第十七單元　倍角公式

(甲)倍角公式

(1)二倍角公式：

由和角公式：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$，令$\alpha=\beta=\theta$　，可得

(a)$\boxed{\sin 2\theta=2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta}$

由和角公式：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$，令$\alpha=\beta=\theta$　，可得

(b)$\boxed{\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta}$

由和角公式：$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$，令$\alpha=\beta=\theta$　，可得

(c)$\boxed{\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$

[注意]：

根據公式(b) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$，可知已知$\theta$的正弦值、餘弦值，可得 2θ 的餘弦值。另一方面，若已知α的餘弦值，就可得$\frac{\alpha}{2}$的正弦值、餘弦值。

例如：

已知 $\cos\theta=\frac{2}{3}$，請求出 $\cos 2\theta=$？

[解法]：

根據 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2(\frac{2}{3})^2-1=\frac{-1}{9}$，已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，且 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，試求 $\cos\frac{\alpha}{2}=$？

根據(b)令 $2\theta=\alpha$，可得 $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$，所以 $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{6}$ $\Rightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$ $\Rightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{5}{6}}$。

結論：我們整理倍角公式如下：

(a)$\sin 2\theta=2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$

(b)$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

(c)$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

(d) $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

(e)$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$　，$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

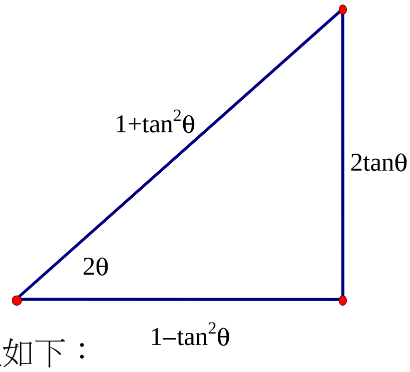
(2)以正切表示二倍角

$\boxed{\sin2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}}$

證明：

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\ \cos^2\theta=2\tan\theta(\dfrac{1}{\sec^2\theta})=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\boxed{\cos2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}$



證明：

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{2}{\sec^2\theta}-1=\dfrac{2}{1+\tan^2\theta}-1=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

結論：利用 tanθ可以將 sin2θ，cos2θ，tan2θ表示出來，整理如下：

(a) $\sin2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ (b) $\cos2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ (c) $\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

[討論]：

利用 tanθ 來表示 sin2θ、cos2θ、tan2θ，主要是將 sinθ、cosθ、tanθ表示成分式的形式，即 $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$，其中 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$為任意實數，可以應用於求某些三角函數的積分。

(3)三倍角公式

(a)$\boxed{\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta}$

證明：

$\sin3\theta=\sin(\theta+2\theta)=\sin\theta\cos2\theta+\cos\theta\sin2\theta$

$=\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+\cos\theta(2\sin\theta\cos\theta)$

$=\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta\cos^2\theta$

$=\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta(1-\sin^2\theta)=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(b)$\boxed{\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta}$

證明：

$\cos3\theta=\cos(\theta+2\theta)=\cos\theta\cos2\theta-\sin\theta\sin2\theta$

$=\cos\theta(2\cos^2\theta-1)-\sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)$

$=\cos\theta(2\cos^2\theta-1)-2\sin^2\theta\cos\theta$

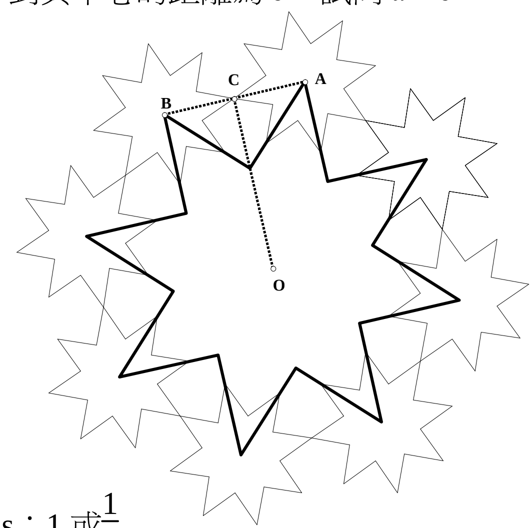
$= \cos\theta(2\cos^2\theta-1)-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

[例題1] 已知 $\tan\theta=\frac{-3}{4}$且$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，求

(1)$\cos2\theta$、$\tan2\theta$ (2)$\sin\frac{\theta}{2}$、$\tan\frac{\theta}{2}$

Ans：(1)$\cos2\theta=\frac{7}{25}$、$\tan2\theta=\frac{-24}{7}$、(2)$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$、$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{-1}{3}$

