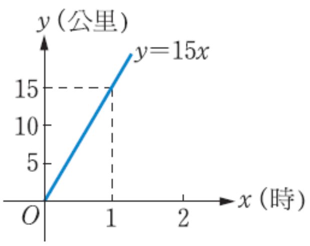
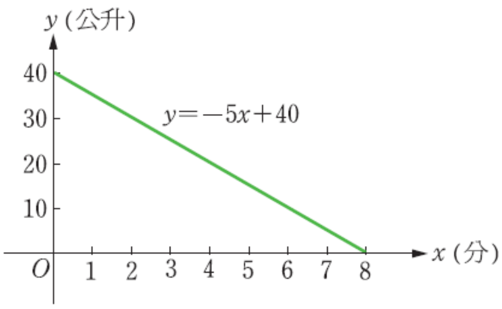
第 5 單元多項式函數

(甲)一次函數

一次函數的實例：
(1°)騎自行車是很環保的健身運動，若自行車每小時的速度大小為 15 公里，則騎 x 小時後，行經的路程為 y 公里，y 與 x 的關係為 $y=15x$ $(x\geq0)$
(2°)水槽中原有存水 40 公升，打開水龍頭後每分鐘排出 5 公升，
x 分鐘後水槽內的水量有 y 公升，y 與 x 的關係為 $y=-5x+40$ $(0\leq x\leq8)$
(1°)(2°)的圖形如下所示：





(1)一次函數(線性函數)：
(a)一次函數的定義：
設 $m\neq0$，若兩個變數 x,y 之間的關係可以表成 $y=mx+b$，則 y 稱為 x 的**一次函數**。
因為 y 為 x 的函數，因此上述的一次函數亦可表成 $f(x)=mx+b$。
當 $x=0$ 時，$y=b$ 稱為 y 截距，通常代表開始觀察時的初始值。

(b)若允許 $m=0$，那麼所有型如 $y=mx+b$ 的函數稱為**線性函數**。

(2)線性函數 $y=mx+b$ 中 m 的意義：
(a)自變數與因變數變化的觀點：
設(x_0,y_0)在一次函數 $y=mx+b$ 的圖形上，即 $y_0=mx_0+b$
現在讓自變數 x_0 增加 h(h 可正可負)成為 x_0+h，
此時因變數 $f(x_0+h)=m(x_0+h)+b=mx_0+b+mh=y_0+a=f(x_0)+mh$
故因變數 $f(x_0+h)$增加 mh(mh 可正可負)成為 $f(x_0)+mh$。
結論：
(1°)若 $m>0$，則當自變數 x 的值**增加** h 單位時($h>0$)，其因變數 y 值必**增加** mh 單位。
(2°)若 $m<0$，則當自變數 x 的值**增加** h 單位時($h>0$)，其因變數 y 值必**減少**$|mh|$單位。
(3°)若 $m=0$，則不論自變數 x 的值如何變動，其因變數 y 值**恆為一個常數**。

(b)函數圖形的觀點：
國中時已經知道一次函數 $y=mx+b$ 的圖形為一直線 L，在 $y=mx+b$ 的圖形上取相異兩點 A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)，所以 $y_1=mx_1+b$，$y_2=mx_2+b$

將兩式相減，可得 $y_1-y_2=m(x_1-x_2)$，因為 $x_1\neq x_2$，所以 $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ 。

$m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$這個式子可以解釋成：

一次函數 $\boldsymbol{y=mx+b}$ 中 $\boldsymbol{x}$ 的係數 $\boldsymbol{m}$ 為$\dfrac{\textbf{相對應因變數的差}}{\textbf{相對應自變數的差}}$。

於是我們定義 **x 的係數** m 為 $y=mx+b$ 圖形直線 L 的**斜率**。

斜率有許多應用，例如常用 2%、3%的數來表示一條公路的坡度(grade)，3%的坡度表示每經 100 英尺的水平距離，公路升高 3 英尺，而−3%表示一條公路的坡度(grade)，3%的坡度表示每經 100 英尺的水平距離，公路下降 3 英尺；斜率還可以理解成平均變化率(average rate of change)，速度、敏感度、密度等都是平均變化率。

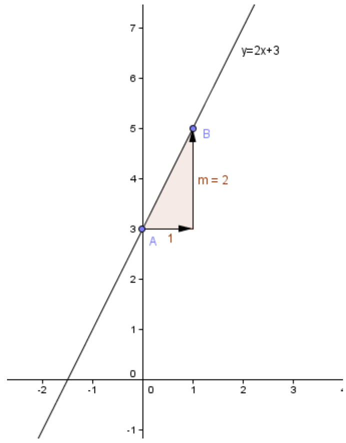
實例說明：

(1°)以一次函數 $y=2x+3$ 為例：

一次函數 $y=2x+3$ 的圖形如右圖所示之直線 L，

直線 L 的斜率為 2，自變數 x **增加** 1 單位，因變數 y **增加** 2 單位。

因此圖形從左下上升到右上。

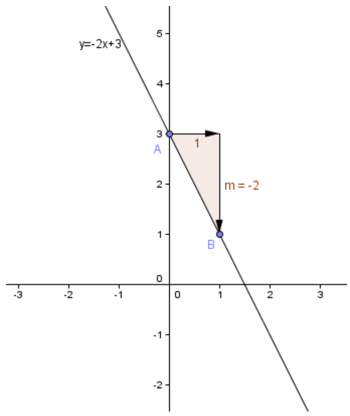


(2°)以一次函數 $y=-2x+3$ 為例：

一次函數 $y=-2x+3$ 的圖形如右圖所示之直線 M，

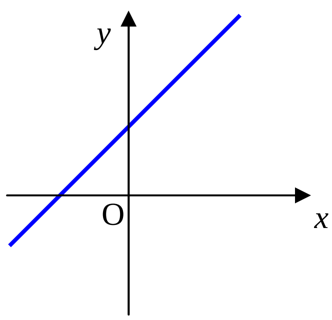
直線 M 的斜率為−2，自變數 x **增加** 1 單位，因變數 y **減少** 2 單位。

