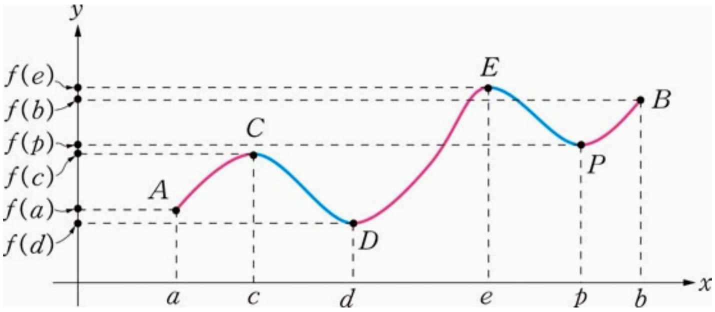
第五十單元 微分的應用(二)

最佳化問題(求最大值與最小值的應用問題)是數學上很重要一個課題，許多應用的領域，最後可能都會歸結到求一個或多個數學式子的最大值與最小值，最佳化問題是微分學發展出來的動機之一，因此利用微分來解決最佳化的問題必然是它的主要應用之一。本單元的主題是利用微分的技術來求函數的最大值與最小值。

(甲)極值的意義

先觀察定義於閉區間$[a,b]$上的多項式函數 $f(x)$的圖形。



上圖中，D 點是圖形中的最低點，而 P 點和 A 點（端點）雖然不是最低點，但是在 P 點(A 點)附近的每個點都比 P 點(A 點)高，因此 P 點和 A 點是「**局部範圍內的最低點**」；相對地，E 點是圖形中的最高點，而 C 點和 B 點（端點）雖然不是最高點，但是在 B 點(C 點)附近的每個點都比 B 點(C 點)低，因此它們都是「**局部範圍內的最高點**」。

接下來我們來說明多項式函數 $f(x)$的最大值(最小值)與極大值(極小值)之意義：

1.最大值與最小值：

若 $f(x)$定義域內的每一個數 x，都有 $f(m)\geq f(x)$時，則稱 $f(m)$是函數 $f(x)$的**最大值**。

若 $f(x)$定義域內的每一個數 x，都有 $f(n)\leq f(x)$時，則稱 $f(n)$是函數 $f(x)$的**最小值**。

如上圖，點 E 的 y 坐標 $f(e)$爲函數 $f(x)$的最大值；點 D 的 y 坐標 $f(d)$就是函數 $f(x)$的最小值。

2.極大值與極小值：

若可找到一個實數α，使得在實數α附近的某一範圍內的每個數 x，都有 $f(\alpha)\geq f(x)$時，則稱 $f(\alpha)$是 $f(x)$的一個**極大值**（局部極大值），也可以說，函數 $f(x)$在 $x=\alpha$處有一個極大值 $f(\alpha)$。

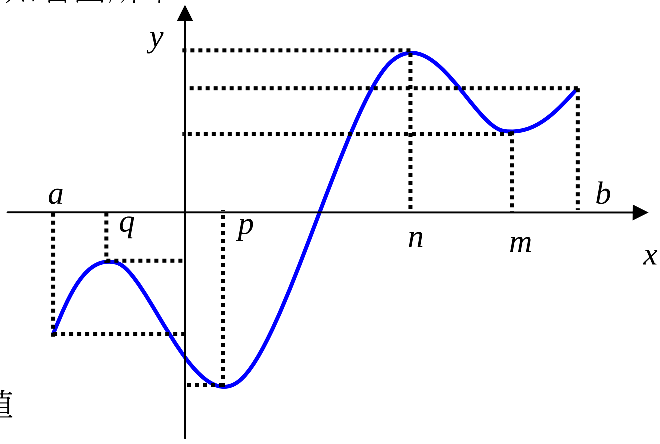
若可找到一個實數β，使得在實數β附近的某一範圍內的每個數 x，都有 $f(\beta)\leq f(x)$時，則稱 $f(\beta)$是 $f(x)$的一個**極小值**（局部極小值），也可以說，函數 $f(x)$在 $x=\beta$處有一個極小值 $f(\beta)$。

如上圖，點 C、E、B 的 y 坐標 $f(c)$、$f(e)$與 $f(b)$都是函數 $f(x)$極大值；點 A，D，P 的 y 坐標 $f(a)$，$f(d)$及 $f(p)$都是函數 $f(x)$的極小值。

總結上述的說明，當我們觀察函數 $f(x)$如波浪起伏的圖形時，圖形相對高點的波峰處

就是發生極大值的位置；而圖形相對低點的波谷處就是發生極小值的位置。另一方面，整個圖形最高點就是發生最大值的位置，而最低點就是發生最小值的位置。

(練習1) (1)設 $f(x)$定義在閉區間$[a,b]$上,其圖形如右圖所示，
$f(x)$的極大值爲：
$f(x)$的極小值爲：
$f(x)$的最大值爲：
$f(x)$的最小值爲：
(2)請問函數 $f(x)$的極大值一定會大於極小值嗎？
Ans：(1)極大值：$f(q)$、$f(n)$、$f(b)$；
極小值：$f(a)$、$f(p)$、$f(m)$
最大值：$f(n)$；最小值：$f(p)$
(2) 極大值**不一定**會大於極小值



(乙)如何用一階導數判別極值

◆ 導數與極值的關係：

觀察一個實例：

$f(x)=ax^2+bx+c$，由配方可知 $f(x)$在 $x=\frac{-b}{2a}$有極值，而 $f'(x)=2ax+b$，所以 $f'(\frac{-b}{2a})=0$。

由圖形上來說，表示 $f(x)$的圖形拋物線在頂點處的切線爲水平線。這個結果可推廣到一般的函數，我們寫成定理。

費馬定理：
若函數 $f(x)$在 $x=a$ 處有極值，而且 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分，則 $f'(a)=0$。

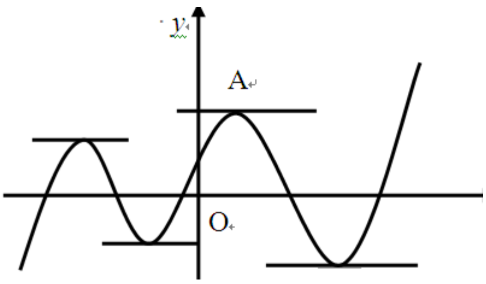
證明：

不妨假設$(a,f(a))$爲 $f(x)$的極大點，根據定義 $f(x)$在 $x=a$ 附近有極大值 $f(a)$

如果 $x>a$，則$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le 0$

如果 $x<a$，則$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ge 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ge 0$

因爲 $f'(a)$存在，所以 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$



因此 $f'(a)=0$

幾何解釋：

定理一：若 A 點是 $y=f(x)$圖形上的一個局部最高點或最低點，而且 A 點爲切點的切線存在，則此切線必爲水平線。

[討論]：

(1)定理一中 $f^{/}(a)$存在的條件，可以去掉嗎？

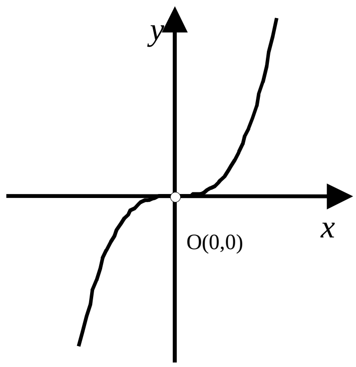
不可以！反例：$f(x)=|x|$，$a=0$

因此不可微分的點可能會發生極值。

(2)定理一的逆定理成立嗎？

逆定理不成立，反例 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 處 $f^{/}(0)=0$，

但 $f(x)$在 $x=0$ 不發生極值。



結論：
對於一個函數 $f(x)$而言，它的極值只可能出現在下面這些點：
(1)滿足 $f^{/}(a)=0$ 的點 a 。
(2)$f(x)$的不可微分的點(圖形上的尖點、跳躍點、轉折點)
(3)$f(x)$的定義域的端點。

◆　如何用一階導函數判別極值：

如何在區間 I 上找可微分函數 $f(x)$的極大值與極小值：

設α爲區間 I 上的一個數，

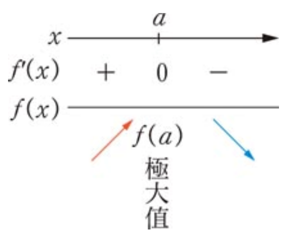
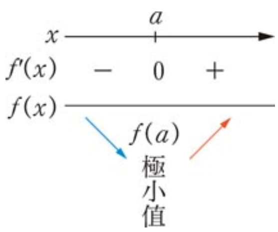
(a)設α爲端點，因爲端點一定會產生極值，只要考慮 $x=\alpha$附近，$f(x)$的增減情形，即可判斷出 $f(\alpha)$是極大值或極小值。

(b)設α不是端點，根據費馬定理，

若 $f^{/}(\alpha)$不爲 0，則 $f(\alpha)$一定不是極值；

若 $f^{/}(\alpha)=0$ 時，可以根據 $x=\alpha$兩側 $f(x)$的增減情形，進一步判斷 $f(\alpha)$是極大值或極小值。

利用(1)的結果與均值定理，可以得出一階導函數與極值的關係：

極值的一階檢定法（簡稱一階檢定法）
設函數 $f(x)$在 $x=a$ 的附近可微分，且 $f^{/}(a)=0$。
(1)若在 a 點附近，當 $x<a$ 時，$f^{/}(x)>0$；當 $x>a$ 時，$f^{/}(x)<0$，則 $f(x)$在 $x=a$ 處有極大值。 
(2)若在 a 點附近，當 $x<a$ 時，$f^{/}(x)<0$；當 $x>a$ 時，$f^{/}(x)>0$，則 $f(x)$在 $x=a$ 處有極小值。 

[證明]：

(1)在 a 點附近，

設 $x<a$，$f(x)-f(a)=f^{/}(t)(x-a)<0$，$t$ 介於 x、a 之間$\Rightarrow f(x)<f(a)$

設 $x>a$，$f(x)-f(a)=f'(s)(x-a)<0$，s 介於 x、a 之間$\Rightarrow f(x)<f(a)$

所以 $f(x)$在 $x=a$ 處有(相對)極大值。

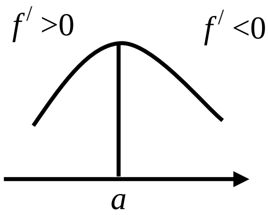
(2)在 a 點附近，

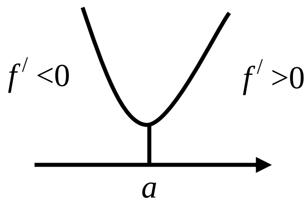
設 $x<a$，$f(x)-f(a)=f'(t)(x-a)>0$，t 介於 x、a 之間$\Rightarrow f(x)>f(a)$

設 $x>a$，$f(x)-f(a)=f'(s)(x-a)>0$，s 介於 x、a 之間$\Rightarrow f(x)>f(a)$

所以 $f(x)$在 $x=a$ 處有(相對)極小值。

這個結果可以用以下的圖形爲模型，來加以理解：





[討論]：若 $f(x)$在 $x=a$ 附近，$f'(x)$沒有變號，那麼 $f(a)$會是極值嗎？

[例題1] 已知函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx-3$ 在 $x=1$、-3 有極值，求 a,b 之值。

