第四十單元 矩陣的應用

(甲)轉移矩陣

(1)引入轉移矩陣：

什麼是轉移矩陣呢？先看底下的例子：

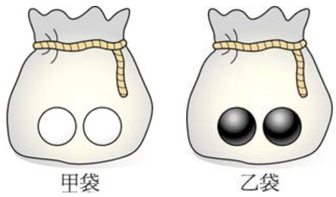
有四個大小相同、質料相同的小球，其中甲袋分配到兩個白球，乙袋分配到兩個黑球。今從甲袋任意抽出一球放入乙袋，攪勻後再從乙袋抽出一球放回甲袋稱做操作一次。試問經過操作三次後，甲袋有一黑一白之機率：

每操作一次，甲袋兩個球的顏色有三種狀態：

狀態 S_1：二個白球。

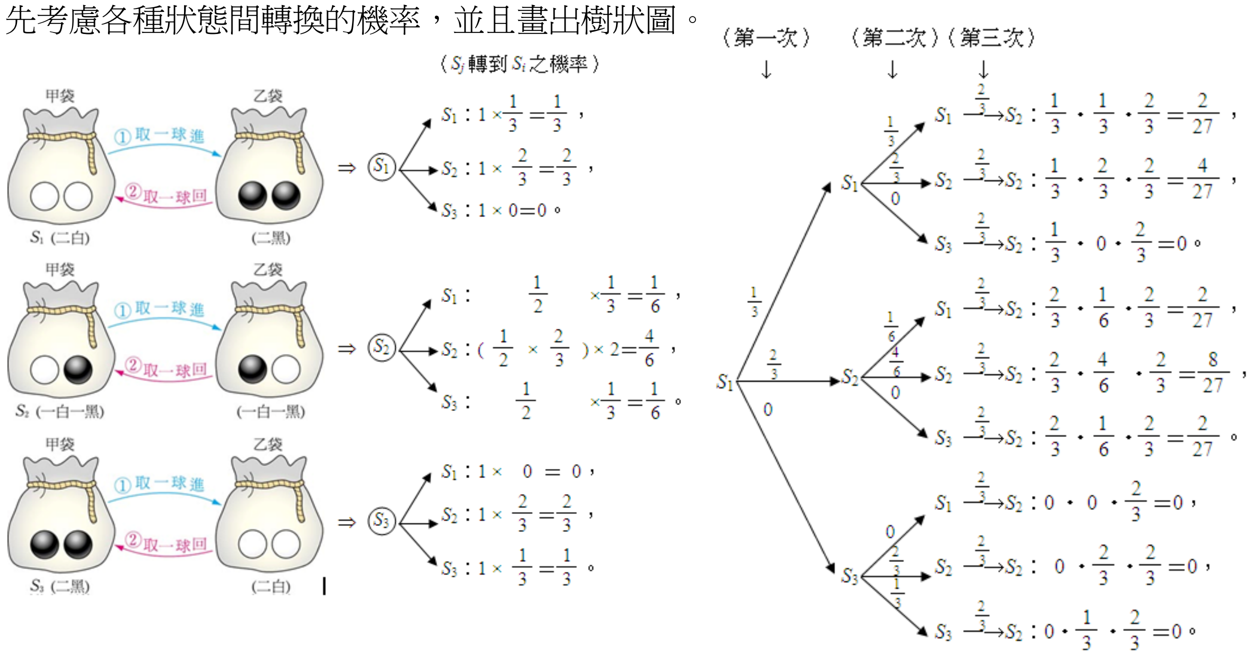
狀態 S_2：一個白球，一個黑球。

狀態 S_3：二個黑球。



[利用樹狀圖]：

先考慮各種狀態間轉換的機率，並且畫出樹狀圖。

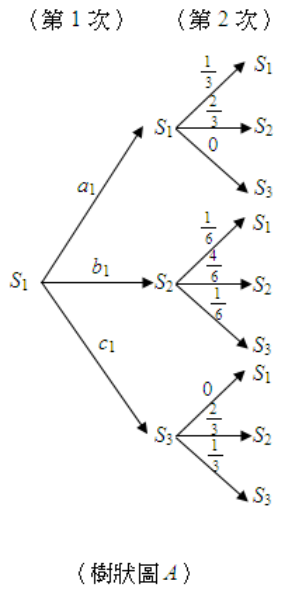


上面“樹狀圖”「脈絡清晰，一目了然」是優點，但當操作次數 n 愈大時，樹的“分枝”就愈多，計算相關的機率也愈趨繁複。

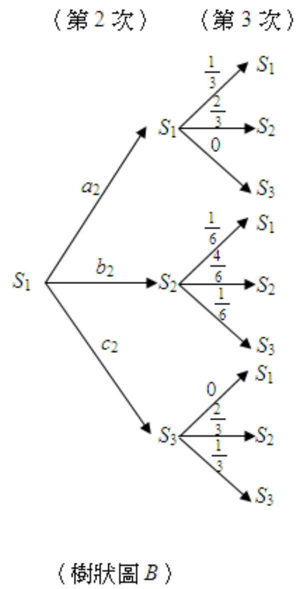
[建立遞迴關係式]：

假設操作第 n 次後，狀態 S_1、S_2、S_3 發生之機率爲 a_n、b_n、c_n，顯然 $a_n+b_n+c_n=1$

回顧前面的「樹狀圖」



（樹狀圖 A）



（樹狀圖 B）

由圖 A 可由 a_1、b_1、c_1 求出 a_2，b_2，c_2

$$(A)\begin{cases} a_2=\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{6}b_1+0\,c_1 \\ b_2=\frac{2}{3}a_1+\frac{4}{6}b_1+\frac{2}{3}c_1 \\ c_2=0\,a_1+\frac{1}{6}b_1+\frac{1}{3}c_1 \end{cases}。$$

由圖 B 可由 a_2、b_2、c_2 求出 a_3，b_3，c_3

$$(B)\begin{cases} a_3=\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{6}b_2+0\,c_2 \\ b_3=\frac{2}{3}a_2+\frac{4}{6}b_2+\frac{2}{3}c_2 \\ c_3=0\,a_2+\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}c_2 \end{cases}。$$

用矩陣的乘法來表示上述的關係：

$$(A)\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \qquad (B)\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

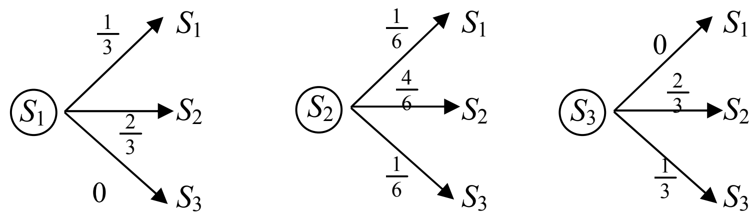
從樹狀圖(A)(B)可以看出，第($n-1$)次操作與第 n 次操作間，各狀況(S_1、S_2、S_3)間的轉換模式都是一樣的，因此可將“樹狀圖 B”中的 a_2，b_2，c_2 依序換成 a_{n-1}，b_{n-1}，c_{n-1}，同理可求得 a_n，b_n，c_n

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{6}b_{n-1}+0c_{n-1} \\ b_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{4}{6}b_{n-1}+\frac{2}{3}c_{n-1} \\ c_n=\ \ a_{n-1}+\frac{1}{6}b_{n-1}+\frac{1}{3}c_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

令(1)式中的三階方陣爲

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{6} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$，P 是這樣形成的：

參照下面樹狀圖



矩陣 P 之第 1 行是“由狀態 S_1 分別轉到 S_1，S_2，S_3 之三項機率”。

第 2 行是“由狀態 S_2 分別轉到 S_1，S_2，S_3 之三項機率”。

第 3 行是“由狀態 S_3 分別轉到 S_1，S_2，S_3 之三項機率”。

即

轉變

$$P=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{6} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ S_1（二\quad 白）\\ S_2（一白一黑）\\ S_3（二\quad 黑）\end{array}$$

其次考慮三項機率 a_n，b_n，c_n 所形成的矩陣 X_n，其中 $X_n=\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow S_1\\ \leftarrow S_2\\ \leftarrow S_3\end{matrix}$，而 $X_0=\begin{bmatrix}a_0\\ b_0\\ c_0\end{bmatrix}$

（一開始，甲袋僅有“二白球”）

利用上面的(1)式，可以遞推求得 a_n，b_n，c_n。

$$X_1=PX_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{6} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ 0\end{bmatrix},$$

$$X_2=PX_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{6} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{9}\\ \frac{6}{9}\\ \frac{1}{9}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_2\\ b_2\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{9}\\ \frac{6}{9}\\ \frac{1}{9}\end{bmatrix},$$

同理

$$X_3=PX_2=\begin{bmatrix}\frac{5}{27}\\ \frac{18}{27}\\ \frac{4}{27}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_3\\ b_3\\ c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{27}\\ \frac{18}{27}\\ \frac{4}{27}\end{bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow S_1\text{（二　　白）}\\ \leftarrow S_2\text{（一白一黑）}\\ \leftarrow S_3\text{（二　　黑）}\end{matrix}$$ 。

所以，經第三次操作後，甲袋有“二個白球”之機率為$\frac{5}{27}$，

有“一白球、一黑球”之機率為$\frac{18}{27}$，

有“二個黑球”之機率為$\frac{4}{27}$。

矩陣 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&0\\ \frac{2}{3}&\frac{4}{6}&\frac{2}{3}\\ 0&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$有兩個特殊性質

(i) P 中的每一個元素都是“非負的實數”。

（P 中的元素 a_{ij}，代表由狀態 S_j 轉變到 S_i 之機率）

(ii) P 中每一行（直行）之“元素總和等於 1”。

像 P 這樣，滿足(i)、(ii)兩個條件的矩陣稱做**轉移矩陣**。

而上面的行矩陣，像

$$X_0=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}，X_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ 0\end{bmatrix}，X_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{9}\\ \frac{6}{9}\\ \frac{1}{9}\end{bmatrix}，\cdots$$

都滿足

(1) 行矩陣之每一元素都是“非負的實數”。

(2) 行矩陣之“元素總和等於 1”。

這種行矩陣稱為**機率矩陣**（或機率向量）。

(2)轉移矩陣：

一般而言，在自然現象與社現象中，許多現象都會隨時間的改變而呈現不同的狀態。假設某現象所可能呈現的不同狀態只有有限多種：$S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n$ 每隔一固定的時間來觀查察它所呈現的狀態。如果此現象在各觀察期呈現某種狀態的過程滿足下面的性質：在任意觀察期中此現象呈現狀態 $\mathbf{S}_j$ 時，則它在下一觀察期呈現狀態 $\mathbf{S}_i$ 的機率為 p_{ij}。當一個現象的呈現具有這個性質時，我們就說這個過程形成一個**馬可夫鏈**。

馬可夫鏈有下列的特性：

(a)A= $\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$，$p_{ij}\geq 0$，$\sum_{k=1}^{n} p_{kj}=1$，$j=1,2,\ldots,n$。

此矩陣 A 稱爲這個**馬可夫鏈的轉移矩陣**。

(b)若一個方陣的各元都大於或等於 0，而且每一行中各元的和都等於 1，此種方陣稱爲馬可夫矩陣或轉移矩陣。

(c)如果一馬可夫鏈可達到穩定狀態，而其(n 階)轉移矩陣爲 A，則其穩定狀態就是滿足 AX=X 的 $n\times 1$ 矩陣 X。

[例題1] 假設某區的數學教科書，有甲、乙、丙三種不同的版本提供各校自由選購，統計各校多年選購的市場資訊，顯示出：

每一年甲版的顧客群中，隔年選購甲版佔$\frac{5}{10}$；乙版佔$\frac{2}{10}$；丙版佔$\frac{3}{10}$。

乙版的顧客群中，隔年選購甲版佔$\frac{4}{10}$；乙版佔$\frac{4}{10}$；丙版佔$\frac{2}{10}$。

丙版的顧客群中，隔年選購甲版佔$\frac{3}{10}$；乙版佔$\frac{2}{10}$；丙版佔$\frac{5}{10}$。

此區，目前甲、乙、丙三種版本的市占率依序爲$\frac{4}{10}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{3}{10}$。若市場選購教科書的資訊不變的趨勢下，

