三角

重點整理

(A)銳角三角比：

(1)正弦、餘弦與正切的定義：

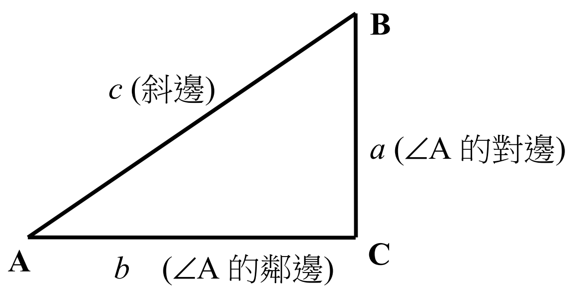
設ΔABC 為直角三角形，其中∠C 為直角三角形，$\overline{AB}$為斜邊，兩股$\overline{BC}$與$\overline{AC}$分別是∠A 的對邊與鄰邊。

設$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，則我們定義∠A 的正弦、餘弦與正切的定義：

∠A 的**正弦**=sinA=$\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{c}$

∠A 的**餘弦**=cosA=$\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}$

∠A 的**正切**=tanA=$\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{a}{b}$



例如：直角三角形 ABC 各邊為 c=13，a=12，b=5 依據定義：

sinB=$\dfrac{5}{13}$，cosB=$\dfrac{12}{13}$，tanB=$\dfrac{5}{12}$

(B)廣義角正弦、餘弦與正切的定義：

(1)廣義角的定義：

由一射線(始邊)旋轉到另一射線(終邊)的旋轉量，逆時針為正向角，順時針為負向角。

(2)同界角：θ_1，θ_2 為同界角⇔ $\theta_1-\theta_2=360^\circ\times k$，$k$ 為整數。

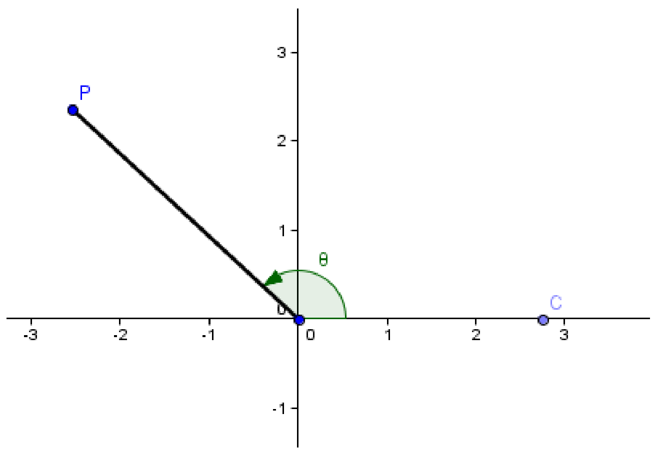
(3)正弦與餘弦的定義：

坐標平面給定一個廣義角θ，規定θ的始邊為 x 軸的正向，角的頂點為原點，根據廣義角θ的旋轉量，可畫出終邊的位置，

在終邊上取一點 P(x,y) (P 異於原點)，

令$\overline{OP}=r$，定義廣義角θ的正弦、餘弦與正切為：

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ $(x\neq0)$



(5)三角的關係：

(a)平方關係：$\mathbf{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

(b)商數關係：$\mathbf{\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

(c)餘角關係：$\mathbf{\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta}$，$\mathbf{\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta}$

(6)三角值的化簡：

(a)同界角的三角值相同

例如：$\sin 789^\circ=\sin(2\cdot 360^\circ+69^\circ)=\sin 69^\circ$，$\tan(-1000^\circ)=\tan(-3\cdot 360^\circ+80^\circ)=\tan 80^\circ$

(b)θ與θ±180°、180°±θ的三角函數互化：三角函數種類不變，但要調整正負。

$\boxed{\sin，\cos，\tan，}$ (180°± θ，θ±180°)

$=\pm\boxed{\sin，\cos，\tan，}$ (θ)　±由等號左右的正負來決定

(兩個角度成補角，正弦值相等，餘弦值等值異號。)

(c) θ與θ±90°、90°±θ的三角函數互化：三角函數正餘互換，但要調整正負。

$\boxed{\sin，\cos}$ ($90^\circ\pm\theta$、θ±90°)

$=\pm\boxed{\cos，\sin}$ (θ)　±由等號左右的正負來決定

(d)負角關係：

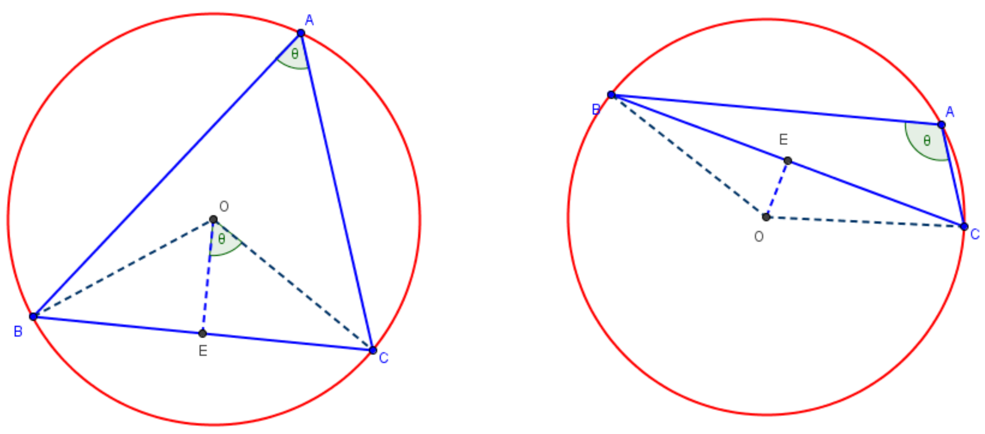
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

(C)三角在平面幾何上的應用：

(1)正弦公式：

在ΔABC 中，以 a,b,c 表示∠A，∠B，∠C 之對邊長度，則$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，

其中 R 為ΔABC 外接圓的半徑。



(2)餘弦公式：

(a)在ΔABC 中，若 a,b,c 為∠A，∠B，∠C 之對邊長，則$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2=b^2+a^2-2ab\cos C\end{cases}$

(3)正、餘弦公式的應用：

(a)解三角形的邊長與角度：

SSA 型的討論：ΔABC 中，若已知 a,b 及∠A

[想法]：

設$\overline{AC}=b$，利用尺規在∠A 的邊$\overrightarrow{AX}$上做出 B 點使得$\overline{BC}=a$。想要找出另一個頂點 B，

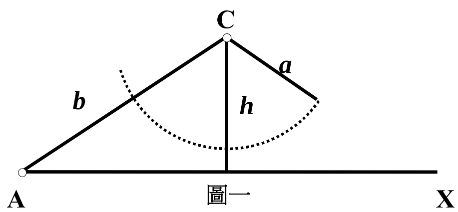
則圓規打開的半徑大小 a，一定要比頂點 C 到$\overrightarrow{AX}$的距離大才有交點。

(1°)∠A 為銳角時，頂點 C 到$\overrightarrow{AX}$的距離 $h=b\cdot\sin A$。

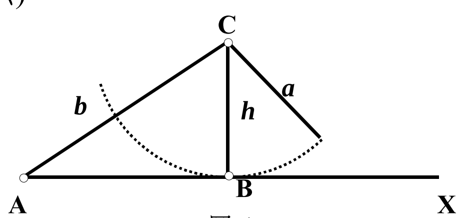
$a<h$ 時，找不到 B 點 ⇒無解。(如圖一)
$a=h$ 時，找到唯一一點 B ⇒恰有一解 (如圖二)
$h<a<b$ 時，有兩個 B 點 ⇒有兩解 (如圖三)
$b\le a$ 時，找到唯一一點 B ⇒恰有一解 (如圖四)

