§2–4 三角測量

(甲)測量的基礎概念與名詞

(1) 基本測量知識

(a)手拿著細繩的一端，懸錘於另一端，即得一鉛直線，垂直於鉛直線的線，稱之爲水平線。

(b)觀測「目的物」時，設想過「目的物」有一鉛直線。從觀察者之目作直線垂直於鉛直線，乃得一水平線。

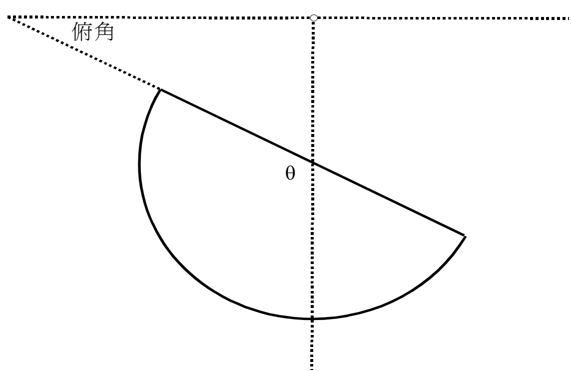
(c)從觀察者之目至「目的物」，作一射線(即表視線)。設視線與水平線所成的角爲θ，若爲仰視(視線在水平線之上)，則稱θ爲仰角；若爲俯視(視線在水平線之下)則稱θ爲俯角。

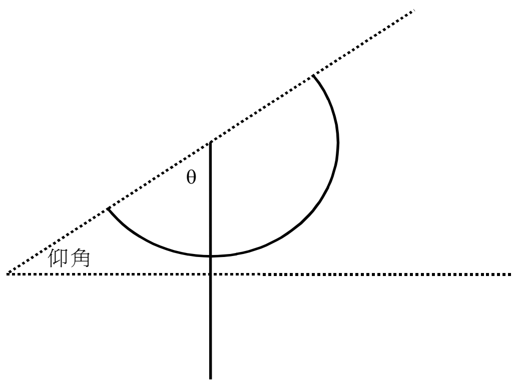
(2)名詞解釋：

① 鉛直線：通過地球球心的直線。
② 水平線：垂直鉛直線的直線。
③ 測物線：眼睛與觀測物所成之直線。
④ 仰角：測物線與水平線之夾角，此時觀測物在水平線之上方。
⑤ 俯角：測物線與水平線之夾角，此時觀測物在水平線之下方。

(3)用量角器作粗略測量

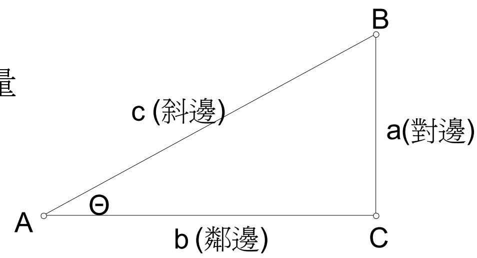
量角器可作爲粗略測量仰角及俯角的工具，其方法爲在中心處挖一個小孔並繫上一細繩，在繩子的另一端繫上一個重物。測量時，將量角器 0°這一端靠近眼睛，另一端對準目標物觀測點。俯視目標物時，若細繩所示的角度爲θ°，則俯角爲($\theta^{\circ}-90^{\circ}$)。仰視物體時，若細繩所示的角度爲$\theta^{\circ}$，可知仰角爲($90^{\circ}-\theta^{\circ}$)。





(3)解題原則：

(a)一遇直角三角形，最大要訣⇒以三角函數值表示幾何量



對邊(a)=斜邊(c)×對角的正弦值(sinA)
　　　　=鄰邊(b)×對角的正切值(tanA)

鄰邊(b)=斜邊(c)×對角的餘弦值(cosA)
　　　　=對邊(a)×對角的餘切值(cotA)

