西安郵電大學

《数 学 建 模 B》

课 程 论 文

学生班级：对抗 1602

学生姓名：郝希烜

学　　号：03166063

班内序号：27

校车安排问题

摘要

本文研究了让教师和工作人员满意度最高为目标的校车安排问题。

在问题 1 中，利用 *D*ijkstra 算法求出了任意两区直接或间接到达的最短距离，然后以各区域到最近乘车点的距离和最小为目标对 50 个区进行遍历分析，从 50 个地区中选出 n 个站点，共有 C_{50}^{n} 种取法，用 MATLAB 算出各个地区到这些站点的路程和的最小值，再取出这 C_{50}^{n} 个最小值中的最小者及其对应的 n 个站点即可。从而得到当 n=2 时，乘车点设立在 18 区和 31 区，各个区域到各自最近乘车点的最短距离之和为 *D*=24492 米。当 n=3 时，乘车点设立在 15 区、21 区和 31 区，各个区域到各自最近乘车点的最短距离之和 *D*=19660 米。

在问题 2 中，因为只有路程一个量，所以直接可以用人们到站点的总路程来刻画人们的满意程度，总路程越大人们满意度越小。据此建立满意度函数求解用 MATLAB 求得当建立 2 个乘车点时，乘车点为区域 24 和区域 32，平均满意度为 0.7239；当建立 3 个乘车点时，乘车点为区域 16、区域 23 和区域 32。平均满意度为 0.7811。

对于问题 3，本文在模型二的基础上，设立满意度最低标准，添加满意度的约束条件 $P_k > h$，建立车辆数模型。求得满意度最大的情况下的 3 个乘车点车辆使用情况，确定车辆最少需要 54 辆，三个站点所在的区域分别为 2、26、31，对应的车辆数分别为 12、19、23。

对于问题 4，我们根据第三问的结果发现每个站点都存在空座的情况，这样造成了一定的资源的浪费。所以我们建议在站点校车空座率较高的情况下时，在其他站点进行一次巡游。以节约了成本同时满足满意度。

关键词： *D*ijkstra 算法　最短距离　满意度函数　双目标函数 节约资源　MATLAB

1　问题的提出

许多学校都建有新校区，因此需要将老校区的教师和工作人员用校车送到新校区。有效的安排车辆并让教师和工作人员尽量满意是个十分重要的值得研究的问题。现有如下四个问题需要设计解决。

假设老校区的教室和工作人员分布在 50 个区。

问题 1：如果建立 n 个乘车点，为使各区人员到最近乘车点的距离最小，建立模型，并分别给出 $n=2$，3 时的结果。

问题 2：考虑每个区的乘车人数，使工作人员和教室的满意度最大，建立模型，并分别建立两个和三个乘车点的校车安排方案。(假定车只在起始点载人)

问题 3：若建立 3 个乘车点，为使教师和工作人员尽量满意，至少需要安排多少辆车。假设每辆车最多载客 47 人（假设车只在起始站点载人）。

问题 4：关于校车安排问题，你还有什么好的建议和考虑。可以提高乘车人员的满意度，又可节省运行成本。

2　问题的分析

2.1 问题 1 的分析

问题 1 要求建立 n 个乘车点，使各区人员到最近乘车点的距离最小，首先利用 *D*ijkstra 算法求得任意两点之间最短距离；其次在 50 个区域中任意选取 n 个区域作为乘车点，找出每个区域所对应的最近乘车点，最后以 50 个区域到各自最近乘车点的最短距离和的最小值为目标函数建立模型，并对设立 2 个和 3 个乘车点时的校车安排问题进行求解。

2.2 问题 2 的分析

问题 2 要求在教师和工作人员的满意度最大为前提条件下选出最佳乘车点，为此需要建立关于满意度的函数，然后以平均满意度最高为目标函数建立模型，并对设立 2 个和 3 个乘车点时的校车安排问题进行求解。

