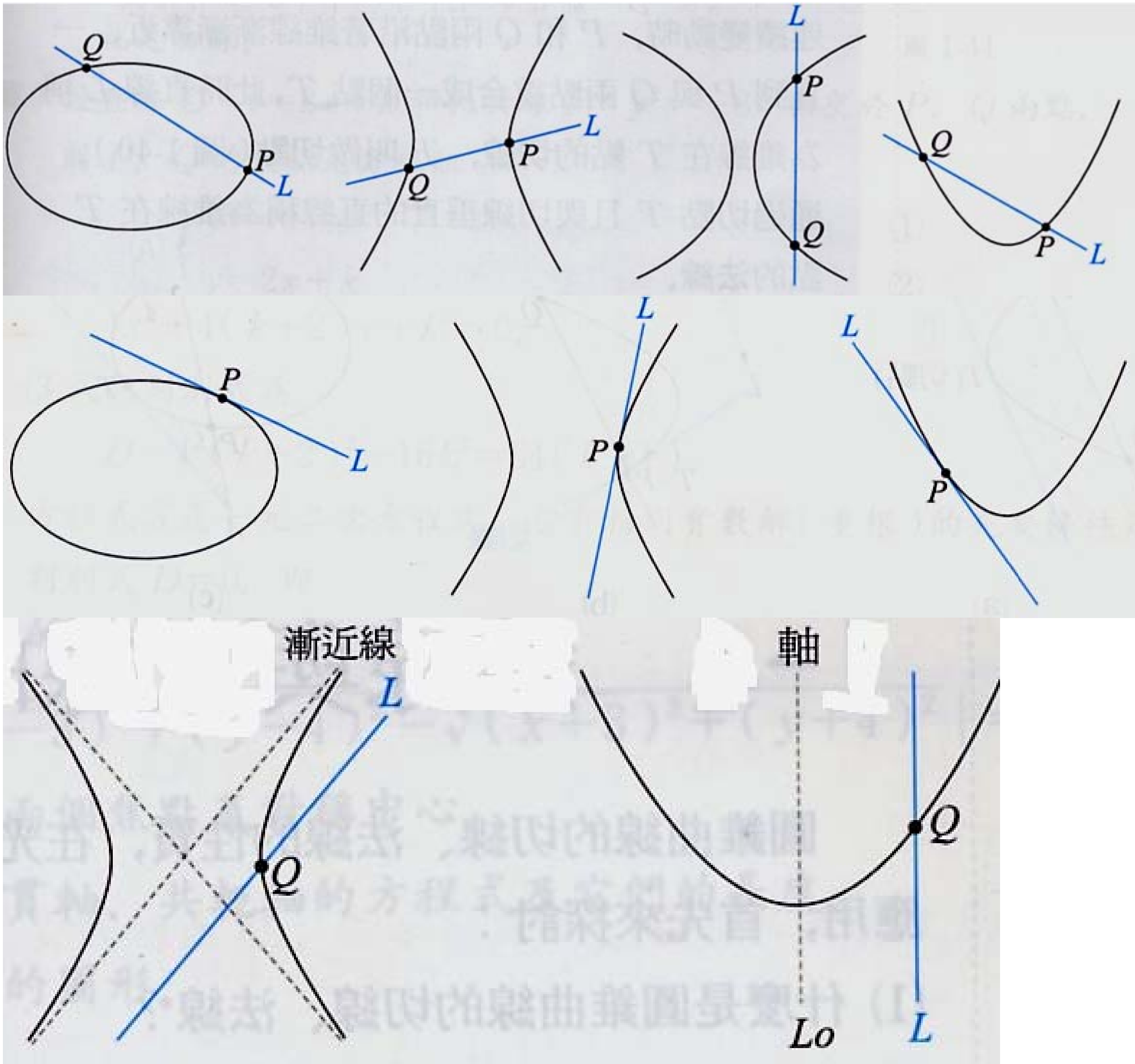
§1–4 圓錐曲線與直線的關係

(甲)圓錐曲線與直線的關係

(1)直線與錐線的關係：



(2)原理：

設圓錐曲線Γ：$f(x,y)=ax^2+by^2+cx+dy+e=0$，直線L：$px+qy+r=0$

討論Γ與L的交點個數 ⇔ 討論$\begin{cases} f(x,y)=0\cdots\cdots\cdots\cdot(1) \\ px+qy+r=0\cdots\cdot\cdot(2) \end{cases}$的實數解$(x,y)$的個數將(2)中L的方程式$px+qy+c=0$ 代入(1)(消去其中一個變數y)，化成一個一元二次(或一元一次)方程式$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}=0$，則得到

(a)當$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}=0$ 有兩個相異實數解，L與Γ交於相異兩點。

(b)當$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}=0$ 有一個實數解，L與Γ交於一點。

(c)當$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}=0$ 有沒有實數解，L與Γ沒有交點。

[例題1] xy 平面上有直線 L：$y=mx+3$ 與橢圓Γ：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，試由 m 值討論直線 L 與橢圓的相交情形。

Ans：(1)$m>\frac{\sqrt{5}}{3}$或 $m<-\frac{\sqrt{5}}{3}$ Γ與 L 相交兩點(2)$m=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$Γ與 L 只有一個交點

(3) $-\frac{\sqrt{5}}{3}<m<\frac{\sqrt{5}}{3}$ Γ與 L 不相交

[例題2] 設Γ：$y^2=4x$外一點A(−1,0)，請問通過A且與Γ交於一點的直線方程式。

Ans：$y=0$ 或$y=(x+1)$或$y=-(x+1)$

(練習1) 直線$y=mx+2$ 不與雙曲線 $4x^2-9y^2=36$ 相交，求m的範圍。

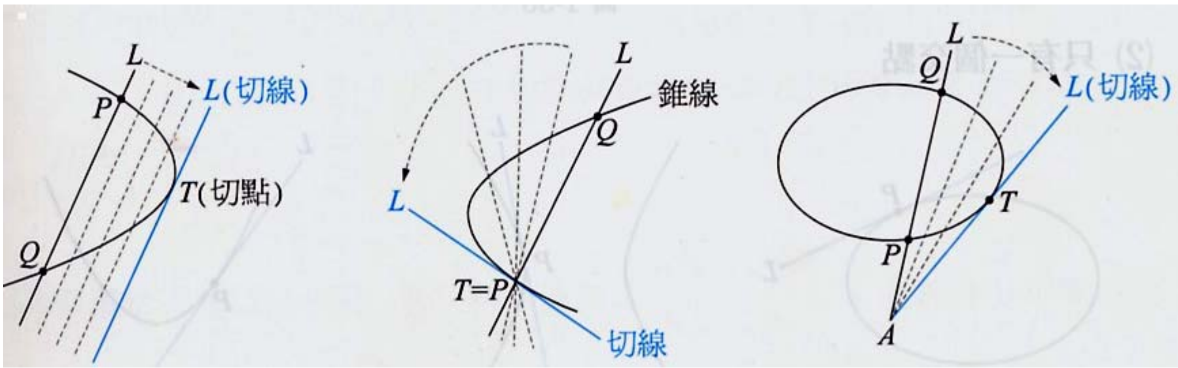
Ans：$m>\frac{2\sqrt{2}}{3}$或$m<-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(乙)圓錐曲線的切線

