第三章 一次方程組與行列式

§3–1 一次方程組的解法與矩陣的列運算

(甲)高斯消去法

(1)一次方程組與高斯消去法：

例子：解下列的一次方程組

$$(L):\begin{cases}2x+y+2z=1\cdots\cdots(1)\\ x-3y-2z=-4\cdots\cdots(2)\\ 4x+y+3z=1\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)\times\dfrac{-1}{2}+(2)\\ (1)\times -2+(3)\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad(L'):\begin{cases}2x+y+2z=1\cdots\cdots(1')\\ -\frac{7}{2}y-3z=-\frac{9}{2}\cdots\cdots(2')\\ -y-z=-1\cdots\cdots(3')\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(2')\times\dfrac{2}{7}+(1')\\ (2')\times\dfrac{-2}{7}+(3')\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad(L''):\begin{cases}2x+\frac{8}{7}z=\frac{-2}{7}\cdots\cdots(1'')\\ -\frac{7}{2}y-3z=-\frac{9}{2}\cdots\cdots(2'')\\ -\frac{1}{7}z=\frac{2}{7}\cdots\cdots(3'')\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(3'')\times 8+(1'')\\ (3'')\times -21+(2'')\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad(L'''):\begin{cases}2x=2\\ \frac{-7}{2}y=\frac{-21}{2}\\ \frac{-1}{7}z=\frac{2}{7}\end{cases}\quad 故\begin{cases}x=1\\ y=3\\ z=-2\end{cases}$$

高斯消去法(Gauss Elimination)解題過程：

(a)將一次方程組(L)利用某個方程組中x的係數消去其它方程式中x的係數，得出同解的方程組(L')。
(b)利用另一方程式中y的係數消去其它方程式中y的係數，而得出同解方程組(L'')。
(c)再利用另一方程式中z的係數消去其它方程式中z的係數，而得出同解方程組(L''')。

繼續上面的作法，把另外還有的變數以同樣的方式消去，最後便能得此一次方程組的解。

(2)利用高斯消去法討論一次方程組的解：

無解：利用高斯消去法到最後，出現下列的型式，則方程組無解。

$$\begin{cases}\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\\ 0=a(a\neq 0)\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}\cdots\cdots\\ x_n=a(a\neq b)\\ x_n=b\end{cases}$$

無限多解：當一方程組用高斯消去法到最後，出現下列的型式，

則方程組無限多解。$\begin{cases}\cdots\\ \cdots\\ 0=0\end{cases}$

[例題1] 試利用高斯消去法解下列一次方程組：

$$\begin{cases}2x+y-z=5\\ x+2y+z=7\\ 7x+8y+z=31\end{cases}$$

Ans：x=1+t，y=3–t，z=t，t 爲實數。

(練習1) 試利用高斯消去法解下列一次方程組：

$$\begin{cases}x-2y+3z=5\\ 2x+y-3z=-3\\ 3x-y+2z=6\end{cases}$$

Ans：x=1，y=1，z=2

(乙)矩陣的列運算

(1)矩陣的引入：

在方程組$\begin{cases}x-2y+3z=6\\ 2x+y-3z=-2\\ 3x-y+2z=4\end{cases}$中，將係數與常數項列出來成一個矩形陣列，並用一對括號把這些數圍起來而成爲$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 6\\ 2 & 1 & -3 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 4\end{bmatrix}$，像這樣型式的矩形陣列，稱之爲**矩陣**。

(2)記號與符號：

矩陣 M=$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 5\\ 2 & 1 & -3 & -3\\ 3 & -1 & 2 & 6\end{bmatrix}$ **直行橫列** $\rightarrow$列 $\downarrow$行

