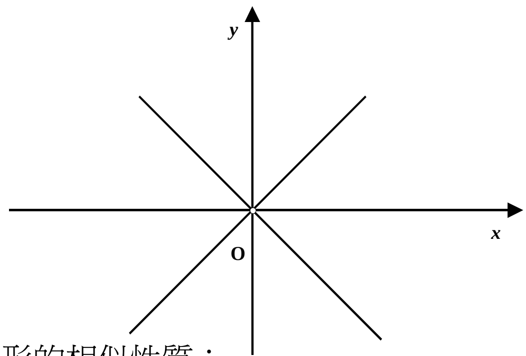
第二十二單元直線方程式

(甲)斜率的概念

(1)一個斜坡的傾斜程度，可用水平方向每前進一個單位時，鉛直方向上升或下降多少個單位距離來表示，在坐標平面上，我們也可以用這個概念來顯示直線的傾斜程度。在坐標平面上，每一條直線對水平線x軸而言，不僅有**傾斜度**，同時還有**方向**的問題。例如在圖中，L_1和L_2對x軸的**傾斜度**是相同的，但**方向**不一樣，就像斜坡一樣，有上升或下降的情形，我們可否用一個值來表示直線的傾斜度與方向呢？



(2)引入斜率：

如下圖一：

設直線AB上兩相異點P(x_1 , y_1)、Q(x_2 , y_2)，根據三角形的相似性質：

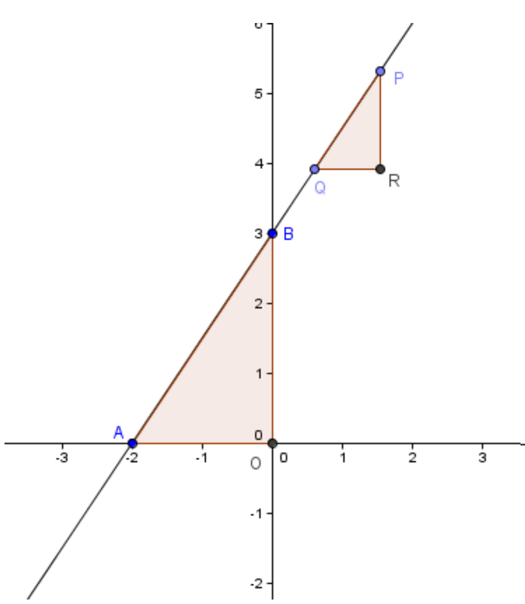
$$\frac{\text{RP}}{\text{RQ}}=\frac{\text{OB}}{\text{OA}}=\frac{3}{2}\quad\Rightarrow\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{y\text{坐標對應相減}}{x\text{坐標對應相減}}=\frac{3}{2}$$

如下圖二：

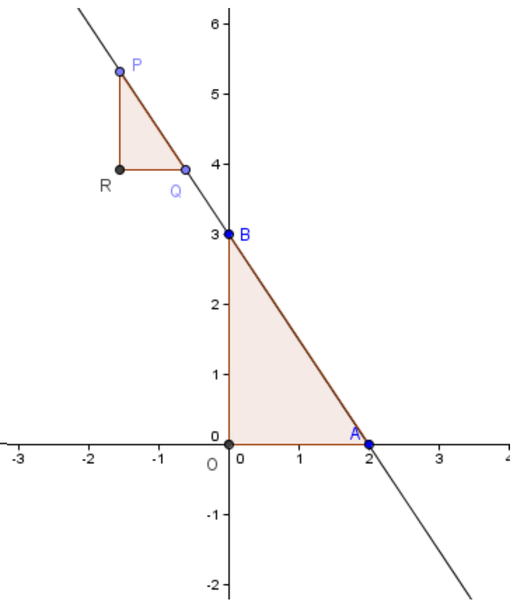
設直線AB上兩相異點P(x_1 , y_1)、Q(x_2 , y_2)，根據三角形的相似性質：

$$\frac{\text{RP}}{\text{RQ}}=\frac{\text{OB}}{\text{OA}}=\frac{3}{2}\quad\Rightarrow\frac{y_1-y_2}{x_2-x_1}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{-3}{2}\Rightarrow\frac{y\text{坐標對應相減}}{x\text{坐標對應相減}}=\frac{-3}{2}$$

