第四十五單元 數列極限與無窮級數的和

(甲)極限的概念

人類自古即有極限的概念，並且善用這樣的想法獲得許多豐碩的成果，這些成果都是人類文明的珍貴資產。底下列舉幾個例子來說明極限的想法：

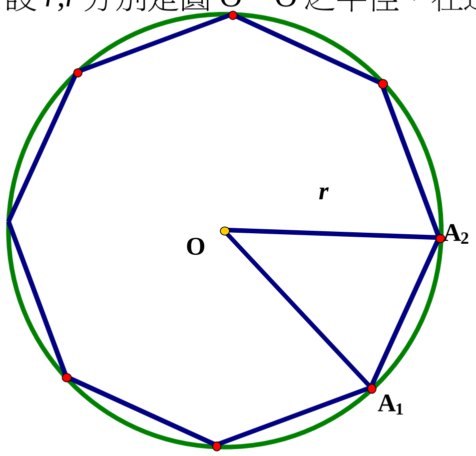
(1)圓周長與半徑的比為一定值：

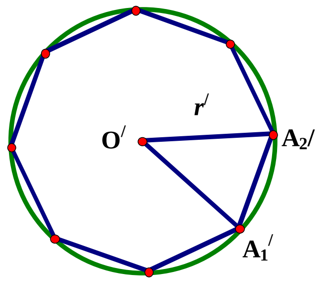
西元前四世紀，古希臘數學家歐多克索斯(Eudoxus of Cnidus)便利用極限的概念導出

$\dfrac{\text{圓的周長}}{\text{半徑}}=$ 定值。

歐多克索斯的想法：

設 r,r'分別是圓 O、O$'$之半徑，在這兩個圓內各放一個內接正 n 邊形





將這兩個正 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 與 $A'_1A'_2\ldots A'_n$ 的周長分別記為 C_n、C_n'

因為ΔQA_1A_2與$\Delta O'A_1'A_2'$相似，所以$\dfrac{A_1A_2}{r}=\dfrac{A_1'A_2'}{r'}$

$\Rightarrow\dfrac{C_n}{r}=\dfrac{n\cdot\overline{A_1A_2}}{r}=\dfrac{n\cdot\overline{A_1'A_2'}}{r'}=\dfrac{C_n'}{r'}\Rightarrow\dfrac{C_n}{r}=\dfrac{C_n'}{r'}$，對於所有內接於圓的正 n 邊形均成立。

當「邊數 n」逐漸增加，趨近於無窮大時，正 n 邊形的周長就逐漸趨近於「圓的周長」。

$$\begin{array}{ccc}\dfrac{C_n}{r} & \longrightarrow & \dfrac{\text{圓O的周長}}{r}\\ \parallel & & \parallel \\ \dfrac{C_n'}{r'} & \longrightarrow & \dfrac{\text{圓O}'\text{的周長}}{r'}\end{array}$$

因此$\dfrac{\text{圓O的周長}}{2r}=\dfrac{\text{圓O}'\text{的周長}}{2r'}$ =定值(與圓的大小無關)

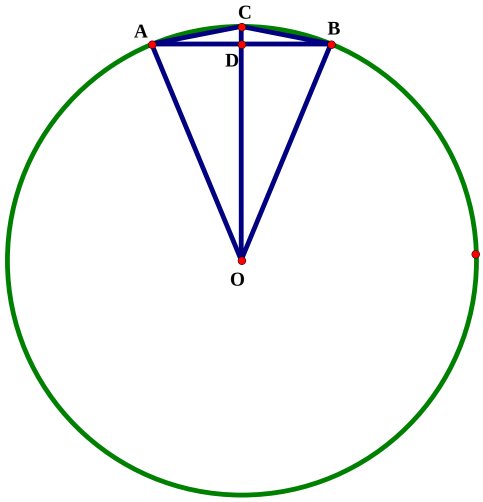
這個定值記作π，就是**圓周長與直徑的比值**，稱為**圓周率**。

(2)圓面積等於半周長與半徑的乘積

「九章算經」中第一章方田之中有計算圓面積的方法，術曰：「**半周半徑相乘得積步**」(積步就是面積的意思)，換成現在的說法就是圓面積等於半周長與半徑的乘積。一開始「九章算經」並沒有說明理由，直到三國時代(西元 263 年)中國數學家劉徽給「九章算經」作注時，提出了他的證明。

劉徽的想法：

設圓內接正 n 邊形邊長爲 a_n，周長 l_n，面積爲 S_n，如圖



令$\overline{AB}=a_n$，$\overline{BC}=a_{2n}$，則

$S_{2n}=(2n)\cdot(\Delta OBC$ 的面積$)$

$=(2n)\cdot(\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{OC})$　　$=(2n)\cdot(\frac{1}{4}\overline{AB}\cdot\ \overline{OC})$

$=(2n)\cdot(\frac{1}{4}a_n\cdot r)$　　$=\frac{1}{2}(n\cdot a_n)\cdot r=\frac{1}{2}l_n\cdot r$

$\Rightarrow S_{2n}=\frac{1}{2}l_n\cdot r$

劉徽注曰：

「**割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓合體，而無所失矣**」

他的看法是每次將內接正多邊形的邊數增加，邊數越多，正多邊形與圓的面積的差就越少，最後與圓重合成一體，而就沒有誤差了。

基本上，從現在數學的眼光來看，劉徽的這段話含有重要的極限思想：

$\lim\limits_{n\to\infty} l_n=$圓周長 l，$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=$圓面積 S，再根據 $S_{2n}=\frac{1}{2}l_n\cdot r$，就可得「九章算經」中圓面積等於半周長與半徑的乘積($S=\frac{1}{2}l\cdot r$)的法則了。

(乙)數列的極限

(1)無窮數列的行爲：

對於無窮數列 $\langle a_n\rangle$ 來說，除了尋找一般項是否有規則之外，另一個重要的課題是：

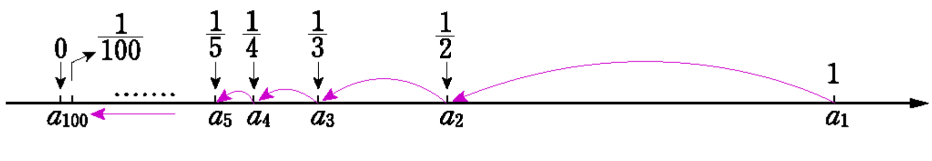
當 n 愈來愈大時，研究無窮數列 a_n 是否會趨近一個定值？即「**研究數列是否有極限**」

將 a_n 逐項畫在數線上，觀察數線上 a_n 的行爲：

①單一方向靠近一個定實數：

例如：$\langle a_n\rangle$：$\frac{1}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、…、$\frac{1}{n}$、…

在數線上觀察 $\langle a_n\rangle$ 的趨向：



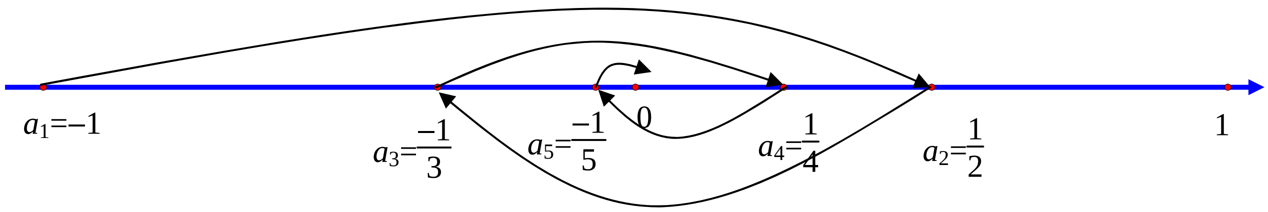
從數線上可以看出：

不管 n 值多大，$\dfrac{1}{n}$恆大於 0，且當項數 n 的值逐漸增大時， 動點$\dfrac{1}{n}$會愈來愈小而逐漸趨近於原點 0．

②左右振動，並且靠近一個定實數：

$\langle a_n\rangle$：$\dfrac{-1}{1}$、$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{-1}{3}$、$\dfrac{1}{4}$、…、$\dfrac{(-1)^n}{n}$、….

在數線上觀察$\langle a_n\rangle$的趨向：



當 n 的值愈來愈大時，動點$\dfrac{(-1)^n}{n}$會在原點 0 的左右兩側一正一負跳動，並且逐漸趨近於 0．故當 n 愈來愈大時，數列$\left\langle\dfrac{(-1)^n}{n}\right\rangle$會朝 0 趨近。

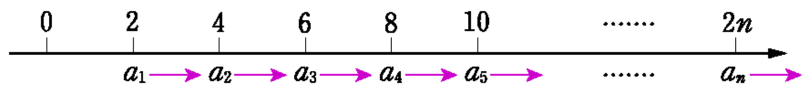
③最後在某一點跳動：

例如：$\langle a_n\rangle$：5、5、5、…、5、…

④越來越趨向∞或−∞

$\langle a_n\rangle$：$\langle 2,4,6,\ldots,2n,\ldots \rangle$

在數線上觀察$\langle a_n\rangle$的趨向：

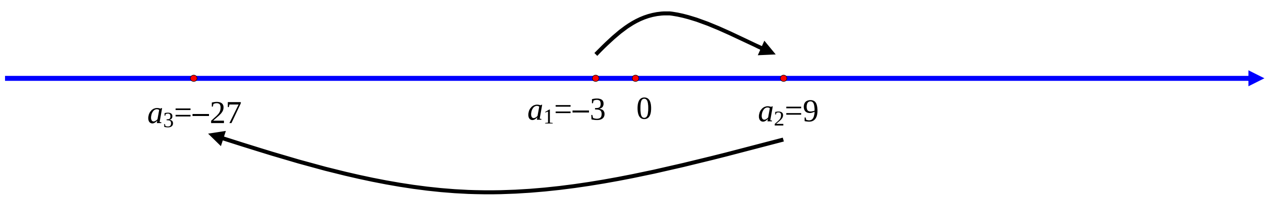


正偶數的數列：2，4，6，8，⋯，由左往右，逐項跨增 2 個單位，且逐漸遠離原點邁向無限大。故 n 的值愈來愈大時，$a_n=2n$ 也愈來愈大，沒有界限，因此數列$\langle a_n\rangle$不會趨近於某一個定數。

⑤左右振動，但越來越分開

例如：$\langle a_n\rangle$：(-3)、9、-27、81、…、$(-3)^n$、….

