§3–3 數學期望值

(甲)數學期望值

(1)期望值的由來：
期望值的概念，緣起於賭金的分配，流傳是這樣的：
1654 年法國有甲、乙兩位實力相當的棋王，各出賭金 32 法郎相約賭賽，規定先贏三局者爲勝，勝者可獲得全部賭金(64 法郎)，但每局必定要分出高下，不能成和局。結果第一局甲贏了。不料這時突然發生一件重大事故，迫令這樁賭賽中途停止，且以後也難有機會繼續比賽。於是公正人決定將賭金 64 平分還給甲、乙二位棋士，但二人爲所分得的賭金之多寡爭執不下，一位喜歡數學的賭徒米爾，就拿這個問題向巴斯卡請教。這就是有名的「賭金分配問題」。

巴斯卡的解法：
①他認爲二人所分賭金的多寡，應與他們獲勝機會的大小成比例，這樣分配才算公平。

②他算出甲獲勝的機率爲$\frac{11}{16}$，乙獲勝的機率爲 $1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}$。所以他認爲甲、乙二人獲勝的機率比爲 11：5。而不是之前的 1：1。賭金也應該按 11：5 來分配。

③因此甲應分賭金______________。乙應分賭金____________。
甲、乙應分得的賭金，就是「**期望值**」。

(2)事件的期望值：
在我們作決策的時候，不但要考慮獲勝的機率有多大，連帶著也要衡量獲勝後贏得的「好處」有多少？失敗後遭受的「損害」有多少？
當我們賭賽(摸彩、競技、甚至與敵人決戰)之前，不能不預先估計我們能從這場賭賽中「可能」獲得的好處有多少？這種事前預期的好處，就叫做這事的期望值。顯然，期望值是由兩個因素決定的：

第一，這件事發生的機率有多大？
第二，若果真發生，會得到的報酬或遭受的損失是多少？

這兩個考慮的過程形成了期望值的概念，
於是定義爲：**(某事的期望值)=(某事發生的機率)×(此事發生後應得的金額)**
把「好處」用金額來表示是數量化的辦法。

定義：
設某件事發生的機率是 p，若此事件發生即可得到 m 元，則 mp 元，
就叫做**此事件的數學期望值，**簡稱爲**期望值。**

實例：
任意丟擲一粒質料均勻的骰子，若出現 6 點可得 7 元，求出現 6 點的期望值是多少？

[解法]：期望值$=7\times\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$。

(3)隨機試驗的期望值

(a)定義：

如果一個隨機實驗有k種可能結果，各種結果的報酬分別爲$m_1,m_2,..,m_k$,而得到這些報酬的機率分別爲$p_1,p_2,p_3,.....p_k$，(其中$p_1+p_2+.....+p_k=1$，此式可用來簡單判斷機率是否算錯)，則$m_1\cdot p_1+m_2\cdot p_2+\ldots+m_k\cdot p_k$稱爲<u>此隨機試驗的期望值</u>，記爲E，(Expectation的字母)，即$E=m_1\cdot p_1+m_2\cdot p_2+\ldots+m_k\cdot p_k$。

實例：任意丟擲一粒質料均勻的骰子，若出現a點可得a元，求期望值是多少？

[解法]：$E=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}$ 。

實例：設袋中有 10 元，5 元硬幣各 3 枚，自袋中任取 2 枚，求期望值爲多少？

[解法]：

此試驗可能發生的結果爲 10 元、10 元與 10 元、5 元與 5 元、5 元

發生的機率爲 $\frac{C_2^3}{C_2^6}$ 、 $\frac{C_1^3\cdot C_1^3}{C_2^6}$ 、 $\frac{C_2^3}{C_2^6}$

所以期望值$=20\times\frac{3}{15}+15\times\frac{9}{15}+10\times\frac{3}{15}=15$(元)

(b)期望值與平均值：

實例：設袋中有 10 元，5 元硬幣各 3 枚，自袋中任取 2 枚，求期望值爲多少？

[解法]：

我們將袋中的硬幣想成有 6 枚總和 45 元的硬幣，平均一枚硬幣的價值$=\frac{45}{6}$元，

因此二枚硬幣平均價值$=\frac{45}{6}$元$\times2=15$ 元，與前面期望值的結果一致。

<u>有時候計算期望值時，也可以考慮用平均價值的概念來處理。</u>

[例題1] 某人擲一枚均勻硬幣 2 次，若出現 2 個正面，即可得 400 元；若出現 1 個正面 1 個反面，即可得 100 元；若出現 2 個反面，則輸 500 元，試求其期望值爲多少？Ans：25 元

