§3–3 克拉瑪公式

(甲)二元一次聯立方程組

(1)解二元一次方程組：$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \cdots(1) \\ a_2x+b_2y=c_2 \cdots(2) \end{cases}$，其中$x,y$是未知數，

我們使用代入消去法解之

$(1)\times b_2-(2)\times b_1 \Rightarrow (a_1b_2-a_2b_1)x=(c_1b_2-c_2b_1)$

$(1)\times a_2-(2)\times a_1 \Rightarrow (a_2b_1-a_1b_2)y=(c_1a_2-c_2a_1)$

$\Rightarrow$可得$\begin{cases} \Delta\cdot x=\Delta_x \\ \Delta\cdot y=\Delta_y \end{cases}$，其中$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$。

當$\Delta\neq 0$時，方程組恰有一解$(x,y)=(\dfrac{\Delta_x}{\Delta}, \dfrac{\Delta_y}{\Delta})$ [**兩直線交於一點**]

當$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，方程組有無限多解。[**兩直線重合**]

當$\Delta=0$，而Δ_x、Δ_y有一不為 0 時，方程組無解。[**兩直線平行**]

[例題1] 試就 a 值討論$\begin{cases} 2x-(a-3)y=a+5 \\ (3-a)x+2y=7-a \end{cases}$的解。

Ans：若 $a\neq1$ 且 $a\neq5$，則$(x,y)=(\dfrac{a-11}{a-5},\dfrac{-a-1}{a-5})$；若 $a=1$，則$(x,y)=(3-t,t)$，$t\in R$

若 $a=5$，則無解。

(練習1) 就 k 值討論方程式的解：$\begin{cases} (k-2)x-2y=2k \\ 3x+(2k+1)y=-k-2 \end{cases}$。

Ans：當 $k\neq1$，$\dfrac{3}{2}$時，恰有一組解，當 $k=1$ 時，有無限多組解，當 $k=\dfrac{3}{2}$時，無解。

(乙)三元一次聯立方程組

(1)推導克拉瑪公式：

考慮三元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \cdots(1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \cdots(2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \cdots(3) \end{cases}$，其中$x,y,z$爲未知數，

使用代入消去法解之：

由(1) $\Rightarrow b_1y+c_1z=-a_1x+d_1$，由(2) $\Rightarrow b_2y+c_2z=-a_2x+d_2$

由二元一次方程組之求解可知

$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y=\begin{vmatrix} -a_1x+d_1 & c_1 \\ -a_2x+d_2 & c_2 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z=\begin{vmatrix} b_1 & -a_1x+d_1 \\ b_2 & -a_2x+d_2 \end{vmatrix}$

整理可得

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x+\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots(4)$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x-\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots(5)$$

將(3)× $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$得

$$a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}x+b_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}y+c_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}z=d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots(6)$$

(4)(5)代入(6)，消去y,z

$$a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}x+b_3\left(-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix}\right)+c_3\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)=d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

整理之後得

$$\left(a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)x=d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots(7)$$

觀察(7)式，等號左端x的係數中，將a_1,a_2,a_3分別換成d_1,d_2,d_3及成爲右端的式子，

$$a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

因此(7)可改寫成 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

同理若令$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

則可得$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \\ \Delta \cdot z = \Delta_z \end{cases}$

結論：

(a)若$\Delta \neq 0$，則方程組恰有一解：$(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta},\frac{\Delta_z}{\Delta})$。[克拉瑪公式]

(b)若$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，則方程組無解或無限多解。

(c)若$\Delta=0$，Δ_x、Δ_y、Δ_z有一不爲 0，則方程組無解。

(2)聯立方程組解的幾何解釋：

三元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \cdots(1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \cdots(2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \cdots(3) \end{cases}$，我們將三個方程式視爲空間中的三平面，因此我們可以討論三個平面的相交情形與解的關聯。

設$\overrightarrow{\blacksquare}=(a_1,b_1,c_1)$、$\overrightarrow{\blacksquare}=(a_2,b_2,c_2)$、$\overrightarrow{\blacksquare}=(a_3,b_3,c_3)$

(a)$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$的解釋：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

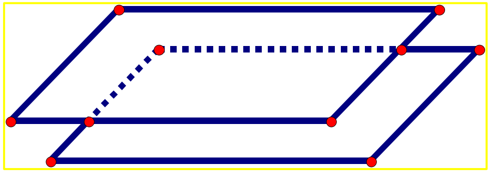
$$=(a_1,b_1,c_1)\cdot(\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix})$$

$$=\overrightarrow{\blacksquare}\cdot(\overrightarrow{\blacksquare}\times\overrightarrow{\blacksquare})$$

