§1–4 平面向量的內積

(甲)坐標化的向量內積

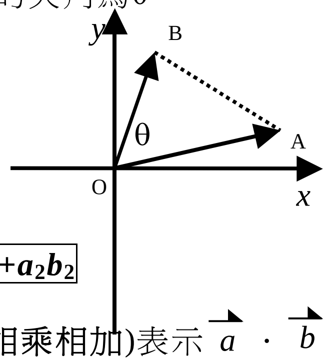
(1)設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，我們如何用$a_1,a_2,b_1,b_2$表示 $a\cdot b$ 呢？

設$\overline{OA}=(a_1,a_2)$和$\overline{OB}=(b_1,b_2)$爲任意兩個向量，且兩向量的夾角爲θ，

因爲$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(a_1-b_1，a_2-b_2)$

$|\overrightarrow{BA}|^2=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

根據前面的定義，



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{BA}|^2)$

$=\frac{1}{2}[(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]]=\boxed{\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2}}$

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2}$，我們用$\boxed{\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2}}$ (各分量相乘相加)表示$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$。

結論：設$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$

(a) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$。

(b)若$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$皆不爲 0 ，則$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$(向量與角度的關係)

(c)若向量$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$皆不爲 0 ，$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$

(d)若$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$，夾角θ=0，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{a}|\cos0=|\overrightarrow{a}|^2$。(向量與長度的關係)

(e)由(b)與(d)可知內積與求角度、長度都有關係，這也是內積重要的地方。

[例題1] 設ΔABC的三頂點爲A(3，–2)、B(–1,–4)、C(6,–3)，求內角∠A的角度。
Ans：135°

[例題2] 設向量$\vec{a}$與另一向量$\vec{b}=(\sqrt{3},1)$的夾角是120°且$|\vec{a}|=8$，試求向量$\vec{a}$。

Ans：$\vec{a}=(0,-8)$或$(-4\sqrt{3},4)$

(練習1) 設 $\vec{u}=(k,1)$, $\vec{v}=(2,3)$,求k使：

(1) $\vec{u}$和$\vec{v}$垂直　(2) $\vec{u}$和$\vec{v}$平行　(3) $\vec{u}$和$\vec{v}$的夾角為60°

Ans：(1)$k=\frac{-3}{2}$　(2)$k=\frac{2}{3}$　(3)$k=-8+\frac{13\sqrt{3}}{3}$

(練習2) ΔABC中，設A(−2,1),B(1,2),C(−4,3)，試求ΔABC的垂心H。

Ans：$(\frac{-5}{2},\frac{-3}{2})$

(練習3) 若$|\vec{x}|=1$，且$\vec{x}$與$\vec{y}=(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$之夾角為$45^{\circ}$，求$\vec{x}$=？

Ans：$(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$或$(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

(練習4) 設A(1,−2)、B(0,2)、C(−3,4)為ΔABC之三頂點，求sinA=？

Ans：$\frac{5}{\sqrt{221}}$

(練習5) 設$\overrightarrow{OA}=(3,1)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,2)$，若$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{OA}$，且$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，則$\overrightarrow{OD}$=？　Ans：(11,6)

(乙)向量內積的應用

(1)柯西不等式：(Cauchy's Inequality)

(a)向量形式：設$\vec{a}$, $\vec{b}$為平面上任意二向量，則$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$，

等號成立 $\Leftrightarrow \vec{a}//\vec{b}$

證明：因為$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，θ為其夾角，$|\cos\theta|\leq1$

所以$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$

等號成立 $\Leftrightarrow |\cos\theta|=1 \Leftrightarrow \theta=0$或$\pi \Leftrightarrow \vec{a}//\vec{b}$

(b)一般形式：a_1,a_2,b_1,b_2為任意四個實數，

則$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$，等號成立$\Leftrightarrow(a_1,a_2)=t(b_1,b_2)$

證明：可設$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，由(a)的結果：$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\geq|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2$

所以$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$。

等號成立 $\Leftrightarrow \vec{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow (a_1,a_2)=t(b_1,b_2)$。

