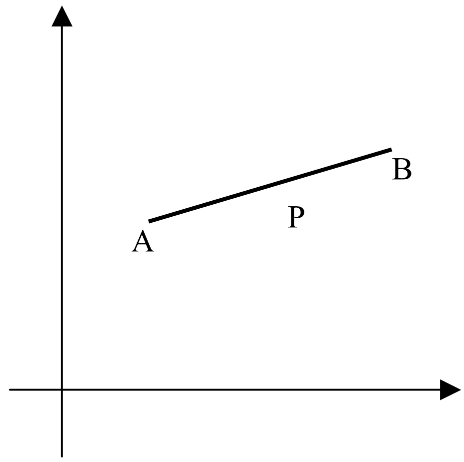
§2−3 平面坐標系

(甲)平面坐標系

(1)兩點的距離：設A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)，則$\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 。

(2)分點公式：設P(x,y)介於A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)之間，且PA：PB=m：n，

則$x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}$，$y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}$。



應用：

(a)當$m=n$時，P為中點，則$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$。

(b)設ΔABC的三頂點為A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)、C(x_3,y_3)，

則重心坐標G為$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

[例題1] 在 x,y 平面上，有三點 A(1,3)、B(4,2)、C(5,7)，求ΔABC 的外心的坐標。

Ans：$\left(\dfrac{13}{4},\dfrac{19}{4}\right)$

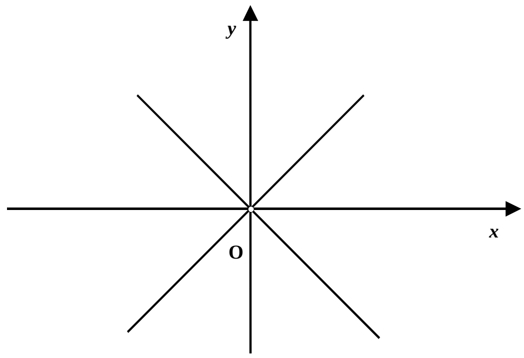
[例題2] 設P_1、P_2、P三點共線，且$\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\dfrac{1}{3}$，且已知$P_1(3,-4)$、$P_2(-1,5)$，試求P點之坐標。　Ans：$(2,-\dfrac{7}{4})$或$(5,-\dfrac{17}{2})$

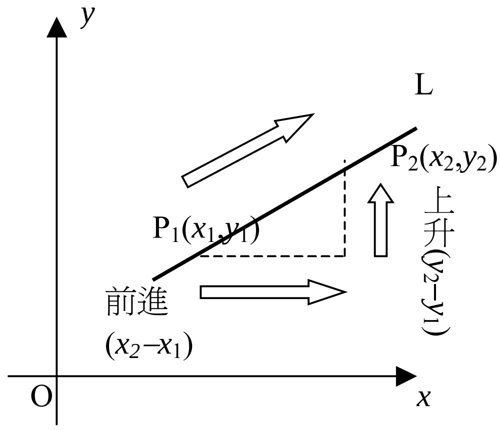
(練習1) 在坐標平面上，有一個三角形其三頂點分別爲 A(5,7)、B(2,1)、C(4,0)，請證明ΔABC 爲直角三角形。

(練習2) ΔABC 之三頂點爲 $A(2,-8)$、$B(-6,-2)$、$C(6,-5)$，若頂點 A 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，則求點 D 的坐標。Ans：$(2,-4)$
Hint：BD：DC=BA：AC (內分比性質)