2.3 问题 3 的分析

问题 3 要求建立 3 个乘车点，在尽量使教师和工作人员满意的前提下，所需的车辆最少，我们利用总车辆数最少函数的双目标函数进行优化求解，得出最优解。

2.4 问题 4 的分析

问题 4 中结合第 3 问的结果对车辆的安排情况提出了建议。

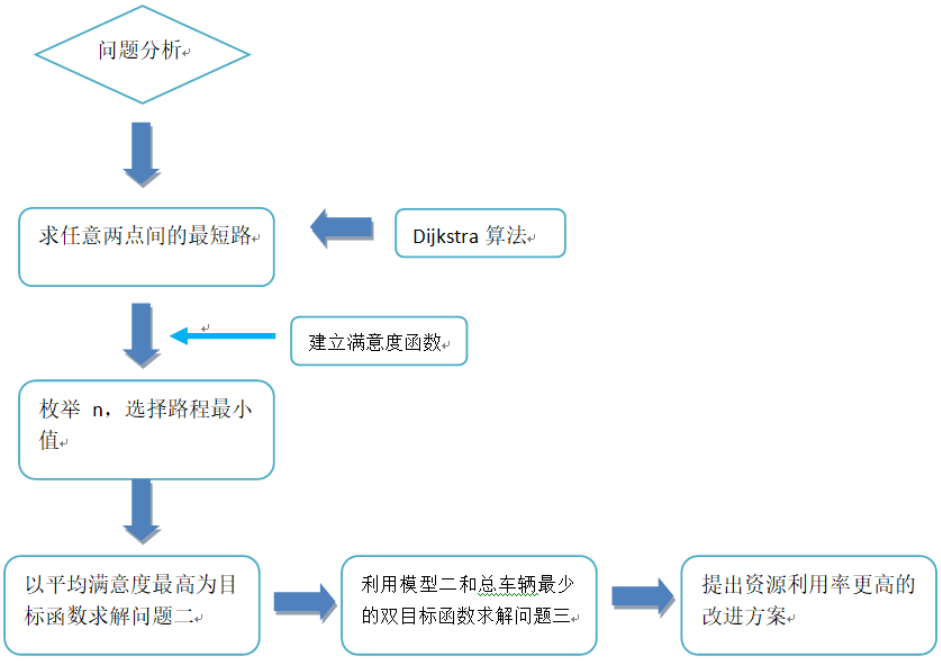


图 2-1 建模思路流程图

3 基本假设

1、每位教师及工作人员均选择最短路径乘车。

2.、假设不考虑教师及工作人员的等车时间。

3、假设每个乘车点的乘车人数固定不变

4、 教师及工作人员到各站点乘车的满意度与到该站点的距离有关系，距离近则满意度高，距离远则满意度低。

5、假设所设置的乘车点数不大于 50。

6、 假设所有人员均乘车。

7、假设每辆车的型号一致

4 符号说明

符号	代表含义
$A(i, j)$	各个区通路的邻接矩阵
P_i	第 i 乘车点所在的区

l_k	第 k 个区到最近乘车点的距离
D	50 个区到各自最近乘车点的距离之和
P_k	第 k 区乘客的满意度
$\bar{P}$	所有乘客的平均满意度
q_i	第 i 个乘车点的车辆数
r_k	第 k 区的人数
h	每个区满意度的下限（0<h<1）
n	共要建的站点数

5 模型的建立

5.1、问题 1 的模型建立

5.1.1 *D*ijkstra 算法

*D*ijkstra 算法是一种求单源最短路的算法，但对每个点进行遍历后可以求任意两点之间的最短路，效率高于 *Floyed* 算法。

*D*ijkstra 算法的基本思路是：先将与起点有边直接相连的节点到起点的距离记为对应的边的权重值，将与起点无边直接相连的节点到起点的距离记为∞。然后以起点为中心向外层层扩展，计算所有节点到起点的最短距离。每次新扩展到一个距离最短的点后，更新与它有边直接相邻的节点到起点的最短距离。当所有点都扩展进来后，所有节点到起点的最短距离将不会再被改变，因而保证了算法的正确性。

