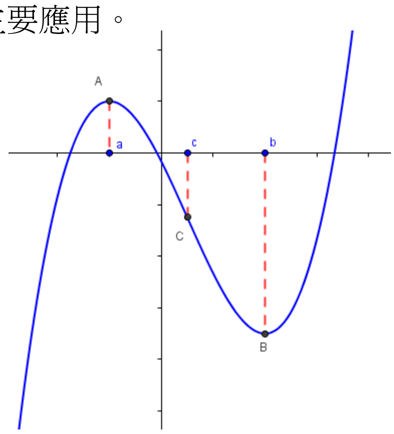
第四十九單元微分的應用(一)

右圖是一個三次多項式函數 $f(x)$的圖形，這個圖形高低起伏並且連續不斷，圖形中有類似波峰或波谷的圖形，而且圖形的開口方向有上有下。利用微分可以得知函數 $f(x)$的圖形在何處會上升或下降(**單調性**)，何處凹口會向上或向下(**凹向性**)；並且可以求得上升下降的轉折點(A、B 點)與彎曲方向的轉折點(C 點)，得知 A、B、C 三點的位置，就可以大致掌握多項式函數 $f(x)$圖形的樣貌。了解 $f(x)$的圖形樣貌後，就可以進一步找函數 $f(x)$的極值(A 點、B 點的 y 坐標分別為極大值與極小值)最後求得多項式函數在某個區間上的最大值或最小值。

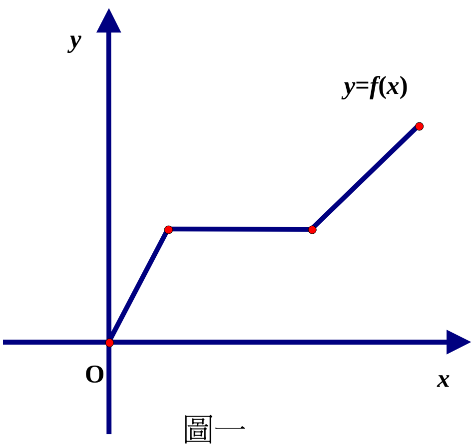
求函數的最大值與最小值是數學上很重要一個課題，許多應用的領域，最後可能都會歸結到求一個或多個函數的最大值與最小值，求函數的最大值與最小值是微分學發展的動力之一，故利用微分來解決這類的問題必然是它的主要應用。



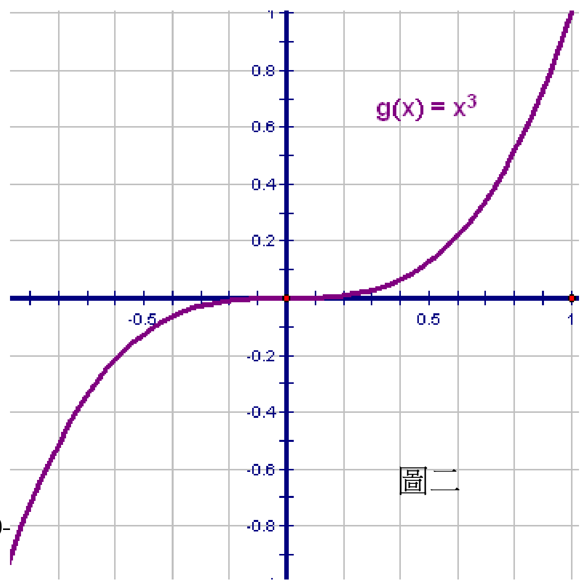
(甲)函數的單調性

◆ 函數的遞增與遞減：

若 $x_1>x_2$，則 $f(x_1)\geq f(x_2)$，具有上述性質的函數 $f(x)$稱為**遞增函數**。
若 $x_1>x_2$，則 $f(x_1)\leq f(x_2)$，具有上述性質的函數 $f(x)$稱為**遞減函數**。
若 $x_1>x_2$，則 $f(x_1)>f(x_2)$，具有上述性質的函數 $f(x)$稱為**嚴格遞增函數**。
若 $x_1>x_2$，則 $f(x_1)<f(x_2)$，具有上述性質的函數 $f(x)$稱為**嚴格遞減函數**。
從圖形的觀點來看：
遞增函數的圖形向右移動時，圖形隨著上升，而遞減函數的圖形則剛好相反。
例如：
如圖一，$y=f(x)$為遞增函數，如圖二，$y=g(x)=x^3$ 為嚴格遞增函數。



圖一

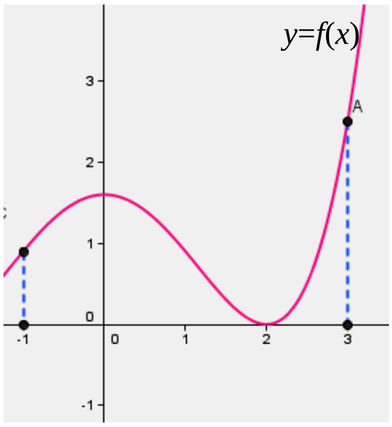


圖二

[例題1] 右圖為多項式函數 $f(x)$在區間$[-1,3]$上的圖形，試問：

(1)$f(x)$在哪個區間會遞增或遞減？

(2)判別 $f(x)$在遞增或遞減的區間上，$f'(x)$的正負？



[解法]：

(1)根據右圖，可以得知

在區間$[-1,0]$與$[2,3]$上函數 $f(x)$為遞增，

在區間$[0,2]$上函數 $f(x)$為遞減。

(2)根據右圖，可以得知

在區間$(-1,0)$與$(2,3)$上的每一點 x，在$(x,f(x))$處的切線斜率都會大於 0，故 $f'(x)>0$。

在區間$(0,2)$上的每一點 x，在$(x,f(x))$處的切線斜率都會小於 0，$f'(x)<0$。

◆ 函數單調性與一階導函數的關係

多項式函數在某個區間內導數恆正或恆負與函數在此區間內是否為遞增或遞減有關。我們將這個結果寫成下列的定理：

> 定理：(函數單調性判別定理)
> 設 $f(x)$在(a,b)內每一點都可微分且一階導函數為連續函數
> (1)若對於區間(a,b)內的每個實數 x，都滿足 $f'(x)\geq 0$，則 $f(x)$在(a,b)上為遞增函數。反之，若 $f(x)$在(a,b)上為遞增函數，則對於區間(a,b)內的每個實數 x，都滿足 $f'(x)\geq 0$。
> (2)若對於區間(a,b)內的每個實數 x，都滿足 $f'(x)\leq 0$，則 $f(x)$在(a,b)上為遞減函數。反之，若 $f(x)$在(a,b)上為遞減函數，則對於區間(a,b)內的每個實數 x，都滿足 $f'(x)\leq 0$。

上述的定理有幾點要加以說明：

(1)因為多項式函數 $f(x)$在閉區間$[a,b]$上為連續函數，因此當 $f(x)$在開區間(a,b)上為遞增(遞減)時，同時也意味著 $f(x)$在閉區間$[a,b]$上為遞增(遞減)。

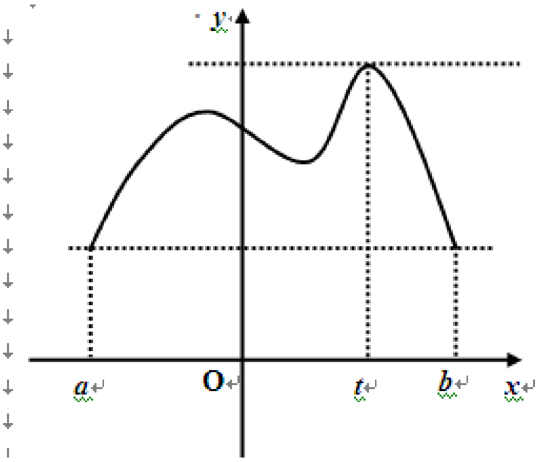
(2)若多項式函數 $f(x)$不是常數函數，則 $f(x)$在$[a,b]$上遞增與嚴格遞增是等價的。

