第四十三單元 雙曲線

(甲)雙曲線的基本定義與性質

(1)定義：

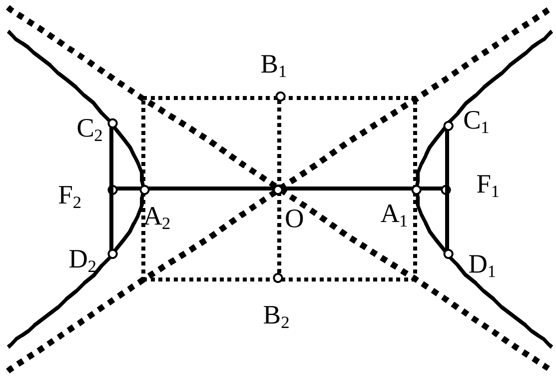
平面上有兩個定點 F_1、F_2，及一定長 $2a$ 且 $\overline{F_1F_2}>2a$，則在平面上所有滿足

$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a$ 的 P 點所形成的圖形稱爲**雙曲線**。其中 F_1、F_2 稱爲**焦點**。

[討論]：

若 $2a=\overline{F_1F_2}$，則 P 點會形成什麼圖形？

若 $2a>\overline{F_1F_2}$，則 P 點會形成什麼圖形？



(2)名詞介紹：

(a)兩焦點連線段的中點(O)稱爲$\boxed{\text{中心}}$。

(b)過兩焦點的直線與雙曲線的交點 A_1、A_2 稱爲雙曲線的$\boxed{\text{頂點}}$。

(c)線段 $\overline{A_1A_2}$ 稱爲$\boxed{\text{貫軸}}$，線段 $\overline{B_1B_2}$ 稱爲$\boxed{\text{共軛軸}}$。$(\overline{OB_1}^2=\overline{OB_2}^2=\overline{OF_1}^2-\overline{OA_1}^2)$

(d)雙曲線上任一點與焦點的連線段稱爲此雙曲線的$\boxed{\text{焦半徑}}$。

(e)雙曲線上兩相異點的連線段，稱爲此雙曲線的$\boxed{\text{弦}}$，過焦點的弦稱爲$\boxed{\text{焦弦}}$。

焦弦中與貫軸垂直者稱爲$\boxed{\text{正焦弦}}$**($\overline{C_1D_1}$、$\overline{C_2D_2}$)**。

(f)如圖，包含矩形對角線的直線稱爲雙曲線的$\boxed{\text{漸近線}}$。

(3)基本性質：

(1°)貫軸兩頂點 A_1 與 A_2 對稱於 O 點，共軛軸軸兩頂點 B_1 與 B_2 對稱於 O 點。 **即 $\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=a$ 爲貫軸半長，貫軸長 $=2a$；以 $\overline{OB_1}=\overline{OB_2}=b$ 爲共軛軸半長，共軛軸長 $=2b$。**

[說明]：

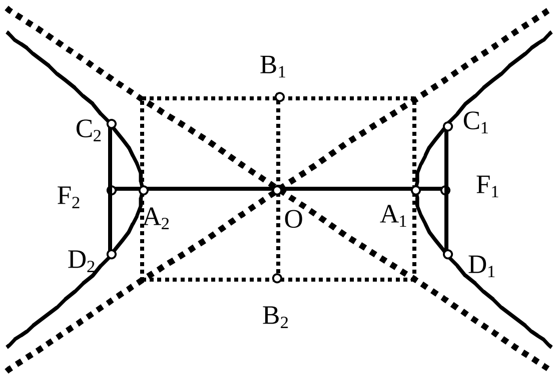
因爲 A_1、A_2 在雙曲線上，

所以 $A_1F_2-A_1F_1=2a=A_2F_1-A_2F_2$

$\Rightarrow A_1A_2+A_2F_2-A_1F_1=A_2A_1+A_1F_1-A_2F_2$

$\Rightarrow A_1F_1=A_2F_2$

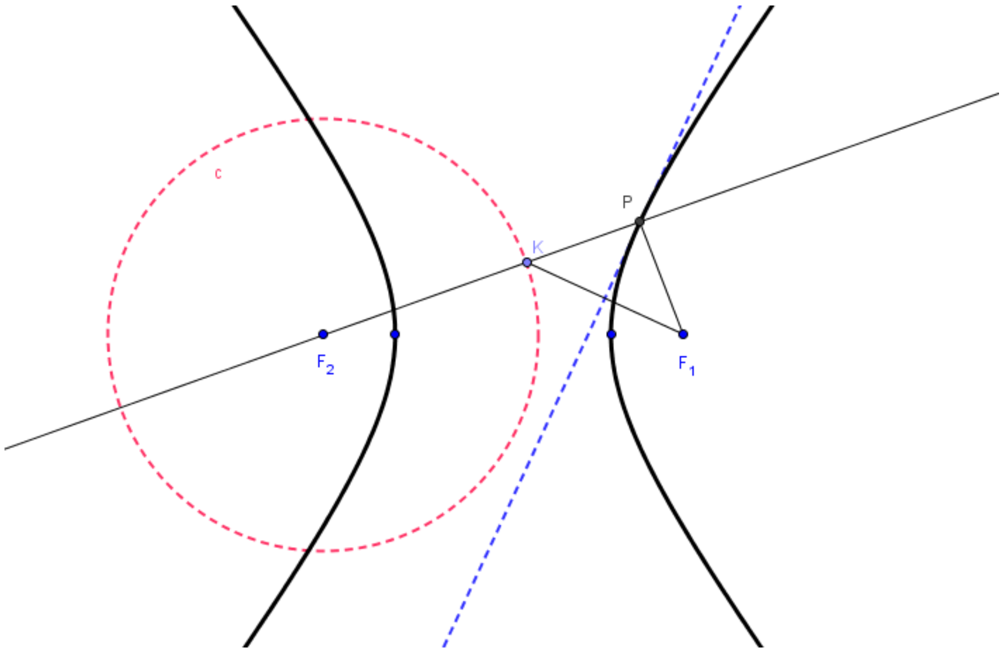
又因為 $OF_1=OF_2$
$\Rightarrow OF_1-A_1F_1=OF_2-A_2F_2 \Rightarrow OA_1=OA_2$



(2°)雙曲線的漸近線：
(a)雙曲線的畫法：
給定一個圓，假設圓心為 F_2，在圓外取一點 F_1，設 K 點在圓 F_2 上移動，

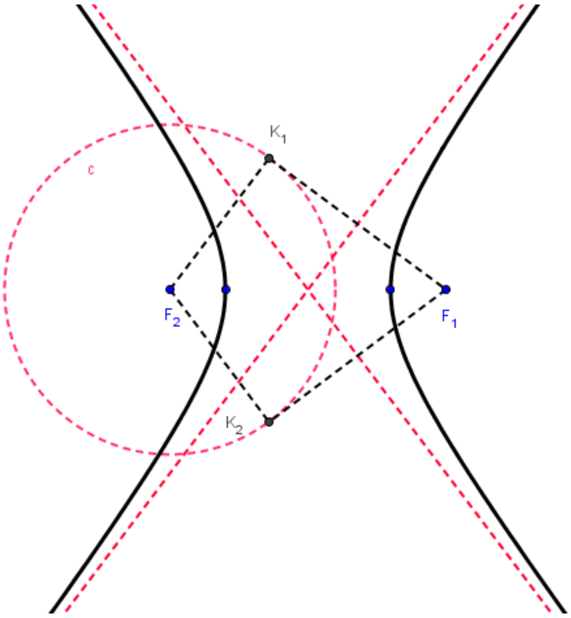
P 點是$\overline{KF_1}$的中垂線與直線 KF_2 的交點。試問 P 點的軌跡是什麼圖形？

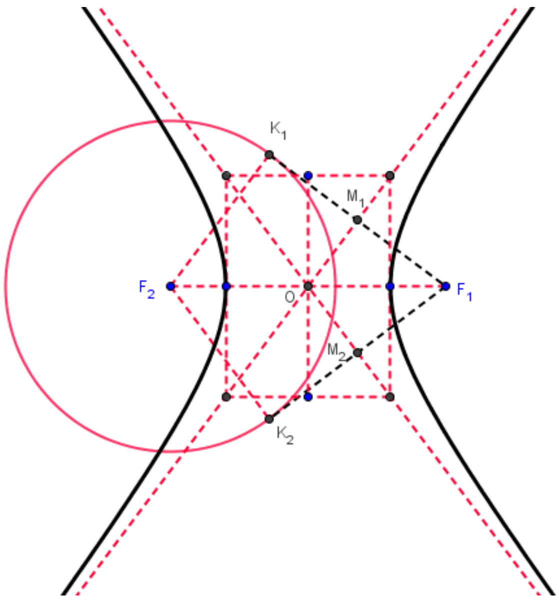
[說明]：
考慮$|PF_1-PF_2|=|PF_2-PK|=F_2K=$圓半徑(定值)
$\Rightarrow$P 點形成一個以 F_1、F_2 為焦點的雙曲線。



(b)漸近線的形成：
定義雙曲線的漸近線：

在下圖中，雙曲線與線段 KF_1 的中垂線交於 P 點，當點 K 在圓上移動使得$\overline{KF_1}$與$\overline{KF_2}$垂直時，(即圖中的 K_1、K_2 的位置) $\overline{KF_1}$的中垂線就與直線 KF_2 平行，因此交點 P 可視為在無窮遠處，此時$\overline{KF_1}$的中垂線通過中心 O。此時的$\overline{K_1F_1}$與$\overline{K_2F_1}$的中垂線 L_1、L_2 稱為此**雙曲線的漸近線(兩條漸近線通過雙曲線的中心)**。





(3°)$\overline{\text{OF}}^2=\overline{\text{OA}_1}^2+\overline{\text{OB}_1}^2$

如上右圖，因爲 M_1 與 M_2 分別爲$\overline{K_1F_1}$與$\overline{K_2F_1}$的中點，且 O 爲$\overline{F_1F_2}$的中點，

故$\overline{OM_1}=\frac{1}{2}\overline{K_1F_2}=\frac{1}{2}(2a)=a=\overline{OA_1}$，令$\overline{OF_1}=\overline{OF_2}=c$ 時$\Rightarrow\overline{M_1F_1}=\sqrt{c^2-a^2}\ =b=\overline{OB_1}=\overline{A_1C_1}$