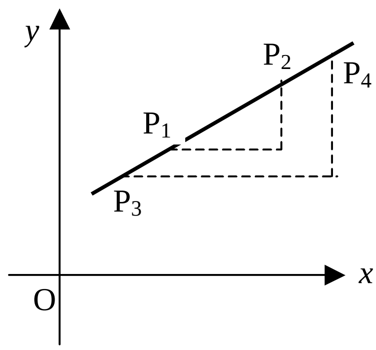


圖一



圖二

根據上面的討論，可以得知在直線AB上任取兩點P(x_1 , y_1)、Q(x_2 , y_2)，其中$x_1\neq x_2$，那麼 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ($\frac{y\text{坐標對應相減}}{x\text{坐標對應相減}}$) 為一定值，因此我們可以用$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$來描述直線的「**走勢**」。



若$x_1=x_2$，直線L為一條鉛直線，我們已經知道它的傾斜程度，因此不定義它的傾斜程度。

(3)斜率的定義：設直線L上有兩相異點$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$

(a)若$x_1\neq x_2$，則直線L的斜率定義為$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。

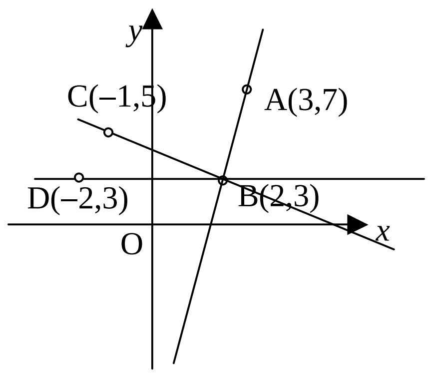
(b)若$x_1=x_2$，直線L為一條鉛直線，不定義它的斜率。

一直線的斜率是定值嗎？

如果我們在直線L上任取其他相異兩點$P_3(x_3,y_3)$，$P_4(x_4,y_4)$，如圖，由相似三角形對應邊成比例，可得$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}$，又由於$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，$\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}=\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}$，所以比值$m$不會因為所選取的兩點不同或順序不同而改變其值。

