第二十五單元　平面向量一

(甲)向量的基本概念

(1)以「位移」為例：

某甲從A點出發，朝西北方前進，走了 10 公里到達B地。某乙從A點出發，朝北走了 10 公里到達C點，我們考慮從A點到B點與C點雖然路徑相同，但方向卻不一樣。有向線段AB的始點A其方向為西北方，其長度 10 公里。同樣的有向線段AC的始點A其方向為北方，長度為 10 公里。

(2)以「合力」為例：

甲、乙兩人拔河，甲用大小 2F的水平力向右邊拉，乙用大小F的水平力向左邊拉，我們亦可用有向線段來表示這兩個力，其始點為施力點，方向分別是兩力的方向，而長度分別是兩力的大小。

像位移、力、速度等，這些物理量包含**大小**與**方向**雙重觀念，我們引進「**向量**」的觀念，將這些物理觀念(朝西北移動 10 公里、向右 2F的水平拉力)看成**有向線段**，而引入向量，物理觀念經數學化之後，便於物理觀念的溝通與物理量的計算。

(3)向量的概念：

(a)向量的表示：

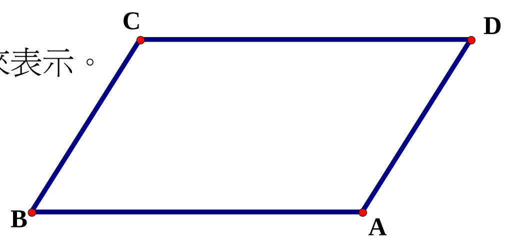
以A為始點，B為終點的有向線段，稱之為**向量**，符號：$\overrightarrow{AB}$，它的方向是由A指向B，

大小為$\overline{AB}$，記為$|\overrightarrow{AB}|$，即$|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}$。

當A=B時，$\overrightarrow{AB}$為**零向量**，記為$\overrightarrow{AB}=\vec{0}$；**注意：$\vec{0}$ 的大小為 0，但方向為任意。**

$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{BA}$長度相等，但方向相反，記為：$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$。

向量若不特別指名始點與終點，亦可用$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{u}$、…來表示。



(b)向量的相等：

兩個向量若大小相等，方向相同，則稱兩個向量相等。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 方向相同且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$

根據這個結果可知，**向量可以自由的平行移動**。

例如：右圖的平行四邊形ABCD，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$。

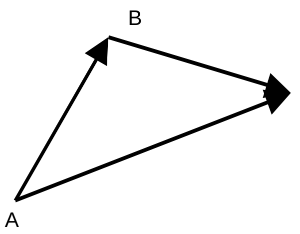
(乙)向量的加減法與係數積

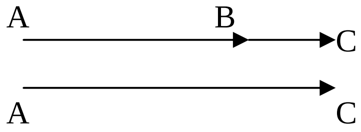
(1)向量的加法：給定二個向量$\vec{a}$，$\vec{b}$ 如何定義$\vec{a}+\vec{b}$呢？

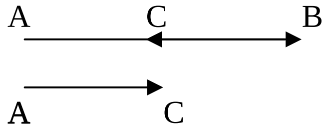
(a)三角形法(可以用位移爲例)：

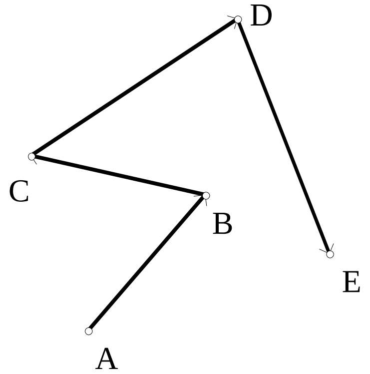
$\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 經由平移，可設 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，即 $\vec{a}$ 的終點與 $\vec{b}$ 的始點爲同一點，

則定義 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$。($\vec{a}$ 的始點指向 $\vec{b}$ 的終點)







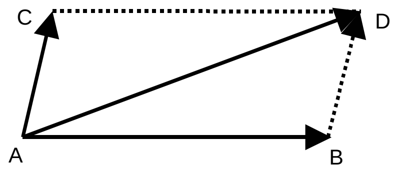


[討論]：如右圖，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=$？

(b)平行四邊形法(可以用合力爲例)：

$\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 經由平移，可設 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，即 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的始點爲同一點，