(a)元：矩陣中列出來的每個數稱爲矩陣的**元**。

(b)列：同一水平線各元合稱此矩陣的一**列**。

(c)行：同一鉛直線各元合稱此矩陣的一**行**。

(d)位於第 i 列，第 j 行的元稱爲**(i,j)元**。
(e)當一個矩陣 M 有 n 列 m 行時，我們稱 M 爲 **$n\times m$ 階的矩陣**。
(f)當一個矩陣 M 有 n 列 n 行時，我們稱 M 爲 **n 階的方陣**。
(g)設A=$[a_{ij}]_{m\times n}$是一個 $m\times n$ 階矩陣，作一 $n\times m$ 階的矩陣B=$[b_{ij}]_{n\times m}$，其中$b_{ij}=a_{ji}$，則稱矩陣B爲矩陣A的**轉置矩陣**，符號：B=A^T。

例如：A=$\begin{bmatrix}2&6&-6&4\\3&7&0&1\\2&6&1&7\end{bmatrix}$ $\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}2&3&2\\6&7&6\\-6&0&1\\4&1&7\end{bmatrix}$。

例子：$M_1=\begin{bmatrix}2&-1&1&3\\1&3&0&5\\4&2&2&7\end{bmatrix}$ $\quad M_2=\begin{bmatrix}1&-1&0\\4&2&1\\2&6&3\end{bmatrix}$

(a)M_1中(2,–1,1,3)爲第____列。
(b) M_1中$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$爲第_____行。
(c)M_1爲____階矩陣。
(d)M_1的(2,3)元爲_____。
(e)M_2爲__階方陣。
(f)M_2中第二行的向量爲____________。

[例題2] 設A=$[a_{ij}]_{3\times3}$，其中$a_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 2, & i>j\\ -2, & i<j\end{cases}$，請寫出A與$A^T$。

(3)係數矩陣與增廣矩陣：
(a)係數矩陣：將方程組(L)的係數依序列出來的矩陣稱爲**係數矩陣**。
(b)增廣矩陣：將方程組(L)的係數及常數項依序列出來的矩陣稱爲**增廣矩陣**。

例：$(L)\!:\begin{cases}3x+y-z=2\\ x+2y+z=8\\ x+z=-4\end{cases}$ 的係數矩陣：$\begin{bmatrix}3&1&-1\\1&2&1\\1&0&1\end{bmatrix}$，增廣矩陣：$\begin{bmatrix}3&1&-1&2\\1&2&1&8\\1&0&1&-4\end{bmatrix}$

(4)矩陣的列運算：
我們使用高斯消去法求解一次方程組，在求解的過程中，可以把方程組以它的增廣矩陣來代替，如此就把方程組的變形過程轉成增廣矩陣的變形。

$$(L):\begin{cases} x-2y+3z=5\cdots(1) \\ 2x+y-3z=-3\cdots(2) \\ 3x-y+2z=6\cdots(3) \end{cases} \Leftrightarrow \quad M=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(L^{/}):\begin{cases} x-2y+3z=5\cdots(1^{/}) \\ 5y-9z=-13\cdots(2^{/}) \\ 5y-7z=-9\cdots(3^{/}) \end{cases} \Leftrightarrow \quad M^{/}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 5 & -7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$(L^{//}):\begin{cases} x-\frac{3}{5}z=-\frac{1}{5}\cdots(1^{//}) \\ 5y-9z=-13\cdots(2^{//}) \\ 2z=4\cdots\cdots(3^{//}) \end{cases} \Leftrightarrow \quad M^{//}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(L^{///}):\begin{cases} x=1\cdots(1^{///}) \\ 5y=5\cdots(2^{///}) \\ 2z=4\cdots\cdots(3^{///}) \end{cases} \Leftrightarrow \quad M^{///}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

矩陣的列運算：
(a)將一矩陣的某一列乘上某一數值加入另一列。
(b)將一矩陣的某一列乘以一個不爲 **0** 的數。
(c)將一矩陣的某兩列互換位置。

簡化矩陣：
一個矩陣，只要列運算後的矩陣達到在**每個不為 0 的列中，第一個不為 0 的元所屬的行中，只有這個元不等於 0**。我們就稱它爲一個**簡化矩陣**。

