第十六單元　和角公式

(甲)和角公式

(1)**公式一：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$**

證明：

先做一單位圓，如右圖其中 A(cosα，sinα)、B(cosβ，sinβ)，

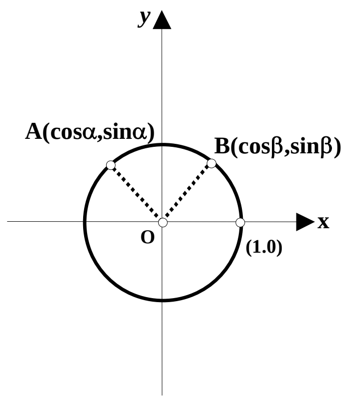
設 O、A、B 三點不共線，令∠AOB=α−β，

因為$\overline{AB}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)$......①

利用餘弦定理：$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos(\alpha-\beta)$

所以$\overline{AB}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$..............................②

由① ②可得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$



討論：

(a)如果 A,O,B 共線上述的結果會成立嗎？

(b)α−β不再[0,π]的範圍內時，上述的結果會成立嗎？

(2)**公式二：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$**

證明：

(3)**公式三：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$**

證明：

(4)**公式四：$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$**

證明：

(5)**公式五：$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$**

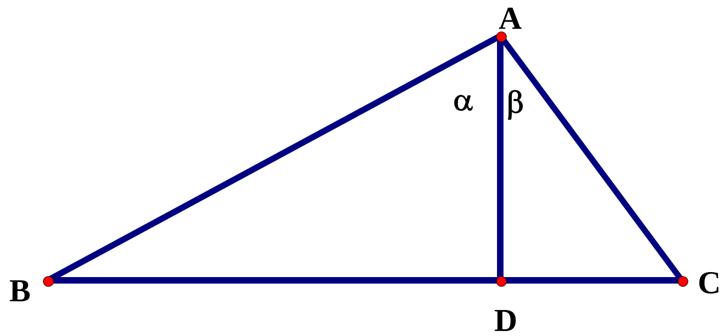
證明：

(6)公式六：**$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$**

證明：

和角公式的精神：
已知兩個角度的三角函數，即可得兩個角度的和或差的三角函數。

(練習1) (1)如圖，設 $0°<\beta\leq\alpha<90°$，其中$\overline{AD}$為$\overline{BC}$邊上的高，$\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$
利用ΔABD、ΔCAD、ΔABC 的面積關係來證明：
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$



(2) 推導其他的和角公式。

[例題1] 試求 cos15°，sin105°，tan75°之值。
Ans：$\cos15°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin105°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\tan75°=2+\sqrt{3}$

[例題2] 設$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$，且$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{-12}{13}$，則

(1)$\sin(\alpha-\beta)=$_____。(2)$\cos(\alpha-\beta)=$_______。(3)$\alpha-\beta$為第____象限角。

Ans：(1)$\frac{-56}{65}$ (2)$\frac{33}{65}$ (3)四

(練習2) 設$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$，且$\cos\alpha=\frac{-3}{5}$，$\sin\beta=\frac{-12}{13}$，試求

(1)$\sin(\alpha+\beta)=$_______；(2)$\cos(\alpha-\beta)=$_________。

(練習3) 計算下列各小題：

(1)$\sin195°$ (2)$\cos75°$ (3)$\tan15°$ Ans：(1)$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (2)$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (3)$2-\sqrt{3}$

(練習4)試化簡下列各小題：

(1) $\sin\frac{7\pi}{9}\cos\frac{23\pi}{36}+\cos\frac{7\pi}{9}\sin\frac{23\pi}{36}$ (2)$\sin68°\cos23°-\sin23°\cos68°$

(3)$\cos44°\sin164°-\sin224°\cos344°=$？

(4) 求$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})+\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=$？

Ans：(1)$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4)0

(練習5)若$\tan\alpha$，$\tan\beta$為$x^2+9x-4=0$之二根，試求

(1)$\tan(\alpha+\beta)=$？ (2)$\sin^2(\alpha+\beta)+9\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-4\cos^2(\alpha+\beta)=$？

