§1−2 向量的基本應用

(甲)分點公式與共線

(1)本節所要使用的工具是 1-1 中所提到的幾個工具：

(a)向量的加減法、係數積

①加減法⇒分解($\overrightarrow{AB}$可用任意點作分解)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ (加法分解)

$=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$　(減法分解)

②係數積⇒平行與三點共線

平行：$\overrightarrow{AB}=r\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{CD}$同向或反向

(b)向量的內積：

求夾角：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

長度化內積：$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}$與$\vec{b}$垂直的充要條件$\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

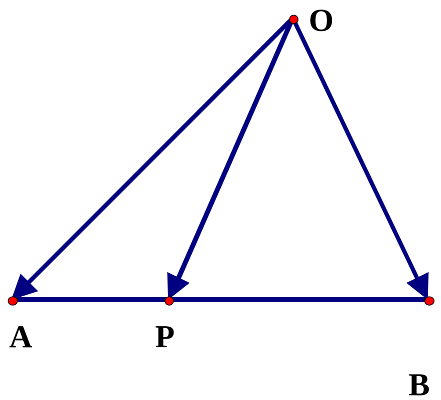
(2)分點公式：

為了解決平面幾何上共線的問題，我們進一步去探討當 A、B、P 三點共線時，如何利用向量來描述這個情形？

例題：

設線段$\overline{AB}$上有一點P且滿足$\overline{AP}:\overline{PB}=3:5$，若$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中O為任意點，求$x,y$的值。

[解法一]：



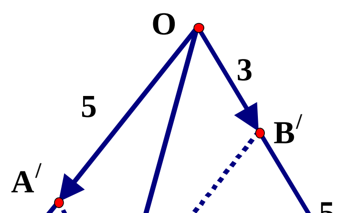
因為$\overline{AP}:\overline{PB}=3:5$，所以$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{OA}-\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}=(1-\frac{3}{8})\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$

$=\frac{5}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$

因為$\overrightarrow{OP}=\frac{5}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$，所以$x=\frac{5}{8},y=\frac{3}{8}$。



解法二：

如右圖，過P分別做$\overline{OB}$、$\overline{OA}$的平行線，交

$\overline{OA}$、$\overline{OB}$於A'、B'，根據向量加法的定義

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$

因爲$\overline{AP}$：$\overline{PB}$=3：5

所以$\overline{OA'}$：$\overline{OA}$=5：3，$\overline{OB'}$：$\overline{OB}$=3：5

故$\overrightarrow{OA'}=\frac{5}{8}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$。

因此可得$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\frac{5}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$，所以$x=\frac{5}{8},y=\frac{3}{8}$。

利用例題的方法，我們可以導出一般的情形：

分點公式：

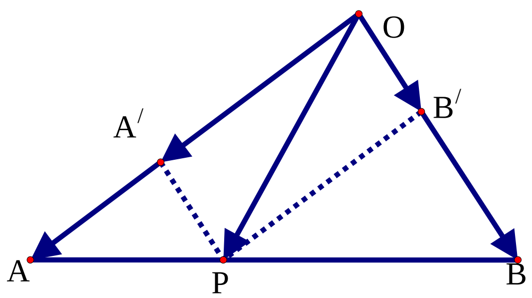
設點P在線段AB上，且AP：PB=m：n，則對任一點O

恆有$\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$。

[證明]：

設O爲任意點，若線段$\overline{AB}$上有一點P且滿足$\overline{AP}$：$\overline{PB}$ =m：n，

$$\begin{aligned}\text{則}\ \overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\\&=\overrightarrow{OA}-\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}\\&=(1-\frac{m}{m+n})\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}\\&=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$



討論：

(a)分點公式中O爲任意點，如令O=A，則$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$，

這也是一個很好用的分點公式。

(b)根據上面的圖形，可知$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$

(c)根據係數積的定義，$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AP}$，故$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，且$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\dfrac{m}{m+n}$，

$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{AP}$同向，故可知$\overrightarrow{AP}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$。

同一個線段上的三點，只要知道其線段長度比，
彼此形成的向量就可以互相表示。

(3)三點共線：

設A,B,P三點共線的充要條件爲能找到二數α,β，而且α+β=1，
使得$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$成立。

[證明]：

(⇒)因爲A,B,P三點共線，所以可找到一個實數t，使得$\overrightarrow{AP}=t\cdot\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}=t(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

因此取$\alpha=1-t$，$\beta=t$，$\alpha+\beta=1$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\alpha\ \overrightarrow{OA}+\beta\ \overrightarrow{OB}$

