第三十三單元 排列組合

(甲)基本計數法則

(1) 窮舉法：

通過一一的列舉而導致結論的方法，稱爲窮舉法。

(2)樹狀圖的設計

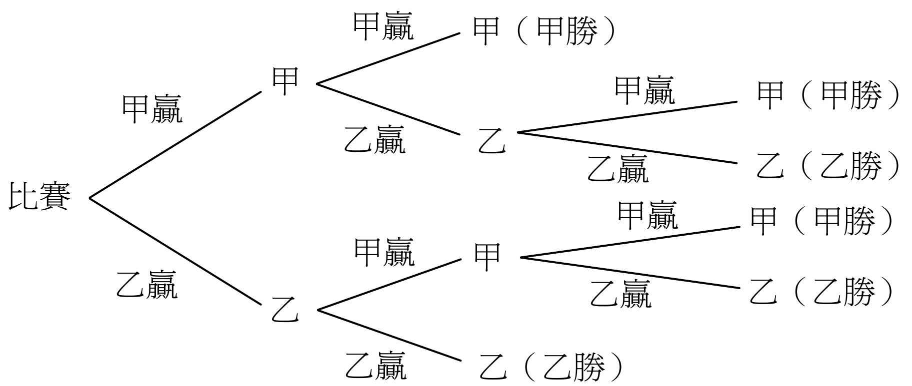
①樹狀圖是一種樹枝形狀的圖形，用來列舉一連串事件發生時所有可能情況的一種工具。

②樹狀圖是用窮舉法解題時的一種工具，通常樹狀圖的作法是由左而右逐層分類，分步，使複雜情況明顯化。

③樹狀圖在計數問題處理的過程中，可以呈現直觀的、具體的模型，使得分類、分層的工作容易進行，且可以避免重疊與遺漏的現象。

[例題1] 甲、乙兩隊比賽拔河，每次比賽沒有平手，規定先贏兩次者爲勝隊，試問共有多少種比賽情形可以分出勝負？

解：我們利用樹狀圖，將勝負情形表示如下：



所以共有 6 種情形可分出勝負。

(2)加法原理：

例子：連續投擲一枚骰子兩次，出現點數和大於 6 的情形總共有多少種？

[解法]：

”點數和大於 6”這件事可區分爲下面 6 個類別，其方法列於後：

(1) 點數和是 7：(6 , 1)，(5 , 2)，(4 , 3)，(3 , 4)，(2 , 5)，(1 , 6)。

(2) 點數和是 8：(6 , 2)，(5 , 3)，(4 , 4)，(3 , 5)，(2 , 6)。

(3) 點數和是 9：(6 , 3)，(5 , 4)，(4 , 5)，(3 , 6)。

(4) 點數和是 10：(6 , 4)，(5 , 5)，(4 , 6)。

(5) 點數和是 11：(6 , 5)，(5 , 6)。

(6) 點數和是 12：(6 , 6)。

這 6 個互斥類別的完成方法分別有 6，5，4，3，2，1 種，

完成”點數和大於 6”這件事的方法共有　$6+5+4+3+2+1=21$ (種)。

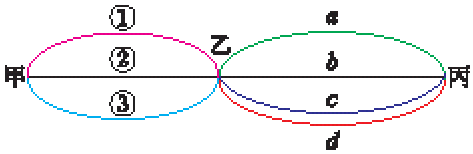
以上例子中，爲了數出現點數和大於 6 的情形，我們將這些情形分成點數和

7,8,9,10,11,12 等 6 種互斥的類別，再將這些類別的方法數加起來，就可以數出出現點數和大於 6 的情形總共有多少種。這樣的方法就是所謂的「**加法原理**」。

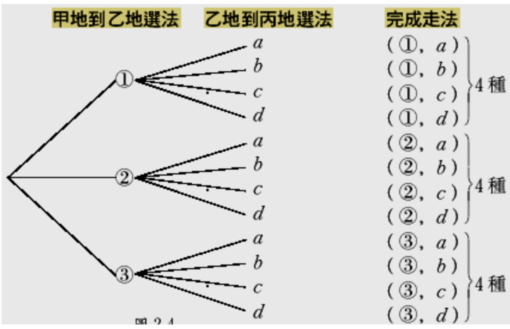
作一件事 E，完成 E 有 $C_1,C_2,\ldots,C_n$ 等 n 類互斥的辦法，在第一類 C_1 辦法中有 m_1 種方法，在第二類 C_2 辦法中有 m_2 種方法，,….,在第 n 類辦法中有 m_n 種方法，那麼這件事共有 $m_1+m_2+\ldots+m_n$ 種不同的方法。

(3)乘法原理：

例子：如下圖，某人從甲地到丙地，途經乙地。設由甲地到乙地有 3 種路徑走法，由乙地到丙地有 4 種路徑走法，則由甲地經乙地到丙地共有多少種走法？



以樹狀圖說明如下圖：



若從甲地到乙地選擇路徑①，則由乙地到丙地可選擇路徑 a，b，c，d，
所以由甲地走路徑①到乙地再到丙地，就有 (① , a)，(① , b)，(① , c)，(① , d)4 種走法。同理，由甲地到乙地走路徑②，③也各有 4 種走法到丙地，故由甲地經乙地到丙地共有 4＋4＋4 (加法原理)＝3x4 (改成乘法)＝12 種（走法）。
上例中，甲地到丙地分成兩個步驟：(1)甲地→乙地(2) 乙地→丙地。
由甲地到乙地有 3 種路徑選擇，由乙地到丙地有 4 種路徑選擇，故由甲地（經乙地）到丙地就有 3x4 種走法。這樣的方法就是所謂的「**乘法原理**」。

完成一件事 E，須經 $S_1,S_2,S_3,\ldots,S_k$ 兩個步驟(有先後順序)，作第一步(S_1)有 m_1 種方法，作第二步驟(S_2)有 m_2 種方法，…，作第 k 步驟(S_k)有 m_k 種方法那麼完成這件事(E)共有 $m_1\times m_2\times\ldots\times m_k$ 種方法。

乘法原理的精神是分好完成事情的一連串步驟，而加法原理著重於如何將事情做適當的分類，在實際作計數的過程中，我們要練習如何適當的使用乘法與加法原理，即如何將事物作分類、分步驟，以助於去計算事物的個數。

[例題2] 若把從 1 到 1000 的整數列出來，試問其中不含有數字 3 的有多少種？又至少含有一個數字 3 的有多少種？

[解說]：

(A)首先我們將 1 到 1000 的數，分成一位數、二位數、三位數、四位數
然後在這些分類中算出不含有數字 3 的數有多少個

(1°)一位數：1,2,4,5,6,7,8,9⇒8 個

(2°)二位數：十位數字有 8 個數可以用，個位數字有 9 個數字可以用，因此用乘法原理可知有 8×9 個數字。

(3°)三位數：百位數字有 8 個數可以用，十位數字有 9 個數字可以用，個位數字有 9 個數字可以用，因此用乘法原理可知有 $8\times9\times9$ 個數字。

(4°)四位數：只有 1000 一個數字

根據以上的分類，由加法原理知共有 $8+8\times9+8\times9^2+1=729$ 個不含有數字 3 的數。

(B)1~1000 中至少含有一個數字 3 的數字個數
=1000−(1~1000 中不含有數字 3 的數的個數)=1000−729=271。

(4)取捨原理：

在加法原理中，完成一件事可以分成幾個互斥的類別，再將完成這些類別的方法數加起來即可。若我們完成一件事的類別有重複的部分，就不能將方法數直接相加，此時就要用到所謂的「**取捨原理**」。取捨原理是計數中很常用的方法，先舉例來說明：

求 1~20 的自然數中 2 或 3 的倍數有多少個？

[解法]：

設 A、B 分別代表 1~20 中 2 與 3 的倍數，我們要計算 $A\cup B$ 的元素個數

$\because A=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$、$B=\{3,6,9,12,15,18\}$，而 $A\cap B=\{6,12,18\}$

因此 $A\cup B$ 的元素個數=10+6−3=13。

上述的方法就是所謂的取捨原理。

(a)設 A 是一個有限集合，則集合 A 的元素個數以 n(A)或|A|表示之。

例：設 $A=\{a,b,c,d,e\}$，則 $n(A)=5$ 或 $|A|=5$。

(b)二個集合的取捨原理：

設 A,B 是二個有限集合，則 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(c) 三個集合的取捨原理：

設 A,B,C 是三個有限集合，

則 $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

[例題3] 某班學生第一次段考，國文、英文、數學成績不及格人數分別爲 8 人，15 人與 20 人。國文、英文兩科都不及格的有 3 人；英文、數學兩科都不及格的有 6 人；數學、國文兩科都不及格的有 4 人，國文、英文、數學三科都不及格的有 2 人。

請問：全班學生中國文、英文、數學三科至少有一科不及格的有多少人？

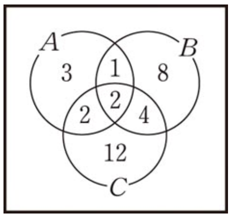
解：設 A，B，C 分別表示這班學生第一次段考國文、英文、數學不及格學生所成的集合，則由題意得

$n(A)=8$，$n(B)=15$，$n(C)=20$，

$n(A\cap B)=3$，$n(B\cap C)=6$，

$n(C\cap A)=4$，$n(A\cap B\cap C)=2$。

以文氏圖呈現如右：



由取捨原理知：$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=8+15+20-3-6-4+2=32$，

所以三科中至少有一科不及格的學生有 32 人。

[討論]：n 個集合的取捨原理

設 A_1、A_2、…、A_n 爲 n 個有限集合，

則 $n(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_n)$

$$=\sum_{i=1}^{n} n(A_i)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} n(A_i\cap A_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j} n(A_i\cap A_j\cap A_k)-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

(5)一對一原理：

設 A、B 爲兩個有限集合，

若是可以找到一個 1−1 且映成的函數 f：A→B，則集合 A 與 B 的元素個數相等。

[例題4] 有 30 個人玩“剪刀、石頭、布”的猜拳遊戲。每一局比賽由其中兩人配對猜拳，直到分出勝負爲止，猜輸的人即遭淘汰，猜贏的人繼續配對猜拳。試問總共要猜拳幾局，才能產生最後的勝利者？

