§4–3 最高公因式、最低公倍式

(甲)因式與倍式

(1)定義：設 $f(x),g(x)$爲二多項式，若存在多項式 $h(x)$使得 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$，則稱 $f(x)$爲 $g(x)$的因式或 $g(x)$爲 $f(x)$的倍式。符號：$\boldsymbol{f(x)|g(x)}$。

例如：因爲 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$，所以 $x-1$ 與 x^2+x+1 均爲 x^3+1 的因式，x^3+1 爲 $x-1$ 與 x^2+x+1 的倍式。

例如：因爲 $\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x+1)(x+2)=(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+1)$，所以 $x+1$，$x+2$，$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}x+1$都是$\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$的因式。

注意：
由上面兩個例子可知，若 $f(x)|g(x)$，則 $c\cdot f(x)|g(x)(c\neq0)$。因此就一般而言，只要求出整係數的因式或倍式即可。

(2)性質：若設 $d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，則 $d(x)|m(x)\cdot f(x)+n(x)\cdot g(x)$。

(乙)公因式與公倍式

(1)公因式與公倍式：
(a)若多項式 $d(x)$同時爲多項式 $f(x),g(x)$的因式，
則稱 $d(x)$爲 $f(x),g(x)$的公因式。
注意：$d(x)=c$ $(c\neq0)$爲任何兩個多項式的公因式。
設 $d(x)$ 爲 $f(x),g(x)$的公因式，則 $k\cdot d(x)(k\neq0)$亦爲 $f(x),g(x)$的公因式， 因此我們通常只取一個代表就行了。

(b)如果多項式 $f(x),g(x)$除了常數以外，沒有其它的公因式，就稱它們**互質**。

(c)設 $f(x),g(x)$都是非零多項式，如果 $m(x)$同時是 $f(x),g(x)$的倍式，那麼就稱 $m(x)$爲 $f(x),g(x)$的公倍式。設 $m(x)$ 爲 $f(x),g(x)$的公倍式，則 $k\cdot m(x)$亦爲 $f(x),g(x)$的公倍式，因此我們通常只取一個代表就行了。

例如：
設 $f(x)=4x^2-1,g(x)=4x^2+4x+1,h(x)=2x^2-7x+3$。
求 $f(x),g(x)$的公因式，$g(x),h(x)$的公因式。
因爲 $f(x)=(2x+1)(2x-1)$，$g(x)=(2x+1)^2$，$h(x)=(2x-1)(x-3)$，
所以 $2x+1,x+\frac{1}{2}$，$4x+2$…等凡是 $k(2x+1)$的形式都是 $f(x),g(x)$的公因式。
在 $g(x),h(x)$中，除了常數外沒有其它的公因式，故 $g(x),h(x)$互質。

(2)最高公因式、最低公倍式：
(a)設 $f(x),g(x)$爲兩多項式，如果 $d(x)$是它們公因式中次數最高的，那麼稱 $d(x)$爲最高公因式(H.C.F)，符號：$\boldsymbol{(f(x),g(x))=d(x)}$。

注意：
(a)當多項式 **$f(x),g(x)$互質時，符號：$(f(x),g(x))=1$。**
(b)最高公因式與公因式一樣，並不是只有一個，不過任兩個最高公因式之間都只差一個常數因式，因此通常所謂兩個多項式的最高公因式，可取它們的任意一個最高公因式。

(b)設 $f(x),g(x)$爲兩多項式，如果 $m(x)$是它們公倍式中次數最低的，那麼稱 $d(x)$爲最低公因式(L.C.M)，**符號：$[f(x),g(x)]=m(x)$**

注意：最低公倍式也不是唯一的，不過它們之間也都只差一個常數因式。

(3)H.C.F 與 L.C.M 的求法：

(a)H.C.F 的求法通常有三個：
因式分解法：
將各個多項式分別因式分解，再取其中公因式相乘，即可得到 H.C.F。
例如：$f(x)=(x^2-x+3)(x+4)(x-5)(x+1)$，$g(x)=(x^2-x+3)(2x-3)(x+6)(x-5)$
則 $f(x)$與 $g(x)$的最高公因式爲$(x^2-x+3)\ (x-5)$

