第六冊要點複習

極限的概念

(1)數列極限：

「**無窮數列$\{a_n\}$收斂到α**」

不論我們要使a_n與α接近到何種程度，即不論我們要使$|a_n-a|$的值如何的小，只要把n的值取到足夠大，必可辦到，記作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$。

若一個無窮數列不**收斂**，我們稱該無窮數列$\{a_n\}$**發散**。

(a)直觀判定數列的收斂與發散：

(1°)收斂的幾個型態：將a_n逐項畫在數線上，觀察數線上a_n的行為：

①單一方向靠近一個定實數：

例如：$a_n=1+\dfrac{1}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$，$b_n=3-(\dfrac{1}{2})^n$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=3$。

②左右振動，並且逐漸靠近一個定實數：

例如：$a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$b_n=(\dfrac{-1}{3})^n$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$

③最後在某一點跳動：

例如：$a_n=5$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$

(2°)發散的幾個型態：

①越來越趨向∞或−∞

例如：$a_n=n^2$，$b_n=-3^n$

②左右振動，但越來越分開

例如：$a_n=(-3)^n$

③在二點或二點以上振動

例如：$a_n=2+(-1)^n$，$b_n=\begin{cases}0 & , \quad n=3k \\ 1 & , \quad n=3k+1 \\ 2 & , \quad n=3k+2\end{cases}$

(b)夾擊原理：

設$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$為數列，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha$，

若從某一項起，$a_n\le b_n\le c_n$都成立，則$\{b_n\}$也是收斂數列，且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha$。

(c)實數完備性：

遞增(減)有上(下)界的數列必收斂。

(d)極限的四則運算：

若設$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均為收斂的數列，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$，

則(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$　　(b) $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n=c\cdot a$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$　　(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}$, ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b\neq0$)

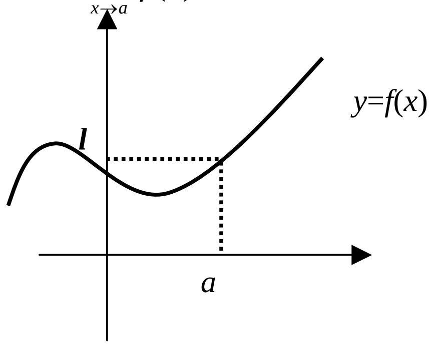
(2)函數的極限；

(a)定義：

設 $f(x)$為一函數, 若 x 從 a 的左右兩邊趨近 a(但 $\boldsymbol{x\neq a}$)時, 則函數 $f(x)$非常趨近一確定的實數 l, 就稱 x 趨近 a 時($x\to a$)時 ， 函數 $f(x)$的極限為 $l(f(x)\to l)$。符號記為：$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ 。

[圖形觀點]：

考慮點 P(x,$f(x)$), 若當 x 趨近 a 時, 點 P(x,$f(x)$)會趨近點(a,l), 則$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ 。



(b)函數值與極限值：

若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

(1°)函數 $f(x)$在 $x=a$ 處不一定有意義。

(2°)即使 $f(a)$有定義, 當 $x\to a$ 時, $f(x)$也不一定趨近於 $f(a)$。

例子：設 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & ,x\neq 2\\ 5 & ,x=2\end{cases}$, 請求出$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$=？

[解法]：注意 $x\to 2$ 的過程中, $x\neq 2$, 所以 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2$。

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4\neq f(2)$。

當 $\boldsymbol{x\to a}$ 時，$\boldsymbol{f(x)}$之極限值並不依賴函數 $\boldsymbol{f}$ 在點 $\boldsymbol{x=a}$ 的函數值。

(c)函數極限的四則運算：

若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=s,\lim\limits_{x\to a} g(x)=t$, c 為一常數, 則

(1°)$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=s+t$

(2°)$\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\cdot s$

(3°)$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=st$

(4°)若$t\neq 0$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{s}{t}$

注意：即使$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))$存在, 但$\lim\limits_{x\to a} f(x),\lim\limits_{x\to a} g(x)$不一定存在。

例如：$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{-1}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))=0$ 但$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$不存在。