[解法]：

因爲函數 $f(x)$在 $x=1$、-3 有極值且 $f'(1)$且 $f'(-3)$存在，根據費馬定理，

可以得知 $f'(1)=f'(-3)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

所以 $f'(1)=3+2a+b=0$，$f'(-3)=27-6a+b=0$

故可解得 $a=3$，$b=-9$。

[例題2] 求函數 $f(x)=3x^5-5x^3$ 在區間[−2,2]的極大值、極小值。

[解法]：

由 $f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x-1)(x+1)\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=0$，$-1$，$1$。

以 $f'(x)=0$ 的根爲與端點：-2、-1、0、1、2 分段討論，並列出下表：

x	-2	$-2<x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<2$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-56	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	56

由函數極值的一階檢定法，我們有：

(1°)在 $x=-1$ 處，圖形左側遞增、右側遞減，$f(x)$在 $x=-1$ 有極大值 $f(-1)=2$；

(2°)在 $x=1$ 處，圖形左側遞減、右側遞增，$f(x)$在 $x=1$ 有極小值 $f(1)=-2$

(3°)在定義域的端點 $x=-2$、$x=2$

$f(x)$在 $x=-2$ 有極小值 $f(-2)=-56$；$f(x)$在 $x=2$ 有極大值 $f(2)=56$。

(4°)在 $x=0$ 處，圖形兩側都遞減，因此 $f(x)$在 $x=0$ 並不會產生極值。

(練習2)已知函數 $f(x)=x^4+2x^3-ax^2+bx+1$ 在 $x=1$、-2 有極值，求 a,b 之值。

Ans：$a=3$、$b=-4$

(練習3)試求函數 $f(x)=-x^4+2x^2-1$ 在區間〔-2，2〕的極大值、極小值。

Ans：極大值 $f(-2)=-9$、$f(1)=0$，極小值 $f(1)=0$、$f(2)=-9$

◆　連續函數的最大值與最小值：

連續函數在開區間上不一定會有最大值、最小值；但是在閉區間上一定會有最大值與最小值。我們用下面的例子來說明：

下圖為多項式函數 $f(x)=x^3-3x+1$ 的圖形，考慮 $f(x)$在下列區間的最大值與最小值：

(1)閉區間$[-2.1,2.1]$

(2)開區間$(-1.5,1.5)$

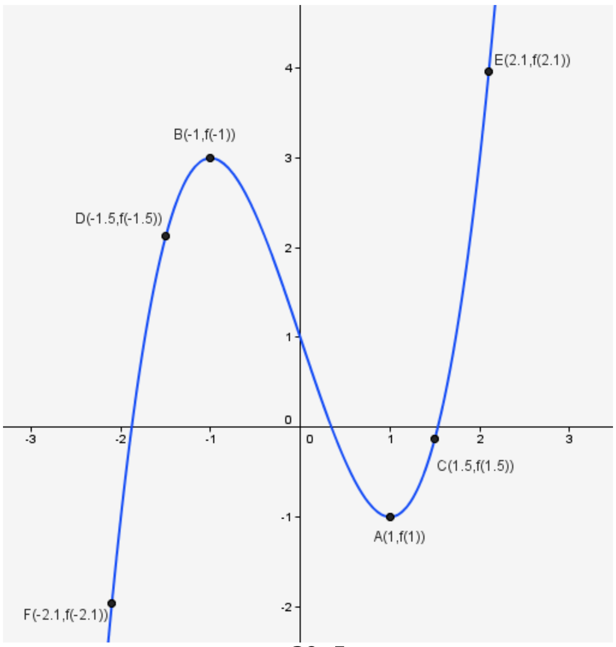
(3)開區間$(-2.1,2.1)$

在閉區間$[-2.1 , 2.1]$中，根據下圖，可以得知最高點與最低點分別為端點 E、F，因此 $f(-2.1)$為最小值，$f(2.1)$為最大值。

在開區間$(-1.5,1.5)$中，根據下圖，可以得知最高點與最低點分別為 B 點與 A 點，因此 $f(-1)$為最大值，$f(1)$為最小值。

在開區間$(-2.1,2.1)$中，根據下圖，當 x 由 2.1 的左側接近 2.1 時，$f(x)$的值會愈來愈大，但是因為 $f(2.1)$並不在考慮的範圍內，因此 $f(x)$並沒有最大值；同樣的，當 x 由-2.1 的右側接近-2.1 時，$f(x)$的值會愈來愈小，但是因為 $f(-2.1)$並不在考慮的範圍內，因此 $f(x)$並沒有最小值。

結果是 $f(x)$在開區間$(-2.1,2.1)$上有極值但是沒有最大值與最小值。



因爲函數 $f(x)$的圖形是一個連續不斷的曲線，當我們從圖形上截取一段含有端點的圖形時，這一段圖形一定會有最高點與最低點，就像 $f(x)$在閉區間$[-2.1,2.1]$上有最大值與最小值；但是當我截取的圖形不含端點時，就可能在這段圖形上找不到最大值或最小值，就像 $f(x)$在開區間$(-2.1,2.1)$上沒有最大值與最小值。

這個事實是連續函數的一個重要性質：

> 連續函數的最大值與最小值定理：
> 若 $f(x)$爲閉區間$[a,b]$上的**連續函數**，則 $f(x)$在$[a,b]$上一定可以找到最大值與最小值。

根據上面的定理，**連續(多項式)函數在閉區間上一定會有最大值與最小值**，因此可以先求出極值之後，再取極大值中最大者爲最大值，極小值中最小者爲最小值。

[例題3] 設函數 $f(x)=x^3-6x^2+9x+4$，$x\in$〔-1，4〕的

(1)試求 $f(x)$的極值。

(2)試求 $f(x)$的最大值與最小值。

[解法]：

(1)極值發生在 $f'(x)=0$ 的實根處或定義域的端點：

導函數 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$ 或 3，

因此 $f(x)$的極值只可能出現在 $x=1$，3 及端點 $x=-1$，4 等處。

由下表再根據前面的結果，可以得知：

$f(x)$的極大值爲 $f(1)=8$、$f(4)=8$；極小值爲 $f(-1)=-12$、$f(3)=4$。

(2)比較函數在各臨界點及定義域端點的值：

因 $f(x)$定義在閉區間，故 $f(x)$有最大值、最小值，且一定是極值之一，

由列表得函數 $f(x)$在區間〔-1，4〕上的最大值(極大值中最大者)爲 8，

最小值(極小值中最小者)爲-12。

x	-1		1		3		4
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$的增減		↗		↘		↗	
$f(x)$	-12		8		4		8

[例題4] 請求出函數 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$ 之極大值與極小值。

Ans：$f(-1)$爲極小值，$f(3)=\dfrac{1}{6}$爲極大值

(練習4) 求 $f(x)=(x+3)^3(x-2)^2$ 的極大值、極小值。
Ans：極大值 $f(0)=108$，極小值 $f(2)=0$

(練習5) 設 $f(x)=x^3-12x+2$，$-3\le x\le 5$，
試求 $f(x)$ 之極大值，極小值，最大值，最小值。
Ans：
極大值：$f(-2)=18$，$f(5)=67$，極小值：$f(-3)=11$，$f(2)=-14$，最大值：$f(5)=67$，最小值：$f(2)=-14$

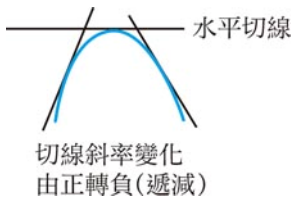
(練習6) 試求 $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3}$的極值。 Ans：極大值 $f(3)=\dfrac{1}{6}$，極小值 $f(1)=\dfrac{1}{2}$。

(練習7) 試求 $f(x)=x+2\sin x$，$0\le x\le 2\pi$ 的極值。
Ans：$g(0)=0$，$g(\frac{4\pi}{3})=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$極小值；$g(\frac{2\pi}{3})=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$，$g(2\pi)=2\pi$極大值。

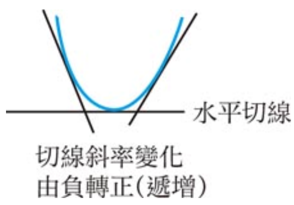
(丙)如何用一階與二階導數判別極值

◆ 由一階及二階導函數判別函數的極值：

極值的一階檢定法重點是判斷導數等於 0 的點兩側函數的增減情形，除了這樣的想法之外，還可以根據導數等於 0 的點兩側函數圖形的凹向來找極大值或極小值。
我們觀察函數圖形極大點與極小點附近圖形的凹向：
如下圖一，在函數圖形的極大點（切線斜率為 0 處）附近，圖形是凹口向下；如下圖二在函數圖形的極小點（切線斜率為 0 處）附近，圖形是凹口向上。



圖一



圖二

反之，若函數 $f(x)$在 $x=\alpha$處的導數為 0，且在該點附近的圖形是凹口向下，則 $f(\alpha)$是極大值；若函數 $f(x)$在 $x=\beta$ 處的導數為 0，且在該點附近的圖形是凹口向上，則 $f(\beta)$是 $f(x)$的一個極小值。一般情形下，我們有下面的結果：

定理：
設 $f(x)$在(a,b)上可微分，設 $x_0\in(a,b)$且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)$存在。
(1)若 $f''(x_0)<0$，則 $f(x)$在 $x=x_0$ 處有相對極大值。
(2)若 $f''(x_0)>0$，則 $f(x)$在 $x=x_0$ 處有相對極小值。

證明：

(1)考慮 $f''(x_0)<0$ 的情形，因為二階導數是通過一階導數定義的，所以 $f''(x_0)$存在，隱含了 $f'(x)$在 x_0 附近是存在的。

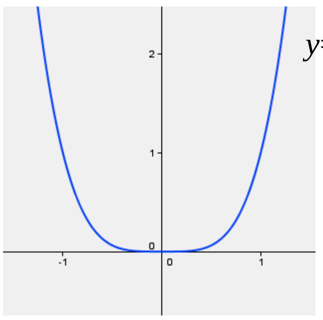
$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$$

$\Rightarrow$存在 $r>0$ 使得當 $x\in(x_0-r,x_0+r)$時，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

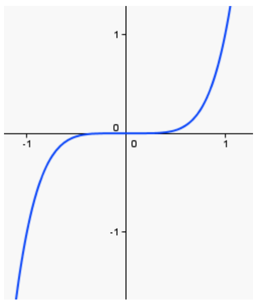
$\Rightarrow x>x_0$，$f'(x)<0$ 且 $x<x_0$，$f'(x)>0$ $\Rightarrow f(x)$在 $x=x_0$ 處有相對極大值。

值得注意的是，如下圖，令 $f(x)=x^4$、$g(x)=x^5$，滿足 $f'(0)=f''(0)=0$ 且 $g'(0)=g''(0)=0$，$(0,0)$為 $f(x)=x^4$ 的極值點，而$(0,0)$為 $g(x)=x^5$ 的反曲點。

因此當 $f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$ 時，$(\alpha,f(\alpha))$可能為極值點或反曲點，故必須再討論這些點左右 $f(x)$的單調性，才能得出 $f(\alpha)$是否為極值。



$y=x^4$



$y=x^5$

結論：

若 $f(x)$為連續函數，則

(1)$f'(a)\neq 0$ $\Rightarrow f(x)$在 $x=a$ 不會產生極值。

(2)滿足 $f'(a)=0$ 的點$(a,f(a))$會有下列三種情形：

$f''(a)<0\Rightarrow$點$(a,f(a))$是極大點 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在 $x=a$ 產生極大值 $f(a)$

