第二十三單元線性規劃

在日常生活中，我們常會面臨如下的問題：如何把有限的資源，做最佳且最有效地運用，以收到最大效益？

例如：好康生技工廠這個月生產 A，B 兩種健康食品，每公斤的成本分別為 150 元和 300 元，且每公斤的利潤分別為 450 元和 600 元。已知該工廠生產這兩種健康食品的總量不超過 2400 公斤，且可用的資金最多是 450000 元。根據市場調查，這兩種健康食品都可以銷售出去，那麼好康生技工廠應如何分配 A，B 兩種健康食品的產量，才能獲得最多的利潤？

這就是一個典型的規劃問題，而解決這類規劃的問題，我們必須先根據題意，設定目標（如上述問題，即建立利潤函數）；再從問題中找出限制條件，轉化為代數式；最後尋求最佳策略，以達成規劃問題的目標。

規劃問題的限制條件，轉化為代數式後，通常是以“不等式”的型態出現，而上述問題牽涉含有“兩個變數”的一次不等式，所以就讓我們先探討這種二元一次不等式及其解區域。

(甲)二元一次不等式的解區域

二元一次不等式的解區域：

所謂的二元一次不等式是指$ax+by+c>(<,\geq,\leq)0$ 這種形式的不等式。

求二元一次不等式$ax+by+c>(<,\geq,\leq)0$ 的解，就是要找出所有滿足該不等式的解(x_0,y_0)。

(2)如何判別兩點在一直線的同側或異側？

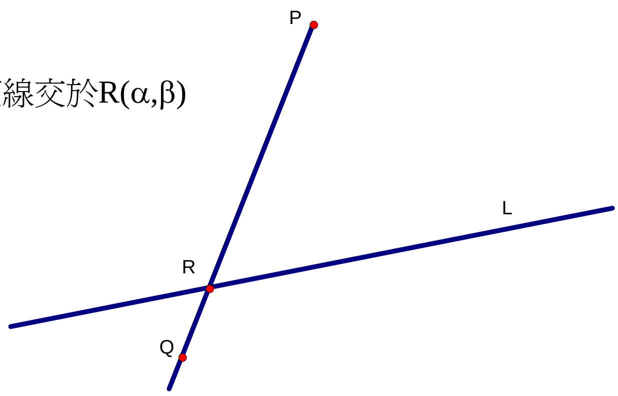
原理：

設L：$px+qy+r=0$，P(x_1,y_1)、Q(x_2,y_2)，

(a)若P、Q兩點在直線L的異側，則$(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)<0$。

(b)若P、Q兩點在直線L的同側，則$(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)>0$。

[證明]：



(a)因為P、Q兩點在直線L的異側，令$\overline{PQ}$與直線交於R(α,β)

設$\dfrac{PR}{RQ}=m$，根據分點公式，可得

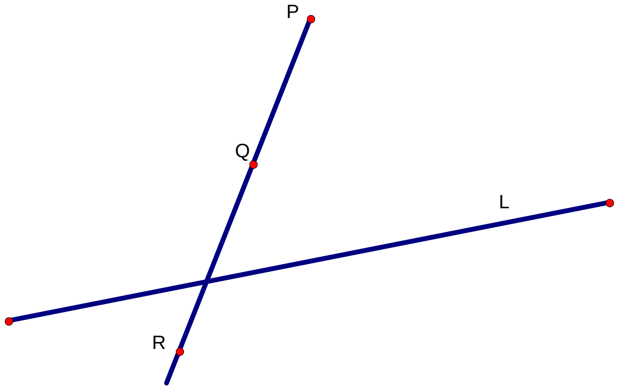
$\alpha=\dfrac{x_1+mx_2}{1+m}$,$\beta=\dfrac{y_1+my_2}{1+m}$

因為R(α,β)在直線L上

$\Rightarrow p(\dfrac{x_1+mx_2}{1+m})+q(\dfrac{y_1+my_2}{1+m})+r=0$

$\Rightarrow(px_1+qy_1+r)+m(px_2+qy_2+r)=0 \Rightarrow m=\dfrac{-(px_1+qy_1+r)}{(px_2+qy_2+r)}>0$

$\Rightarrow(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)<0$



(b)設在直線PQ上取一點R，
使得R(α,β)分別與P、Q落在直線L異側
根據(a)的證明可得
$(p\alpha+q\beta+r)(px_1+qy_1+r)<0$ 且$(p\alpha+q\beta+r)(px_2+qy_2+r)<0$
$\Rightarrow(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)>0$。

(2)如何找出二元一次不等式的解？
例子一：請在座標平面上畫出滿足$x+2y-4<0$的點(x,y)所形成的區域？
[解法一]：
如右圖，考慮鉛直線$x=x_0$，它與$x+2y-4=0$
的交點爲A($x_0,\dfrac{4-x_0}{2}$)，又在A點正下方設B(x_0,y)
很顯然$y<\dfrac{4-x_0}{2}$ $\Rightarrow x_0+2y-4<0$
因此B(x_0,y)滿足$x+2y-4<0$。
換句話說，鉛直線上落在A點下方的所有點
(x,y)均滿足$x+2y-4<0$。現在讓$x=x_0$作變動
它會通過所有$x+2y-4<0$的解(x,y)，
因此可以得到，滿足$x+2y-4<0$的點(x,y)形成的
圖形區域是直線$x+2y-4=0$的下方區域。

[解法二]：
利用判別兩點在直線的同側與異側的條件，可以先代一個已知點A(0,0)
顯然(0,0)是$x+2y-4<0$的解，因此與A(0,0)同側的點都是$x+2y-4<0$的解，而與A(0,0)異側的點都不是$x+2y-4<0$的解，因此$x+2y-4<0$的解(x,y)所形成的區域是與(0,0)同側的點所成的圖形，因此是直線$x+2y-4=0$的下方區域。

結論：設L：$px+qy+r=0$
(a)若P、Q兩點在直線L的異側，則$(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)<0$。
若P、Q兩點在直線L的同側，則$(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)>0$。

(b)設直線L將座標平面分成兩個半平面H_1、H_2。
設$(x_0,y_0)\in H_1$且$px_0+qy_0+r>0$，則對於任意點$(x,y)\in H_1$恆有$px+qy+r>0$，而對於任意點$(x,y)\in H_2$，恆有$px+qy+r<0$。

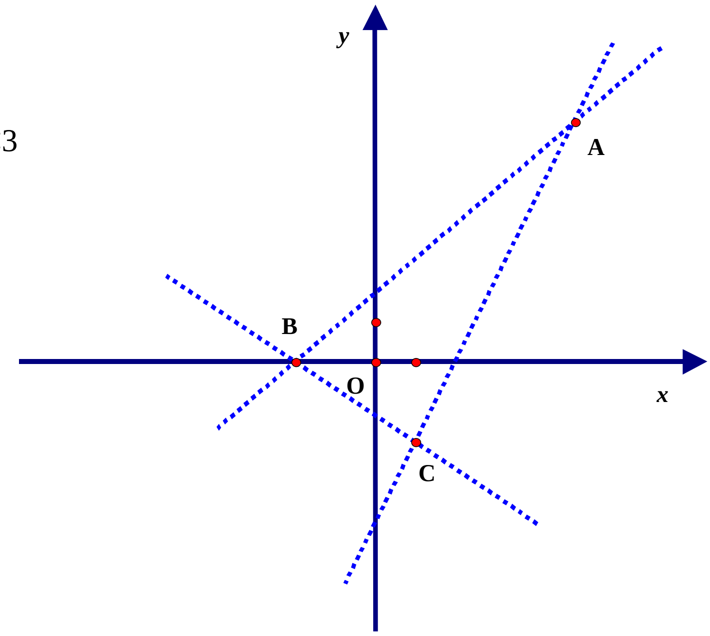
[例題1] 設 A(5,6)，B(–2,0)，C(1,–2) 爲坐標平面上的三點

