第二十單元　數列與數學歸納法

(甲)數列的意義

(1)名詞與記號：

在日常生活裡，常會遇到一連串依序呈現的數，例如：

(1°)<u>舒嫻</u>種了一些綠豆，每天觀察其發芽的情形，下表為這些綠豆芽的觀察紀錄：

天數	第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天	第七天
綠豆芽的平均高度(公分)	0.2	1.1	2.2	3.8	4.6	7.3	9.2

(2°)<u>小舒</u>將 1 萬元存入銀行，依據年利率 3%複利計算，則第 1、2、3、4、5 年底的本利和為 $1\times(1.03)^1,1\times(1,03)^2,1\times(1,03)^3,1\times(1,03)^4,1\times(1,03)^5$ (萬元)

觀察上面一連串的數，可以發現它們都是等比數列。

(3°)把$\dfrac{1}{7}$化成小數是 0.142857142857⋯，它是一個循環的無限小數。小數點以後的數字依序排列如下：1 , 4 , 2 , 8 , 5 , 7 , 1 , 4 , 2,⋯ 。

觀察前面例子(1)，(2)，(3)中，可以列出一連串依序排列的數：

(1) 0.2 , 1.1 , 2.2 , 3.8 , 4.6 , 7.3 , 9.2

(2) $1\times(1.03)^1$、$1\times(1,03)^2$、$1\times(1,03)^3$、$1\times(1,03)^4$、$1\times(1,03)^5$

(3)1 , 4 , 2 , 8 , 5 , 7 , 1 , 4 , 2 ,⋯

像這樣將一系列的數依序排列出來，就稱為**數列**．數列中的每一項稱為數列的**項**，數列中第一個數稱為**第一項**或**首項**，第二個數稱為**第二項**，依此類推。一個數列中若只有有限多項，我們稱此數列為**有限數列**；否則就稱它為**無限數列**。

前例中，數列(1)是有限數列，最後一項是 9.2，簡稱**末項**；數列(2)也是有限數列，而數列(3)是無限數列。

(2)數列的表徵

(a)列舉型：把數列中每一項都列舉出來，例如：$<3,-1,3,4,-2>$或是把數列的開頭幾項列出來，讓人家能看出它的通則，其餘以「…..」來代替。**例如**：$<1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots.>$。

(b)概括型：假定問題只牽涉到數列的概念，而對於各項為何並不去探究時，我們常以$\lt a_n\gt,\lt b_n\gt,\lt c_n\gt$分別代表一些不同的數列，通常以$\langle a_n\rangle_{n=1}^{l}$代表有限數列，$\langle a_n\rangle_{n=1}^{\infty}$表示無限數列。[∞：無限大]

(c)n 項型：若討論的數列其各項間有一定的規則存在，且這種規則與「項數」有某些關聯(即這種規則可用項數 n 的函數來描寫)。即

第 k 項 a_k 與項數 k 之間的函數關係可以用一個代數式來表示，這個式子就稱為

數列＜a_n＞一般項的通式。

例如：$\lt a_n\gt=\lt 1,4,7,10,\ldots.\gt$，$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$，故$\lt a_n\gt=\lt 3n-2\gt$

(練習1) 找出下列各數列的第 n 項：

$(1) <1,1,3,3,5,5,\ldots\ldots>$ $\quad(2) <\sqrt{2}-1,1,\sqrt{2}+1,3+2\sqrt{2},\ldots.>$

$(3) <-\dfrac{1}{1\times3},\dfrac{1}{2\times5},-\dfrac{1}{3\times7},\dfrac{1}{4\times9}\ldots> \quad (4) <\dfrac{2}{1\times3},\dfrac{4}{3\times5},\dfrac{8}{5\times7},\dfrac{16}{7\times9},\ldots>$

$(5) <\dfrac{1}{1},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{10},\ldots.> \quad (6) <5,\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2},\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{4},\dfrac{2}{27}+\dfrac{3}{8},\ldots.>$

Ans ： $(1)\ n-\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ $\quad(2)\ (\sqrt{2}+1)^{n-2}$ $\quad(3)\ \dfrac{(-1)^n}{n(2n+1)}$ $\quad(4)\ \dfrac{2^n}{(2n-1)(2n+1)}$

$(5)\ \dfrac{2}{n(n+1)}$ $\quad(6)\ \dfrac{2}{3^{n-1}}+\dfrac{3}{2^{n-1}}$

(練習2) 數列 $<1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,\ldots\ldots>$ 之第 200 項為______。 Ans：20

(乙)數列的規則──遞迴關係

觀察兩個數列＜a_k＞、＜b_k＞，其中 $a_k=3k+2$，$b_k=3\cdot2^k$

＜$3k+2$＞：5,8,11,14,17,20,…

＜$3\cdot2^k$＞：6,12,24,48,96,192,…

可以發現

＜a_k＞為等差數列：$a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=a_5-a_4=\ldots.=a_{k+1}-a_k=3$(後項−前項=3)。

因此可得 $a_2=a_1+3$，$a_3=a_2+3$，…，$a_{k+1}=3(k+1)+2=(3k+2)+3=a_k+3$

＜b_k＞為等比數列：$\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{b_3}{b_2}=\dfrac{b_4}{b_3}=\dfrac{b_5}{b_4}=\ldots=\dfrac{b_{k+1}}{b_k}=2$(後項÷前項=3)。

因此可得 $b_2=2b_1$，$b_3=2b_2$，…，$b_{k+1}=3\cdot2^{k+1}=2(3\cdot2^k)=2\cdot b_k$。

因此＜a_k＞、＜b_k＞相鄰兩項之間會有 $a_{k+1}=a_k+3$、$b_{k+1}=2b_k$ 的關係式，像這樣描述相鄰幾項之間關係的式子，稱為**遞迴關係式**，具有**遞迴關係式**的數列稱為**遞迴數列**。

除了等差數列與等比數列之外，還有許多數列各項之間隱藏著遞迴關係。

考慮下列由虛線與端點所形成的圖形：第一個圖的外面是邊長 1 單位長的正方形(如圖 1−1 所示)，在圖 1−1 中以對角線為中心，將四個頂點往外再伸長 1 倍，拓展成 2 單位長的正方形，再此正方形各邊每隔 1 單位長畫上點形成第二個圖，(如圖 1−2 所示)；重複前面的方法，將第二個圖中 2 單位長的正方形頂點，向外拓展成邊長 3 單位長的正方形，並且將此正方形各邊每隔 1 單位長畫上點形成第三個圖 (如圖 1−3 所示)，按照這樣的規律，可以形成一連串的圖形，我們想藉由尋找這些圖形的規則來探討每個圖形中點的個數？

