§2−4 二項式定理

(甲)二項式定理

(1)從一個例子談起：

(a)觀察二項和的平方：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，

三項和的平方：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

如過要推廣到二項和的n次方$(a+b)^n$，是否其展開式有一般的公式呢？

首先我們觀察n=4，$(a+b)^4$的不同類項有a^4、a^3b、a^2b^2、ab^3、b^4五項，即一般項可以寫成$a^{4-k}b^k$，k=0,1,2,3,4，問題是它們的係數是多少呢？先考慮a^3b項的係數要如何計算？

因爲$(a+b)^4=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$，要乘出$a^3b$項，4 個$(a+b)$項的相乘式中，有三項選$a$，一項選$b$，相乘情形如下表所示：

	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$
第 1,2,3 括號選 a，第 4 括號選 b	a	a	a	b
第 1,2,4 括號選 a，第 3 括號選 b	a	a	b	a
第 1,3,4 括號選 a，第 2 括號選 b	a	b	a	a
第 2,3,4 括號選 a，第 1 括號選 b	b	a	a	a

以上四種情形，均能乘出a^3b，所以合併之後，展開式中a^3b的係數爲 4

根據上表，我們可以看出a^3b項的係數是由 3 個a,1 個b作不儘相異物的排列數$\dfrac{4!}{3!\,1!}$，或是 4 個括號選 3 個括號拿a 出來乘的組合數$C^4_3=C^4_1=4$。

同理，我們可以求其他不同類項的係數：

a^2b^2項的係數是 2 個a,2 個b作不儘相異物的排列數$\dfrac{4!}{2!\,2!}=C^4_2$。

ab^3項的係數是 1 個a,3 個b作不儘相異物的排列數$\dfrac{4!}{1!\,3!}=C^4_3$。

b^4項的係數是 4 個b的排列數 $1=C^4_4$。

a^4項的係數是 4 個a的排列數 $1=C^4_0$。

所以$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$。以組合的符號來寫，可得

$(a+b)^4=C^4_0a^4+C^4_1a^3b+C^4_2a^2b^2+C^4_3ab^3+C^4_4b^4$。

(b)由$(a+b)^4$推$(a+b)^5$

$(a+b)^5=(a+b)^4(a+b)$

$=(C^4_0a^4+C^4_1a^3b+C^4_2a^2b^2+C^4_3ab^3+C^4_4b^4)(a+b)$

$=(C^4_0a^5+C^4_1a^4b+C^4_2a^3b^2+C^4_3a^2b^3+C^4_4ab^4)+(C^4_0a^4b+C^4_1a^3b^2+C^4_2a^2b^3+C^4_3ab^4+C^4_4b^5)$

$=C^4_0a^5+(C^4_1+C^4_0)a^4b+(C^4_2+C^4_1)a^3b^2+(C^4_3+C^4_2)a^2b^3+(C^4_4+C^4_3)ab^4+C^4_4b^5$

$=C^5_0a^5+C^5_1a^4b+C^5_2a^3b^2+C^5_3a^2b^3+C^5_4ab^4+C^5_5b^5$。

最後一個式子，用了巴斯卡定理：$C^n_m=C^{n-1}_m+C^{n-1}_{m-1}$。

(2)二項式定理：

$$\boldsymbol{(a+b)^n=C^n_0a^nb^0+C^n_1a^{n-1}b+\ldots+C^n_ka^{n-k}b^k+\ldots+C^n_nb^n=}\sum_{i=1}^{n}C_i^n a^{n-i}b^i$$ 。

[證明]：

(1)當n=1 時，$(a+b)^1=C^1{}_0a+C^1{}_1b$。等式顯然成立。

(2)若設$n=k$時，等式成立，即$(a+b)^k=\sum_{i=1}^{k}C_i^k a^{k-i}b^i$ 。

則當$n=k+1$ 時，

$$\begin{aligned}&(a+b)^{k+1}\\
=&(a+b)^k(a+b)\\
=&(C^k{}_0a^kb^0+C^k{}_1a^{k-1}b+\ldots+C^k{}_ia^{k-i}b^i+\ldots+C^k{}_kb^k)(a+b)\\
=&(C^k{}_0a^{k+1}b^0+C^k{}_1a^kb+\ldots+C^k{}_ia^{k-i+1}b^i+\ldots+C^k{}_kab^k)\\
&+(C^k{}_0a^kb+C^k{}_1a^{k-1}b^2+\ldots+C^k{}_ia^{k-i}b^{i+1}+\ldots+C^k{}_kb^{k+1})\\
=&C^k{}_0a^{k+1}b^0+(C^k{}_1+C^k{}_0)a^kb+(C^k{}_2+C^k{}_1)a^{k-1}b^2+\ldots\\
&+(C^k{}_i+C^k{}_{i-1})a^{k-i+1}b^i+\ldots+(C^k{}_k+C^k{}_{k-1})ab^k+C^k{}_kb^{k+1}\end{aligned}$$