[例題1] 如圖，試求直線 AB、BD、BC 的斜率。

Ans：$4,0,-\frac{2}{3}$



[課堂討論]：

利用前面介紹的斜率定義，說明一次函數 $y=ax+b$ 的圖形是一條斜率為 a 的直線。

(4)斜率與傾斜程度：

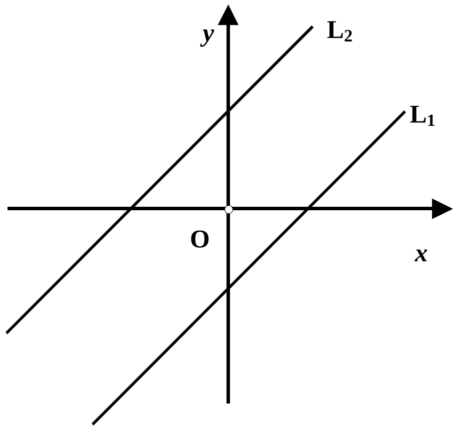
直線斜率的絕對值代表傾斜程度：傾斜程度愈大，則其斜率的絕對值也愈大，而且

(a)當直線由左下到右上傾斜時，其斜率爲正。

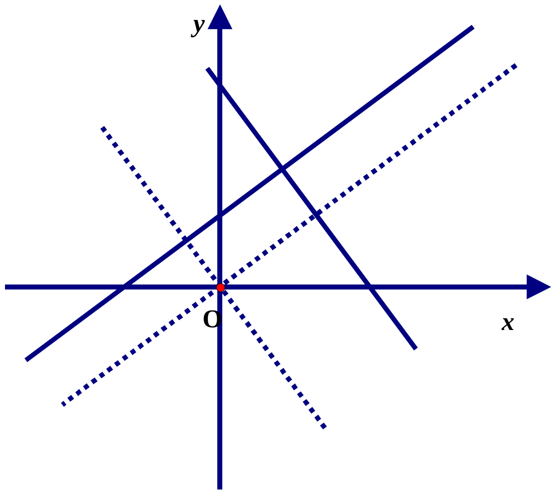
(b)當直線由左上到右下傾斜時，其斜率爲負。

(c)當直線成水平時，其斜率爲 0。

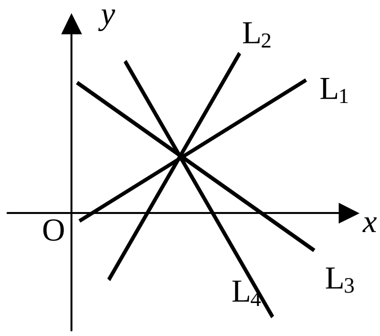
[例題2] 斜率爲m_1與m_2的直線L_1、L_2互相平行$\Rightarrow m_1=m_2$。



[例題3] 斜率爲m_1與m_2的直線L_1、L_2互相垂直$\Leftrightarrow m_1\cdot m_2=-1$。



(練習1)如右圖，設m_1,m_2,m_3,m_4各爲直線L_1,L_2,L_3,L_4的斜率，
試比較m_1,m_2,m_3,m_4的大小。
Ans：$m_2>m_1>m_3>m_4$



(練習2)設 A(2,1)、B(3,5)、C(0,−1)、D(2,a)

