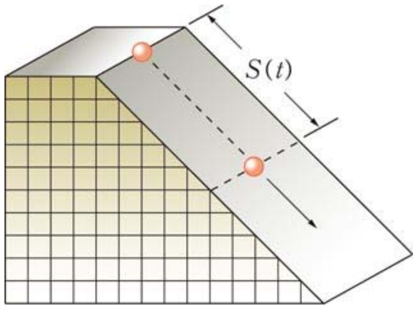
第四十七單元　函數的極限

(甲)函數極限的概念

求函數的極限是微積分最基本的課題。首先我們要透過兩個古典問題：速度與切線來引進極限的概念。

(1)引進函數極限的概念：

(a)以求瞬時速度為例：



右圖中有一顆小球沿斜面自由下滾，已知小球的位移s(公尺)與時間t（秒）之關係為$s=S(t)=2t^2$。

為了便於說明與列表，引進一些符號：

$\Delta t=t_2-t_1$：表由t_1秒到t_2秒的“時間差”。

$\Delta s=S(t_2)-S(t_1)$：表由與t_1到t_2對應的“位移差”。

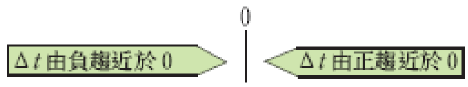
(1°)考慮 t=2 秒附近小球滾動的平均速度：

設Δt表“時間差”(Δt可正、可負)，從t=2 秒到 t=$(2+\Delta t)$秒，小球滾動的“位移差”為$\Delta s=S(2+\Delta t)-S(2)=2[(2+\Delta t)^2-2^2]=2\cdot\Delta t(4+\Delta t)$。

從t=2 秒到t=$(2+\Delta t)$ 秒，小球滾動的“平均速度”為$\overline{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=8+2\Delta t$，

平均速度$\overline{v}=\overline{v}(\Delta t)$為$\Delta t$的函數。

今列表來觀察在“t=2 秒附近”，小球滾動的平均速度：



時段 $2\sim2+\Delta t$	$2\sim1.9$	$2\sim1.99$	$2\sim1.999$	…	$2\sim2.001$	$2\sim2.01$	$2\sim2.1$
時間差Δt	-0.1	-0.01	-0.001	…	0.001	0.01	0.1
平均速度 $\overline{v}=8+2\Delta t$	7.8	7.98	7.998	…	8.002	8.02	8.2

(2°) t=2 秒的瞬時速度：

現在當時間間隔Δt愈來愈趨近於 0 時，由上表可以看出：

當$\Delta t>0$且Δt趨近於 0 時，平均速度依序為 8.2，8.02，8.002，…（公尺/秒）。

當$\Delta t<0$且Δt趨近於 0 時，平均速度依序為 7.8，7.98，7.998，…（公尺/ 秒 ）。

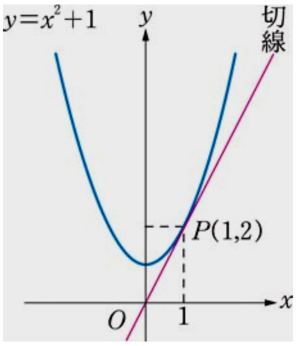
即$|\Delta t|$越來越小時($\Delta t\neq0$)，其平均速度$\overline{v}$ 越來越趨近 8，8 稱為“函數$\overline{v}(\Delta t)$ ”的**極限**，這個極限就是在 t=2 秒的**瞬時速度**。

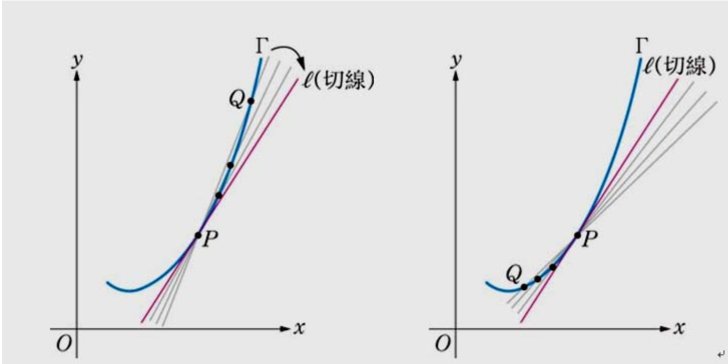
這個事實用數學符號可以表示成「若$\Delta t\to0$，則 $\overline{v}=8+2\Delta t\to8$」。

或寫成「$\lim\limits_{\Delta t\to0}\overline{v}=8$」。故小球在$t=2$ 秒 時的「瞬時速度」是 8 (公尺/ 秒)

(b)以求函數圖形的切線為例：

設$f(x)=x^2+1$之圖形為拋物線Γ，如何求通過Γ以點$P(1，f(1))$為切點的切線。





(a) Q從P之右側趨近P　　(b) Q從P之左側趨近P

首先考慮“**割線的斜率**”。

過點 $P(1, f(1))$任作一條割線，此割線與Γ交於另一點 $Q(1+\Delta x, f(1+\Delta x))$，

其中$\Delta x=(1+\Delta x)-1$。　　（橫坐標的差量）

$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)$。　（縱坐標的差量）

那麼割線 PQ 的斜率為$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，如上圖，進一步計算$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$如下：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{\left[(1+\Delta x)^2+1\right]-2}{\Delta x}$$

$$=\frac{(\Delta x)\cdot(1+\Delta x+1)}{\Delta x}=2+\Delta x\text{，（注意}\Delta x\neq 0\text{）}$$

所以$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2+\Delta x$。

當Δx 逐漸趨近於 0 時，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2+\Delta x$ 會逐漸趨近於 2。

從圖形來看，Δx 逐漸趨近於 0 時，即 Q 點逐漸趨近於 P 點，那麼割線 PQ 的斜率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$會逐漸趨近於切線的斜率 2。所以曲線 Γ 在點 $P(1, 2)$ 之切線斜率 m 為 2

上面提到的“速度問題”與“切線問題”都與微積分的誕生息息相關。

速度	平均速度 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$	瞬時速度（即平均速度的極限） $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$。
切線	割線斜率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	切線斜率（即割線斜率的極限） $m=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。

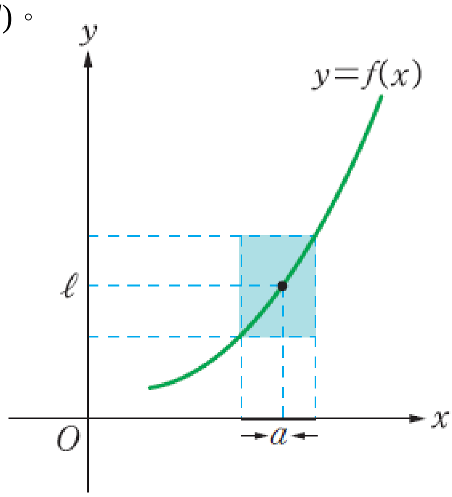
這兩個古典問題的解決，最後都要求某一個函數在某處的極限。

即“當 x 趨近於 c 時，$f(x)$是否趨近於某一個數 l。”