[例題2] 如右圖，一個大的正八角星形的頂點為周圍八個全等的小正八角星形中心，相鄰的兩個小八角星有一個共同頂點。觀察圖中虛線部分，設小八角星頂點 C 到其中心 A 的距離為 a，大八角星頂點 A 到其中心的距離為 b。試問 a：b 的比值為何？ Ans：$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$



[例題3] 若 $3\cdot\sin2\theta+2\cos2\theta=3$，求 $\tan\theta$ 之值。 Ans：1 或$\frac{1}{5}$

[例題4] 設 $\sin 2\theta=\frac{-3}{5}$，$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{4}$，試求下列之值：

(1)$\sin\theta-\cos\theta$　(2)$\cos^4\theta-\sin^4\theta$　(2)$\tan\theta+\cot\theta$　(3)$\sin^6\theta+\cos^6\theta$

Ans：(1)$\sqrt{\frac{8}{5}}$ (2)$\frac{-4}{5}$ (2)$\frac{-10}{3}$ (3)$\frac{73}{100}$

結論：

底下是一些有用的公式：

(a)$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$　(b)$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

(c)$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

(d)$\sin^6\theta+\cos^6\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3-3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

(e)$\tan\theta+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{\sin 2\theta}$

(f)$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta\pm 2\sin\theta\cos\theta=1\pm\sin 2\theta$

(練習1) 設$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$且 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，求 $\sin 2\theta$及 $\sin\frac{\theta}{2}$、$\sin 3\theta$的值。

Ans：$\sin 2\theta=\frac{-24}{25}$，$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$、$\sin 3\theta=\frac{117}{125}$

(練習2) 試求 $\sin\frac{\pi}{8}$，$\cos\frac{\pi}{8}$，$\tan\frac{\pi}{8}$之值。Ans：$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$，$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$，$-1+\sqrt{2}$

(練習3) $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$，且 $\tan\theta=\frac{3}{4}$，則 $\sin\frac{\theta}{2}$ =____，$\cos\frac{\theta}{2}$ =____。Ans：$\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\frac{-1}{\sqrt{10}}$

(練習4) 設 $\cos 2\theta=t$，試以 t 表示 $4(\cos^6\theta-\sin^6\theta)=$？ Ans：$t^3-3t$

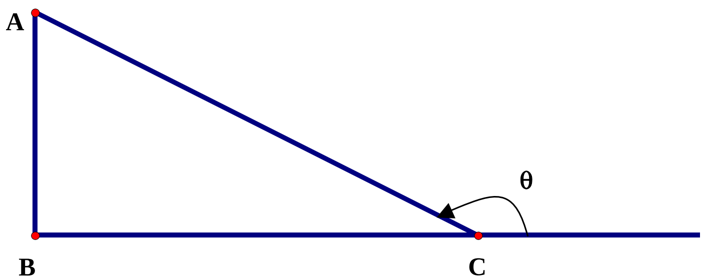
(練習5) 設$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，且 $3\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta=0$，則 $\sin 2\theta+\cos 2\theta=$_____。

Ans：$\frac{-7}{13}$

(練習6) 試求 $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$的值。Ans：$\frac{3}{2}$

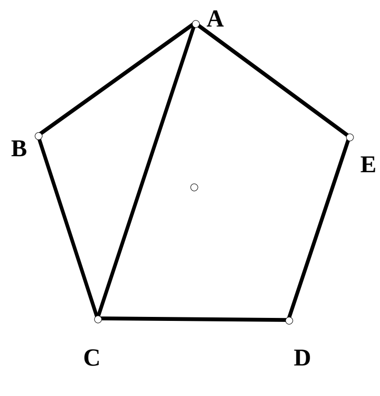
(練習7) $\frac{-\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$， 且 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$，
則(1)$\sin2\theta=$____ (2)$\cos2\theta=$_____，(3)$\sin^3\theta+\cos^3\theta=$_____。
Ans：(1)$\frac{-15}{16}$(2)$\frac{\sqrt{31}}{16}$ (3)$\frac{47}{128}$

(練習8) 如圖，θ為一有向角，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，求 $\sin2\theta=$？Ans：$\frac{-24}{25}$



(乙)倍角公式的應用

[例題5] (1)利用倍角公式，求出 sin18°之值。
(2)求 sin54°之值。
(3) 如圖，假設正五邊形的邊長為 a，請求出對角線$\overline{AC}$的長度。
Ans：(1) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ 註：$\mathbf{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$**稱為黃金比例數**