(1) 試以聯立不等式表示ΔABC 的內部？________。

(2) 若 $P(k,k-1)$爲ΔABC 內部一點，

則實數 k 的範圍爲____________。

Ans：(1)$\begin{cases} 6x-7y+12>0 \\ 2x-y-4<0 \\ 2x+3y+4>0 \end{cases}$ (2)$\frac{-1}{5}<k<3$



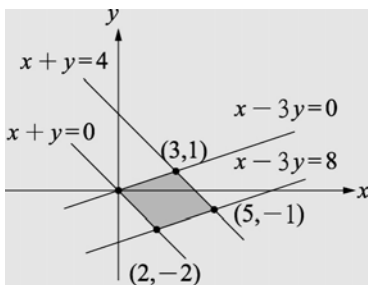
[例題2] 若 $0\le a\le 1$，$0\le b\le 2$ 且 $x = 3a + b$，$y = a - b$

(1)試求 x，y 所滿足的聯立不等式。

(2)作出(1)所表示的聯立不等式的圖形，並求此圖形所圍成區域的面積。

Ans：(1)$\begin{cases} 0\le x+y\le 4 \\ 0\le x-3y\le 8 \end{cases}$；(2)面積爲 8 (平方單位)

(1)$\begin{cases} 3a+b=x \\ a-b=y \end{cases} \Rightarrow a=\frac{x+y}{4}$，$b=\frac{x-3y}{4}$



但$\begin{cases} 0\le a\le 1 \\ 0\le b\le 2 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} 0\le \dfrac{x+y}{4}\le 1 \\ 0\le \dfrac{x-3y}{4}\le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\le x+y\le 4 \\ 0\le x-3y\le 8 \end{cases}$

(2)$\begin{cases} 0\le x+y\le 4 \\ 0\le x-3y\le 8 \end{cases}$作圖如附圖之區域

頂點爲 (0，0)，(3，1)，(5，–1)，(2，–2)

$\therefore$ 面積爲$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\times 16 = 8$。

[討論]：

例題 2 中，已知 $0\le a\le 1$，$0\le b\le 2$，則可推得 $0\le x = 3a + b\le 5$ 且$-2\le y = a - b\le 1$，

爲何(x,y)所形成的區域爲何不是矩形區域呢？

(練習1) (1)已知二定點 P(3,1)、Q(−4,6)，若$\overline{PQ}$與直線 $3x-2y+k=0$ 相交，
則 k 值的範圍為________。
(2)若點 P(3,1)、Q(−4,6)在直線 $3x-2y+k=0$ 的反側，
則 k 的範圍為________。 Ans：(1)$-7\le k\le 24$ (2)$-7<k<24$

(練習2) A(2,1)，B(3,4)，若線段$\overline{AB}$與直線 $y=mx+3$ 相交(有公共點)，
則實數 m 的範圍為_____________。Ans：$-1\le m\le\frac{1}{3}$

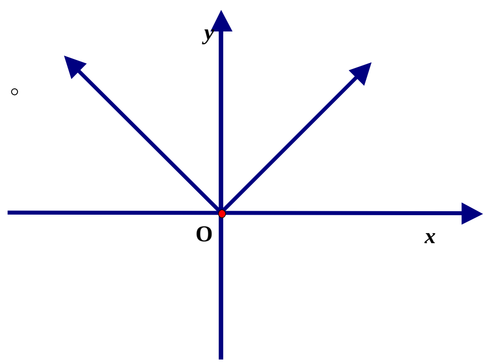
(練習3) 設 $P(-2,3)$，$Q(4,0)$，$R(-2,-3)$為△PQR 的頂點，
若 $A(2t+1, t)$ 為三角形及其內部的一點，則實數 t 的範圍為
___________。Ans：$\frac{-3}{2}\le t\le\frac{3}{4}$ (說明：$\boxed{\text{三角形}}$及其內部的一點⇒有等號)

(練習4) 試作不等式 $6-2x\le y-2\le x\le 6$ 的圖形，並求此圖形所圍成的區域的面積。
Ans：24
(說明：$6-2x\le y-2\le x\le 6\Rightarrow\begin{cases}6-2x\le y-2\\ y-2\le x\\ x\le 6\end{cases}$ 求三直線所圍面積即為所求)

(練習5) 若 $0\le a\le 2$，$2\le b\le 4$，且點 $P(x,，y)$滿足 $x=2a-b+2$，$y=a+b-3$，
(A) $a=\dfrac{x+y+1}{3}$ (B) $b=\dfrac{-x+2y+8}{3}$
(C) $(x，y)$ 滿足聯立不等式$\begin{cases}-1\le x+y\le 5\\ -4\le x-2y\le 2\end{cases}$
(D) 所有 P 點所表示的區域為一個平行四邊形
(E) 所有 P 點所表示的區域面積為 12。Ans：(A)(B)(C)(D)(E)

(乙)其他二元不等式解的區域

若 $f(x,y)=0$ 為一封閉區域，
則通常滿足 $f(x,y)>0$ 或 $f(x,y)<0$ 的點(x,y)會形成一個區域。
例一：
考慮 $y=|x|$的圖形(此時 $f(x,y)=y-|x|$)，如右圖，
它是一個折線，而 $f(x,y)>0$ 的圖形為折線上方的區域
$f(x,y)<0$ 的圖形為折線下方的區域

