第三十一單元 空間中的平面與直線

前面的單元探討了空間中基本要素—「點、直線、平面」的基本概念，以及它們之間的關係。並且建立空間坐標系，把空間向量用坐標表示。

本單元則是透過空間向量，將空間中直線與平面的基本概念轉化成代數方程式加以探討。

換句話說，本單元的核心內容大致上分成兩類：

(一)空間坐標中平面與直線的表示方式：

平面方程式、直線的參數式與比例式。

(二)利用方程式來表示點、直線與平面間的關係：

當它們有交點或交線時，可以求得交點、交線與交角；

當它們沒有交點時，就求它們的距離。

(甲)空間中的平面方程式

(1)回顧坐標平面上的直線方程式：

(a)平面坐標系中，只要知道斜率 m 與點(x_0,y_0)就可以確定直線的位置，因此可以求出直線的方程式 $y-y_0=m(x-x_0)$ (點斜式)。

(b)考慮平面上的直線 L，P(3,−4)為 L 上的任意點，直線 L 的法向量 $\vec{n}=(2,3)$，

設 R(x,y)為 L 上的一點

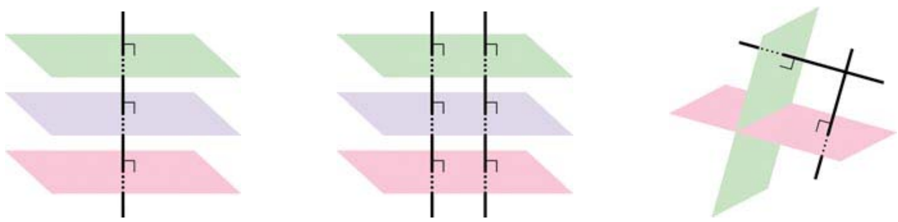
$\Leftrightarrow \overrightarrow{PR}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{PR}\cdot\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow (x-3,y+4)\cdot(2,3)=0 \Leftrightarrow 2x+3y+6=0$。

因此我們也可以用直線的法向量來求坐標平面上直線的方程式。

(2)平面的法線與法向量：

在空間中，垂直於同一平面的直線都會平行或重合，而垂直於同一直線的平面也會平行或重合，相交於一直線兩平面的垂線不會平行，因此在空間中，一個平面只要指定了垂線的方向，這些平面不是平行就是重合，即它們的「**走向**」被確定了，因此仿照平面上的直線，引進「**法向量**」來描述空間中平面的「**走向**」。

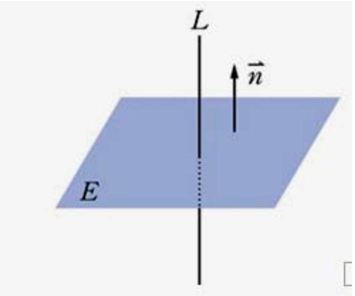


平面的法線：

若一直線 L 垂直於平面 E，則稱此直線為平面 E 的法線。

平面的法向量：

若直線 L 為平面 E 的法線，則直線 L 的方向向量就稱為平面 E 的法向量。



法向量的特性：

(a)設 $\vec{n}$ 為平面的一個法向量，則 $t\vec{n}$ $(t\neq0)$亦為平面的一個法向量。

(b)若任取平面 E 上的兩個相異點 A、B，則 $\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$ 。

(3)如何求平面的方程式：

(a)點法式：

若平面 E 法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$且過點 $A(x_0,y_0,z_0)$，

則平面 E 的方程式為 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$。

[證明]：

在平面 E 上任取一點 P 其坐標為(x,y,z)，則$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$

所以$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(a,b,c)=0$

$\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

反過來說滿足方程式 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ 的解 $Q(x,y,z)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AQ}\perp\vec{n}\Rightarrow$Q 落在平面 E 上。

(b)一般式：

方程式 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ 化簡可得 $ax+by+cz+d=0$ 的方程式。

我們稱 $ax+by+cz+d=0$ 為一般式。

一般式 $ax+by+cz+d=0$ 的法向量為 $\vec{n}=(a,b,c)$

[證明]：

設 $A(m,n,l)$、$B(p,q,r)$在平面 $ax+by+cz+d=0$ 上，

驗證 $\overrightarrow{AB}\cdot(a,b,c)=(p-m,q-n,r-l)\cdot(a,b,c)=a(p-m)+b(q-n)+c(r-l)=ap+bq+cr-(am+bn+cl)=0$

故$\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$　因此 $ax+by+cz+d=0$ 的法向量為$\vec{n}=(a,b,c)$。

結論：**掌握法向量 $\overrightarrow{n}$，平面上的一點 P，即可用點法式去表示平面方程式：**

(a)已知平面 E 的 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}=(a,b,c)$，過 $P(x_0,y_0,z_0)$ ⇒點法式：$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

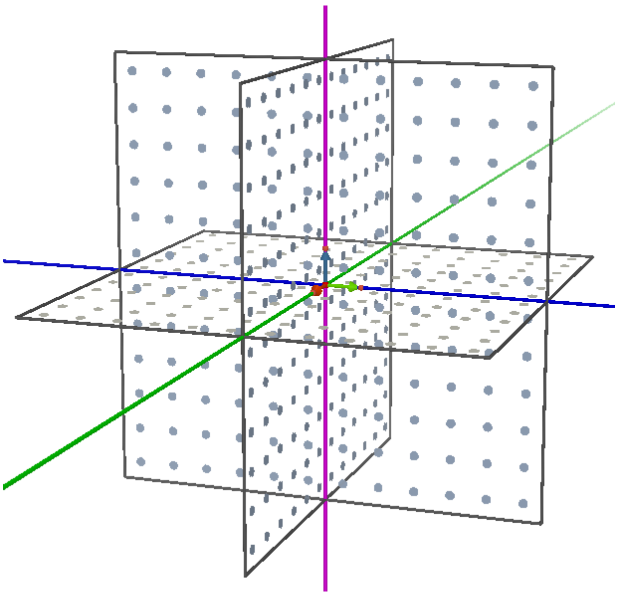
(b)一般式：$ax+by+cz+d=0$，⇒法向量 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}=(a,b,c)$。

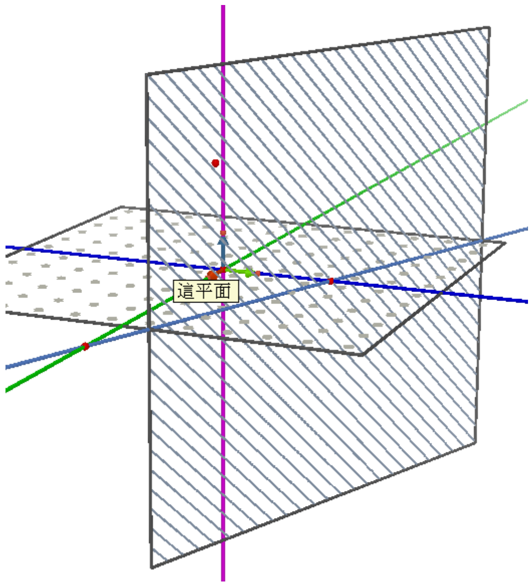
[問題與討論]：

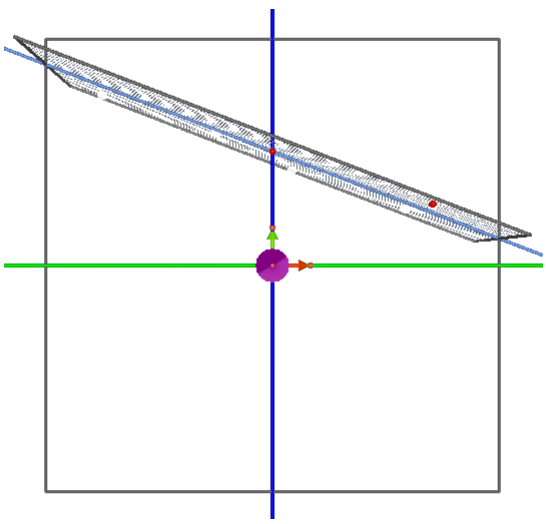
(a)特殊平面的方程式如何表示：

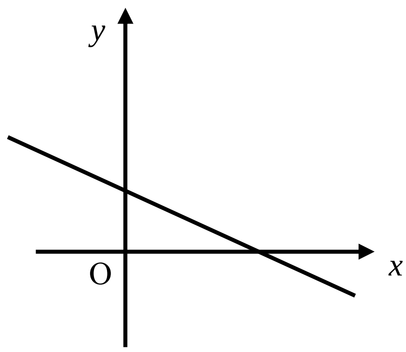
xy 平面：　　　yz 平面：　　　zx 平面：

(b)如何去決定方程式 $2x+3y-6=0$ 的圖形。









[例題1] 已知一平面 E 和直線 AB 垂直，A 為其垂足，若 A(4,3,–2)，B(5,–2,1)，求平面 E 的方程式。Ans：$x-5y+3z+17=0$

(練習1) 求過點 P(2,–3,1)且法向量 $\overrightarrow{n}=(2,-3,4)$的平面方程式。Ans：$2x-3y+4z=17$

(練習2) 在空間中，連接點 P(2,1,3)與點 Q(4,5,5)的線段$\overline{PQ}$之垂直平分面。
Ans：$x+2y+z-13=0$

(練習3) 設 P、Q 為平面 E：$ax+by+cz=5$ 上相異兩點，且$\overrightarrow{PQ}=(x_0 , y_0 , z_0)$，則$\overrightarrow{PQ}\cdot(a,b,c)=$___________。 Ans：0

(4)給不共線三點求平面方程式：

(a)從一個例子說起：

設 A(3，–1,1)、B(4,2,–1)、C(7,0,3)，求過 A、B、C 三點的平面方程式。

[解法]：

設平面的法向量為$\overrightarrow{n}=(a,b,c)$，

$\overrightarrow{AB}=(1,3,-2)$、$\overrightarrow{AC}=(4,1,2)\Rightarrow \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AB}$且$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AC}$，故$\overrightarrow{n}$為$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$的公垂向量

因為$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\perp\overrightarrow{AB}$，$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\perp\overrightarrow{AC}$，因此$\overrightarrow{n}//\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(8,-10,-11)$

故可以取$\overrightarrow{n}=(8,-10,-11)$，所求平面為 $8(x-3)-10(y+1)-11(z-1)=0$。

(b)找公垂向量：

由前面的例子中，已知空間中兩個不平行的向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，因為

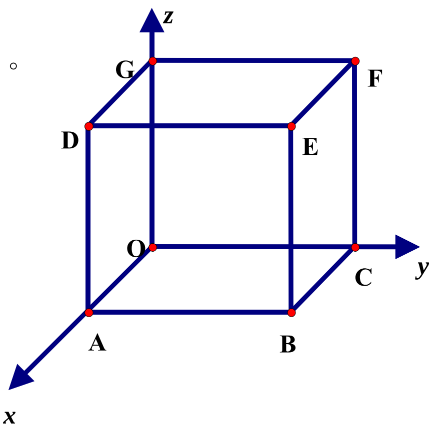
$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$且$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$，所以與$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$平行的向量$\overrightarrow{c}$，會使得$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$且$\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{c}$。故$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$的公垂向量為$k(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$，$k\neq0$。