則定義 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AD}$，ABDC爲平行四邊形。



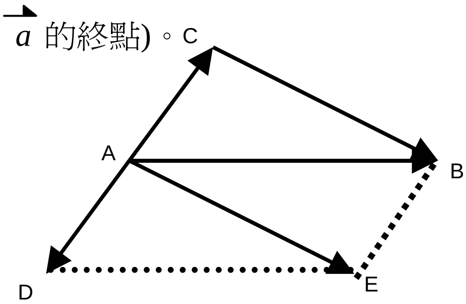
[說明]：因爲 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

(2)向量的減法：

給定兩個向量 $\vec{a},\vec{b}$，如何定義 $\vec{a}-\vec{b}$ 呢？

$\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 經由平移，可設 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，即 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的始點爲同一點，

則定義 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$(由 $\vec{b}$ 的終點指向 $\vec{a}$ 的終點)。



[說明]：

設 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，我們定義 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

根據右圖可知 $\overrightarrow{AD}=-\vec{b}$，ADEB爲平行四邊形，

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$，即$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$。

[結論]：向量的拆解

(a)任何一個向量$\overrightarrow{BC}$，我們都可以把它拆解為$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$兩向量的和，其中A為任一點。

即$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$。(可以以位移為例)

(b)任何一個向量$\overrightarrow{BC}$，我們都可以把它拆解為$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$兩向量的差，其中A點為任一點。即$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$。(可以相對運動為例)

(3)向量加法的性質：

(a)交換性：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

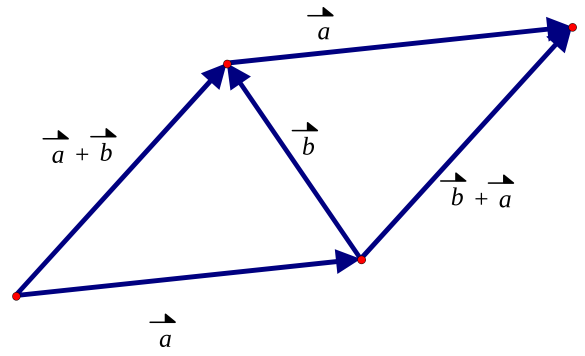
(b)結合性：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(c)零向量：$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$，$\vec{0}$表示起點與終點重合的向量，稱為零向量。

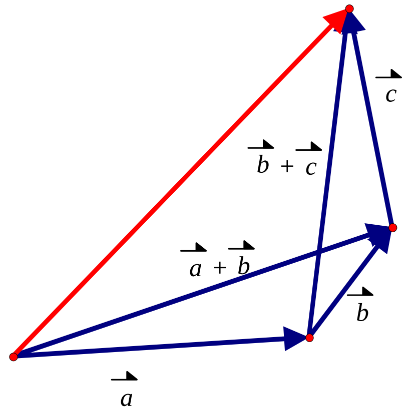
(d)可逆性：對於任一向量$\vec{a}$，若以$\overrightarrow{AB}$表示$\vec{a}$，則$\overrightarrow{BA}$所表示的向量以$-\vec{a}$表示，

由於$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$，故$\vec{a}+(-\vec{a})=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$

(a)



(b)



(4)向量的係數積

設$\vec{a}$是一個向量，r是一個實數，則係數積$r\vec{a}$仍是一個向量，定義如下：

長度：$|r\vec{a}|=|r||\vec{a}|$

例：$|5\vec{a}|=$_____；$|-100\vec{a}|=$___________

方向：

若 $\vec{a}$ 為非零向量且$r\neq0$：

$r>0$，則$r\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 同向；$r<0$，則$r\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 反向

若$r=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$，則$r\vec{a}=\vec{0}$

注意：$\mathbf{0}\cdot\vec{a}$ 、$\boldsymbol{r}\cdot\vec{\mathbf{0}}$ 均為零向量 $\vec{\mathbf{0}}$ ，而不是 **0**。

(5) 係數積與向量平行：

利用係數積可使向量在同向($r>0$)或反向($r<0$)，伸縮向量的長度。

例如：設A,B,C為一直線上的三點，且$\overline{AB}:\overline{BC}=3:2$，

則$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}=\frac{-2}{3}\overrightarrow{BA}$。

設向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 中有一個可以寫另一個的係數積，則稱這兩個向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 平行，

