圓錐曲線的補充資料

(甲)圓錐曲線的其他定義

(1)利用離心率定義圓錐曲線：

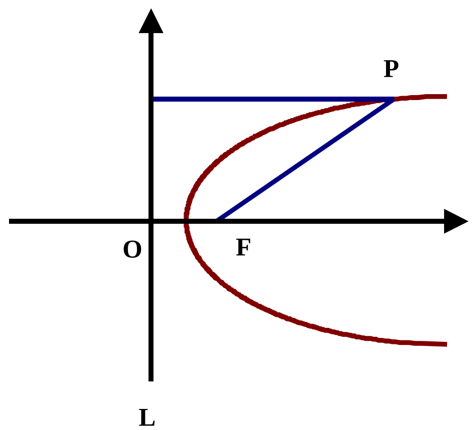
平面上到一定點F和一條定直線L(F$\notin$L)的距離比等於一個常數e的動點P的軌跡，

稱爲圓錐曲線Γ，即 $\Gamma=\{P|\ \overline{PF}=e\cdot d(P,L)\}$。

其中F稱爲Γ的焦點，直線L稱爲Γ的準線，定數e稱爲Γ的離心率。

我們選定直線L爲y軸，過定點F而與L垂直的直線爲x軸，

設P(x,y)爲Γ上的一點，令F(c,0)，$c\neq0$



$\Leftrightarrow\sqrt{(x-c)^2+y^2}=e\cdot|x|$

$\Leftrightarrow (1-e^2)x^2+y^2-2cx+c^2=0$…….(*)

(a)當 $e=1$ 時，(*)可化成$y^2=2c(x-\frac{c}{2})$

故Γ代表拋物線。

(b)當 $0<e<1$ 時，(*)可化成

$$\frac{(x-\frac{c}{1-e^2})^2}{\frac{e^2c^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{(y-0)^2}{\frac{e^2c^2}{1-e^2}}=1$$

故Γ代表橢圓。

(c)當$e>1$ 時，(*)可化成

$$\frac{(x+\frac{c}{e^2-1})^2}{\frac{e^2c^2}{(e^2-1)^2}}-\frac{(y-0)^2}{\frac{e^2c^2}{e^2-1}}=1$$

故Γ代表雙曲線。

(2)由標準式求離心率、準線、焦點

我們從圓錐曲線的標準式出發，也可以求得離心率、準線與焦點。

(a)拋物線：

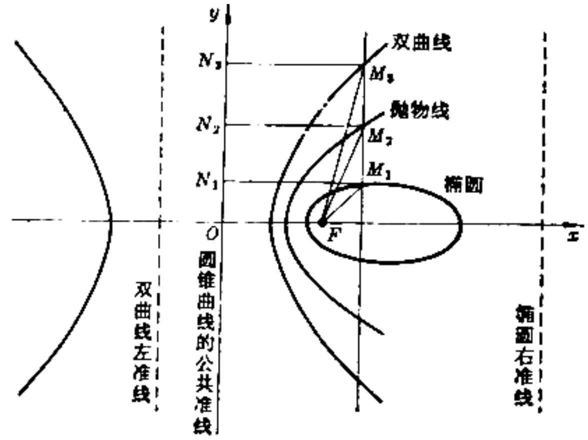
設拋物線Γ方程式爲$y^2=4cx$，焦點F(c,0)

設P(x,y)爲Γ上的任一點，

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=|x+c|$

取準線爲$x+c=0$，上式可化爲$\overline{\mathrm{PF}}=d(\mathrm{P},\mathrm{L})$，

因此可得離心率$e=1$，準線$x+c=0$，焦點F(c,0)。



(b)橢圓：

設橢圓Γ方程式爲$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$爲焦點

設P(x,y)爲Γ上的任一點，

$\overline{\mathrm{PF_1}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=|\dfrac{c}{a}x-a|=\dfrac{c}{a}|x-\dfrac{a^2}{c}|$。

$\overline{\mathrm{PF_2}}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=|\dfrac{c}{a}x+a|=\dfrac{c}{a}|x+\dfrac{a^2}{c}|$