(⇐)因爲α+β=1，$\overrightarrow{OP}=\alpha\ \overrightarrow{OA}+\beta\ \overrightarrow{OB}$

所以$\overrightarrow{OP}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}=(1-\beta)\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}=\beta(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AP}=\beta\cdot\overrightarrow{AB}$

⇒A,B,P三點共線。

討論：

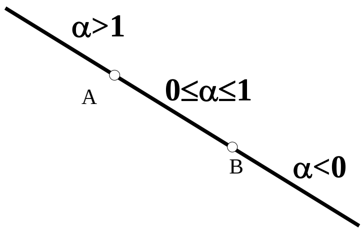
設P點在$\overleftrightarrow{AB}$上，根據(2)的結論，可找到α，β使得$\overrightarrow{OP}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}$

①0≤α≤1，則P在線段AB上

②α>1，則P−A−B

③α<0，則A−B−P

④α=0，則P=B，α=1，則P=A



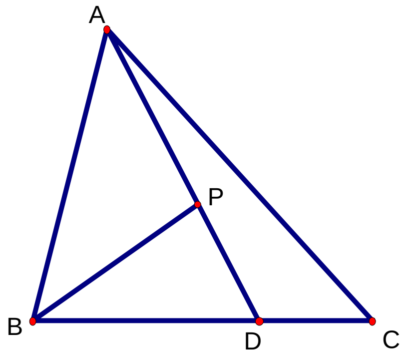
[例題1] 直線AB上有一點P，滿足AP：PB=3：2，O爲任一點，
若$\overrightarrow{OP}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}$，則請問數對$(x,y)$=？Ans：$(x,y)=(\frac{2}{5},\frac{3}{5})$或(−2,3)

[例題2] (分點公式與三點共線)

設ΔABC中有一點P，且滿足 $5\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，設直線AP與$\overline{BC}$交於D點，請求出下列二小題：

(1)$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=$？　(2)$\dfrac{\Delta PBD}{\Delta ABC}=$？

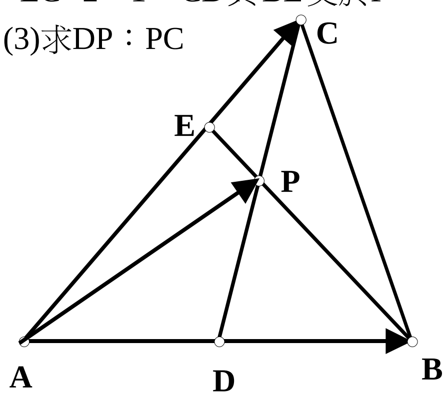
Ans：(1)2 (2)$\dfrac{4}{15}$



[例題3] (分點公式與線段比例)

ΔABC中，D是$\overline{AB}$中點，E點在$\overline{AC}$上，且$\overline{AE}$：$\overline{EC}$=2：1，$\overline{CD}$與$\overline{BE}$交於P，(1)設$\overrightarrow{AP}=x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{AC}$，求$x,y$。(2)求BP：PE　(3)求DP：PC

Ans：(1)$x=\dfrac{1}{4}$,$y=\dfrac{1}{2}$ (2)3：1 (3)1：1



[例題4] (分點公式與長度)

設ΔABC中，$\overline{AB}=6$,$\overline{AC}=4$,$\angle BAC=60^\circ$，D在$\overline{BC}$上，且$\overline{BD}=\frac{1}{3}\cdot\overline{BC}$，則$\overline{AD}=$？

