第四章不等式

§4−1 條件不等式

(甲)整式、分式與根式不等式

(1)一元二次不等式：

解二次不等式的方法

設不等式$ax^2+bx+c(>,<,\geq,\leq)0$，先將$a$調整為正

先解一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$的二根α、β

(a)設$a>0$，$D=b^2-4ac>0$，α,β $(\alpha<\beta)$為兩實數

因為$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$　分段討論ax^2+bx+c的正負：

x	$x<\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x>\beta$
$x-\alpha$	−	+	+
$x-\beta$	−	−	+
$(x-\alpha)(x-\beta)$	+	−	+

解$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x>\beta$或$x<\alpha$(大於大的根或小於小的根)

解$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow \alpha<x<\beta$ (介於兩實根之間)

(b)設$a>0$，$D=b^2-4ac=0$，　$\alpha=\beta$為兩相等實數

因為$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$分段討論ax^2+bx+c的正負：

x	$x<\alpha$	$x>\alpha$
$x-\alpha$	−	+
$(x-\alpha)^2$	+	+

解$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x\neq\alpha$(或β) [$x>\alpha$或$x<\alpha$]

(c)設$a>0$，$D=b^2-4ac<0$，α、β均為虛數

$ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$　因為$a>0$且$b^2-4ac<0$，所以$\dfrac{4ac-b^2}{4a}>0$

故不管x代入那一個實數，ax^2+bx+c恆正。

解$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow$ 所有實數均為解

解$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow$ 無解

(2)二次函數恆正(恆負)的充要條件：

對於所有的實數x，二次函數$ax^2+bx+c>0(\geq 0)$恆成立$\Leftrightarrow$ $a>0$ 且$D<0$ $(D\leq 0)$

對於所有的實數x，二次函數$ax^2+bx+c<0(\leq 0)$恆成立$\Leftrightarrow$ $a<0$ 且$D<0$ $(D\leq 0)$

(3)解一元高次不等式 $f(x)\geq 0$

Step1：最高次係數使其為正

Step2：因式分解求出全部的根：$a_1<a_2<\ldots\ldots<a_n$

Step3：由小至大，由左至右排列

Step4：$f(x)>0$⇒取正範圍；$f(x)<0$⇒取負範圍
註：偶次方及恆正之項可捨去，但須注意「等號」是否成立
(ax^2+bx+c中，當$a>0$ 且$b^2-4ac<0$ 時，則ax^2+bx+c恆正)

(4)分式不等式：
基本理論：
(a)基本型式：

$\frac{f(x)}{g(x)}>(<)0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>(<)0$

$\frac{f(x)}{g(x)}\ge(\le)0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>(<)0$ 或 $f(x)=0$

(b)一般型式：

$\frac{f(x)}{g(x)}>(<)h(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}-h(x)>(<)0 \Leftrightarrow \frac{f(x)-h(x)g(x)}{g(x)}>(<)0$

$\Leftrightarrow g(x)[f(x)-h(x)g(x)]>(<)0$

$\frac{f(x)}{g(x)}\ge(\le)h(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}-h(x)\ge(\le)0 \Leftrightarrow \frac{f(x)-h(x)g(x)}{g(x)}\ge(\le)0$

$\Leftrightarrow g(x)[f(x)-h(x)g(x)]>(<)0$ 或$[f(x)-h(x)g(x)]=0$

(5)根式不等式：

型一：$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\ge 0$且$g(x)\ge 0$且$f(x)>g(x)$

型二：$f(x)>\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>0$且$g(x)\ge 0$且$[f(x)]^2>g(x)$

型三：$\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow$ ① $f(x)\ge 0$且$g(x)<0$或② $f(x)\ge 0$且$g(x)>0$且$f(x)>[g(x)]^2$

[**例題**1] 設$x\in R$，求下列二次不等式之解：

(1) $x^2-4x+3\le 0$ (2) $x^2-x-1>0$ (3) $x^2+x+1>0$

(4) $x^2-x+1<0$ (5) $x^2+2x+1>0$ (6) $x^2+4x+4\le 0$

【詳解】

(1) $(x-1)(x-3)\le 0 \quad \Rightarrow 1\le x\le 3$

(2) $x^2-x-1>0 \quad \Rightarrow (x-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2})>0$ (用公式解)

$\Rightarrow x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$或$x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(3) $x^2+x+1>0 \quad \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$恆成立，故解爲 R(一切實數集合)

(4) $x^2+x+1<0 \quad \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}<0$恆成立，故無解

(5) $x^2+2x+1>0 \quad \Rightarrow (x+1)^2>0 \Rightarrow x\in R, x\ne 1$

(6) $(x+2)^2\le 0 \quad \Rightarrow x=-2$

[例題2] 解下列不等式：

(1)$x^4+x^3-7x^2-x+6>0$ (2) $(x-1)^2\cdot(x^2-3x-4)<0$

Ans：(1)$x>2$ 或$-1<x<1$ (2) $-1<x<4, x\neq 1$

[例題3] 解下列不等式：

(1)$\dfrac{x+2}{x-1}>0$ (2)$\dfrac{x-3}{x+2}\leq 0$ (3)$\dfrac{x-1}{(x-2)(x+3)}\geq 0$ (4)$\dfrac{3}{x-2}>x$