分析：我們利用一一對應原理解題。

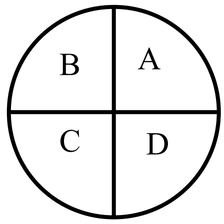
解：每猜拳一局，就會淘汰一人。

今欲產生最後一位勝利者，就須淘汰 29 人，

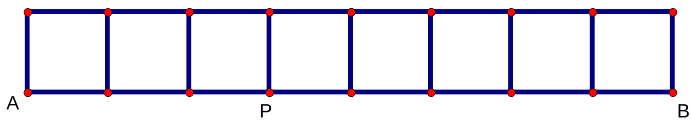
因此總共要猜拳 $30-1=29$ (局)。

[例題5] 將 15 用三個自然數之和來表示，方法有幾種？Ans：19
(15=1+1+13 與 15=1+13+1 視為同一種，即不考慮順序)

[例題6] 如圖，用 5 個不同的顏色去塗 A、B、C、D 四個區域，將每個區域塗上一種顏色，相鄰區域不得同色，則有幾種方法？ Ans：260



[例題7] 自 A 到 B 規定其行走方向為「→,↑,↓」三種
(1)不經過 P 的走法有多少種？
(2)經過 P 的走法有多少種？
Ans：(1)64 種 (2)192 種

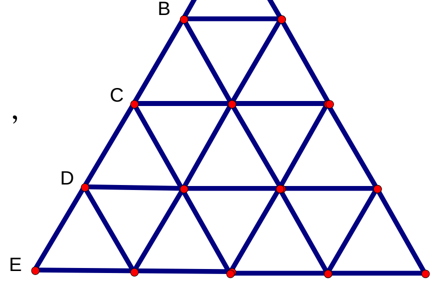


(練習1)設二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 之係數 $a,b,c\in\{3,4,5\}$ 請問共有多少個不同的二次函數？ Ans：3^3

(練習2)請問 720 的正因數個數有多少個？Ans：30 個

(練習3)用 0,1,2,3,4,5 排成一個四位數，
(1)若數字可重複，請問可作成幾個四位數。
(2)若數字不可重複，請問可作成幾個四位數。
Ans：(1)5×6^3 (2)300

(練習4)若球道設計如圖所示，兩兩相鄰的節點間距離皆為 1，請問
(1)共有多少個面積為$\frac{\sqrt{3}}{4}$的三角形。

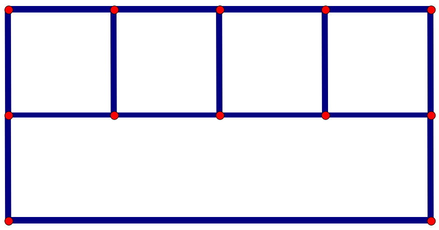


(2)共有多少條長度為 1 的線段。
(3)球由 A 點進入，經 B 層的兩個節點之一
再依斜線路徑進入 C 層，依次類推往下掉落到
最底層，共有多少種走法？
Ans：(1)16 (2)30 (3)16

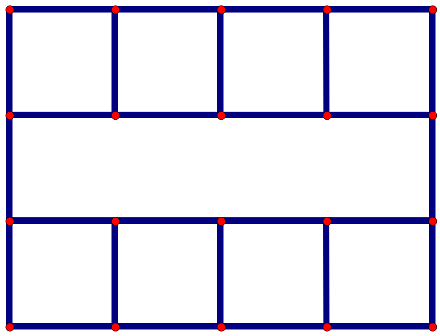
(練習5)設有 25 個人參加網球單淘汰賽，每一場由其中兩位選手配對比賽，賽輸的人即遭淘汰，並且每一場比賽都一定有一位得勝，不允許有和局。試問總共要比賽幾場，才能產生冠軍？

(練習6)從 4 種顏色塗下列兩圖，使同色不相鄰之塗法共有多少種？

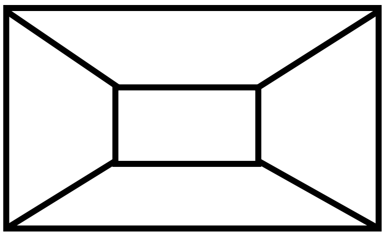
(1)



(2)



(3)



Ans：(1)96　(2)2304　(3)420

(乙)直線排列

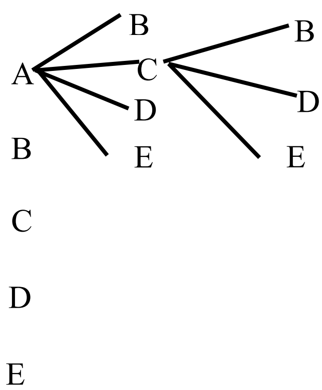
(1)直線排列的引入：

例子：

從建中高二某班 5 個同學中，選出 3 人排成一列，有幾種排法？

解法：

5 個同學以 ABCDE 表示，選出 3 人排成一列，我們將這個過程，分成 3 個步驟，配合樹狀圖，可得排法共有 5×4×3 種方法。



數學上，我們將這樣的排列方法稱為在 5 個不同的事物中，選取 3 個排成一列，符號上以 $\mathbf{P^5_3}$ 來表示。即 $\mathbf{P^5_3=5\times4\times3}$。

(2)直線排列的定義：

從 n 個**不同**的物件中，選取 m 個物件($1\le m\le n$)安排到 m 個不同的位置，共有 $\boldsymbol{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}$種方法，這樣的方法數用 P^n_m 來表示。

即 $P^n_m= n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$ **[*n* 往下乘 *m* 個]**。

為了方便表示，規定 $n!=1\times2\times3\times\ldots\times n$，$0!=1$

因此 $P^n_m=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)\cdots2\cdot1}{(n-m)\cdots2\cdot1}=\dfrac{n!}{(n-m)!}$。

特別 $P^n_n=\dfrac{n!}{0!}=n!$。

結論：

(1)從 n 個**不同**的事物中，選取 m 個物件($1\le m\le n$)安排到 m 個不同的位置，
共有 P^n_m 種方法。

(2) $P^n_m=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

例子：$3!=6$，$4!=24$，$5!=120$，$6!=720$

例子：$P^6_4=6\times5\times4\times3=\dfrac{6!}{(6-4)!}=\dfrac{6!}{2!}$，$P^{10}_4=10\times9\times8\times7=\dfrac{10!}{6!}$

[例題8] 請計算下列各小題：
(1)$2P_3^n=3\cdot P_2^{n+1}+6P_1^n$，求 n=？(2)$5P_n^9=6P^{10}_{n-1}$，求 n=？
Ans：(1)$n=5$ (2)$n=7$

[例題9] 請求出下列各小題的方法數：
(1)甲乙丙三人在排成一列的 8 個座位中，選坐相連的三個座位，
則有幾種坐法？
(2)9 個人組成一個少棒隊，已知三、四棒的人選已定，而投手與捕手要安排
在第七、八、九棒，請問教練可以排出幾種不同的打擊順序？
Ans：(1)36 (2)720

(練習7) 設 $P_3^{n+1}=10P_2^{n-1}$，求 n=？ Ans：n=4 或 5

(練習8) 若 $2P^8_{n-2}=P^8_n$，則 n=？ Ans：8

(練習9) 請證明：$P_r^n = P_r^{n-1} + r\,P_{r-1}^{n-1}$。
這個式子可以做這樣的解釋：
假設 50 個人中含有一人爲甲,則從 50 個人中選取 6 個之排列數爲 P^{50}_6。
利用加法原理，可將這樣的過程分成兩類：
不含甲之排列數爲 P^{49}_6 與含甲的排列數爲 $P^6_1\times P^{49}_5$(某甲先選座位,剩下 5 個座位再由其他 49 人選取排列)。因此可得 $P^{50}_6= P^{49}_6+ P^6_1\times P^{49}_5$。

(練習10) 某桌球隊要從 10 名選手中排出 5 名，分別參加五場單打友誼賽，10 名選手中近況特佳的有 3 位，教練決定任意安排他們分別在第一、三、五場出賽，另外兩場則由其餘選手任意選出排定，則此球隊出場比賽的名單順序一共可以有【　　】種。Ans：252

(練習11) 甲、乙、丙三人在排成一列的八個座位中選坐三個座位，但不能三個座位全相連，共有【　　】種坐法。Ans：300

(練習12) 將三個不同的球，放入五個不同的箱子中，但每箱最多放一球，則有多少種不同的放法。 Ans：60

(丙)不盡相異物排列與重複排列

(1)有相同物的直線排列：
例子：四個英文字母 AAAB 排成一列，請問有幾種排法？
[方法]：
先將 AAA 這三個相同的字母視爲不同，設爲 $A_1A_2A_3$ 所以先視爲 $A_1A_2A_3B$ 這 4 個不同字母的排列，共有 4！種，如下所示：

$A_1A_2A_3B$，$A_1A_3A_2B$，$A_2A_1A_3B$，$A_2A_3A_1B$，$A_3A_1A_2B$，$A_3A_2A_1B$
$A_1A_2BA_3$，$A_1A_3BA_2$，$A_2A_1BA_3$，$A_2A_3BA_1$，$A_3A_1BA_2$，$A_3A_2BA_1$
$A_1BA_2A_3$，$A_1BA_3A_2$，$A_2BA_1A_3$，$A_2BA_3A_1$，$A_3BA_1A_2$，$A_3BA_2A_1$
$BA_1A_2A_3$，$BA_1A_3A_2$，$BA_2A_1A_3$，$BA_2A_3A_1$，$BA_3A_1A_2$，$BA_3A_2A_1$

但是當我們將 $A_1A_2A_3$ 還原成 AAA 的時候 $A_1A_2A_3B$，$A_1A_3A_2B$，$A_2A_1A_3B$，$A_2A_3A_1B$，$A_3A_1A_2B$，$A_3A_2A_1B$ 以上 6 種排列情形，均代表同一種 AAAB。換句話說 3！種的排列要視爲同一種，因此排列方法有$\frac{4!}{3!}$=4 種。

結論：

設有 n 件物品，共有 k 種不同種類，第一類有 m_1 個，第二類有 m_2 個，….,第 k 類有 m_k 個。(此處 $n=m_1+m_2+m_3+\ldots+m_k$)，此處此 n 件物品排成一列，