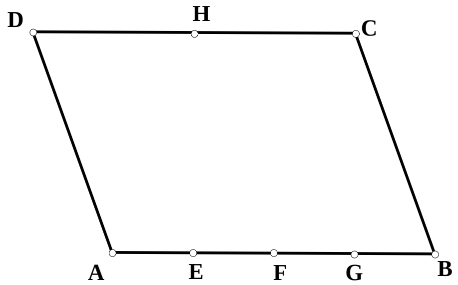
Ans：$\frac{4\sqrt{13}}{3}$

(練習1) 右圖平行四邊形ABCD中，AE=EF=FG=GB，DH=HC，則

(1)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=$？

(2)$\overrightarrow{DH}=$________$\overrightarrow{BE}$

(3)$\overrightarrow{CE}=$_____$\overrightarrow{CA}+$_____$\overrightarrow{CB}$



Ans：(1)$\overrightarrow{DB}$ (2)$\frac{-2}{3}$ (3)$\frac{3}{4}$、$\frac{1}{4}$

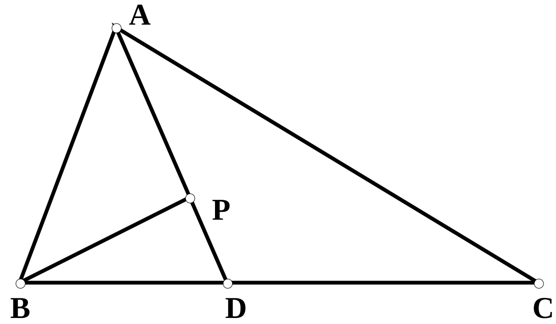
(練習2) 設點 P 在直線 AB 上，且$\overline{AP}:\overline{AB}=4:11$，若$\overrightarrow{PA}=\gamma\,\overrightarrow{PB}$，

則$\gamma=$__________。Ans：$\frac{-4}{7}$或$\frac{4}{15}$

(練習3) 若A、B、C三點共線，且 $5\overrightarrow{OB}=(2t-1)\overrightarrow{OA}+(3t-4)\overrightarrow{OC}$，

求實數t的值。 Ans：$t=2$

(練習4) 如右圖，ΔABC中，D在$\overline{BC}$上，BD：DC=2：3，P在$\overline{AD}$上，
AP：DP=2：1，若$\overrightarrow{AP}=m\cdot\overrightarrow{AB}+n\cdot\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BP}=k\cdot\overrightarrow{AB}+l\cdot\overrightarrow{AC}$，
則數對(m,n)=？ (k,l)=？
Ans：$(m,n)=(\frac{2}{5},\frac{4}{15})$，$(k,l)=(\frac{-3}{5},\frac{4}{15})$



(練習5) O,A,B三點不共線，P點在直線AB上，但不在線段$\overline{AB}$上，
且$\overline{AP}$：$\overline{BP}$=5：2，設$\overrightarrow{OP}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}$，求$x,y$。Ans：$x=\frac{-2}{3},y=\frac{5}{3}$

(練習6) △ABC 中，∠A=60°，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，D 點在$\overline{BC}$上，且$\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BC}$，求$\overline{AD}$
之長(以 b,c 表之)Ans：$\frac{1}{3}\sqrt{b^2+4c^2+2bc}$

(練習7) 設O,A,B三點不共線，若$\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=5\overrightarrow{OB}$，
令AD與BC交於一點E，若$\overrightarrow{OE}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}$，求$x,y$。
Ans：$x=\frac{16}{19}, y=\frac{15}{19}$

(練習8) △OAB 中，點 C，D 分別在$\overline{OA}$ 與$\overline{OB}$ 上，且$\overline{OC}$：$\overline{CA}$＝5：2，
$\overline{OD}$：$\overline{DB}$＝3：4，$\overline{CD}$ 中點爲 M，直線 OM 與$\overline{AB}$ 交於 N，則：
(1)$\overrightarrow{OM}$ ＝__________$\overrightarrow{OA}$＋__________$\overrightarrow{OB}$。

(2)$\overrightarrow{ON}=$__________$\overrightarrow{OA}+$__________$\overrightarrow{OB}$。Ans：(1)$\frac{5}{14},\frac{3}{14}$ (2)$\frac{5}{8},\frac{3}{8}$

(乙)向量與三角形的心

(1)三角形的重心與內心：
使用的技巧，最主要是分點公式。

(a)若ΔABC中，G爲ΔABC的重心，O爲任何一點，則

(1°)$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

(2°)若令O=A，則$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$。

(3°)若令O=G $\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ 。

(b)若ΔABC中，三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$之長分別爲c,a,b，
I爲ΔABC之內心，O爲任何一點，則

(1°)$\overrightarrow{OI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$。

(2°)令O=A，則$\overrightarrow{AI}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

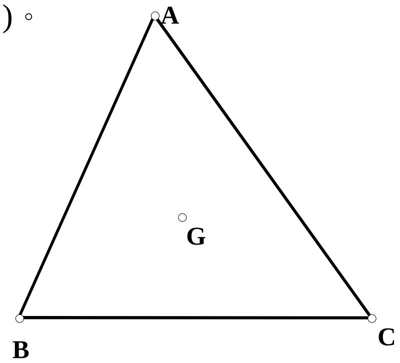
(3°)令O=I，則$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