$f''(a)>0\Rightarrow$點$(a,f(a))$是極小點 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在 $x=a$ 產生極小值 $f(a)$

$f''(a)=0\Rightarrow$點$(a,f(a))$可能是反曲點或極大(小)點

[例題5] 試利用極值的二階檢定法求函數 $f(x)=3x^5-5x^3$ 在區間$[-2,2]$的極大值、極小值。

[解法]：

先求 $f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x-1)(x+1)\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=0$，$-1$，$1$。

$f''(x)=60x^3-30x=30x(2x^2-1)$

因為 $f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$，且 $f''(-1)<0$，$f''(0)=0$，$f''(1)>0$

根據二階檢定法可以得知 $f(x)$在 $x=-1$ 有極大值 $f(-1)=2$；$f(x)$在 $x=1$ 有極小值 $f(1)=-2$。
在 $x=0$ 處 $f^{\prime}(0)=f^{\prime\prime}(0)=0$，根據二階檢定法並無法得知 $f(0)$是否為極值，端點 $x=-2$、$x=2$ 處，也是一樣無法由二階導數得知是否為極值。
所以要判斷 $f(-2)$、$f(2)$與 $f(0)$是否為極值，必須根據例題 2 的作法，討論這些點左右的 $f(x)$的單調性，才能得出 $f(-2)$為極小值、$f(2)$為極大值，$f(0)$不為極值。

[例題6] 試求 $f(x)=x-2\sin x$，$0\le x\le 2\pi$的極值與最大值與最小值。

Ans：極大值 $f(\frac{5\pi}{3})$、$f(0)$；極小值 $f(\frac{\pi}{3})$、$f(2\pi)$；最大值 $f(\frac{5\pi}{3})$，最小值 $f(\frac{\pi}{3})$

[例題7] 設 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$，試求 $f(x)$的極值。

Ans：極小值 $f(0)=0$，$f(4)=2^{\frac{5}{3}}$ 極大值

(練習8) 試求函數 $f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x+150$ 的極大值與極小值。
Ans：極小值 $f(3)=-102$，極大值 $f(-1)=154$。

(練習9) 求函數 $f(x)=3x^5-5x^3$ 的極大值、極小值。
Ans：極大值 $f(-1)=2$，極小值 $f(1)=-2$

(練習10) 求 $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot(x-7)^2$ 的極值。
Ans：極大值 $f(1)=36$，極小值 $f(7)=0$。

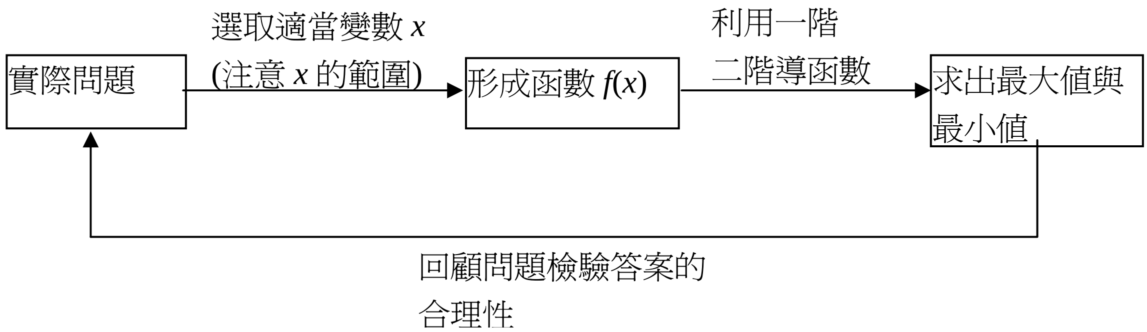
(練習11) 試求函數 $f(x)=x\cdot\sqrt{2x-x^2}$的最大值、最小值。

Ans：最大值 $f(\frac{3}{2})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，最小值 $f(0)=f(2)=0$

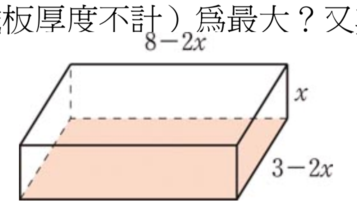
(練習12) 試求 $f(x)=x+\cos x$，$-2\pi\le x\le 2\pi$的極值。
Ans:$f(2\pi)=2\pi+1$ 極大值，$f(-2\pi)=-2\pi+1$ 極小值。

(丁)極值的應用

前面各小節中已經介紹了如何利用一階、二階導函數來求函數的極值，有了這些工具之後，可以將其利用在許多最佳化的問題上(求最大值與最小值的應用問題)，在處理這些問題時，首先要了解題意並釐清問題方向，適當地選取變數 x（使所求值發生變化的關鍵），並依題意定出函數 $f(x)$，此時要特別注意變數 x 的範圍，然後找出函數在該範圍內的臨界點(一階導函數之根與定義域的端點)，再計算函數的最大值或最小值，並且回顧問題的最大值與最小值是否合理。



[例題8] 用一塊寬 3 公尺、長 8 公尺的白鐵板，先在四個角各截去相同大小的正方形，然後摺起四邊焊接起來，形成一個無蓋的長方體蓄水箱，試問在各角截去的正方形邊長應為多少，才能使水箱的容積（鐵板厚度不計）為最大？又其最大容積為多少？



[解法]：
先求出水箱各邊長，然後計算容積。
(1)根據題意，選取變數 x：
設截去的正方形邊長為 x 公尺，此時水箱底邊的長、寬分別為 $(8-2x)$ 公尺與
$(3-2x)$公尺，高為 x 公尺，故水箱的容積為 $x(8-2x)(3-2x)$ 立方公尺。
(2)依題意定出函數 $f(x)$，並標示變數 x 的範圍：
令 $f(x)=x(2x-8)(2x-3)=4x^3-22x^2+24x$，其中 $0<x<\frac{3}{2}$，欲求 $f(x)$的最大值。(3)找出函數 $f(x)$的最大值：
計算 $f(x)$的第一階導函數 $f'(x)=12x^2-44x+24=4(x-3)(3x-2)$，
得 $f'(x)=0$ 的根為 $x=\frac{2}{3}$，3（不合）。

x	$0<x<\frac{2}{3}$	$x=\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	$\frac{200}{27}$	↘

由上表可以得知 $f(x)$在 $0<x<\frac{3}{2}$ 中只有一個極大值，故 $f(\frac{2}{3})=\frac{200}{27}$爲最大值。

因此在各角截去邊長爲（約 0.67）公尺的正方形時，可摺成一個有最大容積的無蓋長方體蓄水箱，其容積爲$\frac{200}{27}$（約 7.41）立方公尺。

[例題9] 傳說中孫悟空的「如意金箍棒」是由「定海神針」變形得來的。這定海神針在變形時永遠保持爲圓柱體，其底圓半徑原爲 12 公分且以每秒 1 公分的等速率縮短，而長度以每秒 20 公分的等速率增長。已知神針之底圓半徑只能從 12 公分縮到 4 公分爲止，且知在這段變形過程中，當底圓半徑爲 10 公分時其體積最大。

(1)試問神針在變形開始幾秒時其體積最大？

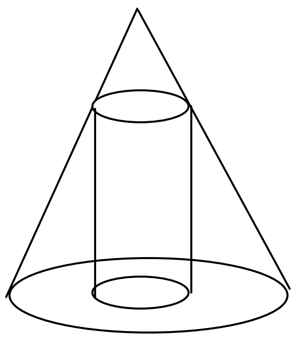
(2)試求定海神針原來的長度。

(3)假設孫悟空將神針體積最小時定形成金箍棒，試求金箍棒的長度。

(2006 指定甲)

Ans：(1)2 秒時體積最大(2)60 公分 (3)220 公分

[例題10] 一直圓柱內接於一已知定直圓錐內(底重合)，當直圓柱有最大體積時求圓柱與圓錐高之比。 Ans：$\frac{1}{3}$



[例題11] 設函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，其中 a，b，c 為常數。若 $f(x)$在 $x=-1$ 處有極值 2，且在 $x=3$ 處也有極值，試求 a，b，c 之值。
Ans：$a=-3$，$b=-9$，$c=-3$

[例題12] 試證明：若 $x>0$，則$\frac{5}{3}x^3+x>2x^2$ 恆成立。

(練習13) 已知函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx-3$ 在 $x=1$、-3 有相對極值，求 a,b 之值。
Ans：$a=3$，$b=-9$

(練習14) 點 A(0,1)到拋物線 $y=x^2-x$ 上點的最短距離為何？ Ans：$\frac{\sqrt{5}}{4}$

(練習15) $a>0$，$f(x)=ax^3-3ax^2-9ax+b$ 有相對極大值 10，相對極小值-22，則(a,b)=?Ans：(1,5)

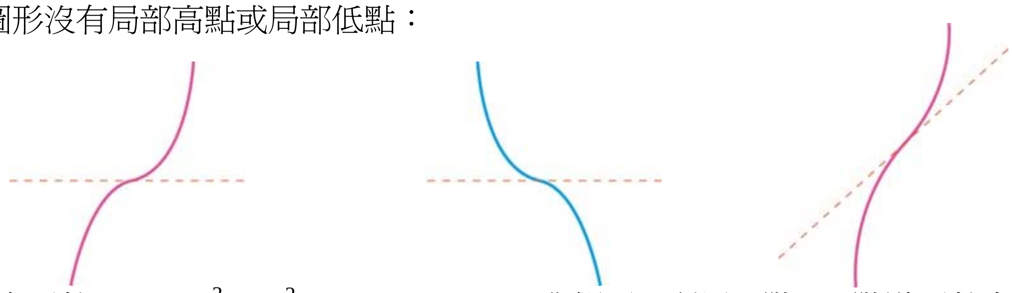
(練習16) 證明在 $0<x<\pi$時，$x-\sin x<x(1-\cos x)$。

(戊)三次函數的圖形

前面已經討論了函數的遞增、遞減、極大值、極小值，以及凹向等性質，我們將利用這些性質來討論三次函數的圖形。
因為三次函數的導函數為二次函數，所以函數圖形的局部最高點、最低點各有一個或根本沒有，因此三次函數圖形的大略形狀可分成兩類：

(1°)圖形有一個局部高點與一個局部低點：

(2°)圖形沒有局部高點或局部低點：



設三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$，我們可以利用一階、二階導函數來討論它的圖形：

設三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$

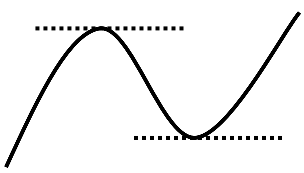
設 $f'(x)=0$ 有兩根α,β ，

而 $f''(\frac{-b}{3a})=0$，當 $x>\frac{-b}{3a}$與 $x<\frac{-b}{3a}$，$f''(x)$異號，所以$(\frac{-b}{3a}$，$f(\frac{-b}{3a}))$為反曲點。

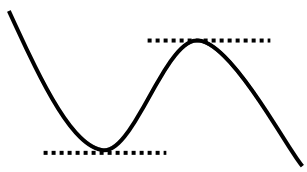
(a)設α、β為兩相異實數(令α<β)

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=3a(x-\alpha)(x-\beta)$ ， $f''(x)=3a(2x-\alpha-\beta)$