(d)夾擊原理：

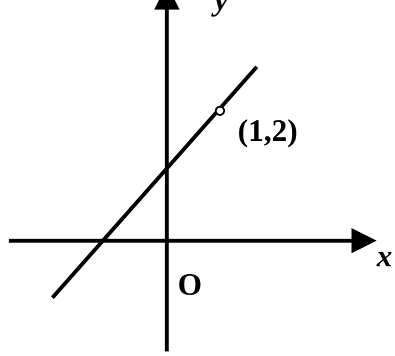
設 c 是開區間(a,b)內的一個定點, 若 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$在(a,b)內滿足下列條件：

(1°)$f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ (2°)$\lim\limits_{x\to c} f(x)=L=\lim\limits_{x\to c} h(x)$ 則$\lim\limits_{x\to c} g(x)=L$。

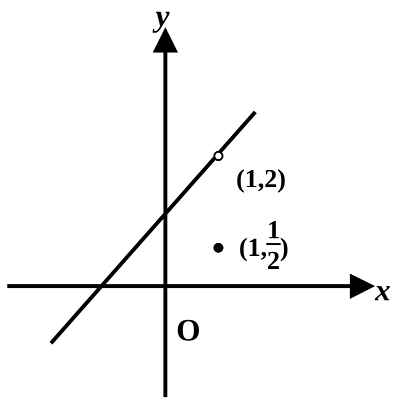
(2)不連續函數的例子：

(a)有缺洞的不連續點：

例子：$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的圖形如右,



函數 $f(x)$在 x=1 無定義，但$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$=2 存在。
而圖形在 x=1 處有「**缺洞**」。



(b)函數值跳躍的不連續點：

設 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ \dfrac{1}{2} & x=1\end{cases}$的圖形如右圖，與上圖不同

的是 $f(x)$在 x=1 有定義，但$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$=2 存在。
但是圖形仍然有「**缺洞**」，在 x=1 的點是**跳躍**的點。

(c)函數值斷裂的不連續點：

設 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$的圖形如右圖，雖然 $f(0)=0$ 有定義

但$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在。圖形中在 x=0 處有斷裂的點。
(3)函數的連續性；
連續的定義：

(1°)
若下列三個條件都滿足：
(a)$f(a)$有定義 (b) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在 (c) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，則稱 $f(x)$ 在點 a 連續。

(2°)若 f 在(a,b)內的每一點都連續，則稱 $f(x)$在(a,b)上連續。

(3°)設 $f(x)$定義在閉區間$[a,b]$,
若 $f(x)$在(a,b)上連續；$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$；$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$
則稱 $f(x)$在$[a,b]$上連續。

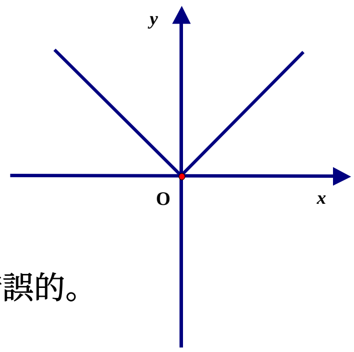
一個函數 $f(x)$在 $x=a$ 處不連續，其不連續點概略可分成以下幾類：
(1°)函數 f 在 $x=a$ 處未定義。
(2°)函數值 $f(x)$在 $x=a$ 處的極限不存在。
(3°)函數值 $f(x)$在 $x=a$ 處的極限存在，但其極限值不等於 $f(a)$。
(4)連續函數的性質：
(a)若函數 $f(x)$、$g(x)$在 $x=a$ 處連續，b 是常數，則下面的四則運算：
(1°)$f(x)\pm g(x)$ (2°)$f(x)\cdot g(x)$ (3°)$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a)\neq 0)$ (4°)$b\cdot f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。
(b)若設函數 $g(x)$在 $x=a$ 連續，且函數 $f(x)$在 $g(a)$點連續，
則合成函數$(f\circ g)(x)=f(g(x))$在 $x=a$ 也連續。

(c)中間值定理：
設 f 是$[a,b]$上的連續函數，且 $f(a)\neq f(b)$，
若 k 是任意一個介於 $f(a)$與 $f(b)$之間的實數，則在$[a,b]$內至少有一點 c，使得 $f(c)=k$。