[例題5] ΔABC中，O爲任意點

(1)若G爲ΔABC的重心，試證：$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$。

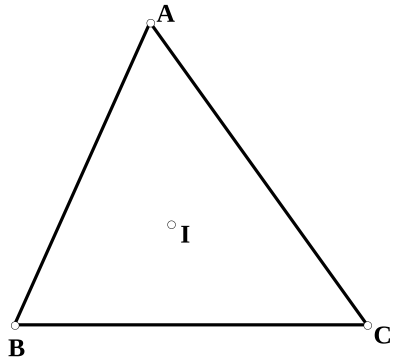
(2)證明：$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$。

(3)試證：G爲ΔABC的重心 $\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ 。



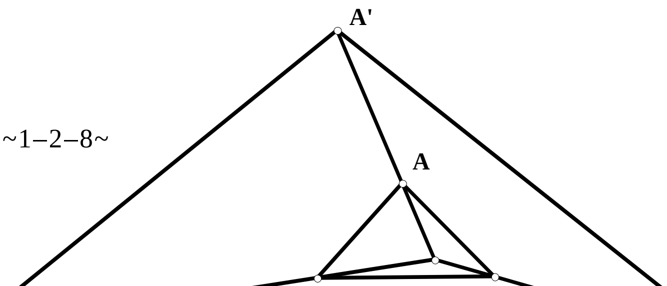
[例題6] ΔABC中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=7$，I爲內心，若$\overrightarrow{OI}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}+\gamma\cdot\overrightarrow{OC}$，

則$(\alpha,\beta,\gamma)=$？　Ans：$(\frac{1}{3},\frac{5}{18})$



[例題7] 設P爲ΔABC內部一點，若$3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，

則$\Delta PAB:\Delta PBC:\Delta PCA=5:3:4$。



(練習9) ΔABC中，三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$之長分別爲c,a,b，I爲ΔABC之內心，O爲任何一點。試證明：

(a) $\overrightarrow{OI}=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$

(b) $\overrightarrow{AI}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

(練習10) 試證：$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ $\Rightarrow$G爲ΔABC的重心。

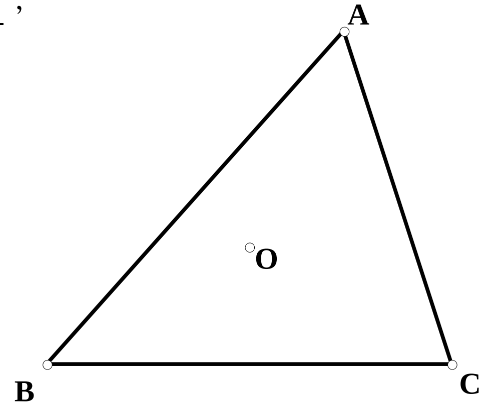
[提示：令D爲$\overline{BC}$上的中點，因爲$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}$，$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GD}$
所以$-\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GD}\Rightarrow$A、G、D三點共線]

(練習11) 設P爲ΔABC內部一點，試證若$l\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，則$\Delta$PBC：$\Delta$PCA：$\Delta$PAB=$l$：$m$：$n$。

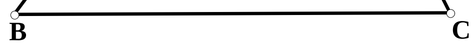
(2)三角形的外心與垂心：

三角形三邊中垂線的交點稱為外心。
三角形三高的交點稱為垂心。

[例題8] ΔABC中，O為ΔABC外心，設$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=6\sqrt{2}$，$\overline{AC}=8$，則
(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______，(2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=$______，
(3)若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則$x=$？$y=$？
Ans：(1)4 (2)8 (3)$x=\frac{8}{21}$，$y=\frac{10}{21}$



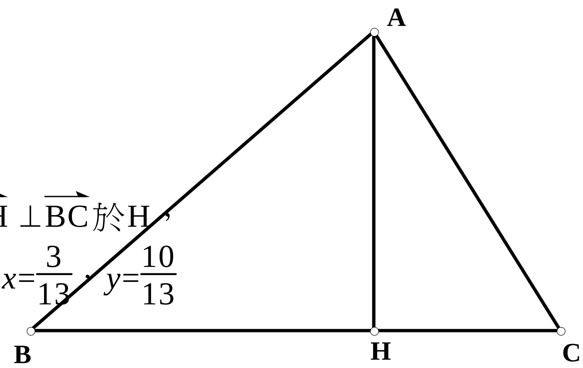
[例題9] ΔABC中，$\overline{AB}=4$,$\overline{BC}=6$,$\overline{AC}=2\sqrt{7}$，H為ΔABC之垂心，
(1)試證：$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$。
(2)若$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則$x=$？$y=$？ Ans：(2)$x=\frac{2}{9}$, $y=\frac{1}{9}$