上圖中拋物線的軸L_0與其僅交於一點，但並不是切線，因此與錐線僅交於一點的直線並不一定是切線，那麼切線應如何定義呢？

(1)切線的定義：

設直線 L 與錐線Γ相交於 P、Q 兩點，當直線 L 連續變動時，P 和 Q 兩點沿著錐線漸漸靠近，一直到 P 與 Q 兩點重合成一個點 T，此時直線 L 稱為錐線Γ在 T 點的**切線**，T 點稱為**切點**。通過切點 T 且與切線垂直的直線稱為錐線在 T 點的**法線**。



事實上，若直線 L 與圓錐曲線Γ交於一點，除了「Γ爲雙曲線且 L 平行其漸近線」與「Γ爲拋物線且 L 平行其對稱軸」的兩個情形外，直線 L 一定是圓錐曲線Γ的切線。

但是這個定義牽涉到微積分的知識，超出高中數學的範圍。因此在這裡我們處理錐線的切線問題，依然使用之前所提及的原理，只是有時要利用其他性質來輔助。

(2)切線方程式的求法：

根據之前的原理，我們分成以下幾個型態：

(a)**已知切線斜率求切線方程式：**

[例題3] 設拋物線的方程式$y^2=-8x$，試求斜率$m=2$之切線方程式，並求切點。

Ans：$y=2x-1$，$(\frac{-1}{2},-2)$

[例題4] 設錐線Γ：$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$ ，$(AB\neq 0)$

若有斜率 m 的切線，則此切線的方程式爲 $y=mx\pm\sqrt{Am^2+B}$ 。

(練習2) 若設拋物線$y^2=4cx$，則斜率爲m的切線方程式爲$y=mx+\frac{c}{m}$。

(練習3) 若設拋物線$x^2=4cy$，則斜率爲m的切線方程式爲$y=mx-cm^2$。

結論：

(1)給定斜率求切線：

圓錐曲線	斜率 **m** 的切線
$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$	$y=mx\pm\sqrt{Am^2+B}$
$y^2=4cx$	$y=mx+\frac{c}{m}$
$x^2=4cy$	$y=mx-cm^2$

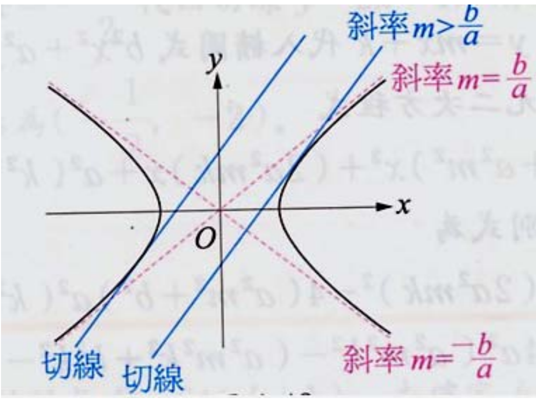
(2)將上表中的方程式沿向量$\vec{l}=(h,k)$平移時，

切線方程式亦隨之沿向量$\vec{l}=(h,k)$平移。

圓錐曲線	斜率 **m** 的切線
$\frac{(x-h)^2}{A}+\frac{(y-k)^2}{B}=1$	$y-k=m(x-h)\pm\sqrt{Am^2+B}$
$(y-k)^2=4c(x-h)$	$y-k=m(x-h)+\frac{c}{m}$
$(x-h)^2=4c(y-k)$	$y-k=m(x-h)-cm^2$

[**例題5**] 根據上表的切線公式，雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的切線方程式爲$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

請討論 m 的值與切線的存在性。



(練習4) 試求下列各曲線Γ中，斜率爲m的切線：

(1)Γ：$x^2+y^2-4x+2y=0$，　$m=\frac{4}{3}$

(2)Γ：$y=x^2-3x+5$，$m=2$

(3)Γ：$\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{y^2}{2}=1$　，$m=-2$

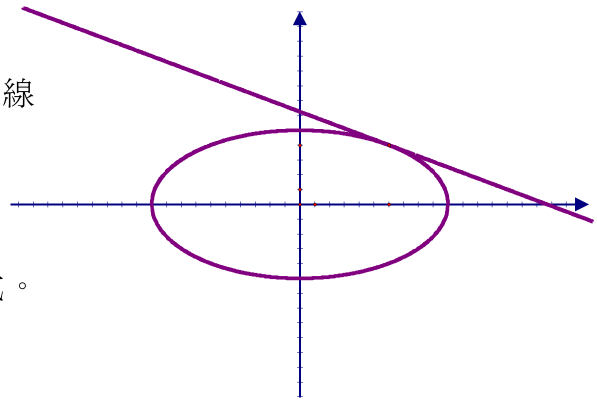
Ans：(1)$y=\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}\pm\frac{5\sqrt{5}}{3}$ (2)$y=2x-\frac{5}{4}$　(3)$y=-2x+2\pm\sqrt{6}$

(練習5) 求垂直於 $3x-2y+1=0$ 且與$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$ 相切的直線方程式。

Ans：$2x+3y\pm8=0$

(練習6) 設雙曲線Γ：$4x^2-9y^2+8x+36y-68=0$，依下列各斜率作切線，求其方程式。(1)m=2(2)m=$\frac{2}{3}$(3)m=$\frac{1}{2}$(4)m=$\frac{-1}{2}$(5)m=$\frac{-2}{3}$

Ans：(1)$y=2x+4\pm4\sqrt{2}$ (2)(3)(4)(5)無法作切線



(b)已知切點求切線方程式：

例子：

求過橢圓$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ 上一點 P(6,4)的切線方程式。

[解法]：

設過 P 的切線之斜率爲 m，根據切線公式，切線方程式爲 $y=mx\pm\sqrt{100m^2+25}$

根據圖形可得切線爲$y=mx+\sqrt{100m^2+25}$　，又切線通過P(6,4)

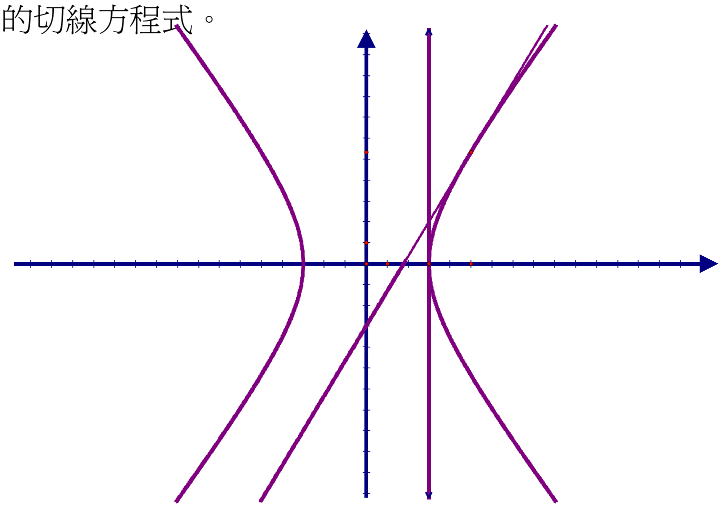
$\Rightarrow 4=6m+\sqrt{100m^2+25}$ $\Rightarrow 64m^2+48m+9=0$ $\Rightarrow m=\frac{-3}{8}$。

