Г.Е. Иванов

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Часть 1

Оглавление

Предисловие

Настоящее учебное пособие написано на основе лекций, читаемых автором студентам первого курса Московского физико-технического института (государственного университета).

Содержание материала соответствует программе кафедры высшей математики МФТИ (ГУ).

Автор выражает искренною признательность коллегам и студентам, высказавшим ценные замечания и предложения, а также обнаружившим опечатки в лекциях.

Введение

Будем использовать следующие *логические операции*:

$\neg$ (не),

и,

или,

$\Rightarrow$ (следует),

$\Leftrightarrow$ (равносильно),

которые применяются к условиям, т.е. выражениям, принимающим значения И (истина) или Л (ложь).

Значения условий, полученных в результате применения указанных операций к исходным условиям, определяются по следующим таблицам истинности в зависимости от значений исходных условий.

A	$\neg\ A$
И	Л
Л	И

A	B	A и B	A или B	$A\ \Rightarrow\ B$	$A\ \Leftrightarrow\ B$
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	Л
Л	Л	Л	Л	И	И

Будем также использовать *кванторы*

$\forall$ (для любого),

$\exists$ (существует)

и *логические связки*

$\hookrightarrow$ (выполняется),

: (такой (ая, ое), что).

Запись $x \in X$ означает "x является элементом множества X".

Запись $X \subset Y$ означает "множество X является подмножеством множества Y". Последнюю запись можно определить следующим образом:

$$X \subset Y \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \hookrightarrow\ (x \in X\ \Rightarrow\ x \in Y)$$

или в более короткой форме записи $\forall x: \ x \in X \hookrightarrow \ x \in Y$ или, еще короче, $\forall x \in X \hookrightarrow \ x \in Y$.

При определении новых множеств часто используют

метод перечисления: $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ и

метод наложения условия:

$$X = \{x : \text{выполняется некоторое условие для } x\}.$$

Определим операции пересечения, объединения и дополнения множеств:
$X \bigcap Y = \{x : x \in X \text{ и } x \in Y\}$;
$X \bigcup Y = \{x : x \in X \text{ или } x \in Y\}$;
$X \backslash Y = \{x \in X : x \notin Y\}$.

Здесь и далее перечеркнутый символ означает отрицание к соответствующему условию, например, $x \notin Y \ \Leftrightarrow \ \neg(x \in Y)$.

При раскрытии отрицания к выражению, содержащему логические операции, полезно использовать следующие свойства

$$\begin{array}{rcl} \neg(\neg A) & \Leftrightarrow & A, \\ \neg(A \quad \text{и} \quad B) & \Leftrightarrow & (\neg A \quad \text{или} \quad \neg B), \\ \neg(A \quad \text{или} \quad B) & \Leftrightarrow & (\neg A \quad \text{и} \quad \neg B), \\ \neg(A \quad \Rightarrow \quad B) & \Leftrightarrow & (A \quad \text{и} \quad \neg B). \end{array}$$

Справедливость этих свойств легко проверить по таблицам истинности, рассмотрев все возможные случаи значений условий A и B.

При раскрытии отрицания к условию, содержащему квантор, следует поменять квантор, а знак отрицания поставить после этого квантора и переменной, к которой он относится. Пусть $A(x)$ – некоторое условие, налагаемое на переменную x. Тогда

$$\begin{array}{rcl} \neg(\forall x \in X \hookrightarrow \ A(x)) & \Longleftrightarrow & \exists x \in X : \ \neg A(x); \\ \neg(\exists x \in X : \ A(x)) & \Longleftrightarrow & \forall x \in X \hookrightarrow \ \neg A(x). \end{array}$$

Например,

$$X \not\subset Y \quad \Longleftrightarrow \quad \neg(\forall x \in X \hookrightarrow \ x \in Y) \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists x \in X : \ x \notin Y).$$

Определение. *Декартовым произведением* множеств X и Y называется множество $X \times Y$, состоящее из всех пар (x, y) таких, что $x \in X$, $y \in Y$.

Например, если $X = \{0, 1\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, то $X \times Y = \{(0, y_1), (1, y_1), (0, y_2), (1, y_2), (0, y_3), (1, y_3)\}$.

Определение. Будем говорить, что задано *соответствие* f между множествами X и Y, если задано множество $G_f \subset X \times Y$. При этом множество G_f называется *графиком* соответствия f. Элемент $y \in Y$ называется *поставленным в соответствие* элементу $x \in X$ при соответствии f, если $(x, y) \in G_f$. *Множеством определения* (или *областью определения*) соответствия f называется

$$D_f = \{x \in X : \ (\exists y \in Y : \ (x, y) \in G_f)\}.$$

Множеством значений (или *областью значений*) соответствия f называется

$$E_f = \{y \in Y : \ (\exists x \in X : \ (x, y) \in G_f)\}.$$

Соответствие f называется *однозначным*, если

$$\forall x \in X \ \forall y_1, y_2 \in Y : \ (x, y_1) \in G_f \text{ и } (x, y_2) \in G_f \ \hookrightarrow \ \ y_1 = y_2.$$

Определение. Соответствие f^{-1} между множествами Y и X называется *обратным* к соответствию f между множествами X и Y, если графики этих соответствий удовлетворяют условию

$$\forall x \in X \ \forall y \in Y \hookrightarrow \ (x, y) \in G_f \ \Leftrightarrow \ (y, x) \in G_{f^{-1}}.$$

Определение. *Функцией* $f : X \to Y$ называется однозначное соответствие такое, что $D_f = X$. При этом если $(x, y) \in G_f$, то пишут $y = f(x)$.

Определение. Функция $f : X \to Y$ называется *обратимой* или *инъективной*, если соответствие, обратное к f, является однозначным.

Определение. Обратимая функция $f : X \to Y$, для которой $E_f = Y$, называется *взаимно однозначным* соответствием или *биекцией* $f : X \to Y$.

Глава 1

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Аксиомы действительных чисел

Определение. Будем говорить, что на множестве X *определена операция* сложения $\langle$умножения$\rangle$, если любым двум элементам $a, b \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $a + b \in X$ $\langle\ a \cdot b \in X\ \rangle$.

Определение. Будем говорить, что на множестве X задано *отношение порядка* $\leq$, если для любых двух элементов $a, b \in X$ известно, верно или неверно неравенство $a \leq b$.

Определение. Множеством *действительных* (*вещественных*) чисел $\mathbb{R}$ называется множество, на котором определены операции сложения и умножения и отношение порядка $\leq$, удовлетворяющие следующим 16 аксиомам, и которое состоит более чем из одного элемента.

Аксиомы сложения
1) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a + b = b + a$;
2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ (a + b) + c = a + (b + c)$;
3) $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a + 0 = a$;
4) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists -a \in \mathbb{R} : \quad a + (-a) = 0$.

Аксиомы умножения
5) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a \cdot b = b \cdot a$;
6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
7) $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a \cdot 1 = a$;
8) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Аксиома связи сложения и умножения
9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Пример 1. Доказать, что если $a, b \in \mathbb{R}$ и $b + a = a$, то $b = 0$.

Решение. $b \overset{(3)}{=} b + 0 \overset{(4)}{=} b + (a + (-a)) \overset{(2)}{=} (b + a) + (-a) \overset{\text{по условию}}{=}$
$= a + (-a) \overset{(4)}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$ □

Пример 2. Доказать, что $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a \cdot 0 = 0$.

Решение. $a \cdot 0 + a \overset{(7)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 1 \overset{(9)}{=} a \cdot (0 + 1) \overset{(1)}{=}$
$= a \cdot (1 + 0) \overset{(3)}{=} a \cdot 1 \overset{(7)}{=} a \quad \overset{\text{Пример 1.}}{\Rightarrow} \quad a \cdot 0 = 0.$ □

Задача 1. Доказать, что $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a \cdot (-1) = -a$.

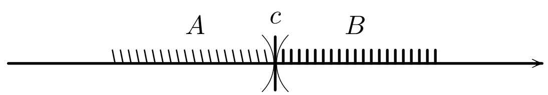
Аксиомы отношения порядка
10) $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a \leq a$;
11) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a \leq b \quad$ или $\quad b \leq a$;
12) $\forall a, b \in \mathbb{R} :\ (a \leq b \quad$ и $\quad b \leq a) \hookrightarrow\ a = b$;
13) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} :\ (a \leq b \quad$ и $\quad b \leq c) \hookrightarrow\ a \leq c$.

Связь отношения порядка и сложения
14) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} :\ a \leq b \hookrightarrow\ a + c \leq b + c$.

Связь отношения порядка и умножения
15) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} :\ (a \leq b \quad$ и $\quad 0 \leq c) \hookrightarrow\ a \cdot c \leq b \cdot c$.

Аксиомы 1-15 известны Вам из школы как свойства действительных чисел. С другой стороны, эти аксиомы определяют алгебраические структуры. В частности, аксиомы 1-4 означают, что $\mathbb{R}$ является абелевой (т.е. коммутативной или перестановочной) группой по сложению. Аксиомы 5-8 говорят, что $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ является абелевой группой по умножению. Аксиомы 1-9 соответствуют определению поля, а аксиомы 1-15 - определению упорядоченного поля.

Аксиома непрерывности
16) Если $A, B \subset \mathbb{R}$ и множество A лежит слева от множества B (т.е. $\forall a \in A \ \forall b \in B \hookrightarrow a \leq b$), то $\exists c \in \mathbb{R} :\ \forall a \in A \quad \forall b \in B \hookrightarrow\ a \leq c \leq b$.



Определим теперь отношения порядка $<, \geq, >$ и операции вычитания и деления на множестве действительных чисел:

$a \neq b \quad \Leftrightarrow \quad \neg(a = b);$

$a < b \quad \Leftrightarrow \quad (\ a \leq b \quad \text{и} \quad a \neq b\ );$

$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad b \leq a;$

$a > b \quad \Leftrightarrow \quad b < a;$

$a - b = a + (-b);$

$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad (b \neq 0).$

Определение. Множеством *натуральных* чисел $\mathbb{N}$ называется множество действительных чисел вида $1, 1+1, \ldots, n = 1 + \ldots + 1, \ldots$ Иначе говоря, натуральным числом является 1 и любое число вида $n+1$, где n – натуральное число.

Множеством *целых* чисел $\mathbb{Z}$ называется множество чисел m таких, что $m \in \mathbb{N}$ или $-m \in \mathbb{N}$, или $m = 0$.

Множеством *рациональных* чисел $\mathbb{Q}$ называется множество чисел вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Задача 2. Доказать, что рациональные числа удовлетворяют всем аксиомам действительных чисел, кроме аксиомы непрерывности.

Задача 3. Показать, что аксиома непрерывности для множества рациональных чисел не выполняется, т. е. привести пример двух множеств $A, B \subset \mathbb{Q}$ таких, что

$\forall a \in A\ \forall b \in B \hookrightarrow\ a \leq b$, но не существует $c \in \mathbb{Q}$:

$\forall a \in A\ \forall b \in B \hookrightarrow\ a \leq c \leq b$.

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ будем также называть *числовой прямой*, а действительные числа – *точками* числовой прямой.

Наряду с числовой прямой определим *расширенную числовую прямую*: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. При этом элементы $-\infty$, $+\infty$ не содержатся в $\mathbb{R}$, для них не определены операции $+, -, *, /$, определены лишь отношения порядка: $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ -\infty < x < +\infty$ и, следовательно, $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ -\infty \leq x \leq +\infty$, $\quad -\infty < +\infty$, $\quad -\infty \leq +\infty$.

Определение. Пусть заданы действительные числа a, b, $a < b$. *Числовыми промежутками* называются следующие множества:

интервал $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}:\ a < x < b\}$,

отрезок $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}:\ a \leq x \leq b\}$,

полуинтервалы: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}:\ a \leq x < b\}$,

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}:\ a < x \leq b\}$,

лучи: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}:\ a \leq x\}$,

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}:\ a < x\}$,

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}:\ x \leq a\}$,

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}:\ x < a\}$,

точка $\{a\}$;

числовая прямая $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

§ 2. Точные грани множеств

Определение. 1) Число $M \in \mathbb{R}$ называется *верхней гранью* множества $A \subset \mathbb{R}$, если число M лежит справа от множества A, т.е. $\forall a \in A \hookrightarrow\ a \leq M$.

2) Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует (конечная) верхняя грань этого множества: $\exists M \in \mathbb{R}:\ \forall a \in A \hookrightarrow\ a \leq M$.

3) Число $m \in \mathbb{R}$ называется *нижней гранью* множества $A \subset \mathbb{R}$, если число m лежит слева от множества A, т.е. $\forall a \in A \hookrightarrow\ a \geq m$.

4) Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если существует (конечная) нижняя грань этого множества: $\exists m \in \mathbb{R}:\ \forall a \in A \hookrightarrow\ a \geq m$.

Множество A называется *ограниченным*, если A ограничено сверху и ограничено снизу.

Замечание. Кванторы $\forall$ и $\exists$ в общем случае нельзя менять местами. Например, если в определении ограниченного сверху множества переставить кванторы, то получится условие $\forall a \in A\ \exists M \in \mathbb{R}:\ a \leq M$, справедливое для любого, в том числе и для неограниченного сверху множества.

Замечание. Для любых условий P и Q условие $P \Rightarrow Q$ эквивалентно условию $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Это проверяется по таблице истинности. На этом свойстве основан метод доказательства от противного.

Замечание. Используя предыдущее замечание, условие "число M является является верхней гранью множества A" можно переписать в эквивалентной форме:

$$\forall a \hookrightarrow\ (a \in A\ \Rightarrow\ a \leq M) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \forall a \hookrightarrow \ (a > M \ \Rightarrow \ a \notin A).$$

Или, короче, $\forall a > M \hookrightarrow \ a \notin A$.

Определение. *Модулем* числа a называется число

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Задача 1. Показать, что множество A ограничено тогда и только тогда, когда

$$\exists M \in \mathbb{R}: \ \forall a \in A \hookrightarrow \ |a| \leq M.$$

Определение. Число M называется *максимальным* элементом множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут $M = \max A$), если

1) $M \in A$ и

2) M является верхней гранью A.

Число m называется *минимальным* элементом множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут $m = \min A$), если

1) $m \in A$ и

2) m является нижней гранью A.

Замечание. Если множество $A \subset \mathbb{R}$ неограничено сверху, то максимальный элемент этого множества не существует, т.к. не существует конечной верхней грани этого множества. Если множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, то максимальный элемент этого множества также может не существовать. Пусть, например, $A = (-\infty, 0)$. Пусть $a \in A$. Тогда $a < 0$ и, следовательно, $a < \frac{a}{2} < 0$. То есть, для каждого $a \in A$ найдется элемент $\frac{a}{2} \in A$ такой, что $a < \frac{a}{2}$. Поэтому любой элемент $a \in A$ не является верхней гранью A, а значит $\max A$ не существует.

Аналогичное замечание справедливо для минимального элемента.

Если максимальный (минимальный) элемент множества A не существует, то вместо него будем рассматривать супремум (инфимум) множества A. Как мы увидим далее супремум (инфимум) существует для любого непустого множества. В случае существования максимального (минимального) элемента множества A супремум (инфимум) множества A совпадает с его максимальным (минимальным) элементом.

Определение. Число $M \in \mathbb{R}$ называется *точной верхней гранью* или *супремумом* множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут: $M = \sup A$), если M является минимальной верхней гранью множества A, т.е.

1) M является верхней гранью множества A и

2) не существует числа, меньшего, чем M, и являющегося верхней гранью множества A, то есть

1) $\forall a \in A \hookrightarrow \ a \leq M$ и

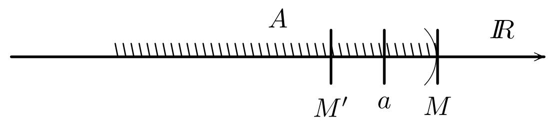
2) $\neg(\exists M' \in \mathbb{R}: \ M' < M$ и $\forall a \in A \hookrightarrow \ a \leq M')$.

Замечание. Используя правило построения отрицания выражения с кванторами, получаем, что пункт (2) определения супремума можно записать в виде

2) $\forall M' < M \hookrightarrow \ \neg(\forall a \in A \hookrightarrow \ a \leq M')$

или в положительной форме

2) $\forall M' < M \ \exists a \in A: \ M' < a$.



Теорема 1. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Тогда существует единственное число $M \in \mathbb{R}$, которое является точной верхней гранью множества A.

Доказательство. Рассмотрим B – множество всех (конечных) верхних граней A. Так как множество A ограничено сверху, то B не пусто. Поскольку множество A лежит слева от множества B, то по аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R}: \ \forall a \in A \quad \forall b \in B \hookrightarrow \ a \leq c \leq b$.

Покажем, что c является точной верхней гранью A. Так как $\forall a \in A \hookrightarrow \ a \leq c$, то c является верхней гранью A, т.е. $a \in B$. Поскольку $\forall b \in B \hookrightarrow \ c \leq b$, то c – минимальный элемент B. Итак, c – точная верхняя грань A.

Предположим, что $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ – две различные точные верхние грани множества A. Тогда M_1, M_2 – два различных минимальных элемента множества B. Пусть для определенности $M_1 < M_2$. Тогда M_2 не является минимальным элементом множества B. Противоречие. □

Определение. Точной верхней гранью неограниченного сверху множества считается $+\infty$.

Теорема 2. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – непустое множество.

а) Существует единственная точная верхняя грань множества A: $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}$.

б) Если множество A ограничено сверху, то $\sup A \in \mathbb{R}$, иначе $\sup A = +\infty$.

в) $\sup A = M \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1) \forall a \in A \hookrightarrow \ a \le M, \\ 2) \forall M' < M \ \exists a \in A : \ M' < a. \end{cases}$

Доказательство. В случае, когда множество A ограничено сверху, доказываемые утверждения следуют из теоремы 1 и замечания перед этой теоремой. Пусть теперь множество A неограничено сверху. Согласно определению не существует конечной верхней грани множества A. Поэтому никакое число не является точной верхней гранью A. В этом случае единственной точной верхней гранью A является $+\infty$.

Обоснуем пункт (в). $\Rightarrow$: Пусть $M = \sup A = +\infty$. Тогда пункт (1) следует из неравенства $a \le +\infty$ для любого $a \in \mathbb{R}$, а пункт (2) следует из того, что множество A неограничено сверху.

$\Leftarrow$: Из пункта (1) и неограниченности сверху множества A следует, что $M = +\infty$. Поэтому $M = \sup A$. □

Аналогично сформулируем определение точной нижней грани.

Определение. Число $m \in \mathbb{R}$ называется *точной нижней гранью* или *инфимумом* множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут: $m = \inf A$), если m является максимальной нижней гранью A. Точной нижней гранью неограниченного снизу множества считается $-\infty$.

Теорема 2'. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – непустое множество.

а) Существует единственная точная нижняя грань множества A: $\inf A \in \overline{\mathbb{R}}$.

б) Если множество A ограничено снизу, то $\inf A \in \mathbb{R}$, иначе $\inf A = -\infty$.

в) $\inf A = m \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1) \forall a \in A \hookrightarrow \ a \ge m, \\ 2) \forall m' > m \ \exists a \in A : \ m' > a. \end{cases}$

Доказательство теоремы 2' аналогично доказательству теоремы 2.

Лемма 1. а) Если существует $\max A$, то $\sup A = \max A$.

б) Если существует $\min A$, то $\inf A = \min A$.

Доказательство. а) Пусть $M = \max A$. Тогда M – верхняя грань A. Пусть $M' < M$. Так как $M \in A$, то M' не является верхней гранью A. Поэтому M – минимальная верхняя грань A.

Пункт (б) доказывается аналогично. □

Теорема 3. (Принцип Архимеда.) Для любого действительного числа x существует натуральное число $n > x$.

Доказательство. Предположим противное: $\exists x \in \mathbb{R} : \ \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ n \le x$. Тогда множество $\mathbb{N}$ ограничено сверху и по теореме 1 существует $\sup \mathbb{N} = M \in \mathbb{R}$. Применяя второй пункт определения супремума для $M' = M - 1$, получаем, что существует натуральное число $n > M - 1$. По определению натуральных чисел имеем, что $n_1 = n + 1 \in \mathbb{N}$. При этом $n_1 > M = \sup \mathbb{N}$, что противоречит первому пункту определения супремума. □

Определение. *Целой частью числа* $x \in \mathbb{R}$ называется целое число $[x]$, лежащее в полуинтервале $(x - 1, x]$.

Задача 2. Доказать, что для любого числа $x \in \mathbb{R}$ целая часть существует и единственна.

§ 3. Предел последовательности

Определение. Числовой последовательностью $\{a_n\}$ называется функция $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, где $a(n) = a_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. *Элемент последовательности* – это пара (n, a_n), где n – *номер* элемента последовательности, а a_n – *значение* элемента последовательности.

Определение. Пусть заданы числа $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Интервал $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется *ε-окрестностью* числа a.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$ (пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \ge N \hookrightarrow \ a_n \in U_\varepsilon(a), \tag{1}$$

т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \ge N \hookrightarrow \ |a_n - a| < \varepsilon \tag{2}$$

(здесь и далее в аналогичных выражениях, если не оговорено противное, мы подразумеваем, что n, N – натуральные числа).

Заметим, что в формулах (1), (2) для каждого $\varepsilon > 0$ существует свое число N, то есть N зависит от ε. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, перепишем формулу (2) в следующем виде:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N=N(\varepsilon):\quad\forall n\geq N\hookrightarrow\ |a_n-a|<\varepsilon.$$

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Решение. $\forall\varepsilon>0\ \exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1:\ \forall n\geq N\hookrightarrow\ \left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$. Действительно, по определению целой части $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1>\frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\varepsilon$. □

Пример. Доказать, что число a является пределом последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N:\quad\forall n\geq N\hookrightarrow\ |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Решение. 1) Пусть выполнено условие (3). Поскольку $\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, то

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N:\quad\forall n\geq N\hookrightarrow\ |a_n-a|<\varepsilon, \tag{4}$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, т. е. выполнено условие (4). Для каждого $\varepsilon>0$ через $N(\varepsilon)$ обозначим такое число, что $\forall n\geq N(\varepsilon)\hookrightarrow\ |a_n-a|<\varepsilon$. В силу условия (4) такое $N(\varepsilon)$ существует. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\overline{N}=N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right):\quad\forall n\geq\overline{N}\hookrightarrow\ |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

т. е. выполнено условие (3). □

Задача 1. Пусть задана последовательность $\{a_n\}$ и число a. Как связано условие $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ со следующими условиями:

а) $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n\geq N\hookrightarrow\ |a_n-a|\leq\varepsilon$;

б) $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N\hookrightarrow\ |a_n-a|<\varepsilon$;

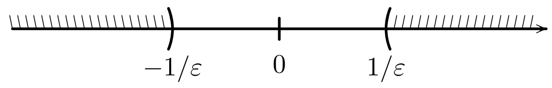
в) $\exists N:\ \forall\varepsilon>0\ \forall n\geq N\hookrightarrow\ |a_n-a|<\varepsilon$;

г) $\forall\varepsilon>0\ \exists n:\ |a_n-a|<\varepsilon$;

д) $\forall\varepsilon>0\ \forall N\ \exists n\geq N:\ |a_n-a|<\varepsilon$?

Определение. Пусть задано число $\varepsilon>0$. *ε-окрестностями* бесконечностей называются соответственно множества

$$U_\varepsilon(-\infty)=\left(-\infty,-\frac{1}{\varepsilon}\right),\qquad U_\varepsilon(+\infty)=\left(\frac{1}{\varepsilon},+\infty\right).$$



Дадим общее определение предела последовательности, справедливое как в случае конечного, так и в случае бесконечного предела.

Определение. Элемент $a\in\overline{\mathbb{R}}$ называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N:\quad\forall n\geq N\hookrightarrow\quad a_n\in U_\varepsilon(a).$$

Лемма 1. Пусть $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ и $a<b$. Тогда существует число $\varepsilon>0$ такое, что $\forall x\in U_\varepsilon(a)\ \forall y\in U_\varepsilon(b)\hookrightarrow\ \ x<y$, а значит, окрестности $U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(b)$ не пересекаются.

Доказательство. Возможны четыре случая:

1) $-\infty<a<b<+\infty$;

2) $-\infty<a<b=+\infty$;

3) $-\infty=a<b<+\infty$;

4) $-\infty=a<b=+\infty$.

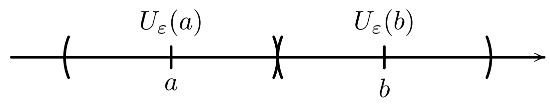
В случае (1) положим $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$, в случае (2): $\varepsilon=\frac{1}{|a|+1}$, в случае (3): $\varepsilon=\frac{1}{|b|+1}$, в случае (4): $\varepsilon=1$.

Пусть $x\in U_\varepsilon(a)$, $y\in U_\varepsilon(b)$. Покажем, что в каждом из четырех случаев $x<y$. Отсюда следует, что окрестности $U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(b)$ не пересекаются.

1) $x<a+\varepsilon=a+\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}=b-\varepsilon<y$;

2) $x<a+\varepsilon\leq a+1\leq|a|+1=\frac{1}{\varepsilon}<y$.

Случаи (3) и (4) рассмотреть самостоятельно. □



Теорема 1. (Единственность предела.) Числовая последовательность не может иметь более одного предела из $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Предположим противное: последовательность $\{a_n\}$ имеет пределы $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a\neq b$. По лемме 1 $\exists\varepsilon>0$:

$U_\varepsilon(a)\bigcap U_\varepsilon(b)=\emptyset$. По определению предела $\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \hookrightarrow\ a_n \in \in U_\varepsilon(a)$, $\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \hookrightarrow\ a_n \in U_\varepsilon(b)$. При $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ получаем $a_n \in U_\varepsilon(a)\bigcap U_\varepsilon(b)$ – противоречие. □

Задача 2. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$, где

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 1, & \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases}$$

не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной (сверху, снизу)*, если ограничено (соответственно сверху, снизу) множество значений ее элементов.

В частности,

$$\{a_n\} \quad \text{– ограничена} \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}: \quad \forall a \in \{a_1, a_2, \ldots\} \hookrightarrow\ |a| \leq M \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}: \quad \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ |a_n| \leq M.$$

Определение. Если последовательность имеет конечный предел, то она называется *сходящейся*. Если последовательность не имеет предела или имеет бесконечный предел, то она называется *расходящейся*.

Теорема 2. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Возьмем $\varepsilon = 1$. По определению предела $\exists N : \ \forall n \geq N \hookrightarrow\ a_n \in (a-1, a+1)$. Следовательно, при $n \geq N$ справедливо неравенство

$$-|a| - 1 \leq a - 1 < a_n < a + 1 \leq |a| + 1,$$

а значит, $\forall n \geq N \hookrightarrow\ |a_n| < |a| + 1$.

Определим $M = \max\{|a_1|, ..., |a_{N-1}|, |a|+1\}$ (максимум существует, так как множество конечно). Тогда при $n < N$ по определению максимума $|a_n| \leq M$. При $n \geq N$ имеем $|a_n| < |a| + 1 \leq M$. Итак, $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ |a_n| \leq M$, т. е. последовательность $\{a_n\}$ ограничена. □

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow\ |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ т.е.}$$

$$\forall M > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow\ |a_n| > M.$$

Задача 3. Как связаны следующие два условия?
а) Последовательность $\{a_n\}$ – бесконечно большая.
б) Последовательность $\{a_n\}$ – неограничена.

Задача 4. Пусть $\{a_n\}$ – бесконечно большая последовательность. Верно ли, что должно выполняться одно из условий: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$?

§ 4. Свойства пределов последовательностей, связанные с арифметическими действиями

Лемма 1. а) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ |a + b| \leq |a| + |b|$ (неравенство треугольника).

б) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ ||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Доказательство. а) Рассмотрим сначала случай, когда $a + b \geq \geq 0$. Тогда по определению модуля $|a + b| = a + b$. Из определения модуля следует также, что $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ x \leq |x|$. Поэтому $a \leq |a|$, $b \leq |b|$, следовательно, $|a + b| \leq a + b \leq |a| + |b|$.

В случае $a+b < 0$ имеем $|a+b| = -a-b$. Так как $-a \leq |a|$, $-b \leq |b|$, то $|a + b| = -a - b \leq |a| + |b|$. Поэтому $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ |a + b| \leq |a| + |b|$.

б) Используя неравенство треугольника, для любых $a, b \in \mathbb{R}$ получаем $|a| - |b| = |a - b + b| - |b| \leq |a - b| + |b| - |b| = |a - b|$, т. е. $|a| - |b| \leq |a - b|$. Аналогично, $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$. Поэтому $||a| - |b|| \leq |a - b|$. □

Определение. Последовательность $\{b_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow\ |b_n| < \varepsilon.$$

В данном параграфе мы будем рассматривать лишь конечные пределы последовательностей.

Непосредственно из определения предела последовательности следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_n - a\}$ является бесконечно малой. Используя это обстоятельство, из свойств бесконечно малых последовательностей мы получим свойства пределов последовательностей, связанные с арифметическими действиями.

Лемма 2. Если $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то $\{a_n+b_n\}$ и $\{a_n-b_n\}$ – бесконечно малые последовательности.

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N_1: \quad \forall n \geq N_1 \hookrightarrow \ |a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N_2: \quad \forall n \geq N_2 \hookrightarrow \ |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(см. второй пример в § 3). Отсюда, используя неравенство треугольника $|a_n \pm b_n| \leq |a_n| + |b_n|$, получаем, что

$$\forall\varepsilon>0 \ \exists N = \max\{N_1, N_2\}: \ \forall n \geq N \hookrightarrow \ |a_n \pm b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = 0.$ □

Теорема 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.

Доказательство. 1) Так как последовательности $\{a_n - a\}$ и $\{b_n - b\}$ являются бесконечно малыми, то в силу леммы 2 последовательности $\{a_n + b_n - (a+b)\} = \{(a_n - a) + (b_n - b)\}$ и $\{a_n - b_n - (a-b)\} = \{(a_n - a) - (b_n - b)\}$ являются бесконечно малыми, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$. □

Теорема 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Доказательство. В силу леммы 1(б) имеем $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$. Отсюда и из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ в силу определения предела получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. □

Лемма 3. Если $\{a_n\}$ – ограниченная последовательность, а $\{b_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то $\{a_n\, b_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Поскольку последовательность $\{a_n\}$ ограничена, то

$$\exists M>0: \quad \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ |a_n| \leq M.$$

Так как последовательность $\{b_n\}$ является бесконечно малой, то

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon): \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow \ |b_n| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists \overline{N} = N\left(\frac{\varepsilon}{M}\right): \quad \forall n \geq \overline{N} \hookrightarrow \ |a_n\, b_n| < M\,\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Поэтому последовательность $\{a_n\, b_n\}$ является бесконечно малой. □

Теорема 3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$.

Доказательство. Требуется доказать, что последовательность $\{a_n b_n - ab\}$ является бесконечно малой. Заметим, что $a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b$. Так как последовательность $\{a_n\}$ сходится, то по теореме 2 § 3 она ограничена. В силу леммы 3 последовательности $\{a_n(b_n - b)\}$ и $\{(a_n - a)b\}$ – бесконечно малые, следовательно, по лемме 2 последовательность $\{a_n b_n - ab\}$ также является бесконечно малой. □

Лемма 4. Если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ a_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

Доказательство. В силу теоремы 2 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a| > 0$. Отсюда, положив в определении предела последовательности $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$, получаем, что $\exists N: \ \forall n \geq N \hookrightarrow \ |a_n| > |a| - \varepsilon = \frac{|a|}{2}$, т. е. $\forall n \geq N \hookrightarrow \ \left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{2}{|a|}$. Определим число $M = \max\left\{\frac{1}{|a_1|}, \ldots, \frac{1}{|a_{N-1}|}, \frac{2}{|a|}\right\}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ \left|\frac{1}{a_n}\right| \leq M$, т. е. последовательность $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ ограничена. Следовательно, последовательность $\left\{\frac{1}{a_n\, a}\right\}$ также ограничена.

Отсюда и из леммы 3 следует, что последовательность $\left\{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right\} = \left\{\frac{1}{a_n\, a}(a - a_n)\right\}$ является бесконечно малой, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$. $\square$

Теорема 4. Если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ a_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}$.

Доказательство. В силу леммы 4 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$. Поэтому, согласно теореме 3, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \frac{1}{a_n} = b\,\frac{1}{a} = \frac{b}{a}$. $\square$

Задача 1. Пусть последовательности $\{a_n + b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$ сходятся. Верно ли, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся?

Задача 2. Пусть $\forall n \hookrightarrow\ b_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = y \geq 0$. Верно ли, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся?

§ 5. Переход к пределу в неравенствах

Напомним, что расширенной числовой прямой называется множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$.

Теорема 1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, где $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, $A < B$. Тогда $\exists N:\ \forall n \geq N \hookrightarrow\ a_n < b_n$.

Доказательство. По лемме 1 § 3 существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x \in U_\varepsilon(A)\ \forall y \in U_\varepsilon(B)\ \hookrightarrow\ x < y$. По определению предела $\exists N_1:\ \forall n \geq N_1 \hookrightarrow\ a_n \in U_\varepsilon(A)$, $\exists N_2:\ \forall n \geq N_2 \hookrightarrow\ b_n \in U_\varepsilon(B)$. Определив $N = \max\{N_1, N_2\}$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Теорема 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\exists N:\ \forall n \geq N \hookrightarrow\ a_n \leq b_n$, то $A \leq B$.

Доказательство. Предположим противное: $A > B$. По теореме 1 $\exists N_1:\ \forall n \geq N_1 \hookrightarrow\ b_n < a_n$. При $n \geq \max\{N, N_1\}$ получаем противоречие с условием $a_n \leq b_n$. $\square$

Следствие. Если $\exists N:\ \forall n \geq N \hookrightarrow\ a_n \leq B$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, то $A \leq B$.

Доказательство. Если $B \in \mathbb{R}$, то определим $\{b_n\} = \{B\}$ и, применяя теорему 2, получаем неравенство $A \leq B$. Если $B = +\infty$, неравенство $A \leq B$ также выполнено. Случай $B = -\infty$ не реализуется, т.к. $\forall n \geq N \hookrightarrow\ a_n \leq B$. $\square$

Замечание. Из условий $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ a_n < b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ не следует, что $A < B$.

Например, $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$, $A = B = 0$.

Теорема 3. (О трех последовательностях.) Если $\exists N:\ \forall n \geq N \hookrightarrow\ a_n \leq b_n \leq c_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Доказательство. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$

$$\exists N_1:\ \forall n \geq N_1 \hookrightarrow\ a_n \in U_\varepsilon(A),$$

$$\exists N_2:\ \forall n \geq N_2 \hookrightarrow\ c_n \in U_\varepsilon(A).$$

Обозначим $\overline{N} = \max\{N, N_1, N_2\}$. Тогда при $n \geq \overline{N}$ имеем $A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$, следовательно, $b_n \in U_\varepsilon(A)$. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{N}:\ \forall n \geq \overline{N} \hookrightarrow\ b_n \in U_\varepsilon(A),$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$. $\square$

Теорема 4. Пусть $\exists N:\ \forall n \geq N \hookrightarrow\ a_n \leq b_n$. Тогда

1) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$;

2) если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Доказательство. 1) По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1:\ \forall n \geq N_1 \hookrightarrow\ a_n \in U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$$

(т. е. $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$), но тогда $b_n \geq a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ при $n \geq \max\{N, N_1\}$. Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 = \max\{N, N_1\}:\ \forall n \geq N_2 \hookrightarrow\ b_n \in U_\varepsilon(+\infty),$$

а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Доказательство пункта (2) аналогично. $\square$

§ 6. Монотонные последовательности

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *нестрого возрастающей* или *неубывающей*, если

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ a_n \le a_{n+1};$$

$\{a_n\}$ – *нестрого убывающая* или *невозрастающая*, если

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ a_n \ge a_{n+1};$$

если в этих определениях нестрогие неравенства заменить на строгие, то получим определения строго возрастающей и строго убывающей последовательностей;

$\{a_n\}$ – *монотонная*, если она является нестрого возрастающей или нестрого убывающей.

Теорема 1. (Вейерштрасс.) 1) Если последовательность $\{a_n\}$ нестрого возрастает, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.

2) Если последовательность $\{a_n\}$ нестрого убывает, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.

Доказательство. 1) Пусть последовательность $\{a_n\}$ нестрого возрастает. Рассмотрим сначала случай, когда эта последовательность ограничена сверху. В силу теоремы 1 § 2 существует $a = \sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. В силу второго пункта определения супремума $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : a_N > a - \varepsilon$. Отсюда в силу возрастания последовательности $\{a_n\}$ имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n \ge N \hookrightarrow\ a_n \ge a_N > a - \varepsilon$. В силу первого пункта определения супремума $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ a_n \le a$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n \ge N \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{a_n\}$ неограничена сверху. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ a_N > \frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда в силу возрастания последовательности $\{a_n\}$ имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n \ge N \hookrightarrow a_n \ge a_N > \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $a_n \in U_\varepsilon(+\infty)$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Доказательство пункта (2) аналогично. $\square$

Следствие. Любая монотонная последовательность имеет конечный или бесконечный предел. Если $\{a_n\}$ – возрастающая и ограниченная сверху последовательность или убывающая и ограниченная снизу последовательность, то предел $\{a_n\}$ конечен.

§ 7. Неравенство Бернулли и число e

Определение. Если $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, то $x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ раз}}$.

Лемма 1. $\forall x \ge -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо *неравенство Бернулли*: $(1+x)^n \ge 1 + nx$.

Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ неравенство Бернулли справедливо. Пусть оно справедливо при $n = k$. Тогда $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \ge (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \ge 1 + (k+1)x$, т. е. неравенство Бернулли справедливо при $n = k+1$. $\square$

Лемма 2. Пусть $a > 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

Доказательство. Обозначим $x = a - 1$. Тогда $a^n = (1+x)^n \ge 1 + nx \to +\infty$ при $n \to \infty$, что по теореме о предельном переходе в неравенствах (теорема 4 § 5) дает требуемое утверждение. $\square$

Теорема 1. Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ сходится.

Доказательство. Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \ge 1$, т. е. $\{x_n\}$ – ограничена снизу. Так как

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} \ge \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \frac{n-1}{n} = 1,$$

то $\{x_n\}$ убывает. В силу теоремы о сходимости ограниченной снизу убывающей последовательности $\{x_n\}$ сходится. $\square$

Определение. $\qquad e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Пример. Доказать равенство: $\quad e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Решение. Применяя теоремы о свойствах пределов, связанных с арифметическими действиями, получаем $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} / \left(1 + \frac{1}{n}\right) \to e$ при $n \to \infty$. $\square$

§ 8. Принцип вложенных отрезков

Определение. Последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется *последовательностью вложенных отрезков*, если

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Теорема 1. (Принцип Кантора.) Последовательность вложенных отрезков имеет общую точку.

Доказательство. Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ – последовательность вложенных отрезков. Из включения (1) следует, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n. \qquad (2)$$

Рассмотрим множество левых концов отрезков $[a_n, b_n]$: $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и множество правых концов этих отрезков: $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Покажем, что

$$\forall a \in A \ \forall b \in B \hookrightarrow \ a \le b. \qquad (3)$$

Пусть $a \in A$, $b \in B$. Тогда $\exists k \in \mathbb{N}: \quad a = a_k$ и $\exists m \in \mathbb{N}: \quad b = b_m$. Из (2) следует, что при $k \le m$ справедливы неравенства $a_k \le a_m < b_m$, а при $k > m$ – неравенства $a_k < b_k \le b_m$. В любом случае имеем $a_k \le b_m$, т. е. справедливо соотношение (3). В силу аксиомы непрерывности действительных чисел $\exists c \in \mathbb{R}: \ \forall a \in A \quad \forall b \in B \hookrightarrow \ a \le c \le b$. Следовательно, $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ c \in [a_n, b_n]$, т. е. c – общая точка отрезков $[a_n, b_n]$. □

Задача 1. Доказать, что если аксиому непрерывности заменить двумя аксиомами: принципом Кантора и принципом Архимеда, то получится эквивалентное определение множества действительных чисел.

Определение. Последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется *стягивающейся*, если $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. Стягивающаяся последовательность вложенных отрезков имеет единственную общую точку.

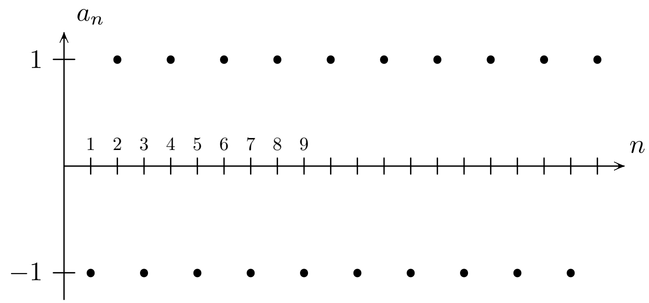
Доказательство. По теореме 1 общая точка существует. Пусть x, y – общие точки стягивающейся последовательности вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$. Так как $|y - x| \le b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то по теореме о предельном переходе в неравенствах $|y - x| \le 0$, т. е. $|y - x| = 0$, $y = x$. □

§ 9. Частичный предел последовательности

Определение. Последовательность $\{b_k\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$, если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$: $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ b_k = a_{n_k}$.

Пример. Пусть задана последовательность $\{a_n\}$. Последовательность $\{a_{2k}\}$, составленная из элементов $\{a_n\}$ с четными номерами, является подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$. Действительно, для любого $k \in \mathbb{N}$ определим $n_k = 2k$. Тогда $\{n_k\}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел и $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ a_{2k} = a_{n_k}$.

Определение. Если последовательность $\{b_k\}$ является подпоследовательностью $\{a_n\}$ и $\exists \lim\limits_{k\to\infty} b_k = A \in \overline{\mathbb{R}}$, то A называется *частичным пределом* последовательности $\{a_n\}$.



Пример. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = (-1)^n$. Последовательности $\{b_k\} = \{a_{2k}\}$ и $\{c_k\} = \{a_{2k-1}\}$ являются подпоследовательностями $\{a_n\}$. Так как $b_k = 1, \quad c_k = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 1, \quad \lim\limits_{k\to\infty} c_k = -1$. Следовательно, числа 1 и -1 являются частичными пределами $\{a_n\}$. □

Теорема 1. (Критерий частичного предела.) Для любой последовательности $\{a_n\}$ и любого $A \in \overline{\mathbb{R}}$ следующие условия эквивалентны:

(1) A является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$;

(2) для любого $\varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(A)$ содержатся значения бесконечного набора элементов $\{a_n\}$;

(3) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N :\ a_n \in U_\varepsilon(A)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть A является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$. Тогда существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ такая, что $A = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon : \forall k \geq K_\varepsilon \hookrightarrow\ a_{n_k} \in U_\varepsilon(A).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(A)$ содержатся значения бесконечного набора элементов $\{a_n\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Так как выполнено условие (2), то в $U_\varepsilon(A)$ содержатся значения бесконечного набора элементов $\{a_n\}$, среди которых найдется элемент с номером $n \geq N$. Иначе в $U_\varepsilon(A)$ будут содержаться лишь элементы с номерами $n < N$, а таких элементов конечное число. Следовательно, выполнено условие (3).

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть выполнено условие (3):

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n = n(\varepsilon, N) \geq N :\ a_n \in U_\varepsilon(A).$$

Построим строго возрастающую последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ такую, что $A = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Определим $n_1 = n(1,1)$. Пусть на некотором шаге $k-1 \in \mathbb{N}$ определено значение $n_{k-1} \in \mathbb{N}$. Определим

$$n_k = n\left(\frac{1}{k}, 1 + n_{k-1}\right),$$

т. е. $n_k = n(\varepsilon, N)$, где $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $N = 1 + n_{k-1}$. Тогда $n_k \geq 1 + n_{k-1} > n_{k-1}$ и $a_{n_k} \in U_{1/k}(A)$. По индукции получаем, что определена последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что $\forall k \geq 2 \hookrightarrow\ n_k > n_{k-1}$ и $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ a_{n_k} \in U_{1/k}(A)$. Поэтому последовательность $\{n_k\}$ строго возрастает и $A = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Следовательно, выполнено условие (1). $\square$

Теорема 2. (Теорема Больцано–Вейерштрасса.) Ограниченная последовательность имеет хотя бы один конечный частичный предел.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т. е. $\exists a_0, b_0 : \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in [a_0, b_0]$. Определим $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Если в отрезке $[a_0, c_0]$ содержатся значения бесконечного набора членов $\{x_n\}$, то определим $[a_1, b_1] = [a_0, c_0]$. В противном случае в отрезке $[c_0, b_0]$ содержатся значения бесконечного набора членов $\{x_n\}$, тогда определим $[a_1, b_1] = [c_0, b_0]$.

Пусть определен отрезок $[a_k, b_k]$, в котором содержатся значения бесконечного набора членов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим $c_k = (a_k + b_k)/2$. Если в отрезке $[a_k, c_k]$ содержатся значения бесконечного набора членов $\{x_n\}$, то определим $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c_k]$. В противном случае определим $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$. Так как этот процесс не может оборваться, мы получаем последовательность вложенных отрезков, которая по теореме Кантора имеет общую точку $x \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} [a_k, b_k]$.

Поскольку $b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k} \to 0$ при $k \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $k \in \mathbb{N}$: $b_k - a_k < \varepsilon$. Отсюда и из включения $x \in [a_k, b_k]$ получаем, что $[a_k, b_k] \subset U_\varepsilon(x)$. Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists k :\ [a_k, b_k] \subset U_\varepsilon(x)$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(x)$ содержатся значения бесконечного набора элементов $\{x_n\}$. В силу теоремы 1 число x является частичным пределом $\{x_n\}$. $\square$

Лемма 1. Если $\{x_n\}$ неограничена снизу, то $-\infty$ является ее частичным пределом; если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $+\infty$ является ее частичным пределом (при этом могут быть и другие частичные пределы).

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ неограничена сверху. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ множество $\{x_n :\ n \geq N\}$ неограничено сверху. Поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N :\ x_n > \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $x_n \in U_\varepsilon(+\infty)$. Применяя теорему 1, получаем, что $+\infty$ является частичным пределом $\{x_n\}$. Случай, когда $\{x_n\}$ неограничена снизу, рассматривается аналогично. $\square$

Теорема 3. (Обобщенная теорема Больцано–Вейерштрасса.) Любая числовая последовательность имеет конечный или бесконечный частичный предел.

Доказательство состоит в применении теоремы 2 и леммы 1.

Теорема 4. Для любой последовательности $\{a_n\}$ и любого $A \in \overline{\mathbb{R}}$ следующие условия эквивалентны:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$;

(2) A является единственным частичным пределом $\{a_n\}$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\{a_{n_k}\}$ – произвольная подпоследовательность $\{a_n\}$. Условие (1) означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geq N \hookrightarrow\ a_n \in U_\varepsilon(A).$$

Так как $\{n_k\}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то по индукции получаем, что $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ n_k \geq k$. Следовательно, при $k \geq N$ справедливы неравенства $n_k \geq k \geq N$. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall k \geq N \hookrightarrow\ a_{n_k} \in U_\varepsilon(A).$$

Итак, из условия (1) следует, что для любой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ справедливо соотношение $A = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Поэтому A является единственным частичным пределом $\{a_n\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное: условие (2) выполнено, а условие (1) не выполнено, т. е. существует $\varepsilon > 0$:

$$\forall N\ \exists n \geq N:\ a_n \notin U_\varepsilon(A). \tag{1}$$

Построим подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ такую, что

$$\forall k \hookrightarrow\ a_{n_k} \notin U_\varepsilon(A). \tag{2}$$

Из соотношения (1) следует существование числа $n_1 \in \mathbb{N}$ такого, что $a_{n_1} \notin U_\varepsilon(A)$. Пусть на некотором шаге $k-1 \in \mathbb{N}$ определено значение $n_{k-1} \in \mathbb{N}$. Тогда в силу соотношения (1) существует натуральное число $n_k \geq 1 + n_{k-1}$ такое, что $a_{n_k} \notin U_\varepsilon(A)$. Таким образом, построена подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, удовлетворяющая соотношению (2). В силу обобщенной теоремы Больцано–Вейерштрасса подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ имеет частичный предел $B \in \overline{\mathbb{R}}$. При этом в силу соотношения (2) $B \neq A$. Поскольку подпоследовательность последовательности $\{a_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$, то B является частичным пределом $\{a_n\}$, отличным от A, что противоречит условию (2). $\square$

Определим точные грани подмножества расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение. Пусть заданы множество $L \subset \overline{\mathbb{R}}$ и элементы $m \in \overline{\mathbb{R}}$, $M \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$m = \inf L \overset{\text{опр.}}{\iff} \begin{cases} \forall x \in L \hookrightarrow\ m \leq x, \\ \forall m' \in \overline{\mathbb{R}} : m' > m\ \exists x \in L:\ m' > x. \end{cases}$$

$$M = \sup L \overset{\text{опр.}}{\iff} \begin{cases} \forall x \in L \hookrightarrow\ M \geq x, \\ \forall M' \in \overline{\mathbb{R}} : M' < M\ \exists x \in L:\ M' < x. \end{cases}$$

Определение. Пусть $L \subset \overline{\mathbb{R}}$ – множество всех конечных и бесконечных (со знаком) частичных пределов последовательности $\{x_n\}$. Тогда *нижним* и *верхним пределами* последовательности $\{x_n\}$ называются соответственно

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf L, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup L.$$

Лемма 2. Верхний и нижний пределы последовательности являются ее частичными пределами.

Доказательство. Пусть $L \subset \overline{\mathbb{R}}$ – множество всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим $M = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению супремума существует $x \in L$, $x \in U_\varepsilon(M)$. Выберем число $\varepsilon' > 0$ так, что $U_{\varepsilon'}(x) \subset$ $\subset U_\varepsilon(M)$. В случае $M \in \mathbb{R}$ можно взять $\varepsilon' = \varepsilon - |M - x|$. В случае $M = +\infty$, $x \in \mathbb{R}$ можно взять $\varepsilon' = x - \frac{1}{\varepsilon}$. В случае $x = M = +\infty$ можно взять $\varepsilon' = \varepsilon$. Так как $x \in L$, то по критерию частичного предела $U_{\varepsilon'}(x)$ содержит значения бесконечного набора элементов $\{x_n\}$. Отсюда и из включения $U_{\varepsilon'}(x) \subset U_\varepsilon(M)$ получаем, что $U_\varepsilon(M)$ содержит значения бесконечного набора элементов $\{x_n\}$. Снова применяя критерий частичного предела получаем, что M – частичный предел $\{x_n\}$. Аналогично, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ – частичный предел $\{x_n\}$. $\square$

Задача 1. Доказать, что если $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

§ 10. Критерий Коши

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ – *фундаментальна* или *удовлетворяет условию Коши*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geq N\ \forall m \geq N \hookrightarrow\ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Лемма 1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – сходится к числу x. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geq N \hookrightarrow\ |x_n - x| < \varepsilon/2$$

и, следовательно,

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geq N\ \forall m \geq N \hookrightarrow$

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

Лемма 2. Фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальна. Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N:\ \forall n \geq N\ \forall m \geq N \hookrightarrow\ |x_n - x_m| < \varepsilon$, следовательно, $\forall n \geq N \hookrightarrow\ |x_N - x_n| < 1$. Определим $M = \max\{|x_1|, ..., |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ |x_n| \leq M$. $\square$

Теорема 1. (Критерий Коши.)
$\{x_n\}$ – сходится $\iff$ $\{x_n\}$ – фундаментальна.

Доказательство. Если $\{x_n\}$ сходится, то по лемме 1 она фундаментальна. Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальна. По лемме 2 $\{x_n\}$ – ограничена, следовательно, по теореме Больцано–Вейерштрасса существует $x \in \mathbb{R}$ – частичный предел $\{x_n\}$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Пусть задано любое $\varepsilon > 0$. Из фундаментальности $\{x_n\}$ следует существование номера N такого, что

$$\forall n \geq N\ \forall m \geq N \hookrightarrow\ |x_n - x_m| < \varepsilon/2.$$

В силу критерия частичного предела (теоремы 1 § 9) найдется номер $m \geq N$ такой, что $|x - x_m| < \varepsilon/2$. Следовательно,

$$\forall n \geq N \hookrightarrow\ |x_n - x| \leq |x_n - x_m| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Итак,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geq N \hookrightarrow\ |x_n - x| < \varepsilon.$$

Поэтому последовательность $\{x_n\}$ сходится к x. $\square$

Задача 1. Доказать, что если аксиому непрерывности заменить двумя аксиомами: критерием Коши и принципом Архимеда, то получится эквивалентное определение множества действительных чисел.

Пример. Как связаны два условия:
а) последовательность $\{x_n\}$ сходится;
б) $\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\ \exists N:\ \forall n \geq N \hookrightarrow\ |x_n - x| < \varepsilon$?

Решение. Распишем условие (а):

$$\text{(а)} \quad\Leftrightarrow\quad \exists x \in \mathbb{R}: \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \exists x \in \mathbb{R}:\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geq N \hookrightarrow\ |x_n - x| < \varepsilon.$$

Так как $\exists x \in \mathbb{R}:\ \forall\varepsilon > 0\ \ldots \quad\Rightarrow\quad \forall\varepsilon > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\ \ldots$, то из условия (а) следует условие (б).

На первый взгляд кажется, что из условия (б) не следует условие (а). Однако с помощью критерия Коши можно показать, что (б) $\Rightarrow$ (а).

Пусть выполнено условие (б). Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\ \exists N:\ \forall n \geq N\ \forall m \geq N \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow\ |x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < 2\varepsilon.$$

Поэтому последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. В силу критерия Коши $\{x_n\}$ сходится, т. е. выполняется условие (а). $\square$

§ 11. Открытые и замкнутые числовые множества

Определение. Пусть задано множество $X \subset \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *внутренней точкой* множества X, если

$$\exists\varepsilon > 0: \quad U_\varepsilon(x) \subset X.$$

Внутренностью множества X называется множество $\operatorname{int} X$, состоящее из всех внутренних точек множества X.

Так как $x \in U_\varepsilon(x)$ для любого $\varepsilon > 0$, то $\operatorname{int} X \subset X$ для любого множества X.

Определение. Множество X называется *открытым*, если все его точки внутренние, т. е. $X \subset \operatorname{int} X$.

Пустое множество $\emptyset$ по определению считается открытым.

Так как для любого множества X справедливо включение $\operatorname{int} X \subset \subset X$, то равенство $X = \operatorname{int} X$ выполняется тогда и только тогда, когда множество X открыто.

Лемма 1. Пусть заданы числа $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Множества (a, b), $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ – открыты, а множества $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$ не являются открытыми.

Доказательство. Покажем, что интервал (a, b) является открытым множеством. Для этого требуется показать, что любая точка $x \in \in (a, b)$ – внутреняя, т. е. $\forall x \in (a, b) \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad U_\varepsilon(x) \subset (a, b)$. Данное условие выполняется: можно взять, например, $\varepsilon = \min\{x - a, b - - x\}$.

Открытость множеств $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ доказать самостоятельно.

Покажем, что полуинтервал $(a, b]$ не является открытым множеством. Это следует из того, что точка b содержится во множестве $(a, b]$, но не является внутренней точкой этого множества, так как не существует числа $\varepsilon > 0$ такого, что $U_\varepsilon(b) \subset (a, b]$.

Самостоятельно доказать, что множества $[a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$ также не являются открытыми. □

Задача 1. а) Доказать, что если $X \subset Y$, то $\operatorname{int} X \subset \operatorname{int} Y$.

б) Доказать, что пересечение конечного набора открытых множеств является открытым множеством.

в) Доказать, что объединение любого набора открытых множеств открыто.

г) Привести пример набора открытых множеств, пересечение которых не является открытым.

Определение. Пусть задано множество $X \subset \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *точкой прикосновения* множества X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \ U_\varepsilon(x) \bigcap X \neq \emptyset.$$

Замыканием множества X называется множество $\overline{X}$, состоящее из всех точек прикосновения множества X.

Так как $x \in U_\varepsilon(x)$ для любого $\varepsilon > 0$, то $X \subset \overline{X}$ для любого множества X.

Определение. Множество X называется *замкнутым*, если любая точка прикосновения X содержится в X, т. е. $\overline{X} \subset X$.

Так как для любого множества X справедливо включение $X \subset \subset \overline{X}$, то равенство $X = \overline{X}$ выполняется тогда и только тогда, когда множество X замкнуто.

Лемма 2. Пусть заданы числа $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Множества $[a, b]$, $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ – замкнуты, а множества (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ не являются замкнутыми.

Доказательство. Покажем, что отрезок $[a, b]$ является замкнутым множеством, т. е. $\overline{[a, b]} \subset [a, b]$. Предположим противное: существует точка $x \in \overline{[a, b]}$ такая, что $x \notin [a, b]$. Так как $x \notin [a, b]$, то либо $x < a$, либо $x > b$. В том и другом случае $\exists \varepsilon > 0 : \quad U_\varepsilon(x) \bigcap X = = \emptyset$, что противоречит условию $x \in \overline{[a, b]}$. Полученное противоречие доказывает замкнутость отрезка $[a, b]$.

Замкнутость множеств $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ доказать самостоятельно.

Покажем, что полуинтервал $(a, b]$ не является замкнутым множеством. Это следует из того, что точка a не содержится во множестве $(a, b]$, но содержится в замыкании этого множества, так как $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \ U_\varepsilon(a) \bigcap (a, b] \neq \emptyset$.

Самостоятельно доказать, что множества (a, b), $[a, b)$, $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ также не являются замкнутыми. □

Задача 2. а) Доказать, что если $X \subset Y$, то $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

б) Доказать, что объединение конечного набора замкнутых множеств является замкнутым множеством.

в) Доказать, что пересечение любого набора замкнутых множеств – замкнуто.

г) Привести пример набора замкнутых множеств, объединение которых не является замкнутым.

Задача 3. Найти замыкания множеств:
а) $\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$,
б) $\mathbb{Q}$ (множество рациональных чисел).

Задача 4. Доказать, что X – открыто $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R} \backslash X$ – замкнуто.

Теорема 1. (Критерий точки прикосновения.)

$$x \in \overline{X} \iff \exists \{x_n\} \subset X : \quad x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Доказательство. 1) Если $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\{x_n\} \subset X$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_n \in U_\varepsilon(x)$. Поскольку $x_n \in X \bigcap U_\varepsilon(x)$, то $X \bigcap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$, следовательно, $x \in \overline{X}$.

2) Пусть $x \in \overline{X}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \quad X \bigcap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Положим $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Получим $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \quad X \bigcap U_{\varepsilon_n}(x) \neq \emptyset$, т. е. $\exists x_n \in X \bigcap U_{\varepsilon_n}(x)$. Так как $0 \leq |x_n - x| < \varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, то в силу теоремы о трех последовательностях $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$, т. е. $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. □

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *компактом*, если из любой последовательности $\{x_n\} \subset X$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $x \in X$.

Теорема 2. (Критерий компактности.) Множество $X \subset \mathbb{R}$ является компактом тогда и только тогда, когда X ограничено и замкнуто.

Доказательство. 1) Пусть множество X ограничено и замкнуто, $\{x_n\} \subset X$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то по теореме Больцано–Вейерштрасса существует подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$. Так как $\{x_{n_k}\} \subset X$, то по теореме 1 имеем $x \in \overline{X} = X$. Следовательно, X – компакт.

2) Пусть X – компакт. Методом от противного докажем, что множество X ограничено и замкнуто.

а) Предположим, что множество X неограничено. Тогда либо X неограничено сверху, либо X неограничено снизу. Пусть для определенности X неограничено сверху. Тогда $\forall n \quad \exists x_n \in X : \quad x_n > n$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. По теореме 4 § 9 любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ стремится к $+\infty$. Следовательно, из последовательности $\{x_n\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, что противоречит компактности X. Полученное противоречие показывает, что множество X ограничено.

б) Предположим, что множество X незамкнуто, т. е. $\exists y \in \overline{X}$, $y \notin X$. По теореме 1 $\exists \{y_n\} \subset X$: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. В силу теоремы 4 § 9 любая подпоследовательность последовательности $\{y_n\}$ сходится к $y \notin X$, т. е. из $\{y_n\}$ нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $x \in X$, что противоречит компактности X. Полученное противоречие показывает, что множество X замкнуто. □

Задача 1. Доказать, что если множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, то $\sup X \in \overline{X}$.

Задача 2. Доказать, что если $X \subset \mathbb{R}$ – компакт, то существуют $\min X$ и $\max X$.

§ 12. Счетные и несчетные множества

Определение. Множества X и Y называются *равномощными*, если $\exists$ взаимно однозначное соответствие $f : X \longrightarrow Y$.

Задача 1. Доказать, что

а) для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ интервал (a, b) равномощен интервалу $(0, 1)$;

б) множества $(0, 1)$ и $\mathbb{R}$ равномощны;

в) множества $(0, 1)$ и $(0, 1]$ равномощны.

Определение. Множество, равномощное множеству $\mathbb{N}$, называется *счетным*.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчетным*.

Теорема 1. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является счетным.

Доказательство. Поместим все рациональные числа $\frac{m}{n}$ в бесконечную таблицу, n-я строчка которой имеет вид

$$\frac{0}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \frac{-1}{n} \quad \frac{2}{n} \quad \frac{-2}{n} \quad \ldots \frac{k}{n} \quad \frac{-k}{n} \quad \ldots$$

Из определения рационального числа следует, что в данной таблице присутствуют все рациональные числа.

$n \backslash m$	0		1		-1		2	$\cdots$
1	$\frac{0}{1}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{1}$		$\frac{-1}{1}$	$\rightarrow$	$\frac{2}{1}$	$\cdots$
			$\downarrow$		$\uparrow$		$\downarrow$	
2	$\frac{0}{2}$	$\leftarrow$	$\frac{1}{2}$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{2}{2}$	$\cdots$
	$\downarrow$				$\uparrow$		$\downarrow$	
3	$\frac{0}{3}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{3}$	$\rightarrow$	$\frac{-1}{3}$		$\frac{2}{3}$	$\cdots$
							$\downarrow$	
$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$

Будем двигаться по таблице в направлении стрелок и последовательно нумеровать элементы таблицы, пропуская сократимые дроби. Сократимые дроби мы пропускаем для того, чтобы каждое рациональное число было занумеровано один раз.

эл. табл.	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\cdots$
номер	1	2	3	–	–	4	5	6	7	8	–	$\cdots$

Тем самым мы установили взаимно однозначное соответствие между элементами таблицы (рациональными числами) и их номерами (натуральными числами), т. е. между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$. Следовательно, множество $\mathbb{Q}$ счетно. $\square$

Теорема 2. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}$ содержит некоторый отрезок $[a, b]$. Тогда X несчетно.

Доказательство. Поскольку множество X содержит бесконечное подмножество $\left\{a + \frac{b-a}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, то X бесконечно. Предположим, что X счетно. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{N}$ и X, следовательно, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in X$ и

$$\forall x \in X \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad x = x_n. \tag{1}$$

Построим последовательность вложенных отрезков. Определим $[a_0, b_0] = [a, b]$. Если построен отрезок $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, то отрезок $[a_n, b_n]$

определим так, чтобы $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ и $x_n \notin [a_n, b_n]$ (легко видеть, что такой отрезок существует). По теореме Кантора о вложенных отрезках, существует общая точка x отрезков $[a_n, b_n]$. Поскольку $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ x_n \notin [a_n, b_n]$ и $x \in [a_n, b_n]$, то $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ x \neq x_n$. Это противоречит условию (1). $\square$

Глава 2

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 1. Определение предела функции

Определение. Пусть задано число $\delta > 0$. *Проколотой δ-окрестностью* элемента $x \in \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $\overset{o}{U}_\delta(x) = U_\delta(x) \setminus \{x\}$.

В частности, $\overset{o}{U}_\delta(\pm\infty) = U_\delta(\pm\infty)$, и для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

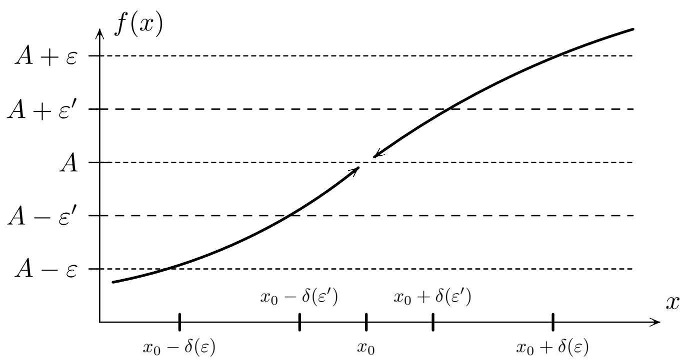
$$\overset{o}{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \bigcup (x_0, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

Определение предела по Коши. Пусть задана функция $f : X \to \mathbb{R}$ и заданы $A \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, причем $\exists \delta_0 > 0 : \quad \overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0) \subset X$. Тогда пишут

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \text{или} \qquad f(x) \to A \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0] : \ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(A). \qquad (1)$$



Замечание. Условие $\delta \in (0, \delta_0]$ в формуле (1) обеспечивает то, что для любого $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ значение $f(x)$ определено. Если $D_f = \mathbb{R}$, то вместо $\delta \in (0, \delta_0]$ в формуле (1) можно писать $\delta > 0$.

Замечание. То, как определена (и определена ли вообще) функция f в точке x_0 не влияет на $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

В частности, если $A \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, а функция f определена на всей числовой прямой, то

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \qquad \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : \ (0 < |x - x_0| < \delta) \hookrightarrow \ (|f(x) - A| < \varepsilon);$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : \ (0 < |x - x_0| < \delta) \hookrightarrow \ (f(x) > \frac{1}{\varepsilon});$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : \ (x < -\frac{1}{\delta}) \hookrightarrow \ (f(x) > \frac{1}{\varepsilon}).$

Определение в других случаях расписать самостоятельно.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью Гейне* в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если

1) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ и

2) $x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение предела по Гейне. Пусть задана функция $f : X \to \mathbb{R}$ и заданы элементы $A \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, причем $\exists \delta_0 > 0 : \overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0) \subset X$. Тогда пишут: $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, если для любой последовательности Гейне $\{x_n\} \subset X$ предел последовательности $\{f(x_n)\}$ существует и равен A.

Теорема 1. Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.

Доказательство. Пусть задана функция $f : X \to \mathbb{R}$, пусть $x_0, A \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0) \subset X$.

1) Покажем, что из определения предела по Коши следует определение предела по Гейне. Пусть $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ по Коши, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0] : \ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(A). \qquad (2)$$

Пусть $\{x_n\} \subset X$ – произвольная последовательность Гейне в точке x_0. Тогда по определению предела и в силу условия $x_n \neq x_0$ имеем

$$\forall \delta > 0\ \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow\ x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0). \tag{3}$$

Применим (3) к δ из (2), тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n \geq N \hookrightarrow\ f(x_n) \in U_\varepsilon(A),$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Значит, $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по Гейне.

2) Методом от противного покажем, что из определения предела по Гейне следует определение предела по Коши. Предположим, что $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по Гейне, но не по Коши.

Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall \delta \in (0, \delta_0]\ \exists x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) :\ f(x) \notin U_\varepsilon(A).$$

Следовательно,

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \overset{o}{U}_{\delta_0/n}(x_0) :\ f(x_n) \notin U_\varepsilon(A).$$

Из условия $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ x_n \in \overset{o}{U}_{\delta_0/n}(x_0)$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Таким образом, мы получили последовательность Гейне $\{x_n\} \subset X$ такую, что $f(x_n) \not\to A$ при $n \to \infty$ – противоречие. □

§ 2. Свойства пределов функций

Теорема 1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность Гейне в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Согласно теореме 2 § 4 главы 1 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = |A|$. Пользуясь определением Гейне, получаем требуемое утверждение. □

Теорема 2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то

1) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$,

2) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$,

3) если дополнительно $B \neq 0$, то функция $f(x)/g(x)$ определена в некоторой $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} (f(x)/g(x)) = A/B$.

Доказательство. Пункты 1, 2 следуют из теорем о пределе суммы последовательностей, пределе произведения последовательностей и определения предела функции по Гейне.

Докажем пункт 3. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$, то по теореме 1 имеем $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = |B| > 0$. Возьмем $\varepsilon = |B|$, тогда $\exists \delta_0 > 0 :\ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow\ |g(x)| \in U_\varepsilon(|B|) = (0, 2|B|)$. Следовательно, $\forall x \in \overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow\ g(x) \neq 0$ и функция $f(x)/g(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$. Пользуясь определением Гейне, из теоремы о пределе частного последовательностей получаем требуемое утверждение. □

Теорема 3. (О предельном переходе в неравенствах.) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\exists \delta > 0 :\ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow\ f(x) \leq g(x)$, то $A \leq B$.

Доказательство следует непосредственно из теоремы о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и определения предела функции по Гейне. □

Теорема 4. (О трех функциях.) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\exists \delta > 0 :\ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

Доказательство следует непосредственно из теоремы о трех последовательностях и определения предела функции по Гейне. □

Лемма 1. (О сохранении знака.) Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки x_0 значение $f(x)$ имеет тот же знак, что и знак числа A.

Доказательство. Пусть для определенности $A > 0$. Положим $\varepsilon = A$. По определению предела существует число $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ справедливо включение $f(x) \in U_\varepsilon(A) = (0, 2A)$, а значит, $f(x) > 0$ при $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$. □

§ 3. Критерий Коши существования предела функции

Лемма 1. Пусть задана функция $f: X \to \mathbb{R}$. Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и

$$\forall \text{ посл. Гейне } \{x_n\} \subset X \text{ в точке } x_0 \quad \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}.$$

Тогда этот предел не зависит от последовательности Гейне:

$$\exists A \in \mathbb{R}\colon \ \forall \text{ посл. Гейне } \{x_n\} \subset X \text{ в точке } x_0 \hookrightarrow \ A = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Доказательство. Пусть имеются две произвольные последовательности Гейне в точке x_0: $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ и $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ x_n \neq x_0, \ y_n \neq x_0$. Составим из них последовательность $\{z_k\}$:

$$z_k = \begin{cases} x_n, & k = 2n-1, \\ y_n, & k = 2n. \end{cases}$$

Последовательность $\{z_k\}$ также является последовательностью Гейне, так как $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x_0$, $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ z_k \neq x_0$. Поэтому, в силу условия леммы, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)$. Так как последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(y_n)\}$ являются подпоследовательностями сходящейся последовательности $\{f(z_k)\}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$. $\square$

Определение. Пусть функция f определена в некоторой $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$. *Условие Коши существования предела функции в точке* x_0 состоит в том, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0] : \ \forall x_1, x_2 \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Теорема 1. (Критерий Коши.) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \iff$ выполнено условие Коши существования предела функции f в точке x_0.

Доказательство. 1) Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0] : \ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon/2.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0] : \ \forall x_1, x_2 \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, т. е. выполнено условие Коши (1).

2) Пусть выполнено условие Коши (1). Возьмем произвольную последовательность Гейне в точке x_0: $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, тогда

$$\forall \delta \in (0, \delta_0] \ \exists N : \ \forall n \ge N \hookrightarrow \ x_n \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0). \qquad (2)$$

Используя условие (2) для δ из (1), получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n \ge N \ \forall k \ge N \hookrightarrow \ |f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие Коши существования предела последовательности $\{f(x_n)\}$. В силу критерия Коши для последовательностей существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$.

Итак, $\forall$ последовательности Гейне $\{x_n\}$ в точке x_0 $\exists A = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \in \mathbb{R}$, тогда по лемме 1

$$\exists A \in \mathbb{R}\colon \ \forall \text{ посл. Гейне } \{x_n\} \subset X \text{ в точке } x_0 \hookrightarrow \ A = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Пользуясь определением предела функции по Гейне, получаем $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. $\square$

Задача 1. Пусть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \hookrightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Верно ли, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$?

Задача 2. Пусть задана функция $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Верно ли, что $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, если

а) $\forall \varepsilon > 0 \ \forall d > 0 \ \exists x_0 > 0 : \ \forall x > x_0 \hookrightarrow \ |f(x + d) - f(x)| < \varepsilon$;

б) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 > 0 : \ \forall d > 0 \hookrightarrow \ |f(x_0 + d) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Рассмотреть данный вопрос отдельно для каждого из условий (а) и (б).

§ 4. Предел по множеству

Определение. Элемент $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *предельной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$, если существует $\{x_n\} \subset X$ – последовательность Гейне в точке x_0.

Определение. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *изолированной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$, если $x_0 \in X$ и $\exists \delta > 0: \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap X = \emptyset$.

Лемма 1. Для любого множества $X \subset \mathbb{R}$ и любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:

(1) x_0 является предельной точкой множества X;

(2) x_0 является точкой прикосновения множества X (см. § 11 главы 1) и x_0 не является изолированной точкой множества X.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть x_0 – предельная точка множества X. Тогда существует $\{x_n\} \subset X$ – последовательность Гейне в точке x_0. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то в силу критерия точки прикосновения (теорема 1 § 11 главы 1) справедливо включение $x_0 \in \overline{X}$, т. е. x_0 является точкой прикосновения множества X. Поскольку $\forall \delta > 0\ \exists n: \ x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$, то $\forall \delta > 0 \quad \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap X \neq \emptyset$. Следовательно, x_0 не является изолированной точкой множества X.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть x_0 – точка прикосновения множества X и x_0 не является изолированной точкой множества X. Покажем, что x_0 – предельная точка множества X.

Рассмотрим случай, когда $x_0 \notin X$. Так как x_0 – точка прикосновения множества X, то в силу теоремы 1 § 11 главы 1 существует последовательность $\{x_n\} \subset X$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Так как $x_0 \notin X$ и $x_n \in X$, то $x_n \neq x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\{x_n\}$ – последовательность Гейне в точке x_0 и, следовательно, x_0 – предельная точка множества X.

Пусть теперь $x_0 \in X$. Так как x_0 не является изолированной точкой множества X, то $\forall \delta > 0 \hookrightarrow \ \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap X \neq \emptyset$. Следовательно, $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ \overset{o}{U}_{1/n}(x_0) \cap X \neq \emptyset$. Поэтому $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \overset{o}{U}_{1/n}(x_0) \cap X$. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ является последовательностью Гейне в точке x_0. Поэтому x_0 – предельная точка множества X. $\square$

Определение. Пусть элемент $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ является предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$. Будем говорить, что элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ является *пределом* функции $f: X \to \mathbb{R}$ *по множеству* X и писать $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = A$, если

(определение Коши):

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in X \cap \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$;

(определение Гейне):

$\forall \{x_n\} \subset X$ – посл. Гейне в точке $x_0 \hookrightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Эквивалентность определений Коши и Гейне доказывается так же, как и раньше (см. доказательство теоремы 1 § 1).

Задача 1. Пусть заданы множества $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}$ и функция $f: X_1 \cup X_2 \to \mathbb{R}$. Пусть x_0 – предельная точка множеств X_1 и X_2. Доказать, что

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X_1\cup X_2}} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \left(\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X_1}} f(x) = A \text{ и } \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X_2}} f(x) = A \right).$$

Пример. Рассмотрим *функцию Дирихле*:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Непосредственно из определений следует, что любая точка $x_0 \in \mathbb{R}$ является предельной точкой множеств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x) = 0$. При этом для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует.

§ 5. Односторонние пределы

Определение. Пусть функция f определена на интервале (a, x_0). Предел функции f в точке x_0 по множеству (a, x_0) называют *пределом слева* функции f в точке x_0 и обозначают $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$.

Используя определение предела по множеству, получаем

$$f(x_0 - 0) = A \in \overline{\mathbb{R}} \quad \overset{\text{опр. Коши}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (0, x_0 - a): \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

$$f(x_0 - 0) = A \in \overline{\mathbb{R}} \quad \overset{\text{опр. Гейне}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \forall \{x_n\} \subset (a, x_0): \ \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \right) \hookrightarrow \ \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \right).$$

Определение. Пусть функция f определена на интервале (x_0, b). Предел функции f в точке x_0 по множеству (x_0, b) называют *пределом справа* функции f в точке x_0 и обозначают $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ или $f(x_0 + 0)$.

Лемма 1. Пусть функция f определена в некоторой $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\exists f(x_0 \pm 0) \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{и} \quad f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)\right).$$

Доказательство. Запишем определение по Коши того, что $\exists f(x_0 + + 0) = f(x_0 - 0) = A \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 \in (0, \delta_0], \ \delta_2 \in (0, \delta_0] : \\ \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0) \bigcup (x_0, x_0 + \delta_2) \hookrightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(A). \end{gathered} \tag{1}$$

Это условие эквивалентно условию

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0] : \\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \bigcup (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(A). \end{gathered} \tag{2}$$

Действительно, из условия (1) следует условие (2), где $\delta = = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Из условия (2) следует условие (1), где $\delta_1 = \delta_2 = = \delta$. Так как $(x_0 - \delta, x_0) \bigcup (x_0, x_0 + \delta) = \overset{o}{U}_\delta(x_0)$, то условие (2) эквивалентно условию $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. $\square$

Определение. *Минимумом (максимумом, инфимумом, супремумом) функции* f на множестве X называется минимум (максимум, инфимум, супремум) множества $f(X)$: $\min\limits_{x \in X} f(x) = \min f(X)$, $\sup\limits_{x \in X} f(x) = \sup f(X)$ и так далее.

