第三十四單元 古典機率

(甲)隨機試驗與樣本空間

(1)隨機現象：

我們生活的世界上，充滿著不確定性。從擲硬幣、丟骰子、玩撲克牌等簡單的機會遊戲，到複雜的社會現象；從嬰兒誕生，到世間萬物的繁衍生息；從天氣變化到大自然的千變萬化，...這其中充滿著隨機的現象。

自然現象與社會現象，大致上分成兩種，例如上拋的物體一定會落下，無論是什麼形狀的三角形，它的兩邊之和總是大於第三邊，這些現象用比較科學的語言來表達，那就是它們都服從特定的因果關係，從一定的條件出發，必定可以推出某一結果；但是在自然界與社會中還存有另一類現象，稱之為隨機現象，例如，在馬路交叉口，每天都要通過許多人和車輛，但是我們無法事先預測確切的人數及車輛數；擲一粒骰子，我們無法確定下一回會擲出幾點；買樂透彩券，我們也無法根據前幾期來預測下一期的得獎號碼，這些隨機現象天天都在發生。

雖然隨機現象並不是因果關係確定的現象，但是它有幾個特點：

隨機現象的結果至少有兩個，那一個結果會出現，人們事先並不知道。

隨機現象的例子：

(a)擲一枚硬幣，可能出現正面，也可能出現反面，但是事先並無法知情。

(b)明天天氣下雨與否，有時無法完全確定。

(c)MLB 明星賽的結果。

很多隨機現象可以大量重複，如擲一枚硬幣可以一直擲下去，可重複的隨機現象稱為隨機試驗，簡稱為試驗。也有很多隨機現象是無法重複的，例如一場籃球賽的輸贏，這兩類的隨機現象，都是機率的研究範圍，而高中的機率主要研究的是隨機試驗。

(2)樣本空間與事件：

氣象報告常提到明天下雨的機率是 90%；兩球隊比賽，賽前很多人都會看好其中一隊，認為其中一隊會贏的機率是 6 成，這些都是生活中可能會遇到的問題，其中「明天下雨」、「某一隊贏球」都稱為事件，這些事件事先都無法確定是否會發生，但通常我們都會根據以往的經驗來認定其發生的機率。

對於一個事件來說，它在一次試驗中，可能發生，也可能不發生，我們常常希望知道某些事件發生的可能性有多大，總希望可以找到一個適當的數來表示事件發生的可能性大小。事件 A 發生的可能性是可以度量的，就好像是一根木棒的長度、一塊土地的面積一樣。事件 A 發生的可能性大小稱為事件 A 的機率。我們觀察以下的例子：

(a)擲一粒骰子，所得點數大於 2。

(b)擲 3 個硬幣，至少有 2 個正面。

(c)在罰球線投籃，5 次之內投進。

(d)從一副撲克牌中，任意抽取兩張，它們的花色相同。

這些都是某個試驗的事件，依序為
(a)擲一粒骰子
(b)擲 3 個硬幣
(c)在罰球線投籃
(d)從一副撲克牌中，任意抽取兩張
「擲一粒骰子」這個試驗下，「點數大於 2」是一個事件，另外，「點數小於 6」、「點數是質數」、「點數是奇數」也都是事件，所以在同一個試驗下，可以有許多不同的事件，為了方便敘述起見，有時候分別稱為事件 A、事件 B，…等等，例如：
A：點數大於 2、B：點數小於 6、C：點數是質數、D：點數是奇數。
在數學上為了方便處理，我們將一個試驗下的各事件以集合表示，例如擲一個骰子時，「**點數為偶數**」的事件以**{2,4,6}**表示，而**{3,4,5,6}**表示「**點數大於 2**」的事件。
集合{1,2,3,4,5,6}所表示的事件，涵蓋了這個試驗的所有可能，此集合稱為此試驗的**樣本空間**。

樣本空間常以 S 表示，每一個事件 A 都是樣本空間 S 的部分集合，即 $A\subset S$。

A 是一個事件，**若試驗結果屬於 A，則稱此事件 A 發生**。例如，擲一粒骰子時，「點數和為偶數」以 A={2,4,6}表示，若擲出的結果為「4」，因為 $4\in A$，所以 **A 發生了**。

