第二十八單元　空間概念

(甲)平面的基本性質

我們曾經學過一些有關平面幾何中點、直線、三角形、圓、平行四邊形等圖形的特性，或是這些圖形彼此之間的關係：平行、垂直、全等、相似等等。由於這些性質與關係都在平面上來討論，因此對於平面的概念與特性，往往不會特別提及。但是在空間中討論問題時，因為空間中有許多不同的平面，因此就無法避免要討論空間中平面的概念與關係。底下列出一些基本性質，作為討論問題的起點。

公理一：$\boxed{\text{相異兩點可以決定一直線。}}$

公理二：$\boxed{\text{若直線上有相異兩點在平面上，則直線上所有的點都在這個平面上。}}$

公理三：$\boxed{\text{若兩相異平面有一個共同點，則它們必有另一個共同點。}}$

事實上，兩相異平面的交點會形成一條直線，我們稱此直線為兩平面的交線。

公理四：$\boxed{\text{恰有一個平面經過不在同一直線上的三點。}}$

根據這些公理，我們可以進一步推知一些定理：

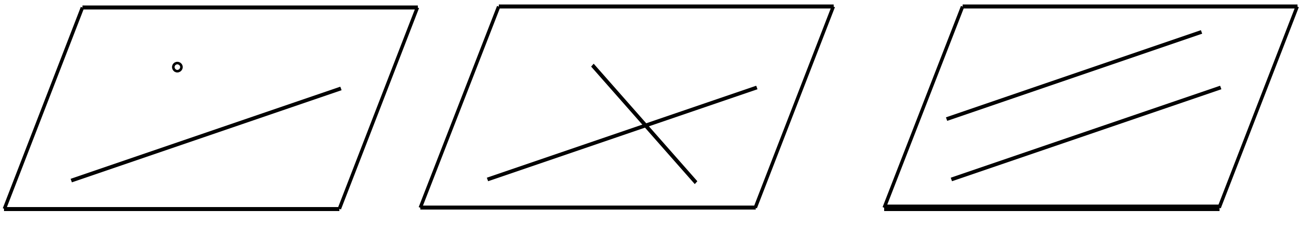
定理一：$\boxed{\text{經過一直線與線外一點，有且只有一個平面。}}$

[證明]：

取直線上的兩點，由公理四只有一個平面 E 通過這三點，再根據公理二，可知此直線上所有的點都在平面 E 上，所以經過一直線與線外一點，有且只有一個平面 E。

定理二：$\boxed{\text{經過兩相交直線，有且只有一個平面。}}$

(**練習**1) 證明定理二

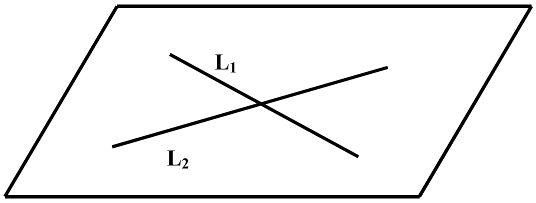


(**練習**2) 若平面 E 與兩平面 E_1、E_2 分別交直線 L_1,L_2，則 $L_1//L_2$。

(乙)空間中直線、平面間的關係

(1)空間中兩直線的關係：

(a)交於一點。



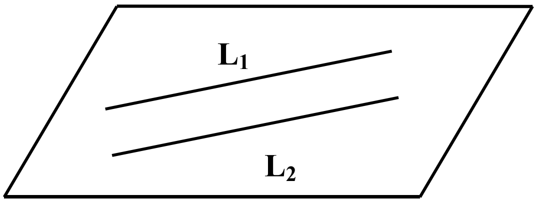
空間中兩直線 L_1、L_2 落在同一平面上，
且兩直線有一個交點。
此時我們如同平面上一樣，可以討論它們的交角
若直線 L_1 與 L_2 交角=90°，則稱直線 L_1 垂直 L_2。

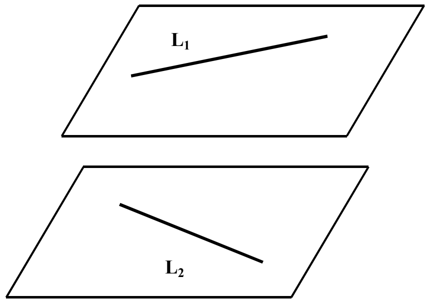
(b)不相交：

空間中兩直線 L_1 與 L_2 沒有交點，有以下兩種情形

平行線：L_1 與 L_2 共平面而無交點，則兩直線 L_1、L_2 為兩**平行線**。

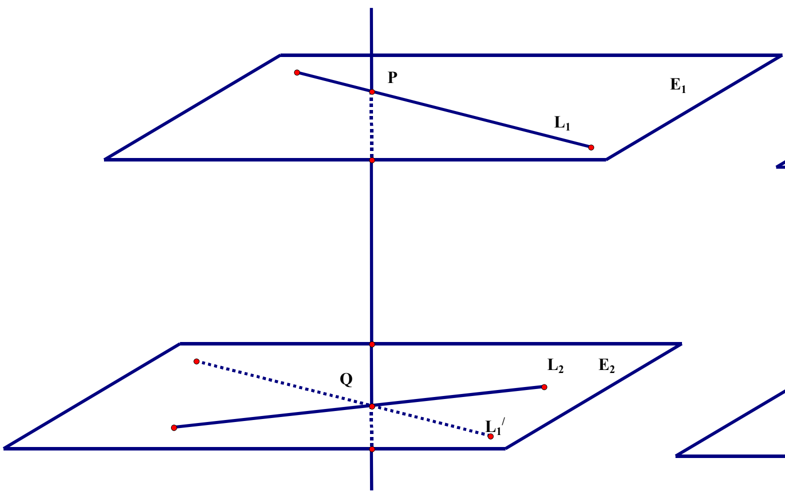
歪斜線：L_1 與 L_2 不共平面而無交點，則稱直線 L_1、L_2 為兩**歪斜線**。

