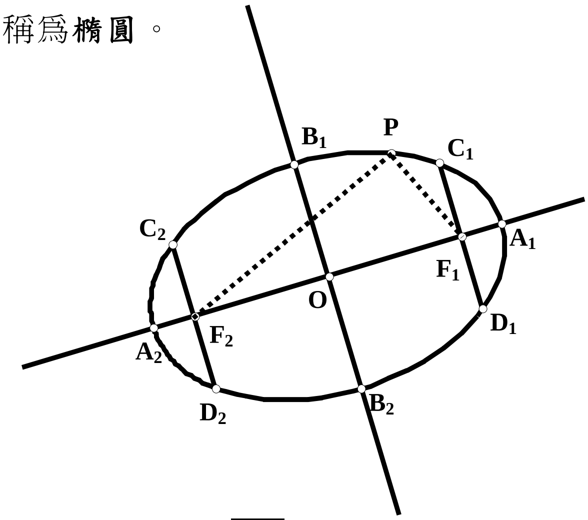
§1−2 橢圓

(甲)橢圓的定義

(1)定義：

平面上有兩個定點F_1、F_2，及一定長 $2a$且$\overline{F_1F_2}<2a$，則在此平面上所有滿足$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$的P點所形成的圖形稱爲**橢圓**。

其中F_1、F_2稱爲**焦點**。



[討論]：

若 $2a=\overline{F_1F_2}$，則P點會形成什麼圖形？

若 $2a<\overline{F_1F_2}$，則P點會形成什麼圖形？

(2)橢圓的名詞介紹：

(a)兩焦點連線段的中點稱爲**中心**。

(b)連接兩焦點的直線與橢圓交於A_1、A_2兩點，過中心O作$\overline{A_1A_2}$之垂線交橢圓於B_1、B_2兩點，A_1、A_2、B_1、B_2稱爲橢圓的**頂點**。

(c)線段$\overline{A_1A_2}$稱爲**長軸**，線段$\overline{B_1B_2}$稱爲**短軸**。

(d)橢圓上任一點與任一焦點的連線段稱爲此橢圓的**焦半徑**(PF_1、PF_2)。

(e)橢圓上兩相異點的連線段，稱爲此橢圓的**弦**，過焦點的弦稱爲**焦弦**。

焦弦中與長軸垂直者稱爲**正焦弦**($\overline{C_1D_1}$、$\overline{C_2D_2}$)

(3)橢圓的基本性質：

(1°)長軸兩頂點A_1與A_2對稱於O點，短軸兩頂點B_1與B_2對稱於O點。

長軸長=$2a$，而a**爲長軸半長**；$\overline{OB_1}$以b表示，**短軸長=$2b$**，b**稱爲短軸半長**。

[說明]：

因爲A_1、A_2在橢圓上，

所以$A_1F_1+A_1F_2=2a$，$A_2F_1+A_2F_2=2a$

$\Rightarrow A_1F_1++A_1F_2=A_2F_1+A_2F_2=2a$

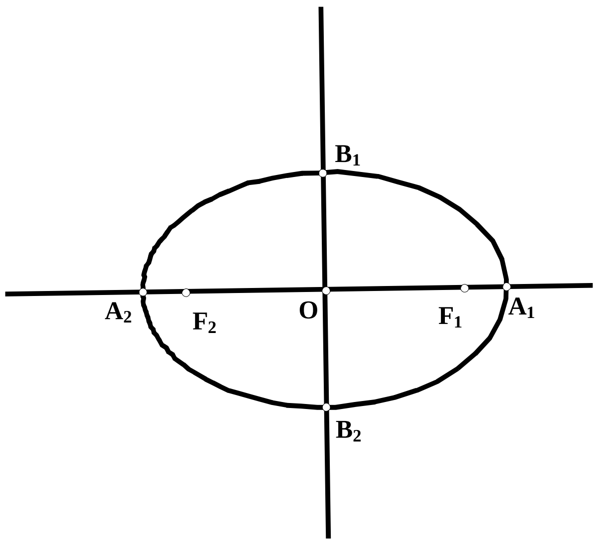
$\Rightarrow 2A_1F_1+F_1F_2=2A_2F_2+F_1F_2$

$\Rightarrow A_1F_1=A_2F_2$

因爲$OF_1=OF_2\Rightarrow OA_1=OA_2$

$\Rightarrow A_1A_2=A_1F_1+F_1A_2=A_1F_1+A_1F_2=2a$

故長軸兩頂點A_1與A_2對稱於O點，且長軸長=$2a$。



另外因爲B_1、B_2對稱於長軸，所以$OB_1=OB_2$。

故短軸兩頂點B_1與B_2對稱於O點，且短軸長=$2b$。

(2°)若令$\overline{\mathbf{OF_1}}=\overline{\mathbf{OF_2}}=\boldsymbol{c}$，則$\boldsymbol{a^2=b^2+c^2}$。

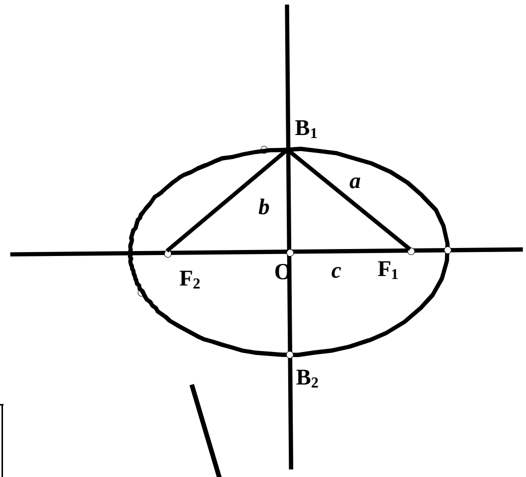
[說明]：

因爲B_1在橢圓上，所以$B_1F_1+B_1F_1=2a$，

又$B_1F_1=B_1F_2=a(\Delta B_1OF_1$與$\Delta B_1OF_2$相似)，

由直角三角形B_1OF_1，

可得$B_1F_1{}^2=OB_1{}^2+OF_1{}^2 \Rightarrow a^2=b^2+c^2$



(3°)**橢圓的正焦弦長**$=\dfrac{\textbf{(短軸長}\boldsymbol{2b)^2}}{\textbf{長軸長}\boldsymbol{2a}}=\dfrac{\boldsymbol{2b^2}}{\boldsymbol{a}}$。