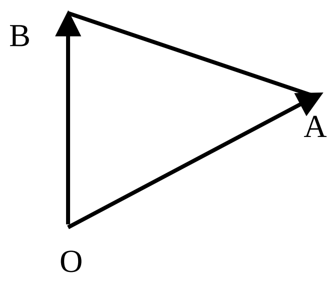
(2)三角形的面積：

設$\vec{a}$，$\vec{b}$爲非平行的兩向量，

則由$\vec{a}$與$\vec{b}$所張成的三角形面積爲$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ 。

證明：設$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$

設$\vec{a}$與$\vec{b}$向量的夾角爲θ，



則$\Delta OAB=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

$=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}$

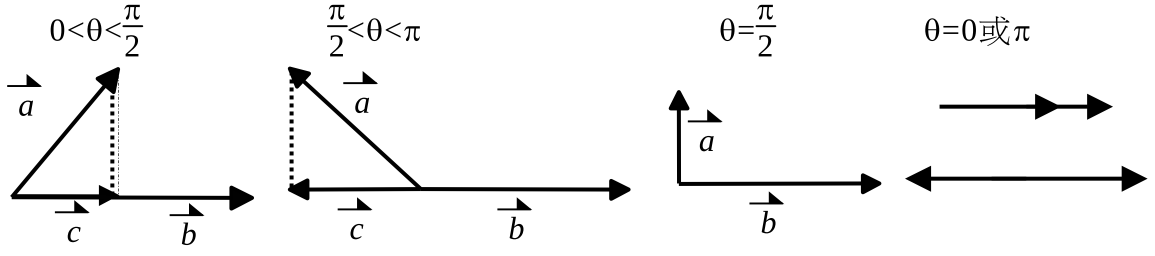
$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

結論：

(a)由 a 與 b 張成的平行四邊形面積爲$\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ 。

(b)ΔABC的面積爲$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$ 。

(3)正射影：設$\vec{a}$對$\vec{b}$之正射影爲$\vec{c}$

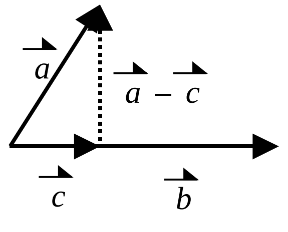


$\vec{c}$與$\vec{b}$同向　　$\vec{c}$與$\vec{b}$反向　　$\vec{c}=\vec{0}$　　$\vec{c}=\vec{a}$

(a)根據上面的圖示：$\vec{a}$對$\vec{b}$之正射影$\vec{c}$平行$\vec{b}$，如何由$\vec{a}$, $\vec{b}$求$\vec{c}$呢？

設$\vec{c}=t\vec{b}$，因爲$(\vec{a}-\vec{c})\perp\vec{b}$，(如右圖)

所以$(\vec{a}-t\vec{b})\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0 \Rightarrow t=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$



即 $\vec{c}=\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$

(b) $=\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\left(\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=(|\vec{a}|\cos\theta)\left(\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$，

我們稱$\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$[或$|\vec{a}|\cos\theta$]為 $\vec{a}$ 對 $\vec{b}$ 的投影量。

$\vec{a}$ 對 $\vec{b}$ 的正射影=($\vec{a}$ 對 $\vec{b}$ 的投影量)與($\vec{b}$ 方向單位向量)的係數積。

結論：

(a) $\vec{a}$ 對 $\vec{b}$ 之正射影 $\vec{c}$ 為$\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$

(b) $\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=|\vec{a}|\cos\theta$ 為 $\vec{a}$ 對 $\vec{b}$ 的投影量(投影量可正可負)

(c)當$0<\theta<\frac{\pi}{2}$時，$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$，所以 $\vec{c}$ 與 $\vec{b}$ 同向

(d)當$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$時，$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，所以 $\vec{c}$ 與 $\vec{b}$ 反向

(e)當$\theta=\frac{\pi}{2}$時，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，所以 $\vec{c}=\vec{0}$