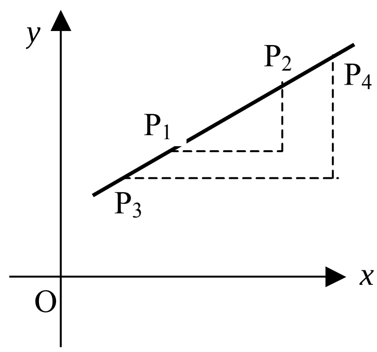
(乙)斜率的概念與應用

(1)一個斜坡的傾斜程度，可用水平方向每前進一個單位時，鉛直方向上升或下降多少個單位距離來表示，在坐標平面上，我們也可以用這個概念來顯示直線的傾斜程度。在坐標平面上，每一條直線對水平線x軸而言，不僅有**傾斜度**，同時還有**方向**的問題。例如在圖中，L_1和L_2對x軸的**傾斜度**是相同的，但**方向**不一樣，就像斜坡一樣，有上升或下降的情形，我們可否用一個値來表示直線的傾斜度與方向呢？





(2)如右上圖，如果我們將直線L看做一個斜坡由點$P_1(x_1,y_1)$走到點$P_2(x_2,y_2)$，那麼，x_2-x_1與　y_2-y_1就分別爲斜坡從P_1到P_2的水平位移與鉛直位移。



(a)若$x_1\neq x_2$，則我們可用下列比例：$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$來表示直線L的傾斜程度。

(b)若$x_1=x_2$，直線L爲一條鉛直線，我們已經知道它的傾斜程度，因此不定義它的傾斜程度。

(c)如果我們在直線L上任取其他相異兩點$P_3(x_3,y_3)$，$P_4(x_4,y_4)$，如圖，由相似三角形對應邊成比例，可得$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}$，

又由於$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, $\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}=\dfrac{y_3-y_4}{x_3-x_4}$,所以比值$m$不會因爲所選取的兩點不同或順序不同而改變其值，因此只要L不是一條鉛直線，那麼就可以決定一個比值m，我們稱這個比值m爲直線L的**斜率**。

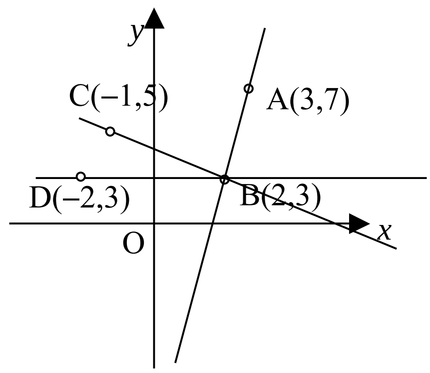
(3)斜率的定義：設直線L上有兩相異點$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$

(a)若$x_1\neq x_2$，則直線L的斜率定義爲$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。

(b)若$x_1=x_2$，直線L爲一條鉛直線，不定義它的斜率。

[例題3] 如圖，試求直線 AB、BD、BC 的斜率。

Ans：$4,0,-\dfrac{2}{3}$



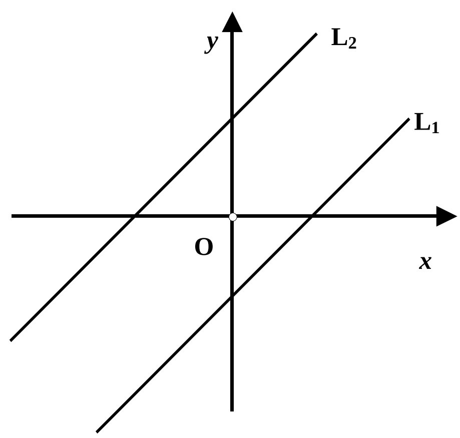
(4)由例題 1，可知直線斜率的絕對值代表傾斜程度：傾斜程度愈大，則其斜率的絕對值也愈大，而且

