第四十一單元拋物線

(甲)圓錐曲線發展的簡史

圓錐曲線的研究，早在古希臘時代就有人爲了「**倍立方問題**」引出了圓錐曲線的概念。到了西元前 400 年左右，Menaechmus 以幾何方法來探索「倍立方問題」，他利用頂角分別爲直角、銳角、鈍角等三種不同的直圓錐面。與垂直於錐面的母線的平面截出了拋物線、橢圓與雙曲線等三種曲線(註：雙曲線只有一支)。Menaechmus 爲了將拋物線的概念與「倍立方問題」結合在一起，他曾推得一個拋物線的關係，以現代解析幾何的表達，就是 $y^2=cx$ 的形式，其中 c 是頂點到截平面的距離有關的常數，同樣，對橢圓與雙曲線也作了」深入的探討。

Menaechmus 之後，希臘數學家持續地有系統的研究，其中 Euclid(330~275B.C.)、Archimedes(287~212B.C.)、Appllonius 等人都有很多的著作。Archimedes 曾利用「**窮竭法**」計算出拋物線與直線圍成的弧形區域面積，並求得橢圓的面積，而 Appllonius 更完成了八卷有關圓錐曲線(Conic Section)的著作，而圓錐曲線純幾何的研究，到了 Appllonius 的時代，可說達到了顛峰。

在 Appllonius 的著作中，他利用一個圓錐面與不同斜度的截平面截出了橢圓、拋物線與雙曲線，而且也確定了雙曲線是兩支曲線的概念，三種曲線的命名最早也是由他提出來的。在八卷著作中，Appllonius 對切線與平行弦的中點軌跡都有詳細的介紹，他也得到橢圓和雙曲線的焦半徑性質：「橢圓上任一點到兩焦點的距離和爲一定值」、「雙曲線上的點到兩焦點的距離差的絕對值是一個定值」。Appllonius 更進一步探索了橢圓與雙曲線的光學性質，但對於圓錐曲線的焦點、準線與離心率的研究，卻在 Appllonius 後約西元三世紀左右，由幾何學家 Pappus 提出來的。圓錐曲線的綜合幾何法研究，到此時已經相當完備了。

直到十六、七世紀後，由於解析幾何的引入，以及實際問題的需要，圓錐曲線的研究，在燃起新的熱潮，利用軌跡的概念，重新探索圓錐曲線與錐線的性質。
如 1579 年，蒙特將橢圓定義爲：平面上到兩定點的距離和爲一定值的點的軌跡。1604 年 Keppler 提出了連續變動的理論：他從一雙曲線開始，設它的兩焦點 F_1 與 F_2 在直線 l 上，且 F_1 固定不動，F_2 沿著直線 l 逐步的向遠方移動，這時候雙曲線的一支也隨著 F_2 的移動向遠處移動，當 F_2 移至無窮遠的地方，F_2 及一支曲線就消失了，這時候雙曲線只剩下一支，而開口也變小了，它變成了拋物線。當 F_2 從 F_1 的左側移到無窮遠處，而從 F_1 的右側又逐步的向 F_1 移動時，拋物線又變成了橢圓，又當 F_2 移到 F_1 的位置時，橢圓就變成圓的圖形。因此就 Keppler 的想法而言，圓錐曲線是一體的。事實上，Keppler 所提出的大膽想法，從圓錐與平面的截痕的觀點是可以理解的。
從 Keppler 提出的連續變動理論及無窮遠點的概念之後，法國的射影幾何學家 Desargues、Blaise Pascal、Hire 也相繼的利用射影幾何學的觀點，對圓錐曲線作更進一步的研究。

