# §2−3 組合

## (甲)組合的意義

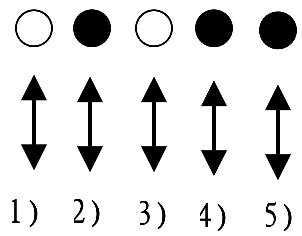
例子：

從建中高二某班 5 個同學中，選出 3 人參加辯論比賽，有幾種選法？

[解法一]：(以分類的觀點)

5 個同學以ABCDE表示，先考慮選出 3 人排成一列，配合樹狀圖，可得排法共有$P^5_3=5\times4\times3$ 種方法。但選人的觀點是不論次序的，即ABC、ACB、BAC、BCA、CAB、CBA是算一樣的，都是選中ABC三個人，因此每 3！種排法算成一種，因此從 5 個人中，選取 3 個人(**不考慮排列順序**)的方法有$\dfrac{P^5_3}{3!}=\dfrac{5\times4\times3}{1\times2\times3}$種。

[解法二]：(以配對的觀點)




如圖，將A,B,C,D,E與 3 個黑球,2 個白球做對應，對到黑球的人被選取，我們可以得知不同的排法會對應不同的選取法，而不同的選取方法會對應不同的排法，即排法與選取的方法一樣多，因此 5 個人中選取 3 人的方法有$\dfrac{5!}{3!\,2!}=\dfrac{5\times4\times3}{1\times2\times3}$種。

(1)組合的定義：

從$n$個不同的事物中，選取$m$個($1\le m\le n$)，共有$\dfrac{P^n_m}{m!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot m}$種方法。**(分子由$n$往下乘$m$個，分母由 1 往上乘$m$個)**我們將這樣的方法數，用$C^n_m$來表示。即$C^n_m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot m}=\dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$。

例如：$C_3^{10}=\dfrac{10!}{3!\,7!}=\dfrac{10\times9\times8}{1\times2\times3}$，$C_0^n=\dfrac{n!}{0!\cdot n!}=1$，$C_n^n=\dfrac{n!}{n!\cdot0!}=1$，$C^n_1=n$

(2)組合的性質：

(a) $P^n_m=C^n_m\cdot m!$

(b) $C^n_m=C^n_{n-m}$

(c)巴斯卡定理：$C^n_m=C^{n-1}_m+C^{n-1}_{m-1}$　　$1\le m\le n-1$

[證明]：

$$\begin{aligned}C^{n-1}_m+C^{n-1}_{m-1}&=\frac{(n-1)!}{m!\,(n-1-m)!}+\frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!}\\&=\frac{(n-1)!\,(n-m)}{m!\,(n-m)!}+\frac{(n-1)!\,m}{m!\cdot(n-m)!}\\&=\frac{(n-1)!\,(n-m+m)}{m!\,(n-m)!}\\&=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\\&=C^n_m\text{。}\end{aligned}$$

例如：$C_7^{10}=\dfrac{10!}{7!\cdot3!}=\dfrac{10!}{3!\cdot7!}=C_3^{10}$。$C^{10}_6=C^9_6+C^9_5$。

用組合的觀點解釋：

(b)要從ABCDE中選出三人去打掃環境，今抽籤決定，籤的作法有兩種：一種是五支籤中，3 支籤做記號，抽中的人去打掃，其抽中的組合數爲$C^5_3$；另一種是五支籤中，2 支作記號，抽中的人不去打掃，其抽中的組合數爲$C^5_2$，故可得$C^5_3=C^5_2$。

(c)要從 ABCDE 中選出三人去打掃環境，今有 $C^5_3$ 種選法，選出來的 3 人之中，我們可分成兩類：第一類是若 A 去打掃，則必須從其他 4 人中再選 2 人一起打掃，其組合數共有 $C^4_2$ 種方法；第二類是若 A 沒去打掃，則從其他 4 人中選 3 人去打掃，其組合數共有 $C^4_3$ 種方法，所以 $C^5_3=C^4_2+C^4_3$

[例題1] 求下列各小題的$n$值：

(1)$12C_4^{n+2}=7C_3^{n+4}$ (2)$C^{10}_n=C^{10}_{3n-2}$ (3)$11C^n_{n-3}=24C^{n+1}_{n-1}$

