林信安老師編寫

向量

重點整理

一、向量的概念：

(1)基本概念：

(a)以 A 為始點，B 為終點的有向線段，稱為**向量**$\overrightarrow{AB}$，它的方向是由 A 指向 B，大小為$\overline{AB}$，記為$|\overrightarrow{AB}|$，即$|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}$。當 A=B 時，$\overrightarrow{AB}$為**零向量**，記為$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$；

注意：$\overrightarrow{0}$ 的大小為 0，但方向為任意。

(b)兩個向量若大小相等，方向相同，則稱兩個向量相等。

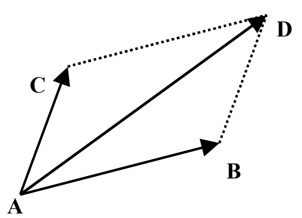
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$方向相同且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$。

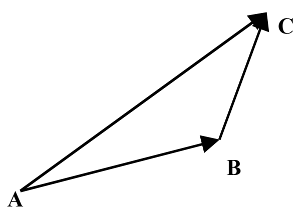
(c)$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{BA}$長度相等，但方向相反，記為：$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$。

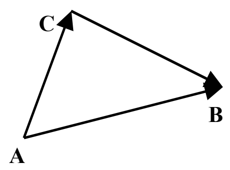
二、向量的運算：

(1)向量的加減法：

①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$　②$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$　③$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$







(2)向量的係數積：

(a)設$\overrightarrow{a}$是一個向量，r 是一個實數，則$r\overrightarrow{a}$仍是一個向量，定義如下：

長度：$|r\overrightarrow{a}|=|r||\overrightarrow{a}|$，

方向：若 $r>0$，則$r\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{a}$同向；若 $r<0$，則$r\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{a}$反向；若 $r=0$ 或$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$，則$r\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$

(b)向量平行與係數積：

$\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b} \Leftrightarrow$ 可找到實數 t 或 s，使得$\overrightarrow{a}=t\overrightarrow{b}$或$\overrightarrow{b}=s\overrightarrow{a}$

根據向量平行的定義，可知：

(1°)兩個非零向量平行的充要條件是兩向量同向或反向

(2°) $\overrightarrow{0}$ 之方向不予限定，故 $\overrightarrow{0}$ 可視為與任何向量均平行。

例如：設 A,B,C 為一直線上的三點，且$\overline{AB}$：$\overline{BC}$=3：2，

則$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}=\frac{-2}{3}\overrightarrow{BA}$。

所以同一線段上的三點，只要知道其線段長度比，彼此形成的向量就可以互相表示。

(3)向量的內積：

(a)設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為兩向量，θ為其夾角，定義 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積為$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$，

符號記為：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$。

請注意：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 是一個**實數**而**非向量**，就好像功是一個純量，而沒有方向。

(b)向量的垂直：$\boldsymbol{\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0}$。

(c)向量的長度：$|\overrightarrow{a}|^2=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}$ 。

(4)向量內積的運算性質：

設 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 為任意三向量，r 為任意實數，則

① $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$ (交換性)　② $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$ (分配性)

③$r(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})=(r\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(r\overrightarrow{b})$

④ $\overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{a}=0$ (注意：$\overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{a}=0$ 而非**零向量**)

⑤$|\overrightarrow{a}|^2=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}\geq 0$，$|\overrightarrow{a}|^2=0\Leftrightarrow\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$

這個性質可以讓我們在內積與長度之間轉換，是一個簡單但重要的性質。

⑥$|\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}|^2=(\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b})=|\overrightarrow{a}|^2\pm 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

(5)空間向量的外積：

設空間中兩向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的外積為一個**向量**，記為 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ ：

(1°)$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta$

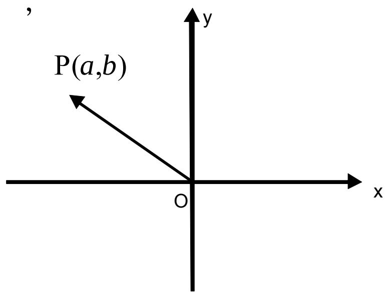
(2°) $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{a}\times\vec{b}$ 成右手則的關係。

(3°) $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ ， $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$

三、向量的坐標化：

(1)平面向量的坐標化：

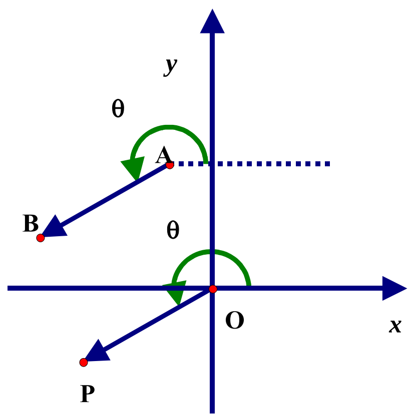
設 $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$ ，而 P 點的坐標為(a,b)，則用 P 的坐標(a,b)來表示向量 $\vec{u}$ ，記為 $\vec{u}=(a,b)$，其中 a 和 b 分別稱為向量 $\vec{u}$ 的 **x−分量**與 **y−分量**。



(a)長度： $\vec{u}=(a,b)$，則$|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2}$。

(b)向量相等：若 $\vec{u}=(a,b)$， $\vec{v}=(c,d)$，則 $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$

(c)兩點決定一向量：設 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$為坐標平面上的兩點，則$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1)$

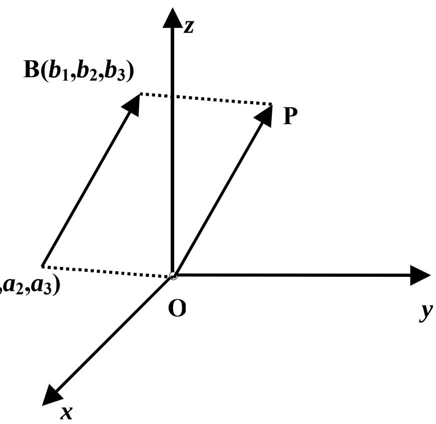


(e) 用長度、方向角決定一個向量：

將$\overrightarrow{AB}$平移到$\overrightarrow{OP}$，其中 O 為原點，令$|\overrightarrow{OP}|=r$ 從 x 軸正向逆時針轉到$\overrightarrow{OP}$的有向角為θ，我們稱為**方向角**，$0°\le\theta<360°$，則$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OP}=(r\cos\theta,r\sin\theta)$。

(2)空間向量的坐標化：

空間中兩點 $A(a_1,a_2,a_3)$、$B(b_1,b_2,b_3)$，$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$。



(a)長度：設 $\vec{u}=(a,b,c)$ ，則$|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

(b)向量相等： $\vec{u}=(a,b,c)$， $\vec{v}=(\alpha,\beta,\gamma)$ 若 $\vec{u}=\vec{v}$ ，則$\begin{cases}a=\alpha\\ b=\beta\\ c=\gamma\end{cases}$。

(3)向量坐標化與向量的運算：

(a)平面上：設 $\vec{a}=(a_1,a_2)$， $\vec{b}=(b_1,b_2)$，則

① $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1，a_2+b_2)$　② $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1，a_2-b_2)$　③$r\vec{a}=(ra_1,ra_2)$，$r\in R$

④ $\vec{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的分量成比例。⑤ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

(b)空間中：設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則

① $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3)$　　② $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1，a_2-b_2，a_3-b_3)$

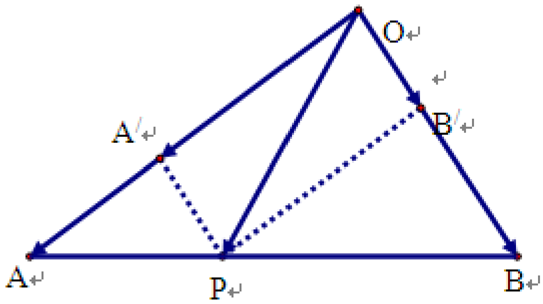
③ $r\cdot\vec{a}=(ra_1,ra_2,ra_3)$，$r\in R$　　④ $\vec{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的分量成比例。

⑤ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

⑥ $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

四、分點公式與三點共線：

(1)分點公式：



設點 P 在線段 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}：\overline{PB}=m：n$，

則對任一點 O(不一定原點)恆有

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$。

(a)分點公式中 O 為任意點，

如令 O=A，則 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$，這也是一個很好用的分點公式。

(b)根據係數積的定義，$\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AP}$，所以 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，且 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\dfrac{m}{m+n}$，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AP}$ 同向，

