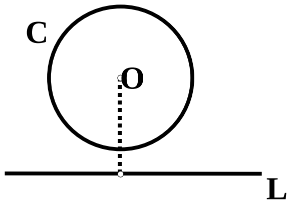
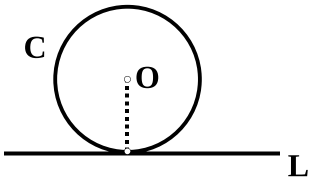
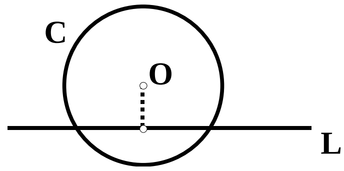
§4−2 圓與直線的關係

(甲)圓與直線的關係

(1)圓與直線相交情況：







不相交(相離)　　　　　相交於一點(相切)　　　相交於相異兩點(相割)

(2)圓與直線的關係之判別(代數觀點)：

(a)原理：利用「圖形的交點就是聯立方程式的實數解」的觀念判別之。

(b)方法：已知聯立方程式$\begin{cases} x^2+y^2+dx+ey+f=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases}$

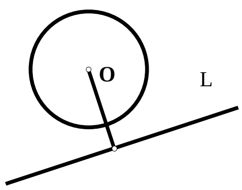
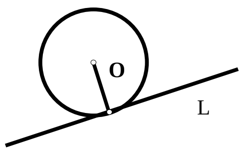
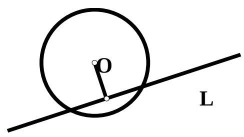
將一次式代入二次式中，得到一元二次方程式，令其判別式爲 D。

結論：相離⇔D<0　相切⇔D=0　相割⇔D>0

(3)圓與直線的關係之判別(幾何觀點)：
(a)原理：利用「圓心到直線的距離」與「半徑」的關係判別之。

(b)方法：設圓 C 的圓心爲 O，半徑爲 r，由 O 到直線 L 的距離爲 d，
則　相離⇔$d>r$　相切⇔$d=r$　相割⇔$d<r$

結論：

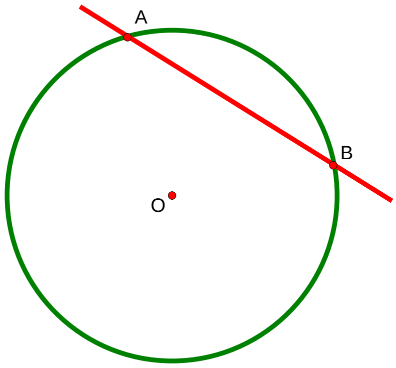
			
圓與直線的關係	相離 d(O,L)>半徑	相切 d(O,L)=半徑	相割 d(O,L)<半徑
交點數	0	1	2
坐標幾何	$\begin{cases} x^2+y^2+dx+ey+f=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases}$ 無解	$\begin{cases} x^2+y^2+dx+ey+f=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases}$ 恰有一解	$\begin{cases} x^2+y^2+dx+ey+f=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases}$ 有兩組相異解

[例題1] 試就實數k值討論直線L：$kx+y-3=0$ 與圓C：$x^2+y^2=3$ 的相交情況。

Ans：(1)相離，$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ (2)相切，$k=\sqrt{2}$，或$k=-\sqrt{2}$ (3)相交，$k>\sqrt{2}$或$k<-\sqrt{2}$

[例題2] 設直線$y=mx$與圓：$x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 交於A、B兩點，若$\overline{AB}=\sqrt{6}$ ，則$m=$？

Ans：$m=\frac{1}{3}$或-3



[例題3] 圓C：$x^2+y^2=4$ 上的動點P到直線L：$x-y=10$ 之距離的

(1)最大值=________，此時P點坐標爲________。

(2)最小值=________，此時P點坐標爲________。

Ans：$5\sqrt{2}+2$，P($-\sqrt{2}$,$\sqrt{2}$)；$5\sqrt{2}-2$，P($\sqrt{2}$,$-\sqrt{2}$)

(練習1) 設直線L：$3x+4y+k=0$，圓C：$(x-1)^2+y^2=9$，請就實數k討論直線L與圓C的位置的關係。

Ans：相切⇔$k=12$ 或-18，相割 ⇔ $-18<k<12$ ，相離⇔ $k>12$ 或$k<-18$

(練習2) 求線L：$4x-3y+1=0$ 在圓$x^2+y^2=41$ 內的弦長。Ans：$\frac{32}{5}$

(練習3) 設直線$y=mx+4-m$與圓：$x^2+y^2=25$ 交於A、B兩點，若$\overline{AB}=6$，則$m=$？

Ans：0 或$\frac{-8}{15}$

(練習4) 求圓$x^2+y^2=4$ 之點到直線 $3x-4y=20$ 的距離之最大值與最小值，並求此時點坐標。 Ans：M=6 點$(\frac{-6}{5},\frac{8}{5})$；m=2 點$(\frac{6}{5},\frac{-8}{5})$