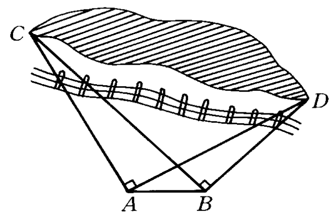
(b)若爲任意三角形

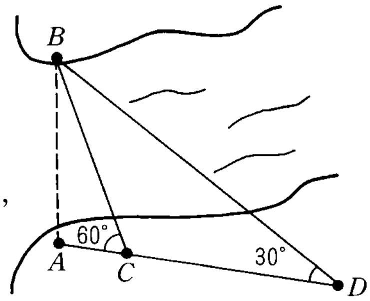
已知一邊二角(角比邊多)⇒用正弦定理

已知二邊一角(邊比角多)⇒用餘弦定理

(c)立體測量：處理立體測量的問題時，通常將要求出的量(塔高、山高、距離..)與題目所給的條件(方位、距離、仰角、俯角)，通通轉化成一個三角形的邊長或內角，然後就可將立體的問題化成平面三角形的問題，此時正餘弦等在三角形上解決邊角問題的技巧就可以派上用場。

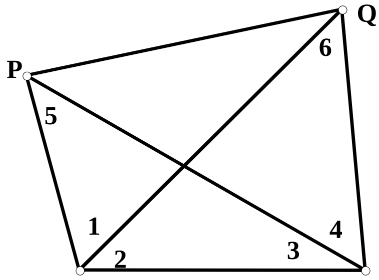
[例題1] 設有一湖，欲測湖岸兩點$\overline{CD}$長，
但湖岸築有鐵絲網不能靠近，
在鐵絲網外取 A，B 兩點間距離爲 30 公尺，
分別自 A，B 可看到其餘三點 C，D，B 或 C，D，A，
因而測得如圖，$\angle CAB=120^\circ$，$\angle DBA=135^\circ$，
$\angle DAB=30^\circ$，$\angle CBA=45^\circ$，則$\overline{CD}$長爲______________公尺。
Ans：$30(\sqrt{6}+\sqrt{2})$



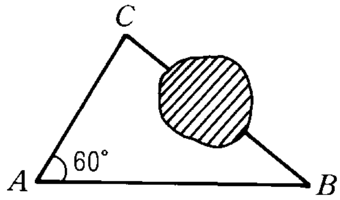


[例題2] 如圖，A，B 兩點分別位於一河口的兩岸邊。
某人在通往 A 點的筆直公路上，
距離 A 點 50 公尺的 C 點與距離 A 點 200 公尺的 D 點，
分別測得$\angle ACB=60^\circ$，$\angle ADB=30^\circ$，
則 A 與 B 的距離爲_______________公尺。
Ans：$50\sqrt{7}$公尺

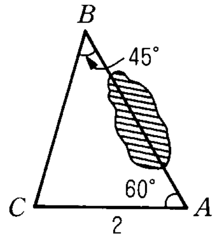
(練習1) 如圖所示，設$\overline{AB}$=30，∠1=60°，∠2=45°，∠3=30°，∠4=60°，求$\overline{PQ}$。
Ans：$15\sqrt{6}$



(練習2) 如下圖，地面上兩點 B，C 被一池塘隔開，在地面上找一點 A，量得$\overline{AB}$＝80 公尺，$\overline{AC}$＝50 公尺，並測得∠ CAB＝60°，則 $\overline{BC}$=______公尺。 Ans：70

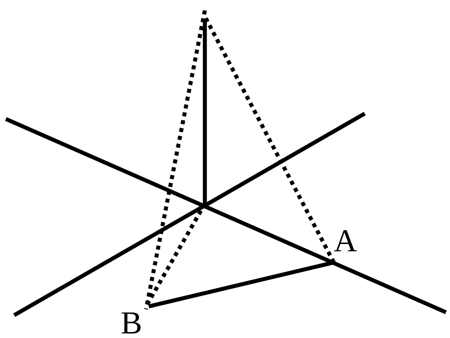


(練習3) 如下圖所示，某人欲測 A 和 B 兩點的距離，得到資料如下：$\overline{AC}$=2 公里，∠ CAB＝60°，∠ CBA＝45°，則$\overline{AB}$=_________公里。
Ans：$\sqrt{3}$+1 公里。