結論：
(a)隨機試驗：
在不確定之現象上，求出一個結果之過程為一種實驗，有一組以上可能之結果，但不能確定是其中那一種，同一條件下，可以反覆進行這種實驗稱為**隨機試驗**。
(b)樣本空間：一項隨機試驗中所有可能發生的結果所成的集合。
(c)事件：樣本空間中的每一個子集合(包含空集合)稱為此樣本空間的事件。
(d)事件發生：若試驗結果屬於 A，則稱此事件 A 發生。

(3)相關的名詞介紹：
(a)全事件：樣本空間 S 稱為全事件
(b)空事件：空集合 ϕ 稱為空事件。
(c)餘事件：發生事件以外的事件，稱為事件 A 的餘事件。即 A'
(d)和事件：事件 A、B 至少有一事件發生的事件，稱為 A，B 的和事件，
即 $A\cup B$。
(e)積事件：事件 A、B 同時發生的事件，稱為 A，B 的積事件，即 $A\cap B$。
(f)互斥事件：二個事件 A,B 若 $A\cap B=\phi$ (即二事件不能同時發生)，則稱 A,B 為互斥事件。

(練習1) 丟一個硬幣 3 次，觀察 3 次出現正反面的次序，寫出
(1)樣本空間 S (2)沒有出現正面的事件 A (3)出現一個正面的事件 B

(4)請問 A、B 互斥嗎？
Ans：(1){(正,正,正)、(正,正,反)、(正,反,正)、(反,正,正)、(正,反,反)、(反,正,反)、(反,反,正)、(反,反,反)}
(2)A={(反,反,反)}　(3)B={(正,反,反)、(反,正,反)、(反,反,正)}
(4)互斥

(練習2) 擲甲乙兩個骰子，觀察每個骰子出現的點數，令 A 為出現點數和為 3 的事件，B 為出現點數和為 5 的事件，
(a)請寫出樣本空間。 (b)判別 A,B 是否為互斥？
Ans：(a)S={$(x,y)|1\le x\le 6$，$1\le y\le 6$，x,y 為正數} (b) A,B 為互斥事件

(練習3) 若袋子中有 3 個紅球，200 個黑球，1 個白球，從袋子中任取一球
(1)請寫出其樣本空間。
(2)請寫出抽出黑球的事件。
Ans：(a) S={紅球，黑球，白球}　(b){黑球}
[討論]：根據以上的結果，可以說抽中黑球的機率=$\frac{1}{3}$嗎？

(練習4) 設樣本空間 S={a,b,c,d}，則 S 的事件有多少個？　Ans：16

(乙)Laplace 古典機率的定義與性質

(1)古典機率的定義：
設樣本空間 S 有 n 個元素，而<u>每個元素出現的機會均等</u>，事件 A 有 k 個元素，則事件 A 發生的機率定義成$\frac{k}{n}$，符號寫成 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{k}{n}$。
此定義是由 Laplace(法國人，1749~1827)所提出的，也稱為古典機率定義法。

結論：機率=$\dfrac{\text{事件的元素個數}}{\text{樣本空間的元素個數}}$
[討論]：根據古典機率的定義去修正樣本空間的寫法：
例子：
設一個袋子中，有 10 個紅球，1 個白球，設每個球的大小質地都一樣，每次從袋子中取一個球，請問取到白球的機率？
[解法]：
根據 3–1 樣本空間的定義，樣本空間 S={R,W}，R 代表紅球，W 代表白球，而事件 A={W}，我們是否可以得到 $P(A)=\frac{1}{2}$嗎？**仔細檢查定義，我們發覺取到紅球與取到白球的機會並不相等，因此不能直接使用古典機率的定義來求機率。**
因此若要使用古典機率的定義去求事件 A 的機率，必須要將樣本空間 S 做一個適當的修正，使得 S 中<u>每個元素出現的機會均等</u>，為了達成這個目的，我們將 10 個相同的紅球，視為 10 個不同的球，即符號寫成 R_1、R_2、R_3、…、R_{10}，