Ans：(1)$\frac{-9}{5}$ (2)-4

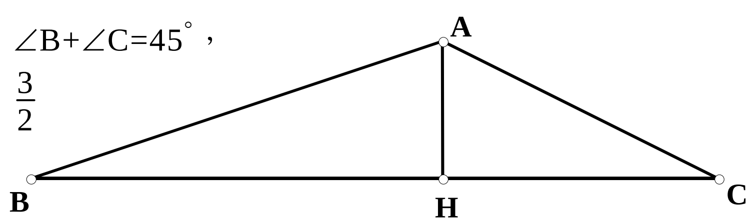
(練習6) 如右圖，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$且$\overline{BC}=5\overline{AH}$，$\angle B+\angle C=45^{\circ}$，

若$\overline{BH}>\overline{HC}$，則$\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}=$？ Ans：$\frac{3}{2}$

[提示：令 BH=x，HC=1，

則 AH=$\frac{1}{5}(x+1)$，

再利用$\tan(B+C)=\tan45^{\circ}=1$，求$x$的值。]



(練習7) 設 tanα=1，tan(α −β)=$\frac{1}{\sqrt{3}}$，試求 tanβ之值。 Ans：$2-\sqrt{3}$

(練習8) 試證：$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$ ，$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

(練習9) 試求下列各值：

(1)$\tan12^{\circ}+\tan48^{\circ}+\sqrt{3}\tan12^{\circ}\tan48^{\circ}$=_____。[提示：考慮 tan(12°+48°)]

(2)$\frac{\tan 227^{\circ}-\tan 287^{\circ}}{1-\tan 133^{\circ}\tan 107^{\circ}}$=______。

(3)$\sqrt{3}\cdot\cot20^{\circ}\cot40^{\circ}-\cot20^{\circ}-\cot40^{\circ}$=_____。[提示：考慮 cot(40°+20°)]

Ans：(1)$\sqrt{3}$ (2)$-\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{3}$

(乙)和角公式的應用

(1)善用和角公式的精神：

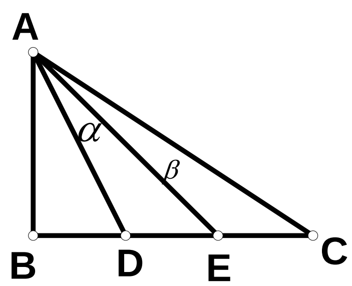
已知兩個角度的三角函數，即可得兩個角度的和或差的三角函數。

[例題3] 在ΔABC 中，已知$\overline{AB}$=5，$\cos\angle ABC=\frac{-3}{5}$ ，且其外接圓半徑為$\frac{13}{2}$，則 sin∠BAC=？ Ans：$\frac{33}{65}$ (2010 指定甲)

[例題4] 如右圖，∠ABC=90°，$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}=\frac{1}{2}\overline{AB}$，$\angle DAE=\alpha$ ，$\angle EAC=\beta$ ，則

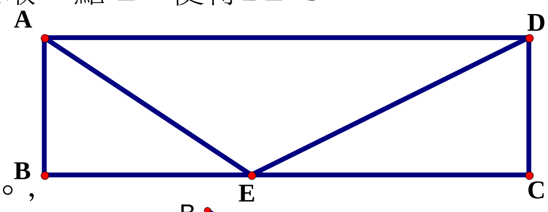
(1) $\tan\alpha=$？ (2) $\cos\beta=$？

Ans：(1)$\frac{1}{3}$ (2)$\frac{5\sqrt{26}}{26}$



(**練習**10)矩形 ABCD 中，若$\overline{AB}$=2，$\overline{BC}$=7，在$\overline{BC}$上取一點 E，使得$\overline{BE}$=3，

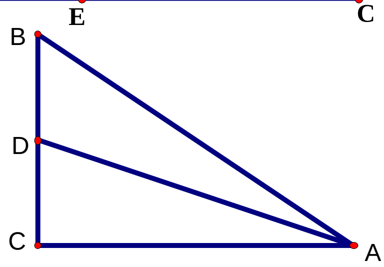
試求 tan∠AED=__________。Ans：$\frac{-17}{6}$



