

§1-3 函數的基本概念

(甲)函數的概念

16 世紀中葉，歐洲科學革命的興起，科學和技術有了長足的進步，有關運動的研究已在自然科學領域中逐漸居主導的地位，這就影響了數學研究的方法：從定量觀念為中心轉移到以變量觀念為中心，而實現這一轉變的關鍵人物是笛卡爾、牛頓、萊布尼茲，函數的概念在解析幾何、微積分誕生的背景下，被引入數學的殿堂。

現在公認最早的函數定義是由德國數學家萊布尼茲給出的，他在一篇手稿中，首先採用「函數」(拉丁文 *functio*，英文 *function*)一詞，並用函數表示曲線上的點的「橫坐標」、「縱坐標」、「切線長度」等，由此可見一開始人們對於函數的認識是相當膚淺的，後來函數的概念經過一次一次的修正，內涵逐漸的擴大，瑞士數學家歐拉在他寫的「無窮小分析引論」書中明確指出：變量的函數是由這個變量和一些定量通過任何方式形成的解析表達式」，例如： $f(x)=x^2$ ，這個定義在 18 世紀被認為是標準的函數概念。西元 1821 年，法國數學家柯西在「分析教程」中給出了自變數的概念，並且初步有了對應的概念，不過他並沒有特別強調。西元 1837 年德國數學家狄利克雷引入新的函數定義：對於某區間上每個確定的 x 值，只要 y 有完全確定的值與之對應，不論 x, y 所建立之對應方式為何， y 都稱為 x 的函數。

有名的狄利克雷函數 $f(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ 為有理數} \\ 0, & x \text{ 為無理數} \end{cases}$ ，就說明了狄利克雷對於函數的看法。

19 世紀末，德國數學家 Cantor 創立了集合論，人們把函數的定義提昇到更抽象的層次：設 A 、 B 是非空的集合， f 是一法則，若 A 中的每個元素 x ，經由法則 f ，總有集合 B 中確定的元素 y 與之對應，則稱 f 是定義於集合 A 上的一個函數。這個抽象的定義，提煉出函數概念的精髓，使它為 17 世紀函數概念萌芽、發展做了一個完美的結果，也使得函數在 20 世紀有更廣泛的應用。

(1)函數的定義：

例一：

設高中一年級某班學生的座號與體重之間的關係如下表所示：

座號	1	2	3	4	5	45	46	47
體重	63 公斤	56 公斤	75 公斤	70 公斤	55 公斤	...	67 公斤	75 公斤	63 公斤

對於這班的學生每個人都有唯一的一個座號，每一個座號都有一個體重值(公斤)與之對應。

例二：

設正方形的面積 A 是由它的邊長 x 所決定，即 $A=x^2$ ，當邊長 x 確定了，則面積 A 亦隨之確定。換句話說，給定一個邊長 x ，都有一個面積值與之對應。

什麼是函數？

設 x 和 y 是兩個變量，若每一個 x 都有一個且只有與之對應的 y 值，我們稱這種對應關係為『 y 是 x 的函數』，並用符號 $y=f(x)$ 表示， $f(x)$ 讀作「 x 的函數 f 」

(a) x 稱為_____， y 稱為應變數， $f(x)$ 稱為_____。

(b)函數的定義域：_____，函數的對應域：_____

函數的值域：_____。

(c)函數的基本要素 \Rightarrow _____，_____，與_____。

例一：

設高中一年級某班學生的座號與體重之間的關係如下表所示：

座號	1	2	3	4	5	45	46	47
體重	63 公斤	56 公斤	75 公斤	70 公斤	55 公斤	...	67 公斤	75 公斤	63 公斤

定義域= $\{1,2,3,...,47\}$ ，對應域= \mathbf{R} ，

值域= $\{63 \text{ 公斤}, 56 \text{ 公斤}, 75 \text{ 公斤}, 70 \text{ 公斤}, 55 \text{ 公斤}, \dots, 67 \text{ 公斤}\}$

例二：

設正方形的面積 A 是由它的邊長 x 所決定，即 $A=x^2$

定義域= $\{x|x>0\}$ ，對應域= \mathbf{R} ，值域= $\{A|A>0\}$

用集合觀點來定義函數：

設 A 、 B 為二非空集合，若對於集合 A 中的任一個元素 a ，在集合 B 中恰有一元素 b 與 a 對應，此種對應法則 f 稱為從 A 映到 B 的函數。記為 $f:A \rightarrow B$ 。

