第二十六單元　平面向量二

(甲)直線的參數式

我們都知道坐標平面上可以用二元一次方程式來表示直線，只要能知道斜率與直線上一點，就可以求得直線的方程式(鉛直線例外)。斜率代表直線的傾斜程度，換句話說，斜率描述了「**直線的方向**」，因為向量同時具有大小與方向，所以可以用向量來描述直線的方向。

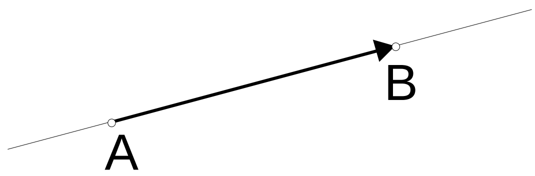
(1)直線的方向向量：

若一個有向線段的始點與終點是一直線上的相異兩點，則此有向線段所表示的向量稱為該直線的一個**方向向量**。

如下圖所示，$\overrightarrow{AB}$、$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA}$、$\frac{-3}{4}\overrightarrow{BA}$、….都是L的方向向量，因此方向向量並不是只有一個，它們都是互相平行的向量，但不可以是零向量。

因此直線L上有兩相異點A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)，

則$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$為直線L的一個方向向量。



(2)直線的參數式：

在坐標平面上，斜率描述直線的方向，例如：斜率=5 的直線會有無限多條，但是它們的方向是一致，彼此互相平行。若指定直線要通過點(4,–3)，則直線就可以確定了，其方程式為 $y-(-3)=5(x-4)$。

同樣的，直線的方向向量代表直線的方向，例如：方向向量 $\vec{v}=(2,3)$的直線會有無限多條，但是它們的方向是一致，彼此互相平行。若指定直線要通過點A(–1,2)，則直線就可以確定了。

如何來表示方向向量 $\vec{v}=(2,3)$，又過點A(–1,2)的直線L呢？

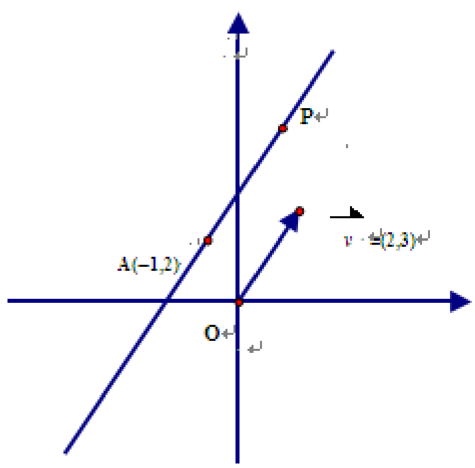
設P(x,y)為直線L上的任意點

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\,//\,\vec{v}$，$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=t\vec{v}$，$t$為實數

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\vec{v}$，$t$為實數 (O為原點)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{v}$，$t$為實數

$\Leftrightarrow (x,y)=(-1,2)+t(2,3) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+3t \end{cases}$。



因此直線L上的任意點P的坐標都可以寫成P(−1+2t,2+3t)。
反過來說，指定一個實數t_0值時，P點坐標爲P(−1+2t_0,2+3t_0)

$\overrightarrow{AP}=(2t_0,3t_0)=t_0(2,3)=t_0\overrightarrow{v}$，即$\overrightarrow{AP}\,//\,\overrightarrow{v}$，故P點會在直線L上。

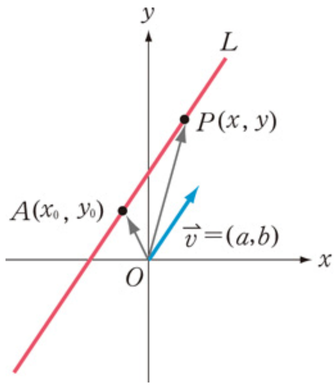
由上面的討論，直線 L 上的任意點 P 的坐標都可以寫成 P(−1+2t,2+3t)，而坐標形如(−1+2t,2+3t)的點，都會在直線 L 上，所以我們用$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+3t \end{cases}$的形式來表示直線 L，其中 t 爲任意實數。

一般而言，

若直線L通過點A(x_0,y_0)且方向向量$\overrightarrow{v}=(a,b)$，那麼直線L的如何表示呢？

若 P(x,y)爲 L 上任意點，則 L 上的每一點都可表成$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$，$t$ 爲一實數，

這個式子稱爲 L 的**參數式**。
證明：
設P(x,y)爲直線L上任一點，



$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\,//\,\overrightarrow{v}$ $\quad\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{v}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{v}$，$t$爲實數 (O爲原點)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{v}$，$t$爲實數 $\Leftrightarrow (x,y)=(x_0,y_0)+t(a,b)$

所以$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$，$t$爲實數。(其中$t$爲參數，也可用其它文字，如$s$,$r$….等)

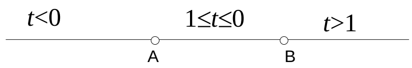
結論：
(a)在坐標平面上，一直線上的點P(x,y)滿足一個方程式$ax+by+c=0$，而方程式的解皆爲此直線上的點。這是直線用方程式表示的形式。
(b)用參數式表示直線，重點在於用t表示直線的點坐標。
換句話說，直線上任一點P(x,y)皆可找到一個實數t使得$x=x_0+at$，$y=y_0+bt$；另一方面，當t代入任何實數後，形成的點構成一條直線。

(c)直線L的方向向量$\overrightarrow{v}=(a,b)$，L過點P(x_0,y_0)，則L的直線參數式$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$。

討論：

(a)上面的參數式並不是唯一的，當我們取$\overrightarrow{BA}$爲方向向量時，參數式的形式就改變了，但仍然是L這條直線。

(b)當 $0\le t\le 1$，則A−P−B 當$t<0$ 時，則P−A−B 當$t>1$ 時，則A−B−P。



(3)直線的一般式與參數式：

(a)直線L的參數式$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$中，

若$ab\neq 0$，消去參數t，即可得到方程式$y-y_0=\dfrac{b}{a}(x-x_0)$。

若$a=0$，則方程式爲$x=x_0$，若$b=0$，則方程式爲$y=y_0$。

(b)直線L的一般式$ax+by+c=0$ 中，任取二相異點A,B，再找出參數式。

(c)直線L的參數式$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$，$(a\neq 0)$，斜率爲$\dfrac{b}{a}$。

[例題1] 若一直線 L 通過 A(3,5)、B(−2,6)兩點，則

(1)用參數式表示 $\overleftrightarrow{AB}$ 。(2)用參數式表示$\overline{AB}$。(3)試求射線 $\overrightarrow{AB}$ 的參數式。

結論：

設$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$爲相異兩點，過A,B兩點的直線之參數式爲

$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}$ $t\in R$

[例題2] 某運動質點在坐標平面上從$P_0(2,-2)$作等速直線運動，當時間$t=1$秒時，它的位置在$P_1(5,2)$。

(1) 試寫出該質點運動軌跡的參數式。

(2) 當時間$t=3$秒時，該質點的位置在點P_3，試求P_3的坐標。(3) 若平面有一點$Q(17,18)$，且此質點持續運動，試問此質點會經過Q嗎？

[解法]：

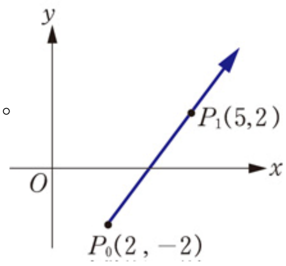
(1) 此質點沿著$\overrightarrow{P_0P_1}$的方向在直線P_0P_1上運動。

因$P_0(2,-2)$，$P_1(5,2)$，

故$\overrightarrow{P_0P_1}=(3,4)$。

所以此質點運動軌跡的參數式爲

$\begin{cases} x=2+3t, \\ y=-2+4t, \end{cases}$ $t\ge 0$。它的軌跡是一條射線$\overrightarrow{P_0P_1}$，如右圖所示。



(2) 當$t=3$秒時，$x=2+3\times 3=11$，$y=-2+4\times 3=10$，

故P_3的坐標是$(11,10)$。

(3) $x=17$，$y=18$代入參數式，得$t=5$，因該質點持續運動，故會經過Q。

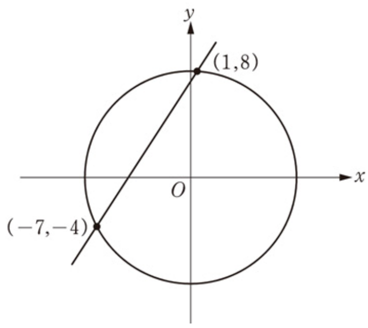
[例題3] 設直線L過點$A(-5,-1)$，且方向向量爲$(2,3)$。

(1) 試求直線L的參數式。

(2) 試求直線L與圓C：$x^2+y^2=65$的交點坐標。

[解法]：

(1) 直線L的參數式爲$\begin{cases} x=-5+2t \\ y=-1+3t, \end{cases}$ (t爲實數)。



(2) 將L上的點$x=-5+2t$，$y=-1+3t$

代入$x^2+y^2=65$，

得$(-5+2t)^2+(-1+3t)^2=65$，

整理得$t^2-2t-3=0$，

$(t-3)(t+1)=0$，故$t=3$或-1，

於是直線L與圓C交於兩點$(1,8)$與$(-7,-4)$，如圖所示。

(練習1) 設A(3,5)，B(–2,–4)，C(3,–1)，D(–1,2)爲平面上四個點，試求

(1)經過點A而與向量$\overrightarrow{CD}$平行的直線方程式爲_________。

(2)經過點D而與向量$\overrightarrow{AB}$平行的直線方程式爲____________。

(3)直線AB的參數方程式爲__________，線段$\overline{AB}$的參數方程式爲_________。

Ans：(1)$\begin{cases} x=3-4t \\ y=5+3t \end{cases}$ $t\in R$ (2)$\begin{cases} x=-1-5t \\ 2-9t \end{cases}$ $t\in R$

(3)直線$\begin{cases} x=-2+5t \\ y=-4+9t \end{cases}$ $t\in R$，線段$\begin{cases} x=-2+5t \\ y=-4+9t \end{cases}$ $0\le t\le 1$

(練習2) 設 A(3,0)，B(–1,2)，L：$\begin{cases} x=3-4t \\ y=2t \end{cases}$ 則下列何者爲真？

(A)若 $t\in R$，則 L 表直線$\overleftrightarrow{AB}$ (B)若 $t\ge 0$，則 L 表射線 BA (C)若 $t\le 1$，則 L

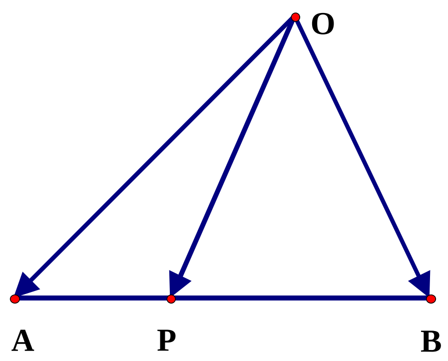
表射線 AB (D)若 $0\le t\le 1$，則 L 表線段$\overline{AB}$(E)若 $t\le 0$，則 L 表射線 AB 的相反射線。Ans：(A)(D)(E)

(練習3) 寫出下列直線 L 的參數方程式：
(1)L 的方程式是 $2x-y-5=0$。
(2)L 通過$(-1,-2)$，且斜率是-3。
Ans：(1)$\begin{cases}x=t\\y=-5+2t\end{cases}$ $t\in R$ (2)$\begin{cases}x=-1+t\\y=-2-3t\end{cases}$ $t\in R$

(練習4) 求在一直線 L：$x-2y+3=0$ 上，而與點 A$(-1,2)$的距離最小的點 P 之坐標爲何？並求此最小距離。 Ans：$(\frac{-3}{5},\frac{6}{5})$

(乙)分點公式與三點共線

(1)分點公式：
爲了解決平面幾何上共線的問題，我們進一步去探討當 A、B、P 三點共線時，如何利用向量來描述這個情形？
例題：



設線段$\overline{AB}$上有一點P且滿足$\overline{AP}$：$\overline{PB}$=3：5，

若$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中O爲任意點，求$x,y$的值。

[解法一]：

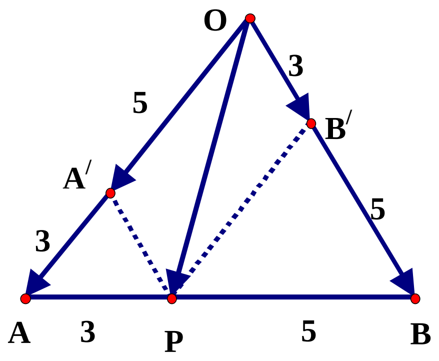
因爲$\overline{AP}$：$\overline{PB}$=3：5，所以$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{OA}-\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}=(1-\frac{3}{8})\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$

