§2–3 二元二次方程式的化簡

(甲)化簡二元二次方程式

(1)化簡二元二次方程式：

二次曲線Γ：$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ $(b\neq0)$，$\delta=b^2-4ac$

根據前面的例子可知，不管$\delta>0$、$\delta=0$，$\delta<0$，我們**先轉軸消去xy項，再移軸，化成標準式**，都可以達到化簡Γ的方程式爲標準式的目的。但是對於有心錐線(有對稱中心的圓錐曲線，如橢圓、雙曲線)，**先移軸到對稱中心，再轉軸消去xy項**，會比較簡便。

化簡原則：設$g(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，$(b\neq0)$.......(1)

(A)**檢查δ，如果$\delta=b^2-4ac\neq0$**，

(a)先移軸至新原點$O'(h,k)$，消去兩個一次項係數，(1)化簡成

Γ：$ax'^2+bx'y'+cy'^2=-f'$.....(2)，(移軸後二次項係數不變)，

其中新原點坐標$O'(h,k)$滿足$\begin{cases}2ah+bk+d=0\\ bh+2ck+e=0\end{cases}$，解出$(h,k)$，　得到$f'=g(h,k)$.

(b)再轉軸一個銳角θ，其中$\cot2\theta=\dfrac{a-c}{b}$，消去$x'y'$項，

變成Γ：$a'x''^2+c'y''^2=-f'$　(轉軸後常數項不變)，即可將Γ化成標準式。

(B)檢查δ，如果$\delta=b^2-4ac=0$

(a)先轉軸一個銳角θ，其中$\cot2\theta=\dfrac{a-c}{b}$，消去$xy$項，

(1)化簡成 Γ：$a'x'^2+c'y'^2+d'x'+e'y'+f=0$(轉軸後常數項不變)............(3)，

此時(3)中a'、c'必有一個爲 0　(後面會說明)，若$c'=0$，則(3)會變成

Γ：$a'x'^2+d'x'+e'y'+f=0$.........(4)

(b)當$e'\neq0$ 時，再將(4)加以配方，再移軸可得Γ爲拋物線。

當$e'=0$ 時，則Γ 可能爲兩條平行線或兩條重合直線或沒有圖形。

[例題1] 利用坐標變換，將二次曲線Γ：$x^2+4xy+y^2-8x+2y-8=0$ 化成標準式。

Ans：$\dfrac{y''^2}{3}-\dfrac{x''^2}{1}=1$

[例題2] 利用坐標變換，將二次曲線Γ：$x^2-2xy+y^2-8x-8y+16=0$ 化成標準式。
Ans：$y''^2=4\sqrt{2}x''$

(練習1) 試利用坐標變換，將下列二次曲線化簡成標準式：
(1)$17x^2-12xy+8y^2+46x-28y+17=0$
(2)$9x^2-24xy+16y^2-18x-101y+19=0$
(3)$x^2+4xy-2y^2-8x+20y+40=0$
(4)$xy=k$
Ans：(1)$x''^2+4y''^2=4$ (2)$y''^2=3x''$ (3)$2x''^2-3y''^2+78=0$(4)$x''^2-y''^2=2k$

(乙)坐標變換的不變量

從前面的討論，我們可以得到化簡一般二次曲線的方法與原則，根據這些原則，我們可以去判定Γ的形狀，不過在化簡過程中，除非到最後，否則無法判別出Γ的形狀。是否有其他方法可以幫助我們來更快達成化簡二次曲線方程式的目的，且根據原來的係數就可以判別出Γ的形狀呢？數學家在坐標變換的過程中發現有些「**係數所形成的代數式**」是保持不變，利用這些「係數所形成的代數式」我們就可以根據原方程式的係數來判斷出Γ的形狀。

(1)不變量：

定理：
二次曲線Γ：$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 中經過「移軸」、「轉軸」的變換後，其係數所形成的代數式：
(1)$H=a+c$ (2)$\delta=b^2-4ac$ (3) $b^2+(a-c)^2$(4)$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$ 的值都不會改變。

[證明]：
[移軸]：設移軸至新原點$O'(h,k)$，移軸公式$\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases}$，代入Γ的原方程式後得

到 Γ：$a'x'^2+bx'y'+cy'^2+d'x'+e'y'+f'=0$，其中

$a'=a$，$b'=b$，$c'=c$，$d'=2ah+bk+d$，$e'=bh+2ck+e$，$f'=ah^2+bhk+ck^2+dh+ek+f$

所以對於H、δ、$b^2+(a-c)^2$而言，經過移軸顯然是不變量。

只需證明Δ爲不變量即可

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a' & b' & d'\\ b' & 2c' & e'\\ d' & e' & 2f'\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a & b & 2ah+bk+d\\ b & 2c & bh+2ck+e\\ 2ah+bk+d & bh+2ck+e & 2(ah^2+bhk+ck^2+dh+ek+f)\end{vmatrix}$$

(第一行×$(-h)$)、第二行×$(-k)$加到第三行)

