第一章 指數與對數

§1–1 指數

(甲)自然數指數

(1)自然數的指數：對於每個實數 a，我們以記號 a^n 代表 a 自乘 n 次的乘積。

即 $\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}^{n\text{個}}=a^n$

(2)正整數指數的運算性質(**指數律**)：

①$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ ②$(a^m)^n=a^{mn}$ ③$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$

例如：$3^{12}\cdot 3^4=3^{16}$，$4^5=(2^2)^5=2^{10}$，$3^4\cdot 2^4=(2\cdot 3)^4$

上面所討論的指數，都是自然數，而接下來我們打算將指數的範圍從自然數逐步推廣至整數系、有理數系、實數系。

換句話說，就是要規定型如：a^0 , a^{-2} $a^{\frac{3}{4}}$ ，$a^{\sqrt{2}}$，…等記號的意義。

推廣的原則：①要求新規定的指數記號仍然滿足指數律。

②適當限制 a 使得指數有意義。

(乙)整數指數

整數比自然數多了 0 與負整數，因此我們將要適當的規定 a^0 與 $a^{-n}(n\in\mathrm{N})$。

(1)規定 a^0：

設 $a\neq 0$，由指數律① 可得 $a^0\cdot a^n=a^{0+n}=a^n$，因為 $a\neq 0$，所以 $a^0=1$。換句話說，要使得指數律① 成立的話， 則必須定義 $a^0=1$。新定義的 $a^0=1$ 能否使得指數律② ③ 成立。

檢驗指數律②：$(a^0)^n=1^n=1=a^0=a^{0\cdot n}$，$(a^m)^0=1=a^0=a^{m\cdot 0}$，$(a^0)^0=1^0=1=a^{0\cdot 0}$

檢驗指數律③：$a^0\cdot b^0=1\cdot 1=1=(a\cdot b)^0$

由以上的檢驗可得：$(a^m)^n=a^{mn}$，$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$ 當 m,n 為正整數或 0 時會成立。

(2)規定 a^{-n}：

假設 $a\neq 0$，且 n 為正整數，由指數律① 可得 $a^{-n}\cdot a^n=a^{-n+n}=a^0=1$，

所以 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$。換句話說，要使得指數律①成立的話，則必須定義 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$，。

新定義的 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ 能否使得指數律① ② ③ 成立。

檢驗指數律①：$a^{-m}\cdot a^n=\dfrac{1}{a^m}\cdot a^n=\begin{cases}a^{-m+n}, n\geq m\\ \dfrac{1}{a^{m-n}}=a^{-m+n}, n\leq m\end{cases}$。 ($m,n$ 為正整數)

檢驗指數律②：$(a^{-m})^n=(\dfrac{1}{a^m})^n=\dfrac{1}{(a^m)^n}=\dfrac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}$。($m,n$ 為正整數)

檢驗指數律③：$a^n \cdot b^n=(a\cdot b)^n$ 留做作業。

[例題1] 化簡$[a^2\cdot(a^{-5})^2]^{-1}$，$(3^5\cdot 3^{-5})^{12}+(3^5+8^{10})^0$，$(1+\sqrt{5})^2(1-\sqrt{5})^4$

Ans：a^8，2，$16\cdot(6-2\sqrt{5})$

(練習1) 化簡下列各式：

(1)$2^{b-c}\cdot 2^{c-b}$　(2)$(-3)^3\div(-3)^5$　(3)$\dfrac{3a^{-2}}{5x^{-1}y}$　(4)$(a^2)^3-(a^3)^2$

(5)$(x^{-2}+4)(x^{-2}-4)$　(6)$(c^x+2c^{-x}-7)(5-3c^{-x}+2c^{-x})$

(7)$(p^{2n}-1+p^{-2n})(5p^n-3p^{-n})$　(8)$(16a^{-3}+\dfrac{6}{a^2}+\dfrac{5}{a}-6)\div(2a^{-1}-1)$

Ans：(1)1(2)$\dfrac{1}{9}$(3)$\dfrac{3x}{5a^2y}$(4)0(5)$x^{-4}-16$(6)$2c^{2x}-9c^x-34+31c^{-x}-6c^{-2x}$

