第四章多項式

§4–1 多項式的四則運算

(甲)多項式的基本定義

(1)何謂多項式：

在代數中，我們通常會引進一些符號 x,y,z 等，用以表示一給定問題的未知數，有了這一些符號，可將問題中量與量之間的關係列成算式，而將給定的問題轉成方程式的問題，而在解方程式的過程中，跟數一樣，會牽涉到數與式之間的運算。將數及具有數的性質的符號 x,y,z 等，經過加、減、乘的運算所形成的式子，叫做多項式。多項式中，只含有一個符號 x，叫做**單元多項式**，含有多於一個的符號，叫做**多元多項式**。

若 $a_n,a_{n-1},\ldots a_1,a_0$ 均爲實數，n 爲非負整數，形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 稱 x 的單元多項式，也可簡稱爲 x 的多項式。

設 $f(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$

(2)相關的名詞說明：設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 爲 x 的多項式

①項：$a_nx^n,a_{n-1}x^{n-1}$，$\ldots,a_1x,a_0$ 分別稱爲此多項式的 n 次項,$n-1$ 次項,…一次項,常數項。

②係數：$a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$ 分別爲此多項式的 n 次項,$n-1$ 次項,…一次項,常數項的係數。

③領導係數：多項式中最高次項之係數(不爲 0)稱爲此多項式之領導係數。

④次數：當 $a_n\neq0$ 時，稱此多項式爲 n 次多項式，記爲：$\deg f(x)=n$。

⑤單項式：只有一項的多項式稱爲單項式。

⑥常數多項式：若一多項式僅含常數項 a_0，則稱此多項式爲常數多項式。
當 $a_0\neq0$，又稱爲零次多項式。當 $a_0=0$，又稱爲零多項式。

⑦升冪與降冪式：若一多項式一變數 x 的次方由大而小排列者稱爲**降冪式**，
由小而大排列者稱爲**升冪式**。

(3) 由多項式的係數決定多項式全體所成的集合：

Z[x]表由**整係數多項式全體**所成的集合

Q[x]表由**有理係數多項式全體**所成的集合

R[x]表由**實係數多項式全體**所成的集合(主要討論實係數多項式)

C[x]表由**複係數多項式全體**所成的集合

例如：$f(x)=-4x^3+6x^2-5x+9 \Rightarrow f(x)\in$ Z[x]。

$f(x)=\frac{2}{5}x^3+\frac{3}{7}x-6 \qquad \Rightarrow f(x)\in \mathrm{Q}[x]$

$f(x)=\sqrt{7}\ x^4-\pi x^3-6x+7 \Rightarrow f(x)\in \mathrm{R}[x]$

$f(x)=(4+i)x^2-3ix+7 \qquad \Rightarrow f(x)\in \mathrm{C}[x]$

(4)多項式的相等：

兩個多項式 $f(x)$與 $g(x)$爲兩個非零多項式若 $f(x)$與 $g(x)$相等⇔兩者的次數相同，對應項的係數也一樣。

[例題1] 判斷下列何者可表爲 x 的多項式？

(A)$\sqrt{3}x^2-2\sqrt{5}x+\frac{1}{5}(B)\sqrt{x}+\frac{2}{y}+xy$ (C)$x^2y+\frac{2x}{y}-7$(D)$|x-4|+|x+3|$(E)2^x+3^y-1

Ans：(A)(C)

【補充說明：如何判別何謂多項式】

(1)x 不可在________(2)x 不可在________(3)x 不可在________(4)須爲有限項

(練習1) 下列那些敘述是正確的？

(A)$\sqrt{x}+x^2-5$ 爲 x 的多項式。

(B)5 爲零次多項式。

(C)$\sqrt{5}\ x^3-7x^2-5x+8$ 爲實係數多項式。

(D)多項式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 必爲 4 次多項式。

(E)零多項式必爲零次多項式。 Ans：(B)(C)

