第二章　數與坐標系

§2−1 整數

(甲)自然數與整數的引入

(1)自然數(N)：人類基於計數、排序最先發展出來的數系。

(2)自然數系中加法、乘法的運算

$a,b,c\in$N

$a+b\in$N，$ab\in$N　　(封閉性)

$a+b=b+a$，$ab=b\cdot a$　　(交換律)

$a+(b+c)=(a+b)+c$，$(ab)c=a(bc)$　　(結合律)

$(a+b)\cdot c=ac+bc$　　(分配律)

自然數的缺陷：
自然數對於加法、乘法具有封閉性，但是兩個自然數相減並不一定是自然數，為了彌補這個缺憾，於是有了整數的誕生。自然數系誕生後，為了彌補上述缺憾，整數系先是繼承了自然數對於加法、乘法的所有資產(運算性質)，接著反方向開拓了「零」和「負整數」，形成了一條「雙向開放」的整數大道。

(3)整數的基本性質：

若 a,b,c 都是任意整數，則

(a)$a+b$，$a-b$，$a\cdot b$ 都是整數(封閉性)，$a\div b$ 不一定是整數。

(b)$a+b=b+a$，$a\cdot b=b\cdot a$

(c)$a+(b+c)=(a+b)+c$，$(ab)c=a(bc)$

(d)$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\ c$

(e)$a+c=b+c \Rightarrow a=b$　　(加法消去律)

(f)$a\cdot c=b\cdot c$　$(c\neq 0) \Rightarrow a=b$　(乘法消去律)

(g)$a+0=0+a=a$，$a\cdot 0=0\cdot a=0$，$a\cdot 1=1\cdot a=a$

(4)除法原理：

若 a,b 為整數，則存在唯一的一組整數 q,r，使得 $a=bq+r$，且 $0\leq r<|b|$。

我們稱 a 為被除數，b 為除數，q 為商數，r 為餘數。

例如：$23\div 5=$？…….？　$23=5\times 4+3$

　　$-13\div 5=$？…….？　$-13=5\times(-3)+2$

(5)整數的大小：整數的大小(次序)關係具有下列性質：

若 a,b,c 都是任意整數

(a)三一律：$a>b$，$a<b$，$a=b$ 三式恆有一式成立。

(b)遞移律：若 $a>b$ 且 $b>c$，則 $a>c$。

(c)加法律：$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$

(d)乘法律：$c>0$ 且 $a>b \Leftrightarrow ac>bc$　，　$c<0$ 且 $a>b \Leftrightarrow ac<bc$

(乙)因數、倍數與質數

(1)整數的除法：

若 a,b 為整數，則存在唯一的一組整數 q,r 使得 $a=bq+r$，且 $0\le r<|b|$。

說明：$17=5\times1+12$

$17=5\times2+7$

$17=5\times3+2$

$17=5\times4+(-3)$

對於 17 與 5 我們可以找到許多組整數 q，r

但如果要求 $0\le r<|b|$，這樣的 q，r 就只有一組了。

即 $a=b\times q+r$　　且 $0\le r<|b|$　　←(這個條件非常重要)

$17=5\times3+2$　　　$0\le2<5$

其它例子：$13=\boxed{5}\times2+\boxed{3}$，$-9=\boxed{5}\times(-2)+\boxed{1}$，$-7=\boxed{-3}\times3+\boxed{2}$

當 $r=0$ 時 $a=bq$，此時我們稱 b 是 a 的因數或 a 是 b 的倍數或 a 可被 b 整除。

符號記為：$b|a$。

(2)整除的性質：

(a)$a|a$ (反身性)