(a)當直線由左下到右上傾斜時，其斜率爲正。

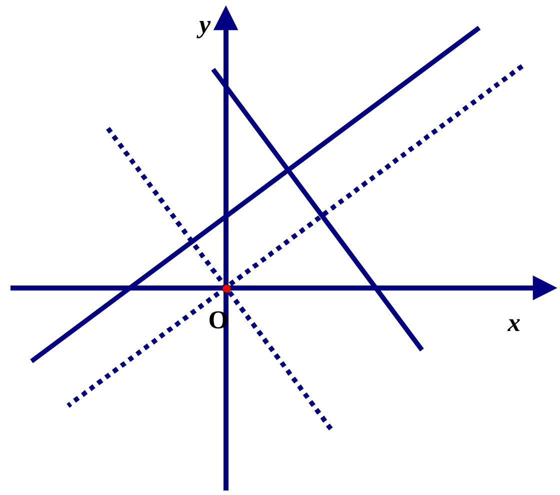
(b)當直線由左上到右下傾斜時，其斜率爲負。

(c)當直線成水平時，其斜率爲 0。

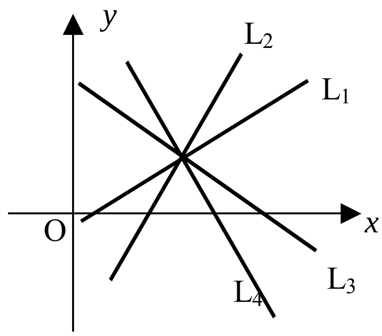
[例題4] 斜率爲m_1與m_2的直線L_1、L_2互相平行$\Rightarrow m_1=m_2$。



[例題5] 斜率爲m_1與m_2的直線L_1、L_2互相垂直$\Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$。



(練習3) 如右圖，設m_1,m_2,m_3,m_4各爲直線L_1,L_2,L_3,L_4的斜率，
試比較m_1,m_2,m_3,m_4的大小。
Ans：$m_2>m_1>m_3>m_4$



(練習4) 設 A(2,1)、B(3,5)、C(0,−1)、D(2,a)

(1)若$\overline{AB}//\overline{CD}$則 a=_____。

(2)若$\overline{AB}\perp\overline{CD}$則 a=_____。

(3)若 A,B,D 共線則 a=_____。Ans：$7,-\frac{3}{2},3$

(練習5) 設 $f(x)=2002x+2003$，求 $\frac{f(8888)-f(6666)}{8888-6666}=$？ Ans：2002

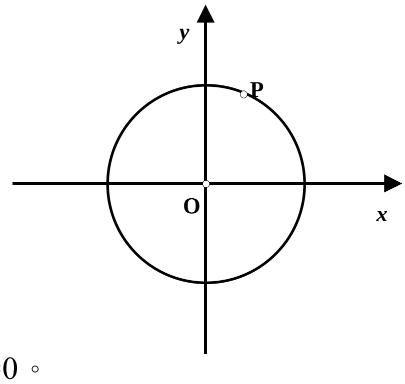
(丙)直線方程式

(1)方程式與圖形：

在平面上建立平面坐標系後，每一個點P都可以用數對(x,y)來表示P的位置。同樣的，一條直線或一個圓或其它的幾何圖形都可對應一個方程式。

例如：一個以原點O爲圓心，2 爲半徑的圓C，如何利用代數方程式來表示呢？
設P(x,y)爲圓C上任一點，

$\Leftrightarrow \overline{OP}^2=2^2$
$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=2^2$
所以，圓C上每一點P(x,y)的坐標都 滿足$x^2+y^2=4$。
反之，滿足$x^2+y^2=4$ 的點(x,y)都會在圓C上。
如此我們就說圓C的方程式爲$x^2+y^2=4$。



結論：要求一個平面圖形G的方程式$f(x,y)=0$。
(1)假設P(x,y)爲G上的任一點，找出x,y的關係$f(x,y)=0$。

(2)驗證$f(x,y)=0$ 上的點是否在G上。

(2)基本想法：
在平面上給一定點A，過點A的直線有無線多條，如果再給斜率m，那麼過A點，且斜率為m的直線就只有一條。

(3)直線方程式的基本類型：

例一：求作一直線過點A(1,−3)且斜率為$\frac{1}{2}$。

結論：在平面上，過一定點A(x_1,y_1)且斜率為m的直線只有一條，
方程式為 $y-y_1=m(x-x_1)$。

例二：求過點 A(3,4)、B(−4,7)的直線方程式。

例三：求過點 A(3,4)、B(3,7)的直線方程式。

結論：直線L上有相異兩點$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，則直線L的方程式
①若$x_1=x_2$，則直線L的方程式為$x=x_1$。
②若$x\neq x_2$，則直線L的方程式為$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$。