(2°)∠A 為鈍角時，頂點 C 到$\overrightarrow{AX}$的距離=b

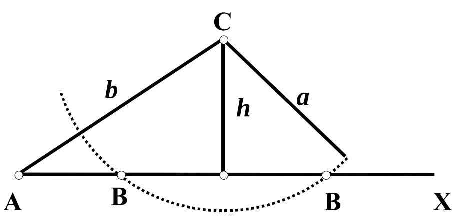
$a\le b$ 時，找不到 B 點 ⇒無解。(如圖五)
$a>b$ 時，找到唯一一點 B ⇒恰有一解 (如圖六)



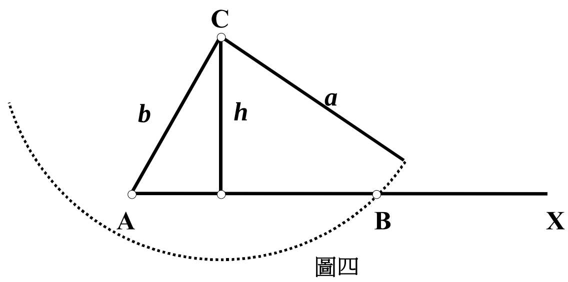
圖一



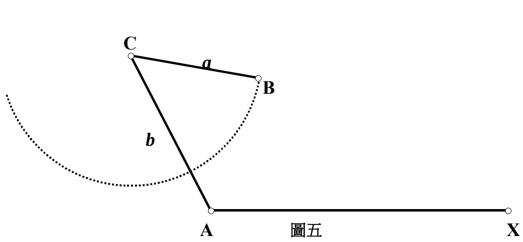
圖二



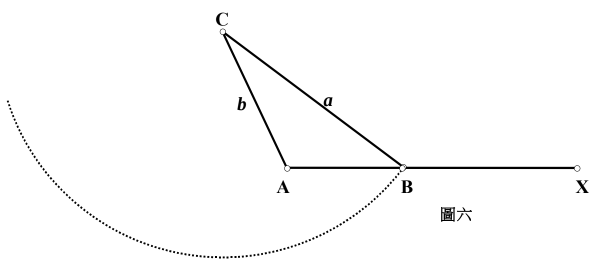
圖三



圖四



圖五



圖六

(b)三角形面積：

三角形 ABC 的面積$=\frac{1}{2}$ 底×高$=\frac{1}{2}\,bc\sin A$($\frac{1}{2}$ 兩邊乘積×夾角的正弦值)

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ s=周長之半

$=\frac{abc}{4R}$ (R 為三角形 ABC 外接圓的半徑)

$=r\cdot s$ (r 為三角形 ABC 內切圓的半徑)

(D)差角(和角)公式：

(1)和角公式：

$\boxed{\text{公式一：}\mathbf{\cos(\alpha\mp\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\pm\sin\alpha\cdot\sin\beta}}$

$\boxed{\text{公式二：}\mathbf{\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta}}$

$\boxed{\text{公式三：}\mathbf{\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}}$

和角公式的精神：
已知兩個角度的正弦、餘弦與正切值，
可得兩個角度的和或差的正弦、餘弦與正切值。

(2)倍角公式：

(a)二倍角公式：

令$\alpha=\beta=\theta$ ，由和角公式，可得

$\sin 2\theta=2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$ ，$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$，$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\boxed{\frac{\theta}{2}\text{的正弦、餘弦值}}$ $\boxed{2\theta\text{的正弦、餘弦值}}$

$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$ $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

$\boxed{\cos\theta}$

例如：

(1)已知 $\cos\theta=\frac{2}{3}$，請求出 $\cos 2\theta=$？

(2)已知 $270°<\alpha<360°$，且 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，試求 $\cos\frac{\alpha}{2}=$？

[解法]：

(1)根據 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2(\frac{2}{3})^2-1=\frac{-1}{9}$，

(2)根據令 $2\theta=\alpha$，可得 $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$，

所以 $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{6}\Rightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}\Rightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{5}{6}}$。

(b)常用的倍角公式如下：

①$\sin2\theta=2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$

②$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

③$\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

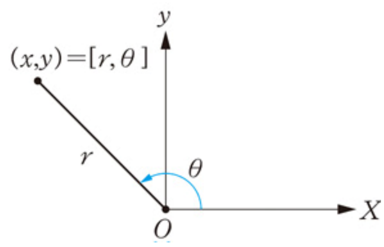
④$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

⑤$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$，$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$

(E)極坐標與直角坐標的關係：

平面上任一點 P 的直角坐標與極坐標是可以互換的。如果平面上直角坐標系的原點與極坐標系的極重合，且極軸恰為 x 軸的正向時，則平面上任一點 P 同時具有直角坐標（x，y）與極坐標〔r，θ〕，它們有如下的關係：

設 P 點不為原點（極點），如右圖



$r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$，根據廣義角正弦與餘弦的定義可得

$\cos\theta=\frac{x}{r}$，$\sin\theta=\frac{y}{r}$，於是 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。

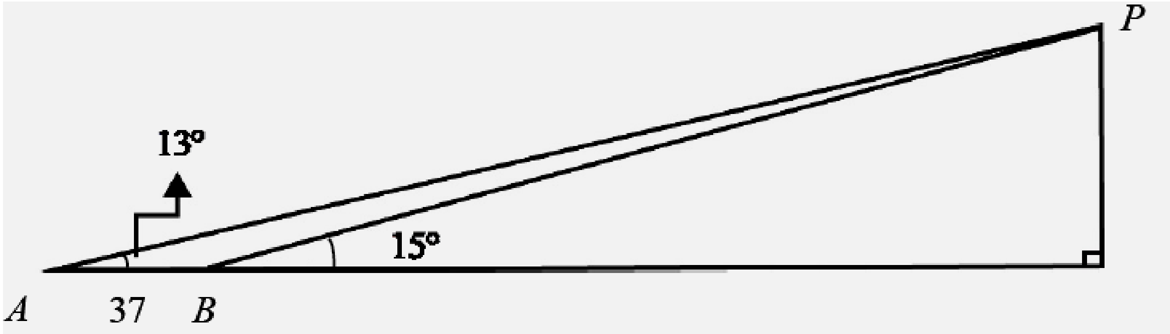
若 P 點為原點，則 P 點的直角坐標為（0，0），

極坐標為〔0，θ〕，其中 $0°\le\theta<360°$，上述關係仍然成立，於是我們有：

設平面上 P 點的直角坐標與極坐標分別為（x，y）與〔r,θ〕，

則 $r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。

[例題1] 如圖，老王在平地點 A 測得遠方山頂點 P 的仰角為 13°。老王朝著山的方向前進 37 公丈後來到點 B，再測得山頂點 P 的仰角為 15°。則山高約為_______公丈。
(四捨五入至個位數，$\tan 13°\approx 0.231$，$\tan 15°\approx 0.268$) (2015 學科能力測驗)