取準線爲L_1：$x-\dfrac{a^2}{c}=0$ 或L_2：$x+\dfrac{a^2}{c}=0$，上式可化爲$\overline{\mathrm{PF_1}}=\dfrac{c}{a}d(\mathrm{P},L_1)$或$\overline{\mathrm{PF_2}}=\dfrac{c}{a}d(\mathrm{P},L_2)$

因此可得離心率$e=\dfrac{c}{a}$，準線L_1：$x-\dfrac{a^2}{c}=0$ 或L_2：$x+\dfrac{a^2}{c}=0$，對應的焦點爲$F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$

(c)雙曲線：

設雙曲線Γ方程式爲$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$爲焦點

設P(x,y)爲Γ上的任一點，

$\overline{\mathrm{PF_1}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=|\dfrac{c}{a}x-a|=\dfrac{c}{a}|x-\dfrac{a^2}{c}|$。

$\overline{\mathrm{PF_2}}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=|\dfrac{c}{a}x+a|=\dfrac{c}{a}|x+\dfrac{a^2}{c}|$

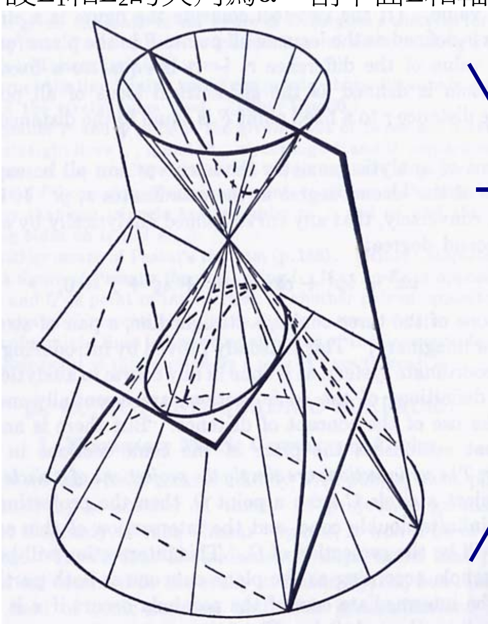
取準線爲L_1：$x-\dfrac{a^2}{c}=0$ 或L_2：$x+\dfrac{a^2}{c}=0$，上式可化爲$\overline{\mathrm{PF_1}}=\dfrac{c}{a}d(\mathrm{P},L_1)$或$\overline{\mathrm{PF_2}}=\dfrac{c}{a}d(\mathrm{P},L_2)$

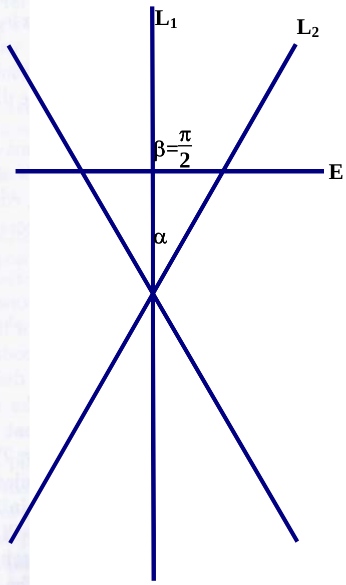
因此可得離心率$e=\dfrac{c}{a}$，準線L_1：$x-\dfrac{a^2}{c}=0$ 或L_2：$x+\dfrac{a^2}{c}=0$，對應的焦點爲$F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$