當笛卡兒與費馬建立了解析幾何的概念與方法之後，他們也發現圓、橢圓、雙曲線和拋物線，它們的方程式都是二次式，但是利用解析幾何系統性的研究圓錐曲線是

1655 年後，英國數學家 Wallis 導出圓錐曲線的方程式之後，才利用方程式的方法證明圓錐曲線的各種性質。

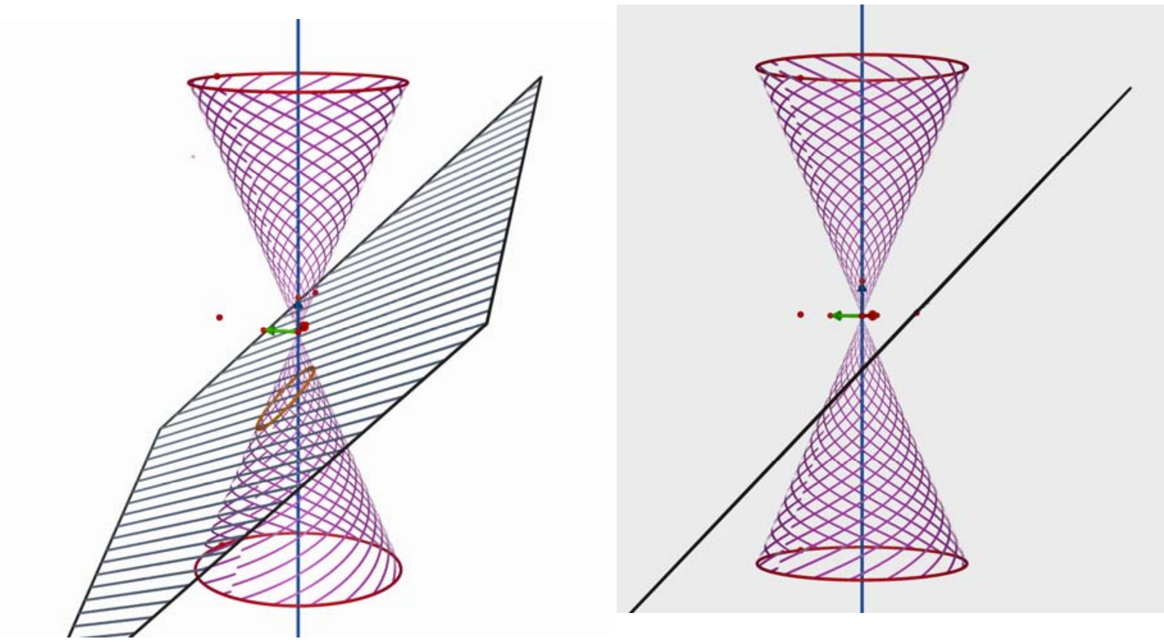
(乙)圓錐截痕

設 L_0 與 L 是相交於 V 點的兩條直線，讓 L 以 L_0 爲軸旋轉，所得的曲面就是一個直圓錐面Ω，

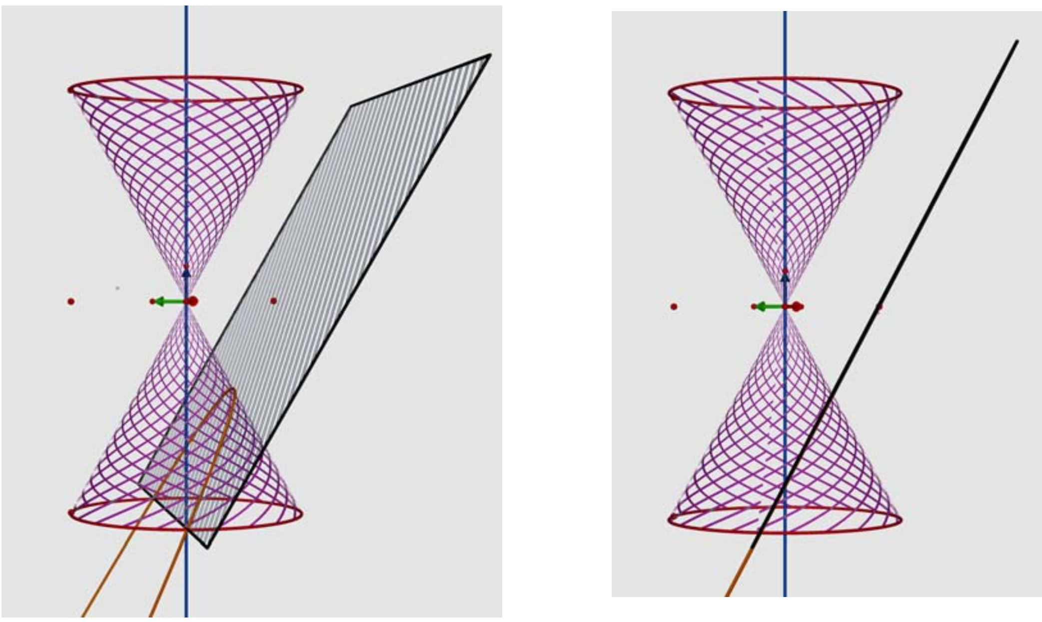
(I)非退化的圓錐曲線：

若用不過 O 點的平面 E 去切割Ω，所得的曲線稱爲圓錐曲線。設 L_0 和 L 的夾角爲α，割平面和軸線 L_1 的夾角爲β，

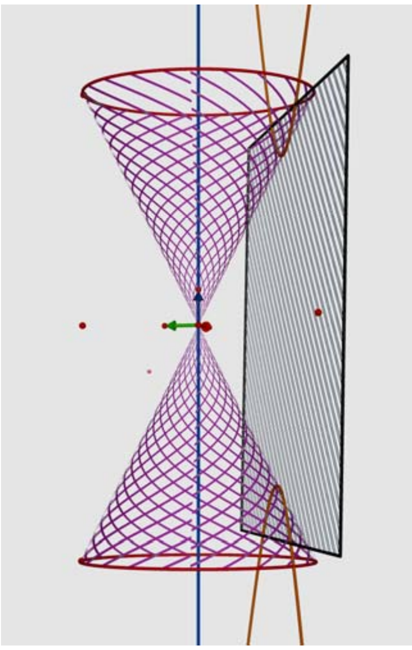
(a)當$\frac{\pi}{2}>\beta>\alpha$時，截痕曲線稱爲**橢圓**；($\beta=\frac{\pi}{2}$時，截痕曲線稱爲**圓**)