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a & b & d\\ b & 2c & e\\ 2ah+bk+d & bh+2ck+e & dh+ek+2f\end{vmatrix}$$

(第一列×$(-h)$)、第二列×$(-k)$加到第三列)

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a & b & d\\ b & 2c & e\\ d & e & 2f\end{vmatrix}$$

[轉軸]：設轉軸一個銳角θ，轉軸公式$\begin{cases}x=x''\cos\theta-y''\sin\theta\\ y=x''\sin\theta+y''\cos\theta\end{cases}$代入Γ的原方程式後

得到Γ ：$a''x''^2+b''x''y''+c''y''^2+d''x''+e''y''+f''=0$……其中

$a''=a\cos^2\theta+b\cdot\sin\theta\cos\theta+c\sin^2\theta$，

$b''=-2a\sin\cos\theta+b(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2c\sin\theta\cos\theta=b\cos2\theta-(a-c)\sin2\theta$

$c''=a\sin^2\theta-b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$

$d''=d\cos\theta+e\sin\theta$

$e''=-d\sin\theta+e\cos\theta$

$f''=f$

證明H爲轉軸不變量

$a''+c''$

$=(a\cos^2\theta+b\cdot\sin\theta\cos\theta+c\sin^2\theta)+(a\sin^2\theta-b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta)$

$=a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+c(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$=a+c$

證明$b^2+(a-c)^2$爲轉軸不變量

$b''^2+(a''-c'')^2$

$=[b\cos2\theta-(a-c)\sin2\theta]^2+[b\sin2\theta+(a-c)\cos2\theta]^2$

$=b^2(\cos^22\theta+\sin^22\theta)+(a-c)^2(\sin^22\theta+\cos^22\theta)$

$=b^2+(a-c)^2$

證明δ爲轉軸不變量

$b''^2-4a''c''=b''^2+(a''-c'')^2-(a''+c'')^2=b^2+(a-c)^2-(a+c)^2=b^2-4ac$。

當轉軸角θ滿足$\cot 2\theta=\dfrac{a-c}{b}\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$時，$b''^2+(a''-c'')^2=b^2+(a-c)^2$，因爲此時$b''=0$，所以$a''-c''=\pm\sqrt{b^2+(a-c)^2}$ ，

又 $a''-c''=(a-c)\cos 2\theta+b\sin 2\theta=(b\sin 2\theta)[(\dfrac{a-c}{b})\cot 2\theta+1]=(b\sin 2\theta)[(\dfrac{a-c}{b})^2+1]$，$\sin 2\theta>0$

故$a''-c''$的正負號與b的正負號相同。

證明Δ爲轉軸不變量(補充僅供參考)

$$\begin{vmatrix}2a'' & b'' & d''\\ b'' & 2c'' & e''\\ d'' & e'' & 2f''\end{vmatrix}=d''\cdot\begin{vmatrix}b'' & d''\\ 2c'' & e''\end{vmatrix}+e''\cdot\begin{vmatrix}d'' & 2a''\\ e'' & b''\end{vmatrix}+2f''\cdot\begin{vmatrix}2a'' & b''\\ b'' & 2c''\end{vmatrix}$$

$a''=a\cos^2\theta+b\cdot\sin\theta\cos\theta+c\sin^2\theta$，
$b''=-2a\sin\cos\theta+b(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2c\sin\theta\cos\theta=b\cos 2\theta-(a-c)\sin 2\theta$
$c''=a\sin^2\theta-b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$
$d''=d\cos\theta+e\sin\theta$
$e''=-d\sin\theta+e\cos\theta$
$f''=f$

$2f''\cdot\begin{vmatrix}2a'' & b''\\ b'' & 2c''\end{vmatrix}=2f\cdot\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}$ (因爲$f''=f$，且b^2-4ac爲不變量)

$$\begin{vmatrix}b'' & d''\\ 2c'' & e''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2(a-c)\sin\theta\cos\theta & d\cos\theta+e\sin\theta\\ 2a\sin^2\theta-2b\sin\theta\cos\theta+2c\cos^2\theta & -d\sin\theta+e\cos\theta\end{vmatrix}$$
$$=(bd-2ae)\sin\theta\cos^2\theta+(be-2cd)\sin^2\theta\cos\theta+(bd-2ae)\sin^3\theta+(be-2cd)\cos^3\theta$$
$$=(bd-2ae)\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+(be-2cd)\cos\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$=\begin{vmatrix}b & 2c\\ d & e\end{vmatrix}\cos\theta-\begin{vmatrix}2a & b\\ d & e\end{vmatrix}\sin\theta$$

同理可證明：$\begin{vmatrix}d'' & 2a''\\ e'' & b''\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b & 2c\\ d & e\end{vmatrix}\sin\theta-\begin{vmatrix}2a & b\\ d & e\end{vmatrix}\cos\theta$

