指數與對數

重點整理

一、指數定義與運算規則

(1)指數的定義：

$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ ，$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ ，$a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m$ 其中 n 為自然數，m 為整數。

(2)指數的運算性質： 設 $a>0$，r,s 為實數 $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$，$(a^r)^s=a^{rs}$，$a^r\cdot b^r=(ab)^r$

二、對數的定義與基本運算性質：

(1)對數的定義：

$a>0$，且 $a\neq1$，當 $a^x=b$ 時，用符號 $\log_a b$ 來表示 x，即 $\log_a b=x \Leftrightarrow a^x=b$。

(2)對數的運算與性質：設 $a>0$，且 $a\neq1$，b,r,s 均為正數

(a)$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$，

(b)$a^{\log_a b}=b$

(c)$\log_a rs=\log_a r+\log_a s$，$\log_a\dfrac{r}{s}=\log_a r-\log_a s$

(d)$\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$

(e)$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ ，$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (b,c 均為不等於 1 的正數)

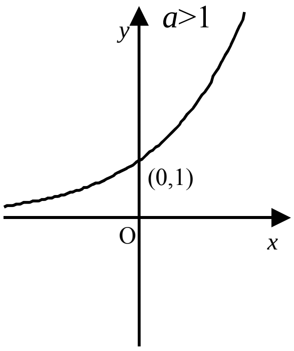
計算要訣：

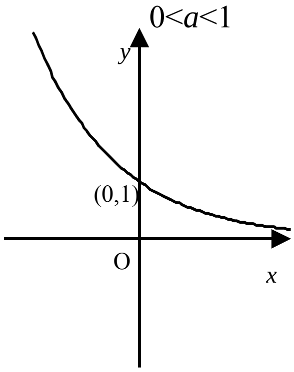
(a)同底對數相加(減)，真數相乘(除)

(b)對數相乘考慮換底公式。

三、指數函數圖形的性質：

(1)指數函數 $f(x)=a^x$，$a>0$ 的圖形





(2)圖形特性：

①$a>1$ 時，$y=a^x$ 為嚴格遞增函數，即 $m>n \Leftrightarrow a^m>a^n$。

 $0<a<1$ 時，$y=a^x$ 為嚴格遞減函數，即 $m>n \Leftrightarrow a^m<a^n$。

②$y=a^x$ 之圖形恆在 x 軸上方，即 $a^x>0$，對所有的實數 x 都成立。

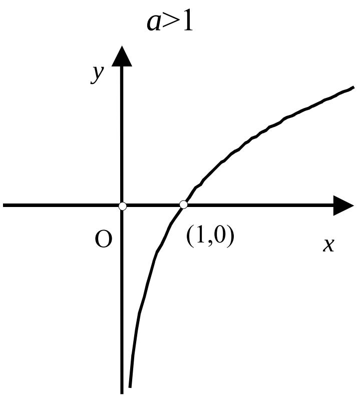
③$y=a^x$ 恆通過(0,1)

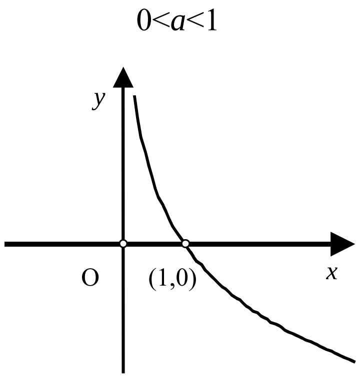
④$y=a^x$ 之圖形以 x 軸為水平漸近線。

⑤$y=a^x$ 之圖形凹向上。即$\frac{1}{2}(a^m+a^n)\geq a^{\frac{m+n}{2}}$，$m,n$ 為任意實數。

四、對數函數圖形的性質：

(1)$f(x)=\log_a x$ 的圖形





(2)圖形的特性：

當 $a>1$

(a)圖形在 y 軸之右方，凹向下，過定點(1,0)。

(b)圖形由左向右逐漸升高且以 y 軸為漸近線，即 $m>n>0 \Leftrightarrow \log_a m>\log_b n$。

(c)$0<x<1 \Leftrightarrow y<0$；$x>1 \Leftrightarrow y>0$

 當 $0<a<1$ 時

(a)圖形在 y 軸之右方，凹向上，過定點(1,0)。

(b)圖形由左向右逐漸下降且以 y 軸為漸近線，即即 $x>y>0 \Leftrightarrow \log_a x<\log_b y$。

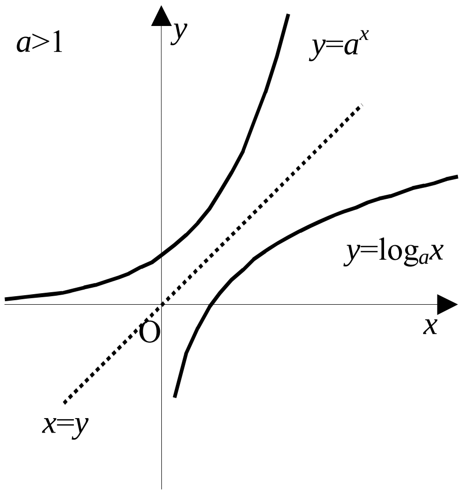
(c) $0<x<1 \Leftrightarrow y>0$；$x>1 \Leftrightarrow y<0$

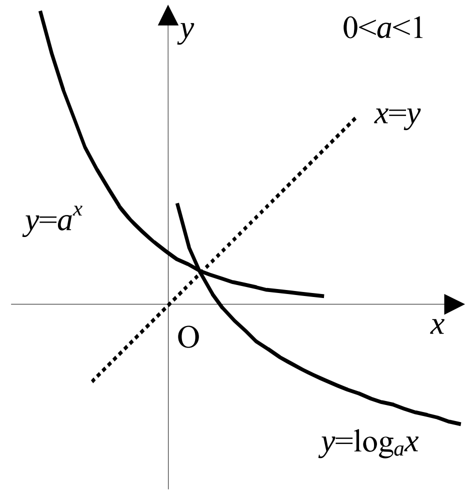
(3)指數函數與對數函數的關係：

(a)$y=\log_a x$ 與 $y=a^x$ 互為反函數。

點(x_0,y_0)在 $y=\log_a x$ 圖形上 $\Leftrightarrow$ 點(y_0,x_0)亦在 $y=a^x$ 圖形上

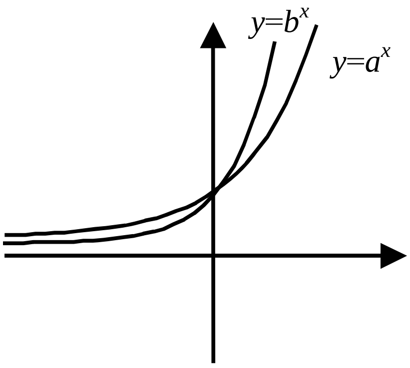
(b)$y=\log_a x$ 的圖形與 $y=a^x$ 的圖形以直線 $y=x$ 為對稱軸。