因此圖形從左上下降到右下。

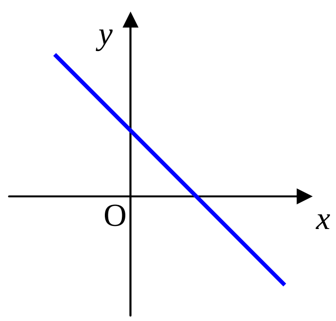


(2)線性函數 $y=mx+b$ 的圖形：

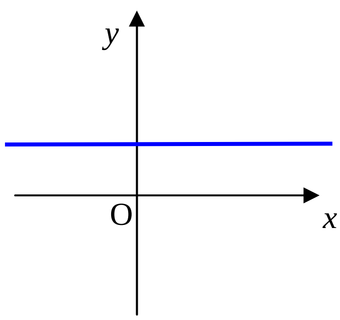
(i) m>0



(ii)m<0

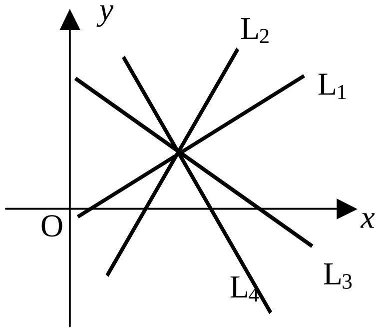


(iii)m=0



[例題1] 測量氣溫，常用攝氏和華氏兩種度數，已知攝氏每上升 1 度， 華氏就上升$\frac{9}{5}$度，且攝氏 0 度時，華氏 32 度，設攝氏 x 度時，華氏 y 度
試回答下列各小題：
(1)請求出 y 與 x 的關係。
(2)攝氏 60 度時，華氏多少度？
(3)攝氏多少度時與華式的度數相同？
[解答]：
(1)因為攝氏每上升 1 度， 華氏就上升$\frac{9}{5}$度，所以 y 與 x 的關係是一個線性關係，故可設 $y=mx+k$，
又攝氏 0 度時，華氏 32 度，所以攝氏 1 度，華氏$(32+\frac{9}{5})$度
$\Rightarrow 32=m\cdot 0+k$，$32+\frac{9}{5}=m\cdot 1+k \Rightarrow m=\frac{9}{5}$，$k=32$。因此 $y=f(x)=\frac{9}{5}x+32$。
(2)$f(60)=108+32=140$(度)
(3)設 t 度時相等，$t=\frac{9}{5}t+32 \Rightarrow t=-40$
$\therefore$在零下 40 度時，攝氏與華式的度數相同。

[例題2] 如右圖，設 m_1,m_2,m_3,m_4 各為一次函數的圖形直線 L_1,L_2,L_3,L_4 的斜率，試比較 m_1,m_2,m_3,m_4 的大小。
Ans：$m_2>m_1>m_3>m_4$



結論：
直線斜率的絕對值代表傾斜程度：傾斜程度愈大，則其斜率的絕對值也愈大，而且
(1°)當直線由左下到右上傾斜時，其斜率為正。
(2°)當直線由左上到右下傾斜時，其斜率為負。
(3°)當直線成水平時，其斜率為 0。

(練習1) 已知線性函數的圖形過點(2,3)，且斜率為 $\frac{1}{2}$，求此函數。
Ans： $y=\frac{1}{2}x+2$

(練習2) 某班數學測驗，成績最低者為 20 分，最高者為 90 分。現設計一線性函數使原來 40 分者變為 60 分，原來 90 分者變為 100 分。求此函數將最低分者調為多少分。Ans： 44 分

(練習3) 設 $f(x)=2002x+2003$，求 $\dfrac{f(8888)-f(6666)}{8888-6666}=$？　Ans：2002

(乙)二次函數

二次函數 $y=f(x)$有多種不同的呈現形式，常見的有

一般形式：$f(x)=ax^2+bx+c$ [可以配成 $y=a(x-h)^2+k$]

頂點形式：$f(x)=a(x-h)^2+k$ [便於作二次函數的圖形，討論 $f(x)$的最大值與最小值]

因式形式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ [便於解方程式 $f(x)=0$ 的解]

(1)二次函數：

設 a,b,c 為給定的實數， $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$稱為<u>二次函數</u>。

(2)二次函數的圖形：

二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形上的點為$(x,f(x))$，點$(x,f(x))$形成二次函數的圖形。

一般說來，二次函數的圖形是**拋物線**，基本的作圖方式是描點，更精確點，則觀察其**對稱軸與極值**，可幫助我們做圖。

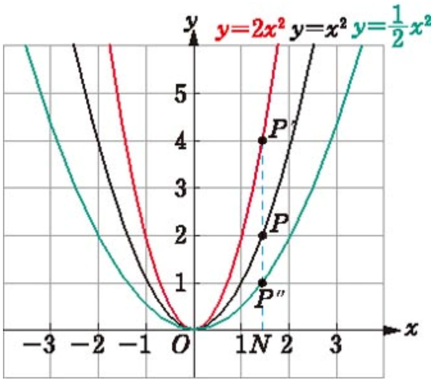
(3)二次函數圖形的認識：

(a)圖形伸縮與對稱

舉例講解：

利用 $y=x^2$ 的圖形，作出 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 及 $y=2x^2$ 的圖形。

壓縮與伸展　$\boxed{y=\frac{1}{2}x^2}\xleftarrow[\frac{1}{2}倍]{鉛直壓縮}\boxed{y=x^2}\xrightarrow[2倍]{鉛直伸展}\boxed{y=2x^2}$



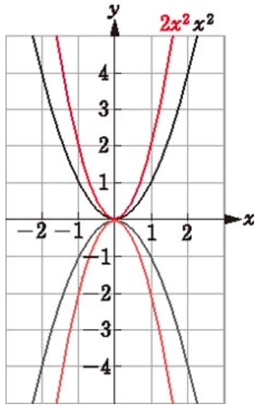
$\overline{P'N}=2\,\overline{PN}$

$\overline{P''N}=\dfrac{1}{2}\overline{PN}$

一般而言：

$y=f(x)$的圖形$\xrightarrow[k倍]{鉛直伸縮}$ $y=k\,f(x)$的圖形

點 $P(r,s)$ $\xrightarrow[k倍]{鉛直伸縮}$ 點 $Q(r,ks)$　$k>0$



舉例講解：

利用 $y=ax^2$ 的圖形，作出 $y=-ax^2$ 的圖形

點 $P(r，s)$ 滿足 $y=ax^2$ $\Longleftrightarrow$ $s=ar^2$

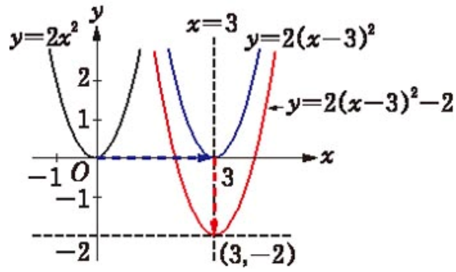
$\Longleftrightarrow$ $-s=-ar^2$ $\Longleftrightarrow$ 點 $P'(r，-s)$ 滿足 $y=-ax^2$。

$y=ax^2$ 的圖形與 $y=-ax^2$ 的圖形對稱於 x 軸。

(b)圖形的平移

舉例講解：

利用 $y=2x^2$ 的圖形，作出 $y=2(x-3)^2$ 及 $y=2(x-3)^2+(-2)$ 的圖形。



點 $P(r，s)$ $\xrightarrow[\text{3個單位}]{\text{右移}}$ 點 $P'(r+3，s)$ $\xrightarrow[\text{2個單位}]{\text{下移}}$ $P''(r+3，s-2)$