(f)當$\theta=0$或π時，$\vec{c}=\vec{a}$

[例題3] (1)設x,y為實數，且$2x+3y=13$，求x^2+y^2的最小值，並求此時x、y的值。

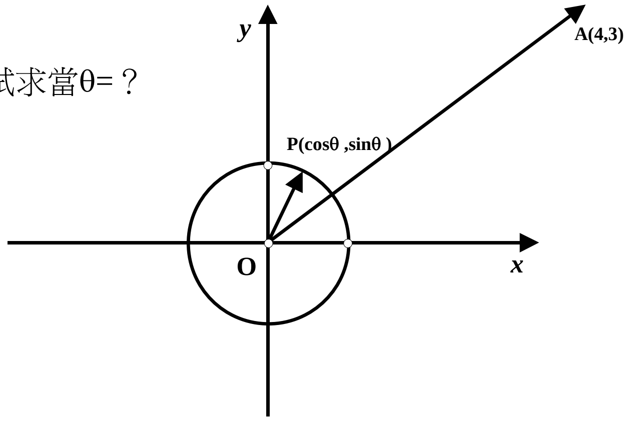
(2)設a,b為實數，且$a^2+b^2=10$，則$a-3b$的最大值為____，此時(a,b)=___；$a-3b$的最小值為____，此時(a,b)=___。

Ans：(1)13，$x=2$，$y=3$ (2)最大值=10，(1,−3)；最小值=−10，(−1,3)

[例題4] 三角函數的疊合：

$f(\theta)=3\sin\theta+4\cos\theta$，其中$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$，試求當$\theta=$？

時$f(\theta)$有最大值或最小值。



[例題5] (1)設$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，試證明：

由$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$張成的三角形面積為$\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$。

(2)設ΔABC三頂點$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，

證明：ΔABC的面積為$\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)|$。

[例題6] 設平面上三點A(1,1)、B(5,−2)、C(5,2)，試求

(1)$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影量。

(2)$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上的正射影。

(3)C點在$\overrightarrow{AB}$上的投影點。

Ans：(1)$\dfrac{13}{5}$ (2)$\dfrac{13}{25}(4,-3)$ (3)$(\dfrac{77}{25},\dfrac{-14}{25})$

(練習6) 設a,b為正數，求$(a+\dfrac{4}{b})(b+\dfrac{9}{a})$之最小值。

[提示]：$a=(\sqrt{a}\ )^2$，$\dfrac{4}{b}=(\dfrac{2}{\sqrt{b}})^2$，$b=(\sqrt{b}\ )^2$，$\dfrac{9}{a}=(\dfrac{3}{\sqrt{a}})^2$

(練習7) 設 u =(cosθ ,sinθ)，$|\overrightarrow{a}|=3$，則求 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{u}$ 之最大值、最小值。

Ans：3，−3

(練習8) 設$f(\theta)=2\sin\theta+5\cos\theta$，其中θ爲任意實數，當$\theta=\alpha$時，$f(\theta)$有最大値M，請求M、$\tan\alpha$之値。 Ans：$M=\sqrt{29}$ ，$\frac{5}{2}$

(練習9) 設x,y爲實數且$x-2y=5$，求x^2+y^2之最小値爲________，此時(x,y)=____________。Ans：5，$(x,y)=(1,-2)$

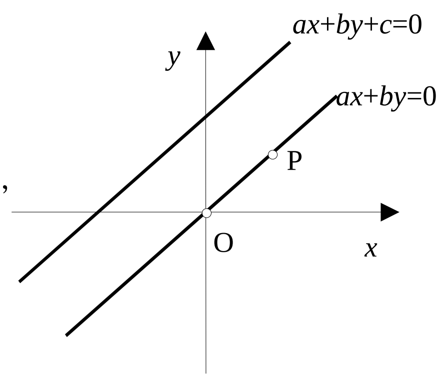
(練習10) 設A(3,8)，B(4,9)，C(1,3)試求ΔABC的面積。Ans：$\frac{3}{2}$

(練習11) ΔABC中，若$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，ΔABC之面積爲$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$=？
Ans：3或−3