(練習2) 設 a,b 爲實數，$f(x)=a(x^3-x^2)+b(x^3-x+2)+x^2+ax+2$ 爲一次多項式，則求 a,b 之值。 Ans：$a=1,b=-1$

(乙)多項式的運算

(1)多項式的加減法：兩多項式相加減，則同次項的係數相加減。

例如：$f(x)=6x^4-7x^3+2x+7$，$g(x)=-5x^5+2x^3-3x^2+8x-9$

$f(x)+g(x)=$

$f(x)-g(x)=$

$\deg\ (f(x)\pm g(x)) \le \mathrm{Max}(\deg f(x),\deg g(x))$或 $f(x)\pm g(x)=0$

(2)多項式的乘法：利用乘法對加法的分配律，再合併同類項。

例如：$f(x)=3x^3-2x^2+x-4$，$g(x)=4x^2-6x+1$

直式運算：$f(x)\cdot g(x)$

橫式運算：$f(x)\cdot g(x)$

$\deg(f(x)\cdot g(x))=[\deg f(x)]\cdot+[\deg g(x)]$ (其中 $f(x)$與 $g(x)$均不爲零多項式。)

(3)多項式的除法：

設 $f(x)$，$g(x)$爲二多項式且 $g(x)$不是零多項式，則可找到二多項式 $q(x)$及 $r(x)$滿足 $f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$。

此時稱 $f(x)$爲**被除式**，$g(x)$爲**除式**，$q(x)$爲**商式**，$r(x)$爲**餘式**。

例如：設 $f(x)=2x^3+5x^2+x-2$，$g(x)=x^2+2x-3$

分離係數法：

(4)綜合除法：

(a)當除式 $g(x)=x-a$ 時，我們介紹綜合除法去求商式、餘式。

設 $f(x)=2x^4+x^2+5x$，$g(x)=x-2$，求 $f(x)$除以 $g(x)$的商式、餘式。

2	0	1	5	0	2
(+)	4	8	18	46	
2	4	9	23 ,	46	
商		式 ,	餘	式	

(b)綜合除法的原理：

設 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，$g(x)=x-b$，若存在商式 $q(x)=c_2x^2+c_1x+c_0$，餘式 $r(x)=d$。

由除法的定義：$(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=(c_2x^2+c_1x+c_0)(x-b)+d$

經比較係數可得：$\begin{cases} a_3=c_2 \\ a_2=-c_2b+c_1 \\ a_1=-c_1b+c_0 \\ a_0=-c_0b+d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2=a_3 \\ c_1=a_2+c_2b \\ c_0=a_1+c_1b \\ d=a_0+c_0b \end{cases}$

上面的關係可寫成以下的形式：

$$\begin{array}{rcccc|c} f(x)= & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ (+) & \downarrow & c_2b & c_1b & c_0b & b \\ \hline & a_3 & a_2+c_2b & a_1+c_1b & ,a_0+c_0+b & \\ & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \\ q(x)= & c_2 & c_1 & c_0 & ,d & =r(x) \end{array}$$

(c)當 $f(x)$除以 $g(x)=ax+b$ 時，我們也可利用綜合除法求餘式 $r(x)$、商式 $q(x)$。

由除法的定義：$f(x)=(ax+b)\cdot q(x)+r(x)=(x+\frac{b}{a})\cdot[aq(x)]+r(x)$可先利用綜合除法求出 $f(x)$除以$(x+\frac{b}{a})$的商式 $q'(x)=aq(x)$與餘式 $r(x)$，

而所要求的商式 $q(x)=\frac{1}{a}\ q'(x)$，餘式 $r(x)$不變。

例如：$f(x)=3x^3+5x^2-46x+42$ 除以 $g(x)=3x-7$

$$\begin{array}{rcccc|c} f(x)= & 3 & 5 & -46 & 42 & \frac{7}{3} \\ (+) & \downarrow & 7 & 28 & -42 & \\ \hline 3\cdot q(x)= & 3 & 12 & -18 & ,0 & =r(x) \\ q(x)= & 1 & 4 & -6 & & \end{array}$$