設第 n 個圖形(最外面是邊長 n 單位長的正方形)中共有 a_n 個點，這樣形成一個數列＜a_n＞，比較圖 1−1 與圖 1−2：

圖 1−2 比圖 1−1 多了位於邊長 2 單位長正方形上的點，這些點共有 2×3+2×1=8 個。

因此 $a_2=13=5+8=a_1+8$。

比較圖 1–2 與圖 1–3：

圖 1–3 比圖 1–2 多了位於邊長 3 單位長正方形上的點，這些點共有 2×4+2×2=12 個。

因此 a_3=25=13+12=a_2+12。

比較圖 1–3 與圖 1–4：

圖 1–4 比圖 1–3 多了位於邊長 4 單位長正方形上的點，這些點共有 2×5+2×3=16 個。

因此 a_4=41=25+16=a_3+16。

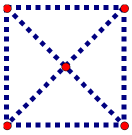


圖 1–1

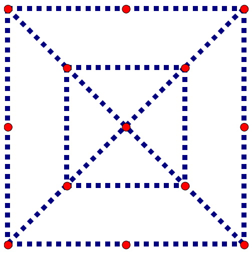


圖 1–2

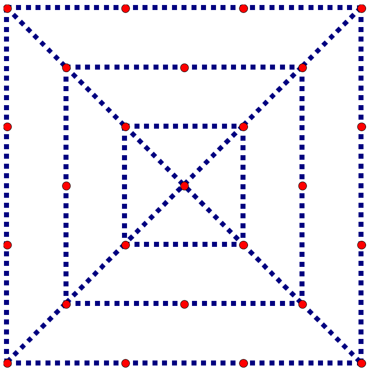


圖 1–3

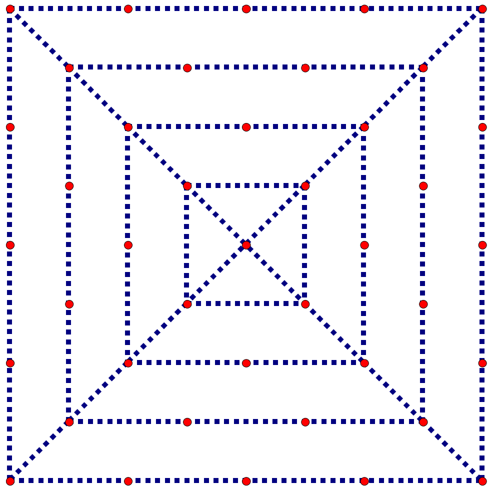
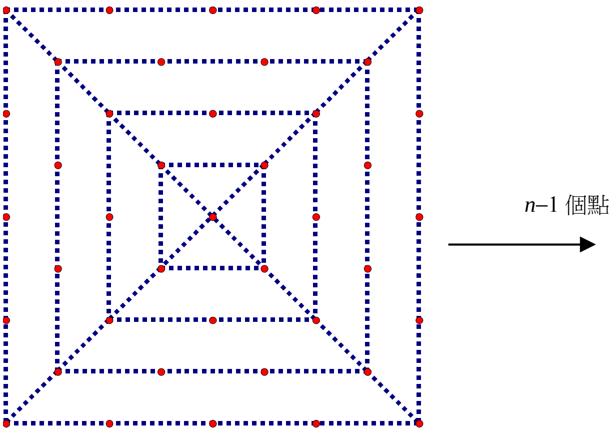


圖 1–4

根據這些這些圖形產生的規則，可以發現第 n 個圖形比第 n–1 個圖形多了位於邊長 n 單位長正方形上的點(如圖 1–5 所示)，這些點共有 2(n+1)+2(n–1)=4n 個。

因此可以得到數列＜a_n＞的遞迴關係式：$a_n=a_{n-1}+4n$



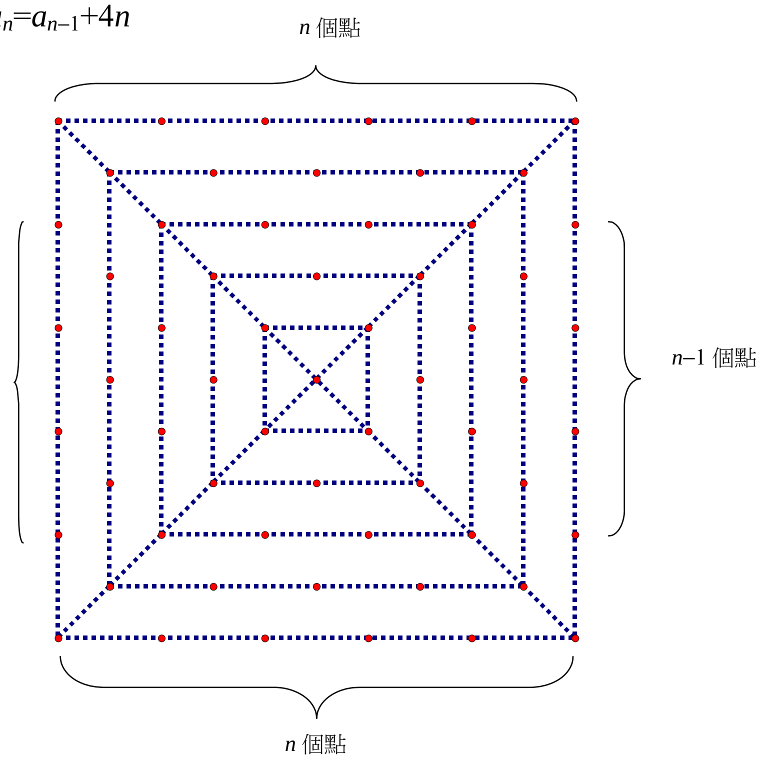


圖 1–5

底下我們利用例題一，來討論如何根據遞迴關係式，求出任何一個圖形中點的個數，並找出數列一般項的通式。

[例題1] 設數列＜a_n＞的首項 a_1=5 且滿足遞迴關係式：$a_n=a_{n-1}+4n$，$n\geq 2$

(1)利用遞迴關係式求 a_{100} 的值。

(2)試求數列＜a_n＞一般項的通式。

[解法]：

(1)直接使用遞迴關係式：$a_n=a_{n-1}+4n$，可以從 a_1 逐次算出 a_2、a_3、…、a_{100}，我們可以利用計算機寫個簡單的程式算出 a_{100}。

下面我們介紹二個方法，來求 a_{100}：

(1°)觀察 a_1 , a_2 , a_3 , a_4 歸納數列的規則：

$a_1=5=1+4=1+4\times 1$

$a_2=13=1+12=1+4\times(1+2)$

$a_3=25=1+24=1+4\times(1+2+3)$

$a_4=41=1+40=1+4\times 10=1+4\times(1+2+3+4)$

…..

因此我們可以歸納出 $a_{100}=1+4\times(1+2+3+\ldots+100)=1+4\times\dfrac{(1+100)\times 100}{2}=20201$。

(2°)利用遞迴關係式：

$a_n=a_{n-1}+4n$，$n\geq 2$ 中的 n 值分別代入 2,3,4,…,100，可得

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1+4\times 2 \\ a_3 &= a_2+4\times 3 \\ &\vdots \\ a_{99} &= a_{98}+4\times 99 \\ a_{100} &= a_{99}+4\times 100 \end{aligned}$$

將上述 99 個等式累加可得 $a_{100}=a_1+4\times(2+3+\ldots+100)=5+4\times\dfrac{(2+100)\times 99}{2}=$ 20201。

(2)根據(1)中的想法

(1°)觀察數列＜a_n＞的規則，可得一般項

$a_k=1+4\times(1+2+3+\ldots+k)=1+4\times\dfrac{(1+k)\times k}{2}=2k^2+2k+1$。

(2°)將遞迴關係式 $a_n=a_{n-1}+4n$，$n\geq 2$ 中的 n 值分別代入 2,3,4,…,k，可得

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1+4\times 2 \\ a_3 &= a_2+4\times 3 \\ &\vdots \\ a_{k-1} &= a_{k-2}+4\times(k-1) \\ a_k &= a_{k-1}+4\times k \end{aligned}$$

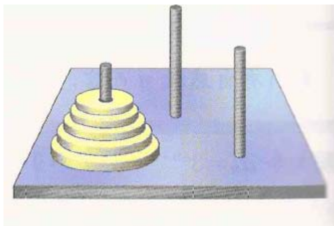
將上述 $k-1$ 個等式累加可得

$a_k=a_1+4\times[2+3+\ldots(k-1)+k]=5+4\times\dfrac{(2+k)\times(k-1)}{2}=2k^2+2k+1$。

例題一中根據數列的遞迴關係式，可以求出數列各項的值或求出數列一般項的通式，但有些數列的一般項 a_k 不容易求得通式，而遞迴關係式反而比較容易觀察出來。

接下來，我們再介紹二個著名的例子：

[例題2] 相傳在創世紀時代，河內(Hanoi)的一座寺廟中豎立著三根銀棒，有 64 個大小都不同的金盤(金盤正中央有一個小孔)「大盤在下，小盤在上」依序套在同一根銀棒上。造物主命僧侶把 64 個金盤全部移到另外一根銀棒上，並且規定：每一次只能移動一個金盤，在移動過程中，較大的金盤不可套在較小的金盤上。當金盤全數搬完，世界末日將降臨，忠誠者得到好報，不忠者受到懲罰。令 a_n 表示搬完 n 個金盤所需最少的次數，



