偶數條直線

性質2. 3. $n \times n$拉丁方陣宮格(x, y)中的數字為$[(x + y - 2)mod\ n] + 1$，如圖2.4.為偶數8×8示意圖。

事實2.5. 標好標滿的表格畫法為，先列出$n \times n$的表格並標上L_1~L_n，如圖3.6.。因同一條直線不會和自己產生交點，因此將主對角線上的宮格鋪上灰色網底，如圖3.7.。L_a和L_b的交點與L_b和L_a的交點一樣，因此$(L_a，L_b)$和$(L_b，L_a)$需填入相同數字，只要讓表格每行每列數字不重複即可標好標滿。

$$\begin{bmatrix} & L_1 & \cdots & L_n \\ L_1 & & & \\ \vdots & & & \\ L_n & & & \end{bmatrix}$$

圖2.6.

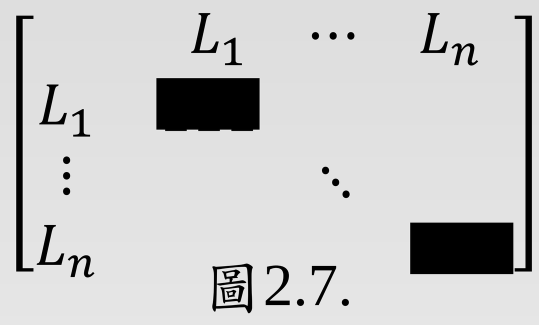

圖2.7.

$$\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

$(8,1) = (8 + 1 - 2)mod\ 8 + 1 = 8$
$(7,2) = (7 + 2 - 2)mod\ 8 + 1 = 8$
$(6,3) = (6 + 3 - 2)mod\ 8 + 1 = 8$
$(5,4) = (5 + 4 - 2)mod\ 8 + 1 = 8$
$(4,5) = (4 + 5 - 2)mod\ 8 + 1 = 8$
$(3,6) = (3 + 6 - 2)mod\ 8 + 1 = 8$
$(2,7) = (2 + 7 - 2)mod\ 8 + 1 = 8$
$(1,8) = (1 + 8 - 2)mod\ 8 + 1 = 8$

圖2.4.

事實2. 8. R_n^2的標法為，先填入$(n-1) \times (n-1)$的拉丁方陣，使每行每列數字都不重複，再將主對角線上(L_r, L_r)的數移至(L_r, L_n)及(L_n, L_r)。則主對角線上的數字都會被移至同一條直線，因此必須證明他們不會重複。

性質2.9. 利用反證法，假設$(2k-1) \times (2k-1)$的拉丁陣主對角線上有兩個數$(x_1，x_1)$和$(x_2，x_2)$重複。則兩數相減的值$|(2 \times x_1) -$

二分圖

性質2. 10. $n = 2^k$條直線$\{L_1 \sim L_{2^k}\}$，平分成$l_1 = \{L_1 \sim L_{2^{k-1}}\}$和$l_2 = \{L_{2^{k-1}+1} \sim L_{2^k}\}$兩群，則$l_1$中的任一直線$L_i$與$l_2$中的任一直線$L_j$產生的交點$P_{i,j}$可以用下列方式標號。設$i = 0 \sim 2^{k-1} - 1$，將所有的交點$P_{1+i,\ 2^{k-1}+1+i}$都標上"1"；將所有的交點$P_{1+i,\ 2^{k-1}+1+[(i+1)mod\ 2^{k-1}]}$都標上"2"；將所有的交點$P_{1+i,\ 2^{k-1}+1+[(i+2)mod\ 2^{k-1}]}$都標上"3"；……；將所有的交點$P_{1+i,\ 2^{k-1}+1+[(i+2^{k-1}-1)mod\ 2^{k-1}]}$都標上"$2^{k-1}$"，如圖3.11.、圖3.12.、圖3.13.。