輾轉相除法：
設 $f(x)$，$g(x)$爲二多項式，且 $g(x)\neq0$，則由除法定理可知：恰有兩個多項式 $q(x),r(x)$滿足 $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$。

原理：$(f(x),g(x))=k\cdot(g(x),r(x))$。$k\neq0$

以 $f(x)=x^5-2x^3-2x^2-3x-2$，$g(x)=x^4-2x^3-2x-1$ 爲例，求 $f(x)$與 $g(x)$的最高公因式。

因式的性質：
若設 $d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，則 $d(x)|m(x)\cdot f(x)+n(x)\cdot g(x)$。

L.C.M 的求法：
因式分解法：先將各多項式因式分解，再取出最低公倍式。

例如：$f(x)=(x^2-x+3)(x+4)(x-5)(x+1)$，$g(x)=(x^2-x+3)(2x-3)(x+6)(x-5)$
則 $f(x)$與 $g(x)$的最低公因式爲$(x^2-x+3)\ (x-5)\cdot(x+4)(x+1)(2x+3)(x+6)$

輾轉相除法：
利用輾轉相除法，求出 $f(x)$與 $g(x)$的 H.C.F 爲 $d(x)$，則 $f(x)$與 $g(x)$的
L.C.M=$\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{d(x)}$。

原理：$f(x)\cdot g(x)=k\cdot(f(x),g(x))\cdot[f(x),g(x)]$

以 $f(x)=x^5-2x^3-2x^2-3x-2$，$g(x)=x^4-2x^3-2x-1$ 爲例，求 $f(x)$與 $g(x)$的最低公因式。

[例題1] 利用因式分解，求下列多項式的 H.C.F 與 L.C.M。
$f(x)=x^3+6x^2+11x+6$，$g(x)=x^4+x^3-4x^2-4x$
Ans：$(x+1)(x+2)$，$x(x+1)(x+2)(x-2)(x+3)$

[例題2] 利用輾轉相除法求 $x^4+x^3-9x^2-3x+18$ 與 $x^5+6x^2-49x+42$ 之最高公因式，最低公倍式。 Ans：x^2+x-6，$x^7-3x^5+6x^4-49x^3+24x^2+147x-126$

[例題3] 求兩多項式 $p(x)=x^{50}-2x^2-1, q(x)=x^{48}-3x^2-4$ 的最高公因式。
Ans：x^2+1

[例題4] 多項式 $2x^2+ax+3$，$3x^2+4x+b$ 之 H.C.F 爲 $x+c$，L.C.M 爲 $6x^3+17x^2+14x+3$，試求 a,b,c 之值。 Ans：$a=5,b=c=1$

(練習1) 試求下列多項式的最高公因式、最低公倍式：
(1)$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$，$g(x)=x^3-x^2-x+1$，$h(x)=(x^2-1)^3$
(2)$f(x)=2x^3-x^2-2x+1$，$g(x)=6x^3+7x^2-x-2$，$h(x)=4x^3-4x^2-x+1$
Ans：(1)$(x-1)^2$，$(x-1)^3\cdot(x+1)^3$ (2)$2x-1$，$(x+1)(x-1)(2x-1)(2x+1)(3x+2)$

(練習2) 試求 $f(x)=x^{100}+5x^2-6$，$g(x)=x^{98}-3x^2+2$ 的最高公因式。
Ans：x^2-1

(練習3) 設 a,b,c 爲自然數，若已知 $f(x)=x^2+ax-3$，$g(x)=x^3-bx^2+2$ 最高公因式爲一次式 $x-c$，則序對(a,b,c)=_____。 Ans：(2,3,1)

