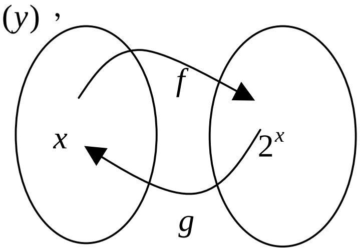
§3–5 反三角函數的基本概念

(甲)反函數的概念

(1)反函數的定義：
函數$f(x)$、$g(y)$，設x,y分別是$f(x)$、$g(y)$定義域內任意元素，如果$g(f(x))=x$且$f(g(y))=y$則稱$f(x)$與$g(y)$互為**反函數**，$f(x)$的反函數記為$f^{-1}(x)$，即$g(x)=f^{-1}(x)$。

此時**$f(x)$、$g(x)$的定義域與值域互換**，即**$f(x)$的定義域為$f^{-1}(x)$的值域**，**$f(x)$的值域為$f^{-1}(x)$的定義域**。

例一：
設$f(x)=2^x$，定義域=R，值域=$\{y \mid y\geq 0\}$，我們來討論$f(x)$的反函數$g(y)$，
因為 $2\xrightarrow{f}4$，$0.5\xrightarrow{f}2^{0.5}$，$\sqrt{3}\xrightarrow{f}2^{\sqrt{3}}$，$x\xrightarrow{f}2^x$
所以 $4\xrightarrow{g}2$，$2^{0.5}\xrightarrow{g}0.5$，$2^{\sqrt{3}}\xrightarrow{g}\sqrt{3}$，$2^x\xrightarrow{g}x$
由對數的定義可知$g(y)=\log_2 y$，定義域=$\{y \mid y\geq 0\}$，值域=R



例二：
設$f(x)=x^2$，定義域=R，值域=$\{y \mid y\geq 0\}$，觀察它的對應情形
$1\xrightarrow{f}1,-1\xrightarrow{f}1$，$2\xrightarrow{f}4,-2\xrightarrow{f}4$，$\pm 3\xrightarrow{f}9$，$\pm x\xrightarrow{f}x^2$，當我們求它的反函數時，會遭遇到一個問題，到底$x^2$要對應回去$x$或是$-x$呢？

因為$f(x)=x^2$是一個 2 對 1 的函數，**因此反函數定義時會遭遇到 1 對 2 無法形成函數，這個情形與(1)的情形不同**，$f(x)=2^x$是一個 1 對 1 的函數，故直接對應回來就能定義反函數；而$f(x)=x^2$是一個 2 對 1 的函數，我們要定義反函數時，就要採取彈性的方法，**所謂彈性的方法就是限制原函數的定義域，使得原函數在限制下的定義域是一個 1 對 1 的函數**。當定義域限制成$\{x|x\geq 0\}$時，可定義反函數$f^{-1}(y)=\sqrt{y}$，當定義域限制成$\{x|x\leq 0\}$時，可定義反函數$f^{-1}(y)=-\sqrt{y}$。

例三：
處理三角函數的情形，與處理$f(x)=x^2$的情形類似，考慮$f(x)=\sin x$，因為$\frac{\pi}{3}+2k\pi\xrightarrow{f}\frac{\sqrt{3}}{2}$它是一個多對 1 的函數，所以要處理正弦函數的反函數問題時，要將定義域做適當的限制，其它的 5 個三角函數也是用同樣的方法來處理。

(乙)反正弦函數

(1)反正弦$\sin^{-1}a$的定義：

對於每一個實數$a\in[-1,1]$，在區間$[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$內，都恰有一個實數$x$，使得$\sin x=a$。這個唯一的實數$x$，就記為$\sin^{-1}a$(有時也記為$\arcsin a$)，讀做*arcsinea*。

例如：因為在$[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$內只有$\frac{\pi}{6}$使得$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，所以$\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$。

因為在$[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$內只有$\frac{-\pi}{4}$使得$\sin\frac{-\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$，所以$\sin^{-1}(\frac{-\sqrt{2}}{2})=\frac{-\pi}{4}$。