在數線上觀察$\langle a_n\rangle$的趨向：

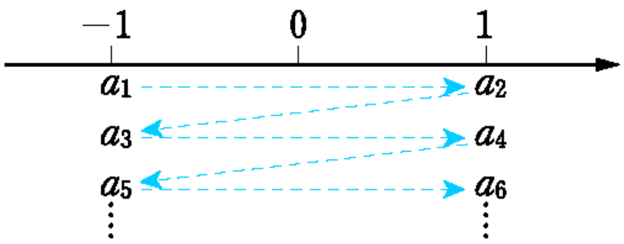


動點$(-3)^n$會在原點左右跳動，而且愈來愈分開，且逐漸遠離原點邁向無限大(負無限大)。

⑥在二點或二點以上振動

例如：$<a_n>$：-1、1、-1、1、…、$(-1)^n$ …，

在數線上觀察$<a_n>$的趨向：



當 n 是奇數時，$a_n=-1$；當 n 是偶數時，$a_n=1$，即

a_n在-1與 1 兩個定數間依序跳動，故 b_n 不會趨近某一定數．

(2)無窮數列的極限

(a)從無窮數列的行爲來定義數列的極限：

上述的觀察中，可以得知，當 n 愈來愈大時，

數列$<\dfrac{1}{n}>$會從數列的正向愈來愈趨近 0。

數列$<\dfrac{(-1)^n}{n}>$則在原點 0 的左右兩側依序跳動，並且愈來愈趨近 0。

這兩個數列都會趨近於一個定數。

數列$<2n>$會沿著數列正向愈來愈大而無界限。

數列$<(-1)^n>$會在-1與 1 這兩個定數上依序跳動。

這兩個數列都不會趨近一個定數。

一般而言， 無窮數列的行爲可以分成兩類：

第一類：當 n 愈來愈大時，數列$<a_n>$會趨近於某一定數，此種數列稱爲「**收斂數列**」。

第二類：當 n 愈來愈大時，數列$<b_n>$不會趨近於某一定數，此種數列稱爲「**發散數列**」。

值得注意的是：

(1)常數數列$<c>$是一個收斂數列。

(2)跳動數列$<(-1)^n>$只在-1和 1 上依序跳動，它不會趨近一個定數，因此數學上還是視它爲**發散數列**。

收斂數列的極限：
給定一個數列$<a_n>$，當 n 愈來愈大時，a_n會趨近於某一個定數α，定數α稱爲數列$<a_n>$的**極限**．記爲$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$． “$\to$”代表趨近或趨向，符號“$\infty$”代表無限大．
有極限的數列稱爲**收斂數列**。

例如：

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c=c$。

由於發散數列＜a_n＞沒有極限，所以符號$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不等於任一個定數．

例如數列＜$2n$＞或＜2^n＞或＜$(-1)^n$＞都是發散數列，此時$\lim\limits_{n\to\infty}2n$，$\lim\limits_{n\to\infty}2^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$

都不等於任一個定數．

(練習1)判別下面的數列是否有極限，如果有的話，請寫出它的極限：

(1)$<(\frac{1}{3})^n>$：$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{27}$，$\frac{1}{81}$，$\frac{1}{243}$，….

(2)$<\frac{2n}{n+5}>$：$\frac{2}{6}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{6}{8}$，$\frac{8}{9}$，$\frac{10}{10}$，….，$\frac{200}{105}$，…

(3) ＜a_n＞： 1，－1，2，－2，3，－3，…，k，$-k$，…

(4) ＜b_n＞： 2，2，2，2，…(常數數列)

Ans：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{3})^n=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+5}=2$ (3)極限不存在 (4)2

(b)收斂數列極限的另一種看法

「當 n 愈來愈大時，數列$<\frac{1}{n}>$會趨近於 0」可以換另一個方式來描述：

欲使$|\frac{1}{n}-0|<\frac{1}{10}$，只要選擇 $n>10^1$ 就可以辦到。

欲使$|\frac{1}{n}-0|<\frac{1}{10^2}$，只要選擇 $n>10^2$ 就可以辦到。

………….

欲使$|\frac{1}{n}-0|<\frac{1}{10^k}$，只要選擇 $n>10^k$ 就可以辦到。

即「$|\frac{1}{n}-0|$要多小，只要選擇 n 足夠大都可以辦到。」

一般而言：

「當 n 愈來愈大時，數列$\langle a_n\rangle$會趨近於定數α」的敘述意指：

欲使 a_n 與α的距離$|a_n-\alpha|$小於給定的任意正數，只要選擇 n 足夠大就可以辦到。

即「只要 n 足夠大，a_n 與α的距離$|a_n-\alpha|$要多小都可以辦到」

結論：

「$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$」表示

「只要 n 足夠大之後， a_n 與 α 的距離｜$a_n-\alpha$｜要多小都可以辦得到．」

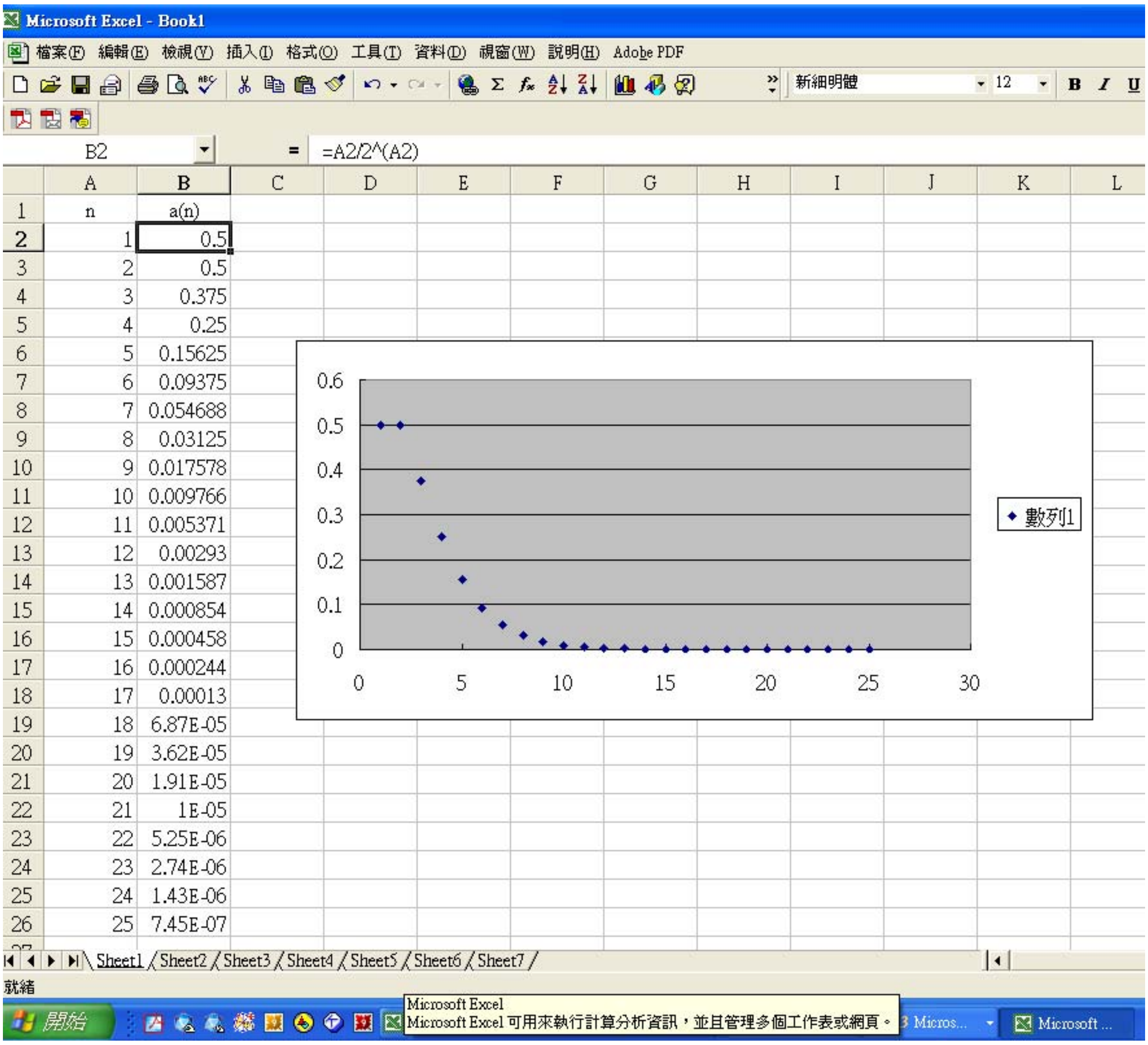
(練習2)考慮數列$\langle a_n\rangle$，其中 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$，

(1)求 a_n 與 1 的距離$|a_n-1|$。

(2)欲使不等式 $|a_n-1|<\dfrac{1}{1000}$ 成立，則 n 至少要大於多少？

(c)用計算機來體驗極限：

考慮數列 $a_n=\dfrac{n}{2^n}$，可以利用 Excel 試算表來猜測極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}$



(練習3)請利用 Excel 試算表來計算下列各數列的極限，若收斂請寫出極限。

(1)$a_n=\dfrac{1+(-3)^n}{2}$　(2)$a_n=\dfrac{2n^2-n+100}{3n^2+1000n-10}$

(3)$a_n=\dfrac{100n^3+n-3}{n^4+1}$　(4)$a_n=\dfrac{2^n+5^n}{4^{n+1}-3^n}$　(5)$a_n=\dfrac{n^2}{2n+1}-\dfrac{n^2}{2n-1}$

(3)無窮等比數列的極限：

對於無窮等差數列，除了公差為 0 的情形之外，其餘都是發散數列。

至於數列<ar^n>而言，當 a=0 或 r=0 時，數列<ar^n>的每一項都是 0，所以極限為 0。當 $a\neq 0$ 或是 $r\neq 0$ 時，數列<ar^n>為無窮等比數列，它是收斂或發散，則與公比 r 有密切關係。

為了簡化討論，我們只討論無窮等比數列<r^n>收斂與發散的情形：
(1) 先觀察 $r=1$，-1 的情形：

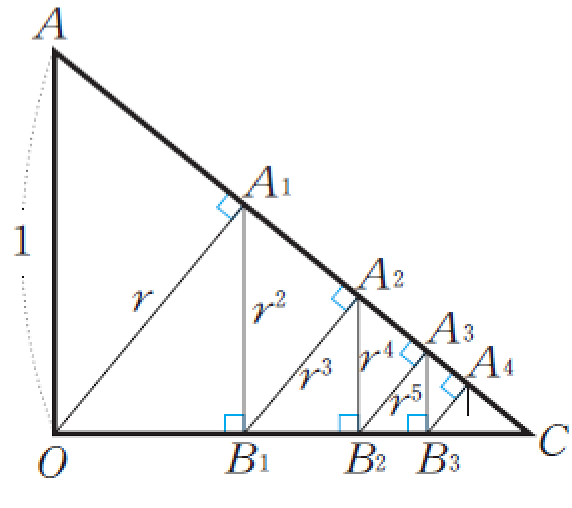
r=1 時，數列<r^n>的每一項都是 1，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=1$。

r=–1 時，數列<$(-1)^n$>：-1，1，-1，1，…是發散數列。
(2)當$|r|<1$ 時，
(i)$0<r<1$ 的情形：

先觀察特例<$(\frac{1}{2})^n$>，在數線上當 n 愈來愈大時，這些點會愈來愈接近 0，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n=0$。

一般而言，觀察數列<r^n>，$r^{n+1}<r^n$，隨著 n 的增加，r^n 愈來愈小，且 r^n 與 0 的距離$|r^n-0|$會愈來愈趨近 0。如下圖，利用一連串相似的直角三角形，斜邊與一股長度比值為 r，股之長度依序為$\overline{OA}=1$、$\overline{OA_1}=r$、$\overline{B_1A_2}=r^3$，$\overline{A_2B_2}=r^4$，$\overline{B_2A_3}=r^5$，…，當 n 愈來愈大時，點 A_n 與 B_n 逐漸趨近頂點 C，即線段長 r_n 愈來愈短而趨近於 0。