例四：設直線 L 的斜率為 m，y 截距為 b(**即直線 L 與 y 軸相交於點$(0,b)$**)，則 L 的方程式為 $y=mx+b$。

例五：設直線 L 的 x,y 截距分別為 a,b(直線與 x,y 軸的交點為$(a,0)$、$(0,b)$)，

$ab\neq 0$，則直線方程式為$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$。

結論：直線方程式 $ax+by+c=0$，

(a)若 $b=0$，則此直線為鉛直線。

(b)若 $b\neq 0$，則此直線的斜率為$-\dfrac{a}{b}$。

[例題6] 試求下列三小題：

(1)過點$(3,-2)$而與直線 $5x-4y+1=0$ 垂直的直線方程式。

(2)x 截距 1，且與過點$(3,2)$、$(-5,7)$之直線平行的直線方程式。

(3)已知三角形之頂點為 $A(-1,-10)$、$B(2,-1)$、$C(6,-3)$，試求ΔABC 的垂心 H。

Ans：(1)$4x+5y=2$ (2)$5x+8y=5$ (3)$H(3，-2)$

[例題7] 試求下列各小題：

(1)直線 L 過點$(2,6)$且與 x 軸及 y 軸之截距和為 1，試求 L 的方程式。

(2)直線 L 在兩軸之截距的絕對值相等，並經過$(-3,1)$，

則直線 L 的方程式為何？

Ans：(1)$y-6=2(x-2)$；$y-6=\frac{3}{2}(x-2)$　(2)$x+y+2=0$，$x-y-4=0$，$x+3y=0$

(練習6) 求出下列條件所決定的直線方程式：

(1)過兩點(2,5)與(6,−5)(2)過點(−3,4)，x 截距−1

(3)x 截距−5，y 截距−4(4)斜率爲$-\frac{1}{3}$，y 截距−3

(5)過(−2,−5)而垂直於直線 $x-2y=7$

Ans：(1)$5x+2y-20=0$(2)$2x+y+2=0$(3)$\frac{x}{-5}+\frac{y}{-4}=1$

(4)$y=\frac{-1}{3}x-3$(5)$2x+y+9=0$

(練習7) 設ΔABC 之三頂點 A(−2,3)、B(0,2)、C(4,−1)，則求

(1)直線 AB 的方程式。

(2)BC 邊的中線方程式，重心坐標。

(3)AC 邊的高所在的直線方程式，垂心坐標。

(4)AB 邊的中垂線，外心坐標。

Ans：(1)$x+2y-4=0$ (2)$5x+8y-14=0$，$(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$

(3)$3x-2y+4=0$，(22,35)(4)$4x-2y+9=0$，$(-10,-\frac{31}{2})$

(4)解析法處理幾何問題：

選取適當的座標系，將幾何的問題用代數的方法來處理。

幾何	代數
過一點 A 作直線 L 的垂線	求過A(x_0,y_0)與直線L：$ax+by+c=0$ 垂直的直方程式。
過線外一點 A 作直線 L 的平行線	求過A(x_0,y_0)與直線L：$ax+by+c=0$ 平行的直線方程式。
找兩條直線的交點	兩條直線的方程式聯立求解。
三點共線	找一條直線方程式使這三點的座標均爲其解。

三線共點	三條線的聯立方程式，恰有一組解。

[例題8] 在ΔABC中，M爲$\overline{BC}$的中點，試證明：$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2+\frac{1}{2}\ \overline{BC}^2$。