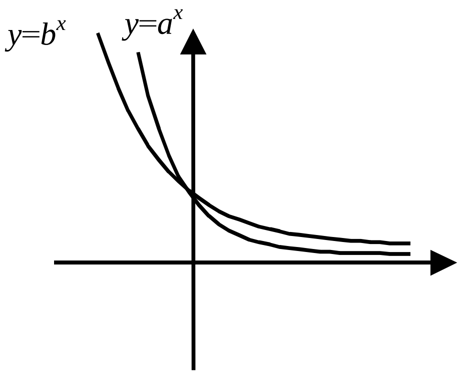




(4) 當 a 變化時，$y=a^x$ 的圖形變化：

觀察下列兩個圖：





① 當 $1<a<b$ 時，如果 $x<0\Rightarrow a^x>b^x$；如果 $x>0\Rightarrow a^x<b^x$。

② 當 $0<a<b<1$ 時，如果 $x<0\Rightarrow a^x>b^x$；如果 $x>0\Rightarrow a^x<b^x$。

四、首數與尾數—利用對數決定位數與估計數字內容

(1)科學記號：

$x=a\cdot 10^n$，$(1\le a<10$，n 為整數$)$，**其中 a 決定了數字 x 的內容，n 代表 x 的位數。**

(2)首數與尾數：

$\log x=\log(a\cdot 10^n)=n+\log a$，$n$ 為整數，$\log 1\le \log a<\log 10 \Rightarrow 0\le \log a<1$

整數 n 稱為**首數**，**$\log a$** 稱為**尾數**，即 **$\log x$=首數+尾數**。

首數決定位數，尾數決定數字內容。

$\log x=3.65 \Rightarrow$ 首數=3，尾數=0.65，$\log x=-2.65 \Rightarrow$ 首數=−3，尾數=0.35

請注意：$\log x=-2.65$ 時，因為 $0\le$尾數<1，因此尾數=0.35 而非−0.65。

$\log x=\overline{2}.8698=-2+0.8698 \Rightarrow$ 首數=−2，尾數=0.8698

(3)首數如何決定位數？

已知 log2=0.3010，log3=0.4771，log7=0.8451

例如：

$x=1000$ 是 4 位數 $\Rightarrow$ $\log x=3$,首數=3

$x=0.001$ 小數點後第 3 位不為 0 $\Rightarrow$ $\log x=-3$，首數=−3

例如：

$x=20000$ 是 5 位數，$\Rightarrow$ $\log x=4.3010$，首數=4

$x=0.0002$ 小數點後第 4 位 $\Rightarrow$ $\log x=-3.6990=-4+0.3010$ 首數=−4

用科學記號來看 $x=a\cdot 10^k$，

① 當首數=$n>0$ 時，則 $k=n$ 且 x 的整數位為$(n+1)$位。

② 當首數=$-n<0$ 時，則 $k=-n$ 且 x 的小數部分自小數點後第 n 位開始不為 0。

(4)尾數如何決定 x 的數字內容：

常用的對數：

log1=0　log2=0.3010　log3=0.4771　log4=2log2=0.6020　log5=1−log2=0.6990

log6=log2+log3=0.7781　log7=0.8451　log8=3log2=0.9030　log9=2log3=0.9542

例如：求 7^{100} 的首位數字。

解：令 $7^{100}=a\cdot 10^n$，$\log 7^{100}=n+\log a=84.51 \Rightarrow n=84$，$\log a=0.51$

從 log2=0.3010，log3=0.4771，log7=0.8451 可知：

log4=2·log2=0.6020，log5=1−log2=0.6990，log6=log2+log3=0.7781，

log8=3·log2=0.9030，log9=2·log3=0.9542。

因為 $\log 3=0.4771<\log a<0.6020=\log 4 \Rightarrow 3<a<4 \Rightarrow a=3...$

所以 7^{100} 的首位數字=3。

一、指數律、指數函數的性質：

[例題1] (由圖形比較大小)

下列那一個值最小？

(A)$(0.9)^{-3.5}$ (B)$(0.9)^{-2.5}$ (C)$(0.9)^{-1.5}$ (D)$(0.9)^{-\sqrt{3}}$ (E) $(0.9)^{-\sqrt{5}}$ (80 社)

[答案]：：(C)

[解法]：

觀察 $y=(0.9)^x$ 的圖形，圖形向右遞減。

即$\alpha>\beta \Leftrightarrow (0.9)^{\alpha}<(0.9)^{\beta}$。

因為$-3.5<-2.5<-\sqrt{5}<-\sqrt{3}<-1.5$

所以$(0.9)^{-3.5}>(0.9)^{-2.5}>(0.9)^{-\sqrt{5}}>(0.9)^{-\sqrt{3}}>(0.9)^{-1.5}$。

故選(C)

[例題2] (函數圖形與方程式的根)

試問方程式$x^2=2^{-|x|}$有幾個實數解？

[答案]：：2 個

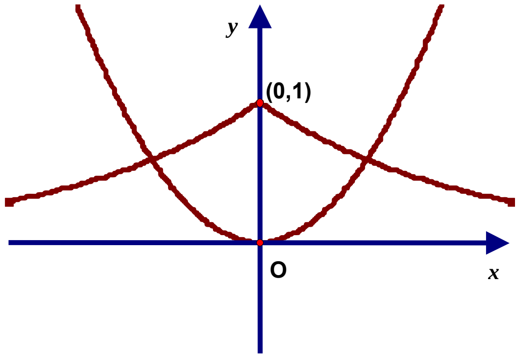
[解法]：

方程式$x^2=2^{-|x|}$實根的個數

=函數$y=x^2$與$y=2^{-|x|}$兩圖形的交點個數。

如圖，可知$y=x^2$與$y=2^{-|x|}$兩圖形有 2 個交點。

所以方程式$x^2=2^{-|x|}$有 2 個實數解。



(練習1) 對任意實數x而言，$27^{(x^2+\frac{2}{3})}$的最小值為

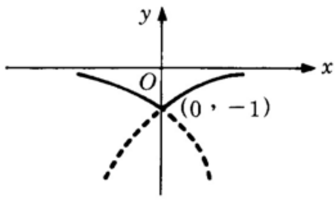
(1)3 (2)$3\sqrt{3}$ (3)9 (4)27 (5)$81\sqrt{3}$ (2008 學科能力測驗)

[答案]：(3)

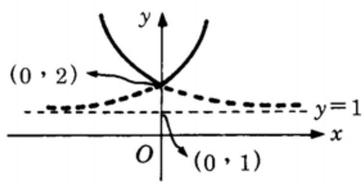
(練習2) 利用$y=2^x$與$y=(\frac{1}{2})^x$之圖形求作(1)$y=-2^{-|x|}$ (2)$y=2^{|x|}+1$ 的圖形。

[答案]：

(1)



(2)