(*a* 爲長軸半長、*b* 爲短軸半長)

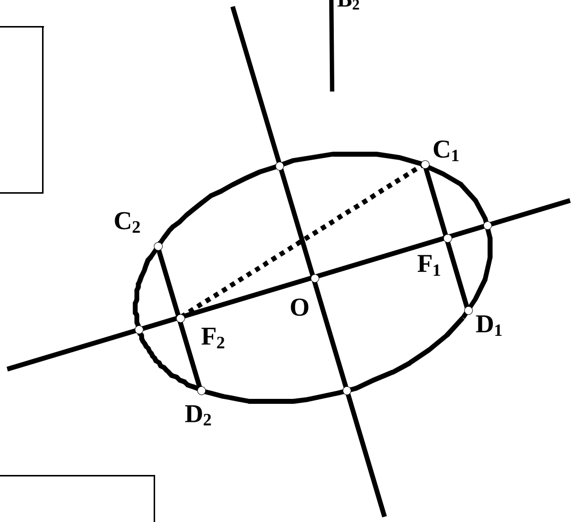
[說明]：

令$C_1F_1=x$，則正焦弦長$C_1D_1=2x$

因爲C_1在橢圓上，所以$C_1F_2=2a-x$

$\Rightarrow x^2+(2c)^2=(2a-x)^2 \Rightarrow x=\dfrac{a^2-c^2}{a}=\dfrac{b^2}{a}$

$\Rightarrow$正焦弦長$C_1D_1=\dfrac{2b^2}{a}$。



結論：

(1)*a,b,c* 的意義如下：

$\boldsymbol{a}$=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離$=\dfrac{1}{2}(\overline{\mathbf{PF_1}}+\overline{\mathbf{PF_2}})$。

$\boldsymbol{b}$=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

$\boldsymbol{c}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathbf{F_1F_2}}$=中心到焦點之距離。

(2)*a,b,c*的關係：$\boxed{\boldsymbol{a^2=b^2+c^2}}$

(3) 橢圓的正焦弦長$=\dfrac{\textbf{(短軸長}\boldsymbol{2b)^2}}{\textbf{長軸長}\boldsymbol{2a}}=\dfrac{\boldsymbol{2b^2}}{\boldsymbol{a}}$。

(*a* 爲長軸半長、*b* 爲短軸半長)

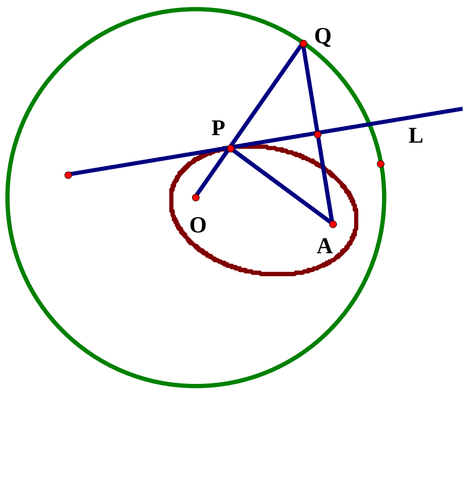
(5)橢圓的作圖法：

已知一圓 O 與圓內部一點 A

step1：在圓上任取一點 Q

step2：作$\overline{AQ}$的中垂線 L

step3：作 L 與直線 OQ 的交點 P，則 P 爲以 O、A 爲焦點的橢圓上的點。



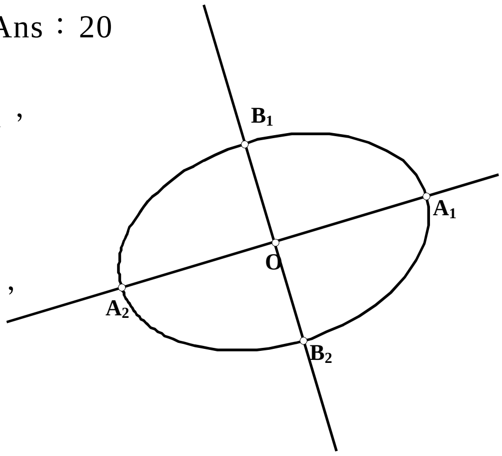
驗證：

[例題1] 橢圓方程式：$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}=10$，
求(1)焦點(2)中心(3)長軸頂點(4)長軸長(5)短軸長(6)正焦弦長
Ans：(1)(4,1)(−4,−1)(2)(0,0) (3)$(\frac{20}{\sqrt{17}},\frac{5}{\sqrt{17}})$ $(-\frac{20}{\sqrt{17}},-\frac{5}{\sqrt{17}})$ (4)10(5)$2\sqrt{2}$ (6)$\frac{16}{5}$

(練習1) 一橢圓形撞球台，其長軸長為 10，且其兩焦點F_1、F_2，今有一人從F_1將一球依直線方向打至邊上一點A，反彈過F_2，撞至邊上另一點B，再回到原焦點處F_1，試求ΔABF_1的周長。　Ans：20

