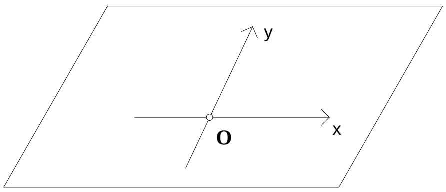
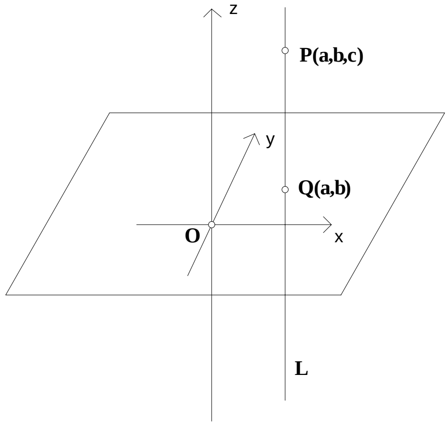
§2−2 空間坐標與空間向量

(甲)空間坐標的引入

(1)建立空間坐標系：

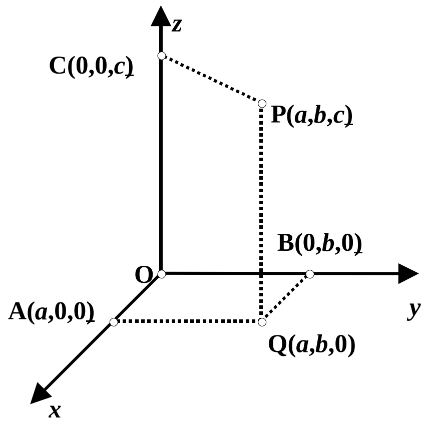




　在空間中的一個平面E上，建立一個直角坐標系，以O為原點，兩軸是x軸與y軸，則平面上每一點都有一個實數對(x,y)做為坐標。但在不在這個平面上的點如何描述呢？

　不在此平面上的點P必在平面E的上方或下方，所以對於空間中一點P做一直線L垂直E於Q，假設Q點的坐標為(a,b)，再將L以Q為原點坐標化，設P點在數線L上的坐標為c，則a,b,c三數可以清楚的定出P點的空間位置。為了避免過P點且垂直平面E的L隨P點不同兒平行變動，所以固定過原點O做一數線垂直平面E，並稱之為***z*軸**。

(2)空間坐標系：



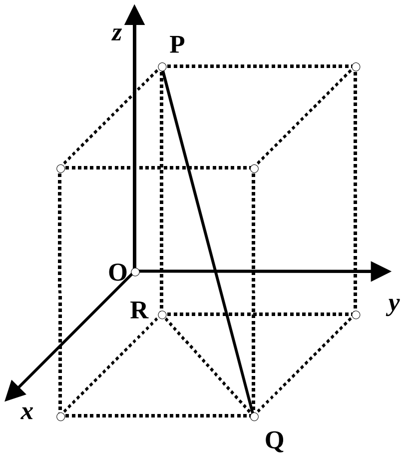
[名詞解釋]：

x軸、y軸再加上z軸就成為一個**空間坐標系**，這三個軸稱為**坐標軸**。它們兩兩互相垂直，且交會於同一點，即**原點O**，***x*軸與*y*軸所決定的平面稱為*xy*平面**，同理亦有yz平面、zx平面，這三個平面稱為坐標平面。

[如何決定坐標]：

P為空間中一點，若過一點P做一直線L垂直xy平面，設交點為Q，Q點在xy平面的坐標為(a,b)，再考慮P點在z軸上的投影點C，設C點在z軸上的直線坐標為c，則將P點的坐標記為(a,b,c)，其中a,b,c分別為P點的x,y,z的坐標。

[討論]：
(a)若Q對x,y軸的投影點爲A、B點，請問P點對於x,y軸的投影點會不會是A、B點呢？
(b)這樣定義的P點坐標會不會是唯一呢？



(3)空間中的距離公式：
設P(x_1,y_1,z_1)、Q(x_2,y_2,z_2)爲空間中兩點，
則$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$。
[證明]：如圖，R(x_1,y_1,z_2)、