(1)若$\overline{AB}//\overline{CD}$則 a=_____。

(2)若$\overline{AB}\perp\overline{CD}$則 a=_____。

(3)若 A,B,D 共線則 a=_____。Ans：$7,-\frac{3}{2},3$

(練習3)設 $f(x)=2011x+2003$，求 $\dfrac{f(8888)-f(6666)}{8888-6666}=$？　Ans：2011

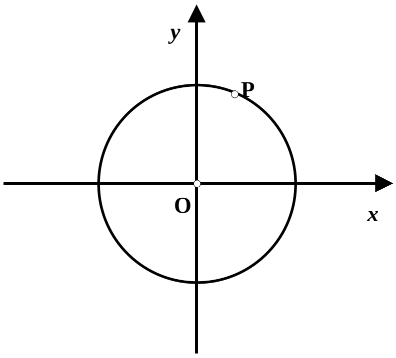
(乙)直線方程式

(1)方程式與圖形：

在平面上建立平面坐標系後，每一個點P都可以用數對(x,y)來表示P的位置。同樣的，一條直線或一個圓或其它的幾何圖形都可對應一個方程式。

例如：一個以原點O爲圓心，2 爲半徑的圓C，如何利用代數方程式來表示呢？

設P(x,y)爲圓C上任一點，



$\Leftrightarrow \overline{OP}^2=2^2$

$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=2^2$

所以，圓C上每一點P(x,y)的坐標都 滿足$x^2+y^2=4$。

反之，滿足$x^2+y^2=4$ 的點(x,y)都會在圓C上。

如此我們就說圓C的方程式爲$x^2+y^2=4$。

結論：

要求一個平面圖形G的方程式$f(x,y)=0$。

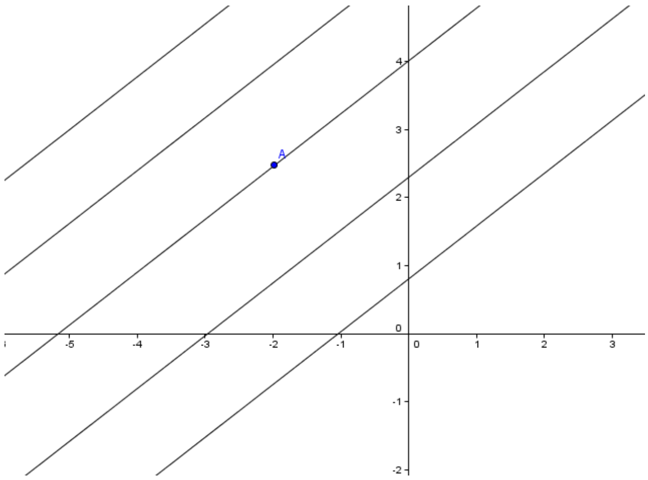
(1)假設P(x,y)爲G上的任一點，找出x,y的關係$f(x,y)=0$。

(2)驗證$f(x,y)=0$ 上的點是否在G上。

(2)決定直線的條件──斜率與點

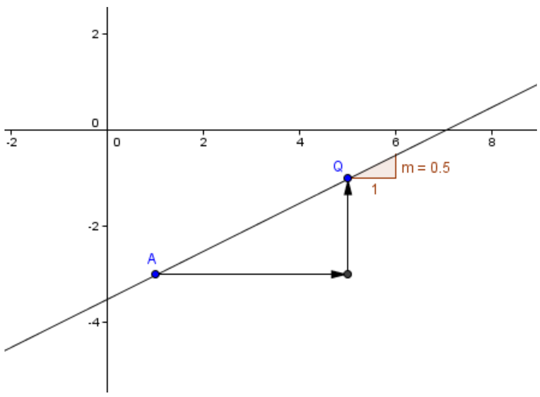
平面上斜率爲m的直線有無限多條，其中恰有一條直線通過定點A。

如何由斜率與已知點求直線方程式呢？



例一：

求作一直線過點 A$(1,-3)$且斜率爲$\frac{1}{2}$的直線方程式。



[解法]：

(1°)設 P(x,y)爲直線 L 上一點，根據斜率的定義，可以得知

當 $x\neq1$ 時，$\dfrac{y-(-3)}{x-1}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y-(-3)=\dfrac{1}{2}(x-1)$

當 $x=1$ 時，點 $A(1,-3)$ 亦滿足上式。

因此直線 L 上任一點 $P(x,y)$ 均為方程式 $y-(-3)=\frac{1}{2}(x-1)$ 的解。

(2°)設 $Q(m,n)$ 為方程式 $y-(-3)=\frac{1}{2}(x-1)$ 的解，且 $Q\neq A$

故 $n-(-3)=\frac{1}{2}(m-1) \Rightarrow \frac{n-(-3)}{m-1}=\frac{1}{2} \Rightarrow$ 直線 QA 的斜率為 $\frac{1}{2}$。

因為過 A 點且斜率為 $\frac{1}{2}$ 的直線恰有一條，故直線 QA 即為直線 L。

因此方程式 $y-(-3)=\frac{1}{2}(x-1)$ 的解都落在直線 L 上。

[例題4] 在平面上，過一定點 $\mathbf{A}(x_1,y_1)$ 且斜率為 m 的直線只有一條，方程式為 $y-y_1=m(x-x_1)$。

點斜式： 在平面上，過一定點 $\mathbf{A}(x_1,y_1)$ 且斜率為 m 的直線只有一條，方程式為 $y-y_1=m(x-x_1)$，我們稱之為**點斜式**。

例二：求過點 $A(3,4)$、$B(-4,7)$ 的直線方程式。

例三：求過點 $A(3,4)$、$B(3,7)$ 的直線方程式。

結論：直線**L**上有相異兩點$\mathbf{P_1(}\boldsymbol{x_1,y_1}\mathbf{)}$、$\mathbf{P_2(}\boldsymbol{x_2,y_2}\mathbf{)}$，則直線**L**的方程式 ①若$\boldsymbol{x_1=x_2}$，則直線**L**的方程式爲$\boldsymbol{x=x_1}$。 ②若$\boldsymbol{x\neq x_2}$，則直線**L**的方程式爲$\boldsymbol{y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$。