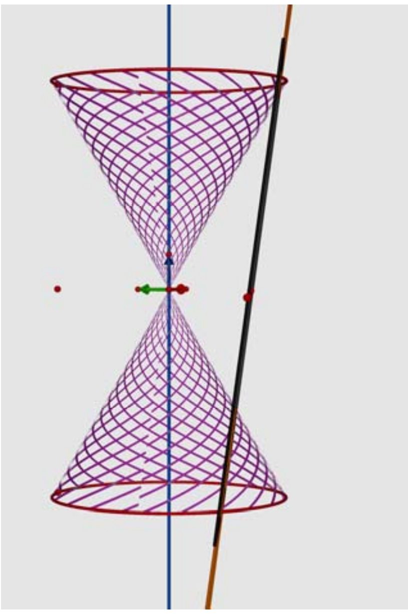


(b)當β=α時，截痕曲線稱爲**拋物線**

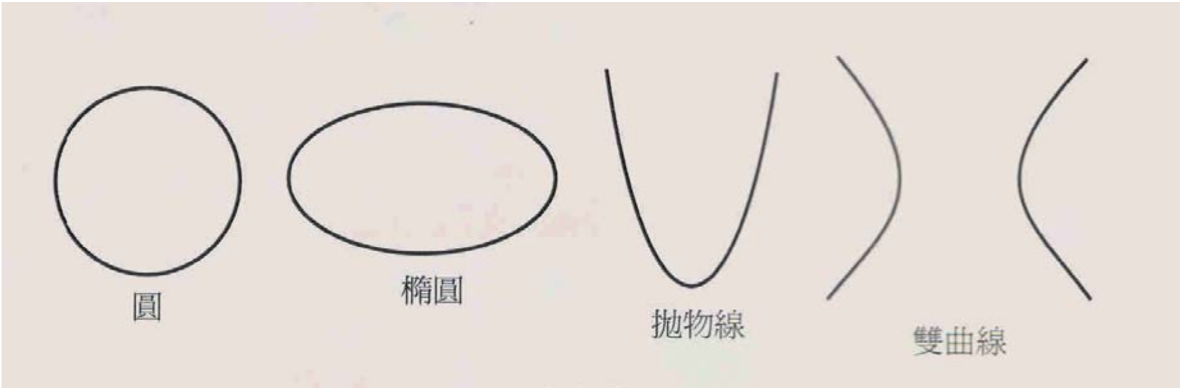


(c)當 $0\le\beta<\alpha$ 時，截痕曲線稱爲**雙曲線**



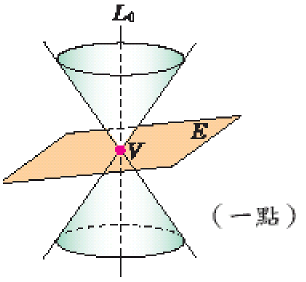


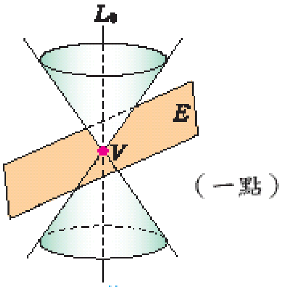
結合上面所述的截痕，可得以下幾個圖形：

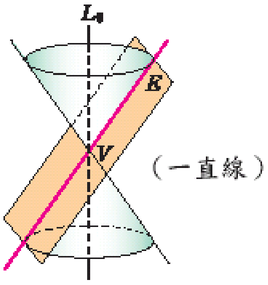


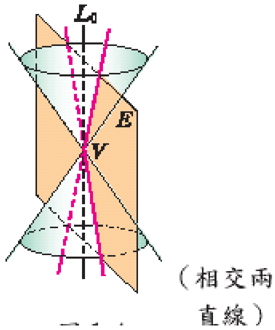
(Ⅱ)退化的圓錐曲線：

若用過頂點 V 的平面去切割Ω，可得退化的圓錐曲線，此時的截痕分別爲一點、一條直線、兩條相交直線



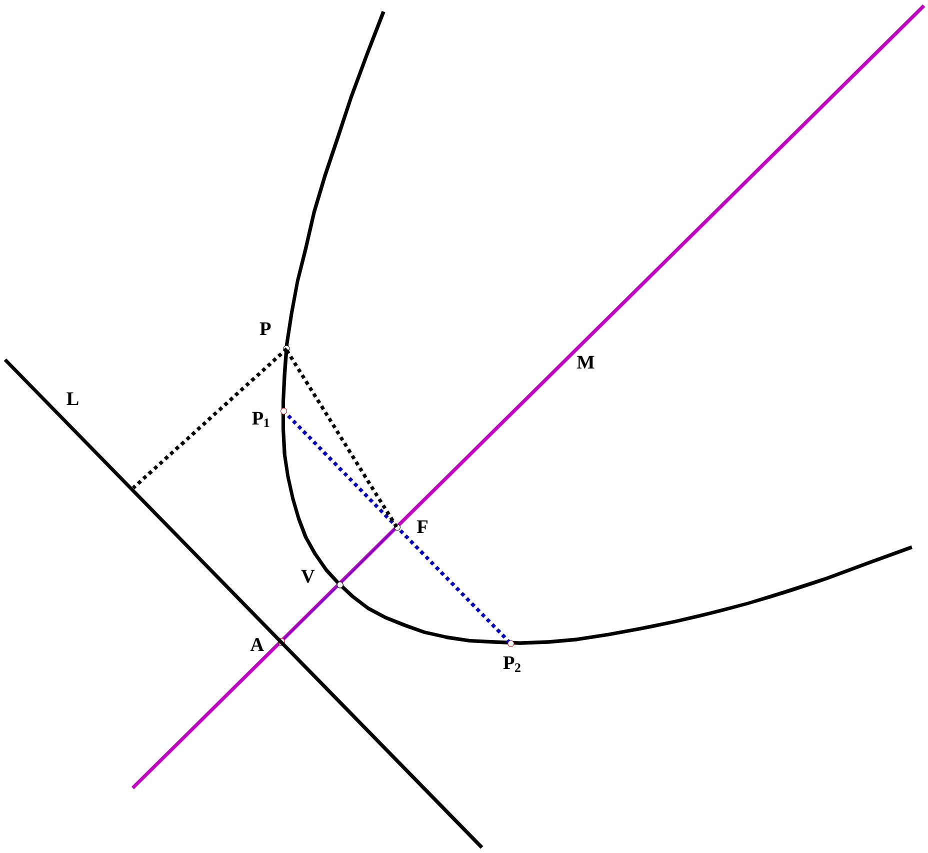






(丙)拋物線的定義與基本性質

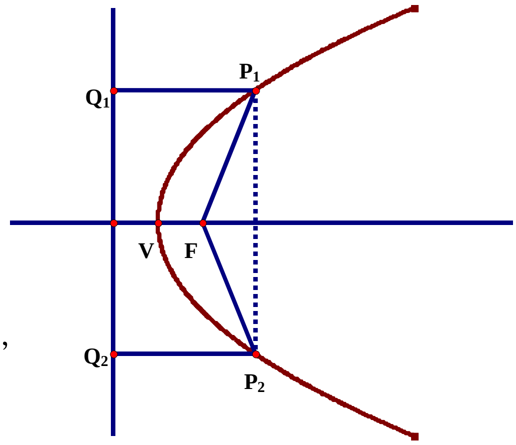
(1)定義：
設平面上有一定直線 L、定點 F，其中 F 不在 L 上，則在平面上到直線的距離等於到定點 F 的所有動點 P 形成的圖形稱爲**拋物線**。



(2)拋物線的名詞介紹：

(a)直線 L 稱爲**準線**，F 點稱爲**焦點**。
(b)過焦點垂直準線的直線 M 稱爲**對稱軸**(簡稱)**軸**
(c)對稱軸與拋物線的交點 V 稱爲**頂點**，VF 稱爲**焦距**。
(d)拋物線上兩點的連線段稱爲**弦**，過焦點的弦稱爲**焦弦**。

垂直對稱軸的焦弦$\overline{P_1P_2}$稱爲**正焦弦**。



[討論]：
如何說明過焦點垂直準線的直線 M 爲拋物線的對稱軸？
[說明]：
設 P_1 是拋物線上的點($P_1 \neq V$)，P_2 是 P_1 對直線 M 的對稱點，P_1、P_2 分別對準線 L 作垂線，垂足分別爲 Q_1、Q_2

因爲$\overline{P_1F}=\overline{P_2F}$且$\overline{P_1F}=\overline{P_1Q_1}=\overline{P_2Q_2}$,故$\overline{P_2F}=\overline{P_2Q_2}$，因此 P_2 在拋物線上。

