第一章極限的概念

§1–1 數列的極限

(甲)極限的概念

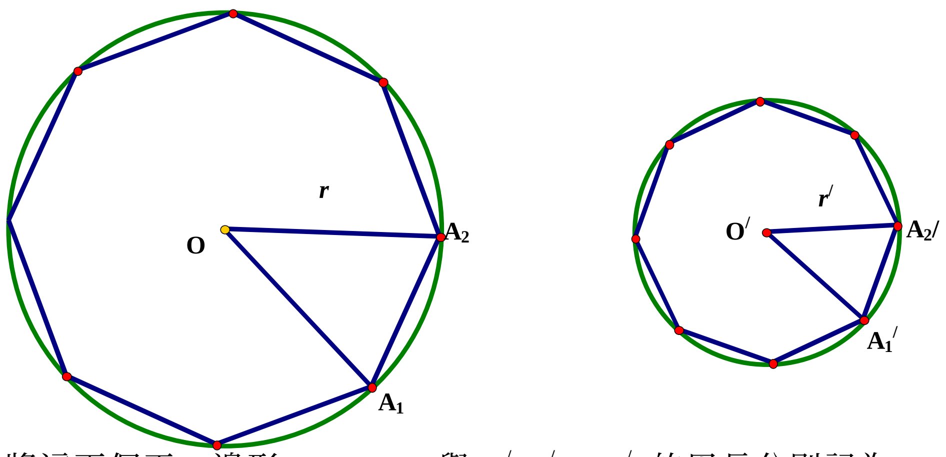
人類自古即有極限的概念，並且善用這樣的想法獲得許多豐碩的成果，這些成果都是人類文明的珍貴資產。底下列舉幾個例子來說明極限的想法：

(1)**圓周長與半徑的比為一定值：**

西元前四世紀，古希臘數學家歐多克索斯(Eudoxus of Cnidus)便利用極限的概念導出$\dfrac{\text{圓的周長}}{\text{半徑}}=$ 定值。

歐多克索斯的想法：

設 r,r'分別是圓 O、O'之半徑，在這兩個圓內各放一個內接正 n 邊形



將這兩個正 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 與 $A'_1A'_2\ldots A'_n$ 的周長分別記為 C_n、C_n'

因為ΔQA_1A_2與$\Delta O'A_1'A_2'$相似，所以$\dfrac{A_1A_2}{r}=\dfrac{A_1'A_2'}{r'}$

$\Rightarrow\dfrac{C_n}{r}=\dfrac{n\cdot\overline{A_1A_2}}{r}=\dfrac{n\cdot\overline{A_1'A_2'}}{r'}=\dfrac{C_n'}{r'}\Rightarrow\dfrac{C_n}{r}=\dfrac{C_n'}{r'}$，對於所有內接於圓的正 n 邊形均成立。

當「邊數 n」逐漸增加，趨近於無窮大時，正 n 邊形的周長就逐漸趨近於「圓的周長」。

$$\begin{array}{ccc}\dfrac{C_n}{r} & \longrightarrow & \dfrac{\text{圓O的周長}}{r}\\ \| & & \|\\ \dfrac{C_n'}{r'} & \longrightarrow & \dfrac{\text{圓O}'\text{的周長}}{r'}\end{array}$$

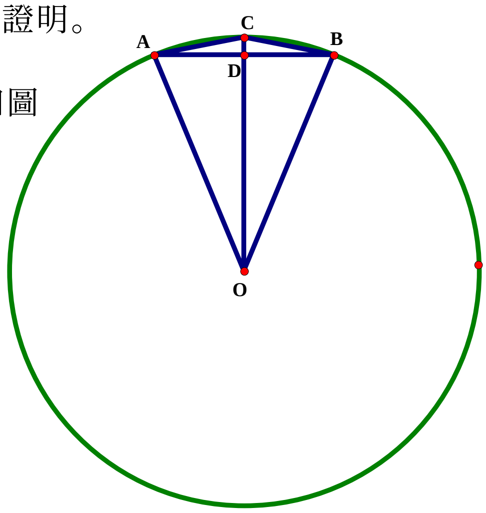
因此$\dfrac{\text{圓O的周長}}{2r}=\dfrac{\text{圓O}'\text{的周長}}{2r'}$ =定值(與圓的大小無關)

這個定值記作π，就是**圓周長與直徑的比值**，稱為**圓周率**。

(2)**圓面積等於半周長與半徑的乘積**

「九章算經」中第一章方田之中有計算圓面積的方法，術曰：「半周半徑相乘

得積步」(積步就是面積的意思)，換成現在的說法就是圓面積等於半周長與半徑的乘積。一開始「九章算經」並沒有說明理由，直到三國時代(西元 263 年)中國數學家劉徽給「九章算經」作注時，提出了他的證明。