故可知 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$。

(2)重心公式：

若ΔABC 中，G 為ΔABC 的重心，O 為任何一點，則

(a) $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

(b)若令 O=A，則 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$。

(c)若令 O=G $\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$。

(3)內心公式：

ΔABC 中，三邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 之長分別為 c,a,b，I 為ΔABC 之內心，O 為任何一點。

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$。

(b)令 O=I，則 $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(4)三點共線的條件：

A,B,P 三點共線

$\Leftrightarrow$存在兩數α,β，使得$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，其中 O 為任意點且$\alpha+\beta=1$。

注意：設 P 點在$\overleftrightarrow{AB}$上，根據(4)的結論，可找到α，β使得$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(a)$0\le\alpha\le1$，則 P 在線段 AB 上，(b)$\alpha>1$，則 P−A−B

(c)$\alpha<0$，則 A−B−P， (d)$\alpha=0$，則 P=B，$\alpha=1$，則 P=A

五、內積的應用：

(1)求夾角：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$。

(a)坐標平面上：設$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)\Rightarrow\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$。

(b)空間坐標中：設$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\Rightarrow\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$。

(2)求面積：ΔABC 面積為$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$。

[證明]：$\Delta\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cdot\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$。

(a)坐標平面上：設$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(m.n)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(p,q)\Rightarrow\Delta\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}\right|$。

(b)空間坐標中：設$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(m,n,l)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(p,q,r)\Rightarrow\Delta\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$。

(3)求正射影：$\vec{a}$ 對 $\vec{b}$ 的正射影為$\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$

(4)柯西不等式：(Cauchy's Inequality)

(a)向量形式：

設$\vec{a}$，$\vec{b}$為平面上任意二向量，則$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$，等號成立 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\,//\,\vec{b}$

(b)坐標型式：

平面坐標：

若 a_1,a_2,b_1,b_2 為任意四個實數，

則$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$，等號成立$\Leftrightarrow(a_1,a_2)=t(b_1,b_2)$

空間坐標：

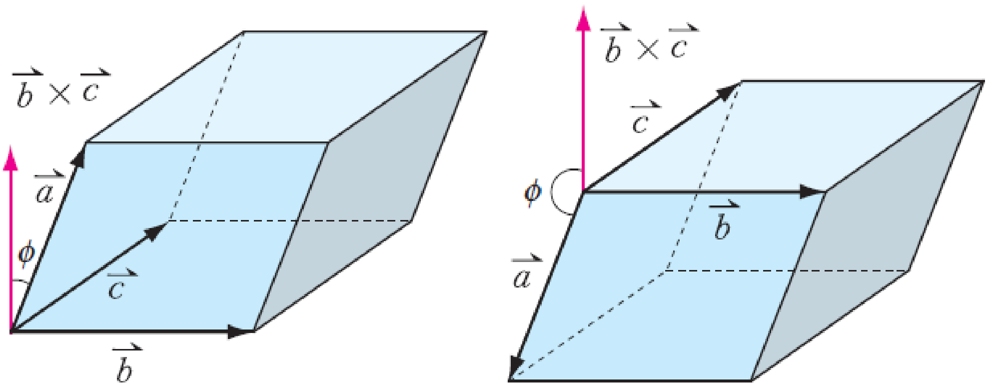
若 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b 為任意六個實數，

則$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3+b_3)^2$，等號成立$\Leftrightarrow(a_1,a_2,a_3)=t(b_1,b_2,b_3)$

(5)平行六面體的體積：

向量$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$所展成的平行六面體的體積等於

$$|(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{a}|=|(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}|=|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



(a) ϕ 為銳角　　(b) ϕ 為鈍角

[例題1] 若一三角形 ABC，$a=4,b=5,c=6$，試求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$？

[答案]：$\dfrac{45}{2}$

[解法]：

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=5\times6\times\dfrac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=\dfrac{45}{2}$。

[例題2] 二向量$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$，若$|\overrightarrow{a}|=3$，$|\overrightarrow{b}|=4$，且$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{13}$，

則(1)$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$之夾角為何？ (2)$|3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|=$？

[答案]：(1)$\dfrac{2\pi}{3}$ (2)$\sqrt{73}$

[解法]：

(1)若可以知道$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$即可用內積的定義$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$，求出夾角θ。

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b} \Rightarrow 13=3^2+4^2+2\vec{a}\cdot\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-6$。

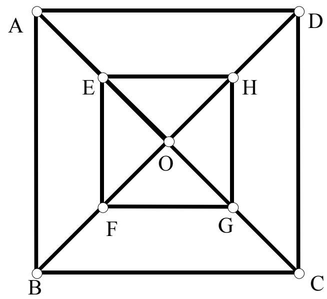
$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，$\therefore \cos\theta=\dfrac{-1}{2} \Rightarrow \theta=\dfrac{2\pi}{3}$。

(2)用 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ 求向量的長度：

$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=(3\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}+2\vec{b})=9|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\Rightarrow |3\vec{a}+2\vec{b}|^2=73 \Rightarrow |3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{73}$

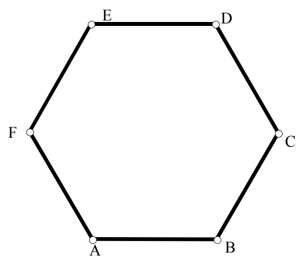
(練習1) (向量運算的基本性質)



如右圖所示，O 為正方形 ABCD 對角線的交點，
且 E、F、G、H 分別為線段 OA，OB，OC，OD 的中點。
試問下列何者為真？
(A)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}$ (B)$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{EF}$
(C)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$ (D)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GC}$
(E)$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$ (86 大學聯考社會組)

[答案]：(全)

(練習2) 在正六邊形 ABCDEF 中，令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ，



試以 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示下列諸向量：

(1)$\overrightarrow{AC}$ (2)$\overrightarrow{ED}$ (3) $\overrightarrow{EF}$ (4)$\overrightarrow{CD}$ 。

[答案]：(1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $\vec{a}$ (3)$-\vec{b}$ (4)$-\vec{a}+\vec{b}$ (5) $\vec{a}-\vec{b}$

(練習3) 設 $\vec{a}\perp\vec{b}$ ，且 $|\vec{a}|=3\sqrt{2}$ ，$|\vec{b}|=1$，

若 $\vec{a}+(t^2+5)\vec{b}$ 與 $-\vec{a}+t\vec{b}$ 互相垂直，則實數 t＝_______。

[答案]：t=2

(練習4) △ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，試求：

(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$＝______。(2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$＝________。

[答案]：(1)19(2)–6

(練習5) 在四邊形 ABCD 中，$\angle A=120°$，$\overline{AB}=1$、$\overline{AD}=2$，且 $\overrightarrow{AC}=3\cdot\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AD}$，

則$\overline{AC}$的長度為何？ [答案]：$\sqrt{13}$

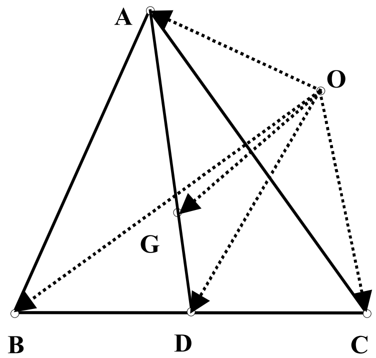
[例題3] ΔABC 中，O 為任意點

(1)證明：$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$。

(2)若 G 為ΔABC 的重心，試證：$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$。

(3)試證：G 為ΔABC 的重心 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ 。

[證明]：



(1)延長$\overline{AG}$交$\overline{BC}$於 D，∵G 為重心

∴AG：GD=2：1 且 BD：DC=1：1

$\Rightarrow\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$\Rightarrow\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$。

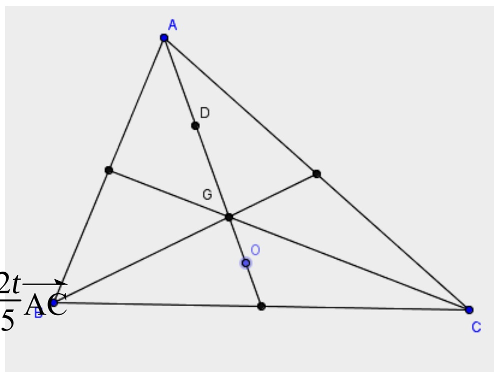
(2)(1)中 O 為任意點，令 O=A

$\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$。

(3)(1)中 O 為任意點，令 O=G $\Rightarrow\overrightarrow{GG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

[例題4] (分點公式與三點共線)

