第五十四單元　二項分布

(甲)獨立事件與重複實驗

(1)獨立事件：

當兩事件 A、B 滿足 **P(A∩B)=P(A)．P(B)** 的關係時，稱 A、B 為獨立事件

若 $\begin{cases}(1)\ P(A\cap B)=P(A)P(B)\\(2)\ P(A\cap C)=P(A)P(C)\\(3)\ P(B\cap C)=P(B)P(C)\\(4)\ P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)\end{cases}$ 四式同時成立，則稱三事件 A,B,C 獨立。

(2)重複試驗：

擲一個均勻骰子 3 次，觀察其出現的點數，或是丟一個銅板 5 次，觀察出現正面的次數，或是由一袋中隨機抽球幾次（取後放回），觀察抽出球的顏色，在這些試驗裡我們常假設每次重複試驗所得結果都與前面所得結果無關（即獨立），也就是每次重複試驗時的環境是相同的。

一個試驗若為重複多次的獨立試驗，我們稱為重複試驗。要計算重複試驗的機率，只要計算其對應的」個別機率再相乘即可。

例如：擲一均勻骰子 3 次，試求依序出現 1 點、3 點、1 點的機率。

[解法]：

設 A、B、C 分別代表第 1、2、3 次出現 1 點、3 點、1 點的事件，因為 A、B、C 三事件獨立，故 P(A∩B∩C)=P(A)P(B)P(C)= $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$。

(乙)二項分布

(1)伯努利試驗：

許多隨機試驗都有一些共同的特性，像丟一個銅板，只丟出正面與反面兩種結果；抽一支籤，會出現中獎與不中獎兩種結果；候選人支持率的調查中，只有支持與不支持兩種結果。

只有兩種結果(通常將這兩種結果稱為「成功」及「失敗」)的隨機試驗，稱為**伯努利試驗**。在伯努利試驗中，如果成功的機率為 p，則失敗的機率為 $1-p$。

許多的隨機試驗都可以看成是重複多次的伯努利試驗：

例如：丟一枚硬幣 10 次或擲公正骰子 5 次，這些重複試驗都具有以下的特徵：

(1)每次試驗結果都不互相影響。

(2)每次試驗結果成功的機率都相同。

例子：

一袋中有 4 個紅球、2 個白球，由袋中取 5 次球，取後放回，請問 5 次取出的球中恰有 3 個紅球的機率是多少？

[解法]：

取一球是紅球的機率爲$\frac{4}{4+2}=\frac{2}{3}$，取一球是白球的機率爲$\frac{1}{3}$

因爲取後放回，所以每次取出的球顏色的事件彼此間是獨立的，

故取 5 次取出球順序爲紅紅白白紅的機率爲$(\frac{2}{3})^3(1-\frac{2}{3})^2$，

而且 3 個紅球、2 個白球的任一種排列順序之事件機率皆爲$(\frac{2}{3})^3(1-\frac{2}{3})^2$

5 次取球中恰有 3 次紅球、2 次白球的排列法有$\frac{5!}{3!2!}=C^5_3$(種)

再利用加法原理，可得 5 次取出的球中恰有 3 個紅球的機率是$=C^5_3(\frac{2}{3})^3(1-\frac{2}{3})^2$。

(2)二項分布：

若重複 n 次伯努利試驗，每次試驗結果都是獨立的，而且每次成功的機率都是 p，

令 X 表示成功的次數，則 $P(X=k)=C^n_k p^k(1-p)^{n-k}$，$(0\le k\le n$，$k$ 爲整數)，即

X	0	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$	n
機率	$C^n_0 p^0(1-p)^n$	$C^n_1 p^1(1-p)^{n-1}$	$C^n_2 p^2(1-p)^{n-2}$	$\cdots$	$C^n_k p^k(1-p)^{n-k}$	$\cdots$	$C^n_n p^n(1-p)^0$