注意：

(a)$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$，為什麼$\sin^{-1}\frac{1}{2}\neq\frac{5\pi}{6}$呢？

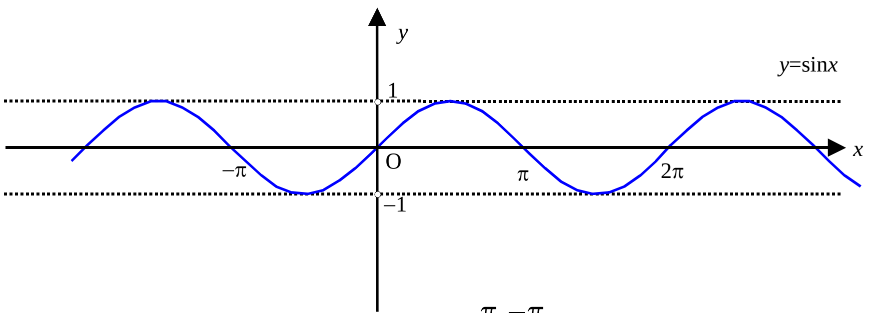
(b)$\sin^{-1}\frac{4}{3}$有意義嗎？為什麼？

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin^{-1}a$									

結論：

$$\boxed{\sin^{-1}a=\theta \iff a\in[-1,1]，\theta\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\ 且\ \sin\theta=x}$$

(2)反正弦函數：



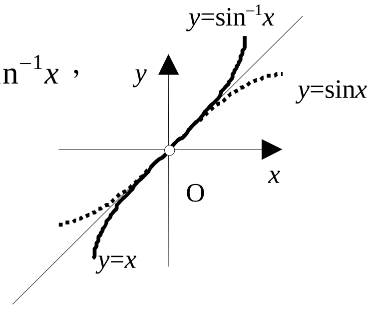
由$y=\sin x$ 的圖形可知定義域限制在$[\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2}]$內時，$y=\sin x$為一個 1−1 函數。

(a)定義反正弦函數：

根據$\sin^{-1}x$的定義，可知我們限制$y=\sin x$的定義域到$[\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2}]$，

此時$y=\sin x$為 1 對 1 的函數，因此可以定義反正弦函數 $y=f(x)=\sin^{-1}x$，

可知**定義域**$=\{x|-1\leq x\leq 1\}$，**值域**$=\{y|\frac{-\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}\}$。



(b)反正弦函數的圖形：

對於 $a\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，點$(a,b)$在 $y=\sin x$,的圖形上

$\iff$ 點(b,a)在$y=\sin^{-1}x$的圖形上。

所以$\boldsymbol{y=\sin x}$，$\boldsymbol{x\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$與$\boldsymbol{y=\sin^{-1}x}$的圖形對稱於直線$\boldsymbol{y=x}$。

(3)反正弦函數的性質：

性質 1：$y=\sin^{-1}x$圖形**對稱原點**，爲**奇函數**。 $\boldsymbol{\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}(x)}$，$\boldsymbol{-1\le x\le 1}$

性質 2：若$-1\le x\le 1$，則$\sin(\sin^{-1}x)=x$。

性質 3：若$\frac{-\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$，則$\sin^{-1}(\sin x)=x$。

性質 4：若$x\in R$，則$\sin^{-1}(\sin x)\ne x$，例$\sin^{-1}(\sin\frac{5\pi}{6})=\sin^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}\ne\frac{5\pi}{6}$。

[例題1] 求下列各式的值：

(1) $\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{5})$ (2) $\sin^{-1}\sin\frac{4\pi}{3}$ (3) $\sin^{-1}\sin 1$ (4) $\sin^{-1}\sin 2$