(練習12) 設$\overrightarrow{a}=(4,2)$, $\overrightarrow{b}=(-3,1)$,則求
(1) $\overrightarrow{b}$在$\overrightarrow{a}$方向的正射影。
(2) $\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$所張成的平行四邊形面積。 Ans：$(-2,-1)$ ，10

(丙)平面向量在直線上的應用

(1)直線$\boldsymbol{ax+by+c=0}$的法向量$\overrightarrow{n}=\boldsymbol{(a,b)}$



法向量：與直線垂直的向量稱爲此直線的法向量。

考慮$ax+by+c=0$的平行線$ax+by=0$(若$c=0$，則爲同一直線)，兩條平行線的法向量方向相同。

設$P(m,n)$爲直線$ax+by=0$上任一點，
直線的方向$\overrightarrow{OP}=(m,n)$，因爲$am+bn=0$，$(a,b)\cdot(m,n)=0$
所以取向量$\overrightarrow{n}=(a,b)$，$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{OP}$，所以可取法向量$\overrightarrow{n}=(a,b)$。

直線方程式$ax+by+c=0$的法向量$\overrightarrow{n}=(a,b)$，所以直線的方向向量$\overrightarrow{l}$，$\overrightarrow{l}\perp\overrightarrow{n}$，故可取$\overrightarrow{l}=(b,-a)$或$(-b,a)$。

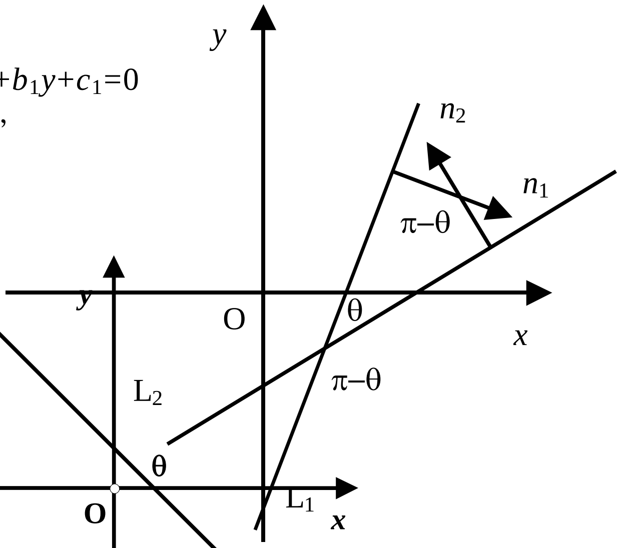
結論：

(a)直線方程式$ax+by+c=0$的法向量$\overrightarrow{n}$可取為(a,b)。

(b)直線方程式$ax+by+c=0$的方向向量$\overrightarrow{l}$可取為$(b,-a)$或$(-b,a)$。

(2)兩直線的交角：

(a)設L_1，L_2為平面上之兩相交的直線，L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$
L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$，設兩直線的法向量夾角為α，
則兩直線的交角為α，π−α。

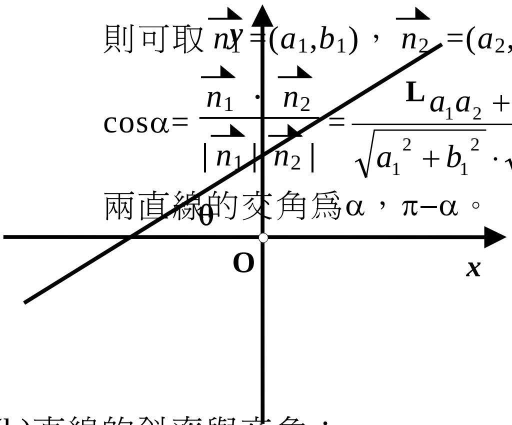


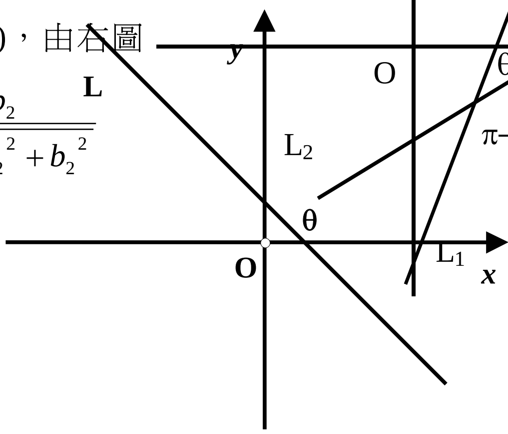
證明：設L_1，L_2的法向量分別為$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$