(7)$5p^{3n}-8p^n+8p^{-n}-3p^{-3n}(8)8a^{-2}+7a^{-1}+6$

(練習2) 試求下列等式中之 m 的值。

(1)$8^m=(2^3)^2$　(2)$8^m=2^{3^2}$　(3)$2^{4^5}=16^m$　(3)$(2^4)^5=16^m$

(練習3) 設於某項實驗中，細菌數 1 日後增加 1 倍。問

(1)$n+5$ 日後的細菌數是 $n+2$ 日後的細菌數的幾倍？

(2)一星期後的細菌數是 3 天前的細菌數的幾倍？

(3)如果 100 天後會有 N 個細菌，那麼甚麼時候有 $\dfrac{N}{4}$ 個細菌？

Ans：(1)8 (2)1024 (3)98 天後

(丙)分數指數

(1)設 $a>0$，如果 r 為一有理數，應該如何定義 a^r 呢？這問題實際上只需要定義 $a^{\frac{1}{n}}$ (n 為一正整數)就可以解決。根據前面推廣指數的原則，新定義的 $a^{\frac{1}{n}}$ 必須滿足指數律，就指數律② 而言$(a^{\frac{1}{n}})^m=a^{\frac{m}{n}}$，其中 m 為一整數，因此，自

然地應該定義符號 $a^{\frac{m}{n}}$ 為 $a^{\frac{1}{n}}$ 的 m 次方，即$(a^{\frac{1}{n}})^m$。

例如：$4^{\frac{3}{2}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^3=8$，$9^{-\frac{1}{2}}=(3^2)^{-\frac{1}{2}}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

(2)規定 $a^{\frac{1}{n}}$：

根據指數律② $(a^{\frac{1}{n}})^n=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a$，即 $a^{\frac{1}{n}}$ 是方程式 $x^n=a$ 的根，根據第一冊第四章勘根定理的推論，$x^n=a$ 恰有一正實根，即 a 的正 n 次方根。因此我們就選定 a 的正 n 次方根為 $a^{\frac{1}{n}}$ 的定義。

(3)由前面的說明，我們可得以下結論：

① 當 $a>0$，n 為正整數，我們定義 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$。

② 當 $a>0$，$r=\frac{m}{n}$，(其中 n 為正整數,m 為整數)，我們定義 $a^r=a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m$。

(4)為何定義分數指數時，a 要為正數？

當我們定義分數指數時，引用了第一冊第四章的勘根定理的應用：$x^n=a$ 恰有一個正實根，而這樣的性質在 $a<0$ 時就不成立了，且 $x^n=a$ 還不一定有實根存在，例如 $x^2=-1$ 就沒有實根，所以找不到適當的實數來作為 $(-1)^{\frac{1}{2}}$ 的定義。

(5)我們定義了分數指數後，我們還要看看是否滿足指數律。

假設 a,b 為正數，p,q 為有理數

檢驗指數律①：令 $p=\frac{m}{n},q=\frac{s}{r}$($n,r$ 為正整數),

$$a^p\cdot a^q=(\sqrt[n]{a})^m\cdot(\sqrt[r]{a})^s=\sqrt[nr]{a^{mr}}\cdot\sqrt[nr]{a^{ns}}=\sqrt[nr]{a^{mr+ns}}=a^{\frac{mr+ns}{nr}}=a^{p+q}$$

檢驗指數律②：

$$(a^p)^q=[(\sqrt[n]{a})^m]^{\frac{s}{r}}=(\sqrt[n]{a^m})^{\frac{s}{r}}=\sqrt[r]{(\sqrt[n]{a^m})^s}=\sqrt[r]{\sqrt[n]{a^{ms}}}=\sqrt[nr]{a^{ms}}=a^{pq}$$

檢驗指數律③：$a^p\cdot b^p=(a\cdot b)^p$，留做作業

[例題2] 小安做數學問題時，發現兩個迷惑的問題：

(迷惑一)：$(-3)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-3}=\sqrt{3}\ i$ 是虛數，但 $(-3)^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{(-3)^2}=\sqrt[4]{9}$ 是實數，