(**練習**11)右圖是一個直角三角形 ABC，其中∠C=90°，

∠BAD=θ，若$\overline{CD}$=$\overline{BD}$=1，$\overline{AC}$=3，則 tanθ=？

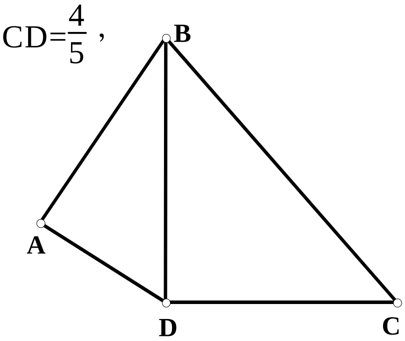
(A)$\frac{3}{11}$ (B)$\frac{1}{7}$ (C)$\frac{2}{9}$ (D)$\frac{1}{9}$ (E)$\frac{1}{3}$。Ans：(A)



(**練習**12)已知四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}$=16，$\overline{BC}$=25，$\overline{CD}$=15，

∠ABC 及∠BCD 皆為銳角，而 sin∠ABC=$\frac{24}{25}$，sin∠BCD=$\frac{4}{5}$，

求(1)$\overline{BD}$=？　(2)$\overline{AD}$=？Ans：(1)20　(2)12



(**練習**13)ΔABC 為等腰直角三角形，∠C=$\frac{\pi}{2}$，D,E 將$\overline{BC}$分成三等分，試求

tan∠DAE=_____。Ans：$\frac{3}{11}$

[提示將∠DAE 分成兩個角的差，即∠DAE=∠CAE−∠CAD，已知 tan∠CAE=$\frac{2}{3}$，tan∠CAD=$\frac{1}{3}$，可得 tan∠DAE]

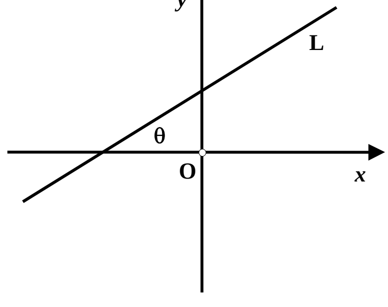
(2)兩直線的夾角

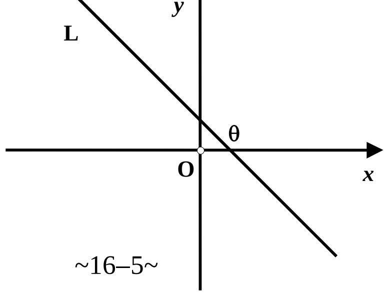
(a)若直線 L 與 x 軸正向的夾角為θ，θ稱為直線 L 的斜角，特別當直線 L 與 x 軸重合，直線 L 的斜角定義成 0，直線 L 與 x 軸平行直線 L 的斜角定義成π。

(b)當直線 L 的斜角為θ(θ≠$\frac{\pi}{2}$)，則直線 L 的斜率為 tanθ。

(b)若兩直線的斜率分別為 m_1,m_2 且兩直線夾角為θ，

則 $\tan\theta=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$。





[例題5] (1)設兩直線 $x-2y+3=0$ 與 $3x+y-1=0$ 的夾角為 θ，則 $\sin\theta=$？
(2)過點 $(1,3)$ 且與直線 $y=2x+6$ 的夾角為 45° 的直線方程式為？
Ans：(1)$\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ (2) $y=-3(x+1)$ 或 $y=\dfrac{1}{3}(x-1)+3$
[解法]：
(1)兩直線斜率為 $\dfrac{1}{2}$，-3，則 $\tan\theta=\pm\dfrac{\frac{1}{2}-(-3)}{1+\frac{1}{2}\cdot(-3)}=\pm7$ 故 $\sin\theta=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$
(2)令直線斜率為 m，則 $\tan45°=\left|\dfrac{2-m}{1+2m}\right|$ $\Rightarrow|1+2m|=|2-m|$
平方可得 $3m^2+8m-3=0$，則 $m=-3$ 或 $\dfrac{1}{3}$
故直線為 $y=-3(x+1)$ 或 $y=\dfrac{1}{3}(x-1)+3$

