

第三章機率與統計(I)

§3-1 樣本空間與事件

(甲)隨機試驗與樣本空間

(1)隨機現象：

我們生活的世界上，充滿著不確定性。從擲硬幣、丟骰子、玩撲克牌等簡單的機會遊戲，到複雜的社會現象；從嬰兒誕生，到世間萬物的繁衍生息；從天氣變化到大自然的千變萬化，...這其中充滿著隨機的現象，彷彿上帝是在擲骰子。

自然現象與社會現象，大致上分成兩種，例如上拋的物體一定會落下，無論是什麼形狀的三角形，它的兩邊之和總是大於第三邊，這些現象用比較科學的語言來表達，那就是它們都服從特定的因果關係，從一定的條件出發，必定可以推出某一結果；但是在自然界與社會中還存有另一類現象，稱之為**隨機現象**，例如，在馬路交叉口，每天都要通過許多人和車輛，但是我們無法事先預測確切的人數及車輛數；擲一粒骰子，我們無法確定下一回會擲出幾點；買樂透彩券，我們也無法根據前幾期來預測下一期的得獎號碼，這些隨機現象天天都在發生。

雖然隨機現象並不是因果關係確定的現象，但是它有幾個特點：**隨機現象的結果至少有兩個，那一個結果會出現，人們事先並不知道。**

隨機現象的例子：

(a)擲一枚硬幣，可能出現正面，也可能出現反面，但是事先並無法知情。

(b)明天天氣下雨與否，有時無法完全確定。

(c)樂透彩券的頭獎得獎號碼，有 C_6^{42} 種組合，但是無法知道下一次開獎的號碼。

很多隨機現象可以大量重複，如擲一枚硬幣可以一直擲下去，可重複的隨機現象稱為**隨機試驗**，簡稱為**試驗**。也有很多隨機現象是無法重複的，例如一場籃球賽的輸贏，這兩類的隨機現象，都是機率的研究範圍，而高中的機率主要研究的是隨機試驗。

(2)樣本空間與事件：

氣象報告常提到明天下雨的機率是 90%；兩球隊比賽，賽前很多人都會看好其中一隊，認為其中一隊會贏的機率是 6 成，這些都是生活中可能會遇到的問題，其中「明天下雨」、「某一隊贏球」都稱為**事件**，這些事件事先都無法確定是否會發生，但通常我們都會根據以往的經驗來認定其發生的機率。

對於一個事件來說，它在一次試驗中，可能發生，也可能不發生，我們常常希望知道某些事件發生的可能性有多大，總希望可以找到一個適當的數來表示事件發生的可能性大小。事件 A 發生的可能性是可以度量的，就好像是一根木棒的長度、一塊土地的面積一樣。事件 A 發生的可能性大小稱為事件 A 的**機率**。我們觀察以下的例子：

(a)擲一粒骰子，所得點數大於 2。

(b)擲 3 個硬幣，至少有 2 個正面。

(c)在罰球線投籃，5 次之內投進。

(d)從一副撲克牌中，任意抽取兩張，它們的花色相同。

這些都是某個試驗的事件，依序為

(a)擲一粒骰子

(b)擲 3 個硬幣

(c)在罰球線投籃

(d)從一副撲克牌中，任意抽取兩張

「擲一粒骰子」這個試驗下，「點數大於 2」是一個事件，另外，「點數小於 6」、「點數是質數」、「點數是奇數」也都是事件，所以在同一個試驗下，可以有許多不同的事件，爲了方便敘述起見，有時候分別稱爲事件 A、事件 B，...等等，例如：

A：點數大於 2、B：點數小於 6、C：點數是質數、D：點數是奇數。

在數學上爲了方便處理，我們將一個試驗下的各事件以集合表示，例如擲一個骰子時，「點數爲偶數」的事件以{2,4,6}表示，而{3,4,5,6}表示「點數大於 2」的事件。集合{1,2,3,4,5,6}所表示的事件，涵蓋了這個試驗的所有可能，此集合稱爲此試驗的**樣本空間**。

樣本空間常以S表示，每一個事件A都是樣本空間S的部分集合，即 $A \subset S$ 。

A 是一個事件，若試驗結果屬於A，則稱此事件A發生。例如，擲一粒骰子時，「點數和爲偶數」以 $A=\{2,4,6\}$ 表示，若擲出的結果爲「4」，因爲 $4 \in A$ ，所以A發生了。