其中 b 稱為 a 的函數值，用符號 $b=f(a)$ 表示。集合 A 稱為 f 的定義域，集合 B 稱為 f 的對應域，而全體函數值 $f(a)$ 所形成的集合稱為 f 的值域。

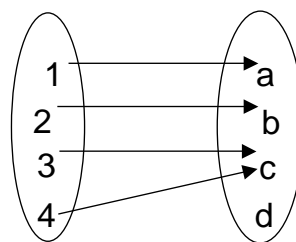
記做 $f(A)=\{f(a)|a \in A\}$ ，注意 $f(A) \subset B$ 。

例三：函數 $f:A \rightarrow B$

A ：定義域= $\{1,2,3,4\}$

B ：對應域= $\{a,b,c,d\}$

值域= $\{ \quad \}$



用一般函數的定義 \rightarrow 判定是否為函數

A 中的每一個元素，在 B 中都有唯一確定的元素 y 和 x 對應。

例說：(a)定義域沒對完

(b)1 對多

(c)多對 1

(d)1 對 1

結論：

(a)定義域要對完。

(b)1 對 1,多對 1 \Rightarrow 是函數，但 **1 對多**不是函數。

[例題1] $A=\{a,b,c,d\}$ ， $B=\{1,2,3\}$ 試判斷下列對應法則何者為由 A 映至 B 的函數？

(1) $f: a \rightarrow 1, b \rightarrow 3, c \rightarrow 2$ 。

(2) $g: a \rightarrow 1, b \rightarrow 3, c \rightarrow 2, d \rightarrow 3$ 。

(3) $h: a \rightarrow 1, b \rightarrow 2, b \rightarrow 3, c \rightarrow 1, d \rightarrow 1$ 。

(4) $k: a \rightarrow 1, b \rightarrow 1, c \rightarrow 1, d \rightarrow 3$ 。

Ans：(2)(4)

[例題2] (1) $y=5x+1$ (2) $y=|x|+2$ (3) $y^2=2x+1$ (4) $|y|=x-6$

Ans：(1)(2)是函數(3)(4)不是函數

[例題3] 試求下列各函數的定義域

(1) $y=\frac{2x+1}{x-1}$ (2) $y=\sqrt{x+1}$ (3) $y=\sqrt{x+1} + \frac{1}{x-1}$

Ans：(1) $\{x|x \neq 1, x \in \mathbf{R}\}$ (2) $\{x|x \geq -1, x \in \mathbf{R}\}$ (3) $\{x|x \neq 1 \text{ 且 } x \geq -1, x \in \mathbf{R}\}$

[例題4] 試求下列定義在實數上的函數之值域。

$$(1)f(x)=2x-1 \quad (2)f(x)=3x^2+4x+7 \quad (3)f(x)=\frac{x+5}{2x-3}$$

$$\text{Ans : (1)}\mathbb{R} \quad (2)\{y|y\geq\frac{17}{3}\} \quad (3)\{y|y\neq\frac{1}{2}\}$$

(練習1) 設 $A=\{a,b,c,d\}$ ， $B=\{1,2,3\}$ ，試判斷下列何者為函數？

$$(A)f: a\rightarrow 1, b\rightarrow 3, c\rightarrow 2$$

$$(B)g: a\rightarrow 1, b\rightarrow 3, c\rightarrow 2, d\rightarrow 3$$

$$(C)h: a\rightarrow 1, b\rightarrow 2, b\rightarrow 3, c\rightarrow 1, d\rightarrow 1$$

$$(D)k: a\rightarrow 1, b\rightarrow 1, c\rightarrow 2, d\rightarrow 2$$

$$\text{Ans : (B)(D)}$$

(練習2) 飲料自動販賣機中，所賣的飲料所成的集合為 A ，飲料的價格所成的集合為 B ，請問：

(1)可以定義出從 A 映至 B 的函數嗎？為什麼？

(2)可以定義出從 A 映至 B 的函數嗎？為什麼？

(練習3) 下列各題中，實數 y 都隨著實數 x 變動而變動，試問 y 是否為 x 的函數？

$$(1)2x+3y=4 \quad (2)xy=2, \text{ 其中 } x\neq 0 \quad (3)x^2=y-5 \quad (4)y^2-3x+4=0$$