Ans：(1)$n=6$ (2)$n=1$ 或 3 (3)10

[例題2] 設$n,r$均爲自然數，且$C^{n-1}_r=C^n_r=C^{n+1}_r=6：9：13$，則數對$(n,r)$=？

Ans：$(n,r)=(12,4)$

[例題3] 求$C^1_0+C^2_1+C^3_2+\ldots+C^{13}_{12}$=？ Ans：$C^{14}_2$

(練習1) 設$C^{2n}_{n-1}：C^{2n-2}_n=132：35$，則$n$=？Ans：$n=6$

(練習2) $C^n_{m-1}:C^n_m:C^n_{m+1}$=3：4：5，求 $m-2n$=？ Ans：$-97$

(練習3) 若$C^{18}_{n}=C_{n+4}^{18}$，則$n$=？ Ans：7

(練習4) (1)請計算$C^{5}_{2}+C^{6}_{3}+C^{7}_{4}+\ldots+C^{20}_{17}$=？
(2)試證明$C_{k}^{k}+C_{k}^{k+1}+C_{k}^{k+2}+\ldots+C_{k}^{k+n}=C_{k+1}^{k+n+1}$。
[提示：$C_{k}^{k}=C_{k+1}^{k+1}$，再利用巴斯卡定理]

[例題4] 自棒球選手 9 人，游泳選手 6 人中選出 4 人擔任福利委員
(1)選法有幾種？ (2)至少有 2 位游泳選手之選法有幾種？
Ans：(1)1365 (2)735

[例題5] 一棟公寓中有 6 對夫妻，請回答下列問題：
(1)任選 2 人，恰爲 1 對夫妻。 (2)任選 4 人，恰爲 2 對夫妻。
(3)任選 4 人，恰有一對夫妻。 (4)任選 4 人，均不是夫妻。
Ans：(1)6 (2)15 (3)240 (4)240

[例題6] 平面上有 12 個相異點，其中除了 7 點共線外，其他各點之中任三點不共線，任意連接各點，則可決定
(1)多少條直線？ (2)多少個線段？ (3)多少個三角形？
Ans：(1)46 (2)66 (3)185

[例題7] 從 1~20 這 20 個號碼中，取出 4 個數使得這四個數都不是相鄰的正整數。
Ans：$C^{17}_4$

(練習5) 某拳擊比賽，規定每位選手和其他選手各比賽一場，賽程總計為 45 場，請問有幾位選手參加比賽？　Ans：10

(練習6) 從男生 4 人和女生 3 人中，排出 3 名男生和 2 名女生並排成一列，請問有幾種排法？　Ans：1440

(練習7) 凸 20 邊形有幾條對角線？Ans：170

(練習8) 從 1,2,3,…,10 中選出 3 個相異數 $a,b,c$ 滿足 $a<b<c$ 的$(a,b,c)$有幾組？
Ans：120

(練習9) 一列火車從第一車至第十車共有十節車廂。要指定其中 4 節車廂安裝行動電話，則共有幾種指定的方法？若更要求此四節車廂兩兩不相銜接，則共有幾種指定方法？　Ans：210 ，35

(練習10) 由 1 到 20 的自然數中取出不同的三個數，則
(a)取出的三數成等差的取法(不考慮排列)有幾種？
(b)取出的三數中沒有二個連續整數的取法有幾種？
(c)取出的三數乘積為偶數的取法有幾種？
Ans：(a)90 (b)816 (c)1020

(練習11) 某次考試，規定 13 題中選做 10 題，求下列各選法？
(a)任意選 (b)前兩題必須作答 (c)前五題必須選做 3 題且只做 3 題
(d)前 5 題中至少選做 3 題。Ans：(a)286 (b)165 (c)80 (d)276

(練習12) 平面上有 15 個相異點，其中除了 7 點共線外，其他各點之中任三點不共線，任意連接各點，則可決定
(1)多少條直線？　(2)多少個線段？　(3)多少個三角形？
Ans：(1)85 (2)105 (3)420

(練習13) 5 對夫妻中選出 4 人，
(1)恰有 2 對夫妻 (2)恰有一對夫妻 (3)4 人皆沒有夫妻關係。
Ans：(1)10 (2)120 (3)80

## (乙)重複組合

例子：ABCD等 4 人到麥當勞點套餐，套餐共有 1~5 號 5 種，請問(a)這 4 個人有幾種點餐的情形？　(b)店員有幾種給餐點的方式？

[說明]：

(a)ABCD四人每個人都有 5 種套餐可以點，因此這 4 個人有幾種點餐的情形共有 $5^4$種。

(b)就店員而言，他不在乎每個人點了那些餐，它只在乎，每種套餐被點了幾次，因此假設第$i$號餐被點了$x_i$次，其中$x_i$爲非負整數，不定方程式$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=4$的解$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$就代表一種店員給餐點的方式。因此只要能求出這樣的方程式有幾個非負整數解，就可以求出店員有幾種給餐點的方式。