(練習14) (1)設兩直線 $x+y+3=0$ 與 $\sqrt{3}x+y-1=0$ 的夾角為 θ，則 $\tan\theta=$？
(2)求過點 $(\sqrt{3},2)$ 與直線 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 之夾角為 $30°$ 的直線方程式。
Ans：(1)$\pm(2-\sqrt{3})$ (2)$y=2$ 或 $\sqrt{3}x-y=1$

(3)和差與積的互化公式(補充教材)
(a)積化為和差
由正餘弦的和角公式：
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ……①
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ……②
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$……..③
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$……..④

可得出：

① +② $\Rightarrow 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$
① −② $\Rightarrow 2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$
③ +④ $\Rightarrow 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$
③ −④ $\Rightarrow 2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

我們將其整理成：

(a) $\boxed{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$

(b) $\boxed{2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$

$\boxed{\textbf{(c) } 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$

$\boxed{\textbf{(d) } 2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$

例如：

將下列三角函數的乘積，化成三角函數的和差

$\sin82.5^\circ\cos37.5^\circ=\frac{1}{2}(\sin120^\circ+\sin45^\circ)=\frac{1}{2}[\sin120^\circ-\sin(-45^\circ)]$

$\cos82.5^\circ\sin37.5^\circ=\frac{1}{2}(\sin120^\circ-\sin45^\circ)=\frac{1}{2}[\sin120^\circ+\sin(-45^\circ)]$

cos 與 sin 相乘如果 sinθ的角度比 cos 的角度大，適合用公式(a)
cos 與 sin 相乘如果 sinθ的角度比 cos 的角度小，適合用公式(b)

$\cos23^\circ\cos37^\circ=\frac{1}{2}[\cos60^\circ+\cos(-14^\circ)]=\frac{1}{2}(\cos60^\circ+\cos14^\circ)$

$\sin23^\circ\sin37^\circ=\frac{1}{2}[\cos(-14^\circ)-\cos60^\circ]=\frac{1}{2}[\cos14^\circ-\cos60^\circ]$

cos 與 cos 相乘 一定是 cos+cos 角度兩個相加、兩個相減。
sin 與 sin 相乘 一定是 cos−cos 角度(兩個相減)減去(兩個相加)。

(b)和差化為積

想法：任何兩角 x,y 一定可以找到二數α,β使得$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{cases}$，此時$\alpha=\frac{x+y}{2}$ 、$\beta=\frac{x-y}{2}$，代入積化為和的關係式中，可得

$\boxed{\textbf{(a)}\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$

$\boxed{\textbf{(b)}\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}$

$\boxed{\textbf{(c)}\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$

$\boxed{\textbf{(d)}\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}$ **(注意此式中有負號)**

例如：

$\sin110^\circ+\sin10^\circ=2\sin60^\circ\cos50^\circ$

$\sin110^\circ-\sin10^\circ=2\cos60^\circ\sin50^\circ$

$\cos110^\circ+\cos10^\circ=2\cos60^\circ\cos50^\circ$

$\cos110^\circ-\cos10^\circ=-2\sin60^\circ\sin50^\circ$

上面的公式，角度的原則都是(前+後)/2，(前−後)/2。

[例題6] 化簡下列各式：
(1)$\cos65^\circ\cdot\sin110^\circ+\cos25^\circ\cdot\sin20^\circ$　(2)$\sin37.5^\circ\cdot\sin7.5^\circ$　(3)$\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ$
Ans：(1)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　(2)$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$　(3)$\frac{\sqrt{3}}{8}$

[例題7] 化簡下列兩式：
(1)$\sin10^\circ-\sin110^\circ+\sin130^\circ$　(2) $\sin^2\theta+\sin^2(\frac{\pi}{3}+\theta)+\sin^2(\frac{\pi}{3}-\theta)$
Ans：(1)0 (2)$\frac{3}{2}$