[例題2] 求過點 P(1,1,1)且垂直平面 $3x+y-z+1=0$ 與 $4x-2y-z-5=0$ 之平面方程式。
Ans：$3(x-1)+(y-1)+10(z-1)=0$

(練習4) 求過三點 A(−3,1,2)、B(5,3,−7)、C(1,7,0)的平面方程式。
Ans：$5x-2y+4z+9=0$

(練習5) 一平面與平面 $3x+2y+z+11=0$ 平行，且與三軸之截距和為 22，試求其方程式。Ans：$3x+2y+z-12=0$
注意：截距不是距離，是圖形與坐標軸交點之坐標值。

(練習6) 如圖，長方體 OABC−DEFG 中，
已知 B(1,3,0)、D(1,0,2)，求平面 BDF 的方程式。
Ans：$6x+2y+3z=12$



(練習7) 試求過點 A(2,1,−1)、B(1,1,2)二點且與平面 $7x+4y-4z=0$ 垂直之平面的方程式。
Ans：$12x-17y+4z-3=0$

(練習8) 平面過 G(−1,2−3)且此點恰為平面在 x,y,z 軸上截點所成三角形之重心，求此平面方程式。 Ans：$6x-3y+2z+18=0$

(練習9) 平面 E 之法向量為(3,−2,1)，且三截距和為 13，求 E 的方程式。
Ans：$15x-10y+5z-78=0$

(練習10) 平面 E 包含 $2x+y-4=0$ 與 $y+2z=0$ 之交線且
(1)通過點(2,−1,1)時，平面 E 的方程式。
(2)垂直於平面 $3x+2y-3z-6=0$ 時，平面 E 的方程式。
Ans：(1)$x+y+z-2=0$ (2)$2x+3y+4z=4$

(乙)空間中的直線方程式

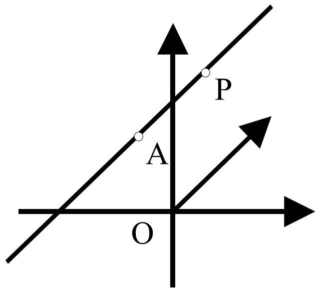
(1)空間中直線的參數式

坐標平面上的直線

在坐標平面上，一直線 L 過 A(x_0,y_0)，且與一向量 $\vec{v}$=(a,b)($\vec{v}\neq\vec{0}$)平行。

若(x,y)為 L 上任意點，則$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$，$t$ 為一實數，這個式子稱為 L 的**參數式**。

證明：設 P(x,y)為直線 L 上任一點，



$\overrightarrow{AP}$ // $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}$=$t\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ (x−x_0,y−y_0)=t(a,b)

所以$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$，$t$ 為實數。

不管是空間坐標或是平面坐標，直線的方向向量都可以定義成直線上兩個相異點所形成的向量。換句話說，方向向量會與直線平行，也就是說空間中的直線也可以用方向向量來表示其方向，因此我們不禁要問：若空間坐標系中，一直線 L 通過點 A(x_0,y_0,z_0)且方向向量 $\vec{v}$=(a,b,c)，那麼直線 L 如何表示呢？

空間坐標中的直線

坐標平面上，只要給定直線的方向向量與線上的一點，就可以用參數式來表示直線上的點。當直線置於空間坐標中，仍然可以利用參數式來表示直線。

空間坐標系中，一直線 L 通過點 A(x_0,y_0,z_0)且方向向量 $\vec{v}$ =(a,b,c)，直線 L 如何表示呢？

設 P 點在直線 L 上，由方向向量的意義，可得$\overrightarrow{AP}$平行 $\vec{v}$ 。

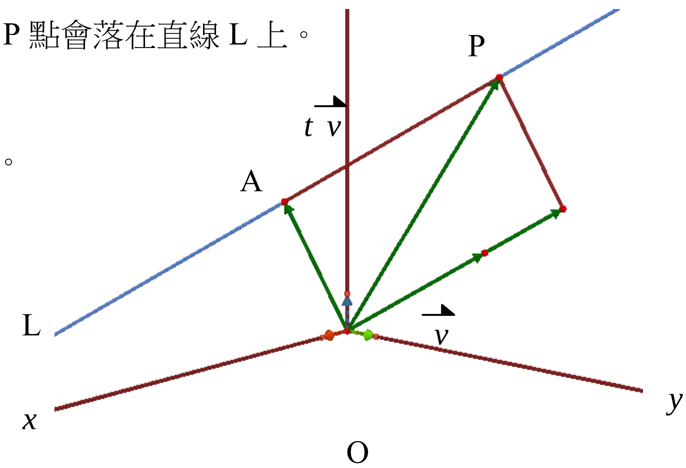
反過來說，若 P 點滿足$\overrightarrow{AP}$平行 $\vec{v}$ (即直線 AP 以 $\vec{v}$ 為方向向量)，因為過 A 點且以 $\vec{v}$ 為方向向量的直線是唯一的(就是直線 L)，因此 P 點會落在直線 L 上。

根據上面的討論，我們可以得知

「**P 點在直線 L 上**」的充要條件是「$\overrightarrow{AP}$ // $\vec{v}$ 」。

設 P 點在直線 L 上

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}$ // $\vec{v}$



$\Leftrightarrow$ 存在一個實數 t，使得 $\overrightarrow{AP}=t\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\vec{v}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{v}$ (其中 O 為原點)。

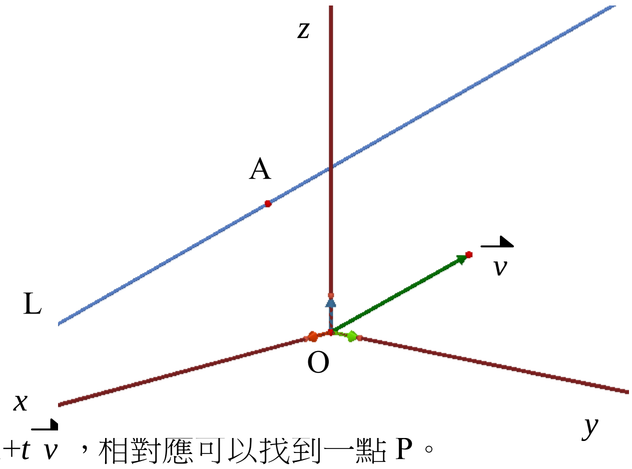
故 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{v}$ 為直線 L 的向量表徵。

(練習11) 根據上面的說明，請在右圖中畫出滿足下列條件的 P 點位置：

(1) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+2\vec{v}$

(2) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{-3}{2}\vec{v}$

(3) 設 B 點在直線 L 上，且 $\overrightarrow{AB}=3\vec{v}$，試問 B 點所對應的參數 t 的值等於多少？



根據上述的討論，當某個參數 t 的值代入式子 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{v}$，相對應可以找到一點 P。

反過來說，直線上某一 P 點的位置會決定了一個參數 t 的值。

現在我們將前面的結果用坐標來表示：
設 $P(x,y,z)$ 在直線 L 上

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{v}$ (其中 O 為原點)。

$\Leftrightarrow$ $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c)$。

因此直線 L 上的點 (x,y,z) 都可以表成 $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$，

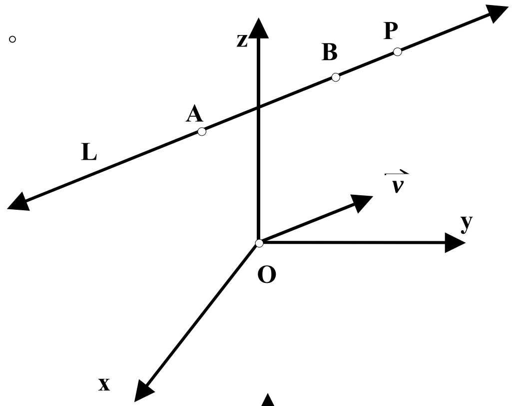
反過來說，型如 (x_0+at, y_0+bt, z_0+ct) 的點一定在直線 L 上。

故我們稱 $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ (t 為實數) 為直線 L 的參數方程式，簡稱**參數式**，

實數 t 稱為**參數**。

[例題3] 設 A，B 兩點的坐標為 A（−1，4，3），B（2，3，5），

(1)求直線 AB 的參數式；(2) 求線段$\overline{AB}$的參數式。



[解法]：(1)設 P(x,y,z)為直線 AB 上任一點，

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} // \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，$t$ 為實數

$\Leftrightarrow(x+1,y-4,z-3)=t(3,-1,2)$，$t$ 為實數

所以直線 AB 的參數式為$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=4-t \quad (t\text{ 為實數})。\\ z=3+2t \end{cases}$

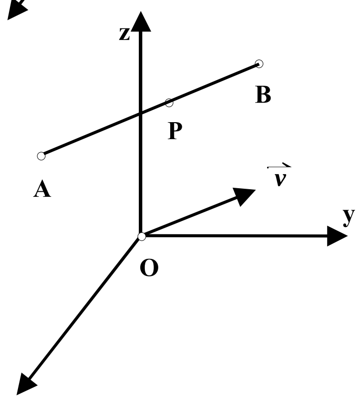
(2) 設 P(x,y,z)為線段 AB 上任一點

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，其中 $0\le t\le 1$。

當 t=0 時，P 點所對應的點為 A 點，

當 t=1 時，P 點所對應的點為 B 點。

因此，線段 AB 的參數式為$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=4-t \quad (0\le t\le 1)。\\ z=3+2t \end{cases}$



在上例中，我們也可以取$\overrightarrow{BA}$=(−3,1,−2)，點 B(2,3,5)也落在直線 AB 上，因此直線 AB 的參數式也可以寫成 $x=2-3t$，$y=3+t$，$z=5-2t$，(t 為實數)，因此 AB 直線的參數式並不是只有一種。

(**練習**12)設平面 E 的方程式為 $2x-3y+2z=6$，過點 A(1,2,4)對平面 E 做一垂線 L，請寫出 L 的參數式。Ans：$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \quad (t\text{ 為實數}) \\ z=4+t \end{cases}$

(**練習**13)設空間坐標中有兩點 A(0,2,−4)、B(−2,6,8)，試問下列哪些參數式代表直線 AB：

(1) $\begin{cases} x=0-2t \\ y=2+4t \quad (t\text{ 為實數}) \\ z=-4+12t \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=0-2t \\ y=2+4t \quad (0\le t\le 2) \\ z=-4+12t \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=0+t \\ y=2-2t \quad (t\text{ 為實數}) \\ z=-4-6t \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=-2-2s \\ y=6+4s \quad (s<0) \\ z=8+12s \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=-2+s \\ y=6-2s \quad (s\ge 3) \\ z=8-6s \end{cases}$ Ans：(1)(3)

(練習14)直線 L 有一方向向量 $\vec{v}$=(4,–5,–2)，且 L 上有一點 A(1,–3,0)，求 L 的參數式。Ans：$\begin{cases} x=1+4t \\ y=-3-5t \\ z=0-2t \end{cases}$，$t$ 為實數。