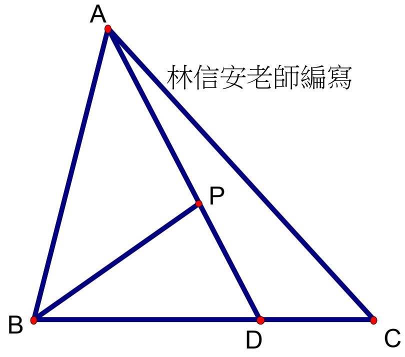
設ΔABC 中有一點 P，且滿足 $5\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，設直線 AP 與$\overline{BC}$交於 D 點，請求出下列二小題：(1)$\frac{BD}{DC}=$？ (2)$\frac{\Delta PBD}{\Delta ABC}=$？



[答案]：(1)2 (2)$\frac{4}{15}$

[解法]：∵$5\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ ∴ $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

∵ $\overrightarrow{AP}//\overrightarrow{AD}$，∴ 可令$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AP}=t(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC})=\frac{t}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2t}{5}\overrightarrow{AC}$



$\because$ B、D、C 三點共線，$\therefore \frac{t}{5}+\frac{2t}{5}=1 \Rightarrow t=\frac{5}{3}$

$\overrightarrow{AD}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

根據分點公式與向量平行的概念

$\Rightarrow$BD：DC=2：1$\Rightarrow\frac{BD}{DC}=2$，AP：AD=3：5

$\frac{\Delta PBD}{\Delta ABD}=\frac{PD}{AD}=\frac{2}{5}$，$\frac{\Delta ABD}{\Delta ABC}=\frac{BD}{DC}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{\Delta PBD}{\Delta ABC}=\frac{\Delta PBD}{\Delta ABD}\times\frac{\Delta ABD}{\Delta ABC}=\frac{4}{15}$。

[例題5] 設 A,B,C 為不共線三點，已知 $\overline{AB}=2,\overline{AC}=1,\angle BAC=60^\circ$，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

其中 x,y 均為實數，

(1) 若 $x\ge 0, y\ge 0$ 且 $x+y=1$，試求 P 點軌跡的幾何度量。

(2) 若 $x\ge 0, y\ge 0$ 且 $x+y=2$，試求 P 點軌跡的幾何度量。

(3) 若 $-1\le x\le 3$，$-4\le y\le 2$，試求 P 點軌跡的幾何度量。

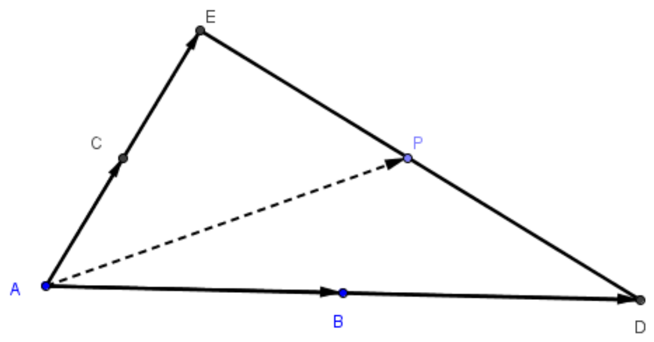
[解法]：

(1) $\because$ P 點軌跡為線段 $\overline{BC}$，而 $\overline{BC}=\sqrt{2^2+1^2-2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos 60^\circ}=\sqrt{3}$

(2)令 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AC}$，

$\because x+y=2$，$\therefore$ $\overrightarrow{AP}=\frac{x}{2}(2\overrightarrow{AB})+\frac{y}{2}(2\overrightarrow{AC})\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{x}{2}(\overrightarrow{AD})+\frac{y}{2}(\overrightarrow{AE})$，

且 $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$，$x\ge 0, y\ge 0$，故 P 點軌跡為線段 $\overline{DE}$，而 $\overline{DE}=2\overline{BC}=2\sqrt{3}$。

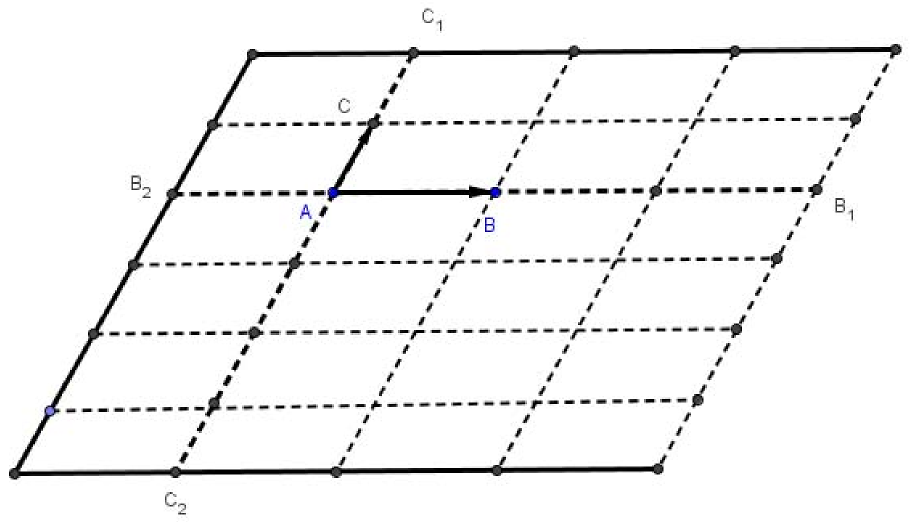


(3)

如右圖：P 點軌跡為一平行四邊形，其中 $\overrightarrow{AB_1}=3\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB_2}=-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC_1}=2\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AC_2}=-4\overrightarrow{AC}$，

平行四邊形面積

$=24(2\Delta ABC$ 面積$)=24\cdot 2\cdot 1\cdot\sin 60^\circ=24\sqrt{3}$ 。



(練習6) 若 A、B、C 三點共線，且 $5\overrightarrow{OB}=(2t-1)\overrightarrow{OA}+(3t-4)\overrightarrow{OC}$，

求實數 t 的值。 [答案]：$t=2$

(練習7) O,A,B 三點不共線，P 點在直線 AB 上，但不在線段$\overline{AB}$上，

且$\overline{AP}$：$\overline{BP}$=5：2，設$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求 x,y。[答案]：$x=\frac{-2}{3},y=\frac{5}{3}$

(練習8) 設 ABC 為坐標平面上一三角形，P 為平面上一點且$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，則

$\frac{\Delta ABP\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}$等於_______。

(1)$\frac{1}{5}$ (2)$\frac{1}{4}$ (3)$\frac{2}{5}$ (4)$\frac{1}{2}$ (5)$\frac{2}{3}$ (2003 學科能力測驗)

[答案]：(3)

(練習9) 設ΔABC 為平面上的一個三角形，P 為平面上一點且$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，其中 t 為一實數。試問下列哪一個選項為 t 的最大範圍，使得 P 落在$\triangle ABC$ 的內部？

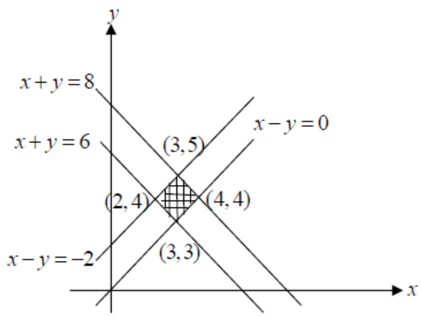
(1)$0<t<\frac{1}{4}$ (2)$0<t<\frac{1}{3}$ (3)$0<t<\frac{1}{2}$ (4)$0<t<\frac{2}{3}$ (5)$0<t<\frac{3}{4}$ (93 學科能力測驗)

[答案]：(4)

[例題6] 令 $\overrightarrow{A}$ ，$\overrightarrow{B}$ 為坐標平面上兩向量。已知 $\overrightarrow{A}$ 的長度為 1，$\overrightarrow{B}$ 的長度為 2 且 $\overrightarrow{A}$ 與 $\overrightarrow{B}$ 之間的夾角為 60°。令 $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$，$\overrightarrow{v}=x\overrightarrow{A}+y\overrightarrow{B}$，其中 x,y 為實數且符合 $6\le x+y\le 8$ 以及 $-2\le x-y\le 0$，則內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ 的最大值為________。(2013 學科能力測驗)

[答案]：31

[解法]：



$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})\cdot(x\overrightarrow{A}+y\overrightarrow{B})$

