第 1 單元　簡單邏輯與認識證明

(甲)敘述與敘述的連接

(1)敘述的意義：在數學的常用語句中，一個能辨別真僞的語句可稱爲**敘述**，
例如：
「0 是偶數」：正確的敘述，
「1 是質數」：錯誤的敘述。
「數學老師很帥」就無法辨別真僞。
(2)敘述的否定：
設 p,q 是兩個敘述，如果這兩個敘述滿足下列關係的話，
我們就稱 p,q 互爲**否定敘述**，記爲$\sim p=q$ 或$\sim q=p$。
由假設敘述 p 爲真，可以據此推得敘述 q 爲僞。
由假設敘述 p 爲僞，可以據此推得敘述 q 爲真。

敘述 p	否定敘述$\sim p$
「$a^2+b^2=0$」	「$a^2+b^2\neq 0$」
「$x<5$」	「$x\geq 5$」
「所有的奇數都是質數」	「存在一個奇數不是質數」
「$x+y\neq 2$ 或 $x-y=5$」	「$x+y=2$ 且 $x-y\neq 5$」
「$x+2=3$ 且 $x-1\leq 5$」	「$x+2\neq 3$ 或 $x-1>5$」

(3)敘述的連結
(a)複合敘述：
兩個或兩個以上敘述，通常可以使用「或」、「且」與「若…，則…」來組成一個新的敘述稱爲**複合敘述**。
例如：敘述 p：「2 是唯一的偶質數」，敘述 q：「25 是完全平方數」
　　敘述 p 且敘述 q：「2 是唯一的偶質數」且「25 是完全平方數」
　　敘述 p 或敘述 q，「2 是唯一的偶質數」或「25 是完全平方數」
　　上面兩個皆爲複合敘述。

(1°)**「敘述 p 且敘述 q」**只有在 p,q 都是真的，這個敘述才是真的。
(2°)**「敘述 p 或敘述 q」**只有在敘述 p,q 都是錯誤時，這個敘述才是僞的。

例如：敘述 p：「ABCD 爲一個平行四邊形」，敘述 q：「$\overline{AB}=\overline{CD}$」

　　若敘述 p「ABCD 爲一個平行四邊形」，則敘述 q「$\overline{AB}=\overline{CD}$」爲複合敘述。

(乙)命題

(1) 在數學的語句中，我們常用「**若敘述 A…，則敘述 B…**」的複合敘述來描述問題，稱之爲**命題**。通常稱敘述 A 稱爲**前提**，敘述 B 稱爲**結論**。記爲 $A\rightarrow B$。

例如：

命題甲：若$\underbrace{\text{某四邊形爲菱形}}_{\text{前提}}$，則該$\underbrace{\text{四邊形爲平行四邊形}}_{\text{結論}}$。

命題乙：若$\underbrace{x \text{ 是實數且 } x\geq 2}_{\text{前提}}$，$\underbrace{\text{則 } x^2\geq 4}_{\text{結論}}$。

命題丙：若$\underbrace{\text{兩個三角形面積相等}}_{\text{前提}}$，則這$\underbrace{\text{兩個三角形全等}}_{\text{結論}}$。

命題甲：

因爲菱形 ABCD 的四個邊都等長，所以每一雙對邊都等長。

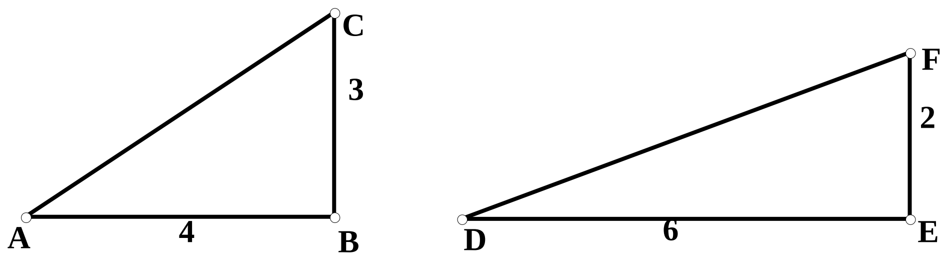
即$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{BC}=\overline{DA}$，故菱形一定是平行四邊形。**所以命題甲是真命題**。