於是得出 $(-3)^{\frac{1}{2}}\neq(-3)^{\frac{2}{4}}$。

(迷惑二)：書本說：$16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}$，那麼 $(-16)^{\frac{1}{4}}$ 是否等於 $\sqrt[4]{-16}$ ？如果是的話，

符號 $\sqrt[4]{-16}$ 是代表方程式 $x^4=-16$ 的那一個「解」呢？

如何來解決小安的迷惑呢？

[例題3] 化簡下列各題：

(1) $\sqrt[5]{a^{20}}\cdot\sqrt{\sqrt{a^{12}}}$ (2) $10^{2.3}\times10^{-0.8}\div10^{2.5}$ (3) $(a-2\sqrt{ab}+b)^{0.5}$ $(a>b>0)$

Ans：(1) a^7 (2) $\frac{1}{10}$ (3) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

[例題4] 設 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，試求(1) $x+x^{-1}$ (2) $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$ 之值。

Ans：(1)7 (2)18

(練習4) 化簡下列各式

(1) $1000\cdot(8^{-\frac{2}{3}})$ (2) $3(\frac{9}{4})^{-\frac{3}{2}}$ (3) $\dfrac{9a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}\cdot 3a^{\frac{1}{3}}}$ (4) $\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[6]{y^{-2}}\cdot\sqrt[4]{x^6}}$

(5) $(3x^{-\frac{1}{3}}+x+2x^{\frac{2}{3}})\cdot(x^{\frac{1}{3}}-2)$ (6) $(6a^{\frac{2}{5}}-5a^{\frac{1}{5}}-6)\div(3a^{\frac{1}{5}}+2)$

Ans：(1)250 (2) $\frac{8}{9}$ (3) $\frac{3}{2a}$ (4) y (5) $x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{2}{3}}+3-6x^{-\frac{1}{3}}$ (6) $2a^{\frac{1}{5}}-3$

(練習5) 設於某項新實驗中，細菌數 1 日後增加 a 倍，且已知 3 日後細菌數為 200000，$4\frac{1}{2}$ 日後其數為 1600000，試求：

(1)a 的值 (2)5 日後的細菌數 (3)$\frac{3}{2}$ 日後的細菌數 (4)細菌數為 800000 時所需的日數。 Ans：(1)3 (2)3200000 (3)25000 (4)4 日

(練習6) 化簡$(\frac{81}{16})^{-0.25}\cdot(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}\cdot(0.25)^{-0.5}$之值為__________。Ans：3

(練習7) 假設 $2^{0.6}=1.516$，$2^{0.03}=1.021$，試求 $2^{1.63}$ 與 $2^{-0.37}$ 的值。
Ans：3.096，0.774

(練習8) 設 $a>0$，$x\in R$，$a^{3x}+a^{-3x}=52$，
求(1)$a^{x}+a^{-x}$之值 (2)求 $a^{2x}+a^{-2x}$之值 (3)求 a^{x}之值。
Ans：(1)4(2)14(3)$2\pm\sqrt{3}$

(練習9) 設 $x+x^{-1}=\sqrt{31}$ ，則$[(x^2+x^{-2})^2-4(x+x^{-1})^2+12]^{\frac{1}{6}}=$？ Ans：3

(丁)實數指數

(1)設 $a>0$，對於所有的有理數 x，我們已經定義了 a^{x}，例如 $2^{-2}=\frac{1}{4}$ ，$2^{0}=1$ ，$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ 等等，接下來我們希望將 x 的範圍擴充到所有的實數，換句話說，我們想要知道$2^{\sqrt{3}}$這種符號的意義。

(2)對於一般的無理數 x，我們可利用逼近的方法去定義 2^{x} 的值。
例如：考慮有理數數列 $a_1=1.7$，$a_2=1.73$，$a_3=1.732$，…，a_n，…且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$ 。
因為 $2^{1.7}$，$2^{1.73}$，$2^{1.732}$，…，2^{a_n}..都有定義，且為一個遞增的數列，但比 2^{2} 小，這種數列會越來越接近一個正實數，這個正實數就定義為$2^{\sqrt{3}}$，
它大約等於 3.3220。