(3)拋物線的基本性質：

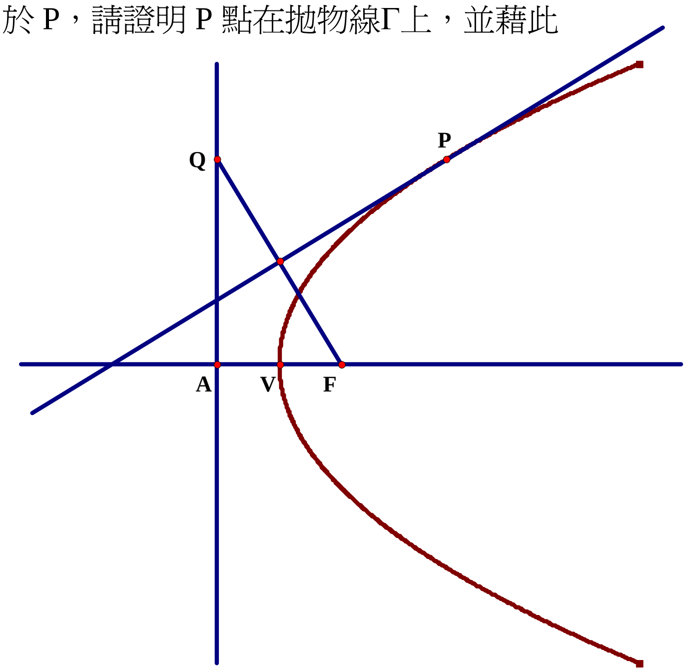
(a)設對稱軸與準線的交點爲 A，則頂點 V 爲$\overline{AF}$的中點。

[說明]：因爲 V 爲拋物線上的點，VF=d(V,L)=$\overline{AV}$，所以 V 爲$\overline{AF}$的中點。

(b)拋物線的正焦弦長爲焦距的 4 倍。

[說明]：因爲 $P_1P_2=2P_1F$，且 $P_1F=d(P_1,L)=\overline{AF}=2\cdot\overline{VF}$ 所以正焦弦長 $P_1P_2=4\cdot VF$。

[例題1] (拋物線的作圖)
設拋物線Γ以 L 爲準線，F 爲焦點，在 L 上任取一點 Q，過點 Q 作直線 L 的垂線 N，再作$\overline{QF}$的中垂線交直線 N 於 P，請證明 P 點在拋物線Γ上，並藉此說明拋物線沒有界限。



[例題2] 在座標平面上，設Γ是以 F(3,−1)爲焦點，L：$x-y+1=0$ 爲準線的拋物線，求(1)Γ的頂點。(2)Γ的對稱軸方程式。(3)正焦弦長(4)Γ的方程式
Ans：(1)$(\frac{7}{4},\frac{1}{4})$ (2)$x+y-2=0$ (3)$5\sqrt{2}$ (4)$x^2+2xy+y^2-14x+6y+19=0$

(練習1) 關於方程式$|\frac{3x+y-19}{\sqrt{10}}|=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$

所代表的錐線圖形Γ，下列何者爲真？

(A)Γ爲拋物線 (B)(1,−2)爲Γ的焦點

(C)$3x+y-19=0$ 爲Γ的漸近線

(D)$x-3y+7=0$ 爲Γ的對稱軸

(E) (3,1)是Γ的頂點。 Ans：(A)(D)

(練習2) 若一拋物線以 F(1,1)爲焦點，L：$x+y+2=0$ 爲準線，求(1)拋物線的方程式(2)對稱軸方程式(3)正焦弦長(4)頂點坐標

Ans ：(1)$x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$(2)$x-y=0$(3)$4\sqrt{2}$(4)(0,0)

(練習3) 設一拋物線之頂點 V(1,2)，準線 L 之方程式 $x+y+6=0$，求其焦點坐標。

Ans：$(\frac{11}{2},\frac{13}{2})$

(練習4) 設拋物線Γ的焦點 F、準線 L，平面上的點，除了Γ之外，被分成兩個區域，其中包含焦點 F 的區域稱爲拋物線內部，不包含焦點 F 的區域稱爲拋物線的外部。試拋物線的定義證明：

(1)若 R 點在拋物線內部，則$\overline{RF}<d(R,L)$。

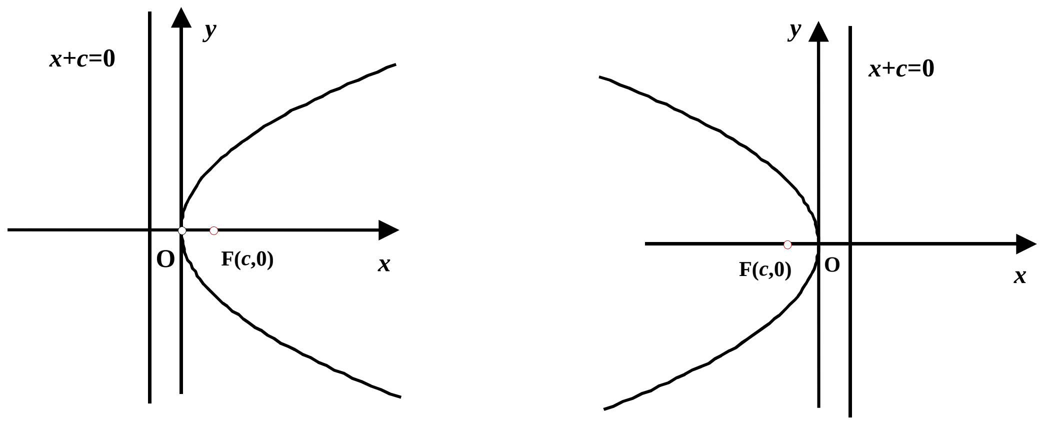
(2)若 R 點在拋物線外部，則$\overline{RF}>d(R,L)$。

(丁)拋物線的標準式

設拋物線Γ的焦點 F 爲$(c,0)$、準線 L：$x+c=0$，則Γ的方程式爲 $y^2=4cx$。

設 P(x,y)爲Γ上任意點，根據定義 PF=d(P,L)可得

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = |x+c| \Leftrightarrow (x-c)^2+y^2=(x+c)^2 \Leftrightarrow y^2=4cx$。