(b)$a|b$ 且 $b|c \Rightarrow a|c$

(c)$a|b$ 且 $a|c \Rightarrow a|mb+nc$，m,n 為整數。

Pf：

注意！

設a是異於 0 的整數，則下列命題是否成立？

若$a|b+c$，則$a|b$且$a|$c。

(3)因數與倍數：

(a)設a,b為整數且$b|a$，我們稱b是a的因數或a是b的倍數。

(b)質數：若p是大於 1 的正整數，且p只有 1 與p本身兩個正因數，

則稱p為質數。

注意：(a)質數中只有 2 為偶數。

(b)質數有無限多個。

(c)任一質數p的正因數都是_____個，即_________。

(c)質因數：若$b|a$且b為質數，則稱b為a的質因數。

例如：12 的正因數有 1,2,3,4,6,12，其中 2,3 為 12 的質因數。

(d)倍數的判別：

2 的倍數：末位數字 0,2,4,6,8　　　**5 的倍數**：末位數字爲 0 或 5

3 的倍數：各位數字和爲 3 的倍數　　**9 的倍數**：各位數字和爲 9 的倍數

4 的倍數：末二位數爲 4 的倍數　　　**8 的倍數**：末三位數爲 8 的倍數

11 的倍數：奇位數字和與偶位數字和的差爲 11 的倍數。

(e)質數的檢驗(篩法)：

①設a,b,c爲正整數，且$a=b\cdot c$，$b>1,c>1$，

求證：b,c中至少有一個小於或等於$\sqrt{a}$ 。

[證明]：假設b,c均大於$\sqrt{a}$

$\Rightarrow a=bc>\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$ 矛盾！

②設$a\in$N，$a>1$，若a不爲質數，試證：a必有小於或等於$\sqrt{a}$ 的質因數。

[證明]：

$\because a$不爲質數，$\therefore$可令$a=bc$，其中b,c爲大於 1 的正整數

根據前面的證明$\Rightarrow b,c$之中至少有一個小於或等於$\sqrt{a}$

設$b\le\sqrt{a}$ ，根據算術基本定理，可找到一個質數p，$p|b$

$\because b\le\sqrt{a}$，$\therefore p\le\sqrt{a}$

又$p|b$且$b|a \Rightarrow p|a$。

故a必有小於或等於$\sqrt{a}$ 的質因數p。

試判別 313 是否爲質數。

(α)$\sqrt{313}$=17.□

(β)找小於或等於$\sqrt{313}$的質數：2,3,5,7,11,13,17

(γ)用 2,3,5,7,11,13,17 來除

請試判別 409 是否爲質數？

(f)標準分解式：

如果$n\in$N，$n>1$，且 $n=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_k^{\alpha_k}$ ，其中$p_1,p_2,\ldots p_k$爲不同的質數，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\ldots,\alpha_k$爲正整數，這種分解式，稱爲$n$的**標準分解式**。

[例題1] 設 a 爲整數，若 $(2a-1)|(5a+1)$且$(a+2)|(5-2a)$，則求 a 的值。
Ans：$a=1$ 或-3

[例題2] 設 $x,y\in$N,x 被 7 除餘 6，y 被 7 除餘 5，求(1)xy 被 7 除餘多少？
(2)$x+2y$ 被 7 除於多少？Ans：(1)2 (2)2

[例題3] 試求下列各小題：
(1)72 的正因數個數與總和。
(2)72 的因數個數與總和。

(練習1) 設一個七位數 23ab421 為 99 的倍數，求 a,b。Ans：$a=2,b=4$

(練習2) (1)設$a=1260$，求a的標準分解式。
(2)設$x\in$N，若 $1260\cdot x$為一自然數的完全平方數，求x的最小值。
Ans：$1260=2^2\times3^2\times5\times7$，$x=35$

(練習3) 求 5292 之(1)標準分解式(2)正因數個數、總和(3)因數個數、總和(4)質因數個數(5)正因數中完全平方數個數、完全立方數個數(6)正因數中 3 的倍數的個數。 Ans：(1)$2^2\cdot3^3\cdot7^2$ (2)36,15960(3)72,0(4)3 (5)8,2 (6)27

(練習4) 設 $a,b,c\in Z$ 若 $a|bc$ 則 $a|b$ 或 $a|c$ 能成立嗎？若不成立，試舉出一個反例。

(練習5) 請判斷命題：「若 $a|b+c$，則 $a|b$ 或 $a|c$」是否正確？
(提示：若正確請證明，若不正確請舉反例)

(練習6) m,n 為自然數，且 $m>1$，若 $m|35n+28$，$m|7n+3$，則 $m=$______。
Ans：$m=13$

(練習7) 設 a 為整數，若$(2a+1)|(3a-3)$且$(a+3)|(5a+3)$，則 a 的值為何？
Ans：$a=-5,-2,-1,0$ 或 1

(練習8) 已知 k 為整數，且 $\dfrac{k-15}{2k-3}$ 為正整數，則滿足這個條件的 k 值為何？
Ans：$k=1,0,-3,-12$　[提示：$2k-3|k-15$]