(1)試求 a_1 , a_2 , a_3。

(2)若已知 a_5 的值，如何利用 a_5 求 a_6 的值呢？

(3)試找出 a_{n-1} 與 a_n 的關係。

[解法]：

(1)嘗試用大小不同的銅板在桌上操作，很容易可得 $a_1=1$，$a_2=3$。

而 $n=3$ 時，參考下圖：所以 $a_3=a_2+1+a_2=2a_2+1=7$

若要將 A 銀棒上的 3 個金盤，搬到 C 銀棒，上圖中所代表的想法是：

先將 A 銀棒上最大的金盤搬到 C 銀棒，想要完成這件事，就必須將上面兩個金盤先搬到 B 銀棒，最少要搬 a_2 次，再將最大的金盤搬到 C 銀棒，這只需要 1 次，最後再將 B 銀棒上的 2 個金盤，搬到 C 銀棒，最少要搬 a_2 次，因此 $a_3=2a_2+1$。

(2)利用 a_5 來求 a_6：

已知將 A 銀棒上的 5 個金盤，搬到 C 金盤最少需要搬 a_5 次，接下來

若要將 A 銀棒上的 6 個金盤，搬到 C 金盤，如同(1)中的想法，可以分成三個步驟求 a_6：

步驟(一)：將 A 銀棒上面的 5 個金盤，移到 B 銀棒上。(最少要搬 a_5 次)

步驟(二)：將最大的金盤搬到 C 銀棒上。(需要搬 1 次)

步驟(三)：將 B 銀棒上的 5 個金盤，搬到 C 銀棒。(最少要搬 a_5 次)

所以 $a_6=a_5+1+a_5=2a_5+1$。因此不管我們用什麼方法知道 a_5 的值，透過關係式 $a_6=2a_5+1$ 就可以求出 a_6 的值。

(3)找出 a_{n-1} 與 a_n 的關係：

回顧前面兩小題的想法，它們都有一個共同的規則：

用 a_2 可以推導 a_3；用 a_5 可以推導出 a_6。

因此若已知搬 $n-1$ 個金盤到另一個銀棒的最少次數 a_{n-1} 時，

可以利用前面提出的步驟來推導出 a_n：

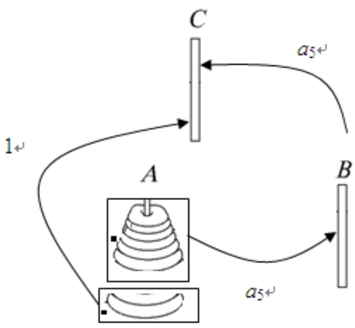
步驟(一)：將 A 銀棒上面的 $n-1$ 個金盤，移到 B 銀棒上。(最少要搬 a_{n-1} 次)

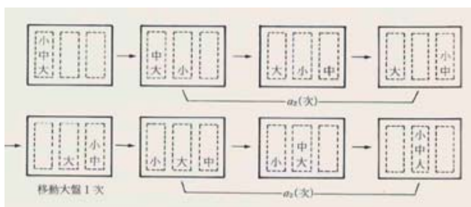
步驟(二)：將最大的金盤搬到 C 銀棒上。(需要搬 1 次)

步驟(三)：將 B 銀棒上的 $n-1$ 個金盤，搬到 C 銀棒。(最少要搬 a_{n-1} 次)

所以 $a_n=a_{n-1}+1+a_{n-1}=2a_{n-1}+1$。因此數列＜$a_n$＞具有底下的遞迴關係式：

$a_n=2a_{n-1}+1$。





[例題3] 義大利數學家費布那西(*F*ibo*n*acci,1170~1250)曾經提出一個有趣的問題：一對兔子出生後，兩個月就能生小兔子，以後每個月都恰好生一對小兔子(一雌一雄)，開始時假如養了初生的小兔子一對，試問一年後共有幾對兔子？(假設兔子都不會死)

[解法]：

設第 n 個月兔子有 F_n 對，依題意可知 $F_1=1$，$F_2=1$

第三個月：大兔子開始繁殖，生了一對小兔子，共有 2 對兔子(一大、一小)。

第四個月：大兔子又生了一對小兔子，而上個月出生的小兔子變成大兔子，共有 3 對兔子(二大,一小)。

第五個月：兩對大兔子各生了一對小兔子，上個月出生的小兔子變成大兔子，共有 5 對兔子(三大,二小)。

從上述的過程，可以發現數第 n 個月的兔子對數，可以分成兩類：

(1°)第 $n-1$ 個月的兔子對數 F_{n-1}，

(2°)第 n 個出生的小兔子，它的數量恰是第 $n-2$ 個月的兔子對數 F_{n-2}。

所以 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

所以數列＜F_n＞具有下列的遞迴關係式：

第 n 個月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
大兔對數	1	1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
小兔對數	0	0	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
總對數 F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

故第十二月共有 144 對兔子。

我們稱數列＜F_n＞：1,1,2,3,5,8,13,21,34,…(前兩項和等於後項)為費布那西數列，簡稱為費氏數列。

從探討河內塔問題與兔子問題，可知透過建立數列的遞迴關係式，逐步由前幾項算出數列中任何一項的值，通常處理有關遞迴數列的問題可以考慮以下步驟：

(a)依據條件構造一個遞迴數列＜a_n＞。

(b)建立相鄰幾項之間的遞迴關係式。

最後再根據(a)(b)去找出問題的答案，這種處理問題的方法稱為「**遞迴方法**」，它常應用在計算機科學、遊戲等許多領域。

[例題4] 設ΔABC 是邊長為 1 的正三角形。將三邊分別三等份，取中間段為一邊向外側作一個正三角形，並且將中間這一段擦去，其次將剩下的每一邊再三等份，取中間段為一邊向外作正三角形，再將中間這一段擦去。依此程序繼續下去，得到一系列的圖形，這種自我複製的圖形，稱為**碎形**。試求

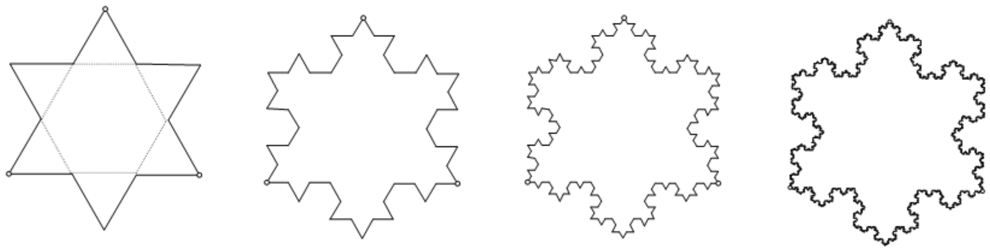
(a)第 6 次之碎形的周長。(b)第 n 次的周長。

[解答]：

(1)構造數列$\{a_n\}$：設 a_n 代表第 n 個碎形的周長，列表計算，

仔細觀察、歸納，發現規則：

第 n 個碎形	1	2	3	4	……
周長 a_n					



(2)建立遞迴關係式：

(練習3) 平面上 n 條直線，任兩條都不互相平行，而且任三條都不共點，試問這 n 條直線把平面分割成多少個互不重疊的區域。

(1)構造數列$\{a_n\}$：設 n 條直線將平面分割成 a_n 個互不重疊的區域，列表計算，仔細觀察、歸納：

n 條直線	1	2	3	4	……
分隔區域 a_n					

(2)建立關係式：

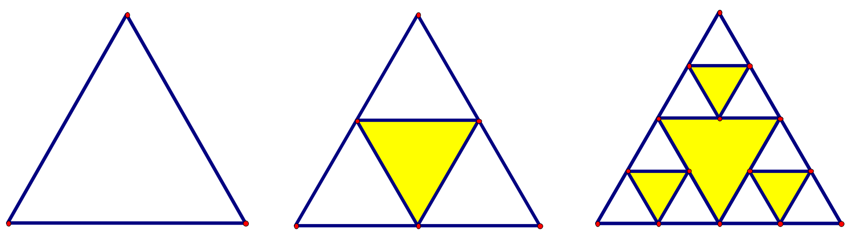
Ans：(2)關係式：$a_{n+1}=a_n+(n+1)$

(練習4) 給定數列$\{a_n\}$：1,3,6,10,15,21,…，找出 a_n 前後項之間的關係。

Ans：$a_{n+1}=a_n+(n+1)$

(練習5) 設△ABC 為邊長 1 的正三角形，取三邊中點並兩兩連線，將△ABC 的面積四等分，得到三個直立的正三角形，和一個倒立的正三角形(如圖)，將倒立的正三角形移走。其次將剩下的三個直立的正三角形，依照相同的方法分割，並移去其中的倒立正三角形，…。設第 n 次移走倒立正三角形後，所剩下的面積為 S_n，前 n 次被移走之三角形周長和為 T_n。