(乙)圓的切線

(1)圓的切線：

割線：當一條直線與圓相交於兩點時，這樣的直線稱爲圓的**割線**。

國中時圓的切線是這樣定義的：

「**與圓恰有一個交點的直線稱為圓的切線，該交點稱為切點。**」

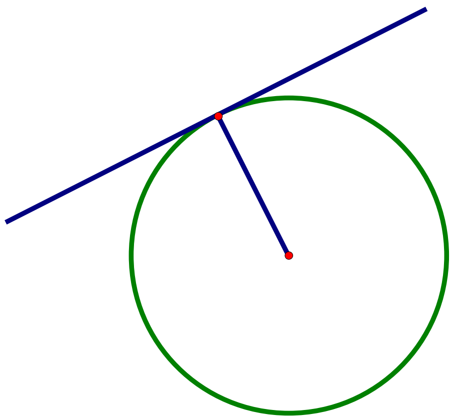
圓的切線性質：

(a)**圓的切線中，除了切點 P 之外，其餘的點都在圓的外部。**

(b)**圓心與切點的連線必垂直於切線。**

(c)**圓心到切線的距離等於半徑。**

[說明]：



(2)切線的求法：

我們將圓的切線之型態分成三類：

(a)過已知點，求切線。

(b)已知切線斜率，求切線。

(c)通過圓外一點，求切線。

求切線的方法：

不管是那一種型態，求圓的切線均可利用「**圓心到切線的距離等於半徑**」、「**圓心與切點的連線必垂直於切線**」這些觀念去解決。

[例題4] (1)求通過$x^2+y^2=25$上一點A(3,4)的切線方程式。

(2)已知點B(2,7)在圓$x^2+y^2+2x-6y-15=0$上，試求過B點的切線方程式。

Ans：(1)$3x+4y=25$　(2)$3x+4y-34=0$

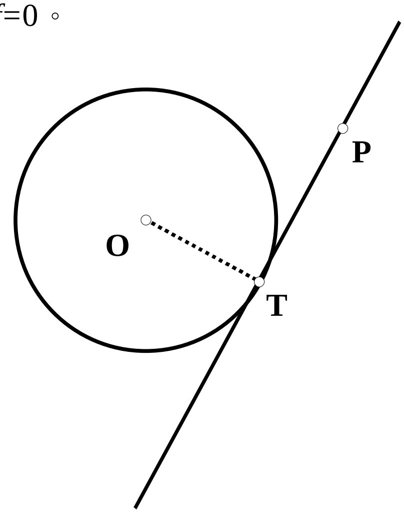
圓上一點的切線公式(僅供參考)

設T(x_1 ,y_1)為圓C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$上給定的一點，

則以T為切點的切線方程式為 $x_1x+y_1y+d(\dfrac{x_1+x}{2})+e(\dfrac{y_1+y}{2})+f=0$。

[證明]：

設P(x,y)為切線L上的任意點



$x^2+y^2+dx+ey+f=0 \Leftrightarrow (x+\frac{d}{2})^2+(y+\frac{e}{2})^2=\dfrac{d^2+e^2-4f}{4}$，所以O$(\frac{-d}{2},\frac{-e}{2})$

$\Leftrightarrow \overline{PT}\perp\overline{OT}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TO}=0$

$\Leftrightarrow (x-x_1,y-y_1)\cdot(\frac{-d}{2}-x_1, \frac{-e}{2}-y_1)=0$

$\Leftrightarrow (x-x_1)(\frac{-d}{2}-x_1)+(y-y_1)(\frac{-e}{2}-y_1)=0$

$\Leftrightarrow xx_1+\frac{d}{2}x-x_1^{\ 2}-\frac{d}{2}x_1+y_1y+\frac{e}{2}y-y_1^{\ 2}-\frac{e}{2}y_1=0$…….(*)

再利用T(x_1,y_1)在圓C上，即$x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+dx_1+ey_1+f=0$……..(**)

