

§4-6 多項不等式

(甲)多項不等式的基礎概念

(1). n 次不等式：

設 $y=f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ 是實係數 n 次多項式，那麼不等式 $f(x)>0$ ，或 $f(x)<0$ ，或 $f(x)\geq 0$ ，或 $f(x)\leq 0$ 就叫做多項不等式或 n 次多項不等式 (簡稱 n 次不等式)

例： $2x-3>0$ ， $x^2-3x+2>0$

(2)不等式的解：滿足 n 次不等式的值，叫做 n 次不等式的解

(3)不等式的基本性質：

三一律： $a>b, a=b, a<b$ 三式中恰有一式會成立

遞移律：若 $a>b$ 且 $b>c$ ，則 $a>c$

加法律：若 $a>b$ ，則 $a+c>b+c$ ($c\in\mathbb{R}$)

乘法律：若 $a>b$ ，且 $c>0$ ，則 $ac>bc$ (不變號)

若 $a>b$ ，且 $c<0$ ，則 $ac<bc$ (要變號)

(乙)一次與二次不等式

(1)一次不等式是形如 $ax+b>0$ (≥ 0) 或 $ax+b<0$ (≤ 0) 的不等式。

二次不等式是形如 $ax^2+bx+c>0$ (≥ 0) 或 $ax^2+bx+c<0$ (≤ 0)，其中 a, b, c 為實數。

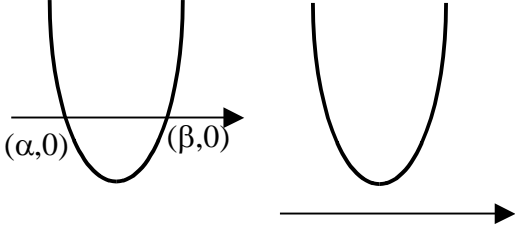
(2)解二次不等式：

設不等式 $ax^2+bx+c(>, <, \geq, \leq)0$ ，先將 a 調整為正
先解一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根 α, β

(a)設 $a>0$ ， $D=b^2-4ac>0$ ， α, β ($\alpha<\beta$) 為兩實數

因為 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

分段討論 ax^2+bx+c 的正負：



x	$x<\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x>\beta$
$x-\alpha$	-	+	+
$x-\beta$	-	-	+
$(x-\alpha)(x-\beta)$	+	-	+

解 $ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x>\alpha$ 或 $x<\beta$ (大於大的根或小於小的根)

解 $ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow \alpha<x<\beta$ (介於兩實根之間)

例如：解不等式 $x^2-x-4>0$

(b) 設 $a > 0$ ， $D = b^2 - 4ac = 0$ ， $\alpha = \beta$ 為兩相等實數

因為 $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$

分段討論 $ax^2 + bx + c$ 的正負：

x	$\alpha < x$	$x > \alpha$
$x - \alpha$	-	+
$(x - \alpha)^2$	+	+

解 $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x \neq \alpha$ (或 β) [$x > \alpha$ 或 $x < \alpha$]

解 $ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow$ 無解

例如： $4x^2 + 4x + 1 < 0$

(c) 設 $a > 0$ ， $D = b^2 - 4ac < 0$ ， α 、 β 均為虛數

$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ ，因為 $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$ ，所以 $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$

故不管 x 代入那一個實數， $ax^2 + bx + c$ 恆正。

解 $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow$ 所有實數均為解。

解 $ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow$ 無解。

例如： $x^2 + 4x + 7 < 0$

結論：如何解二次不等式：

(a) 先將不等式化成 $ax^2 + bx + c \boxed{>, <, \geq, \leq} 0$ ，其中 $a > 0$

(b) 再檢查判別式： $D = b^2 - 4ac$

(c) 若 $D = b^2 - 4ac > 0$ ，

$ax^2 + bx + c > 0$ 的解 \Leftrightarrow 解為大於大的根，小於小的根的實數

$ax^2 + bx + c < 0$ 的解 \Leftrightarrow 解為介於兩根之間的實數

(d) 若 $D = b^2 - 4ac = 0$ ，

$ax^2 + bx + c > 0$ 的解 \Leftrightarrow 解為除了 $-\frac{b}{2a}$ 外的所有實數

$ax^2 + bx + c < 0$ 的解 \Leftrightarrow 沒有任何實數是解

(e) 若 $D = b^2 - 4ac < 0$ ，

$ax^2 + bx + c > 0$ 的解 \Leftrightarrow 解為所有實數

$ax^2 + bx + c < 0$ 的解 \Leftrightarrow 沒有任何實數是解

[例題1] 解下列各不等式：

(1) $x^2+4x-1>0$ (2) $x^2-2x+3<0$ (3) $x^2-2\sqrt{3}x+5>0$ (4) $-3x^2+6x-1\geq 0$

