4 Kombinatorika (kombinatorická čísla, princip inkluze a exkluze); Využití matematické indukce; rekurzivní vztahy (řešení rovnic, odhad náročnosti algoritmů) (A4B01DMA)

4.1 Kombinatorika

4.1.1 Kombinační číslo

Definice

Nechť $k \leq n \in \mathbb{N}_0$. Definujeme jejich **kombinační číslo** nebo **binomický koeficient** jako

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Čteme to „n nad k“.

Úprava

Výraz z definice je nepraktický, protože faktoriály jsou velice drahé na výpočet. Proto bývá lepší nejprve zkrátit jeden z faktoriálů ze jmenovatele se začátkem faktoriálu v čitateli. Máme pak

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (k+2) \cdot (k+1)}{(n-k)!}.$$

4.1.2 Kombinatorické případy

Uvažujme množinu o n různých prvcích.
(i) Je $n!$ způsobů, jak je seřadit (neboli je $n!$ permutací).
(ii) Jestliže na pořadí záleží a opakování není povoleno, pak je $\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.
(iii) Jestliže na pořadí záleží a opakování je povoleno, pak je n^k různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.
(iv) Jestliže na pořadí nezáleží a opakování není povoleno, pak je $\binom{n}{k}$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.
(v) Jestliže na pořadí nezáleží a opakování je povoleno, pak je $\binom{n+k-1}{k}$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.

4.1.2.1 shrnutí

	bez opakování	s opakováním
s pořadím (variace)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
bez pořadí (kombinace)	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

4.1.2.2 příklady

Variace s opakováním Kolik je možno vytvořit osmimístných hesel (password) skládajících se z písmen a číslic? Každý znak je nezávislý jev, který je možno udělat 26 + 10 = 36 způsoby, proto je možno vytvořit 36^8 hesel.

Permutace Kolik permutací písmen ABCDEFGH obsahuje slovo DECH? Toto se udělá jednoduchým trikem, prostě se DECH vezme jako jeden celek, který se spolu s ostatními čtyřmi písmenky permutuje, takže celkem permutujeme pět věcí. Možností je tedy 5! = 120.

Kombinace Uvažujme binární řetězce o délce 8. Kolik z nich obsahuje přesně tři jedničky? Zde vybíráme, na které pozice jedničky dáme, a na pořadí výběru nezáleží (říct, že jedničky mají být na pozicích 1, 2 a 6, vyjde nastejno jako říct, že mají být na pozicích 2, 6 a 1). Takže vybíráme z osmi míst, bez opakování a bez pořadí, tedy $\binom{8}{3} = 56$ řetězců.

Kombinace s opakováním Kolik různých balíčků bonbónů (ty jsou tam volně ložené) je možné vytvořit, když do balíčku vybíráme 10 bonbónů ze tří druhů, přičemž od každého druhu je k dispozici dostatek kusů? Vybíráme desetkrát z tříprvkové množiny, výběr můžeme opakovat a na pořadí nezáleží, protože bonbóny se pak stejně budou v balíčku volně míchat. Je to ta nejobtížnější ze čtyř základních situací, proto si vzorec pamatujeme: Je možné udělat $\binom{3+10-1}{10} = 66$ různých balíčků.

4.1.3 Princip inkluze a exkluze

Jsou-li A_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ konečné množiny, pak

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

pro dvě množiny tedy: $|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|$

4.1.4 Binomická věta

4.1.4.1 Pascalova identita

Pro všechna $k \leq n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

grafické znázornění - Pascalův trojúhelník

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

4.1.4.2 Binomický rozvoj

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n.
\end{aligned}$$

4.2 Matematická indukce

= metoda dokazování matematických vět a tvrzení

4.2.1 Slabý princip matematické indukce

Nechť $n_0 \in \mathbb{Z}$, nechť $V(n)$ je vlastnost celých čísel, která má smysl pro $n \geq n_0$.
Předpokládejme, že jsou splněny následující předpoklady:
(0) $V(n_0)$ platí.
(1) Pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ je pravdivá následující implikace: Jestliže platí $V(n)$, pak platí i $V(n+1)$.
Potom $V(n)$ platí pro všechna $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$.

Pokud tedy chceme dokázat univerzální platnost nějaké vlastnosti V, stačí dokázat pravdivost tvrzení (0) a (1).

4.2.1.1 Demonstrace na příkladu žebříku

Obecně Tzv. základní krok (0) říká, že umíme vylézt na první příčku žebříku. Tzv. indukční krok (1) říká, že když už někde jsme, tak umíme vylézt o příčku výš. Podstatný je ten obecný kvantifikátor v (1), indukční krok je splněn pro libovolné místo na žebříku.

Matematicky Vezmeme pro jednoduchost n0 = 1. Podle základního kroku platí V (1). Indukční krok dává pro volbu n = 1 pravdivou implikaci V (1) ⇒ V (2), my už ovšem ze základního kroku víme, že V (1) platí, tudíž podle této implikace platí i V (2). Pak zase můžeme použít indukční krok s n = 2, kde z pravdivosti V (2) dostaneme pravdivost V (3). Další použití indukčního kroku (s n = 3) dá pravdivost V (4), pak V (5) a tak dále.