所以

$$\begin{vmatrix}2a'' & b'' & d''\\ b'' & 2c'' & e''\\ d'' & e'' & 2f''\end{vmatrix}=d''\cdot\begin{vmatrix}b'' & d''\\ 2c'' & e''\end{vmatrix}+e''\cdot\begin{vmatrix}d'' & 2a''\\ e'' & b''\end{vmatrix}+2f''\cdot\begin{vmatrix}2a'' & b''\\ b'' & 2c''\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}b & 2c\\ d & e\end{vmatrix}(d''\cos\theta-e''\sin\theta)-\begin{vmatrix}2a & b\\ d & e\end{vmatrix}(d''\sin\theta+e''\cos\theta)+2f\cdot\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}$$
$$=d\cdot\begin{vmatrix}b & 2c\\ d & e\end{vmatrix}-e\cdot\begin{vmatrix}2a & b\\ d & e\end{vmatrix}+2f\cdot\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a & b & d\\ b & 2c & e\\ d & e & 2f\end{vmatrix}$$

(2)利用不變量來化簡方程式：

二次曲線 Γ ：$g(x,y)= ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

檢查$\delta=b^2-4ac$

(A) $\delta=b^2-4ac\neq 0$ 先移軸再轉軸

(a)先平移到新原點$O'(h,k)$消去x，y項係數，其中(h,k)滿足$\begin{cases} 2ah+bk+d=0 \\ bh+2ck+e=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Gamma$：$a'x'^2+bx'y'+cy'^2+f'=0$，其中$a'=a$，$b'=b$，$c'=c$，$f'=g(h,k)$，

(b)再轉軸銳角θ，消去$x'y'$項，其中$\cot 2\theta=\dfrac{a-c}{b}$，$\Rightarrow\Gamma$ ：$a''x''^2+c''y''^2+f''=0$

因爲$b''^2+(a''-c'')^2= b^2+(a-c)^2$，且此時$b''=0$，所以$a''-c''=\pm\sqrt{b^2+(a-c)^2}$

$a''-c''=(a-c)\cos 2\theta+b\sin 2\theta=(b\sin 2\theta)[(\dfrac{a-c}{b})\cot 2\theta+1]=(b\sin 2\theta)[(\dfrac{a-c}{b})^2+1]$，且$\sin 2\theta>0$

故$a''-c''$的正負號與b的正負號相同，

$\Rightarrow$ **$a''-c''=\pm\sqrt{b^2+(a-c)^2}$ ($b>0$，取正號；$b<0$，取負號)。**

根據不變量的理論**$a''+c''=a'+c'=a+c$**，

所以可以解出a''、c''，$f''=f'= g(h,k)$

(B)$\delta=b^2-4ac=0$ 先轉軸再移軸

(a)先轉軸銳角θ 消去xy項，$\cot 2\theta=\dfrac{a-c}{b}$

$\Rightarrow\Gamma$：$a'x'^2+c'y'^2+d'x'+e'y'+f'=0$

因爲$b'^2-4a'c'=b^2-4ac=0 \Rightarrow -4a'c'=0 \Rightarrow a'=0$ 或$c'=0$，不妨設$c'=0$

$\Rightarrow\Gamma$：$a'x'^2+d'x'+e'y'+f'=0$，$d'=d\cdot\cos\theta+e\cdot\sin\theta$，$e'=-d\cdot\sin\theta+e\cdot\cos\theta$ ，$f'=f$。

(b)再移軸至$O'(h,k)$，(h,k)的找法可利用配方法。

[例題3] 利用坐標變換，將曲線Γ：$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ 化成標準式，並作其圖形，然後回答下列問題：

(1) Γ的圖形名稱爲______________。

(2) Γ之中心的坐標爲_______________。

(3) Γ的正焦弦長爲________________。

(4) Γ的焦點坐標爲_____________________。

(5) Γ的長軸所在的直線方程式爲_____________________。

Ans：(1)橢圓 (2)(1,1) (3)$\dfrac{2}{3}$ (4)(−1,3)及(3,−1) (5)$x+y-2=0$

[例題4] 於xy平面上，方程式$x^2+2xy+y^2+8x-8y+16=0$，利用坐標移軸轉軸化簡方程式成標準式。Ans：$x''^2=4\sqrt{2}\ y''$

(練習2) 將坐標軸旋轉θ 角($\cot 2\theta=\dfrac{A-C}{B}$)，使得曲線$\Gamma$：
$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+7=0$ 的新方程式為：
$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0$，則下列何者正確？
(A)$A'+C'=A+C$　(B)$A'-C'=A-C$　(C)$A-C=\sqrt{(A-C)^2+B^2}$
(D)$B'=0$　(E)$-4A'C'=B^2-4AC$　(F)$F'=7$
(G)$D'^2+E'^2=D+E$　Ans：(A)(D)(E)(F)(G)

(練習3) 設坐標系S旋轉 $18°$,方程式 $3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2+2x-2\sqrt{3}y=0$ 的新方程式為$ax'^2+bx'y'+cy'^2+dx'+ey'+f=0$，試求
(1) $a+c=$？(2) $b^2-4ac=$？(3) $d^2+e^2=$？(4) $f=$？
Ans：(1) 4(2) 0(3) 16(4) 0