Непосредственно из определений инфимума и супремума имеем

$$m = \inf_{x \in X} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in X \hookrightarrow \ m \le f(x), \\ \forall m' > m \ \exists x \in X : \ m' > f(x); \end{cases}$$

$$M = \sup_{x \in X} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in X \hookrightarrow \ M \ge f(x), \\ \forall M' < M \ \exists x \in X : \ M' < f(x). \end{cases}$$

Заметим, что это верно не только в случае конечных, но и в случае бесконечных верхних и нижних граней.

Определение. Функция f называется *нестрого возрастающей* на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : \ x_1 < x_2 \hookrightarrow \ f(x_1) \le f(x_2).$$

Функция f называется *нестрого убывающей* на множестве $X \subset \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : \ x_1 < x_2 \hookrightarrow \ f(x_1) \ge f(x_2).$$

Если функция является нестрого возрастающей или нестрого убывающей, то она называется *монотонной.*

Функция f называется *строго возрастающей* на множестве $X \subset \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : \ x_1 < x_2 \hookrightarrow \ f(x_1) < f(x_2).$$

Функция f называется *строго убывающей* на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : \ x_1 < x_2 \hookrightarrow \ f(x_1) > f(x_2).$$

Теорема 1. 1) Если функция f нестрого возрастает на (a, x_0), то $\exists f(x_0 - 0) = \sup\limits_{x \in (a, x_0)} f(x)$.

2) Если функция f нестрого убывает на (a, x_0), то $\exists f(x_0 - 0) = \inf\limits_{x \in (a, x_0)} f(x)$.

3) Если функция f нестрого возрастает на (x_0, b), то $\exists f(x_0 + 0) = \inf\limits_{x \in (x_0, b)} f(x)$.

4) Если функция f нестрого убывает на (x_0, b), то $\exists f(x_0 + 0) = \sup\limits_{x \in (x_0, b)} f(x)$.

Доказательство. 1) Пусть функция f нестрого возрастает на (a, x_0). Так как конечный или бесконечный супремум любого множества существует, то существует $\sup\limits_{x \in (a, x_0)} f(x) = M \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$.

Из определения супремума следует, что $\forall x \in (a, x_0) \hookrightarrow \ f(x) \le \le M$ и, кроме того, $\forall M_1 < M \ \exists x_1 \in (a, x_0) : M_1 < f(x_1)$. Отсюда и из возрастания функции f следует, что $\forall x \in (x_1, x_0) \hookrightarrow \ M_1 < f(x_1) \le \le f(x)$.

Итак, $\forall M_1 < M \ \exists x_1 \in (a, x_0): \ \forall x \in (x_1, x_0) \hookrightarrow \ M_1 < f(x) \le M$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_1 \in (a, x_0): \ \forall x \in (x_1, x_0) \hookrightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(M)$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = x_0 - x_1 > 0: \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(M)$, а значит, $M = f(x_0 - 0)$. Другие случаи рассмотреть самостоятельно. $\square$

§ 6. Непрерывность функции в точке

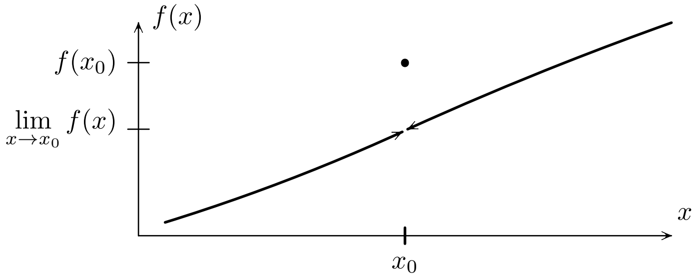
Определение. 1) Пусть функция f определена в некоторой δ-окрестности точки x_0. Тогда f называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) Пусть функция f определена на $(a, x_0]$. Тогда f называется *непрерывной слева* в точке x_0, если $f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

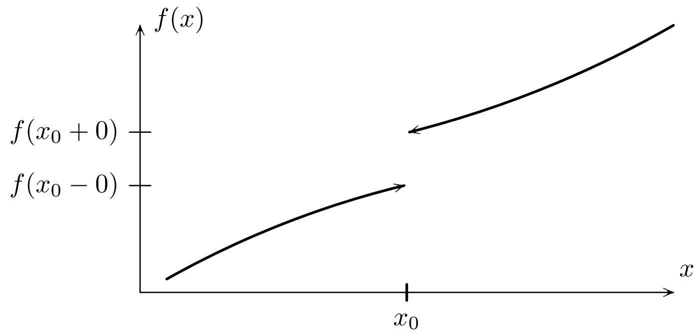
Пусть функция f определена на $[x_0, b)$. Тогда f называется *непрерывной справа* в точке x_0, если $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

3) Пусть f определена в $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$. Тогда

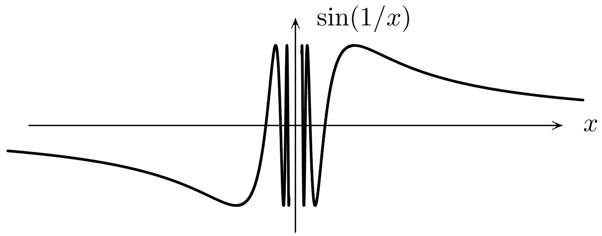
а) если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, но в точке x_0 функция f не определена либо $f(x_0) \ne \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*;

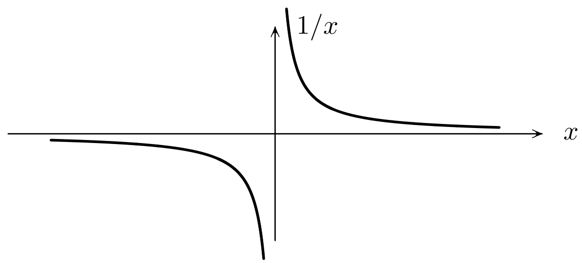


б) если $\exists f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$, но $f(x_0 - 0) \ne f(x_0 + 0)$, то x_0 – *точка разрыва первого рода*;



в) если какой-либо из пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ не существует или бесконечен, то x_0 – *точка разрыва второго рода*.





Задача 1. Существует ли функция $f : [x_0, x_0 + \delta_0) \to \mathbb{R}$, непрерывная справа в точке x_0 и такая, что

$$\forall \delta \in (0, \delta_0) \ \exists x_1, x_2 \in (x_0, x_0 + \delta): \ f(x_1) > 0, \ f(x_2) < 0.$$

Задача 2. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывная справа в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ и такая, что

$$\forall a,b\in\mathbb{R}:\ a<b\ \ \exists x_1,x_2\in(a,b):\ f(x_1)>0,\ f(x_2)<0.$$

Лемма 1. Пусть f определена в $U_{\delta_0}(x_0)$. Следующие условия эквивалентны:

1) f непрерывна в x_0;
2) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\in(0,\delta_0]:\ \forall x\in U_\delta(x_0)\hookrightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;
3) $\forall\{x_n\}\subset U_{\delta_0}(x_0):\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0\hookrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2) : следует из определения $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ по Коши; в данном случае условие $x\neq x_0$ можно не писать, так как при $x=x_0$ выполняется: $|f(x)-f(x_0)|=0<\varepsilon$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) : следует из определения $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ по Гейне; в данном случае условие $x_n\neq x_0$ можно не писать, так как при $x_n=x_0$ выполняется: $f(x_n)=f(x_0)$. □

Задача 3. Пусть функция f определена в $U_{\delta_0}(x_0)$. Как связаны следующие условия с непрерывностью функции f в точке x_0?

1) $\forall\delta>0\ \exists\varepsilon\in(0,\delta_0]:\ \forall x\in U_\varepsilon(x_0)\hookrightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\delta$;
2) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\in(0,\delta_0]:\ \forall x:\ |x-x_0|\le\delta\hookrightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;
3) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\in(0,\delta_0]:\ \forall x:\ |x-x_0|<\delta\hookrightarrow\ |f(x)-f(x_0)|\le\varepsilon$;
4) $\forall\varepsilon>0\ \forall\delta\in(0,\delta_0]\ \exists x\in\overset{o}{U}_\delta(x_0):\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;
5) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\in(0,\delta_0],\ \exists A\in\mathbb{R}:\ \forall x\in U_\delta(x_0)\hookrightarrow\ |f(x)-A|<\varepsilon$;
6) $\exists\varepsilon>0:\ \forall x\in U_{\delta_0}(x_0)\hookrightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;
7) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\in(0,\delta_0]:\ \forall x_1,x_2\in U_{\delta_0}(x_0):\ |x_1-x_2|<\delta\hookrightarrow\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$;
8) (условие Липшица) $\exists L\in\mathbb{R}:\ \forall x_1,x_2\in U_{\delta_0}(x_0)\hookrightarrow\ |f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|$.

Теорема 1. Пусть функции f и g определены в $U_\delta(x_0)$ и непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ непрерывны в точке x_0. Если дополнительно $g(x_0)\neq0$, то функция $f(x)/g(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство состоит в применении теоремы 2 § 2.

Определение. Пусть заданы множества $X,Y\subset\mathbb{R}$ и функции $y:X\to\mathbb{R}$, $f:Y\to\mathbb{R}$, причем $y(X)\subset Y$. Функция $\varphi:X\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=f(y(x))$ называется *суперпозицией* функций y и f, или *сложной функцией.*

Пример. Пусть $x_0,y_0,A\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0}f(y)=A$. Верно ли, что $\exists\lim\limits_{x\to x_0}f(y(x))=A$?

Решение. Неверно. Например, $y(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$, $f(y)=\begin{cases}0, & y\neq0,\\ 1, & y=0.\end{cases}$ Тогда $A=0$, но $f(y(x))=1\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to x_0}f(y(x))=1\neq A$. □

Теорема 2. (О пределе сложной функции.) Пусть заданы функции $y:\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)\to\mathbb{R}$ и $f:\overset{o}{U}_{\beta_0}(y_0)\to\mathbb{R}$, пусть $\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=y_0\in\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{y\to y_0}f(y)=A\in\overline{\mathbb{R}}$ и пусть выполнено хотя бы одно из следующих дополнительных условий:

(a) $\exists\delta_0>0:\ \forall x\in\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)\hookrightarrow\ y(x)\neq y_0$ или
(b) $f(y_0)=A$ (т.е. функция f непрерывна в точке y_0).

Тогда сложная функция $\varphi(x)=f(y(x))$ определена в некоторой $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ и $\exists\lim\limits_{x\to x_0}f(y(x))=\lim\limits_{y\to y_0}f(y)=A$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. Так как $\lim\limits_{y\to y_0}f(y)=A$, то

$$\exists\beta\in(0,\beta_0):\ \forall y\in\overset{o}{U}_\beta(y_0)\hookrightarrow\ f(y)\in U_\varepsilon(A).\tag{1}$$

По определению $\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=y_0$

$$\exists\delta\in(0,\delta_0):\ \forall x\in\overset{o}{U}_\delta(x_0)\hookrightarrow\ y(x)\in U_\beta(y_0).\tag{2}$$

Покажем, что сложная функция $\varphi(x)=f(y(x))$ определена в $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ и

$$\forall x\in\overset{o}{U}_\delta(x_0)\hookrightarrow\ f(y(x))\in U_\varepsilon(A).\tag{3}$$

Зафиксируем произвольную точку $x\in\overset{o}{U}_\delta(x_0)$. В силу условия (2) получаем $y(x)\in U_\beta(y_0)$. В случае $y(x)\neq y_0$ имеем $y(x)\in\overset{o}{U}_\beta(y_0)$ и согласно (1) включение $f(y(x))\in U_\varepsilon(A)$ выполнено. Рассмотрим случай $y(x)=y_0$. В этом случае дополнительное условие (a) реализоваться не может. Следовательно, реализуется дополнительное условие (b), а значит, $f(y(x))=f(y_0)=A\in U_\varepsilon(A)$. Таким образом, доказано соотношение (3). Итак,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in \overset{o}{U}_\delta(x_0)\hookrightarrow\ f(y(x))\in U_\varepsilon(A).$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(y(x))=A$. □

Теорема 3. (О непрерывности сложной функции в точке.) Пусть функция y определена в некоторой $U_{\delta_0}(x_0)$ и непрерывна в точке x_0. Пусть функция f определена в некоторой $U_{\beta_0}(y_0)$ и непрерывна в точке $y_0=y(x_0)$. Тогда сложная функция $\varphi(x)=f(y(x))$ определена в некоторой $U_{\delta_1}(x_0)$ и непрерывна в точке x_0.

Доказательство состоит в применении пункта (b) теоремы 2 для случая $y_0=y(x_0)$. □

§ 7. Непрерывность функции на множестве

Определение. Функция $f:X\to\mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* $x_0\in X$ *по множеству* $X\subset\mathbb{R}$, если

(a) точка x_0 является предельной точкой множества X и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)=f(x_0)$ либо

(b) точка x_0 является изолированной точкой множества X.

Заметим, что согласно лемме 1 § 4 точка $x_0\in X$ является либо предельной, либо изолированной точкой множества X. В случае, когда точка x_0 является изолированной точкой множества X, любая функция $f:X\to\mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 по множеству X.

Определение. Функция $f:X\to\mathbb{R}$ называется *непрерывной на множестве* $X\subset\mathbb{R}$, если f непрерывна в каждой точке $x_0\in X$ по множеству X.

Лемма 1. Для функции $f:X\to\mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:

1) f непрерывна на множестве X;

2) $\forall x_0\in X\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in U_\delta(x_0)\cap X\hookrightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;

3) $\forall x_0\in X\ \forall\{x_n\}\subset X:\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0\hookrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 § 6. □

Задача 1. Пусть заданы множества $X,Y\subset\mathbb{R}$ и функции $y:X\to\mathbb{R}$, $f:Y\to\mathbb{R}$, $y(X)\subset Y$, пусть функция y непрерывна на

множестве X, а функция f непрерывна на множестве Y. Доказать, что сложная функция $\varphi(x)=f(y(x))$ непрерывна на множестве X.

Задача 2. Пусть на интервале (a,b) задана функция f. Доказать, что функция f непрерывна на (a,b) тогда и только тогда, когда для любых чисел $m,M\in\mathbb{R}$ множества $\{x\in(a,b)\ :\ f(x)<M\}$ и $\{x\in(a,b)\ :\ f(x)>m\}$ открыты.

Напомним, что множество $X\subset\mathbb{R}$ называется компактом, если из любой последовательности $\{x_n\}\subset X$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $x\in X$.

Теорема 1. Пусть f непрерывна на компакте X. Тогда $f(X)$ – компакт. (Другими словами, непрерывная функция переводит компакт в компакт.)

Доказательство. Пусть задана произвольная последовательность $\{y_n\}\subset f(X)$. Требуется доказать, что из $\{y_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $y_0\in f(X)$. Так как $y_n\in f(X)$, то $\exists x_n\in X$: $f(x_n)=y_n$. В силу компактности X существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}:\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=$ $=x_0\in X$. В силу непрерывности f имеем $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$, т.е. $\{y_{n_k}\}$ – подпоследовательность последовательности $\{y_n\}$, сходящаяся к $y_0=f(x_0)\in f(X)$. □

Задача 3. Верно ли, что непрерывная функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ переводит

а) открытое множество в открытое;

б) замкнутое множество в замкнутое;

в) ограниченное множество в ограниченное;

г) замкнутое и ограниченное множество в замкнутое и ограниченное?

Определение. Последовательность $\{x_n\}\subset X$ называется *минимизирующей* (соответственно *максимизирующей*) *последовательностью* функции f на множестве X, если $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\inf\limits_{x\in X}f(x)$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\sup\limits_{x\in X}f(x)$).

Лемма 2. Для любого непустого множества X и любой функции $f : X \to \mathbb{R}$ существуют минимизирующая и максимизирующая последовательности функции f на множестве X.

Доказательство. По теореме о существовании инфимума существует $\inf\limits_{x\in X} f(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$. По определению инфимума $\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in \in X:\ f(x) \in U_\varepsilon(m)$. Следовательно, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in X:\ f(x_n) \in \in U_{1/n}(m)$. Таким образом, построена минимизирующая последовательность $\{x_n\}$. Аналогично строится максимизирующая последовательность. $\square$

Теорема 2. (Теорема Вейерштрасса.) Если функция f непрерывна на компакте $X \subset \mathbb{R}$, то существуют $\max\limits_{x\in X} f(x)$ и $\min\limits_{x\in X} f(x)$.

Доказательство. Обозначим $m = \inf\limits_{x\in X} f(x)$. В силу леммы 2 существует минимизирующая последовательность $\{x_n\} \subset X$: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = m$. Поскольку X – компакт, то из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому $x_0 \in X$. Поскольку последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{f(x_n)\}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = m$. Отсюда и из непрерывности функции f следует, что $m = f(x_0)$. Поэтому в точке достигается $\min\limits_{x\in X} f(x)$. Существование максимума доказывается аналогично. $\square$

Определение. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной* на X, если множество ее значений $f(X)$ ограничено.

Следствие 1. Если функция f непрерывна на компакте $X \subset \mathbb{R}$, то она ограничена на X.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса существуют $\min\limits_{x\in X} f(x) = m \in \mathbb{R}$ и $\max\limits_{x\in X} f(x) = M \in \mathbb{R}$. По определению минимума и максимума функция f на множестве X ограничена снизу числом m и ограничена сверху числом M. $\square$

Любой отрезок $[a, b]$ ограничен и замкнут, следовательно, в силу критерия компактности (теорема 2 § 11 главы 1) отрезок является компактом. Отсюда вытекают еще два следствия.

Следствие 2. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существуют $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Следствие 3. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.

Задача 4. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] \hookrightarrow \hookrightarrow\ f(x) > 0$. Верно ли, что $\exists\varepsilon > 0 :\ \forall x \in [a, b] \hookrightarrow\ f(x) \geq \varepsilon$?

Задача 5. Пусть функция f непрерывна на (a, b) и $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow \hookrightarrow\ f(x) > 0$. Верно ли, что $\exists\varepsilon > 0 :\ \forall x \in (a, b) \hookrightarrow\ f(x) \geq \varepsilon$?

Задача 6. Пусть функция f непрерывна на $[0, +\infty)$ и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Верно ли, что функция f ограничена на $\mathbb{R}$?

Теорема 3. (Теорема Больцано–Коши о промежуточном значении.) Пусть заданы функция f, непрерывная на $[a, b]$, и число y_0 такие, что либо $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$, либо $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$. Тогда существует $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = y_0$.

Доказательство. Пусть, например, $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$. Обозначим $[a_0, b_0] = [a, b]$. Пусть определен отрезок $[a_k, b_k]$, причем $f(a_k) \leq \leq y_0 \leq f(b_k)$. Определим $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$,

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, c_k], & \text{если} \quad y_0 \leq f(c_k), \\ [c_k, b_k], & \text{если} \quad f(c_k) < y_0, \end{cases}$$

тогда $f(a_{k+1}) \leq y_0 \leq f(b_{k+1})$.

Получаем последовательность вложенных отрезков $\{[a_k, b_k]\}$ таких, что $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ f(a_k) \leq y_0 \leq f(b_k)$. По теореме Кантора существует общая точка $x_0 \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} [a_k, b_k]$.

Так как $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0$, то $|x_0 - a_k| \leq |b_k - a_k| \to 0$, следовательно, $a_k \to x_0$, аналогично, $b_k \to x_0$.

В силу непрерывности f имеем $f(a_k) \to f(x_0)$, $f(b_k) \to f(x_0)$. Так как $f(a_k) \leq y_0 \leq f(b_k)$, то по теореме о предельном переходе в неравенствах $f(x_0) \leq y_0 \leq f(x_0)$, т. е. $y_0 = f(x_0)$. $\square$

Теорема 4. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $f([a, b]) = [m, M]$, где $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Доказательство. Если $m = M$, то отрезок $[m, M]$ вырождается в одну точку, а функция f равна константе $m = M$ на $[a, b]$. При этом утверждение теоремы тривиально выполняется. Поэтому будем предполагать, что $m < M$.

Из определений минимума и максимума следует, что $\forall x \in [a,b] \hookrightarrow \ m \leq f(x) \leq M$, т.е. $f([a,b]) \subset [m,M]$. Покажем, что $[m,M] \subset f([a,b])$. Из определений минимума и максимума также следует, что $m, M \in f([a,b])$, т.е. $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$: $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$. По теореме Коши о промежуточном значении для любого числа $y_0 \in [m,M]$ существует точка x_0, лежащая на отрезке с концами x_1, x_2 и такая, что $f(x_0) = y_0$. Поэтому $y_0 \in f([a,b])$. Следовательно, $[m,M] \subset f([a,b])$. □

Следствие. Непрерывная функция переводит отрезок в отрезок или в точку.

Напомним, что множество $X \subset \mathbb{R}$ называется числовым промежутком, если X является отрезком, точкой, интервалом, полуинтервалом, лучом (открытым и замкнутым) или всей числовой прямой.

Теорема 5. (Обобщенная теорема о промежуточном значении.) Пусть функция f непрерывна на числовом промежутке X и пусть $\inf\limits_{x\in X} f(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$, $\sup\limits_{x\in X} f(x) = M \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\forall y_0 \in (m,M) \quad \exists x_0 \in X: \quad f(x_0) = y_0.$$

Доказательство. Пусть задано произвольное число $y_0 \in \in (m,M)$. Так как $m < y_0$, то из определения инфимума следует: $\exists x_1 \in X : f(x_1) < y_0$. Так как $M > y_0$, то из определения супремума следует: $\exists x_2 \in X : f(x_2) > y_0$. По теореме Коши о промежуточном значении существует точка x_0, лежащая на отрезке с концами x_1, x_2 (а значит, поскольку X – числовой промежуток, то $x_0 \in X$) и такая, что $f(x_0) = y_0$. □

Следствие. Непрерывная функция переводит числовой промежуток в числовой промежуток.

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на числовом промежутке X. Обозначим $m = \inf\limits_{x\in X} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in X} f(x)$. В силу теоремы 5 получаем $(m,M) \subset f(X)$.

Поэтому если $m = -\infty$ и $M = +\infty$, то $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty) \subset f(X) \subset \subset \mathbb{R}$, а значит, $f(X) = \mathbb{R}$ – числовой промежуток.

Рассмотрим случай $m \in \mathbb{R}$, $M = +\infty$. Тогда $(m,+\infty) = (m,M) \subset \subset f(X)$ и по определению инфимума $f(X) \subset [m,+\infty)$. Поэтому если $m \in f(X)$, то $f(X) = [m,+\infty)$, а если $m \notin f(X)$, то $f(X) = (m,+\infty)$. В обоих случаях $f(X)$ – числовой промежуток.

Остальные случаи рассмотреть самостоятельно. □

Задача 7. Верно ли, что непрерывная функция переводит
а) интервал в интервал;
б) числовую прямую в числовую прямую?

Задача 8. Пусть функция f непрерывна и неограничена на луче $[0,+\infty)$. Верно ли, что $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$?

Задача 9. Пусть функция f непрерывна на луче $[0,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$. Верно ли, что выполнено одно из соотношений $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$?

§ 8. Обратная функция

Лемма 1. Строго монотонная функция обратима. Обратная к строго возрастающей функции является строго возрастающей функцией; обратная к строго убывающей функции строго убывает.

Доказательство. Пусть для определенности функция $f : X \to \to \mathbb{R}$ строго возрастает. Из определений (см. введение) следует обратимость функции f, т.е. существование функции $f^{-1} : f(X) \to \to X$, обратной к f. Докажем, что функция f^{-1} строго возрастает. Пусть $y_1, y_2 \in f(X)$, $y_1 < y_2$. Обозначим $x_i = f^{-1}(y_i)$ $(i = 1,2)$. Равенство $x_1 = x_2$ не может выполняться, так как $f(x_1) = y_1 \neq y_2 = = f(x_2)$. Неравенство $x_2 < x_1$ также не может выполняться, так как в силу строго возрастания f из условия $x_2 < x_1$ следует, что $y_2 = = f(x_2) < f(x_1) = y_1$. Поэтому выполняется неравенство $x_1 < x_2$. Итак, $\forall y_1, y_2 \in f(X): \ y_1 < y_2 \hookrightarrow \ f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, т.е. функция f^{-1} строго возрастает. □

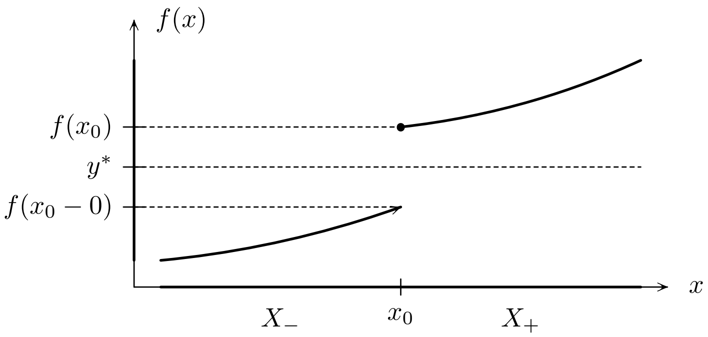
Лемма 2. Пусть функция f монотонна на числовом промежутке X и множество значений $f(X)$ – числовой промежуток. Тогда функция f непрерывна на X.

Доказательство. Пусть для определенности f нестрого возрастает на X. Пусть точка $x_0 \in X$ не является левым концом промежутка X. Покажем, что f непрерывна слева в точке x_0. Разобъем множество X на два множества: $X_- = \{x \in X : \ x < x_0\}$ и $X_+ = \{x \in \in X : \ x \geq x_0\}$. По теореме об одностороннем пределе монотонной функции существует $f(x_0 - 0) = \sup\limits_{x \in X_-} f(x)$. Поскольку $f(x) \leq f(x_0)$ для любого $x \in X_-$, то $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$. Предположим, что f не является непрерывной слева в точке x_0, т.е. $f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$. Тогда $f(x_0 - 0) < f(x_0)$ и, следовательно, существует число y^* такое, что $f(x_0 - 0) < y^* < f(x_0)$. Зафиксируем $x_1 \in X_-$. Тогда $f(x_1) \leq \leq \sup\limits_{x \in X_-} f(x) = f(x_0 - 0) < y^* < f(x_0)$. Так как значения $f(x_1)$ и $f(x_0)$ лежат на числовом промежутке $f(X)$, а число y^* лежит между ними, то $y^* \in f(X)$. С другой стороны,

$$\forall x \in X_- \hookrightarrow \ f(x) \leq \sup_{x \in X_-} f(x) = f(x_0 - 0) < y^*,$$

$$\forall x \in X_+ \hookrightarrow \ f(x) \geq f(x_0) > y^*.$$

Поэтому $\forall x \in X \hookrightarrow \ f(x) \neq y^*$, что противоречит включению $y^* \in \in f(X)$. Полученное противоречие доказывает, что f непрерывна слева в любой точке x_0, не являющейся левым концом промежутка X. Аналогично, f непрерывна справа в любой точке x_0, не являющейся правым концом промежутка X. Таким образом, функция f непрерывна на X. $\square$



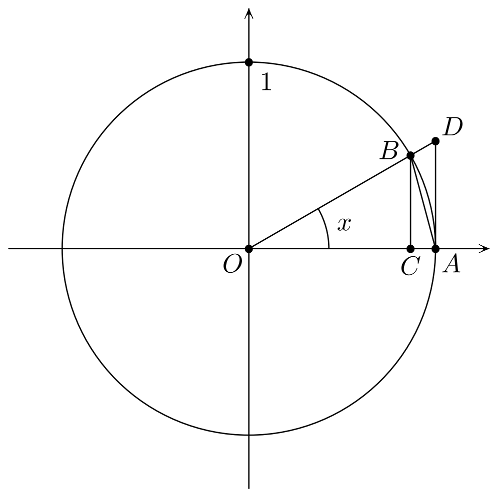
Теорема 1. Если функция f определена, строго монотонна и непрерывна на числовом промежутке X, то обратная функция определена, строго монотонна и непрерывна на числовом промежутке $f(X)$.

Доказательство. По теореме 5 § 7 множество $f(X)$ является числовым промежутком. По лемме 1 обратная функция f^{-1} строго монотонна на $f(X)$. Поскольку монотонная функция f^{-1} переводит числовой промежуток $f(X)$ в числовой промежуток X, то по лемме 2 функция f^{-1} непрерывна на $f(X)$. $\square$

§ 9. Тригонометрические функции

Лемма 1. $\forall x \in (0, \pi/2) \hookrightarrow \ \sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Доказательство. Нарисуем на координатной плоскости окружность единичного радиуса с центром в начале координат, а также точки $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(\cos x, \sin x)$, $C(\cos x, 0)$ и $D(1, \operatorname{tg} x)$. Заметим, что точка B лежит на прямой (O, D).



Так как $S_{\triangle AOB} < S_{\text{сект. } AOB} < S_{\triangle AOD}$, $\quad S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot BC = = \frac{1}{2} \sin x$, $S_{\text{сект. } AOB} = \frac{1}{2}(OA)^2 \cdot x = \frac{1}{2} x$, $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} OA \cdot AD = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, то $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$. $\square$

Теорема 1. Функции $\sin x$, $\cos x$ непрерывны на $\mathbb{R}$. Функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна во всех точках $x \in \mathbb{R}$, кроме точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

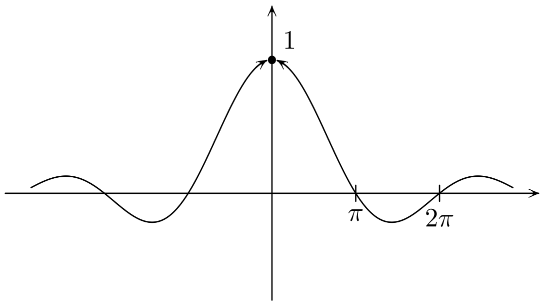
Доказательство. Так как $|\sin x - \sin x_0| = = 2 \sin\left|\frac{x - x_0}{2}\right| \left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|$ при $x \in (-\pi, \pi)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} |\sin x - - \sin x_0| = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$, т. е. $\sin x$ – непрерывная функция.

Функцию $\cos x$ можно представить как суперпозицию непрерывных функций $y(x) = \frac{\pi}{2} - x$ и $f(y) = \sin y$: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(y(x))$, следовательно, $\cos x$ – непрерывная функция.

По теореме о непрерывности частного функция $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна во всех точках, где знаменатель не обращается в 0. $\square$

Теорема 2. (Первый замечательный предел.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Доказательство. По лемме 1 при $x \in (0, \pi/2)$ справедливы неравенства $1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$, т.е. $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$. В силу четности функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ эти неравенства имеют место при всех x: $|x| < \pi/2$, $x \neq 0$. Из непрерывности косинуса следует, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. По теореме о трех функциях (теорема 4 § 2) получаем требуемое утверждение. $\square$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Решение. Из теоремы 2 и непрерывности косинуса следует: $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} \to 1$ при $x \to 0$. $\square$

Функции arcsin, arccos, arctg вводятся как обратные к монотонным функциям:
$f_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \sin x, \quad \arcsin y = f_1^{-1}(y);$
$f_2 : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \cos x, \quad \arccos y = f_2^{-1}(y);$
$f_3 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{arctg} y = f_3^{-1}(y).$

Из теоремы 4 § 7 следует, что множеством значений функции f_1 (а значит, и множеством определения функции arcsin) является отрезок $[m, M]$, где $m = \min\limits_{x\in[-\pi/2,\pi/2]} \sin x = -1$, $M = \max\limits_{x\in[-\pi/2,\pi/2]} \sin x = 1$. Аналогично множеством определения функции arccos также является отрезок $[-1, 1]$. Поскольку

$$\inf_{x\in(-\pi/2,\pi/2)} \operatorname{tg} x = -\infty, \qquad \sup_{x\in(-\pi/2,\pi/2)} \operatorname{tg} x = +\infty,$$

то по теореме 5 § 7

$$\forall y_0 \in (-\infty, \infty) \quad \exists x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \quad \operatorname{tg}(x_0) = y_0.$$

Следовательно, множеством значений функции $f_3(x) = \operatorname{tg} x$ (а значит, и множеством определения функции arctg) является вся числовая прямая.

В силу теоремы о непрерывности обратной функции функции arcsin, arccos, arctg непрерывны на своих множествах определения.

Пример. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

Решение. Докажем утверждение (а). Определим функции $y(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(y) = \begin{cases} \frac{y}{\operatorname{tg} y}, & y \neq 0, \\ 1, & y = 0. \end{cases}$

Из предыдущего примера следует, что функция $f(y)$ непрерывна на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. По теореме о непрерывности сложной функции функция $\varphi(x) = f(y(x))$ – непрерывна. Так как $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \varphi(x) = \varphi(0) = 1.$$

Утверждение (б) доказывается аналогично. $\square$

§ 10. Степенная, показательная и логарифмическая функции

Лемма 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$. Тогда

1) функция f непрерывна и строго возрастает на $[0,+\infty)$;
2) $f([0,+\infty)) = [0,+\infty)$.

Доказательство. 1) Непрерывность f следует из теоремы о непрерывности произведения (теорема 1 § 6) и непрерывности функции $\varphi(x) = x$. Строгое возрастание f доказывается индукцией по n.

2) Поскольку $\inf\limits_{x\in[0,+\infty)} f(x) = 0$, $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} f(x) = +\infty$, то в силу теоремы 5 § 7 имеем

$$\forall y_0 \in (0,+\infty) \quad \exists x_0 \in [0,+\infty): \quad x_0^n = y_0,$$

т. е. $(0,+\infty) \subset f([0,+\infty))$. Отсюда и из равенства $f(0) = 0$ следует, что $[0,+\infty) \subset f([0,+\infty))$. Поскольку $\forall x \in [0,+\infty) \hookrightarrow \ f(x) \geq 0$, то справедливо и обратное включение. □

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $y \in [0,+\infty)$. Через $y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$ обозначается значение функции $f^{-1}(y)$, обратной к функции $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$.

В силу леммы 1 и теоремы об обратной функции (теоремы 1 § 8) функция $g(y) = \sqrt[n]{y}$ определена, строго возрастает и непрерывна на луче $[0,+\infty)$.

Определение. Если $x > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ и дробь $\frac{m}{n}$ – несократима, определим: $\quad x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m, \quad x^{-\frac{m}{n}} = 1/(x^{\frac{m}{n}})$.

Тем самым мы определили x^p для любых $x \in (0,+\infty)$, $p \in \mathbb{Q}$.

Используя эти определения, можно получить следующие свойства степеней с рациональным показателем.

1) $\forall x, y \in \mathbb{Q}\ \forall a > 0 \quad \hookrightarrow \quad (a^x)^y = a^{xy},\ a^x a^y = a^{x+y};$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 < a < b \ \ \forall x \in \mathbb{Q} \quad \hookrightarrow \quad x > 0 \Rightarrow a^x < b^x,\ x < 0 \Rightarrow a^x > b^x;$

3) $\forall x, y \in \mathbb{Q} : x < y \ \ \forall a \in \mathbb{R} : \ a > 0 \quad \hookrightarrow \quad a > 1 \Rightarrow a^x < a^y;\ a < 1 \Rightarrow a^x > a^y.$

Лемма 2. $\forall a > 0 \hookrightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$.

Доказательство. Рассмотрим случай $a > 1$. Обозначим $b_n = a^{1/n} - 1$. Тогда $b_n > 0$ и в силу неравенства Бернулли $a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n > nb_n$, следовательно, $b_n < a/n \to 0$, а значит, $a^{1/n} \to 1$.

Случай $a \in (0,1)$ сводится к предыдущему: так как $\frac{1}{a} > 1$, то $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ и $a^{\frac{1}{n}} = 1 \Big/ \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ при $n \to \infty$. □

Теорема-определение 1. Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда для любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$, сходящейся к x, существует $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} \in \mathbb{R}$. Этот предел при данном x не зависит от последовательности $\{x_n\}$ и обозначается a^x.

Доказательство. Пусть для определенности $a \geq 1$. Покажем, что последовательность $\{a^{x_n}\}$ – фундаментальна. Так как $\{x_n\}$ – ограничена, то существует $M \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ |x_n| \leq M$. Следовательно, существует $C = a^M : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ a^{x_n} \in (0, C]$. Поэтому для любых $m, k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|a^{x_m} - a^{x_k}| = a^{x_k} \cdot |a^{x_m - x_k} - 1| \leq C \cdot |a^{x_m - x_k} - 1|. \tag{1}$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она фундаментальна: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m, k \geq N \hookrightarrow \ |x_m - x_k| < \varepsilon$, следовательно, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists N : \forall m, k \geq N \hookrightarrow \ |x_m - x_k| < 1/n$. Поэтому $\forall m, k \geq N \hookrightarrow \ a^{x_m - x_k} \in [a^{-1/n}, a^{1/n}]$.

Так как по лемме 2 $a^{1/n} \to 1$, $a^{-1/n} \to 1$ при $n \to \infty$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m, k \geq N \hookrightarrow \ |a^{x_m - x_k} - 1| < \varepsilon$, следовательно, с учетом (1), получаем $\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m, k \geq N \hookrightarrow \ |a^{x_m} - a^{x_k}| < C\varepsilon$, следовательно, последовательность $\{a^{x_n}\}$ фундаментальна. В силу критерия Коши последовательность $\{a^{x_n}\}$ сходится. Так же, как в лемме 1 § 3, доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$ не зависит от последовательности $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$, сходящейся к x. □

Используя свойства степеней с рациональным показателем, предельным переходом получаем следующие свойства степеней с действительным показателем.

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall a > 0 \quad \hookrightarrow \quad (a^x)^y = a^{xy},$
$a^x a^y = a^{x+y};$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 < a < b\ \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \hookrightarrow \quad x > 0 \Rightarrow a^x < b^x$
$x < 0 \Rightarrow a^x > b^x;$

3) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y\ \ \forall a \in \mathbb{R} :\ a > 0 \quad \hookrightarrow \quad a > 1 \Rightarrow a^x < a^y;$
$a < 1 \Rightarrow a^x > a^y.$

Лемма 3. $\forall a > 0 \hookrightarrow \lim\limits_{x\to 0} a^x = 1.$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $a \geq 1$. В силу леммы 2 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$, следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} :\ (a^{-1/n}, a^{1/n}) \subset (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Поэтому в силу монотонности показательной функции $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \frac{1}{n} > 0 : \forall x \in (-\delta, \delta) \hookrightarrow\ a^x \in (a^{-1/n}, a^{1/n}) \subset (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. □

Теорема 2. $\forall a \geq 0$ функция $f(x) = a^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство. В силу леммы 3 для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ имеем $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = \lim\limits_{y\to 0} a^{x_0+y} = a^{x_0} \lim\limits_{y\to 0} a^y = a^{x_0}$. □

Определение. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $y > 0$. Тогда через $\log_a y$ обозначим значение обратной функции $f^{-1}(y)$ к функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$.

В силу монотонности функции $f(x) = a^x$ при $a > 0$, $a \neq 1$ она обратима. Так как $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} a^x = 0$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} a^x = +\infty$, то по теореме 5 §7 функция $f^{-1}(y) = \log_a y$ определена при всех $y \in (0, +\infty)$. По теореме о непрерывности обратной функции функция $f^{-1}(y) = \log_a y$ – непрерывна.

Определение. Пусть $x > 0$, тогда $\ln x = \log_e x$, где число e определено в §7 главы 1.

Лемма 4. $\forall a \in (0,1) \bigcup (1, +\infty)\ \forall b > 0 \hookrightarrow\ \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$.

Доказательство. Поскольку $f(x) = \log_a x$ – функция, обратная к функции $g(x) = a^x$, то $a^{\log_a b} = b$, $e^{\ln a} = a$, $e^{\ln b} = b$. Следовательно,

$$e^{\ln a\ \log_a b} = \left(e^{\ln a}\right)^{\log_a b} = a^{\log_a b} = b = e^{\ln b}.$$

Отсюда и из обратимости функции e^x следует, что $\ln a\ \log_a b = \ln b$, т. е. $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$. □

Теорема 3. Пусть $a > 0$. Тогда функция $f(x) = \log_x a$ непрерывна на множестве $(0,1) \bigcup (1, +\infty)$.

Доказательство следует из непрерывности $\ln x$, леммы 4 и теоремы о непрерывности частного. □

Теорема 4. Пусть $p \in \mathbb{R}$. Тогда функция $f(x) = x^p$ непрерывна на $(0, +\infty)$.

Доказательство следует из формулы $x^p = e^{p \ln x}$, непрерывности логарифма и экспоненты и теоремы о непрерывности сложной функции. □

§ 11. Второй замечательный предел

Лемма 1. Если $\{n_k\}$ – произвольная (не обязательно строго возрастающая) последовательность натуральных чисел такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

Доказательство. Как показано в примере §7 главы 1, $e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, где $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow\ a_n \in U_\varepsilon(e)$. Так как $n_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, то $\forall N\ \exists K : \forall k \geq K \hookrightarrow\ n_k \geq N$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0\ \exists K : \forall k \geq K \hookrightarrow\ a_{n_k} \in U_\varepsilon(e)$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = e$. □

Лемма 2. $\lim\limits_{x\to +0} (1+x)^{1/x} = e.$

Доказательство. Воспользуемся определением предела справа по Гейне. Пусть задана произвольная последовательность $\{x_k\}$ такая, что $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ x_k > 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Требуется доказать, что

$$\lim_{k\to\infty} (1 + x_k)^{1/x_k} = e. \qquad (1)$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k} = +\infty$, то $\exists k_0 : \forall k > k_0 \hookrightarrow\ \frac{1}{x_k} \geq 1$.

При $k > k_0$ определим n_k как целую часть числа $1/x_k$, т. е. $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \leq 1/x_k < n_k + 1$, тогда $1 + \frac{1}{n_k+1} \leq 1 + x_k \leq 1 + \frac{1}{n_k}$ и, следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} \le (1+x_k)^{1/x_k} \le \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \qquad (2)$$

В силу леммы 1 при $k\to\infty$ имеем

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right) \to e,$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1+\frac{1}{n_k}\right) \to e.$$

Поэтому из неравенств (2) по теореме о трех последовательностях следует (1). $\square$

Лемма 3. $\lim\limits_{x\to -0}(1+x)^{1/x}=e.$

Доказательство. Пусть задана произвольная последовательность $\{x_k\}$ такая, что $\forall k\in\mathbb{N} \hookrightarrow\ x_k<0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Тогда $\exists k_0 : \forall k>k_0 \hookrightarrow\ x_k\in(-1,0)$. При $k>k_0$ определим $y_k = -\frac{x_k}{1+x_k}$.

Заметим, что

$$(1+y_k)(1+x_k)=1, \quad x_k=-\frac{y_k}{1+y_k}, \quad (1+x_k)^{1/x_k}=(1+y_k)^{1+(1/y_k)}.$$

Так как $y_k>0$, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$, то в силу леммы 2 $\lim\limits_{k\to\infty}(1+y_k)^{1/y_k}=e$, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k}=e$. Пользуясь определением Гейне, получаем требуемое утверждение. $\square$

Из лемм 2, 3 следует

Теорема 1. (Второй замечательный предел.)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$

Доказательство. Заметим, что $\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln\left((1+x)^{1/x}\right) = f(y(x))$, где $\forall y>0 \hookrightarrow\ f(y)=\ln y$ и $\forall x\in(-1,0)\cup(0,1)\hookrightarrow\ y(x) = (1+x)^{1/x}$. Поскольку согласно теореме 1 $\lim\limits_{x\to 0} y(x)=e$ и согласно теореме 3 § 10 функция f непрерывна в точке $y_0=e$, то по теореме о пределе сложной функции (теорема 2(b) § 6) получаем, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} f(y(x)) = f(y_0)=\ln e = 1.$ $\square$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$

Доказательство. Определим функцию $y(x)=e^x-1$. Заметим, что $\frac{e^x-1}{x} = \frac{y(x)}{\ln(1+y(x))} = f(y(x))$, где $\forall y\in(-1,0)\cup(0,1)\hookrightarrow\ f(y) = \frac{y}{\ln(1+y)}$. Из теоремы 2 следует, что $\lim\limits_{y\to 0} f(y)=1$. Так как функция $y(x)$ непрерывна, то $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = y(0) = 0$. Так как функция $y(x)$ строго возрастает, то $\forall x\ne 0 \hookrightarrow\ y(x)\ne y(0)=0$. Поэтому, применяя теорему о пределе сложной функции (теорема 2(a) § 6), получаем, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} f(y(x)) = \lim\limits_{y\to 0} f(y)=1.$ $\square$

Определение. (Гиперболические функции.)
Косинус гиперболический : $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$,
синус гиперболический : $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$,
тангенс гиперболический : $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$,
котангенс гиперболический : $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

Пример. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{th} x}{x}=1.$$

Решение. В силу теоремы 3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} + \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} 0 = 1$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{th} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1.$ $\square$

§ 12. Сравнение функций

Определение. Пусть функции f и g определены и не обращаются в 0 в некоторой $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$. Функции f и g называются *эквивалентными* (пишут: $f(x)\sim g(x)$) при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$

Лемма 1. 1) Если $f(x)\sim g(x)$, $g(x)\sim h(x)$ при $x\to x_0$, то $f(x)\sim h(x)$ при $x\to x_0$.

2) Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то $g(x) \sim f(x)$ при $x \to x_0$.

Доказательство следует из теорем о пределе произведения и пределе частного.

Из теорем и примеров § 9 и § 11 следует, что при $x \to 0$

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \arcsin x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \operatorname{sh} x \sim \operatorname{th} x. \quad (1)$$

Лемма 2. Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ определены и не обращаются в 0 в некоторой $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ и пусть $f_1(x) \sim f_2(x)$, $g_1(x) \sim g_2(x)$ при $x \to x_0$. Тогда $f_1(x)g_1(x) \sim f_2(x)g_2(x)$, $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ при $x \to x_0$.

Доказательство следует из теорем о пределе произведения и пределе частного.

Замечание. Из условий $f_1(x) \sim f_2(x)$, $g_1(x) \sim g_2(x)$ при $x \to x_0$ не следует $f_1(x) + g_1(x) \sim f_2(x) + g_2(x)$ при $x \to x_0$. Например, $-x \sim -x$, $x + x^2 \sim x + x^3$ при $x \to 0$, но $-x + x + x^2 \not\sim -x + x + x^3$ при $x \to 0$.

Лемма 3. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, а если один из пределов не существует, то не существует и другой.

Доказательство. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$, то по теореме о пределе произведения $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Аналогично, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Следствие. При вычислении пределов произведений и частных функций эти функции можно заменять на эквивалентные.

Лемма 4. Пусть $f(y) \sim g(y)$ при $y \to y_0$ и пусть $y(x) \to y_0$ при $x \to x_0$ и $y(x) \neq y_0$ при $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$. Тогда $f(y(x)) \sim g(y(x))$ при $x \to x_0$.

Доказательство. По теореме о пределе сложной функции (теореме 2(а) § 6) имеем $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(y(x))}{g(y(x))} = \lim\limits_{y\to y_0} \frac{f(y)}{g(y)} = 1$. $\square$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\ \arcsin x^2}{\operatorname{th} x\ \ln^2(1+x)}$.

Решение. Так как $\arcsin x^2 \sim x^2$, $e^x - 1 \sim x$, $\operatorname{th} x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$, то $\frac{(e^x-1)\ \arcsin x^2}{\operatorname{th} x\ \ln^2(1+x)} \sim \frac{x^2 \cdot x}{x \cdot x^2} = 1$ при $x \to 0$, следовательно, предел равен 1. $\square$

Определение. Пусть функции f и g определены в $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ и функция $g(x)$ не обращается в 0. Говорят, что функция f является *бесконечно малой относительно функции* g при $x \to x_0$ и пишут $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Замечание. $o(g(x))$ – это класс функций. Запись $f(x) = o(g(x))$ означает, что функция $f(x)$ принадлежит классу функций $o(g(x))$. Поэтому равенство в записи $f(x) = o(g(x))$ необратимо, т. е. нельзя писать $o(g(x)) = f(x)$. Например, $x^3 = o(x)$, $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, но $x^3 \neq x^2$.

Теорема 2. $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ $\iff$ $f(x) - g(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$.

Доказательство. $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ $\iff$ $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ $\iff$ $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$ $\iff$ $f(x) - g(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$. $\square$

Из теоремы 2 следует, что эквивалентности (1) можно переписать в виде

$$\begin{array}{lll} \sin x = x + o(x), & \operatorname{tg} x = x + o(x), & \\ \arcsin x = x + o(x), & \operatorname{arctg} x = x + o(x), & \\ e^x = 1 + x + o(x), & \ln(1+x) = x + o(x), & \\ \operatorname{sh} x = x + o(x), & \operatorname{th} x = x + o(x) & \text{при } x \to 0. \end{array}$$

Определение. Пусть функции f и g определены в $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$. Говорят, что функция f *ограничена относительно функции* g, и пишут $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$, если

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow\ |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

Теорема 3. (Свойство o-малого и O-большого.)

Для функций, не обращающихся в 0 в некоторой $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ при $x \to \to x_0$, справедливы равенства:

1) $o(f) \pm o(f) = o(f)$;	6) $O(O(f)) = O(f)$;
2) $O(f) \pm O(f) = O(f)$;	7) $o(f) \cdot O(g) = o(fg)$;
3) $o(f) = O(f)$;	8) $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$;
4) $o(O(f)) = o(f)$;	9) $(o(f))^\alpha = o(f^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$;
5) $O(o(f)) = o(f)$;	10) $(O(f))^\alpha = O(f^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$.

Докажем, например, первое утверждение. Требуется доказать, что если $g_1(x) = o(f(x))$, $g_2(x) = o(f(x))$ при $x \to x_0$, то $g_1(x) \pm g_2(x) = = o(f(x))$ при $x \to x_0$. Действительно, из условий $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g_1(x)}{f(x)} = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g_2(x)}{f(x)} = 0$ следует $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g_1(x)\pm g_2(x)}{f(x)} = 0$, т. е. $g_1(x) \pm g_2(x) = o(f(x))$ при $x \to x_0$. Остальные утверждения проверяются аналогично. $\square$

Глава 3

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Определение и геометрический смысл производной и дифференциала

Определение. Пусть функция f определена в $U_\delta(x_0)$. *Производной* функции f в точке x_0 называется

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \in \overline{\mathbb{R}}$$

и обозначается $f'(x_0)$. Если указанный предел не существует, то производная $f'(x_0)$ не существует.

Выясним геометрический смысл производной.

Напишем уравнение секущей, проходящей через точки графика $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$:
$y_{\text{сек}}(x, \Delta x) = kx + b$, где числа k и b определяются из системы уравнений

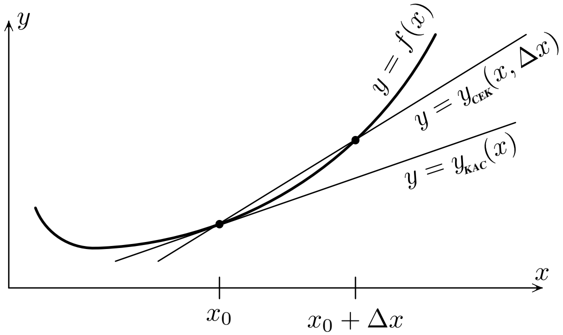
$$\begin{cases} f(x_0) = y_{\text{сек}}(x_0, \Delta x), \\ f(x_0 + \Delta x) = y_{\text{сек}}(x_0 + \Delta x, \Delta x), \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} f(x_0) = kx_0 + b, \\ f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + b. \end{cases}$$

Решая систему, $b = f(x_0) - kx_0$, $\quad k = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, получаем уравнение секущей:

$$y_{\text{сек}}(x, \Delta x) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(x - x_0). \qquad (1)$$



Определение. *Невертикальной касательной* к графику функции f в точке x_0 называется невертикальная прямая, которая является предельным положением секущей:

$$\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow \ y_{\mathbf{KAC}}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} y_{\mathbf{CEK}}(x, \Delta x).$$

Непосредственно из определений и формулы (1) следует

Теорема 1. (Геометрический смысл производной.) Существование невертикальной касательной к графику функции f в точке x_0 эквивалентно существованию конечной производной функции f в точке x_0. Уравнение касательной имеет вид

$$y_{\mathbf{KAC}}(x) = f(x_0) + k_{\mathbf{KAC}} \cdot (x - x_0), \quad \text{где} \quad k_{\mathbf{KAC}} = f'(x_0).$$

Определение. Пусть функция f определена в $U_\delta(x_0)$. Функция f называется *дифференцируемой* в точке x_0, если существует число A такое, что приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ имеет вид $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ (число A не зависит от Δx, но зависит от x_0).

Теорема 2. (Связь дифференцируемости и существования производной.) Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует конечная производная $f'(x_0)$. Число A в определении дифференцируемой функции совпадает с $f'(x_0)$, т. е. $\Delta f = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Доказательство.

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\overset{\text{по опр. } o\text{-малого}}{\Longleftrightarrow} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - A\Delta x}{\Delta x} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \exists f'(x_0) = A \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Определение. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. *Дифференциалом функции* f называется следующая линейная функция переменного Δx: $df(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\,\Delta x$. При записи дифференциала функции аргумент Δx обычно не пишут, но подразумевают:

$$df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x.$$

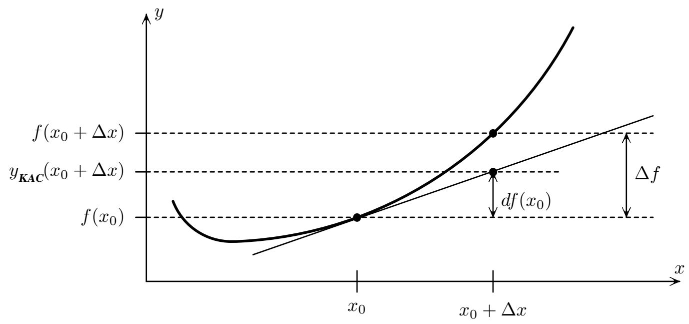
Определение. *Дифференциалом независимой переменной* называется ее приращение: $dx = \Delta x = x - x_0$.

Итак, в случае дифференцируемости функции f в точке x_0 справедливы формулы

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx,$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Заметим, что дифференциал, будучи линейной функцией, определен для всех Δx, а приращение функции Δf определено только для тех Δx, для которых $x_0 + \Delta x$ лежит во множестве определения функции f.



Из теорем 1, 2 следует

Теорема 3. (Геометрический смысл дифференциала.) Существование дифференциала эквивалентно существованию невертикальной касательной. В случае существования дифференциал равен приращению ординаты касательной: $y_{\text{кас}}(x) - y_{\text{кас}}(x_0) = df(x_0)$.

Определение. (Односторонние производные.)

1) Если функция определена на $(x_0 - \delta, x_0)$ и существует односторонний предел $f(x_0 - 0) \in \mathbb{R}$, то *левой производной* в точке x_0 называется левый предел

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0 - 0)}{x - x_0}.$$

2) Если функция определена на $(x_0, x_0 + \delta)$ и существует односторонний предел $f(x_0 + 0) \in \mathbb{R}$, то *правой производной* в точке x_0 называется правый предел

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0 + 0)}{x - x_0}.$$

Лемма 1. Если функция f непрерывна в точке x_0, то
$\exists f'(x_0) \iff \exists f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Доказательство состоит в применении леммы об односторонних пределах (лемма 1 § 5 главы 2). □

Теорема 4. (Связь непрерывности и дифференцируемости.) Функция, дифференцируемая в точке x_0, является непрерывной в этой точке. Обратное неверно.

Доказательство. 1) Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$ $(\Delta x \to 0)$, а значит, f непрерывна в точке x_0.

2) Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке 0, но не является дифференцируемой в этой точке. □

Задача 1. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0. Верно ли, что существует окрестность точки x_0, в которой f непрерывна?

§ 2. Правила дифференцирования

Теорема 1. Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то

1) $\exists \quad (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

2) $\exists \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

3) Если дополнительно $g(x) \neq 0$, то
$\exists \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Доказательство. Обозначим $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. Заметим, что при $\Delta x \to 0$ справедливы соотношения: $\Delta f \to 0$, $\Delta g \to 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$, $\frac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x_0)$.

1) $\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \to f'(x_0) + g'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$;

2) $\Delta(fg) = f(x_0 + \Delta x)\, g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\, g(x_0) = (f(x_0) + \Delta f)\, (g(x_0) + \Delta g) - f(x_0)\, g(x_0) = f(x_0)\Delta g + g(x_0)\Delta f + \Delta f\, \Delta g$, следовательно, $\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = f(x_0)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x_0)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \Delta g \frac{\Delta f}{\Delta x} \to f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$;

3) $\frac{\Delta(f/g)}{\Delta x} = \frac{(f(x_0)+\Delta f)/(g(x_0)+\Delta g) - f(x_0)/g(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(x_0)\Delta f - f(x_0)\Delta g}{g(x_0)\,(g(x_0)+\Delta g)\,\Delta x} \to \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x)}$ при $\Delta x \to 0$. □

Теорема 2. (Производная сложной функции.) Пусть функция $y(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = y(x_0)$. Тогда сложная функция $z = f(x) = z(y(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = z'(y_0)y'(x_0)$, что записывают также в форме $z'_x = z'_y y'_x$.

Доказательство. Определим функцию

$$g(y) = \begin{cases} \frac{z(y) - z(y_0)}{y - y_0}, & y \neq y_0, \\ z'(y_0), & y = y_0. \end{cases}$$

Так как по определению производной $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = \lim\limits_{y \to y_0} \frac{z(y) - z(y_0)}{y - y_0} = z'(y_0) = g(y_0)$, то функция g непрерывна в точке y_0.

В силу теоремы о непрерывности дифференцируемой функции функция $y(x)$ непрерывна в точке x_0. Следовательно, сложная функция $g(y(x))$ непрерывна в точке x_0, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} g(y(x)) = g(y(x_0)) = g(y_0) = z'(y_0)$.

Из определения функции g следует равенство $z(y) - z(y_0) = g(y)\,(y - y_0)$, которое справедливо не только в некоторой проколотой окрестности точки y_0, но и при $y = y_0$. Поэтому в некоторой окрестности точки x_0 справедливо равенство $f(x) - f(x_0) = z(y(x)) - z(y_0) = g(y(x))\,(y(x) - y_0)$. Отсюда по теореме о пределе произведения следует, что существует предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} g(y(x)) \lim_{x\to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = z'(y_0)\,y'(x_0),$$

т. е. $\exists f'(x_0) = z'(y_0)y'(x_0)$. □

Следствие. (Инвариантность формы первого дифференциала.) Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда дифференциалы простой функции $z(y)$ и сложной функции $z = f(x) = z(y(x))$ могут быть записаны в одной и той же (инвариантной) форме: $dz = z'(y_0)\,dy$. Хотя в первом случае dy – приращение независимой переменной y, а во втором случае $dy = dy(x_0)$ – дифференциал функции.

Доказательство. В случае простой функции формула $dz = dz(y_0) = z'(y_0)\,dy$ следует из определения дифференциала.

В случае сложной функции по определению дифференциала получаем $dz = df(x_0) = f'(x_0)\,dx$. В силу теоремы 2 $f'(x_0) = z'(y_0)y'(x_0)$, следовательно, $dz = z'(y_0)y'(x_0)\,dx = z'(y_0)dy(x_0) = z'(y_0)dy$. □

Теорема 3. (Производная обратной функции.) Пусть функция $y(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна в некоторой $U_\delta(x_0)$. Пусть $\exists y'(x_0) \in \mathbb{R}$, $y'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = y(x_0)$ и $x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)} = \frac{1}{y'(x(y_0))}$.

Доказательство. Существование обратной функции следует из строгой монотонности $y(x)$. По теореме о непрерывности обратной функции функция $x(y)$ непрерывна в точке y_0, т. е. $\lim\limits_{y\to y_0} x(y) = x_0$.

Для любого $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ определим $f(x) = \frac{y(x)-y_0}{x-x_0}$. По определению производной $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y'(x_0)$. В силу обратимости функции $x(y)$ при $y \neq y_0$ справедливо неравенство $x(y) \neq x_0$, следовательно, $f(x(y)) = \frac{y-y_0}{x(y)-x_0}$ при $y \neq y_0$. Пользуясь теоремой о пределе сложной функции (теорема 2(a) § 6), получаем равенства

$$\lim_{y\to y_0} \frac{y - y_0}{x(y) - x_0} = \lim_{y\to y_0} f(x(y)) = \lim_{x\to x_0} f(x) = y'(x_0).$$

Следовательно, $\exists x'(y_0) = \lim\limits_{y\to y_0} \frac{x(y)-x_0}{y-y_0} = \frac{1}{y'(x_0)}$. □

Теорема 4. (Производные элементарных функций.)
1) $C' = 0 \quad (C = \text{const})$;
2) $(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}$;
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$;
4) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R},\ x > 0$;
$(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$;
5) $(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x$;
6) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
7) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
8) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
9) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
10) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Доказательство. 1) $f(x) = C \quad \Rightarrow \quad \Delta f = 0 \quad \Rightarrow \quad f' = 0$.

2) В силу теоремы 3 § 11 главы 2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, следовательно, $(e^x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x$, поэтому по теореме о производной сложной функции $(a^x)' = (e^{\ln a\, x})' = e^{\ln a\, x}\,(\ln a\, x)' = a^x \ln a$. Здесь использовано равенство $x' = 1$, которое следует непосредственно из определения производной.

3) По теореме о производной обратной функции $(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a}$, где $y = \log_a x$, т. е. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

4) При $x > 0$: $(x^\alpha)' = (e^{\ln x\, \alpha})' = e^{\ln x\, \alpha}\,(\ln x\, \alpha)' = \alpha\, x^\alpha / x = \alpha x^{\alpha-1}$.

Формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ доказывается индукцией по n.

5) Заметим, что $\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \frac{1}{2}\Delta x)\,\sin(\frac{1}{2}\Delta x)$. Используя первый замечательный предел и непрерывность косинуса, получаем

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)\,\frac{\sin(\frac{1}{2}\Delta x)}{\frac{1}{2}\Delta x} = \cos x.$$

Пользуясь формулой для производной сложной функции, получаем $(\cos x)' = (\sin(\pi/2 - x))' = -\cos(\pi/2 - x) = -\sin x$.

6) $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.
$(\operatorname{ctg} x)' = (\operatorname{tg}(\pi/2 - x))' = -\frac{1}{\cos^2(\pi/2-x)} = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

7) $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$, где $y = \arcsin x$, т. е. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Так как $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то $(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

8) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y$, где $y = \operatorname{arctg} x$, т. е. $(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$.
Так как $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, то $(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

9) $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$;
$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$.

10) $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)'\operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x)'\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{th} x}\right)' = -\frac{(\operatorname{th} x)'}{\operatorname{th}^2 x} = -\frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}\,\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$. □

Производная неявной функции

Определение. Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется *неявной* функцией, заданной уравнением $F(x,y) = 0$, если $\forall x \in X \hookrightarrow F(x, f(x)) = 0$.

Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает следующие непрерывные неявные функции: $y = f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ и $y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

Пусть неявная функция $y = f(x)$ задана уравнением $F(x,y) = 0$. Тогда производную неявной функции $f(x)$ (если она существует) можно найти из условия равенства нулю производной сложной функции $\varphi(x) = F(x, f(x)) = 0$: $\varphi'(x) = 0$.

Пример. Найти производную в точке $x = 0$ функции $y(x)$, заданной уравнением $\sin x + x - y - y^3 = 0$.

Решение. Так как $\varphi(x) = \sin x + x - y(x) - y^3(x) = 0$, то $0 = \varphi'(x) = \cos x + 1 - y'(x) - 3y^2(x)y'(x)$, следовательно, $y'(x) = \frac{\cos x + 1}{1+3y^2(x)}$. При $x = 0$ имеем $0 = y^3 + y = y(y^2+1)$, следовательно, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1+1}{1+0} = 2$. □

Производная параметрически заданной функции

Определение. Пусть заданы функции $x(t)$ и $y(t)$. Пусть функция $x(t)$ обратима, т. е. существует обратная функция $t(x)$. Тогда функция $y = \varphi(x) = y(t(x))$ называется *параметрически заданной* функцией.

Если выполнены условия теоремы о производной обратной функции, то $\exists t'(x) = \frac{1}{x'(t)}$, где $t = t(x)$.

Если выполнены условия теоремы о производной сложной функции, то $\exists y'_x(x) = \varphi'(x) = y'_t(t(x))\,t'(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$, где $t = t(x)$. Итак, при выполнении условий этих теорем справедлива формула

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Теорема 5. (Правила вычисления дифференциала.) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда

1) $\exists\ d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$,
2) $\exists\ d(fg)(x_0) = g(x_0)\,df(x_0) + f(x_0)\,dg(x_0)$,
3) если $g(x_0) \neq 0$, то $\exists\ d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)\,df(x_0) - f(x_0)\,dg(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Доказательство. 1) Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то по теореме 1 $\exists (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. В силу определения дифференциала получаем $\exists d(f+g)(x_0) = (f+g)'(x_0)\,dx = f'(x_0)\,dx + g'(x_0)\,dx = df(x_0) + dg(x_0)$.

Пункты (2) и (3) доказываются аналогично. □

§ 3. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная $f^{(n)}(x)$ порядка n определяется индукцией по порядку.

Определение. Производная нулевого порядка – это сама функция: $f^{(0)}(x) = f(x)$. Производная первого порядка $f^{(1)}(x) = f'(x)$ была определена ранее. Если функция $f^{(n)}$ определена в $U_\delta(x)$, то $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$.

Определение. *Факториалом* числа $n \in \mathbb{N}$ называется число $n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1$.

Строгое определение факториала числа $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ дается по индукции: $0! = 1$, $1! = 1$, $n! = n \cdot (n-1)!$.

Определение. Пусть $n, k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $k \leq n$. Определим *биномиальный коэффициент*:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Лемма 1. (Свойства биномиальных коэффициентов.)
1) $C_n^0 = 1, \quad C_n^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$;
2) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \quad \forall n, k \in \mathbb{N}: \ k \leq n$.

Доказательство. 1) $C_n^0 = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$, аналогично $C_n^n = 1$.

2) $C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,k!}(n-k+1+ +k) = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!\,k!} = C_{n+1}^k$. □

Теорема 1. (Формула Лейбница.) Пусть существуют производные функций $u(x)$, $v(x)$ в точке x порядка n. Тогда

$$\exists \quad (u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)}(x)\, v^{(n-k)}(x) =$$

$$= C_n^0\, u^{(0)}(x)\, v^{(n)}(x) + C_n^1\, u^{(1)}(x)\, v^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n^n\, u^{(n)}(x)\, v^{(0)}(x).$$

Доказательство. При $n = 1$ $(uv)' = u'v + uv' = = \sum\limits_{k=0}^{1} C_1^k\, u^{(k)}\, v^{(1-k)}$ теорема справедлива.

Пусть формула Лейбница справедлива при $n = s$, тогда $(uv)^{(s)} = \sum\limits_{k=0}^{s} C_s^k\, u^{(k)}\, v^{(s-k)}$. Покажем, что формула Лейбница справедлива при $n = s+1$.

$$(uv)^{(s+1)} = ((uv)^{(s)})' = \sum_{k=0}^{s} C_s^k\, (u^{(k)}\, v^{(s-k)})' =$$

$$= \sum_{k=0}^{s} C_s^k\, u^{(k+1)}\, v^{(s-k)} + \sum_{k=0}^{s} C_s^k\, u^{(k)}\, v^{(s+1-k)} \overset{j=k+1}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{s+1} C_s^{j-1}\, u^{(j)}\, v^{(s+1-j)} + \sum_{k=0}^{s} C_s^k\, u^{(k)}\, v^{(s+1-k)} \overset{k=j}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} C_s^{k-1}\, u^{(k)}\, v^{(s+1-k)} + C_s^s\, u^{(s+1)}\, v^{(0)} +$$

$$+ C_s^0\, u^{(0)}\, v^{(s+1)} + \sum_{k=1}^{s} C_s^k\, u^{(k)}\, v^{(s+1-k)} \overset{\text{свойство 1}}{=}$$

$$= u^{(0)}\, v^{(s+1)} + \sum_{k=1}^{s} (C_s^{k-1} + C_s^k) u^{(k)}\, v^{(s+1-k)} + u^{(s+1)}\, v^{(0)} \overset{\text{свойства 1,2}}{=}$$

$$= C_{s+1}^0\, u^{(0)}\, v^{(s+1)} + \sum_{k=1}^{s} C_{s+1}^k\, u^{(k)}\, v^{(s+1-k)} + C_{s+1}^{s+1}\, u^{(s+1)}\, v^{(0)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{s+1} C_{s+1}^k\, u^{(k)}\, v^{(s+1-k)},$$

т. е. формула Лейбница верна при $n = s+1$. По индукции получаем, что формула Лейбница справедлива для любого $n \in \mathbb{N}$. □

Аналогично доказательству теоремы 1 проводится доказательство *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Этой формуле коэффициенты C_n^k и обязаны своим названием.

Определение. Дифференциал первого порядка $d^1 f(x) = df(x)$ был определен ранее. Пусть в $U_\delta(x_0)$ существует дифференциал n-го порядка функции f: $\quad d^n f(x)$. *Дифференциалом порядка* $n+1$ называется дифференциал первого порядка от дифференциала порядка n: $\quad d^{n+1}f(x_0) = d(d^n f)(x_0)$.

Дифференциал $d^n f(x)$ является функцией двух переменных: x и dx. При вычислении $d^{n+1}f(x_0)$ нужно зафиксировать dx и дифференцировать $d^n f(x)$ как функцию одной переменной x.

Функция f называется *n раз дифференцируемой* в точке x_0, если $\exists d^n f(x_0)$.

Теорема 2. 1) $\exists d^n f(x_0) \iff \exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$;
2) если $\exists \quad f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, то $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,(dx)^n$.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение теоремы следует из определения дифференциала первого порядка.

Пусть утверждение теоремы справедливо при $n = k$ (предположение индукции).

Если ни в какой окрестности точки x_0 не существует $f^{(k)}(x) \in \mathbb{R}$, то в силу предположения индукции не существует $d^k f(x)$. Тогда не существует $f^{(k+1)}(x_0)$ и не существует $d^{k+1}f(x_0)$, и при $n = k+1$ утверждение теоремы тривиально выполнено.

Пусть теперь в некоторой $U_\delta(x_0) \quad \exists \quad f^{(k)}(x) \in \mathbb{R}$. Тогда в силу предположения индукции в $U_\delta(x_0) \quad \exists \quad d^k f(x) = f^{(k)}(x)\,(dx)^k$. По определению дифференциала порядка $k+1$

$$d^{k+1}f(x_0) = d(d^k f)(x_0) = d(f^{(k)}(x)\,(dx)^k)\Big|_{x=x_0} =$$

$$= d(f^{(k)}(x))\Big|_{x=x_0} (dx)^k = f^{(k+1)}(x_0)\,dx\,(dx)^k = f^{(k+1)}(x_0)\,(dx)^{k+1}.$$

Поэтому существование $d^{k+1}f(x_0)$ эквивалентно существованию $f^{(k+1)}(x_0) \in \mathbb{R}$ и в случае существования $f^{(k+1)}(x_0) \in \mathbb{R}$ справедлива формула $d^{k+1}f(x_0) = f^{(k+1)}(x_0)\,(dx)^{k+1}$. Следовательно, утверждение теоремы справедливо при $n = k+1$. По индукции получаем, что теорема справедлива при любом $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Замечание. (Неинвариантность формы дифференциалов выше 1-го порядка.)

Пусть заданы дважды дифференцируемые функции $y(x)$ и $z(y)$. Найдем второй дифференциал сложной функции $z = \varphi(x) = z(y(x))$.

В силу инвариантности формы первого дифференциала $d\varphi(x) = z'(y(x))\,dy(x)$.

По правилу вычисления дифференциала произведения $d^2\varphi(x) = d(z'(y(x))) \cdot dy(x) + z'(y(x)) \cdot d(dy(x)) = z''(y(x))\,(dy(x))^2 + z'(y(x))\,d^2y(x)$.

Итак, для сложной функции $z = z(y(x))$: $\quad d^2z = z''(y)(dy)^2 + z'(y)d^2y$, в то время как для простой функции $z = z(y)$: $d^2z = z''(y)(dy)^2$. Таким образом, формулы для вторых дифференциалов простой и сложной функций не совпадают. То же относится к дифференциалам порядков $n > 2$.

§ 4. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Определение. Пусть задана функция $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой локального минимума* функции f по множеству X, если

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in U_\delta(x_0) \bigcap X \hookrightarrow \ f(x_0) \le f(x).$$

2. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой локального максимума* функции f по множеству X, если

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in U_\delta(x_0) \bigcap X \hookrightarrow \ f(x_0) \ge f(x).$$

3. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой локального экстремума* функции f, если x_0 является точкой локального минимума или максимума f.

Точки локального экстремума, которые мы сейчас определили, называются также точками *нестрогого* локального экстремума. Определим точки строгого локального экстремума.

4. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой строгого локального минимума* функции f по множеству X, если

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \bigcap X \hookrightarrow \ f(x_0) < f(x). \tag{1}$$

5. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой строгого локального максимума* функции f по множеству X, если

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \bigcap X \hookrightarrow \ f(x_0) > f(x).$$

6. Точки строгого локального минимума и строгого локального максимума называются *точками строгого локального экстремума.*

Замечание. Непосредственно из определения следует, что точка строгого локального экстремума является точкой нестрогого локального экстремума. Обратное неверно. Например, для функции, равной константе, все точки множества определения являются точками нестрогого экстремума, а строгих экстремумов нет.

Замечание. Если $x_0 \in \operatorname{int} X$, то в определении локального экстремума можно не указывать множество X и вместо $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \bigcap X$ писать $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$. В этом случае получится эквивалентное определение. Действительно. Если $x_0 \in \operatorname{int} X$, то существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $U_{\delta_0}(x_0) \subset X$. Если, например, x_0 является точкой строго локального минимума функции f по множеству X, то выполнено соотношение (1). Определим $\delta_1 = \min\{\delta, \delta_0\}$. Тогда

$$\forall x \in \overset{o}{U}_{\delta_1}(x_0) \hookrightarrow \ f(x_0) < f(x). \tag{2}$$

Обратно, если выполнено соотношение (2), то $\forall x \in \overset{o}{U}_{\delta_1}(x_0) \bigcap X \hookrightarrow f(x_0) < f(x)$ и, следовательно, справедливо соотношение (1).

Теорема 1. (Теорема Ферма.) Пусть функция f определена на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$ – точка (нестрогого) локального экстремума функции f. Тогда если f дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$.

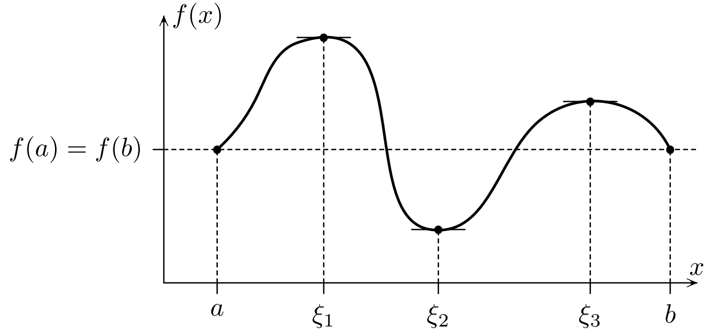
Доказательство. Пусть для определенности x_0 – точка локального минимума f.
Определим $\delta_0 = \min\{b - x_0, x_0 - a\}$. Тогда $\exists \delta \in (0, \delta_0] : \ \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \ f(x_0) \le f(x)$. Поэтому при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, следовательно, по теореме о предельном переходе в неравенствах правая производная неотрицательна: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$. Аналогично, $f'_-(x_0) \le 0$. Если $\exists f'(x_0)$, то $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ и, следовательно, $f'(x_0) = 0$. $\square$

Замечание. В точке локального экстремума производная может
а) не существовать, как, например, для $f(x) = |x|$ не существует $f'(0)$ или
б) быть бесконечной, как, например, для $f(x) = \sqrt{|x|}$ $\quad f'(0) = \infty$.

Замечание. Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ достигает экстремума в точке $x_0 \in X$, которая не является внутренней точкой множества

X, то в точке x_0 может существовать конечная (односторонняя), не равная нулю, производная функции f. Например, функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, заданная формулой $f(x) = x$, достигает минимума в точке $x_0 = 0$, но $f'_+(x_0) = 1 \ne 0$.

Теорема 2. (Теорема Ролля.) Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) и пусть $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.