因此 S={ R_1、R_2、R_3、…、R_{10}、W}，取到白球的事件 A={W}，P(A)=$\frac{1}{11}$。

例子：
擲二粒相同的骰子，
請問(1)擲出 1 點、2 點的機率為何？(2)擲出 1 點、1 點的機率為何？
[解法]：
根據排列組合的觀點，二粒相同的骰子，有 H^6_2=21 種情形。
這 21 種情形為 1,1、1,2、1,3、1,4、1,5、1,6、2,2、2,3、2,4、2,5、2,6、3,3、3,4、3,5、3,6、4,4、4,5、4,6、5,5、5,6、6,6 共 21 種。
因此樣本空間 S 為這 21 種情形的集合，但是若根據這個樣本空間，我們可得
事件 A={1 點、2 點}，B={1 點、1 點}的機率為 P(A)=P(B)=$\frac{1}{21}$，但是與前例一樣，樣本空間中<u>每個元素出現的機會並不均等</u>，因此必須要修正樣本空間，將 2 粒相同的骰子，視為不同的骰子，即 S={$(x,y)|x$=1,2,3,4,5,6，y=1,2,3,4,5,6}
A={(1,2)、(2,1)}，B={(1,1)} $\Rightarrow$P(A)=$\frac{2}{36}$，P(B)=$\frac{1}{36}$。

(2)機率的性質：
根據古典機率的定義，可以得到下列機率的性質：
性質一：(非負性)每一個事件 A 發生的機率必在 0 與 1 之間。
　　　　即 A 為任一事件，$0\le P(A)\le 1$。
性質二：(標準化)全事件發生的機率為 1，即 P(S)=1。
性質三：(加法性)：設 A,B 為互斥事件，則事件 A,B 的和事件發生的機率等於
　　　　分別機率相加。即若 $A\cap B=\phi$，則 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。
　　　　[由性質三可得 $P(\phi)=0$]
這三個性質是由前蘇聯數學家<u>科莫戈洛夫</u>(A.Kolmogorov)所提出的，他利用這三個性質來定義機率。
(a)和事件的機率
若 A,B 為 S 的二個事件，則 A 與 B 的和事件 $A\cup B$ 發生的機率為
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

(b)機率的排容原理：
設 A,B,C 是樣本空間的三個事件，
則 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$。

(c)餘事件的機率

若 $A\subseteq S$ 是一個事件，則 A 的餘事件 A'發生的機率 $P(A')=1-P(A)$。

(d)子集合的機率：

若事件 $A\subseteq B$，則 $P(A)\leq P(B)$。

[例題1] (袋中取球)

一袋中有紅球 3 個，黃球 5 個，白球 2 個

(1)任取一球，取出紅球的機率=？ (2)任取二球為同色的機率=？

Ans：(1)$\frac{3}{10}$ (2)$\frac{14}{45}$

[例題2] (擲骰子)

任意丟擲二粒質料均勻的骰子(即各點出現的機會均等)，求其點數和為 5 的機率為多少？Ans：$\frac{1}{9}$

擲二個或三個骰子，求點數和的問題：

整理如下。擲兩粒相同的骰子，其點數和與發生的機率表：

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
機率$\frac{n}{36}$(n 值)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

擲三粒相同的骰子，其點數和與發生的機率表：

點數和	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
機率$\frac{n}{216}$(n 值)	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

[例題3] 設 A,B 為樣本空間 S 中的二事件，$P(A)=\frac{1}{3}$ ，$P(B)=\frac{1}{4}$ ，$P(A\cup B)=\frac{2}{5}$ ，求
(1)$P(A\cap B)$=？(2)$P(A')$=？(3)$P(A'\cap B)$=？(4)$P(A'\cup B)$=？
Ans：(1)$\frac{11}{60}$ (2)$\frac{2}{3}$ (3)$\frac{1}{15}$ (4)$\frac{17}{20}$

[例題4] 投擲一粒骰子，假設點數出現的機率與該點數成正比例。設 A 表示出現偶數點的事件，B 表示出現奇數點的事件，C 表示出現質數點的事件。試求：
(1)出現 2 點的機率。(2)P(A)、P(B)、P(C)(3)$P(B\cap C)$
Ans：(1)$\frac{2}{21}$(2)$\frac{4}{7},\frac{3}{7},\frac{10}{21}(3)\frac{8}{21}$

