§3–2 和角公式

(甲)和角公式

(1)公式一：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

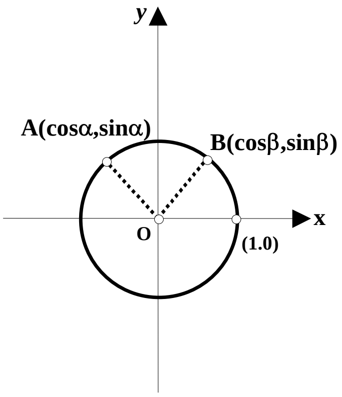
證明：先做一單位圓，如右圖其中A(cosα，sinα)、B(cosβ，sinβ)，∠AOB=α−β，

因為$\overline{AB}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)$……①

利用餘弦定理：$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos(\alpha-\beta)$

所以$\overline{AB}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$…………………………②

由① ②可得$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$



討論：

(a)如果 A,O,B 共線上述的結果會成立嗎？

(b)α−β >π 時，上述的結果會成立嗎？

(2)公式二：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

證明：

(3)公式三：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

證明：

(4)公式四：$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

證明：

(5)公式五：$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

證明：

(6)公式六：$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

證明：

[注意]：
和角公式的精神：
已知兩個角度的三角函數，即可得兩個角度的和或差的三角函數。

[例題1] 試求$\cos 15^{\circ}$，$\sin 105^{\circ}$，$\tan 75^{\circ}$之值。

Ans：$\cos 15^{\circ}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin 105^{\circ}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\tan 75^{\circ}=2+\sqrt{3}$

[例題2] 設$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$，且$\cos\alpha=\dfrac{-3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{-12}{13}$，試求

(1)$\sin(\alpha+\beta)=$______；(2)$\cos(\alpha-\beta)=$________。

(練習1) 計算下列各小題：

(1)$\sin 195^{\circ}$ (2)$\cos 75^{\circ}$ (3)$\tan 15^{\circ}$ Ans：(1)$\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (2)$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (3)$2-\sqrt{3}$

(練習2) 試化簡下列各小題：

(1) $\sin\dfrac{7\pi}{9}\cos\dfrac{23\pi}{36}+\cos\dfrac{7\pi}{9}\sin\dfrac{23\pi}{36}$

(2)$\sin 68^{\circ}\cos 23^{\circ}-\sin 23^{\circ}\cos 68^{\circ}$

(3)$\cos 44^{\circ}\sin 164^{\circ}-\sin 224^{\circ}\cos 344^{\circ}=$？

(4) 求$\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{6})\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{3})+\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{3})=$？

Ans：(1)$-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (3)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (4)0

(練習3) 設$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$，且 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{-12}{13}$，則
(1)$\sin(\alpha-\beta)$=______。(2)$\cos(\alpha-\beta)$=________。(3)$\alpha-\beta$爲第_____象限角。
Ans：(1)$\dfrac{-56}{65}$ (2)$\dfrac{33}{65}$ (3)四

[例題3] (1)$\dfrac{\tan 83^\circ-\tan 38^\circ}{1+\tan 83^\circ\tan 38^\circ}$＝_________。Ans：1
(2) 設$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，則$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$＝______。Ans：2

[例題4] 試證：$\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$，$\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

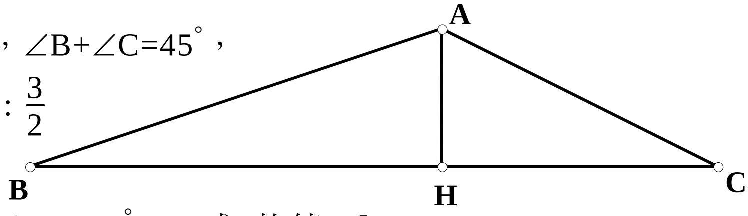
[例題5] 若$\tan\alpha$，$\tan\beta$爲$x^2+9x-4=0$ 之二根，
試求
(1)$\tan(\alpha+\beta)$=？
(2)$\sin^2(\alpha+\beta)+9\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-4\cos^2(\alpha+\beta)$=____。
Ans：(1)$\dfrac{-9}{5}$ (2)-4