試問：

(1)甲、乙、丙三種版本三年後的市占率各爲多少？(教科書每年選購一次)

(2)試求長期之後，甲、乙、丙三種版本三年後的市占率(穩定狀態)各爲多少？

[分析]：

(1) 各校使用的數學教科書有三種狀態：

S_1 (甲版)；S_2 (乙版)；S_3 (丙版)。

(2) 求轉移矩陣

$$P=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \xrightarrow{\text{轉購}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} \xrightarrow{\text{轉購}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{array}。$$

(3) 目前甲、乙、丙三種版本的市占率爲

$X_0=\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \leftarrow \text{甲} \\ \leftarrow \text{乙} \\ \leftarrow \text{丙} \end{array}$，設經 k 年後的市占率 $X_k=\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}\begin{array}{l} \leftarrow \text{甲} \\ \leftarrow \text{乙} \\ \leftarrow \text{丙} \end{array}$。

[解法]：

(1)$X_1=PX_0=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.26 \\ 0.33 \end{bmatrix}$,

$$X_2=PX_1=\begin{bmatrix}0.5&0.4&0.3\\0.2&0.4&0.2\\0.3&0.2&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.41\\0.26\\0.33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.408\\0.252\\0.340\end{bmatrix}。$$

$$X_3=PX_2=\begin{bmatrix}0.5&0.4&0.3\\0.2&0.4&0.2\\0.3&0.2&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.408\\0.252\\0.340\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4068\\0.2504\\0.3428\end{bmatrix}。$$

故預估三年後甲、乙、丙三種版本之市占率依序爲

40.68%，25.04%，34.28%。

(2) 設穩定狀態的機率矩陣 $X=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow 甲\\\leftarrow 乙\\\leftarrow 丙\end{matrix}$，轉移矩陣 $P=\begin{bmatrix}0.5&0.4&0.3\\0.2&0.4&0.2\\0.3&0.2&0.5\end{bmatrix}$，

由 $PX=X$ 得

$$\begin{bmatrix}0.5&0.4&0.3\\0.2&0.4&0.2\\0.3&0.2&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\quad(a+b+c=1)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0.5a+0.4b+0.3c=a\\0.2a+0.4b+0.2c=b\\0.3a+0.2b+0.5c=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-0.5a+0.4b+0.3c=0\\0.2a-0.6b+0.2c=0\\0.3a+0.2b-0.5c=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-5a+4b+3c=0\text{——}①\quad\times(-2)\\2a-6b+2c=0\text{——}②\quad\times(3)\\3a+2b-5c=0\text{——}③\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-11a+0b+13c=0\\11a+0b-13c=0\\3a+2b-\ 5c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-11a+0b+13c=0\\3a+2b-\ 5c=0\end{cases}$$

$\Rightarrow a=13t$，$c=11t$，$b=8t$，又 $a+b+c=1$，

所以 $32t=1$，$t=\dfrac{1}{32}$。$\Rightarrow a=\dfrac{13}{32}=0.40625$，$b=\dfrac{8}{32}=0.25$，$c=\dfrac{11}{32}=0.34375$

即 $X=\begin{bmatrix}0.40625\\0.25000\\0.34375\end{bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow 甲\\\leftarrow 乙\\\leftarrow 丙\end{matrix}$ 爲“穩定狀態”。

[例題2] 設 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$爲二階實係數方陣

(1)當 A 爲轉移矩陣時，試敘述實數 a、b、c、d 需滿足的條件。

(2)試證：當 A 爲轉移矩陣時，A^2 也是轉移矩陣(式中 A^2 代表 A 與 A 的乘積)

(2011 指定乙)

[解法]：

(1)a,b,c,d 均爲正實數，且第一行各項之和 $a+c=1$、第二行各項之和 $b+d=1$。

(2) $A^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix}$

$\because a$、b、c、d 均爲正實數，$\therefore$ A^2 中各項亦爲正實數。

$\because a+c=1$，$b+d=1$

A^2 第一行各項之和$(a^2+bc)+(ac+cd)=a(a+c)+c(b+d)=a+c=1$

A^2第二行各項之和$(ab+bd)+(bc+d^2)=b(a+c)+d(b+d)=b+d=1$。
故A^2爲轉移矩陣。

[例題3] 設有A，B兩支大瓶子，開始時，A瓶裝有a公升的純果汁，B瓶裝有b公升的淨水。每一輪操作都是先將A瓶的溶液倒出一半到B瓶，均勻混合後再將B瓶的溶液倒出一半回A瓶。設n輪操作後A瓶有a_n公升的溶液，B瓶有b_n公升的溶液。

已知二階方陣$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$滿足：$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$。

(1) 求二階方陣$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$。

(2) 當$a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{1}{3}$時，求a_{100}及b_{100}。

(3) 在第二輪操作後，A瓶的溶液中有百分之多少的“果汁”。

Ans：(1) $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$ (2) $a_{100}=\dfrac{2}{3}$，$b_{100}=\dfrac{1}{3}$ (3) 68.75%

(練習1) 設 A,B 兩箱中，A 箱內有 1 黑球 1 白球，B 箱內有 1 白球。甲乙兩人輪流取球，每次先由甲自 A 箱內任取一球，放入 B 箱內，再由乙自 B 箱內任取一球，放入 A 箱內，這樣的動作完成後稱爲一局。

(1)當一局結束時，A 箱內兩球爲一黑一白的機率爲__________。

(2)當第三局結束時，A 箱內兩球爲一黑一白的機率爲_________。

Ans：(1)$\dfrac{3}{4}$ (2)$\dfrac{43}{64}$

(練習2) 台北市捷運局曾做過調查，消費者中原來搭捷運者有 80%繼續搭乘捷運，有 10%會改爲自行開車，有 10%改爲騎機車；原來自行開車的人有 30%改搭捷運，有 50%會繼續開車，有 20%改爲騎機車；原來騎機車者有 20%改爲搭捷運，有 20%會改爲自行開車，有 60%會繼續騎機車；假設台北市人口數不變，且目前有 20%的消費者採用捷運系統，有 30%的人自行開車，有 50%的人騎機車爲交通工具。

(a)試自行定義狀態，並寫出推移矩陣。

(b)一年後將有多少比例的消費者採用捷運系統爲交通工具？

(c)長期而言，將有多少比例的人會搭乘捷運？

Ans：(a) $\begin{array}{c|ccc} & \text{捷運} & \text{開車} & \text{機車} \\ \text{捷運} & 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ \text{開車} & 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ \text{機車} & 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{array}$ (b)35%(c)$\frac{16}{29}$

(練習3)設某地區有甲乙兩種報紙，訂戶總人數不變，且每一年訂戶變化皆如下述：今年訂閱甲報的人有$\frac{1}{3}$明年會繼續訂閱甲報，有$\frac{2}{3}$會改定乙報；今年訂閱乙報的人有$\frac{3}{5}$明年會改訂閱甲報，有$\frac{2}{5}$會繼續定乙報，根據這些資料，請寫出這項資料的推移矩陣 A，當市場趨於穩定狀態時，甲乙兩種報紙市場佔有率之比爲何？

Ans：A=$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$，9：10

(練習4)有甲、乙兩個袋子，甲袋內裝有兩顆編號 3 的球，乙袋內裝有兩顆編號 4 的球，
每一顆球被抽到的機會相等，今從各袋中抽出一球後互相交換
(1)試求交換五次後，甲袋內兩顆球的球號和爲偶數的機率。
(2)若經長久交換後成穩定狀態，試求此時乙袋內兩顆球的球號和爲奇數的機率。

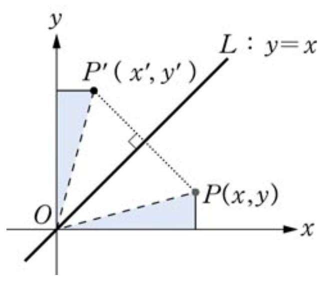
Ans：(1) $\frac{5}{16}$ (2) $\frac{2}{3}$

(乙)二階方陣對應的線性變換

(1)平面上的線性變換

◆ 二階方陣與平面上的線性變換

坐標平面上點經由特殊的運動到達另一點的情形很多，
例如：P(x,y)對稱於直線 L：x–y=0 得到 P$'$(x' , y')，



滿足$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$，這個關係式可以表示成矩陣的乘積：

$$\begin{cases} x'=y=0\cdot x+1\cdot y \\ y'=x=1\cdot x+0\cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

一般而言，

給定一個二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，

則方陣 A 將平面上每一點 $P(x，y)$ 變換到 $P'(x'，y')$，其坐標關係式爲

$$\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

(A)式稱爲**平面上的線性變換**，亦可用矩陣的乘積表示成$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。

根據上面的說明，可以得知二階方陣可以用來表示線性平面上的線性變換。

平面上每一個“線性變換”都對應唯一的一個“二階方陣”。即

$$\boxed{\text{線性變換}} \xleftrightarrow{\text{“一對一”對應}} \boxed{\text{二階方陣}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}。$$

所以每一個“**二階方陣** A”在變換的意義下可視爲平面上的“**線性變換**”。

事實上，行矩陣$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$除了可以爲點 P 的坐標外，有時也可以視爲位置向量$\overrightarrow{OP}=(x,y)$，因此平面上的線性變換不僅可以爲「平面上點與點」間的變換，也可以視爲「平面上向量與向量」間的變換。

爲了方便起見，A$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$可以表爲 A$(\overrightarrow{OP})$。

[例題4] (單位點在線性變換下的像點)

設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，求坐標軸上的單位點 (1，0)，(0，1) 在 A 變換下的像點。

[解法]：

$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ← A 的“第 1 行”行矩陣，

$A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ← A 的“第 2 行”行矩陣。

故 (1，0)，(0，1) 的像點分別爲 (2，3)，(1，4)。

例題四中，若將點 (1，0)，(0，1)視爲單位向量 $\overrightarrow{e_1}=(1,0)$、$\overrightarrow{e_2}=(0,1)$，則單位向量 $\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$ 經由二階方陣 A 的變換之後，它們分別會對應到向量(2，3)，(1，4)，而$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$分別是 A 的第一行與第二行的行矩陣。

(練習5)設 $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$，試求點 (1，0)，(0，1)，(0，0) 在 B 變換下的像點。

Ans：(1,2)、(4,9)、(0,0)

對一般的線性變換 (二階方陣) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$而言，下面的結論是成立的。

結論：

二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，恆將

(1)原點 O 映成原點 O，

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

(2) x 軸上的單位點 e_1 (1，0)[單位向量 $\overrightarrow{e_1}$ **=(1,0)**]映成

A 之第 1 行“行矩陣”所代表的點[向量]。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}。$$

(3)y 軸上的單位點 e_2 (0，1) [單位向量 $\overrightarrow{e_2}$ **=(0,1)**]映成

A 之第 2 行“行矩陣”所代表的點[向量]。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}。$$

[例題5] (給予兩點及其像點可決定一個線性變換)

求一個線性變換 A 使得$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

並求點 P (4，-2) 在 A 變換下的像點 P'。

分析：設線性變換 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$。已知

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad ①$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad ②$$

①與②可以合併成③式 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ③

欲求③式之未定係數 a，b，c，d。

[解法]：

(1) 由題意知：$A\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (1)

因 $B=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 之行列式 det (B)$=1\neq 0$，

故方陣 $B=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$之逆方陣 $B^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 存在，