隨機變數 X 的分布稱爲參數是(n,p)的**二項分布**，以符號 $\mathbf{X\sim B(n,p)}$表示。

[說明]：

因爲重複 n 次伯努利試驗，每次試驗結果都是獨立的，故

n 次試驗中恰有 k 次成功、$(n-k)$次失敗的任一種排列順序之事件機率皆爲 $p^k(1-p)^{n-k}$

n 次試驗中恰有 k 次成功、$(n-k)$次失敗的排列法有 C^n_k 種，

由加法原理，可得 n 次試驗恰有 k 次$(0\le k\le n$，k 爲整數)成功的機率爲 $C^n_k p^k(1-p)^{n-k}$。

因爲根據二項式定理，$1=1^n=[p+(1-p)]^n=\sum_{k=0}^{n}C^n_k p^k(1-p)^{n-k}$ ，

所以上述隨機變數 X 的分布稱爲二項分布。

[例題1] 已知一個不均勻銅板，出現正面的機率為$\frac{2}{3}$，出現反面的機率為$\frac{1}{3}$，今丟此銅板 5 次，令 X 代表出現正面的次數，

(1)試求 P(X=3)=________。

(2)試求恰在第 5 次，出現第 3 次正面的機率為_________。Ans：(1)$\frac{80}{243}$ (2)$\frac{16}{81}$

[例題2] 袋中有 3 紅球、4 白球，從中每次任取一球，取後放回，共取 6 次，

(1)求 6 次取球中恰取得 2 次紅球的機率。

(2)試求取得紅球次數的機率分布。

Ans：(1) $C_2^6(\frac{3}{7})^2(\frac{4}{7})^4$　(2)機率函數 $f(k)=\ C_k^6(\frac{3}{7})^k(\frac{4}{7})^{6-k}$ (k=0,1,2,3,4,5,6)

[例題3] 設有一個二項分布 X~B(10,0.3)，試求下列機率：

(1)P(X=4)=？　(2)P(X≤4)=？

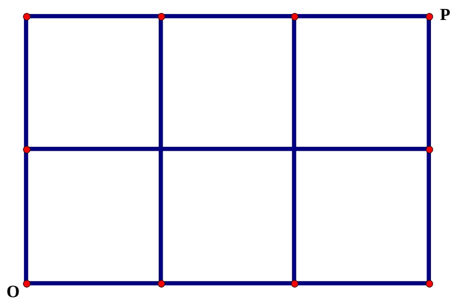
Ans：(1) $C_4^{10}(0.3)^4(0.7)^6$　(2) $\sum_{k=0}^{4} C_k^{10}(0.3)^k(0.7)^{10-k}$

(練習1) 投擲一均勻骰子 10 次，求下列事件之機率：

(1)恰好出現 6 次 1 點 (2)恰在第 10 次出現第 2 次 6 點的機率

Ans：(1)$C^{10}{}_6(\frac{5}{6})^4(\frac{1}{6})^6$ (2)$C^9{}_1(\frac{5}{6})^8(\frac{1}{6})^1$

(練習2) 如圖，從 O 點出發，投擲一骰子，若點數為 1 或 6，則向右走一步，若出現其他點數，則向上走一格，求投 5 次到達 P 點之機率=？



Ans：$\frac{40}{243}$

(練習3) 設某人打靶的命中率爲$\frac{1}{4}$，而且每次射擊的結果是互相獨立的。現在此人朝同一個目標射擊 5 次，試求
(1)靶面恰中 2 發的機率。
(2)擊中靶面的次數不超過 2 次的機率。
Ans：(1)$\frac{135}{512}$ (2)$\frac{459}{512}$

(練習4) 設有一個二項分布 X~B(9,0.4)，試求(1)P(X=3) (2)P(X≤2)
Ans：(1) $C_3^9(0.4)^3(0.6)^6$ (2) $\sum_{k=0}^{2} C_k^9 (0.4)^k (0.6)^{9-k}$

(乙)二項分布的期望值

(1)二項分布的期望值與變異數：

設二項分布 X~B(n,p)，即成功機率爲 p 的伯努利試驗，互相獨立的重複 n 次，其中 X 代表成功的次數

隨機變數 X 的期望值μ=E(X)定義爲$\sum_{k=0}^{n} k\cdot P(X=k)$。

隨機變數 X 的變異數σ^2=Var(X)定義爲$\sum_{k=0}^{n}(k-\mu)^2\cdot P(X=k)$。

計算期望值：

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot P(X=k)=\sum_{k=1}^{n} k \cdot C^n_k\, p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}\, p^k(1-p)^{n-k}=np\cdot \sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$=np\cdot \sum_{k=1} C_{k-1}^{n-1}\; p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np\cdot [p+(1-p)]^{n-1}=np。$$