(2)函數極限的定義：

設 $f(x)$爲一函數，若 x 從 a 的左右兩邊趨近 a(但 $x\neq a$)時， 則函數 $f(x)$趨近一確定的實數 l，就稱 x 趨近 a 時($x\to a$)時 ，函數 $f(x)$的極限爲 l($f(x)\to l$)。

符號記爲：$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ 。



$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不一定存在，但若$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在，其值必唯一。

由圖形來說：

考慮點 $P(x,f(x))$，當 x 趨近 c 時，點 $P(x,f(x))$會趨近點(c,l)，

則$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

補充：(理論上的定義)

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=l$

$\Leftrightarrow$ 給定一個正數ε，可以找到一個正數$\delta=\delta(\varepsilon)$，使得當 x 滿足 $0<|x-c|<\delta$，$|f(x)-l|<\varepsilon$

[例題1] 設三個函數定義如下：

$$f(x)=x^2+x+1，g(x)=\frac{x^3-1}{x-1}，h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$$

(1) 概略描出 $y=f(x)$的圖形，並求$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。

(2) 概略描出 $y=g(x)$的圖形，並求$\lim\limits_{x\to 1} g(x)$。

(3) 概略描出 $y=h(x)$的圖形，並求$\lim\limits_{x\to 1} h(x)$。

[解法]：

(1) $f(x)=x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$。

$y=f(x)$之圖形是一條拋物線（沒有斷點），如圖(a)所示。

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$。

(2)因 $g(x)$的定義域爲 $A=\{x\mid x\in R，x\neq 1\}$，

當 $x\in A$ 時，$g(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$，

所以 $y=g(x)$的圖形就是“$y=f(x)$的拋物線去掉一個點$(1，3)$”， 如圖 1–28 所示。$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$。

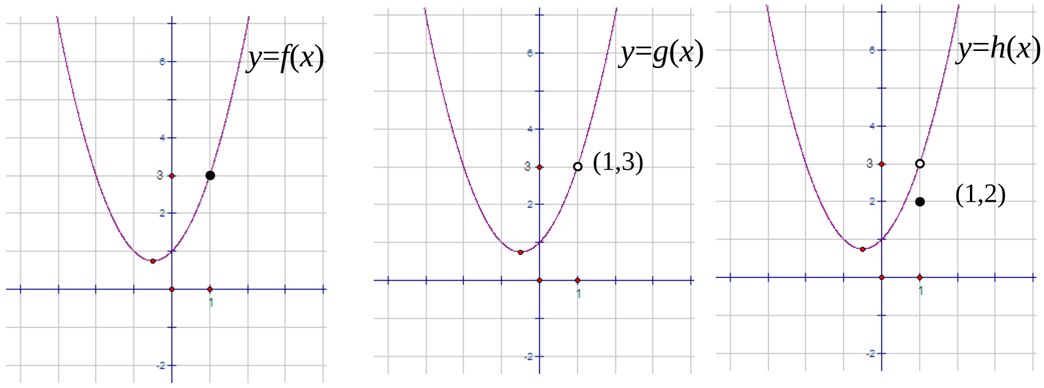
此時 $g(1)$沒有定義。

(3)在 $x\neq 1$ 時，$y=h(x)$的圖形與 $y=g(x)$的圖形一樣，

差別是 $h(1)=2$ 而 $g(1)$沒定義。所以 $y=h(x)$的圖形就是

“$y=g(x)$的拋物線加上一個點$(1，2)$”

$$\lim_{x\to 1} h(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=(x^2+x+1)=3\neq h(1)。$$



(a) (b) (c)

觀察例題一，當 $x\neq1$ 時 $f(x)=g(x)=h(x)$，在 $x=1$ 時，$f(1)=3$、$g(1)$沒定義、$h(1)=2$，但是$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1} g(x)=\lim\limits_{x\to1} h(x)=3$，故只要在 $x=1$ 的附近(不考慮 $x=1$)函數值的行爲一樣，那麼極限若存在就會相等，而與 $x=1$ 的函數值無關。

[例題2] 請用理論上的定義證明：$\lim\limits_{x\to2} x^2=4$。

給定一個函數 $f(x)$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不一定存在！

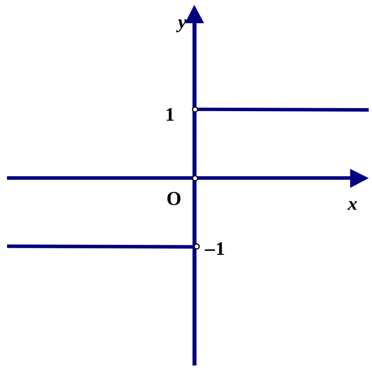
[例題3] 設 $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $(x\neq0)$，試問：當 x 趨近 0 時，函數值 $g(x)$是否會趨近一個「定值」？

[解法]：

$$g(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & ,x>0\\ -1 & ,x<0\end{cases}$$

x 從 0 的右邊趨近，則 $g(x)$會趨近 1。

x 從 0 的左邊趨近，則 $g(x)$會趨近-1。



所以**當 x 趨近 0 時，函數值 $g(x)$不會趨近一個「定值」**。

[例題4] 設 $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $(x\neq0)$，試問當 x 趨近 0 時，函數值 $h(x)$是否會趨近一個「定值」？

[解法]：

x 趨近 0 時，x^2 會愈來愈小，因此 $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$會愈來愈大。

所以當 x 趨近 0 時，函數值 $h(x)$不會趨近一個「定值」。

結論：

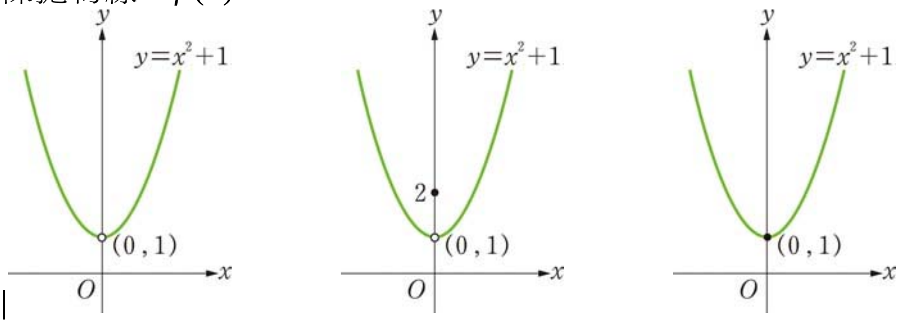
(1)函數 $f(x)$在 $x=a$ 處不一定有定義，即 $f(a)$可能有意義或無意義。

(2)當 $x \to a$ 時，$f(x)$之極限值與 $f(x)$在 a 點的函數值無關。

(3)當 $x \to a$ 時，極限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$不一定存在。

(練習1) 設 $f(x)=x^2+1$。

在圖(a)中，$f(x)$在 $x=0$ 處沒有定義；在圖(b)中，$f(x)$ 在 $x=0$ 處的定義改爲 $f(0)=2$；在圖(c)中，$f(x)$ 的定義域爲 R，$y=f(x)$ 的圖形是一條拋物線，$f(0)=1$。