用 B^{-1} 右乘(1)式兩邊得到

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}$$

所求的線性變換 $A=\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}$。

(2) $P(4，-2)$ 在 A 變換下之像點爲

$A\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 32 \\ -52 \end{bmatrix}$，故 $P'(32，-52)$。

例題 5 中，

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{A}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}\xrightarrow{A}\begin{bmatrix} 32 \\ -52 \end{bmatrix}$，簡記作 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{\quad\quad A^2 \quad\quad}\begin{bmatrix} 32 \\ -52 \end{bmatrix}$。

(練習6)求線性變換 A 滿足：$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}\xrightarrow{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{A}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$，並求點 $P(x，y)$ 使得 P 在 A 的變換下像點爲(1，0)。

Ans：$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -11 \end{bmatrix}$，(1,5)

◆　平面上的線性變換的性質

根據矩陣乘法的性質：(i) $A(rB)=r(AB)$。　(ii) $A(B+C)=AB+AC$。

當 A 是平面上的線性變換（二階方陣），B，C 分別是（2×1）階矩陣 $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$，

$C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$，上式(i)(ii)的關係仍然成立，故可以得到以下的性質：

設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是平面上的線性變換，$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$是相異兩個點 P、Q 的坐標，

(相異兩向量$\overrightarrow{OP}$與$\overrightarrow{OQ}$)，

(1°) A 恆將原點 O 變換到原點 O。

(2°)$A(r\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix})=r(A\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix})+s(A\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix})$　(r,s 爲實數)

根據矩陣的乘法運算性質，很容易可以得知上式是正確的，從向量的角度來看

向量$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$的線性組合 $r\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OQ}$，經由 A 變換到向量 $A\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$與 $A\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$的線性組合

$r(A\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix})+s(A\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix})$。

(3°)若 $\det A\neq 0$，則 A 將直線 L 變換到直線 L'。

設 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$是直線 L 上的相異兩點，

故直線上的動點 P(x,y)會滿足$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=(1-t)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$，其中 t 是任意實數。

設 P_1、P_2、P 經由 A 的變換成 $Q_1(x_1',y_1')$、$Q_2(x_2',y_2')$、$Q(x',y')$

可以得出$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}((1-t)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix})$

$=(1-t)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=(1-t)\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix}$，$t$ 是任意實數

因此 Q 點會形成直線 Q_1Q_2，因此可知 A 將直線 L 變換成直線 L'。

◆ 線性變換的行爲

先舉一個實例來探討線性變換的行爲：

設 A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，P($x$,$y$)點經由 A 的變換得到 $P'(x',y')$，令單位向量$\overrightarrow{e_1}$=(1,0)、$\overrightarrow{e_2}$=(0,1)，

根據前面的討論，可以得知：

$\overrightarrow{e_1} \xrightarrow{A} \overrightarrow{e_1'}=A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ←A 的第 1 行“行矩陣”，

$\overrightarrow{e_2} \xrightarrow{A} \overrightarrow{e_2'}=A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ←A 的第 2 行“行矩陣”，

(1°)若$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}$，因爲$\overrightarrow{OP}$經由 A 的變換得到$\overrightarrow{OP'}$，則

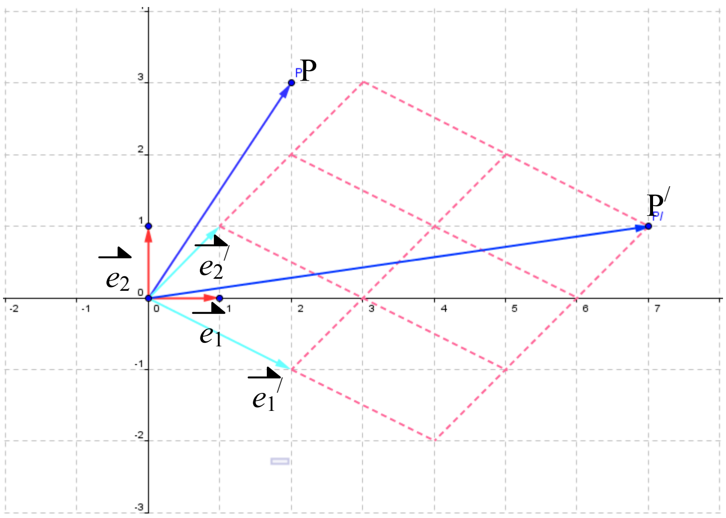
$A(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})=A(2\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2})=2A(\overrightarrow{e_1})+3A(\overrightarrow{e_2})$

故$\overrightarrow{OP'}=2\overrightarrow{e_1'}+3\overrightarrow{e_2'}$。

(2°)若$\overrightarrow{OP}=x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}$，因爲$\overrightarrow{OP}$經由 A 的變換得到$\overrightarrow{OP'}$，

則 $A(x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})=A(x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2})=x_1A(\overrightarrow{e_1})+y_1A(\overrightarrow{e_2})$

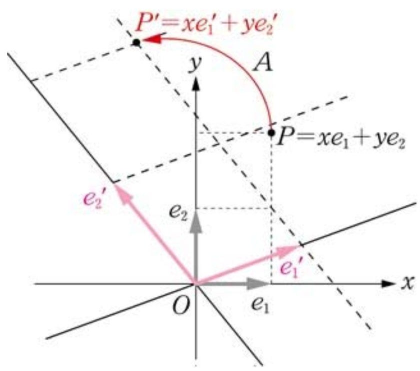
故$\overrightarrow{OP'}=x_1\overrightarrow{e_1'}+y_1\overrightarrow{e_2'}$。



一般而言，給定一個線性變換 A＝$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，其中 det(A)≠0。

A 分別將單位向量 $\overrightarrow{e_1}$ =(1,0)、$\overrightarrow{e_2}$ =(0,1)變換到 $\overrightarrow{e_1'}$、$\overrightarrow{e_2'}$，

其中 $\overrightarrow{e_1'}=\mathrm{A}\overrightarrow{e_1}=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$，$\overrightarrow{e_2'}=A\overrightarrow{e_2}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$。



對於平面上任一點 $P(x，y)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，經 A 變換到 P'

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 與其像 $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$ 恆有下列關係：

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}\xrightarrow{A}x\overrightarrow{e_1'}+y\overrightarrow{e_2'}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$$

$\overrightarrow{e_1}$ 與 $\overrightarrow{e_1'}$ 之係數相同 (同為 x)，$\overrightarrow{e_2}$ 與 $\overrightarrow{e_2'}$ 之係數相同（ 同為 y)，

根據上述的討論，我們可以得知，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 與 $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$(線性變換 A 的像)分別對於{ $\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$ }與

{ $\overrightarrow{e_1'}$、$\overrightarrow{e_2'}$ }的線性組合有相同的係數，因此想要掌握線性變換的行為，只要掌握 A $\overrightarrow{e_1}$

與 $A\overrightarrow{e_2}$ 的行為即可。

◆　線性變換與坐標

另一方面，如上圖 3-7，將原來的直角坐標系記作 $S\equiv(O；\overrightarrow{e_1}，\overrightarrow{e_2})$，

其中 O 是原點，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 分別是 x 軸，y 軸上的單位向量（$\overrightarrow{e_1}\perp\overrightarrow{e_2}$），那麼

“線性變換 A”可以看成：

把直角坐標系 $S\equiv(O；\overrightarrow{e_1}，\overrightarrow{e_2})$ 變換到另一個新坐標系 $S'\equiv(O；\overrightarrow{e_1'}，\overrightarrow{e_2'})$，其中

原點 O 不變，而 $\overrightarrow{e_1'}$，$\overrightarrow{e_2'}$ 依序是 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 之像。

設點 P 對坐標系 S 之“坐標”記為$(x，y)_S$，則其像點 P'對坐標系 S'之“坐標”仍是 $(x，y)_{S'}$，即

直角坐標系 S		一般坐標系 S'
$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$	$\xrightarrow{A}$	$\overrightarrow{OP}'=x\overrightarrow{e_1}'+y\overrightarrow{e_2}'$
$P=(x，y)_S$		$P'=(x，y)_{S'}$

注意：因 $\overrightarrow{e_1}'$ 與 $\overrightarrow{e_2}'$ 不一定垂直，並且長度 $|\overrightarrow{e_1}'|$ 與 $|\overrightarrow{e_2}'|$ 也不一定相等，故新坐標系 $S'\equiv(O；\overrightarrow{e_1}'，\overrightarrow{e_2}')$ 不一定是直角坐標系。

[例題6] 試求直線 L：$x+y=3$ 經過 A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$的變換之後所得的直線方程式。

Ans：$x-y+6=0$

[例題7] 兩直線 L_1：$x-y-1=0$、L_2：$2x-3y+1=0$，L_1 上的點經由線性變換 A 變換至 L_2，L_2 上的點經由線性變換 A 變換至 L_1；

(1)試求 2 階方陣 A。

(2)通過原點的直線 L 經由 A 變換到直線 L，試求 L 的方程式。

Ans：(1)A=$\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ (2)$y=\frac{3}{4}x$、$y=\frac{1}{2}x$

(練習7)坐標平面上有兩點$(1,-1)$、$(-1,3)$分別經由線性變換 A 變換至點$(-1,8)$、$(5,-18)$

(1)試求 2 階方陣 A。

(2)若線性變換 A 將點(a,b)變換至點$(2,7)$，試求 a,b 的值。

(3)P(2,0)、Q(5,3) 線性變換 A 變換至 P'、Q'，令 O(0,0)，

試求$\dfrac{\Delta OP'Q'\text{面積}}{\Delta OPQ\text{面積}}=$？

Ans：(1)A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ (2)$a=\frac{24}{11}$、$b=\frac{-1}{11}$ (3)11

(練習8)線性變換 A 將(1,0)變換到(1,−1)，將圓 $2x^2+2y^2-4y+1=0$ 變換到圓 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$，求變換 A 所代表的矩陣。Ans：$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

(練習9)在 $A=\begin{bmatrix}3 & b\\ c & 7\end{bmatrix}$所定義的線性變換 T 將直線 $y=2x+1$ 變換成它自己，求出 b,c 的值。Ans：$b=3$，$c=4$

(丙)特殊的線性變換

我們熟知的幾何變換—旋轉、鏡射、伸縮等，我們都可以用特定的矩陣來表示。
如果平面上一個"變換"，確定是線性變換 A，那麼只須找出坐標軸上兩個單位點 e_1，e_2 經 A"變換"後的像點 e_1'，e_2' 即可。即

設 A 爲線性變換，並且滿足：
$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{A}e_1'=\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix};e_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\xrightarrow{A}e_2'=\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix},$$
則 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$。

◆ 伸縮變換：

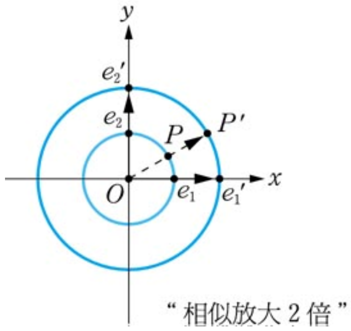
(1)中心伸縮：
設 O 爲平面上一個定點，k 爲大於 0 的定數，若將平面上的動點 P 變換到 P'，使得 $\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$，則爲以 O 爲中心伸縮 k 倍的伸縮變換。

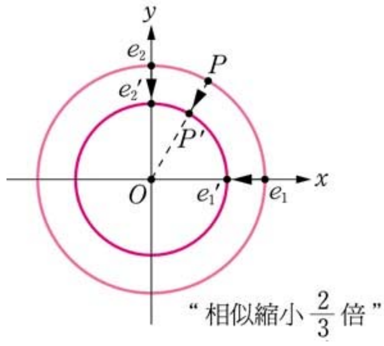
(2)伸縮變換是平面上的線性變換：
設 $P(x,y)$經過以原點 O 爲伸縮中心，伸縮 $k(k>0)$倍得到 $P'(x',y')$，
因爲$\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}\Rightarrow(x',y')=k(x,y)\Rightarrow x'=kx$，$y'=ky$