$a>0$



$a<0$

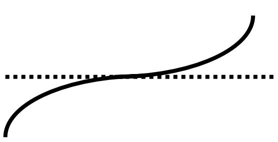


有一個極大，一個極小，一個反曲點

(b)設α=β為兩相等實根：

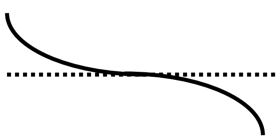
$f'(x)=3a(x-\alpha)^2$ ， $f''(x)=6a(x-\alpha)$

$a>0$



遞增函數，沒有極大極小點，反曲點有一水平切線

$a<0$

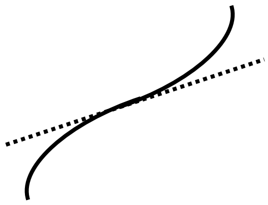


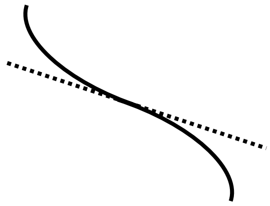
遞減函數，沒有極大極小點，反曲點有一水平切線

(c) α,β爲兩虛數

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ ， $f''(x)=6ax+2b$

$a>0$ $a<0$





遞增函數，沒有極大極小點，反曲點沒有水平切線　遞減函數，沒有極大極小點，反曲點沒有水平切線

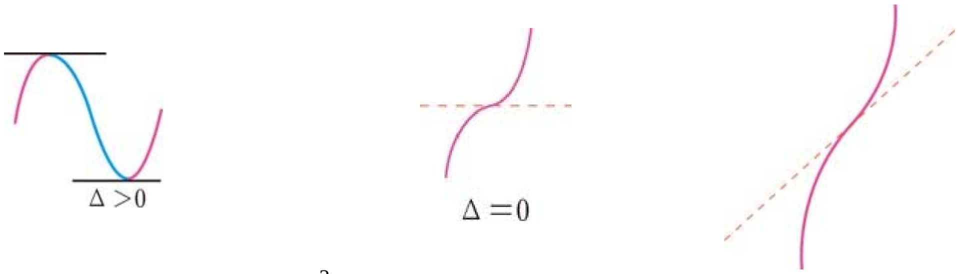
結論：設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq0)$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ ， $f''(x)=6ax+2b$ ， $\Delta=4(b^2-3ac)$

(1)$\Delta\neq0$：$y=f(x)$的圖形有一個極大點、極小點、反曲點。

(2)$\Delta=0$：$y=f(x)$無極大點、極小點，只有一個反曲點，在反曲點有水平切線。

(3)$\Delta<0$：$y=f(x)$無極大點、極小點，只有一個反曲點，在反曲點有斜的切線。



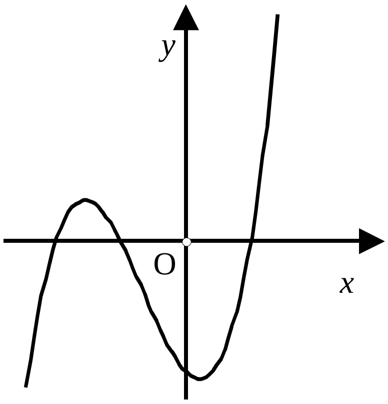
[例題13] (1)證明：$f(x)=ax^3$ 的圖形對稱於反曲點(0,0)。

(2)證明：$f(x)=ax^3+bx+c$ 對稱於反曲點$(0,c)$。

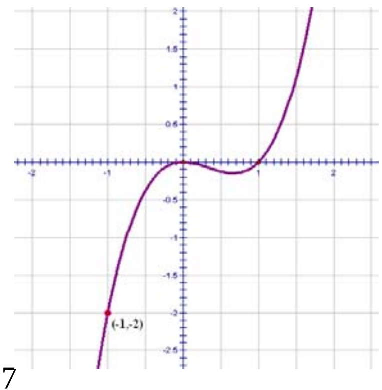
(3)證明：三次函數 $f(x)= ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形都可以利用平移將圖形化成 $g(x)= ax^3+bx+c$ 的形式。

(4)證明：三次函數 $f(x)= ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形都是**點對稱**圖形，

且以反曲點($\frac{-b}{3a}$，$f(\frac{-b}{3a})$)爲圖形的對稱中心。



[例題14] 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，如圖，試判別 a,b,c,d 之正負。
Ans：$a>0$，$b>0$，$c<0$，$d<0$



(練習17) 如圖，已知三次函數的圖形通過(1,0)、(−1,−2)且與 x 軸相切於原點，試求函數 $f(x)$。
Ans：x^3-x^2

(練習18) 已知三次函數 $f(x)=x^3+kx^2+3x+10$ 有兩個極值，試求 k 的範圍。
Ans：$k>3$ 或 $k<-3$

(練習19) 設函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 在 $x=1$ 處有相對極大值 7，而(−1,−9)是它的一個反曲點，求 $f(x)=$？
Ans：$-x^3-3x^2+9x+2$

(練習20) 試問 $y=-x^3+5x$ 的圖形與 $y=2x+5$ 有幾個交點？ Ans：1 個

(己)三次方程式的根

(1)重根的意義：

給定 n 次多項式方程式 $f(x)=0$，如果 α 為定數，k 為正整數($2\le k\le n$)且

$(x-\alpha)^k \mid f(x)$，但$(x-\alpha)^{k+1}\nmid f(x)$，那麼α便是方程式 $f(x)=0$ 的 k 重根。

性質：

若α為 n 次方程式 $f(x)=0$ 的 k 重根(其中 $2\le k\le n$)，

則 $f(\alpha)=f'(\alpha)=\ldots=f^{(k-1)}(\alpha)=0$，但 $f^{(k)}(\alpha)\neq 0$。

[證明]：

設α為 $f(x)=0$ 的 k 重根(其中 $2\le k\le n$)，令 $f(x)=(x-\alpha)^k Q(x)$其中 $Q(\alpha)\neq 0$

我們可以使用綜合除法將 $Q(x)$表成：

$Q(x)=a_{n-k}(x-\alpha)^{n-k}+a_{n-k-1}(x-\alpha)^{n-k-1}+\ldots+a_1(x-\alpha)+a_0$，其中 $a_0\neq 0$

$f(x)= a_{n-k}(x-\alpha)^n+a_{n-k-1}(x-\alpha)^{n-1}+\ldots+a_1(x-\alpha)^{k+1}+a_0(x-\alpha)^k$，

所以可以得知 $f(\alpha)=f'(\alpha)=\ldots=f^{(k-1)}(\alpha)=0$，

但 $f^{(k)}(x)=(x-\alpha)R(x)+a_0k!$ ，$f^{(k)}(\alpha)=a_0k!\neq 0$。

(2)三次方程式的重根：

設實係數三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，令 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，我們用兩種方法來討論 $f(x)=0$ 的重根。

對任意實數α，以 $x-\alpha$為除式我們可以反覆操作綜合除法，將 $f(x)$表示成 $x-\alpha$的多項式：

$$
\begin{array}{lllll|l}
 & a+ & b+ & c+ & d & \alpha \\
+) & & +a\alpha & +(a\alpha^2+b\alpha) & +(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha) & \\
\hline
 & a+ & (a\alpha+b)+ & (a\alpha^2+b\alpha+c) & +(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d)=f(\alpha) & \\
+) & & +a\alpha & +(2a\alpha^2+b\alpha) & & \\
\hline
 & a+ & (2a\alpha+b) & +(3a\alpha^2+2b\alpha+c)=f'(\alpha)\ (\text{因為 } f'(x)=3ax^2+2bx+c) & & \\
+) & & +a\alpha & & & \\
\hline
 & a & +(3a\alpha+b)=\frac{1}{2}f''(\alpha)\ (\text{因為 } f''(x)=6ax+2b) & & &
\end{array}
$$

得 $f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{1}{2}f''(\alpha)(x-\alpha)^2+a(x-\alpha)^3$。

結論：

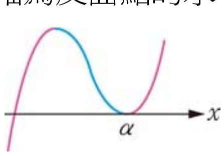
設 $f(x)=0$ 為實係數三次方程式，

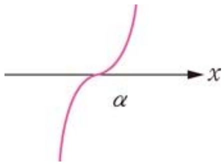
(1)$f(x)=0$ 有二重實根 $\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=f'(\alpha)=0$，但 $f''(\alpha)\neq 0$，此時由極值的二階檢定法可知 $f(x)$有極值 $f(\alpha)=0$。

因此 x 軸為三次函數圖形的水平切線，切點為極大點或極小點。

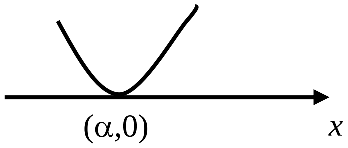
(2) $f(x)=0$ 有三重實根 α $\Leftrightarrow f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$，此時 $f(x)$的圖形有反曲點

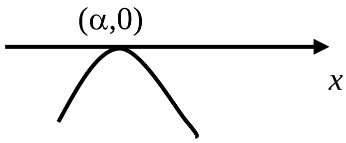
$(\alpha , f(\alpha))=(\alpha , 0)$且過反曲點的切線爲$y-0=0\cdot(x-\alpha)$，
即x軸爲反曲點的水平切線。





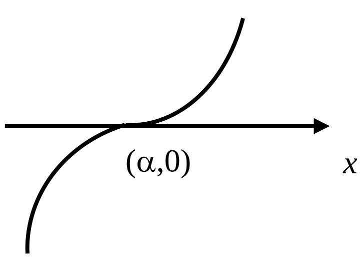
(3)多項式函數的圖形與n次方程式的重根：
(a)當k偶數，則$y=f(x)$在$(\alpha,0)$附近的圖形，如下圖所示：

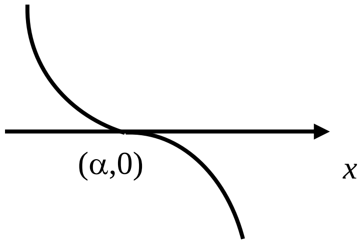




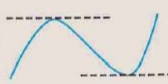
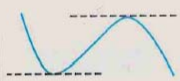
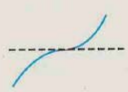
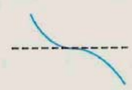
設$k=2m$
$f(x)=(x-\alpha)^{2m}Q(x)$，其中$Q(\alpha)\neq 0$
在$x=\alpha$附近：$f(x)\approx Q(\alpha)(x-\alpha)^{2m}$，因此$f(x)$的圖形特徵與$y=Q(\alpha)(x-\alpha)^{2m}$類似

(b)當k爲大於 1 的奇數，則$y=f(x)$在$(\alpha,0)$附近的圖形，如下圖所示：



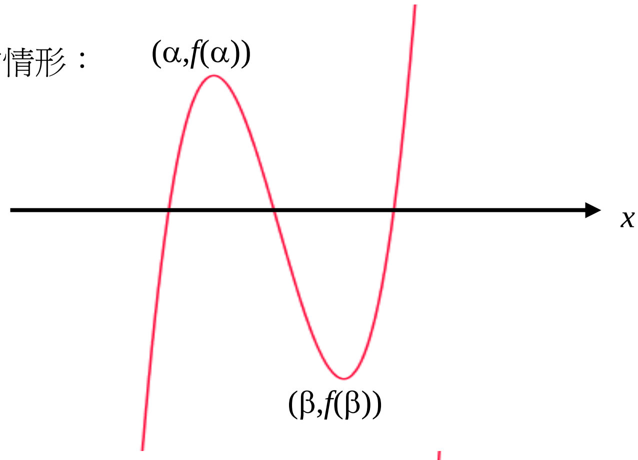


設$k=2m+1$
$f(x)=(x-\alpha)^{2m+1}Q(x)$，其中$Q(\alpha)\neq 0$
在$x=\alpha$附近：$f(x)\approx Q(\alpha)(x-\alpha)^{2m+1}$，因此$f(x)$的圖形特徵與$y=Q(\alpha)(x-\alpha)^{2m+1}$類似
結論：
(1)實係數三次函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$的圖形：

判別式	圖形特徵	$a>0$	$a<0$
$b^2>3ac$	(1)有兩條水平切線. (2)有一極大值，也有一極小值. (3)反曲點為極大點及極小點的連線段之中點.		
$b^2<3ac$	(1)沒有水平切線. (2) $f(x)$ 是嚴格遞增或嚴格遞減的函數. (3)沒有極大值，也沒有極小值.		
$b^2=3ac$	(1)恰有一條水平切線. (2) $f(x)$ 是遞增或遞減的函數. (3)沒有極大值，也沒有極小值.		