(練習15) 化簡下列各式：
(1) $\sin100^\circ\sin140^\circ\sin160^\circ$
(2)$\cos100^\circ\cos120^\circ\cos140^\circ\cos160^\circ\cos180^\circ$
(3) $\sin100^\circ\sin(-160^\circ)+\cos200^\circ\cos(-280^\circ)$
(4) $\cos55^\circ\cos65^\circ+\cos65^\circ\cos175^\circ+\cos175^\circ\cos55^\circ$
Ans：(1)$\frac{\sqrt{3}}{8}$ (2)$\frac{-1}{16}$ (3) $\frac{-1}{2}$ (4) $\frac{-3}{4}$

(練習16) 化簡下列各式：

(1)$\cos 80^\circ+\cos 40^\circ-\cos 20^\circ$ (2)$\cos^2\theta+\cos^2(\frac{\pi}{3}+\theta)+\cos^2(\frac{\pi}{3}-\theta)$

(3)$\sin 5^\circ+\sin 125^\circ-\sin 115^\circ$ (4)$\cos 10^\circ+\cos 110^\circ+\cos 130^\circ$

Ans：(1)0 (2)$\frac{3}{2}$ (3)0 (4)0

(練習17) 求$\frac{\sin 55^\circ \sin 35^\circ}{\cos 80^\circ+\cos 40^\circ}$之值。 Ans：$\frac{1}{2}$

(練習18) 設 $\sin(x+y)=\frac{33}{65}$，$\sin(x-y)=\frac{-63}{65}$，求 $\cos x \sin y$ 之值。Ans：$\frac{48}{65}$

(練習19)$\theta=\frac{\pi}{8}$，求$\frac{\sin 5\theta+\sin\theta}{\cos 5\theta+\cos\theta}$之值。Ans：$\sqrt{2}+1$

綜合練習

(1) ΔABC 為邊長為 5 的正三角形，P 點在三角形內部，若線段長度$\overline{PB}$=4 且$\overline{PC}$=3，則 cos∠ABP=____________
(四捨五入到小數點後第二位，$\sqrt{2}$的近似值是 1.414，$\sqrt{3}$的近似值是 1.732)
(2009 指定甲)

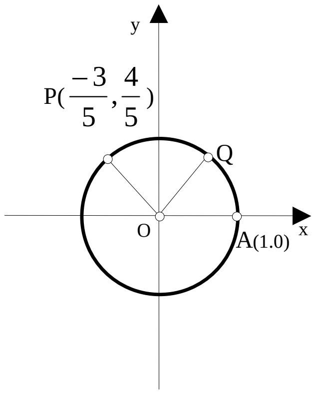
(2) 設 $\sec\alpha=\frac{5}{3}$，$\cot\beta=\frac{8}{15}$，$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，$\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$，求 $\sin(\alpha+\beta)=$？

(3) 化簡下列兩小題：

(a)$\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\cos(\theta-\frac{\pi}{3})-\cos(\theta+\frac{\pi}{3})\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=$？

(b)$\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}+\frac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\frac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}=$？

(4) 如右圖：設 A(1,0)，Q(m,n)，P$(\frac{-3}{5},\frac{4}{5})$均在單位圓上，$\angle QOP=\frac{\pi}{3}$，算出點 Q 的坐標。



(5) 設 sin84°＝a，cos63°＝b，則
(A) cos21°＝$b\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-b^2}$
(B) sin21°＝$ab-\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}$
(C) sin147°＝$ab+\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}$
(D) cos147°＝$b\sqrt{1-b^2}-a\sqrt{1-a^2}$ 。

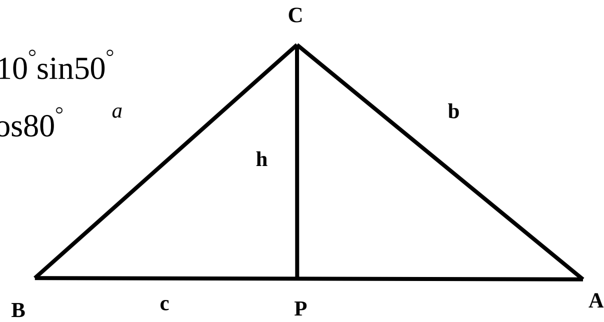
(6) 令 sin84°=a，cos63°=b，試以 a,b 表示 sin147°及 cos21°。