共有$\dfrac{n!}{m_1!\cdot m_2!\ldots\cdot m_k!}$種不同的排法。

例如：用 3 個相同的紅球，2 個相同的黃球，4 個相同的黑球，
排成一列有幾種排法？

[解法]：$\dfrac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 4!}$

(2)重複排列的定義：

例子：

用 12345 五個字母排成一個三位數，

(1)數字可重複，可作出幾個三位數？

(2)數字不可重複，可作出幾個三位數？

[解法]：

(1)百位數、十位數、個位數都有 5 種方法⇒5^3 種三位數字。(重複排列)

(2)百位數、十位數、個位數分別有 5、4、3 種方法⇒$5\times4\times3$ 種三位數字。

結論：

從 m 種不同之事物(每種事物的個數超過 n 個)選取 n 個安排到 n 個不同的位置(n,m 無大小關係)，但可以重複選取，這種計數方式稱爲重複排列，排列方法有 m^n 個。

[例題10] 請求出下列各小題的排列數：

(1)有 10 位選舉人，3 位候選人，採計名投票，每人都要投一票(沒有廢票)，請問有候選人得票的情形有幾種？

(2)一個多重選擇題，有 A,B,C,D,E 五個選項，請問答案有幾種型式？

(3)10 名學生要爭奪 3 項比賽的錦標，請問得到冠軍的可能性有幾種？

(4)5 個人於十字路口話別後，同時離開(沒有 5 人同走一條路)
共有幾種可能情形？

Ans：(1)3^{10} (2)2^5-1 (3)10^3 (4)4^5-4

(3)有限制條件之排列：

(a)若要求 k 個人相連，先將這 k 個人視為一整體，排定後再排此 k 個人。

(b)若要求 k 個人分開，則先排其他人，在將這 k 個人安排至其他人的空隙中。

(c)考慮反面計算：全部方法−不合的方法。

(d)應用取捨原理。

(f)應用 1−1 原理。

(g)利用遞迴方法。

[例題11] 甲乙丙丁等 7 人排成一列，請求出下列情形的方法數：
(1)甲乙丙三人相鄰　(2)甲乙丙分開　(3)甲乙相鄰，丙丁不相鄰
(4)甲乙相鄰，甲丙不相鄰
Ans：(1)$3!\times 5!=720$ (2)$4!\times P^5_3=1440$　(3)$4!\times 2!\times P^5_2=960$(4)1200

[例題12] **pallmall** 一字中各字母排成一列
(1)有幾種排法？(2)所有之 l 皆相鄰而兩個 a 分開。
(3)其中三個 l 在一起，另一 l 分離
Ans：(1)840(2)36 (3)240

[例題13] 用 0,1,2,3,4,5 作相異數字之四位數，請求出滿足下列要求的四位數個數？
(1)數字相異四位數 (2)偶數 (3)3 的倍數 (4)4 的倍數 (5)5 的倍數。
Ans：(1)300 (2)156 (3)96 (4)72 (5)108

[例題14] A,B,C,D,E,F,G 排成一列，求下列排列數：
(1)A,B,C 順序不變　(2)A 在 B,C 之前
(3)A 在 B 之前，F 在 G 之後　(4)A,B 在 C,D,E 之前
Ans：(1)840 (2)1680 (3)1260 (4)504

[例題15] 有 5 封不同的信件，投入甲乙丙丁 4 個不同的郵筒，則甲乙丙三郵筒均至少投入一封郵件的投法有幾種？　Ans：390

[例題16] 鳴放氣笛作信號，長鳴一次需 4 秒，短鳴一次需 1 秒，每次間隔時間為 1 秒，請問 30 秒的時間可作出多少種的信號？Ans：235
[1−1 原理]：

[遞迴方法]：

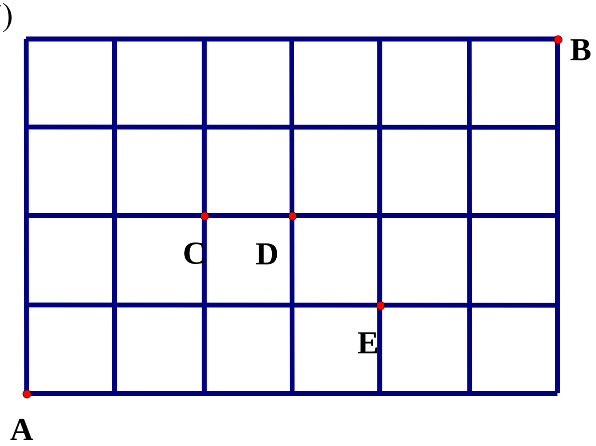
[例題17] (錯排問題)

設 1,2,3,…,n 這 n 個數重新排成一列爲 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$，若 $a_i\neq i$，我們稱之爲 n 的錯排，它的個數以 g_n 來表示，$g_1=0$，$g_2=1$

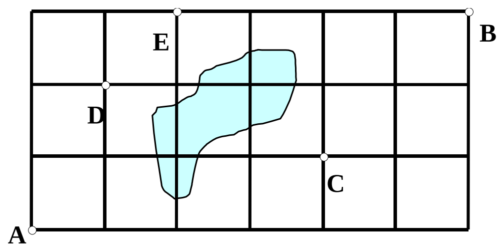
請找出數列$\{g_n\}$的遞迴關係式。

Ans：$g_n=(n-1)(g_{n-1}+g_{n-2})$，$n\geq3$

[例題18] 如圖，一人走捷徑由 A 到 B(即只能走→↑)
(1)走捷徑有幾種走法？
(2)若每次需經過 D，其走法有幾種？
(3)若不經過 C 且不經過 D，
其走法有幾種？
Ans：(1)210 (2)100 (3)80



[例題19] 如圖，由 A 走到 B 走捷徑，但不走斜線部分區域之路徑，依下列情形求走法數。
(1)經 C (2)經 D (3)自由走但不經斜線區域。
Ans：(1)50 (2)8 (3)23



(練習13)一對新婚夫妻家庭有 6 人排成一列拍結婚照，但新婚夫妻一定排在中間的兩個位置，請問共有幾種排法？ Ans：48

(練習14)有 4 個女生 3 個男生排成一列，若要求男生排在一起，女生排在一起，則其排列方法有　　　　種；若要求男女相間隔排列，
排列方法有　　　種，3 個男生要分開排列的方法有　　　種。
Ans：288，144，1440

(練習15)甲乙丙丁戊己六人排成一列，求下列的排列數？
(1)乙丙均與甲相鄰 (2)甲乙相鄰，甲丙不相鄰 (3)甲乙丙中恰二人相鄰
Ans：(1)48 (2)192 (3)432

(練習16)某班一天有七節課，每一節課均排不同的科目，其中體育課不排第四節，數學課不排第七節，請問這一天的課表有幾種排法？Ans：3720

(練習17) 用 2,3,4,5,6 五個數字排成三位數
(1)數字可以重複，有多少個不同的三位數。
(2)數字不可以重複，則所有三位數的和=？
Ans：(1)125 (2)26640

(練習18) 二位數中：(1)個位數字>十位數字共有幾個？(2)十位數字>個位數字共右幾個？ Ans：(1)36 (2)45

(練習19)設 A,B,C,D 等十人排成一列，規定 A,B 不排首，C,D 不排末之方法有幾種？
Ans：$8!\times 58$
[提示：全部−(A,B 排首)−(C,D 排末)+(A,B 排首且 C,D 排末)]

(練習20)七本書分給 10 個人，每人至多一本
(1)書本相同有幾種分法？ (2)書本不同有幾種分法？
Ans：(1)120 (2)604800

(練習21)甲，乙，丙，…，庚等 7 人排成一列，甲在乙的左方，且在丙的左方有__________種排法。Ans： 1680

(練習22)LKKLMM 排成一列，要求同字不相鄰，方法有幾種？Ans：30

(練習23)pontoon 一字，各字母排成一列，求下列各排列數：
(1)全部任意排成一列 (2)三個「o」完全在一起
(3)恰有兩個「o」在一起 (4) 三個「o」完全分開
Ans：(1)420 (2)60 (3)240 (4)120

(練習24)factoring 中各字母，每次全取排列
(1)母音保持 a,o,i 之順序有幾種排法？
(2)母音保持 a,o,i 之順序，同時子音保持 f,c,t,r,n,g 之順序有幾種排法？
Ans：(1)$\dfrac{9!}{3!}$ (2)$\dfrac{9!}{3!6!}$

(練習25)cabbage 一字，各字母排成一列，其中相同字母不相鄰，有幾種排法？
Ans：660[提示：考慮反面情形的計算]

(練習26)一樓梯有 8 級，某人上樓，每步走一級或二級或三級，則此人上樓的方法有幾種？ Ans：81

(練習27)設 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 是 1,2,3,4,5 的一種排列(例如 13254,15432,…等均是 1,2,3,4,5 的一種排列)求滿足下列各式的排列數：

$(1)(2-a_4)(1-a_3)=0$ $(2)(1-a_1)(3-a_3)\neq 0$ $(3)\ (1-a_1)(2-a_2)(3-a_3)(4-a_4)(5-a_5)\neq 0$