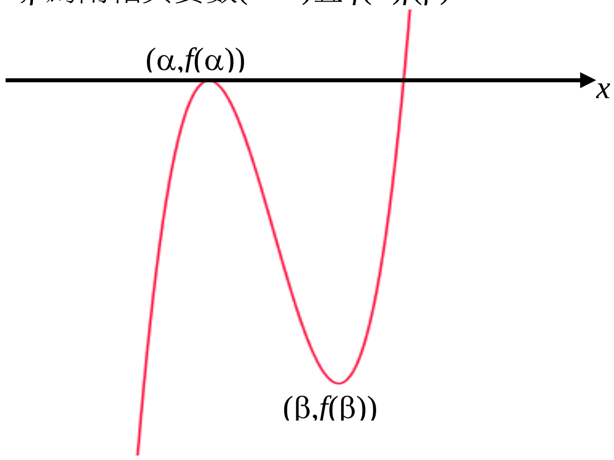
(2)三次方程式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的根有下列的情形：
$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 兩根爲α,β，令$\Delta=4(b^2-3ac)$

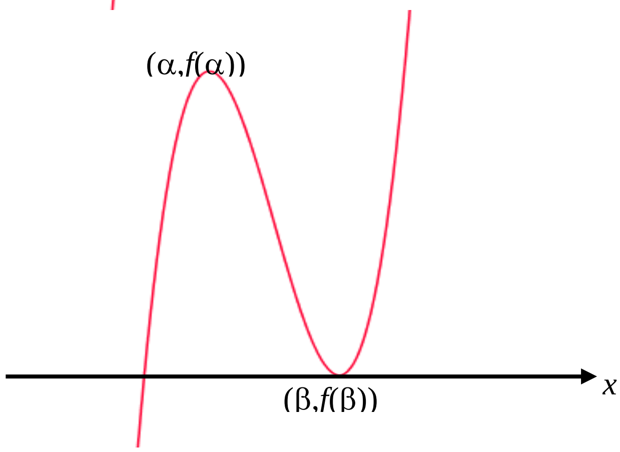
(A)$f(x)=0$ 有三相異實根(如右圖)



α,β爲兩相異實數($\Delta>0$)且 $f(\alpha)f(\beta)<0$

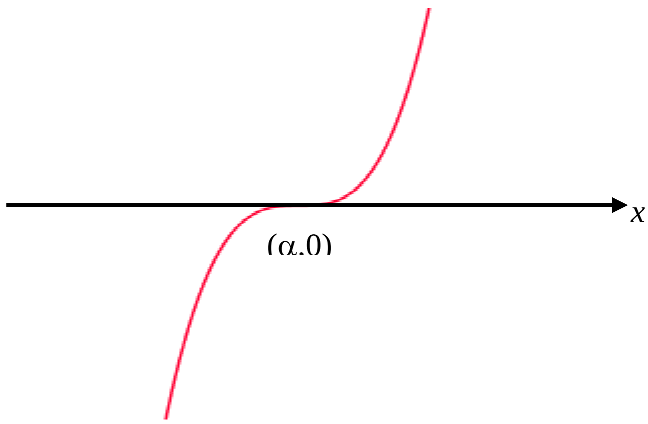
(B)$f(x)=0$ 有兩相異實根(有二重根)
α,β爲兩相異實數($\Delta>0$)且 $f(\alpha)f(\beta)=0$





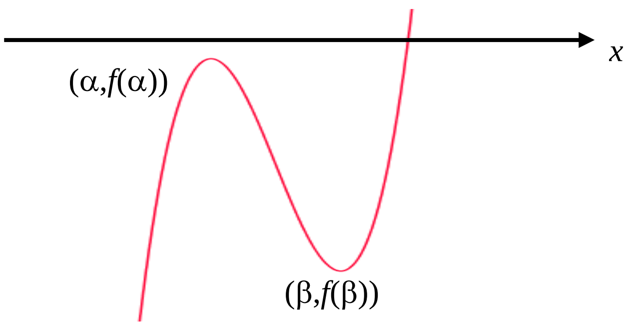
(C)$f(x)=0$ 有三重根

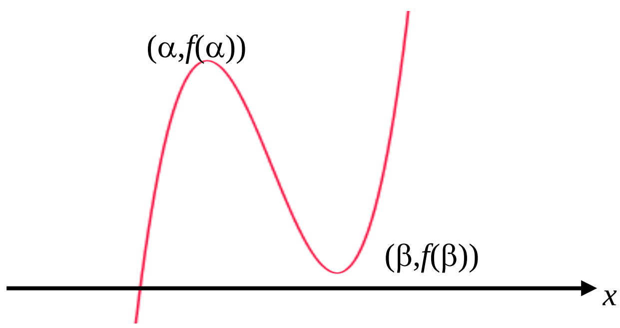
α,β爲兩相等實根($\Delta=0$)且 $f(\alpha)=0$



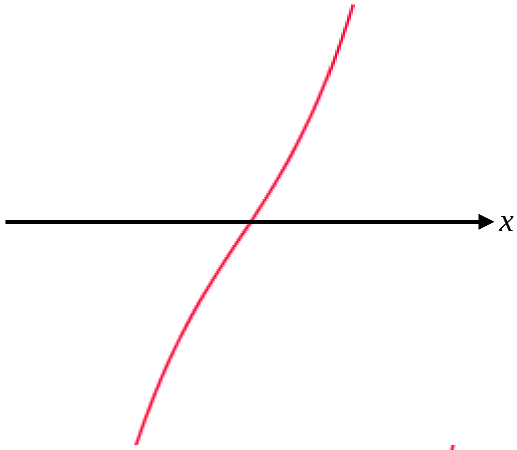
(D)$f(x)=0$ 有一實根兩共軛虛根

(1°)α,β爲兩相異實數($\Delta>0$)且 $f(\alpha)f(\beta)>0$

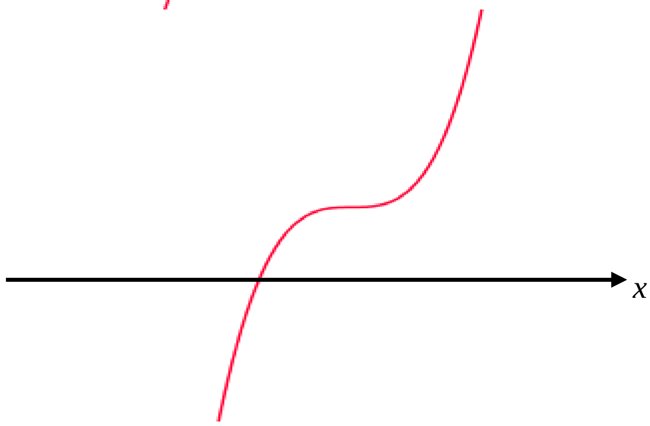




(2°)α,β為兩共軛虛根(Δ<0)



(3°)α,β為兩相等實根(Δ=0)且 $f(\alpha)\neq 0$



[例題15] 設 $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$，試求滿足下列各條件之 k 值：

(1) $f(x)=0$ 有三相異實根。

(2) $f(x)=0$ 有一實根與二虛根。

(3) $f(x)=0$ 有二正根與一負根。

解：

＜方法一＞利用根的性質：

求出 $f(x)$的導函數 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$，

得 $f(x)$的臨界點為 -1， 3，由三次函數的圖形可知 $f(-1)=k+5$ 為 $f(x)$的極大值， $f(3)=k-27$ 為極小值。

(1)當 $f(x)=0$ 有三相異實根時，$f(x)$的極大值、極小值異號，

故 $f(-1)f(3)=(k+5)(k-27)<0$，所以 $-5<k<27$。

(2)當 $f(x)=0$ 有一實根與二虛根時，$f(x)$的極大值、極小值同號，

故 $f(-1)f(3)=(k+5)(k-27)>0$，所以 $k<-5$ 或 $k>27$。

(3)當 $f(x)=0$ 有二正根與一負根時（三相異實根，或二正重根與一負根），

$f(-1)f(3)=(k+5)(k-27)\le 0$，所以 $-5\le k\le 27$。

另一方面，由根與係數的關係，知三根乘積 $-k<0$，即 $k>0$。 故得 $0<k\le 27$。

＜方法二＞觀察圖形的交點：

方程式 $x^3-3x^2-9x+k=0$ 的實根就是函數 $g(x)=x^3-3x^2-9x$ 的圖形 (有極大值為 5，極小值為 -27)與直線 $y=-k$ 的交點的橫坐標。

如圖因此觀察圖形相交情形，可以判斷 $f(x)=0$ 根的狀況：

(1)當 $f(x)=0$ 有三相異實根時，$y=g(x)$的圖形與直線 $y=-k$ 有三個交點，

此時 $-5<k<27$。

(2)當 $f(x)=0$ 有一實根與二虛根時，$y=g(x)$的圖形與直線 $y=-k$ 只有一個交點，

此時$-k>5$或$-k<-27$，即$k<-5$或$k>27$ 。

(3)當$f(x)=0$有二正根與一負根時，$y=g(x)$的圖形與直線$y=-k$有三個交點，其中有兩個交點之橫坐標須大於0，此時$0<k\leq 27$。

[例題16] 已知正數α爲三次方程式$x^3-x^2-8x+k=0$（其中k爲定數）的二重根，試求α，k及另一根。 Ans：$\alpha=2$，$k=12$，-3

(練習21) 設$f(x)=x^3-3kx^2+k+3$求滿足下列條件之k值。
(1)$f(x)=0$有三實根。 (2)$f(x)=0$有二相異負根一正根。
Ans：(1)$k\leq -3$或$k\geq 1$ (2)$k<-3$