$$(5)y=\begin{cases} 1, & \text{當 } x\geq 0 \\ 0, & \text{當 } x< 0 \end{cases} \quad \text{Ans : (1)(2)(3)(5)}$$

$$(練習4) \text{ 設 } f(x)=\begin{cases} 3x-1, & \text{若 } x>3 \\ x^2-2, & \text{若 } -2\leq x\leq 3 \\ 2x+3, & \text{若 } x<-2 \end{cases} \quad \text{試求(1)}f(0) \quad (2)f(5) \quad (3)f(-4)$$

$$\text{Ans : (1)}-2 \quad (2)14 \quad (3)-5$$

(練習5) 試求函數 $f(x)=\frac{2x+3}{x-5}$ 的值域與定義域。

$$\text{Ans : 定義域}=\{x|x\neq 5\}, \text{ 值域}=\{y|y\neq 2\}$$

(練習6) 設 $f(n)$ 表示 $\frac{2}{7}$ 化成小數，小數點後第 n 位數字。

(a) $f(1)=?$ $f(5)=?$ $f(2002)=?$

(b) 設 n 為任意自然數，請問 $f(n)$ 是否為 n 的函數？

(c) 請寫出 f 的值域。

Ans : (a) $f(1)=2$, $f(5)=1$, $f(2002)=7$ (b) 是 (c) $\{2, 8, 5, 7, 1, 4\}$

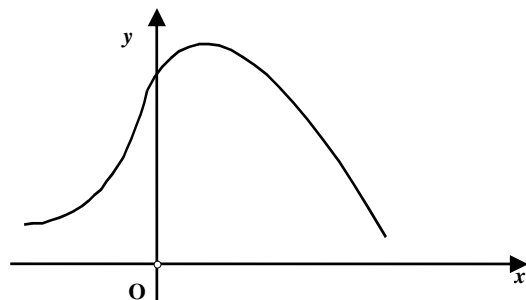
(乙) 函數的圖形

函數圖形的定義：

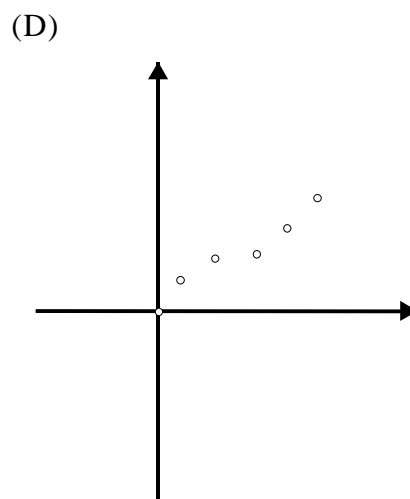
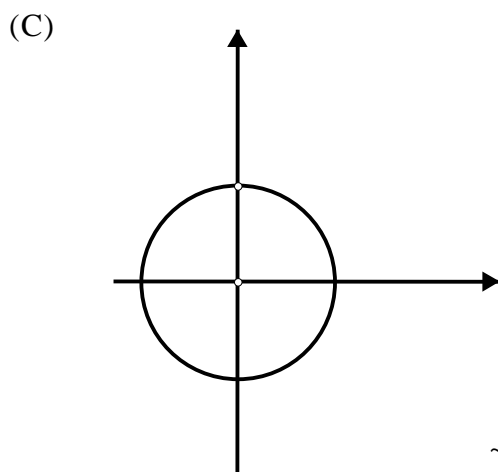
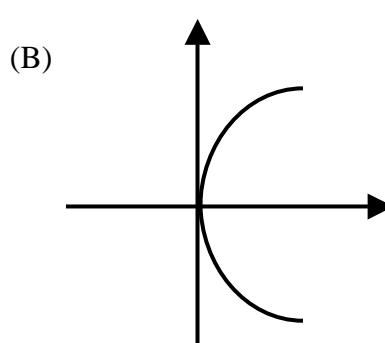
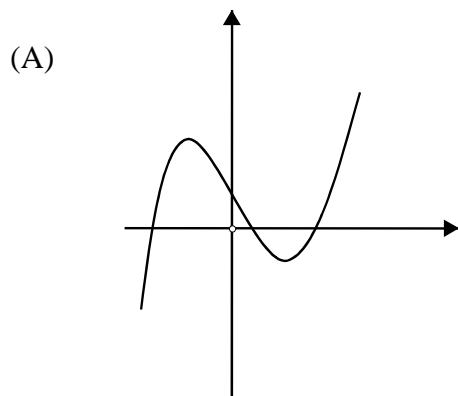
設 $y=f(x)$ 是一個給定的函數(其中 x, y 均為實數)，如果將 (x, y) 視為平面直角坐標系中的橫坐標與縱坐標，則所有滿足 $y=f(x)$ 的點 (x, y) 構成一個圖形(可能是直線、曲線或其他圖形)，這個圖形稱為函數 f 的圖形。