則可取$\overrightarrow{n_1}=(a_1,b_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(a_2,b_2)$，由右圖

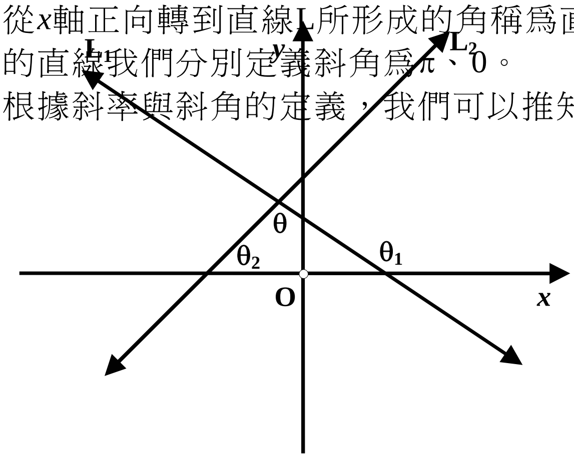
$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

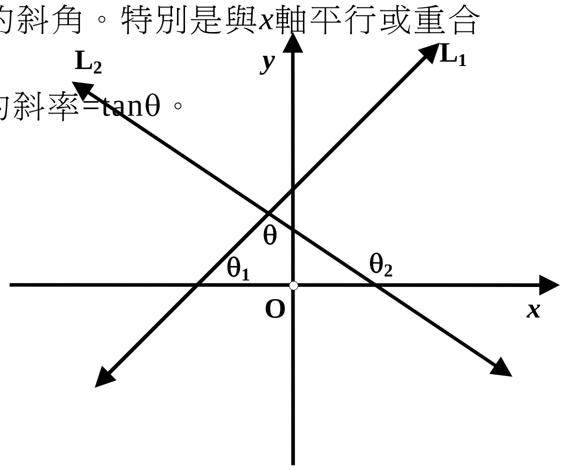
兩直線的交角為α，π−α。





(b)直線的斜率與交角：
如下圖，我們可以定義直線L的斜角θ如下：
從x軸正向轉到直線L所形成的角稱為直線L的斜角。特別是與x軸平行或重合的直線我們分別定義斜角為π、0。
根據斜率與斜角的定義，我們可以推知：L的斜率=tanθ。





設L_1，L_2為平面上之兩相交的直線，L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$，L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$
其中L_1、L_2的斜率$m_1\cdot m_2\neq-1$，L_1、L_2的斜角分別是θ_1、θ_2

根據上圖，可知$\theta=\theta_1-\theta_2$或$\theta=\theta_2-\theta_2$，假設θ爲L_1、L_2的銳夾角

$\Rightarrow\tan\theta=|\tan(\theta_1-\theta_2)|=|\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}|=|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}|$。

結論：設兩直線L_1、L_2的斜率爲m_1、m_2，若$m_1\cdot m_2\neq-1$，其交角θ，

可由$\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$求得，令一交角爲$\pi-\theta$。

[例題7] 設直線L_1：$2x-3y-4=0$，L_2：$3x+y-6=0$之一交角θ，求$\sin\theta=$？

Ans：$\dfrac{11}{\sqrt{130}}$

[例題8] 求過點(1,2)作一直線與L：$\sqrt{3}x-y-1=0$成30°之交角，則此直線之方程式爲何？ Ans：$y-2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$，$x=1$

