西安郵電大學

《数 学 建 模 B》

课程实验报告

实验名称：数学规划模型

学生班级：信息对抗 1602

学生姓名：郝希烜

班内序号：27

数学规划模型

一、实验目的

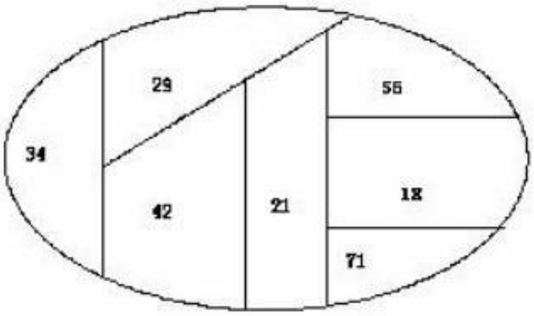
（1）着重于数学建模的角度，介绍如何建立若干实际优化问题的模型

（2）在用 LINGO 软件求解后，对结果做一些分析.

二、实验题目

题目一：某公司用两种原油（A 和 B）混合加工成两种汽油（甲和乙）。甲、乙两种汽油含原油 A 的最低比例分别为 50%和 60%，每吨售价分别为 4800 元/t 和 5600 元/t。该公司现有原油 A 和 B 的库存量分别为 500t 和 1000t，还可以从市场上买到不超过 1500t 的原油 A。原油 A 的市场价为：购买量不超过 500t 时的单价为 10000 元/t；购买量超过 500t 但不超过 1000t 时，超过 500t 的部分 8000 元/t；购买量超过 1000t 时，超过 1000t 的 6000 元/t。该公司应如何安排原油的采购和加工？

题目二：一家出版社准备在某市建立两个销售代理点，向 7 个区的大学生售书，每个区的大学生数量(单位：千人)已经表示在图上. 每个销售代理点只能向本区和一个相邻区的大学生售书，这两个销售代理点应该建在何处，才能使所能供应的大学生的数量最大？建立该问题的整数线性规划模型并求解.



三、问题分析

题目一问题分析：安排原油采购、加工的目标只能是利润最大，题目中给出的是两种汽油的售价和原油 A 的采购价，利润为销售汽油的收入与购买原油 A 的支出之差。这里的难点在于原油 A 的采购价与购买量的关系比较复杂，是分段函数关系，能否以及如何用线性规划、整数规划模型加以处理是关键所在。

题目二问题分析：本问题要求找到一个人数最多的方案，得到最优解，故考虑优化模型。可以将城市看做一个图，不同区之间的关系可以看成是图的边，通过题中所给的约束条件建立整数线性规划模型求解

四、模型建立

题目一模型建立：设原油 A 的购买量为 x，根据题目所给数据，采购的支出 c(x) 可表示为如下的分段线性函数（以下价格以千元/t 为单位）：

$$c(x)=\begin{cases}10x & (0\le x\le 500)\\ 1000+8x & (500\le x\le 1000)\\ 3000+6x & (1000\le x\le 1500)\end{cases} \tag{1}$$

设原油 A 用于生产甲、乙两种汽油的数量分别是x_{11}和x_{12}，原油 B 用于生产甲、乙两种汽油的数量分别是x_{21}和x_{22}，则总收入为 $4.8(x_{11}+x_{21})+5.6(x_{12}+x_{22})$. 于是本例目标函数——利润为