[例題2] 數人賭博，其中 1 人做莊，不做莊的先交給莊家 3 元，得到擲 1 個公正銅板 1 次的權利，規定：擲得正面時，莊家賠 5 元；擲得反面時，莊家不賠。

(1)不做莊的人的期望值是_________，故此種玩法_________(填公平、不公平)

(2)若要玩法公平，當得反面時，莊家應賠__________元。

Ans：(1)2.5 元，不公平(2)賠 1 元

[例題3] 袋中有 10 元、5 元硬幣各 4 枚，自袋中任取 3 枚，求期望值。
Ans：22.5 元

[例題4] 根據統計資料得知，一個 50 歲的人，在一年內存活的機率爲 98.5%，今有一個 50 歲的人參加一年期保險額度爲五十萬元的人壽保險，須繳保費一萬元，則保險公司獲利的期望值爲__________。Ans：2350 元

(練習1) 假設每次付款 150 元參加抽獎，獎金有 300 元,200 元,100 元三種，機率分爲$\frac{1}{10}$,$\frac{2}{10}$,$\frac{3}{10}$，求每次得獎金的期望值？Ans：100 元

(練習2) 某人擲一枚均勻硬幣 2 次，若出現 2 個正面，即可得 400 元；若出現 1 個正面 1 個反面，即可得 100 元；若出現 2 個反面，則輸 500 元，試求其期望值爲多少？Ans：25 元]

(練習3) 擲一公正骰子，若出現點數爲偶數，則可得 3 倍點數的錢，若出現點數爲奇數，則輸掉點數 2 倍的錢，請求出這個試驗的期望值。
Ans：3 元

(練習4) 擲一均勻硬幣三次，若每出現一個正面得 5 元，一個反面賠 2 元，則所得總額之期望值爲____________元。Ans：4.5 元

(練習5) 袋中有 10 個硬幣，其中有 4 個 10 元，3 個 5 元，其他 3 個同值，若從袋中一次取出二個硬幣的期望值爲 11.6 元,求其他 3 個硬幣之值爲何？
Ans：1 元

(練習6) 發行每張 1 元的彩券 2000 張，其中有 2 張獎金各 500 元，有 8 張獎金各 100 元，有 10 張獎金各 10 元。問購此彩券是否有利？
Ans：否

(練習7) 根據統計資料，每年房屋失火的機率爲$\frac{1}{10000}$。某人將其房屋向產物保

險公司投保 2000000 元的火災險，期間一年，保費是 10000 元。求保險公司獲益的期望值是多少？Ans：9800 元

期望值的注意事項：

(a)期望值是各種可能的報酬乘以得此報酬的機率之和，此所謂報酬不一定指金錢，也可以是其他數值。

(b)一張統一發票值 1.6236 元，2 張發票值 2×1.6236 元，也就是期望值有「可加性」。

(c)一種遊戲如有輸贏，它是否公平，端看期望值是否爲 0？

(d)要計算期望值需要將各種結果(如得獎是機車、電視機等)換算成同一單位(如金錢)後才能計算。

[例題5] 有關擲骰子的期望值：

(1)擲 1 粒骰子求點數的期望值。

(2)同時擲 2 粒骰子，求點數和的期望值。

(3)同時擲 6 粒骰子，求點數和的期望值。

Ans：(1)$\frac{7}{2}$ (2)7(3)21

[例題6] 有 5 個選項的選擇題

(1)若單選每題答對給 8 分，則答錯應扣______分才公平。

(2)若是多重選擇題，每題答對給 12 分，則答錯應扣_______分才公平。

Ans：(1)2 分(2)$\frac{2}{5}$分

[例題7] 袋中有k號球有k^2個(k=1,2,3…,n)，今從其中選取一個，則選取之球的球號的期望值。　Ans：$\dfrac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$

[例題8] 摸彩箱裝有若干編號爲 1, 2, …10 的彩球，其中各種編號的彩球數目可能不同。今從中隨機摸取一球，依據所取球的號數給予若干報酬。現有甲、乙兩案：甲案爲當摸得彩球的號數爲 k 時，其所獲報酬同爲 k；乙案爲當摸得彩球的號數爲 k 時，其所獲報酬爲 $11-k$ (k=1, 2, …10)。已知依甲案每摸取一球的期望值爲$\dfrac{67}{14}$，則依乙案每摸取一球的期望值爲________。(化成最簡分數)

Ans：$\dfrac{87}{14}$　(2007 學科)