P 與 P'的關係用矩陣表示如下：$\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$。

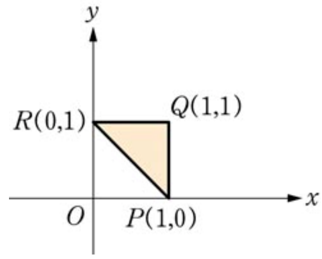
一般而言，設 $k>0$，則線性變換
$$S=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}\quad\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{S}\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\xrightarrow{S}\begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix}\right)$$
稱爲以原點爲中心的伸縮變換。S 將平面圖形"相似伸縮"了 k 倍，
當 $k>1$ 時，S 是放大；
當 $0<k<1$ 時，S 是縮小；
當 $k=1$ 時，$S=I$（單位方陣），此時 S 爲恆等變換（S 將每一點變換到本身）。
例如：
線性變換 $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ 是以原點 O 爲伸縮中心，將平面上的圖形"相似放大"2 倍。

同理，線性變換 $B=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ 以原點 O 為伸縮中心，將圖形“相似縮小”$\frac{2}{3}$倍，如下圖所示。





(練習10)右圖△PQR 經 $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ 變換到△$P'Q'R'$，試畫出△$P'Q'R'$。



(練習11)設圓 C：$(x-1)^2+y^2=4$，經由 $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ 變換到圖形 C'。

試求 C'的方程式。　Ans：$(x-3)^2+y^2=36$

(練習12)設 O(0,0)、A(a_1,a_2)、B(b_1,b_2)形成ΔOAB，

經過伸縮運動$\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$($k>0$)，形成ΔOA'B'，

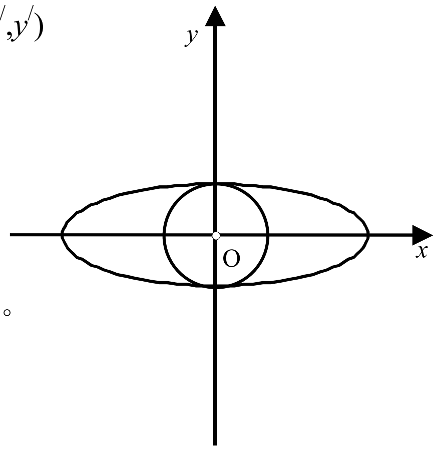
試問這兩個三角形面積的關係？Ans：$\Delta OA'B'=k^2\Delta OAB$

(2)水平與鉛直伸縮

水平方向的伸縮變換：

將點 P(x,y)的 y 坐標保持不變，而將 x 坐標乘以 r 倍，得到 P'(x',y')

其中 $x'=rx, y'=y$，用矩陣表示為$\begin{bmatrix}r & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$。



當 $r>1$ 時，此運動可視為水平方向伸張 r 倍，鉛直方向不變

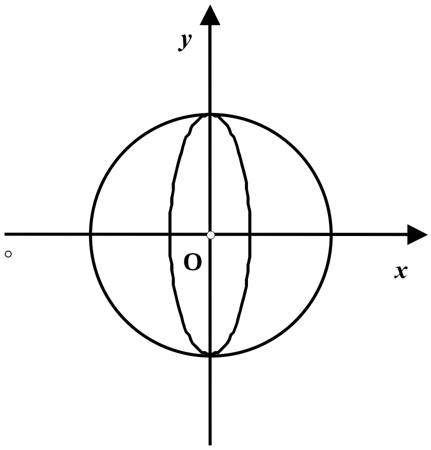
當 $0<r<1$ 時，此運動可視為水平方向壓縮 r 倍，鉛直方向不變。

當 $r<0$ 時，此運動可視為伸張或壓縮與對 y 軸的鏡射。

例如：$\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$將每一點 P($x,y$)變成 Q($3x,y$)，

所以可將圓 $x^2+y^2=1$ 水平方向伸長 3 倍，

成爲橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$。



例如：$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$將每一點 P($x,y$)變成 Q($\frac{1}{3}x,y$)，

所以可將圓 $x^2+y^2=1$ 水平方向壓縮 $\dfrac{1}{3}$ 倍，成爲橢圓 $9x^2+y^2=1$。

例如：$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

所以$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$可視爲先對 y 軸作鏡射，在沿 x 軸伸長 3 倍。

鉛直方向的伸縮變換：

將點 P(x,y)的 x 坐標保持不變，而將 y 坐標乘以 r 倍，得到 $P'(x',y')$其中 $x'=x,y'=ry$，用矩陣表示爲$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$。

當 $r>1$ 時，此運動可視爲鉛直方向伸張 r 倍，水平方向不變

當 $0<r<1$ 時，此運動可視爲鉛直方向壓縮 r 倍，水平方向不變。

當 $r<0$ 時，此運動可視爲伸張或壓縮與對 x 軸的鏡射。

[例題8] 一個圓 $x^2+y^2=1$ 上的點 P(x,y)先沿水平方向伸長 3 倍，再沿 y 軸方向伸長 2 倍。得到另一個點 Q(x',y')，

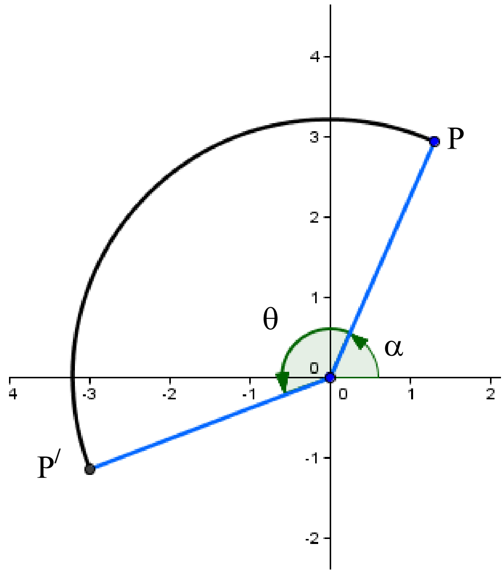
(a)請找出一個 2 階方陣 A 使得 A$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$。

(b)Q 點形成另一個圖形，請問此圖形的方程式。

Ans：$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

(練習13)設ΔABC 的頂點 A、B、C 經過沿水平方向壓縮$\frac{1}{5}$倍之後，再沿鉛直方向伸長 2 倍，得到 A'、B'、C'，形成另一個$\Delta A'B'C'$，請問這兩個三角形面積的關係。Ans：$S_{A'B'C'}=\frac{2}{5}\cdot S_{ABC}$

◆ 旋轉變換：



(1)旋轉矩陣：

$\boxed{\text{旋轉中心為原點}(0,0)}$

設平面上有一點 $P(x,y)$繞原點 O 旋轉θ角度得到 $P'(x',y')$，

當θ>0 時，逆時針轉；θ<0 時，順時針轉

令$\overline{OP}=r$，根據三角函數的定義，可以得知

$x=r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$；$x'=r\cos(\theta+\alpha)$，$y'=r\sin(\theta+\alpha)$

$x'=r\cos(\theta+\alpha)=r(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)=x\cdot\cos\theta-y\cdot\sin\theta$

$y'=r\sin(\theta+\alpha)=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=x\cdot\sin\theta+y\cdot\cos\theta$

如果將 $P(x,y)$寫成$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$P'(x',y')$寫成$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，則它們之間的關係可寫成

$\Rightarrow\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，稱矩陣 $R_\theta=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$為**旋轉矩陣**。

從向量的觀點來看：

若$\overrightarrow{OP}=(x,y)$繞原點 O 旋轉θ成為$\overrightarrow{OP'}=(x',y')$，

則$\overrightarrow{OP}$與$\overrightarrow{OP'}$滿足$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$。

根據前面的討論可以得知：將單位向量$\overrightarrow{e_1}=(1,0)$、$\overrightarrow{e_2}=(0,1)$旋轉變換到$\overrightarrow{e_1'}$、$\overrightarrow{e_2'}$，

其中$\overrightarrow{e_1'}=(R_\theta)\overrightarrow{e_1}=\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$，$\overrightarrow{e_2'}=(R_\theta)\overrightarrow{e_2}=\begin{bmatrix} \cos(\theta+90^\circ) \\ \sin(\theta+90^\circ) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$。

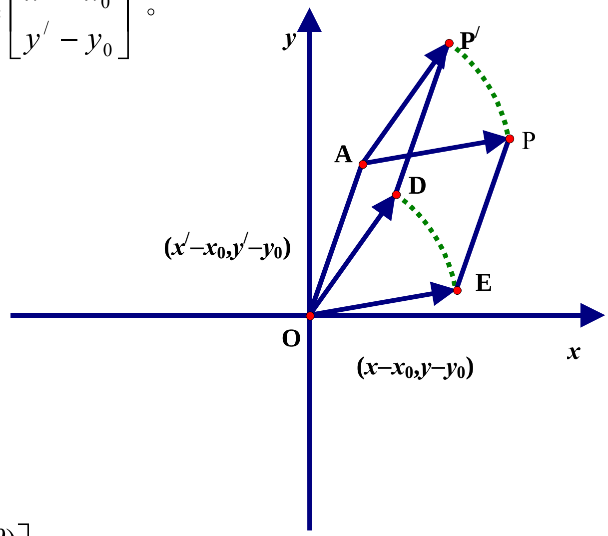
故 $R_\theta=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$。

$\boxed{\text{旋轉中心為一般的點}}$

設平面上有一點 $P(x,y)$繞一點 $A(x_0,y_0)$旋轉θ角度得到 $P'(x',y')$，

上述的旋轉運動可以視為$\overrightarrow{AP}=(x-x_0,y-y_0)$繞原點 O 旋轉θ成為$\overrightarrow{AP'}=(x'-x_0,y'-y_0)$

所以可以得到關係式：$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'-x_0\\ y'-y_0\end{bmatrix}$。



如右圖，可以得知：

P $\xrightarrow{R(A,\theta)}$ P′ 相當於 E $\xrightarrow{R(O,\theta)}$ D

(2)旋轉矩陣的性質：

(a)旋轉矩陣 R_θ的反矩陣 R_θ^{-1}=$\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}$。

[證明]：

因 det (R_θ)＝$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\neq0$，故逆方陣 R_θ^{-1} 存在。又

$$R_\theta^{-1}=\frac{1}{\det(R_\theta)}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}=R_{(-\theta)}。$$

即旋轉 θ 角的線性變換 R_θ，其逆方陣 R_θ^{-1} 就是旋轉－θ 角的線性變換 $R_{(-\theta)}$。

(b) $R_{\theta_1}\times R_{\theta_2}=R_{(\theta_1+\theta_2)}$

$$R_{\theta_1}\times R_{\theta_2}=\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}$$

$$=R_{(\theta_1+\theta_2)}。$$

即先旋轉 θ_2 角，再旋轉 θ_1 角，等於旋轉 $(\theta_1+\theta_2)$ 角。

根據(b)可以得知$(R_\theta)^k=R_{k\theta}$，即「以原點為中心旋轉θ角」轉了 k 次，就相當於「以原點 O 為中心旋轉了(kθ)角」，用矩陣來表示為

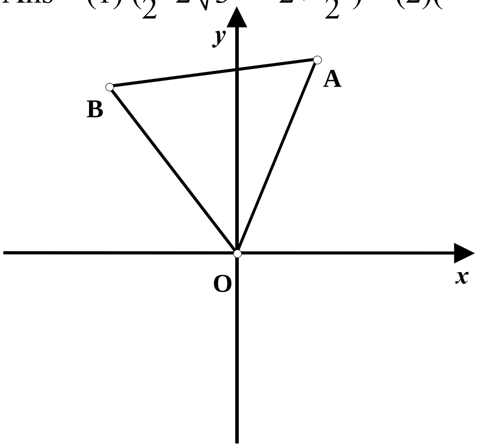
$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{bmatrix}$$，其中 k 為正整數。