命題乙：

因 $x\geq 2$，兩邊同乘正數 x 得 $x^2\geq 2x$，另外 $x\geq 2$，兩邊同乘 2 得 $2x\geq 4$

故 $x^2\geq 2x\geq 4$，即 $x^2\geq 4$。**所以命題乙是真命題**。

命題丙：如圖，兩個直角三角形ΔABC 與ΔDEF 有相同面積 6，但它們並不全等。



故面積相等的兩個三角形，並不保證它們全等。**所以命題丙是僞命題**。

(2)要確定一個命題是僞命題，只要舉出一個滿足前提而不滿足結論的實例就可以了，數學上稱爲**舉反例**。

(3)一般而言，當 $A\rightarrow B$ 爲正確命題時，用符號「$\mathbf{A\Rightarrow B}$」表示，讀作「**A 蘊涵 B**」。

(4)四種命題：

設原命題爲「若敘述 p，則敘述 q」，我們可以根據敘述 p，敘述 q 或敘述 p，敘述 q 的否定敘述，產生以下的命題：

原命題：若敘述 p，則敘述 q

逆命題：若敘述 q，則敘述 p

否命題：若敘述 p 的否定敘述，則敘述 q 的否定敘述

否逆命題：若敘述 q 的否定敘述，則敘述 p 的否定敘述

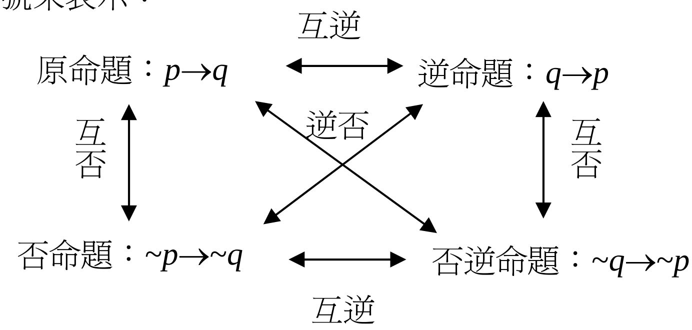
我們將這些命題用底下的符號來表示：

原命題：$p\rightarrow q$

逆命題：$q\rightarrow p$

否命題：$\sim p\rightarrow \sim q$

否逆命題：$\sim q\rightarrow \sim p$



例如：

原命題：若兩個三角形面積相等，則這兩個三角形全等。	僞
逆命題：若這兩個三角形全等，則兩個三角形面積相等。	真
否命題：若兩個三角形面積不相等，則這兩個三角形不全等。	真
否逆命題：若這兩個三角形不全等，則兩個三角形面積不相等。	僞

原命題： 若兩個三角形三邊對應相等，則這兩個三角形三內角對應相等	真
逆命題： 若兩個三角形三內角對應相等，則這兩個三角形三邊對應相等	僞
否命題： 若兩個三角形有一對應邊長不相等， 則這兩個三角形有一對應內角不相等	僞
否逆命題： 若兩個三角形有一對應內角不相等， 則這兩個三角形有一對應邊長不相等	真

等價命題：兩個命題同爲真或同爲僞，稱這兩個命題爲**等價命題**。

根據以上的例子：

(a)原命題和它的逆命題不一定同時正確。

(b)原命題與否逆命題爲等價命題。

(5)充分條件與必要條件：

(a)充分條件的定義：

命題「敘述 $p\to$敘述 q」爲**真命題**，表示敘述 p 可充分推演出敘述 q，而敘述 q 是敘述 p 的必要結論。

稱敘述 p 爲敘述 q 的**充分條件**；敘述 q 爲敘述 p 的**必要條件**。

(b)充要條件的定義：

命題「敘述 $p\to$敘述 q」與它的逆命題「敘述 $q\to$敘述 p」都是真命題，稱敘述 p 是敘述 q 的**充分必要條件**，簡稱爲**充要條件**。

記爲 $p\Leftrightarrow q$

因爲敘述 $p\Rightarrow$敘述 q，所以敘述 p 是敘述 q 的充分條件。

因爲敘述 $q\Rightarrow$敘述 p，所以敘述 p 是敘述 q 的必要條件。

(丙)證明方法

(1) 直接證明法：

由前提出發，經過一連串正確命題的推導：

$p\Rightarrow p_1$；$p_1\Rightarrow p_2$；…；$p_{n-1}\Rightarrow p_n$；$p_n\Rightarrow q$，再由蘊涵關係的遞移律，