1. *D*ijkstra 算法求解最短路径问题的基本步骤如下：

①设立 Y 和 N 两个集合， Y 用于保存所有等待访问的节点，N 记录所有已经访问过的节点。

②访问网络节点中距离起始节点最近且没有被访问过的节点，把这个节点放入 Y 中等待访问。

③从 Y 中找出距离起点最近的节点，放入 N 中，更新与这个节点有边直接相连的相邻节点到起始节点的最短距离，同时把这些相邻节点加入 Y

④重复步骤（2）和（3），直到 Y 集合为空， N 集合为网络中所有节点为止。

2. 由于题中图节点较多，下面用该图来演示一下 *D*ijkstra 算法

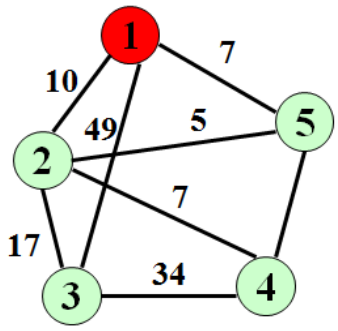


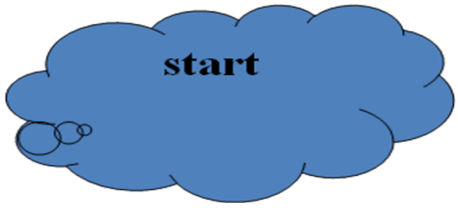
图 5-1 *D*ijkstra 算法演示样图

开始点（源点）：start

D[i]:顶点 i 到 start 的最短距离。

初始：D[start]=0； D[i]=a[start][i] （无边设为 INF）

集合 1：已求点 集合 2：未求点



算法步骤：

①在集合 2 中找一个到 start 距离最近的顶点 k ，距离=d[k]

②把顶点 k 加到集合 1 中，同时修改集合 2 中的剩余顶点 j 的 d[j]是否经过 k 后变短。如果变短修改 d[j]

$$if\ \ (d[k]+a[k][j]<d[j]) \rightarrow d[j]=d[k]+a[k][j]$$

③重复 1，直至集合 2 空为止。

关于本文具体问题的算法如下:

1. 先根据题目所给的各个连通区域之间距离的数据为初始矩阵A(i, j) 赋值，其中没有给出距离的赋为∞，其中 $A(i,j)=0 \quad (i=j)$

2. 对于每一个点，进行一次 *D*ijkstra 算法，依次从与当前点相连的边中选取最短的边去更新其他点与当前点的距离

3. 对所有点均进行 *D*ijkstra 算法遍历后，任意两个点之间的距离就是它们的最短距离，可以得到最短距离矩阵 $A(i,j),(i,j=1,2,...,50)$

5.1.2 模型一的建立

在上述最短路距离矩阵A(i, j)的基础上，分析建立 *n* 个乘车点的情况：

首先，在 50 个区域中任意选取 *n* 个区域作为乘车点

$$\{p_1,p_2,...,p_n\}\in\{1,2,...50\}$$

其次，由于每个区的乘客都选距离本区最近的乘车点乘车，引入变量 l_k，表示第个 *k* 区域到最近乘车点的距离

$$l_k=\min\{A(k,p_1),A(k,p_2),...,A(k,p_n)\} \quad (k=1,2,...,50) \tag{1}$$

然后，求出 50 个区域到各自最近乘车点的最短距离之和

$$D=\sum_{k=1}^{50} l_k \tag{2}$$

最后，建立针对问题 1 所述的数学模型。最佳乘车点是使得 50 个区域到各自最近乘车点的距离之和最小的点，基于此建立目标函数

$$\min D=\sum_{k=1}^{50} l_k \tag{3}$$

5.2、问题 2 模型的建立

5.2.1 根据题意建立顾客满意度函数

如果车站就建在自己的区，则乘客就非常的满意，如果离自己区最近的车站比较远，则乘客就不满意，乘客对车站点的满意度取决于自己区到最近乘车点的距离，为此我们建立满意度函数

$$P_k=\frac{d_{\max}-d_k}{d_{\max}-d_{\min}} \tag{4}$$

其中, $d_{\max}$ 为第 k 个区离本区最远区的距离， $d_{\min}$ 为第 k 个区离本区最近区的距离，当然离自己区的距离最近，即 $d_{\min}=0$，化简得：

$$P_k=1-\frac{d_k}{d_{\max}} \tag{5}$$

其中 P_k 的值越大，满意度就越大。如果乘车点就建在自己的区, 则 $d=0$， P_k=1, 该区的乘客非常满意；如果让乘客去距离本区最远的区乘车，则 P_k=0, 为极度不满意。