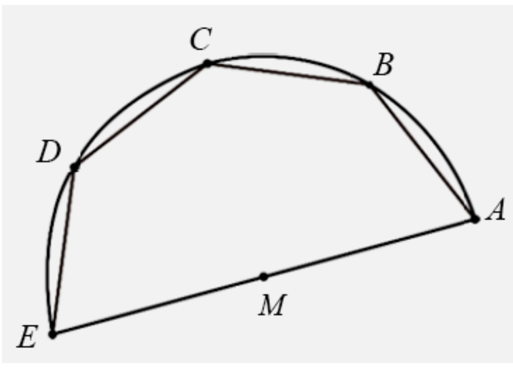
$=x\left|\overrightarrow{A}\right|^2+y\left|\overrightarrow{B}\right|^2+(x+y)\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}$

$=x\cdot 1^2+y\cdot 1^2+(x+y)\cdot 1\cdot 2\cdot\cos 60°=x+4y+(x+y)=2x+5y$

x,y 為實數且符合 $6\le x+y\le 8$ 以及 $-2\le x-y\le 0$ 圖形如右：

利用頂點法可得最大值為 31。

[例題7] 如圖，以 M 為圓心、$\overline{MA}=8$ 為半徑畫圓，$\overline{AE}$ 為該圓的直徑，B、C、D 三點皆在圓上，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$。



若 $\overrightarrow{MD}=8(\cos(\theta+90°),\sin(\theta+90°))$。

請選出正確選項。

(1) $\overrightarrow{MA}=8(\cos\theta,\sin\theta)$

(2) $\overrightarrow{MC}=8(\cos(\theta+45°),\sin(\theta+45°))$

(3) (內積) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA}=8$

(4) (內積) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

(5) $\overrightarrow{BD}=8(\cos\theta+\cos(\theta+90°),\sin\theta+\sin(\theta+90°))$

(2015 學科能力測驗)

[答案]：(2)(4)

[解法]：

如下圖，依題意，$\overrightarrow{MD}=8(\cos(\theta+90°),\sin(\theta+90°))$，建立坐標系，以 M 為原點，且 B 點

的方向角為θ。

故$\overrightarrow{MB}$=8(cosθ,sinθ)

(1)錯誤，∠AMD>0°，∴ $\overrightarrow{MA}$≠8(cosθ,sinθ)。

(2)正確，∵∠BMC=45°，$\overrightarrow{MC}$=8(cos(θ+45°),sin(θ+45°))

(3)錯誤，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA}=8^2=64$。

(4)正確，∵ $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{MD}$，∴ $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

(5)錯誤，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MB}$=8(cos(θ+90°)−cosθ ,sin(θ+90°)−sinθ)。

[例題8] 設 $\vec{u}$=(2,1,3)，$\vec{v}$ =(1,0,2)，$\vec{w}=\vec{u}+t\vec{v}$ ($t\in R$)則 t=_____時，$|\vec{w}|$有最小值為何？

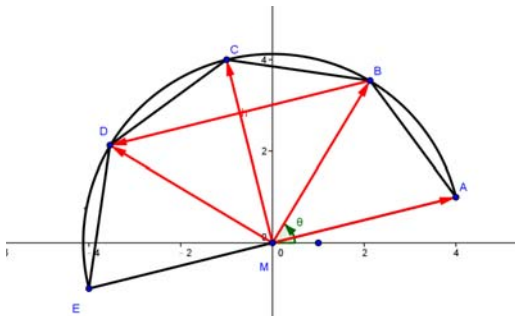
[答案]：$t=\frac{-8}{5}$，$|\vec{w}|$的最小值為$\frac{\sqrt{30}}{5}$

[解法]：

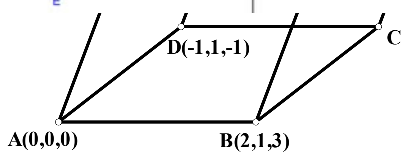
$\vec{w}=\vec{u}+t\vec{v}=(2,1,3)+t(1,0,2)=(t+2,1,2t+3)$

$|\vec{w}|^2=(t+2)^2+1^2+(2t+3)^2=5t^2+16t+14=5(t+\frac{8}{5})^2+\frac{6}{5}$

當 $t=\frac{-8}{5}$時，$|\vec{w}|$的最小值為$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$。



(練習10) 如圖，每一個面皆為平行四邊形的六面體，
稱為平行六面體，
求 G 點的坐標。[答案]：G(2,−1,4)



(練習11) 令 A(−1,6,0),B(3,−1,−2),C(4,4,5)為坐標空間中三點。若 D 為空間中的一點且滿足 $3\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ ，則 D 點的坐標為________。(2008 學科能力測驗)

[答案]：D(−7,30,18)

(練習12) 在坐標平面上，A(150,200)、B(146,203)、C(−4,3)、O(0,0)，則下列敘述何者為真？(2001 學科能力測驗)

(A)四邊形 ABCO 是一個平行四邊形。

(B)四邊形 ABCO 是一個長方形。

(C)四邊形 ABCO 的兩對角線互相垂直。

(D)四邊形 ABCO 的對角線$\overline{AC}$長度大於 251。

(E)四邊形 ABCO 的面積為 1250。　[答案]：(A)(B)(E)

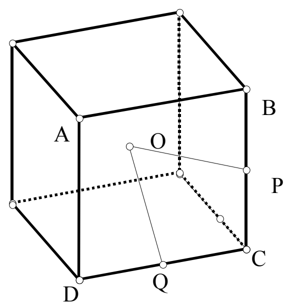
(練習13) 小明在天文網站上看到以下的資訊「可利用北斗七星斗杓的天璇與天樞這兩顆星來尋找北極星：由天璇起始向天樞的方向延伸便可找到北極星，其中天樞與北極星的距離為天樞與天璇距離的 5 倍。」今小明將所見的星空想像成一個坐標平面，其中天璇的坐標為(9,8) 及天樞的坐標為(11 , 7)。依上述資訊可以推得北極星的坐標為___________。(2012 學科能力測驗)

[答案]：$(-3,26)$

(練習14) 在坐標平面上有四點 O(0,0),A(−3,−5),B(6,0),C(x,y)。今有一質點在 O 點沿$\overrightarrow{AO}$方向前進$\overline{AO}$距離後停在 P，再沿$\overrightarrow{BP}$方向前進 2$\overline{BP}$距離後停在 Q。假設此質點繼續沿$\overrightarrow{CQ}$方向前進 3$\overline{CQ}$距離後回到原點 O，則(x,y)=________。

(2009 學科能力測驗)[答案]：$(-4,20)$

[例題9] (坐標化用內積求幾何量)



如右圖，ABCD 為正立方體的一個面，P、Q 分別為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$的中點，O 為正立方體的中心，則 cos(∠POQ)=？

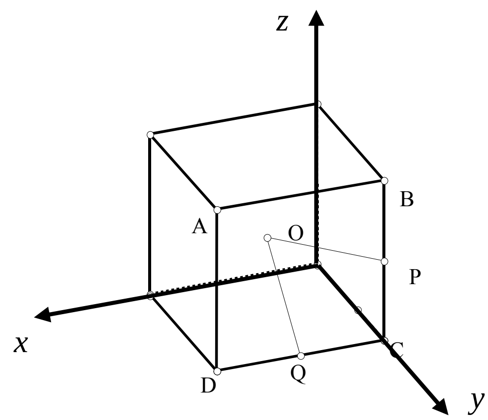
[答案]：$\dfrac{1}{2}$

[解法]：

如右圖，建立空間坐標系，設正立方體的邊長為 1，

A(1,1,1)、B(0,1,1)、C(0,1,0)、D(1,1,0)、

$O(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$、$P(0,1,\frac{1}{2})$、$Q(\frac{1}{2},1,0)$



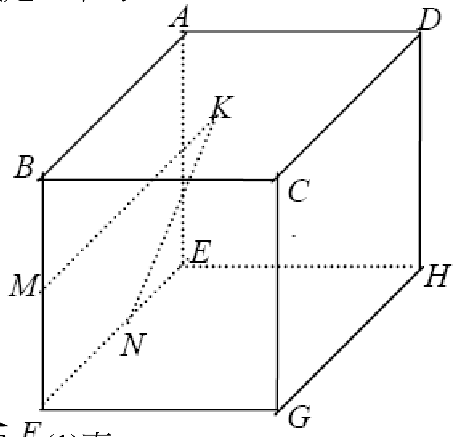
∠POQ 可視為$\overrightarrow{OQ}$與$\overrightarrow{OP}$的夾角，$\overrightarrow{OQ}=(0,\frac{1}{2},\frac{-1}{2})$，