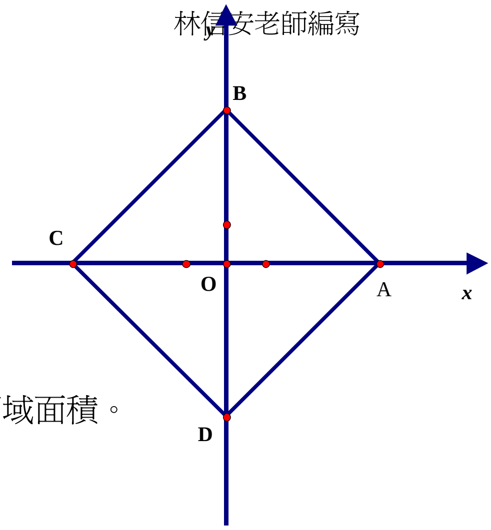


例二：

如右圖，考慮 $f(x,y)=|x|+|y|-4=0$ 的圖形爲菱形 ABCD

則滿足 $f(x,y)<0$ 的點(x,y)會形成菱形 ABCD 的內部。

而滿足 $f(x,y)>0$ 的點(x,y)會形成菱形 ABCD 的外部。



[例題3] 試圖示$|x|\le y\le 11-|x-6|$所表示之區域，並求此區域面積。

Ans：面積$=\dfrac{85}{2}$

[例題4] (1)請畫出 $y=||x|-2|$之圖形，

(2)請就 k 的值，討論$||x|-2|=k$ 的實數解的個數。

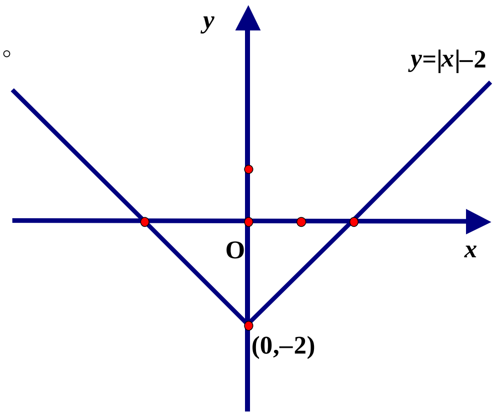
[分析]：

(1)將 $y=f(x)$的圖形在 x 軸下方的部分對 x 軸作對稱，再加上 $y=f(x)$原先在 x 軸上方的圖形，即可構成 $y=|f(x)|$的圖形。

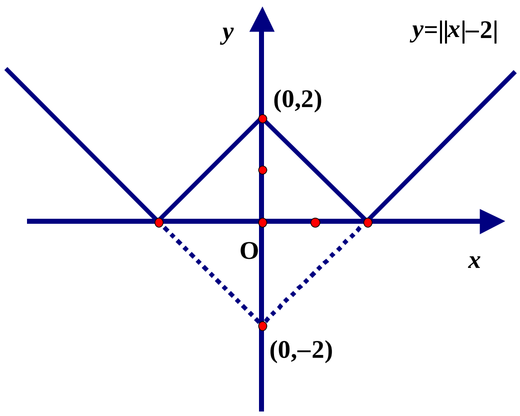
(2)$f(x)=k$ 的實數解個數$=\begin{cases} y=f(x) \\ y=k \end{cases}$交點個數。

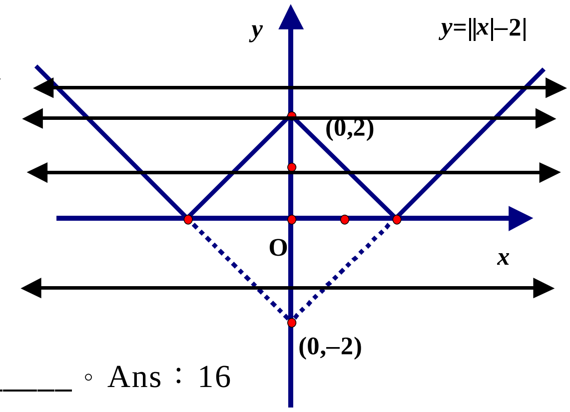
[解法]：

先畫 $y=|x|-2$ 的圖形：



再將 $y=|x|-2$ 的圖形在 x 軸下方的部分對 x 軸作對稱，即可得 $y=||x|-2|$之圖形





(2)考慮$\begin{cases} y=||x|-2| \\ y=k \end{cases}$的交點個數。可得

k<0 無實數解。

k=0 或 k>2 有二個實數解。

0<k<2 有四個實數解。

k=2 有三個實數解。

(練習6) 求$|12x-4|+|6y-3|\le 24$ 所圍面積=________。Ans：16

(練習7) 下列哪些方程式圖形所圍的面積與$\frac{|x|}{2}+\frac{|y|}{3}=1$所圍區域面積大小相等？(1)$\frac{|x-1|}{2}+\frac{|y-2|}{3}=1$ (2)$\frac{|x|}{3}+\frac{|y|}{2}=1$ (3)$\frac{|x-2|}{3}+\frac{|y-1|}{2}=1$
(4)$2|x|+3|y|=1$ (5)$3|x|+2|y|=6$ Ans：(1)(2)(3)(5)

(練習8) 求作$|x+1|\le y\le 5-|x-2|$的圖形，其區域面積爲_______。Ans：8

(練習9) 作下列不等式之圖形，
並求其面積：$(|x|+|y|-1)(|x|+|y|-2)(|x|+|y|-3)\le 0$。
Ans：面積＝12

(練習10) $y=||x|-2|$之圖形與 $y=mx+5$ 之圖形恰有二個交點，請問 m 的範圍=？
Ans：$m\le -1$ 或 $m\ge 1$

(丙)線性規劃

在二元一次不等式組的限制下，尋求符合實際應用的最佳解答，這是應用數學中的一門學問，稱爲**線性規劃(Linear Programming)**。

常見的有兩類：

①某些條件限制下，研究最節省的人力或物力就可完成目標。

②在一定的人力、物力限制下，創造最高的利潤。

例子：某工廠用兩種不同的原料均可生產同一產品，若採用甲原料，每噸成本 1000 元，運費 500 元，可生產出產品 90 公斤；若採用乙原料，每噸成本 1500 元，運費 400 元，可生產出產品 100 公斤。現在工廠的預算是成本不可超過 6000 元，運費不得超過 2000 元，請問在此預算下，最多可生產出多少公斤的產品？

[解法]：

(1)設甲原料用x噸，乙產品用y噸根據預算可得聯立不等式組：$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 10x+15y\le 60 \\ 5x+4y\le 20 \end{cases}$，

將這個聯立不等式組的解(x,y)畫在坐標平面上所形成的區域，稱爲**可行解區域**。

甲原料用x噸，乙產品用y噸可以生產出$f(x,y)=90x+100y$公斤

因此整個問題的核心，就是要在聯立不等式組的條件下(在預算的限制下)，

求$f(x,y)$的最大值，我們稱$f(x,y)$爲**目標函數**。

這樣的過程就是線性規劃最簡單的形式：

接下來的問題是，要如何在聯立不等式組：$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 10x+15y\le 60 \\ 5x+4y\le 20 \end{cases}$的條件下，

