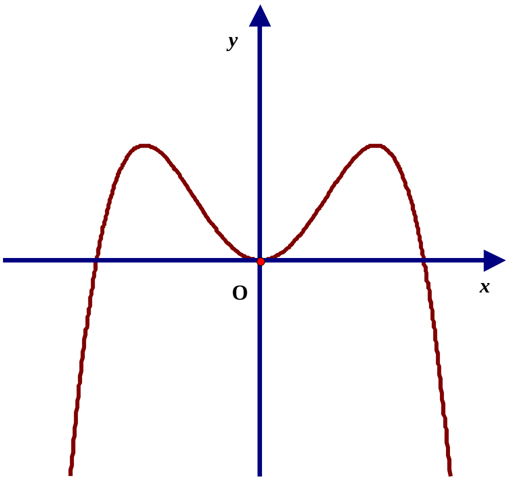
§2–4 多項函數的繪圖



右圖是一個多項式函數的圖形，這個圖形高低起伏並且連續不斷，圖形中有類似波峰或波谷的圖形，而且圖形的開口方向有上有下，因此若是要畫出$y=f(x)$的近似圖形，就要能掌握圖形兩個重要的特徵：**圖形上升下降的變化情形與彎曲方向的變化情形**，2–3 節中我們已經討論了圖形上升下降的變化情形：

(1)設$f(x)$在(a,b)內每一點都可微分

(a)若$f'(x)\geq 0$，$\forall x\in(a,b)$，則$f(x)$在(a,b)上為遞增。

(b)若$f'(x)\leq 0$，$\forall x\in(a,b)$，則$f(x)$在(a,b)上為遞減。

(2)設$f(x)$在(a,b)內每一點都可微分

(a)若$f'(x)>0$，$\forall x\in(a,b)$，則$f(x)$在(a,b)上為嚴格遞增。

(b)若$f'(x)<0$，$\forall x\in(a,b)$，則$f(x)$在(a,b)上為嚴格遞減。

接下來我們要介紹如何掌握圖形變化方向的變化情形。

(甲)多項式函數圖形彎曲的方向

(1)函數的凹向：

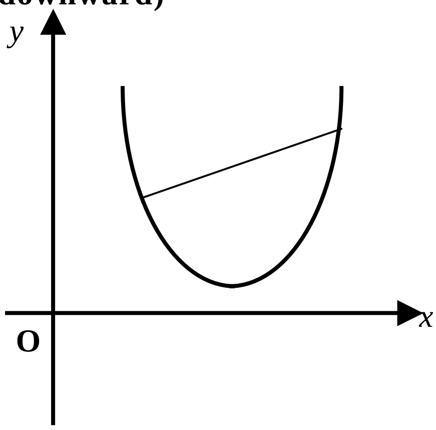
觀察$y=f(x)=x^2$，$y=g(x)=\sqrt{x}$，$x\geq 0$，它們都是遞增的函數，但是這兩個遞增圖形有一些差異。假想這兩個圖形是兩條公路，如果汽車從(0,0)出發，分別沿公路前進，為了保持在公路上前進，沿$y=x^2$路線的汽車要左轉彎，沿$y=\sqrt{x}$路線的汽車要右轉彎。這種「左轉彎、右轉彎」的現象指出了這兩種曲線的一項重要差異。

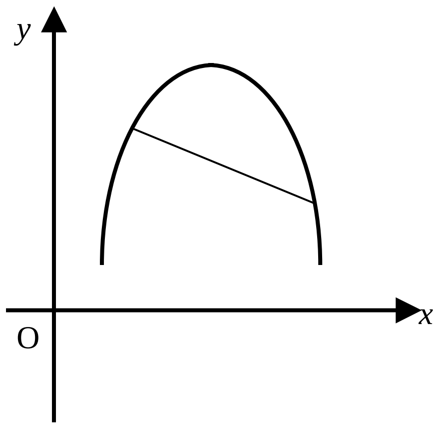
以數學術語來說，$y=x^2$的圖形**凹口向上**，$y=\sqrt{x}$的圖形**凹口向下**。