Ans：(1)$x<-2$ 或 $x>1$ (2)$-2<x\leq 3$ (3)$-3<x\leq -1$ 或 $x>2$ (4)$x<-1$ 或 $2<x<3$

[例題4] 求解下列根式不等式：

(1) $\sqrt{x+6} \ge \sqrt{x^2-x-2}$ (2) $2 > \sqrt{3x^2+5x+2}$ (3) $\sqrt{x^2+6x+5} \ge x+2$

Ans：(1) $-2\le x\le -1$ 或 $2\le x\le 4$ (2) $-2<x\le -1$ 或 $\frac{-2}{3}\le x<\frac{1}{3}$ (3) $x\ge\frac{-1}{2}$ 或 $x\le -5$

(1) $\begin{cases} x+6\ge 0 \\ x^2-x-2\ge 0 \\ x+6\ge x^2-x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -6 \\ x\le -1 \text{或} x\ge 2 \\ -2\le x\le 4 \end{cases} \Rightarrow -2\le x\le -1$ 或 $2\le x\le 4$

(2) $\begin{cases} 3x^2+5x+2\ge 0 \\ 4>3x^2+5x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le -1 \text{或} x\ge \frac{-2}{3} \\ -2<x<\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -2<x\le -1$ 或 $\frac{-2}{3}\le x<\frac{1}{3}$

(3) ① $\begin{cases} x^2+6x+5\ge 0 \\ x+2<0 \end{cases} \Rightarrow x\le -5$ 或② $\begin{cases} x^2+6x+5\ge 0 \\ x+2>0 \\ x^2+6x+5\ge (x+2)^2 \end{cases} \Rightarrow x\ge\frac{-1}{2}$

(練習1) 設一三角形的三邊長分別為 15,19,24，今將三邊長各減去 x 後，得一鈍角三角形，試求 x 值的範圍。Ans：$3<x<11$

(練習2) 已知方程式$f(x)=x^4-5x^3+3x^2+19x-30=0$ 有一個複數根 $2+i$，若實數a滿足$f(a)<0$，試求a的範圍為？Ans：$-2<a<3$

(練習3) (1)解不等式$(x^2+2x+7)(x-1)(x+2)<0$

(2)解不等式$(x-1)^{10}(x+2)(x-4)<0$

(3)解不等式$(x^2-2x+1)(x^2-x-1)<0$

(4)解不等式 $x^3-3x^2-3x+10<0$

Ans：(1) $1<x<-2$ (2) $-2<x<4$，但$x\ne 1$

(3) $x\ne 1$ 但$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (4) $x<\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ 或 $2<x<\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

(練習4) 解下列不等式：

(1) $\frac{(x-1)^2}{2x-1}<0$ (2) $\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}\ge 0$ (3) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}<-1$

Ans：(1) $x<\frac{1}{2}$ (2) $-1\le x<1$ 或 $x>3$ (3) $1<x<2$

(練習5) 不等式：$\frac{2}{x}>x+1$ 與下列哪一個不等式有相同的解集合？

(A) $x(x-1)(x+2)<0$ (B) $x(x+1)(x-2)<0$ (C) $x(x+1)(x-2)>0$

(D) $x(x-1)(x+2)>0$　(E) $2>x^2+x$　　　Ans：(A)

(練習6) 解下列的不等式：

$(1)x+2<\sqrt{10-x^2}$　$(2)\sqrt{x^2-25}>x-1$

Ans：(1)$-\sqrt{10}\le x<1$　(2)$x\le-5$ 或 $x>13$

(乙)指數、對數與三角不等式

(1)不等式中含有指數對數時，先將底數化爲相同，再比較指數或真數大小。

基本知識：

(a)底數 $a>1$： $a^{x_2}>a^{x_1}\Leftrightarrow x_2>x_1$ ； $\log_a x_2>\log_a x_1\Leftrightarrow x_2>x_1>0$

(b)底數 $0<a<1$： $a^{x_2}>a^{x_1}\Leftrightarrow x_2<x_1$ ； $\log_a x_2>\log_a x_1\Leftrightarrow 0<x_2<x_1$