$\Rightarrow\Delta OA_1C_1\cong\Delta OM_1F_1\Rightarrow\overline{OC_1}=\overline{OF_1}=\sqrt{a^2+b^2}\ \Rightarrow c^2=a^2+b^2$

($\overline{\boldsymbol{OA_1}}=\overline{\boldsymbol{OA_2}}=\boldsymbol{a}$ 爲貫軸半長，$\overline{\boldsymbol{OB_1}}=\overline{\boldsymbol{OB_2}}=\boldsymbol{b}$ 爲共軛軸半長，$\boldsymbol{c}=\overline{\boldsymbol{OF_1}}=\overline{\boldsymbol{OF_2}}$)

(4°)雙曲線的正焦弦長爲 $\dfrac{\textbf{(共軛軸長)}^2}{\textbf{貫軸長}}=\dfrac{\boldsymbol{2b^2}}{\boldsymbol{a}}$。($a$ 爲貫軸半長、b 爲共軛軸半長)

[說明]：因爲$\overline{C_1D_1}$爲正焦弦，

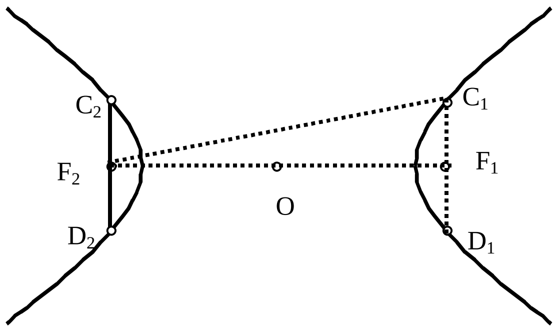
所以$\Delta C_1F_1F_2$ 爲直角三角形

設 $C_1F_1=x$，$\Rightarrow C_1F_2=2a+x$，

$\Rightarrow(2a+x)^2=x^2+(2c)^2$

$\Rightarrow 4a^2+4ax+x^2=x^2+4c^2\Rightarrow x=\dfrac{c^2-a^2}{a}=\dfrac{b^2}{a}\Rightarrow C_1F_1=\dfrac{b^2}{a}$

$\Rightarrow C_1D_1=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{(2b)^2}{2a}=\dfrac{\textbf{(共軛軸長)}^2}{\textbf{貫軸長}}$



結論：

(1)*a*,*b*,*c* 的意義如下：

a=貫軸長之半=中心到貫軸頂點(頂點)之距離=$\frac{1}{2}|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|$

b=共軛軸長之半=中心到共軛軸頂點之距離

c=$\frac{1}{2}\cdot\overline{F_1F_2}$=中心到焦點之距離

(2)*a*,*b*,*c* 的關係：$\boxed{c^2=a^2+b^2}$

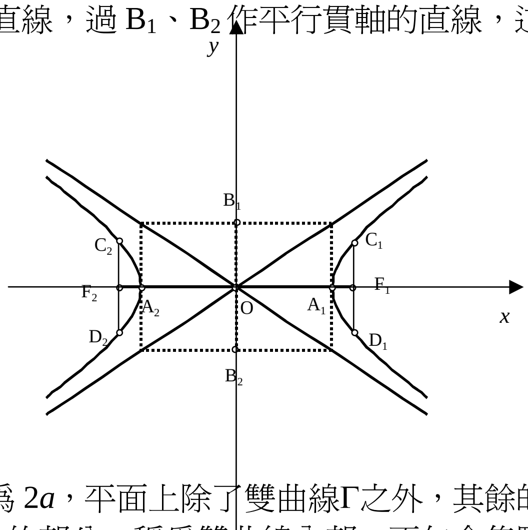
(3)雙曲線的正焦弦長為 $\frac{(\text{共軛軸長})^2}{\text{貫軸長}}=\frac{2b^2}{a}$。($a$ 為貫軸半長、b 為共軛軸半長)

(4)雙曲線的描繪：

如圖，當我們要描繪雙曲線的圖形時，首先描出貫軸與共軛軸的四個端點 A_1,A_2,B_1,B_2，通過 A_1、A_2 作平行於共軛軸的直線，過 B_1、B_2 作平行貫軸的直線，這兩雙平行線形成一個矩形。

其次連接矩形的兩條對角線，向兩端延長便是雙曲線的漸近線。

最後在兩條漸近線之間描繪雙曲線，並且沿漸近線向四方無限延伸，如此畫出的雙曲線較為寫真。



[例題1] 設雙曲線Γ的兩焦點 F_1、F_2，貫軸長為 $2a$，平面上除了雙曲線Γ之外，其餘的點可分成兩個部分，包含焦點 F_1、F_2 的部分，稱為雙曲線內部，不包含焦點 F_1、F_2 的部分，稱為雙曲線外部。試利用雙曲線的定義證明：

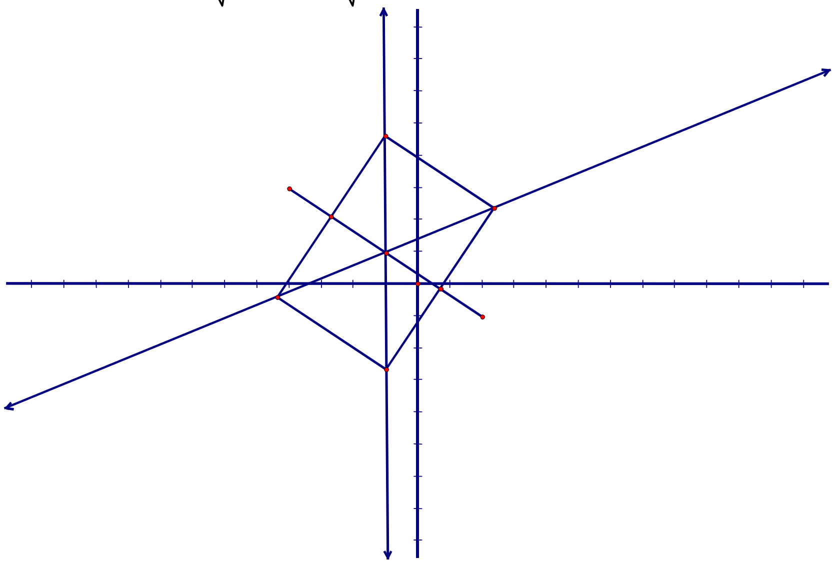
(1)若 R 點為雙曲線Γ內部的點，則$|\overline{RF_1}-\overline{RF_2}|>2a$。

(2)若 R 點為雙曲線Γ外部的點，則$|\overline{RF_1}-\overline{RF_2}|<2a$。

[例題2] 求雙曲線$\left|\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}-\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}\right|=4$ 的

(1)中心坐標與焦點坐標。(2)頂點坐標 (3)正焦弦長

Ans：(1)中心$(-1,1)$焦點$(2,-1)$ $(-4,3)$ (2)$(\frac{6}{\sqrt{13}}-1,1-\frac{4}{\sqrt{13}})$ (3)9



(練習1) 設雙曲線的貫軸長為 6，共軛軸長為 8，求此雙曲線的正焦弦長。

Ans：$\frac{32}{3}$

(練習2) 設雙曲線Γ的貫軸長與共軛軸長等長，且長度為 $2a$，求

(1)中心與任一正焦弦端點所圍成的三角形面積。

(2)以任一正焦弦為一組隊邊的矩形面積。

Ans：(1)$\sqrt{2}a^2$ (2)$4\sqrt{2}a^2$

(練習3) 求雙曲線$\left|\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}\right|=6$ 的

(1)中心坐標 (2)正焦弦長 (3)貫軸方程式 (4)共軛軸方程式 (5)頂點。

Ans：(1)$(-1,-1)$ (2)$\frac{8}{3}$ (3)$2x+3y+5=0$ (4)$3x-2y+1=0$ (5)$(-1-\frac{9}{\sqrt{13}},-1+\frac{6}{\sqrt{13}})$

(乙)雙曲線的標準式

(1)雙曲線的標準式：

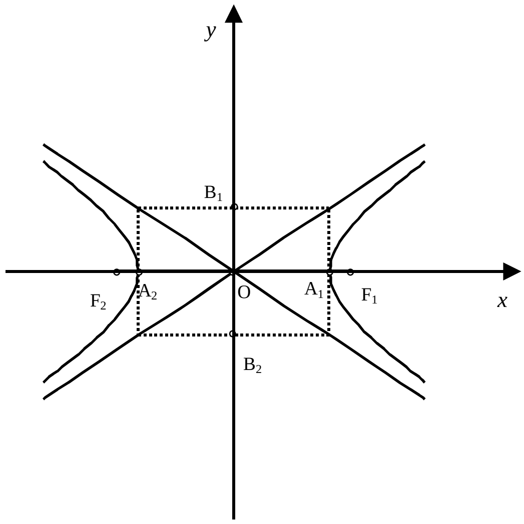
(a)給定兩個定點 $F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$，雙曲線$\Gamma=\{P||PF_1-PF_2|=2a$，$\overline{F_1F_2}>2a\}$的方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$。

[證明]：

(⇒)(證明滿足$|PF_1-PF_2|=2a$ 的點 $P(x,y)$是方程式的解)

設 $P(x,y)$滿足$|PF_1-PF_2|=2a$，則$|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}|=2a$ 移項變成

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$ 兩端平方



得 $(x-c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$

$\Rightarrow\pm a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$，兩端平方，再化簡可得

$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=(c^2-a^2)a^2$

$\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1\quad\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(⇐)(證明方程式的解 $P(x,y)$滿足$|PF_1-PF_2|=2a$)

設點 $P(x,y)$滿足$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

則 $PF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$$=\sqrt{(x^2-2cx+c^2)+b^2(\frac{x^2}{a^2}-1)}=\sqrt{(\frac{a^2+b^2}{a^2})x^2-2cx+(c^2-b^2)}$$

$$=\sqrt{(\frac{c}{a}x)^2-2cx+a^2}\quad(\because b=\sqrt{a^2-c^2})$$

$$=\sqrt{(\frac{c}{a}x-a)^2}=|\frac{c}{a}x-a|$$，同理可得 $PF_2=|\frac{c}{a}x+a|$

由於點 $P(x,y)$滿足$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，所以$\frac{x^2}{a^2}\geq 1\Rightarrow|x|\geq a$