由上述標號方法可知，l_1中的任何一條直線L_i，其與l_2中任何一條直線的交點標號皆不相同。以L_1為例子，其與l_2中所有直線的交點標號如圖2.14.。同樣的l_2中的任何一條直線L_j，其與l_1中任何一條直線的交點標號也皆不相同。以$L_{2^{k-1}+1}$為例子，其與l_1中所有直線的交點標號如圖2.15.。

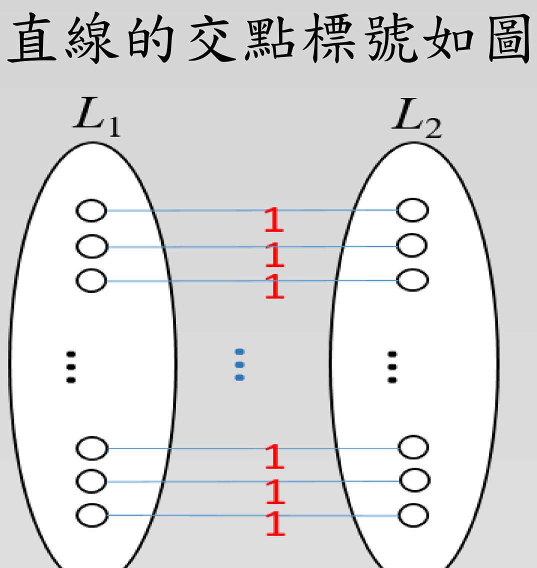

圖2.11.

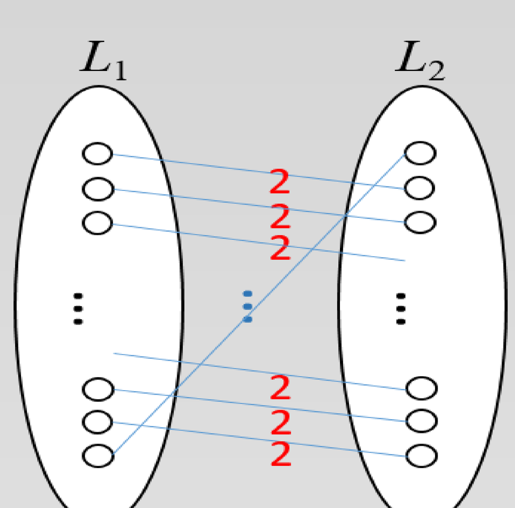

圖2.12.

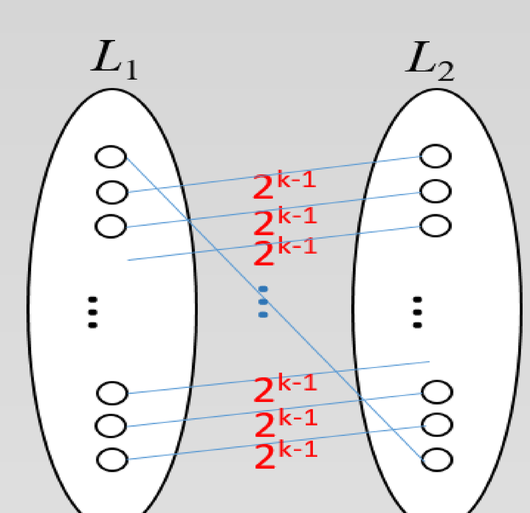

圖2.13.

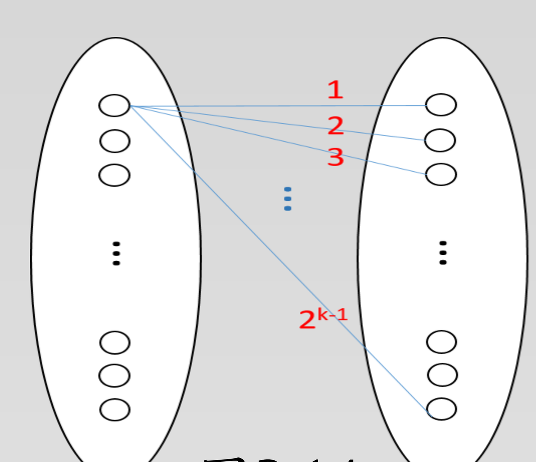

圖2.14.