例四：設直線 L 的斜率爲 m，y 截距爲 b(即直線 **L** 與 $\boldsymbol{y}$ 軸相交於點$\boldsymbol{(0,b)}$)，則 L 的方程式爲 $y=mx+b$。

例五：設直線 L 的 x,y 截距分別爲 a,b(直線與 x,y 軸的交點爲$(a,0)$、$(0,b)$)，

$ab\neq0$，則直線方程式爲$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$。

結論：直線方程式 $\boldsymbol{ax+by+c=0}$， **(a)**若 $\boldsymbol{b=0}$，則此直線爲鉛直線。 **(b)**若 $\boldsymbol{b\neq0}$，則此直線的斜率爲$\boldsymbol{-\dfrac{a}{b}}$。

[例題5] 試求下列三小題：

(1)過點(3,–2)而與直線 $5x-4y+1=0$ 垂直的直線方程式。

(2)x 截距 1，且與過點(3,2)、(–5,7)之直線平行的直線方程式。

(3)已知三角形之頂點爲 A(–1,–10)、B(2,–1)、C(6,–3)，試求ΔABC 的垂心 H。

Ans：(1)$4x+5y=2$ (2)$5x+8y=5$ (3)H(3，–2)

[例題6] 試求下列各小題：

(1)直線 L 過點(2,6)且與 x 軸及 y 軸之截距和為 1，試求 L 的方程式。

(2)直線 L 在兩軸之截距的絕對值相等，並經過(−3,1)，
則直線 L 的方程式為何？

Ans：(1)$y-6=2(x-2)$；$y-6=\frac{3}{2}(x-2)$　(2)$x+y+2=0$，$x-y-4=0$，$x+3y=0$

(練習4) 求出下列條件所決定的直線方程式：

(1)過兩點(2,5)與(6,−5)(2)過點(−3,4)，x 截距−1

(3)x 截距−5，y 截距−4(4)斜率為$-\frac{1}{3}$，y 截距−3

(5)過(−2,−5)而垂直於直線 $x-2y=7$

Ans：(1)$5x+2y-20=0$(2)$2x+y+2=0$(3)$\frac{x}{-5}+\frac{y}{-4}=1$

(4)$y=\frac{-1}{3}x-3$(5)$2x+y+9=0$

(練習5) 設ΔABC 之三頂點 A(−2,3)、B(0,2)、C(4,−1)，則求

(1)直線 AB 的方程式。

(2)BC 邊的中線方程式，重心坐標。

(3)AC 邊的高所在的直線方程式，垂心坐標。

(4)AB 邊的中垂線，外心坐標。

Ans：(1)$x+2y-4=0$ (2)$5x+8y-14=0$，$(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$

(3)$3x-2y+4=0$，(22,35)(4)$4x-2y+9=0$，$(-10,-\frac{31}{2})$

(3)解析法處理幾何問題：

選取適當的座標系，將幾何的問題用代數的方法來處理。

幾何	代數
過一點 A 作直線 L 的垂線	求過A(x_0,y_0)與直線L：$ax+by+c=0$ 垂直的直方程式。
過線外一點 A 作直線 L 的平行線	求過A(x_0,y_0)與直線L：$ax+by+c=0$ 平行的直線方程式。
找兩條直線的交點	兩條直線的方程式聯立求解。
三點共線	找一條直線方程式使這三點的座標均爲其解。
三線共點	三條線的聯立方程式，恰有一組解。

[例題7] 在ΔABC中，M爲$\overline{BC}$的中點，試證明：$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2$。

