第五十九屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：標好標滿

關 鍵 詞：拉丁方陣、*Banayai`s threorem*、二分圖和三分圖

編 號：

摘要

探討平面上條直線，每兩條相交出一個交點，但不三線共點，並在每個交點上標上1至*n-*1其中一個數字，是否能使任何一條直線上的交點恰好出現1至*n-*1各一次。得到奇數條直線無法、偶數條直線可以。

推廣至三維空間，探討個平面，每三個相交出一個交點，但不四面共點，發現到三維空間有兩種推廣方式：

1. 在每個交點上標上數字，使每條直線上的數字都不重複
2. 在每個交點上標上數字，使每個平面上的數字都不重複

在此兩種情況下，可見當有三個平面時皆可以。

探討第二種推廣後發現在六個平面時亦可以給出構造。而後又發現其等價於*Baranyai's theorem*故得到平面個數為三的倍數皆可以，再根據文獻構造出三維度空間9個平面的一種方法。

壹、前言

一、研究動機

科學研習月刊第57卷第5期第58頁，台灣科學教育館網站，篇名【標好標滿】[4,2018年5月]。如題目1.1.1.。

**題目1.1.1.** 桌上畫著四條直線，兩兩相交。小志想在每個交點上標一個數字，讓沿著任何一條直線上的三個交點都剛好出現 各一次。小志想了一下就成功了。

聰明的讀者知道小志怎麼做的嗎？

小定接著想：「如果五條直線兩兩相交，能不能也做同樣的事？」也就是說，在每個交 點上標一個數字，讓任何一條線上的四個點都出現，剛好各一次？

請問聰明的讀者，你能幫幫小定嗎？如果直線有更多條，結果又是如何呢？

二、研究目的

**研究目的1.2.1.** 平面上有條直線，每兩條直線相交出一個交點且不三線共點，並在每個交點標上數字其中一個數字，使得沿著任何一條直線上的個交點都剛好出現 各一次。

**研究目的1.2.2.** 三維度空間中有個平面，每兩個平面相交出一條直線、每三個平面相交出一個交點，每三個平面相交出一個交點且不四個平面共點。每個交點標上數字其中一個數字

，使沿著任何一條直線上的個交點都剛好出現 各一次。

**研究目的1.2.3.** 三維度空間中有個平面，每兩個平面相交出一條直線、每三個平面相交出一個交點，每三個平面相交出一個交點且不四個平面共點。在每個交點上標上數字其中一個數字，使沿著任何一個平面上的個交點都剛好出現 各一次。

三、研究器材

紙、筆和電腦

四、符號與名詞定義 （應歸類在研究目的1.2.1.）

**符號1.4.1.** : 空間中的第條直線。

**符號1.4.2.** : 空間中的第個點。

**符號1.4.3.** : 和的交點。

**符號1.4.4.** :維空間，條直線兩兩相交，且不三線共點。是否為一集合？

**定義1.4.5.** 將的每個交點給予標號。若每條直線，均有至的連續自然數，則稱為**標好標滿**。

**符號1.4.6.** : 將直線分群後，其中的第群。

五、簡單的圖形

二維空間，一條直線沒有交點，一條直線本身無法標好標滿。

考慮，為二條不平行直線，如圖1.5.1.。平面上，若條直線平行則沒有交點，如圖1.5.2.。



圖1.5.1. 圖1.5.2.

**事實1.5.3.** 依題目1.1.1.的規定，平面上有條相異直線，直線兩兩相交，則交點個數為

此時，為組合數，個相異物任取個方法數。

貳、文獻探討與預備知識

一、拉丁方陣

本研究所稱的拉丁方陣填法如下。

**例子2.1.1.** 將數字填入一個的宮格中使每一行每一列數字都不重複，如圖2.1.2.。

圖2.1.2.

**例子2.1.3.** 將數字填入一個的宮格中使每一行每一列數字都不重複，如圖2.1.4.。

圖2.1.4.

如此，

圖2.1.2.的一般式如圖2.1.5.。

圖2.1.5.

圖2.1.4.的一般式如圖2.1.6.。

圖2.1.6.

因此，

**性質2.1.7.** 拉丁方陣宮格中的數字為，如圖2.1.8.為偶數示意圖。可利用矩陣元素的表示方法：，其中為的拉丁方陣。

[證明]令，成立。我利用數學歸納法，假設成立。則宮格中的數為

*。*

同理，宮格中的數為

*。*

Q.E.D.

圖2.1.8.

參、二維度空間奇數直線

一、二維度空間奇數直線

**例子3.1.1.** 如圖3.1.2.及3.1.3.，平面上三條線的結構圖與標法，設填入。而無法被數字1、2替代，因此無法標好標滿。

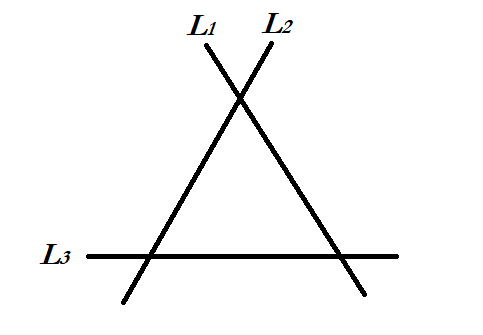
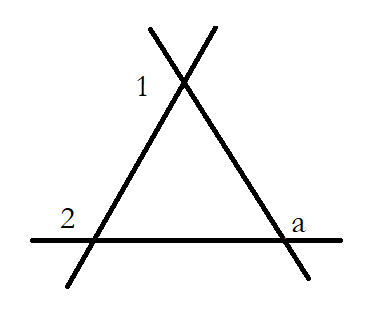
 

圖3.1.2. 圖3.1.3.

**性質3.1.4.** 平面上奇數條線無法標好標滿。

[證明] 任取兩條線必有一個交點。不妨假設該交點標號為。如此，我們可以從平面上移除這兩條線。經過有限次的移除，會留下一條線，無法和別條線產生交點標號為。如此，奇數條線無法標好標滿。如示意圖3.1.5.。

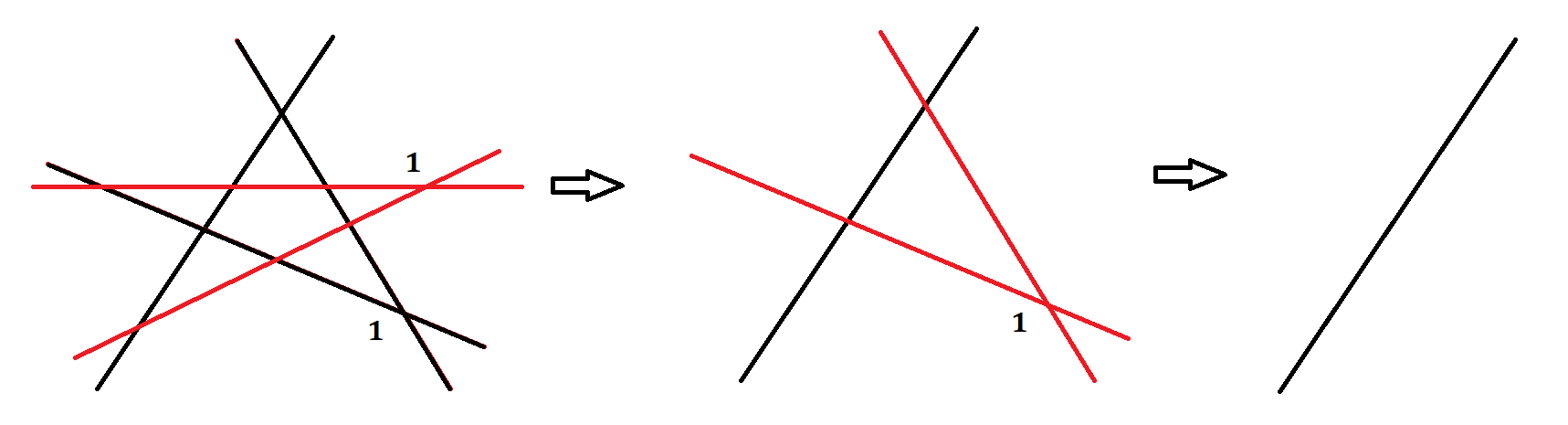


圖3.1.5.

Q.E.D.

肆、二維度空間偶數直線

一、標好標滿表格

為了完成的標好標滿，我設計出一個標好標滿的表格。

**例子4.1.1.** 將的個點，從第一條線上的點開始依序列出，如圖4.1.2.，可以發現它的形狀呈現為倒三角形。若複製兩個倒三角形，則會呈現出圖4.1.3.，這時表格中的座標和都代表的是和的交點。

圖4.1.2. 圖4.1.3.

得到，

**事實4.1.2.** 標好標滿的表格畫法為，先列出的表格並標上，如圖4.1.5.。因為同一條直線不會和自己產生交點，因此將主對角線上的宮格鋪上灰色網底，如圖4.1.6.。和的交點與的交點是一樣的，因此，和，需填入相同數字，接著只要讓表格每行每列數字不重複即可標好標滿。

圖4.1.5. 圖4.1.6.