由集合的觀點來看：

函數 $f: A \rightarrow B$ ($A, B \subset \mathbb{R}$) 的圖形為點集合 $G = \{(x, f(x)) | x \in A\}$



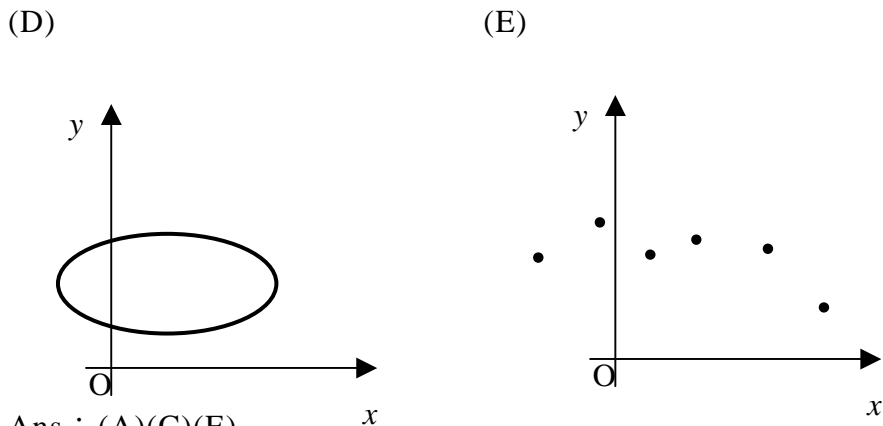
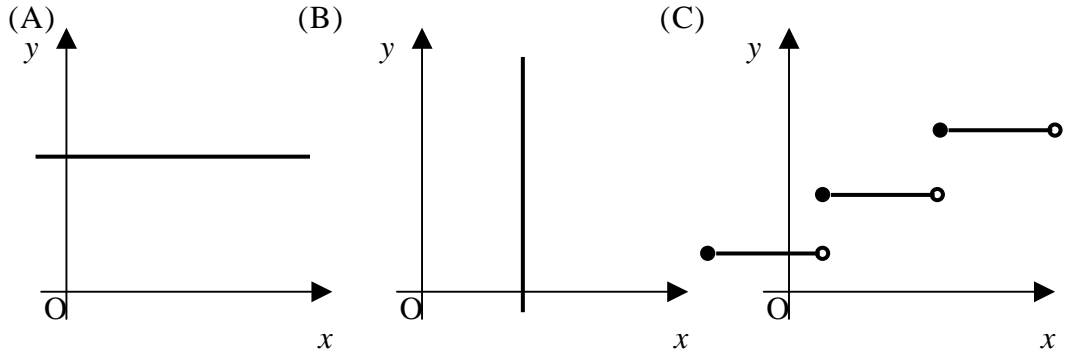
[例題5] 下列何者是 y 為 x 的函數圖形？



Ans : AD

判斷函數圖形的方法：若是函數圖形，作鉛直線與圖形最多一個交點。

(練習7) 在直角坐標平面上，下列圖形何者表示 y 為 x 的函數 $y=f(x)$ 的部分圖形？



Ans : (A)(C)(E)

[例題6] 設 $x \in \mathbb{R}$ ，定義符號 $[x]$ 為不大於 x 的最大整數。

例如： $[-5]=5$ ， $[-3.2]=-4$ ， $[6]=6$ ，...