(d)多項式的係數和：

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，則

各項係數之和=$f(1)$，常數項=$f(0)$

奇次項係數之和=$\frac{f(1)-f(-1)}{2}$，偶數項的係數之和=$\frac{f(1)+f(-1)}{2}$

$f(i)$之實部=$a_0-a_2+a_4-a_6+\ldots..$，$f(i)$之虛部=$a_1-a_3+a_5-a_7+\ldots.$

[例題2] 設 $f(x)=6x^4+2x^3-5x^2-3x+7$，$g(x)=4x^3+2x^2-5x+6$，試求

(1)$f(x)+g(x)=$______；(2)$f(x)-3g(x)=$_________；(3)$f(x)\cdot g(x)$中 x^4 項的係數。

Ans：(1)$6x^4+6x^3-3x^2-8x+13$ (2)$6x^4-10x^3-11x^2+12x-11$ (3)29

[例題3] 利用長除法求 $8x^5+12x^3-21x^2+12x+5$ 除以 $2x^3+x^2+3x-4$ 的商式與餘式。

Ans：商式=$4x^2-2x+1$，餘式=$x+9$

[例題4] 試分別利用綜合除法計算下列各小題的商式、餘式。

(1)以 $x-3$ 除 $5x^3-8x^2+2x-1$ (2)以 $2x-1$ 除 $4x^4+5x^2+3x-2$

Ans：(1)商式$=5x^2+7x+23$,餘式$=68$；(2)商式$=2x^3+x^2+3x+3$,餘式$=1$

[例題5] 設 $f(x)$為一多項式，a,b 為實數，$a\neq0$，若以 $x-\frac{b}{a}$ 除以 $f(x)$，所得的商式為 $Q(x)$，餘式為 r。則

(1)以 $ax-b$ 除 $f(x)$，得商為______，餘式為______。

(2)以 $x-b$ 除 $f(\frac{x}{a})$，得商為______，餘式為______。

Ans：(1)$\frac{1}{a}$ $Q(x)$，r (2)$\frac{1}{a}$ $Q(\frac{x}{a})$，r

(練習3) $a,b\in R$，已知多項式 x^2-3x+a 與 $x-2$ 的乘積再加上$-3x+b$ 得到 x^3-5x^2+4x+2,

求 a,b。Ans：$a=1,b=4$

(練習4) $(x^5+2x^4-x^3+2x^2-3x-2)$與$(3x^6+2x^5+x^4+x^3+2x^2+3x+1)$之乘積中，$x^7$ 項的係數爲__________。 Ans：-2

(練習5) 已知 x^2+ax+1 能整除 x^3+3x^2+bx+2，試求 a,b 之值。 Ans：$a=1,b=3$

(練習6) 利用綜合除法計算下列各題之商式與餘式：
(1)以 $x+4$ 除 $2x^4+3x^2-5x-4$；(2)以 $3x+7$ 除 $6x^3+12x^2+11$
Ans：(1)商式$=2x^3-8x^2+35x-145$,餘式$=576$(2)商式$=2x^2-\frac{2}{3}x+\frac{14}{9}$,餘式$=\frac{1}{9}$

(練習7) 設 $f(x),g(x)$爲兩多項式，且 $\deg[f(x)\cdot g(x)]=8$，$\deg[f(x)+g(x)]=3$，則求 $f(x)$ 的次數爲何？ Ans：4

(練習8) 設 $f(x)$爲一多項式，a,b 爲實數，$a\neq 0$，若以 $x-\frac{b}{a}$ 除以 $f(x)$，所得的商式爲 $Q(x)$，餘式爲 r。則
(1)以 $x-b$ 除 $a\,f(\frac{x}{a})$，得商爲_______，餘式爲_______。
(2)以 $x-\frac{1}{a}$ 除 $f(bx)$，得商爲_______，餘式爲_______。
Ans：(1)$Q(\frac{x}{a})$，ar (2)$b\cdot Q(bx)$，r