$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2$

$\Rightarrow\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$。

(4)投影與對稱點：
(a)點P在各坐標平面與各坐標軸的投影點：

點P(x,y,z)對yz平面之投影點爲 $(0,y,z)$ 。
點P(x,y,z)對zx平面之投影點爲 $(x,0,z)$ 。
點P(x,y,z)對xy平面之投影點爲 $(x,y,0)$ 。

點P(x,y,z)對x軸之投影點爲 $(x,0,0)$ 。
點P(x,y,z)對y軸之投影點爲 $(0,y,0)$ 。
點P(x,y,z)對z軸之投影點爲 $(0,0,z)$ 。

(b)點P對於各坐標平面與各坐標軸的對稱點：

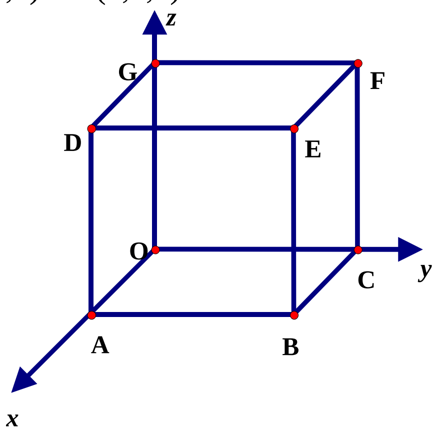
點P(x,y,z)關於yz平面之對稱點爲 $(-x,y,z)$ 。
點P(x,y,z)關於zx平面之對稱點爲 $(x,-y,z)$ 。
點P(x,y,z)關於xy平面之對稱點爲 $(x,y,-z)$ 。

點P(x,y,z)關於x軸之對稱點爲 $(x,-y,-z)$ 。
點P(x,y,z)關於y軸之對稱點爲 $(-x,y,-z)$ 。
點P(x,y,z)關於z軸之對稱點爲 $(-x,-y,z)$ 。

結論：
(a)點P與其對於各坐標平面與各坐標軸的對稱點的中點爲點P在各坐標平面與各坐標軸的投影點。
(b)點P與其在各坐標平面與各坐標軸的投影點之距離爲點P到各坐標平面與各坐標軸的距離。

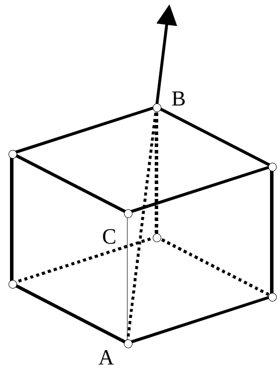
[例題1] 如圖，長方體OABC−DEFG中，已知B(1,3,0)、D(1,0,2)

(1)求其它頂點的坐標。 (2)$\overline{AF}$的長度。



[例題2] 如右圖，有一邊長為1的正立方體，今置頂點A於空間坐標系中之原點(0,0,0)，頂點B於正z軸上，則頂點C之z坐標為_____。

Ans：$(0,0,\frac{\sqrt{3}}{3})$ (88自)



[例題3] 空間中線段$\overline{AB}$在xy平面、、yz平面及zx平面上的投影長，分別為$2\sqrt{5}$ 、$3\sqrt{2}$
2，則$\overline{AB}$長度為何？Ans：$\sqrt{21}$

(練習1) 設點P(−3,14)，則點P到yz平面的距離為________，
點P到x軸的距離為_________。 Ans：3，$\sqrt{17}$

(練習2) 已知一正四面體，其中三頂點坐標分別為(0,0,0)，(2,0,0)及$(1,1,\sqrt{2}\ )$則另一點之坐標為__________或__________。

Ans：$(1,-1,\sqrt{2}\ )$、$(1,\frac{5}{3},\frac{-\sqrt{2}}{3})$ (80自)

