

4 Kombinatorika (kombinatorická čísla, princip inkluze a exkluze); Využití matematické indukce; rekurzivní vztahy (řešení rovnic, odhad náročnosti algoritmů) (A4B01DMA)

4.1 Kombinatorika

4.1.1 Kombinační číslo

Definice

Nechť $k \leq n \in \mathbb{N}_0$. Definujeme jejich **kombinační číslo** nebo **binomický koeficient** jako

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Čteme to „ n nad k “.

Úprava

Výraz z definice je nepraktický, protože faktoriály jsou velice drahé na výpočet. Proto bývá lepší nejprve zkrátit jeden z faktoriálů ze jmenovatele se začátkem faktoriálu v čitateli. Máme pak

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (k+2) \cdot (k+1)}{(n-k)!}.$$

4.1.2 Kombinatorické případy

Uvažujme množinu o n různých prvcích.

(i) Je $n!$ způsobů, jak je seřadit (neboli je $n!$ permutací).

(ii) Jestliže na pořadí záleží a opakování není povoleno, pak je $\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.

(iii) Jestliže na pořadí záleží a opakování je povoleno, pak je n^k různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.

(iv) Jestliže na pořadí nezáleží a opakování není povoleno, pak je $\binom{n}{k}$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.

(v) Jestliže na pořadí nezáleží a opakování je povoleno, pak je $\binom{n+k-1}{k}$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.

4.1.2.1 shrnutí

	bez opakování	s opakováním
s pořadím (variací)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
bez pořadí (kombinace)	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

4.1.2.2 příklady

Variace s opakováním Kolik je možno vytvořit osmimístných hesel (password) skládajících se z písmen a číslic? Každý znak je nezávislý jev, který je možno udělat $26 + 10 = 36$ způsoby, proto je možno vytvořit 36^8 hesel.

Permutace Kolik permutací písmen ABCDEFGH obsahuje slovo DECH? Toto se udělá jednoduchým trikem, prostě se DECH vezme jako jeden celek, který se spolu s ostatními čtyřmi písmenky permutuje, takže celkem permutujeme pět věcí. Možností je tedy $5! = 120$.

Kombinace Uvažujme binární řetězce o délce 8. Kolik z nich obsahuje přesně tři jedničky? Zde vybíráme, na které pozice jedničky dáme, a na pořadí výběru nezáleží (říct, že jedničky mají být na pozicích 1, 2 a 6, vyjde nastejno jako říct, že mají být na pozicích 2, 6 a 1). Takže vybíráme z osmi míst, bez opakování a bez pořadí, tedy $\binom{8}{3} = 56$ řetězců.

Kombinace s opakováním Kolik různých balíčků bonbónů (ty jsou tam volně ložené) je možné vytvořit, když do balíčku vybíráme 10 bonbónů ze tří druhů, přičemž od každého druhu je k dispozici dostatek kusů? Vybíráme desetkrát z tříprvkové množiny, výběr můžeme opakovat a na pořadí nezáleží, protože bonbóny se pak stejně budou v balíčku volně míchat. Je to ta nejobtížnější ze čtyř základních situací, proto si vzorec pamatujeme: Je možné udělat $\binom{3+10-1}{10} = 66$ různých balíčků.

4.1.3 Princip inkluze a exkluze

Jsou-li A_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ konečné množiny, pak

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right| \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|. \end{aligned}$$

pro dvě množiny tedy: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

4.1.4.1 Pascalova identita

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$
$$\begin{array}{cccccc}
& & \binom{0}{0} & & & \\
& \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
& \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
& \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
& \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n.\end{aligned}$$

= metoda dokazování matematických vět a tvrzení

Nechť $n_0 \in \mathbb{Z}$, necht' $V(n)$ je vlastnost celých čísel, která má smysl pro $n \geq n_0$.

Předpokládejme, že jsou splněny následující předpoklady:

(0) $V(n_0)$ platí.

(1) Pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ je pravdivá následující implikace: Jestliže platí $V(n)$, pak platí i $V(n+1)$.

Potom $V(n)$ platí pro všechna $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$.

4.2.1.1 Demonstrace na příkladu žebříku

Obecně Tzv. základní krok (0) říká, že umíme vylézt na první příčku žebříku. Tzv. indukční krok (1) říká, že když už někde jsme, tak umíme vylézt o příčku výš. Podstatný je ten obecný kvantifikátor v (1), indukční krok je splněn pro libovolné místo na žebříku.

Matematicky Vezmeme pro jednoduchost $n_0 = 1$. Podle základního kroku platí $V(1)$. Indukční krok dává pro volbu $n = 1$ pravdivou implikaci $V(1) \Rightarrow V(2)$, my už ovšem ze základního kroku víme, že $V(1)$ platí, tudíž podle této implikace platí i $V(2)$. Pak zase můžeme použít indukční krok s $n = 2$, kde z pravdivosti $V(2)$ dostaneme pravdivost $V(3)$. Další použití indukčního kroku ($n = 3$) dá pravdivost $V(4)$, pak $V(5)$ a tak dále.