(練習3) 設$a=\sqrt{\frac{1}{2}}$，$b=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$，$c=\sqrt[5]{\frac{1}{5}}$，則a,b,c的大小順序為何？

[答案]：：$c>a>b$ (提示：底數不同，化成同次方。)

(練習4) 請問方程式$|x|=2^{-|x|}$的實數解有幾個？

[答案]：2 個

[例題3] 設 a 為一正實數且滿足 $a^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ 。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $a^3=3$ (2) $\log_{\sqrt{3}} a=\sqrt{3}$ (3) $a>1$ (4) $a<3^{\frac{1}{4}}$ 。(2010 指定甲)

[答案]：(3)

[解法]：

$a^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ $a^3=(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}=3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\therefore$ $a=3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$

$a=3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}>3^0=1$，$a=3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}>3^{\frac{1}{4}}$ $(\because \frac{1}{2\sqrt{3}}>\frac{1}{4})$。故選(3)

[例題4] 考慮坐標平面上滿足 $2^x=5^y$ 的點 $P(x,y)$，試問下列哪一個選項是錯誤的？

(1)(0,0)是一個可能的 P 點。

(2)(log5,log2) 是一個可能的 P 點。

(3)點 $P(x,y)$滿足 $xy\geq 0$

(4)所有可能的點 $P(x,y)$構成的圖形為一直線。

(5)點 P 的 x,y 坐標可以同時為正整數。(2011 指定甲)

[答案]：(5)

[解法]：

(1)$2^0=5^0=1$，故(1)正確。

(2) $2^{\log 5}=5^{\log 2}$ ，故(2)正確。

(3)$\because$ 底數 2 , 5 均大於 1，當 $2^x=5^y>1$ 時，x,y 均≥ 0；當 $0<2^x=5^y<1$ 時，x,y 均≤ 0

$\therefore$ $xy\geq 0$。故(3)正確。

(4) $2^x=5^y \Rightarrow \log(2^x)=\log(5^y) \Rightarrow x\log 2=y\log 5$，所有可能的點 $P(x,y)$構成的圖形為一直線。故(4)正確。

(5) $\because (5,2)=1$，所以當 x,y 坐標同時為正整數時，$2^x\neq 5^y$，故(5)錯誤。

[例題5] (對數的基本運算)

計算下列各小題：

(1) $\log_{\sqrt{2}} 8$ (2) $(\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{5}} 7}$ (3) $\log_{2\sqrt{2}} 32\sqrt[5]{2}$

(4)$\log_{10}4-\log_{10}5+2\log_{10}\sqrt{125}$

(5) $\log_2 3\cdot\log_7 64\cdot\log_3 5\cdot\log_5 49$

(6) $(\log_2 5+\log_4 0.2)(\log_5 2+\log_{25} 0.5)$

[答案]：：(1)6 (2)7(3)$\dfrac{52}{15}$(4)2 (5)12 (6) $\dfrac{1}{4}$

[解法]：

(1) $\log_{\sqrt{2}} 8=\log_{2^{\frac{1}{2}}}^{2^3}=\dfrac{3}{\cancel{1/2}}\log_2 2=6$。

(2) $(\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{5}} 7}=x$，$\log_{\sqrt{5}}^{x}=\log_{\sqrt{5}}^{7}\Rightarrow x=7$

(3) $\log_{2\sqrt{2}} 32\sqrt[5]{2}=\log_{2^{\frac{3}{2}}}^{2^{\frac{26}{5}}}=\dfrac{\cancel{26/5}}{\cancel{3/2}}\ \log_2 2=\dfrac{52}{15}$。

(4) $\log_{10}4-\log_{10}5+2\log_{10}\sqrt{125}$

$=\log_{10}4+\log_{10}5^{-1}+\log_{10}(\sqrt{125})^2$

$=\log_{10}(4\times5^{-1}\times125)\quad=\log_{10}100\quad=2$

(5) $\log_2 3\cdot\log_7 64\cdot\log_3 5\cdot\log_5 49$

$=(\dfrac{\log3}{\log2})(\dfrac{\log64}{\log7})(\dfrac{\log5}{\log3})(\dfrac{\log49}{\log5})\quad=(\dfrac{\log3}{\log2})(\dfrac{6\cdot\log2}{\log7})(\dfrac{\log5}{\log3})(\dfrac{2\cdot\log7}{\log5})\quad=12$

(6) $(\log_2 5+\log_4 0.2)(\log_5 2+\log_{25} 0.5)$

$=(\log_2 5+\log_2\sqrt{0.2}\ )(\log_5 2+\log_5\sqrt{0.5}\ )$

$=\log_2(5\cdot\sqrt{0.2})\cdot\log_5(2\cdot\sqrt{0.5})=\log_2(\sqrt{5})\cdot\log_5(\sqrt{2})$

$=\dfrac{\log\sqrt{5}}{\log 2}\cdot\dfrac{\log\sqrt{2}}{\log 5}=\dfrac{\frac{1}{2}\log 5}{\log 2}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}\log 2}{\log 5}=\dfrac{1}{4}$

[例題6] (用對數表示另一個對數)

設 $\log_2 3=a$，$\log_3 11=b$，試以 a,b 表 $\log_{66}44$。

[答案]：：$\dfrac{2+ab}{1+a+ab}$

[解法]：

根據換底公式⇒ $\log_{66}44=\dfrac{\log_2 44}{\log_2 66}=\dfrac{\log_2 4+\log_2 11}{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 11}$

利用 $\log_2 3=a$，$\log_3 11=b$ 去表示 $\log_2 11$，$\log_2 3$，就可以表示 $\log_{66}44$。

$\log_2 11=(\log_2 3)(\log_3 11)=ab \Rightarrow \log_{66}44=\dfrac{\log_2 4+\log_2 11}{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 11}=\dfrac{2+ab}{1+a+ab}$。

(練習5) 試求下列各值：

(1) $2^{-\log_2 3}$ (2) $2^{\frac{\log 3}{2\log 2}}$ (3) $\dfrac{\log_4 27}{\log_2 3}$ (4) $\dfrac{\log_5 16}{\log_{25} 8}$

[答案]：：(1)$\dfrac{1}{3}$ (2)$\sqrt{3}$ (3) $\dfrac{3}{2}$ (4)$\dfrac{8}{3}$

(練習6) 試求下列各值：

(1) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$ (2) $\log_3\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{6}$

(3) $(\log_5 2+\log_{25} 8)(\log_4 3+\log_{\sqrt{2}} 27)(\log_3 0.2+\log_9 5)$

(4)$(\log_2 9)\cdot(\log_3 4)\cdot(\log_{\frac{1}{4}} 8)$

[答案]：：(1)5 (2)–1 (3)–$\dfrac{65}{8}$ (4)–6

(練習7) 設 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 11$，以 a，b 表出
(1) $\log_2 12=$__________。(2) $\log_{66}18=$__________。