符號以 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$ 來表示。即

根據向量平行的定義，可知：

(a)兩個非零向量平行的充要條件是兩向量同向或反向

(b) $\vec{0}$ 之方向不予限定，故 $\vec{0}$ 可視為與任何向量均平行。

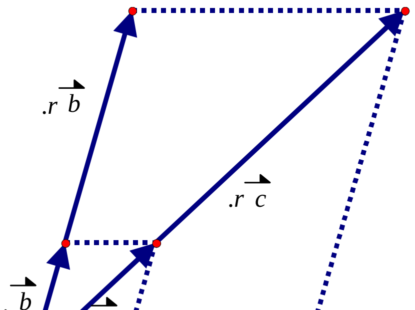
$\boxed{\vec{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow \text{可找到實數}t\text{或}s\text{，使得 }\vec{a}=t\vec{b}\text{ 或 }\vec{b}=s\vec{a}}$

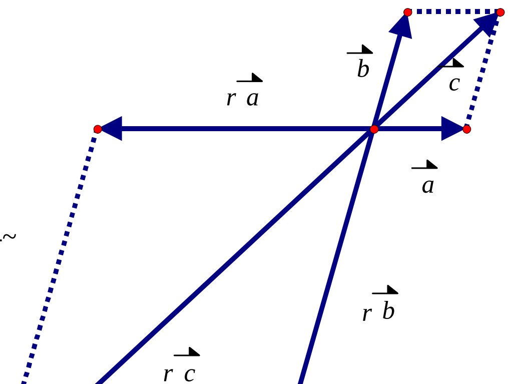
(6)係數積的基本性質：

設$r,s\in\mathbb{R}$， $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為二任意向量，則：

(a)分配律一：$r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$　　分配律二：$(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{b}$

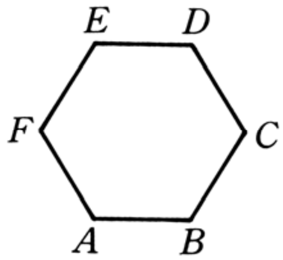
(b)結合律：$r(s\vec{a})=(rs)\vec{a}$





[例題1] 在正六邊形ABCDEF中，令$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ，試以$\vec{a}$ 和$\vec{b}$ 表示下列諸向量：
(1)$\overrightarrow{AC}$ (2)$\overrightarrow{BD}$ (3) $\overrightarrow{CD}$ 。

Ans：(1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $2\vec{b}-\vec{a}$ (3) $-\vec{a}+\vec{b}$



[例題2] 設相異三點A,B,C共線

若C為線段$\overline{AB}$之中點，則$\overrightarrow{AC}=$________$\overrightarrow{AB}$ ，$\overrightarrow{CA}=$________$\overrightarrow{CB}$

若C在線段$\overline{AB}$上，且$\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ ，則$\overrightarrow{BC}=$_______$\overrightarrow{AC}$ ，$\overrightarrow{AB}=$________$\overrightarrow{AC}$

(練習1) 正六邊形 ABCDEF，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ，則

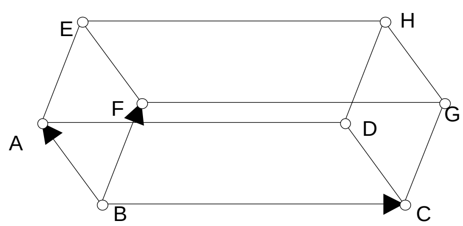
Ⓐ $\overrightarrow{BE}=2\vec{b}-2\vec{a}$ Ⓑ $\overrightarrow{BD}=2\vec{b}-\vec{a}$

Ⓒ $\overrightarrow{BF}=\vec{b}-2\vec{a}$ Ⓓ $\overrightarrow{BF}=2\vec{a}-\vec{b}$

Ⓔ $\overrightarrow{BD}=\vec{a}-2\vec{b}$ 。Ans：(A)(B)(C)

(練習2) 如圖所示，設四邊形ABCD、EFGH、DCGH、ABFE、ADHE和BCGF都是平行四邊形，$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$,$\overrightarrow{BF}=\vec{d}$ ，試以$\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ 表示$\overrightarrow{CE}$和$\overrightarrow{AG}$。

Ans： $\vec{a}-\vec{c}+\vec{d}$ ，$-\vec{a}+\vec{d}+\vec{c}$



(練習3) 已知 $3(\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{a})+\frac{1}{4}(2\vec{b}-5\vec{x}+\vec{c})+4\vec{x}=\vec{0}$，請用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 表示 $\vec{x}$。