定義：

(a)設$f(x)$是定義在(a,b)上的函數，令Γ為函數$y=f(x)$的圖形，如果連接Γ上任意兩點的線段位於連接此兩點的上方，稱$y=f(x)$在(a,b)上**凹口向上(concave upward)**。

(b)設$f(x)$是定義在(a,b)上的函數，令Γ為函數$y=f(x)$的圖形，如果連接Γ上任意兩點的線段位於連接此兩點的下方，稱$y=f(x)$在(a,b)上**凹口向下(concave downward)**。

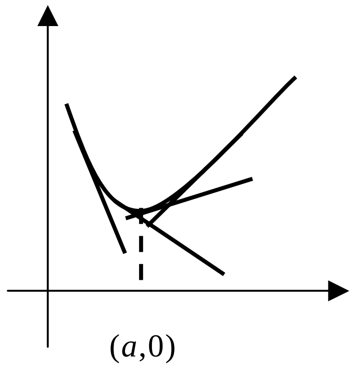




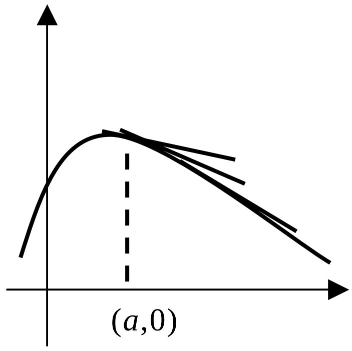
(2)微分與函數的凹向：

函數圖形的凹向代表圖形彎曲的方向，討論這個概念可以藉由觀察函數圖形上每一點切線斜率的變化來達成目標，而我們知道導函數$f'(x)$代表以$(x,f(x))$爲切點的切線斜率，因此討論切線斜率的變化，就相當於討論$f'(x)$的函數值之變化。因此對於二階可微分函數而言，我們利用f''(f的二階導數)來解釋函數的凹向：

$f(x)$在$(a,f(a))$點附近的切線斜率遞增



$f(x)$在$(a,f(a))$點附近的切線斜率遞減

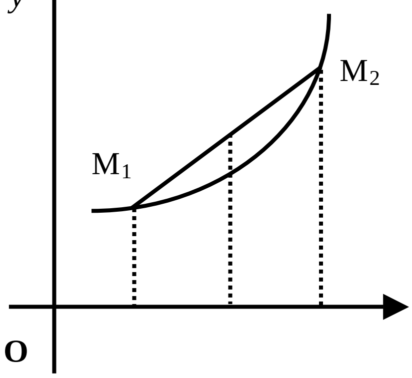


由左上圖，因爲$f(x)$在$(a,f(a))$點附近的切線斜率$f'(x)$遞增，
換句話說，$f'(x)$在$x=a$附近是遞增函數，因此$f''(a)\geq 0$。
由右上圖，因爲$f(x)$在$(a,f(a))$點附近的切線斜率$f'(x)$遞減，
換句話說，$f'(x)$在$x=a$附近是遞減函數，因此$f''(a)\leq 0$。

定理一：(函數凹性的二階函數判別法)
設f：$(a,b)\to \mathbf{R}$爲一個二階可微分的函數。
(1) $f''(x)\leq 0$，$\forall x\in(a,b) \Leftrightarrow f(x)$在$(a,b)$內凹口向下。
(2) $f''(x)\geq 0$，$\forall x\in(a,b) \Leftrightarrow f(x)$在$(a,b)$內凹口向上。

(1)證明：(僅供參考)
先證必要性，即證明$f'(x)$爲遞增函數
$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，設$\mathrm{M}(x_1,f(x_1))$和$(x_2,f(x_2))$的連線斜率爲m，