利用巴斯卡定理$C^k{}_i+C^k{}_{i-1}=C^{k+1}{}_i$，$C^k{}_0=C^{k+1}{}_0$與$C^k{}_k=C^{k+1}{}_{k+1}$

所以$(a+b)^{k+1}=C^{k+1}{}_0a^{k+1}+C^{k+1}{}_1a^kb+\ldots+C^{k+1}{}_i\,a^{k+1-i}b^i+\ldots+C^{k+1}{}_{k+1}b^{k+1}$。

因此$n=k+1$ 時等式成立。所以由數學歸納法可知$(a+b)^n=\sum_{i=1}^{n}C_i^n a^{n-i}b^i$ 。

結論：

(a) $(a+b)^n=C^n{}_0a^nb^0+C^n{}_1a^{n-1}b+\ldots+C^n{}_ka^{n-k}b^k+\ldots+C^n{}_nb^n=\sum_{i=1}^{n}C_i^n a^{n-i}b^i$ 。

(b)$(a+b)^n$展開式中的一般式爲$C^n{}_ka^{n-k}b^k$

(c)$(a+b)^n$若按a的降冪排列，則第k+1 項爲$C^n{}_ka^{n-k}b^k$。

(d)$(a+b)^n$的展開式共有n+1($H^n{}_2$)項。

(e)$(1+x)^n=C^n{}_0+C^n{}_1x+C^n{}_2x^2+C^n{}_3x^3+\ldots+C^n{}_kx^k+\ldots+C^n{}_nx^n$。

[例題1] (1)在$(2x-y^2)^6$的展開式中，x^4y^4的係數爲何？

(2)求$(x-\frac{1}{3x^2})^{18}$展開式中，x^6項的係數、不含x之項、x^4項之係數。

Ans：(1)240 (2)$\frac{340}{9}$、$\frac{6188}{243}$、0

[例題2] 設$(1+x)^n$之展開式中，按x的升冪排列，第 5,6,7 項的係數成等差數列，則n=？　Ans：7 或 14

[例題3] $(1+x^2)+(1+x^2)^2+(1+x^2)^3+\cdots+(1+x^2)^{20}$的展開式中，$x^4$的係數為________。Ans：$C^{21}_3=1330$

(練習1) 在$(2x-3y)^8$的展開式中，x^3y^5的係數為何？Ans：-108864

(練習2) 在$(2x^2-\frac{1}{x})^8$的展開式中，x^7的係數為何？Ans：-1792

(練習3) 設a為實數，若$(ax^2+\frac{1}{x})^5$展開式中x^4項之係數為 80，則求
(1)a=？　(2)$\frac{1}{x^2}$項的係數。Ans：(1)a=2 (2)10

(練習4) 請問$(x-1)(x^2-2y)^{10}$的展開式中$x^{15}y^3$項的係數等於多少？
Ans：-960

(練習5) $[(a-2b)^2-c]^5$之展開式中，共有________個不同類項；其中$a^2b^2c^3$項的係數為________。　Ans：36，-240

(練習6) $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ldots\ldots+(1+x)^{20}$展開式中，$x^3$ 項之係數為_______。
Ans：5985

(乙)二項式定理的應用

(1) 組合恆等式：

由$(1+x)^n= C^n_0+C^n_1x+C^n_2x^2+C^n_3x^3+\ldots+C^n_kx^k+\ldots+C^n_nx^n\ldots(*)$