(練習2) 假設一個橢圓的長軸與短軸之比為 2：1，求此橢圓的短軸長與正焦弦長的比。
Ans：2：1

(練習3) 如右圖，已知橢圓的長軸與短軸的頂點，試利用尺規找出焦點的位置。



(練習4) 已知平面上一橢圓的兩焦點為(6,0)及(0,8)，長軸長為 20，則下列那些敘述是正確的？(A)(3,4)為橢圓的中心 (B)短軸的斜率為$\frac{3}{4}$ (C)(9,−4)為長軸上一個頂點 (D)橢圓與正 x 軸只有一個交點。 Ans：全

(練習5) 橢圓Γ：$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=6$，則求焦點、長軸長、短軸長、正焦弦長、中心、長軸方程式、短軸方程式。
Ans：(−3,1),(1,−2)、6、$\sqrt{11}$ 、$\frac{11}{6}$、$(-1,\frac{-1}{2})$、$3x+4y+5=0$、$8x-6y+5=0$

(乙)橢圓的標準式

(1)橢圓的標準式：

(a)給定兩個定點**$F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$**，橢圓**$\Gamma=\{P|PF_1+PF_2=2a$，$\overline{F_1F_2}<2a\}$**
的方程式爲**$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$**。**$(a^2=b^2+c^2)$**

[證明]：

($\Rightarrow$)(證明滿足$PF_1+PF_2=2a$的點$P(x,y)$都是方程式的解)

設$P(x,y)$滿足$PF_1+PF_2=2a$，則

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$ 移項變成$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ 兩端平方

$\Rightarrow(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$

$\Rightarrow a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$，兩端平方，再化簡可得

$\Rightarrow(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)a^2$

$\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \quad \Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

($\Leftarrow$)(證明方程式的解$P(x,y)$都滿足$PF_1+PF_2=2a$)

設點$P(x,y)$滿足$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，則

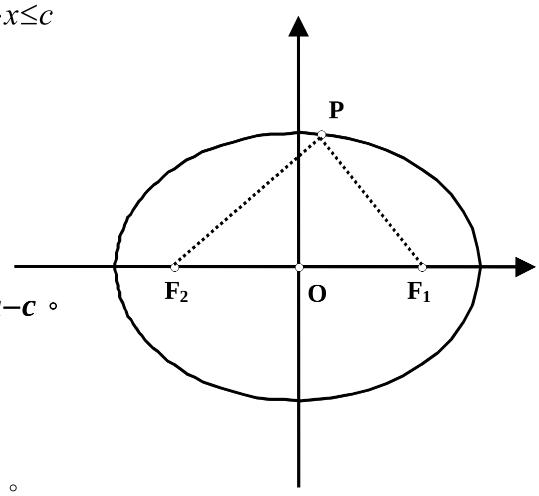
$PF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x^2-2cx+c^2)+b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}=\sqrt{(\frac{a^2-b^2}{a^2})x^2-2cx+(b^2+c^2)}$

$=\sqrt{(\frac{c}{a}x)^2-2cx+a^2}=\sqrt{(a-\frac{c}{a}x)^2}=|a-\frac{c}{a}x|$ $\quad(\because b=\sqrt{a^2-c^2})$

同理可得$PF_2=|a+\frac{c}{a}x|$

由於點$P(x,y)$滿足$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，所以$\frac{x^2}{a^2}\le1\Rightarrow-a\le x\le a$，$-c\le\frac{c}{a}\cdot x\le c$

$\Rightarrow a-c\le a-\frac{c}{a}x\le a+c$ ，$a-c\le a+\frac{c}{a}x\le a+c$



橢圓兩焦半徑：**$PF_1=a-\frac{c}{a}x$且$PF_2=a+\frac{c}{a}x$**

於是$PF_1+PF_2=|a-\frac{c}{a}x|+|a+\frac{c}{a}x|=(a-\frac{c}{a}x)+(a+\frac{c}{a}x)=2a$。

根據焦半徑的公式：**焦半徑的最大值$=a+c$，最小值$=a-c$。**

結論：橢圓方程式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(**橫臥的橢圓**)的特徵：

(1)中心(0,0)

(2)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離$=\frac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

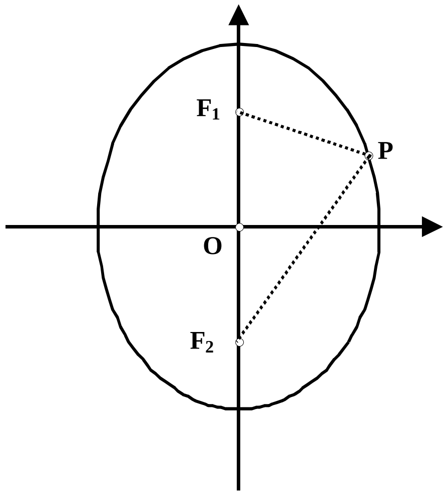
(b)若選取**$F_1(0,c)$、$F_2(0,-c)$**，橢圓**$\Gamma=\{P|PF+PF=2a$，$\overline{F_1F_2}<2a\}$**
的方程式爲**$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$**。**$(a^2=b^2+c^2)$**

結論：橢圓方程式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(**直立的橢圓**)的特徵：

(1)中心$(0,0)$

(2)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離=$\frac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。



試完成下列表格：

橢圓標準式	焦點	中心	對稱軸 (長短軸)	長短軸頂點
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$(\pm c,0)$			
$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $(a>b>0)$	$(0,\pm c)$			

(練習6) 求橢圓方程式$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的中心、焦點、長短軸頂點坐標、正焦弦長。

Ans：$(0,0)$、$(\pm\sqrt{7},0)$、$(\pm4,0)$、$(0,\pm3)$、$\frac{9}{2}$

(練習7) 求橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1$ 的中心、焦點、長短軸頂點坐標、正焦弦長。

