§2–2 有理數與實數

(甲)有理數

(1)自然數系 N 對於+ × 是完備的，但對於減法則有缺憾，而整數系 Z 對於+ × −是完備的，但是整數有除不盡的缺憾，我們因缺而補，在整數系外補上一切「除不盡」的有理數，擴大成為有理數系 Q，故使得有理數系中對於+ − × ÷是完備的。

$$N \xrightarrow{\text{補上0與}\{\bullet\bullet\bullet-3,-2,-1,\}} Z \xrightarrow{\text{補上除不盡的數}} Q$$

(2)有理數(Q)的形式：凡是能表成形如$\dfrac{a}{b}$ 的數，其中 a,b 是整數，且 $b\neq 0$。

即 Q=$\{\dfrac{a}{b}\ |a,b$ 是整數，且 $b\neq 0\}$

$$\text{有理數}\begin{cases}\text{整數}\begin{cases}\text{正整數(自然數)}\\ \text{零}\\ \text{負整數}\end{cases}\\ \text{分數}\begin{cases}\text{有限小數}\\ \text{循環小數}\end{cases}\end{cases}$$

(3)有理數的性質：

(a)a,b,c,d 為整數，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$

(b)整數系的基本運算性質(結合律、交換律、分配律、消去律)及大小次序性質(三一律、遞移律、乘法律)在有理數中照樣成立。

(c)有理數與整數的差異：

有理數的稠密性：若設 r,s 為有理數且 $r<s$，則存在一有理數 t 使得 $r<t<s$。

整數的離散性：設 p,q 為兩相異整數，則$|p-q|\geq 1$。

(4)有理數的作圖：

在數線上，我們可用直尺圓規作出一有理數$\dfrac{m}{n}$ 所對應的點。

例如：在數線上作出 $\dfrac{3}{4}$ 所代表的點。

[例題1]　**整數離散性的應用**

(1)設$a,b\in Z$，若$|a-1|+5|b-3|=4$，求a,b之值。

(2)設$a,b,c\in Z$，且 $3|a-4|+4(b-2)^2+\sqrt{(c-1)^2}=2$，求a,b,c之值。

Ans：(1)a=5 或–3，b=3　(2)a=4,b=2,c=3 或–1

[例題2]　(1)將$\frac{21}{12}$化爲小數。

(2)將$\frac{5}{13}$化爲小數後，小數點後第 2000 位數字是多少？

Ans：(1)1.75　(2)8

[例題3]　設數線上相異二點 A,B 的坐標分別爲α,β，且$\alpha<\beta$，今在 A,B 之間取一點 P，使$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，$m,n\in N$，則 P 點的坐標爲何？Ans：$\frac{m\beta+n\alpha}{m+n}$

[例題4]　設 a,b 爲有理數，且 $a<b$

(1)試證明：$a<\frac{ma+nb}{m+n}<b$。

(2)根據(1)的結果，試問有多少個有理數解於 a,b 之間。

(練習1) 設 a,b,c 為整數，且 $3|a+1|+2|b-3|+|c+4|=2$，求 a,b,c 之值。

Ans：$a=-1,b=3,c=-2$ 或-6；$a=-1,b=2$ 或 $4,c=-4$

(練習2) 下列何者可化為有限小數？

(A)$\frac{283}{350}$ (B)$\frac{63}{128}$ (C)$\frac{147}{168\times125}$ (D)$\frac{149}{21\times40}$ (E)$\frac{56}{25^9}$。

Ans：(B)(C)(E)

(練習3) 設 A,B,P 在數線上之坐標分別為$-7,5,x$，且 $\overline{AP}=\frac{3}{5}\overline{BP}$，求 x 之值。

Ans：$x=-25$ 或$-\frac{5}{2}$

(練習4) 設 a,b 為有理數， 且 $a<b$，則下列敘述何者為真？

(A)$a<\frac{a+b}{2}<b$(B)$a<\frac{a+b}{3}<b$(C)$a<\frac{2a+b}{3}<\frac{a+2b}{3}<b$