[答案]：62
[解法]：
設山高 h 公丈，B 點到山腳的距離為 a 公丈，依題意可得

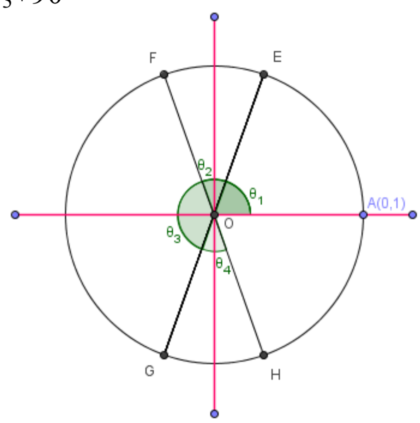
$\frac{h}{37+a}=\tan 13°$，$\frac{h}{a}=\tan 15°$

解得 $h=\dfrac{37}{\dfrac{1}{\tan 13^\circ}-\dfrac{1}{\tan 15^\circ}}\approx\dfrac{37\times 0.231\times 0.268}{0.268-0.231}\approx 61.908\approx 62$。

[例題2] 設θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 分別為第一、二、三、四象限角，且都介於 0°與 360°之間。
已知$|\cos\theta_1|=|\cos\theta_2|=|\cos\theta_3|=|\cos\theta_4|=\frac{1}{3}$，請問下列哪些選項是正確的？

(1)$\theta_1<45°$　(2)$\theta_1+\theta_2=180°$　(3) $\cos\theta_3=\frac{-1}{3}$　(4)$\sin\theta_4=\frac{2\sqrt{2}}{3}$　(5)$\theta_4=\theta_3+90°$。

[答案]：(2)(3)　(2010 學科能力測驗)
[解法]：下圖為單位圓，根據三角函數的定義，
方向角$\angle AOE=\theta_1$、$\angle AOF=\theta_2$、$\angle AOG=\theta_3$、$\angle AOG=\theta_4$
根據右圖可以得知
(1)$\theta_1>45°$　(2)$\theta_2=180°-\theta_1 \Leftrightarrow \theta_1+\theta_2=180°$
(3)$\because$ $\cos\theta_3<0$，所以 $\cos\theta_3=\frac{-1}{3}$　(4)$\because \sin\theta_4<0$，$\therefore \sin\theta_4=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$
(5)根據圖形$\theta_3=180°+\theta_1$，$\theta_4=360°-\theta_1=360°-(\theta_3-180°)=540°-\theta_3$
故選(2)(3)



[例題3] 在坐標平面上，廣義角θ的頂點為原點 O，始邊為 x 軸正向，且滿足 $\tan\theta=\frac{2}{3}$。若θ的終邊上有一點 P，其 y 坐標為-4，則下列哪個選項正確？

(1) P 的 x 坐標為 6　(2) $\overline{OP}=2\sqrt{13}$　(3) $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$　(4) $\sin2\theta>0$　(5) $\cos\frac{\theta}{2}<0$。

(2012 學科能力測驗)

[答案]：(2)(4)

[解法]：

$\because\ \tan\theta=\frac{2}{3}$。若θ的終邊上有一點 P，其 y 坐標為−4

$\therefore$ θ為第三象限角，且 $\tan\theta=\frac{-4}{\text{P點}x\text{坐標}}=\frac{2}{3}$ ⇒P 點的坐標為(−6,−4)。

$\overline{OP}=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2}=2\sqrt{13}$，$\sin\theta=\frac{-2}{\sqrt{13}}$，$\cos\theta=\frac{-3}{\sqrt{13}}$

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{13}>0$

$180°+360°\times k<\theta<270°+360°\times k \Rightarrow 90°+180°\times k<\frac{\theta}{2}<135°+180°\times k$

$k=0$ 時，$\cos\frac{\theta}{2}<0$，$k=1$ 時，$\cos\frac{\theta}{2}>0$。　故選(2)(4)

[例題4] 設 $0°<\theta<90°$，若 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$，則下列敘述何者正確？

(1)$\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{12}{25}$ (2)$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{25}{12}$ (3)$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$ (4)$\sin\theta=\frac{4}{5}$ (5)$\cos\theta=\frac{3}{5}$。

[答案]：(1)(2)(3)(4)(5)

[解法]：

(A)$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1-2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$。

(B)$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{25}{12}$

(C) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{49}{25}$

　因為θ為銳角，所以 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$。

(D)(E)$\because\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$ $\therefore \sin\theta\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$。

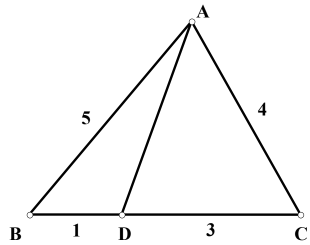
[注意]：

根據$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm2\sin\theta\cos\theta$，$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

可知 $\sin\theta\pm\cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$，$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$ 這三個式子，

已知一個就可以求得其他各個式子的值。

[例題5] 如右圖，$\overline{AB}=5,\overline{AC}=4,\overline{BC}=4$,D 在$\overline{BC}$上，且$\overline{BD}=1$，$\overline{CD}=3$ 試求$\overline{AD}=$？

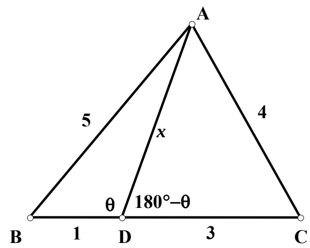


[答案]：$\dfrac{\sqrt{79}}{2}$

[解法]：

(想法)：考慮兩個三角形，其中這兩個三角形的內角互補或相等，在這兩個三角形中使用餘弦定理，去求出要求的邊長。

令$\overline{AD}=x$，$\angle ADB=\theta$，$\angle ADC=180°-\theta$



在ΔADB 中使用餘弦公式

$5^2=x^2+1^2-2\cdot x\cdot 1\cdot\cos\theta \Rightarrow 24=x^2-2x\cos\theta$.......①

在ΔADC 中使用餘弦公式

$4^2=x^2+3^2-2\cdot x\cdot 3\cdot\cos(180°-\theta) \Rightarrow 7=x^2-6x(-\cos\theta)$.......②

①×3+② $\Rightarrow 79=4x^2 \Rightarrow x^2=\dfrac{79}{4} \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{79}}{2}$。

[例題6] 設 α 為第一象限角且 $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，β 為第二象限角且 $\sin\beta=\dfrac{4}{5}$，試求 $\sin(\alpha+\beta)$與 $\cos(\alpha+\beta)$之值。

[解法]：

如圖，因為 α 為第一象限角，且 $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$。

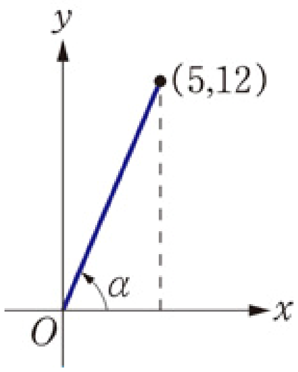
因為 β 為第二象限角，且 $\sin\beta=\dfrac{4}{5}$，所以 $\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$。利用和角公式，得 $\sin(\alpha+\beta)$

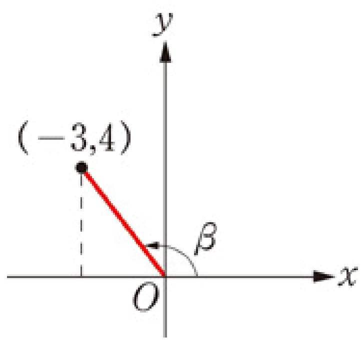
$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{12}{13}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)+\dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{4}{5}=-\dfrac{16}{65}$。