找出目標函數$f(x,y)= 90x+100y$的最大值。

(2)平行線法：

首先，先畫出可行解區域，如左下圖

當點P(x,y)在可行解區域中，目標函數$f(x,y)=90x+100y$的最大值爲何？

令$k=90x+100y$，因此可以將$90x+100y=k$視爲一群平行直線$9x+10y=0$的直線

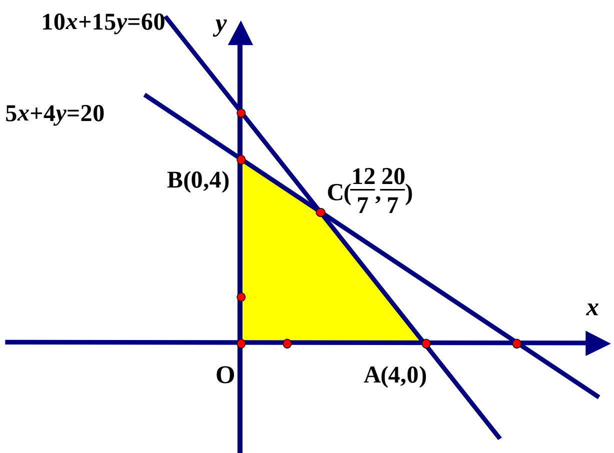
在可行解區域中的點P(m,n)，代入$f(x,y)$得到的k_0

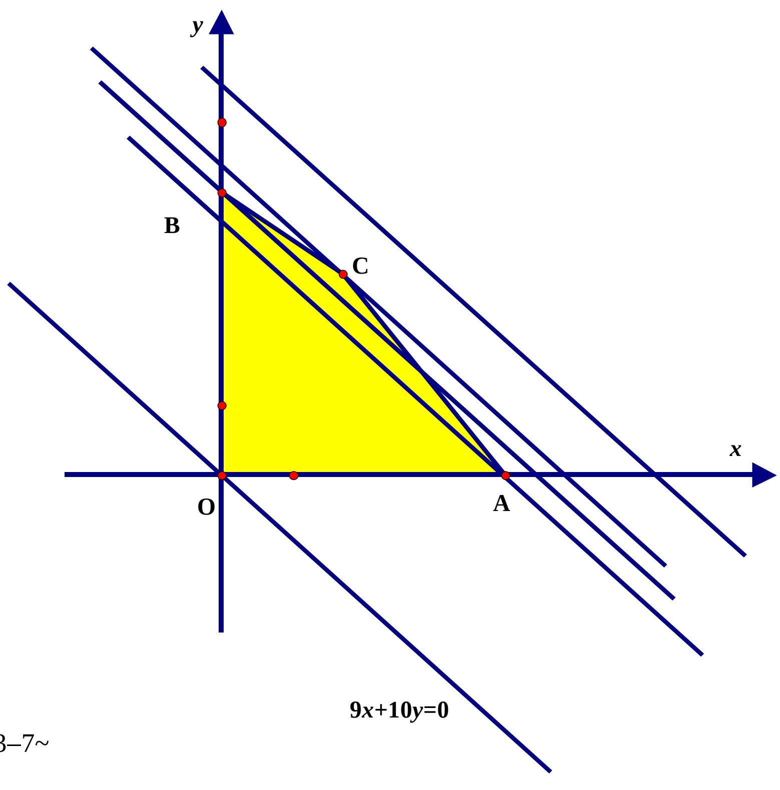
$\Leftrightarrow$ 直線$90x+100y=k_0$會與可行解區域交於點P(m,n)

另一方面，

直線$90x+100y=k_1$與可行解區域沒有交點

$\Leftrightarrow$可行解區域中的任何點P(m,n)代入$f(x,y)$中都不會有k_1的值產生





根據前面的說明，可知在與可行解區域有交點的平行直線中，要找出最大的 k 相當於求最大的 x 截距$\frac{k}{90}$，。因此從圖形可以看出來，當平行線通過 C 點時，會有最大的 x 截距$\frac{k}{90}$，所以當$(x,y)=(\frac{12}{7},\frac{20}{7})$時，$f(\frac{12}{7},\frac{20}{7})=440$ 爲最大值。

(3)頂點法：

從另一觀點來看，當可行解區域爲凸區域時，而目標函數爲 $f(x,y)=90x+100y=k$
視爲一群平行直線，而 k 的最大值與最小值都會發生在頂點之處。因此另一方法就是將各頂點代入 $f(x,y)$，即可求出最大值。

頂點	A(4,0)	B(0,4)	C$(\frac{12}{7},\frac{20}{7})$	O(0,0)
$f(x,y)=90x+100y$	360	400	440	0

現在我們再把前面解決規劃問題的方法整理如下：

第一步 找出問題的目標：（建立利潤函數）

問題的目標是要求最大利潤，而利潤可以表成 x，y 的一次式

$f(x,y)=90x+100y$。

這個二元一次式也可以稱爲此問題的目標函數，它的變數是 x，y

第二步 從問題中找出條件限制式（即二元一次聯立不等式）：

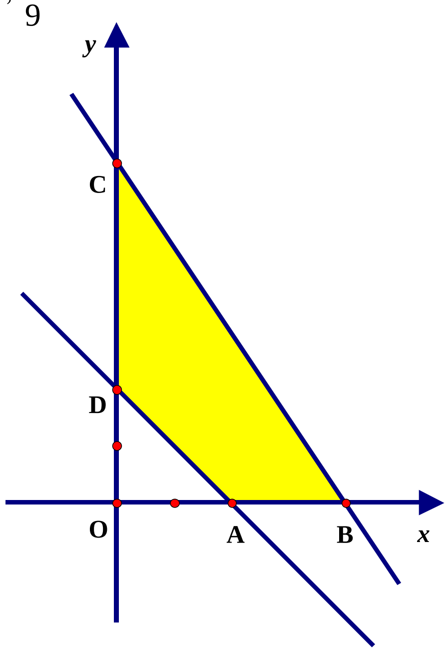
$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 10x+15y \le 60 \\ 5x+4y \le 20 \end{cases}$$

這個聯立不等式的每一個解，稱爲此問題的可行解；由全部可行解所成的區域，稱爲此問題的可行解區域。

第三步 如何做最佳決策以達成問題的目標：

利用平行線法或頂點法，在可行解區域中，找出使目標函數
f（x，y）之值最大（或最小）的解（x，y），這個解（x，y）就稱爲此問題的最佳解

[例題5] 若x,y滿足$x\ge 0,y\ge 0$，$3x+2y-12\le 0$，$x+y-2\ge 0$，則
(1)(x,y)=？時，$2x-y+3$ 有最大值=？
(2)x^2+y^2的最大值=？最小值=？
(3)$\dfrac{y+2}{2x+1}$ 的最大值=？最小值=？
Ans：(1)$(x,y)=(4,0)$，最大值=11 (2)36，2 (3)8，$\dfrac{2}{9}$



[例題6] 設(x,y)滿足$\begin{cases} 2x-y-7\le 0 \\ 2x-5y+13\ge 0 \\ 2x+3y-11\ge 0 \end{cases}$，若$x=4$，$y=1$可使$kx-y+27$取得最大值，求$k$值的範圍爲________。Ans：$\dfrac{-2}{3}\le k\le 2$

[例題7] 建築公司在房市熱絡時推出甲、乙兩型熱門預售屋。企業部門的規劃如下：
甲型屋每棟地價成本為 500 萬元，建築費用為 900 萬元，
乙型屋每棟地價成本為 200 萬元，建築費用為 1500 萬元，
公司在資金部份限制地價總成本上限為 3500 萬元，所有建築費用的上限為 1 億 2000 萬元；無論甲型或乙型售出，每棟獲利皆為 500 萬元，假設推出的預售屋皆可售出，請問推出甲、乙兩型預售屋各幾棟，公司才可得到最大利潤？

[解法]：

設推出甲型預售屋 x 棟，推出乙型預售屋 y 棟，x，y 為整數。

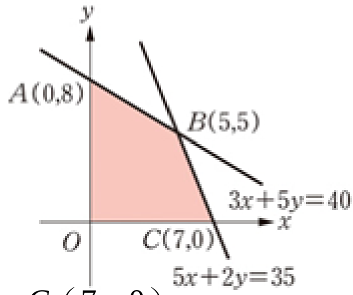
(1) 寫出目標函數

問題要求最大利潤，亦即使

目標函數 $P=500x+500y$（萬元）的值最大。

(2) 根據問題，列出二元一次聯立不等式，並作出可行解區域

	甲	乙	總和不超過	
地價成本	500	200	3500	
建築費用	900	1500	12000	（單位：萬元）



由上表得：

$$\begin{cases} 500x+200y\le 3500, \\ 900x+1500y\le 12000, \\ x\ge 0, y\ge 0. \end{cases} \text{即} \begin{cases} 5x+2y\le 35, \\ 3x+5y\le 40, \\ x\ge 0, y\ge 0. \end{cases}$$

作出可行解區域如圖：

各頂點的坐標為 $O(0, 0)$，$A(0, 8)$，$B(5, 5)$，$C(7, 0)$

(3) 尋求最佳解

依據題意，x，y 須是整數，而各頂點也都是格子點，

故將各頂點坐標代入目標函數，得其對應值如下：

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 8)$	$(5, 5)$	$(7, 0)$
$P=500x+500y$	0	4000	5000	3500