[例題5] 已知二多項式 x^3+ax^2-4x+2 與 x^3+bx^2-2 有一個二次的 H.C.F，求 a,b 之值。
Ans：$a=1$，$b=3$

[例題6] 已知 $f(x)=x^2+3x+a$ 與 $g(x)=x^3+x^2+x-1+a$ 的最低公倍式爲四次式，求整數 a 與此最低公倍式。 Ans：$a=2$，$(x+1)(x+2)(x^2+1)$

(練習4) 若多項式 $f(x)=2x^3-4x^2+2x+(2c+4)$與多項式 $g(x)=3x^3-6x^2+2x+(3c+5)$的最高公因式爲一次式，則 $c=$____。 Ans：$c=2$

(練習5) $f(x)=x^2+x+a-3$，$g(x)=x^3-x^2+x-a$，L.C.M 爲四次式，求 $a=$？。Ans：1

(練習6) 若 $x^3+ax^2+11x+6$ 與 $x^3+bx^2+14x+8$ 之最高公因式爲二次式，求實數 a,b 之值。 Ans：$a=6$，$b=7$

(練習7) 設 $f(x),g(x)$皆爲三次多項式，其最高公因式爲 $\mathrm{H}(x)$，最低公倍式爲 $\mathrm{L}(x)$，且 $\mathrm{H}(x)+\mathrm{L}(x)=(x^2+x)^2-3(x^2+x)-10$，試問
(1)$\mathrm{H}(x)$與 $\mathrm{L}(x)$的次數。 (2)求 $f(x),g(x)$。
Ans：(1)deg $\mathrm{H}(x)=2$，deg $\mathrm{L}(x)=4$
(2)$(x^2+x+2)(x+3)$，$(x^2+x+2)(x-2)$

(丙) 整數系與多項式的比較

(1)整係數的加法、乘法 ⟷ 多項式的加法、乘法

封閉性　　　　封閉性

運算性質　　　　運算性質

(2)整數的除法 ⟷ 多項式的除法

沒有封閉性　　　　沒有封閉性

面對除法失去封閉性所產生的問題，有兩個方向來解決，
第一個是求餘式，第二個就是討論整除的情形。

性　質	整　　數　　系	多　　項　　式
除法的定義	若 a,b 為整數,則存在唯一的一組整數 q,r，使得 $a=bq+r$，且 $0\le r<\|b\|$。	設 $f(x)$，$g(x)$為二多項式且 $g(x)$不是零多項式，則可找到二多項式 $q(x)$ 及 $r(x)$ 滿足 $f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$。
整除的定義	a,b 為整數 $a\|b \Leftrightarrow b=ac$，$c$ 為整數 例如：$3\|6 \Leftrightarrow 6=2\times3$	$f(x)$、$g(x)\in R[x]$ $f(x)\|g(x)$ $\Leftrightarrow g(x)=f(x)\cdot h(x)$，$h(x)\in R[x]$ 例如： $(x+1)(x+3)=(x+1)[2(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2})]$ $(x+3)\|(x+1)(x+3)$， $\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\|(x+1)(x+3)$ $k(x+3)\|(x+1)(x+3)$
因數(式)、倍數(式)	設 a,b 為整數且 $b\|a$，我們稱 b 是 a 的因數或 a 是 b 的倍數。	設 $f(x),g(x)$為二多項式，若存在多項式 $h(x)$使得 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$，則稱 $f(x)$為 $g(x)$的因式或 $g(x)$為 $f(x)$的倍式。