(練習4) 如右圖，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$且$\overline{BC}=5\overline{AH}$，$\angle B+\angle C=45^{\circ}$，

若$\overline{BH}>\overline{HC}$，則$\dfrac{BH}{HC}$=？　　Ans：$\dfrac{3}{2}$

[提示：令BH=x，HC=1，

則AH=$\dfrac{1}{5}(x+1)$，再利用tan(B+C)=tan45°=1，求x的值。]



(練習5) 設 $\tan\alpha=1$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，試求 $\tan\beta$之值。　Ans：$2-\sqrt{3}$

(練習6) 設$\tan\alpha$，$\tan\beta$爲 $2x^2-4x+1=0$ 之二根，試求

(1)$\cos^2(\alpha+\beta)$=____。

(2)$2\sin^2(\alpha+\beta)-4\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+4\cos^2(\alpha+\beta)$=_____。

Ans：(1)$\dfrac{1}{17}$(2)$\dfrac{20}{17}$

(練習7) 試求下列各值：

(1)$\tan12^{\circ}+\tan48^{\circ}+\sqrt{3}\tan12^{\circ}\tan48^{\circ}$=_____。[提示：考慮tan(12°+48°)]

(2)$\dfrac{\tan227^{\circ}-\tan287^{\circ}}{1-\tan133^{\circ}\tan107^{\circ}}$=______。

(3)$\sqrt{3}\cdot\cot20^{\circ}\cot40^{\circ}-\cot20^{\circ}-\cot40^{\circ}$=_____。[提示：考慮cot(40°+20°)]

Ans：(1)$\sqrt{3}$　(2)$-\sqrt{3}$　(3)　$\sqrt{3}$

(練習8) 設 A、B、C 爲ΔABC 的內角，

請證明：$\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}\cdot\cot\dfrac{B}{2}\cdot\cot\dfrac{C}{2}$。

(乙)和角公式的應用

善用和角公式的精神：

已知兩個角度的三角函數，即可得兩個角度的和或差的三角函數。

[例題6] ΔABC 中，已知 $\cos B=\dfrac{4}{5}$，$\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\overline{BC}=22$，則

(1)sinA=____，(2)ΔABC 之外接圓半徑爲_______。

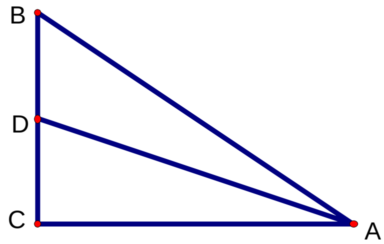
Ans：(1)$\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$　(2)$5\sqrt{5}$

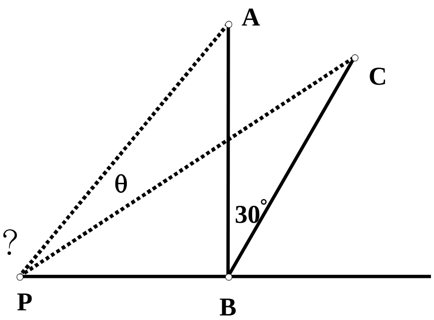
[例題7] 右圖是一個直角三角形 ABC，其中∠C=90°，∠BAD=θ，

若$\overline{CD}$=$\overline{BD}$=1，$\overline{AC}$=3，則 tanθ=？

(A)$\frac{3}{11}$ (B)$\frac{1}{7}$ (C)$\frac{2}{9}$ (D)$\frac{1}{9}$ (E)$\frac{1}{3}$。(92 北區指定考科模擬考)

Ans：(A)





(練習9) 一鐵塔AB垂直於地面，由於地震的關係，
向東傾斜 30°，則觀測者在西方對塔頂之仰角由
∠BPA變成∠BPC，即角度減少θ，
若已知PB=AB=60 公尺，求(1)∠BPC=？ (2)tanθ=？