(1) 以遞迴的方式定義 S_n。 (2) 求 S_5。(3) 以遞迴的方式定義 T_n。



圖一　　　　圖二　　　　圖三

Ans：(1) $S_1=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$，$S_n=\dfrac{3}{4}S_{n-1}$，$n\geq 2$　(2) $S_5=\dfrac{243}{4096}\sqrt{3}\approx 0.10276$

(3) $T_1=\dfrac{3}{2}$，$T_n=T_{n-1}+(\dfrac{3}{2})^n$，$n\geq 2$

(練習6)設在一排 $n(n\ge 2)$ 個格子中，每格各填入一個數字"0"或"1"，則任意兩個"1"都不相鄰的填法有 a_n 種。

(1) 試求出 a_2 , a_3 。(2) 試建立 a_n 遞迴關係式。(3) 求 a_{12} 。

Ans：(1) $\begin{cases} a_2=3 \\ a_3=5 \end{cases}$ 。(2) $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ ，$(n\ge 3)$。(3) $a_{12}=377$ 。

[提示：將所有狀況分三種：(a)第一格填 0 (b) 第一、二格依序填 0，1 (c) 第一、二格依序填 1，1。]

(丙)數學歸納法

◆ 觀察歸納臆測的結果不一定正確

由河內塔問題中，我們建立了遞迴關係式 $a_n=2a_{n-1}+1$ 與 $a_1=1$，將數列＜a_n＞前幾項列表如下：

n	1	2	3	4	5	6
a_n	$1=2^1-1$	$3=2^2-1$	$7=2^3-1$	$15=2^4-1$	$31=2^5-1$	$63=2^6-1$

從上表可以歸納出 $a_k=2^k-1$，這個通式是由前 6 項的結果歸納出來的規則，我們不禁要問：

「一般項 $a_k=2^k-1$，對於所有的自然數 k 是否都成立呢？」

我們可以保證前幾項的規則都能使得數列中的每一項都符合這個規則嗎？

[例題5] 小舒在數學習作中見到一個數列＜a_n＞，其中 $a_n=n^2+n+41$，他將 n=1,2,3,4…,10 的值列表如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2+n+41	43	47	53	61	71	83	97	113	131	151

(1)根據上表，n=1,2,3,…,10 時，$a_n=n^2+n+41$ 都是質數嗎？

(2)根據(1)小舒歸納出猜想：「當 n 是任意自然數時，$a_n=n^2+n+41$ 都是質數。」試問這個猜想正確嗎？如果不成立，請舉出反例。

根據上面的討論，我們很容易可以得知，n=41 時，$a_{41}=41\times 43$ 不是質數，因此根據有限項歸納的規則不一定正確。

雖然歸納的結果不一定正確，但是「**歸納法**」是人類探索自然常用的一種方法，透過觀察(紀錄、比對)歸納出**結論**。並在這個結論上進一步提出**臆測**(或稱**猜想**)，這種**歸納**

臆測的方法，往往提供發現真理的契機。故

觀察→歸納→臆測→驗證

一直都是人類發現問題、解決問題的一個重要過程。如何來驗證猜想的正確性呢？

◆ 驗證觀察歸納臆測的結果

重新考慮河內塔問題中的所成的數列＜a_n＞，它滿足遞迴關係式：$a_n=2a_{n-1}+1$，$n\geq 2$ 且 $a_1=1$，經由觀察歸納得到一般項 $a_n=2^n-1$ 的猜想，即使我們 n=1,2,3,…,10000 代入都正確，但是自然數有無限多個，如何驗證這個結論對於所有的自然數 n 是否都成立呢？

若以 P(n)來表示「$a_n=2^n-1$ 」這個式子

當 n=1,2,3 時，經由遞迴關係式與 $a_1=1$，可得 $a_2=3$、$a_3=7$，因此 P(n)都是正確的，而 n=4,5,6…有無窮多個自然數，不可能一個接著一個去驗證 P(n)是否正確。必須找一套有效的方法，來處理這種涉及到**無限多個自然數**的問題。

若假設 $n=k$ 時，P(k)是正確的，在這個基礎上，嘗試去推導 $n=k+1$ 時，P(k+1)也是正確的。

若假設 $n=k$ 時，$a_k= 2^k-1$

則 $n=k+1$ 時，

因為 $a_{k+1}=2a_k+1$，

所以 $a_{k+1}=2\cdot(2^k-1)+1=2^{k+1}-2+1=2^{k+1}-1$

所以 $n=k+1$ 時，P(k+1)仍是正確的。

即得出「**若 P(*k*)成立，則 P(*k*+1)成立**」。…….(*)

今已知 P(1)成立，再利用(*)的結果得到：

P(1)成立推得 P(2)成立；P(2)成立推得 P(3)成立；P(3)成立推得 P(4)成立；進而推得 P(5)、P(6)、P(7)、…都成立。

所以所有的自然數 n，$a_n=2^n-1$ 是正確的。

上述驗證的過程，可以想像成一個依編號順序排好的骨牌，而骨牌的編號是所有的自然數，骨牌的機制是「**前一張倒了，下一張必定會倒**」即「**若 P(*k*)成立，則 P(*k*+1)成立**」，因此當「**第一張骨牌倒了**」即「**P(1)成立**」，那麼會產生**連鎖反應**，第二張、第三張、…都會依序倒下，因此這樣的過程可以保證每一張骨牌都會倒下。(即**對於任一自然數 *n*，P(*n*)都成立**)。

我們將前面的證法整理如下：

(1)驗證 n=1 時，P(1)成立。

(2)假設 P(k)成立，在這個假設條件下，去推導出 P(k+1)也成立。

通過(1)(2)兩個步驟，就得出 P(n)：「$a_n=2^n-1$ 」對於所有的自然數 n 都成立。

接下來我們利用前面所提出的方法來驗證數列一般項的正確性：

[例題6] 設數列＜a_n＞的首項 $a_1=5$ 且滿足遞迴關係式：$a_n=a_{n-1}+4n$，$n\geq 2$

證明：所有的自然數 n， $a_n=2n^2+2n+1$。

[解法]：

(1)n=1 時，因為 $a_1=2=2\times 1^2+2\times 1+1$，所以 $a_n=2n^2+2n+1$ 成立。

(2)若設 $n=k$(k 為自然數)時，$a_k=2k^2+2k+1$ 成立

則 $n=k+1$ 時，

$$
\begin{aligned}
a_{k+1}&=a_k+4(k+1)\\
&=(2k^2+2k+1)+4k+4\\
&=2k^2+6k+5\\
&=2(k^2+2k+1)+2(k+1)+1\\
&=2(k+1)^2+2(k+1)+1
\end{aligned}
$$