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{5}{13}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)-\dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{4}{5}=-\dfrac{63}{65}$。





[例題7] (倍角與半角公式)

已知 $\tan\theta=\frac{-3}{4}$且 $270°<\theta<360°$，求 $\cos2\theta$、$\tan2\theta$、$\sin\frac{\theta}{2}$、$\tan\frac{\theta}{2}$的值。

[答案]：$\cos2\theta=\frac{7}{25}$、$\tan2\theta=\frac{-24}{7}$、$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$、$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{-1}{3}$

[解法]：

$\tan\theta=\frac{-3}{4}$ 且 $270°<\theta<360° \Rightarrow \cos\theta=\frac{4}{5}$

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2(\frac{4}{5})^2-1=\frac{7}{25}$。

$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{-24}{7}$

$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{4}{5}=1-2\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{10} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}(\because \frac{3\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\pi) \Rightarrow \tan\frac{\theta}{2}=\frac{-1}{3}$。

[例題8] 已知ΔABC 中，$\overline{AB}=2$、$\overline{BC}=3$ 且$\angle A=2\angle C$，則$\overline{AC}=$__________。

[答案]：$\frac{5}{2}$ (2010 學科能力測驗)

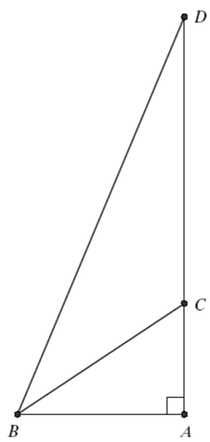
[解法]：令$\overline{AC}=x$

令$\angle C=\theta$，由正弦定理，$\frac{AB}{\sin\theta}=\frac{BC}{\sin2\theta} \Rightarrow \frac{2}{\sin\theta}=\frac{3}{\sin2\theta} \Rightarrow \cos\theta=\frac{3}{4}$

再根據餘弦定理，$2^2=x^2+3^2-2\cdot x\cdot3\cos\theta$，解得 $x=\frac{5}{2}$或 2(不合)

當 $x=2$ 時，$\overline{AB}=\overline{AC} \Rightarrow \angle ABC=\theta \Rightarrow 4\theta=180° \Rightarrow \Delta ABC$ 為直角三角形，
不過 $3^2\neq2^2+2^2$ 故 $x=2$ 不合。

[例題9] 如右圖，直角三角形 ABD 中，$\angle A$ 為直角，C 為$\overline{AD}$邊上的點。



已知$\overline{BC}=6$，$\overline{AB}=5$，$\angle ABD=2\angle ABC$，則$\overline{BD}=$____________。

[答案]：$\frac{90}{7}$ (2010 學科能力測驗)

[解法]：

令$\angle ABC=\theta$ 則 $\cos\theta=\frac{5}{6}\because$ $\overline{BD}$ $\cos2\theta=\overline{AB}$，且 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{7}{18}$

$\therefore\ 5=\overline{BD}\cdot\dfrac{7}{18}\Rightarrow\overline{BD}=\dfrac{90}{7}$。

[例題10] 在ΔABC 中，已知$\overline{AB}=5$，$\cos\angle ABC=\dfrac{-3}{5}$，且其外接圓半徑為$\dfrac{13}{2}$，則 $\sin\angle BAC=$______。

(2010 指定甲)

[答案]：$\dfrac{33}{65}$

[解法]：

由正弦定理可得$\dfrac{5}{\sin C}=2\times\dfrac{13}{2}=13\Rightarrow\sin C=\dfrac{5}{13}$

$\sin A=\sin(180°-B-C)=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}+(\dfrac{-3}{5})\times\dfrac{5}{13}=\dfrac{33}{65}$

[例題11] 四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=7$，且$\angle DAB=\angle BCD=90°$，則對角線$\overline{AC}$長為____________。

[答案]：$\sqrt{32}$

[解法]：

$\because\angle DAB=\angle BCD=90°$，$\therefore$直徑$\overline{BD}=5\sqrt{2}$，令$\angle ABD=\theta$

根據正弦定理$\dfrac{AC}{\sin(\theta+45°)}=2R=5\sqrt{2}$，又 $\sin\theta=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\sin(\theta+45°)=\sin\theta\cos45°+\cos45°\sin\theta=\dfrac{4}{5}\ \Rightarrow\overline{AC}=\sqrt{32}$

(練習1) 設 $\sin\theta=\dfrac{-4}{5}$，且θ為第四象限角，試求下列各值：

(1)$\cos\theta$ (2)$\tan(180°+\theta)$ (3)$\cos(\theta+90°)$ 。[答案]：(1)$\dfrac{3}{5}$ (2)$\dfrac{-4}{3}$ (3) $\dfrac{4}{5}$

(練習2) 請問下列關係何者正確？

(A)$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$ (B)$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ (C)$\sin(\theta+90°)=\cos\theta$
(D)$\tan(\theta+180°)=\tan\theta$(E)$\sin(\theta-360°)=\sin\theta$。 [答案]：(A)(B)(C)(D)(E)

(練習3) 設 $\cos100^{\circ}=k$，試以 k 表

(1)$\sin(-260^{\circ})=$______。(2)$\tan(-260^{\circ})=$_____。

(3)$\cos(-80^{\circ})=$_______。(4)$\sin(-80^{\circ})=$_______。

[答案]：(1)$\sqrt{1-k^2}$ (2)$\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ (3)$-k$ (4)$-\sqrt{1-k^2}$

(練習4) 化簡下列各小題的值：

(1)$\sin60^\circ\cdot\cos150^\circ-\cos225^\circ\sin(-315^\circ)+\tan300^\circ\cdot\cos(-180^\circ)=$_______。

(2)$4\cos(-960^\circ)+\tan(585^\circ)+2\sin(-1020^\circ)=$_____。[答案]：(1)$\dfrac{-1+4\sqrt{3}}{4}$ (2)$-1+\sqrt{3}$

(練習5) 設θ為銳角，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，請計算下列各小題的值：

(1)$\sin\theta\cdot\cos\theta$ (2)$\sin\theta-\cos\theta$ (3)$\tan\theta+\cot\theta$ [答案]：(1)$\dfrac{3}{8}$ (2) $\pm\dfrac{1}{2}$ (3)$\dfrac{8}{3}$

(練習6) 在ΔABC 中已知 $\sin A:\sin B:\sin C=4:5:7$，則求 $\cos C=$？$\sin C=$？[答案]：$\dfrac{-1}{5}$、$\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

(練習7) 已知ΔABC 之三邊長分別為 4,6,8，則

(1)ΔABC 的面積=？(2)邊長 6 所對應的高=？

(3)ΔABC 的內切圓半徑=？(4)ΔABC 的外接圓半徑=？

[答案]：(1)$3\sqrt{15}$ (2)$\sqrt{15}$ (3)$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ (4)$\dfrac{16\sqrt{15}}{15}$

(練習8) 設ΔABC 為直角三角形，ACEF 是以$\overline{AC}$為一邊向外作出的正方形，BCDG 是以$\overline{BC}$為一邊向外作出的正方形，若 AC=5、AB=4、BC=3，

試求(1)cos(∠DCE) (2)ΔDCE 的面積。[答案]：(a)$\dfrac{-3}{5}$ (b)6

(練習9) 已知圓內接四邊形 ABCD 的各邊長為$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\overline{AD}=4$，則