Ans：(1) $\frac{\pi}{5}$ (2) $-\frac{\pi}{3}$ (3)1 (4)$\pi-2$

[例題2] 求下列各式的值：

(1)$\sin\sin^{-1}\frac{2}{5}$ (2)$\sin\sin^{-1}(\frac{-2}{5})$ (3)$\sin\sin^{-1}1$ (4)$\sin\sin^{-1}2$

Ans：(1)$\frac{2}{5}$ (2)$\frac{-2}{5}$ (3)1 (4)無意義

(練習1) 求下列各小題的值：

(1)$\sin^{-1}1=$ ？ (2)$\sin^{-1}\frac{2}{5}$ [利用三角函數值表] (3)$\sin^{-1}\frac{\pi}{3}$ = ？

(4)$\sin^{-1}(\cos\frac{5\pi}{6})=$？(5)$\sin(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2})=$？ (6) $\sin^{-1}(\sin 10)$ (7) $\sin^{-1}\sin\frac{5\pi}{8}$

Ans：(1)$\frac{\pi}{2}$ (2)約 0.41 弧度 (3)無意義 (4)$\frac{-\pi}{3}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (6) $3\pi-10$ (7) $\frac{3\pi}{8}$

(練習2) 在$\triangle ABC$中，若$\overline{BC}=2\sqrt{2},\overline{CA}=6,\angle B=135°$,求$\angle A$。

Ans：$\angle A=\sin^{-1}\frac{1}{3}$

(丙)反餘弦函數

(1)反餘弦$\cos^{-1}a$的定義：
對於每一個a，$-1\le a\le 1$，在區間$\{x|0\le x\le\pi\}$上都恰有一個實數x使得$\cos x=a$這個唯一的實數x，就記爲$\cos^{-1}a$(有時也記做$\arccos a$)，讀做*arc cosinea*。

例如：因爲 $0\le\frac{\pi}{3}\le\pi$，$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，所以$\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$。

因爲 $0\le\frac{5\pi}{6}\le\pi$，$\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$，所以$\cos^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})=\frac{5\pi}{6}$。

注意：

(1)$\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$，爲何$\cos^{-1}\frac{1}{2}\neq\frac{5\pi}{3}$呢？

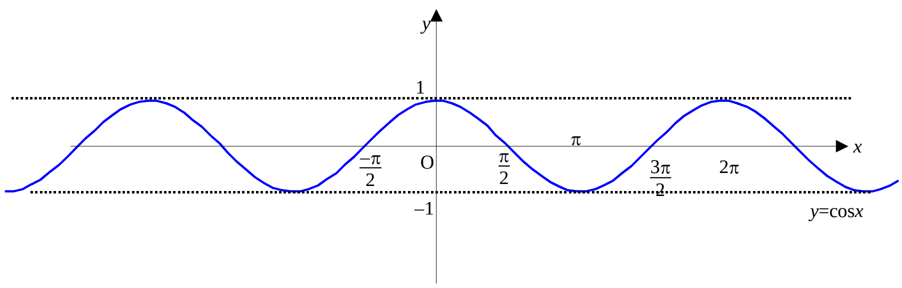
(2)$\cos^{-1}\frac{3}{2}$是否有意義？

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\cos^{-1}a$									
$\sin^{-1}a$									
$\sin^{-1}a+\cos^{-1}a$									

結論：

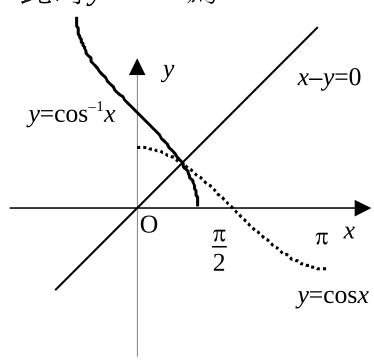
$\boxed{\cos^{-1}a=\theta \quad \Leftrightarrow a\in[-1,1]，\theta\in[0,\pi]\ 且\cos\theta=x}$