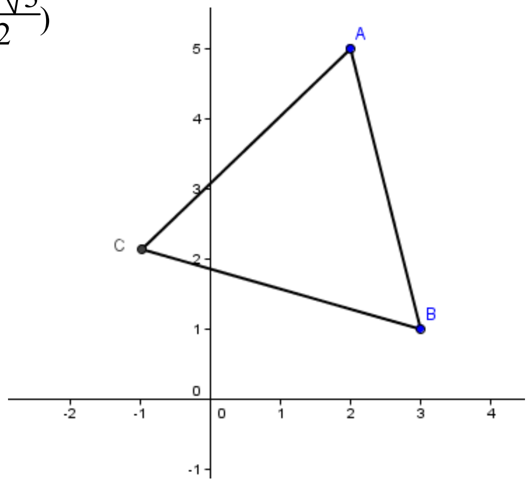
[例題9] 試求下列各小題：

(1)設ΔOAB 為一正三角形，其中 A 的坐標為(1,4)，B 點在第二象限。試求 B 的坐標。

(2)如圖，ΔABC 為正三角形，且 A(2,5)、B(3,1)，試求 C 點坐標。

Ans：(1) $(\frac{1}{2}-2\sqrt{3}\ ,\ 2+\frac{\sqrt{3}}{2})$ (2)$(\frac{5-4\sqrt{3}}{2},\frac{6-\sqrt{3}}{2})$





[例題10] 試求下列各問題：

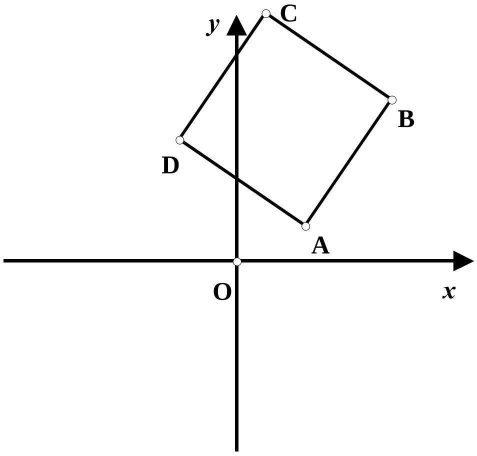
(1)將直線 L：$x+y=2$ 上的點繞原點 O 旋轉 45°，得到新的圖形 L'，試求 L'的方程式。

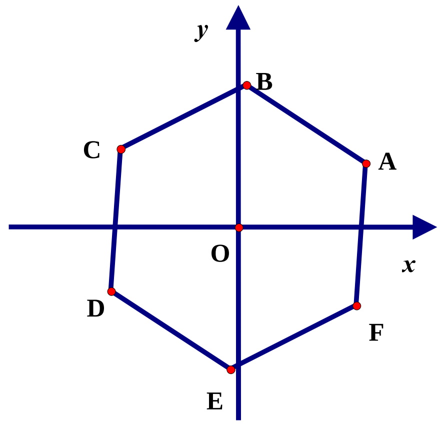
(2)將直線 L：$x+y=2$ 上的點由旋轉變換$\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$得到新的圖形 L'，試求 L'的方程式。

Ans：(1)$y=\sqrt{2}$ (2)$7x-y=10$

(練習14)如圖，ABCD 爲正方形，其中 A(2,1)、B(5,5)試求 C、D 的坐標。

Ans：D(−2,4)、C(1,8)





(練習15)一正六邊形 ABCDEF 其中心爲原點，而 A 的坐標爲(4,2)，求 C 點的坐標。Ans：C($-2-\sqrt{3},2\sqrt{3}-1$)

(練習16)設直線 L：$\sqrt{3}\ x+y=4$ 上的每一個點繞原點 O 旋轉 30°後成爲立一條直線 L'，求 L'的方程式。Ans：$x+\sqrt{3}\ y=4$

(練習17)設 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，若$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，則下列何者正確？

(A)$0<\theta<\frac{\pi}{6}$ (B)$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{4}$ (C)$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$ (D)$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5\pi}{12}$ (E)$\frac{5\pi}{12}<\theta<\frac{\pi}{2}$

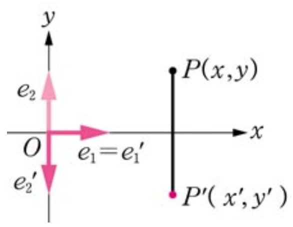
Ans：(C) (2008 台北區指考模擬考 1)

◆ 鏡射變換：

(1)鏡射矩陣：

設直線 L 通過原點 O，且與 x 軸正向的夾角爲$\theta(0°\le\theta\le180°)$，$P(x，y)$對於直線 L 的鏡像點爲 $P'(x'，y')$，接下來探討鏡像變換所代表的 2 階方陣 M_θ：

(1°)「對稱軸爲 x 軸」之鏡射變換 $M_{0°}$ (圖 1)



$P(x，y)\xrightarrow{M_{0°}}P'(x'，y')$。滿足

$\begin{cases}x'=x=1x+0y\\ y'=-y=0x-1y\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，

故 $M_{0°}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 是一個線性變換。

(2°)「對稱軸爲 y 軸」之鏡射變換 $M_{90°}$ (圖 2)

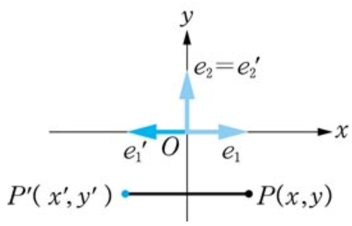


圖 2

$P(x，y)\xrightarrow{M_{90°}}P'(x'，y')$。滿足：

$\begin{cases} x'=-x=-1x+0y \\ y'=y=0x+1y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，

故 $M_{90^\circ}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是一個線性變換。

(3°)「對稱軸為直線 L：$y=x$」之鏡射變換 M_{45° (圖 3)

$P(x，y) \xrightarrow{M_{45^\circ}} P'(x'，y')$。滿足

$\begin{cases} x'=y=0x+1y \\ y'=x=1x+0y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$，

故 $M_{45^\circ}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是一個線性變換。

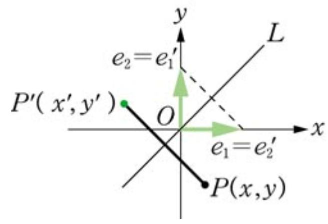


圖 3

(4°)「對稱軸為過原點之一條直線 L：$y=(\tan\theta)x$」之鏡射變換 M_θ，

[想法]：

如右圖，設點 $P(x，y)$關於 L 之鏡射點為 $P'(x'，y')$。欲求 M_θ使得 $P \xrightarrow{M_\theta} P'$。

(i) 先用旋轉變換 $R_{(-\theta)}$，使ℓ與 x 軸重合，並求出 $P(x，y)$ 之像點 P_1

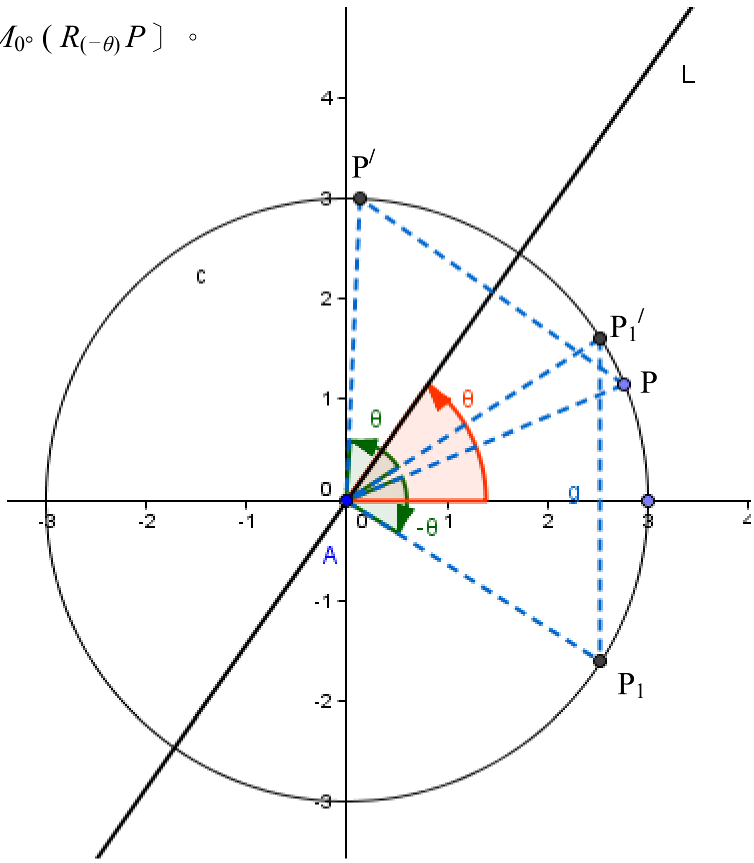
$P \xrightarrow{R_{(-\theta)}} P_1$。

(ii) 再用“以 x 軸為對稱軸”之鏡射變換 M_{0°，求出 P_1 之像點 P_1'。

(iii) 最後用旋轉變換 R_θ，求出 P_1'之像點 P'。即

$P \xrightarrow[\text{旋轉}]{R_{(-\theta)}} P_1 \xrightarrow[\text{對稱}]{M_{0^\circ}} P_1' \xrightarrow[\text{旋轉}]{R_\theta} P'$。

即 $P'=R_\theta〔M_{0^\circ}(R_{(-\theta)}P〕$。



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$=\left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos^2\theta-\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta-\cos^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，故 $M_\theta=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$。$M_\theta$也是線性變換。

故我們稱 $M_\theta=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$爲關於直線 L 的鏡射矩陣。

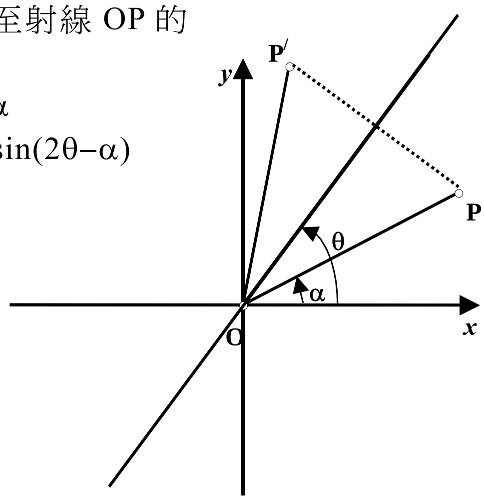
(練習18)如圖，設平面上有一點 P(x,y)、過原點的直線 L 的斜角爲θ，P 點對於直線 L 鏡射的點爲 $P'(x',y')$，令$\overline{OP}=r$，由 x 軸正向轉至射線 OP 的方向角爲α

(1)證明：x 軸正向轉至射線 OP'的方向角爲 $2\theta-\alpha$

(2)利用 $x=r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$；$x'=r\cos(2\theta-\alpha)$，$y'=r\sin(2\theta-\alpha)$

推導出(x,y)與(x',y')的關係：

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$



(練習19)試寫出關於直線 L：$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 的鏡射矩陣。

Ans：$\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix}$

(練習20)請寫出關於 x 軸、y 軸、直線 $x-y=0$、直線 $x+y=0$ 的鏡射矩陣。

Ans：$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(2)鏡射矩陣的性質：

(a)$(M_\theta)^{-1}=M_\theta$

[證明]：$M_\theta=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$，$\det(M_\theta)=-1$

$(M_\theta)^{-1}=\frac{1}{\det(M_\theta)}\begin{bmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$。

(b)$(M_\theta)^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

[證明]：

$(M_\theta)^2= M_\theta\cdot M_\theta= M_\theta\cdot (M_\theta)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