(7) 求$\frac{2\sin80^\circ-\cos70^\circ}{\cos20^\circ}=$？

(8) 化簡下列各式：

(a)$2\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}$ (b)$\sin20^\circ\cos70^\circ+\sin10^\circ\sin50^\circ$

(c)$\sin^2 10^\circ+\cos^2 20^\circ-\sin10^\circ\cos20^\circ$ (d)$\cos20^\circ-\cos40^\circ-\cos80^\circ$

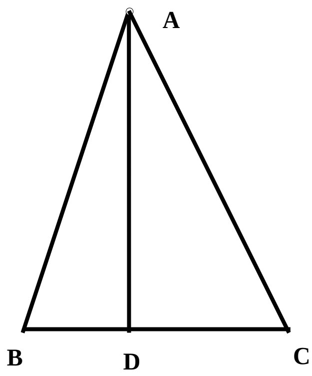


(9) 令$\theta=\frac{\pi}{18}$，求$\frac{\sin5\theta+\sin\theta}{\cos5\theta+\cos\theta}$ 的值。

(10) 如圖，ΔABC 的對邊分別為 a,b,c，P 為 C 點的垂足，h 為高，BP=x，AP=y，則下列那些選項必定為真？

(A)cosC= $\frac{h}{a}+\frac{h}{b}$ (B)cosC= $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ (C)cosC=cos(A+B)

(D)cosC=$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ac}$(E)cosC= $\frac{h^2-xy}{ab}$ 。(91 學科)

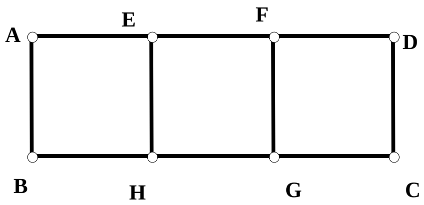


(11) 如右圖，在ΔABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$於 D 點，

且$\overline{AD}$：$\overline{BD}$：$\overline{CD}$=6：2：3，求∠BAC=？。

(12) 坐標平面上設 $A(2，4)$，$B(3，1)$，$O(0，0)$，則 tan∠AOB＝_______ 。

(13) 矩形 ABCD，AB=1，AD=3，分割如圖，令∠AFB=θ ，∠ADB=ϕ，求θ+ϕ=______ 。

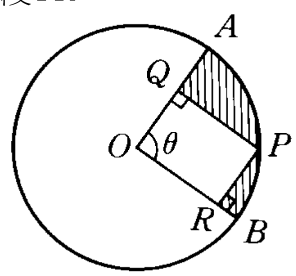


(14) 半徑 14 的圓 O 上有一扇形 AOB；如圖所示，在 $\overset{\frown}{AB}$ 弧上取一點 P，

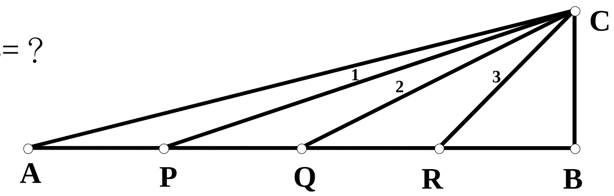
已知 P 對$\overline{OA}$作垂直線段$\overline{PQ}$，其長為 13；P 對$\overline{OB}$作垂直線段$\overline{PR}$，其長為 11。則：

(a)若此扇形 AOB 的圓心角 θ ，則 θ 為________ 。

(b)斜線面積為_________ 。

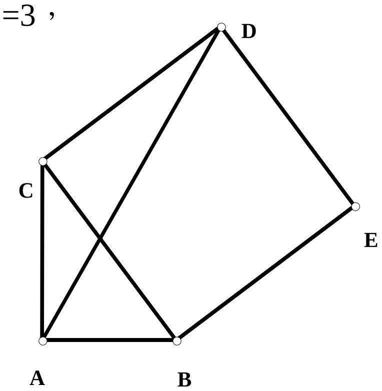


(15) 如圖，設 AP=PQ=QR=RB=BC，求(a)tan∠1=？ (b)tan∠2=？ (c)tan∠3=？



(16) 設ΔABC 為一直角三角形，BCDE 為

以$\overline{BC}$為一邊向外作出的正方形，若$\overline{BC}$=5，$\overline{CA}$ =4，$\overline{AB}$ =3，試求 cos∠ACD=_______ ，ΔACD 的面積=__________ 。