二、二維度空間偶數直線

**事實4.2.1.** 在二維度空間中，當等於偶數時，才可能符和條件標數。

**例子4.2.2.** ，先填入的拉丁方陣，使的每行每列數字都不重復。再將對稱線上的數移至及，如圖4.2.3.。

圖4.2.3.

**事實4.2.3.** 的標法為，先填入的拉丁方陣，使每行每列數字都不重復，再將主對角線上的數移至及。則主對角線上的數字都會被移至同一條直線，因此必須證明他們不會重複。

三、主對角線上的數不會重複

**事實4.3.1.** 拉丁方陣宮格中的數為

**性質4.3.2.** 在偶數條直線的標好標滿中，會有奇數個數。利用反證法，假設主有兩個位置和的數字重複。則兩數相減的值必須等於奇數。

[證明] 若表格中兩個數字重複，則經由公式證明和同餘於但非同數，因此為的倍數。接著將對角線上最大及最小的數，即是座標及帶入上式，得到（因此主對角線上任選兩數帶入上式皆。因此，必須等於。不妨直接假設。我有另外一種證明。

Q.E.D.

得到，

**事實4.3.3.** 經由上述說明，是偶數、是奇數，矛盾。因此，可以標好標滿。）？我看不懂

四、二分圖

**事實4.4.1**. 利用二分圖的方法，可以找到另一種將標好標滿的標號方法。

**性質4.4.2.** 條直線，平分成和兩群（不是*E*嗎？），則中的任一直線與中的任一直線產生的交點可以用下列方式標號，使得不會有某一條直線上的任兩個交點標號相同。

設，

將所有的交點都標上“1”；

將所有的交點都標上 “2”；

將所有的交點都標上 “3”；

將所有的交點都標上 “”；

對於同一個數字的標點方法中，可利用函數的onto及one-to-one證明：

令，對於所有令函數

對於同一條線的任兩種標點方法，可利用反證法說明不會有兩點有相同數字。

[證明] 所有被標上“1”的交點，為中的第*i*條直線與為中的第*i*條直線的交點，如圖4.4.3.。所有被標上“2”的交點，為中的第*i*條直線與為中的第[(*i*+1)mod ]條直線的交點，如圖4.4.4.。依此類推，所有被標上“”的交點，為中的第*i*條直線與為中的第條直線的交點，如圖4.4.5.。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 圖4.4.3. | 圖4.4.4. | 圖4.4.5. |

由上述標號方法可知，中的任何一條直線，其與中任何一條直線的交點標號皆不相同。以為例子，其與中所有直線的交點標號如圖4.4.6.。同樣的中的任何一條直線，其與中任何一條直線的交點標號也皆不相同。以為例子，其與中所有直線的交點標號如圖4.4.7.。

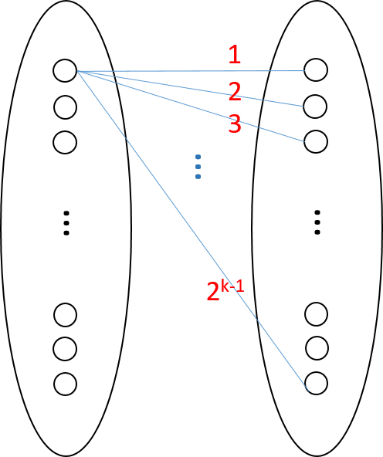
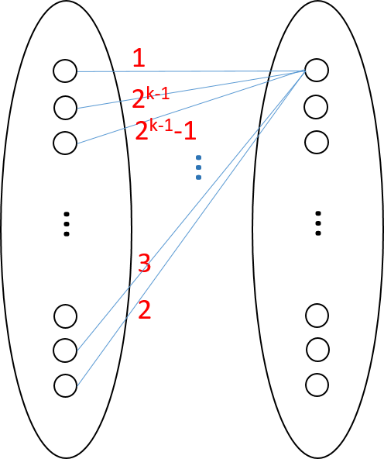
 

圖4.4.6. 圖4.4.7.

Q.E.D.

**性質4.4.8.** 條直線，依性質4.4.2.平分成和兩群並完成標號後，的條直線和的條直線可繼續依性質4.4.2.各自平分成和兩群並完成標號。

[證明] 和兩群的直線個數仍為偶數，所以可以繼續平分成兩群。另外分成和兩群後只有對中的任一直線與中的任一直線產生的交點標號。所有中任兩條直線的交點都尚未標號。同樣的中任兩條直線的交點也都尚未標號。因此仍可繼續依性質4.4.2.各自平分成和兩群並完成標號。

Q.E.D.

**性質4.4.9.** 重複性質4.4.8.的步驟直到無法再分群為止，如此總共對個交點完成標號，共標了個號碼。

[證明] 第一次分成和兩群時共對個交點完成標號，標了個不一樣的號碼。第二次各自分成和兩群時共對個交點完成標號，標了個不一樣的號碼。第三次分群時共對個交點完成標號，標了個不一樣的號碼。依此類推，第次分群時共對個交點完成標號，標了個不一樣的號碼。因此總共有

個交點完成標號，共標了=個不一樣的號碼。

Q.E.D.

**性質4.4.10.** 利用二分圖找到的標好標滿的標號方法不同於利用拉丁方陣找到的標好標滿的標號方法。

[證明] 以為例，利用拉丁方陣找到的標號方法如圖4.4.11.。其中、、、被標上號碼1。因此將、、、分成一群，、、、分成另一群，利用二分圖法繼續標號。雖然發現二分圖法中、、、會被標上相同號碼，如圖4.4.12.，與拉丁方陣找到的標號方法相同。但是二分圖法中、、、也會被標上相同號碼，如圖4.4.13.，與拉丁方陣找到的標號方法不同。

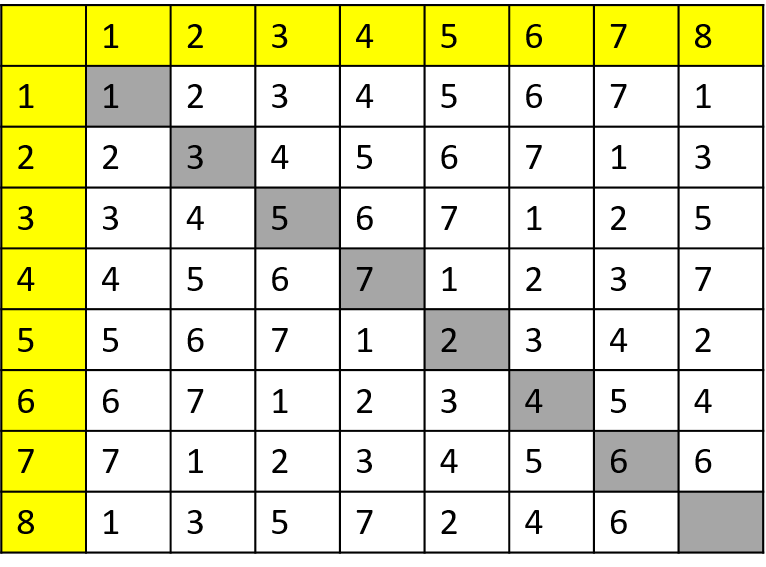
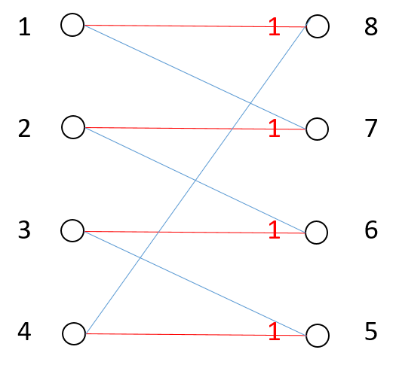
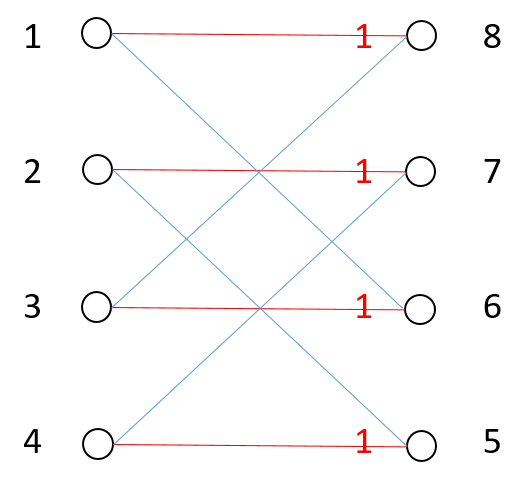
  

圖4.4.11. 圖4.4.12. 圖4.4.13.

Q.E.D.