任取$x\in(x_1,x_2)$，設$\mathrm{P}(x,\tilde{y}(x))$是線段$\mathrm{M_1M_2}$上相對應的點，



因爲$f(x)$凹口向上，所以$\tilde{y}(x)\geq f(x)$。

$\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\dfrac{\tilde{y}(x)-f(x_1)}{x-x_1}=m$，$\Rightarrow f'_{+}(x_1)\leq m$

$\dfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}\geq\dfrac{\tilde{y}(x)-f(x_2)}{x-x_2}=m$，　$\Rightarrow f'_{-}(x_2)\geq m$

因爲$f'(x_1)$與$f'(x_2)$存在
$\Rightarrow f'(x_1)= f'_{+}(x_1)\leq m\leq f'_{-}(x_2)= f'(x_2)$
因此$f'(x)$爲遞增函數 $\Rightarrow f''(x)\leq 0$

再證充分性，
$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，設$\mathrm{M}(x_1,f(x_1))$和$(x_2,f(x_2))$的連線斜率爲m，

任取$x\in(x_1,x_2)$，設$P(x,\tilde{y}(x))$是線段M_1M_2上相對應的點，欲證明 $\tilde{y}(x)\geq f(x)$。
根據Lagrange中間值定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=m$

設$x_1<x\leq\xi$，因爲$f''(x)\geq 0$，所以$f'(x)$爲遞增函數 $\Rightarrow f'(x)\leq f'(\xi)=m=\tilde{y}'(x)$，又因爲$f(x_1)=\tilde{y}(x_1)$

$\Rightarrow(f(x)-\tilde{y}(x))'\leq 0$，且$f(x_1)-\tilde{y}(x_1)=0\Rightarrow f(x)-\tilde{y}(x)\leq 0\Rightarrow f(x)\leq\tilde{y}(x)$。

設$\xi<x<x_2$，同理可證$f(x)\leq\tilde{y}(x)$。
因此$f(x)$在(a,b)內凹口向下。

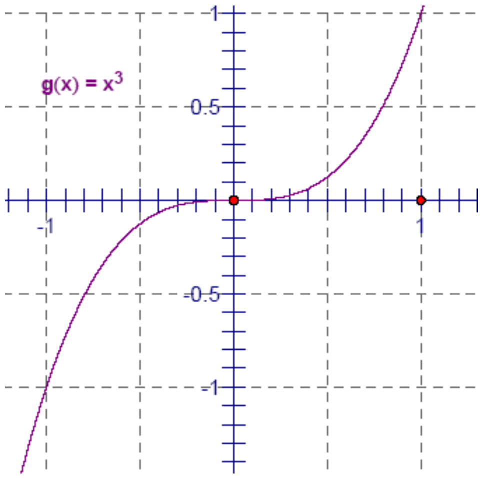
[例題1] 討論$f(x)=x^3-12x+2$凹向的情形。
Ans：$x<0$圖形凹口向下，$x>0$，圖形凹口向上。

(練習1) 討論$f(x)=x^4-2x^2+1$的凹向情形。
Ans：凹向上：$x<\frac{-1}{\sqrt{3}}$或$x>\frac{1}{\sqrt{3}}$；凹向下：$\frac{-1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$

(練習2) 試討論$f(x)=\frac{-x}{x^2+4}$的凹向。
Ans：凹向上：$x<-2\sqrt{3}$或$0<x<2\sqrt{3}$；凹向下：$-2\sqrt{3}<x<0$或$x>2\sqrt{3}$

(練習3) 根據美國當選總統的得票率,預測該總統的政黨在眾議院獲得席次比率的一個數學模型：設當選總統的得票率爲p，則該總統的政黨在眾議院獲得席次比率爲$H(p)=\frac{p^3}{p^3+(1-p)^3}$ $0\leq p\leq 1$[稱爲House函數]，請討論$H(p)$的凸性。
Ans：$(0,\frac{1}{2})$凹口向上，$(\frac{1}{2},1)$凹口向下。