(a) (b) (c)

(1)在圖(a)中，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。($f(0)$沒有意義)

(2)在圖(b)中，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$，並問 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$是否成立？

(3)在圖(c)中，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$，並問 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$是否成立？

Ans：(1)1　(2)1，否　(3)1，是

(練習2) 請利用理論上的定義，證明：$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{1}{10}$。

(練習3) 設 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x>0) \\ -2x+1 & (x<0) \end{cases}$

(1)請問 $f(0)$是否有意義？　(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$是否存在？

Ans：(1)無意義　(2)1

(3)左右極限

有些函數在 $x=a$ 左右附近，定義的形式並不相同，像例題 3 中所討論的函數 $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$，

$x>0$ 時 $g(x)=1$，而 $x<0$ 時 $g(x)=-1$，若要考慮 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$是否存在，

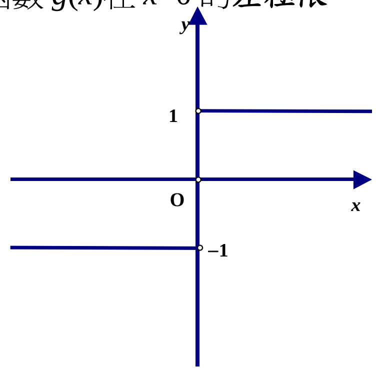
可能要將 $x>0$ 與 $x<0$ 分開考慮。

當 x 從 0 的右邊趨近 0，$g(x)$會趨近於 1；此時 1 稱爲函數 $g(x)$在 $x=0$ 的**右極限**，

記作 $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1$。

當 x 從 0 的左邊趨近 0，$g(x)$會趨近於-1；此時-1 稱爲函數 $g(x)$在 $x=0$ 的**左極限**，

記作 $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-1$。



如右圖，很顯然可以得知

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$不存在，$g(x)$在 $x=0$ 的左右極限也不相等。

下面我們介紹左右極限的意義與符號：

$x\to a^+$表示「x 從 a 的右側趨近 a」，即 $x>a$ 且 $x\to a$。

$x\to a^-$表示「x 從 a 的左側趨近 a」，即 $x<a$ 且 $x\to a$。

當 $x\to a^+$，函數值 $f(x)$會趨近於 l 時，記作 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$　(l 稱爲 $f(x)$的右極限)

當 $x\to a^-$，函數值 $f(x)$會趨近於 l 時，記作 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$　(l 稱爲 $f(x)$的左極限)

函數的左右極限也可以用來判別函數的極限是否存在：

若 $f(x)$在 $x=a$ 的極限等於 l，其左右極限都會存在且等於 l；反過來說，也會成立。
但是若 $f(x)$的左右極限存在但是不相等，那麼 $f(x)$在 $x=a$ 的極限就不存在了。
將前述討論的結果整理如下：

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ 的充要條件爲 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$。

如果 $f(x)$在 $x=a$ 左右定義的形式不同，就可以先求 $f(x)$在 $x=a$ 左右極限，並藉以判斷 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$是否存在。我們用以下的例子來說明：

[例題5] 設 $f(x)=\begin{cases} x^3+2 & x<1 \\ 3x & x\geq 1 \end{cases}$，試求下列各小題：

(1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$　(2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$　(3) 判別 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$是否存在？若存在求出其值。

[例題6] (1)設 $f(x)=\dfrac{|x|^3+x^3}{x}$，請問 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$？

(2)試求 $\lim\limits_{x\to 2} x[x]=$？

(3)試求 $\lim\limits_{x\to 1.3} x[x]=$？

(4) $\lim\limits_{x\to 0} x[x]=$？

Ans：(1)0(2)不存在 (3)1.3 (4)0

(練習4)設高斯函數 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$，

(1)試求 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ (2) 試求 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ (3) 判別 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 是否存在？若存在求出其值。

(練習5)假設兩地之間的通話費， 第一個半分鐘是 5 元，之後每半分鐘是 2 元，不滿半分鐘以半分鐘計算，則 t 分鐘的通話費 C(t)公式如下(單位元)：

$C(t)=5-2[1-2t]$，

其中[x]表示小於或等於 x 的最大整數，例如：[3.5]=3，[−3.1]=−4,[−5]=−5 等

試問下列哪些選項是正確的？

(1) 10 分鐘的通話費是 43 元 (2) 在 $t\ge 0$ 時，$[1-2t]=-[2t-1]$恆成立。

(3) $\lim\limits_{t\to 10.5} C(t)=45$ (4) $\lim\limits_{t\to 11.2} C(t)=49$。 (2011 指定甲)

Ans： (1)(4)

(練習6)設 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 當x\ge 2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{2} & 當x<2 \end{cases}$，試求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$？ Ans：不存在

(練習7)試求下列極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=$？ (2) $\lim\limits_{x\to 5}(x-[x])$ (3) $\lim\limits_{x\to 0} x^2[x]$

Ans：(1)不存在 (2)不存在 (3)0

(乙)函數極限的四則運算與極限的求法

(1)函數極限的四則運算：

若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=s,\lim\limits_{x\to a} g(x)=t$，$c$ 為一常數，則

(a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\boldsymbol{s+t}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=\boldsymbol{c\cdot s}$

(c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\boldsymbol{st}$ **(d)**若 $t\neq 0$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(x)}}=\dfrac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{t}}$

注意：即使$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))$存在，但$\lim\limits_{x\to a} f(x),\lim\limits_{x\to a} g(x)$不一定存在。

例如：$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，$g(x)=\dfrac{-1}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))=0$ 但$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1} g(x)$不存在。

[說明]：

(c) $\because |f(x)g(x)-st|=|g(x)(f(x)-s)+s(g(x)-t)|\leq|g(x)||f(x)-s|+|s||g(x)-t)|$

$\because \lim\limits_{x\to a} f(x)=s,\lim\limits_{x\to a} g(x)=t$

$\therefore$當 x 很趨近 a 時，$|f(x)-s|$、$|g(x)-t)|$會很小，且$|g(x)|\leq$M

$\Rightarrow|f(x)g(x)-st|\leq|g(x)||f(x)-s|+|s||g(x)-t)|\leq \text{M}|f(x)-s|+|s||g(x)-t)|$

故當 x 很趨近 a 時$|f(x)g(x)-st|$會很趨近於 0。

即$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=st$

(d) $\because |\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{s}{t}|=|\dfrac{f(x)t-sg(x)}{g(x)t}|=|\dfrac{t(f(x)-s)+s(t-g(x))}{g(x)t}|\leq|\dfrac{1}{g(x)t}|[|t||f(x)-s]|+|s||g(x)-t)|]$

$\because \lim\limits_{x\to a} f(x)=s,\lim\limits_{x\to a} g(x)=t\ (t\neq0)$

$\therefore$當 x 很趨近於 a 時，$|f(x)-s|$、$|g(x)-t)|$會很小，且$|\dfrac{1}{g(x)}|\leq \text{M}(\neq0)$