劉徽的想法：

設圓內接正 n 邊形邊長為 a_n，周長 l_n，面積為 S_n，如圖

令$\overline{AB}=a_n$，$\overline{BC}=a_{2n}$，則

$S_{2n}=(2n)\cdot(\Delta OBC$ 的面積)

$=(2n)\cdot(\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{OC})$

$=(2n)\cdot(\frac{1}{4}\overline{AB}\cdot\ \overline{OC})$

$=(2n)\cdot(\frac{1}{4}a_n\cdot r)$

$=\frac{1}{2}(n\cdot a_n)\cdot r=\frac{1}{2}l_n\cdot r$

$\Rightarrow S_{2n}=\frac{1}{2}l_n\cdot r$

劉徽注曰：”割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓合體，而無所失矣”，他的看法是每次將內接正多邊形的邊數增加，邊數越多，正多邊形與圓的面積的差就越少，最後與圓重合成一體，而就沒有誤差了。

基本上，從現在數學的眼光來看，劉徽的這段話含有

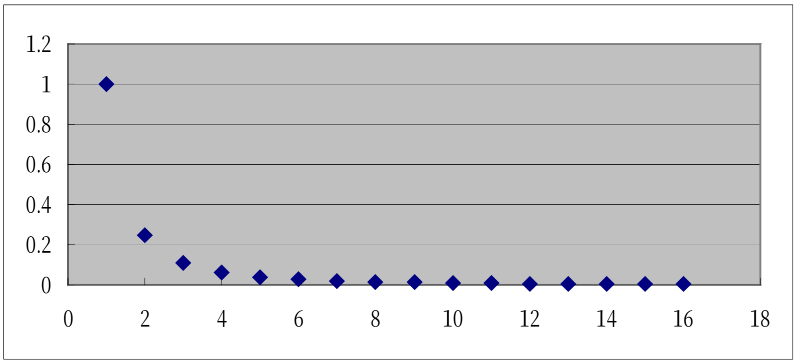
重要的極限思想：$\lim\limits_{n\to\infty} l_n=$圓周長 l，$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=$圓面積 S，再根據 $S_{2n}=\frac{1}{2}l_n\cdot r$，就可得「九章算經」中圓面積等於半周長與半徑的乘積($S=\frac{1}{2}l\cdot r$)的法則了。

(3)數列的極限：

(a)直觀的看法：

例如：考慮數列 $a_n=\frac{1}{n^2}$，根據之第一冊所學的極限概念，我們可以觀察出隨著 n 的增加，$\frac{1}{n^2}$與 0 的距離會越來越小，所以可以得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ 的結果。

n	**$\frac{1}{n^2}$**
1	**1**
2	**0.25**
3	**0.111111**
4	**0.0625**
5	**0.04**
6	**0.027778**
7	**0.020408**
8	**0.015625**
9	**0.012346**
10	**0.01**
11	**0.008264**
12	**0.006944**



直觀判定數列的收斂與發散：

(1°)收斂的幾個型態：將 a_n 逐項畫在數線上，觀察數線上 a_n 的行為：

①**單一方向靠近一個定實數：**

例如：$a_n=1+\frac{1}{n}$ ，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$，$b_n=3-(\frac{1}{2})^n$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=3$。

②**左右振動，並且逐漸靠近一個定實數：**

例如：$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ ，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$b_n=(\frac{-1}{3})^n$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$

③**最後在某一點跳動：**

例如：$a_n=5$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$

(2°)發散的幾個型態：

①**越來越趨向∞或−∞**

例如：$a_n=n^2$，$b_n=-3^n$

②**左右振動，但越來越分開**

例如：$a_n=(-3)^n$

③**在二點或二點以上振動**

例如：$a_n=2+(-1)^n$ ，$b_n=\begin{cases} 0 \ , \ n=3k \\ 1 \ , \ n=3k+1 \\ 2 \ , \ n=3k+2 \end{cases}$

(b)比較嚴謹的說明數列的極限：

更近一步來說，我們要如何來描述「**隨著 n 的增加，$\frac{1}{n^2}$與 0 的距離會越來越小**」

19 世紀的數學家 Cauchy 是這樣描述的：

「**考慮$\frac{1}{n^2}$與 0 的誤差=$|\frac{1}{n^2}-0|=\frac{1}{n^2}$，**

若要求誤差小於ε，那麼 n 要取得多大才辦得到呢？」

$\varepsilon=\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{1}{n^2}<\frac{1}{10}\Rightarrow n\geq4$ 即可。

$\varepsilon=\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{1}{n^2}<\frac{1}{100}\Rightarrow n\geq11$ 即可。

$\varepsilon=\frac{1}{1000}\Rightarrow\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1000}\Rightarrow n\geq32$ 即可。