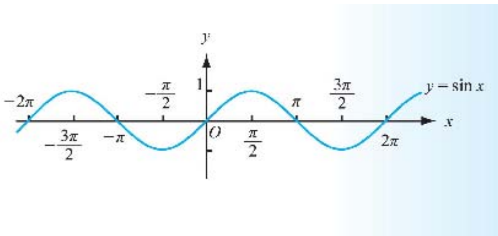
(2)簡易的三角不等式：

step1：利用三角恆等式或性質(如：和角、倍角、和差積互化、疊合等公式)
化成**同名且同角函數**，再解不等式。

step2：以三角函數圖形的增減，寫出一週期的解，再寫出全部的通解。

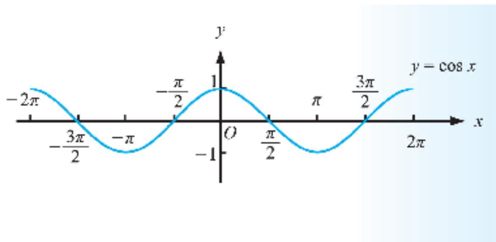
①三角函數圖形：

正弦函數 $y=\sin x$



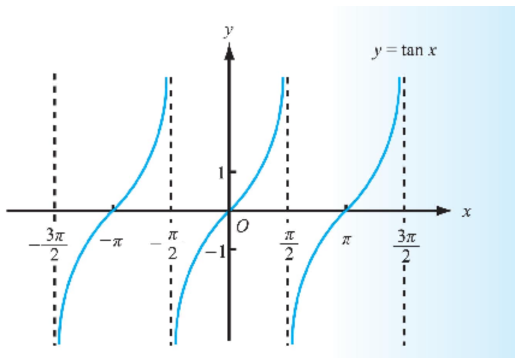
週期為 2π

餘弦函數 $y=\cos x$



週期為 2π

正切函數 $y=\tan x$



週期為 π

[例題5] (1)解不等式： $2^{x^2}<4^{x+3}$　(2) $(0.008)^{x^2-x+2}<(0.2)^{2x^2+x+3}$ (3)$2^x>3^x$

Ans：(1)$1-\sqrt{7}<x<1+\sqrt{7}$(2) $x>3$ 或$x<1$(3)$x<0$

[解法]：

(1) $2^{x^2}<4^{x+3} \Leftrightarrow 2^{x^2}<2^{2(x+3)} \Leftrightarrow x^2<2(x+3) \Leftrightarrow 1-\sqrt{7}<x<1+\sqrt{7}$

(2) $(0.008)^{x^2-x+2}<(0.2)^{2x^2+x+3}$

$\Leftrightarrow (0.2)^{3(x^2-x+2)}<(0.2)^{2x^2+x+3}$

$\Leftrightarrow 3(x^2-x+2)>2x^2+x+3$

$\Leftrightarrow x>3$ 或 $x<1$

(3)兩邊取對數 $\log 2^x>\log 3^x \Leftrightarrow x(\log 2)>x(\log 3) \Leftrightarrow x(\log 2-\log 3)>0$

$\because \log 2-\log 3<0$，$\therefore x<0$。

[例題6] 解不等式：$9^x-13\cdot 3^x+36<0$。

Ans：$\log_3 4<x<2$

[解法]：

$9^x-13\cdot 3^x+36<0 \Leftrightarrow (3^x)^2-13\cdot 3^x+36<0 \Leftrightarrow (3^x-4)(3^x-9)<0$

$\Leftrightarrow 4<3^x<9 \Leftrightarrow \log_3 4<\log_3 3^x<\log_3 9 \Leftrightarrow \log_3 4<x<2$

[例題7] 解下列不等式：

(1) $\log_{14}(x^3-5x+12)<1$ (2) $\log_2(\log_{\frac{1}{2}} x)>1$

[答案]：：(1) $-3<x<-2$ 或 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ (2) $0<x<\sqrt{2}$

[解法]：

(1) 解 $\log_{14}(x^3-5x+12)<1$

首先考慮真數 $x^3-5x+12>0$……..①

又 $\log_{14}(x^3-5x+12)<1 \Leftrightarrow \log_{14}(x^3-5x+12)<\log_{14}14$，因爲 $y=\log_{14}x$ 爲增函數

$\Leftrightarrow x^3-5x+12<14$….②

①式 $\Leftrightarrow (x+3)(x^2-3x+4)>0$，因爲 x^2-3x+4 恆正，$\Leftrightarrow x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$

②式 $\Leftrightarrow x^3-5x-2<0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x-1)<0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2}<x>1+\sqrt{2}$ 或 $x<-2$

由①②的解，取共同部分可得 $-3<x<-2$ 或 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$。

(2) $\log_2(\log_{\frac{1}{2}} x)>1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x>0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x>2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x>2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<(\frac{1}{2})^2 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{4}$。

[例題8] 解 $\log_3(3^x+8)<\frac{x}{2}+1+\log_3 2$。

[答案]：：$\log_3 4<x<\log_3 16$

[解法]：

$\log_3(3^x+8)<\frac{x}{2}+1+\log_3 2 \Leftrightarrow \log_3(3^x+8)-\log_3 2<\frac{x}{2}+1$

$\Leftrightarrow \log_3\frac{3^x+8}{2}<\frac{x}{2}+1 \Leftrightarrow \frac{3^x+8}{2}<3^{\frac{x}{2}+1} \Leftrightarrow 3^x+8<2\cdot 3^{\frac{x}{2}+1}$，令 $t=3^{\frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow t^2+8<6t \Leftrightarrow 2<t<4 \Leftrightarrow 2<3^{\frac{x}{2}}<4$

$\Leftrightarrow \log_3 2<\frac{x}{2}<\log_3 4 \Leftrightarrow \log_3 4<x<\log_3 16$。

(練習7) (1)解不等式 $0.1^{x^2-3x}>0.0001$，得x的範圍爲_______________________。

(2)解不等式$x>0$，$x^{x^2-4}>(x^x)^3$，得x的範圍爲_______________________。

(3)解不等式 $2^{3x-2}+5\cdot2^{x-2}+1<11\cdot2^{2x-3}$得$x$的範圍_______________________。