(練習4) 利用坐標變換，將曲線Γ：$5x^2-6xy+5y^2-4x-4y-4=0$ 化成標準式，並作其圖形，然後回答下列問題：
(1) Γ的圖形名稱為______________。
(2) Γ之中心的坐標為_______________。
(3) Γ的正焦弦長為________________。
(4) Γ的焦點坐標為_____________________。
(5) Γ的兩對稱軸所在的直線方程式為_____________________。

Ans：(1)橢圓：$\dfrac{x''^2}{4}+\dfrac{y''^2}{1}=1$ (2)(1,1) (3)1

(4) $(\dfrac{\sqrt{6}}{2}+1,\dfrac{\sqrt{6}}{2}+1)$ 及 $(\dfrac{-\sqrt{6}}{2}+1,\dfrac{-\sqrt{6}}{2}+1)$ (5)$x-y=0$ 及 $x+y-2=0$

(練習5) 設 $\Gamma: xy+3x-2y=10$，則：

(1)中心坐標爲_________，(2)頂點坐標爲__________，

(3)焦點坐標爲_________，(4)貫軸長爲____________，

(5)正焦弦長爲_________，(6)漸近線方程式爲____________。

(7)標準式：______________________。

Ans：(1)(2,−3) (2)(4,−1)與(0,−5)

(3) $(2\sqrt{2}+2,2\sqrt{2}-3),(-2\sqrt{2}+2,-2\sqrt{2}-3)$ (4) $4\sqrt{2}$ (5) $4\sqrt{2}$

(6)$x-2=0$ 與 $y+3=0$ (7) $\dfrac{x''^2}{8}-\dfrac{y''^2}{8}=1$

(練習6) 設二次曲線 $\Gamma: x^2+2xy+y^2-4x-12y=0$，則：

(1)頂點坐標爲__________，(2)焦點坐標爲____________，

(3)對稱軸方程式爲__________，(4)正焦弦長爲____________，

(5)準線方程式爲___________。(6)標準式：___________________。

Ans：(1)(4,0) (2) $(\dfrac{7}{2},\dfrac{1}{2})$ (3)$x+y=4$ (4) $2\sqrt{2}$ (5)$x-y=5$ (6) $x''^2=2\sqrt{2}y''$

(練習7) 求橢圓Γ：$5x^2-2\sqrt{3}xy+7y^2-4=0$ 於第一象限的頂點坐標。

Ans：$(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$ (90 台中指定考科模擬測驗)

(丙)二次曲線的分類

(1)二元二次方程式的圖形：

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 稱爲二元二次方程式

二元二次方程式的圖形共可分成 9 類：

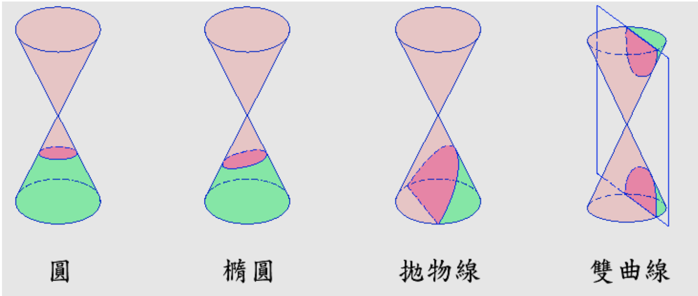
①圓：$x^2+y^2-2x-4y=5 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=10$

②橢圓
③拋物線
④雙曲線
} 合稱爲圓錐曲線

⑤二相交直線：$x^2-xy-2y^2-x-4y-2=0 \Rightarrow (x+y+1)(x-2y-2)=0$
⑥二平行直線：$x^2-2xy+y^2+3x-3y+2=0 \Rightarrow (x-y+1)(x-y+2)=0$
⑦一直線：$x^2-2xy+y^2+2x-2y+1=0 \Rightarrow (x-y+1)^2=0$
⑧一點：$x^2+y^2-4x-6y+13=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=0$
⑨沒有圖形：$x^2+y^2-4x-6y+14=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=-1$
} 退化的圓錐曲線

注意：圓一定沒有*xy*項，橢圓、拋物線、雙曲線可能有*xy*項(歪的)

橢圓、拋物線、雙曲線合稱圓錐曲線，因爲可以用平面截圓錐而成。



(2)不變量與係數：

設二次曲線Γ：$g(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，

(A) $\delta=b^2-4ac\neq 0$

$\boxed{\text{先移軸}}$

若Γ經移軸至$O'(h,k)$後，其中h,k滿足 $2ah+bk+d=0$ 且$bh+2ck+e=0$

則新方程式$ax'^2+bx'y'+cy'^2+g(h,k)=0$，其中$g(h,k)=-\dfrac{\Delta}{\delta}$，$\delta=b^2-4ac$，