…

$\varepsilon=\frac{1}{10^k}\Rightarrow\frac{1}{n^2}<\frac{1}{10^k}\Rightarrow n\geq[\sqrt{10^k}]+1$ 即可。(對於任何的正整數 k)

從上面的討論可以得知，無論我們要使「$\frac{1}{n^2}$與 0 的誤差=$|\frac{1}{n^2}-0|=\frac{1}{n^2}$」如何的小，只要把 n 的值取到足夠大就可以辦到，因此 Cauchy 就利用這樣的說法來描述「**隨著 n 的增加，$\frac{1}{n^2}$與 0 的距離會越來越小**」這種直觀的感覺。

(c)數列的極限：

「**無窮數列{a_n}收斂到α**」

不論我們要使a_n與α接近到何種程度，即不論我們要使$|a_n-a|$的值如何的小，只要把n的值取到足夠大，必可辦到，記作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$。
若一個無窮數列不收斂，我們稱該無窮數列**{a_n}發散**。

[例題1] 設$a_n=1+\dfrac{1}{2n}$，計算a_n與1的誤差$\varepsilon=|a_n-1|=\dfrac{1}{2n}$，

(1)請問n要取多大，才會使得誤差ε小於$\dfrac{1}{1000}$？

(2)請問n要取多大，才會使得誤差ε小於$\dfrac{1}{10^k}$？(k為正整數)

[例題2] (1)$a>1$ 證明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。(2)$0<a<1$ 證明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

(練習1) 考慮單位圓的內接正n邊形$A_1A_2\ldots A_n$其邊長為a_n，周長l_n分別為

$a_n=2\sin\dfrac{\pi}{n}$，$l_n=n\cdot a_n=2n\sin\dfrac{\pi}{n}$，請問$\lim\limits_{n\to\infty}2n\sin\dfrac{\pi}{n}=$？ Ans：2π，

(練習2) (1)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=$？ (2)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{100}}=$？

(乙)極限的性質

(1)極限的四則運算：

給定兩個收斂的數列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$，經四則運算之後，產生下列新的數列：
$\{a_n+b_n\}$、$\{a_n-b_n\}$、$\{a_n\cdot b_n\}$、$\{\frac{a_n}{b_n}\}(b_n\neq 0)$都會收斂。唯一要注意的是，
商式$\frac{a_n}{b_n}$中必須附加$\lim\limits_{n\to\infty} b_n\neq 0$的條件，才能使得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$收斂。

若設$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均為收斂的數列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，

則(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$　　(b) $\lim\limits_{n\to\infty}c\cdot a_n=c\cdot a$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$　　(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b},(\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq 0)$

[說明]：

(c)$|a_nb_n-ab|=|b_n(a_n-a)+a(b_n-b)|\leq|b_n||a_n-a|+|a||b_n-b|$
當n夠大時，$|b_n|\leq M$，$|a_n-a|$、$|b_n-b|$會夠小，
因此$|b_n||a_n-a|+|a||b_n-b|\leq M|a_n-a|+|a||b_n-b|$也會夠小。
所以無論$|a_nb_n-ab|$要多小，只要當n夠大時就可辦到，故$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$。

(d)$|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}|=|\frac{a_nb-ab_n}{b_nb}|$

$=|\frac{b(a_n-a)+a(b-b_n)}{b_nb}|$

$\leq|\frac{1}{b_nb}|(|b||a_n-a|+|a||b_n-b|)$

$\because\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq 0$，$\therefore$當$n$夠大時，$|\frac{1}{b_n}|\leq M$，

$\because\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，$\therefore$當$n$夠大時，$|a_n-a|$、$|b_n-b|$會夠小，

$\Rightarrow|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}|\leq|\frac{1}{b_nb}|(|b||a_n-a|+|a||b_n-b|)\leq M|\frac{1}{b}|(|b||a_n-a|+|a||b_n-b|)$

故當n夠大時，$M|\frac{1}{b}|(|b||a_n-a|+|a||b_n-b|)$會夠小，

所以無論$|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}|$要多小，只要當$n$夠大時就可辦到，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$。

[例題3] 設$\{a_n\}$為一數列，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4a_n-2}{3a_n+1}=\frac{1}{2}$，則試證明$\{a_n\}$為一收斂數列，並求其極限值。Ans：1

(練習3) 已知$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3n-1}{4n-2}-a_n)=4$，則$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$？　Ans：$\frac{-13}{4}$

(2)一些特殊型式的極限：

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$的求法：

(a)若 $\deg f(n)<\deg g(n)$，則$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$。

(b)若 $\deg f(n)=\deg g(n)$,則$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{f(n)\text{的最高次項係數}}{g(n)\text{的最高次項係數}}$。