故 $n=k+1$ 時，$a_n=2n^2+2n+1$ 成立。

由(1)(2)這兩個步驟得證：所有的自然數 n，$a_n=2n^2+2n+1$ 成立。

上面所使用的方法，就是數學歸納法，它的理論整理如下：

數學歸納法原理：
設 P(n)表示與自然數有關的敘述，如果
(1)當 $n=n_0$ 時，P(n_0)成立。 (n_0 是一個固定的自然數)
(2)若 $n=k$ ($k\ge n_0$，k 為自然數)時，P(k)成立，
　則 $n=k+1$ 時，P($k+1$)也成立。
那麼對於一切自然數 $n\ge n_0$，敘述 P(n)都成立。

數學歸納法的步驟 (1)就像我們推倒了第一張骨牌(編號 n_0)，步驟(2)就像建立了骨牌的機制：「第 k 張倒了，第 $k+1$ 張必定會倒」，如此一來，從編號 n_0 開始的無限張骨牌就會一張接著一張倒下來。

課內討論：

<u>小舒</u>宣稱可以證明「$n=n+1$，對於任意的自然數都成立。」，他的證明步驟如下：

若設 $n=k$(k 為自然數)時，敘述成立，即 $k=k+1$

則當 $n=k+1$ 時，$n=k+1=(k+1)+1=n+1$

故當 $n=k+1$ 時敘述成立。

請問<u>小舒</u>的證明有些什麼問題呢？

此處必須強調一下，數學歸納法中證明的兩個步驟

步驟(1)：驗證 $n=n_0$ 時，P(n_0)成立。

步驟(2)：假設 P(k)成立，去推導 P($k+1$)也成立 ($k\ge n_0$)。

缺一不可！步驟(1)稱為**起始步驟**，步驟(2)稱為**遞推步驟**，而(2)中的「假設 P(k)成立」

稱為**歸納假設**。

課內討論：

試證明：任何 n 個人都一樣高。

(1°)當 $n=1$ 時，命題變為”任何一個人都一樣高”此結論顯然成立。

(2°)若設 $n=k$ 時，結論成立，即”任何 k 個人都一樣高”

則當 $n=k+1$ 時，將 $k+1$ 個人記為 A_1、A_2、…、A_{k+1}，

由歸納假設，A_1、A_2、…、A_k 都一樣高，而 A_2、A_2、…、A_k 也都一樣高，

故 A_1、A_2、…、A_{k+1} 都一樣高。

由(1°)(2°)根據數學歸納法原理，任何 n 個人都一樣高。 **這個例子顯然有誤，但問題出在那裡呢？**

[例題7] 設數列＜a_n＞的一般項 $a_n=10^n+3\cdot4^n+5$

(1)計算 a_1、a_2、a_3，並檢驗 a_1、a_2、a_3 是否可被 9 整除。

(2)利用數學歸納法驗證：對於所有的自然數 n，a_n 恆被 9 整除。

[解法]：

(1)

因為 $a_1=10^1+3\cdot4^1+5=27=9\times3$、$a_2=10^2+3\cdot4^2+5=153=9\times7$、$a_3=10^3+3\cdot4^3+5=9\times133$

所以 a_1、a_2、a_3 會被 9 整除。

(2)利用數學歸納法的步驟來驗證：「對於所有的自然數 n，a_n 恆被 9 整除。」

(1°)當 $n=1$ 時，$a_1=27$ 被 9 整除。

(2°)若設 $n=k(k\geq1)$時，$a_k=10^k+3\cdot4^k+5$ 被 9 整除

則當 $n=k+1$ 時，

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=10^{k+1}+3\cdot4^{k+1}+5\\&=10\cdot10^k+3\cdot4\cdot4^k+5\\&=10(10^k+3\cdot4^k+5)-18\cdot4^k-45\\&=10\cdot a_k-9(2\cdot4^k+5)\end{aligned}$$

因為 a_k 被 9 整除，所以 a_{k+1} 也會被 9 整除。

由數學歸納法得知：對於所有的自然數 n，a_n 恆被 9 整除。

[例題8] 設數列＜a_n＞滿足 a_1=2 且滿足遞迴關係式：$a_{n+1}=(\frac{n}{n+1})a_n$，$n\geq 1$

(1)試求 a_2、a_3、a_4、a_5。

(2)利用數學歸納法驗證你的結果。

Ans：

綜合前面所討論的內容，以下的兩個要點是處理有關數列問題的重要內涵：

(1)從 n=1,2,3,….開始去歸納出數列的規則(猜想)。

(2)用數學歸納法的理論來證明數列規則的正確性(驗證)。

[例題9] $t=x+\frac{1}{x}$，n 為自然數，證明：$x^n+\frac{1}{x^n}$可表示為 t 的多項式。

第二數學歸納法：

欲證明 P(n)成立，當 $n\geq n_0$。

(a)證明：$n=n_0$ 時命題 P(n_0)成立。

(b)證明：若設 $n\leq k$，($k\geq n_0$)時，P(n)成立，則 $n=k+1$ 時，P(k+1)成立。

(練習7)設數列＜a_n＞滿足 $a_1=\frac{1}{2}$且滿足 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$ ($n\geq 1$)，

(1)試求 a_2、a_3、a_4 的值。(2)試臆測一般項的通式。

(3)利用數學歸納法驗證(2)中臆測的結果。

Ans：(1)$a_2=\frac{2}{5}$，$a_3=\frac{2}{6}$，$a_4=\frac{2}{7}$ (2)$a_n=\frac{2}{n+3}$

(練習8)利用數學歸納法證明：對於所有的正整數 n，4^n+2 恆為 6 的倍數。

(練習9)設數列＜a_n＞滿足 a_1=1 且滿足 $a_n=3a_{n-1}+4(n\geq 2)$

(1) 試臆測一般項的通式。 (2) 利用數學歸納法驗證(1)中臆測的結果。

Ans：(1)3^n-2

(**練習**10)設 $t=x-\frac{1}{x}$，證明對於任意的自然數 n，$x^{2n-1}-\frac{1}{x^{2n-1}}$ 都可以表為 t 的多項式。

綜合練習

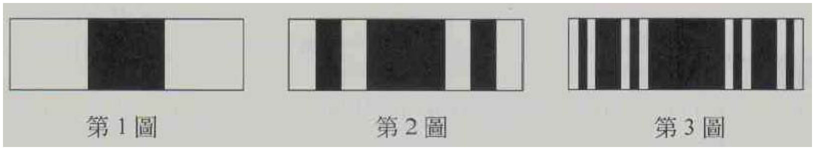
(1) 下面數列的最末項是第 n 項 a_n，試寫出 a_n(用 n 表示)

(a)$9,99,999,\ldots,\underbrace{99\cdots9}_{n\text{個}9}$ 。 (b)$1,11,111,\ldots,\ \underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}1}$ 。

(2) 數列 $1,\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\ldots\ldots$，求

(a)第 244 項為何？ (b)$\frac{13}{29}$ 為數列中第幾項？

(3) 取一個白色矩形，將其等分成 3 個相同的小矩形，然後將中間那一個矩形塗成黑色；接著再將剩下的 2 個白色矩形，分別等分成 3 個相同的更小矩形，然後將中間更小的矩形塗成黑色，重複這樣的操作，如下圖所示：



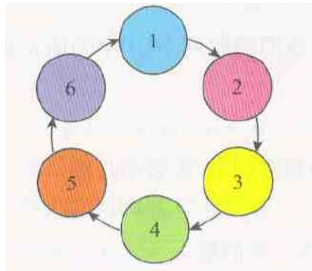
設 a_n 為第 n 個圖中白色矩形的總數，請寫出數列$\langle a_n\rangle$的遞迴關係式。

(4) 跳蟲依下列規律，從 1 號位置往順時針方向開始跳動：

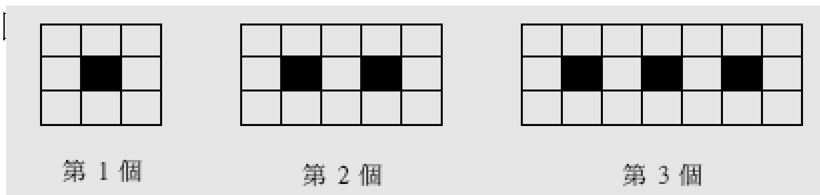
(1°)如果跳蟲所在的位置是奇數，那麼它的下一次將跳動 1 格，如由 3 號跳到 4 號。