方程式 $y^2=4cx$ 的特徵：

(a)$c>0$，開口向右；$c<0$，開口向左。

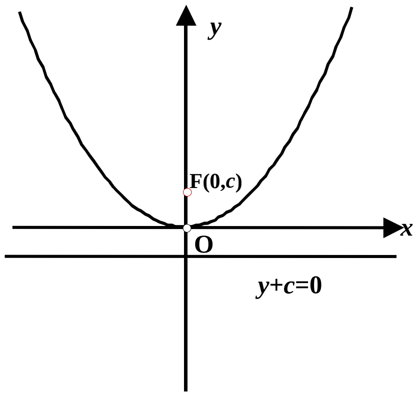
(b)焦距=$|c|$，正焦弦長=$4|c|$。

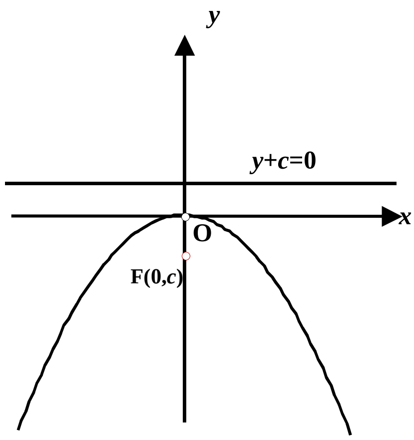
(c)頂點(0,0)

(2) **設拋物線Γ的焦點 F 為(0,c)、準線 L：$y+c=0$，則Γ的方程式為 $x^2=4cy$。**

設 P(x,y)為Γ上任意點，根據定義 PF=d(P,L)可得

$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=|y+c| \Leftrightarrow x^2+(y-c)^2=(y+c)^2 \Leftrightarrow x^2=4cy$。





方程式 $x^2=4cy$ 的特徵：

(a)$c>0$，開口向上；$c<0$，開口向下。

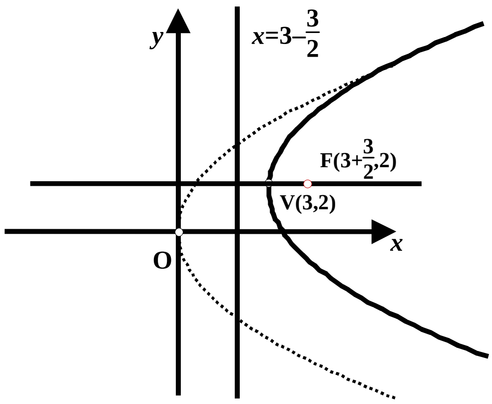
(b)焦距=$|c|$，正焦弦長=$4|c|$。

(c)頂點(0,0)

(3)標準式的平移：

例子：

將拋物線Γ：$y^2=6x$ 沿著向量 $\vec{l}=(3,2)$平行移動得到一個新的拋物線Γ$'$，試求Γ$'$的方程式。



[解答]：

(1)設Γ$'$上的任一點 Q(x',y')，因為 Q(x',y')沿向量 $-\vec{l}=(-3,-2)$可得 P(x,y)在Γ上，即 $x-x'=-3$，$y-y'=-2$

$\Rightarrow x=x'-3$，$y'=y-2 \Rightarrow (y'-2)^2=6(x'-3)$。

因此Γ$'$ 的方程式為$(y-2)^2=6(x-3)$。

(2)考慮Γ的頂點(0,0)、焦點$(\frac{3}{2},0)$、正焦弦長=6、對稱軸 $y=0$、準線 $x=\frac{-3}{2}$。

考慮Γ'的頂點(3,2)、焦點($\frac{3}{2}+3$,2)、正焦弦長=6、對稱軸 y=3、準線 $x=\frac{-3}{2}+3$。

(3)由(1)(2)，可以得知就點坐標、方程式而言，形式會改變，但正焦弦長不變。

結論：

(1)方程式 $f(x,y)=0$ 的圖形沿向量 $\overrightarrow{l}=(h,k)$平移，所得的圖形的方程式

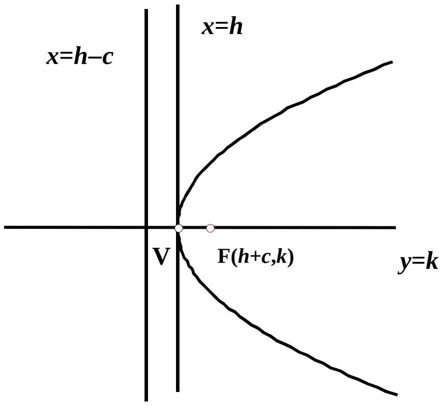
爲 $f(x-h,y-k)=0$。(即原方程式中的 x,y 用 $x-h,y-k$ 來取代)

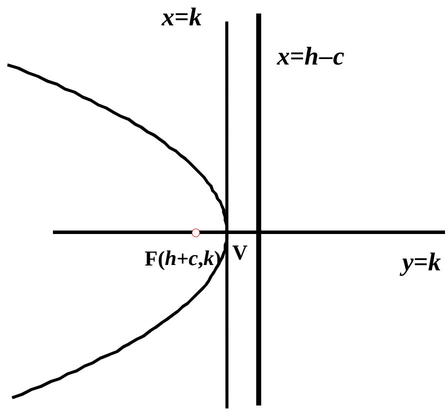
(2)方程式$(y-k)^2=4c(x-h)$的特徵：

(a)$c>0$，開口向右；$c<0$，開口向左。

(b)焦距=$|c|$，正焦弦長=$4|c|$。

(c)頂點(h,k)