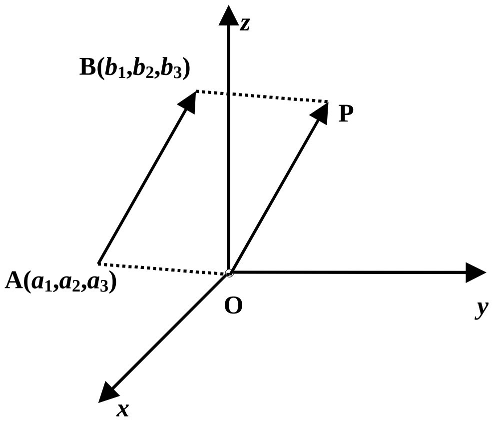
(練習3) ΔABC之三頂點坐標為A(4,2,4)、B(−2,−1,6)、C(1,4,−2)，則ΔABC為 (A)等腰三角形 (B)正三角形 (C)銳角三角形 (D)直角三角形 (E)鈍角三角形。 Ans：(A)(D)

(練習4) 在第一卦限內有一點P，P到x軸、y軸、z軸的距離依次為 $\sqrt{17}$ 、5、$\sqrt{10}$ ，則P點的坐標為__________；若不限制P點在第一卦限內，則符合題意的之P點共有______個。
Ans：P(3,1,4)，8

(練習5) 線段 $\overline{PQ}$ 在xy平面、yz平面及zx平面上的投影長，分別為 $\sqrt{13}$ 、5、$\sqrt{20}$ ，則$\overline{PQ}$長度為何？Ans：$\sqrt{29}$

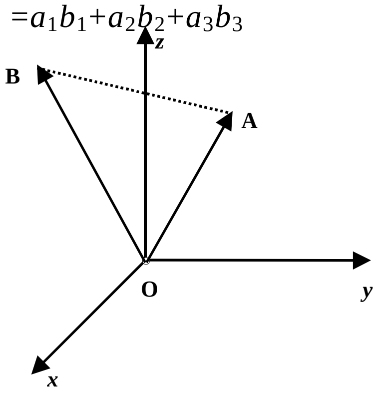
(乙)空間向量的坐標表示法

(1)空間向量的坐標表示：
仿照平面坐標系中向量的表示法，在空間坐標系中，向量也可以用坐標表示。
空間中兩點A(a_1,a_2,a_3)、B(b_1,b_2,b_3)，將向量AB的起點A移至原點O，B點移至P點，此時P點的坐標為(b_1-a_1,b_2−a_2,b_3−a_3)，
我們以(b_1-a_1,b_2−a_2,b_3−a_3)表示$\overrightarrow{AB}$，
即$\overrightarrow{AB}$=(b_1-a_1,b_2−a_2,b_3−a_3)。



(2)加法、減法與係數積：
設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$， $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則
(a) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3)$
(b) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1，a_2-b_2，a_3-b_3)$
(c)$r\cdot\vec{a}=(ra_1,ra_2,ra_3)$，$r\in$R
(d)兩向量平行 $\vec{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow (a_1,a_2,a_3)=t(b_1,b_2,b_3)$ (分量成比例)。

(3)空間坐標內積的坐標表示：
若 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
[證明]：
設$\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$和$\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)$為任意兩個非零向量，
且兩向量的夾角為θ，
因為$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(a_1-b_1，a_2-b_2，a_3-b_3)$
$|\overrightarrow{BA}|^2=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$



根據前面的定義，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{BA}|^2)$

$=\frac{1}{2}[(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2]]$

$=\boxed{\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}}$

(4)內積的性質

(a)若 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 都不是零向量，則. $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$。

(b) $|\overrightarrow{a}|^2=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}$

(c) $|m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}|^2=|m\overrightarrow{a}|^2+2mn\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|n\overrightarrow{b}|^2$

(d) $(r\cdot\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(r\cdot\overrightarrow{b})=r(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$

(e) $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$

(5)內積的應用： $a=(a_1,a_2,a_3)$、 $b=(b_1,b_2,b_3)$

(a)求夾角： $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

(b)求面積：設 $\overrightarrow{a}$ ， $\overrightarrow{b}$ 爲非平行的兩向量，

則由 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張成的三角形面積爲 $\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}$ 。

(c)求正射影： $\overrightarrow{a}$ 對 $\overrightarrow{b}$ 的正射影爲 $\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\right)\overrightarrow{b}$ 。