[例題6] 多項式 $f(x)=(x^5-2x^3+x+1)^{1999}$ 展開式中，試求下列各小題：
(1)各項係數和 (2)常數項 (3)奇數項係數和 (4)偶數項係數和
Ans：(1)1,(2)1,(3)0,(4)1

(練習9) 設 $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-5x+1$，$g(x)=x^{17}+5x^8-7x^5+x^3-4x+1$，則
(1)$f(x)\cdot g(x)$的所有項的係數和=_____。
(2)$f(x)+2g(x)$的偶次項係數和=______。 Ans：(1)6 (2)17

(練習10) 設 $f(x)=x^{19}+2x^{18}+3x^{17}+\ldots+19x+20$，$g(x)=20x^{19}+19x^{18}+\ldots+2x+1$，求 $f(x)\cdot g(x)$ 的展開式中 x^{18} 項的係數爲________。 Ans：2660

(練習11) 若$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10)=a_{10}x^{10}+a_9x^9+\ldots+a_1x+a_0$，則求
(1)x^9 項的係數 a_9=______，(2)x^8 項的係數 a_8=_______。

Ans：(1)55(2)1320
[提示：$(1+2+3+\ldots+10)^2=1^2+2^2+3^2+\ldots 10^2+2(1\times 2+1\times 3+\ldots+9\times 10)$]

[例題7] 設多項式 $f(x)=2x^4-7x^3+x^2+5x+5=a(x+1)^4+b(x+1)^3+c(x+1)^2+d(x+1)+e$
(1)求 a,b,c,d,e 之值。
(2)求$(x+1)^2$除 $f(x)$ 之餘式。
(3)求 $f(-0.999)$的近似值到小數點後第三位。
Ans：(1)$a=2,b-15,c=34,d=-26,e=10$ (2)$-26x-26$ (3)9.974

[例題8] 設 $f(x)=54x^3-99x^2+66x-20=a(3x-1)^3+b(3x-1)^2+c(3x-1)+d$，
(1)試求數對$(a.,b,c,d)$=？ (2)求 $f(0.333)$的近似值到小數點後第三位。
Ans：(1)$a=2,b=-5,c=6,d=-7$ (2)-7.006

[例題9] 設 $f(x)=x^5-2x^4-7x^3+2x^2-4x+6$，試求 $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2})=$？Ans：$-\frac{17}{2}-\frac{17\sqrt{5}}{2}$

(練習12) 設 $2x^4-23x^3+31x-7=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$，則求 a,b,c,d,e 之值。Ans：$a=2,b=16,c=25,d=3,e=-5$

(練習13) 將 $f(x)=(x-3)^4+5(x-3)^3+6(x-3)^2+11(x-3)+13$ 展成 x 的多項式，依降次排列為何？ Ans：$x^4-7x^3+15x^2+2x+20$[提示：可令 $y=x-3\Rightarrow x=y+3$，原來的多項式可化為 $f(y)=y^4+5y^3+6y^2+11y+13$，再利用綜合除法將 $f(y)$ 化為 $y+3$ 的多項式即為所求。]

(練習14) 求 $4(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})^4-8(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})^3-15(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})^2+13(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})+1$ 之值。Ans：2

[提示：令 $f(x)=4x^4-8x^3-15x^2+13x+1$，原式$=f(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})$]

綜合練習

(1) 列何者為 x 的多項式：(A)x^2+4 (B)2^x+4 (C)$x+|x|$ (D)$x+\frac{1}{x}$ (E)$x+\sqrt{2}$

(2) 若 $2x^3+x^2-x-2=a(x-1)(x-2)(x-3)+bx(x-2)(x-3)+cx(x-1)(x-3)+dx(x-1)(x-2)$，求償數 a,b,c,d 之值。