(1°)$x\geq a$：

$\frac{c}{a}x\geq c$，$\frac{c}{a}x-a\geq c-a>0$，$\frac{c}{a}x+a\geq c+a>0$

故得焦半徑 $PF_1=|\frac{c}{a}x-a|=\frac{c}{a}x-a$，$PF_2=|\frac{c}{a}x+a|=\frac{c}{a}x+a$

於是$|PF_1-PF_2|=2a$

(2°)$x\leq -a$ 同理可證出$|PF_1-PF_2|=2a$。

結論：雙曲線方程式$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$**(左右開口的雙曲線)**的特徵：

(1)中心**(0,0)**

(2)a=貫軸長之半=中心到貫軸頂點之距離=$\dfrac{1}{2}(\overline{PF_1}-\overline{PF_2})$。

b=共軛軸長之半=中心到共軛軸頂點之距離。

> **(b)**若選取 $F_1(0,c)$、$F_2(0,-c)$，雙曲線$\Gamma=\{P\,|\,|PF_1-PF_2|=2a$，$\overline{F_1F_2}>2a\}$
> 的方程式為$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$。

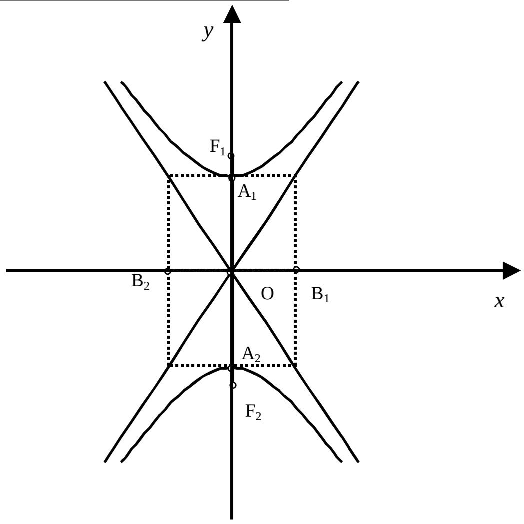
結論：

雙曲線方程式$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$**(上下開口的雙曲線)**的特徵：

(1)中心**(0,0)**

(2)a=貫軸長之半=中心到貫軸頂點之距離=$\dfrac{1}{2}(\overline{PF_1}-\overline{PF_2})$。

b=共軛軸長之半=中心到共軛軸頂點之距離。



(2)利用坐標的方法解釋雙曲線的漸近線：

設雙曲線的方程式為$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

當 x 很大時，$\sqrt{x^2-a^2}\approx\sqrt{x^2}$ 點$(x,\pm\dfrac{b}{a}x)$與點$(x,\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2})$會很接近，

於是我們可以猜測兩直線 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 為漸近線。

[說明]：

設 $P(x_0,y_0)$在雙曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$上，取 L_1：$bx-ay=0$，L_2：$bx+ay=0$

計算：$d(P,L_1)\cdot d(P,L_2)=\dfrac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{b^2+a^2}}\cdot\dfrac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\dfrac{|b^2x_0^2-a^2y_0^2|}{b^2+a^2}=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ (定值與 P 無關)

我們得到 $d(P,L_1)\cdot d(P,L_2)$為定值，因此當 P 點離 L_2 越遠時，則 P 點離 L_1 越近；同樣地，P 點離 L_1 越遠時，則 P 點離 L_2 越近。

於是雙曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的雙曲線為 $bx-ay=0$、$bx+ay=0$。

結論：

(a)雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的漸近線爲 $bx\pm ay=0$。

(b)雙曲線$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$的漸近線爲 $by\pm ax=0$。

(c)雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上的點 P 到兩漸近線的距離乘積爲定值=$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$。

(練習4) 試求雙曲線$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的中心、焦點、頂點、貫軸長、共軛軸長、正焦弦長、漸近線方程式？

(3)平移雙曲線的標準式：

例子：設雙曲線Γ：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 沿向量$\vec{l}=(3,2)$平移，所得的圖形爲Γ'，

(1)請求出Γ'的方程式。

(2)並求Γ'的中心、焦點、頂點、貫軸、共軛軸所在直線方程式、漸近線方程式、正焦弦長、貫軸長。

[解法]：

(1)設 $P'(x',y')$爲Γ'上的任意點，令 $P(x,y)$爲Γ上的點，且$\overrightarrow{PP'}=(3,2)$，即 P 點沿向量$\vec{l}$平移到 P'，所以$(x'-x,y'-y)=(3,2)\Rightarrow x=x'-3,y=y'-2$

$\Rightarrow \frac{(x'-3)^2}{9}-\frac{(y'-2)^2}{16}=1$ 故Γ'的方程式爲$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$。

$\Rightarrow a^2=9$，$b^2=16,c^2=a^2+b^2=25\Rightarrow a=3,b=4,c=5$

根據 a,b,c 的意義，可知中心到貫軸頂點距離爲 3，中心到焦點的距離爲 5

(2)Γ的中心(0,0)，貫軸頂點(±3,0)、焦點坐標(±5,0)、貫軸方程式 $y=0$、共軛軸方程式 $x=0$、漸近線 $4x\pm3y=0$、正焦弦長$\frac{2\cdot16}{3}=\frac{32}{3}$、貫軸長=6。

平移過程中，雙曲線的中心、焦點、頂點坐標、貫軸、共軛軸、漸近線方程式會隨之作平移，而貫軸長、共軛軸長、正焦弦長不變。所以可得Γ'的各項資料：

Γ'的中心(3,2)，貫軸頂點坐標(3±3,2)、焦點坐標(3±5,2)、貫軸方程式 $y=2$

共軛軸方程式 $x=3$、漸近線 $4(x-3)\pm3(y-2)=0$，正焦弦長$\frac{2\cdot16}{3}=\frac{32}{3}$、貫軸長=6。

結論：

(1)$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\xrightarrow{\text{沿}\vec{l}=(h,k)\text{平移}}\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

雙曲線方程式$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (左右開口的雙曲線)的特徵：

(1°)中心(h,k)

(2°)a=貫軸長之半=中心到貫軸頂點之距離=$\frac{1}{2}(\overline{PF_1}-\overline{PF_2})$。

b=共軛軸長之半=中心到共軛軸頂點之距離。

(2) $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \xrightarrow{沿\vec{l}=(h,k)平移} \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

雙曲線方程式 $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ (上下開口的雙曲線)的特徵：

(1°)中心(h,k)

(2°)a=貫軸長之半=中心到貫軸頂點之距離=$\frac{1}{2}(\overline{PF_1}-\overline{PF_2})$。

b=共軛軸長之半=中心到共軛軸頂點之距離。

(3)平移前後的圖形，中心、焦點、頂點、漸近線方程式都同時平移一個向量，但雙曲線的形狀、貫軸、共軛軸的長度，這些幾何性質不會因位置不同而改變。

[例題3] 求雙曲線$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{16}=1$的中心、頂點、焦點座標及貫軸、共軛軸及漸近線方程式，並作圖形。

Ans：O(–2,5) 頂點(1,5)、(–5,5)、焦點座標(3,5)、(–7,5)、貫軸 $y=5$、共軛軸 $x+2=0$、漸近線 $4(x+2)\pm3(y-5)=0$

[例題4] 求滿足下列條件的雙曲線：

(1)共軛軸在 $x=1$ 上，焦點是(6,3)，且過點(5,3)之雙曲線爲何？

(2)中心原點，一焦點爲(0,–13)，一頂點爲(0,12)。

(3)設雙曲線的二焦點爲 F(5,2)、F′(–1,2)，且過(7,6)，則此雙曲線的方程式爲？

(4)一焦點爲$(1,2+\sqrt{5})$，兩漸近線爲 $x+2y-5=0$、$x-2y+3=0$。

Ans：

(1)$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=1(2)\frac{-x^2}{25}+\frac{y^2}{144}=1(3)\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y-2)^2}{4}=1(4)\frac{(y-2)^2}{1}-\frac{(x-1)^2}{4}=1$

(練習5) 雙曲線$\left|\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}\right|=6$，則：

(1)焦點______。(2)中心______。(3)貫軸長為___。(4)正焦弦長是___。

Ans：(1)$(-4,1)(2,-3)$ (2)$(-1,-1)$ (3)6 (4)$\frac{8}{3}$

(練習6) 雙曲線 $4x^2-y^2-8x-4y+4=0$ 之(1)頂點坐標為__________。(2)漸近線方程式為___________。(3)雙曲線上任一點到二漸近線之距離之積＝__________。Ans：(1)(1，－4)，(1，0)(2) $2x-y-4=0$，$2x+y=0$(3)$\frac{4}{5}$

(練習7) 求滿足下列條件的雙曲線方程式：

(a)$F_1(5,0)$，$F_2(-5,0)$是雙曲線的二個焦點，且 P 為雙曲線上一點，若$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=8$。

(b)設雙曲線中心為(3,5)，貫軸平行 x 軸且長為 6，共軛軸長為 10

(c) 已知 $F_1(-1,7)$，$F_2(-1,-3)$是雙曲線的二個焦點，正焦弦長為$\frac{32}{3}$

(d)以 $2x+y=0$ 與 $2x-y=0$ 為漸近線且一焦點為$(\sqrt{35},0)$

(e)以原點為中心，正焦弦長為 4，兩焦點間的距離為 $2\sqrt{15}$，且焦點在 y 軸上。

Ans：(a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ (b) $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{25}=1$(c) $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{16}=1$

(d) $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{28}=1$ (e) $-\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1$

(練習8) 雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的兩焦點 F_1、F_2，若雙曲線上一點 P 滿足$\angle F_1PF_2=90°$

且$\overline{PF_1}=2\overline{PF_2}$，$\overline{F_1F_2}=10$，求 a，b 之值。Ans：$a=\sqrt{5}$ ，$b=2\sqrt{5}$