(練習15)設 L：$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2-7t \\ z=5+2t \end{cases}$，$t$ 為實數，求直線 L 上 t=0 的點坐標，並寫出此直線的一個方向向量。 Ans：(–1,2,5)，(3,–7,2)

(練習16)設 L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z+5}{7}$，試寫出直線 L 上一點坐標，L 的一個方向向量，L 的參數式。

(2)空間中直線的比例式：

在坐標平面上，一直線可以用參數式與點斜式來表示，而空間中的直線除了參數式之外，還可以用比例式來表示。

例子：

設直線 L 的方向向量 $\vec{v}$=(2,3,5)，A(–2,4,3)在直線 L 上，

設 P(x,y,z)為直線 L 上的點，$\overrightarrow{AP}\,/\!/\,\vec{v}$ ⇔ $\overrightarrow{AP}$與 $\vec{v}$ 分量成比例

(x+2,y–4,z–3)與(2,3,5 分量成比例，因此$\frac{x+2}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{5}$，另一方面，

令比值為 t，即 $t=\frac{x+2}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{5}$，可得 L 的參數式為$\begin{cases} x=-2+2t \\ y=4+3t \\ z=3+5t \end{cases}$，$t$ 為實數

一般而言，我們稱$\frac{x+2}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{5}$為直線 L 的比例式。

直線的比例式：

設直線 L 過 A(x_0,y_0,z_0)且 $\vec{v}$=(a,b,c)為 L 的方向向量，

設 P(x,y,z)為直線 L 上的點

⇔$\overrightarrow{AP}\,/\!/\,\vec{v}$

⇔$(x-x_0\,,\,y-y_0\,,\,z-z_0)/\!/(a,b,c)$……(*)

(1)若 a , b , c 都不為 0：
(*)式可以寫成

$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ ($\overrightarrow{AP}$與$\overrightarrow{v}$ 分量成比例)

因此直線 L 上的點 P(x,y,z)均滿足上式，反之，滿足上式的 P(x,y,z)都會在直線 L 上。

此表示形式 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ 稱為**直線的比例式**。

結論：
直線的比例式

設直線 L 通過 A(x_0,y_0,z_0)且方向向量為 $\overrightarrow{v}=(a,b,c)$，其中 $abc\neq 0$，則直線 L 的比例式為

$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$， ($\overrightarrow{AP}$與$\overrightarrow{v}$ 分量成比例)

另一方面，當我們令比值 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t$ 時，可以得到直線 L 的參數式

$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ (t 為實數)。

(2)若 a,b,c 有一個為 0：
設 $a=0$，而 b ，c 都不為 0(其它情形比照處理)
根據$(x-x_0 , y-y_0 , z-z_0)//(a,b,c)=(0,b,c)$

則得　$x=x_0$且$\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ ($\overrightarrow{AP}$與$\overrightarrow{v}$ 的 y,z 分量成比例)

上式表示直線 L 為「平面 $x=x_0$」與「平面$\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$」的交線。

若令比值$\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t$，可以得到 L 的參數式$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ (t 為實數)。

(3)若 a,b,c 有二個為 0：
設 $a=0$，$b=0$ 而 $c\neq 0$(其它情形比照處理)
根據$(x-x_0 , y-y_0 , z-z_0)//(a,b,c)=(0,0,c)$
可以得到 $x=x_0$，$y=y_0$ 而 z 為任意實數，它表示「平面 $x=x_0$」與「平面 $y=y_0$」的交線，

因此直線 L 可表為$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$。

另一方面，令比值$\frac{z-z_0}{c}=t$，可以得到 L 的參數式$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0+ct \end{cases}$ (t 為實數)。

此外，我們知道 x 軸是 xy 平面、zx 平面的交線，因此 x 軸可以表示成$\begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$的形式，同理可得 y 軸與 z 軸分別用$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$與$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$來表示。

[例題4] 設空間中有兩點 A(−2,4,7)、B(1,−3,5)，試求
(1)直線 AB 的比例式、參數式。
(2)試判別 C(4,−10,3)、D(1,−3,0)兩點是否在直線 AB 上？
[解法]：(1)設 P(x,y,z)為直線 AB 上的點
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}//\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow (x+2\ ,\ y-4\ ,\ z-7)//(3,-7,-2)$
$\Leftrightarrow \frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z-7}{-2}$。($\overrightarrow{AP}$與$\overrightarrow{AB}$的分量成比例)
故直線的比例式為$\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z-7}{-2}$。
(注意：當我們考慮直線 AB 通過 B 點時，上述的比例式亦可以寫成：$\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-7}=\frac{z-5}{-2}$)
令比值$\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z-7}{-2}=t$ 可得參數式$\begin{cases} x=-2+3t \\ y=4-7t \\ z=7-2t \end{cases}$ (t 為實數)。
(2)將 C(4,−10,3)代入比例式$\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z-7}{-2}\Rightarrow\frac{4+2}{3}=\frac{-10-4}{-7}=\frac{3-7}{-2}=2$(三式比值相等)故 C 點在直線 L 上。
將 D(1,−3,0)代入比例式$\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z-7}{-2}\Rightarrow\frac{1+2}{3}=\frac{-3-4}{-7}=1$，但是$\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2}$(比值不相等)故 D 點不在直線 L 上。

(練習17) 設直線 L 有一方向向量$\vec{v}=(4,3,-1)$，且過點 A(−2,5,3)，則求直線 L 的比例式與參數式。　　Ans：$\frac{x+2}{4}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-3}{-1}$，$\begin{cases} x=-2+4t \\ y=5+3t \\ z=3-t \end{cases}$,$t\in R$

(練習18) 二平面 E_1：$x+3y-z+4=0$，E_2：$2x+5y+z+1=0$ 的交線之對稱比例式為何？

Ans：$\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{-1}$

(練習19) 化直線 L 的比例式$\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-7}{7}$ 為二面式。Ans：$\begin{cases}x+5y+9=0\\7y+z+7=0\end{cases}$

(丙)空間中兩平面與兩直線的關係

◆ 空間中兩平面的關係：

兩相異平面可能平行或相交於一直線，利用平面的法向量，可以判別出兩相異平面的關係：

當兩法向量平行時，兩相異平面互相平行。

當兩法向量不平行時，兩相異平面相交於一直線。

在空間坐標系中，當兩相異平面相交於一直線時，我們可以用聯立的兩個平面方程式來代表這兩平面交線的方程式。

[例題1] 設空間坐標中，二平面 E_1：$x+3y-z+4=0$，E_2：$2x+5y+z+1=0$

(1)試判別平面 E_1 與 E_2 的關係。

(2)試求平面 E_1 與 E_2 交線的參數式與比例式。

[解法]：

(1)設$\overrightarrow{n_1}=(1,3,-1)$、$\overrightarrow{n_2}=(2,5,1)$分別為 E_1、E_2 的法向量，因為$\overrightarrow{n_1}$與$\overrightarrow{n_2}$不平行，故平面 E_1 與 E_2 交於一直線。

(2)

[分析]：

要求交線的參數式，只要求交線的方向向量與線上的一點即可。

(1)找方向向量：

設$\overrightarrow{u}$為交線的方向向量，因為平面 E_1 與 E_2 的交線分別落在兩個平面上，而交線的方向向量會分別與平面 E_1、E_2 的法向量$\overrightarrow{n_1}=(1,3,-1)$、$\overrightarrow{n_2}=(2,5,1)$都垂直。

所以$\overrightarrow{u}$為$\overrightarrow{n_1}$與$\overrightarrow{n_2}$的公垂向量，故$\overrightarrow{u}\,//\,\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$

而$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\left(\begin{vmatrix}3&-1\\5&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix}\right)=(8,-3,-1)$，

因此可以取方向向量$\overrightarrow{u}=(8,-3,-1)$

(2)找直線上的點：

令 $z=0$ 代入兩平面的方程式，得$\begin{cases}x+3y=-4\\2x+5y=-1\end{cases}$，解得 $x=17$，$y=-7$

因此點$(17,-7,0)$落在兩平面的交線上。

根據參數式的意義，可知交線的

參數式為$\begin{cases} x=17+8t \\ y=-7-3t \\ \quad z=-t \end{cases}$ (t 為實數)。

比例式為$\dfrac{x-17}{8}=\dfrac{y+7}{-3}=\dfrac{z}{-1}$。

另外，可令 $z=t$，代入聯立方程式$\begin{cases} x+3y-z+4=0 \\ 2x+5y+z+1=0 \end{cases}$，解得 $x=17-8t$，$y=-7+3t$，這樣也可以求得交線的參數式。

(1)直線的兩面式：

一般而言，若 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 是兩個不平行的平面，相交於直線 L，則聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$的圖形即為交線 L，此聯立方程式稱為直線 L 的**二面式**。

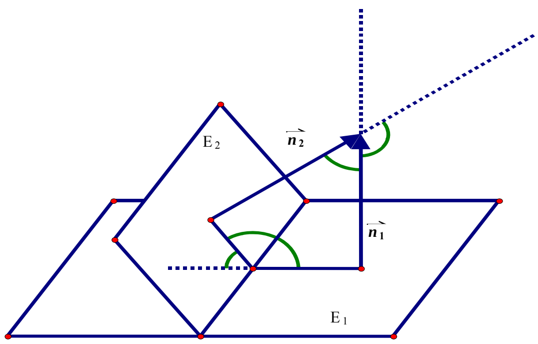
(練習20) 求兩平面$\begin{cases} 2x-y+3z-4=0 \\ x+4y-2z+7=0 \end{cases}$的交線 L 的比例式。 Ans：$\dfrac{x-1}{-10}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z}{9}$

(2)空間中兩平面的夾角：

設兩平面 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，

若設兩平面的法向量$\vec{n_1}$、$\vec{n_2}$的夾角為α，

則平面 E_1 與 E_2 的交角為α，$\pi-\alpha$。



[證明]：

設平面 E_1、E_2 交於一直線 L，另作一平面 E 垂直 L 且分別與 E_1、E_2 交線 L_1、L_2，法向量$\vec{n_1}$、$\vec{n_2}$的夾角α必等於直線 L_1、L_2 的一個夾角也就是平面 E_1、E_2 所夾的一個二面角。

[例題2] 設α為平面 $2x+y-z=4$ 與 xy 平面之夾角，則 $\sin\alpha=$？ Ans：$\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

[例題3] 求過點 A(1,0,0)、B(0,0,$\frac{1}{3}$)二點，且與平面 $x+z=3$ 之交角為 45°的平面方程式。
Ans：$x\pm\sqrt{6}\ y+3z-1=0$

[例題4] 平面 E_1：$7x-y+2z+10=0$，E_2：$4x+4y-8z+3=0$，求 E_1 及 E_2 所夾二面角之平分面方程式。Ans：$16x-16y+32z+31=0$ 或 $40x+8y-16z+49=0$

(練習21) 求 E_1：$x-2y+2z=5$ 與 E_2：$3x+4y-5z=-3$ 二平面的交角。Ans：$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$