(3)一般而言，對於任意一正實數 a 與任意一個無理數 x，利用(2)中定義$2^{\sqrt{3}}$的逼近方法，也可來求 a^{x}的估計值，進一步還可證明這樣定義無理指數後，指數律依然成立。

[例題5] 化簡下列各式：

(1)$(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ (2)$2^{\pi+1}\cdot2^{-\pi}$ (3)$36^{\sqrt{5}}\div6^{\sqrt{20}}$
Ans：(1)9 (2)2 (3)1

[例題6] 設$(67)^x=27$，$(603)^y=81$，則$\frac{3}{x}-\frac{4}{y}=$？ Ans：-2

(練習10) 設 $a\neq0$，若 $2^a=3^b=\sqrt{6^c}$ ，則$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=$？ Ans：2

(練習11) 設 x,y 為實數，$53^x=9$，$477^y=243$，$\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=$？ Ans：-2

[例題7] 解下列方程式：

(1)$2^{x+4}=7^{x+4}$ (2)$5^{2x+1}-6\cdot5^x+1=0$ (3)$2(4^x+4^{-x})-7(2^x+2^{-x})+10=0$

Ans：(1)$x=-4$ (2)$x=0$ 或-1 (3)$x=0$

[例題8] 設$\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}$ 且 $3^{15y+3x}=81^{xy}$，則 $x=$？$y=$？ Ans：$x=5$，$y=3$

(練習12) 解下列方程式：

(1)$4^{-2x}=(0.25)^{5x-1}$ (2)$\sqrt[3]{4^x}=\sqrt{2^{3x+1}}$ (3)$(\sqrt{3})^{3x+2}=\frac{27\sqrt{3}}{3^x}$

Ans：(1)$\frac{1}{3}$ (2)$-\frac{3}{5}$ (3)1

(練習13) 試解 $4(4^x+4^{-x})-12(2^x+2^{-x})+13=0$ Ans：$x=1$ 或-1

綜合練習

(1) 將下列根式化為指數型：

(a)$(2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}\times(2-\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}=$______(b)$729^{\frac{-1}{3}}+32^{\frac{3}{5}}+(\frac{1}{27})^{\frac{-1}{3}}=$ ______

(c)$\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4}}}=$ ________

(2) 若 $a>0$，$a\in R$，設 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$，試求下列各式的值：

(a)$a+a^{-1}$　(b)$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$　(c)a^2+a^{-2} (d)a^3+a^{-3} (e)$a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}$

(3) $2^{0.6}=a$，$2^{0.03}=b$，則 $2^{2.23}=$？

(4) 解 $2^{5x+3}\times(-\frac{1}{2})^{4x+8}=(\frac{1}{4})^{3x^2}$

(5) 解 $2^{2x-1}+2^{3x-2}=5\cdot 2^{x+2}$。

(6) 試解 $6^x-4\cdot 3^x-3\cdot 2^x+12=0$。

(7) 設 $a>0,b>0$，且 $ab\neq 1$，設 $a^x=b^y=(ab)^z$，試求 x,y,z 的關係。

進階問題

(8) 設 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，$x\in R$，(a)試證：若 $a+b=1$，則 $f(a)+f(b)=1$。

(b)承(a)，試求 $f(\frac{1}{2000})+f(\frac{2}{2000})+f(\frac{3}{2000})+\ldots\ldots+f(\frac{1999}{2000})=$______。

(9) 試解 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=4$，

(10) 若 $2^x+3^y=8$，$2^{x+1}+\frac{1}{3}\cdot 3^y=5$，求 $5\cdot 3^y-5\cdot 2^x=$？

綜合練習解答

(1) (a)1　(b)$11\frac{1}{9}$　(c)$a^{\frac{-1}{10}}$

(2) (a)23(b)110(c)527(d)12098(e)$\sqrt{7}$

(3) $2a^2b$

(4) $x=\frac{5}{6}$ 或 -1

(5) $x=3$

(6) $x=1$ 或 2

(7) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$

(8) (b)$\frac{1999}{2}$

(9) x=2 或−2

[提示：$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$，故令$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=\mathrm{A}$，則$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=\frac{1}{\mathrm{A}}$]

(10) 26 (提示：令 A=2^x,B=3^y)