如何求$\boldsymbol{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=4}$ 非負整數解個數？

| | ○ ○ | ○ | ○ ⟶ (0,0,2,1,1)

| ○ | ○ | ○ | ○ ⟵ (0,1,1,1,1)

解$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$可以和 4 個 | 4 個 ○ 的排列情形 1 對 1 對應，因此非負整數解個數= $\dfrac{8!}{4!\,4!}$ = $C^8_4$，我們定義$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=4$ 非負整數解個數爲$H^5{}_4$，所以$H^5{}_4=C^8_4$。

[重複排列與重複組合]

設(A,1)代表A點了 1 號餐，設有兩種點法(A,1)(B,3)(C,1)(D,2)與(A,3)(B,1)(C,2)(D,1)，在(a)中他代表兩種點餐的方式，換句話說 1,3,1,2 與 3,1,2,1 是有順序的，不過就店員而言，都代表 1 號餐 2 份，2 號餐 1 份，3 號餐 1 份，因此店員給餐的方式都一樣，也就是沒有順序可言。在(a)中我們可以重複點套餐，但是有順序的，即 1,1,3,2、1,3,2,1、…是不同的，這是前面提過的**重複排列**；而(b)中的情形，我們可以重複點餐，但是不考慮順序，即 1,1,3,2、1,3,2,1、…都代表$x_1=2$、$x_2=1$、$x_3=1$、$x_4=0$、$x_5=0$ 這一組解，
我們稱做**重複組合**。

重複組合的定義：

從 $n$ 類東西中取出 $m$ 件，(每類至少有 $m$ 件)的組合數爲 $H^n_m=C^{n+m-1}_m$。

(a)從$n$類東西中取出$m$件，(每類至少有$m$件)的組合數等於不定方程式

$\boldsymbol{x_1+x_2+\ldots+x_n=m}$的非負整數解個數=$(n-1)$個 | $m$個 ○ 排列數

$$=\frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}=C^{n+m-1}_m$$

(b)當我們從$n$類東西中取出$m$件，或問題的方法數可以化成不定方程組
$\boldsymbol{x_1+x_2+\ldots+x_n=m}$的非負整數解的個數，這都是使用重複組合的時機。

[例題8] 求下列各小題的方法數：

(1)同時擲 2 粒相同的骰子，有幾種可能的情形？

(2)有 4 名候選人，18 名選舉人，記名投票時，有幾種情形？不記名投票時，有幾種情形？(假設每個人都去投票，而且沒有廢票)

(3)將 6 件相同的玩具分給 4 個小朋友，任意的分配，有幾種分法？

Ans：(1)21 (2)$4^{18}$，$H^4_{18}$ (3)$H^4_6$

[例題9] 求下列各小題：

(1)$x+y+z+u=100$ 之非負整數解個數？

(2)$x+y+z+u=100$ 之正整數解個數？

(3)$x+y+z+u=100$，且滿足$x>-1,y>2,z>3,u\geq-2$ 的整數解個數？

(4)$x+y+z\leq 8$ 之非負整數解個數？

Ans：(1)$H^4_{100}$ (2)$H^4_{96}$ (3)$H^4_{95}$ (4)$H^4_8$

[例題10] $(x+y+z)^8$的展開式中

(1)請問有幾個不同類項？(2)請求出$x^2y^4z^2$項的係數=？

Ans：(1)$H^3_8$ (2)$\dfrac{8!}{2!4!2!}$

(練習14) 投擲 4 粒骰子

(1)骰子相同有幾種可能的情形？ (2)骰子不同有幾種可能的情形？

Ans：(1)$6^4$ (2)$H^6{}_4$

(練習15) 將 9 件相同的玩具分給 4 個小朋友，每個人至少一件，有幾種分法？

Ans：56

(練習16) 求集合 $A=\{(x,y,z)|1\le x\le y\le z\le 10$，$x,y,z$ 爲整數$\}$的元素個數=？Ans：220

(練習17) 設$(a+b+c)^7$的展開式中，

(1)請問有幾個不同類項？(2)請問$a^2bc^4$的係數=？

Ans：(1)$H^3{}_7$ (2)$\dfrac{7!}{2!1!4!}$

(練習18) 方程式 $x+y+z+u=12$ 的非負整數解有______個，正整數解有_______個。

Ans：455，165

(練習19) 方程式 $x+y+z+u\le 9$ 之正整數解之個數爲何？ Ans：126 (84 社)