例如：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$爲一個簡化矩陣。

[例題3] 對以下的矩陣作列運算化到最簡形式(即化成簡化矩陣)

$$(1)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 3 \\ 7 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Ans：(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{12}{13} \\ 0 & 1 & \frac{-19}{13} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

[例題4] 設矩陣 A= $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

(1)試求矩陣 A 所對應的方程組 L。
(2)化矩陣 A 為簡化矩陣。
(3)試寫出(L)的解。

Ans：(1)L：$\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-3z=-3 \\ 3x-y+2z=6 \end{cases}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (3) $x=1, y=1, z=2$

(練習2) 設A= $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & -7 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & -8 & 16 & 15 \end{bmatrix}$ 請回答下列各問題：

(1)有幾行幾列？(2)請問A的階數為何？
(3)寫出A的第二列行向量(4)請寫出a_{12}、a_{35}。

Ans：(1)5 行 3 列(2)3×5 階(3)[8,7,−7,6,−6] (4)−2，15

(練習3) 設A為 3 階方陣，且A=[a_{ij}]，其中$a_{ij}=i^2+2j-1$，請寫出A^T。

Ans：$A^T=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 4 & 7 & 12 \\ 6 & 9 & 14 \end{bmatrix}$

(練習4) 將下列矩陣用列運算化成簡化矩陣。

(1)$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Ans：(1) $\begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(練習5) 利用增廣矩陣的列運算，求下列方程組的解。

(1)$\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x-y+2z=1 \\ 5x-3y+6z=6 \end{cases}$ (2)$\begin{cases} x-4y+2z=0 \\ 2x-8y+4z=-1 \\ -3x+8y+z=2 \end{cases}$

Ans：(1) $x=-3,y=-7+2t,z=t$ (2)無解

(練習6) 利用高斯消去法解：$\begin{cases} x_1-x_2-3x_3+8x_4=9 \\ 3x_1-3x_3+9x_4=6 \\ x_1+x_2+x_3-2x_4=1 \end{cases}$ Ans：無解

(練習7) 利用高斯消去法解：$\begin{cases} x_1+6x_2-18x_3=0 \\ 4x_1-5x_3=0 \\ -3x_1+6x_2-13x_3=0 \\ 9x_1-6x_2+8x_3=0 \end{cases}$ Ans：$x_1=30t$，$x_2=67t$，$x_3=24t$。

(丙)一次聯立方程組

[例題5] 用加減消去法解下列方程組

(1)$\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 2x-6y+z=5 \\ 2x-5y-z=3 \end{cases}$。 (2) $\begin{cases} x+4y+2z=1 \\ -3x+z=2 \\ -2x+4y+3z=3 \end{cases}$

Ans：(1)$x=-9$，$y=-4$，$z=-1$ (2)$x=t$，$y=\frac{-3}{4}+\frac{-7}{4}t$，$z=3t-2$。

[例題6] 解下列方程組：

$$(1)\begin{cases}\dfrac{6}{x+y}-\dfrac{1}{y+z}=1\\ \dfrac{4}{y+z}+\dfrac{2}{z+x}=2\\ \dfrac{4}{z+x}+\dfrac{3}{x+y}=-3\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{10}\\ 15(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z})=1\\ 15(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{z})=1\end{cases}$$

Ans：(1)$(x,y,z)=(\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{-3}{2})$ (2)$(x,y,z)=(30,20,60)$

(練習8) 若$\begin{cases}x+2y-3z=-9\\ ax+y+z=4\\ 2x-y+z=8\end{cases}$與$\begin{cases}2x+by-z=1\\ x-2y+3z=13\\ 2x+y-cz=12\end{cases}$爲同義方程組，且恰有一解，則$(a,b,c)$=？Ans：$(1,0,-3)$

(練習9) 解方程組$\begin{cases}\dfrac{xyz}{x+y}=6\\ \dfrac{xyz}{y+z}=-6\\ \dfrac{xyz}{z+x}=\dfrac{-3}{2}\end{cases}$。Ans：$(x,y,z)=(1,-2,3)$或$(-1,2,-3)$