幾何意涵：P 點經過直線 L 兩次鏡射之後會再回到 P 點。

(c) $M_{0^\circ}\cdot R_{(-\theta)}=R_\theta\cdot M_{0^\circ}$

[證明]：

$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$

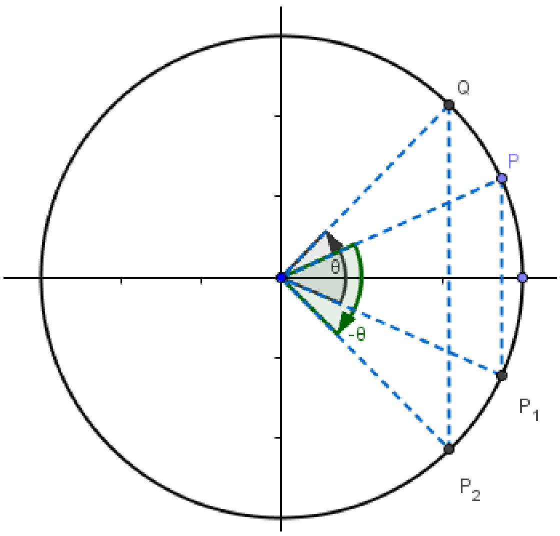
$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$

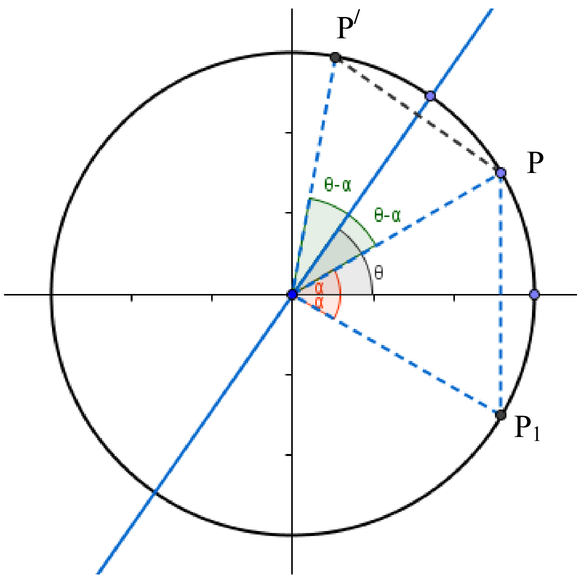
(d) $M_\theta=R_{2\theta}\cdot M_{0^\circ}$

[證明]：$M_\theta= R_\theta\cdot M_{0^\circ}\cdot R_{(-\theta)}=R_\theta\cdot R_\theta\cdot M_{0^\circ}= R_{2\theta}\cdot M_{0^\circ}$

幾何意涵為“點 P 對直線 L：$y=(\tan\theta)x$ 之鏡射點 P'”

等於“P 先對 x 軸求“鏡射點 P_1”，然後 P_1 繞原點旋轉 2θ 角之像點”。





[例題11] 設平面上有一點 P(x,y)、過原點的直線 L：y=mx，P 點對於直線 L 鏡射的點為 P$^{/}$($x^{/}$,$y^{/}$)，則(x,y)與($x^{/}$,$y^{/}$)關係式可寫成$\begin{bmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^{/} \\ y^{/} \end{bmatrix}$。

[例題12] 有關矩陣 A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$與矩陣 B=$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，試問下列哪些選項是正確的？

(1)AB=BA (2)A^{2}B=BA^2 (3)A^{11}B^3=B^{6}A^5 (4)AB^{12}=A^7
(5)(ABA)^{15}=AB^{15}A。(2007 指定甲) Ans：(2)(4)(5)

[例題13] 拋物線Γ：y=x^2 經過直線 y=2x 鏡射下變成Γ$^{/}$，請問Γ$^{/}$的方程式為何？
Ans：$9x^2-24xy+16y^2-20x-15y=0$

(練習21)設ℓ：$y=2x$。其中 $\tan\theta=2$。

(1) 試求以ℓ為對稱軸之鏡射變換 M_θ。

(2) 求點 P (－2，1) 在 M_θ變換下的像點 P'。Ans：(1)$\begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ (2)P$^{/}$(2,−1)

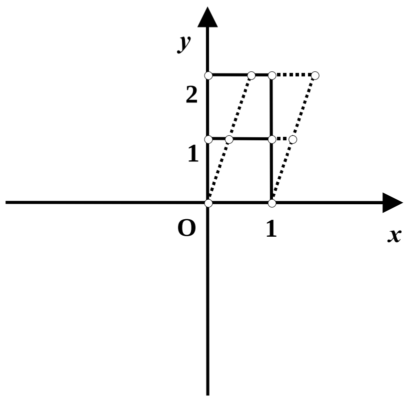
(練習22)(1)A(−2,6)關於 L： $x-\sqrt{3}y=0$ 的對稱點坐標 A'：____________。
(2)直線 L：$2x-y-6=0$ 關於直線 $y=3x$ 的鏡射圖形方程式爲____________。
Ans：(1) $A'(-1+3\sqrt{3},-3-\sqrt{3})$ (2)$11x-2y+30=0$

(練習23)試求直線 L：$y=-x$ 經過繞原點旋轉 30°，再對直線 $y=x$ 鏡射下變成 L'，求 L' 的方程式。Ans：$y=-(2+\sqrt{3})x$

◆ 推移變換：

(1)設 k 是一個大於 0 的常數，在坐標平面上，若將動點 $P(x,y)$ 的 y 坐標保持不變，而 x 坐標變成 $x+ky$，形成 $P'(x',y')$，其中 $x'=x+ky$，$y'=y$，用矩陣表示可爲 $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$。

稱此運動爲沿 x 坐標推移 y 坐標的 k 倍的推移變換。



例如：沿 x 坐標推移 y 坐標的 $\frac{1}{3}$ 倍時，

$$\begin{cases} x' = x+\frac{1}{3}y \\ y'=y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix},$$

這樣的運動將(0,0)、(1,0)、(0,1)、(1,1)、(0,2)、(1,2)

依序變成(0,0)、(1,0)、$(\frac{1}{3},1)$,$(\frac{4}{3},1)$,$(\frac{2}{3},1)$,$(\frac{5}{3},2)$，如右圖所示。

(b)設 k 是一個大於 0 常數，在坐標平面上，若將動點 $P(x,y)$ 的 x 坐標保持不變，而 y 坐標變成 $kx+y$，形成 $P'(x',y')$，其中 $x=x'$，$y'=kx+y$，用矩陣表示可爲 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$。

稱此運動爲沿 y 坐標推移 x 坐標的 k 倍的推移變換。

結論：設 $k>0$，

(1) $S_y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$ 沿 y 軸方向的推移變換：

$S_y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$ 將平面上的每一點 P 之“x 坐標”不變，再沿著 y 軸方向推移“kx”。

y 軸之右半平面（$x>0$）朝上推移“kx”；y 軸左半平面（$x<0$），朝下推移“$|kx|$”；y 軸（$x=0$）的每一點都保持不動。

(2)$S_x=\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$沿 x 軸方向的推移變換：

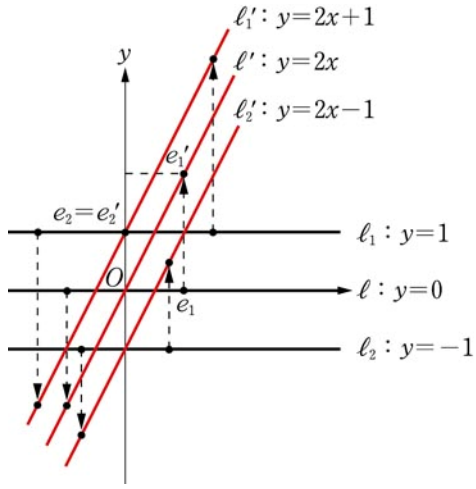
$S_x=\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$是將平面上的每一點 P 之“y 坐標”不變，再沿著 x 軸方向推移“ky”。
x 軸之上半平面（$y>0$）向右推移“ky”；下半平面（$y<0$）向左推移“$|ky|$”；x 軸上（$y=0$)每一點都保持不動。

[例題14] 線性變換 S：$\begin{cases}x'=1x+0y\leftarrow P\text{點的}x\text{坐標}\\ y'=2x+1y\leftarrow P\text{點的}y\text{坐標}+2\,(x\text{坐標})\end{cases}$的幾何意涵爲何？試說明之。

[解法]：

解：$\begin{cases}x'=1x+0y\\ y'=2x+1y\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，$S=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}$，

S 的幾何意涵是將平面上每一點 $P(x，y)$
（“x 坐標”不變），沿著 y 軸方向推移“$2x$”。
y 軸右半平面（$x>0$）向上推移，y 軸左半平面（$x<0$）向下推移
y 軸上的點保持不動。
如右圖所示，



因 $\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{S}\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\2x\end{bmatrix}$，

故 $\boxed{x\text{ 軸}：y=0}\xrightarrow[\text{原點不動}]{S}\boxed{\ell'：y=2x}$

同理，因 $\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}\xrightarrow{S}\begin{bmatrix}x\\2x+1\end{bmatrix}$

故 $\boxed{\ell_1：y=1}\xrightarrow[\text{點}(0,1)\text{不動}]{S}\boxed{\ell_1'：y=2x+1}$

因 $\begin{bmatrix}x\\-1\end{bmatrix}\xrightarrow{S}\begin{bmatrix}x\\2x-1\end{bmatrix}$，

故 $\boxed{\ell_2：y=-1}\xrightarrow[\text{點}(0,-1)\text{不動}]{S}\boxed{\ell_2'：y=2x-1}$

水平直線 $y=k$ 變換成**斜率爲 2 之平行直線 $y=2x+k$**，
其中 y 軸上的點（$0，k$）不動。

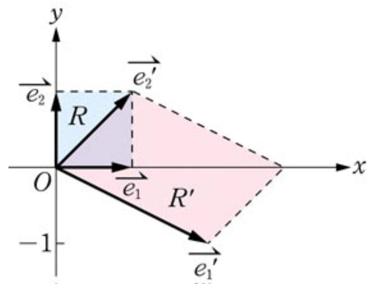
(練習24)設 A$(-1,-1)$、B$(1,-1)$、C$(1,1)$、D$(-1,1)$，
(1)正方形 ABCD 沿 x 軸推移 y 坐標的 2 倍，成爲四邊形 $A'B'C'D'$。
請問 $A'B'C'D'$各頂點的坐標。
(2)正方形 ABCD 沿 y 軸推移 x 坐標的 2 倍，成爲四邊形 $A'B'C'D'$。
請問 $A'B'C'D'$各頂點的坐標。
Ans：(1)$A'(-3,-1)$、B$(-1,-1)$、$C'(3,1)$、$D'(1,1)$
(2)$A'(-1,-3)$、B$(1,1)$、C$(1,3)$、D$(-1,-1)$

(練習25)設圓 C：$x^2+y^2=4$ 在$(x,y)\to(x+y,y)$的推移下，變成另一個圖形Γ，求Γ的方程式。Ans：$x^2-2xy+2y^2=4$ （橢圓)

(丁)線性變換的面積比

給了一個線性變換 A，A 將平行四邊形 R 變換到另一個平行四邊形 R'，那麼它們的面積比 （R' 的面積）：(R 的面積)是不是恆爲一個定值呢？
(與平行四邊形 R 的選擇無關) 答案是肯定的，我們先利用例子來說明。

設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，首先考慮坐標軸上兩個互相垂直的單位向量



$\vec{e_1}=(1，0)$，$\vec{e_2}=(0，1)$ 及經 A 變換後向量，。

$$\vec{e_1}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\vec{e_1}'$$

$$\vec{e_2}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\vec{e_2}' 。$$

單位向量 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 所張成的平行四邊形區域記作 R；

$\vec{e_1}'$，$\vec{e_2}'$ 所張成的平行四邊形區域記作 R′。

(i) 線性變換 A 將 R 變換到 R′
R 上任一向量 $\overrightarrow{OP}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$ $(0\le x，y\le 1)$ 之像爲
$\overrightarrow{OP'}=A(x\vec{e_1}+y\vec{e_2})=x\vec{e_1}'+y\vec{e_2}'$ $(0\le x，y\le 1)$，故 P'顯然仍在 R' 區上。