(d)柯西不等式：

向量形式：設 a , b 爲平面上任意二向量，則 $|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|\leq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$，

等號成立 $\Leftrightarrow\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$

證明：因爲 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ ，θ爲其夾角，$|\cos\theta|\leq1$

所以 $|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\cos\theta|\leq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$

等號成立 $\Leftrightarrow|\cos\theta|=1\Leftrightarrow\theta=0$ 或 $\pi\Leftrightarrow\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$

一般形式：a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 爲任意六個實數，

則 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$，

等號成立 $\Leftrightarrow(a_1,a_2)=t(b_1,b_2)$

證明：可設 $a=(a_1,a_2,a_3)$， $b=(b_1,b_2,b_3)$，因爲 $|a|^2|b|^2\geq|a\cdot b|^2$

所以 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$。

等號成立 $\Leftrightarrow a\,//\,b\Leftrightarrow(a_1,a_2,a_3)=t(b_1,b_2,b_3)$。

[例題4] 空間中A$(a,b,3)$、B(2,1,1)、C(0,3,5)三點共線，求數對(a,b)=？

Ans：(1,2)

[例題5] 設A(4,1,3)、B(6,3,4)、C(4,5,6)，在$\overline{BC}$上有一點P，

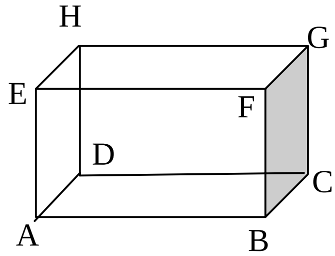
使得ΔABD：ΔACD=3：5，請問P點的坐標為何？Ans：P$(\frac{21}{4},\frac{15}{4},\frac{19}{4})$

[例題6] 右圖為長方體ABCD−EFGH中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=2$，$\overline{AE}=3$，則

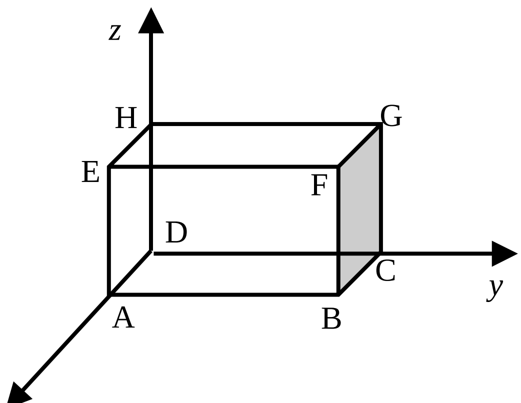
(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HF}=$？ (2)直線AG、BH的銳交角(3)ΔFAC的面積=？

Ans：(1)16 (2)$\cos^{-1}\frac{3}{29}$(3)$\sqrt{61}$

[非坐標化]：



[坐標化]



[例題7] 設A(2,–1,1)、B(1,–3,5)，C(3，–4,–4),則

(1)ΔABC的面積爲何？ (2)A點到BC直線的距離。

Ans：(1)$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{510}$ (2)$\sqrt{\frac{510}{86}}$

[例題8] 空間中有三點A(1,0,1)、B(3,–1,2)、C(0,1,–1)

(1)向量$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影爲何？

(2)求向量$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影長度？

(3)求點B在直線AC上的投影點坐標？

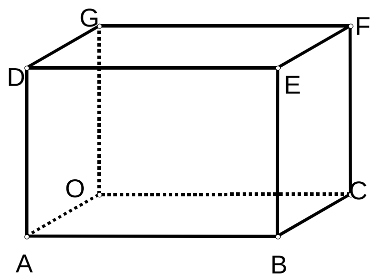
Ans：(1)$(\frac{5}{6},\frac{-5}{6},\frac{5}{3})$ (2)$\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (3)$(\frac{11}{6},\frac{-5}{6},\frac{8}{3})$

[例題9] 空間中，兩向量$\vec{a}$=(1,2,3)、$\vec{b}$=(x,y,z)，已知$x^2+y^2+z^2=56$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最大值為何？此時$\vec{b}$=？ Ans：28，(2,4,6)