$=\frac{5}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$

因爲$\overrightarrow{OP}=\frac{5}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$，所以$x=\frac{5}{8},y=\frac{3}{8}$。



[解法二]：

如右圖，過P分別做$\overline{OB}$、$\overline{OA}$的平行線，交

$\overline{OA}$、$\overline{OB}$於A/、B/，根據向量加法的定義

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$

因為$\overline{AP}:\overline{PB}=3:5$

所以$\overline{OA'}:\overline{OA}=5:3$，$\overline{OB'}:\overline{OB}=3:5$

故$\overrightarrow{OA'}=\frac{5}{8}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$。

因此可得$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\frac{5}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$，所以$x=\frac{5}{8},y=\frac{3}{8}$。

利用例題的方法，我們可以導出一般的情形：

分點公式：
設點P在線段AB上，且AP：PB=m：n，則對任一點O
恆有$\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$。

[證明]：

設 O 為任意點，若線段$\overline{AB}$上有一點 P 且滿足$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，

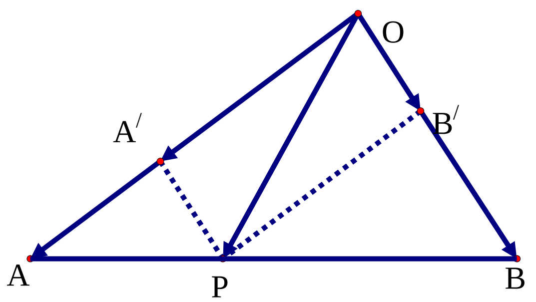
則$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{OA}-\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$

$=(1-\frac{m}{m+n})\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$

$=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$



討論：

(a)分點公式中O為任意點，如令O=A，則$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$，
這也是一個很好用的分點公式。

(b)根據上面的圖形，可知$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$

(c)根據係數積的定義，$\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AP}$，故$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，且$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{m}{m+n}$，

$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{AP}$同向，故可知$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$。

線段上的三點，知道其線段長度比，彼此形成的向量就可以互相表示。

(2)三點共線：
設A,B,P三點共線的充要條件為能找到二數α,β，而且$\alpha+\beta=1$，

使得$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$成立。

[證明]：

(⇒)因為A,B,P三點共線，所以可找到一個實數t，使得$\overrightarrow{AP}=t\cdot\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}=t(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})$

$\Rightarrow\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

因此取$\alpha=1-t$，$\beta=t$，$\alpha+\beta=1\Rightarrow\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$

(⇐)因為$\alpha+\beta=1$，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$

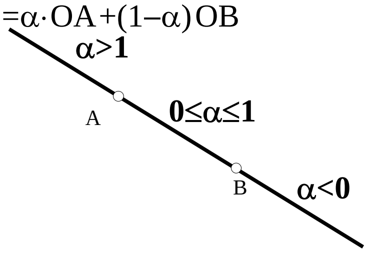
所以$\overrightarrow{OP}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}=(1-\beta)\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}=\beta(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})$

$\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\beta\cdot\overrightarrow{AB}\Rightarrow$A,B,P三點共線。

討論：

設P點在$\overleftrightarrow{AB}$上，根據(2)的結論，可找到α，β使得$\overrightarrow{OP}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}$



①$0\le\alpha\le1$，則P在線段AB上

②$\alpha>1$，則P–A–B

③$\alpha<0$，則A–B–P

④$\alpha=0$，則P=B，$\alpha=1$，則P=A

[例題4] 直線AB上有一點P，滿足AP：PB=3：2，O為任一點，

若$\overrightarrow{OP}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}$，則請問數對$(x,y)$=？Ans：$(x,y)=(\frac{2}{5},\frac{3}{5})$或$(-2,3)$

[例題5] (分點公式與長度)

設ΔABC 中，$\overline{AB}=6$,$\overline{AC}=4$,$\angle BAC=60°$，D 在$\overline{BC}$上，且$\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BC}$，則$\overline{AD}$=？

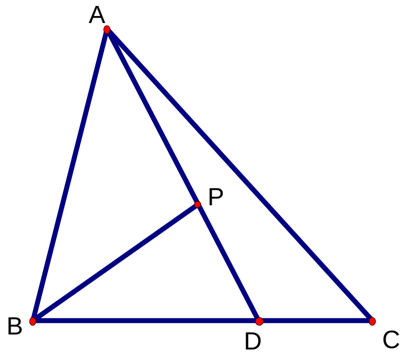
Ans：$\frac{4\sqrt{13}}{3}$

[例題6] (分點公式與三點共線)

設ΔABC中有一點P，且滿足 $5\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，設直線AP與$\overline{BC}$交於D點，請求出下列二小題：

(1)$\dfrac{BD}{DC}=$？　(2)$\dfrac{\Delta PBD}{\Delta ABC}=$？

Ans：(1)2 (2)$\dfrac{4}{15}$

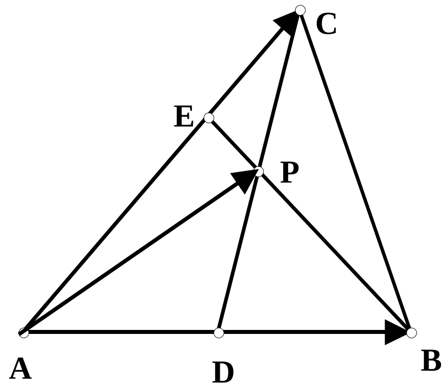


[例題7] (分點公式與線段比例)

ΔABC中，D是$\overline{AB}$中點，E點在$\overline{AC}$上，且$\overline{AE}$：$\overline{EC}$=2：1，$\overline{CD}$與$\overline{BE}$交於P，

(1)設$\overrightarrow{AP}=x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{AC}$，求$x,y$。(2)求BP：PE　(3)求DP：PC

Ans：(1)$x=\dfrac{1}{4}$,$y=\dfrac{1}{2}$ (2)3：1 (3)1：1



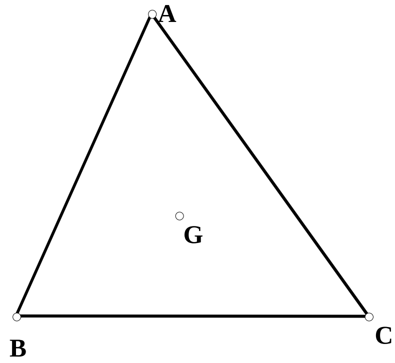
[例題8] (向量與重心)

ΔABC中，O爲任意點

(1)若G爲ΔABC的重心，試證：$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$。

(2)證明：$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$。

(3)試證：G爲ΔABC的重心 $\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$。



(練習5) 設點 P 在直線 AB 上，且$\overline{AP}$：$\overline{AB}$＝4：11，若$\overrightarrow{PA}=\gamma\,\overrightarrow{PB}$，則$\gamma$ =__________。Ans：$\frac{-4}{7}$或$\frac{4}{15}$

(練習6) 若A、B、C三點共線，且 $5\overrightarrow{OB}=(2t-1)\overrightarrow{OA}+(3t-4)\overrightarrow{OC}$，求實數$t$的值。 Ans：$t$=2

(練習7) ΔABC中，D在$\overline{AB}$上且$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{3}{2}$，E在$\overline{AC}$上且$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{2}{5}$，已知P爲$\overline{BE}$與$\overline{CD}$的交點，且$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求

(1)x,y之值。 (2) $\frac{\overline{BP}}{\overline{PE}}$之值。Ans：(1)$x=\frac{15}{29},y=\frac{4}{29}$ (2)$\frac{14}{15}$

(練習8) O,A,B三點不共線，P點在直線AB上，但不在線段$\overline{AB}$上，且$\overline{AP}$：$\overline{BP}$=5：2，設$\overrightarrow{OP}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}$，求$x,y$。Ans：$x=\frac{-2}{3},y=\frac{5}{3}$

(練習9) △ABC 中，∠A=60°，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，D 點在$\overline{BC}$上，且$\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BC}$，求$\overline{AD}$之長(以 b,c 表之)Ans：$\frac{1}{3}\sqrt{b^2+4c^2+2bc}$

(練習10) 設O,A,B三點不共線，若$\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=5\overrightarrow{OB}$，令AD與BC交於一點E，

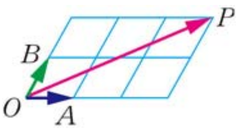
若$\overrightarrow{OE}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}$，求$x,y$。Ans：$x=\dfrac{16}{19}, y=\dfrac{15}{19}$

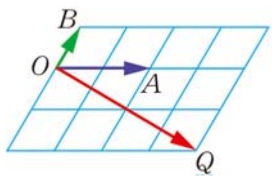
(練習11) (向量與內心)

若ΔABC中，三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$之長分別為c,a,b，I為ΔABC之內心，O為任何一點，則$\overrightarrow{OI}=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$。

(丙)向量的線性組合

上面所談的分點公式中，將向量$\overrightarrow{OP}$表示成$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$的形式。





我們稱$\overrightarrow{OP}$為$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$的**線性組合**。

不論是$\overrightarrow{OP}$或$\overrightarrow{OQ}$，都可以表成$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$的線性組合，

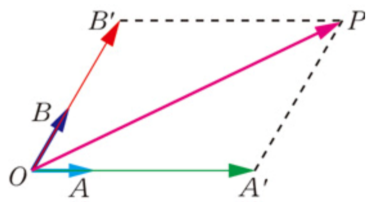
即$\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OA}+(-2)\overrightarrow{OB}$。

一般而言，若$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$是平面上不平行的兩個非零向量，那麼在此平面上任一向量$\overrightarrow{OP}$都可以唯一表成$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$的線性組合，即存在唯一的一組實數x，y，使得$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$。我們說明如下：

如右圖所示，過P點作直線OA的平行線交直線OB於B'；再過P點作直線OB的平行線交直線OA於A'，得$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA'}+y\overrightarrow{OB'}$，

令$\overrightarrow{OA'}=x\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=y\overrightarrow{OB}$，則

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$。



所以$\overrightarrow{OP}$可以表成$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$的形式。另一方面，

若$\overrightarrow{OP}=x_1\overrightarrow{OA}+y_1\overrightarrow{OB}=x_2\overrightarrow{OA}+y_2\overrightarrow{OB}$，

則$(x_1-x_2)\overrightarrow{OA}=(y_2-y_1)\overrightarrow{OB}$。

假設$x_1\neq x_2$，則得$\overrightarrow{OA}=\left(\dfrac{y_2-y_1}{x_1-x_2}\right)\overrightarrow{OB}$。

這表示“$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$平行”，此與“$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$不平行”明顯不合，所以$x_1=x_2$，於是又得$y_1=y_2$。這說明了$\overrightarrow{OP}$表示成$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$的線性組合是唯一的。

[例題9] 設$\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(-1,2)$，$\vec{c}=(3,8)$，若$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，其中$x$，$y$為實數，試求$x$，$y$之值。

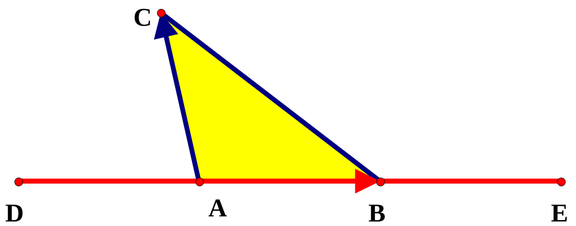
[解法]：

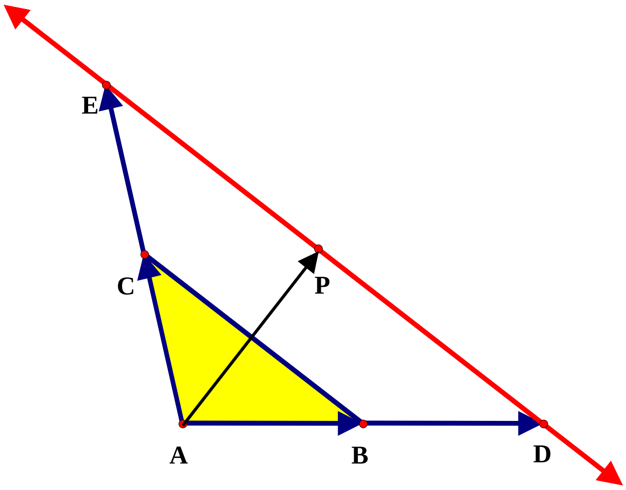
因$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，

故$(3,8)=x(2,3)+y(-1,2)=(2x-y,3x+2y)$，

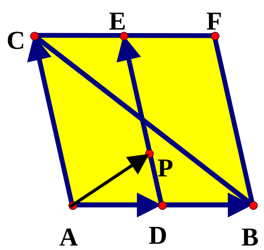
由此得$\begin{cases}2x-y=3\\3x+2y=8\end{cases}$，解得$x=2$，$y=1$。