故當 $0<r<1$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$。



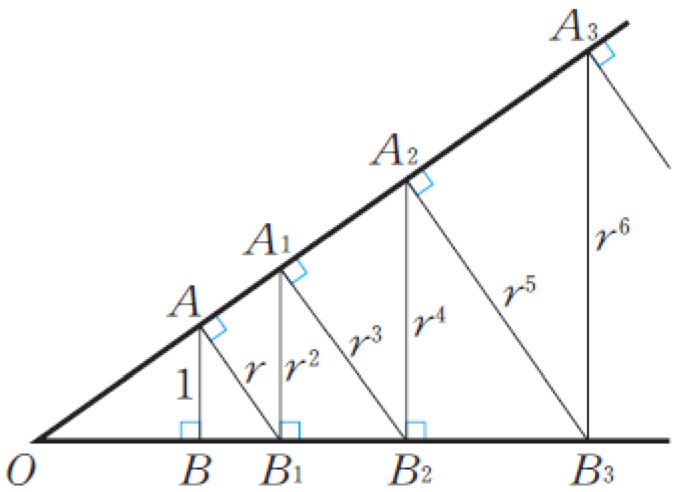
(ii)$-1<r<0$ 的情形：

再觀察特例<$(\frac{-1}{2})^n$>，在數線上當 n 愈來愈大時，這些點會依序在原點左右兩側跳動，並且逐漸的接近原點 0，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-1}{2})^n=0$。

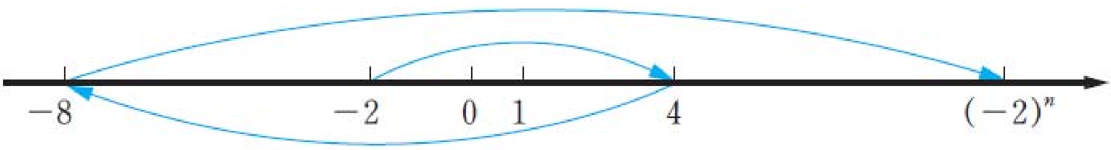
一般而言，觀察數列<r^n>，因 $0<|r|<1$，由(i)的情形知：$\lim\limits_{n\to\infty}|r^n-0|=\lim\limits_{n\to\infty}|r|^n=0$，即當 n 愈來愈大時，r^n 與 0 的距離 $|r^n-0|$ 會愈來愈趨近 0，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$。

(3)當 $|r|>1$ 時，
(i) $r>1$ 的情形：
觀察特例<2^n>，在數線上當 n 愈來愈大時，這些點會快速向右趨向無限大。即 2^n 會愈來愈大，不會小於任何的數，因此數列<2^n>並不會趨近於任何一個定數，故數列<2^n>爲發散數列。
一般而言，觀察數列<r^n>，如下圖，利用一連串相似的直角三角形，可以得知：

$\overline{AB}=1$、$\overline{AB_1}=r$、$\overline{A_1B_1}=r^2$，$\overline{A_1B_2}=r^3$，$\overline{A_2B_2}=r^4,\cdots$，當 n 愈來愈大時，$\overline{A_{n-1}A_n}$ 及 $\overline{B_{n-1}B_n}$ 愈來愈長，即 $r<r^2<r^3<r^4<\cdots$，所以 r^n 要多大就多大，並不會趨近於任何一個定數，故數列$<r^n>$是發散數列。



(ii) $r<-1$ 時，
觀察特例<$(-2)^n$>的點，在數線上當 n 愈來愈大時，這些點會在原點兩側依序跳動，並且逐漸遠離原點。因此數列<$(-2)^n$>並不會趨近於任何一個定數，故數列<$(-2)^n$>爲發散數列。



一般而言，因$|r|>1$ 且$|r^n|=|r|^n$，由(3) (i)知：當 n 愈來愈大時，$|r^n|$要多大就多大，對於任一實數α而言，同樣地$|r^n-\alpha|$要多大就多大，即＜r^n＞為發散數列。

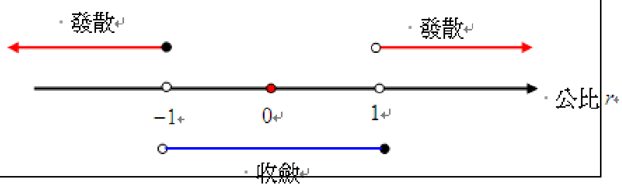
我們將上述討論整理如下：

無窮數列$<r^n>$收斂的條件：

數列$<r^n>$ $(a\neq0)$收斂的充要條件為 $-1<r\leq1$

(1)當$-1<r<1$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$。

(2)當 $r=1$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=1$。



當 $r=0$ 時，雖然$<r^n>$不是等比數列，但是$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$。

(練習4)試判斷下列數列是否收斂，若為收斂數列，求出其極限值。

(1)$<(-0.02)^n>$　　(2)$<\dfrac{3^n}{7^n}>$　　(3)$<(1.0001)^n>$

(丙)數列極限的性質

給定兩個收斂數列$<a_n>$與$<b_n>$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$。將其對應項作四則運算，

可以得到一些新的數列：

$<a_n+b_n>$、$<a_n-b_n>$、$<a_n\cdot b_n>$、$<\dfrac{a_n}{b_n}>$，這些新數列是否會收斂呢？

如果收斂，其極限值是否會等於$\alpha+\beta$、$\alpha-\beta$、$\alpha\beta$、$\dfrac{\alpha}{\beta}$呢？

(1)極限的四則運算：

給定兩個收斂的數列$<a_n>$、$<b_n>$，經四則運算之後，產生下列新的數列：

$<a_n+b_n>$、$<a_n-b_n>$、$<a_n\cdot b_n>$、$<\dfrac{a_n}{b_n}>(b_n\neq0)$都會收斂。

唯一要注意的是，商式$\dfrac{a_n}{b_n}$中必須附加$\lim\limits_{n\to\infty} b_n\neq0$ 的條件，才能使得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收斂。

我們寫成下面的定理：

若設<a_n>，<b_n>均為收斂的數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ，

則(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot a$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a\cdot b$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$)

收斂數列的「和、差、積與商(商的分母不為 0)」仍然是收斂數列，其極限分別為原收斂數列之極限的「和、差、積與商」。

[說明]：

(c)$|a_nb_n-ab|=|b_n(a_n-a)+a(b_n-b)|\leq|b_n||a_n-a|+|a||b_n-b|$

當 n 夠大時，$|b_n|\leq M$，$|a_n-a|$、$|b_n-b|$會夠小，

因此$|b_n||a_n-a|+|a||b_n-b|\leq M|a_n-a|+|a||b_n-b|$也會夠小。

所以無論$|a_nb_n-ab|$要多小，只要當 n 夠大時就可辦到，故 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a\cdot b$ 。

(d)$\left|\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b}\right|=\left|\dfrac{a_nb-ab_n}{b_nb}\right|$

$=\left|\dfrac{b(a_n-a)+a(b-b_n)}{b_nb}\right| \leq\left|\dfrac{1}{b_nb}\right|(|b||a_n-a|+|a||b_n-b|)$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} b_n=b\neq0$，$\therefore$當 n 夠大時，$\left|\dfrac{1}{b_n}\right|\leq M$，

$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ，$\therefore$當 n 夠大時，$|a_n-a|$、$|b_n-b|$會夠小，

$\Rightarrow\left|\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b}\right|\leq\left|\dfrac{1}{b_nb}\right|(|b||a_n-a|+|a||b_n-b|)\leq M\left|\dfrac{1}{b}\right|(|b||a_n-a|+|a||b_n-b|)$

故當 n 夠大時，$M\left|\dfrac{1}{b}\right|(|b||a_n-a|+|a||b_n-b|)$會夠小，

所以無論$\left|\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b}\right|$要多小，只要當 n 夠大時就可辦到，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ 。

[例題1] 設＜a_n＞是收斂數列且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ，而＜b_n＞是發散數列，
試問數列＜a_n+b_n＞是收斂或發散？

由上面例題可知「**收斂數列與發散數列的「和與差」所形成的新數列必為發散數列。**」

至於收斂數列與發散數列的「積與商」所形成的新數列，可能收斂或發散。

[課內討論]：

試舉出兩個發散數列< a_n >、< b_n >，分別使得

(1)< a_n+b_n >是收斂數列

(2)＜ $a_n \cdot b_n$ ＞是收斂數列

(3)＜ $\dfrac{a_n}{b_n}$ ＞是收斂數列

我們將前面討論的結果，表列如下：

	和差	積	商
兩收斂數列	收斂	收斂	收斂(分母極限≠0)
一收斂、一發散數列	發散	不一定收斂或發散	不一定收斂或發散
兩發散數列	不一定收斂或發散	不一定收斂或發散	不一定收斂或發散

[**例題**2] 設{ a_n }為一數列， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4a_n-2}{3a_n+1}=\dfrac{1}{2}$ ，則試證明{ a_n }為一收斂數列，並求其極限值。Ans：1

(**練習**5) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{3n-1}{4n-2}-a_n)=4$ ，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ？ Ans： $\dfrac{-13}{4}$

(2)一些特殊型式的極限：

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}$ ($f(x)$ 、 $g(x)$ 為多項式)的求法：

(a)若 $\deg f(n)<\deg g(n)$ ，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=0$ 。

(b)若 $\deg f(n)=\deg g(n)$,則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=\dfrac{f(n)\text{的最高次項係數}}{g(n)\text{的最高次項係數}}$ 。

(c)若 $\deg f(n)>\deg g(n)$ ，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}$ 發散。

[例題3] (不定型：$\frac{\infty}{\infty}$)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+4n-1}{n^3+1}=$？(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+1}{2n^2}=$？(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^5-n+5}{n^4}=$？

Ans：(1)0 (2)$\frac{3}{2}$ (3)發散

[例題4] (不定型：$\frac{\infty}{\infty}$)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}=$？ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots n(n+1)}=$？ Ans：(1)0 (2)1

[例題5] (不定型：$\infty-\infty$、$\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=$？ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=$？

Ans：(1)0 (2)2

(練習6) 試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2-5n+1}{3n^2-6}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{m}{m+1})^n$ (其中 m 爲正數)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n+1})^m$ (其中 m 爲自然數)

Ans：(1)$\dfrac{8}{3}$ (2)0 (3)1

(練習7) 試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3n+1}}=$？ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n+3}}=$？

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{3n+1}}=$？ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}-n)=$？

Ans：(1)0 (2)$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ (3)發散 (4)1

(丁)無窮級數的和

(1)發展無窮級數求和的程序：

第一冊中曾提到循環小數$0.\bar{3}$等於$\dfrac{3}{9}$是一個有理數，如果將$0.\bar{3}$寫成無窮等比級數的和，

$0.\bar{3}$=0.3+0.03+0.003++….，

上式中的無窮數列中有無限多項，可以相加嗎？這個問題自古就困擾了許多人。
古希臘哲學家齊諾(Zeno of Elea 約 490BC~425BC)曾提出一個關於阿基里斯(Achilles**)**與烏龜賽跑的詭辯，這個詭辯大致敘述如下：
「假設阿基里斯每秒走 1 公尺，烏龜每秒走 0.1 公尺，現在烏龜在阿基里斯前方 10 公尺的地方與阿基里斯同時出發，齊諾說阿基里斯永遠追不上烏龜！」
爲何齊諾說阿基里斯永遠追不上烏龜呢？
他說當阿基里斯來到烏龜出發的地方，此時烏龜又向前走了 0.1×10 公尺，當阿基里斯又往前走了 0.1×10 公尺，此時烏龜又走了$(0.1)^2$×10….，如此下去，阿基里斯永遠追不上烏龜。

阿基里斯所追趕的距離可以寫成 $10+10\times(0.1)+10\times(0.1)^2+10\times(0.1)^3+\ldots$.
這個式子一項一項加下去永遠不會結束。
從運動學的觀點來看：
t 秒後阿基里斯走到出發點前 t (公尺)
t 秒後烏龜走到出發點前 $10+0.1t$ (公尺)