伍、三維度空間的標法一

三維度空間中，

對於任意三個平面，存在共點；

對於任意四個平面，不存在共點。

本研究對於三維度空間有兩種類型的標法。

第一種標法，針對每條線上的數字不重複。將在第伍章討論。

第二種標法，針對每個平面上的數字不重複。將在第陸章討論。

一、題目分析

**題目5.1.1.** 有個平面，每兩個相交成一條直線、每三個相交成一個點、每四個不存在共點，在點上標上連續的自然數由到，使得每條線上的點數字不重複，則稱為標好標滿。

二、符號與名詞定義

**定義5.2.1.** 維度空間中，對於任意個相交出條直線、任意個平面相交出個點，在每個點上給予標號。若每條直線，均有至的連續自然數，則稱為標好標滿。

**符號5.2.2.** : 空間中的第個平面。

**符號5.2.3.** : 和的交線。

**符號5.2.4.** : 和和的交點。

**符號5.2.5.** : 維度空間，有個平面，每個平面相交成一條直線、每個平面相交成一個交點、每個平面不存在共點。（是否為集合？）

三、三維度偶數個平面的例子

**例子5.3.1.** ，不會產生交點，無須標好標滿。

**例子5.3.2.** ，其中一個平面上呈現的是。但無法標好標滿，因此也就無法標好標滿。上，、、分別是與、、相交出的線，但若在上填、上填，則就無法填上數字或。

**例子5.3.4.** ，其中一個平面上呈現的是。但無法標好標滿，而就也無法標好標滿。

因此，

**事實5.3.5.** ，其中一個平面上呈現的是，但無法標好標滿，而就也無法標好標滿。

四、三維度的三個平面問題

**事實5.4.1.** ，交點數量為，而個點要再平分給個數，每個數會出現次。類似方式用在二維平面中，恰好可以說明為何奇數條線不能填好填滿。

其中一定被2整除，因此或一定要是的倍數，。

**例子5.4.2.** ，會產生個交點，而我們只能在此點標上數字。如圖5.4.3.。



圖5.4.3.

**事實5.4.4.** 三維度空間，只有一個交點，可以標好標滿，如圖5.4.3.。

也就是，

**事實5.4.5.** ，個平面交於一點時，可以標好標滿。

**事實5.4.6.** 我試了的例子，、

的例子，、

的例子，、

的例子，。

都符合事實5.4.1.的條件，但我無法將它們標好標滿。

因此，

**猜想5.5.6.** ，時，無法標好標滿。

陸、三維度空間標法二

一、題目分析

**題目6.1.1.** 有個平面，每兩個相交成一條直線、每三個相交成一個點、每四個不存在共點，若我們在點上標上連續的自然數由到，使得每個平面上數字不重複，則稱為標好標滿。

[說明] 任意三個平面相交出一個交點，因此總交點數量是，將此數乘以後再平分給個平面，就是。（為何須乘以3？）可以想成找另外兩個不同的平面即可。

Q.E.D.

經由維基百科*Graph factorization*[7]我發現，

**性質6.1.2.** *Baranyai's theorem*證明出一個*complete k-uniform hypergraph*可以被拆成個*1****-****factor*的條件為可以被整除。此證明相當於題目6.1.1.能標好標滿的條件為可以整除。

[證明] *Complete 3-uniform hypergraph*中，每個點相當於標好標滿中的一個平面、每條*hyperedge*相當於標好標滿中的一個交點。如此，每一個*1****-****factor*為被標上相同數字的點，而總共有個數字也就是個*1****-****factor*。

Q.E.D.

上述部分須將下列的定義表述清楚才可以說明，且這裡新定義的名詞與研究部分必須說明清楚為何要提出這些名詞，比如將*complete k-uniform hypergraph*套用至哪一部分，且在此部分*k*值為何等等。

二、符號與名詞定義

**名詞6.2.1.** *Hypergraph*: 一種廣義上的圖，他的一條邊可以連接任意數量的頂點。

**名詞6.2.2.** *Hyperedge*: *Hypergraph* 中的邊。

**名詞6.2.3.** *Complete graph*: 個點，任意個點之間都有一條邊。

**名詞6.2.4.** *Complete k-uniform hypergraph*: 個點，任意個點之間都有一條*hyperedge*。

**名詞6.2.5.** *Subgraph*: 子圖，其中為原圖中點集合的子集合，為原圖中邊集合的子集合。

**名詞6.2.6.** *1****-****factor*: 一種*Subgraph*，恰好包含原圖中所有的點且只與一條邊相連。

應改寫成每個點只有對應到一條邊

**符號6.2.7.** : 、和連成的三角形。

**符號6.2.8.** : 的點集合。（一樣，是否為集合？）

**符號6.2.9.** : 的子集合。

**符號6.2.10.** : 將平面分群後，其中的第+1群？。

**符號6.2.11.** : 第群中的第個平面。可直接寫

**符號6.2.12.** : 、和的交點。

**符號6.2.13.** : 度空間中，有個度超立方體，每個相交成一個交點、每個不存在共點

二、三個平面和六個平面

**例子6.2.1.** 如圖6.2.2.、圖6.2.3.、圖6.2.4.，為的標法。

**例子6.2.5.** 如圖6.2.6.、圖6.2.7.、圖6.2.8.、圖6.2.9.、圖6.2.10.、圖6.2.11.，為的標法。

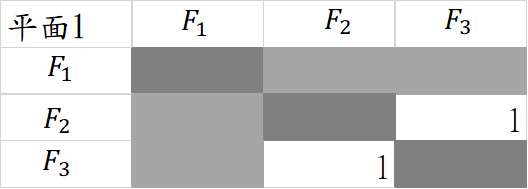
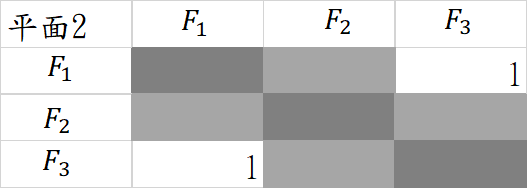
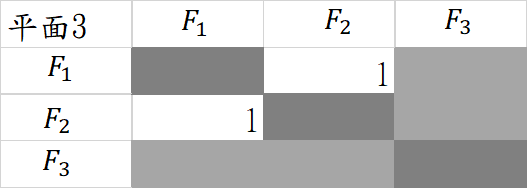
  

圖6.2.2. 圖6.2.3. 圖6.2.4.

圖6.2.6. 圖6.2.7.

圖6.2.8. 圖6.2.9.

圖6.2.10. 圖6.2.11.

平面*k*我覺得也能用表示

也就是，

我們可以使用一種標法，滿足題目6.1.1.的規定。

**性質6.2.12.** 對於三維空間，相異平面的個數不是的倍數無法標好標滿。

[證明]任意三個相異平面必有一個交點。不妨假設該交點標號為。如此，我們可以從三維空間移除這三個平面。經過有限次的移除，會留下一個平面或兩個平面，無法和別的平面產生交點標號為。如此，非個平面無法標好標滿。

Q.E.D.

三、九個平面的標法

Narsingh Deo and Paulius Micikevicius [7]示範了一種將9個頂點的*complete 3-uniform hypergraph*做*one-factorization*的方法。也就是對所有的*hyperedges*分群，每一群中的*hyperedges*恰好連到*complete 3-uniform hypergraph*中所有的頂點一次。每一群中的*hyperedges*集合稱做*1****-****factor*。透過性質6.1.2.可得知，

**事實6.3.1.** 將一個*complete 3-uniform hypergraph*的頂點依序編號並順時針方向排列，如圖6.3.2.(應該直接放complete graph，比較好理解)。每個頂點相當於標好標滿中的一個平面。任意3個點、、之間都有一條*hyperedge*相連，相當於標好標滿中3個平面、、的交點。對*complete 3-uniform hypergraph*做*one-factorization*產生的每一個*1****-****factor*，即為中可以被標上相同數字的點集合



圖6.3.2.

透過事實6.3.2.的轉換和[7]示範的方法，可得知，

**事實6.3.3.** 中的=84個交點可以分成10種類型，分別是、、、、、、、、和。對某一種類型，其中的分別代表屬於此類型的交點其相交的三個平面在圖6.3.2.中的順時鐘方向編號距離，且, 。

[說明] 以為例，若交點且，則()mod 9、()mod 9和()mod 9中最小的值等於1，且順時鐘方向的下一個編號距離也等於1。例如、、、等9個交點都屬於。相同的可以知道、、、等9個交點都屬於。

Q.E.D.

**事實6.3.4.** 。在除了點集合以外的每個的子集合中各挑選一個交點。若能找到將它們分成每個一組，設每組有、、且則可標好標滿。

[說明] 共會有個子集合，點集合會包含著個交點、其他的點集合則會包含個交點。在的情況下，個數字，每個數字會被標在個交點上。點集合的交點可湊出一個圓，如圖6.3.5.，因此會被標上同一個數字。若找到、、且，可湊出一個圓，則

、、 也可以湊出一個圓；

、、 也可以湊出一個圓；

、、也可以湊出一個圓；

、、 也都可以湊出一個圓。

**

圖6.3.5.

Q.E.D.