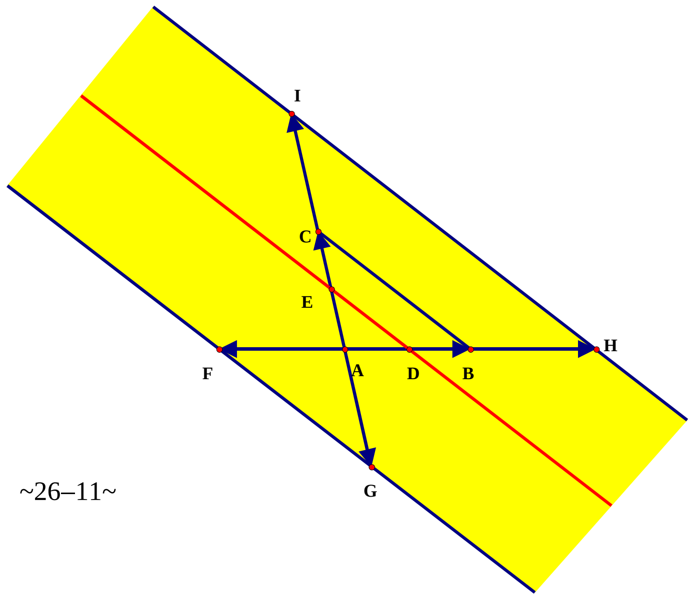
[例題10] 設P點落在ΔABC所在的平面中，且滿足$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$，
請依下列s,t的條件，求出P點所形成的圖形。
(1)$t=0$，$-1\le s\le 2$ (2)$s+t=2$ (3)$0\le s\le 1$，$0\le t\le 1$ (4)$-1<s+t<2$
[解法]：
[向量的觀點]：
(1)$t=0\Rightarrow\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}$，
$s=-1$，$\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$，$s=2$，$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}$
因為$-1\le s\le 2$，所以P點形成的圖形是$\overline{DE}$。
(2)因為$s+t=2\Rightarrow\frac{s}{2}+\frac{t}{2}=1$，$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{s}{2}\cdot(2\overrightarrow{AB})+\frac{t}{2}\cdot(2\overrightarrow{AC})$
令$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$，$2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{s}{2}\cdot(\overrightarrow{AD})+\frac{t}{2}\cdot(\overrightarrow{AE})$且$\frac{s}{2}+\frac{t}{2}=1$
根據三點共線的條件可知P點會在直線DE上。
因此P點所形成的圖形為DE直線。





(3)設$s=k$，$\overrightarrow{AP}=k\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$
$\Rightarrow k\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CE}$，此時因為 $0\le t\le 1$
所以P在$\overline{DE}$上移動，而另一方面，
k在 0 與 1 之間變動，那麼D會在$\overline{AB}$間移動，
因此P點會形成的圖形為平行四邊形與其內部。





(4)

(a)令$k=s+t(k\neq 0$，$-1<k<2)$

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{s}{k}\cdot(k\overrightarrow{AB})+\dfrac{t}{k}(k\overrightarrow{AC})$，令$k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$，$k\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$，$s'=\dfrac{s}{k}$，$t'=\dfrac{t}{k}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AP}=s'\cdot\overrightarrow{AD}+t'\cdot\overrightarrow{AE}$，$s'+t'=1$

因此P點會在直線DE上移動，

(b)當$k=0$時，$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}-s\cdot\overrightarrow{AC}=s\cdot\overrightarrow{CB}$，

P點形成的圖形爲過A點與$\overleftrightarrow{BC}$平行的直線。

(c)設$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF}$，$-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}$，$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}$，$2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}$

當k在-1到2之間變化$(k\neq 0)$時，那麼D由F變化到H，E由G變化到I

且保持$\overleftrightarrow{DE}\,//\,\overleftrightarrow{BC}$。因此P點形成一個帶狀區域。

[例題11] ΔABC所在的平面上的P點滿足$6\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

(1)試畫出P點的位置。 (2)ΔPAB、ΔPBC、ΔPCA的面積比。

Ans：(2)2：6：3

(練習12)設P點落在ΔABC所在的平面中，且滿足$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$，

請依下列s,t的條件，求出P點所形成的圖形。

(1)$s-2t=1$ (2)$-1\leq s\leq 2$，$2\leq t\leq 3$ (3)$s+t\leq 1$。

(練習13)平面上三點A(3,–2)、B(–1,1)、C(5,4)

(1)若點P滿足$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$，且$-1\leq r\leq 2$，$0\leq s\leq 2$，

則求點P所成區域之面積。

(2)若點Q滿足$\overrightarrow{AQ}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$，且$r\geq -1$，$s\geq 1$，$r+s\leq 2$

則求點Q所成區域之面積。Ans：(1)15 (2)60

(練習14)設ΔABC爲平面上的一個三角形，P爲平面上一點且$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，其中$t$爲一實數。試問下列哪一個選項爲$t$的最大範圍，使得$P$落在$\triangle ABC$的內部？

(A)$0<t<\dfrac{1}{4}$ (B)$0<t<\dfrac{1}{3}$ (C)$0<t<\dfrac{1}{2}$ (D)$0<t<\dfrac{2}{3}$ (E)$0<t<\dfrac{3}{4}$

(2004 學科能力測驗)　(D)

(丁)向量內積的應用

前面向量內積的定義 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$中，夾角不是那麼容易求，當我們將 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 用坐標表示之後，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 就很容易用坐標來表示，這是一個很重要的結果。可以使得與角度有關的幾何量都用向量內積來表示。

(1)柯西不等式：(Cauchy's Inequality)

(a)向量形式：設 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 為平面上任意二向量，則$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$，

等號成立 $\Leftrightarrow \vec{a}\,//\,\vec{b}$

證明：因為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ，θ為其夾角，$|\cos\theta|\leq 1$

所以$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$

等號成立 $\Leftrightarrow |\cos\theta|=1 \Leftrightarrow \theta=0$ 或$\pi \Leftrightarrow \vec{a}\,//\,\vec{b}$

(b)一般形式：a_1,a_2,b_1,b_2為任意四個實數，

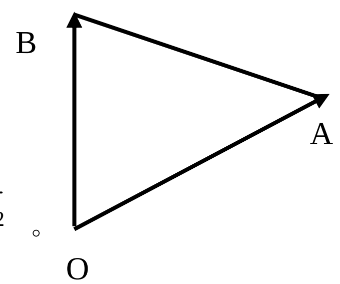
則$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$，等號成立$\Leftrightarrow(a_1,a_2)=t(b_1,b_2)$

證明：可設 $\vec{a}=(a_1,a_2)$， $\vec{b}=(b_1,b_2)$，由(a)的結果：$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\geq|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2$

所以$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$。

等號成立 $\Leftrightarrow \vec{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow (a_1,a_2)=t(b_1,b_2)$。

(2)三角形的面積：



設 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 為非平行的兩向量，

則由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張成的三角形面積為$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ 。

證明：設 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$， $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 向量的夾角為θ，

則$\Delta OAB=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

$=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

結論：

(a)由$\vec{a}$與$\vec{b}$張成的平行四邊形面積爲$\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$。

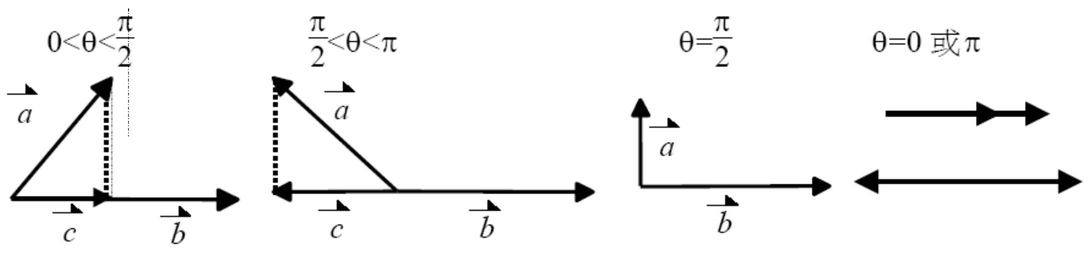
(b)ΔABC的面積爲$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$。

(3)正射影

(a)平面上已知兩個不平行的非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，平面上任一向量都可以表示成$\vec{a}$、$\vec{b}$的線性組合，若是進一步要求任一向量都表示成兩個垂直向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的線性組合，那麼如何辦到呢？接下來我們介紹正射影(垂直投影)的概念：

如下圖所示：設$\vec{a}$對$\vec{b}$之正射影爲一向量，設此向量爲$\vec{c}$

$\vec{a}$對$\vec{b}$之正射影$\vec{c}$平行$\vec{b}$，如何由$\vec{a}$, $\vec{b}$來表示$\vec{c}$呢？



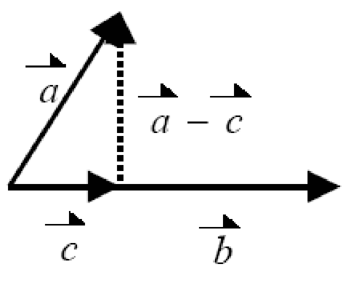
$\vec{c}$與$\vec{b}$同向　　$\vec{c}$與$\vec{b}$反向　　$\vec{c}=\vec{0}$　　$\vec{c}=\vec{a}$

[做法]：

設$\vec{c}=t\vec{b}$，因爲$(\vec{a}-\vec{c})\perp\vec{b}$，(如右圖)

所以$(\vec{a}-t\vec{b})\cdot\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0\Rightarrow t=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$ 即$\vec{c}=(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}$。

(b)正射影的另一個看法：



$\vec{c}=(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|})(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})=(|\vec{a}|\cos\theta)(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})$，

我們稱$(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|})$[或$|\vec{a}|\cos\theta$]爲$\vec{a}$對$\vec{b}$的投影量。

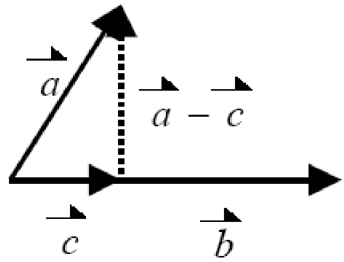
$\vec{a}$ 對 $\vec{b}$ 的正射影=($\vec{a}$ 對 $\vec{b}$ 的投影量)與($\vec{b}$ 方向單位向量)的係數積。

(c)正交向量的線性組合：

設 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\vec{c}$ ，則 $\vec{a}=\vec{c}+(\vec{a}-\vec{c})$，

如圖，其中 $\vec{c}$ 與 $\vec{b}$ 平行，$(\vec{a}-\vec{c})$與 $\vec{b}$ 垂直，

換句話說，**任一向量可分解為與某一向量(非零向量)平行及垂直的兩向量之和。**



若設 $\vec{v_1}$ 、 $\vec{v_2}$ 為兩個非零且互相垂直的向量， $\vec{w}$ 為平面上的一個向量

則 $\vec{w}=\left(\dfrac{\vec{w}\cdot\vec{v_1}}{|\vec{v_1}|^2}\right)\vec{v_1}+\left(\dfrac{\vec{w}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_2}|^2}\right)\vec{v_2}$ 。

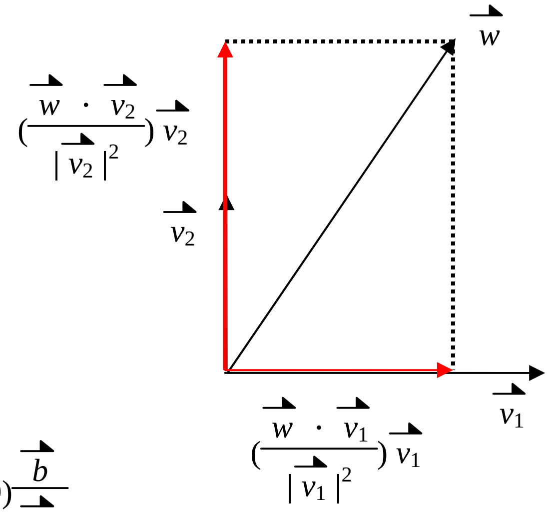
[證明]：

$\vec{w}$ 可以唯一表成$m\vec{v_1}+n\vec{v_2}$ ，

因為 $\vec{v_1}\perp\vec{v_2}$，所以$m\vec{v_1}$、$n\vec{v_2}$ 分別代表 $\vec{w}$ 在 $\vec{v_1}$ 、 $\vec{v_2}$ 上的正射影。根據正射影的公式，

可以得知$m\vec{v_1}=\left(\dfrac{\vec{w}\cdot\vec{v_1}}{|\vec{v_1}|^2}\right)\vec{v_1}$ 且$n\vec{v_2}=\left(\dfrac{\vec{w}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_2}|^2}\right)\vec{v_2}$