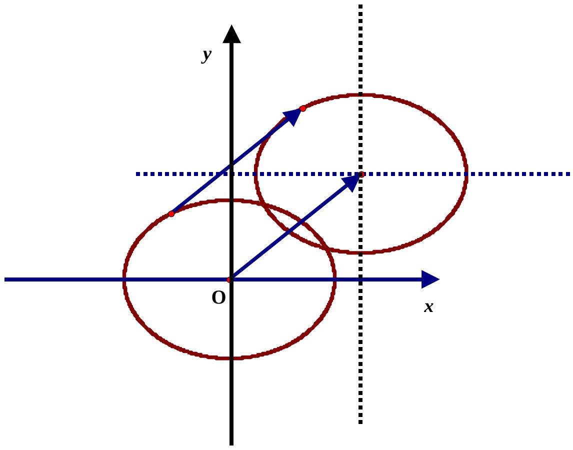
Ans：$(0,0)$、$(\pm\sqrt{3},0)$、$(0,\pm\sqrt{3})$、$(0,\pm\sqrt{7})$、$(\pm2,0)$、$\frac{8}{\sqrt{7}}$

(2)平移橢圓標準式：

例子：設橢圓Γ：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 平移一個向量$\vec{l}=(5,4)$後得另一個橢圓Γ'，

試求Γ'的方程式及中心、焦點、長短軸頂點坐標、正焦弦長、長軸長、短軸長。

[解答]：



設點$P'(x',y')$爲橢圓Γ'的任意點，則$\overrightarrow{PP'}=\vec{l}=(5,4)$，其中$P(x,y)$爲橢圓$\Gamma$上的點。

$\Rightarrow x'-x=5$，$y'-y=4 \Rightarrow x=x'-5$ 且$y=y'-4$

因爲$P(x,y)$爲橢圓Γ上的點

$\Rightarrow \dfrac{(x'-5)^2}{16}+\dfrac{(y'-4)^2}{9}=1$

所以Γ'的方程式爲$\boldsymbol{\dfrac{(x-5)^2}{16}+\dfrac{(y-4)^2}{9}=1}$。

$\Rightarrow a^2=16$，$b^2=9$，$c^2=16-9=7 \Rightarrow a=4$，$b=3$，$c=\sqrt{7}$

即中心到長軸頂點、短軸頂點、焦點的距離分別是 4，3，$\sqrt{7}$

Γ'的中心爲$(5,4)$、焦點$(5\pm\sqrt{7},4)$、長軸頂點$(5\pm4,4)$、短軸頂點$(5,4\pm3)$、正焦弦長$=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{9}{2}$，長軸長=8，短軸長=6。

Γ的中心$(0,0)$、焦點$(\pm\sqrt{7},0)$、長軸頂點$(\pm4,0)$、短軸頂點$(0,\pm3)$、正焦弦長$=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{9}{2}$，長軸長=8，短軸長=6

比較Γ、Γ'的中心、焦點、長短軸頂點坐標、正焦弦長、長軸長、短軸長，可以得知，點坐標會平移而長度部分不變。

結論：

(1)$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow{沿\vec{l}=(h,k)平移} \dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

橢圓方程式$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$(**橫臥的橢圓**)的特徵：

(1°)中心(h,k)

(2°)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離$=\dfrac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

(2) $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1 \xrightarrow{沿\vec{l}=(h,k)平移} \dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

橢圓方程式$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$(**直立的橢圓**)的特徵：

(1°)中心(h,k)

(2°)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離$=\dfrac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

(3)橢圓的一些要點整理：

(a)請先觀察題目的條件是否可以使用橢圓的基本定義。

(b)給定一個橢圓方程式如何求中心、頂點、焦點、長短軸長、正焦弦長？

1°掌握基本性質與a,b,c的意義。

2°將中心求出來，再根據中心到長軸頂點、短軸頂點、焦點的距離分別是a,b,c。

(c)如何根據條件求橢圓的標準式：

1°判別是否為標準式：

「標準式」的特徵⇒**橢圓的長短軸與坐標軸平行(或重合)**

2°求橢圓方程式的步驟：

step1：由長短軸決定型式

(1)直接判別⇒看長短軸是否平行x軸還是平行y軸

長軸水平(短軸鉛直)⇔橫臥的橢圓

長軸鉛直(短軸水平)⇔直立的橢圓

(2)間接判別⇒

長軸上有五個重要的點，包括一個中心，兩個焦點，兩個長軸頂點。

step2：求橢圓中心

step3：求a,b。($a>b>0$)

不必拘泥型式，充分利用概念作圖法

常用公式

(1)三角形關係$a^2=b^2+c^2$

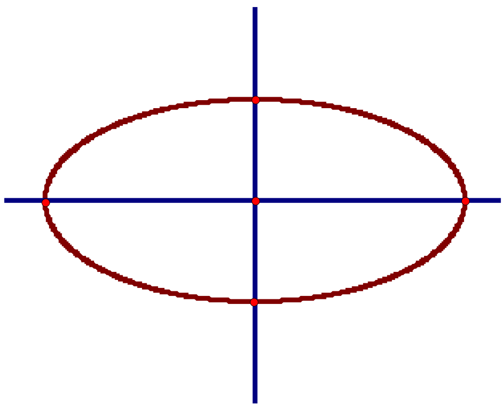
(2)正焦弦長$=\dfrac{\text{短軸長平方}}{\text{長軸長}}=\dfrac{2b^2}{a}$

(3)利用點在橢圓上，點代入必滿足橢圓方程式。

step4：代入標準式 橫臥的橢圓$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

直立的橢圓$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

[例題2] 試求橢圓$x^2+9y^2+8x+54y+61=0$的(1)中心坐標(2)焦點坐標(3)頂點坐標(4)長軸的長(5)短軸的長(6)正焦弦長。Ans：(1)$(-4,-3)$ (2)$(-4+4\sqrt{2},-3)$、$(-4-4\sqrt{2},-3)$ (3)$(2,-3)(-10,-3)(-4,-1)(-4,-5)$(4)12(5)4(6)$\frac{4}{3}$