導致 $p\Rightarrow q$ 這個命題是成立的，此種證法稱爲**直接證法**。

例如：

利用國中所學的幾何知識，可知下面的命題皆爲真。

命題甲：

敘述 p：「四邊形爲正方形」$\Rightarrow$敘述 q：「四邊形爲菱形」

命題乙：

敘述 q：「四邊形爲菱形」$\Rightarrow$敘述 r：「四邊形爲平行四邊形」

由命題甲與命題乙，可知命題敘述 p：「四邊形爲正方形」

$\Rightarrow$敘述 r：「四邊形爲平行四邊形」爲真，這就是直接證明法。

(2)反證法：

有時候命題用直接證法感到無從著手，此時可以考慮另一種證題方法—**反證法**。

反證法是從「結論的反面」出發，通過一系列正確無誤的推理，最後導致題設條件、公設、定義、公理、公式…等等數學上已知的事實中的某一種相矛盾，所以得出「結論的反面」不成立，從而肯定「命題的結論」是正確的。

反證法的步驟：

Step1：反面假設：否定命題的結論。

Step2：導出矛盾：把反面的假設作爲輔助條件，添加到命題的
前提中，從這些條件出發，最後導出矛盾。

Step3：肯定結論：「否定命題的結論」不成立，所以肯定
「命題的結論」。

(3) **反證法與舉反例的差別：**

反證法是一種證明命題爲真的一種方法，而舉反例是爲了確定一個命題是僞命題的方法。

[**例題**1] 試判斷下列命題的真僞？

(A)若 $x>1$，則 $x>3$。

(B)若 $-2<x<5$，則 $-4<x<8$。

(C)若 $x\ge1$，則 $x>1$。

(D)若 $a\ge b$ 且 $a\le b$，則 $a=b$。

(E)若 $x>1$，則 $x\ge1$。　Ans：(B)(D)(E)爲真

[解法]：

(A)反例：$x=2>1$，但 $x=2<3$。故命題錯誤。

(B)因爲 $-4<-2$，$5<8$，所以 $-4<-2<x<5<8$，故 $-4<x<8$。

(C)反例 $x=1\ge1$，但 $x=1>1$ 不成立，故命題錯誤。

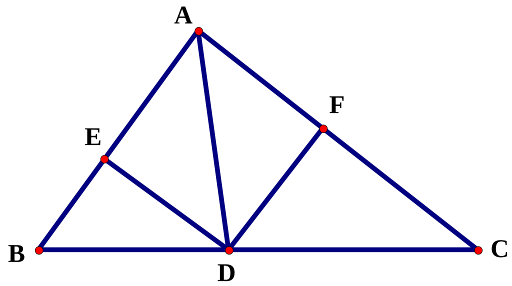
(D)命題爲真

(E)因爲 $x>1\ge1$，所以 $x\ge1$。

[**例題**2] (直接證法)

若ΔABC 中$\angle$A 的分角線$\overrightarrow{AD}$交$\overline{BC}$於 D，

則$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{BA}:\overline{AC}$。



[證明]：

(1)過 D 點作$\overline{AB}$與$\overline{AC}$的垂線，垂足爲 E、F。

(2)因爲$\overline{AD}$爲$\angle$BAC 的平分線，所以$\overline{DE}=\overline{DF}$。

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\Delta ABD}{\Delta ADC}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DE}}{\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{DF}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}。$$

[**例題**3] (直接證法)

證明「若自然數 n 的個位數字是 5，則 n 爲 5 的倍數。」

[證明]：

自然數 n 的個位數字是 5

$\Rightarrow n=10a+5$，其中 a 爲自然數或 0

$\Rightarrow n$ 除以 5 的餘數爲 0

$\Rightarrow n$ 爲 5 的倍數。

[例題4] (直接證法與反證法)

如圖，若 ABCD 是四邊形，

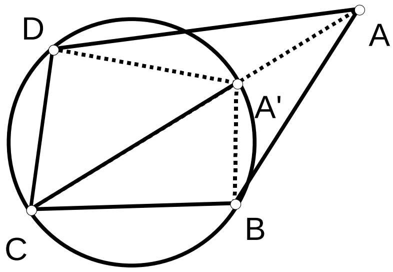
則 ABCD 是圓內接四邊形

$\Leftrightarrow\angle A+\angle C=180^\circ$或$\angle B+\angle D=180^\circ$。

[證明]：

"$\Rightarrow$"