(練習5) 投擲 2 粒公正的骰子，點數和大於 7 的機率=？ Ans：$\frac{5}{12}$

(練習6) 投擲 3 粒公正的骰子，
(1)3 粒點數均相異的機率=？(2)恰有 2 粒點數相同的機率=？
Ans：(1)$\frac{5}{9}$ (2)$\frac{90}{216}$

(練習7) 試證：若 A、B、C 為樣本空間 S 中三個事件，則機率滿足下列性質：
(a)若 $A\subset B$，則 $P(A)\le P(B)$。

(b)若 $P(A'\cup B')=1-P(A\cap B)$。

(c)$P((A\cup B)\cap C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)$

(練習8) 一袋中有 3 個白球，4 個黑球，5 個紅球，從袋中任取 3 球，求下列各事件的機率：
(1)取出 1 個黑球，2 個紅球　(2)此 3 球同色
(3)此 3 球顏色都不同　(4)恰有 2 種顏色球之機率。
Ans：(1)$\frac{2}{11}$ (2)$\frac{3}{44}$ (3)$\frac{3}{11}$ (4)$\frac{29}{44}$

(練習9) 自 10 到 99 中任取一數，請求出下列事件的機率：
(1)個位數>十位數　(2)個位數=十位數 Ans：(1)$\frac{2}{5}$ (2)$\frac{1}{10}$

(練習10) 六面均塗綠漆之正方體木塊，鋸成 1000 個大小相同的小正立方體，混合放在一個袋子中，今自其中任取一塊，其 6 面均無綠漆之機率=？
Ans：$\frac{64}{125}$

[例題5] 從 N 個人中隨機抽取 n 個人，假設每個人被抽中的機會相等，試求每個人被抽中的機率。 Ans：$\frac{C^{N-1}_{n-1}}{C^{N}_{n}}=\frac{n}{\mathrm{N}}$。

[例題6] 投一骰子三次，出現的點數依次爲 a,b,c，求下列滿足下列各條件的事件的機率：
(1)$a<b<c$　(2)$a\le b\le c$　(3)$a+b+c=11$ (4)$(a-b)(b-c)=0$ (5)$(a-b)(b-c)=2$
Ans：(1)$\frac{5}{54}$ (2)$\frac{7}{27}$ (3)$\frac{1}{8}$ (4)$\frac{11}{36}$ (5)$\frac{1}{18}$
[提示：(4)$P=1-P(a\ne b$ 且 $b\ne c)$]

[例題7] (撲克牌問題)

從一副撲克牌任取 5 張，求下列各種情形之機率：

(1)同花大順(Royal Flush)　(2)葫蘆(Full House)

(3)兩對(Two Pairs)　(4)鐵枝(AAAAQ)

Ans：(1) $\dfrac{C_1^4 \times C_5^5}{C_5^{52}} = \dfrac{1}{649740}$ (2) $\dfrac{C_2^4 \times C_3^4 \times C_1^{13} \times C_1^{12}}{C_5^{52}} = \dfrac{6}{4165}$

(3) $\dfrac{C_2^4 \times C_2^4 \times C_1^4 \times C_2^{13} \times C_1^{11}}{C_5^{52}} = \dfrac{198}{4165}$　(4) $\dfrac{C_1^4 \times C_1^{13} \times C_1^{12}}{C_5^{52}}$

[例題8] (重複實驗)

擲一均勻骰子 10 次，求恰好出現 7 次 6 點的機率是多少？Ans： $\dfrac{C_7^{10} \cdot 5^3}{6^{10}}$

[例題9] (先取完球)