故 $\vec{w}=\left(\dfrac{\vec{w}\cdot\vec{v_1}}{|\vec{v_1}|^2}\right)\vec{v_1}+\left(\dfrac{\vec{w}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_2}|^2}\right)\vec{v_2}$ 。



結論：

(a) $\vec{a}$ 對 $\vec{b}$ 之正射影 $\vec{c}$ 為$\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}=(|\vec{a}|\cos\theta)\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

(b) $\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=|\vec{a}|\cos\theta$ 為 $\vec{a}$ 對 $\vec{b}$ 的投影量(投影量可正可負)

(c) 若設 $\vec{v_1}$ 、 $\vec{v_2}$ 爲兩個非零且互相垂直的向量， $\vec{w}$ 爲平面上的一個向量，

則 $\vec{w}=(\dfrac{\vec{w}\cdot\vec{v_1}}{|\vec{v_1}|^2})\vec{v_1}+(\dfrac{\vec{w}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_2}|^2})\vec{v_2}$ 。

[例題12] (1)設x,y爲實數，且 $2x+3y=13$，求x^2+y^2的最小值，並求此時x、y的值。

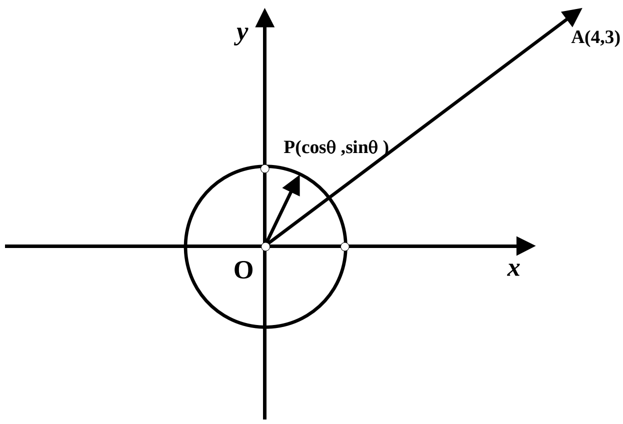
(2)設a,b爲實數，且$a^2+b^2=10$，則$a-3b$的最大值爲________，

此時(a,b)=_________；$a-3b$的最小值爲________，此時(a,b)=_________。

Ans：(1)13，$x=2$，$y=3$ (2)最大值=10，(1,–3)；最小值=–10，(–1,3)

[例題13] (三角函數的疊合)

$f(\theta)=3\sin\theta+4\cos\theta$，其中 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$，試求當θ=？時 $f(\theta)$有最大值或最小值。



[例題14] 設平面上三點A(1,1)、B(5,−2)、C(5,2)，試求

(1)$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影量。(2)$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上的正射影。

(3)C點在$\overrightarrow{AB}$上的投影點。(4)將$\overrightarrow{AC}$分解成兩個互相垂直向量的線性組合。

Ans：(1)$\frac{13}{5}$ (2)$\frac{13}{25}(4,-3)$ (3)$(\frac{77}{25},\frac{-14}{25})$ (4) $\overrightarrow{AC}=\frac{13}{25}(4,-3)+\frac{16}{25}(3,4)$

[例題15] 設$\vec{a}=(3,4)$，$\vec{v_1}=(1,2)$，$\vec{v_2}=(-2,1)$

(1)試求與$\vec{v_1}$、$\vec{v_2}$同方向的單位向量$\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$。

(2)設$\vec{a}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}$，試求實數$\alpha_1$與$\alpha_2$。

Ans：(1) $\vec{e_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$、$\vec{e_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$ (2)$\alpha_1=\frac{11\sqrt{5}}{5}$、$\alpha_2=\frac{-2\sqrt{5}}{5}$

(練習15) 設a,b為正數，求$(a+\frac{4}{b})(b+\frac{9}{a})$之最小值。

[提示]：$a=(\sqrt{a})^2$，$\frac{4}{b}=(\frac{2}{\sqrt{b}})^2$，$b=(\sqrt{b})^2$，$\frac{9}{a}=(\frac{3}{\sqrt{a}})^2$

(練習16) 設 $f(\theta)=2\sin\theta+5\cos\theta$，其中$\theta$為任意實數，當$\theta=\alpha$時，$f(\theta)$有最大值 M，請求 M、$\tan\alpha$之值。 Ans：$M=\sqrt{29}$ ，$\frac{5}{2}$

(練習17) 設x,y為實數且$x-2y=5$，求x^2+y^2之最小值為________，
此時(x,y)=____________。Ans：5，$(x,y)=(1,-2)$

(練習18) 設 A(3,8)，B(4,9)，C(1,3)試求ΔABC 的面積。Ans：$\frac{3}{2}$

(練習19) ΔABC中，若$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，ΔABC之面積為$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$？
Ans：3 或-3

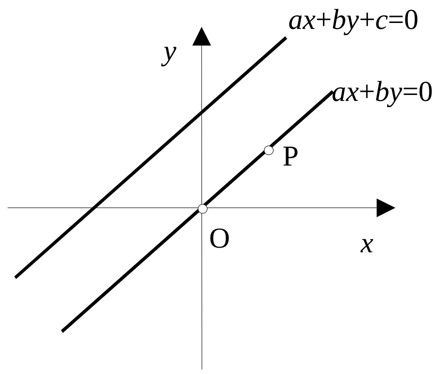
(練習20) 設$\vec{a}=(4,2)$, $\vec{b}=(-3,1)$,則求
(1) $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向的正射影。
(2) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積。
(3)將 $\vec{b}$ 分解成兩個垂直向量的線性組合。
Ans：(1)$(-2,-1)$ ，(2)10 (3) $\vec{b}=(-2,-1)+(-1,2)$。

(丙)向量內積與直線

(1)定義直線的法向量：
與直線方向向量垂直的向量稱為此直線的法向量。

$\boxed{\text{直線}\boldsymbol{ax+by+c=0}\text{ 的法向量 }\vec{n}=\boldsymbol{(a,b)}}$

考慮$ax+by+c=0$ 的平行線$ax+by=0$(若$c=0$，則為同一直線)，
兩條平行線的法向量方向相同。



設P(m,n)為直線$ax+by=0$ 上任一點，直線的方向$\overrightarrow{OP}=(m,n)$，

因為$am+bn=0$，$(a,b)\cdot(m,n)=0$，所以取向量 $\vec{n}=(a,b)$， $\vec{n}\perp\overrightarrow{OP}$，

所以可取直線L的法向量 $\vec{n}$ 為(a,b)。

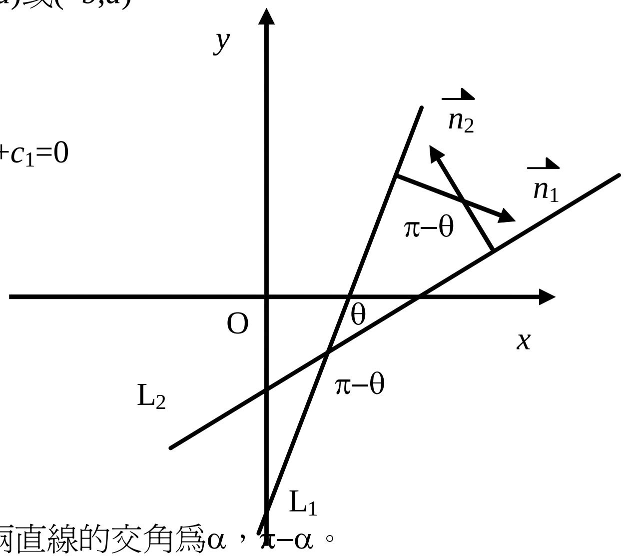
直線方程式$ax+by+c=0$ 的一個法向量 $\vec{n}=(a,b)$，所以直線的方向向量 $\vec{l}$ ，$\vec{l}\perp\vec{n}$ ，故

可取 $\vec{l}=(b,-a)$或$(-b,a)$。

結論：

(a)直線方程式$ax+by+c=0$ 的法向量 $\vec{n}$ 可取為(a,b)。

(b)直線方程式$ax+by+c=0$的方向向量$\overrightarrow{l}$可取為$(b,-a)$或$(-b,a)$。



(2)兩直線的交角：

(a)設L_1，L_2為平面上之兩相交的直線，L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$
L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$，設兩直線的法向量夾角為α，
則兩直線的交角為α，π−α。

證明：設L_1，L_2的法向量分別為$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$

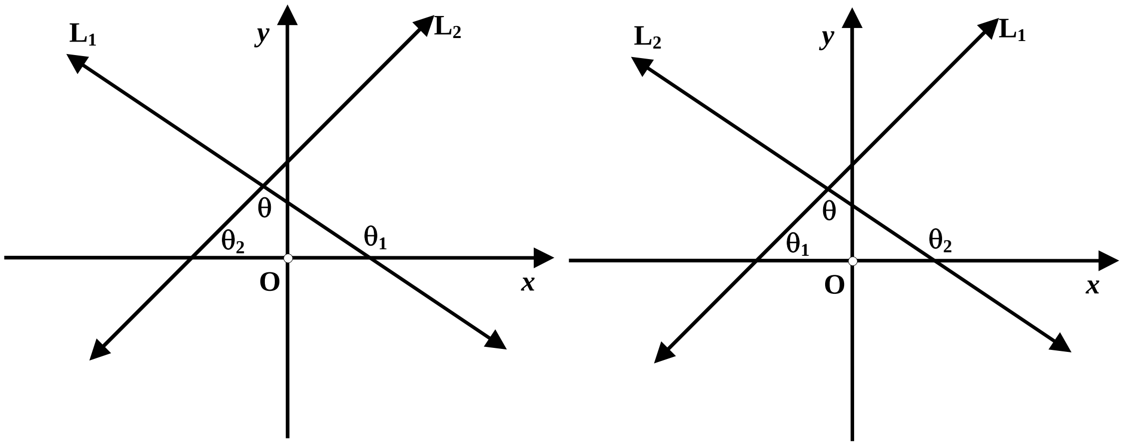
則可取$\overrightarrow{n_1}=(a_1,b_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(a_2,b_2)$，由右圖

$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$，故兩直線的交角為α，π−α。

[例題16] 求點P(−2,−6)到直線L：$4x+3y+1=0$的垂足點坐標以及點P對直線L的對稱點坐標。　Ans：(2,−3)，(6,0)

[例題17] 求過點(1,2)作一直線與L：$\sqrt{3}x-y-1=0$成30°之交角，則此直線之方程式為何？
Ans：$y-2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$，$x=1$

(練習21) 如圖，設直線L_1、L_2的斜率爲m_1、m_2，且$m_1 \cdot m_2 \neq -1$。兩直線的銳夾角爲θ，試證明：$\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$。



(練習22) 求點 P(1,−1)到直線 L：$3x+5y-32=0$ 的垂足點坐標以及點 P 對直線 L 的對稱點坐標。　Ans：(4,4)，(7,9)

(練習23) 二直線L_1：$x-2=0$，L_2：$x=-2y+6$ 所夾鈍角爲θ，則cosθ=？Ans：$\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$

(練習24) 設直線L通過點P(0,−1)且與另一直線L'：$3x+4y-12=0$ 的交角爲 45°，求直線L的方程式。　Ans：$y+1=\dfrac{1}{7}x$ ，$y+1=-7x$

(練習25) 給定直線L_1：$2x+y-8=0$，L_2：$x+2y+6=0$，求通過(0,0)且與L_1、L_2成等角之直線方程式。Ans：$y=\pm x$

(練習26) 與直線L_1：$3x-4y-7=0$，L_2：$12x-5y+6=0$ 成等角，且過點(4,5)的直線方程式。Ans：$9x-7y-1=0$ 或 $7x+9y-73=0$

(3)點到直線的距離：

一定點$P(x_0,y_0)$到一直線L：$ax+by+c=0$ 之距離爲$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

證明：

過P點作垂線交L於Q，則$\overline{PQ}$爲P點到L的距離。今在L上任取一點R(x,y)，則向量$\overrightarrow{PR}$在L的法向量上的正射影之長度爲$\overline{PQ}$。

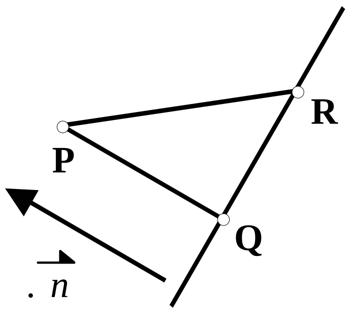
現在來計算向量$\overrightarrow{PR}$在L的法向量上的正射影之長度

$\overrightarrow{PR}=(x-x_0,y-y_0)$，考慮L的法向量$\vec{n}=(a,b)$

則$\overrightarrow{PR}$在L的法向量上的正射影之長度

$$=\left|\left(\frac{\overrightarrow{PR}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\right)\vec{n}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{PR}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\right||\vec{n}|$$

$$=\frac{|\overrightarrow{PR}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|a(x-x_0)+b(y-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