$\overrightarrow{OP}=(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0)$

$\Rightarrow\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{OP}|\cos(\angle POQ)$

$\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(\angle POQ)\Rightarrow\cos(\angle POQ)=\frac{1}{2}$。

[例題10] 如圖所示，正立方體 ABCD−EFGH 的稜長等於 2(即$\overline{AB}$=2)，K 為正方形 ABCD 的中心，M、N 分別為線段 BF、EF 的中心。試問下列哪些選項是正確的？



(1)$\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$　(2) (內積)$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=1$ (3) $\overline{KM}=3$

(4) ΔKMN 為一直角三角形　(5) ΔKMN 之面積為$\frac{\sqrt{10}}{2}$。

(2009 學科能力測驗)

[答案]：(1)(4)

[解法]：

(1) $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ (1)真。

(2) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=2$ (2)不真

(3)$|\overrightarrow{KM}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AE}|^2)=3$

(因為$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AE}$互相垂直)⇒$\overline{KM}=\sqrt{3}$ (3)不真

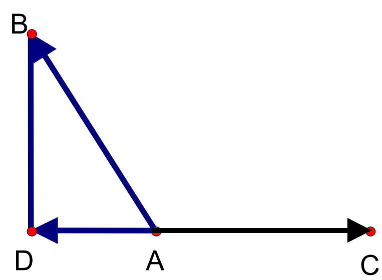
(4)(5)可以由建立座標系解決：
選點 E 為座標原點，則圖中的點 A、B、D、K、M、N 的座標依序為 $A(0,0,2)$、$B(2,0,2)$、$D(0,2,2)$、$K(1,1,2)$、$M(2,0,1)$、$N(1,0,0)$。

(4) $\overline{KM}=\sqrt{3}$，$\overline{KN}=\sqrt{5}$，$\overline{MN}=\sqrt{2}$。

所以，$\overline{KN}^2=\overline{KM}^2+\overline{MN}^2$，△ KMN 為一直角三角形。

(5) △ KMN 之面積為$\frac{1}{2}\times\overline{KM}\times\overline{MN}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，(5)不真。

[例題11] 空間中有三點 A(1,0,1)、B(3,−1,2)、C(0,1,−1)



(1)$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影為何？

(2)求向量$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影長度？

(3)求點 B 在直線 AC 上的投影點坐標？

[答案]：(1)$(\frac{5}{6},\frac{-5}{6},\frac{5}{3})$ (2)$\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (3)$(\frac{11}{6},\frac{-5}{6},\frac{8}{3})$

[解法]：

(1)$\overrightarrow{AB}=(2,-1,1)$、$\overrightarrow{AC}=(-1,1,-2)$

$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影$=(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2})\overrightarrow{AC}=\frac{-5}{6}(-1,1,-2)$。

(2)$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影長度$=|\frac{-5}{6}(-1,1,-2)|=\frac{5}{6}\sqrt{6}$。

(3)設點 B 在直線 AC 上的投影點為 D(m,n,l)

$\overrightarrow{AD}=(m-1,n,l-1)=\frac{-5}{6}(-1,1,-2)\Rightarrow(m,n,l)=(\frac{11}{6},\frac{-5}{6},\frac{8}{3})$。

[例題12] 設 x,y,z 為實數，且 $x^2+y^2+z^2=9$，求 $2x+2y-z$ 之

(1)最小值=_______，此時(x,y,z)=________。

(2)最大值=_______，此時(x,y,z)=_________。

[答案]：(1)-9，$(-2,-2,1)$ (2)9，$(2,2,-1)$

[解法]：

根據柯西不等式$(x^2+y^2+z^2)(2^2+2^2+(-1)^2)\geq(2x+2y-z)^2$

$\Rightarrow 9\cdot 9\geq(2x+2y-z)^2 \Rightarrow -9\leq 2x+2y-z\leq 9$

等號成立$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}=t$

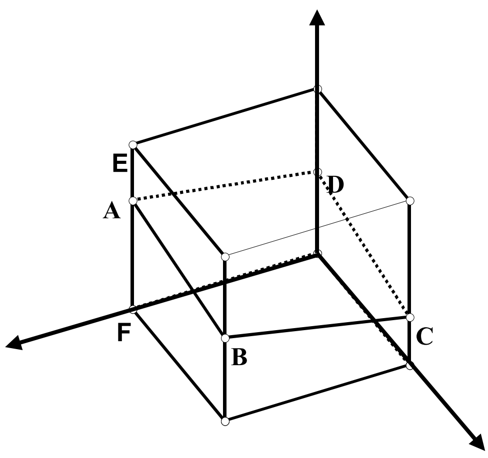
$x=2t$，$y=2t$，$z=-t$ 代入 $2x+2y-z=\pm 9$

$\Rightarrow t=-1\Rightarrow(x,y,z)=(-2,-2,1)$，$2x+2y-z=-9$ 最小值。

$\Rightarrow t=1\Rightarrow(x,y,z)=(2,2,-1)$，$2x+2y-z=9$ 最大值。

(練習15) 右圖是一個正立方體，被平面截出一個四邊形 ABCD，其中 B、D 分別是稜的中點，且$\overline{EA}$：$\overline{AF}$ = 1：2。則 cos∠DAB=_______。

(2002 學科) [答案]：$\frac{1}{37}$



(練習16) 右圖為一正立方體，若 M 在線段 $\overline{AB}$ 上，$\overline{BM}=2\overline{AM}$，

N 為線段 $\overline{BC}$ 之中點，則 $\cos\angle MON=$？ [答案]：$\frac{4}{15}\sqrt{10}$

(練習17) 設$\overrightarrow{OA}=(-1,2,3)$、$\overrightarrow{OB}=(4,6,-1)(1)\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=$？ (2)$\Delta AOB$ 的面積=？

[答案]：(1) $(-20,11,-14)$ (2)$\frac{1}{2}\sqrt{717}$

(練習18) 設平面上三點 A(1,1)、B(5,−2)、C(5,2)，試求

(1)$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影量。(2)$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上的正射影。(3)C 點在$\overrightarrow{AB}$上的投影點。

[答案]：(1)$\frac{13}{5}$ (2)$\frac{13}{25}(4,-3)$ (3)$(\frac{77}{25},\frac{-14}{25})$

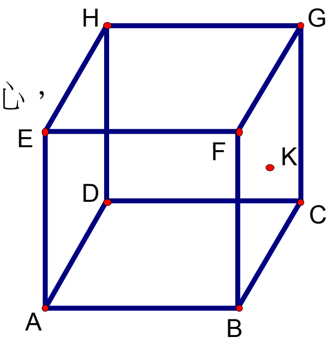
(練習19) 設空間中三點 A(1,1,1)、B(2,3,4)、C(3,2,1)，若$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AC}$，則下列敘述那些是正確的？(90 台北區指定考科模擬測驗 2)

(A) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=4$ (B) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 之長度為 $3\sqrt{3}$ (C) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 之夾角小於 60°

(D)ΔABC 之面積為$\frac{3}{2}\sqrt{6}$ (E)A 到直線 BC 的距離為 $3\sqrt{\frac{6}{11}}$ 。[答案]：(A)(D)(E)

(練習20) 空間中，兩向量$\overrightarrow{a}=(1,2,3)$、$\overrightarrow{b}=(x,y,z)$，已知 $x^2+y^2+z^2=56$，則$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為何？此時$\overrightarrow{b}=$？ [答案]：28，(2,4,6)

綜合練習



1. 如右圖，ABCD-EFGH 為一平行六面體，K 為四邊形 *BCGF* 的中心，

如果$\overrightarrow{AK}=a\cdot\overrightarrow{AB}+b\cdot\overrightarrow{AD}+c\cdot\overrightarrow{AE}$，

試問下列哪些選項是正確的?______。(2003 學科能力測驗)

(1)$\frac{1}{3}<b<\frac{2}{3}$　(2)$a+b+c=2$　(3)$a=1$(4)$a=2c$　(5)$a=b$

2. 設點 A(−2,2)、B(4,8)為坐標平面上兩點，且點 C 在二次函數 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形上變動。當

C 點的 x 坐標為_____時，內積$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$有最小值______。 (2012 學科能力測驗)

3. 如右圖 *O–ABCD* 為一金字塔，底是邊長為 1 之正方形，頂點 *O* 與 *A*、*B*、*C*、*D* 之距離均為 2，試問下列哪些式子是正確的？(2004 學科能力測驗)