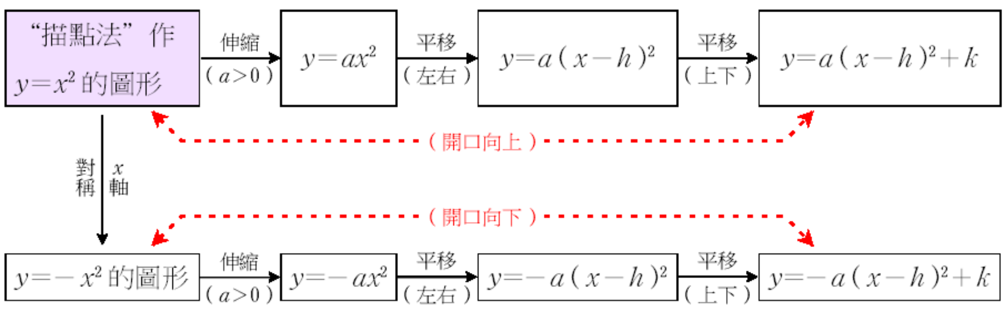
$\boxed{y=2x^2}$ $\xrightarrow[\text{3個單位}]{\text{右移}}$ $\boxed{y=2(x-3)^2}$ $\xrightarrow[\text{2個單位}]{\text{下移}}$ $\boxed{y=2(x-3)^2-2}$

一般情形：

$y=f(x)$的圖形 $\xrightarrow[h\text{單位}]{\text{左右平移}}$ $y=f(x-h)$的圖形 ($h>0$ 右移；$h<0$ 左移)

$y=f(x)$的圖形 $\xrightarrow[k\text{單位}]{\text{上下平移}}$ $y=f(x)+k$ 的圖形 ($k>0$ 上移；$k<0$ 下移)

結論：



例如：

將 $y=x^2$ 的圖形應如何伸縮、對稱、平移才得到 $y=-3x^2-6x-4$ 的圖形。

Ans：

$y=x^2 \xrightarrow{\text{對x軸做鏡射}} y=-x^2 \xrightarrow{\text{沿 } y \text{ 軸伸縮3倍}} y=-3x^2 \xrightarrow{\text{沿 } x \text{ 軸向左移動1單位}} y=-3(x+1)^2$

$\xrightarrow{\text{沿 } y \text{ 軸向下移動1單位}} y=-3(x+1)^2-1$

(練習4) 將 $y=2x^2-6x+8$ 的圖形水平移動 3，鉛直移動−5，形成另一個圖形，求此圖形的頂點與對稱軸。Ans：$(\frac{3}{2}，-\frac{3}{2})$，$x=\frac{3}{2}$

(練習5) 將 $y=x^2$ 的圖形應如何伸縮、對稱、平移才得到 $y=2(x+1)^2-2$ 的圖形。

Ans：

$$y=x^2 \xrightarrow{\text{沿 } y \text{ 軸伸縮2倍}} y=2x^2$$

$$\xrightarrow{\text{沿 } x \text{ 軸向左移動1單位}} y=2(x+1)^2 \xrightarrow{\text{沿 } y \text{ 軸向下移動2單位}} y=2(x+1)^2-2$$

(練習6) 寫出下列空格所對應的二次函數：

Γ_4：________ $\qquad\qquad$ Γ_3：________

$\Gamma_2 \xrightarrow{\text{鉛直上移 } k \text{ 個單位}} \Gamma_4$ $\qquad$ $\Gamma_1 \xrightarrow{\text{鉛直上移 } k \text{ 個單位}} \Gamma_3$

Γ_2：________ $\xleftarrow[h \text{ 個單位}]{\text{水平左移}}$ Γ_0 $\boxed{y=3x^2}$ $\xrightarrow[h \text{ 個單位}]{\text{水平右移}}$ Γ_1：________

$\Gamma_2 \xrightarrow{\text{鉛直下移 } k \text{ 個單位}} \Gamma_6$ $\qquad$ $\Gamma_1 \xrightarrow{\text{鉛直下移 } k \text{ 個單位}} \Gamma_5$

Γ_6：________ $\qquad\qquad$ Γ_5：________

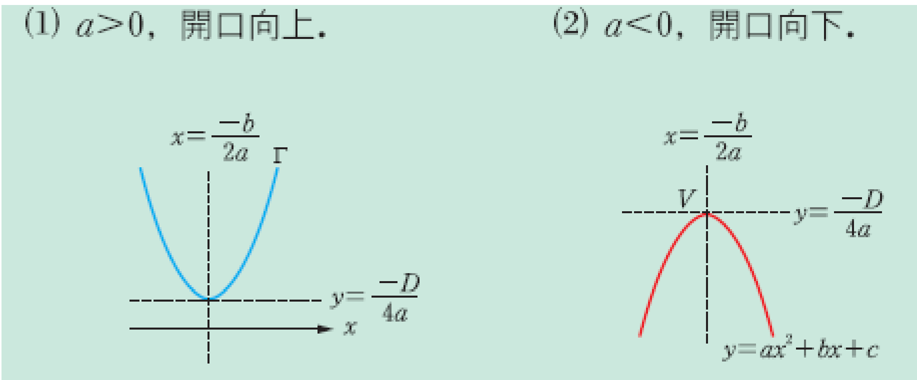
(3)二次函數 $f(x)$的最大值與最小值：

(a)利用配方法找二次函數的頂點與對稱軸：

考慮二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 之圖形為拋物線，利用配方法

$$y= ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}= a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

可知拋物線之對稱軸為 $x=-\dfrac{b}{2a}$，頂點為$(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a})$



(b)沒有範圍限制求極值：

考慮二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 利用配方法

$$y= ax^2+bx+c= a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\ldots\ldots(*)$$

(a)$a>0$ 時，由$(*)$式可得 $y\geq -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$，所以拋物線的開口向上，

最低點為$(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a})$，

因為**圖形最低點的 y 坐標為最小值**，故最小值為$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ 。

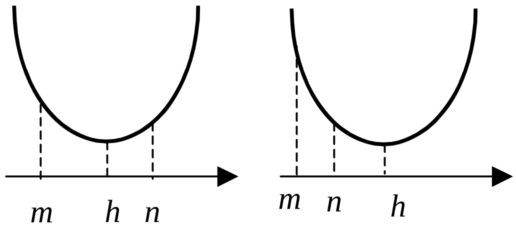
(b)$a<0$ 時，由(∗)式可得 $y\leq-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ ，所以拋物線的開口向下，

最高點為$\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$，因為**圖形最高點的 y 坐標為最大值，**