最佳解是（5，5）。

所以推出甲、乙型預售屋各 5 棟，公司才可得到最大利潤 5000 萬元。

[例題8] 有一營養師規劃利用食物 A 與食物 B 組成營養餐的主食。已知各食物含營養成分如下表：

成分 / 食物	蛋白質	鐵質	碳水化合物
A（百公克）	60 單位	30 單位	40 單位
B（百公克）	20 單位	30 單位	80 單位

食物 A 每 100 公克需 30 元，食物 B 每 100 公克需 40 元。假設營養師希望營養餐的主食最少能提供 12 單位的蛋白質，9 單位的鐵質以及 16 單位的碳水化合物，那麼他必須使用食物 A 與食物 B 各幾公克組合成營養餐的主食，才能使花費最低？

[解法]：

假設該營養師使用 x 公克的食物 A 與 y 公克的食物 B 組合成營養餐的主食。

(1) 寫出目標函數：

問題要求最低花費，亦即使目標函數

$P=\dfrac{30}{100}x+\dfrac{40}{100}y=\dfrac{3}{10}x+\dfrac{4}{10}y$（元）的值最小。

(2) 根據問題，列出二元一次聯立不等式，並作出可行解區域：

	A（百公克）	B（百公克）	最少需要量
蛋白質	60	20	12
鐵質	30	30	9
碳水化合物	40	80	16

由上表得 $\begin{cases}\dfrac{60}{100}x+\dfrac{20}{100}y\geq 12\text{，}\\ \dfrac{30}{100}x+\dfrac{30}{100}y\geq 9\text{，}\\ \dfrac{40}{100}x+\dfrac{80}{100}y\geq 16\text{，}\\ x\geq 0\text{，}y\geq 0\text{。}\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3x+y\geq 60\text{，}\\ x+y\geq 30\text{，}\\ x+2y\geq 40\text{，}\\ x\geq 0\text{，}y\geq 0\text{。}\end{cases}$

作出可行解區域，如右圖：

可行解區域的頂點坐標分別為

A（0，60），B（15，15），C（20，10），D（40，0）。

(3) 尋求最佳解：

將各頂點坐標代入目標函數，得其對應值如下：

(x, y)	(0, 60)	(15, 15)	(20, 10)	(40, 0)
$P=\dfrac{3}{10}x+\dfrac{4}{10}y$	24	10.5	10	12

[例題9] 一家積木玩具工廠，欲將兩種大小不同的木板裁成甲、乙、丙三種規格的積木。兩種木板可裁得這三種規格的積木個數如右表所示。若欲得甲、乙、丙三種規格的成品各 15，22，27 個，則這兩種木板各需多少塊，才能使總數最少？

規格 / 種類	甲種規格	乙種規格	丙種規格
第一種木板	2	1	1
第二種木板	1	2	3

[解法]：

設使用第一種木板 x 塊，第二種木板 y 塊。

(1) 寫出目標函數：

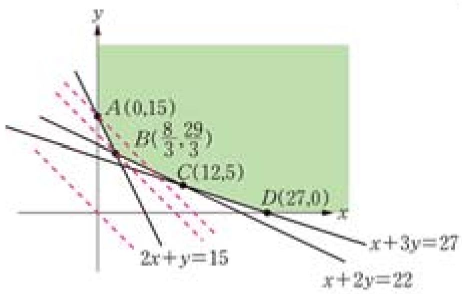
問題要求兩種木板使用的總數最少，即是使目標函數 $P=x+y$ 的值最小。

(2) 根據問題，列出二元一次聯立不等式，並作出可行解區域：

由上表得 $\begin{cases}2x+y\geq 15\text{，}\\ x+2y\geq 22\text{，}\\ x+3y\geq 27\text{，}\\ x\geq 0\text{，}y\geq 0\text{。}\end{cases}$

作出可行解區域，如右圖：

可行解區域各頂點的坐標為



A（0，15），B（$\frac{8}{3}$，$\frac{29}{3}$），C（12，5），D（27，0）。

(3) 尋求最佳解：

$x+y=k$ 表一組斜率爲-1的平行線，愈往右上方移動，y 截距愈大，k 值也就愈大，而且直線 $x+y=k$ 的斜率介於 $2x+y=15$ 與 $x+2y=22$ 兩直線的斜率之間，所以當直線 $x+y=k$ 通過點

B（$\frac{8}{3}$，$\frac{29}{3}$）時，k 值最小，但根據題意，x，y 必須爲整數，所以可行解區域中的格子點才符合題意。將 $x=\frac{8}{3}$，$y=\frac{29}{3}$ 代入 $x+y$，得 $\frac{8}{3}+\frac{29}{3}=\frac{37}{3}=12\frac{1}{3}$，於是可行解區域裡的每個點（$x$，$y$）滿足 $x+y\geq 12\frac{1}{3}$，而其中的格子點（x，y）必須滿足 $x+y\geq 13$。因此可行解區域中滿足 $x+y=13$ 的格子點就是問題的最佳解。將直線 $x+y=k$ 往右上方移動，當 $k=13$ 時，直線 $x+y=13$ 與可行解區域相交的格子點有（2，11），（3，10），（4，9），用不等式組檢驗，這三個格子點的確都在可行解區域內，所以第一種木板與第二種木板各需 2，11 塊或 3，10 塊或 4，9 塊，其總數 13 塊最少。

(練習11) 設x、y滿足 $2\leq x\leq 5$，$x+y\leq 8$，$x+3y\geq 5$，試求：

(1) $2x+y+3$ 的最大值爲________，最小值爲__________。Ans：16,8

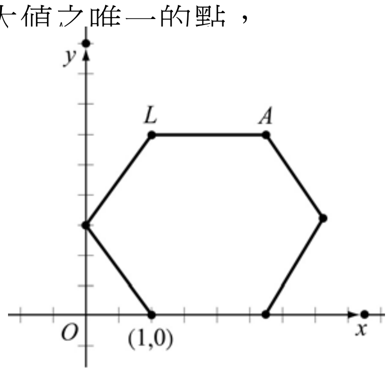
(2) x^2+y^2的最大值爲__________，最小值爲___________。Ans：40,5

(3) $\frac{y+1}{x+1}$的最大值爲___________，最小值爲___________。Ans：$\frac{7}{3}$,$\frac{1}{6}$

(練習12) 設一線性規畫的可行解區域爲如圖所示之正六邊形內部(含邊界)，而目標函數爲 $y-ax$，若已知 A 點爲此目標函數取得最大值之唯一的點，則 a 值的範圍要有限制。

若以不等式表示，則 a 之範圍爲_________。

Ans：$-\sqrt{3}<a<0$【87 自】



(練習13) 在$|x|\leq\frac{1}{2}$，$y\geq 0$，$|x|+y\leq 1$ 的條件下，

求 $3x+8y$ 的最小值與最大值。

Ans：$\frac{-3}{2}$，8

(練習14) 某公司有甲、乙二廠生產三種型式的彩色電視機，其營業狀況如下表所示：

每日生產量（架）／廠別／型式	甲廠	乙廠	每週至少需要量（架）
I	12	3	36
II	4	4	24
III	6	12	48
每日開支（元）	20000	15000	