Ans：(1) $x>-2+\sqrt{5}$ 或 $x<-2-\sqrt{5}$ (2)無解 (3)所有實數 (4) $1-\frac{\sqrt{6}}{3}\leq x\leq 1+\frac{\sqrt{6}}{3}$

[例題2] 已知不等式 $ax^2+bx+1>0$ 之解為 $-\frac{5}{2}<x<\frac{2}{5}$ ，求數對 $(a,b)=?$ Ans： $(-1,-\frac{21}{10})$

(練習1) 有一項運動協會，要從 250 位會員代表中選出 7 位理事，250 位代表每人投一票互選。如果想選上理事，至少要得多少票，才能保證當選？

Ans：32 票

[提示：設至少要得 x 票，才能保證當選，如果剩下的票都投給一個人，那個人至多得 $(250-7x)$ 票，因此若要保證得 x 票能當選，則 $(250-7x)<x \Rightarrow x>31\dots \Rightarrow$ 至少要得 32 票，才能保證當選。]

(練習2) 解不等式 $\frac{3}{4}x-\frac{2x-1}{6}>\frac{3x+1}{2}-\frac{5}{2}$ Ans： $x<2$

(練習3) 解下列各不等式：

(1) $16x^2-22x-3\leq 0$ (2) $3x^2-2x+5<0$ (3) $-4\leq x^2-5x<6$

(4) $x^2-2x+1>0$ (5) $9x^2+1\leq 6x$ (6) $3x^2-2x-7\geq 0$

Ans：(1) $-\frac{1}{8}\leq x\leq \frac{3}{2}$ (2)無解 (3) $-1<x\leq 1$ 或 $4\leq x<6$

(4) $x\neq 1$ (5) $x=\frac{1}{3}$ (6) $x\geq \frac{1+\sqrt{22}}{3}$ 或 $x\leq \frac{1-\sqrt{22}}{3}$

(練習4) 若 $x^2+ax+b<0$ 之解爲 $-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}<x<-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ ，則 $x^2+ax-4b>0$ 之解爲何？

Ans： $x>1$ 或 $x<-4$

(丙)高次不等式的解法

1.基本實例：解不等式 $(x-1)(x-2)(x+3)<0$

2.領導係數爲負

解 $(x-1)(x-3)(5-x)<0$ Ans： $1<x<3$ 或 $5<x$

3.有恆正的因式

解不等式 $(x^2+x+1)(x-1)(x+1)\leq 0$ Ans： $-1\leq x\leq 1$

4.有重因式時

解不等式 $(x+3)^3(x-1)^2(x-2)<0$ Ans： $-3<x<2$ ，且 $x\neq 1$

解不等式 $(x+3)^3(x-1)^2(x-2)\leq 0$ Ans： $-3\leq x\leq 2$

[例題3] 已知多項式 $f(x)=x^4-5x^3+3x^2+19x-30=0$ 有一個複數根 $2+i$ ，若實數 a 滿足 $f(a)<0$ ，試求 a 的範圍為？ Ans： $-2<a<3$

[例題4] 設 $f(x)$ 為一個 3 次多項式，且 $f(x-1)>0$ 之解集合為 $\{x|x>2 \text{ 或 } -3<x<-1\}$ ，試求 (1) $f(x)>0$ 的解集合。 (2) $f(2x+1)<0$ 的解集合。

Ans：(1) $\{x|x>1 \text{ 或 } -4<x<-2\}$ (2) $\{x|x<-\frac{5}{2} \text{ 或 } -\frac{3}{2}<x<0\}$

[例題5] 解分式不等式：

(1) $x>\frac{1}{x}$ (2) $\frac{x+2}{(x^2+x+1)(x-1)} \leq 0$ Ans：(1) $x>1 \text{ 或 } -1<x<0$ (2) $-2 \leq x < 1$