袋子中有 3 紅球，5 個白球，每次取一球，直到取完球爲止，則白球先被取完的機率=？　Ans：$\frac{3}{8}$

[例題10] 甲乙丙丁戊 5 人各出一張名片，將 5 張名片放入一袋內，今每人取出一張，試求：

(1)恰有 2 人拿到自己的名片之機率。

(2)每個人都拿到自己的名片之機率。

(3)每個人都沒有拿到自己的名片。

Ans：(1)$\frac{1}{6}$ (2)$\frac{1}{120}$ (3)$\frac{11}{30}$

(練習11) 12 張標示以 1,2,…,12 的卡片，任意分成兩疊，每疊各 6 張。

(1)求 1,2,3 三張在同一疊的機率=？

(2)求 1,2,3,4 四張中，每疊各有兩張的機率=？

Ans：(1)$\frac{2}{11}$ (2)$\frac{5}{11}$

(練習12) 投擲一顆骰子 5 次，出現點數以 x,y,z,u,v 表示，試求出下列事件發生的機率：

(1) x,y,z,u,v 不全相異。　(2)$(x-y)(y-z)(z-u)(u-v)=0$

Ans：(1)$\frac{49}{54}$　(2)$\frac{671}{1296}$

(練習13) 同尺寸同式樣的黑鞋 3 雙，白鞋 2 雙，任取 4 隻，則能配成 2 雙之機率

爲何？Ans：$\frac{23}{105}$

(練習14) 同尺寸同式樣的黑襪 3 雙，白襪 2 雙，任取 4 隻(襪子不分左右腳)，則能配成 2 雙之機率爲何？Ans：$\frac{53}{105}$

(練習15) 袋子中有 m 個紅球，n 個白球，每次取一球，直到取完球爲止，則白球先被取完的機率=？　Ans：$\frac{m}{m+n}$

(練習16) 一副撲克牌的大牌(10,J,Q,K,A)有 20 張，從中任取 4 張，求下列各事件發生的機率：
(1)花色相同(2)恰含兩種花色(3)恰爲兩對(如 JJKK)
Ans：(1)$\frac{4}{969}$ (2)$\frac{80}{323}$ (3)$\frac{24}{323}$

(練習17) 從一副 52 張的撲克牌中任意抽出二張，則這二張號碼相同的機率是多少？又兩張號碼不同的機率爲何？Ans：$\frac{1}{17}$，$\frac{16}{17}$

(練習18) 設 N 個人中至少二人在同一個月出生的機率爲 P(N)
(1)P(5)=？ (2)P(14)=？　Ans：(1)$1-\frac{P_5^{12}}{12^5}$ (2)1

(練習19) 有 A,B,C 三房間，各可住 4 人,3 人,3 人，今有甲乙丙 10 人前往住宿，則甲乙丙三人中至少有二人同住一間房間的機率爲何？　Ans：$\frac{7}{10}$

(練習20) 從 5 對夫妻中任選 4 人，試求下列事件的機率
(1)恰爲二對夫妻之機率=？　(2)恰爲一對夫妻之機率=？
Ans：(1)$\frac{1}{21}$ (2)$\frac{4}{7}$

(練習21) 甲乙兩人分別從 0 至 99 的 100 個數，各自選出 3 個不同的數，則兩人所選的數完全相同的機率爲________；至少有一數相同的機率爲________。Ans：$\frac{1}{161700}$，$\frac{713}{8085}$

(練習22) 任意丟擲一粒質料均勻的骰子三次。設三次中至少出現一次 1 點的事件爲 A，三件中至少出現一次 2 點的事件爲 B。試求
(1)A 不發生的機率。
(2)A 發生的機率。
(3)A 與 B 都發生的機率。
(4)A 或 B 發生的機率。

Ans：(1)$\frac{125}{216}$ (2)$\frac{91}{216}$ (3)$\frac{5}{36}$ (4)$\frac{19}{27}$

(練習23) 假設任意取得之統一發票，其號碼之個位數字為 0,1,2,……,9 中任一數字，且這些數字出現的機率相等。
今自三不同場所，各取得一張統一發票，則三張發票號碼個位數字中
(1)至少有一個為 0 的機率為
(A)0.081 (B)0.243 (C)0.271 (D)0.300 (E)0.333
(2)至少有一個為 0，且至少有一個為 9 的機率為(A)0.048 (B)0.054 (C)0.096 (D)0.488 (E)0.667　　Ans：(1)C　(2)B　(80 自)

(練習24) 袋子中有 20 球，分別編有 1，2，3，....20 號的球各一個，任取 3 球，求下列各種情形之機率：
(1)3 球之號碼和為 3 之倍數。　(2)3 球之號碼成等差數列。
(3)3 球中任 2 球之號碼均不連續。
Ans：(1) $\frac{32}{95}$　(2) $\frac{3}{38}$　3) $\frac{68}{95}$