$\Delta=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}2a & b & d\\ b & 2c & e\\ d & e & 2f\end{vmatrix}$。

[分析]：

根據前面座標移軸轉軸的說明，我們只需證明

$g(h,k)=ah^2+bhk+ck^2+dh+ek+f=-\dfrac{\Delta}{\delta}$，即可。

又因為$g(h,k)=\dfrac{1}{2}(2ah+bk+d)h+\dfrac{1}{2}(bh+2ck+e)k+\dfrac{1}{2}(dh+ek+2f)=\dfrac{1}{2}(dh+ek+2f)$。

所以真正要證明的結果是$\boxed{-\dfrac{\Delta}{\delta}=\dfrac{1}{2}(dh+ek+2f)}$。

[證明]：$\Delta=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}2a & b & d\\ b & 2c & e\\ d & e & 2f\end{vmatrix}$

$=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}2a & b & 2ah+bk+d\\ b & 2c & bh+2ck+e\\ d & e & dh+ek+2f\end{vmatrix}$

$=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}2a & b & 0\\ b & 2c & 0\\ d & e & dh+ek+2f\end{vmatrix}$

$=\dfrac{1}{2}(dh+ek+2f)\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}$

$=\dfrac{1}{2}(dh+ek+2f)\cdot(-\delta)$，故得證。

根據上面的結果，移軸之後方程式為$ax'^2+bx'y'+cy'^2=\dfrac{\Delta}{\delta}$

$\boxed{\text{再轉軸}}$

移軸後再轉軸θ，$(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，$\cot 2\theta=\frac{a-c}{b}$，得新方程式$a''x''^2+cy''^2=\frac{\Delta}{\delta}$

其中$a''+c''=a+c$，$a''-c''=\pm\sqrt{(a-c)^2+b^2}$ ，(正負號與b相同)

圖形的討論：$(\delta=b^2-4ac\neq 0)$

對於二次曲線 Γ：$a''x''^2+cy''^2=\frac{\Delta}{\delta}$ …………(*)而言，

因爲δ、H爲不變量，

$a''+c''=a+c=\mathrm{H}$，$0^2-4a''c''=b^2-4ac$

(a)$\delta=b^2-4ac>0 \Rightarrow a''c''<0$

$\Delta\neq 0$ 時(*)可化爲 $\dfrac{x''^2}{\frac{\Delta}{a''\delta}}+\dfrac{y''^2}{\frac{\Delta}{c''\delta}}=1$，所以Γ爲雙曲線。

$\Delta=0$ 時，Γ 爲兩相交直線。

(b)$\delta=b^2-4ac<0 \Rightarrow a''c''>0$

$\Delta\neq 0$ 時(*)可化爲 $\dfrac{x''^2}{\frac{\Delta}{a''\delta}}+\dfrac{y''^2}{\frac{\Delta}{c''\delta}}=1$，

$\mathrm{H}\cdot\Delta=(a''+c'')\cdot\Delta=(a+c)\cdot\Delta$

①$\mathrm{H}\cdot\Delta<0 \Leftrightarrow a''$與Δ異號、$c''$與Δ異號 $\Leftrightarrow$ $\frac{\Delta}{a''\delta}>0$ 且$\frac{\Delta}{b''\delta}>0$

$\Rightarrow$Γ 表示一個橢圓或圓。

②$\mathrm{H}\cdot\Delta>0 \Leftrightarrow a''$與Δ同號、$c''$與Δ同號 $\Leftrightarrow$ $\frac{\Delta}{a''\delta}$,<0 且$\frac{\Delta}{b''\delta}<0$

$\Rightarrow$Γ無圖形。

(B)$\delta=b^2-4ac=0$

$\boxed{\text{先轉軸}}$

轉軸θ，$(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，$\cot 2\theta=\frac{a-c}{b}$，得新方程式$a'x'^2+c'y'^2+d'x'+e'y'+f'=0$

因爲δ爲不變量，$0^2-4a''c''=0 \Rightarrow a''c''=0$ 所以$a''=0$ 或$c''=0$

不失一般性下，設$c'=0$，得$a'x'^2+d'x'+e'y'+f=0$

又$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a & b & d\\ b & 2c & e\\ d & e & 2f\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a' & 0 & d'\\ 0 & 0 & e'\\ d' & e' & 2f\end{vmatrix}=-a'e'^2$

(a) $\Delta\neq 0$ 時，$e'\neq 0$，Γ 爲拋物線。

(b)$\Delta=0$ 時，$e'=0$ $(a'\neq 0)$，新方程式可化爲$a'x'^2+d'x'+f=0$

若$d'^2-4a'f'>0$，則Γ 爲兩平行線。

若$d'^2-4a'f'=0$，則Γ 爲兩重合線。

若$d'^2-4a'f'<0$，則Γ 無圖形。

將上述的結果列表如下：

Δ \ δ	$\delta>0$	$\delta=0$	$\delta<0$
$\Delta\neq0$	雙曲線	拋物線	$H\cdot\Delta<0$：橢圓 $H\cdot\Delta>0$：無圖形
$\Delta=0$	兩相交直線	兩條平行線 兩條重合直線 無圖形	一點