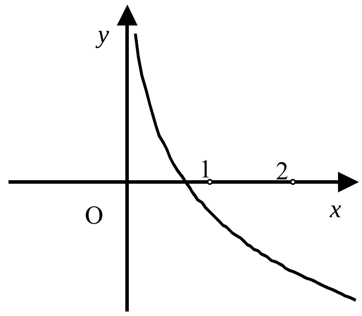
[答案]：：(1) $2+a$(2)$\dfrac{1+2a}{1+a+ab}$

三、對數函數圖形與指數、對數方程式不等式

[例題7] (對數函數的圖形)

右圖為函數 $y=a+\log_b x$ 之部分圖形，其中 a,b 為常數，
則下列何者為真？

(A)$a<0$，$b>1$ (B)$a>0$，$b>1$ (C)$a=0$，$b>1$ (D)$a>0$，$0<b<1$
(E)$a<0$，$0<b<1$ (88 大學聯考社會組)



[答案]：：(E)

[解法]：

如圖，$0<b<1$，再觀察$(1,f(1))$在 x 軸下方，所以 $f(1)=a<0$。
故選(E)

[例題8] (對數函數與指數函數的圖形)

設 a 為大於 1 的實數，考慮函數 $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=\log_a x$，試問下列那些選項是正確的？

(1)若 $f(3)=6$，則 $g(36)=6$

(2) $\dfrac{f(238)}{f(219)}=\dfrac{f(38)}{f(19)}$

(3)$g(238)-g(219)=g(38)-g(19)$

(4)若 P、Q 為 $y=g(x)$的圖形上兩相異點，則直線 PQ 之斜率必為正數

(5)若直線 $y=5x$ 與 $y=f(x)$的圖形有兩個交點，則直線 $y=\dfrac{1}{5}x$ 與 $y=g(x)$的圖形也有兩個交點。(96 學科能力測驗)

[解答]：

(1) 若 $f(3)=6$， 即 $a^3=6$

$\Rightarrow 3=\log_a 6 \Rightarrow 6=2\log_a 6=\log_a 6^2=\log_a 36$ 則 $g(36)=6$

(2) $\dfrac{f(238)}{f(219)}=\dfrac{a^{238}}{a^{219}}=a^{238-219}=a^{19}=a^{38-19}=\dfrac{a^{38}}{a^{19}}=\dfrac{f(38)}{f(19)}$

(3) $g(238)-g(219)=\log_a 238-\log_a 219$

$=\log_a \dfrac{238}{219}\neq \log_a \dfrac{38}{19}=\log_a 38-\log_a 19=g(38)-g(19)$

(4) 因 a 為大於1的實數，故 $g(x)=\log_a x$ 的圖形為遞增，
故若 P,Q 為 $y=g(x)$ 的圖形上兩相異點，則直線 PQ 之斜率必為正數

(5) 若直線 $y=5x$ 與 $y=f(x)$ 的圖形有兩個交點，因直線 $y=5x$ 與直線 $y=\dfrac{1}{5}x$ 對直線 $y=x$ 對稱且 $y=f(x)$ 的圖形與 $y=g(x)$ 的圖形也對直線 $y=x$ 對稱，故直線 $y=\dfrac{1}{5}x$ 與 $y=g(x)$ 的圖形也有兩個交點。選(1)(2)(4)(5)

[例題9] (對數與數據處理)

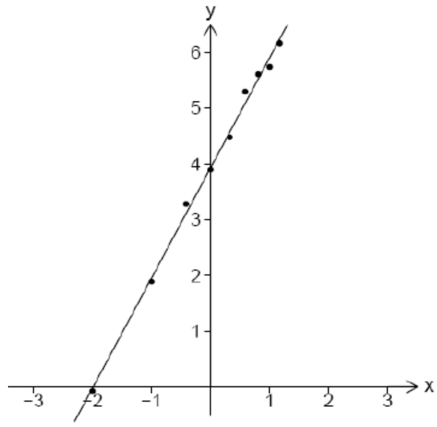
某人進行一實驗來確定某運動之距離 d 與時間 t 的平方或立方成正比，所得數據如下：

時間 t(秒)	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25
距離 d(呎)	0.95	3.69	9.71	14.88	22.32	39.34	48.68	53.65	71.79

為探索該運動的距離與時間之關係，令 $x=\log_2 t$， $y=\log_2 d$ ，即將上述的數據 (t,d) 分別取以 2 為底的對數變換，例如：(2 , 53.65) 變換後成為(1, 5.74)。

已知變換後的數據 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots\cdots,(x_9,y_9)$ 之散佈圖及以最小平方法所求得變數 y 對變數 x 的最適合直線（或稱迴歸直線）為 $y=a+bx$，如上圖所示：

試問下列哪些選項是正確的？



(1) 若 $d=14.88$，則$3<\log_2 d<4$

(2) x 與 y 的相關係數小於 0.2

(3) 由上圖可以觀察出 $b>2.5$

(4) 由上圖可以觀察出 $a>2$

(5) 由上圖可以確定此運動之距離與時間的立方約略成正比

(2008 年指考甲)

[解法]：(1) $8<d=14.88<16\Rightarrow 3<\log_2 d<4$

(2) 由圖觀察可知 x 與 y 為高度正相關(所有的點都集中在最適合直線的 附近)，故相關係數大於 0.2

(3) 由圖，$b=\dfrac{\log_2 14.88-\log_2 0.95}{\log_2 1-\log_2 \frac{1}{4}}=\dfrac{\log_2 15.66\cdots}{2}$ 而 $8=2^3<15.667\ldots<16=2^4$

$\Rightarrow 1.5=\dfrac{3}{2}<b<2$，故 $b<2.5$

(4) 由上圖可以觀察出 y 截距 $a>2$

(5) $y=a+bx\Rightarrow \log_2 d=a+b\log_2 t=\log_2 2^a\cdot b^t=\log_2 A\cdot b^t$

$A\cdot t^{\frac{3}{2}}<d=A\cdot t^b<A\cdot t^2$ 可知此運動之距離並不是與時間的立方成正比

故選 (1)(4)

[例題10] (指數、對數方程式)

解下列方程式：

(1)$2^{1-x}-33\cdot 2^{\frac{-x}{2}-2}+1=0$ (2) $2\log_2 x-\log_2(x+6)=3$

[答案]：(1)$x=\dfrac{\log 35-\log 27}{\log 49-\log 27}$ (2)$x=6$ 或-4 (3) $x=12$

[解法]：

(1) 令 $t=2^{\frac{-x}{2}}$，$t^2=2^{-x}$，原方程式可化成 $2^1\cdot t^2-\dfrac{33}{2^2}t+1=0$，整理成

$8t^2-33t+4=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{8}$或 4 $\Rightarrow 2^{\frac{-x}{2}}=\dfrac{1}{8}$或 4$\Rightarrow x=6$ 或-4。