(2)反餘弦函數：



由 $y=\cos x$ 的圖形可知定義域限制在$[0,\pi]$內時，$y=\cos x$ 爲一個 1−1 函數。

(a)定義反餘弦函數：
根據$\cos^{-1}x$的定義，可知我們限制$y=\cos x$的定義域到$[0,\pi]$，此時$y=\cos x$爲 1 對 1 的函數，因此可以定義反餘弦函數 $y=f(x)=\cos^{-1}x$，
可知**定義域**$=\{x|-1\le x\le 1\}$，**值域**$=\{y|0\le y\le\pi\}$。



(b)反餘弦函數的圖形：
對於$a\in[0,\pi]$，點(a,b)在$y=\cos x$的圖形上
$\Leftrightarrow$ 點(b,a)在$y=\cos^{-1}x$ 的圖形上。

所以$\boldsymbol{y=\cos x}$，$\boldsymbol{x\in[0,\pi]}$與$\boldsymbol{y=\cos^{-1}x}$的圖形對稱於直線$\boldsymbol{y=x}$。

(3)反餘弦函數的性質：

性質 1：$y=\cos^{-1}x$圖形無對稱原點，不為奇函數。 $\cos^{-1}(-x)\neq -\cos^{-1}x$

性質 2：若$-1\le x\le 1$，則$\cos(\cos^{-1}x)=x$。

性質 3：若 $0\le x\le \pi$，則$\cos^{-1}(\cos x)=x$。

性質 4：若$x\in R$，則$\cos^{-1}(\cos x)\neq x$

例：$\cos^{-1}(\cos\frac{4\pi}{3})=\cos^{-1}(\frac{-1}{2})=\frac{2\pi}{3}\neq\frac{4\pi}{3}$

性質 5：$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

性質 6：若$-1\le a\le 1$，則$\cos^{-1}(-a)=\pi-\cos^{-1}a$

例：$\cos(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\pi-\cos^{-1}\frac{1}{2}$

[例題3] 求下列各式的值：

(1)$\cos^{-1}\cos\frac{5\pi}{7}$ (2)$\cos^{-1}(\cos\frac{-\pi}{3})$ (3)$\cos^{-1}\cos 4$

Ans：(1)$\frac{5\pi}{7}$ (2)$\frac{\pi}{3}$ (3)$2\pi-4$

[例題4] (1)$\cos(\cos^{-1}(-1))$ (2) $\cos(\cos^{-1}(\frac{\pi}{2}))$ (3)$\cos[\cos^{-1}(-\frac{2}{3})]$

Ans：(1)-1 (2)無意義 (3)$\frac{-2}{3}$

(練習3) 求下列各小題的值：

(1)$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$　(2)$\cos^{-1}\pi$　(3)$\cos^{-1}(\cos 1000\pi)$　Ans：(1)$\frac{\pi}{6}$ (2)無意義 (3)0

(練習4) 求下列各小題的值：

(1)$\cos^{-1}(\cos 2\pi)$　(2)$\cos^{-1}(\frac{-\pi}{3})$　(3)$\cos^{-1}(\cos\frac{4\pi}{3})$

Ans：(1)0　(2)無意義　(3)$\frac{2\pi}{3}$

(練習5) 求下列各小題的值：

(1)$\cos^{-1}(\cos 1)$　(2)$\cos^{-1}(\cos 2)$　(3)$\cos^{-1}(\cos 3)$

(4)$\cos^{-1}(\cos 4)$　(5)$\cos^{-1}(\cos 5)$　(6)$\cos^{-1}(\cos 6)$

Ans：(1)1(2)2(3)3 (4) $2\pi-4$(5)$2\pi-5$ (6)$2\pi-6$

(練習6) 設 $0\le x\le 2\pi$，且$\cos x=\frac{1}{3}$，請問x=？

Ans：$x=\cos^{-1}\frac{1}{3}$或 $2\pi-\cos^{-1}\frac{1}{3}$

(丁)反正切函數

(1)反正切$\tan^{-1}a$的意義：

對於每一個實數a，在區間$(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$內，都恰有一個實數$x$，使得$\tan x=a$。這個唯一的實數$x$，就記爲$\tan^{-1}a$(有時也記爲arctan$a$)，讀做*arctangenta*。