(練習25) 擲一均勻骰子 10 次，求恰好出現 4 次 6 點的機率是多少？Ans：$\frac{C_4^{10}\cdot 5^6}{6^{10}}$

(練習26) 袋中有 20 個燈泡，其中有 3 個斷了燈絲。現在逐一檢查，在檢查到第 7 個燈泡時，恰好是第 3 個斷了燈絲的燈泡之機率=？ Ans：$\frac{1}{76}$

(練習27) 設生男生女的機會相等，若計畫生 4 個小孩的家庭
(1)四個都是男孩的機率是多少？
(2)至少有一個女孩的機率是多少？
(3)四個孩子都是同性別的機率是多少？
(4)有男孩也有女孩的機率是多少？
(5)男孩、女孩各有 2 位的機率是多少？
Ans：(1)$\mathbf{\frac{1}{16}}$ (2)$\mathbf{\frac{5}{16}}$ (3)$\mathbf{\frac{2}{16}}$ (4)$\mathbf{\frac{14}{16}}$ (5)$\mathbf{\frac{6}{16}}$

綜合練習

(1) 設 A、B、C 表三事件，且 P(A)=P(B)=P(C)=$\frac{1}{4}$，P(A∩B)==P(C∩B)=0，P(A∩C)=$\frac{1}{8}$，求三事件至少發生一件的機率=？

(2) 某袋中有許多號碼球，抽出爲偶數的機率是 0.5，抽出偶數或 3 的倍數的機率是 0.6，抽出 6 的倍數的機率是 0.3，求抽出 3 的倍數的機率爲_________。

(3) 從 8 個奇數與 5 個偶數中任取兩數相加，請問恰爲偶數的機率是多少？

(4) 設有 A、B、C 三球隊進入決賽爭取冠軍獎盃。若 A 得冠軍的機會爲 B 的 2 倍，B 得冠軍的機會爲 C 的 3 倍，則 A 隊得冠軍的機率=？

(5) 設二公正的骰子，二個骰子的六面點數分別是 1,1,1,2,2,3 和 1,2,2,3,3,3，今將此二骰子同時擲出，問擲得點數爲那一個數時機率最大。

(6) 假設有一種特製的骰子，其六個面上的點數各爲 2,3,4,5,6,7。現在同時投擲兩顆公正的這種骰子，則其點數和爲幾點時機率最大？
(A)6 (B)7 (C)8 (D)9 (E)10　　(90 自)

(7) 當使用一儀器去測量一個高爲 70 單位長的建築物 50 次，所得數據爲

測量值	**68 單位長**	**69 單位長**	**70 單位長**	**71 單位長**	**72 單位長**
次數	**5**	**15**	**10**	**15**	**5**

依據此數據來推測，假如在用這個儀器測量此建築物三次，則三次測得的平均值爲 71 單位長的機率爲__________。

(8) 擲 3 粒公正骰子，問恰有兩個點數相同的機率爲_________　　(88.學科)

(9) 金先生在提款時忘了帳號密碼，但他還記得密碼的四位數字中，有兩個 3，一個 8，一個 9，於是他就用這四個數字隨意排成一個四位數輸入提款機嘗試。請問他只試一次就成功的機率有多少？(92 學科)

(10) 從 1,2,….,10 這十個數中隨意任取兩個，以 p 表示其和爲偶數之機率，q 表示其和爲奇數之機率。試問下列哪些敘述是正確的？
(1) $p+q=1$　(2) $p=q$　(3) $|p-q|\le\frac{1}{10}$　(4) $|p-q|\ge\frac{1}{20}$　(5) $p\ge\frac{1}{2}$　(93 學科)

(11) 從集合 $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a,b,c\text{爲}0,1,2\text{或}3\right\}$ 中隨機抽取一個矩陣，其行列式爲 0 的機率等於_______________。(化爲最簡分數)　(2008 指定乙)

(12) 已知編號爲 1,2,3…….,10 的十盞路燈中，有三盞是故障的，則編號 4 與編號 5 都是故障的機率爲_______。　　(85 社)

(13) 袋中有 7 個相同的球，分別標示 1、2、⋯、7 號；若自袋中隨機取出 4 個球(取出之球不再放回)，則取出之球上的標號和為奇數的機率為_____。 (86 社)