結論：

(a)隨機試驗：

在不確定之現象上，求出一個結果之過程爲一種實驗，有一組以上可能之結果，但不能確定是其中那一種，同一條件下，可以反覆進行這種實驗稱爲隨機試驗。

(b)樣本空間：一項隨機試驗中所有可能發生的結果所成的集合。

(c)事件：樣本空間中的每一個子集合(包含空集合)稱爲此樣本空間的事件。

(d)事件發生：若試驗結果屬於A，則稱此事件A發生。

(3)相關的名詞介紹：

(a)全事件：樣本空間S稱爲全事件

(b)空事件：空集合 ϕ 稱爲空事件。

(c)餘事件：發生事件以外的事件，稱爲事件A的餘事件。即 A^c

(d)和事件：事件A、B至少有一事件發生的事件，稱爲A，B的和事件，即 $A \cup B$ 。

(e)積事件：事件A、B同時發生的事件，稱爲A，B的積事件，即 $A \cap B$ 。

(f)互斥事件：二個事件A,B若 $A \cap B = \phi$ (即二事件不能同時發生)，則稱A,B爲互斥事件。

[例題1] 設有 12 張卡片，編號 1 至 12，從中抽取一張，考慮所得號碼，樣本空間取爲

$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ ，令事件 A、B 分別表示「號碼是 3 的倍數」、「號碼大於 7」

(1)試分別以集合表下列事件：

(a)A (b)B (c)A 的餘事件 (d)A 與 B 的積事件 (e)A 與 B 的和事件。

(2)A 與 B 是否互斥？

(3)設事件 C 表「號碼是 5 的倍數」，請問 A、C 是否互斥？

[例題2] 丟一個硬幣 3 次，觀察 3 次出現正反面的次序，寫出

(1)樣本空間 S (2)沒有出現正面的事件 A (3)出現一個正面的事件 B

(4)請問 A、B 互斥嗎？

Ans：(1){(正,正,正)、(正,正,反)、(正,反,正)、(反,正,正)、(正,反,反)、
(反,正,反)、(反,反,正)、(反,反,反)}

(2)A={(反,反,反)} (3)B={(正,反,反)、(反,正,反)、(反,反,正)}

(4)互斥

[例題3] 擲甲乙兩個骰子，觀察每個骰子出現的點數，令 A 為出現點數和為 3 的事件，
B 為出現點數和為 5 的事件，

(a)請寫出樣本空間。 (b)判別 A,B 是否為互斥？

Ans：(a) $S=\{(x,y)|1\leq x\leq 6, 1\leq y\leq 6, x,y \text{ 為正數}\}$ (b) A,B 為互斥事件

(練習1) 若袋子中有 3 個紅球，200 個黑球，1 個白球，從袋子中任取一球

(1)請寫出其樣本空間。

(2)請寫出抽出黑球的事件。

Ans：(a) $S=\{\text{紅球}, \text{黑球}, \text{白球}\}$ (b){黑球}

[討論]：根據以上的結果，可以說抽中黑球的機率= $\frac{1}{3}$ 嗎？

(練習2) 將五個相同的球任意分配在黑白兩個箱子中，請寫出樣本空間。

Ans：S={ (x,y) | x,y 分別表示黑箱、白箱中的球數 }
= { (5,0)、(4,1)、(3,2)、(2,3)、(1,4)、(0,5) }

(練習3) 設樣本空間 S={a,b,c,d}，則 S 的事件有多少個？ Ans：16

(練習4) 丟一個硬幣 3 次，觀察 3 次出現正反面的次序，寫出

(1)至少出現 2 次正面的事件 A (2)剛好出現 2 次正面的事件 B
(3)3 次出現同一面的事件 C (4)A 和 C 的和事件 (5)C 的餘事件
(6)B 和 C 的積事件。

Ans：(1)A={ (正,正,正)、(正,正,反)、(正,反,正)、(反,正,正) }

(2)B={ (正,正,反)、(正,反,正)、(反,正,正) }

(3)C={ (正,正,正)、(反,反,反) }

(4){ (正,正,正)、(正,正,反)、(正,反,正)、(反,正,正)、(反,反,反) }

(5){ (正,正,反)、(正,反,正)、(反,正,正)、(正,反,反)、(反,正,反)、(反,反,正) }

(6) ϕ