(練習13) 二直線L_1：$x-2=0$，L_2：$x=-2y+6$所夾鈍角爲θ，則$\cos\theta=$？

Ans：$\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$

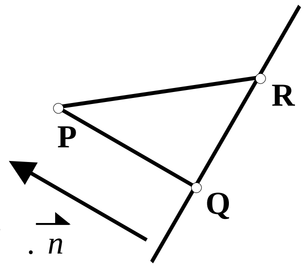
(練習14) 設直線L通過點P(0,−1)且與另一直線L'：$3x+4y-12=0$的交角爲45°，求直線L的方程式。 Ans：$y+1=\dfrac{1}{7}x$，$y+1=-7x$

(練習15) 給定直線L_1：$2x+y-8=0$，L_2：$x+2y+6=0$，求通過(0,0)且與L_1、L_2成等

角之直線方程式。Ans：$y=\pm x$

(練習16) 與直線L_1：$3x-4y-7=0$，L_2：$12x-5y+6=0$成等角，且過點(4,5)的直線方程式。

Ans：$9x-7y-1=0$或$7x+9y-73=0$



(3)點到直線的距離：

一定點$P(x_0,y_0)$到一直線L：$ax+by+c=0$之距離為$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

證明：過P點作垂線交L於Q，則$\overline{PQ}$為P點到L的距離。

今在L上任取一點$R(x,y)$，則向量PR在L的法向量上的正射影之長度為$\overline{PQ}$。

現在來計算向量$\overrightarrow{PR}$在L的法向量上的正射影之長度

$\overrightarrow{PR}=(x-x_0,y-y_0)$，考慮L的法向量$\vec{n}=(a,b)$

則$\overrightarrow{PR}$在L的法向量上的正射影之長度

$=\left|\left(\dfrac{\overrightarrow{PR}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\right)\vec{n}\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PR}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\right|\cdot|\vec{n}|$

$=\dfrac{|\overrightarrow{PR}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|a(x-x_0)+b(y-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

例如：平面上一點P(2,3)到直線$4x-3y+6=0$的距離。

$d=\dfrac{|8-9+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{5}{5}=1$

[例題9] 平面上二平行線L_1：$ax+by+c_1=0$，L_2：$ax+by+c_2=0$，

試證明此二直線的距離為$\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

[例題10] 求過點(0,2)與二定點A(4,6)、B(8,3)等距之直線方程式為何？

Ans：$y=\dfrac{-3}{4}x+2$或$y=\dfrac{5}{12}x+2$

[例題11] 設L_1：$4x-3y-65=0$，L_2：$3x+4y-5=0$，L_3：$7x-24y+55=0$，而L_1與L_2交於C點，L_2與L_3交於A點，L_3與L_1交於B點，求

(1)$\angle$B內角平分線。

(2)ΔABC的內心坐標。

(3)ΔABC的內切圓半徑。 Ans：(1)$9x-13y-90=0$ (2) (10,0) (3)5

[解法]：

(1)設P(x,y)為$\angle$B平分線上的任意點

$\Rightarrow d(\text{P,L})=d(\text{P,N}) \Leftrightarrow \dfrac{|4x-3y-65|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|7x-24y+55|}{\sqrt{7^2+(-24)^2}} \Leftrightarrow 5|4x-3y-65|=|7x-24y+55|$

$\Rightarrow 9x-13y-90=0$或$13x+9y-375=0$(由上圖中，∠B內角平分線的斜率爲正數)

$\Rightarrow$∠B內角平分線爲$9x-13y-90=0$。

(2)按照(1)的方法去找∠A的內角平分線

$\dfrac{|3x+4y-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|7x-24y+55|}{\sqrt{7^2+(-24)^2}}\Rightarrow$∠A的內角平分線爲$2x+11y-20=0$

內心I爲∠A、∠B內角平分線的交點(10,0)

(3) ΔABC的內切圓半徑=I點到直線L的距離$=\dfrac{|40-65|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5$。

(練習17) 設$4x-3y+6=0$，則求$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$ 之最小值爲何？

Ans：1

(練習18) 求點P(2,−3)至直線L：$\begin{cases} x=-2+5t \\ y=2-3t \end{cases}$，$t$爲實數知距離爲何？

Ans：$\dfrac{13}{\sqrt{34}}$

(練習19) 一動點$P(x,y)$至直線L_1：$3x+4y-2=0$的距離爲至直線L_2：$4x+3y-5=0$的距離之2倍，求$P(x,y)$的軌跡方程式。　Ans：$11x+10y-12=0$

