第三章數列與級數

§3–1 等差級數與等比級數

(甲)數列與級數

(1)名詞與記號：一連串的數，排成一列，就稱爲數列，例如 1,3,5,8,….
(a)有限數列：有限個數所排成的數列，且有首項有末項，就稱爲有限數列。
(b)無限數列：一個數列有首項，沒有末項，稱爲無限數列。
例如：1,3,5,7,9…..　，$a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots$
(c)記法：
①列舉型：
把數列中每一項都列舉出來，例如：<3,–1,3,4,–2>或是把數列的開頭幾項列出來，讓人家能看出它的通則，其餘以「…..」來代替，例如：$<1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots.>$。

②概括型：
假定問題只牽涉到數列的概念，而對於各項爲何並不去探究時，我們常以$<a_n>,<b_n>,<c_n>$分別代表一些不同的數列，通常以$\langle a_n\rangle_{n=1}^{l}$ 代表有限數列，$\langle a_n\rangle_{n=1}^{\infty}$表示無限數列。[∞：無限大]

③n 項型：
通常所討論的數列其各項間有一定的規則存在，而這種規則通常與「項數」有某些關聯(即這種規則可用項數 n 的函數來描寫)。
例如：$<a_n>=<1,4,7,10,\ldots.>$，$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$，故$<a_n>=<3n-2>$

[例題1] 找出下列各數列的第 n 項：
(1)$<-5,-1,3,7,11,\ldots\ldots>$
(2)$<-1,2,-4,8,\ldots\ldots.>$
(3)$<1\times3,3\times9,5\times27,\ldots..>$
(4)$<\frac{1}{3\times5},\frac{1}{7\times7},\frac{1}{11\times9},\ldots..>$
Ans：(1)$4n-9$ (2)$-(-2)^{n-1}$ (3)$(2n-1)\times3^n$ (4)$\frac{1}{(4n-1)(2n+3)}$

(練習1) 找出下列各數列的第 n 項：
(1)$<1,1,3,3,5,5,\ldots..>$(2)$<\sqrt{2}-1,1,\sqrt{2}+1,3+2\sqrt{2},\ldots.>$
(3)$<-\frac{1}{1\times3},\frac{1}{2\times5},-\frac{1}{3\times7},\frac{1}{4\times9}\ldots\ldots>(4)<\frac{2}{1\times3},\frac{4}{3\times5},\frac{8}{5\times7},\frac{16}{7\times9},\ldots>$
(5)$<\frac{1}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{10},\ldots.>(6)<5,\frac{2}{3}+\frac{3}{2},\frac{2}{9}+\frac{3}{4},\frac{2}{27}+\frac{3}{8},\ldots.>$

Ans ： (1)$n-\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ (2)$(\sqrt{2}+1)^{n-2}$ (3) $\dfrac{(-1)^n}{n(2n+1)}$ (4) $\dfrac{2^n}{(2n-1)(2n+1)}$

(5)$\dfrac{2}{n(n+1)}$ (6)$\dfrac{2}{3^{n-1}}+\dfrac{3}{2^{n-1}}$

(練習2) 數列<1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,…..>之第 200 項爲______。 Ans：20

(練習3) 下面數列的最末項是第 n 項 a_n，試寫出 a_n(用 n 表示)

(1)9,99,999,…, $\underbrace{99\cdots9}_{n個9}$。 (2)1,11,111,…, $\underbrace{11\cdots1}_{n個1}$。

Ans;(1)$a_n=10^n-1$ (b)$\dfrac{1}{9}(10^n-1)$

(2)級數的名詞與記號：若<a_n>爲一數列，則將數列中的各項依次用”+”號連起來所成的式子，就稱爲「數列**<a_n>**所定義的級數」，或直接稱它爲級數。

例如：數列<2,4,6,…,24>所定義的級數爲 2+4+6+…+24

數列<1,$-\frac{1}{2}$,$\frac{1}{4}$,$-\frac{1}{8}$,…>所定義的級數爲 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots.$

(a)有限級數：有限數列所定義的級數稱爲有限級數。

數列：$\langle a_n\rangle_{n=1}^{k}=<a_1,a_2,\ldots..,a_k>$

級數：$a_1+a_2+\ldots+a_k=\sum\limits_{l=1}^{k}a_l$ ($\sum$ 讀作 **sigma**)