Ans：(1)42 (2)78 (3)44

(練習28)7 個不同的書本分贈給 4 人，請求依下列情形分配的方法有幾種？

(1)甲至少分得一本書。 (2)甲恰得一本書

(3)甲至少二本書 (4)每人至少一本書

Ans：(1)47−37 (2)7×36 (3)47−37−7×36 (4)47−4·37+6·27−4·17+1·07

(練習29)5 本不同的玩具，分贈給甲乙丙 3 人，每人至少得一件之方法有幾種？

Ans：150

(練習30)渡船三隻，每船可載 6 人，則(1) 8 人過渡，有 ______ 種安全渡法。(2) 7 人過渡，但甲坐 A 船，有 ______ 種安全渡法。

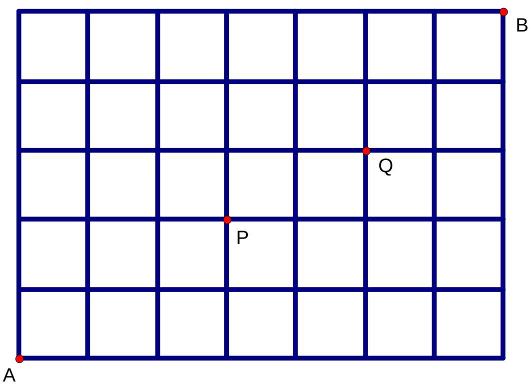
Ans： (1) 6510(2) 728

(練習31) 棋盤街道如右圖，南北街道有 8 條，東西街道有 6 條，某人自 A 取捷徑走到 B，下列走法各有多少種？

(1)走捷徑 (2)必須經過 P

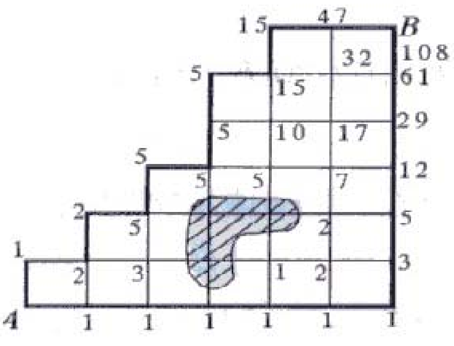
(3)必須經過 P 與 Q (4)不許經過 P,Q

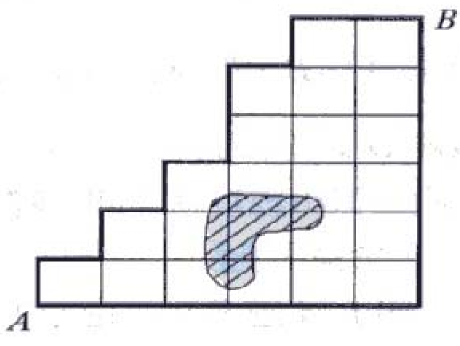
Ans：(1)792 (2)350 (3)180 (4)286



(練習32) 如右圖，由 A 走到 B 取捷徑。但不許經過斜線區之方法有幾種？

Ans：108





(練習33) 在坐標平面上，自 A(−4,−3)走捷徑到 B(3,3)，

(1)要經過第二象限，請問有幾種走法？

(2)不經過原點有幾種走法？

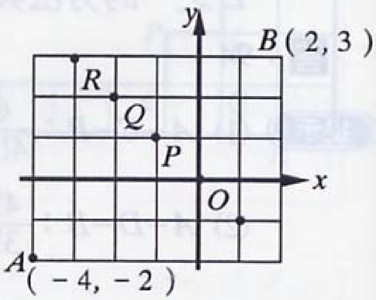
⑴ 經第二象限的走法

$= (A-P-B) + (A-Q-B) + (A-R-B)$

$= \frac{7!}{3!\,4!}\cdot\frac{6!}{4!\,2!} + \frac{7!}{2!\,5!}\cdot\frac{6!}{5!\,1!} + \frac{7!}{1!\,6!}\cdot 1$

$= 35\times 15 + 21\times 6 + 7\times 1$

$= 525 + 126 + 7 = 658$



⑵ 不經原點＝(全部)－(經原點)

$= \frac{13!}{7!\,6!} - \frac{7!}{4!\,3!}\cdot\frac{6!}{3!\,3!} = 1716 - 700$

$= 1016$

(丙)組合的意義

例子：

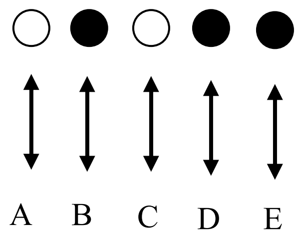
從建中高二某班 5 個同學中，選出 3 人參加辯論比賽，有幾種選法？

[解法一]：(以分類的觀點)

5 個同學以 ABCDE 表示，先考慮選出 3 人排成一列，配合樹狀圖，可得排法共有 $P^5_3=5\times4\times3$ 種方法。但選人的觀點是不論次序的，即 ABC、ACB、BAC、BCA、CAB、CBA 是算一樣的，都是選中 ABC 三個人，因此每 3！種排法算成一種，因此從 5 個人中，選取 3 個人(**不考慮排列順序**)的方法有 $\frac{P^5_3}{3!}=\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}$ 種。

[解法二]：(以 1−1 原理的觀點)

如圖，將 A,B,C,D,E 與 3 個黑球,2 個白球做對應，對到黑球的人被選取，我們可以得知不同的排法會對應不同的選取法，而不同的選取方法會對應不同的排法，即排法與選取的方法一樣多，因此 5 個人中選取 3 人的方法有 $\frac{5!}{3!\,2!}=\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}$ 種。



(1)**組合**的定義：

從 n 個不同的事物中，選取 m 個($1\le m\le n$)，共有 $\frac{P^n_m}{m!}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot m}$ 種方法。

(分子由 n 往下乘 m 個，分母由 1 往上乘 m 個)

將這樣的方法數，用 C^n_m 來表示。即 $C^n_m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot m}=\dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$。

例如：$C_3^{10}=\dfrac{10!}{3!\,7!}=\dfrac{10\times9\times8}{1\times2\times3}$，$C_0^n=\dfrac{n!}{0!\cdot n!}=1$，$C_n^n=\dfrac{n!}{n!\cdot0!}=1$，$C^n_1=n$

(2)組合的性質：

(a) $P^n_m=C^n_m\cdot m!$

(b) $C^n_m=C^n_{n-m}$

(c)巴斯卡定理：$C^n_m=C^{n-1}_m+C^{n-1}_{m-1}$　　$1\le m\le n-1$

[證明]：

$$C^{n-1}_m+C^{n-1}_{m-1}=\frac{(n-1)!}{m!\,(n-1-m)!}+\frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!}$$

$$=\frac{(n-1)!\,(n-m)}{m!\,(n-m)!}+\frac{(n-1)!\,m}{m!\cdot(n-m)!}=\frac{(n-1)!\,(n-m+m)}{m!\,(n-m)!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}=C^n_m\text{。}$$

例如：$C_7^{10}=\dfrac{10!}{7!\cdot3!}=\dfrac{10!}{3!\cdot7!}=C_3^{10}$。$C^{10}{}_6=C^9{}_6+C^9{}_5$。

用組合的觀點解釋性質：

(b)要從 ABCDE 中選出三人去打掃環境，今抽籤決定，籤的作法有兩種：一種是五支籤中，3 支籤做記號，抽中的人去打掃，其抽中的組合數為 C^5_3；另一種是五支籤中，2 支作記號，抽中的人不去打掃，其抽中的組合數為 C^5_2，故可得 $C^5_3=C^5_2$。

(c)要從 ABCDE 中選出三人去打掃環境，今有 C^5_3 種選法，選出來的 3 人之中，我們可分成兩類：第一類是若 A 去打掃，則必須從其他 4 人中再選 2 人一起打掃，其組合數共有 C^4_2 種方法；第二類是若 A 沒去打掃，則從其他 4 人中選 3 人去打掃，其組合數共有 C^4_3 種方法，所以 $C^5_3=C^4_2+C^4_3$

[例題20] 求下列各小題的 n 值：

(1)$12C_4^{n+2}=7C_3^{n+4}$　(2)$C^{10}{}_n=C^{10}{}_{3n-2}$　(3)$11C^n{}_{n-3}=24C^{n+1}{}_{n-1}$

Ans：(1)$n=6$ (2)$n=1$ 或 3　(3)10

[例題21] (1)請計算 $C^5_2+C^6_3+C^7_4+\ldots+C^{20}_{17}=$？
(2)試證明 $C_k^k+C_k^{k+1}+C_k^{k+2}+\ldots+C_k^{k+n}=C^{k+n+1}_{k+1}$ 。

[例題22] 自棒球選手 9 人，游泳選手 6 人中選出 4 人擔任福利委員
(1)選法有幾種？ (2)至少有 2 位游泳選手之選法有幾種？
Ans：(1)1365 (2)735

[例題23] 從 1~20 這 20 個號碼中，取出 4 個數使得這四個數都不是相鄰的正整數。
Ans：C^{17}_4

(練習34) 設 C^{2n}_{n-1}：$C^{2n-2}_{n}=132$：35，則 $n=$？Ans：$n=6$

(練習35) 設 n,r 均為自然數，且 C^{n-1}_{r}：C^{n}_{r}：$C^{n+1}_{r}=6$：9：13，則數對$(n,r)=$？
Ans：$(n,r)=(12,4)$

(練習36) 求 $C^1_0+C^2_1+C^3_2+\ldots+C^{13}_{12}=$？ Ans：$C^{14}_2$

(練習37) 某拳擊比賽，規定每位選手和其他選手各比賽一場，賽程總計為 45 場，
請問有幾位選手參加比賽？ Ans：10

(練習38) 從男生 4 人和女生 3 人中，排出 3 名男生和 2 名女生並排成一列，
請問有幾種排法？ Ans：1440

(練習39) 凸 20 邊形有幾條對角線？Ans：170

(練習40) 從 1,2,3,…,10 中選出 3 個相異數 a,b,c 滿足 $a<b<c$ 的(a,b,c)有幾組？
Ans：120

(練習41) 一列火車從第一車至第十車共有十節車廂。要指定其中 4 節車廂安裝行動電話，則共有幾種指定的方法？若更要求此四節車廂兩兩不相銜接，則共有幾種指定方法？　Ans：210　，35

(練習42) 由 1 到 20 的自然數中取出不同的三個數，則
(a)取出的三數成等差的取法(不考慮排列)有幾種？
(b)取出的三數中沒有二個連續整數的取法有幾種？
(c)取出的三數乘積為偶數的取法有幾種？
Ans：(a)90 (b)816 (c)1020

(練習43) 某次考試，規定 13 題中選做 10 題，求下列各選法？
(1)任意選　(2)前兩題必須作答
(3)前五題必須選做 3 題且只做 3 題(4)前 5 題中至少選做 3 題。
Ans：(1)286 (2)165 (3)80 (4)276

(練習44) 平面上有 15 個相異點，其中除了 7 點共線外，其他各點之中任三點不共線，任意連接各點，則可決定
(1)多少條直線？　(2)多少個線段？　(3)多少個三角形？
Ans：(1)85 (2)105 (3)420

(練習45) 5 對夫妻中選出 4 人，
(1)恰有 2 對夫妻　(2)恰有一對夫妻　(3)4 人皆沒有夫妻關係。
Ans：(1)10 (2)120 (3)80

(丁)重複組合

例子：ABCD 等 4 人到麥當勞點 1~6 號套餐，每個人限點一份套餐，請問：
(a)這 4 個人有幾種點餐的情形？　(b)店員有幾種給餐點的方式？
[說明]：
(a)ABCD 四人每個人都有 6 種套餐可點，因此這 4 個人有幾種點餐的情形共有 6^4 種。
(b)就店員而言，他不在乎每個人點了那些餐，他只在乎每種套餐被點了幾次，因此假設第 i 號餐被點了 x_i 次，其中 x_i 為非負整數，
不定方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=4$ 的非負整數解$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$
就代表一種店員給餐點的方式。
因此只要能求出方程式有幾個非負整數解，就可以求出店員有幾種給餐點的方式。
從另一個角度來看，店員給餐點的方式也可以看成是 1~6 號套餐重複選取出 4 份套餐的方式。
如何求 $\boldsymbol{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=4}$ 非負整數解個數？

| | ○ ○ | ○ | ○ | ⟶ (0,0,2,1,1,0)

| ○ | ○ | ○ | ○ | ⟵ (0,1,1,1,1,0)