(1)$\overline{AC}=$？ (2)$\sin\angle ABC=$？ (3)ABCD 的面積

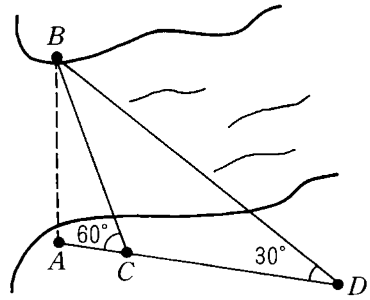
[答案]：(1)$\sqrt{\dfrac{55}{7}}$ (2)$\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$ (3)$2\sqrt{6}$

(練習10) ΔABC 中，已知 $\cos B=\dfrac{4}{5}$，$\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\overline{BC}=22$，則

(1)sinA=____，(2)ΔABC 之外接圓半徑為_______。

[答案]：(1)$\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$ (2)$5\sqrt{5}$

(練習11) 如圖，A，B 兩點分別位於一河口的兩岸邊。某人在通往 A 點的筆直公路上，距離 A 點 50 公尺的 C 點與距



離 A 點 200 公尺的 D 點，分別測得∠ACB＝60°，∠ADB＝30°，則 A 與 B 的距離為_______________公尺。[答案]：$50\sqrt{7}$公尺

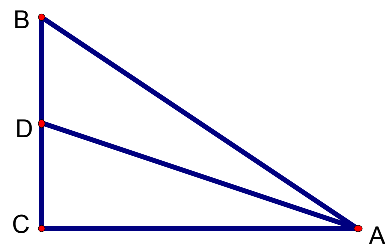
(練習12) 氣象局測出在 20 小時期間，颱風中心的位置由恆春東南方 400 公里直線移動到恆春南 15°西的 200 公里處，試求颱風移動的平均速度。(整數以下，四捨五入) (2000 學科能力測驗)　[答案]： 17 公里/時。

(練習13) 設 $90°<\alpha<180°$，$180°<\beta<270°$，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{-12}{13}$，則

(1)$\sin(\alpha-\beta)=$_____。(2)$\cos(\alpha-\beta)=$_______。(3)$\alpha-\beta$為第____象限角。

[答案]：(1)$\frac{-56}{65}$ (2)$\frac{33}{65}$ (3)四

(練習14) 右圖是一個直角三角形 ABC，其中∠C=90°，∠BAD=θ，若$\overline{CD}=\overline{BD}=1$，$\overline{AC}=3$，則 $\tan\theta=$？(A)$\frac{3}{11}$ (B)$\frac{1}{7}$ (C)$\frac{2}{9}$ (D)$\frac{1}{9}$ (E)$\frac{1}{3}$。[答案]：(A)



(練習15) 設 $90°<\theta<180°$且 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，求 $\sin2\theta$及 $\cos\frac{\theta}{2}$的值。

[答案]：$\sin2\theta=\frac{-24}{25}$、$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

(練習16) 有一個輪子，半徑 50 公分，讓它在地上滾動 200 公分的長度，問輪子繞軸轉動________度。(度以下四捨五入)　(88 學科能力測驗)　[答案]：229°

(練習17) 求下列各點的極坐標：

(1)A(−2,2)　(2)B(4sin20°,4cos20°)　(3)C(0,−3)

[答案]：(1)[$2\sqrt{2}$,135°]　(2) [4, 70°]　(3)[3,270°]

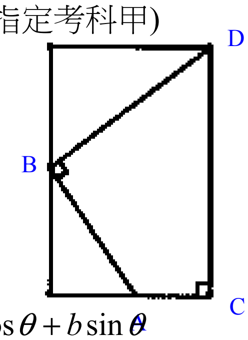
(練習18) 求下列各點的直角坐標：

(1)A[4,240°]　(2)B[2,330°]　(3) C[3,θ]，$\cos\theta=\frac{3}{5}$(θ 為第四象限角)

[答案]：(1)A($-2,-2\sqrt{3}$)　(2)B($\sqrt{3}$,−1)　(3)C($\frac{9}{5},\frac{-12}{5}$)

綜合練習

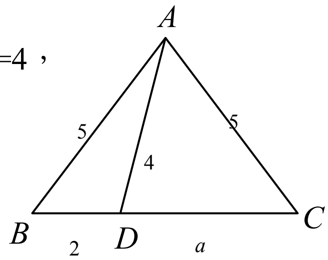
1. 平面上有 A、B、C 三點。已知 B、C 之間的距離是 200 公尺，B、A 之間的距離是 1500 公尺，∠ACB 等於 60°。請問 A、C 之間距離的最佳近似值是哪一個選項？
(1) 1500 公尺 (2) 1600 公尺 (3) 1700 公尺 (4) 1800 公尺。(2003 指定考科甲)



2. 如圖，$\angle BAC=\theta$，$\angle ABD=\angle ACD=90°$，$\overline{AB}=a$，$\overline{BD}=b$，

下列選項合者可以表示$\overline{CD}$？

(1) $a\sin\theta+b\cos\theta$ (2) $a\sin\theta-b\cos\theta$ (3) $a\cos\theta-b\sin\theta$ (4) $a\cos\theta+b\sin\theta$
(5) $a\sin\theta+b\tan\theta$ (2004 指定考科乙)



3. 如圖所示△ABC 中，D 為邊$\overline{BC}$上一點，且$\overline{AB}=\overline{AC}=5$，$\overline{AD}=4$，

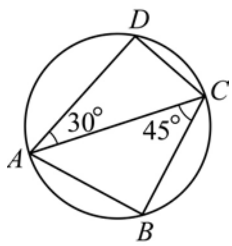
$\overline{BD}=2$，$\overline{DC}=a$，則 $a=$________。(2003 指定考科乙)

4. 嘌呤是構成人體基因的重要物質，它的化學結構式主要是由一個正五邊形與一個正六邊形構成（ 令它們的邊長均為 1）的平面圖形， 如下圖所示：
試問以下那些選項是正確的？(2006 指定乙)

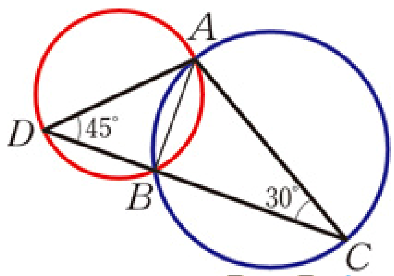
(1)∠BAC=54° (2)O 是ΔABC 的外接圓圓心 (3)$\overline{AB}=\sqrt{3}$ (4)$\overline{BC}=2\cdot\sin66°$

5. 在ΔABC 中，M 為$\overline{BC}$邊之中點，若$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，且∠BAC=120°，

則 tan∠BAM=__________。 (2007 學科能力測驗)



6. 假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆為 20 公里，兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮。今在一比例精確的地圖上量得兩公路的夾角為45°，則丙、丁兩鎮間的距離約為
(1) 24.5 公里 (2) 25 公里 (3) 25.5 公里 (4) 26 公里 (5) 26.5 公里
(2009 學科能力測驗)