(練習9) 試問有多少個正整數 n 使得 $\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+......+\dfrac{10}{n}$為整數？____________。
(A) 1 個　(B) 2 個　(C) 3 個　(D) 4 個　(E) 5 個
(92 學科能力測驗)　Ans：(D)

(丙)公因數、公倍數與最大公因數、最小公倍數

(1)(最大)公因數、(最小)公倍數：

(a)設 a,b,c 為整數，且 $a|b$、$a|c$，則稱 a 為 b,c 的**公因數**，b,c 公因數中最大者稱為**最大公因數**，符號記為：(b,c)。
注意：若$(b,c)=1$，則稱 b,c **互質**。

(b)設 a,b,c 為整數，且 $b|a$、$c|a$，則稱 a 為 b,c 的**公倍數**，b,c 正公倍數中最小者稱為**最小公倍數**，符號記為：$[b,c]$。

(c)設 a 為 b,c 的公因數，則 $a|(b,c)$。

(d)設 a 為 b,c 的公倍數，則$[b,c]|a$。

(2)輾轉相除法：

例如：求 38254 與 60466 的最大公因數。

$60466=38254\times1+22212$
設 $a=(60466,38254)$，$b=(38254,22212)$
因為 $a|60466$，$a|38254 \Rightarrow a|60466-38254\times1=22212 \Rightarrow a|b$
因為 $b|38254$，$b|22212 \Rightarrow b|38254\times1+22212=60466 \Rightarrow b|a$
所以 $a=b$，
被除數(60466)與除數(38254)的最大公因數
=除數(38254)與餘數(22212)的最大公因數。
即$(60466,38254)=(38254,22212)$。

接下來，將上一次除法的除數、餘數當成下一次除法的被除數與除數，如此一來，便可將過程中的被除數、除數與餘數逐漸變小，而能將 38254 與 60466 的最大公因數求出來。

$38254=22212\times1+16042 \Rightarrow (38254,22212)=(22212,16042)$
$22212=16042\times1+6170 \Rightarrow (22212,16042)=(16042,6170)$
$16042=6170\times2+3702 \Rightarrow (16042,6170)=(6170,3702)$
$6170=3702\times1+2468 \Rightarrow (6170,3702)=(3702,2468)$
$3702=2468\times1+1234 \Rightarrow (3702,2468)=(2468,1234)$
$2468=1234\times2+0 \Rightarrow (2468,1234)=(1234,0)=1234$
將上述的過程寫成直式：

1	60466	38254	1
	38254	22212	
1	22212	16042	2
	16042	12340	
1	6170	3702	1
	3702	2468	
2	2468	3702	
	2468	2468	
	0	1234	

原理：設 $\boldsymbol{a,b}$ 為整數，$\boldsymbol{b\neq0}$，若 $\boldsymbol{b}$ 除 $\boldsymbol{a}$ 所得的商數為 $\boldsymbol{q}$，餘數為 $\boldsymbol{r}$，
即 $\boldsymbol{a=bq+r}$，則$\boldsymbol{(a,b)=(b,r)}$。
註：此定理說明了**被除數與除數的最大公因數=除數與餘數的最大公因數。**

Pf：

[例題4] 設a,b,q_1,q_2,q_3皆爲正整數，且滿足$\begin{cases} a = bq_1 + 4098 \\ b = 4098q_2 + 582 \\ 4098 = 582q_3 + 24 \end{cases}$，則$a,b$的最大公因數爲________。 (86 日大社) Ans：6

[例題5] 用輾轉相除法求 3431 與 2397 的最大公因數與最小公倍數。
Ans：47，174981

注意：
設 **a,b**$\in$**N,**且**(a,b)=d,**則
(1)a=dh,b=dk 且**(h,k)=1** $\Rightarrow$ **[a,b]=dhk**
(2)(a,b)[a,b]=ab 但**(a,b,c)**$\times$**[a,b,c]=a·b·c** 不恆成立。