(17) 設 A,B,C 為ΔABC 三內角的度量，且 tanA,tanB,tanC 均有意義，試證：tanA+tanB+tanC=tanA·tanB·tanC

(18) 設 A，B，C 均為正銳角，tanA＝2，tanB＝4，tanC＝13，
則(a)tan(A＋B)＝__________；(b)A＋B＋C＝__________。

(19) 函數 $f(x)=\frac{1}{2}(\cos 10x-\cos 12x)$，$x$ 為實數。則下列選項那些是正確的？
(A)$f(x)=\sin 11x\sin x$ 恆成立 (B)$|f(x)|\le 1$ (C)$f(x)$的最大值是 1 (D)$f(x)$的最小值是-1 (E)$f(x)=0$ 有無窮多解。 (2002 學科)

(20) 已知ΔABC為銳角三角形，$\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=10$，D點在$\overline{BC}$邊上，∠BAD=α，$\overline{BD}$：$\overline{CD}$=3：2，若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，(a)求 cosA=？ (b)$\overline{BC}$邊之長為何。

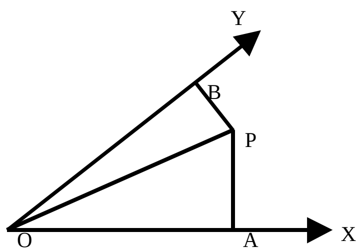
進階問題

(21) 設α+β+γ=π，證明：$\cot\alpha\cot\beta+\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha=1$

(22) 已知 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$且 $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{3}$，求 $\cos(\alpha-\beta)$與 $\cos(\alpha+\beta)$的值。

(23) 設 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$，試求 $\cos(\alpha-\beta)$=______。

(24) 過銳角∠XOY 內部一點 P 作$\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}$之垂線，垂足為 A、B，
若∠XOY=θ，試證：$\dfrac{\overline{PA}+\overline{PB}}{\overline{OA}+\overline{OB}}=\tan\dfrac{\theta}{2}$。



(25) 請證明：(a)$\sin(x+y)\sin(x-y)=\sin^2x-\sin^2y$。
(b)$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2x-\sin^2y$。

(26) α ,β ,γ ,δ 均為正銳角，$\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=\frac{1}{5}$，$\tan\gamma=\frac{1}{7}$，$\tan\delta=\frac{1}{8}$，
求α +β +γ +δ =____。

(27) 設 $\cos x+\cos y=a$，$\sin x+\sin y=b$，試以 a,b 表示 $\cos(x-y)$=？

(28) 設 tanα、tanβ為 $x^2+px+q=0$ 之二根($p^2-4q\ge 0$)，試以 p,q 表示
(a)$\tan(\alpha+\beta)$=？ (b)$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$=？

(29) 設 A,B,C 為銳角ΔABC 三內角的度量，且 tanA,tanB,tanC 均有意義，
試求 tanA·tanB·tanC 之最小值。

(30) 設 $x^2-px+q=0$ 的二根為 tanα，tanβ，且 tanα+tanβ≠0，試求$\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$=_____。

(31) 化簡$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2^{\circ}}{\sin(2k-1)^{\circ}\cdot\sin(2k+1)^{\circ}}$。 (Hint：$\sin 2^{\circ}=\sin[(2k+1)^{\circ}-(2k-1)^{\circ}]$)

(32) 求$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\theta}{2^k}\cdot\cos\frac{3\theta}{2^k}=$？

綜合練習解答

(1) 0.92

(2) $\frac{-13}{85}$

(3) (a)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b)0

(4) Q($\frac{-3+4\sqrt{3}}{10}$,$\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$)[提示：設∠AOP=α，即得 $\cos\alpha=\frac{-3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，因為$\angle QOP=\frac{\pi}{3}$ 所以$\angle AOQ=\alpha-\frac{\pi}{3}$，$\Rightarrow m=\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})$，$n=\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})$]