Ans：$\vec{x}=\frac{6}{23}\vec{a}-\frac{2}{23}\vec{b}-\frac{1}{23}\vec{c}$

(練習4) 如圖A，B，C，D，E，F共線，且

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}$，則下列敘述何者正確？

(A) $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AF}$ (B) $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$ (C) $\overrightarrow{BE}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{DB}$ (D) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{BC}$

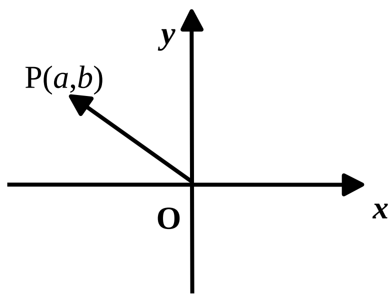
(E) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AF}$。Ans：(A)(B)(C)(D)

(丙)平面向量的坐標化

(1)平面向量的坐標表示：

設 $\vec{u}$ 為一個平面向量，取定直角坐標平面，其中O為原點，如何用坐標來表示 $\vec{u}$ 呢？

因為向量可以自由移動，故可令$\overrightarrow{OP}=\vec{u}$。如下圖，設 $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$，而P點的坐標為$(a,b)$，則我們用P的坐標$(a,b)$來表示向量 $\vec{u}$，記為 $\vec{u}=(a,b)$，其中a和b分別稱為向量 $\vec{u}$ 的***x*–分量**與***y*–分量**。



所以 $\vec{u}$ 的長度為$|\vec{u}|=\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$。

根據定義，平面向量 $\vec{u}$ 用(a,b)來表示，它的方向是由原點O指向P(a,b)，而它的大小為$\sqrt{a^2+b^2}$。因此坐標的表示方式可以同時呈現出向量的兩個要素–$\boxed{\text{大小與方向}}$。

結論：

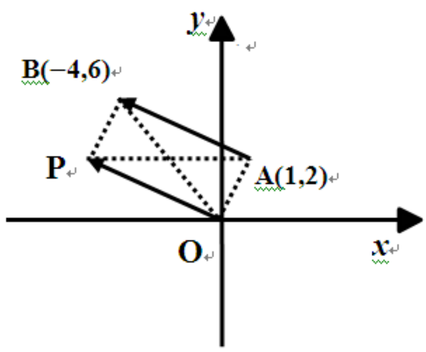
(a)長度：$\vec{u}=(a,b)$，則$|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2}$。

(b)相等：若 $\vec{u}=(a,b)$，$\vec{v}=(c,d)$，則 $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow a=c$且$b=d$

(c)兩點決定一向量：

若設A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)為坐標平面上的兩點，則$\overrightarrow{AB}$如何表示呢？

例如：設A(1,2)、B(–4,6)，試用坐標表示$\overrightarrow{AB}$。



作法：我們取一點P(x,y)，使得$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$，由向量相等的定義，可知四邊形ABOP爲平行四邊形，平行四邊形對角線互相平分，所以AP的中點與OB的中點爲同一點，故

$\dfrac{-4+0}{2}=\dfrac{x+1}{2}$，$\dfrac{0+6}{2}=\dfrac{y+2}{2}$，

即$x=-4-1=-5$，$y=6-2=4$，所以$\overrightarrow{AB}=(-5,4)$。

若設A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)爲坐標平面上的兩點，則$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$。

[說明]：

我們取一點P(x,y)，使得$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$，由向量相等的定義，可知四邊形ABOP爲平行四邊形，因爲平行四邊形對角線互相平分，

所以AP的中點與OB的中點爲同一點，

故 $\dfrac{x_2+0}{2}=\dfrac{x+x_1}{2}$，$\dfrac{y_2+0}{2}=\dfrac{y+y_1}{2}$，即$x=x_2-x_1$，$y=y_2-y_1$，所以$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$。

用坐標表示的向量，我們稱爲**坐標向量**，將向量予以坐標化，即向量除了幾何表示(即有向線段)外，希望能利用代數法或代數式表示，使得向量在幾何問題的處理上能發揮更大的效益。