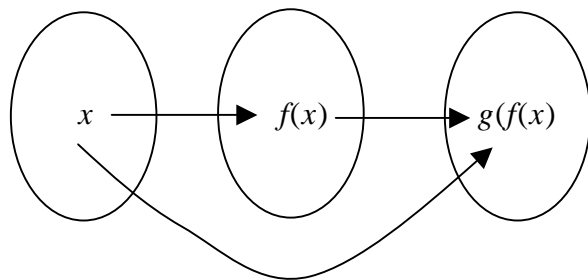
定義 $f(x)=[x]$ (高斯符號)，請問此函數的定義域、值域為何？並繪出此函數的圖形。

(丙) 一些特殊的函數

(1) 映成函數：設 A 、 B 為兩個非空集合， $f: A \rightarrow B$ 為一函數，若 $f(A)=B$ ，則稱 f 為映成函數。

(2) 1-1 函數：設 A 、 B 為兩個非空集合， $f: A \rightarrow B$ 為一函數，對於任意 $x_1, x_2 \in A$ ，若 $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ，則稱函數 f 為 1-1 函數。

(3) 合成函數：給定兩個函數 $f: A \rightarrow B$ 與 $g: B \rightarrow C$ ，我們定義 f 與 g 的合成函數 $g \circ f: A \rightarrow C$ 為 $g \circ f(x) = g(f(x))$ 。



(4) 奇函數與偶函數：

設 A 、 B 為兩個非空集合， $f: A \rightarrow B$ 為一函數

若 $x \in A$ ， $f(-x) = f(x)$ ，則稱 f 為偶函數。

若 $x \in A$ ， $f(-x) = -f(x)$ ，則稱 f 為奇函數。

例如： $f(x) = x^2 + 4$ 為偶函數， $f(x) = x^3 - x$ 為奇函數。

[例題7] 設 $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 3$, 求 (1) $f(g(-2)) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，(2) $g(f(0)) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

Ans : (1) 26 (2) -2

[例題8] 設 $f(x) = 3x - 6$ ，若 $g(3x+2) = f(2x+1)$ ，求 $g(x) = ?$ Ans : $g(x) = 2x - 7$

(練習8) 設函數 $f(x)=2x^2+3$ ， $g(y)=3y-4$ ，求函數 $f(g(y))=$ _____。

Ans : $18y^2-48y+35$

(練習9) 設 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x>1) \\ 3-2x & (x\leq 1) \end{cases}$ ， $g(x)=\begin{cases} x^3 & (x>1) \\ 2x^2-x & (x\leq 1) \end{cases}$ ，

則 $f(g(2))+g(f(0))=?$ Ans : 91

(練習10) 設 $f: A \rightarrow B$ 為一個函數，定義 $g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ ， $h(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$

請證明： $g(x)$ 為一個偶函數， $h(x)$ 為一個奇函數。

綜合練習

(1) 函數 $f: A \rightarrow B$ ，則下列何者真？

(A) $f(A) \subset B$ (B) 若 $f(x) \in f(A)$ ，則 $x \in A$ (C) 若 $x \in A$ ，則 $f(x) \in f(A) \cap B$

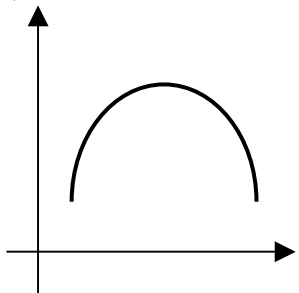
(D) 若 $D \subset A$ ，則 $f(D) \subset B$ (E) 若 $B \subset f(A)$ ，則 f 為映成函數。

(2) 設集合 $C=\{-1,0,1,2\}$ ，定義函數 $f: C \rightarrow \mathbb{Z}$ 如右： $f(x)=\begin{cases} 2x & (x<0) \\ 1 & (x=0) \\ x+3 & (x>0) \end{cases}$ ，請寫出此

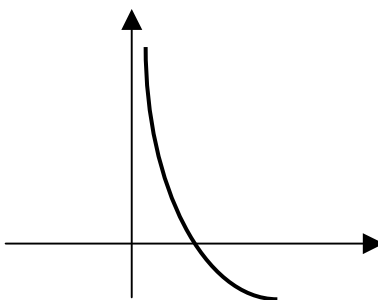
函數的定義域、值域。

(3) 在 xy 平面上，有下列四個圖形，試問何者表示 y 為 x 的圖形？

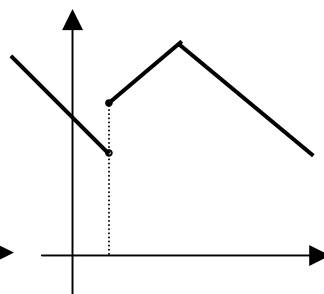
(A)