(b)無窮級數：由無限數列所定義的級數稱爲無窮級數。

數列：$\langle a_n\rangle_{n=1}^{\infty}=<a_1,a_2,\ldots..,a_k,\ldots..>$

級數：$a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots..=\sum\limits_{l=1}^{\infty}a_l$

(3)$\sum$ 這個符號：

(a)舉例說明：

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{75}=$

$b_3+b_4+b_5+\ldots b_{78}=$

9+10+11+…+175 =

$4c+5c+6c+\ldots+30c=$

$1^3+2^3+\ldots+n^3=$

$d^1+d^2+d^3+\ldots d^p=$

$(c-1)+(c-3)+\ldots[c-(2n-1)]=$

$a_1b_2+a_2b_3+\ldots+a_{49}b_{50}=$

$\underbrace{5+5+\ldots.+5}_{100個}=$

$1\times2+2\times3+\ldots+n(n+1)=$

$\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{7\times7}+\ldots.+\dfrac{1}{(4n-1)(2n+3)}=$

(b)Σ用法的要點：

由前面的例子，我們可觀察出些要點：

- 注意各項中那些符號是不變的，那些符號隨著項數作有規律的改變，請注意下標、係數、指數、一般項等等。
- 注意哪些隨著項數改變的項是從多少到多少？
- 假設式中第 n 項 a_n 已經寫明，那只要把第 n 項改寫成第 k 項，寫成 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 。

(c)Σ的性質：

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k \pm \sum_{k=1}^{n}b_k \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{n}c\cdot a_k = c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{n}d = n\cdot d$$

(d)注意事項：

- $\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k \neq \sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k$
- $\sum_{k=1}^{n}2 \neq 2$
- $a_1+a_2+\ldots a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{l=1}^{n}a_l$ ，不可寫成 $\sum_{k=1}^{n}a_n$ 。

[例題2] 設有一數列<a_n>之前 n 項和為 $3n^2+4$，則 a_{10}=？a_k=？

Ans：$a_{10}=57$，$a_k=\begin{cases} 7, k=1 \\ 6k-3, k\geq 2 \end{cases}$

[例題3] 設$\sum_{k=2}^{4}(ak+b)=93$ ， $\sum_{k=0}^{3}(ak+b)=70$ ，則求 $a-2b$=？ Ans：1

(練習4) 化簡下列級數：

(1) $\sum_{k=2}^{50}3$ (2) $\sum_{k=1}^{20}(7k+1)$ Ans：(1)147 (2)1490

(練習5) 試以Σ表示出級數$\frac{5}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{-1}{3^5}+\ldots$ (至第 n 項)。

Ans： $\sum_{k=1}^{n}\frac{-2k+7}{3^{k+1}}$

(練習6) 若一數列$\langle a_n\rangle$滿足 $a_1+2a_2+\ldots+na_n=n^2+3n+1$，則求 a_n=？

Ans：$a_n=\begin{cases}5, n=1\\ \frac{2n+2}{n}, n\geq 2\end{cases}$

(乙)等差、等比數列與等差、等比級數

(1)等差數列、級數：

設$\langle a_n\rangle$爲以 d 爲公差之等差數列：

第 k 項 $a_k=a_1+(k-1)d$

首 n 項和 $S_n=\frac{項數}{2}$ (首項+末項)$=\frac{n}{2}\times(a_1+a_1+(n-1)d)$

(2)等比數列、級數：

設$\langle a_n\rangle$爲以 r 爲公比之等比數列：

第 k 項 $a_k=a_1\times r^{k-1}$

首 n 項和 $S_n=\begin{cases}na & , r=1\\ \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} & , r\neq 1\end{cases}$

(3)等差、等比中項

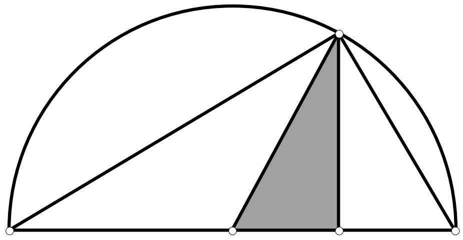
(a)設 a,c,b 成等差，則 $c=\dfrac{a+b}{2}$ 稱爲 a,b 的等差中項(又稱算術平均數)。