[例題6] 求在 $0<x<2\pi$ 的範圍內，$y=\sin x$ 與 $y=\sin 2x$ 兩圖形的交點坐標。

Ans：$(\pi,0)$、$(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$、$(\frac{5\pi}{3},\frac{-1}{2})$

[例題7] 已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=2$、$\overline{BC}=3$ 且 $\angle A=2\angle C$，則 $\overline{AC}=$_________。

Ans：$\frac{5}{2}$　(2010 學科能力測驗)

(練習9) 利用 $\sin 18^\circ$ 的值求出 $\cos 36^\circ$ 的值。Ans：$\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

(練習10) 試求在 $0\le x\le 2\pi$ 的範圍內，$y=\cos x$ 與 $y=\cos 2x$ 兩圖形的交點坐標。

Ans：$(0,1)$、$(\frac{2\pi}{3},\frac{-1}{2})$、$(\frac{4\pi}{3},\frac{-1}{2})$、$(2\pi,1)$

(練習11) 設 $f(x)=4x^3-3x+1$，則 $f(x)$ 被 $x-\sin\frac{\pi}{9}$ 除後所得的餘式=______。

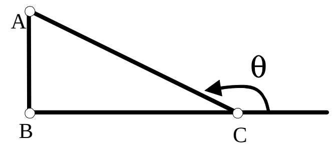
Ans：$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (提示：利用三倍角公式與餘式定理)

(練習12)求下列的值：

(1)$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$　(2)$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$　Ans：(1)$\frac{1}{8}$ (2)$\frac{-1}{8}$

綜合練習

(1) 如圖，θ為一個有向角，$\overline{AB}$=2，$\overline{BC}$ =5，則 sin2θ =____ 。



(2) 設 $\cos\theta=\frac{3}{5}$且$\frac{3\pi}{5}<\theta<2\pi$，求(a)sin2θ　(b)sin3θ　(c)$\cos\frac{\theta}{2}$

(3) 設$\cos 2\alpha=\frac{1}{3}, \frac{3\pi}{2}\le 2\alpha\le 2\pi$ ，求

(a) $\cos\alpha$　(b) $\tan\alpha$　(c) $\cos^4\frac{\alpha}{2}+\sin^4\frac{\alpha}{2}$ 之值

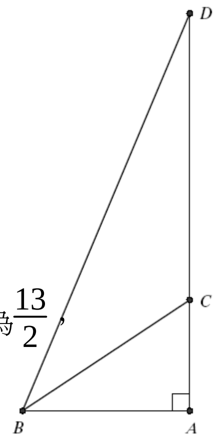
(4) 設 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，且 $\cos\alpha=\frac{11}{61}$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$，請求出

(a)cos(α−β)　(b)$\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$　(c)$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$ 。

(5) 如右圖，直角三角形 ABD 中，∠A 為直角，

C 為$\overline{AD}$邊上的點。已知$\overline{BC}$=6，$\overline{AB}$=5，∠ABD=2∠ABC，

則$\overline{BD}$=___________。(2010 學科能力測驗)



(6) 在ΔABC 中，已知$\overline{AB}$=5，cos∠ABC= $\frac{-3}{5}$ ，且其外接圓半徑為$\frac{13}{2}$，

則 sin∠BAC=_________ 。　(2010 指定甲)

(7) 下列何者為 $8x^3-6x+1=0$ 之根？

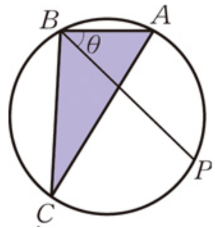
(A) sin10°(B) sin30°(C) sin130°　(D) sin160°　(E)sin250°。

(8) 設 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，若 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos\beta=\frac{5}{13}$則

(A)$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ (B)$\tan(\alpha-\beta)=\frac{-16}{63}(C)\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (D)$\sin 2\beta=\frac{120}{169}$

(9) 如右圖，在△ABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，且∠B 的分角線交其外接圓於 P 點，若∠$ABP=\theta$，求：

(a) sinθ 之值。(b) $\overline{PC}$ 之長。



(10) 求函數 $f(x)=2\sin^2 x$ 的週期。

(11) 化簡$\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}$ =____ 。

(12) 化簡$-\cos^2\theta+\cos^2(\frac{\pi}{6}+\theta)+\cos^2(\frac{\pi}{6}-\theta)$=____ 。

(13) 若 $\sin x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，請計算 $\sin 2(x-\dfrac{\pi}{4})=$？

(14) 設 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，求 $\tan\dfrac{\theta}{2}$之值。