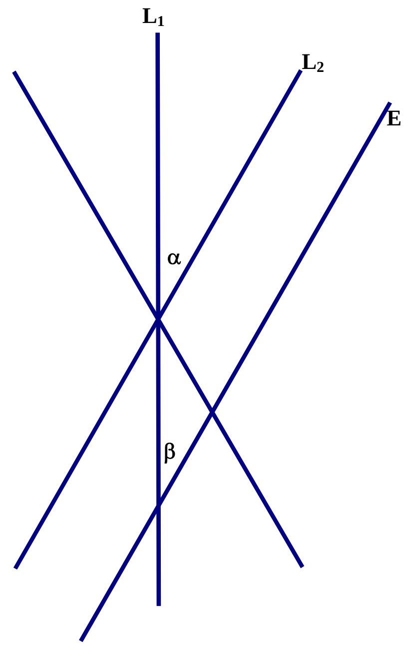
(3)平面截圓錐：

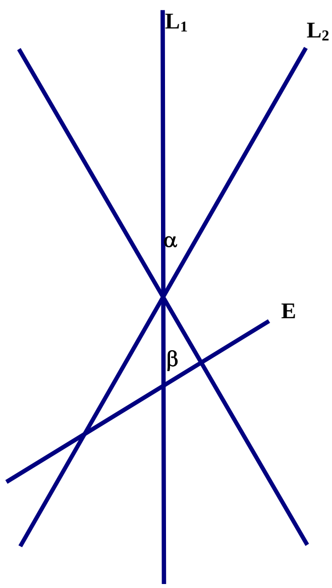
(a)設L_1與L_2是相交於O點的兩條直線，讓L_2以L_1爲軸旋轉，所得的曲面就是一個直圓錐面Ω，再用一個不過O點的平面E去切割Ω，所得的曲線稱爲圓錐曲線。

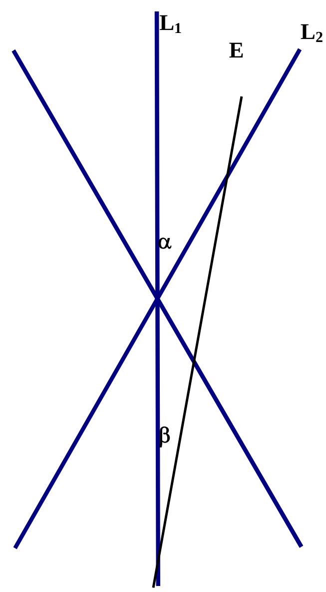
設L_1和L_2的夾角爲α，割平面E和軸線L_1的夾角爲β，











(1°)當$\frac{\pi}{2}>\beta>\alpha$時，截痕曲線稱爲**橢圓**；($\beta=\frac{\pi}{2}$時，截痕曲線稱爲**圓**)

(2°)當β=α時，截痕曲線稱爲**拋物線**

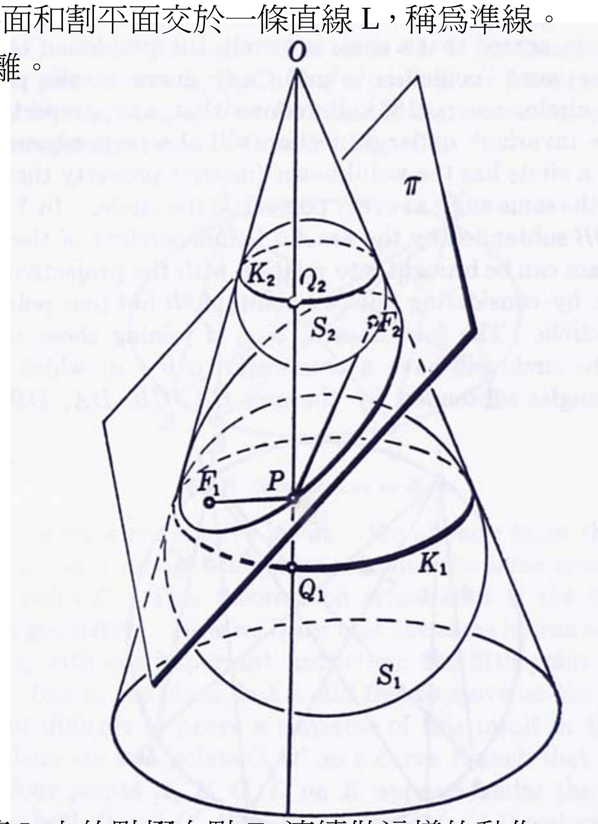
(3°)當 $0\le\beta<\alpha$時，截痕曲線稱爲**雙曲線**

(b)面截圓錐與焦半徑定義之間的關係：

(1°)當$\frac{\pi}{2}>\beta>\alpha$時，在圓錐中塞進兩個球$S_1$、$S_2$分別從上、下兩方面與割平面E相切於$F_1$和$F_2$點，而與圓錐面相切於圓$K_1$和$K_2$。設P為截痕上任一點，連接直線OP，交$K_1$、$K_2$於$Q_1$、$Q_2$點，則有$PF_1+PF_2$=定長。