Доказательство. По теореме Вейерштрасса (теорема 2 § 7 главы 2) $\exists m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ и $\exists M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Если $m = M$, то $f(x) = \text{const}$ на $[a, b]$. Взяв произвольную точку $\xi \in (a, b)$, получаем требуемое утверждение.

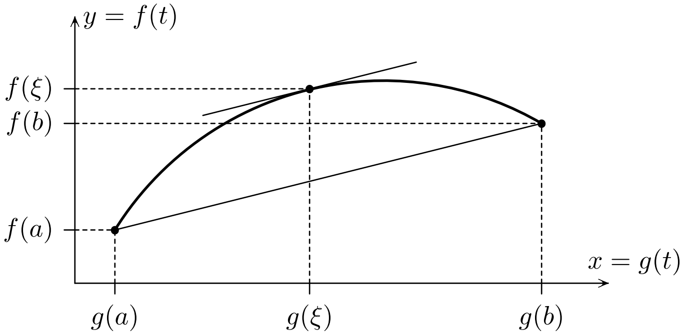
Если $m \ne M$, то либо $m < f(a)$, либо $f(a) < M$. Рассмотрим, например, случай $m < f(a)$. По определению минимума $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = m < f(a) = f(b)$. Следовательно, $\xi \in (a, b)$ и по теореме Ферма $f'(\xi) = 0$. $\square$

Теорема 3. (Теорема Коши о среднем.) Пусть функции f и g непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b). Пусть $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow \ g'(x) \ne 0$. Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) : \qquad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказательство. Из теоремы Ролля и условия $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow$ $\hookrightarrow g'(x) \neq 0$ следует, что $g(b) \neq g(a)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) =$ $= f(x) - kg(x)$, где коэффициент k определим из условия $\varphi(a) = \varphi(b)$: $f(b) - kg(b) = f(a) - kg(a)$, т.е. $k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

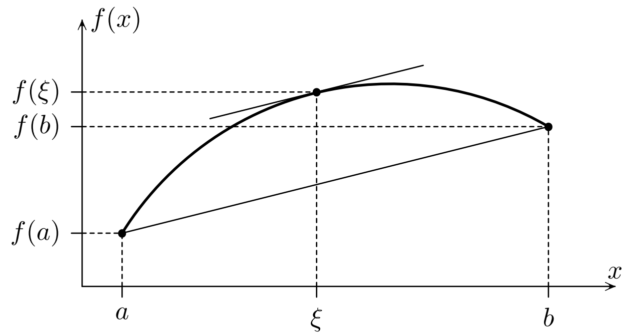
По теореме Ролля $\exists \xi \in (a,b) : \varphi'(\xi) = 0$, т.е. $f'(\xi) - kg'(\xi) = 0$, следовательно, $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. □



Геометрическая интерпретация. Пусть функции $f : [a,b] \to$ $\to \mathbb{R}$ и $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем. Построим график параметрически заданной функции $x = g(t)$, $y = f(t)$, $t \in [a,b]$. Проведем отрезок (хорду), соединяющий точки $(g(a), f(a))$ и $(g(b), f(b))$. Тангенс угла наклона этой хорды равен $k =$ $= \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Согласно теореме Коши найдется точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k$. Используя формулу вычисления производной функции, заданной параметрически (см. § 2), получаем, что в точке $t = \xi$ справедливы равенства $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{f'_t}{g'_t} = k$. Следовательно, в точке $(g(\xi), f(\xi))$ тангенс угла наклона касательной к графику функции $y(x)$ равен тангенсу угла наклона хорды. Таким образом, теорема Коши утверждает, что на графике функции, заданной параметрически, найдется точка, в которой касательная параллельна хорде.

Теорема 4. (Теорема Лагранжа о среднем.) Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда существует точка $\xi \in (a,b)$, для которой справедлива *формула конечных приращений Лагранжа*: $f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b-a)$.

Доказательство состоит в применении теоремы Коши о среднем для функций $f(x)$ и $g(x) = x$.



Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа состоит в том, что для функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям этой теоремы, найдется точка $\xi \in (a,b)$, в которой касательная к графику f параллельна хорде.

Задача 1. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с непрерывной производной такая, что

$\forall \delta > 0\ \exists x_1, x_2 \in (0,\delta) : \quad f(x_1) \geq x_1, \quad f(x_2) \leq -x_2$?

Задача 2. Пусть функция f дифференцируема на интервале (a,b) и $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow f'(x) \neq 0$. Обязана ли функция f' сохранять знак на (a,b)?

Следствие из теоремы Лагранжа о среднем. (1) Пусть функция f непрерывна на отрезке $[x_0, x_0+\delta]$ и дифференцируема на интервале $(x_0, x_0+\delta)$. Пусть существует односторонний предел производной $f'(x_0+0)$. Тогда существует односторонняя производная $f'_+(x_0)$ и $f'_+(x_0) = f'(x_0+0)$.

(2) Пусть функция f непрерывна на отрезке $[x_0-\delta, x_0]$ и дифференцируема на интервале $(x_0-\delta, x_0)$. Пусть существует односторонний предел производной $f'(x_0-0)$. Тогда существует односторонняя производная $f'_-(x_0)$ и $f'_-(x_0) = f'(x_0-0)$.

(3) Пусть функция f непрерывна в $U_\delta(x_0)$ и дифференцируема в $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$. Пусть существует предел производной $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$. Тогда существует производная $f'(x_0)$ и $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

Доказательство. Докажем пункт (1). По теореме Лагранжа о среднем для любой точки $x \in (x_0; x_0+\delta)$ существует точка $\xi(x) \in \in (x_0; x)$ такая, что $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi(x))$. По теореме о трех функциях имеем $\lim\limits_{x\to x_0+0} \xi(x) = x_0$. Используя теорему о пределе сложной функции для одностороннего предела, аналогичную теореме 2(а) § 6 главы 2, получаем $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(\xi(x)) = \lim\limits_{\xi\to x_0+0} f'(\xi) = f'(x_0+0)$. Следовательно, существует

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+0} f'(\xi(x)) = f'(x_0+0).$$

Доказательство пункта (2) аналогично. Пункт (3) следует из пунктов (1), (2). □

Задача 3. Пусть функция f дифференцируема на интервале (a,b). Может ли f' на (a,b) иметь

а) разрыв первого рода;

б) разрыв второго рода?

§ 5. Формула Тейлора

Определение. Пусть $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Тогда

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется *многочленом Тейлора* функции f в точке x_0;

$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ называется *остаточным членом* в формуле Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x).$$

Лемма 1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(x) = (x-x_0)^k$. Тогда

1) $\varphi_k^{(s)}(x) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-s)!}(x-x_0)^{k-s} & \text{при} \quad s \in \{0, \ldots, k\}, \\ 0 & \text{при} \quad s > k; \end{cases}$

2) $\varphi_k^{(s)}(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad s \neq k, \\ k! & \text{при} \quad s = k. \end{cases}$

Доказательство. 1) $\varphi'_k(x) = k(x-x_0)^{k-1}$, $\varphi''_k(x) = k(k-1)(x-x_0)^{k-2}$ и так далее, при $s \le k$: $\varphi_k^{(s)}(x) = k(k-1)\ldots(k-(s-1))(x-x_0)^{k-s} = \frac{k!}{(k-s)!}(x-x_0)^{k-s}$. Следовательно, $\varphi_k^{(k)}(x) = k!$ и $\varphi_k^{(s)}(x) = 0$ при $s > k$.

Пункт (2) следует из пункта (1). □

Лемма 2. Пусть $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall s \in \{0, \ldots, n\} \hookrightarrow r_n^{(s)}(x_0) = 0$.

Доказательство. Заметим, что

$$P_n^{(s)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\varphi_k(x)\right)^{(s)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\varphi_k^{(s)}(x).$$

Из леммы 1(б) следует, что при $s \le n$:

$$P_n^{(s)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\varphi_k^{(s)}(x_0) = f^{(s)}(x_0),$$

а значит, $r_n^{(s)}(x_0) = f^{(s)}(x_0) - P_n^{(s)}(x_0) = 0$. □

Определение. Будем говорить, что число ξ *лежит строго между числами* x_0 и x, если $x < \xi < x_0$ или $x_0 < \xi < x$.

Теорема 1. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.) Пусть $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Доказательство. Требуется доказать, что $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$, то есть

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = 0, \tag{1}$$

где $\varphi_n(x) = (x-x_0)^n$. Поскольку $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, то существует окрестность $U_\delta(x_0)$, в которой определена $f^{(n-1)}$, а значит, и $f^{(k)}$ при всех

$k \in \{0, \dots, n-1\}$. Так как $r_n(x_0) = 0$, $\varphi_n(x_0) = 0$, то по теореме Коши о среднем $\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ существует число ξ_1, лежащее строго между x и x_0, такое, что

$$\frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)} = \frac{r'_n(\xi_1)}{\varphi'_n(\xi_1)}.$$

Согласно леммам 1, 2 имеем $r'_n(x_0) = r_n^{(n-1)}(x_0) = 0$, $\varphi'_n(x_0) = \varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0$. Поэтому по теореме Коши о среднем найдется число ξ_2, лежащее строго между ξ_1 и x_0 (а значит, лежащее строго между x и x_0), такое, что

$$\frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{r'_n(\xi_1)}{\varphi'_n(\xi_1)} = \frac{r'_n(\xi_1) - r'_n(x_0)}{\varphi'_n(\xi_1) - \varphi'_n(x_0)} = \frac{r''_n(\xi_2)}{\varphi''_n(\xi_2)}.$$

Продолжая эти рассуждения, для любого $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ получаем $\xi_{n-1} = \xi_{n-1}(x)$, лежащее строго между x и x_0, такое, что

$$\frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{r_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{\varphi_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})}.$$

Так как $r_n^{(n-1)}(x_0) = 0$, $\varphi_n^{(n-1)}(x) = n!\,(x - x_0)$, то

$$\frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{r_n^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(\xi_{n-1} - x_0)}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x \to x_0} \xi_{n-1}(x) = x_0$ и $\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \ \xi_{n-1}(x) \neq x_0$, то по теореме о пределе сложной функции (теорема 2(a) § 6 главы 2) имеем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x)) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{\xi_{n-1}(x) - x_0} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{\xi \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(\xi) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{\xi - x_0}.$$

Отсюда по определению производной $r_n^{(n)}(x_0)$ получаем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{1}{n!}\ r_n^{(n)}(x_0). \qquad (2)$$

Поскольку согласно лемме 2 справедливо равенство $r_n^{(n)}(x_0) = 0$, то из равенства (2) следует равенство (1). □

Теорема 2. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.)

Пусть в некоторой $U_\delta(x_0)$ существует $f^{(n+1)}(x)$. Тогда $\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ $\exists \xi$, лежащее строго между x и x_0, такое, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_{n+1}(x) = (x - x_0)^{n+1}$. Применяя $n+1$ раз теорему Коши о среднем и используя леммы 1, 2, для любого $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ получаем существование чисел $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$, лежащих строго между x и x_0, и таких, что

$$\frac{r_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)} = \frac{r'_n(\xi_1)}{\varphi'_{n+1}(\xi_1)} = \dots = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{\varphi_{n+1}^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

Поскольку $P_n(x)$ – многочлен степени n, то $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ P_n^{(n+1)}(x) = 0$. Следовательно, $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ f^{(n+1)}(x) = r_n^{(n+1)}(x)$. Поэтому, используя соотношение $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ \varphi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ и обозначая $\xi = \xi_{n+1}$, получаем

$$\frac{r_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Итак,

$$f(x) - P_n(x) = r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\varphi_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

□

Теорема 3. (Единственность разложения по формуле Тейлора.) Пусть $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ и пусть при $x \to x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) =$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Тогда $\forall k \in \{0, ..., n\} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Доказательство. В силу теоремы 1 справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, следовательно,

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$, получаем $a_0 = f(x_0)$. Отбросив в левой и правой частях одинаковые слагаемые a_0 и $f(x_0)$ и разделив обе части полученного равенства на $x - x_0$, получаем

$$a_1 + a_2(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}) =$$

$$= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, находим $a_1 = f'(x_0)$. Продолжая эти рассуждения по индукции, получаем утверждение теоремы. □

Задача 1. Пусть $f(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$, $x \to x_0$. Верно ли, что

а) $\exists f'(x_0)$;

б) $\exists f''(x_0)$?

Теорема 4. (О почленном дифференцировании формулы Тейлора.) Пусть $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ и пусть

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. Тогда

$f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k k(x - x_0)^{k-1} + o((x - x_0)^{n-1})$ при $x \to x_0$.

Доказательство. По теореме 3 (о единственности разложения Тейлора) $\forall k \in \{0, ..., n\} \hookrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. В силу теоремы 1, примененной к функции $g(x) = f'(x)$,

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n-1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n-1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(k+1)(x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n-1}) \overset{k=s-1}{=}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} a_s s(x - x_0)^{s-1} + o((x - x_0)^{n-1}) \overset{s=k}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k k(x - x_0)^{k-1} + o((x - x_0)^{n-1}).$$ □

Теорема 5. (О почленном интегрировании формулы Тейлора.) Пусть $\exists f^{(n+1)}(x_0)$ и пусть

$f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. Тогда

$f(x) = f(x_0) + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1} + o((x - x_0)^{n+1})$ при $x \to x_0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.

§ 6. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора

Из теоремы 1 § 5 при $x_0 = 0$ следует

Теорема 1. (Формула Маклорена.) Если $\exists f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Лемма 1. Пусть f – дифференцируемая функция. Тогда

1) если f – четная, то f' – нечетная функция;

2) если f – нечетная, то f' – четная функция.

Доказательство. 1) Пусть f – четная, т. е. $f(-x) = f(x)$. Так как $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, то $f'(-x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x+\Delta x) - f(-x)}{\Delta x} \overset{\text{в силу четности f}}{=} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \overset{t=-\Delta x}{=}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{-t} = -f'(x)$. Итак, $\forall x \hookrightarrow \;\; f'(-x) = -f'(x)$, т. е. f' – нечетная функция.

Доказательство пункта 2 – аналогично. $\square$

Лемма 2. 1) Пусть функция f – четная и пусть $\exists f^{(2n+1)}(0)$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

2) Пусть функция f – нечетная и пусть $\exists f^{(2n+2)}(0)$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

Доказательство. 1) Так как $f(x)$ – четная, то $f'(x)$ – нечетная, следовательно, $f''(x)$ – четная и так далее: $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \;\; f^{(2k)}(x)$ – четная, $f^{(2k-1)}(x)$ – нечетная. Так как $f^{(2k-1)}(x)$ – нечетные, то $f^{(2k-1)}(0) = -f^{(2k-1)}(0)$, т. е. $f^{(2k-1)}(0) = 0$. По теореме 1 $f(x) = P_{2n+1}(x) + o(x^{2n+1})$ при $x \to 0$, где

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{s=0}^{2n+1} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} x^s =$$

$$= \sum_{s=0,2,4,\dots,2n} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} x^s + \sum_{s=1,3,5,\dots,2n+1} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} x^s =$$

$$= \sum_{s=0,2,4,\dots,2n} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} x^s \overset{s=2k}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}.$$

2) Доказательство второго пункта аналогично. $\square$

Экспонента. Если $f(x) = e^x$, то $\forall n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\} \hookrightarrow \;\; f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, следовательно,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Гиперболические функции. Если $f(x) = \operatorname{sh} x$, то $f^{(2k)}(x) = \operatorname{sh} x$, $f^{(2k+1)}(x) = \operatorname{ch} x$, следовательно, $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = 1$,

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) =$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

Аналогично,

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

Тригонометрические функции. Если $f(x) = \sin x$, то $f^{(s)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}s\right)$, $f^{(2k)}(0) = \sin(\pi k) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = (-1)^k$, следовательно,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

Аналогично,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

Степенная функция. Если $f(x) = (1+x)^\alpha$, то $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))(1+\alpha)^{\alpha-k}$, следовательно, $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))$. Обозначим

$$C_\alpha^0 = 1, \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Отметим важный частный случай последней формулы:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Логарифм. Если $f(x) = \ln(1+x)$, то $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^n), \quad x \to 0$, следовательно, по теореме 5 § 5 о почленном интегрировании формулы Тейлора, с учетом $\ln(1) = 0$, получаем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Арктангенс. Если $f(x) = \operatorname{arctg} x$, то $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0$, следовательно, по теореме о почленном интегрировании формулы Тейлора, с учетом $\operatorname{arctg} 0 = 0$, получаем

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

Замечание. Если требуется разложить функцию $f(x)$ в окрестности точки $x_0 \neq 0$, то прежде всего нужно сделать замену переменной: $t = x - x_0$, затем разложить функцию $\varphi(t) = f(x_0 + t)$ по формуле Маклорена в окрестности точки $t = 0$, после чего вернуться к исходным переменным, подставив $t = x - x_0$.

Пример. Разложить $\ln x$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0, $x_0 > 0$.

Решение. $\ln x \overset{t=x-x_0}{=} \ln(x_0 + t) = \ln(x_0(1 + t/x_0)) = \ln x_0 + \ln(1 + t/x_0)$. Так как $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n), \quad x \to 0$, то $\ln x = \ln x_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} t^k}{x_0^k k} + o(t^n) = \ln x_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(x-x_0)^k}{x_0^k k} + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0$. □

Заметим, что разложение $\ln x = \ln(1+(x-1)) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k} + o((x-1)^n)$ при $x_0 \neq 1$ не является решением данной задачи, так как $x - 1 \not\to 0$ при $x \to x_0$. □

Пример. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^4)$ функцию $\operatorname{tg} x$.

Решение. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. При $x \to 0$: $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$; $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - x^2/2 + o(x^3)} = \frac{1}{1+y(x)}$, где $y(x) = -x^2/2 + o(x^3)$. Так как $y(x) \to 0$ при $x \to 0$, то $\frac{1}{1+y(x)} = -y(x) + y^2(x) + o(y^2(x))$ при $x \to 0$. Следовательно, $\frac{1}{\cos x} = 1 - (-x^2/2 + o(x^3)) + (-x^2/2 + o(x^3))^2 + o((-x^2/2 + o(x^3))^2) = 1 + x^2/2 + o(x^3)$, поэтому $\operatorname{tg} x = (x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4))(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^4) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$. □

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - \operatorname{sh} x}$.

Решение. Так как при $x \to 0$: $\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + o(x^4)$, $\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$, $\operatorname{sh} x = x + x^3/6 + o(x^4)$, то $\frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - \operatorname{sh} x} = \frac{x^3/3 + o(x^4)}{-x^3/3 + o(x^4)} = \frac{1 + o(x)}{-1 + o(x)} = -1 + o(1)$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - \operatorname{sh} x} = -1$. □

§ 7. Правило Лопиталя

Теорема 1. (Неопределенность вида $\frac{0}{0}$.) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b),

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a+0} g(x) = 0 \quad \text{и} \quad \forall x \in (a, b) \hookrightarrow \ g'(x) \neq 0.$$

Пусть

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда существует

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a, полагая $f(a)=g(a)=0$. Тогда функции f и g будут непрерывны на $[a,b)$. По теореме Коши о среднем

$$\forall x\in(a,b)\ \exists\xi=\xi(x)\in(a,x):\quad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a+0}\xi(x)=a$ и $\xi(x)\neq a$, то по теореме о пределе сложной функции $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}=\lim\limits_{\xi\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=C$, следовательно, $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=C$. $\square$

Следствие 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на луче $(A,+\infty)$,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}g(x)=0\quad \text{и}$$

$$\forall x\in(A,+\infty)\hookrightarrow\ g'(x)\neq 0.$$

Пусть

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=C\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда существует

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Введем переменную $t=\frac{1}{x}$ и рассмотрим функции $f_1(t)=f(1/t)$, $g_1(t)=g(1/t)$. Определим $A_1=\max\{A,1\}$. Тогда функции f_1 и g_1 дифференцируемы на интервале $\left(0,\frac{1}{A_1}\right)$. Заметим, что $\lim\limits_{t\to+0}f_1(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{t\to+0}g_1(t)=0$,

$$\forall t\in\left(0,\frac{1}{A_1}\right)\hookrightarrow\ f_1'(t)=-\frac{f'(1/t)}{t^2},\quad g_1'(t)=-\frac{g'(1/t)}{t^2}\neq 0,$$

$$\lim_{t\to+0}\frac{f_1'(t)}{g_1'(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=C.$$

Поэтому по теореме 1 существует $\lim\limits_{t\to+0}\frac{f_1(t)}{g_1(t)}=C$, т.е. существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=C$. $\square$

Аналогично можно сформулировать теорему для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при $x\to b-0$, $x\to x_0$ и при $x\to-\infty$.

Теорема 2. (Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b),

$$\lim_{x\to a+0}|f(x)|=+\infty,\quad \lim_{x\to a+0}|g(x)|=+\infty\quad \text{и}$$

$$\forall x\in(a,b)\hookrightarrow\ g'(x)\neq 0.$$

Пусть

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=C\in\mathbb{R}.$$

Тогда существует

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Так как $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=C$, то

$$\exists a_\varepsilon\in(a,b):\ \forall\xi\in(a,a_\varepsilon)\hookrightarrow\ \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-C\right|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{1}$$

В силу теоремы Коши о среднем для любого $x\in(a,a_\varepsilon)$ существует число $\xi\in(x,a_\varepsilon)$ такое, что $\frac{f(x)-f(a_\varepsilon)}{g(x)-g(a_\varepsilon)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Для любого $x\in(a,a_\varepsilon)$ обозначим

$$H(x)=\frac{f(x)-f(a_\varepsilon)}{g(x)-g(a_\varepsilon)}.$$

Тогда в силу соотношения (1) имеем

$$\forall x\in(a,a_\varepsilon)\hookrightarrow\ |H(x)-C|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{2}$$

Покажем, что

$$\lim_{x\to a+0}\left(H(x)-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=0.\tag{3}$$

Действительно,

$$H(x)-\frac{f(x)}{g(x)}=H(x)\left(1-\frac{g(x)-g(a_\varepsilon)}{f(x)-f(a_\varepsilon)}\;\frac{f(x)}{g(x)}\right)=H(x)\left(1-\frac{1-\frac{g(a_\varepsilon)}{g(x)}}{1-\frac{f(a_\varepsilon)}{f(x)}}\right).$$

Из соотношения (2) следует, что функция $H(x)$ ограничена. Поскольку $\lim\limits_{x\to a+0}|f(x)|=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a+0}|g(x)|=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(a_\varepsilon)}{f(x)}=0$ и $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g(a_\varepsilon)}{g(x)}=0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a+0}\left(1-\frac{1-g(a_\varepsilon)/g(x)}{1-f(a_\varepsilon)/f(x)}\right)=0$. Поэтому функция $H(x)-\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a+0$ является бесконечно малой как произведение ограниченной функции на бесконечно малую. Таким образом, соотношение (3) справедливо. Из соотношения (3) следует существование числа $\tilde a_\varepsilon\in(a,a_\varepsilon)$ такого, что

$$\forall x\in(a,\tilde a_\varepsilon)\hookrightarrow\ \left|H(x)-\frac{f(x)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из соотношения (2) получаем

$$\forall x\in(a,\tilde a_\varepsilon)\hookrightarrow\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}-C\right|<\varepsilon.$$

Поэтому существует $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=C$. □

Следствие 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на луче $(A,+\infty)$,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}g(x)=\infty\quad\text{и}$$

$$\forall x\in(A,+\infty)\hookrightarrow\ g'(x)\neq0.$$

Пусть

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=C\in\mathbb{R}.$$

Тогда существует

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство следствия 2 аналогично доказательству следствия 1.

Аналогично можно сформулировать теорему для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x\to b-0$, $x\to x_0$ и при $x\to-\infty$.

Теорема 3. а) $\forall\alpha>0\hookrightarrow\ \ln x=o(x^\alpha)$ при $x\to+\infty$;
б) $\forall\alpha>0\hookrightarrow\ x^\alpha=o(e^x)$ при $x\to+\infty$.

Доказательство. а) В силу следствия 2 имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0$.

б) Определим $y(x)=e^x$, $\beta=1/\alpha$, тогда в силу пункта (а) $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{(\ln y)}{y^\beta}=0$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln y(x))^\alpha}{y(x)}=$ $=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{y^\beta}\right)^\alpha=0$. □

Теорема 3 показывает, что при $x\to+\infty$ степенная функция растет быстрее логарифмической, а экспонента растет быстрее степенной.

§ 8. Исследование функций с помощью производных

Теорема 1. Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда
1) $\forall x\in(a,b)\hookrightarrow\ f'(x)\geq0\quad\Leftrightarrow\quad f$ нестрого возрастает на $[a,b]$;
2) $\forall x\in(a,b)\hookrightarrow\ f'(x)\leq0\quad\Leftrightarrow\quad f$ нестрого убывает на $[a,b]$;
3) если $\forall x\in(a,b)\hookrightarrow\ f'(x)>0$, то f строго возрастает на $[a,b]$;
4) если $\forall x\in(a,b)\hookrightarrow\ f'(x)<0$, то f строго убывает на $[a,b]$.

Доказательство. 1. а) Пусть $\forall x\in(a,b)\hookrightarrow\ f'(x)\geq0$. Покажем, что функция f нестрого возрастает на $[a,b]$. Пусть заданы произвольные $x_1,x_2\in[a,b]$: $x_1<x_2$. Требуется доказать, что $f(x_2)\geq f(x_1)$. По теореме Лагранжа о среднем $\exists\xi\in(x_1,x_2)$: $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi)$. Так как $f'(\xi)\geq0$, то $f(x_2)\geq f(x_1)$.

б) Пусть функция f нестрого возрастает на $[a,b]$. Зафиксируем произвольную точку $x_0\in(a,b)$ и покажем, что $f'(x_0)\geq0$. Так как

f нестрого возрастает на $[a,b]$, то для любой точки $x \in [a,b]$ такой, что $x \neq x_0$, справедливо неравенство $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. В силу теоремы о предельном переходе в неравенствах получаем $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.

Пункт 2 доказывается аналогично. Доказательство пунктов 3, 4 аналогично доказательству пункта 1 а). $\square$

Замечание. Из строгого возрастания дифференцируемой функции f не следует неравенство $f'(x) > 0$. Например, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает, но $f'(0) = 0$.

Теорема 2. (Первое достаточное условие экстремума.) Пусть функция f непрерывна в некоторой $U_\delta(x_0)$ и дифференцируема в $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$. Тогда

1) если $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow f'(x) > 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow f'(x) < 0$ (т.е. производная меняет знак с плюса на минус), то x_0 – точка строгого локального максимума f;

2) если $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow f'(x) < 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow f'(x) > 0$ (т.е. производная меняет знак с минуса на плюс), то x_0 – точка строгого локального минимума f.

Доказательство. 1) По теореме 1 функция f строго убывает на $[x_0 - \delta/2, x_0]$ и строго возрастает на $[x_0, x_0 + \delta/2]$. Следовательно, x_0 – точка строгого локального минимума f. Доказательство пункта 2 – аналогично. $\square$

Аналогично можно сформулировать достаточные условия нестрогого экстремума.

Теорема 3. (Второе достаточное условие экстремума.) Пусть в некоторой окрестности точки x_0 определена функция f такая, что $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, пусть $\forall k \in \{1, ..., n-1\} \hookrightarrow f^{(k)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда

1) если n – четно, то при $f^{(n)}(x_0) > 0$ x_0 является точкой строгого локального минимума функции f, при $f^{(n)}(x_0) < 0$ x_0 является точкой строгого локального максимума функции f;

2) если n – нечетно, то x_0 не является точкой (нестрогого) локального экстремума функции f.

Доказательство. В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеем $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$. Следовательно, $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(1)$ при

$x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$. По лемме о сохранении знака (лемма 1 § 2 главы 2) существует число $\delta > 0$ такое, что при $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ величина $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}$ имеет тот же знак, что и знак числа $f^{(n)}(x_0)$. Пусть, например, $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тогда

$$\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} > 0.$$

Поэтому в случае четного n $\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$, следовательно, x_0 – точка строгого локального минимума. В случае нечетного n: $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow f(x) - f(x_0) < 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$, следовательно, x_0 не является точкой нестрогого экстремума. Случай $f^{(n)}(x_0) < 0$ рассматривается аналогично. $\square$

Рассмотрим необходимые условия экстремума. Необходимым условием экстремума в терминах первой производной является теорема Ферма (теорема 1 § 4).

Теорема 4. (Необходимое условие экстремума в терминах второй производной.) Пусть функция f определена в некоторой $U_\delta(x_0)$ и $\exists f''(x_0)$. Тогда

1) если x_0 – точка (нестрогого) локального минимума функции f, то $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \geq 0$;

2) если x_0 – точка (нестрогого) локального максимума функции f, то $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \leq 0$.

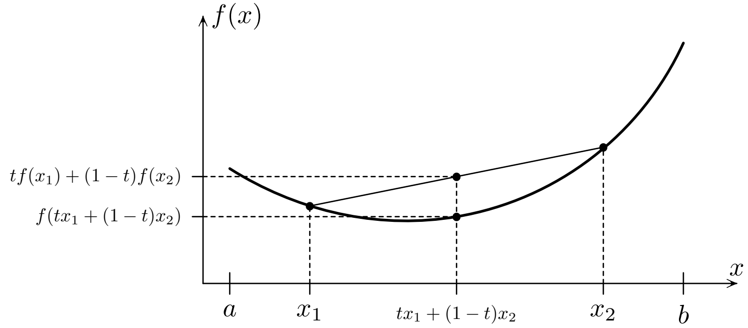
Доказательство. 1) Пусть x_0 – точка локального минимума. В силу теоремы Ферма $f'(x_0) = 0$. Если $f''(x_0) < 0$, то по теореме 3 x_0 является точкой строгого локального максимума и, следовательно, не может являться точкой (нестрогого) локального минимума. Полученное противоречие показывает, что $f''(x_0) \geq 0$.

Доказательство пункта 2 – аналогично. $\square$

Замечание. Из условий $\exists f''(x_0)$ и x_0 – точка строго локального минимума не следует неравенство $f''(x_0) > 0$. Например, $x_0 = 0$ является точкой строгого минимума функции $f(x) = x^4$, но $f''(0) = 0$.

Определение. Функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз*, если каждая точка любой хорды к графику функции f лежит не ниже графика f. Функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой вверх*, если каждая точка любой хорды к графику функции f лежит не выше графика f.

На рисунке изображен график выпуклой вниз функции.



Каждая точка хорды, соединяющей точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, может быть записана в виде $\Big(tx_1 + (1-t)x_2, tf(x_1) + (1-t)f(x_2)\Big)$, где $t \in [0,1]$. Поэтому условие выпуклости вниз функции f на (a,b) можно записать в виде

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]\ \forall t \in [0,1] \hookrightarrow\ f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

а условие выпуклости вверх функции f на (a,b) – в виде

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]\ \forall t \in [0,1] \hookrightarrow\ f(tx_1 + (1-t)x_2) \ge tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Замечание. Если в последних двух формулах нестрогие неравенства заменить строгими, то получатся определения строгой выпуклости вниз и вверх.

Замечание. Нередко в литературе используется немного иная терминология: выпуклую вниз функцию называют *выпуклой*, а выпуклую вверх – *вогнутой*.

Задача 1. Пусть функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ выпукла вниз. Доказать, что f непрерывна на (a,b).

Задача 2. Пусть функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ выпукла вниз и дифференцируема в точке x_0. Доказать, что $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow\ f(x) \ge y_{\text{кас}}(x)$, где $y_{\text{кас}}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Теорема 5. Пусть функция f дважды дифференцируема на (a,b). Тогда

1) функция f выпукла вниз на (a,b) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow\ f''(x) \ge 0$;

2) функция f выпукла вверх на (a,b) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow\ f''(x) \le 0$.

Доказательство. 1. а) Пусть функция f выпукла вниз на (a,b). Зафиксируем произвольное $x_0 \in (a,b)$ и покажем, что $f''(x_0) \ge 0$. Определим $\delta = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$. Тогда $\forall u \in (-\delta, \delta)$ справедливы условия $x_0 \pm u \in (a,b)$. Применяя условие выпуклости вниз для $x_1 = x_0 - u$, $x_2 = x_0 + u$, $t = \frac{1}{2}$ и замечая, что $tx_1 + (1-t)x_2 = x_0$, получаем

$$f(x_0) \le \frac{1}{2} f(x_0 - u) + \frac{1}{2} f(x_0 + u) \quad \forall u \in (-\delta, \delta). \tag{1}$$

Раскладывая по формуле Тейлора, имеем $f(x_0 \pm u) = f(x_0) \pm f'(x_0)\, u + \frac{1}{2} f''(x_0)\, u^2 + o(u^2)$ при $u \to 0$, следовательно,

$$\frac{1}{2} f(x_0 - u) + \frac{1}{2} f(x_0 + u) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\, u^2 + o(u^2).$$

Отсюда и из формулы (1) имеем

$$\frac{1}{2} f''(x_0)\, u^2 + o(u^2) = \frac{1}{2} f(x_0 - u) + \frac{1}{2} f(x_0 + u) - f(x_0) \ge 0.$$

Деля это неравенство на u^2, получаем $\frac{1}{2} f''(x_0) + o(1) \ge 0$, где $o(1)$ – это такая функция $\varphi(u)$, что $\lim\limits_{u \to 0} \varphi(u) = 0$. Переходя к пределу при $u \to 0$, получаем $\frac{1}{2} f''(x_0) \ge 0$, т. е. $f''(x_0) \ge 0$.

б) Пусть $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow\ f''(x) \ge 0$. Покажем, что функция f выпукла вниз на (a,b). Зафиксируем произвольные числа $t \in [0,1]$ и x_1, x_2 такие, что $a < x_1 < x_2 < b$. Обозначим $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$. Требуется доказать, что

$$f(x_0) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{2}$$

Если $t = 0$ или $t = 1$, то неравенство (2) тривиально выполняется (выполняется равенство). Поэтому будем предполагать, что $t \in (0,1)$.

В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа
$\exists\xi_1 \in (x_1, x_0): \quad f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\,(x_1 - x_0)^2$
и
$\exists\xi_2 \in (x_0, x_2): \quad f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x_2 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\,(x_2 - x_0)^2.$

Поскольку $f''(\xi_1) \geq 0$ и $f''(\xi_2) \geq 0$, то $f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)\,(x_1 - x_0)$ и $f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)\,(x_2 - x_0)$, следовательно,

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq$$

$$\geq tf(x_0) + (1-t)f(x_0) + f'(x_0)\Big(t(x_1 - x_0) + (1-t)(x_2 - x_0)\Big) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\Big(tx_1 + (1-t)x_2 - x_0\Big) \overset{\text{по опр. } x_0}{=} f(x_0).$$

Поэтому справедливо неравенство (2).

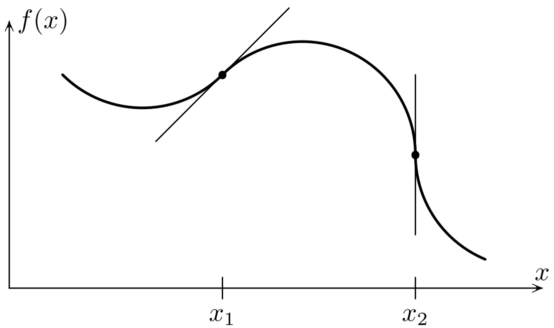
Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. □

Определение. Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции f, если

1) функция f определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0,

2) существует $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$, т.е. в точке x_0 существует касательная к графику функции f и

3) в точке x_0 меняется направление выпуклости функции f, т.е. существует число $\delta > 0$ такое, что на одном из интервалов $(x_0-\delta, x_0)$, $(x_0, x_0+\delta)$ функция выпукла вниз, а на другом – выпукла вверх.



x_1, x_2 – точки перегиба f

Теорема 6. (Необходимые и достаточные условия точки перегиба.) Пусть функция f непрерывна в $U_{\delta_0}(x_0)$ и дважды дифференцируема в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$, пусть $\exists f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда x_0 является точкой перегиба функции f в том и только в том случае, когда существует $\delta \in (0, \delta_0]$:
либо $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow\ f''(x) \geq 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow\ f''(x) \leq 0$,
либо $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow\ f''(x) \leq 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow\ f''(x) \geq 0$,
т. е. вторая производная меняет знак в точке x_0.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 5 и определения точки перегиба. □

Теорема 7. Пусть функция f дважды дифференцируема в некоторой $U_{\delta_0}(x_0)$. Пусть x_0 – точка перегиба функции f, $y_{\textbf{кас}}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной. Тогда

$$\exists\delta > 0: \quad \left[\begin{array}{l} \text{либо} \left\{\begin{array}{l} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow\ y_{\textbf{кас}}(x) \leq f(x) \text{ и} \\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow\ y_{\textbf{кас}}(x) \geq f(x), \end{array}\right. \\ \text{либо} \left\{\begin{array}{l} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow\ y_{\textbf{кас}}(x) \geq f(x) \text{ и} \\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow\ y_{\textbf{кас}}(x) \leq f(x), \end{array}\right. \end{array}\right.$$

т. е. график функции переходит с одной стороны касательной на другую.

Доказательство. В силу теоремы 6 $f''(x)$ меняет в точке x_0 знак. Для определенности будем предполагать, что $f''(x)$ меняет знак с плюса на минус, т. е.

$$\exists\delta \in (0, \delta_0]: \quad \left\{\begin{array}{l} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow\ f''(x) \geq 0 \quad \text{и} \\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow\ f''(x) \leq 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

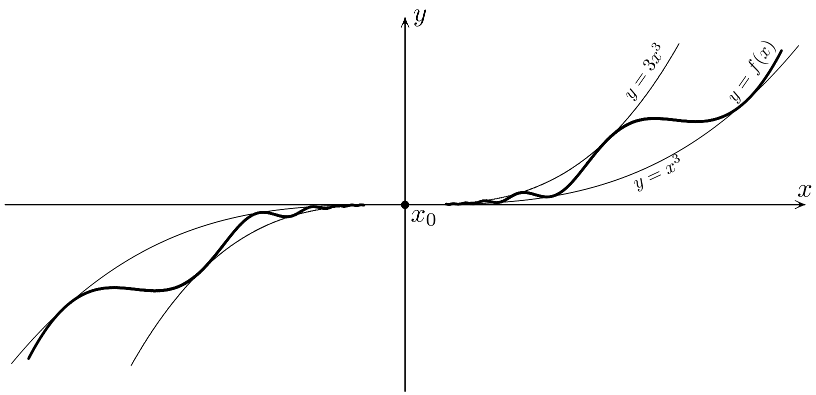
Пользуясь формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем, что для любого $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ существует точка ξ, лежащая строго между x и x_0 и такая, что

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)\,(x - x_0)^2.$$

Отсюда в силу условия (3) имеем
$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow\ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) = y_{\textbf{кас}}(x)$ и
$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow\ f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) = y_{\textbf{кас}}(x)$. А значит, график функции переходит с одной строны касательной на другую. □

Замечание. Из того, что график функции f в точке x_0 переходит с одной стороны касательной на другую не следует, что x_0 является точкой перегиба функции f. Например, график функции

$$f(x) = \begin{cases} (2+\sin\frac{1}{x})x^3, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



переходит в точке $x_0 = 0$ с одной стороны касательной $y = 0$ на другую, но точка x_0 не является точкой перегиба функции f, так как не существует левой и правой полуокрестностей точки x_0, в которых сохраняется направление выпуклости функции f.

Асимптоты

Определение. Говорят, что график функции $y = f(x)$ имеет *вертикальную асимптоту* $x = x_0$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ бесконечен.

Например, график функции $y = e^{1/x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to+0} e^{1/x} = +\infty$.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется *невертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0$.

Если $k \neq 0$, то асимптота $y = kx + b$ называется *наклонной*. Если $k = 0$, то асимптота $y = kx + b = b$ называется *горизонтальной*.

Аналогично вводится понятие асимптоты при $x \to -\infty$.

Следующая теорема показывает метод нахождения невертикальной асимптоты.

Теорема 8. Прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \exists \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Доказательство. 1) Если $y = kx + b$ – асимптота при $x \to +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)-kx-b}{x} = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{kx+b}{x} = k$. Из равенства $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, следует также, что $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$.

2) Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ и, следовательно, прямая $y = kx + b$ – асимптота. $\square$

Задача 3. Пусть функция f выпукла вниз на луче $(x_0, +\infty)$ и прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика f при $x \to +\infty$. Доказать, что $\forall x > x_0 \hookrightarrow\ f(x) > kx + b$.

План построения графика функции f

1) Найти множество определения функции. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или периодической. Найти точки пересечения графика функции f с осями координат.

2) Вычислить $f'(x)$ и $f''(x)$.

3) Составить таблицу знаков f' и f''. Указать промежутки монотонности и выпуклости f.

4) Найти точки экстремумов и перегиба, а также точки недифференцируемости f. Вычислить (если возможно) в этих точках значения $f(x)$ и $f'(x)$.

5) Исследовать асимптоты графика.

6) Нарисовать график функции.

Глава 4

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Элементарные методы интегрирования

Определение. Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$ и на (a,b) заданы функции $f(x)$ и $F(x)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на (a,b), если

$$\forall x \in (a,b) \hookrightarrow \; F'(x) = f(x).$$

Лемма 1. Пусть на (a,b) задана функция $\varphi(x)$ и $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow$ $\hookrightarrow \; \varphi'(x) = 0$. Тогда $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in (a,b) \hookrightarrow \; \varphi(x) = C$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in (a,b)$ и обозначим $C = \varphi(x_0)$. По теореме Лагранжа о среднем $\forall x \in (a,b)$: $x \neq x_0$ $\exists \xi$, лежащее строго между x и x_0: $\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \varphi'(\xi)$. Так как $\varphi'(\xi) = 0$, то $\varphi(x) = \varphi(x_0) = C$. $\square$

Теорема 1. (О структуре множества первообразных.) Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на (a,b). Тогда функция $F_1(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на (a,b) в том и только в том случае, если $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in (a,b) \hookrightarrow \; F_1(x) =$ $= F(x) + C$.

Доказательство. 1) Если $F_1(x) = F(x) + C$, то $F_1'(x) = F'(x) =$ $= f(x)$ и, следовательно, функция $F_1(x)$ является первообразной функции $f(x)$.

2) Если $F_1(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow$ $\hookrightarrow \; F_1'(x) = f(x) = F'(x)$ и $F_1'(x) - F'(x) = 0$. По лемме 1, примененной к функции $\varphi(x) = F_1(x) - F(x)$, $\exists C \in \mathbb{R}$: $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow \; F_1(x) -$ $- F(x) = C$. $\square$

Определение. *Неопределенным интегралом* $\int f(x)\,dx$ называется множество всех первообразных функции $f(x)$.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$. Тогда неопределенный интеграл функции $f(x)$ – это множество функций вида $F(x)+C$, где $C \in \mathbb{R}$ – произвольная константа: $\int f(x)\,dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$, что для краткости записывают в виде

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Замечание. Нужно понимать, что неопределенный интеграл – это не одна функция, а множество функций. Иначе говоря, константа C, стоящая в правой части последней формулы, – не фиксированная константа, а параметр, пробегающий множество всех действительных чисел. Непонимание этого факта может привести к недоразумениям. Например, из формул $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$ $= -\arccos x + C$ не следует, что $\arcsin x = -\arccos x$. (На самом деле справедливо равенство $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$).

Лемма 2. Операция взятия дифференциала d и операция взятия неопределенного интеграла $\int$ являются взаимно обратными:

а) если функция $f(x)$ на (a,b) имеет первообразную, то на (a,b)

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx;$$

б) если функция $F(x)$ дифференцируема на (a,b), то на (a,b)

$$\int d(F(x) + C) = F(x) + C.$$

Доказательство. а) Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, тогда по теореме 2 $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, следовательно, $d\int f(x)\,dx =$ $= dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$.

б) Обозначим $f(x) = F'(x)$. Тогда $\int d(F(x) + C) = \int f(x)\,dx =$ $= F(x) + C$. $\square$

Лемма 3. (Свойство линейности неопределенного интеграла.) Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные на (a,b), $\alpha_1 \in \mathbb{R}$,

$\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, то на (a, b)

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))\, dx = \alpha_1 \int f_1(x)\, dx + \alpha_2 \int f_2(x)\, dx.$$

Доказательство. Пусть $F_1(x)$ – первообразная функции $f_1(x)$, $F_2(x)$ – первообразная функции $f_2(x)$. Тогда $F_1'(x) = f_1(x)$, $F_2'(x) = f_2(x)$ и $(\alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x))' = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$, следовательно, $\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))\, dx = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + C \overset{\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0}{=}$ $= \alpha_1(F_1(x) + C_1) + \alpha_2(F_2(x) + C_2) = \alpha_1 \int f_1(x)\, dx + \alpha_2 \int f_2(x)\, dx.$ □

Теорема 3. (Замена переменной или метод интегрирования подстановкой.)
Пусть на (a, b)

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

а функция $x : (t_1, t_2) \to (a, b)$ дифференцируема. Тогда на (t_1, t_2)

$$\int f(x(t))\, dx(t) = F(x(t)) + C.$$

Доказательство. Так как $\int f(x)\, dx = F(x)+C$, то $F'(x) = f(x)$. В силу инвариантности формы первого дифференциала $dF(x(t)) = F'(x(t))\, dx(t) = f(x(t))\, dx(t)$. По лемме 2 (б) $\int f(x(t))\, dx(t) = \int dF(x(t)) = F(x(t)) + C$. □

Теорема 4. (Метод интегрирования по частям.) Пусть на (a, b) заданы дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$. Тогда на (a, b)

$$\int u(x)\, dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\, du(x).$$

Доказательство. Так как $d(u(x)v(x)) = u(x)\, dv(x) + v(x)\, du(x)$, то по свойству линейности (лемма 3) $\int u(x)\, dv(x) = \int d(u(x)v(x)) - \int v(x)\, du(x) \overset{\text{Л.2(б)}}{=} u(x)v(x) + C - \int v(x)\, du(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\, du(x)$. Последнее равенство объясняется тем, что произвольная константа C уже присутствует в $\int v(x)\, du(x)$. □

Используя доказанные ранее формулы для производных элементарных функций, получаем следующую таблицу интегралов.

Таблица интегралов

1) $\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1,\ x > 0.$

2) $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x + a| + C,\ x \neq -a.$

3) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

4) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C.$

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,\ x \neq \pi k.$

6) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C, \qquad \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

7) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,\ x \neq 0.$

8) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad |x| < a.$

10) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad x \neq \pm a.$

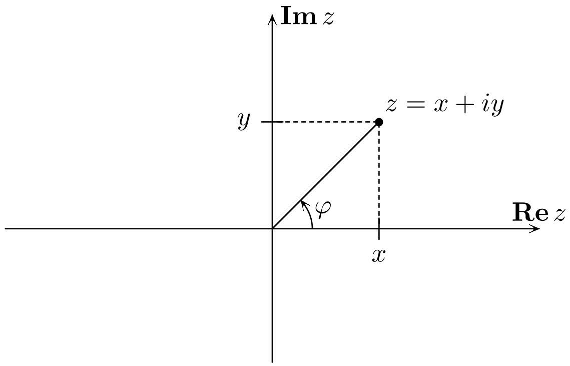
11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0,\ x^2 > -a.$

§ 2. Комплексные числа

Определение. *Комплексным числом* z называется выражение вида $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, i – мнимая единица. При этом x называется *вещественной частью*, а y – *мнимой частью* комплексного числа z: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Множество комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$.

Любое вещественное число $x \in \mathbb{R}$ будем отождествлять с комплексным числом $x + i\,0$. Поэтому $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить как вектор с координатами (x, y) на комплексной плоскости, т. е. на координатной плоскости с осями $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$.



Определение. Если $\operatorname{Re} z = r\cos\varphi$, $\operatorname{Im} z = r\sin\varphi$, $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то r называется *модулем*, а φ – *аргументом* комплексного числа z: $r = |z|$, $\varphi = \arg\, z$, $\quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Заметим, что если φ – аргумент числа z, то любое число вида $\varphi + 2\pi k$, где k – целое, также является аргументом числа z. Поэтому аргумент комплексного числа определен с точностью до $2\pi k$.

Определение. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, где $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Тогда

1) $z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2\Big)$;

2) $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$, $\quad z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$, т. е. сумма и разность комплексных чисел определяется как сумма и разность векторов комплексной плоскости;

3) $z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$, т. е. при вычислении произведения $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$ нужно раскрыть скобки и воспользоваться тем, что $i^2 = -1$;

4) Пусть $z_2 \neq 0$, т. е. $x_2 \neq 0$ или $y_2 \neq 0$. Тогда частным $\frac{z_1}{z_2}$ называется такое комплексное число z, что $z_1 = z z_2$.

Свойства операций комплексных чисел
а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $\quad z_1 z_2 = z_2 z_1$,
б) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $\quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$,
в) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
доказать самостоятельно.

Определение. *Экспонентой* комплексного числа $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ называется комплексное число $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Из определения экспоненты комплексного числа следует *формула Эйлера*: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$.

Из формулы Эйлера и определений модуля и аргумента комплексного числа следует, что любое комплексное число z может быть представлено в *экспоненциальной форме*:
$z = re^{i\varphi}$, $\quad$ где $\quad r = |z|$, $\varphi = \arg\, z$.

Лемма 1. (Свойство экспоненты.)

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \hookrightarrow \; e^{z_1}\, e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

Доказательство. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ $(x_i, y_i \in \mathbb{R})$. Тогда

$$e^{z_1}\, e^{z_2} = e^{x_1 + iy_1}\, e^{x_2 + iy_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)\, e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) =$$

$$= e^{x_1 + x_2}(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + +i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)) =$$

$$= e^{x_1 + x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) = e^{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = e^{z_1 + z_2}.$$

$\square$

Следствие 1. Для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
2) $\arg\,(z_1 \cdot z_2) = \arg\, z_1 + \arg\, z_2$.

Доказательство. Пусть $r_1 = |z_1|$, $\varphi_1 = \arg z_1$, $r_2 = |z_2|$, $\varphi_2 = \arg z_2$. Тогда $z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$. Следовательно, $|z_1 z_2| = r_1 r_2$, $\arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$. $\square$

Следствие 2. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$. Тогда частное $\frac{z_1}{z_2}$ существует и единственно, причем
1) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$,
2) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим через r, r_1, r_2 – модули, а через $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ – аргументы чисел z, z_1, z_2. Тогда $z = \frac{z_1}{z_2} \overset{\text{опр.}}{\iff} z_1 = z z_2 \overset{\text{Сл.1.}}{\iff} \Big(r_1 = r r_2,\ \varphi_1 = \varphi + \varphi_2\Big) \iff \Big(r = \frac{r_1}{r_2},\ \varphi = \varphi_1 - \varphi_2\Big)$. $\square$

Определение. Если $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, то $z^n = \underbrace{z \cdot ... \cdot z}_{n\text{ раз}}$.

Пусть $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Из леммы 1 следует, что $z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$. Поэтому $|z^n| = |z|^n$, $\arg z^n = n \arg z$.

Определение. *Сопряженным* к комплексному числу $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ называется комплексное число $\overline{z} = x - iy$.

Свойства операции сопряжения комплексных чисел
1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$, $\quad \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$, $\quad \overline{(z_1/z_2)} = \overline{z}_1/\overline{z}_2$,
2) $\overline{\overline{z}} = z$,
3) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z$, $\quad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$, $\quad z \cdot \overline{z} = |z|^2$,
4) $|\overline{z}| = |z|$, $\quad \arg \overline{z} = -\arg z$
доказать самостоятельно.

§ 3. Разложение многочлена на множители

Определение. *Многочленом* степени n называется функция

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0,$$

где $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Степень многочлена P будем обозначать через $\deg P$.

Лемма 1. Для любых чисел $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ следующие условия эквивалентны:
(1) $\forall z \in \mathbb{C} \hookrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k z^k$;
(2) $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$;
(3) $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \hookrightarrow a_k = b_k$.

Доказательство (2) $\Rightarrow$ (3) проводится аналогично доказательству теоремы о единственности разложения по формуле Тейлора (теорема 3 § 5 главы 3). Доказательство (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) очевидно. $\square$

Деление многочленов можно производить "в столбик". Например, разделим $P(x) = x^2$ на $Q(x) = x - 1$:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & & x-1 \\ \cline{3-3} x^2 - x & & x+1 \\ \cline{1-1} x & & \\ x - 1 & & \\ \cline{1-2} 1 & & \end{array}$$

следовательно, $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

Лемма 2. Пусть заданы многочлены $P(z)$ и $Q(z)$, $\deg P \geq \deg Q$. Тогда существуют и единственны многочлены $D(z)$ и $R(z)$ такие, что $\deg R < \deg Q$ и

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = D(z) + \frac{R(z)}{Q(z)}. \tag{1}$$

Многочлен $R(z)$ называется *остатком* от деления $P(z)$ на $Q(z)$.

Доказательство. Пусть $\deg P = n$, $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$, $\deg Q = m$, $Q(z) = b_m z^m + ... + b_0$. Приводя уравнение (1) к общему знаменателю, получаем

$$P(z) = D(z)\, Q(z) + R(z). \tag{2}$$

Так как $\deg R < \deg P$, то $\deg (P - R) = n$ и $\deg D = n - m$. Определим коэффициенты многочлена $D(z) = d_{n-m} z^{n-m} + ... + d_0$, начиная с коэффициента при старшей степени. Уравнение (2) принимает вид $a_n z^n + ... = d_{n-m} z^{n-m} b_m z^m + ...$. Приравнивая коэффициенты при

z^n, согласно лемме 1 получаем $d_{n-m} = \frac{a_n}{b_m}$. При известном коэффициенте d_{n-m} задача деления многочлена $P(z)$ на $Q(z)$ сводится к задаче деления $\widetilde{P}(z)$ на $Q(z)$, где $\widetilde{P}(z) = P(z) - d_{n-m}\, z^{n-m}\, Q(z)$ – многочлен степени $\leq n-1$: $\frac{P(z)}{Q(z)} = d_{n-m}\, z^{n-m} + \frac{\widetilde{P}(z)}{Q(z)}$. Применяя те же рассуждения к дроби $\frac{\widetilde{P}(z)}{Q(z)}$ и так далее, получаем разложение (1). Так как коэффициент d_{n-m} определяется однозначно, то многочлен $\widetilde{P}(z)$ определяется однозначно. По индукции получаем, что все коэффициенты многочленов $D(z)$ и $R(z)$ определяются однозначно. □

Заметим, что доказательство леммы 2 является формальным описанием алгоритма деления многочленов "в столбик".

Определение. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной рациональной дробью*, если $\deg P < \deg Q$ и многочлены $P(x)$, $Q(x)$ не имеют общих корней.

Согласно лемме 2 дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, если она не является правильной, можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Теорема 1. (Теорема Безу.) Пусть задано число $z_0 \in \mathbb{C}$. Многочлен $P(z)$ делится на $z - z_0$ без остатка $\Longleftrightarrow P(z_0) = 0$.

Доказательство. Разделив $P(z)$ на $Q(z) = z - z_0$, согласно лемме 2 получаем $P(z) = D(z)\,(z - z_0) + R(z)$, где $\deg R < 1$, т.е. $R(z) = c_0$ – константа. Итак, $P(z) = D(z)\,(z - z_0) + c_0$. Поэтому $P(z)$ делится на $z - z_0$ без остатка $\Longleftrightarrow c_0 = 0 \Longleftrightarrow P(z_0) = 0$. □

Теорема 2. (Основная теорема алгебры.) Для любого многочлена $P(z)$ степени $\deg P \geq 1$ существует корень, т.е. $\exists z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) = 0$.

Доказательство основной теоремы алгебры проводится в курсе теории функции комплексного переменного.

Теорема 3. Любой многочлен $P(z)$ степени $\deg P = n$ можно представить в виде

$$P(z) = a\,(z - z_1)\,...\,(z - z_n),$$

где $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $z_1, ..., z_n$ – корни многочлена $P(z)$, среди которых могут быть равные.

Доказательство. В силу основной теоремы алгебры $\exists z_1 \in \mathbb{C} : P(z_1) = 0$. По теореме Безу $P(z)$ делится на $z - z_1$ без остатка,

т.е. $P(z) = (z - z_1)\,P_1(z)$. Аналогично, применяя основную теорему алгебры и теорему Безу к многочлену $P_1(z)$, получаем $P_1(z) = (z - z_2)\,P_2(z)$. И так далее по индукции получаем требуемое разложение. □

Определение. Число $z_0 \in \mathbb{C}$ называется *корнем кратности* k многочлена $P(z)$, если $P(z)$ делится без остатка на $(z - z_0)^k$ и не делится без остатка на $(z - z_0)^{k+1}$.

Лемма 3. Пусть z_0 – корень кратности k многочлена $P(z)$, все коэффициенты которого вещественны. Тогда комплексно-сопряженное число $\overline{z}_0$ – также корень кратности k многочлена $P(z)$.

Доказательство. По условию леммы

$$\forall z \in \mathbb{C} \hookrightarrow\ P(z) = D(z)\,(z - z_0)^k, \tag{3}$$

причем $D(z_0) \neq 0$. Возьмем комплексное сопряжение от левой и правой частей равенства (3). Так как коэффициенты многочлена $P(z)$ вещественны, то $\overline{P(z)} = \overline{a_n\, z^n} + ... + \overline{a_0} = a_n\, \overline{z^n} + ... + a_0 = P(\overline{z})$, следовательно,

$$\forall z \in \mathbb{C} \hookrightarrow\ P(\overline{z}) = \overline{D(z)}\,(\overline{z} - \overline{z}_0)^k.$$

Поэтому

$$\forall z \in \mathbb{C} \hookrightarrow\ P(z) = D_1(z)(z - \overline{z}_0)^k,$$

где $D_1(z) = \overline{D(\overline{z})}$. Следовательно, $D_1(\overline{z}_0) = \overline{D(z_0)} \neq 0$. Поэтому $\overline{z}_0$ – также корень кратности k многочлена $P(z)$. □

Из теоремы 3 и леммы 3 следует

Теорема 4. (О разложении многочлена на элементарные множители.) Пусть $P(x)$ – многочлен, все коэффициенты которого вещественны. Пусть $x_1, ..., x_s$ – вещественные корни многочлена $P(x)$ кратностей $k_1, ..., k_s$, а $(z_1, \overline{z}_1), ..., (z_t, \overline{z}_t)$ – пары комплексно-сопряженных корней многочлена $P(x)$ кратностей $\ell_1, ..., \ell_t$. Тогда

$$P(x) = a\,(x - x_1)^{k_1}\,...\,(x - x_s)^{k_s}\,(x - z_1)^{\ell_1}\,(x - \overline{z}_1)^{\ell_1}\,...\,(x - z_t)^{\ell_t}\,(x - \overline{z}_t)^{\ell_t} =$$

$$= a\,(x - x_1)^{k_1}\,...\,(x - x_s)^{k_s}\,(x^2 + p_1 x + q_1)^{\ell_1}\,...\,(x^2 + p_t x + q_t)^{\ell_t},$$

где $p_j = -(z_j + \overline{z}_j) = -2\mathrm{Re}\, z_j \in \mathbb{R}$, $\quad q_j = z_j\,\overline{z}_j = |z_j|^2 \in \mathbb{R}$, причем дискриминанты трехчленов отрицательны: $D_j = p_j^2 - 4q_j = (z_j - \overline{z}_j)^2 = (2i\,\mathrm{Im}\, z_j)^2 = -4(\mathrm{Im}\, z_j)^2 < 0$.

§ 4. Разложение правильной рациональной дроби в сумму элементарных дробей

В этом параграфе все коэффициенты рассматриваемых многочленов вещественные.

Лемма 1. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь. Пусть x_1 – вещественный корень кратности k знаменателя (т. е. $Q(x) = (x-x_1)^k\,\widetilde{Q}(x)$, и x_1 не является корнем многочлена $\widetilde{Q}(x)$). Тогда существуют и единственны число $A \in \mathbb{R}$ и многочлен $F(x)$ такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)^k} + \frac{F(x)}{(x-x_1)^{k-1}\widetilde{Q}(x)}. \tag{1}$$

При этом $\frac{F(x)}{(x-x_1)^{k-1}\widetilde{Q}(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Доказательство. Приводя формулу (1) к общему знаменателю, получаем $P(x) = A\,\widetilde{Q}(x)+F(x)\,(x-x_1)$. Поэтому требуется доказать, что существуют число $A \in \mathbb{R}$ и многочлен $F(x)$ такие, что

$$P(x) - A\,\widetilde{Q}(x) = F(x)\,(x-x_1). \tag{2}$$

Таким образом, требуется доказать, что существует число $A \in \mathbb{R}$ такое, что многочлен $\varphi(x) = P(x) - A\,\widetilde{Q}(x)$ делится на $x - x_1$ без остатка. По теореме Безу это эквивалентно условию $\varphi(x_1) = 0$, т. е. $P(x_1) - A\,\widetilde{Q}(x_1) = 0$. Так как $\widetilde{Q}(x_1) \neq 0$, то такое $A \in \mathbb{R}$ существует и единственно: $A = \frac{P(x_1)}{\widetilde{Q}(x_1)}$. При найденном A многочлен $F(x)$ определяется формулой (2) однозначно: $F(x) = \frac{P(x)-A\,\widetilde{Q}(x)}{x-x_1}$.

Так как $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная дробь, то $\deg P < \deg Q$. Отсюда и из соотношений $\deg\widetilde{Q} = \deg Q - k < \deg Q$ следует, что $\deg\,(P - A\,\widetilde{Q}) < \deg Q$. Поэтому в силу равенства (2) имеем

$$\deg F = \deg\,(P - A\,\widetilde{Q}) - 1 < \deg Q - 1 = \deg\widetilde{Q} + k - 1.$$

Следовательно, дробь $\frac{F(x)}{(x-x_1)^{k-1}\widetilde{Q}(x)}$ является правильной. □

Лемма 2. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь. Пусть z_1 – невещественный корень кратности ℓ знаменателя (т. е. согласно лемме 2 § 3 имеем $Q(x) = (x^2+px+q)^\ell\widetilde{Q}(x)$, где $x^2+px+q = (x-z_1)(x-\overline{z}_1)$, z_1 не является корнем многочлена $\widetilde{Q}(x)$). Тогда существуют и единственны числа $B, C \in \mathbb{R}$ и многочлен $F(x)$ такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\ell} + \frac{F(x)}{(x^2+px+q)^{\ell-1}\widetilde{Q}(x)}. \tag{3}$$

При этом $\frac{F(x)}{(x^2+px+q)^{\ell-1}\widetilde{Q}(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Доказательство. Приводя формулу (3) к общему знаменателю, получаем $P(x) = (Bx+C)\widetilde{Q}(x)+F(x)(x^2+px+q)$. Поэтому требуется доказать, что существуют числа $B, C \in \mathbb{R}$ и многочлен $F(x)$ такие, что

$$P(x) - (Bx+C)\widetilde{Q}(x) = F(x)(x-z_1)(x-\overline{z}_1). \tag{4}$$

Таким образом, требуется доказать, что существуют числа $B, C \in \mathbb{R}$ такие, что многочлен $\varphi(x) = P(x) - (Bx+C)\widetilde{Q}(x)$ делится на $x - z_1$ и $x - \overline{z}_1$ без остатка. По теореме Безу и лемме 2 § 3 это эквивалентно условию $\varphi(z_1) = 0$, т. е. $P(z_1)-(Bz_1+C)\widetilde{Q}(z_1) = 0$. Так как $\widetilde{Q}(z_1) \neq 0$, то последнее равенство эквивалентно равенству

$$Bz_1 + C = \frac{P(z_1)}{\widetilde{Q}(z_1)}. \tag{5}$$

Покажем, что существуют и единственны числа $B, C \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие равенству (5). Обозначим $x_1 = \operatorname{Re} z_1$, $y_1 = \operatorname{Im} z_1$, $x_0 = \operatorname{Re}\frac{P(z_1)}{\widetilde{Q}(z_1)}$, $y_0 = \operatorname{Im}\frac{P(z_1)}{\widetilde{Q}(z_1)}$. Тогда равенство (5) можно записать в виде $Bx_1 + iBy_1 + C = x_0 + iy_0$. Следовательно, равенство (5) эквивалентно системе

$$\begin{cases} By_1 = y_0, \\ C = x_0 - Bx_1. \end{cases} \tag{6}$$

Так как $z_1 \notin \mathbb{R}$, то $y_1 = \operatorname{Im} z_1 \neq 0$. Поэтому система (6) имеет единственное решение $B, C \in \mathbb{R}$. Следовательно, существуют и единственны числа $B, C \in \mathbb{R}$ такие, что многочлен $\varphi(x)$ делится на $x - z_1$ и $x - \overline{z}_1$ без остатка. При найденных B и C многочлен $F(x)$ определяется формулой (4) однозначно: $F(x) = \frac{P(x)-(Bx+C)\widetilde{Q}(x)}{x^2+px+q}$.

Доказательство того, что дробь $\frac{F(x)}{(x^2+px+q)^{\ell-1}\widetilde{Q}(x)}$ является правильной проводится аналогично доказательству леммы 1. □

Теорема 1. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами. Пусть

$$Q(x) = a\,(x-x_1)^{k_1} \dots (x-x_s)^{k_s} (x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1} \dots (x^2+p_tx+q_t)^{\ell_t},$$

где $x_1, \dots, x_s$ – различные вещественные корни многочлена $Q(x)$, а $(x^2+p_1x+q_1), \dots, (x^2+p_tx+q_t)$ – различные квадратные трехчлены с отрицательными дискриминантами. Тогда дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить как сумму *элементарных дробей*:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Sigma_1^{\text{вещ}} + \Sigma_2^{\text{вещ}} + \dots + \Sigma_s^{\text{вещ}} + \Sigma_1^{\text{компл}} + \dots + \Sigma_t^{\text{компл}},$$

где вещественному корню x_j кратности k_j соответствует сумма

$$\Sigma_j^{\text{вещ}} = \sum_{k=1}^{k_j} \frac{A_{jk}}{(x-x_j)^k}, \quad j \in \{1, \dots, s\},$$

а множителю $(x^2+p_jx+q_j)^{\ell_j}$ в разложении знаменателя соответствует сумма

$$\Sigma_j^{\text{компл}} = \sum_{\ell=1}^{\ell_j} \frac{B_{j\ell}x + C_{j\ell}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\ell}}, \quad j \in \{1, \dots, t\},$$

причем все коэффициенты являются действительными числами и определены однозначно.

Доказательство состоит в многократном применении лемм 1 и 2. □

§ 5. Интегрирование рациональных дробей

Пусть многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общих корней. Алгоритм интегрирования рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ состоит из следующих шагов:

1) если $\deg P \geq \deg Q$, то методом деления многочленов "в столбик"представить дробь в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, где $D(x)$ – многочлен, $\frac{R(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь;

2) найти корни знаменателя и разложить знаменатель $Q(x)$ на элементарные множители;

3) методом неопределенных коэффициентов разложить правильную рациональную дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$ (или $\frac{P(x)}{Q(x)}$ при $\deg P < \deg Q$) в сумму элементарных дробей. В силу теоремы 1 § 4 разложение в сумму элементарных дробей существует и единственно;

4) проинтегрировать элементарные дроби и многочлен $D(x)$ при $\deg P \geq \deg Q$.

Интегрирование элементарных дробей

1) Интегралы вида $\int \frac{A\,dx}{(x-x_1)^k}$, $k \in \mathbb{N}$ являются табличными.

2) Интеграл $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\,dx$ сводится к интегралу $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{B}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k},$$

$$\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} = \begin{cases} \ln|x^2+px+q| & \text{при} \quad k=1, \\ -\frac{1}{(k-1)\,(x^2+px+q)^{k-1}} & \text{при} \quad k>1. \end{cases}$$

3) Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$, где знаменатель не имеет вещественных корней. Выделим полный квадрат в знаменателе: $x^2 + px + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$. Поскольку знаменатель не имеет вещественных корней, то $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Обозначим $a = \sqrt{q - p^2/4}$ и выполним замену переменной интегрирования: $t = x + p/2$. Тогда $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = I_k(t)$.

При $k = 1$ имеем $I_1(t) = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$.

Выведем рекуррентную формулу для вычисления $I_k(t)$ при $k > 1$.

Интегрируя по частям, получаем

$$I_k(t) = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{(t^2+a^2)\,dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} - 2ka^2 \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\, I_k(t) - 2a^2 k\, I_{k+1}(t),$$

следовательно,

$$I_{k+1}(t) = \frac{1}{2a^2 k}\left((2k-1)\, I_k(t) + \frac{t}{(t^2+a^2)^k}\right).$$

Поскольку интеграл каждой элементарной дроби выражается через элементарные функции, то интеграл произвольной рациональной дроби выражается через элементарные функции.

§ 6. Интегрирование иррациональных, тригонометрических и гиперболических функций

Определение. Функция n переменных $x_1, ..., x_n$ вида $f(x_1, ..., x_n) = a\, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$, где $a \in \mathbb{R}$, $k_i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, называется *одночленом*. Сумма конечного числа одночленов называется *многочленом*. Если $P(x_1, ..., x_n)$, $Q(x_1, ..., x_n)$ – многочлены от n переменных, то функция вида $R(x_1, ..., x_n) = \frac{P(x_1,...,x_n)}{Q(x_1,...,x_n)}$ называется *рациональной функцией*.

1) Интеграл вида

$$\int R(x^{1/n})\, dx, \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, а $R(t)$ – рациональная функция, сводится к интегралу от рациональной дроби с помощью подстановки $t = x^{1/n}$. Действительно, $\int R(x^{1/n})\, dx = n \int R(t)\, t^{n-1}\, dt$.

2) Интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}\right) dx, \tag{2}$$

где $n \in \mathbb{N}$, а $R(u, v)$ – рациональная функция, сводится к интегралу вида (1), если воспользоваться дробно-линейной подстановкой $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Следовательно, подстановка $t = y^{1/n} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}$ приводит данный интеграл к интегралу от рациональной дроби.

3) Подстановки Эйлера.

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx, \tag{3}$$

где $R(u, v)$ – рациональная функция.

а) Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет вещественные корни x_1, x_2, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = |x - x_2|\sqrt{a\frac{x-x_1}{x-x_2}}$. Поэтому в данном случае интеграл (3) является частным случаем интеграла вида (2) и сводится к интегралу от рациональной дроби при помощи подстановки $t = \sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}$.

б) Пусть квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет вещественных корней. Тогда при $a<0$ выражение $\sqrt{ax^2+bx+c}$ не определено, так как $ax^2+bx+c<0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. При $a>0$ подстановки Эйлера $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t$ сводят интеграл (3) к интегралу от рациональной дроби.

4) Интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m (ax^n+b)^p\, dx, \quad \text{где} \quad m, n, p \ - \quad \text{рациональные числа}, \tag{4}$$

в следующих трех случаях сводится к интегралу от рациональной дроби.

Случай 1. p – целое.

В этом случае $x^m(ax^n+b)^p = R(x^m, x^n)$ – рациональная функция переменных x^m, x^n. Поэтому в данном случае интеграл (4) является частным случаем интеграла (1) и подстановка $t = x^{1/q}$, где q – общий знаменатель дробей m и n, приводит интеграл (4) к интегралу от рациональной дроби.

Случай 2. $\frac{m+1}{n}$ – целое.

Тогда путем подстановки $t = (ax^n+b)^{1/s}$, где s – знаменатель дроби p, интеграл (4) сводится к интегралу от рациональной дроби.

Случай 3. $\frac{m+1}{n} + p$ – целое.

В этом случае подстановка $t = \left(\frac{ax^n+b}{x^n}\right)^{1/s}$, где s – знаменатель дроби p, сводит интеграл (4) к интегралу от рациональной дроби.

Теорема Чебышева. Если не реализуется ни один из трех выше перечисленных случаев, то интеграл от дифференциального бинома (6) не выражается через элементарные функции.

5) Тригонометрические подстановки.

Универсальная тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg}(x/2)$ сводит интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{5}$$

где $R(u, v)$ – рациональная функция, к интегралу от рациональной дроби.

Универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к громоздким вычислениям. Укажем частные случаи, в которых интеграл (5) следует вычислять с помощью других подстановок.

а) Если функция $R(\sin x, \cos x)$ периодична с периодом π, то следует использовать подстановку $t = \operatorname{tg} x$.

б) Если интеграл (5) можно представить в виде $\displaystyle\int R_1(\cos x)\, d\cos x$, где $R_1(u)$ – рациональная функция, то следует использовать подстановку $t = \cos x$.

в) Аналогично, если интеграл (5) можно представить в виде $\displaystyle\int R_2(\sin x)\, d\sin x$, где $R_2(u)$ – рациональная функция, следует использовать подстановку $t = \sin x$.

6) Универсальная гиперболическая подстановка $t = \operatorname{th}(x/2)$ сводит интеграл

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx \tag{6}$$

к интегралу от рациональной дроби.

7) Некоторые интегралы от иррациональных функций удобно вычислять с помощью гиперболических или тригонометрических подстановок.

а) Интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx,$$

где $a > 0$, $R(u, v)$ – рациональная функция, сводится к интегралу вида (6) подстановкой $x = a \operatorname{sh} t$.

б) Интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx,$$

где $a > 0$, $R(u, v)$ – рациональная функция, сводится к интегралу вида (6) подстановкой $x = a \operatorname{ch} t$.

в) Интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx,$$

где $a > 0$, $R(u, v)$ – рациональная функция, сводится к интегралу вида (5) подстановкой $x = a \cos t$.

Глава 5

ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

§ 1. Линейное пространство

Определение. Говорят, что во множестве X *определена операция сложения*, если любым двум элементам $x, y \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $x+y \in X$.

Во множестве X *определена операция умножения на вещественное число*, если любому элементу $x \in X$ и любому вещественному числу $\alpha \in \mathbb{R}$ поставлен в соответствие единственный элемент $\alpha\, x \in X$.

Определение. Множество X называется *вещественным линейным (векторным) пространством*, если в X определены операции сложения и умножения на вещественное число, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1) $\forall x, y \in X \hookrightarrow\ x+y=y+x$;
2) $\forall x, y, z \in X \hookrightarrow\ (x+y)+z=x+(y+z)$;
3) $\exists\, \overline{0} \in X:\ \forall x \in X \hookrightarrow\ x+\overline{0}=x$;
4) $\forall x \in X\ \exists -x \in X:\ x+(-x)=\overline{0}$;
5) $\forall x \in X\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ \alpha(\beta\, x)=(\alpha\beta)\, x$;
6) $\forall x \in X\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ (\alpha+\beta)\, x=\alpha\, x+\beta\, x$;
7) $\forall x, y \in X\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ \alpha\,(x+y)=\alpha\, x+\alpha\, y$;
8) $\forall x \in X \hookrightarrow\ 1\, x=x$, где $1 \in \mathbb{R}$.

Определение. Множество X называется *комплексным линейным пространством*, если в X определены операции сложения и умножения на комплексное число, удовлетворяющие тем же аксиомам.

Пример. Вывести из аксиом линейного пространства:
1) $\overline{0}$ единствен;
2) $\forall x \in X \hookrightarrow\ -x$ единствен;
3) $\forall x \in X \hookrightarrow\ 0\, x=\overline{0}$;

Решение. 1) Пусть $\overline{0}_1, \overline{0}_2 \in X$ и $\forall x \in X \hookrightarrow\ x+\overline{0}_1=x,\ x+\overline{0}_2=x$. Тогда $\overline{0}_1=\overline{0}_1+\overline{0}_2=\overline{0}_2+\overline{0}_1=\overline{0}_2$, т. е. $\overline{0}_1=\overline{0}_2$.

2) Пусть $x+(-x)_1=\overline{0}$, $x+(-x)_2=\overline{0}$. Тогда $(-x)_1=(-x)_1+\overline{0}= =(-x)_1+(x+(-x)_2)=((-x)_1+x)+(-x)_2=(-x)_2+(x+(-x)_1)= =(-x)_2+\overline{0}=(-x)_2$.

3) $0\, x = 0\, x+\overline{0} = 0\, x+(x+(-x)) = (0\, x+x)+(-x) = =(0\, x+1\, x)+(-x) = (0+1)x+(-x) = 1\, x+(-x) = x+(-x) = =\overline{0}$. □

Определение. *Арифметическим n-мерным пространством* $\mathbb{R}^n$ называется множество упорядоченных наборов из n чисел: $x = =(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, где $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., n\}$.

Определим в $\mathbb{R}^n$ операции сложения и умножения на число: если $x=(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y=(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то $x+y=(x_1+ +y_1, ..., x_n+y_n)$, $\alpha\, x=(\alpha\, x_1, ..., \alpha\, x_n)$. □

Лемма 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ является вещественным линейным пространством.

Доказательство состоит в проверке аксиом, которые, очевидно, выполняются. В частности, $\overline{0}=(0, ..., 0)$, $-x=(-x_1, ..., -x_n)$.