Ans：(1) $-1<x<4$　(2) $0<x<1$或 $x>4$ (3)　$1<x<2$ [提示：可令$t=2^x$]

key：注意底數比 1 大或比 1 小

【詳解】

(1) $\because 0.1^{x^2-3x}>0.1^4\Rightarrow x^2-3x<4 \therefore -1<x<4$

(2) $\begin{cases}0<x<1\\x^2-4<3x\end{cases}$或$\begin{cases}x>1\\x^2-4>3x\end{cases}\Rightarrow 0<x<1$或 $x>4$

(練習8) 已知 $0<x<y<a<1$，則有

(A) $\log_a(xy)<0$　(B) $0<\log_a(xy)<\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}<\log_a(xy)<1$

(D) $1<\log_a(xy)<2$　(E) $\log_a(xy)>2$　Ans：(E)

(練習9) (1)解不等式$\log x+\log(x-3)<1$。

(2)解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2)>2\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)-1$。

(3)　解$\log_2(2^x+16)<\frac{x}{2}+1+\log_2 5$。

Ans：(1) $3<x<5$ (2) $\frac{5}{7}<x<1$ 或$x>2$ (3) $2<x<6$

(練習10) 一個人喝了少量酒後，血液中酒精含量將迅速上升到 0.3(毫克/毫升)。在停止喝酒以後，血液中酒精含量就以每小時 40%的速度減少，爲了保障交通安全，某地交通規則規定，駕駛員血液中的酒精含量不得超過0.08(毫克/毫升)。問若喝了少量酒的駕駛員，則至少過 n 小時後才能駕駛，求 n 的最小值？Ans：3

(練習11) 小明身體不舒服，須依照醫師指示服藥。醫生告訴他這種藥吸收比較慢，當藥吞服t小時之後，殘留在胃裡的藥量尚有$M(t)=450\times(0.64)^t$毫克，請問至少需要_________小時，藥量才能被吸收九成以上。

(四捨五入至小數點第一位)　$\log_{10}2=0.3010$,$\log_{10}3=0.4771$　Ans：5.2

(hint：解不等式 $450\cdot(0.64)^t\le 450\cdot 0.1$)

(練習12) 某一個社區裡，當一個謠言在傳播時，其流傳的速度，

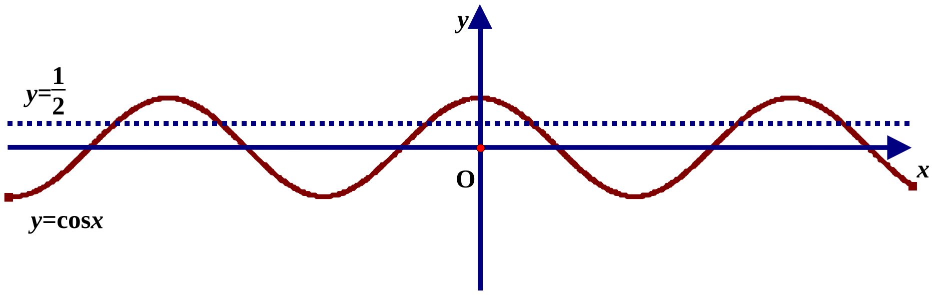
可以用下列的數學模式來表示：$N=p(1-10^{-0.1d})$其中 P 表示社區總人口數，N 表示謠言開始流傳後第 d 天以內已經聽到這個謠言的人數。已這個社區有 2000 人，則一個謠言從開始流傳，最少要______天才會有 1600 人以上聽到這個謠言。Ans：7

[例題9] 解三角不等式：$\cos x<\frac{1}{2}$。

[解法一]：下圖是 $y=\cos x$ 的函數圖形，考慮函數圖形在 $y=\frac{1}{2}$下面的部分

先觀察 $0\le x\le 2\pi$的部分，可得 x 的範圍爲$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$。

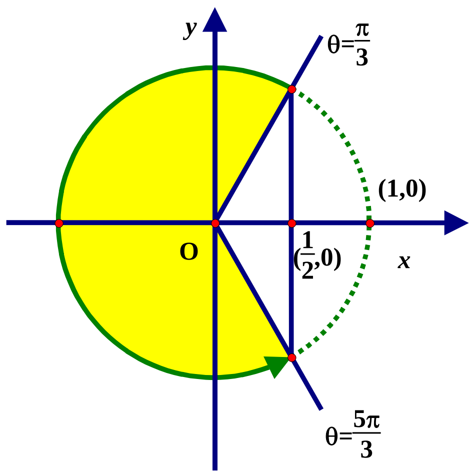
再根據 $\cos x$ 的週期性，可得 x 的範圍是$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$。



[解法二]：

根據三角函數的定義，考慮單位圓與標準角的位置，根據下圖，可知在$[0,2\pi]$的範圍內，當$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$時，單位圓上的點$(\cos x ,\sin x)$會滿足 $\cos x<\frac{1}{2}$的條件，所以可得 x 的範圍爲$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$。

再根據 $\cos x$ 的週期性，可得 x 的範圍是$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$。



[例題10] 解不等式 $\sin x>\sin 2x$。Ans：$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\pi+2k\pi$或$\frac{-\pi}{3}+2k\pi<x<2k\pi$