若 t 秒時阿基里斯追趕上烏龜，則 $t=10+0.1t$ 解得 $t=\dfrac{10}{1-0.1}$。

因此在$\dfrac{10}{1-0.1}$秒後，離出發點$\dfrac{10}{1-0.1}$公尺的地方阿基里斯會追上烏龜。

雖然阿基里斯所追趕的距離 $10+10\times(0.1)+10\times(0.1)^2+10\times(0.1)^3+\ldots.$ 這個式子一項一項加下去永遠不會結束，不過這個級數的和似乎要等於$\dfrac{10}{1-0.1}$才符合觀察的結果。

接下來我們要發展一套新的概念來討論無窮等比級數
$10+10\times(0.1)+10\times(0.1)^2+10\times(0.1)^3+\ldots.$的和。

<<莊子•天下篇>>中記述了一段話「**一尺之棰，日取其半，萬世不竭。**」
這段話的原意是「一尺長的竹子，每日截取去掉其自身長度的一半，可以世世代代不斷的截取下去，永遠不會結束。」這段話隱藏著「無窮多項求和」的奧祕，讓我們來探討這個奧祕！

將前述的竹子視爲 1 尺長的線段，每次截取線段自身長度的一半，那麼每天所截取的線段長度總和可表爲

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots.$，

我們想像線段可以世世代代不停的分割下去，故上面的式子構成了一個無窮級數。
直觀的想：所有被截取的線段長度之和不會超過一尺，會不會等於一尺呢？
(1)先求前 n 項和 S_n(以 n 表示)：
設 S_n 爲前 n 日所截取的線段長度總和，即

$$S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\overset{\text{等比級數和的公式}}{=}1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$$

要世世代代不停的截取線段，因此數列<S_n>是一個無窮數列，
當 n 愈來愈大時，觀察數列<S_n>的走勢：

$S_1=\dfrac{1}{2}$ ，

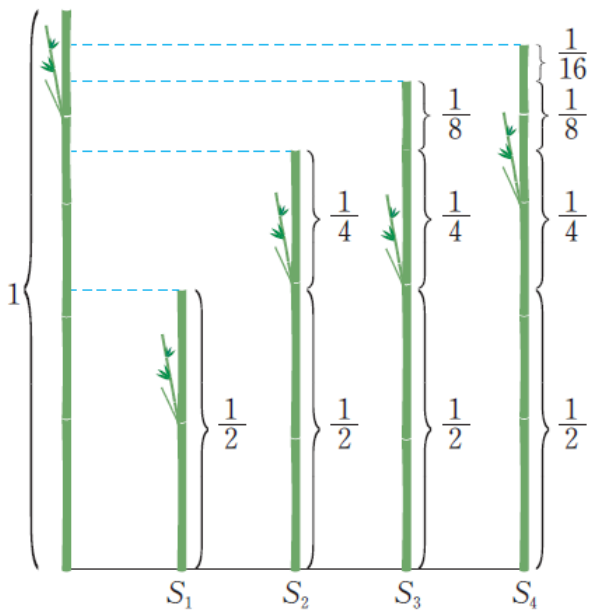
$S_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$，

$S_3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$，

$\vdots$

$S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，

$\vdots$



(2)求數列<S_n>的極限：
隨著 n 越來越大，數列<S_n>會越來越接近 1。

因爲$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$。

換句話說，前 n 日所分割的線段總和所形成的

數列<S_n>其極限為 1。即$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$。

上面求無窮級數$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$的和，分成兩個步驟：

(1)先求「部分和」形成的數列<S_n>：

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-(\frac{1}{2})^n$$

(2)求<S_n>的極限，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$。

上面兩個步驟對於求一般的無窮級數的和也適用：

設<a_n>為無窮數列，將各項依序相加就得出**無窮級數 $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots$**，此級數可以用符號$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$來表示。

令 S_n 為級數$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$前 n 項的和，即 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\ldots+a_n$，

我們透過無窮數列<S_n>是否有「極限」，來決定無窮級數 $a_1+a_2+a_3+\ldots.$是否有和。

其步驟如下：

(1)求「部分和」形成的數列<S_n>：

(2)討論<S_n>的收斂與發散：

(1°)若<S_n>收斂且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\alpha$，則極限值α定為此無窮級數的和。即

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\alpha$，「和」存在的級數稱為**收斂級數**。

(2°)若<S_n>發散，則無窮級數$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$的和不存在，「和」不存在的級數稱為**發散級數**。

此時$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$不是一個數，僅代表該級數本身。

上述(1)(2)說明了「**無窮級數$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$的求和問題就是求數列<$S_n$>的極限問題**」。

無窮級數$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$的求和程序：

(1)先求「部分和」$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ (用 n 來表示)。

(2)考慮數列<S_n>的收斂或發散：

若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\alpha$，則$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=\alpha$ (**收斂級數**)；若<S_n>發散，則$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的和不存在。**(發散級數)**

[例題6] 試求無窮級數$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$的和。

[例題7] 試求下面無窮等比級數的和：

(1) $10+10\times(0.1)+10\times(0.1)^2+10\times(0.1)^3+\ldots$ ‧

(2) $1-2+4-8+16+\cdots+(-2)^{n-1}+\cdots$

(練習8)求下面無窮等比級數的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^n=\frac{2}{5}+(\frac{2}{5})^2+(\frac{2}{5})^3+\ldots.+(\frac{2}{5})^n+\ldots.$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-1}{3})^n=\frac{-1}{3}+(\frac{-1}{3})^2+\ldots+(\frac{-1}{3})^n+\ldots.$

Ans：(1)$\frac{2}{3}$ (2)$\frac{-1}{4}$

(2)無窮等比級數的和

從例題七中發現，公比的大小會影響無窮級數的和存在與否，一般的無窮等比級數$a+ar+ar^2+\ldots.+ar^{n-1}+\ldots..(a\neq 0$ 且 $r\neq 0)$的和是否存在呢？

設無窮等比級數$\sum_{k=1}^{\infty}ar^{k-1}$前 n 項和為 S_n，即 $S_n=a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}$，

根據無窮級數求和的程序，

(1)求 S_n 的值：

$S_n=a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}(1-r^n) & 當 r\neq 1 時\\ na & 當 r=1 時\end{cases}$

(2)討論數列<S_n>的收斂或發散：

(1°)當 $r\neq1$ 時，根據數列<r^n>是否收斂來討論<S_n>收斂或發散。

當$-1<r<1$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$

此時$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{a}{1-r}(1-r^n)]=\dfrac{a}{1-r}$

所以無窮等比級數 $a+ar+ar^2+\ldots.+ar^{n-1}+\ldots..=\dfrac{a}{1-r}$。

當 $r>1$ 或 $r\leq-1$ 時，因爲<r^n>爲發散數列，故<S_n>爲發散數列。

無窮等比級數 $a+ar+ar^2+\ldots.+ar^{n-1}+\ldots..$ 的和不存在。

(2°)當 $r=1$ 時，

$S_n=na$，因爲 $a\neq0$，所以<na>爲發散數列，故<S_n>爲發散數列。

無窮等比級數 $a+ar+ar^2+\ldots.+ar^{n-1}+\ldots..$ 的和不存在。

我們將前面的討論結果整理如下：

無窮等比級數的和：

無窮等比級數 $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}+\ldots.$的和：

(1)當 $0<|r|<1$ 時，無窮等比級數的和爲$\dfrac{a}{1-r}$。

(2)當$|r|\geq1$ 時，無窮等比級數的和不存在。

[例題8] 求下列無窮等比級數的和：

(1)$\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{7^2}+\dfrac{4}{7^3}+\ldots.+\dfrac{2^{n-1}}{7^n}+\ldots$

(2) $\dfrac{4}{3}-\dfrac{16}{3^2}+\dfrac{64}{3^3}-\ldots.+\dfrac{(-1)^{n+1}\times4^n}{3^n}+\ldots.$

[解法]：

(1)一般項$\dfrac{2^{n-1}}{7^n}=\dfrac{1}{7}(\dfrac{2}{7})^{n-1}$，故此無窮等比級數的首項爲$\dfrac{1}{7}$，公比爲$\dfrac{2}{7}$，且 $0<|\dfrac{2}{7}|<1$，因此無窮等比級數

$\dfrac{1}{7}+\dfrac{4}{7^2}+\dfrac{8}{7^3}+\ldots.+\dfrac{2^{n-1}}{7^n}+\ldots$的和爲$\dfrac{\frac{1}{7}}{1-\frac{2}{7}}=\dfrac{1}{5}$。

(2)一般項$\dfrac{(-1)^{n+1}\times4^n}{3^n}=(-1)\times(\dfrac{-4}{3})^n$，故此無窮等比級數的公比爲$\dfrac{-4}{3}$，且$|\dfrac{-4}{3}|\geq1$，

因此無窮等比級數$\dfrac{4}{3}-\dfrac{16}{3^2}+\dfrac{64}{3^3}-\ldots.\ \dfrac{(-1)^{n+1}\times4^n}{3^n}+\ldots$的和不存在。

[例題9] 將下列循環小數化成分數：

(1) $0.\overline{4}$ (2) $0.2\overline{15}$ Ans：(1)$\frac{4}{9}$ (2)$\frac{213}{990}$

[討論]： $0.\overline{9}=1$ 這是怎麼回事呢？真的嗎！

[解釋]：

設 $1-0.\overline{9}=\alpha>0$，則由阿基米德性質

(對於任意正數 a，及任意實數 b 而言，必存在一個正整數，使得 $na>b$)

可找到一個正整數 n 使得 $10^n\alpha>1$，及$\alpha>\frac{1}{10^n}$，所以 $1-0.\overline{9}>\frac{1}{10^n}$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{10^n}>0.\overline{9}$ ，即$0.\underbrace{999\cdots9}_{n個9}>0.\overline{9}$ 此與循環小數的意義矛盾。

[例題10] 試求下列無窮級數的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})=$？

(2)0.9+0.099+0.00999+0.0009999+…..=？

(3)$1+2+3+\ldots+100+(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2+\ldots+(\frac{1}{2})^n+\ldots$.Ans：(1)$\frac{3}{2}$ (2)$\frac{100}{99}$ (3)5051

(練習9)求下列各無窮等比級數的和：

(1)$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots.=$？

(2)無窮等比級數$(\sqrt{3}-1)+(2-\sqrt{3})+\frac{3\sqrt{3}-5}{2}+\ldots.=$？

(3)試求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}=$？ Ans：(1)$\frac{2}{3}$ (2)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$

(練習10)試求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{3^n}=$？ Ans：$\frac{1}{2}$

(練習11)(1)化循環小數$2.3\overline{12}$爲分數。 (2)化循環小數$3.\overline{51}$爲分數。

Ans：(1)$\frac{763}{330}$ (2)$\frac{348}{99}$

(練習12)設 x 爲實數且無窮級數 $1+(1-3x)+(1-3x)^2+\ldots+(1-3x)^{n-1}+\ldots$收斂，求 x 的範圍與級數的和。Ans：$0<x<\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3x}$

[例題11] (1)試求級數$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}$的和。

(2)試求無窮級數$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots$之和。

Ans：(1)$\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$ (2)$\frac{3}{4}$

[例題12] 試求級數$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^{n-1}}$的和。　Ans：6

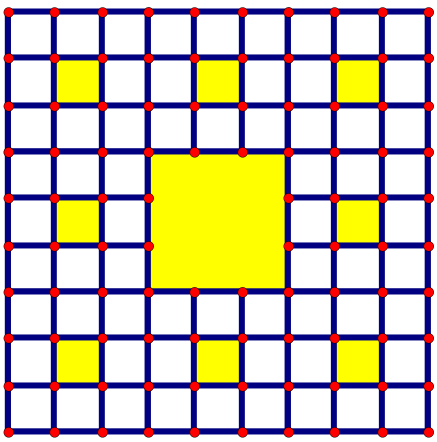
(練習13) 求$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\dots\dots$之和。　Ans：$\frac{1}{4}$