(練習22) 平面 E 過點 A(1,−1,1)、B(−1,3,1)且與平面 $x+y+1=0$ 之一交角為$\frac{\pi}{4}$，求 E 的方程式。 Ans：$2x+y+2z-3=0$，$2x+y-2z+1=0$

(練習23) 求與平面 $2x-y-2z+3=0$ 平行且與其距離為 1 的平面方程式。
Ans：$2x-y-2z=0$ 或 $2x-y-2z+6=0$

(3)兩直線的關係：
空間中兩直線的關係──平行、重合、相交、歪斜，當我們建立空間坐標系後，可以依據直線的參數式或比例式來判別空間中兩相異直線的關係。
因為兩直線平行或重合時，它們的方向都會一致，而當兩直線相交或歪斜時，它們的

方向不會一致。因此若空間中兩直線 L_1 與 L_2 的方向向量分別為 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$，則

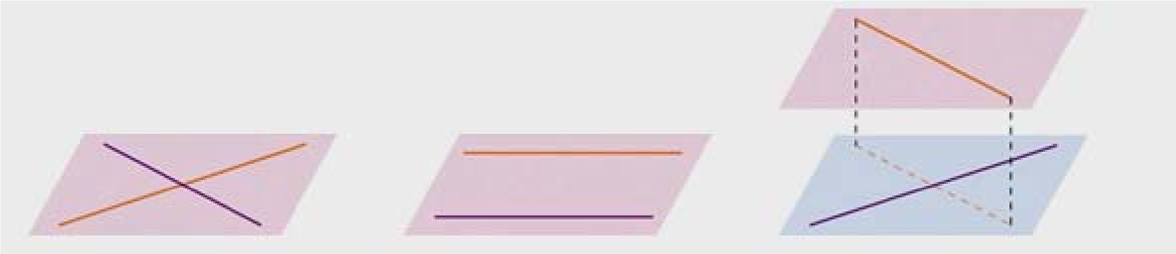
當 $\overrightarrow{v_1}$ 與 $\overrightarrow{v_2}$ 平行時，兩直線 L_1 與 L_2 可能平行或重合；

當 $\overrightarrow{v_1}$ 與 $\overrightarrow{v_2}$ 不平行時，兩直線 L_1 與 L_2 可能相交或為歪斜線。

結論：兩直線的關係：

①方向向量平行：重合、平行

②方向向量不平行：相交於一點、歪斜。



(a) 兩直線交於一點　(b) 兩直線平行　(c) 兩直線歪斜

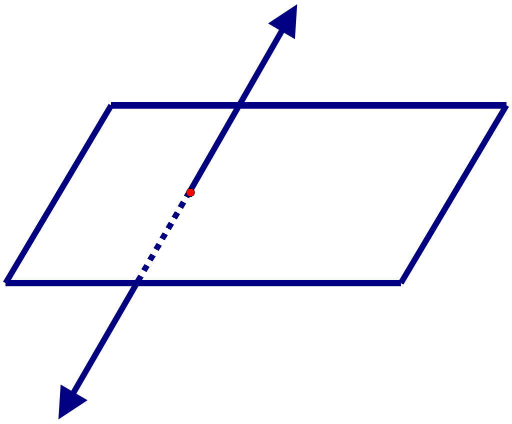
[例題5] 試判別直線 $L_1:\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{2},L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y+14}{3}=\frac{z-1}{1}$ 的相交情形，若相交求交點。　Ans：相交，(6,–2,5)

(練習24) 請判別兩直線 L_1：$\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{-2}$ 與 L_2：$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{1}$ 的關係。
Ans：歪斜

(丁)空間中平面與直線的關係

(1)求直線與平面的交點：
例如：

設直線 L：$\begin{cases} x=5+2t \\ y=-3-2t \\ z=1+t \end{cases}$，$t\in R$，平面 E：$3x-2y-4z-2=0$，請問直線 L 與平面 E 是否相交？若相交，則交點坐標為何？



[解法]：
設交點 $P(5+2t,-3-2t,1+t)$，代入 E 的方程式，
如果 t 有一解，則直線 L 與平面 E 有一個交點
如果 t 無解，則直線與平面 E 平行。
如果 t 有無限多解，則直線與平面 E 重合。
$\Rightarrow 3(5+2t)-2(-3-2t)-4(1+t)-2=0$
$\Rightarrow t=-3 \Rightarrow$L 與 E 有一個交點 $P(-1,3,-2)$

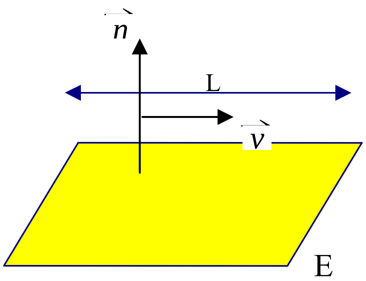
[代數觀點]：
根據上一題的解法，參數 t 有唯一解，則直線 L 與平面 E 只有一個交點，若是 t 無解，則可知 L 與 E 無交點；要是 t 有無限多個解，則 L 在平面 E 上。

[幾何觀點]：

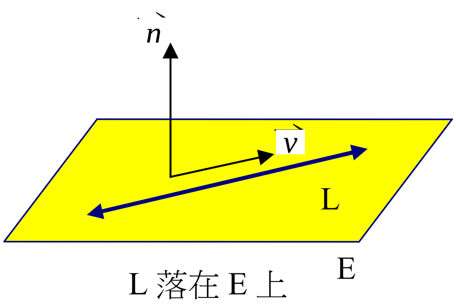
判別平面 E 與直線 L 的相交情形，亦可用法向量 $\vec{n}$ 與方向向量 $\vec{l}$ 來判別。

(a) $\vec{n}\perp\vec{l}$ $\Rightarrow$直線 L 與平面 E 平行或重合。

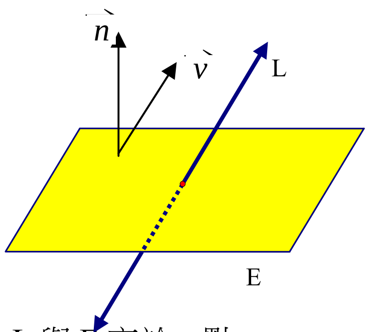
(b) $\vec{n}$ 與 $\vec{l}$ 不垂直 $\Rightarrow$ 直線 L 與平面 E 交於一點。



L 與 E 平行



L 落在 E 上

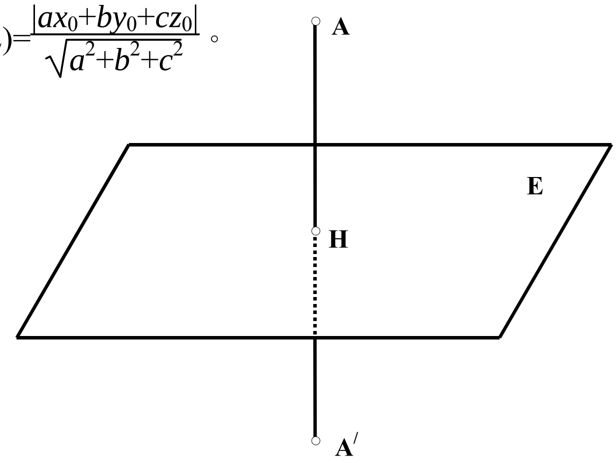


L 與 E 交於一點

[例題6] 設空間中有一個平面 E：$ax+by+cz+d=0$，試證明：

(1)點 $A(x_0,y_0,z_0)$到平面 E 的距離為 $d(A,E)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

(2)試求 A 點對平面 E 的對稱點。



[例題7] 已知 A(1,1,1)、B(2,1,−1)，平面 E：$x-2y+z+3=0$，P 為平面 E 上的動點，

(1)求 P 點使得$\overline{AP}+\overline{BP}$最小 (2)並求此最小值。

Ans：(1)$P(\frac{6}{5},\frac{9}{5},\frac{-3}{5})$ (2)3

(練習25) 設直線 L 的方程式為$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$，則下列那一個平面與 L 平行？

(A)$2x-y+z-1=0$ (B)$x+y-z-2=0$ (C)$3x-y+2z-1=0$ (D)$3x+2y+z-2=0$
(E)$x-3y+z-1=0$ Ans：(B)

(練習26) 兩平行平面 E_1：$ax+by+cz+d_1=0$，E_2：$ax+by+cz+d_2=0$，

兩平面 E_1、E_2 的距離 $d(E_1,E_2)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

(練習27) 求直線$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{3}$與平面 $2x+4y-z+2=0$ 交點 P 之坐標。

Ans：P(9,−2,12)

(練習28) 設 A(3,2,1)在平面 E：$3x+2y+z-28=0$ 上的投影點坐標，並求 A 點對此平面的對稱點。 Ans：(6,4,2)、(9,6,3)

(練習29) 設 P(x,y,z)為平面 E：$x-2y-2z+3=0$ 的點，則$(x-6)^2+y^2+z^2$ 的最小值為？ Ans：9

(練習30) 空間中，設 A(−1,3,3)、B(1,3,4)、C(3,−5,−5)、D(2,2,7)，則四面體 ABCD 中，以 ABC 為底面時，高為何？ Ans：$\sqrt{5}$

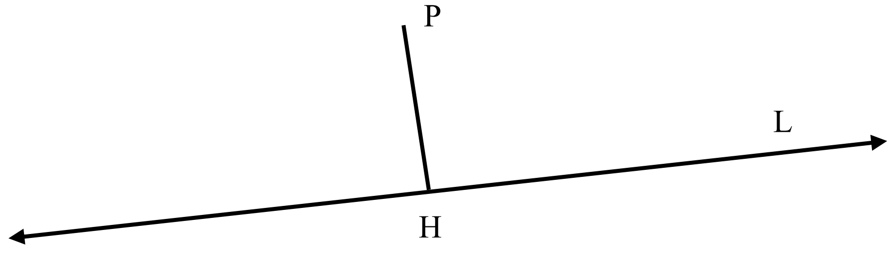
(戊)距離問題

前面我們已經討論了點線面這些幾何基本元素之間的關係，當它們有交點，我們可以利用方程式或參數式求出交點或是夾角，例如求直線與平面或兩直線的交點，當然交點也可能不只一個，像是求兩平面的交線；當它們沒有交點，通常問題就會是求距離的問題，例如求點到平面、點到直線、兩平行平面、兩平行線、兩歪斜線的距離。接下來要討論點到直線、兩平行線、兩歪斜線的距離：

(1)點到直線的距離：
在空間中，恰有一個平面通過直線 L，與 L 外一點 P。因此在空間中討論 P 點到直線 L 的距離，就如同在平面上討論 P 點到直線 L 的距離一樣。

設 H 點為 P 點對直線 L 的投影點，則 P 點到 L 的距離是$\overline{PH}$的長度，而$\overline{PH}$的長度亦是「P 點到 L 上各點連線段長度之最小值」。
因此根據這樣的想法，給定 P 點的坐標與直線 L 的參數式或比例式，就可以求出點 P 到 L 的距離，我們用下面的實例來說明。

取 L 的參數式，利用$\overline{AP}\perp L$的方向向量，求 P，而$\overline{AP}$即為點 P 到 L 的距離。



[例題8] 設點 $P(-5,0,-8)$，直線 $L：\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$ ，