問甲、乙兩廠每週開工幾日就可以最節省的方式供應所需?
Ans：每週甲開工 2 日，乙開工 4 日最節省

(練習15) 王先生採收酪梨共獲 1080 粒，要打包裝箱上市。已知大箱一箱可裝 25 粒，小箱一箱可裝 8 粒；每個大箱子成本 60 元，每個小箱子成本 20 元。試問能將這 1080 粒的酪梨剛好裝完，所用的箱子成本最少為 ______________元。Ans：2600【89 社】

【詳解】

設用大箱子 x 個，小箱子 y 個

$25x+8y=1080\Rightarrow$設 $x=8t$，$y=135-25t$ 且 $\begin{cases} x=8t\geq 0\Rightarrow t\geq 0 \\ y=135-25t\geq 0\Rightarrow t\leq 5.8 \end{cases}$

所以 $t=0,1,2,3,4,5$

成本：$60x+20y=60(8t)+20(135-25t)=2700-20t$

當 $t=5$ 時，成本有 Min=2600

(練習16) 大盛紙業有限公司有兩家工廠，第一廠生產 $A4$ 紙張 40 噸，第二廠生產 $A4$ 紙張 50 噸。

	甲經銷商	乙經銷商
第一廠	10 元	14 元
第二廠	12 元	15 元

今該公司自甲、乙兩家經銷商接獲訂單，
甲經銷商申購 $A4$ 紙張 30 噸，乙經銷商申購 $A4$ 紙張 40 噸。
如果自第一、二廠運送 $A4$ 紙張至甲、乙兩家經銷商每噸的運費如右上表所示：請幫該公司找出最佳方法（運費最低），以分配兩廠將 $A4$ 紙張運至甲、乙兩經銷商。
Ans：第一廠 30 噸至甲，10 噸至乙；第二廠 30 噸至甲，20 噸至乙

$\boxed{\text{綜合練習}}$

(1) 試作不等式$(2x+y-8)(x+y-5)\leq 0$與 x 軸及 y 軸圍成的區域及其面積。

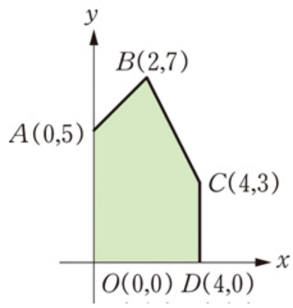
(2) 設聯立方程組$\begin{cases}|4x+y|\leq 2\\ |x-y|\leq 2\end{cases}$的解形成的區域面積爲

________。

(3) 如右圖，設 O（0，0），A（0，5），B（2，7），C（4，3），D（4，0）。

(a) 試以二元一次聯立不等式表示五邊形 $OABCD$ 的內部區域（含邊界）。

(b) 若（x，y）爲五邊形 $OABCD$ 內部區域（含邊界）的點，求 $2x+3y$ 的最大值與最小值。

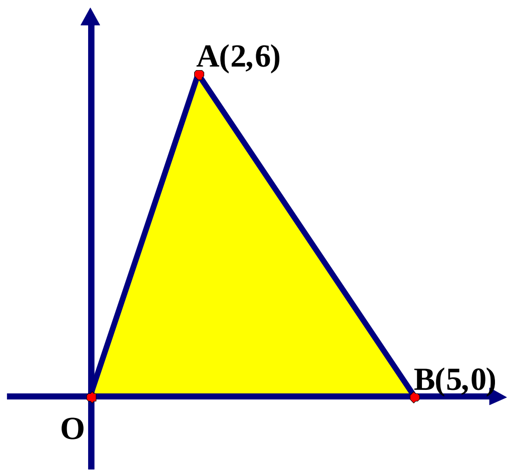


(4) 已知點P(a,b)在三條直線L_1：$4x+3y-12=0$、L_2：$2x-y+4=0$、L_3：$3x-4y-9=0$ 所圍成的三角形內部或邊界上，則P(a,b)的坐標必滿足下列哪些不等式？

(A)$3a-4b-9\geq 0$ (B)$2a-b+4\geq 0$ (C)$a^2+b^2\leq 61$ (D)$-5\leq a\leq 3$ (E)$-11\leq a+b\leq 3$。

(5) 設 $A(-1,3)$，$B(4,1)$，$C(5,6)$，直線 $y=mx-1$恆與ΔABC 相交，則 m 的範圍爲________。

(6) 已知右圖爲二元一次聯立不等式
$\begin{cases}x+ay\geq 0\\ bx+cy\leq 5\\ y\geq 0\end{cases}$的解區域，試求 a,b,c。



(7) 坐標平面上滿足聯立不等式 $|x|+|y|\leq 2$，$|x|+|y-1|\leq 2$ 之區域的面積爲________。(2002 指定考科甲)

(8) 已知一個線性規劃問題的可行解區域爲四邊形 ABCD 及其內部，其中 A(4,0) , B(8,10) ,C(6,14) , D(2,6)爲坐標平面上的四個點。若目標函數 $k=ax+by+32$（a ,b 爲實數）在四邊形 ABCD 的邊界上一點(4,10) 有最小值 18，試求數對(a,b)=？(2010 指定乙)

(9) 某公司召聘新員工，共有 1600 人應徵參加筆試。筆試場地借用甲大學的教室，該校可租借的大教室有 50 間， 每間可容納 40 人， 每間租金 500 元； 小教室有 60 間， 每間可容納 20 人， 每間租金 1 50 元。考慮監考人員的限制，筆試教室不能超過 60 間。試問租借大教室_______ 間， 小教室______ 間，來進行筆試， 最省租借場地費用。(2009 指定乙)

(10) 在一個牽涉到兩個未知量, x y 的線性規劃作業中，有三個限制條件。坐標平面上符合這三個限制條件的區域是一個三角形區域。假設目標函數 $ax+by$ (a , b 是常數)，在此三角形的一個頂點(19,12)上取得最大值 31，而在另一個頂點

(13,10)取得最小值 23。現因業務需要，加入第四個限制條件，結果符合所有限制條件的區域變成一個四邊形區域，頂點少了(19,12)，新增了(17,13)和(16,11)。在這四個限制條件下，請選出正確的選項。

(A) $ax+by$ 的最大值發生在(17,13) (B) $ax+by$ 的最小值發生在(16,11)

(C) $ax+by$ 的最大值是 30 (D) $ax+by$ 的最小值是 27

(2003 指定考科甲)

(11) 為預防禽流感， 營養師吩咐雞場主人每天必須從飼料中提供至少 84 單位的營養素 A、至少 72 單位的營養素 B 和至少 60 單位的營養素 C 給他的雞群。這三種營養素可由兩種飼料中獲得，且知第一種飼料每公斤售價 5 元並含有 7 單位的營養素 A，3 單位的營養素 B 與 3 單位的營養素 C； 第二種飼料每公斤售價 4 元並含有 2 單位的營養素 A，6 單位的營養素 B 與 2 單位的營養素 C。

(1)若雞場主人每天使用 x 公斤的第一種飼料與 y 公斤的第二種飼料就能符合營養師吩咐，則除了 $x\geq 0$ $y\geq 0$ 兩個條件外， 寫下, x y 必須滿足的不等式組。

(2)若雞場主人想以最少的飼料成本來達到雞群的營養要求， 則, x y 的值為何？ 最少的飼料成本又是多少？ (2006 指定考科乙)