(2) $2\log_2 x-\log_2(x+6)=3$

$\Rightarrow \log_2 x^2-\log_2(x+6)=3$ $\Rightarrow \log_2\dfrac{x^2}{x+6}=3$ $\Rightarrow \dfrac{x^2}{x+6}=2^3\Rightarrow x=12$ 或-4(不合)

[例題11] (指數、對數不等式)

解下列不等式：

(1) $(0.25)^{3x^2}<(0.5)^{10x+4}$ (2) $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)>1$

[答案]：(1)$x>2$ 或 $x<\frac{-1}{3}$ (2) $0<x<\sqrt{2}$

[解法]：

(1) $(0.25)^{3x^2}<(0.5)^{10x+4}$ $\Leftrightarrow$ $[(0.5)^2]^{3x^2}<(0.5)^{10x+4}$ 因為 $y=(0.5)^x$ 為遞減函數

$\Leftrightarrow 6x^2>10x+4 \Leftrightarrow x>2$ 或 $x<\frac{-1}{3}$

(2) $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)>1 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x>0\\ \log_{\frac{1}{2}}x>2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}x>2 \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x<(\frac{1}{2})^2\end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{4}$。

(練習8) 若 (a,b) 是對數函數 $y=\log x$ 圖形上一點，則下列哪些選項中的點也在該對數函數的圖形上？

(1) $(1,0)$ (2) $(10a,b+1)$ (3) $(2a,\ 2b)$ (4) $(\frac{1}{a},1-b)$ (5) $(a^2,2b)$

[答案]：(1)(2)(5)(2009 指考乙)

(練習9) 解下列的不等式：

(1)$5^x+3\cdot5^{-x}<4$ (2) $(0.7)^{x^2-2x}>0.343$

(3)$\log(6x-x^2)<1+\log(5-x)$ (4) $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_{\frac{1}{3}}x>1$

[答案]：：(1)$0<x<\log_5 3$ (2)$-1<x<3$ (3)$0<x<8-\sqrt{14}$ (4) $3^{-\sqrt{2}}<x<3^{-1}$

(練習10) 解 $\log_2(2^x+16)<\frac{x}{2}+1+\log_2 5$。 [答案]：：$2<x<6$

四、對數表的應用：

[例題12] (利用首數尾數估計數字)

設 $y=(\frac{2}{3})^{20}$，則

(1)y 自小數點後第________位，開始出現不為 0 的數字。

(2)y 之小數點後第一個不為 0 的數字為____________。

[答案]：：(1)4　(2)3

[解法]：

設$(\frac{2}{3})^{20}=a\times10^n \Rightarrow \log(\frac{2}{3})^{20}=n+\log a$

$\Rightarrow \log(\frac{2}{3})^{20}=20(\log2-\log3)=-3.522=-4+0.478$

$\Rightarrow n=-4$，$\log a=0.478$

$\because\ \log3<\log a<\log4 \Rightarrow 3<a<4 \Rightarrow a=3\ldots.$

$\Rightarrow(\frac{2}{3})^{20}=3\ldots.\times10^{-4}\therefore\ y=(\frac{2}{3})^{20}$ 自小數點後第 4 位開始不為 0，不為 0 的數字是 3。

[例題13]　(內插法的意義)

數學教科書所附的對數表中，$\log 4.34 = 0.6375$、$\log 4.35 = 0.6385$。根據 $\log 4.34$ 和 $\log 4.35$ 的查表值以內插法求 $\log 4.342$，設求得的值為 p，則下列哪一個選項是正確的？

(1) $p = \frac{1}{2}(0.6375 + 0.6385)$　　(2) $p = 0.2\times0.6375 + 0.8\times0.6385$

(3) $p = 0.8\times0.6375 + 0.2\times0.6385$　　(4) $p = 0.6375 + 0.002$

(5) $p = 0.6385 - 0.002$　(2009 指考甲)

[解法]：設 $\log 4.342 = p$，則 $\frac{p-0.6375}{4.342-4.34}=\frac{0.6385-0.6375}{4.35-4.34}$，

$\Rightarrow\ \frac{p-0.6375}{0.002}=\frac{0.6385-0.6375}{0.01}\ \Rightarrow\ \frac{p-0.6375}{0.2}=\frac{0.6385-0.6375}{1}$

$\Rightarrow\ p-0.6375 = 0.2\times0.6385 - 0.2\times0.6375$

$\Rightarrow\ p = 0.8\times0.6375 + 0.2\times0.6385$。 選 (3)。

[例題14] (利用對數求複利的本利和)

(1)阿財將 10 萬元存入銀行，以年利率 6%，每年複利計息一次，則至少需要多少年，方使利息部分超過 15 萬元。（log1.06＝0.0253）

(2)阿財於十年間，每年年初存款 1200 元，若依年利率 4%複利計算，十年後，存款的本利和為？（log1.04＝0.0170，log 1.47＝0.1673，log 1.48 = 0.1703）

[解法]：

(1) n 年後本利和$=100000(1+0.06)^n>100000+150000$

$\Rightarrow(1.06)^n>\frac{25}{10}$　　$\Rightarrow\log(1.06)^n>\log25-\log10$

$\Rightarrow n\times0.0253>2\log100-\log4-1=0.398$

$\Rightarrow n>\frac{0.398}{0.0253}\fallingdotseq15.7$　　$\therefore\ n\geq16$

(2) $1200(1.04)^{10}+1200(1.04)^9+\cdots+1200(1.04)^1$

$=\dfrac{1200(1.04)[(1.04)^{10}-1]}{1.04-1}=1200\times 26[(1.04)^{10}-1]\cdots$,

$\because \log(1.04)^{10}=10\log 1.04=0.170$

已知 $\log 1.47=0.1673$，$\log 1.48=0.1703$，設 $\log a=0.170$

由內插法知 $\dfrac{a-1.47}{1.48-1.47}=\dfrac{0.170-0.1673}{0.1703-0.1673}=0.9$

$a=1.47+0.01\times 0.9=1.479\therefore 1.479=(1.04)^{10}$ 代入 ,

$\therefore 1200(26)(0.479)=14944.8$ 元 .

[例題15] (對數的應用)

目前國際使用芮氏規模來表示地震強度，設 $E(r)$為地震芮氏規模 r 時震央所釋放出來的能量，r 與 $E(r)$的關係如下：$\log E(r)=5.24+1.44r$,

(1)某次地震其芮氏規模為 4，試問其震央所釋放的能量 E(4)為多少?