(練習20) 有 7 個橘子，8 個桃子(橘子與桃子各視爲相同物，而且分完)

(1)任意分給甲乙丙三人有幾種方法？

(2)分給甲乙丙三人，每人至少得 1 橘子 1 桃子，有幾種方法？

(3)分給甲乙丙三人，每人至少得 1 橘子或 1 桃子，有幾種方法？]

Ans：(1)1620 (2)315 (3)1407[提示：(3)可考慮反面來計算]

## (丙)分組分堆

例子：有 ABCDEF 六人按照下列人數來分組，請問有幾種分組的方法？

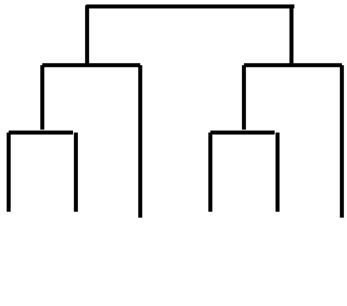
(1)按 3,2,1 分成三組 (2)按 2,2,2 分成三組。

[解法]：

[例題11] **(分組與給物的問題)**
有 8 本不同的書本，
(1)平分成兩堆 (2)按照 4,2,2 分成三堆 (3)按照 4,3,1 分成三堆
(4)平分給甲乙兩人 (5)甲給 4 本，乙給 2 本，丙給 2 本
(6)按照 4,3,1 自由分配給甲乙丙三人
Ans：(1)35 (2)210 (3)280 (4)70 (5)420(6)1680

[例題12] **(有特定條件的分組問題)**
(1)9 人平分成三組，其中甲乙丙三人必不在同一組的方法有幾種？
(2)9 人平分成三組，其中甲乙在同一組的方法有幾種？
Ans：(1)90 (2)70

[例題13] 高二三班各派 2 名羽球選手，作羽球的單打排名賽，比賽賽程表如圖所示，而且要求同班派出的選手在冠亞軍以外不比賽，則賽程有幾種排法？
Ans：36



(練習21) 籃球 3 人鬥牛賽，共有甲乙丙丁戊己庚辛壬癸 9 人參加，組成 3 對，且甲乙兩人不在同一隊的組隊方法有多少種？ Ans：210 (90 學科)

(練習22) 有學生 10 人，住 A,B,C 三間房，若 A 房住 4 人，B,C 各住 3 人

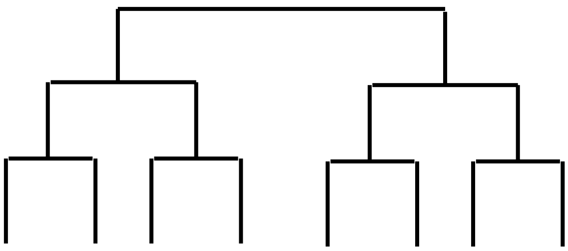
(1)住法有幾種？ (2)若甲乙兩人住同房，其住法有幾種？
Ans：(1)4200 (2)1120

(練習23) 有八本不同的書，按 3,3,2 自由分配給甲乙丙三人，請問有幾種給法？
Ans：1680

(練習24) 世界盃棒球賽，共有 12 對參賽，先抽籤均分成四組進行預賽，各組的第一名才有資格進入複賽爭奪冠軍，請問亞洲三強台灣、日本、南韓在預賽均不同組的分法有幾種？Ans：7560

(練習25) S={1,2,3,4,5,6,7,8,9}
(1)將 S 的元素分成 4 個，5 個的兩組，1,2 要在同一組的選法有幾種？
(2)從 S 中任取 3 個數的和爲奇數的取法有幾種？
Ans：(1)56 (2)40

(練習26) HBL 的複賽共有 8 支隊伍入圍參加比賽，現在要作淘汰賽，如圖爲本次的賽程表，請問共有幾種安排賽程的方式？Ans：315



## (丁)排列組合的綜合運用

[例題14] 7 個球放入 3 個箱子，每個箱子都夠大能放入 7 個球，亦可以留有空箱子
(1)球相同，箱子相同有幾種存放的方法？
(2)球相同，箱子相異有幾種存放的方法？
(3)球相異，箱子相同有幾種存放的方法？
(4)球相異，箱子相異有幾種存放的方法？
Ans：(1)8 (2)36 (3)365 (4)2187