(2°)如果跳蟲所在的位置是偶數，那麼它的下一次將跳動 3 格，如由 2 號一下子跳到 5 號。

試問跳蟲在跳動 127 下之後，其所在的位置是幾號？



(5) 用黑、白兩種顏色的正方形地磚依照如下的規律拼成若干



設第 n 個圖所需用到 a_n 個白色地磚

(a)試寫出數列＜a_n＞的遞迴關係式。

(b)試問第 30 個圖需用到幾塊白色地磚。

(c)試求 a_n 一般項的通式。

(6) 用單位長的不鏽鋼焊條焊接如下圖系列的四面體鐵架，圖中的小圓圈「°」表示焊接點，圖 1–1 有兩層共 4 個焊接點，圖 1–2 有三層共 10 個焊接點，圖 1–3 有四層共 20 個焊接點。試問依此規律，設 n+1 層的四面體鐵架有 a_n 個焊接點($n\geq1$)，

(a)計算 a_2-a_1、a_3-a_2、a_4-a_3 的值。

(b)推算有八層的四面體鐵架共有多少個焊接點。

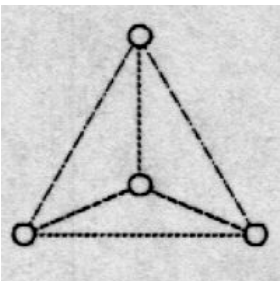


圖 1−1

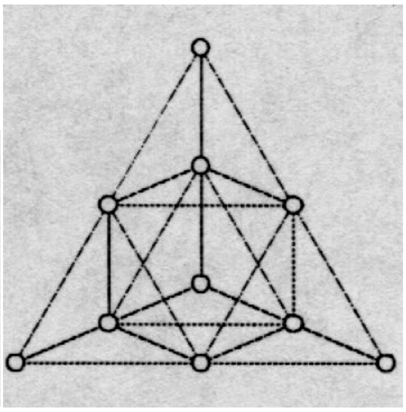


圖 1−2

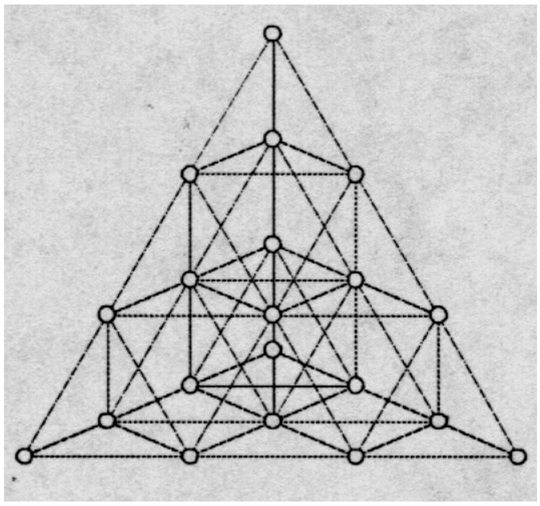


圖 1−3

(7) 一機器狗每秒鐘前進或後退一步，程式設計師讓機器狗以前進 3 步，然後再後退 2 步的規律移動。如果將此機器狗放在數線的原點，面向正的方向，以 1 步的距離為 1 單位。令 P(n)表示第 n 秒時機器狗所在位置的坐標，且 P(0)=0，那麼下列選項何者為真？(91 學科能力測驗)
(A)P(3)=3 (B)P(5)=1 (C)P(10)=2 (D)P(101)=21 (E)P(103)<P(104)

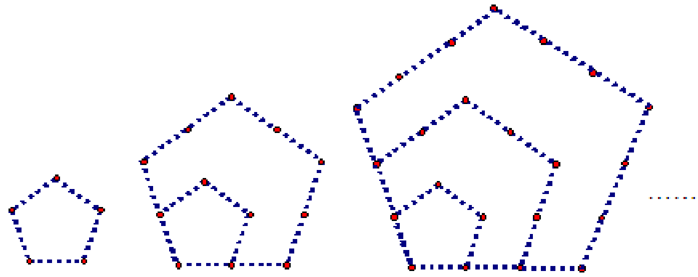
(8) 設等差數列$\langle a_n \rangle$滿足 $a_{10}=20$、$a_{20}=10$，選出正確的選項：
(A)公差為−1 (B)首項 $a_1=30$ (C)$a_{15}=15$ (D)0 是數列$\langle a_n \rangle$中的一項(E) 數列$\langle a_n \rangle$中共有 30 項的值大於 0。

(9) 假設實數 a_1,a_2,a_3,a_4 是一個等差數列，且滿足 $0<a_1<2$ 及 $a_3=4$。若定義 $b_n=2^{a_n}$，則以下那些選項是對的？(2006 學科能力測驗)
(1)b_1,b_2,b_3,b_4 是一個等比數列。 (2)$b_1<b_2$ (3)$b_2>4$ (4)$b_4>32$ (5)$b_2\times b_4=256$。

(10) 設實數組成的數列$\langle a_n \rangle$是公比為-0.8的等比數列，實數組成的數列$\langle b_n \rangle$是首項為 10 的等差數列。已知$a_9>b_9$且$a_{10}>b_{10}$。請選出正確的選項。
(1) $a_9\times a_{10}<0$ (2) $b_{10}>0$ (3) $b_9>b_{10}$ (4) $a_9>a_{10}$ (5) $a_8>b_8$
(2013 學科能力測驗)

(11) 某人參加銀行優惠存款，年利率 7%，每年複利計算，若每年年初存入 10000 元，假設第 n 年結束可得本利和 a_n 元，
(a) 試寫出 a_n 的遞迴關係式。 (b) 求一般項 a_n。

(12) 下列圖形中的正五邊形邊長依序為 1,2,3,…。圖中的點分別落在正五邊形的頂點或邊上，且相鄰兩點的線段長相等。設邊長為 n 的正五邊形其上的所有點之個數形成數列＜a_n＞，



(a) 求數列＜a_n＞的遞迴關係式。
(b) 根據遞迴關係式，歸納臆測出一般項的通式。
(c) 利用數學歸納法驗證：對於所有自然數 n ，(b)所歸納臆測的通式是正確的。

(13) 設前 n 個正奇數的和為 a_n，試利用數學歸納法證明：對於所有的自然數 n，$a_n=n^2$。

(14) (a)k 是自然數，而且個位數字是 6，請用一個等式表示 k。
(b)請用數學歸納法證明對於任意自然數 n，$2^{4n+1}-6^n$ 的個位數字恆為 6。

(15) 已知一數列＜a_n＞定義為 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}$ ，$n=1$，2，3，…。
(a)求 a_2，a_3，a_4。
(b)觀察(a)的規則性，並推測第 n 項 a_n(以 n 表示之)。
(c)證明在(b)中所推測之結果。

(16) 已知一數列＜a_n＞定義為 $a_1=1$，$a_n=(1-\dfrac{1}{n^2})a_{n-1}$，$n\geq2$，
(a)臆測 a_n=？　(b)利用數學歸納法證明臆測。

(17) 設數列＜a_n＞有以下的規律：
$a_1=1-\dfrac{1}{4}$，$a_2=(1-\dfrac{1}{4})(1-\dfrac{1}{9})$，$a_3=(1-\dfrac{1}{4})(1-\dfrac{1}{9})$，…，$a_k=(1-\dfrac{1}{4})(1-\dfrac{1}{9})\cdot\cdot\cdot(1-\dfrac{1}{(k+1)^2})$，…
(a)試求數列＜a_n＞的遞迴關係式。
(b)試推測一般項的通式。
(c)利用數學歸納法驗證推測的結果。