設 a,c,b 成等比，則 $c^2=ab$ 稱爲 a,b 的等比中項(又稱幾何平均數)。

(b)設 a,b 爲兩正數，則 a,b 的算術平均數大於等於幾何平均數。

即 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 等號成立⇔$a=b$

Pf：



[例題4] 設 $\langle a_n\rangle$ 爲等差數列，首項爲 -200，公差爲 7

(1)若 $\sum_{k=1}^{n}a_k$ 之值最小，則 $n=$？

(2)承上題，此時 $\sum_{k=1}^{n}a_k=$？ Ans：(1)29 (2)–2958

[例題5] 等差數列 $\{a_n\}$ 前 12 項和 $S_{12}=12$ 且前 30 項和 $S_{30}=45$，

(1)求此數列的公差與首項。

(2)求此數列的一般項。 Ans：(1)公差=$\dfrac{1}{18}$，首項=$\dfrac{25}{36}$ (2)$a_n=\dfrac{23+2n}{36}$

(練習7) 有一等差級數之第 10 項爲 2，前 n 項和爲 110，求此級數的公差。
Ans：-2

(練習8) 一等差數列之第 n 項爲 $31-3n$，則此數列第____項起爲負數，其前__項之和爲最大，其和爲_____；又前 20 項之絕對值的和=______。
Ans：11,10,145,300

(練習9) 已知一等差數列$\{a_n\}$的前 n 項和 $S_n=n^2-3n+1$，求 a_n。
Ans：$a_n=\begin{cases} -1 & ,n=1 \\ 2n-4 & ,n\geq 2 \end{cases}$ (請注意 $\boldsymbol{n=1}$ 代入 $\boldsymbol{a_n=2n-4}$ 並不等於$\boldsymbol{-1}$)

(練習10) 一等差數列前 n 項和爲 9，前 $2n$ 項和爲 12，則前 $3n$ 項和=？
Ans：9

(練習11) 已知二等差數列 5,8,11,….與 3,7,11,…均有 100 項，試問共有多少項同時出現在這兩個數列？Ans：25

[例題6] 設$\langle a_n\rangle$爲一等比數列，且每一項均爲實數，若 $S_{10}=2$，$S_{20}=14$，求 $S_{30}=$？
Ans：86

[例題7] 某三數成等差，其和爲 36，若各項依次加 1,4,43 後，則成等比數列，試求此三數。 Ans：3,12,21

(練習12) 數列$\sqrt{2}-1,1,\sqrt{2}+1,3+2\sqrt{2}$,…. 是否成等比？若爲一等比數列，則公

比=？又此數列之第 n 項為何？ Ans：是，$\sqrt{2}+1$，$(\sqrt{2}+1)^{n-2}$

(練習13) 設一等比數列前 3 項之和為 13，前 6 項之和為 364，則此數列前 7 項之和=？ Ans：1093

(練習14) a,b,c,d 四數成等比數列，已知 $a+b=8$，$c+d=72$，求公比。Ans：3

(練習15) 若三數成等比數列，其和為 39，若各數依次減去 1,2,12 之後，則成等差數列，求此三數。 Ans：4,10,25 或 25,10,4

(練習16) 有一等比數列<a_n>，前 n 項的和為 S_n，如果 $S_n=24$，$S_{2n}=30$，則求 S_{3n}=？ Ans：$\frac{63}{2}$

[例題8] 設兩正數 a,b 滿足 $a+2b=12$，試求 ab 的最大值，並求此時的 a,b 值。

(練習17) 設 x,y 為正實數，且 $xy=6$，則 $3x+2y$ 之最小值為__________。Ans：12

(丙)特殊數列、級數

(1)幾個數列的和：

(a) $\sum_{k=1}^{n}1=n$

(b) $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(c) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

圖解法：
$$\begin{array}{ccccc} n & n & \ldots & n & n \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ 2 & 2 & & & \\ 1 & & & & \end{array} + \begin{array}{ccccc} n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ n & n-1 & & & \\ n & & & & \end{array} + \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ n-1 & n & & & \\ n & & & & \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccccc} 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ 2n+1 & 2n+1 & & & \\ 2n+1 & & & & \end{array}$$