(練習5) 解下列不等式：

(a) $(x^2-4)(2x+1)(-x+3) \geq 0$ (b) $x^3-5x^2+2x+8 < 0$ (c) $(x+1)^2(x-2)(x-3) \leq 0$
(d) $x^3+3x^2+3x+9 \leq 0$ (e) $(x-1)^2(x^2-3x-18) < 0$ (f) $(x^2+3x+6)(x^2-x-3) < 0$

Ans：(a) $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } 2 \leq x \leq 3$ (b) $x < -1 \text{ 或 } 2 < x < 4$ (c) $2 \leq x \leq 3 \text{ 或 } x = -1$

(d) $x \leq -3$ (e) $-3 < x < 6$ 且 $x \neq 1$ (f) $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

(練習6) 解分式不等式：

$$(a) \frac{2x+5}{3x-4} \geq 0 \quad (b) \frac{x^2+2x-4}{2x^2-x-2} \geq 1 \quad (c) \frac{1}{x+1} < \frac{x+3}{x^2+x-2}$$

$$\text{Ans : (a)} x \leq \frac{-5}{2} \text{ 或 } x > \frac{4}{3} \quad (b) \frac{1-\sqrt{17}}{4} < x \leq 1 \text{ 或 } \frac{1+\sqrt{17}}{4} < x \leq 2$$

$$(c) x > 1 \text{ 或 } \frac{-5}{3} < x < -1 \text{ 或 } x < -2$$

(練習7) 設 $f(x)$ 為一個 3 次多項式，且 $f(3x-1) > 0$ 之解為 $x > 3$ 或 $-4 < x < -2$ ，試求 $f(2x+1) < 0$ 的解集合。

$$\text{Ans : } \{x | x > \frac{7}{2} \text{ 或 } -7 < x < -4\}$$

(丁) 二次函數恆正或恆負的條件

設二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ， $a \neq 0$ ， $D = b^2 - 4ac$

(1) 二次不等式解的幾何解釋：

考慮二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形：

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ 頂點為 } \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

(a) 解 $ax^2 + bx + c > 0$

\Leftrightarrow 在圖形上找那些實數 x 使得其所對應的點 $(x, ax^2 + bx + c)$ 在 x 軸的上方。

解 $ax^2 + bx + c < 0$

\Leftrightarrow 在圖形上找那些實數 x 使得其所對應的點 $(x, ax^2 + bx + c)$ 在 x 軸的下方。

(b) 二次函數恆正與恆負的條件：

① 對於所有的實數 x ， $f(x) > 0$ (恆正)

\Leftrightarrow 圖形上的每一點的 y 坐標均大於 0 (圖形在 x 軸上方)

$\Leftrightarrow a > 0$ 且 $D < 0$ (開口向上，與 x 軸無交點)

② 對於所有的實數 x ， $f(x) < 0$ (恆負)

\Leftrightarrow 圖形上的每一點的 y 坐標均小於 0 (圖形在 x 軸下方)

$\Leftrightarrow a < 0$ 且 $D < 0$ (開口向下，與 x 軸無交點)

③ 對於所有的實數 x ， $f(x) \geq 0$ (不為負)

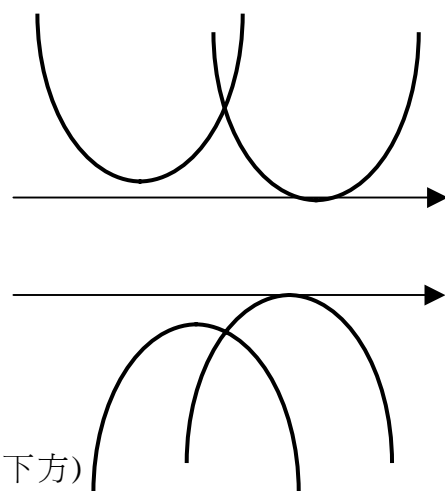
\Leftrightarrow 圖形上的每一點的 y 坐標均大於等於 0 (圖形不在 x 軸下方)

$\Leftrightarrow a > 0$ 且 $D \leq 0$ (開口向上，與 x 軸無交點或相切)

④ 對於所有的實數 x ， $f(x) \leq 0$ (不為正)