5.2.2 模型二的建立

由于每个区乘客的满意度不同，每个区的人数也不同，我们不可能使每个区乘客的满意度都最大，因此我们关注的是全体乘客的平均满意度 $\overline{P}$

$$\overline{P}=\frac{\sum_{k=1}^{50}P_k\times r_k}{\sum_{k=1}^{50}r_k} \tag{6}$$

为使教师和工作人员的满意度最大，为此我们将全体人的平均满意度作为目标函数

$$\max \overline{P}=\frac{\sum_{k=1}^{50}P_k\times r_k}{\sum_{k=1}^{50}r_k} \tag{7}$$

5.3、问题 3 的模型建立

5.3.1 模型三的建立

对所需车辆数q_k的分析，设到第 i 个乘车点的区域的子集合为 A_i

$$q=\left\lceil\frac{\sum_{k\in A_i}z_k}{47}\right\rceil \quad (\lceil\ \rceil\text{表示向上取整}) \tag{8}$$

$$\min Q=q_1+q_2+q_3 \tag{9}$$

由于每个站点的人数不恰好是车辆满载乘客数的整数倍，每个站点就有可能有一辆车不能满载，所以当站点数越多，不能满载的车辆数就越多，从而导致所需车辆总数的增加。当 $n=1$ 时， $q=54$，这也是所需车辆数的最小值。

关于模型二当 $n=3$ 时结出的结果，其中平均满意度是在建立 3 个站点的请况下最大的结果，经运算得需车辆数为 56，但车辆数不是最小。

在模型二中，虽然使得平均满意度最大，但个别区的满意度却相当的小，比如第三个区的满意度仅为 0.4434。

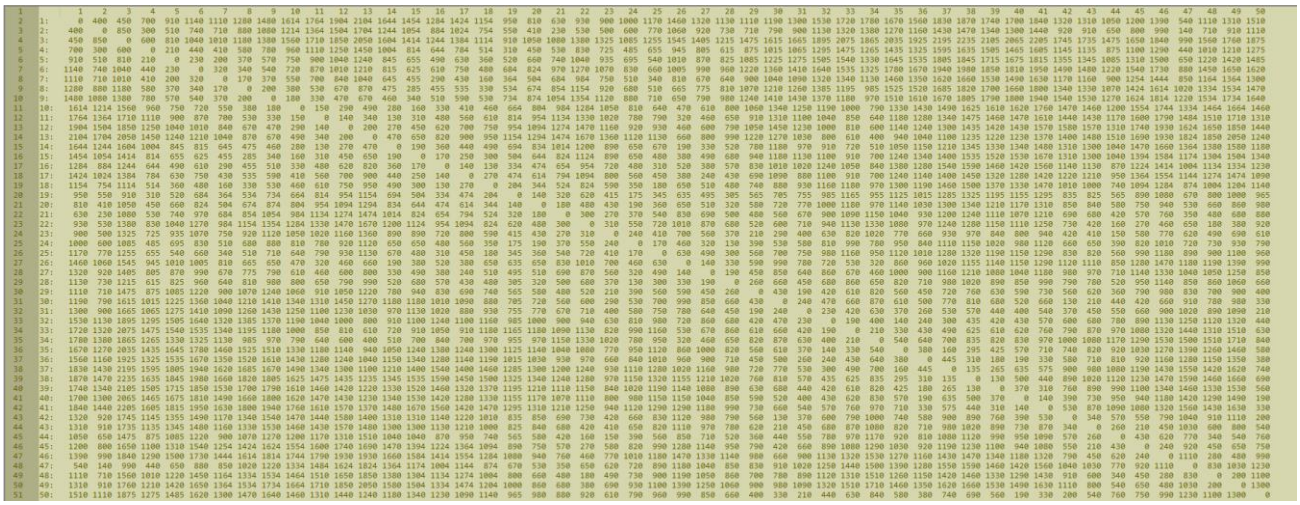
为了兼顾平均满意度尽可能的大、车辆数尽可能小，建立以下模型：在每个区的满意度都大于最低满意度标准的情况下，即 $P_k > h$，其中 h 可人为地设定且 $0 < h < 1$，求出 $\bar{P}$ 的最大值，即