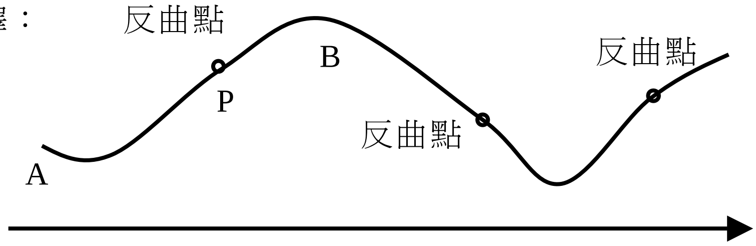
(3)函數的反曲點：
先給一個實例：
考慮$f(x)=x^3$，觀察$x=0$附近凹向的變化情形：
①$x>0$，$f''(x)>0$，因此$f(x)$凹口向上。
②$x<0$，$f''(x)<0$，因此$f(x)$凹口向下。
因此$f(x)$在$(0,0)$處發生凹向的變化，
我們把$(0, f(0))$稱爲$\boxed{\textbf{函數}f(x)\textbf{的反曲點}。}$



(a)反曲點的定義：

若在a點附近，$x<a$的凹向與$x>a$的凹向相反，則稱$(a,f(a))$爲函數$f(x)$的一個反曲點。

幾何解釋：



以開車爲例，當汽車從A沿著$y=f(x)$的圖形向B行駛，由A至P這一段，方向盤應該左轉；由P至B這一段應該右轉。換句話說，反曲點就是方向盤應該改變轉向的點。

(b)如何判別反曲點的位置：

設函數$f(x)$爲一個至少可微分 2 次以上的函數，
若點$(a,f(a))$爲函數$f(x)$的反曲點，則$f''(a)=0$。
[證明]：

說明：

(1°)根據前面的定理，若$f(x)$是二次可微分的函數，若$f''(a)\neq 0$，那麼$(a,f(a))$一定不是反曲點；但是反過來說，若$f''(a)=0$ 時，點$(a,f(a))$不一定就是反曲點。
反例是$f(x)=x^4$，$f''(0)=0$，但(0,0)不是反曲點。

(2°)設$f(x)$是二次可微分的函數，滿足$f''(a)=0$，若$(a,f(a))$附近圖形的凹向相反，那麼$(a,f(a))$就是反曲點。

[例題2] 決定曲線$y=x^4-4x^3+10$ 的凹向，並求其反曲點。
Ans：$(-\infty,0)\cup(2,\infty)$凹口向上，(0,2)凹口向下；(0,10)及(2,−6)爲反曲點。

(4)由一階及二階導函數判別函數的極值：

局部最高點附近⇒凹口向下
局部最低點附近⇒凹口向上

定理二：
設$f(x)$在(a,b)上可微分，設$x_0\in(a,b)$且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)$存在。
(1)若$f''(x_0)<0$，則$f(x)$在$x=x_0$處有相對極大值。
(2)若$f''(x_0)>0$，則$f(x)$在$x=x_0$處有相對極小值。

證明：(僅供參考)
(1)考慮$f''(x_0)<0$ 的情形，因為二階導數是通過一階導數定義的，所以$f''(x_0)$存在，隱含了$f'(x)$在x_0附近是存在的。

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$$

⇒存在$r>0$ 使得當$x\in(x_0-r,x_0+r)$時，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$
⇒$x>x_0$，$f'(x)<0$ 且$x<x_0$，$f'(x)>0$ ⇒$f(x)$在$x=x_0$處有相對極大值。

結論：根據之前的討論我們可以得知
若$f(x)$為多項式函數，則
(1)$f'(a)\neq 0$ ⇒$f(x)$在$x=a$不會產生極值。
(2)滿足$f'(a)$的點$(a,f(a))$會有下列三種情形：
$f''(a)<0$⇒點$(a,f(a))$是極大點 ⇔ $f(x)$在$x=a$產生極大值$f(a)$
$f''(a)>0$⇒點$(a,f(a))$是極小點 ⇔ $f(x)$在$x=a$產生極小值$f(a)$
$f''(a)=0$⇒點$(a,f(a))$可能是反曲點或極大(小)點