(2)試問芮氏規模 6 的地震，其震央所釋放的能量是芮氏規模 4 的地震震央所釋放能量之多少倍? [整數倍以下捨去，已知 $10^{1.44}=27.54$]。

(90 大學聯考社會組)

[答案]：(1)10^{11} (2)758

[解法]：

(1)$\log E(4)=5.24+1.44\times 4=11\Rightarrow E(4)=10^{11}$。

(2)$\log E(6)=5.24+1.44\times 6=13.88\Rightarrow E(6)=10^{13.88}$

$\dfrac{E(6)}{E(4)}=\dfrac{10^{13.88}}{10^{11}}=10^{2.88}=(10^{1.44})^2=(27.54)^2\fallingdotseq 758$。

[例題16] (對數的應用)

根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後，t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的$100(1-2^{-kt})\%$，其中 k是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70%的人口聽到該訊息。又設最快要 T小時後，有 99%的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項？____________。

(1) 5 小時 (2) $7\frac{1}{2}$小時 (3) 9 小時 (4) $11\frac{1}{2}$小時 (5) 13 小時

(92 學科能力測驗)

[答案]：(4)

[解法]：

依題意可得 $\begin{cases}100(1-2^{-3k})\%=70\%\\100(1-2^{-kT})\%=99\%\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1-2^{-3k})=0.7\\(1-2^{-kT})=0.99\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{-3k}=0.3\\2^{-kT}=0.01\end{cases}$

取對數 $\Rightarrow\begin{cases}-3k\cdot\log 2=\log 0.3\cdots(1)\\-kT\cdot\log 2=\log 0.01\cdots(2)\end{cases}$

$\dfrac{(1)}{(2)}\Rightarrow\dfrac{3}{T}=\dfrac{\log 0.3}{\log 0.01}\Rightarrow T=\dfrac{3\cdot\log 0.01}{\log 0.3}\fallingdotseq 11.4\ldots$故選(4)。

(練習11) 有一個司機喝了 200 毫升的烈酒後，血液中的酒精含量急劇上升到 0.96mg/ml，但停止喝酒後，該司機血液中的酒精含量每小時減少原來的 $\frac{1}{4}$。依據(**交通安全條例規定)**：『駕駛員血液中的酒精含量不得超過 0.25mg/ml』。請問該司機喝了 200 毫升的烈酒後至少需要幾小時(取整數)才能開車？ (已知 log2=0.3010 , log3=0.4771)[答案]： 5

(練習12) 若 $A=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{73}$，則

(a)A 為幾位數？ (b)A 的最高位數為多少？ (c)A 的個位數為何？

[答案]：(a)23 位 (b)1 (c)3

(練習13) 某鎮因高科技園區的設立與高鐵的通車，帶來地方的繁榮，因此預估人口會大幅成長，假設 t 年後人口數 $y=10\cdot 3^{kt}$ 萬人 (k 為常數)，若 5 年後某鎮預估有 12 萬人，問某鎮人口由 15 萬人成長到 30 萬人，約需經過幾年的時間？ (請選出最接近的答案)

(1) 19 年 (2) 24 年 (3) 29 年 (4) 34 年 (5) 39 年 [答案]： 5

(練習14) 經過長期的追蹤調查，某國家公園 10 年前有 10 隻熊，這 10 年熊的數量的數學式子為 $N(t)=\dfrac{100}{1+9\cdot 3^{-0.1(t+10)}}$，即 $t(0\le t\le 10)$年前，熊的數量約有 $N(-t)$ 隻。假設未來熊的數量仍按照這數學式子成長(即 t 年後，熊的數量約有 $N(t)$ 隻)。(1)現在熊的數量是幾隻？(2)再過幾年，熊的數量才會達到 50 隻？

[答案]：(1)25 隻 (2)10 年

綜合練習

1.某君於九十年初，在甲、乙、丙三銀行各存入十萬元，各存滿一年後，分別取出。已知該年各銀行之月利率如下表，且全年十二個月皆依機動利率按月以複利計息。

	甲銀行	乙銀行	丙銀行
1～4 月	0.3%	0.3%	0.3%
5～8 月	0.3%	0.4%	0.2%
9～12 月	0.3%	0.2%	0.4%

假設存滿一年，某君在甲、乙、丙三家銀行存款的本利和分別為 a、b、c 元，請問下列哪些式子為真? (1) a＞b (2)a＞c (3)b＞c (4)a＝b＝c . (2002 指定甲)

2.前行政院長提出知識經濟，喊出 10 年內要讓台灣 double(加倍)，一般小市民希望第 11 年開始的薪水加倍。如果每年調薪 a%，其中 a 為整數，欲達成小市民的希望，那麼 a 的最小值為 ______ . (參考數值：log2=0.3010) (2002 指定考科乙)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log(1+0.01x)$	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374

3.統計學家克利夫蘭對人體的眼睛詳細研究後發現：我們的眼睛看到圖形面積的大小與此圖形實面積的 0.7 次方成正比。例如：大圖形是小圖形的 3 倍，眼睛感覺到的只有 $3^{0.7}$（約 2.16）倍。觀察某個國家地圖，感覺全國面積約為某縣面積的 10 倍，試問這個國家的實際面積大約是該縣面積的幾倍？
（已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ，$\log 3 \approx 0.4771$ ，$\log 7 \approx 0.8451$ ）
(1) 18 倍　(2) 21 倍　(3) 24 倍　(4) 27 倍　(5) 36 倍(2004 指定考科乙)

4.聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特（W/m^2）來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0 = 10^{-12}(W/m^2)$；當測得的聲音強度為 $I(W/m^2)$ 時，所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I) = 10 \cdot \log \dfrac{I}{I_0}$

(1) 一隻蚊子振動翅膀測得的聲音強度為 $10^{-12}(W/m^2)$，求其產生的噪音分貝數。
(2)汽車製造廠測試發現，某新車以每小時 60 公里速度行駛時，測得的聲音強度為 $10^{-4}(W/m^2)$，問此聲音強度產生的噪音為多少分貝？
(3)棒球比賽場中，若一支瓦斯汽笛獨鳴，測得的噪音為 70 分貝，則百支瓦斯汽笛同時同地合鳴，被測得的噪音大約為多少分貝？ (2004 指定考科乙)

5.設(π,r)為函數 $y=\log_2 x$ 圖形上一點，其中π為圓周率，r 為一實數。請問下列哪些選項是正確的？

(1)(r,π)為函數 $y=2^x$ 圖形上一點。(2)$(-r,\pi)$為函數 $y=(\dfrac{1}{2})^x$ 圖形上一點。

(3)$(\dfrac{1}{\pi},r)$為 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 圖形上一點。(4)$(r,2\pi)$為函數 $y=4^x$ 上一點。(2011 指定乙)

6.設 a,b 為正實數，已知 $\log_7 a = 11, \log_7 b = 13$；試問 $\log_7(a+b)$ 之值最近下列別個選項？(1) 12　(2) 13　(3) 14　(4) 23　(5) 24　(94 學科能力測驗)

7.設實數 x 滿足 $0<x<1$，且 $\log_x 4-\log_2 x=1$，則 $x=$______。(化成最簡分數)
(2007 學科能力測驗)