(練習12) 設E為ΔABC的外心，H為ΔABC的垂心，且$\overline{AB}$=4，$\overline{BC}$=5，$\overline{CA}$=6，

(1)若$\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，求α、β之值。Ans：$\alpha=\frac{4}{35}$，$\beta=\frac{16}{35}$

(2)若$\overrightarrow{AH}=x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{AC}$，求$x,y$之值。Ans：$x=\frac{27}{35}$，$y=\frac{3}{35}$



(練習13) ΔABC中，$\overline{AB}$=4，$\overline{AC}$=3，$\angle A=60^\circ$，$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$於H，

且$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求$x,y$之值。　Ans：$x=\frac{3}{13}$，$y=\frac{10}{13}$

(丙)向量方法證明幾何問題

(1)基本認識

利用已學過的向量的加法、減法、係數積與內積運算，來求證平面幾何問題，重要原理說明如下：

(a)加減法⇒分解($\overrightarrow{AB}$可用任意點作分解)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ (加法分解)

$=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (減法分解)

(b)係數積⇒平行與三點共線

平行：$\overrightarrow{AB}=r\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{CD}$同向或反向

$\overrightarrow{AB}=r\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow$A,B,C共線$\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$且$\alpha+\beta=1$

(c)內積⇒長度與垂直

求夾角：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

長度化內積：$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}$與$\vec{b}$垂直的充要條件$\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(2)幾何問題可以使用向量證明的重要題。

①三角形兩邊中點連線定理。
②平行四邊形的對角線互相平分。

③平行四邊形定理$\Rightarrow\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$
④共點問題⇒三角形之高交於一點、三中線交於一點。

以上是向量在幾何應用的幾個典型的例子，它藉著圖形的位置關係，利用向量

及基本代數運算，做為證明幾何性質的工具，在證明過程中，在證明過程中，極少需要輔助線–這是綜合幾何證明最困擾之處，也是向量證題的最大特點。

[例題10] 設 D,E 分別是△ABC 二邊$\overline{AB}$,$\overline{AC}$的中點，求證：$\overline{DE}//\overline{BC}$且$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

[例題11] 設ABCD是一個平行四邊形，試證：$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$。

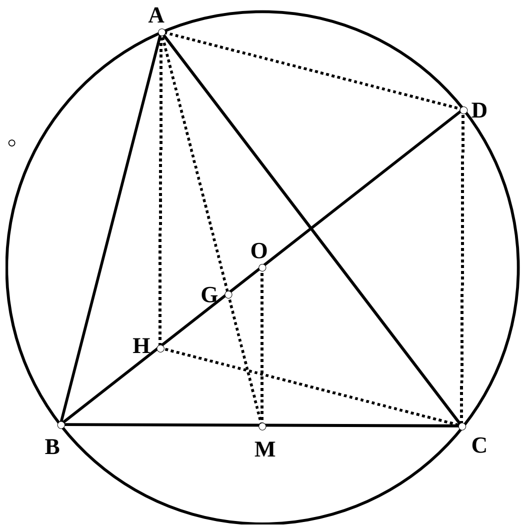
[例題12] H為△ABC平面上一點，求證若$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$，則$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$。
（即證△ABC之三高交於一點）

[例題13] 設ΔABC之外心為O，垂心為H，重心為G，

(1)試證：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$。

(2)若$\overrightarrow{AG}=x\cdot\overrightarrow{AO}+y\cdot\overrightarrow{AH}$，試求實數$x,y$之值。

(3)證明：G、H、O三點共線，且OG：GH=1：2。



(練習14) (1)設ΔABC的兩中線$\overline{BE}$、$\overline{CF}$相交於G點，試求BG：BE=？

(2)根據(1)的結果，試證：三角形三邊的中線交於一點。
Ans：2：1

[提示：設ΔABC的三中線爲$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$，設$\overline{AD}$與$\overline{BE}$交於G，$\overline{AD}$與$\overline{CF}$交於G'，由(1)之結果可以證明BG：BE =BG'：BE。]

(練習15) 梯形 ABCD 中，設 E、F 分別爲$\overline{AB}$、$\overline{CD}$的中點，

求證：$\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$。

(練習16) 設$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$爲ΔABC的三中線，試證：$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{0}$。

綜合練習

(1) 設ABC 爲坐標平面上一三角形，P 爲平面上一點且$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，