$\Rightarrow$切線方程式爲$y-4=(\frac{-3}{8})(x-6)$。

[例題6] 求過雙曲線Γ：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 上點 P 的切線方程式。

(1)P(5,$\frac{16}{3}$)　(2)P(3,0)

Ans：(1)$y-\frac{16}{3}=\frac{5}{3}(x-5)$　(2)$x=3$



一般情形：(證明僅供參考)

圓錐曲線$ax^2+cy^2+dx+ey+f=0$ 上點$P(x_0,y_0)$的切線L方程式為

$$\boldsymbol{ax_0x+cy_0y+d(\frac{x_0+x}{2})+e(\frac{y_0+y}{2})+f=0}\text{。}$$

$$\boldsymbol{[x^2\to x_0x\text{，}y^2\to y_0y\text{，}x\to\frac{x_0+x}{2}\text{，}y\to\frac{y_0+y}{2}\text{，}f\to f]}$$

[證明]：

設切線斜率為m，則L的方程式為$y-y_0=m(x-x_0)$，化為$y=mx-mx_0+y_0$

代入Γ的方程式，得$ax^2+c(mx-mx_0+y_0)^2+dx+e(mx-mx_0+y_0)+f=0$

展開後得$(a+cm^2)x^2+[2cm(y-mx_0)+d+em]x+[c(y_0-mx_0)+e(y_0-mx_0)+f]=0\ldots(*)$

因為切線L與Γ的方程式僅切於一點$P(x_0,y_0)$，因此$(*)$可解出重根$x=x_0$。

由根與係數的關係$\Rightarrow 2x_0=-\dfrac{2c(y-mx_0)+d+em}{a+cm^2}$

$\Rightarrow m(2cy_0+e)=-2ax_0-d$

$\Rightarrow m=-\dfrac{2ax_0+d}{2cy_0+e}$

切線L的方程式為$y-y_0=(-\dfrac{2ax_0+d}{2cy_0+e})(x-x_0)$

$\Rightarrow(2ax_0+d)(x-x_0)+(2cy_0+e)(y-y_0)=0$

展開整理成$(2ax_0x+2cy_0y+dx+ey)-2(ax_0^2+cy_0^2)-(dx_0+ey_0)=0$

又點$P(x_0,y_0)$在曲線Γ上$\Rightarrow ax_0^2+cy_0^2=-(dx_0+ey_0+f)$　代入上式可得

$(2ax_0x+2cy_0y+dx+ey)+(dx_0+ey_0+2f)=0$

$\Rightarrow ax_0x+cy_0y+d(\dfrac{x_0+x}{2})+e(\dfrac{y_0+y}{2})+f=0$。

(練習7) 求下列切線方程式：

(1)過點(1,−2)且與橢圓 $2x^2+y^2-3x-2y-7=0$ 相切。

(2)過點(2,4)且與雙曲線$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 相切。

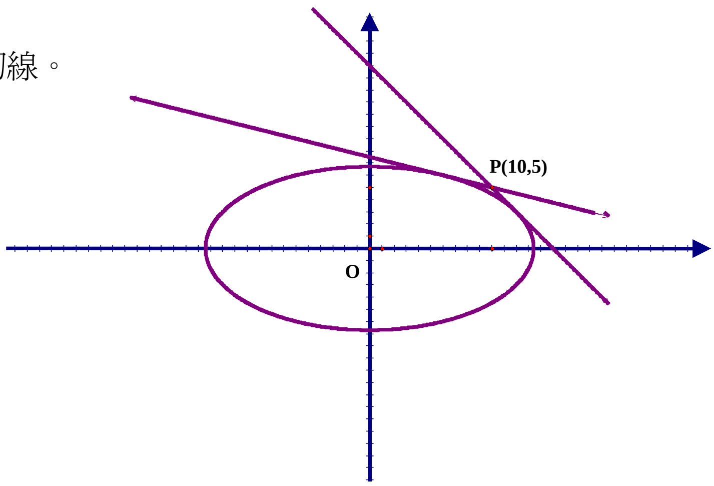
(3) 拋物線$x^2+x-y-8=0$ 在點T(2,−2)的切線方程式。

Ans：(1)$x-6y-13=0$　(2)$10x-3y-8=0$ (3)$5x-y-12=0$

(練習8) 若$x^2+4y^2+2x-19=0$ 之一切線為$x-4y+11=0$，求切點T。Ans：T(−3,2)

(c)過錐線外一點求切線方程式

[例題7] 求自點(10,5)至橢圓$x^2+4y^2=180$ 之切線。

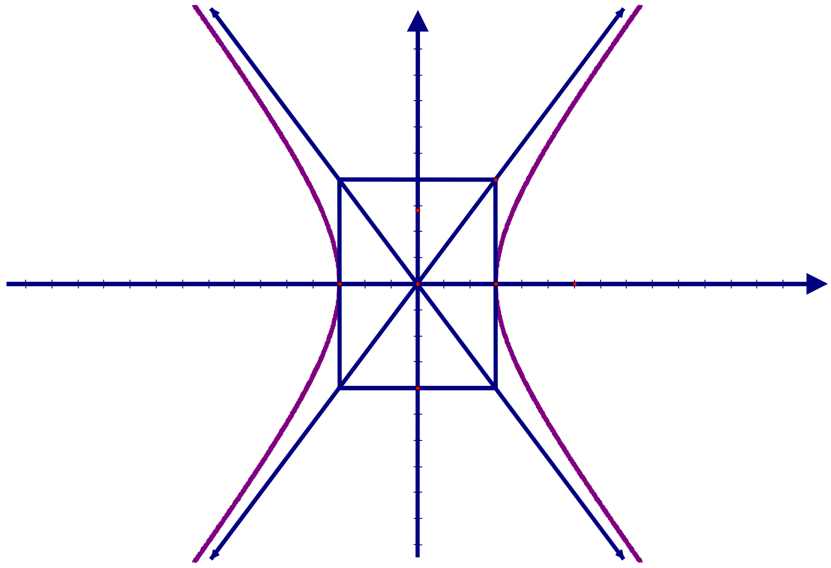


[例題8] 求過雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 上點 P 的切線方程式。

(1)P$(0,2\sqrt{5})$ (2)P(3,0) (3)P(3,5) (4)P(6,8) (5)P(0,0)