[例題11] 解不等式：$4\sin^2x-(2+2\sqrt{3})\sin x+\sqrt{3}>0$。

Ans：$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi$或$\frac{-7\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi$

(練習13) 設 $0\leq x<2\pi$ ，試解

(1) $\sin x=\frac{1}{2}$ (2) $\sin x>\frac{1}{2}$ (3) $\sin x\geq\frac{1}{2}$ (4) $\sin x<\frac{1}{2}$

Ans：

(1) $\sin x=\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$

(2) $\sin x>\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x$ 之範圍爲 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}$

(3) $\sin x \geq \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ x 之範圍爲 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

(4) $\sin x < \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ x 之範圍爲 $0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$

(練習14) (1)若 $0\leq x\leq 2\pi$，解不等式 $\sin x>\cos x$。

(2)解不等式 $\sin x>\cos x$。Ans：(1) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$ (2)$\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

(練習15) 若 $0\leq x\leq 2\pi$，解不等式 $\sin x-\sqrt{3}\cos x\geq 1$。 Ans：$\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{7\pi}{6}$

(練習16) (1)若 $0\leq x\leq 2\pi$，解不等式 $4\cos^2 x-4\cos x-3\geq 0$。

(2)解不等式 $4\cos^2 x-4\cos x-3\geq 0$。Ans：(1)$\frac{2\pi}{3}\leq x\leq\frac{4\pi}{3}(2)\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leq x\leq\frac{4\pi}{3}+2k\pi$

(丙)函數的極值

[例題12] (判別式法求函數極值)

(1)設 $x\in R$，則 $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 之最大值爲________，最小值爲________。

(2)設 $x\in R$，則 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 之最大值爲______，最小值爲______。

Ans：(1) 3；$\frac{1}{3}$ (2)Max=1,min=−1

[例題13] (利用函數圖形求函數極值)

已知函數 $y=f(x)=\left|x^2-3x\right|+x+2$ ，則下列敘述哪些是正確的？

(A)函數圖形通過(1,5)(B)當$1<x<3$時， $f(x)$ 的最大值爲 5

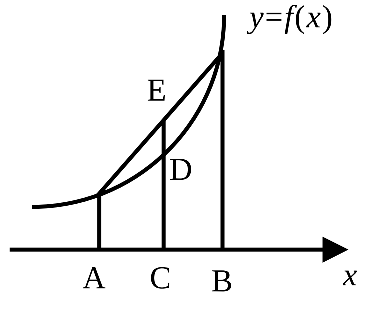
(C)方程式 $f(x)=\dfrac{11}{2}$有 4 個相異實根(D)方程式 $f(x)=x+1$無實根

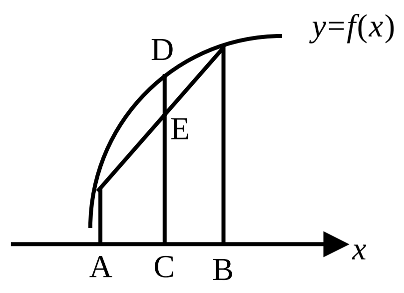
(E)函數 $f(x)$ 的最小值爲 2。Ans：(A)(C)(D)(E)

(函數的凹凸與不等式)

$f(x)$ 圖形爲凹向上⇔近似值≥實際值⇔$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geq f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$

$f(x)$ 圖形爲凹向下⇔近似值≤實際值⇔$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leq f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$





$f(x)$ 圖形爲凹向上

⇔E($\dfrac{x_1+x_2}{2}$,$\dfrac{1}{2}$(f(x_1)+f(x_2)))在D($\dfrac{x_1+x_2}{2}$,f($\dfrac{x_1+x_2}{2}$))上方

⇔$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geq f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$

$f(x)$ 圖形爲凹向下

⇔E($\dfrac{x_1+x_2}{2}$,$\dfrac{1}{2}$(f(x_1)+f(x_2)))在D($\dfrac{x_1+x_2}{2}$,f($\dfrac{x_1+x_2}{2}$))下方

⇔$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geq f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$

[例題14] 若 a，b 為任意兩相異正數，試問下列各式何者恆成立？

(1) $\frac{a^2+b^2}{2}>(\frac{a+b}{2})^2$　　(2) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}>\sqrt{\frac{a+b}{2}}$

(3) $\frac{2^a+2^b}{2}>2^{\frac{a+b}{2}}$　　(4) $\frac{\log a+\log b}{2}>\log\frac{a+b}{2}$

(5) $\frac{\sin a+\sin b}{2}>\sin\frac{a+b}{2}$　　Ans：(1)(3)

(練習17) 設 $f(x)=\sum_{n=1}^{3}(x-n)^2+\sum_{n=8}^{10}(x-n)^2$ ，若 $f(x)$在 $x=a$ 處有極小值，則(A) a 為整數(B) $a<5.9$(C) $a>5.1$(D)｜$a-4$｜<0.5(E)｜$a-6$｜$<$ 0.5

Ans：(B)(C)

(練習18) 試求函數 $f(x)=\frac{x^2-4x+5}{x^2+2x+6}$的值域。　Ans：$\{y|\frac{15-\sqrt{205}}{10}\le y\le\frac{15+\sqrt{205}}{10}\}$