[例題3] 求$f(x)=(x+3)^3(x-2)^2$的極大值、極小值。
Ans：極大值$f(0)=108$，極小值$f(2)=0$

(練習5) 決定下列各曲線的彎曲方向，並求其反曲點：
(1)$y=x^5-5x^4$ (2)$y=\dfrac{x}{x^2+1}$
Ans：
(1)$(-\infty,3)$凹口向下；$(3,\infty)$凹口向上；反曲點(3，−162)

注意(0,0)不是反曲點。

(2)$(-\infty，-\sqrt{3})\cup(0,\ \sqrt{3})$凹口向下；$(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3}，\infty)$凹口向上；

反曲點：$(-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{4})$，(0,0)，$(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4})$。

(練習6) 求函數$f(x)=3x^5-5x^3$的極大值、極小值。

Ans：極大值$f(-1)=2$，極小值$f(1)=-2$

(練習7) 求曲線$y=x^4-6x^3+12x^2-8x$上，以反曲點為切點之切線方程式。

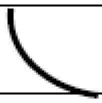
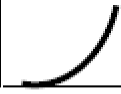
Ans：$2x-y-3=0$，$y=0$

(乙)多項式函數圖形的描繪

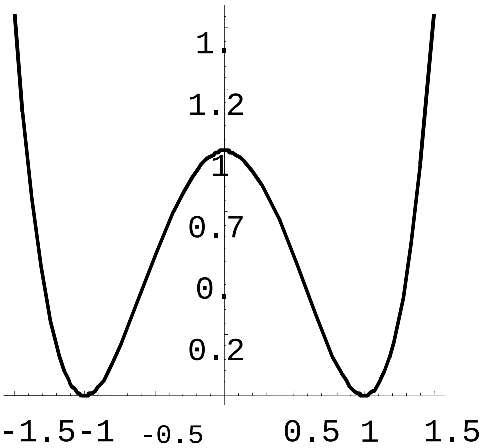
(1)如何繪製多項式函數的圖形

根據前面的討論，我們可以得知多項函數圖形的增減情形與何處會增減，函數圖形凹向的變化與何時凹向會改變，我們將這些資訊結合在一起，就可以繪製多項式函數的近似圖形。

我們結合多項式函數增減情形與凹向，可以得到以下的表格：

f''	+	+	−	−
f'	−	+	+	−
圖形				

[例題4] 試描繪函數$f(x)=x^4-2x^2+1$ 的圖形。



(練習8) 方程式$x^4-2x^2+1=k$有四個相異實數解時，請問k的範圍？

Ans：$-1<k<1$

(練習9) 試作$y=f(x)=x^3-x^2-8x+1$ 的圖形。

(2)三次函數的圖形：

設三次函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$)

$\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$

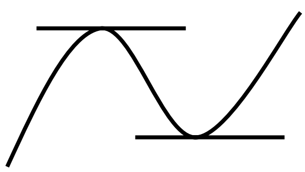
設 $f'(x)=0$ 有兩根α,β ，

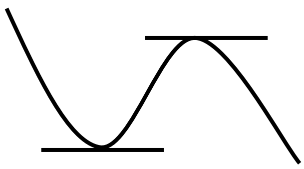
而$f''(\frac{-b}{3a})=0$，當$x>\frac{-b}{3a}$與$x<\frac{-b}{3a}$，$f''(x)$異號，所以$(\frac{-b}{3a}$，$f(\frac{-b}{3a}))$為反曲點。

(a)設α、β為兩相異實數(令$\alpha<\beta$)

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=3a(x-\alpha)(x-\beta)$ ， $f''(x)=3a(2x-\alpha-\beta)$