計算變異數：(僅供參考)

$$Var(X)=\sum_{k=0}^{n}(k-\mu)^2\cdot P(X=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(k^2-2k\mu+\mu^2)\cdot P(X=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot P(X=k)-2\mu\sum_{k=0}^{n}k\cdot P(X=k)+\mu^2\sum_{k=0}^{n}P(X=k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2 \cdot \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}\; p^k(1-p)^{n-k}-\mu^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[k(k-1)+k]\frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}\ p^k(1-p)^{n-k}-\mu^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\cdot\frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}\ p^k(1-p)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}\ p^k(1-p)^{n-k}-\mu^2$$

$$=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}\ p^k(1-p)^{n-k}+\mu-\mu^2$$

$$=n(n-1)p^2\ \sum_{k=2}^{n}C_{k-2}^{n-2}\ p^{k-2}(1-p)^{n-k}+\mu-\mu^2$$

$$=n(n-1)p^2[p+(1-p)]^{n-2}+np-n^2p^2=np(1-p)。$$

上述討論中所計算的期望值，只是理論上的數字，假設投擲一枚公正硬幣 20 次，根據前面的結論，期望值 $E=20\times\frac{1}{2}=10$(次)。這樣是否能代表每次投擲一枚公正硬幣 20 次都會出現 10 次正面，顯然不會如此，若讓全校同學都投擲一枚公正硬幣 20 次，將每個人投擲出正面的次數紀錄下來，這些數的平均就會相當接近 10 次。

在**機率理的期望值就是統計試驗中大量數據的平均值**。

> 結論：
> 在參數是(n,p)的二項分布中，即重複做 n 次成功機率為 p 的伯努利試驗，若隨機變數 X 代表成功的次數，即 $X\sim B(n,p)$，則
> (1)隨機變數 X 的期望值 $E(X)=np$。
> (2)隨機變數 X 的變異數 $Var(X)=np(1-p)$，標準差$\sigma_X=\sqrt{np(1-p)}$ 。

[例題4] 全校每位學生投擲一硬幣 20 次，設 X 是每個人所擲出正面的次數，求 X 的期望值與標準差。Ans：10、$\sqrt{5}\approx2.2$

[例題5] 重複丟兩枚均勻的硬幣 300 次，以隨機變數 X 表示兩枚硬幣都出現正面的次數，試求 X 的期望值與標準差。

Ans：$E(X)=75$ 次，$\sigma_X=\frac{15}{2}$次

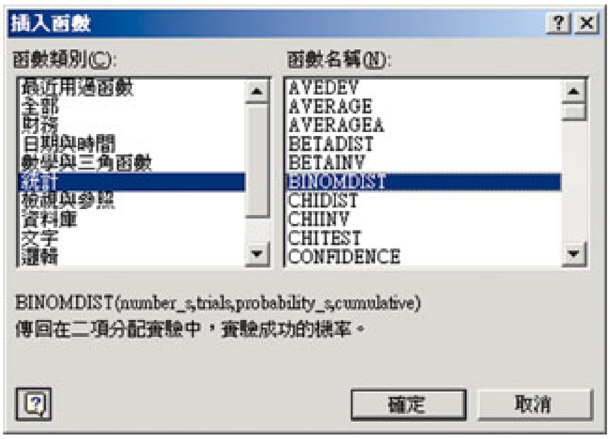
(2)利用 Excel 來二項分布的機率：
語法：
BINOMDIST(number_s,trials,probability_s,cumulative)