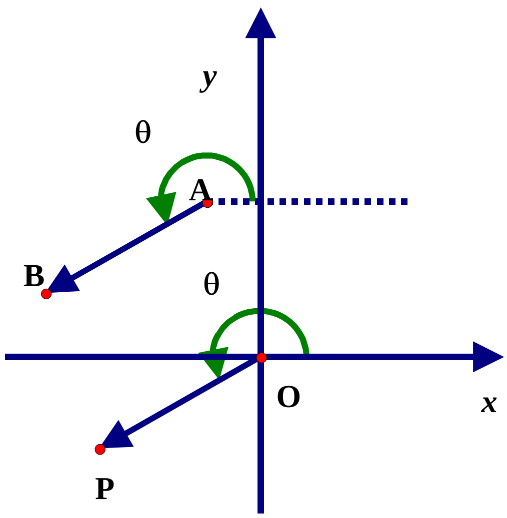
結論：

已知兩點A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)，則

(a)坐標化：$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

(b)求分量：$\overrightarrow{AB}$的x分量爲x_2-x_1，y分量爲y_2-y_1。

(c)求長度：$|\overrightarrow{AB}|^2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



(2)用長度、方向角決定一個向量：

將$\overrightarrow{AB}$平移到$\overrightarrow{OP}$，其中O爲原點，令$|\overrightarrow{OP}|=r$

從x軸正向逆時針轉到$\overrightarrow{OP}$的有向角爲θ，我們稱爲方向角，$0\le\theta<2\pi$

則$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OP}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$。

[說明]：設A(x_1,y_1)、B$(x_2,y_2)\Rightarrow\overrightarrow{OP}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，即P$(x_2-x_1,y_2-y_1)$

根據三角函數的定義，可知$x_2-x_1=r\cos\theta$，$y_2-y_1=r\sin\theta$。

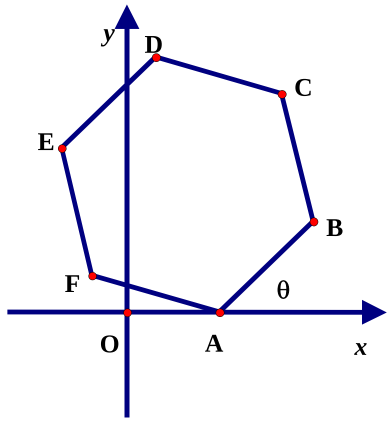
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OP}=(r\cos\theta,r\sin\theta)$。

結論：$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$。

[例題3] 如圖，正六邊形ABCDEF的邊長爲 3 單位長，且$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

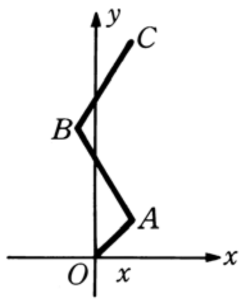
試問$\overrightarrow{AB}=$？ $\overrightarrow{AC}=$？

Ans：$\overrightarrow{AB}=(2,\sqrt{5})$，$\overrightarrow{AC}=(\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{15}+2}{2})$



(練習5)如圖中，$O(0,0)$，$X(1,0)$，$\overline{OA}=2$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=4$，$\angle AOX=45^\circ$，$\angle OAB=105^\circ$，$\angle ABC=120^\circ$，則 C 點的坐標爲________________。

Ans：$(\sqrt{2},\sqrt{2}+4\sqrt{3})$



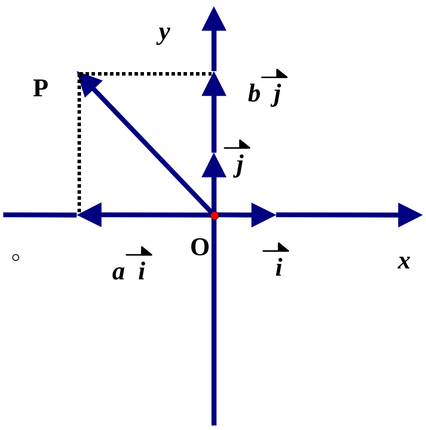
(丁)坐標向量的加減法與係數積

給定一個向量$\vec{u}=\overrightarrow{OP}$，其中O爲原點，取A(1,0)、B(0,1)兩點，並令$\vec{i}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{j}=\overrightarrow{OB}$，因爲$\vec{i}$ 、$\vec{j}$ 兩向量不平行，所以可將$\vec{u}=\overrightarrow{OP}$唯一表示成$\vec{i}$ 、$\vec{j}$ 兩向量的線性組合，可知$\vec{u}=\overrightarrow{OP}=a\vec{i}+b\vec{j}$ 。