(d)勘根定理：設 f 是$[a,b]$上的連續函數，若 $f(a)f(b)<0$，則至少存在一個 $c\in[a,b]$，使得 $f(c)=0$。

極限的應用

(1)導數的定義：
函數 $y=f(x)$在 $x=a$ 處及其附近有意義
(a)函數 $y=f(x)$在 $x=a$ 處的導數 $\boldsymbol{f'(a)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\boldsymbol{f(x)-f(a)}}{\boldsymbol{x-a}}$。
(b)函數 $y=f(x)$的圖形以 $P(a,f(a))$為切點的切線斜率$=f'(a)$。
(c)函數 $y=f(x)$的圖形以 $P(a,f(a))$為切點的切線方程式為 $y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$。
若 $f'(a)\neq 0$，則通過 P 點的法線方程式為 $y-f(a)=\dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$
(d) $y=f(t)$在 $t=t_0$ 的瞬時變化率$=\lim\limits_{h\to 0}$($t=t_0$ 的平均變化率)$=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{t_0+h-t_0}\right]=f'(t_0)$。
(2)導函數的定義：
給定一個函數 $f(x)$，若 $x=a$ 在定義域中，且 $f'(a)$存在，則 $a\to f'(a)$形成一個新的函數稱為 $f(x)$的導函數。符號記為 $f'(x)$或$\dfrac{df(x)}{dx}$　$[f'$ 或$\dfrac{df}{dx}]$
(3)微分與連續
(a)若設 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分，則 $f(x)$在 $x=a$ 處連續。
[證明]：
$\because f(x)-f(a)=(x-a)\cdot\left[\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$，$f(x)=f(a)+(x-a)\cdot\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$
$\therefore \lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\left[f(a)+(x-a)\cdot\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\right]=f(a)+0\cdot f'(a)=f(a)$。
根據以上的定理，若 $f(x)$在 $x=a$ 處不連續，則 $f(x)$在 $x=a$ 處不可微分。
例如：$f(x)=[x]$在 $x=2$ 不連續$\Rightarrow f(x)$在 $x=2$ 不可微。



(b)「**若設 $f(x)$在 $x=a$ 處連續，則 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分**」這個敘述是錯誤的。
反例：設 $f(x)=|x|$，考慮$(0,0)$這一點，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{|x|}{x}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，所以 $f'(0)$不存在，但是$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，
所以 $f(x)=|x|$在 $x=0$ 不可微分，但是在 $x=0$ 處連續。
注意：$f(x)$在 $x=0$ 不可微分，因此 x 軸並不是$(0,0)$處的切線，在$(0,0)$處沒有切線。
(4)微分的四則運算：

(a)$(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$　(b) $(cf(x))' = c\cdot f'(x)$

(c) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ (d) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

(5)合成函數的微分：

(連鎖法則　Chain Rule)

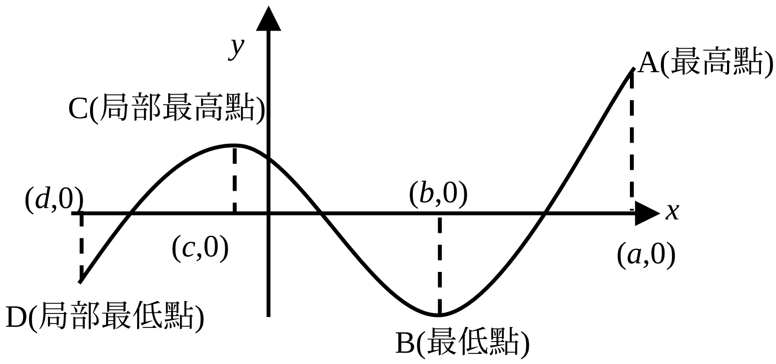
若 $f(x)$,$g(y)$都是可微分的函數，則合成函數$(g\circ f)(x)$亦可微分，

而且$\dfrac{d}{dx}((g\circ f)(x)) = \dfrac{dg(y)}{dy}\Big|_{y=f(x)}\cdot\dfrac{df(x)}{dx}$或$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$。