(丙)雙曲線與漸近線

(1)已知漸近線如何表示雙曲線呢？

例子：

假設雙曲線Γ的方程式爲$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

$\Rightarrow 9x^2-16y^2=144 \Rightarrow (3x+4y)(3x-4y)=144$

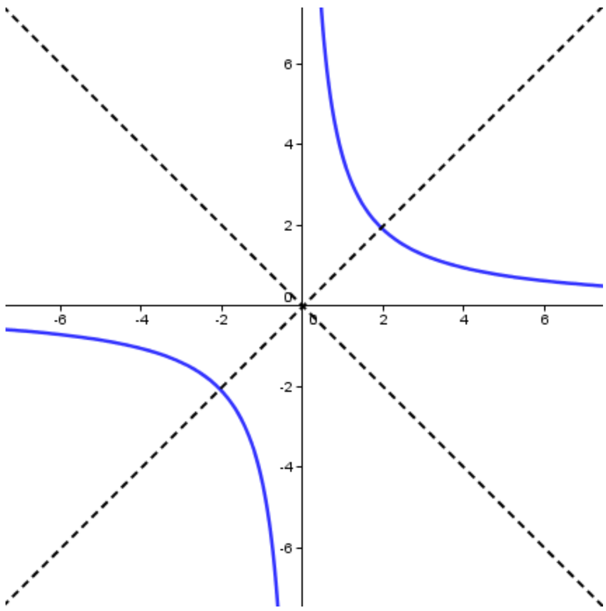
另一方面漸近線爲 $3x+4y=0$、$3x-4y=0$

觀察上面的式子，我們猜想如果有一雙曲線的漸近線爲 $3x+4y=0$、$3x-4y=0$，則此雙曲線是否爲$(3x+4y)(3x-4y)=k(k\neq 0)$的形式？

例子：

請畫出 $xy=4$ 的圖形？

觀察右圖，可知 x,y 軸爲雙曲線的漸近線。



若設 L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$ 和 L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$ 是相交於一點的兩條直線，

則$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=k\ (k\neq 0)$ 代表以 L_1、L_2 爲漸近線的雙曲線。

[說明]：

設Γ是以 L_1、L_2 爲漸近線之一雙曲線，$P(x,y)$是Γ上的任一點，由漸近線的性質可知「P 點到 L_1、L_2 之距離乘積是一個定值」。

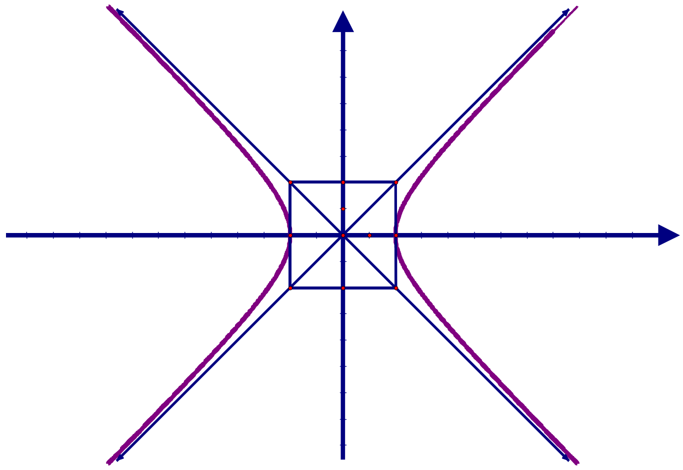
即 $$\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\times\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=k_1$$

$\Rightarrow(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=\pm k_1\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}$ 。

結論：
(a)若設 L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$，L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$ 爲雙曲線Γ的漸近線，
則雙曲線Γ可表爲$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=k$ $(k\neq 0)$。
(b)兩漸近線的交點爲雙曲線的中心。
(c)以 L_1、L_2 爲漸近線的雙曲線，兩對稱軸爲 L_1、L_2 的角平分線。

(2)等軸雙曲線

漸近線互相垂直的雙曲線稱為等軸雙曲線。



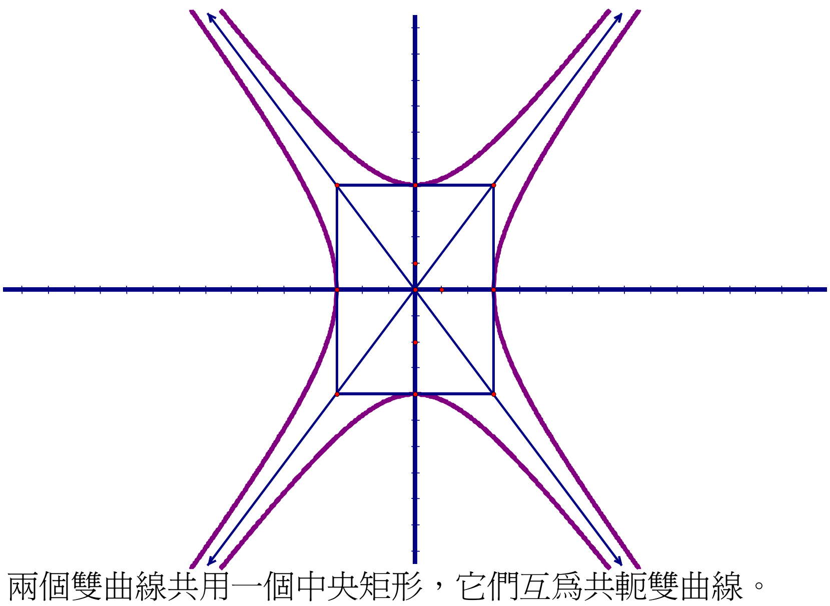
性質：
標準式爲等軸雙曲線 $\Leftrightarrow$ $a=b$ $\Leftrightarrow$ 貫軸長=共軛軸長 $\Leftrightarrow$ 中央矩形爲正方形

[說明]：
設雙曲線$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$爲等軸雙曲線

$\Leftrightarrow$ 漸近線 $b(x-h)\pm a(y-k)=0$ 互相垂直$\Leftrightarrow$ $(\frac{b}{a})(\frac{-b}{a})=-1$ $\Leftrightarrow$ $a=b$

例如：
$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 、$xy=k$ $(k\neq 0)$均爲等軸雙曲線。

(3)雙曲線Γ_1與Γ_2互爲共軛雙曲線
$\Leftrightarrow\Gamma_1$與Γ_2有相同的漸近線且Γ_1的貫軸、共軛軸分別爲Γ_2的共軛軸與貫軸。



上圖中，兩個雙曲線共用一個中央矩形，它們互爲共軛雙曲線。

例如：

雙曲線$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$與$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\mathbf{-1}$它們的貫軸、共軛軸互相對調因此互為共軛雙曲線。

性質：

(a)共軛雙曲線共用中央矩形，具有相同的漸近線。

(b) $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$的共軛雙曲線為$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=-1$

$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$的共軛雙曲線為$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=-1$

(c)雙曲線$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=\pm k\quad(k\neq 0)$ 互為共軛雙曲線。

[例題5] (1)一雙曲線之二漸近線為 $2x-y=0$，$2x+y=0$ 且貫軸長為 6，求其方程式。
(2)求以$(1,2+\sqrt{10})$為一焦點，兩漸近線為 $x+2y-5=0$ 與 $x-2y+3=0$ 的雙曲線方程式？Ans：(1)$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ 或$\frac{-4x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1$ (2)$\frac{(y-2)^2}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}=1$

[例題6] 一等軸雙曲線通過(1,0)，且中心為(1,–2)，有一條漸近線為 $x+2y+3=0$，試求另一漸近線方程式與此等軸雙曲線的方程式。
Ans：$2x-y-4=0$，$(2x-y-4)(x+2y+3)=-8$

[例題7] 已知雙曲線 G 的二漸近線 $3x+2y-7=0$，$3x-2y+1=0$，又 G 的共軛雙曲線 G'通過定點(3,0)，請問(1)G 的方程式。 (2)G 的正焦弦長。
Ans：(1)$(3x+2y-7)(3x-2y+1)=-20$ (2)$\frac{40}{9\sqrt{5}}$

(練習9) 一雙曲線Γ之漸近線為 $3x+4y+2=0$、$3x-4y+10=0$，且一焦點$(-2,5)$
(1)請將Γ化為標準式。
(2)請求出頂點坐標、正焦弦長。
(3)Γ的共軛雙曲線方程式。
Ans：(1) $\dfrac{-(x+2)^2}{\frac{256}{25}}+\dfrac{(y-1)^2}{\frac{144}{25}}=1$ (2)$(-2,\dfrac{17}{5})$、$(-2,\dfrac{-7}{5})$(3) $\dfrac{(x-2)^2}{\frac{256}{25}}-\dfrac{(y-1)^2}{\frac{144}{25}}=1$

(練習10) 求以(1,3)為中心，貫軸平行 y 軸，貫軸長為 8，漸近線之斜率$=-1$ 之雙曲線方程式。 Ans：$\dfrac{-(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$

(練習11) 已知雙曲線為 $4y^2-9x^2-24y-18x-9=0$，試求其共軛雙曲線的方程式。
Ans：$\dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

(練習12) 一等軸雙曲線的中心在(1,1)，過點(0,0)，且一漸近線為 $x+2y-3=0$，
其方程式為何？ Ans：$(x+2y-3)(2x-y-1)=3$

(練習13) 雙曲線Γ以(1,2)為中心，$3x+ay+1=0$、$3x+by-7=0$ 為漸近線，且Γ通過(3,0)，請問(1)a,b 之值。 (2)Γ的正焦弦長。
Ans：(1)$a=-2$ $b=2$ (2)$3\sqrt{5}$

(丁)雙曲線的其他特性

(1)共焦點：
共焦點的二曲線Γ_1、Γ_2共焦點 ⇔ 中心相同、c 的值一樣。

[例題8] 已知一雙曲線的兩個焦點與橢圓$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{36}=1$ 的兩焦點都相同，且共軛軸長是$2\sqrt{3}$，求此雙曲線的方程式。Ans：$-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{27}=1$

(練習14) 已知一雙曲線的兩個焦點與橢圓$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的兩焦點都相同，且共軛軸長是 4，求此雙曲線的方程式。Ans：$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$

(練習15) 設與雙曲線$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ 共焦點，且貫軸長為 4 之雙曲線為Γ，求Γ的方程式。Ans：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{37}=1$

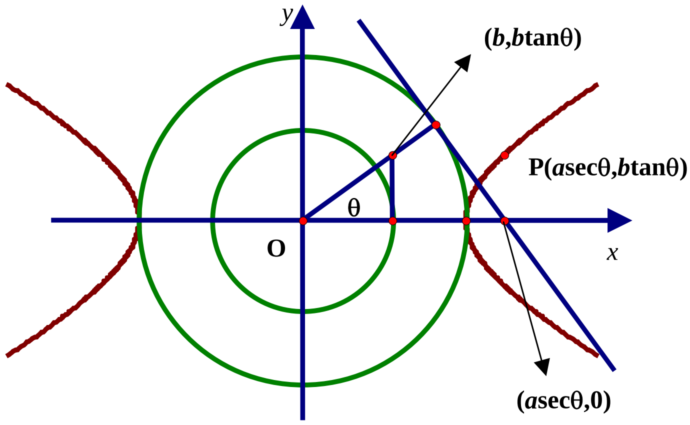
(練習16) 已知圓$(x-1)^2+(y-2)^2=9$、橢圓$\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$ 現有一橢圓的長軸恰等於雙曲線的貫軸，且橢圓與圓相切，請問此橢圓的方程式為何？
Ans：$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