(練習14) 試求$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}]$=？　Ans：$\frac{1}{2}$

[提示：原式可視爲求無窮級數$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\dots$的和]

[例題13] 如圖，一單位長正方形，第一次將其平分成 9 塊(九格宮形)，然後挖去中間一塊。第二次再將剩餘各塊各平分成 9 塊，分別去掉中間各一塊。…

設第 n 次挖去之正方形面積總和爲 a_n，請問：(1)a_n=？　(2)$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$



[例題14] 小安從裝有 5 個紅球、3 個黑球的袋中取出一個球，假設每個球被取中的機會都相等，他看完球的顏色後，再將球放入袋中，設 P_n 代表直到第 n 次才取中紅球的機率。試求下列各小題：

(1)P_2、P_3 的值。　(2)P_n 的值。　(3)一直沒取中紅球的機率。

Ans：(1)$P_2=\frac{15}{64}$、$P_3=\frac{45}{512}$　(2) $P_n=(\frac{3}{8})^{n-1}\times\frac{5}{8}$　(3)0

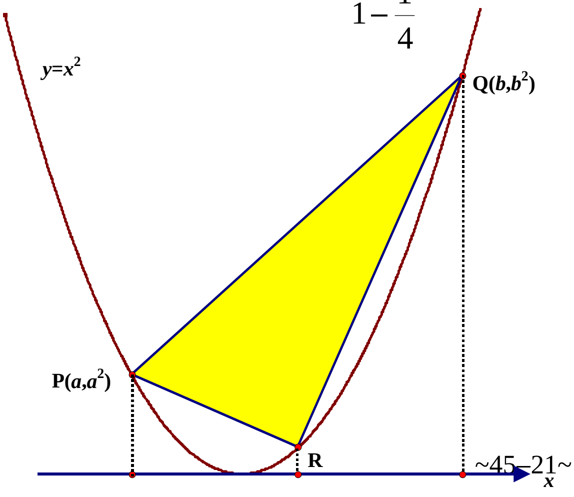
[例題15] 阿基米德曾利用一連串的三角形來逼近弓形，並計算出弓形面積。如圖，設 D 為由直線 PQ 與 $y=x^2$ 的圖形所圍成的弓形，其中 $P(a,a^2)$、$Q(b,b^2)$，在 $y=x^2$ 上取一點 $R(c,c^2)$，其中 $c=\frac{a+b}{2}$，

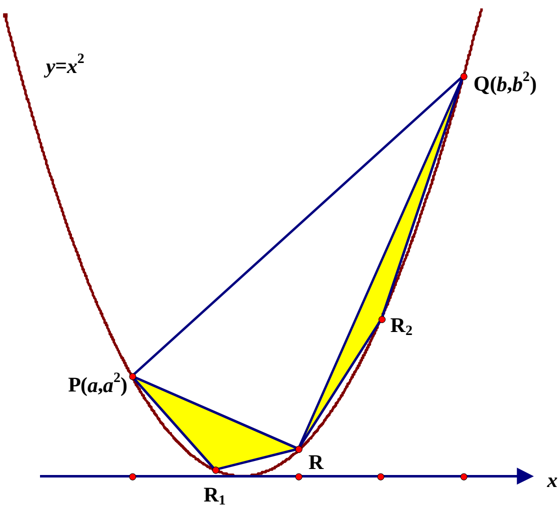
(1)證明：ΔPQR 的面積$=\frac{1}{8}(b-a)^3$。

(2)在 $P(a,a^2)$與 $R(c,c^2)$、$R(c,c^2)$與 $Q(b,b^2)$的拋物線間分別取 $R_1(c_1,c_1^2)$、$R_2(c_2,c_2^2)$ 其中 $c_1=\frac{a+c}{2}$，$c_2=\frac{c+b}{2}$，請證明：ΔPR_1R 面積$+\Delta RR_2Q$ 面積$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}(b-a)^3$。

(3)重複前面的動作，第一次做 1 個三角形，第二次做 2 個三角形，…，第 n 次做 2^n 個三角形，如此下次會形成無窮多個三角形，阿基米得利用這些三角形的面積和來求弓形的面積，試求出這無窮多個三角形面積和，並藉此證明弓形的面積為$\frac{1}{6}(b-a)^3$。註：上述的方法就是阿基米得的**窮竭法**。

Ans：弓形的面積$=\dfrac{\frac{1}{8}(b-a)^3}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}(b-a)^3$。

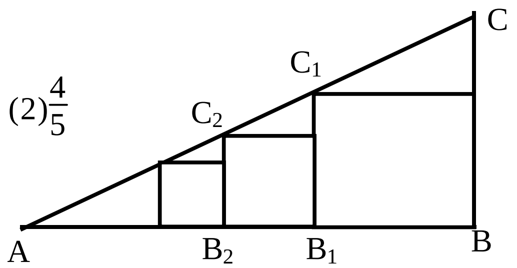




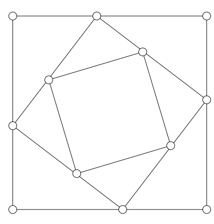
(練習15) 平面上一動點 P 自原點 O 出發沿 x 軸正向前進一個單位，其次沿 y 軸正方向前進 $\frac{2}{3}$ 單位，再沿 x 軸負方向前進 $(\frac{2}{3})^2$ 單位，然後再沿 y 軸負方向前進 $(\frac{2}{3})^3$ 單位，以下依此種方式重複類推下去，求點 P 極限位置的坐標爲何？
Ans：$(\frac{9}{13}, \frac{6}{13})$

(練習16) 一皮球自離地面 10 公尺高處落下，首次反彈高度爲 $\frac{10}{3}$ 公尺，此後每次反彈高度爲其前次反彈高度的 $\frac{1}{3}$，則此球到完全靜止前，所經過路徑的總長度爲多少公尺？　Ans：20 公尺

(練習17) 右圖中，$\overline{AB}=2, \overline{BC}=1$，$\angle B=90^\circ$，$S_1$ 爲 ΔABC 之內接正方形，S_2 爲 ΔAB_1C_1 之內接正方形，……
(1)求 S_1 之面積。
(2)求 S_1，S_2，….之面積和。Ans：(1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{4}{5}$

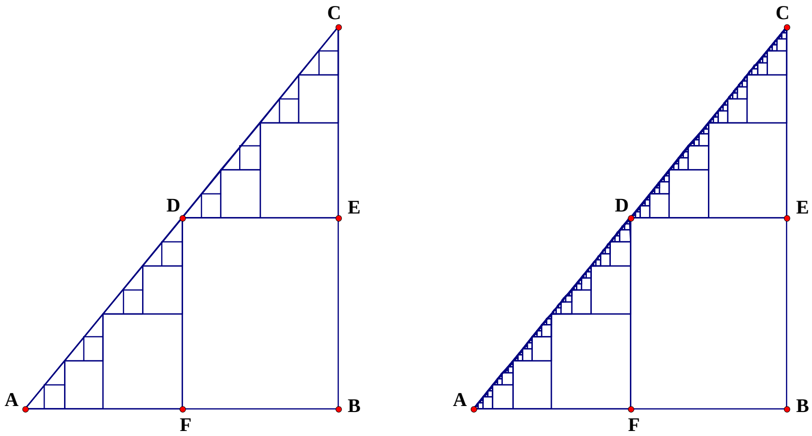


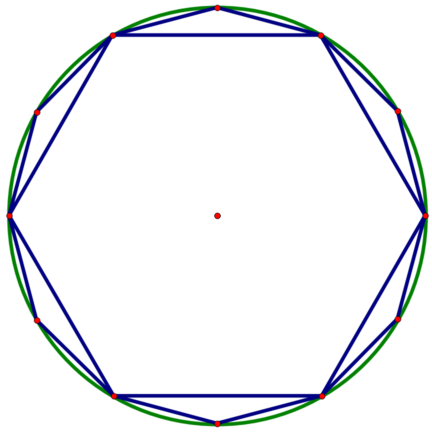
(練習18) 如右圖，一正方形的邊長爲 a，以 3：4 的順序內分各邊，再連各分點得第二個正方形，再以同順序內分第二個正方形各邊，連接各分點得第三個正方形，如此繼續下去，則一切正方形的面積總和爲多少？　Ans：$\frac{49}{24}a^2$



[直觀可靠嗎]：

(1)圖形的逼近：





(2)Cantor 集

Cantor 於 1833 年提出了一個集合，後人將它稱為 Cantor 集。

Cantor 集是由閉區間[0,1]去掉無數多個開子區間所剩下的點所成的集合，它的造法如下：

(1)將[0,1]三等分，去掉中間的開子區間$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$。

(2)將(1)中所剩下的二個閉子區間$[0,\frac{1}{3}]$,$[\frac{2}{3},1]$分別再三等分，去掉中間的開子區間，

$(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$、$(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$…..

(3)如此繼續下去，所剩下的點所成的集合就稱為 **Cantor 集**。

(a)試問第 9 個步驟，所去掉的開子區間的總長等於多少？

(b)所有去掉的開子區間的長度總和為何？

(c)做完(a)(b)之後是否發覺這個集合有些奇怪的現象，與你的直觀不大相同，你能描述這個奇怪的現象嗎？

(戊)夾擠定理

(1)引入夾擠原理

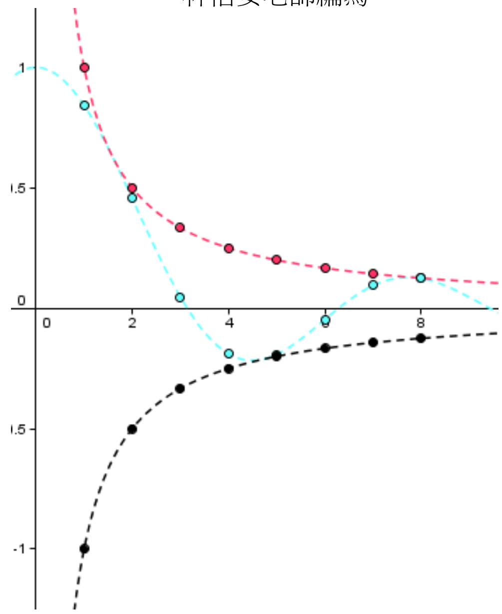
考慮數列$<\frac{\sin n}{n}>$的極限，因$-1\le\sin n\le 1$，故得到 $\frac{-1}{n}<\frac{\sin n}{n}<\frac{1}{n}$，

即數列$<\frac{\sin n}{n}>$夾在兩個術數列$<\frac{-1}{n}>$與$<\frac{1}{n}>$之間，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} =0$ 。

當 n 愈來愈大時，觀察坐標平面上三組動點 $A_n(n, \frac{-1}{n})$、$P_n(n, \frac{\sin n}{n})$、$B_n(n, \frac{-1}{n})$的分布情形(如下圖)：

A_n , P_n ,B_n 三點都在同一條垂直 x 軸的直線 $x=n$ 上，並且 P_n 恆介於 A_n 與 B_n 之間，當 n 愈來愈大時，點 A_n 與點 B_n 愈來愈接近 x 軸，故 $P_n(n,\dfrac{\sin n}{n})$也愈來愈接近 x 軸，