故最大值為$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ 。

(c)有範圍限制求極值：

二次函數 $y=f(x)=a(x-h)^2+k$，$m\leq x\leq n$，求 y 的最大值，最小值。



(a)$m\leq h\leq n$，則比較 $f(m),f(h),f(n)$可求得最大，最小。

$a>0\Rightarrow f(h)$最小，m,n 中離對稱軸較遠者發生最大值。

$a<0\Rightarrow f(h)$最大，m,n 中離對稱軸較遠者發生最小值。

(b)h 不在 m,n 之間，比較 $f(m),f(n)$可求得最大值、最小值。

$a>0$：m,n 中離對稱軸較遠者發生最大值，離對稱軸較近者發生最小值。

$a<0$：m,n 中離對稱軸較遠者發生最小值，離對稱軸較近者發生最大值。

[例題3] 求下列二次函數在閉區間上的最大值與最小值。

(1)$y=(x-1)^2+2$ $(-1\leq x\leq 2)$

(2)$y=-x^2+2x+6$ $(2\leq x\leq 3)$

解：(1) 頂點 $V(1,\ 2)$ 的橫坐標為 1,
而 1 在閉區間 $[-1,\ 2]$ 內.
此時須比較頂點與閉區間兩端點所對應的函數值.
當 $x=1$ 時，$y=2$ 是最小值.
當 $x=-1$ 時，$y=6$
當 $x=2$ 時，$y=3$
$\}$ $y=6$ 是最大值.
如圖 2-22 所示.

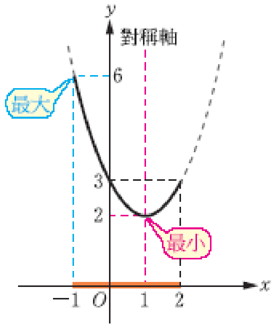


圖 2-22

(2) $y=-x^2+2x+6$
$=-(x-1)^2+7\quad(2\le x\le 3)$
頂點 $V(1,\ 7)$ 的橫坐標為 1,
而 1 不在閉區間 $[2,\ 3]$ 內.
此時只須比較閉區間兩端點所對應的函數值即可.
當 $x=2$ 時，$y=6$,
當 $x=3$ 時，$y=3$.
$y=6$ 是最大值,
$y=3$ 是最小值.
如圖 2-23 所示.

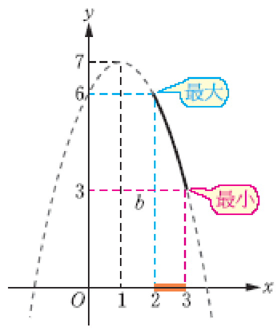


圖 2-23

(練習7) 二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形的頂點為$(-2,3)$，並經過$(0,-9)$，求 $f(x)=$？ Ans：$-3x^2-12x-9$

(練習8) 二次函數 $y=ax^2+bx+5$，於 $x=2$ 時，有最小值 1，則 $a=$？$b=$？
Ans：$a=1,b-4$

(練習9) 函數 $y=f(x)=x^2+2x-3$
(1)若$-2\le x\le 2$，則 $x=$______時，$f(x)$有最大值________；$x=$______時，$f(x)$有最小值_________。
(2)若 $0\le x\le 3$，則 $x=$______時，$f(x)$有最大值________；$x=$______時，$f(x)$有最小值_________。
Ans：(1)$x=2$ 時 $f(x)$有最大值$=5$，$x=-1$ 時 $f(x)$有最大值$=-4$
(2)$x=3$ 時 $f(x)$有最大值$=12$，$x=0$ 時 $f(x)$有最大值$=-3$

(練習10) 設 x,y 為實數，且 $x^2+3y^2=1$，
(1)請找出 x 的範圍。
(2)求 $4x+3y^2$ 之最小值、最大值為何？
Ans：(1)$-1\le x\le 1$ (2)當 $x=1$ 有最大值 4；當 $x=-1$ 時，有最小值-4

(練習11) x 為實數，求 $y=(x^2+3x+1)(x^2+3x+2)+3x^2+9x+2$ 之最小值。

Ans：$x=-\dfrac{3}{2}$，y 有最小值 $-\dfrac{71}{16}$

[提示：令 $t=x^2+3x$，並且要注意 t 的範圍]

(4)二次函數的正定性：

在什麼條件下，二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的值會恆大於 0(恆小於 0)呢？

利用配方法將二次函數化成頂點形式：

$y=ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=a(x-h)^2+k$，其中頂點 $V(h,k)=(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-D}{4a})$，$D=b^2-4ac$

x 在實軸上任意變動對應的 y 值恆大於 0

⟺ $y=ax^2+bx+c$ 的圖形 Γ 恆位在 x 軸上方（如圖 2-28）

⟺ Γ 的開口朝上（$a>0$）且頂點位在 x 軸上方（$\dfrac{-D}{4a}>0$）

⟺ $a>0$，且 $D<0$

故 對任意實數 x，ax^2+bx+c 恆大於 0

⟺ $a>0$，且 $D<0$

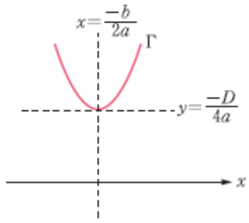


圖 2-28

[思考題]：

(1)二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的值會恆小於 0 的充分條件是什麼？

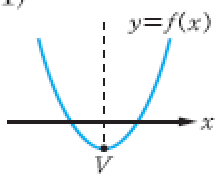
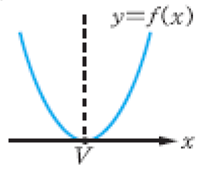
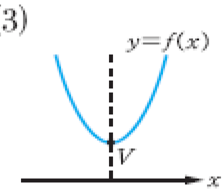
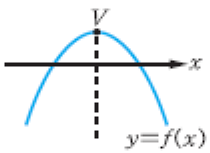
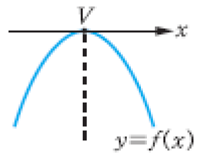
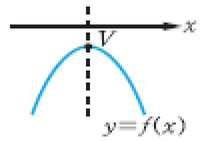
(2)二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的值會恆不小於 0 的充分條件是什麼？

(3)二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的值會恆不大於 0 的充分條件是什麼？

下表是用 a 與 D 的正負來判定圖形Γ與 x 軸的位置關係：

(1)a 的正負掌控了拋物線開口的方向與大小。

(2)a 與 D 的正負決定了拋物線頂點是位於 x 軸的上方或下方。

D \ a	$D>0$	$D=0$	$D<0$	頂點
$a>0$ 開口向上	(1)  “頂點”在 x 軸下方	(2)  “頂點”在 x 軸上	(3)  “頂點”在 x 軸上方 $f(x)$ 恆正	$V(\frac{-b}{2a},\frac{-D}{4a})$ 請注意：頂點 V y 坐標 $\frac{-D}{4a}$ 的正、負
$a<0$ 開口向下	(4)  “頂點”在 x 軸上方	(5)  “頂點”在 x 軸上	(6)  “頂點”在 x 軸下方 $f(x)$ 恆負	