(2)雙曲線的參數式：

雙曲線：$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

上的任一點 $P(x,y)$可表為

$x=h+a\sec\theta$，$y=k+b\tan\theta$。



[例題9] 求點 A(3,0)與方程式 $x^2-4y^2=4$ 圖形上動點 P 之距離最小值為何？並求 P 點之坐標。 Ans：$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$P(\frac{12}{5},\pm\frac{\sqrt{11}}{5})$

(練習17) 點 Q(1,4)為平面上一定點，試在雙曲線 $x^2-9y^2-2x=8$ 上找一點 P，使得$\overline{\mathbf{PQ}}$最短，則 P 點的坐標為何？又$\overline{\mathbf{PQ}}$之最小值為何？
Ans：$P(\pm\frac{3\sqrt{29}}{5}+1,\frac{2}{5})$，$\sqrt{\frac{117}{5}}$

(3)二次曲線圖形的討論：

圖形的討論：$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$

圓：A=B>0

橢圓：A>0，B>0，A≠B

雙曲線：AB<0

[例題10] 設Γ：$\frac{x^2}{25-t}+\frac{y^2}{16-2t}=1$，請就 t 值討論Γ所代表的圖形名稱。

Ans：$t=-9$ 表圓，$t<8$，$t\neq-9$ 時表橢圓，$8<t<25$ 雙曲線，$t\geq25$ 或 $t=8$ 無圖形。

(練習18) 設Γ：$\frac{x^2}{5+k}+\frac{y^2}{3+k}=1$，Γ′：$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$

(1)請就 $k(k\neq-5,-3)$值討論Γ的圖形。

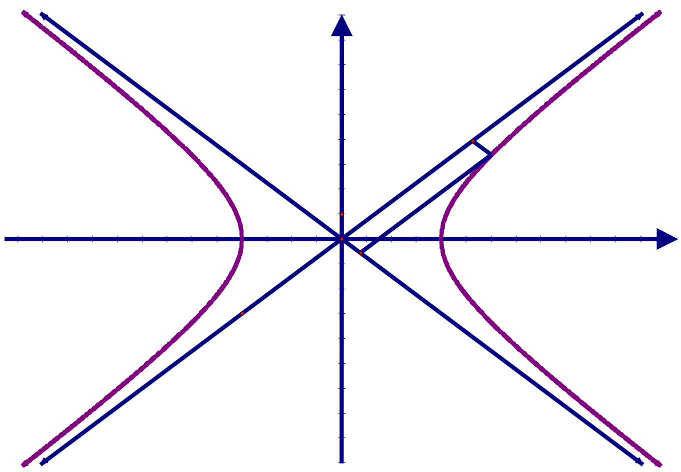
(2)若Γ為一雙曲線，請問焦點坐標為何？

Ans：(1)$k>-3$ 時橢圓，$-5<k<-3$ 時，雙曲線，$k<-5$，無圖形。

(2)$(\pm\sqrt{2},0)$

(4)雙曲線的其他性質：

[例題11] 點 P 為雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$上任一點，過 P 作二漸近線之平行線，此二直線與二漸近線所圍成平行四邊形的面積為定值$\frac{ab}{2}$。



(練習19) 直線 L 經過雙曲線的焦點，且與漸近線垂直，證明中心到直線 L 之距離等於貫軸長度一半。

(練習20) 證明：雙曲線上一個焦點到一條漸近線的距離等於共軛軸長度的一半。

(練習21) 試證明一雙曲線之一頂點至其共軛雙曲線之一頂點之距離必等於中心到焦點之距離。

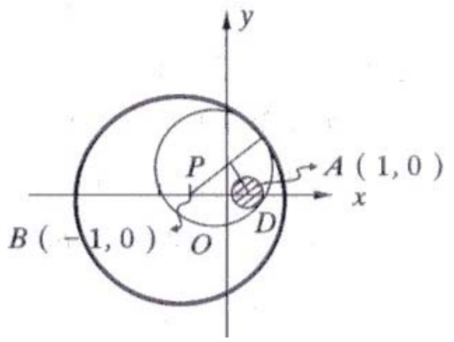
(戊)軌跡問題

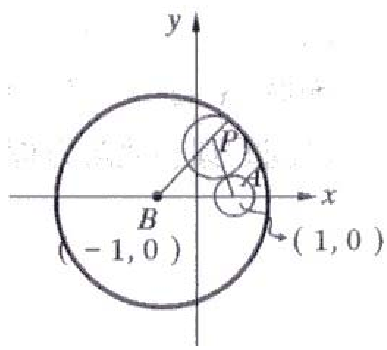
如何求動點的軌跡方程式：
設所求的動點 P(x,y)，透過題目的條件，找出 x,y 的關係式 $f(x,y)=0$，再檢查滿足 $f(x,y)=0$ 的點都具有題設的條件。

[例題12] 設二圓 C_1：$(x-1)^2+y^2=1$，C_2：$(x+1)^2+y^2=16$，今有一動圓與 C_1、C_2 皆相切，求此動圓圓心 P 之軌跡方程式。

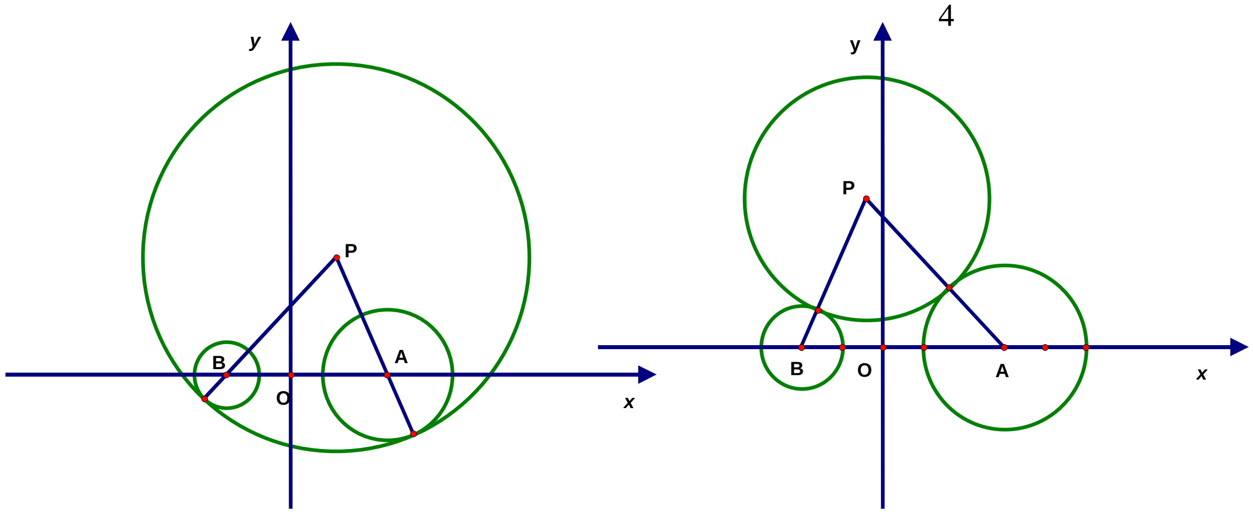
Ans：與圓 C_1 相外切時，動圓圓心軌跡為$\dfrac{4x^2}{25}+\dfrac{4y^2}{21}=1$

與圓 C_1 相內切時，動圓圓心軌跡為$\dfrac{4x^2}{9}+\dfrac{4y^2}{5}=1$





[例題13] 設圓 C_1：$(x-3)^2+y^2=4$，圓 C_2：$(x+2)^2+y^2=1$，今有一動圓與圓 C_1 與圓 C_2 均相切(外切或內切)，則此動圓之圓心軌跡方程式爲何？Ans：$\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{6}=1$



[例題14] 平面上點 P 到 F(3,0)的距離等於點 P 到直線 L：$x-1=0$ 的 2 倍，請求出 P 點的軌跡方程式。　Ans：$3x^2-y^2-2x-5=0$

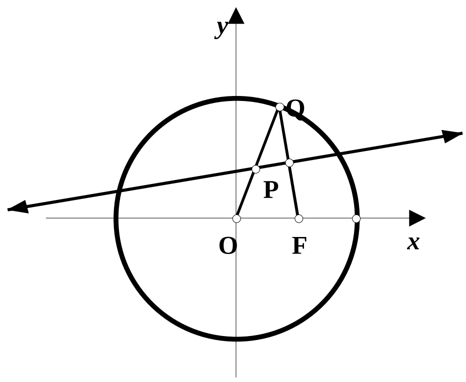
[例題15] 有一圓心爲 O(0,0)半徑爲 4 的圓與點 A(6,0)，今在圓上找動點 Q，考慮$\overline{AQ}$的中垂線與直線 OQ 的交點 P，請求出 P 點的軌跡方程式。

Ans：$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

(練習22) 一圓 C 與$(x+1)^2+y^2=9$ 相切，並過點 A(4,0)，試求動圓 C 的圓心所成的圖形之軌跡方程式。 Ans：$\frac{(x-\frac{3}{2})^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{4}=1$

(練習23) 右圖中，圓 O 的半徑爲 6，F 的坐標爲(4,0)，Q 在圓 O 上，P 爲$\overline{FQ}$的中垂線與$\overline{OQ}$的交點。當 Q 在圓 O 上移動時，動點 P 的軌跡方程式。

Ans：$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$



(練習24) 設圖形Γ上任一點到點 F(2,0)的距離與到直線 $x+\frac{10}{3}=0$ 的距離比爲 3∶5，試求Γ的方程式爲何？ Ans：$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