例如：平面上一點 P(2,3)到直線 $4x-3y+6=0$ 的距離。

$$d=\frac{|8-9+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{5}{5}=1$$

[討論]：

(1)平面上二平行線L_1：$ax+by+c_1=0$，L_2：$ax+by+c_2=0$，

試證明此二直線的距離爲$\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

(2)設$P(x_0,y_0)$爲平面上一點，L：$ax+by+c=0$，若P不在直線L上，

如何解釋ax_0+by_0+c的意義呢？

[例題18] 設L_1：$4x-3y-65=0$，L_2：$3x+4y-5=0$，L_3：$7x-24y+55=0$，而L_1與L_2交於C點，L_2與L_3交於A點，L_3與L_1交於B點，求

(1)∠B內角平分線。

(2)ΔABC的內心坐標。

(3)ΔABC的內切圓半徑。　Ans：(1)$9x-13y-90=0$ (2) (10,0) (3)5

[解法]：

(1)設P(x,y)爲∠B平分線上的任意點

$\Rightarrow d(\mathrm{P,L})=d(\mathrm{P,N}) \Leftrightarrow \dfrac{|4x-3y-65|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|7x-24y+55|}{\sqrt{7^2+(-24)^2}} \Leftrightarrow 5|4x-3y-65|=|7x-24y+55|$

$\Rightarrow 9x-13y-90=0$ 或 $13x+9y-375=0$(由上圖中，∠B內角平分線的斜率爲正數)

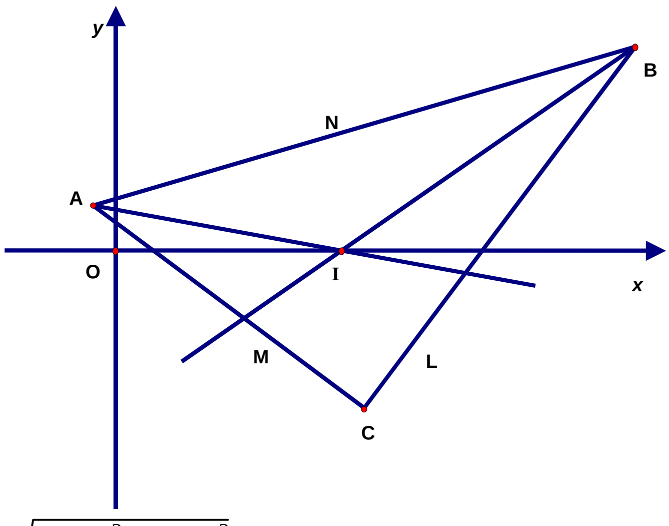
$\Rightarrow$∠B內角平分線爲 $9x-13y-90=0$。

(2)按照(1)的方法去找∠A的內角平分線

$\dfrac{|3x+4y-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|7x-24y+55|}{\sqrt{7^2+(-24)^2}} \Rightarrow$∠A的內角平分線爲 $2x+11y-20=0$

內心I爲∠A、∠B內角平分線的交點(10,0)

(3) ΔABC的內切圓半徑=I點到直線L的距離$=\dfrac{|40-65|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5$。



(練習27) 設 $4x-3y+6=0$，則求$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$ 之最小值爲何？Ans：1

(練習28) 求兩平行線 $3x-4y+2=0$ 與$-6x+8y-5=0$ 間之距離。　Ans：$\dfrac{1}{10}$

(練習29) 試求兩直線L_1：$x-2y+3=0$ 與L_2：$2x-y+4=0$ 的交角平分線方程式。
Ans：$x+y+1=0$ 或 $3x-3y+7=0$

(練習30) 求與直線 $x-y+1=0$ 平行，且距離爲$\sqrt{2}$的直線方程式。
Ans：$x-y-1=0$ 或 $x-y+3=0$

(練習31) 兩直線 $3x+4y-7=0$ 及 $4x+3y+2=0$ 所交的鈍角平分線方程式。
Ans：$x-y+9=0$

(練習32) 直線 L 過點 A(1,1)，且與點 B(−5,4)之距離爲 3，求 L 的方程式。
Ans：$y=1$ 或 $4x+3y-7=0$

(丁)向量與平面幾何

(1)基本認識

利用已學過的向量的加法、減法、係數積與內積運算，來求證平面幾何問題，重要原理說明如下：

(a)向量的加減法、係數積

①加減法⇒分解($\overrightarrow{AB}$可用任意點作分解)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ (加法分解)

$=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (減法分解)

②係數積⇒平行與三點共線

平行：$\overrightarrow{AB}=r\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$

(b)向量的內積：

夾角與內積：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

長度與內積：$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$

垂直與內積：$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(2)幾何問題可以使用向量證明的重要題。

①三角形兩邊中點連線定理。

②平行四邊形的對角線互相平分。

③平行四邊形定理⇒$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$

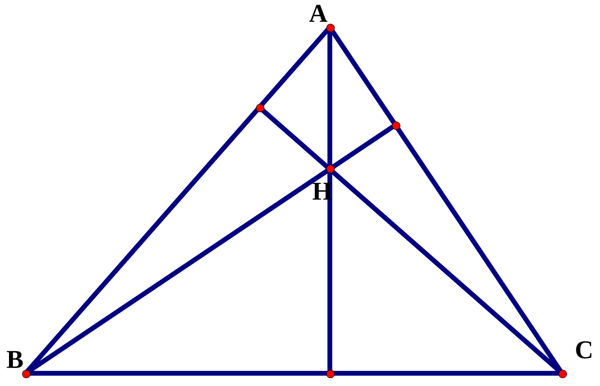
④共點問題⇒三角形之高交於一點、三中線交於一點。

以上是向量在幾何應用的幾個典型的例子，它藉著圖形的位置關係，利用向量及基本代數運算，做爲證明幾何性質的工具，在證明過程中，在證明過程中，極少需要輔助線–這是綜合幾何證明最困擾之處，也是向量證題的最大特點。

[例題19] 設 D,E 分別是△ABC 二邊$\overline{AB}$,$\overline{AC}$的中點，求證：$\overline{DE}//\overline{BC}$且$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

[例題20] 設ABCD是一個平行四邊形，試證：$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$。

[例題21] H爲△ABC平面上一點，求證若$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$，則$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$。
（即證△ABC之三高交於一點）



(練習33) (1)設ΔABC的兩中線$\overline{BE}$、$\overline{CF}$相交於G點，試求BG：BE=？
(2)根據(1)的結果，試證：三角形三邊的中線交於一點。
Ans：2：1

[提示：設ΔABC的三中線爲$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$，設$\overline{AD}$與$\overline{BE}$交於G，$\overline{AD}$與$\overline{CF}$交於G'，由(1)之結果可以證明BG：BE =BG$'$：BE。]

(練習34) 梯形 ABCD 中，設 E、F 分別爲$\overline{AB}$、$\overline{CD}$的中點，求證：$\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$。

(練習35) 設$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$爲ΔABC的三中線，試證：$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{0}$。

(練習36) 四邊形ABCD中，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{CD}$，證明對角線AC與BD互相垂直。(提示：設$\overline{BD}$的中點E，證明$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{CE}$都與$\overrightarrow{BD}$垂直，因此$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$)

綜合練習

(1) 設直線 L：$\begin{cases} x=2-4t, \\ y=1+3t, \end{cases}$ (t 為實數)，則下列選項哪些是正確的？

(A) L 的方向向量為 $(-4,3)$

(B) L 的斜率為 $-\dfrac{4}{3}$

(C) L 的一般式為 $3x+4y=10$

(D) 當 $0\le t\le 1$ 時，則在 L 上取出的線段長為 5

(E) 直線 L 的參數式亦可寫為 $\begin{cases} x=-2-4t, \\ y=4+3t, \end{cases}$ (t 為實數)。

(2) 設 L_1：$x=3-s$，$y=2s$，s 為任意實數；L_2：$x=4+t$，$y=-1+3t$，t 為任意實數，則 L_1，L_2 之交點坐標為何？

(3) 設圓 C 的圓心 C(–1,4)，直線 L：$\begin{cases} x=6+4t \\ y=3+3t \end{cases}$，($t$ 為實數)為圓 C 的切線，試求圓 C 的方程式。

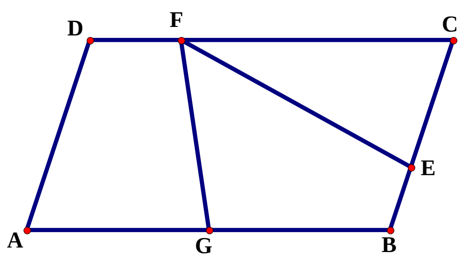
(4) 設ABC 為坐標平面上一三角形，P 為平面上一點且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，

則 $\dfrac{\Delta ABP面積}{\Delta ABC面積}$ 等於_______。

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$ (2003 學科能力測驗)

(5) 坐標平面上有一ΔABC與一點D，若 $7\overrightarrow{AD}=8\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}$，請求出 $\dfrac{\Delta ABD面積}{\Delta ABC面積}=$？

(6) 右圖中ABCD是平行四邊形，且 $\overline{AG}=\frac{1}{2}\overline{AB}$，$\overline{BE}=\frac{1}{3}\overline{BC}$，$\overline{CF}=\frac{3}{4}\overline{CD}$，設 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，請利用 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之係數積來表示 $\overrightarrow{EF}$ 、$\overrightarrow{GF}$ 。



(7) 在ΔABC中，D在$\overline{BC}$上，BD：DC=3：2，P在$\overline{AD}$上，
AP：PD=1：2，設 $\overrightarrow{OP}=l\cdot\overrightarrow{OA}+m\cdot\overrightarrow{OB}+n\cdot\overrightarrow{OC}$ (其中O為任一點)，求l,m,n之值。

(8) O、A、B、P爲平面上相異四點，下列那些情形會使得P點在直線AB上？

(A)$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (B)$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$ (C)$4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=12\overrightarrow{OP}$

(D)$5\overrightarrow{OP}=7\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$ (E)$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}$。

(9) 設$\vec{u}$、$\vec{v}$是平面上任意兩個不互相平行的非零向量，又已知

$\overrightarrow{OA}=\vec{u}+2\vec{v}$，$\overrightarrow{OB}=-\vec{u}+5\vec{v}$，$\overrightarrow{OC}=r\vec{u}+s\vec{v}$，

若A、B、C三點共線且 $2r+s=1$，求r,s之值。

(10) 平行四邊形ABCD中，E爲$\overline{AD}$上一點，且$\overline{AE}=2\overline{ED}$，F爲$\overline{AB}$上一點且$\overline{AF}=3\overline{FB}$，若$\overline{BE}$與$\overline{DF}$交於點P，且$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則(a)$(x,y)$=？ (b)DP：PF=？

(11) △ABC中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，I是△ABC的內心(三內角平分線的交點)，

(a)求分角線$\overline{AT}$的長，其中T在$\overline{BC}$上。(b)設$\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求$x,y$。

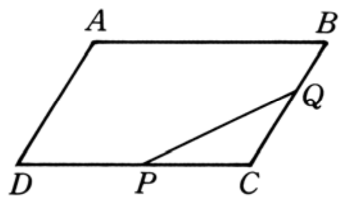
(12) 設K爲△ABC內部之一點，使得△ABK：△ACK = 3：4，

而射線$\overline{AK}$交$\overline{BC}$於D，若$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則$x$ =________，y =________。

(13) 如右圖，平行四邊形 ABCD 中，

$\overline{DP}=\overline{CP}$，$\overline{CQ}=2\overline{BQ}$，若$\overrightarrow{PQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，

則數對(x,y)=________。



(14) 在ΔABC的三邊$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$上分別取D、E、F三點，

使得$\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$。

設G爲ΔDEF的重心，$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則α=？β=？

(15) 設G爲ΔABC之重心，P爲$\overline{AG}$之中點，若$\overrightarrow{AP}=x\cdot\overrightarrow{AC}+y\cdot\overrightarrow{BG}$，

試求實數x,y的值。

(16) ΔOAB中，$\overline{OA}=2$，$\overline{OB}=3$，$\overline{AB}=4$，令$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，則

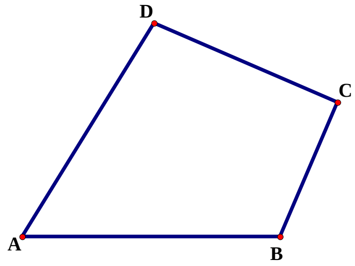
(a)$\vec{a}\cdot\vec{b}$之值爲何？ (b)自頂點O作邊$\overline{AB}$之垂線，令垂足爲H，

則$\overrightarrow{OH}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$，求α、β之值。