(練習8) 試求橢圓 $9x^2+4y^2-18x+8y-23=0$ 具有下列何性質：
(a) 中心爲 $(-1,1)$(B) 焦點在直線 $x=1$ 上(C) 兩焦點坐標 $(1,-1+\sqrt{5})$ 與 $(1,-1-\sqrt{5})$(D)最高點坐標 $(1,2)$(E)正焦弦長爲 $\frac{32}{2}$ Ans：(B)(C)(D)

(練習9) 橢圓 Γ：$\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}=10$，則求
(1)焦點坐標 (2)長軸長 (3)短軸頂點 (4)正焦弦長。
Ans：(1)$(4,-1)$、$(-4,-1)$ (2)10 (3)$(0,2)$、$(0,-4)$ (4)$\frac{18}{5}$

(練習10) 設橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 有一點P滿足PF：PF$'$=5：11，則P點坐標爲何？
Ans：$(\pm 2,\pm\frac{\sqrt{21}}{2})$

[例題3] 橢圓的兩焦點 $F_1(-1,5)$、$F_2(-1,-1)$，弦AB過 F_1，ΔABF_2 的周長爲 20，
則橢圓的方程式爲何？ Ans：$\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

[例題4] 試求滿足下列諸條件的橢圓方程式：
(1) 中心爲 $(-3,2)$，長軸半長爲 2，短軸半長爲 1，且長軸平行於 x 軸。
(2) 已知橢圓長軸的端點爲 $(4,2)(12,2)$，短軸半長爲 2，求此橢圓方程式。
(3) 已知兩焦點爲 $(-3,-1)$ 與 $(-3,1)$，橢圓上點到兩焦點的距離和 10，求此橢圓方程式。
Ans：(1) $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$ (2) $\frac{(x-8)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ (3) $\frac{(x+3)^2}{24}+\frac{y^2}{25}=1$

[例題5] 試求滿足下列諸條件的橢圓方程式：

(1)設橢圓中心為(1,2)，長軸的頂點為(−1,1)，正焦弦長為$\frac{8}{3}$，

(2)中心在原點，軸為座標軸，且過(2,3)、(−1,4)。

(3)長軸在 x=5 上，短軸在 y=1 上，短軸長是長軸長的$\frac{3}{5}$倍，

中心到焦點的距離為 12。

Ans：(1)$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ (2) $\frac{7x^2}{55}+\frac{3y^2}{55}=1$(3) $\frac{(x-5)^2}{81}+\frac{(y-1)^2}{225}=1$

[例題6] 求過點(3,2)，且與$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 共焦點的橢圓方程式。Ans：$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$

[例題7] 描繪下列方程式的圖形：

(1)$y=\sqrt{4-\frac{4}{9}x^2}$ (2)$x=-\sqrt{4-\frac{4}{9}y^2}$

(練習11) 求滿足下列條件的橢圓方程式：

(1)中心在(2,2)，其軸平行於坐標軸，長軸爲短軸的三倍，並通過(4,0)，

(2)已知兩焦點爲(3,6)與(3,–2)，短軸長爲 6

(3) 已知兩焦點$(0,2\sqrt{3})$，$(0,-2\sqrt{3})$，且過點$(\sqrt{3},2)$，求此橢圓方程式。

(4) 有一焦點坐標爲 F(–3，2)，短軸一端點爲 B(1，–1)，長軸平行 x 軸。

(5) 中心在(1，2)，長軸平行 x 軸，長軸長爲短軸長的 3 倍，且過(4，3)。

Ans：(1)$\frac{(x-2)^2}{40}+\frac{9(y-2)^2}{40}=1$ 或$\frac{9(x-2)^2}{40}+\frac{(y-2)^2}{40}=1(2)\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

(3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ (4) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ (5) $\frac{(x-1)^2}{18}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$

(練習12) 設點P爲橢圓 $2x^2+y^2-4x+4y+2=0$ 上任一點，F_1與F_2爲其二焦點，

則$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$=__________。Ans：4

(練習13) 坐標平面上，若$\frac{x^2}{15-k}+\frac{y^2}{24-k}=1$ 表示一個橢圓，

求此橢圓的兩焦點坐標。 Ans：$(0,\pm 3)$

(練習14) 某行星繞一恆星之軌道爲橢圓，且恆星在其一焦點處。據觀察得知此行星與恆星的最近距離爲 100 萬公里，最遠是 300 萬公里，則此橢圓的正焦弦長爲______萬公里。Ans：300

(練習15) 橢圓兩焦點$F_1(0,6)$、$F_2(0，-6)$，弦$\overline{AB}$過F_1，ΔABF_2的周長爲 40，請求出此橢圓的方程式爲何？Ans：$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