則$\frac{\Delta ABP面積}{\Delta ABC面積}$等於______。

(A)$\frac{1}{5}$ (B)$\frac{1}{4}$ (C)$\frac{2}{5}$ (D)$\frac{1}{2}$ (E)$\frac{2}{3}$ (92 學科能力測驗)

(2) 坐標平面上有一ΔABC與一點D，若 $7\overrightarrow{AD}=8\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}$，

請求出$\frac{\Delta ABD面積}{\Delta ABC面積}$=？ (92 台北區指定考科乙模擬考 3)

(3) 設ΔABC爲平面上的一個三角形，P爲平面上一點且$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，其中$t$爲一實數。試問下列哪一個選項爲$t$的最大範圍，使得$P$落在△$ABC$的內部？

(A)$0<t<\frac{1}{4}$ (B)$0<t<\frac{1}{3}$ (C)$0<t<\frac{1}{2}$ (D)$0<t<\frac{2}{3}$ (E)$0<t<\frac{3}{4}$ (93 學科能力測驗)

(4) 在ΔABC中，D在$\overline{BC}$上，BD：DC=3：2，P在$\overline{AD}$上，

AP：PD=1：2，設$\overrightarrow{OP}=l\cdot\overrightarrow{OA}+m\cdot\overrightarrow{OB}+n\cdot\overrightarrow{OC}$ (其中O爲任一點)，求l,m,n之值。

(5) O、A、B、P爲平面上相異四點，下列那些情形會使得P點在直線AB上？

(A) $\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$ (B) $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$ (C) $4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=12\overrightarrow{OP}$

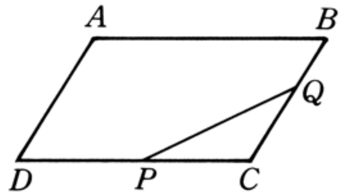
(D) $5\overrightarrow{OP}=7\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$ (E) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}$。

(6) 平行四邊形ABCD中，E爲$\overline{AD}$上一點，且$\overline{AE}=2\overline{ED}$，F爲$\overline{AB}$上一點且$\overline{AF}=3\overline{FB}$，若$\overline{BE}$與$\overline{DF}$交於點P，且$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則(a)$(x,y)$=？ (b)DP：PF=？

(7) △ABC中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，I是△ABC的內心(三內角平分線的交點)，(a)求分角線$\overline{AT}$的長，其中T在$\overline{BC}$上。(b)設$\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求$x,y$。

(8) 設K爲△ABC內部之一點，使得△ABK：△ACK = 3：4，而射線$\overline{AK}$交$\overline{BC}$於D，若$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則$x$ =________，y =________。

(9) 如右圖，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{DP}=\overline{CP}$，$\overline{CQ}=2\overline{BQ}$，若$\overrightarrow{PQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對$(x,y)$=________。



(10) 在ΔABC的三邊$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$上分別取D、E、F三點，使得$\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$。設G爲ΔDEF的重心，$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則α=？β=？

(11) 設G為ΔABC之重心，P為$\overline{AG}$之中點，若$\overrightarrow{AP}=x\cdot\overrightarrow{AC}+y\cdot\overrightarrow{BG}$，
試求實數x,y的值。

(12) ΔOAB中，$\overline{OA}=2$，$\overline{OB}=3$，$\overline{AB}=4$，令$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，則
(a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$之值為何？　(b)自頂點O作邊$\overline{AB}$之垂線，令垂足為H，
則$\overrightarrow{OH}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$，求$\alpha$、$\beta$之值。

(13) 設P為ΔABC內一點滿足 $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2(2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$，求$\Delta$ABP：$\Delta$BCP：$\Delta$ACP=？

(14) 若梯形ABCD，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，$M$在$\overline{BC}$上使得$\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MC}$，若$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，
則$x=$________，$y=$________。

(15) 試證：$\vec{a}\perp\vec{b}$的充要條件為$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$。(回想畢氏定理與其逆定理)

(16) 試用向量的觀點證明：半圓內之圓周角為一直角。

(17) 證明：平行四邊形之對角線互相垂直 $\Leftrightarrow$ 該平行四邊形為一菱形。

(18) 設$\overline{AD}$爲ΔABC中，$\overline{BC}$上的中線，試證：$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2$。

$\boxed{\text{進階問題}}$

(19) ΔABC中，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$，試證$\Delta ABC$爲一正三角形。

(20) 設 G 爲ΔABC 的重心，過 G 做一直線 L 交$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 P、Q，其中 P、Q 分別異於 A 點，求$\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=$？