(練習19) 設 $x\in R$， $f(x)=(4^x+4^{-x})+4(2^x+2^{-x})$，當 $x=a$ 時， $f(x)$有最小值 b，則 $(a,b)=$ ＿＿＿＿＿＿＿ 。Ans：(0,10)

【詳解】令 $t=2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$ ，則 $t^2=4^x+4^{-x}+2\cdot 4^x\cdot 4^{-x}$ ，

所以 $f(x)=(t^2-2)+4t$ ，$=(t+2)^2-6$ ， $t\ge 2$

(練習20) 已知 $1\le x\le 8$，則函數$f(x)=(2\log_2 x+1)(\log_2 x-1)+1$ 的最大值為＿＿＿＿，最小值為＿＿＿＿。Ans：15，$-\frac{1}{8}$

(練習21) 下列各敘述中，恆正確的有哪些？

(A) $x, y \in R$ ， $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $\dfrac{a^x + a^y}{2} \geq a^{\frac{x+y}{2}}$

(B) $x, y \in R$ ， $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $\log_a \dfrac{x+y}{2} \geq \dfrac{\log_a x + \log_a y}{2}$

(C)若 $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ 、 $0 \leq y < \dfrac{\pi}{2}$ ， $\sin\dfrac{x+y}{2} \geq \dfrac{\sin x + \sin y}{2}$

(D)若 $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ 、 $0 \leq y < \dfrac{\pi}{2}$ ， $\cos\dfrac{x+y}{2} \geq \dfrac{\cos x + \cos y}{2}$

(E)若 $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ 、 $0 \leq y < \dfrac{\pi}{2}$ ， $\tan\dfrac{x+y}{2} \geq \dfrac{\tan x + \tan y}{2}$ Ans：(A)(C)(D)

綜合練習

(1) 設一個三角形的三邊長分別為 14,18,22，今將三邊長各減去 x 後可得一個鈍角三角形，求 x 值之範圍為______________。

(2) 已知函數 $f(x) = \log(2x^2 - x - 6)$ 的定義域為 F，$g(x) = \log\dfrac{x-2}{2x+3}$ 的定義域為 G ，$h(x) = \log(x-2) + \log(2x+3)$ 的定義域為 H，試問下列敘述哪些正確？
(A) $F = G$ (B) $F \subset H$ (C) $G \subset H$ (D) $H \subset F$ (E) $H \subset G$

(3) 設 x，y 為實數，且 $x^2 + 3y^2 = 6y$ ，若 $x^2 + 4y + 1$ 之最大值為 a，最小值為 b，則 (a,b)=__________ 。

(4) 函數$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-97)^2+(x-98)^2+(x-99)^2$當$x=\alpha$時，$f(x)$有最小值$\beta$，試求$\alpha$=？

(5) 試問不等式$(x^2 - 4x + 2)(2x - 5)(2x - 37) \leq 0$ 有多少個整數解？(92 學測補)

(6) 求不等式 $(x^2 + 2x + 5)(x+1)^{10}(x-2)^{101} < 0$ 的解為_______________ 。

(7) $a,b \in$ R，$f(x)=x^3+ax+b$有一根 $1+2i$，則不等式$f(x)\geq 0$ 之解為________。

(8) 解分式不等式$\dfrac{3}{x-2}\geq x$。

(9) 設 $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}$，試求滿足 $0<y<1$ 的 x 的範圍。

(10) 解不等式$|x^2-4x|\geq 3$。

(11) 設不等式$\dfrac{2x^2 + 2kx + k}{4x^2 + 6x + 3} < 1$對於一切實數 x 均成立。則其中常數 k 的範圍為？

(12) 解不等式：(a) $\sqrt{3-x} > \sqrt{2x-1}$ (b) $x - 2 \geq \sqrt{x+10}$ (c) $\sqrt{x^2 - x - 6} > x - 2$

(13) 設 $\log_a 2 < \log_b 2 < 0$ ，則下列敘述何者正確？
(A) $1 < a < b$ (B) $1 < b < a$ (C) $0 < a < b < 1$
(D) $0 < b < a < 1$ (E) $0 < a < 1 < b$

(14) 能使得 $\log_x(2x^2+3x-2)$ 有意義的實數 x 之範圍為

(A) $x>\frac{1}{2}$，但 $x\neq 1$ (B) $0<x<1$ (C) $-2<x<\frac{1}{2}$ (D) $x>0$，但 $x\neq 1$

(E) $0<x<\frac{1}{2}$ 。

(15) 解下列的不等式：

(a)$5^x+3\cdot 5^{-x}<4$ (b) $(0.7)^{x^2-2x}>0.343$

(c)$\log(6x-x^2)<1+\log(5-x)$ (d) $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_{\frac{1}{3}}x>1$

(16) 小安想求$f(x)=9^x+3^{x+2}-6$ 的最小值，它的方法如下：

Step1：令$k=3^x$，$k^2=(3^x)^2=9^x$

Step2：$f(x)=k^2+3^2k-6=k^2+9k-6$

Step3：因為$k^2+9k-6=(k^2+9k+(\frac{9}{2})^2)-6-\frac{81}{4}=(k+\frac{9}{2})^2-\frac{105}{4}$