Ans：(1)$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2)$2-\sqrt{3}$

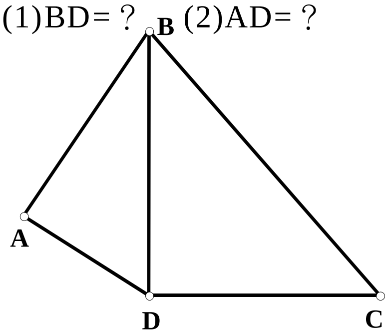
(練習10) 設∠A,∠B,∠C 爲ΔABC 之三內角，其對邊分別爲 *a*,*b*,*c*，若 sinA=$\frac{5}{13}$ ，

cosB=$\frac{-4}{5}$， 則 *a*：*b*：*c*=_______。 Ans：25：39：16

(練習11) 已知四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}$=16，$\overline{BC}$=25，$\overline{CD}$=15，∠ABC 及∠BCD 皆

爲銳角，而 sin∠ABC=$\frac{24}{25}$，sin∠BCD=$\frac{4}{5}$，求(1)$\overline{BD}$=？ (2)$\overline{AD}$=？

Ans：(1)20 (2)12



(練習12) ΔABC 爲等腰直角三角形，∠C=$\frac{\pi}{2}$，D,E 將$\overline{BC}$分成三等分，試求

tan∠DAE=______。Ans：$\frac{3}{11}$

[提示將∠DAE 分成兩個角的差，即∠DAE=∠CAE−∠CAD，已知

tan∠CAE=$\frac{2}{3}$，tan∠CAD=$\frac{1}{3}$，可得 tan∠DAE]

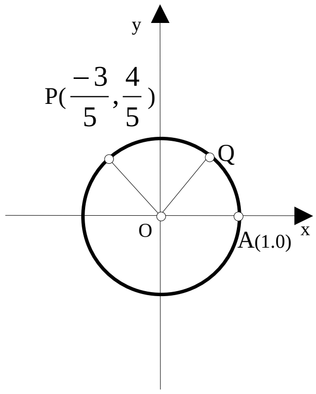
綜合練習

(1) 設 $\sec\alpha=\frac{5}{3}$，$\cot\beta=\frac{8}{15}$，$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，$\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$，求 $\sin(\alpha+\beta)=$？

(2) 化簡下列兩小題：

(a)$\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\cos(\theta-\frac{\pi}{3})-\cos(\theta+\frac{\pi}{3})\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=$？

(b)$\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}+\frac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\frac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}=$？

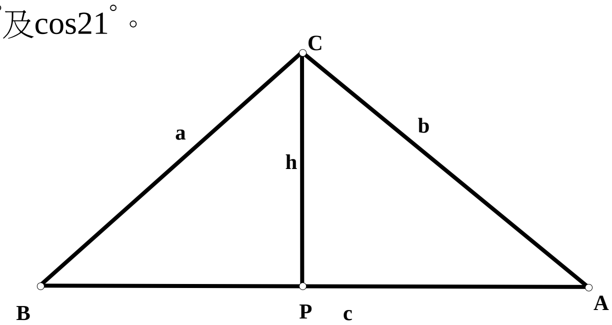


(3) 如右圖：設 A(1,0)，Q(m,n)，P($\frac{-3}{5}$,$\frac{4}{5}$)均在單位圓上

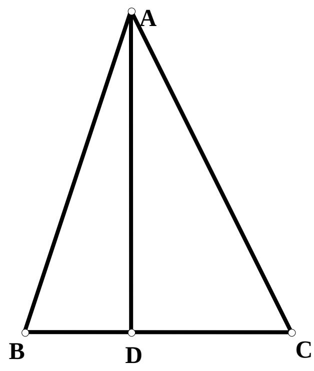
，$\angle QOP=\frac{\pi}{3}$，算出點 Q 的坐標。

(4) 設 $\sin84^\circ=a$，$\cos63^\circ=b$，則 (A) $\cos21^\circ=b\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-b^2}$
(B) $\sin21^\circ=ab-\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}$ (C) $\sin147^\circ=ab+\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}$
(D) $\cos147^\circ=b\sqrt{1-b^2}-a\sqrt{1-a^2}$。