(17) 設P爲ΔABC內一點滿足 $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2(2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$，求ΔABP：ΔBCP：ΔACP=？

(18) 設P爲ΔABC內部一點，試證若$l\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，$l,m,n$爲正數

則ΔPBC：ΔPCA：ΔPAB=l：m：n。



(19) 如圖，在平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=1$，$\overline{CD}=\sqrt{3}$

，$\overline{BC}\perp\overline{CD}$，$\angle ABC=120°$，試求邊$\overline{AD}$=？

(20) ΔABC中，$\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AC}=2\sqrt{7}$，H爲ΔABC之垂心，

(a)試證：$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\cdot\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$。

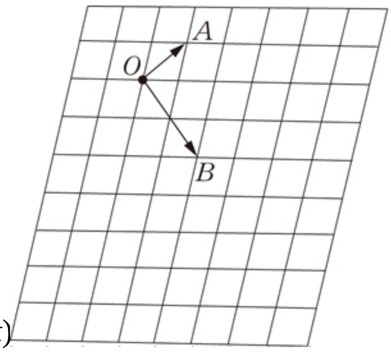
(b)若$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則$x$=？$y$=？

(21) 設單位圓O的內接ΔABC滿足 $13\overrightarrow{OA}+12\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$

(a)試證明：$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$

(b)設$\angle AOB=\alpha$，試求$\cos\alpha$的值。

(22) ΔABC中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=60°$，$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$於H，且$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，試求$x,y$之值。



(23) 右圖中，每一個小平行四邊形皆全等，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$如右圖所示，設$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 x，y 爲實數，試就下列各條件，畫出 P 點所成的圖形。

(a) $x+2y=1$。

(b) $-2\leq x\leq 1$，$1\leq y\leq 2$。

(24) 坐標平面上有相異兩點P、Q，其中P點的坐標爲(s,t)的方程式爲 $3x-4y=0$，試問下列那些選項是正確的？

(1)向量$\overrightarrow{PQ}$與向量$(3,-4)$平行

(2)線段$\overline{PQ}$的長度等於$\dfrac{|6s-8t|}{5}$

(3)Q點的坐標爲(t,s)

(4)過Q點與直線L平行之直線必過點$(-s,-t)$

(5)以O表示原點，則向量$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$與向量$\overrightarrow{PQ}$的內積爲 0　(2007 學科能力測驗)

(25) 設三點P(8,9)、Q(−2,4)、R(1,8)，試求下列各小題：

(a)$\overrightarrow{QP}$在$\overrightarrow{QR}$上的正射影爲何？

(b)P點在直線QR的投影點爲何？

(c)將$\overrightarrow{QP}$化成兩個互相垂直的向量之線性組合。

(26) 設$\vec{a}$、$\vec{b}$均非零向量，若$\vec{a}$在$\vec{b}$方向的投影量爲$|\vec{b}|$的 3 倍，而$\vec{b}$在$\vec{a}$方向的投影量爲$|\vec{a}|$的$\frac{1}{6}$倍，則$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角爲何？

(27) 已知二定點A(4,0)，B(0,−3)與一動點P($\cos\theta$,$\sin\theta$)，$0\leq\theta\leq 2\pi$ ，則內積$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$之最大值爲之最大值爲_______，最小值爲_______。

(28) 坐標平面上ΔABC三頂點坐標為$A(1,2)$、$B(-2,4)$、$C(-6,r)$，已知ΔABC面積是4，求r=？

(29) 直線L過(1,2)且與$4x+y-8=0$之夾角為$\frac{\pi}{4}$，則L的方程式為何？

(30) 一直線L通過點(9,−6)且與點(4,1)相距$5\sqrt{2}$，則L之方程式為何？

(31) P是一個動點，$0\le\theta\le\pi$，點$P(\cos\theta,\sin\theta)$至直線$\sqrt{3}x+y+1=0$之最大距離為何？最小距離為何？

(32) 一平行四邊形ABCD，其中三頂點A(3,1)、B(−2,2)、C(0,−1)，一直線L通過P(−2,−3)且平分平行四邊形ABCD的面積，則L的方程式為何？

(33) 試證：$\vec{a}\perp\vec{b}$的充要條件為$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$。
(回想畢氏定理與其逆定理)

(34) 試用向量的觀點證明：半圓內之圓周角為一直角。

(35) 證明：平行四邊形之對角線互相垂直 $\Leftrightarrow$ 該平行四邊形為一菱形。

(36) 設$\overline{AD}$為ΔABC中，$\overline{BC}$上的中線，試證：$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2$。

(37) 設圓O：$x^2+y^2=r^2$，點$T(x_0,y_0)$為圓O上一點，試證明：以T為切點的切線方程式為$x_0x+y_0y=r^2$。

(38) 圓O直徑上兩點$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，
試證明圓O的方程式為$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$。

(39) 試求滿足條件的ΔABC的形狀：
(a)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2$ (b)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$。

(40) (1)設$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$，
證明：由$\vec{a}$與$\vec{b}$張成的三角形面積為$\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$。
(2)設ΔABC三頂點$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，
證明：ΔABC的面積為$\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)|$。

進階問題

(41) ΔABC所在的平面上，設D是$\overline{BC}$上的一點，且$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DC}$，O是直線AD上任一點，且$\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{AD}$，過O作一直線交直線AB、AC於M、N，且$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$，試證：$\frac{m}{1+\lambda}+\frac{n\lambda}{1+\lambda}=\frac{1}{k}$。

(42) 設 G 為ΔABC 的重心，過 G 做一直線 L 交$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 P、Q，其中 P、Q 分別異於 A 點，求$\dfrac{AB}{AP}+\dfrac{AC}{AQ}=$？

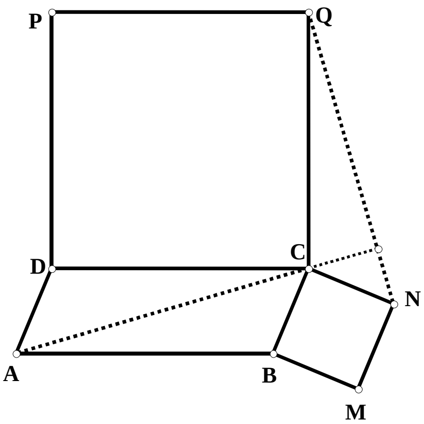
(43) 四邊形ABCD，若 $4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AD}=6\overrightarrow{AC}$，則ΔABC：ΔABD=？

(44) 同一平面上，兩個三角形ΔABC、ΔPQR，若下列三式同時滿足：
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RB}+\overrightarrow{RC}=\overrightarrow{AB}$

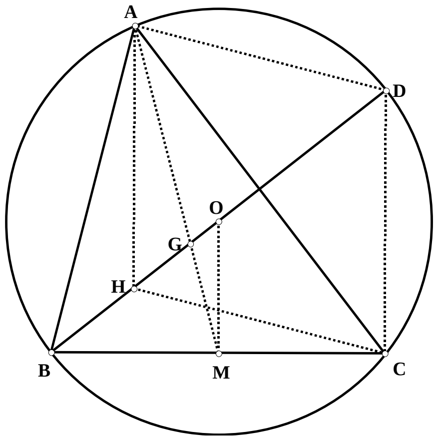
(a)試證三頂點P、Q、R分別在$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$邊上。
(b)求ΔABC：ΔPQR=？

(45) 直角ΔABC中，斜邊上的高為$\overline{AD}$，令$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，
若$\overrightarrow{AD}=x\,\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則實數對$(x,y)$=？ 用$b,c$表示

(46) 如圖，在平行四邊形 ABCD 兩邊 BC、CD 向外分別作正方形 BCNM、CDPQ。求證：$\overline{AC}\perp\overline{QN}$。

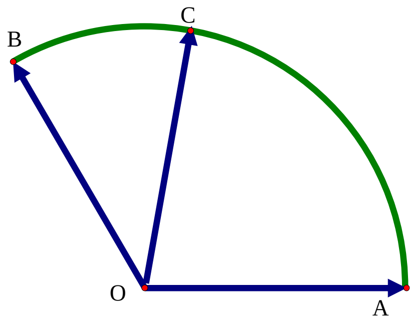


(47) 設ΔABC之外心為O，垂心為H，重心為G，
(a)試證：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$。
(b)證明：G、H、O三點共線，
且OG：GH=1：2。



(48) 在等腰三角形ABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，D、E、F分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$的$m$：$n$內分點，
設$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，
(a)請將$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{DF}$用$\vec{b}$、$\vec{c}$來表示。
(b)若$\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{DF}$，那麼$m$、$n$要滿足什麼條件？

(49) 設給定兩個長度為 1 的平面向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$，
它們的夾角為 120°，如圖所示，點C在以O為圓心的圓弧AB上變動。若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，
其中x,y為實數，則$x+y$的最大值=？



(50) 設d_1，d_2分別爲表原點O至L_1：$x\sec\theta+y\csc\theta=a$，$L_2$：$x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos2\theta$ 的距離，試證：$4d_1^2+d_2^2=a^2$。

(51) 設直線L：$y=mx$平分直線L_1：$y=m_1x$與L_2：$y=m_2x$所成的角，試證明$(m-m_1)(1+mm_2)+(m-m_1)(1+mm_2)=0$

(52) 設直線L過原點(0,0)且與兩直線L_1：$2x+y-8=0$，L_2：$x+2y+6=0$ 形成一個等腰三角形，求直線L的方程式。

(53) 據說，有一位海盜將他的寶藏埋在某小島的一個地方。有一天海盜帶著他的兒子到寶藏附近的一顆樹 P 處，他指著另一顆大樹 Q 及附近另一個大石頭 R，對兒子說，以ΔPQR 的兩邊$\overline{PR}$與$\overline{QR}$爲邊，向外各作一個矩形 PRAB 與 QRCD，使得$\overline{RA}=2\overline{RP}$，$\overline{RC}=2\overline{RQ}$，我的寶藏就埋在$\overline{BD}$的中點的地底下。數十年後，海盜與兒子都去世了，不過藏寶圖依然存在，海盜的孫子來到小島，不過大石頭 R 已經不見了，請問還可以找到寶藏嗎？如何找？

綜合練習解答

(1) (A)(C)(D)(E)

(2) $(\frac{19}{5}$，$-\frac{8}{5})$

(3) $(x+1)^2+(y-4)^2=25$

(4) (C)

(5) $\frac{6}{7}$

(6) $\overrightarrow{EF}=\frac{-3}{4}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{GF}=\frac{-1}{4}\vec{a}+\vec{b}$

(7) $l=\frac{2}{3},m=\frac{2}{15},n=\frac{1}{5}$

(8) (A)(B)(D)

(9) $r=-9,s=17$

(10) (a) $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ (b)2：1

(11) (a)$\frac{\sqrt{105}}{2}$ (b)$x=\frac{7}{18},y=\frac{5}{18}$

(12) $(\frac{3}{7},\frac{4}{7})$

(13) $(x,y)=(\frac{7}{6},\frac{-2}{3})$

(14) $\alpha=\frac{17}{45}$，$\beta=\frac{8}{45}$

[提示：$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$，再利用題目的條件，將$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$化成與$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$關的線性組合]

(15) $x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{-1}{4}$

(16) (a)$\frac{-3}{2}$ (b)$\alpha=\frac{21}{32}$，$\beta=\frac{11}{32}$[提示：(b)$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$且$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，所以$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\frac{-11}{2}\alpha+\frac{321}{2}\beta=0\Rightarrow 11\alpha-21\beta=0$，又因爲$\alpha+\beta=1$，可解得$\alpha$、$\beta$之值]

(17) 1：3：2

(18) 利用例題 11 的想法

(19) $2\sqrt{3}$[提示：可將$\overrightarrow{AD}$寫成$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$，再求$|\overrightarrow{AD}|^2$]

(20) (b)$x=\frac{2}{9}$, $y=\frac{1}{9}$

[提示：將$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}$化開形成$x,y$的聯立方程組，再解出$x,y$]。

(21) (a)利用 $12\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=-13\overrightarrow{OA}$，求出$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$的值。

(b)$\cos\alpha=\frac{-12}{13}$

(22) $x=\frac{3}{13}$，$y=\frac{10}{13}$

(23) 略

(24) (1)(2)(4)(5)

(25) (a)(6,8) (b)(4,12) (c) $\overrightarrow{QP}=(6,8)+(4,-3)$

(26) 45° [提示：$\vec{a}$對$\vec{b}$方向的投影量為$|\vec{a}|\cos\theta$，其中θ為$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角]