(練習16) 已知橢圓Γ_1爲 $\frac{x^2}{k^2+1}+\frac{y^2}{7-k}=1$，試求

(1)若Γ_1的焦點在x軸上，則k的範圍爲何？

(2)Γ_1與橢圓$\frac{x^2}{90}+\frac{y^2}{24}=1$ 共焦點，則k的值爲何？

Ans：(1)$k<-3$ 或 $2<k<7$ (2)–9

(丙)參數式與軌跡方程式

(1)橢圓的參數式⇒可求最大值、最小值

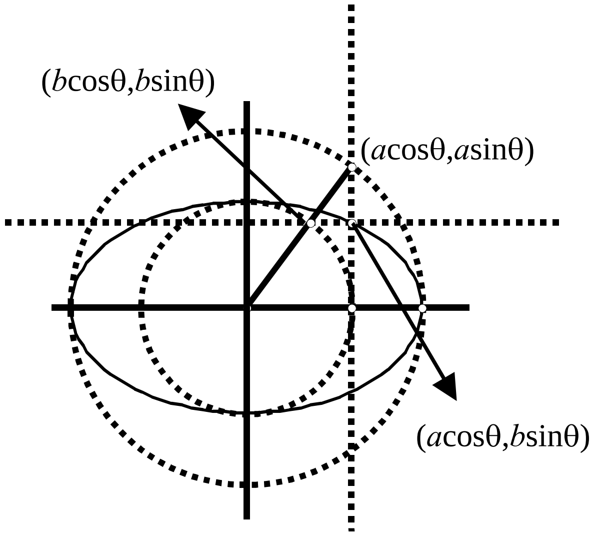
(a)標準式的橢圓參數式

(1°)圓：$x^2+y^2=r^2$

$\Rightarrow x=r\cdot\cos\theta$ ，$y=r\cdot\sin\theta$ 。

圓心(h,k)的圓：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$\Rightarrow x=h+r\cos\theta$，$y=k+r\sin\theta$



(2°)橢圓：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的參數式爲

$\Rightarrow x=a\cos\theta$　，$y=b\sin\theta$

[圖形觀點]：如右圖所示

[代數觀點]：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可寫成$(\dfrac{x}{a})^2+(\dfrac{y}{b})^2=1$

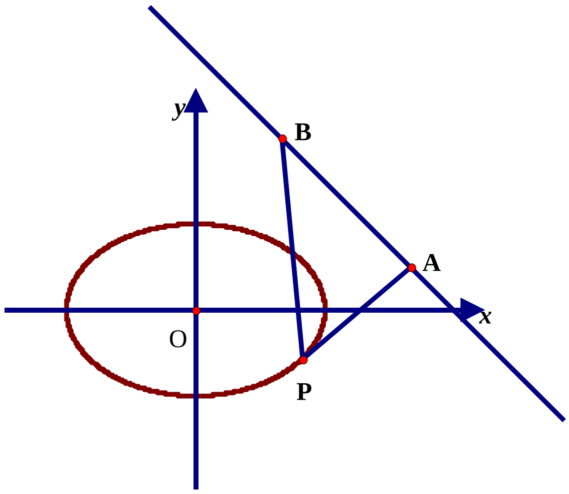
並與三角公式$(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=1$ 比較

(b)平移標準式的橢圓參數式

$\Rightarrow$橢圓：$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$　上的點

可設爲$x=h+a\cos\theta$，$y=k+b\sin\theta$　。

[例題8] 設 A(5,1)，B(2,4)，P 是橢圓$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的動點，求△ABP 面積的最大值與最小值。Ans：最大值爲$\dfrac{3}{2}(6+\sqrt{13})$，最小值爲$\dfrac{3}{2}(6-\sqrt{13})$

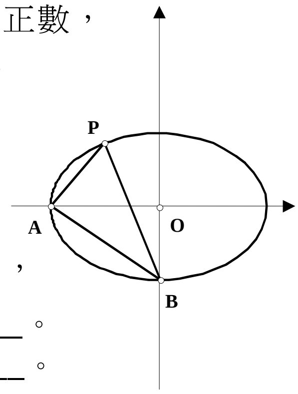


(練習17) 在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別爲 4、2。如圖所示，通過橢圓的中心 O 且與 x 軸的夾角爲 45 度的直線在第一象限跟橢圓相交於 P。則此交點 P 與中心 O 的距離爲

(A)1.5 (B)$\sqrt{1.6}$　(C)$\sqrt{2}$　(D)$\sqrt{2.5}$　(E)$\sqrt{3.2}$　。　(B)　(91 學科)

(練習18) 求橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 上任一點P，到直線L：$x-2y+10=0$ 的距離之最小值為何？相應的P點坐標為何？Ans：$\sqrt{5}$，P$(\frac{-9}{5},\frac{8}{5})$

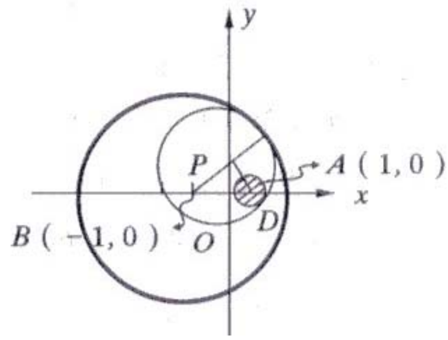
(練習19) 如右圖，A、B 為橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之兩頂點，其中 a,b 為兩正數，若 P 為第一象限橢圓弧上一點，則ΔABP 的最大面積為何？
Ans：$\frac{\sqrt{2}+1}{2}ab$ (88 大學自)

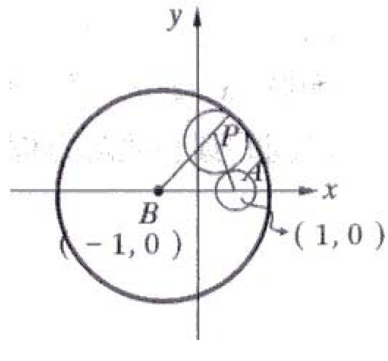


(練習20) 求橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的內接矩形(邊與坐標軸平行)中，
(a)最大面積為__________________，此時其周長為__________。
(b)最大周長為__________________，此時其面積為__________。
Ans：(1)$2ab,2\sqrt{2}(a+b)$ (2)$4\sqrt{a^2+b^2},\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

(2)求動點的軌跡：
如何求動點的軌跡方程式：
設所求的動點 P(x,y)，透過題目的條件，找出 x,y 的關係式 $f(x,y)=0$，再檢查滿足 $f(x,y)=0$ 的點都具有題設的條件。