即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$ 。

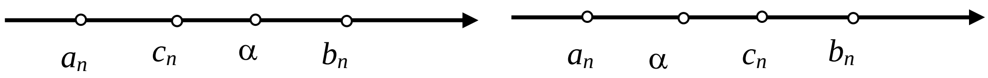


上述的結果，對於一般的數列也會成立，我們稱爲數列的「**夾擠原理**」。

(2)夾擠原理

夾擠原理： 給一個數列＜c_n＞，若存在兩個數列＜a_n＞與＜b_n＞滿足： (1)從某一項起(即 $n\geqq n_0$)， $a_n\leqq c_n\leqq b_n$。(c_n 夾在 a_n 與 b_n 之間) (2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。(數列＜$a_n$＞與＜$b_n$＞有相同的極限值) 則＜$c_n$＞是收斂數列，並且 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$。(＜$c_n$＞的極限就是數列＜$a_n$＞與＜$b_n$＞的極限)

上述原理可以用數線說明如下：
從第 n_0 項起，c_n 始終夾在 a_n 與 b_n 之間，即｜$c_n-\alpha$｜必不大於｜$a_n-\alpha$｜或｜$b_n-\alpha$｜，如圖 1–16，所以可得　　$|c_n-\alpha|\leqq|a_n-\alpha|+|b_n-\alpha|$　　$(n\geqq n_0)$。



那麼只要 n 足夠大，｜$a_n-\alpha$｜與｜$b_n-\alpha$｜都會小於任意給定的正數，因此可得知只要 n 足夠大，｜$c_n-\alpha$｜也會任意小，故 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$。

夾擠原理的重點是：我們要找出兩個有相同極限的數列($\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$)，將欲求極

限的數列$\langle c_n \rangle$夾在中間($a_n \leqq c_n \leqq b_n$)，那麼數列$\langle c_n \rangle$的極限就是數列$\langle a_n \rangle$與$\langle b_n \rangle$的極限。($\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$)。

[例題16] 設 $a_n = \dfrac{n}{2^n}$，$b_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$，

(1)列表觀察 a_n 與 b_n 的走勢，臆測 a_n 與 b_n 的大小關係。

(2)用數學歸納法證明(1)的臆測。

(3)數列＜a_n＞是否收斂？若為收斂，試求它的極限。

[解法]：

(1)列表觀察 a_n 與 b_n 的走勢如下表：

n	1	2	3	4	5	6	7	…
$a_n=\dfrac{n}{2^n}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2}{4}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{4}{16}$	$\dfrac{5}{32}$	$\dfrac{6}{64}$	$\dfrac{7}{128}$	…
$b_n=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{1}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{7}$	…

由上表，當 $n \geq 5$ 時，不等式

$\dfrac{5}{32} < \dfrac{1}{5}$，$\dfrac{6}{64} < \dfrac{1}{6}$，$\dfrac{7}{128} < \dfrac{1}{7}$，…都成立，因此我們臆測：

「當 $n \geq 5$ 時，不等式 $\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{1}{n}$ 恆成立。」

(2)又 $\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow 2^n > n^2$，用數學歸納法證明不等式：「**若 $n \geq 5$，則 $2^n > n^2$。**」

(i)$n=5$，$2^5>5^2$ 成立。

(ii)設 $n=k$ (k 為正整數，$k \geqq 5$)時，$2^k>k^2$ 成立。

則 $n=k+1$ 時，$2^{k+1}=2 \cdot 2^k>2k^2$……………….(A)

另一方面，$2k^2>(k+1)^2$…………………………….(B)

因為 $2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=k(k-2)-1 \geq 5(5-2)-1>0$

由(A)(B)可得 $2^{k+1}>(k+1)^2$。

即由「$2^k>k^2$」成立，可以推導出「$2^{k+1}>(k+1)^2$」亦成立。

由數學歸納法原理可知

對於任意正整數 $n \geq 5$，不等式 $2^n>n^2$ (等價於 $\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{1}{n}$)恆成立。

(3)當 $n \geq 5$ 恆有 $0 < \dfrac{n}{2^n} < \dfrac{1}{n}$

因為 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$，根據夾擠原理，可以得知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$。

n 的二次式 an^2+bn+c

例題十六中，根據二項式定理 $2^n=(1+1)^n=C_0^n+\boxed{C_1^n+C_2^n}+\ldots+C_n^n$，因此當 n 為大於 1 的正整數時，$2^n\geq C_1^n+C_2^n=n+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}$，因此

$0<\dfrac{n}{2^n}\leq\dfrac{n}{C_1^n+C_2^n}=\dfrac{2n}{n^2+n}$，即 $0<\dfrac{n}{2^n}<\dfrac{2n}{n^2+n}$

因為 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^2-n}=0$，利用夾擠原理可以得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$。

仿照上述的作法，可以得到 $0<\dfrac{n^k}{2^n}\leq\dfrac{n^k}{C_1^n+C_{k+1}^n}$ (k 為固定正整數)，其中 $C_1^n+C_k^n$ 是 n 的(k+1)次多項式，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{C_1^n+C_{k+1}^n}=0$，利用夾擠原理可以得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{2^n}=0$。

一般而言，隨著 n 的增加，形如「2^n 的指數增長」會比形如「$a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1n+a_0$ 多項式增長」來得快。

[例題17] 設 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ (n 項和)，

試用夾擠原理證明＜a_n＞收斂，並求它的極限。

分析：

我們必須找出兩個極限相同的數列＜b_n＞及＜c_n＞，使得

$b_n\leqq a_n\leqq c_n$　($n\geqq n_0$，從某一項 n_0 起)，再引用夾擠原理。

考慮 a_n 之各項分母中，以最小的 $\sqrt{n^2+1}$ 及最大的 $\sqrt{n^2+n}$ 分別當公分母，則

$a_n<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，

$a_n>\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$，

$\Rightarrow\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<a_n<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$。

[解法]：

取 $b_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$ 及 $c_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$，

因 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$，且 $b_n\leq a_n\leq c_n$，由夾擠原理得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$。

(練習19)已知對於每一個正整數 n，數列<R_n>滿足：
$\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\leq R_n\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=$？　Ans：$\frac{1}{3}$

(練習20)在坐標平面上，令落在以原點爲圓心，正整數 n 爲半徑的圓內或圓上的格子點數爲 a_n，數學家以證明了數列<a_n>會滿足不等式：
$\pi(n^2-3n)\leq a_n\leq\pi(n^2+3n)$，試利用此不等式求極限值：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ 。Ans：π

(練習21)已知對於每一個正整數 n，數列<a_n>滿足 $4n+1\leq na_n\leq 4n+7$，
試求數列<a_n>的極限。　Ans：4

(練習22)請利用夾擊原理求出 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n})=$？Ans：0
[提示：$\frac{1}{n^2+n}\leq\frac{1}{n^2+k}\leq\frac{1}{n^2+1}$]

(練習23)請利用夾擊原理求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!}=$？　Ans：0
[提示：$\frac{10^n}{n!}=\frac{10}{1}\cdot\frac{10}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdots\frac{10}{10}\cdot\frac{10}{11}\cdots\frac{10}{n}\leq(\frac{10}{1}\cdot\frac{10}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdots\frac{10}{10})(\frac{10}{11})^{n-10}$]

(練習24)證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。
(提示：令 $x_n=\sqrt[n]{n}-1>0$⇒根據二項式定理 $n=(x_n+1)^n\geq C^n_2\cdot x_n^2$)

(練習25)(1)例題 17 中，下列求法是否正確？爲什麼？

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$
$$=0$$

(2)利用夾擊原理求出 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n})=$？Ans：(2)0

綜合練習

(1) 判斷下列的數列是否有極限，若有極限，請求出它的極限值：

(a)$a_n=1+\dfrac{100}{n^2}$　(b)$a_n=\dfrac{1}{2}[1+(-1)^n]$　(c)$a_n=\dfrac{5n^2+n-7}{3n^2-n+5}$　(d)$a_n=(\dfrac{-4}{7})^n$　(e)$a_n=(\dfrac{11}{10})^n$

(2) 試求下列各題的極限：

(a)$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n}{n+1}-\dfrac{n+1}{2n})$ (b)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot3^{n-1}}{3^{n+1}}$ (c)$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2-1}{n+1}-\dfrac{n^2+2}{n+2})$　(d)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-1}-3^n}{2^n+3^{n-1}}$

(3) 下列那些選項是正確的？

(A)$10^{10}+2-2+2-2+\ldots\ldots=10^{10}$

(B)$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots+(\dfrac{-1}{3})^{n-1}+\ldots=\dfrac{1}{1-(\dfrac{-1}{3})}$

(C)$1+0.9+0.09+0.009+\ldots<2$

(D)$3-6+12-24+\ldots\ldots+3(-2)^{n-1}+\ldots=\dfrac{3}{1-(-2)}$

(E)$10+10^2+10^3+\ldots+10^{1000}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10^2}+\ldots+(\dfrac{1}{10})^n+\ldots$收斂

(4) 下列關於無窮數列的敘述，何者為真？

(A)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^2=\alpha^2$　(B)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^2=0$

(C)$\{a_n\}$、$\{b_n\}$皆收斂 $\Leftrightarrow \{a_n+b_n\}$收斂　(D)$\{a_n\}$、$\{b_n\}$皆收斂 $\Leftrightarrow \{a_n\cdot b_n\}$收斂

(5) 設一袋中有 3 個黑球、2 個白球，小安從袋中取球，取後放回，設第 n 次取球小安才取得黑球的機率為 p_n，試回答下列問題：

(a)試求 p_n。(以 n 表示)　(b)試求$\lim\limits_{n\to\infty}p_n$等於多少？

(c)試求小安沒有取得黑球的機率

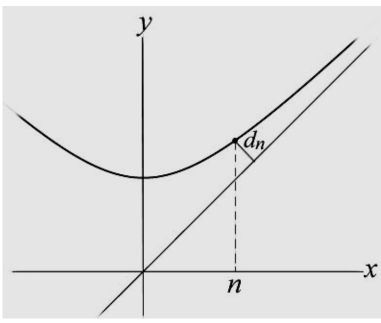
(6) 已知$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{5n-1}{3n+2}-a_n)=7$，且$\langle a_n\rangle$是收斂數列，試求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$？

(7) 設 n 為正整數，坐標平面上有一等腰三角形 ABC，它的三個頂點分別是 A(0,1)、B($\dfrac{1}{n}$,0)、C($-\dfrac{1}{n}$,0)，回答下列問題：

(a)試求 $\sin\dfrac{A}{2}$、$\cos\dfrac{A}{2}$、$\sin A$

(b)用 n 來表示此三角形的外接圓直徑長 D_n，

(c)試求$\lim\limits_{n\to\infty}D_n$等於多少？



(8) 考慮雙曲線 $y^2-x^2=1$ 圖形的上半部（如圖），取此雙曲線上 x 坐標為 n 的點與漸近線 $y=x$ 的距離，記為 d_n，其中 n 為正整數。則$\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot d_n)$ ＝________。

（以四捨五入取到小數兩位）(2005 指定甲)

(9) 當 n 爲正整數時，令 $x=a_n$、$y=b_n$、$z=c_n$ 爲三元一次聯立方程組

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ -2nx+ny+3z=8n \end{cases}$$

之唯一解，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$？ (2010 指定甲)

(10) 有一數列 $\langle a_n\rangle$ 定義如下：$a_1=2$，$a_2=3$，當 $n\geq 3$ 時，a_n 爲 $a_{n-1}\cdot a_{n-2}$ 除以 5 的餘數，試判斷數列 $\langle \dfrac{a_n}{10^n} \rangle$ 的極限是否存在，若存在求其極限值。

(11) 若 $2.\overline{9}$ 表示無窮級數 $2+\dfrac{9}{10}+\dfrac{9}{10^2}+\ldots\ldots$ 之和，則下列敘述那些是正確的？