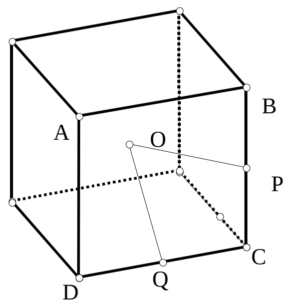
[例題10] 設x,y,z為實數，且$x^2+y^2+z^2=9$，求$2x+2y-z$之
(1)最小值=____，此時(x,y,z)=____。
(2)最大值=____，此時(x,y,z)=_____。
Ans：(1)−9，(−2,−2,1) (2)9，(2,2,−1)

(練習6) 設$\vec{u}$=(2,1,3)，$\vec{v}$ =(1,0,2)，$\vec{w}$ = $u+tv$ ($t\in$R)則t=_____時，|$\vec{w}$|有最小為何？Ans：Ans：$t=\frac{-8}{5}$，|w|的最小值為$\frac{\sqrt{30}}{5}$

(練習7) 設A(4,1,3)，B(6,3,4)，C(4,5,6)，在△ABC中，若：
(1)∠A之內角平分線交$\overline{BC}$於D，則D點之坐標為_________。
(2)∠A之外角平分線交$\overleftrightarrow{BC}$於E，則E點之坐標為_________。
Ans：(1)D($\frac{21}{4}$,$\frac{15}{4}$,$\frac{19}{4}$) (2)E(,9,0,1)



(練習8) 如右圖，立方體ABCODEFG，
$\overline{OA}$=1，$\overline{AB}$=3，$\overline{OG}$=2，$\overline{OE}$與$\overline{GB}$之夾角為θ，試求sinθ。Ans：sinθ=$\frac{2\sqrt{10}}{7}$



(練習9) 如右圖，ABCD為正立方體的一個面，P、Q分別為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$的中點，O為正立方體的中心，

則cos(∠POQ)=？Ans：$\frac{1}{2}$　(90大學自)

(練習10) 設P(6,−4,4)、Q(2,1,2)、R(3,−1,4)，求P點到直線QR之最短距離。
Ans：3

(練習11) 若空間中三點A(−1,3,2)、B(1,0,2)、C(k+3m,1,2k−m)共線，
求實數k,m。
Ans：$k=\frac{19}{21}$，$m=\frac{-4}{21}$

(練習12) 設$\vec{a}$=(1,−1,2)、$\vec{b}$=(4,−5,3)為空間中兩向量，請求
(1) $\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角。　(b) $\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影。
Ans：(1)$\frac{\pi}{6}$　(2)$\frac{3}{10}$(4,−5,3)

(練習13) 空間中有三點P(6.-4,6)，Q(2,1,2)，R(3,-1,4)，求
(1) ΔPQR的面積=__________(2)P點到直線QR的距離=___________
(3)求$\overrightarrow{PQ}$在$\overrightarrow{PR}$上的正射影為___________。
Ans：(1)$\frac{\sqrt{29}}{2}$　(2)$\frac{\sqrt{29}}{3}$　(3)$\frac{35}{22}$ (−3,3,−2)

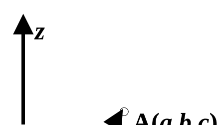
(練習14) 設A(1,2,3)，B(2,1,2)，C(−1,3,4)，A在直線BC上之投影為P，
若$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BC}$，則$t$=______。Ans：$t=\frac{7}{17}$

(練習15) 設$\vec{a}$=(5,4,3)、$\vec{b}$=(x,y,z)且$\vec{a}\cdot\vec{b}$=14，求|$\vec{b}$|的最小值。
Ans：2

(練習16) 設$x,y,z\in$R，(1)若3x+2y+4z=7，求$x^2+y^2+z^2$的最小值。
(2)若$3x^2+y^2+2z^2=6$，求x+2y+3z的最大值與最小值。
Ans：(1)$\frac{49}{29}$ (2)$\sqrt{53}$，$-\sqrt{53}$

(丙)方向餘弦

(1)方向角：
設 $\overrightarrow{OA}$ =(a,b,c)為一向量，若從x軸、y軸、z軸的正方向到 $\overrightarrow{OA}$ 的有向角分別為