**例子6.3.6.** 如圖6.3.7.，、和中的、、可以湊出一個圓。則、和中的其他交點也可以湊出一個圓，共可湊出9個圓。湊出一個圓中的三個交點即是中可以被標上相同數字的三個交點。此外如圖6.3.8.，、和中的、、可以湊出一個圓。因此、和中的其他交點也可以湊出一個圓，共可湊出9個圓。最後如圖6.3.9.，、和中的、、可以湊出一個圓。因此、和中的其他交點也可以湊出一個圓，共可湊出9個圓。加上恰好可湊出一個圓，如圖6.3.5.，總共湊出28個圓，即是中標好標滿時需要的個數字。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 圖6.3.7. | 圖6.3.8. | 圖6.3.9. |

在[7]中並沒有提出一個通用的方法，說明如何中的個類型，每個類型湊出一個圓。明顯的並非所有可以整除3的*n*其類型個數都能剛好整除，只有當為整數時才可以。也就是說，只有當*n* = 6*k*+3時，中的個類型才可以整除。

**猜想6.3.10.** ，時，可以用事實6.3.4.的方式標好標滿。

四、的標好標滿

**事實6.4.1.** 利用三分圖的方法，可以將標好標滿。

**事實6.4.2.** 個平面，平分成、和三群。則交點可分為三種類型，

類型一: ，其中相交的三個平面、、恰好分別屬於、和。

類型二: ，其中相交的三個平面、、中恰好有兩個屬於、、中的其中一群。另一個平面則與其他平面屬於不同群。

類型三: ，其中相交的三個平面、、恰好同屬於、和中的其中一群。

**性質6.4.3.** ，類型一的交點標號方法為，交點標上，。

[證明] 當，交點被標上號碼1，，如圖6.4.4.。當，交點被標上號碼2，。依此類推，所有類型一的交點標號方法如圖6.4.5.，總共對27個交點用了9個標號。

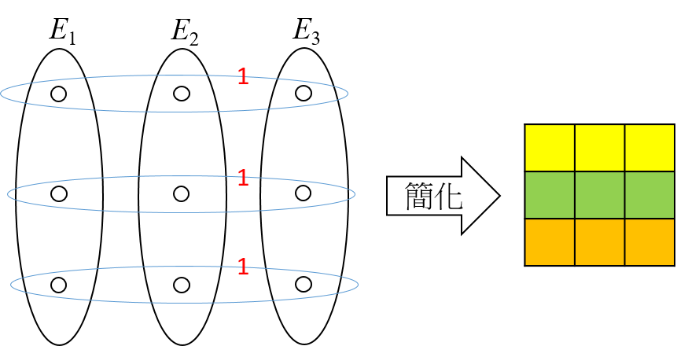


圖6.4.4.

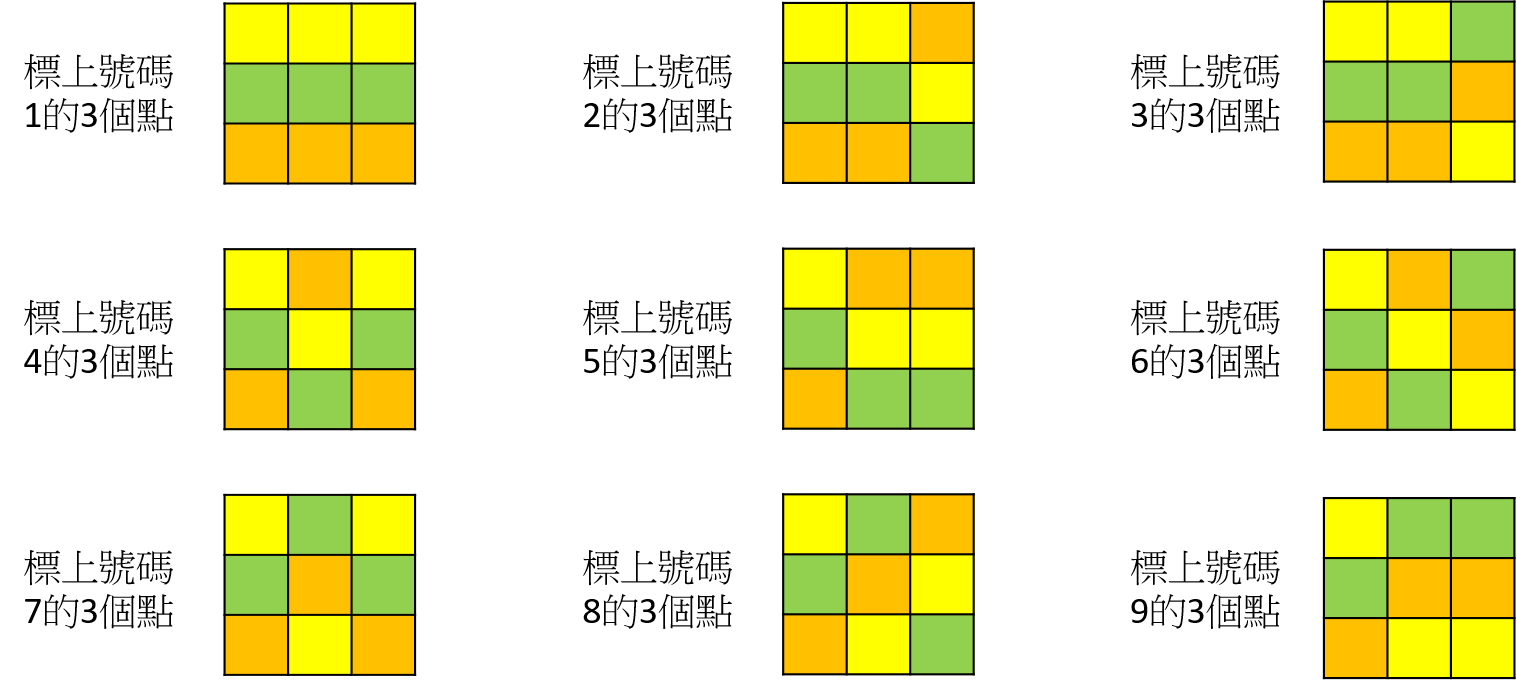


圖6.4.5.

Q.E.D.

**性質6.4.6.** ，類型二的交點標號方法為，交點標上；

標上；

標上；

標上；

標上；

標上，

。

[證明] 當，交點、、、、、分別被標上10、13、16、19、22、25，如圖6.4.7.。當，交點、、、、、分別被標上11、14、17、20、23、26，如圖6.4.8.。依此類推，所有類型二的交點標號方法如圖6.4.9.，總共對54個交點用了18個標號。

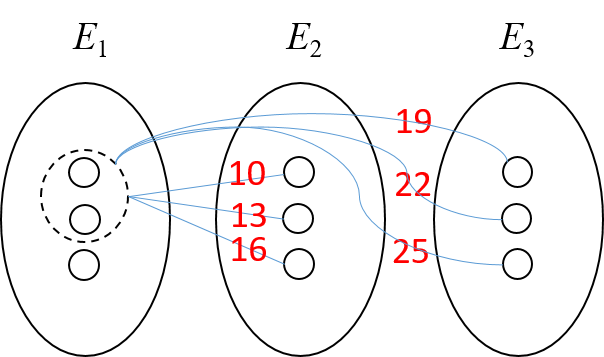
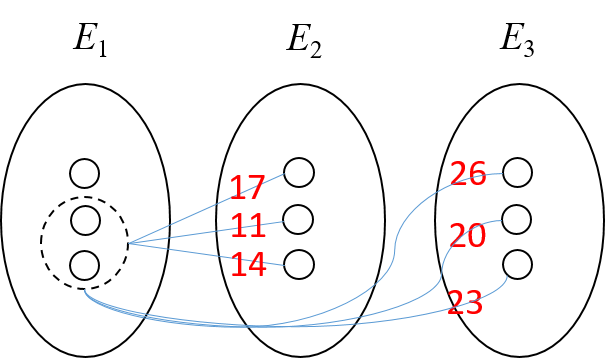
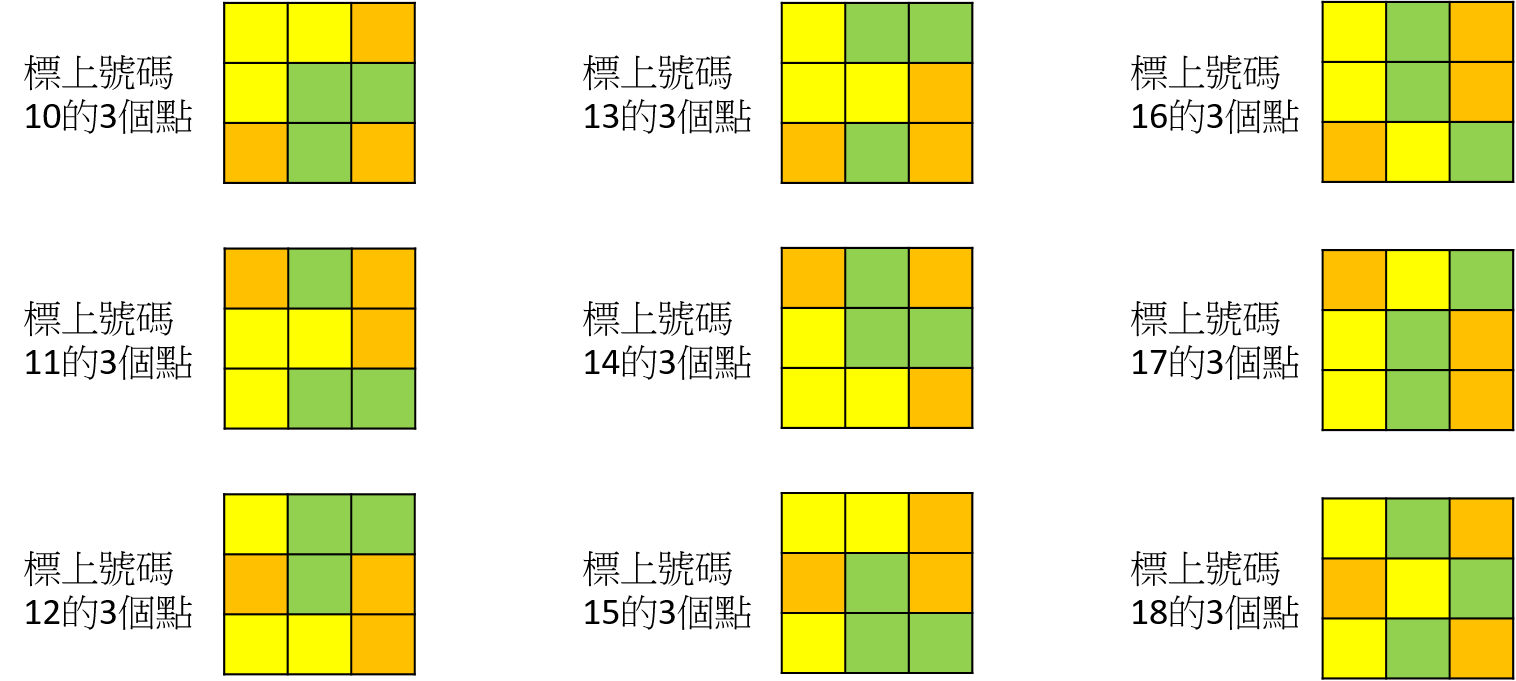
 