[例題9] 設二圓C_1：$(x-1)^2+y^2=1$，C_2：$(x+1)^2+y^2=16$，今有一動圓與C_1、C_2皆相切，求此動圓圓心P之軌跡方程式。
Ans：與圓C_1相外切時，動圓圓心軌跡為$\frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{21}=1$
與圓C_1相內切時，動圓圓心軌跡為$\frac{4x^2}{9}+\frac{4y^2}{5}=1$

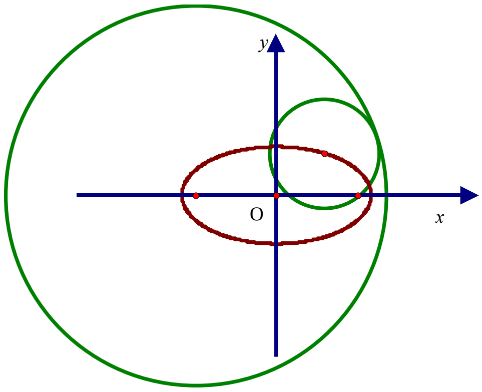




[例題10] 設圖形Γ上任一點到點 F(2,0)的距離與到直線 $x+\frac{10}{3}=0$ 的距離比爲 3：5，試求Γ的方程式爲何？ Ans：$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

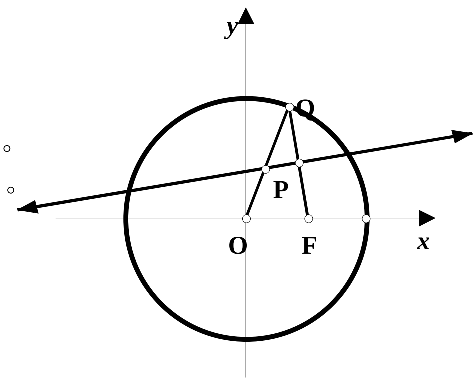
(練習21) 設點P(x,y)在橢圓$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上移動，F_1、F_2爲橢圓的兩焦點，則△PF_1F_2的重心的軌跡爲何？
Ans：$9x^2+25y^2=25$

(練習22) 一圓C與$(x+3)^2+y^2=64$ 相切，並過點(3,0)，試求動圓C的圓心所成的圖形方程式。
Ans：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$



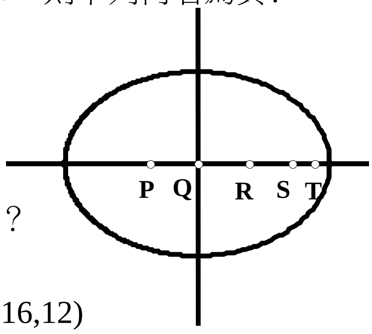
(練習23) 在坐標平面上，到直線$x=-1$ 之距離是到點F(1,0)之距離的兩倍的所有點所形成的圖形是一個橢圓，其中F(1,0)爲此橢圓之一焦點，則另一個焦點F'的坐標爲______________。 Ans：$(\frac{7}{3},0)$ (85 大學社)

(練習24) 右圖中，圓 O 的半徑爲 6，F 的坐標爲(4,0)，Q 在圓 O 上，P 爲$\overline{FQ}$的中垂線與$\overline{OQ}$的交點。當 Q 在圓 O 上移動時，動點 P 的軌跡方程式。
Ans：$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ (87 學科)



綜合練習

(1) 關於橢圓Γ：$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=6$，則下列何者爲真?
(A)(0 , 0)是Γ的中心 (B)(1 , 2),(−1 ,−2)爲Γ的焦點
(C)Γ的短軸長爲 4(D)Γ對稱於直線 $x=y$
(E)Γ 對稱於(1 , 2)與(−1 ,−2)的連線。



(2) 右圖是一個橢圓，試問下列那一個點是此橢圓的焦點？
(A)P (B)Q (C)R(D)S (E)T

(3) 坐標平面上有一個橢圓，已知在(8,4), (9,11), (15,5)和(16,12)
這四個點中，有兩個是焦點，另外兩個是頂點，則此橢圓的半長軸長度=？

(4) 設一橢圓方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ，其中 $a>0$，$b>0$，設 F 爲其一焦點，已知橢圓在 x 軸上的兩個頂點分別與 F 的距離爲 5 單位與 1 單位，試求(a,b)=？
(91 指定乙)

(5) 設坐標平面上有 A、B、C 三點，若 A(5,0)、B(−5,0)，線段$\overline{AC}$的長爲 $3\sqrt{10}$ ，線段$\overline{BC}$的長爲$\sqrt{10}$ 。求以 A、B 爲焦點，且通過 C 的橢圓方程式。

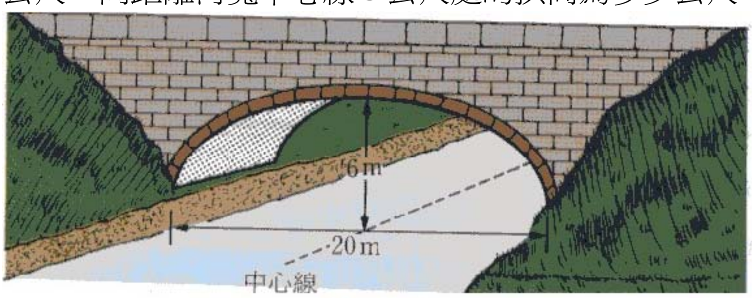
(6) 設 $a\in$R，方程式$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}=2a$，則(a)表一橢圓，則 a 值之範圍爲？(b)表一線段，則 a=_________。(c)無圖形，則 a 值之範圍爲__________。

(7) 已知方程式$x^2+4y^2+2x+4y+k=0$ 之圖形爲一個橢圓，試求實數k的取值範圍？

(8) 設一橢圓長軸長 16，短軸長 10，求此橢圓最長的焦半徑與最短的焦半徑。

(9) 設點 P 在橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 且 P 與兩焦點的連線互相垂直，已知點 P 在第一象限內，求 P 的座標。