非負整數解$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$可以和 5 個 | 4 個 ○ 的排列情形 **1 對 1 對應**，因此非負整數解個數= $\dfrac{9!}{4!5!}$ = C^9_4，若定義 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=4$ 非負整數解個數為 H^6_4，

則 $H^6_4=C^9_4$。

[重複排列與重複組合]

設(A,1)代表 A 點了 1 號餐，設有兩種點法(A,1)(B,3)(C,1)(D,2)

與(A,3)(B,1)(C,2)(D,1)，在(a)中他代表兩種點餐的方式，換句話說 1,3,1,2 與 3,1,2,1 是有順序的，不過就店員而言，都代表 1 號餐 2 份，2 號餐 1 份，3 號餐 1 份，因此店員給餐的方式都一樣，也就是沒有順序可言。在(a)中我們可以重複點套餐，但是有順序的，即 1,1,3,2、1,3,2,1、…是不同的，這是前面提過的**重複排列**；而(b)中的情形，我們可以重複點餐，但是不考慮順序，即 1,1,3,2、1,3,2,1、…都代表 $x_1=2$、$x_2=1$、$x_3=1$、$x_4=0$、$x_5=0$、$x_6=0$ 這一組解，我們稱為**重複組合**。

重複組合的定義：

從 n 類東西中取出 m 件，(每類至少有 m 件)的組合數為 $H^n_m=C^{n+m-1}_m$ 。

(a)從 n 類東西中取出 m 件，(每類至少有 m 件)的組合數等於不定方程式

$\boldsymbol{x_1+x_2+\ldots+x_n=m}$ 的非負整數解個數

$=(n-1)$個 | m 個 ○ 排列數

$=\dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}=C^{n+m-1}_m$

(b)當我們從 n 類東西中取出 m 件，或問題的方法數可以化成不定方程組

$\boldsymbol{x_1+x_2+\ldots+x_n=m}$ 的非負整數解的個數，這都是使用重複組合的時機。

[例題24] 求下列各小題的方法數：

(1)同時擲 2 粒相同的骰子，有幾種可能的情形？

(2)有 4 名候選人，18 名選舉人，記名投票時，有幾種情形？不記名投票時，有幾種情形？(假設每個人都去投票，而且沒有廢票)

(3)將 6 件相同的玩具分給 4 個小朋友，任意的分配，有幾種分法？

Ans：(1)21 (2)4^{18}，H^4_{18} (3)H^4_6

[例題25] 求下列各小題：

(1)$x+y+z+u=100$ 之非負整數解個數？

(2)$x+y+z+u=100$ 之正整數解個數？

(3)$x+y+z+u=100$，且滿足 $x>-1,y>2,z>3,u\geq-2$ 的整數解個數？

Ans：(1)H^4_{100} (2)H^4_{96} (3)H^4_{95}

[例題26] $x+y+z\leq 8$ 之非負整數解個數？ Ans：H^4_8

[例題27] $(x+y+z)^8$ 的展開式中

(1)請問有幾個不同類項？(2)請求出 $x^2y^4z^2$ 項的係數=？

Ans：(1)H^3_8 (2)$\dfrac{8!}{2!4!2!}$

(練習46) 投擲 4 粒骰子

(1)骰子不同有幾種可能的情形？ (2)骰子相同有幾種可能的情形？

Ans：(1)6^4 (2)$H^6{}_4$

(練習47) 將 9 件相同的玩具分給 4 個小朋友，每個人至少一件，有幾種分法？

Ans：56

(練習48) 設$(a+b+c)^7$的展開式中，

(1)請問有幾個不同類項？(2)請問 a^2bc^4 的係數=？

Ans：(1)$H^3{}_7$ (2)$\dfrac{7!}{2!\,1!\,4!}$

(練習49) 方程式 $x+y+z+u=12$ 的非負整數解有______個，正整數解有_______個。

Ans：455，165

(練習50) 方程式 $x+y+z+u\le 9$ 之正整數解之個數為何？ Ans：126

(戊)排列組合的綜合運用

(1)分組與分堆問題：

例子：有 ABCDEF 六人按照下列人數來分組，請問有幾種分組的方法？

(1)按 3,2,1 分成三組 (2)按 2,2,2 分成三組。

[解法]：

(1)考慮 $C^6{}_3\cdot C^3{}_2\cdot C^1{}_1$ 這個式子，根據乘法原理或樹狀圖，可以得知，按 3,2,1 分成三組的方法有 $C^6{}_3\cdot C^3{}_2\cdot C^1{}_1$ 種。

(2)考慮 $C^6{}_2\cdot C^4{}_2\cdot C^2{}_2$ 這個式子，根據乘法原理或樹狀圖，我們可以發現 $\boxed{\text{AB、CD、EF}}$，$\boxed{\text{AB、EF、CD}}$，$\boxed{\text{CD、AB、EF}}$，$\boxed{\text{CD、EF、AB}}$，$\boxed{\text{EF、AB、CD}}$，$\boxed{\text{EF、CD、AB}}$，這 6 種分組方式並沒有差別，而算式 $C^6{}_2\cdot C^4{}_2\cdot C^2{}_2$ 中，卻將其算了 6 次，因此按 2,2,2 分成三組的分組方法只有 $C^6{}_2\cdot C^4{}_2\cdot C^2{}_2\cdot\dfrac{1}{3!}$ 種。

[例題28] **(分組與給物的問題)**

有 8 本不同的書本，

(1)平分成兩堆 (2)按照 4,2,2 分成三堆 (3)按照 4,3,1 分成三堆

(4)平分給甲乙兩人 (5)甲給 4 本，乙給 2 本，丙給 2 本

(6)按照 4,3,1 自由分配給甲乙丙三人

Ans：(1)35 (2)210 (3)280 (4)70 (5)420(6)1680

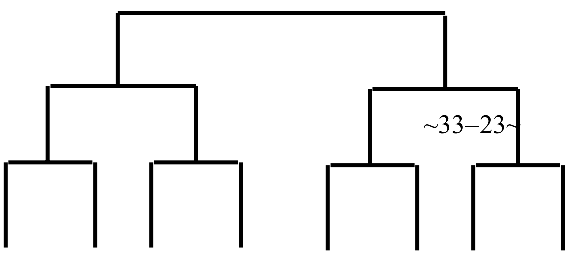
[例題29] **(有特定條件的分組問題)**
(1)9 人平分成三組，其中甲乙丙三人必不在同一組的方法有幾種？
(2)9 人平分成三組，其中甲乙在同一組的方法有幾種？
Ans：(1)90 (2)70

(練習51) 籃球 3 人鬥牛賽，共有甲乙丙丁戊己庚辛壬癸 9 人參加，組成 3 隊，且甲乙兩人不在同一隊的組隊方法有多少種？ Ans：210 (90 學科)

(練習52) 有學生 10 人，住 A,B,C 三間房，若 A 房住 4 人，B,C 各住 3 人
(1)住法有幾種？ (2)若甲乙兩人住同房，其住法有幾種？
Ans：(1)4200 (2)1120

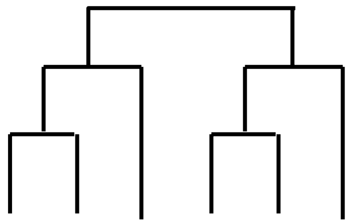
(練習53) 有八本不同的書，按 3,3,2 自由分配給甲乙丙三人，請問有幾種給法？
Ans：1680

(練習54) HBL 的複賽共有 8 支隊伍入圍參加比賽，現在要作淘汰賽，如圖爲本次的賽程表，請問共有幾種安排賽程的方式？Ans：315



(練習55) S={1,2,3,4,5,6,7,8,9}
(1)將 S 的元素分成 4 個，5 個的兩組，1,2 要在同一組的選法有幾種？
(2)從 S 中任取 3 個數的和爲奇數的取法有幾種？
Ans：(1)56 (2)40

(練習56) 高二三班各派 2 名羽球選手，作羽球的單打排名賽，比賽賽程表如圖所示，而且要求同班派出的選手在冠亞軍以外不比賽，則賽程有幾種排法？Ans：36



(2)排列與組合的綜合運用：

[例題30] 7 個球放入 3 個箱子，每個箱子都夠大能放入 7 個球，亦可以留有空箱子
(1)球相同，箱子相同有幾種存放的方法？
(2)球相同，箱子相異有幾種存放的方法？
(3)球相異，箱子相同有幾種存放的方法？
(4)球相異，箱子相異有幾種存放的方法？
Ans：(1)8 (2)36　(3)365 (4)2187

[例題31] 設 A={1,2,3,4}，B={5,6,7}
(1)從 A 映至 B 的函數有幾個？　(2)從 A 到 B 的映成函數有幾個？
(3)從 B 映到 A 的函數有幾個？　(4)從 B 到 A 之一對一函數有幾個？
Ans：(1)81 (2)36 (3)64 (4)24