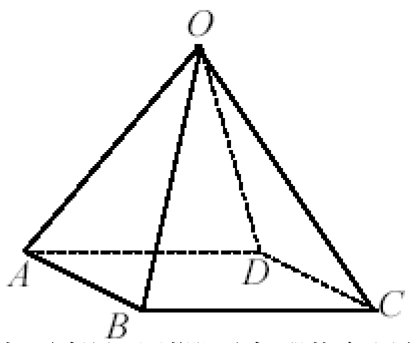
(1)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

(2)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

(3) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

(4)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$

(5)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2$

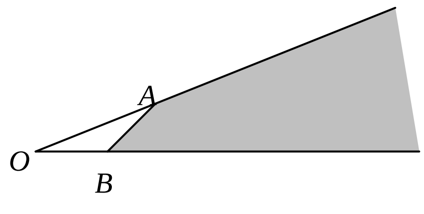


4. 如右圖所示，兩射線 *OA* 與 *OB* 交於 *O* 點，試問下列選項中哪些向量的終點會落在陰影區域內？

(1) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$　(2) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

(3) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$　(4) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$

(5) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$



5. 在坐標平面上的ΔABC 中，P 為$\overline{BC}$邊之中點，Q 在$\overline{AC}$邊上且$\overline{AQ}=2\overline{QC}$。

已知$\overrightarrow{PA}=(4,3)$，$\overrightarrow{PQ}=(1,5)$，則$\overrightarrow{BC}=$__________。(2007 學科能力測驗)

6. 標平面上有一質點沿方向 $\overrightarrow{u}=(1, 2)$ 前進。現欲在此平面上置一直線 L，使得此質點碰到 L 時依光學原理(入射角等於反射角)反射，之後沿方向 $\overrightarrow{v}=(-2,1)$ 前進，則直線 L 的方向向量應為 $\overrightarrow{w}$=＿＿＿＿＿。(2008 學科能力測驗)

7. 坐標平面中，向量 $\overrightarrow{w}$ 與向量 $\overrightarrow{v}=(2,\sqrt{5})$ 互相垂直且等長。請問下列哪些選項是正確的？

(1)向量 $\overrightarrow{w}$ 必為 $(\sqrt{5},-2)$ 或 $(-\sqrt{5},2)$

(2)向量 $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ 與 $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}$ 等長

(3)向量 $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ 與 $\overrightarrow{w}$ 的夾角可能為 135°

(4)若向量 $\overrightarrow{u}=a\overrightarrow{v}+b\overrightarrow{w}$，其中 a,b 為實數，則向量 $\overrightarrow{u}$ 的長度為 $\sqrt{a^2+b^2}$

(5)若向量 $(1,0)=c\overrightarrow{v}+d\overrightarrow{w}$，其中 c,d 為實數，則 $c>0$。(2011 學科能力測驗)

8. 設空間向量 $\overrightarrow{a}=(1,3,2)$、$\overrightarrow{b}=(3,0,2)$、$\overrightarrow{c}=(1,-1,3)$，試求：

(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$　(2) $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$

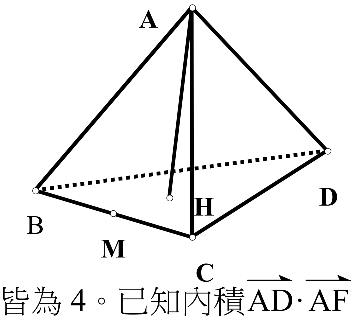
(3) $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 所展成的平行四邊形面積

(4) $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 所張成的平行六面體體積

9. 如圖，正四面體 ABCD，每邊長為 a，M 為 $\overline{BC}$ 之中點，H 為 ΔBCD 的重心，則下列敘述何者是正確的？

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$ (B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ (C) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

(D) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{a^2}{2}$ (E) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{3a^2}{4}$。



10. 空間中，以 $\overline{AB}$ 為共同邊的兩正方形 ABCD、ABEF，其邊長皆為 4。已知內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}$

=11，則$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$=________。(2012 指定甲)

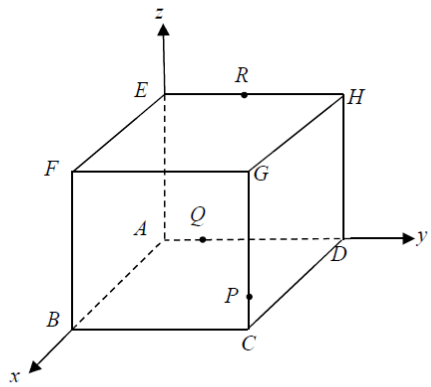
11. 平面上有一ΔABC，G 為ΔABC 的重心，O、D 為此平面上相異二點，且滿足

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$。請選出正確的選項。

(1) O、G、D 三點共線 (2) $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OG}$ (3) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{OD}$

(4)G 位於ΔABC 的內部 (5)D 位於ΔABC 的外部。

12. 如下圖，在坐標空間中，A,B,C,D,E,F,G,H 為正立方體的八個頂點，已知其中四個點的坐標 $A(0,0,0)$、$B(6,0,0)$、$D(0,6,0)$ 及 $E(0,0,6)$，P 在線段 $\overline{CG}$ 上且 $\overline{CP}:\overline{PG}=1:5$，$R$ 在線段 $\overline{EH}$ 上且 $\overline{ER}:\overline{RH}=1:1$，$Q$ 在線段 $\overline{AD}$ 上。若空間中通過 P,Q,R 這三點的平面，與直線 AG 不相交，則 Q 點的 y 坐標為________。(化成最簡分數) (2013 學科能力測驗)



13. ΔABC 中，∠A 之內角平分線交$\overline{BC}$於 D，$\overline{AB}$ =3，$\overline{AC}$ =6，∠A=120°，

則$\overline{AD}$=__________。

14. 平面上三點 A(3,−2)、B(−1,1)、C(5,4)，

若點 P 滿足$\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{AB}+s\cdot\overrightarrow{AC}$，且$-1\le r\le 2$，$0\le s\le 2$，則求點 P 所成區域之面積。

15. 於ΔABC 中，$\overline{AB}$=7，$\overline{BC}$=8，$\overline{CA}$=11，I 為ΔABC 的內心，令

$\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求$(x,y)$=？

16. ΔABC 中，D 為$\overline{AB}$中點，E 在$\overline{AC}$上，且$\overline{AC}=3\overline{AE}$，$\overline{BE}$交$\overline{CD}$於 F 點，求 x,y 使得

$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$。

17. 空間中，設 G 為ΔABC 的重心，若已知$|\overrightarrow{GA}|=3$，$|\overrightarrow{GB}|=5$，$|\overrightarrow{GC}|=7$，

則求(1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=$？(2) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=$？(3)$\Delta ABC$ 的面積=？

18. 平行四邊形 ABCD 中，AB=4,AD=6，求$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$？

19. 設ΔABC 的垂心為 H，且$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6,\overline{AB}=4$，

(1)試證：$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2)求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(3)若$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x,y 之值。

20. 設$\overrightarrow{OA}=(-2,2,1)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,1,0)$且$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{OB}$，$t$ 為實數，若射線 OC 平分∠AOB，則 $t=$_____________。

21. 設 A(1,2,3)，B(2,1,2)，C(−1,3,4)，A 在直線 BC 上之投影為 P，若$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BC}$，則 $t=$______。

22. 考慮向量$\overrightarrow{u}=(a,b,0)$、$\overrightarrow{v}=(c,d,1)$，其中 $a^2+b^2=c^2+d^2=1$。請選出正確選項。

(1) 向量$\overrightarrow{v}$與 z 軸正向的夾角恆為定值(與 c,d 之值無關)

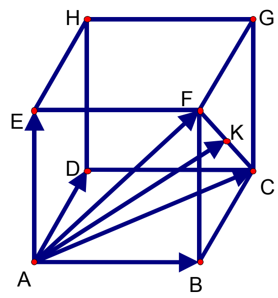
(2) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$的最大值為$\sqrt{2}$　(3) $\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$夾角的最大值為 135°

(4) $ad-bc$ 的值可能為$\frac{5}{4}$　(5) $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|$的最大值為$\sqrt{2}$。(2013 指定甲)

答案與詳解

1. [答案]：(1)(2)(3)(4)

[解法]：



連$\overline{CF}$，K 為$\overline{CF}$的中點

$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ 。

$\Rightarrow a=1,b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{2}$ 故選(1)(2)(3)(4)。