(15) 若$\dfrac{5\pi}{4}<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，$\sin 2\theta=a$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$________。

(16) 設 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，試化簡$\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}$。

(17) 設 $x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+1=0$ 有一根 $2+\sqrt{3}$，求 $\sin 2\theta=$____。

(18) $2x^2+ax-1=0$ 有一根為 $\sin 30°+\cos 30°$，求 a 的值。

(19) 以 $x-\cos 40°$ 除 $f(x)=3x-4x^3$ 之餘式為__________。

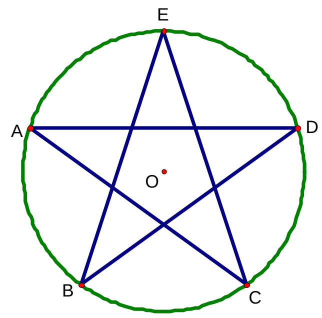
(20) (a)試求 $\cos\dfrac{\pi}{16}$；$\sin\dfrac{\pi}{16}$？

(b)試求單位圓內接正十六邊形的面積及周長？

(21) 設$\pi<x<2\pi$，化簡 $\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}$。

(22) 已知正五角星(即 $ABCDE$ 為正五邊形)內接於一圓 O，如右圖所示.若 $\overline{AC}=1$，則圓 O 的半徑長=？.

[$\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\cos 18°=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$]



(23) 等腰三角形的頂角為 $20°$，腰長為 1，底長為 $2b$，試求 $8b^3-6b$ 之值為何？

(24) 四邊形 ABCD 內接於圓 O，圓 O 的半徑為$\dfrac{65}{8}$，已知四邊形的周長為 44，

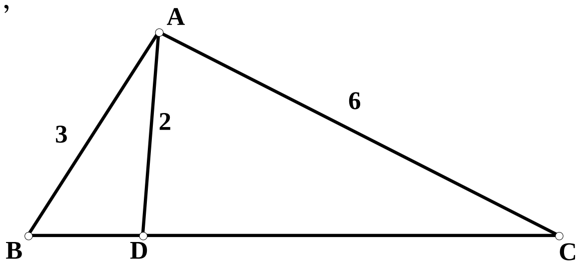
$\overline{BC}=\overline{CD}=13$，試問$\overline{AB}$、$\overline{AD}$的長度為何？

(25) 已知ΔABC 的$\angle A$ 和 b、c 兩邊，試求$\angle A$ 的內角平分線段長。

(26) 在右圖ΔABC 中，$\overline{AB}=3,\overline{AC}=6,\overline{AD}=2$，且$\angle BAD=\theta$，$\angle DAC=2\theta$ ：

(a)利用ΔABC 之面積=ΔABD 面積+ΔADC 面積，以θ之三角函數列出方程式。

(b)試利用(a)的結果求 $\cos\theta$ 之值。



進階問題

(27) 化簡求 $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$ 之積。

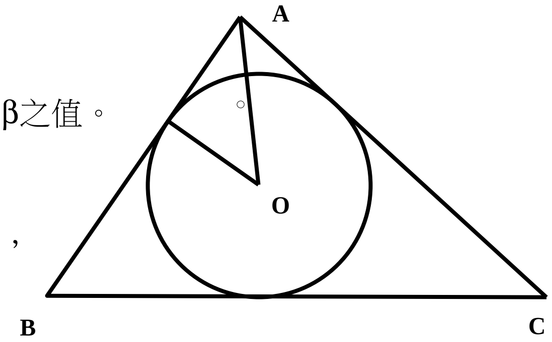
(提示：令 $A=\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$ ，同乘 $\sin\frac{\pi}{15}$，再利用 $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ 的公式)。

(28) 設實數 x 滿足 $\sin^4x-6\sin^2x\cos^2x+\cos^4x$

(a)求 $\sin^2x\cos^2x$ 的值。

(b)設 $0\le x\le\pi$,試求 $x=$？

(29) 設 $\sin\alpha+\sin\beta=1$，$\cos\alpha+\cos\beta=0$，求 $\cos2\alpha+\cos2\beta$之值。