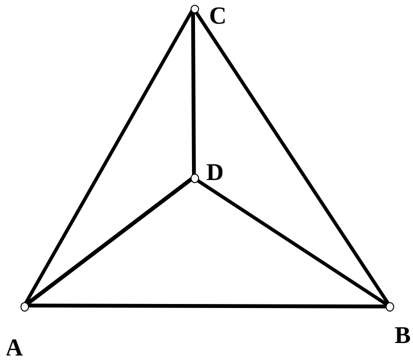


(練習4) 海岸上有A，B兩座燈塔，B在A之正北 2 公里處，一船見A在北 60° 西，B在北 45° 西，若此船依北 30° 東方向行 20 分鐘後，見B在正西，求船速。Ans：6($\sqrt{3}$＋1)公里／小時

[例題3] 自塔之東一點A，測得塔頂之仰角爲 45°；在塔之南 60°東一點B，測得塔頂之仰角爲 30°。設A、B兩點相距 1000 公尺，則塔高爲_________公尺。
Ans：1000 公尺

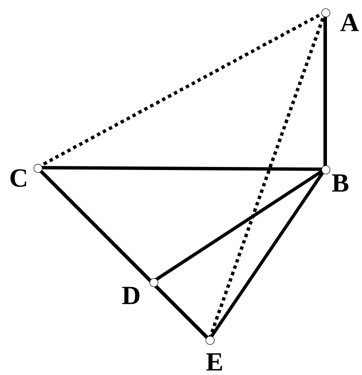


[例題4] 從相距 100 公尺的A、B兩點，測量氣球C之高度，設氣球正下方為D點，在A點測得氣球仰角為 30°，$\angle BAD=75^{\circ}$，在B點測得$\angle ABD=60^{\circ}$，試求氣球的高度為__________公尺。　Ans：$50\sqrt{2}$



[例題5] 設一颱風中心為 O，下午 3 時被測出在 A 地南 60°西，距 A 地 100 公里的海上，正朝東以每小時 $\dfrac{50}{\sqrt{3}}$ 公里速度侵襲，且其暴風半徑為 $\dfrac{100}{\sqrt{3}}$ 公里。假定這颱風半徑及行進方向與速度均不變，試預測何時 A 地會進入暴風圈，何時可望脫離？Ans：下午 5 時進入暴風圈，下午 7 時脫離

[例題6] 一直線上三點C、D、E測得山頂之仰角分別為 30°、45°、60°(但C、D、E三點與山頂之垂足不共線)，若$\overline{CD}$=600 公尺，$\overline{DE}$=400 公尺，則山高為多少公尺？
Ans：$200\sqrt{15}$

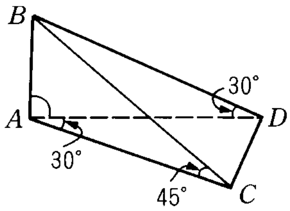


(練習5) 一塔高 25 公尺，某人由塔頂A測得海面上二點B,C俯角分別為 30°及θ ，若$\sin\theta=\frac{5}{6}$，且$\angle BAC=120^\circ$，則B,C二點之距離為______公尺。

(練習6) 某人在燈塔$\overline{AB}$的頂端A測得一船在正西方C點，俯角為 45°，5 分鐘後再測得該船在西 30°南的D點，其俯角為 60°，已知$\overline{AB}=200$公尺，求船的時速。Ans：$800\sqrt{3}$公尺／小時

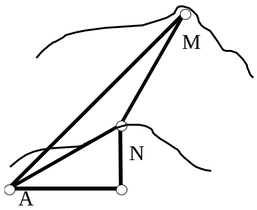
(練習7) 從一直線上之三點A,B,C測得一山之仰角各為 30°，45°，60°，已知A,B,C與山腳不共線，AB =300 公尺，BC =200 公尺，求山高。Ans：$100\sqrt{15}$公尺

(練習8) 一人立於山頂俯視地上一石得其俯角為 45°，若向左轉 30°，再俯視地面一石得其俯角為 30°，令兩石之距離為 d，則山高為



(A) d (B)$\frac{d}{2}$(C)$\frac{d}{3}$(D) 2d(E) 3d Ans：(A)