[例題6] $2^{20}-1$ 與 $2^{19}+1$ 的最大公因數爲__________。(91 學科能力測驗能力測驗)
Ans：3

[例題7] 設 a,b 爲自然數，且 a,b 爲三位數，若$(a,b)=36$，$[a,b]=540$，求 a,b 的值。
Ans：$a=108$，$b=180$。

[例題8] 試找一組整數 m,n 使得 $3431m+2397n=47$。Ans：$m=7$，$n=-10$

最大公因數表現定理：
設 a,b 都是自然數，若$(a,b)=d$，則存在整數 m,n，使得 $d=am+bn$。

[例題9] 試證明下列因數與倍數的性質：
(1)設 a,b 是整數，p 是質數，若 $p|ab$，則 $p|a$ 或 $p|b$。
(2)設 a,b,c 是整數，若 $a|bc$，且$(a,b)=1$，則 $a|c$。

(練習10) 若 a 爲大於 1000 的自然數，且被 465 除後餘數爲 30，則 a 與 465 的最大公因數爲______。Ans：15

(練習11) (1)求(5814,6018)=？ [5814,6018]=？ Ans：102,171×6018
(2)求最大公因數(4176,1566,1856)=？ Ans：58

(練習12) (1)利用輾轉相除法,求(7982,11359)=___________。
(2)由(1)找出兩個整數 α , β ，使得 $7982\alpha+11359\beta=(7982,11359)$
Ans：(1)307 (2)$\alpha=10,\beta=-7$

(練習13) 設有足夠多的 5 克，7 克砝碼兩種，今想在天平的左右兩個盤子裡只放這兩種砝碼，問能夠稱出 1 克紅豆嗎？能稱出 13 克的紅豆嗎？
Ans：可以：左放 4 個 5 克，右放 3 個 7 克

(練習14) 設 a,b 爲整數且$(a,b)=1$，證明：$(a+b,ab)=1$，$(a-b,ab)=1$。

(練習15) 設 a,b 爲自然數，且 $a<b$，若 $a+b=1092$，$[a,b]=3528$，求 a,b 之值。
Ans：$a=504$，$b=588$

(丁)最大公因數與最小公倍數的應用、整數的分類

(1)韓信點兵問題：

例如：一個整數 n 除以 3 餘 1，除以 5 餘 2，除以 7 餘 3，試問 n 的一般式爲何？

[解法]：

(2)整數的分類：
整數的分類：整數 n 可依餘數 r 分類
1.可分爲兩類：奇數$(2k+1)$，偶數$(2k)$
2.可分爲三類：$3k+1$，$3k+2$，$3k$
3.可分爲四類：$4k+1$，$4k+2$，$4k+3$，$4k$
………

[例題10] 證明一個完全平方數 n 被 4 除之的餘數爲 0 或 1。

[例題11] 已知西元 2002 年爲壬午年，試問 2039 年的農曆記年爲_______年。
Ans：己未

[例題12] 小明和小華相約到學校的四百公尺圓形跑道上跑步，他們在同一時間從同一地點朝相反方向開始跑，跑的速度，小明保持每分鐘 320 公尺，小華保持每分鐘 280 公尺。試問：出發後第________秒，小明與小華會第八次相遇。
Ans：320 (88 社會組)

(練習16) 一自然數 n，以 7,6,5 除之所得餘數依序爲 5,1,2，
求此自然數的最小值。
Ans：187

(練習17) 40^{255}除以 13 的餘數爲(A)1 (B)2 (C)4 (D)6 (E)8 Ans：(A) (85 學科)

(練習18) 若所有正整數之平方除以 5 後，所得餘數之集合爲_____。

Ans：{0,1,4}
若所有正整數之平方除以 6 後，所得餘數之集合爲______。
Ans：{0,1,3,4}
若所有正整數之平方除以 7 後，所得餘數之集合爲_____。
Ans：{0,1,2,4}
若所有正整數之平方除以 8 後，所得餘數之集合爲_____。
Ans：{0,1,4}

(練習19) 形如 $3n+2$ 的整數不可能是完全平方數。

(練習20) 設n是整數，試證：若n^2爲 3 的倍數，則n爲 3 的倍數。

(練習21) 天干地支記日是分別以甲子、乙丑、丙寅、丁卯、戊辰、己巳、庚午、辛未、壬申、癸酉、甲戌、乙亥、丙子、丁丑、…癸亥、六十天爲一週期循環記日,已知民國 89 年 7 月 3 日爲壬戌日,那麼推算民國 90 年 1 月 1 日以天干地支記是 ________日。Ans：甲子 (89 社會組)