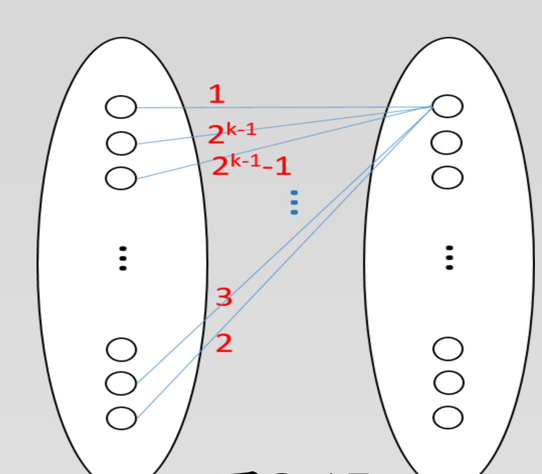

圖2.15.

性質2.16. $n = 2^k$條直線$\{l_1 \sim l_{2^k}\}$，平分成L_1和L_2兩群並完成標號後，$L_1 = \{l_1 \sim l_{2^{k-1}}\}$的$2^{k-1}$條直線和$L_2 = \{l_{2^{k-1}+1} \sim l_{2^k}\}2^{k-1}$條直線可繼續依性質2.10.各自平分成$L_{1,1}$、$L_{1,2}$和$L_{2,1}$、$L_{2,2}$兩群並完成標號。

性質2.17. 重複性質2.16. 直到無法再分群為止，如此總共對$\frac{2^k \times (2^k - 1)}{2} = \frac{n \times (n-1)}{2}$個交點完成標號，共標了$2^k - 1 = n - 1$個號碼。

性質2.18. 利用二分圖找到的標好標滿的標號方法不同於利用拉丁方陣找到的標好標滿的標號方法，如圖2.19.、圖2.20.和圖2.21。

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	1
2	2	3	4	5	6	7	1	3
3	3	4	5	6	7	1	2	5
4	4	5	6	7	1	2	3	7
5	5	6	7	1	2	3	4	2
6	6	7	1	2	3	4	5	4
7	7	1	2	3	4	5	6	6
8	1	3	5	7	2	4	6	

圖2.19.

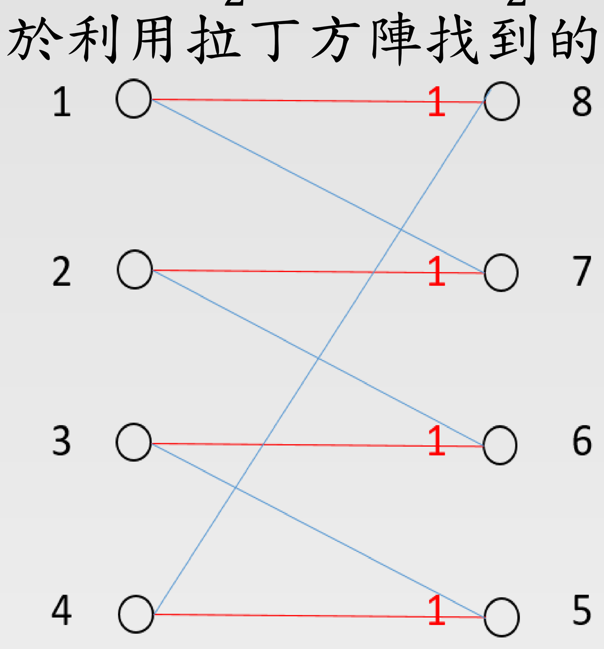

圖2.20.