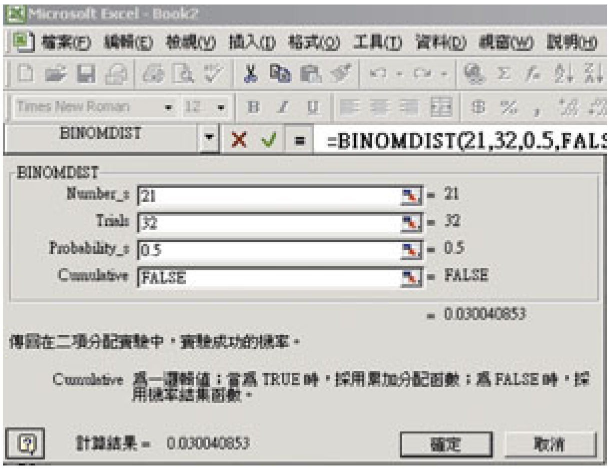
Number_s 欲求解的實驗成功次數。

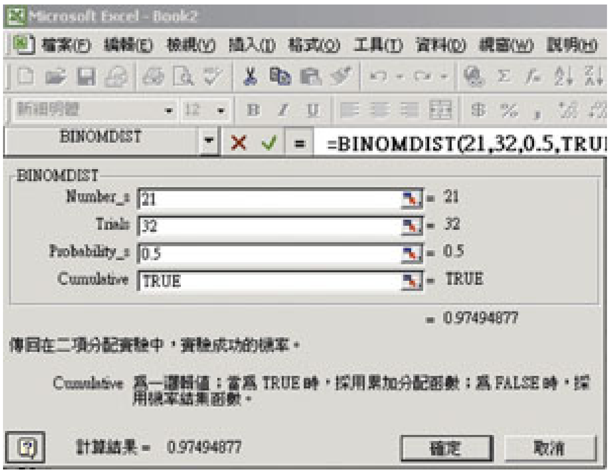
Trials 獨立實驗的次數。

Probability_s 每一次實驗的成功機率。

Cumulative 為一邏輯值，主要用來決定函數的型態。如果 cumulative 為 TRUE，則 BINOMDIST 傳回累加分配函數值，其代表最多有 number_s 次成功的機率；如果其值為 FALSE，則傳回機率密度函數的機率值，代表有 number_s 次成功的機率。







例如：
擲一枚銅板出現正面的機率為 0.5，則在 10 次實驗中**恰**出現 6 次正面的機率為：

BINOMDIST(6,10,0.5,FALSE) 等於 0.205078
擲一枚銅板出現正面的機率為 0.5，則在 10 次實驗中**最多**出現 6 次正面的機率為：

BINOMDIST(6,10,0.5,TRUE) 等於 0.828125

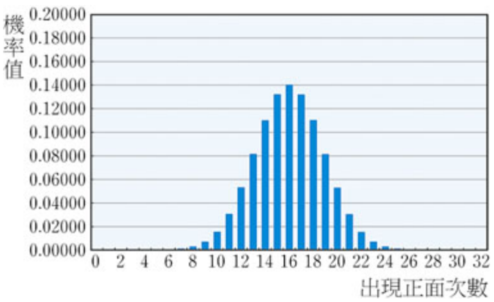
[例題6] 利用 Excel 來計算：
投擲一均勻硬幣 100 次，試估計正面次數介於 40 到 60 次間的機率。
Ans：0.95

(練習5) 同時丟 2 個硬幣的試驗中，把兩個硬幣都出現正面叫做成功，重複丟 2 個硬幣 1000 次，求成功次數的期望值與變異數。
Ans：250，187.5

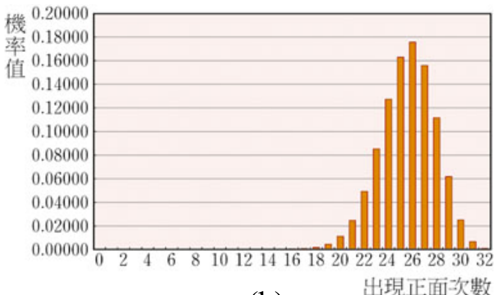
(練習6) 擲一公正骰子 10 次，試求
(1)恰出現 6 次 2 點的機率=？
(2)在恰出現 6 次 2 點的條件下，第 10 次是 2 點的機率=？
(3)出現 2 點次數的期望值是多少？
(4)出現 2 點次數的變異數是多少？
Ans：(1)$C^{10}_{6}(\frac{1}{6})^6(\frac{5}{6})^4$　(2)$\frac{3}{5}$　(3)$\frac{10}{6}$　(4)$\frac{50}{36}$