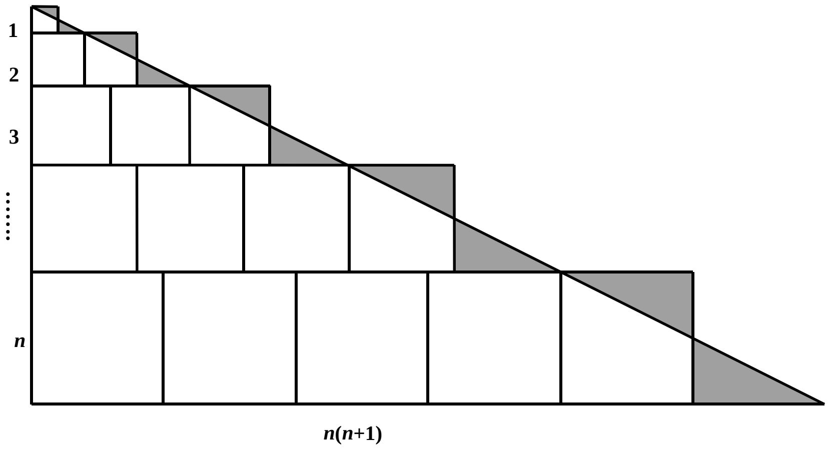
$\Rightarrow 3(1^2+2^2+\ldots+n^2)=(2n+1)\cdot\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot n(n+1)(2n+1)$

$\Rightarrow (1^2+2^2+\ldots+n^2)= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

遞迴法：

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

圖解法：



(2)利用①②③④的結果，可計算

$$\sum_{k=1}^{n}(ak^3+bk^2+ck+d)=a\sum_{k=1}^{n}k^3+b\sum_{k=1}^{n}k^2+c\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}d$$

例如： $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

[例題9] (1)用Σ表示 1×3+3×5+5×7+…+29×31=？

(2)求(1)的和。　Ans：(1) $\sum_{k=1}^{15}(2k-1)(2k+1)$ 　(2)4945

[例題10] 求 1+(1+3)+(1+3+5)+…(1+3+5+…+2*n*–1)=？　Ans：$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(練習18) 試求下列級數的和：

(1) $\sum_{k=1}^{20}(2k+1)$　　(2) $\sum_{k=1}^{8}(3k+1)(k-2)$

Ans：(1)440 (2)416

(練習19) 級數 $1\times2+2\times5+3\times8+\ldots+$第 n 項

(1)用Σ表示此級數。(2)求此級數的和。Ans：(1) $\sum_{k=1}^{n}k(3k-1)$ (2)$n^2(n+1)$

(練習20) 試求 $\sum_{k=5}^{n}k(k+3)=$？ Ans：$\dfrac{n(n+1)(n+5)}{3}-60$

(練習21) 求級數 $1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots(1+2+\ldots+n)=$？ Ans：$\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

(練習22) 觀察下列 3×3 與 4×4 方格中的數字規律，
如果在 10×10 的方格上，仿上面的規則填入數字，
則所填入的 100 個數字的總和爲_________。

1	2	3
1	2	2
1	1	1

1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

[答案]：385 (88 大學聯考社會組)
[解法]：
設 $n\times n$ 方格中的數字總和爲 a_n
$a_3=1\times5+2\times3+3\times1$、
$a_4=1\times7+2\times5+3\times3+4\times1$、…、$a_{10}=1\times19+2\times17+3\times15+\ldots+10\times1$

$=\sum_{k=1}^{10}k(21-2k)=21\sum_{k=1}^{10}k-2\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=21\times55-2\times\dfrac{10\times11\times21}{6}=385$。

[例題11] $x\neq1$，試求 $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=$？ Ans：$\dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}-\dfrac{nx^n}{1-x}$

[例題12] (1)試求$\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\ldots..+\dfrac{1}{30\cdot31}=$？

(2)$\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{5\times7}+\ldots..+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$？Ans：(1)$\dfrac{30}{31}$ (2) $\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})$

(練習23) 試求下列級數和

(1) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$？

(2) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}=$？

Ans：(1) $1-\frac{1}{n+1}$ (2) $\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$

(練習24) 試求 $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=$？ Ans：$\frac{2575}{10302}$

(提示：$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}]$)