Определение. Элементы линейного пространства называются *векторами.*

Заметим, что векторы на плоскости или векторы трехмерного геометрического пространства со стандартными операциями сложения векторов и умножения вектора на число удовлетворяют аксиомам линейного пространства и, следовательно, являются векторами в смысле данного определения. Поскольку $\mathbb{R}^n$ является линейным пространством, то его элементы $\overline{a}=(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ также являются векторами.

Пусть на плоскости задана система координат. Множество координат (x_1, x_2) точек на плоскости образует двумерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^2$. При этом операции суммы и умножения на число в $\mathbb{R}^2$ соответствуют операциям суммы и умножения на число радиус-векторов точек на плоскости. Поскольку соответствие между точками на плоскости и их координатами является взаимно однозначным и сохраняет операции суммы и умножения на число, то при фиксированной системе координат плоскость можно отождествить с $\mathbb{R}^2$. Аналогично, трехмерное геометрическое пространство можно отождествить с $\mathbb{R}^3$.

§ 2. Евклидово пространство

Определение. Линейное вещественное пространство X называется *евклидовым*, если в нем определено скалярное произведение, т. е. любым элементам $x, y \in X$ поставлено в соответствие единственное число $(x, y) \in \mathbb{R}$, причем выполняются аксиомы

1) $\forall x \in X \hookrightarrow\ (x, x) \geq 0$;
2) $\forall x \in X:\ (x, x) = 0 \hookrightarrow\ x = \overline{0}$;
3) $\forall x, y, z \in X\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ (\alpha\, x + \beta\, y, z) = \alpha\,(x, z) + \beta\,(y, z)$;
4) $\forall x, y \in X \hookrightarrow\ (x, y) = (y, x)$.

Лемма 1. Линейное пространство $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$, где $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, является евклидовым.

Доказательство состоит в проверке аксиом, которые, очевидно, выполняются. □

Замечание. Определенное выше скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ соответствует скалярному произведению векторов на плоскости и в трехмерном геометрическом пространстве, данному в аналитической геометрии в случае ортонормированного базиса.

Теорема 1. (Неравенство Коши–Буняковского.) Пусть X – евклидово пространство. Тогда

$$\forall x, y \in X \hookrightarrow\ (x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y).$$

Доказательство. В силу аксиом скалярного произведения $\forall t \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ (tx + y, tx + y) \geq 0$. Следовательно, дискриминант квадратного трехчлена $(x, x)t^2 + 2(x, y)t + (y, y)$ меньше либо равен 0: $D = 4(x, y)^2 - 4(x, x) \cdot (y, y) \leq 0$, т. е. $(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$. □

Применяя неравенство Коши–Буняковского в пространстве $\mathbb{R}^n$, получаем:

Следствие. Для любых чисел $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

§ 3. Нормированное пространство

Определение. Линейное пространство X называется *нормированным*, если в пространстве X определена *норма*, т. е. каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие единственное число $\|x\|$ (норма элемента x), причем выполняются аксиомы

1) $\forall x \in X \hookrightarrow\ \|x\| \geq 0$;
2) $\forall x \in X:\ \|x\| = 0 \hookrightarrow\ x = \overline{0}$;
3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in X \hookrightarrow\ \|\alpha\, x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
4) $\forall x, y \in X \hookrightarrow\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Следствие из неравенства треугольника. Если X – нормированное пространство, то

$$\forall x, y \in X \hookrightarrow\ \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|.$$

Доказательство. В силу неравенства треугольника $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, следовательно, $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Аналогично, $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$. Поэтому $\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|$. □

Лемма 1. Любое евклидово пространство X является нормированным пространством с евклидовой нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Доказательство. Выполнение аксиом (1), (2), (3) нормы следует из аксиом (1), (2), (3) скалярного произведения. Докажем неравенство треугольника. $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2$. В силу неравенства Коши–Буняковского $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} = \|x\| \cdot \|y\|$ получаем $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. Следовательно, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

Из леммы 1 § 2 и леммы 1 § 3 получаем следующую лемму.

Лемма 2. Пространство $\mathbb{R}^n$ является нормированным пространством с нормой $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, где $x = (x_1, ..., x_n)$.

Определение. Евклидову норму $\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ вектора $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ также называют *длиной* или *модулем вектора* x и обозначают через $|x|$:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}. \tag{1}$$

Лемма 3. Если X – евклидово пространство, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ – евклидова норма, то для любых $x, y \in X$ справедливо равенство параллелограмма:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2. \quad (2)$$

Доказательство.

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)=$$
$$=(x,x)+2(x,y)+(y,y)+(x,x)-2(x,y)+(y,y)=$$
$$=2(x,x)+2(y,y)=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

□

Пример. В линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать неевклидовы нормы, например,

$$\|x\|_{\max}=\max_{k\in\{1,\dots,n\}}|x_k| \quad \forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

удовлетворяет всем аксиомам нормы. При $n\geq 2$ для векторов $x=(1,0,0,\dots,0)$ и $y=(0,1,0,\dots,0)$ имеем $\|x\|_{\max}=1$, $\|y\|_{\max}=1$, $\|x\pm y\|_{\max}=1$. Поэтому равенство (2) не выполнено. Следовательно, нельзя так ввести скалярное произведение в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$, чтобы $\|x\|_{\max}=\sqrt{(x,x)}$.

Задача 1. Пусть $[a,b]$ – некоторый отрезок. Пространством $C[a,b]$ называется линейное нормированное пространство, элементами которого являются все непрерывные на $[a,b]$ функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Линейные операции в $C[a,b]$ определяются естественным образом:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \forall f,g\in C[a,b] \quad \forall x\in[a,b],$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x) \quad \forall f\in C[a,b] \quad \forall\alpha\in\mathbb{R} \quad \forall x\in[a,b].$$

Показать, что норма

$$\|f\|_C=\max|f(x)|, \quad f\in C[a,b]$$

удовлетворяет всем аксиомам нормы. Показать, что в $C[a,b]$ нельзя ввести скалярное произведение так, чтобы $\|f\|_C=\sqrt{(f,f)}$ для всех $f\in C[a,b]$, т.е. чтобы $\|f\|_C$ была бы евклидовой нормой.

Указание: воспользоваться леммой 3 (показать, что равенство параллелограмма для нормы $\|f\|_C$ может быть не выполнено).

§ 4. Метрическое пространство

Определение. *Метрическим пространством* называется множество X с введенной на нем *метрикой* ϱ, т.е. функцией $\varrho: X\times X\to\mathbb{R}$, которая каждой паре (x,y), где $x\in X$ и $y\in X$, ставит в соответствие единственное число $\varrho(x,y)$, называемое расстоянием между элементами x и y, причем выполнены аксиомы

1) $\forall x,y\in X \hookrightarrow \ \varrho(x,y)\geq 0$;
2) $\forall x,y\in X \hookrightarrow \ \varrho(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow x=y$;
3) $\forall x,y\in X \hookrightarrow \ \varrho(y,x)=\varrho(x,y)$;
4) $\forall x,y,z\in X \hookrightarrow \ \varrho(x,z)\leq\varrho(x,y)+\varrho(y,z)$ (неравенство треугольника).

Лемма 1. Любое нормированное пространство является метрическим с метрикой $\varrho(x,y)=\|x-y\|$.

Доказательство. Проверим аксиомы метрики для $\varrho(x,y)=\|x-y\|$.

1) Из первой аксиомы нормированного пространства следует, что $\varrho(x,y)=\|x-y\|\geq 0$.

2) Если $\varrho(x,y)=0$, то $\|x-y\|=0$ и в силу второй аксиомы нормы имеем $x-y=\overline{0}$. Следовательно, $x=y$. Обратно, пусть $x=y$. Тогда $\varrho(x,y)=\|x-y\|=\|x-x\|=\|\overline{0}\|=\|0\cdot\overline{0}\|=0\cdot\|\overline{0}\|=0$.

3) Используя третью аксиому нормы, имеем $\varrho(y,x)=\|y-x\|=\|(-1)(x-y)\|=\|x-y\|=\varrho(x,y)$.

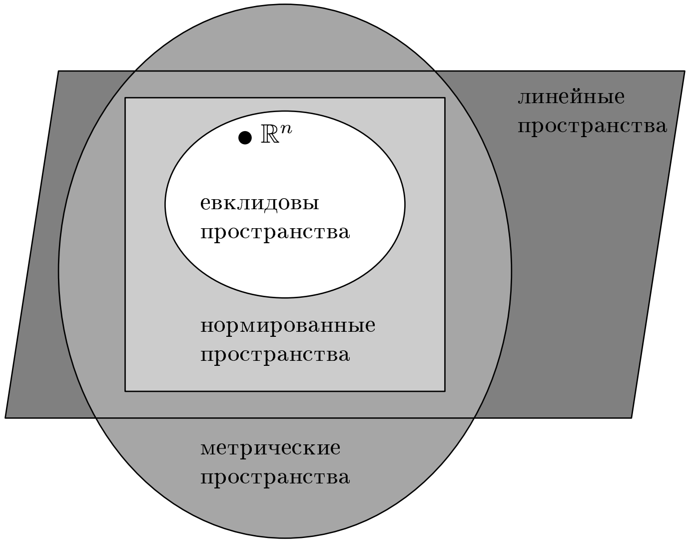
4) В силу неравенства треугольника для нормы получаем $\varrho(x,z)=\|x-z\|=\|(x-y)+(y-z)\|\leq\|x-y\|+\|y-z\|=\varrho(x,y)+\varrho(y,z)$. □

Из леммы 2 § 3 и леммы 1 текущего параграфа получаем следующую лемму.

Лемма 2. Пространство $\mathbb{R}^n$ является метрическим пространством с метрикой

$$\varrho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2} \quad \begin{array}{l}\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\\ \forall y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n.\end{array} \quad (1)$$

На следующем рисунке схематично показана вложенность рассматриваемых типов пространств.



Определение. Пусть X – метрическое пространство с метрикой ϱ, пусть $\varepsilon > 0$. Тогда ε-окрестностью точки $x_0 \in X$ называется множество

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \ \varrho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Определение. Пусть в метрическом пространстве X заданы последовательность $\{x_n\} \subset X$ и элемент $x_0 \in X$. Будем писать $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ или $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n \geq N \hookrightarrow \ x_n \in U_\varepsilon(x_0),$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_n, x_0) = 0$.

Определение. Пусть X – метрическое пространство с метрикой ϱ_X, Y – метрическое пространство с метрикой ϱ_Y. Пусть заданы функция $f : X \to Y$ и элементы $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Будем писать $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ или $f(x) \to y_0$ при $x \to x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(y_0),$$

где

$$\overset{o}{U}_\delta(x_0) = \{x \in X : \ 0 < \varrho_X(x, x_0) < \delta\},$$
$$U_\varepsilon(y_0) = \{y \in Y : \ \varrho_Y(y, y_0) < \varepsilon\}.$$

Также как и для функции одной переменной доказывается, что это определение предела функции по Коши эквивалентно следующему определению предела функции по Гейне:
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, если для любой $\{x_n\} \subset X$ – последовательности Гейне в точке $x_0 \in X$ справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$. Как и раньше, последовательность $\{x_n\}$ называется последовательностью Гейне в точке x_0, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $x_n \neq x_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Непосредственно из определения следует, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \varrho_Y(f(x), y_0) = 0. \tag{2}$$

Определение. Пусть X и Y – метрические пространства. Функция $f : X \to Y$ называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

§ 5. Предел и производная вектор-функции

Определение. n-мерной *вектор-функцией* $\overline{a}(t)$, заданной на множестве $T \subset \mathbb{R}$, называется отображение $\overline{a} : T \to \mathbb{R}^n$, ставящее в соответствие каждому числу $t \in T$ единственный вектор $\overline{a}(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t)) \in \mathbb{R}^n$.

Задание n-мерной вектор-функции $\overline{a}(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t))$ на множестве T эквивалентно заданию n скалярных функций $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ на множестве T.

Лемма 1. Пусть задан вектор $\overline{a}^0 = (a_1^0, \ldots, a_n^0)$ и в некоторой проколотой окрестности точки $t_0 \in \mathbb{R}$ задана вектор-функция $\overline{a}(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t)) \in \mathbb{R}^n$. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{a}(t) = \overline{a}^0$;

б) $\lim\limits_{t\to t_0} \varrho(\overline{a}(t), \overline{a}^0) = 0$;

в) $\lim\limits_{t\to t_0} |\overline{a}(t) - \overline{a}^0| = 0$;

г) $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \hookrightarrow \lim\limits_{t\to t_0} a_i(t) = a_i^0$.

Доказательство. Эквивалентность (а) $\Leftrightarrow$ (б) следует из формулы (2) § 4. Эквивалентность (б) $\Leftrightarrow$ (в) следует из формулы (1) § 4 и формулы (1) § 3.

Используя равенство (1) § 3 (определение нормы в $\mathbb{R}^n$), получаем

$$(в) \iff \lim_{t\to t_0} |\overline{a}(t) - \overline{a}^0| = 0 \iff \lim_{t\to t_0} |\overline{a}(t) - \overline{a}^0|^2 = 0 \iff$$

$$\iff \lim_{t\to t_0} \left(|a_1(t) - a_1^0|^2 + \ldots + |a_n(t) - a_n^0|^2\right) = 0 \iff$$

$$\iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} \hookrightarrow \lim_{t\to t_0} |a_i(t) - a_i^0|^2 = 0 \iff (г).$$

$\square$

Лемма 2. Если $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{a}(t) = \overline{a}_0$, то $\lim\limits_{t\to t_0} |\overline{a}(t)| = |\overline{a}_0|$.

Доказательство. По следствию из неравенства треугольника $\Big||\overline{a}(t)| - |\overline{a}_0|\Big| \le |\overline{a}(t) - \overline{a}_0| \to 0$ при $t \to t_0$. $\square$

Лемма 3. Если $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{a}(t) = \overline{a}_0$, $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = \varphi_0$, то $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t)\overline{a}(t) = \varphi_0\overline{a}_0$.

Доказательство. $|\varphi(t)\overline{a}(t) - \varphi_0\overline{a}_0| = |\varphi(t)\overline{a}(t) - \varphi(t)\overline{a}_0 + \varphi(t)\overline{a}_0 - \varphi_0\overline{a}_0| \le |\varphi(t)|\,|\overline{a}(t) - \overline{a}_0| + |\varphi(t) - \varphi_0|\,|\overline{a}_0| \to |\varphi_0| \cdot 0 + 0 \cdot |\overline{a}_0| = 0$ при $t \to t_0$. $\square$

Лемма 4. Если $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{a}(t) = \overline{A}$, $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{b}(t) = \overline{B}$, то

1) $\exists \lim\limits_{t\to t_0} (\overline{a}(t) + \overline{b}(t)) = \overline{A} + \overline{B}$,

2) $\exists \lim\limits_{t\to t_0} (\overline{a}(t), \overline{b}(t)) = (\overline{A}, \overline{B})$,

Доказательство. 1) $|\overline{a}(t) + \overline{b}(t) - (\overline{A} + \overline{B})| \le |\overline{a}(t) - \overline{A}| + |\overline{b}(t) - \overline{B}| \to 0$ при $t \to t_0$.

2) $|(\overline{a}(t), \overline{b}(t)) - (\overline{A}, \overline{B})| = |(\overline{a}(t), \overline{b}(t)) - (\overline{A}, \overline{b}(t)) + (\overline{A}, \overline{b}(t)) - (\overline{A}, \overline{B})| \le |\overline{a}(t) - \overline{A}|\,|\overline{b}(t)| + |\overline{A}|\,|\overline{b}(t) - \overline{B}| \to 0 \cdot |\overline{B}| + |\overline{A}| \cdot 0 = 0$ при $t \to t_0$. $\square$

Определение. *Векторным произведением* векторов $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ называется вектор

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Заметим, что данное определение векторного произведения соответствует определению векторного произведения в случае правого ортонормированного базиса, данному в аналитической геометрии. Легко проверить, что векторное произведение обладает свойствами

1) $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^3 \hookrightarrow [\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$;

2) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\ \ \forall \overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{b} \in \mathbb{R}^3 \hookrightarrow [\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2, \overline{b}] = \alpha_1[\overline{a}_1, \overline{b}] + \alpha_2[\overline{a}_2, \overline{b}]$;

3) $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^3 \hookrightarrow |[\overline{a}, \overline{b}]| \le |\overline{a}|\,|\overline{b}|$.

Лемма 5. Если $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{a}(t) = \overline{A} \in \mathbb{R}^3$, $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{b}(t) = \overline{B} \in \mathbb{R}^3$, то $\exists \lim\limits_{t\to t_0} [\overline{a}(t), \overline{b}(t)] = [\overline{A}, \overline{B}]$.

Доказательство. $|[\overline{a}(t), \overline{b}(t)] - [\overline{A}, \overline{B}]| \le |[\overline{a}(t) - \overline{A}, \overline{b}(t)]| + |[\overline{A}, \overline{b}(t) - \overline{B}]| \le |\overline{a}(t) - \overline{A}|\,|\overline{b}(t)| + |\overline{A}|\,|\overline{b}(t) - \overline{B}| \to 0$. $\square$

Определение. Вектор-функция $\overline{a}(t)$ называется *непрерывной* в точке t_0, если она определена в некоторой $U_\delta(t_0)$ и $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{a}(t) = \overline{a}(t_0)$.

Определение. Пусть вектор-функция $\overline{a}(t)$ определена в некоторой $U_\delta(t_0)$. *Производной* вектор-функции $\overline{a}(t)$ в точке t_0 называется

$$\overline{a}'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\overline{a}(t_0 + \Delta t) - \overline{a}(t_0)}{\Delta t}.$$

Если указанный предел не существует, то производная $\overline{a}'(t_0)$ не существует.

Лемма 6. Существование производной вектор-функции $\overline{a}(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t))$ эквивалентно существованию конечных производных всех ее компонент $a_i(t)$, причем $\overline{a}'(t) = (a_1'(t), \ldots, a_n'(t))$.

Доказательство состоит в применении леммы 1. $\square$

Производные высших порядков вектор-функции $\overline{a}(t)$ определяются по индукции: $\overline{a}^{(1)}(t) = \overline{a}'(t)$, $\overline{a}^{(n+1)}(t) = (\overline{a}^{(n)}(t))'$.

Лемма 7. (Правила дифференцирования.) Пусть вектор-функции $\overline{a}(t)$, $\overline{b}(t)$ и скалярная функция $\varphi(t)$ имеют производные в точке t_0. Тогда в точке t_0 существуют производные функций $\overline{a} + \overline{b}$, $\varphi\overline{a}$, $(\overline{a}, \overline{b})$, $[\overline{a}, \overline{b}]$, причем

$(\overline{a}+\overline{b})' = \overline{a}' + \overline{b}'$, $\quad (\varphi\overline{a})' = \varphi'\overline{a} + \varphi\overline{a}'$,
$(\overline{a},\overline{b})' = (\overline{a}',\overline{b}) + (\overline{a},\overline{b}')$, $\quad [\overline{a},\overline{b}]' = [\overline{a}',\overline{b}] + [\overline{a},\overline{b}']$.

Докажем, например, последнее равенство. Обозначим $\Delta\overline{a} = \overline{a}(t_0+\Delta t) - \overline{a}(t_0)$, $\quad \Delta\overline{b} = \overline{b}(t_0+\Delta t) - \overline{b}(t_0)$. Тогда

$$[\overline{a},\overline{b}]'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\overline{a}(t_0+\Delta t),\overline{b}(t_0+\Delta t)] - [\overline{a}(t_0),\overline{b}(t_0)]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\overline{a}(t_0)+\Delta\overline{a},\overline{b}(t_0)+\Delta\overline{b}] - [\overline{a}(t_0),\overline{b}(t_0)]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\Delta\overline{a},\overline{b}(t_0)] + [\overline{a}(t_0),\Delta\overline{b}] + [\Delta\overline{a},\Delta\overline{b}]}{\Delta t} =$$

$$= \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{a}}{\Delta t},\overline{b}(t_0)\right] + \left[\overline{a}(t_0),\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{b}}{\Delta t}\right] +$$

$$+ \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{a}}{\Delta t},\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\overline{b}\right] = [\overline{a}',\overline{b}](t_0) + [\overline{a},\overline{b}'](t_0). \qquad \square$$

Лемма 8. (Производная сложной функции.) Пусть в окрестности точки s_0 задана скалярная функция $t(s)$, а в окрестности точки $t_0 = t(s_0)$ задана вектор-функция $\overline{a}(t)$. Пусть $\exists t'(s_0) \in \mathbb{R}$, $\exists\overline{a}'(t_0) \in \mathbb{R}^n$. Тогда в точке s_0 существует производная сложной функции $\overline{b}(s) = \overline{a}(t(s))$: $\quad \overline{b}'(s_0) = \overline{a}'(t_0)\cdot t'(s_0)$.

Доказательство состоит в применении леммы 6 и теоремы о производной сложной функции для скалярных функций. $\square$

Определение. Пусть в $\overset{o}{U}_\delta(t_0)$ заданы вектор-функция $\overline{a}(t)$ и скалярная функция $\varphi(t)$, причем $\forall t \in \overset{o}{U}_\delta(t_0) \hookrightarrow \varphi(t) \neq 0$. Тогда функция $\overline{a}(t)$ называется *бесконечно малой* относительно функции $\varphi(t)$:

$$\overline{a}(t) = \overline{o}(\varphi(t)) \quad \text{при} \quad t\to t_0, \quad \text{если} \quad \lim_{t\to t_0}\frac{\overline{a}(t)}{\varphi(t)} = \overline{0}.$$

Лемма 9. Пусть в $\overset{o}{U}_\delta(t_0)$ заданы вектор-функция $\overline{a}(t) = (a_1(t),\ldots,a_n(t))$ и скалярная функция $\varphi(t)$. Тогда при $t\to t_0$:

$$\overline{a}(t) = \overline{o}(\varphi(t)) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(a_1(t) = o(\varphi(t)),\ldots,a_n(t) = o(\varphi(t))\Big).$$

Доказательство следует из леммы 1.

Определение. Вектор-функция $\overline{a}(t) \in \mathbb{R}^n$, определенная в некоторой $U_\delta(t_0)$, называется *дифференцируемой* в точке t_0, если $\exists\overline{A} \in \mathbb{R}^n$:

$$\Delta\overline{a} = \overline{a}(t_0+\Delta t) - \overline{a}(t_0) = \overline{A}\,\Delta t + \overline{o}(\Delta t) \quad \text{при} \quad \Delta t\to 0.$$

При этом линейная вектор-функция $\overline{A}\,\Delta t$ называется *дифференциалом* вектор-функции $\overline{a}(t)$ в точке t_0:

$$d\overline{a}(t_0) = \overline{A}\,\Delta t = \overline{A}\,dt, \quad \Delta\overline{a} = d\overline{a}(t_0) + \overline{o}(\Delta t) \quad \text{при} \quad \Delta t\to 0.$$

Аналогично доказательству теоремы о связи производной и дифференциала для скалярных функций легко доказать, что

Лемма 10. $\quad \exists d\overline{a}(t_0) \iff \exists\overline{a}'(t_0)$.

Для дифференцируемой вектор-функции: $\quad d\overline{a}(t_0) = \overline{a}'(t_0)\,dt$.

Замечание. Теорема Лагранжа о среднем для скалярных функций непосредственно не обобщается на вектор-функции. Например, для вектор-функции $\overline{a}(t) = (\cos t,\sin t)$ не существует $\xi \in (0,2\pi)$: $\overline{a}(2\pi) - \overline{a}(0) = \overline{a}'(\xi)\cdot 2\pi$. Действительно, $\overline{a}(2\pi) - \overline{a}(0) = (1,0) - (1,0) = (0,0)$, но $\overline{a}'(\xi) = (-\sin\xi,\cos\xi)$ и $\forall\xi \in (0,2\pi) \hookrightarrow |\overline{a}'(\xi)| = \sqrt{\sin^2\xi + \cos^2\xi} = 1 \neq 0$, следовательно, $\overline{a}(2\pi) - \overline{a}(0) = (0,0) \neq \overline{a}'(\xi)\cdot 2\pi$.

Теорема 1. (Теорема Лагранжа о среднем для вектор-функции.) Пусть вектор-функция $\overline{a}(t)$ непрерывна на $[t_0,t_1]$ и дифференцируема на (t_0,t_1). Тогда

$$\exists\xi \in (t_0,t_1): \quad |\overline{a}(t_1) - \overline{a}(t_0)| \le |\overline{a}'(\xi)|(t_1-t_0).$$

Доказательство. Определим скалярную функцию $\varphi(t) = (\overline{a}(t),\overline{a}(t_1)-\overline{a}(t_0))$. По теореме Лагранжа о среднем для скалярной функции $\varphi(t)$ $\exists\xi \in (t_0,t_1) : \varphi(t_1) - \varphi(t_0) = \varphi'(\xi)(t_1-t_0)$, т. е.

$$(\overline{a}(t_1),\overline{a}(t_1)-\overline{a}(t_0)) - (\overline{a}(t_0),\overline{a}(t_1)-\overline{a}(t_0)) = (\overline{a}'(\xi),\overline{a}(t_1)-\overline{a}(t_0))\,(t_1-t_0),$$

следовательно,

$$|\overline{a}(t_1) - \overline{a}(t_0)|^2 \leq |\overline{a}'(\xi)| \, |\overline{a}(t_1) - \overline{a}(t_0)| \, (t_1 - t_0).$$

Если $\overline{a}(t_1) = \overline{a}(t_0)$, то доказываемое неравенство выполняется автоматически $\forall \xi \in (t_0, t_1)$. Если $\overline{a}(t_1) \neq \overline{a}(t_0)$, то, сокращая последнее неравенство на $|\overline{a}(t_1) - \overline{a}(t_0)|$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Теорема 2. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.) Пусть вектор-функция $\overline{a}(t)$ определена в $U_\delta(t_0)$ и $\exists \overline{a}^{(n)}(t_0)$. Тогда

$$\overline{a}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{a}^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \overline{o}((t - t_0)^n) \quad \text{при} \quad t \to t_0.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для каждой компоненты вектор-функции $\overline{a}(t)$. Поскольку остаточные члены для каждой компоненты являются $o((t - t_0)^n)$, то в силу леммы 9 составленный из них вектор является $\overline{o}((t - t_0)^n)$. $\square$

§ 6. Кривые

Определение. *Годографом* вектор-функции $\overline{r} : T \to \mathbb{R}^n$ называется множество точек $\overline{r}(t)$, где параметр t пробегает множество T.

Определение. *Кривой* Γ называется годограф непрерывной вектор-функции $\overline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$:

$$\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\}.$$

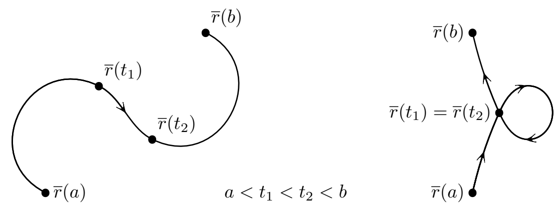
Определение. Если концы кривой $\Gamma = \{\overline{r}(t) : t \in [a, b]\}$ совпадают, т. е. $\overline{r}(a) = \overline{r}(b)$, то кривая Γ называется *замкнутой.*

Определение. Точка $\overline{r}_0$ называется *точкой самопересечения* кривой $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\}$, если $\exists t_1, t_2 \in [a, b]$: $t_1 \neq t_2$ и $\overline{r}_0 = \overline{r}(t_1) = \overline{r}(t_2)$.

Определение. Если для кривой $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\}$ не существует чисел t_1, t_2 таких, что $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ и $\overline{r}(t_1) = \overline{r}(t_2)$ кроме,

быть может, $t_1 = a$, $t_2 = b$ (иначе говоря, нет других точек самопересечения, кроме концов кривой), то кривая Γ называется *простой кривой.*

Определение. (Ориентация простой незамкнутой кривой.) Пусть задана простая незамкнутая кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\}$. Будем говорить, что точка $\overline{r}_2 \in \Gamma$ *следует за* точкой $\overline{r}_1 \in \Gamma$ или точка $\overline{r}_1$ *предшествует* точке $\overline{r}_2$, если $\overline{r}_1 = \overline{r}(t_1)$, $\overline{r}_2 = \overline{r}(t_2)$, $t_1 < t_2$. При этом кривую Γ называют *ориентированной* по возрастанию параметра t.



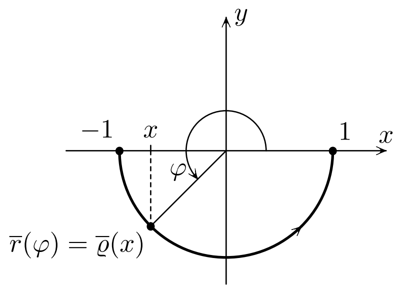
Определение. *Разбиением отрезка* $[a, b]$ называется конечный набор точек $\mathrm{T} = \{t_0, t_1, ..., t_I\}$ таких, что $a = t_0 < t_1 < ... < t_I = b$.

Определение. Пусть задана кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\}$ и разбиение $\mathrm{T} = \{t_0, t_1, ..., t_I\}$ отрезка $[a, b]$. Тогда будем говорить, что кривая Γ *разбита на кривые* $\Gamma_i = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [t_{i-1}, t_i]\}$, $i = 1, \ldots, I$.

Определение. (Ориентация кривой, состоящей из конечного числа простых незамкнутых кривых.) Пусть кривая Γ разбита на простые незамкнутые кривые Γ_i, ориентированые по возрастанию параметра t. Тогда упорядоченная по возрастанию параметра t совокупность $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_I$ называется *ориентированной кривой* Γ: $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 ... \Gamma_I$.

Далее мы рассматриваем только ориентированные кривые. Для краткости будем говорить "кривая но всегда подразумевать ориентированную кривую.

Замечание. Разные вектор-функции могут задавать одну и ту же кривую. Например, кривая $\Gamma = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) : \varphi \in [-\pi, 0]\}$, задаваемая вектор-функцией $\overline{r}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\varphi \in [-\pi, 0]$, может быть задана другой вектор-функцией $\overline{\varrho}(x) = (x, -\sqrt{1 - x^2})$, $x \in [-1, 1]$: $\Gamma = \{(x, -\sqrt{1 - x^2}) : x \in [-1, 1]\}$.



Определение. Вектор-функция $\overline{\varrho}(s)$, $s \in [s_1, s_2]$ называется *допустимой параметризацией* кривой $\Gamma = \{\overline{r}(t) \;:\; t \in [t_1, t_2]\}$, если существует непрерывная строго возрастающая функция $t(s)$ такая, что $t(s_1) = t_1$, $t(s_2) = t_2$ и $\forall s \in [s_1, s_2] \hookrightarrow \;\overline{\varrho}(s) = \overline{r}(t(s))$.

При этом считается, что вектор функции $\overline{r}(t)$ и $\overline{\varrho}(s)$ параметризуют (задают) одну и ту же кривую Γ.

Замечание. Так как при допустимой замене параметра старый параметр является строго возрастающей функцией нового параметра, то ориентация кривой не меняется.

§ 7. Длина кривой

Определение. *Отрезком* $[\overline{r}_1, \overline{r}_2]$ в $\mathbb{R}^n$ называется множество точек $\{\overline{r}_1 + t(\overline{r}_2 - \overline{r}_1) : \; t \in [0,1]\}$.

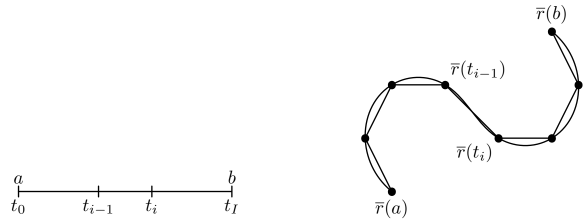
Определение. Пусть задана кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) : t \in [a,b]\}$ и разбиение $\mathrm{T} = \{t_0, t_1, ..., t_I\}$ отрезка $[a,b]$. *Ломаной* $\mathcal{P}$, вписанной в кривую Γ, называется упорядоченный по возрастанию параметра t набор отрезков $[\overline{r}(t_{i-1}), \overline{r}(t_i)]$:

$$\mathcal{P} = \left([\overline{r}(t_0), \overline{r}(t_1)], [\overline{r}(t_1), \overline{r}(t_2)], ..., [\overline{r}(t_{I-1}), \overline{r}(t_I)]\right).$$

При этом говорят, что разбиение T *порождает ломаную* $\mathcal{P}$. Отрезки $[\overline{r}(t_{i-1}), \overline{r}(t_i)]$ называются *звеньями ломаной* $\mathcal{P}$.

Длиной ломаной $\mathcal{P}$ называется сумма длин ее звеньев:

$$|\mathcal{P}| = \sum_{i=1}^{I} |\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})|.$$



Определение. *Длиной кривой* Γ называется точная верхняя грань длин ломанных, вписанных в Γ:

$$|\Gamma| = \sup_{\mathcal{P}} |\mathcal{P}| = \sup_{\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{I} |\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})|.$$

Если $|\Gamma| < +\infty$, то кривая Γ называется *спрямляемой*.

Лемма 1. Если спрямляемая кривая Γ разбита на кривые Γ_1 и Γ_2, то кривые Γ_1 и Γ_2 спрямляемы, причем $\quad |\Gamma| = |\Gamma_1| + |\Gamma_2|$.

Доказательство. 1) Покажем, что кривые Γ_1 и Γ_2 спрямляемы и $|\Gamma_1| + |\Gamma_2| \le |\Gamma|$.

Пусть $\mathcal{P}_1$ – ломанная, вписанная в Γ_1, $\mathcal{P}_2$ – ломанная, вписанная в Γ_2, тогда $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ – ломанная, вписанная в Γ. Так как $|\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2| = |\mathcal{P}| \le |\Gamma|$, то $\sup\limits_{\mathcal{P}_1} |\mathcal{P}_1| < +\infty$, $\sup\limits_{\mathcal{P}_2} |\mathcal{P}_2| < +\infty$ и $|\Gamma_1| + |\Gamma_2| = \sup\limits_{\mathcal{P}_1} |\mathcal{P}_1| + \sup\limits_{\mathcal{P}_2} |\mathcal{P}_2| \le |\Gamma|$.

2) Покажем, что $|\Gamma| \le |\Gamma_1| + |\Gamma_2|$.

Пусть кривая Γ параметризована вектор-функцией $\overline{r}(t)$: $\quad \Gamma = \{\overline{r}(t) \;:\; t \in [a,b]\}$. Пусть точка $c \in (a,b)$ разбивает Γ на Γ_1 и Γ_2: $\quad \Gamma_1 = \{\overline{r}(t) \;:\; t \in [a,c]\}$, $\quad \Gamma_2 = \{\overline{r}(t) \;:\; t \in [c,b]\}$. Пусть $\mathcal{P}$ – произвольная ломанная, вписанная в кривую Γ, $\quad \mathrm{T} = \{t_0, t_1, ..., t_I\}$ – разбиение отрезка $[a,b]$, порождающее ломаную $\mathcal{P}$. Определим j из условия $t_{j-1} < c \le t_j$. Ломанную, вписанную в кривую Γ_1 и порожденную разбиением $\mathrm{T}_1 = \{t_0, t_1, ..., t_{j-1}, c\}$, обозначим через $\mathcal{P}_1$. Ломанную, вписанную в кривую Γ_2 и порожденную разбиением $\mathrm{T}_2 = \{c, t_j, t_{j+1}, ..., t_I\}$, обозначим через $\mathcal{P}_2$ (если $c = t_j$, то $\mathrm{T}_2 = \{t_j, t_{j+1}, ..., t_I\}$). По определению верхней грани $|\mathcal{P}_1| \le |\Gamma_1|$, $|\mathcal{P}_2| \le |\Gamma_2|$.

Длины ломаных $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ равны соответственно

$$|\mathcal{P}| = \sum_{i=1}^{I} |\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})| =$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} |\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})| + |\overline{r}(t_j) - \overline{r}(t_{j-1})| + \sum_{i=j+1}^{I} |\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})|,$$

$$|\mathcal{P}_1| = \sum_{i=1}^{j-1} |\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})| + |\overline{r}(c) - \overline{r}(t_{j-1})|,$$

$$|\mathcal{P}_2| = |\overline{r}(t_j) - \overline{r}(c)| + \sum_{i=j+1}^{I} |\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})|.$$

В силу неравенства треугольника $|\overline{r}(t_j) - \overline{r}(t_{j-1})| \le |\overline{r}(c) - \overline{r}(t_{j-1})| + |\overline{r}(t_j) - \overline{r}(c)|$, следовательно, $|\mathcal{P}| \le |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2| \le |\Gamma_1| + |\Gamma_2|$. Итак, $|\Gamma| = \sup\limits_{\mathcal{P}} |\mathcal{P}| \le |\Gamma_1| + |\Gamma_2| \le |\Gamma|$, т. е. $|\Gamma_1| + |\Gamma_2| = |\Gamma|$. □

Определение. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *непрерывно дифференцируемой* на $[a,b]$, если

1) $\forall t \in [a,b] \quad \exists f'(t)$, где при $t = a$ под $f'(t)$ понимается правая, а при $t = b$ – левая производная и

2) функция $f'(t)$ непрерывна на $[a,b]$.

Непрерывная дифференцируемость вектор-функции $\overline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ определяется аналогично.

Теорема 1. (Достаточное условие спрямляемости кривой.) Пусть вектор-функция $\overline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, параметризующая кривую $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\}$, непрерывно дифференцируема. Тогда Γ спрямляема и

$$|\Gamma| \le (b-a) \max_{t\in[a,b]} |\overline{r}'(t)|.$$

Доказательство. Так как скалярная функция $|\overline{r}'(t)|$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса для скалярных функций $\exists \max\limits_{t\in[a,b]} |\overline{r}'(t)| = M$.

Пусть $\mathcal{P}$ – ломаная, вписанная в кривую Γ, порожденная некоторым разбиением $\mathrm{T} = \{t_0, t_1, ..., t_I\}$ отрезка $[a,b]$. По теореме Лагранжа для вектор-функций $\forall i \in \{1, 2, ..., I\} \quad \exists \xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$:

$$|\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})| \le |\overline{r}'(\xi_i)|\,(t_i - t_{i-1}) \le M\,(t_i - t_{i-1}),$$

следовательно,

$$|\mathcal{P}| = \sum_{i=1}^{I} |\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})| \le M \sum_{i=1}^{I} (t_i - t_{i-1}) = M\,(b-a).$$

Поэтому $\quad |\Gamma| = \sup\limits_{\mathcal{P}} |\mathcal{P}| \le \max\limits_{t\in[a,b]} |\overline{r}'(t)|\,(b-a)$. □

Определение. Пусть кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\}$ спрямляема. Определим переменную дугу $\Gamma_t = \{\overline{r}(u) \ : \ u \in [a,t]\}$. Функцию $s(t) = |\Gamma_t|$ называют ***переменной длиной дуги*** кривой Γ.

Теорема 2. Пусть вектор-функция $\overline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, параметризующая кривую $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\}$, непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги $s(t)$ непрерывно дифференцируема и $\forall t_0 \in [a,b] \hookrightarrow \ s'(t_0) = |\overline{r}'(t_0)|$ (здесь при $t_0 = a$ и при $t_0 = b$ имеются в виду односторонние производные).

Доказательство. Пусть $t_0 \in [a,b)$, $\Delta t \in (0, b - t_0)$. Обозначим $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, $\Delta\overline{r} = \overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)$.

В силу леммы 1 длина кривой $\Delta\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [t_0, t_0 + \Delta t]\}$ равна $|\Delta\Gamma| = \Delta s$. Так как длина отрезка $[\overline{r}(t_0), \overline{r}(t_0 + \Delta t)]$ не превосходит длины дуги $\Delta\Gamma$, то

$$|\Delta\overline{r}| \le |\Delta\Gamma|. \tag{1}$$

По теореме 1 $|\Delta\Gamma| \le \max\limits_{t\in[t_0,t_0+\Delta t]} |\overline{r}'(t)|\,|\Delta t|$. По определению максимума $\exists \xi \in [t_0, t_0 + \Delta t] : \ \max\limits_{t\in[t_0,t_0+\Delta t]} |\overline{r}'(t)| = |\overline{r}'(\xi)|$, следовательно, $|\Delta\Gamma| \le |\overline{r}'(\xi)|\,|\Delta t|$, откуда в силу (1) получаем $\frac{|\Delta\overline{r}|}{|\Delta t|} \le \frac{|\Delta\Gamma|}{|\Delta t|} \le |\overline{r}'(\xi)|$. Поэтому

$$\left|\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}\right| \le \frac{\Delta s}{\Delta t} \le |\overline{r}'(\xi)|. \tag{2}$$

Так как $|t_0 - \xi| \le |\Delta t|$, то при $\Delta t \to +0$ выполняется $\xi \to t_0 + 0$ и в силу непрерывности функции $\overline{r}'(t) \quad \exists \lim\limits_{\Delta t\to+0} |\overline{r}'(\xi)| = |\overline{r}'(t_0)|$. Кроме того, по определению производной $\quad \exists \lim\limits_{\Delta t\to+0} \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \overline{r}'(t_0)$, следовательно, $\quad \exists \lim\limits_{\Delta t\to+0} \left|\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}\right| = |\overline{r}'(t_0)|$. Поэтому из (2) по теореме о трех функциях следует, что $\quad \exists \lim\limits_{\Delta t\to+0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = |\overline{r}'(t_0)|$, т. е. $\exists s'_+(t_0) = |\overline{r}'(t_0)|$. Аналогично $\forall t_0 \in (a,b] \ \exists s'_-(t_0) = |\overline{r}'(t_0)|$. □

Определение. Будем говорить, что вектор-функция $\overline{\varrho}[0,|\Gamma|] \to \mathbb{R}^n$ является *натуральной параметризацией* кривой $\Gamma = \{\overline{\varrho}(t) \ : \ t \in [0,|\Gamma|]\}$, если параметр t является переменной длиной дуги, т. е. $\forall t \in [0,|\Gamma|] \to s(t) = t$.

Определение. Кривая Γ называется *гладкой*, если

1) возможна натуральная параметризация кривой Γ : $\Gamma = \{\overline{\varrho}(s) \ : \ s \in [0,|\Gamma|]\}$ и

2) вектор-функция $\overline{\varrho}[0,|\Gamma|] \to \mathbb{R}^n$, задающая натуральную параметризацию кривой Γ, непрерывно дифференцируема на $[0,|\Gamma|]$.

Определение. Пусть вектор-функция $\overline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, параметризующая кривую $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\}$, дифференцируема на $[a,b]$. Точка $t_0 \in [a,b]$ называется *особой точкой* параметризации $\overline{r}$, если $\overline{r}'(t_0) = \overline{0}$.

Теорема 3. (О существовании натуральной параметризации.) Пусть вектор-функция $\overline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, параметризующая кривую $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\}$, непрерывно дифференцируема и не имеет особых точек. Тогда

1) натуральная параметризация $\overline{\varrho} : [0,|\Gamma|] \to \mathbb{R}^n$ кривой Γ является допустимой;

2) $\forall t \in [a,b] \quad \exists\, \overline{\varrho}'(s)|_{s=s(t)} = \frac{\overline{r}'(t)}{|\overline{r}'(t)|}$;

3) кривая Γ является гладкой.

Доказательство. 1) По теореме 2 $\forall t \in [a,b]$ $\exists s'(t) = |\overline{r}'(t)|$. Так как $\overline{r}'(t) \neq \overline{0}$, то $s'(t) > 0$. Следовательно, переменная длина дуги $s(t)$ является строго возрастающей непрерывной функцией. Поэтому существует обратная к ней функция $t(s)$, которая также строго возрастает и непрерывна. По определению допустимой параметризации получаем, что параметризация $\overline{\varrho}(s) = \overline{r}(t(s))$, где $s \in [0,|\Gamma|]$, является допустимой.

2) Так как $\exists s'(t) = |\overline{r}'(t)| \neq 0$, то по теореме о производной обратной функции $\exists t'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\overline{r}'(t)|}$. По теореме о производной сложной функции $\exists\, \overline{\varrho}'(s) = \overline{r}'(t)\, t'(s) = \frac{\overline{r}'(t)}{|\overline{r}'(t)|}$.

3) Так как вектор-функция $\overline{r}(t)$ непрерывно дифференцируема и $\overline{r}'(t) \neq \overline{0}$, то вектор-функция $\overline{\varrho}'(s) = \frac{\overline{r}'(t(s))}{|\overline{r}'(t(s))|}$ непрерывна, следовательно, вектор-функция $\overline{\varrho}(s)$ – непрерывно дифференцируема и кривая Γ – гладкая. $\square$

Замечание. Условие отсутствия особых точек является существенным для гладкости кривой. Например, кривая $\Gamma = \{(t^3, |t|^3) : t \in [-1,1]\}$ задается непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $\overline{r}(t) = (t^3, |t|^3)$, так как ее производная $\overline{r}'(t) = (3t^2, 3t^2 \operatorname{sign} t)$ – непрерывная вектор-функция. Однако Γ не является гладкой, так как в натуральной параметризации $\Gamma = \{\overline{\varrho}(s) : s \in [0, 2\sqrt{2}]\}$ задается вектор-функцией $\overline{\varrho}(s) = (\frac{s}{\sqrt{2}} - 1, |\frac{s}{\sqrt{2}} - 1|)$, не являющейся дифференцируемой в точке $s = \sqrt{2}$.

§ 8. Первое приближение кривой (касательная)

Пусть кривая $\Gamma = \{\overline{r}(s) : s \in [0,|\Gamma|]\}$ задана в натуральной параметризации. Пусть s_0, $s_0 + \Delta s \in [0,|\Gamma|]$, $\Delta s \neq 0$. Обозначим $\overline{r}_0 = \overline{r}(s_0)$, $\Delta\overline{r} = \overline{r}(s_0 + \Delta s) - \overline{r}_0$. Уравнение секущей, проходящей через точки $\overline{r}_0$ и $\overline{r}(s_0 + \Delta s)$, имеет вид $\overline{r} = \overline{r}_0 + \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta s}u$ (где $u \in \mathbb{R}$ – параметр прямой).

Определение. Прямая $\overline{r} = \overline{r}_{\mathbf{кас}}(u) = \overline{r}_0 + \overline{\tau}u$ называется *касательной* к кривой $\Gamma = \{\overline{r}(s) \ : \ s \in [0,|\Gamma|]\}$ в точке $\overline{r}_0$, если эта прямая является предельным положением секущей:

$$\forall u \in \mathbb{R} \hookrightarrow \lim_{\Delta s \to 0} \left(\overline{r}_0 + \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta s}\, u \right) = \overline{r}_{\mathbf{кас}}(u) = \overline{r}_0 + \overline{\tau}u.$$

Теорема 1. Пусть кривая $\Gamma = \{\overline{r}(s) : s \in [0,|\Gamma|]\}$ задана в натуральной параметризации. Тогда существование касательной к кривой Γ в точке $\overline{r}(s_0)$ эквивалентно существованию производной $\frac{d\overline{r}}{ds}$ в точке s_0. При этом вектор $\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{ds}$ является единичным вектором касательной, направленным по возрастанию параметра s.

Доказательство. Из определения касательной следует, что прямая $\overline{r} = \overline{r}(s_0) + \overline{\tau}u$ является касательной тогда и только тогда, когда $\overline{\tau} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta s}$, т. е. $\exists \frac{d\overline{r}}{ds} = \overline{r}'(s_0) = \overline{\tau}$. Из теоремы 2 § 7 следует, что $|\overline{r}'(s)| = s'(s) = 1$, т. е. $|\overline{\tau}| = 1$. Так как при достаточно малых Δs вектор $\Delta\overline{r}$ направлен в сторону возрастания параметра s, то вектор $\overline{\tau} = \lim\limits_{\Delta s \to +0} \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta s}$ направлен в ту же сторону. $\square$

Теорема 2. Пусть кривая $\Gamma = \{\overline{r}(s) : s \in [0, |\Gamma|]\}$ задана в натуральной параметризации и пусть $\exists \overline{r}'(s_0)$. Тогда

$$\overline{r}(s) = \overline{r}_{\text{кас}}(s - s_0) + \overline{o}(s - s_0) \quad \text{при} \quad s \to s_0,$$

т. е. в окрестности точки $\overline{r}(s_0)$ кривая Γ в первом приближении совпадает со своей касательной.

Доказательство. Разложим вектор-функцию $\overline{r}(s)$ по формуле Тейлора: $\overline{r}(s) = \overline{r}(s_0) + \overline{r}'(s_0)\,(s - s_0) + \overline{o}(s - s_0)$ при $s \to s_0$. Так как по теореме 1 имеем $\overline{r}'(s_0) = \overline{\tau}$, то $\overline{r}(s) = \overline{r}(s_0) + \overline{\tau}\,(s - s_0) + \overline{o}(s - s_0) = \overline{r}_{\text{кас}}(s - s_0) + \overline{o}(s - s_0)$ при $s \to s_0$. $\square$

Теорема 3. Пусть вектор-функция $\overline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, параметризующая кривую $\Gamma = \{\overline{r}(t) : t \in [a, b]\}$ непрерывно дифференцируема и не имеет особых точек. Тогда в любой точке $\overline{r}_0 = \overline{r}(t_0) \in \Gamma$ существует касательная к кривой Γ: $\overline{r} = \overline{r}_{\text{кас}}(u) = \overline{r}_0 + \overline{\tau}u$, где единичный вектор касательной, указывающий ориентацию кривой Γ по возрастанию параметра t имеет вид

$$\overline{\tau} = \frac{\overline{r}'(t_0)}{|\overline{r}'(t_0)|}.$$

Доказательство. В силу теоремы 3 § 7 кривую Γ можно задать в натуральной параметризации: $\overline{\varrho}(s) = \overline{r}(t(s))$, где $t(s)$ – функция, обратная к переменной длине дуги. По теореме 1 вектор $\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{ds}$ является единичным вектором касательной, направленным по возрастанию параметра s (а значит, и по возрастанию параметра t). В силу пункта 2 теоремы 3 § 7 $\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{ds} = \frac{\overline{r}'(t_0)}{|\overline{r}'(t_0)|}$. $\square$

§ 9. Второе приближение кривой

Определение. Пусть кривая $\Gamma = \{\overline{r}(s) : s \in [0, |\Gamma|]\}$ задана в натуральной параметризации. Пусть вектор-функция $\overline{r} : [0, |\Gamma|] \to \mathbb{R}^n$ дважды дифференцируема на $[0, |\Gamma|]$. Пусть $\overline{\tau}(s) = \frac{d\overline{r}(s)}{ds}$ – единичный вектор касательной. Тогда число $k = k(s_0) = \left|\frac{d\overline{\tau}}{ds}(s_0)\right|$ называется *кривизной* кривой Γ в точке $\overline{r}_0 = \overline{r}(s_0)$.

Если в точке $\overline{r}_0$ кривизна $k(s_0) \neq 0$, то

1) число $R = R(s_0) = \frac{1}{k(s_0)}$ называется *радиусом кривизны*,

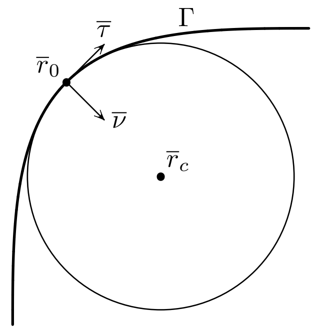
2) единичный вектор $\overline{\nu} = \overline{\nu}(s_0) = \frac{1}{k(s_0)} \frac{d\overline{\tau}}{ds}(s_0)$ – *вектором главной нормали*,

3) прямая с направляющим вектором $\overline{\nu}$, проходящая через точку $\overline{r}_0$, – *главной нормалью*,

4) плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль, – *соприкасающейся плоскостью*,

5) точка $\overline{r}_c = \overline{r}_c(s_0) = \overline{r}_0 + R(s_0)\,\overline{\nu}(s_0)$ – *центром кривизны*,

6) окружность с центром в точке $\overline{r}_c$, радиусом R, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется *соприкасающейся окружностью* кривой Γ в точке $\overline{r}_0$.



Лемма 1. Если в некоторой точке кривой Γ определены вектор касательной $\overline{\tau}$ и вектор главной нормали $\overline{\nu}$, то $\overline{\tau} \perp \overline{\nu}$.

Доказательство. Так как $(\overline{\tau}(s), \overline{\tau}(s)) = |\overline{\tau}(s)|^2 = 1 \quad \forall s \in [0, |\Gamma|]$, то $(\overline{\tau}(s), \overline{\tau}(s))' = 0$, следовательно, $(\overline{\tau}'(s), \overline{\tau}(s)) = 0$, т. е. $(\overline{\nu}(s), \overline{\tau}(s)) = 0$. $\square$

Напишем векторное уравнение соприкасающейся окружности кривой Γ в точке $\overline{r}_0$.

Пусть сначала в плоскости xy задана прямоугольная система координат с единичными базисными векторами $\overline{i}$, $\overline{j}$. Окружность радиуса R с центром в $\overline{0}$, лежащая в плоскости векторов $\overline{i}$, $\overline{j}$, может быть задана формулами

$$x = -R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

или в векторной форме: $\overline{r} = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} = -R\cos\varphi\,\overline{i} + R\sin\varphi\,\overline{j}$. Если в $\mathbb{R}^n$ заданы два ортогональных единичных вектора $\overline{\tau}$ и $\overline{\nu}$ и точка $\overline{r}_c$, то уравнение окружности радиуса R, лежащей в плоскости векторов $\overline{\tau}, \overline{\nu}$ и с центром в точке $\overline{r}_c$, имеет вид $\overline{r} = \overline{r}_{\text{окр}}(\varphi) = \overline{r}_c - R\cos\varphi\,\overline{\nu} + R\sin\varphi\,\overline{\tau}$. Следовательно, с учетом определения центра кривизны

$\overline{r}_c = \overline{r}_0 + R(s_0)\,\overline{\nu}(s_0)$, соприкасающаяся окружность кривой Γ в точке $\overline{r}_0 = \overline{r}(s_0)$ задается уравнением

$$\overline{r} = \overline{r}_{\text{окр}}(\varphi) = \overline{r}_0 + R\sin\varphi\,\overline{\tau} + R\,(1-\cos\varphi)\,\overline{\nu}. \tag{1}$$

Теорема 1. Пусть кривая $\Gamma = \{\overline{r}(s) \ : \ s \in [0, |\Gamma|]\}$ задана в натуральной параметризации. Пусть вектор-функция $\overline{r} : [0, |\Gamma|] \to \to \mathbb{R}^n$ дважды дифференцируема. Тогда

1) если $\overline{r}''(s_0) \neq \overline{0}$, то в окрестности точки $\overline{r}_0 = \overline{r}(s_0)$ кривая Γ во втором приближении совпадает с соприкасающейся окружностью:

$$\overline{r}(s) = \overline{r}_{\text{окр}}\left(\frac{s-s_0}{R}\right) + \overline{o}((s-s_0)^2) \quad \text{при} \quad s \to s_0;$$

2) если $\overline{r}''(s_0) = \overline{0}$, то в окрестности точки $\overline{r}(s_0)$ кривая Γ во втором приближении совпадает с касательной:

$$\overline{r}(s) = \overline{r}_{\text{кас}}(s-s_0) + \overline{o}((s-s_0)^2) \quad \text{при} \quad s \to s_0.$$

Доказательство. 1) Пользуясь разложениями $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + + o(\varphi^2)$, $\quad \sin\varphi = \varphi + o(\varphi^2)$ при $\varphi \to 0$, из формулы (1) получаем при $s \to s_0$:

$$\overline{r}_{\text{окр}}\left(\frac{s-s_0}{R}\right) = \overline{r}(s_0) + \overline{\tau}\,(s-s_0) + \frac{\overline{\nu}}{2R}\,(s-s_0)^2 + \overline{o}((s-s_0)^2).$$

Так как $\overline{\tau} = \overline{r}'(s_0)$, $\quad \frac{\overline{\nu}}{R} = k\,\overline{\nu} = \overline{r}''(s_0)$, то при $s \to s_0$:

$$\overline{r}_{\text{окр}}\left(\frac{s-s_0}{R}\right) = \overline{r}(s_0) + \overline{r}'(s_0)\,(s-s_0) + \frac{\overline{r}''(s_0)}{2}\,(s-s_0)^2 + \overline{o}((s-s_0)^2).$$

С другой стороны, в силу формулы Тейлора при $s \to s_0$

$$\overline{r}(s) = \overline{r}(s_0) + \overline{r}'(s_0)\,(s-s_0) + \frac{\overline{r}''(s_0)}{2}\,(s-s_0)^2 + \overline{o}((s-s_0)^2).$$

Сравнивая разложения $\overline{r}(s)$ и $\overline{r}_{\text{окр}}\left(\frac{s-s_0}{R}\right)$, получаем утверждение пункта (1).

Доказательство пункта (2) аналогично доказательству теоремы 2 § 8. $\square$

Теорема 2. Пусть вектор-функция $\overline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, параметризующая кривую $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^3$, дважды дифференцируема и не имеет особых точек (т. е. $\overline{r}'(t) \neq \overline{0}$) на $[a,b]$. Тогда

1) $\qquad \left[\overline{\tau}, \frac{d\overline{\tau}}{ds}\right] = \frac{[\overline{r}'(t), \overline{r}''(t)]}{|\overline{r}'(t)|^3}$;

2) кривизна кривой Γ в каждой точке $\overline{r}(t) \in \Gamma$ существует и выражается формулой

$$k = \frac{|[\overline{r}'(t), \overline{r}''(t)]|}{|\overline{r}'(t)|^3}.$$

Доказательство. 1) По теореме 3 § 8 имеем $\overline{\tau} = \frac{\overline{r}'(t)}{|\overline{r}'(t)|}$. Так как $\overline{r}(t)$ дважды дифференцируема, то $\exists \frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{\overline{r}''(t)}{|\overline{r}'(t)|} + \overline{r}'(t)\left(\frac{1}{|\overline{r}'(t)|}\right)'$.

Так как по теореме 2 § 7 справедливо равенство $\frac{ds}{dt} = |\overline{r}'(t)|$, то

$$\exists \quad \frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{d\overline{\tau}}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\overline{r}'(t)|}\,\frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{\overline{r}''(t)}{|\overline{r}'(t)|^2} + \frac{\overline{r}'(t)}{|\overline{r}'(t)|}\left(\frac{1}{|\overline{r}'(t)|}\right)'.$$

Еще раз используя равенство $\overline{\tau} = \frac{\overline{r}'(t)}{|\overline{r}'(t)|}$, получаем

$$\left[\overline{\tau}, \frac{d\overline{\tau}}{ds}\right] = \frac{1}{|\overline{r}'(t)|}\,\left[\overline{r}'(t), \frac{d\overline{\tau}}{ds}\right] = \frac{[\overline{r}'(t), \overline{r}''(t)]}{|\overline{r}'(t)|^3}.$$

2) Из существования $\frac{d\overline{\tau}}{ds}$ следует существование кривизны $k = = \left|\frac{d\overline{\tau}}{ds}\right|$. В силу леммы 1, векторы $\overline{\tau}$ и $\frac{d\overline{\tau}}{ds}$ взаимно перпендикулярны, кроме того, $|\overline{\tau}| = 1$, следовательно,

$$k = \left|\left[\overline{\tau}, \frac{d\overline{\tau}}{ds}\right]\right| = \frac{|[\overline{r}'(t), \overline{r}''(t)]|}{|\overline{r}'(t)|^3}. \qquad \square$$

Следствия

1) Формула для вычисления кривизны, записанная через координаты вектор-функции $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, принимает вид

$$k = \frac{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^{3/2}}.$$

2) Если Γ – плоская кривая, т. е. $z(t) = 0$, то

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

3) Если плоская кривая Γ задана как график функции $y = f(x)$, то $x' = 1$, $x'' = 0$, $y' = f'$, $y'' = f''$ и, следовательно,

$$k = \frac{|f''|}{(1 + (f')^2)^{3/2}}.$$

§ 10. Сопровождающий трехгранник кривой

В данном параграфе всегда будем предполагать, что кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^3$

1) параметризована дважды дифференцируемой вектор-функцией $\overline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$,

2) не имеет особых точек (т. е. $\forall t \in [a,b] \quad \overline{r}'(t) \neq \overline{0}$) и

3) кривизна не обращается в 0 (т. е. согласно теореме 2 § 6 $\forall t \in [a,b] \quad [\overline{r}'(t), \overline{r}''(t)] \neq \overline{0}$).

Определение. Пусть $\overline{\tau}$ – единичный вектор касательной, $\overline{\nu}$ – единичный вектор главной нормали кривой Γ в точке $\overline{r}_0$. Тогда вектор $\overline{\beta} = [\overline{\tau}, \overline{\nu}]$ называется *вектором бинормали* в точке $\overline{r}_0$. Прямая с направляющим вектором $\overline{\beta}$, проходящая через точку $\overline{r}_0$, называется *бинормалью* кривой Γ в точке $\overline{r}_0$.

Замечание. Поскольку векторы $\overline{\tau}$ и $\overline{\nu}$ – единичные и взаимно перпендикулярны, то в силу определения векторного произведения тройка векторов $\overline{\tau}$, $\overline{\nu}$, $\overline{\beta}$ образует правый ортонормированный базис, а касательная, главная нормаль и бинормаль в данной точке – это три взаимно перпендикулярные прямые.

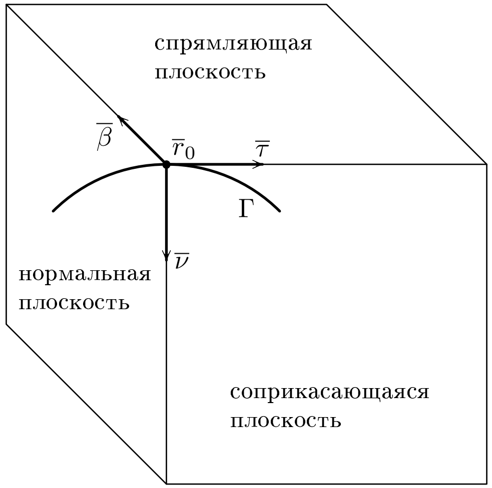
Определение. Отложим векторы $\overline{\tau}$, $\overline{\nu}$ и $\overline{\beta}$, вычисленные для точки $\overline{r}_0$ кривой Γ, от точки $\overline{r}_0$. Образовавшийся трехгранник называется *сопровождающим трехгранником Френе* кривой Γ.

Трехгранник Френе в точке $\overline{r}_0$ задает следующие три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через точку $\overline{r}_0$:

плоскость, перпендикулярная касательной, называется *нормальной плоскостью*,

плоскость, перпендикулярная бинормали, называется *соприкасающейся плоскостью*,

плоскость, перпендикулярная главной нормали, называется *спрямляющей плоскостью*.



Замечание. (Геометрический смысл соприкасающейся и спрямляющей плоскостей.)

Как следует из теоремы 1 § 6, кривая Γ с точностью до $\overline{o}((s-s_0)^2)$ совпадает с соприкасающейся окружностью:

$$\overline{r} = \overline{r}_{\text{окр}}(\varphi) = \overline{r}_0 + R\sin\varphi\,\overline{\tau} + R\,(1 - \cos\varphi)\,\overline{\nu}.$$

Так как соприкасающаяся окружность лежит в соприкасающейся плоскости, то кривая Γ с точностью до $\overline{o}((s-s_0)^2)$ при $s \to s_0$ лежит в соприкасающейся плоскости. Так как проекция соприкасающейся окружности на спрямляющую плоскость принадлежит касательной к кривой Γ, то с точностью до $\overline{o}((s-s_0)^2)$ при $s \to s_0$ проекция кривой Γ на спрямляющую плоскость является прямой. Этим объясняются названия соприкасающейся и спрямляющей плоскостей.

Напишем уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей в точке $\overline{r}_0 = \overline{r}(t_0)$. Согласно определениям эти уравнения можно записать в следующем виде.
Нормальная плоскость: $(\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{\tau}) = 0$.
Спрямляющая плоскость: $(\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{\nu}) = 0$.
Соприкасающаяся плоскость: $(\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{\beta}) = 0$.

Напишем более явные уравнения этих плоскостей.

Так как $\overline{\tau} = \frac{\overline{r}'(t)}{|\overline{r}'(t)|}$, то нормальная плоскость задается уравнением

$$(\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{r}'(t_0)) = 0.$$

Поскольку $\overline{\nu} = \frac{1}{k}\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{1}{k}\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$, то спрямляющая плоскость задается уравнением

$$\left(\overline{r} - \overline{r}_0,\, \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}(t_0)\right) = 0.$$

Используя равенство $\overline{\beta} = [\overline{\tau}, \overline{\nu}]$, запишем уравнение соприкасающейся плоскости через смешанное произведение: $(\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{\tau}, \overline{\nu}) = 0$. В силу пункта (1) теоремы 2 § 6 и определения вектора главной нормали $\overline{\nu} = \frac{1}{k}\frac{d\overline{\tau}}{ds}$ получаем $[\overline{\tau}, \overline{\nu}] = \frac{[\overline{r}'(t), \overline{r}''(t)]}{k\,|\overline{r}'(t)|^3}$. Поэтому соприкасающаяся плоскость в точке $\overline{r}_0$ задается уравнением

$$(\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{r}'(t_0), \overline{r}''(t_0)) = 0.$$

§ 11. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$

Напомним, что ε-окрестностью точки $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \varrho(x, x_0) < \varepsilon\} =$$

$$= \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : \ \sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + \ldots + (x^n - x_0^n)^2} < \varepsilon\}.$$

Определение. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой* множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x_0) \subset X.$$

Внутренностью множества X называется $\operatorname{int} X$ – множество всех внутренних точек X. Множество X называется *открытым*, если все точки X являются внутренними, т. е. $X \subset \operatorname{int} X$. Пустое множество $\emptyset$ по определению считается открытым.

Определение. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *точкой прикосновения* множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \ U_\varepsilon(x_0) \bigcap X \neq \emptyset.$$

Замыканием множества X называется $\overline{X}$ – множество всех точек прикосновения X. Множество X называется *замкнутым*, если все точки прикосновения лежат в X, т. е. $\overline{X} \subset X$. Пустое множество $\emptyset$ по определению считается замкнутым.

Лемма 1. $\forall X \subset \mathbb{R}^n \hookrightarrow \ \operatorname{int} X \subset X \subset \overline{X}$.

Доказательство. 1) Если $x_0 \in \operatorname{int} X$, то $\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x_0) \subset X$, следовательно, $x_0 \in X$.

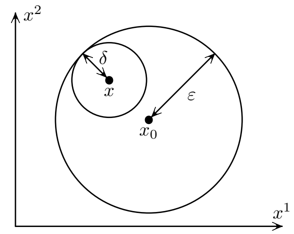
2) Если $x_0 \in X$, то $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \ x_0 \in U_\varepsilon(x_0) \bigcap X$, следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \ U_\varepsilon(x_0) \bigcap X \neq \emptyset$, а значит, $x_0 \in \overline{X}$. □

Следствие. 1) Множество X открыто $\Leftrightarrow$ $X = \operatorname{int} X$.
2) Множество X замкнуто $\Leftrightarrow$ $X = \overline{X}$.

Лемма 2. Если $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$, то $\operatorname{int} X \subset \operatorname{int} Y$, $\overline{X} \subset \overline{Y}$.
Доказательство следует непосредственно из определений.

Лемма 3. $\forall \varepsilon > 0\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow$ множество $U_\varepsilon(x_0)$ открыто.

Доказательство. Пусть $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Требуется доказать, что $x \in \operatorname{int} U_\varepsilon(x_0)$. Определим $\delta = \varepsilon - |x_0 - x|$. Так как $|x - x_0| < \varepsilon$, то $\delta > 0$.



Покажем, что $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(x_0)$. Действительно, если $y \in U_\delta(x)$, то $|x - y| < \delta$ и по неравенству треугольника $|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| < \delta + |x - x_0| = \varepsilon$, следовательно, $y \in U_\varepsilon(x_0)$. Итак, $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(x_0)$. Поэтому $x \in \operatorname{int} U_\varepsilon(x_0)$. □

Теорема 1. $\forall X \subset \mathbb{R}^n$ выполняется:
1) $\operatorname{int} X$ является открытым множеством;

2) $\overline{X}$ является замкнутым множеством.

Доказательство. 1) Обозначим $Y = \operatorname{int} X$. Пусть $x_0 \in Y$. Требуется доказать, что $x_0 \in \operatorname{int} Y$. Так как $x_0 \in Y = \operatorname{int} X$, то $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \subset X$. По лемме 2 $\operatorname{int} U_\varepsilon(x_0) \subset \operatorname{int} X$. В силу леммы 3 $\operatorname{int} U_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0)$, следовательно, $U_\varepsilon(x_0) \subset \operatorname{int} X = Y$. Поэтому $x_0 \in \operatorname{int} Y$.

2) Обозначим $Y = \overline{X}$. Пусть $x_0 \in \overline{Y}$. Требуется доказать, что $x_0 \in Y$. Так как $x_0 \in \overline{Y}$, то $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow\ U_{\varepsilon/2}(x_0) \bigcap Y \neq \emptyset$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists x_1(\varepsilon) \in U_{\varepsilon/2}(x_0) \bigcap Y$. Так как $x_1(\varepsilon) \in Y = \overline{X}$, то $\exists x_2(\varepsilon) \in U_{\varepsilon/2}(x_1(\varepsilon)) \bigcap X$. В силу неравенства треугольника $|x_0 - x_2(\varepsilon)| \leq |x_0 - x_1(\varepsilon)| + |x_1(\varepsilon) - x_2(\varepsilon)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists x_2(\varepsilon) \in X \bigcap U_\varepsilon(x_0)$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow\ X \bigcap U_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$, а значит, $x_0 \in \overline{X} = Y$. $\square$

Лемма 4. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда
1) $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int} X = \overline{\mathbb{R}^n \setminus X}$;
2) $\mathbb{R}^n \setminus \overline{X} = \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus X)$.

Доказательство. 1) $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int} X \iff \neg(x_0 \in \operatorname{int} X) \iff$

$$\iff \neg(\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \subset X) \iff \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x_0) \not\subset X \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x_0) \bigcap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset \iff x_0 \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus X}.$$

2) Доказать самостоятельно. $\square$

Теорема 2. X – замкнуто $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus X$ – открыто.

Доказательство. X – замкнуто $\Leftrightarrow$ $X = \overline{X}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus X = \mathbb{R}^n \setminus \overline{X}$ $\overset{\text{Л.4}}{\iff}$ $\mathbb{R}^n \setminus X = \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus X)$ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus X$ – открыто. $\square$

Определение. *Границей* множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $\partial X = \overline{X} \setminus \operatorname{int} X$. Точки множества ∂X называются *граничными точками* множества X.

Лемма 5. $x_0 \in \partial X \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists x_1 \in U_\varepsilon(x_0) \cap X,\ \exists x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \setminus X$.

Доказательство. По определению $\overline{X}$ имеем $x_0 \in \overline{X} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x_1 \in U_\varepsilon(x_0) \cap X$.

По определению $\operatorname{int} X$ имеем $x_0 \notin \operatorname{int} X \Leftrightarrow \neg(\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \subset X) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x_0) \not\subset X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \setminus X$.

Поэтому $x_0 \in \overline{X} \setminus \operatorname{int} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) : x_1 \in X,\ x_2 \notin X$. $\square$

Задача 1. Доказать, что для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ справедливы равенства $\operatorname{int} X = X \setminus \partial X$, $\overline{X} = X \cup \partial X$.

Задача 2. Найти $\operatorname{int} X$, $\overline{X}$, ∂X. Выяснить, является ли множество X открытым или замкнутым.
а) полуплоскость $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$;
б) интервал $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0,\ x_2 \in (-1, 1)\}$.

Задача 3. Верно ли, что для любых множеств $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$ справедливы включения:
1) $\operatorname{int}(X_1 \cup X_2) \subset \operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2$;
2) $\operatorname{int}(X_1 \cup X_2) \supset \operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2$;
3) $\overline{X_1 \cup X_2} \subset \overline{X_1} \cup \overline{X_2}$;
4) $\overline{X_1 \cup X_2} \supset \overline{X_1} \cup \overline{X_2}$;
5) $\partial(X_1 \cup X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2$;
6) $\partial(X_1 \cup X_2) \supset \partial X_1 \cup \partial X_2$?

§ 12. Сходимость в $\mathbb{R}^n$

В соответствии с определением сходимости последовательности в метрическом пространстве последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *сходится* к точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall k \geq N \hookrightarrow\ x_k \in U_\varepsilon(x_0),$$

т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall k \geq N \hookrightarrow\ \varrho(x_k, x_0) < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(x_k, x_0) = 0$.

Лемма 1. Пусть заданы последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $x_k = (x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n)$ и точка $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad \iff \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \hookrightarrow \lim_{k\to\infty} x_k^i = x_0^i.$$

Доказательство. 1) Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. Тогда $\forall i \in \{1, ..., n\} \hookrightarrow (x_k^i - x_0^i)^2 \leq \varrho(x_k, x_0)^2 \to 0$ при $k \to \infty$, следовательно, $x_k^i \to x_0^i$ при $k \to \infty$.

2) Пусть $\forall i \in \{1, ..., n\} \hookrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_k^i = x_0^i$. Тогда по теореме о пределе суммы $\varrho(x_k, x_0)^2 = (x_k^1 - x_0^1)^2 + ... + (x_k^n - x_0^n)^2 \to 0$ при $k \to \infty$, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. $\square$

Теорема 1. (Критерий точки прикосновения.)

$$x_0 \in \overline{X} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \{x_k\} \subset X : \quad \lim_{k\to\infty} x_k = x_0.$$

Доказательство. 1) Пусть $\exists \{x_k\} \subset X : \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. По определению предела имеем $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall k \geq N \hookrightarrow \ x_k \in U_\varepsilon(x_0)$. Поскольку $x_k \in X$, то $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \ U_\varepsilon(x_0) \bigcap X \neq \emptyset$, т. е. $x_0 \in \overline{X}$.

2) Пусть $x_0 \in \overline{X}$. Тогда по определению $\overline{X}$ имеем $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow$ $\hookrightarrow X \bigcap U_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$, следовательно, $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists x_k \in X \bigcap U_{1/k}(x_0)$. Так как $\varrho(x_k, x_0) < 1/k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. □

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \hookrightarrow \ |x| \leq C$. В частности, последовательность $\{x_k\} \in \mathbb{R}^n$ называется *ограниченной*, если $\exists C \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ |x_k| \leq$ $\leq C$.

Напомним, что последовательность $\{y_j\}_{j=1}^\infty$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_j\}$: $\forall j \in$ $\in \mathbb{N} \hookrightarrow \ y_j = x_{k_j}$.

Теорема 2. (Теорема Больцано–Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$.)
Из любой ограниченной последовательности $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство проведем индукцией по размерности пространства $\mathbb{R}^n$. При $n = 1$ доказываемая теорема следует из теоремы Больцано–Вейерштрасса для числовых последовательностей. Пусть доказываемая теорема справедлива при $n = n_0$. Докажем тогда, что данная теорема справедлива при $n = n_0 + 1$. Пусть последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ ограничена, $x_k = (x_k^1, x_k^2, ..., x_k^{n_0}, x_k^{n_0+1}) \in \mathbb{R}^{n_0+1}$. Рассмотрим последовательность $\{y_k\}_{k=1}^\infty$, где $y_k = (x_k^1, x_k^2, ..., x_k^{n_0}) \in \mathbb{R}^{n_0}$. Поскольку $|y_k| \leq |x_k|$, то последовательность $\{y_k\}$ также ограничена. По предположению индукции из последовательности $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y_{k_m}\}_{m=1}^\infty$. Рассмотрим подпоследовательность $\{x_{k_m}\}_{m=1}^\infty$ последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty$. Так как $\{y_{k_m}\}_{m=1}^\infty$ сходится, то первые n_0 координат последовательности $\{x_{k_m}\}_{m=1}^\infty$ сходятся. Рассмотрим числовую последовательность $\{x_{k_m}^{n_0+1}\}_{m=1}^\infty$, составленную из $n_0 + 1$-й координаты последовательности $\{x_{k_m}\}_{m=1}^\infty$. Пользуясь теоремой Больцано–Вейерштрасса для ограниченной числовой последовательности $\{x_{k_m}^{n_0+1}\}_{m=1}^\infty$, выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_{m_j}}^{n_0+1}\}_{j=1}^\infty$. Тогда все координаты подпоследовательности $\{x_{k_{m_j}}\}_{j=1}^\infty$ сходятся и по лемме 1 подпоследовательность $\{x_{k_{m_j}}\}_{j=1}^\infty$ сходится. Итак, доказано, что из произвольной ограниченной последовательности $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^{n_0+1}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_{m_j}}\}_{j=1}^\infty$, т. е. данная теорема справедлива при $n = n_0 + 1$, что по индукции доказывает теорему при любом $n \in \mathbb{N}$. □

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется ***компактом***, если из любой последовательности $\{x_k\} \subset X$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу множества X.

Теорема 3. (Критерий компактности множества.) Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ является компактом тогда и только тогда, когда X ограничено и замкнуто.