(練習8) 證明ΔABC 的三高共線。

(練習9) 試證平行四邊形定理「平行四邊形中，四邊的平方和等於對角線的平方和」。

(練習10) 一海盜欲將三件珠寶埋藏在一個島上的三個地方,海盜就以島上的一顆大王椰子樹爲中心，由大王椰子樹向東走 12 步埋他的第一件珠寶；猶大王椰子樹向東走 4 步，再往北走 a 步埋他的第二件珠寶；最後由大王椰子樹向東走 a 步，再向南走 8 步埋他的第三件珠寶；事隔多年之後，海盜僅記得 $a>0$ 及埋藏珠寶的三個地方再同一直線上，求 a=？
Ans：16 (88 學科)

(5)直線系問題：

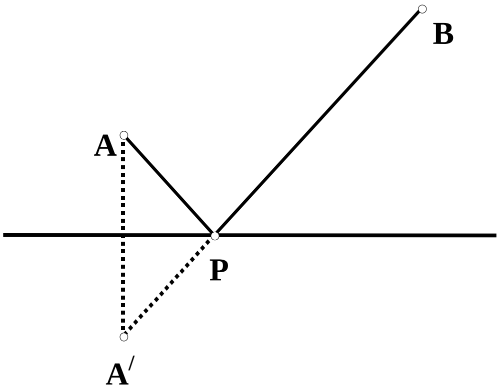
[例題9] 設兩直線L_1：$3x-y=1$，L_2：$2x+y=4$
(1)求L_1、L_2的交點P。
(2)對於任意實數k，Γ：$(3x-y-1)+k(2x+y-4)=0$ 的圖形是什麼？
(3)P點是否在上述的圖形上？
(4)若直線L：$x-y+1=0$ 過P點且L在Γ的圖形上，求k的值。
Ans：(1)P(1,2) (2)Γ的圖形是一群直線，隨著k的變動。
(3)P點恆在Γ上。(4)$k=\frac{-2}{3}$

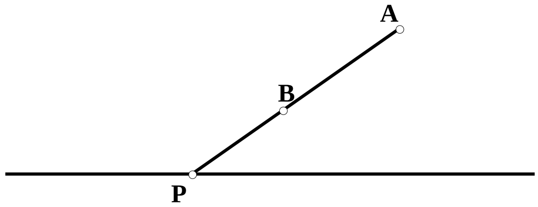
(6)直線的對稱問題：

(a)線對稱：A與$A^{\prime}$對於直線L對稱⇔直線L為 $\overline{AA^{\prime}}$ 的中垂線。

(b)點對稱：A與$A^{\prime}$對於點O對稱⇔點O為 $\overline{AA^{\prime}}$ 的中點。

(c)線段和之最小值與差之最大值：





[例題10] 試求點 A(1,1)關於直線 $4x+2y-1=0$ 的對稱點。 Ans：$(-1,0)$

[例題11] 設平面上 A(1,9)、B(6,2)，在 y 軸上找一點 P 使得$\overline{PA}+\overline{PB}$有最小值，則 P 點的坐標爲______________，又此最小值爲____________。
Ans：P(0,8)、$7\sqrt{2}$

(練習11) 不論 k 爲任何的實數，直線$(3k+5)x+(k-1)y+9k-1=0$ 恆過一定點 P，則 P 點的坐標爲何？　Ans：P(−1,−6)

(練習12) 設$\frac{2a}{3}+\frac{b}{3}=1$，其中 $b\neq0$，則直線 L：$2ax+by+1=0$ 恆過那一個點？$(\frac{-1}{3}，\frac{-1}{3})$

(練習13) 設 A(3,−1)，B(9,3)，P 爲 L：$2x-3y+4=0$ 上一點，當 P 點坐標爲______，時$\overline{AP}+\overline{BP}$有最小值爲有最小值爲_________。Ans：P(4,4)、$2\sqrt{26}$

(練習14) 在直線 $x-5y-12=0$ 上找一點 Q，使得$|\overline{QA}-\overline{QB}|$有最大值，則 Q 點的坐標爲____________，又此最大值爲____________。
Ans：Q(8，$\frac{-4}{5}$)，$\sqrt{74}$