$$\max \bar{P} = \frac{\sum_{k=1}^{50} P_k \times r_k}{\sum_{k=1}^{50} r_k} (0 < h < 1, P_k > h) \qquad (10)$$

6 模型的求解

6.1、问题 1 模型的求解

依据模型一，由题目给出的各区距离表 1 及假设 1、2 运用 C++语言实现 *D*ijkstra 算法（算法程序参见附录程序 1），求出任意两点之间的最短路径矩阵。



当 n=2 时，在 50 个点中一共有 C_{50}^{2} 种取法，分别对每一种取法运用 MATLAB 进行运算，可以得到 B(2)，求出 $\min B(2)$ 所对应的两乘车点（具体的 MATLAB 运算程序参见附录程序 2）

同理，当 n=3 时，在 50 个点中一共有 C_{50}^{3} 种取法，分别对每一种取法运用 MATLAB 进行运算，可以得到 $B(3)$，求出 $\min B(3)$ 所对应的三乘车点（具体的 MATLAB 运算程序参

见附录程序 3)

求得结果如下:

① 当 $n=2$ 时:

乘车点设立在 18 区和 31 区，各个区域到各自最近乘车点的最短距离之和为 D=24492 米。

选 18 站点乘车的区域	选 31 站点乘车的区域
1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、21、24、25、22、26、27、47	23、28、29、30、31、32、33、34、35、36、37、38、38、40、41、42、43、44、45、46、48、49、50

② 当 $n=3$ 时:

乘车点设立在 15 区、21 区和 31 区，各个区域到各自最近乘车点的最短距离之和 D=19660 米。

选 15 站点乘车的区域	选 21 站点乘车的区域	选 31 站点乘车的区域
5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、24、25、26、27	1、2、3、4、19、20、21、22、23、24、44、45、46、47、48、49	28、29、30、31、32、33、34、35、36、37、38、39、40、41、42、43、50

6.2、问题 2 模型的求解

利用 MATLAB 软件求得结果如下（程序参见附录中程序 4）:

①当 $n=2$ 时:

选择的 2 个乘车点为区域 24 和区域 32，平均满意度 $\bar{P}$ 为 0.7239。

选 24 站点乘车的区域	选 32 站点乘车的区域
1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、15、16、17、18、19、20、21、22、23、24、25、26、27、28、29、43、44、45、46、47、48、49、50	14、30、31、32、33、34、35、36、37、38、39、40、41、42

选 24 站乘车的区域、的有 36 个，选 32 站乘车的区域有 14 个。

②当 $n=3$ 时：

选择的三个乘车点为区域 16、区域 23 和区域 32。平均满意度为 0.7811。

选 16 站点乘车的区域	选 23 站点乘车的区域	选 32 站点乘车的区域
1、2、25、26、27	3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、42、43、44、45、46、47、48、49	20、21、22、23、24、28、29、30、31、32、33、34、35、36、37、38、39、40、41、50

选 16 站乘车的区域有 5 个，选 23 站乘车的区域有 25 个，选 32 站乘车的区域有 20 个。

6.3、问题 3 模型的求解

依据此模型利用 MATLAB 软件求得结果如下（程序参见附录中程序 5）：

当 $n=3$ 时，取不同的值时，算得在平均满意度较高的几种情况下，站点、平均满意度及车辆数的情况如表 1 所示：

表 5.1 站点、平均满意度及车辆数

H	平均满意度	总车辆数	站点 p1	站点 p2	站点 p3	p1 的车辆数	p2 的车辆数	p3 的车辆数
0.500	0.7809	55	18	23	32	20	28	17
0.533	0.7690	54	2	16	31	12	19	23
0.547	0.7565	54	7	23	33	15	23	16
0.550	0.7469	55	2	14	23	10	17	28
0.570	0.7424	55	19	23	34	16	21	18