Доказательство. 1) Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное замкнутое множество. Покажем, что X – компакт. Пусть $\{x_k\}$ – произвольная последовательность элементов множества X. Так как последовательность $\{x_k\}$ ограничена, то по теореме Больцано–Вейерштрасса можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$, сходящуюся к некоторому $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $\{x_{k_j}\} \subset X$ и $x_0 = \lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j}$, то по теореме 1 $x_0 \in \overline{X}$. В силу замкнутости $X \quad x_0 \in X$.

Итак, показано, что из произвольной последовательности $\{x_k\} \subset$ $\subset \mathbb{R}^n$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$, сходящуюся к некоторому элементу x_0 множества X, т. е. X – компакт.

2) Пусть X – компакт. Доказательство того, что множество X ограничено и замкнуто, проведем методом от противного.

а) Предположим, что множество X неограничено. Тогда $\forall k \in$ $\in \mathbb{N} \quad \exists x_k \in X : |x_k| > k$. Поскольку для любой подпоследовательности $\{x_{k_j}\}$ последовательности $\{x_k\}$ выполняется $\lim\limits_{j\to\infty} |x_{k_j}| = +\infty$, то из последовательности $\{x_k\}$ нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу множества X. Следовательно, множество X не является компактом. Полученное противоречие показывает, что множество X ограничено.

б) Предположим, что множество X незамкнуто. Тогда $\exists x_0 \in \overline{X} \setminus X$. Так как $x_0 \in \overline{X}$, то по теореме 1 $\exists \{x_k\} \subset X: \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. Так как любая подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$ сходится к $x_0 \notin X$, то из последовательности $\{x_k\}$ нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу множества X. Следовательно, множество X не является компактом. Полученное противоречие показывает, что множество X замкнуто. $\square$

Определение. Последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall k \geq N\ \forall m \geq N \hookrightarrow\ |x_k - x_m| < \varepsilon.$$

Задача 1. Доказать критерий Коши в $\mathbb{R}^n$: последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

§ 13. Лемма Гейне-Бореля

Определение. *Открытым покрытием* множества X называется семейство открытых множеств $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ таких, что $X \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} V_\alpha$. Если множество A' содержится во множестве индексов A (т.е. $A' \subset A$) и $X \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A'} V_\alpha$, то $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A'}$ называется *подпокрытием* множества X. Если множество A' конечно, то это подпокрытие называется *конечным подпокрытием.*

Лемма 1. Из любого открытого покрытия отрезка можно выделить конечное подпокрытие этого отрезка.

Доказательство. Предположим противное: $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – открытое покрытие отрезка $[a,b]$, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Построим последовательность вложенных отрезков $[a_k,b_k] \subset [a,b]$, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{P}[a_k,b_k]: \quad \begin{cases} \text{из покрытия } \{V_\alpha\}_{\alpha\in A} \text{ нельзя выделить} \\ \text{конечное подпокрытие отрезка } [a_k,b_k]. \end{cases}$$

Положим $[a_1,b_1] = [a,b]$. Тогда условие $\mathcal{P}[a_1,b_1]$ выполнено. Пусть задан отрезок $[a_k,b_k] \subset [a,b]$, обладающих свойством $\mathcal{P}[a_k,b_k]$. Разделим отрезок $[a_k,b_k]$ пополам точкой $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$. Заметим, что хотя бы одно из условий $\mathcal{P}[a_k,c_k]$ или $\mathcal{P}[c_k,b_k]$ выполнено. Иначе из покрытия $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ можно выделить конечное подпокрытие отрезка $[a_k,c_k]$ и отрезка $[c_k,b_k]$, объединение которых является конечным покрытием отрезка $[a_k,b_k]$, что противоречит условию $\mathcal{P}[a_k,b_k]$.

Определим

$$[a_{k+1},b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k,c_k], & \text{условие } \mathcal{P}[a_k,c_k] \text{ выполнено}, \\ [c_k,b_k], & \text{условие } \mathcal{P}[a_k,c_k] \text{ не выполнено}. \end{cases}$$

Так как одно из условий $\mathcal{P}[a_k,c_k]$ или $\mathcal{P}[c_k,b_k]$ выполнено, то выполнено условие $\mathcal{P}[a_{k+1},b_{k+1}]$. Поэтому данный процесс можно продолжать бесконечно. В результате получаем стягивающуюся последовательность вложенных отрезков $[a_k,b_k]$, каждый из которых удовлетворяет условию $\mathcal{P}[a_k,b_k]$.

По теореме Кантора существует общая точка $x \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} [a_k,b_k]$. Поскольку $x \in [a,b] \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} V_\alpha$, то найдется индекс $\alpha_0 \in A$ такой, что $x \in V_{\alpha_0}$. Так как множество V_{α_0} открыто, то найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset V_{\alpha_0}$. Поскольку $b_k - a_k \to 0$, то найдется индекс k_0 такой, что $b_{k_0} - a_{k_0} < \varepsilon$. Тогда в силу условия $x \in [a_{k_0},b_{k_0}]$ получаем, что $[a_{k_0},b_{k_0}] \subset U_\varepsilon(x) \subset V_{\alpha_0}$. Таким образом, из покрытия $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ можно выделить конечное подпокрытие отрезка $[a_{k_0},b_{k_0}]$, состоящее из одного множества V_{α_0}, что противоречит условию $\mathcal{P}[a_{k_0},b_{k_0}]$. $\square$

Замечание. Существует открытое покрытие интервала, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Например, таким покрытием интервала $(0,1)$ является семейство интервалов $\left\{\left(\frac{1}{k},1\right)\right\}_{k\geq 2}$.

Определение. *Клеткой* в пространстве $\mathbb{R}^n$ будем называть декартово произведение отрезков $\Pi = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_n,b_n]$, т.е. замкнутый прямоугольный параллелепипед

$$\Pi = \{x = (x_1,\ldots,x_n)\ :\ a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = \overline{1,n}\}.$$

Лемма 2. Из любого открытого покрытия клетки в $\mathbb{R}^n$ можно выделить конечное подпокрытие этой клетки.

Доказательство. Предположим противное: существует клетка $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ и открытое покрытие $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ этой клетки, для которого справедливо условие

$$\mathcal{P}(\Pi):\quad \begin{cases} \text{из покрытия } \{V_\alpha\}_{\alpha\in A} \text{ нельзя выделить} \\ \text{конечное подпокрытие клетки } \Pi. \end{cases}$$

Построим последовательность вложенных клеток Π_k, удовлетворяющих условию $\mathcal{P}(\Pi_k)$. Положим $\Pi_1 = \Pi$. Пусть задана клетка Π_k. Разобъем пополам каждый отрезок, декартовым произведением которых является клетка Π_k. Получим разбиение клетки Π_k на 2^n клеток одинаковых размеров. Среди них найдется клетка Π_{k+1}, удовлетворяющая условию $\mathcal{P}(\Pi_{k+1})$. Продолжая этот процесс бесконечно, получим последовательность вложенных клеток Π_k. Эта последовательность имеет общую точку $x \in \mathbb{R}^n$. Для доказательства последнего достаточно применить теорему Кантора о вложенных отрезках к проекциям клеток Π_k на i-ую координатную ось. Эти проекции имеют общую для всех k точку x_i, а точка $x = (x_1, ..., x_n)$ является общей точкой клеток Π_k. Далее аналогично лемме 1 найдется $\alpha_0 \in A$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $U_\varepsilon(x) \subset V_{\alpha_0}$ и найдется клетка $\Pi_{k_0} \subset U_\varepsilon(x) \subset V_{\alpha_0}$. Это противоречит условию $\mathcal{P}(\Pi_{k_0})$. $\square$

Теорема 1. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ является компактом. Тогда из любого открытого покрытия X можно выделить конечное подпокрытие X.

Доказательство. Так как компакт X является ограниченным множеством, то найдется клетка $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $X \subset \Pi$. Пусть $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – открытое покрытие множества X. Поскольку компакт X является замкнутым множеством, то его дополнение $V^0 = \mathbb{R}^n \setminus X$ – открытое множество. Поэтому $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cup \{V^0\}$ – открытое покрытие $\mathbb{R}^n$, а значит, – открытое покрытие клетки Π. В силу леммы 2 из покрытия $\mathcal{V}'$ можно выделить конечное подпокрытие $\mathcal{V}'_{\text{кон}}$ клетки Π. Так как $X \subset \Pi$, то $\mathcal{V}'_{\text{кон}}$ является покрытием множества X.

Поскольку $X \cap V^0 = \emptyset$, то $\mathcal{V}_{\text{кон}} := \mathcal{V}'_{\text{кон}} \setminus \{V^0\}$ также является покрытием множества X. Итак, из покрытия $\mathcal{V}$ мы выделили конечное подпокрытие множества X. $\square$

Задача 1. Доказать утверждение, обратное к теореме 1: если из любого открытого покрытия множества $X \subset \mathbb{R}^n$ можно выделить конечное подпокрытие X, то X – компакт.

Глава 6

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Предел функции нескольких переменных

Определение. Пусть задано множество $X \subset \mathbb{R}^n$. Говорят, что на множестве X определена *функция нескольких переменных* $f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n)$ и пишут $f : X \to \mathbb{R}$, если каждой точке $x = (x^1, ..., x^n) \in X$ поставлено в соответствие единственное число $f(x)$, являющееся значением функции f в точке x.

Напомним, что проколотой ε-окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0) \subset \mathbb{R}^n$. Говорят, что элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *предело*м функции $f(x)$ при $x \to x_0$ (*по совокупности переменных*) и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $\lim\limits_{\substack{x^1\to x_0^1 \\ \cdots \\ x^n\to x_0^n}} f(x^1, ..., x^n) = A$, если

(определение Коши):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (0, \delta_0] : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow\ f(x) \in U_\varepsilon(A);$$

(определение Гейне):

$\forall$ последовательности Гейне $\{x_k\} \subset \overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$ (т.е. такой последовательности, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ и $x_k \neq x_0$ $\forall k \in \mathbb{N}$) выполняется условие $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = A$.

Эквивалентность двух определений предела функции нескольких переменных доказывается так же, как и для функции одной переменной. Для функций нескольких переменных справедливы теоремы о предельном переходе в неравенствах, а также о пределах суммы, произведения и частного, аналогичные соответствующим теоремам для функций одной переменной.

Определение. *Направлением* в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется любой вектор $\ell \in \mathbb{R}^n$ единичной длины ($|\ell| = 1$).

Определение. Элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *пределом* функции $f(x)$ в точке x_0 *по направлению* $\ell \in \mathbb{R}^n$ ($|\ell| = 1$), если $\lim\limits_{t\to+0} f(x_0 + t\ell) = A$, т. е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall t \in (0,\delta) \hookrightarrow\ f(x_0 + t\ell) \in U_\varepsilon(A). \tag{1}$$

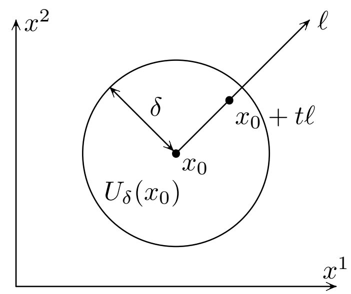
Теорема 1. 1) Если $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то по любому направлению предел функции f в точке x_0 существует и равен A.

2) Обратное неверно.

Доказательство. 1) Пусть $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow\ f(x) \in U_\varepsilon(A). \tag{2}$$

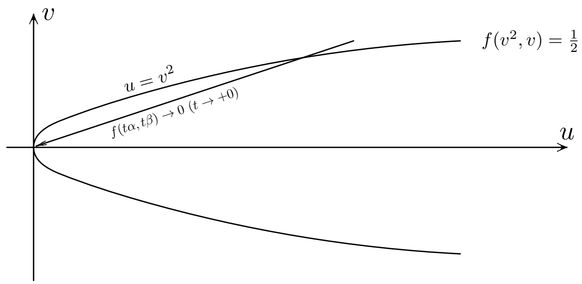
Зафиксируем произвольное направление $\ell \in \mathbb{R}^n$, $|\ell| = 1$. Тогда $\forall t \in (0,\delta)$ при $x = x_0 + t\ell$ выполнены соотношения $|x - x_0| = t|\ell| = t < \delta$, т. е. $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$. Отсюда, учитывая (2), получаем (1), т. е. $\lim\limits_{t\to+0} f(x_0 + t\ell) = A$.



2) Пусть $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$, $\quad x = (u,v)$, $\quad f(u,v) = \frac{u\,v^2}{u^2+v^4}$. Покажем, что в точке $x_0 = (0,0)$ предел функции f по любому направлению $\ell = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, где $\varphi \in [0,2\pi)$, существует и равен 0, однако предела по совокупности переменных $\lim\limits_{\substack{u\to0\\v\to0}} f(u,v)$ не существует.

а) Поскольку $f(x_0 + t\ell) = f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) = \frac{t^3\ \cos\varphi\ \sin^2\varphi}{t^2\cos^2\varphi + t^4\sin^4\varphi} = \frac{t\ \cos\varphi\ \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + t^2\sin^4\varphi}$, то при $\cos\varphi \neq 0$ имеет место неравенство $|f(t\cos\varphi, t\sin\varphi)| \le \left|\frac{t\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right| \to 0$ $(t \to +0)$, а при $\cos\varphi = 0$ имеем $\sin\varphi \neq 0$, и выполняется равенство $f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) = 0$.

Следовательно, $\forall\ell \in \mathbb{R}^2 :\ |\ell| = 1\ \ \exists \lim\limits_{t\to+0} f(x_0 + t\ell) = 0$.



б) Заметим, что при $u = v^2 \neq 0$ справедливо равенство $f(u,v) = \frac{v^4}{2v^4} = \frac{1}{2}$, а при $u = 0$, $v \neq 0$ – равенство $f(u,v) = 0$. Рассмотрим две последовательности: $\{(u_k, v_k)\} = \{(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k})\}$ и $\{(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)\} = \{(0, \frac{1}{k})\}$. Эти две последовательности являются последовательностями Гейне, сходящимися к точке $(0,0)$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} f(u_k, v_k) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim\limits_{k\to\infty} f(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)$, то предела функции f в точке $(0,0)$ по совокупности переменных не существует. $\square$

Метод исследования предела функции нескольких переменных

Рассмотрим метод исследования предела функции двух переменных, основанный на введении полярных координат (для функции трех и более переменных можно использовать подобный метод, основанный на введении сферических или обобщенных сферических координат). Пусть требуется исследовать

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y). \tag{3}$$

Введем полярные координаты с центром в точке (x_0, y_0):

$$x = x_0 + \varrho\cos\varphi,$$
$$y = y_0 + \varrho\sin\varphi.$$

Шаг 1. Для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$ рассмотрим предел по направлению $\ell = (\cos\varphi, \sin\varphi)$:

$$\lim_{\varrho\to+0} f(x_0 + \varrho\cos\varphi,\ y_0 + \varrho\sin\varphi) = A(\varphi). \tag{4}$$

Если при некотором $\varphi \in [0, 2\pi]$ предел (4) не существует или этот предел $A(\varphi)$ зависит от φ, т.е. от направления, то согласно пункту (1) теоремы 1 предел по совокупности переменных (3) не существует и исследование закончено.

Будем предполагать теперь, что что для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$ предел (4) существует и не зависит от φ: $A(\varphi) = A_0$. Согласно пункту (2) теоремы 1 указанное предположение не гарантирует существование предела по совокупности переменных.

Шаг 2. Предположим, что существует функция $g(\varrho) \to 0$ при $\varrho \to +0$ такая, что для некоторого $\varrho_0 > 0$ справедлива следующая *равномерная оценка*

$$\Big|f(x_0 + \varrho\cos\varphi,\ y_0 + \varrho\sin\varphi) - A_0\Big| \le g(\varrho) \quad \forall\varrho \in (0, \varrho_0) \quad \forall\varphi \in [0, 2\pi]. \tag{5}$$

Эта оценка называется равномерной (по φ) потому, что правая часть неравенства не зависит от φ. В этом случае предел (3) существует и равен A_0. Действительно, так как $g(\varrho) \to 0$ при $\varrho \to +0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta \in (0, \varrho_0]$ такое, что при $\varrho \in (0, \delta)$ справедливо неравенство $g(\varrho) < \varepsilon$. Следовательно, в этом случае

$$\forall (x, y) \in \overset{o}{U}_\delta(x_0, y_0) \hookrightarrow\ |f(x, y) - A_0| \le g(\varrho) < \varepsilon,$$

где $\varrho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Таким образом, в данном случае исследование предела по совокупности закончено.

Шаг 3. Иначе можно подобрать последовательность $\{(x_k, y_k)\}$ такую, что

$$(x_k, y_k) \to (x_0, y_0), \quad f(x_k, y_k) \not\to A_0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{6}$$

Тогда согласно определению Гейне A_0 не является пределом функции f в точке x_0 по совокупности переменных. Однако в силу пункта 1 теоремы 1 предел по совокупности, если он существует, обязан

совпадать с A_0 – пределом по направлению. Таким образом, в данном случае предел (3) не существует и исследование закончено.

Покажем, что если не существует равномерной оценки (5) такой, что $g(\varrho) \to 0$ при $\varrho \to +0$, то всегда можно подобрать последовательность $\{(x_k, y_k)\}$, удовлетворяющую условиям (6). Определим

$$\hat{g}(\varrho) = \sup_{\varphi\in[0,2\pi]} \Big|f(x_0 + \varrho\cos\varphi,\ y_0 + \varrho\sin\varphi) - A_0\Big|.$$

Тогда $\hat{g}(\varrho) \not\to 0$ при $\varrho \to +0$, т.к. для функции $g(\varrho) = \hat{g}(\varrho)$ справедлива равномерная оценка (5). Следовательно, согласно определению супремума найдутся последовательность $\{\varphi_k\} \subset [0, 2\pi]$ и сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varrho_k\}$ такие, что $f(x_0 + \varrho_k\cos\varphi_k,\ y_0 + \varrho_k\sin\varphi_k) - A_0 \not\to 0$. Таким образом, последовательность $\{(x_k, y_k)\} = \{(x_0 + \varrho_k\cos\varphi_k,\ y_0 + \varrho_k\sin\varphi_k)\}$ удовлетворяет условиям (6).

Примеры. Исследовать пределы

$$\text{а)} \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\operatorname{sh}(xy)}{x^2 + y^2}; \qquad \text{б)} \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\operatorname{sh}(x^2y)}{x^2 + y^2}.$$

Решение. Введем полярные координаты $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$.

а) Для функции $f_1(x, y) = \frac{\operatorname{sh}(xy)}{x^2+y^2}$ рассмотрим предел по направлению:

$$\lim_{\varrho\to+0} f_1(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) = \lim_{\varrho\to+0} \frac{\operatorname{sh}(\varrho^2\cos\varphi\sin\varphi)}{\varrho^2} = \cos\varphi\sin\varphi.$$

Поскольку предел по направлению зависит от направления, предела по совокупности переменных не существует.

б) Для функции $f_2(x, y) = \frac{\operatorname{sh}(x^2y)}{x^2+y^2}$ рассмотрим предел по направлению:

$$\lim_{\varrho\to+0} f_2(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) = \lim_{\varrho\to+0} \frac{\operatorname{sh}(\varrho^3\cos^2\varphi\sin\varphi)}{\varrho^2} = 0.$$

Проведем равномерную оценку:

$$|f_2(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)| \le \frac{\operatorname{sh}(\varrho^3)}{\varrho^2} \to 0 \quad \text{при} \quad \varrho \to +0.$$

Здесь важно, что величина $\frac{\operatorname{sh}(\varrho^3)}{\varrho^2}$ не зависит от φ, т.е. оценка равномерная по φ. Таким образом предел функции f_2 в точке $(0,0)$ по совокупности переменных равен 0.

Повторный предел

Определение. Пусть задана функция двух переменных $f(x,y)$ и точка $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Для любого фиксированного числа y предел функции одной переменной $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ (если он существует) обозначим через $\varphi(y)$. Тогда

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

называется *повторным пределом* функции f в точке (x_0,y_0). Предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ также называется повторным пределом функции f в точке (x_0,y_0). Аналогично можно определить повторные пределы функции n переменных.

Замечание 1. Из существования повторного предела не следует существование предела по совокупности переменных. Например, для функции $f(u,v)=\frac{u\,v^2}{u^2+v^4}$ повторные пределы в точке $(0,0)$ равны нулю, а предел по совокупности не существует.

Замечание 2. Из существования предела по совокупности переменных не следует существование повторного предела. Например, для функции

$$f(u,v)=\begin{cases}(u+v)\sin\frac{1}{u}\sin\frac{1}{v}, & uv\neq 0,\\ 0, & uv=0\end{cases}$$

предел по совокупности переменных в точке $(0,0)$ равен 0, а повторные пределы не существуют.

Предел по множеству

Определение. Точка $x_0\in\mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $X\subset\mathbb{R}^n$, если существует $\{x_n\}\subset X$ – последовательность Гейне в точке x_0.

Точка $x_0\in\mathbb{R}^n$ называется *изолированной точкой* множества $X\subset$ $\subset\mathbb{R}^n$, если $x_0\in X$ и $\exists\delta>0:\ \overset{o}{U}_\delta(x_0)\cap X=\emptyset$.

Напомним, что точка $x_0\in\mathbb{R}^n$ называется *точкой прикосновения* множества $X\subset\mathbb{R}^n$, если $\forall\delta>0\hookrightarrow\ U_\delta(x_0)\cap X\neq\emptyset$.

Лемма 2. Для любого множества $X\subset\mathbb{R}^n$ и любой точки $x_0\in$ $\in\mathbb{R}^n$ следующие условия эквивалентны:

(1) x_0 является предельной точкой множества X;

(2) x_0 является точкой прикосновения множества X и x_0 не является изолированной точкой множества X.

Доказательство проводится так же, как в случае $n=1$ (см. лемму 1 § 4 главы 2).

Определение. Пусть x_0 – предельная точка множества $X\subset$ $\subset\mathbb{R}^n$. Элемент $A\in\overline{\mathbb{R}}$ будем называть *пределом* функции $f:X\to\mathbb{R}$ в точке x_0 *по множеству* X и писать $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)=A$, если

(определение Коши):

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x\in X\cap\overset{o}{U}_\delta(x_0)\hookrightarrow\ f(x)\in U_\varepsilon(A)$;

(определение Гейне):

$\forall\{x_n\}\subset X$ – посл. Гейне в точке $x_0\hookrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

Замечание 3. Непосредственно из определений следует, что если $\exists\delta_0>0:\ \overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)\subset X$, то предел функции $f:X\to\mathbb{R}$ по множеству $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)$ – это то же самое, что и предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (по совокупности переменных, без указания множества).

Определение. Говорят, что на множестве $X\subset\mathbb{R}^n$ *задана вектор-функция* $f:X\to\mathbb{R}^m$, если каждому вектору $x\in X$ поставлен в соответствие единственный вектор $f(x)\in\mathbb{R}^m$.

Замечание 4. Задание вектор-функции $f:X\to\mathbb{R}^m$ эквивалентно заданию m скалярных функций $f_i:X\to\mathbb{R}$, являющихся компонентами вектор-функции f: $\quad f(x)=(f_1(x),...,f_m(x))$.

Определение. Пусть x_0 – предельная точка множества $X\subset\mathbb{R}^n$. Вектор $A\in\mathbb{R}^m$ будем называть пределом вектор-функции $f:X\to$ $\to\mathbb{R}^m$ в точке x_0 по множеству X и писать $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)=A$, если

(определение Коши):
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in X \cap \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$;
(определение Гейне):
$\forall\{x_n\} \subset X$ – посл. Гейне в точке $x_0 \hookrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Замечание 5. Вектор $A = (A_1, ..., A_m)$ является пределом вектор-функции $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ по множеству $X \subset \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f_i(x) = A_i$ для каждой компоненты $i \in \{1, \dots, m\}$. Этот факт доказывается так же, как и в случае $n = 1$ (см. лемму 1 § 2 главы 5).

§ 2. Непрерывность функции нескольких переменных в точке

Определение. Вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in X$ *по множеству* $X \subset \mathbb{R}^n$, если
(a) точка x_0 является предельной точкой множества X и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = f(x_0)$ либо
(b) точка x_0 является изолированной точкой множества X.

Определение. Пусть x_0 – внутренняя точка множества $X \subset \mathbb{R}^n$ (т. е. $\exists\delta_0 > 0\ :\ U_{\delta_0}(x_0) \subset X$). Вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ называется *непрерывной в точке* x_0 (*по совокупности переменных*), если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е.
(определение Коши):

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta \in (0, \delta_0] : \forall x \in \mathbb{R}^n :\ |x - x_0| < \delta \hookrightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$

(определение Гейне):

$$\forall\{x_k\} \subset U_{\delta_0}(x_0) :\ \lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \hookrightarrow\ \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0).$$

Здесь в определении Коши не требуется, что $x \neq x_0$, а в определении Гейне не требуется, что $x_k \neq x_0$, так как при $x = x_0$ выполняется равенство $f(x) = f(x_0)$.

Замечание 1. Если $x_0 \in \operatorname{int} X$, то непрерывность вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^m$ в точке x_0 по множеству X эквивалентна непрерывности функции f в точке x_0 (без указания множества). Это следует непосредственно из определений.

Замечание 2. Вектор-функция $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда каждая координата $f_i(x)$ непрерывна в точке x_0. Это следует из замечания 5 параграфа § 1.

Определение. Функция $f(x) = f(x^1, ..., x^n)$ называется *непрерывной* в точке $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$ *по переменной* x^i, если функция $\varphi(x^i) = f(x_0^1, ..., x_0^{i-1}, x^i, x_0^{i+1}, ..., x_0^n)$ непрерывна в точке x_0^i.

Замечание 3. Если функция $f(x^1, ..., x^n)$ непрерывна по совокупности переменных в точке x_0, то она непрерывна по каждой переменной в отдельности. Это легко следует из определений.

Замечание 4. Из непрерывности функции $f(x^1, ..., x^n)$ по каждой переменной в отдельности не следует непрерывность f по совокупности переменных. Например, функция

$$f(u, v) = \begin{cases} \frac{uv^2}{u^2+v^4}, & u^2 + v^2 \neq 0,\\ 0, & u^2 + v^2 = 0 \end{cases}$$

непрерывна в каждой точке по каждой переменной в отдельности, но не является непрерывной в точке $(0, 0)$ по совокупности переменных.

§ 3. Непрерывность функции нескольких переменных на множестве

Определение. Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Вектор-функция f называется *непрерывной на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке $x_0 \in X$ по множеству X.

Теорема 1. (О непрерывности сложной функции.) Пусть заданы множества $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ и вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^m$, $g : Y \to \mathbb{R}^p$, непрерывные на своих множествах определения. Пусть $f(X) \subset Y$. Тогда сложная вектор-функция $\varphi(x) = g(f(x))$ непрерывна на множестве X.

Доказательство. Так как функция g непрерывна на множестве Y, то

$$\forall y_0 \in Y\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma > 0 : \ \forall y \in Y : \ |y - y_0| < \sigma \hookrightarrow \ |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Из непрерывности функции f на множестве X следует, что

$$\forall x_0 \in X\ \forall \sigma > 0\ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in X : \ |x - x_0| < \delta \hookrightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \sigma.$$

Отсюда, применяя условие (1) для $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, получаем

$$\forall x_0 \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in X : \ |x - x_0| < \delta \hookrightarrow \ |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon,$$

т. е. вектор-функция $\varphi(x) = g(f(x))$ непрерывна на множестве X. □

Теорема 2. Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда множество значений $f(X)$ является компактом.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1 § 7 главы 2. □

Следствие. Если вектор-функция f непрерывна на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$, то она ограничена на X.

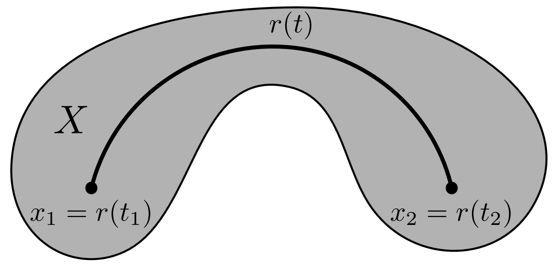
Доказательство. В силу теоремы 2 множество $f(X)$ – компакт, следовательно, является ограниченным множеством. Это и означает ограниченность вектор-функции f на множестве X. □

Теорема 3. (Вейерштрасс.) Пусть скалярная функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\exists \min_{x \in X} f(x) \in \mathbb{R}, \qquad \exists \max_{x \in X} f(x) \in \mathbb{R}.$$

Доказательство повторяет доказательство теоремы Вейерштрасса (теоремы 2 § 7 главы 2) для функции одной переменной. □

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *линейно-свя́зным*, если любые две точки x_1 и x_2 множества X можно соединить кривой Γ, лежащей в X, т. е. $\forall x_1, x_2 \in X$ существует вектор-функция $r(t)$, непрерывная на некотором отрезке $[t_1, t_2]$ и такая, что $r(t_1) = x_1$, $r(t_2) = x_2$ и $\forall t \in [t_1, t_2] \hookrightarrow \ r(t) \in X$.



Теорема 4. (О промежуточном значении.) Пусть скалярная функция $f(x)$ непрерывна на линейно-связном множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ и принимает на X значения y_1 и y_2. Тогда $f(x)$ принимает на X все значения, лежащие между y_1 и y_2.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ принимает значения y_1 и y_2 в точках $x_1, x_2 \in X$: $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. В силу линейно-связности множества X существует непрерывная на отрезке $[t_1, t_2]$ вектор-функция $r : [t_1, t_2] \to X$ такая, что $r(t_1) = x_1$, $r(t_2) = x_2$. Так как сложная функция $\varphi(t) = f(r(t))$ непрерывна на отрезке $[t_1, t_2]$, то по теореме Коши о промежуточном значении для функции одной переменной для любого числа y_0, лежащего между y_1 и y_2, существует $t_0 \in [t_1, t_2]$: $\varphi(t_0) = y_0$. Следовательно, $x_0 = r(t_0) \in X$ и $f(x_0) = y_0$. □

Определение. Открытое линейно-связное множество называется *областью*.

Заметим, что множество определения функции может не являться областью. Поэтому лучше говорить не "область определения функции а "множество определения функции".

Задача 1. Являются ли областями в $\mathbb{R}^n$ следующие множества:
а) $U_\varepsilon(x_0)$, где $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$;
б) $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| > \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$;
в) $U_{\varepsilon_1}(a) \bigcup U_{\varepsilon_2}(b)$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $|b - a| > \varepsilon_1 + \varepsilon_2$?

Указания: 1) открытость ε-окрестности в $\mathbb{R}^n$ доказана в главе 5;

2) для доказательства отсутствия линейно-связности множества (в) применить теорему о промежуточном значении для непрерывной функции $f(x) = |x - a|$.

§ 4. Равномерная непрерывность функции на множестве

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Говорят, что $f(x)$ *равномерно непрерывна* на X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : \ |x - x'| < \delta \hookrightarrow \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \quad (1)$$

Лемма 1. Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X, то она непрерывна на множестве X. Обратное неверно.

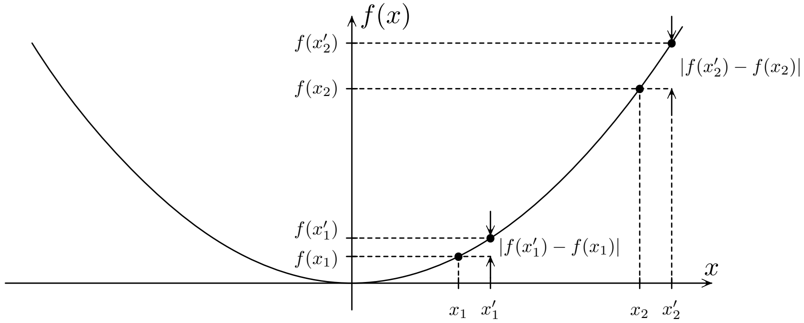
Доказательство. Условие непрерывности функции на множестве X можно записать в виде

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x' \in X : \ |x - x'| < \delta \hookrightarrow \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \quad (2)$$

Формально условия (1) и (2) отличаются порядком кванторов; фактическое отличие этих условий состоит в том, что в условии (1) число δ – единое для всех x, т. е. не зависит от x, а в условии (2) число δ – свое для каждого x. Поэтому из условия (1) следует условие (2).

Покажем, что из условия (2) не следует условие (1). Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$ на множестве $X = \mathbb{R}$. Поскольку $f(x) = x^2$ – непрерывная функция, то условие (2) выполняется. Покажем, что для этой функции условие (1) не выполняется, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x, x' \in X : \ |x - x'| < \delta \quad \text{и} \quad |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon.$$



Действительно, возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\forall \delta > 0 \ \exists x = \frac{1}{\delta}, \ x' = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$: $|x - x'| = \delta/2 < \delta$ и $|f(x) - f(x')| = \left|\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2}\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} >$ $> \varepsilon$. Следовательно, функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. □

Теорема 1. (Теорема Кантора.) Если функция f непрерывна на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на этом компакте.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функция f непрерывна на множестве X, то для любого $x \in X$ найдется число $\delta(x) > 0$ такое, что

$$\forall x' \in X : \ |x' - x| < \delta(x) \hookrightarrow \ |f(x') - f(x)| < \varepsilon. \quad (3)$$

Поскольку X – компакт, то в силу теоремы 1 § 13 главы 5 из открытого покрытия $\{U_{\delta(x)/2}(x)\}_{x \in X}$ множества X можно выделить конечное подпокрытие, т.е. найдется конечный набор $x_1, \ldots, x_N$ элементов множества X такой, что

$$X \subset \bigcup_{k \in \overline{1,N}} U_{\delta(x_k)/2}(x_k). \quad (4)$$

Обозначим $\delta = \min\limits_{k \in \overline{1,N}} \frac{\delta(x_k)}{2}$. Тогда $\delta > 0$. Пусть $x, x' \in X$, $|x - x'| <$ $< \delta$. В силу включения (4) найдется индекс $k \in \overline{1,N}$ такой, что $x \in U_{\delta(x_k)/2}(x_k)$. Так как $|x - x'| < \delta \leq \frac{\delta(x_k)}{2}$, то $x' \in U_{\delta(x_k)}(x_k)$. Следовательно, согласно соотношению (3) имеем $|f(x') - f(x_k)| < \varepsilon$ и $|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon$. Используя неравенство треугольника, получаем $|f(x) - f(x')| < 2\varepsilon$. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : \ |x - x'| < \delta \hookrightarrow \ |f(x) - f(x')| < 2\varepsilon.$$

Это означает равномерную непрерывность функции f на множестве X. □

Определение. Функция $\omega(\delta) = \sup\limits_{\substack{x, x' \in X \\ |x - x'| < \delta}} |f(x) - f(x')|$ называется *модулем непрерывности* функции f на множестве X.

Лемма 2. Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta) = 0$.

Доказательство. а) Пусть функция f равномерно непререрывна на множестве X, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0 > 0 : \forall x, x' \in X : \ |x - x'| < \delta_0 \hookrightarrow \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \quad (5)$$

Тогда при $\delta \in (0, \delta_0]$, $x, x' \in X$, $|x - x'| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Следовательно, $\omega(\delta) \le \varepsilon$ при $\delta \in (0, \delta_0]$. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_0 > 0 :\ \forall \delta \in (0, \delta_0] \hookrightarrow\ \omega(\delta) \le \varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства $\omega(\delta) \ge 0$ следует, что $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta) = 0$.

б) Пусть $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta) = 0$. Тогда по определению предела

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_0 > 0 :\ \forall \delta \in (0, \delta_0] \hookrightarrow\ \omega(\delta) < \varepsilon.$$

Тогда для любых $x, x' \in X$ таких, что $|x - x'| < \delta_0$ выберем число δ из условия $|x - x'| < \delta < \delta_0$ и получим $|f(x) - f(x')| \le \omega(\delta) < \varepsilon$. Следовательно, выполняется условие (5), т. е. функция f равномерно непрерывна на множестве X. □

Задача 1. Найти модуль непрерывности функции $f(x) = \sqrt{x}$ на множестве $X = [0, +\infty)$. Является ли функция f равномерно непрерывной на множестве X?

Задача 2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Как связаны условия

а) функция f равномерно непрерывна на (a, b);

б) производная функции f ограничена на (a, b)?

Задача 3. Пусть функция f непрерывна на полуинтервале $[a, b)$. Как связаны условия

а) функция f равномерно непрерывна на $[a, b)$;

б) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$?

§ 5. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Геометрический смысл градиента и дифференциала

Определение. Пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в $U_\delta(x^0) \subset \mathbb{R}^n$. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если существует вектор $A = (A_1, ..., A_n) \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$f(x) - f(x^0) = (A, x - x^0) + o(|x - x^0|) \quad \text{при} \quad x \to x^0,$$

где $(A, x - x^0) = A_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + A_n(x_n - x_n^0)$ – скалярное произведение векторов A и $x - x^0$; $o(|x - x^0|)$ – это такая функция $\varphi(x)$, что $\lim\limits_{x \to x^0} \frac{\varphi(x)}{|x - x^0|} = 0$.

При этом вектор A называется *градиентом* функции f в точке x^0 и обозначается через $\operatorname{grad} f(x^0)$.

Итак, функция f дифференцируема в точке x^0, если существует вектор $\operatorname{grad} f(x^0) \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$f(x) - f(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), x - x^0) + o(|x - x^0|) \quad \text{при} \quad x \to x^0.$$

Определение. *Дифференциалом* функции f в точке x^0 называется линейная относительно приращений независимых переменных $x_i - x_i^0$ функция $df(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), x - x^0)$.

Для дифференцируемой в точке x^0 функции f справедливо равенство

$$f(x) - f(x^0) = \Delta f = df(x^0) + o(|x - x^0|) \quad \text{при} \quad x \to x^0.$$

Выясним геометрический смысл градиента и дифференциала. Для простоты будем рассматривать функцию двух переменных $f(x, y)$, заданную на множестве $G \subset \mathbb{R}^2$.

Определение. *Графиком* функции $f : G \to \mathbb{R}$ называется множество

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ (x, y) \in G,\ z = f(x, y)\}.$$

Зафиксируем точку $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} G$. Через точку графика $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ проведем плоскость α с нормальным вектором $n = (n_x, n_y, n_z)$. Уравнение этой плоскости имеет вид

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Будем предполагать, что плоскость α невертикальна, т. е. $n_z \ne 0$. При этом уравнение плоскости α можно переписать в виде $z = f(x_0, y_0) - \frac{n_x}{n_z}(x - x_0) - \frac{n_y}{n_z}(y - y_0)$. Обозначив $N_x = -\frac{n_x}{n_z}$, $N_y = -\frac{n_y}{n_z}$, получаем уравнение плоскости α в следующем виде:

$$z = z_\alpha(x, y) = f(x_0, y_0) + N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0). \qquad (1)$$

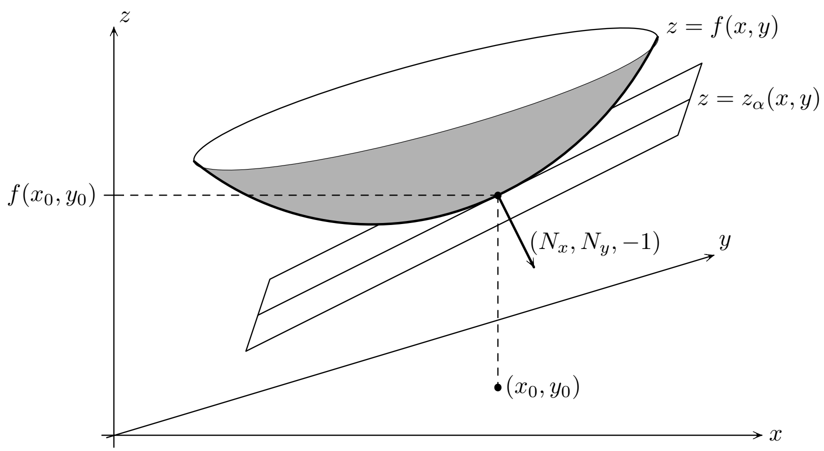
Вектор $(N_x, N_y, -1)$ является нормальным вектором плоскости α.

Определение. Плоскость вида (1) будем называть *касательной плоскостью* к графику функции $f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, если она приближает график функции с точностью до $o(\varrho)$ при $(x, y) \to \to (x_0, y_0)$, где $\varrho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, т. е.

$$f(x, y) - z_\alpha(x, y) = o(\varrho) \quad \text{при} \quad (x, y) \to (x_0, y_0). \qquad (2)$$

Теорема 1. (О геометрическом смысле градиента и дифференциала.) Пусть функция $f(x, y)$ определена в окрестности точки (x_0, y_0). Касательная плоскость к графику функции f в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ существует тогда и только тогда, когда функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0). Для дифференцируемой функции вектор $(\operatorname{grad} f(x_0, y_0), -1)$ является нормальным вектором касательной плоскости, а дифференциал функции равен приращению аппликаты касательной плоскости:

$$df(x_0, y_0) = z_\alpha(x, y) - z_\alpha(x_0, y_0).$$



Доказательство. Из формул (1), (2) следует, что касательная плоскость α существует в том и только в том случае, когда существуют числа N_x, N_y такие, что

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) - N_x(x - x_0) - N_y(y - y_0) = o(\varrho) \quad \text{при} \quad (x, y) \to (x_0, y_0).$$

Это условие эквивалентно дифференцируемости функции f в точке (x_0, y_0), причем в случае дифференцируемости $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = = (N_x, N_y)$. Нормальный вектор касательной плоскости α можно записать в виде $(N_x, N_y, -1) = (\operatorname{grad} f(x_0, y_0), -1)$.

Из условия $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (N_x, N_y)$ и формулы (1) получаем

$$df(x_0, y_0) = N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) = z_\alpha(x, y) - z_\alpha(x_0, y_0).$$

□

§ 6. Необходимые условия дифференцируемости. Производные по направлению и частные производные

Теорема 1. (Первое необходимое условие дифференцируемости.) Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x^0 и дифференцируема в этой точке, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x^0.

Доказательство. Из условия дифференцируемости функции f в точке x^0

$$f(x) - f(x^0) = (A, x - x^0) + o(|x - x^0|) \quad \text{при} \quad x \to x^0$$

следует, что $\lim\limits_{x \to x^0}(f(x) - f(x^0)) = 0$, т. е. функция f непрерывна в точке x^0. □

Определение. *Производной* функции f в точке x^0 *по вектору* $\ell \in \mathbb{R}^n$ называется

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x^0 + t\ell) - f(x^0)}{t}.$$

В частности, если ℓ – единичный вектор (т.е. является направлением), то $\frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0)$ называется *производной по направлению*.

Теорема 2. (Второе необходимое условие дифференцируемости.) Если функция f дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, то производная по любому вектору $\ell \in \mathbb{R}^n$ существует и равна скалярному произведению градиента на вектор ℓ:

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), \ell).$$

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, т. е.

$$f(x) - f(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), x - x^0) + o(|x - x^0|) \quad \text{при} \quad x \to x^0.$$

Зафиксировав произвольный вектор $\ell \in \mathbb{R}^n$ и подставив $x = x^0 + t\ell$ в предыдущую формулу, получаем

$$f(x^0 + t\ell) - f(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), t\ell) + o(t) \quad \text{при} \quad t \to +0,$$

следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), \ell) + \lim_{t\to+0} \frac{o(t)}{t} = (\operatorname{grad} f(x^0), \ell). \qquad \square$$

Лемма 1. (Второй геометрический смысл градиента.) Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0 и $\operatorname{grad} f(x^0) \neq \overline{0}$, то направление $\operatorname{grad} f(x^0)$ является направлением наиболее быстрого возрастания функции f в точке x^0, а направление $-\operatorname{grad} f(x^0)$ является направлением наиболее быстрого убывания функции f в точке x^0. Иными словами,

1) $\max\limits_{\ell \in \mathbb{R}^n:\ |\ell|=1} \frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0)$ достигается на векторе $\ell_{\max} = \frac{\operatorname{grad} f(x^0)}{|\operatorname{grad} f(x^0)|}$;

2) $\min\limits_{\ell \in \mathbb{R}^n:\ |\ell|=1} \frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0)$ достигается на векторе $\ell_{\min} = -\frac{\operatorname{grad} f(x^0)}{|\operatorname{grad} f(x^0)|}$.

Доказательство. 1) Из теоремы 2 следует, что $\forall \ell \in \mathbb{R}^n$: $|\ell| = 1$ выполняются соотношения $\frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), \ell) \leq |\operatorname{grad} f(x^0)|\ |\ell| = |\operatorname{grad} f(x^0)| = (\operatorname{grad} f(x^0), \ell_{\max}) = \frac{\partial f}{\partial \ell_{\max}}(x^0)$. Следовательно, $\max\limits_{\ell:\ |\ell|=1} \frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0)$ достигается на векторе $\ell_{\max}$.

Пункт (2) доказывается аналогично. $\square$

Замечание 1. Из существования производных по всем направлениям (и по всем векторам) функции f в точке x^0 не следует дифференцируемость функции f в точке x^0.

Действительно, рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x \neq y^2 \quad \text{или} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases} \qquad (1)$$

Поскольку для любого вектора $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2\ \exists \delta > 0 : \forall t \in (0, \delta) \hookrightarrow \to\ f(\delta\ell_1, \delta\ell_2) = 0$, то производная $\frac{\partial f}{\partial \ell}(0, 0)$ по любому вектору $\ell \in \mathbb{R}^2$ существует и равна 0, однако функция f не является дифференцируемой и даже непрерывной в точке $(0, 0)$.

Определение. *Частной производной* функции $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ по переменной x_i в точке $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ называется производная функции одной переменной $\varphi(x_i) = f(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, ..., x_n^0)$ в точке x_i^0:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = f'_{x_i}(x^0) = \varphi'(x_i^0) =$$

$$= \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_n^0)}{x_i - x_i^0}.$$

Иными словами, для того, чтобы вычислить частную производную функции f по переменной x_i, нужно зафиксировать все остальные переменные (при этом получится функция одной переменной x_i), а затем – вычислить производную полученной функции одной переменной.

Лемма 2. (О связи частных производных и производных по направлению.) Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ существует тогда и только тогда, когда для направлений $\ell_i^+ = (0, ..., 0, +1, 0, ..., 0)$ и $\ell_i^- = (0, ..., 0, -1, 0, ..., 0)$ (где ± 1 стоит на i-м месте) производные по направлению $\frac{\partial f}{\partial \ell_i^+}(x^0)$ и $\frac{\partial f}{\partial \ell_i^-}(x^0)$ существуют и $\frac{\partial f}{\partial \ell_i^+}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial \ell_i^-}(x^0)$. При этом $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial \ell_i^+}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial \ell_i^-}(x^0)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(t) = f(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0 + t, x_{i+1}^0, ..., x_n^0) = f(x^0 + t\ell_i^+)$. Из определений частной производной и производной по направлению следует, что

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \varphi'(0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \ell_i^+}(x^0) = \lim_{t\to+0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'_+(0), \\ \frac{\partial f}{\partial \ell_i^-}(x^0) = \lim_{t\to+0} \frac{\varphi(-t) - \varphi(0)}{t} = -\lim_{t\to-0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = -\varphi'_-(0). \end{gathered} \qquad (2)$$

Как было доказано в главе 3, производная функции одной переменной $\varphi'(0)$ существует тогда и только тогда, когда правая и левая производные $\varphi'_+(0)$ и $\varphi'_-(0)$ существуют и равны между собой и при этом $\varphi'(0) = \varphi'_+(0) = \varphi'_-(0)$. Отсюда и из формул (2) получаем утверждение леммы. □

Теорема 3. (Третье необходимое условие дифференцируемости.) Если функция f дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ существуют и совпадают с соответствующими координатами вектора градиента:

$$\operatorname{grad} f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right).$$

Доказательство. По теореме 2 производные по направлениям координатных осей $\ell_i^+ = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (где 1 стоит на i-м месте) существуют и $\frac{\partial f}{\partial \ell_i^+}(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), \ell_i^+)$, т.е. равны соответствующим координатам вектора градиента. Аналогично, производные по противоположным направлениям $\frac{\partial f}{\partial \ell_i^-}(x^0)$ (где $\ell_i^- = -\ell_i^+$) существуют и равны соответствующим координатам вектора градиента с обратным знаком. Отсюда и из леммы 2 получаем, что частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ существуют и равны соответствующим координатам вектора градиента. □

Замечание 2. Из существования частных производных по всем переменным не следует дифференцируемость, а значит, не следует существование градиента функции. Например, все частные производные функции (1) в точке $(0,0)$ существуют и равны нулю, однако эта функция недифференцируема в точке $(0,0)$.

Теорема 4. (О связи частных производных и дифференциала функции.) Если функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$, то для дифференциала функции f в точке x^0 справедлива формула

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\, dx_i, \quad \text{где} \quad dx_i = x_i - x_i^0.$$

Доказательство. По определению дифференциала $df(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), x - x^0)$. Следовательно, по теореме 3 $df(x^0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\,(x_i - x_i^0)$. □

§ 7. Достаточные условия дифференцируемости

Теорема 1. Если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$ определены в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и непрерывны в точке x^0, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0.

Доказательство проведем для функции двух переменных $f(x,y)$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Пусть частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0).

Представим приращение функции f как сумму приращений по каждой переменной:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0). \qquad (1)$$

Зафиксировав y и применив теорему Лагранжа о среднем к функции одной переменной $\varphi(x) = f(x,y)$, получаем, что существует число ξ, лежащее между x и x_0, такое, что $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi) \cdot (x - x_0)$. Иными словами, существует число $\theta \in (0,1)$, зависящее от x и y, такое, что

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0),$$

то есть

$$f(x,y) - f(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), y) \cdot (x - x_0).$$

Определим функцию $\varepsilon(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Тогда

$$f(x,y) - f(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x,y) \cdot (x - x_0). \qquad (2)$$

Так как частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ непрерывна в точке (x_0,y_0) и $\theta \in (0,1)$, то $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, и, следовательно, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \varepsilon(x,y) = 0$. Обозначая $\varrho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, получаем

$$\frac{|\varepsilon(x,y)\cdot(x-x_0)|}{\varrho} \le |\varepsilon(x,y)| \quad \xrightarrow{(x,y)\to(x_0,y_0)} \quad 0,$$

т. е. $\varepsilon(x,y)\cdot(x-x_0) = o(\varrho)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$. Отсюда и из (2) получаем при $(x,y)\to(x_0,y_0)$

$$f(x,y) - f(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + o(\varrho).$$

Аналогично, при $(x,y)\to(x_0,y_0)$

$$f(x_0,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + o(\varrho).$$

Следовательно, учитывая (1), получаем при $(x,y)\to(x_0,y_0)$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + o(\varrho),$$

что доказывает дифференцируемость функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0). Случай функции n переменных ($n \ge 3$) рассматривается аналогично. $\square$

§ 8. Дифференцирование сложной вектор-функции

Определение. Пусть вектор-функция $f(x) = (f_1(x),...,f_m(x))$ определена в некоторой окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что вектор-функция f *дифференцируема* в точке x^0, если все ее координаты $f_k(x)$ $(k = 1,...,m)$ дифференцируемы в точке x^0. *Матрицей Якоби* вектор-функции f в точке x^0 называется следующая матрица, составленная из частных производных:

$$\mathcal{D}\, f(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в k-й строке матрицы Якоби стоят координаты градиента скалярной функции $f_k(x)$.

Лемма 1. Вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $x^0 \in \operatorname{int} X \subset \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда существует матрица A размера $m\times n$, такая, что

$$f(x) - f(x^0) = A\,(x-x^0) + \overline{o}(|x-x^0|) \quad \text{при} \quad x\to x^0, \qquad (1)$$

где $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_m(x)\end{pmatrix}$, $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n\end{pmatrix}$, $\quad \overline{o}(|x-x^0|) = \begin{pmatrix} o(|x-x^0|) \\ \dots \\ o(|x-x^0|)\end{pmatrix}$ – столбцы высоты m, n и m соответственно, а $A\,(x-x^0)$ – произведение матрицы A на столбец $x-x^0$.

Причем если выполняется условие (1), то матрица A совпадает с матрицей Якоби вектор-функции f в точке x^0.

Доказательство. По определению дифференцируемости скалярная функция $f_k(x)$ дифференцируема в точке x^0 тогда и только тогда, когда существует вектор $a_k = (a_{k1},...,a_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$f_k(x) - f_k(x^0) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(x_i - x_i^0) + o(|x-x^0|) \quad \text{при} \quad x\to x^0. \qquad (2)$$

Так как набор условий (2) при $k = 1,...,m$ можно записать в матричном виде (1), где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$, то условие (1) эквивалентно дифференцируемости вектор-функции f в точке x^0.

В силу третьего необходимого условия дифференцируемости (теорема 3 § 6) из условия (2) следует, что $a_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^0)$, поэтому из условия (1) следует, что $A = \mathcal{D}\, f(x^0)$. $\square$

Лемма 2. Если вектор-функция $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_m(x)\end{pmatrix}$ дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, то

$$df(x^0) = \mathcal{D}\, f(x^0)\, dx. \qquad (3)$$

Доказательство. В силу теоремы 4 § 6

$$df_k(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^0)\, dx_i, \quad k\in\{1,\dots,m\}.$$

Записывая эти уравненения в матричном виде, получаем уравнение (3). $\square$

Теорема 1. (О дифференцировании сложной функции.) Пусть заданы множества $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ и вектор-функции $f : X \to Y$ и $g : Y \to \mathbb{R}^p$. Пусть вектор-функция f дифференцирума в точке $x^0 \in \in \operatorname{int} X$, а вектор-функция g дифференцируема в точке $y^0 = f(x^0) \in \in \operatorname{int} Y$. Тогда сложная функция $\varphi(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x^0, а матрица Якоби функции φ равна произведению матриц Якоби функций g и f:

$$\mathcal{D}\,\varphi(x^0) = \mathcal{D}\,g(y^0)\ \cdot \mathcal{D}\,f(x^0),$$

или в координатной форме:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x^0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(y^0)\ \ \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x^0)$$

$$(i = 1, ..., p,\ \ j = 1, ..., n).$$

Доказательство. Применяя лемму 1 для вектор-функций $f(x)$ и $g(y)$, получаем

$$f(x) - f(x^0) = \mathcal{D}\,f(x^0)\,(x - x^0) + \overline{o}(|x - x^0|) \quad \text{при} \quad x \to x^0,$$

$$g(y) - g(y^0) = \mathcal{D}\,g(y^0)\,(y - y^0) + \overline{o}(|y - y^0|) \quad \text{при} \quad y \to y^0.$$

Подставляя в последнюю формулу $y = f(x)$, $y^0 = f(x^0)$, получаем

$$g(f(x)) - g(f(x^0)) =$$

$$= \mathcal{D}\,g(y^0)\left(\mathcal{D}\,f(x^0)\,(x - x^0) + \overline{o}(|x - x^0|)\right) + \overline{o}(|f(x) - f(x^0)|)$$

при $x \to x^0$. Поскольку

$$\mathcal{D}\,g(y^0)\,\overline{o}(|x - x^0|) = \overline{o}(|x - x^0|),$$

$$\overline{o}(|f(x) - f(x^0)|) = \overline{o}(|x - x^0|) \quad \text{при} \quad x \to x^0,$$

и $\varphi(x) = g(f(x))$, то при $x \to x^0$

$$\varphi(x) - \varphi(x^0) = \mathcal{D}\,g(y^0)\ \cdot \mathcal{D}\,f(x^0)\,(x - x^0) + \overline{o}(|x - x^0|).$$

Отсюда по лемме 1 следует, что функция φ дифференцируема в точке x^0 и $\mathcal{D}\,\varphi(x^0) = \mathcal{D}\,g(y^0)\ \cdot \mathcal{D}\,f(x^0)$. □

Теорема 2. (Инвариантность формы первого дифференциала.) Пусть вектор-функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, а вектор-функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке $y^0 = f(x^0) \in \in \mathbb{R}^m$. Тогда формула для дифференциала сложной функции $z = = \varphi(x) = g(f(x))$ и формула для дифференциала простой функции $z = g(y)$ имеют один и тот же вид:

$$dz = \mathcal{D}\,g(y^0)\,dy, \tag{4}$$

где в случае простой функции dy – это приращение независимой векторной переменной y, а в случае сложной функции dy – это дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x^0.

Доказательство. Для простой функции формула (4) следует из леммы 2. Пользуясь этой же леммой для вектор-функций $z = \varphi(x)$ и $y = f(x)$, получаем $dz = d\varphi(x^0) = \mathcal{D}\,\varphi(x^0)\,dx$, $dy = df(x^0) = = \mathcal{D}\,f(x^0)\,dx$.

В силу теоремы о дифференцировании сложной функции $\mathcal{D}\,\varphi(x^0) = \mathcal{D}\,g(y^0) \cdot \mathcal{D}\,f(x^0)$, следовательно, $dz = \mathcal{D}\,g(y^0) \cdot \mathcal{D}\,f(x^0)\,dx = = \mathcal{D}\,g(y^0)\,dy$, т.е. справедлива формула (4) для сложной функции. □

§ 9. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Определение. Пусть в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ функции $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$. Частная производная функции $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ по переменной x_j в точке x^0 называется *частной производной второго порядка* функции $f(x)$ и обозначается через $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)$ или $f''_{x_i\,x_j}(x^0)$. *Частная производная порядка* k определяется индукцией по k:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}\right).$$

Например, для функции двух переменных $f(x, y)$ можно рассматривать четыре производные второго порядка: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ называются *смешанными*.

Замечание. Смешанные производные могут зависеть от порядка дифференцирования. Например, для функции

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

имеет место неравенство $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

Теорема 1. Пусть обе смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ определены в окрестности точки (x_0,y_0) и непрерывны в этой точке. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$.

Доказательство. Поскольку смешанные производные определены в окрестности точки (x_0,y_0), то $\exists\delta>0$ такое, что смешанные производные определены в квадрате

$$\{(x,y):|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}.$$

При $t\in(-\delta,\delta)$ определим функцию

$$w(t)=f(x_0+t,y_0+t)-f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0+t)+f(x_0,y_0).$$

Зафиксируем произвольное $t\in(-\delta,\delta)$ и применим теорему Лагранжа о среднем для функции $\varphi(x)=f(x,y_0+t)-f(x,y_0)$. Получим, что существует число $\theta_1\in(0,1)$, зависящее от t и такое, что $\varphi(x_0+$ $+t)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta_1 t)\,t$, т. е. поскольку $w(t)=\varphi(x_0+t)-\varphi(x_0)$, $\varphi'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0+t)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)$, получаем

$$w(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 t,y_0+t)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 t,y_0)\right)t.$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем для функции $\psi(y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+$ $+\theta_1 t,y)$, получаем, что существует число $\theta_2\in(0,1)$, зависящее от t и такое, что $\psi(y_0+t)-\psi(y_0)=\psi'(y_0+\theta_2 t)\,t$, т. е.

$$w(t)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_1 t,y_0+\theta_2 t)\,t^2. \qquad (1)$$

В силу непрерывности частной производной $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ в точке (x_0,y_0) и условий $\theta_1\in(0,1)$, $\theta_2\in(0,1)$, получаем

$$\lim_{t\to0}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_1 t,y_0+\theta_2 t)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0),$$

откуда и из (1) следует, что

$$\lim_{t\to0}\frac{w(t)}{t^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

Поскольку при замене переменных x на y, а y на x и замене функции $f(x,y)$ на функцию $f(y,x)$, функция $w(t)$ не изменится, но поменяется порядок дифференцирования в смешанной производной $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, то

$$\lim_{t\to0}\frac{w(t)}{t^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0).$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$. □

Замечание. По аналогии с теоремой 1 можно доказать, что если частные производные k-го порядка функции $f(x_1,...,x_n)$ определены в окрестности точки $x^0\in\mathbb{R}^n$ и непрерывны в точке x^0, то в этой точке частные производные k-го порядка не зависят от порядка дифференцирования.

Определение. Функция $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ называется *k раз дифференцируемой* в точке $x^0\in\mathbb{R}^n$, если все частные производные порядка $(k-1)$ функции f определены в окрестности точки x^0 и дифференцируемы в точке x^0. *Дифференциал k-го порядка* определяется по индукции:

$$d^k f(x^0)=d(d^{k-1}f)(x^0).$$

При вычислении дифференциала выражения $d^{k-1}f$ дифференциалы независимых переменных dx_i, входящие в $d^{k-1}f$, следует считать постоянными.

Лемма 1. Пусть функция $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ является k раз дифференцируемой в точке $x^0\in\mathbb{R}^n$. Тогда

$$d^k f(x^0)=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(x^0)\,dx_{i_k}\cdots dx_{i_1}.$$

Доказательство. В силу теоремы 4 § 6 имеем

$$d^2 f(x^0) = d(df)(x^0) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,dx_i\right)\Bigg|_{x=x_0} = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x^0)\,dx_i.$$

Используя равенства

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x^0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x^0)\,dx_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(x^0)\,dx_j,$$

приходим к соотношениям

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(x^0)\,dx_j\,dx_i = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2}\,\partial x_{i_1}}(x^0)\,dx_{i_2}\,dx_{i_1}.$$

Рассуждая аналогично, индукцией по k получаем доказываемую формулу. $\square$

§ 10. Операторы дифференцирования

Напомним, что в главе 5 было введено понятие линейного пространства как множества, на котором определены операция сложения элементов и операция умножения элемента на число, удовлетворяющие определенным аксиомам.

Пример. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Обозначим через F_X^0 множество функций $f : X \to \mathbb{R}$, а через F_X^k, где $k \in \mathbb{N}$, – множество функций $f : X \to \mathbb{R}$, дифференцируемых k раз в каждой точке $x \in X$. Легко проверить, что множества F_X^k $(k = 0, 1, ..)$ являются линейными пространствами с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число.

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – линейные пространства. Отображение $\hat{A} : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется *линейным оператором*, действующим из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$, если для любых элементов $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ и любых чисел λ_1, λ_2 выполняется $\hat{A}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \hat{A} f_1 + \lambda_2 \hat{A} f_2$.

Пример. Частная производная $\frac{\partial}{\partial x_i}$ является линейным оператором $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, действующим из линейного пространства F_X^k в линейное пространство F_X^{k-1}. Действительно, для любой k раз дифференцируемой функции $f \in F_X^k$ функция $(\hat{A} f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ является $k-1$ раз дифференцируемой, т.е. $\hat{A} f \in F_X^{k-1}$. Из свойств производной следует линейность оператора $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x_i}$: $\forall f_1, f_2 \in F_X^k$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\right) = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x).$$

Определение. Пусть $\hat{A}_1, ..., \hat{A}_n$ – линейные операторы, действующие из линейного пространства $\mathcal{F}$ в линейное пространство $\mathcal{G}$, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – числа. Через $\lambda_1 \hat{A}_1 + \cdots + \lambda_n \hat{A}_n$ будем обозначать линейный оператор, результат действия которого на элемент $f \in \mathcal{F}$ определяется по формуле

$$\left(\lambda_1 \hat{A}_1 + \cdots + \lambda_n \hat{A}_n\right) f = \lambda_1 \hat{A}_1 f + \cdots + \lambda_n \hat{A}_n f.$$

Пример. Для заданных чисел $\lambda_1, ..., \lambda_n$ и открытого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим линейный оператор $\hat{A} = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, действующий из F_X^k в F_X^{k-1}. Поскольку результат применения оператора $\hat{A}$ к функции $f \in F_X^k$ равен $\hat{A} f = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$, т.е. равен скалярному произведению вектора $\ell = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ на вектор-функцию $\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$: $(\hat{A} f)(x) = (\operatorname{grad} f(x), \ell)$, то в силу формулы $(\operatorname{grad} f(x), \ell) = \frac{\partial f}{\partial \ell}(x)$ получаем $(\hat{A} f)(x) = \frac{\partial f}{\partial \ell}(x)$, т.е. оператор $\hat{A}$ является оператором взятия производной по вектору ℓ: $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial \ell}$.

Определение. Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ – линейные пространства; $\hat{A} : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $\hat{B} : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ – линейные операторы. *Произведением* или *суперпозицией* операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется линейный оператор $\hat{B}\,\hat{A} : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$, определяемый по формуле

$$\forall f \in \mathcal{F} \qquad (\hat{B}\,\hat{A}) f = \hat{B}(\hat{A} f).$$

Пример. Пусть $\hat{A}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ – операторы частных производных первого порядка. Произведениями операторов $\hat{A}_i$ являются частные производные высших порядков. Например, $\hat{A}_i\,\hat{A}_j = \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}$, $\quad \hat{A}_i^2 = \hat{A}_i\,\hat{A}_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – линейные операторы, действующие из F_X^k в F_X^{k-2}.

Заметим, что в общем случае произведение операторов некоммутативно: $\hat{A}\,\hat{B} \neq \hat{B}\,\hat{A}$. В § 9 был приведен пример функции $f(x,y)$, для которой $\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\,f \neq \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial x}\,f$.

Из теоремы 1 § 9 следует, что на пространстве функций, имеющих непрерывные смешанные производные, операторы $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ коммутативны.

Лемма 1. Пусть функция $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ является k раз дифференцируемой в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда в этой точке

$$d^k f = \left(\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f\right).$$

Доказательство. Индукцией по k получаем равенство

$$\left(\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f\right) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\,\cdots\,\partial x_{i_1}}\,dx_{i_k}\,\cdots\,dx_{i_1}.$$

Отсюда в силу леммы 1 § 9 следует доказываемое утверждение. □

Лемма 2. Пусть все частные производные k-го порядка функции $f(x,y)$ непрерывны в точке (x_0,y_0). Тогда в этой точке

$$d^k f = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\,\partial y^i} dx^{k-i}\,dy^i, \quad \text{где} \quad C_k^i = \frac{k!}{(k-i)!\,i!}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 § 9 смешанные производные порядка k функции f в точке (x_0,y_0) не зависят от порядка дифференцирования. Поэтому в выражении $\left(\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right)(x_0,y_0)$ операторы $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ коммутируют, т.е. ведут себя как обычные числа. Применяя формулу для бинома Ньютона, в точке (x_0,y_0) получаем

$$\left(\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\,\partial y^i} dx^{k-i}\,dy^i.$$

Отсюда и из леммы 1 следует доказываемое равенство. □

§ 11. Формула Тейлора

Теорема 1. Пусть функция $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ является $m+1$ раз дифференцируемой в некоторой δ-окрестности точки $x^0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$. Тогда для любой точки $x \in U_\delta(x^0)$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + \frac{1}{(m+1)!}\,d^{m+1} f(x^0 + \theta\Delta x),$$

где $\theta = \theta(x) \in (0,1)$, $\Delta x = dx = x - x^0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $x \in U_\delta(x^0)$. Определим функцию $\varphi(t) = f(x^0 + t\Delta x)$ и оператор

$$\hat{A} = \Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{1}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_i^0$. По теореме о дифференцировании сложной функции

$$\forall t \in (0,1) \quad \exists\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0 + t\Delta x)\,\cdot\,\Delta x_1 + \cdots +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0 + t\Delta x)\,\cdot\,\Delta x_n = (\hat{A}f)(x^0 + t\Delta x).$$

Дифференцируя сложную функцию $\varphi(t) = f(x^0 + t\Delta x)$ $\quad k$ раз, получаем $\quad \varphi^{(k)}(t) = (\hat{A}^k f)(x^0 + t\Delta x)$. Применяя формулу Тейлора для функции одной переменной $\varphi(t)$, получаем, что существует число $\theta \in (0,1)$ такое, что

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\,\varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}\,\varphi^{(m+1)}(\theta),$$

то есть

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}(\hat{A}^k f)(x^0) + \frac{1}{(m+1)!}(\hat{A}^{m+1} f)(x^0 + \theta\Delta x).$$

Отсюда в силу леммы 1 § 10 и формулы (1) получаем доказываемое равенство. □

Определение. Многочлен

$$P_m(dx) = P_m(dx_1, \ldots, dx_n) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x^0)$$

называется *многочленом Тейлора* порядка m функции f в точке x^0.

Многочлен Тейлора $P_m(dx_1, \ldots, dx_n)$ является многочленом степени не выше m относительно переменных $dx_1, \ldots, dx_n$.

Теорема 2. Пусть все частные производные функции f до порядка m включительно существуют и непрерывны в некоторой окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = P_m(\Delta x) + o(|\Delta x|^m) \quad \text{при} \quad \Delta x = x - x^0 \to 0. \tag{2}$$

Доказательство. Поскольку функция f является m раз дифференцируемой в некоторой окрестности точки x^0, то согласно теореме 1 в этой окрестности справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + \frac{1}{m!}\, d^m f(x^0 + \theta \Delta x), \tag{3}$$

где $\theta = \theta(x) \in (0,1)$. Покажем, что при $x \to x^0$

$$d^m f(x^0 + \theta \Delta x) - d^m f(x^0) = o(|\Delta x|^m). \tag{4}$$

Согласно лемме 1 § 9 в достаточно малой окрестности точки x^0

$$d^m f = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}\, dx_{i_m} \cdots dx_{i_1}.$$

Так как $|dx_i| = |\Delta x_i| \le \sqrt{|\Delta x_1|^2 + \ldots + |\Delta x_n|^2} = |\Delta x|$, то

$$\frac{|d^m f(\widetilde{x}) - d^m f(x^0)|}{|\Delta x|^m} \le$$

$$\le \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \left| \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}(\widetilde{x}) - \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}(x^0) \right| \le$$

$$\le n^m \max_{i_1,\ldots,i_m \in \{1,\ldots,n\}} \left| \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}(\widetilde{x}) - \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}(x^0) \right|.$$

Поскольку производные порядка m непрерывны и $\theta \in (0,1)$, то для любых $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$ при $x \to x^0$

$$\left| \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}(x^0 + \theta \Delta x) - \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}(x^0) \right| \to 0 \quad \text{при} \quad x \to x^0.$$

Следовательно,

$$\frac{|d^m f(x^0 + \theta \Delta x) - d^m f(x^0)|}{|\Delta x|^m} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to x^0.$$

Отсюда следует формула (4), которая вместе с формулой (3) дает (2). □

Замечание. Так же, как и для функции одной переменной, доказывается единственность разложения (2). А именно, если все частные производные функции f до порядка m включительно непрерывны в точке x^0 и справедливо разложение (2), где $P_m(\Delta x)$ – некоторый многочлен степени не выше m относительно переменных $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, то $P_m(\Delta x)$ – многочлен Тейлора функции f в точке x^0.

Глава 7

ИНТЕГРАЛ РИМАНА

§ 1. Мера Жордана

Определение. *Клеткой* в пространстве $\mathbb{R}^n$ будем называть замкнутый прямоугольный параллелепипед

$$\Pi = \{x = (x_1, \dots, x_n) \ : \ a_k \le x_k \le b_k, \ k = 1, \dots, n\},$$

где числа a_k, b_k ($a_k \le b_k$), $k = 1, \dots, n$, задают клетку $\Pi \subset \mathbb{R}^n$. Мерой $\mu(\Pi)$ клетки Π называется число $\mu(\Pi) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *клеточным множеством*, если оно представимо в виде объединения конечного набора клеток $\Pi_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, I$, не имеющих общих внутренних точек:

$$A = \bigcup_{i=1}^{I} \Pi_i, \qquad (\operatorname{int} \Pi_i) \bigcap (\operatorname{int} \Pi_s) = \emptyset \quad \text{при} \quad i \ne s.$$

Мерой клеточного множества A называется сумма мер составляющих его клеток: $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{I} \mu(\Pi_i)$.

Пустое множество по определению будем считать клеточным, а меру пустого множества – равной нулю.

Примем без доказательства следующие очевидные свойства клеточных множеств. (Предлагается доказать эти свойства в качестве упражнения.)

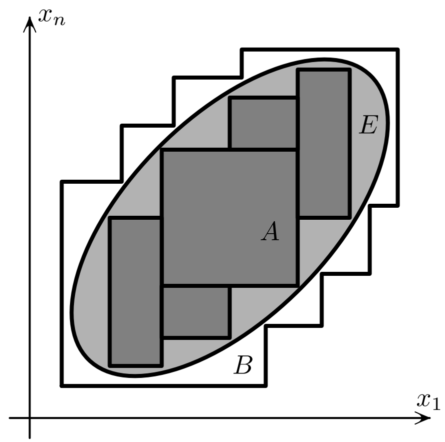
Свойство 1. Мера клеточного множества не зависит от способа разбиения этого множества на клетки. (Из этого свойства следует корректость определения меры клеточного множества).

Свойство 2. Если A, B – клеточные множества, то множества $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus (\operatorname{int} B)$ являются клеточными. (Множество $A \setminus B$, вообще говоря, незамкнуто, следовательно, не является клеточным.)

Свойство 3. (Аддитивность.) Если A, B – клеточные множества, не имеющие общих внутренних точек, то $\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Если существует общая внутренняя точка клеточных множеств A и B, то $\mu(A \bigcup B) < \mu(A) + \mu(B)$.

Свойство 4. (Монотонность.) Если A, B – клеточные множества и $A \subset B$, то $\mu(A) \le \mu(B)$.

Определение. *Нижней мерой Жордана* $\mu_*(E)$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется точная верхняя грань мер клеточных множеств A, содержащихся в E. *Верхней мерой Жордана* $\mu^*(E)$ множества $E \subset \subset \mathbb{R}^n$ называется точная нижняя грань мер клеточных множеств B, содержащих E:



$$\mu_*(E) = \sup_{A-\text{ клет.}, \, A \subset E} \mu(A),$$

$$\mu^*(E) = \inf_{B-\text{ клет.}, \, B \supset E} \mu(B).$$

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если $\mu_*(E) = \mu^*(E) \in \mathbb{R}$. Число $\mu(E) = \mu_*(E) = \mu^*(E)$ называется *мерой* множества E.

Заметим, что если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ неограниченно, то не существует клеточного множества B (т. е. множества, состоящего из конечного набора клеток), такого, что $E \subset B$. При этом верхняя мера $\mu^*(E)$ равна $+\infty$ и множество E неизмеримо.

Поскольку для клеточных множеств A, B таких, что $A \subset E \subset B$, справедливо неравенство $\mu(A) \le \mu(B)$, то для любого ограниченного множества E

$$\mu_*(E) \le \mu^*(E).$$

Поэтому ограниченное множество E неизмеримо тогда и только тогда, когда $\mu_*(E) < \mu^*(E)$.

Например, множество

$$G = \{x \in [0,1] \ : \ x - \text{рациональное число}\}$$

неизмеримо. Действительно, любое клеточное множество $A \subset G$ не может содержать клетки ненулевой меры, поэтому $\mu(A) = 0$ и, следовательно, $\mu_*(G) = 0$. С другой стороны, любое клеточное множество $B \supset G$ содержит отрезок $[0,1]$. Поэтому $\mu(B) \geq 1$ и, следовательно, $\mu^*(G) \geq 1$. Итак, $\mu_*(G) < \mu^*(G)$, а значит, множество G неизмеримо по Жордану.

Замечание. Для любых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ таких, что $A \subset \subset B$, справедливы неравенства $\mu_*(A) \leq \mu_*(B)$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Это следует из свойства 4 меры клеточных множеств.

Лемма 1. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся клеточные множества A_ε и B_ε такие, что $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$.

Доказательство. 1) Пусть E – измеримо, т. е. $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. По определению точной верхней грани $\mu_*(E) = \sup\limits_{A-\text{ клет.}, A \subset E} \mu(A)$, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется клеточное множество $A_\varepsilon \subset E$ такое, что $\mu_*(E) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Аналогично, по определению точной нижней грани, найдется клеточное множество $B_\varepsilon \supset E$ такое, что $\mu(B_\varepsilon) - \mu^*(E) < \varepsilon/2$. Следовательно, $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$.

2) Пусть для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся клеточные множества A_ε и B_ε такие, что $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$. Поскольку $\mu_*(E) = \sup\limits_{A-\text{ клет.}, A \subset E} \mu(A) \geq \mu(A_\varepsilon)$ и, аналогично, $\mu^*(E) \leq \mu(B_\varepsilon)$, то $\mu^*(E) - \mu_*(E) \leq \mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$. Так как число $\mu^*(E) - \mu_*(E)$ не зависит от выбора $\varepsilon > 0$, то $\mu^*(E) - \mu_*(E) \leq 0$, т. е. $\mu^*(E) \leq \leq \mu_*(E)$. Поскольку неравенство $\mu^*(E) \geq \mu_*(E)$ выполняется всегда, то $\mu^*(E) = \mu_*(E)$. $\square$

Через $U_\delta(E)$ обозначим δ – окрестность множества E:

$$U_\delta(E) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \varrho(x; E) < \delta\},$$

где $\quad \varrho(x; E) = \inf\limits_{y \in E} |x - y|$ – расстояние от точки x до множества E.