(D)$a<\frac{3a+b}{4}<\frac{a+3b}{4}<b$ (E)$a<\frac{2a+2b}{5}<\frac{a+3b}{5}<b$ Ans：(A)(C)(D)

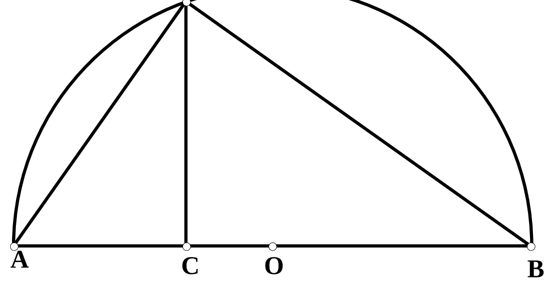
(練習5) 一最簡分數，分子與分母之差為 7，將其化為小數，並四捨五入得 0.5，則此分數為何？Ans：$\frac{6}{13}$ 或$\frac{8}{15}$

(乙)實數系(R)

(1)$\sqrt{n}$ 的作圖：

(作法)：取$\overline{AC}=1,\overline{BC}=n$，以$\overline{AB}$長為直徑作一半圓，過 C 點作垂直線交半圓於 D，則$\overline{CD}=\sqrt{n}$ ，即為所求。

(證明)：



(2)證明$\sqrt{2}$ 不爲有理數。

(3)有理點不能填滿數線：雖然數線上的有理點是稠密的，即兩個有理點之間有無限多個有理點存在,似乎稠密得擁擠不堪,但由(1)我們可以作出代表$\sqrt{2}$的點，由(2)之證明可知這個點不是有理點，換句話說，有理點並沒有將數線佔滿，數線還有留白，爲了方便起見，在數線上非有理點所代表的數稱爲「無理數」。

即無理數所代表的點為數線上不能表示成分數的點。

(4)無理數有多少？$\sqrt{2}$ 雖然是一個無理數，但是無理數並非只有$\sqrt{2}$ 一個，還有$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,…,$\sqrt{p}$ (p 爲質數)，$\sqrt[3]{2},\sqrt[5]{3}$ …而這些無理數有無限多個，其中有些可用尺規作圖，有些則不能。

(5)**實數系：**對應數線上的點不是代表有理數，就是無理數，而有理數補上了無理數之後就稱爲「實數系」。因此，每一個實數在數線上都有唯一一個點與之對應，反過來說，數線上每一個點都對應唯一一個實數。

(6)實數系中的基本運算性質與有理數系同。

實數的大小次序：

設 x,y,z 均爲實數，則

(a)下列三式恰有一成立：$x>y$，$x=y$，$x<y$ (三一律)

(b)若 $x<y$，$y<z$，則 $x<z$。

(c)$x<y \Leftrightarrow x+z<y+z$

(d)若 $z>0$，則 $x<y \Leftrightarrow xz<yz$。

(e)若 $z<0$，則 $x<y \Leftrightarrow xz>yz$。

(7)實數系的家譜：

$$\text{實數}\begin{cases}\text{有理數}\begin{cases}\text{整數}\begin{cases}\text{正整數}\\ \text{零}\\ \text{負整數}\end{cases}\\ \text{分數:有限小數,循環小數}\end{cases}\\ \text{無理數:不循環的無限小數}\end{cases}$$

[例題5] 證明：(1)$\sqrt{3}$ 爲無理數。(2)$5+\sqrt{3}$ 爲無理數。(3)$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 爲無理數。

[例題6] 試做下列二小題：
設 a,b,c,d 爲有理數，而$\sqrt{d},\sqrt{b}$ 爲無理數，
試證：　$a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d} \Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$

(練習6) 若 a,b 爲任意無理數，c 爲任意有理數，則下列敘述何者是正確的？
(A)$a+b$是無理數(B)ab是無理數(C)$a+c$爲無理數(D)cb 爲無理數(E)$a+b$與 ab 至少有一是無理數。Ans：(C)