(1)自 P 點作直線 L 的垂線與直線 L 交於 H，求 H 點坐標。

(2)求點 P 到直線 L 的距離。

解法：

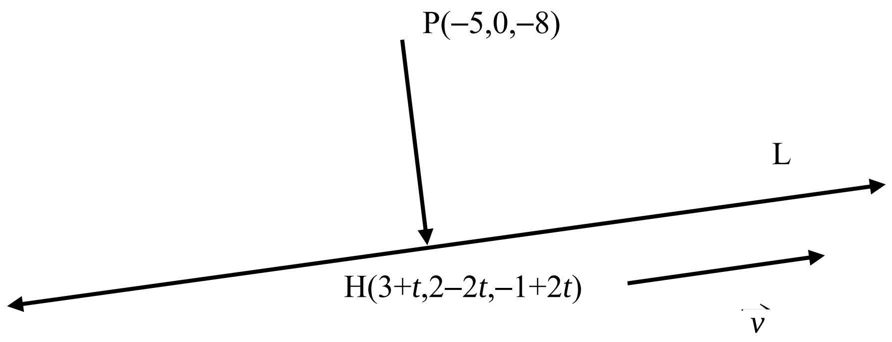
法一：

(1)因為 H 點在 L 上，故令 H 點的坐標為 $H(3+t,2-2t,-1+2t)$，

由於直線 PH 垂直直線 L，所以 $\overrightarrow{PH}=(8+t,2-2t,7+2t)$ 與 L 的方向向量 $\overrightarrow{v}=(1,-2,2)$ 垂直所以 $(8+t,2-2t,7+2t)\cdot(1,-2,2)=0$，

故可得 $9t+18=0$，解得 $t=-2$，故 H 點的坐標為 $(1,6,-5)$。

(2) 點 P 到直線 L 的距離 $\overline{PH}=\sqrt{(-5-1)^2+(0-6)^2+(-8+5)^2}=\sqrt{81}=9$。



法二：

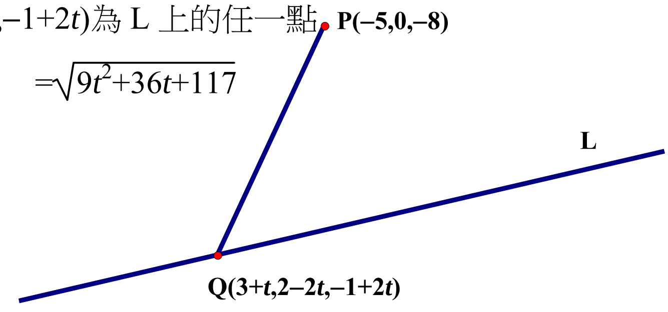
根據最小距離的原理，可設 $Q(3+t,2-2t,-1+2t)$ 為 L 上的任一點

$\overline{PQ}=\sqrt{(-5-3-t)^2+(0-2+2t)^2+(-8+1-2t)^2}=\sqrt{9t^2+36t+117}$
$=\sqrt{9(t^2+4t+4)+81}=\sqrt{9(t+2)^2+81}$

故當 $t=-2$ 時，$\overline{PQ}=\sqrt{81}=9$ 最小，

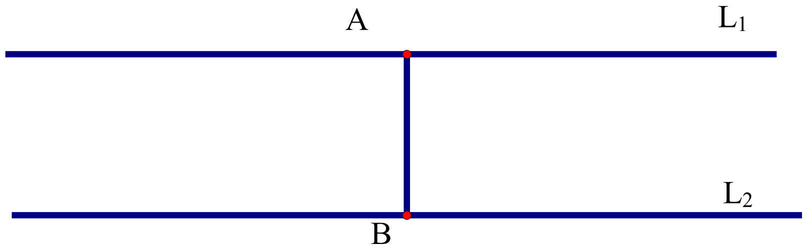
此時 $Q(1,6,-5)$ 即為 H 點。

而且點 P 到直線 L 的距離 $=\sqrt{81}=9$。



(2)兩平行線的距離：

空間中，設直線 L_1 平行直線 L_2，因為 L_1 與 L_2 在同一平面上，因此討論空間中兩平行線的距離就相當於在平面上的情形一樣。即平行線的距離為 L_1 與 L_2 的公垂線段的長度($\overline{AB}$)。換句話說，平行線 L_1、L_2 間的距離會等於 L_1 上任一點到 L_2 的距離。



空間坐標中，給定兩平行直線的參數式或比例式，利用前面點到直線距離的求法，就可以求出它們的距離，接下來用實例來說明。

[例題9] 二平行線 $L_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$與 $L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{1}$，求 L_1 與 L_2 間的距離。

解法：

取 L_1 上的點 $P(-1,1,0)$，平行線 L_1 與 L_2 間的距離等於點 P 到直線 L_2 的距離。

設 P 點對 L_2 的投影點 Q，因為 Q 在 L_2 上，可令 $Q(1+2t,2t,-2+t)$

由此可得 $\overrightarrow{PQ}=(2+2t,2t-1,-2+t)$，

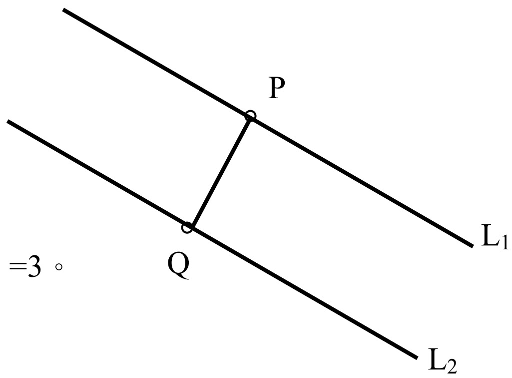
因為 $\overrightarrow{PQ}\perp L_2$ 且 $(2,2,1)$ 為 L_2 的一個方向向量

所以 $\overrightarrow{PQ}\cdot(2,2,1)=0$，

得 $2(2+2t)+2(2t-1)+1(-2+t)=0$

解得 $t=0$，故 $Q(1,0,-2)$

所以 L_1 與 L_2 間的距離 $=\overline{PQ}=\sqrt{(-1-1)^2+(1-0)^2+(0+2)^2}=3$。



(3)二歪斜線的距離：

設 L_1、L_2 為空間中兩歪斜線，根據最短路徑的原理，在 L_1、L_2 上任取一點，兩點距離的最小值即為歪斜線 L_1、L_2 間的距離。

(1°)找 L_1、L_2 的公垂線：

因為 L_1、L_2 為歪斜線，所以可找到平行平面 E_1、E_2，使得 L_1、L_2 分別落在 E_1、E_2 上。設 L_1 在 E_2 上的投影直線為 L_1'，所以 L_1'與 L_2 不平行，設 L_1'與 L_2 的交點為 Q，因為 L_1'為 L_1 在 E_2 上的投影直線，所以 Q 點對 E_1 的投影點 P 會落在 L_1 上，因此直線 PQ 是平面 E_1、E_2 的垂線，故直線 PQ 分別垂直歪斜線 L_1、L_2，我們稱直線 PQ 為歪斜線 L_1、L_2 的**公垂線**，其中 P、Q 分別是公垂線在 L_1、L_2 上的垂足點。

(2°)求歪斜線 L_1、L_2 的距離：

如下圖，在 L_1、L_2 上分別取異於 P、Q 的 A、B 兩點，

設 A 點對平面 E_2 的投影點為 C，因為直線 AC 為 E_2 的垂線，所以直線 BC 垂直直線 AC，因此ΔABC 為直角三角形，故 $\overline{AB}>\overline{AC}$。又因為 $\overline{AC}=\overline{PQ}$=兩平行平面 E_1、E_2 的距

離，所以若在歪斜線 L_1、L_2 上各任取一點，則此兩點間的最短距離

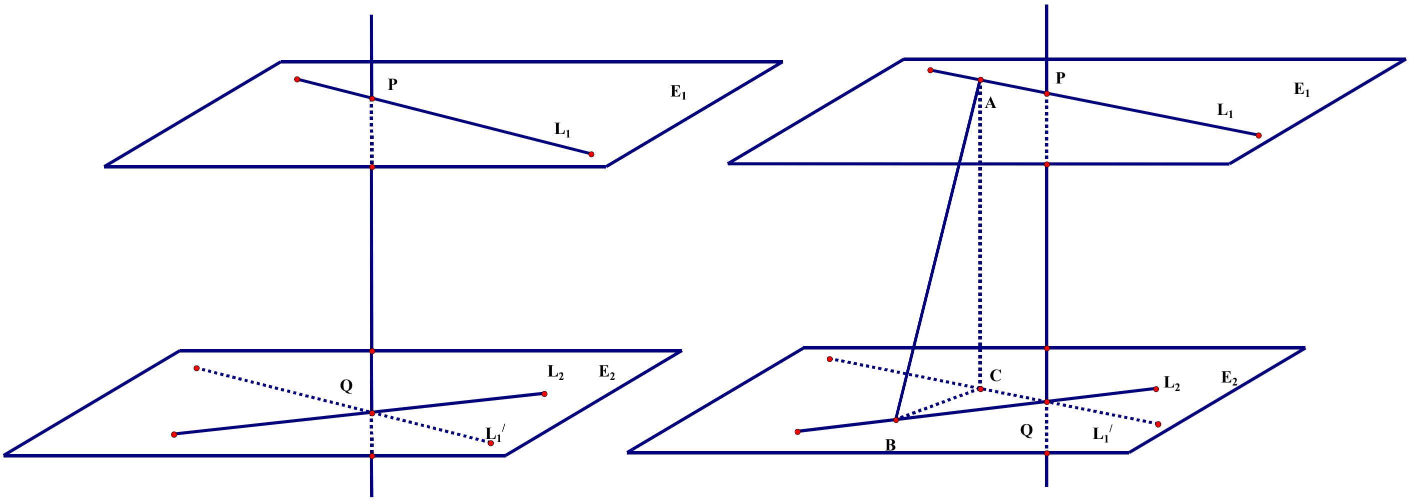
$=\overline{PQ}$(兩平行面 E_1、E_2 的距離)。

我們將前面的結果整理如下：

歪斜線 L_1、L_2 的距離

=公垂線與兩線交點間的距離

=過 L_1 與 L_2 的兩平行面 E_1 與 E_2 間的距離。



根據前面的討論，可以歸結出求兩歪斜線距離的方法：

(法一)：

求歪斜線 L_1，L_1 之公垂線與 L_1,L_2 的交點 P,Q 則 L_1,L_2 的距離為$\overline{PQ}$。

(法二)：

先求一平面 E_1 包含直線 L_1，且平行 L，在取 L_2 上一點 A，求 A 點到 E_1 的距離，即為 L_1,L_2 的距離。

[例題10] 空間坐標中，兩歪斜線 L_1：$\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{-2}$與 L_2：$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{1}$，直線 L 為直線 L_1 與 L_2 的公垂線。