圖6.4.7. 圖6.4.8.



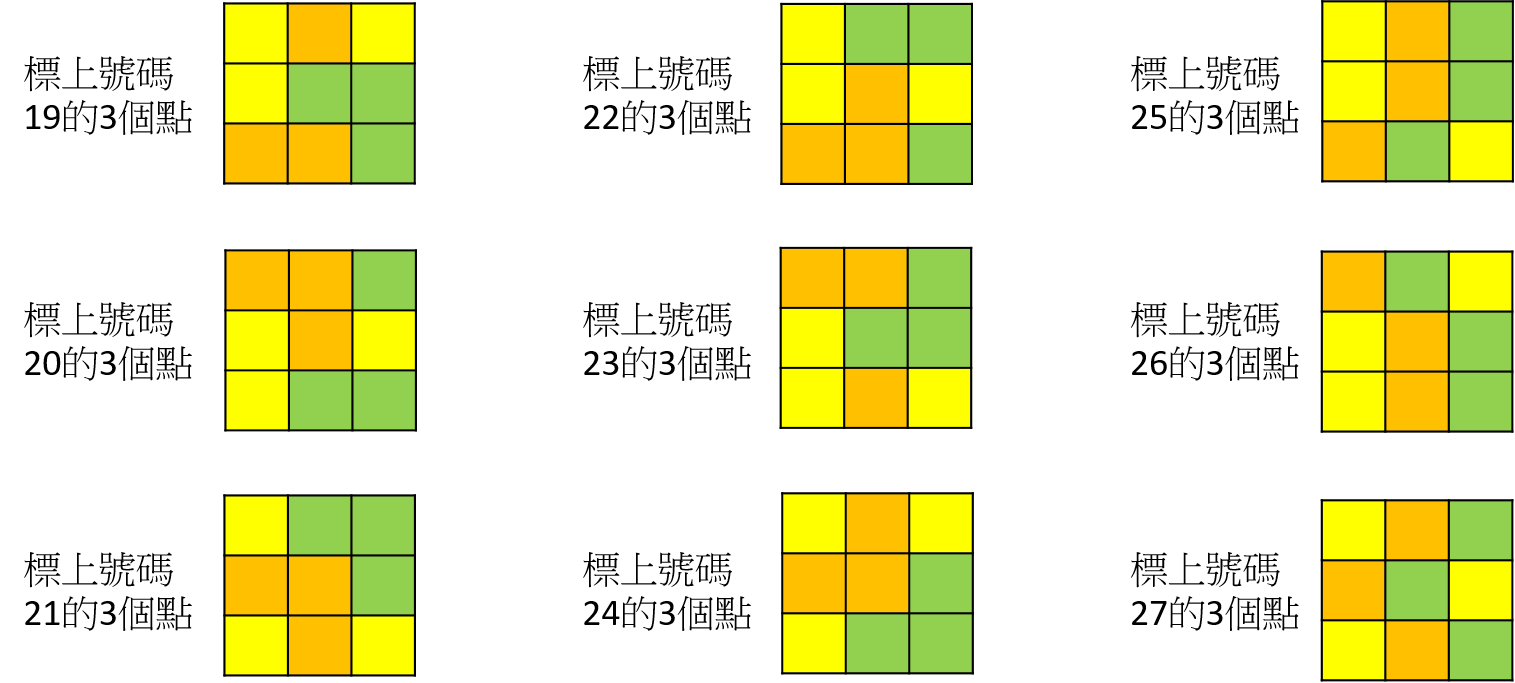


圖6.4.9.

Q.E.D.

**性質6.4.10.** ，類型三的交點標號方法為，交點標上，。

[證明] 因為只有9個平面，平分成三群後每群內恰好只有3個平面，並形成一個類型三交點。因此對每個類型三的交點標上28，總共對3個交點用了1個標號。

Q.E.D.

**性質6.4.11.** ，透過性質6.4.3.、性質6.4.6.和性質6.4.10.的標號方法，一個號碼在每個平面只會出現一次。

[證明] 透過圖6.4.5.和圖6.4.9.可得知，被標成相同號碼的三個交點，其相交的平面都彼此互斥。因此，一個號碼在每個平面只會出現一次。

Q.E.D.

**事實6.4.12.** ，透過性質6.4.3.、性質6.4.6.和性質6.4.10.的標號方法，每一個交點只會被標號一次。

[說明] 我們將上面標號方法所得到交點標號填入三維宮格中，以驗證恰好每一個交點只會被標號一次。為表達方便，我們將平面記作平面。結果如圖6.4.13.、圖6.4.14.、圖6.4.15.、圖6.4.16.、圖6.4.17.、圖6.4.18.、圖6.4.19.、圖6.4.20.、圖6.4.21.。

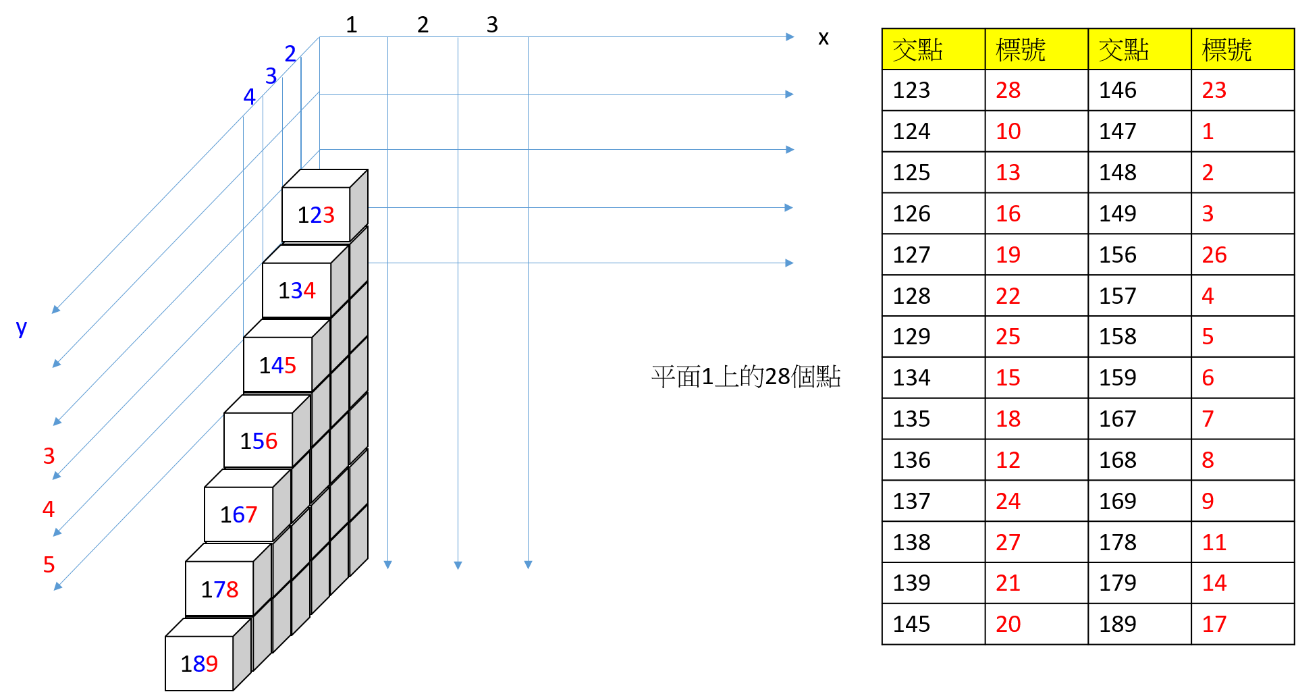


圖6.4.13.

