第四單元 複數的簡介

(甲)虛數 i 的引進

爲了使 $x^2+1=0$ 有解，我們在實數系之外另創了一個新數$\sqrt{-1}$,稱爲**虛數單位**。

十八世紀 Euler 特以 i 來表示$\sqrt{-1}$ 但當時並未普遍,直到 Gauss 時代才被廣泛的使用。

(1) i 的性質：

(a)$i=\sqrt{-1}$ (b)$i^2=-1$ (c)$i^3=-i$ (d)$i^4=1$

一般而言：$i^{4m+k}=i^k$，m 爲整數，$k=0,1,2,3$

(2)$\sqrt{負數}$ 的運算：如果 $a<0$，則計算$\sqrt{a}$ 時，$\sqrt{a}=\sqrt{-a}\cdot i$ 。

計算：$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}$ =？

計算：$\sqrt{\dfrac{2}{-3}}$ =？

結論 1：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\begin{cases}-\sqrt{ab}, & a<0,b<0\\ \sqrt{ab}, & 其他\end{cases}$

結論 2：$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}, & a>0,b<0\\ \sqrt{\dfrac{a}{b}}, & 其他\end{cases}$

[例題1] 計算下列各小題：

(1)$i^{97}+i^{102}+i^{303}-i^{27}$=？ (2)$\sqrt[3]{-27}\ i+\sqrt{-9}$ =？

(3)$\sqrt{2}\cdot\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}\cdot\sqrt{7}$ =？ (4)$-\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}}$=？ Ans：(1)$i-1$ (2)0 (3)$-\sqrt{210}$ (4)$\dfrac{2}{3}\ i$

(練習1) 求 $\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{30}}\times\sqrt{-5}\times\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=$？ Ans：$\frac{4}{3}\ i$

(練習2) 若 x,y 為實數，且 $x+y=-7,xy=4$，求$(\sqrt{x}+\sqrt{y}\ )^2=$？ Ans：-11

(乙)複數標準式與基本運算

(1)複數的定義：

(a)設 $\boldsymbol{i}$ 表示$\sqrt{-1}$ ，而 a,b 均為實數，則所有像 $\boldsymbol{a+bi}$ 這樣的數，都叫做複數。

所有的複數所成的集合稱為**複數系**。

複數系(C)={$a+b\ i|a,b$ 為實數}

(b)複數的標準式：(實數)+(實數) $\boldsymbol{i}$

一個複數 z 寫成 $a+bi(a,b$ 為實數$)$的形式，則 $a+bi$ 就稱為複數 z 的**標準式**。

其中 a 稱為 z 的**實部**，b 稱為 z 的**虛部**。符號：$a=\text{Re}(z)$，$b=\text{Im}(z)$。

例如：$3+4i$ 的實部為 3，虛部為 4。$2-\sqrt{3}\ i$ 的實部為 2，虛部為$-\sqrt{3}$ 。

(c)虛數的定義：

設複數 $z=a+bi(a,b$ 為實數$)$

①若 $b=0$，則 $z=a+bi=a$ 為實數，即虛部為 0 的複數為實數，故實數系包含在複數系中。

②若 $b\neq0$，則 $z=a+bi$ 為虛數$\begin{cases} a=0\ ,\ z=bi\ ,\text{稱為純虛數} \\ a\neq0\ ,\ z=a+bi\ ,\quad\text{稱為虛數}\end{cases}$

數系的關係：$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$

(2)複數的相等：

設 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ $(a,b,c,d$ 均為實數$)$，則 $z_1=z_2\Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$。

(3)複數的加減乘除：設 a,b,c,d 為實數

(a)加法：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(b)減法：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(c)乘法：$(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$

例如：$(3+5i)(2-4i)=[3\times2+(5i)(-4i)]+i[5\times2+3\times(-4)]=26-2i$。

(d)除法：若 $c+di\neq0$，則$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\ i$

例如：$\frac{2+3i}{1+4i}=\frac{(2+3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\frac{14-5i}{17}=\frac{14}{17}-\frac{5}{17}i$。

(4)複數運算的定義能像實數運算一樣滿足交換律、結合律、分配律。

[例題2] 化簡$(2+5i)(7+3i)+\dfrac{3-i}{2+4i}$ 爲標準式。 Ans：$\dfrac{-9}{10}+\dfrac{403}{10}i$