(12) 南北生技農場今年生產一種植物共 1 萬公斤，該植物每 200 公斤可提煉 1 公斤的中草藥，每 5 公斤可製成 1 公斤的健康食品。中草藥每公斤可獲利 5000 元，健康食品每公斤可獲利 100 元；根據市場調查，每年中草藥最大需求量為 30 公斤，健康食品最大需求量是 1800 公斤。如果南北生技農場決定提煉中草藥 x 公斤，並製成健康食品 y 公斤，設 P 為其可獲利潤。

(a) 試以 x,y 表示 P。

(b) 如果想獲得最大利潤，則 x,y 的值為何？說明理由。(2004 指定乙)

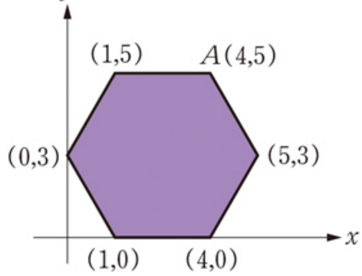
(13) 建築公司在房市熱絡時推出甲、乙兩型熱門預售屋。企劃部門的規劃如下：甲型屋每棟地價成本為 500 萬元， 建築費用為 900 萬元， 乙型屋每棟地價成本為 200 萬元， 建築費用為 1500 萬元， 公司在資金部分限制地價總成本上限為 3500 萬元， 所有建築費用的上限為 1 億 2000 萬元； 無論甲型或乙型售出， 每棟獲利皆為 500 萬元， 假設推出的預售屋皆可售出， 請問推出甲、乙兩型預售屋各幾棟， 公司才可得到最大利潤。(2008 指定乙)

(14) (a)試求不等式 $\begin{cases}(x+y-1)(2x-y+2)\leq 0\\ x-y\leq 0\\ y\leq 2\end{cases}$ 所圍成圖形之面積為何？

(b)若直線 $y=mx-3$ 與(a)圖形相交，則實數 m 之範圍為何？

(15) 設 k 為實數，F 為坐標平面上由下列不等式所定義之區域：$\begin{cases}x+2y\leq 4\\ x-y\leq 1\\ x\geq 0,\ y\geq 0\end{cases}$，若 $z=x+ky$ 在(2,1)處有最大值，試求 k 之範圍。

(16) 設一線性規劃的可行解區域如右圖所示六邊形內部區域（含界），而目標函數為 $y-ax$；若已知 A 點為此目標函數取得最大值之唯一點，則 a 值的範圍要有限制，若以不等式表示，求 a 之範圍。



(17) 設 x、$y\in R$ 且滿足 $x\ge 0$ ， $y\ge 0$ ，$3x+y\le 3$ ，$2x+3y\le 6$ ，
則下列各選項何者正確？
(A)$2x-y$ 的最大值為 2　　(B)$2x-y$ 的最小值為-1
(C) $(x-2)^2+(y-1)^2$ 的最小值為 $\dfrac{8}{5}$　　(D) $\dfrac{y+1}{x+2}$ 的最大值為 $\dfrac{3}{2}$

(18) 一農民有田五甲，手頭資金共 48000 元，依他的經驗，在他田地上種稻每甲每年產量為 8000 公斤，種花生則為 2000 公斤，但種稻成本每甲每期為 16000 元，花生為 4000 元。今設稻米之收益為每公斤 2.6 元，花生為 6.5 元。試問這位農民能得到的最大收益為 ＿＿＿＿＿ 元。

(19) 某自行車公司在新竹、台中個有一個倉庫，新竹存貨 700 輛自行車，台中存貨 800 輛自行車，現在公司接獲桃園客戶訂 480 輛、台北客戶訂 360 輛，而由新竹運到桃園每輛自行車運費 46 元，由新竹運到台北每輛自行車運費 53 元，由台中運到桃園每輛自行車運費 50 元，由台中運到台北每輛自行車運費 55 元，現在想知道公司要如何配送才能使總運費最低？設配送方式為新竹送到桃園 x 輛，新竹送到台北 y 輛，試求：
(a)x,y 必須滿足的不等式組。
(b)總運費的目標函數
(c)在 xy 平面上做出(a)的圖形
(d)如何配送才能使得總運費最低？最低運費又是多少？
(2008 台北區指考模擬考 1)

(20) 一五金商有二工廠，第一廠有產品 40 單位，第二廠有產品 50 單位，該商人自甲、乙二鎮獲貨單，甲鎮申購產品 30 單位，乙鎮申購產品 40 單位，如果自第一、二廠運產品至甲、乙兩鎮，每單位運費如下表所示，應如何分配二廠產品數量至甲、乙，以使運費最低?
(a)第一廠運＿＿＿＿單位到甲鎮，＿＿＿＿單位到乙鎮．
(b)第二廠運＿＿＿＿單位到甲鎮，＿＿＿＿單位到乙鎮．
(c)最低運費＿＿＿＿元．

	甲鎮	乙鎮
第一廠	10 元	14 元
第二廠	12 元	15 元

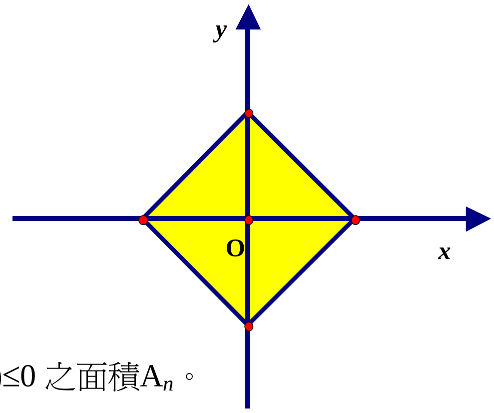
(21) 某貨運公司有載重 4 噸的「小」貨車 7 輛，載重 5 噸的「大」貨車 4 輛，及 9 名司機，現在受託每天至少要運送 30 噸的煤，則
(a) 這家公司有幾種調度車輛的辦法？
(b) 設運送一趟的成本，「小」貨車需花費 500 元，「大」貨車需花費 800 元，則公司如何調派才能使成本最節省？花費多少元？

(22) 設 x,y 為實數，請就 a 的值來討論方程組 $\begin{cases} |x|+|y|=a \\ |x+y|+|x-y|=4 \end{cases}$ 解的個數。

(23) $p\ge 0,q\ge 0,r\ge 0$，$p+q+r=1$，求滿足 $x=p+3q+4r$，$y=2p+q+3r$，之點(x,y)所形成區域面積。

(24) 設 $a\ge b\ge c\ge -2$，$3a+2b-c=4$，則 $a+2b+c$ 的最大值=？

(25) 若 x,y 滿足 $x\geq 0, y\geq 0, 2x+y-2\leq 0, x+2y-2\leq 0$，則 xy 的最大值=？最小值=？



進階問題

(26) 在坐標平面上，$|x|+|y|-1\leq 0$ 的圖形，如右圖所示：

(a)請畫出$(|x|+|y|-1)(|x|+|y|-\frac{1}{2})\leq 0$ 的圖形。

(b)請畫出$(|x|+|y|-1)(|x|+|y|-\frac{1}{2})(|x|+|y|-\frac{1}{4})\leq 0$ 的圖形。

(c)請求出$(|x|+|y|-1)(|x|+|y|-\frac{1}{2})(|x|+|y|-\frac{1}{4})\cdots(|x|+|y|-\frac{1}{2^{n-1}})\leq 0$ 之面積A_n。

(27) 已知 $0\leq x\leq 1$，$f(x)=|2x-1|$，試求

(a)作出 $y=f(f(x))$之圖形。

(b)滿足方程式 $f(f(f(x)))=x$ 的值有幾個。(2002 台北區指考模擬測驗 2)