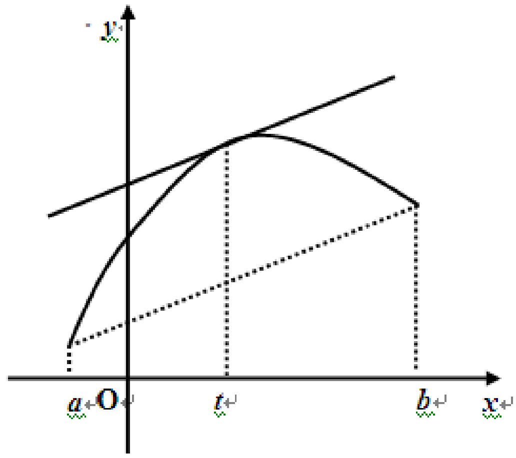
當然遞減與嚴格遞減也是等價。換句話說，

> **若次數至少一次的多項式函數 $f(x)$在$[a,b]$上為遞增(遞減)函數，**
> **則 $f(x)$在$[a,b]$為嚴格遞增(嚴格遞減)函數。**

在說明這個定理之前，我們先討論連續函數的一個性質：

> **Rolle's 定理**：(僅供參考)
> 設 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 為連續函數，且 $f'(x)$存在，$\forall x\in(a,b)$，
> 若 $f(a)=f(b)$，則存在 $t\in(a,b)$，使得 $f'(t)=0$。





[證明]：

(1)若 $f(x)$在$[a,b]$是常數函數，則結論自然成立。

(2)若 $f(x)$在$[a,b]$不是常數，因爲 f 在$[a,b]$爲連續函數，所以 $f(x)$在$[a,b]$上有最大值與最小值， 因爲 $f(a)=f(b)$，不妨假設 $f(x)$在 $x=t$ 發生最大值，且 $t\in(a,b)$，可知 $f'(t)=0$。

均值定理：(僅供參考)

設 f：$[a,b]\rightarrow$R 爲連續函數，且 $f'(x)$存在，$\forall x\in(a,b)$，則存在 $t\in(a,b)$，
使得 $f(b)-f(a)=f'(t)(b-a)$。

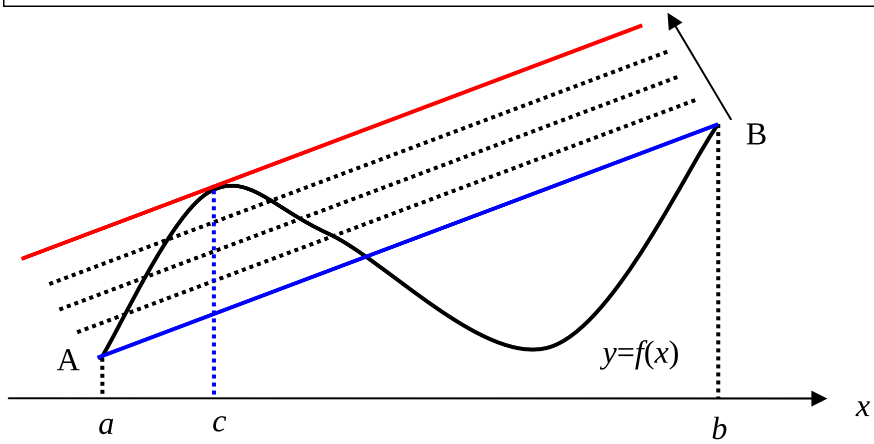
[證明]：

(1)如果 $f(a)=f(b)$，根據 Rolle's 定理，可知存在 $t\in(a,b)$，使得 $f'(t)=0$，
因此結論自然成立。

(2)如果 $f(a)\neq f(b)$，定義$\varphi(x)=f(x)-[f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]$

顯然$\varphi(x)$爲$[a,b]$上的連續函數，且$\varphi(a)=\varphi(b)$，$\varphi'(x)$存在$\forall x\in(a,b)$

$\Rightarrow$根據 Rolle's 定理，存在 $t\in(a,b)$，使得$\varphi'(t)=0 \Rightarrow f(b)-f(a)=f'(t)(b-a)$。



[幾何意義]：

定義在$[a,b]$上連續函數 $y=f(x)$，它的圖形連續不斷，而且每個(a,b)內的點 x，$f'(x)$存在，連接圖形端點 A$(a,f(a))$、B$(b,f(b))$的直線 AB，我們可以平行移動 AB 直線，一定可以在(a,b)內找到一點 t，使得在$(t,f(t))$處切線的斜率等於直線 AB 的斜率。

[物理意義]：

當 $f(t)$代表車子在某一個時段內行使的速度，當車子在某一時段$[t_1,t_2]$的平均速度爲 $\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}$，Lagrange 中間值定理代表一定有某一個時刻 t_0，此時的瞬時速度 $f'(t_0)$等於平均速度$\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}$。

證明函數單調性判別定理：

(1) **設 $f'(x)\geq 0$，欲證明 $f(x)$在(a,b)上遞增。**

設 x_1、$x_2\in(a,b)$且 $x_1<x_2$，欲證明 $f(x_1)<f(x_2)$。

由均值定理，可以在(x_1,x_2)找到一個 c，使得 $f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

由條件可得 $f'(c)\geq 0$，故 $f(x_1)\leq f(x_2)$，即 $f(x)$在(a,b)上遞增。

(2)

設 $f(x)$在(a,b)上遞增，欲證明 $f'(x)\geq 0$。

設 $x_0\in(a,b)$，欲證明 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$。

對於(a,b)內的每個實數 x，但 $x\neq x_0$，

當 $x>x_0$時，$f(x)\geq f(x_0)$，差商 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$

當 $x<x_0$時，$f(x)\leq f(x_0)$，差商 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$，

所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$。

故對於(a,b)內的每一個實數 x，都滿足 $f'(x)\geq 0$。

函數單調性判別定理(2)的證明，亦可以比照定理(1)的方法。

根據前面的證明，可以得知：

若 $f'(x)>0$ (**$f'(x)<0$**)，$\forall x\in(a,b)$，則 $f(x)$在(a,b)上爲嚴格遞增(**嚴格遞減**)。

但是 $f(x)$嚴格遞增不見得可以得到 $f'(x)>0$。

反例：$f(x)=x^3$ 在 R 上爲嚴格遞增，但 $f'(x)=3x^2\geq 0$。

[例題2] 試討論函數 $f(x)=2x^3-3x^2-12x-1$ 的遞增與遞減的區間。

[解法]：

先求出 $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$ 有兩個根-1、2，故要討論 $f'(x)$的正負，

要考慮 $x<-1$、$-1<x<2$、$x>2$ 三個範圍

$f'(x)$的正負列表如下：

根據函數單調性判別定理，可以得知：

(1)當 $x<-1$ 時，$f'(x)>0$ 恆成立，$f(x)$在$(-\infty,-1)$上遞增，即 $f(x)$在$(-\infty,-1]$上遞增。

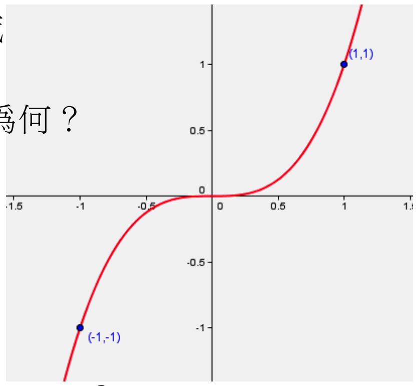
(2)當$-1<x<2$ 時，$f'(x)<0$ 恆成立，$f(x)$在$(-1,2)$上遞減，即 $f(x)$在$[-1,2]$上遞減。
(3)當 $x>2$ 時，$f'(x)>0$ 恆成立， $f(x)$在$(2,\infty)$上遞增，即 $f(x)$在$[2,\infty)$上遞增。

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$		6		−21	
函數 $f(x)$的增減	↗		↘		↗

[例題3] 設函數 $f(x)=x^3+ax^2+ax+2$ 在實數 R 上爲遞增函數，試求 a 值的範圍。
Ans：$0\le a\le 3$
[解法]：
先求出導函數 $f'(x)=3x^2+2ax+a$。
因爲 $f(x)$在實數 R 上爲遞增函數，
所以對於任意 $x\in R$ ，$f'(x)=3x^2+2ax+a\ge 0$ 恆成立，
$\Leftrightarrow$ 二次函數 $f'(x)=3x^2+2ax+a$ 的判別式 $4a^2-12a\le 0$，
即 $4a(a-3)\le 0$，得 $0\le a\le 3$。

(練習1) 設 $f(x)=-x^3+ax^2+ax+1$ 恆爲遞減函數，則 a 的範圍爲何？
Ans：$-3\le a\le 0$

(練習2) 試問 $f(x)=x^4-2x^2+1$ 在那些區間會遞增、遞減？
Ans：$x\ge 1$ 遞增，$0\le x\le 1$ 遞減，$-1\le x\le 0$ 遞增，$x\le -1$ 遞減