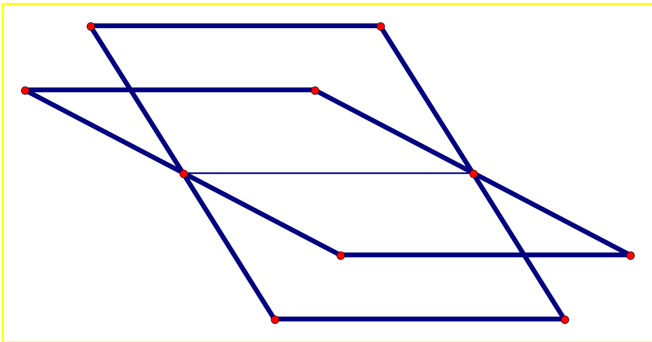
$$\Rightarrow\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\overrightarrow{\blacksquare}\cdot(\overrightarrow{\blacksquare}\times\overrightarrow{\blacksquare})$$

(1°)當$\Delta=0 \Leftrightarrow$ [redacted]·([redacted]×[redacted])=0

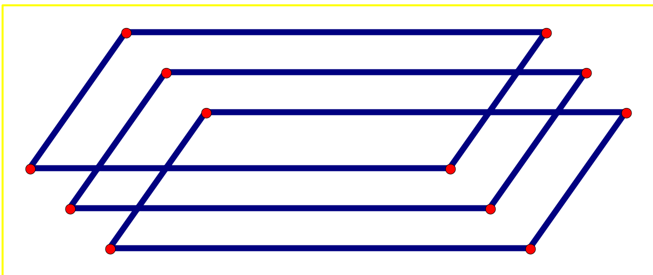
若[redacted]×[redacted]=[redacted]，則表示[redacted]//[redacted]，此時E_2與E_3互相平行或重合。



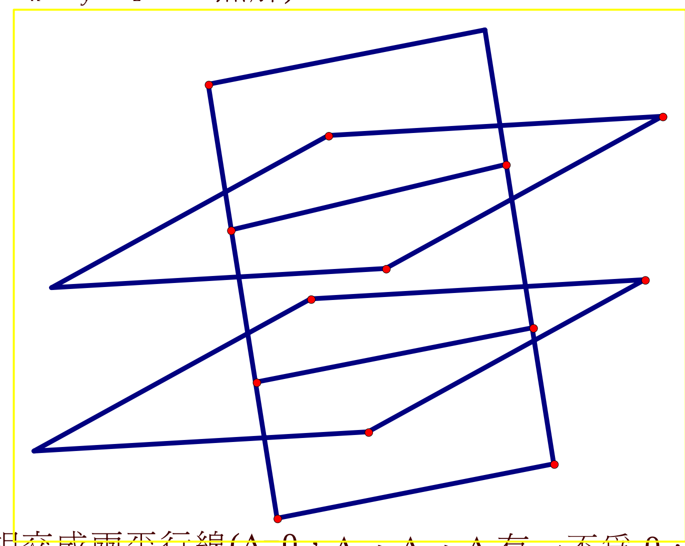
$E_1=E_2=E_3$ ($\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，無限多解)　　$E_1//E_2=E_3$($\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ 無解)



E_1與E_2(E_3)交於一直線($\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，無限多解)

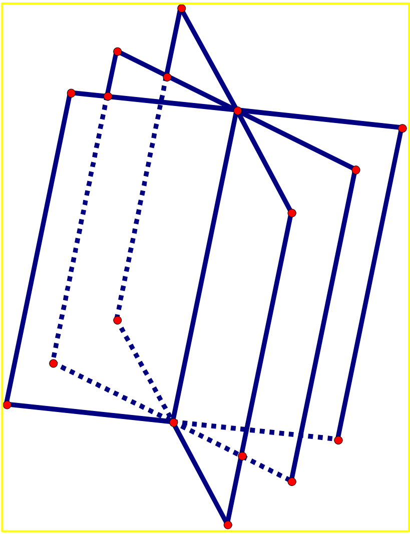


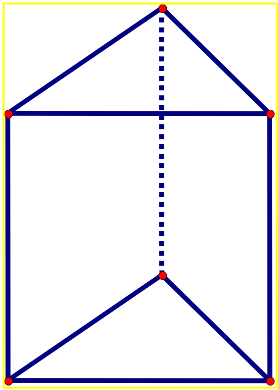
$E_1//E_2//E_3$($\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，無解)



E_1與E_2、E_3相交成兩平行線($\Delta=0$，Δ_x、Δ_y、Δ_z有一不為 0，無解)

若[redacted]×[redacted]≠[redacted]，則[redacted]⊥([redacted]×[redacted])，因爲[redacted]×[redacted]≠[redacted]代表E_2與E_3交於一直線L，且其方向向量爲[redacted]×[redacted]，此時因爲[redacted]⊥([redacted]×[redacted])，所以L與E_1平行或重合。