(練習22) 已知西元 1987 年爲丁卯年，試問西元 1942 年爲_______年。
Ans：壬午年

[例題13] 試求整數n使得n^4-6n^2+25 爲一質數，求此質數。Ans：17

[例題14] 設 n 爲自然數，且$\sqrt{x^2+21}$ 亦爲自然數，則 x=？ Ans：x=2 或 10

(練習23) 設 x 爲自然數，且$\sqrt{x^2+23}$ 亦爲自然數，則 x=？Ans：x=11

(練習24) a,b 爲整數，且 $a(b+2)=b$，且 $a>1$，則請問數對(a,b)=？

Ans：$(a,b)=(2,-4)$、$(3,-3)$

(練習25) 設$p=(a^2-22a+121)(a^2-2a+137)$，其中$a$為正整數，若$p$是質數，則$p=$？ Ans：$p=257$

綜合練習

(1) 下列那些數是 3 的倍數？
(A)31^3-28^3 (B)11^3+16^3 (C)74234 (D)998866 (E)345678945。

(2) 下列哪些數是 9 的倍數？
(A)247023846(B)645×7329(C)3^{101}(D)986^3+814^3(E)$10^{90}+1$ (79 社)

(3) 若六位數 $12a49b$ 為 36 的倍數，則數對$(a,b)=$？

(4) 下列何者是 2^{100}除以 10 的餘數(A)0(B)2(C)4(D)6(E)8 (88 學科)

(5) 求$(234793)^{126}$被 7 除之的餘數。

(6) 試求(a) $(14963)^{5270}$乘開後的個位數字。 (b) $(1990)^{100}$被 7 除之的餘數。

(7) 已知「偶數的平方是 4 的倍數，奇數的平方除以 4 餘數為 1」，考慮 5 個數：513,226,216,154,145；試問下列何者可以和上述五數中的某一個數相加成為完全平方數？(A)513 (B)226 (C)216 (D)154 (E)145 (87 學科)

(8) 古代的足球運動，有一種計分法，規定踢進一球得 16 分，犯規後的罰踢，進一球得 6 分。請問下列哪些得分數有可能在計分板上出現？
(A) 26 (B) 28 (C) 82 (D) 103 (E) 284 (90 學科)

(9) 設 a 為整數，若 $2a-1|5a+1$，$a+2|5-2a$，則 a 的值為何？

(10) 設 a 為整數，試證明 $an+1$ 與 a 互質，對於所有的整數 n 都成立。

(11) 2160 的正因數有________個，真因數有________個，質因數有________個，正因數之和=_________。

(12) 若 m 及$\frac{540}{m}$均為自然數，則滿足此條件之 m 有________個。

(13) 若正整數 a,b,q,r 滿足 $a=bq+r$ 且令(a,b)表示 a 與 b 的最大公因數，則下列選項何者為真？
(A) (a,b)=(b,r) (B) (a,b)=(q,r) (C) (a,q)=(b,r) (D) (a,q)=(q,r) (E) (a,r)=(b,q) (90 學科)

(14) 求(a) (7242,3195)=？ (b) [693,45,77]=？

(15) 試求 1134 與 918 的正公因數個數。

(16) (a)利用輾轉相除法求 4176 與 1566 之最大公因數。
(b)求一組整數 x,y 使得 $1566x+4176y=(4176,1566)$。
(c)求 1566 及 4176 的正公因數的個數。

(17) 公元 2000 年是閏年的 1 月 1 日是星期六。試問下一個 1 月 1 日也是星期六，發生在公元哪一年？ (89 學科)

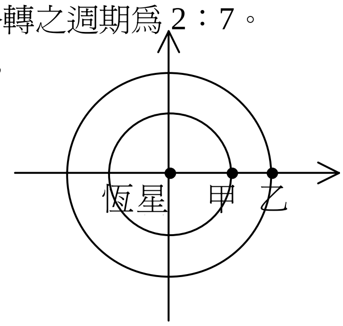
(18) 設 a,b 爲自然數且 $a>b$，若 $a-b=30$ 且$[a,b]=225$，則數對$(a,b)=$？