(ii) (R' 的面積)$=|\det(A)|=\left|\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right|=2-(-1)=3$，

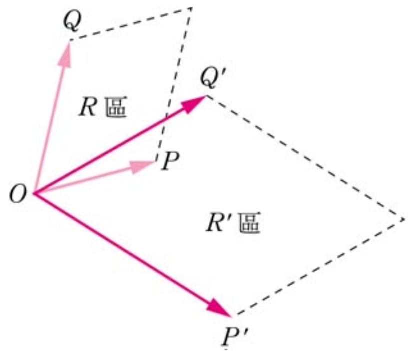
R 的面積$=\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right|=1$，

故 (R' 的面積)：(R 的面積)$=3：1=|\det(A)|：1$。

事實上，(R'的面積)：(R 的面積)$=|\det(A)|：1$。對一般的線性變換都成立。

> **線性變換的面積比：**
> 設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$，
> 若 A 將平行四邊形區域 R“變換”到另一平行四邊形區域 R'。
> 則(R'的面積)：(R 的面積)$=|\det(A)|：1$。

[證明]：



$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\det(A)=ad-bc\neq 0$，

設 $P=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$，其像點爲 $P'=AP=\begin{bmatrix} ap_1+bp_2 \\ cp_1+dp_2 \end{bmatrix}$，

$Q'=AQ=\begin{bmatrix} aq_1+bq_2 \\ cq_1+dq_2 \end{bmatrix}$，如右圖之示意圖。

兩向量$\overrightarrow{OP}$與$\overrightarrow{OQ}$所展成的平行四邊形區 R 的面積設爲 $S=|\Delta|$，其中 $\Delta=\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$ 。

兩向量$\overrightarrow{OP'}$與$\overrightarrow{OQ'}$所展成的平行四邊形區 R'的面積設爲 $S'=|\Delta'|$，其中

$$\Delta'=\begin{vmatrix} ap_1+bp_2 & aq_1+bq_2 \\ cp_1+dp_2 & cq_1+dq_2 \end{vmatrix}\overset{\text{行列互換}}{=}\begin{vmatrix} ap_1+bp_2 & cp_1+dp_2 \\ aq_1+bq_2 & cq_1+dq_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ap_1 & cp_1+dp_2 \\ aq_1 & cq_1+dq_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} bp_2 & cp_1+dp_2 \\ bq_2 & cq_1+dq_2 \end{vmatrix}\quad (\text{ 行列式的加法性質 })$$

$$=a\,(\underbrace{\begin{vmatrix} p_1 & cp_1 \\ q_1 & cq_1 \end{vmatrix}}_{=0}+\begin{vmatrix} p_1 & dp_2 \\ q_1 & dq_2 \end{vmatrix})+b\,(\begin{vmatrix} p_2 & cp_1 \\ q_2 & cq_1 \end{vmatrix}+\underbrace{\begin{vmatrix} p_2 & dp_2 \\ q_2 & dq_2 \end{vmatrix}}_{=0})$$

$$=(ad)\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}+(bc)\begin{vmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{vmatrix}$$

$$=(ad)\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}+(bc)\begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix}\quad (\text{ 行列互換 })$$

$$=(ad)\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}-(bc)\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}=(ad-bc)\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$$

$$=\det(A)\cdot\Delta$$

$$\Rightarrow \Delta'=\Delta\cdot\det(A)$$

$$\Rightarrow \frac{S'}{S}=\frac{|\Delta'|}{|\Delta|}=\frac{|\Delta'||\det(A)|}{|\Delta|}=|\det(A)|\text{。}$$

$\Rightarrow$ (R'的面積 S')$=$(R 的面積 S) $\times|\det(A)|$。

其中，線性變換 A 之行列式的絕對值 $|\det(A)|$ ，亦稱爲線性變換 A 之面積漲縮率。

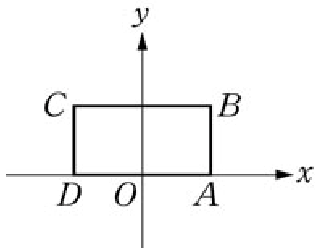
旋轉變換 R_θ 及鏡射變換 M_θ，

$$R_\theta=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\text{，}M_\theta=\begin{bmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ \sin2\theta & -\cos2\theta \end{bmatrix}$$

之面積漲縮率都是 1 ($\det(R_\theta)=1$，$\det(M_\theta)=-1$)。

事實上，平面上任意兩點 $\boldsymbol{P_1}$ 與 $\boldsymbol{P_2}$ **的距離**在旋轉 R_θ 或鏡射 M_θ 變換下，其像點 $\boldsymbol{P_1'}$ 與 $\boldsymbol{P_2'}$**的距離**是保持不變的，故**區域 $\boldsymbol{R}$ 的面積**在**旋轉變換**或**鏡射變換**下都保持不變。

[例題15] 如圖，給了一個矩形 $ABCD$，其中 $A=(1，0)$，$B=(1，1)$，$C=(-1，1)$，$D=(-1，0)$，推移變換 $M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 將矩形 $ABCD$ 變換到▱$A'B'C'D'$，試描出▱$A'B'C'D'$之圖形，並求它的面積。



[解法]：

(1) 利用“線性變換之面積漲縮率”($|\det(M)|=1$)

就可求出▱$A'B'C'D'$ 的面積。

▱$A'B'C'D'$ 的面積。

$=$(矩形 $ABCD$ 的面積) $\times|\det(M)|=2\times1=2$。

(2) ▱$A'B'C'D'$之圖形如右圖所示

(由圖形亦知：▱$A'B'C'D'$面積$=$底 $\times$ 高$=1\times2$)。

一般而言，推移變換 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 之行列式值 det $(A)=1$，所以任一個平行四邊形經 A 變換後，其面積不改變。

(練習26)下列線性變換，何者"面積漲縮率"小於 1？

(A) $M_1=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$　(B) $M_2=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$　(C) $M_3=\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $M_4=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$　(E) $M_5=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Ans：(B)

綜合練習

(1) 設 A 為某一個馬可夫鏈的推移矩陣，$X_n=\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$，$n=0,1,2,\ldots$，其中 $x_0+y_0=1$，$x_0\geq 0$，$y_0\geq 0$，而 $X_n=AX_{n-1}$，試證明 $x_n+y_n=1$，$n=1,2,\ldots$且 $x_n\geq 0$，$y_n\geq 0$。

(2) 所謂「轉移矩陣」必須滿足下列兩個條件：
(甲)該矩陣的每一個位置都是一個非負的實數，
(乙)該矩陣的每一行的數字相加都等於 1
以 2×2 矩陣為例，$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$，滿足(甲)(乙)這兩個條件，因此都是轉移矩陣。今設 A、B 是兩個 $n\times n$ 的轉移矩陣，請問下列哪些敘述是正確的？
(1)A^2 是轉移矩陣　(2)AB 不滿足條件(乙)　(3)$\frac{1}{2}$(A+B)是轉移矩陣　(4)$\frac{1}{4}(A^2+B^2)$ 是轉移矩陣。(2002 指定考科甲)

(3) 某籃球選手經常作罰球投籃練習，依據過去的經驗，當他前一球投進時，下一球的命中率為 80%；當他前一球不進時，下一球的命中率為 60%。
(a)請寫出此選手投籃的轉移矩陣 A。
(b)在暖身球投進之後，分別求接下來投進第 1 球、第 2 球、第 3 球的機率。
(c)長期而言，此選手的投籃命中率為何？

(4) 某保險公司經由多年的經驗與研究，發現汽車駕駛人若曾經肇禍者較易再失事，面臨不斷增加的修護損失及賠償請求，公司決定依據駕駛人的肇禍紀錄增加投保者的保險費，即投保人一年的保險費隨著它的肇禍次數增加而增加。假設永安保險公司將投保人分成下列三類：第一類：未曾肇禍的人；第二類：肇禍一次的人；第三類：肇禍多於一次的人。該公司的研究發現，獲得下列資料：

	第一類	第二類	第三類
發生第一類	0.80	0	0
發生第二類	0.15	0.70	0
發生第三類	0.05	0.30	1.00

假設現有未曾肇禍的投保人 1000 人，根據這份研究，從第二年開始，1000 人中，這三類保險人的分布情形為何？第三年開始，1000 人中，這三類保險人的分布情形為何？

(5) 某國政府長期追蹤全國國民的經濟狀況，依訂定的標準將國民分為高收入和低收入兩類。統計發現高收入的人口一直是低收入人口的兩倍，且知在高收入的人口中，每年有四成會轉變為低收入。請問在低收入的人口中，每年有幾成會轉變為高收入？請選出正確的選項。
(A) 6 成　(B)7 成　(C)8 成　(D)9 成　(2003 指定考科甲)

(6) 有一股票經紀商，長期分析某一股票行情，分成上漲、持平、下跌三種，若某日股票行情上漲，則次日股票行情有$\frac{1}{3}$機會上漲、$\frac{1}{2}$機會持平、$\frac{1}{6}$機會下跌，若

某日股票行情持平，則次日股票行情有$\frac{1}{3}$機會上漲、$\frac{1}{3}$機會持平、$\frac{1}{3}$機會下跌，若某日股票行情下跌，則次日股票行情有$\frac{1}{6}$機會上漲、$\frac{1}{2}$機會持平、$\frac{1}{3}$機會下跌，假設今日股票上漲，則後天此股票上漲的機會爲多少？

(7) 甲乙兩個袋子，甲袋內裝有兩顆編號 3 的球，乙袋內裝有兩顆編號 4 的球，每一顆球被抽到的機會相等，今從各袋中抽出一球後互相交換
(a)試求交換五次後，甲袋內兩顆球號和爲偶數的機率。
(b)若經長久交換後成穩定狀態，試求此時乙袋內兩顆球號和爲奇數的機率。
(2009 台北區指考模擬考 1)

(8) 已知甲袋中裝有 1 紅球 2 白球，乙袋中裝有 2 紅球 1 白球，現依下列規則取球：每次取一球後放回原袋，若某次取出白球，則下一次由乙袋取球；若某次取出紅球則下一次由甲袋取球，且第一次由甲袋取球。設第 n 次取中白球之機率爲 P_n，則 (a)P_3=？ (b)試求穩定狀態 X=？

(9) 設有 A、B 兩支大瓶子， 開始時， A 瓶裝有 a 公升的純酒精， B 瓶裝有 b 公升的礦泉水。每一輪操作都是先將 A 瓶的溶液倒出一半到 B 瓶， 然後再將 B 瓶的溶液倒出一半回 A 瓶(不考慮酒精與水混合後體積的縮小)。設 n 輪操作後，A 瓶有 $_na$ 公升的溶液，B 瓶有 b 公升的溶液。已知二階方陣
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$滿足$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$。(2009 指定乙)
(a)求二階方陣$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$。
(b)當 $a=\frac{2}{3},b=\frac{1}{3}$時，求 a_{100} 及 b_{100}。
(c)當 $a=\frac{2}{3},b=\frac{1}{3}$時，在第二輪操作後，A 瓶的溶液中有百分之多少的酒精？

(10) 設甲袋中有 2 個白球，乙袋中有 2 個紅球(設各個球大小及觸感相同)，現在每次自袋中各取一球交換，回答下列小題：
(a)試求在交換兩次後，甲袋中有 2 紅球的機率。
(b)試求甲袋的兩球之轉移矩陣 A。
(c)試求在長期交換下，成穩定狀態，甲袋中有 2 紅球的機率。