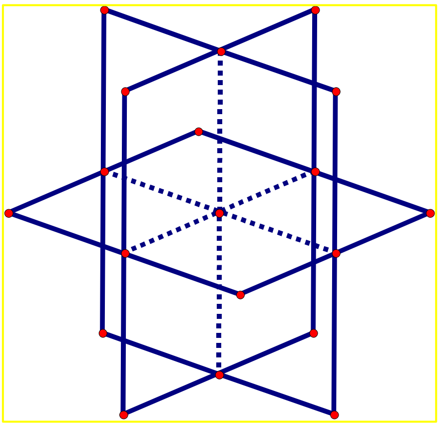


E_1、E_2、E_3三平面交於一直線($\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，無限多解)

E_1、E_2、E_3兩兩交於一直線，三直線互相平行
($\Delta=0$，Δ_x、Δ_y、Δ_z有一不爲 0，無解)

(2°)當$\Delta\neq0$ ⇔ [redacted]·([redacted]×[redacted])≠0 ⇔ [redacted]×[redacted]≠[redacted]且[redacted]與([redacted]×[redacted])不垂直

所以E_2與E_3交於一直線L，且其方向向量爲[redacted]×[redacted]，此時因爲[redacted]與([redacted]×[redacted])不垂直，所以L與E_1交於一點。



E_1、E_2、E_3三平面交於一點($\Delta\neq0$，恰有一解)

(3)齊次方程組：$\begin{cases} E_1: a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ E_2: a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ E_3: a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 至少會有(0,0,0)的解，所以

(a)若$\Delta\neq0$，則齊次方程組只有一組解(0,0,0)。

(b)若$\Delta=0$，則齊次方程組除了(0,0,0)之外，尚有其他的解。

[例題2] 說明下列各方程組所表示的平面相交的情形

(1) $\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 6x+3y-8z=0 \\ 2x-y+5z=-4 \end{cases}$ Ans：三平面相交於一點$(-1,2,0)$

(2) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+4y-6z=7 \\ 3x+6y+z=5 \end{cases}$ Ans：兩面平行，另一面交兩線

(3) $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+5z=2 \end{cases}$ Ans：三平面兩兩相交於一直線且三交線不共點

[例題3] 試就實數 a 之值討論方程組的解：$\begin{cases} 3x+4y+az=4 \\ 3x+ay+4z=4 \\ ax+3y+4z=4 \end{cases}$

Ans：(1)$a\neq3$ 且 $a\neq4$ 且 $a\neq7$ 時，有唯一解$(x,y,z)=(\frac{4}{a+7},\frac{4}{a+7},\frac{4}{a+7})$

(2)$a=3$ 時，有無限多組解$(x,y,z)=(\frac{4-7t}{3},t,t)$

(3)$a=4$ 時，有無限多組解$(x,y,z)=(t,t,1-\frac{7t}{4})$

(4)$a=-7$ 時，無解

[例題4] 若α及β為二實數，且聯立方程組

$$\begin{cases}(1-\alpha)x+7y=1\\ x+y+\alpha z=\beta\\ 2\alpha y+z=0\end{cases}$$

有二組以上的解，則α之值為___，β之值為___。

Ans：α =2，β =–1 (84 社)

[例題5] 方程組 $\begin{cases}x+y+z=ax\\ x+y+z=ay\\ x+y+z=az\end{cases}$ 有異於(0,0,0)之解，a=_____。Ans：0,3

[例題6] 已知方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 恰有一組解(α,β γ)，αβγ≠0

則方程組 $\begin{cases}a_1x+2b_1y+3c_1z=4d_1\\ a_2x+2b_2y+3c_2z=4d_2\\ a_3x+2b_3y+3c_3z=4d_3\end{cases}$ 之解為何？Ans：$(4\alpha ,2\beta ,\frac{4\gamma}{3})$

(練習2) 試以克拉瑪公式解方程組$\begin{cases}7x+3y-2z-7=0\\2x+5y+3z-20=1\\5x-y+5z-10=8\end{cases}$ Ans：$x=1,y=2,z=3$

(練習3) 解下列方程組，並判斷其幾何關係：

(1)$\begin{cases}x+2y-z=2\\2x+5y+3z=7\\3x-y+z=-1\end{cases}$ (2)$\begin{cases}x+4y+2z=1\\-3x+z=2\\-2x+4y+3z=3\end{cases}$ (3)$\begin{cases}-4x+2y-z=-1\\3x+y+3z=1\\2x+4y+5z=3\end{cases}$