(練習25) $\frac{3}{1^2}+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+\ldots+\frac{2n+1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}=$？ Ans：$\frac{6n}{n+1}$

(練習26) $1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\ldots.+n\cdot2^{n-1}=$？ Ans：$(n-1)\cdot2^n+1$

[例題13] 利息的計算

某人於年初存入銀行 10000 元，其年利率爲 10%

(1)若依單利計息，第 6 期期滿可得本利和若干元？

(2)若依複利計息，第 6 期期滿可得本利和若干元？

(已知 $(1.1)^6=1.7715610$ 不足一元部分採四捨五入處理)

Ans：(1)16000 元 (2)17716 元

(練習27) 某人參加銀行儲蓄存款，年利率爲 10%，依複利計算，問每年初存入

10000 元，則第 5 年年底結算可得到的本利和為多少元？

Ans：$110000(1.1^5-1)$

綜合練習

(1) 一機器狗每秒鐘前進或後退一步，程式設計師讓機器狗以前進 3 步，然後再後退 2 步的規律移動。如果將此機器狗放在數線的原點，面向正的方向，以 1 步的距離為 1 單位。令 P(n)表示第 n 秒時機器狗所在位置的坐標，且 P(0)=0，那麼下列選項何者為真？
(A)P(3)=3　(B)P(5)=1　(C)P(10)=2　(D)P(101)=21　(E)P(103)<P(104)
(91 學科能力測驗)

(2) 已知一等差數列共有十項，且知其奇數項之和為 15，偶數項之和為 30，則下列哪一選項為此數列之公差？
(A)1　(B)2　(C)3　(D)4　(E)5　　(93 學科能力測驗)

(3) 有一個 101 項的等差數列 a_1 , a_2 ,....,a_{101}，其和為 0，且 a_{71}=71。問下選項哪些正確？(A)$a_1+a_{101}>0$(B)$a_2+a_{100}<0$(C)$a_3+a_{99}=0$(D)$a_{51}=51$(E)$a_1<0$。

(4) 戲院中有 20 排座位，依次每後一排都比前一排多 2 個座位，已知第 10 排有 50 個座位，試求此戲院共有多少個座位？

(5) 設 $a_1,a_2,a_3,\ldots$是一個等差數列且 e 是一個正的常數。
試證明$e^{a_1},e^{a_2},e^{a_3},\ldots$是一等比數列。

(6) 設 2,a,b,17 成等差數列，且 a,b,c,d 成等比數列，試求 d 值。

(7) 設一凸多邊形，其各內角的度數成等差數列，若已知公差為 4°，最大內角之度數為 172°，問此多邊形的邊數？

(8) 一等差數列$\{a_n\}$的前 n 項之和 $S_n=5n^2+3n$，試求第 n 項 a_n。(用 n 表示)

(9) 設數列$\langle a_n\rangle$前 n 項的和 $a_1+a_2+\ldots+a_n=2^{n+1}(n^2-2n)$，則此數列的第 n 項 a_n=？

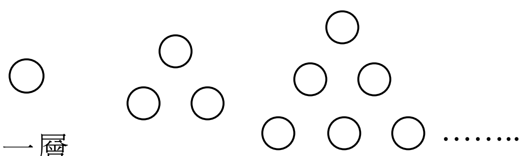
(10) n 為自然數，已知數列$<4n-3>$、$<6n-5>$均為等差數列，將這二個數列的共同項取出也會形成一個等差數列，請將這個數列的一般項寫出來，並求第 10 項。

(11) 小安於年初存入銀行 10000 元，其年利率為 10%，依複利計算。若他每年的年初存入 10000 元，試求第 10 年的年底期本利和為多少元？
(已知 $(1.1)^{10}=2.5937425$，不足一元部分採四捨五入處理)

(12) 在等差數列$\{a_k\}_{k=1}^{n}$中，已知 $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=30$，試求前 20 項和。

(13) 觀察數列 2×1，3×3，4×5，5×7，…前四項的規則，依此規則求出
(a)第 34 項=_______，(b)用$\sum$ 表示數列 1 到 100 項之和為________，
(c)求數列 1 到 100 項之和為________。