(練習22) 試求實數a的範圍，使得方程式$x^3-4x^2-3x-a=0$恰有一實根與二共軛虛根。Ans：$a<-18$或$a>\frac{14}{27}$

(練習23) 方程式$2x^3-3(k+1)x^2+6kx-2k=0$有三個相異實根，求實數k的範圍。
Ans：$k>2$或$k<0$

(庚)牛頓法求根

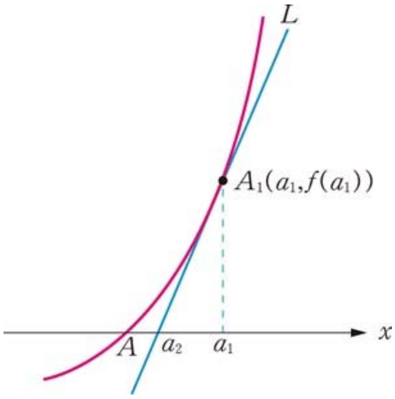
設我們要向銀行貸款180000元，希望從下個月開始每個月還3750元，分五年還清，那麼月利率是多少呢？解決這個問題，相當於解$48x(1+x)^{60}-(1+x)^{60}+1=0$，其中$x$代表月利率。這個方程式並不像二次方程式那樣有公式解，如何能夠用電腦找一個數值解呢？電腦有很多方法可以找方程式$f(x)=0$數值解，其中一種最常用的是
牛頓法(Newton’s Method)。

(1)牛頓法的幾何解釋：

右圖是$y=f(x)$圖形的一部分，A爲函數圖形與x軸的一個交點，則A的x坐標
a就是方程式$f(x)=0$的一個實根。

首先我們可以先找一個值a_1(初始值)，這個值可以用猜的或是畫$y=f(x)$的

圖形，來找一個接近根的值。

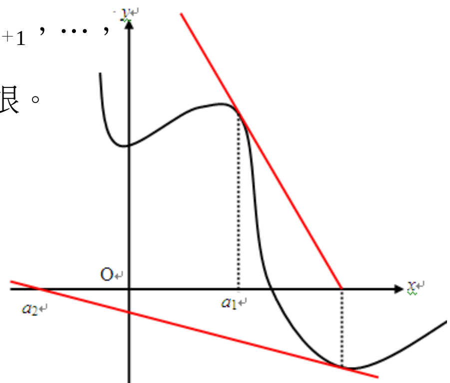


如右圖，設 $A_1\,(\,a_1\,，f\,(a_1)\,)$爲 $y=f\,(x)$圖形上接近 A 的一個點，
今考慮以 $A_1\,(\,a_1\,，f\,(a_1)\,)$爲切點的切線方程式
$L：y=f^{\prime}(a_1)\,(\,x-a_1\,)+f\,(a_1)$，則當 L 不是水平線時
（即 $f^{\prime}(a_1)\neq 0$），L 與 x 軸的交點爲 $A_2\,(a_1-\dfrac{f\,(a_1)}{f^{\prime}(a_1)}\,，0\,)$

令 $a_2=a_1-\dfrac{f\,(a_1)}{f^{\prime}(a_1)}$，如果 A_2 點比 A_1 更接近 A（例如 $a_1>a_2>a$），那麼對方程式 $f\,(x)=0$ 的根來說，a_2 就是比 a_1 更好的一個近似值，在這種情形下，由方程式 $f\,(x)=0$ 的根的一個近似值 a_1 出發，可求得方程式 $f\,(x)=0$ 根更好的近似值 a_2。在求近似值的過程中，有時我們可以反覆操作上面由 a_1 求 a_2 的過程，當 $f^{\prime}(a_2)\neq 0$ 時，令

$a_3=a_2-\dfrac{f\,(a_2)}{f^{\prime}(a_2)}$，重複前述步驟，當 $f^{\prime}(a_k)\neq 0$ 時，

令 $a_{k+1}=a_k-\dfrac{f\,(a_k)}{f\,'(a_k)}$，進而得到一數列 a_1，a_2，a_3，…，a_k，a_{k+1}，…，
在適當條件下此數列會收斂，其極限值即爲 $f\,(x)=0$ 的一個實根。



值得注意的是，如右圖所示，雖然 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 會是 $f(x)=0$ 的實根，但是也可能選取到 a_1 不甚理想，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 可能不會收斂。因此初始值的選取很重要。

例如：當 $f\,(x)=x^2-2$ 時，$f^{\prime}(x)=2x$，$A\,(\sqrt{2}\,，0\,)$爲函數圖形 $y=f\,(x)$與 x 軸的交點。

(1)由 $a_1=2$ 出發，令 $a_2=a_1-\dfrac{f\,(a_1)}{f\,'(a_1)}=2-\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{2}=1.5$，則作爲方程式 $x^2-2=0$ 的根的近似值，$a_2=1.5$ 確實是比 $a_1=2$ 更好的一個近似值。

(2)由 $a_1=\dfrac{3}{2}$出發，令 $a_2=a_1-\dfrac{f\,(a_1)}{f\,'(a_1)}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\frac{1}{4}}{3}=\dfrac{17}{12}$，則作爲方程式 $x^2-2=0$ 的根的近似值，$a_2=\dfrac{17}{12}\fallingdotseq 1.4167$ 確實是比 $a_1=1.5$ 更好的一個近似值。

[例題17] 給定方程式 $x^2-k=0$（其中 $k>0$ ）的根的一個近似值 a_1，若 $a_1>\sqrt{k}$，利用牛頓法找出 a_2、a_3、⋯，形成一個數列$\{a_n\}$

(1)證明：$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{k}{a_n})$。

(2)證明：$a_n>a_{n+1}>\sqrt{k}$ 。

例題 17 中由方程式 $f(x)=x^2-k=0$ 的根的一個近似值 a_1 出發，求得更好的近似值 a_2 的過程，就是所謂牛頓法求平方根。我們將這個過程整理如下：

牛頓法求平方根的近似值：

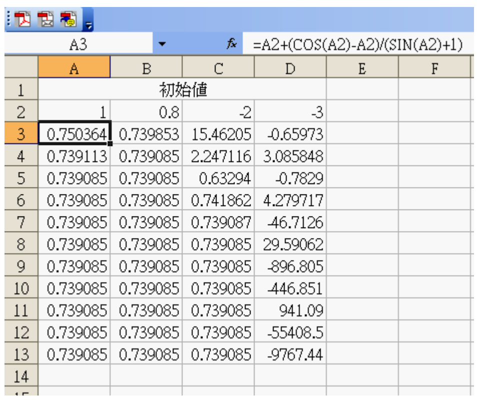
求方程式 $x^2-k=0$（其中 $k>0$）的正根的近似值，先任選一個大於$\sqrt{k}$的一個近似值 a_1，然後以 a_1 與$\frac{k}{a_1}$的算術平均數 $a_2=\frac{1}{2}(a_1+\frac{k}{a_1})$ 作為$\sqrt{k}$的一個較好的近似值；依此反覆進行，亦即 $a_2=\frac{1}{2}(a_1+\frac{k}{a_1})$，$a_3=\frac{1}{2}(a_2+\frac{k}{a_2})$，$a_4=\frac{1}{2}(a_3+\frac{k}{a_3})$，⋯，

這些數的大小關係如下：$a_1>a_2>a_3>a_4>\cdots>\sqrt{k}$ 。

如此反覆操作，可得到更好的近似值。

[例題18] 利用牛頓法(取初始值 $a_1=1$)與 Excel 來找 $\cos x=x$ 的近似根到小數點後第 6 位。

Ans：0.739085


A3 =A2+(COS(A2)-A2)/(SIN(A2)+1)

	A	B	C	D	E	F
1	初始值					
2	1	0.8	-2	-3		
3	0.750364	0.739853	15.46205	-0.65973		
4	0.739113	0.739085	2.247116	3.085848		
5	0.739085	0.739085	0.63294	-0.7829		
6	0.739085	0.739085	0.741862	4.279717		
7	0.739085	0.739085	0.739087	-46.7126		
8	0.739085	0.739085	0.739085	29.59062		
9	0.739085	0.739085	0.739085	-896.805		
10	0.739085	0.739085	0.739085	-446.851		
11	0.739085	0.739085	0.739085	941.09		
12	0.739085	0.739085	0.739085	-55408.5		
13	0.739085	0.739085	0.739085	-9767.44		
14						

(練習24) 利用牛頓法與 Excel 來找 $x^3-2x-5=0$ 的近似根到小數點後第 6 位。
(1)取初始值 $a_1=2$
(2)取初始值 $a_1=-5$
(3)請利用圖形來檢討這兩個初始值哪一個較適當。
Ans：(1)2.094551　(2)−9.45311

(練習25) 試利用牛頓法與 Excel 來求$\sqrt{7}$的近似值到小數點後第 8 位。
Ans：2.6457513123⋯

綜合練習

(1) 求下列各函數的極大值與極小值：
(a)$f(x)=x^3+3x^2-9x+10$　(b)$f(x)=8x^2-x^4$　(c)$f(x)=(x+3)(2x-7)^3$　(d)$f(x)=\cos x\sin^3 x$。

(2) 求下列各函數的最大值與最小值：
(a)$f(x)=3x-x^3$　$(0\le x\le 2)$
(b)$f(x)=\cos^3 x-\cos^2 x+2$ (提示：可令 $t=\cos x$)
(c)$f(x)=(x+2)(4x-1)^3$　$(0\le x\le 1)$
(d)$f(x)=\dfrac{3x}{x^2+3x+4}$　$(-3\le x\le 3)$

(3) 設 $f(x)=|x^2-1|$，試求 $f(x)$的極大值與極小值。

(4) 求函數 $f(x)=x\cdot\sqrt{16-x^2}$的極值。

(5) 設 $f(x)=x^2+a(1-x^2)$為一實係數多項式函數，a 為常數。
下列敘述何者正確：
(A) 不論 a 是何值，$f(x)$ 的函數圖形都不可能是直線。
(B) 不論 a 是何值，若 $f(x)$ 有極值，則極值都等於 a。
(C) 0 有可能是 $f(x)$ 的極大值。
(D) 若 $a\neq 0$ 方，則 $f(x)=0$ 無重根　(2005 指定甲)

(6) $f(x)$是一個首項係數為 1 的實係數三次多項式，k 是一個常數。已知當 $k<0$ 或 $k>4$ 時，$f(x)-k=0$ 只有一個實根；當 $0<k<4$ 時，$f(x)-k=0$ 有三個相異實根。
請選出正確的選項。
(1) $f(x)-4=0$ 和 $f'(x)=0$ 有共同實根
(2)$f(x)=0$ 和 $f'(x)=0$ 有共同實根
(3)$f(x)+3=0$ 任一實根大於 $f(x)-6=0$ 的任一實根
(4)$f(x)+5=0$ 的任一實根小於 $f(x)-2=0$ 的任一實根。　(2003 指定甲)

(7) 已知整係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(2)=f(4)=f(6)=0$，而且除了 $x=2,4,6$ 之外，$f(x)$ 的值恆正。下列選項有哪些必定是正確的？
(A) $f(x)$ 的次數至少為 6　(B) $f(x)$ 的次數為奇數
(C) $f(1)$ 為奇數　(D) $f'(4)=0$　(2004 指定甲)

(8) 考慮坐標平面上函數 $y=x^3+2x+3$ 的圖形(x 為任意實數)，試問下列哪些選項是正確的？(2007 指定甲)
(1)圖形有最高點，也有最低點。
(2)圖形有水平切線。
(3)圖形與任一水平直線恰有一交點。
(4)若(a,b)在圖形上，則$(-a,-b+6)$也在圖形上。
(5)圖形與三直線 $x=0$、$x=1$；$y=0$ 所圍成的區域之面積大於 4。

(9) 考慮多項式函數 $f(x)=x^5+2x^4-x^3-5x^2+3$，試問下列那些選項是正確的？
(A)$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(k)}{f(k+100)}=0$　(B)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$　(C)函數 f 在區間$[\frac{1}{2},1]$遞增。