(c)若 $\deg f(n)>\deg g(n)$，則$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$發散。

[例題4] (1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+4n-1}{n^3+1}=$？(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+1}{2n^2}=$？(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^5-n+5}{n^4}=$？

Ans：(1)0 (2)$\frac{3}{2}$ (3)發散

[例題5] (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}=$？　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots n(n+1)}=$？ Ans：(1)0 (2)1

[例題6] (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=$？ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n+1})=$？

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=$？ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}-n)=$？ Ans：(1)0 (2)0 (3)2 (4)1

(練習4) 試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2-5n+1}{3n^2-6}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{m}{m+1})^n$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n+1}\ )^m$Ans：(1)$\dfrac{8}{3}$ (2)0 (3)1

(練習5) (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3n+1}}=$？(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n+3}}=$？(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{3n+1}}=$？

Ans：(1)0 (2)$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ (3)發散

(3)夾擠原理：

設$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$為數列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$，

若從某一項起，$a_n\le b_n\le c_n$都成立，則$\{b_n\}$也是收斂數列，且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$。

[說明]：

$\because$從某一項起，$a_n\le b_n\le c_n$，$\therefore$從某一項起$|b_n-\alpha|\le|a_n-\alpha|+|c_n-\alpha|$

又$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$，所以無論$|a_n-\alpha|$、$|c_n-\alpha|$要多小，只要 n 夠大就辦得到，

所以無論$|b_n-\alpha|$要多小，只要 n 夠大就可以辦到，故$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$。

[例題7] 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=$？ Ans：1

[例題8] 設數列$\{a_n\}$的每一項 $a_n\geq0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a(a\geq0)$，

證明：(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$。(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$。

[例題9] 請利用夾擊原理求出$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$的值。 Ans：0

(練習6) 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

(提示：令 $x_n=\sqrt[n]{n}-1>0\Rightarrow$根據二項式定理 $1=(x_n+1)^n\geq n\cdot x_n\Rightarrow 0<x_n\leq\frac{1}{n}$)

(練習7) 請利用夾擊原理求出 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n})=$？Ans：0

[提示：$\frac{1}{n^2+n}\leq\frac{1}{n^2+k}\leq\frac{1}{n^2+1}$]

(練習8) 請利用夾擊原理求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n}{n\,!}=$？　Ans：0

[提示：$\frac{10^n}{n\,!}=\frac{10}{1}\cdot\frac{10}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdots\frac{10}{10}\cdot\frac{10}{11}\cdots\frac{10}{n}\leq(\frac{10}{1}\cdot\frac{10}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdots\frac{10}{10})(\frac{10}{11})^{n-10}$]

(4)實數完備性：

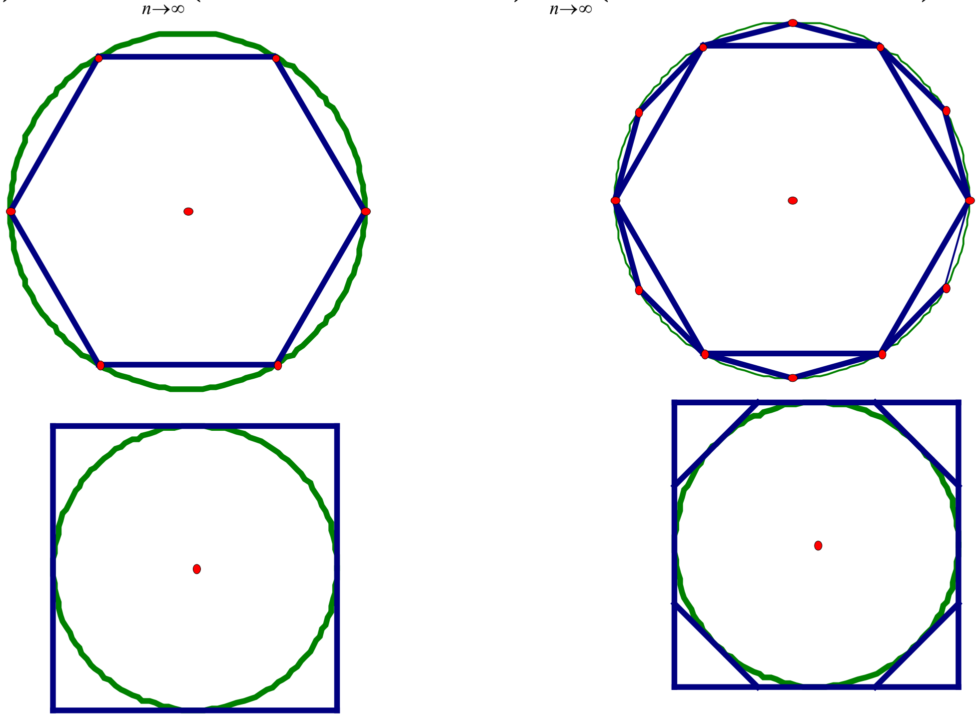
若數列$\{a_n\}$中有 $a_n\leq a_{n+1}$ 的性質，則稱數列$\{a_n\}$為一個遞增數列。
若數列$\{a_n\}$中有 $a_n\geq a_{n+1}$ 的性質，則稱數列$\{a_n\}$為一個遞減數列。
若數列$\{a_n\}$中的每一項 $a_n\leq$M，則稱 M 為數列$\{a_n\}$的上界。
若數列$\{a_n\}$中的每一項 $a_n\geq m$，則稱 m 為數列$\{a_n\}$的下界。

