3 Vlastnosti celých čísel (dělitelnost, prvočísla) a Eukleidův algoritmus. Binární relace, zejména ekvivalence a uspořádání, a jejich reprezentace. Počítání modulo. (A4B01DMA)

3.1 Vlastnosti celých čísel

- celá čísla Z se skládají z přirozených čísel, nuly a záporných celých čísel
- množina je uzavřena na operaci sčítání, odčítání a násobení

3.1.1 Dělitelnost

- **Definice:** Nechť a, b$\in$ Z. Řekneme, že a dělí b, značeno a$|$b, jestliže existuje k $\in$ Z takové, že b = k $\cdot$ a. V takovém případě říkáme, že a je faktor b a že b je násobek a. Také říkáme, že b je dělitelné číslem a. Pokud toto není pravda, tak píšeme a$\nmid$b.
- Číslo d$\in$N je **společný dělitel** (common divisor) čísel a, b, jestliže d$|$a a d$|$b.
- **největší společný dělitel** (greatest common divisor), značeno gcd(a, b) je největší prvek množiny jejich společných dělitelů, pokud je alespoň jedno z a,b nenulové.
- Číslo d$\in$N je **společný násobek** (common multiple) čísel a, b, jestliže a$|$d a b$|$d.
- **nejmenší společný násobek** (least common multiple), značeno lcm(a, b) je nejmenší prvek množiny jejich společných násobků, pokud jsou obě a,b nenulové.
- lcm(a, 0) = lcm(0, b) = 0
- gcd(0, 0) = 0
- **lcm(a, b) $\cdot$ gcd(a, b) = $|$a$|$ $\cdot$ $|$b$|$**
- čísla a, b $\in$ Z jsou **nesoudělná**, jestliže gcd(a, b) = 1

3.1.2 Prvočíslo

- je přirozené číslo, které je beze zbytku dělitelné **právě dvěma různými přirozenými čísly**, a to číslem **jedna** a **sebou samým** (tedy 1 není prvočíslo)
- Přirozená čísla různá od jedné, která nejsou prvočísla, se nazývají **složená čísla**.

3.1.3 Eukleidův algoritmus

Lze jím vypočítat **největšího společného dělitele** dvou přirozených čísel.

- **vychází z lemmatu**: Nechť a, b $\in$ N, nechť q, r$\in N_0$ splňují a = qb + r a 0 $\leq$ r $<$ b. Pak platí následující: d $\in$ N je společný dělitel a, b právě tehdy, když je to společný dělitel b, r.
- gcd(a, b) = gcd(b, r)
- opakovaně hledáme gcd pro dvojici b, r místo a, b

3.1.3.1 příklad: Chceme najít gcd(408, 108)

Máme 408 = 3 $\cdot$ 108 + 84 (408 mod 108 = 84), proto gcd(408, 108) = gcd(108, 84).

Máme 108 = 1 $\cdot$ 84 + 24, proto gcd(408, 108) = gcd(108, 84) = gcd(84, 24).

Máme 84 = 3 $\cdot$ 24 + 12, proto gcd(408, 108) = gcd(108, 84) = gcd(84, 24) = gcd(24, 12).

Máme 24 = 2 $\cdot$ 12 + 0, proto gcd(408, 108) = gcd(108, 84) = gcd(84, 24) = gcd(24, 12) = gcd(12, 0) = 12.

3.2 Binární relace

Definice: Nechť A,B jsou množiny. Libovolná podmnožina R $\subseteq$ A $\times$ B se nazývá relace z A do B. Jestliže (a, b)$\in$ R, pak to značíme aRb a řekneme, že a je v relaci s b vzhledem k R. Jestliže (a, b) /$\in$ R, pak řekneme, že a není v relaci s b vzhledem k R.