α、β、γ，其中0≤α、β、γ≤π，則稱α、β、γ爲$\overrightarrow{OA}$的方向角。

(2)方向餘弦：

若α、β、γ爲 $\overrightarrow{OA}$ 的方向角，則稱$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ，$\cos\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ，$\cos\gamma=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$三數爲向量$\overrightarrow{OA}$的方向餘弦。

根據方向餘弦的定義 ⇒p\\$\overrightarrow{OA}=(a,b,c)=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

換句話說：設$\overrightarrow{OA}$的長度爲l，方向角爲α、β、γ，則$\overrightarrow{OA}=l(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$。

因爲$\overrightarrow{OA}=l(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma) \Rightarrow |\overrightarrow{OA}|^2=l^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=l^2$

$\Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

例如：$\overrightarrow{OA}=(1,-2,5)$，則$\overrightarrow{OA}$的方向餘弦爲$(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{-2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}})$，

且$\overrightarrow{OA}=\sqrt{30}\ (\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{-2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}})$。

結論：

(a)三個角α、β、γ形成某一個向量的方向角⇔0≤α、β、γ≤π

且 $os^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

(b) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

[例題11] 設A(0,–3,1)、B(4,1,t)，若AB之方向角爲$\frac{\pi}{3}$、β、γ，求t及γ。

Ans：$t=1+4\sqrt{2}$ ，$\gamma=\frac{\pi}{4}$或$t=1-4\sqrt{2}$ ，$\gamma=\frac{3\pi}{4}$

[例題12] 空間中$\overrightarrow{OP}$的方向角爲α、β、γ，且0<α、β、γ<π

(1)$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$？

(2)求$\dfrac{9}{\sin^2\alpha}+\dfrac{4}{\sin^2\beta}+\dfrac{1}{\sin^2\gamma}$之最小值？

Ans：(1)2 (2)18

(練習17) (1)設一向量$\vec{v}$，且$|\vec{v}|=10$，其方向角爲$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{3}$，求$\vec{v}=$？

(2)若$\vec{v}$的始點坐標爲(0,1,−1)，請問$\vec{v}$的終點坐標爲何？

Ans：(1)$(5,5\sqrt{2},5)$ (2)$(5,5\sqrt{2}+1,4)$

(練習18) 空間中$\overrightarrow{OP}$的方向角爲α、β、γ，且0<α、β、γ<π，

(1)求$\cos\alpha+2\cos\beta-2\cos\gamma$的最大値與最小值。

(2)$4\csc^2\alpha+9\csc^2\beta+16\csc^2\gamma$的最小值。

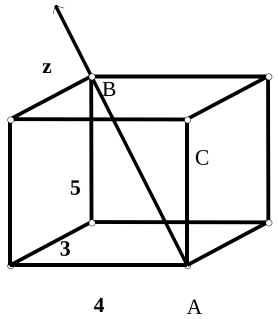
Ans：(1)3,−3 (2)$\frac{81}{2}$

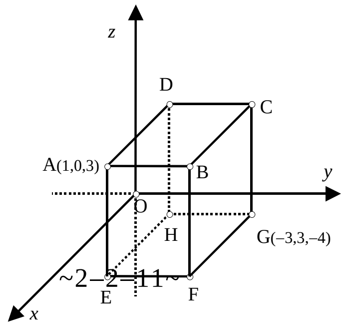
(練習19) 空間中$\overrightarrow{OP}$的方向角爲α、β、γ，證明：$\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=-1$。

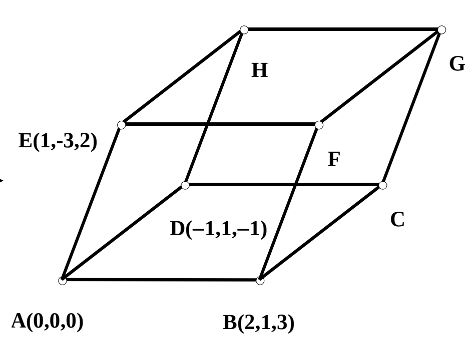
綜合練習

(1) 設$(\sqrt{2},2,0)$，$(-\sqrt{2},2,0)$,$(-\sqrt{2},-2,0)$,$(\sqrt{2},-2,0)$爲一正立方體的四個頂點，則下列那些點也爲此正立方體的頂點？(A)$(\sqrt{2},0,2)$ (B)$(0,2,\sqrt{2})$ (C)$(\sqrt{2},2,4)$ (D)$(\sqrt{2},2,2\sqrt{2})$ (E)$(-\sqrt{2},0,-2)$