8.已知一容器中有 A、B 兩種菌，且在任何時刻 A,B 兩種菌的個數乘積為定值 10^{10}。為了簡單起見，科學家用 $P_A=\log(n_A)$來紀錄 A 菌個數的資料，其中 n_A 為 A 菌的個數。試問下列哪些選項是正確的？
(1)$1 \le P_A \le 10$
(2)當 $P_A=5$ 時，B 菌個數與 A 菌個數相同
(3)如果上週一測得 P_A 值為 4 而上週五測得 P_A 值為 8，表示上週五 A 菌個數是上週一 A 菌個數的 2 倍
(4)若今天的 P_A 值比昨天增加 1，則今天的 A 菌比昨天多了 10 個

(5)假設科學家將 B 菌的個數控制為 5 萬個，則此時 $5<P_A<5.5$　(2008 學科能力測驗)

9.在密閉的實驗室中，開始時有某種細菌 1 千隻，並且以每小時增加 8%的速率繁殖。如果依此速率持續繁殖，則 100 小時後細菌的數量最接近下列哪一個選項？
(1) 9 千隻 (2) 108 千隻 (3) 2200 千隻 (4) 3200 千隻 (5) 32000 千隻。(2010 學測)

10.設 $a>1>b>0$，關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $(-a)^7>(-a)^9$　(2) $b^{-9}>b^{-7}$　(3) $\log_{10}\frac{1}{a}>\log_{10}\frac{1}{b}$

(4) $\log_a 1>\log_b 1$　(5) $\log_a b>\log_b a$　(2013 學測)

11.某公司為了響應節能減碳政策，決定在五年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的 75% 。公司希望每年依固定的比率(當年和前一年排放量的比)逐年減少二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則該公司每年至少要比前一年減少_______ %的二氧化碳的排放量。(計算到小數點後第一位，以下四捨五入。)(2009 學測)

12.某種傳染病的感染率之定義為 $I(t)=\dfrac{\text{在時間}t\text{時被感染過的人數}}{\text{這城市的總人數}}$ ，根據此理論得知，感染率之值為 $I(t)=\dfrac{1}{1+a\cdot 7^{-bt}}$ ，而當 $I(t)=\dfrac{1}{2}$ 的時間 t 是該傳染病的傳染高峰。若此種傳染病在某城市蔓延，剛開始(即 t=0 時)，有 2%的人口被傳染；而 t=3 時，有 12.5%的人口被傳染。
(1)試求感染率 $I(t)$ 中的常數 a 與 b 之值
(2)當 t 為何時，是該傳染病的傳染高峰
(3)當 t=12 時，該城市有多少比例的人口被傳染過該傳染病

13.法國數學家<u>費馬</u>曾以為 $F(n)=2^{2^n}+1$ 都是質數，如 $F(0)=3$ ，$F(1)=5$ ，$F(2)=17$ ，$F(3)=257$ ，$F(4)=65537$ ，但是後來<u>尤拉</u>發現 $F(5)$ 有質因數，試求
(1) $F(5)$ 的個位數字為何？　(2) $F(5)$ 為幾位數字？　(3) $F(5)$ 的最高位數字為何？

14.已知 $\log 235=2.3711$，下列敘述何者正確？
(A) $\log 2350=3.3711$　(B) $\log 0.0235=-2.6289$　(C) $10^{0.3711}=2.35$
(D)若 $\log x=5.3711$，則 $x=23500$
(E)若 $\log y=-5.6289$，則 $y=0.00000235$

15.已知 $\log 365=2.5623$，$\log 366=2.5635$，$\log x=2.5633$，試用內插法求 x 之近似值至 1 位小數。

16.已知 $\log x$ 之尾數與 log0.1234 之尾數相同，$\log x$ 之首數與 log5678 之首數相同，則 x=　(A)0.1234 (B)0.5678 (C)5678 (D)1234 (E)無法判斷。

17.天上的星光有的較亮，有的較暗，天文學以「星等」區分之，即選擇某一特定的星

光強度 F_0 為標準，對於發出星光強度為 F 的星體，定義其「星等」為 $m=-2.5\log\frac{F}{F_0}$，並稱該星體為「m 等星」。已知天狼星為-1.4 等星，北極星為 2 等星，則天狼星的星光強度大約是北極星的幾倍？

(A)3 (B)13 (C)23 (D)33。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	表尾差								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17

答案

1. (1) (2)

[解法]：

$a=10\times(1+0.003)^4(1+0.003)^4(1+0.003)^4$

$b=10\times(1+0.003)^4(1+0.004)^4(1+0.002)^4$

$c=10\times(1+0.003)^4(1+0.002)^4(1+0.004)^4$

$\dfrac{a}{b}=(\dfrac{1.003\times1.003}{1.002\times1.004})^4=(\dfrac{1.006009}{1.006008})^4>1\Rightarrow a>b=c$。

2. 8

[解法]：

設一開始薪水為 A，$A\times(1+a\%)^{10}\geq 2A\Rightarrow(1+a\%)^{10}=2$

$\log(1+a\%)^{10}\geq\log2\Rightarrow\log(1+a\%)\geq0.03010$，根據表格 $a>7$，所以 a 最小值為 8。

3. (4)

[解法]：

設這個國家的實際面積大約是該縣面積的 t 倍

$t^{0.7}=10\Rightarrow0.7\log t=\log10\Rightarrow\log t=\dfrac{1}{0.7}=1.428\ldots$

log18=log2+2log3=1.2552，log21=log3+log7=1.3222，log24=3log2+log3=1.3801

log27=3log3=1.4313，log36=2(;;og2+log3)=1.5562

故 t 最接近 27。

4. (1)0 分貝 (2)80 分貝 (3)90 分貝

[解法]：

(1) $d(10^{-12})=10\cdot\log\dfrac{10^{-12}}{10^{-12}}=0$（分貝）

(2) $d(10^{-4})=10\cdot\log\dfrac{10^{-4}}{10^{-12}}=10\cdot\log10^{8}=80$（分貝）

(3) $70=10\cdot\log\dfrac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=10^{-5}$

百支的強度 $I=100\cdot10^{-5}=10^{-3}$

故噪音 $=d(10^{-3})=10\cdot\log\dfrac{10^{-3}}{10^{-12}}=10\cdot\log10^{9}=90$（分貝）

5. (1)(2)(3)

[解法]：

$\because(\pi,r)$為函數 $y=\log_2 x$ 圖形上一點 $\Leftrightarrow r=\log_2\pi\Leftrightarrow 2^r=\pi$

所以$(\frac{1}{2})^{-r}=2^r=\pi$，$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi}=\log_2\pi=r$，故(1)(2)(3)均正確。

$\because 4^r=(2^r)^2=\pi^2$，故(4)錯誤。

6. (2)

[解法]：

$\log_7 a=11\Rightarrow a=7^{11}$，$\log_7 b=13\Rightarrow b=7^{13}$

$\Rightarrow a+b=7^{11}+7^{13}=7^{11}\cdot(1+7^2)=50\cdot 7^{11}$

$\log_7(a+b)=11+\log_7 50\approx 11+\log_7 49=13$

7. $\frac{1}{4}$

[解答]：

令$t=\log_x 2$

由$\log_x 4-\log_2 x=1$

$\Rightarrow 2t-\frac{1}{t}=1\Rightarrow 2t-\frac{1}{t}=1\Rightarrow 2t^2-t-1=0\Rightarrow(2t+1)(t-1)=0$