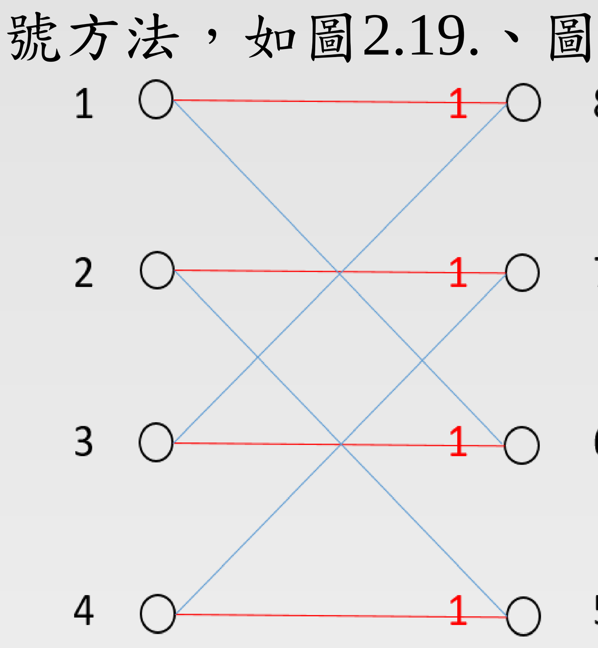

圖2.21.

03 三維度空間

性質3.1. *Baranyai's theorem*證明出一個*complete k-uniform hypergraph*可以被拆成C_{k-1}^{n-1}個*1-factor*的條件為n可以整除k。此證明相當於此題目能標好標滿的條件為n可以整除3。

[證明] *Complete 3-uniform hypergraph*中，每個點相當於標好標滿R_n^3中的一個平面、每條*hyperedge*相當於標好標滿R_n^3中的一個交點。如此，每一個*1-factor*為被標上相同數字的點，而總共有C_2^{n-1}個數字也就是C_{k-1}^{n-1}個*1-factor*。

Q.E.D.

三分圖

事實3.2. 3^k個平面，平分成E_0、E_1和E_2三群。則交點可分為三種類型，

類型一: $P_{i,j,k}$，其中相交的三個平面F_i、F_j、F_k恰好分別屬於E_0、E_1和E_2。

類型二: $P_{i,j,k}$，其中相交的三個平面F_i、F_j、F_k中恰好有兩個屬於E_0、E_1、E_2中的其中一群。另一個平面則與其他平面屬於不同群。

類型三: $P_{i,j,k}$，其中相交的三個平面F_i、F_j、F_k恰好同屬於E_0、E_1和E_2中的其中一群。

性質3.3. $R_{3^2}^3$，類型一的交點標號方法為，交點$V(E_{0,k}, E_{1,(k+i)mod3}, E_{2,(k+j)mod3})$標上$3i + j + 1$，$i = \{0,1,2\}, j = \{0,1,2\}, k = \{0,1,2\}$。

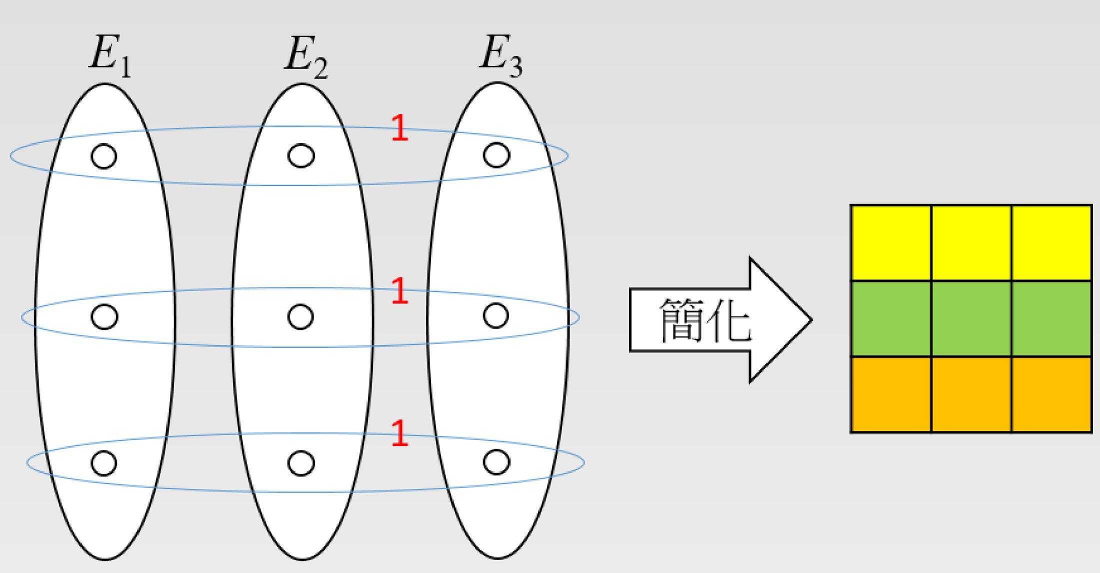

圖3.4.