$\Rightarrow|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{s}{t}|\leq|\dfrac{1}{g(x)t}|[|t||f(x)-s]|+|s||g(x)-t)|]\leq \text{M}[|t||f(x)-s]|+|s||g(x)-t)|]$

故當當 x 很趨近 a 時，$|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{s}{t}|$會很趨近於 0。即$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{s}{t}$

（練習8）若$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=6$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=2$，求$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=$？Ans：8

(2)函數極限的求法：

(1°)直接代入法：

假定我們要計算$\lim\limits_{x\to a} f(x)$，其中的 $f(x)$是由多項式、有理式或根式經過加、減、乘、除等四則運算而成的函數，只要「把 $f(x)$中的 x 以 a 代入，不會出現分母為 0 這種無意義的情形」則$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$。

[例題7] (1) $\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1})=?$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=?$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^3-4x-1}{x+6}}=?$ (4) $\lim\limits_{x\to 3}5=?$ Ans：(1) 1 (2)1 (3)$\dfrac{-1}{2}$ (4)5

(2°)若代入出現$\dfrac{0}{0}$、$\dfrac{\infty}{\infty}$、$0\times\infty$這種沒意義的結果，則必須將函數作適當的變形，變形的目的，就是要使它不再出現$\dfrac{0}{0}$的結果。通常以下列兩種方法求極限：

(a)把分子分母的公因式約去，再代入。

(b)把分子或分母有理化，約去使分母為 0 的式子，再代入。

[例題8] (約去公因式)

(1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12}=$？ (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=$？ (3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=$？

Ans：(1)5(2) 6(3)$2x$

[例題9] (分母、分子有理化，再代入)

(1) $\lim_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}=$？(2) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-3}}{\sqrt{6x-2}-\sqrt{3x+7}}=$？(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2}}{x}=$？

Ans：(1)6 (2) $\dfrac{-8}{9}$ (3) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{6}$

[例題10] (分式合項再約公因式)

$\lim_{x\to 1}(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x^2+4x-8}{x^2+x-2})=$？ Ans：$\dfrac{7}{3}$

[例題11] (1)若 $\lim_{x\to 1}\dfrac{a-4x+x^2}{1-x}=b$，則求 a=?,b=? Ans：a=3,b=2

(2)若 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+ax+b}=\dfrac{3}{7}$，則 a=?,b=? Ans：a=3,b=–10

(練習9) (1) $\lim\limits_{x\to 1000}[x-[x]]=$？ (2) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)(x-3)=$？ (3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-5}{x-2}=$？

Ans：(1)0 (2)−1 (3)−2

(練習10) (1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\frac{x}{x-3}-4}{x-4}=?$ (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=?$ (3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+1)^{10}-1}{x+2}=?$

Ans：−3，12，−10

(練習11) 求下列函數的極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3})$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x})$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ (4) $\lim\limits_{x\to 4}(\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4}{x-4})$

Ans：(1)$\dfrac{-1}{6}$ (2)$\dfrac{1}{12}$ (3) $\dfrac{1}{2}$ (4)$\dfrac{1}{4}$

(練習12) 試定 a,b 之值：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a-4x+x^2}{1-x}=b$，

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+5x+b}{x^2-1}=3$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a\sqrt{x^2+3}-b}{x-1}=2$

Ans：(1) $a=3,b=2$ (2)$a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{-11}{2}$ (3)$a=4,b=8$

(3)夾擠原理：

設 c 是開區間(a,b)內的一個定點，
若 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$在$(a,c)\cup(c,b)$內滿足下列條件：
(1°)$f(x)\le g(x)\le h(x)$ (2°) $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L=\lim\limits_{x\to c}h(x)$
則$\lim\limits_{x\to c}g(x)=L$。

[說明]：

$\because$ $f(x)\le g(x)\le h(x)$，$\forall x\in(a,c)\cup(c,b)$

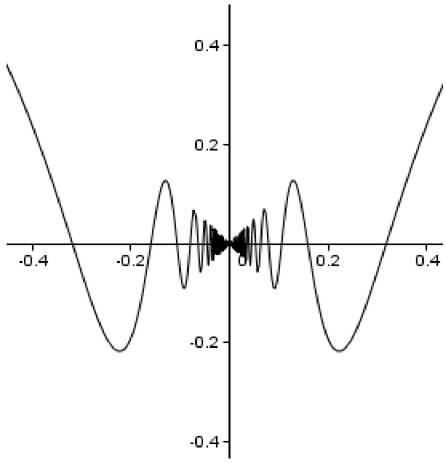
$\therefore |g(x)-L|\le|f(x)-L|+|h(x)-L|$

$\because$ $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L=\lim\limits_{x\to c}h(x)$

$\therefore$當 x 趨近於 c 時，$|f(x)-L|$、$|h(x)-L|$會很小，故$|g(x)-L|$也會很小

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to c}g(x)=L$。

[例題12] 設 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq0)$，請求出$\lim\limits_{x\to0}f(x)=$？ Ans：0



(練習13) 請求出$\lim\limits_{x\to0}(x^2)\sin\frac{1}{x^2}=$？ Ans：0

(丙)連續函數

一日之中，氣溫的高低變化是「**連續**」的，棒球外野手傳球，球的飛行路線也是「連續」的。數學上，「**連續**」這個字眼與日常生活中的用詞具有很類似的涵義。

數學上談函數的連續性，是從函數在某一點的連續性出發的，然後再討論函數在某些區間的連續性。當然若函數 $f(x)$在 $x=a$ 沒定義，我們就不討論 $f(x)$在 $x=a$ 的連續性問題。

直觀來說，函數 $f(x)$在 $x=a$ 處**連續**就是「**函數 $f(x)$的圖形在 $x=a$ 處沒有斷點的現象**」。

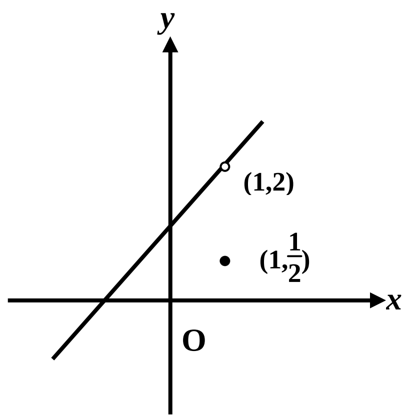
接下來，先舉例說明不連續點的情形：

(1)函數在某處不連續的情形：

(a)函數值跳躍的點：

設 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq1\\ \dfrac{1}{2} & x=1\end{cases}$ 的圖形如右圖，與上圖不同的是 $f(x)$在 $x=1$ 有定義，但$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ 存在。