6.4、问题 4 的求解

通过对第三问的结果的分析可知，每个站点都存在空座的情况，这样造成了一定的资源的浪费。所以我们建议在站点校车空座率较高的情况下时，在其他站点进行一次巡游。当校车型号单一时，很容易造成某些站点乘客难以乘车而其他某些站点又大量空座的情况，这种方案最大限度的节省了成本，相当于所有乘客集中乘车，同时因为乘客依然可以在对自己满意度高的站点候车，也达到了使满意度逼近甚至达到最大的效果。

7　结果分析

7.1 问题 1 的结果分析

由结果可看出当乘车点越多时，D 值越小。

7.2 问题 2 的结果分析

由计算结果可看出，建立车站数越多，乘客的平均满意度越高。

7.3 问题 3 的结果分析

可取得在 $h=0.533$，车辆数达到了最小值 54，平均满意度 $\bar{P}$ 为 0.769，相对比较高。三个站点所在的区域分别为 2、26、31，对应站点的车辆数分别为 12、19、23。

7.4 问题 4 的结果分析

在站点校车空座率较高的情况下时，在其他站点进行一次巡游的方案最大限度的节省了成本，相当于所有乘客集中乘车，同时因为乘客依然可以在对自己满意度高的站点候车，也达到了使满意度逼近甚至达到最大的效果。

8　模型的评价与改进

8.1 模型评价

①优点：模型结构简单,巧妙地将教师和工作者满意度量化为函数问题，而且便于计算，当数据量很大时，此优势更加突出，并且在求解时，结合 C++语言和 MATLAB，在一定程度上提高了计算速度。

②缺点：模型的影响因素过于单一化,假设条件过于理想化，使得结果与实际情况有些误差。用 *D*ijkstra 算法计算的也是理想化的情况。比如存在车载量未满开走或车辆等候教师及工作人员而停滞的现象。未考虑到天气（阴雨天）、时间（节假日）及每个

人的具体情况。

8.2 模型改进

本文模型适合于区域较少的情况，当区域量十分庞大的时候，模型的误差变大，所以我们考虑到，对于区域量很大的情况，以区域密集度为决策量，选出密集度高的区域作为乘车点被选区，在对乘车点被选区利用本文模型进行求解，这样使得问题变得简单化。

参考文献

[1]姜启源，数学模型[M]，高等教育出版社，2003。

[2] Thomas H.Cormen、Charles E.Leiserson，算法导论[M]，机械工业出版社，2006。

[3]刘浩，韩晶，MATLAB 完全自学一本通[M]，电子工业出版社，2016。

[4]邬学军，数学建模竞赛辅导教程[M]，浙江大学出版社，2009。

[5]刘汝佳，算法竞赛入门经典[M]，清华大学出版社，2009。

附录

1.程序 1(*D*ijkstra 算法求出最短路矩阵)

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <utility>
#include <queue>
#include <functional>
#include <algorithm>
#include <cstdio>
using namespace std;
const int maxn = 1010 + 20;
const int INF = 9999999;
int V, E;
int Prev[maxn];            //最短路上的前驱顶点
int d[maxn];
```

```
int a[100][100];      //i->j 上的权值
int a1[100][100];
int used[maxn];

//求从起点 s 出发到各个顶点的最短距离
void dijkstra(int s);

//从 s 点出发到各个顶点的最短距离
void dijkstra(int s)
{
    fill(d, d + V, INF);
    fill(used, used + V, false);
    fill(Prev, Prev + V, -1);
    d[s] = 0;

    while (true) {
        int v = -1;
        for (int u = 0; u < V; u++) {
            if (!used[u] && (v == -1 || d[u] < d[v]))
                v = u;  //找出到下一条尝试的顶点中距离最短的点
        }

        if (v == -1) break;
        used[v] = true;
        for (int u = 0; u < V; u++) {
            if (d[u] > d[v] + a[v][u]) {
                d[u] = d[v] + a[v][u];  //从 v 到各个临边 u 中最短的路-->存放到 d[u]，用于下一次计算
                Prev[u] = v;                //u 的前驱是 v
            }
```