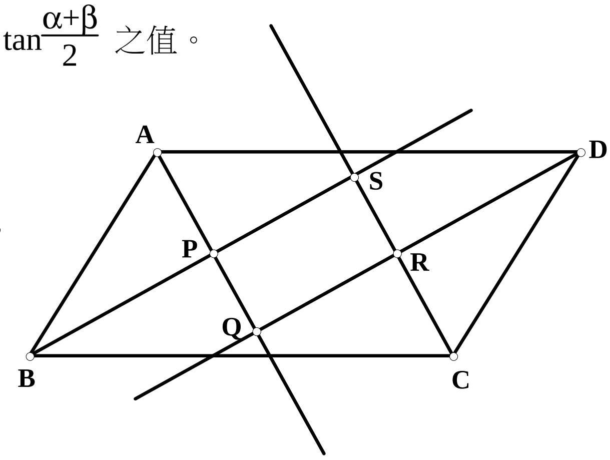
(30) ΔABC 中，BC=a，CA=b，AB=c，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ ，

試證： $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

(31) 設α,β為 $a\cos x+b\sin x+c=0$ 的相異二根，$a\neq0$，$-\pi<\alpha,\beta<\pi$

(a)令 $\tan\frac{x}{2}=t$，試將上述方程式化成 t 的方程式。

(b)求 x 在$-\pi$與π之間有二實根的條件。(c)求 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$ 之值。



(32) 平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=a$，$\overline{AD}=b$，且 $a\neq b$，$\angle A=\alpha$，其內角平分線圍成一矩形，試以 a,b,α表示此矩形的面積。

綜合練習解答

(1) $\dfrac{-20}{29}$

(2) (a)$\dfrac{-24}{25}$ (b)$\dfrac{-44}{125}$ (c)$\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$

(3) (a)$\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$ (b)$\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ (c)$\dfrac{5}{6}$

(4) (a)$\dfrac{273}{305}$ (b)$\dfrac{16}{305}$ (c)$\dfrac{49}{305}$

(5) $\dfrac{90}{7}$

(6) $\dfrac{33}{65}$

(7) (A)(C)(E)

(8) (B)(C)(D)

(9) (a)$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (b)$\dfrac{21}{4}$

(10) π

(11) $\dfrac{3}{2}$

(12) $\dfrac{1}{2}$

(13) $2-\sqrt{5}$

(14) $\sqrt{2}-1$

(15) $-\sqrt{1-a}$

(16) $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$[提示：$1+\sin\alpha=\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2})^2$，$1-\sin\alpha=\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2})^2$]

(17) $\dfrac{1}{2}$

(18) -2

(19) $\dfrac{1}{2}$

(20) (a)$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$ ；$\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

(b)面積$=8\sin\dfrac{\pi}{8}=4\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ；周長$32\sin\dfrac{\pi}{16}=16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

(21) $\sqrt{2}(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2})$[提示：利用 $\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}-1=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$]

(22) $\dfrac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

(23) -1

(24)　4、16 或 16、4

[提示：設$\overline{AB}=x,\overline{AD}=y$，$\angle CBD=\angle CDB=\theta$，根據正弦定理可知 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，又周長為 44，所以 $x+y=18$，由餘弦定理可知$\overline{BD}^2=x^2+y^2-2xy\cos2\theta$，根據倍角公式$\Rightarrow xy=56$]

(25)　$\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$

(26)　(a)$3\sin3\theta=\sin\theta+2\sin2\theta$ (b)$\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$

(27)　$\dfrac{-1}{16}$　。

(28)　(a)$\frac{1}{8}$　(b)$\frac{\pi}{8}$、$\frac{3\pi}{8}$、$\frac{5\pi}{8}$、$\frac{7\pi}{8}$

(29)　1[提示：$\sin\alpha=1-\sin\beta$，$\cos\alpha=-\cos\beta$，兩式平方相加可得 $\sin\beta=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 再計算 $\cos2\alpha+\cos2\beta$]

(30)　[提示：$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{r^2}{OA^2}$，因為 $r=\frac{\Delta}{s}$　所以 $r^2=\frac{1}{s^2}\cdot s(s-a)(s-b)(s-c)$ $=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$，$OA^2=r^2+(s-a)^2=\frac{(s-a)[(s-b)(s-c)+s(s-a)]}{s}$，

$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{r^2}{OA^2}=\frac{(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)+s(s-a)}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$]

(31)　(a)$(c-a)t^2+2bt+(a+c)=0$ (b)$a^2+b^2\ge c^2$　(c)$\frac{b}{a}$

(32)　$\frac{1}{2}(b-a)^2\sin\alpha$ [提示：$BS=BC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=b\sin\frac{\alpha}{2}$，$BP=BA\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$

$PS=BS-BP=(b-a)\sin\frac{\alpha}{2}$，$AQ=AD\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$，$AP=AB\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$，

$PQ=AQ-AP=(b-a)\cos\frac{\alpha}{2}$，故矩形面積$=PS\cdot PQ=\frac{1}{2}(b-a)^2\sin\alpha$。]