實數完備性：遞增(減)有上(下)界的數列必收斂。

(a)π的定義，以圓面積的求法為例：

(*)圓面積$=\lim\limits_{n\to\infty}$(圓內接正 n 邊形面積)$=\lim\limits_{n\to\infty}$(圓外切正 n 邊形面積)

(**)圓周長$=\lim\limits_{n\to\infty}$(圓內接正 n 邊形周長)$=\lim\limits_{n\to\infty}$(圓外切正 n 邊形周長)



利用(*)$\Rightarrow$
(a)計算π的近似值
(b)證明圓面積=πr^2， r為圓之半徑。
(c)證明半徑為 r 的圓，周長為 $2\pi r$。
[說明]
設 A_n 為圓內接正 n 邊形的面積，顯然 $A_n \le A_{n+1}$，且 $A_n \le$圓面積
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$=圓面積
另外 $A_n=\frac{1}{2}\times$(中心到邊的距離 l_n)$\times$周長，且圓內接正 n 邊形的周長與 l_n 比為定值(只要這 n 固定，這個比例就確定了)。
透過極限的過程 $\Rightarrow$圓面積=$\frac{1}{2}\times$半徑$\times$圓周長，且圓的周長與直徑比為定值(定義為π)。$\Rightarrow$圓面積=πr^2，圓周長=$2\pi r$。
歷史上阿基米得、劉徽分別使用外切圓、內接圓的方法處理圓周長、圓面積的問題，進一步求π的近似值。(阿基米得以$\frac{22}{7}$為π的近似值，而劉徽以 3.1416 為π的近似值)

(b)e 的定義，以複利的計算為例：(補充)
設年利率為 r，$\frac{1}{n}$年為一期，一年有 n 期，本金為 A，複利計算則一年後的本利和為 $A(1+\frac{r}{n})^n$，當期數 n 增加時，本利和 $A(1+\frac{r}{n})^n$ 會不會無限大的增加，或是會接近一個值呢？
當然問題的關鍵在於 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 是否存在呢？
設 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$，我們可以證明$\{a_n\}$遞增有上界！
[遞增]：因為 $\dfrac{\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}+\ldots+\frac{n+1}{n}+1}{n+1} \ge \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}\cdot 1}$ 所以 $a_{n+1} \ge a_n$。
[有上界]：
$a_n=(1+\frac{1}{n})^n$
$$=C_0^n\cdot 1^n+C_1^n 1^{n-1}\cdot(\frac{1}{n})+\ldots+C_k^n 1^{n-k}(\frac{1}{n})^k+\ldots+C_n^n(\frac{1}{n})^n$$
考 慮 $C_k^n(\frac{1}{n})^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{1}{n})^k=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}(\frac{1}{n})^k=\frac{1}{k!}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\le\frac{1}{k!}$
$\Rightarrow a_n \le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+2(1-\frac{1}{2^n})<3$ (因為 $n!\ge 2^{n-1}$)
根據實數的完備性，可證明$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在，定義 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$。
e 的近似值為 2.71828….。

因為 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$。

[例題10] 設 $a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$

(1)試證明：數列$\{a_n\}$是遞增數列。

(2)試證明：數列$\{a_n\}$有上界。

(3)請說明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在。

[例題11] 一數列$\{a_n\}$，已知 $a_1=4$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{9}{a_n})$，$\forall n\in N$,

(1)證明：$a_n>3$。(2)證明：$\{a_n\}$為遞減數列。 (3)求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$？

Ans：(3)3

(練習9) 設 $a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$

(1)請證明$\{a_n\}$為遞增數列。

(2)試證明：$1\le a_n\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

(3)請說明數列$\{a_n\}$極限存在，求極限值。

Ans：(3)$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(練習10) 已知$a_1=\sqrt{2}, a_n=\sqrt{2a_{n-1}}$， $n=2,3,4,\ldots$， 則$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$？