Лемма 2. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество. Тогда

$$\mu^*(U_\delta(E)) \to \mu(E) \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{1}$$

Доказательство. а) Покажем сначала, что условие (1) выполняется для любой клетки $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ a_i \leq x_i \leq b_i, \ i = = 1, \ldots, n\}$: $\ \mu^*(U_\delta(\Pi)) \to \mu(\Pi)$ при $\delta \to 0$. Действительно, поскольку $\Pi \subset U_\delta(\Pi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ a_i - \delta \leq x_i \leq b_i + \delta, \ i = 1, \ldots, n\}$, то $\mu(\Pi) \leq \mu^*(U_\delta(\Pi)) \leq (b_1 - a_1 + 2\delta) \cdots (b_n - a_n + 2\delta) \xrightarrow{\delta \to 0} (b_1 - a_1) \cdots (b_n - - a_n) = \mu(\Pi)$, то условие (1) для множества $E = \Pi$ выполняется.

б) Покажем теперь, что условие (1) выполняется для любого клеточного множества A. Пусть $A = \bigcup\limits_{i=1}^{I} \Pi_i$, где клетки Π_i не имеют общих внутренних точек. Тогда $U_\delta(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{I} U_\delta(\Pi_i)$, следовательно, используя пункт (а), получаем, что

$$\mu(A) \leq \mu^*(U_\delta(A)) \leq \sum_{i=1}^{I} \mu^*(U_\delta(\Pi_i)) \xrightarrow{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{I} \mu(\Pi_i) = \mu(A).$$

Откуда следует условие (1) для множества $E = A$.

в) Докажем, наконец, условие (1) для произвольного измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению верхней меры $\mu^*(E) = \mu(E)$, существует клеточное множество A такое, что $E \subset A$ и $\mu(A) < \mu(E) + \varepsilon/2$. Отсюда и из пункта (б) получаем, что $\exists \delta_0 > 0 : \ \forall \delta \in (0, \delta_0) \quad \mu^*(U_\delta(A)) \leq \mu(A) + \varepsilon/2$. Поскольку $U_\delta(E) \subset U_\delta(A)$, то

$$\mu(E) \leq \mu^*(U_\delta(E)) \leq \mu^*(U_\delta(A)) \leq \mu(A) + \varepsilon/2 \leq \mu(E) + \varepsilon.$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0 > 0 : \ \forall \delta \in (0, \delta_0) \hookrightarrow \ \mu(E) \leq \mu^*(U_\delta(E)) \leq \mu(E) + \varepsilon,$$

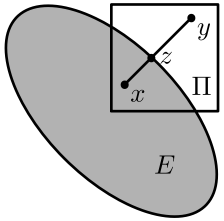
что доказывает условие (1). $\square$

Следствие. Если E – множество меры нуль в $\mathbb{R}^n$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует клеточное множество $C_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$ и $E \subset \operatorname{int} C_\varepsilon$.

Доказательство. В силу леммы 2 для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $\mu^*(U_\delta(E)) < \varepsilon/2$. Отсюда и из определения верхней меры Жордана следует существование клеточного множества C_ε такого, что $U_\delta(E) \subset C_\varepsilon$ и $\mu(C_\varepsilon) < \mu(U_\delta(E)) + \varepsilon/2 < \varepsilon$. Из условия $U_\delta(E) \subset C_\varepsilon$ следует, что $E \subset \operatorname{int} C_\varepsilon$. $\square$

Лемма 3. Пусть клетка $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ содержит как точку из множества E, так и точку, не лежащую во множестве E. Тогда клетка Π имеет общую точку с границей множества E.

Доказательство. Пусть $x \in \Pi \bigcap E$, $y \in \in \Pi \setminus E$. Тогда отрезок $[x, y] \subset \Pi$ обладает тем свойством, что один из его концов лежит в E, а другой – вне E. Применяя к этому отрезку процесс деления пополам и отбирая каждый раз ту половину, которая обладает указанным свойством, получим стягивающуюся систему вложенных отрезков.



По теореме Кантора эта система отрезков имеет общую точку z. Всякая окрестность точки z содержит как точки из E, так и не из E. Поэтому $z \in \partial E$. $\square$

Теорема 1. (Критерий измеримости.) Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо тогда и только тогда, когда оно ограничено и его граница имеет меру нуль.

Доказательство. 1) Пусть множество E измеримо. Как было замечено ранее, всякое измеримое множество ограничено. Покажем, что $\mu(\partial E) = 0$.

В силу леммы 1 для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся клеточные множества A_ε и B_ε такие, что $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$. Из свойства 2 следует, что множество $C_\varepsilon = B_\varepsilon \setminus (\operatorname{int} A_\varepsilon)$ является клеточным. Поскольку клеточные множества A_ε и C_ε не имеют общих внутренних точек, то в силу свойства аддитивности меры клеточных множеств $\mu(A_\varepsilon) + \mu(C_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon \bigcup C_\varepsilon) = \mu(B_\varepsilon)$. Следовательно,

$$\mu(C_\varepsilon) = \mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{2}$$

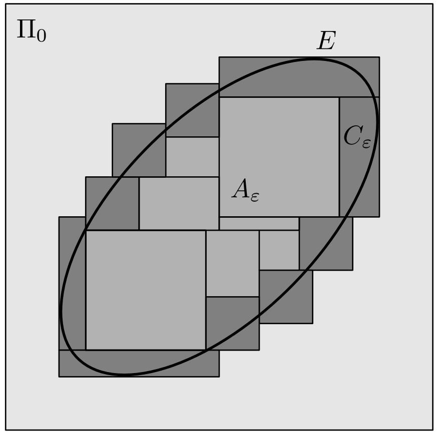
Поскольку $E \subset B_\varepsilon$, то $\overline{E} \subset \overline{B_\varepsilon} = B_\varepsilon$. Так как $A_\varepsilon \subset E$, то $\operatorname{int} A_\varepsilon \subset \subset \operatorname{int} E$, поэтому $\partial E = \overline{E} \setminus (\operatorname{int} E) \subset B_\varepsilon \setminus (\operatorname{int} A_\varepsilon) = C_\varepsilon$. Отсюда и из неравенства (2) следует, что $\mu^*(\partial E) \le \mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$. Следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\mu^*(\partial E) = 0$. Поскольку неравенства $0 \le \mu_*(\partial E) \le \mu^*(\partial E)$ выполнены всегда, то $\mu_*(\partial E) = = \mu^*(\partial E) = 0$, т. е. $\mu(\partial E) = 0$.

2) Пусть множество E ограничено и $\mu(\partial E) = 0$. Покажем, что множество E измеримо. Зафиксируем призвольное число $\varepsilon > 0$. В силу следствия из леммы 2 существует клеточное множество C_ε такое, что $\partial E \subset \operatorname{int} C_\varepsilon$ и $\mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$. В силу ограниченности множеств

E и C_ε существует клетка Π_0, содержащая множества E и C_ε. Из свойства 2 следует, что множество $D_\varepsilon = \Pi_0 \setminus \operatorname{int} C_\varepsilon$ является клеточным, т. е. может быть представлено как объединение клеток Π_i^ε, $i = 1, \ldots, I$, не имеющих общих внутренних точек.

Определим клеточное множество A_ε как объединение всех клеток Π_i^ε, $i = 1, \ldots, I$, которые целиком содержатся во множестве E: $A_\varepsilon = \bigcup\limits_{\Pi_i^\varepsilon \subset E} \Pi_i^\varepsilon$.

Поскольку клетки Π_i^ε не имеют общих точек с границей множества E, то, как следует из леммы 3, либо клетка Π_i^ε целиком содержится в E, либо не имеет общих точек с множеством E. Поэтому $E \subset \subset A_\varepsilon \bigcup C_\varepsilon$.



Определив клеточное множество $B_\varepsilon = A_\varepsilon \bigcup C_\varepsilon$, получим $A_\varepsilon \subset \subset E \subset B_\varepsilon$. Поскольку множества C_ε и D_ε не имеют общих внутренних точек, то множества C_ε и $A_\varepsilon \subset D_\varepsilon$ обладают тем же свойством. Отсюда по свойству аддитивности меры клеточных множеств следует, что $\mu(B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon \bigcup C_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon) + \mu(C_\varepsilon) < \mu(A_\varepsilon) + \varepsilon$. Поэтому $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$. Применяя лемму 1, получаем измеримость множества E. $\square$

Лемма 4. Для любых множеств $E, F \subset \mathbb{R}^n$ справедливы включения

а) $\partial(E \bigcup F) \subset \partial E \bigcup \partial F$,
б) $\partial(E \bigcap F) \subset \partial E \bigcup \partial F$,
в) $\partial(E \setminus F) \subset \partial E \bigcup \partial F$.

Доказательство. Докажем включение (а). Включения (б), (в) доказываются аналогично. Пусть $x \in \partial(E \bigcup F)$. Тогда $x \in \overline{E \bigcup F} = = \overline{E} \bigcup \overline{F}$. Следовательно, $x \in \overline{E}$ или $x \in \overline{F}$. Так как $\operatorname{int} E \bigcup \operatorname{int} F \subset \subset \operatorname{int}(E \bigcup F)$ и $x \notin \operatorname{int}(E \bigcup F)$, то $x \notin \operatorname{int} E \bigcup \operatorname{int} F$. Поэтому $x \in \in \overline{E} \setminus \operatorname{int} E = \partial E$ или $x \in \overline{F} \setminus \operatorname{int} F = \partial F$. В любом случае $x \in \in \partial E \bigcup \partial F$. $\square$

Следствие. Если множества E и F измеримы, то множества $\overline{E}$, $\operatorname{int} E$, $E \bigcup F$, $E \bigcap F$, $E \setminus F$ измеримы.

Доказательство. Измеримость множеств $\overline{E}$ и $\operatorname{int} E$ следует из критерия измеримости и включений $\partial\overline{E} \subset \partial E$, $\partial(\operatorname{int} E) \subset \partial E$.

Измеримость множеств $E \bigcup F$, $E \bigcap F$, $E \setminus F$ следует из критерия измеримости и леммы 4. $\square$

Теорема 2. (Свойство аддитивности меры Жордана.) Если множества E_1 и E_2 измеримы по Жордану и не имеют общих внутренних точек, то $\mu(E_1 \bigcup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

Доказательство. По определению меры Жордана для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют клеточные множества $A_i^\varepsilon, B_i^\varepsilon$ $(i = 1, 2)$ такие, что $A_i^\varepsilon \subset E_i \subset B_i^\varepsilon$ и $\mu(A_i^\varepsilon) \ge \mu(E_i) - \varepsilon/2$, $\mu(B_i^\varepsilon) \le \mu(E_i) + \varepsilon/2$, $(i = 1, 2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\mu(A_1^\varepsilon) + \mu(A_2^\varepsilon) \ge \mu(E_1) + \mu(E_2) - \varepsilon, \\ &\mu(B_1^\varepsilon) + \mu(B_2^\varepsilon) \le \mu(E_1) + \mu(E_2) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку $A_1^\varepsilon \bigcup A_2^\varepsilon \subset E_1 \bigcup E_2 \subset B_1^\varepsilon \bigcup B_2^\varepsilon$ и клеточные множества A_1^ε и A_2^ε не имеют общих внутренних точек, то

$$\mu(A_1^\varepsilon) + \mu(A_2^\varepsilon) = \mu(A_1^\varepsilon \bigcup A_2^\varepsilon) \le$$

$$\le \mu(E_1 \bigcup E_2) \le \mu(B_1^\varepsilon \bigcup B_2^\varepsilon) \le \mu(B_1^\varepsilon) + \mu(B_2^\varepsilon).$$

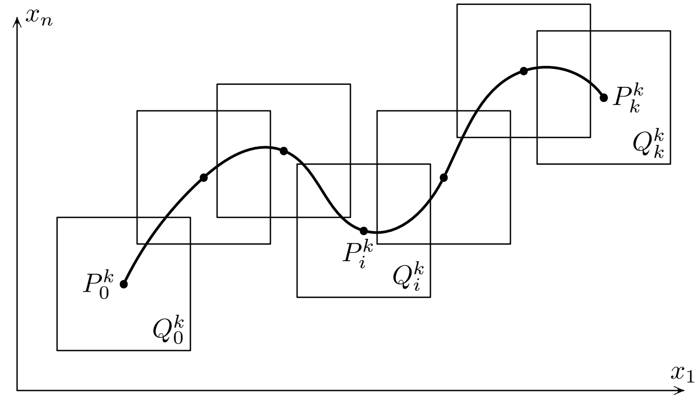
Отсюда и из неравенств (3) следуют неравенства

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) - \varepsilon \le \mu(E_1 \bigcup E_2) \le \mu(E_1) + \mu(E_2) + \varepsilon,$$

что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ дает равенство $\mu(E_1 \bigcup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$. $\square$

Теорема 3. Спрямляемая кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$ при $n \ge 2$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть для любого натурального числа k точки $P_0^k, \ldots, P_k^k$ лежат на кривой Γ и разбивают ее на k дуг длины $|\Gamma|/k$ каждая. Построим клеточное множество B_k, являющееся объединением кубов $Q_0^k, \ldots, Q_k^k$ с центрами в точках $P_0^k, \ldots, P_k^k$ соответственно и ребрами длиной $|\Gamma|/k$, параллельными осям координат. Тогда $\mu(Q_i^k) = (|\Gamma|/k)^n$, $\Gamma \subset B_k$ и, следовательно, $\mu(B_k) \le (k + 1)\,(|\Gamma|/k)^n = |\Gamma|^n \frac{k+1}{k^n} \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому $\mu^*(\Gamma) = 0$, а значит, $\mu(\Gamma) = 0$. $\square$



Существует непрерывная кривая (кривая Пеано) в $\mathbb{R}^2$, которая проходит через все точки квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$. Следовательно, ее мера не равна нулю.

Теорема 4. Если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, то цилиндр $G = E \times [a, b] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является измеримым множеством и $\mu(G) = (b - a)\mu(E)$.

Доказательство. Так как E измеримо, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся клеточные множества $A_\varepsilon, B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ такие, что

$$A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon, \quad \mu(E) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \mu(B_\varepsilon) - \mu(E) < \varepsilon.$$

Рассмотрим клеточные множества $\tilde{A}_\varepsilon = A_\varepsilon \times [a, b]$, $\tilde{B}_\varepsilon = B_\varepsilon \times [a, b]$. Тогда $\tilde{A}_\varepsilon \subset G \subset \tilde{B}_\varepsilon$. Следовательно, $\mu_*(G) \ge \mu(\tilde{A}_\varepsilon) = (b - a)\mu(A_\varepsilon) > (b - a)(\mu(E) - \varepsilon)$. В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем неравенство $\mu_*(G) \ge (b - a)\mu(E)$. Аналогично, $\mu^*(G) \le \mu(\tilde{B}_\varepsilon) = (b - a)\mu(B_\varepsilon) < (b - a)(\mu(E) + \varepsilon)$. Следовательно, $\mu^*(G) \le (b - a)\mu(E) \le \mu_*(G)$. Поэтому существует $\mu(G) = (b - a)\mu(E)$. $\square$

§ 2. Суммы Дарбу

Определим некоторые операции с $+\infty$ и $-\infty$:
$+\infty + (+\infty) = +\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty;$
если $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\pm\infty + \lambda = \pm\infty;$
если $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, то $\lambda \cdot (\pm\infty) = \pm\infty;$
если $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$, то $\lambda \cdot (\pm\infty) = \mp\infty.$

Напомним, что разбиением отрезка $[a,b]$ называется конечный набор точек $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^{I}$, таких, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_I = b$. Отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ называются отрезками разбиения T.

Определение. Пусть на $[a,b]$ определена функция $f(x)$ и задано разбиение $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отрезка $[a,b]$. Определим

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\ , \qquad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$

$$s(f;\mathrm{T}) = \sum_{i=1,\ldots,I} (x_i - x_{i-1}) m_i\ ,$$

$$S(f;\mathrm{T}) = \sum_{i=1,\ldots,I} (x_i - x_{i-1}) M_i.$$

Сумма $s(f;\mathrm{T})$ называется *нижней суммой Дарбу*, а $S(f;\mathrm{T})$ – *верхней суммой Дарбу* для функции f и разбиения T.

Определение. *Мелкостью разбиения* $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ называется число

$$\ell(\mathrm{T}) = \max_{i=1,\ldots,I} (x_i - x_{i-1}).$$

Определение. Число J называется *(определенным) интегралом Римана* функции f на $[a,b]$ и обозначается $J = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, если $\lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} s(f;\mathrm{T}) = \lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} S(f;\mathrm{T}) = J$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \mathrm{T}:\ \ell(\mathrm{T}) \le \delta \hookrightarrow\ |s(f;\mathrm{T}) - J| \le \varepsilon \ \text{ и } \ |S(f;\mathrm{T}) - J| \le \varepsilon.$$

Функция f называется *интегрируемой по Риману* на $[a,b]$, если существует интеграл Римана функции f на $[a,b]$.

Геометрический смысл интеграла состоит в том, что для неотрицательной функции f интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует тогда и только тогда, когда существует площадь криволинейной трапеции G, а в случае существования интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен площади множества G.

Лемма 1. 1) Если функция f неограничена снизу на $[a,b]$, то $s(f;\mathrm{T}) = -\infty$ для любого разбиения T.

2) Если функция f неограниченна сверху на $[a,b]$, то $S(f;\mathrm{T}) = +\infty$ для любого разбиения T.

Доказательство. 1) Пусть $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ – разбиение отрезка $[a,b]$. Если f неограничена снизу, то она неограничена снизу на некотором отрезке $[x_{j-1}, x_j]$, следовательно, $m_j = \inf\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) = -\infty$ и $s(f;\mathrm{T}) = -\infty$.

Пункт (2) доказывается аналогично. □

Лемма 2. (Необходимое условие интегрируемости.) Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то f ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Если функция f неограничена снизу на $[a,b]$, то в силу леммы 1 $\lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} s(f;\mathrm{T}) = -\infty$, а значит, не существует конечного предела $s(f;\mathrm{T})$ при $\ell(\mathrm{T}) \to 0$, следовательно, функция f неинтегрируема на $[a,b]$. Аналогично, если функция f неограничена сверху, то она также неинтегрируема. □

Замечание. Условие ограниченности функции на $[a,b]$ не является достаточным условием интегрируемости на $[a,b]$. Например, для функции Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \\ 1, & \text{если } x \text{ рациональное} \end{cases}$$

для любого разбиения T имеют место равенства $s(f;\mathrm{T}) = 0$, $S(f;\mathrm{T}) = b - a$, следовательно, при измельчении разбиений нижняя и верхняя суммы Дарбу будут стремиться к различным пределам, а значит, функция Дирихле неинтегрируема по Риману.

Лемма 3. Пусть разбиение T' отрезка $[a,b]$ получено добавлением k точек к точкам разбиения T. Пусть функция f ограничена на $[a,b]$ и $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| = C_f$. Тогда

$$0 \le s(f;\mathrm{T}') - s(f;\mathrm{T}) \le 2C_f \ell(\mathrm{T}) k, \tag{1}$$

$$0 \le S(f;\mathrm{T}) - S(f;\mathrm{T}') \le 2C_f \ell(\mathrm{T}) k. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^{I}$. Рассмотрим сначала случай, когда разбиение T' получено добавлением одной точки $x^* \in \in [x_{j-1}, x_j]$, где $j \in \overline{1, I}$. Обозначим

$$m_j = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x),$$

$$m_j' = \inf_{x \in [x_{j-1}, x^*]} f(x), \qquad m_j'' = \inf_{x \in [x^*, x_j]} f(x).$$

Тогда

$$s(f; \mathrm{T}') - s(f; \mathrm{T}) = m_j'(x^* - x_{j-1}) + m_j''(x_j - x^*) - m_j(x_j - x_{j-1}) =$$

$$= (m_j' - m_j)(x^* - x_{j-1}) + (m_j'' - m_j)(x_j - x^*).$$

Так как

$$0 \le m_j' - m_j \le 2C_f, \quad 0 \le m_j'' - m_j \le 2C_f,$$

то

$$0 \le s(f; \mathrm{T}') - s(f; \mathrm{T}) \le 2C_f(x_j - x_{j-1}) \le 2C_f \ell(\mathrm{T}).$$

Добавляя k раз по одной точке, из разбиения T получим разбиение T'. Поскольку при добавлении точек мелкость разбиения не увеличивается, то получаем оценки (1). Оценки (2) доказываются аналогично. □

Определение. Пусть на $[a, b]$ задана функция f. Определим

$$J_* = \sup_{\mathrm{T}} s(f; \mathrm{T}), \qquad J^* = \inf_{\mathrm{T}} S(f; \mathrm{T}),$$

где супремум и инфимум берутся по всевозможным разбиениям T отрезка $[a, b]$. Величины J_* и J^* называются соответственно *нижним и верхним интегралами Дарбу.*

Лемма 4. Пусть функция f ограничена на $[a, b]$. Тогда

$$\lim_{\ell(\mathrm{T}) \to 0} s(f; \mathrm{T}) = J_*, \qquad \lim_{\ell(\mathrm{T}) \to 0} S(f; \mathrm{T}) = J^*,$$

то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \mathrm{T} : \; \ell(\mathrm{T}) < \delta \hookrightarrow \; |s(f; \mathrm{T}) - J_*| < \varepsilon \text{ и } |S(f; \mathrm{T}) - J^*| < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим $C_f = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению нижнего интеграла Дарбу существует разбиение T_ε отрезка $[a, b]$ такое, что $s(f; \mathrm{T}_\varepsilon) > J_* - \varepsilon$. Пусть I_ε – количество точек разбиения T_ε. Пусть T – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Составим из всех точек разбиений T и T_ε разбиение T'. Тогда разбиение T' получается из T добавлением не более I_ε точек. Поэтому согласно лемме 3 получаем

$$s(f; \mathrm{T}') - s(f; \mathrm{T}) \le 2C_f \ell(\mathrm{T}) I_\varepsilon,$$

$$0 \le s(f; \mathrm{T}') - s(f; \mathrm{T}_\varepsilon).$$

Следовательно,

$$s(f; \mathrm{T}) \ge s(f; \mathrm{T}') - 2C_f \ell(\mathrm{T}) I_\varepsilon \ge s(f; \mathrm{T}_\varepsilon) - 2C_f \ell(\mathrm{T}) I_\varepsilon > J_* - \varepsilon - 2C_f \ell(\mathrm{T}) I_\varepsilon.$$

Если $C_f = 0$, то $f(x) = 0$ для любого $x \in [a, b]$ и утверждение леммы тривиально выполнено. Поэтому будем предполагать, что $C_f > 0$. Определим $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2C_f I_\varepsilon}$. Тогда для любого разбиения T такого, что $\ell(\mathrm{T}) < \delta(\varepsilon)$ получаем

$$J_* - 2\varepsilon < s(f; \mathrm{T}) \le J_*.$$

Это доказывает равенство $\lim_{\ell(\mathrm{T}) \to 0} s(f; \mathrm{T}) = J_*$. Равенство $\lim_{\ell(\mathrm{T}) \to 0} S(f; \mathrm{T}) = J^*$ доказывается аналогично. □

Лемма 5. Для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ и любой функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ справеливы неравенства

$$s(f; \mathrm{T}) \le J_* \le J^* \le S(f; \mathrm{T}).$$

Доказательство. Первое и последнее неравенства цепочки следуют из определений верхнего и нижнего интегралов Дарбу. Докажем неравенство $J_* \le J^*$. Пусть T_1 и T_2 – произвольные разбиения $[a, b]$. Составим из всех точек разбиений T_1 и T_2 разбиение T. В силу леммы 3 $s(f; \mathrm{T}_1) \le s(f; \mathrm{T})$ и $S(f; \mathrm{T}) \le S(f; \mathrm{T}_2)$. Поскольку $s(f; \mathrm{T}) \le S(f; \mathrm{T})$, то $s(f; \mathrm{T}_1) \le s(f; \mathrm{T}) \le S(f; \mathrm{T}) \le \le S(f; \mathrm{T}_2)$. Поэтому число $S(f; \mathrm{T}_2)$ является некоторой верхней гранью множества $\{s(f; \mathrm{T}_1) : T_1 \text{ – разбиение } [a, b]\}$. Следовательно, $J_* = \sup_{\mathrm{T}_1} s(f; \mathrm{T}_1) \le S(f; \mathrm{T}_2)$. Поэтому $J_* \le \inf_{\mathrm{T}_2} S(f; \mathrm{T}_2) = J^*$. □

Разность верхней и нижней сумм Дарбу для функции f и разбиения T будем обозначать через $\Delta(f;\mathrm{T})$:

$$\Delta(f;\mathrm{T}) = S(f;\mathrm{T}) - s(f;\mathrm{T}).$$

Теорема 1. (Критерий интегрируемости.) Пусть функция f ограничена на $[a,b]$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) f интегрируема по Риману на $[a,b]$;

2) $\lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} \Delta(f;\mathrm{T}) = 0$;

3) $\inf\limits_{\mathrm{T}} \Delta(f;\mathrm{T}) = 0$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение T отрезка $[a,b]$ такое, что $\Delta(f;\mathrm{T}) < \varepsilon$;

4) $J_* = J^*$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Так как $\lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} S(f;\mathrm{T}) = J$ и $\lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} s(f;\mathrm{T}) = J$, то $\lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} \Delta(f;\mathrm{T}) = \lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} (S(f;\mathrm{T}) - s(f;\mathrm{T})) = J - J = 0$.

2) $\Rightarrow$ 3). Поскольку $\Delta(f;\mathrm{T}) \geq 0$, то $0 \leq \inf\limits_{\mathrm{T}} \Delta(f;\mathrm{T}) \leq \lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} \Delta(f;\mathrm{T}) = 0$ и, следовательно, $\inf\limits_{\mathrm{T}} \Delta(f;\mathrm{T}) = 0$.

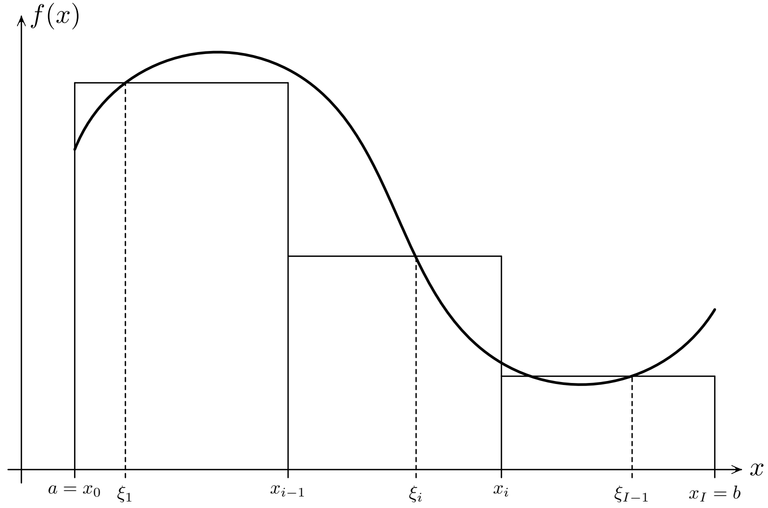
3) $\Rightarrow$ 4). Поскольку согласно лемме 5 справедливы неравенства $s(f;\mathrm{T}) \leq J_* \leq J^* \leq S(f;\mathrm{T})$, то $0 \leq J^* - J_* \leq S(f;\mathrm{T}) - s(f;\mathrm{T}) = \Delta(f;\mathrm{T})$, а значит $0 \leq J^* - J_* \leq \inf\limits_{\mathrm{T}} \Delta(f;\mathrm{T}) = 0$, то есть $J_* = J^*$.

4) $\Rightarrow$ 1) следует из леммы 4. $\square$

§ 3. Интегральные суммы Римана

Определение. Пусть задано разбиение $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отрезка $[a,b]$. *Выборкой*, соответствующей разбиению T, называется набор точек $\xi_{\mathrm{T}} = \{\xi_i\}_{i=1}^{I}$ таких, что $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. *Интегральной суммой (Римана)* для функции f, разбиения T и выборки ξ_{T} называется

$$\sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}) = \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$



Лемма 1. Пусть на $[a,b]$ определена функция $f(x)$ и задано разбиение $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отрезка $[a,b]$. Тогда

$$s(f;\mathrm{T}) = \inf_{\xi_{\mathrm{T}}} \sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}), \qquad S(f;\mathrm{T}) = \sup_{\xi_{\mathrm{T}}} \sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}),$$

где супремум и инфимум берутся по всем выборкам ξ_{T}, соответствующим разбиению T.

Доказательство

$$s(f;\mathrm{T}) = \sum_{i=1,\ldots,I} (x_i - x_{i-1}) \inf_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi_i) =$$

$$= \inf_{\xi_1 \in [x_0, x_1]} \cdots \inf_{\xi_I \in [x_{I-1}, x_I]} \sum_{i=1,\ldots,I} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \inf_{\xi_{\mathrm{T}}} \sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}).$$

Аналогично, $S(f;\mathrm{T}) = \sup\limits_{\xi_{\mathrm{T}}} \sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}})$. $\square$

Теорема 1. (Определение интеграла через интегральные суммы Римана.) Число J равно $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} \sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}) = J$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \mathrm{T}:\ \ell(\mathrm{T}) \leq \delta\ \forall \xi_{\mathrm{T}} \hookrightarrow\ |\sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}) - J| \leq \varepsilon. \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно условие:

$$\forall \xi_{\mathrm{T}} \hookrightarrow \ |\sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}) - J| \leq \varepsilon.$$

Это условие можно переписать в виде

$$\forall \xi_{\mathrm{T}} \hookrightarrow \ J - \varepsilon \leq \sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}) \leq J + \varepsilon. \qquad (2)$$

Условие $\forall \xi_{\mathrm{T}} \hookrightarrow \ \sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}) \leq J + \varepsilon$ означает, что число $J+\varepsilon$ является некоторой верхней гранью значений $\sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}})$ по выборкам ξ_{T}. В силу свойств верхних граней это условие эквивалентно неравенству $\sup\limits_{\xi_{\mathrm{T}}} \sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}) \leq J+\varepsilon$. Из леммы 1 следует, что последнее неравенство можно переписать в виде $S(f;\mathrm{T}) \leq J+\varepsilon$. Аналогично, условие $\forall \xi_{\mathrm{T}} \hookrightarrow \ J-\varepsilon \leq \sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}})$ эквивалентно неравенству $J-\varepsilon \leq$ $\leq s(f;\mathrm{T})$.

Поскольку неравенство $s(f;\mathrm{T}) \leq S(f;\mathrm{T})$ выполняется всегда, то

$$(2) \iff J-\varepsilon \leq s(f;\mathrm{T}) \leq S(f;\mathrm{T}) \leq J+\varepsilon \iff$$

$$\iff |s(f;\mathrm{T}) - J| \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad |S(f;\mathrm{T}) - J| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, условие (1) эквивалентно условию

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \mathrm{T}:\ \ell(\mathrm{T}) \leq \delta \hookrightarrow\ |s(f;\mathrm{T}) - J| \leq \varepsilon \text{ и } |S(f;\mathrm{T}) - J| \leq \varepsilon,$$

что по определению означает $J = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. □

§ 4. Свойства определенного интеграла

Теорема 1. (Линейность определенного интеграла.) Если функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, а α и β – некоторые числа, то функция $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Заметим, что интегральные суммы Римана обладают свойством линейности:

$$\forall \mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^I \quad \forall \xi_{\mathrm{T}} = \{\xi_i\}_{i=1}^I \ \hookrightarrow \ \sigma(\alpha f + \beta g;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1})(\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) = \alpha\sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}) + \beta\sigma(g;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}).$$

В силу определения интеграла через интегральные суммы (теорема 1 § 3) существуют пределы

$$\lim_{\ell(\mathrm{T})\to 0} \sigma(f;\mathrm{T};\xi_T) = \int\limits_a^b f(x)\,dx, \qquad \lim_{\ell(\mathrm{T})\to 0} \sigma(g;\mathrm{T};\xi_T) = \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

следовательно, существует предел

$$\lim_{\ell(\mathrm{T})\to 0} \sigma(\alpha f + \beta g;\mathrm{T};\xi_T) = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Еще раз пользуясь теоремой 1 § 3, получаем требуемое утверждение. □

Следствие. Множество интегрируемых на отрезке $[a,b]$ функций является линейным пространством, а определенный интеграл Римана является линейным оператором, действующим из этого пространства в пространство чисел $\mathbb{R}$.

Теорема 2. (Интегрирование неравенств.) Если функции f и g интегрируемы на $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b] \hookrightarrow\ f(x) \leq g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq$ $\leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. Поскольку для интегральных сумм имеет место неравенство

$$\sigma(f;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}) \leq \sigma(g;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}}) \quad \forall \mathrm{T} \quad \forall \xi_{\mathrm{T}},$$

то, переходя к пределу при $\ell(\mathrm{T}) \to 0$, по определению интеграла через интегральные суммы (теорема 1 § 3) получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\ell(\mathrm{T})\to 0} \sigma(f;\mathrm{T};\xi_T) \leq \lim_{\ell(\mathrm{T})\to 0} \sigma(g;\mathrm{T};\xi_T) = \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

$\square$

Определение. Пусть на $[a,b]$ задана функция f и определено разбиение $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^I$ отрезка $[a,b]$. *Колебанием* функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ называется

$$\omega_i(f) = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')|.$$

Лемма 1. Для любой функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и для любого разбиения $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^I$ отрезка $[a,b]$ справедливо равенство для разности сумм Дарбу

$$\Delta(f; \mathrm{T}) = \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1}) \omega_i(f).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\omega_i(f) = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x') - f(x'')) =$$

$$= \sup_{x' \in [x_{i-1}, x_i]} f(x') + \sup_{x'' \in [x_{i-1}, x_i]} (-f(x'')) =$$

$$= \sup_{x' \in [x_{i-1}, x_i]} f(x') - \inf_{x'' \in [x_{i-1}, x_i]} f(x'') = M_i - m_i,$$

где $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$

Следовательно,

$$\Delta(f; \mathrm{T}) = S(f; \mathrm{T}) - s(f; \mathrm{T}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) = \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1}) \omega_i(f).$$

$\square$

Теорема 3. (Интегрируемость модуля.) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке и справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{1}$$

Доказательство. В силу неравенства треугольника имеет место неравенство $|\,|f(x')| - |f(x'')|\,| \leq |f(x') - f(x'')|$. Поэтому для любого разбиения $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^I$ отрезка $[a,b]$ колебания функций f и $|f|$ связаны неравенством

$$\omega_i(|f|) = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |\,|f(x')| - |f(x'')|\,| \leq$$

$$\leq \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')| = \omega_i(f).$$

Отсюда, используя критерий интегрируемости (теорема 1 § 2), получаем

$$0 \leq \Delta(|f|; \mathrm{T}) = \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1}) \omega_i(|f|) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1}) \omega_i(f) = \Delta(f; \mathrm{T}) \to 0 \quad \text{при} \quad \ell(\mathrm{T}) \to 0,$$

следовательно, $\Delta(|f|; \mathrm{T}) \to 0$ при $\ell(\mathrm{T}) \to 0$, что, опять по критерию интегрируемости, означает интегрируемость функции $|f|$ на $[a,b]$.

Поскольку для интегральных сумм имеют место соотношения

$$\left| \sigma(f; \mathrm{T}; \xi_{\mathrm{T}}) \right| = \left| \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1}) |f(\xi_i)| = \sigma(|f|; \mathrm{T}; \xi_{\mathrm{T}}),$$

то, переходя к пределу при $\ell(\mathrm{T}) \to 0$, получаем неравенство (1). $\square$

Теорема 4. Если функция g интегрируема на $[a,b]$, а функция f совпадает с функцией g, за исключением конечного набора точек $\{c_k\}_{k=1}^K \subset [a,b]$, то функция f интегрируема на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^b g(x)\, dx$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x) = g(x) - f(x)$. Определим число $M = \max\{|h(c_1)|, \ldots, |h(c_K)|\}$. Так как $h(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b] \setminus \{c_1, \ldots, c_K\}$, то $|h(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$.

Поскольку значение $h(x)$ отлично от 0 лишь в K точках, то для любого разбиения $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ и любой выборки $\xi_{\mathrm{T}} = \{\xi_i\}_{i=1}^{I}$ имеет место соотношение

$$|\sigma(h;\mathrm{T};\xi_{\mathrm{T}})| = \left|\sum_{i=1}^{I} h(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leq 2K\,M\,\ell(\mathrm{T}) \to 0 \quad \text{при} \quad \ell(\mathrm{T}) \to 0.$$

Следовательно, функция h интегрируема на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b h(x)\,dx = 0$. Отсюда и из свойства линейности интеграла получаем интегрируемость функции $f(x) = g(x) - h(x)$ и равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx - \int\limits_a^b h(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx. \quad \square$$

Лемма 2. Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то f интегрируема на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.

Доказательство. Пусть задан отрезок $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$. Для любого разбиения T отрезка $[\alpha,\beta]$ существует разбиение T' отрезка $[a,b]$, которое на отрезке $[\alpha,\beta]$ совпадает с разбиением T и имеет мелкость, равную мелкости разбиения T: $\ell(\mathrm{T}') = \ell(\mathrm{T})$. Поскольку $0 \leq \Delta(f;\mathrm{T}) \leq \Delta(f;\mathrm{T}')$ и в силу критерия интегрируемости $\lim\limits_{\ell(\mathrm{T}')\to 0} \Delta(f;\mathrm{T}') = 0$, то $\lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} \Delta(f;\mathrm{T}) = 0$, а значит, функция f интегрируема на $[\alpha,\beta]$. $\square$

Теорема 5. (Аддитивность интеграла относительно отрезков интегрирования.) Пусть функция f интегрируема на отрезках $[a,b]$ и $[b,c]$. Тогда f интегрируема на отрезке $[a,c]$ и

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$

Доказательство. Поскольку функция f интегрируема на отрезках $[a,b]$ и $[b,c]$, то f ограничена на этих отрезках. Для любого натурального числа N через $\mathrm{T}_{[a,b]}^N$ обозначим равномерное разбиение отрезка $[a,b]$ на N отрезков длины $\frac{b-a}{N}$. Так как $\ell(\mathrm{T}_{[a,b]}^N) = \frac{b-a}{N} \to 0$

при $N \to \infty$ и функция f интегрируема на $[a,b]$, то

$$\lim_{N\to\infty} s(f,\mathrm{T}_{[a,b]}^N) = \lim_{N\to\infty} S(f,\mathrm{T}_{[a,b]}^N) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Аналогично, через $\mathrm{T}_{[b,c]}^N$ обозначим равномерное разбиение отрезка $[b,c]$ на N отрезков длины $\frac{c-b}{N}$. Тогда

$$\lim_{N\to\infty} s(f,\mathrm{T}_{[b,c]}^N) = \lim_{N\to\infty} S(f,\mathrm{T}_{[b,c]}^N) = \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$

Составим из разбиений $\mathrm{T}_{[a,b]}^N$ и $\mathrm{T}_{[b,c]}^N$ разбиение $\mathrm{T}_{[a,c]}^N$ отрезка $[a,c]$. Тогда

$$s(f,\mathrm{T}_{[a,c]}^N) = s(f,\mathrm{T}_{[a,b]}^N) + s(f,\mathrm{T}_{[b,c]}^N) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx, \quad (2)$$

$$S(f,\mathrm{T}_{[a,c]}^N) = S(f,\mathrm{T}_{[a,b]}^N) + S(f,\mathrm{T}_{[b,c]}^N) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$

Поэтому для разности сумм Дарбу справедливы соотношения

$$\lim_{N\to\infty} \Delta(f,\mathrm{T}_{[a,c]}^N) = \lim_{N\to\infty} \Big(S(f,\mathrm{T}_{[a,c]}^N) - s(f,\mathrm{T}_{[a,c]}^N)\Big) = 0.$$

Поэтому

$$0 \leq \inf_{T_{[a,c]}} \Delta(f,\mathrm{T}_{[a,c]}) \leq \lim_{N\to\infty} \Delta(f,\mathrm{T}_{[a,c]}^N) = 0$$

и, согласно критерию интегрируемости, функция f интегрируема на $[a,c]$. Следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} s(f,\mathrm{T}_{[a,c]}^N) = \int\limits_a^c f(x)\,dx$. Сравнивая с формулой (2), получаем

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$

$\square$

Определение. Для любой функции f положим по определению

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то определим

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Следствие. Если функция f интегрируема на отрезке, содержащем точки a, b и c, то при любом расположении этих точек справедливо равенство

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $a < c < b$. Из леммы 2 следует интегрируемость функции f на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$. Поэтому в силу теоремы 5 получаем

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_c^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx. \qquad \square$$

§ 5. Достаточные условия интегрируемости

Теорема 1. Если функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$, тогда по теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на $[a,b]$. Это означает, что модуль непрерывности $\omega(\delta) = \sup\limits_{\substack{x,x'\in[a,b]\\|x-x'|<\delta}} |f(x)-f(x')|$ стремится к нулю при $\delta \to 0$.

Пусть задано разбиение $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отрезка $[a,b]$. Поскольку $|x_i - x_{i-1}| \le \ell(\mathrm{T}) < 2\ell(\mathrm{T})$, то колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$

$$\omega_i(f) = \sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)-f(x')| \le \omega(2\ell(\mathrm{T})).$$

Поэтому согласно лемме 1 разность сумм Дарбу

$$\Delta(f;\mathrm{T}) = \sum_{i=1}^{I}(x_i - x_{i-1})\omega_i(f) \le \omega(2\ell(\mathrm{T}))\ \sum_{i=1}^{I}(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \omega(2\ell(\mathrm{T}))\,(b-a) \to 0 \quad \text{при} \quad \ell(\mathrm{T}) \to 0.$$

Отсюда и из критерия интегрируемости следует интегрируемость функции f. $\square$

Определение. Функция f называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a,b]$, если существует разбиение отрезка $[a,b]$ точками $\{c_k\}_{k=1}^{N}$: $\quad a = c_0 < c_1 < \ldots < c_N = b$ такое, что $\forall k \in \{1,\ldots,N\}$ на интервалах (c_{k-1}, c_k) функция f непрерывна и существуют конечные односторонние пределы $f(c_{k-1}+0)$, $f(c_k - 0)$.

Теорема 2. Если функция кусочно-непрерывна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Пусть функция f кусочно-непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует разбиение отрезка $[a,b]$ точками $\{c_k\}_{k=1}^{N}$ такое, что на интервалах (c_{k-1}, c_k) функция f непрерывна, а в концах интервалов (c_{k-1}, c_k) функция f имеет конечные односторонние пределы.

Зафиксируем произвольный отрезок $[c_{k-1}, c_k]$ и рассмотрим непрерывную функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in (c_{k-1}, c_k), \\ f(c_{k-1}+0), & \text{если} \quad x = c_{k-1}, \\ f(c_k - 0), & \text{если} \quad x = c_k. \end{cases}$$

В силу теоремы 1 функция g интегрируема на отрезке $[c_{k-1}, c_k]$. Поскольку на отрезке $[c_{k-1}, c_k]$ функция f может отличаться от функции g не более чем в двух точках, то по теореме 4 § 4 функция f интегрируема на произвольном отрезке $[c_{k-1}, c_k]$. Отсюда по теореме 5 § 4 следует интегрируемость функции f на всем отрезке $[a,b]$. $\square$

Теорема 3. Если функция монотонна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Пусть функция f не убывает на отрезке $[a,b]$ и пусть задано разбиение $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отрезка $[a,b]$. Тогда

$$\omega_i(f) = \sup_{x,x' \in [x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(x')| = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Следовательно,

$$\Delta(f;\mathrm{T}) = \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1})\omega_i(f) \leq$$

$$\leq \ell(\mathrm{T}) \sum_{i=1}^{I} \omega_i(f) = \ell(\mathrm{T}) \sum_{i=1}^{I} (f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$

$$= \ell(\mathrm{T})\,(f(b) - f(a)) \to 0 \quad \text{при} \quad \ell(\mathrm{T}) \to 0.$$

В силу критерия интегрируемости, функция f интегрируема на $[a,b]$. $\square$

Замечание. Из непрерывности или монотонности функции на интервале (a,b) не следует интегрируемость этой функции на $[a,b]$. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна и убывает на $(0,1)$, однако она неограничена и, следовательно, неинтегрируема на $[0,1]$.

Теорема 4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то их произведение $f(x)g(x)$ является интегрируемой на отрезке $[a,b]$ функцией.

Доказательство. Поскольку функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, то они ограничены, т. е.

$$M_f = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \in \mathbb{R}, \qquad M_g = \sup_{x \in [a,b]} |g(x)| \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$|f(x)g(x) - f(x')g(x')| =$$

$$= |f(x)g(x) - f(x')g(x) + f(x')g(x) - f(x')g(x')| \leq$$

$$\leq |f(x)g(x) - f(x')g(x)| + |f(x')g(x) - f(x')g(x')| \leq$$

$$\leq M_g\,|f(x) - f(x')| + M_f\,|g(x) - g(x')|.$$

Пусть задано разбиение $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отрезка $[a,b]$. Тогда

$$\omega_i(fg) = \sup_{x \in [x_{i-1},x_i]} |f(x)g(x) - f(x')g(x')| \leq$$

$$\leq M_g \sup_{x \in [x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(x')| + M_f \sup_{x \in [x_{i-1},x_i]} |g(x) - g(x')| =$$

$$= M_g\,\omega_i(f) + M_f\,\omega_i(g).$$

Поэтому разность сумм Дарбу функции $f(x)g(x)$

$$\Delta(fg;\mathrm{T}) = \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1})\omega_i(fg) \leq M_g\,\Delta(f;\mathrm{T}) + M_f\,\Delta(g;\mathrm{T}).$$

В силу критерия интегрируемости из интегрируемости функций f и g следует, что $\Delta(f;\mathrm{T}) \to 0$, $\Delta(g;\mathrm{T}) \to 0$ при $\ell(\mathrm{T}) \to 0$. Следовательно, $\Delta(fg;\mathrm{T}) \to 0$ при $\ell(\mathrm{T}) \to 0$, а значит, функция $f(x)g(x)$ интегрируема на $[a,b]$. $\square$

§ 6. Определенный интеграл как функция верхнего предела

Теорема 1. (Непрерывность интеграла как функции верхнего предела.) Пусть на отрезке $[a,b]$ задана интегрируемая по Риману функция $f(x)$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство. В силу необходимого условия интегрируемости функция $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, т. е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in [a,b] \hookrightarrow \ |f(x)| \leq C.$$

Пусть $x_1, x_2 \in [a,b]$. В силу свойства аддитивности интеграла относительно отрезков интегрирования $F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$. По теореме об интегрировании неравенств $|F(x_2) - F(x_1)| \leq \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} C\,dt\right| = C\,|x_2 - x_1|$. Следовательно,

$$\forall x_0 \in [a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C}\ \forall x \in [a,b] :\ |x - x_0| < \delta \hookrightarrow\ |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon,$$

т. е. функция $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$. $\square$

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на $[a,b]$, если $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow \; F'(x) = f(x)$, а на концах отрезка $[a,b]$ значения функции f равны односторонним производным функции F: $\quad f(a) = F'_+(a) = \lim\limits_{x\to a+0} \frac{F(x)-F(a)}{x-a}, \quad f(b) = F'_-(b) = \lim\limits_{x\to b-0} \frac{F(x)-F(b)}{x-b}$.

Теорема 2. Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ является первообразной функции $f(x)$ на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $x, x_0 \in [a,b]$, $x \neq x_0$.

Тогда $\quad F(x) - F(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt = (x-x_0)\,f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,dt$. Следовательно,

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int\limits_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|\,dt\right|.$$

В силу непрерывности функции f на $[a,b]$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall t \in [a,b]: \ |t-x_0| \le \delta \hookrightarrow \ |f(t)-f(x_0)| \le \varepsilon,$$

поэтому

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in [a,b]: \ |x-x_0| \le \delta \hookrightarrow \left|\int\limits_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|\,dt\right| \le |x-x_0|\,\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in [a,b]: \ |x-x_0| \le \delta \hookrightarrow \ \left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \le \varepsilon,$$

то есть $\forall x_0 \in [a,b] \hookrightarrow \ \lim\limits_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, где при $x_0 = a$ имеется в виду предел справа, а при $x_0 = b$ – предел слева. Это означает,

что $F'_+(a) = f(a), \quad F'_-(b) = f(b), \quad \forall x_0 \in (a,b) \hookrightarrow \ F'(x_0) = f(x_0)$. Таким образом, функция F является первообразной функции f на $[a,b]$. □

Из теоремы 2 и теоремы о структуре множества первообразных (теорема 1 § 1 главы 4) получаем

Следствие 1. Любая первообразная непрерывной на $[a,b]$ функции f имеет вид

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C,$$

где $C \in \mathbb{R}$ – произвольная константа.

Следствие 2. (Формула Ньютона–Лейбница.) Если F – первообразная непрерывной на $[a,b]$ функции f, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(x)\Big|_a^b \quad \overset{\text{по опред.}}{=} \quad F(b) - F(a).$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 1 и заметим, что $F(a) = \int\limits_a^a f(t)\,dt + C = C, \quad F(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt + C = \int\limits_a^b f(t)\,dt + F(a)$. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. □

Теорема 3. (Замена переменной.) Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$, а функция f непрерывна на отрезке $\varphi([a,b])$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Поскольку функция f непрерывна на $\varphi([a,b])$, то по теореме 2 существует первообразная F для функции f: $\ \forall x \in \varphi([a,b]) \hookrightarrow \ F'(x) = f(x)$. По формуле Ньютона–Лейбница $\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

Поскольку $\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, то функция $F(\varphi(t))$ является первообразной функции $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. Следовательно, по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b dF(\varphi(t)) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx. \qquad \square$$

Теорема 4. (Интегрирование по частям.) Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\,du(x).$$

Доказательство. Пользуясь линейностью интеграла и формулой Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int\limits_a^b u(x)\,dv(x) + \int\limits_a^b v(x)\,du(x) = \int\limits_a^b (u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x))\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b (u(x)v(x))'\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b. \qquad \square$$

Теорема 5. (Интегральная теорема о среднем.) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]\quad g(x) \neq 0$, то существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Поскольку функции f и g непрерывны, то по теореме 2 существуют дифференцируемые на $[a,b]$ функции $\Phi(x)$ и $G(x)$: $\quad \Phi'(x) = f(x)\,g(x), \quad G'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

По теореме Коши о среднем $\exists \xi \in (a,b)$:

$$\frac{\Phi(b)-\Phi(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{\Phi'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)\,g(\xi)}{g(\xi)} = f(\xi).$$

Так как по формуле Ньютона–Лейбница $\Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx, \quad G(b) - G(a) = \int\limits_a^b g(x)\,dx$, то $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx$. $\square$

§ 7. Формулы Валлиса и Стирлинга

Теорема 1. (Формула Валлиса.)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2,$$

где для любого $k \in \mathbb{N}$ через $k!!$ обозначается произведение натуральных чисел одинаковой с k четности и не превосходящих k, $0!! = 1$.

Доказательство. Для любого $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ рассмотрим интеграл $I_k = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^k x\,dx$. Заметим, что $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ и для любого $k \geq 2$

$$I_k = -\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{k-1} x\,d\cos x =$$

$$= -\sin^{k-1} x\,\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} (k-1)\sin^{k-2} x\,\cos^2 x\,dx =$$

$$= (k-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{k-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx = (k-1)I_{k-2} - (k-1)I_k.$$

Следовательно, $I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}$. Поэтому

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n)(2n-2)} I_{2n-4} = \ldots =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \ldots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Так как

$$\sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

то

$$I_{2n+1} \le I_{2n} \le I_{2n-1}.$$

Поэтому

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \le \frac{\pi}{2} \le \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n}.$$

Обозначая $A_n = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$, получаем $A_n \le \frac{\pi}{2} \le A_n \frac{2n+1}{2n}$, то есть

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} \le A_n \le \frac{\pi}{2}.$$

Так как $\frac{2n}{2n+1} \to 1$, то по теореме о трех последовательностях $A_n \to \frac{\pi}{2}$. $\square$

Теорема 2. (Формула Стирлинга.)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \to \infty,$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}.$$

Доказательство. Обозначим $x_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. Так как

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{ne(n-1)^{n-\frac{1}{2}}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-n} \cdot \frac{1}{e},$$

то

$$\ln \frac{x_{n-1}}{x_n} = \left(\frac{1}{2} - n\right) \ln \frac{n-1}{n} - 1 =$$

$$= -n\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1 =$$

$$= -n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{12} + \varepsilon_n\right),$$

где $\varepsilon_n \to 0$. Поэтому найдется номер N такой, что $|\varepsilon_n| < \frac{1}{12}$ для любого $n \ge N$. Итак, для любого $n \ge N$

$$0 < \ln \frac{x_{n-1}}{x_n} < \frac{1}{6n^2}. \tag{1}$$

Первое из неравенств (1) показывает, что $\frac{x_{n-1}}{x_n} > 1$ для любого $n \ge$ $\ge N$, т.е. начиная с номера $N-1$ последовательность $\{x_n\}$ убывает. Поскольку $x_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то по теореме Вейерштрасса последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому числу $a \ge 0$.

Далее, используя второе из неравенств (1), получим, что $a > 0$. Затем с помощью формулы Валлиса покажем, что $a = \sqrt{2\pi}$ и тем самым завершим доказательство.

Второе из неравенств (1) дает при $k \ge N$

$$\ln x_{k-1} - \ln x_k = \ln \frac{x_{k-1}}{x_k} < \frac{1}{6k^2} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Суммируя эти неравенства по k от N до n, получим для любого $n >$ $> N$

$$\ln x_{N-1} - \ln x_n < \frac{1}{N-1} - \frac{1}{n} < \frac{1}{N-1}.$$

Следовательно, $x_n > C := x_{N-1} e^{-\frac{1}{N-1}} > 0$ при всех $n > N$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $a \ge C > 0$. Таким образом,

$$x_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \xrightarrow{n\to\infty} a > 0. \tag{2}$$

Для вычисления значения a применим формулу Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2. \qquad (3)$$

Замечая, что $(2n-1)!! \cdot (2n)!! = (2n)!$, получаем

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

Из равенства (2) следует, что $n! = \frac{x_n n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$. Поэтому

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n} \cdot x_n^2 \cdot n^{2n+1} \cdot e^{2n}}{e^{2n} \cdot x_{2n} \cdot (2n)^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{x_n^2 \cdot n^{\frac{1}{2}}}{x_{2n} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}.$$

Отсюда и из формулы (3) вытекает

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{x_n^4 \cdot n}{x_{2n}^2 \cdot 2} = \frac{a^4}{4a^2} = \frac{a^2}{4}.$$

Поскольку $a > 0$, то $a = \sqrt{2\pi}$. □

§ 8. Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь криволинейной трапеции

Теорема 1. Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема и неотрицательна на $[a, b]$. Тогда *криволинейная трапеция*

$$E = \{(x, y) \ : \ a \le x \le b, \ 0 \le y \le f(x)\}$$

является измеримым множеством и $\mu E = \int\limits_a^b f(x)\, dx$.

Доказательство. Пусть задано произвольное разбиение $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^I$ отрезка $[a, b]$. Рассмотрим клетки

$$q_i = \{(x, y) \ : \ x_{i-1} \le x \le x_i, \ 0 \le y \le m_i\} \ ,$$

$$Q_i = \{(x, y) \ : \ x_{i-1} \le x \le x_i, \ 0 \le y \le M_i\},$$

где $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Заметим, что клеточные множества $A_\mathrm{T} = \bigcup\limits_{i=1}^I q_i$ и $B_\mathrm{T} = \bigcup\limits_{i=1}^I Q_i$ удовлетворяют включениям $A_\mathrm{T} \subset E \subset B_\mathrm{T}$. Поскольку $\operatorname{int} q_i \cap \operatorname{int} q_j = \emptyset$ и $\operatorname{int} Q_i \cap \operatorname{int} Q_j = \emptyset$ при $i \ne j$, то

$$\mu(A_\mathrm{T}) = \sum_{i=1}^I \mu(q_i) = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) m_i = s(f; \mathrm{T}),$$

$$\mu(B_\mathrm{T}) = \sum_{i=1}^I \mu(Q_i) = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) M_i = S(f; \mathrm{T}).$$

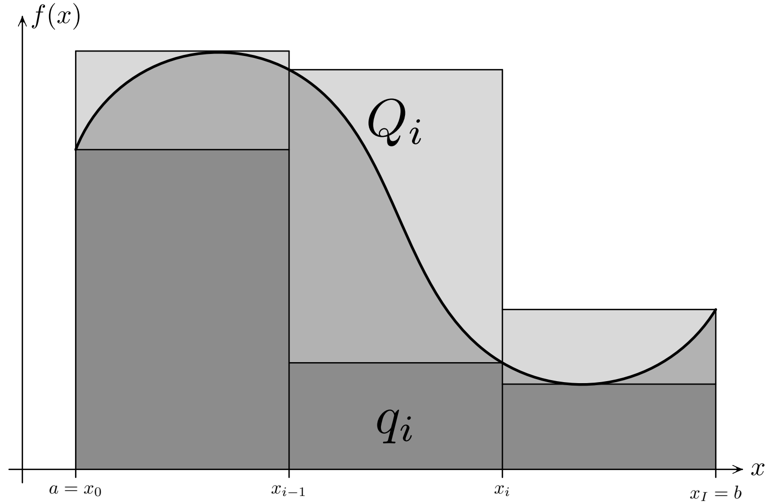
Поскольку $A_\mathrm{T} \subset E \subset B_\mathrm{T}$, то

$$\mu(A_\mathrm{T}) = \mu_*(A_\mathrm{T}) \le \mu_*(E) \le \mu^*(E) \le \mu^*(B_\mathrm{T}) = \mu(B_\mathrm{T}).$$

Следовательно,

$$s(f; \mathrm{T}) \le \mu_*(E) \le \mu^*(E) \le S(f; \mathrm{T}). \qquad (1)$$

Обозначим $J = \int\limits_a^b f(x)\, dx$. Так как $\lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} s(f; \mathrm{T}) = \lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} S(f; \mathrm{T}) = J$, то, переходя к пределу в неравенствах (1) при $\ell(\mathrm{T}) \to 0$, получаем неравенства $J \le \mu_*(E) \le \mu^*(E) \le J$. Следовательно, $\mu_*(E) = \mu^*(E) = J$. □



Лемма 1. Круг $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le r^2\}$ измерим и имеет меру (площадь) πr^2.

Доказательство. Заметим, что полукруг $C_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le r^2, \ y \ge 0\}$ является криволинейной трапецией: $C_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-1,1], \ 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}\}$. Поэтому согласно теореме 1 полукруг C_+ измерим и $\mu(C_+) = \int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - x^2}$. Производя замену $x = r\sin\varphi$, получаем $\mu(C_+) = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi r^2}{2}$. В силу симметрии нижний полукруг $C_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le r^2, \ y \ge 0\}$ имеет ту же меру: $\mu(C_-) = \frac{\pi r^2}{2}$. Поскольку эти два полукруга не имеют общих внутренних точек, то $\mu(C) = \mu(C_- \bigcup C_+) = \mu(C_-) + \mu(C_+) = \pi r^2$. $\square$

Объем тела вращения

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана неотрицательная функция $f(x)$. Множество

$$G = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \in [a,b], \ \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\Big\} \tag{2}$$

называется *телом вращения* вокруг оси Ox.

Теорема 2. Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема и неотрицательна на $[a,b]$. Тогда тело вращения (2) измеримо и

$$\mu(G) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx.$$

Доказательство. Пусть задано произвольное разбиение $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^I$ отрезка $[a,b]$. Рассмотрим цилиндры:

$$q_i = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i], \ \sqrt{y^2 + z^2} \le m_i\},$$

$$Q_i = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i], \ \sqrt{y^2 + z^2} \le M_i\},$$

где $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

В силу теоремы 4 § 1 и леммы 1 § 8 эти цилиндры измеримы и

$$\mu(q_i) = (x_i - x_{i-1})\, \pi\, m_i^2, \qquad \mu(Q_i) = (x_i - x_{i-1})\, \pi\, M_i^2.$$

Поскольку $\operatorname{int} q_i \cap \operatorname{int} q_j = \emptyset$ при $i \ne j$, то мера множества $A_\mathrm{T} = \bigcup\limits_{i=1}^{I} q_i$ вычисляется по формуле $\mu(A_\mathrm{T}) = \sum_{i=1}^I \mu(q_i)$. Обозначая $\varphi(x) = \pi f^2(x)$, получаем

$$\mu(A_\mathrm{T}) = \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1})\, \pi\, m_i^2 = \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \varphi(x) = s(\varphi; \mathrm{T}).$$

Аналогично, для множества $B_\mathrm{T} = \bigcup\limits_{i=1}^{I} Q_i$

$$\mu(B_\mathrm{T}) = S(\varphi; \mathrm{T}).$$

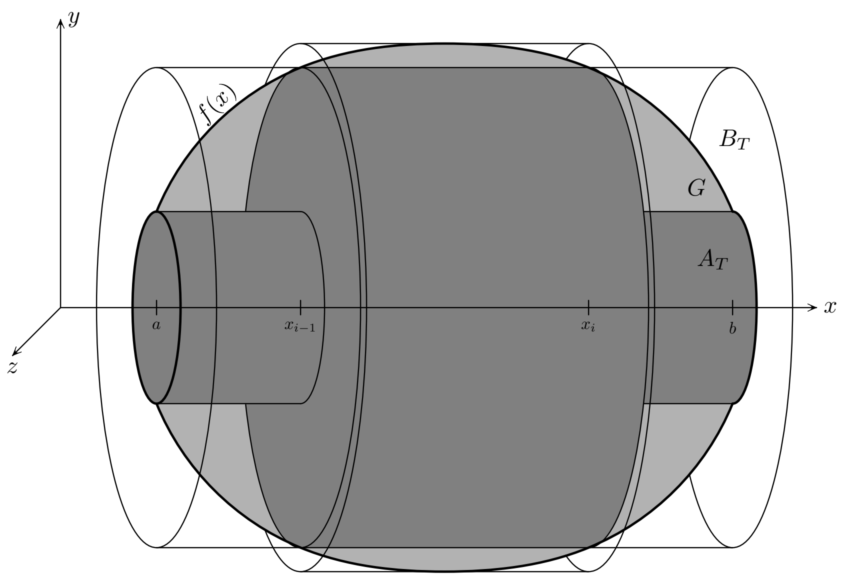
Поскольку $A_\mathrm{T} \subset G \subset B_\mathrm{T}$, то

$$\mu(A_\mathrm{T}) = \mu_*(A_\mathrm{T}) \le \mu_*(G) \le \mu^*(G) \le \mu^*(B_\mathrm{T}) = \mu(B_\mathrm{T}).$$

Следовательно,

$$s(\varphi; \mathrm{T}) \le \mu_*(G) \le \mu^*(G) \le S(\varphi; \mathrm{T}). \tag{3}$$

Обозначим $J = \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx$. Так как $\lim\limits_{\ell(\mathrm{T}) \to 0} s(\varphi; \mathrm{T}) = \lim\limits_{\ell(\mathrm{T}) \to 0} S(\varphi; \mathrm{T}) = J$, то, переходя к пределу в неравенствах (3) при $\ell(\mathrm{T}) \to 0$, получаем неравенства $J \le \mu_*(E) \le \mu^*(E) \le J$. Следовательно, $\mu_*(E) = \mu^*(E) = J = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx$. $\square$

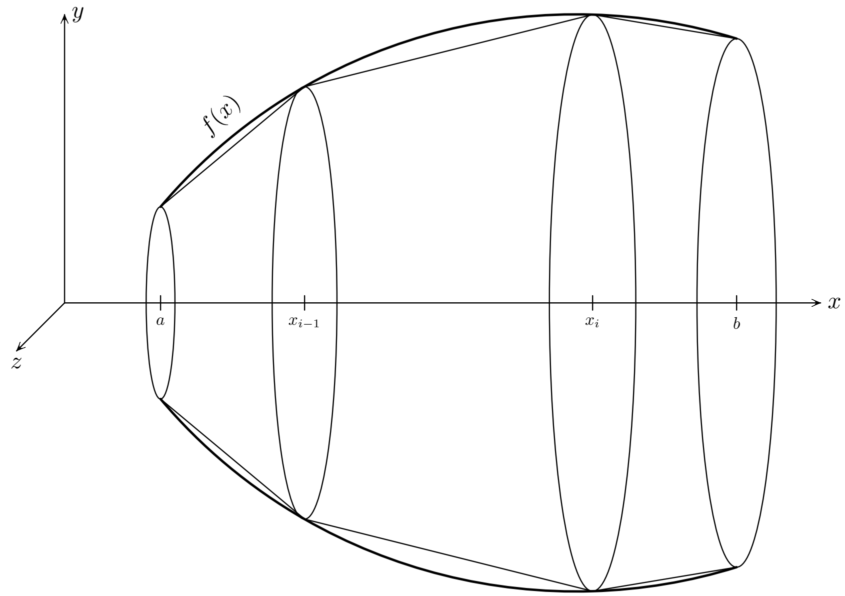


Площадь поверхности вращения

Пусть на $[a, b]$ задана неотрицательная функция $f(x)$. Множество

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \in [a, b], \ \sqrt{y^2 + z^2} = f(x)\right\}$$

называется *поверхностью вращения* графика функции f вокруг оси Ox.



Обозначим через Γ кривую, совпадающую с графиком функции f: $\Gamma = \{\overline{r}(x) \ : \ x \in [a, b]\}$, где $\overline{r}(x) = (x, 0, f(x))$.

Пусть $\mathcal{P}_{\mathrm{T}}$ – ломаная, вписанная в кривую Γ и соответствующая разбиению $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отрезка $[a, b]$. Через Q_{T} обозначим поверхность, полученную вращением ломаной $\mathcal{P}_{\mathrm{T}}$ вокруг оси Ox. Поверхность Q_{T} состоит из I боковых поверхностей усеченных конусов $q_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i], \ \sqrt{y^2 + z^2} = f_i(x)\}$, где функция $f_i(x)$ задает i-й отрезок ломаной $\mathcal{P}_{\mathrm{T}}$.

Как известно из элементарной геометрии, площадь боковой поверхности усеченного конуса q_i равна $S(q_i) = \frac{b_i(\ell_{i-1}+\ell_i)}{2}$, где b_i – длина i-го звена ломаной $\mathcal{P}_{\mathrm{T}}$, являющегося образующей усеченного конуса q_i, а ℓ_{i-1}, ℓ_i – длины окружностей оснований усеченного конуса q_i. Поскольку $\ell_i = 2\pi f(x_i)$, $\quad b_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$, то площадь поверхности усеченного конуса q_i равна

$$S(q_i) = \pi \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \ (f(x_{i-1}) + f(x_i)).$$

Следовательно, площадь поверхности Q_{T}, полученной вращением ломаной $\mathcal{P}_{\mathrm{T}}$ вокруг оси Ox, равна

$$S(Q_{\mathrm{T}}) = \sum_{i=1}^{I} S(q_i) =$$

$$= \pi \sum_{i=1}^{I} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}\ (f(x_{i-1}) + f(x_i)).$$

Определение. Число S называется *площадью* поверхности вращения Q, если $S = \lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} S(Q_{\mathrm{T}})$.

Теорема 2. Пусть на $[a,b]$ задана неотрицательная, непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$. Тогда площадь поверхности вращения Q существует и равна

$$S = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx.$$

Доказательство. Пусть задано разбиение $\mathrm{T} = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отрезка $[a,b]$. По теореме Лагранжа о среднем $\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$: $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S(q_i) &= \pi \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) = \\ &= \pi (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\ (f(x_{i-1}) + f(x_i)). \end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку производная $f'(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она ограничена на $[a,b]$: $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in [a,b]$ $|f'(x)| \le C$. Следовательно, $\forall x', x'' \in [a,b]$ $|f(x') - f(x'')| \le C\,|x' - x''|$. В частности,

$$|f(x_i) - f(\xi_i)| \le C\,|x_i - \xi_i| \le C\,\ell(\mathrm{T}),$$

$$|f(x_{i-1}) - f(\xi_i)| \le C\,|x_{i-1} - \xi_i| \le C\,\ell(\mathrm{T}),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} &|f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(\xi_i)| \le \\ &\le |f(x_{i-1}) - f(\xi_i)| + |f(x_i) - f(\xi_i)| \le 2C\,\ell(\mathrm{T}). \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = 2\pi\, f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Из формул (4), (5) следует, что

$$|S(q_i) - (x_i - x_{i-1})\,\varphi(\xi_i)| = \Big|\pi\,(x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\ \times$$

$$\times\ (f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(\xi_i))\Big| \le \pi\,(x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + C^2}\ 2C\ell(\mathrm{T}).$$

Из точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ составим выборку $\xi_{\mathrm{T}} = \{\xi_i\}_{i=1}^{I}$. Из предыдущего неравенства получаем следующую оценку близости площади поверхности Q_{T} и суммы Римана $\sigma(\varphi; \mathrm{T}; \xi_{\mathrm{T}}) = \sum\limits_{i=1}^{I}(x_i - x_{i-1})\varphi(\xi_i)$:

$$|S(Q_{\mathrm{T}}) - \sigma(\varphi; \mathrm{T}; \xi_{\mathrm{T}})| = \sum_{i=1}^{I}(S(q_i) - (x_i - x_{i-1})\,\varphi(\xi_i)) \le$$

$$\le 2\pi\sqrt{1 + C^2}\ C\,\ell(\mathrm{T})\ \sum_{i=1}^{I}(x_i - x_{i-1}) = 2\pi\sqrt{1 + C^2}\ C\,\ell(\mathrm{T})\,(b - a),$$

следовательно,

$$S(Q_{\mathrm{T}}) - \sigma(\varphi; \mathrm{T}; \xi_{\mathrm{T}}) \to 0 \quad \text{при} \quad \ell(\mathrm{T}) \to 0. \tag{6}$$

Поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна, то она интегрируема на $[a,b]$, и, следовательно, существует $\lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} \sigma(\varphi; \mathrm{T}; \xi_{\mathrm{T}}) = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$. Отсюда и из (6) получаем, что существует $\lim\limits_{\ell(\mathrm{T})\to 0} S(Q_{\mathrm{T}}) = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$, т. е. существует площадь поверхности Q:

$$S(Q) = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx. \qquad \square$$

Длина дуги

Пусть кривая Γ задана непрерывной вектор-функцией $\overline{r}(t)$: $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ :\ t \in [a,b]\}$. Напомним, что ломанной $\mathcal{P}_{\mathrm{T}}$, вписанной в кривую Γ и соответствующей разбиению $\mathrm{T} = \{t_i\}_{i=0}^{I}$, называется упорядоченный набор отрезков

$$\mathcal{P}_{\mathrm{T}} = \{[\overline{r}(t_0), \overline{r}(t_1)],\ \ldots\ , [\overline{r}(t_{I-1}), \overline{r}(t_I)]\}.$$

Длина ломаной $\mathcal{P}_{\mathrm{T}}$ равна $|\mathcal{P}_{\mathrm{T}}| = \sum\limits_{i=1}^{I} |\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})|$, а длиной кривой Γ называется $|\Gamma| = \sup\limits_{\mathrm{T}} |\mathcal{P}_{\mathrm{T}}|$ – супремум длин ломаных по всем разбиениям T отрезка $[a, b]$.

Теорема 3. Если кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\}$ задана непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $\overline{r}(t)$ (т. е. производная $\overline{r}'(t)$ непрерывна на $[a, b]$), то

$$|\Gamma| = \int\limits_a^b |\overline{r}'(t)|\, dt.$$

Доказательство. Рассмотрим переменную длину дуги $s(t) = |\Gamma_t|$, где $\Gamma_t = \{\overline{r}(\xi) \ : \ \xi \in [a, t]\}$. Как было показано в главе 5, $s'(t) = |\overline{r}'(t)| \quad \forall t \in [a, b]$. Следовательно, по формуле Ньютона–Лейбница $\quad |\Gamma| = s(b) = s(b) - s(a) = \int\limits_a^b s'(t)\, dt = \int\limits_a^b |\overline{r}'(t)|\, dt.$ $\square$

§ 9. Криволинейные интегралы

Определение. Будем говорить, что вектор-функция $\overline{r}(t)$ *имеет кусочно-непрерывную производную* на отрезке $[a, b]$, если производная этой вектор-функции существует и непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, в которых $\overline{r}'(t)$ имеет конечные односторонние пределы.

Определение. Пусть кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$ задана непрерывной вектор-функцией $\overline{r}(t)$, имеющей на $[a, b]$ кусочно-непрерывную производную. Пусть на множестве Γ задана непрерывная скалярная функция $f(\overline{r})$. *Криволинейным интегралом первого рода* функции $f(\overline{r})$ по кривой Γ называется определенный интеграл функции $\varphi(t) = f(\overline{r}(t))|\overline{r}'(t)|$ по отрезку $[a, b]$:

$$\int\limits_{\Gamma} f(\overline{r})\, ds = \int\limits_a^b f(\overline{r}(t))\, |\overline{r}'(t)|\, dt. \qquad (1)$$

Замечание. Так как функция $\varphi(t) = f(\overline{r}(t))|\overline{r}'(t)|$ кусочно-непрерывна на $[a, b]$, то интеграл (1) существует.

Замечание. Если кривая Γ задана в натуральной параметризации $\overline{r}(s)$, то $|\overline{r}'(s)| = 1$, и формула (1) принимает более простой вид:

$$\int\limits_{\Gamma} f(\overline{r})\, ds = \int\limits_0^{|\Gamma|} f(\overline{r}(s))\, ds.$$

Теорема 1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от параметризации.

Доказательство. Пусть вектор-функции $\overline{r}(t)$ и $\overline{\varrho}(\tau)$ непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные на отрезках $[t_1, t_2]$ и $[\tau_1, \tau_2]$ соответственно. Пусть эти вектор-функции задают одну и ту же кривую

$$\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [t_1, t_2]\} = \{\overline{\varrho}(\tau) \ : \ \tau \in [\tau_1, \tau_2]\},$$

т. е. существует функция $\tau(t)$, непрерывная и строго возрастающая на $[t_1, t_2]$ и такая, что $\tau(t_1) = \tau_1$, $\tau(t_2) = \tau_2$ и $\overline{r}(t) = \overline{\varrho}(\tau(t)) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$. Будем дополнительно предполагать, что функция $\tau(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$. Пусть на множестве Γ задана непрерывная функция $f(\overline{r})$. Требуется доказать, что криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(\overline{r})\, ds$, вычисленный с помощью параметризации $\overline{r}(t)$, совпадает с криволинейным интегралом $\int\limits_{\Gamma} f(\overline{r})\, ds$, вычисленным с помощью параметризации $\overline{\varrho}(\tau)$, т. е.

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} f(\overline{r}(t))\, |\overline{r}'(t)|\, dt = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} f(\overline{\varrho}(\tau))\, |\overline{\varrho}'(\tau)|\, d\tau.$$

По теореме о производной сложной функции $\overline{r}'(t) = \overline{\varrho}'(\tau(t)) \cdot \tau'(t)$. Отсюда в силу неравенства $\tau'(t) \geq 0$ получаем $|\overline{r}'(t)| = |\overline{\varrho}'(\tau(t))| \cdot \tau'(t)$. Поэтому, согласно теореме о замене переменных в определенном интеграле,

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} f(\overline{\varrho}(\tau))\, |\overline{\varrho}'(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\overline{\varrho}(\tau(t)))\,|\overline{\varrho}'(\tau(t))|\,\tau'(t)\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\overline{r}(t))\,|\overline{r}'(t)|\,dt. \qquad \square$$

Лемма 1. При изменении ориентации кривой криволинейный интеграл первого рода не изменяется.

Доказательство. Пусть кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\}$ задана непрерывной вектор-функцией $\overline{r}(t)$, имеющей кусочно-непрерывную производную. Введем параметр $\tau = -t$. Тогда вектор-функция $\overline{\varrho}(\tau) = \overline{r}(-\tau)$ задает кривую $\Gamma^- = \{\overline{\varrho}(\tau) \ : \ \tau \in [-b,-a]\}$, полученную из кривой Γ изменением ориентации. Действительно, если точка $\overline{r}_1 \in \Gamma$ следует за точкой $\overline{r}_2 \in \Gamma$ в смысле ориентации кривой Γ, то $\overline{r}_1 = \overline{r}(t_1)$, $\overline{r}_2 = \overline{r}(t_2)$, $t_1 > t_2$. Поэтому $\overline{r}_1 = \overline{\varrho}(-t_1)$, $\overline{r}_2 = \overline{\varrho}(-t_2)$, $-t_1 < -t_2$, т.е. точка $\overline{r}_1$ предшествует точке $\overline{r}_2$ в смысле ориентации кривой Γ^-.