(27) 6，-4

(28) 4 或$\frac{28}{3}$

(29) $3x+5y-13=0$ 或 $5x-3y+1=0$

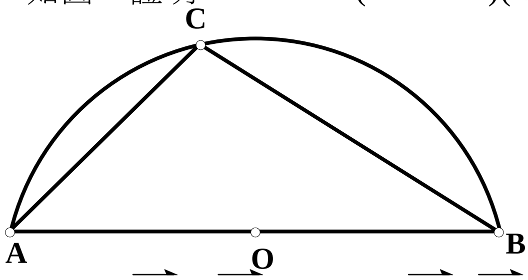
(30) $y+6=\frac{7\pm4\sqrt{3}}{5}(x-9)$

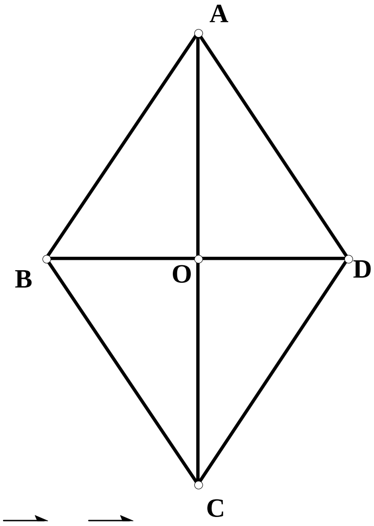
(31) $\frac{3}{2}$，0

(32) $6x-7y-9=0$

(33) 提示：$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(34) 如圖，證明$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})=0$





(35) 如圖，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=0 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|$

(36) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

(37) 設P(x,y)為切線上一點，$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{OT}=0$。

(38) 設P為圓O上一點 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

(39) (a)$\angle C=90°$的直角三角形 (b)正三角形

[提示：(a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$

(b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=0 \Rightarrow \overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA})=0$

$\Rightarrow(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0 \Rightarrow |\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$]

(40) 略

(41) [提示：因為M−O−N，故可設$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}$，且$x+y=1$，又$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DC}$，故$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}=\frac{m}{1+\lambda}\overrightarrow{AM}+\frac{n\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AN}$，又$\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{AD}$，可得證]

(42) 3 [提示：令$\frac{AP}{AB}=m$，$\frac{AQ}{AC}=n$，因為$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\frac{1}{m}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{n}\overrightarrow{AQ})$，因為P、G、Q三點共線，$\frac{1}{3m}+\frac{1}{3n}=1 \Rightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$]

(43) 5∶4[提示：設$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於O，令$\overrightarrow{AO}=t\,\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AO}=(\frac{2}{3}t)\overrightarrow{AB}+(\frac{5}{6}t)\overrightarrow{AD} \Rightarrow$ 因為B、O、D共線 $\Rightarrow t=\frac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AO}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AD}$]

(44) (b)3∶1

[提示：(a)由滿足的條件，可求得$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{QB}=2\overrightarrow{CQ}$，$\overrightarrow{RC}=2\overrightarrow{AR}$]

(45) $x=\dfrac{b^2}{b^2+c^2}$ $y=\dfrac{c^2}{b^2+c^2}$ [提示：求$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$]

(46) [詳解] $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{QN}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CN})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{QC}$

(因爲AB⊥CQ，BC⊥CN)

$=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{QC}$

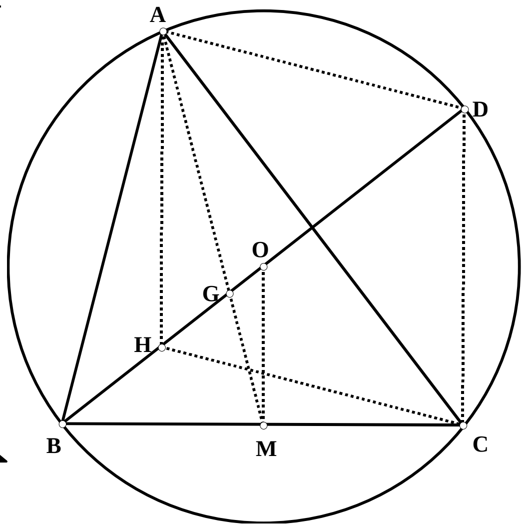
$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CN}=-|\overrightarrow{DC}||\overrightarrow{CN}|\cos\angle DCN$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{QC}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{QC}|\cos\angle BCQ$

又因爲$\angle DCN=\angle BCQ\Rightarrow\cos\angle DCN=\cos\angle BCQ$

$\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{QC}=0$

(47) 提示：



(a)如圖，因爲$\overline{AH}$與$\overline{CD}$均與$\overline{BC}$垂直，故$\overline{AH}//\overline{CD}$

同理$\overline{AD}//\overline{CH}$，因此AHCD爲平行四邊形。

$\Rightarrow\overline{AH}=\overline{CD}=2\cdot\overline{OM}$ $\Rightarrow\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\Rightarrow\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$。

(b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GH}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{GH}$

(48) (a) $\overrightarrow{AE}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{b}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{c}-\frac{m}{m+n}\overrightarrow{b}$

(b)$m=n$。

(49) 2

(50) 略

(51) [提示：設L與L_1的銳夾角θ_1，L與L_2的銳夾角θ_2，$\cos\theta_1=\cos\theta_2$，再化簡即可得]

(52) $y=\pm x$，$y=\frac{11}{2}x$，$y=\frac{2}{11}x$

[提示：設直線L的斜率爲m，若直線L與L_1、L_2的交角相等，則

$\left|\dfrac{m+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}m}\right|=\left|\dfrac{m+2}{1-2m}\right|\Rightarrow m=\pm1$。 若直線L與$L_1$的交角與$L_1$、$L_2$的夾角相等

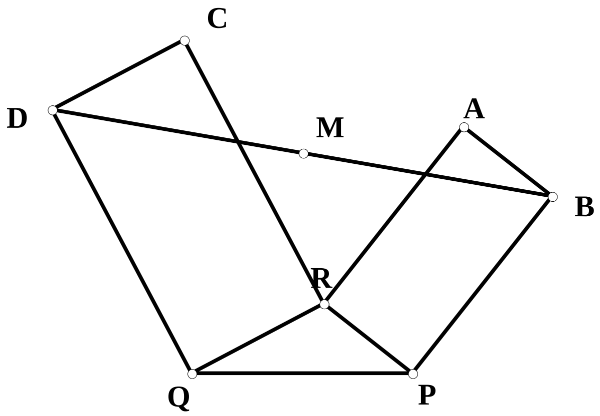
$\Rightarrow\left|\dfrac{m+2}{1-2m}\right|=\dfrac{3}{4}\Rightarrow m=\dfrac{11}{2}$， 若直線L與$L_2$的交角與$L_1$、$L_2$的夾角相等

$\Rightarrow\left|\dfrac{m+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}m}\right|=\dfrac{3}{4}\Rightarrow m=\dfrac{2}{11}$]

(53) [提示：如圖，PRAB、QRCD都是矩形且$\overline{RA}=2\overline{RP}$，$\overline{RC}=2\overline{RQ}$，M爲$\overline{BD}$的中點，我們將相關的點坐標化，令Q(0,0),P(a,0),R(x,y)，$\Rightarrow\overrightarrow{QR}=(x,y)$, $\overrightarrow{PR}=(x-a,y)$ $\overrightarrow{QD}=(-2y,2x)$, $\overrightarrow{PB}=(2y,2a-2x)$，因此$\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PB}=(a+2y,2a-2x)$

，即B(a+2y,2a−2x)，D(−2y,2x)，所以$\overline{BD}$中點M($\frac{a}{2}$,a)，

換句話說，M的位置不受R的位置影響，且$\overline{QM}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$且∠PQM=$\tan^{-1}2$，即寶藏的位置在距Q點$\frac{\sqrt{5}}{2}a$的距離與$\overline{QP}$夾角$\tan^{-1}2$(約 63.5°)方向的地方。



補充教材

斜坐標的介紹與應用

(1)坐標的意義：

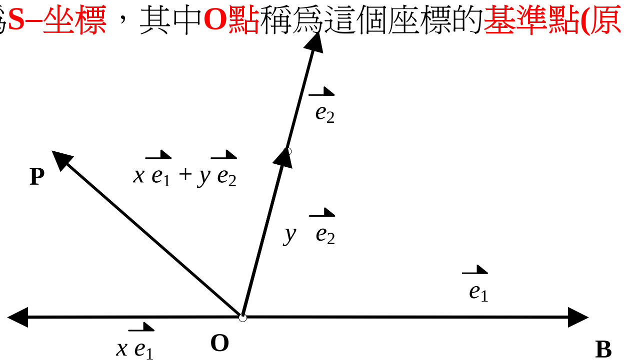
一維的情形：

給定一直線L，取其上一點O，再取不同於O點的E，設 $\overrightarrow{e}=\overrightarrow{OE}$，則對於L上任意點P，$\overrightarrow{OP}$ 均與 $\overrightarrow{OE}$ 平行，即存在一個實數x，使得 $\overrightarrow{OP}=x\cdot\overrightarrow{e}$ 。

我們稱**S ≡ {O；$\overrightarrow{e}$ }為L上的一個坐標系**，而**x稱為P點相關於S的坐標**。簡記為**S−坐標**，其中**O點**稱為這個座標的**基準點(原點)**，而 $\overrightarrow{e}$ 稱為**S**的基底。

二維的情形：

給定平面上一個定點O與兩個不平行的向量 $\overrightarrow{e_1}$ 、 $\overrightarrow{e_2}$ ，平面上任意點P，可以找到實數x,y滿足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$ ，我們稱**S ≡ {O；$\overrightarrow{e_1}$ ，$\overrightarrow{e_2}$ }為平面上的一個坐標系**，而**(x,y)稱為P點相關於S的坐標**。簡記為**S−坐標**，其中**O點**稱為這個座標的**基準點(原點)**，而 $\overrightarrow{e_1}$ ，$\overrightarrow{e_2}$ 稱為S的基底。



[討論]：點P對於S坐標系的坐標(x,y)是否唯一？

[討論]：

根據坐標系的定義，我們熟悉的座標系 $\overrightarrow{e_1}$ 、 $\overrightarrow{e_2}$ 應該如何取？

我們熟悉的直角坐標，座標系 $\overrightarrow{e_1}$ 、 $\overrightarrow{e_2}$ 可取為兩個長度為 1，且互相平行的兩個向量。

例如： $\overrightarrow{e_1}$ 可取成(1,0)， $\overrightarrow{e_2}$ 可取成(0,1)

例如：設$\overrightarrow{e_1}$=(2,1)，$\overrightarrow{e_2}$ =(1,2)，O(0,0)，若$\overrightarrow{OP}$=2$\overrightarrow{e_1}$+3$\overrightarrow{e_2}$，

則我們稱P點相關於S的坐標為(2,3)。

例如：直角坐標系：

在平面上選定一個基準點O及一組互相垂直且長度等於 1 的向量$\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$，當作基底，這樣構成的坐標系稱為**直角坐標系**。

通過O點且包含$\overrightarrow{i}$ 的直線定為*x*軸，通過O點且包含$\overrightarrow{j}$ 的直線定為*y*軸。

[問題]：設$\overrightarrow{i}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{j}=\overrightarrow{OB}$，

請問A、B的坐標如何表示？

[問題]：在此直角坐標系下，

$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$ 如何用坐標來表示？

例如：

在ΔABC中，D、E、F分別在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上，且BD：DC=2：1，AE：EC=1：1，AF：FB=1：4。

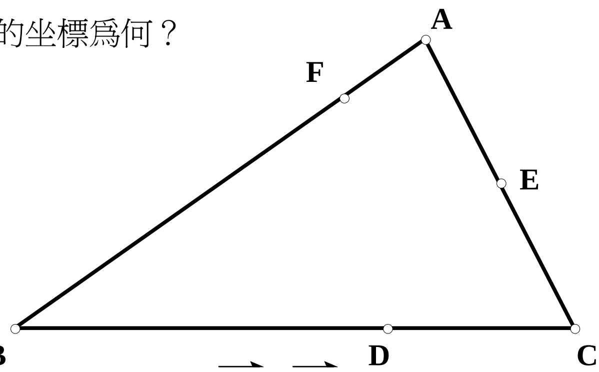
若取基準點為B，$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{BA}$，

請問：A、B、C、D、E、F在坐標系{B；$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$}的坐標為何？

Ans：A(0,1),B(0,0),C(1,0),D($\frac{2}{3}$,0),E($\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$),F(0,$\frac{4}{5}$)

[解法]：根據坐標的意義，

可得A(0,1),B(0,0),C(1,0),D($\frac{2}{3}$,0),E($\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$),F(0,$\frac{4}{5}$)



[例題1] 設P點落在直線AB上，O點在直線AB外，現在以O為原點，$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$為基底，設P點相關於坐標{O；$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$}的坐標為(*x*,*y*)，請求出直線AB的方程式。

Ans：$x+y=1$

[解法]：因為$\overrightarrow{OP}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OC}$，