[例題3] 求 $8+6i$ 的平方根。 Ans：$3+i$，$-3-i$。

[解法]：

令 $8+6i$ 的平方根爲 $a+bi$ (a,b 爲實數)

$\Leftrightarrow (a+bi)^2=8+6i$

$\Leftrightarrow a^2-b^2+2abi=8+6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=8 \\ 2ab=6 \end{cases}$$

解得$(a,b)=(3,1)$或$(-3,-1)$

(5)共軛複數：

(a)設複數 z 的標準式爲 $a+bi$，我們稱 $a-bi$ 爲 $a+bi$ 的**共軛複數**。

符號$\overline{z}=a-bi$。即 $a+bi$ 與 $a-bi$ 互爲共軛複數。

$(a+bi)+(a-bi)=2a$ 爲實數 $(a+bi)\times(a-bi)=a^2+b^2$ 爲實數

[例題4] 試證明下列共軛複數的性質：

(1) z 爲實數$\Leftrightarrow \overline{z}=z$ (2) z 爲純虛數或 $0\Leftrightarrow \overline{z}=-z$

[例題5] 共軛複數的運算性質：

設 z_1、z_2 為複數，試證明下列性質：

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$　　(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$　　(4) $\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2\neq 0)$　。

(練習3) 設複數 z 的虛部為$-\frac{1}{2}$，且$\frac{1}{z}$ 的實部為$\frac{3}{5}$，則 $z=$？

Ans：$\frac{1}{6}-\frac{1}{2}i$ 或 $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

(練習4) 求 $5+12i$ 的平方根。 Ans：$\pm(3+2i)$

(練習5) 將下列各複數化成 $a+bi$ 的形式：

(1)$(-2-3i)-(-\frac{1}{2}-\sqrt{2}i)$　(2)$(2+5i)(-7-2i)$

(3)$(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)$ (4)$\frac{5+3i}{2+7i}$

Ans：(1)$-\frac{3}{2}+(-3+\sqrt{2})i$ (2)$-4-39i$ (3)$5+0i$ (4)$\frac{31}{53}-\frac{29}{53}i$

(練習6) 試求$\frac{8+5i}{3-2i}$的共軛複數。 Ans：$\frac{14}{13}-\frac{31}{13}i$

(練習7) 設 $z=3+2i$，試求 $\frac{z-1}{z+1}$ 之共軛複數。Ans：$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$

(乙)一元二次方程式的解

(1)解一元二次程式：

$ax^2+bx+c=0$，$a\neq 0$，$a,b,c\in\mathrm{R}$， $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(2) 一元二次程式根的性質：

$ax^2+bx+c=0$ (a,b,c 爲**實數**，$a\neq 0$)，根的判別式 $D=b^2-4ac$

(a)$D>0\Leftrightarrow$兩相異實根 (b)$D=0\Leftrightarrow$兩相等實根 (c)$D<0\Leftrightarrow$兩共軛虛根

[問題與討論]：當 a,b,c 並不全是實數時，上述結果是否成立？

注意：以上的結論有一個重要的前提，就是 *a,b,c* 爲實數。

(3) $ax^2+bx+c=0$ (a,b,c 爲**有理數**，$a\neq 0$)，

(a)$D=(\text{有理數})^2>0\Leftrightarrow$ 兩相異有理根

(b)$D\neq(\text{有理數})^2>0\Leftrightarrow$兩相異無理根

(c)$D=0\Leftrightarrow$兩相等有理根

(4)根與係數的關係：

設一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有兩根爲α,β

(a)$a\alpha^2+b\alpha+c=a\beta^2+b\beta+c=0$ (b)$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ ，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

(c)$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)\Rightarrow$ 方程式 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