(D)若 $x\geq 0$，則 $f(x)\geq 0$　(E)在坐標平面上 $y=f(x)$的圖形與直線 $y=3$ 恰有兩個交點。(2006 指定甲)

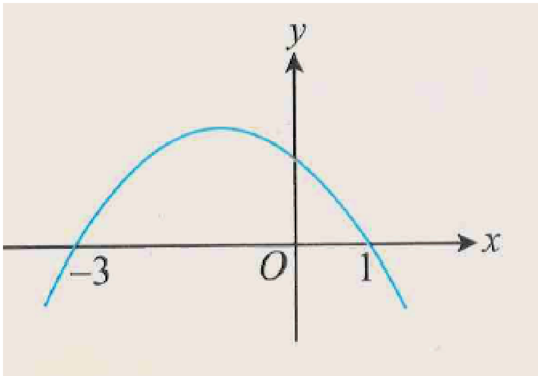
(10) 以 O 表示坐標平面上的原點。給定一點 A(4,3)，而點 B(x,0)在正 x 軸上變動。若 $l(x)$表示$\overline{AB}$長，則ΔOAB 中兩邊長比值$\dfrac{x}{l(x)}$ 的最大值為＿＿＿＿＿。(化成最簡分數)　(2006 指定甲)

(11) 設 $f'(x)$表示實係數多項式函數 $f(x)$的導函數，已知 $y=f'(x)$的圖形是一個通過點(1,0)和點(2,0)且開口向上的拋物線。試問下列哪些選項是正確的？
(1)$f(x)$一定是三次多項式
(2)$f(x)$在 $1<x<2$ 的範圍必為遞增
(3)$f(x)$一定恰有兩個極值
(4)$f(x)=0$ 一定有三個實根
(5)$f(x)=0$ 在 $1\leq x\leq 2$ 的範圍內一定有實根。(2008 指定甲)

(12) 設 $p(x)$為三次實係數多項式函數，其圖形通過(1,3),(−1,5)兩點。若 $p(x)$的圖形在點(1,3)的切線斜率為 7，而在點(−1,5)的切線斜率為−5，試求 $p(x)$。(2008 指定甲)

(13) 已知多項式 $f(x)$滿足 $f''(x)=8x+11$，且 $y=f(x)$在 $x=1$ 有局部極值，則 $f'(0)=$＿＿＿＿＿。　(2010 指定甲)

(14) 設 $f(x)$是實係數三次多項式函數，滿足 $f(0)=1$，$f'(-1)=4$ 且導函數 $f'(x)$的圖形如下圖所示，試描繪函數 $f(x)$的圖形。



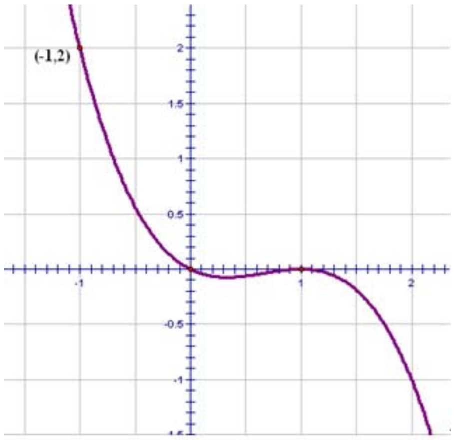
(15) 發現者號太空梭於 1990 年 4 月 24 日裝載著哈柏太空望遠鏡(Hubble Space Telescope)，太空梭於一開始發射到固態燃料裝置拋棄為止約 126 秒，期間它的速度可以用
$v(t)=0.001302t^3-0.09029t^2+23.61t-3.083$ (*feet/sec*)來近似的表示。
試利用這個模型來估計太空梭在這段期間加速度的最大值與最小值。
(必要時使用計算機)

(16) 函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$
(a)若 $f(x)$在 $x=-1$ 時有極大值，在 $x=2$ 時有極小值，求 a,b。
(b)承(a)若極大值為 3，求極小值。
(c)承(a)(b)之結果求 $y=f(x)$斜率最小的切線方程式。

(17) 設四次函數 $f(x)=x^4-4x^3+2ax^2$
(a)若 $f(x)$沒有相對極大值，則求 a 的範圍。
(b)若 $f(x)$有相對極大值，則求 a 的範圍。

(18) 試證明對於任意實數 x，$x^4-2x^3+2x\geq\frac{-11}{16}$。

(19) 已知三次函數 $f(x)$的圖形通過點(0,0)，(−1,2)，且與 x 軸相切於點(1,0)，圖形如下圖所示，求函數 $f(x)$。



(20) 設 m 爲實數，已知四次方程式 $3x^4-4mx^3+1=0$ 無實數根，求 m 的範圍。

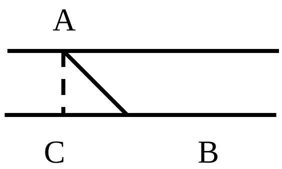
(21) 若 $y=3x-x^3$ 與 $y=x+k$ 圖形交相異三點，求 k 之範圍。

(22) 設 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$在 $x=-2$ 時有極值−2，求數對(a,b)=？

(23) 設一直圓錐的高爲 27 底半徑爲 12，若有一直圓柱內接於此圓錐(底重合)，試求此直圓柱的最大體積。

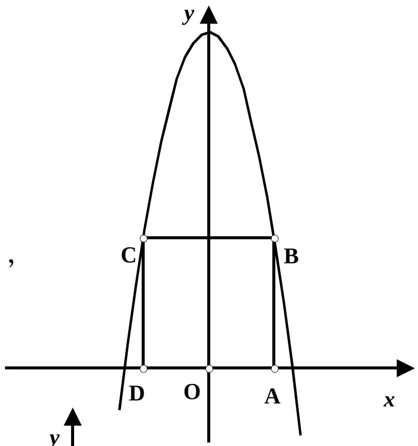
(24) 有一地方 A，一日之間降雨之機率爲 p，不降雨之機率爲 $1-p$，今連續三日只有一日降雨之機率設爲 Q，則
(a)求 Q 表爲 p 之函數。(b)試問當 p=？時，Q 有最大值=？

(25) 如右圖，河寬 5 公里，$\overline{BC}$=8 公里，今老李欲從 A 到 B，已知老李划船時速 3 公里/小時，路上步行的時速 5 公里，問老李應於何處上岸，到達 B 點用時最少？



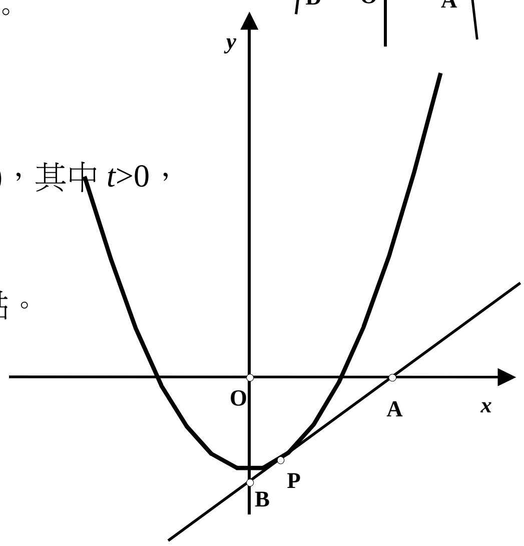
(26) 已知三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+b$，a,b 爲實數
(a)若 $f(x)$之圖形通過(1,4)，且過此切點的切線斜率爲−3，則求 a,b 之值。
(b)由(a)求 $y=f(x)$之相對極大值、相對極小值。

(27) 設 ABCD 爲矩形，B、C 兩點在拋物線 $y=16-x^2$ 上(如圖)，求此矩形之最大面積。



(28) 設 n 爲正整數，試利用$(1+x)^n$的導函數爲 $n(1+x)^{n-1}$ 證明：對於任意 $x\geq-1$，不等式$(1+x)^n\geq1+nx$ 恆成立。

(29) 設拋物線 $y=x^2-1$ 的右半圖形上一點 $P(t,t^2-1)$，其中 $t>0$，點 P 的切線與 x,y 軸分別切於 A、B 兩點，
(a)將ΔOAB 的面積用 t 表示。
(b)求ΔAOB 面積的最小值，並問此時的 P 點。



進階問題

(30) 三次曲線 $y=x^3+ax^2+x+1$，若由通過原點的切線有 3 條，則 a 的範圍為何？

(31) 一個放在水平面上的重 W 的物體，被一條綁在物體上與水平夾$\theta(0\le\theta\le2\pi)$的繩子拉動，繩子至少要施力 $F=\dfrac{\mu W}{\mu\sin\theta+\cos\theta}$才能使得物體開始移動，其中$\mu$為此平面的靜摩擦係數，若讓$\theta$改變而 $F=F(\theta)$，試證明當 $\tan\theta=\mu$時，F 有最小值。

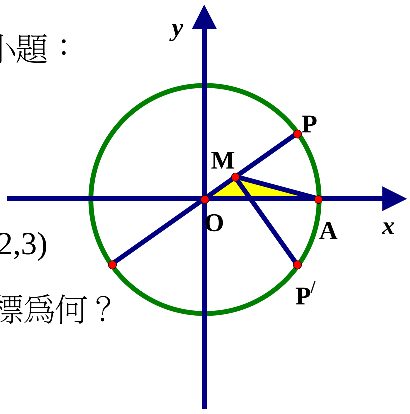
(32) (1)若 $x\ge0$，則 $\sin x\le x$，試證之。

(2)不論任何實數 x，不等式 $\cos(\sin x)\ge1-\dfrac{x^2}{2}$。

(33) 平面上有一個以原點 O 為圓心，1 為半徑的圓，A 是圓周上的定點(1,0)，P 是圓周上的動點。設點 P$'$是點 P 對於直線 OA 的對稱點，從 P$'$向直線 OP 做垂線 P$'$M，令$\angle AOP=\theta$，θ在 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$範圍內變化，試回答下列各小題：

(a)設 $x=\sin\theta$，用 x 將ΔOAM 的面積表示出來。

(b)求ΔOAM 面積的最大值。



(34) P 為曲線 $y=x^2+2$ 上的動點，A 為直線 $y=x$ 上的動點，且 B(2,3)

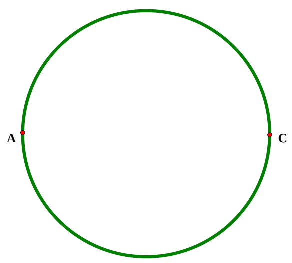
試求$\overline{AB}+\overline{AP}$之最小值=？此時 P 點的坐標為何？A 點的坐標為何？

(35) 設 $x>0$，令 $x+\dfrac{1}{x}=t$

(a)請將 $y=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+x}$ 表為 t 的有理式。(b)請求出 y 的最小值。

(36) 設 $a>0$，O(0,0)為原點，在拋物線 $ay=a^2-x^2$ 上取一點 $P(s,t)$，$(s>0)$過 P 作拋物線之切線，交 x,y 軸於 Q,R 兩點，當 P 點變動時，ΔQOR 面積的最小值。

(37) 如圖，有一個半徑為 2 公里圓湖，其中$\overline{AC}$為直徑的兩端點，小安從 A 點要透過划船或沿著湖邊步行到 C，划船每小時 2 公里，步行每小時 4 公里，請問小安應如何安排步行與划船的方式，才可以在最短時間到達 C 點。