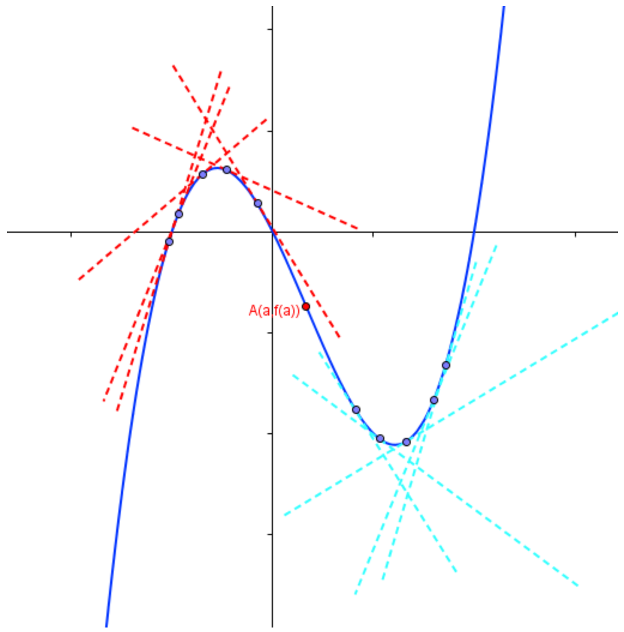
(練習3) 設 $f(x)=x^3-ax^2+2x+1$，若 $f(x)$爲遞增函數，則 a 的範圍爲何？
Ans：$-\sqrt{6}\le a\le\sqrt{6}$

(乙)函數圖形的凹向性

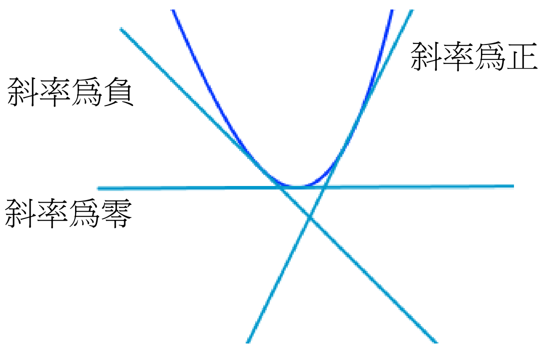
(1)函數的凹向：
觀察函數 $f(x)=x^3$ 的圖形，因爲對於任意實數 x 而言，$f'(x)=3x^2\ge 0$，故 $f(x)=x^3$ 爲遞增函數，但是在 $x<0$ 與 $x>0$ 這兩個部分的圖形，遞增的情形並不相同，假想這個圖形是條公路，如果汽車從$(-1,-1)$出發，分別沿公路前進至$(1,1)$。爲了保持在公路上前進，一開始沿 $y=x^3(x<0)$路線要***右轉彎***，經過$(0,0)$之後，沿 $y=x^3(x>0)$路線要***左轉彎***。這種「***左轉彎、右轉彎***」的現象指出了函數圖形的一項重要特性—函數圖形的**凹向性**。

◆　函數的凹向性

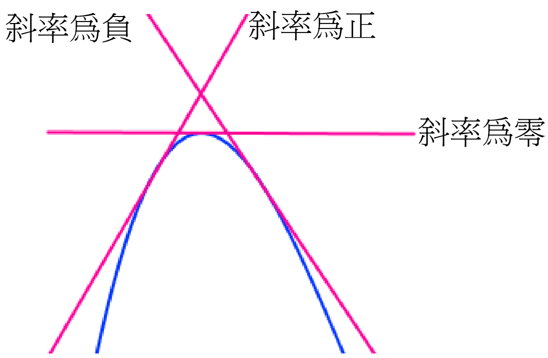
如下圖，要描述函數圖形的凹向性，先觀察 $f(x)=x^3$ 的圖形上每一點切線斜率的變化：
當 $x<0$，點 $(x,f(x))$ 處的切線斜率 $f'(x)$ 會隨著 x 的**增加而遞減**，此時稱圖形的**凹口向下**；
當 $x>0$，點 $(x,f(x))$ 處的切線斜率 $f'(x)$ 會隨著 x 的**增加而遞增**，此時稱圖形的**凹口向上**。
函數圖形凹口向上或凹口向下稱爲函數的**凹向性**。
我們對於可微分函數圖形的**凹向性**作以下的定義：



可微分函數圖形凹向性的定義 設 $f(x)$ 爲可微分函數， (1)若 $f'(x)$ 在區間 (a,b) 上爲嚴格遞增函數，則稱 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上的圖形是**凹口向上** （**簡稱**凹向上）。 (2)若 $f'(x)$ 在區間 (a,b) 上爲嚴格遞減函數，則稱 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上的圖形是**凹口向下** （**簡稱**凹向下）



凹口向上
切線斜率嚴格遞增



凹口向下
切線斜率嚴格遞減

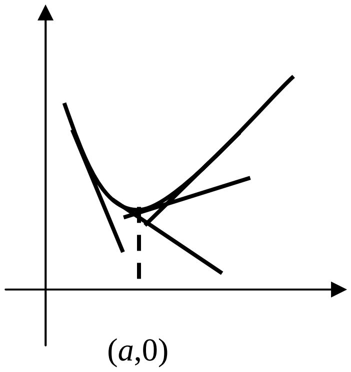
例如 $f(x)=x^2$，$f'(x)=2x$ 在 R 上爲嚴格遞增函數，故 $f(x)$ 在 R 上的圖形凹口向上。
　$f(x)=-x^2$，$f'(x)=-2x$ 在 R 上爲嚴格遞減函數，故 $f(x)$ 在 R 上的圖形凹口向下。

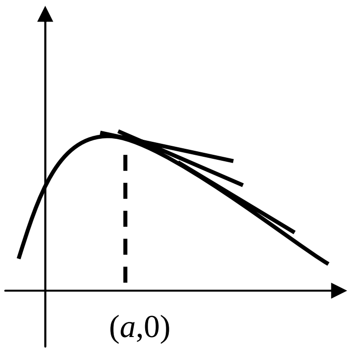
◆ 函數圖形的凹向性與二階微分的關係

函數圖形的凹向代表圖形彎曲的方向，討論這個概念可以藉由觀察函數圖形上每一點切線斜率的變化來達成目標，而我們知道導函數 $f'(x)$代表以$(x,f(x))$為切點的切線斜率，因此**討論切線斜率的變化，就相當於討論 $f'(x)$的函數值之變化**。

因此我們利用 f''(f 的二階導數)來解釋函數的凹向：

$f(x)$在$(a,f(a))$點附近的切線斜率遞增　　　　$f(x)$在$(a,f(a))$點附近的切線斜率遞減





由左上圖，$y=f(x)$在$(a,f(a))$圖形附近**凹口向上**：

因為 $f(x)$在$(a,f(a))$點附近的切線斜率 $f'(x)$遞增，換句話說，$f'(x)$在 $x=a$ 附近是遞增函數，因此 $f''(a)\geq 0$。

由右上圖，$y=f(x)$在$(a,f(a))$圖形附近**凹口向下**：

因為 $f(x)$在$(a,f(a))$點附近的切線斜率 $f'(x)$遞減，換句話說，$f'(x)$在 $x=a$ 附近是遞減函數，因此 $f''(a)\leq 0$。

接下來僅說明多項式函數凹向性的判別性定理，一般情形，請參考後面的補充教材

函數凹向性判別定理：

設 $f(x)$為為至少二次的多項式函數，

(1)若(a,b)中的任意實數 x，$f''(x)\geq 0$ 恆成立，則 $f(x)$在(a,b)上的圖形是凹口向上(凹向上)；反之，若 $f(x)$在 (a,b)上的圖形凹口向上(凹向上)，則對於(a,b)中的任意實數 x，$f''(x)\geq 0$ 恆成立。

(2)若(a,b)中的任意實數 x，$f''(x)\leq 0$ 恆成立，則 $f(x)$在 (a,b)上的圖形是凹口向下(凹向下)；反之，若 $f(x)$在(a,b)上的圖形凹口向下(凹向下)，則對於(a,b)中的任意實數 x，$f''(x)\leq 0$ 恆成立。