且P點在直線AB上 $\Leftrightarrow x+y=1$

所以直線AB的方程式為$x+y=1$

[例題2] 設P點落在線段AB上，且$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，O點在直線AB外，現在以O爲原點，$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$爲基底，在坐標{O；$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$}上，設P點的坐標爲$(x,y)$，請問$(x,y)=$？

Ans：$(\dfrac{n}{m+n},\dfrac{m}{m+n})$

[解法]：

根據分點公式，可得$\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$

所以P點在關於坐標系{O；$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$}下的坐標爲$(\dfrac{n}{m+n},\dfrac{m}{m+n})$。

[例題3] 在坐標{O；$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$}上，C、D兩點的坐標爲$(-1,2)$、$(3,4)$，請問直線CD的方程式爲何？

[解法]：

設$P(x,y)$爲直線CD上的任一點

依坐標的意義：

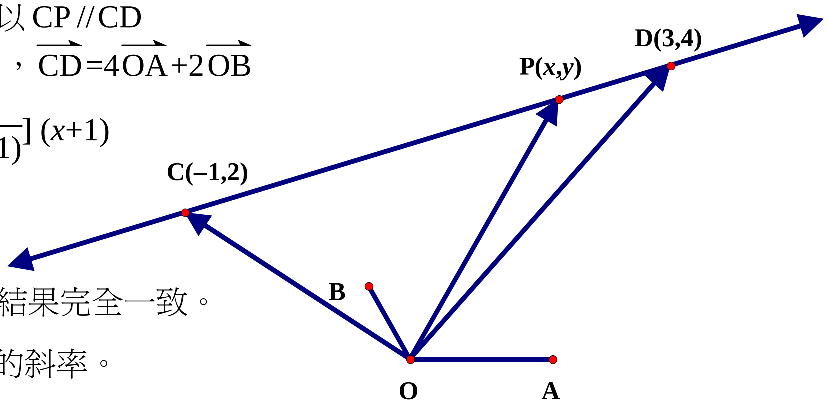
$\overrightarrow{OC}=(-1)\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$

因爲P點在直線CD上，所以$\overrightarrow{CP}//\overrightarrow{CD}$

而$\overrightarrow{CP}=(x+1)\overrightarrow{OA}+(y-2)\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{2}$ $\Leftrightarrow y-2=[\dfrac{4-2}{3-(-1)}](x+1)$

$\Leftrightarrow y-2=\dfrac{1}{2}(x+1)$。



這樣的做法跟直坐標系的結果完全一致。

只是$\dfrac{1}{2}$不能解釋成直線CD的斜率。

[例題4] ΔABC中，D是$\overline{AB}$中點，E點在$\overline{AC}$上，且$\overline{AE}:\overline{EC}=2:1$，$\overline{CD}$與$\overline{BE}$交於P，設$\overrightarrow{AP}=x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{AC}$，求數對$(x,y)=$？ Ans：$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$

[解答]：

考慮坐標系{A；$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$}，

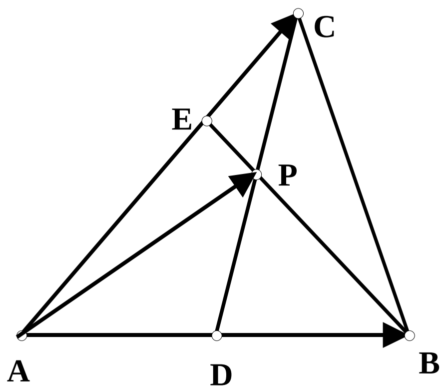
因爲$\overrightarrow{AP}=x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{AC}$，所以P點坐標爲$(x,y)$

所以A(0,0)、B(1,0)、C(0,1)、D$(\dfrac{1}{2},0)$、E$(0,\dfrac{2}{3})$

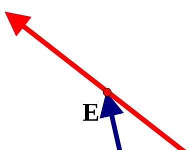
算出直線BE、CD的方程式：

BE：$2x+3y=2$，CD：$2x+y=2$

因此P點的坐標爲$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$。



[例題5] 設P點落在ΔABC所在的平面中，且滿足$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$，請依下列$s,t$的條件，求出P點所形成的圖形。



(1)t=0，$-1\le s\le 2$ (2)$s+t=2$ (3)$0\le s\le 1$，$0\le t\le 1$ (4)$-1<s+t<2$

[解法]：

[向量的觀點]：

(1)$t=0\Rightarrow \overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}$，

$s=-1$，$\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$，$s=2$，$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}$

因為$-1\le s\le 2$，所以P點形成的圖形是$\overline{DE}$。

(2)因為$s+t=2\Rightarrow \frac{s}{2}+\frac{t}{2}=1$，$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{s}{2}\cdot(2\overrightarrow{AB})+\frac{t}{2}\cdot(2\overrightarrow{AC})$

令$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$，$2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{s}{2}\cdot(\overrightarrow{AD})+\frac{t}{2}\cdot(\overrightarrow{AE})$且$\frac{s}{2}+\frac{t}{2}=1$

根據三點共線的條件可知P點會在直線DE上。

因此P點所形成的圖形為DE直線。

(3)設$s=k$，$\overrightarrow{AP}=k\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow k\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CE}$，此時因為 $0\le t\le 1$

所以P在$\overline{DE}$上移動，而另一方面，

k在 0 與 1 之間變動，那麼D會在$\overline{AB}$間移動，

因此P點會形成的圖形為平行四邊形與其內部。

(4)

(a)令$k=s+t$($k\ne 0$，$-1<k<2$)

$\overrightarrow{AP}=\frac{s}{k}\cdot(k\overrightarrow{AB})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{AC})$，令$k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$，$k\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$，$s'=\frac{s}{k}$，$t'=\frac{t}{k}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AP}=s'\cdot\overrightarrow{AD}+t'\cdot\overrightarrow{AE}$，$s'+t'=1$

因此P點會在直線DE上移動，

(b)當$k=0$ 時，$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}-s\cdot\overrightarrow{AC}=s\cdot\overrightarrow{CB}$，

P點形成的圖形為過A點與$\overleftrightarrow{BC}$平行的直線。

(c)設$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF}$，$-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}$，$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}$，$2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}$

當k在-1 到 2 之間變化($k\neq0$)時，那麼D由F變化到H，E由G變化到I

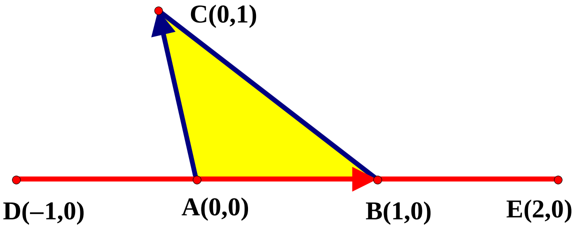
且保持$\overleftrightarrow{DE}//\overleftrightarrow{BC}$。因此P點形成一個帶狀區域。

[斜坐標的觀點]：

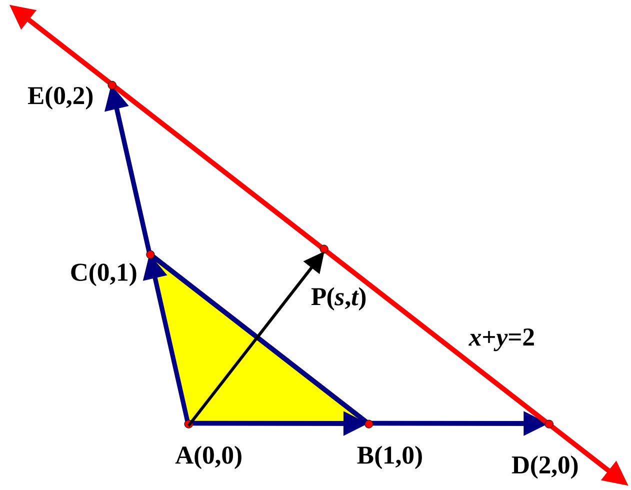
考慮坐標系{A；$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$}，

因為$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$，所以P點坐標為$(s,t)$，因此(1)~(4)各題可以視為P點坐標滿足(1)$t=0$，$-1\le s\le2$ (2)$s+t=2$ (3)$0\le s\le1$，$0\le t\le1$ (4)$-1<s+t<2$所形成的圖形。因此各題的圖形如下：

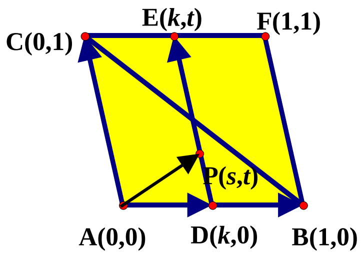
(1)



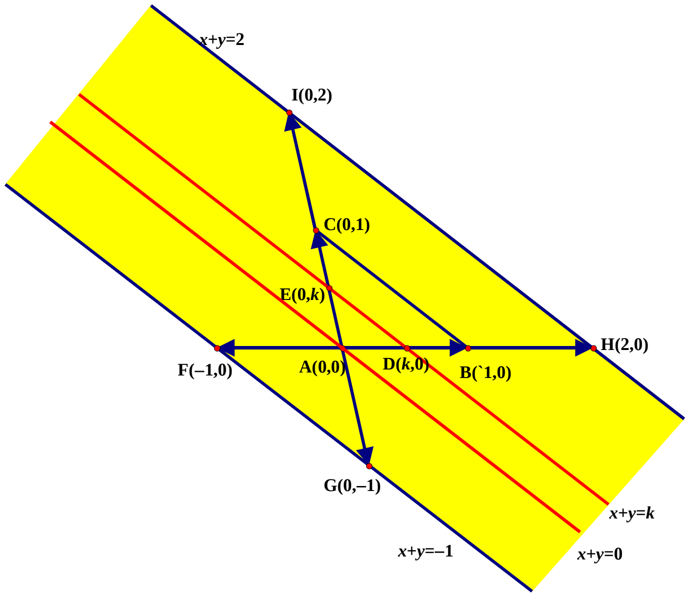
(2)



(3)



(4)



(練習1) 在ΔABC中，考慮坐標系{A：$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$}設$\overline{AB}=c,\overline{BC}=a,\overline{AC}=b$請問重心G與內心I的坐標為何？

Ans：G($\frac{1}{3},\frac{1}{3}$)、I($\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}$) [提示：考慮G與I向量的性質]

(練習2) 設O,A,B三點不共線，若$\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=5\overrightarrow{OB}$，令AD與BC交於一點E，若$\overrightarrow{OE}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}$，求$x,y$。 Ans：$x=\frac{16}{19}, y=\frac{15}{19}$

(練習3) 坐標平面上有一ΔABC與一點D，若$7\overrightarrow{AD}=8\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}$，

請求出$\dfrac{\Delta ABD面積}{\Delta ABC面積}$=？　Ans：$\dfrac{6}{7}$

(練習4)　設ΔABC爲平面上的一個三角形，P爲平面上一點且$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，其中$t$爲一實數。試問下列哪一個選項爲$t$的最大範圍，使得P落在△ABC的內部？

(A)$0<t<\dfrac{1}{4}$ (B)$0<t<\dfrac{1}{3}$ (C)$0<t<\dfrac{1}{2}$ (D)$0<t<\dfrac{2}{3}$ (E)$0<t<\dfrac{3}{4}$ (93 學科能力測驗)　(D)

(練習5)　在ΔABC的三邊$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$上分別取D、E、F三點，使得$\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$。設G爲ΔDEF的重心，$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則α=？β=？

Ans：$\alpha=\dfrac{17}{45}$，$\beta=\dfrac{8}{45}$

(練習6)　平行四邊形ABCD中，E爲$\overline{AD}$上一點，且$\overline{AE}=2\overline{ED}$，F爲$\overline{AB}$上一點且$\overline{AF}=3\overline{FB}$，若$\overline{BE}$與$\overline{DF}$交於點P，且$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則

(a)(x,y)=？ (b)DP：PF=？Ans：(a) $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3})$ (b)2：1

(練習7)　平面上三點A(3,−2)、B(−1,1)、C(5,4)

(1)若點P滿足$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$，且$-1\leq s\leq 2$，$0\leq t\leq 2$，則求點P所成區域之面積。

(2)若點Q滿足$\overrightarrow{AQ}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$，且$s\geq -1$，$t\geq 1$，$s+t\leq 2$，

　則求點Q所成區域之面積。Ans：(1)15 (2)60

(練習8)　設O是平面上一定點，A、B、C是平面上不共線三點，

(1)動點P滿足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$，$\lambda\geq 0$，則點P的軌跡一定通過ΔABC的內心。

(2)動點P滿足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\lambda>0$，則點P的軌跡一定通過ΔABC的重心。

(3)動點P滿足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C})$，$\lambda>0$，則點P的軌跡一定通過ΔABC的垂心。

(4)動點P滿足$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+\lambda(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C})$，$\lambda>0$，則點P的軌跡一定通過ΔABC的外心。