(練習25) 平面上 P 點滿足「P 點與 F(4,0)之距離」比「P 點到直線 L：$x+7=0$ 之距離」少 1，求 P 點的軌跡。

Ans：$y^2=20(x+1)$

綜合練習

(1) 在坐標平面上，以(−1 , 1)，(3 , 1)為焦點，且通過點(3 , 4)畫一雙曲線．試問此雙曲線也會通過下列哪些點?
(A)(1 , 1)(B)(−1 ,4)(C)(3 ,−2)(D)(−1 ,−2)(E)(3 , 1)。

(2) 設 F_1 與 F_2 為坐標平面上雙曲線Γ：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的兩個焦點，P 為Γ上一點，使得此三點構成一等腰三角形。試問以下那些值可能是這些等腰三角形的周長？
(A)20 (B)24 (C)28 (D)32 (E)36。 (2005 學科能力測驗)

(3) 求滿足下列條件的雙曲線方程式：
(a)求貫軸在 $x+1=0$ 上且長度為 4 一漸近線為 $2x+y=0$。
(b)以 $y\pm 2x$ 為漸近線且過點(3,8)。
(c)求以 $F_1(-2,-2)$、$F_2(8,-2)$為焦點，一漸近線的斜率為$\frac{3}{4}$。
(d)等軸且中心(1,2)，貫軸平行 x 軸長度為 6。

(4) 已知等軸雙曲線Γ的一條漸近線為 $x-y=0$，中心的坐標(1 , 1)，且Γ過點(3 , 0)，試問下列敘述哪些是正確的？(A)Γ的兩漸近線互相垂直(B)$x+y=0$ 為Γ的另外一條漸近線(C)Γ的貫軸在直線 $y=1$ 上(D)點$(1 , \sqrt{3}-1)$為Γ的一個頂點
(E)點$(1 , \sqrt{6}-1)$為Γ的一個焦點。

(5) 雙曲線｜$\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}-\sqrt{(x+1)^2+(y+5)^2}$｜＝6 化簡後方程式為__________，頂點為__________，共軛雙曲線方程式為________。

(6) 雙曲線$\left|\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}-\sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2}\right|=8$ 的共軛軸方程式。

(7) 已知二頂點 $A_1(5,3)$，$A_2(-3,3)$，一漸近線的斜率為$\frac{3}{4}$，試求此雙曲線的方程式。

(8) 試求經過 $M(8\sqrt{2}\ ,10)$且與雙曲線$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ 有相同漸近線的雙曲線方程式。

(9) 設一雙曲線過點$(\sqrt{6}\ ,1)$，又與橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$ 共頂點，且貫軸與長軸重合，請問此雙曲線的方程式為何？

(10) 試求下列各小題：
(a)求中心(2,−3)，一漸近線為 $2x-y-7=0$ 且過(1,−2)的等軸雙曲線。
(b)已知一雙曲線與橢圓$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{36}=1$ 共焦點，且共軛軸長 $2\sqrt{3}$ ，則此雙曲線的共軛雙曲線為何？

(11) 設雙曲線Γ過點 P($\sqrt{6}$,1)，又與$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$ 共頂點，且貫軸與長軸一致，求雙曲線Γ的方程式。

(12) 設 F、F$'$為雙曲線：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>0，b>0)二焦點，$\overline{FF'}=10$，P 在雙曲線上，且∠FPF$'$＝90°，$\overline{PF'}=2\overline{PF}$，則雙曲線的二漸近線為__________，共軛雙曲線為__________ 。

(13) 設雙曲線二漸近線為 $2x-y=0$，$2x+y-4=0$，且為過點(6,10)，則此雙曲線的方程式？雙曲線上任一點到兩漸近線距離之乘積=？

(14) 設橢圓 C_1 與雙曲線 C_2 有相同的兩個焦點，已知直線 $y=x$ 為 C_2 之一漸近線，點($\sqrt{6}$,$\sqrt{3}$)為 C_1 與 C_2 之一交點.若 C_1 的方程式為$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 其中$|a|>|b|$，求 a^2，b^2。

(15) 若曲線$\frac{(x-1)^2}{15-k}+\frac{(y+2)^2}{24-k}=1$ 表一雙曲線，則(a)k 的範圍為何？ (b)焦點坐標。

(16) 設直線 L_1：$3x-4y-11=0$，L_2：$3x+4y+5=0$，動點 P(x,y)到直線 L_1 與 L_2 之距離乘積為定值$\frac{144}{25}$，求證 P 點所成圖形為雙曲線，並求此雙曲線之漸近線方程式。

(17) 設 0°≤α≤180°，請討論Γ_α：$x^2+y^2\cos\alpha=1$ 的圖形。

(18) 設 A(6,0)，P 是雙曲線 $2x^2-y^2=8$ 上任一點，求$\overline{AP}$最小值，並求 P 點坐標。

(19) 雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$($a$>0，$b$>0)的兩焦點 F_1、F_2，雙曲線上一點 P 滿足$\overline{PF_1}=5$，$\overline{PF_2}=10$，$\angle F_1PF_2=60°$，則數對(a,b)=？

(20) 拋物線 $y^2=8x$ 上任一點 P 與焦點 F 所成線段為$\overline{PF}$，求$\overline{PF}$中點之軌跡方程式。

(21) 在坐標平面上，到直線 $x=-1$ 之距離是到點 F(1,0)之距離的兩倍的所有點所形成的圖形是一個橢圓，其中 F(1,0)為此橢圓之一焦點，則另一個焦點 F$'$的坐標為____________。 (85 大學社)

(22) 設點 P(x,y)在橢圓$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上移動，F_1、F_2 為橢圓的兩焦點，則△PF_1F_2 的重心的軌跡為何？

進階問題

(23) 試證明雙曲線Γ和它的共軛雙曲線Γ$'$的四個焦點在同一個圓上。

(24) 設 O 爲雙曲線 $x^2-y^2=1$ 的中心，F_1、F_2 爲二焦點，P 爲此雙曲線上任一點。
試證明：$OP^2=PF_1 \cdot PF_2$。

(25) 點 $A(4,0)$，$B(10,0)$，圓 C：$x^2+y^2=64$，直線 L：$x+12=0$，求
(a)與直線 L 相切且與圓 C 外切的圓之圓心軌跡方程式．
(b)過 A 且與圓 C 相切之動圓圓心的軌跡方程式．
(c)過 B 且與圓 C 相切之動圓圓心的軌跡方程式．

(26) 設過原點之直線 L 與 L_1：$x+y=2$，L_2：$x-y=2$ 交於 A、B 兩點，求 $\overline{AB}$ 中點的軌跡方程式。

綜合練習解答

(1) (B)(C)(D)

(2) (B)(E)

(3) (a) $\frac{-(x+1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ (b) $\frac{-x^2}{7}+\frac{y^2}{28}=1$ (c) $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ (d) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$ (e) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{72}=1$

(4) (A)(C)

(5) $-\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，頂點$(-1,3)(-1,-3)$，共軛雙曲線$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

(6) $3x+4y=0$

(7) $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$

(8) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{100}=1$

(9) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$

(10) (a) $(2x-y-7)(x+2y+4)=-3$，(b)$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{27}=1$

(11) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$

(12) $2x\pm y=0$，$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=-1$

(13) $(2x-y)(2x+y-4)=36$，$\frac{36}{5}$

(14) $a^2=12$，$b^2=6$

(15) (a)$15<k<24$ (b)$(1,-5)$、$(1,1)$

(16) $3x-4y-11=0$ 與 $3x+4y+5=0$

(17) $\alpha=0°$時，圓；$0°<\alpha<90°$時，圖形爲直立的橢圓；$\alpha=90°$時，圖形爲兩平行線；$90°<\alpha<180°$，圖形爲左右開口的雙曲線；$\alpha=180°$時，圖形爲等軸雙曲線。

(18) $P(2,0)$時，有$\overline{AP}$最小值爲 4。

(19) $(a,b)=(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2})$

(20) $y^2=4(x-1)$

(21) $(\frac{7}{3},0)$

(22) $9x^2+25y^2=25$

(23) 可假設兩雙曲線爲$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 、$\frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，而四個焦點坐標分別爲$(c,0)$、$(-c,0)$、$(0,c)$、$(0,-c)$所以四個焦點在同一個圓上(圓心爲(0,0)半徑爲 c)]

(24) 令 $P(x,y)$、$F_1(\sqrt{2},0)$、$F_2(-\sqrt{2},0)$ $\Rightarrow PF_1^2\cdot PF_2^2=$
$[(x-\sqrt{2})^2+y^2][(x+\sqrt{2})^2+y^2]=(x^2+y^2)^2-4(x^2-y^2)+4=(x^2+y^2)^2=OP^2$，

因為 $x^2-y^2=1$]

(25) (a)$y^2=40(x+10)$, (b)$\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$, (c)$\dfrac{(x-5)^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

(26) $(x-1)^2-y^2=1$，但不包含(2,0)[提示：設 $y=mx$，則 A$(\dfrac{2}{1+m},\dfrac{2m}{1+m})$、B$(\dfrac{2}{1-m},\dfrac{2m}{1-m})$，因此$\overline{AB}$的中點$(\dfrac{2}{1-m^2},\dfrac{2m}{1-m^2})$令 $x=\dfrac{2}{1-m^2}$，$y=\dfrac{2m}{1-m^2}$ $\Rightarrow y=mx$ $\Rightarrow$再代入 $x=\dfrac{2}{1-m^2}$ $\Rightarrow x^2-y^2=2x$ ，因為 A、B 相異，所以不包含 L_1、L_2 的交點(2,0)]

補充教材

(甲)圓錐曲線的其他定義

(1)利用離心率定義圓錐曲線：

平面上到一定點 F 和一條定直線 L(F$\notin$L)的距離比等於一個常數 e 的動點 P 的軌跡，

稱為圓錐曲線Γ，即 $\Gamma=\{P|\ \overline{PF}=e\cdot d(P,L)\}$。

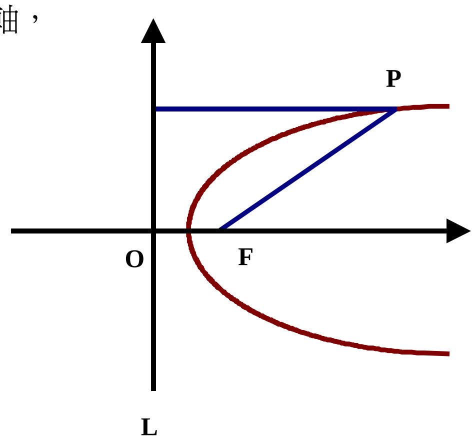
其中 F 稱為Γ的焦點，直線 L 稱為Γ的準線，定數 e 稱為Γ的離心率。

我們選定直線 L 為 y 軸，過定點 F 而與 L 垂直的直線為 x 軸，

設 P(x,y)為Γ上的一點，令 F$(c,0)$，$c\neq0$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-c)^2+y^2}=e\cdot|x|$