(A) $2.\overline{9}<3$ (B) $2.\overline{9}=3$ (C) $2.\overline{9}\leq 3$ (D) $2.\overline{9}$ 的整數部分是 2
(E) $2.\overline{9}$ 的整數部分是 3。

(12) 求下列無窮級數之和：

(a) $\dfrac{4}{5}+(\dfrac{4}{5})^2+(\dfrac{4}{5})^3+\ldots$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{7^{k+1}}$ (c) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{27}-\dfrac{16}{81}+\ldots$

(13) 求下列無窮級數的和：

(a) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{27}+\ldots=$？ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-2}+4+(-1)^{n+1}}{5^{n-1}}=$？

(c) $0.7+0.077+0.00777+0.0007777+\ldots+0.\overbrace{00\ldots0}^{n-1個0}\overbrace{77\ldots7}^{n個7}+\ldots$

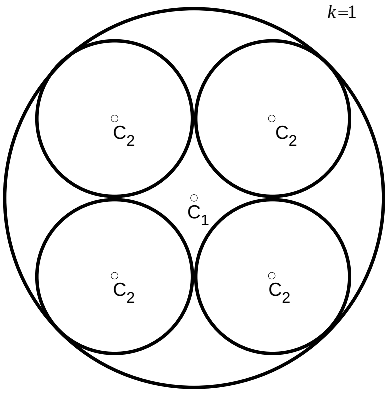
(d) $0.22+0.0202+0.002002+0.00020002+\ldots$

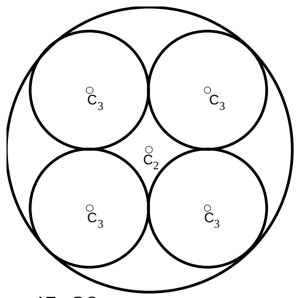
(14) 某一無窮等比數列之和爲 28，其各項之平方和爲 112，求此級數的首項與公比。

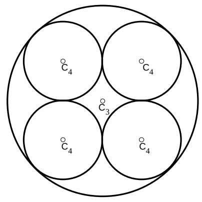
(15) 設無窮等比級數 $1+\dfrac{1}{3}+(\dfrac{1}{3})^2+\ldots$ 的和爲 S，其前 n 項之和爲 S_n，

(a)試求 S=？ (b)前 n 項的和 $S_n=$？ (c)若 $|S-S_n|<\dfrac{1}{1000}$，則 n 至少爲多少？

(16) 設 C_1、C_2、C_3…爲一群圓，其作法如下：C_1 是半徑爲 a 的圓，在圓 C_1 的內部作四個相等的圓 C_2(如圖)，每個圓 C_2 和圓 C_1 都內切，且相鄰的兩個圓 C_2 外切；再由任一個圓 C_2 中用同樣的作法得到四個圓 C_3，依此類推可作出 C_4、C_5、….。
(a)求圓 C_2 的半徑長(用 a 表示) (b)假設每一個 C_k 之面積爲 a_k(其中 $k=1,2,3,,n,$)，求面積和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k=$？(用 a 表示)







(17) 甲乙兩人輪流丟一個公正骰子，約定擲出 6 點者獲勝，經由抽籤決定由甲先投擲骰子，試求甲獲勝的機率。

(18) 設一正三角形 ABC 的邊長為 2，連接各邊中點 A_1,B_1,C_1 形成$\Delta A_1B_1C_1$，再連接其三邊中點形成$\Delta A_2B_2C_2$，依此規則繼續下去，試求這些三角形的面積總和。

(19) 有一條長度為 1 的繩子，切取$\frac{2}{3}$為周長做一正三角形，令其面積為 S_1，從剩下的$\frac{1}{3}$中再切取$\frac{2}{3}$為周長做第二個正三角形，令其面積為 S_2，依此規則下取得到的正三角形的面積為 S_3、S_4、…，試問這些三角形面積的總和=？

(20) 設 a,b 均為實數，若$\frac{a}{2^1}+\frac{b}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\frac{b}{2^4}+\ldots+\frac{a}{2^{2n-1}}+\frac{b}{2^{2n}}+\ldots=3$，則 $2a+b$=____。 (87 學科)

(21) (a)試求 $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+n}$的和。

(b)試求無窮級數 $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+n}+\ldots$之和。

(22) 在坐標平面上， L：$\sqrt{3}x-y=0$，由 $A_1(2,0)$作 L 的垂線，其垂足為 B_1，再由 B_1 向 x 軸作垂線，其垂足為 A_2，再由 A_2 作 L 之垂線，其垂足為 B_2，以此類推，可得 A_3、B_3、A_4、B_4、…，則$\overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}+\overline{A_3B_3}+\ldots$之和。

(23) (a)證明：$k\leq\sqrt{k(k+1)}\leq k+1$。

(b)證明：$\frac{n(n+1)}{2}\leq\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}\leq\frac{n(n+3)}{2}$。

(c)求$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)})$=？

(24) 設 n 為正整數，對於三次方程式 $nx^3+nx-1=0$ 而言，

(a)證明此方程式恰有一實根。

(b)證明此實根介於 0 與$\frac{1}{n}$之間。

(c)對於正整數 n 而言，可令三次方程式 $nx^3+nx-1=0$ 的實根 x_n 形成了一個數列$\langle x_n\rangle$，試求$\lim_{n\to\infty}x_n$。

進階問題

(25) 設矩陣 A=$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}$，且數列<$a_n$>與<$b_n$>滿足 A$\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix}a_{n+}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}$，$n$=1,2,…，且 a_1=3，b_1=−1。試求下列各小題：

(a)A^n=？ (b)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$=？ (c)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$=？

(26) 求下列的極限：

(a)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-4^{n+1}}{3^{n+1}-5^{n+1}}$=？ (b)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$=？

(c)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2-2}}{\sqrt[3]{n^3-2n}+\sqrt{n-4}}$ =？(d)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$=？

(e)$\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{\dfrac{n-3}{n+1}}-n)$=？ (f)$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2+3n}{n+1}-\dfrac{n^3}{n^2+1})$=？

(27) 求下列數列的極限：

(a)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[8]{n^4+1}-\sqrt[4]{n^2+1})$=？ (b)$\lim\limits_{n\to\infty}n^3(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-\sqrt{2}n)$=？

(c)$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{4^n+3^n}{8^n+3^n})^{\frac{1}{n}}$=？

(28) 求下列各數列的極限：

(a)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+3^n+2^n+1^n}$=？ (b)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n}{n\,!}$ =？ (c)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{3^n}$=？ (d)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[\dfrac{2}{3}n]$=？

(29) (a)若$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ = A[$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$]，請問 A=？

(b)試求$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$=？(c)試求$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$=？

(30) 設 $a_n=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$，試求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$=？

(31) 一數列{a_n}滿足 $a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n=n(n+1)(n+2)$，試求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{a_n}$=？

(32) 試求下列無窮級數的和：

(a)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+2+\ldots+2^n}{3^n}$=？ (b)$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{k^2}{3n^3})$ (c)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2-1}$ (d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k}{5^k}$=？

(33) 設 a_n 為 15^n 之正因數總和，則$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{15^n}$ =？

(34) 設{a_n}為一數列，如果 c 為某一實數且對於任意正整數而言，$a_n\geq c$ 都成立，則稱 c 為數列{a_n}的下界。已知數列{a_n}滿足 $a_1=p>\sqrt{k}$ 且 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{k}{a_n})$，其中 n 為任意正整數，且 k 為正定數。

(a)試證明：數列$\{a_n\}$有下界。
(b)試證明：$a_{n+1}\leq a_n$，n 爲任意正整數。
(c)試求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$=？

(35) (a)試證$\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}$。(2b)求$\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}=$？

(36) 設數列 $a_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(a)證明：$2(\sqrt{n+1}-1)<a_n<2\sqrt{n}$ (b)求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$=？

綜合練習解答

(1) (a)1 (b)發散 (c)$\frac{5}{3}$ (d)0 (e)發散

(2) (a)$\frac{3}{2}$ (b)$\frac{2}{9}$ (c)1 [$\frac{n^2-1}{n+1}-\frac{n^2+2}{n+2}=\frac{n-4}{n+2}$] (d)$-3$

(3) (B)(E)

(4) (B)

(5) (a)$p_n=(\frac{2}{5})^{n-1}(\frac{3}{5})$ (b)0

(c) 0[提示：小安沒有取得黑球的機率$=1-\sum_{n=1}^{\infty}p_n$]

(6) $\frac{26}{7}$

(7) (a) $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$、$\cos\frac{A}{2}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$、$\sin A=\frac{2n}{n^2+1}$ (b)$D_n=\frac{n^2}{n^2+1}$ (c)1

(8) 0.35

(9) -2

[解法]：

由 $x+y+z=0$ 與 $x+2y+3z=0$，可以解得 $x=t$、$y=-2t$、$z=t$

再代入$-2nx+ny+3z=8n$，可得$-2nt+n(-2t)+3t=8n\Rightarrow t=\frac{8n}{3-4n}$

所以 $a_n=\frac{8n}{3-4n}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{8n}{3-4n})=-2$。

(10) 0

根據數列的規則，可以得知$\langle a_n\rangle$：2,3,1,3,3,4,2,3,1,3,3,4…..(週期性數列)

$a_n\le 5$，$\frac{a_n}{10^n}\le\frac{5}{10^n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(11) (B)(C)(E)

(12) (a)4 (b)$\frac{1}{4}$ (c)$\frac{2}{5}$

(13) (a)$\frac{7}{4}$ (b)$\frac{20}{3}$ (c)$\frac{700}{891}$ [提示：原式$=\frac{7}{9}$ (0.9+0.099+0.00999+….)](d)$\frac{24}{99}$[提示：每一項拆成兩個分數之和，例如：$0.0202=\frac{2}{100}+\frac{2}{10000}$]

(14) 7，$\frac{3}{4}$ [提示：將一個無窮等比級數的各項平方，依然是一個無窮等比級數，且公比為原來公比的平方]

(15) (a)$\frac{3}{2}$ (b) $\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]$ (c)7

(16) (a) $(\sqrt{2}-1)a$ (b)$(\frac{\sqrt{2}+1}{2})\pi a^2$

[解法]：

設圓 C_k 之半徑為 r_k

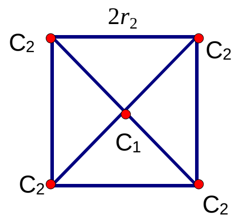
(a)如右圖所示，可得 $a-r_2=\overline{C_1C_2}=\sqrt{2}\ r_2$ $\therefore r_2=\frac{a}{\sqrt{2}+1}$

(b)同理 $r_2-r_3=\sqrt{2}\ \ r_3 \Rightarrow r_3=\dfrac{r_2}{\sqrt{2}\ +1}$依此規律可得 $r_n=\dfrac{r_{n-1}}{\sqrt{2}\ +1}$

$\Rightarrow \dfrac{r_3}{r_2}=\dfrac{r_4}{r_3}=\ldots\ldots=\dfrac{r_n}{r_{n-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\ +1}\Rightarrow$ $\langle r_n \rangle$形成一個等比數列

且公比爲$\dfrac{1}{\sqrt{2}\ +1}=\sqrt{2}\ -1\Rightarrow \dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\ldots\ldots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=(\sqrt{2}\ -1)^2$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\frac{a^2\pi}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi a^2$