Ans：(1)三平面交於一點$(\frac{-2}{39},\frac{47}{39},\frac{14}{39})$ (2)三平面交於一線$(t,\frac{-3}{4}+\frac{-7}{4}t,3t+2)$

(3)三平面兩兩相交於一直線且三交線不共點

(練習4) 試就 a 值討論方程組$\begin{cases}ax+y+z=1\\x+ay+z=1\\x+y+az=1\end{cases}$的解。

Ans：若 $a\neq1,-2$ 時，恰有一解$(\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2})$；若 $a=1$，$(x,y,z)=(s,t,1-s-t)$

若 $a=-2$ 時，無解。

(練習5) 齊次方程組：

(1)$\begin{cases}3x-ay=0\\x-2y=b+4\end{cases}$除(0,0)外尚有其他解，則 $a=$？$b=$？

(2)$\begin{cases}ax+2y+3z=0\\3x+2y+3z=0\\x+5y+7z=0\end{cases}$有異於(0,0,0)的解，則 $a=$？ 解爲何？

Ans：(1)$a=6$，$b=-4$ (2)$a=3$ 解爲$(-t,-18t,13t)$

綜合練習

(1) 設 a 爲不等於 0 的實數，關於方程式組$\begin{cases}ax+y+\frac{z}{a}=1\\x+ay+z=-1\\\frac{x}{a}+y+az=1\end{cases}$的解，下列選項那些是正確的？(A)當 $a=3$ 時，無解 (B)當 $a=1$ 時，恰有一組解 (C)當 $a=\frac{1}{2}$時，恰有一組解 (D)當 $a=-1$ 時，有無限多組解 (E)當 $a=-4$ 時，有無限多組解。

(85 社)

(2) 試決定實數a之值，使得三相異平面E_1：$(a+2)x+y+z=0$，E_2：$x+ay+z=0$，E_3：$x+y+az=0$ 相交於一直線。

(3) 已知空間中三個平面 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 恰好交於一點P，

令$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & d_1 \\ c_2 & a_2 & d_2 \\ c_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix}$，$D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$，試問下列敘述何者正確？(A)若$D_1=0$，則P點在$xy$平面上 (B)若$D_1=0$，則P點在$yz$平面上
(C)若$D_1=D_2=0$，則P點在x軸上 (D) 若$D_1=D_2=0$，則P點在y軸上
(E)若$D_1=D_2=D_3=0$，則$d_1=d_2=d_3=0$。

(4) 若$\begin{cases} x-y-2z=3 \\ 2x+2y+z=1 \\ 3x+ay-z=b \end{cases}$有無限多解，則(a)$a$=？$b$=？ (b)方程組的解。

(5) 三元一次方程組的幾何意義：

(a)就 k 值討論下列三平面相交的情形 $\begin{cases} x+3y-z=-4 \\ 2x+5y+z=-1 \\ x+5y-7z=k \end{cases}$

(b)就 a 值討論下列四平面相交的情形$\begin{cases} 3x+5y-z=-1 \\ x-y+4z=11 \\ x+7y-9z=-23 \\ 4x+20y-23z=a \end{cases}$

(6) 已知方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 恰有一組解(5,−2 8)，

則方程組$\begin{cases} (2a_1+3b_1)x+2b_1y+3c_1z=d_1 \\ (2a_2+3b_2)x+2b_2y+3c_2z=d_2 \\ (3a_3+3b_3)x+2b_3y+3c_3z=d_3 \end{cases}$ 之解為何？

(7) 已知方程組$\begin{cases} x+y+2z=-2 \\ x+2y+3z=\alpha \\ x+3y+4z=\beta \\ x+4y+5z=\beta^2 \end{cases}$ 有解，且α、β都不是整數，則求α、B 的值。

綜合練習解答

(1) (C)(D)

(2) $a=0$ 或-3

(3) (B)(E)[提示：$D_1=\Delta_x$，$D_2=\Delta_y$，$D_3=\Delta_y$，而$P(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta},\frac{\Delta_z}{\Delta})$]

(4) (a)$a=1,b=4$ (b)$x=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}t$，$y=\frac{-5}{4}+\frac{-5}{4}t$，$z=t$

(5) (a) $k=-18$ 時，共線；$k\neq-18$ 時，三平面各交一線，三線平行。(b)$a=-58$ 時，共線；$a\neq-58$ 時，前三平面的交線與第四平面平行[提示：先考慮前三個平面的相交狀況，結果爲三平面交於一直線，將此直線的參數式代入 $4x+20y-23z$，得到值 58，所以 $a=-58$ 時，共線；$a\neq-58$ 時，前三平面的交線與第四平面平行]

(6) $(\frac{5}{2},\frac{-19}{2},8)$

(7) $(\frac{-5}{4},\frac{-1}{2})$