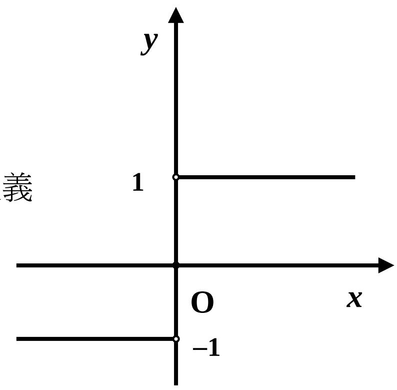
但是圖形在 $x=1$ 的點是**跳躍**的點。



(b)函數值斷裂的點：

設 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 的圖形如右圖，雖然 $f(0)=0$ 有定義

但$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在。圖形中在 $x=0$ 處有斷裂的點。

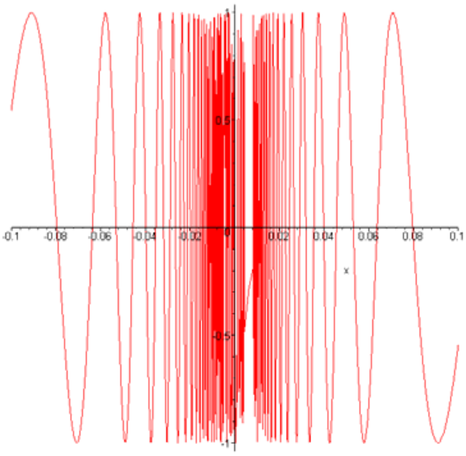


(c)函數值振動的點：

設 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$，

當 $x_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}$時，$f(x_n)=1$；

當 $t_n=\dfrac{1}{\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi}$時，$f(t_n)=-1$



故$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，右圖是 $y=\sin\dfrac{1}{x}$在$-0.1\le x\le 0.1$ 的圖形：

(2)函數 $f(x)$在某一點連續的定義：

若下列三個條件都滿足： **(a)$f(a)$有定義 (b) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在 (c) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，** **則稱 $f(x)$ 在點 a 連續。**

一個函數 $f(x)$在 $x=a$ 處**不連續**，其不連續點概略可分成以下幾類：

(a)函數 $f(x)$在 $x=a$ 處的極限不存在。

(b)函數 $f(x)$在 $x=a$ 處的極限存在，但其極限值不等於 $f(a)$。

[例題13] 設函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|^3+2x^3}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，

(1)試判斷$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在，若存在求出極限。

(2)試問 a 的值應等於多少？才會使得 $f(x)$在 $x=0$ 連續？

Ans：(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ (2)$a=0$

(3)函數 $f(x)$在某個區間連續的定義：

談到函數的連續性，有時候必須考慮整個區間的連續性，而不光只是某一點的連續性，函數在區間的連續性定義如下：

> 函數在區間連續的定義
> **(1°)若 f 在(a,b)內的每一點都連續，則稱 $f(x)$在(a,b)上連續。**
> **(2°)設 $f(x)$定義在閉區間$[a,b]$上，**
> **若 $f(x)$在(a,b)上連續；且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$、 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$，**
> **則稱 $f(x)$在$[a,b]$上連續。**
> **(3°) 若函數 $f(x)$在其定義域中的每一點都連續，則稱 $f(x)$爲連續函數。**

[例題14] 試說明函數 $f(x)=|x|$爲連續函數。

[解法]：

根據連續函數的定義，我們要說明 a 爲任意實數，$f(x)=|x|$在 $x=a$ 連續。

因爲 $f(x)=\begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ -x & ,x<0 \end{cases}$

(1)當 $a>0$ 時， $\lim\limits_{x\to a} f(x)= \lim\limits_{x\to a} x=a=f(a)$，故 $f(x)$在 $x=a$ 連續。

(2)當 $a<0$ 時， $\lim\limits_{x\to a} f(x)= \lim\limits_{x\to a}(-x)=-a=f(a)$，故 $f(x)$在 $x=a$ 連續。

(3)當 $a=0$ 時，因爲 $f(x)$在 $x=0$ 左右函數的形式不同，故考慮左右極限：

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)= \lim\limits_{x\to 0^+} x=0$， $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)= \lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)= \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0=f(0)$，因此 $f(x)$在 $x=0$ 連續。

由(1)(2)(3)的討論，可以得知 $f(x)=|x|$爲連續函數。

(練習14) 設 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+8}{x+2} & x\neq -2 \\ 12 & x=-2 \end{cases}$，試求 $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=?$，

並問 $f(x)$在 $x=-2$ 處是否連續。Ans：12，連續

(練習15) 有一函數 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & x\neq -3 \\ a & x=-3 \end{cases}$，若 $f(x)$在 $x=-3$ 連續，則 $a=$？Ans：$a=-6$

(練習16) 設 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$，請問 $f(x)$是連續函數嗎？ Ans：連續函數

(4)連續函數的性質：
運用前面討論過的極限基本運算性質與連續函數的定義，可以得到兩個連續函數經四則運算後的新函數也都是連續函數。
(a)若函數 $f(x)$、$g(x)$在 $x=a$ 處連續，b 是常數，則下面的四則運算：

(1°)$f(x)\pm g(x)$ (2°)$f(x)\cdot g(x)$ (3°)$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a)\neq 0)$ (4°)$b\cdot f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。

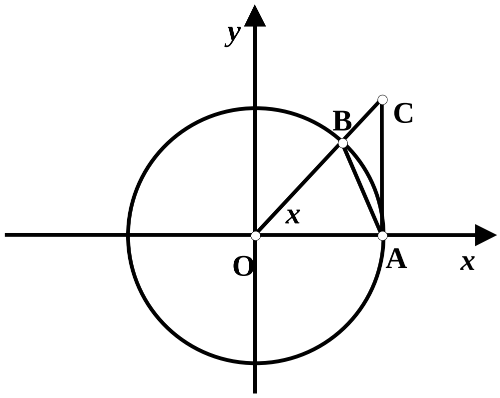
(b)若設函數 $g(x)$在 $x=a$ 連續，且函數 $f(x)$在 $g(a)$點連續，
則合成函數$(f\circ g)(x)=f(g(x))$在 $x=a$ 也連續。

(丁)基本初等函數的連續性

這裡所稱的**基本函數**可以分成以下五類：
冪函數：$y=x^{\alpha}$，(α是實數)
指數函數：$y=a^x$ ($a>0$，且 $a\neq 1$)
對數函數：$y=\log_a x$ ($a>0$，且 $a\neq 1$)
三角函數：$y=\sin x$，$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$，$y=\sec x$,$y=\csc x$
反三角函數：$y=\sin^{-1}x$，$y=\cos^{-1}x$,$y=\tan^{-1}x$,$y=\cot^{-1}x$，$y=\sec^{-1}x$,$y=\csc^{-1}x$
將基本函數和常數經過有限次四則運算、合成而得出的函數，統稱爲**初等函數**。
(1)多項式函數的連續性：

(2)有理式函數的連續性：

(3)一個重要極限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$的證明：



(a)先證明$\dfrac{-\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，$x\neq 0$，則$|\sin x|<|x|<|\tan x|$。

證明：

(1°)先設x是正數，在右圖中，有向角∠AOB=x 弧度，
直線 AC 與圓相切於 A，O,B,C 共線。
由圖形：ΔABC<扇形 AOB<ΔAOC

$$\left.\begin{aligned}&\Delta AOB=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin x\\&\text{扇形}AOB=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x\\&\Delta AOC=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\tan x\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\tan x$$