[例題5] 請判斷下列二元二次方程式之圖形爲何？

(1)$x^2-xy+2y^2-x+y-1=0$

(2)$x^2-2xy+y^2-x+2y+1=0$

(3)$x^2+4xy+4y^2+x+2y-2=0$

(4)$x^2-xy-y^2+x-2y+1=0$

(5)$x^2-3xy-4y^2-x-11y-6=0$

Ans：(1)橢圓 (2)拋物線 (3)兩平行直線 (4)雙曲線 (5)相交兩直線

[例題6] 求雙曲線 $2x^2+4xy-y^2-6y+3=0$ 之漸近線及其共軛雙曲線。

Ans：$2x^2+4xy-y^2-6y-3=0$，$2x^2+4xy-y^2-6y-9=0$

[例題7] 請問當k的條件爲何時？下列方程式$x^2+y^2+2x+2y+k(x^2+xy-y^2)=0$ 表示

(1)橢圓 (2)雙曲線 (3)拋物線(4)圓 (5)相交兩直線。

Ans：(1)$\frac{-2}{\sqrt{5}}<k<\frac{2}{\sqrt{5}}$，$k\neq0$ (2)$k<\frac{-2}{\sqrt{5}}$或$\frac{2}{\sqrt{5}}<k<2$ 或$k>2$ (3)$k=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ (4)$k=0$ (5)$k=2$

(練習8) 試判別下列方程式所代表的圖形。

(1)$x^2+4xy+5y^2+2x+4y-7=0$

(2)$x^2-xy-2y^2+5x-y+5=0$

(3)$x^2-2xy-y^2-8x+9=0$

(4)$4x^2-4xy+y^2+2x+4y+1=0$

(5)$4x^2+12xy+9y^2+2x+3y+1=0$

Ans：(1)橢圓 (2)雙曲線 (3)兩相交直線 (4)拋物線 (5)兩平行直線

(練習9) 試判定下列二元二次方程式之圖形爲何？

(1) $x^2+4xy+4y^2-2x-4y-3=0$ 的圖形爲________。

(2) $x^2+5xy+6y^2+y-1=0$ 的圖形爲________。

(3) $x^2-4xy+4y^2+2x-4y+1=0$ 的圖形爲________。

(4) $x^2+3xy+4y^2=0$ 的圖形爲________。

(5) $x^2+y^2+2x+2y+3=0$ 的圖形為________。

Ans：(1)平行兩直線(2)相交兩直線(3)一直線(4)一點(5)沒有圖形

(練習10) 求 $xy+2x-3y-1=0$ 之(1)中心(2)共軛雙曲線。

Ans：(1)$(3,-2)$ (2)$xy+2x-3y-11=0$

(練習11) 若$x^2+4xy+4y^2+kx+2y-12=0$ 表示二平行線，則k的值為_______；又此二平行線間的距離=_________。Ans：$k=1$，$\frac{7}{\sqrt{5}}$

(練習12) 試就實數k的值討論下列方程式的圖形：

$2x^2-4xy+3y^2+2x-y+k=0$

Ans：$k<\frac{3}{4}$，橢圓；$k=\frac{3}{4}$，一點$(-1,\frac{-1}{2})$；$k>\frac{3}{4}$，無圖形

[例題8] 坐標平面上，當點P(x,y)在曲線$x^2+2xy+y^2-2x+6y+1=0$上變動時，點P到直線$x-y+4=0$的距離的最小值=__________。(92 指定甲)

Ans：$\sqrt{8}$

(練習13) 坐標平面上，當點P(x,y)在曲線 $5x^2-6xy+5y^2-4x-4y-4=0$ 上變動時，點P到直線$x-y-10=0$的距離的最小值=___________。

Ans：$\frac{10}{\sqrt{2}}-1$

綜合練習

(1) 在坐標平面上以 Γ 表示拋物線$y=x^2$ 的圖形。試問以下哪些方程式的圖形可以由 Γ 經適當的平移或旋轉得到？
(A)$y=2x^2$ (B)$y=-x^2$ (C)$x=y^2$ (D)$y=x^2+4x+3$ (E)$(x+y)=(x-y)^2$。(95 指定甲)

(2) 拋物線Γ的準線為$x+y+2=0$，焦點F(3,3)，現在將轉軸銳角θ，再移軸至$O'(h,k)$[針對xy坐標]，方程式可化為$y''^2=4cx''$，請問$\theta=$？$(h, k)=$？$c=$？

(3) k為正奇數，方程式$kx^2-6xy+ky^2-8x+8y-12=0$ 之圖形Γ為雙曲線，則
(a)試求k之值。 (b)將坐標原點平移至$(h.k)$再做旋轉θ角度$(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，使Γ的方程式標準化成$\frac{x''^2}{A}+\frac{y''^2}{B}=1$，試求序對(A,B)=？
(c)求Γ的共軛雙曲線之方程式。(91 南一中模擬考)