(14) 樂透是由 1~42 個號碼開出 6 個號碼，請問開出的 6 個號碼都是偶數的機率，最接近下列哪一個值？

(1)$\frac{1}{2}$ (2)$\frac{6}{42}$ (3)$\frac{1}{2^3}$ (4)$\frac{1}{12}$ (5)$\frac{1}{2^6}$ (2003 指定乙)

(15) 某訓練班招收 100 名學員，以報到先後順序賦予 1 到 100 的學號。開訓一個月之後，班主任計畫從 100 位學員中抽出 50 位來參加時事測驗。他擬定了四個抽籤方案：

方案一：在 1 到 50 號中，隨機抽出 25 位學員；同時在 51 到 100 號中，也隨機抽出 25 位學員，共 50 位學員參加測驗

方案二：在 1 到 60 號中，隨機抽出 32 位學員；同時在 61 到 100 號中，也隨機抽出 18 位學員，共 50 位學員參加測驗

方案三：將 100 位學員平均分成 50 組；在每組 2 人中，隨機抽出 1 人，共 50 位學員參加測驗

方案四：擲一粒公正的骰子：如果出現的點數是偶數，則由學號是偶數的學員參加測驗；反之，則由學號是奇數的學員參加測驗，請選出正確的選項。

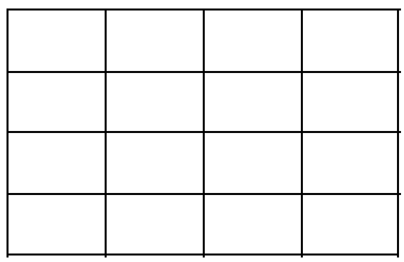
(1) 方案一中， 每位學員被抽中的機率相等
(2) 方案二中， 每位學員被抽中的機率相等
(3) 方案三中， 每位學員被抽中的機率相等
(4) 方案四中， 每位學員被抽中的機率相等。(2011 指定乙)

(16) 台北銀行最早發行的樂透彩(俗稱小樂透)的玩法是「42 選 6」：購買者從 01~42 中任選六個號碼，當這六個號碼與開出的六個號碼完全相同(不計次序)時即得頭獎；台北銀行曾考慮改發行「39 選 5」的小小樂透：購買者從 01~39 中任選五個號碼，當這五個號碼與開出的五個號碼完全相同(不計次序)時即得頭獎。假設原來的小樂透中頭獎的機率是 R，而曾考慮發行的小小樂透中頭獎的機率是 r。試問比值$\frac{r}{\mathrm{R}}$最接近下列那一個選項？

(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11。(2005 學科能力測驗)

(17) 在右圖的棋盤方格中，隨機任意選取兩個格子。選出的兩個格子不在同一行(有無同列無所謂)的機率為

(1)$\frac{1}{20}$ (2)$\frac{1}{4}$ (3)$\frac{3}{4}$ (4)$\frac{3}{5}$ (5)$\frac{4}{5}$。(2006 學科能力測驗)



(18) 甲、乙、丙三所高中的一年級分別有 3、4、5 個班級。從這 12 個班級中隨機選取一班參加國文抽考，再從未被抽中的 11 個班級中隨機選取一班參加英文抽考。則參加抽考的兩個班級在同一所學校的機率最接近以下哪個選項？

(1) 21% (2) 23% (3) 25% (4) 27% (5) 29% (2009 學科能力測驗)

(19) 高三甲班共有 20 位男生、15 位女生，需推派 3 位同學參加某項全校性活動。班會中大家決定用抽籤的方式決定參加人選。若每個人中籤的機率相等，則推派的三位同學中有男也有女的機率為__________。(2011 學科能力測驗)

(20) 投擲一粒公正骰子 4 次，每個點出現的機會均等，試求
(a)恰好有 2 次出現 1 點之機率 (b)至少有 2 次出現 1 點的機率。

(21) 設甲乙丙三人猜拳(剪刀石頭布)時，只有甲得勝的機率為多少？三人不分勝負之機率為多少？

(22) 自 1,2,3,…,100 中任取相異 3 數，則此三數成等差之機率=？

(23) 設集合 M={1,2,3,4,5..,10}中，任取三個數字，求下列事件發生的機率：
(a)出現三個連續數字 (b)恰出現二個連續數字 (c)不出現連續數字