[證明]：

(1)根據函數單調性判別定理，「$f''(x)\geq 0$」為「$f'(x)$在(a,b)上遞增」的充要條件，

另一方面，因為 $f(x)$為至少二次的多項式函數，所以 $f'(x)$為至少一次的多項式函數，

此時「$f'(x)$在(a,b)上遞增」與「$f'(x)$在(a,b)上嚴格遞增」等價，

所以「$f''(x)\geq 0$」為「$f'(x)$在(a,b)上嚴格遞增」的充要條件。

故「$f''(x)\geq 0$」為「$f(x)$在 (a,b)上的圖形凹口向上(凹向上)」的充要條件。

定理(2)的證明亦可比照定理(1)的證明。

因為多項式函數 $f(x)$為連續函數，且微分之後還是多項式函數，因此當 $f(x)$在開區間(a,b)上的圖形凹口向上時，那麼 $f(x)$在閉區間$[a,b]$上的圖形也會凹口向上。

[例題4] 討論函數 $f(x)=x^4-6x^2+3$ 圖形在那些區間凹口向上？在那些區間凹口向下？

[解法]：

首先，求出 $f'(x)$ 與 $f''(x)$。

$f'(x)=4x^3-12x$，$f''(x)=12x^2-12=12(x-1)(x+1)$ 。

解 $f''(x)=0$ 的根 $x=1$ 或 -1

接下來，根據 $f''(x)=0$ 的根 -1 與 1 分段討論 $f''(x)$ 的正負，並列表如下：

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f'(x)$	遞增		遞減		遞增
函數 $f(x)$ 圖形的凹凸性	凹向上		凹向下		凹向上

根據函數凹向性判別定理，可得

$f(x)$ 在區間 $(-\infty，-1)$ 及 $(1，\infty)$ 上的圖形是凹口向上，即

$f(x)$ 在區間 $(-\infty，-1]$ 及 $[1，\infty)$ 上的圖形是凹口向上。

$f(x)$ 在區間 $(-1，1)$ 的圖形是凹口向下，即

$f(x)$ 在區間 $[-1，1]$ 上的圖形是凹口向下。

其中點 $(-1,-2)$ 與點 $(1,-2)$ 是函數 $f(x)$ 圖形凹口向上與凹口向下的轉折點。

(練習4) 討論 $f(x)=x^4-2x^2+1$ 的凹向情形。

Ans：凹向上：$x\le\frac{-1}{\sqrt{3}}$ 或 $x\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$；凹向下：$\frac{-1}{\sqrt{3}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{3}}$

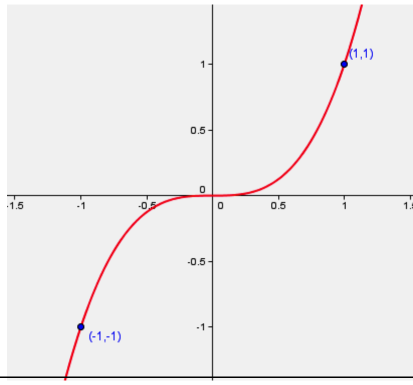
(練習5) 試討論 $f(x)=\frac{-x}{x^2+4}$ 的凹向。

Ans：凹向上：$x\le-2\sqrt{3}$ 或 $0\le x\le2\sqrt{3}$；凹向下：$-2\sqrt{3}\le x\le0$ 或 $x\ge2\sqrt{3}$

(練習6) 根據美國當選總統的得票率，預測該總統的政黨在眾議院獲得席次比率的一個數學模型：設當選總統的得票率為 p，則該總統的政黨在眾議院獲得席次比率為 $H(p)=\frac{p^3}{p^3+(1-p)^3}$ $0\le p\le1$[稱為 House 函數]，請討論 $H(p)$ 的凸性。

Ans：$(0,\frac{1}{2})$ 凹口向上，$(\frac{1}{2},1)$ 凹口向下。

◆ 函數的反曲點：



先給一個實例：

考慮 $f(x)=x^3$，觀察 $x=0$ 附近凹向的變化情形：

①$x>0$，$f''(x)>0$，因此 $f(x)$凹口向上。

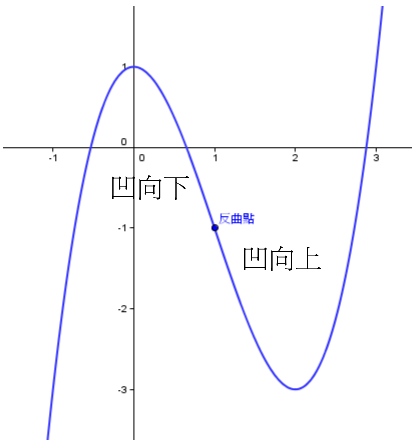
②$x<0$，$f''(x)<0$，因此 $f(x)$凹口向下。

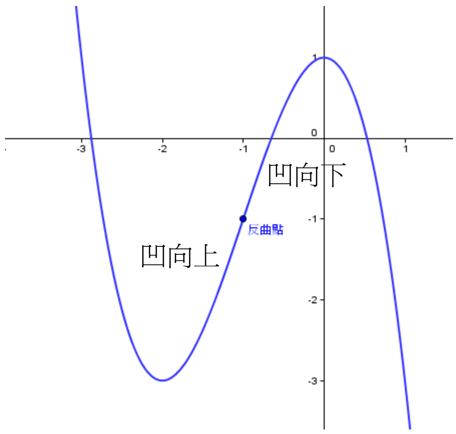
因此 $f(x)$在(0,0)處發生凹向的變化，

我們把(0，$f(0)$)稱爲**函數 $f(x)$的反曲點**。

(1)反曲點的定義

反曲點的定義：
若在 a 點附近，$x<a$ 的凹向與 $x>a$ 的凹向相反，則稱$(a,f(a))$爲函數 $f(x)$的一個**反曲點**。





(2)二階導數與反曲點

若$(a,f(a))$爲多項式函數 $f(x)$的反曲點，則 $f''(a)=0$。

根據函數凹向性判別定理，在反曲點$(a,f(a))$附近，$f(x)$的二階導函數 $f''(x)$會由正轉負或由負轉正，因爲 $f''(x)$爲連續函數，因此 $f''(a)=0$。

故可得以下結論：

若$(a,f(a))$爲多項式函數 $f(x)$的反曲點，則 $f''(a)=0$。

反過來說，$f''(a)=0$ 是否可以保證$(a,f(a))$爲函數 $f(x)$的反曲點呢？

例如 $f(x)=x^4$，$f''(x)=12x^2$，$f''(0)=0$，但是 $f''(x)\geq 0$ 恆成立，故$(0,f(0))$並不是反曲點。

因此 $f''(a)=0$ 不一定可以推得$(a,f(a))$爲函數 $f(x)$的反曲點。

上述的定理對於一般二階可微分的函數亦成立，我們寫成以下的結果：(僅供參考)

設函數 $f(x)$爲一個至少可微分 2 次以上的函數，

若點$(a,f(a))$爲函數 $f(x)$的反曲點，則 $f''(a)=0$。

[證明]：

因爲$(a,f(a))$爲函數 $f(x)$的反曲點，

我們可以假設在 a 點附近：

$x<a$，$f(x)$凹口向下，$x<a$，$f(x)$凹口向上

所以在 a 點附近：

$x<a$，$f''(x)\leq 0$；$x>a$，$f''(x)\geq 0$

因此 $f^{/}(x)$在 $x<a$ 爲遞減；在 $x>a$ 爲遞增。

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f^{/}(a+h)-f^{/}(a)}{h}=f_+^{//}(a)\ge 0,\ \lim_{h\to 0^-}\frac{f^{/}(a+h)-f^{/}(a)}{h}=f_-^{//}(a)\le 0\text{，故 } f^{//}(a)=0$$

x	$x<a$	$x>a$
$f^{//}$	$-$	$+$
$f^{/}$	$\searrow$	$\nearrow$

說明：

(1°)根據前面的定理，若 $f(x)$是二次可微分的函數，若 $f^{//}(a)\neq 0$，那麼$(a,f(a))$一定不是反曲點；但是反過來說，若 $f^{//}(a)=0$ 時，點$(a,f(a))$不一定就是反曲點。
反例是 $f(x)=x^4$，$f^{//}(0)=0$，但$(0,0)$不是反曲點。

(2°)設 $f(x)$是二次可微分的函數，滿足 $f^{//}(a)=0$，若$(a,f(a))$附近圖形的凹向相反，那麼$(a,f(a))$就是反曲點。

[例題5] 討論函數 $f(x)=x^3-3x^2-x-1$ 圖形的凹向，並求其圖形的反曲點？

[解法]：

首先，求出 $f^{/}(x)$與 $f^{//}(x)$。

$f^{/}(x)=3x^2-6x-1$，$f^{//}(x)=6x-6=6(x-1)$

解 $f^{//}(x)=0$ 的根爲 $x=1$

接下來，分段討論 $f^{//}(x)$的正負，並列表如下：

x	$x<1$	$x=1$	$x>1$
$f^{//}(x)$	$-$	0	$+$
$f^{/}(x)$	**遞減**		**遞增**
函數 $f(x)$圖形的凹凸性	**凹向下**		**凹向上**