Остается показать, что криволинейные интегралы первого рода непрерывной функции $f(\overline{r})$ по кривым Γ и Γ^- совпадают. Производя замену переменной в определенном интеграле, получаем

$$\int\limits_{\Gamma^-} f(\overline{r})\,ds = \int\limits_{-b}^{-a} f(\overline{\varrho}(\tau))\,|\overline{\varrho}'(\tau)|\,d\tau \overset{t=-\tau}{=}$$

$$= \int\limits_{b}^{a} f(\overline{\varrho}(-t))\,|\overline{\varrho}'(-t)|\,(-dt) = \int\limits_{a}^{b} f(\overline{r}(t))\,|\overline{r}'(t)|\,dt = \int\limits_{\Gamma} f(\overline{r})\,ds. \qquad \square$$

Замечание. (Физическая интерпретация криволинейного интеграла первого рода.) Если $f(\overline{r}) = 1 \quad \forall \overline{r} \in \Gamma$, то криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(\overline{r})\,ds$ равен длине кривой Γ. Если $f(\overline{r}) \geq 0$, то криволинейный интеграл первого рода можно интерпретировать как массу кривой Γ с линейной плотностью $f(\overline{r})$.

Определение. Пусть кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^n$ задана непрерывной вектор-функцией $\overline{r}(t)$, имеющей на $[a,b]$ кусочно-непрерывную производную. Пусть на множестве Γ задана непрерывная n-мерная вектор-функция $\overline{F}(\overline{r})$. *Криволинейным интегралом второго рода* вектор-функции $\overline{F}$ по кривой Γ называется определенный интеграл функции $\varphi(t) = \Big(\overline{F}(\overline{r}(t)),\, \overline{r}'(t)\Big)$ по отрезку $[a,b]$:

$$\int\limits_{\Gamma} \Big(\overline{F}(\overline{r}),\, d\overline{r}\Big) = \int\limits_{a}^{b} \Big(\overline{F}(\overline{r}(t)),\, \overline{r}'(t)\Big)dt. \qquad (2)$$

Замечание. Так как функция $\varphi(t) = \Big(\overline{F}(\overline{r}(t)),\, \overline{r}'(t)\Big)$ кусочно-непрерывна на $[a,b]$, то интеграл (2) существует.

Теорема 2. Криволинейный интеграл второго рода не зависит от параметризации.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, поэтому приведем его в сокращенном виде. Пусть кривая Γ задана в двух параметризациях:

$$\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [t_1,t_2]\} = \{\overline{\varrho}(\tau) \ : \ \tau \in [\tau_1,\tau_2]\}.$$

Делая замену переменной в определенном интеграле, получаем

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \Big(\overline{F}(\overline{\varrho}(\tau)),\, \overline{\varrho}'(\tau)\Big)d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\overline{F}(\overline{\varrho}(\tau(t))),\, \overline{\varrho}'(\tau(t))\Big)\tau'(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\overline{F}(\overline{r}(t)),\, \overline{r}'(t)\Big)dt. \qquad \square$$

Лемма 2. При изменении ориентации кривой криволинейный интеграл второго рода меняет знак.

Доказательство. Пусть кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\}$ задана непрерывной вектор-функцией $\overline{r}(t)$, имеющей кусочно-непрерывную производную. Изменив ориентацию кривой Γ, получаем кривую $\Gamma^- = \{\overline{\varrho}(\tau) \ : \ \tau \in [-b,-a]\}$, заданную вектор-функцией $\overline{\varrho}(\tau) = \overline{r}(-\tau)$. В силу теоремы о замене переменных в определенном интеграле имеем

$$\int\limits_{\Gamma^-} \Big(\overline{F}(\overline{r}),\, d\overline{r}\Big) = \int\limits_{-b}^{-a} \Big(\overline{F}(\overline{\varrho}(\tau)),\, \overline{\varrho}'(\tau)\Big)d\tau \overset{t=-\tau}{=}$$

$$= \int_b^a \Big(\overline{F}(\overline{r}(t)),\, -\overline{r}'(t)\Big)(-dt) = \int_b^a \Big(\overline{F}(\overline{r}(t)),\, \overline{r}'(t)\Big)dt =$$

$$= -\int_a^b \Big(\overline{F}(\overline{r}(t)),\, \overline{r}'(t)\Big)dt = -\int_\Gamma \Big(\overline{F}(\overline{r}),\, d\overline{r}\Big). \qquad \square$$

Замечание. В частности, если кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ задана вектор-функцией $\overline{r}(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$, $t \in [a, b]$, а подынтегральная вектор-функция имеет вид $\overline{F}(\overline{r}) = \overline{F}(x, y, z) = \Big(P(x, y, z),\, Q(x, y, z),\, R(x, y, z)\Big)$, то криволинейный интеграл второго рода записывают в виде

$$\int_\Gamma P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_a^b \Big(P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\Big)dt.$$

Замечание. (Физическая интерпретация интеграла второго рода.) Пусть заданы кусочно-гладкая кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) \in \mathbb{R}^3 : t \in [a, b]\}$, непрерывная вектор-функция $\overline{F} : \Gamma \to \mathbb{R}^3$ и разбиение $\mathrm{T} = \{t_i\}_{i=0}^I$ отрезка $[a, b]$ с мелкостью $\ell(\mathrm{T})$. Заметим, что

$$\lim_{\ell(\mathrm{T})\to 0} \sum_{i=1}^I \Big(\overline{F}(\overline{r}(t_i)),\, \overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})\Big) =$$

$$= \lim_{\ell(\mathrm{T})\to 0} \sum_{i=1}^I \Big(\overline{F}(\overline{r}(t_i)),\, \overline{r}'(t_i)\Big)(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \int_a^b \Big(\overline{F}(\overline{r}(t)),\, \overline{r}'(t)\Big)dt = \int_\Gamma \Big(\overline{F}(\overline{r}),\, d\overline{r}\Big).$$

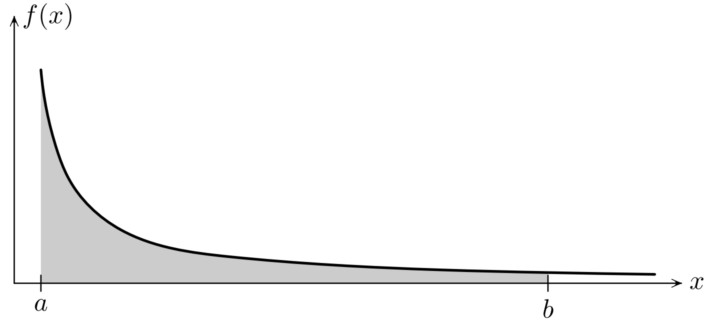
Поскольку скалярное произведение $\Big(\overline{F}(\overline{r}(t_i)),\, \overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})\Big)$ равно работе силы $\overline{F}(\overline{r}(t_i))$ вдоль отрезка $[\overline{r}(t_{i-1}), \overline{r}(t_i)]$, то криволинейный интеграл $\int_\Gamma \Big(\overline{F}(\overline{r}),\, d\overline{r}\Big)$ можно интерпретировать как работу силы $\overline{F}(\overline{r})$ вдоль кривой Γ.

Глава 8

НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определение и некоторые свойства несобственного интеграла

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на луче $[a,+\infty)$ и для любого числа $b>a$ функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. *Несобственным интегралом* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$.



Если существует конечный $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится*, иначе – *расходится*.

Определенный интеграл Римана, который мы изучали до сих пор, будем называть *собственным* интегралом.

Аналогично определяется несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ для функции $f(x)$, интегрируемой в собственном смысле на любом отрезке из луча $(-\infty,b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 1. Найти все значения α, при которых интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится.

Решение. При $\alpha\neq1$ имеем $\int\limits_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-1\right)$.

Поэтому $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} & \text{при}\quad \alpha>1\\ +\infty & \text{при}\quad \alpha<1\end{cases}$.

При $\alpha=1$ получаем $\int\limits_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\ln b\to+\infty\quad(b\to+\infty)$. Следовательно, при $\alpha>1$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, а при $\alpha\le1$ – расходится. $\square$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a,b)$ и интегрируема в собственном смысле на любом отрезке $[a,b']\subset[a,b)$. *Несобственным интегралом* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется $\lim\limits_{b'\to b-0}\int\limits_a^{b'} f(x)\,dx$.

Аналогично определяется несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для функции $f(x)$, интегрируемой в собственном смысле на любом отрезке $[a',b]\subset(a,b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{a'\to a+0}\int\limits_{a'}^b f(x)\,dx.$$

Лемма 1. Если существует собственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то несобственные интегралы $\lim\limits_{b'\to b-0}\int\limits_a^{b'} f(x)\,dx$ и $\lim\limits_{a'\to a+0}\int\limits_{a'}^b f(x)\,dx$ существуют и равны собственному интегралу.

Доказательство. Поскольку функция f интегрируема в собственном смысле на $[a,b]$, то она ограничена, т. е. $\exists M\in\mathbb{R}:\forall x\in[a,b]\hookrightarrow\quad|f(x)|\quad\le\quad M$. Поэтому $\left|\int\limits_{b'}^b f(x)\,dx\right|\le$ $\le M\,|b-b'|\to0$ при $b'\to b-0$.

Следовательно, $\lim\limits_{b'\to b-0}\int\limits_a^{b'} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx - \lim\limits_{b'\to b-0}\int\limits_{b'}^{b} f(x)\,dx =$ $= \int\limits_a^{b} f(x)\,dx$. Аналогично, $\lim\limits_{a'\to a+0}\int\limits_{a'}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx$. $\square$

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$, а на любом отрезке $[a,b'] \subset [a,b)$ функция $f(x)$ интегрируема. Тогда существует собственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Доказательство. Поскольку функция f ограничена на $[a,b]$, то $\exists C_f > 0 : \forall x \in [a,b] \hookrightarrow \ |f(x)| \le C_f$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и определим $b' \in [a,b)$ так, чтобы $b - b' < \frac{\varepsilon}{4C_f}$. Поскольку функция f интегрируема на $[a,b']$, то в силу критерия интегрируемости найдется разбиение $\mathrm{T}_{[a,b']}$ отрезка $[a,b']$ такое, что $\Delta(f,\mathrm{T}_{[a,b']}) <$ $< \frac{\varepsilon}{2}$. Добавляя к точкам разбиения $\mathrm{T}_{[a,b']}$ точку b, получим разбиение $\mathrm{T}_{[a,b]}$ отрезка $[a,b]$. При этом

$$\Delta(f,\mathrm{T}_{[a,b]}) = \Delta(f,\mathrm{T}_{[a,b']}) +$$

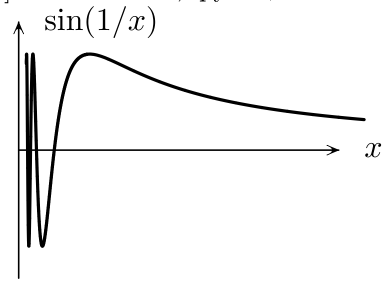
$$+ \left(\sup_{x\in[b',b]} f(x) - \inf_{x\in[b',b]} f(x)\right)(b-b') < \frac{\varepsilon}{2} + 2C_f \cdot \frac{\varepsilon}{4C_f} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\inf_{\mathrm{T}} \Delta(f,\mathrm{T}) = 0$, где инфимум берется по всем разбиениям отрезка $[a,b]$. В силу критерия интегрируемости получаем существование $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в собственном смысле. $\square$

Замечание. Аналогично можно доказать, что если ограниченная на $(a,b]$ функция интегрируема на любом отрезке $[a',b] \subset (a,b]$, то эта функция интегрируема на $[a,b]$. В частности, функция

$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

интегрируема (в собственном смысле) на $[0,1]$.



Следствие. Если функция f ограничена на отрезке $[a,b]$ и непрерывна на этом отрезке за исключением конечного числа точек, то функция f интегрируема на $[a,b]$. Это следует из свойства аддитивности интеграла по отрезкам интегрирования, а также из теоремы 1 и интегрируемости непрерывной на отрезке функции. Заметим, что при этом функция f в некоторых точках разрыва может не иметь предела, в значит, не быть кусочно-непрерывной.

Определение. Точка a называется *особой точкой* несобственного интеграла $\int\limits_b^c f(x)\,dx$, если $b \le a \le c$ и функция f неограничена в любой окрестности точки a. Для несобственных интегралов $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx$ символы $\pm\infty$ всегда считаются особыми точками.

Следствие. Из леммы 1 и теоремы 1 следует, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ без особых точек всегда сходится. Более того, в этом случае существует собственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, равный несобственному. Поэтому не имеет смысла рассматривать несобственные интегралы без особых точек.

Пример 2. Найти все значения α, при которых интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится.

Решение. При $\alpha \le 0$ функция $\frac{1}{x^\alpha}$ ограничена на $(0,1)$, и, следовательно, данный интеграл не имеет особенностей. При $\alpha > 0$ данный интеграл имеет особенность в точке $x = 0$, поэтому $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} =$ $= \lim\limits_{b\to+0}\int\limits_b^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

При $\alpha \ne 1$, $b \in (0,1)$ имеем $\int\limits_b^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_b^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{b^{\alpha-1}}\right)$.

Поэтому $\lim\limits_{b\to+0}\int\limits_b^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{при} \quad \alpha < 1 \end{cases}.$

При $\alpha = 1$ $\int\limits_b^1 \frac{dx}{x^\alpha} = -\ln b \to +\infty$ $(b \to +0)$. Следовательно, при $\alpha < 1$ интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, а при $\alpha \geq 1$ – расходится. □

Лемма 2. (Принцип локализации.) Пусть заданы $a, a_1 \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$, $a < a_1 < b$. Пусть на промежутке $[a, b)$ определена функция $f(x)$, интегрируемая в собственном смысле на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$. Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a_1}^b f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно, а в случае их сходимости справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{a_1} f(x)\,dx + \int\limits_{a_1}^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Поскольку при $b' \in [a, b)$ имеет место $\int\limits_a^{b'} f(x)\,dx = \int\limits_a^{a_1} f(x)\,dx + \int\limits_{a_1}^{b'} f(x)\,dx$, то конечные пределы $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{b' \to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a_1}^b f(x)\,dx = \lim\limits_{b' \to b-0} \int\limits_{a_1}^{b'} f(x)\,dx$ существуют или не существуют одновременно, и в случае их существования справедлива формула (1). □

Замечание. Принцип локализации состоит в том, что сходимость несобственного интеграла определяется поведением подынтегральной функции лишь в окрестности особой точки. В лемме 2 сформулирован принцип локализации для несобственного интеграла с особенностью на правом конце промежутка интегрирования. Аналогичное утверждение справедливо и для несобственного интеграла с особенностью на левом конце промежутка интегрирования.

До сих пор мы рассматривали несобственные интегралы с одной особенностью. Дадим теперь определение несобственного интеграла с конечным числом особенностей.

Определение. Пусть на конечном или бесконечном промежутке (a, b) задана функция $f(x)$, за исключением точек x_i $(i = 0, ..., I)$: $a = x_0 < x_1 < ... < x_I = b$. Пусть функция f интегрируема в собственном смысле на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, не содержащем точек x_i. Выберем произвольным образом точки $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ $(i = 1, ..., I)$. Будем говорить, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится*, если все несобственные интегралы с одной особенностью $\int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{\xi_i}^{x_i} f(x)\,dx$ сходятся. В противном случае будем говорить, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится*. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, то его значение определим как сумму несобственных интегралов с одной особенностью:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{I} \left(\int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)\,dx + \int\limits_{\xi_i}^{x_i} f(x)\,dx \right).$$

Из леммы 2 следует, что сходимость и значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не зависит от выбора точек ξ_i.

В дальнейшем мы будем рассматривать интегралы с особенностью на правом конце промежутка интегрирования. Интегралы с особенностью на левом конце промежутка интегрирования рассматриваются аналогично. Интегралы с конечным числом особенностей сводятся к конечному числу интегралов с одной особенностью.

Теорема 2. (Линейность несобственного интеграла.) Если функции f и g интегрируемы в собственном смысле на любом отрезке из промежутка $[a, b)$ и несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходятся, то для любых чисел α, β несобственный интеграл $\int\limits_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)dx$ сходится и равен $\alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. В силу линейности собственного интеграла для любого $b' \in [a, b)$ справедлива формула

$$\int\limits_a^{b'} \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\, dx = \alpha \int\limits_a^{b'} f(x)\, dx + \beta \int\limits_a^{b'} g(x)\, dx.$$

Поскольку при $b' \to b-0$ существует конечный предел выражения, стоящего в правой части равенства, то, переходя к пределу при $b' \to$ $\to b-0$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Следствие. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ расходится, а интеграл $\int\limits_a^b g(x)\, dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\, dx$ расходится.

Доказательство. Если бы интеграл $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\, dx$ сходился, то поскольку $f(x) = (f(x)+g(x)) - g(x)$ по теореме 2 мы бы получили сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\, dx$, что не выполняется по условию. Следовательно, интеграл $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\, dx$ расходится. $\square$

Замечание. Если интегралы $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\, dx$ расходятся, то интеграл $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\, dx$ может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Теорема 3. (Замена переменной.) Пусть непрерывно дифференцируемая, строго возрастающая функция $x(t)$ переводит промежуток $[t_0, \beta)$ в промежуток $[x_0, b)$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[x_0, b)$. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_{x_0}^{b} f(x)\, dx = \int\limits_{t_0}^{\beta} f(x(t))\, x'(t)\, dt, \qquad (2)$$

означающая, что если хотя бы один из указанных интегралов сходится, то другой интеграл сходится и их значения равны.

Доказательство. По теореме об одностороннем пределе возрастающей функции

$$\lim_{t \to \beta-0} x(t) = \sup_{t \in (t_0, \beta)} x(t) = \sup\, [x_0, b) = b.$$

Поскольку функция $x(t)$ непрерывна и строго возрастает, то существует обратная к ней непрерывная строго возрастающая функция $t(x)$, причем

$$\lim_{x \to b-0} t(x) = \sup_{x \in (x_0, b)} t(x) = \sup\, [t_0, \beta) = \beta.$$

В силу теоремы о замене переменной в собственном интеграле

$$\int\limits_{x_0}^{b'} f(x)\, dx = \int\limits_{t_0}^{\beta'} f(x(t))\, x'(t)\, dt,$$

где $\quad b' = x(\beta') \in (x_0, b), \quad \beta' = t(b') \in (t_0, \beta).$

Если интеграл $\int\limits_{x_0}^{b} f(x)\, dx$ сходится, то

$$\lim_{\beta' \to \beta-0} \int\limits_{t_0}^{\beta'} f(x(t))\, x'(t)\, dt = \lim_{\beta' \to \beta-0} \int\limits_{x_0}^{x(\beta')} f(x)\, dx =$$

$$= \lim_{b' \to b-0} \int\limits_{x_0}^{b'} f(x)\, dx = \int\limits_{x_0}^{b} f(x)\, dx,$$

т. е. несобственный интеграл $\int\limits_{t_0}^{\beta} f(x(t))\, x'(t)\, dt$ сходится и выполняется формула (2). Аналогично, если несобственный интеграл $\int\limits_{t_0}^{\beta} f(x(t))\, x'(t)\, dt$ сходится, то сходится несобственный интеграл $\int\limits_{x_0}^{b} f(x)\, dx$ и справедлива формула (2). $\square$

Пример 3. Найти все значения α, при которых интеграл $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}$ сходится.

Решение. Выполнив замену перменной $x = e^t$, получаем $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$. Пользуясь результатами примера 1, получаем, что исходный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le$ ≤ 1. □

§ 2. Несобственные интералы от знакопостоянных функций

В этом параграфе будем рассматривать интегралы от функций, принимающих лишь неотрицательные значения. Если функция $f(x)$ принимает лишь неположительные значения, то для исследования сходимости интеграла от функции $f(x)$ достаточно исследовать сходимость интеграла от функции $-f(x)$, которая принимает лишь неотрицательные значения.

Теорема 1. (Критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции.) Пусть функция f интегрируема в собственном смысле на любом отрезке из промежутка $[a, b)$ и $f(x) \ge 0$ $\forall x \in [a, b)$. Тогда сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ эквивалентна условию $\sup\limits_{b' \in [a,b)} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx < +\infty$.

Доказательство. Поскольку $f(x) \ge 0$, то функция $F(b') =$ $= \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx$ нестрого возрастает на $[a, b)$. По теореме об одностороннем пределе монотонной функции существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{b' \to b-0} F(b') = \sup\limits_{b' \in [a,b)} F(b')$. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{b' \to b-0} F(b')$, т. е. когда $\sup\limits_{b' \in [a,b)} F(b') < +\infty$. □

Теорема 2. (Первый признак сравнения.) Пусть функции f и g интегрируемы в собственном смысле на любом отрезке из промежутка $[a, b)$ и для любого $x \in [a, b)$ выполняются неравенства $0 \le$ $\le f(x) \le g(x)$. Тогда

а) из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

б) из расходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует расходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. Из неравенства $f(x) \le g(x)$ следует, что $\sup\limits_{b' \in [a,b)} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx \le \sup\limits_{b' \in [a,b)} \int\limits_a^{b'} g(x)\,dx$. Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то $\sup\limits_{b' \in [a,b)} \int\limits_a^{b'} g(x)\,dx < +\infty$, следовательно, $\sup\limits_{b' \in [a,b)} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx < +\infty$ и по теореме 1 интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится. Пункт (а) доказан. Пункт (б) следует из пункта (а). □

Определение. Будем говорить, что неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$ *эквивалентны в смысле сходимости интегралов* при $x \to$ $\to b-0$ и писать $f(x) \overset{\text{сх.}}{\sim} g(x)$ при $x \to b-0$, если существуют числа $m > 0$, $M > 0$, $b_1 < b$ такие, что для любого $x \in [b_1, b)$ выполняются неравенства

$$m\,g(x) \le f(x) \le M\,g(x).$$

Заметим, что неотрицательные функции f и g эквивалентны в смысле сходимости интегралов тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$. В частности, если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \ne 0$, то $f(x) \overset{\text{сх.}}{\sim} g(x)$ при $x \to b-0$.

Лемма 1. Пусть на промежутке $[a, b)$ заданы неотрицательные функции $f_i(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, причем $\forall x \in [a, b) \hookrightarrow \; f_3(x) >$ $> 0, g_3(x) > 0$. Тогда из условия

$$f_i(x) \overset{\text{сх.}}{\sim} g_i(x) \quad \text{при} \quad x \to b-0, \quad i = 1, 2, 3$$

следует условие

$$\frac{f_1(x)\,f_2(x)}{f_3(x)} \overset{\text{сх.}}{\sim} \frac{g_1(x)\,g_2(x)}{g_3(x)} \quad \text{при} \quad x\to b-0.$$

Доказательство. По определению эквивалентных функций в смысле сходимости интегралов для любого $i=1,2,3$

$$\exists b_i\in[a,b),\ m_i>0,\ M_i>0 : \forall x\in[b_i,b) \hookrightarrow\ m_i\,f_i(x)\le g_i(x)\le M_i\,f_i(x).$$

Следовательно, существует $b'=\max\{b_1,b_2,b_3\}$ такое, что для любого $x\in[b',b)$ выполняются неравенства

$$\frac{m_1\,m_2}{M_3}\,\frac{f_1(x)\,f_2(x)}{f_3(x)} \le \frac{g_1(x)\,g_2(x)}{g_3(x)} \le \frac{M_1\,M_2}{m_3}\,\frac{f_1(x)\,f_2(x)}{f_3(x)}. \qquad \square$$

Теорема 3. (Второй признак сравнения.) Пусть неотрицательные функции f и g интегрируемы в собственном смысле на любом отрезке из промежутка $[a,b)$ и эквивалентны в смысле сходимости интегралов при $x\to b-0$. Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Поскольку $f(x) \overset{\text{сх.}}{\sim} g(x)$ при $x\to b-0$, то

$$\exists m,M>0,\ \exists b_1\in[a,b) : \forall x\in[b_1,b)\hookrightarrow\ m\,g(x)\le f(x)\le M\,g(x).$$

В силу принципа локализации (лемма 2 § 1) сходимость или расходимость интегралов $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ не изменится, если промежуток интегрирования $[a,b)$ заменить на промежуток $[b_1,b)$. Пусть интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, тогда сходится интеграл $\int\limits_{b_1}^b g(x)\,dx$, и, следовательно, сходится интеграл $\int\limits_{b_1}^b M\,g(x)\,dx$. Отсюда в силу признака сравнения получаем сходимость интеграла $\int\limits_{b_1}^b f(x)\,dx$, а значит, и интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Аналогично, из сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$. $\square$

Замечание. Условие неотрицательности функций $f(x)$ и $g(x)$ в теореме 3 существенно. В следующем параграфе будет показано, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)dx$ расходится, хотя $1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \overset{\text{сх.}}{\sim} 1$ при $x\to+\infty$.

Пример. Исследовать на сходимость

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x\ \sin\left(\frac{2+\cos x}{x^2}\right)}{(e^x+1)^\alpha}dx.$$

Решение. Заметим, что при $x\to+\infty$ имеют место следующие эквивалентности в смысле сходимости интегралов:

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2} \qquad\Rightarrow\qquad \operatorname{arctg} x \overset{\text{сх.}}{\sim} 1;$$

$$\sin t \overset{\text{сх.}}{\sim} t \ \text{ при } \ t=\frac{2+\cos x}{x^2}\to 0 \quad\Rightarrow\quad \sin\left(\frac{2+\cos x}{x^2}\right) \overset{\text{сх.}}{\sim} \frac{2+\cos x}{x^2};$$

$$1\le 2+\cos x\le 3 \qquad\Rightarrow\qquad \sin\left(\frac{2+\cos x}{x^2}\right) \overset{\text{сх.}}{\sim} \frac{2+\cos x}{x^2} \overset{\text{сх.}}{\sim} \frac{1}{x^2};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x+1)^\alpha}{e^{\alpha x}}=1 \qquad\Rightarrow\qquad (e^x+1)^\alpha \overset{\text{сх.}}{\sim} e^{\alpha x}.$$

Отсюда и из леммы 1 получаем

$$\frac{\operatorname{arctg} x\ \sin\frac{1}{x^2}}{(e^x+1)^\alpha} \overset{\text{сх.}}{\sim} \frac{1}{x^2\,e^{\alpha x}} \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

При $\alpha\ge 0$ выполняется $\frac{1}{x^2\,e^{\alpha x}}\le\frac{1}{x^2}$ $\forall x\ge 1$. Поскольку $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, то при $\alpha\ge 0$ исходный интеграл сходится в силу признака сравнения.

При $\alpha<0$ выполняется $\frac{1}{x^2\,e^{\alpha x}}\to+\infty$ $(x\to+\infty)$, следовательно, $\exists x_0\ge 1 : \forall x\ge x_0 \hookrightarrow\ \frac{1}{x^2\,e^{\alpha x}}\ge 1$. Поскольку интеграл $\int\limits_1^{+\infty}dx$ расходится, то в силу признака сравнения при $\alpha<0$ исходный интеграл расходится. $\square$

Задача 1. Пусть функция $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ нестрого убывает. Как связано условие сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ с условием $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,f(x) = 0$?

§ 3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций

Теорема 1. (Критерий Коши.) Пусть функция f интегрируема в собственном смысле на любом отрезке из промежутка $[a, b)$. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\xi \in (a, b) : \forall b_1, b_2 \in (\xi, b) \hookrightarrow \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Определим функцию $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$. По определению несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, если существует конечный предел $\lim\limits_{t\to b-0} F(t)$. Из критерия Коши существования предела функции следует, что существование конечного предела $\lim\limits_{t\to b-0} F(t)$ эквивалентно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует левая полуокрестность (ξ, b) точки b такая, что $\forall b_1, b_2 \in (\xi, b) \hookrightarrow |F(b_2) - F(b_1)| < \varepsilon$. Используя равенство $F(b_2) - F(b_1) = \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Замечание. Критерий Коши чаще всего используется для доказательства расходимости несобственных интегралов от знакопеременных функций. Согласно критерию Коши, для доказательства расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с особенностью в точке b достаточно доказать, что выполняется отрицание к условию Коши сходимости этого интеграла, т.е.

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall\xi \in (a, b)\ \exists b_1, b_2 \in (\xi, b) : \quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \geq \varepsilon.$$

Определение. Говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится абсолютно*, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема 2. Пусть функция f интегрируема в собственном смысле на любом отрезке из промежутка $[a, b)$. Если несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно, то этот несобственный интеграл сходится.

Доказательство. Так как интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то выполняется условие Коши его сходимости:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\xi \in (a, b) : \forall b_1, b_2 \in (\xi, b) \hookrightarrow \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon.$$

Поскольку $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \leq \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx\right|$, то выполняется условие Коши сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Отсюда по критерию Коши получаем сходимость этого интеграла. $\square$

Заметим, что для собственных интегралов из интегрируемости модуля функции не следует интегрируемость самой функции.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \\ -1, & \text{если } x \text{ рациональное} \end{cases}$$

неинтегрируема, а ее модуль $|f(x)| = 1$ является функцией, интегрируемой в собственном смысле на любом отрезке.

Определение. Если несобственный интеграл сходится, но не является абсолютно сходящимся, то говорят, что этот несобственный интеграл *сходится условно.*

Теорема 3. (Признак Дирихле.) Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[a,b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Пусть выполнены условия

1) первообразная функции f ограничена на $[a,b)$;
2) $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$;
3) функция g нестрого убывает на $[a,b)$, т.е. $g'(x) \le 0\ \forall x \in [a,b)$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ сходится.

Доказательство. По условию первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ ограничена, т.е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in [a,b) \hookrightarrow\ |F(x)| \le C. \tag{1}$$

Для произвольного $b' \in (a,b)$ воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^{b'} f(x)\,g(x)\,dx = \int\limits_a^{b'} g(x)\,dF(x) = g(x)\,F(x)\Big|_a^{b'} - \int\limits_a^{b'} F(x)\,g'(x)\,dx. \tag{2}$$

Заметим, что в силу формулы Ньютона–Лейбница $\lim\limits_{b'\to b-0} \int\limits_a^{b'} g'(x)\,dx = \lim\limits_{b'\to b-0} g(b') - g(a) = -g(a)$, следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_a^b g'(x)\,dx$ сходится. Отсюда и из равенства $|g'(x)| = -g'(x)$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b |g'(x)|\,dx$, а значит, и интеграла $\int\limits_a^b C\,|g'(x)|\,dx$. Учитывая условие (1), в силу признака сравнения получаем сходимость интеграла $\int\limits_a^b |F(x)\,g'(x)|\,dx$. Отсюда по теореме 2 получаем сходимость интеграла $\int\limits_a^b F(x)\,g'(x)\,dx$. Иными словами,

$$\exists \lim_{b'\to b-0} \int\limits_a^{b'} F(x)\,g'(x)\,dx \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Поскольку функция $F(x)$ ограничена и $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)\,F(x) = 0$, поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{b'\to b-0} g(x)\,F(x)\Big|_a^{b'} = -g(a)\,F(a)$. Отсюда и из условий (2), (3) получаем существование конечного предела $\lim\limits_{b'\to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x)\,g(x)\,dx$, т.е. сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$. □

Исследование на сходимость и абсолютную сходимость несобственных интералов состоит из четырех этапов (обоснование сходимости, расходимости, абсолютной сходимости и отсутствия абсолютной сходимости при различных значениях параметра).

Пример. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^\alpha}$.

Решение. 1) Покажем, что при $\alpha > 0$ данный интеграл сходится по признаку Дирихле. Действительно, функция $\sin x$ имеет ограниченную первообразную $-\cos x$, а функция $\frac{1}{x^\alpha}$ при $\alpha > 0$ убывает на $[1,+\infty)$ и стремится к нулю при $x \to +\infty$. Кроме того, функции $\sin x$ и $\frac{1}{x^\alpha}$ непрерывно дифференцируемы на $[1,+\infty)$. Следовательно, при $\alpha > 0$ все условия признака Дирихле выполнены и данный интеграл сходится.

2) Покажем, что при $\alpha \le 0$ данный интеграл расходится в силу критерия Коши. Действительно, при $\alpha \le 0$, $n \in \mathbb{N}$ имеем $\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{\sin x\,dx}{x^\alpha} \ge \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{\sin x\,dx}{(2\pi n)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi n)^\alpha} \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin x\,dx = \frac{2}{(2\pi n)^\alpha} \ge 2.$ Следовательно,

$$\exists \varepsilon_0 = 1 : \forall \xi\ \exists b_1 = 2\pi n > \xi,\ b_2 = 2\pi n + \pi > \xi : \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x\,dx}{x^\alpha} \right| > \varepsilon_0,$$

т.е. выполняется отрицание условия Коши сходимости исходного интеграла.

3) Покажем, что при $\alpha > 1$ данный интеграл сходится абсолютно. Поскольку $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$, то при этих α интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$ сходится по признаку сравнения.

4) Покажем, что при $\alpha \in (0,1]$ данный интеграл не является абсолютно сходящимся. Поскольку $0 \le |\sin x| \le 1$, то $|\sin x| \ge$ $\ge \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. При $\alpha \in (0,1]$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x\, dx}{x^\alpha}$ сходится по признаку Дирихле (так как функция $\cos 2x$ имеет ограниченную первообразную, а функция $\frac{1}{x^\alpha}$ монотонно стремится к нулю). Отсюда в силу следствия из свойства линейности несобственного интеграла получаем расходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2\,x^\alpha}\, dx$, т. е. интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\, dx$.

Отсюда и из признака сравнения следует расходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$ при $\alpha \in (0,1]$. Поскольку, как показано на первом этапе, при $\alpha > 0$ исходный интеграл сходится, то при $\alpha \in (0,1]$ этот интеграл сходится условно.

Ответ: при $\alpha > 1$ данный интеграл сходится абсолютно, при $\alpha \in$ $\in (0,1]$ сходится условно, при $\alpha \le 0$ – расходится. □

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение: $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$. Поскольку интегралы $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\, dx$ сходятся по признаку Дирихле, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ расходится, то исходный интеграл расходится. □

Последний пример показывает, что для знакопеременных функций при замене функции на эквивалентную сходимость интеграла

может измениться. Действительно, $1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \overset{\text{сх.}}{\sim} 1$ при $x \to +\infty$, однако интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx$ расходится.

Теорема 3. (Признак Абеля.) Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[a,b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Пусть выполнены условия

1) интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ сходится;

2) функция g ограничена на $[a,b)$;

3) функция g нестрого убывает на $[a,b)$, т. е. $g'(x) \le 0\ \forall x \in [a,b)$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ сходится.

Доказательство. Так как функция g нестрого убывает и ограничена на $[a,b)$, то существует $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = g_0 \in \mathbb{R}$. Заметим, что функция $\tilde{g}(x) = g(x) - g_0$ нестрого убывает на $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} \tilde{g}(x) = 0$. Поэтому в силу признака Дирихле интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, \tilde{g}(x)\, dx$ сходится. Поскольку $f(x)\, g(x) = f(x)\, \tilde{g}(x) + f(x)\, g_0$, причем интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ сходится по условию теоремы, то по свойству линейности интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ сходится. □

Следствие. Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[a,b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Пусть функция g монотонна на $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = g_0 \in \mathbb{R}$, $g_0 \ne$ $\ne 0$. Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ имеет тот же тип сходимости и абсолютной сходимости, что и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$.

Доказательство. Интегралы $\int\limits_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx$ и $\int\limits_a^b |f(x)|\, dx$ сходятся или расходятся одновременно, так как $|f(x)\, g(x)| \overset{\text{сх.}}{\sim} |f(x)|$ при

$x \to +\infty$. Докажем теперь, что интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ сходится по признаку Абеля. Покажем, что из сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Так как $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = g_0 \neq 0$, то существует число $a_1 \in [a,b)$ такое, что на промежутке $[a_1,b)$ функция $g(x)$ не обращается в нуль. Поэтому функция $g_1(x) = \frac{1}{g(x)}$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a_1,b)$. Поскольку $f(x) = f(x)\,g(x)\,g_1(x)$, то в силу признака Абеля из сходимости интеграла $\int\limits_{a_1}^b f(x)\,g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_{a_1}^b f(x)\,dx$. Применяя принцип локализации, получаем требуемое утверждение. □

Пример. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sin x^2\,dx$.

Решение. Заметим, что $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$. Следовательно, для функции $g(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ справедливо равенство $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Кроме того,

$$g'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2x^2}(1+o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Поэтому существует число $x_0 > 1$ такое, что $g'(x) > 0$ для любого $x > x_0$. Поэтому согласно следствию из признака Абеля и принципу локализации исходный интеграл имеет тот же тип сходимости и абсолютной сходимости, что и интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} x^{\alpha-1}\sin x^2\,dx = \Bigg/ \begin{array}{c} t = x^2, \\ x = \sqrt{t}, \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \Bigg/ = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1-\alpha/2}}\sin t\,dt.$$

Используя пример, рассмотренный ранее, получаем, что исходный интеграл сходится абсолютно при $1-\frac{\alpha}{2} > 1$, т. е. при $\alpha < 0$; сходится условно при $1-\frac{\alpha}{2} \in (0,1]$, т. е. при $\alpha \in [0;2)$ и расходится при $1 - \frac{\alpha}{2} \leq 0$ т. е. при $\alpha \geq 2$.

Задача 1. Пусть функции f и g непрерывны на луче $[1,+\infty)$, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится условно. Может ли интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$

а) сходиться условно,
б) расходиться ?

Глава 9

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. Определение и некоторые свойства рядов

Определение. Пусть задана числовая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Число $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называется n-й *частичной суммой ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Элементы последовательности $\{a_k\}$ называются *членами* этого *ряда*. Суммой ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется предел частичных сумм:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *сходящимся*, если существует конечный предел частичных сумм этого ряда, в противном случае ряд называется *расходящимся*.

Теорема 1. (Необходимое условие сходимости ряда.) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Доказательство. Поскольку ряд сходится, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. Поскольку $a_n = S_n - S_{n-1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. $\square$

Пример. При каких q сходится ряд из геометрической прогрессии $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$?

Решение. При $|q| \geq 1$ имеем $q^k \not\to 0$ $(k \to \infty)$, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда, и, следовательно, ряд расходится.

Пусть $|q| < 1$. Воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии (которую легко доказать по индукции), получаем $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^k = q\frac{1-q^n}{1-q} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{q}{1-q}$. Следовательно, при $|q| < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится. $\square$

Лемма 1. (Принцип локализации.) Для любого $k_0 \in \mathbb{N}$ ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Для любого натурального $n > k_0$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} a_k.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Лемма 2. (Свойство линейности.) Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся, то для любых чисел α и β ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ сходится.

Доказать самостоятельно.

Следствие. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ расходится.

§ 2. Ряды с неотрицательными членами

Теорема 1. (Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами.) Если $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ эквивалентна ограниченности его частичных сумм: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n < +\infty$.

Доказательство. Поскольку последовательность частичных сумм нестрого возрастает, то существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел его частичных сумм, т. е. когда $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n < +\infty$. $\square$

Теорема 2. (Первый признак сравнения.) Если $0 \le a_k \le b_k\ \forall k \in \in \mathbb{N}$, то

а) из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$;

б) из расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство. а) Из неравенства $a_k \le b_k$ следует неравенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k < +\infty$, поэтому $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k < +\infty$ и в силу теоремы 1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

б) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то согласно пункту (а) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ не может сходиться. $\square$

Определение. Будем говорить, что последовательности с неотрицательными элементами $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ *эквивалентны в смысле сходимости рядов* и писать $a_k \overset{\text{сх.}}{\sim} b_k$, если существуют числа $m > 0$, $M > 0$ и $k_0 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$m\, b_k \le a_k \le M\, b_k \qquad \forall k \ge k_0.$$

Теорема 3. (Второй признак сравнения.) Пусть $\exists k_0 : \forall k \ge k_0 \hookrightarrow \hookrightarrow a_k \ge 0,\ b_k \ge 0$ и $a_k \overset{\text{сх.}}{\sim} b_k$. Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство состоит в применении первого признака сравнения и принципа локализации. $\square$

Теорема 4. (Интегральный признак.) Пусть на луче $[1, +\infty)$ задана монотонная функция $f(x)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Из монотонности f следует существование предела $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Если $A \ne 0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ расходится в силу необходимого условия сходимости ряда, а интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится в силу второго признака сравнения. Поэтому в случае $A \ne 0$ утверждение теоремы справедливо.

Пусть теперь $A = 0$. Для определенности будем предполагать, что функция f нестрого убывает. Тогда $f(x) \ge 0\ \forall x \ge 1$. Проинтегрировав неравенства $f(k+1) \le f(x) \le f(k)\ \forall x \in [k, k+1]$ по отрезку $[k, k+1]$, получаем неравенства $f(k+1) \le \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \le f(k)$. Просуммировав полученные неравенства по k от 1 до n, получаем

$$S_{n+1} - f(1) \le F(n+1) \le S_n, \tag{1}$$

где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k), \quad F(t) = \int\limits_{1}^{t} f(x)\,dx.$

Поскольку $f(x) \ge 0$, то функция $F(t)$ нестрого возрастает, следовательно, $F(n) \le F(x) \le F(n+1) \quad \forall x \in [n, n+1]$, что вместе с неравенствами (1) дает неравенства

$$S_n - f(1) \le F(n) \le F(x) \le F(n+1) \le S_n \qquad \forall x \in [n, n+1],$$

следовательно, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n - f(1) \le \sup\limits_{x\in[1,+\infty)} F(x) \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$, а значит, условия $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n < +\infty$ и $\sup\limits_{x\in[1,+\infty)} F(x) < +\infty$ эквивалентны.

В силу критерия сходимости ряда с неотрицательными членами условие $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n < +\infty$ эквивалентно сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$, а в силу критерия сходимости интегралов от знакопостоянных функций, условие $\sup\limits_{x\in[1,+\infty)} F(x) < +\infty$ эквивалентно сходимости интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$. Поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. $\square$

Пример. При каких α сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$?

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ монотонна. Поскольку интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. $\square$

Задача 1. Пусть на луче $[1, +\infty)$ задана непрерывная функция $f(x)$. Верно ли, что из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ следует сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$? Верно ли обратное?

Теорема 5. (Признак Даламбера.) Пусть $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

а) если существуют $k_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in (0,1)$ такие, что $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le q \quad \forall k \ge k_0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

б) если $\exists k_0 : \forall k \ge k_0 \hookrightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. а) По индукции легко показать, что $a_k \le a_{k_0}\, q^{k-k_0} \quad \forall k \ge k_0$. Поскольку, как показано в примере из § 1, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится при $q \in (0,1)$, то ряд $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_{k_0}\, q^{k-k_0}$ также сходится и по признаку сравнения сходится ряд $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$. А значит, в силу принципа локализации сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

б) Если $\frac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1$ при $k \ge k_0$, то $a_k \ge a_{k_0}$ при $k \ge k_0$. Следовательно, $a_k \not\to 0$ $(k \to \infty)$, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда, и, следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. $\square$

Следствие. (Признак Даламбера в предельной форме.) Пусть $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$, тогда

а) при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

б) при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;

в) при $q = 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ может сходиться, а может и расходиться.

Доказательство. а) Определим $q' = \frac{q+1}{2}$. Поскольку $q < 1$, то $q < q' < 1$. По определению предела $\exists k_0 : \forall k > k_0 \hookrightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} \le q'$. Следовательно, в силу теоремы 5(а) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

б) По определению предела $\exists k_0 : \forall k > k_0 \hookrightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1$. В силу теоремы 5(б) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

в) Пусть $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Однако, как показано ранее, при $\alpha > 1$ данный ряд сходится, а при $\alpha \le 1$ – расходится. $\square$

Теорема 6. (Признак Коши.) Пусть $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

а) если существуют $k_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in (0,1)$ такие, что $\sqrt[k]{a_k} \le q \quad \forall k \ge k_0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

б) если $\exists k_0 : \forall k \ge k_0 \hookrightarrow \sqrt[k]{a_k} \ge 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. а) Если $\sqrt[k]{a_k} \le q \quad \forall k \ge k_0$, то $a_k \le q^k \quad \forall k \ge k_0$. В силу признака сравнения и принципа локализации из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

б) Если $\sqrt[k]{a_k} \ge 1$ при $k \ge k_0$, то $a_k \ge 1$ при $k \ge k_0$, а значит, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, и, следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. $\square$

Следствие. (Признак Коши в предельной форме.) Пусть $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q$, тогда

а) при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

б) при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

в) при $q = 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ может сходиться, а может и расходиться.

Доказательство аналогично доказательству признака Даламбера в предельной форме.

§ 3. Ряды со знакопеременными членами

Теорема 1. (Критерий Коши.) Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon.$$

Доказательство. По определению ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, если сходится последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. В силу критерия Коши для последовательностей сходимость последовательности $\{S_n\}$ эквивалентна ее фундаментальности: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ |S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon$. Отсюда и из равенства $S_{n+p} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k$ следует требуемое утверждение. □

Определение. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, но не является абсолютно сходящимся.

Теорема 2. Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно. Тогда выполняется условие Коши сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| \leq \varepsilon,$$

следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon,$$

т. е. выполняется условие Коши сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, а значит, этот ряд сходится. □

Лемма 1. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ абсолютно сходятся, то для любых чисел α и β ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ абсолютно сходится.

Доказательство. В силу свойства линейности из сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (|\alpha|\,|a_k| + |\beta|\,|b_k|)$. Поскольку $|\alpha a_k + \beta b_k| \leq |\alpha|\,|a_k| + |\beta|\,|b_k|$, то в силу признака сравнения ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha a_k + \beta b_k|$ сходится. □

Теорема 3. (Признак Дирихле.) Пусть последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничена:

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq C,$$

а последовательность $\{b_k\}$ монотонно стремится к нулю. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\, b_k$ сходится.

Доказательство. Для определенности будем предполагать, что последовательность $\{b_k\}$ нестрого убывает: $b_{k+1} \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Обозначим $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ $(n \in \mathbb{N})$, $A_0 = 0$. Выполним преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k\, b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1}\, b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k\, b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k\, b_{k+1} \quad \overset{\text{т.к. } A_0 = 0}{=} \quad \sum_{k=1}^{n} A_k\, b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k\, b_{k+1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k = A_n\, b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}). \tag{1}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b_1,$$

т. е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ сходится, следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C\,(b_k - b_{k+1})$. Поскольку $b_k - b_{k+1} \ge 0$ и $|A_k| \le C$, то $|A_k\,(b_k - - b_{k+1})| \le C|b_k - b_{k+1}| = C\,(b_k - b_{k+1})$. Отсюда в силу признака сравнения получаем абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k\,(b_k - b_{k+1})$. Поэтому в силу теоремы 2 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k\,(b_k - b_{k+1})$ сходится.

Поскольку $\{A_n\}$ – ограниченная последовательность, а $\{b_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} A_n\,b_n = 0$. Отсюда из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k\,(b_k - b_{k+1})$ и из формулы (1) следует существование конечного предела

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\,b_k = \lim_{n\to\infty} A_n\,b_n + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1}),$$

т. е. сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\,b_k$. $\square$

Теорема 4. (Признак Лейбница.) Если последовательность $\{b_k\}$ монотонно стремится к нулю, то ряд Лейбница $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,b_k$ сходится.

Доказательство. Заметим, что последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ ограничена: $\sum\limits_{k=1}^{2m}(-1)^k = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{2m+1}(-1)^k = -1$ $\forall m \in \mathbb{N}$, следовательно, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right| \le 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. В силу признака Дирихле ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,b_k$ сходится. $\square$

Теорема 5. (Признак Абеля.) Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, последовательность $\{b_k\}$ монотонна и ограничена. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\,b_k$ сходится.

Доказательство. Так как последовательность $\{b_k\}$ монотонна и ограничена, то существует $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b_0 \in \mathbb{R}$. Поэтому последовательность $\{b_k - b_0\}$ монотонно стремится к нулю. Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует ограниченность последовательности частичных сумм этого ряда. Поэтому согласно признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - b_0)$ сходится. Отсюда и из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\,b_k$. $\square$

§ 4. Перестановки слагаемых в рядах и перемножение рядов

Определение. Будем говорить, что последовательность натуральных чисел $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ *задает взаимно однозначное преобразование множества натуральных чисел*, если для любого $k \in \mathbb{N}$ существует единственный номер $j \in \mathbb{N}$ такой, что $k = k_j$.

Лемма 1. Пусть последовательность $\{k_j\}$ задает взаимно однозначное преобразование множества $\mathbb{N}$ и пусть

$$M_n = \max_{j\le n} k_j, \qquad m_n = \min_{j>n} k_j.$$

Тогда $\lim\limits_{j\to\infty} k_j = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = +\infty$.

Доказательство. Поскольку последовательность $\{k_j\}$ задает взаимно однозначное преобразование $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, то существует последовательность $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$, задающая обратное преобразование $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. е.

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall j \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ k_j = k \iff j_k = j.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим $J_m = \max\{j_1, \ldots, j_m\}$. Тогда при $j > J_m$ получаем, что $j \ne j_k$ $\forall k \in \{1, \ldots, m\}$, следовательно,

$k_j \notin \{1, \ldots, m\}$, т. е. $k_j > m$. Итак,

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \exists J_m \in \mathbb{N} : \forall j > J_m \hookrightarrow\ k_j > m. \tag{1}$$

Это означает, что $\lim\limits_{j\to\infty} k_j = +\infty$. Кроме того, из (1) следует, что

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \exists J_m \in \mathbb{N} : \forall n > J_m \hookrightarrow\ m_n = \min_{j>n} k_j > m.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = +\infty$. Поскольку $M_n \geq k_n \to +\infty$, то $M_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. $\square$

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$ *получен перестановкой членов* ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, если существует последовательность натуральных чисел $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$, задающая взаимно однозначное преобразование множества $\mathbb{N}$, и такая, что $\forall j \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ \widetilde{a}_j = a_{k_j}$.

Теорема 1. Если ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$ получен перестановкой членов абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, то ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$ абсолютно сходится и его сумма равна сумме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Доказательство. а) Пусть последовательность $\{k_j\}$ задает перестановку $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, т. е.

$$\forall j \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ \widetilde{a}_j = a_{k_j} \quad \text{и}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{существует единственный} \quad j \in \mathbb{N} : k_j = k.$$

Поскольку $\sum\limits_{j=1}^{n} |\widetilde{a}_j| = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{k_j}| \leq \sum\limits_{k=1}^{M_n} |a_k|$, где $M_n = \max\limits_{j\leq n} k_j$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ следует, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{j=1}^{n} |\widetilde{a}_j| \leq \sup\limits_{M\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{M} |a_k| < +\infty$. Следовательно, в силу критерия сходимости ряда с неотрицательными членами ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\widetilde{a}_j|$ сходится, т. е. ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$ сходится абсолютно.

б) Обозначим $\widetilde{S}_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \widetilde{a}_j$, $\quad S_m = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$, $\quad \sigma_m = \sum\limits_{k=1}^{m} |a_k|$, $\quad \widetilde{S} = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{S}_n$, $\quad S = \lim\limits_{m\to\infty} S_m$, $\quad \sigma = \lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m$ (из условий теоремы и доказанной сходимости ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$ следует, что данные пределы существуют и конечны). Требуется доказать, что $\widetilde{S} = S$.

Заметим, что $S_{M_n} - \widetilde{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{M_n} a_k - \sum\limits_{j=1}^{n} \widetilde{a}_j = \sum\limits_{k=1}^{M_n} a_k - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{k_j}$.

По определению числа $M_n = \max\limits_{j\leq n} k_j$ в сумме $\sum\limits_{k=1}^{M_n} a_k$ содержатся все слагаемые суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{k_j}$, поэтому

$$|S_{M_n} - \widetilde{S}_n| = \left| \sum_{\substack{k \in \{1,\ldots,M_n\} \\ k \notin \{k_1,\ldots,k_n\}}} a_k \right| \leq \sum_{\substack{k \in \{1,\ldots,M_n\} \\ k \notin \{k_1,\ldots,k_n\}}} |a_k|.$$

Из условия $k \notin \{k_1, \ldots, k_n\}$ следует, что $k = k_j$, где $j > n$, а значит, $k \geq \min\limits_{j>n} k_j = m_n$. Поэтому

$$|S_{M_n} - \widetilde{S}_n| \leq \sum_{k=m_n}^{M_n} |a_k| = \sigma_{M_n} - \sigma_{m_n-1}.$$

Согласно лемме 1, $m_n \to +\infty$, $M_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} (\sigma_{M_n} - \sigma_{m_n-1}) = \sigma - \sigma = 0$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} |S_{M_n} - \widetilde{S}_n| = 0$. Отсюда и из условия $\lim\limits_{n\to\infty} S_{M_n} = S$ получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{M_n} = S$, т. е. сумма ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$ совпадает с суммой ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. $\square$

Заметим, что при перестановке членов условно сходящегося ряда сумма ряда, вообще говоря, меняется. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. (Теорема Римана.) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, то для любого числа x можно так переставить члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, что полученный ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$ будет иметь сумму, равную x.

Доказательство. Шаг 1. Составим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, членами которого являются все неотрицательные члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, взятые с сохранением порядка (если неотрицательных членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ конечное число, то вместо ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ получится конечная сумма). Составим ряд (или конечную сумму) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, членами которого являются все отрицательные члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, взятые с сохранением порядка.

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n_1} b_k + \sum_{k=1}^{n_2} (-c_k); \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_1} b_k + \sum_{k=1}^{n_2} c_k. \tag{3}$$

Покажем, что ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ расходятся и, следовательно, не могут являться конечными суммами. Это доказательство проведем методом от противного. Предположим, что один из этих рядов сходится.

Случай (а). Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходятся. Тогда их частичные суммы ограничены, и из формулы (2) следует, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ограничены, а значит, в силу критерия сходимости ряда с неотрицательными членами этот ряд сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, что противоречит условию теоремы.

Случай (б). Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится. Тогда частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ стремятся к $+\infty$, а частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ ограничены. Отсюда и из формулы (3) следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, что противоречит сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Аналогично, *случай* (в), когда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ расходится, также противоречит сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Таким образом, ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ расходятся, так как другие случаи противоречат условиям теоремы.

Шаг 2. Определим ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$.

Определим $\quad \widetilde{a}_1 = \begin{cases} b_1, & \text{если } x \ge 0, \\ c_1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Пусть определены первые n членов ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$: $\quad \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_n$, которые состоят из первых $p = p(n)$ членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и первых $n - p(n)$ членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$. Пусть $\widetilde{S}_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \widetilde{a}_j$.

Определим $\quad \widetilde{a}_{n+1} = \begin{cases} b_{p(n)+1}, & \text{если } x \ge \widetilde{S}_n, \\ c_{n-p(n)+1}, & \text{если } x < \widetilde{S}_n. \end{cases}$

Шаг 3. Покажем, что $\quad p(n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Предположим противное: $p(n) \not\to +\infty$ при $n \to \infty$. Тогда поскольку последовательность $\{p(n)\}_{n=1}^{\infty}$ нестрого возрастает, то она ограничена сверху, т. е. $\exists p_0 : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ p(n) \le p_0$. Следовательно, в ряде $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$ присутствует лишь конечное число членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, т. е. существует j_1 такое, что

$$\forall j > j_1 \hookrightarrow \ \widetilde{a}_j \in \{c_k\}_{k=1}^{\infty}. \tag{4}$$

Поскольку частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ стремятся к $-\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{S}_n = -\infty$, и, следовательно, $\exists j_2 \geq j_1 : \forall j > j_2 \hookrightarrow \widetilde{S}_j < x$. Согласно построению ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$ получаем $\widetilde{a}_{j_2+1} \in \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, что противоречит условию (4). Полученное противоречие доказывает, что $p(n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Аналогично, $n - p(n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Следовательно, любой член ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ будет присутствовать в ряде $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$. Поэтому ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$ является перестановкой членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Шаг 4. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \widetilde{a}_j = x$.

Из алгоритма построения ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j$ следует, что при достаточно больших n, а именно, при таких, что $p(n) > 0$ и $n - p(n) > 0$, справедлива формула

$$|\widetilde{S}_n - x| \leq \max\{b_{p(n)}, -c_{n-p(n)}\}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $a_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, следовательно, $b_{p(n)} \to 0$, $c_{n-p(n)} \to 0$ при $n \to \infty$, а значит, $|\widetilde{S}_n - x| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \widetilde{a}_j = x$. Таким образом, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{a}_j = x$. $\square$

Определение. Через $\mathbb{N}^2$ будем обозначать множество всевозможных пар натуральных чисел. Будем говорить, что последовательность пар натуральных чисел $\{(m_j, n_j)\}_{j=1}^{\infty}$ *задает взаимно однозначное отображение* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, если для любой пары натуральных чисел (m, n) существует единственный номер $j \in \mathbb{N}$ такой, что $(m_j, n_j) = (m, n)$.

Теорема 3. (О перемножении рядов.) Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$

абсолютно сходятся, а последовательность $\{(m_j, n_j)\}_{j=1}^{\infty}$ задает взаимно однозначное отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$. Тогда ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{m_j} b_{n_j}$ абсолютно сходится, а его сумма равна произведению сумм рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство. а) Для произвольного натурального числа J определим $M_J = \max\{m_1, \ldots, m_J\}$, $N_J = \max\{n_1, \ldots, n_J\}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{J} |a_{m_j} b_{n_j}| \leq \left(\sum_{m=1}^{M_J} |a_m|\right) \left(\sum_{n=1}^{N_J} |b_n|\right).$$

Отсюда в силу абсолютной сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ получаем

$$\sup_{J\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{J} |a_{m_j} b_{n_j}| \leq \left(\sup_{M\in\mathbb{N}} \sum_{m=1}^{M} |a_m|\right) \left(\sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} |b_n|\right) < +\infty.$$

Следовательно, в силу критерия сходимости ряда с неотрицательными членами ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{m_j} b_{n_j}|$ сходится, т. е. ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{m_j} b_{n_j}$ сходится абсолютно.

б) Покажем теперь, что $S = A\,B$, где

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j} b_{n_j}, \qquad A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \qquad B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

В силу теоремы 1 сумма абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{m_j} b_{n_j}$ не изменится при перестановке членов ряда. Поэтому вместо последовательности $\{(m_j, n_j)\}$ можно взять специально выбранную последовательность $\{(m_j^*, n_j^*)\}$, задающую взаимно однозначное отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$.

Занумеруем все пары натуральных чисел $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ по "методу квадратов т. е. в соответствии со следующей таблицей:

$n_j^* \backslash m_j^*$	1	2	3	4	$\dots$
1	$j{=}1$ a_1b_1	$j{=}2$ a_2b_1	$j{=}5$ a_3b_1	$j{=}10$ a_4b_1	$\dots$
2	$j{=}4$ a_1b_2	$j{=}3$ a_2b_2	$j{=}6$ a_3b_2	$j{=}11$ a_4b_2	$\dots$
3	$j{=}9$ a_1b_3	$j{=}8$ a_2b_3	$j{=}7$ a_3b_3	$j{=}12$ a_4b_3	$\dots$
4	$j{=}16$ a_1b_4	$j{=}15$ a_2b_4	$j{=}14$ a_3b_4	$j{=}13$ a_4b_4	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Данная таблица задает алгоритм, по которому каждому номеру j ставится в соответствие пара натуральных чисел $(m, n) = (m_j^*, n_j^*)$, причем последовательность $\{(m_j^*, n_j^*)\}_{j=1}^{\infty}$ задает взаимно однозначное отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$. В результате получаем ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j^*} b_{n_j^*} = a_1b_1 + (a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2) +$$

$$+ (a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_1b_3) + \dots$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{m_j^*} b_{n_j^*}$ получен перестановкой членов ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{m_j} b_{n_j}$, то по теореме 1: $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{m_j^*} b_{n_j^*} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{m_j} b_{n_j} = S$.

Пусть $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{m_j^*} b_{n_j^*}$, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Тогда частичная сумма элементов ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{m_j^*} b_{n_j^*}$, соответствующая квадрату со стороной N, лежащему в левом верхнем углу таблицы, равна

$$S_{N^2} = \sum_{\substack{m=1,\dots,N \\ n=1,\dots,N}} a_m b_n = \left(\sum_{m=1}^{N} a_m\right) \left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right) = A_N\, B_N.$$

Так как $A_N \to A$, $B_N \to B$ при $N \to \infty$, то $S_{N^2} \to A\,B$ при $N \to \infty$. С другой стороны, поскольку $\{S_{N^2}\}$ – подпоследовательность последовательности $\{S_n\}$, имеющей предел S, то $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_{N^2} = A\,B$. $\square$

Глава 10

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Определение. Пусть на множестве X заданы функции $f_n(x)$, $(n = 1, 2, \dots)$. Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *поточечно сходится* к функции $f(x)$ на множестве X и писать $f_n(x) \underset{X}{\longrightarrow} f(x)$ при $n \to \infty$, если $\forall x \in X \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, т. е.

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \qquad (1)$$

Определение. Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится* к функции $f(x)$ на множестве X и писать $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ \forall x \in X \hookrightarrow\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \qquad (2)$$

Отличие условий (1) и (2) состоит в том, что в условии (1) число N свое для каждого x, а в условии (2) число N не зависит от x. Поэтому из равномерной сходимости следует поточечная сходимость.

Заметим, что если $f_n(x) \underset{X}{\longrightarrow} f(x)$ при $n \to \infty$ и $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ не может сходиться равномерно и ни к какой другой функции $g(x)$, так как из условия $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} g(x)$ при $n \to \infty$ следовало бы, что $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. В этом случае говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ *неравномерно* на множестве X.

Теорема 1. (Критерий равномерной сходимости.)

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \Longleftrightarrow$$

$$\iff \quad \sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Доказательство. Поскольку условие $\forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\le \varepsilon$ эквивалентно условию $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$, то условие (2) эквивалентно условию

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\forall n\ge N\hookrightarrow \sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon,$$

т. е. $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\to 0$ при $n\to\infty$. $\square$

Следствие 1. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда существует числовая последовательность $\{a_n\}$:

$$\forall x\in X\ \forall n\in\mathbb{N}\hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\le a_n \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty}a_n=0. \tag{3}$$

Доказательство. 1) Пусть выполнено условие (3). Тогда $\forall n\in\mathbb{N}\hookrightarrow 0\le\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\le a_n$. Отсюда и из условия $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ по теореме о трех последовательностях получаем $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\to 0$ при $n\to\infty$, что в силу критерия равномерной сходимости означает $f_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$.

2) Пусть $f_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$. Определив $a_n= \sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$, из критерия равномерной сходимости получаем условие (3). $\square$

Следствие 2. $f_n(x)\underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\exists\{x_n\}\subset X: \quad f_n(x_n)-f(x_n)\not\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{4}$$

Доказательство. 1) Пусть выполняется условие (4). Тогда $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\ge|f_n(x_n)-f(x_n)|\not\to 0$ при $n\to\infty$, следовательно, $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\not\to 0$ и по критерию равномерной сходимости $f_n(x)\underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$.

2) Пусть $f_n(x)\underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ обозначим $M_n=\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$. По определению супремума $\forall n\in \mathbb{N}\ \exists x_n\in X:$

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|>\begin{cases} M_n-\frac{1}{n}, & M_n\in\mathbb{R},\\ 1, & M_n=+\infty.\end{cases} \tag{5}$$

Предположим, что $f_n(x_n)-f(x_n)\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда найдется номер N такой, что $\forall n\ge N\hookrightarrow |f_n(x_n)-f(x_n)|<1$. Следовательно, согласно неравенству (5) имеем $\forall n\ge N\hookrightarrow M_n\in\mathbb{R}$. Отсюда и из неравенства (5) получаем, что $M_n\overset{n\ge N}{\le}|f_n(x_n)-f(x_n)|+\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Последнее соотношение в силу критерия равномерной сходимости противоречит условию $f_n(x)\underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$. Поэтому предположение $f_n(x_n)-f(x_n)\to 0$ при $n\to\infty$ неверно, а значит, выполнено условие (4). $\square$

Следствие 1 удобно для доказательства равномерной сходимости, а следствие 2 – для доказательства отсутствия равномерной сходимости конкретных функциональных последовательностей.

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно ограниченной* на множестве X, если

$$\exists C\in\mathbb{R}:\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in X\hookrightarrow |f_n(x)|\le C.$$

Лемма 1. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена на множестве X и $g_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$, то $f_n(x)\,g_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена, то

$$\exists C\in\mathbb{R}:\forall n\in\mathbb{N}\hookrightarrow \sup_{x\in X}|f_n(x)|\le C.$$

Поскольку $g_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$, то $\sup\limits_{x\in X}|g_n(x)|\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно,

$$\sup_{x\in X} |f_n(x)\, g_n(x)| \le C \cdot \sup_{x\in X} |g_n(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

т. е. $f_n(x)\, g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$. □

Замечание. В условии леммы 1 равномерную ограниченность последовательности $\{f_n(x)\}$ нельзя заменить на ограниченность этой последовательности при любом фиксированном x.

Пусть, например, $X=(0,1)$, $f_n(x)=f(x)=\frac{1}{x}$, $g_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n}$. Поскольку $|g_n(x)| \le \frac{1}{n} \to 0$ при $n\to\infty$, то в силу следствия 1 имеем $g_n(x) \underset{(0,1)}{\rightrightarrows} 0$. Однако $f(x)\, g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx} \underset{(0,1)}{\not\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$, что следует из следствия 2, поскольку для последовательности точек $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\} \subset (0,1)$ имеет место соотношение $f(x_n)\, g_n(x_n) = \sin 1 \not\to 0$ при $n\to\infty$.

Заметим, что $\forall x\in(0,1) \hookrightarrow \left|\frac{\sin(nx)}{nx}\right| \le \frac{1}{nx} \to 0$ при $n\to\infty$, поэтому последовательность $\{f(x)\, g_n(x)\} = \{\frac{\sin(nx)}{nx}\}$ сходится к 0 на интервале $(0,1)$, но неравномерно.

Замечание. Из условий $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g_n(x)}{f_n(x)} = 1 \quad \forall x\in X$ не следует, что $g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$.

Пусть, например, $X=(0,1)$, $f_n(x)=\frac{1}{n}$, $g_n(x)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2x}$. Тогда $\forall x\in(0,1) \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{g_n(x)}{f_n(x)} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{nx}\right)=1$, $f_n(x) \underset{(0,1)}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$, но $g_n(x) \underset{(0,1)}{\not\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$, так как $g_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}+1 \not\to 0$ при $n\to\infty$.

Теорема 2. (Критерий Коши.) Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши равномерной сходимости последовательности:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\ge N\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f_{n+p}(x)| \le \varepsilon. \quad (6)$$

Доказательство. 1) Пусть $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$, тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\ge N\ \forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку $\forall p\in\mathbb{N} \hookrightarrow n+p>n\ge N$, то $\forall x\in X \hookrightarrow |f_{n+p}(x)-f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $\forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f_{n+p}(x)| \le |f_n(x)-f(x)| + |f_{n+p}(x)-f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$, т. е. выполняется условие (6).

2) Пусть выполняется условие (6). Следовательно,

$$\forall x\in X \quad \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\ge N\ \forall p\in\mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x)-f_{n+p}(x)| \le \varepsilon,$$

т. е. для любого фиксированного $x\in X$ выполняется условие Коши сходимости числовой последовательности $\{f_n(x)\}$. В силу критерия Коши для числовых последовательностей $\forall x\in X$ последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится. Обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Перепишем условие (6) в виде

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\ge N\ \forall x\in X \quad \forall p\in\mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x)-f_{n+p}(x)| \le \varepsilon$$

и рассмотрим отдельно условие $\forall p\in\mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x)-f_{n+p}(x)| \le \varepsilon$. Поскольку $\lim\limits_{p\to\infty} |f_n(x)-f_{n+p}(x)| = |f_n(x)-f(x)|$, то по теореме о предельном переходе в неравенствах $|f_n(x)-f(x)| \le \varepsilon$. Итак, из условия (6) следует, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\ge N\ \forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)| \le \varepsilon$, т. е. $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$. □

§ 2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение. Пусть на множестве X задана функциональная последовательность $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X к сумме $S(x)$ этого ряда. Аналогично определяется *поточечная сходимость* ряда.

Поскольку из равномерной сходимости последовательности следует поточечная сходимость последовательности, то из равномерной сходимости ряда следует поточечная сходимость этого ряда.

Определение. *Остатком* поточечно сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Непосредственно из определения равномерной сходимости ряда и критерия равномерной сходимости функциональной последовательности следует

Теорема 1. (Критерий равномерной сходимости ряда.) Поточечно сходящийся функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда

$$r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. $$\sup_{x \in X} |r_n(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 2. (Критерий Коши.) Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши равномерной сходимости ряда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \hookrightarrow \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Доказательство состоит в применении критерия Коши равномерной сходимости последовательности к последовательности частичных сумм ряда. □

Следствие. (Необходимое условие равномерной сходимости ряда.) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X, то $u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. В силу критерия Коши из равномерной сходимости ряда следует условие Коши равномерной сходимости ряда (1). Полагая в условии (1) $p = 1$, получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \forall x \in X \hookrightarrow \ |u_{n+1}(x)| \leq \varepsilon,$$

т. е. $u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$. □

Замечание. Из необходимого условия равномерной сходимости ряда и следствия 2 § 1 вытекает, что если $\exists \{x_k\} \subset X : u_k(x_k) \not\to 0$ при $k \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ не является равномерно сходящимся на множестве X.

Замечание. Существование последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ такой, что числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_k)$ расходится, не доказывает отсутствие равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X.

Действительно, пусть, например,

$$u_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & x \in \left[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}\right), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Остаток ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеет вид

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & x \in \left[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}\right), k \geq n+1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку $|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, то $r_n(x) \underset{(0,1)}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на интервале $(0,1)$. Тем не менее числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k\left(\frac{1}{2^k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится.

Теорема 3. (Обобщенный признак сравнения.) Пусть $\forall k \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \hookrightarrow \ |u_k(x)| \leq v_k(x)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ сходится равномерно на множестве X. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Доказательство. В силу критерия Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Используя неравенство $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} v_k(x)\right|$, имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Еще раз применяя критерий Коши, получаем доказываемое утверждение. □

Следствие. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$ сходится равномерно на множестве X, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Теорема 4. (Признак Вейерштрасса.) Если $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \quad |u_k(x)| \leq a_k$ и числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Доказательство состоит в применении обобщенного признака сравнения для $v_k(x) = a_k$. □

Теорема 5. (Признак Дирихле.) Пусть на множестве X заданы две функциональные последовательности $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{b_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющие условиям:

1) последовательность частичных сумм $A_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно ограничена, т. е. существует число C, не зависящее от x и от n:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \hookrightarrow \ |A_n(x)| \leq C;$$

2) $b_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $k \to \infty$;

3) $\forall x \in X \quad \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ b_{k+1}(x) \leq b_k(x)$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, b_k(x)$ равномерно сходится на множестве X.

Доказательство. Выполним преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(x) = \sum_{k=1}^{n} (A_k(x) - A_{k-1}(x)) b_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\, b_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x)\, b_{k+1}(x) \overset{A_0(x)=0}{=}$$

$$= A_n(x)\, b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)). \qquad (2)$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) = b_1(x) - b_{n+1}(x) \underset{X}{\rightrightarrows} b_1(x)$ при $n \to \infty$, т. е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k(x) - b_{k+1}(x))$ равномерно сходится, следовательно, равномерно сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C\,(b_k(x) - b_{k+1}(x))$. Поскольку $|A_k(x)| \leq C$, $b_k(x) - b_{k+1}(x) \geq 0$, то $|A_k(x)\,(b_k(x) - b_{k+1}(x))| \leq \leq C\,(b_k(x) - b_{k+1}(x))$, и в силу обобщенного признака сравнения получаем равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(x)\,(b_k(x) - b_{k+1}(x))$, т. е. существует функция $S(x)$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)\,(b_k(x) - b_{k+1}(x)) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \qquad (3)$$

В силу леммы 1 § 1 из равномерной сходимости последовательности $\{b_n(x)\}$ к 0 и равномерной ограниченности последовательности $\{A_n(x)\}$ следует, что $A_n(x)\, b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из соотношений (2), (3) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, b_k(x)$ равномерно сходится на множестве X. □

Задача 1. Останется ли справедливым признак Дирихле, если в нем условие 3) заменить

а) условием $\forall x \in X\ \exists N:\ \forall k \geq N \hookrightarrow\ b_{k+1}(x) \leq b_k(x)$;

б) условием $\exists N:\ \forall x \in X\ \forall k \geq N \hookrightarrow\ b_{k+1}(x) \leq b_k(x)$?

Теорема 6. (Признак Лейбница.) Пусть $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \hookrightarrow$ $\hookrightarrow\ b_{k+1}(x) \leq b_k(x)$ и $b_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $k \to \infty$. Тогда ряд Лейбница $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k(x)$ равномерно сходится.

Доказательство. Обозначим $a_k(x) = (-1)^k$. Тогда $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)\right| =$ $= \left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right| \leq 1$. В силу признака Дирихле ряд Лейбница сходится.

□

Теорема 7. (Признак Абеля.) Пусть на множестве X заданы две функциональные последовательности $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{b_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющие условиям:

1) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно сходится на множестве X;

2) последовательность $\{b_k(x)\}$ равномерно ограничена, т. е.

$$\exists C \in \mathbb{R}:\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \hookrightarrow\ |b_k(x)| \leq C; \tag{4}$$

3) $\forall x \in X\quad \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ b_{k+1}(x) \leq b_k(x)$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, b_k(x)$ равномерно сходится на множестве X.

Доказательство.

Для любых $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ определим $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)$. Так как $R_{n-1}(x) - R_n(x) = a_n(x)$, то

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p}(R_{k-1}(x) - R_k(x))b_k(x) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} R_{k-1}(x)b_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} R_k(x)b_k(x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} R_k(x)b_{k+1}(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} R_k(x)b_k(x) =$$

$$= R_n(x)b_{n+1}(x) - R_{n+p}(x)b_{n+p+1}(x) +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{n+p} R_k(x)(b_{k+1}(x) - b_k(x)). \tag{6}$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $M_n = \sup\limits_{k \geq n}\ \sup\limits_{x \in X} |R_k(x)|$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно сходится на можестве X, то $\sup\limits_{x \in X} |R_k(x)| \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $M_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Поскольку для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} R_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))\right| \leq M_n \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| =$$

$$= M_n \sum_{k=n+1}^{n+p}(b_k(x) - b_{k+1}(x)) = M_n(b_{n+1}(x) - b_{n+p+1}(x)) \overset{(4)}{\leq} 2CM_n,$$

то из равенства (6) для любых $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)\right| \leq 4CM_n.$$

Так как $M_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geq N \hookrightarrow\ 4CM_n \leq \varepsilon$. Поэтому

$$\forall \varepsilon\ \exists N:\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X \hookrightarrow\ \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Применяя критерий Коши (теорему 2), получаем равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, b_k(x)$ на множестве X. □

Непосредственно из признака Абеля вытекает следующее утверждение, позволяющее в некоторых случаях упрощать функциональный ряд при исследовании его равномерной сходимости.

Следствие. Пусть на множестве X заданы две функциональные последовательности $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{b_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, причем

$$\exists m > 0\ \exists M > 0:\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \hookrightarrow\ m \le b_k(x) \le M$$

и $\forall x \in X\ \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ b_{k+1}(x) \le b_k(x)$. Тогда на множестве X равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, b_k(x)$ эквивалентна равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$.

Исследование ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на равномерную сходимость на множестве X можно проводить по следующему плану:

1) Если существует такое $x_0 \in X$, что числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ расходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ не является поточечно (а значит, и равномерно) сходящимся на X.

2) Если существует последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ такая, что $u_k(x_k) \not\to 0$ при $k \to \infty$, то не выполняется необходимое условие равномерной сходимости ряда, и, следовательно, ряд не сходится равномерно.

3) Если выполняются условия признака Вейерштрасса, то ряд сходится равномерно.

4) Если выполняются условия признака Лейбница, то ряд сходится равномерно.

5) Если с помощью следствия из признака Абеля возможно свести исследование исходного ряда к исследованию более простого ряда, сделать это.

6) Если выполняются условия признака Дирихле, то ряд сходится равномерно.

7) Если выполняется отрицание к условию Коши равномерной сходимости ряда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \ge N\ \exists p \in \mathbb{N}\ \exists x \in X :\quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| > \varepsilon,$$

то ряд не сходится равномерно. (Важно, что в отрицании условия Коши равномерной сходимости ряда точка x может зависеть от N, но не должна зависеть от индекса суммирования k.)

При решении конкретной задачи нужно найти тот из пунктов 1)–7), условия которого выполняются, затем это нужно обосновать и тем самым завершить исследование равномерной сходимости ряда.

Пример. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^{\alpha}}$ на отрезках $[0,\pi]$ и $[\delta,\pi]$, где $\delta \in (0,\pi)$.

Решение. 1) При $\alpha \le 0$ члены ряда $\frac{\sin(kx)}{k^{\alpha}}$ не стремятся к нулю при $k \to \infty$ (т.к., например, при $x = \frac{\pi}{2}$, $k = 1 + 4n$, $n \in \mathbb{N}$ имеем $\frac{\sin(kx)}{k^{\alpha}} = \frac{1}{k^{\alpha}} \not\to 0$ при $k \to \infty$). Следовательно, при $\alpha \le 0$ данный ряд не является поточечно сходящимся на отрезках $[0,\pi]$ и $[\delta,\pi]$.