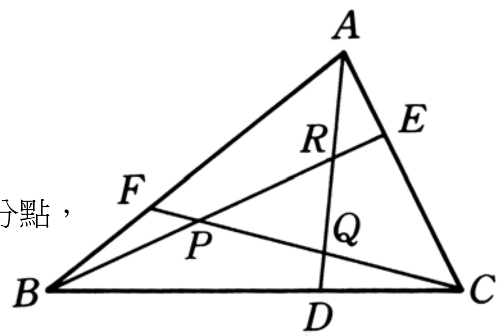
(21) 四邊形ABCD，若 $4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AD}=6\overrightarrow{AC}$，則$\Delta ABC：\Delta ABD=$？

(22) 同一平面上，兩個三角形ΔABC、ΔPQR，若下列三式同時滿足：
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RB}+\overrightarrow{RC}=\overrightarrow{AB}$

(a)試證三頂點P、Q、R分別在$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$邊上。
(b)求$\Delta ABC：\Delta PQR=$？

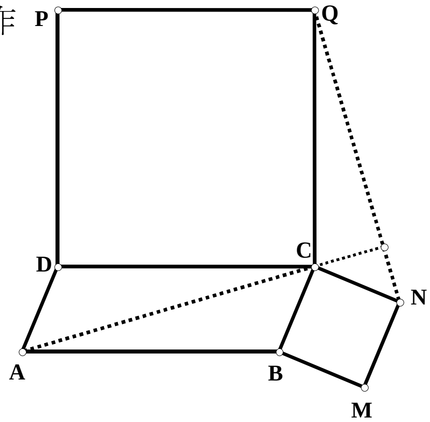
(23) 直角ΔABC中，斜邊上的高爲$\overline{AD}$，令$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，若$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則實數對$(x,y)=$？ 用$b,c$表示

(24) 如右圖，△ABC 中，D，E，F 分別爲三邊之三等分點，若$\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CF}$ 兩兩分別交於 P，Q，R，



則(a) $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，數對$(x，y)=$____________，
(b)△PQR 和△ABC 面積比為____________。

(25) 如圖，在平行四邊形 ABCD 兩邊 BC、CD 向外分別作正方形 BCNM、CDPQ。求證：AC⊥QN。



綜合練習解答

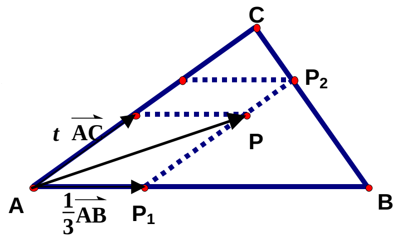
(1) (C)

(2) $\frac{6}{7}$

(3) (D)

[解法一]：

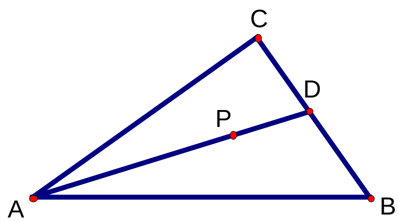
如圖所示，∵B、P_2、C三點共線∴$\overrightarrow{AP_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$



又∵滿足$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$的P點落在ΔABC內，

∴P落在$\overline{P_1P_2}$上($P\neq P_1$且$P\neq P_2$)，故 $0<t<\frac{2}{3}$。

[解法二]：



延長$\overline{AP}$交$\overline{BC}$於D點⇒$\overrightarrow{AP}\,//\,\overrightarrow{AD}$，

令$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}=k(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})=\frac{k}{3}\overrightarrow{AB}+kt\overrightarrow{AC}$

∵B、D、C三點共線，∴$\frac{k}{3}+kt=1\Rightarrow k=\frac{3}{1+3t}$

∵P在ΔABC內部∴$kt>0$，$k>1\Rightarrow\begin{cases}k=\dfrac{3}{1+3t}>1\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<\frac{2}{3}$。

(4) $l=\frac{2}{3},m=\frac{2}{15},n=\frac{1}{5}$

(5) (A)(B)(D)

(6) (a) $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ (b)2：1

(7) (a)$\frac{\sqrt{105}}{2}$ (b)$x=\frac{7}{18},y=\frac{5}{18}$

(8) $(\frac{3}{7},\frac{4}{7})$

(9) $(x,y)=(\frac{7}{6},\frac{-2}{3})$

(10) $\alpha=\frac{17}{45}$，$\beta=\frac{8}{45}$

[提示： $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$，再利用題目的條件，將$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$化成與$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$關的線性組合]