(練習7) 已知$\sqrt{2}$ 爲無理數，試證明：(1)$\frac{\sqrt{2}}{5}$ (2)$\sqrt{2}+\sqrt{7}$ 爲無理數。

(練習8) 若 n 爲任意自然數，試證明：
(1)$n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$　(2) $\sqrt{n(n+1)}$ 爲無理數。

(練習9) 設 a,b 爲有理數，$(2+\sqrt{3})a+(1-\sqrt{3})b=7-\sqrt{3}$，則 $a+b=$？ Ans：5

(8)實數的絕對值

(a)定義：在數線上，設原點O(0),A(a),B(b)，則

$\overline{OA}$=___________，$\overline{AB}$=__________。

(b)性質：

1. $-|a|\le a \le |a|$　　2.$|a+b|\le|a|+|b|$ (等號成立$\Leftrightarrow$)

3.$|ab|=|a||b|$　$|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$　4.$\sqrt{a^2}=|a|$　5.$|a|^2=a^2$

(c)推廣：設$x \in$ R,$a\ge0,b\ge0$

1.$|x|=a \Leftrightarrow x=\pm a$　2.$|x|\le a\Leftrightarrow -a\le x\le a$　3.$|x|\ge a\Leftrightarrow x \ge a$或$x\le -a$

(d)絕對值的幾何意義：$|x|$ 代表數線上代表x的點到原點的距離。

例：1.$|x|=1\Rightarrow$　2.$|x|<2\Rightarrow$　3.$|x|>3\Rightarrow$

4. $2<|x|<3\Rightarrow$

[例題7] 設 a,b 為實數，試證：

(1)$-|a|\le a\le|a|$　(2)$|ab|=|a||b|$　(3) $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$　($b\ne0$)

[例題8] 設 a,b 為兩實數，請證明：$||a|-|b||\le|a\pm b|\le|a|+|b|$

[例題9] 求下列絕對值不等式的解：

(1)$|x-2|\ge 3$ (2)$|2x+3|\le 5$ (3)$|x-1|\ge|x+2|$。

Ans：(1)$x\ge 5$ 或 $x\le -1$ (2)$-4\le x\le 1$ (3)$x\le\frac{-1}{2}$

[例題10] (1)若$|ax+1|\le b$ 之解爲$-1\le x\le 5$，求 a,b 之值。Ans：$a=\frac{-1}{2},b=\frac{3}{2}$

(2)若$|ax-2|\ge b$ 之解爲 $x\le 0$ 或 $x\ge\frac{4}{3}$，求實數 a,b。Ans：$a=3,b=2$

[例題11] 設 $2\le x\le 5$，$-1\le y\le 3$，求下列各式的範圍。

(1)$x+2y$ (2)$2x-y$ (3)xy (4)$\frac{1}{x}$ (5)$\frac{y}{x}$。

Ans：(1)$0\le x+2y\le 11$ (2)$1\le 2x-y\le 11$ (3)$-5\le xy\le 15$ (4)$\frac{1}{5}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{2}$ (5)$\frac{-1}{2}\le\frac{y}{x}\le\frac{3}{2}$。

(練習10) 解下列不等式：

(1)$|x-1|\ge|2x+3|$ (2)$|x-1|+|x-2|<3$

Ans：(1) $-4\le x\le\frac{-2}{3}$ (2)$0<x<3$

(練習11) 解方程式：$|x+3|+|2x-5|=10$。 Ans：$x=4$ 或-2

(練習12) 設 $x\in$R，且滿足 $3\le|x+1|<5$，則 x 的範圍為____________。

Ans：$2\le x<4$ 或$-6<x\le-4$

(練習13) 若$|ax+3|\le b$ 之解為$-3\le x\le7$，則 a=？b=？

Ans：$a=\frac{-3}{2}$，$b=\frac{15}{2}$

(練習14) 方程式$|2x-a|\le b$ 之解為$-2\le x\le5$，則 a=？b=？ Ans：$a=3$，$b=7$

(練習15) 設 x，$y\in$R，且$|x+1|\le3$，$|y-2|\le1$，試求

(1)$2x+y$ (2)xy (3)$x-3y$ (4)$\frac{1}{y}$ 的範圍。

Ans：(1)$-7\le2x+y\le7$ (2)$-12\le xy\le6$ (3)$-13\le x-3y\le-1$ (4)$\frac{1}{3}\le\frac{1}{y}\le1$。