因此$\vec{u}=\overrightarrow{OP}=(a,b)=a\vec{i}+b\vec{j}$ 。

反過來說，

$\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ ，那麼$\overrightarrow{OP}=a\vec{i}+b\vec{j}$ ，因此P點的坐標爲(a,b)。



結論：

$\boxed{\vec{u}=(a,b)\Leftrightarrow \vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}\ 。}$

(1)向量的加減法：

若設$\vec{u}=(a,b)$，$\vec{v}=(c,d)$，則$\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$，$\vec{v}=c\vec{i}+d\vec{j}$，

因此$\vec{u}+\vec{v}=(a\vec{i}+b\vec{j})+(c\vec{i}+d\vec{j})=(a+c)\vec{i}+(b+d)\vec{j}=(a+c,b+d)$

$\vec{u}-\vec{v}=(a\vec{i}+b\vec{j})-(c\vec{i}+d\vec{j})=(a-c)\vec{i}+(b-d)\vec{j}=(a-c,b-d)$

由以上的討論，可得以下的結論：

若$\vec{u}=(a,b)$、$\vec{v}=(c,d)$，

則$\vec{u}+\vec{v}=(a+c,b+d)$，$\vec{u}-\vec{v}=(a-c,b-d)$。

(2)向量係數積：

設$\vec{u}=(a,b)$，r爲實數，則$r\vec{u}=r(a,b)=(ra,rb)$ 各分量乘以r

(3)單位向量：若$|\vec{u}|=1$，則稱$\vec{u}$爲單位向量。

例如：$\overrightarrow{AB}$爲非零向量，$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$爲$\overrightarrow{AB}$方向上的單位向量。

(4)兩坐標向量平行：

設$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$

$\vec{a}\,//\,\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad\Leftrightarrow\quad\vec{a}=t\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_2=a_2b_1$ [分量成比例]

(5)位置向量：

設O爲坐標平面的原點，在坐標平面上每一個點P都可以決定向量$\overrightarrow{OP}$，反之，每一個向量$\overrightarrow{OP}$都可以指出P點的位置，我們稱$\overrightarrow{OP}$爲P點的位置向量。若P點的坐標爲(a,b)，則P點的位置向量$\overrightarrow{OP}$的坐標表示法也是(a,b)。也就是說(a,b)既表示P點，也表示向量$\overrightarrow{OP}$。至於什麼時候表示一點？什麼時候表示向量？一般可以從上、下文看出來，若有混淆之虞，則可加以註明清楚，例如“(a,b)爲P點的坐標”或“(a,b)爲某一向量”

等，如果將數對(a,b)，(c,d)，…視爲向量，那麼就可以做加、減與係數積的運算。

[例題4] 設$\overrightarrow{a}=(2,-3)$，$\overrightarrow{b}=(1,4)$，$t$爲實數，試求$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$的最小值。Ans：$\dfrac{11}{\sqrt{17}}$

[例題5] (1)求一向量$\overrightarrow{u}$使$|\overrightarrow{u}|=1$ 且$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}=(5,6)$同方向。

(2) 求一向量$\overrightarrow{u}$使$|\overrightarrow{u}|=1$ 且$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}=(5,6)$反方向。

Ans：(1)$(\dfrac{5}{\sqrt{61}},\dfrac{6}{\sqrt{61}})$ (2) $(-\dfrac{5}{\sqrt{61}},-\dfrac{6}{\sqrt{61}})$

(練習6) 設$\overrightarrow{a}=(-1,-1)$, $\overrightarrow{b}=(5,2)$，試求：

(1)$2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$ (2)$4\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}$ (3)$|-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|$

Ans： (1) (3,0) (2)(−9,−14) (3)$\sqrt{146}$

(練習7) 設$\overrightarrow{a}=(2,1)$，$\overrightarrow{b}=(3,4)$，當$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$最小時，$t$=？ Ans：−2

(練習8) 設$\overrightarrow{a}=(1,2)$、$\overrightarrow{b}=(3,4)$，若$t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$平行，求實數$t$=？