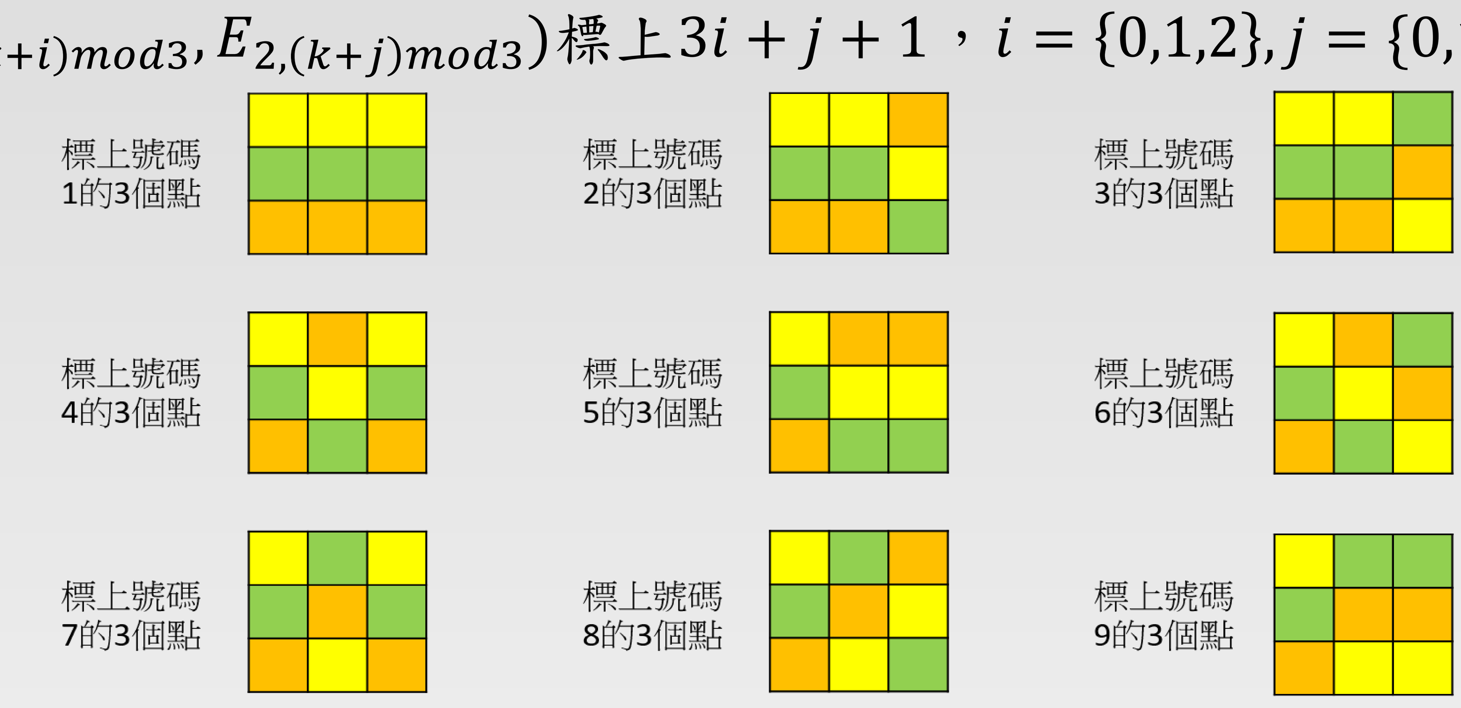

圖3.5.

Q.E.D.