例如：因爲在$(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$內只有$\frac{\pi}{4}$使得$\tan\frac{\pi}{4}=1$，所以$\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$。

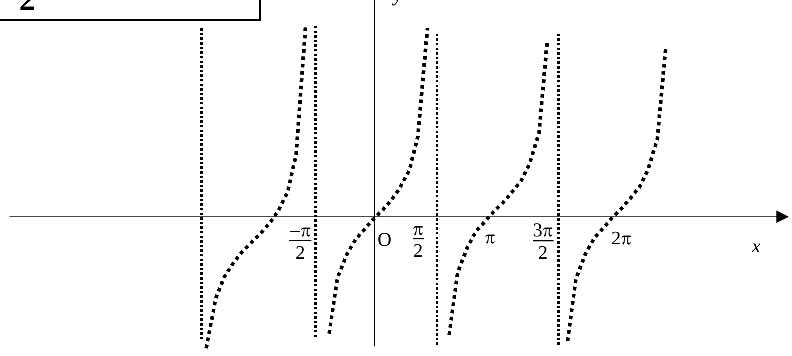
因爲在$(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$內只有$\frac{-\pi}{3}$使得$\tan\frac{-\pi}{3}=-\sqrt{3}$，所以$\tan^{-1}(-\sqrt{3})=\frac{-\pi}{3}$。

注意：$\tan\frac{5\pi}{6}=\frac{-1}{\sqrt{3}}$，爲什麼$\tan^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}})\neq\frac{5\pi}{6}$呢？

結論：

$\boxed{\tan^{-1}a=\theta \quad \Leftrightarrow a\in\mathbf{R}，\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2}) \text{ 且} \tan\theta=x。}$

(2)反正切函數：

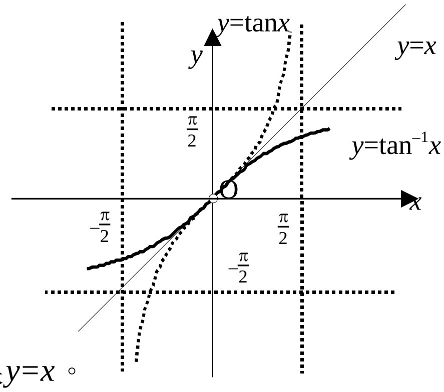


由 $y=\tan x$ 的圖形可知限制定義域在$(\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2})$時，$y=\tan x$ 是 1−1 的函數。

(a)定義反正切函數

根據$\tan^{-1}x$的定義，可知我們限制$y=\tan x$的定義域到$(\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2})$，此時$y=\tan x$爲 1 對 1 的函數，因此可以定義反正切函數 $y=f(x)=\tan^{-1}x$，

可知定義域=R，值域=$\{y|\frac{-\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\}$。



(b)反正切函數的圖形：

對於$b\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，點$(a,b)$在$y=\tan x$,的圖形上

$\Leftrightarrow$ 點(b,a)在$y=\tan^{-1}x$的圖形上。

所以$y=\tan x$，$x\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$與$y=\tan^{-1}x$的圖形對稱於直線$y=x$。

(3)反正切函數的性質：

性質 1：$y=\tan^{-1}x$圖形**對稱原點**，爲**奇函數**。$\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$

性質 2：若$x\in$R，則$\tan\tan^{-1}x=x$

性質 3：若$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，則$\tan^{-1}\tan x=x$

性質 4：若$x\in$R，則$\tan^{-1}\tan x\neq x$

例如：$\tan^{-1}(\tan\frac{3\pi}{4})=\tan^{-1}(-1)=\frac{-\pi}{4}\neq\frac{3\pi}{4}$

[例題5] 求下列各小題的值：

(1)$\tan^{-1}(-1)$ (2)$\tan^{-1}(\tan\frac{7\pi}{12})$ (3)$\tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{2})$ (4)$\tan(\tan^{-1}(100))$