[例題8] 證明ΔABC 的三高共線。

[例題9] 試求點 A(1,1)關於直線 $4x+2y-1=0$ 的對稱點。 Ans：$(-1,0)$

[問題與討論]：
設A、B爲平面上不在直線L上的兩點，

(1)可否在L上找一點P使得$\overline{AP}+\overline{BP}$的值最小？

(2)可否在L上找一點P使得$|\overline{AP}-\overline{BP}|$的值最小？

(3)可否在L上找一點P使得$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$的值最小？

(練習6) 試證平行四邊形定理「平行四邊形中，四邊的平方和等於對角線的平方和」。

(練習7) 計算點 A(m,n)到直線 $ax+by+c=0$ 的距離。

(練習8) 不論 k 爲任何的實數，直線$(3k+5)x+(k-1)y+9k-1=0$ 恆過一定點 P，則 P 點的坐標爲何？ Ans：P$(-1,-6)$

(練習9) 設$\frac{2a}{3}+\frac{b}{3}=1$，其中 $b\neq 0$，則直線 L：$2ax+by+1=0$ 恆過那一個點？

Ans：$(\frac{-1}{3},\frac{-1}{3})$

(練習10) 設 A$(3,-1)$，B$(9,3)$，P 爲 L：$2x-3y+4=0$ 上一點，當 P 點坐標爲______，

時$\overline{AP}+\overline{BP}$有最小值爲有最小值爲________。Ans：P(4,4)、$2\sqrt{26}$

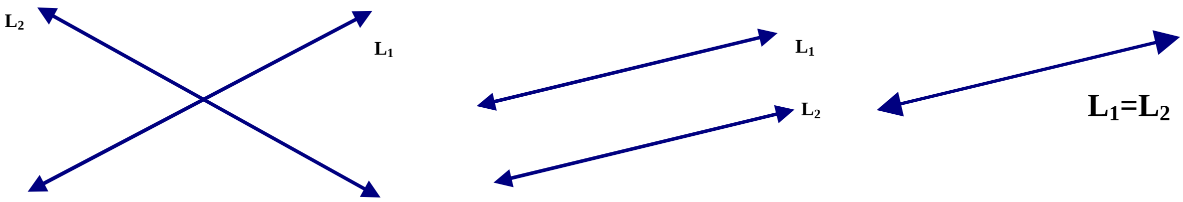
(練習11) 在直線 $x-5y-12=0$ 上找一點 Q，使得$|\overline{QA}-\overline{QB}|$有最大值，則 Q 點的坐標爲__________，又此最大值爲__________。

Ans：Q(8，$\frac{-4}{5}$)，$\sqrt{74}$

(丙)兩直線的關係

(1)兩直線的關係(圖形觀點)：

平面上兩直線L_1、L_2的關係如下：



L_1與L_2交於一點　　L_1與L_2沒有交點(平行)　　L_1與L_2重合

(2) 兩直線的關係(方程式的觀點)：

兩直線 $\begin{cases} L_1: a_1x+b_1y=c_1 \\ L_2: a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ (其中$a_2b_2c_2\neq 0$)

兩直線交於一點 ⇔ 方程組恰有一解 ⇔ $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ 。

兩直線重合 ⇔ 方程組有無限多解 ⇔ $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ 。

兩直線平行 ⇔ 方程組無解 ⇔ $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ 。

(練習12)(1) $\begin{cases} 2x+y-a=0 \\ x+2=y \end{cases}$二直線相交於第二象限，求 a 的範圍爲何？

(2) 就 k 值討論兩直線的關係：$\begin{cases} L_1: (k-3)x-2y=2k \\ L_2: 3x+(2k+1)y=-k-2 \end{cases}$ 。