(*)+(**) $\Rightarrow x_1x+y_1y+d(\dfrac{x_1+x}{2})+e(\dfrac{y_1+y}{2})+f=0$。

[例題5] 試求斜率為-1，圓$x^2+y^2-6x-4y+5=0$的切線。

Ans：$y=-x+1$或$y=-x+9$

[例題6] 求通過A(4,2)與圓$x^2+y^2-4x+4y-2=0$ 相切的直線。

Ans：$y-2=\frac{1}{3}(x-4)$或$y-2=-3(x-4)$

已知斜率的切線公式：

(1)圓$x^2+y^2=r^2$中，斜率爲m的切線爲$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$。

(2)圓$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$中，斜率爲m的切線爲$y-y_0=m(x-x_0)\pm r\sqrt{1+m^2}$。

結論：

(a)過圓外一點求切線的方法：

設$P(x_1,y_1)$在圓$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 外，則過此點之切線方程式求法：

設所求切線方程式爲$y-y_1=m(x-x_1)$，利用圓心到切線的距離等於半徑，求斜率m。

(注意：當m只有一個值時，還有另一切線爲鉛直線$x-x_1=0$)

(b)已知切線斜率(m)求切線：

設切線斜率爲$y=mx+k$，利用圓心到切線的距離等於半徑，求y截距k。

(練習5) 圓C：$(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 及一點P(4,5)，求過P點而與圓C相切之切線方程式。

Ans：$4x-3y-1=0$ 或$x=4$

(練習6) 設直線L：$x-2y+3=0$，圓C：$x^2+y^2+6x-2y+5=0$

(1)平行L與圓C相切的直線。

(2)垂直L與圓C相切的直線。

Ans：(1)$x-2y+10=0$ ，$x-2y=0$(2)$2x+y=0$，$2x+y+10=0$

(練習7) 求過點P(3,−1)與圓C：$x^2+y^2+2x-y-17=0$ 相切的直線。

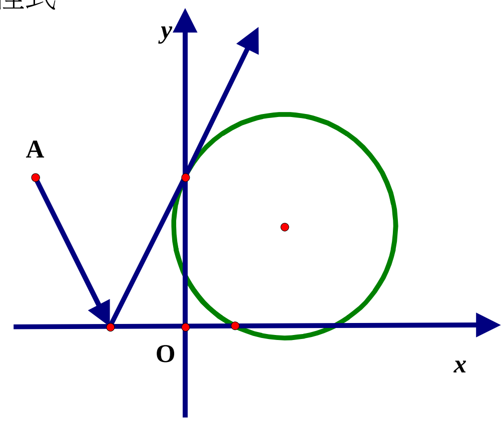
Ans：$8x-3y-27=0$

(練習8) 直線 $5x-y-a=0$ 與圓 $3x^2+3y^2-2x+4y+b=0$ 相切於$(c,-1)$，求實數a,b,c之值。

Ans： $a=11,b=-7,c=2$

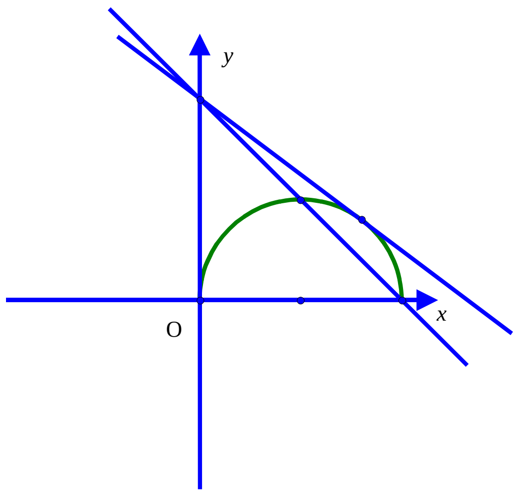
[例題7] 自點A$(-3,3)$發出的光線L射到x軸上，被x軸反射，其反射光線所在直線與圓 $x^2+y^2-4x-4y+3=0$ 相切，求光線L所在的直線方程式。

Ans：$2x+y+3=0$



[例題8] 設$\sqrt{x(4-x)}=mx+4$ 有兩相異實數解，

求 m 的範圍。Ans：$-1\le m<\frac{-3}{4}$



(練習9) 設$\begin{cases} y=m(x-3)+4 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$有兩解，求 m 的範圍。Ans：$\frac{12-2\sqrt{21}}{5}<m<\frac{12+2\sqrt{21}}{5}$