[例題9] 某食品每天早上製造蛋糕，並以 1 個 25 元賣出(1 個蛋糕成本爲 15 元)，每日餘下未賣出的蛋糕將之丟掉，該店統計 50 日得到下表

1 日賣出蛋糕數	230	250	270	290	合計
日數	6	18	20	6	50

(1)製造出 270 個蛋糕的期望值爲多少元？

(2)若要使利益之期望值最大，則必須要製造多少個蛋糕？(但每日只許製造 230 或 250 或 270 或 290 個蛋糕)

Ans：(1)2400 元　(2)250 個蛋糕

[例題10] 袋中有 5 個紅球，4 個白球，今任意從袋中取 3 球，則取到白球個數的期望值=？　Ans：$\frac{4}{3}$個

[例題11] 將 5 個球任意分派到 3 個箱子中，請求空箱子個數的期望值=？
Ans：0.4

[例題12] 甲，乙，丙分別出 340 元，300 元，丙出 270 元，輪流投擲一公正的骰子，依甲，乙，丙，甲，乙，丙，…之次序，誰先投出么點者為勝，可獲得全部獎金，(1)此遊戲對甲，乙，丙三人而言，那一人最不利？__________。(2)若遊戲改為只有甲，乙二人，依甲，乙，乙，甲，甲，乙，乙，甲，…之次序，誰先投出么點者為勝，可獲得全部獎金，遊戲之前，乙出 300 元，為使遊戲公平，甲應出__________元。
Ans：(1)丙(2)341 元

(練習8) 袋中有 12 個球，其中有 3 個白球。若機會均等，試求袋中任取 3 個球時，選中白球個數的期望值。　Ans：$\frac{3}{4}$個

(練習9) (1)9 個樣品中有 2 個不良品，今取出 3 個，則含有不良品個數的期望值爲__________個。
(2) 40 個樣品中有 4 個不良品，今取出 2 個，則含有不良品個數的期望值爲__________個。Ans：(1)$\frac{2}{3}$ (2)$\frac{1}{5}$

(練習10) 袋中有 1 號球 1 個，2 號球 2 個，…，n 號球 n 個，自袋中任取一球，若取得 r 號球可得 r 元，請問期望值=？　Ans：$\frac{2n+1}{3}$

(練習11) (1)在五選一的單選題中，若答對得 5 分，反之答錯應倒扣_________分才公平。
(2)有一複選題，有五個敘述，其中至少有一個敘述是正確的，若此題答對得 5 分，若答錯則應倒扣__________分才公平。
Ans：(1)$\frac{5}{4}$ (2)$\frac{1}{6}$

(練習12) 網球一盤比賽先勝 6 局者贏，贏一盤可得獎金 1000 元，甲、乙兩人實力相當，但甲已連勝 5 局，請問如果因下雨不再繼續比賽，則甲、乙兩人如何分配獎金才公平？Ans：甲：$1000\times\frac{63}{64}$元、乙：$1000\times\frac{1}{64}$元

(練習13) 設飯糰一個售價爲 15 元，而成本是每個 10 元。建中合作社每天賣出的飯糰個數經 50 日的統計如下：

一日的需求量(個)	40	50	60	70	80
日　　　數	2	8	12	18	10

若一直保持如此的需求量，而且每日的剩下的飯糰都要廢棄，則一日準備 70 個飯糰的獲利期望值爲_________元。 Ans：248 元

(練習14) 袋中有 10 個球，其中有 2 個白球，取球機會相等，求
(1)任取 3 球，則取得白球數的期望值爲__________。

(2)每次取 1 球，取後放回，於第k次始取到白球，則取到白球次數的期望值為＿＿＿＿＿。

Ans：(1)$\frac{3}{5}$ (2) 5

(練習15) 甲、乙、丙三人輪流依甲乙丙甲乙丙……，依順序投兩公正銅板，先得兩正面者獲勝，欲使公平起見，若甲勝給 3600 元，則乙、丙獲勝應各給多少？Ans： 乙給 4800 元，丙給 6400 元。

綜合練習

(1) 有一種遊戲，每次輸贏規則如下：先從 1 至 6 中選出一個號碼 n，再擲三粒均勻骰子，若三粒骰子的點數全是 n，則可贏 3 元；恰有兩個點數為 n，則得 2 元；恰有一個骰子點數為 n，則得 1 元；而沒有點數為 n，則輸 1 元；如此，玩一次的期望值(贏為正，輸為負)為＿＿＿＿＿元。 (86 學科)