2. [答案]：-1，-3

[解法]：

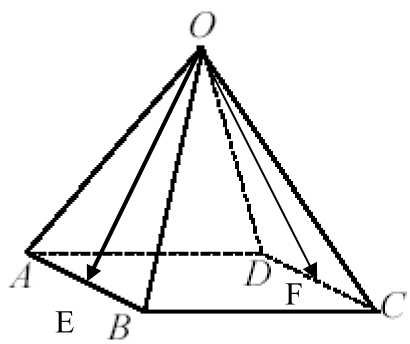
令 $C(t,\frac{1}{2}t^2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(6,6)\cdot(t+2,\ \frac{1}{2}t^2-2)=3t^2+6t=3(t+1)^2-3$

故當 $t=-1$ 時，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$ 最小。

3. [答案]：(3)(4)

[解法]：如圖，E、F 分別為$\overline{AB}$、$\overline{CD}$的中點



(1)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OF}$

$\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})\neq\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=2(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OF})=2\overrightarrow{FE}\neq\vec{0}$

(3)$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

(4) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\angle AOB)$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|\cos(\angle COD)$

$\because\Delta OAB\cong\Delta OCD\Rightarrow|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|$且$\angle AOB=\angle AOC\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$

(5)$\because\overline{OA}=\overline{OC}=2$，$\overline{AC}=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos(\angle AOC)=2\cdot2\cdot\frac{2^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot2\cdot2}=3$。故選(3)(4)。

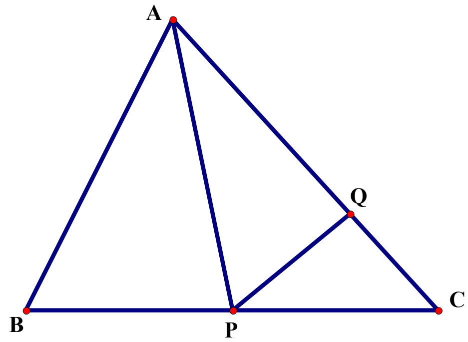
4. [答案]：(1) (2)

[解答]：

陰影區域 $\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$ 其中 $r\geq 0, s\geq 0, r+s\geq 1$，所以只有(1) (2)合於所求。

5. [答案]：$(-1,12)$

[解答]：



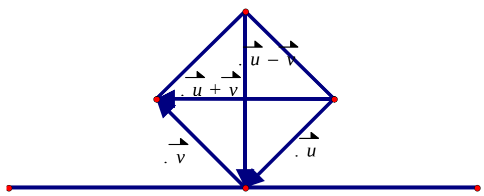
$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{PC}$，因為$\overline{AQ}=2\overline{QC}$，

所以$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}\Rightarrow 2\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PA}$

因此$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PA}=-(4,3)+3(1,5)=(-1,12)$

6. [答案]：$(-1,3)$

[解法]：

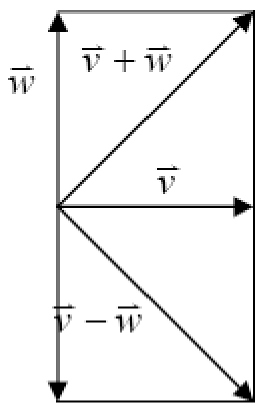


如圖，因為$|\vec{u}|=|\vec{v}|$，入射角=反射角，

所以 $\vec{u}+\vec{v}=(-1,3)$平行 L 的方向向量。

7. [答案]：(1)(2)(5)

[解法]：



(1)可以利用複數$(2+\sqrt{5}i)i=-\sqrt{5}+2i$，$(2+\sqrt{5}i)(-i)=\sqrt{5}-2i$

(2)根據右圖，可以得知(2)正確

(3)根據右圖，可以得知(3)錯誤

(4)$|\vec{u}|^2=|a\vec{v}+b\vec{w}|^2=a^2|\vec{v}|^2+b^2|\vec{w}|^2$ ($\because \vec{v}\perp\vec{w}$)

$|\vec{u}|=3\sqrt{a^2+b^2}$

(5)$(1,0)\cdot\vec{v}=c|\vec{v}|^2=2\Rightarrow c>0$。

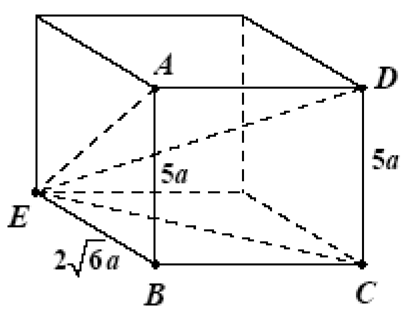
8. [答案]：(1)$(6,4,-9)$ (2)$(-6,-4,9)$ (3)$\sqrt{133}$ (4)25

[解法]：

略

9. [答案]：(A)(B)(C)(D)

[解法]：



(A)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°=\frac{a^2}{2}$。

(B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos60°=\frac{a^2}{2}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$。

(C)因為 H 為ΔBCD 的重心$\overline{HM}\perp\overline{BC}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MH})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$。

(D)$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$。

(E)$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})=|\overrightarrow{AH}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{HC}|^2=\frac{2a^2}{3}$。故選(A)(B)(C)(D)

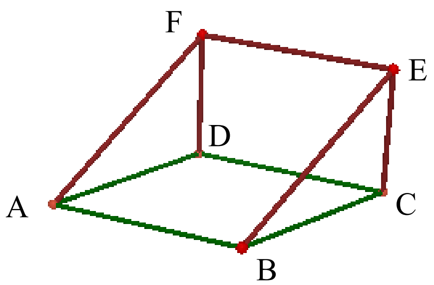
10. [答案]：27

[解法]：

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}$

$=16+11=27$



11. [答案]：(1)(3)(4)

[解法]：

∵ G 為ΔABC 的重心

$\therefore\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$

故 O、G、D 三點共線、$\overline{OD}=3\overline{OG}$

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})$

$=3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=2\overrightarrow{OD}$。

而 G 位於ΔABC 的內部，D 不一定位於ΔABC 的外部。

12. [答案]：$\frac{15}{11}$

[解法]：

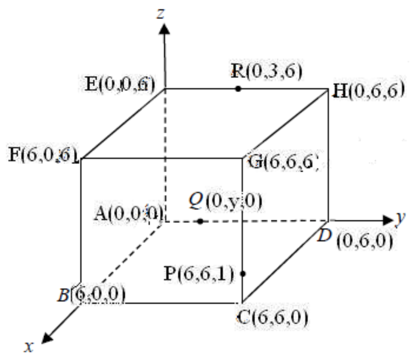
由題意知 $P(6,6,1)$、$R(0,3,6)$，設 $Q(0,y,0)$

則平面 E_{PQR} 之法向量 $\overrightarrow{n}$ 滿足

$\overrightarrow{n}\parallel\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=(-6,y-6,-1)\times(-6,-3,5)$

$=(5y-33,36,6y-18)$

又直線 AG 與平面 E_{PQR} 不相交，則直線 $AG\parallel$ 平面 E_{PQR}

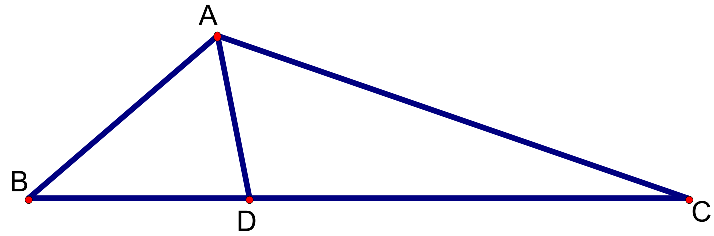


$\Rightarrow \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{n}=0$

$\Rightarrow(6,6,6)\cdot(5y-33,36,6y-18)=0 \Rightarrow 11y-15=0\Rightarrow y=\dfrac{15}{11}$

13. [答案]：2

[解法]：



$\because \overline{AD}$為$\angle A$ 的分角線

$\Rightarrow \overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=1:2$

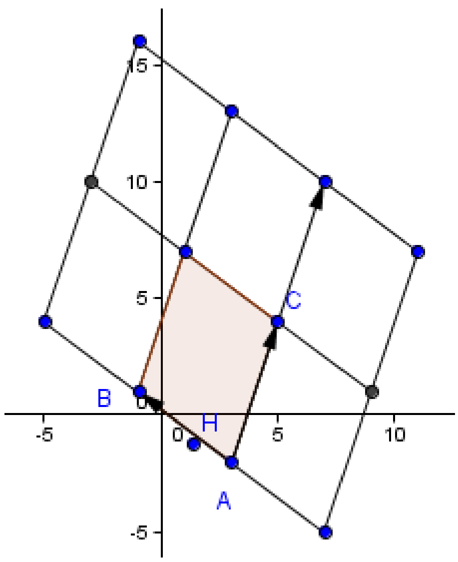
$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AD}|^2=|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}|^2$