Ans：(1)$y=2x+2\sqrt{5}$ 或 $y=-2x+2\sqrt{5}$ (2)$x=3$ (3)$x=3$ 或 $y-5=\dfrac{41}{30}(x-3)$

(4)$y-8=\dfrac{20}{9}(x-6)$ (5)不存在



(練習9) 求過點(0,1)且與拋物線$y^2=4x$相切之直線方程式。

Ans：$x-y+1=0$ 或$x=0$

(練習10) 求自點(2,3)作橢圓$x^2+2y^2=4$ 之切線方程式。

Ans：$x=2$ 或 $7x-12y+22=0$

(練習11) 求過下列各定點所做的雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1$ 的切線方程式。

(1)A(3,0) (2)B(8,5)

Ans：(1)$x\pm\sqrt{5}y-3=0$ (2)$2x-5y+9=0$

(丙)切線性質及應用

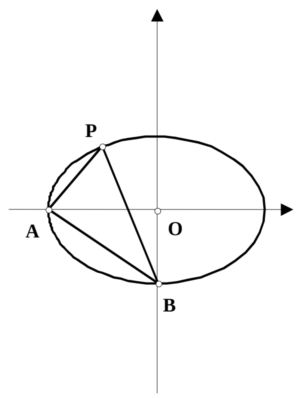
[例題9] 設P爲直線$x+2y=9$ 上一點，Q爲拋物線$y^2+x-3=0$ 上一點，若$\overline{PQ}$最小時，則Q的坐標爲何？　Ans：Q(2,1)

[例題10] 求橢圓$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 在直線 $2x+y-10=0$ 上的投影長。

Ans：$4\sqrt{2}$

[例題11] 如右圖，A、B 爲橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之兩頂點，其中 a,b 爲兩正數，若 P 爲第一象限橢圓弧上一點，則ΔABP 的最大面積爲何？

Ans：$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}ab$　(88 大學自)



(練習12) 橢圓 $4x^2+y^2=4$ 在直線$x-y-4=0$ 的正射影長。　Ans：$\sqrt{10}$

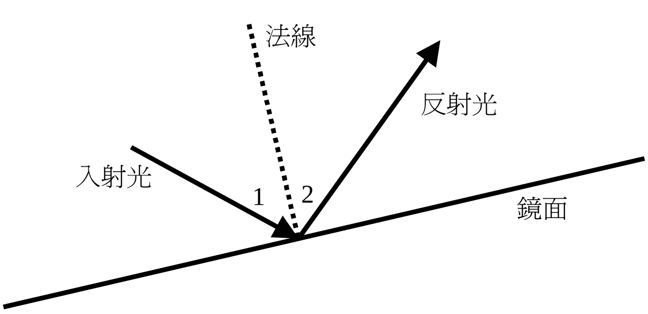
(練習13) 過橢圓$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一點 P 之切線與坐標軸交於 A、B 兩點，求$\overline{AB}$的最小值。　Ans：8

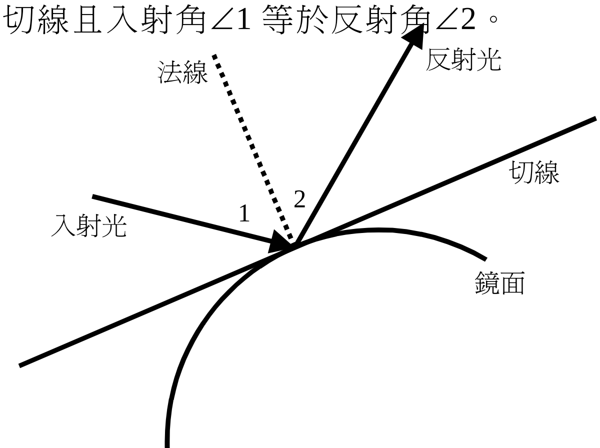
(練習14) 橢圓$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一點 P，且 P 點在第一象限，過 P 作此橢圓之切線 L，L 與 x 軸正向交於 Q，與 y 軸正向交於 Q，令 O 爲原點，
若ΔOQR：ΔOPR=4：3，則 P 之坐標__________。Ans：P($\sqrt{3}$,$\dfrac{3}{2}$)

(練習15) 自橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$a>b>0$ 上一點P作x軸垂線，垂足爲A，又過P之切線與x軸相交於B，試證：$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=a^2$。

(丁)錐線的光學性質

物理上，我們知道光沿直線行進，遇到鏡面則反射，且遵循反射定律：入射光、法線與反射光在同一平面上且入射角∠1 等於反射角∠2。下圖中，若鏡面是曲面，則反射的情形如圖所示，其中法線垂直切線且入射角∠1 等於反射角∠2。



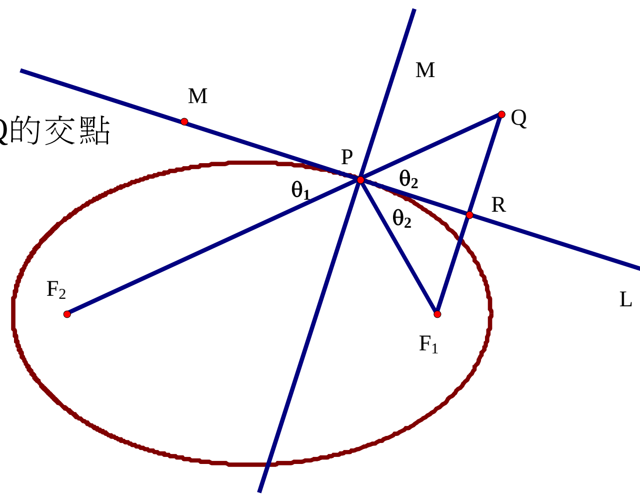


(1)橢圓的光學性質：

若橢圓的焦點爲F_1、F_2，設P是橢圓上的任一點，L是橢圓在P點的切線，則入射光線 $\overrightarrow{F_1P}$ 經過P點的完全反射，反射光線會經過F_2(即反射光線爲 $\overrightarrow{PF_2}$)。 **(過橢圓上的一點P之切線與過P的兩焦半徑夾角相等。)**

[證明]：

(1)證明：$\overline{F_1Q}$的中垂線L爲過P的切線



根據橢圓的作圖，切點P爲$\overline{F_1Q}$的中垂線與直線F_2Q的交點
回憶從前直線L同側有兩點F_1、F_2，
而$F_1P+F_2P=2a$爲直線L上的點到F_1、F_2距離和
的最小值，因此設M爲直線L上異於P的任意點
則$MF_1+MF_2>F_1P+F_2P=2a$因此M在橢圓外。
結果直線L除了P點在橢圓上之外，
其餘的點均落在橢圓外，