(17) $\dfrac{6}{11}$

(18) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

(19) $\dfrac{\sqrt{3}}{72}$

(20) 9

(21) (a) $2(1-\dfrac{1}{n+1})$ (b)2

(22) $\dfrac{-65}{24}$

(23) (c)$\dfrac{1}{2}$

(24) (a)$f'(x)=3nx^2+n\geq 0$ 恆成立，因此 $f(x)$爲遞增函數，
故 $f(x)$的圖形只與 x 軸交一點。
(b)$f(0)f(\dfrac{1}{n})<0$ (c)$0<x_n<\dfrac{1}{n}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

(25) (a) $\begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{-1}{3})^n \end{bmatrix}$(b)0 (c)$\dfrac{21}{4}$

(26) (a)$\dfrac{-1}{5}$ (b)1 (c) $\sqrt{3}$ (d) $\dfrac{1}{2}$ (e)-2(f)2

(27) (a)0 (b)$\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ (c)$\dfrac{1}{2}$[提示：(a) $\sqrt[8]{n^4+1}-\sqrt[4]{n^2+1}=\dfrac{\sqrt[4]{n^4+1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[8]{n^4+1}+\sqrt[4]{n^2+1}}$

(b) $n^3(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-\sqrt{2}n)=n^3\dfrac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+\sqrt{2}n}$

$=n^3\cdot\dfrac{(\sqrt{n^4+1}-n^2)(\sqrt{n^4+1}+n^2)}{(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+\sqrt{2}n)(\sqrt{n^4+1}+n^2)}$ (c) $(\dfrac{4^n}{8^n})^{\frac{1}{n}}\leq(\dfrac{4^n+3^n}{8^n+3^n})^{\frac{1}{n}}\leq(\dfrac{2\cdot 4^n}{8^n})^{\frac{1}{n}}$

(28) (a)4 (b)0 (c)0 (d)$\dfrac{2}{3}$

[提示：(a)$\sqrt[n]{4^n}\leq\sqrt[n]{4^n+3^n+2^n+1^n}\leq 4\cdot 4^n$ (b)仿照練習 8 的做法]

(c)$3^n=(2+1)^n=2^n+C^n_1 2^{n-1}+C^n_2 2^{n-2}+C^n_3 2^{n-3}+\ldots\Rightarrow\dfrac{n^3}{3^n}\leq\dfrac{n^3}{C^n_3}$。

(d)設$[\dfrac{2}{3}n]=k$，$k\leq\dfrac{2}{3}n<k+1\Rightarrow\dfrac{3k}{2}\leq n<\dfrac{3}{2}(k+1)\Rightarrow\dfrac{2k}{3(k+1)}<\dfrac{k}{n}<\dfrac{2}{3}$。]

(29) (a) $\frac{1}{4}$ (b)$\frac{1}{4}[\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}]$ (c)$\frac{1}{12}$

(30) $\frac{1}{2}$

[提示：$a_n=\frac{(2-1)(2+1)}{2\cdot 2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3\cdot 3}\cdots\cdots\frac{(n-1-1)(n-1+1)}{(n-1)(n-1)}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\frac{n+1}{2n}$]

(31) $\frac{2}{3}$ [提示：$na_n=n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)=3n(n+1)\Rightarrow a_n=3(n+1)$]

(32) (a)$\frac{7}{2}$ [提示：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\ldots+2^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{3^n}=\frac{7}{2}$]

(b)$\frac{8}{9}$ [提示：$\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n}-\frac{k^2}{3n^3})=1-\frac{1}{3n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=1-\frac{1}{3n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$]

(c)$\frac{3}{4}$ [提示：先求 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$](d) $\frac{5}{16}$

[提示：求 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{5^k}=\frac{5}{16}[1-(\frac{1}{5})^n]-\frac{4}{5}(\frac{n}{5^{n+1}})$]

(33) $\frac{15}{8}$

(34) (c)$\sqrt{k}$

(1) 1° 當 $n=1$時，$a_1=p>\sqrt{k}$ 成立

2° 設 $n=m$時成立，即 $a_m>\sqrt{k}$

則 $a_{m+1}=\frac{1}{2}(a_m+\frac{k}{a_m})\geq\sqrt{a_m\cdot\frac{k}{a_m}}=\sqrt{k}$ 亦成立故知數列$\langle a_n\rangle$有下界

(2) $a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}(a_n+\frac{k}{a_n})=\frac{a_n{}^2-k}{2a_n}>0$ （由(1)）

$\Rightarrow a_{n+1}\leq a_n$ 即數列$\langle a_n\rangle$爲遞減數列

(3) 因數列$\langle a_n\rangle$爲有下界且遞減的數列，由實數完備性知數列$\langle a_n\rangle$會收斂

設 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha>0$ $\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}(\alpha+\frac{k}{\alpha})\Rightarrow\alpha=\sqrt{k}$ 所以 $\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{k}$

(35) (a) [提示：$(1+\sqrt{\frac{2}{n}})^n=1+C^n_1\sqrt{\frac{2}{n}}+C^n_2(\sqrt{\frac{2}{n}})^2+\ldots>1+C^n_2(\sqrt{\frac{2}{n}})^2=n$]

(b)1(利用夾擠原理)

(36) (a)略 (b)2

[提示：因爲$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}$ 所以 $\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$]

補充教材

實數完備性：

若數列$\{a_n\}$中有 $a_n \le a_{n+1}$ 的性質，則稱數列$\{a_n\}$爲一個遞增數列。

若數列$\{a_n\}$中有 $a_n \ge a_{n+1}$ 的性質，則稱數列$\{a_n\}$爲一個遞減數列。

若數列$\{a_n\}$中的每一項 $a_n \le \mathrm{M}$，則稱 M 爲數列$\{a_n\}$的上界。

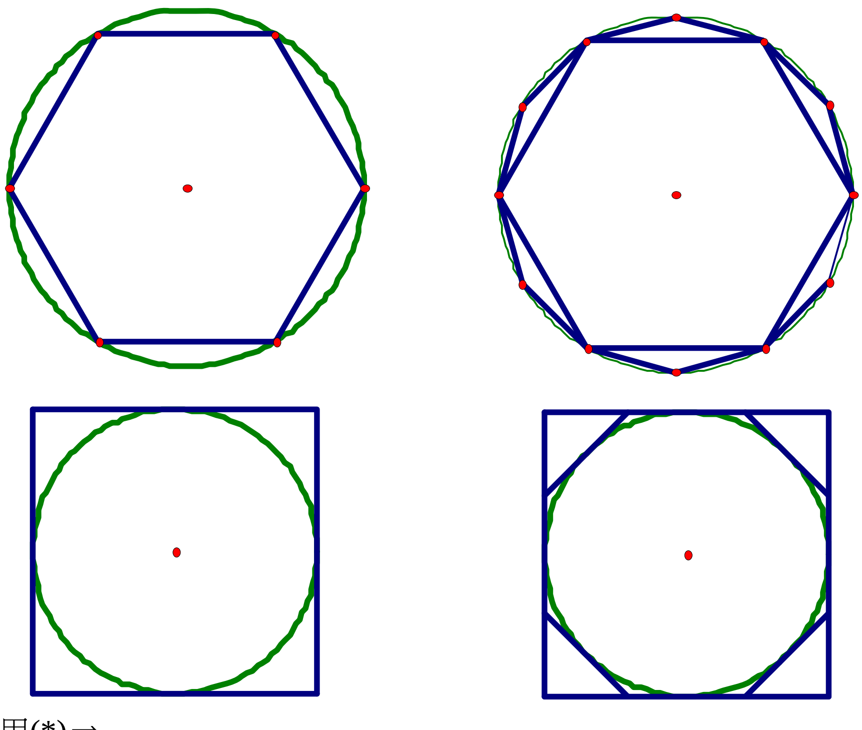
若數列$\{a_n\}$中的每一項 $a_n \ge m$，則稱 m 爲數列$\{a_n\}$的下界。

實數完備性：遞增(減)有上(下)界的數列必收斂。

(a)π的定義，以圓面積的求法爲例：

(*)圓面積$=\lim\limits_{n\to\infty}$(圓內接正 n 邊形面積)$=\lim\limits_{n\to\infty}$(圓外切正 n 邊形面積)

(**)圓周長$=\lim\limits_{n\to\infty}$(圓內接正 n 邊形周長)$=\lim\limits_{n\to\infty}$(圓外切正 n 邊形周長)



利用(*)⇒

(a)計算π的近似值

(b)證明圓面積$=\pi r^2$，r 爲圓之半徑。

(c)證明半徑爲 r 的圓，周長爲 $2\pi r$。

[說明]

設 A_n 爲圓內接正 n 邊形的面積，顯然 $\mathrm{A}_n \le \mathrm{A}_{n+1}$，且 $\mathrm{A}_n \le$圓面積

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{A}_n$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{A}_n=$圓面積

另外 $\mathrm{A}_n=\frac{1}{2}\times$(中心到邊的距離 l_n)$\times$周長，且圓內接正 n 邊形的周長與 l_n 比爲定值(只要

這 n 固定，這個比例就確定了)。

透過極限的過程 ⇒圓面積=$\frac{1}{2}$×半徑×圓周長，且圓的周長與直徑比爲定值(定義爲π)。

⇒圓面積=πr^2，圓周長=$2\pi r$。

歷史上阿基米得、劉徽分別使用外切圓、內接圓的方法處理圓周長、圓面積的問題，進一步求π的近似值。(阿基米得以$\frac{22}{7}$爲π的近似值，而劉徽以 3.1416 爲π的近似值)

(b)e 的定義，以複利的計算爲例：(補充)

設年利率爲 r，$\frac{1}{n}$年爲一期，一年有 n 期，本金爲 A，複利計算則一年後的本利和爲 $A(1+\frac{r}{n})^n$，當期數 n 增加時，本利和 $A(1+\frac{r}{n})^n$ 會不會無限大的增加，或是會接近一個值呢？

當然問題的關鍵在於$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$是否存在呢？

設 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$，我們可以證明$\{a_n\}$遞增有上界！

[遞增]：因爲 $\dfrac{\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}+\dots+\frac{n+1}{n}+1}{n+1}\geq\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}\cdot 1}$ 所以 $a_{n+1}\geq a_n$。

[有上界]：

$a_n=(1+\frac{1}{n})^n$

$=C_0^n\cdot 1^n+C_1^n 1^{n-1}\cdot(\frac{1}{n})+\dots+C_k^n 1^{n-k}(\frac{1}{n})^k+\dots+C_n^n(\frac{1}{n})^n$

考慮 $C_k^n(\frac{1}{n})^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{1}{n})^k=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}(\frac{1}{n})^k=\frac{1}{k!}$

$\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\leq\frac{1}{k!}$

$\Rightarrow a_n\leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+2(1-\frac{1}{2^n})<3$ (因爲 $n!\geq 2^{n-1}$)

根據實數的完備性，可證明$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在，定義 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$。

e 的近似值爲 2.71828….。

因爲 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$，所以可以推得$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$。

[例題1] 設 $a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$

(1)試證明：數列$\{a_n\}$是遞增數列。

(2)試證明：數列$\{a_n\}$有上界。

(3)請說明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在。

[例題2] 一數列$\{a_n\}$，已知 $a_1=4$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{9}{a_n})$，$\forall n\in N$，

(1)證明：$a_n\geq 3$。(2)證明：$\{a_n\}$爲遞減數列。 (3)求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$？

Ans：(3)3

(練習1)

設 $a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$

(1)請證明$\{a_n\}$爲遞增數列。

(2)試證明：$1\leq a_n\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

(3)請說明數列$\{a_n\}$極限存在，求極限值。Ans：(3)$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(練習2) 已知 $a_1=\sqrt{2}, a_n=\sqrt{2a_{n-1}}$ ，$n=2,3,4,\ldots.$ ，則$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$？Ans：2