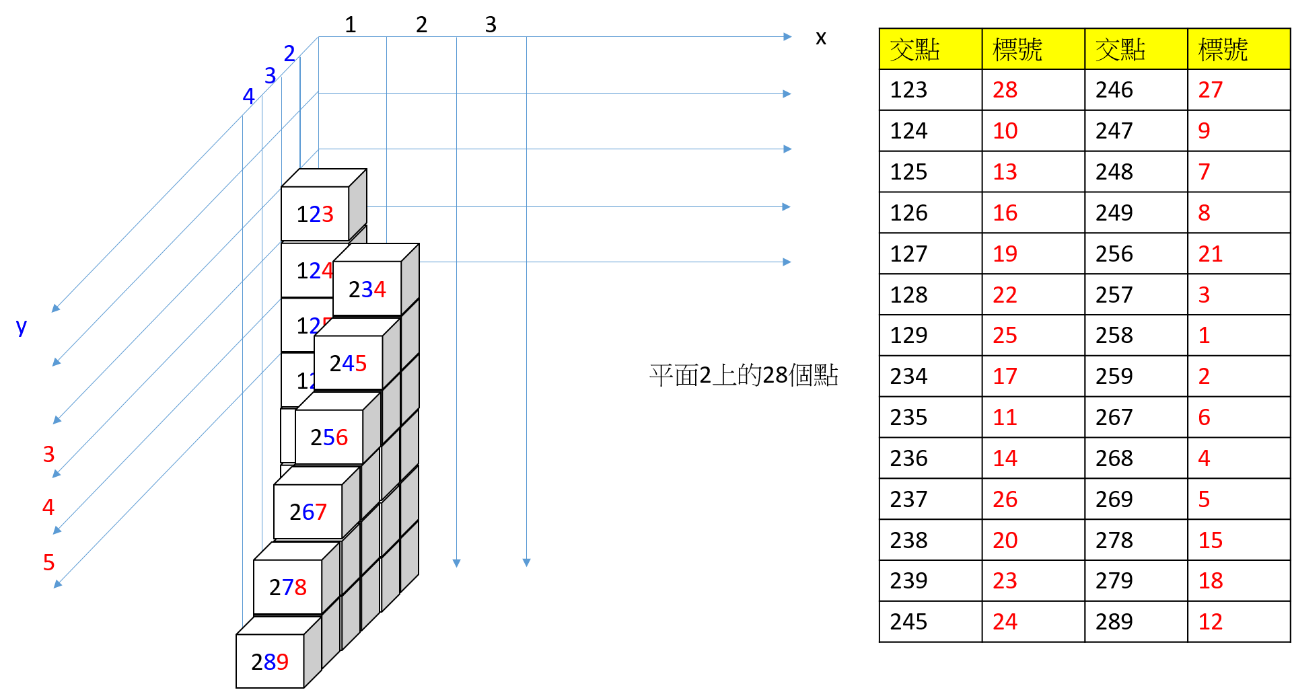


圖6.4.14.

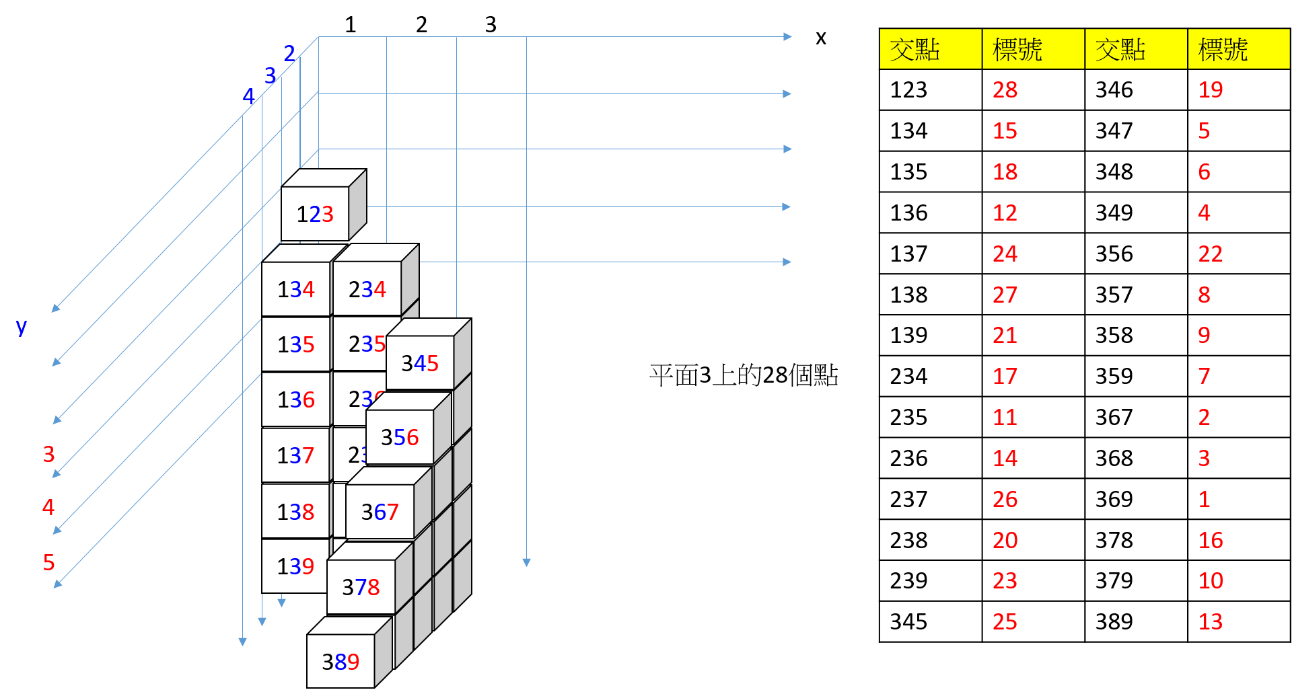
****

圖6.4.15.

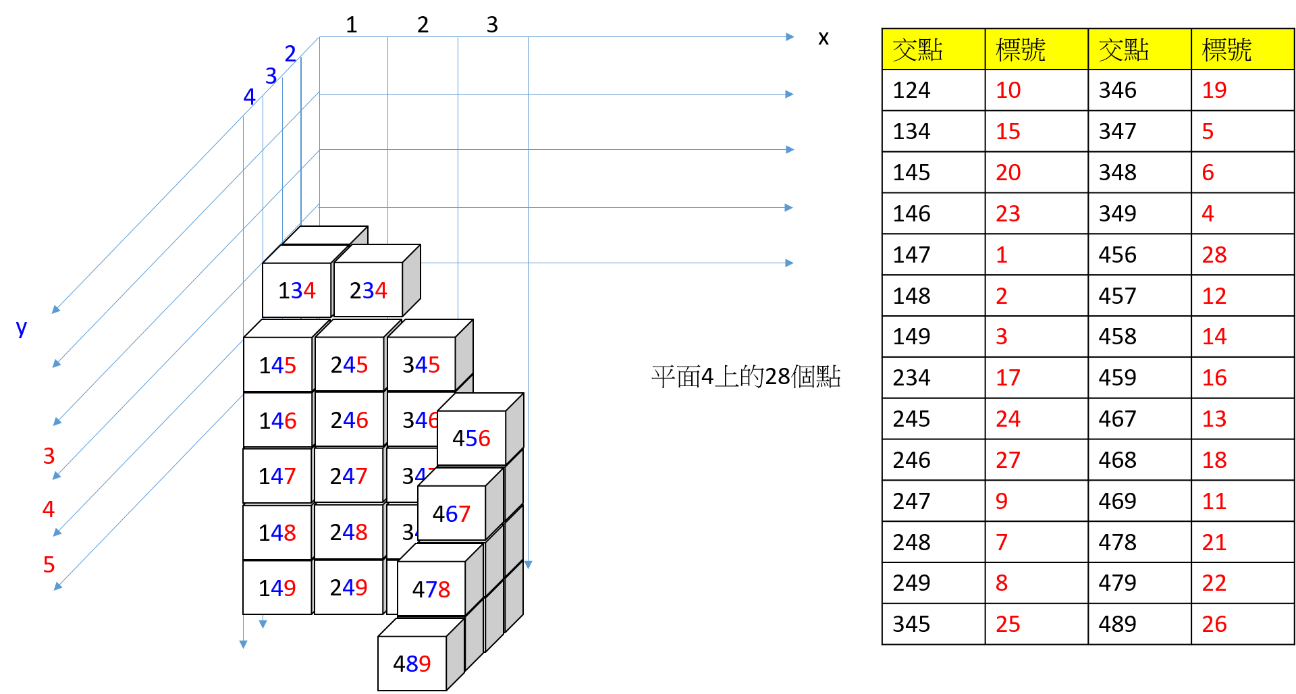
****

圖6.4.16.