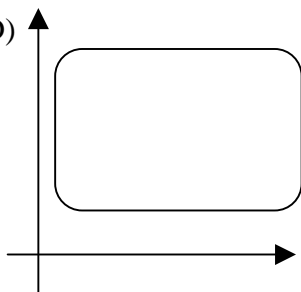
(B)



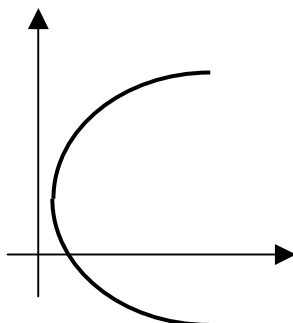
(C)



(D)



(E)



(4) 根據上一題的圖形，那些是 y 為 x 的 1-1 函數？

(5) 函數 f 定義如右： $f(x)=\begin{cases} 0 & (x\leq 0) \\ 3x & (x>0) \end{cases}$ ，請寫出此函數的定義域、值域。

(6) 求(a) $f(x)=\frac{2x-3}{3x+1}$ (b) $f(x)=\sqrt{-x^2+6x+16}$ 之定義域與值域？

(7) 試求下列函數的值域：

(a) $f(x)=2x-3$ (b) $f(x)=\sqrt{2x-3}$ (c) $f(x)=x^2-3x+5$ (d) $f(x)=\frac{4x-5}{3x+2}$

(8) 函數 $f(x)=\frac{x(x-1)}{|x-1|}$ ，請問此函數的定義域為何？並做其圖形。

(9) 設 $f(x)=\begin{cases} 2x+5, & \text{若 } x>9 \\ x^2-|x|, & \text{若 } -9\leq x\leq 9 \\ x-4, & \text{若 } x<-9 \end{cases}$ ，設 $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{若 } x<-2 \\ \sqrt{x^2+7}, & \text{若 } -2<x\leq 8 \\ |x+1|-12-x, & \text{若 } x>8 \end{cases}$

(a) $g(-5)=$ _____ (b) $f\circ g(9)=$ _____ (c) $g\circ f(-5)=$ _____

(10) 已知一函數 $f(x)$ 有下列的性質：

$f(x+5)=f(x)$ ， $f(-x)=-f(x)$ ， $f(\frac{1}{3})=1$ ，試求(a) $f(\frac{16}{3})$ (b) $f(\frac{29}{3})$ (c) $f(11)+f(-6)$ 的值。

(11) $f(\frac{x+1}{2x-1})=x+7$ ，求 $f(\frac{2}{3})=$ _____。

(12) 設 $f(x)=\frac{2x-3}{3x+1}$ ，若 $g(\frac{2x-1}{x+1})=f(x+1)$ ，則 $g(x)=$ _____。

(13) 根據記載：從地面向上升高，在 11 公里以下的高度，每升高 1 公里，氣溫降低 6°C ；在 11 公里以上的高度，氣溫幾乎不變。

(a) 假設地面溫度為 20°C ，上空 x 公里處的大氣溫度是 $y^\circ\text{C}$ ，試寫出函數關係式 $y=f(x)$ 。

(b) 離開地面 5500 公尺的高空，氣溫是多少度？

綜合練習解答

(1) (A)(B)(C)(D)(E)

(2) 定義域=C，值域= $\{-2, 1, 4, 5\}$

(3) (A)(B)(C)

(4) (B)

(5) 定義域=R，值域= $\{y|y\geq 0\}$

(6) (a) 定義域= $\{x|x\neq-\frac{1}{3}\}$ 值域= $\{y|y\neq\frac{2}{3}\}$ (b) 定義域= $\{x|-2\leq x\leq 8\}$ 值域= $\{y|0\leq y\leq 5\}$

(7) (a) R (b) $\{y|y\geq 0\}$ (c) $\{y|y\geq \frac{11}{4}\}$ (d) $R-\{\frac{4}{3}\}$

(8) $\{x\in R|x\neq 1\}$

(9) (a) $\frac{1}{5}$ (b) -15 (c) -11

(10)(a)1 (b)-1 (c)0

(11)12

(12) $g(x) = \frac{3x}{11-x}$

(13)(a) $y=f(x)=\begin{cases} 20-6x & (0 \leq x \leq 11) \\ -46 & (x \geq 11) \end{cases}$ (b)零下 13°C