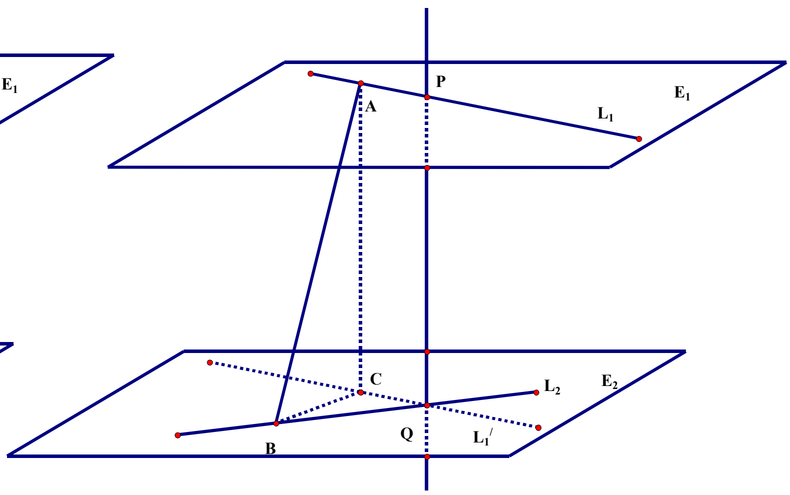




(c)歪斜線的公垂線：

互為歪斜線的兩直線 L_1 與 L_2 有一公垂線，而且只有一條，其公垂線段長，是兩歪斜線上各取一點之連線段長的最小值。





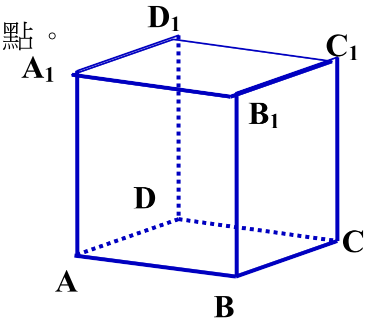
[討論]：如何做出兩歪斜線的公垂線呢？

結論：

空間中兩相異直線的關係分成兩類：

(1)共平面：交於一點、互相平行　(2)不共平面：不相交又不平行(歪斜)。

(練習3) 如圖，請說明長方體兩對角線 A_1C 與 BD_1 交於一點。

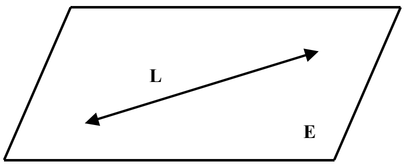


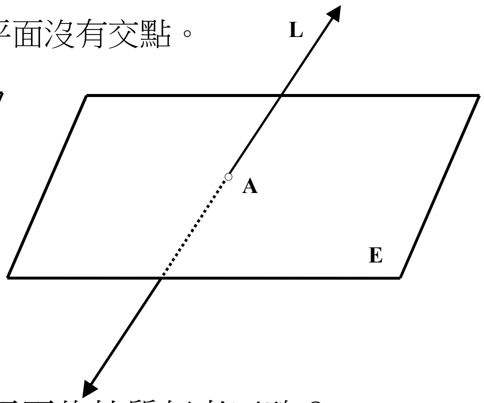
(2)平面與直線的關係：

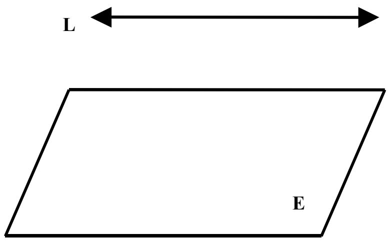
(a)直線落在平面上：直線上的每一點都落在平面上。

(b)直線與平面交於一點。

(c)直線平行平面：直線與平面沒有交點。







(練習4) 下列有關空間與平面的性質何者正確？

(A)空間中不相交的直線必平行。

(B)平面上不相交的直線必平行。

(C)空間中任取三個點，通過這三點的平面只有一個。

(D)空間中兩個相異平面可能只交於一點。

(E)空間中，只有一個平面通過兩平行直線。

Ans：(B)(E)

(練習5) 下列有關空間與平面的性質何者正確？

(A)空間中，兩相異平面的交點一定會形成一直線，。

(B)空間中，兩歪斜線一定不共平面。

(C)空間中，通過一直線與此線外一點的平面只有一個。

(D)空間中，給定一直線及其上一點 P，恰有一平面 E 通過 P 點。

(E)空間中，直線與平面一定有交點。

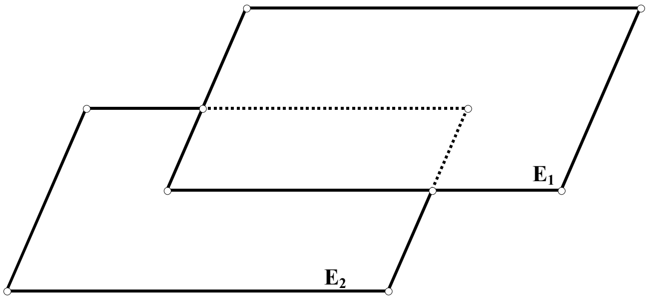
Ans：(A)(B)(C)(D)

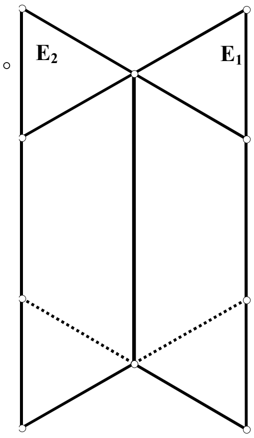
(3)空間中兩平面的關係：

(a)空間中兩平面無交點，稱為**兩平面平行**。

(b)兩平面交於一直線：

空間中兩平面 E_1、E_2 的公共點構成一直線，稱為平面 E_1、E_2 的**交線**。



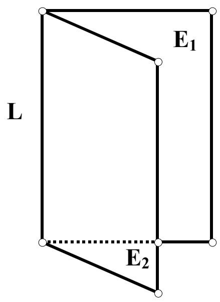


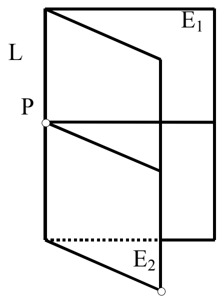
(4)兩平面的交角：

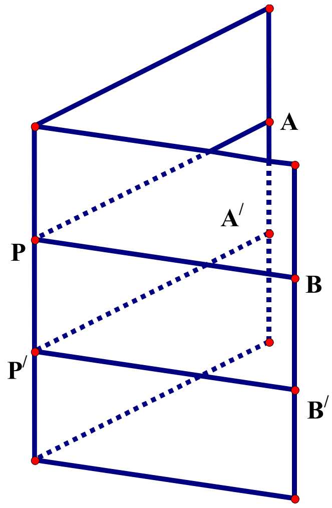
(a)二面角：

一個平面內的一條直線，把這個平面分成兩個部分，其中的每個部分都稱為**半平面**。從一條直線出發的兩個半平面組成的圖形稱為**二面角**。這條直線稱為**二面角的稜**，這兩個半平面稱為**二面角的面**。