(練習7) 某射擊選手命中率爲 0.6，今射擊 150 發，求其中命中次數的期望值與變異數，並計算其 95%的信賴區間。
Ans：期望值=90、變異數=36、[78,102]

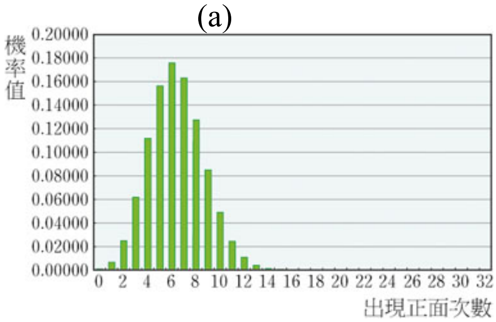
(2)二項分布機率圖的特性：
設 X~B(n,p)，
當 n=32，p=0.5 時，其機率函數圖是對稱且呈鐘形，如圖(a)，最高點在 $k=16$ 處。
當 n=32，$p=0.8$ 時，其機率函數圖是左偏，如圖(b)，最高點在 $k=26$ 處。
當 n=32，$p=0.2$ 時，其機率函數圖是右偏，如圖(c)，最高點在 $k=6$ 處。



(a)



(b)



(c)

二項分布機率圖有特徵如下。

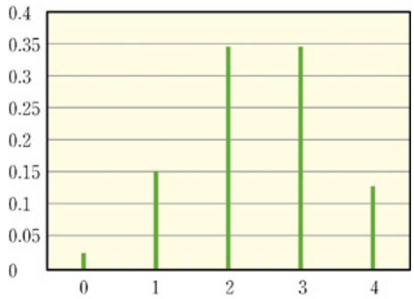
1. 單峰現象：

當成功次數 k 由 0 到 n，機率值 $P(X=k)$ 先上升後下降。

2. 最高點：

一般二項分布機率值 $P(X=k)$ 最高點是在 $k=[(n+1)p]$，其中[ ] 表高斯符號，即 $[a]$ 表小於或等於 a 的最大整數。

當 $(n+1)p$ 爲整數時，有兩個最高點分別在 $k=(n+1)p-1$ 及 $k=(n+1)p$，例如：$X \sim B(4，0.6)$，則 $(n+1)p=3$，最高點在 $k=2$ 及 $k=3$。



二項分配最高點在 $k=[(n+1)p]$ 的理由。

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k+1)} \geq 1 \Longleftrightarrow \frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}}{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}} \geq 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(k+1)(1-p)}{(n-k)p} \geq 1 \Longleftrightarrow k \geq (n+1)p-1。$$

同理，$\dfrac{P(X=k)}{P(X=k-1)} \geq 1 \Longleftrightarrow k \leq (n+1)p$。

不但得到二項分布 $X \sim B(n，p)$ 在 $[(n+1)p]$ 有最高點，同時也證明了二項分布的單峰現象。

3. 對稱性：

二項分布的機率圖可能對稱，也有可能右偏或是左偏，決定於成功的機率值 p。

如果 $p=0.5$，則圖形對稱；

如果 $p<0.5$，則圖形右偏；

如果 $p>0.5$，則圖形左偏。

[例題7] 設袋中有 4000 個紅球，6000 個白球，從中每次任取一球，共取 6 次。一下列條件分別寫出取得紅球次數 X 的機率函數：

(1)每次取後放回　(2)每次取後不放回

[解法]：

(1)每次取後放回：

每次取到紅球的機率爲$\frac{2}{5}$。故 X 爲參數爲$(6,\frac{2}{5})$的二項分配。

故 $P(X=k)=f(k)=C_k^6(\frac{2}{5})^k(\frac{3}{5})^{6-k}$，$k=0,1,2,3,4,5,6$。

(2)每次取後不放回：

取球 6 次，相當於從 10000 個球中一次取 6 球，令 S 表示樣本空間，E_k表示 $X=k(k=0,1,2,3,4,5,6)$的事件

$n(S)=C_6^{10000}$，$n(E_k)=C_k^{4000}\cdot C_{6-k}^{6000}$

故 $P(E_k)=P(X=k)=f(k)=\frac{C_k^{4000}\cdot C_{6-k}^{6000}}{C_6^{10000}}$，$k=0,1,2,3,4,5,6$。