[例題32] 請求出下列集合的元素個數：

$A=\{(x,y,z)|1\le x,y,z\le 9$，$x,y,z$ 爲整數，且 x,y,z 互異$\}$，

$B=\{(x,y,z)|1\le x,y,z\le 9$，$x,y,z$ 爲整數$\}$

$C=\{(x,y,z)|1\le x<y<z\le 9$，$x,y,z$ 爲整數$\}$

$D=\{(x,y,z)|1\le x\le y\le z\le 9$，$x,y,z$ 爲整數$\}$

Ans：$n(A)=504$，$n(B)=729$，$n(C)=84$，$n(D)=165$

[例題33] 由 **mathematical** 中的字母，每次取 4 個的組合數有幾個？排列數有幾個？

Ans：143，2482

(練習57) 將 10 件相同物分給甲乙丙三人

(1)每人至少一件，有幾種分法？

(2)其中一人至少得一件，一人至少得二件，一人至少得三件，
有幾種分法？Ans：(1)36 (2)33

(練習58) 五件不同的玩具分給甲乙丙三人，求下列的分法？

(1)每人至少得一件。　(2)甲得 2 件，乙得 2 件，丙得 1 件。

Ans：(1)150 (2)30

(練習59) (函數的個數)f：G→H 為一個函數

(1)若 n(G)=6，n(H)=3，則 f 的個數有幾種？

(2)若 n(G)=3，n(H)=7，且 f 為一對一函數，則 f 的個數有幾種？

(3)若 n(G)=9，n(H)=2，且 f 為映成函數，則 f 的個數有幾種？

Ans：(1)729 (2)210 (3)510

(練習60) 自 ATTENTION 一字中，每次取 5 個字母，共有幾種取法？幾種不同的排列法？　Ans：41，2250

(練習61) 設 A={1,2,3,4}，B={1,2,3,4,5,6}，則從 A 到 B 的函數中，滿足 (1)$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$者共有幾個？(2) $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$者共有幾個？

Ans：(1)126 (2)15

(練習62) 袋中有相同的紅球 5 個，相同的白球 4 個，相同的黑球 2 個，相同的黃球 2 個，綠球 1 個，自袋中任取 4 球

(1)有幾種取法？　(2)取 4 球排成一列有幾種取法？

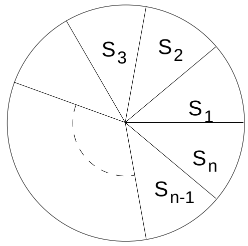
(3)從袋中至少取一球有幾種取法？Ans：(1)45 (2)478 (3)539

(3)遞迴方法計數：

[例題34] 地圖上某一地區有 n 個國家相鄰，但 n 個國家只有一個公共點（如圖）。現用紅，黃，綠三種顏色給地圖染色，但使相鄰的國家顏色不同。

令 a_n 表示滿足上述染色規則的方法數，求一般項公式 a_n。

Ans：$\begin{cases} a_3=6, a_4=18; \\ a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}, n\ge 5. \end{cases}$，$a_n=2^n+2(-1)^n$

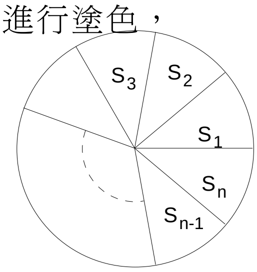


[例題35] 設有一個 n 字元的字串，字串中的字元都是由阿拉伯數字所組成的，試問數字 0 出現為偶數的字串共有多少個？

Ans：$a_n=5\times10^{n-1}+4\times8^{n-1}$，$n\ge1$

(練習63)一個圓區域，依圓心分成 n 個部分，用 k 種顏色對這 n 個區域進行塗色，並且要求相鄰的區域不同色，試問有多少種塗色的方式？

Ans：$(k-1)^n+(-1)^{n+1}$



(練習64)10 個數字(0~9)和 4 個四則運算符號(+−×÷)組成的 14 個字元，求其中的 n 個字元的排列構成一個算式表達式的個數。

所謂的算式表達式是指從左至右最後一個字元一定是數字。

(1)試求 a_n 的遞迴式　(2)試求 a_n 的一般式。

Ans：(1)$a_n=10a_{n-1}+40a_{n-2}(n\geq 3)$，$a_1=10$，$a_2=120$

(2)$a_n=\dfrac{1}{4\sqrt{65}}[(15+\sqrt{65})(5+\sqrt{65})^n-(15-\sqrt{65})(5-\sqrt{65})^n]$

(練習65)設滿足下列條件的自然數

(a)各位數字和爲 n。　(b)各位數字是 1 或 2。

有 a_n 個，試求

(1)數列$\{a_n\}$的遞迴關係。

(2)a_n 的一般項。

Ans：(1)$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$　(2)$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}((\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$

綜合練習

(1) 某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼為 O 以外的英文大寫字母，後四碼為 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4。例如： AA1234 ,AB4434 為可出現的車牌號碼；而 AO1234 ,AB3444 為不可出現的車牌號碼。則所有第一碼為 A 且最後一碼為 4 的車牌號碼個數為
(1) 25×9^3 (2) $25\times 9^2\times 10$ (3) 25×900 (4) 25×990 (5) 25×999

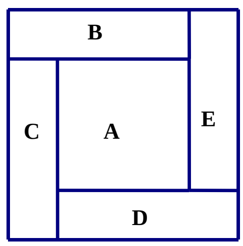
(2) 某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有________種不同款式的「阿民」公仔。(2007 學科)

(3) 坐標平面上的圓 C：$(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上有________個點與原點的距離正好是整數值。(2004 學科)

(4) $|x|+|y|\le 3$ 的圖形中有幾個整數坐標點？

(5) 三邊長均為正整數且最大邊長為 11 的三角形共有多少個？

(6) 用五種不同的顏色塗右圖中五個空白區域，
相鄰的區域塗不同的顏色，
則有幾種塗法？



(7) 從 1 到 999 的正整數中，總共寫了多少個 0？

(8) 由 1,2,3,4,5,6,7 七個數字所組成的四位數中(數字可重複)，含有奇數個 5 的共有多少個？

(9) 欲檢查整係數方程式 $360x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx-361=0$ 有理根的個數，則最後需總共檢驗多少個有理數才知道？

(10) 8 個棒球隊，舉行淘汰賽，每次賽到分出勝負，到冠軍隊產生，共需比賽多少場？若改為雙敗淘汰賽(敗二場則被淘汰)，則到冠軍隊產生，至多需比賽多少場？

(11) 有相同紅球 5 個，白球 4 個，黃球 3 個，藍球 2 個，則從其中任意取出 4 球的方法有幾種？

(12) 4 男 4 女排成二列，如圖：
O O O O
O O O O
求下列之排法數：
(a)上排是男生，下排是女生。 (b)上下兩排均是男女相間隔
(c)上下左右均是男女相間隔。

(13) A,B,C,D,E 等 7 人排成一列，求 A,B,C 三人都不與 D 相鄰的排法有多少種？

(14) 甲乙丙丁戊 5 人排成一列，
(a)若甲乙丙要保持順序不變(不一定要相鄰)，則排列方法有幾種？
(b)若甲一定要排在丙丁之間，則排列方法有幾種？

(15) 下圖共 12 格(每格有編號，以表示位置固定)，今以黃色塗 3 格，紅色塗 4 格，綠色塗 2 格，其餘 3 格不塗色，請問有幾種塗法？

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

(16) 某地共有 9 個電視頻道，將其分配給 3 個新聞台、4 個綜藝台及 2 個體育台共三種類型。若同類型電視台的頻道要相鄰，而且前兩個頻道保留給體育台，則頻道的分配方式共有__________種。(2006 學科)

(17) attribute 一字，各字母排成一列，求下列的排列數：
(a)子音排奇數位，母音排偶數位 (b)母音保持 a,i,u,e 之順序
(c)子音保持 t,t,,r,b,t 之順序 (d)子音母音的順序不變

(18) 在坐標平面上自 A(−3,−2)到 B(3,4)走捷徑，求下列情形有幾種走法？
(a)所有走法有幾種？(b)過原點 (c)不經過第二象限(d)不過(1,1)及(−2,3)

(19) 0，1，2，3，4，5 等六個數字所排成的三位數中，數字不重複者，共有_____個，其中可被 3 整除的，共有__________個。

(20) 若數列 $a_1,a_2\ldots,a_k,\ldots,a_{10}$ 中每一項皆爲 1 或−1，則 $a_1+\ldots+a_k+\ldots+a_{10}$ 之值有多少種可能？(1)10 (2)11 (3) P_2^{10} (4) C_2^{10} (5)2^{10} (2010 學科)

(21) 有 6 男 4 女共 10 名學生擔任本週值日生，導師規定在本週五個上課日中，每天兩名值日生，且至少需有 1 名男生，試問本週安排值日生的方式有________種。 (90 大學社)

(22) 因乾旱水源不足自來水公司計畫在下周一至週日的 7 天中選擇 2 天停止供水。若要求停水的兩天不相連，則自來水公司共有幾種選擇方式？(2002 指定乙)

(23) 新新鞋店爲與同業進行促銷戰，推出「第二雙不用錢---買一送一」的活動。該鞋店共有八款鞋可供選擇，其價格如下：

款式	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
價格	670	670	700	700	700	800	800	800

規定所送的鞋之價格一定少於所買的價格（例如：買一個「丁」款鞋，可送甲、

乙兩款鞋之一）。若有一位新新鞋店的顧客買一送一，則該顧客所帶走的兩雙鞋，其搭配方法一共有_________種。(2006 學科)

(24) 有一個兩列三行的表格如右下圖。在六個空格中分別填入數字 1、2、3、4、5、6（不得重複），則 1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有________種。

(2010 學科)

(25) 請計算 $\sum_{k=1}^{8} C_3^{k+2} =$？

(26) 籃球員：甲乙丙丁…共 9 人，選派其中 5 人上場比賽，
(a)若甲乙丙三人中，至少選 1 人上場，則選法有幾種？
(b)若甲乙丙三人中，至多選 1 人上場，則選法有幾種？

(27) 7 男 5 女互選 5 個人爲委員
(a)任意選有幾種方法？ (b)至少有 1 女委員的選法有幾種？
(c)7 男 5 女互選 5 個人爲委員，再從中選出一個主席，
一個執行幹事的選法有幾種？
(d)若此委員會要由 3 男 2 女組成，且主席爲男生，
執行幹事爲女生之選法有幾種？

(28) 多項式$(x+y+z+w)^5$的展開式中
(a)共有幾個不同類項 (b)x^2y^2w 的係數=？(c)與 x^4y 的同形項(例如：y^4w、x^4z 等等)有幾個？ (d)x^2y^2z 的同形項(例如：x^2z^2y、y^2z^2w..等)有幾個？

(29) 三位數 ABC 中，滿足(a)C>B>A (b)A>B>C 的三位數各有多少個？

(30) 一骰子擲 3 次，第 k 次出現 a_k 點，今以 a_1、a_2、a_3 分別爲三位正整數之百位、十位、個位數字
(a)若 a_1、a_2、a_3 三數字中，恰有 2 個相同，則此三位數有幾個？
(b)若 a_1、a_2、a_3 三數全相異，且滿足 a_1 不大於 5，a_3 不小於 4，
則此種三位數有幾個？
(c)若 a_1、a_2、a_3 滿足 $a_1 \geq a_2 \geq a_3$，則此種三位數有幾個？
(d) 若 a_1、a_2、a_3 三數全相異，則此種三位數的總和等於多少？