(14) 考慮一個 n 層三角垛，將每一層的圓圈數目呈現如下圖：



第一層　第二層　第三層

(a)第 n 層有幾個圓圈？　(b)由第 1 層至第 n 層共有幾個圓圈？

(15) 試求 $69\times71+68\times72+67\times73+\ldots+2\times138+1\times139$ 之值。

(16) 級數 $1\cdot2+2\cdot5+3\cdot8+4\cdot11+\ldots+$ 第 n 項，則第 n 項=__________，其和=_______。

(17) 設$\{a_n\}$是一個等差數列，S_n，S_{2n}，S_{3n}分別代表此數列前 n 項、前 $2n$ 項、前 $3n$ 項之和。試證明 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$形成一等差數列。

(18) 某人向銀行借款一百萬，年利率 8%，採複利計算。若此人每年年終須還本息一次，每次所還款項相等，十年還清。試問他每次要還多少元？
(已知$(1.08)^{10}=2.16$，不足一元部分捨去不計)

進階問題

(19) 求級數 $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(2n-1)^2-(2n)^2=$？

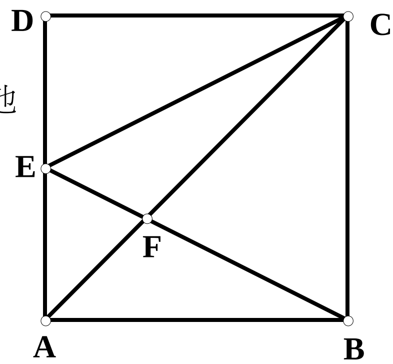
(20) 求級數 1+11+111+1111+…到第 n 項之和。

(21) 將自然數 1,2,3,4,…以括號成如下形式：
(1)、(2,3)、(4,5,6)、(7,8,9,10)、……
試問(a)第 23 個括號內的第一個數是多少？
(b)第 n 個括號內的第一個數是多少？
(c)第 23 個括號內所有項的和是多少？
(d)第 n 個括號內所有項的和是多少？

(22) 試求 $1+2+2+3+3+3+\ldots+\overbrace{(100+100+\ldots+100)}^{\text{共100項}}=$？

(23) 有兩個等差數列$\{a_n\}$與$\{b_n\}$，S_n，T_n分別表示前 n 項之和，若 $S_n：T_n=(7n+1)：(4n+27)$，試求 $a_{11}：b_{11}$之比值。

(24) 在台電工地放置 48 根電線桿，從距離工地 1000 公尺處開始豎立第一根電線桿，之後向前每隔 15 公尺豎立一根，直到 48 根全部豎立完成才停止。假設一輛卡車每次只能載運 3 根電線桿，此輛卡車自工地出發到完工後又返回原地，試求它至少需要行駛多少公里？



(25) 如右圖，邊長爲 a 的正方形 ABCD，E 爲 AD 之中點且 AC 與 BE 交於 F 點，試證：ΔAFE,ΔEFC,ΔFBC 的面積形成等比數列。

(26) 數列$\frac{1}{1}$、$\frac{2}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{1}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{4}{1}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{4}$、….，依此規則，請問$\frac{7}{9}$爲第幾項？

(27) 自 1 開始之自然數中去掉 2 的倍數，3 的倍數，5 的倍數後，構成一個數列：1,4,7,11,13,17,…試求此數列的第 1000 項=？且前 1000 項總和=？

(28) 級數 1×1×4+2×3×7+3×5×10+…+10×19×31 具有規則性，
(a)將此級數以Σ表示。(b)求此級數的和。

(29) 設 a_n=1+2+…+n，則$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$=？

(30) 設數列<a_n>，$a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$，則$\displaystyle\sum_{k=1}^{120}\frac{1}{a_k}$=？

(31) 請計算$\dfrac{1\cdot2^1}{2\cdot3}+\dfrac{22^2}{3\cdot4}+\dfrac{3\cdot2^3}{4\cdot5}+\ldots+\dfrac{n\cdot2^n}{(n+1)(n+2)}$=？(用 n 表示)

(32) 求級數$\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\ldots+\dfrac{n}{(n+1)!}$=？ (用 n 表示)
(註：1！=1，2！=1×2，3！=1×2×3，…,n！=1×2×3×…×n)