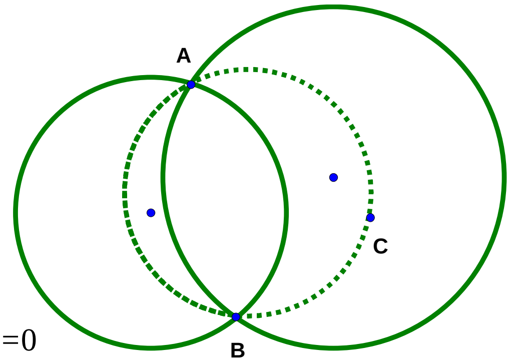
(練習10) (1)作圖 C：$y=3-\sqrt{4-x^2}$ 。

(2)若 P(x,y)在 C 上，求$\frac{y}{x+3}$的極大值、極小值。Ans：$3,\frac{9-2\sqrt{14}}{5}$

(丙)圓系

(1)若設圓C_1：$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$，與圓C_2：$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$，則過兩圓交點之所有圓方程式可設爲$k_1(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+k_2(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$，其中$k_1^2+k_2^2\neq0$

[證明]：
令$f_1(x,y)= x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1$，$f_2(x,y)= x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2$，
圓C_1的方程式爲$f_1(x,y)=0$，圓C_2的方程式爲$f_2(x,y)=0$，
假設C_1、C_2的交點爲$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$
所以$f_1(x_i,y_i)=0$，$f_2(x_i,y_i)=0$，$i=1,2$
今圓O過A、B兩點，
令$C(m,n)$爲圓O上異於A、B兩點的點，
取$k_1=f_2(m,n)$，$k_2=-f_1(m,n)$
考慮$f_2(m,n)\ (x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)- f_1(m,n)(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$



將A、B、C三點代入均成立，因此上式所代表的圓通過A、B、C三點
而過A、B、C三點的圓只有一個。
所以$f_2(m,n)\ (x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)-f_1(m,n)(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$ 爲通過A、B兩點的圓。

根據前面的結果，當$k_1\neq0$，通過兩圓交點的圓，可寫成：
$(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+k(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$，其中$k=\dfrac{k_2}{k_1}$。

通過圓C_1：$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$，與圓C_2：$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$，則過兩圓交點之所有圓方程式可設爲$(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+k(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$ (不包含圓C_2)

(2)設通過圓C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 與直線L：$ax+by+c=0$ 之交點之圓系方程式爲：

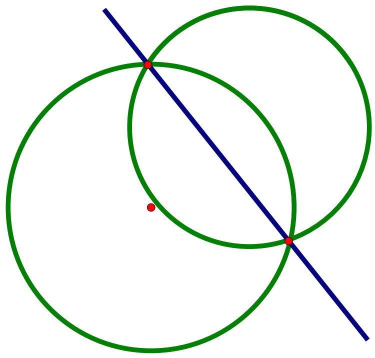
$(x^2+y^2+dx+ey+f)+k(ax+by+c)=0$，$k$爲任意實數。
[證明]：方法同(1)

(3)若圓C_1：$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$，與圓C_2：$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$，且兩圓相交於A、B兩點，則直線AB方程式爲$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$。

[證明]：
令$f_1(x,y)= x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1$，$f_2(x,y)= x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2$，
圓C_1的方程式爲$f_1(x,y)=0$，圓C_2的方程式爲$f_2(x,y)=0$，
假設C_1、C_2的交點爲$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$
考慮$f_1(x,y)-f_2(x,y)= (d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$ 這個方程式
因爲$f_1(x_i,y_i)=0$，$f_2(x_i,y_i)=0$，$i=1,2$
所以$(d_1-d_2)x_i+(e_1-e_2)y_i+(f_1-f_2)=0$，$i=1,2$
因此$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$ 通過A、B兩點
又過A、B兩點只有一直線
故直線AB方程式爲$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$

[例題9] 過$x^2+y^2-4x-28=0$，$x^2+y^2-4x-20y+52=0$ 的交點，且與直線$x-7=0$ 相切得圓方程式。
Ans： $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ 或$x^2+y^2+4x-14y+28=0$

[例題10] 設圓C：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$ 與直線L：$x+2y=0$ 交於A、B兩點，
設定點P(1,1)，則
(1)ΔPAB的外接圓方程式為何？
(2)直線AB的方程式。Ans：(1)$3x^2+3y^2-2x+2y-6=0$(2)$x-2y=0$



(練習11) 求過兩圓$x^2+y^2-2x+4y-4=0$，$x^2+y^2-2x-3=0$ 之交點，且過$(-2,1)$的圓方程式。
Ans：$x^2+y^2-2x-8y-1=0$

(練習12) 通過$x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 與直線 $2x-y+4=0$ 之交點且切Y軸之圓方程式。
Ans：$x^2+y^2+6x-6y+9=0$ 或$x^2+y^2+14x-10y+25=0$