(練習12) 設 $f(x)=2x^2-3x+k$，若不論 x 為任何實數，對應的 $f(x)$ 值恆為正值，試求實數 k 的範圍。　　Ans：$k>\frac{9}{8}$。

(丙)多項式函數

(1)多項式函數與其圖形：

由實係數的 n 次多項式所定義的一個函數，稱為**多項式函數**，又稱為 ***n* 次函數**。

(a)多項式函數的實例：

函數 $f：x\to x^2+x+1$，即 $f(x)=x^2+x+1$ 為一個二次函數。

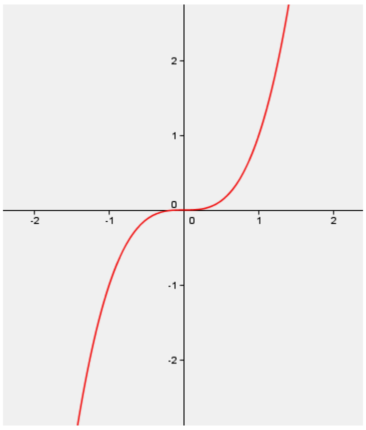
函數 $f：x\to x^3+2x^2+x+4$，即 $f(x)=x^3+2x^2+x+4$ 為一個三次函數。

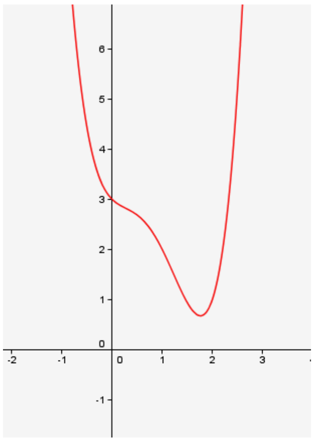
(b)多項式函數的定義域：所有的實數所成的集合。

(c)多項式函數的圖形連續不斷。

例如：

左圖是 $f(x)=x^3$ 的圖形，右圖是 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-x+3$ 的圖形，這些圖形都是**連續不斷**的。





結論：

(1°)函數 $f(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+a_1x+a_0$，稱為**多項式函數**。

若 $a_n\neq0$，則 $y=f(x)$稱為 n 次多項式函數，簡稱為 ***n* 次函數**。

當 x 用 a 代入函數時，得到 $f(a)$稱為函數 $y=f(x)$在 $x=a$ 的函數值。

(2°)多項函數 $y=f(x)$的圖形構成一條連續不斷的曲線。

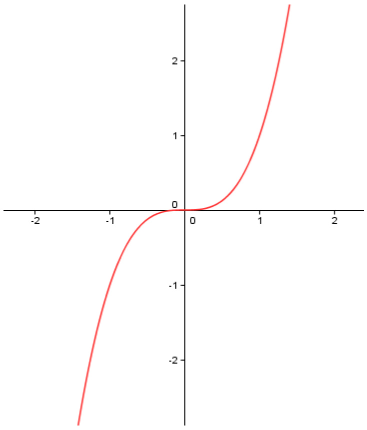
(2)三次、四次單項函數：

對於一般多項式函數的圖形，於高三數學甲下冊微分的課程中會做介紹，接下來我們針對 $y=x^3$、$y=x^4$ 的圖形及它們經過「伸縮、對稱、平移」後的圖形作探討。

[例題4] 試透過 GeoGebra 繪出 $y=x^3$ 的圖形，並且討論其圖形的特徵。

圖形特徵：

(1)圖形Γ由左向右上升。



(2)圖形Γ對稱對稱於原點(0,0)

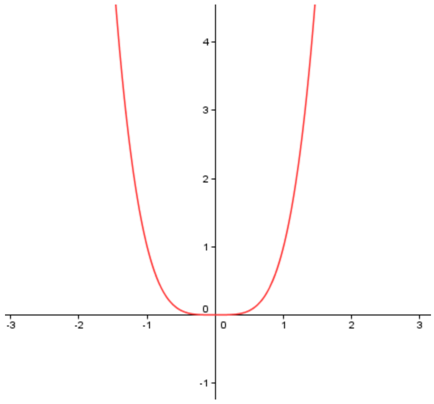
[例題5] 試透過 GeoGebra 繪出 $y=x^4$ 的圖形，並且討論其圖形的特徵。

圖形特徵：

(1)當 $x\geq 0$ 時，圖形Γ由左向右上升。

當 $x\leq 0$ 時，圖形Γ由左向右下降。

(2)圖形Γ對稱對稱 y 軸。



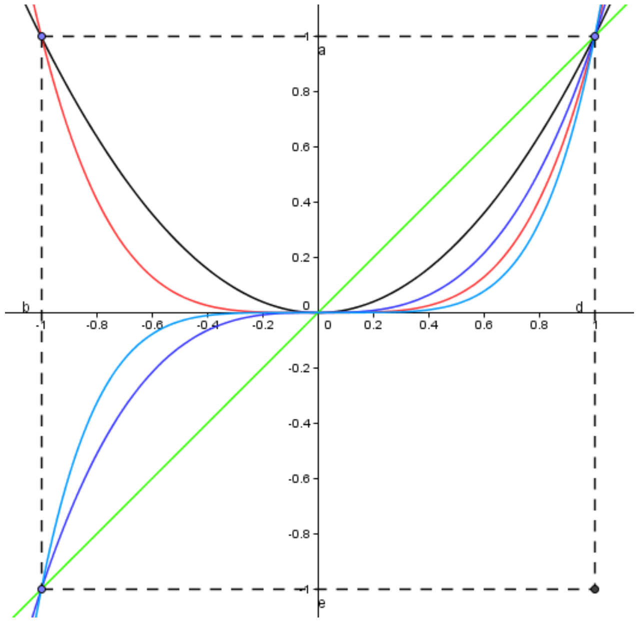
[討論]：

試透過 GeoGebra 繪出 $y=x^n$ 的圖形，

並且討論其圖形的特徵。

n 為奇數：

n 為偶數：



[例題6] (1)利用「伸縮、對稱、平移」來討論 $y=x^3$ 與 $y=2(x+1)^3-3$ 兩個圖形的關係。

(2)利用「伸縮、對稱、平移」來討論 $y=x^3$ 與 $y=-2(x+1)^3-3$ 兩個圖形的關係。

(練習13) 利用「伸縮、對稱、平移」來討論 $y=x^4$ 與 $y=\frac{1}{2}(x-2)^4+1$ 兩個圖形的關係。

Ans：$y=x^4 \xrightarrow{\text{沿鉛直方向伸縮}\frac{1}{2}\text{倍}} y=\frac{1}{2}x^4 \xrightarrow{\text{向右平移2單位}}$