因此得知若已知兩根α,β ，計算$\alpha+\beta$ ，$\alpha\beta$ ，則可求得方程式。

[例題6] 試求以下列數字為二根的整係數方程式。

(1)$\frac{1}{2}$、$\frac{-1}{3}$ (2)$1+\sqrt{2}$ 、$1-\sqrt{2}$ (3)$4-3i$、$4+3i$

Ans：(1)$6x^2-x-1=0$ (2)$x^2-2x-1=0$ (3)$x^2-8x+25=0$

[例題7] 設 a 為實數，且方程式 $4x^2-(3a+i)x+a-i=0$ 有一實根α，試求α之值與另一個根。

Ans：$\alpha=-1$、$\frac{1+i}{4}$

[例題8] 設α、β為方程式 $x^2+2x+3=0$ 的二根，求下列各式的值。

(a)$\alpha^2+\beta^2$ (b)$\alpha^3+\beta^3$ (c)$\alpha^4+\beta^4$ (d)$(\alpha^2+4\alpha+3)(\beta^2+4\beta+3)$

(e)$\frac{\alpha}{\alpha^2+3}+\frac{\beta}{\beta^2+3}$ 。Ans：(a)-2 (b)10 (c)-14 (d)12 (e)-1

[例題9] 設一元二次方程式 $x^2+16x+4=0$ 的二根為α、β，請求$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$？

Ans：-20

(練習8) 試解下列的方程式：

(1)$5x^2-7x-1=0$ (2)$x^2-4x+5=0$ (3)$3x^2+2x+1=0$

Ans：(1)$\frac{7\pm\sqrt{69}}{10}$ (2)$x=2\pm i$ (3)$x=\frac{-1\pm\sqrt{2}i}{3}$

(練習9) 設α、β為 $x^2-3x+5=0$ 之二根，試分別為以下列二數為根之一元二次方程式。(1)$\alpha+\beta$、$\alpha\beta$ (2)$\frac{\beta}{\alpha^2}$、$\frac{\alpha}{\beta^2}$

Ans：(1)$x^2-8x+15=0$ (2)$25x^2+18x+5=0$

(練習10) 試解方程式 $x|x|-3|x|+2=0$。 Ans：$x=1,2$ 或$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$

(練習11) 設 a 為實數，且 $3x^2+(a+i)x+2i-6=0$ 有實根，求此方程式的解。

Ans：-2、$1-\frac{i}{3}$

(練習12) 設 $x^2-2x+3=0$ 的二根為α、β，求下列各式的值：

(1)$\alpha^2+\beta^2$ (2)$\alpha^3+\beta^3$ (3)$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ (4)$\frac{\beta^3}{\alpha^2+3}+\frac{\alpha^3}{\beta^2+3}$。

Ans：(1)-2 (2)-10 (3)$\frac{2}{3}$ (4)$\frac{-7}{3}$

(練習13) 設α、β為 $x^2+6x+4=0$ 之二根，則 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$? Ans：$-10$

(練習14) 甲乙二生同解一整係數方程式，甲生判別式計算錯誤，得二根為$\frac{13}{12}$、$\frac{-7}{24}$，乙生抄錯 x^2 的係數，得二根為$\frac{5}{4}$、$\frac{-3}{10}$，則正確的方程式為何？