Ans：t=1 或−1

(練習9) 請求出與$\overrightarrow{a}=(4,-3)$平行的單位向量。Ans：$\dfrac{1}{5}(4,-3)$或$\dfrac{-1}{5}(4,-3)$

(練習10) 設$\overrightarrow{a}=(3,1)$、$\overrightarrow{b}=(-1,2)$、$\overrightarrow{c}=(3,8)$，若$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，則實數對$(x,y)$=？

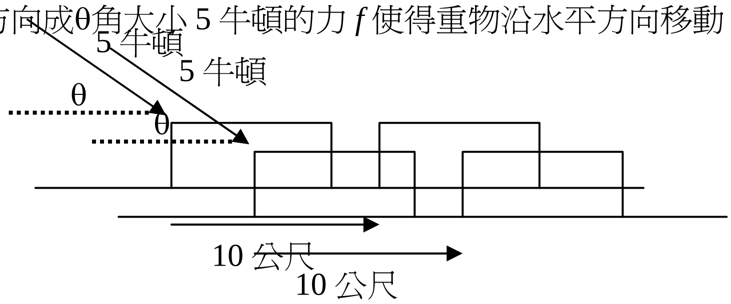
Ans：$(x,y)=(2,3)$

(戊)向量的內積

物理學告訴我們：一個物體在定力 f 作用下，若在力 f 的方向上有一位移 d，則該力對物體所作的 W=$f\cdot d$；但當力的方向與位移的方向有一夾角時，所作的功就不再單純的只是力與位移的乘積，而與夾角有關。

例子：

如下圖，對一個重物施以與水平方向成θ角大小 5 牛頓的力 f 使得重物沿水平方向移動 10 公尺，試求所作的功=？



[解答]：因為f的水平分力為 5cosθ，因此所作的功W=(5cosθ)·10(焦耳)

[數學化]：

現在將力視為向量 $\vec{f}$ ，位移視為向量 $\vec{d}$ ，因為力與水平方向夾角為θ，則可視為 $\vec{f}$ 與 $\vec{d}$ 的夾角為θ，

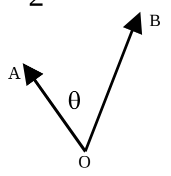
所作的功W=(5cosθ)·10=($|\vec{f}|\cos\theta$)·$|\vec{d}|$=$|\vec{f}||\vec{d}|\cos\theta$ ，其中θ為 $\vec{f}$ 與 $\vec{d}$ 的夾角，這樣的概念數學化之後，就稱為**向量 $\vec{f}$ 與 $\vec{d}$ 的內積**。

(1)向量的夾角：

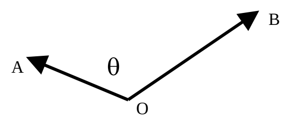
$\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 為平面上的兩個**非零向量**，根據向量的意義，我們可以將兩個向量平行移動，使得 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的起點重合(如圖)，

即 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ ，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ 我們定義兩向量的夾角θ為∠AOB。(0≤θ≤π或 0°≤θ≤180°)

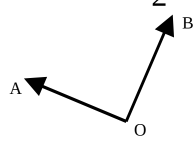
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

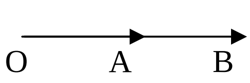


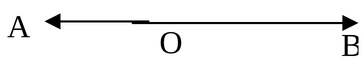
$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$



$\theta=\frac{\pi}{2}$







$\theta=0$　　　　　　　　　　　　　　　　$\theta=\pi$

因爲$\overrightarrow{0}$之方向不予限定，因此我們規定$\overrightarrow{\mathbf{0}}$**與任何向量的夾角爲任意角度。**

注意：

當$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}>0\Leftrightarrow 0<$夾角$\theta<\dfrac{\pi}{2}$，當$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}<0\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{2}<$夾角$\theta<\pi$

(2)向量的內積：

定義：

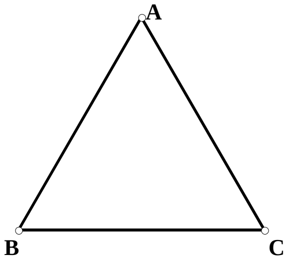
設$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$爲兩向量，θ爲其夾角，定義$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的內積爲$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$，符號記爲：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$，"‧"念成dot。

特別的，$\overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{0}||\overrightarrow{a}|\cos\theta=0$，因此$\overrightarrow{0}$與任何向量$\overrightarrow{a}$的內積都是 0。