(2°)當 $0\leq\beta<\alpha$時，則割平面和Ω交於上下兩曲線，在上下塞進兩個球S_1、S_2(此時它們分居Ω的的上下兩部分)與割平面E相切於F_1和F_2點，而與Ω相切於圓K_1和K_2。設P為截痕上任一點，連接直線OP，交K_1、K_2於Q_1、Q_2點，則有$|PF_1-PF_2|$=定長。

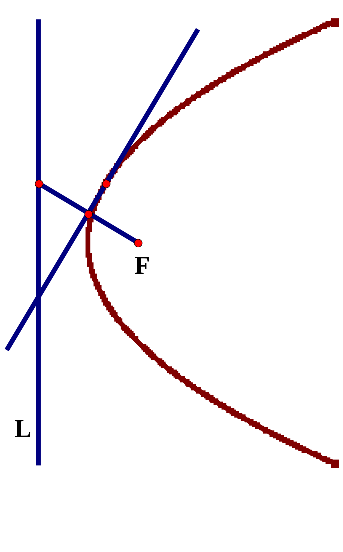
(3°)當$\beta=\alpha$時，則割平面E和Ω交於開口的一支，這時，我們只能塞進一個球，它和Ω相切於圓 C，和割平面相切於 F 點，另外，圓 C 所在的平面和割平面交於一條直線 L，稱為準線。設 P 為截痕上任一點，則 PF=P 點到直線 L 的距離。

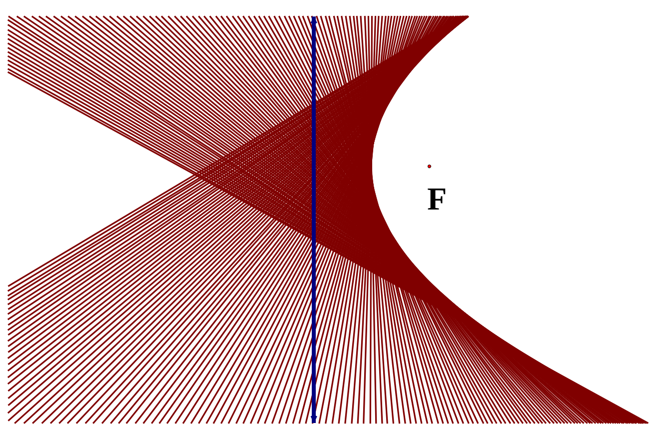


(4)摺出圓錐曲線：

(a)摺拋物線：

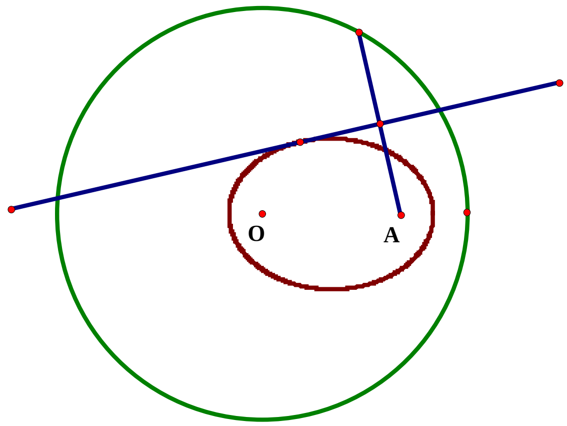
如圖在一張紙上劃一條直線 L 與不在 L 上一點 F，將 L 上的點摺向點 F，連續做這樣的動作，那麼這些摺痕便可「包絡」稱一個拋物線。