$y=\frac{1}{2}(x-2)^4 \xrightarrow{\text{向上平移1單位}} y=\frac{1}{2}(x-2)^4+1$

(3)奇偶函數

奇函數：

對定義域內每一點 x，若函數 $f(x)$ 恆有 $f(-x)=-f(x)$，則稱 $f(x)$ 為奇函數。

偶函數：

對定義域內每一點 x，若函數 $f(x)$ 恆有 $f(-x)=f(x)$，則稱 $f(x)$ 為偶函數。

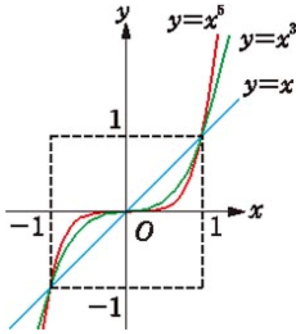
[例題7] 奇偶函數的圖形特徵

(1)奇函數的圖形對稱原點。

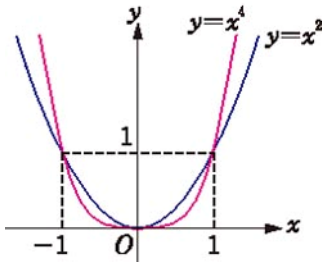
(2)偶函數的圖形對稱 y 軸。

圖形 Γ 對稱於原點 $(0,0)$。

(1) Γ 上任一點 $P(x,f(x))$ 關於原點的對稱點為 $P'(-x,-f(x))=(-x,f(-x))$ 在 Γ 上。



(2) Γ 上任一點 $P(x,f(x))$ 關於 y 軸對稱點為 $P'(-x,f(x))=(-x,f(-x))$ 在 Γ 上。



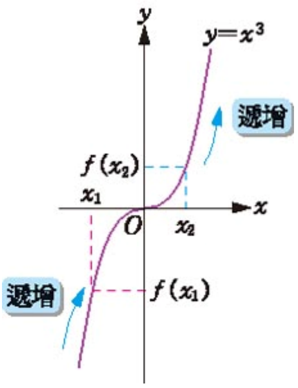
(練習14) 設 f：A→B 為一個函數，定義 $g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$，$h(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$

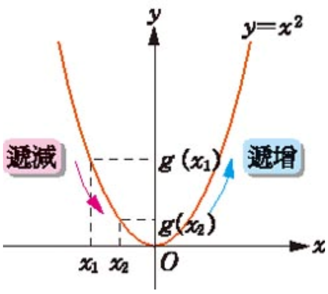
請證明：$g(x)$為一個偶函數，$h(x)$為一個奇函數。

(4)單調函數：

觀察實例：

像三次函數 $f(x)=x^3$ 在定義域上，函數值 $f(x)$ 會隨自變數 x 的增大而遞增 (對應在函數圖形上，就是其圖形由左而右上升，如下圖)。





而像二次函數 $g(x)=x^2$， (如上圖)。

當 $x\le 0$ 時，函數值 $g(x)$ 隨 x 的增大反而遞減；當 $x\ge 0$ 時，x 愈大，函數值也愈大。

(a)定義單調函數：

設 I 為 $f(x)$定義域內的一個區間

遞增函數(嚴格遞增函數)：對於 I 內的任意兩點 x_1、x_2 若滿足：

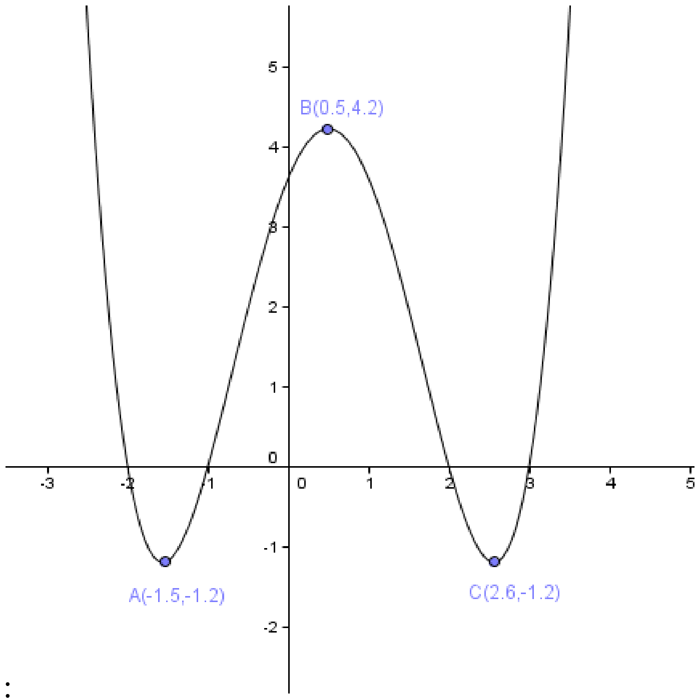
$x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$ $(f(x_1)<f(x_2))$，則稱 $f(x)$在 I 上是遞增函數(嚴格遞增函數)

遞減函數(嚴格遞減函數)：對於 I 內的任意兩點 x_1、x_2 若滿足：

$x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，則稱 $f(x)$在 I 上是遞減函數(嚴格遞減函數)

區間上的遞增函數(嚴格遞增函數)或遞減函數(嚴格遞減函數)都稱為 I 上的單調函數。

(練習15) 如圖為 $y=f(x)$的部分圖形，請指出在那些區間為遞增或遞減？



[✪**數學與電腦**]：

(1)利用 GeoGebra 描繪出 $f(x)=x^3$，$f(x)=x^4$，$f(x)=x^5$，…的圖形，

並據此描述 $f(x)=x^n$ 圖形特徵。

(2)利用 GeoGebra 繪出下列函數圖形：

$y=x+x^3$、$y=x^3-2x$、$y=x^2+4$、$y=x^4+3x^2+1$、$y=2(x-1)^3$

並且判斷這些函數是奇函數或偶函數。

(3)設 $f(x)=x^3+ax+b$，利用 GeoGebra 來探討當 a,b 變動時，$f(x)$的圖形有哪些型態？

(4) 耶魯大學 Harold J.Morowitz 博士研究報告中，從所蒐集到的數據推測，男人的死亡率與他們每天的睡眠時間呈現一定的關係。這些數據如下表所示：

平均睡眠時間 x(小時)	每 100000 名男人的死亡人數 y
5	1121
6	805
7	626
8	813
9	967

(資料來源：Harold J.Morowitz “Hiding in the Hammond Report “ Hospital Practice)

(1)利用 GeoGebra 畫出散布圖。

(2)找一個函數來擬合這些數據。

(3)利用(2)找出來的模型，預測睡眠時間 4、10 小時的男人的死亡率。

(4)利用(2)找出來的模型，推測平均大概睡多少小時？死亡率最低。

綜合練習

(1) 設 $f(x)$為一次函數，

(a)如果 x 增加 4 單位時，其對應之 $f(x)$就增加 10 單位，又 $f(4)=12$， 則 $f(x)=$？

(b)若 $f(x)=1998x+9876$，則求$\dfrac{f(56789)-f(12345)}{56789-12345}$ =________。

(2) (女性新婚的平均年齡)