所以$\overline{F_1Q}$的中垂線L為過P的切線。

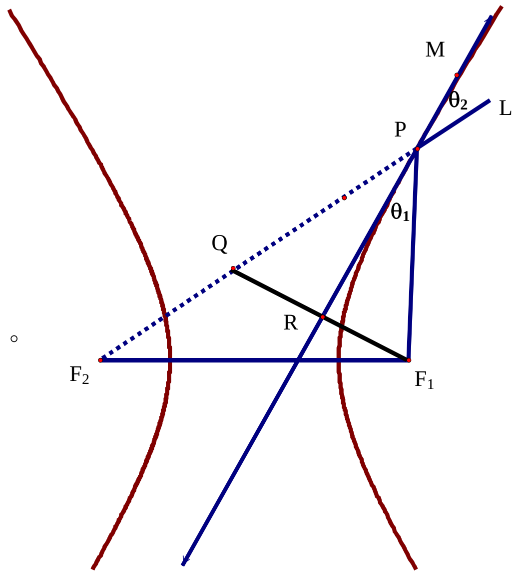
(2)證明：過橢圓上的一點**P**之切線與過**P**的兩焦半徑夾角相等。

由於$\overline{F_1Q}$的中垂線L為過P的切線
$\Rightarrow\angle F_1PR=\angle QPR=\theta_2$，而$\angle F_2PM=\angle QPR=\theta_1$
$\Rightarrow\theta_1=\theta_2$。

(2)雙曲線的光學性質：

若雙曲線的焦點為F_1、F_2，設P是雙曲線上的任一點，L是雙曲線在P點的切線，則入射光線$\overrightarrow{F_1P}$經過P點的完全反射，反射光線會經過F_2(即反射光線為$\overrightarrow{PF_2}$)。
(**過雙曲線上的一點P之切線與過P的兩焦半徑夾角相等。**)

[證明]：



(1) $\overline{F_1Q}$的中垂線L為過P的切線
根據雙曲線的作圖法，

P點是$\overline{F_1Q}$的中垂線與直線F_2Q的交點
因為直線L同側有兩點F_1、F_2，而$|PF_1-PF_2|=2a$
為直線L上的點到F_1、F_2距離差的最大值，
因此設M為直線L上異於P的任意點，
則$|MF_1-MF_2|<|PF_1-PF_2|=2a$，所以M不在雙曲線上。
結果直線L除了P點在雙曲線上之外，
其餘的點均不在雙曲線上，

所以$\overline{F_1Q}$的中垂線L為過P的切線。

(2)證明：
過雙曲線上的一點**P**之切線與過**P**的兩焦半徑夾角相等。

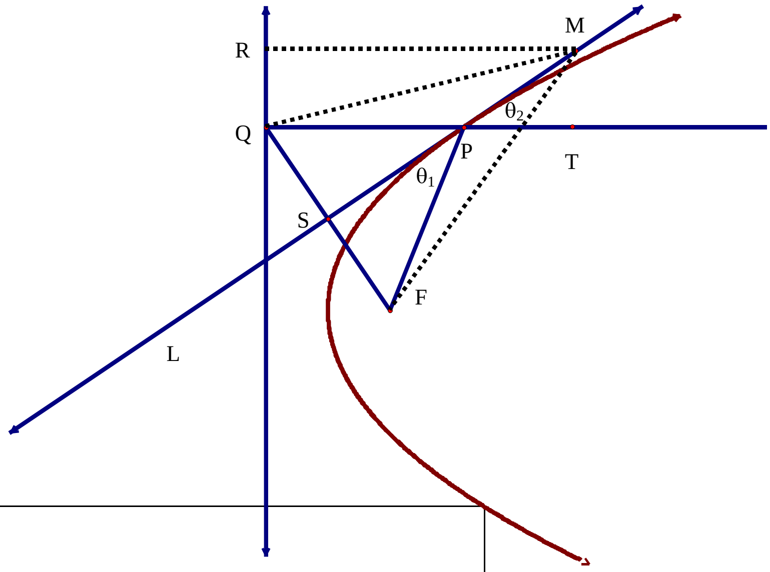
由於$\overline{F_1Q}$的中垂線L為過P的切線
$\Rightarrow\angle F_1PR=\angle QPR=\theta_1$，而$\angle QPR=\theta_2\Rightarrow\theta_1=\theta_2$。

(3)拋物線的光學性質：

若拋物線的焦點為 F，設 P 是拋物線上的任一點，L 是拋物線在 P 點的切線，則入射光線$\overrightarrow{FP}$經過 P 點的完全反射，反射光線會平行對稱軸。
(**過拋物線上的一點 P 之切線與過 P 的焦半徑夾角相等。**)

$\overline{FQ}$的中垂線L為過P的切線(1)證明：$\overline{FQ}$的中垂線L為過P的切線
根據拋物線的作圖法，
設M為中垂線L上異於P的點，
所以$MF=MQ>MR=d(P,L)$
故M點不在拋物線上，且M與F對於L異側

所以$\overline{FQ}$的中垂線L為過P的切線



(2)證明：

過拋物線上的一點**P**之切線

與過**P**的焦半徑夾角相等。

$\theta_1=\angle FPS=\angle QPS=\angle MPT=\theta_2$

結論：

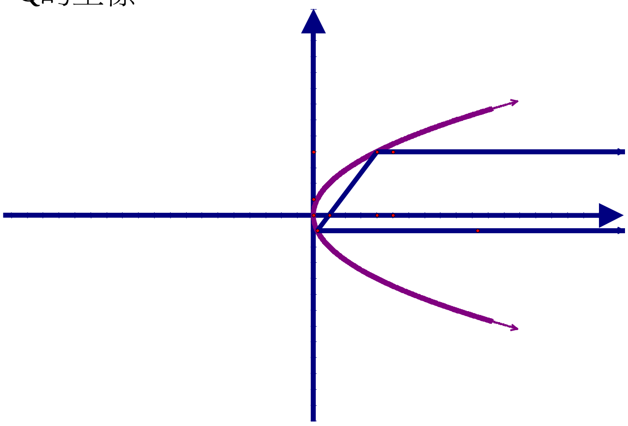
(1)圓錐曲線的光學性質，可以歸結成

「**過圓錐曲線上的一點P之切線與過P的焦半徑夾角相等。**」

(2)設橢圓(雙曲線)上的一點P的切線L，若焦點F_1對於切線L的對稱點Q，則另一焦點F_2、Q、P點三點共線。

[例題12] 設拋物線Γ：$y^2=4x$，一光線從點(5,4)射出，平行Γ的軸射在Γ上的P點，經反射後又射到Γ上的Q點，求P、Q的坐標。

Ans：P(4,4)，Q($\frac{1}{4}$,−1)



[例題13] 平面上有一橢圓，已知其焦點爲(0,0)和(4,4)，且 $y=x+\sqrt{2}$爲此橢圓的切線。

(a)此橢圓的半長軸長。

(b)設此橢圓方程式爲 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=1$，求 A、B、C、D、E。

Ans：(a)3　(b)A=5,B=–8,C=5,D=–4,E=–4　(2005 指定甲)