(3) 若多項式 x^3+4x^2+5x-3 除以 $f(x)$的商式為 $x+2$，餘式為 $2x-1$，則 $f(x)=$_______。(87.社)

(4) $3x+1$ 除 $3x^3+16x^2-13x+8$，求商式、餘式。

(5) 設多項式 $f(x)$除以 x^3-1 的餘式為 x^2-1，求 $f(x)$除以 x^2+x+1 的餘式。

(6) 設 $f(x)=9x+4$，$p(x)$為一個 m 次多項式且 m>1，又 $p(x)=g(x)f(x)+r(x)$，其中 $r(x)$為常數多項式。則下列敘述何者正確？

(A)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其商式爲 $9g(x)$　(B)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其商式爲 $g(x)$

(C)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其商式爲$\frac{1}{9}g(x)$　(D)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其餘式爲 $r(x)$

(E)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其商式爲 $r(x)+9$

(7) 設 $f(x)=(x-2)^8$，$g(x)=(x^2-x+1)^{10}$，試求
(a)$f(x)\cdot g(x)$乘積中各項係數和。
(b) $f(x)\cdot g(x)$乘積中偶次項係數和。

(8) 設 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2+kx-1$，$g(x)=x^3+kx^2+2x+3$，若 $f(x)\cdot g(x)$之展開式中所有偶次項的係數和爲所有奇數項係數和之二倍，則 $k=$？

(9) 設 $f(x)=x^3-4x^2+7x-1=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$，$a,b,c,d$ 爲實數
(a)求 a,b,c,d 的值。
(b)求 $f(2.003)$的近似值至小數點後第三位。
(c)求 $f(2+\sqrt{3}\ )$的值。
(d)以$(x-2)^2$ 除 $f(x)$的餘式。

(10) 設 $f(x)=16x^4-16x^3+12x^2+3=a(2x-1)^4+b(2x-1)^3+c(2x-1)^2+d(2x-1)+e$，則下列何者正確？(A)$e=5$ (B)$d=8$ (C)$c=12$ (D)$f(0.55)= 5.4321$ (E)以$(2x-1)^2$ 除 $f(x)$得餘式 $16x-3$。

進階問題

(11) 設$(x^{37}-4x^{23}+4x^{15}-3x^2-1)(x^7-2x^6+5x^3-x+2)=a_{44}x^{44}+a_{43}x^{43}+\ldots+a_1x+a_0$，試求
(a) $a_0-a_2+a_4-a_6+\ldots..+a_{44}=$________，
(b)$a_1-a_3+a_5-a_7+\ldots -a_{43}=$_________。

(12) 設 $f(x)=(x+1)(x+3)(x+5)\cdots(x+29)(x+31)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$，但 $a_n\neq 0$，試求 n，a_n，a_{n-1}，a_{n-2}。

(13) (a)設 $f(x)$是多項式，n 爲自然數，$h\neq k$ 證明：$\deg f(x)=n \Leftrightarrow \deg[f(x+h)-f(x+k)]=n-1$。
(b)若多項式 $f(x)$對於所有的實數 x 滿足 $f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=x+1$，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，求 $f(x)=$？

綜合練習解答

(1)(A)(E)

(2)$a=\frac{1}{3},b=0,c=-8,d=\frac{29}{3}$

(3)x^2+2x-1

(4)商式 x^2+5x-6,餘式 14

(5)$-x-2$

(6)(A)(D)

(7) (a)1 (b)$\frac{3^{18}+1}{2}$

(8) $-\frac{1}{2}$或 3

(9) (a)$a=1,b=2,c=3,d=5$ (b)5.009 (c)$11+6\sqrt{3}$ (d)$3x-1$

(10) (A)(D)

(11) 15；-10

(12) 16，1，256，30040[Hint：$(1+3+5+\ldots+2n-1)^2=1^2+3^2+\ldots.+(2n-1)^2+2\cdot a_{n-2}$]]

(13) (b)$\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x$