(2) 如左下圖，有一個長方體的長、寬、高分別爲3,4,5，考慮一個空間坐標系，以A爲原點(0,0,0)，B點置於正z軸上，則頂點C之z坐標爲_____。





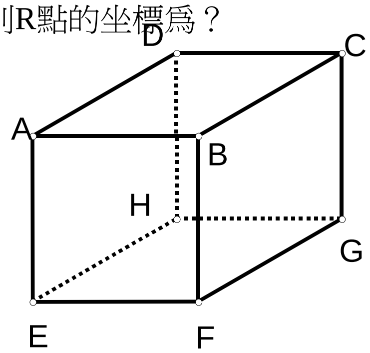


(3) 如圖，每一個面皆爲平行四邊形的六面體，
稱爲平行六面體，求G點的坐標。

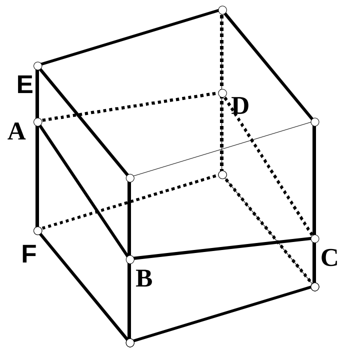
(4) 如右上圖，長方體ABCD−EFGH，已知A(1,0,3)、G(−3,3,−4)，求
(a)點F的坐標爲______。(b)點A到xy平面的距離=____。
(c)點G對z軸的對稱點坐標爲_____。

(5) 在空間坐標中，設xy平面爲一鏡面，有一光線通過點P(1,2,1)，射向鏡面上的點O(0,0,0)，經鏡面反射後通過點R，若$\overline{OR}=2\overline{PO}$，則R點的坐標爲？

(6) 右圖是邊長爲1之正立方體，則下列敘述何者爲真？
(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=1$ (B) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}=1$
(C) $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{DE}=0$ (D) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{FC}=2$ (E) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FB}=1$



(7) 右圖是一個正立方體，被平面截出一個四邊形ABCD，
其中B、D分別是稜的中點，且$\overline{EA}:\overline{AF}=1:2$。
則cos∠DAB=___。 (91學科)



(8) 於xyz空間中有三點A(1,2,3)，B(−1,0,1)，C(0,−1,2)，
令∠ABC=θ，則：(a)cosθ=____(b)sinθ=____(c)點A到直線BC的距離。

(9) 設A(1,−1,2)、B(3,2,1)、C(−1,3,5)，則(a)ΔABC之面積=______。
(b)A到直線BC的距離爲______。

(10) 已知 ˋ=(1,3,−2)、bˋ=(2,−1,3)，且$p+q=1$，若|p ˋ+q ˋ|有最小值m，請求出m的值，並問此時(p,q)=？

(11) 已知空間中二向量$\overrightarrow{OA}=(2,2,1)$、$\overrightarrow{OB}=(x,y,z)$，設$x^2+y^2+z^2=16$，試求

(a)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最大值。 (b)若$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$交角爲60°時，求$\overline{AB}$的長度。

(12) 設x,y,z爲實數，若$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}+\frac{(z-2)^2}{25}=2$，求$x-y+z+2$的最大值爲何？

此時$(x,y,z)=$？

(13) 設a,b,c爲正數，且$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{36}{c}=3$，求$a+b+c$之最小值。

進階問題

(14) 空間中，O(0,0,0)，令$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，

若$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$兩兩互相垂直，

試證：ΔABC的面積爲$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2+|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2+|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}$。

(15) 若$\vec{a}=(2,1,-1)$、$\vec{b}=(1,3,2)$、$\vec{c}=(-2,3,1)$，則$|\vec{a}-s\vec{b}-t\vec{c}|$有最小值時，