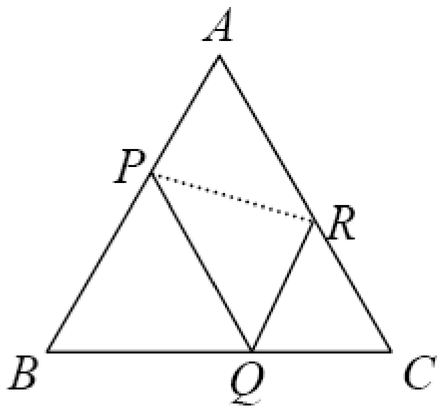
7. 如右圖，大小兩圓相交於 A，B 兩點，過 B 點有一直線交大圓於 C 點，交小圓於 D 點。若∠ACD＝30°，∠ADC＝45°，求大圓與小圓的面積比值。

8. 已知 sinθ=$\frac{-2}{3}$且 cosθ>0，請問下列哪些選項是正確的？

(1) tanθ<0 (2) $\tan^2\theta>\frac{4}{9}$ (3) $\sin^2\theta>\cos^2\theta$ (4)sin2θ>0

(5)標準位置角θ與 2θ的終邊位在不同象限。(2011 學科能力測驗)

9. 在邊長為 13 的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P、Q、R，使得 APQR 形成一平行四邊形，如下圖所示：

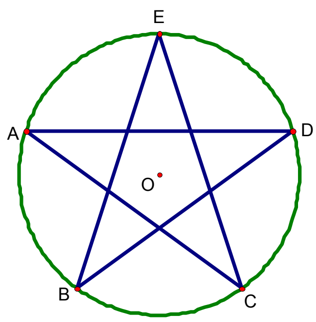


若平行四邊形 APQR 的面積為 $20\sqrt{3}$ ，則線段 PR 的長度為______。
(2012 學科能力測驗)

10. 下圖為汽車迴轉示意圖。汽車迴轉時，將方向盤轉動到極限，以低速讓汽車進行轉向圓周運動，汽車轉向時所形成的圓周的半徑就是迴轉半徑，如圖中的$\overline{BC}$即是。已知在低速前進時，圖中 *A* 處的輪胎行進方向與$\overline{AC}$垂直，*B* 處的輪胎行進方向與$\overline{BC}$垂直。

在圖中，已知軸距$\overline{AB}$ 為 2.85 公尺，方向盤轉到極限時，輪子方向偏了 28 度，試問此車的迴轉半徑 *BC* 為________公尺。(2015 學科能力測驗)
（小數點後第一位以下四捨五入，sin28°≈0.4695, cos28°≈ 0.8829）

11. 已知正五角星(即 *ABCDE* 為正五邊形)內接於一圓 O，如右圖所示.若$\overline{AC}$=1，則圓 O 的半徑長為____________.
[$\sin18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\cos18°=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$]



12. $\frac{\sin 3\theta}{\sec 2\theta}-\frac{\cos 3\theta}{\csc 2\theta}$可化簡為(1) sinθ (2) cosθ (3) tanθ (4)

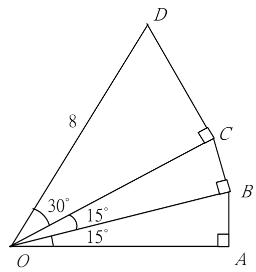
$\dfrac{1}{\tan\theta}$ 。(2005 指定考科甲)

13. ΔABC 為邊長為 5 的正三角形，P 點在三角形內部，若線段長度 $\overline{PB}=4$ 且 $\overline{PC}=3$，則 $\cos\angle ABP=$_________。（四捨五入到小數點後第二位，$\sqrt{2}$ 的近似值是 1.414，$\sqrt{3}$ 的近似值是 1.732）。(2009 指定甲)

14. 在ΔABC 中，下列哪些選項的條件有可能成立？

(1)$\sin A=\sin B=\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\sin A,\sin B,\sin C$ 均小於 $\dfrac{1}{2}$ (3) $\sin A,\sin B,\sin C$ 均大於$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $\sin A=\sin B=\sin C=\dfrac{1}{2}$ (5)$\sin A=\sin B=\dfrac{1}{2}$，$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。(2002 學科能力測驗)

15. 右圖是由三個直角三角形堆疊而成的圖形，且$\overline{OD}=8$。



問：直角三角形 OAB 的高 $\overline{AB}$ 為何？

(1) 1 (2) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{7}-1$ (4) $\sqrt{3}$ (5) 2
(2006 學科能力測驗)

16. 坐標平面上，以原點 O 為圓心的圓上三個相異點 A(1,0)、B、C，且$\overline{AB}=\overline{BC}$。已知銳角三角形 OAB 的面積為$\dfrac{3}{10}$，則$\Delta$OAC 的面積為_______。(化為最簡分數)
(2008 學科能力測驗)

17. 莎韻觀測遠方等速率垂直上升的熱氣球。在上午 10:00 熱氣球的仰角為 30°，到上午 10:10 仰角變成 34°。請利用下表判斷到上午 10:30 時，熱氣球的仰角最接近下列哪一個度數？(2013 學科能力測驗)

θ	30°	34°	39°	40°	41°	42°	43°
sin	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
bosθ	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
tanθ	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

(1) 39° (2) 40° (3) 41° (4) 42° (5) 43°

18. 設銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 8。已知外接圓圓心到 $\overline{AB}$ 的距離為 2，而到 $\overline{BC}$ 的距離為 7，則 $\overline{AC}$ ＝________。 (2013 學科能力測驗)

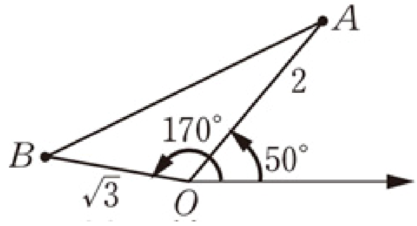
19. 設 A、B、C、D 為空間中四個相異點，且直線 CD 垂直平面 ABC。已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=10$，$\sin\angle ABC=\frac{4}{5}$，且∠ABC 為銳角，則 $\overline{AD}$ =________。(化成最簡根式) (2013 指定甲)

20. 在△ABC 中，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=9$，$\cos\angle BAC=\frac{3}{8}$。設點 P、Q 分別在 AB、AC 上使得△APQ 之面積為△ABC 面積之一半，則 $\overline{PQ}$ 最小可能值為________。 (2009 學科能力測驗)

21. 若有θ使下述方程組不只一組解，求 sinθ +cosθ的值。

$$\begin{cases}(1+\cos\theta)x-y=0\\ -x+(1+\sin\theta)y=0\end{cases}$$ (2004 指定考科甲)

22. 如右圖，設 A，B 的極坐標分別為〔2，50°〕，〔$\sqrt{3}$，170°〕，而 O 為極點，求(1)△AOB 的面積，(2)$\overline{AB}$ 長度。



答案與詳解

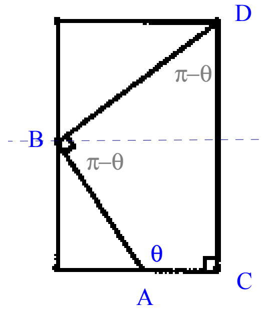
1. [答案]：(2)

[解法]：

令$\overline{AC}$=100x，在ΔABC 中使用餘弦公式

$\Rightarrow 1500^2=(100x)^2+200^2-2\cdot 100x\cdot 200\cdot \cos 60° \Rightarrow x^2-2x-221=0 \Rightarrow x=1+\sqrt{222} \fallingdotseq 15.9$

$\therefore\overline{AC}$約為 1600 公尺。



2. [答案]：(2)