```
        }
    }
}
int main()
{
    for(int i=0;i<50;i++)
        for(int j=0;j<50;j++)
          if(i==j)
             a[i][j] = 0;
          else
             a[i][j] = INF;

a[0][1]=400;a[0][2]=450;a[1][3]=300;a[1][20]=230;a[1][46]=140;a[2][3]=600;

a[3][4]=210;a[3][18]=310;a[4][5]=230;a[4][6]=200;a[5][6]=320;a[5][7]=340;

a[6][7]=170;a[6][17]=160;a[7][8]=200;a[7][14]=285;a[8][9]=180;a[9][10]=150;
    a[9][14]=160;a[10][11]=140;a[10][13]=130;a[11][12]=200;a[12][33]=400;
    a[13][14]=190;a[13][25]=190;a[14][15]=170;a[14][16]=250;a[15][16]=140;
    a[15][17]=130;a[16][26]=240;a[17][18]=204;a[17][24]=180;a[18][19]=140;
    a[18][23]=175;a[19][20]=180;a[19][23]=190;a[20][21]=300;a[20][22]=270;
    a[20][46]=350;a[21][43]=160;a[21][44]=270;a[21][47]=180;a[22][23]=240;
    a[22][28]=210;a[22][29]=290;a[22][43]=150;a[23][27]=130;a[23][24]=170;
    a[25][26]=140;a[25][33]=320;a[26][27]=190;a[27][28]=260;a[28][30]=190;
    a[29][30]=240;a[29][41]=130;a[29][42]=210;a[30][31]=230;a[30][35]=260;
    a[30][49]=210;a[31][32]=190;a[31][34]=140;a[31][35]=240;a[34][36]=160;
    a[35][38]=180;a[35][39]=190;a[36][37]=135;a[37][38]=130;a[38][40]=310;
    a[39][40]=140;a[39][49]=190;a[41][49]=200;a[42][43]=260;a[42][44]=210;
    a[32][33]=210;a[44][45]=240;a[45][47]=280;a[47][48]=200;
```

```
    for(int i=0;i<50;i++)
        for(int j=0;j<50;j++)
            if(a[i][j]!=0 && a[i][j]!=INF)
                a[j][i]=a[i][j];

    V=50,E=77;

    for(int i=0;i<50;i++)
    {
       dijkstra(i);
       for(int j=0;j<50;j++)
       {
          a1[i][j]=d[j];
       }
    }

    for(int i=0;i<50;i++)
    {
       for(int j=0;j<50;j++)
          cout<<a1[i][j]<<' ';
       cout << endl;
    }
    return 0;
}
```

2.程序 2:（求出 n=2 时应选择的站点，及各区所应选的乘车点）

```
sl=inf;
for b=1:n
    for c=1:n
        for d=1:n
            if a(b,d)<a(c,d)
                1(d)=a(b,d);
            else 1(d)=a(c,d);
```

```
            end
        end
        L=sum(1);
        if sl>L
            sl=L;p1=b;p2=c;
        end
    end
end
sl,p1,p2
for i=1:n
    if a(i,p1)<=a(i,p2)
    qulu(1,i)=p1;
    else qulu(1,i)=p2;
    end
end
qulu
```

3.程序 3：（求出 n=3 时应选择的站点，及各区所应选的乘车点）