$a>0$ $a<0$



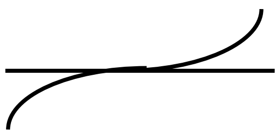


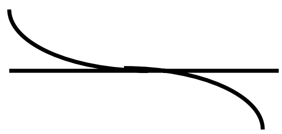
有一個極大，一個極小，一個反曲點

(b)設$\alpha=\beta$為兩相等實根：

$f'(x)=3a(x-\alpha)^2$ ， $f''(x)=6a(x-\alpha)$

$a>0$ $a<0$





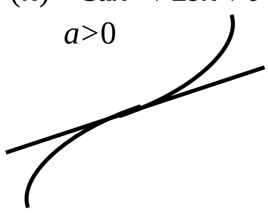
遞增函數，沒有極大極小點，反曲點有一水平切線

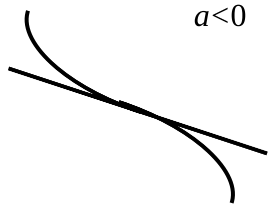
遞減函數，沒有極大極小點，反曲點有一水平切線

(c) α,β為兩虛數

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ ， $f''(x)=6ax+2b$

$a>0$ $a<0$





遞增函數，沒有極大極小點，反曲點沒有水平切線

遞減函數，沒有極大極小點，反曲點沒有水平切線

結論：設$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$)

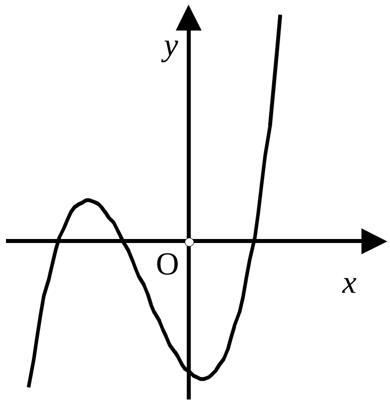
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ ， $f''(x)=6ax+2b$ ， $\Delta=4(b^2-3ac)$

(1)$\Delta\neq 0$：$y=f(x)$的圖形有一個極大點、極小點、反曲點。

(2)$\Delta=0$：$y=f(x)$無極大點、極小點，只有一個反曲點，在反曲點有水平切線。

(3)$\Delta<0$：$y=f(x)$無極大點、極小點，只有一個反曲點，在反曲點有斜的切線。

[例題5] 設$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，如圖，
試判別a,b,c,d之正負。
Ans：$a>0$，$b>0$，$c<0$，$d<0$

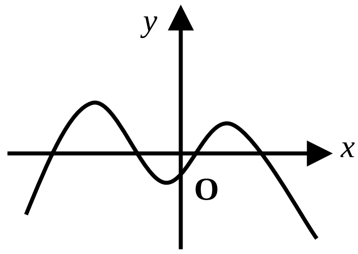


[例題6] 設$f(x)=x^3-3x^2-9x+k$試求滿足下列各條件之k值。
(1)$f(x)=0$ 有相異三實根。(2)$f(x)=0$ 有一實根二虛根。(3) $f(x)=0$ 有二正根一負根。 Ans：(1)$-5<k<27$ (2)$k>27$ 或$k<-5$ (3)$0<k\le 27$

[例題7] 設函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$在 $x=1$ 處有相對極大值 7，而$(-1,-9)$是它的一個反曲點，求 $f(x)=$？ Ans：$-x^3-3x^2+9x+2$

(練習10) $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x+a$ 有二個實根與二虛根，則求 a 的範圍。
Ans： $-8<a<19$或$a<-13$

(練習11) 設$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$之圖形如右，
試判斷a,b,c,d,e的符號。
Ans：$-$，$-$，$+$，$+$，$-$



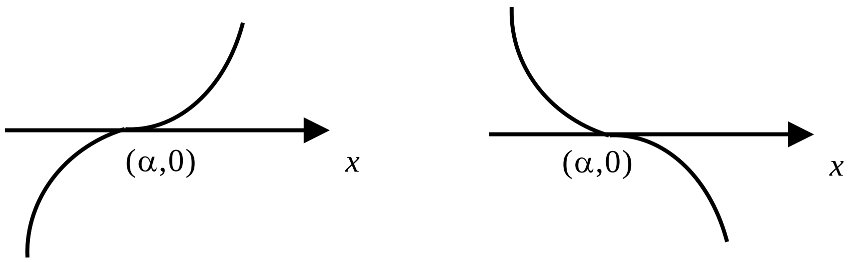
(練習12) 設$f(x)=x^3-3kx^2+k+3$ 求滿足下列條件之k值。
(1)$f(x)=0$ 有三實根。 (2)$f(x)=0$ 有二相異負根一正根。