(2) 投擲一枚不均勻的骰子，出現 X 點的機率為 AX+B，並且可以得到 X 元，(X=1,2,3,4,5,6)，若已知期望值為 4 元，試求 A,B 之值。

(3) 一賭博機器有兩個電鈕，每按一次，會出現老鼠、牛、老虎三種不同動物中的一種，設每種動物出現的機率如右：每賭一次（即同時按兩個電鈕）須先付 5 元，且設出現結果不互相影響，若兩隻老鼠同時出現，則機器會自動付給 50 元，若兩隻牛同時出現則付給 10 元，若兩隻老虎同時出現則付給 5 元，其他情形一概不付，求賭一次所得之期望值為＿＿＿＿＿＿元。

出現結果	老鼠	牛	老虎
機率	0.1	0.4	0.5

(4) 老張過去買釋迦的經驗是平均 5 個中就有 1 個釋迦內長蟲不能吃須丟掉，因此有次到水果攤買釋迦時向老板抱怨，老板說今天釋迦每斤 70 元，如果老張要求當場打開，則售價提高至每斤 80 元，但如打開有蟲可退回，試以「期望值」的觀點來看，老張應否要求打開？

(5) 袋子有 3 個球，2 個球上面標 1 元，1 個球標 5 元，從袋中任取兩個球，即可得到兩個球所標錢數的總和，則此玩法所得錢數的期望值是多少？ (88.學科)

(6) 某市為了籌措經費而發行彩券，該市決定每張彩券的售價為 10 元；且每發行一百萬張彩卷，即附有一百萬元獎 1 張，十萬元獎 9 張，一萬元獎 90 張，一千元獎 900 張。假設某次彩券共發行三百萬張，試問當你購買一張彩券時，你預期會損失＿＿元。(88 社)

(7) 某電子公司欲擴廠，新建廠房中有大中小三種規模。建廠規模的決策與未來一年的經濟景氣情況有關；經濟景氣如果高度成長，則建大規模廠較有利，如果微幅成長或持平，則建中規模廠即可，如果經濟衰退，則應建小規模廠。進一步評估三種廠規模在四種經濟景氣情況下的獲利如下：(89 社)

利潤 (百萬元/年)		建廠規模			
		大	中	小	P
景氣情況	高度成長	50	40	30	0.3
	微幅成長	10	30	20	0.1
	持平	5	10	5	0.4
	衰退	−30	−10	−2	0.2

經分析未來一年經濟高度成長的機率爲$P_1=0.3$，微幅成長的機率爲$P_2=0.1$，持平的機率爲$P_3=0.4$，衰退的機率爲$P_4=0.2$。試問以未來一年利潤期望值越大越好的判斷準則，此公司選用那一種建廠規模獲利最佳？最佳的建廠決策下，未來一年它的利潤期望值是多少？(百萬元)

(8) 某次數學測驗共有 25 題單一選擇題，每題都有五個選項，每答對一題可得 4 分，答錯倒扣 1 分。某生確定其中 16 題可答對；有 6 題他確定五個選項中有兩個選項不正確，因此這 6 題他就從剩下的選項中分別猜選一個；另外 3 題只好亂猜，則他這次測驗得分之期望值爲_______分。(92 學科)
(計算到整數爲止，小數點以後四捨五入。)

(9) 某電視台舉辦抽獎遊戲，現場準備的抽獎箱裡放置了四個分別標有 1000、800、600、0 元獎額的球。參加者自行從抽獎箱裡摸取一球(取後即放回)，主辦單位即贈送與此球上數字等額的獎金，並規定抽取到 0 元的人可以再摸一次，但是所得獎金折半(若再摸到 0 就沒有第三次機會)；則一個參加者可得獎金的期望值是 _________ 元。(93 學科)

(10) 某公司考慮在甲、乙兩地間選擇一地投資開設新廠。經評估，在甲地設廠，如獲利，預計可獲利 10000(萬元);如不獲利，預計將虧損 7000(萬元)。在乙地設廠，如獲利，預計可獲利 6000(萬元);如不獲利，預計將虧損 5000(萬元)。又該公司評估新廠在甲、乙兩地獲利的機率分別爲 0.6、0.7。如以獲利期望值爲決策準則，該公司應選擇甲地或乙地投資?寫出作決策的過程。(91 指定乙)

(11) 某引擎製造商擬出售 10 個引擎，可能完全售出或完全被退回，其驗貨方式是「任意選取二個引擎來檢查，若有缺陷，則整批退回，否則全部被接受」，今一引擎成本爲 70 萬元，售價 95 萬元，設此批引擎中有一個是有缺陷，試問此引擎製造商獲利的期望值=？