(4) 假設甲、乙是兩條圓錐曲線，方程式分別為
甲：$x^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=1$，乙：$x^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=2$，請問下列敘述那些是正確的？
(A)甲乙兩條曲線不相交。
(B)如果甲的圖形是橢圓，乙的圖形也是橢圓。
(C)如果乙是兩條相交直線，則甲的圖形是雙曲線。
(D)如果乙在坐標平面上的圖形是甲的圖形往上平移一單位，
則甲乙的圖形均為拋物線。
(E)如果甲的圖形是雙曲線，乙的圖形也是雙曲線。

(5) 下列方程式所表示的圖形是雙曲線的有那些？
(A)$4xy+3x^2-2=0$ (B)$5x^2+8xy-2y^2+x-2=0$ (C)$x^2+6xy+9y^2-3y+1=0$
(D)$x^2+xy+y^2+2x-3y+6=0$ (E)$x^2+2y^2+4x+4y+6=0$。
(92 台北指定考科模擬測驗甲 2)

(6) 二次曲線Γ：$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 中，經過移軸、轉軸的變換後，下列那些值不會改變？
(A)b^2-4ac (B)$a-c$ (C)$a+c$ (D)f (E)$a+b+c$。(92 台北指定考科模擬測驗甲 2)

(7) 已知P為橢圓Γ：$5x^2-6xy+5y^2=8$ 上一點，設F_1、F_2為Γ的兩個焦點且$\angle F_1PF_2=90°$，則下列敘述何者正確？
(A)$(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$為Γ之長軸端點坐標 (B)$(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$為$\Gamma$之焦點坐標 (C)正焦弦長為 1
(D)ΔF_1PF_2的周長為 $2(\sqrt{3}+2)$。(E) ΔF_1PF_2的面積為 1。
(92 台北指定考科模擬測驗甲 3)

(8) 將直角坐標平面上的兩坐標軸以原點為中心，旋轉θ角$(0<\theta<\frac{\pi}{2})$後，原曲線Γ的方程式為 $25x^2-14xy+25y^2=288$ 之新方程式為$a(x')^2+b(y')^2=1$，則：

(A)$\theta=\frac{\pi}{4}$ (B)$a=\frac{1}{9}$ (C)$b=\frac{1}{16}$ (D)$(\frac{\sqrt{14}}{2},\ \frac{\sqrt{14}}{2})$爲原曲線$\Gamma$的一焦點。

(E)$(2\sqrt{2}\ ,-2\sqrt{2}\ )$爲原曲線$\Gamma$的一個頂點。(90 台北指定考科模擬測驗甲 1)

(9) 在坐標平面上，(8,6)、(0,0)分別爲橢圓Γ上的長軸之端點及中心點，且短軸長爲 10。若將座標軸旋轉一個角度$\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$後可將$\Gamma$的方程式變長標準式，試問下列敘述何者爲真？

(A)$\theta=\tan^{-1}\frac{4}{3}$ (B)旋轉後的新方程式爲$\frac{x^{//2}}{100}+\frac{y^{//2}}{25}=1$ (C)旋轉前的方程式爲 $52x^2+72xy+73y^2=2500$ (D)有一焦點其原坐標爲$(-4\sqrt{3},-3\sqrt{3})$ (E)有一短軸的端點其原座標爲(3,−4)。(90 高雄女中模擬考)

(10) 若坐標平面上滿足$2x^2+axy+2y^2=1$上的點(x,y)，都滿足$x^2+y^2\le 1$，則 a 的最小值可能爲___________。(93 指定甲)

(11) 證明：$xy=k\ (k\neq 0)$的方程式爲一等軸雙曲線。

(12) 求 $8x^2+10xy-3y^2-2x+4y-2=0$ 之漸近線，並求兩漸近線的交點。

(13) 設k爲實數，試就k的值來討論$x^2+kxy+y^2=1$ 所代表的圖形。

(14) 二次曲線Γ：$kx^2+8xy+ky^2=1$，當$k=$______時，表示兩平行線，若k表示橢圓，則k的範圍爲________。

(15) 若二元二次方程式$x^2-4xy+ky^2-3x+ly-4=0$ 的圖形表兩平行直線，則：

(a)數對(k,l)=______________。

(b)此兩平行直線的距離爲______________。

(16) a,b,c爲實數，若二元二次方程式$\sqrt{3}x^2-4xy+\sqrt{3}y^2+ax+by+c=0$ 之圖形爲相交二直線L_1、L_2之聯集且L_1、L_2之銳夾角θ，則θ=？

(A)$\frac{\pi}{6}$ (B)$\frac{\pi}{4}$ (C)$\frac{\pi}{3}$ (D)$\frac{\pi}{2}$ 。(91 南一中模擬考)