\Leftrightarrow 圖形上的每一點的 y 坐標均小於等於 0 (圖形不在 x 軸上方)

$\Leftrightarrow a < 0$ 且 $D \leq 0$ (開口向下，與 x 軸無交點或相切)



[例題6] 設 $f(x)=x^2+2(a-5)x+2(3a-19)$ ， $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $f(x)>0$ ，求 a 範圍。 Ans： $7<a<9$

[例題7] 不等式 $x^2+2(m+2)x+2m^2<0$ 無解，求 m 的範圍。

Ans： $m>2+2\sqrt{2}$ 或 $m<2-2\sqrt{2}$

[例題8] 設不等式 $\frac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$ 對於一切實數 x 均成立。則其中常數 k 的範圍為？

Ans： $1<k<3$

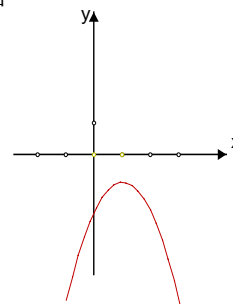
(練習8) (1) $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $-6x-9<x^2+ax+a-1$ 恆成立，求 a 之範圍。

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $x^2+ax+a-1<2(x^2+2x+2)$ 恆成立，求 a 之範圍。

Ans： (1) $-4-2\sqrt{3}<a<-4+2\sqrt{3}$ (2) $2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$

(練習9) $y=f(x)=kx^2+2x+k$ 之圖形如右，

求實數 k 的範圍？ Ans： $k<-1$



(練習10) a 為實數，且對於所有實數 x ，不等式 $\frac{x^2+2ax+1}{3x^2-2x+3} \leq 5$ 恆成立，則求 a 值之範圍。 Ans： $-19 \leq a \leq 9$

(練習11) $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $f(x)=x^2-(k-3)x+4$ ， $g(x)=-x^2+(k-1)x+(k-2)$ ， $f(x)$ 恆在 $g(x)$ 上方時，求 k 範圍。 Ans： $-2<k<4$

(練習12) 令 $g(x)=-x^2+2(3m-1)x-(8m^2+17)$ ， m 為實數，求使得 $g(x) \geq 0$ 無解之 m

的範圍。 Ans : $-2 < m < 8$

[例題9] 求實數 k 之範圍使得 $x^2 - kx + k^2 - 3 = 0$

(1)有實數解 (2)兩根都是正數 (3)一正根、一負根。

Ans : (1) $-2 \leq k \leq 2$ (2) $\sqrt{3} < k \leq 2$ (3) $-2 < k < -\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3} < k < 2$

[例題10] 若 $ax^2 + (1-5a)x + 6a = 0$ 之二根皆大於 1，試求 a 的範圍。

Ans : $a < \frac{-1}{2}$ 或 $a \geq 5 + 2\sqrt{6}$

(練習13) 二次方程式 $ax^2 - (a-1)x - 6 = 0$ 有一根介於 1 與 2 之間，另一根介於 -1 與 -2 之間，試求實數 a 的範圍。 Ans : $2 < a < \frac{7}{2}$

[提示：考慮勘根定理]

綜合練習

(1) 試解下列各二次不等式：

(a) $-x^2 + x - 1 > 0$ (b) $-x^2 + x - 1 < 0$ (c) $x^2 < x + 1$

(d) $x^2 > x + 1$ (e) $-x^2 + 6x - 9 < 0$ (f) $x^2 + 8x + 4 < 0$ (g) $x^2 - 4x - 4 < 0$

(2) 已知 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解為 $-2 < x < 5$ ，試求下列不等式的解：

(a) $ax^2 - bx + c < 0$ (b) $\frac{cx + 2a}{ax + b} \geq 0$

(3) 設 $f(x)$ 為二次函數，且不等式 $f(x) > 0$ 之解集合為 $\{x \in \mathbf{R} | -2 < x < 4\}$ ，則求 $f(2x) < 0$ 之解集合。