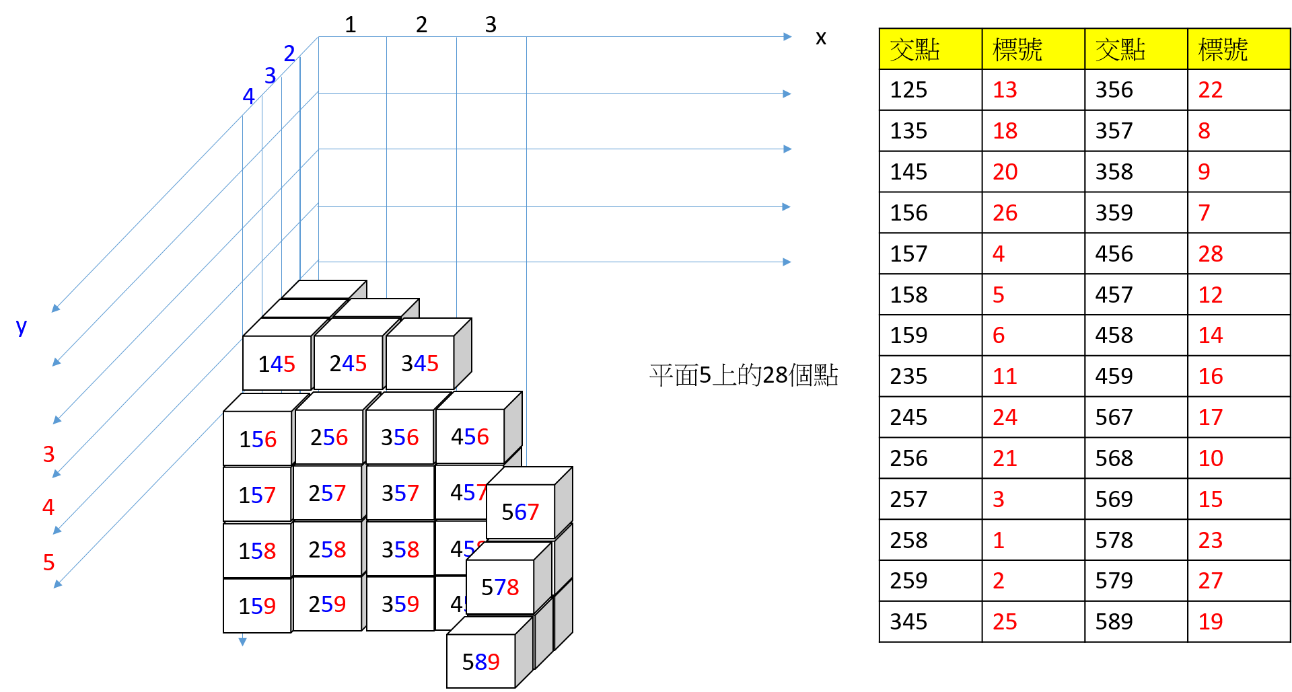
****

圖6.4.17.

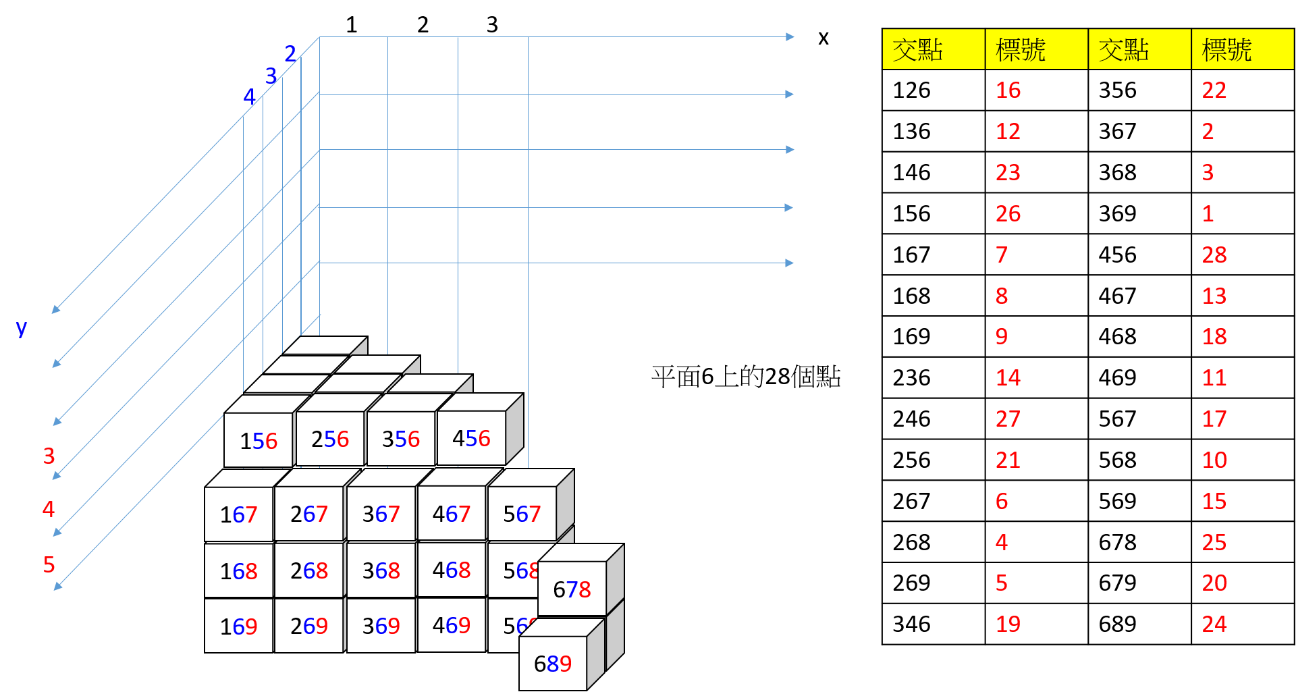
****

圖6.4.18.

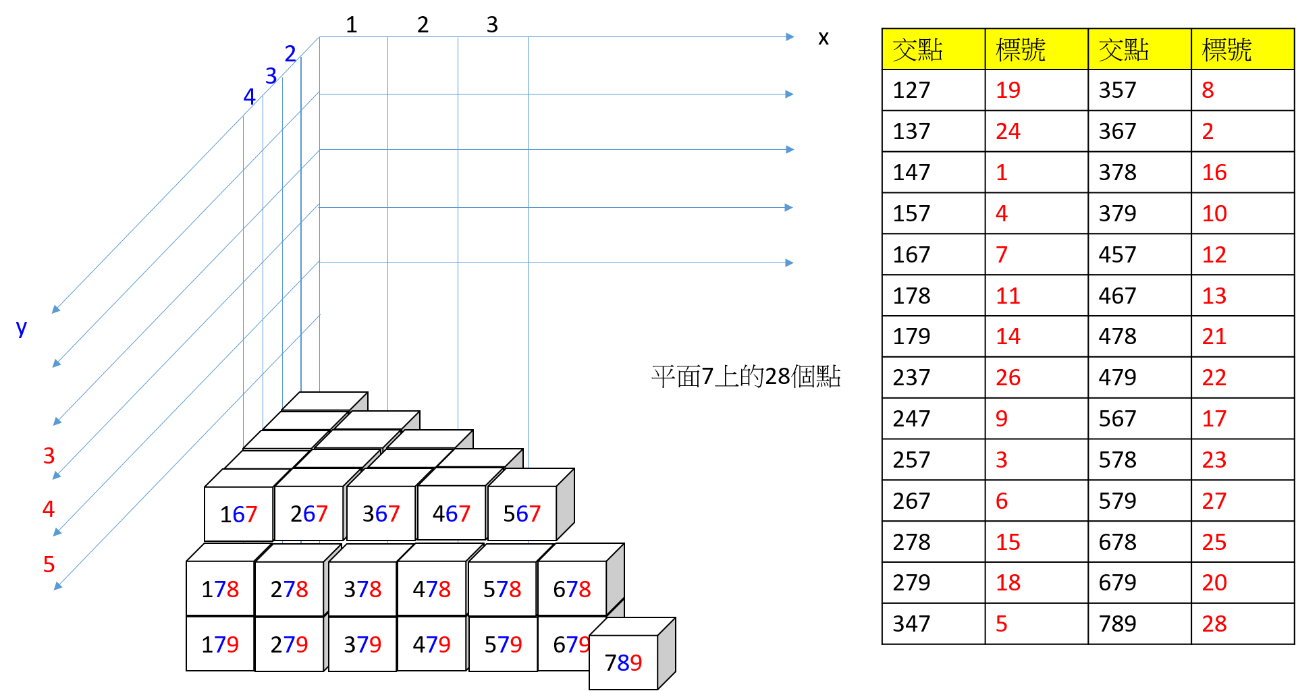
****

圖6.4.19.