(31) $x+y+z+t^2=22$ 的
(a)正整數解(x,y,z,t)有幾組？(b)正奇數解(x,y,z,t)有幾組？

(32) 滿足 $10 \leq x \leq y \leq z \leq 25$ 的整數(x,y,z)共有幾組？

(33) 5 種不同的酒，注入 3 個空杯子，酒不可混合，不得有空杯子，
求下列各注入法有幾種？
(1)杯子不同，且各杯的酒亦不同。 (2)杯子不同，且各杯的酒可相同。
(3)杯子相同，且各杯的酒亦不同。 (4)杯子相同，且各杯的酒可相同。

(34) 有 7 個橘子，8 個桃子(橘子與桃子各視為相同物，而且分完)
(1)任意分給甲乙丙三人有幾種方法？
(2)分給甲乙丙三人，每人至少得 1 橘子 1 桃子，有幾種方法？
(3)分給甲乙丙三人，每人至少得 1 橘子或 1 桃子，有幾種方法？]

(35) 設在一排 $n(n\geq2)$個格子中，每格各填入一個數字“0”或“1”，則任意兩個“1”都不相鄰的填法有 a_n 種。
(a) 試求出 a_2 , a_3 。(b) 試建立 a_n 遞迴關係式。(c) 求 a_7。
[提示：將所有狀況分三種：(a)第一格填 0 (b) 第一格填 1]

(36) 設方程式 $x+y\leq 2n+1$ 的非負整數解個數為 a_n，
(a)請找出數列$\langle a_n\rangle$的遞迴關係式 (b)求 a_n 的一般項通式。

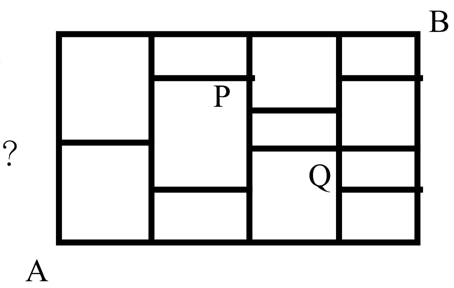
(37) 只由三個字母 a,b,c 所組成長度為 n 的字串在通訊管道上傳輸，傳輸中不得有兩個 a 連續出現在任一字串中，試求傳輸中的字串有多少個？

進階問題

(38) 在各位數字互不相同的所有四位正整數，滿足下列條件的各有多少個？
(a)偶數數字(包含 0)與奇數數字交換排列。
(b)個位數字不為 0，其反序數和原數的和為偶數。

(39) 以 245000 為最小公倍數的兩個正整數 A 與 B，
請問數對(A,B)有幾組？

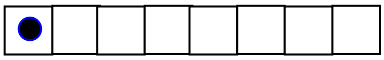
(40) 如圖，自 A 到 B，規定其行走方向為「→,↑,↓」三種，求
(a)A 到 B 有幾種走法？ (b)不經過 P 有幾種走法？
(c)經過 P 有幾種走法？ (d)不過 P 且不過 Q 有幾種走法？
(e)經過 P 且經過 Q 有幾種走法？



(41) 設 $n=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$ ，定義$\varphi(n)$為不大於 n 而且與 n 互質的正整數個數
例如：$\varphi(7)=6$，$\varphi(12)=4$ 證明：$\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdot\cdot\cdot(1-\frac{1}{p_k})$。

(42) 編號 1~6 之 6 個球滾入編號 1~6 的 6 個洞中，每洞 1 球
(a)恰有一球號與洞號相同，方法有______種。
(b)所有球號與洞號皆不相同，方法有______種。

(43) 將右圖黑棋向右移動，每次移動 1~3 格，移到最右一格。共有幾種移法？

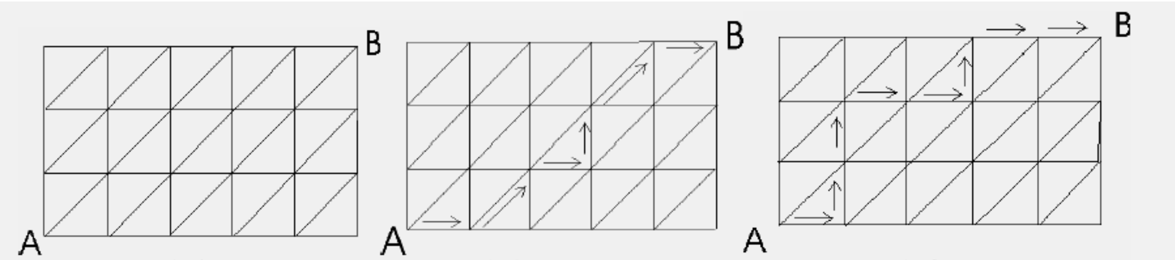


(44) A、B 兩人競選，選舉得票數共 11 張，唱票時，A 一直保持領先，且最後 A 恰以多一票獲勝，則唱票的情形有多少種？

(45) 圖一為 3×5 的棋盤格，其中有水平與垂直線段，也有右上與左下方向的斜線。某人要走「捷徑」從 A 到 B。走捷徑的規則是：只能往上、往右，或往右上走，如圖二與圖三各表示一種走法。

(a)在所有從 A 到 B 的捷徑走法中，恰包含兩段斜線(如圖二)的走法有幾種？

(b)從 A 到 B 共有幾種走捷徑的方法？



圖一　圖二　圖三

(46) 求 $xyz=360$ 之非負整數解的個數。(2004 台大電機甄試)

(47) 平面上有 11 個相異點，任意連接兩點，共可得 48 條不同的直線

(a)在這 11 點中，含 3 點以上的相異直線有幾條？

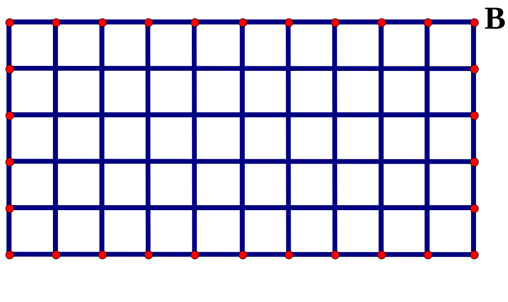
(b)在這 11 點中，任取 3 點，可決定幾個三角形？(2004 台大電機甄試)

(48) 連接正 12 邊形之任 3 個頂點，可得

(a)多少個直角三角形？

(b)多少個銳角三角形？　(c)多少個鈍角三角形？

(49) 如右圖，棋盤式街道中由 A 到 B 走捷徑，恰轉彎 4 次的走法有幾種？



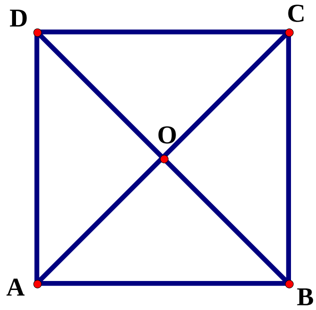
(50) 如圖，O 為正方形 ABCD 的中心，工程師設計出一個機器跳蚤，設計者想要讓跳蚤在圖中諸點跳動，每次都可以跳到相鄰的任一點，例如，由 A 點可以跳到 O、B、D 中任一點。設從 O 點開始，經 n 次跳動返回 O 點的路線有 a_n 種，而經 n 次跳動到達 A 點的路線有 b_n 種(其實到達 B、C、D 點的路線都有 b_n 種)。

(1)試求 a_n 與 b_n 的關係式。

(2)建立 a_n 的遞迴關係式。

(3)試求 a_n 的一般式。

(4)試證明：$a_n=2^n F_n$，其中 $\{F_n\}$ 為費式數列(Fibonacci 數列)



綜合練習解答

(1)　4

(2)　25

(3)　12[因爲圓 C 上的點 P 與原點 O 距離$\overline{OP}$的最大值爲$\sqrt{113}+3$，最小值爲$\sqrt{113}-3$，因此$\overline{OP}$=8,9,10,11,12,13，而這樣的$\overline{OP}$均各有 2 點，因此共有 2×6=12 點]

(4)　25 [分成 x=0，$|x|$=1，$|x|$=2,$|x|$=3 分別去討論(x,y)均爲整數的點有幾個]

(5)　36　[提示：可設三邊長爲 $a=11\geq b\geq c$，因爲 $2b\geq b+c>a=11$ $\Rightarrow 11\geq b\geq 5.5$ 因此可討論 b=6,7…,11，符合條件的(a,b,c)各有 1,3,….,11，因此共有 1+3+5+…+11=36 個]

(6)　420
[提示：塗顏色的順序可爲 A,B,C,D,E 你可以利用樹狀圖，去討論塗法。或是考慮塗法的順序 A,B,D,C,E 當 B,D 同色$\Rightarrow 5\times4\times3^2$ 當 B,D 異色$\Rightarrow 5\times4\times3\times2\times2$]

(7)　189 個[提示：可分成有 1 個 0、2 個 0 這兩種情形來計數]

(8)　888 個 [提示：含有 1 個 5 共有 $6^3\times4$，含有 3 個 5 共有 6×4]

(9)　144[提示：設有理根爲$\frac{a}{b}$，則 a,b 互質，且 $a|361=19^2$，$b|360=2^3\times3^2\times5$，因此去討論$(a,b)$有幾組]

(10)　7，15
[說明：單敗淘汰，7 隊被淘汰；雙敗淘汰，7 隊被淘汰，共比了 14 場，而冠軍隊至多敗一場，因此至多比賽 15 場]

(11)　30
[提示：利用顏色的同異來分類，可分成 4 同$\Rightarrow$2 種，3 同 1 異.3×3=9 種，2 同 2 同$\frac{4\times3}{2}$=6 種，2 同 2 異$\Rightarrow$4×3=12 種，4 異$\Rightarrow$1 種]

(12)　(a)4！×4！=576 (b)$(P^4{}_2)^2\times(P^2{}_2)^2\times4=2304(c)P^4{}_4\times P^4{}_4\times2=1152$

(13)　1440
[提示:(a)全−(AD 相鄰或 BD 相鄰或 CD 相鄰)(b)D 排首或排尾且與 E,F,G 之一相鄰=3×5！×2=720，D 插在 E,F,G 之間的排法有 $P^3{}_2\times5!=720$]