故 $\sin x<x<\tan x$，因爲 $\sin x,\tan x$ 均爲正，故$|\sin x|<|x|<|\tan x|$。

(2°)若$\dfrac{-\pi}{2}<x<0$，則 $0<-x<\dfrac{\pi}{2}$，由上面的證明：$\sin(-x)<-x<\tan(-x)$

故$|\sin x|<|x|<|\tan x|$。

(b)由(a)，因爲$x\neq 0,\dfrac{-\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，且$|\sin x|<|x|<|\tan x|$。

故$\dfrac{1}{|\sin x|}>\dfrac{1}{|x|}>\dfrac{|\cos x|}{|\sin x|}$，且$1>\dfrac{|\sin x|}{|x|}>|\cos x|$。

因爲$\cos x>0$,且$\sin x$與x同號，故$\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1\Rightarrow 0<1-\dfrac{\sin x}{x}<1-\cos x$

又$0\leq\left|\dfrac{\sin x}{x}-1\right|=1-\dfrac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}<2\cdot(\dfrac{x}{2})^2=\dfrac{1}{2}x^2$，故

$0\leq\left|\dfrac{\sin x}{x}-1\right|<\dfrac{1}{2}x^2$。由夾擠原理：$\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\sin x}{x}-1\right|=0$，因此可得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

[例題15] 求下列極限：(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ (2)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ Ans：(1)1 (2)$\dfrac{1}{2}$

(練習17) 求下列極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 3x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\tan x}{x^2}$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\cdot\sin x}$

Ans;(1)$\dfrac{1}{3}$ (2)$\dfrac{3}{5}$ (3)1 (4)2

(練習18) 圓心角θ的扇形，弦長爲 d，弧長爲 s，試求 $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{s}{d}=$？

Ans：1

(4)sin$x$、cos$x$ 的連續性：

設 $f(x)=\sin x$，a 爲任意實數，$|f(x)-f(a)|=|\sin x-\sin a|=|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}|\leq 2|\sin\frac{x-a}{2}|$

當 x 很接近 a 時，$|f(x)-f(a)|\leq 2|\sin\frac{x-a}{2}|\leq 2\cdot\frac{|x-a|}{2}=|x-a|$

根據夾擠原理 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}|f(x)-f(a)|=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$。 所以 $f(x)=\sin x$ 爲連續函數。

同理可證明，$g(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$，可以看成 $g(x)=f(h(x))$，其中 $h(x)=x+\frac{\pi}{2}$，因爲 $f(x)$、$h(x)$均爲連續函數，所以 $g(x)=f(h(x))=\cos x$ 爲連續函數。

[例題16] (1)請證明：$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ (a 爲正數)。

(2)請證明：$f(x)=\sqrt{x^2+1}$ 爲 R 上的連續函數。

(練習19) 請證明：四個三角函數($y=\tan x,y=\cot x$，$y=\sec x,y=\csc x$)在其定義域上均爲三角函數。

(練習20) 請利用函數的基本性質說明下列兩函數在其定義域是連續的：

(1)$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ，$(-1,1)$ (2)$g(x)=|x^2-1|$，R

(練習21) 設 $a>0$，已知 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$ ，設 $f(x)$在 $x=a$ 連續且 $f(a)>0$，試說明：

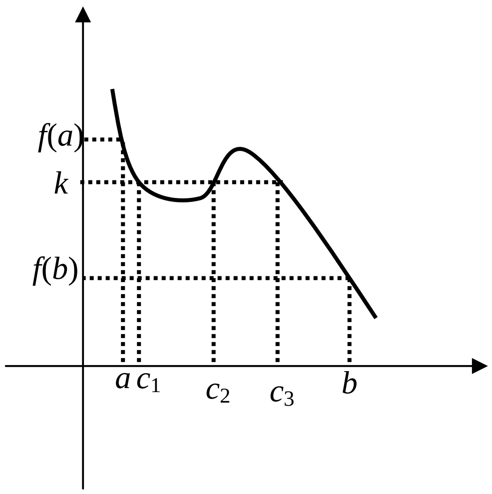
$\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{f(a)}$ 。

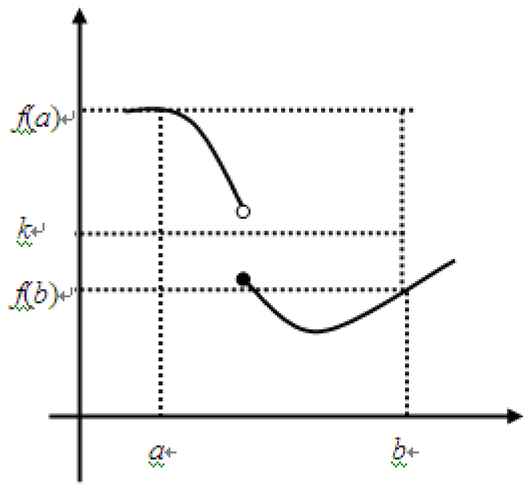
(戊)介值定理

連續函數是很重要的數學模型，舉例來說，人的生長曲線(時間對應身高)可以視爲連續函數的圖形，假如一個男孩 16 歲生日時身高爲 168 公分，17 歲生日時身高達 173 公分，那麼此男孩一定會在 16 歲生日後的某個時刻，身高剛好會是 170 公分，這樣的現象就是我們要介紹的**介值定理**：

介值定理： 設 f 是$[a,b]$上的連續函數，且 $f(a)\neq f(b)$，若 k 是任意一個介於 $f(a)$與 $f(b)$之間的實數，則在(a,b)內至少有一點 c，使得 $f(c)=k$。

這個定理的證明，超出高中課程的範圍，本書在此不作證明。
用前面的實例來說明，男孩的身高與歲數的關係可爲 $f(x)$：$[16,17]\rightarrow R$ 的連續函數，其中 $f(16)=168$、$f(17)=173$，對於任意介於 $f(16)$與 $f(17)$間的數 k，必存在 c(c 介於 16 到 17 間)，使得 $f(c)=k$。
下面兩個圖形也許有助於讀者對於介值定理的理解：

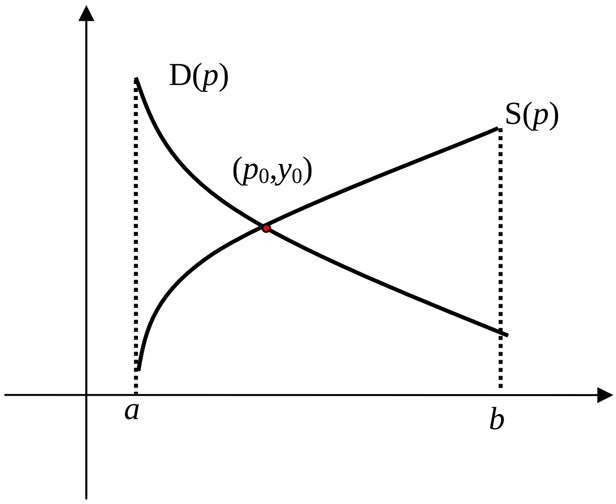




上述定理中，若 $f(a)f(b)<0$，取 $k=0$ 介於 $f(a)$與 $f(b)$之間，則在(a,b)內至少有一點 c，使得 $f(c)=0$。
這樣的想法可以用來估計方程式 $f(x)=0$ 實根的位置，這就是第一冊中曾介紹的勘根定理。