根據函數凹向性判別定理，可得

$f(x)$在區間 $(-\infty，1)$圖形凹口向下；

$f(x)$在區間$(1，\infty)$的圖形是凹口向上，

因爲 $f^{//}(x)$在 $x=1$ 附近由負轉正，即函數圖形由凹口向下轉向凹口向上，所以點$(1,-4)$是反曲點。

[例題6] 三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 圖形的反曲點爲$(-1,3)$，且 $f^{/}(0)=-2$，試求實數 a,b,c 的值。[解法]：

首先，求出 $f^{/}(x)$與 $f^{//}(x)$：

$f^{/}(x)=3x^2+2ax+b$，$f^{//}(x)=6x+2a$

因爲 $f(x)$ 圖形的反曲點爲$(-1,3)$，故 $f^{//}(-1)=0$，即$-6+2a=0$，$a=3$

又由 $f^{/}(0)=-2$，即 $b=-2$

因此 $f(x)=x^3+3x^2-2x+c$

又因為反曲點$(-1,3)$在 $f(x)$的圖形上，所以 $f(-1)=3$，$-1+3+2+c=3$，解得 $c=-1$。

故 $a=3$，$b=-2$，$c=-1$。

[例題7] 決定下列各曲線的彎曲方向，並求其反曲點：

(1)$y=x^5-5x^4$ (2)$y=\dfrac{x}{x^2+1}$

Ans：

(1)$(-\infty,3)$凹口向下；$(3,\infty)$凹口向上；反曲點$(3,-162)$，$(0,0)$不是反曲點。

(2)$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$凹口向下；$(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},\infty)$凹口向上；

反曲點：$(-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{4})$，$(0,0)$，$(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4})$。

(練習7) 決定曲線 $y=x^4-4x^3+10$ 的凹向，並求其反曲點。

Ans：$(-\infty,0)\cup(2,\infty)$凹口向上，$(0,2)$凹口向下；$(0,10)$及$(2,-6)$為反曲點。

(練習8) 求曲線 $y=x^4-6x^3+12x^2-8x$ 上，以反曲點為切點之切線方程式。

Ans：$2x-y-3=0$，$y=0$

(練習9) 試討論函數 $f(x)=\dfrac{5x^2+8x+5}{x^2+1}$的凹向。

Ans：$x<-\sqrt{3}$或 $0<x<\sqrt{3}$，$f(x)$凹向下；$-\sqrt{3}<x<0$ 或 $x>\sqrt{3}$，$f(x)$凹向上。

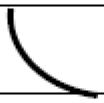
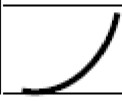
(練習10) 設曲線 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 之反曲點為$(1,8)$，試求(a,b)=？ Ans：$(-3,9)$

(丙)函數圖形的描繪

(1)如何繪製函數的圖形

根據前面的討論，我們可以得知函數圖形的增減情形與何處會增減，函數圖形凹向的變化與何時凹向會改變，我們將這些資訊結合在一起，再用解析幾何的描圖原則討論截距、對稱、範圍、漸近線等，就可以大致上繪製出函數的近似圖形。

我們結合函數增減情形與凹向，可以得到以下的表格：

f''	+	+	−	−
f'	−	+	+	−
圖形				

[例題8] (1)討論函數 $f(x)=x^4-6x^2+3$ 圖形的增減情形與凹向。

(2)描繪 $f(x)$的圖形。

[分析]：

根據「單調性判別定理」，多項式函數 $f(x)$的增減狀況與 $f'(x)$的正負有關。根據「凹向性判別定理」，多項式函數 $f(x)$的凹向與 $f''(x)$的正負有關。因此我們可以利用滿足 $f'(x)=0$ 或 $f''(x)=0$ 的 x 來將數線分段，並討論各段之中 $f'(x)$與 $f''(x)$的正負，並且據此描繪 $f(x)$在各段大略的圖形，如此就可以大致上描繪出 $f(x)$的圖形。

[解法]：

(1)求出 $f'(x)$與 $f''(x)$。

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=0$ 或$\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$

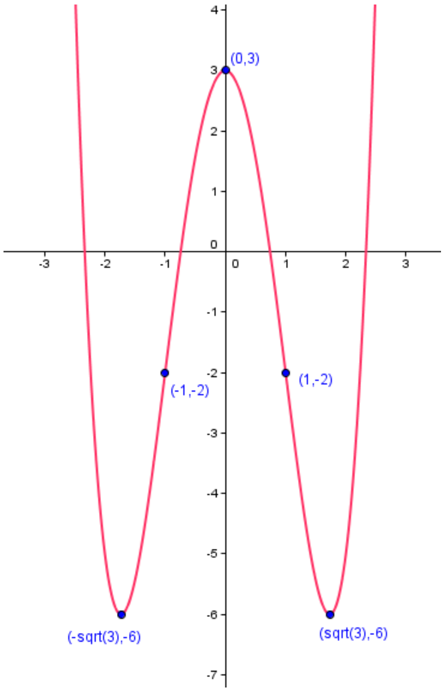
$f''(x)=12x^2-12=12(x-1)(x+1)\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow x=1$ 或-1

在數線上根據$-\sqrt{3}$、-1、0、1、$\sqrt{3}$分段，再討論各段之中 $f'(x)$與 $f''(x)$的正負列表如下：

x	$x<-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}<x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$x>\sqrt{3}$
$f''(x)$ (凹向)	+	+	+	**0**	−	−	−	**0**	+	+	+
$f'(x)$ (增減)	−	**0**	+		+	**0**	−		−	**0**	+
$f(x)$ (圖形)		−6		−2		3		−2		−6	

(2)在坐標平面上畫出$(-\sqrt{3},-6)$、$(-1,-2)$、$(0,3)$、$(1,-2)$、$(\sqrt{3},-6)$的點，然後根

據上表中各段函數的增減性與凹向，描繪出 $f(x)=x^4-6x^2+3$ 的圖形如下：



(2)漸近線的求法：

漸近線的意義：假設 Γ 為一曲線，L 為一直線，若動點 P 沿著曲線 Γ的任一方向趨向無窮遠處時，P 點至直線 L 的距離也隨之趨近於 0，則稱直線 L 為曲線 Γ的漸近線。

(a)若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ ，則 $y=l$ 為 $y=f(x)$的水平漸近線。

若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=m$ ，則 $y=m$ 為 $y=f(x)$的水平漸近線。

說明：

(b)若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$ ，則 $x=a$ 為 $y=f(x)$的鉛直漸近線。

說明：

(c)若 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ，$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$

或 $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ，$b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)$則直線 $y=ax+b$ 為 $y=f(x)$的漸近線。

說明：設 $y=ax+b$ 是 $y=f(x)$圖形的漸近線

$\Rightarrow$P(x,$f(x)$)與直線 L 的距離$=\dfrac{|f(x)-ax-b|}{\sqrt{a^2+1}}\to 0$，當 $x\to\infty$或 $x\to-\infty$

假設 $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-ax-b|=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$，

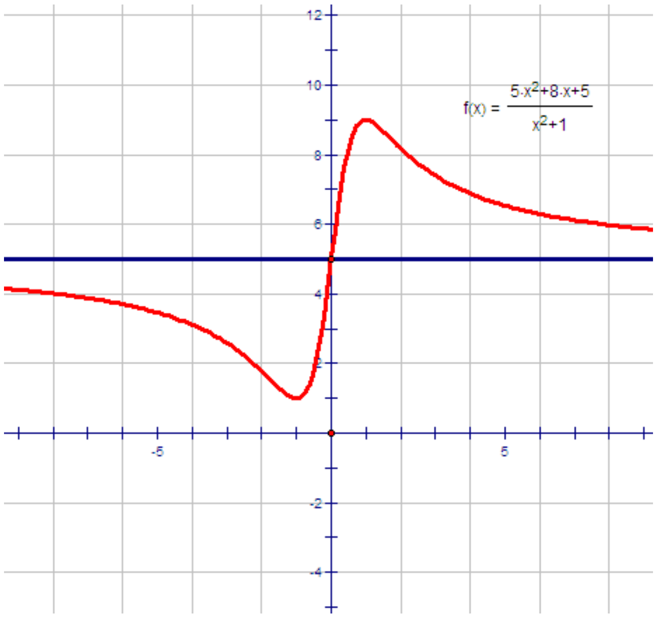
又因爲 $\lim\limits_{x\to\infty}|\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}|=\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-ax-b|\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}=0$。