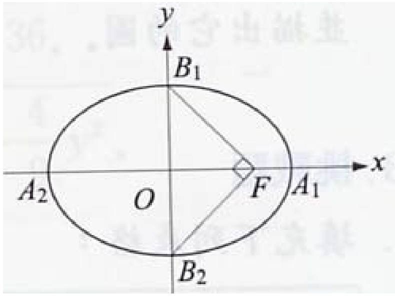
(10) 下圖是一座設計成半橢圓的拱橋，河寬 20 公尺，河寬之中心線的水面處拱高 6 公尺，問距離河寬中心線 5 公尺處的拱高爲多少公尺？



(11) 橢圓$\sqrt{x^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+(y+4)^2}=10$ 的短軸長爲_________。

(12) 一橢圓形撞球台，外圍的方程式爲$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，且其兩焦點$F_1$、$F_2$，今有一人從$F_1$將一球依直線方向打至邊上一點A，反彈過$F_2$，撞至邊上另一點B，再回到原焦點處$F_1$，試求$\Delta ABF_1$的周長。

(13) 已知F是橢圓一焦點，B_1、B_2是短軸的頂點，且$B_1FB_2=90°$，A_1是長軸上距離F較近的一個端點，若$\overline{A_1F}$-=$\sqrt{10}-\sqrt{5}$，求橢圓的方程式。



(14) 設Γ：$\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{k-4}=1$ $(k\in R)$，(a)若Γ表一橢圓，求k的範圍。(b)若Γ表一焦點在x軸的橢圓，求k的範圍。(c)若Γ表一焦點在y軸的橢圓，求k的範圍。

(15) 求橢圓$\frac{(2x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$上任一點 P 到直線 L：$2x+y-8=0$的最大距離。

(16) 平面上有兩定點 A(1,6)，B(−5,3)，取橢圓$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$上任一點 P，求 P 點坐標爲何？此時△PAB 之面積最大爲多少？

(17) 設$(p,0)$爲橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$的長軸上一定點，且$0<p<\frac{3}{2}$。若點$(a,b)$爲橢圓上距離$(p,0)$最近之點，則$a$=？ (以$p$的函數表示) (89 自)

(18) 自橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$上的點 P 到直線 L：$x-2y+10=0$作垂線，求垂線長的最大值 M 及最小值 m。

(19) ΔABC 中，已知 B(0,3),C(0,−3)
(a)若ΔABC 的周長爲 16，請問頂點 A 的軌跡方程。
(b)若$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的斜率乘積爲定值$\frac{-1}{4}$，則頂點 A(x,y)之軌跡在那一個圓錐曲線上。

(20) 設長爲 5 的一線段$\overline{AB}$，被 P 點內分爲$\overline{AP}$：$\overline{PB}$=2：3，若其端點 A 恆在x軸，另一端點 B 恆在y軸上移動，求此 P 點的軌跡方程式。

進階問題

(21) 已知單位圓$x^2+y^2=1$之內接三角形中以正三角形的面積最大，其面積爲$\frac{3\sqrt{3}}{4}$，請利用上面的事實，求橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$內接三角形的最大面積。

(22) 有一線段$\overline{AP}$的長度爲 6，令 A 點在x軸上移動，$\overline{AP}$的中點在y軸上移動，則 P 點的軌跡方程式爲何？

綜合練習解答

(1) (A)(B)(C)(E)

(2) (D)

(3) $\sqrt{50}$

(4) $(a,b)=(3，\sqrt{5}\ )$

(5) $\dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{15}=1$

(6) (a)$a>\dfrac{5}{2}$ (b)$a=\dfrac{5}{2}$ (c)$a<\dfrac{5}{2}$

(7) $k<2$

(8) $8+\sqrt{39}$，$8-\sqrt{39}$

(9) $(\dfrac{3}{\sqrt{5}},\dfrac{4}{\sqrt{5}})$

(10) $3\sqrt{3}$ 公尺

(11) 6

(12) 20

(13) $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{5}=1$

(14) (a) $4<k<9$ 且 $k\neq\dfrac{13}{2}$(b) $4<k<\dfrac{13}{2}$(c)$\dfrac{13}{2}<k<9$

(15) $\dfrac{13}{\sqrt{5}}$

(16) $P(\dfrac{4}{5},\dfrac{-3}{5})$，△PAB 之面積最大為$\dfrac{39}{2}$

(17) $\dfrac{4p}{3}$

(18) $M=3\sqrt{5},m=\sqrt{5}$

(19) (a)$\dfrac{x^2}{55}+\dfrac{y^2}{64}=1$ (但 $x\neq0$) (b)$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ (但 $x\neq0$)

(20) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$[提示：設A$(a,0)$、B$(0,b)$，P$(x,y)$且$a^2+b^2=25$，因為$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OB}$，則$(x,y)=(\dfrac{3}{5}a,\dfrac{2}{5}b)$，故得$a=\dfrac{5}{3}x$，$b=\dfrac{5}{2}y$，代入$a^2+b^2=25$，得$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$]

(21) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$[提示：令橢圓內接三角形 ABC 的頂點坐標 A$(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$、B$(a\cos\beta,b\sin\beta)$、C$(a\cos\gamma,b\sin\gamma)$，ΔABC 的面積$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a\cos\alpha & b\sin\alpha & 1 \\ a\cos\beta & b\sin\beta & 1 \\ a\cos\gamma & b\sin\gamma & 1 \end{vmatrix}\right|$

$$=\frac{1}{2}ab\left|\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 1\\ \cos\beta & \sin\beta & 1\\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1\end{vmatrix}\right|\le\frac{3\sqrt{3}}{4}ab]$$

(22) $4x^2+y^2=36$