數對$(s,t)=$？

(16) 設P爲ΔABC內部一點，且滿足ΔAPB：ΔBPC：ΔCPA=3：4：5

且$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求$(x,y)=$？

(17) 承上題，若A(−2,0,6)、B(0,4,3)、C(3,5,7)，求P點坐標。

(18) 設$\overrightarrow{OA}=(-2,2,1)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,1,0)$且$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{OB}$，$t$爲實數

，若射線OC平分∠AOB，則$t=$___。

(19) 一三角形之三邊長分別爲4,5,6，三角形內一點到各邊之距離分別爲x,y,z，試求

$x^2+y^2+z^2$之極小值。

(20) 設a,b爲實數，求$a^2+b^2+(2a-3b-2)^2$之最小值爲何？此時$(a,b)=$？

綜合練習解答

(1) (A)(E)[提示：因爲A($\sqrt{2}$,2,0)，B($-\sqrt{2}$,2,0),C($-\sqrt{2}$,−2,0),D($\sqrt{2}$,−2,0)均在xy平面

上，且$\overline{AD}=\sqrt{2}\ \overline{AB}$，其他四個頂點落在同一平面上，即爲$yz$平面。]

(2) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

(3) G(2,−1,4)

(4) (a)(1,3,−4) (b)3 (c)(3,−3,−4)

(5) (−2,−4,2)

(6) (A)(B)(C)

(7) $\dfrac{1}{37}$

(8) (a)$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$(b)$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(c)\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

(9) (a)$\dfrac{\sqrt{381}}{2}$ (b)$\sqrt{\dfrac{127}{11}}$

(10) $m=\sqrt{\dfrac{7}{2}}$，$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

(11) (a)12 (b)$\sqrt{13}$

(12) 16，$(\dfrac{14}{5},\dfrac{-21}{5},7)$

[提示：$[\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{16}+\dfrac{(z-2)^2}{25}][3^2+(-4)^2+5^2]\geq[(\dfrac{x-1}{3})\cdot3+(\dfrac{y+1}{4})\cdot(-4)+(\dfrac{z-2}{5})\cdot5]^2$]

(13) 27[提示：$(a+b+c)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{36}{c})\geq(1+2+6)^2$]

(14) 提示：利用三角形面積的向量公式：$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}$

$\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，而$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2$，同理$|\overrightarrow{AC}|^2=|\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\vec{a}|^2-\vec{c}\cdot\vec{a}$，代入公式計算即可得]

(15) $(\dfrac{12}{23},\dfrac{-11}{23})$[提示：$|\vec{a}-s\vec{b}-t\vec{c}|$最小$\Rightarrow(\vec{a}-s\vec{b}-t\vec{c})\perp\vec{b}$且$(\vec{a}-s\vec{b}-t\vec{c})\perp\vec{c}$]

(16) $(\dfrac{5}{12},\dfrac{1}{4})$[提示：設P爲ΔABC內部一點，若ΔPAB：ΔPBC：ΔPCA=n：l：m

則$l\,\overrightarrow{PA}+m\,\overrightarrow{PB}+n\,\overrightarrow{PC}=\vec{0}$。]

(17) $(\frac{1}{12},\frac{35}{12},5)$

(18) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$[提示：$\overrightarrow{OC}=(-2-t,2+t,1)$，設$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OC}$的夾角α，$\overrightarrow{OC}$與$\overrightarrow{OB}$的夾角β，

利用$\cos\alpha=\cos\beta\Rightarrow t=\frac{3\sqrt{2}}{2}$]

(19) $\frac{225}{44}$

(20) $\frac{2}{7}$，$(\frac{2}{7},\frac{-3}{7})$[提示：$[a^2+b^2+(2a-3b-2)^2][(-2)^2+3^2+1^2]\geq[-2a+3b+(2a-3b-2)]^2=4$，等號

成立$\Leftrightarrow\frac{a}{-2}=\frac{b}{3}=\frac{2a-3b-2}{1}=k\Rightarrow a=-2k$，$b=3k$，代入$2a-3b-2=k\Rightarrow k=\frac{1}{7}$]