求數列極限的原則：①上下同除②有理化③夾擠定理④完備性公設

數列極限的題型：①分式型②根式型③等比型

型一：$\dfrac{\infty}{\infty}$：分子、分母同時除以$\boxed{\text{最大項}}$。

型二：$\infty-\infty$：先化成收斂型$\begin{cases}\text{分式型}\Rightarrow\text{通分}\\ \text{根式型}\Rightarrow\text{有理化}\end{cases}$

型三：等比(指數)型：$\lim\limits_{n\to\infty}ar^n=\begin{cases}0 & ,\text{當}|r|<1\\ a & ,\text{當}r=1\\ \text{發散},\text{當}r\le -1\text{或}r>1\end{cases}$

(丙)無窮級數的求和

設$\langle a_n\rangle$為一無窮數列，考慮$\langle S_n\rangle_{n=1}^{\infty}$這個數列的極限，其中 $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$，來決定$\langle a_n\rangle$所定義之無窮級數的和。

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\alpha$，則$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$，此時$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$不僅代表級數本身，意代表它的和。

用符號上的關係來看：$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$

若$\langle S_n\rangle$發散，則$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$發散，即不能求和。此時$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$不代表一個數，僅代表該級數本身。

(2)如何求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$呢？首先將 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$用 n 來表示，再計算$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$。

若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\alpha$，則$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$；若$\langle S_n\rangle$發散，則$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$發散。

[例題12] 試求無窮級數$\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{k(k+1)}+\ldots$之和。

[例題13] 試問無窮級數$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots.+\frac{1}{n^2}+\ldots$是否收斂？

[例題14] 試問無窮級數$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{n}+\ldots$是否收斂？

[例題15] 請求出$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}=$？ Ans：$\frac{3}{4}$

(練習11) (1)若$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$收斂，試證明$\lim_{k\to\infty}a_k=0$

(2)若$\lim_{k\to\infty}a_k=0$，則$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$收斂是否成立？若不成立，請舉反例！

(練習12) 試求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{3^n}=$？ Ans：$\frac{1}{2}$

(練習13) (1)試求級數$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}$的和。

(2)試求無窮級數$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots$之和。

Ans：(1)$\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$ (2)$\frac{3}{4}$

(練習14) 請計算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}{n}\right)$=？　Ans：0

$\boxed{\text{綜合練習}}$

(1) 下列關於無窮數列的敘述，何者為真？

(A)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^2=\alpha^2$　(B)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^2=0$

(C)$\{a_n\}$、$\{b_n\}$皆收斂 $\Leftrightarrow$ $\{a_n+b_n\}$收斂　(D)$\{a_n\}$、$\{b_n\}$皆收斂 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\cdot b_n\}$收斂

(2) 試在下列的計算式中，指出開始錯誤的地方：

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$ =(A)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\times\ldots\times\frac{2}{n}\times\frac{1}{n}\right)$

=(B)$(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n})(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n})(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-2}{n})\ldots(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n})(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})$

=(C)$1\times1\times1\times\ldots\times0\times0$

=(D)0

(3) 試求下列各題的極限：

(a)$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2n}{n+1}-\frac{n+1}{2n})$ (b)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^{n-1}}{3^{n+1}}$ (c)$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2-1}{n+1}-\frac{n^2+2}{n+2})$　(d)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}-3^n}{2^n+3^{n-1}}$

(4) 設 n 為正整數，坐標平面上有一等腰三角形，它的三個頂點分別是(0,2)、$(\frac{1}{n},0)$、$(-\frac{1}{n},0)$，假設此三角形的外接圓<u>直徑</u>長等於D_n，則$\lim\limits_{n\to\infty}D_n$=_________。

(2002 指定甲)

(5) n 是大於 1 的整數。坐標平面上兩個橢圓區域$\frac{x^2}{n^2}+y^2\le 1$和$x^2+\frac{y^2}{n^2}\le 1$共同的部分以A_n表示。請選出正確的選項。___________

(1) A_n的面積小於 4　(2) A_n的面積大於 π　(3) A_n的周長大於 5

(4)當 n 趨於無窮大時，A_n的面積趨近於 4。　(2003 指定甲)

(6) 將$\tan x = x$的所有正實根由小到大排列，得一無窮數列$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$，則$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)$ = ？（四捨五入到小數第二位）(2004 指定甲)

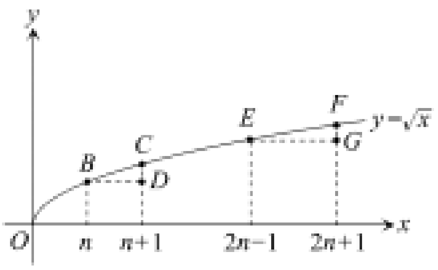
(7) 求下列的極限：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-4^{n+1}}{3^{n+1}-5^{n+1}}=$？ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=$？