2) При $\alpha > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^{\alpha}}$ сходится равномерно на отрезке $[0,\pi]$ (а значит, и на отрезке $[\delta,\pi]$). Это следует из признака Вейерштрасса, поскольку $\left|\frac{\sin(kx)}{k^{\alpha}}\right| \le \frac{1}{k^{\alpha}}$, и числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$.

3) Покажем, что при $\alpha > 0$ данный ряд сходится поточечно на отрезке $[0,\pi]$.

Пусть $x \in (0,\pi]$. Покажем, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin(kx)$ ограничены. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{1}{\sin(x/2)} \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\ \sin(x/2) =$$

$$= -\frac{1}{2\sin(x/2)} \sum_{k=1}^{n} \Big(\cos\big((k+\tfrac{1}{2})x\big) - \cos\big((k-\tfrac{1}{2})x\big)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2\sin(x/2)} \left(\cos\big((n+\tfrac{1}{2})x\big) - \cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\right),$$

следовательно,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \le \frac{1}{\sin(x/2)} \qquad \forall x \in (0,\pi] \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Так как при $\alpha > 0$ последовательность $\left\{\frac{1}{k^{\alpha}}\right\}$ монотонно стремится к нулю, то в силу признака Дирихле для числовых рядов $\forall x \in$ $\in (0,\pi]$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^{\alpha}}$ сходится. Поскольку в точке $x = 0$: $\frac{\sin(kx)}{k^{\alpha}} =$ $= 0$, данный ряд сходится и в точке $x = 0$. Таким образом, при $\alpha > 0$

ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ сходится поточечно на отрезке $[0,\pi]$ (следовательно, и на отрезке $[\delta,\pi]$).

4) Покажем, что при $\alpha>0$ данный ряд сходится равномерно на $[\delta,\pi]$. Из (5) следует, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| \le \frac{1}{\sin(\delta/2)} \qquad \forall x\in[\delta,\pi] \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Следовательно, частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin(kx)$ равномерно ограничены на $[\delta,\pi]$. Так как при $\alpha>0$ последовательность $\left\{\frac{1}{k^\alpha}\right\}$ монотонно стремится к нулю, то в силу признака Дирихле для функциональных рядов данный ряд сходится равномерно на $[\delta,\pi]$ при $\alpha>$ >0.

5) Покажем, что при $\alpha\le 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ не является равномерно сходящимся на $[0,\pi]$, так как выполняется отрицание условия Коши равномерной сходимости этого ряда:

$$\exists\varepsilon>0: \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n\ge N\ \exists p\in\mathbb{N}\ \exists x\in[0,\pi]: \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin(kx)}{k^\alpha}\right| \ge \varepsilon.$$

Положим $p=n=N$, $x=\frac{\pi}{4N}$, тогда для любого $k\in\{n+1,n+2,\ldots,n+p\}=\{N+1,\ldots,2N\}$ выполняется $kx\in$ $\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ и, следовательно, $\sin(kx)\ge\sin(\pi/4)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin(kx)}{k^\alpha} = \sum_{k=N+1}^{2N}\frac{\sin(kx)}{k^\alpha} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{k^\alpha} \ge$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{k} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2N}\,N = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Итак,

$$\exists\varepsilon=\frac{1}{2\sqrt{2}}: \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n=N\ \exists p=N\ \exists x=\frac{\pi}{4N}: \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin(kx)}{k^\alpha}\right| \ge \varepsilon.$$

Следовательно, в силу критерия Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ не является равномерно сходящимся на $[0,\pi]$ при $\alpha\le 1$. Отсюда и из пункта (3) следует, что при $\alpha\in(0,1]$ данный ряд сходится неравномерно на $[0,\pi]$.

Ответ. Данный ряд на отрезке $[0,\pi]$: расходится при $\alpha\le 0$, сходится неравномерно при $\alpha\in(0,1]$, сходится равномерно при $\alpha>$ >1; на отрезке $[\delta,\pi]$: расходится при $\alpha\le 0$, сходится равномерно при $\alpha>0$. □

§ 3. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 1. (О непрерывности предельной функции.) Если последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных на множестве X функций сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве X, то функция $f(x)$ непрерывна на множестве X.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $x_0\in X$ и $\varepsilon>0$. Требуется доказать существование числа $\delta>0$ такого, что

$$\forall x\in X\cap U_\delta(x_0) \hookrightarrow \ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{1}$$

По определению равномерной сходимости существует число $N\in\mathbb{N}$, удовлетворяющее условию $\forall n\ge N\ \forall x\in X \hookrightarrow\ |f_n(x)-f(x)|\le\frac{\varepsilon}{4}$. В частности:

$$\forall x\in X \hookrightarrow\ |f_N(x)-f(x)|\le\frac{\varepsilon}{4}. \tag{2}$$

Поскольку функция $f_N(x)$ непрерывна на множестве X, то существует число $\delta>0$ такое, что

$$\forall x\in X\cap U_\delta(x_0) \hookrightarrow\ |f_N(x)-f_N(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Из соотношений (2) и (3) получаем

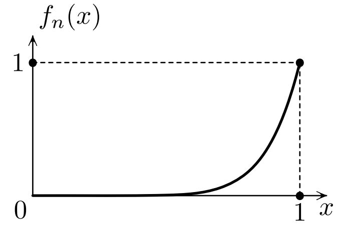
$$\forall x\in X\cap U_\delta(x_0) \hookrightarrow\ |f(x)-f(x_0)|\le|f(x)-f_N(x)|+$$

$$+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

Следовательно, справедливо соотношение (1). □

Замечание. Из поточечной сходимости последовательности непрерывных функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к функции $f(x)$ не следует непрерывность функции $f(x)$.

Например, последовательность непрерывных функций $f_n(x) = x^n$ сходится на отрезке $[0,1]$ к разрывной функции $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0,1), \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$



Теорема 2. (О непрерывности суммы ряда.) Если функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X и все функции $u_k(x)$ непрерывны на множестве X, то сумма ряда является непрерывной функцией.

Доказательство состоит в применении теоремы 1 к последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

Теорема 3. (Об интегрировании предельной функции.) Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $f(x)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \right) = \int\limits_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а значит, интегрируема по Риману на этом отрезке. По теореме об интегрировании неравенств

$$\left| \int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \le$$

$$\le \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

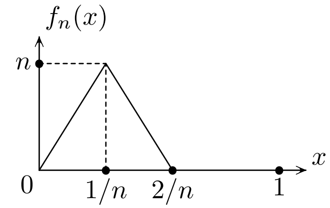
Так как $f_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$, то $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Замечание. Из поточечной сходимости $f_n(x) \underset{[a,b]}{\longrightarrow} f(x)$ при $n \to \infty$ не следует, что $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Пусть, например,

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 2n - n^2 x, & x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \\ 0, & x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Тогда $f_n(x) \underset{[0,1]}{\longrightarrow} 0$ при $n \to \infty$, но $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \not\to 0$ при $n \to \infty$.



Теорема 4. (О почленном интегрировании ряда.) Если функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$ и все функции $u_k(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_a^b u_k(x)\,dx \right)$ сходится к интегралу от суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, т. е. справедлива формула почленного интегрирования ряда:

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_a^b u_k(x)\,dx \right).$$

Доказательство. Примененяя теорему 3 к последовательности частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_a^b u_k(x)\,dx \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_a^b u_k(x)\,dx \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_a^b S_n(x)\,dx \right) \overset{\text{Т. 3}}{=}$$

$$\stackrel{\text{Т. 3}}{=} \int\limits_a^b \left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right) dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) dx. \qquad \square$$

Теорема 5. (О дифференцировании предельной функции.) Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in \in [a,b]$, а последовательность производных $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a,b]$. Тогда последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к некоторой непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, причем

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \forall x \in [a,b]. \tag{4}$$

Доказательство. По условию существует функция $\varphi(x)$: $f_n'(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $n \to \infty$. Поскольку функции $f_n'(x)$ непрерывны, то в силу теоремы 1 функция $\varphi(x)$ непрерывна. Из условия теоремы следует также, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = A \in \mathbb{R}$. Определим функцию $f(x) = A + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$. Заметим, что $f_n(x) = f_n(x_0) + + \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt$, следовательно, $|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - A| + \int\limits_{x_0}^{x} |f_n'(t) - - \varphi(t)|\,dt$. Поэтому

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - A| + (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - \varphi(t)|.$$

Поскольку $f_n'(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $n \to \infty$, то $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - \varphi(t)| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le$$

$$\le |f_n(x_0) - A| + (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - \varphi(t)| \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0,$$

т. е. $f_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$. Из определения функции $f(x)$ следует, что $f'(x) = \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. $\square$

Замечание. Из того, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций равномерно сходится к функции $f(x)$ не следует соотношение (4).

Например, последовательность функций $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{n}$ сходится к функции $f(x) = 0$ равномерно на отрезке $[0,1]$, однако в точке $x = = 0$ имеем $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = f'(x) = 0 \ne 1 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Теорема 6. (О почленном дифференцировании ряда.) Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in \in [a,b]$, все функции $u_k(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$ и справедлива формула почленного дифференцирования ряда

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Доказательство. Примененяя теорему 5 к последовательности частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, получаем, что эта последовательность равномерно сходится на $[a,b]$ и для любого $x \in [a,b]$ справедливы равенства

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} S_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x). \qquad \square$$

Глава 11

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 1. Обобщенный признак Коши сходимости числового ряда

Напомним, что верхним пределом числовой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется точная верхняя грань множества всех (конечных и бесконечных) частичных пределов последовательности $\{x_k\}$:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} x_k =$$

$$= \sup\left\{ A \in \overline{\mathbb{R}} : \exists \text{ подпослед. } \{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \ : \ A = \lim_{j\to\infty} x_{k_j} \right\}.$$

Лемма 1. Если $A > \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_k$, то

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \hookrightarrow \ x_k \leq A.$$

Доказательство. Предположим противное: $\forall k_0 \in \mathbb{N} \ \exists k \geq \geq k_0 : \quad x_k > A$. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$\forall j \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ x_{k_j} > A. \tag{1}$$

В силу теоремы Больцано–Вейерштрасса любая числовая последовательность имеет конечный или бесконечный частичный предел. Пусть $B \in \overline{\mathbb{R}}$ – некоторый частичный предел последовательности $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$. Из условия (1) в силу теоремы о предельном переходе в неравенствах следует, что $B \geq A$. Поскольку B является частичным пределом последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, то по определению супремума $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_k \geq B \geq A$, что противоречит условию леммы. □

Теорема 1. (Обобщенный признак Коши сходимости числового ряда.) Пусть все члены числового ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ неотрицательны и пусть $q = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k}$. Тогда

а) если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится;

б) если $q > 1$, то $a_k \not\to 0$ при $k \to \infty$, и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ расходится;

в) если $q = 1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ может сходиться, а может и расходиться.

Доказательство. а) Пусть $q < 1$. Определим некоторое q' из условия $q < q' < 1$. Поскольку $q' > q = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k}$, то в силу леммы 1 имеем $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \hookrightarrow \ \sqrt[k]{a_k} \leq q'$. Отсюда в силу признака Коши в допредельной форме (теорема 5 § 2 главы 9) следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

б) Пусть $q > 1$. Поскольку $q = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k}$ является супремумом множества частичных пределов последовательности $\left\{\sqrt[k]{a_k}\right\}$, то в силу определения супремума из неравенства $q > 1$ следует, что существует $q' > 1$ – частичный предел последовательности $\left\{\sqrt[k]{a_k}\right\}$. Это означает существование подпоследовательности $\left\{\sqrt[k_j]{a_{k_j}}\right\}$ такой, что $\lim\limits_{j\to\infty} \sqrt[k_j]{a_{k_j}} = q' > 1$. Отсюда по определению предела получаем $\exists j_0 \in \in \mathbb{N} : \forall j > j_0 \hookrightarrow \ \sqrt[k_j]{a_{k_j}} \geq 1$ и, следовательно, $\forall j > j_0 \hookrightarrow \ a_{k_j} \geq 1$. Поэтому $a_{k_j} \not\to 0$ при $j \to \infty$, а значит, $a_k \not\to 0$ при $k \to \infty$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ расходится.

в) Для ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ имеем $q = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^\alpha = 1$, а как показано ранее, при $\alpha > 1$ этот ряд сходится, а при $\alpha \leq 1$ – расходится. □

§ 2. Комплексные ряды

Напомним, что модулем комплексного числа $z = x + iy$ (где $x = = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$) называется вещественное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Определение. Комплексное число S называется *пределом* последовательности комплексных чисел $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\left(S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n\right)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} |S - S_n| = 0$.

Заметим, что

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \quad \Leftrightarrow \quad \left(\operatorname{Re} S = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} S_n \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} S = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} S_n\right). \quad (1)$$

Определение. Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности частичных сумм этого ряда. Комплексный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится вещественный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|$.

Из условия (1) следует, что сходимость комплексного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ эквивалентна сходимости двух вещественных рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} c_k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} c_k$.

Лемма 1. Если комплексный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Обозначим $a_k = \operatorname{Re} c_k$, $b_k = \operatorname{Im} c_k$. Поскольку $|a_k| \le \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |c_k|$, то в силу признака сравнения из сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|$ следует абсолютная сходимость вещественного числового ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, а значит, и его сходимость. Аналогично получаем сходимость вещественного числового ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$. Следовательно, комплексный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k + ib_k)$ сходится. $\square$

Определение. Пусть на некотором множестве комплексных чисел $Z \subset \mathbb{C}$ задана последовательность комплекснозначных функций $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$. Будем говорить, что последовательность комплекснозначных функций $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится* к функции $S(z)$ *равномерно* на множестве Z, если последовательность вещественнозначных функций $\{|S_n(z) - S(z)|\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к 0 равномерно на множестве Z.

Определение. Будем говорить, что комплексный функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ *сходится равномерно* на множестве Z, если последовательность частичных сумм $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(z)$ этого ряда сходится равномерно к сумме $S(x)$ этого ряда, т. е. $|S_n(x) - S(x)| \underset{Z}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости комплексного ряда.) Пусть на множестве $Z \subset \mathbb{C}$ задан комплексный функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)$. Пусть $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall z \in Z \hookrightarrow\ |u_k(z)| \le$ $\le a_k$ и пусть вещественный числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ сходится равномерно на множестве Z.

Доказательство. В силу признака сравнения вещественный числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |u_k(z)|$ сходится для любого $z \in Z$. Отсюда в силу леммы 1 получаем поточечную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ на множестве Z, т. е. $\forall z \in Z\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = S(z) \in \mathbb{C}$, где $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(z)$. Заметим, что

$$|S_n(z) - S(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0,$$

следовательно, $\sup\limits_{z\in Z} |S_n(z) - S(z)| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $|S_n(z) -$ $- S(z)| \underset{Z}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$. $\square$

§ 3. Степенные ряды

Определение. Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ и комплексное число w_0. Комплексный функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(w - w_0)^k$ с комплексной переменной w называется *степенным рядом*.

Введение комплексной переменной $z = w - w_0$ сводит ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(w-w_0)^k$ к ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Имея в виду эту замену переменной, в дальнейшем будем рассматривать степенные ряды вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$.

Определение. *Радиусом сходимости* степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ называется $R_{\text{сх}} \in [0, +\infty) \bigcup \{+\infty\}$, определяемое по *формуле Коши–Адамара*:

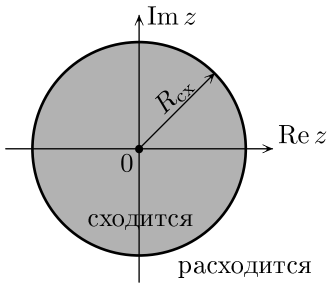
$$\frac{1}{R_{\text{сх}}} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} \tag{1}$$

(при этом будем полагать, что $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Круг на комплексной плоскости с центром в нуле и радусом $R_{\text{сх}}$ называется *кругом сходимости* степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Если $R_{\text{сх}} = +\infty$, то кругом сходимости считается вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$.

Теорема 1. (О круге сходимости степенного ряда.)
Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

1) абсолютно сходится внутри круга сходимости (т. е. на множестве $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R_{\text{сх}}\}$),
2) расходится вне круга сходимости (т. е. на множестве $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_{\text{сх}}\}$),
3) на границе круга сходимости (т. е. на множестве $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R_{\text{сх}}\}$) может сходиться, а может и расходиться.



(Здесь $R_{\text{сх}}$ – радиус сходимости степенного ряда.)

Доказательство. Зафиксируем произвольное комплексное число $z \neq 0$ и исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ с помощью обобщенного признака Коши. Определим

$$q = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{|z|}{R_{\text{сх}}}$$

(где при $R_{\text{сх}} = 0$, $|z| > 0$ следует положить $q = +\infty$).

1) При $z = 0$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ состоит из нулей, а значит, сходится. Если $0 < |z| < R_{\text{сх}}$, то $q < 1$ и в силу обобщенного признака Коши ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ сходится, т. е. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится абсолютно.

2) Если $|z| > R_{\text{сх}}$, то $q > 1$ и в силу обобщенного признака Коши члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ не стремятся к нулю, следовательно, не стремятся к нулю и члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, а значит, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ расходится. (Заметим, что из расходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ не следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, и поэтому важно, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ не только расходится, но и его члены не стремятся к нулю.)

3) Рассмотрим, например, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1}$. По формуле Коши–Адамара для радиуса сходимости $R_{\text{сх}}$ имеем $\frac{1}{R_{\text{сх}}} = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} e^{-\ln(k+1)/k} = e^0 = 1$.

При $z = 1$ исходный ряд имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ и, как показано в § 2 главы 9, расходится. При $z = -1$ исходный ряд имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$. Этот ряд сходится в силу признака Лейбница (теорема 4 § 3 главы 9). $\square$

Теорема 2. (Первая теорема Абеля.) Пусть степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в точке $z = z_0$. Тогда в любой точке $z = z_1$ такой, что $|z_1| < |z_0|$ этот ряд сходится абсолютно.

Доказательство. Так как степенной ряд сходится в точке $z = z_0$, то в силу пункта 2) теоремы о круге сходимости радиус сходимости этого ряда удовлетворяет неравенству $R_{\text{сх}} \geq |z_0|$. Следовательно, $|z_1| < |z_0| \leq R_{\text{сх}}$, и согласно пункту 1) теоремы о круге сходимости в точке $z = z_1$ степенной ряд сходится абсолютно. $\square$

Следующая лемма дает альтернативный по отношению к формуле Коши–Адамара способ определения радиуса сходимости степенного ряда. Этот способ удобен в тех случаях, когда коэффициенты степенного ряда выражаются через факториал.

Лемма 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$ и для последовательности $\{c_k\} \subset \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}$. Тогда для радиуса сходимости $R_{\text{сх}}$ степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^{mk+n}$ справедлива формула

$$\frac{1}{R_{\text{сх}}} = \sqrt[m]{\lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}}.$$

Доказательство. Определим $R_1 \in [0, +\infty) \bigcup \{+\infty\}$ из условия $\frac{1}{R_1} = \sqrt[m]{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}}$ и исследуем сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^{mk+n}|$ с помощью признака Даламбера в предельной форме (следствие из теоремы 4 § 2 главы 9). Определим

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}\, z^{m(k+1)+n}|}{|c_k\, z^{mk+n}|} = \frac{|z|^m}{R_1^m}.$$

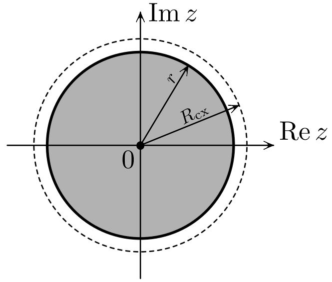
Согласно признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^{mk+n}|$ сходится при $q < < 1$, т. е. при $|z| < R_1$, и расходится при $q > 1$, т. е. при $|z| > R_1$.

Пусть $R_{\text{сх}}$ – радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^{mk+n}$. В силу теоремы 1 ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^{mk+n}|$ сходится при $|z| < R_{\text{сх}}$ и расходится при $|z| > R_{\text{сх}}$.

Следовательно, $R_1 = R_{\text{сх}}$ и $\frac{1}{R_{\text{сх}}} = \frac{1}{R_1} = \sqrt[m]{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}}$. □

Замечание. Из леммы 1 следует, что если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}$, то радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^{2k}$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^{2k+1}$ могут быть определены формулой $\frac{1}{R_{\text{сх}}} = \sqrt{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}}$.

Теорема 3. (О равномерной сходимости степенного ряда.)



Пусть $R_{\text{сх}} > 0$ – радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Тогда для любого числа $r \in \in (0, R_{\text{сх}})$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится равномерно в круге $Z = \{z \in \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.

Доказательство. Заметим, что $\forall z \in Z\ \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow\ |c_k z^k| \leq \leq |c_k|\, r^k$. Поскольку $|r| = r < R_{\text{сх}}$, то в силу теоремы 1 числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k r^k|$ сходится. Отсюда и из признака Вейерштрасса равномерной сходимости комплексного ряда (теорема 1 § 2) следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ на множестве Z. □

Замечание. В самом круге сходимости, т. е. на множестве $Z = = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < R_{\text{сх}}\}$ степенной ряд может сходиться неравномерно. Например, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ имеет радус сходимости $R_{\text{сх}} = 1$, но на множестве $Z = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < 1\}$ этот ряд сходится неравномерно, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Действительно, $\sup\limits_{z\in Z} |z^k| = 1 \not\to 0$ при $k \to \infty$, следовательно, $z^k \underset{Z}{\not\rightrightarrows} 0$ при $k \to \infty$.

Теорема 4. (Вторая теорема Абеля.) Пусть степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в точке $z_1 \in \mathbb{C}$. Тогда этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0, z_1] = \{tz_1\ :\ t \in [0, 1]\}$.

Доказательство. При $z = tz_1$ имеем $c_k z^k = c_k z_1^k t^k = a_k(t) b_k(t)$, где $a_k(t) = a_k = c_k z_1^k$, $b_k(t) = t^k$. По условию числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k$ сходится, а значит, функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(t)$ сходится равномерно на любом множестве. Функциональная последовательность $\{b_k(t)\}$ равномерно ограничена на отрезке $[0, 1]$ и монотонна по k $\quad (0 \leq b_{k+1}(t) \leq b_k(t) \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0, 1])$. В силу признака Абеля ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\operatorname{Re} a_k(t))b_k(t)$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\operatorname{Im} a_k(t))b_k(t)$ сходятся равномерно на $[0,1]$. Поэтому ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(t)b_k(t)$ сходится равномерно на $[0,1]$, а значит, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится равномерно на отрезке $[0, z_1]$. □

Теорема 5. Радиусы сходимости степенных рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, z^{k-1}$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$, полученных формальным почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k$, совпадают с радиусом сходимости исходного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k$.

Доказательство. Покажем сначала, что радиус сходимости R_1 ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, k\, z^k$ равен радиусу сходимости R исходного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k$. В силу формулы Коши–Адамара имеем

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|\, k} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}\ \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R}.$$

(Здесь мы воспользовались тем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = \lim\limits_{k\to\infty} e^{\ln k/k} = e^0 = 1$.)

Следовательно, $R_1 = R$.

Покажем теперь, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, k\, z^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, z^k$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, z^{k-1}$ сходятся или расходятся одновременно. При $z = 0$ эти ряды, очевидно, сходятся. Пусть $z \neq 0$. Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\, k\, z^k$, $\widetilde{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\, k\, z^{k-1}$. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{C}$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{z} = \frac{S}{z} \in \mathbb{C}$. Обратно, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{S}_n = \widetilde{S} \in \mathbb{C}$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = z\,\widetilde{S}$.

Следовательно, радиус сходимости R_1 ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, z^k$ равен радиусу сходимости R_2 ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, z^{k-1}$. Итак, $R_2 = R_1 = R$, т. е. при почленном дифференцировании степенного ряда его радиус сходимости не изменяется.

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k$ получается при почленном дифференцировании ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$, то радиусы сходимости этих рядов также совпадают. □

Далее мы будем рассматривать вещественные степенные ряды вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, (x - x_0)^k$, где $a_k, x, x_0 \in \mathbb{R}$. Поскольку вещественный степенной ряд можно рассматривать как комплексный степенной ряд, то радиус сходимости $R_{\text{сх}}$ ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, (x - x_0)^k$ можно определять из формулы Коши–Адамара или из леммы 1, в которых следует положить $c_k = a_k$. Интервал $(x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}})$ называется интервалом сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, (x - x_0)^k$.

Теорема 6. Пусть вещественный степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, (x - x_0)^k = f(x)$ имеет радиус сходимости $R_{\text{сх}} > 0$. Тогда

1) для любого $x \in (x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}})$ справедлива формула почленного интегрирования степенного ряда:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1};$$

2) в интервале сходимости $(x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}})$ функция f имеет производные любого порядка, получаемые почленным дифференцированием ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, (x - x_0)^k$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, ((x - x_0)^k)^{(n)} \quad \forall x \in (x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}}); \qquad (2)$$

3) коэффициенты степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k = f(x)$ однозначно определяются по функции $f(x)$ с помощью формулы $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Доказательство. 1) Для любого $x \in (x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}})$ определим число $r \in (0, R_{\text{сх}})$ из условия $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. В силу теоремы о равномерной сходимости степенного ряда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(t-x_0)^k$ равномерно сходится на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$. Отсюда по теореме о почленном интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда (теорема 4 § 3 главы 10) следует, что

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}.$$

2) Покажем, что для любого $x \in (x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}})$ существует конечная производная $f'(x)$, причем $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\,k\,(x-x_0)^{k-1}$. Зафиксируем произвольное $x \in (x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}})$ и определим число $r \in (0, R_{\text{сх}})$ из условия $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

В силу теоремы 5 радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\,k\,(t-x_0)^{k-1}$, полученного почленным дифференцированием ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(t-x_0)^k$, равен $R_{\text{сх}}$. Следовательно, в силу неравенства $r < R_{\text{сх}}$ и теоремы о равномерной сходимости степенного ряда этот ряд сходится равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$. Поэтому согласно теореме о почленном дифференцировании функционального ряда (теорема 6 § 3 главы 10) ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(t-x_0)^k$ можно дифференцировать почленно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$. В частности, существует $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\,k\,(x-x_0)^{k-1}$. Следовательно, при $n = 1$ справедлива формула (2).

Проводя те же рассуждения для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\,k\,(x-x_0)^{k-1} = f'(x)$, получаем формулу (2) при $n = 2$ и так далее. По индукции формула (2) справедлива для любого $n \in \mathbb{N}$, что доказывает второе утверждение теоремы.

3) Заметим, что

$$((x-x_0)^k)^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-n+1)\,(x-x_0)^{k-n}, & k \geq n, \\ 0, & k < n, \end{cases}$$

следовательно, $((x-x_0)^k)^{(n)}|_{x=x_0} = \begin{cases} n!, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$

Отсюда и из формулы (2) следует, что $f^{(n)}(x_0) = a_n\,n!$, что доказывает утверждение третьего пункта теоремы. □

§ 4. Ряд Тейлора

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно дифференцируемой* в точке x_0, если в этой точке существуют производные любого порядка функции f.

Определение. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке x_0. Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение. Функция $f(x)$ называется *регулярной* в точке x_0, если она бесконечно дифференцируема в этой точке и ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Замечание. Из пункта (3) теоремы 5 § 3 следует, что если функция $f(x)$ может быть представлена как сумма степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ с радиусом сходимости $R_{\text{сх}} > 0$, то этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0. В этом случае функция f является регулярной в точке x_0.

Замечание. Ряд Тейлора в точке x_0 бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ может сходиться не к функции $f(x)$, а к некоторой другой функции, не совпадающей с $f(x)$ в сколь угодно малой окрестности точки x_0. В этом случае функция $f(x)$ не является регулярной в точке x_0.

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Заметим, что $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^k} e^{-1/x^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{k/2}\, e^{-t} = 0.$

Отсюда следует, что

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{4}{x^6} - \dfrac{6}{x^4}\right) e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

По индукции легко показать, что

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{3n}(1/x)\, e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

где $P_{3n}(t)$ – многочлен степени $3n$ от t.

Следовательно, все коэффициенты ряда Тейлора функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$ равны нулю. Поэтому сумма ряда Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 равна нулю и не совпадает с функцией $f(x)$ в сколь угодно малой окрестности точки x_0. Таким образом, хотя функция (1) бесконечно дифференцируема, она не является регулярной в точке $x_0 = 0$.

Напомним, что остаточным членом формулы Тейлора n раз дифференцируемой функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x), \quad \text{где} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Замечание. Остаточный член фомулы Тейлора не всегда совпадает с остатком ряда Тейлора. Например, для функции (1) $S_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}$, поэтому остаток ряда Тейлора тождественно равен нулю, а остаточный член формулы Тейлора $r_n(x) = f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$.

Непосредственно из определений следует, что функция $f(x)$ является регулярной в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{2}$$

Как показывает пример функции (1), для доказательства регулярности функции недостаточно показать, что радиус сходимости ряда Тейлора этой функции $R_{\text{сх}} > 0$. Нужно проверить условие (2).

Теорема 1. (Достаточное условие регулярности.) Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что функция f бесконечно дифференцируема в $U_\delta(x_0)$ и

$$\exists M > 0 :\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow\ |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Тогда функция f регулярна в точке x_0 и

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{3}$$

Доказательство. В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для любого $x \in U_\delta(x_0)$ существует число ξ, лежащее между x и x_0 (а значит, $\xi \in U_\delta(x_0)$), такое, что $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$. Следовательно,

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow\ |r_n(x)| \leq M \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{4}$$

Покажем, что $\forall a > 0 \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Определим $n_0 \in \mathbb{N}$ из условия $n_0 > 2a$, тогда при $n > n_0$ имеем

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \frac{a^{n-n_0}}{n(n-1)\cdots(n_0+1)} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \frac{a^{n-n_0}}{n_0^{n-n_0}} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Отсюда и из соотношения (4) получаем

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Поэтому функция f регулярна в точке x_0 и выполнено соотношение (3). $\square$

§ 5. Ряды Тейлора для показательной, гиперболических и тригонометрических функций

Определение. Ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$ называется *рядом Маклорена* этой функции.

Теорема 1. Ряды Маклорена функций e^x, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$, $\sin x$ сходятся к этим функциям на всей числовой прямой: для любого $x \in \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \tag{1}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{2}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}. \tag{3}$$

Доказательство. Так как для любого числа $\delta > 0$ при $x \in \in U_\delta(0) = (-\delta, \delta)$ справедливы соотношения $|(e^x)^{(n)}| = e^x < e^\delta$, то выполнено достаточное условие регулярности функции $f(x) = e^x$ в точке $x_0 = 0$ и по теореме 1 § 4 для любого числа $\delta > 0$ справедливо соотношение (3) из § 4. Поэтому для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство (1). Аналогично, используя ограниченность последовательности всех производных функций $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$, $\sin x$ на любом интервале $(-\delta, \delta)$ и применяя теорему 1 § 4, получаем равенства (2), (3). $\square$

Теорема 2. Для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ равен $+\infty$. Поэтому согласно теореме о круге сходимости, этот ряд сходится абсолютно для любого $z \in \mathbb{C}$. Обозначим

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Зафиксируем произвольное комплексное число $z = x + iy$, где $x, y \in \in \mathbb{R}$. Требуется доказать равенство $f(z) = e^z$. Согласно определению экспоненты комплексного числа, данному в § 2 главы 4 требуется доказать равенство

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{5}$$

Покажем сначала, что

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) f(z_2) \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

По теореме о перемножении абсолютно сходящихся рядов (теорема 3 § 4 главы 9), которая для комплексных рядов доказывается точно так же, как и для вещественных, согласно равенству (4) имеем

$$f(z_1) f(z_2) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_1^{k_j}}{k_j!} \frac{z_2^{n_j}}{n_j!},$$

где $\{(k_j, n_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ – произвольная последовательность пар элементов множества $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, задающая взаимно однозначное отображение $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^2$. Выберем эту последовательность методом "диагоналей т. е. так, что ее первый член – это пара $(0, 0)$, сумма элементов которой равна 0, следующие два элемента последовательности $\{(k_j, n_j)\}$ – это пары с суммой элементов 1, затем 2 и т.д. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_1^{k_j}}{k_j!} \frac{z_2^{n_j}}{n_j!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{z_1^k \, z_2^{m-k}}{k! \, (m-k)!}.$$

Следовательно,

$$f(z_1) f(z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k! \, (m-k)!} z_1^k \, z_2^{m-k}.$$

Используя формулу бинома Ньютона и равенство (4), получаем

$$f(z_1) f(z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (z_1 + z_2)^m = f(z_1 + z_2).$$

Тем самым доказано соотношение (6).

Из равенства (4) следует, что

$$f(iy)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iy)^k}{k!}=\sum_{k-\text{четн.}}\frac{(iy)^k}{k!}+\sum_{k-\text{неч.}}\frac{(iy)^k}{k!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Поэтому согласно теореме 1 имеем $f(iy)=\cos y+i\sin y$. Из той же теоремы 1 и формулы (4) следует, что $f(x)=e^x$ при $x\in\mathbb{R}$. Поэтому, используя равенство (6), получаем равенство (5). □

Определим гиперболические и тригонометрические функции комплексного переменного по формулам

$$\operatorname{ch} z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!},\qquad \operatorname{sh} z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k},\qquad \sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}.$$

Из теоремы 1 следует, что данные ряды сходятся при любом вещественном z. Отсюда и из теоремы о круге сходимости степенного ряда следует, что радиусы сходимости этих степенных рядов равны $+\infty$, т. е. эти ряды сходятся при любом $z\in\mathbb{C}$. Из теоремы 1 следует также, что при вещественном z определенные здесь функции совпадают с известными ранее гиперболическими и тригонометрическими функциями.

Лемма 1. Для любого комплексного числа z справедливы формулы Эйлера:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Доказательство

$$e^{iz}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\cos z+i\sin z.$$

Остальные формулы Эйлера следуют из первой. □

§ 6. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме. Ряды Тейлора для степенной, логарифмической и других функций

Для того чтобы доказать регулярность степенной и некоторых других функций, нам потребуется представление остаточного члена формулы Тейлора в интегральной форме.

Теорема 1. (Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.) Если функция $f(x)$ на интервале $(x_0-\delta,x_0+{}$ $+\delta)$ имеет непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для остаточного члена формулы Тейлора $r_n(x)=f(x)-{}$ $-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ справедливо представление в интегральной форме:

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\qquad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

Доказательство. Поскольку $r_0(x)=f(x)-f(x_0)=\int\limits_{x_0}^{x}f'(t)\,dt=$ $=\frac{1}{0!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^0 f'(t)\,dt$, то при $n=0$ теорема справедлива.

Предположим, что теорема справедлива для $n=s-1$, т. е.

$$r_{s-1}(x)=\frac{1}{(s-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{s-1}f^{(s)}(t)\,dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$r_{s-1}(x) = \frac{1}{(s-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(s)}(t) \left(-\frac{1}{s}\right) d((x-t)^s) =$$

$$= -\frac{1}{s!} f^{(s)}(t)\,(x-t)^s \Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{s!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^s\, f^{(s+1)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{s!} f^{(s)}(x_0)\,(x-x_0)^s + \frac{1}{s!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^s\, f^{(s+1)}(t)\,dt.$$

Отсюда получаем формулу для остаточного члена порядка s:

$$r_s(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= r_{s-1}(x) - \frac{1}{s!} f^{(s)}(x_0)\,(x-x_0)^s = \frac{1}{s!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^s\, f^{(s+1)}(t)\,dt.$$

Следовательно, теорема справедлива для $n = s$. По индукции получаем справедливость теоремы для любого натурального n. $\square$

Теорема 2. Ряд Маклорена степенной функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ сходится к этой функции при $x \in (-1,1)$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k\, x^k \qquad \forall x \in (-1,1),$$

где $\quad C_\alpha^0 = 1, \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Доказательство. Зафиксируем $x \in (-1,1)$. Записывая остаточный член формулы Маклорена функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ в интегральной форме и учитывая, что $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\,(1+x)^{\alpha-k}$, получаем

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n\,(1+t)^{\alpha-n-1}\,dt \quad \overset{t=\tau x}{=}$$

$$\overset{t=\tau x}{=} \quad \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^1 x^n\,(1-\tau)^n\,(1+\tau x)^{\alpha-n-1}\,x\,d\tau =$$

$$= \lambda_n \int_0^1 \left(\frac{1-\tau}{1+\tau x}\right)^n (1+\tau x)^{\alpha-1}\,d\tau,$$

где введено обозначение

$$\lambda_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\,x^{n+1}. \tag{1}$$

Поскольку $\forall x \in (-1,1)\ \forall \tau \in [0,1] \hookrightarrow\ 1+\tau x \geq 1-\tau$, то $\left(\frac{1-\tau}{1+\tau x}\right)^n \leq 1$. Следовательно,

$$|r_n(x)| \leq |\lambda_n| \int_0^1 (1+\tau x)^{\alpha-1}\,d\tau = |\lambda_n| C, \tag{2}$$

где величина $C = \int\limits_0^1 (1+\tau x)^{\alpha-1}\,d\tau$ не зависит от n. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0. \tag{3}$$

Если $x = 0$, то согласно равенству (1) имеем $\lambda_n = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если $\alpha = m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то из (1) следует равенство $\lambda_n = 0$ при $n > m$. Поэтому в случаях $x = 0$ и $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ соотношение (3) справедливо. Пусть $x \neq 0$ и $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n-1)\ x^{n+2}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\ x^{n+1}} =$$

$$= \frac{\alpha-n-1}{n+1}x \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad -x \in (-1,1).$$

Выберем число $q \in (|x|,1)$. Тогда по определению предела существует номер n_0 такой, что $\frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|} < q$ для любого $n \geq n_0$. Поэтому при $n \geq n_0$ имеем $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n_0}| q^{n-n_0} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда вытекает соотношение (3), которое вместе с неравенством (2) дает равенство $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ при любом $x \in (-1,1)$. $\square$

Заметим, что при $\alpha = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ для любого $k \geq n+1$ имеет место $C_\alpha^k = 0$, и, следовательно, ряд Маклорена функции $(1+x)^\alpha$ совпадает с конечной суммой:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k\, x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k.$$

В случае $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, используя лемму 1 § 3, вычислим радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k\, x^k$:

$$\frac{1}{R_{\text{сх}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|C_\alpha^{k+1}|}{|C_\alpha^k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha - k|}{k+1} = 1.$$

Следовательно, $R_{\text{сх}} = 1$.

Полагая в теореме 2 $\alpha = -1$ и замечая, что $C_{-1}^k = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k$, получаем разложение

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^k \qquad \forall x \in (-1,1). \tag{4}$$

Заметим, что последнее разложение можно получить предельным переходом в формуле суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \frac{1}{1+x} \qquad \forall x \in (-1,1).$$

Из формулы (4) и теоремы о почленном интегрировании степенного ряда (пункт 1 теоремы 5 § 3) при $|x| < 1$ получаем

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Производя замену индекса суммирования $n = k+1$, получаем

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, \frac{x^n}{n} \qquad \forall x \in (-1,1). \tag{5}$$

Покажем, что равенство (5) справедливо и при $x = 1$. Действительно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, \frac{x^n}{n}$ сходится при $x = 1$ по признаку Лейбница (теорема 4 § 3 главы 9). Следовательно, в силу второй теоремы Абеля (теорема 4 § 3 главы 11) этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0,1]$. Согласно теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда (теорема 2 § 3 главы 10) функция $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, \frac{x^n}{n}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$. Поскольку согласно равенству (5) имеем $S(x) = \ln(1+x)$ для любого $x \in (-1,1)$, то $S(1) = \lim\limits_{x\to 1-0} S(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} \ln(1+x) = \ln 2$. Таким образом, равенство (5) справедливо и при $x = 1$.

Применяя разложение (4) для $x = t^2$, имеем

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, t^{2k} \qquad \forall t \in (-1,1).$$

Интегрируя этот ряд внутри круга сходимости, получаем

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \forall x \in (-1,1).$$

Для любого нечетного числа n обозначим $n!! = n\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 1$. Кроме того, будем полагать $(-1)!! = 1$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$

$$C_{-1/2}^k = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} = \frac{(-1)^k\,(2k-1)!!}{2^k\, k!}.$$

Применяя теорему 2 для $\alpha = -\frac{1}{2}$, получаем разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(2k-1)!!}{2^k\, k!}\, x^k \qquad \forall x \in (-1,1).$$

Подставляя $x = -t^2$ и интегрируя степенной ряд, получаем

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k\, k!} \left(\int_0^x t^{2k}\, dt \right).$$

Итак,

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k\, k!}\, \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \forall x \in (-1,1).$$

Глава 12

ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Теорема о неявной функции для одного уравнения

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ и в окрестности точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ задана скалярная функция $F(x, y)$. Нас будет интересовать решение $y = y(x)$ уравнения $F(x, y) = 0$. При этом в явном виде найти функцию $y(x)$ зачастую не удается. В связи с этим функция $y(x)$ называется *неявной*.

Теорема 1. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ и пусть скалярная функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$,

(2) функция F непрерывна в $U_\varepsilon(x_0, y_0)$,

(3) частная производная $F'_y(x, y)$ существует в $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ и непрерывна в точке (x_0, y_0),

(4) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существуют числа $\gamma > 0$, $\delta > 0$ и непрерывная в точке x_0 функция $\varphi : U_\gamma(x_0) \to U_\delta(y_0)$ такая, что для любого $x^* \in U_\gamma(x_0)$ уравнение $F(x^*, y) = 0$ на множестве $U_\delta(y_0)$ имеет единственное решение $y^* = \varphi(x^*)$.

Доказательство. Для определенности будем предполагать, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности функции $F'_y(x, y)$ в точке (x_0, y_0) существует число $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ такое, что

$$F'_y(x, y) > 0 \qquad \forall (x, y) \in U_{\varepsilon_1}(x_0, y_0). \tag{1}$$

Зафиксируем произвольное число $\delta \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1\right]$. Тогда для любых $x \in U_\delta(x_0)$, $y \in U_\delta(y_0)$ выполняются соотношения

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| = \sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} < \sqrt{\delta^2 + \delta^2} \leq \varepsilon_1,$$

т. е. $(x, y) \in U_{\varepsilon_1}(x_0, y_0)$. Поэтому согласно соотношению (1) для любого $x \in U_\delta(x_0)$ функция $F(x, y)$ строго возрастает по y на отрезке $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$.

Отсюда и из равенства $F(x_0, y_0) = 0$ следуют неравенства

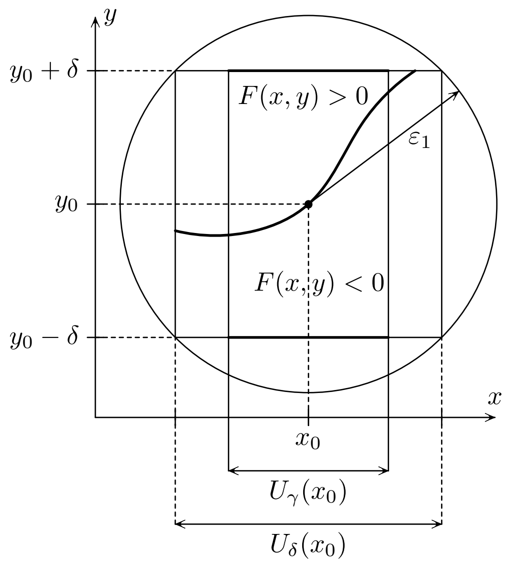
$$F(x_0, y_0 - \delta) < 0,$$

$$F(x_0, y_0 + \delta) > 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции F в $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ существует число $\gamma \in (0, \delta]$ такое, что

$$\forall x \in U_\gamma(x_0) \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow \; F(x, y_0 - \delta) < 0, \quad F(x, y_0 + \delta) > 0.$$



Применяя теорему о промежуточном значении для функции $f(y) = F(x, y)$, непрерывной на отрезке $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, получаем, что для любого $x \in U_\gamma(x_0)$ существует число $\varphi(x) \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ такое, что $F(x, \varphi(x)) = 0$. Тем самым определена функция $\varphi : U_\gamma(x_0) \to U_\delta(y_0)$. Из строго возрастания функции $F(x, y)$ по y в $U_\delta(y_0)$ следует, что для любого $x \in U_\gamma(x_0)$ число $y = \varphi(x)$ является единственным в $U_\delta(y_0)$ решением уравнения $F(x, y) = 0$.

Поскольку число δ было выбрано как произвольное число из интервала $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\,\varepsilon_1\right)$, то эти же рассуждения можно провести для произвольного числа $\delta_1 \in (0, \delta]$. В результате получим, что

$$\forall \delta_1 \in (0, \delta] \; \exists \gamma_1 \in (0, \gamma] : \; \forall x \in U_{\gamma_1}(x_0) \hookrightarrow \; \varphi(x) \in U_{\delta_1}(y_0).$$

Тем самым доказана непрерывность функции φ в точке x_0. $\square$

§ 2. Операторная норма матрицы. Теорема Лагранжа о среднем

Определение. Пусть A – матрица размера $m \times n$. *Операторной нормой матрицы* A называется число

$$\|A\| = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ |x|=1}} |Ax|,$$

где $|Ax|$ – длина вектора $Ax \in \mathbb{R}^m$.

Поскольку функция $f(x) = Ax$ непрерывна, а множество $\{x \in \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ является компактом, то в определении нормы максимум существует.

Заметим, что введенная норма матрицы удовлетворяет аксиомам нормы:

(1) $\|A\| \geq 0$;

(2) если $\|A\| = 0$, то $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ – нулевая матрица;

(3) для любого числа λ справедливо равенство $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$;

(4) $\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$ (неравенство треугольника).

Свойства (1) – (3) очевидны. Докажем неравенство треугольника.

$$\|A_1 + A_2\| = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ |x|=1}} |A_1x + A_2x| \leq \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ |x|=1}} (|A_1x| + |A_2x|) \leq$$

$$\leq \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ |x|=1}} |A_1x| + \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ |x|=1}} |A_2x| = \|A_1\| + \|A_2\|.$$

Задача 1. Доказать, что операторная норма матрицы A совпадает с корнем квадратным из максимального собственного числа матрицы A^TA (число λ называется собственным числом матрицы B размера $n \times n$, если $\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\} : \ Bx = \lambda x$).

Лемма 1. а) Если A – $(m \times n)$-матрица и $x \in \mathbb{R}^n$, то $|Ax| \leq \leq \|A\|\,|x|$.

б) Если A – $(m\times n)$-матрица, а B – $(n\times k)$-матрица, то $\|AB\| \leq \leq \|A\|\,\|B\|$.

Доказательство. а) Если $x = \overline{0}$, то $Ax = \overline{0}$ и неравенство $|Ax| \leq \leq \|A\|\,|x|$ выполнено. Пусть $x \neq \overline{0}$. Обозначим $x_1 = \frac{x}{|x|}$. Поскольку $|x_1| = 1$, то $\|A\| \geq |Ax_1| = \frac{1}{|x|}\,|Ax|$, следовательно, $|Ax| \leq \|A\|\,|x|$.

б) Поскольку в силу пункта (а)

$$|ABx| \leq \|A\|\,|Bx| \leq \|A\|\,\|B\|\,|x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^k,$$

то $\|AB\| = \max\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^k\\ |x|=1}} |ABx| \leq \|A\|\,\|B\|$. □

Теорема 1. (Теорема Лагранжа о среднем.) Пусть в δ-окрестности точки $y_0 \in \mathbb{R}^k$ задана дифференцируемая вектор-функция $g : U_\delta(y_0) \to \mathbb{R}^m$. Тогда для любых $y, y' \in U_\delta(y_0)$ существует число $\theta \in (0;1)$ такое, что

$$|g(y') - g(y)| \leq \ \|\mathcal{D}\, g(y + \theta\,(y' - y))\|\ |y' - y|. \tag{1}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные $y, y' \in U_\delta(y_0)$ и рассмотрим вектор-функцию скалярного переменного $f(t) = g(y + t(y'-y))$. Поскольку для любого $t \in [0,1]$ имеем $y+t(y'-y) \in [y,y'] \subset \subset U_\delta(y_0)$, то по теореме о дифференцировании сложной функции для любого $t \in [0,1]$ существует $f'(t) = \mathcal{D}\, g(y + t\,(y' - y))\ (y' - y)$. Следовательно, согласно теореме Лагранжа о среднем для вектор-функции скалярного переменного существует число $\theta \in (0,1)$ такое, что $|f(1) - f(0)| \leq |f'(\theta)|$. Поэтому

$$|g(y') - g(y)| = |f(1) - f(0)| \leq |f'(\theta)| = |\mathcal{D}\, g(y + \theta\,(y' - y))\ (y' - y)| \leq$$

$$\overset{\text{Л. 1(a)}}{\leq} \ \|\mathcal{D}\, g(y + \theta\,(y' - y))\|\ |y' - y|. \qquad \square$$

§ 3. Принцип Банаха сжимающих отображений

Определение. Пусть задано множество $Y \subset \mathbb{R}^m$. Вектор-функция $g : Y \to \mathbb{R}^m$ называется *сжимающим отображением*, если существует число $\mu \in (0,1)$ такое, что

$$|g(y) - g(y')| \leq \mu|y - y'| \qquad \forall y, y' \in Y.$$

Теорема 1. Пусть в δ-окрестности точки $y_0 \in \mathbb{R}^m$ задана вектор-функция $g : U_\delta(y_0) \to \mathbb{R}^m$ такая, что

(а) отображение $g : U_\delta(y_0) \to \mathbb{R}^m$ является сжимающим с коэффициентом $\mu < 1$ и

(б) $|g(y_0) - y_0| < (1 - \mu)\delta$.

Тогда в $U_\delta(y_0)$ система уравнений $y = g(y)$ имеет единственное решение y^*, которое может быть найдено как предел последовательности $\{y_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^m$, определяемой рекуррентной формулой

$$y_{k+1} = g(y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

Доказательство. Покажем, что для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливо неравенство

$$|y_{k+1} - y_k| \le \mu^k |y_1 - y_0|. \tag{2}$$

При $k = 0$ неравенство (2) выполнено. Пусть неравенство (2) выполнено $\forall k \in \{0, \dots, s-1\}$, тогда

$$|y_s - y_0| \le |y_s - y_{s-1}| + \dots + |y_1 - y_0| \le$$

$$\le (\mu^{s-1} + \dots + 1)|y_1 - y_0| \overset{(б),(1)}{<} (\mu^{s-1} + \dots + 1)(1-\mu)\delta = (1-\mu^s)\delta < \delta.$$

Следовательно, $y_s \in U_\delta(y_0)$, $y_{s-1} \in U_\delta(y_0)$ и в силу условия (а) доказываемой теоремы

$$|y_{s+1} - y_s| \overset{(1)}{=} |g(y_s) - g(y_{s-1})| \overset{(а)}{\le} \mu |y_s - y_{s-1}| \le \mu^s |y_1 - y_0|,$$

т. е. неравенство (2) выполнено при $k = s$. По индукции получаем, что это неравенство выполнено для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Из неравенства (2) следует, что для любых $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n > k$

$$|y_n - y_k| \le |y_n - y_{n-1}| + \dots + |y_{k+1} - y_k| \le$$

$$\le (\mu^{n-1} + \dots + \mu^k)|y_1 - y_0| = \frac{(\mu^k - \mu^n)|y_1 - y_0|}{1-\mu} \le \frac{\mu^k |y_1 - y_0|}{1-\mu}.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N, определяемое из условия $\frac{\mu^N |y_1 - y_0|}{1-\mu} < \varepsilon$, такое, что для любых $k \ge N$, $n > k$ справедливо неравенство $|y_n - y_k| < \varepsilon$. Это означает фундаментальность последовательности $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$, следовательно, в силу критерия Коши последовательность $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к некоторой точке $y^* \in \mathbb{R}^m$. Используя неравенство $|y_n - y_k| \le \frac{\mu^k |y_1 - y_0|}{1-\mu}$ при $k = 0$, для любого $n \in \mathbb{N}$ получаем неравенство $|y_n - y_0| \le \frac{|y_1 - y_0|}{1-\mu}$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, имеем $|y^* - y_0| \le \frac{|y_1 - y_0|}{1-\mu} \overset{(б),(1)}{<} \delta$. Следовательно, $y^* \in U_\delta(y_0)$. Из условия (а) следует непрерывность функции $g(y)$. Переходя к пределу в формуле $y_{k+1} = g(y_k)$ при $k \to \infty$, получаем $y^* = g(y^*)$, т. е. вектор y^* является решением системы уравнений $y = g(y)$.

Покажем единственность решения системы уравнений $y = g(y)$ в $U_\delta(y_0)$. Предположим противное: существует $y' \in U_\delta(y_0)$ – решения этой системы, $y' \ne y^*$. Тогда в силу условия (а) имеем $|y^* - y'| = |g(y^*) - g(y')| \le \mu |y^* - y'| < |y^* - y'|$. Противоречие. $\square$

§ 4. Теорема о неявной функции для системы уравнений

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ и в окрестности точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ задана m-мерная вектор-функция

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ \cdots \\ F_m(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \\ \cdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \end{pmatrix}.$$

Нас будет интересовать решение $y = y(x)$ системы $F(x,y) = \overline{0}$ из m скалярных уравнений. Компоненты вектора y называются *неизвестными* в том смысле, что их нужно выразить через вектор параметров x, исходя из системы уравнений $F(x,y) = \overline{0}$. Предполагается, что число уравнений системы и число неизвестных совпадают и равны m.

Рассмотрим сначала частный случай, в котором вектор-функция F линейна по вектору неизвестных: $F(x,y) = A(x)y - b(x)$. В этом случае, применяя правило Крамера, известное из линейной алгебры, получаем, что система $F(x,y) = \overline{0}$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det A(x) \ne 0$. Следующая теорема формулирует достаточные условия существования и единственности решения нелинейного уравнения. Предполагается известным некоторое решение $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ векторного уравнения $F(x,y) = \overline{0}$. Поскольку дифференцируемая вектор-функция $F(x,y)$ в малой окрестности точки (x_0, y_0) "близка" к линейной по y функции $F(x, y_0) + \mathcal{D}_y F(x, y_0)(y - y_0)$, то вполне естественно, что для существования и единственности решения уравнения $F(x,y) = \overline{0}$ следует потребовать выполнение условия $\det \mathcal{D}_y F(x_0, y_0) \ne 0$.

Здесь $\mathcal{D}_y F(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x_0,y_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ – матрица Якоби функции $F(x,y)$ в точке (x_0, y_0) по переменным $y = (y_1, \dots, y_m)$. В отличие от линейного уравнения, существование и единственность решения нелинейного уравнения гарантируются лишь в малой окрестности точки (x_0, y_0).

Теорема 1. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ и пусть m-мерная вектор-функция $F(x,y)$ удовлетворяет условиям:
(1) $F(x_0,y_0) = \overline{0}$,
(2) функция F непрерывно дифференцируема в $U_\varepsilon(x_0,y_0)$,
(3) $\det \mathcal{D}_y F(x_0,y_0) \neq 0$.

Тогда существуют числа $\gamma > 0$, $\delta > 0$ и непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\varphi : U_\gamma(x_0) \to U_\delta(y_0)$ такая, что для любого $x^* \in U_\gamma(x_0)$ система уравнений $F(x^*, y) = \overline{0}$ на множестве $U_\delta(y_0)$ имеет единственное решение $y^* = \varphi(x^*)$.

Доказательство

Шаг 1. Доказательство существования и единственности решения.

Поскольку матрица Якоби $\mathcal{D}_y F(x,y)$ непрерывна в точке (x_0,y_0), то ее определитель является скалярной функцией, непрерывной в этой точке. Отсюда и из условия $\det \mathcal{D}_y F(x_0,y_0) \neq 0$ следует существование числа $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon]$ такого, что

$$\forall (x,y) \in U_{\varepsilon_1}(x_0,y_0) \hookrightarrow \ \det \mathcal{D}_y F(x,y) \neq 0. \tag{1}$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$h(x,y) = y - (\mathcal{D}_y F(x_0,y_0))^{-1} \, F(x,y).$$

По теореме о дифференцировании сложной функции

$$\mathcal{D}_y h(x,y) = E - (\mathcal{D}_y F(x_0,y_0))^{-1} \, \mathcal{D}_y F(x,y) =$$

$$= (\mathcal{D}_y F(x_0,y_0))^{-1} \, (\mathcal{D}_y F(x_0,y_0) - \mathcal{D}_y F(x,y)),$$

где E – единичная матрица размера $m \times m$. Из непрерывности матрицы Якоби $\mathcal{D}_y F(x,y)$ следует, что $\mathcal{D}_y F(x,y) \to \mathcal{D}_y F(x_0,y_0)$ при $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Поэтому $\|\mathcal{D}_y h(x,y)\| \to 0$ при $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Следовательно, существует $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$:

$$\forall (x,y) \in U_{\varepsilon_2}(x_0,y_0) \hookrightarrow \ \|\mathcal{D}_y h(x,y)\| \leq \frac{1}{2}.$$

Зафиксируем произвольное число $\delta \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\, \varepsilon_2\right]$. Тогда для любых $x \in U_\delta(x_0)$, $y \in U_\delta(y_0)$ выполняются соотношения

$$|(x,y) - (x_0,y_0)| = \sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} < \sqrt{\delta^2 + \delta^2} \leq \varepsilon_2,$$

т. е. $(x,y) \in U_{\varepsilon_2}(x_0,y_0)$. Поэтому

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \quad \forall y \in U_\delta(y_0) \hookrightarrow \ \|\mathcal{D}_y h(x,y)\| \leq \frac{1}{2}.$$

Фиксируя произвольный $x \in U_\delta(x_0)$ и применяя теорему Лагранжа о среднем к вектор-функции $g(y) = h(x,y)$, получаем, что для любых $y, y' \in U_\delta(y_0)$ существует число $\theta \in (0,1)$:

$$|h(x,y') - h(x,y)| \leq \|\mathcal{D}_y h(x, y + \theta\,(y' - y))\| \ |y' - y| \leq \frac{1}{2}|y' - y|.$$

Итак,

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \quad \forall y, y' \in U_\delta(y_0) \hookrightarrow \ |h(x,y') - h(x,y)| \leq \frac{1}{2}|y' - y|. \tag{2}$$

Это означает, что для любого фиксированного $x^* \in U_\delta(x_0)$ отображение $g(y) = h(x^*, y)$ в $U_\delta(y_0)$ является сжимающим с коэффициентом $\mu = \frac{1}{2}$.

Заметим, что $h(x,y_0) - y_0 = -\left(\mathcal{D}_y F(x_0,y_0)\right)^{-1} \, F(x,y_0)$. В силу непрерывности функции $F(x,y_0)$ в точке x_0 имеем $h(x,y_0) - y_0 \to -\left(\mathcal{D}_y F(x_0,y_0)\right)^{-1} \, F(x_0,y_0) = \overline{0}$ при $x \to x_0$. Поэтому существует число $\gamma \in (0, \delta]$ такое, что

$$\forall x \in U_\gamma(x_0) \hookrightarrow \ |h(x,y_0) - y_0| < \frac{\delta}{2} = (1-\mu)\delta. \tag{3}$$

Зафиксируем произвольную точку $x^* \in U_\gamma(x_0)$. Из условий (2) и (3) следует выполнение условий (а) и (б) принципа сжимающих отображений для функции $g(y) = h(x^*, y)$. Применяя эту теорему получаем, что для любого $x^* \in U_\gamma(x_0)$ система уравнений $y = g(y)$ на множестве $U_\delta(y_0)$ имеет единственное решение y^*. Обозначим это решение через $\varphi(x^*)$. Поскольку $g(y) = h(x^*, y) = y - \left(\mathcal{D}_y F(x_0,y_0)\right)^{-1} \, F(x^*, y)$, то система уравнений $y = g(y)$ эквивалентна системе $F(x^*, y) = \overline{0}$. Таким образом, мы получили, что для любого $x^* \in U_\gamma(x_0)$ система уравнений $F(x^*, y) = \overline{0}$ на множестве $U_\delta(y_0)$ имеет единственное решение $y^* = \varphi(x^*)$.

Шаг 2. Доказательство непрерывности решения в точке x_0.

Заметим, что число δ было выбрано как произвольное число из полуинтервала $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\,\varepsilon_2\right]$. Поэтому, повторяя те же рассуждения для произвольного числа $\delta_1 \in (0, \delta]$, найдем число $\gamma_1 \in (0, \gamma]$ и функцию $\varphi_1 : U_{\gamma_1}(x_0) \to U_{\delta_1}(y_0)$ такую, что для любого $x^* \in U_{\gamma_1}(x_0)$ уравнение $F(x^*, y) = \overline{0}$ имеет единственное решение $y = \varphi_1(x^*)$. Следовательно, $\forall x \in U_{\gamma_1}(x_0) \hookrightarrow\ \ \varphi_1(x) = \varphi(x)$ и

$$\forall \delta_1 \in (0, \delta]\ \exists \gamma_1 \in (0, \gamma] :\ \forall x \in U_{\gamma_1}(x_0) \hookrightarrow\ \ \varphi(x) \in U_{\delta_1}(y_0).$$

Тем самым доказана непрерывность функции φ в точке x_0. $\square$

Шаг 3. Доказательство дифференцируемости решения в точке x_0.

В силу дифференцируемости функции F в точке (x_0, y_0) из леммы 1 § 8 главы 6 следует, что

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \mathcal{D}\, F(x_0, y_0)\ \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \overline{o}(|(x, y) - (x_0, y_0)|) =$$

$$= \mathcal{D}_x\, F(x_0, y_0)(x - x_0) + \mathcal{D}_y\, F(x_0, y_0)(y - y_0) + \overline{o}(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2})$$

при $x \to x_0$, $y \to y_0$. Подставим в полученную формулу $y = \varphi(x)$, $y_0 = \varphi(x_0)$. Воспользуемся равенствами $F(x, \varphi(x)) = \overline{0}$, $F(x_0, \varphi(x_0)) = \overline{0}$. В силу непрерывности неявной функции φ в точке x_0 получаем, что $\varphi(x) \to \varphi(x_0)$ при $x \to x_0$. Поэтому

$$\overline{0} = \mathcal{D}_x\, F(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \mathcal{D}_y\, F(x_0, y_0)\,(\varphi(x) - \varphi(x_0)) +$$
$$+ \overline{o}(\sqrt{|x - x_0|^2 + |\varphi(x) - \varphi(x_0)|^2}) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Из условия $\det \mathcal{D}_y\, F(x_0, y_0) \neq 0$ следует существование обратной матрицы к матрице $\mathcal{D}_y\, F(x_0, y_0)$. Поэтому

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = -\left(\mathcal{D}_y\, F(x_0, y_0)\right)^{-1} \Bigl(\mathcal{D}_x\, F(x_0, y_0)\,(x - x_0) +$$
$$+ \overline{o}(\sqrt{|x - x_0|^2 + |\varphi(x) - \varphi(x_0)|^2})\Bigr) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Определив матрицу $M = -\left(\mathcal{D}_y\, F(x_0, y_0)\right)^{-1} \mathcal{D}_x\, F(x_0, y_0)$, получаем

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = M\,(x - x_0) + \overline{o}(\sqrt{|x - x_0|^2 + |\varphi(x) - \varphi(x_0)|^2}), \quad x \to x_0. \tag{4}$$

Покажем, что в формуле (4) слагаемое $\overline{o}(\sqrt{|x - x_0|^2 + |\varphi(x) - \varphi(x_0)|^2})$ можно заменить на $\overline{o}(|x - x_0|)$. Это и будет означать дифференцируемость функции φ в точке x_0.

Согласно определению o-малого из формулы (4) получаем

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = M\,(x - x_0) + \varepsilon(x)\,\sqrt{|x - x_0|^2 + |\varphi(x) - \varphi(x_0)|^2}, \tag{5}$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = \overline{0}$. Поэтому существует число $\beta > 0$ такое, что $|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}\ \forall x \in U_\beta(x_0)$.

Обозначим $\Delta\varphi = |\varphi(x) - \varphi(x_0)|$. Так как $\sqrt{|x - x_0|^2 + |\Delta\varphi|^2} \leq |x - x_0| + |\Delta\varphi|$, то из (5) следует, что для любого $x \in U_\beta(x_0)$

$$\Delta\varphi \leq \|M\|\,|x - x_0| + |\varepsilon(x)|\,(|x - x_0| + \Delta\varphi) \leq \|M\|\,|x - x_0| + \frac{|x - x_0| + \Delta\varphi}{2},$$

а значит,

$$\Delta\varphi \leq (2\|M\| + 1)\,|x - x_0| \qquad \forall x \in U_\beta(x_0).$$

Следовательно, при $x \in U_\beta(x_0)$ справедливо неравенство

$$\sqrt{|x - x_0|^2 + |\Delta\varphi|^2} \leq \sqrt{1 + (2\|M\| + 1)^2}\ |x - x_0|.$$

Отсюда и из равенства (4) следует, что

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = M\,(x - x_0) + \overline{o}(|x - x_0|), \quad x \to x_0.$$

В силу леммы 1 § 8 главы 6 это означает, что функция φ дифференцируема в точке x_0 и ее матрица Якоби равна

$$\mathcal{D}\,\varphi(x_0) = M = -\Bigl(\mathcal{D}_y\, F(x_0, y_0)\Bigr)^{-1} \mathcal{D}_x\, F(x_0, y_0).$$

Шаг 4. Доказательство непрерывной дифференцируемости решения в окрестности точки x_0.

Так как для любого $x \in U_\gamma(x_0)$ имеем $\varphi(x) \in U_\delta(y_0)$, $\gamma \leq \delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,\varepsilon_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,\varepsilon_1$, то в силу соотношения (1) имеем

$$\det \mathcal{D}_y\, F(x, \varphi(x)) \neq 0 \qquad \forall x \in U_\gamma(x_0). \tag{6}$$

Кроме того, для любого $x \in U_\gamma(x_0)$ справедливо равенство $F(x, \varphi(x)) = \overline{0}$, и найдется окрестность точки $(x, \varphi(x))$, лежащая в $U_\varepsilon(x_0,y_0)$, поэтому функция F непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(x,\varphi(x))$. Следовательно, доказанное на предыдущем шаге утверждение останется справедливым, если в нем точку (x_0,y_0) заменить точкой $(x,\varphi(x))$, где $x \in U_\gamma(x_0)$. А именно, функция φ дифференцируема в любой точке $x \in U_\gamma(x_0)$ и

$$\mathcal{D}\,\varphi(x) = -\Big(\mathcal{D}_y\,F(x,\varphi(x))\Big)^{-1}\mathcal{D}_x\,F(x,\varphi(x)) \qquad \forall x \in U_\gamma(x_0). \tag{7}$$

Следовательно, функция φ непрерывна в $U_\gamma(x_0)$ и, используя непрерывную дифференцируемость функции F в $U_\varepsilon(x_0,y_0)$, получаем непрерывность в $U_\gamma(x_0)$ правой части равенства (7). Поэтому матрица Якоби $\mathcal{D}\,\varphi(x)$ непрерывна в $U_\gamma(x_0)$, т. е. функция φ непрерывно дифференцируема в $U_\gamma(x_0)$. □

§ 5. Теорема об обратном отображении

Лемма 1. Пусть функция $g : Y \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на открытом множестве $Y \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для любого открытого множества $G \subset \subset \mathbb{R}^m$ его прообраз $Y_0 = \{y \in Y : g(y) \in G\}$ является открытым множеством.

Доказательство. Пусть y_0 – произвольная точка множества Y_0. Требуется доказать, что существует число $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(y_0) \subset \subset Y_0$. Из определения множества Y_0 следует, что $g(y_0) \in G$. Поскольку множество G открыто, то $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(g(y_0)) \subset G$. Из непрерывности функции $g(y)$ в точке y_0 открытого множества Y следует, что существует число $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(y_0) \subset Y$ и для любого вектора $y \in U_\delta(y_0)$ выполняется включение $g(y) \in U_\varepsilon(g(y_0))$. Следовательно, $\forall y \in U_\delta(y_0) \hookrightarrow\ g(y) \in G$, что по определению множества Y_0 означает $U_\delta(y_0) \subset Y_0$. □

Определение. Пусть для вектор-функции $g(y)$ размерности векторов y и $g(y)$ совпадают. Определитель матрицы Якоби $\mathcal{D}\,g(y)$ называется *якобианом* отображения g и обозначается через $\mathcal{J}_g(y)$:

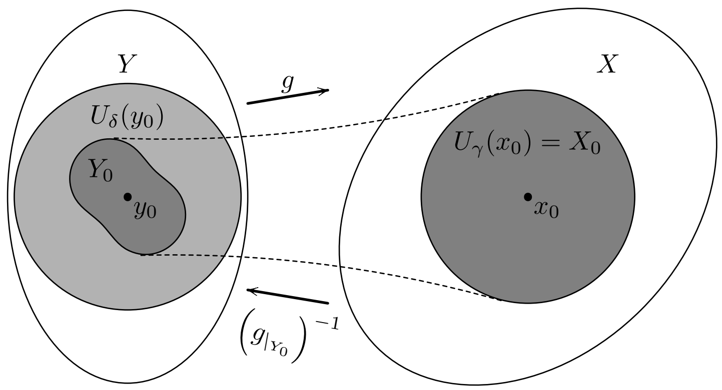
$$\mathcal{J}_g(y) = \det \mathcal{D}\,g(y).$$

Определение. Пусть заданы множества X, Y. Сужением функции $f : X \to Y$ на множество $X_0 \subset X$ называется функция $f_{|_{X_0}} : X_0 \to Y$, определяемая формулой $\forall x \in X_0 \hookrightarrow\ f_{|_{X_0}}(x) = = f(x)$.

Теорема 1. (Об обратном отображении.) Пусть заданы открытое множество $Y \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируемое отображение $g : Y \to \mathbb{R}^n$ с неравным нулю якобианом:

$$\forall y \in Y \hookrightarrow\ \mathcal{J}_g(y) \neq 0.$$

Тогда отображение $g : Y \to \mathbb{R}^n$ локально обратимо, т. е. для любой точки $y_0 \in Y$ существуют открытые множества X_0 и Y_0 в пространстве $\mathbb{R}^n$ такие, что $y_0 \in Y_0 \subset Y$ и сужение отображения $g_{|_{Y_0}} : Y_0 \to \to X_0$ является взаимно однозначным отображением множества Y_0 на множество X_0. Причем обратное отображение $\left(g_{|_{Y_0}}\right)^{-1} : X_0 \to Y_0$ является непрерывно дифференцируемым отображением с неравным нулю якобианом.



Доказательство. Обозначим $x_0 = g(y_0)$ и применим теорему о неявной функции к функции $F(x,y) = g(y) - x$. Из непрерывной дифференцируемости функции $g(y)$ следует непрерывная дифференцируемость функции $F(x,y)$. Кроме того, $F(x_0,y_0) = g(y_0) - x_0 = \overline{0}$ и $\det \mathcal{D}_y\,F(x_0,y_0) = \det \mathcal{D}\,g(y_0) = \mathcal{J}_g(y_0) \neq 0$. Таким образом, все условия теоремы о неявной функции выполнены, и, согласно этой теореме, существуют числа $\gamma > 0$, $\delta > 0$ и непрерывно дифференцируемая функция $\varphi : U_\gamma(x_0) \to U_\delta(y_0)$ такая, что для любого вектора $x \in U_\gamma(x_0)$ система уравнений $F(x,y) = \overline{0}$ (эквивалентная системе уравнений $g(y) = x$) на множестве $U_\delta(y_0)$ имеет единственное решение $y = \varphi(x)$.

Определим множества $X_0 = U_\gamma(x_0)$ и $Y_0 = \{y \in U_\delta(y_0) : g(y) \in \in X_0\}$. Поскольку $\forall y \in Y_0 \hookrightarrow\ g(y) \in X_0$, то отображение g переводит элементы множества Y_0 в элементы множества X_0. Отображение $g_{|_{Y_0}} : Y_0 \to X_0$ является взаимно однозначным, поскольку для любого вектора $x \in X_0$ существует единственный вектор $y \in Y_0$ такой, что $g(y) = x$. Этот вектор $y = \varphi(x)$ является единственным решением системы уравнений $F(x, y) = \overline{0}$ относительно y. Отсюда следует также, что отображение $\varphi : X_0 \to Y_0$ является обратным к отображению $g_{|_{Y_0}} : Y_0 \to X_0$, т. е. $\varphi = \left(g_{|_{Y_0}}\right)^{-1}$.

Поскольку множество Y_0 является прообразом открытого множества $X_0 = U_\gamma(x_0)$ при непрерывном отображении g, то в силу леммы 1 множество Y_0 открыто.

В силу теоремы о неявной функции функция $\left(g_{|_{Y_0}}\right)^{-1}(x) = \varphi(x)$ непрерывно дифференцируема. Дифференцируя левую и правую части системы уравнений $g(\varphi(x)) = x$, по теореме о дифференцировании сложной функции получаем $\forall x \in X_0 \hookrightarrow\ \mathcal{D}\, g(\varphi(x))\ \mathcal{D}\,\varphi(x) = E$ – единичная матрица. Следовательно, $\det \mathcal{D}\, g(\varphi(x)) \cdot \det \mathcal{D}\,\varphi(x) = = \det E = 1$. Поэтому $\forall x \in X_0 \hookrightarrow\ \det \mathcal{D}\,\varphi(x) \neq 0$. □

Замечание. В условиях теоремы 1 отображение g может не быть глобально обратимым, т. е. оно может переводить различные точки множества Y в одну и ту же точку. Пусть, например,

$$Y = \{(r, \varphi) : r \in (1, 3),\ \varphi \in (-\pi, 3\pi)\}, \qquad g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Отображение $g : Y \to \mathbb{R}^2$ непрерывно дифференцируемо; матрица Якоби этого отбражения равна $\mathcal{D}\, g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$, а якобиан: $\mathcal{J}_g(r, \varphi) = r \neq 0 \quad \forall (r, \varphi) \in Y$. Однако отображение $g : Y \to \to \mathbb{R}^2$ не является обратимым, так как $g(2, 0) = g(2, 2\pi) = \binom{2}{0}$.

Теорема 2. Образ открытого множества $Y \subset \mathbb{R}^n$ при непрерывно дифференцируемом отображении $g : Y \to \mathbb{R}^n$ с неравным нулю якобианом является открытым множеством.

Доказательство. Через G обозначим образ множества Y при отображении g:

$$G = g(Y) = \{g(y) : y \in Y\}.$$

Покажем, что множество G открыто. Пусть $g_0 \in G$. Требуется доказать, что

$$\exists \delta > 0 : \quad U_\delta(g_0) \subset G.$$

По определению множества G из условия $g_0 \in G$ следует, что существует вектор $y_0 \in Y$ такой, что $g(y_0) = g_0$. В силу теоремы 1 существуют открытые множества X_0 и Y_0 такие, что $g(Y_0) = X_0$ и $y_0 \in Y_0 \subset Y$. Следовательно, $g_0 = g(y_0) \in X_0$ и в силу открытости множества X_0 существует число $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(g_0) \subset X_0$. Поскольку $Y_0 \subset Y$, то $X_0 = g(Y_0) \subset g(Y) = G$, и, следовательно, $U_\delta(g_0) \subset G$. □

Замечание. Условие отличия от нуля якобиана отображения в теореме 2 существенно. Например, непрерывно дифференцируемое отображение $g(y) = \overline{0}$ переводит любое открытое множество G в множество, состоящее из одной точки $\overline{0}$, которое не является открытым.

Напомним, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *линейно-свя́зным*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ существует непрерывная на некотором отрезке $[t_1, t_2]$ вектор-функция $x(t)$ со значениями в X и такая, что $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$.

Теорема 3. Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на линейно-связном множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда множество значений $f(X)$ является линейно-связным.

Доказательство. Рассмотрим произвольные точки $f_1, f_2 \in \in f(X)$. По определению множества значений $\exists x_1, x_2 \in X$: $f(x_1) = = f_1$, $f(x_2) = f_2$. Поскольку множество X линейно-связно, то существует непрерывная вектор-функция $x : [t_1, t_2] \to X$ такая, что $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$. По теореме о непрерывности сложной функции вектор-функция одной переменной $\varphi(t) = f(x(t))$ непрерывна на отрезке $[t_1, t_2]$. Следовательно, произвольные две точки $f_1, f_2 \in \in f(X)$ можно соединить кривой $\Gamma = \{\varphi(t) : t \in [t_1, t_2]\} \subset f(X)$, т. е. множество $f(X)$ линейно-связно. □

Поскольку открытое линейно-связное множество называется областью, то из теорем 2, 3 получаем

Следствие. (Принцип сохранения области.) Образ области $Y \subset \mathbb{R}^n$ при непрерывно дифференцируемом отображении $g : Y \to \to \mathbb{R}^n$ с неравным нулю якобианом является областью.

Предметный указатель