下右圖是一個以 L 為稜，半平面 E_1、E_2 為面的二面角







(b)二面角的大小：

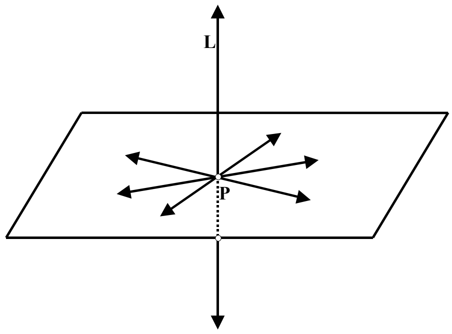
在二面角的稜 L 上取一點 P，過 P 點分別在兩半平面 E_1 與 E_2 上作垂直 L 的兩條射線，這兩條射線所成的角就稱為二面角在 **P 點的平面角**。如左上圖，考慮二面角稜上的兩點 P、P'，分別作出平面角 $\angle APB$、$\angle A'P'B'$，因為 $\overline{PA}$ 和 $\overline{P'A'}$ 同向平行，且 $\overline{PB}$ 和 $\overline{P'B'}$ 同向平行，所以 $\angle APB=\angle A'P'B'$。因此二面角在稜上任意點的平面角都相等。於是我們將稜上任意點平面角的大小定義成**二面角的大小**。

(c)兩平面的交角：

相交兩平面會形成四個二面角，這四個二面角都是兩平面的交角，它們相等或互補。若兩平面 E、F 的二面角的大小為 90 度時，則我們稱**兩平面垂直**，以符號 $E\perp F$ 表示。

(丙)直線垂直平面、平面的垂線、直線與平面的夾角

在直線與直線的關係中，當兩直線交於一點且夾角為 90°時，我們稱兩直線垂直，當直線與平面交於一點時，是否也可以定義直線與平面的垂直概念呢？



(1)一點對於一直線的垂線：

(a)給定一直線 L 及線外一點 P，恰有一直線通過 P 且垂直於直線 L。

(b)給定一直線 L 及線上一點 P，有無限多直線通過 P 且垂直於直線 L，而且這些直線構成一平面。

[討論]：

(1)可否用前面提出的公理與定理來說明(a)(b)這兩個性質。

(2)直線垂直平面：

(a)定義：

若直線 L 與平面 E 相交於 P 點，且平面 E 上所有通過 P 點的每一直線都和 L 垂直，則稱直線 L 垂直於平面 E，以 L⊥E 表示。

(b)投影點：

過任意 A 點對平面 E 只能作一條垂直線，如果垂直線與平面 E 交於點 B，我們稱 B 點為 A 點對平面 E 的**投影點**。

[註解]：

若根據以上的定義去判別直線與平面是否垂直，那麼就會沒完沒了，因為必須去檢查平面 E 上每一條過 P 點的直線是否垂直直線 L，可否找一個比較適合的判別性質呢？

(3)直線垂直平面判別定理：

若平面 E 上存在兩條通過 P 點的相異直線 L_1、L_2 分別與 L 垂直，則 L 垂直於平面 E。

[證明]：

設 M 是平面 E 上過點 P 且異於 L_1、L_2 的任一直線，

在 L 上取兩點 A、B 使得 P 點為$\overline{AB}$的中點，

又在直線 L_1、L_2、M 上分別取 Q_1、Q_2、Q

使得這三點共線。

由垂直平分的性質得到

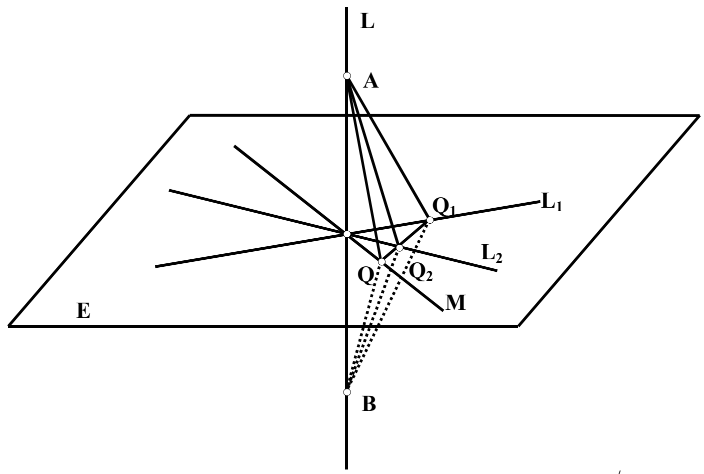
$\overline{Q_1A}=\overline{Q_1B}$，$\overline{Q_2A}=\overline{Q_2B}$

$\Rightarrow\Delta AQ_1Q_2\cong\Delta BQ_1Q_2$

$\Rightarrow\angle AQ_1Q_2=\angle BQ_1Q_2$

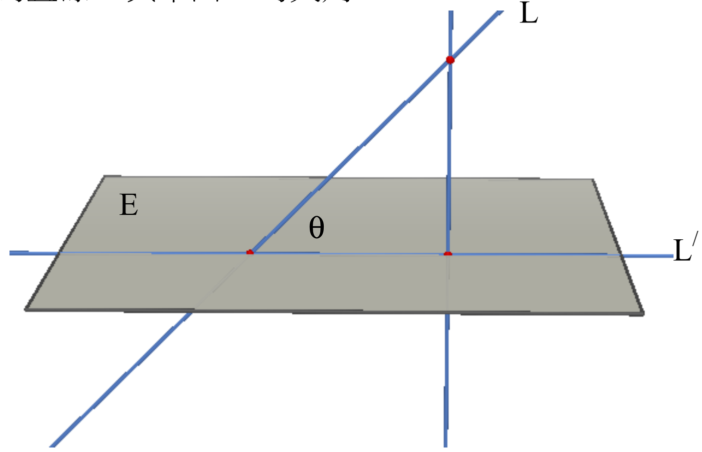
$\Rightarrow\Delta AQ_1Q\cong\Delta BQ_1Q\Rightarrow\overline{AQ}=\overline{BQ}$