試求：(1)直線 L 與 L_1、L_2 的交點坐標。　(2)直線 L_1 與 L_2 的距離。

解法：

(1)設公垂線 L 與 L_1、L_2 的交點為 P、Q，

因為 P、Q 分別在直線 L_1、L_2 上，

所以可設 $P(-2+t，3+2t，-3-2t)$，$Q(2-3s，-2+4s，s)$，

(請注意：因為兩相異直線上點的變化各自獨立，所以 P、Q 要用不同的參數)

則$\overrightarrow{PQ}=(-3s-t+4，4s-2t-5，s+2t+3)$。

因為$\overline{PQ}$為公垂線段，所以$\overline{PQ}\perp L_1$ 且$\overline{PQ}\perp L_2$

故$\overrightarrow{PQ}$為 L_1 與 L_2 方向向量$\vec{v_1}=(1,2,-2)$與$\vec{v_2}=(-3,4,1)$的公垂向量

$\Rightarrow\overrightarrow{PQ}\,//\,\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\left(\begin{vmatrix}2 & -2\\4 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & 1\\1 & -3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\-3 & 4\end{vmatrix}\right)=(10,5,10)$

$\Rightarrow\dfrac{-3s-t+4}{10}=\dfrac{4s-2t-5}{5}=\dfrac{s+2t+3}{10}$ 則$\begin{cases}5(-3s-t+4)=10(4s-2t-5)\\10(4s-2t-5)=5\cdot(s+2t+3)\end{cases}$，

化簡得$\begin{cases}11s-3t-14=0\\7s-6t-13=0\end{cases}$，

解此聯立方程式得 $s=1$，$t=-1$。

故公垂線段兩端點 P$(-3,1,-1)$，Q$(-1,2,1)$。

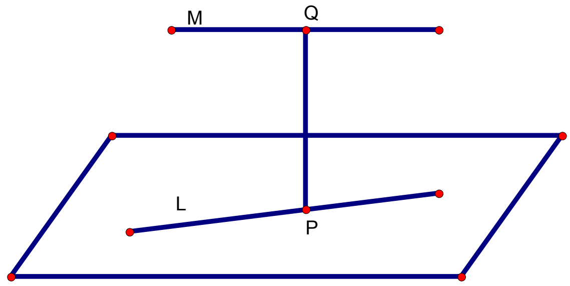
(2) 公垂線段$\overline{PQ}$長等於 L_1 與 L_2 的距離。

因此 L_1 與 L_2 之距離為$\overline{PQ}=\sqrt{(-1+3)^2+(2-1)^2+(1+1)^2}=3$。

[例題11] 設 L：$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$，M：$\dfrac{x+9}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{2}$，

(1)試判別 L、M 的相關位置。(2)求 L、M 的公垂線方程式。

(3)求 $d(L,M)=$？Ans：(1)歪斜 (2)$\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{7}$ (3)$\sqrt{62}$



(練習31) 試求點 P$(-1,3,6)$到直線 L：$\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-8}{3}=\dfrac{z-6}{2}$的距離。 Ans：3

(練習32) 試求兩平行線 L_1：$\frac{x-6}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-4}{2}$,$L_2$：$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{2}$的距離。Ans：3

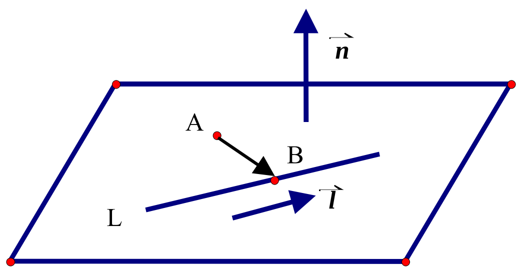
(練習33) L_1：$\frac{x-11}{4}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z+7}{-1}$，$L_2$：$\frac{x+5}{3}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-6}{-2}$，若 L_1、L_2 的公垂線為 L，請求出 L 與 L_1、L_2 的交點 P、Q 坐標。
Ans：P(3,1,−5)、Q(1,−4,2)

(練習34) 設二直線 L:$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}$，M:$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{1}$ 為空間中二直線
(1)求包含 L 且與 M 平行的平面。(2)求 d(L,M)
Ans：(1)$5x-2y+z-7=0$ (2)$\frac{\sqrt{30}}{6}$

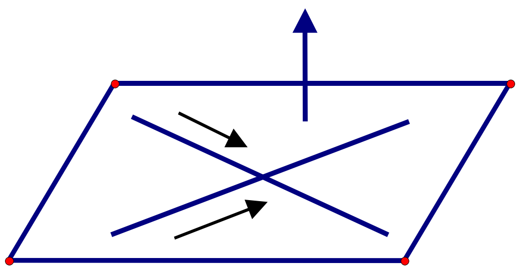
◆ 由點、線決定平面：

決定平面有決定平面的四個條件：
(a)不共線的相異三點(b)一線與其線外一點。(c)二相交直線(d)二平行線
接下來舉例來說明這些條件如何透過平面的方程式與直線的方程式來詮釋：

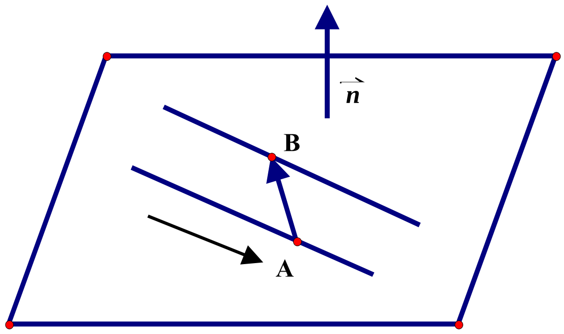
[例題12] 求過點 A(4,3,1)且包含直線 L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$之平面方程式。
Ans：$2x-6y+z+9=0$



[例題13] 試求包含二相交直線$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1},L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$的平面方程式。Ans：$5x-4y-3z-10=0$



[例題14] 試求過二平行線$L_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{2}$,$L_2:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+4}{2}$之平面方程式。Ans：$2x-3y+2z+11=0$



(練習35) 已知直線 L：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$ 與點 P(−2,1,3)試求

(1)直線 L 與點 P 所決定的平面方程式。

(2)包含直線 L 且垂直平面 $x-y+z=3$ 的平面方程式。

Ans：(1)$6x+y+15z-34=0$　(2)$2x-3y-5z+2=0$

(練習36) 求包含二平行線$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ 與$\begin{cases}x=2t\\y=-1+t\\z=1-t\end{cases}$，($t$ 為實數)的平面方程式。Ans：$x-7z-5z-2=0$

(練習37) 空間中兩相交直線 L_1：$\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+2z+2=0\end{cases}$，L：$\begin{cases}2x+y+z-3=0\\3x+y+2z-4=0\end{cases}$

則求通過 L_1、L_2 的平面。Ans：$x-2y+3z+1=0$

(己)平面族的意義

例子：

(1)對於任意的實數 a，二平面 E_1：$x+3y-z+4=0$，E_2：$2x+5y+z+1=0$ 之交線

$\begin{cases}x=17-8t\\y=-7+3t\\z=t\end{cases}$ (t 為實數)是否在平面 $a(x+3y-z+4)+(2x+5y+z+1)=0$ 上？

(2)$\begin{cases}x+3y-z+4=0\\2x+5y+z+1=0\end{cases}$的交線與$\begin{cases}x+3y-z+4=0\\a(x+3y-z+4)+(2x+5y+z+1)=0\end{cases}$的交線是否代表相同的直線？

[解法]：

(1)將$\begin{cases}x+3y-z+4=0\\2x+5y+z+1=0\end{cases}$交線的參數式$\begin{cases}x=17-8t\\y=-7+3t\\z=t\end{cases}$代入

平面 $a(x+3y-z+4)+(2x+5y+z+1)=0$，可知交線落在該平面上。

(2)

$\begin{cases}x+3y-z+4=0\\a(x+3y-z+4)+(2x+5y+z+1)=0\end{cases}$與$\begin{cases}x+3y-z+4=0\\2x+5y+z+1=0\end{cases}$的交線代表同一條直線。

從方程組的觀點來看，這兩個方程組的解相同。

從(1)可以得知平面 $a(x+3y-z+4)+(2x+5y+z+1)=0$ 會包含二平面 E_1：$x+3y-z+4=0$，E_2：$2x+5y+z+1=0$ 之交線，反過來說，所有通過 E_1、E_2 交線的平面是否都能表成平面 $a(x+3y-z+4)+(2x+5y+z+1)=0$ 的形式呢？

(1)通過兩平面 E_1、E_2 交線的平面：

設 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，二平面交於一直線 L，

則通過此直線的平面可設為：$k_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+k_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$。$(k_1^2+k_2^2\neq 0)$

[證明]：設 $f_1(x,y)=a_1x+b_1y+c_1z+d_1$，$f_2(x,y)=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$

很容易可以證明交線 L 上的點都會在平面 $k_1f_2(x,y)+k_2f_2(x,y)=0$，其中 $k_1^2+k_2^2\neq 0$

設平面 E 通過交線 L，再 E 上取一點 $A(x_0,y_0,z_0)$，且 A 不在 L 上，

取 $k_1=f_2(x_0,y_0)$，$k_2=-f_1(x_0,y_0)$

考慮平面 $f_2(x_0,y_0)\cdot(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)-f_1(x_0,y_0)\cdot(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$……(*)

(*)很明顯會通過 L 上的兩點 B、C，故(*)所代表的平面會通過 A、B、C 三點，因為通過不共線三點 A、B、C 的平面只有一個，即為平面 E。

因此平面 E 的方程式為 $f_2(x_0,y_0)\cdot(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)-f_1(x_0,y_0)\cdot(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$。

$k_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+k_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$ 代表兩平面 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 交線 L 的平面，當 $k_1=0$，代表平面 E_2，當 $k_2=0$，代表平面 E_1。

當 $k_1\neq 0$ 時，可以將 $k_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+k_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$ 化成

$a_1x+b_1y+c_1z+d_1+k(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$ 的型式，其中 $k=\dfrac{k_2}{k_1}$。

我們可以得到以下的結論：

通過直線 L：$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$的平面(除了平面 $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 之外)可以表成 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1+k(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$ 的型式。

[例題15] 過直線$\begin{cases}7x+y-2z-4=0\\3x+2y+4z-6=0\end{cases}$，且與直線$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$平行的平面方程式。

Ans：$15x-y-14z=0$

(練習38) (1)求包含二平面 $2x+y-4=0$，$y+2z=0$ 之交線且垂直平面 $3x+2y+3z-6=0$ 之平面方程式。

(2)求過直線$\begin{cases}x+y-z+1=0\\x+2y-3=0\end{cases}$，且與 x 軸平行的平面方程式。

Ans：(1)$x-z-2=0$ (2)$y+z-4=0$

(練習39) 求包含平面 $3x+2y-2z+1=0$、$x+y-5z-6=0$ 交線的平面，且與 $4x+2y+3z+1=0$ 平行的平面方程式。Ans：$37x+28y-68z-51=0$

[例題16] A$(-5,4,3)$、B$(13,12,5)$為空間中二點，P 為 x 軸上的一個動點，當$\overline{AP}+\overline{BP}$小時，P 之坐標為何？ Ans：P$(0,0,0)$