(6)基本的微分公式：

(a)$f(x)=x^r \Rightarrow f'(x)=rx^{r-1}$。

(b) $\dfrac{d}{dx}((f(x))^n = n(f(x))^{n-1}\dfrac{df(x)}{dx}$。



函數求極值

(1)極大(小)值、最大(小)值得意義：

(a)最大(小)值⇔函數值中最大(小)者。

　極大(小)值⇔函數在某點附近最大(小)值。

(b)最大(小)值必為極大(小)值。

(c)最大值與最小值最多只能各有一個，而極大值、極小值不一定各只有一個。

(d)最大值≥最小值，但極大值不一定大於極小值，而極小值不一定小於極大值。

(e)一個閉區間$[a,b]$中，全部的極大值與極小值中，最大一個就是最大值，最小的就是最小值。

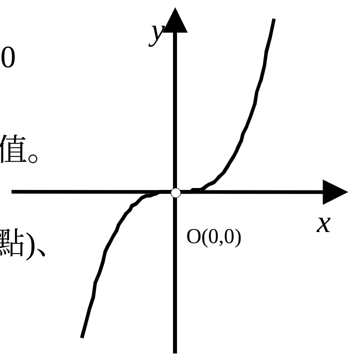
(2)導數與極值的關係：

若函數 $f(x)$在 $x=a$ 處有極值，而且 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分，則 $f'(a)=0$。

(a)定理中 $f'(a)$存在的條件，可以去掉嗎？　不可以！反例：$f(x)=|x|$，$a=0$

(b)定理一的逆定理成立嗎？

　逆定理不成立，反例 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 處 $f'(0)=0$，但 $f(x)$在 $x=0$ 不發生極值。



(c)對於一個函數 $f(x)$而言，它的極值只可能出現在下面這些點：

滿足 $f'(a)=0$ 的點 a，$f(x)$的不可微分的點(圖形上的尖點、跳躍點、轉折點)、$f(x)$的定義域的端點。

(3)如何用一階導數判別極值：

(a)函數的遞增與遞減：

若 $x_1>x_2$，則 $f(x_1)\ge f(x_2)$，具有上述性質的函數 $f(x)$稱為**遞增函數**。

若 $x_1>x_2$，則 $f(x_1)\le f(x_2)$，具有上述性質的函數 $f(x)$稱為**遞減函數**。

若 $x_1>x_2$，則 $f(x_1)>f(x_2)$，具有上述性質的函數 $f(x)$稱為**嚴格遞增函數**。

若 $x_1>x_2$，則 $f(x_1)<f(x_2)$，具有上述性質的函數 $f(x)$稱為**嚴格遞減函數。**

從圖形的觀點來看：

遞增函數的圖形向右移動時，圖形隨著上升，而遞減函數的圖形則剛好相反。

例如：$f(x)=x^3$ 為遞增函數，$g(x)=-x^3$ 為遞減函數。

(b)設 $f(x)$在(a,b)內每一點都可微分

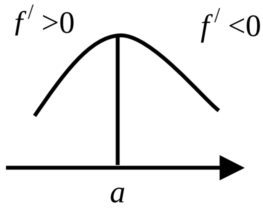
(1°)若 $f'(x)\geq 0$，$\forall x\in(a,b)$，則 $f(x)$在(a,b)上為遞增。

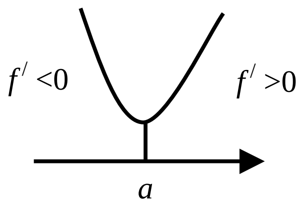
(2°)若 $f'(x)\leq 0$，$\forall x\in(a,b)$，則 $f(x)$在(a,b)上為遞減。

(c) **設函數 $f(x)$在 $x=a$ 的附近可微分，且 $f'(a)=0$。**

(1°)若在 a 點附近，當 $x<a$ 時，$f'(x)>0$；當 $x<a$ 時，$f'(x)<0$，　則 $f(x)$在 $x=a$ 處有(相對)極大值。

(2°)若在 a 點附近，當 $x<a$ 時，$f'(x)<0$；當 $x<a$ 時，$f'(x)>0$，　則 $f(x)$在 $x=a$ 處有(相對)極小值。





注意：當 $f'(a)=0$ 且 $x=a$ 兩側 $f'(x)$同號，那麼 $f(x)$在 $x=a$ 處不會發生極值。

(4)二次微分與凹凸性：

(a)**(函數凹性的二階函數判別法)**

設 f：$(a,b)\rightarrow \mathbf{R}$ 為一個二階可微分的函數。

(1) $f''(x)\leq 0$，$\forall x\in(a,b)\Leftrightarrow f(x)$在$(a,b)$內凹口向下。

(2) $f''(x)\geq 0$，$\forall x\in(a,b)\Leftrightarrow f(x)$在$(a,b)$內凹口向上。

(b)反曲點與二次導數的關係：

設函數 $f(x)$為一個至少可微分 2 次以上的函數，

若點$(a,f(a))$為函數 $f(x)$的反曲點，則 $f''(a)=0$。

(5)由一階及二階導函數判別函數的極值：

局部最高點附近$\Rightarrow$凹口向下

局部最低點附近$\Rightarrow$凹口向上

設 $f(x)$在(a,b)上可微分，設 $x_0\in(a,b)$且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)$存在。