最大(高)公因數(式)、 最小(低)公倍數(式) 互質	(1)設 a,b,c 爲整數，且 $a\|b$、$a\|c$，稱 a 爲 b,c 的公因數，b,c 公因數中最大者稱爲最大公因數。 (2)設 a,b,c 爲整數，且 $b\|a$、$c\|a$，稱 a 爲 b,c 的公倍數，b,c 正公倍數中最小者稱爲最小公倍數。 (3)兩數的最大公因數、最小公倍數都是唯一的。	(1)設 $f(x),g(x)$爲兩多項式，如果 $d(x)$是它們公因式中次數最高的，那麼稱 $d(x)$爲最高公因式。 (2)設 $f(x),g(x)$爲兩多項式，如果 $m(x)$是它們公倍式中次數最低的，那麼稱 $d(x)$爲最低公因式 (3)兩多項式的 H.C.F 與 L.C.M 不是唯一的。
輾轉相除法原理	設 a,b 爲整數，$b\neq 0$，若 b 除 a 所得的商數爲 q，餘數爲 r， 即 $a=bq+r$，則$(a,b)=(b,r)$。	設 $f(x)$，$g(x)$爲二多項式，且 $g(x)\neq 0$ 設 $q(x),r(x)$分別爲商式與餘式。 則$(f(x),g(x))=k\cdot(g(x),r(x))$。$k\neq 0$
整除的性質	(a)$a\|a$ (反身性) (b)$a\|b$ 且 $b\|c \Rightarrow a\|c$ (c)$a\|b$ 且 $a\|c \Rightarrow a\|mb+nc$， m,n 爲整數。	(a)$kf(x)\|f(x)$，$k\neq 0$ (b)$f(x)\|g(x)$且 $g(x)\|h(x) \Rightarrow f(x)\|h(x)$ (c)$d(x)\|f(x)$，$d(x)\|g(x)$， $\Rightarrow d(x)\|m(x)\cdot f(x)+n(x)\cdot g(x)$。

$\boxed{\text{綜合練習}}$

(1) 下列敘述何者爲真？(A)若 $d(x)$是多項式 $f(x)$與 $g(x)$的公因式，則 $d(x)$是 $f(x)+g(x)$ 的因式。(B)設 $f(x)$，$g(x)$，$q(x)$，$r(x)$均爲非零多項式，若 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，則$(f(x)，g(x))=(g(x)，r(x))$(C) $f(x)$，$g(x)$爲二多項式，則 $f(x)$與 $g(x)$的次數和爲其 LCM 的次數。(D)兩多項式 $f(x)$與 $g(x)$互質時，其最低公倍式可爲 $f(x)$與 $g(x)$的乘積(E)多項式 $f(x)$，$g(x)$之 HCF 爲 $h(x)$，LCM 爲 $m(x)$，則必 $h(x)m(x)=f(x)g(x)$

(2) a，b，c，k 皆爲整數，若 $x+k$ 爲 x^2+ax-6 與 x^3+bx^2+cx+3 的公因式，則 k 値可爲：(A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) 3　(E) 6

(3) 設 $f(x)=(x+1)(x-2)^2(2x+1)$，$g(x)=(x-1)(x-2)(2x+1)^2$，則
(a) $(f(x)，g(x))=$__________。(b) $[f(x)，g(x)]=$__________。

(4) 設 a 爲整數，若 $f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$與 $g(x)=2x^3-7x^2+7x+(2a-8)$的最高公因式爲一次式，則 a 的值爲__________。

(5) a，b，$c\in N$，若 $f(x)=x^3-2x^2-ax+6$，$g(x)=x^3+11x^2+bx-35$，其 HCF 爲一次式 $x-c$，求 a，b，c，的值。

(6) 設 $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=x^2+bx+a$，若 $f(x)$，$g(x)$之 HCF 爲一次式，求 $(f(x)，g(x))=$？

(7) 設 x^2+ax+b 與 x^2+bx+c 的 HCF 爲 $x+1$，LCM 爲 x^3-4x^2+x+d，求 a，b，c，d 的值。

(8) 設二方程式 $f(x)=2x^4+7x^3+10x^2+5x-6=0$ 與 $g(x)=2x^4+5x^3+7x^2+7x-6=0$ 有公根α，則$\alpha=$_____。