Ans：(1)$\frac{-\pi}{4}$ (2)$\frac{-5\pi}{12}$ (3)無意義 (4)100

(練習7) 求下列各小題的值：

(1)$\tan^{-1}(\sqrt{3})$ (2)$\tan^{-1}(\tan 200\pi)$ (3)$\tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{4})$ (4)$\tan(\tan^{-1}123)$

Ans:(1)$\frac{\pi}{3}$ (2)0 (3)$\frac{\pi}{4}$ (4)123

[例題6] 求下列各小題的值：

(1)$\sin[\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}+\cos^{-1}(\frac{-2}{\sqrt{5}})]$　(2)$\cos[\frac{1}{2}\cdot\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}]$

Ans：(1)$\frac{\sqrt{2}}{10}$　(2)$\sqrt{\frac{5}{6}}$

(練習8) 試求$\cos[\tan^{-1}(\frac{-4}{3})+\sin^{-1}\frac{12}{13}]=$？　Ans：$\frac{63}{65}$

(練習9) 試求$\sin[\frac{1}{2}\cos^{-1}(\frac{-2}{3})]=$？　Ans：$\frac{\sqrt{30}}{6}$

綜合練習

(1) 求下列各式的值：

(a)$\sin(\sin^{-1}\frac{\pi}{4})$　(b)$\sin^{-1}(\sin 2)$　(c)$\cos(\cos^{-1}\frac{\pi}{3})$

(d)$\cos^{-1}(\cos 3\pi)$　(e)$\tan(\tan^{-1}2\pi)$　(f)$\tan^{-1}(\tan 2\pi)$

(2) 下列有關反函數的敘述那些是正確的？

(A)$\sin^{-1}\sin\frac{4\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$　(B)$\tan^{-1}\tan 4=4$　(C)$\cos[\cos^{-1}\pi]=\pi$　(D)$\sin(\cos^{-1}\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E)$\cos^{-1}(\cos\frac{-\pi}{3})=\frac{\pi}{3}$。

(3) 有關$f(x)=\sin^{-1}x$，$-1\le x\le 1$ 的敘述，何者正確？
(A) $f(x)$爲一對一函數　(B) $f(x)$的反函數爲正弦函數
(C) $f(x)$爲遞增函數　(D) $f(x)$之定義域爲$\{x\mid -1\le x\le 1\}$
(E) $f(x)$的值域爲$\{y\mid -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\}$。

(4) 有關$f(x)=\cos^{-1}x$，$-1\le x\le 1$ 的敘述，何者正確？
(A) $f(x)$爲一對一函數　(B) $f(x)$的反函數爲餘弦函數
(C) $f(x)$爲遞增函數　(D) $f(x)$之定義域爲$\{x\mid -1\le x\le 1\}$
(E) $f(x)$的值域爲$\{y\mid -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\}$。

(5) 計算下列各小題：

(a)$\tan[\sin^{-1}\frac{-4}{5}+\cos^{-1}\frac{-5}{13}]$　(b)$\cos[2\cdot\sin^{-1}(\frac{-4}{5})]$　(c)$\cos[3\cdot\tan^{-1}(\frac{-4}{3})]$

(d)$\sin[\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{5}{13}]$　(e)$\cos[2\sin^{-1}\frac{4}{5}-\frac{\pi}{3}]$

(6) 解下列方程式：

(a)$\cos^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{3}$　(b)$\cos^{-1}\frac{x}{2}=-\sin^{-1}\frac{3}{5}$　(c)$\cos^{-1}\frac{7}{25}=\tan^{-1}(3x+3)$。

(7) 化簡$\tan^{-1}3+\tan^{-1}2=$__________。

(8) 比較$a=\sin^{-1}\sin 1$，$b=\cos^{-1}\cos 2$，$c=\tan^{-1}\tan 3$，的大小。

(9) 試比較$a=\sin^{-1}(\frac{-3}{4})$，$b=\cos^{-1}\frac{5}{6}$，$c=\tan^{-1}(\frac{-1}{2})$ 之大小。