Ans：$48x^2-38x-15=0$

(練習15) 設 k 為實數，二次方程式 $kx^2+2x+3=0$ 沒有實根，求 k 之範圍。

Ans：$k>\frac{1}{3}$

(練習16) 設 k 為自然數，$3x^2+10x+k=0$ 的二根均為有理數，求 k 之值。

Ans：$k=3$ 或 7 或 8

複數與實數的比較：

數系 性質	實數系(R)	複數系(C)
定義與關係	可表示在數線上	可表示在複數平面上
加法運算	加法有封閉性 加法有結合律 加法有交換律	加法有封閉性 加法有結合律 加法有交換律
乘法運算	乘法有封閉性 乘法有結合律 乘法有交換律 乘法對加法有分配律	乘法有封閉性 乘法有結合律 乘法有交換律 乘法對加法有分配律
不等性質	設 $a,b\in$R $a-b>0\Leftrightarrow a>b$ 實數的大小次序關係： 設 x,y,z 均爲實數，則 (a)下列三式恰有一成立：$x>y$，$x=y$，$x<y$ (三一律) (b)若 $x<y$，$y<z$，則 $x<z$。 (c)$x<y \Leftrightarrow x+z<y+z$ (d)若 $z>0$，則 $x<y \Leftrightarrow xz<yz$。	**虛數不能比較大小。**
絕對值的性質	a 爲實數， $\|a\|$代表數線上，a 所代表的點到坐標原點的距離。 設 x,y 爲實數 $\|xy\|=\|x\|\|y\|$ $\left\|\frac{x}{y}\right\|=\frac{\|x\|}{\|y\|}$ $(y\neq 0)$ $\|\|x\|-\|y\|\|\leq\|x\pm y\|\leq\|x\|+\|y\|$	a 爲複數，$a=x+yi$ $\|a\|$代表複數平面上，a 所代表的點到原點 O 的距離。 設 x,y 爲複數 $\|xy\|=\|x\|\|y\|$ $\left\|\frac{x}{y}\right\|=\frac{\|x\|}{\|y\|}$ $(y\neq 0)$ $\|\|x\|-\|y\|\|\leq\|x\pm y\|\leq\|x\|+\|y\|$
其它	設 $a,b\in$R， $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$。 $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$ $a^2\geq 0$ $-\|a\|\leq a\leq\|a\|$	**設 $a,b\in$C** **$a-b>0$ 不能保證 $a>b$。** **$a^2+b^2=0$ 不能保證 $a=b=0$** **不能保證 $a^2\geq 0$** **不能保證$-\|a\|\leq a\leq\|a\|$**

綜合練習

(1) 請化簡下列兩式：

(a)$\dfrac{5}{\sqrt{-3}}+\dfrac{(\sqrt{3}+2)i}{3}+\dfrac{2i^2}{\sqrt{-12}}+i=$？　(b)$\dfrac{(2+i)(7+3i)}{3-i}=$？　(c)$i^{81}+i^{82}+\ldots+i^{366}=$？

(2) 下列各式何者爲真？

(A)$\sqrt{6}=\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$　(B)$\sqrt{-6}=-\sqrt{2}\times\sqrt{3}$　(C)$\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$

(D) $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$。

(3) 設 a,b 爲兩個複數，下列敘述何者正確？
(A)若 $z=a+bi$ 爲複數，則 b 爲複數 z 的虛部。 (B)若 $a+bi=0$，則 $a=b=0$
(C)若 $a^2>b^2$，則 $a^2-b^2>0$　(D)若 $a^2-b^2>0$，則 $a^2>b^2$　(E)若 $a^2+b^2=0$，則 $a=b=0$

(4) 設 a,b 爲實數，下列選項何者爲真？

(A)$(\sqrt{-1})^2=\sqrt{(-1)^2}$　(B)$\sqrt{\dfrac{-1}{1}}=\sqrt{\dfrac{1}{-1}}$　(C)$a+bi=0\Rightarrow a=b=0$

(D)設 a,b 爲實數，$b>a$，則$\sqrt{a-b}=\sqrt{b-a}\ i$　(E)$5i>4i$

(5) 設 z 爲複數，z 的虛部爲-2，$\dfrac{1}{z}$ 的實部爲$\dfrac{3}{13}$，則 $z=$？

(6) 設 a,b 爲實數，且$\dfrac{2a+i}{4+3i}$ 之共軛複數爲$-5+bi$，則 $a+b=$？

(7) 設 a 爲實數，若 $x^3+ax^2+x+2=0$ 有純虛根，求 $a=$？

(8) 設 $i=\sqrt{-1}$，若 $1-i$ 爲 $x^2-cx+1=0$ 之一根，則複數 $c=$？

(9) 設 $x\in$R 且 $i(x+i)^3$ 爲實數，求 x 的值。

(10) 設 a,b 爲實數，滿足 $a+b=-12$ 且 $ab=3$，則$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=$？

(11) 設 a,b 爲實數，滿足 $a+b=-13$ 且 $ab=9$，則$\sqrt{a}+\sqrt{b}=$？

(12) 設 x,y 爲實數，且 $x+y-4i=1+xyi$，求$\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}=$？

(13) 試解下列方程式：

(a)$6x^2-x-12=0$　(b)$x^2-3\sqrt{2}\ x+(3+\sqrt{2})=0$　(c)$x^2+|2x-1|=3$　(d)$\dfrac{3x+1}{x-3}+5\cdot\dfrac{x-3}{3x+1}=6$