一般而言，社會正走向晚婚，女性新婚的平均年齡可以近似表成線性函數：

$A(t)=0.08t+19.7$

其中 $A(t)$為 1950 年後第 t 年女性新婚的平均年齡

(a)解釋 $A(0)$與 $A(60)$的意義。

(b)解釋 0.08 的意義。

(3) 設 a,b,c 為實數。若二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過$(0,-1)$且與 x 軸相切，則下列選項何者為真？

(A) $a<0$(B) $b>0$(C) $c=-1$(D) $b^2+4ac=0$(E) $a+b+c\leq 0$ (90 學科能力測驗)

(4) 設 a,b 均為實數，且二次函數 $f(x)=a(x-1)^2+b$ 滿足 $f(4)>0$，$f(5)<0$，試問下列何者為真？

(A)$f(0)>0$ (B)$f(-1)>0$ (C)$f(-2)>0$ (D)$f(-3)>0$ (E)$f(-4)>0$ (87 學科能力測驗)

(5) 某玩具飛機製造工廠，每次接到訂單都需要開模費 5 萬元，且製造一千個玩具飛機的材料費需 2 萬元，由此建立生產的成本函數 $f(x)=5+2x$，其中 x 以千個為單位。依過去經驗，接到訂單數量與報價總值有如下關係：

數量(千個)	報價總值(萬元)
5	37.5
10	70
15	97.5

以此資料建立一個二次函數的報價總值函數 $g(x)$，以及獲利函數 $h(x)=g(x)-f(x)$

(a)試求報價總值函數 $g(x)$。

(b)試問當訂單數量是多少時，獲利總價最高？

(6) 設 k 為實數，二次函數 $y=-2x^2+4x+k+1$ 的圖形與 x 軸相交於相異兩點，試求 k 的範圍。

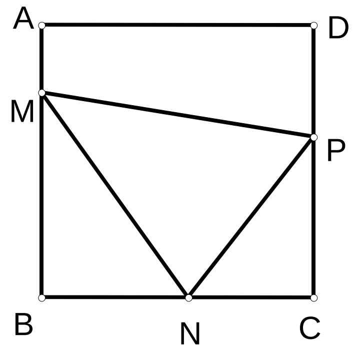
(7) (a)請作出 $y=|x-1|$的圖形。

(b)利用(a)的圖形說明如何由水平位移與鉛直位移得出下列圖形：

①$y=|x-4|$②$y=|x+1|+3$

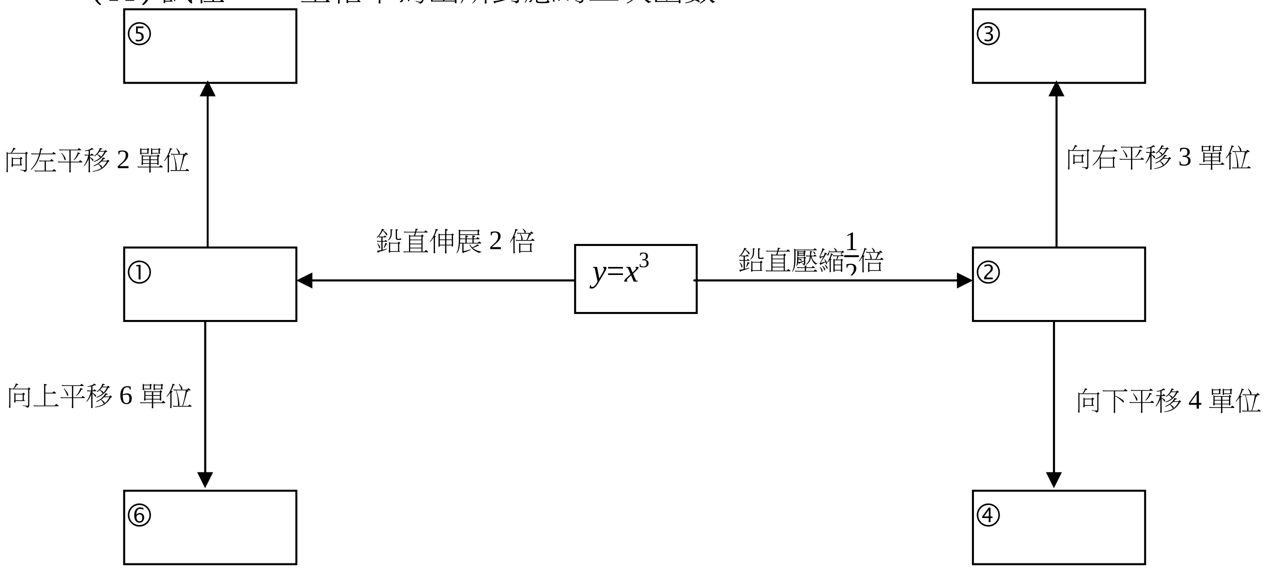
(8) 求 $f(x)=-x^2+4x+2$ $(-3\leq x\leq 5)$ 的最大值與最小值。

(9) 如圖所示，正方形 ABCD 的邊長為 1，若動點 M,N,P 分別在$\overline{AB}$,$\overline{BC}$,$\overline{CD}$邊上，且$\overline{AM}=\overline{BN}=\frac{1}{2}\overline{CP}$，求△MNP 面積的最小值。

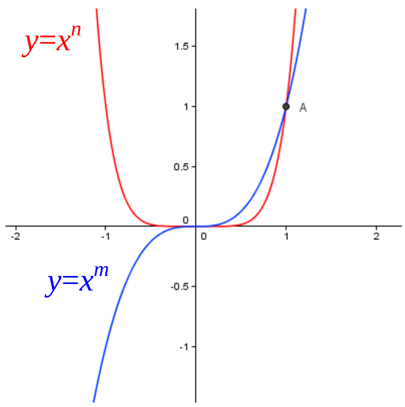


(10) 如圖，二次函數 $y=2x^2-x-3$ 的圖形在直線 $y=3x+k$ 的上方，試求 k 的範圍。

(11) 試在①~⑥空格中寫出所對應的三次函數：



(12) 右圖兩個函數圖形，分別為 $f(x)=x^n$，$g(x)=x^m$ (m,n 為自然數)，下列有關圖形的特性，哪些是正確的？
(A)$f(x)$為奇函數。
(B)$g(x)$為偶函數。
(C)A 點坐標為(1,1)
(D)$m<n$
(E)$g(x)$為嚴格遞增函數