(練習16) 一橢圓二焦點爲(9,20)、(49,55)，若此橢圓與 x 軸相切，則此橢圓的長軸長爲何？Ans：85

(練習17) 設F_1、F_2爲雙曲線$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 之兩焦點，$P(4\sqrt{2}\ ,2)$爲其上一點，求$\angle F_1PF_2$之角平分線方程式＿＿＿＿＿＿＿．

Ans：$\sqrt{2}\,x-2y=4$(hint：角平分線就是切線)

(練習18) 設橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦點$F_1(c,0)$,$F_2(-c,0)$，P爲橢圓上一點。

若$\angle F_1PF_2=\theta$，L爲過P的切線，過F_1,F_2作L的垂線，其垂足分別爲Q_1與Q_2，則梯形$F_1F_2Q_2Q_1$的面積爲$a^2\sin\theta$，試證之。

[提示：過P作法線PN，則此法線平分$\angle F_2PF_1$

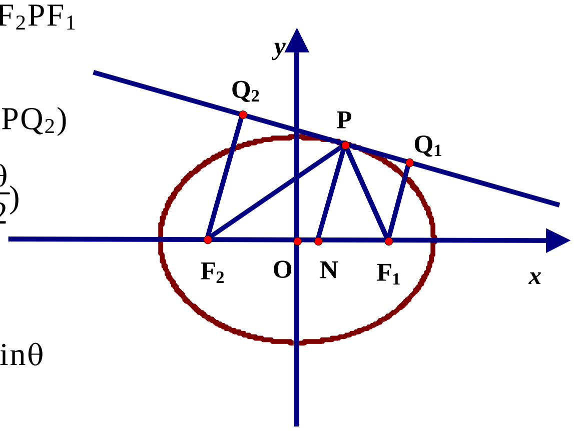
梯形$F_1F_2Q_2Q_1$的面積

$=\frac{1}{2}(F_1Q_1+F_2Q_2)Q_1Q_2=\frac{1}{2}(F_1Q_1+F_2Q_2)(Q_1P+PQ_2)$

$=\frac{1}{2}(PF_1\cos\frac{\theta}{2}+PF_2\cos\frac{\theta}{2})(PF_1\sin\frac{\theta}{2}+PF_2\sin\frac{\theta}{2})$

$=\frac{1}{2}[(PF_1+PF_2)\cos\frac{\theta}{2}]\cdot[(PF_1+PF_2)\sin\frac{\theta}{2}]$

$=\frac{1}{2}(2a)^2(\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2})=a^2(2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2})=a^2\sin\theta$



(練習19) 與$y^2=4x$的軸平行的一光線碰到A(9,6)，後反射到B，再反射回去，求B點的座標爲＿＿＿＿＿＿。Ans：$(\frac{1}{9},\frac{-2}{3})$

(戊)錐線與直線的其他性質

(1)曲線族：

$S_1+kS_2=0$ 可表示通過圓錐曲線S_1，S_2的相交部分之圓錐曲線(退化、非退化)。

[例題14] 設Γ_1：$y^2=4(x+1)$與Γ_2：$(y-2)^2=-2(x-1)$交於A、B兩點，求AB直線的方程式。

[解法]：

設$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，則A、B必在$[y^2-4(x+1)]-[(y-2)^2+2(x-1)]=0$ 上，

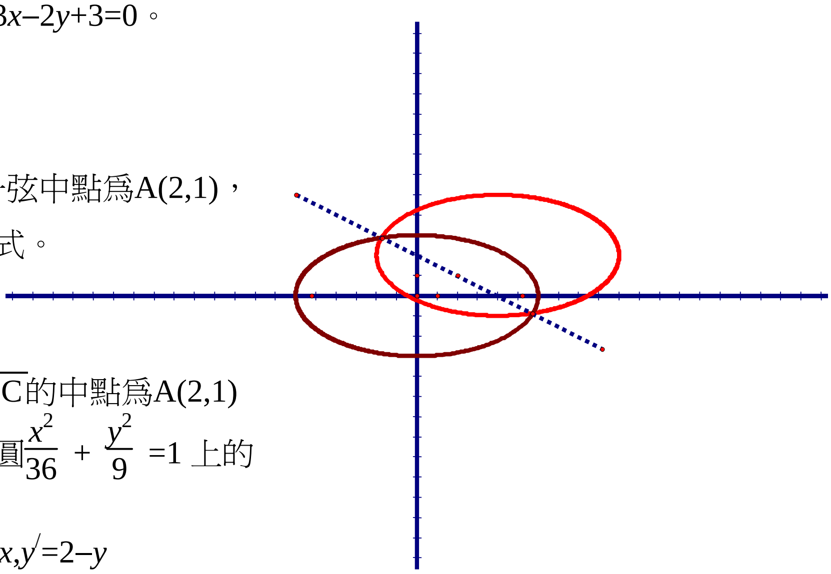
即在 $6x-4y+6=0$ 上$\Rightarrow 3x-2y+3=0$ 通過A、B兩點，

因為通過A、B兩點的直線只有一條

因此AB直線的方程式為 $3x-2y+3=0$。

(2)弦中點：

[例題15] 設橢圓$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一弦中點為A(2,1)，求此弦所在之直線方程式。



[解法]：

(變換觀點)

設所求之弦為$\overline{BC}$，即$\overline{BC}$的中點為A(2,1)

今作一個變換，即將橢圓$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上的每一點$P(x,y)$對A點作對稱點$P'(x',y')$，即$x'=4-x, y'=2-y$

$\Rightarrow x=4-x'$，$y=2-y'$，代入橢圓方程式。

故P'點的軌跡方程式為$\dfrac{(x'-4)^2}{36}+\dfrac{(y'-2)^2}{9}=1$。

因為$\overline{BC}$的中點為A(2,1)，因此B、C兩點會落在這兩個橢圓上，因此BC直線為通過兩橢圓交點的直線，因此將兩橢圓方程式相減，消去x^2,y^2項

可得BC直線的方程式$x+2y-4=0$。

(代數觀點)

設BC直線的方程式為$y-1=m(x-2)$，$B(x_1,y_1)$、$C(x_2,y_2)$

考慮聯立方程組$\begin{cases}\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1\\ y-1=m(x-2)\end{cases}$，將$y=mx-2m+1$ 代入$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$

整理得$(4m^2+1)x^2+4(-4m^2+2m)x+4(4m^2-4m-8)=0$，

上面方程式的解為x_1、x_2。

因為$\overline{BC}$的中點為A(2,1) $\Rightarrow x_1+x_2=4 \Rightarrow \dfrac{-4(-4m^2+2m)}{4m^2+1}=4 \Rightarrow m=\dfrac{-1}{2}$

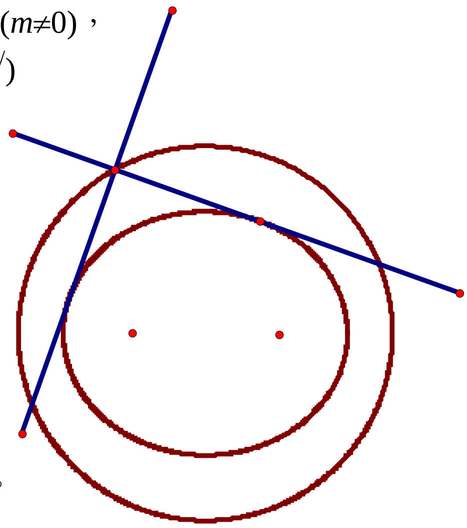
$\Rightarrow$直線BC：$y-1=\dfrac{-1}{2}(x-2)$。