$$\frac{C_k^{4000}\cdot C_{6-k}^{6000}}{C_6^{10000}}$$

$$=\frac{\frac{4000!}{k!\cdot(4000-k)!}\cdot\frac{6000!}{(6-k)!\cdot(5994+k)!}}{\frac{10000!}{6!\cdot 9994!}}$$

$$=\frac{6!}{k!\cdot(6-k)!}\cdot\frac{4000!\cdot 6000!\cdot 9994!}{(4000-k)!\cdot(5994+k)!\cdot 10000!}$$

$$=C_k^6\cdot\frac{\overbrace{4000\cdot 3999\cdots(4000-k+1)}^{k個}\cdot\overbrace{(5995+k)\cdot(5996+k)\cdots 6000}^{(6-k)個}}{9995\cdot 9996\cdot 9997\cdot 9998\cdot 9999\cdot 10000}$$

$$\approx C_k^6(\frac{2}{5})^k(\frac{3}{5})^{6-k}$$

這個結果表示紅球與白球數目都遠大於取球次數 6 時，即使每次取後不放回，無論前面取球是紅或是白，6 次中每一次取得紅球的機率都非常接近$\frac{2}{5}$。因此當母體很大，抽樣樣本數相對少時，抽樣不放回與放回的機率接近。

(練習8) 某公司每月生產電子零件幾百萬件，與客戶約定以隨機抽樣抽 10 件檢查，如果 10 件至多有一件不良品客戶才接受此批貨，假設電子零件中不良品所占比率爲 3%，請問此批貨被接受的機率約爲多少？

(註抽樣不放回，但母體很大，抽樣樣本數小，所以 X 的機率分布接近二項分布，即 $X\sim B(10，0.03)$。)

Ans：約 0.9655

(可使用計算機計算)

結論：

設袋中有 N 個球，其中 r 個是紅球(r<N)，N−r 個非紅球，從中每次任取一球，共取 n 次，令隨機變數 X 表示取得紅球的次數

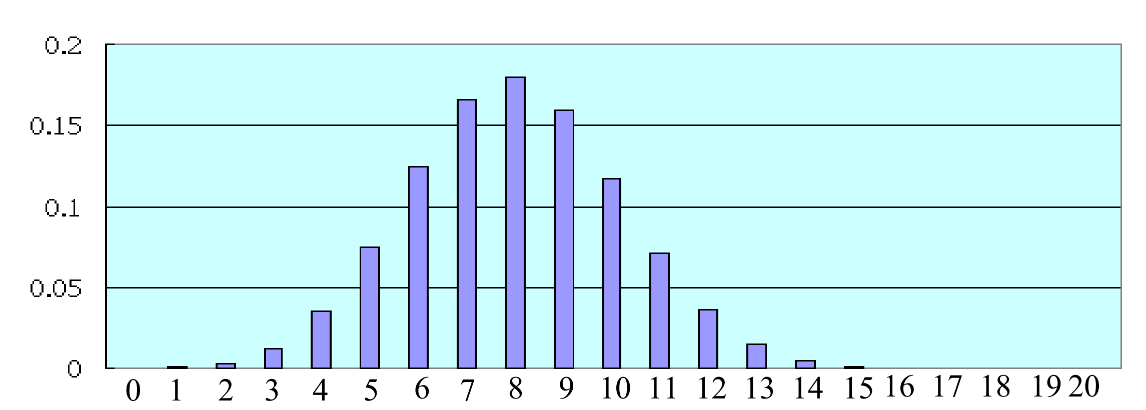
(1)若每次取後放回，則 X 的分布爲參數$(n,\frac{r}{\mathrm{N}})$的二項分布。