(練習13) 通過$x^2+y^2-4x-6y+4=0$ 與$x-y-2=0$ 之交點且半徑為 3，求圓方程式。
Ans：$x^2+y^2-7x-3y+10=0$

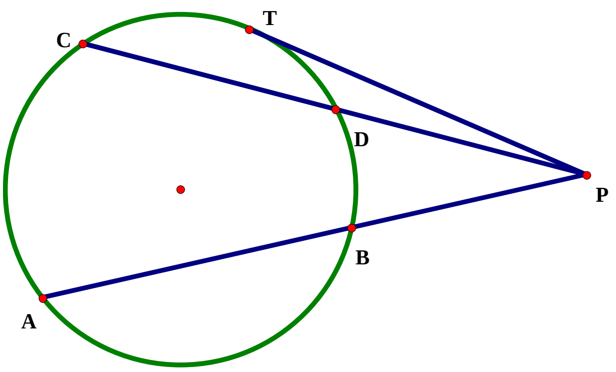
(練習14) 設直線L：$x+y-4=0$ 與圓C：$x^2+y^2+2x-2y-14=0$ 相交於A,B二點，試求
(1)通過A,B二點及原點的圓方程式。
(2)通過A,B二點且與直線$x+y+2=0$ 相切的圓方程式。
Ans：(1)$2x^2+2y^2-3x-11y=0$　(2)$3x^2+3y^2-x-13y-14=0$

(練習15) 求過兩圓$x^2+y^2=4$、$x^2+y^2+2x-3=0$ 之交點且半徑為 4 之圓方程式。
Ans：$x^2+y^2+8x=0$ 或$x^2+y^2-6x-7=0$

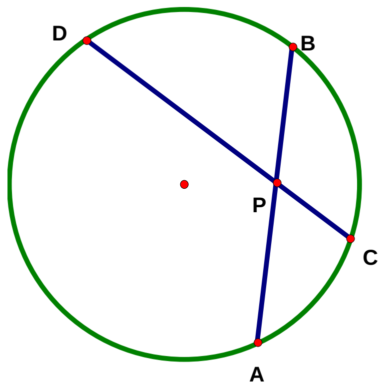
(丁)圓的其他性質

(1)切割線性質：

(a)$PT^2=PA\times PB=PC\times PD$

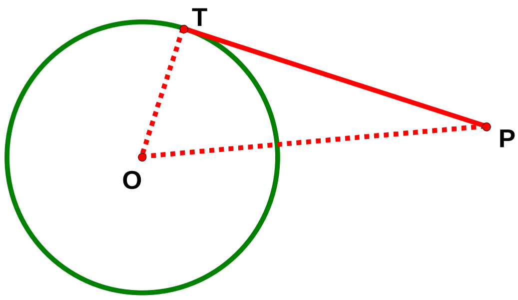


(b) $PA\times PB=PC\times PD$



(2)切線段長與圓冪：

[例題11] (1)設$P(x_1,y_1)$為圓$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 外部一點，
則自P點所作的切線長為$\sqrt{x_1^2+y_1^2+dx_1+ey_1+f}$ 。
(2)試求點P(5,8)到圓 $2x^2+2y^2-4x+6y+1=0$ 之切線段長度。
Ans：$\dfrac{3\sqrt{46}}{2}$



[補充教材]：

圓冪：

點P(x_0,y_0)對圓C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 的**冪**(power)= $x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f$。

$x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f=(x_0+\frac{d}{2})^2+(y_0+\frac{e}{2})^2-(\frac{d^2+e^2-4f}{4})=\overline{\mathbf{OP}}^{\mathbf{2}}-$(圓C的半徑)^2

圓冪的幾何意義：

(a)點P在圓C外面：

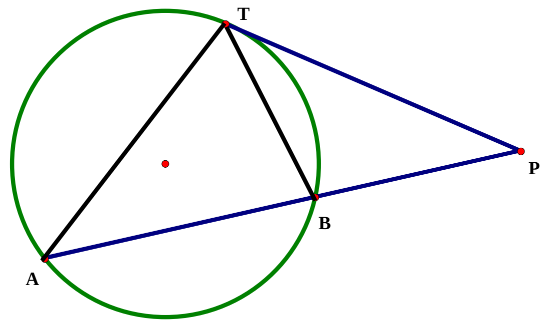
圓冪=$\overline{\mathbf{OP}}^2-$(圓C的半徑)$^2=\overline{\mathbf{PT}}^{\mathbf{2}}=\overline{\mathbf{PA}}^{\mathbf{2}}\times\overline{\mathbf{PB}}^{\mathbf{2}}$。