$\Rightarrow$M 是$\overline{AB}$的中垂線$\Rightarrow M\perp L$。



(4)直線與平面的夾角

若直線 L 與平面 E 不垂直且交於一點，且直線 L 在平面 E 上的投影點形成一直線 L'，我們定義直線 L 與 L'的銳夾角θ，稱為直線 L 與平面 E 的夾角。



[例題1] 邊長為 2 的正方形 ABCD 中，E 是$\overline{AB}$的中點，現在將ΔADE、ΔBCE 分別沿$\overline{CE}$、$\overline{DE}$折起，使$\overline{AE}$和$\overline{BE}$重合，組成一個四面體，設 A、B 摺疊後的點為 P

(1)說明直線 PE 為平面 PCD 的垂線。 (2)請求出此四面體的體積。

Ans；(2)$\frac{\sqrt{3}}{3}$

(練習6) 利用前面的公理與定理說明「過任意 A 點對平面 E 只能作一條垂直線」。

(練習7) (是非題)

(1)設一直線 L 交一平面 E 於 A，若在 E 上過 A 有一直線 L'與 L 垂直，則 L 垂直於平面 E。

(2)已知相異二平面 F、M 交於一直線，若 L 垂直一平面 E，則 F、M 均垂直於 E。

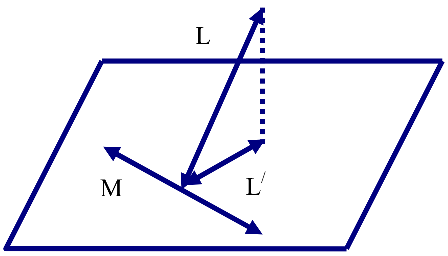
(3)兩歪斜線在一平面 E 之正射影有可能為二平行線。
(4)相異三平面 E_1、E_2、E_3 兩兩相交於不同之三線必平行。
(5)平行於同一平面的二直線必共共面。
(6)平行於同一平面的二直線必共平行。
Ans：(1)× (2)O (3) O(4) × (5) × (6) ×

(練習8) 下列有關空間中的敘述何者錯誤？
(A)空間中任意兩點恰可決定一直線　(B)空間中相異三點恰可決定一平面　(C)空間中一直線及一點恰可決定一平面　(D)空間中不平行的兩直線，必交於一點　(E)空間中到ΔABC 三頂點等距離的點只有一點　(F)空間中，一線段恰有一條中垂線。Ans：全

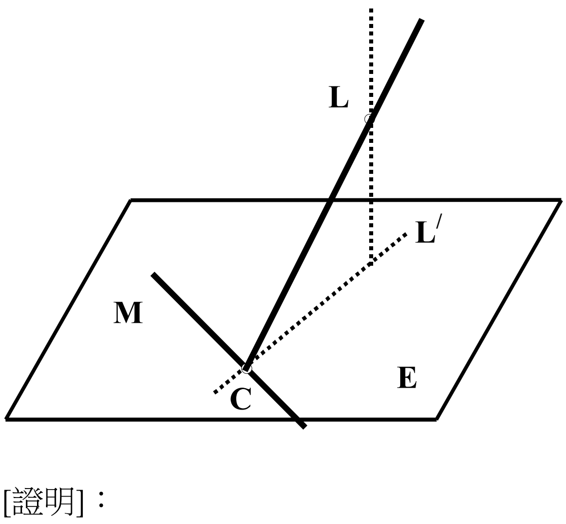
(丁)三垂線定理

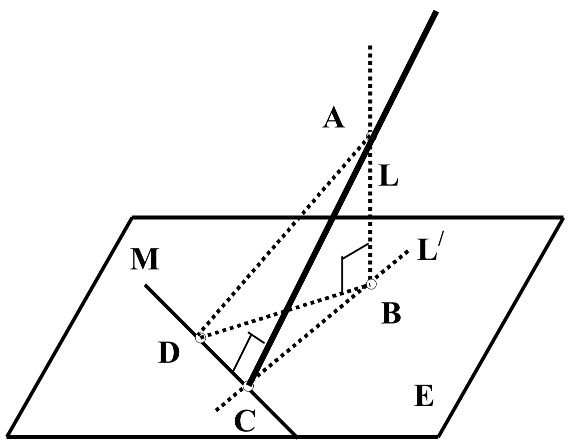
如圖，直線 M 在平面 E 上，直線 L 不在 E 上，有時候我們不是很容易能判別 L 與 M 是否垂直？如果我們從平面 E 上方俯視下去，看到的直線 $L^{/}$與 M 垂直，那麼直觀上來說，L 會與 M 垂直，而這種視覺的直觀看法是否正確呢？

換句話說，將 L 上的每一點正投影到平面 E 上，形成直線 $L^{/}$，若同時落在平面 E 上的 $L^{/}$與 M 垂直時，那麼可否根據 $L^{/}$垂直於 M 的前提，來得到 L 與 M 垂直的結論呢？
我們介紹「三垂線定理」來回答這個問題。



三垂線定理：
在空間中，若直線 M 在平面 E 上，直線 L 與平面 E 斜交(不垂直)，且 L 與 M 交於 C 點，令 $L^{/}$為 L 在平面 E 上的正投影直線，則 $L^{/}\perp M \Leftrightarrow L\perp M$。





[證明]：
(1)如下右圖，在 L 上取一點 A，且 A 點不在 E 上，令 B 為 A 點在 E 上的投影點，D 為 M 上異於 C 的點，連接$\overline{AB}$、$\overline{AD}$、$\overline{BD}$、$\overline{BC}$

(2) $L'\perp M$ $\Leftrightarrow \angle BCD=90°$

$\Leftrightarrow$ $\overline{BD}^2=\overline{CD}^2+\overline{BC}^2$ $\Leftrightarrow \overline{AB}^2+\overline{BD}^2=\overline{CD}^2+\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