(2)若每次取後不放回，且$\frac{n}{r}$，$\frac{n}{\mathrm{N}-r}$都很小，則 X 的分布近似參數$(n,\frac{r}{\mathrm{N}})$的二項分布。

綜合練習

(1) 人的某種特徵（如慣用左手）會依據一對基因，假設 d 表顯性基因(dominant gene)，r 表隱性基因（recessive gene)，一個人若有一對 dd，rd 基因，在外觀上會有某種特徵，若有一對 rr 基因，則沒有某種特徵。小孩自父母親各接受一個基因，若父母親均具有一對 rd 基因，他們生四個小孩，請問恰有一個小孩沒有某種特徵的機率。

(2) 隨機變數爲一個參數爲(20,0.4)的二項分布，其機率分布圖如下所示：



試問下列哪些選項是正確的？

(1)X 的期望值爲 8

(2)X 的標準差小於 2

(3)X=8 時，機率最大

(4)P(X=7)=P(X=9)

(5)X 的分布爲右偏。

(3) 擲一均勻硬幣 10 次，令 p_n 代表恰出現正面的機率，下列選項哪些是正確的？

(1)$p_5=\frac{1}{2}$　(2)$p_4=p_6$　(3)p_0、p_1、…p_{10} 中最大值爲 p_5

(4)p_0、p_1、…、p_{10} 的平均值爲$\frac{1}{11}$　(5)$p_7<p_8$。

(4) 某人丟一枚均勻硬幣 8 次，下列選項哪些是正確的？

(1)每次投擲都會恰好得到正面 4 次反面 4 次。

(2)若前 4 次得到正面 4 次，則後 4 次得到正面 4 次的機率大於得到反面 4 次的機率

(3)恰好得到 4 次正面及 4 次反面的機率大於$\frac{1}{4}$。

(4)若已知丟完硬幣後共出現 4 次正面及 4 次反面，則丟擲過程中正反面交錯出現的機率大於正面集中在前 4 次或後 4 次的機率。

(5) 一袋中有 5 顆黑球，4 顆白球，每次從袋中隨機取出 2 球，取後放回袋中，共取 9 次，X 代表取到的 2 球都是黑球的次數，試求 X 的期望值與變異數。

(6) 根據過去一年打球的成績統計，小安打保齡球全倒的機率是 0.4，試問：
(a)在一局(10 次)中全倒的次數低於 4 次的機率是多少？
(b)已知一局中小安出現 4 次全倒，第 4 次全倒恰好在打第 9 次時的機率是多少？

(7) 已知丟某枚銅板，其出現正面的機率爲 p，出現反面的機率爲$(1-p)$，將此枚銅板丟擲 n 次，在丟擲的過程中，正面第一次出現時，可得獎金 1 元，正面第二次出現時，可再得獎金 2 元，正面第三次出現時，可再得獎金 3 元，以此類推。試問下列哪些選項是正確的？
(1)若 n 次丟擲中出現正面 k 次，總共得到獎金$\frac{1}{2}(k^2-k)$元
(2)丟擲銅板第二次後，累計得獎金 1 元的機率爲 $2(p-p^2)$
(3)總共得到獎金 2 元的機率爲$\frac{n(n-1)}{2}p^2(1-p)^{n-2}$
(4)總共得到獎金$\frac{1}{2}(n^2-n)$的機率爲 $n(p^{n-1}-p^n)$。(2009 指定甲)

(8) 袋中有紅球 6 個，白球 4 個，從袋中每次取一個，共取 3 次
(a)取後放回，則取到 2 紅球 1 白球的機率爲多少？
(b)取後不放回，則取到 2 紅球 1 白球的機率爲多少？

(9) 小安每天從家裡步行到學校共需經過 6 個路口，設小安在每個路口遇到紅燈的」機率爲$\frac{1}{3}$，若每個路口的燈號各自獨立運作，試問
(a)小安從家裡步行到學校都沒遇到紅燈的機率是多少？
(b)小安每天從家裡步行到學校遇到 4 次紅燈的機率是多少？
(c)小安每天從家裡步行到學校遇到紅燈次數 X 的期望值與標準差。