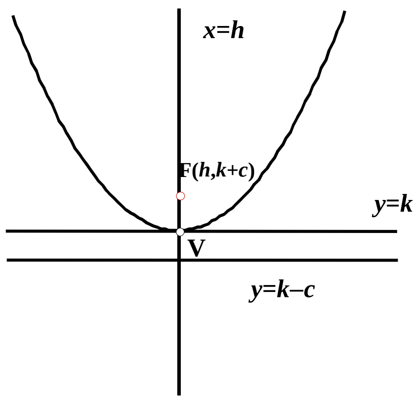


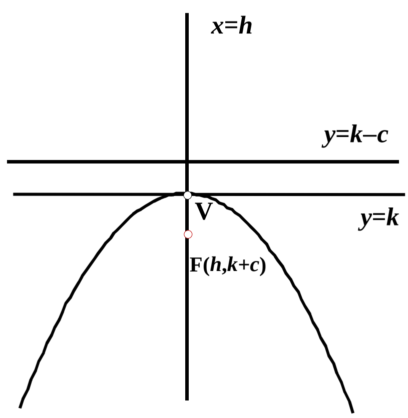
(3)方程式$(x-h)^2=4c(y-k)$的特徵：

(a)$c>0$，開口向上；$c<0$，開口向下。

(b)焦距=$|c|$，正焦弦長=$4|c|$。

(c)頂點(h,k)





[例題3] 求拋物線 $x^2-8x+3y+10=0$ 的(1)對稱軸(2)頂點(3)焦點(4)準線(5)正焦弦長(6)圖形 Ans：(1)$x-4=0$ (2)V(4,2)(3)F(4,$\frac{5}{4}$)(4)$y-\frac{11}{4}=0$(5)3

[例題4] 求合乎下列條件之拋物線方程式：

(1)通過(2,3)、(−1,6)二點，其對稱軸為 $x=1$

(2)焦點(3,−4)，準線與軸的交點為(−1,−4)

(3)焦點(−2,0)、準線平行於 y 軸，正焦弦長為 12。

(4)正焦弦的兩端點為(1,5)、(1,−1)

Ans：(1)$(x-1)^2=y-2$　(2)$(y+4)^2=8(x-1)$

(3)$y^2=-12(x-1)$或 $y^2=12(x+5)$　(4)$(y-2)^2=6(x+\frac{1}{2})$或$(y-2)^2=-6(x-\frac{5}{2})$

(練習5) 求拋物線$(y+1)^2=-8(x-3)$的頂點、焦點坐標及對稱軸、準線方程式。

Ans：頂點(3,−1)、焦點(1,−1)，準線 $x=5$、對稱軸 $y=-1$

(練習6) 求合乎下列條件的拋物線方程式：

(1)頂點 V(2,3)，軸平行 x 軸，正焦弦長=9

(2)準線平行 x 軸，焦點(3,−2)且頂點在焦點上方，正焦弦長 16

(3)頂點在 y 軸上，對稱軸為 $y=2$，而焦點在直線 $x+2y=7$ 上

(4)頂點在 x 軸上，對稱軸平行 y 軸，且過點(1,1)、(4,4)

(5)已知頂點 V(5,−2)，準線方程式 L：$y+4=0$

Ans：(1)$(y-3)^2=9(x-2)$或$(y-3)^2=-9(x-2)$ (2)$(x-3)^2=-16(y-2)$

(3)$(y-2)^2=12x$ (4)$(x-2)^2=y$ 或 $(x+2)^2=9y$ (5) $(x-5)^2=8(y+2)$

(練習7) 在拋物線 $y^2=20x$，求一點 P 使 P 與焦點的距離等於 15，求 P 的坐標爲何？Ans：P(10, $\pm10\sqrt{2}$)

(練習8) 設二次函數的圖形 $y=f(x)=2x^2-4x+7$，
(1)請將此二次函數的圖形化成$(x-h)^2=4c(y-k)$的形式。
(2)試求此拋物線的焦點與正焦弦長
Ans：(1)$(x-1)^2=\frac{1}{2}(y-5)$ (2)焦點$(1,\frac{41}{8})$、正焦弦長=$\frac{1}{2}$

[例題5] 坐標平面上有一以點 V(0,3)爲頂點、F(0,6)爲焦點的拋物線。設 P(a,b)爲此拋物線上一點，Q$(a,0)$爲 P 在 x 軸上的投影，滿足$\angle$FPQ=60°，則 b=________。(2007 學科能力測驗) Ans：12

[例題6] 過點(7,8)且與 $y^2=4x$ 同焦點且同軸的拋物線方程式。
Ans：$y^2=-32(x-9)$或 $y^2=8(x+1)$

抛物線的參數式⇒可求最大值及最小值
標準式的拋物線參數式
1.$y^2=4cx$ 的參數式爲________________________($t\in$R)
2.$x^2=4cy$ 的參數式爲________________________($t\in$R)

[例題7] (拋物線的參數式)

試求拋物線 $y=x^2$ 上距離 A(0,1)最近之點。Ans：$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$或$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$

(練習9) 設拋物線之軸與 x 軸垂直且過 A(0,2)、B(3,5)，而其頂點在直線 $x-y=0$ 上，求其方程式。　Ans：$(x-6)^2=-9(y-6)$

(練習10) 拋物線 $y=x(ax+b)$之焦點(4,−3)求數對(a,b)=？Ans：$(\frac{1}{4},-2)$或$(\frac{-1}{16},\frac{1}{2})$

(練習11) 設拋物線之頂點(1,16)其軸平行 y 軸，若其圖形截 x 軸所得線段之長爲 8，求其方程式。　Ans：$(x-1)^2=-(y-16)$

(練習12) 在拋物線 $y^2=12x$ 上求一點 P 使得 P 到焦點 F 與定點 A(5,4)之距離和 PF+PA 爲最小，求 P 點的坐標爲何？Ans：$(\frac{4}{3},4)$

(練習13) 試求拋物線 $y^2=16x$ 上與直線 $4x-3y+24=0$ 距離最短之點的坐標，及最短距離？Ans：$(\frac{9}{4},6)$，最短距離爲 3。

綜合練習

(1) 求下列各拋物線之方程式:

(a)頂點$(-1,2)$，準線 $x-2=0$．

(b)焦點$(1,-1)$，準線爲 $y+3=0$．

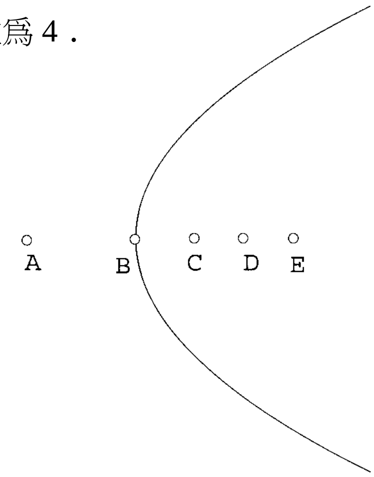
(c)焦點$(1,1)$，對稱軸 $x-1=0$，焦點與準線的距離爲 4．

(d)焦點$(-2,0)$，準線平行於 y 軸，正焦弦長 8．

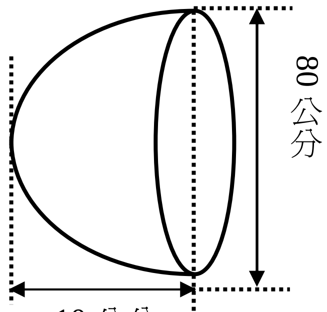
(e)以 $y+1=0$ 爲對稱軸且過$(3,1)$，$(9,3)$．

(f)與 $y^2=4x$ 同軸同焦點且過$(7,8)$．

(2) 右下圖爲一拋物線的部分圖形，
且 A、B、C、D、E 五個點中有一爲其焦點。
試判斷哪一點是其焦點？
(可利用你手邊現有簡易測量工具)
(1) A(2) B(3) C (4) D (5) E (90 學科)



(3) 一拋物面鏡的橫截面縱深 10 公分，橫長 80 公分，
如圖，則焦距長爲(A)10 (B)20 (C)30 (D)40 (E)50 公分。



(4) 設一拋物線的方程式爲$\dfrac{(3x+4y-7)^2}{25}=(x-4)^2+(y-5)^2$，則此拋物線的

(a)焦點坐標爲__________， (b)頂點坐標爲__________，

(c)準線方程式是__________， (d)對稱軸方程式是__________，

(e)正焦弦長爲__________ ．

(5) 設拋物線 $y^2=12x$ 上一點 P 與 A(3,0)、B(b,0)，其中 $b>3$，形成一個正三角形 PAB，試求 b=？

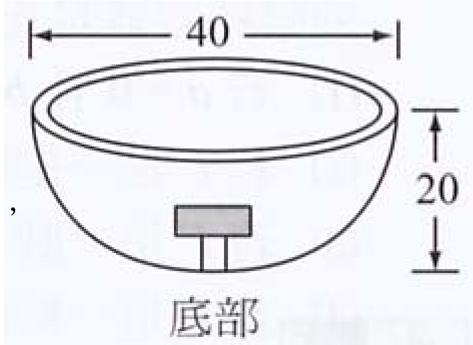
(6) 拋物線通過 P(6 , 5)且和拋物線 $y^2-4x+6y+5=0$ 有相同的對稱軸與相同的焦點，求此拋物線的方程式。

(7) 一拋物線的準線垂直 x 軸，且過(1,0)，(–1,1)，(5,–1)三點，則此拋物線方程式爲何？其焦點坐標爲何？

(8) 有一開口向上的拋物線Γ，Γ的焦點爲 F，直線 PQ 過 F 並且交Γ於 P、Q 兩點，

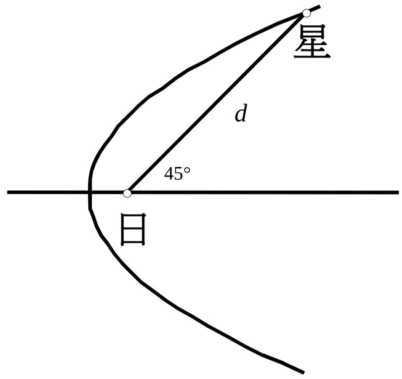
已知$\overline{PF}=4$、$\overline{QF}=6$，令θ爲直線 PQ 與對稱軸的銳夾角，試問 cosθ=？

(9) $y=ax^2+bx+c(a>0)$之焦點$(-1,3)$且圖形過$(3,3)$，則數對(a,b,c)=？



(10) 有一太陽爐灶，它由拋物線繞軸旋轉而成之拋物面做成的，開口直徑 40 公分，開口距底部之深爲 20 公分，試問烤肉盤應置於距底部＿＿＿＿＿公分，才容易烤熟。(烤肉盤至於焦點處才容易烤熟肉類)

(11) 某慧星軌道爲一拋物線，而以太陽爲焦點，當此慧星與太陽距離爲 d 時，兩者連線與拋物線之軸成 45° 之夾角(如圖)，則
(a)當兩者與軸垂直時，其距離爲＿＿＿＿＿。
(b)兩者最近時，其距離爲＿＿＿＿。

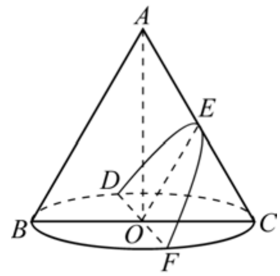


(12) 拋物線 $x^2=8y$ 上有兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$且$\overline{AB}$過焦點 F，，已知$\overline{AB}=16$ 試問 y_1+y_2=？　[考慮拋物線的定義]

(13) 已知拋物線 $y=ax^2+bx+2a+b(a\neq0)$之頂點爲(1,2)，求 a,b 之值。

(14) 設 a 爲實數，試求拋物線 $y=x^2+ax+1$ 的頂點所成軌跡的方程式。

(15) 如右圖，直圓錐頂點爲 A，$\overline{BC}$爲底面之直徑，O 爲圓心，
$\overline{AE}=\overline{CE}$，$\overline{DF}\perp\overline{BC}$於 O，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=6$，
則 D、E、F 三點所在平面截圓錐得一截痕，
則其正焦弦長爲＿＿＿＿＿。



(16) 若 P 爲拋物線 $y=\frac{1}{2}x^2+2x+3$ 上的一點，A(1,−1)、B(3,2)，求ΔABP 面積之最小值。

(17) 坐標平面上給定點 $A(\frac{9}{4},2)$、直線 L：$y=-5$ 與拋物線Γ：$x^2=8y$。以 $d(P,L)$表示點 P 到直線 L 的距離。若點 P 在Γ上變動，則$|d(P,L)-\overline{AP}|$之最大値爲＿＿＿＿＿＿。