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2-2}}{\sqrt[3]{n^3-2n}+\sqrt{n-4}}=$？ (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}=$？

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{\dfrac{n-3}{n+1}}-n)=$？ (f) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2+3n}{n+1}-\dfrac{n^3}{n^2+1})=$？

(8) 在下圖中 $B(n,\ \sqrt{n})$, $C(n+1,\ \sqrt{n+1})$, $E(2n-1,\ \sqrt{2n-1})$, $F(2n+1,\ \sqrt{2n+1})$ 分別是 $y=\sqrt{x}$ 圖形上的四個點；又設點 $D(n+1,\ \sqrt{n})$, $G(2n+1,\ \sqrt{2n-1})$,
則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\triangle BCD\text{的面積}}{\triangle EFG\text{的面積}}=$(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ (D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{16}$



(9) 如下圖△ABC 為直角△，其中 $\overline{AB}=5$， $\overline{AC}=3$，
一質點 P 沿著 $\overrightarrow{CB}$ 作直線運動，令 $\overline{BP}=e$， $\overline{PA}=d$，則 $\lim\limits_{e\to\infty}(d-e)=$ ______。

(10) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{4n+5}=3$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+a_n}{7n-4}=$？

(11) 求下列無窮級數的和：

(a) $5-\dfrac{10}{3}+\dfrac{20}{9}-\dfrac{40}{27}+\ldots+5\cdot(\dfrac{-2}{3})^n+\ldots=$？ (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}=$？

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}=$？ (d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[(0.7)^k+(0.9)^k]=$？

(12) 利用夾擊原理求出 $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n)^2}]=$？

(13) (a)證明：$k\le\sqrt{k(k+1)}\le k+1$。

(b)證明：$\dfrac{n(n+1)}{2}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}\le\dfrac{n(n+3)}{2}$。

(c)求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)})=$？

(14) 試問數列 $\sqrt{3}$ ，$\sqrt{3\sqrt{3}}$ 、$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ 、….是否收斂？若收斂，求其極限值。

(15) 設 $a_n=2\cdot\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdots\cdots\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n-1)}$

(a)請證明數列$\{a_n\}$是遞增數列。

(b)請證明數列$\{a_n\}$有上界。

(c)請說明數列$\{a_n\}$的極限存在。

(16) 試求下列無窮級數的和：

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\ldots+2^n}{3^n}=$？ (b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n}-\frac{k^2}{3n^3})$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2-1}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^k}=$？

(17) 試求 $\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}]=$？

(18) 求 $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3\ldots+n}+\ldots=$？

進階問題

(19) 求下列數列的極限：

(a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[8]{n^4+1}-\sqrt[4]{n^2+1})=$？ (b) $\lim_{n\to\infty}n^3(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-\sqrt{2}n)=$？

(c) $\lim_{n\to\infty}(\frac{4^n+3^n}{8^n+3^n})^{\frac{1}{n}}=$？

(20) 求下列各數列的極限：

(a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+3^n+2^n+1^n}=$？ (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{n!}=$？

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^n}=$？ (d) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{2}{3}n]=$？

(21) 一數列$\{a_n\}$滿足 $a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n=n(n+1)(n+2)$，試求 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{a_n}=$？

(22) 設 a_n 為 15^n 之正因數總和，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{15^n}=$？

(23) 設 a,b 為常數，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{3n-2}=-2$，則 $(a,b)=$？

(24) 設$\{a_n\}$為一數列，如果 c 為某一實數且對於任意正整數而言，$a_n\geq c$ 都成立，則稱 c 為數列$\{a_n\}$的下界。已知數列$\{a_n\}$滿足 $a_1=p>\sqrt{k}$ 且 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{k}{a_n})$，其中 n 為任意正整數，且 k 為正定數。

(a)試證明：數列$\{a_n\}$有下界。

(b)試證明：$a_{n+1}\leq a_n$，n 為任意正整數。

(c)試求 $\lim_{n\to\infty}a_n=$？ (92 下台北區指定考科模擬考 3)

(25) (a)試證$\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}$。(2b)求$\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}=?$

綜合練習解答

(1) (B)

(2) (B)

(3) (a)$\frac{3}{2}$ (b)$\frac{2}{9}$ (c)1 [$\frac{n^2-1}{n+1}-\frac{n^2+2}{n+2}=\frac{n-4}{n+2}$] (d)$-3$

(4) 2

(5) (1)(2)(3)(4)

(6) 3.14

[解法：當n很大時, x_n很靠近$x=(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}$（漸近線）且x_{n+1}很靠近$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$（漸近線）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\{(n\pi+\frac{\pi}{2})-[(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}]\}=\pi\approx 3.14$]

(7) (a) -5 (b) 1 (c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e)-2(f)2

(8) (A)