```
sl=inf;
for b=1:n
    for c=1:n
        for d=1:n
            for e=1:n
                if a(b,e)<a(c,e)&a(b,e)<a(d,e)
                    l(e)=a(b,e);
                elseif a(c,e)<a(b,e)&a(c,e)<a(d,e)
                    l(e)=a(c,e);
                else l(e)=a(d,e);
                end
            end
            L=sum(l);
            if sl>L
                sl=L;p1=b;p2=c;p3=d;
            end
        end
    end
end
sl,p1,p2,p3
for i=1:n
    if a(i,p1)<=a(i,p2)&a(i,p1)<=a(i,p3)
        qulu(1,i)=p1;
    elseif a(i,p2)<=a(i,p1)&a(i,p2)<a(i,p3)
        qulu(1,i)=p2;
    else qulu(1,i)=p3;
```

```
    end
end
qulu
```

4. 程序 4 ：(求 n=3 时怎样达到最大满意度)

```
ren=[65 67 42 34 38 29 17 64 39 20 61 47 66 21 70 85 12 35 48 54 49 12 54 46
76 16 94 18 29 75 10 86 70 56 65 26 80 90 47 40 57 40 69 67 20 18 68 72 76 62]
q=sum(ren);
sl=0;
A=max(a);
for b=1:n
    for c=1:n
        for d=1:n
            for e=1:n
                mm=[a(b,e),a(c,e),a(d,e)];
                l(e)=min(mm);
                lren(e)=((A(e)-l(e))/A(e))*ren(e);
            end
            L=sum(lren);
            if sl<L
                sl=L;p1=b;p2=c;p3=d;
            end
        end
    end
end
manyidu=sl/q,p1,p2,p3
for i=1:n
    if a(i,p1)<=a(i,p2)&a(i,p1)<=a(i,p3)
        qulu(1,i)=p1;
    elseif a(i,p2)<=a(i,p1)&a(i,p2)<a(i,p3)
        qulu(1,i)=p2;
    else qulu(1,i)=p3;
    end
end
qulu
```

5.程序 5：

```
ren=[65 67 42 34 38 29 17 64 39 20 61 47 66 21 70 85 12 35 48 54 49 12 54 46
76 16 94 18 29 75 10 86 70 56 65 26 80 90 47 40 57 40 69 67 20 18 68 72 76 62]
q=sum(ren);
sl=0;
A=max(a);
```

```
for b=1:n
    for c=1:n
        for d=1:n
            for e=1:n
                mm=[a(b,e),a(c,e),a(d,e)];
                l(e)=min(mm);
                lren(e)=((A(e)-l(e))/A(e))*ren(e);
            end
            L=sum(lren);
            if sl<L
                sl=L;p1=b;p2=c;p3=d;
            end
        end
    end
end
manyidu=sl/q,p1,p2,p3
for i=1:n
    if a(i,p1)<=a(i,p2)&a(i,p1)<=a(i,p3)
        qulu(1,i)=p1;
    elseif a(i,p2)<=a(i,p1)&a(i,p2)<a(i,p3)
        qulu(1,i)=p2;
    else qulu(1,i)=p3;
    end
end
qulu
for i=1:n
    if a(i,p1)<=a(i,p2)&a(i,p1)<=a(i,p3)&a(i,p1)<=a(i,p4)
        qulu(1,i)=p1;
    elseif a(i,p2)<=a(i,p1)&a(i,p2)<a(i,p3)&a(i,p2)<=a(i,p4)
        qulu(1,i)=p2;
    elseif a(i,p3)<=a(i,p1)&a(i,p3)<=a(i,p2)&a(i,p3)<=a(i,p4)
        qulu(1,i)=p3;
    else qulu(1,i)=p4;
    end
end
p1renshu=0;p2renshu=0;p3renshu=0;p4renshu=0;
for i=1:n
    if qulu(1,i)==p1
        p1renshu=p1renshu+ren(1,i);
    elseif qulu(1,i)==p2
        p2renshu=p2renshu+ren(1,i);
    elseif qulu(1,i)==p3
        p3renshu=p3renshu+ren(1,i);
    else p4renshu=p4renshu+ren(1,i)
```

```
    end
end
p1renshu,p2renshu,p3renshu,p4renshu
ch1=p1renshu/47,ch2=p2renshu/47,ch3=p3renshu/47,ch4=p4renshu/47
che=ceil(ch1)+ceil(ch2)+ceil(ch3)+ceil(ch4)
```