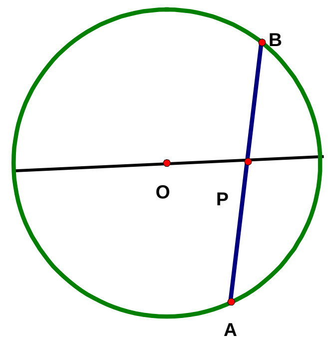
(b)點P在圓C上面：

圓冪=$\overline{\mathbf{OP}}^2-$(圓C的半徑)$^2=0$

(c)點P在圓C內部：

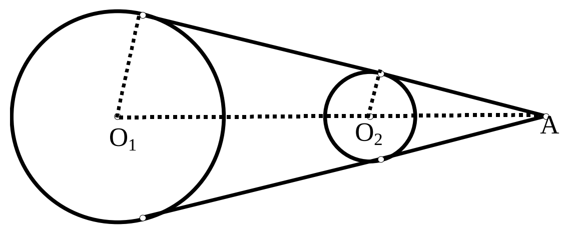
圓冪=$\overline{\mathbf{OP}}^2-$(圓C的半徑)$^2=-\overline{\mathbf{PA}}\times\overline{\mathbf{PB}}$。



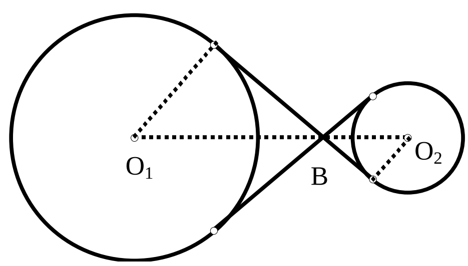


(3)兩圓的公切線：

外公切線長=$\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1-r_2)^2}$

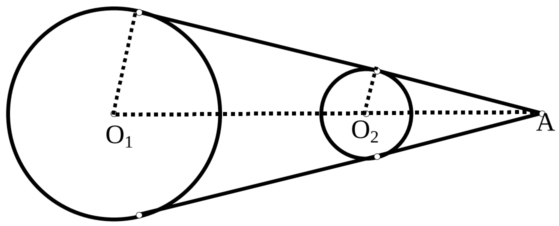


內公切線長=$\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1+r_2)^2}$



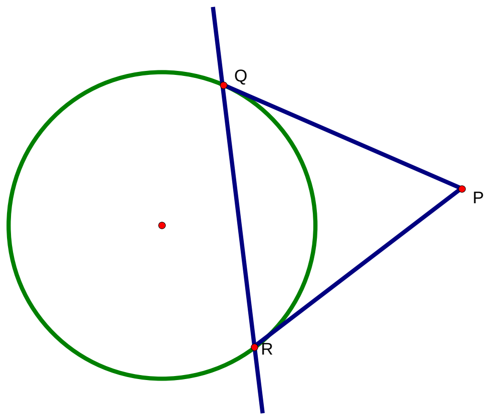
[例題12] 設C_1：$(x-2)^2+(y-3)^2=4$，C_2：$(x-6)^2+(y+3)^2=9$，求C_1,C_2的外公切線方程式及其長。

Ans：$y-15=(\frac{-24\pm\sqrt{51}}{15})(x+6)$，$\sqrt{15}$



[例題13] (極線)

證明：設$P(m,n)$爲圓$x^2+y^2=r^2$外一點，過P作此圓之切線，設切點分別爲Q、R，則直線QR之方程式爲$mx+ny=r^2$。



(練習16) xy平面上有一定點$A(-1,2)$及一圓：$x^2+y^2-2x+4y-3=0$

試求(1)點A到圓C的切線段長。(2)過A的直線與圓C相交於P,Q兩點，求$\overline{AP}\times\overline{AQ}$之値。Ans：(1)$2\sqrt{3}$　(2)12

(練習17) 二圓C_1：$x^2+y^2-6x-2y+1=0$，C_2：$x^2+y^2+4x+3=0$，則

(1)二圓的外公切線長、內公切線長。(2)設二圓的外公切線夾角θ，則$\sin\theta=$？

(3)二圓外公切線的交點、內公切線的交點(4)二外公切線方程式。

(5)二內公切線方程式。

Ans：(1)$\sqrt{22}$，$\sqrt{10}$　(2)$\frac{2\sqrt{22}}{13}$　(3)$(\frac{-9}{2},\frac{-1}{2})$、$(\frac{-3}{4},\frac{1}{4})$

(4)$y+\frac{1}{2}=\frac{5\pm2\sqrt{22}}{21}(x+\frac{9}{2})$(5) $y-\frac{1}{4}=\frac{5\pm4\sqrt{10}}{9}(x+\frac{3}{4})$