$\lim\limits_{x\to\infty}|\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}|=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}=a \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$。

(d)分式函數 $f(x)=ax+b+\frac{k}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}$圖形的漸近線：

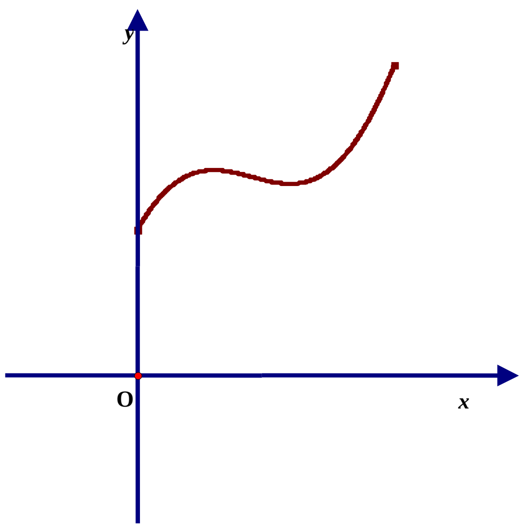
$y=ax+b$，$x=\alpha_1$，$x=\alpha_2$，$\ldots x=\alpha_n$。

[例題9] 試描繪 $f(x)=\frac{5x^2+8x+5}{x^2+1}$的圖形。



[例題10] 試求 $y=f(x)=\sqrt{3}x+2\cos x$，$0\le x\le\pi$ 的增減情形、反曲點與圖形。

Ans：$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{3})$、$(\frac{2\pi}{3},\pi)$嚴格遞增；在$(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$嚴格遞減，反曲點$(\frac{\pi}{2},\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2})$



[討論]：

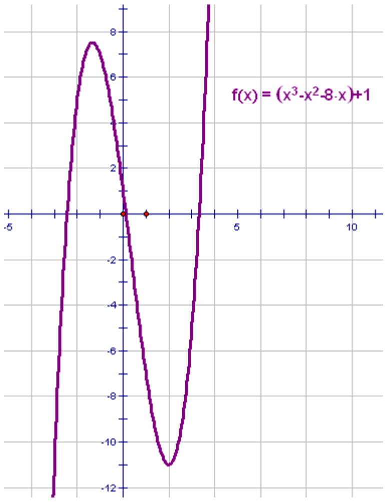
請就 c 的值討論下列圖形的變化：

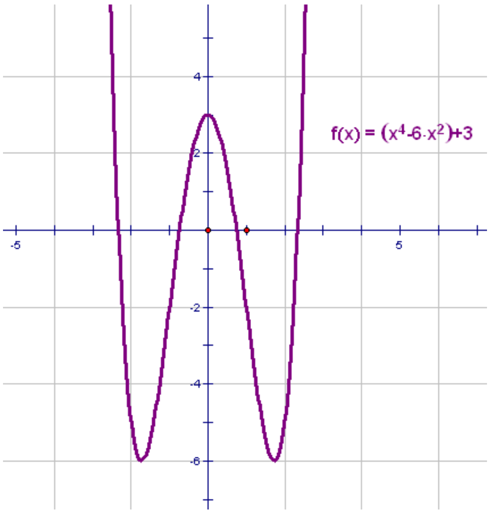
(1)$f(x)=x^3+cx$　　(2)$f(x)=x^4+cx^2$　　(3)$f(x)=\dfrac{cx}{1+c^2x^2}$　　(4)$f(x)=cx+\sin x$

你可以用微分的方法來討論，並且在 GeoGebra 上驗證。

(練習11) 描繪函數 $g(x)=x^3+6x^2+13x-1$ 的圖形，
並標示函數圖形的反曲點及過反曲點的切線。
Ans：$y=x-9$

(練習12) 描繪下列函數圖形：
(1)$f(x)=x^3-x^2-8x+1$。　(2) $f(x)=x^4-6x^2+3$
Ans：(1)　　(2)





(練習13) 求下列各函數圖形漸近線：
(1)$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$　(2)$f(x)=\dfrac{x^2}{x-a}$　(3)$y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$

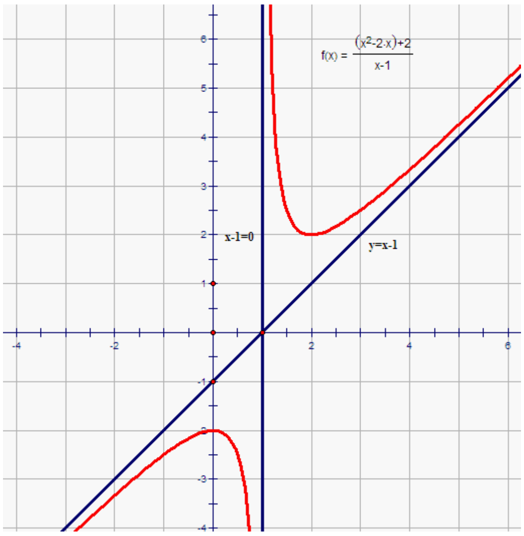
Ans：(1) $x+1=0$，$y-1=0$(2) $y=x+a$，$x=a$ (3)$y=\dfrac{1}{4}(x-5)$，$x-1=0$

(練習14) 設 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$，

(1)試問 $f(x)$圖形的漸近線。

(2)試描繪 $f(x)$的圖形。

Ans：(1)$y=x-1$、$x=1$ (2)



(練習15) 利用漸近線的定義，

證明：$y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 為雙曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的漸近線。

綜合練習

(1) 試討論下列各函數的遞增與遞減區間：

(a) $f(x)=x^2-2x+4$。

(b) $g(x)=-\ x^3-6x^2+15x-7$。

(c) $h(x)=x^4-2x^3+2x+1$。

(2) 試討論下列各函數之圖形的凹向性，並求其反曲點：

(a) $f(x)=x^3+3x^2-4x$。

(b) $g(x)=x^4-4x^3+x+5$。

(c) $h(x)=x^5-5x^4$。

(3) 設 $f(x)$爲實係數三次多項式，右圖所示爲函數 $y=f(x)$的圖形，其中 $(5,f(5))$爲反曲點。

試問 $f(x)$的導函數 $f'(x)$可能爲下列哪一個選項？

(1) $(x-5)^2-1$

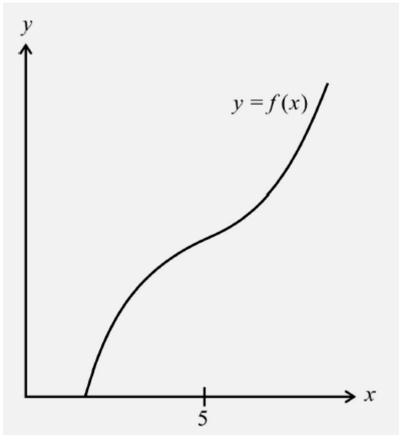
(2) $(x-5)^2+1$

(3) $(x-5)^2$

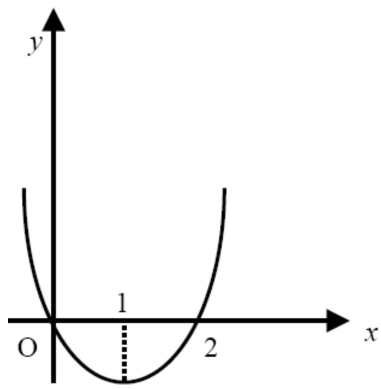
(4) $-(x-5)^2+1$

(5) $-(x-5)^2-1$

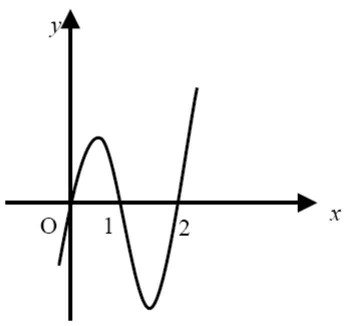
(2010 指定甲)



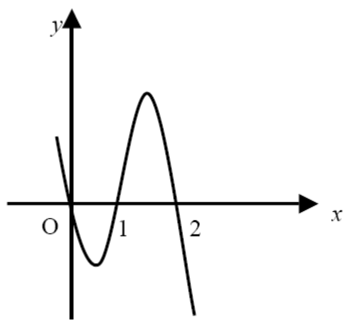
(4) 設 $f(x)$是一個多項式函數，若 $y=f'(x)$的圖形如右圖所示，則 $y=f(x)$的圖形最有可能的是下列何者？