(12) 同時擲三粒公正的骰子，求(a)三粒骰子的點數均相同時，可得 300 元；恰有兩粒點數相同時，可得 200 元，則其期望值爲__________元。
(b)出現最大點數的期望值爲__________。

(13) 將 3 個球投入 3 個不同的袋子裡，每次投一個球，連續投 3 次，則每個袋子都有球的機率爲__________，3 個球都在同一袋子的機率爲__________，空袋子個數的期望值爲__________。

(14) 某保險公司銷售旅遊平安保險，每名保額 200 萬元，保費 800 元，公司的管理與銷售成本爲 200 元，根據統計得知，出險的機率爲$\frac{2}{10000}$，試求對每一保戶，保險公司獲利的期望值。

(15) 袋中有 1 號球 1 個，2 號球 2 個，…，n 號球 n 個，自袋中任取一球，若取得 r 號球可得 $r-1$ 元，請問期望值=？

(16) 甲、乙兩人輪流投擲兩粒公正的骰子，約定先擲得點數和為 7 者可得 110 元，若由甲先擲，則甲、乙兩人的期望值為___________。

(17) 擲三粒骰子一次，須先付 10 元，若出現點數均相同時，可得 120 元；點數成等差時，可得 30 元，求
(a)此遊戲是否有利？__________。(答有利或不利)
(b)要使遊戲公平，應將出現點數成等差時，可得 30 元，更改為____元。

(18) 甲乙兩人做對局遊戲，二人獲勝的機率均等，誰先勝三局可得獎金 5600 元，進行至第二局且甲都獲勝時，因故遊戲必須停止。現依先勝三局的機會來分錢，請問甲乙二人各應分得多少元？

(19) 袋中有 1,2,3 號卡片各 2 張，求取出 2 張時，數字積的期望值。

(20) 將 3 本不同的書，任意放入 4 個抽屜，求空抽屜個數的期望值。

進階問題

(21) 證明擲 n 個公正骰子一次，則其正面出現個數的期望值為$\frac{n}{2}$。

(22) 袋中有 5 個黑球，3 個白球，今由袋中任意取出一球(設各球被取出機會均等)，若取出的球為白球，則停止取球，若取出黑球，則將球放回袋中，再由袋中任取出一球，如此進行直到取出白球為止，令 x 表示取得黑球的次數，則 x 的期望值=？

(23) 設某人站在數線點位置上投擲一個骰子，得 1 點或 2 點，朝正方向前進一單位，得其餘點數，朝負方向前進一單位。此人連續擲 4 次骰子，求此人所在位置的坐標之期望值=？

綜合練習解答

(1) $-17/216$

(2) A=$\frac{1}{35}$，B=$\frac{1}{15}$

(3) -1.65

(4) 應要求打開[提示：打開的期望值=$\frac{1}{5}\times0+\frac{4}{5}\times(-10)=-8$，不打開的期望值=$\frac{1}{5}\times(-70)+\frac{4}{5}\times0=-14$]

(5) 14/3 元

(6) 6.3

(7) 中廠的建廠規模最佳，利潤期望值為 17 百萬元

(8) 68

(9) 675

(10) E(甲)=3200 萬元，E(乙)=2700 萬元，故應到甲地投資

(11) 60 萬元

(12) (a) $\frac{275}{3}$ (b) $\frac{119}{24}$

(13) $\frac{2}{9}$；$\frac{1}{9}$；$\frac{8}{9}$

(14) −200 元

(15) $\frac{2(n-1)}{3}$

(16) 甲 60 元，乙 50 元

(17) (a)不利(b)40 元

(18) 甲 4900 元，乙 700 元

(19) $\frac{58}{15}$

(20) $\frac{27}{16}$

(21) $n(S)=2^n$，恰出現 k 個正面樣本點為 $\overbrace{正正\cdots正}^{k個}\overbrace{反反\cdots反}^{n-k個}$ 之排法，共 $\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_k^n$ 個，所以P(恰 k 個正面)=$\frac{C_k^n}{2^n}$

期望值 $=1\times\frac{C_1^n}{2^n}+2\times\frac{C_2^n}{2^n}+\ldots+n\times\frac{C_n^n}{2^n}=\frac{1}{2^n}\times[1\times C_1^n+2\times C_2^n+\ldots+n\times C_n^n]=\frac{1}{2^n}[n\times 2^{n-1}]=\frac{n}{2}$。

(22) $\frac{5}{3}$

(23) $\frac{-4}{3}$ [提示：投一次的期望值$=1\times\frac{2}{6}+(-1)\times\frac{4}{6}=\frac{-1}{3}$，所以 4 次的期望值為$\frac{-4}{3}$]