Step4：所以當$k=\frac{-9}{2}$時會有最小值$-\frac{105}{4}$。

上述的步驟中，有一個錯誤，請指出錯誤的地方並加以說明。

(17) 已知不等式$1.253\times 10^{845}<7^{1000}<1.254\times 10^{845}$成立。請選出正確的選項。______

(1) $\log_{10}7<0.846$ (2) $\log_{10}7>0.845$ (3) $7^{100}<5\times 10^{84}$ (4) $7^{10}<2\times 10^{8}$【92 自】

(18) 某甲在股票市場裡買進賣出頻繁，假設每星期結算都損失該星期初資金的1%，而第n星期結束後資金總損失已超過原始資金的一半，則n最小為_____。（已知$\log_{10}2=0.3010,\log_{10}3=0.4771,\log_{10}11=1.0414$）

(19) 根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後，t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的$100(1-2^{-kt})\%$，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70%的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時後，有 99%的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項？____________。

(1) 5小時 (2) $7\frac{1}{2}$小時 (3) 9小時 (4)$11\frac{1}{2}$小時 (5) 13小時 (92學科能力測驗)

(20) 小明身體不舒服，需依照醫生的指示服藥。假設在吞藥 t 小時，殘留在胃裡的藥量$M(t)=450\times(0.64)^t$毫克，根據此關係回答下面兩個問題：

(a)經過 1.5 小時後藥量殘存為_____________毫克。

(b)自 t 小時到 t+1 小時內吸收的藥量，與第 t 小時殘存藥量的比值為 ______。

(21) 牛頓冷卻規律描述一個物體在常溫a°C環境下的溫度變化，

如果物體的初始溫度是b°C，那麼經過t小時後的溫度$f(t)$°C將滿足

$f(t)-a=(b-a)(\frac{1}{2})^{kt}$，這裡的常數$k$與物體的性質有關。今有一杯用$95^\circ C$熱水沖的即溶咖啡，放置在$31^\circ C$的房間中，如果 5 分鐘後，咖啡的溫度是$63^\circ C$，那麼欲使咖啡降溫到$32^\circ C$，需________分鐘。

(22) 下列哪些選項可滿足不等式 $2\sin^2\theta+3\cos\theta>3$？

(1)$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ (2)$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}$ (3)$\frac{4\pi}{3}<\theta<\frac{5\pi}{3}$ (4)$\frac{5\pi}{3}<\theta<2\pi$ (5)$2\pi<\theta<\frac{7\pi}{3}$

(23) 已知 $0\le x<2\pi$ ，求滿足不等式 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin x<-\dfrac{1}{2}$ 的 x 之範圍爲________。

(24) 若 $a=\cos 2$ ，則：

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $0<a<\dfrac{1}{2}$

(D) $\dfrac{-1}{2}<a<0$ (E) $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{-1}{2}$

(25) 考慮函數 $f(x)=\cos 2x+4\sin^2 x-\cos x-2$

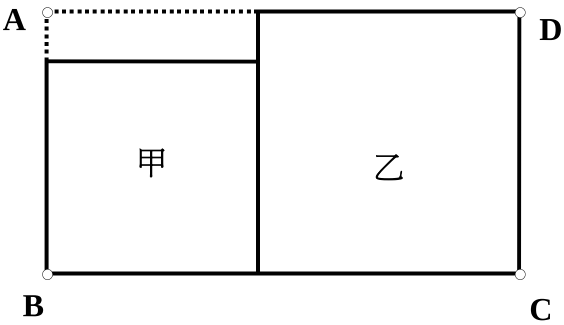
(a)解方程式 $f(x)=0$ 。

(b)在 $0\le x\le 2\pi$ 的條件下，解不等式 $f(x)>0$ 。

(26) 解不等式 $0\le x\le 2\pi$ ， $\cos 2x+3\sin x-2<0$ 。

(27) 如下圖，正方形甲與正方形乙的面積和爲 1。

試證：矩形 ABCD 的面積≤$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$。



進階問題

(28) 設 x 爲實數，則有理式 $\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2-x+1}$ 之極大值爲__________。

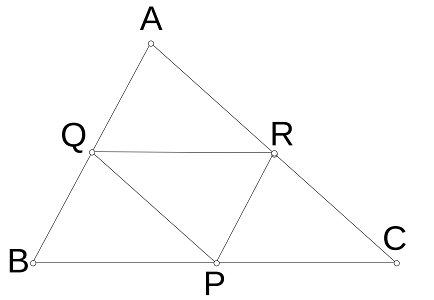
(29) 已知△ABC 中， $\overline{AB}=5$ ， $\overline{BC}=6$ ， $\overline{CA}=7$ ，今在 $\overline{BC}$ 上取異於 B,C 的一點 P，過 P 作 $\overline{PQ}\,//\,\overline{AC}$ 交 $\overline{AB}$ 於 Q，過 P 作 $\overline{PR}\,//\,\overline{AB}$ 交 $\overline{AC}$ 於 R，如圖。

試回答下列問題：

(a)試求△ABC 之面積？

(b)設 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BC}}=x$ ，試以 x 表示 $\dfrac{\Delta PQR\text{的面積}}{\Delta ABC\text{的面積}}$ ？