綜合練習

(1) 設 k 爲實數，若點 P$(\frac{k+1}{3k-1}，\frac{2k+1}{k-2})$在第二象限中，求 k 的範圍。

(2) ΔABC 三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$的中點依次爲 P(4,1)、Q(0,3)、R(−2,−3)，求 A、B、C 三點坐標。

(3) 已知直角三角形 ABC 三頂點坐標爲 A(2,−1)、B(5,1)、C(3,a)，則實數 a 可爲____________。

(4) 設 A(3,1)、B(1,k)、C(−2,−1)，若 A、B、C 三點共線，求 k 之值。

(5) 設 A(a,1)、B(3,5)、C(7,3)、D(b,−1)，若 ABCD 爲菱形，求 a,b 之值。

(6) 將一張畫有直角坐標系的圖紙摺疊一次，使得 A(0,2)與 B(4,0)重合。若此時點 C(7,3)與點 D(m,n)重合，試求 $m+n$=？

(7) 求滿足下列條件的直線方程式：

(a)過 A(1,4)、B(3,0)二點的直線。(b)過 A(−2,7)、B(−2,0) 二點的直線。

(c)平行 $x+2y-3=0$ 且在 x 軸上的截距爲 8 的直線。

(d) 過 A(3,−2)且在二坐標軸截距相等的直線。

(e)垂直 $2x-y=3$ 且與 x,y 軸所圍成的三角形面積爲 2 的直線。

(f)斜率爲$\frac{-4}{3}$且與二坐標軸所圍成直角三角形的斜邊長爲 5 的直線。

(g)過 A(3,−2)且在二坐標軸截距的絕對值相等的直線。

(h) 試求截距之和爲 5，且與二座標軸所成的面積爲 3 的直線方程式。

(8) 在ΔABC 中，A(−1,4)、B(3,2)且垂心 H$(\frac{19}{8},\frac{7}{4})$，求 C 點坐標。

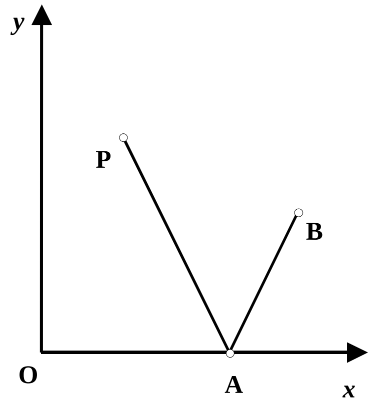
(9) 三直線L_1：$y=ax+b$，L_2：$y=cx-9$，L_3：$2y=-x+d$圍成一三角形ABC，若A(0,5)，B(3,0)，則求頂點C的坐標=______________。

(10) 試求m值，使下列三直線不能圍成三角形。
L_1：$4x+y=4$，L_2：$mx+y=0$，L_3：$2x-3my=4$。

(11) L_1：$x+y=4$，L_2：$2x-y=8$，L過(1,0)與L_1、L_2交於A,B，若 $\overline{AB}$ 的中點爲(1,0)，則L方程式爲何？

(12) 設點A(3,1)，直線L：$x+2y=0$，求A點在直線L上的投影點H及對稱點A'之坐標。

(13) 小安用神奇球桿撞球，球從坐標平面上點 P(2,6)打出，碰到檯邊的 A 點，經過完全反射之後，再折向撞擊到 B 球，已知 B 球的坐標(7,4)，試求 A 點的坐標爲__________，並求所行路徑 PA+AB=_________。



(14) 求過L_1：$x+y=1$ 與L_2：$2x-3y=12$ 的交點且y軸上的截距爲 3 的直線方程式。

進階問題

(15) 坐標平面上，直線 L 通過定點(2,3)且在第一象限內與兩坐標軸所圍成的三角形面積爲最小，求 L 的方程式與最小面積。

(16) 三角形之三邊所在之直線方程式爲L_1：$2x+y-2=0$，L_2：$y=0$，L_3：$x-y+1=0$，若直線L：$y=mx+\frac{3}{2}$與三角形相交，則m之範圍=_______。