(練習18) 點$P(3,4)$對圓：$x^2+y^2=9$ 所引之切點連線的方程式。Ans：$3x+4y=9$

綜合練習

(1) 請就實數 k 值討論方程組 $\begin{cases} x+2y+k=0 \\ x^2+y^2+2x-6y-6=0 \end{cases}$ 的解的個數。

(2) 設兩圓，圓C_1：$x^2+(y-2)^2=1$ 與圓C_2：$(x+3)^2+(y+2)^2=a^2(a>0)$試求：
(a)若圓C_1與圓C_2相切，則a值範圍爲何？
(b)若圓C_1與圓C_2外離，則a值範圍爲何？
(c)若圓C_1與圓C_2內離，則a值範圍爲何？
(d)若圓C_1與圓C_2相交，則a值範圍爲何？

(3) 求過點A(2,4)與圓$x^2+y^2+2x+4y-4=0$ 相切的直線，並求出切點坐標。

(4) 過原點作圓$x^2+y^2-6x-2y+9=0$ 的切線，求切線方程式。

(5) 在坐標平面上(7,5)處有一光源，將圓$x^2+(y-1)^2=1$ 投影到x軸的影長爲______。

(6) 設圓 C 與直線 $4x-3y+1=0$ 相切於$(a,3)$，且 $a>0$，與 y 軸相切於$(0,b)$，且 $b>0$，求圓 C 的方程式及 a,b 兩數之值。

(7) 試求過 A(1,2)且與 x 軸，y 軸均相切的圓方程式。

(8) 試求圓心在(9,7)且又與圓C：$x^2+y^2+2x-4y=15$ 相切的兩圓較小者的圓方程式。

(9) 試求圓C：$2x^2+2y^2-8x-5y+k=0$ 與x軸相切時的k值。

(10) 設P$(-2,h)$ $(h>0)$爲光源，C：$x^2+y^2=1(y\geq 0)$爲半圓形障礙線，若光源要照到點A(2,0)，問h至少爲多少？

(11) 過P(1,2)對圓$x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 作兩切線，若切點爲Q、R，則
(a)請問ΔPQR的外接圓方程式。(b)直線QR的方程式。(c)兩切線的方程式。

(12) 設圓C通過$x^2+y^2-12x+3y+28=0$ 與直線 $2x-y-19=0$ 的交點及點(1,0)，試求圓C的方程式。

(13) 圓心在 $x-2y=6$ 上且與兩坐標軸相切之圓方程式。

(14) 試求通過二圓C_1：$x^2+y^2-x+y-2=0$ 與C_2：$x^2+y^2=5$ 的交點，且圓心在L：$3x+4y-1=0$ 上的圓方程式。

(15) 設P,Q爲y軸上兩定點且Q(0,−3)，若P到圓C：$4x^2+4y^2-32x+20y+53=0$ 的切線段長等於$\overline{PQ}$長,求P坐標及切線段長。

(16) 求P(6,8)到圓$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 之
(a)最近距離m=_____，此時點坐標爲__________。

(b)最遠距離M=_____，此時點坐標為__________。

(17) 設圓C_1：$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$，與圓C_2：$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$，不為同心圓，若$P(m,n)$至圓C_1、C_2的切線段長相等，求證：
P點落在$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$ 上。

進階問題

(18) 已知圓心(4,2)的圓 C 與 x 軸相切，若自點 A(−2,1)發射光線 L 經 x 軸反射後與此圓相切(L 不可在與 x 軸接觸前先碰到圓 C)，則光線 L 所在的直線斜率為何？

(19) (a)已知點$P(x_0,y_0)$，圓C：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，若過點P引一直線交圓C於A、B兩點，則$PA\cdot PB==|x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F|$，試證之。

(b)已知$\overline{AB}$為圓C：$x^2+y^2+2x-6y-3=0$ 之一弦，P(−2,5)為$\overline{AB}$之三等分點，求$\overline{AB}$。

(20) 在坐標平面上有一圓C：$x^2+y^2=37$， $\overline{AB}$為圓C之一弦且點P(1,2)恰為$\overline{AB}$之三等分點，試求直線AB之方程式。(二解)

(21) 自圓C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 外一點$P(x_0,y_0)$作圓C的二切線，設切點為$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，則直線P_1P_2的方程式為$x_0x+y_0y+\frac{d}{2}(x_0+x)+\frac{e}{2}(y_0+y)+f=0$。