Ans：(1)$k\le -3$ 或$k\ge 1$ (2)$k< -3$

(3)多項式函數的圖形與 n 次方程式的重根：
若多項式$f(x)=(x-\alpha)^k Q(x)$，其中$Q(\alpha)\neq 0$，$k>1$，則稱α爲方程式$f(x)=0$ 的k重根。

(a) 當 k 偶數，則 $y=f(x)$在$(\alpha,0)$附近的圖形，如下圖所示：

(b)當k爲大於 1 的奇數，則$y=f(x)$在$(\alpha,0)$附近的圖形，如下圖所示：



(c)若α爲n次方程式$f(x)=0$ 的k重根(其中 $2\le k\le n$)，
則$f(\alpha)=f'(\alpha)=\ldots=f^{(k-1)}(\alpha)=0$，但$f^{(k)}(\alpha)\neq 0$。

綜合練習

(1) 試繪下列各函數的圖形：
(a)$f(x)=2x^3-3x^2$　(b)$f(x)=2x^2-x^4$

(2) $f(x)$ 是一個首項係數爲 1 的實係數三次多項式，k 是一個常數。已知當 $k<0$ 或 $k>4$ 時，$f(x)-k=0$ 只有一個實根；當 $0<k<4$ 時，$f(x)-k=0$ 有三個相異實根。請選出正確的選項。__________
(1) $f(x)-4=0$ 和 $f'(x)=0$ 有共同實根　(2) $f(x)=0$ 和 $f'(x)=0$ 有共同實根
(3) $f(x)+3=0$ 的任一實根大於 $f(x)-6=0$ 的任一實根　(4) $f(x)+5=0$ 的任一實根小於 $f(x)-2=0$ 的任一實根。　(92 指定甲)

(3) 已知整係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(2)=f(4)=f(6)=0$，而且除了 $x=2,4,6$ 之外，$f(x)$ 的值恆正。下列選項有哪些必定是正確的？
(A) $f(x)$ 的次數至少爲 6　　(B) $f(x)$ 的次數爲奇數
(C) $f(1)$ 爲奇數　　(D) $f'(4)=0$　(2004 指定甲)

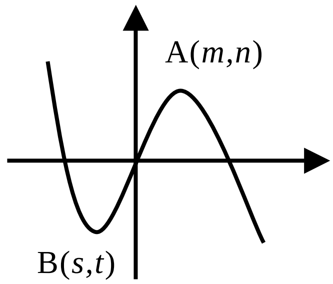
(4) 若$y=3x-x^3$與$y=x+k$圖形交相異三點，求 k 之範圍。
(Hint：考慮$y=-x^3+2x$與$y=k$的交點。)

(5) 設 $y=f(x)$爲 x 的四次多項函數，圖形有二個反曲點(2,16)，(0,0)，並且過(2,16)的切線與 x 軸平行，試求 $f(x)$。

(6) 三次函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，在 $x=2$ 有極小值-14，在$x=-2$ 處有極大值 18，則圖形中的反曲點坐標爲__________。

(7) 利用三次函數的圖形，求方程式$x^3+ax+b=0$ 有三個相異實根的充要條件。

(8) 已知函數$f(x)=-2x^3-3x^2+12x$之圖形如右，A,B爲極點，則
(a)(m,s) =？ (b)若$f(x)=k$有三相異實根，則 k 的範圍爲？
(c)若$f(x)=k$有二相異負根，一正根，則 k 的範圍爲？