(14)　(a)20 (b)40

(15)　$\frac{12!}{2!3!4!3!}=277200$
[提示：將 YYYRRRRGG×××排成一列再與 1,2,..,12 一一對應，就代表所有的塗法]

(16)　576

(17)　(a)480 (b)2520 (c)3024 (d)126
[提示：(a)$\frac{5!}{3!}\times4!=480$ (b)$\frac{9!}{3!4!}=2520$ (c)$\frac{9!}{5!}=3024$ (d)$\frac{9!}{5!4!}=126$]

(18)　(a)924 (b)350 (c)462 (d)538[提示：(3)全部−(經過第二象限)]

(19)　100；40
[提示：(1)首位數可從 1，2，3，4，5 中取一個數，第二、三位數從剩下 5 個數取兩數排列，共有 $5\cdot P^5{}_2=100$ 種排法(2)在(1)中可被 3 整除的三位數，必須考慮三個數字和爲 3 的倍數的情況，依含 0 與不含 0 分類如下：

含 0 的三個數：(0，1，2)，(0，1，5)，(0，2，4)，(0，4，5)不含 0 的三個數：(1，2，3)，(1，3，5)，(2，3，4)，(3，4，5)含 0 的三個數，排成三位數有 4 種方法，不含 0 的有 3！＝6 種方法，所以，三位數中，被 3 整除的有 4×4+4×6＝40 個]

(20) (2)

(21) 43200

(22) 15

(23) 21

(24) 432

(25) $330=C_4^{11}$

(26) (a)120 (b)51 [提示：(a)$C^3{}_1C^6{}_4+C^3{}_2C^6{}_3+C^3{}_3C^6{}_2$ (b)$C^3{}_1C^6{}_4+C^3{}_0C^6{}_5$]

(27) (a)792 (b)771 (c)15840 (d)210 [提示：(c)$C^{12}{}_5\cdot P^5{}_2$ (d)$C^7{}_3C^5{}_2C_1{}^3C^2{}_1$]

(28) (a)56 (b)30 (c)12 (d)12

(29) (a)84 (b)120 [提示：(a)滿足 C>B>A 的三位數，因爲 A 不能爲 0，因此相當於自 1~9 中選出 3 個數的組合。(b)滿足 A>B>C 的三位數，因爲 C 可爲 0，因此相當於自 1~10 中選出 3 個數的組合。]

(30) (a)90 (b)52 (c)56 (d)46620

[提示：

(a)$C^6{}_2\times2\times\dfrac{3!}{2!}=90$ (b)全部情形$-[a_1>5$ 或 $a_3<4]=P^6{}_3-[1\times P_2{}^5+3\times P^5{}_2-4\times3]=52$

(c)$H^6{}_3=56$(d)$(1+2+3+4+5+6)\times(10^2+10+1)\times20=46620$]

(31) (a)402 (b)76

(32) 816[提示：(x,y,z)整數解的個數相當於從 10,11,…,25 這 16 個數中，重複選取 3 個的組合數]

(33) (1)60 (2)125 (3)10 (4)35

(34) (1)1620 (2)315 (3)1407[提示：(3)可考慮反面來計算]

(35) (a) $\begin{cases}a_2=3\\a_3=5\end{cases}$ 。(b) $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ ，$(n\geq3)$。(c) $a_7=34$ 。

(36) (a)$a_n=a_{n-1}+(4n+3)$，$n\geq2$ (b)$a_n=(2n+3)(n+1)$

(37) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n$

(38) (a)720 (b)1792

(39) 315

[提示：$245000=2^3\times5^4\times7^2$，設 $A=2^a\times5^b\times7^c$，$B=2^\alpha\times5^\beta\times7^\gamma$，討論 $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ 有幾種情形，就可以得知(A,B)的數對有幾組，因爲(a,α)有 2×4−1=7 種情形((3,0)、(3,1)、(3,2)、(0,3)、(1,3)、(2,3)、(3,3))，同理(b,β)有 2×5−1=9 種情形，(c,γ)有 2×3−1=5 種，因此數對(A,B)有 7×9×5=315 組]

(40) (a)240 (b)105 (c)135 (d)30 (e)93

[提示：注意，整過問題是不經過某一點的走法比較容易算，(e)先計算過 P 或過 Q 的走法=240−30=210，故經過 P 且經過 Q 的走法有(135+168)−210=93 種]

(41) 可以設 A_i 爲 1~n 中 p_i 的倍數所成的集合(i=1,2,..,k)，

$\varphi(n)=n(A_1{}'\cap A_2{}'\cap\ldots\cap A_n{}')$，再利用排容原理計算。

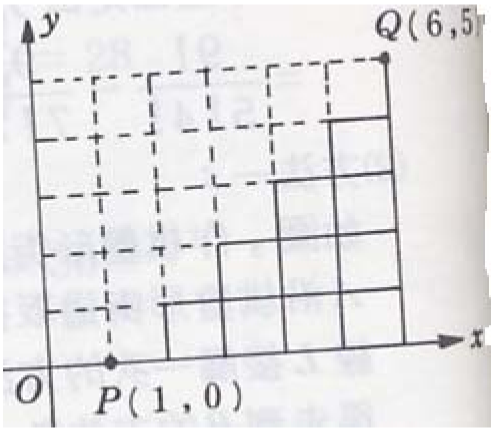
(42) (a)264 (b)265

[提示：(a)6×(其他 5 個號碼與洞的號碼不同)=6×44=264

(b)6！−6×5！+15×4！−20×3！+15×2！−6×1！+0！=265]

(43) 44 [提示：設每次移動 1 格 x 次，移動 2 格 y 次，移動 3 格 z 次，依題意可得 $x+2y+3z=7$]

(44) 42 [提示：將 A 的得票數與 B 的得票數分別記在 x 軸，y 軸，唱票時 A 一直保持領先，故第一票爲 A 所得，即自 P(1,0)出發，第二票必是 A 獲得，故由(1,0)移動到(2,0)，令 A、B 的得票數分別爲 a,b，則形成點(a,b)，其中 $a>b$。最後 A 恰以一票獲勝，因此終點爲 Q(6,5)，即自 P 點開始沿實線取捷徑走到 Q 點的方法，會與唱票時，A 一直保持領先，且最後 A 恰以多一票獲勝的唱票情
形一一對應。]



(45) (a)60 (b)231

[提示：(a)每一種走法 1–1 對應 $3\rightarrow 2\nearrow 1\uparrow$的一種排法，故有$\dfrac{6!}{3!2!}$種

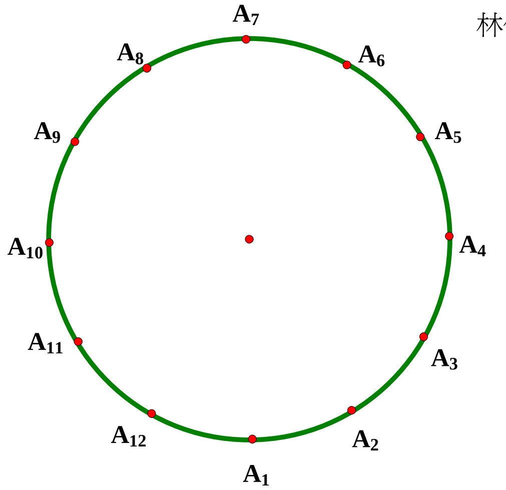
(b)分成 0 次右上：$\dfrac{8!}{5!3!}$，1 次右上：$\dfrac{7!}{4!2!}$，2 次右上$\dfrac{6!}{3!2!}$，

3 次右上 $\dfrac{5!}{2!3!}$。]

(46) 180[提示：設 $x=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$，$y=2^m\cdot 3^n\cdot 5^l$，$z=2^r\cdot 3^s\cdot 5^t$，因爲 $xyz=360$ 所以 $a+m+r=3$，$b+n+s=2$，$c+l+t=1\Rightarrow xyz=360$ 之非負整數解的個數 $=H^3{}_3\cdot H^3{}_2\cdot H^3{}_1=180$]

(47) (a)2 (b)160 [提示：(a)若 11 個相異點中，任三點不共線，則可決定 $C^{11}{}_2=55$ 條直線，因爲只決定了 48 條直線，則可知少了 7 條直線，另外，若有一直線上有三點，則直線會減少 $C^3{}_2-1=2$ 條，若有一直線上有四點，則直線會減少 $C^4{}_2-1=5$ 條，若有一直線上有五點，則直線會減少 $C^5{}_2-1=9$ 條，此不可能，所以在這 11 點中有一條直線恰有 3 點，令一直線恰有 4 點。(b)$C^{11}{}_3-C^3{}_3-C^4{}_3=160$]

(48) (a)60 (b)40 (c)120 [提示：(a)任選一條直徑 A_1A_7，可得 10 個直角三角形，所以有 $6\times 10=60$ 個直角三角形。(b)取 A_1 爲頂點，以 A_1A_2 爲邊，形成 0 個銳角三角形，以 A_1A_3 爲邊，形成 1 個銳角三角形($\Delta A_1A_3A_8$)，以 A_1A_4 爲邊，形成 2 個銳角三角形($\Delta A_1A_4A_8$、$\Delta A_1A_4A_9$)，以 A_1A_5 爲邊，形成 3 個銳角三角形，以 A_1A_6 爲邊，形成 4 個銳角三角形($\Delta A_1A_3A_8$)，所以取 A_1 爲頂點，可形成(1+2+3+4)=10 個銳角三角形，共有 $10\times 12\times\frac{1}{3}=40$ 個銳角三角形。(c)$C^{12}{}_3-60-40=120$。]



(49) 198 [提示：從 A 到 B 走捷徑，相當於 10 個→5 個↑
，而轉彎 4 次代表→↑有 4 個，因此可分成→↑→↑→或↑→↑→↑兩種，
(1) →↑→↑→：剩下 7 個→要排在→的位置，而 3 個↑要排在↑的位置，因此有 $H^3{}_7 \times H^2{}_3$ 種；同理↑→↑→↑有 $H^3{}_2 \times H_8{}^2$ 種]

(50) (1)$a_n=4b_{n-1}$，$b_n=a_{n-1}+2b_{n-1}$ (2)$a_n=2a_{n-1}+4a_{n-2}$ $(n\geq 3)$
(3)$a_n=(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}})(1+\sqrt{5})^n+(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}})(1-\sqrt{5})^n$(4)略