$$\max\ z=4.8(x_{11}+x_{21})+5.6(x_{12}+x_{22})-\ c(x) \tag{2}$$

约束条件包括加工两种汽油用的原油 A、原油 B 的库存量的限制，和原油 A 购买量的限制，以及两种汽油含原油 A 的比例限制，分别表示为

$$x_{11}+x_{21}\le 500+x \tag{3}$$

$$x_{21}+x_{22}\le 1000 \tag{4}$$

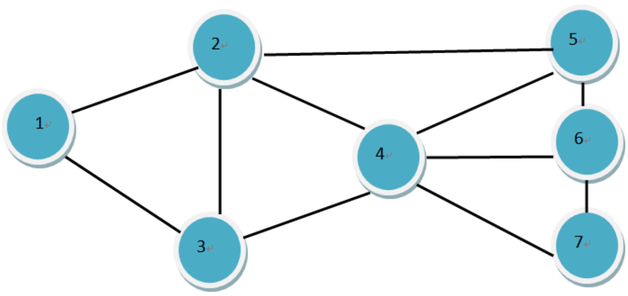
$$x\le 1500 \tag{5}$$

$$\frac{x_{11}}{x_{11}+x_{21}}\ge 0.5 \tag{6}$$

$$\frac{x_{12}}{x_{12}+x_{22}}\ge 0.6 \tag{7}$$

$$x_{11},x_{12},x_{21},x_{22},x\ge 0 \tag{8}$$

题目二模型建立：为方便问题求解，将 7 个区分别标号，大学生数量为 34、29、42、21、56、18、71 的区分别标号为 1、2、3、4、5、6、7，画出不同区之间的相邻关系：



记a_i为第 i 区大学生的人数，用 0-1 变量b_{ij}=1 表示(i，j)区的大学生由一个代售点供应图书（i<j, 且 i， j 相邻），否则b_{ij}=0

于是两个销售代理点所能提供的大学生数量的总和为最大目标：

$$\mathrm{Max}=\sum(r_i+r_j)x_{ij}$$

即

$$\mathrm{Max}=63*x_{12}+76*x_{13}+71*x_{23}+50*x_{24}+63*x_{34}+85*x_{25}+77*x_{45}+39*x_{46}+92*x_{47}+74*x_{56}+89*x_{67}$$

约束条件：

（1） 只能建立两个代售点

$$x_{12}+x_{13}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{34}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{56}+x_{67}=2$$

（2） 与 1 建立的代售关系只能有一个

$$x_{12}+x_{13}\le 1$$

与 2 建立的代售关系只能有一个

$$x_{12}+x_{23}+x_{24}+x_{25}\le 1$$

与 3 建立的代售关系只能有一个

$$x_{13}+x_{23}+x_{34}\le 1$$

与 4 建立的代售关系只能有一个

$$x_{24}+x_{34}+x_{45}+x_{46}+x_{47}\le 1$$

与 5 建立的代售关系只能有一个

$$x_{25}+x_{45}+x_{56}\le 1$$

与 6 建立的代售关系只能有一个

$$x_{46}+x_{56}+x_{67}\le 1$$

与 7 建立的代售关系只能有一个

$$x_{47}+x_{67}\le 1$$

五、模型求解

题目一模型求解：

第 1 种解法 一个自然的想法是将原油 A 的采购量 x 分解为三个量，即用 x_1，x_2，x_3 分别表示以价格 10 千元/t、8 千元/t、6 千元/t 采购的原油 A 的数量，总支出为$c(x)=10x_1+8x_2+6x_3$，且

$$x=x_1+x_2+x_3 \tag{9}$$

这时目标函数（2）变成线性函数：

$$\max z= 4.8(x_{11}+x_{21})+5.6(x_{12}+x_{22})-(10x_1+8x_2+6x_3) \tag{10}$$

应该注意到，只有当以 10 千元/t 的价格购买x_1=500t 时，才能以 8 千元/t 的价格购买$x_2\,(x_2>0)$，这个条件可以表示为

$$(x_1-500)x_3=0 \tag{11}$$

同理，只有当以 8 千元/t 的价格购买x_2=500t 时，才能以 6 千元/t 的价格购买$x_3\,(x_3>0)$，于是

$$(x_2-500)x_3=0 \tag{12}$$

此外，x_1，x_2，x_3的取值范围是

$$0\le x_1,x_2,x_3\le 500 \tag{13}$$

由于有非线性约束（11）和（12），（3）～（13）构成非线性规划模型.将该模型输入 LINGO 软件如下：

个线性规划模型（当然要加上 x_{ij} 的非负约束）. 输入 LINGO（附录 problem1_program1.lg4）:

```
model:
```

```
max=4.8*x11+4.8*x21+5.6*x12+5.6*x22-10*x1-8*x2-6*x3;
x11+x12<x+500;
x21+x22<1000;
0.5*x11-0.5*x21>0;
0.4*x12-0.6*x22>0;
x=x1+x2+x3;
(x1-500)*x2=0;
(x2-500)*x3=0;
x1<500;
x2<500;
x3<500;
end
```