$\because$ABCD 是圓內接四邊形，$\angle A$ 是 BCD 弧的圓周角，



$\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$，$\angle C$ 是 BAD 弧的圓周角，$\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$

$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD})=\frac{1}{2}\times360^\circ=180^\circ$。

同理，$\angle B+\angle D=180^\circ$。

"$\Leftarrow$"

(1)設 A 在圓外，連接 $\overline{AC}$ 交圓於 A'，連接$\overline{A'D}$、$\overline{A'B}$

$\because A'$、B、C、D 四點共圓$\angle BA'D+\angle BCD=180^\circ$，

但已知 $\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$ $\therefore\angle BA'D=\angle BAD$

$\because\angle CA'D$ 是$\triangle AA'D$ 的外角，$\angle CA'D>\angle CAD$，

同理 $\angle CA'B>\angle CAB$，

$\therefore\angle BA'D=\angle CA'D+\angle BA'D>\angle CAD+\angle CAB=\angle BAD$

此與 $\angle BA'D=\angle BAD$ 的前提矛盾。

(2)設 A 在圓內，連接 $\overline{AC}$ 且延長交圓於 A'，連接$\overline{A'D}$、$\overline{A'B}$

$\because A'$、B、C、D 四點共圓$\angle BA'D+\angle BCD=180^\circ$，

但已知 $\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$ $\therefore\angle BA'D=\angle BAD$

$\because\angle CA'D$ 是$\triangle AA'D$ 的外角，$\angle CA'D<\angle CAD$，

同理 $\angle CA'B<\angle CAB$，

$\therefore\angle BA'D=\angle CA'D+\angle BA'D<\angle CAD+\angle CAB=\angle BAD$

此與 $\angle BA'D=\angle BAD$ 的前提矛盾

由(1)(2)$\therefore$A、B、C、D 四點共圓。

[例題5] (反證法)

設 a,b 是正實數，證明：若 $a^2+b^2>50$ 則 $a>5$ 或 $b>5$。

[分析]：

直接證明不容易，我們證明原命題的否逆命題成立。

否逆命題：「若 $a\le5$ 且 $b\le5$，則 $a^2+b^2\le50$」

[證明]：

因爲 $0<a\le5$ 且 $0<b\le5$

所以 $a^2\le25$ 且 $b^2\le25$

因此 $a^2+b^2\le50$。

否逆命題：「若 $a\le5$ 且 $b\le5$，則 $a^2+b^2\le50$」成立。

原命題：「若 $a^2+b^2>50$ 則 $a>5$ 或 $b>5$」成立。

[例題6] (反證法)