(10) 設a,b爲方程式$x^2-3x+2=0$ 的二根，試求$\tan(\tan^{-1}a+\tan^{-1}b)$之值。

(11) 解方程式 $\cos x=\dfrac{-2}{3}$，$0\le x\le 2\pi$

進階問題

(12) 解方程式：$2\cos 2x+\sin x+1=0$，其中 $0\le x\le 2\pi$。

(13) (a)證明：$|x|\le 1$，$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$。

(b)解方程式 $4\cos^{-1}x+\sin^{-1}x=\dfrac{3\pi}{4}$。

綜合練習解答

(1) (a)$\dfrac{\pi}{4}$ (b)$\pi-2$ (c)無意義 (d)π (e)2π (f)0

(2) (D)(E)

(3) (A)(C)(D)(E)

(4) (A)(D)

(5) (a)$\dfrac{56}{33}$ (b)$\dfrac{-7}{25}$ (c)$\dfrac{-117}{125}$ (d)$\dfrac{56}{65}$ (e)$\dfrac{1}{50}(24\sqrt{3}-7)$

(6) (a)$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (b)$\dfrac{8}{5}$ (c)$\dfrac{1}{7}$ [提示：(a)令$\alpha=\cos^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow\cos\alpha=x$且$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$， $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$]

(7) $\dfrac{3\pi}{4}$[提示：令$\alpha=\tan^{-1}3,\beta=\tan^{-1}2$，$\tan\alpha=3$，$\tan\beta=2$，

計算$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$之值]

(8) $c<a<b$[提示：$a=\sin^{-1}\sin 1=1$，$b=\cos^{-1}\cos 2=2$ ，$c=\tan^{-1}\tan 3=3-\pi$]

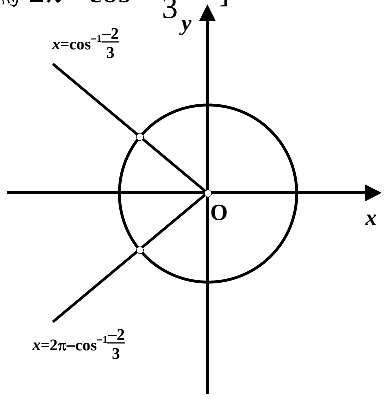
(9) $b>c>a$

(10) -3 [提示：令$\tan^{-1}a=\alpha$，$\tan^{-1}b=\beta\Leftrightarrow\tan\alpha=a$，$\tan\beta=b$ 所以$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{a+b}{1-ab}=-3$]

(11) $2\pi-\cos^{-1}\frac{-2}{3}$或$\cos^{-1}\frac{-2}{3}$[提示： $x=\cos^{-1}\frac{-2}{3}$ 是一個解，且$\frac{\pi}{2}<\cos^{-1}\frac{-2}{3}<\pi$，但是在

$0\le x\le 2\pi$的範圍內，還有其他的解，如圖這個解爲 $2\pi-\cos^{-1}\frac{-2}{3}$。]



(12) $\frac{\pi}{2}$或 $2\pi+\sin^{-1}(\frac{-3}{4})$或$\pi-\sin^{-1}(\frac{-3}{4})$[提示：原方程式$\Rightarrow 2(1-\sin^2x)+\sin x+1=0$

$\Rightarrow 4\sin^2x-\sin x-3=0 \Rightarrow \sin x=1$ 或 $\frac{-3}{4}$ $\Rightarrow$ 因爲 $0\le x\le 2\pi$ 所以$x=\frac{\pi}{2}$或 $2\pi+\sin^{-1}(\frac{-3}{4})$

或$\pi-\sin^{-1}(\frac{-3}{4})$]

(13) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ [提示：(a)令$\sin^{-1}x=\theta$，欲證明$\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=x$]