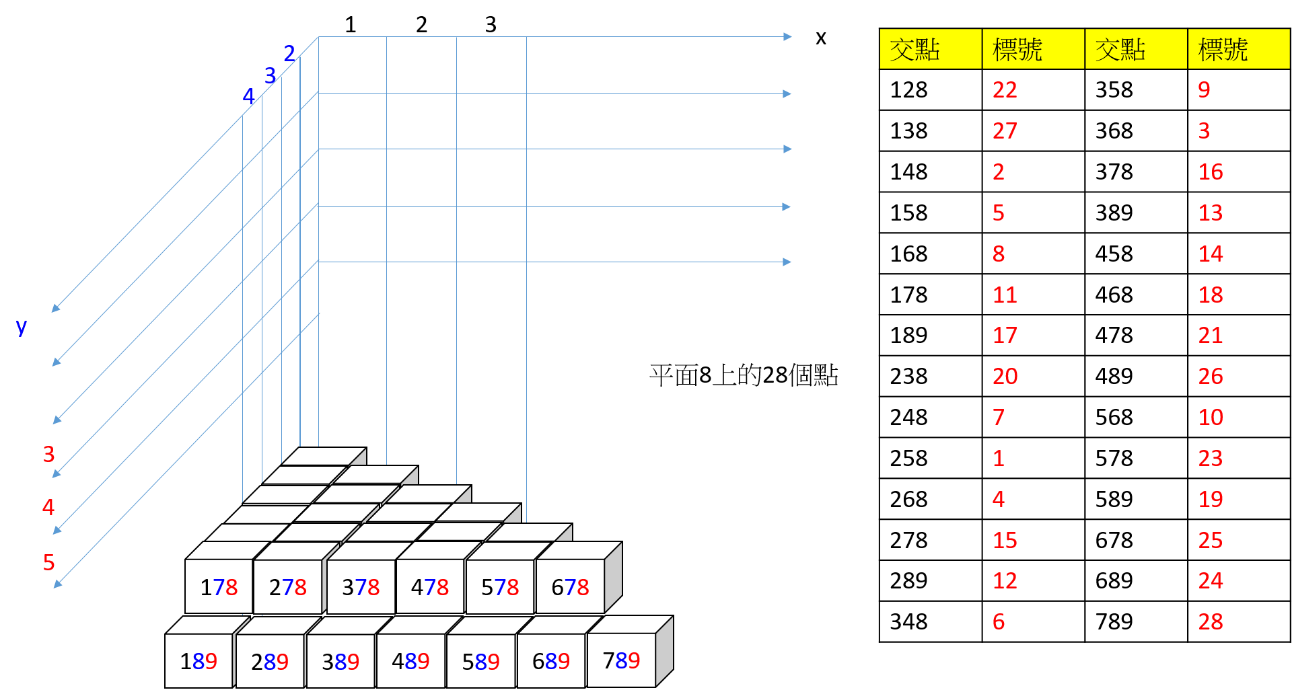
****

圖6.4.20.

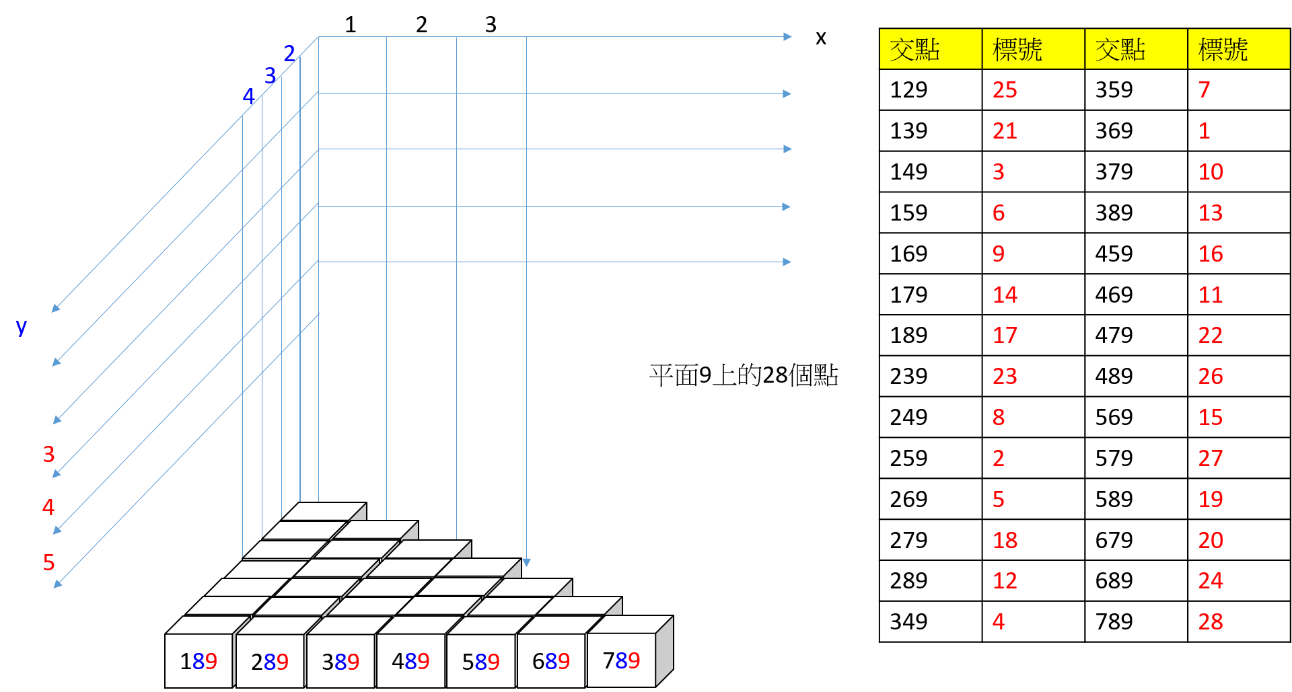
****

圖6.4.21.

Q.E.D.

**事實6.4.14.** ，可以利用三分圖的方法，以性質6.4.3.、性質6.4.6.和性質6.4.10.的標號方法為基礎，將標好標滿。。

柒、

一、四維度空間

**題目7.1.1.** 有個立方體，每兩個相交成一個平面、每三個相交成一條直線、每四個相交成一個交點、每五個不存在共點，若我們在點上標上連續的自然數由到，使得每個平面上數字不重複，則稱為標好標滿。

[說明] 任意四個平面相交出一個交點，因此總交點數量是，將此數乘以後再平分給個立方體，就是。

Q.E.D.

**性質7.1.2.** *Complete 4-uniform hypergraph*相當於標好標滿的，因此可以標好標滿。

[證明] *Complete 3-uniform hypergraph*中，每個點相當於標好標滿中的一個平面、每條*hyperedge*相當於標好標滿中的一個交點。如此，每一個*1****-****factor*為被標上相同數字的點，而總共有個數字也就是個*1****-****factor*。

Q.E.D.

二、多維度空間

**題目7.2.1.** 有個度超立方體，每個相交成一個交點、每個不存在共點，若我們在點上標上連續的自然數由到，使得每個度超立方體上數字不重複，則稱為標好標滿。

[說明] 任意個平面相交出一個交點，因此總交點數量是，將此數乘以後再平分給個超立方體，就是。

Q.E.D.

**性質7.2.2.** *Complete k-uniform hypergraph*相當於標好標滿的，因此可以標好標滿。

[證明] *Complete k-uniform hypergraph*中，每個點相當於標好標滿中的一個度超立方體、每條*hyperedge*相當於標好標滿中的一個交點。如此，每一個*1****-****factor*為被標上相同數字的點，而總共有個數字也就是個*1****-****factor*。

Q.E.D.

結論

我發現: (一)可以用拉丁方陣標好標滿。

可以用二分圖標好標滿。

無法標好標滿。

(二)延伸一的針對每條直線標好標滿，可以標好標滿。

延伸二的針對每個平面標好標滿，可以用標好標滿。

延伸二的針對每個平面標好標滿，可以用三分圖標好標滿。

(三)可以用標好標滿。

參考資料

[1]第56屆全國科展國小數學，【神算】。台灣科學教育館網站，2016年7月。

[2]第57屆全國科展國小數學，【一直乘以 2】。台灣科學教育館網站，2017年7月。

[3]第58屆全國科展國小數學，【狡兔八窟】。台灣科學教育館網站，2018年7月。

[4]游森棚，科學研習月刊第57卷第5期第58頁，台灣科學教育館網站，2018年5月。

[5]維基百科，幾何原本，第五公設， 2018年12月2日下載。

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B9%B3%E8%A1%8C%E5%85%AC%E8%A8%AD

[6]維基百科，排序演算法，2019年1月20日下載。

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8E%92%E5%BA%8F%E7%AE%97%E6%B3%95>

[7]維基百科，Graph factorization，2019年6月2日下載。

<https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_factorization>

[8]維基百科，，2019年6月2日下載。

<https://en.wikipedia.org/wiki/Hypergraph>

[9]維基百科，，2019年6月2日下載。

<https://en.wikipedia.org/wiki/Complete_graph>

[10]維基百科，，2019年6月2日下載。

<https://en.wikipedia.org/wiki/Baranyai%27s_theorem>

[11]Narsingh Deo and Paulius Micikevicius，On One-factorization of Complete 3-Uniform。

Hypergraphs<https://pdfs.semanticscholar.org/7b3c/a95518252fe89e3346345e1192c884aceedf.pdf>