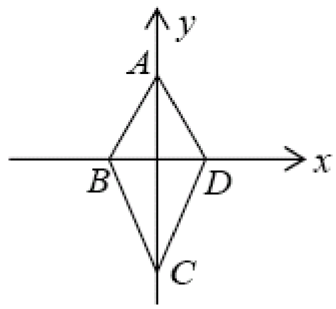
Ans：(1) $-4<a<2$　(2) 當 $k\neq 1$，$\frac{3}{2}$時，二直線相交於一點；當 $k=1$ 時，兩直線重合；當 $k=\frac{3}{2}$時，兩直線平行。

綜合練習

(1) 已知直角三角形 ABC 三頂點坐標爲 A(2,–1)、B(5,1)、C(3,a)，則實數 a 可爲___________。

(2) 設 A(3,1)、B(1,k)、C(–2,–1)，若 A、B、C 三點共線，求 k 之值。

(3) 如右圖所示，坐標平面上一鳶形ABCD，其中A,C在y軸上，B,D在x軸上，且$\overline{AB}=\overline{AD}=2$，$\overline{BC}=\overline{CD}=4$，$\overline{AC}=5$。令$m_{AB}$、$m_{BC}$、$m_{CD}$、$m_{DA}$分別表示直線AB、BC、CD、DA之斜率。試問以下那些敘述成立？



(A)此四數值中以m_{AB}爲最大。
(B)此四數值中以m_{BC}爲最小。
(C)$m_{BC}=-m_{CD}$
(D)$m_{AB}\times m_{BC}=-1$
(E)$m_{CD}+m_{DA}>0$

(4) 坐標平面上四條直線L_1、L_2、L_3、L_4與x軸、y軸及直線$y=x$的相關位置如圖所示，其中L_1與L_3垂直，而L_3與L_4平行。設L_1、L_2、L_3、L_4的方程式分別爲$y=m_1x$、$y=m_2x$、$y=m_3x$、以及$y=m_4x+c$。試問下列哪些選項是正確的？
(1) $m_3>m_2>m_1$ (2) $m_1 \cdot m_4=-1$
(3) $m_1<-1$ (4)$m_2 \cdot m_3<-1$ (5)$c>0$。(2009 學科能力測驗)

(5) 將一張畫有直角坐標系的圖紙摺疊一次，使得 A(0,2)與 B(4,0)重合。若此時點 C(7,3)與點 D(m,n)重合，試求 $m+n$=？

(6) 求滿足下列條件的直線方程式：
(a)過 A(1,4)、B(3,0)二點的直線。(b)過 A(–2,7)、B(–2,0) 二點的直線。
(c)平行 $x+2y-3=0$ 且在 x 軸上的截距爲 8 的直線。
(d) 過 A(3,–2)且在二坐標軸截距相等的直線。
(e)垂直 $2x-y=3$ 且與 x,y 軸所圍成的三角形面積爲 2 的直線。
(f)斜率爲$\frac{-4}{3}$且與二坐標軸所圍成直角三角形的斜邊長爲 5 的直線。
(g)過 A(3,–2)且在二坐標軸截距的絕對值相等的直線。
(h) 試求截距之和爲 5，且與二座標軸所成的面積爲 3 的直線方程式。

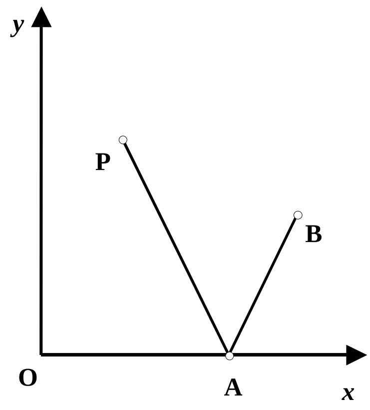
(7) 在ΔABC 中，A(–1,4)、B(3,2)且垂心 H($\frac{19}{8}$,$\frac{7}{4}$)，求 C 點坐標。

(8) 試求m值，使下列三直線不能圍成三角形。
L_1：$4x+y=4$，L_2：$mx+y=0$，L_3：$2x-3my=4$。

(9) L_1：$x+y=4$，L_2：$2x-y=8$，L過(1,0)與L_1、L_2交於A,B，若$\overline{AB}$的中點爲(1,0)，則L方程式爲何？