(24) 設袋子中有 42 個相同的球，分別標上 1,2,3..,42 等 42 個號碼，甲乙兩人各自袋中任意取出一球，然後比較取出球上數字的大小。設每個球被取出的機會均等，而且各人取球後仍放回袋中，則甲取出之球上數字不小於乙取出之球上數字的機率=？

(25) 自 1,2,3,…,10 中任取相異 3 數，則
(a)此三數成等差之機率=？ (b)此三數成等比之機率=？

(26) 設 HBL 共有 16 對參賽，先抽籤均分成甲乙丙丁 4 組進行分組預賽，(每組有 4 對)，則松山高中、再興中學、三民家商在預賽中分在不同組的機率=？

(27) 由 6 位男士與 9 位女士中任選 5 人組成一個委員會，若每人被選出的機會相同，試求
(a)由三男二女組成委員會的機率是________。
(b)委員會委員都是同性別的機率是多少________。

進階問題

(28) 某休旅車有 3 排座位，每排坐 2 人，今有 3 男 3 女入坐，則每排均坐 1 男 1 女之機率=？

(29) 自 1,2,3,4,5 中取出 3 個相異數字作成三位數，則
(a)此三位數是偶數的機率=？ (b)此三位數是 4 的倍數的機率=？

(30) 設有一電梯自 1 樓開始升到 6 樓，今有 4 人自 1 樓乘坐，電梯在二、三、四、五、六樓均有停留，則在某樓至少有二人走出之機率=？

(31) 把 r 個相同的球隨機放入 n 個箱子，假設每個箱子都可以一次放 r 個球，試求每個箱子至多有一個球的機率。($n\geq r$)

(32) 有 8 個人(含甲乙兩人)同時乘坐一輛有 4 節車廂的火車，在已知剛好每兩人乘坐一車廂的情形下，求甲乙兩人同坐一車廂的機率？

綜合練習解答

(1) $\frac{5}{8}$

(2) 0.4

(3) $\frac{19}{39}$

(4) $\frac{3}{5}$

(5) $\frac{7}{18}$ (4 點時)

(6) (D)

(7) $\frac{9}{125}$

(8) 90/216 ($\frac{5}{12}$)

(9) $\frac{1}{12}$

(10) (1)(4)

(11) $\frac{7}{16}$

(12) 1/15

(13) 16/35

(14) (5)

(15) (1)(3)(4)

[解法]：

從 N 個人中隨機抽取 n 個人，假設每個人被抽中的機會相等，那麼每個人被抽中的機會等於$\frac{C_{n-1}^{N-1}}{C_n^N}=\frac{n}{\text{N}}$。故(1)(3)(4)中學員被選中的機率均爲$\frac{1}{2}$。

(2)中 1~60 號每個人被選中的機率爲$\frac{32}{60}$，61~100 號每個人被選中的機率爲$\frac{18}{40}$。

(16) (4)

(17) (5)

(18) (5)

(19) $\frac{90}{119}$

(20) (a)$\frac{25}{216}$ (b)$\frac{171}{1296}$

(21) $\frac{1}{9}$，$\frac{1}{3}$

(22) $\frac{1}{66}$ [提示：此三數中最大與最小同爲奇數或同爲偶數，P=$\frac{C_2^{50}+C_2^{50}}{C_3^{100}}$]

(23) (a)$\frac{1}{15}$ (b)$\frac{7}{15}$ (c)$\frac{7}{15}$

(24) $\frac{43}{84}$ [提示：P=1$-\frac{C_2^{42}}{42\times 42}$]

(25) (a)$\frac{1}{6}$ (b)$\frac{1}{30}$

(26) $\frac{16}{35}$

(27) (a)$\frac{240}{1001}$ (b)$\frac{4}{91}$

(28) $\frac{2}{5}$

(29) (a)$\frac{2}{5}$ (b)$\frac{1}{5}$

(30) $\frac{101}{125}$ [提示：機率=1−(二、三、四、五、六樓中，每樓至多有一人走出)=$1-\frac{P^5_4}{5^4}$]

(31) $\frac{C^n_r \cdot r!}{n^r}$

(32) $\frac{1}{7}$