(練習9) 設有甲、乙兩山，一人從平地A點爬上乙山，想藉此求得甲山高度，如圖所示：設M,N分別為甲、乙兩山的山頂，此人從A沿直線斜坡$\overline{AN}$爬上乙山，$\overline{AN}=800$公尺，若$\angle MAN=15^\circ$，$\overline{AN}$的傾斜角為 30°，此人爬到N後，又測得對M之仰角為 60°，$\angle ANM=120^\circ$，試求甲山的山高。 Ans：$200(5-\sqrt{3})$公尺

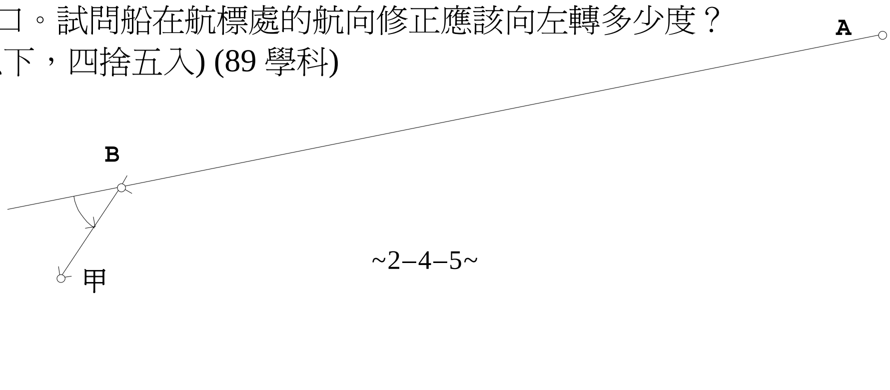


綜合練習

(1) 氣象局測出在 20 小時期間，颱風中心的位置由恆春東南方 400 公里直線移動到恆春南 15°西的 200 公里處，試求颱風移動的平均速度。(整數以下，四捨五入) (89 學科)

(2) 在坐標平面的 x 軸上有 A(2,0),B(−4,0)兩觀測站，同時觀察在 x 軸上方的一目標 C 點，測得∠BAC 及∠ABC 之值後，通知在 D($\frac{5}{2}$,−8)的砲台此兩個角的正切值分別為$\frac{8}{9}$及$\frac{8}{3}$。那麼砲台 D 至目標 C 的距離為________。 (90 學科)

(3) 如下圖所示，有一船位於甲港口的東方 27 公里北方 8 公里 A 處，直朝位於港口的東方 2 公里北方 3 公里 B 處的航標駛去，到達航標後即修正航向以便直線駛入港口。試問船在航標處的航向修正應該向左轉多少度？
(整數以下，四捨五入) (89 學科)

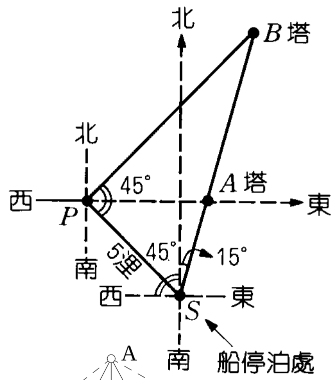


(4) 小山頂有一砲台，台頂上有高為 60 尺之瞭望塔，今在平地上一點，側得山頂、台頂、塔頂之仰角依次為 45°，60°，75°，

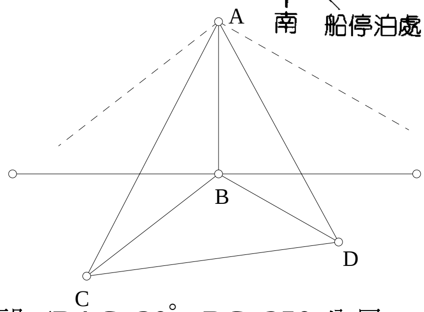
則山高為____尺，砲台高為______尺。 $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(5) A,B,C 三地兩兩相距 14 公里。甲從 A 地出發走向 B 地，在同一時間乙從 B 地出發走向 C 地，已知甲速為乙速的 2 倍，試求甲、乙兩人間的最短距離。