勘根定理 設 $f(x)$是$[a,b]$上的連續函數，若 $f(a)f(b)<0$，則方程式 $f(x)=0$ 在(a,b)內至少有一個實根 c。

在經濟學上，某種商品的需求量 D=D(p)是價格 p 的函數，通常當 p 增加時，消費者的需求量 D 就會減少；反之，當 p 減少時，消費者的需求量 D 就會增加。商品的供給量 S=S(p)也是價格 p 的函數，通常當 p 增加時，供應商的供應量 S 就會增加；反之，當 p 減少時，供應商的供應量 S 就會減少。一般在經濟學上，都將需求函數 D(p)與供給函數 S(p)視為連續函數，



當 D(p)與 S(p)的圖形有交點(p_0,y_0)時，這個點稱為平衡點。此時 p_0 稱為平衡價格，這是消費者與商家都認可的價格。當價格 p 很低時，需求量 D(p)會大於供給量 S(p)；反之，當價格 p 很高時，需求量 D(p)會小於供給量 S(p)。

下面的例子中我們利用介值定理來說明平衡價格會存在。

[例題17] 設某種商品的需求量函數 D(p)=$-2p+18$，供給量函數 S(p)=p^3-2p+3，試證明平衡價格 p_0 介於 2 與 3 之間。

[分析]：

因為當 D(p)與 S(p)的圖形有交點(p_0,y_0)時，此時 p_0 稱為平衡價格，因此考慮函數 $f(p)$=D(p)−S(p)

，證明 $f(p)=0$ 在 2 與 3 之間有實根。

[解法]：

令函數 $f(p)$=D(p)−S(p)

因為 $f(2)$=D(2)−S(2)=7，$f(3)$=D(3)−S(3)=−12，$f(2)f(3)<0$

由介值定理，可知存在一個實數 p_0 介於 2 與 3 之間，使得 $f(p_0)=0$。

因此平衡價格 p_0 介於 2 與 3 之間。

(練習22) 利用中間值定理證明勘根定理：
設 f 是$[a,b]$上的連續函數，若 $f(a)f(b)<0$，則至少存在一個 $c\in[a,b]$，使得 $f(c)=0$。

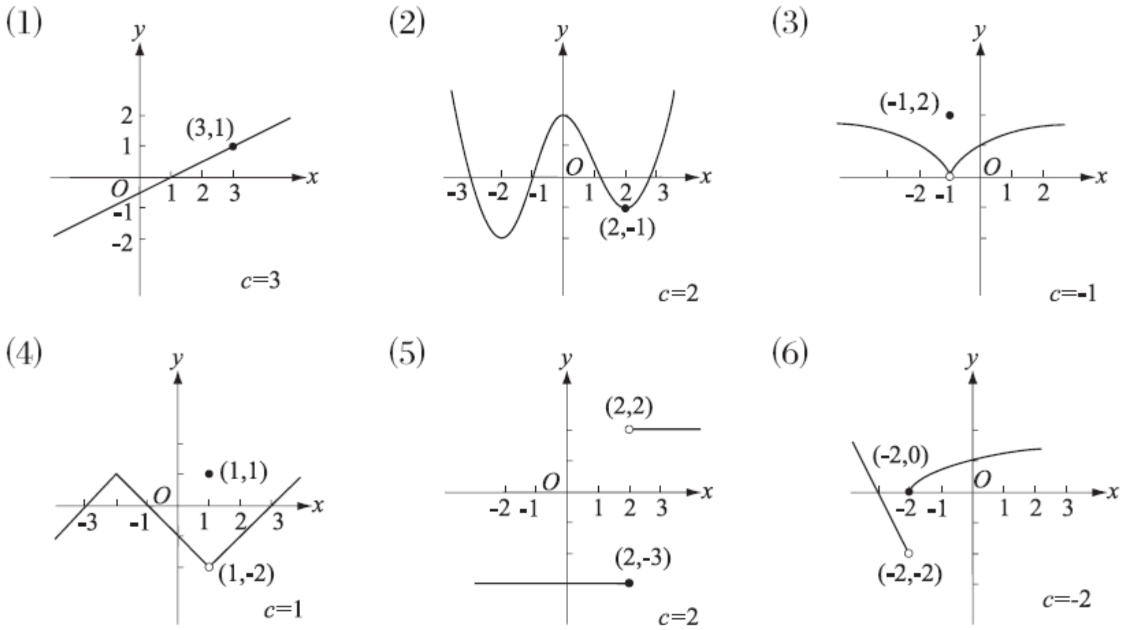
(練習23) 設 $f(x)=[x]$，因為 $f(1)=1$，$f(3)=3$，所以[1,3]內存在一個 c 使得 $f(c)=2.5$。此說法是否正確？試說明之！

(練習24) 設 $f(x)=x^5+2x^3-x+2$，試證明：存在一個實數 c 介於 1 與 2 之間，使得 $f(c)=20$。

綜合練習

(1) 在圖(1)~(6)中，利用圖形求下列的極限值：

(a) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$=？ (b) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$=？ (c) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$=？



(2) 試求下列各式的極限：

(a) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2x+5)$ (b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}$ (c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}$ (d) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(3+\Delta x)^2-9}{\Delta x}$

(3) 試求下列各式的極限：

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$=？ (b) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{3x-2}{(x+2)(x+4)}\right)$=？

(c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$=？ (d) $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{27-x}{\sqrt[3]{x}-3}=$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin x$

(4) 設函數 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 若x\geq 2 \\ 2x+3, & 若x<2 \end{cases}$，試問下列哪些選項是正確的？

(A)$f(2)=5$ (B) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=5$ (C) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$ (D) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10$

(E) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=3$。

(5) (a)若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\dfrac{5}{3}$，則 a=?，b=?

(b)若 $\lim\limits_{x\to \frac{-1}{2}}\dfrac{2x^2-x-1}{2x^2+ax+b}=-3$，則 a=?，b=?