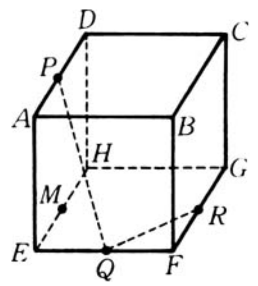
(因為直線 AB 為 E 的垂線，所以$\angle ABD=90°$，$\angle ABC=90°$；

$\angle ABD=90° \Leftrightarrow$ $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2$；$\angle ABC=90° \Leftrightarrow$ $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$)

$\Leftrightarrow$ $\overline{AD}^2=\overline{CD}^2+\overline{AC}^2$ $\Leftrightarrow \angle ACD=90°$ $\Leftrightarrow L\perp M$

上面定理的證明中，因為直線 AB 垂直平面 E，而且有「L'垂直 M」 與「L 垂直 M」這兩個可以互推的條件，因此我們稱這個定理為「**三垂線定理**」。

[例題2] 設 ABCDEFGH 為一正立方體，P，Q，R 分別為$\overline{AD}$，$\overline{EF}$，$\overline{FG}$的中點，試證：$\overline{PQ}\perp\overline{QR}$。



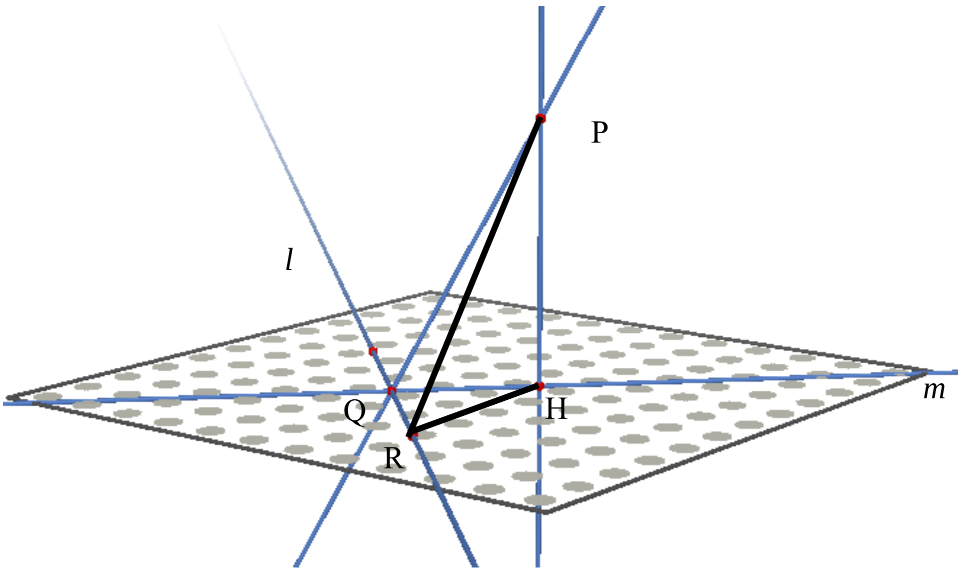
[例題3] 如何找空間中 P 點對平面 E 的投影點呢？

[作法]：

(1)在平面 E 上先找一直線 l，過 P 點對 l 做垂線，垂足為 Q 點，

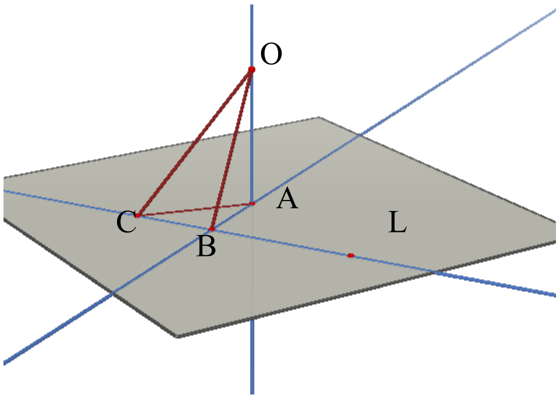
(2)在平面 E 上過 Q 點對 l 作垂線 m。

(3)過 P 對直線 m 作垂線，垂足 H 即為所求。

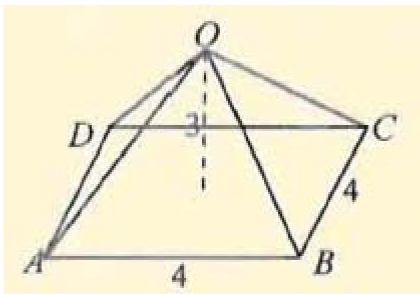


[證明]：

[例題4] 設 O 點在平面 E 上的投影點為 A，A 在平面 E 上一直線 L 之投影點為 B，C 為 L 上一點(1)若$\overline{BC}$=12，$\overline{OC}$=13，$\overline{AB}$=4，求$\overline{OA}$=？
(2)ΔABC 與ΔOBC 所在平面的二面角為θ，求 cosθ=？
Ans：(1)3 (2)$\frac{4}{5}$



[例題5] 如圖，有一直四角錐 O−ABCD，其高為 3，底面 ABCD 為邊長 4 的正方形，四個側面均為全等正三角形，則
(1)側面 ABO 與底面 ABCD 的夾角α，求 tanα
(2)兩相鄰側面的夾角β，試求 cosβ=？
Ans：(1)$\frac{3}{2}$ (2)$\frac{-4}{13}$