綜合練習解答

(1) (A)(B)(C)(D)
[解法]：根據程式設計的規律，可發現每 5 秒機器狗可前進 1 步，
且知 P(1)=1，P(2)=2，P(3)=3，P(4)=2，P(5)=1，…
⇒ P(10)=P(5×2)=2
P(101)=P(5×20+1)=20+P(1)=21
P(103)=P(5×20+3)=20+P(3)=23
P(104)=P(5×20+4)=20+P(4)=22

(2) (C)
[解法]：
設首項=a,公比= d，

$$\begin{cases} a+(a+2d)+(a+4d)+(a+6d)+(a+8d)=15\cdots\cdots(1) \\ (a+d)+(a+3d)+(a+5d)+(a+7d)+(a+9d)=30\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

將(2)式減去(1)式可得 5d=15 ⇒ d=3

(3) (C)(E)

(4) 1020 個

(5) 設{a_n}為公差=d 的等差數列，想辦法證明數列 $e^{a_1},e^{a_2},e^{a_3},\ldots$公比為 e^d。

(6) $\dfrac{1728}{49}$

(7) 12

(8) 10n–2

(9) $2^n(n^2-3)$

(10) 12n–11，109

(11) 175312 元

(12) 150

(13) (a)35×77 (b) $\sum_{k=1}^{100}(k+1)(2k-1)$ (c)681650

(14) (a)$\frac{1}{2}n(n+1)$ (b)$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

[解法]：

(a)設第 n 層的圓圈有 a_n 個，$a_n=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$。

(b)由第 1 層至第 n 層圓圈數

$=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$

$=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)\quad=\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k)=\frac{1}{2}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2})$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

(15) 226205

(16) $n(3n-1)$，$n^2(n+1)$

(17) 證明：$2(S_{2n}-S_n)=S_n+S_{3n}-S_{2n}$ 即可。

(18) 148966 元

(19) $-2n^2-n$[提示：原式$=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\ldots+(2n-1)^2-(2n)^2=\sum_{k=1}^{n}[(2k-1)^2-(2k)^2]$]

(20) $\frac{10}{81}(10^n-1)-\frac{n}{9}$

(21) (a)254 (b)$\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ (c)6095(d)$\frac{(n^2+1)n}{2}$

(22) 338350[提示：原式$=1^2+2^2+\ldots+100^2$]

(23) 4：3

[提示：由$\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+1}{4n+27}$ 可得$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2b_1+(n-1)d_2}=\frac{7n+1}{4n+27}\Rightarrow\frac{a_1+\frac{n-1}{2}d_1}{b_1+\frac{n-1}{2}d_2}=\frac{7n+1}{4n+27}\Rightarrow\frac{a_{11}}{b_{11}}=$

$\frac{a_1+10d_1}{b_1+10d_2}=\frac{7\times21+1}{4\times21+27}=\frac{4}{3}$。令一種想法：$n$ 項和=中間項×項數$\Rightarrow\frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{a_{11}\times21}{b_{11}\times21}=\frac{S_{21}}{T_{21}}$]

(24) 43.76 公里

[提示：每次運電線桿回到工地的路程是一個等差數列，公差爲 30 公尺]

(25) 略

(26) 114

[解法]：由數列的規則可知$\frac{7}{9}$爲分子與分母和等於 16 的第 9 項，

故$\frac{7}{9}$是第$(1+2+\ldots+14)+9=114$。

(27) 3749；187500 [提示：因為 2,3,5 的最小公倍數為 30，所以先考慮 1~30 的數中，去掉 2,3,5 的倍數，結果只剩下 1,7,11,13,17,19,23,29，而這些數每次加 30 就是自然數中去掉 2,3,5 的倍數後，所剩下的數。]

(28) (a) $\sum_{k=1}^{10} k(2k-1)(3k+1)$ (b)17710

(29) $2(1-\frac{1}{n+1})$[提示：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$]

(30) 10 [提示：$\sum_{k=1}^{120}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{120}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{120}\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$]。

(31) $\frac{2^{n+1}}{n+2}-1$[提示：$\frac{k\cdot 2^k}{(k+1)(k+2)}=\frac{2(k+1)-(k+2)}{(k+1)(k+2)}\cdot 2^k=\frac{2^{k+1}}{k+2}-\frac{2^k}{k+1}$]

(32) $1-\frac{1}{(n+1)!}$ [提示：$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$]