(5) 令$\sin84^\circ=a$，$\cos63^\circ=b$，試以a,b 表示$\sin147^\circ$及$\cos21^\circ$。



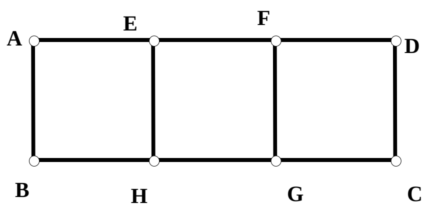
(6) 如圖，ΔABC 的對邊分別為 a,b,c，
P 為 C 點的垂足，h 為高，BP=x，AP=y，
則下列那些選項必定為真？
(A)$\cos C=\frac{h}{a}+\frac{h}{b}$ (B)$\cos C=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ (C)$\cos C=\cos(A+B)$
(D)$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ac}(E)\cos C=\frac{h^2-xy}{ab}$。(91 學科)



(7) 如右圖，在ΔABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$於 D 點，

且$\overline{AD}$：$\overline{BD}$：$\overline{CD}$=6：2：3，求∠BAC=？。

(8) 坐標平面上設 A(2，4)，B(3，1)，O(0，0)，
則 tan∠AOB＝_______。

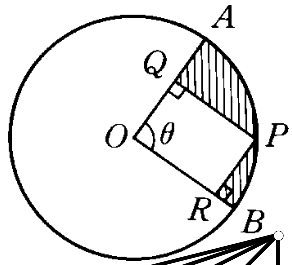


(9) 矩形ABCD，AB=1，AD=3，分割如圖，
令$\angle AFB=\theta$ ，$\angle ADB=\phi$，求$\theta+\phi$=______。

(10) 半徑 14 的圓 O 上有一扇形 AOB；如圖所示，在 $\overset{\frown}{AB}$ 弧上取一點 P，已知 P 對 $\overline{OA}$作垂直線段$\overline{PQ}$，其長爲 13；P 對$\overline{OB}$作垂直線段$\overline{PR}$，其長爲 11。

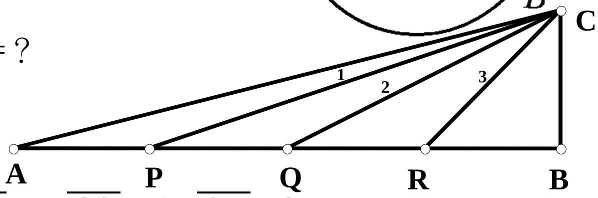
則：(a)若此扇形 AOB 的圓心角θ，則θ爲________。

(b)斜線面積爲_________。



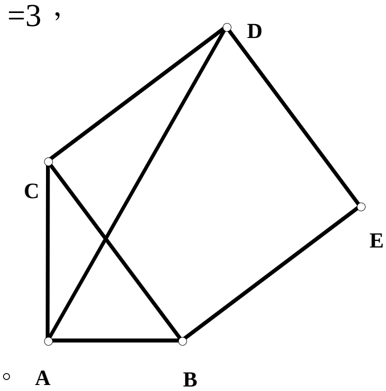
(11) 如圖，設 AP=PQ=QR=RB=BC，

求(a)tan∠1=？ (b)tan∠2=？ (c)tan∠3=？



(12) 設ΔABC 爲一直角三角形，BCDE 爲以$\overline{BC}$爲一邊向外作出的正方形，若$\overline{BC}$=5，$\overline{CA}$ =4，$\overline{AB}$ =3，