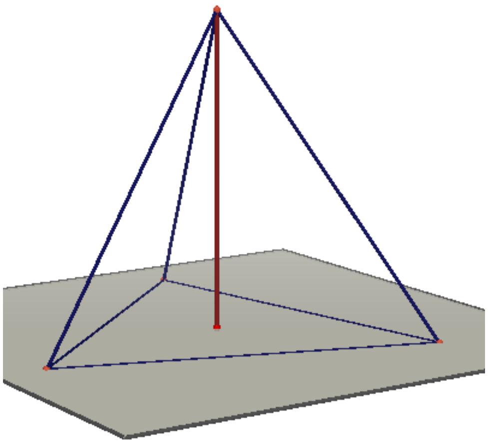
[例題6] 設一正四面體各稜長均為 a

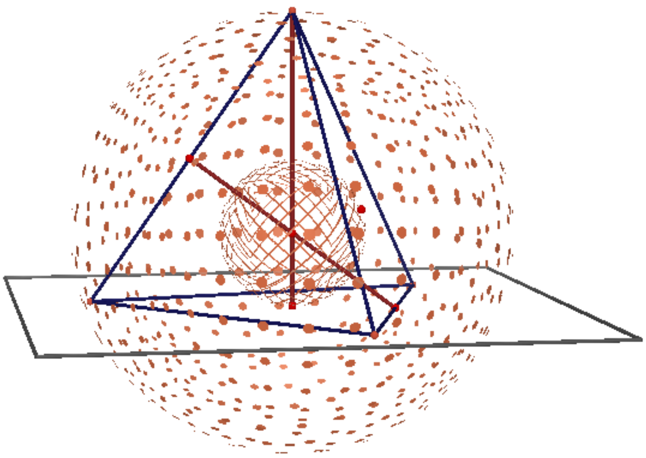
(1)求頂點 A 到底面 BCD 的距離。(2)求此四面體的體積。

(3)求直線 AB、CD 的距離為多少？(4)內切球的半徑為多少？

(5)外接球的半徑為多少？

Ans：(1)$\frac{\sqrt{6}}{3}a$ (2)$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ (3)$\frac{\sqrt{2}}{2}a$ (4)$\frac{\sqrt{6}}{12}a$ (5)$\frac{\sqrt{6}}{4}a$

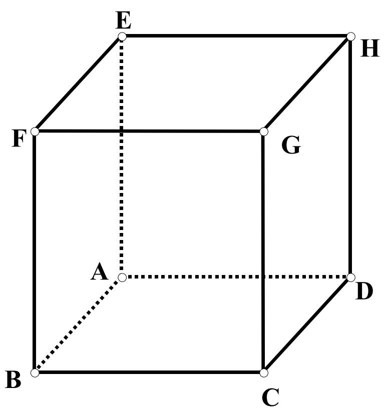




(練習9) 長方體 ABCD−EFGH 中，$\overline{AB}$=3，$\overline{AD}$=4，$\overline{AE}$=5

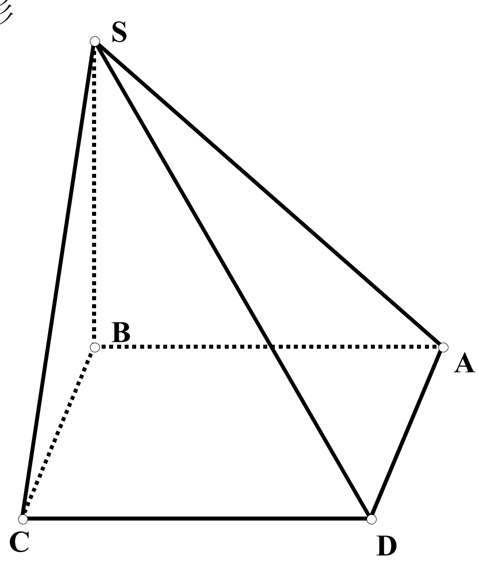
(1)求四面體 E−ABCD 之體積。

(2)ΔABD 與ΔBDE 所在平面之二面角之角度為θ，tanθ=？Ans：(1)10 (2)$\frac{25}{12}$



(練習10) 有一四角錐 O−ABCD，底面 ABCD 為一矩形 $\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=6$，側面為四個全等的等腰三角形 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=13$，求
(1)此角錐的高之長。 (2)ΔOAB 之面積。
Ans：(1)12 (2)$4\sqrt{153}$

(練習11) 如圖，四角錐 S−ABCD 的底面是邊長為 1 的正方形，側稜$\overline{SB}$垂直於底面，並且$\overline{SB}=\sqrt{3}$，用α表示∠ASD，求 sinα的值。Ans：$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

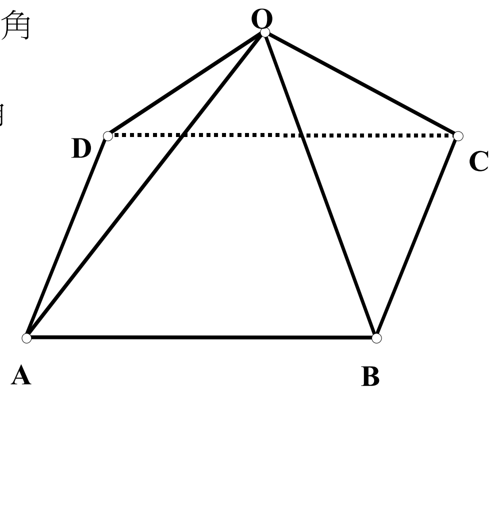


(練習12) 空間中，A 點在平面 E 的垂足為 H，$\overline{AH}=3$，L 為平面 E 上一直線，由 H 作 L 的垂線交 L 於 B 點，$\overline{HB}=2$，C 是 L 上一點，且$\overline{AC}=7$，求$\overline{BC}$=？
Ans：$\overline{BC}=6$

(練習13) 設四面體 ABCD 中，$\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=5$，$\overline{AB}=4$，$\overline{CD}=6$，令平面 ACD 與平面 BCD 所成的兩面角為θ，(θ為銳角)，則 cosθ=？Ans：$\dfrac{1}{2}$

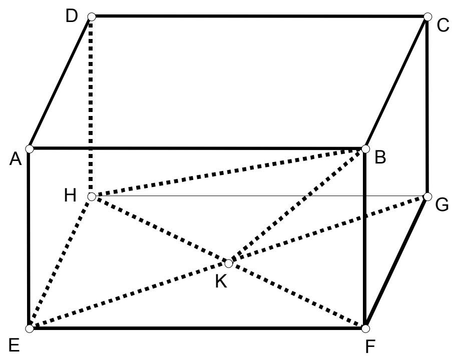
(練習14) 已知直線 AB 垂直平面 E 於 B，直線 L 在 E 上，直線 AC 垂直 L 於點 C，設 D 在 L 上，若$\overline{BC}=24$，$\overline{CD}=24\sqrt{3}$ ，則$\overline{BD}$=？Ans：48