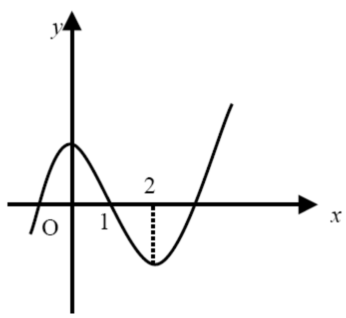
(A)



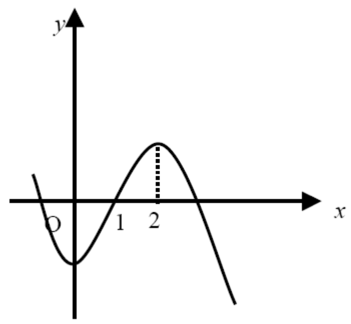
(B)



(C)



(D)



(5) 試繪下列各函數的圖形：

(a)$f(x)=2x^3-3x^2$　(b)$f(x)=2x^2-x^4$　(c) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$　(d)$f(x)=\sqrt{x^2+4}$

(6) 設 $f(x)=x^3-ax^2+2x+1$，若 $f(x)$爲遞增函數，則 a 的範圍爲何？

(7) 已知函數 $f(x)=x+\dfrac{x}{x-1}$ 請求出遞增與遞減的區間。

(8) 試證：三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$a\neq 0$ 在實數 R 上爲遞增函數的充要條件爲 $a>0$ 且 $b^2-3ac\leq 0$ 。

(9) 設 $y=f(x)$爲 x 的四次多項函數，圖形有二個反曲點(2,16)，(0,0)，並且過(2,16)的切線與 x 軸平行，試求 $f(x)$。

(10) 設曲線 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 之反曲點爲(1,8)，試求(a,b)=?

(11) 求曲線 $y=x^4-6x^3+12x^2-8x$ 上，以反曲點爲切點之切線方程式。

(12) 已知函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ 僅在區間[－1，3]上爲遞減函數，試求函數圖形 $y=f(x)$的反曲點坐標。

進階問題

(13) 利用函數的凹凸性，證明：若 A、B、C 爲三角形的三內角，

則$\dfrac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

(14) 設 $f(x)=x+\cos x$，

(a)試討論 $f(x)$的增減情形。(b)試求 $y=f(x)$的反曲點的 x 坐標。

(15) 曲線 $y=1-\cos x$ 上點$(t,1-\cos t)$處的切線與 x 軸的交點記爲$(f(t),0)$，其中$-\pi<t<\pi$，

$t\neq 0$　(a)求 $f(t)$。 (b)求$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}$=？　(c)考慮函數$\dfrac{f(t)}{t}$的增減情形。

(16) 令 $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$，證明：$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-x^2]=0$。

上述事實說明了 $f(x)$的圖形漸近於 $y=x^2$ 的圖形。

請描繪 $f(x)$的圖形觀察這個事實。

(17) 利用 Lagrange 中間值定理證明：

設連續函數 $f:[a,b]\to\mathrm{R}$，$f'(x)$存在，$\forall x\in(a,b)$，$f(x)$在$[a,b]$上的常數函數的充要條件是$\forall x\in(a,b)$，$f'(x)=0$。

綜合練習解答

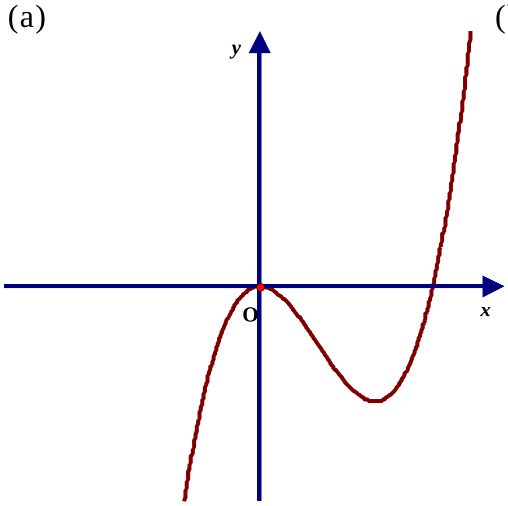
(1)　(a)$(-\infty, 1)$遞增，〔$1, \infty$〕遞減；
(b)〔$-5, 1$〕遞增，$(-\infty, -5)$與〔$1, \infty$〕遞減；
(c)〔$-\dfrac{1}{2}, \infty$〕遞增，$(-\infty, -\dfrac{1}{2})$爲遞減

(2)　(a)〔$-1, \infty$〕凹口向上，$(-\infty, -1)$凹口向下，$(-1, 6)$反曲點；
(b) $(-\infty, 0)$與〔$2, \infty$〕凹口向上，〔$0, 2$〕凹口向下，
$(0, 5)$ 與 $(2, -9)$反曲點；
(c)〔$3, \infty$〕凹口向上，$(-\infty, 3)$凹口向下，$(3, -162)$反曲點

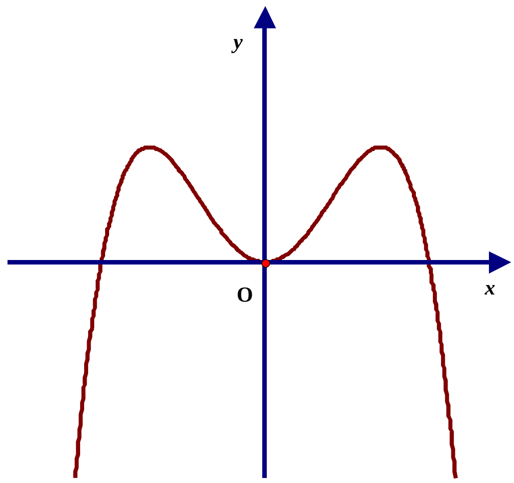
(3)　(2)
[解法]：
如右圖，可以得知在$(5,f(5))$的切線斜率爲正，而且 $x>5$ 凹口向上；$x<5$ 凹口向下。故(1)(3)(5)一定不是答案
(2)中 $f''(x)=2(x-5)$，符合圖形特性。
(3)中 $f''(x)=-2(x-5)$不符合圖形特性。故選(2)。

(4)　(C)

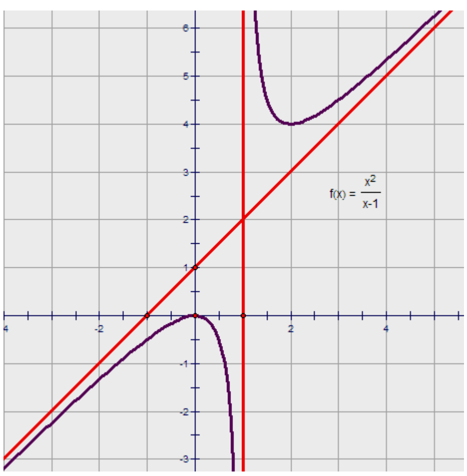
(5)　(a)



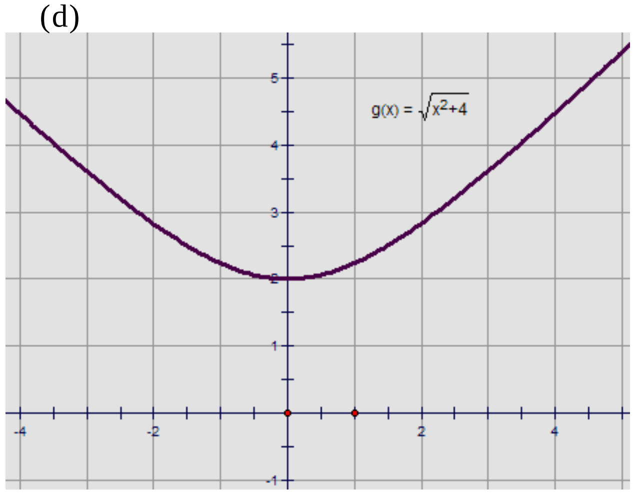
(b)



(c)



(d)



(6) $-\sqrt{6}\le a\le\sqrt{6}$

(7) $x\ge2$ 或 $x\le0$ 遞增，$0\le x\le2$ 且 $x\ne1$ 遞減

(8) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$a\ne0$ 在實數 R 上爲遞增函數的充要條件爲 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 在實數 R 上恆正。