[提示：原方程組可化爲$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xyz}=\dfrac{1}{6}\\ \dfrac{y+z}{xyz}=\dfrac{-1}{6}\\ \dfrac{x+z}{xyz}=\dfrac{-2}{3}\end{cases}$]

(練習10) 解方程組$\begin{cases}3x+4y=xy\\ 2x-y=2xy\end{cases}$。$(x,y)=(0,0)$或$(\frac{-11}{4},\frac{11}{9})$

[提示：考慮 $xy=0$ 與 $xy\neq 0$ 兩種情形]

[例題7] 有一工程，如甲、乙、丙三人合作，10 天可完成；如乙、丙合作，15 天可完成；如甲做 15 天，餘下由丙來做，要再 30 天才做成；問甲、乙、丙獨做，各需幾天完成？Ans：甲需 30 天,乙需 60 天,丙需 20 天

[例題8] 一容量爲 100 立方公尺的水池，由 A、B 二水管注水，而由第三水管 C 放水，若三水管全開，則由滿池至水乾需 3 小時，若只開 A、C 兩水管，則 1 小時水乾，若只開 B、C 兩水管，則只需 45 分鐘水乾，請問三水管每小時的注水(放水)量各爲多少？

(練習11) 某公司有甲乙丙三條生產線，現欲生產三萬個產品，如果甲乙丙三條生產線同時開動，則需 10 小時；如果只開動乙、丙兩條生產線，則需 15 小時，如果只開動甲生產線 15 小時，則需再開動丙生產線 30 小時，才能完成所有產品。問如果只開動乙生產線，則需____小時才能生產三萬個產品。Ans：20 小時

(練習12) 已知一長方體的底面積為 200 平方公分，兩相鄰之側面的面積分別為 600 平方公分與 300 平方公分，試問此長方體的長寬高為何？

綜合練習

(1) 用高斯消去法解下列方程組：

(a) $\begin{cases} x+2y-z+u=7 \\ 2x-y+3z-u=4 \\ 3x-4y+7z-3u=1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-3z=-3 \\ 3x-y+2z=6 \end{cases}$

(2) 解下列各二元一次方程式：

(a) $\begin{cases} |x|+2|y|=1 \\ 3|x|+|y|=1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{y}=4 \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{12}{y}=-1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2y+3x=18xy \\ 3y-2x=xy \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 3x+\dfrac{2y}{x}=11 \\ 7x-\dfrac{6y}{x}=-1 \end{cases}$

(3) 解下列各三次方程式：

(a) $\begin{cases} x+y=-1 \\ y+z=6 \\ z+x=1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y+z=12 \\ \dfrac{x+y}{7}=\dfrac{y+z}{9}=\dfrac{z+x}{8} \end{cases}$ (c) $\begin{cases} yz=y+z \\ zx=2(z+x) \\ xy=3(x+y) \end{cases}$

(4) 設 $a_1,a_2,\ldots,a_{50}$ 是從 -1 , 0 , 1 這三個整數中取值的數列。若 $a_1+a_2+......+a_{50}=9$ 且 $(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+......+(a_{50}+1)^2=107$，則 $a_1,a_2,\ldots,a_{50}$ 當中有幾項是 0？

(5) 有一個三位數其各位數字和為 18，交換個位數字與百位數字後就比原數大 495，交換十位數字與百位數字後就比原數大 630，試求這個三位數。

(6) 相傳包子是三國時白羅家族發明的。孔明最喜歡吃他們所做的包子，因此白羅包子店門庭若市，一包難求，必須一大早去排隊才買的到。事實上，白羅包子店只賣一種包子，每天限量供應 999 個，且規定每位顧客限購三個；而購買一個、兩個或三個包子的價錢分別是 8、15、21 分錢。在那三國戰亂的某一天，包子賣完後，老闆與老闆娘有如下的對話：老闆說：「賺錢真辛苦，一個包子成本就要 5 分錢，今天到底賺了多少錢？」
老闆娘說：「今天共賣了 7195 分錢，只有 432 位顧客買到包子」
(a)請問當天白羅包子店淨賺多少錢？