$\Leftrightarrow (1-e^2)x^2+y^2-2cx+c^2=0$…….(*)



(a)當 $e=1$ 時，(*)可化成 $y^2=2c(x-\frac{c}{2})$

故Γ代表拋物線。

(b)當 $0<e<1$ 時，(*)可化成

$$\frac{(x-\frac{c}{1-e^2})^2}{\frac{e^2c^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{(y-0)^2}{\frac{e^2c^2}{1-e^2}}=1$$ 故Γ代表橢圓。

(c)當 $e>1$ 時，(*)可化成

$$\frac{(x+\frac{c}{e^2-1})^2}{\frac{e^2c^2}{(e^2-1)^2}}-\frac{(y-0)^2}{\frac{e^2c^2}{e^2-1}}=1$$ 故Γ代表雙曲線。

(2)由標準式求離心率、準線、焦點

我們從圓錐曲線的標準式出發，也可以求得離心率、準線與焦點。

(a)拋物線：

設拋物線Γ方程式為 $y^2=4cx$，焦點 F$(c,0)$

設 P(x,y)為Γ上的任一點，

$\overline{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=|x+c|$

取準線為 $x+c=0$，上式可化為$\overline{PF}=d(P,L)$，

因此可得離心率 $e=1$，準線 $x+c=0$，焦點 F$(c,0)$。

(b)橢圓：

設橢圓Γ方程式爲$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

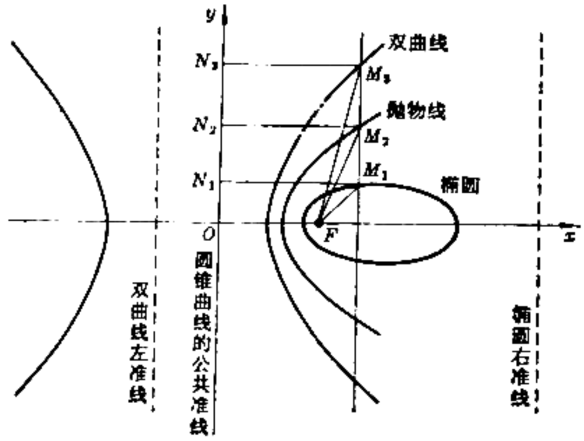
$F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$爲焦點

設 $P(x,y)$爲Γ上的任一點，

$\overline{PF_1}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=|\dfrac{c}{a}x-a|=\dfrac{c}{a}|x-\dfrac{a^2}{c}|$。

$\overline{PF_2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=|\dfrac{c}{a}x+a|=\dfrac{c}{a}|x+\dfrac{a^2}{c}|$

取準線爲 L_1：$x-\dfrac{a^2}{c}=0$ 或 L_2：$x+\dfrac{a^2}{c}=0$，



上式可化爲$\overline{PF_1}=\dfrac{c}{a}\,d(P,L_1)$或$\overline{PF_2}=\dfrac{c}{a}\,d(P,L_2)$

因此可得離心率 $e=\dfrac{c}{a}$，準線 L_1：$x-\dfrac{a^2}{c}=0$ 或 L_2：$x+\dfrac{a^2}{c}=0$，對應的焦點爲 $F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$

(c)雙曲線：

設雙曲線Γ方程式爲$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$爲焦點

設 $P(x,y)$爲Γ上的任一點，

$\overline{PF_1}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=|\dfrac{c}{a}x-a|=\dfrac{c}{a}|x-\dfrac{a^2}{c}|$。

$\overline{PF_2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=|\dfrac{c}{a}x+a|=\dfrac{c}{a}|x+\dfrac{a^2}{c}|$

取準線爲 L_1：$x-\dfrac{a^2}{c}=0$ 或 L_2：$x+\dfrac{a^2}{c}=0$，上式可化爲$\overline{PF_1}=\dfrac{c}{a}\,d(P,L_1)$或$\overline{PF_2}=\dfrac{c}{a}\,d(P,L_2)$

因此可得離心率 $e=\dfrac{c}{a}$，準線 L_1：$x-\dfrac{a^2}{c}=0$ 或 L_2：$x+\dfrac{a^2}{c}=0$，對應的焦點爲 $F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$

(練習1)　求離心率=0.8 且焦距=8，中心爲(0,0)的圓錐曲線方程式。

Ans：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 或$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

(練習2)　求雙曲線 $9y^2-16x^2=144$ 的貫軸長、離心率、漸近線方程式。

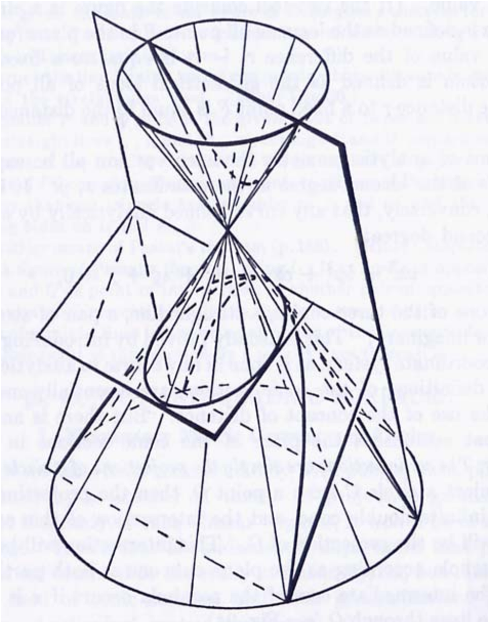
Ans：8、$\dfrac{5}{4}$、$4x\pm3y=0$

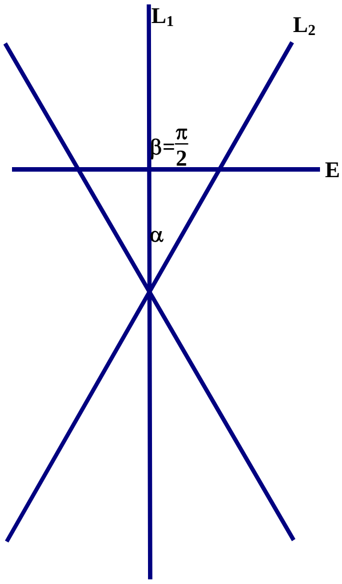
(練習3)　在平面直角坐標系中，設橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的焦距爲 2c。以點 O 爲圓心，a 爲半徑作圓 M。若過點 $P(\dfrac{a^2}{c},0)$所作圓 M 的兩條切線互相垂直，試求該橢圓的離心率爲多少？　Ans：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

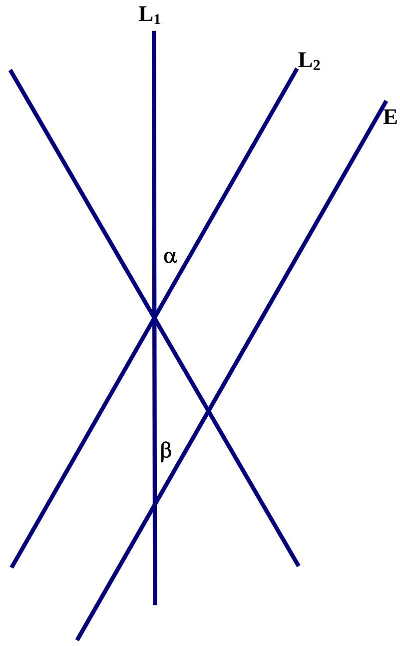
(3)平面截圓錐：

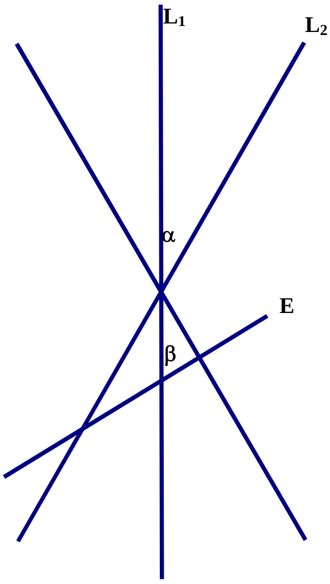
(a)設 L_1 與 L_2 是相交於 O 點的兩條直線，讓 L_2 以 L_1 爲軸旋轉，所得的曲面就是一個直圓錐面Ω，再用一個不過 O 點的平面 E 去切割Ω，所得的曲線稱爲圓錐曲線。

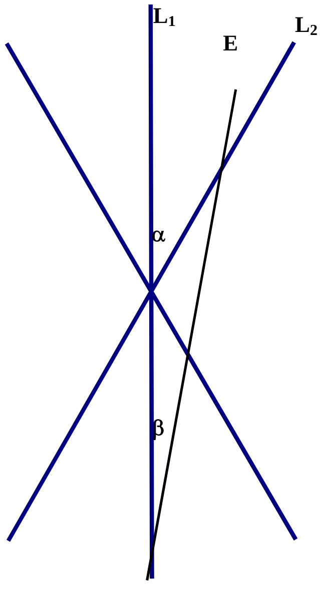
設 L_1 和 L_2 的夾角爲α，割平面 E 和軸線 L_1 的夾角爲β，











(1°)當$\frac{\pi}{2}>\beta>\alpha$時，截痕曲線稱爲**橢圓**；($\beta=\frac{\pi}{2}$時，截痕曲線稱爲**圓**)