(10) 丟一個公正銅板 5 次，令 X 表 5 次中出現正面的次數，求：
(a) $P(X=0)$。 (b) $P(X=1)$。 (c) $P(3\leq X\leq 5)$。
(d) $E(X)$。 (e) $\mathrm{Var}(X)$。

(11) 袋中有 10 個號碼球，1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個，4 號球 4 個，大華從袋中隨機抽取 1 球，抽出一球後放回，共抽 5 球，令 X 表抽到 1 號球的次數，試求：
(a) $X=1$ 的機率是多少？ (b) $P(X\leq 2)$。
(c) $E(X)$ (d) $\mathrm{Var}(X)$

(12) 假設隨機變數 $X\sim B(50,\frac{1}{6})$，試求隨機變數$\frac{X}{50}$的期望值與變異數。

(13) 設某人射飛鏢時射中靶面的機率是$\frac{1}{4}$，他連續射了 4 次。求
(a)直到第四次才射中靶面的機率。
(b)恰好射中靶面 2 次的機率。

(14) 某車行有 20 輛計程車，這些計程車都是中古車，假設每輛車子每月需要維修的機率是 0.2，而且每輛計程車是否需要維修，在車與車之間是獨立的。如果 Y 代表每個月需要維修的計程車數，則 Y 的期望值與變異數是多少？

(15) 設飛機引擎在飛行中故障的機率是 p，且每部引擎故障是獨立，若一架飛機至少有一半的引擎正常，飛機就能安全飛行，請問 p 要多大時，一架四部引擎飛機才比一架二部引擎飛機安全？

進階問題

(16) 假設一位獸醫師在一周中，需要給上門的家犬注射狂犬疫苗的次數 X 是呈現二項分布，X 的平均數爲 12，變異數爲 7.2，請問在一周中，他需要注射狂犬疫苗的次數恰爲 10 次的機率爲多少？

(17) 一點 P 在數線上的原點，今投一硬幣，若出現正面，則向正向移動 3 個單位，若出現反面則向負向移動 2 個單位，今連續投擲 12 次硬幣，求最後 P 點落在坐標爲−4 之點的機率。

(18) 一袋中有三個白球、二個黑球，甲乙兩人輪流自其中取出一球，今約定先取得白球者得勝。
(a)若取完球不放回袋中，甲乙獲勝的機率各爲多少？
(b)若取完球放回袋中，甲乙獲勝的機率各爲多少？

(19) 一個骰子連續投擲 50 次，一點的出現次數爲 r 的機率爲 P_r，當 P_r 最大時，試問 r=？

綜合練習解答

(1) $\frac{27}{64}$

(2) (1)(2)(3)(5)

(3) (2)(3)(4)

(4) (3)

(5) $\frac{5}{2}$，$\frac{65}{36}$

(6) (a) $\sum_{k=4}^{10} C_k^{10}(0.4)^k(0.6)^{10-k} \approx 0.6177$ (b)$\frac{2}{5}$

(7) (2)(4)

(8) (a)$\frac{54}{125}$ (b)$\frac{1}{2}$

(9) (a)$\frac{64}{729}$ (b)$\frac{80}{243}$ (c)E(X)=2，$\sigma_X=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(10) (a)0.03125 (b)0.15625 (c)0.5 (d)2.5 (e)1.25

(11) (a)0.3281 (b)0.9914 (c)0.5 (d)0.45

(12) $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{360}$

(13) (a)$\frac{27}{4^4}$ (b) $\frac{54}{4^4}$

(14) 期望值=4，變異數=3.2

(15) $p\leq\frac{1}{3}$

(16) $C_{10}^{30}(0.4)^{10}(0.6)^{20}$

(17) $C_4^{12}(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^8$

(18) (a)甲獲勝的機率爲$\frac{7}{10}$，乙獲勝的機率爲$\frac{3}{10}$

(b)甲獲勝的機率爲$\frac{5}{7}$，乙獲勝的機率爲$\frac{2}{7}$

(19) r=8

$P_r=C^{50}{}_r(\frac{1}{6})^r(\frac{5}{6})^{50-r}$，考慮 $P_r\geq P_{r+1}$ 與 $P_r\geq P_{r-1}$