[例題17] L_1：$\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z}{-3}$，$L_2$：$\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z}{2}$

(1)L_1與L_2的交點坐標。 (2)L_1、L_2二線交角平分線之方程式。

Ans：(1)(4,−5,0) (2)$\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 或 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z}{5}$

(練習40) 求 x 軸與平面 $6x-3y+2z=12$ 交角為θ，求 sinθ =？ Ans：$\dfrac{6}{7}$

(練習41) A(12,10,5)、B(4,−8,3)為空間中二點，P 是 y 軸上一個動點，當$\overline{AP}+\overline{BP}$小時，P 之坐標為何？ Ans：(0,−3,0)

(練習42) 過點(3,2,−1)與(0,4,1)二點的直線與平面 $2x-y-z+7=0$ 之交角為θ，求 sinθ=？ Ans：$\dfrac{10}{\sqrt{102}}$

綜合練習

(1) 試求下列諸平面的方程式：

(a)過點(−1,3,2)，法線方向為(−4,1,3)。

(b)過三點(2,7,3)、(4,6,2)、(5,6,1)。

(c)在 x,y,z 軸截距為 3,−2,4。

(d)設 P(2,1,−1)、Q(3,−2,1)、R(1,1,2)，其中直線 PQ 垂直此平面且 R 點到平面的距離為 $2\sqrt{14}$ 。

(e)與 $4x-2y-z-5=0$、$3x+y-z+1=0$ 二平面均垂直且通過點 P(1,1,1)。

(f)點(1,2,3)在此平面上的投影點為(2,3,4)。

(g)過 $x+y-z+2=0$、$x+z-3=0$ 二平面的交線且過點(0,0,2)。

(2) 試求符合下列條件之直線方程式：

(a)過點(3,3,−1)且平行 y 軸

(b)過點(9,8,7)且平行直線$\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ 5x-y+2z+2=0 \end{cases}$

(c)過點(11,4,−6)且垂直於直線$\begin{cases} x=4-t \\ y=7+2t \\ z=-1+t \end{cases}$，$t$ 為實數。

(3) 空間中，下列何者代表直線：

(A)$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-2y+z=1 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$ (B)$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-4t \\ z=4 \end{cases}$ t 為任意實數。(C)$\begin{cases} x-y+z=5 \\ 2x-2y+2z=3 \end{cases}$

(D)$\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{x+1}{-5}$ (E)$3x+2y=1$。

(4) 空間中有一直線 L：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{6}$，請回答下列兩個小題：

(a)那一條直線與 L 歪斜？

(A) $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-4}{6}=\dfrac{z}{12}$ (B) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-6}{6}$ (C)$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+2t \\ z=-6+3t \end{cases}$

(D) $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+1}{5}$ (E) $\begin{cases} 3x-2y+8=0 \\ 2y-z-3=0 \end{cases}$

(b)那一個平面與 L 平行？

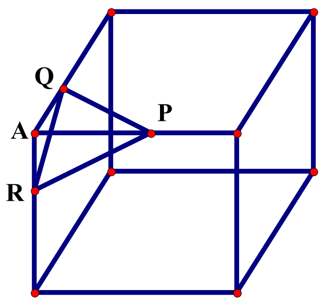
(A)$2x+3y+6z=0$(B)$3x-4y+z+5=0$(C)$3x-2y+7=0$(D)xy 平面(E) $x+y+z=4$

(5) 空間中一直線 L：$\begin{cases}2x+y-z=0\\x+2y-z=1\end{cases}$，則下列何者為真？

(A)L 的方向向量為(1,−1,3) (B)點(0,1,1)在直線 L 上 (C)L 與$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-7}{3}$重合。(D)L 與$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$ 垂直 (E)L 在平面上 $x-y+1=0$ 上。

(6) 空間坐標中，平面 E：$2x-y=2$ 上有 A(2,2,2)與 B(1,0,0)兩點
已知原點 O 在直線 AB 與 E 上的投影點分別為 H、K，試問
下列哪些選項是正確的？
(1)$\overrightarrow{AB}\cdot(2,-1,0)=0$ (2)$\overrightarrow{OH}\cdot(2,-1,0)=0$
(3) $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ (4)$\overrightarrow{OK}\cdot(2,-1,0)=0$ (5) $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{KH}=0$。

(7) 有一個邊長為 5 公尺的正立方體木塊，一位雕塑家想要作一件藝術品，他拿鋸子沿 P、Q、R 三點鋸下四面體 APQR，剩下的木塊以截面 PQR 為底放在地上，



已知$\overline{AP}$=4 公尺，$\overline{AQ}=\overline{AR}$=2 公尺，請問這一件藝術品的高度為多少公尺？

(8) 若 A(1,2,1)、B(0,−1,1)、C(−1,0,0)、D(4,3,k)，試求
(a)ΔABC 的面積 (b)A、B、C 三點所決定之平面方程式 (c)若 A、B、C、D 四點共平面，求 k=？

(9) 坐標空間中，直線 L 上距離點 Q 最近的點稱為 Q 在 L 上的投影點。已知 L 為平面 $2x-y=2$ 上通過點(2,2,2)的一直線。請問下列哪些選項中的點可能是原點 O 在 L 上的投影點？
(1)(2,2,2) (2) (2,0,2) (3) $(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},0)$ (4) $(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},-2)$ (5) $(\frac{8}{9},-\frac{2}{9},-\frac{2}{9})$
(2010 年學科能力測驗)

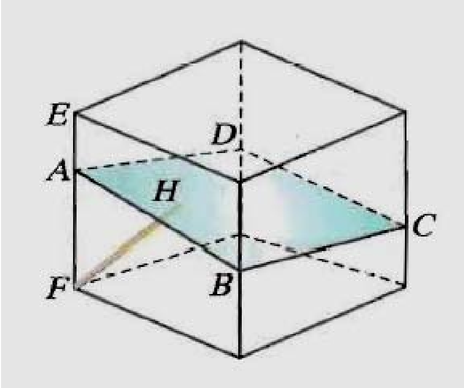
(10) H：$x-y+z=2$ 為坐標空間中一平面，L 為平面 H 上一直線。已知點 P(2,1,1)為 L 上距離原點 O 最近的點，已知$(2,m,n)$為 L 的方向向量，試求(m,n)=？

(2011 學科能力測驗)

(11) 設ΔABC 的三頂點分別為 A(−2,7,15)、B(1,16,3)、C(10,7,3)。
(a)試求通過 A、B、C 三點的平面方程式。(b)試求ΔABC 的外心坐標。
(2006 指定甲)

(12) 設 A(0，1，2)，B(－1，0，3)，C(1，2，3)，
(a)求通過 A，B，C 三點的平面方程式。(b)求ΔABC 的垂心坐標。

(13) 如圖，有一邊長 30 公分的正立方體，
在其中置入一面鏡子 ABCD，其中 B、D 分別為
稜的中點，$\overline{EA}$：$\overline{AF}$=1：2，若由 F 立一個垂直
鏡面支柱$\overline{FH}$撐注鏡子，求$\overline{FH}$長度。



(14) 平面 E_1：$x-2y+2z-5=0$，E_2：$2x+y-2z+3=0$，求 E_1、E_2所夾二面角之平分面方程式。

(15) 設 A(3,1,0)、B(1,2,3)對稱於平面 $ax+by+cz-2=0$，求

(a) (a,b,c)=？　(b)$\overline{AB}$與此平面的交點。

(16) 給予一平面 E：$x-3y-z-12=0$ 及一點 P(2,5,–3)，求 P 在 E 上的正射影，P 對於 E 的對稱點。

(17) 設 A(1,–1,2)、B(1,5,–4)及平面 E：$x+y+z-5=0$，求 E 上的一點 P 使得$\overline{AP}+\overline{BP}$最小。

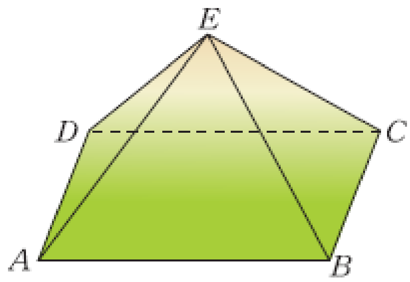
(18) 一平面過點(1,2,1)並通過二平面 $x+2y-3z=0$ 與 $x-y+z=1$ 的交線，求此平面的方程式。

(19) (正射影與點到直線的距離)

設空間中有一點$A(-1,-2,-1)$，直線L：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$，在 L 上取一點 P(0,–3,3)

(a)試求$\overrightarrow{PA}$在方向向量 $\overrightarrow{v}$ =(1,2,–2)的正射影。
(b)試求 A 點對直線 L 的投影點坐標。
(c)試求 A 點到直線 L 的距離。

(20) 設空間坐標中有一個金字塔形狀的立體圖形，其中每個稜長都相等，
底面 ABCD 落在 xy 平面上，其中 A(2,0,0)、C(0,2,0)、D(0,0,0)
且 E 點在 xy 平面上方，試求下列各小題：
(a)試求 A 點到平面 BCE 的距離。
(b)試求 D 點到直線 BE 的距離。



(21) 空間中有二直線

$$L_1:\begin{cases}x-y+z-1=0\\2x+y-2z+1=0\end{cases},L_2:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$$

(a)求包含 L_1 且與 L_2 平行的平面 E 的方程式。
(b)L_1 與 L_2 的距離。

(22) 某次航空展有兩架飛機在空中進行分列式表演，在某個小範圍的空域中，兩架飛機直線飛行。根據塔台的觀測資料：
甲飛機一開始在 A(1,2,−1)，2 秒之後飛到 B(5,8,−3)；
乙飛機一開始在 C(0,8,4)，1 秒之後飛到 D(2,10,3)，
根據這些資料，請預測這兩架飛機在這個空域內會發生碰撞嗎？

(23) 設空間中兩直線 L_1：$\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$，$L_2$：$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+14}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ 相交於一點，試求：(a)L_1 與 L_2 的交點坐標。 (b)兩線交角θ ，cosθ=？ (c)包含 L_1 與 L_2 的平面。

(24) L_1：$\begin{cases} x+3y=1 \\ 3y+z=2 \end{cases}$、$L_2$：$\begin{cases} 2x-z+1=0 \\ y-3=0 \end{cases}$，求過點(3,6,−12)且與 L_1、L_2 均平行的平面方程式。

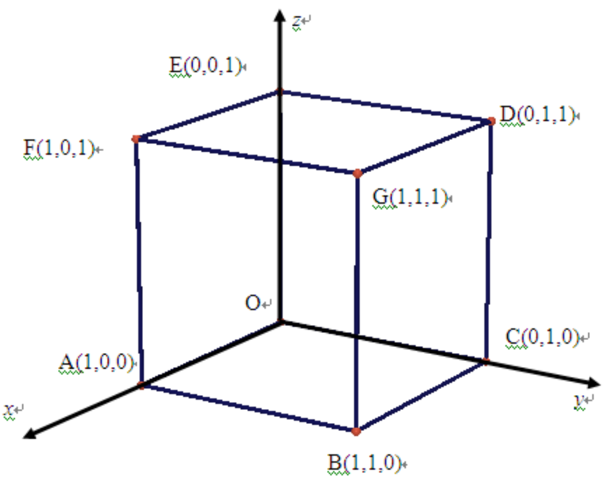
(25) 設 L_1：$\begin{cases} 3x+2y=6 \\ z=0 \end{cases}$，$L_2$：$z$ 軸，若 L_1 上一點 P、L_2 上一點 Q，使得$\overline{PQ}$分別與 L_1、L_2 垂直，求 Q 點坐標及$\overline{PQ}$之長。