(17) 設k爲實數，且 $3x^2+kxy+(k-1)y^2-8x-2ky+6=0$ 圖形表示一點，則

(a)求k之值。 (b)此點坐標。(91 高雄中學模擬考)

(18) 求曲線 $xy=2$ 上的點到直線 $2x+y=0$ 的距離的最小值。

(19) 坐標平面上，設二次曲線Γ的方程式爲 $2x^2-\sqrt{3}xy+y^2=1$，且直線L：$x=k$爲Γ的切線，則下列何者爲真？(91 台中區模擬考 3)

(A)Γ的圖形爲抛物線 (B)k有兩解 (C)y有最大值(D)Γ在第二象限沒有圖形。

(20) 關於曲線Γ：$7x^2-8xy+y^2-30x+12y+18=0$，則下列敘述何者正確？

(A)Γ之中心坐標為$(1,-2)$　(B)Γ之對稱軸斜率為$\frac{1}{2}$和-2　(C)Γ之正焦弦長為$\frac{2}{3}$

(D)若$P(x,y)$為Γ上任一點，則$(x-1)^2+(y+2)^2$之最小值為 1。(91 台中區模擬考 2)

進階問題

(21) 化簡方程式$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$　($a>0$)，證明此方程式的圖形為與兩軸相切的一段拋物線，並求其頂點、焦點坐標及準線方程式。

(22) 求證無論θ為何值，方程式$x^2-2\tan\theta xy-y^2+2ay\sec\theta-a^2=0$ 恆代表兩直線，且兩直線恆各過一定點。並請求出θ變化時此兩直線交點的軌跡。

(23) 設二實數x,y滿足$x^2+2xy+2y^2-2x-4y-6=0$，則x值的範圍為__________。

綜合練習解答

(1) (B)(C)(D)

(2) $\frac{\pi}{4}$，$(1,1)$，$2\sqrt{2}$

(3) (a)$k=1$ (b)$(2,-1)$ (c)$x^2-6xy+y^2-8x+8y+4=0$

(4) (A)(B)(C)(D)

(5) (A)(B)

(6) (A)(C)

(7) (C)(D)(E)[(E)提示：移軸轉軸後的方程式為$\frac{x''^2}{4}+\frac{y''^2}{1}=1$，設$PF_1=m$，$PF_2=n\Rightarrow m+n=2a=4$，$m^2+n^2=(2c)^2=12\Rightarrow mn=2\Rightarrow\Delta F_1PF_2$的面積為 1]

(8) (A)(D)

(9) (B)(D)(E)

(10) -2

(11) 提示：經過軸轉可得方程式為$\frac{x''^2}{2}-\frac{y''^2}{2}=k$。

(12) $8x^2+10xy-3y^2-2x+4y-1=0$，$(\frac{-1}{7},\frac{3}{7})$

(13) $|k|>2\Rightarrow$雙曲線，$|k|=2\Rightarrow$兩平行直線，$|k|<2\Rightarrow$橢圓(含圓)

(14) 4，$k>4$

(15) (a) $(4,6)$　(b) $\sqrt{5}$

[提示：兩平行直線$\Rightarrow b^2-4ac=0\Rightarrow(-4)^2-4k=0\Rightarrow k=4$

$\Rightarrow x^2-4xy+4y^2-3x+ly-4=0$ 雙十字可分解為$(x-2y-4)(x-2y+1)=0$

$\Rightarrow l=6$

$\Rightarrow$兩平行線$x-2y-4=0$ 及 $x-2y+1=0$ 的距離$=\sqrt{5}$]

(16) (A)[提示：原方程式可化為$(\sqrt{3}x-y+m)(x-\sqrt{3}y+n)=0$]

(17) (a)$k=2$ (b)$(1,1)$

[提示：(a)利用Δ=0，求出 $k=2$。(b)圖形代表的點即為對稱中心]

(18) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ [設與 $2x+y=0$ 平行的切線為 $2x+y-k=0$，與 $xy=2$ 聯立判別式=0，解

出 $k=\pm4$，再計算切線到 $2x+y=0$ 的距離。]

(19) (B)(C)

(20) (A)(D)

(21) 頂點$(\frac{a}{4}，\frac{a}{4})$，焦點$(\frac{a}{2}，\frac{a}{2})$，準線 $x+y=0$

(22) 計算$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -2\tan\theta & 0 \\ -2\tan\theta & -2 & 2a\sec\theta \\ 0 & 2a\sec\theta & -2a^2 \end{vmatrix}=0$，$\delta=4\sec^2\theta>0$，所以方程式代表兩相交直線。恆過點$(a\cos\theta, a\sin\theta)$，兩直線交點的軌跡為圓。

(23) $-4\le x\le4$

[提示：將方程式視為y的一元二次方程式 $2y^2+(2x-4)y+(x^2-2x-6)=0$，因為要解出實數$y$，因此$y$的判別式$=(2x-4)^2-4\cdot2\cdot(x^2-2x-6)\ge0$，藉此可解出$x$的範圍。]