(18) 設數列＜a_n＞滿足 $a_1=2$ 且滿足 $a_{n+1}=3a_n-2$ $(n\geq1)$，
(a)試求 a_2、a_3、a_4 的值。
(b)設遞迴關係式 $a_{n+1}=3a_n-2$ 可以化成 $a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$，試求α的值。
(c)試求數列＜a_n＞一般項的通式。
(提示：可以先求數列＜b_n＞一般項，其中 $b_n=a_n-\alpha$)

進階問題

(19) 觀察一群單細胞生物，一開始有 7 個細胞，根據此細胞的生態特性，這一群細胞每隔一小時會死亡 3 個，剩下的每個細胞都分裂成 2 個細胞，設 n 小時後可以觀察到 a_n 個細胞，這樣形成數列＜a_n＞。

(a)試求第 1,2,3 小時後細胞的數目。
(b)試求 a_n 與 a_{n-1} 的關係式。
(c)試求數列＜a_n＞一般項的通式。

(20) 平面上 n 條直線，任兩條都不互相平行，而且任三條都不共點，設這 n 條直線把平面分割成 a_n 個互不重疊的區域。
(a)請找出 a_n 的遞迴式。
(b)求 a_n 的一般式。
(c)請用數學歸納法證明(b)的結果。

(21) 設 x_1 和 x_2 是方程式 $x^2-6x+1=0$ 的兩個根，試證明：
對於任意自然數 n，$x_1^n+x_2^n$ 都是自然數。

(22) (a)設 a_1、a_2 為正實數，請證明：$\dfrac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2}$ 。
(b)設 a_1、a_2、a_3、a_4 為正實數，利用(a)的結果證明：$\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geq\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$ 。
(c)設 a_1、a_2、a_3 為正實數，利用(b)的結果證明：$\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}\geq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$ 。
(d)設 a_1、a_2、a_3、….、a_n 為正實數，請利用數學歸納法證明：
$\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$ 。
(註：不等式$\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$ 稱為算幾不等式，等號成立的充要條件是 $a_1=a_2=\ldots=a=n$)

(23) 有一個函數序列$\{f_n(x)\}$，其中 $x\geq0$，滿足 $f_1(x)=|x-1|$，$f_{n+1}(x)=|f_n(x)-(n+1)|$，$n=1,2,3\ldots$
(a)畫出 $y=f_2(x)$、$y=f_3(x)$的圖形。
(b)令 $a_n=f_n(0)$，試求 a_n 的一般式。
(c)若 $f_n(\alpha)=0$，試證明 $f_{n-i}(\alpha)=in-\dfrac{i(i-1)}{2}$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$
(d)將滿足 $f_n(\alpha)=0$ 的α用 n 來表示。

綜合練習解答

(1) (a)$a_n=10^n-1$ (b)$\frac{1}{9}(10^n-1)$

(2) (a)$\frac{13}{22}$ (b)419

(3) $a_n=2\cdot a_{n-1}$

(4) 1 號

(5) (a)$a_n-a_{n-1}=5$ (b)153 (c)$5n+3$

(6) (a)6、10、15 (b)120

(7) (A)(B)(C)(D)

(8) (A)(C)(D)

(9) 全

(10) (1)(3)

(11) (a) $a_0=0$，$a_n=1.07(a_{n-1}+10000)=1.07a_{n-1}+10700$，$n\geq 1$

(b) $a_n=\dfrac{10700(1.07^n-1)}{1.07-1}$

(12) (a)$a_{n+1}-a_n=3n+4$ (b)$a_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1$ (c)略

(13) 略

(14) (a)$k=10m+6$ (m 是非負整數)

(b)設 $n=k$ 時，$2^{4k+1}-6^k=10m+6$，去證明當 $n=k+1$ 時，$2^{4k+5}-6^{k+1}=10m'+6$。

(15) (a) $a_1=\frac{1}{1}$，$a_2=\frac{2}{3}$，$a_3=\frac{3}{5}$，$a_4=\frac{4}{7}$ (b) $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$，$\forall n\in N$

(c)略

(16) (a) $a_n=\dfrac{n+1}{2n}$

(17) (a)$a_{n+1}=a_n\cdot[1-\frac{1}{(n+2)^2}]$ (b)$a_n=\dfrac{n+2}{2n+2}$ (c)略

(18) (a)4,10,28 (b)$\alpha=1$ (c)$3^{n-1}+1$

(19) (a)8 , 10, 14 (b)$a_n=2(a_{n-1}-3)$ (c)$a_n=6+2^n$

(20) (a)$a_n-a_{n-1}=n$ (b)$a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$

(21) 提示：利用雙基歸納法去證明。

(22) 提示：(c)令 $A=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$，利用$\frac{a_1+a_2+a_3+A}{4}\geq\sqrt[4]{a_1a_2a_3A}$，即可得證。

(d)若設 $n=k$，k 為大於等於 2 的正整數時，

$\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k}{k}\geq\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_k}$ ，則當 $n=k+1$ 時，

令 $d=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}}{k+1}$ 考慮 $a_1,a_2,\ldots,a_{k+1},\overbrace{d,d,\ldots,d}^{k-1個}$ 這 $2k$ 個數的算術平均數

$$d=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}+\overbrace{d+d+\ldots+d}^{k-1個}}{2k}=\frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+d+\ldots+d}{k}}{2}$$

$$\geq\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\right)\left(\frac{a_{k+1}+d+\ldots+d}{k}\right)}\geq\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}\cdot d\cdot d\cdots d}}$$

$=\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{k+1}\cdot d^{k-1}}\Rightarrow d^{2k}\geq a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}.d^{k-1}\Rightarrow d^{k+1}\geq a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}$

(23) (a)略

(b)$a_n=f_n(0)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2} & ,n\text{為正奇數}\\ \dfrac{n}{2} & ,n\text{為正偶數}\end{cases}$(注意 $a_1=1$，$a_{n+1}=|a_n-(n+1)|$，再利用數學歸納法證明)

(c)利用數學歸納法

(d)$\alpha=\dfrac{n(n+1)}{2}$

補充教材

(甲)二階常係數線性齊次遞迴方程式

一般而言，除了一些特殊形式的遞迴關係外，遞迴數列中 a_n 不一定能用 n 來表示，前面已經介紹了幾種可以找出 a_n 的一般式的遞迴關係式，接下來再介紹一種可以表示出 a_n 的一般式的遞迴關係式— 二階常係數線性遞迴方程式。

(1)遞迴關係式：$a_{n+1}=c_1a_n+c_2a_{n-1}$ 稱為二階常係數線性遞迴方程式

假設透過裂項的方法可將遞推式變形成為

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$$

的形式，那麼，$<a_{n+1}-\alpha a_n>$就成為以 $a_2-\alpha a_1$ 為首項，β 為公比的等比數列。

比較 $a_{n+1}-(\alpha+\beta)a_n+\alpha\beta a_{n-1}=0$ 與 $a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1}=0$ 二式

得 $\alpha+\beta=c_1$ ，$\alpha\beta=-c_2$

即 α, β 為二次方程式 $x^2-c_1x-c_2=0$ 的兩根，而這個式子稱為原遞推式的特徵方程式，α, β 稱為特徵根。

當二次方程式(特徵方程式)：$x^2-c_1x-c_2=0$ 的兩根為 α, β。

(1)若α, β為兩相異實數，則可以找到 A, B 使得 $a_n=\text{A}\alpha^n+\text{B}\beta^n$ 。

(2)若α, β為兩相等實數，則可以找到 A, B 使得 $a_n=(\text{A}+n\text{B})\alpha^n$ 。

[證明]

(1) 若α, β為兩相異實數：

因(*)可化成 $a_{n+1}=(\alpha+\beta)a_n-\alpha\beta a_{n-1}$，又 $\alpha+\beta=c_1$，$\alpha\beta=-c_2$

從而可得：

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})=\cdots=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1) \quad ①$$

$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha(a_n-\beta a_{n-1})=\cdots=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1) \quad ②$$