(5) (A)(B)(C)

(6) $ab+\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}$，$b\cdot\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-b^2}$

(7) $\sqrt{3}$ [提示：化 $2\sin80^{\circ}=\sin80^{\circ}+\sin80^{\circ}$]

(8) (a)0 (b)$\frac{1}{4}$ (c)$\frac{3}{4}$ (d)0

(9) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(10) (E)

(11) $\frac{\pi}{4}$

(12) 1

(13) $\frac{\pi}{4}$ (Hint：利用 tanθ與 tanϕ的值求 tan(θ+ϕ))

(14) (a)$\frac{2\pi}{3}$ (b)$\frac{196\pi}{3}-47\sqrt{3}$

(15) (a)$\frac{1}{13}$ (b)$\frac{1}{7}$ (c)$\frac{1}{3}$

(16) $\frac{-3}{5}$，8

(17) [提示：利用 $A+B+C=180^{\circ}$，$A+B=180^{\circ}-C\Rightarrow\tan(A+B)=\tan(180^{\circ}-C)$，再利用和角公式展開化簡即可得 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$]

(18) (a)$\frac{-6}{7}$(b)$\frac{5\pi}{4}$

(19) (A)(B)(D)(E)

[提示：由和差化積的公式，可得 $f(x)=\frac{1}{2}(\cos10x-\cos12x)=\sin11x\sin x$，因為$|\sin11x|\le1$ 且$|\sin x|\le1$，所以$|f(x)|\le1$，當 $f(x)=1$ 時 $\sin11x\sin x=1$，但是並沒有 x 滿足這個結果，所以 $f(x)$的最大值不是 1，當 $x=\frac{\pi}{2}$時，$f(\frac{\pi}{2})=-1$，

所以 $f(x)$的最小值是-1]

(20) (a)$\frac{3}{5}$ (b)$\sqrt{65}$

(21) 證法與(16)相同

(22) $\cos(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{-59}{72}$

[提示：$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$ …….(A)，$\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{3}$ ……..(B)，

$(A)^2+(B)^2 \Rightarrow 2+2\cos(\alpha+\beta)=\frac{13}{36}$，

由(A)$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}$，由(B)$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{3}$，將兩式

相除，得 $\tan\frac{\alpha-\beta}{2}$，再求 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$]

(23) $\frac{-1}{2}$ (Hint：將 $\cos\alpha+\cos\beta=-\cos\gamma$，$\sin\alpha+\sin\beta=-\sin\gamma$兩式平方相加)

(24) [提示：設$\angle POA=\alpha$，$\angle POB=\beta$，$PA=OP\cdot\sin\alpha$，$PB=OP\cdot\sin\beta$ $OA=OP\cdot\cos\alpha$，

$OB=OP\cdot\cos\beta$ $\frac{PA+PB}{OA+OB}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$

$=\tan\frac{\theta}{2}$。]

(25) 利用和角公式直接計算，即可得證.

(26) $\frac{\pi}{4}$ [提示：可以先計算 $\tan(\alpha+\beta)$、$\tan(\gamma+\delta)$，再計算 $\tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$的值]

(27) $\frac{1}{2}(a^2+b^2-2)$

(28) (a)$\frac{-p}{1-q}$ (b)q

(29) $3\sqrt{3}$ (Hint：利用不等式$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$，其中 a,b,c 為正數與練習 16)

(30) $\frac{1+q}{p}$

(31) $\cot1^\circ-\cot(2n+1)^\circ$

(32) $\frac{1}{2}(\sin2\theta-\sin\frac{\theta}{2^{n-1}})$

[提示：$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\theta}{2^k}\cdot\cos\frac{3\theta}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}(\sin\frac{\theta}{2^{k-2}}-\sin\frac{\theta}{2^{k-1}})=\frac{1}{2}(\sin2\theta-\sin\frac{\theta}{2^{n-1}})$]