二重方根的化簡：

可以化簡的形式：

設 p,q 為正數：

$\sqrt{p+q+2\sqrt{pq}}=\sqrt{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}=\sqrt{p}+\sqrt{q}$

$\sqrt{p+q-2\sqrt{pq}}=\sqrt{(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2}=|\sqrt{p}-\sqrt{q}|$

[例題12] 設 $a=\sqrt{41-2\sqrt{180}}$，b 為 a 的純小數部份，則$\frac{a}{4}+\frac{1}{b}$=？ Ans：$\frac{9}{4}$

(練習16) 設 $a=\sqrt{17-12\sqrt{2}}$，b 為 a 之整數部分，則$\frac{9}{b-3}+\frac{15-5a}{2}$=？Ans：$-3+5\sqrt{2}$

綜合練習

(1) 下列敘述那些是正確的？

(A)若 $a,b,a-b$ 均爲無理數，則 $a+b$ 爲無理數。

(B)若 $a,b,\dfrac{a}{b}$ 均爲無理數，則 ab 爲無理數。

(C)若 $a+b,b+c,c+a$ 均爲有理數，則 $a+b+c$ 爲有理數。

(D)設 a,b 均爲有理數，且 $ab\neq$，則 $a+b\sqrt{3}\neq 0$。

(E)可以找到兩個無理數 a,b，使得$\dfrac{a}{b}$爲無理數，且 ab 爲有理數。

(2) 設 a,b,c,d 爲實數，且 $a<b$，$c<d$，則下列何者成立？

(A)$a<\dfrac{2a+5b}{7}<b$　(B)$\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+c}{a+c}<\dfrac{b+d}{a+d}$　(C)$\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+d}{b+d}>\dfrac{a+c}{b+c}$　(D)若$\dfrac{b}{a}<\dfrac{d}{c}$，則 $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+d}{a+c}<\dfrac{d}{c}$。

(E)$a<\dfrac{4a+5b}{7}<b$。

(3) 設 $a,b,c,d\in\mathrm{R}$，則下列何者成立？

(A)$a>b$，$c>d \Rightarrow a+c>b+d$。

(B) $a>b$，$c>d \Rightarrow a-c>b-d$。

(C)$a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$。

(D) $a>b>0$，$c<d<0 \Rightarrow ac<bd$。

(E)$a>b>0$，$c>d \Rightarrow ac>bd$。

(4) 設 a,b,c 爲異於 0 之有理數，試證明 $\dfrac{a\sqrt{2}}{b+c}$ 爲無理數。

(5) (a)設n爲整數，若n^2爲 3 的倍數，則n也是 3 的倍數。

(b)利用(a)的結果，證明$\sqrt{3}$ 爲無理數。

(c)證明：$2+\sqrt{3}$ 爲無理數。

(d)證明：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$爲無理數。

(6) $\sqrt{11-\sqrt{72}}=a+b$，其中 $a\in\mathrm{N}$，$0\leq b<1$，求$\dfrac{1}{a-b}+b$ 之值。

(7) 設 x,y,z 爲整數，試解下列各方程式：

(a)$|x+2|+2|y|=3$

(b)$3|x+1|+2|y-2|+|z-1|=1$

(8) 設x爲有理數，且$(x^2-1)+(x^2-2x-3)\sqrt{5}=0$，則$x=$_______。

(9) 設 $\mathrm{A}=\{x||x-a|\leq 2\}$，$\mathrm{B}=\{x||x-3|\leq 5\}$，若 $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$，求實數 a 之範圍。