[解法]：$\overline{CD}=a\cdot\sin(\pi-\theta)+b\cdot\cos(\pi-\theta)=a\sin\theta-b\cos\theta$

3. [答案]：$\frac{9}{2}$

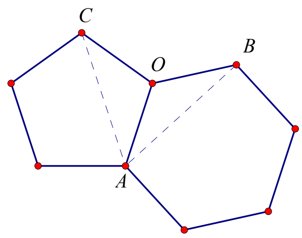
[解法]：

在ΔADB 與ΔABC 中使用餘弦公式

$\Rightarrow\frac{2^2+5^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 5}=\cos B=\frac{5^2+(2+a)^2-5^2}{2\cdot 5\cdot(2+a)}\Rightarrow\frac{13}{2}=\frac{a^2+4a+4}{2+a}\Rightarrow a=\frac{9}{2}$。

4. [答案]：(2) (3) (4)

[解法]：



正五邊形每一內角為 108°$\Rightarrow\angle OAC=36°$

正六邊形每一內角為 120°$\Rightarrow\angle OAB=30°$

(1) $\angle BAC=\angle BAO+\angle OAC=30°+36°=66°$

(2) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$，故 O 為 ΔABC 外接圓圓心

(3) $\overline{AB}=2\cos\angle BAO=2\cos 30°=\sqrt{3}$

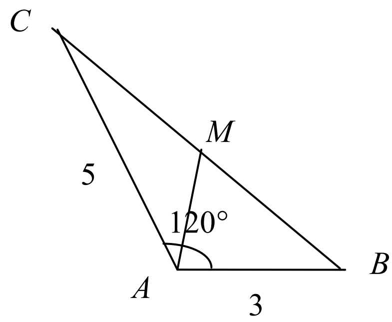
(4) $\angle BOC=360°-120°-108°=132°$ (或$\angle BOC=2\angle A=132°$)

$$\overline{BC}=2\sin\frac{\angle BOC}{2}=2\sin 66°$$

(另解)由正弦定理：$\overline{BC}=2R\cdot\sin A=2\sin 66°$ 故選 (2) (3) (4)

5. [答案]：$5\sqrt{3}$

[解法]：



利用坐標化方法

設 $A(0,0)$ ，$B(3,0)$ ，$C(5\cos 120°,5\sin 120°)=(-\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$

$\Rightarrow M$ 之坐標為 $(\dfrac{3+(-\frac{5}{2})}{2},\dfrac{0+\frac{5\sqrt{3}}{2}}{2})=(\dfrac{1}{4},\dfrac{5\sqrt{3}}{4})\Rightarrow \tan\angle BAM=\dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}=5\sqrt{3}$

6. [答案]：(1)

[解法]：

依照題意可作圖如右：假設丙丁之間的距離為 x，則由正弦定理有 $\dfrac{x}{\sin 120^\circ}=\dfrac{20}{\sin 45^\circ}$，

故 $x=20\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\approx 24.4978$，即最接近 24.5 公里。

7. [答案]：2

[解法]：設大小圓半徑為 R、r

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}=2R$，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ}=2r$

$\Rightarrow\dfrac{R}{r}=\dfrac{\sin45^\circ}{\sin30^\circ}=\sqrt{2}$ ⇒大圓與小圓的面積比值=2。

8. [答案]：(1)(2)

[解法]：

$\because\ \sin\theta=\dfrac{-2}{3}<0$ 且 $\cos\theta>0$，$\therefore\ \theta$為第四象限角

(1)$\tan\theta=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}<0$ 正確　(2) $\tan^2\theta=\dfrac{4}{5}>\dfrac{4}{9}$　(3)$\sin^2\theta=\dfrac{4}{9}<\cos^2\theta=\dfrac{5}{9}$　(4)$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{-2\sqrt{5}}{9}<0$

(5)$\because\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{1}{9}>0$，故 2θ與θ均為第四象限角。

9. [答案]：7

[解法]：

令 $\overline{AP}=x$，則 $\overline{AP}=\overline{QR}=\overline{QC}=\overline{CR}=x$

$\Rightarrow\overline{AR}=\overline{PQ}=\overline{QB}=\overline{BP}=13-x$

ΔAPR 面積$=10\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}x(13-x)\sin60^\circ\Rightarrow x=5$

再利用餘弦定理:

$\overline{PR}^2=5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos60^\circ=49\Rightarrow\overline{PR}=7$。

10. [答案]：6.1

[解法]：

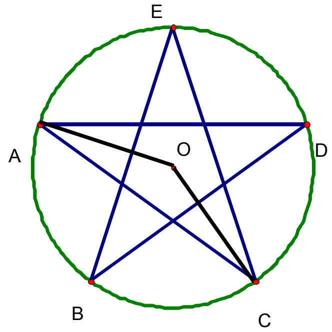
$\angle ABC+28°=90°\Rightarrow\angle ABC=62°$，$\overline{BC}\ \cos62°=2.85\Rightarrow\overline{BC}=\dfrac{2.85}{\cos62°}\approx6.09\approx6.1$。

11. [答案]：$\dfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}$

[解法]：

令圓 O 的半徑為 r

連 OA、OC，在ΔAOC 中使用餘弦公式



$\overline{AC}^2=\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OC}\cdot\cos144°$

$\Rightarrow1=2r^2-2r^2\cos144°=2r^2(1-\cos144°)$

$\Rightarrow1=2r^2(1-\cos144°)$

$\Rightarrow1=2r^2\cdot2\sin^2 72°\Rightarrow2r\cdot\sin72°=1$

$\Rightarrow r=\dfrac{1}{2\sin72°}=\dfrac{1}{2\cos18°}=\dfrac{1}{2\cdot\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}=\dfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}$。

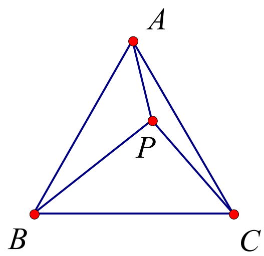
12. [答案]：(1)

[解法]：原式$=\sin3\theta\cdot\cos2\theta-\cos3\theta\cdot\sin2\theta=\sin(3\theta-2\theta)=\sin\theta$，所以選(1)

13. [答案]：0.92

[解法]：設 $\angle CBP=\theta$，則 ΔPBC 中，由 $\overline{BC}=5$，$\overline{PB}=4$，$\overline{PC}=3$，

依據餘弦定理，$\cos\angle CBP=\dfrac{\overline{PB}^2+\overline{BC}^2-\overline{PC}^2}{2\cdot\overline{PB}\cdot\overline{BC}}$，



得 $\cos\theta=\dfrac{16+25-9}{2\cdot4\cdot5}=\dfrac{32}{40}=\dfrac{4}{5}$。

又 $\angle ABP=60°-\angle CBP=60°-\theta$，

$\Rightarrow\ \cos\angle ABP=\cos(60°-\theta)=\cos60°\cos\theta+\sin60°\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}\fallingdotseq\dfrac{9.196}{10}\fallingdotseq0.92$。

14. [答案]：(1)(2)(5)

[解法]：

(1)$\angle A=\angle B=\angle C=60°$

(2)$\angle A=10°$，$\angle B=10°$，$\angle C=160°\Rightarrow\sin A=\sin B<\sin30°=\dfrac{1}{2}$，$\sin160°=\sin20°<\sin30°=\dfrac{1}{2}$

(3)$\because$ sinA,sinB,sinC 均大於$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$ΔABC 中有兩個大於 60°的角，設為∠A、∠B