可導出一些組合恆等式。

(a)活用公式：

①$x=1$ 代入(*)得：_____= ____

②$x=-1$ 代入(*)得：_____= ____

③$x=2$ 代入(*)得：_____= ____

④$x=\frac{1}{3}$代入(*)得：_____= ____

(c)從組合意義來看組合恆等式：$C^n_0+C^n_1+C^n_2+C^n_3+\ldots+C^n_k+\ldots+C^n_n=2^n$

百貨公司服飾專櫃，推出當季最新的服飾，共有 5 種款式，小萍想要購買服飾，每種款式最多買一件，也可以都不買，請問小萍有幾種購買服飾的情形？

❈ 5 種款式的服飾，買與不買有 2 種情形⇒有 2^5種情形。

❈ 從購買服飾的件數來分類：

沒有買⇒$1=C^5_0$，買 1 件⇒C^5_1，買 2 件⇒C^5_2，買 3 件⇒C^5_3，買 4 件⇒C^5_4，買 5 件⇒$1=C^5_5$，

因此$\mathbf{C^5_0+C^5_1+C^5_2+C^5_3+C^5_4+C^5_5=2^5}$。

[例題4] 化簡下列各式：

(1)$C^n_2+C^n_4+C^n_6+\cdots+$(有意義的最後一項)＝__________

(2) $C^n_1+C^n_3+C^n_5+\cdots+$(有意義的最後一項)＝___________

Ans：(1)2^{n-1} (2)2^{n-1}

[例題5] 設n為自然數，試證：$C^n_1+2C^n_2+\cdots+nC^n_n=n\cdot 2^{n-1}$。

[例題6] 求出$C^{10}_0 C^{10}_8 + C^{10}_1 C^{10}_7 + C^{10}_2 C^{10}_6 + \cdots\cdots + C^{10}_8 C^{10}_0 = ?$

Ans：C^{20}_8

(練習7) $C^{12}_2 + C^{12}_4 + C^{12}_6 + \cdots\cdots + C^{12}_{12} =$__________。Ans：2047

(練習8) 設 n 為正偶數，則$C^n_0 + 3^2 C^n_2 + 3^4 C^n_4 + \cdots\cdots + 3^n C^n_n =$__________。
(A)2^{2n-1} (B)2^{2n+1} (C)$2^{n-1}+2^{n+1}$ (D)$2^{n-1}+2^{2n-1}$ (E)2^n Ans：(D)

(練習9) 滿足 $1+(-\frac{1}{3})C^n_1+(-\frac{1}{3})^2C^n_2+(-\frac{1}{3})^3C^n_3+\cdots\cdots+(-\frac{1}{3})^nC^n_n<\frac{1}{500}$ 之最小正整數 n=______。（已知 log2＝0.3010，log3＝0.4771）Ans：16

(練習10) 求$C^{10}_0\cdot C^8_3+C^{10}_1\cdot C^8_2+C^{10}_2\cdot C^8_1+C^{10}_3\cdot C^8_0=$？ Ans：$C^{18}_3$。

(練習11) $2C^n_1+5C^n_2+8C^n_3+\ldots+(3n-1)C^n_n=$？ Ans：$(3n-2)\cdot 2^{n-1}+1$

(練習12) (1)證明：$\frac{1}{k+1}C^n_k=\frac{1}{n+1}C^{n+1}_{k+1}$

(2)證明：$C^n_0+\frac{C^n_1}{2}+\frac{C^n_2}{3}+\cdots\cdots+\frac{C^n_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$。

(練習13) 證明：$(C^n_0)^2+(C^n_1)^2+(C^n_2)^2+\ldots+(C^n_n)^2=C^{2n}_n$。

(2) 多項式定理：

設m,n爲自然數，$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_m$爲任意數，則

$(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n=\Sigma\dfrac{n\,!}{p_1\,!\,p_2\,!\cdots p_m\,!}\ a_1^{\,p_1}\cdot a_2^{\,p_2}\cdots a_m^{\,p_m}$ ，$n=p_1+p_2+\ldots+p_m$。

[例題7] $(x+2y-z)^5$展開式中有多少個同類項？ 且x^2y^2z之係數爲何？
Ans：21，-120

[例題8] $(1+2x-x^2)^{10}$展開式中x^3之係數=？ Ans：780

(練習14) 求$(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+x^3)^6$展開式中$x^5$項的係數。 Ans：$-120$

(練習15) $(1+x-x^2)^{50}=1+ax+bx^2+\ldots+cx^{100}$，則數對$(a,b,c)$=？
Ans：(50,1175,1226)

(練習16) $(x+y+z+u)^5$展開式中
(1)不同類項有______個。(2)x^2y^2z項的係數=________。
Ans：(1)56 (2)30