(10) 若$|-2a+1|\leq 3$，$|b-8|\leq 1$，則求(a)$a+b$　(b)$\dfrac{a}{b}$ 的範圍。

(11) 不等式$|ax+2|\leq b$，的解爲$-2\leq x\leq 6$，則 $a=$？$b=$？

(12) 試求不等式 $5<|2x-1|<33$。

(13) 試解方程式 $|x+3|+|2x-5|=10$。

(14) 設 a,b,c 為實數，利用 $|a|+|b|\geq|a+b|$ 求出 $y=|x+2|+|x-5|$ 的最小值，
並問此時 x 的範圍。

進階問題

(15) 試證明：$\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ 為無理數。

(16) 設 a,b 為實數，且 $|a|<1$，$|b|<1$，試證 $|a+b|+|a-b|<2$。

(17) 實數 a 之小數部分為 b，若 $a^2+b^2=38$，求 $a+b=$？

(18) 一個最簡分數，其分子、分母之和為 70，將其化成小數並四捨五入後為 0.6，
求此分數。

(19) 下列敘述那些是正確的？
(A)若 $a^3\in Q$ 且 $a^6\in Q$，則 $a\in Q$。
(B)若 $a^3\in Q$ 且 $a^5\in Q$，則 $a\in Q$。
(C)若 a,b 為無理數，則 $a+b$ 為無理數。
(D)若 a 為有理數，b 為無理數，則 ab 為無理數。
(E) $a,b\in R$，$a+b\in Q$，$ab\notin Q \Rightarrow a-b\notin Q$。

(20) 若 $\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，求 $b=$？

(21) 設 $x=\dfrac{2a}{1+a^2}$ $(a>0)$，$y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$，試就 a 的值的大小，討論 y 值(以 a 表示)。

(22) 設 a,b,c 為實數，且 $|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$，試證：
(a) $ab+1>a+b$　(b) $abc+2>a+b+c$

(23) 設 a,b 為實數，試證明：$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$。

綜合練習解答

(1) (B)(C)(D)(E)
(2) (A)(B)(D)
(3) (A)(C)(D)
(4) 利用反證法
(5) 仿照例題 5 的證法
(6) 3
(7) (a) $(x,y)=(-1,1)$、$(-1,-1)$、$(-3,1)$、$(-3,-1)$、$(1,0)$、$(-5,0)$。
(b) $(x,y,z)=(-1,2,0)$、$(-1,2,2)$
(8) -1
(9) $0\leq a\leq 6$
(10) $6\leq a+b\leq 11$　$\dfrac{-1}{7}\leq\dfrac{a}{b}\leq\dfrac{2}{7}$
(11) $a=-1$，$b=4$
(12) $3<x<17$ 或 $-16<x<-2$
(13) $x=4$ 或 -2

(14) 最小值=7，此時$-2\le x\le 5$

(15) [提示：令$x=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3} \Rightarrow x-\sqrt{3}=\sqrt[3]{2} \Rightarrow (x-\sqrt{3})^3=2 \Rightarrow \sqrt{3}=\dfrac{x^3+9x-2}{3x^2+3}$]

(16) 提示：去證明$(|a+b|)^2<(2-|a-b|)^2$會成立。

(17) $2\sqrt{10}$ [提示：$0<b<1\Rightarrow 0<b^2<1\Rightarrow a^2+0<a^2+b^2<a^2+1\Rightarrow a^2<38<a^2+1$，$\therefore$ a的整數為 6，再令$a=6+b$，代入$a^2+b^2=38$，求b]

(18) $\dfrac{23}{47}$

(19) (B)[提示：(A)反例 $a=\sqrt[3]{2}$，(B)$a=\dfrac{(a^3)^2}{a^5}$為有理數]

(20) $2\sqrt{3}-3$

(21) $a>1$ 時，$y=\dfrac{1}{a}$；$0<a\le 1$ 時，$y=a$

(22) (b)利用(a)的結果，$(ab)c+1+1>ab+c+1=ab+1+c>a+b+c$

(23) 提示：$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}=1-\dfrac{1}{1+|a+b|}\le 1-\dfrac{1}{1+|a|+|b|}=\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$，

再證明$\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\le\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$。