4.2.1.2 Příklad

Dokažte indukcí: Pro $n \in \mathbb{N}$ je $V(n)$ tvrzení, že $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

(0) Nechť $n = 1$. Vlastnost $V(1)$ zní $1 = 1$, což je pravda.

(1) Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné. Předpokládejme, že $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ pro naše konkrétní n platí také $1 + 3 + 5 + \dots + (2(n+1) - 1) = (n+1)^2$, tedy že $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$
 $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$.

4.3 Rekurzivní vztahy

Definice: Rekurentní vztah či rekurzivní vztah pro posloupnost $\{a_k\}$ je libovolná rovnice typu $F(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0) = 0$, kde F je nějaká funkce.

Např. podstata problému Hanojských věží se dá vyjádřit vztahem $H_n - 2H_{n-1} - 1 = 0$

4.3.1 Lineární rekurentní rovnice

Lineární rekurentní rovnice, popřípadě lineární rekursivní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}_0$ je libovolná rovnice ve tvaru

$$a_{n+k} + c_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \dots + c_2(n)a_{n+2} + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n \quad \text{pro všechna } n \geq n_0,$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$, $c_i(n)$ pro $i = \{0, \dots, k-1\}$ (tzv. **koefficienty** rovnice) jsou nějaké funkce $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$, přičemž $c_0(n)$ není identicky nulová funkce, a $\{b_n\}_{n=n_0}^\infty$ (tzv. **pravá strana rovnice**) je pevně zvolená posloupnost reálných čísel.

Jestliže $b_n = 0$ pro všechna $n \geq n_0$, pak se příslušná rovnice nazývá **homogenní**.

Řešení

Nechť je dána lineární rekurentní rovnice

$$a_{n+k} + c_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \dots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Jako její **řešení** označíme libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^\infty$ takovou, že po dosazení odpovídajících členů do dané rovnice dostáváme pro všechna n pravdivý výrok.

4.3.2 Charakteristická rovnice

Definice

Nechť je dána lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

$$a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + c_1a_{n+1} + c_0a_n = b_n \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Její **charakteristický polynom** (characteristic polynomial) je definován jako polynom

$$p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + c_1\lambda + c_0.$$

Kořeny charakteristického polynomu se nazývají **charakteristická čísla**, popřípadě **vlastní čísla** dané rovnice (characteristic numbers/roots or eigenvalues).

K získání charakteristických čísel potřebujeme vyřešit rovnici $\lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0$, které se také říká **charakteristická rovnice**

4.3.2.1 Příklad

Najdeme obecné řešení rovnice $a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$ pro všechna $n \geq -2$

Charakteristický polynom je $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

báze řešení:

$$\left\{ \{1^n\}_{n=-2}^{\infty}, \{n1^n\}_{n=-2}^{\infty}, \{(-1)^n\}_{n=-2}^{\infty} \right\}$$

obecné řešení pro $u, v, w \in \mathbb{R}$:

$$\{u \cdot 1^n + v \cdot n1^n + w \cdot (-1)^n\}_{n=-2}^{\infty} = \{u + vn + w(-1)^n\}_{n=-2}^{\infty}$$

z takového řešení lze odhadnout asymptotickou složitost algoritmu

4.3.3 Master theorem

- Algoritmus pro určování asymptotické složitosti algoritmů (zejména “rozděl a panuj” a rekurze)
- Při volání funkce nad n prvky se problém rozdělí na a podproblémů o velikosti n/b , které se řeší rekurzivně tou samou funkcí
- Řešení se získá jako sloučení řešení z podproblémů, a slučování trvá cn^d .
- Složitost funkce f pak lze vyjádřit jako $f(n) = a \cdot f(\frac{n}{b}) + cn^d$
- Z toho plyne několik podmínek pro konstanty:
 - a musí být alespoň jedna, tedy úloha má alespoň jeden podproblém
 - b musí být alespoň dvě, tedy data se postupně zmenšují
 - c je kladné a d je nezáporné, tedy čas sloučení podproblémů je kladný

Algoritmus

(The Master theorem)

Předpokládejme, že neklesající nezáporná funkce f na \mathbb{N} splňuje rovnici $f(n) = a \cdot f(\frac{n}{b}) + cn^d$ na množině $M = \{b^k; k \in \mathbb{N}\}$, kde $b \in \mathbb{N}$ splňuje $b \geq 2$ a $a, c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}_0$ jsou konstanty splňující $a \geq 1$ a $c > 0$. Pak platí následující:

- Jestliže $a > b^d$, tak $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$.
- Jestliže $a = b^d$, tak $f(n) = \Theta(n^d \log_2(n))$.
- Jestliže $a < b^d$, tak $f(n) = \Theta(n^d)$.