(2°)當$\beta=\alpha$時，截痕曲線稱爲**拋物線**

(3°)當 $0\le\beta<\alpha$時，截痕曲線稱爲**雙曲線**

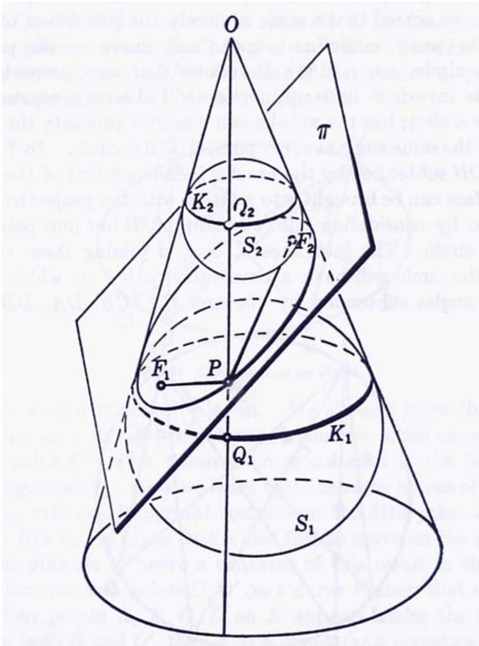
(b)面截圓錐與焦半徑定義之間的關係：

(1°)當$\frac{\pi}{2}>\beta>\alpha$時，在圓錐中塞進兩個球 S_1、S_2 分別從上、下兩方面與割平面 E 相切於

F_1 和 F_2 點，而與圓錐面相切於圓 K_1 和 K_2。設 P 爲截痕上任一點，連接直線 OP，交 K_1、K_2 於 Q_1、Q_2 點，則有 PF_1+PF_2=定長。

(2°)當 $0\leq\beta<\alpha$ 時，則割平面和Ω交於上下兩曲線，在上下塞進兩個球 S_1、S_2(此時它們分居Ω的的上下兩部分)與割平面 E 相切於 F_1 和 F_2 點，而與Ω相切於圓 K_1 和 K_2。設 P 爲截痕上任一點，連接直線 OP，交 K_1、K_2 於 Q_1、Q_2 點，則有 $|PF_1-PF_2|$=定長。

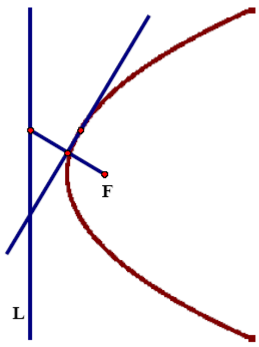
(3°)當 $\beta=\alpha$ 時，則割平面 E 和Ω交於開口的一支，這時，我們只能塞進一個球，它和Ω相切於圓 C，和割平面相切於 F 點，另外，圓 C 所在的平面和割平面交於一條直線 L，稱爲準線。設 P 爲截痕上任一點，則 PF=P 點到直線 L 的距離。

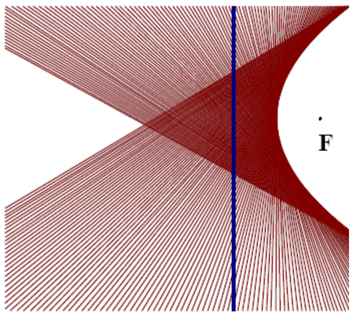


(4)摺出圓錐曲線：

(a)摺拋物線：

如圖在一張紙上劃一條直線 L 與不在 L 上一點 F，將 L 上的點摺向點 F，連續做這樣的動作，那麼這些摺痕便可「包絡」稱一個拋物線。

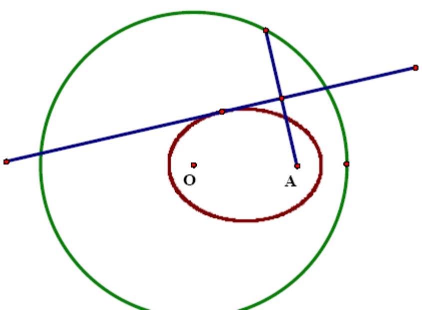


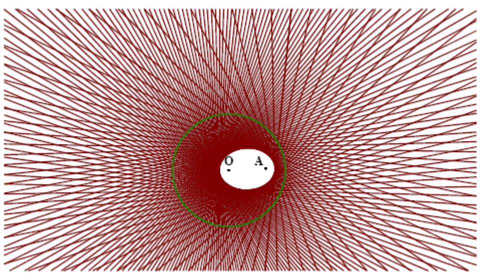


(b)摺橢圓：

如圖在紙上畫一個圓心 O，並在圓內劃一點 A，將圓上的點摺向點 A，連續做這樣的動作，

那麼這些摺痕便可「包絡」稱一個橢圓。





[例題1] 一張紙上畫有半徑為 R 的圓 O 和圓內一定點 A，且$\overline{OA}=a$，摺疊紙片，使圓周上某一點 A'剛好與 A 點重合，這樣的折法，都留下一條直線摺痕，當 A' 取遍圓周上的所有點，試求摺痕所在的直線上的點所形成的圖形方程式。

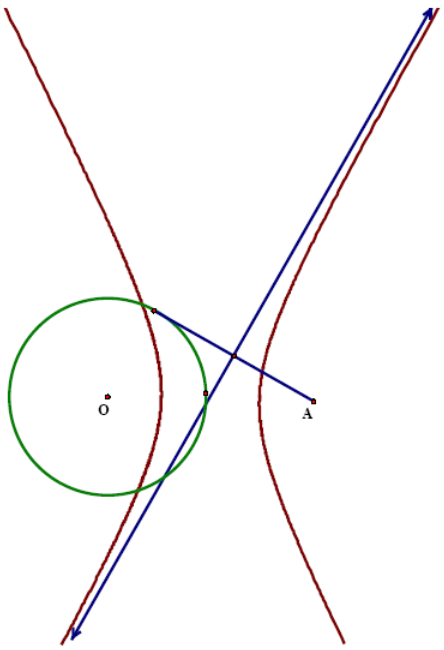
Ans：$\dfrac{(x-\frac{a}{2})^2}{(\frac{R}{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{R}{2})^2-(\frac{a}{2})^2}\geq 1$

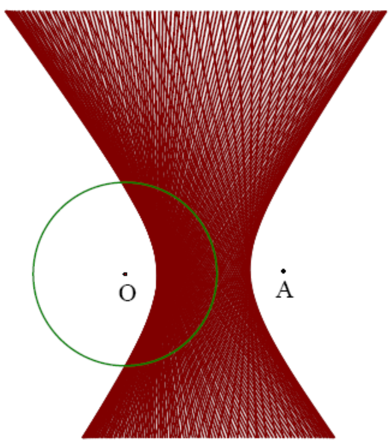
[提示：設 P(x,y)為摺痕上的點，A(x',y')，利用$\overline{PA}=\overline{PA'}\Rightarrow x'x+y'y=\dfrac{2ax+R^2-a^2}{2}$

再利用$|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}|\leq|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|$，得到$\dfrac{(x-\frac{a}{2})^2}{(\frac{R}{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{R}{2})^2-(\frac{a}{2})^2}\geq 1$]

(c)摺雙曲線：

如圖在紙上畫一個圓心 O，並在圓外劃一點 A，將圓上的點摺向點 A，連續做這樣的動作，那麼這些摺痕便可「包絡」稱一個雙曲線。





(練習4) 一張紙上畫有半徑爲 R 的圓 O 和圓外一定點 A，且$\overline{OA}=a$，摺疊紙片，使圓周上某一點 A′剛好與 A 點重合，這樣的折法，都留下一條直線摺痕，當 A′取遍圓周上的所有點，試求摺痕所在的直線上的點所形成的圖形方程式。

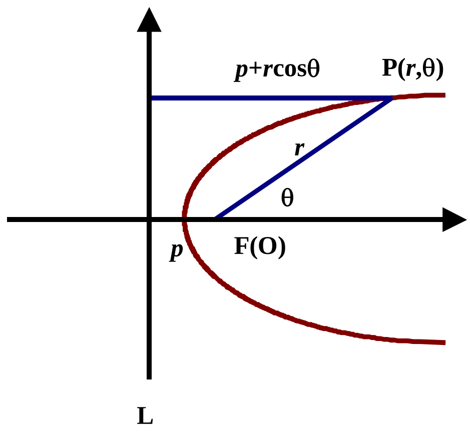
Ans：$\dfrac{(x-\frac{a}{2})^2}{(\frac{R}{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{R}{2})^2-(\frac{a}{2})^2}\le 1$

(乙)圓錐曲線的極座標方程式

平面上到一定點 F 和一條定直線 L(F∉L)的距離比等於一個常數 e 的動點 P 的軌跡，是一個以 e 爲離心率的圓錐曲線，其中 F 稱爲Γ的焦點，直線 L 稱爲Γ的準線，現在我們想要用極座標來推導出出代表圓錐曲線Γ的極座標方程式。

設極軸以 F 爲極點 O，且垂直定直線 L，極點 F(O)到 L 的距離爲 p，

設Γ上的動點 P 的極坐標爲(r,θ)



由定義$\overline{PF}=e\cdot d(P,L) \Leftrightarrow r=e\cdot(p+r\cos\theta)$

上式整理成 $r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ ……(*)。

(*)稱爲圓錐曲線Γ的極坐標方程式。

(1°)$e=1$ 時，$r=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$ 表示拋物線。

(2°)$0<e<1$ 時，$r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$表示橢圓。

(3°)$e>1$ 時，$r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$表示雙曲線。

當$\theta=\frac{\pi}{2}$時，$r=ep$ 爲正交弦長。

[例題2] 將圓錐曲線的極坐標方程式 $r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 化成直角坐標系圓錐曲線的方程式。 Ans：$(1-e^2)x^2+y^2-2epx=p^2$

[例題3] 過圓錐曲線焦點 F 的兩條互相垂直的弦，其長分別爲 L_1、L_2，

求證：$\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}$ 爲常數。

(練習5) 以圓錐曲線的焦點爲極點，焦點到準線的垂線之反向延長線爲極軸，寫出下列圓錐曲線的極座標方程式：

(1)焦點到準線的距離爲 5，離心率=2

(2)焦點到準線的距離爲 3，離心率=$\frac{2}{3}$

(3)焦點到準線的距離爲 7，離心率=1

(練習6) 設橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左右焦點爲 F_1、F_2，設頂點 $B(0,b)$，一直線 L：$x-2y+2=0$ 通過 F_1 與 B，試求橢圓的離心率=？ Ans：$\frac{2}{\sqrt{5}}$

圓錐曲線的各種表示：

圓錐曲線	拋物線	橢圓	雙曲線
標準式	$y^2=4cx$ $x^2=4cy$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
參數式	$x=\frac{t^2}{c}$，$y=2t$ $x=2t$，$y=\frac{t^2}{c}$	$x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$ $x=b\cos\theta$，$y=a\sin\theta$	$x=a\sec\theta$，$y=b\tan\theta$ $x=b\tan\theta$，$y=a\sec\theta$
極坐標方程式	$r=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$		