(9) $f(x)=x^4-4x^3+16x$

(10) $(-3,9)$

(11) $2x-y-3=0$，$y=0$

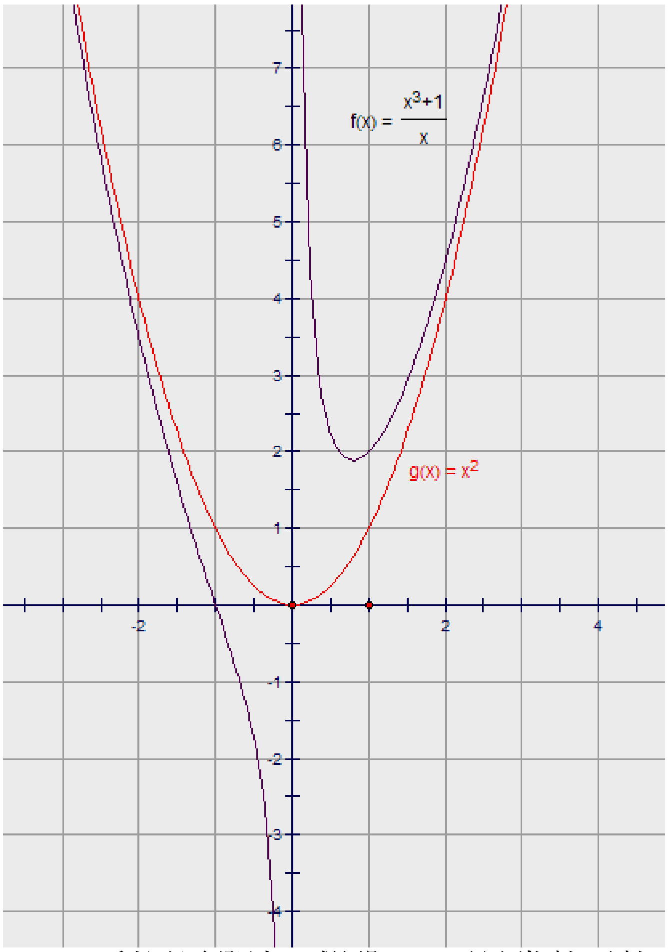
(12) (1，−7)

(13) 提示：$f(x)=\sin x$ 在$[0,\pi]$凹口向下

(14) (a)增函數 (b) $(n\pi+\dfrac{\pi}{2},0),n\in Z$

(15) (a)$f(t)=t-\dfrac{1-\cos t}{\sin t}$ (b)$\dfrac{1}{2}$ (c)$-\pi<t<0$ 時，$\dfrac{f(t)}{t}$遞增；$0<t<\pi$時，$\dfrac{f(t)}{t}$遞減

(16) 證明自己寫！$f(x)$的圖形如下：



(17) (⇐)利用反證法，假設 $f(x)$不是常數函數，則存在 x_1、$x_2\in[a,b]$，使得 $f(x_1)\ne f(x_2)$，再根據 Lagrange 中間值定理，存在 $t\in(a,b)$，

使得 $f'(t)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$，此與條件矛盾。

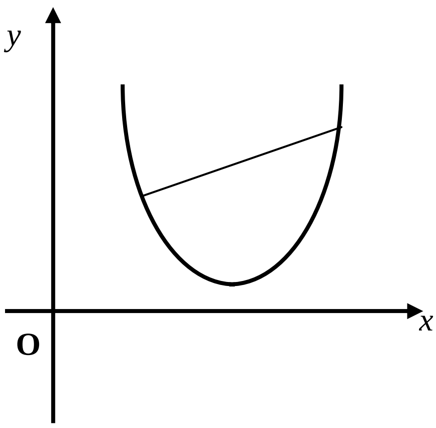
補充教材

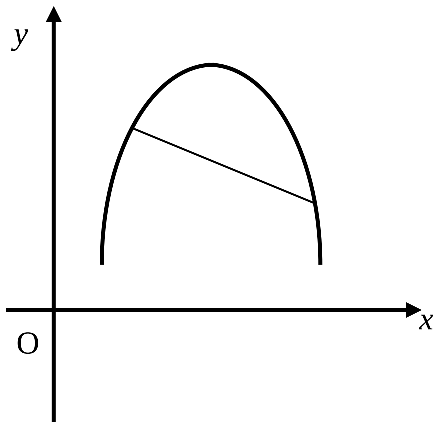
◆　函數凹向性判別定理：

(1)函數凹向性的定義：

(a)設 $f(x)$是定義在(a,b)上的函數，令Γ爲函數 $y=f(x)$的圖形，如果連接Γ上任意兩點的線段位於連接此兩點的上方，稱 $y=f(x)$在(a,b)上凹口向上**(concave　upward)**。

(b)設 $f(x)$是定義在(a,b)上的函數，令Γ爲函數 $y=f(x)$的圖形，如果連接Γ上任意兩點的線段位於連接此兩點的下方，稱 $y=f(x)$在(a,b)上凹口向下**(concave　downward)**。





(2)判別定理的證明：

函數凹向性判別定理 設 f：$(a,b)\to R$ 爲一個二階可微分的函數。 (1) $f''(x)\le 0$，$\forall x\in(a,b) \Leftrightarrow f(x)$在$(a,b)$內凹口向下。 (2) $f''(x)\ge 0$，$\forall x\in(a,b) \Leftrightarrow f(x)$在$(a,b)$內凹口向上。

證明：(僅供參考)

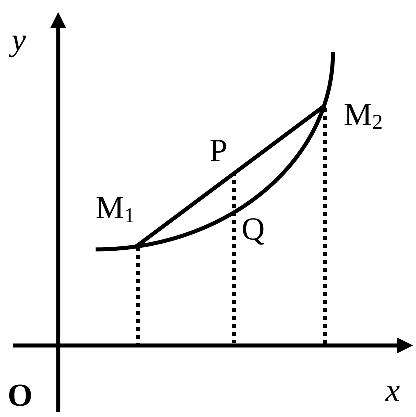
(1)先證必要性，即證明 $f'(x)$爲遞增函數

$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，設 $M_1(x_1,f(x_1))$和 $M_2(x_2,f(x_2))$的連線斜率爲 m，

任取 $x\in(x_1,x_2)$，設 $P(x,\tilde{y}(x))$，(其中$\tilde{y}(x)=mx+k$)是線段 M_1M_2 上相對應的點，

因爲 $f(x)$凹口向上，所以$\tilde{y}(x)\ge f(x)$。

如右圖，可以得知 M_1Q 的斜率$\le M_1M_2$ 的斜率$\le M_2Q$ 的斜率



$\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\dfrac{\tilde{y}(x)-f(x_1)}{x-x_1}=m$，$\Rightarrow f'_+(x_1)\le m$

$\dfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}\ge\dfrac{\tilde{y}(x)-f(x_2)}{x-x_2}=m$，　$\Rightarrow f'_-(x_2)\ge m$

因爲 $f'(x_1)$與 $f'(x_2)$存在

$\Rightarrow f'(x_1)=f'_+(x_1)\le m\le f'_-(x_2)=f'(x_2)$

因此 $f^{\prime}(x)$爲遞增函數 $\Rightarrow f^{\prime\prime}(x)\leq 0$

(2)再證充分性，

$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，設 $M_1(x_1,f(x_1))$和 $M_2(x_2,f(x_2))$的連線斜率爲 m，

任取 $x\in(x_1,x_2)$，設 $P(x,\tilde{y}(x))$是線段 M_1M_2 上相對應的點，欲證明 $\tilde{y}(x)\geq f(x)$。

設$\varphi(x)=f(x)-\tilde{y}(x)$，因爲$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$，$\varphi^{\prime}(x)=f^{\prime}(x)-m$

根據均值定理定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f^{\prime}(\xi)=m$

設 $x_1<x\leq\xi$，因爲 $f^{\prime\prime}(x)\geq 0$，所以 $f^{\prime}(x)$爲遞增函數 $\Rightarrow f^{\prime}(x)\leq f^{\prime}(\xi)=m$，故$\varphi^{\prime}(x)\leq 0$

所以$\varphi(x)\leq\varphi(x_1)=0$

設$\xi<x<x_2$，因爲 $f^{\prime\prime}(x)\geq 0$，所以 $f^{\prime}(x)$爲遞增函數 $\Rightarrow f^{\prime}(x)\geq f^{\prime}(\xi)=m$，故$\varphi^{\prime}(x)\geq 0$

所以$\varphi(x)\leq\varphi(x_2)=0$

故$\varphi(x)=f(x)-\tilde{y}(x)<0$ ，故可得$\tilde{y}(x)\geq f(x)$

因此 $f(x)$在(a,b)內凹口向下。