(6) 淡水河岸A，B兩點距離為 400 公尺，$\overline{CD}$ 為新光三越大樓，D為樓頂，C為基底。若$\angle BAC=105^\circ$，由A測得D的仰角為 14°，又$\angle ABC=45^\circ$，求$\overline{CD}$高度。(但$\sin 14^\circ=\dfrac{1}{8}$，$\cos 14^\circ=\dfrac{24}{25}$，$\tan 14^\circ=\dfrac{1}{4}$)



(7) 如圖(1)，自停泊中一船測兩燈塔均在北 15°東之方向，此船向北西方向前進 5 浬後再看燈塔，則一在正東，另一在北東，則兩塔距離為(A) $15-5\sqrt{3}$ (B) $15-6\sqrt{3}$ (C) $15-4\sqrt{3}$ (D) $15-2\sqrt{3}$ (E) $15-\sqrt{3}$ 浬



(8) 某人在岸邊小土墩上A點看一漁船在海岸附近慢行，已知土墩高出水面 20 公尺，當他第一眼看到漁船在C點時，俯角 30°，過 5 分鐘後，船行至D點，再測得俯角為 45°，且$\angle DAC=45^\circ$，則船速為何？

(9) 從平地上三點A,B,C測得某山頂之仰角均為 15°，設$\angle BAC=30^\circ$，BC=250 公尺，求山高。(註：$\cot 15^\circ=2+\sqrt{3}$)

(10) 自地面上共線的相異三點A，B，C測得一山頂的仰角分別為 30°，45°，60°。若點B介A，C之間且$\overline{AB}=200$ 公尺，$\overline{BC}=100$ 公尺，並且山腳與三點A，B，C不共線，試求山高。

(11) 某甲觀測一飛行中之熱氣球，發現其方向一直維持在正前方，而仰角則以等速遞減。已知此氣球的高度維持不變，則氣球正以
(A)等速飛行 (B)加速向某甲飛來 (C)減速向某甲飛來 (D)加速離某甲飛去 (E)減速離某甲飛去。

(12) 一直線上三點A、B、C，測一山之仰角各為 30°、45°、60°

(但A、B、C三點與山頂之垂足不共線)，若$\overline{AB}=\overline{BC}=800$ 公尺，求山高。

(13) 某人測得一山峰之仰角為 θ，當他向山峰前進距離 a 後，再測得山峰之仰角增大為 ϕ，則山峰的高度為 $\dfrac{a\sin\phi\sin\theta}{\sin(\phi-\theta)}$，證明之。

綜合練習解答

(1) 17 公里/時

(2) 13

(3) 45 度

(4) 30，$30(\sqrt{3}-1)$

(5) $\sqrt{21}$

(6) $100\sqrt{2}$

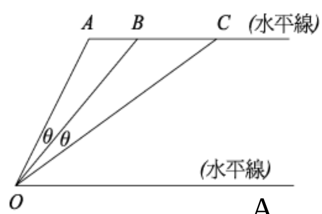
(7) (A)

(8) $4\sqrt{2}$ 公尺/分

(9) $250(2-\sqrt{3})$公尺 (Hint：A,B,C 三點共圓 Why？)

(10) 300 公尺

(11) (D)(詳解)： 如上圖，令熱氣球由 A 沿水平線飛至 B 與由 B 飛至 C 所需時間均為 t 秒，又因為仰角以等速遞減故 $\angle AOB=\angle BOC=\theta$ 故由幾何性質得知：$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$ 因為 $\overline{OC}>\overline{OA}$，所以 $\overline{BC}>\overline{AB}$。再令 V_1 及 V_2 分別表熱氣球由 A 至 B 及由 B 至 C 的速度，則 $V_1=\dfrac{\overline{AB}}{t}$，$V_2=\dfrac{\overline{BC}}{t}$ 因為 $\overline{BC}>\overline{AB}$，顯然可得 $V_2>V_1$ 故熱氣球加速離某甲飛去，故應選(D)



(12) $400\sqrt{6}$

(13) 如右下圖，$\angle CAB=\varphi-\theta$，由正弦定理

可得 $\overline{AC}=\sin\theta\cdot\dfrac{a}{\sin(\varphi-\theta)}$，而高 $h=\overline{AC}\cdot\sin\varphi$

所以高 $=\dfrac{a\sin\phi\sin\theta}{\sin(\phi-\theta)}$。