(26) 設二直線 L_1:$\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$ ，L_2:$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 為空間中二直線
(a)求 L_1 與 L_2 的交點。(b)求交角平分線。(c)求包含 L_1 與 L_2 的平面方程式。

(27) (a)若 $\vec{a}=(1,-2,2)$, $\vec{b}=(8,4,-1)$，$\vec{c}=t\cdot\vec{a}+\vec{b}$，若 $\vec{c}$ 與 $\vec{a}$ 的夾角等於 $\vec{c}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角 ，求 $\vec{c}$ 。
(b)已知直線 L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$ ，直線 L_2：$\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-1}$，求 L_1 與 L_2 的交角平分線的參數式。

進階問題

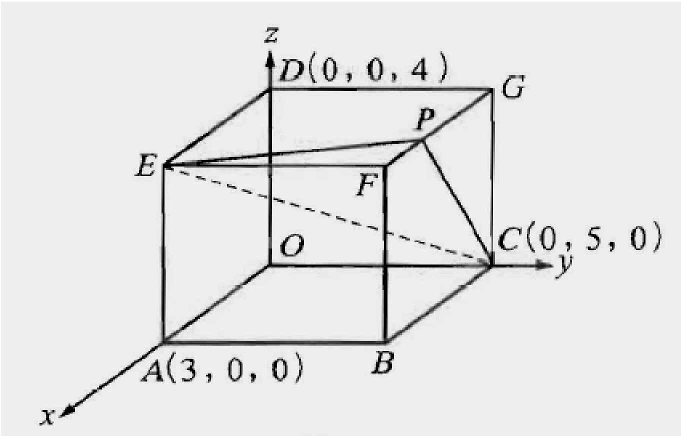
(28) 空間坐標系中，設Γ為空間中之稜長為 1 的一正立方體(如下圖所示)，
設平面α的方程式為 $5x+2y-z=k$，試求下列各小題：
(a)當 $k=0$ 時，正立方體Γ被平面α截出一個四面體，且此四面體包含 E 點，試求此四面體的體積。
(b)當 k 變動，而且使得正立方體Γ被平面α截出一個包含 E 點的四面體，試求 k 之範圍。



(29) ΔABC 的三頂點坐標為 A(2,−3,5)，B(3,0,10)，C(x,y,0)，則使ΔABC 的周長最小的點 C 的坐標為？

(30) 平面 E 過點 P(2,3,4)，且分別交 x,y,z 三軸正向於 A、B、C 三點，O 為原點，(a)求四面體 OABC 的最小體積。(b)此時平面 ABC 之方程式為何？

(31) 如圖所示，OABC−DEFG 是一長方體，其中一些頂點坐標 A(3,0,0)、C(0,5,0)、D(0,0,4)，試求
(a)B、E、G 三點所決定的平面方程式。
(b)設 P 是線段 FG 上一點，欲使ΔCEP 的周長最小，求點 P 的坐標。



(32) 設直線 L$_1$：$\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-3t \end{cases}$、L$_2$：$\begin{cases} x=2+s \\ y=-1-2s \\ z=-s \end{cases}$
(a)證明 L$_1$、L$_2$ 為歪斜線。
(b)設 P(t,−t,−3t)在 L$_1$ 上，Q、R 為 L$_2$ 的兩相異點，且ΔPQR 為正三角形時，試以 t 表示ΔPQR 的面積。
(c)請問當正ΔPQR 的面積最小時，P 點坐標為何？

(33) 空間中平面α：$-x+y+2z-10=0$，直線β：$\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3}$
(a)求直線β與平面α的交點 A 之坐標。
(b)自直線β上之點 P 向平面α做垂線，垂足為 Q，使ΔAPQ 之面積為$\frac{20\sqrt{2}}{3}$，求 P 之坐標。

綜合練習解答

(1) (a)$4x-y-3z+13=0$ (b)$x+y+z-12=0$(c)$4x-6y+3z-12=0$ (d)$x-3y+2z=30$ 或 $x-3y+2z=-26$ (e)$3x+y+10z-14=0$ (f)$x+y+z-9=0$ (g)$x+y-z+2=0$

(2) (a)$x=3$、$y=3+t$、$z=-1$ (b)$\dfrac{x-9}{7}=\dfrac{y-8}{1}=\dfrac{z-7}{-17}$ (c) $\dfrac{x-11}{4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+6}{-2}$

(3) (A)(B)(D)

(4) (a)(D) (b)(C)

(5) (B)(D)(E)

(6) (1)(3)(5)

(7) 7 公尺

(8) (a)$\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ (b)$3x-y-4z+3=0$ (c)$k=3$

(9) (1)(3)(5)

[解法]：

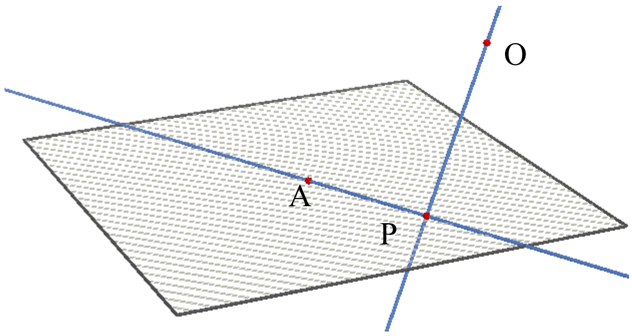
如右圖,令 A(2,2,2)，若點 P 符合條件要求

那麼 P 在 $2x-y=2$ 上且 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AP}$

因此可以據此檢查選項中的點是否符合

在 $2x-y=2$ 上且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

故選(1)(3)(5)



(10) $(-1,-3)$

(11) (a)$x+y+z-20=0$ (b)$(3,9,8)$

[解法]：設外心 O(a,b,c)，$\because \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$且 O 在平面 ABC 上

$\therefore (a+2)^2+(b-7)^2+(c-15)^2=(a-1)^2+(b-16)^2+(c-3)^2$

$(a-1)^2+(b-16)^2+(c-3)^2=(a-10)^2+(b-7)^2+(c-3)^2$

$a+b+c-20=0$，上面三式整理成：$a+3b-4c=-2$，$a-b=-6$，$a+b+c=20$

聯立解得 $a=3$，$b=9$，$c=8$。

(12) (a) $x-y+1=0$(b) $H(0，1，1)$

[提示：令 H(x,y,z)，利用$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，H 在平面 ABC 上，找出 x,y,z 的方程式，再解 x,y,z。]

(13) $\dfrac{60\sqrt{38}}{19}$

(14) $x+3y-4z+8=0$ 或 $3x-y-2=0$

(15) (a)$(-2,1,3)$ (b)$(2,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

(16) $(4,-1,-5)$ $(6,-7,-7)$

(17) $(2,3,0)$

(18) $3x-z-2=0$

(19) (a) $(1,2,-2)$ (b) $(1,-1,1)$ (c)3

(20) (a)$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ (b)2

(21) (a)$x+5y-7z+5=0$ (b)$\dfrac{7\sqrt{3}}{15}$

(22) 不會

(23) (a)(6,−2,5) (b)$\frac{\pm1}{\sqrt{6}}$ (c)$x-2z+4=0$

(24) $2x+3y-z=36$

(25) Q(0,0,0)、$\frac{6\sqrt{13}}{13}$

(26) (a) $(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$ (b)$\frac{3x+2}{1}=\frac{3y-1}{4}=\frac{3z-5}{-1}$ 或 $\frac{3x+2}{3}=\frac{3z-5}{3}$ ，$3y=1$
(c)$2x-y-2z+5$

(27) (a) (11,−2,5) (b)$\begin{cases}x=1+11t\\ y=1-2t\\ z=1+5t\end{cases}$，$t$ 為實數或$\begin{cases}x=1+5t\\ y=1+10t\\ z=1-7t\end{cases}$，$t$ 為實數。

[提示：因為$\vec{c}$與$\vec{a}$的夾角等於$\vec{c}$與$\vec{b}$的夾角，所以$|t\cdot\vec{a}|=|\vec{b}|$，且 $t>0$]

(28) (a)$\frac{\sqrt{30}}{20}$(b)$-1<k\leq0$

(29) $(\frac{7}{3},-2,0)$[提示：ΔABC 周長=$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$，而$\overline{AB}$為定值，因此原問題可化為在 xy 平面上找一點 C，使得$\overline{BC}+\overline{CA}$最小，C 點為 A 點對 xy 平面的對稱點 $A'(2,-3,-5)$與 B 點連線的交點.]

(30) (a)108 (b)$\frac{x}{6}+\frac{y}{9}+\frac{z}{12}=1$[提示：設平面方程式為$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ，因為平面過 P 點 $\Rightarrow\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}=1$(其中 a,b,c 均為正數)，四面體 OABC 的體積 $V=\frac{1}{6}abc$，$1=\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}\geq3\sqrt[3]{\frac{2}{a}\cdot\frac{3}{b}\cdot\frac{4}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{4}{V}}\Rightarrow V\geq108$，等號成立時 $\Leftrightarrow$ $\frac{2}{a}=\frac{3}{b}=\frac{4}{c}=\frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow$ $a=6$，$b=9,c=12$]

(31) (a)$20x+12y+15z=120$ (b)$(\frac{4}{3},5,4)$

[提示：令 $P(t,5,4)$，$\overline{PE}+\overline{PC}=\sqrt{(t-3)^2+5^2}+\sqrt{t^2+4^2}$ 可以視為坐標平面上點$(t,0)$到 M(3,5)、(0,4)距離和的最小值。]

(32) (a)證明 L_1、L_2 無交點且方向向量不平行。 (b)$\frac{1}{\sqrt{3}}(5t^2+2t+\frac{7}{3})$ (c)$(\frac{-1}{5},\frac{1}{5},\frac{3}{5})$
[提示：(b)先求 P 點到 L_2 的距離，此距離為正三角形 PQR 的高，進一步求面積]

(33) (a)A(5,−5,10) (b)P(7,−7,16)或(3,−3,4)
[解法]：
(a)令 $A(2+t,-2-t,1+3t)$代入α的方程式，可得 $t=3\Rightarrow A(5,-5,10)$。
(b)令 $PA=l$，去求β的方向向量與α的法向量的銳夾角為θ，$\Rightarrow\angle PAQ=90^\circ-\theta$
$\sin(\angle PAQ)=\frac{4}{\sqrt{66}}$，由 ΔAPQ 之面積為 $=\frac{20\sqrt{2}}{3}$ $\Rightarrow l=2$ 設 $P(5+s,-5-s,10+3s)$ 因為 $AP=2\Rightarrow s=\pm2\Rightarrow$P 點坐標(7,−7,16)或(3,−3,4)