Druhy relací:

- R je reflexivní, jestliže pro všechna a $\in$ A platí aRa. např. “je stejný”
- R je symetrická, jestliže pro všechna a, b $\in$ A platí (aRb $\Rightarrow$ bRa). “je sourozencem”
- R je antisymetrická, jestliže pro všechna a, b $\in$ A platí ([aRb $\bigwedge$ bRa] $\Rightarrow$ a = b).
- R je tranzitivní, jestliže pro všechna a, b, c $\in$ A platí ([aRb $\bigwedge$ bRc] $\Rightarrow$ aRc). “je vyšší; A je vyšší než B, B je vyšší než C $\Rightarrow$ A je vyšší než C”

3.2.1 Ekvivalence

Definice: Nechť R je relace na nějaké množině A. Řekneme, že R je ekvivalence, jestliže je **reflexivní, symetrická a tranzitivní**.

3.2.1.1 Třída ekvivalence

Každá ekvivalence rozdělí množinu A na systém disjunktních množin, které pak nazýváme třídy ekvivalence.

Definice: Nechť R je relace ekvivalence na nějaké množině A. Pro a∈A definujeme třídu ekvivalence prvku a (equivalence class of a) vzhledem k R jako $[a]_R = \{b \in A; aRb\}$.

Příklad: Mějme ekvivalenci R na množině celých číslech Z definovanou takto: [a, b] ∈ R právě tehdy, když |a| = |b|. Pak:
Z[0] = {0}. Nula je v relaci pouze s nulou.
Z[1] = {−1, 1}. Jednička je v relaci s jedničkou a s minus jedničkou, protože |1| = |−1|.
Z[2] = {−2, 2}. Dvojka je v relaci s dvojkou a s minus dvojkou.
Z[3] = {−3, 3}. ...

3.2.2 Částečné uspořádání

Definice: Nechť R je relace na nějaké množině A. Řekneme, že R je částečné uspořádání, jestliže je **reflexivní, antisymetrická a tranzitivní**. V tom případě řekneme, že dvojice (A, R) je částečně uspořádaná množina.

Příklad: Relace ≤ je uspořádání na přirozených, celých, racionálních i reálných číslech.
Relace ⊆ je uspořádání na třídě všech množin (na univerzální třídě).
Relace dělitelnosti | (a dělí b) je uspořádáním na přirozených číslech
Relace "Být potomkem" je uspořádáním na množině osob.

3.2.2.1 Hasseův diagram

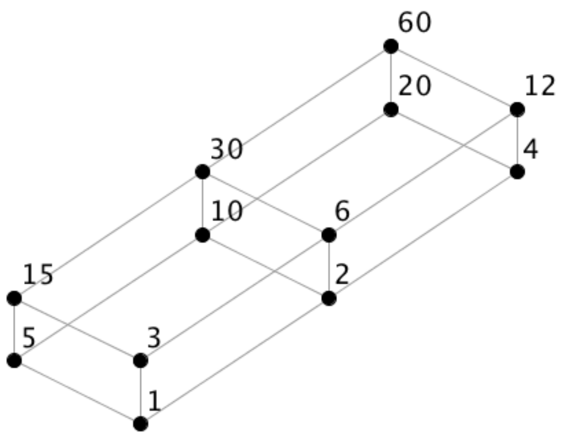
- Uspořádané množiny můžeme zakreslit pomocí Hasseova diagramu.
- vrcholy představují prvky množiny
- hrana mezi vrcholy (a, b) nám říká, že a < b a zároveň neexistuje c takové, že a < c < b. Tedy mezi prvky a a b už žádný jiný prvek není. Přitom musí platit, že v grafu je vrchol a níže než vrchol b.

Příklad: Dělitelé čísla 60: A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}. Uspořádání podle dělitelnosti:

3.3 Počítání modulo

Definice Nechť n∈N. Řekneme, že čísla a, b∈Z jsou **kongruentní modulo** n, značeno a ≡ b (mod n), jestliže n|(a−b).

Nechť n ∈ N. Pro čísla a, b ∈ Z jsou následující podmínky ekvivalentní:



- a $\equiv$ b (mod n)
- existuje k $\in$ Z takové, že a = b + kn
- a mod n = b mod n, tj. jsou si rovny zbytky po dělení číslem n.

3.3.1 vlastnosti

Nechť n $\in$ N, uvažujme a, b, u, v $\in$ Z takové, že a $\equiv$ u (mod n) a b $\equiv$ v (mod n):

- a + b $\equiv$ u + v (mod n)
- a − b $\equiv$ u − v (mod n)
- ab $\equiv$ uv (mod n)