$\Rightarrow t=-\frac{1}{2}$或$1\Rightarrow\log_x 2=-\frac{1}{2}$或$1\Rightarrow x=\frac{1}{4}$或$2$但$0<x<1$，故$x=\frac{1}{4}$。

8. (2)(5)

[解法]：

(1)錯誤：$0<n_A<10\Rightarrow P_A<1$

(2)正確：$P_A=5\Rightarrow n_A=10^5\Rightarrow n_B=10^5$

(3)錯誤：$\frac{10^8}{10^4}=10^4$(倍)

(4)錯誤：因為 $P_A=\log(n_A)$，若 $P_A=2\Rightarrow n_A=10^2$，增加 1，$P_A=3\Rightarrow n_A=10^3$

(5)正確：$n_B=5\times10^4$，因為 $n_A\times n_B=10^{10}\Rightarrow n_A=\frac{10^{10}}{5\times10^4}=2\times10^5\Rightarrow P_A$ 約為 5.3010。

故選(2)(5)

9. (3)

[解法]：

100 小時後細菌的數量$=10^3(1+0.08)^{100}$，令$(1.08)^{100}=a\times10^n$，$1\le a<10$，$n\in Z$

$\Rightarrow 100\cdot\log 1.08=n+\log a\Rightarrow 3.33=n+\log a\Rightarrow n=3$，$\log a=0.33\Rightarrow 2<a<3$

故$(1.08)^{100}=2.\ldots\times10^3$，故選(3)

10. [答案]：(1)(2)

[解法]：

(1) $a>1$ 且 $7<9\Rightarrow 0<a^7<a^9$　$\therefore\ (-a)^7>(-a)^9$

(2) $1>b>0$ 且 $-9<-7$　$\therefore b^{-9}>b^{-7}$

(3) $a>1>b>0$　$\therefore 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ $\Rightarrow$ $\log_{10}\frac{1}{a}.<\log_{10}\frac{1}{b}$

(4) $\log_a 1.=\log_b 1=0$

(5) 若 a=2，$b=\frac{1}{4}$，則$\log_a b.=\log_2\frac{1}{4}=-2$，$\log_b a=\log_{\frac{1}{4}}2=-\frac{1}{2}$，德$\log_a b.<\log_b a$

故選(1)(2)

11. 5.6%

[解法]：5.6

假設該公司在作決定減碳時，年排碳量為 P，且第二年的碳排放量為前一年的 x，則由題意知，$x^5<75\%$，

同取常用對數$5\log x<\log 3-\log 4=-0.1249$

$\Rightarrow \log x<-0.0249=-1+0.9750$，查表得$x\approx 0.94$。

故每年要穩定減排前一年的 5.6%。

12. (1)49、1/3　(2)6　(3)98%

[解法]：

(1)I(0)=0.02，$\Rightarrow\frac{1}{1+a}=0.02\Rightarrow a=49$

I(3)=0.125=$\frac{1}{8}$ $\Rightarrow\frac{1}{1+49\times7^{-3b}}=\frac{1}{8}\Rightarrow b=\frac{1}{3}$

(2)設 $t=t_0$ 是該傳染病的傳染高峰

所以 I(t_0)=$\frac{1}{2}$ $\Rightarrow\frac{1}{1+49\times7^{\frac{-t_0}{3}}}=\frac{1}{2}\Rightarrow t_0=6$。

(3)I(12)=$\frac{1}{1+49\times7^{-4}}$=0.98。

13. (1)7　(2)10　(3)4

[解法]：

(1)F(5)=$2^{32}+1\Rightarrow 2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$，…，歸納個位數字的規律，可知 2^{32} 的個位數字為 6，故 $2^{32}+1$ 的個位數字為 7。

(2)估計 2^{32} 為幾位數：

令 $2^{32}=a\times10^n\Rightarrow\log2^{32}=n+\log a\Rightarrow 9.632\Rightarrow n=9$，$\log a=0.632\Rightarrow 2^{32}=a\times10^9$

故 2^{32} 為 10 位數。

(3)$\log a=0.632\Rightarrow\log4<\log a<\log5\Rightarrow a=4\ldots$，故首位數字為 4。

14. (A)(C)(E)

[解法]：log235=2.3711⇒log2.35=0.3711

(A)$\log2350=\log2.35\times10^4=4+\log2.35=4.3711$。

(B)$\log0.0235=\log2.35\times10^{-2}=-2+0.3711=-1.6289$。

(C)$\because$ $\log2.35=0.3711$，$\therefore$ $10^{0.3711}=2.35$

(D)$\log x=5.3711\Rightarrow x=2.35\times10^{5}\Rightarrow x=235000$。

(E) $\log y=-5.6289=-6+0.3711\Rightarrow y=2.35\times10^{-6}=0.00000235$。

15. 365.8

[解法]：

$\log 365=2.5623$，$\log 366=2.5635\Rightarrow\log3.65=0.5623$，$\log3.66=0.5635$

$\log x=2.5633\Rightarrow x=a\times10^{2}$，且 $\log a=0.5633$

$\Rightarrow\dfrac{a-3.65}{3.66-3.65}=\dfrac{0.5633-0.5623}{0.5633-0.5623}\Rightarrow a=3.658$

$x=3.658\times10^{2}=365.8$

16. (D)

[解法]：

令 $x=a\times10^{n}$，即 $\log x$ 之尾數為 $\log a$，首數 n

$\Rightarrow\log0.1234=\log1.234\times10^{-1}=-1+\log1.234\quad\Rightarrow\log a=\log1.234\quad\Rightarrow a=1.234$

又 $\log5678=\log5.678\times10^{3}=3+\log5.678\quad\Rightarrow n=3$

所以 $x=1.234\times10^{3}=1234$，故選(D)

17. (C)

[解法]：

設天狼星、北極星的星光強度分別為 F_1,F_2

$\Rightarrow -1.4=-2.5\times\log\dfrac{F_1}{F_0}\ldots\ldots(1)$

$2=-2.5\times\log\dfrac{F_2}{F_0}\ldots\ldots(2)$

若計算(2)−(1)：

$3.4=-2.5(\log\dfrac{F_2}{F_0}-\log\dfrac{F_1}{F_0})=-2.5\times\log\dfrac{F_2}{F_1}$

$\Rightarrow3.4=2.5\times\log\dfrac{F_1}{F_2}\Rightarrow\log\dfrac{F_1}{F_2}=\dfrac{3.4}{2.5}=1.36$

令$\dfrac{F_1}{F_2}=a\times10^{n}\Rightarrow n=1$，$\log a=0.36$

由對數表可得 $a=2.291$

所以$\dfrac{F_1}{F_2}=2.291\times10=22.91$，故選(C)