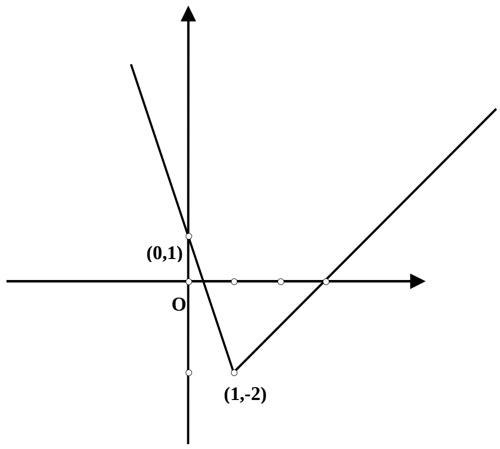
(13) 設函數 $f(x)=2(x-3)^4$ 的圖形與直線 $y=k$(k 為正數) 有兩個交點 A,B，試求 A,B 兩點的 x 坐標和。

進階問題

(14) 設 $f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{a}$，在 $x=3$ 時 $f(x)$有最大值 8，則數對(a,b)=__________。

(15) (a)作出 $y=x|x-2|$的圖形。
(b)設 a 為實數，若 $x|x-2|=a$ 恰有一個實數解，求 a 的範圍。

(16) $f(x)=ax+b+c|x+d|$，a,b,c,d 為實數，而 $y=f(x)$的圖形如右，求 $a+b+c+d=$？



(17) $f(x)=|x-a|+b$ 和 $g(x)=-|x-c|+d$ 的圖形相交於$(-2, 3)$, $(8, 5)$兩點，則 $a+c=$______。

(18) 設 $f(x)=|x^2-3x|+x-2$
(a)請做出 $y=f(x)$的圖形。
(b)方程式$|x^2-3x|+x-2=k$ 有四個相異實數解，k 的範圍=？

(19) 已知定義在 R 上的奇函數 $f(x)$滿足 $f(x-4)=-f(x)$，而且在區間[0,2]上 $f(x)$是遞增函數。試求下列各小題：
(a)請說明 $f(x)$的圖形對稱直線 $x=2$。
(b)請說明 $f(x-8)=f(x)$。

綜合練習解答

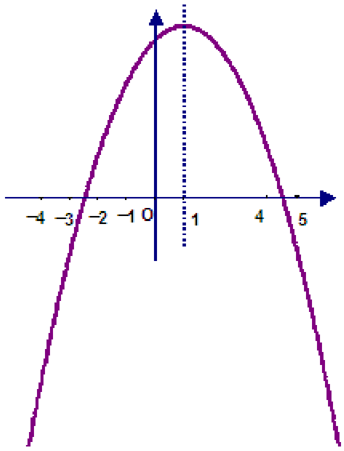
(1)　(a)$\frac{5}{2}x+2$(b)1998

(2)　(a)A(0)代表 1950 年女性新婚的平均年齡，A(60) 代表 2009 年女性新婚的平均年齡

(b)女性新婚的平均年齡以每年 0.08 歲的速度增加。

(3)　[答案]：(A)(C)(E)

[解法]：



觀察右圖，可設 $f(x)=ax^2+bx+c$ 與 x 軸相切於 A(α,0)

(A)因開口向下$\Rightarrow a<0$……(○)

(B)$\alpha=-\frac{b}{2a}$可正亦可負 $\Rightarrow b$ 可能大於 0 亦可能小於 0

(C)因圖形過(0,−1)，將其代入可求得 $c=-1$……(○)

(D)因圖形與 x 軸相切 $\Rightarrow b^2-4ac=0$

(E) $a+b+c=f(1)$，而圖形與 $x=1$ 之交點

必在第四象限或 x 軸上 $\Rightarrow a+b+c\le 0$……(○)

(4)　(A)(B)(C)

[解法]：

根據題意，可以知道拋物線的對稱軸為 $x=1$ 且

點(4,f(4))在 x 軸上方，(5,f(5))在 x 軸下方

$\Rightarrow$圖形開口向下，頂點在 x 軸上方$\Rightarrow a<0$，$b>0$

因為對稱軸為 $x=1$

所以 $f(0)=f(2)>0$，$f(-1)=f(3)>0$，$f(-2)=f(4)>0$

$f(-3)=f(5)<0$，$f(-4)=f(6)<0$

$f(0)=a+b>0$　故應選(A)(B)(C)

(5)　(a)$g(x)=\frac{-1}{10}x^2+8x$　(b)$x=30$(千個)獲利總值最高。

(6)　$k>-3$

(7)　(a)略 (b) ①向右 3 單位② 向左平移 2 單位，向上平移 3 單位

(8)　最大值 6，最小值−19

(9)　$\frac{1}{3}$ [提示：可以令$\overline{AM}=\overline{BN}=x$，$0\le x\le 1$，再將△MNP 面積表示成 x 的二次函數，再求其最小值。]

(10)　$k<-5$

(11)　①：$y=2x^3$ ②：$y=\frac{1}{2}x^3$ ③：$y=\frac{1}{2}(x-3)^3$ ④：$y=\frac{1}{2}x^3-4$ ⑤：$y=2(x+2)^3$ ⑥：$y=2x^3+6$

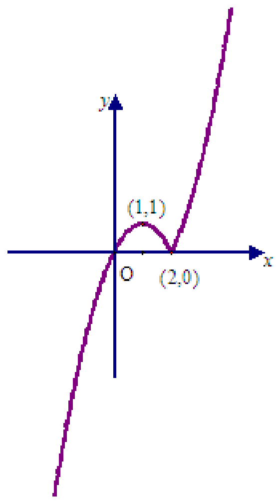
(12)　(C)(D)(E)

(13)　6

(14)　(−1,6)

(15)　(a)略 (b)$a>1$ 或 $a<0$

[解法]：



(a) 當 $x\ge 2$ 時，$f(x)=x^2-2x$

；當 $x\le 2$ 時，$f(x)=-x^2+2x$

(b)考慮 $y=f(x)=x|x-2|$與 $y=a$ 兩個圖形的交點，

若有一個交點，則方程式 $x|x-2|=a$ 有一個實數解

$\Rightarrow a>1$ 或 $a<0$

(16) -1[提示：轉折點$(-1,0)\Rightarrow d=-1\Rightarrow f(x)=ax+b+c|x+1|$
$x\geq1\Rightarrow f(x)=ax+b+c(x-1)$；$x\leq1\Rightarrow f(x)=ax+b+c(1-x)$]

(17) 6

(18) (b)$1<k<2$ [(a)畫圖時考慮 $x\geq3$ 或 $x\leq0$ 與 $0\leq x\leq3$ 兩種情形(b)考慮 $y=k$ 與 $y=f(x)=|x^2-3x|+x-2$ 的交點]

(19) (a)根據題目的條件，可以得知 $f(x-4)=-f(x)=f(-x)$，$(x,f(x))$在圖形上，對 $x=2$ 的對稱點為$(4-x,f(x))$，$f(4-x)=-f(x-4)=f(x)$，所以 $f(x)$對稱於直線 $x=2$。
(b)$f(x-8)=-f(x-4)=f(x)$。所以 $f(x)$是以 8 為週期的函數