(練習20) 求兩平行線$3x-4y+2=0$與$-6x+8y-5=0$間之距離。　Ans：$\dfrac{1}{10}$

(練習21) 求與直線$x-y+1=0$平行，且距離爲$\sqrt{2}$的直線方程式。

Ans：$x-y-1=0$或$x-y+3=0$

(練習22) 兩直線$3x+4y-7=0$及$4x+3y+2=0$所交的鈍角平分線方程式。

Ans：$x-y+9=0$

(練習23) 直線L過點A(1,1)，且與點B(−5,4)之距離爲３，求L的方程式。

Ans：$y=1$或$4x+3y-7=0$

綜合練習

(1) 在坐標平面上，A(150,200)、B(146,203)、C(−4,3)、O(0,0)，則下列敘述何者爲真？
(A)四邊形ABCO是一個平行四邊形。
(B)四邊形ABCO是一個長方形。
(C)四邊形ABCO的兩對角線互相垂直。
(D)四邊形ABCO的對角線$\overline{AC}$長度大於251。
(E)四邊形ABCO的面積爲1250。 (90學科)

(2) 等腰梯形ABCD，$\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AB}=(12,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(-2,5)$，求內積$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=$？

(3) 坐標平面上A(2,−1)、B(3,2)，若$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$，且$\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{OA}$，則C之坐標爲何？

(4) 設三點P(8,9)、Q(−2,4)、R(1,8)，則$\overrightarrow{QP}$在$\overrightarrow{QR}$上的正射影爲何？P點在直線QR的正射影點爲何？

(5) 設$\vec{a}$、$\vec{b}$均非零向量，若$\vec{a}$在$\vec{b}$方向的投影量爲$|\vec{b}|$的3倍，而$\vec{b}$在$\vec{a}$方向的投影量爲$|\vec{a}|$的$\frac{1}{6}$倍，則$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角爲何？

(6) 設A(a,1)、B(2,b)與C(3,4)爲坐標平面上三點，而O爲原點。若向量$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$在向量$\overrightarrow{OC}$上的正射影相同，則a與b的滿足的關係式爲何？

(7) 已知二定點A(4,0)，B(0,−3)與一動點P($\cos\theta$,$\sin\theta$)，$0\le\theta\le2\pi$ ，
則內積$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$之最大值爲之最大值爲____，最小值爲____。

(8) 試求$\dfrac{4}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}$之最小值。

(9) 直線L過點(2,–3)且與向量$\vec{u}$=(1,4)夾30°角，則L之斜率爲何？

(10) 直線L過(1,2)且與$4x+y-8=0$之夾角爲$\dfrac{\pi}{4}$，則L的方程式爲何？

(11) 設直線L：$y=mx$平分直線L_1：$y=m_1x$與L_2：$y=m_2x$所成的角，
試證明$(m-m_1)(1+mm_2)+(m-m_2)(1+mm_2)=0$

(12) 一直線L通過點(9,–6)且與點(4,1)相距$5\sqrt{2}$，則L之方程式爲何？

(13) P是一個動點，$0\le\theta\le\pi$，點P$(\cos\theta,\sin\theta)$至直線$\sqrt{3}x+y+1=0$之最大距離爲何？
最小距離爲何？

(14) 一平行四邊形ABCD，其中三頂點A(3,1)、B(–2,2)、C(0,–1)，一直線L通過
P(–2,–3)且平分平行四邊形ABCD的面積，則L的方程式爲何？

進階問題

(15) 若$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$|\overrightarrow{AD}|=3$且$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}=\vec{0}$，則$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影之
長度爲____。

(16) 設d_1，d_2分別爲表原點O至L_1：$x\sec\theta+y\csc\theta=a$，$L_2$：$x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos2\theta$
的距離，試證：$4d_1^2+d_2^2=a^2$。