4.2.1.2 Příklad

Dokažte indukcí: Pro n∈N je V (n) tvrzení, že 1 + 3 + 5 + · · · + (2n − 1) = n^2.

(0) Nechť n = 1. Vlastnost V (1) zní 1 = 1, což je pravda.

(1) Nechť n∈N je libovolné. Předpokládejme, že 1 + 3 + 5 + · · · + (2n − 1) = n^2

pro naše konkrétní n platí také 1+3+5+· · ·+(2(n+1)−1) = $(n+1)^2$, tedy že 1 + 3 + 5 + · · · + (2n + 1) = $(n + 1)^2$

1 + 3 + 5 + · · · + (2n + 1) = 1 + 3 + 5 + · · · + (2n − 1) + (2n + 1) = [1 + 3 + 5 + · · · + (2n − 1)] + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = $(n + 1)^2$.

4.3 Rekurzivní vztahy

Definice: Rekurentní vztah či rekurzivní vztah pro posloupnost $\{a_k\}$ je libovolná rovnice typu F(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, . . . , a_0) = 0, kde F je nějaká funkce.

Např. podstata problému Hanojských věží se dá vyjádřit vztahem Hn − 2H_{n-1} − 1 = 0

4.3.1 Lineární rekurentní rovnice

Lineární rekurentní rovnice, popřípadě **lineární rekursivní rovnice řádu** $k \in \mathbb{N}_0$ je libovolná rovnice ve tvaru

$$a_{n+k} + c_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \cdots + c_2(n)a_{n+2} + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n \quad \text{pro všechna } n \geq n_0,$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$, $c_i(n)$ pro $i = \{0, \ldots, k-1\}$ (tzv. **koeficienty** rovnice) jsou nějaké funkce $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$, přičemž $c_0(n)$ není identicky nulová funkce, a $\{b_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ (tzv. **pravá strana rovnice**) je pevně zvolená posloupnost reálných čísel.

Jestliže $b_n = 0$ pro všechna $n \geq n_0$, pak se příslušná rovnice nazývá **homogenní**.

Řešení

Nechť je dána lineární rekurentní rovnice

$$a_{n+k} + c_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \ldots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Jako její **řešení** označíme libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ takovou, že po dosazení odpovídajících členů do dané rovnice dostáváme pro všechna n pravdivý výrok.

4.3.2 Charakteristická rovnice

Definice

Nechť je dána lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

$$a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + c_1a_{n+1} + c_0a_n = b_n \text{ pro všechna } n \geq n_0.$$

Její **charakteristický polynom** (**characteristic polynomial**) je definován jako polynom

$$p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0.$$

Kořeny charakteristického polynomu se nazývají **charakteristická čísla**, popřípadě **vlastní čísla** dané rovnice (**characteristic numbers/roots** or **eigenvalues**).

K získání charakteristických čísel potřebujeme vyřešit rovnici $λ^k$ + c^k−1$λ^k$−1 + . . . + c_1λ + c_0 = 0, které se také říká charakteristická rovnice

4.3.2.1 Příklad

Najdeme obecné řešení rovnice $a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$ pro všechna n ≥ -2

Charakteristický polynom je p(λ) $=\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda + 1$

p(λ) = (λ − 1)(λ − 1)(λ + 1) = (λ − 1)^2(λ + 1).

báze řešení:

$$\left\{ \{1^n\}_{n=-2}^{\infty}, \{n1^n\}_{n=-2}^{\infty}, \{(-1)^n\}_{n=-2}^{\infty} \right\}$$

obecné řešení pro pro u, v, w ∈ R:

$$\{u \cdot 1^n + v \cdot n1^n + w \cdot (-1)^n\}_{n=-2}^{\infty} = \{u + vn + w(-1)^n\}_{n=-2}^{\infty}$$

z takového řešení lze odhadnout asymptotickou složitost alogritmu

4.3.3 Master theorem

- = algoritmus pro určování asymptotické složitosti algoritmů
- zejména "rozděl a panuj" $f(n) = a \cdot f(\frac{n}{b}) + g(n)$.

Algoritmus

(The Master theorem)

Předpokládejme, že neklesající nezáporná funkce f na $\mathbb{N}$ splňuje rovnici $f(n) = a \cdot f(\frac{n}{b}) + cn^d$ na množině $M = \{b^k;\ k \in \mathbb{N}\}$, kde $b \in \mathbb{N}$ splňuje $b \geq 2$ a $a, c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}_0$ jsou konstanty splňující $a \geq 1$ a $c > 0$. Pak platí následující:

(i) Jestliže $a > b^d$, tak $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$.

(ii) Jestliže $a = b^d$, tak $f(n) = \Theta(n^d \log_2(n))$.

(iii) Jestliže $a < b^d$, tak $f(n) = \Theta(n^d)$.