$\boxed{\text{綜合練習}}$

(1) $[(a-2b)^2-3c]^5$展開式中$a^3b^3c^2$項的係數為何？

(2) $(9x+\dfrac{1}{3\sqrt{x}})^{12}$ 展開式中，常數項之係數為__________。

(3) $(5x+3)^{20}$展開式中，a_kx^k項的係數a_k最大，請問k=？

(4) $C^3{}_3+C^4{}_3+C^5{}_3+\ldots+C^8{}_3+C^9{}_3$=？

(5) 若$(ax^3+\dfrac{2}{x^2})^4$展開式中x^2項係數為 6，則實數a之值為何？

(6) 將$(-3x^2+2x+1)^{10}$展開式中，x項的係數為多少？

(7) $(x^2-2x+\dfrac{1}{x^2})^6$展開式中常數項=？

(8) 取$(1.05)^{10}$的近似值到小數點後一位(第二位四捨五入)為何？

(9) $(x-1)^3$除$(2x^2-4x+3)^{10}$之餘式為何？

(10) 11^{18}除以 1000 的餘數為何？

(11) $(x+y+z+u+t)^6$ 展開式中，則：

(a)共有____________個不同類項。

(b)其中 x^3y^2z 項之係數為____________，有____________個同型項。

(c)又 x^2y^2ut 項之係數為_____________，而有____________個同型項。

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{C_2^2}+\dfrac{1}{C_2^3}+\cdots+\dfrac{1}{C_2^n})$=？

(13) 若$(1+x)^n$之展開式中，依升冪排列，第二、三、四項之係數成等差，求n=？

(14) 設 500＜$C_1^n+C_2^n+C_3^n+\cdots\cdots+C_n^n$＜1000，則 n＝_______ 。

(15) 設 n 為自然數，且$C_0^n+\dfrac{C_1^n}{2}+\dfrac{C_2^n}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{C_n^n}{n+1}=\dfrac{31}{n+1}$，

則n＝？

(16) $C^n{}_0C^m{}_r+C^n{}_1C^m{}_{r-1}+C^n{}_2C^m{}_{r-2}+\ldots+C^n{}_rC^m{}_0$=？

(17) 設$C_0^{50}C_1^{50}+C_1^{50}C_2^{50}+C_2^{50}C_3^{50}+\cdots\cdots+C_{49}^{50}C_{50}^{50}=C_k^n$，

則 n＋k＝________________。

$\boxed{\text{進階問題}}$

(18) $(1+x)+(1+x)^2+\ldots+(1+x)^n$展開式中，$x^n$的係數為$a_n(n\geq2)$，試求$\sum\limits_{n=2}^{20}\dfrac{1}{a_n}$=？

綜合練習解答

(1) -14400
(2) 495
(3) 13 [提示：$a_k=C^{20}_k\cdot 5^k(20)^{20-k}$最大，則$a_k\geq a_{k+1}a_k\geq a_{k-1}\Rightarrow k=13$]
(4) 210
(5) $\pm\frac{1}{2}$
(6) 20
(7) 260
(8) 1.6
[提示：
$(1+0.05)^{10}=1^{10}+C^{10}_1(0.05)+C^{10}_2(0.05)^2+\ldots+C^{10}_{10}(0.05)^{10}$
$\approx 1^{10}+C^{10}_1(0.05)+C^{10}_2(0.05)^2=1.6125$]
(9) $20x^2-40x+21$ [提示：$(2x^2-4x+3)^{10}=[2(x-1)^2+1]^{10}$，再利用二項式定理展開，$(x-1)^3$除$(2x^2-4x+3)^{10}$之餘式爲$C^{10}_1 2(x-1)^2+1$。]
(10) 481
(11) (a)210(b)60；60(c)180；30
(12) 2 [提示：$\frac{1}{C_2^k}=\frac{2}{k(k-1)}=2(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})$]
(13) 7
(14) 9
(15) 4
(16) C^{n+m}_r [提示：考慮$(1+x)^n(1+x)^m$展開式中x^r項的係數]
(17) 149 或 151
(18) $\frac{209}{140}$ [提示：求值式$=\frac{(1+x)[(1+x)^n-1]}{1+x-1}=\frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)}{x}$，所以$x^n$的係數爲$a_n=C^{n+1}_3=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$，$\frac{1}{a_n}=\frac{6}{(n+1)n(n-1)}=3[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}]$，$\sum_{n=2}^{20}\frac{1}{a_n}=3[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{19\cdot 20}-\frac{1}{20\cdot 21}]=3\{\frac{1}{2}-\frac{1}{20\cdot 21}\}=\frac{209}{140}$。]