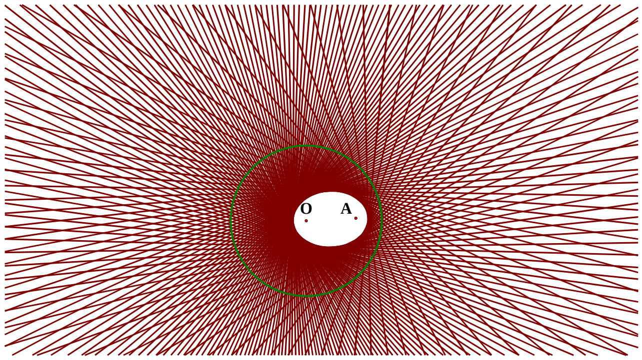




(b)摺橢圓：

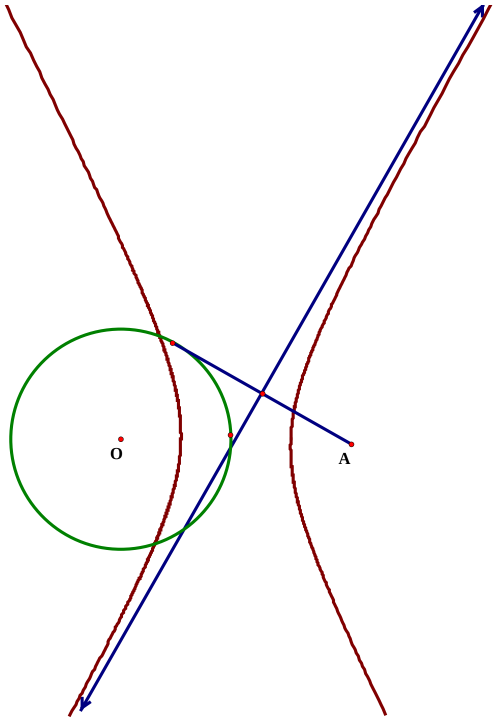
如圖在紙上畫一個圓心 O，並在圓內劃一點 A，將圓上的點摺向點 A，連續做這樣的動作，那麼這些摺痕便可「包絡」稱一個橢圓。

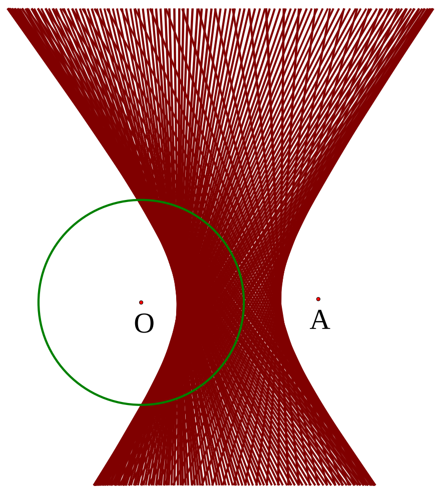




(c)摺雙曲線：

如圖在紙上畫一個圓心 O，並在圓外劃一點 A，將圓上的點摺向點 A，連續做這樣的動作，那麼這些摺痕便可「包絡」稱一個雙曲線。



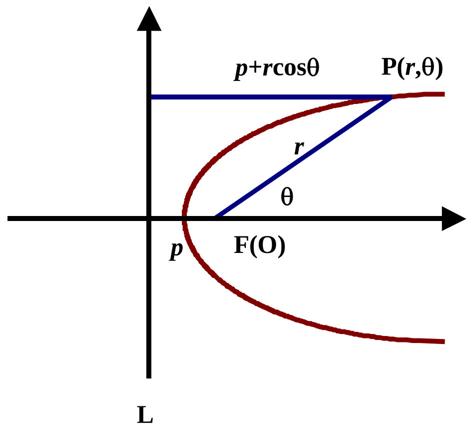


(乙)圓錐曲線的極座標方程式

平面上到一定點 F 和一條定直線 L(F$\notin$L)的距離比等於一個常數 e 的動點 P 的軌跡，是一個以 e 爲離心率的圓錐曲線，其中 F 稱爲Γ的焦點，直線 L 稱爲Γ的準線，現在我們想要用極座標來推導出出代表圓錐曲線Γ的極座標方程式。

設極軸以 F 爲極點 O，且垂直定直線 L，極點 O 到 L 的距離爲 p，

設Γ上的動點 P 的極坐標爲(r,θ)



由定義$\overline{PF}=e\cdot d(P,L) \Leftrightarrow r=e\cdot(p+r\cos\theta)$

上式整理成 $r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ ……(*)。

(*)稱爲圓錐曲線Γ的極坐標方程式。

(1°)$e=1$ 時，$r=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$ 表示拋物線。

(2°)$0<e<1$ 時，$r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$表示橢圓。

(3°)$e>1$ 時，$r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$表示雙曲線。

當$\theta=\dfrac{\pi}{2}$時，$r=ep$ 爲正交弦長。