試求 cos∠ACD=_______，ΔACD 的面積=__________。



(13) 設 A,B,C 爲ΔABC 三內角的度量，

且 tanA,tanB,tanC 均有意義，

試證：tanA+tanB+tanC=tanA·tanB·tanC

(14) 設 A，B，C 均爲正銳角，tanA＝2，tanB＝4，tanC＝13，

則(a)tan(A＋B)＝__________；(b)A＋B＋C＝__________。

(15) 設α+β+γ=π，證明：cotαcotβ+cotβcotγ+ cotγcotα=1

進階問題

(16) 設 cosα+cosβ+cosγ=0，sinα+sinβ+sinγ=0，試求 cos(α−β)=______。

(17) 請證明：(a)$\sin(x+y)\sin(x-y)=\sin^2x-\sin^2y$。

(b)$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2x-\sin^2y$。

(18) α ,β ,γ ,δ 均爲正銳角，tanα=$\frac{1}{3}$，tanβ= $\frac{1}{5}$ ，tanγ =$\frac{1}{7}$ ，tanδ =$\frac{1}{8}$ ，

求α +β +γ +δ =____。

(19) 設 $\cos x+\cos y=a$，$\sin x+\sin y=b$，試以 a,b 表示 $\cos(x-y)$=？

(20) 設tanα、tanβ爲$x^2+px+q=0$ 之二根($p^2-4q\geq0$)，試以p,q表示

(a)tan(α+β)=？ (b)$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$=？

(21) 設 A,B,C 爲銳角ΔABC 三內角的度量，且 tanA,tanB,tanC 均有意義，

試求 tanA·tanB·tanC 之最小值。

(22) 設$x^2-px+q=0$的二根為$\tan\alpha$，$\tan\beta$，且$\tan\alpha+\tan\beta\neq 0$，

試求$\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=$______。

綜合練習解答

(1) $\dfrac{-13}{85}$

(2) (a)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b)0

(3) Q($\dfrac{-3+4\sqrt{3}}{10},\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$)[提示：設∠AOP=α，即得 $\cos\alpha=\dfrac{-3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，因為∠QOP=$\dfrac{\pi}{3}$ 所以∠AOQ=$\alpha-\dfrac{\pi}{3}$，$\Rightarrow m=\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{3})$，$n=\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{3})$]

(4) (A)(B)(C)

(5) $ab+\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}$，$b\cdot\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-b^2}$

(6) (E)

(7) $\dfrac{\pi}{4}$

(8) 1

(9) $\dfrac{\pi}{4}$ (Hint：利用 $\tan\theta$與 $\tan\phi$的值求 $\tan(\theta+\phi)$)

(10) (a)$\dfrac{2\pi}{3}$ (b)$\dfrac{196\pi}{3}-47\sqrt{3}$

(11) (a)$\dfrac{1}{13}$ (b)$\dfrac{1}{7}$ (c)$\dfrac{1}{3}$

(12) $\dfrac{-3}{5}$，8

(13) [提示：利用$A+B+C=180^\circ$，$A+B=180^\circ-C$ $\Rightarrow\tan(A+B)=\tan(180^\circ-C)$，再利用和角公式展開化簡即可得$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$]

(14) Ans：(a)$\dfrac{-6}{7}$(b)$\dfrac{5\pi}{4}$

(15) 證法與(13)相同

(16) $\dfrac{-1}{2}$ (Hint：將 $\cos\alpha+\cos\beta=-\cos\gamma$，$\sin\alpha+\sin\beta=-\sin\gamma$兩式平方相加)

(17) 利用和角公式直接計算，即可得證.

(18) $\dfrac{\pi}{4}$ [提示：可以先計算 $\tan(\alpha+\beta)$、$\tan(\gamma+\delta)$，再計算 $\tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$的值]

(19) $\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-2)$

(20) (a)$\dfrac{-p}{1-q}$ (b)q

(21) $3\sqrt{3}$ (Hint：利用不等式$\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$，其中 a,b,c 爲正數與例題 13)

(22) $\dfrac{1+q}{p}$