[例題15] 設 A={1,2,3,4}，B={5,6,7}

(1)從 A 映至 B 的函數有幾個？　(2)從 A 到 B 的映成函數有幾個？

(3)從 B 映到 A 的函數有幾個？　(4)從 B 到 A 之一對一函數有幾個？

Ans：(1)81 (2)36 (3)64 (4)24

[例題16] 請求出下列集合的元素個數：

$A=\{(x,y,z)|1\le x,y,z\le 9$，$x,y,z$ 爲整數，且 $x,y,z$ 互異$\}$，

$B=\{(x,y,z)|1\le x,y,z\le 9$，$x,y,z$ 爲整數$\}$

$C=\{(x,y,z)|1\le x<y<z\le 9$，$x,y,z$ 爲整數$\}$

$D=\{(x,y,z)|1\le x\le y\le z\le 9$，$x,y,z$ 爲整數$\}$

Ans：$n(A)=504$，$n(B)=729$，$n(C)=84$，$n(D)=165$

[例題17] 由 **mathematical** 中的字母，每次取 4 個的組合數有幾個？排列數有幾個？
Ans：142，2482

(練習27) 將 10 件相同物分給甲乙丙三人
(1)每人至少一件，有幾種分法？
(2)其中一人至少得一件，一人至少得二件，一人至少得三件，有幾種分法？
Ans：(1)36 (2)33

(練習28) 五件不同的玩具分給甲乙丙三人，求下列的分法？
(1)每人至少得一件。 (2)甲得 2 件，乙得 2 件，丙得 1 件。
Ans：(1)150 (2)30

(練習29) (函數的個數)$f$：$G\rightarrow H$ 爲一個函數
(1)若 $n(G)=6$，$n(H)=3$，則 $f$ 的個數有幾種？
(2)若 $n(G)=3$，$n(H)=7$，且 $f$ 爲一對一函數，則 $f$ 的個數有幾種？
(3)若 $n(G)=9$，$n(H)=2$，且 $f$ 爲映成函數，則 $f$ 的個數有幾種？
Ans：(1)729 (2)210 (3)510

(練習30) 自 ATTENTION 一字中，每次取 5 個字母，共有幾種取法？幾種不同的排列法？ Ans：41，2250

(練習31) 5 種不同的酒，注入 3 個空杯子，酒不可混合，不得有空杯子，求下列各注入法有幾種？
(1)杯子不同，且各杯的酒亦不同。 (2)杯子不同，且各杯的酒可相同。
(3)杯子相同，且各杯的酒亦不同。 (4)杯子相同，且各杯的酒可相同。
Ans：(1)60 (2)125 (3)10 (4)35

(練習32) 設 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$，則從 A 到 B 的函數中，滿足 (1)$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$者共有幾個？(2) $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$者共有幾個？
Ans：(1)126 (2)15

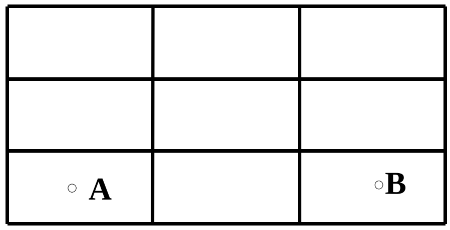
(練習33) 袋中有相同的紅球 5 個，相同的白球 4 個，相同的黑球 2 個，相同的黃球 2 個，綠球 1 個，自袋中任取 4 球

(1)有幾種取法？　(2)取 4 球排成一列有幾種取法？
(3)從袋中至少取一球有幾種取法？
Ans：(1)45 (2)478 (3)539

## 綜合練習

(1) 體操委員會由 10 女性委員與 5 位男性委員組成。委員會要由 6 位委員組團出國考察，如以性別做分層，並在各層比例隨機抽樣，試問此考察團共有多少種組團方式？ (89 學科)

(2) 右圖中，至少含 A 或 B 兩點之一的長方形共有__________個？ (85 學科)




(3) 有 6 男 4 女共 10 名學生擔任本週值日生，導師規定在本週五個上課日中，每天兩名值日生，且至少需有 1 名男生，試問本週安排值日生的方式有_______種。　(90 大學社)

(4) 因乾旱水源不足自來水公司計畫在下周一至週日的 7 天中選擇 2 天停止供水。若要求停水的兩天不相連，則自來水公司共有幾種選擇方式？(2002 指定乙)