(b)聰明的你，請幫忙分析當天購買一個、兩個及三個包子的人數各是多少人？(90 大學社)

進階問題

(7) 解方程組 $\begin{cases} x+y+4z+u=2 \\ 2x+3y+13z+2u=7 \\ 2x+2y+8z+2u=4 \\ 2x+3y+13z+3u=8 \\ 4x+5y+21z+4u=11 \end{cases}$ 。

(8) 解方程組 $\begin{cases} xy+yz+zx=0 \\ 4yz+3zx+2xy=5xyz \\ 3yz+2zx+4xy=-4xyz \end{cases}$ 。

(9) x,y,z爲實數，且$(x+y+z-k)^2+(x-y+z)^2+(x+3y+z-k-1)^2=0$，則$k$的值爲何？

(10) 解方程組 $\begin{cases} x_2=\frac{1}{2}(x_1+\frac{4}{x_1}) \\ x_3=\frac{1}{2}(x_2+\frac{4}{x_2}) \\ x_1=\frac{1}{2}(x_3+\frac{4}{x_3}) \end{cases}$ 。

綜合練習解答

(1) (a)$(x,y,z)=(-s+\frac{t}{5}+3,s-\frac{3}{5}t+2,s,t)$ (b)$(x,y,z)=(1,1,2)$

(2) (a) $(\frac{1}{5},\frac{2}{5})$，$(\frac{1}{5},\frac{-2}{5})$，$(\frac{-1}{5},\frac{2}{5})$，$(\frac{-1}{5},\frac{-2}{5})$ (b)(1,2) (c)$(\frac{1}{3},\frac{1}{4})$，(0,0)(d)(2,5)

(3) (a)(3,2,4) (b)(3,4,5) (c) (0,0,0)或$(-12,\frac{12}{5},\frac{12}{7})$

(4) 11[提示：假設$a_1,a_2,\ldots,a_{50}$中有x項為-1，y項為 0，z項為 1，根據題意可得$x+y+z=50$，$-x+z=9$，$y+4z=107$]

(5) 297

(6) (a)2200 分錢(b)買一個包子有 95 人，買二個包子有 107 人，買三個包子有 230 人

(7) $x=t-2$，$y=-5t+3$，$z=t$，$u=1$，t 爲任意實數[提示：高斯消去法]

(8) $(\frac{1}{2},1,\frac{-1}{3})$或$(0,0,t)$或$(0,t,0)$或$(t,0,0)$，$t$ 爲實數[提示：若 $xyz\neq0$，將原方程組各式同除

xyz，可解得$(\frac{1}{2},1,\frac{-1}{3})$；若是 x,y,z 之中有一為 0，則可得解為$(0,0,t)$或$(0,t,0)$或$(t,0,0)$，t 為實數]

(9) $k=1$ [提示：$x+y+z-k=0$，$x-y+z=0$，$x+3y+z-k-1=0$]

(10) $(2,2,2)$或$(-2,-2,-2)$[提示：因為x_1、x_2、x_3同號，且具有輪換性，所以可設$x_1\ge x_2\ge x_3>0$，因為$x_1-x_2\ge 0\Rightarrow 4\ge x_1x_3\ge x_3{}^2\Rightarrow 2\ge x_3$，又因為$x_3=\frac{1}{2}(x_2+\frac{4}{x_2})\ge\sqrt{4}\ =2\Rightarrow x_3=2$，同理可得$x_1=x_2=2$。若 $0<x_1\le x_2\le x_3$，令$x_1{}'=-x_1,x_2{}'=-x_2,x_3{}'=-x_3$，則可得$x_1{}'=x_2{}'=x_3{}'=2$]