输出结果:

```
Local optimal solution found.
  Objective value:                              4800.000
  Infeasibilities:                            0.5560952E-11
  Total solver iterations:                            24


                         Variable           Value        Reduced
Cost
                              X11        500.0000
0.000000
                              X21        500.0000
0.000000
                              X12        0.000000
0.2666667
                              X22        0.000000
0.000000
                               X1        0.000000
0.4000000
                               X2        0.000000
0.000000
                               X3        0.000000
0.000000
                                X        0.000000
0.000000

                              Row    Slack or Surplus      Dual
Price
                                1        4800.000
1.000000
                                2        0.000000
```

9.600000

3 500.0000

0.000000

4 0.000000

-9.600000

5 0.000000

-9.333333

6 0.000000

9.600000

7 0.000000

-0.3200000E-02

8 0.000000

-0.7200000E-02

9 500.0000

0.000000

10 500.0000

0.000000

11 500.0000

0.000000

最优解是用库存的 500t 原油、500t 原油 B 生产 1000t 汽油甲，不购买新的原油 A，利润为 4800000 元.

但 LINGO 得到的该结果只是一个局部最优解，我们通过修改 LINGO 选项要求计算全局最优解，可得到如下输出：

Global optimal solution found.
Objective value: 5000.001
Objective bound: 5000.001
Infeasibilities: 0.1225483E-06
Extended solver steps: 12
Total solver iterations: 533

Variable Value Reduced Cost

X11 0.000000

0.9000000

X21 0.000000

0.000000

X12 1500.000

0.000000

X22 1000.000

0.000000

X1 500.0000

0.000000

X2 499.9996

0.000000

X3 0.3500690E-03

0.000000

X 1000.000

0.000000

Row Slack or Surplus Dual Price

1 5000.001

1.000000

2 0.000000

7.000000

3 0.000000

3.500000

4 0.000000

-2.600000

5 0.000000

-3.500000

6 0.000000

7.000000

7 0.000000

-0.6000004E-02

8 -0.1225483E-06 -2856.579

9 0.000000

0.000000

10 0.3500690E-03

0.000000

11 499.9996

0.000000

全局最优解是购买 1000t 原油 A，与库存的 500t 原油 A 和 1000t 原油 B 一起，共生产 2500t 汽油乙，利润为 5000000 元，高于局部最优解对应的利润.

第 2 种解法 引入 0-1 变量将（11）和（12）转化为线性约束.

令y_1=1，y_2=1，y_3=1 分别表示以 10 千元/t、8 千元/t、6 千元/t 的价格采购原油 A，则约束（11）和（12）可以替换为

$$500y_2 \le x_1 \le 500y_1 \tag{14}$$

$$500y_3 \le x_2 \le 500y_2 \tag{15}$$

$$x_3 \le 500y_3 \tag{16}$$

$$y_1, y_2, y_3 = 0 \text{ or } 1 \tag{17}$$

（3）～（10），（13）～（17）构成整数（线性）规划模型，将它输入 LINGO 软件如下（附录 problem1-program2.lg4）：

```
model:
max=4.8*x11+4.8*x21+5.6*x12+5.6*x22-10*x1-8*x2-6*x3;
x11+x12<x+500;
x21+x22<1000;
```

```
0.5*x11-0.5*x21>0;
0.4*x12-0.6*x22>0;
x=x1+x2+x3;
x1<500*y1;
x2<500*y2;
x3<500*y3;
x1>500*y2;
x2<500*y3;
@bin(y1);@bin(y2);@bin(y3);
end
```

运行该程序得到的最优解与第 1 种解法得到的结果（全局最优解）相同.