(14) 設 $x^2+kx+6=0$ 試求滿足下列條件的 k 值。
(a)二根的比爲 2：1。　(b)二根平方和爲 5。

(15) 甲乙二生解 x 之一元二次方程式，甲看錯判別式得二根 4,−3，乙看錯 x^2 項係數，二根得 3,−1，試問若無其他錯誤，求正確二根。

(16) 試解方程式 $x^2-5|x|+6=0$。

(17) 設 $m\in$Q，方程式 $x^2-(\sqrt{3}+1)x+m\sqrt{3}-2=0$ 有有理根，求 m 的值。

進階問題

(18) 設 k 為自然數，方程式 $3x^2+10x+k=0$ 的二根均為有理數，求 k 的值。

(19) 設 a,b,c 為三角形的三邊長，若二次方程式$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ 有兩相等實根，試證明此三角形為正三角形。

(20) 利用代換法解下列各方程式：

(a)$(x^2+3x+1)^2-5(x^2+3x)-1=0$

(b)$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)=168x^2$

[提示：$(x^2+7x+6)(x^2+5x+6)-168x^2=0\Rightarrow(x^2+6+7x)(x^2+6+5x)-168x^2$

$\Rightarrow(x^2+6)^2+12x(x^2+6)-133x^2=0\Rightarrow(x^2+6+19x)(x^2+6-7x)=0$]

(c)$x^2+\dfrac{1}{x^2}+4=5(x-\dfrac{1}{x})$　[提示：令 $t=x-\dfrac{1}{x}$，$t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2$]

(21) 甲乙二人同解一個一元二次方程式，因甲誤寫一次項係數，乙誤寫常數項，故甲乙二人所得的二根之絕對值之比各為 2：3 與 5：2，且甲之大根為$-\dfrac{4}{5}$，乙小根為$\dfrac{2}{3}$，求原方程式。

(22) 設 $5x^2-7x-1=0$ 的兩根為α、β，求以$|\alpha|$、$|\beta|$之小數部分為根的方程式。

(23) 設二次方程式 $x^2+(m-1)x+m+1=0$ 有兩個整數根，則整數 $m=$？

綜合練習解答

(1) (a) $\dfrac{(5-3\sqrt{3})}{3}i$ (b) $2+5i$(c) $-1+i$

(2) (D)

(3) (C)

(4) (B)(C)(D)

(5) $3-2i$ 或$\dfrac{4}{3}-2i$

(6) -20

(7) 2 [提示：可以令虛根為 ki，其中 k 為不等於 0 的實數，再代入原方程式，求 k 的值。]

(8) $\dfrac{3-i}{2}$

(9) $x=0$ 或$\pm\sqrt{3}$

(10) $-12-2\sqrt{3}$

(11) $\sqrt{19}\ i$[注意：$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=19$，因為 $a<0$ 且 $b<0$，所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{19}\ i$($-\sqrt{19}\ i$ 不合)]

(12) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}i$

(13) (a)$x=\dfrac{3}{2}$或$\dfrac{-4}{3}$ (b)$x=\sqrt{2}+1$ 或 $2\sqrt{2}-1$ (c) $x=1-\sqrt{3}$ 或$-1+\sqrt{5}$ (d)$x=-2$ 或 8

(14) (a)$k=\pm3\sqrt{3}$ [提示：令兩根為 $2a,a$，再利用根與係數的關係去求 a，再求 k](b)$k=\pm\sqrt{17}\ \sqrt{3}$ [提示：令兩根為α、β，已知$\alpha^2+\beta^2=5$，用根與係數的關係，求 k]

(15) $\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$

(16) $x=\pm2$ 或±3 [提示：分成 $x\geq0$，$x\leq0$ 兩種情形來討論方程式的解]

(17) $m=2$ 或-1

(18) $k=3$ 或 7 或 8

(19) 利用判別式=0，化簡成$[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$，可得 $a=b=c$。

(20) (a)$x=0$ 或-3 或$\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$ [提示：令 $t=x^2+3x$，再將原方程式化成 $t^2-3t=0\Rightarrow t=0$ 或 3，再解 x](b)$x=1$ 或 6 或$\dfrac{-19\pm\sqrt{337}}{2}$ (c)$x=1\pm\sqrt{2}$ 或$\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

(21) $75x^2-175x+72=0$

(22) $10x^2-2(\sqrt{69}-5)x+(9-\sqrt{69})=0$

(23) 7 或-1