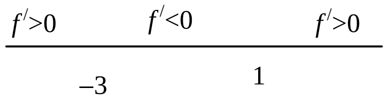


綜合練習解答

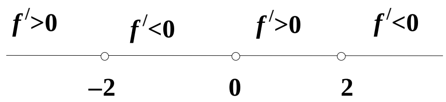
(1) (a)極大值 $f(-3)=37$，極小值 $f(1)=5$

(b)極大值 $f(2)=16$，$f(-2)=16$，極小值 $f(0)=0$

(c)極小值 $f(\frac{-11}{8})=\frac{-6169176}{4096}$。

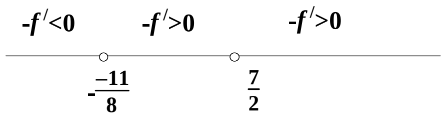


(d) 極大值 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$、極小值 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$



[詳解]：

(a)$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$



(b)$f'(x)=16x-4x^3=4x(4-x^2)=-4x(x-2)(x+2)$

(c)$f'(x)=(2x-7)^2(8x+11)$

(2) (a)最大值 $f(1)=2$，最小值 $f(2)=-2$

(b)最大值=2，最小值=0

(c)最大值 $f(1)=81$，最小值 $f(0)=-2$

(d)最大值 $f(2)=\frac{3}{7}$，最小值 $f(-2)=-3$

[詳解]：(a)$f'(x)=3-3x^2=-3(x+1)(x-1)$，

由下表可知

x	$0<x<1$	$1<x<2$
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

極小值爲 $f(0)=0$，$f(2)=-2$，極大值 $f(1)=2$ 因爲最大值與最小值存在，

所以極大值中最大者爲最大值，極小值中最小者爲最小值。故最大值 $f(1)=2$，最小值 $f(2)=-2$

(b)設 $t=\cos x$，則 $f(x)=g(t)=t^3-t^2+1$，其中$-1\le t\le 1$

$g'(t)=3t^2-2t=t(3t-2)\Rightarrow g'(t)=0\Rightarrow t=0$ 或$\frac{2}{3}$

列表如下：

t	$-1\le t<0$	$0<t<\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}<t\le 1$
$g'(t)$	+	–	+
$g(t)$	↗	↘	↗

因爲最大值與最小值存在，所以極大值中最大者爲最大值，極小值中最小者爲最小

值。故最大值 $g(0)=g(1)=2$，最小值 $g(-1)=0$。

(c)$f'(x)=(4x-1)^2(16x+23) \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{-23}{16}$，但 $0\le x\le 1$ 因為 $0\le x\le 1 \Rightarrow f'(x)>0$

所以極大值 $f(1)=81$，極小值 $f(0)=-2$ 因為最大值與最小值存在，所以極大值中最大者為最大值，極小值中最小者為最小值。所以最大值 $f(1)=81$ 最小值 $f(0)=-2$。

(d)$f'(x)=\dfrac{-3(x-2)(x+2)}{(x^2+3x+4)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=2$ 或 -2

x	$-3\le x<-2$	$-2<x<2$	$2<x\le 3$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘

極大值為 $f(-3)=\dfrac{-9}{4}$，$f(2)=\dfrac{3}{7} \Rightarrow$ 最大值 $f(2)=\dfrac{3}{7}$ 極小值 $f(-2)=-3$，$f(3)=\dfrac{9}{22}$

$\Rightarrow$ 最小值 $f(-2)=-3$

(3) 極大值不存在，極小值 $=f(1)=f(-1)=0$

(4) 極大值 $f(-4)=0$，$f(2\sqrt{2})=8$，極小值 $f(-2\sqrt{2})=-8$，$f(4)=0$

(5) (B)(D)

(6) (1)(2)(4)

(7) (A)(D)

(8) (3)(4)(5)

(9) (B)(D)(E)

(10) $\dfrac{5}{3}$

(11) (1)(3)

(12) $p(x)=x^3+3x^2-2x+1$

[提示：設 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，利用 $p'(1)=7$，$p'(-1)=-5$，$p(1)=3$，$p(-1)=5$ 解出 a,b,c,d。]

(13) -15

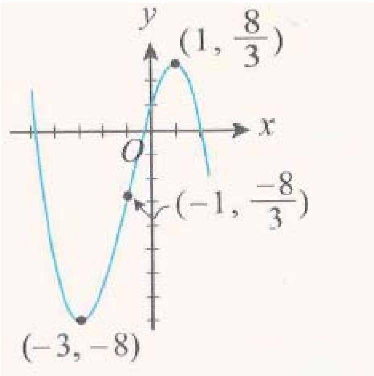
[解法]：

$\because$ $f''(x)=8x+11$，$\therefore$ $f'(x)=4x^2+11x+k$

又 $\because y=f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極值，$\therefore$ $f'(1)=0 \Rightarrow k=-15$

$f'(0)=k=-15$。

(14) 圖形如右圖：



(15) 最大值約 $a(126)\approx 62.87(ft/s^2)$、最小值 $a(t_1)\approx 21.52(ft/s^2)$，其中 $t_1\approx 23.12$

(16) (a)$a=\dfrac{-3}{2}$，$b=-6$ (b)$\dfrac{-21}{2}$ (c)$54x+8y+3=0$

(17)　(a)$a=0$ 或 $a\geq\frac{9}{4}$ (b)$a<\frac{9}{4}$且 $a\neq 0$

(18)　設 $f(x)=x^4-2x^3+2x$，證明 $f(x)$的最小值是$\frac{-11}{16}$

(19)　$\frac{-1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}x$

(20)　$-1<m<1$[提示：令 $f(x)=3x^4-4mx^3+1$，$f(x)=0$ 無實數解$\Leftrightarrow y=f(x)$的圖形在 x 軸上方 $\Leftrightarrow f(x)$的最小值>0]

(21)　$\frac{-4\sqrt{6}}{9}<k<\frac{4\sqrt{6}}{9}$

(22)　(8,6)

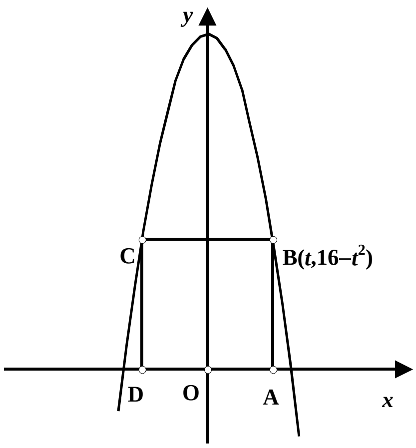
(23)　576π

(24)　(a)$3(p^3-2p^2+p)$ (b)$\frac{4}{9}$

(25)　離 C 點$\frac{15}{4}$公里

(26)　(a)$a=-3$，$b=6$　(b)極大值 $f(0)=6$，極大值 $f(2)=2$

(27)　$\frac{256\sqrt{3}}{9}$



[詳解]：

設 $B(t,16-t^2)$，面積 $f(t)=2t(16-t^2)=32t-2t^3$　$(0<t<4)$

$f'(t)=32-6t^2=0\Rightarrow t=\frac{4}{\sqrt{3}}$因爲 $t<\frac{4}{\sqrt{3}}\Rightarrow f'(t)>0\Rightarrow f(t)<f(\frac{4}{\sqrt{3}})=\frac{256\sqrt{3}}{9}$

$t>\frac{4}{\sqrt{3}}\Rightarrow f'(t)<0\Rightarrow f(t)<f(\frac{4}{\sqrt{3}})=\frac{256\sqrt{3}}{9}\Rightarrow$最大值爲 $f(\frac{4}{\sqrt{3}})=\frac{256\sqrt{3}}{9}$。

(28)　令 $f(x)=(1+x)^n-(1+nx)$，利用 $f'(x)=n(1+x)^{n-1}-n$，去求 $f(x)$在 $x\geq-1$ 的最小值。

(29)　(a)$\frac{(t^2+1)^2}{4t}$ (b)$\frac{4\sqrt{3}}{9}$，P($\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{-2}{3}$)

(30)　$a>3$

[提示：令 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$，$f'(x)=3x^2+2ax+1$，令(t,t^3+at^2+t+1)爲切點，以此點爲切點的切線方程式爲 $y-(t^3+at^2+t+1)=(3t^2+2at+1)(x-t)$，因爲切線過原點$(0,0)\Rightarrow 2t^3+at^2-1=0$，因爲通過原點的切線有 3 條，所以 $2t^3+at^2-1=0$ 有三相異實根。令 $g(t)=2t^3+at^2-1=0$ 有三相異實根，$g'(t)=6t^2+2at=2t(3t+a)\Rightarrow g'(t)=0\Rightarrow t=0$ 或$\frac{-a}{3}$，$g(t)=0$ 有三相異實根

$\Leftrightarrow g(0)g(\frac{-a}{3})<0\Leftrightarrow a>3$。]

(31)　略

(32)　略

(33) (a) $\frac{1}{2}x(1-2x^2)$ (b) $\frac{\sqrt{6}}{18}$

(a)$P(\cos\theta,\sin\theta)$，$P'(\cos\theta,-\sin\theta)$

可得直線 MP'的方程式：$y=\frac{-1}{\tan\theta}(x-\cos\theta)-\sin\theta$，因此可得 $M(x,y)$，其中 $x=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{(1+\tan^2\theta)\cos\theta}$，$y=\sin\theta\cdot(1-2\sin^2\theta)$因此可得$\Delta OAM$ 面積$=\frac{1}{2}\cdot y\cdot 1=\frac{1}{2}\sin\theta(1-2\sin^2\theta)=\frac{1}{2}x(1-2x^2)$。(b)令 $f(x)=\frac{1}{2}x(1-2x^2)$，$f'(x)=\frac{1}{2}(1-6x^2)$，$0\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

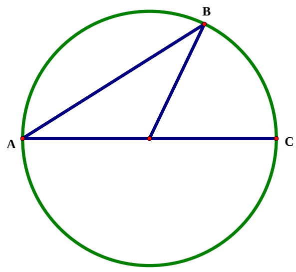
再根據導數求函數 $f(x)$的極值。 可得最大值 $f(\frac{1}{\sqrt{6}})=\frac{\sqrt{6}}{18}$。

(34) $\sqrt{5}$，$P(1,3)$、$A(\frac{7}{3},\frac{7}{3})$[提示：假設 B 點對 $y=x$ 的對稱點爲 $B'(3,2)$，$\overline{AB}+\overline{AP}=\overline{AB'}+\overline{AP}$，因此當 B'、A、P 三點共線時，會有最小值$\overline{B'P}$。令 $f(t)=\overline{B'P}^2=(t-3)^2+(t^2+2-2)^2=t^4+t^2-6t+9$，再求最小值。]

(35) (a)$y=\frac{t^2-1}{t}$ (b)當 $x=1$ 時有最小值$\frac{3}{2}$

(36) $\frac{4\sqrt{3}a^2}{9}$[提示：ΔQOR 面積$=f(s)=\frac{(a^2+s^2)^2}{4as}$]

(37) 最短時間是$\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$



[提示：如圖，先划船到 B，再步行到 C，設$\angle BAC=\theta$

$\overline{AB}=4\cos\theta$，$\overset{\frown}{BC}=2\cdot(2\theta)=4\theta$

所花費的時間爲 $f(\theta)=\frac{4\cos\theta}{2}+\frac{4\theta}{4}=2\cos\theta+\theta$]