$=\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{4}{9}\cdot3^2+\frac{1}{9}\cdot6^2+\frac{4}{9}\cdot3\cdot6\cdot\cos120°=4\Rightarrow|\overrightarrow{AD}|=2$。

14. [答案]：180

[解法]：區域如下圖，面積=6×由$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$所張成的平行四邊形面積=180。



15. [答案]：$(\frac{11}{26},\frac{7}{26})$

[解法]：$\overrightarrow{AI}=\dfrac{11}{7+8+11}\overrightarrow{AB}+\dfrac{7}{7+8+11}\overrightarrow{AC}$。

16. [答案]：$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$

[解法]：

$\because$ AD：DB=1：1 且 AE：EC=1：2　$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AE}$

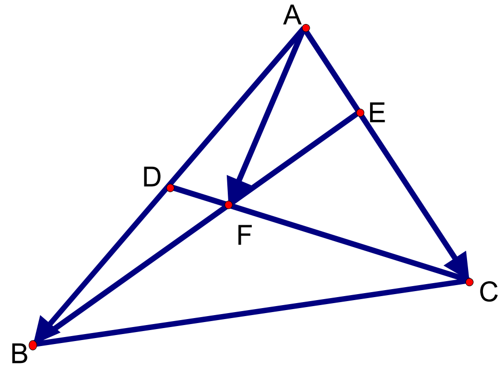
$\overrightarrow{AF}=x\ \overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x(2\overrightarrow{AD})+y\overrightarrow{AC}$

$\because$ F、D、C 三點共線 $\therefore 2x+y=1\ldots(*)$

$\overrightarrow{AF}=x\ \overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y(3\overrightarrow{AE})$

$\because$ B、F、E 三點共線$\therefore x+3y=1\ldots(**)$

由(*)(**)解得 $x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$。



17. [答案]：(1) $\vec{0}$　(2)$\frac{15}{2}$　(3)$\frac{45\sqrt{3}}{4}$

[解法]：

(1)$\because$ G 為ΔABC 的重心，$\therefore$ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$。

(2)$\because$ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，$\therefore \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC}\Rightarrow|\overrightarrow{GC}|^2=|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}|^2$

$\Rightarrow|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=|\overrightarrow{GC}|^2$

$\Rightarrow\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\frac{-1}{2}(|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2-|\overrightarrow{GC}|^2)=\frac{-1}{2}(3^2+5^2-7^2)=\frac{15}{2}$。

(3)ΔABC=3·ΔGAB

$\Delta GAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{GA}|^2|\overrightarrow{GB}|^2-(\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB})^2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$　$\Rightarrow\Delta ABC=3\cdot\Delta GAB=\frac{45\sqrt{3}}{4}$。

18. [答案]：20

[解法]：

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=6^2-4^2=20$

19. [答案]：(2)$\frac{27}{2}$　(3)$x=\frac{27}{35}, y=\frac{3}{35}$

[解法]：

(1)如右圖，設∠BAH=α，∠CAH=β

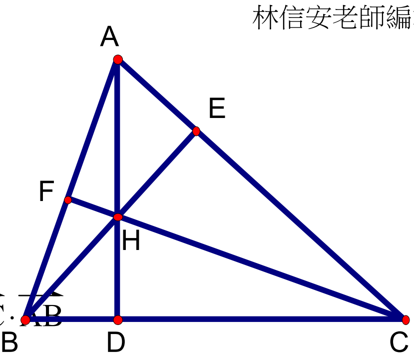
$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$分別為三邊上的高

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AH}||\overrightarrow{AB}|\cos\alpha=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AH}|\cos\alpha=|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{AB}|$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AF}|$

$\Rightarrow\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

同理，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AE}|=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



故$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$。

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=4\times6\times\dfrac{4^2+6^2-5^2}{2\times4\times6}=\dfrac{27}{2}$。

(3)$\because$ $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow 16x+\dfrac{27}{2}y=\dfrac{27}{2}\ldots(*)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2$

$\Rightarrow \dfrac{27}{2}x+36y=\dfrac{27}{2}\ldots(**)$

由(*)(**)解得 $x=\dfrac{27}{35}, y=\dfrac{3}{35}$。

20. [答案]：$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

[解法]：$\because$射線 OC 平分$\angle AOB$，$\therefore$設$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OC}$的夾角$=\overrightarrow{OC}$與$\overrightarrow{OB}$的夾角

設$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OC}$的夾角α，$\overrightarrow{OC}$與$\overrightarrow{OB}$的夾角$\beta\Rightarrow \cos\alpha=\cos\beta$

$\overrightarrow{OA}=(-2,2,1)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{OC}=(-2-t,2+t,1)$

$\Rightarrow\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}|}=\cos\alpha=\cos\beta=\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OB}|}\Rightarrow t=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$。

21. [答案]：$t=\dfrac{7}{17}$

[解法]：$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\Rightarrow(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow t=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}=\dfrac{7}{17}$。

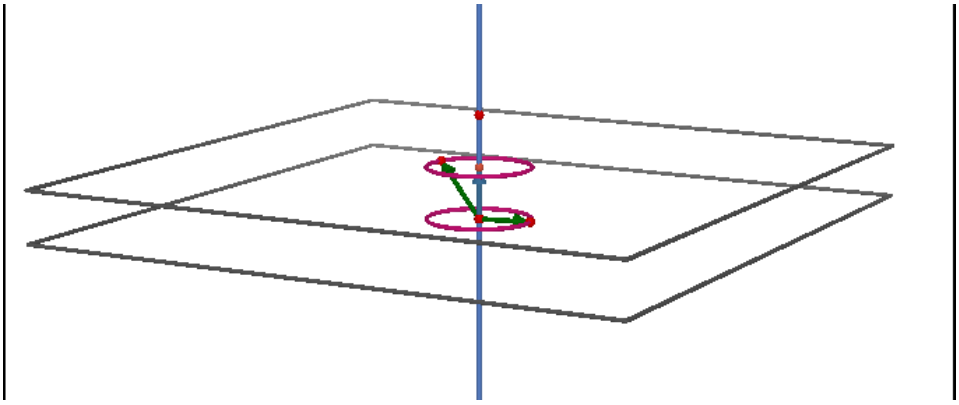
22. [答案]：(1)(3)(5)

[解法]：

$\because\ \vec{u}=(a,b,0)$、$\vec{v}=(c,d,1)$，且 $a^2+b^2=c^2+d^2=1$

$\therefore\ \vec{u}$ 可以視為起點為(0,0,0)，終點在 $z=0$ 上以(0,0,0)為圓心的圓上的點

$\vec{v}$ 可以視為起點為(0,0,0)，終點在 $z=1$ 上以(0,0,1)為圓心的圓上的點



(1) 向量$\vec{v}$與 z 軸正向的夾角恆為 45°(與 c,d 之值無關)

(也可以根據$\vec{v}\cdot(0,0,1)=1$ 來得知)

(2) $\vec{u}\cdot\vec{v}\le|\vec{u}||\vec{v}|=\sqrt{2}$，但是$\vec{u}$與$\vec{v}$並不會平行，因此等號不成立，故(2)錯誤。

$\because\ \vec{u}\cdot\vec{v}=ac+bd$，

根據科西不等式$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$，$\therefore -1\le ac+bd\le 1$，

且當$\vec{v}$在 $z=0$ 平面上投影向量$\vec{v'}$與$\vec{u}$同向時，等號會成立。故最大值=1

(3)設$\vec{u}$、$\vec{v}$夾角為θ

$\vec{u}\cdot\vec{v}=ac+bd=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

$\because\ -1\le ac+bd\le 1$，且 $ac+bd=-1$ 會成立，$\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\le\cos\theta\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\vec{u}$與$\vec{v}$夾角的最大值為 135°

(4)設$\vec{v}$在 $z=0$ 平面上投影向量$\vec{v'}$

$|ad-bc|=\vec{u}$與$\vec{v'}$所張成的平行四邊形面積$\le|\vec{u}||\vec{v'}|=1$ 故(4)錯誤

(5) $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha=\sqrt{2}\ \sin\alpha$

當α=90°時,等號會成立（$\vec{u}\perp\vec{v}$ 在 $z=0$ 平面上投影向量$\vec{v'}$)，(5)正確。