(5) 新新鞋店爲與同業進行促銷戰，推出「第二雙不用錢---買一送一」的活動。該鞋店共有八款鞋可供選擇，其價格如下：

| 款式 | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 | 戊 | 己 | 庚 | 辛 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 價格 | 670 | 670 | 700 | 700 | 700 | 800 | 800 | 800 |

規定所送的鞋之價格一定少於所買的價格（例如：買一個「丁」款鞋，可送甲、乙兩款鞋之一）。若有一位新新鞋店的顧客買一送一，則該顧客所帶走的兩雙鞋，其搭配方法一共有_________種。(2006 學科)

(6) 請計算 $\sum_{k=1}^{8} C_3^{k+2} = ?$

(7) 籃球員：甲乙丙丁…共 9 人，選派其中 5 人上場比賽，
(a)若甲乙丙三人中，至少選 1 人上場，則選法有幾種？
(b)若甲乙丙三人中，至多選 1 人上場，則選法有幾種？

(8) 8 人玩剪刀、石頭、布，其中二人於一次猜拳中，同時贏了其他 6 人，我們可以推測此 8 人個人出拳的情形，共有幾種情形？

(9) 7 男 5 女互選 5 個人爲委員
(a)任意選有幾種方法？ (b)至少有 1 女委員的選法有幾種？
(c)7 男 5 女互選 5 個人爲委員，再從中選出一個主席，一個執行幹事的選法有幾種？
(d)若此委員會要由 3 男 2 女組成，且主席爲男生，執行幹事爲女生之選法有幾種？

(10) 多項式$(x+y+z+w)^5$的展開式中
(a)共有幾個不同類項 (b)$x^2y^2w$的係數=？(c)與$x^4y$的同形項(例如：$y^4w$、$x^4z$等等)有幾個？ (d)$x^2y^2z$的同形項(例如：$x^2z^2y$、$y^2z^2w$..等)有幾個？

(11) 三位數 ABC 中，滿足(a)C>B>A (b)A>B>C 的三位數各有多少個？

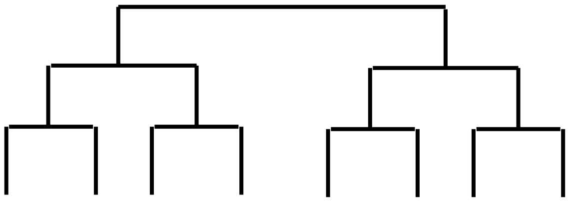
(12) 一骰子擲 3 次，第$k$次出現$a_k$點，今以$a_1$、$a_2$、$a_3$分別爲三位正整數之百位、十位、個位數字
(a)若$a_1$、$a_2$、$a_3$三數字中，恰有 2 個相同，則此三位數有幾個？
(b)若$a_1$、$a_2$、$a_3$三數全相異，且滿足$a_1$不大於 5，$a_3$不小於 4，則此種三位數有幾個？
(c)若$a_1$、$a_2$、$a_3$滿足$a_1 \geq a_2 \geq a_3$，則此種三位數有幾個？
(d) 若$a_1$、$a_2$、$a_3$三數全相異，則此種三位數的總和等於多少？

(13) $x+y+z+t^2=22$ 的
(a)正整數解$(x,y,z,t)$有幾組？(b)正奇數解$(x,y,z,t)$有幾組？

(14) 滿足 $10 \leq x \leq y \leq z \leq 25$ 的整數$(x,y,z)$共有幾組？

(15) 請求出下列集合的元素個數：
$A=\{(x,y,z)|1 \leq x \leq y \leq z \leq 5$，$x,y,z$ 整數$\}$，$B=\{(x,y,z)|1 \leq x,y,z \leq 5$，$x,y,z$ 整數$\}$
$C=\{(x,y,z)|1 \leq x \leq y < z \leq 5$，$x,y,z$ 整數$\}$

(16) 甲乙丙丁等 4 校，每校派選手 2 名，賽程表如右圖所示，同校二選手除冠亞軍決賽外不交手，請問賽程表有幾種排法？



(17) 5 支相同的原子筆，6 支相同的鉛筆，分給 A,B,C 三人
(a)任意分給三人，原子筆鉛筆要分完，請問有幾種分法？
(b)每人至少得一支筆且原子筆鉛筆要分完，請問有幾種分法？