(6) 試問下列有關極限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|3-3x-x^2|-1}{x-1}$ 的敘述何者正確？(2007 指考甲)

(1) 極限不存在 (2) 極限為 0 (3) 極限為 1 (4) 極限為 5 (5) 極限為 2。

(7) 設$[x]$表示高斯函數，求下列各極限值

(a) $\lim\limits_{x\to \frac{7}{2}}[x]$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}x^5|x|$ (c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{|x^2-1|}$

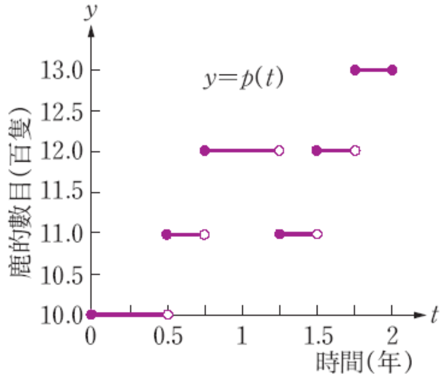
(8) $[x]$表不大於 x 之最大整數，則下列何者正確？

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[x]}{x}=0$ (B) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$ (C) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{[x]}{x}$ 不存在 (D) $\lim\limits_{x\to 0^-}x^2[x]$ 不存在

(E) $\lim\limits_{x\to 1.5}x-[x]=1$。

(9) 在某個國家公園內，鹿的數目 $p(t)$(百隻)為時間 t(年)的函數，

其圖形如下：



試回答下列各問題：

(a)試求函數 $p(t)$的定義域與值域。

(b)試求 $\lim\limits_{t\to 0.5^+}p(t)$、$\lim\limits_{t\to 0.5^-}p(t)$的值。

(c)試求 $\lim\limits_{t\to 1}p(t)$的值。

(d)試問 $p(t)$在哪些點不連續？

(10) 設 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+8}{x+2}, x\neq -2\\ 5, x=-2\end{cases}$ 試求 $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$，並問 $f(x)$在 $x=-2$ 處是否連續？

(11) 綜合所得淨收入 x 元，全年應繳納稅額為 $f(x)$元

若立法院要修改綜合所得稅的計算方式公式如下：

當 $0\le x\le 500000$ 時，$f(x)=0.05x$

當 $500000<x\le 1130000$ 時，$f(x)=0.12x-35000$

當 $1130000<x\le 2260000$ 時，$f(x)=0.20x-125400$

當 $2260000<x\le 4230000$ 時，$f(x)=0.30x-a$

當 $4230000<x$ 時，$f(x)=0.40x-b$

使得函數 $f(x)$的圖形為連續的，試問累計差額 a、b 的值為何？

(12) 設函數 $f(x)=\begin{cases}2x-5 & 當x<-1\\ ax-1 & 當 -1\le x<2\\ bx+11 & 當x\ge 2\end{cases}$，若 $f(x)$在所有實數 R 上每一點皆連續，

試求 a,b 的值。

(13) 設 $f(x)=\text{sgn}x=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$，試問 $f(x)$在 $x=0$ 處是否連續?

(14) 請問 $y=x-[x]$ $(-4\le x\le 4)$有那些不連續點。

(15) 設多項函數 $f(x)$滿足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=10$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-4$，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=26$，求最低次數的多項式 $f(x)$。

(16) 下列各函數在 $x=0$ 時函數值定義爲 0，則何者在 $x=0$ 爲連續？

(A) $f(x)=|x|$ (B) $f(x)=x-[x]$ (C) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|}$

(D) $f(x)=\sin x$ (E) $f(x)=\dfrac{|x|^3+x^3}{x}$。

(17) 設 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$，試證在開區間(0，1)內有一數 a，使得 $f(a)=a$。

進階問題

(18) 求下列各函數的極限：

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{20x+6+\sqrt{x^2+x-1}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x+3}}-\sqrt{3}}{x-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1-x^{12}}{1-x}-1)$

(19) 求下列各函數的極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m,n 正整數) (2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 6x}$ (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$ (4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

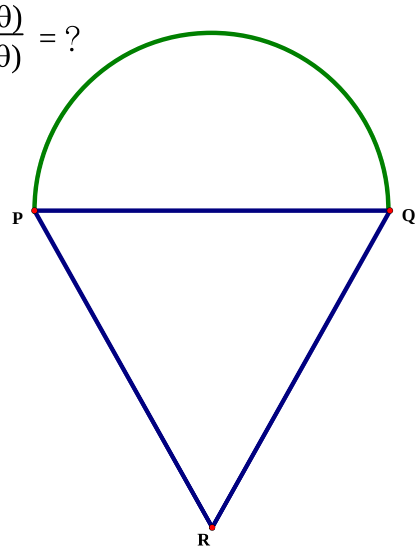
(20) 求下列各函數的極限：

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}=$？ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n+x^{n-1}+\ldots+x^2+x-n}{x-1}=$？

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[10]{x})}{(1-x)^9}=$？

(21) 設多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$a\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$，試求 $f(x)$。

(22) 如圖，$\overline{PQ}$爲半圓的直徑，ΔPQR 爲頂角θ 的等腰三角形，其中 RP=RQ，設半圓區域面積爲 A(θ)，ΔPQR 區域面積爲 B(θ)，試求 $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{A(\theta)}{B(\theta)}=$？



(23) 請利用理論上的定義證明：若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$，則 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|L|$。

(24) 利用理論上的定義證明以下兩個函數的極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1+x}{x^2+1}=\dfrac{2}{5}$ (2) $\lim\limits_{x\to 27}\sqrt[3]{x}=3$

綜合練習解答

(1) (a)1,−1,0,−2,不存在,不存在 (b)1,−1,0,−2,−3,−2 (c)1,−1,0,−2,2,0

(2) (a)8 (b)$\frac{3}{4}$ (c)$\frac{2}{3}$ (d)6

(3) (a)3 (b)$-\frac{5}{2}$ (c)$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (d)−27 (e)0

(4) (A)(B)(D)(E)

(5) (1)−3,−2 (2)3,1

(6) (4)

(7) (a)3 (b)0 (c)0

(8) (A)(B)(C)

(9) (a)[0,2]、[10,13] (b)11、10 (c)12 (d)0.5、0.75、1.25、1.5、1.75

(10) 否

(11) a=315400、b=738400

(12) a=6，b=0[提示：$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=f(-1)=-7\Rightarrow a=6$；

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=f(2)\Rightarrow b=0$]

(13) 否

(14) −4,−3,−2,−1,−1,0,1,2,3,4

(15) $f(x)=x(x-1)(x-2)(5x^2-6x+5)$

利用「$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}$ = A(一定值)，則 $f(a)=0$」之性質。

(16) (A)(D)(E)

(17) 利用介值定理

(18) (a)3(b)$\frac{1}{8\sqrt{3}}$(c)11

(19) (1)$\frac{m}{n}$ (2)$\frac{-1}{2}$ (3)1 (4)$\cos a$

(20) (a)$\sqrt{6}$ (b)$\frac{n(n+1)}{2}$ (c)$\frac{1}{10!}$

(21) $3x^3-13x^2+18x-8$

【詳解】設 $f(x)=(x-1)(x-2)(ax+\frac{d}{2})$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}(x-2)(ax+\frac{d}{2})=1$，$\lim\limits_{x\to2}(x-1)(ax+\frac{d}{2})=2\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{d}{2}=-1\\2a+\frac{d}{2}=2\end{cases}$ 解得 $a=3,d=-8$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(3x-4)=3x^3-13x^2+18x-8$

(22) 0[提示：$A(\theta)=\frac{1}{2}\pi R^2$，$B(\theta)=R^2\cot\frac{\theta}{2}$，$R=\frac{1}{2}\overline{PQ}$]

(23) 考慮不等式$||f(x)|-|L||\le|f(x)-L|$，再利用定義即可證明。

(24) 略