設 a,b,c 為奇數，證明：方程式 $ax^2+bx+c=0$ 沒有整數解。

[證明]：

假設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有整數解 m

$\Rightarrow am^2+bm+c=0$

(1)若 m 為偶數，因為 a,b,c 為奇數

可得 am^2、bm、c 為偶數、偶數、奇數

因此 am^2+bm+c 為奇數。

(2)若 m 為奇數，因為 a,b,c 為奇數

可得 am^2、bm、c 為奇數、奇數、奇數

因此 am^2+bm+c 為奇數。

由(1)(2)的討論可以得知 $am^2+bm+c\neq 0$

此與「假設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有整數解 m」矛盾。

綜合練習

(1) 對ΔABC 而言，試判斷下列命題的真偽？

(A)若最小內角小於 60°，則三邊不全相等。

(B)若三內角相等，則三邊相等。

(C)若$\angle$A 為最大角，則$\overline{BC}$為最大邊。

(D)若ΔABC 內接於一圓，則ΔABC 為直角三角形。

(2) 設(A)充分非必要(B)必要非充分(C)充要(D)非充分且非必要，將(A)(B)(C)(D)填入下列空格

(1°)「$x=1$」為「$x^2-3x+2=0$」的________條件。

(2°)「$-1\leq x\leq 4$」為「$x>-3$」的_________條件。

(3°)「$ab<0$」為「a , b 之中有一者為負」的______條件。

(4°)「$a\neq b$」為「$a^2\neq b^2$」的______________條件。

(5°)「$a=b$」為 $a^2=b^2$ 的_____________條件。

(6°)「 $|a|=|b|$ 」為 $a=b$ 的______________條件。

(7°)「$a=b=0$」為「$a^2+b^2=0$」的_____________條件。

(8°)「$x>2$」為「 $|x|<2$」的________________條件。

(3) 對四邊形 ABCD 而言，

(a)ABCD 為平行四邊形是對角線互相平分之_____條件。

(b)ABCD 爲矩形是對角線互相平分之__________條件。
(c)ABCD 爲菱形是對角線互相垂直之__________條件。
(d)對角線互相垂直平分是正方形之___________條件。

(4) 完成下面的表格：

原命題：若四邊形爲平行四邊形，則其對角線互相平分。	真
逆命題：	
否命題：	
否逆命題：	

(5) 設 a,b 爲實數，則$(a-1)^2+(b-2)^2=0$ 的否定敘述是：
(A)$(a-1)^2+(b-1)^2\neq 0$(B)$a\neq 1$ 或 $b=2$(C)$a\neq 1$ 或 $b\neq 2$
(D)$a\neq 1$ 且 $b=2$(E)$a\neq 1$ 且 $b\neq 2$

(6) 設 x 爲實數，
(a)設$|x+2|\leq 4$ 爲$|x-1|\leq k$ 之充分條件，則求 k 的範圍。
(b)設$|x+2|\leq 4$ 爲$|x-1|\leq k$ 之必要條件，則求 k 的範圍。

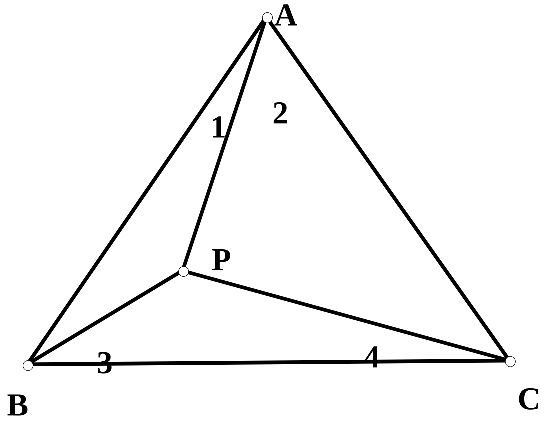
(7) 由王昌齡出塞中的「但使龍城飛將在，不教胡馬渡陰山」可推知
(A)若胡馬渡陰山，則龍城飛將不在。(B)若龍城飛將不在，則胡馬渡陰山。
(C)若胡馬不渡陰山，則龍城飛將在。(D)若胡馬不渡陰山，則龍城飛將不在。

(8) n 爲正整數，試證明：「n 是偶數」$\Leftrightarrow$「n^2 是偶數」。

(9) n 是 3 的倍數$\Leftrightarrow n^2$ 是 3 的倍數。

(10) 證明平均數原則：
設 10 個正數 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ 的總和是 35
(a)必有一個正數≥ 3.5。
(b)必有一正數≤ 3.5。

(11) 如右圖，ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle 1<\angle 2$，試證：$\angle 3>\angle 4$。



綜合練習解答

(1)　(A)(B)(C)爲真

(2)　(1°)A(2°)A(3°)A(4°)B(5°)A(6°)B(7°)C(8°)D

(3)　(a)充要　(b)充分　(c)充分　(d)必要

(4)

原命題：若四邊形爲平行四邊形，則其對角線互相平分。	真
逆命題： 若四邊形對角線互相平分，則四邊形爲平行四邊形。	真
否命題： 若四邊形不爲平行四邊形，則其對角線不互相平分。	真
否逆命題： 若四邊形對角線不互相平分，則四邊形不爲平行四邊形。	真

(5)　(A)(C)

(6)　(a)$k\geq 7$　(b)$k\leq 1$

(7)　(A)

(8)　提示(2)可以利用反證法。

(9)　略

(10)　提示：利用反證法

(11)　假設$\angle 3\leq\angle 4\Rightarrow\overline{PC}\leq\overline{PB}$因爲$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AP}=\overline{AP}$，所以$\angle 2\leq\angle 1$(矛盾)