(1)若 $f''(x_0)<0$，則 $f(x)$在 $x=x_0$ 處有相對極大值。

(2)若 $f''(x_0)>0$，則 $f(x)$在 $x=x_0$ 處有相對極小值。

(6)三次函數圖形的討論：

設三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$

$\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$

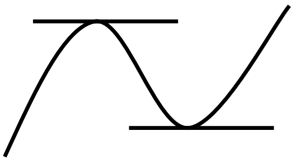
設 $f'(x)=0$ 有兩根α,β ，

而 $f''(\frac{-b}{3a})=0$，當 $x>\frac{-b}{3a}$與 $x<\frac{-b}{3a}$，$f''(x)$異號，所以$(\frac{-b}{3a}$，$f(\frac{-b}{3a}))$為反曲點。

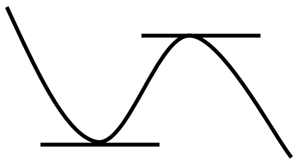
(a)設α、β為兩相異實數(令α<β)

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=3a(x-\alpha)(x-\beta)$， $f''(x)=3a(2x-\alpha-\beta)$

$a>0$



$a<0$

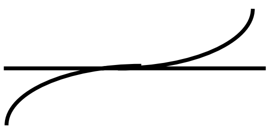


有一個極大，一個極小，一個反曲點

(b)設α=β為兩相等實根：

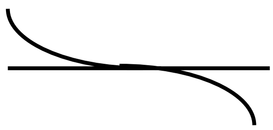
$f'(x)=3a(x-\alpha)^2$， $f''(x)=6a(x-\alpha)$

$a>0$



遞增函數，沒有極大極小點，反曲點有一水平切線

$a<0$

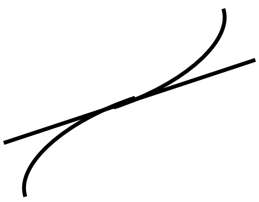


遞減函數，沒有極大極小點，反曲點有一水平切線

(c) α,β為兩虛數

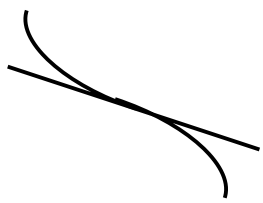
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$， $f''(x)=6ax+2b$

$a>0$



遞增函數，沒有極大極小點，反曲點沒有水平切線

$a<0$



遞減函數，沒有極大極小點，反曲點沒有水平切線

結論：設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$， $f''(x)=6ax+2b$， $\Delta=4(b^2-3ac)$

(1)$\Delta\neq 0$：$y=f(x)$的圖形有一個極大點、極小點、反曲點。

(2)$\Delta=0$：$y=f(x)$無極大點、極小點，只有一個反曲點，在反曲點有水平切線。

(3)$\Delta<0$：$y=f(x)$無極大點、極小點，只有一個反曲點，在反曲點有斜的切線。

曲線下的面積

要計算函數 $f(x)$的圖形與直線 $y=0,x=a,x=b$ 所圍成的區域 S 的面積時(假設 $f(x)\ge 0$，$\forall x\in[a,b]$)，可依上例分成三步驟：

第一步：分$[a,b]$為 n 等分，每等分長=$\frac{b-a}{n}$

第二步：

計算下和=$L_n=\frac{b-a}{n}$ $(m_1+m_2+\ldots m_n)$

計算上和=$U_n=\frac{b-a}{n}$ $(M_1+M_2+\ldots+M_n)$ 對於 $i=1,2,3,\ldots,n$

$m_i=f(x)$在$\left[a+\frac{(i-1)(b-a)}{n},a+\frac{i(b-a)}{n}\right]$的最小值=下矩形的高。

$M_i=f(x)$在$\left[a+\frac{(i-1)(b-a)}{n},a+\frac{i(b-a)}{n}\right]$的最大值=上矩形的高。

故 $L_n\le S\le U_n$，$\forall n\in N$

第三步：$\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\lim\limits_{n\to\infty}U_n$ =A (夾擠原理)

根據上面三個步驟，可得區域 S 的面積為 A。