$\because$ 內角和=180° $\Rightarrow\angle$C<60°$\Rightarrow$sinC<$\frac{\sqrt{3}}{2}$(矛盾)。

(4)$\because$ sinA=sinB=sinC=$\frac{1}{2}$ $\Rightarrow\Delta$ABC 中會有兩個內角=30°，另一內角為 120°，

sin120°=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$不合。

(5)$\angle$A=$\angle$B=30°，$\angle$C=120°。故選(1)(2)(5)

15. [答案]：(4)

[解法]：

$\overline{AB}=\overline{OB}\cdot\sin 15°=(\overline{OC}\cdot\cos 15°)\cdot\sin 15°$

$=(\overline{OD}\cdot\cos 30°)\cdot\cos 15°\cdot\sin 15°=8\cdot\cos 30°\cdot\frac{1}{2}\sin 30°=2\sin 60°=\sqrt{3}$

16. [答案]：(1)$\frac{3}{2}$ (2)$\sqrt{7+2\sqrt{3}}$

[解法]：

(1)ΔAOB 面積=$\frac{1}{2}\overline{\text{OA}}\cdot\overline{\text{OB}}\cdot\sin 120°=\frac{3}{2}$

(2)$\overline{\text{AB}}^2=\overline{\text{OA}}^2+\overline{\text{OB}}^2-2\overline{\text{OA}}\cdot\overline{\text{OB}}\cdot\cos 120°=7+2\sqrt{3}\Rightarrow\overline{\text{AB}}=\sqrt{7+2\sqrt{3}}$。

17. [答案]:(3)

[解法]：

如圖，設觀測點與熱氣球在地面的投影點距離 x

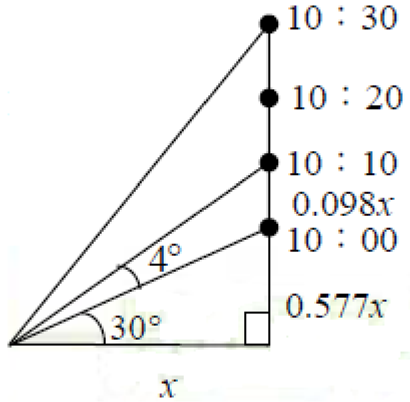
由 10：10 時的仰角為 34°

得熱氣球高度為 $x\tan 34°=0.675x$，得熱氣球每 10 分鐘上升 $0.675x-0.577x=0.098x$

故 10：30 時熱氣球高度為 $0.577x+3\times 0.098x=0.871x$

設 10：30 時熱氣球仰角 θ 得

$\tan\theta\frac{0.871x}{x}=0.871\approx\tan 41°$，故選(3)

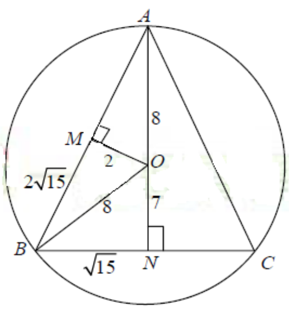


18. [答案]：$4\sqrt{15}$

[解法]：

$\overline{BM}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$、$\overline{BN}=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$

得 $\cos\angle ABO=\frac{2\sqrt{15}}{8}=\frac{\sqrt{15}}{4}\Rightarrow\sin\angle ABO=\frac{1}{4}$



$\cos\angle CBO=\dfrac{\sqrt{15}}{8}\Rightarrow\sin\angle CBO=\dfrac{7}{8}$

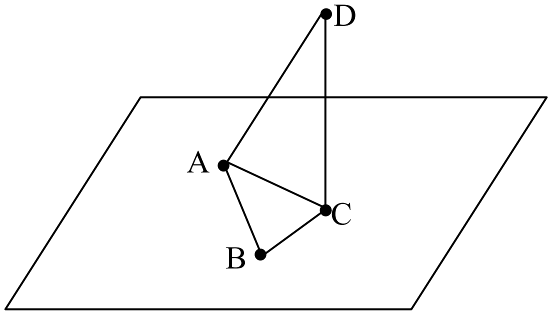
$\therefore\ \sin\angle ABC=\sin\angle ABO+\sin\angle CBO$

$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

由正弦定理得 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin\angle ABC}=2\times 8\Rightarrow\overline{AC}=16\sin\angle ABC=16\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=4\sqrt{15}$

19. [答案]：$6\sqrt{5}$

[解法]：



連 AC，令∠ABC=θ，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$ ，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

$\overline{AC}^2=10^2+10^2-2\times10\times10\times\cos\theta\Rightarrow\overline{AC}^2=80$

∵直線 CD 垂直平面 ABC∴ ∠ACD=90°

故$\overline{AD}^2=\overline{CD}^2+\overline{AC}^2=180\Rightarrow\overline{AD}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$ 。

20. [答案]：$\dfrac{15}{2}$

[解法]：

因為$\triangle APQ$與$\triangle ABC$共用一個$\angle A$，這兩個三角形的面積比為其共角夾邊的乘積比，

即欲使$\triangle APQ$之面積為$\triangle ABC$面積之一半，則須$\overline{AP}\times\overline{AQ}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}=45$ 。

假設$x=\overline{AP}$ ，$y=\overline{AQ}$ ，$t=\overline{PQ}$ 。$\triangle APQ$中，$t^2=x^2+y^2-2xy\cos A$ 。因為

$x^2+y^2\geq 2xy=90$ ，所以，$t^2\geq 90-\dfrac{135}{4}=\dfrac{225}{4}\Rightarrow t\geq\dfrac{15}{2}$

21. [答案]：$-1+\sqrt{2}$

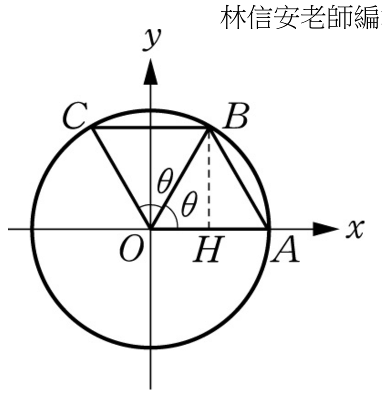
[解法]：$\begin{cases}(1+\cos\theta)x-y=0\\-x+(1+\sin\theta)y=0\end{cases}$不止一組解$\Rightarrow\begin{vmatrix}1+\cos\theta & -1\\ -1 & 1+\sin\theta\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cdot\cos\theta=0\cdots\cdots(*)$

令$\sin\theta+\cos\theta=t$（其中$-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$ ）且$\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$

$\Rightarrow(*)$式$=\dfrac{t^2-1}{2}+t=\dfrac{1}{2}(t^2+2t-1)=0\Rightarrow t=-1\pm\sqrt{2}$（負不合）

故 $\sin\theta+\cos\theta=-1+\sqrt{2}$。



22. [答案]：$\frac{12}{25}$

[解法]：設 B(x_B,y_B)、C(x_C,y_C)

三角形 OAB 面積=$\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot y_B=\frac{3}{10}\Rightarrow y_B=\frac{3}{5}$

因為三角形 OAB 為銳角，故 $x_B=\frac{4}{5}$

設 B 的方向角∠AOB 為θ$\Rightarrow\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\sin\theta=\frac{3}{5}$

因為$\overline{AB}=\overline{BC}$，$y_C=\sin2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{24}{25}$，ΔOAC 的面積為$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{24}{25}=\frac{12}{25}$。