(9) 設$f(x)=x^3+kx^2+2kx+1+k$無極值，則 k 的範圍爲？

(10) 設四次函數$f(x)=x^4-4x^3+2ax^2$
(a)若$f(x)$沒有相對極大值，則求 a 的範圍。
(b)若$f(x)$有相對極大值，則求 a 的範圍。

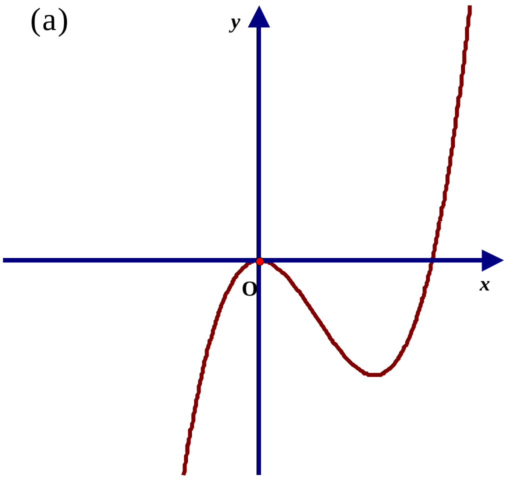
(11) 設$f(x)=x^3+ax+b$的極大值爲 5，極小值爲 1，則(a,b)=？

進階問題

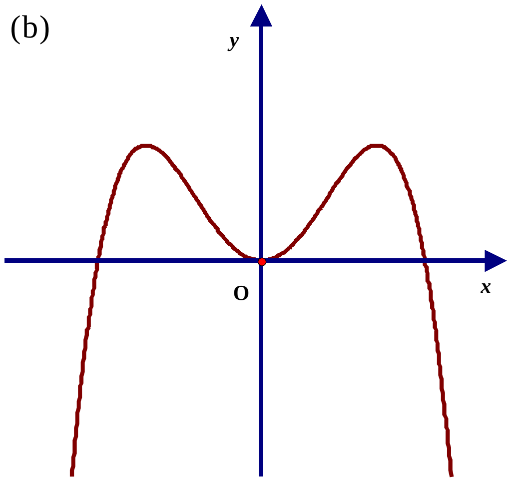
(12) 三次曲線$y=x^3+ax^2+x+1$，若由通過原點的切線有 3 條，則a的範圍爲何？

綜合練習解答

(1) (a)



(b)



(2) (1)(2)(4)

(3) (A)(D)

(4) $\dfrac{-4\sqrt{6}}{9}<k<\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$

(5) x^4-4x^3+16x

(6) (0,2)

(7) $4a^3+27b^2<0$[提示：$f(x)=0$ 有三相異實根，表示$y=f(x)$的圖形與x軸有三個交點，因此$y=f(x)$會有極大值$f(\alpha)$與極小值$f(\beta)$，且$f(\alpha)f(\beta)<0$]

(8) (a)(1，-2) (b)$-20<k<7$ (c)$-20<k<0$

(9) $0\le k\le 6$

(10) (a)$a=0$ 或 $a\ge\frac{9}{4}$ (b)$a<\frac{9}{4}$或 $a\neq 0$

(11) (3,1)或(-3,5)

(12) $a>3$

[提示：令$f(x)=x^3+ax^2+x+1$，$f'(x)=3x^2+2ax+1$，令(t,t^3+at^2+t+1)爲切點，以此點爲切點的切線方程式爲$y-(t^3+at^2+t+1)=(3t^2+2at+1)(x-t)$，因爲切線過原點$(0,0)\Rightarrow 2t^3+at^2-1=0$，因爲通過原點的切線有 3 條，所以 $2t^3+at^2-1=0$ 有三相異實根。令$g(t)=2t^3+at^2-1=0$ 有三相異實根，$g'(t)=6t^2+2at=2t(3t+a)\Rightarrow g'(t)=0\Rightarrow t=0$或$\frac{-a}{3}$，$g(t)=0$ 有三相異實根 $\Leftrightarrow g(0)g(\frac{-a}{3})<0\Leftrightarrow a>3$。]