(19) 設 a,b 爲正整數且 $a>b$，$a+b=1092$，a,b 之最小公倍數爲 3528，求 a,b 之值。

(20) 有一長方形木板，長 105 公尺，寬 28 公尺。若欲將此木板切成幾個一樣大之長方形木板，且不准剩下，如果要求這些正方形木板有最大面積，試問應如何切，可切成幾塊？

(21) 甲乙丙三人，同時同地同方向繞一周長爲 1800 公尺的圓形水池而走，設甲每分鐘走 90 公尺，乙每分鐘走 100 公尺，丙每分鐘走 120 公尺，則在幾分鐘之後三人會於原出發點會合？

(22) 某恆星系統中有甲、乙兩行星。假設兩者公轉軌道在同一平面上,且爲以恆星爲圓心的同心圓。某時,甲行星在恆星與乙行星之間而成一直線。今在該平面上設定一座標系如下圖。已知兩行星皆以逆時針方向運行,且公轉之週期爲 2：7。試問下一次甲行星再度在恆星與乙行星之間而成一直線時,
應該是下面哪一種狀況？
(A) 行星在第一象限(B) 行星在第二象限
(C) 行星在第三象限(D) 行星在四象限(E)行星在正 x 軸上
(89 年自然組)



(23) 求滿足 $xy=6(y-x)$之整數 x,y 有幾組。

(24) 求滿足$\frac{5}{x}+\frac{4}{y}=3$ 之整數 x,y 有幾組。

$\boxed{\text{進階問題}}$

(25) 設 $100\le n\le 500$，則滿足「n^2除以 7 餘 2」的n有幾個？

(26) 設n爲正奇數，試證明n^4+4n^2+11 恆爲 16 的倍數。

(27) 試證明對於自然數k，若 2^k-1 爲質數，則k必爲質數。
(逆命題不成立，反例是 $2^{11}-1=23\times 89$)

(28) 若n爲整數，n^4-6n^2+25 爲質數，求n之值。

(29) 設 a 爲自然數，且 $a|99000$、$25|a$、且 9 不是 a 的因數，則 a 共有幾組解。

(30) 設n是自然數，求使得 $9|23^n+7$ 成立的最小自然數$n=$？

(31) 設 a,b,c 爲正整數，且 $6a+21b=20c$，$3a-7b+4c=0$，$(a,b,c)+[a,b,c]=3025$，試求 a,b,c 之值。

(32) 求含有 12 個正因數的自然數中，最小值是多少？

(33) 求證：在 $11,111,1111,\ldots,\underbrace{11\ldots1}_{n+1}$ 沒有完全平方數。

綜合練習解答

(1) (A)(B)(E)
(2) (A)(B)(C)(D)
(3) (0,2)、(9,2)或(5,6)
(4) (D)
(5) 1
(6) (a)9 (b)2
(7) (A)(C)(E)
(8) (B)(C)(E)
(9) $a=1,-3$
(10) 提示：可考慮輾轉相除法原理。
(11) 40，38，3，7440
(12) 24
(13) (A)(D)
(14) (a)213,(b)3465
(15) 8 個
(16) (a)522 (b)$x=3$，$y=-1$(答案不只一組) (c)12
(17) 2005 年
(18) $(a,b)=(75,45)$
(19) $a=588,b=504$
(20) 7，60
(21) 180 分鐘
(22) (B)
(23) 18 組
(24) (2,8)(3,3)(5,2)
(25) 115
(26) 提示：設 $n=2k+1$，k 爲整數，$n^4+4n^2+11=(n^2+2)^2+7=[4k(k+1)+3]^2+7$
(27) 提示：利用反證法，令 $n=pq$，其中 p,q 皆爲大於 1 的正整數，再代入 2^n-1 的值，證明它不爲質數。
(28) 2,–2 (提示：$n^4-6n^2+25=(n^2+5)^2-16n^2=(n^2+5+4n)(n^2+5-4n)$)
(29) 32
(30) 5
(31) $a=200,b=300,c=375$ (先求出 $a:b:c$)
(32) 60 (提示：用力去湊這個數)
(33) 考慮這些數被 4 除的餘數，再運用例題 10 的結果)