(4) 解下列不等式：

(a) $(x-1)^{80}(x^2+x+1)(x-2)(x-3)(x-4)^4 < 0$

$$(b)(x^2+x+1)(x-1)(x-2)^2(x-3)^{33}<0$$

$$(c)(x^2+3x+6)(x^2-x-3)<0$$

(5) 若已知一實係數方程式 $f(x)=x^3+ax+b=0$ 之一複數根為 $1-2i$ ，求

(a)數對 $(a,b)=?$ 。(b) $f(x)=0$ 之所有解。(c)不等式 $f(x)<0$ 的解。

(6) 解不等式 $\frac{2}{x+1}<x$ 的解。

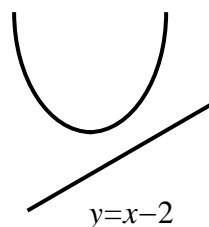
(7) 解不等式 $\frac{x^2(x-1)}{(2-x)(x+1)}\geq 0$

(8) 對於任意一個實數 x ， $y=2x^2-2ax+(5+2a)$ 的圖形恆在 $y=ax^2$ 的上方，則實數 a 的範圍為_____。

(9) 設對所有實數 x ， $(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6$ 之值恆為正，求實數 m 的範圍？

(10) x 為任意實數時， $mx^2+2mx-(2m+3)$ 之值恆為負，則 m 之範圍為_____。

(11) 二次函數 $y=x^2-ax+a-1$ 之圖形如右，求 a 的範圍。



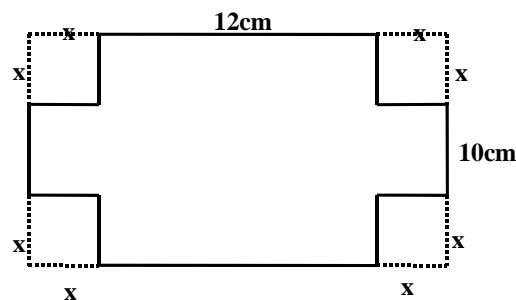
(12) 若 $\begin{cases} x^2 - ax + b > 0 \\ x^2 + bx - 4 \leq 0 \end{cases}$ 之解為 $3 < x \leq 4$ ，試求 a, b 之值。

進階問題

(13) 如右圖，將一個無蓋容器展開，欲使容器的容積至少為 80cm^3 ，求 x 值的範圍。

(14) 利用 $y=|x^2-2x-3|$ 與直線 $y=x+1$ 之圖形，求 $|x^2-2x-3|\geq x+1$ 的解。

(15) 若 $\begin{cases} x^2 - ax + b > 0 \\ x^2 + bx - 4 \leq 0 \end{cases}$ 之解為 $3 < x \leq 4$ ，試求 a, b 之值。



綜合練習解答

(1)(a)無解 (b) $x \in \mathbb{R}$ (c) $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (d) $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (e) $x \neq 3$

(f) $-4-2\sqrt{3} < x < -4+2\sqrt{3}$ (g) $2-2\sqrt{2} < x < 2+2\sqrt{2}$

(2)(a) $x < -5$ 或 $x > 2$ (b) $\frac{1}{5} \leq x < 3$

(3) $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 3\}$

(4)(a) $2 < x < 3$ (b) $1 < x < 3$ 且 $x \neq 2$ (c) $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

(5)(a) $(a,b)=(1,10)$ (b) $-2, 1-2i, 1+2i$ (c) $x < -2$

(6) $-2 < x < -1$ 或 $x > 1$

(7) $x < -1$ 或 $x = 0$ 或 $1 \leq x < 2$

(8) $-2 < a < \frac{5}{3}$

(9) $m > 3$

(10) $-1 < m \leq 0$

(11) $-1 < a < 3$

(12) $a = 2, b = -3$

(13) $1 \leq x \leq 5 - \sqrt{5}$

(14) $x \geq 4$ 或 $x \leq 2$

(15) $a = 2, b = -3$

[解法]：

設 $x^2 - ax + b > 0$ 之解為 $x > \alpha$ 或 $x < \beta$ ， $x^2 + bx - 4 \leq 0$ 之解為 $n \leq x \leq m$

當聯立不等式的解為 $3 < x \leq 4$ 時，則上述的範圍可取其共同解為 $\alpha < x \leq m$

$\Rightarrow \alpha = 3, m = 4$

所以 $x = 3$ 為 $x^2 - ax + b = 0$ 之解且 $x = 4$ 為 $x^2 + bx - 4 = 0$ 之解

$\Rightarrow a = 2, b = -3$