(3)輔助圓

[例題16] 試求橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之任意兩條垂直切線之交點軌跡方程式。

[證明]：

設P(x',y')為兩垂直切線的交點，設一切線的斜率為$m(m\neq 0)$，



則切線的方程式為$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ ，此切線過P(x',y')

$\Rightarrow y'=mx'\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

$\Rightarrow(y'-mx')^2=a^{2(}+b^2$

$\Rightarrow(x'^2-a^2)m^2-2x'y'm+(y'^2-b^2)=0$

此方程式之二根為過P之兩垂直切線的斜率

因為垂直切線的斜率相乘$=-1$

$\Rightarrow -1=\dfrac{y'^2-b^2}{x'^2-a^2}$ $\Rightarrow x'^2+y'^2=a^2+b^2$

又當切線為水平切線、鉛直切線時

P點為$(\pm a,b)$、$(\pm a,-b)$亦滿足上式，

因此兩條垂直切線之交點軌跡方程式為$x^2+y^2=a^2+b^2$。

(4)切點弦：

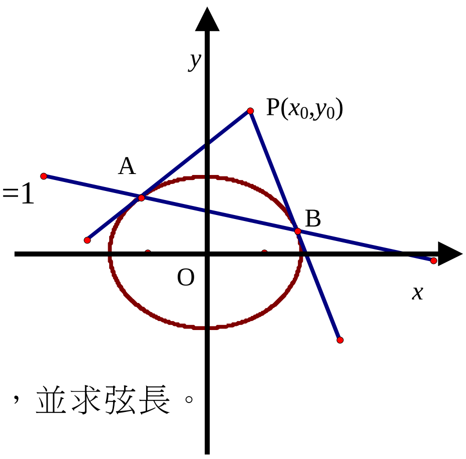
[例題17] 設P(x_0,y_0)為橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 外一點，過P作二切線切點為A、B。

試證明：直線AB的方程式為$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$。

[解法]：設A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)，

則切線PA：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

切線PB：$\dfrac{x_2x}{a^2}+\dfrac{y_2y}{b^2}=1$



而切線PA、PB均通過P(x_0,y_0)

$\Rightarrow\dfrac{x_1x_0}{a^2}+\dfrac{y_1y_0}{b^2}=1$ 且$\dfrac{x_2x_0}{a^2}+\dfrac{y_2y_0}{b^2}=1$

因此可知A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)均落在直線$\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$

而通過A、B兩點的直線只有一條，

因此直線AB的方程式為$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$。

(練習20) 求$y^2=6x$之弦方程式，但此弦被點(4,3)所平分，並求弦長。
Ans：$x-y-1=0$，$2\sqrt{30}$

(練習21) 已知兩拋物線$x=y^2+3y-2$ 與$y=x^2+kx+19$ 有交點，其中兩個交點在直線$x+y=3$ 上，則$k=$？ Ans：-11

(練習22) 試求橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的外切最大矩形的面積。Ans：$2(a^2+b^2)$
[提示：由例題 15 可知所有外切矩形的頂點之軌跡為一圓，而圓內接矩形中面積最大是正方形]

(練習23) 試求雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (設$a>b>0$)之任意兩條垂直切線之交點軌跡方程式。Ans：$x^2+y^2=a^2-b^2$。

綜合練習

(1) 過點A(0,2)且與雙曲線 $4y^2-13x^2=52$ 相切之切線方程式。

(2) 求過點P(1,0)作Γ：$y=x^2+3$ 的切線方程式。

(3) 過點 P(3,5)作Γ：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的切線方程式。

(4) 拋物線$y=x^2+2$ 與直線 $2ky=x-1$ 僅交於一點，求k=？

(5) 若拋物線$y=ax^2+bx$與直線$x-y=1$ 及 $5x-y=1$ 相切，試求a,b的值。

(6) 設一雙曲線的兩個焦點爲(5,0)、(–5,0)，又知其上有一條切線方程式爲 $3x-y-5=0$，試求此雙曲線方程式。

(7) 設由點(1，1)所作拋物線$y=x^2-x+k$的兩條切線互相垂直，則k=__________，又設點$P(0，t)$在拋物線上，則以P爲切點的切線方程式爲__________。

(8) 若直線$y=2x+k$與橢圓$x^2+4y^2-8x+4y=0$ 相切，求k=？

(9) 設L：$y=2x+k$與Γ：$y=x^2-5x+13$ 交於P、Q，若$\overline{PQ}=3$，求k=？

(10) 在坐標平面上，過F(1,0)的直線交拋物線Γ：$y^2=4x$於P、Q兩點，其中P在上半平面，且知 $2\overline{PF}=3\overline{QF}$，則P點的$x$坐標爲________。(化成最簡分數)
(2005 學科能力測驗)

(11) 圓錐曲線Γ：$4x^2+9y^2=36$ 上一點$P(1,\frac{4\sqrt{2}}{3})$，兩焦點F_1、F_2，請求出 $\angle F_2PF_1$的平分線方程式。

(12) 有一雙曲線Γ，其兩焦點爲$F_1(5,0)$、$F_2(-5,0)$，已知直線L：$y=x-1$ 與雙曲線Γ的右葉相切於點P，
(a)求切點P的坐標。(b)求雙曲線Γ的貫軸長。(c)求雙曲線Γ的標準式。

(13) 試求橢圓$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 之外切矩形之最大面積。

(14) 求二拋物線$y^2=4x$ 與$x^2=2y-3$ 之公切線方程式。

(15) $9x^2-16y^2-72x=0$ 與直線L交於A、B，若$\overline{AB}$中點爲(–2,1)，則L的方程式爲何？

(16) 證明：拋物線正焦弦兩端點的兩切線相交於準線上。

進階問題

(17) 設自橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 外一點 A(5,4)至此橢圓所作二切線之斜角爲α、β，求 tan(α+β)=？

(18) 設橢圓 $4x^2+18y^2-8x+72y+4=0$ 的二焦點爲F、F′，點P爲橢圓上一點，但 $\angle FPF'=30°$，過P點作橢圓的切線，由焦點F、F′各做切線的垂線，其垂足爲H、K，則梯形FHKF′的面積爲何？