(17) 設 A(3,3)、B(−1,−5)、C(6,0)及直線 L：$y=mx-8m-6$，若 L 與ΔABC 相交，則求 m 的範圍。

(18) ΔABC 中，A(2,1)、B(5,4)、C(x,0)，當 x 變動時，ΔABC 有最小的周長，求此時 x=？

(19) (a)試做 $y=f(x)=||x|-2|$的圖形。

(b)直線 $y=mx+5$ 與(1)之圖形恰交一點，求 m 的範圍。

(c)直線 $y=mx+5$ 與(1)之圖形恰交二點，求 m 的範圍。

(d)直線 $x+3y+a=0$ 與(1)之圖形交於四點，求 a 的範圍。

(20) (Euler 線)ΔABC 的垂心 H、重心 G、外心 O 三點共線。

(21) 直線L：$ax+by+c=0$ 交$\overline{P_1P_2}$於P，且$P_1\neq P_2$，若$\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=r$，$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，則$r=-\dfrac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$，試證之。

(22) 利用(21)，求證若$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$在直線L：$ax+by+c=0$ 之異側，
則$(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)<0$。

綜合練習解答

(1) $-1<k<\frac{-1}{2}$

(2) A(2,−5)、B(6,7)、C(−6,−1)

(3) $-\frac{5}{2},4,\pm\sqrt{3}$

(4) $k=\frac{1}{5}$

(5) $a=1,b=5$ 或 $a=5,b=9$

(6) $\frac{34}{5}$

(7) (a)$2x+y=6$ (b)$x+2=0$ (c)$x+2y=8$ (d)$x+y=1$ 或 $2x+3y=0$ (e)$x+2y=\pm2\sqrt{2}$ (f)$4x+3y=\pm12$(g) $x+y=1$ 或 $2x+3y=0$ 或 $x-y=5$(h) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$，$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$，$\frac{x}{6}+\frac{y}{-1}=1$，$\frac{x}{-1}+\frac{y}{6}=1$

(8) C(1,−1)

(9) (4,3)，18

(10) $\frac{2}{3}$，−1，4，$-\frac{1}{6}$

(11) $4x+y=4$

(12) H(2,−1)、A$'$(1,−3)

(13) (5,0)、$5\sqrt{5}$

(14) $5x+3y=9$

(15) $3x+2y=12$，12(提示：可以假設直線爲$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，再利用 A>0,B>0，$\frac{A+B}{2}\geq\sqrt{AB}$ 去找出面積最小時的 a,b 值。)

(16) $m\geq\frac{3}{2}$ 或 $m\leq-\frac{1}{2}$ (提示：$y=mx+\frac{3}{2}$可視爲一群通過$(0,\frac{3}{2})$斜率爲 m 的直線，再畫圖去觀察 m 等於那些值時，會與三角形相交)

(17) $-3\leq m\leq-\frac{1}{9}$ (提示：可將 $y=mx-8m-6$ 化爲 $y+6=m(x-8)$，視爲一群通過定點(8,−6)且斜率爲 m 的直線，再畫圖去觀察 m 等於那些值時，會與三角形相交)

(18) $\frac{13}{5}$(提示：可將 C 視爲在 x 軸上任意移動的點)

(19) (a)略(提示：分段討論畫 $f(x)$ 的圖形)(b)$m\geq 1$ 或 $m\leq -1$(c)$-1<m<1$ (d)$-6<a<-2$

(20) 略

(21) 根據分點公式可設 $P(\frac{x_1+rx_2}{1+r}，\frac{y_1+ry_2}{1+r})$，因爲 P 在 L 上所以代入 $ax+by+c=0$，經整理即可得 $r=-\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$

(22) 因爲 $r>0$，所以可得證。