(18) 自 0,1,2,2,3,3,3,3,4,4 共 10 個數字中，任取 4 個數字，可作成多少個 4 位數？

(19) $a,a,a,a,b,b,b,c,d$ 共 9 個字母
(a)由其中任取 4 個共有幾種取法？
(b)這 9 個字母排成一列，且任二個 $b$ 均不相鄰的排法有幾種？

(20) 有相同的白球 4 個，相同的紅球 5 個，相同的黑球 7 個
(a)至少取 1 球 (b)每個色球至少取一個
(c)分給甲乙，每人至少一球的方法有多少種。

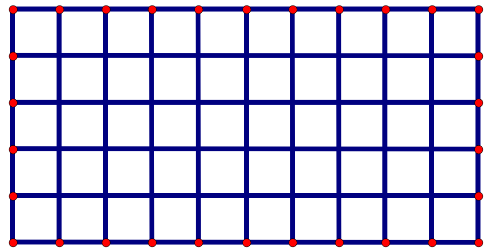
(21) 求 $xyz=360$ 之非負整數解的個數。(2004 台大電機甄試)

## 進階問題

(22) 平面上有 11 個相異點，任意連接兩點，共可得 48 條不同的直線
(a)在這 11 點中，含 3 點以上的相異直線有幾條？
(b)在這 11 點中，任取 3 點，可決定幾個三角形？(2004 台大電機甄試)

(23) 連接正 12 邊形之任 3 個頂點，可得
(a)多少個直角三角形？ (b)多少個銳角三角形？ (c)多少個鈍角三角形？

(24) 如右圖，棋盤式街道中由 A 到 B 走捷徑，
恰轉彎 4 次的走法有幾種？



# 綜合練習解答

(1) 2100　[提示：以性別做分層，並在各層比例隨機抽樣，則 6 位委員中女性人數：男性人數=10：5=2：1]

(2) 15

(3) 43200

(4) 15

(5) 21

(6) $330=C_4^{11}$

(7) (a)120 (b)51　[提示：(a)$C^3{}_1C^6{}_4+C^3{}_2C^6{}_3+C^3{}_3C^6{}_2$ (b)$C^3{}_1C^6{}_4+C^3{}_0C^6{}_5$]

(8) 84 [提示：先選人，再考慮贏拳的情形]

(9) (a)792 (b)771 (c)15840 (d)210 [提示：(c)$C^{12}{}_5\cdot P^5{}_2$ (d)$C^7{}_3C^5{}_2C_1{}^3C^2{}_1$]

(10) (a)56 (b)30 (c)12 (d)12

(11) (a)84 (b)120 [提示：(a)滿足 C>B>A 的三位數，因為 A 不能為 0，因此相當於自 1~9 中選出 3 個數的組合。(b)滿足 A>B>C 的三位數，因為 C 可為 0，因此相當於自 1~10 中選出 3 個數的組合。]

(12) (a)90 (b)52 (c)56 (d)46620

[提示：

(a)$C^6{}_2\times2\times\frac{3!}{2!}=90$　(b) 全部情形 $-[a_1>5$　或 $a_3<4]=P^6{}_3-[1\times P_2{}^5+3\times P^5{}_2-4\times3]=52$

(c)$H^6{}_3=56$(d)$(1+2+3+4+5+6)\times(10^2+10+1)\times20=46620$]

(13) (a)402 (b)76

(14) 816[提示：$(x,y,z)$整數解的個數相當於從 10,11,…,25 這 16 個數中，重複選取 3 個的組合數]

(15) $n(A)=35$，$n(B)=125$，$n(C)=20$[提示：計算集合C的元素個數，分成$z=5$、$z=4$、$z=3$、$z=2$ 這些情形去討論，$n(C)=H^4{}_2+H^3{}_2+H^2{}_2+H^1{}_2=20$]

(16) 72 [提示：先選賽程表的左右兩邊$\Rightarrow 2^4\times\frac{1}{2}=8$，在將左、右邊的 4 人平分成兩組$\Rightarrow(C^4{}_2\times C^2{}_2\times\frac{1}{2})^2=9$]

(17) (a)588 (b)465

[提示：(a)$H^3{}_5\times H^3{}_6=588$ (b) $H^3{}_5\times H^3{}_6-3\times H^2{}_5\times H^2{}_6+3\times H^1{}_5\times H^1{}_6=465$]