第 3 种解法 直接处理分段线性函数$c(x)$.（1）式表示的$c(x)$如图 1

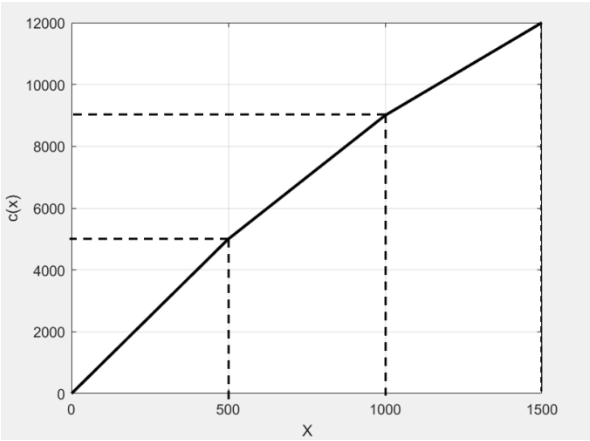


图 1 分段线性函数 c(x)图形

记 x 轴上的分点为b_1=0, b_2=500, b_3=1000, b_4=1500.当 x 在第一个小区间$[b_1,b_2]$时，记$x = z_1b_1 + z_2b_2, z_1 + z_2 = 1, z_1, z_2 \geq 0$,因为$c(x)$在$[b_1,b_2]$是线性的，所以$c(x) = z_1c(b_1) + z_2c(b_2)$.同样，当 x 在第 2 个小区间$[b_2,b_3]$时，$x = z_2b_2 + z_3b_3, z_2 + z_3 = 1, z_2, z_3 \geq 0$,
$c(x) = z_2c(b_2) + z_3c(b_3)$.当 x 在第 3 个小区间$[b_3,b_4]$时，$x = z_3b_3 + z_4b_4$，$z_3 + z_4 = 1$，$z_3, z_4 \geq 0$，$c(x) = z_3c(b_3) + z_4c(b_4)$.

为了表示 x 在哪个小区间，引入 0-1 变量y_k(k=1,2,3)，当 x 在第 k 个小区间时，$y_k = 1$，否则，$y_k = 0$.这样$z_1, z_2, z_3, z_4, y_1, y_2, y_3$应满足

$$z_1 \leq y_1, z_2 \leq, y_1 + y_2, z_3 \leq, y_2 + y_3, z_4 \leq y_3 \qquad (18)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1，z_k \geq 0(k = 1,2,3,4) \qquad (19)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1, y_1, y_2, y_3 \qquad (20)$$

此时 x 和 c(x)可以统一的表示为

$$x = z_1b_1 + z_2b_2 + z_3b_3 + z_4b_4 = 500z_2 + 1000z_3 + 1500z_4 \qquad (21)$$

$$c(x) = z_1c(b_1) + z_2c(b_2) + z_3c(b_3) + z_4c(b_4)$$
$$= 5000z_2 + 9000z_3 + 12000z_4 \quad (22)$$

（2）～（8），（18）～（22）也构成一个整数规划模型，将它输入 LINGO 软件求解，得到的结果与第 2 种解法相同

题目二模型求解：

（1）将建立的模型输入 LINGO ，如下（附录 problem2_program1.lg4）：

```
model:
max=63*x12+76*x13+71*x23+50*x24+85*x25+63*x34+77*x45+39*x46+74*x56+89*x67+92*x47;
x12+x13+x23+x24+x25+x34+x45+x46+x47+x56+x67=2;
x12+x13<=1;
x12+x23+x24+x25<=1;
x13+x23+x34<=1;
x24+x34+x45+x46+x47<=1;
x25+x45+x56<=1;
x46+x56+x67<=1;
x47+x67<=1;
@gin(x12);
@gin(x13);
@gin(x23);
@gin(x24);
@gin(x25);
@gin(x34);
@gin(x45);
@gin(x46);
@gin(x47);
@gin(x56);
@gin(x67);
End
```

输出结果：

```
  Global optimal solution found.
  Objective value:                              177.0000
  Objective bound:                              177.0000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Extended solver steps:                               0
  Total solver iterations:                             0


                       Variable           Value        Reduced
Cost
                            X12                       0.000000
-63.00000
```

X13 0.000000
-76.00000
X23 0.000000
-71.00000
X24 0.000000
-50.00000
X25 1.000000
-85.00000
X34 0.000000
-63.00000
X45 0.000000
-77.00000
X46 0.000000
-39.00000
X56 0.000000
-74.00000
X67 0.000000
-89.00000
X47 1.000000
-92.00000