(17) 設直線L過原點(0,0)且與兩直線L_1：$2x+y-8=0$，L_2：$x+2y+6=0$形成一個等腰三
角形，求直線L的方程式。

(18) 據說，有一位海盜將他的寶藏埋在某小島的一個地方。有一天海盜帶著他的
兒子到寶藏附近的一顆樹P處，他指著另一顆大樹Q及附近另一個大石頭R，
對兒子說，以ΔPQR的兩邊$\overline{PR}$與$\overline{QR}$爲邊，向外各作一個矩形PRAB與
QRCD，使得$\overline{RA}=2\overline{RP}$，$\overline{RC}=2\overline{RQ}$，我的寶藏就埋在$\overline{BD}$的中點的地底下。數
十年後，海盜與兒子都去世了，不過藏寶圖依然存在，海盜的孫子來到小
島，不過大石頭R已經不見了，請問還可以找到寶藏嗎？如何找？

綜合練習解答

(1)(A)(B)(E)

(2) -87

(3) $(\frac{-7}{2},\frac{21}{4})$

(4) $(6,8)$、$(4,12)$

(5) $45°$ [提示：$\vec{a}$ 對 $\vec{b}$ 方向的投影量爲 $|\vec{a}|\cos\theta$ ，其中θ爲 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角]

(6) $3a-4b=2$

(7) 6，-4

(8) 9[提示：$[\frac{4}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}](\cos^2\theta+\sin^2\theta)\geq(2+1)^2$]

(9) $\frac{-16\pm17\sqrt{3}}{13}$

(10) $3x+5y-13=0$ 或 $5x-3y+1=0$

(11) [提示：設L與L_1的銳夾角θ_1，L與L_2的銳夾角θ_2，$\cos\theta_1=\cos\theta_2$，再化簡即可得]

(12) $y+6=\frac{7\pm4\sqrt{3}}{5}(x-9)$

(13) $\frac{3}{2}$，0

(14) $6x-7y-9=0$

(15) $\frac{1}{2}$

(16) 略

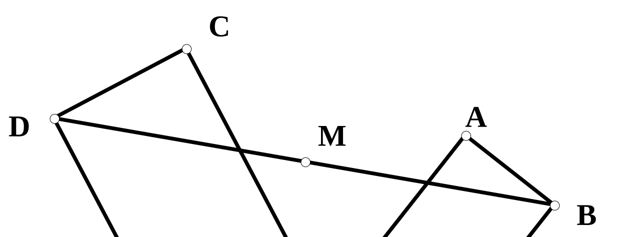
(17) $y=\pm x$，$y=\frac{11}{2}x$，$y=\frac{2}{11}x$

[提示：設直線L的斜率爲m，若直線L與L_1、L_2的交角相等，則

$|\frac{m+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}m}|=|\frac{m+2}{1-2m}|\Rightarrow m=\pm1$。 若直線L與$L_1$的交角與$L_1$、$L_2$的夾角相等

$\Rightarrow|\frac{m+2}{1-2m}|=\frac{3}{4}\Rightarrow m=\frac{11}{2}$， 若直線L與$L_2$的交角與$L_1$、$L_2$的夾角相等

$\Rightarrow|\frac{m+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}m}|=\frac{3}{4}\Rightarrow m=\frac{2}{11}$]



(18)[提示：如圖，PRAB、QRCD都是矩形

且$\overline{RA}=2\overline{RP}$，$\overline{RC}=2\overline{RQ}$，M為$\overline{BD}$的中點，

我們將相關的點坐標化，令Q(0,0),P(a,0),R(x,y)，

$\Rightarrow$ QR =(x,y), PR =(x−a,y) QD =(−2y,2x),

PB =(2y,2a−2x)，因此 QB = QP + PB =(a+2y,2a−2x)

，即B(a+2y,2a−2x)，D(−2y,2x)，所以$\overline{BD}$中點M($\frac{a}{2}$,a)，

換句話說，M的位置不受R的位置影響，

且$\overline{QM}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$且$\angle PQM=\tan^{-1}2$，即寶藏的位置在

距Q點$\frac{\sqrt{5}}{2}a$的距離與$\overline{QP}$夾角$\tan^{-1}2$(約63.5°)方向的地方。