(10) 設點A(3,1)，直線L：$x+2y=0$，求A點在直線L上的投影點H及對稱點A'之坐標。

(11) 小安用神奇球桿撞球，球從坐標平面上點 P(2,6)打出，碰到檯邊的 A 點，經過完全反射之後，再折向撞擊到 B 球，已知 B 球的坐標(7,4)，試求 A 點的坐標爲__________，並求所行路徑 PA+AB=_________。



進階問題

(12) 坐標平面上，直線 L 通過定點(2,3)且在第一象限內與兩坐標軸所圍成的三角形面積爲最小，求 L 的方程式與最小面積。

(13) 三角形之三邊所在之直線方程式爲L_1：$2x+y-2=0$，L_2：$y=0$，L_3：$x-y+1=0$，若直線L：$y=mx+\frac{3}{2}$與三角形相交，則m之範圍=_______。

(14) 設 A(3,3)、B(−1,−5)、C(6,0)及直線 L：$y=mx-8m-6$，若 L 與ΔABC 相交，則求 m 的範圍。

(15) ΔABC 中，A(2,1)、B(5,4)、C(x,0)，當 x 變動時，ΔABC 有最小的周長，求此時 x=？

(16) (Euler 線)ΔABC 的垂心 H、重心 G、外心 O 三點共線。

綜合練習解答

(1) $-\frac{5}{2},4,\pm\sqrt{3}$

(2) $k=\frac{1}{5}$

(3) (B)(C)(E)

(4) (2)(3)(4)

(1) $m_3>0$，但 $m_2<m_1<0$，故(1)不真

(2) 因爲 L_3與 L_4 平行，且 L_1與 L_3垂直，

從而 L_1與 L_4 垂直，故 $m_1\cdot m_4=-1$

(3) 因爲 $0<m_3<1$，所以$|m_1|>1$。又因爲 $m_1<0$，

故 $m_1<-1$

(4) 因爲 $m_2<m_1\Rightarrow m_2m_3<m_1m_3=-1$

(5) c 爲 L_4 的 Y 軸截距，如附圖，顯然 $c<0$

(5) $\frac{34}{5}$

(6) (a)$2x+y=6$ (b)$x+2=0$ (c)$x+2y=8$ (d)$x+y=1$ 或 $2x+3y=0$ (e)$x+2y=\pm2\sqrt{2}$

(f)$4x+3y=\pm12$(g) $x+y=1$ 或 $2x+3y=0$ 或 $x-y=5$(h) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$，$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$，$\frac{x}{6}+\frac{y}{-1}=1$，$\frac{x}{-1}+\frac{y}{6}=1$

(7) C(1,−1)

(8) $\frac{2}{3}$，−1，4，$-\frac{1}{6}$

(9) $4x+y=4$

(10) H(2,−1)、A′(1,−3)

(11) (5,0)、$5\sqrt{5}$

(12) $3x+2y=12$，12(提示：可以假設直線為$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，再利用 A>0,B>0，$\frac{A+B}{2}\geq\sqrt{AB}$ 去找出面積最小時的 a,b 值。)

(13) $m\geq\frac{3}{2}$ 或 $m\leq-\frac{1}{2}$ (提示：$y=mx+\frac{3}{2}$可視為一群通過$(0,\frac{3}{2})$斜率為 m 的直線，再畫圖去觀察 m 等於那些值時，會與三角形相交)

(14) $-3\leq m\leq-\frac{1}{9}$ (提示：可將 $y=mx-8m-6$ 化為 $y+6=m(x-8)$，視為一群通過定點(8,−6)且斜率為 m 的直線，再畫圖去觀察 m 等於那些值時，會與三角形相交)

(15) $\frac{13}{5}$(提示：可將 C 視為在 x 軸上任意移動的點)

(16) 略