(11) $x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{-1}{4}$

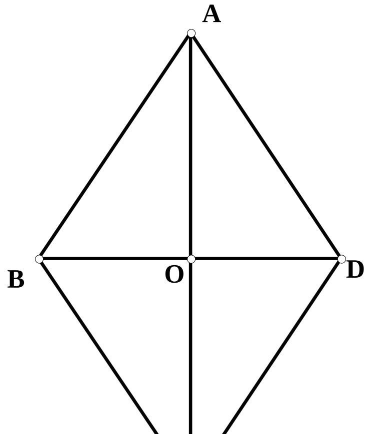
(12) (a)$\frac{-3}{2}$ (b)$\alpha=\frac{21}{32}$，$\beta=\frac{11}{32}$[提示：(b)$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$且$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，所以$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\frac{-11}{2}\alpha+\frac{321}{2}\beta=0\Rightarrow 11\alpha-21\beta=0$，又因爲$\alpha+\beta=1$，可解得$\alpha$、$\beta$之值]

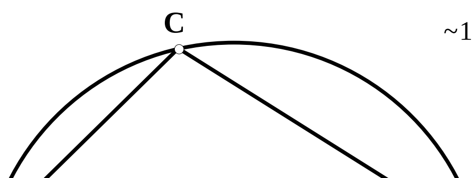
(13) 1：3：2 [提示：利用例題 7 的結果]

(14) $x=\frac{5}{8},y=\frac{3}{4}$

(15) 提示：$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(16) 如圖，證明$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})=0$





(17) 如圖，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0 \;\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=0 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|$

(18) [提示：$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$|\overrightarrow{BC}|^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

利用內積的定義計算 $2|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|^2$]

(19) [提示：$0=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$]

(20) 3　[提示：令$\frac{\text{AP}}{\text{AB}}=m$，$\frac{\text{AQ}}{\text{AC}}=n$，因為$\overrightarrow{\text{AG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{AC}})=\frac{1}{3}(\frac{1}{m}\overrightarrow{\text{AP}}+\frac{1}{n}\overrightarrow{\text{AQ}})$，因為P、G、Q三點共線，$\frac{1}{3m}+\frac{1}{3n}=1\Rightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$]

(21) 5：4[提示：設$\overline{\text{AC}}$與$\overline{\text{BD}}$相交於O，令$\overrightarrow{\text{AO}}=t\,\overrightarrow{\text{AC}}\Rightarrow\overrightarrow{\text{AO}}=(\frac{2}{3}t)\overrightarrow{\text{AB}}+(\frac{5}{6}t)\overrightarrow{\text{AD}}\Rightarrow$因為B、O、D共線 $\Rightarrow t=\frac{2}{3}\Rightarrow\overrightarrow{\text{AO}}=\frac{4}{9}\overrightarrow{\text{AB}}+\frac{5}{9}\overrightarrow{\text{AD}}$]

(22) (b)3：1 [提示：(a)由滿足的條件，可求得$\overrightarrow{\text{AP}}=2\overrightarrow{\text{PB}}$，$\overrightarrow{\text{QB}}=2\overrightarrow{\text{CQ}}$，$\overrightarrow{\text{RC}}=2\overrightarrow{\text{AR}}$]

(23) $x=\frac{b^2}{b^2+c^2}$ $y=\frac{c^2}{b^2+c^2}$　[提示：求$\overrightarrow{\text{AD}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}$，$\overrightarrow{\text{AD}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}$]

(24) $(\frac{4}{7}，\frac{1}{7})$；1：7

(25) [詳解] $\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{QN}}=(\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{BC}})\cdot(\overrightarrow{\text{QC}}+\overrightarrow{\text{CN}})=\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{CN}}+\overrightarrow{\text{BC}}\cdot\overrightarrow{\text{QC}}$

(因為AB⊥CQ，BC⊥CN)

$=\overrightarrow{\text{DC}}\cdot\overrightarrow{\text{CN}}+\overrightarrow{\text{BC}}\cdot\overrightarrow{\text{QC}}$

$\overrightarrow{\text{DC}}\cdot\overrightarrow{\text{CN}}=-|\overrightarrow{\text{DC}}||\overrightarrow{\text{CN}}|\cos\angle\text{DCN}$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{QC} = |\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{QC}|\cos\angle BCQ$

又因爲$\angle DCN = \angle BCQ \Rightarrow \cos\angle DCN = \cos\angle BCQ$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{QC} = 0$