(18) 319 [提示：四同：$C^1{}_1\times1=1$，三同一異：含 0 者有$C^1{}_1\cdot C^1{}_1\times(\frac{4!}{3!}-1)=3$，不含 0 者有$C^1{}_1\cdot C^3{}_1\times\frac{4!}{3!}=12$，二同二同：$C^3{}_2\times\frac{4!}{2!2!}=18$，二同二異：含 0 者有$C^3{}_1C^3{}_1\times(\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!})=81$，不含 0 者有$C^3{}_1C^3{}_2\times\frac{4!}{2!}=108$，四異：含 0 者有$C^4{}_3C_1{}^1\times(4!-3!)$，不含 0 者有$C^4{}_4\times4!=24$，所以共有 319 個]

(19) (a)15 (b)1050 [提示：(a)分成 4 同、2 同 2 同、2 同 2 異、4 異去討論。

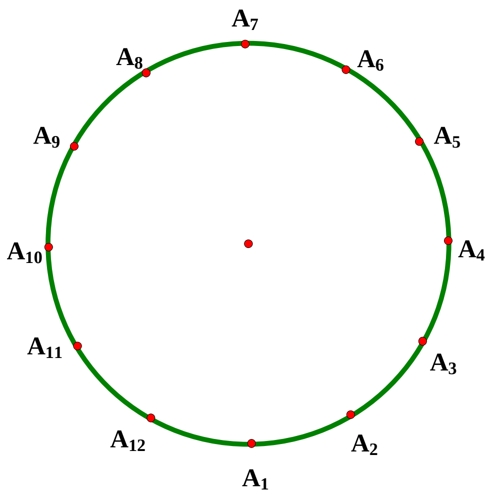
(b)先排$a,a,a,a,c,d$，再將$b,b,b$排入空隙中，$\frac{6!}{4!}\times C^7{}_3=1050$]

(20) (a)239 (b)140 (c)238 [提示：(a)$(4+1)(5+1)+(7+1)-1=239$ (b)先將每個色球去掉一個，再任意取$(3+1)(4+1)(6+1)=140$　(c)全部的分法$-$(全部給甲或全部給乙)$=H^2{}_4\cdot H^2{}_5\cdot H^2{}_7-2=238$]

(21) 180[提示：設$x=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$，$y=2^m\cdot 3^n\cdot 5^l$，$z=2^r\cdot 3^s\cdot 5^t$，因爲$xyz=360$ 所以$a+m+r=3$，$b+n+s=2$，$c+l+t=1\Rightarrow xyz=360$ 之非負整數解的個數$=H^3{}_3\cdot H^3{}_2\cdot H^3{}_1=180$]

(22) (a)2 (b)160 [提示：(a)若 11 個相異點中，任三點不共線，則可決定$C^{11}{}_2=55$條直線，因爲只決定了 48 條直線，則可知少了 7 條直線，另外，若有一直線上有三點，則直線會減少$C^3{}_2-1=2$ 條，若有一直線上有四點，則直線會減少$C^4{}_2-1=5$ 條，若有一直線上有五點，則直線會減少$C^5{}_2-1=9$ 條，此不可能，所以在這 11 點中有一條直線恰有 3 點，令一直線恰有 4 點。(b)$C^{11}{}_3-C^3{}_3-C^4{}_3=160$]

(23) (a)60 (b)40 (c)120 [提示：(a)任選一條直徑$A_1A_7$，可得 10 個直角三角形，所以有 $6\times10=60$ 個直角三角形。(b)取$A_1$爲頂點，以$A_1A_2$爲邊，形成 0 個銳角三角形，以$A_1A_3$爲邊，形成 1 個銳角三角形($\Delta A_1A_3A_8$)，以$A_1A_4$爲邊，形成 2 個銳角三角形($\Delta A_1A_4A_8$、$\Delta A_1A_4A_9$)，以$A_1A_5$爲邊，形成 3 個銳角三角形，以$A_1A_6$爲邊，形成 4 個銳角三角形($\Delta A_1A_3A_8$)，所以取$A_1$爲頂點，可形成$(1+2+3+4)=10$ 個銳角三角形，共有 $10\times12\times\frac{1}{3}=40$ 個銳角三角形。(c)$C^{12}{}_3-60-40=120$。]




(24) 198 [提示：從A到B走捷徑，相當於 10 個→5 個↑
，而轉彎 4 次代表→↑有 4 個，因此可分成→↑→↑→或↑→↑→↑兩種，
(1) →↑→↑→：剩下 7 個→要排在→的位置，而 3 個↑要排在↑的位置，因此有$H^3{}_7\times H^2{}_3$種；同理↑→↑→↑有$H^3{}_2\times H_8{}^2$種]