(9) 4

(提示：$\lim\limits_{e\to\infty}(d-e)=\lim\limits_{e\to\infty}(\sqrt{3^2+(e+4)^2}-e)$，再有理化求極值)

(10) 2

(11) (a)3 (b)$\frac{3}{4}$ (c)$\frac{1}{6}$ (d)$\frac{34}{3}$

(12) 0

(13) (c)$\frac{1}{2}$

(14) 3[提示：$a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$，證明$\{a_n\}$遞增有上界, 再令$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3a_n}$]

(15) [提示：$a_n=2\cdot\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\cdots\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n-1)}=2\cdot\frac{2}{1}(\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3})(\frac{4\cdot 8}{5\cdot 5})\ldots(\frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)(2n-1)})\cdot\frac{2n}{2n-1}<\frac{2n}{2n-1}$]

(16) (a)$\frac{7}{2}$ [提示：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\ldots+2^n}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{3^n}=\frac{7}{2}$]

(b)$\frac{8}{9}$ [提示：$\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{n}-\frac{k^2}{3n^3})=1-\frac{1}{3n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=1-\frac{1}{3n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$](c)$\frac{3}{4}$ [提示：先求

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$](d) $\frac{5}{16}$

[提示：請參考例題 15 的做法，求 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{5^k}=\frac{5}{16}[1-(\frac{1}{5})^n]-\frac{4}{5}(\frac{n}{5^{n+1}})$]

(17) $\frac{1}{2}$[提示：原式可視為求無窮級數$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$的和]

(18) 2

(19) (a)0 (b)$\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (c)$\frac{1}{2}$[提示：(a) $\sqrt[8]{n^4+1}-\sqrt[4]{n^2+1}=\frac{\sqrt[4]{n^4+1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[8]{n^4+1}+\sqrt[4]{n^2+1}}$

(b) $n^3(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-\sqrt{2}n)$

$=n^3\frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+\sqrt{2}n}$

$=n^3\cdot\frac{(\sqrt{n^4+1}-n^2)(\sqrt{n^4+1}+n^2)}{(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+\sqrt{2}n)(\sqrt{n^4+1}+n^2)}$

(c) $(\frac{4^n}{8^n})^{\frac{1}{n}}\leq(\frac{4^n+3^n}{8^n+3^n})^{\frac{1}{n}}\leq(\frac{2\cdot4^n}{8^n})^{\frac{1}{n}}$

(20) (a)4 (b)0 (c)0 (d)$\frac{2}{3}$

[提示：(a)$4^n\leq\sqrt[n]{4^n+3^n+2^n+1^n}\leq4\cdot4^n$ (b)仿照練習 8 的做法

(c)$3^n=(2+1)^n=2^n+C^n_1 2^{n-1}+C^n_2 2^{n-2}+C^n_3 2^{n-3}+\ldots\Rightarrow\frac{n^3}{3^n}\leq\frac{n^3}{C^n_3}$。

(d)設$[\frac{2}{3}n]=k$，$k\leq\frac{2}{3}n<k+1\Rightarrow\frac{3k}{2}\leq n<\frac{3}{2}(k+1)\Rightarrow\frac{2k}{3(k+1)}<\frac{k}{n}<\frac{2}{3}$。]

(21) $\frac{2}{3}$ [提示：$na_n=n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)=3n(n+1)\Rightarrow a_n=3(n+1)$]

(22) $\frac{15}{8}$

(23) $(0,-6)$

(24) (c)$\sqrt{k}$

(1) 1° 當$n=1$時，$a_1=p>\sqrt{k}$成立

2° 設 $n=m$ 時成立，即 $a_m > \sqrt{k}$

則 $a_{m+1} = \frac{1}{2}(a_m + \frac{k}{a_m}) \geq \sqrt{a_m \cdot \frac{k}{a_m}} = \sqrt{k}$ 亦成立

故知數列 $\langle a_n \rangle$ 有下界

(2) $a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}(a_n + \frac{k}{a_n}) = \frac{{a_n}^2 - k}{2a_n} > 0$ （由(1)）

$\Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$

即數列 $\langle a_n \rangle$ 為遞減數列

(3) 因數列 $\langle a_n \rangle$ 為有下界且遞減的數列，由實數完備性知數列 $\langle a_n \rangle$ 會收斂

設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha > 0 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{k}{\alpha}) \Rightarrow \alpha = \sqrt{k}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{k}$

(25) (a) [提示：$(1+\sqrt{\frac{2}{n}})^n = 1 + C^n_1\sqrt{\frac{2}{n}} + C^n_2(\sqrt{\frac{2}{n}})^2 + \ldots > 1 + C^n_2(\sqrt{\frac{2}{n}})^2 = n$]

(b)1(利用夾擠原理)