(9) $f(x)=x^3-6x^2+11x-3$，$g(x)=x^3-8x^2+19x-8$，若 $f(a)=3$，$g(a)=4$，則 a 之値爲何？

(10) 設 $f(x)=x^3-19x+30$，$g(x)=x^3-4x^2+x+6$，若一實數α 滿足 $f(\alpha)\cdot g(\alpha)=0$ 且 $f(\alpha)+g(\alpha)\neq 0$，試求$\alpha=$_____。

(11) 設 a，b 均爲負整數，$f(x)=x^3+x^2+ax+2$，$g(x)=x^3+2x^2+bx+1$
(a)如果 $f(x)$與 $g(x)$的最高公因式爲二次式時，數對$(a，b)=$__________。
(b)如果 $f(x)$與 $g(x)$的最高公因式爲一次式時，數對$(a，b)=$__________。

(12) 設 x^3+x^2+ax+2 與 x^3+2x^2+bx+1 的 LCM 爲四次式，求實數 a，b 的值。

(13) 已知兩個多項式 x^3+ax^2+2x+4、$2x^3+x^2+a^2x+2$ 有一個二次的公因式，求 $a=$？

(14) 設 a,b,c 爲自然數，若已知 $f(x)=x^2+ax-3$，$g(x)=x^3-bx^2+2$ 最高公因式爲一次式 $x-c$，則序對$(a,b,c)=$____。

(15) 兩多項式 $f(x)$，$g(x)$的 LCM 爲 $x^4+4x^3-15x^2-58x-40$，$f(x)+g(x)=2x^3+11x^2-x-30$，求 $f(x)$及 $g(x)$。

$\boxed{\text{進階問題}}$

(16) 已知多項式 $2x^4+x^3-2x-a$ 與 $2x^3-x^2-x-b$ 的 H.C.F 爲二次式，求 a,b 之值。

(17) 設 $f(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots b_1x+b_0$ 爲一整係數 n 次多項式，而 a 爲整數。
求證：$f(f(a)+a)$恆有 $f(a)$之因數。

(18) 已知 a,b,c 爲有理數，$f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ 與 $g(x)=x^3+cx^2+2$ 之最高公因式 $\mathrm{H}(x)$爲二次式，且 $x-2|f(x)$，則求 a,b,c 之值與 $\mathrm{H}(x)$。

(19) 設二多項式 $f(x)$、$g(x)$的最高公因式爲 $d(x)$，若
$f(x)\cdot g(x)=4x^6-16x^5+17x^4+5x^3-19x^2+11x-2$，且以 $d(x)$分別除 $f(x)$與 $g(x)$所得的商式爲 $x-2$ 及 $x+1$，求 $f(x)$、$g(x)$、$d(x)$。

綜合練習解答

(1) (A)(B)(D)

(2) (A)(B)(D)

(3) (a) $(x-2)(2x+1)$(b) $(x+1)(x-1)(x-2)^2(2x+1)^2$

(4) $a=3$

(5) $a=5$，$b=23$，$c=1$

(6) $x-1$

(7) $a=-1$，$b=-2$，$c=-3$，$d=6$

(8) -2，$\frac{1}{2}$

(9) $a=1$ 或 3

(10) -5 或 -1

(11) (a) $(-7，-4)$；(b) $(-4，-4)$

(12) $a=-7$，$b=-4$

(13) 2

(14) (2,3,1)

(15) $f(x)=(x+1)(x^2+7x+10)$，$g(x)=(x-4)(x^2+7x+10)$或 $f(x)=(x-4)(x^2+7x+10)$，$g(x)=(x+1)(x^2+7x+10)$

(16) $(a,b)=(1,0)$，$(1,3)$，$(-4,-2)$

(17) 根據除法原理，$f(x)=(x-a)\mathrm{Q}(x)+f(a)$，令 $x=f(a)+a$，代入上式中，即可得證。

(18) $a=-\frac{5}{2}$，$b=2$，$c=\frac{3}{2}$

(19) $f(x)=(2x^2-3x+1)(x-2)$，$g(x)=(2x^2-3x+1)(x+1)$，$d(x)=2x^2-3x+1$