(18) 設 a、b 爲實數。已知坐標平面上拋物線 $y=x^2+ax+b$ 與 x 軸交於 P、Q 兩點，且 $\overline{PQ}=7$。若拋物線 $y=x^2+ax+(b+2)$與 x 軸交於 R、S，則$\overline{RS}$=＿＿＿＿
(2010 學科能力測驗)

進階問題

(19) 設 $P(a^2,2a)$，$a>0$，為拋物線 $y^2=4x$ 上一點，P 與焦點之連線交拋物線於另一點 Q。設點 R 的坐標為(3,0)，則△PQR 的面積為_________，若 P 在拋物線上移動，當 a=________時，△PQR 的面積最小。

(20) 設 $\overline{BC}$ 為等腰三角形 ABC 之底邊，且 $\overline{BC}=2$，點 A 在以 B 為頂點 C 為焦點的一拋物線上，求ΔABC 之腰長。

(21) 若拋物線之頂點 V(−1,0)其軸為 x 軸，與圓 $x^2+y^2-3x=0$ 恰交兩點，求拋物線的方程式。

(22) 求函數 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}+\sqrt{x^4-3x^2-8x+20}$ 的最小值？
(88 年北市數學能力競賽)

綜合練習解答

(1) (a)$(y-2)^2=-12(x+1)$, (b)$(x-1)^2=4(y+2)$, (c)$(x-1)^2=8(y+1)$或$(x-1)^2=-8(y-3)$, (d)$y^2=-8x$ 或 $y^2=8(x+4)$, (e)$(y+1)^2=2(x-1)$, (f)$y^2=8(x+1)$或 $y^2=-32(x-9)$

(2) (3)

(3) (D)

(4) (a)(4 , 5)(b)($\frac{5}{2}$, 3)(c)$3x+4y-7=0$(d)$4x-3y-1=0$(e)10

(5) $b=15$

(6) $(y+3)^2=8(x+2)$或$(y+3)^2=-32(x-8)$

(7) $x=y^2-3y+1$；$(-1，\frac{3}{2})$

(8) $\frac{1}{5}$

(9) $(a,b,c)=(\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{9}{8})$

(10) 5

(11) (a)$\frac{2-\sqrt{2}}{2}d$ (b)$\frac{2-\sqrt{2}}{4}d$

(12) 12

(13) $a=-2,b=4$

(14) $y=-x^2+1$

(15) 3[提示：再拋物線所在的平面上建立一個坐標系，取 E(0,0)、O(3,0)、D(3,3)、F(3,−3)，可令拋物線為 $y^2=4cx$
再代入 D(3,3) ⇒$4c=9$ ⇒正焦弦長=9]

(16) $\frac{43}{8}$ [提示：可令 $P(x,\frac{1}{2}t^2+2t+3)$，計算 P 點到直線 AB 的距離的最小值]

(17) $\frac{21}{4}$

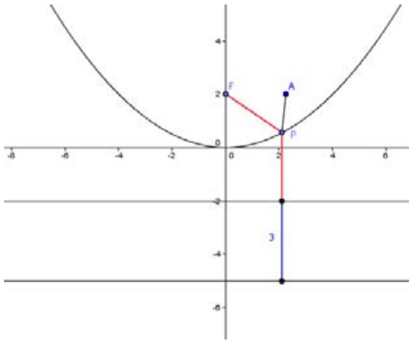
[解法]：

設 $x^2=8y$ 的焦點為 F，準線為 L'

所以 F(0,2)、L'：$y=-2$，依據拋物線的定義，$d(P,L')=\overline{PF}$

而 $d(P,L)=d(P,L')+3$，故$|d(P,L)-\overline{AP}|=|d(P,L')+3-\overline{AP}|=|\overline{PF}-\overline{AP}+3|$，即

求$|d(P,L)-\overline{AP}|$之最大值 $\Leftrightarrow$ 求$|\overline{PF}-\overline{AP}+3|$之最大值



因為$|\overline{PF}-\overline{AP}|\leq\overline{AF}$，且等號成立時 F、A、P 三點共線

所以$|\overline{PF}-\overline{AP}+3|\leq\overline{AF}+3=\dfrac{21}{4}$，當 F−A−P 時等號會成立。

(18) $\sqrt{41}$

[解法]：

設 $R(x_1,y_1)$、$S(x_2,y_2)$、$P(u_1,v_1)$、$Q(u_2,v_2)$

依題意，$x^2+ax+b=0$ 兩根為 u_1、u_2，且$\overline{PQ}=|u_1-u_2|=7$；

$x^2+ax+(b+2)=0$ 兩根為 x_1、x_2，且$\overline{RS}=|x_1-x_2|$

由根與係數的關係，可以得知：

$u_1+u_2=-a$，$u_1u_2=b\Rightarrow 49=(u_1-u_2)^2=(u_1+u_2)^2-4u_1u_2=a^2-4b$

$x_1+x_2=-a$，$x_1x_2=b+2\Rightarrow(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=a^2-4(b+2)=a^2-4b-8=41$

故$\overline{RS}=\sqrt{41}$ 。

(19) △PQR 的面積為 $2a+\dfrac{2}{a}$，$a=1$

(20) 3[提示：建立坐標系取 B(0,0)、C(2,0)⇒此時拋物線方程式為 $y^2=8x$，再令 $A(2,y)$，代入方程式計算 y，再計算腰長]

(21) $y^2=x+1$[提示：令拋物線方程式為 $y^2=k(x+1)$，因為圓與拋物線均對稱於 x 軸，所以兩交點亦對稱 x 軸，因此聯立方程組$\begin{cases} y^2=k(x+1) \\ x^2+y^2-3x=0 \end{cases}$的解為 (x,y_1)、(x,y_2)，因此將 $y^2=k(x+1)$代入 $x^2+y^2-3x=0$ 中，可得 $x^2+(k-3)x+k=0$ 只有一個正解⇒$D=(k-3)^2-4k=0$ ⇒$k=1$ 或 9，但重根為正根，因此 $k=1$]

(22) 4 [提示：$x^4-3x^2+4=(x-0)^2+(x^2-2)^2$ ，$x^4-3x^2-8x+20=(x-4)^2+(x^2-2)^2$ 考慮動點 $P(x,x^2)$(P 在拋物線 $y=x^2$ 上)及兩定點(0,2)，(4,2)距離的最小值]