② − ①得 $(\alpha-\beta)a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)-\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$

$$\Rightarrow a_n=\frac{(a_2-\beta a_1)}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}+\left(\frac{-(a_2-\alpha a_1)}{\alpha-\beta}\right)\beta^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n=\text{A}\alpha^n+\text{B}\beta^n，\text{A}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{(a_2-\beta a_1)}{\alpha-\beta}，\text{B}=\frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{-(a_2-\alpha a_1)}{\alpha-\beta}\right)。$$

這裡的 A, B 為待定的常數可由初始值的條件 a_2, a_1 代入確定。

反之，若 $a_n=\mathrm{A}\alpha^n+\mathrm{B}\beta^n$ ，直接計算

$$a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1}=(\mathrm{A}\alpha^{n+1}+\mathrm{B}\beta^{n+1})-c_1(\mathrm{A}\alpha^n+\mathrm{B}\beta^n)-c_2(\mathrm{A}\alpha^{n-1}+\mathrm{B}\beta^{n-1})$$

$$=\mathrm{A}\alpha^{n-1}(\alpha^2-c_1\alpha-c_2)+\mathrm{B}\beta^{n-1}(\beta^2-c_1\beta-c_2)=0$$

所以 $a_n=\mathrm{A}\alpha^n+\mathrm{B}\beta^n$ 亦滿足(*)式，其中 A, B 為任意常數，故得證。

(2)若α, β為兩相等實數

由① $a_{n+1}-\alpha a_n=\alpha(a_n-\alpha a_{n-1})=\cdots=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$

所以

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-\alpha a_n&=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1),\\
\alpha a_n-\alpha^2a_{n-1}&=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1),\\
\alpha^2a_{n-1}-\alpha^3a_{n-2}&=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1),\\
&\vdots\\
\alpha^{n-1}a_2-\alpha^na_1&=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1).
\end{aligned}$$

累加以上 n 個式子，
得 $a_{n+1}-\alpha^na_1=n\cdot\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$ ③

由③ $a_{n+1}=\alpha^na_1+(\dfrac{a_2}{\alpha}-a_1)n\alpha^n=(\mathrm{A}+n\mathrm{B})\alpha^n$，其中 $\mathrm{A}=a_1$，$\mathrm{B}=(\dfrac{a_2}{\alpha}-a_1)$

反之，對於任意的實數 A, B，$a_n=(\mathrm{A}+n\mathrm{B})\alpha^n$ ，
因為$\alpha=\beta$ ，$\alpha+\beta=c_1$，$\alpha\beta=-c_2\Rightarrow c_1=2\alpha$，$c_2=-\alpha^2$
直接計算 $a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1}=[\mathrm{A}+(n+1)\mathrm{B}]\alpha^{n+1}-c_1(\mathrm{A}+n\mathrm{B})\alpha^n-c_2[\mathrm{A}+(n-1)\mathrm{B}]\alpha^{n-1}$

$$=\mathrm{A}(\alpha^{n+1}-c_1\alpha^n-c_2\alpha^{n-1})+\mathrm{B}n(\alpha^{n+1}-c_1\alpha^n-c_2\alpha^{n-1})+\mathrm{B}(\alpha^{n+1}+c_2\alpha^{n-1})$$

$=\mathrm{A}\cdot0+\mathrm{B}n\cdot0+\mathrm{B}\alpha^{n-1}(\alpha^2-\alpha^2)=0$，亦滿足(*)，故得證。

[討論]：

若α,β為兩共軛複數時，數列$\{a_n\}$也可以寫成與 n 有關的一般式。

[例題1] 已知費布納西(*F*ibo*n*acci)數列＜F$_n$＞滿足$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$，求此數列的一般項 a_n。

[解法]

費布納西(*F*ibo*n*acci)數列＜F$_n$＞對應的特徵方程式是

$x^2-x-1=0$。其解為 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。

所以可設一般項 $F_n= c_1\times(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+c_2\times(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

將 $F_1=1$，$F_2=1$ 的條件代入，得 $c_1\times(\frac{1+\sqrt{5}}{2})+c_2\times(\frac{1-\sqrt{5}}{2})=1$，

$c_1\times(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2+c_2\times(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2=1$

解得 $c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$。所以 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]$。

[例題2] 已知數列$\{a_n\}$滿足 $a_1=3$，$a_2=0$，且 $a_n-6a_{n-1}+9a_{n-2}=0$，求此數列的一般項 a_n。

[解法]

所給數列的對應的特徵方程式是 $x^2-6x+9=0$ 解得二重根 $x_1=x_2=3$。

所以可設一般項 $a_n=(c_1+c_2n)\times3^n$。

將$a_1=3, a_2=0$代入，得

$(c_1+c_2)\times3=3$，　$(c_1+2c_2)\times3^2=0$

解得 $c_1=2$，$c_2=-1$ 。所以 $a_n=(2-n)\times3^n$。

(練習1) 已知數列$\{a_n\}$滿足 $a_1=3, a_2=93$，$a_n-10a_{n-1}+21a_{n-2}=0$，
求此數列的一般項 a_n。Ans：$a_n=-6\times3^n+3\times7^n$。

(練習2) 若$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+b_n & (1) \\ b_{n+1}=-a_n+b_n & (2) \end{cases}$，且初始條件是$a_1=14$，$b_1=-6$。求兩遞迴數列＜$a_n$＞，＜$b_n$＞的一般項公式。

Ans：$\begin{cases} a_n=(5+2n)\cdot2^n \\ b_n=-(1+2n)\cdot2^n \end{cases}$

(練習3) 若數列$\{a_n\}$滿足$\begin{cases} a_1=0, a_2=1 \\ a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2}) \end{cases}$ $(n=3,4,5,\ldots)$，求 a_n 的一般式。

Ans：$a_n=\frac{2}{3}[1-(\frac{-1}{2})^n]$

(練習4) 用紅、白、藍三色將$1\times n$棋盤上的方格塗色，對於$n=1,2,3,\cdots$,令a_n表示沒有兩相鄰方格都塗紅色的個數，求一般項公式a_n。

Ans： $a_n=\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\dfrac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n$

(練習5) (錯列問題)

宣宣給 n 個人寫了 n 封不同的信，信寫好後再寫信封上的人名、地址。假設此 n 張信紙全都裝錯信封的情形有 a_n 種。

(1) 試求出 a_1 , a_2 , a_3 。(2) 求a_n所滿足的遞迴關係式。

Ans：(1) $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=2$。 (2) $a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$。

[提示：將所有狀況分二種：(a)第 1 封信放錯位置的方法數有$(n-1)$種裝。(b)錯放位置的另$(n-1)$封信，又可分為兩類： (i) 當第 1 封信放與錯放信互換時。(ii) 當第 1 封信放未與錯放信封之信互換時。]

(練習6) 10 個數字(0~9)和 4 個四則運算符號(+−×÷)組成的 14 個字元，求其中的 n 個字元的排列構成一個算式表達式的個數。

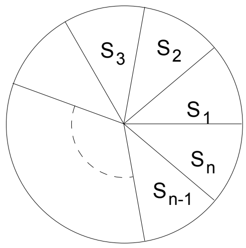
所謂的算式表達式是指從左至右最後一個字元一定是數字。

(1)試求 a_n 的遞迴式 (2)試求 a_n 的一般式。

Ans：(1)$a_n=10a_{n-1}+40a_{n-2}(n\geq 3)$，$a_1=10$，$a_2=120$

(2)$a_n=\dfrac{1}{4\sqrt{65}}[(15+\sqrt{65})(5+\sqrt{65})^n-(15-\sqrt{65})(5-\sqrt{65})^n]$

(練習7) 地圖上某一地區有n個國家相鄰，但n個國家只有一個公共點（如圖）。現用紅，黃，綠三種顏色給地圖染色，但使相鄰的國家顏色不同。令a_n表示滿足上述染色規則的方法數，求一般項公式a_n。



Ans：$\begin{cases} a_3=6, a_4=18; \\ a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}, n\geq 5. \end{cases}$，$a_n=2^n+2(-1)^n$