(28) 實係數二次方程式$x^2-ax+b=0$ 的二實根α,β滿足$-1\leq\alpha\leq 0$，$1\leq\beta\leq 2$，如此的(a,b)圍成一區域，試求

(a)$2a+b$的最大值=？最小值=？ (b)a^2+b^2的最小值=？

綜合練習解答

(1) $\frac{11}{2}$

(2) $\frac{16}{5}$

(3) (a) $\begin{cases} x-y+5\geq 0， \\ 2x+y-11\leq 0， \\ x\leq 4， \\ x\geq 0，y\geq 0 \end{cases}$ (b) 最大值 25，最小值 0

(4) (B)(C)(D)

(5) $m\leq -4$ 或 $m\geq\frac{1}{2}$

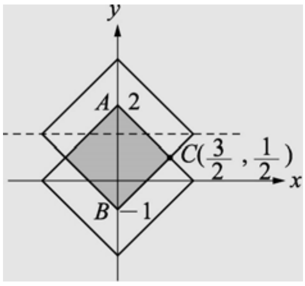
(6) $a=\frac{-1}{3},b=1,c=\frac{1}{2}$

(7) $\frac{9}{2}$

$|x|+|y-1|=2$ 即 $|x|+|y|=2$ 上移 1 單位

可得所求面積之對角線 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=\frac{3}{\sqrt{2}}$，

所以面積$=\frac{9}{2}$



(8) (14,−7)

[解答]：

因為可行解區域為四邊形區域，且目標函數 $k=ax+by+32$

所以最小值會發生在頂點或邊界上。

已知最小值發生在邊界的內點 E(4,10)，故邊界上的點(包含頂點)都會發生最小值。經畫圖或檢查斜率，可以得知 E(4,10)會落在$\overline{CD}$上，

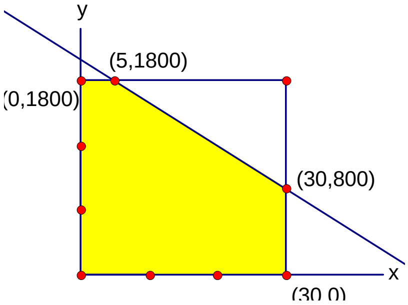
因此目標函數 $k=ax+by+32$ 會在頂點 C、D 上發生最小值。

故可以得到 $18=4a+10b+32$，$18=2a+6b+32$，解得 $a=14$ 或 $b=-7$。

(9) 20、40

(10) (A)(C)

(11) (1) $\begin{cases} 7x+2y\geq 84 \\ x+2y\geq 24 \\ 3x+2y\geq 60 \end{cases}$ (2)目標函數 $f(x,y)=5x+4y$ 在$(x,y)=(18,3)$時有最小值 102。



(12) (a) $P=5000x+100y$ (b) 依題意 (x,y) 滿足

$$:\begin{cases}0\le x\le 30\\0\le y\le 1800\\200x+5y\le 10000\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 30\\0\le y\le 1800\\40x+y\le 2000\end{cases}$$

可行解區域如右圖 $P=5000x+100y$ 表斜率為 -50 的直線在可行解區域平行移動到過 $(30,800)$ 時有最大值，提煉中草藥 30 公斤，製成健康食品 800 公斤，可獲得最大利潤

(13) 各推 5 棟預售屋

(14) (a)$\frac{29}{12}$ (b)$m\le\frac{-1}{2}$或 $m\ge 7$

(15) $-1\le k\le 2$

(16) $-2<a<0$

(17) (A)(C)(D)

(18) 83200 元

(19) (a)$\begin{cases}0\le x\le 480\\0\le y\le 360\\x+y\le 700\\40\le x+y\end{cases}$ (b)$2x+y$ (c)略 (d)$x=480$、$y=220$ 時總運費 41440 元最低

(20) (a)30，10，(b)0，30，(c)890

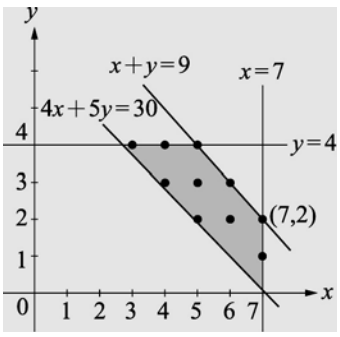
(21) (a) 10 種；(b)小貨車 5 輛，大貨車 2 輛，花費最省花費 4100 元

【詳解】

(1)

設小貨車用 x 輛，大貨車用 y 輛

$$\begin{cases}0\le x\le 7\\0\le y\le 4\\0\le x+y\le 9\\4x+5y\ge 30\end{cases}\quad x，y\in Z$$



在可行解區域可找到的格子點有

x	3	4	5	6	7
y	4	3，4	2，3，4	2，3	1，2

共有 10 個格子點⇒有 10 種調度車輛的方式

(2)目標函數 $f(x，y)=500x+800y$

將格子點代入，則 $f(5，2)=4100$ 有最小值

∴ 需小貨車 5 輛，大貨車 2 輛，花費最省為 4100 元

(22) 若 $a=2$ 或 4，則有 4 組解。若 $2<a<4$，則有 8 組解，若 $a<2$ 或 $a>4$，則無解。

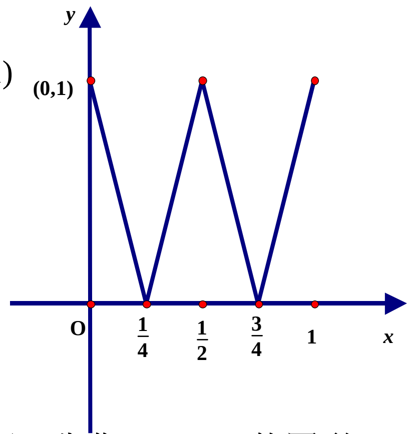
(23) $\frac{5}{2}$ [提示：用 x,y 表示 $p,q,r \Rightarrow p=\frac{-2x+y+5}{5},q=\frac{x-y+1}{2},r=\frac{-x+3y-5}{10}$，再根據
$p\geq 0,q\geq 0,r\geq 0$ 求出滿足條件之點(x,y)的區域。]

(24) 4

(25) $\frac{4}{9}$，0

(26) (c)$A_n=\frac{8}{5}[1-(\frac{-1}{4})^n]$

(27) (a)



(b)8 個解

[提示：先作 $y=|2x-1|$的圖形，再將 $y=|2x-1|$的圖形沿 y 軸伸縮 2 倍再下移 1 單位，再將 x 軸下方的圖形對 x 軸作鏡射即可得(a)的圖形。
(b)$y=f(f(f(x)))$的圖形是將(a)的圖形沿 y 軸伸縮 2 倍再下移 1 單位，再將 x 軸下方的圖形對 x 軸作鏡射所得到的，再討論與 $y=x$ 的交點即可知有 8 個交點。]

(28) (a)4，-1 (b)$\frac{1}{2}$

[提示：令$y=f(x)=x^2-ax+b$，根據$-1\leq\alpha\leq 0$，$1\leq\beta\leq 2$

可得$f(-1)>0$，$f(0)<0$，$f(1)<0$，$f(2)>0 \Rightarrow \begin{cases} 1+a+b>0 \\ b<0 \\ 1-a+b<0 \\ 4-2a+b>0 \end{cases}$]