(11) 一實驗室培養兩種菌，令$\langle a_n \rangle$和$\langle b_n \rangle$分別代表兩種培養菌在時間點 n 的數量，彼此有如下的關係：$a_{n+1}=2(a_n+b_n),\quad b_{n+1}=2b_n \quad (n=0,1,2,\cdots).$
若二階方陣 A=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$滿足$\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}$=A$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，(其中 n=0,1,2,⋯)，則
a=_______，b=_______，c=______，d=________。(2005 指定乙)

(12) 某地區有 C、F、T 三家加油站，根據資料顯示，
C 家每年保留 40%的顧客，轉向 F、T 兩家的各 40%、20%；
F 家每年保留 60%的顧客，轉向 C、T 兩家的各 20%、20%；
T 家每年保留 20%的顧客，轉向 C、F 兩家的各 60%、20%；

且目前 C、F、T 三家加油站的佔有率各爲 20%、20%、60%。
假設 C_n、F_n、T_n 各代表 n 年後的佔有率，C_x、F_x、T_x 各代表達到穩定狀態的佔有率，則下列敘述哪些是正確的？
(A) $C_1=0.32$　(B) $F_2=0.424$　(C) $C_n+F_n+T_n=1$　(D) $T_x=0.2$

(13) A 和 B 是兩個二階方陣，方陣中每一位置的元素都是實數。就二階方陣所對應的平面變換來說，A 在平面上的作用是對直線 L：$y+\sqrt{3}x=0$ 的鏡射，且已知 AB=$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$。請選出正確的選項。
(1)AB=BA　(2)A+B=O(零矩陣)　(3)B 所對應的平面變換是旋轉。
(4)−A 是 B 的乘法反元素。　(2003 指定甲)

(14) 下列各方陣所定義的平面變換，何者爲旋轉？
(A) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$　(B) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$　(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$
(D) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$　(E) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

(15) 下列各方陣所定義的平面變換，何者爲對過原點直線的鏡射？
(A) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix}\frac{12}{13} & \frac{-5}{13}\\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13}\end{bmatrix}$

(16) 在平面上有一定點 $P(-4,3)$作下列各變換，試分別求變換後的 P'點坐標。
(a)平移向量 $\overrightarrow{a}=(1,2)$。
(b)以原點爲中心，順時針旋轉 30°。
(c)對直線 $2x-y=0$ 鏡射。
(d)以原點爲中心，伸長爲 3 倍。
(e)沿 x 軸方向推移 y 坐標的−2 倍。

(17) 用矩陣分別表示下列合成變換
(a)先旋轉 60°，再對 x 軸鏡射。
(b)先對 x 軸鏡射，再伸縮 2 倍，再旋轉 120°
(c)先對 x 軸伸縮 2 倍，再對 y 軸伸縮$\frac{1}{3}$ 倍，再沿 x 軸推移 y 坐標 4 倍，再對 y 軸鏡射

(18) A 是 2×2 方陣，設 $A^2=A\cdot A$，$A^3=A\cdot A\cdot A$，以此類推。
已知 $A\cdot\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，$A\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$，若有 a,b 使得 $A^4\cdot\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$，
下列敘述何者正確：

(1)a=−3。(2)b=2。(3) $A^2\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$。(4)A 是一旋轉方陣。

(2005 指定甲)

(19) 設矩陣 R=$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，0<θ<2π，M=$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$。若 $R^6=I_2$，則

(a)θ的最小值=？ (b)承(a) $(RMR^{-1})^5$=？(90 台中區指定考科模擬考 2)

(20) 設 A=$\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$試求：(1)$A^{10}$=？ (2)$B^{10}$=？

(21) 設 A=$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，對於任意自然數 n，點 $P_n(a_n , b_n)$，設ΔOP_nP_{n+1}的面積為 S_n

已知$\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{bmatrix}$，試求$\frac{S_n}{S_{n+1}}$的值。

(22) 線性變換 A=$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 4\end{bmatrix}$將點 P($x$,$y$)變換到 Q($x'$,$y'$)，試求下列各問題：

(a)若$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|$，則求出 x,y 的關係式。

(b)若$\overrightarrow{OQ}=s\ \overrightarrow{OP}$，試求 s 的值。

(c)若$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$，則求出 x,y 的關係式。

進階問題

(23) 設線性變換 A=$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$將點(1,0)、(0,1)、(1,1)分別對應到 P、Q、R 三點，而且

$\overline{PQ}$、$\overline{QR}$、$\overline{PR}$分別為 2、1、$\sqrt{3}$，試回答下列各問題：

(a)證明：$ab+cd=0$

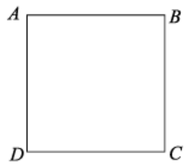
(b)若 $ad-bc<0$，試用 a,c 表示 b,d。

(c) 若 $ad-bc<0$ 且$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\ 3\end{bmatrix}$，試求 A。

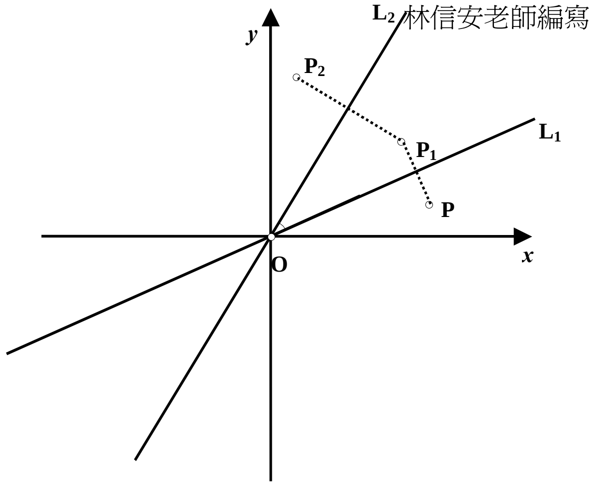
(24) 有一人流浪於 A，B，C，D 四鎮間，此四鎮間相鄰關係如下圖。假設每日清晨，此人決定當日夜晚繼續留宿該鎮，或改而前往相鄰任一鎮之機率皆為$\frac{1}{3}$。若此人第一夜宿 A 鎮，

(a)第三夜亦宿於 A 鎮之機率為多少？

(b)第五夜此人宿於 A 鎮之機率為多少？宿於 C 鎮之機率為多少？



(25) [兩次對稱相當於一次旋轉]
如圖，設 L_1 與 L_2 的交角為θ，
點 P(x，y)對於 L_1 的對稱點 P_1，
P_1 對於 L_2 的對稱點 $P_2(x',y')$，
試找出 $P(x,y)$與 $P_2(x',y')$的關係。



(26) 設 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$對轉軸θ角後的新坐標依次為 $P'(x'_1,y'_1)$、$Q'(x'_2,y'_2)$，
試證明：(1) $\overline{PQ}=\overline{P'Q'}$。 (2) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}$。

(27) 在平面上取點 P、Q，P 與 Q 關於直線 $2x-y+1=0$ 對稱。將 Q 繞原點旋轉 45°
得到 R 點。設用矩陣 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ 表示的變換把 $P(x,y)$變換成
R(X,Y)，(a)請問矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$=？(b) 請問矩陣=$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$？

綜合練習解答

(1) 略

(2) (1)(3)

(3) (a)A=$\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$ (b)0.8 、0.76、0.752 (c)0.75

(4) 第二年，第一類有 800 人，第二類有 150 人，第三類有 50 人；第三年，第一類有 640 人，第二類有 225 人，第三類有 135 人

(5) (C)

(6) $\frac{11}{36}$

(7) (a)$\frac{5}{16}$ (b)$\frac{2}{3}$

(8) (a)$\frac{14}{27}$ (b)$\frac{1}{2}$

(9) (a)$\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (b)$a_{100}=\frac{2}{3}$，$b_{100}=\frac{1}{3}$ (c)68.75%

(a)設 $a_0=a$，$b_0=b$，依題意：

可得$\begin{cases}a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{2}b_n\\ b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}b_n\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$，因此$\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$

因此$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$。

(b)$a_0=a=\frac{2}{3}$，$b_0=b=\frac{1}{3}$代入$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$，可得$(a_1,b_1)=(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$，

同理$(a_2,b_2)=(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$，….，$(a_{100},b_{100})=(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$。

(c)因爲$\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\frac{11}{16} & \frac{5}{8}\\ \frac{5}{16} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}$，故$\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{16}a+\frac{5}{8}b\\ \frac{5}{16}a+\frac{3}{8}b\end{bmatrix}$，第二輪後 A 瓶內的酒精量$\frac{11}{16}a=\frac{11}{16}\times\frac{2}{3}=\frac{11}{24}$，因此酒精濃度爲$(\frac{11}{24}\div\frac{2}{3})\times100\%=\frac{11}{16}\times100\%=68.75\%$。

(10)　(a)$\frac{1}{4}$　(b) $A=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2W \\ 1W \\ 0W \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 2W & 1W & 0W \end{array} & \end{array}$　(c)$\frac{1}{6}$

(11)　$a=8$，$b=24$，$c=0$，$d=8$
(12)　(B)(C)(D)
(13)　(1)(2)(4)
(14)　(A)(B)(D)(E)
(15)　(B)(D)

(16)　(a) $P'(-3，5)$(b) $P'(\frac{-4\sqrt{3}+3}{2}，\frac{4+3\sqrt{3}}{2})$(c) $P'(\frac{24}{5}，\frac{-7}{5})$
(d) $P'(-12，9)$ (e) $P'(-10，3)$

(17)　(a)$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}(b)\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ (c)$\begin{bmatrix} -2 & \frac{-4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

(18)　(2)(3)(4)

(19)　(a)$\frac{\pi}{3}$ (b)$\begin{bmatrix} \frac{29}{4} & \frac{33\sqrt{3}}{4} \\ \frac{33\sqrt{3}}{4} & \frac{95}{4} \end{bmatrix}$

(20)　Ans：(1) $2^{10}\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$　(2) $2^{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

[提示：$A=\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$，

$A^{10}=2^{10}\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$；$B=2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$，$A^{10}=2^{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

(21)　2 [提示：$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}$代表繞原點旋轉 45°再以 O 為中心伸縮$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍。]

(22)　(a)$x+y=0$ 或 $7x+6y=0$　(b)$s=7$ 或-1　(c)$x=(-2\pm\sqrt{2})y$

(23)　(a)利用$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，即可得證。(b)$b=\sqrt{3}c$，$d=-\sqrt{3}a$　(c)$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
[提示：(b)$ab+cd=0$，$a^2+c^2=1$，$b^2+d^2=3$，$(ad-bc)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2=3$
$\Rightarrow ad-bc=-\sqrt{3}$，又可以得到$(a^2+c^2)b=\sqrt{3}c$，$(a^2+c^2)d=-\sqrt{3}a$]

(24) (a)$\frac{1}{3}$ (b)$\frac{7}{27}$、$\frac{20}{21}$

(25) $\begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$

(26) 利用$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_i\\ y_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_i'\\ y_i'\end{bmatrix}$直接去驗證。

(27) (a)A=$\begin{bmatrix}\frac{-7}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{5\sqrt{2}}\\ \frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{7}{5\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ (b)$\begin{bmatrix}\frac{-6}{5\sqrt{2}}\\ \frac{-2}{5\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

[提示：(a)設 Q(m,n)，依題意可知$\begin{bmatrix}\frac{-3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\\ n-1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}$，令 L=$\begin{bmatrix}\frac{-3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$，R=$\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$L($\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$)=$\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$，R$\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}$= R$\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}$=R(L$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$+L$\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$)=RL$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$+RL$\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$−R$\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$

故 A= RL=$\begin{bmatrix}\frac{-7}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{5\sqrt{2}}\\ \frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{7}{5\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$= RL$\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$−R$\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-6}{5\sqrt{2}}\\ \frac{-2}{5\sqrt{2}}\end{bmatrix}$。]