(c)試求△PQR 面積的最大值？



(30) 試解不等式 $\log_{(x-2)}(x^2+x-1)<0$ 。

(31) 設 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$，$x\in R$，若 y 之最大值 9 且 y 之最小值 1，

試求 a 與 b 之值？

(32) 設 $f(x)=x^2-2px+2p+8$ ，若在 $0\le x\le 2$ 時， $f(x)>0$ 恆成立，

求實數 p 的範圍？

(33) 設 x,y 爲正實數且 $x+y=2$，試求 x^3+y^3-2xy 之最小值。

綜合練習解答

(1)　2<x<10(提示：　設 14–x，18–x，22–x 爲鈍角三角形的三邊長，則：

1° 三邊爲正(最小邊爲正)　$\begin{cases} 14-x>0 \\ 18-x>0 \Rightarrow x<14 \\ 22-x>0 \end{cases}$

2° 最小二邊和>第三邊　(14–x)+(18–x)>(22–x) ⇒x<10

3° 鈍角三角形：最小二邊平方和<第三邊的平方

$(14-x)^2+(18-x)^2<(22-x)^2 \Rightarrow 2<x<18$　取交集得 2<x<10

(2)　(A)(D)(E)

(3)　$(\frac{28}{3},1)$

(4)　α=50

(5)　17 個

(6)　$x<2, x\neq 1$

(7)　x≥–2

(8)　2<x≤3 或 x≤–1

(9)　x>3 或$\frac{1}{5}$<x<2

(10)　x≤2–$\sqrt{7}$或 1≤x≤3 或 x≥2+$\sqrt{7}$

(11)　1<k<3(詳解) 因爲$4x^2+6x+3$恆正，所以$\forall x\in R$，$2x^2+2kx+k<4x^2+6x+3$恆成立 $\Rightarrow \forall x\in R$，$2x^2+(6-2k)x+(3-k)>0$

$\Rightarrow (6-2k)^2-4\cdot 2\cdot(3-k)<0$，得$1<k<3$

(12)　(a)$\frac{1}{2}\leq x<\frac{4}{3}$　(b)x≥6　(c)$x\leq -2$或$x>\frac{10}{3}$

(13)　(D)

(14)　(A)【詳解】　$\log_a b$ 有意義$\Leftrightarrow a>0, a\neq 1, b>0$

所以$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 2x^2+3x-2>0 \end{cases}$，取交集可得$x>\frac{1}{2}$但 $x\neq 1$

(15)　(a)0<x<$\log_5 3$ (b)–1<x<3 (c)0<x<8–$\sqrt{14}$ (d)$3^{-\sqrt{2}}<x<3^{-1}$

(16)　k=3^x，則k>0，所以k不可能爲$\frac{-9}{2}$

(17)　(1)(2)(3)

(18)　69

(19)　(4)[解法]：依題意可得$\begin{cases}100(1-2^{-3k})\% = 70\% \\ 100(1-2^{-kT})\% = 99\%\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(1-2^{-3k}) = 0.7 \\ (1-2^{-kT}) = 0.99\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2^{-3k} = 0.3 \\ 2^{-kT} = 0.01\end{cases}$

取對數$\Rightarrow\begin{cases}-3k\cdot\log 2 = \log 0.3\cdots(1) \\ -kT\cdot\log 2 = \log 0.01\cdots(2)\end{cases}$ $\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{3}{T} = \frac{\log 0.3}{\log 0.01} \Rightarrow T = \frac{3\cdot\log 0.01}{\log 0.3} \fallingdotseq 11.4\ldots$

故選(4)。

(20)　(a)230.4　(b)0.36

(21)　30

(22)　(1)(4)(5)

(23)　$\frac{7\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{3}$或$\frac{5\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{6}$

(24)　(D)

(25)　(a)　$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$或$(2n-1)\pi$　　(b)$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}, x \neq \pi$

(26)　$0 \leq x < \frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6} < x \leq 2\pi$

(27)　[提示：可以假設甲乙兩邊的邊長爲 sinθ ,cosθ　，再計算正方形 ABCD 的面積，再求其最大值]

(28)　$\frac{10}{3}$

(29)　(a)$6\sqrt{6}$　(b)$-x^2+x$　(c)$\frac{3\sqrt{6}}{2}$

(30)　2<x<3

(31)　a＝5，b＝5

【詳解】 1°　$y = \frac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$

$\Rightarrow yx^2 + y = ax^2 + 8x + b$

$\Rightarrow (a-y)x^2 + 8x + (b-y) = 0, x \in R$

因爲$x \in R$

$\Rightarrow$判別式= $8^2 - 4(a-y)(b-y) \geq 0$

即 $y^2-(a+b)y+(ab-16)\le 0$

2° ∵y之最大值 9 且最小值 1，使y值的範圍 $1\le y\le 9$

得$y^2-10y+9\le 0$

3° 故知：$a+b=10$，$ab-16=9$，

解之得$a=5$與$b=5$

(32) $-4<p<6$

(33) 0 [提示：$x^3+y^3+3xy(x+y)=(x+y)^3\Rightarrow x^3+y^3+6xy=8$]