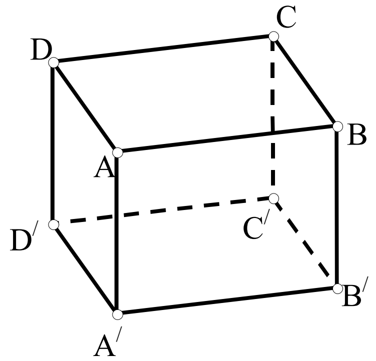
(練習15) 如圖，底面為正方形，側面均為正三角形之金字塔之各稜長均為 a，
(1)設兩側面ΔOAD 與ΔOCD 所在平面的二面角為α，求 cosα。
(2)設ΔABO 與底面 ABCD 所在平面的二面角為β，求 cosβ。Ans：(1)$\dfrac{1}{3}$ (2)$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



綜合練習

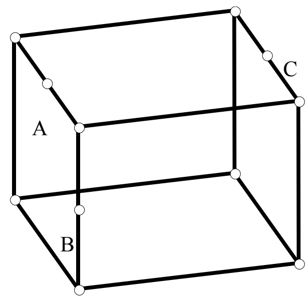
(1) 如下右圖，正立方體 ABCD−EFGH 中，$\overline{HF}$ 與 $\overline{EG}$ 交於 K 點，則下列敘述何者正確？(A)EB⊥BG (B)HF⊥EG (C)KB⊥EG (D)KB⊥HF (E)KB⊥BC。





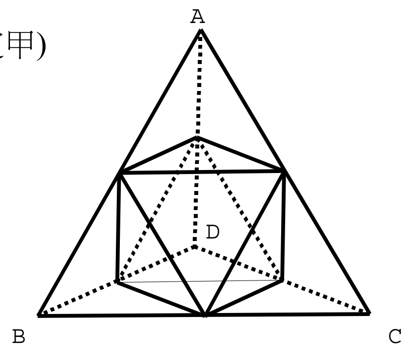
(2) 如右上圖，ABCD−A′B′C′D′為立方體的八個頂點，試問下列那些線段會與線段 $\overline{A'B}$共平面？(A)$\overline{BC'}$ (B)$\overline{AC}$ (C)$\overline{DB'}$ (D)$\overline{DD'}$ (E)$\overline{CD'}$　(89 大學社)

(3) 右圖為一正立方體，A,B,C 分別為所在的邊之中點，通過 A,B,C 三點的平面與此立方體表面相截，問下列何者為其截痕的形狀？
(A)直角三角形 (B)非直角三角形 (C)正方形
(D)非正方形的長方形 (E)六邊形。(88 學科)

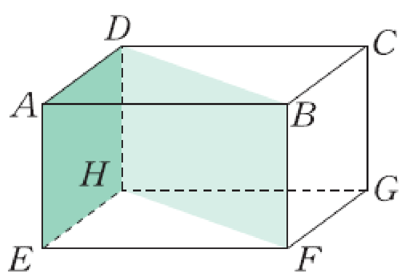


(4) 一正立方體的八個頂點中有四個頂點，各頂點彼此之間的距離都是 1，則此正立方體的體積為(A)$2\sqrt{2}$ (B)$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C)1 (D)2。　(91 指定甲)

(5) 將一個正四面體的四個面上的各邊中點用線段連接，可得四個小正四面體及一個正八面體，如下圖所示。如果原四面體 ABCD 的體積為 12，那麼此正八面體的體積________。　(90 學科)



(6) 右圖為長方體 ABCD−EFGH，其中$\overline{AB}$=12，$\overline{BC}$=9，
$\overline{CG}$=8，試求下列小題：
(a)求$\overline{BH}$之長。
(b)設半平面 ADHE 與半平面 BDHF 所成的二面角的度量為θ，試求 tanθ之值。

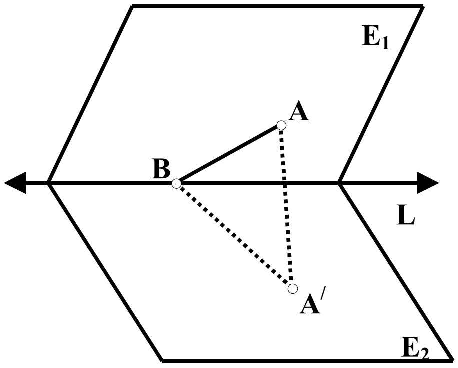


(7) 下列那些敘述是正確的？
(A)在平面上，若兩相異直線不相交，則它們必平行。

(B)在空間中，若兩相異直線不相交，則它們必平行。
(C)在平面上，任意兩相異直線一定有公垂線(仍在該平面上)
(D)在空間中，任意兩相異直線一定有公垂線。
(E)在空間中，相交的兩相異平面一定有公垂面。
(公垂面是指與該兩平面都垂直的平面)

(8) 設 L 為二平面 E_1 及 E_2 的交線，而 E_1、E_2 所成的二面角之一為 60°，若 A 點在 E_1 上但不在 L 上，B 點在 L 上，$\overleftrightarrow{AB}$ 與 L 所夾銳角為 30°，$\overline{AB}=2$，

試求$\overline{AB}$在 E_2 上的投影$\overline{A'B}$的長度。

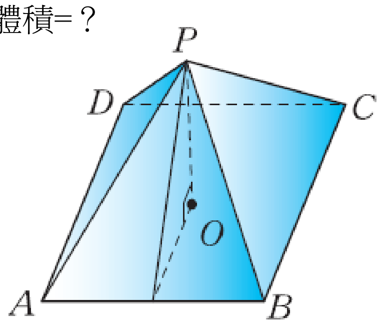


(9) 一四面體 A−BCD 中，令$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=4$，$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DB}=2$，若θ為平面 ABC 和平面 BCD 所夾成之二面角的度量，則(a)cosθ＝？ (b)四面體的體積=？

(10) 右圖是一個四角錐體，其中底面為正方形 ABCD，且邊長為 6，四個側面均為等腰三角形，

且$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PD}=5$
(a)設側面 PAB 與底面 ABCD 所成的二面角為θ，求 cosθ之值。