Row Slack or Surplus Dual
Price
1 177.0000
1.000000
2 0.000000
0.000000
3 1.000000
0.000000
4 0.000000
0.000000
5 1.000000
0.000000
6 0.000000
0.000000
7 0.000000
0.000000
8 1.000000
0.000000
9 0.000000
0.000000

从输出结果可以得到最优解：

$x_{25} = x_{47}$=1,其余均为 0，最优值为 177 人

即：第 2、5 区的大学生由一个销售代理点提供图书，代理点在 2 区或者 5 区均可；第 4、7 区的大学生由另一个销售代理点供应图书，代理点在 4 区或者 7 区均可

（2）为检验结果的正确性，根据所建立的模型用 matlab 编程求解，如下（附录 problem2_program2.m）：

```
ans=0
for x12=0:1:1
for x13=0:1:1
for x23=0:1:1
for x24=0:1:1
for x25=0:1:1
for x34=0:1:1
for x45=0:1:1
for x46=0:1:1
for x47=0:1:1
for x56=0:1:1
for x67=0:1:1
if(x12+x13+x23+x24+x25+x34+x45+x46+x47+x56+x67==2 & x12+x13<=1 & x12+x23+x24+x25<=1 & x13+x23+x34<=1 & x24+x34+x45+x46+x47<=1 & x25+x45+x56<=1 & x46+x56+x67<=1 & x47+x67<=1)

if(ans<63*x12+76*x13+71*x23+50*x24+85*x25+63*x34+77*x45+39*x46+74*x56+89*x67+92*x47)

ans=63*x12+76*x13+71*x23+50*x24+85*x25+63*x34+77*x45+39*x46+74*x56+89*x67+92*x47
           if(x12==1)
              fprintf('12\n')
           end
          if(x13==1)
             fprintf('13\n')
          end
          if(x23==1)
            fprintf('23\n')
          end
         if(x24==1)
            fprintf('24\n')
         end
        if(x25==1)
          fprintf('25\n')
        end
        if(x34==1)
          fprintf('34\n')
```

```
          end
         if(x45==1)
            fprintf('45\n')
         end
         if(x46==1)
            fprintf('46\n')
         end
         if(x47==1)
            fprintf('47\n')
         end
         if(x56==1)
            fprintf('56\n')
         end
         if(x67==1)
             fprintf('67\n')
         end
       end
    end
    end
    end
    end
    end
    end
    end
    end
    end
    end
    end
end
```

输出结果：

```
ans =

     0


ans =

   166

47
56
```

ans =

174

25
67

ans =

177

25
47

通过结果可以看出，结果最大为 177，此时x_{25}和x_{47}为 1，其余均为 0，与 LINGO 所求解结果吻合。

最优解：

$x_{25}=x_{47}$=1,其余均为 0，最优值为 177 人

即：第 2、5 区的大学生由一个销售代理点提供图书，代理点在 2 区或者 5 区均可；第 4、7 区的大学生由另一个销售代理点供应图书，代理点在 4 区或者 7 区均可

六、结果分析与讨论

题目一结果分析与讨论：

采用不同的方法求解得出的结果一致，表明结果经受住检验，即为最终答案。这个问题的关键是处理分段线性函数，对于三种解法，相比较而言，整数模型的第 2、3 种解法更好一些，第三种解法更具一般性。

题目二结果分析与讨论：

通过查看该区图可以粗略知道应该选择人数最大的地区为代售点，在题中假设的前提下，选择人数最大的地区为代售点，覆盖了大部分人口，此模型的建立，很好的应用数学知识将选择销售代理点的问题抽象化，使选择我们的选择不再主观、盲目、而是更全面深入条理选择最少的变量考虑问题简化了模型建立的分析。这也是模型最大的弊端数据的真实受到了很大的限制对实际应用很不利。虽然假设的变量比较多，但人们可以较容易理解。题中假设的太多假设，有些脱离实际，考虑现实中的销售点检的运输路程、交通便利程度、学生在校期间的对书的消费情况，不同人群之间的消费了解等情况。