(19) 不論任何實數a，拋物線$y=x^2-2(a+3)x+a^2+8a$恆與一條定直線L相切，則L的方程式爲何？

(20) 自$(-2,-1)$作 $5x^2+y^2=5$ 切線，兩切點的弦所在之直線方程式爲何？

(21) 直線 $2x-3y=2$ 與橢圓 $9x^2+4y^2=36$ 相交於A、B兩點，則過A、B兩點的切線相交於P點，求P點的坐標。

(22) 求橢圓$x^2+5y^2=5$ 與圓$(x+2)^2+y^2=5$ 之公切線方程式。

(23) 橢圓的兩焦點爲F、F′，而L爲橢圓的一切線，試證：$d(F,L)\cdot d(F',L)=b^2$。

綜合練習解答

(1) $3x-2y+4=0$ 或 $3x+2y-4=0$

(2) $y=6x-6$ 或 $y=-2x+2$

(3) $y-5=\frac{7}{10}(x-3)$或 $x=3$

(4) $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{8}$或 0[提示：令$x=2ky+1$ 代入$y=x^2+2\Rightarrow 4k^2y^2+(4k-1)y+3=0$，$k=0$ $\Rightarrow y=3$，$x=1$ 滿足要求；$k\neq 0$，判別式$(4k-1)^2-4\cdot 4k^2\cdot 3=0\Rightarrow k=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{8}$。]

(5) $a=1$、$b=3$

(6) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ [提示：令雙曲線方程式爲$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ⇒因爲已知切線爲$3x-y-5=0$，根據切線公式，$y=3x-\sqrt{9a^2-b^2}$ 代表切線$y=3x-5\Rightarrow 9a^2-b^2=25$，又$a^2+b^2=c^2=25\Rightarrow a^2=5$ 且$b^2=20$]

(7) $\frac{3}{2}$；$2x+2y-3=0$

(8) 0，-17

(9) $\frac{6}{5}$[提示：設$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，將$y=2x+k$代入$y=x^2-5x+13$ 得$x^2-7x+13-k=0$ 的兩根爲x_1，$x_2\Rightarrow x_1+x_2=7$，$x_1\cdot x_2=13-k$。$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{5(x_1-x_2)^2}$ 計算$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2=-3+4k\Rightarrow 3^2=5(-3+4k)\Rightarrow k=\frac{6}{5}$。]

(10) $\frac{3}{2}$

(11) $y-\frac{4\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}\ (x-1)$

(12) (a)P(13,12) (b)$2\sqrt{13}$ (c)$\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{12}=1$

(提示：F_1對於切線$y=x-1$ 的對稱點G，則F_2、G、P三點共線。)

(13) 52 [提示：請參考練習 22]

(14) $x-y+1=0$、$4x+2y+1=0$[提示：設公切線的斜率爲m，所以利用已知斜率求切線的公式，可知公切線的形式有$y=mx+\frac{1}{m}$，$y-\frac{3}{2}=mx-\frac{1}{2}m^2$，這兩種形式代表同一條直線，因此$\frac{1}{m}=-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}$ $\Rightarrow m^3-3m+2=0$ $\Rightarrow(m-1)^2(m+2)=0$ $\Rightarrow m=1$或-2]

(15) $27x+8y+46=0$

(16) [證明：設抛物線爲$y^2=4cx$，此時焦點爲$F(c,0)$，而正焦弦爲$\overline{AB}$，其中$A(c,2c)$、$B(c,-2c)$，通過切點A、B之切線分別爲L_1：$(2c)y=4c(\frac{c+x}{2})\Rightarrow y=x+c$，$L_2$：$(-2c)y=4c(\frac{c+x}{2})\Rightarrow y=-x-c$，因此$L_1$與$L_2$相交於準線上一點$(-c,0)$。]

(17) $\frac{20}{7}$[提示：設切線斜率爲m，切線方程式爲$y=mx\pm\sqrt{4m^2+9}$，代入A(5,4) $\Rightarrow 21m^2-40m+7=0$，設兩根爲$m_1$、$m_2$，此兩根爲切線的斜率，所以可得$m_1=\tan\alpha$、$m_2=\tan\beta$，再根據根與係數的關係，$\tan\alpha+\tan\beta=m_1+m_2=\frac{40}{21}$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=m_1\cdot m_2=\frac{7}{21}\Rightarrow\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{20}{7}$]

(18) 9 [提示：參考練習 18]

(19) $y=2x-16$[提示：設L的方程式爲$y=mx+k$代入$y=x^2-2(a+3)x+a^2+8a$，得$x^2-(2a+m+6)x+a^2+8a-k=0$
$\Rightarrow$因爲相切，所以$(2a+m+6)^2-4(a^2+8a-k)=0\Rightarrow 4(m-2)a+(m+6)^2+4k=0$，因爲不論任何實數$a$，上式恆成立，所以$(m-2)=0$ 且$(m+6)^2+4k=0$ $\Rightarrow m=2$ 且$k=-16$ $\Rightarrow y=2x-16$]

(20) $10x+y+5=0$[提示：令兩切點爲$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，根據切線公式，兩切線分別爲 $5x_1x+y_1y-5=0$，$5x_2x+y_2y-5=0$，又兩切線的交點爲$(-2,-1\Rightarrow -10x_1-y_1-5=0$，$-10x_2-y_2-5=0$ $\Rightarrow$所以$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$分別落在直線 $10x+y+5=0$ 上，所以兩切點的弦所在之直線方程式爲 $10x+y+5=0$)

(21) $P(4,\frac{-27}{4})$[提示：設$P(x_0,y_0)$根據切點弦的公式(例題 17)，可得AB直線的方程式爲 $9x_0x+4y_0y=36$，此方程式與 $2x-3y=2$ 代表同一直線，因此$x_0=4$，$y_0=\frac{-27}{4}$]

(22) $x+2y-3=0$ 或$x-2y-3=0$[提示：設公切線的斜率爲m，根據切線公式可得$y=mx\pm\sqrt{5m^2+1}$ 與 $y=m(x+2)\pm\sqrt{5m^2+5}$ 代表同一直線 $\Rightarrow\pm\sqrt{5m^2+1}=2m\pm\sqrt{5m^2+5}$
經過兩次平方$\Rightarrow 4m^2+3m^2-1=0$ $\Rightarrow m^2=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow m=\pm\frac{1}{2}$。再根據兩個圖形的相對位置，去求出公切線的方程式]

(23) [證明：設切點爲P，$\angle FPF'=2\theta$，過P的法線交FF'於Q，仿照練習 18 的做法可知$d(F,L)=PF\cdot\cos\theta$，$d(F',L)=PF'\cdot\cos\theta$，令$PF=x$,$PF'=2a-x$，$d(F,L)=d_1$，$d(F',L)=d_2\Rightarrow d_1d_2=x(2a-x)\cos^2\theta$，另一方面在$\Delta FPF'$中使用餘弦定理$\Rightarrow(2c)^2=x^2+(2a-x)^2-2x(2a-x)\cos2\theta=x^2+(2a-x)^2-2x(2a-x)[2\cos^2\theta-1]$
$\Rightarrow(2c)^2=x^2+2x(2a-x)+(2a-x)^2-4d_1d_2\Rightarrow4d_1d_2=4(a^2-c^2)=4b^2\Rightarrow d_1d_2=b^2$]