(22) 過點P作圓C：$x^2+y^2-8x+6y=0$ 之切線，切點P_1、P_2，設直線P_1P_2之方程式為 $7x+y=0$，試求P之坐標。

綜合練習解答

(1) $-5-4\sqrt{5}<k<-5+4\sqrt{5}$ 兩組解，$k=-5\pm4\sqrt{5}$ 一組解，$k>-5+4\sqrt{5}$ $k<-5-4\sqrt{5}$ 無實數解

(2) (a) $a=6$ 或 $a=4$(b) $0<a<4$(c) $a>6$(d) $4<a<6$

(3) $3x-4y+10=0$ 為切線時，切點$(\frac{-14}{5},\frac{2}{5})$、$x=2$ 為切線時，切點$(2,-2)$

(4) $y=0$ 與 $3x-4y=0$

(5) $\frac{16}{3}$

(6) $(x-\frac{10}{9})^2+(y-\frac{11}{3})^2=\frac{100}{81}$，$a=2$，$b=\frac{11}{3}$

(7) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 及$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

(8) $(x-9)^2+(y-7)^2=45$

(9) $k=8$

(10) h 至少為$\frac{4}{\sqrt{3}}$

(11) (a)$x^2+y^2-3x-y=0$ (b)$x-3y+4=0$ (c)$y=2$ 或$y-2=\frac{3}{4}(x-1)$

(12) $(x-5)^2+(y+1)^2=17$

(13) $(x+6)^2+(y+6)^2=36$ 或$(x-2)^2+(y+2)^2=4$

(14) $x^2+y^2+2x-2y-11=0$

(15) $P(0,\frac{17}{4})$切線段長$\frac{29}{4}$

(16) (a) $m=4$，$(\frac{18}{5}，\frac{24}{5})$ (b) $M=6$，$(\frac{12}{5}，\frac{16}{5})$

(17) [證明：設P點對圓C_1、C_2的切點爲T_1、T_2，因爲P到圓C_1、C_2的切線段相等，所以$m^2+n^2+d_1m+e_1n+f_1= PT_1=PT_2= m^2+n^2+d_2m+e_2n+f_2$ 所以$(d_1-d_2)m+(e_1-e_2)n+(f_1-f_2)=0$，故P點落在$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$ 上。]

(18) $\frac{-9-\sqrt{41}}{16}$

(19) (a)當P點在圓外時，$PA\cdot PB=PT^2= x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F$ (參考例題 11)，

當P點在圓內部時，引一弦$\overline{CD}$通過圓心O與P點，

$\Rightarrow PA\cdot PB=PC\cdot PD=(r-\overline{OP})(r+\overline{OP})=r^2-\overline{OP}^2=-(x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F)$

結論：$PA\cdot PB==| x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F|$ (b)6

(20) $y-2=\frac{3}{4}(x-1)$及 $x-1=0$

[提示：用(19)題的結果，可知 $A\cdot PB=32\Rightarrow PA=8,PB=4\Rightarrow\overline{AB}=12$， 令直線 AB 的方程式爲 $y-2=m(x-1)$，利用弦中點與圓心連線垂直平分弦的性質，⇒圓心到直線 AB 的距離$=1\Rightarrow\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Rightarrow m=\frac{3}{4}$，但此種直線有兩條，所以令一直線是 $x-1=0$]

(21) [證明：

圓C上過切點$P_1(x_1,y_1)$的切線方程式爲$x_1x+y_1y+\frac{d}{2}(x_1+x)+\frac{e}{2}(y_1+y)+f=0$，

圓C上過切點$P_2(x_2,y_2)$的切線方程式爲$x_2x+y_2y+\frac{d}{2}(x_2+x)+\frac{e}{2}(y_2+y)+f=0$，

因爲這兩條切線均通過$P(x_0,y_0)$，

所以$x_1x_0+y_1y_0+\frac{d}{2}(x_1+x_0)+\frac{e}{2}(y_1+y_0)+f=0$ 且$x_2x_0+y_2y_0+\frac{d}{2}(x_2+x_0)+\frac{e}{2}(y_2+y_0)+f=0$，

因此$x_0x+y_0y+\frac{d}{2}(x_0+x)+\frac{e}{2}(y_0+y)+f=0$ 通過$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$。

故直線P_1P_2的方程式爲$x_0x+y_0y+\frac{d}{2}(x_0+x)+\frac{e}{2}(y_0+y)+f=0$。

(22) $P(-3,-4)$ [提示：設 $P(m,n)$，根據(21)題的結果$\Rightarrow P_1P_2$的方程式爲$x+ny-4(m+x)+3(n+y)=0$ 與 $7x+y=0$ 比較係數 $\Rightarrow m=-3$，$n=-4$。]