(b)求四角錐體的高$\overline{PO}$之長。

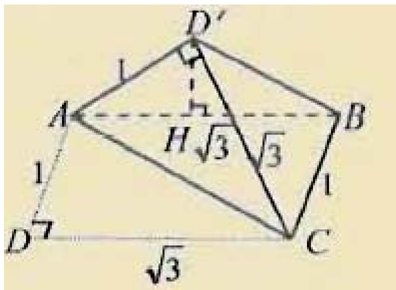


(11) 將一張正方形的紙 ABCD 沿著對角線 BD 摺起，使得∠ABC=60°，試求二平面 ABD 與 BCD 的夾角。

(12) 有一矩形紙版 ABCD，沿$\overline{AC}$上折至 ACD′位置，

由 D′作 ABC 平面之垂線$\overline{D'H}$，其垂足點 H 恰好在

$\overline{AB}$邊上，已知$\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{BC}=1$，求$\overline{BD'}$=？



(13) 有一四面體 OABC，它的一個底面 ABC 是邊長為 4 的正三角形，且知$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=a$；如果直線 OA 與直線 BC 間的公垂線段長(亦即此兩直線間的距離)是$\sqrt{3}$，則 a＝？

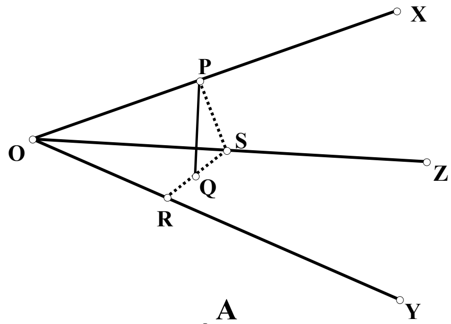
(14) 將長為 4，寬為 3 的矩形 ABCD 沿對角線 AC 折成直二面角，求摺疊後 B、D 兩點間的距離。

(15) 設在四面體 ABCD 中，$\overline{AB}=3$，ΔABC 與ΔABD 的面積分別為 15、12，且它們所在平面的二面角為 30°，求四面體 ABCD 的體積。

(16) 有一個三腳架，三腳等長 PA=PB=PC，P 在ΔABC 所在的平面上的正射影為 O，

(a)證明：O 為ΔABC 的外心。(b)若$\overline{AC}$=7,$\overline{BC}$=5,$\overline{AB}$=8，$\overline{PA}$=10，求$\overline{PO}$=？

進階問題

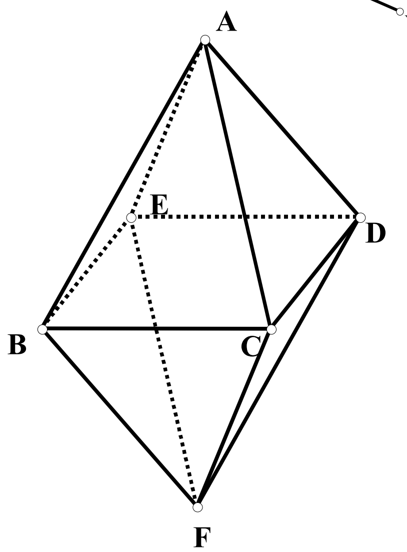


(17) $\overline{OX}$、$\overline{OY}$、$\overline{OZ}$為空間中三線段兩兩夾角為 30°，

P 點在$\overline{OX}$上，且$\overline{OP}$=2，P 在平面 OYZ 上之

正射影為 Q，過 Q 且垂直$\overline{OY}$之直線交$\overline{OY}$於 R，

交$\overline{OZ}$於 S，求$\overline{QR}$+$\overline{PS}$=？



(18) A−BCDE 與 F−BCDE 為二正四角錐，即 BCDE 為正方形且二正四角錐之側面均為正三角形，若ΔABC 與ΔACD 所在二面角為α，ΔABC 與ΔBCF 所在之二面角為β，試證明：α=β。

(19) 設平面 ABC 與平面 E 之交線為$\overleftrightarrow{BC}$，交角為α，且ΔABC 中，∠A=90°，又$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{AC}$與平面 E 之夾角分別為β、γ，求證：$\sin^2\alpha=\sin^2\beta+\sin^2\gamma$。
(直線與平面的夾角代表直線在該平面上的投影直線與直線的交角)

(20) 設$\overleftrightarrow{PQ}$垂直平面 E 於 Q 點，L 是平面 E 上不過 Q 點的一直線，試於 L 上求取

一點 S，使$\overline{PS}$+$\overline{QS}$為最小。

(21) 二面角α−l−β的平面角為 120°，在半平面α內，$\overline{AB}\perp l$，垂足為 B，$\overline{AB}$=2，在半

平面β內，$\overline{CD}\perp l$，垂足為 D，$\overline{CD}$=3，若$\overline{BD}$=1，M 為稜 l 上的動點，則$\overline{AM}$+$\overline{CM}$的最小值=？

綜合練習解答

(1) (B)(C)
(2) (A)(E)
(3) (D)
(4) (B)
(5) 6
(6) (a)17 (b)$\frac{4}{3}$
(7) (A)(D)(E)
(8) $\frac{\sqrt{13}}{2}$
(9) (a)$\frac{\sqrt{5}}{15}$ (b)$\frac{2\sqrt{11}}{3}$
(10) (a) $\frac{3}{4}$ (b)$\sqrt{7}$
(11) 90°
(12) $\sqrt{2}$
(13) $\frac{8}{3}$

(提示：取$\overline{BC}$中點 D，作$\overline{DE}\perp\overline{OA}$，$\because\overline{OE}\perp\overline{DE}$，$\overline{OD}\perp\overline{BC}$，根據三垂線定理$\Rightarrow\overline{DE}\perp\overline{BC}$)

(14) $\frac{\sqrt{337}}{5}$
(15) 20
(16) (a)欲證明 OA=OB=OC (b)$\frac{\sqrt{753}}{3}$
(17) $2\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{2}-3$
(18) 略
(19) [提示：如圖，設$\overline{AA'}=h$，$\overline{AB}=h\csc\beta$，$\overline{AC}=h\csc\gamma$，$\overline{AD}=h\csc\alpha$因為 $AB\cdot AC=BC\cdot AD\Rightarrow AD=\frac{AB\cdot AC}{\sqrt{AB^2+AC^2}}\Rightarrow\sin^2\alpha=\sin^2\beta+\sin^2\gamma$。]
(20) 過 Q 點作 L 之垂線，垂足 S 即為所求。
(21) $\sqrt{26}$ [沿稜 l 將半平面β翻折，使之與半平面α在同一平面上，連接 AC 交 l 於 M，則 AM+CM 會最小]