注意：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$**是一個實數而非向量，就好像功是一個純量，而沒有方向。**

例：設正三角形ABC之邊長爲 1，

求(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$之値；(2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$之値。



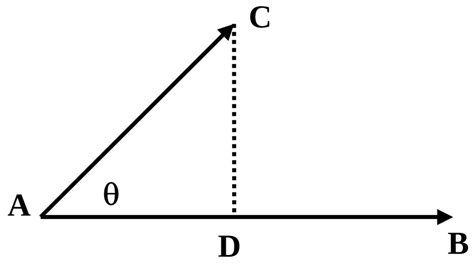
[例題6] ΔABC之三邊長爲$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$，

則求(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$？　(2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$？　Ans：(1)$\dfrac{27}{2}$ (2)$\dfrac{-5}{2}$

(3)投影量與內積

令 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，θ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角

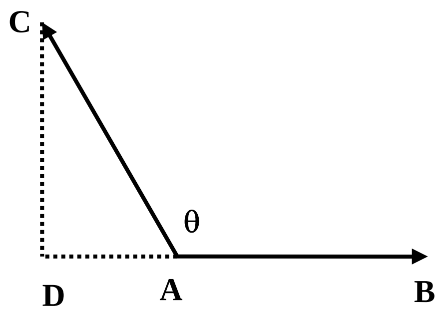
(a) 當 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$



如圖，$|\vec{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=\overline{AD}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\overline{AB}\cdot\overline{AD}>0$

(b)當 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

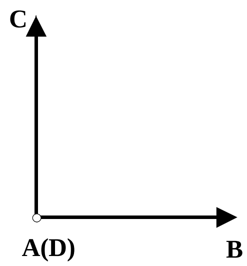


如圖，$|\vec{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=-\overline{AD}$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-\overline{AB}\cdot\overline{AD}<0$

(c)當 $\theta=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

如圖，$|\vec{b}|\cos\theta=0$ $\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$



根據前面的說明，我們稱 $|\vec{b}|\cos\theta$ 為 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影量(不一定為正)，向量 $\overrightarrow{AD}$ 為 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影(或正射影)。因此(a)(b)(c)中投影量分別為 $\overline{AD}$、$-\overline{AD}$、0。

因為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=(|\vec{b}|\cos\theta)\cdot|\vec{a}|$，

故 $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}\text{ 是 }\vec{b}\text{ 在 }\vec{a}\text{ 方向上的投影量乘以 }\vec{a}\text{ 的長度。}}$

另一方面，$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影量 $|\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}|\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)=\vec{b}\cdot\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)=\vec{b}\cdot\vec{e}$

其中 $\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 表示 $\vec{a}$ 方向的單位向量。

故 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影量亦可表為「**$\vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 方向的單位向量之內積**」。

(4)垂直的向量

當 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為直角時，我們稱 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 垂直，記為 $\vec{a}\perp\vec{b}$。

因為一向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{0}$ 之夾角可視為任意角，為了方便起見，**我們將任何向量與零向量都視為垂直**，於是 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 表示 $\vec{a}=\vec{0}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}$ 或$\theta=\frac{\pi}{2}$，但不管是那一種情形，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。所以規定：$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\text{。}}$

(5)向量的性質：

設 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 為任意三向量，r為任意實數，則

(a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交換性)

(b) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (分配性)

(c) $r(\vec{a}\cdot\vec{b})=(r\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(r\vec{b})$

(d) $\vec{0}\cdot\vec{a}=0$ (注意：$\vec{0}\cdot\vec{a}=0$ 而非零向量)

(e) $|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$，$|\vec{a}|^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

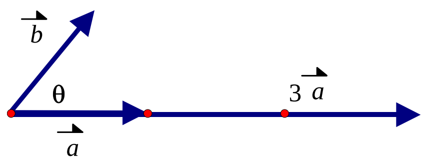
注意：$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$

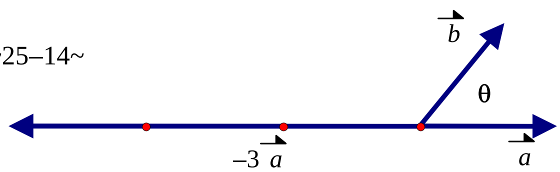
這個性質可以讓我們在內積與長度之間轉換，是一個簡單但重要的性質。

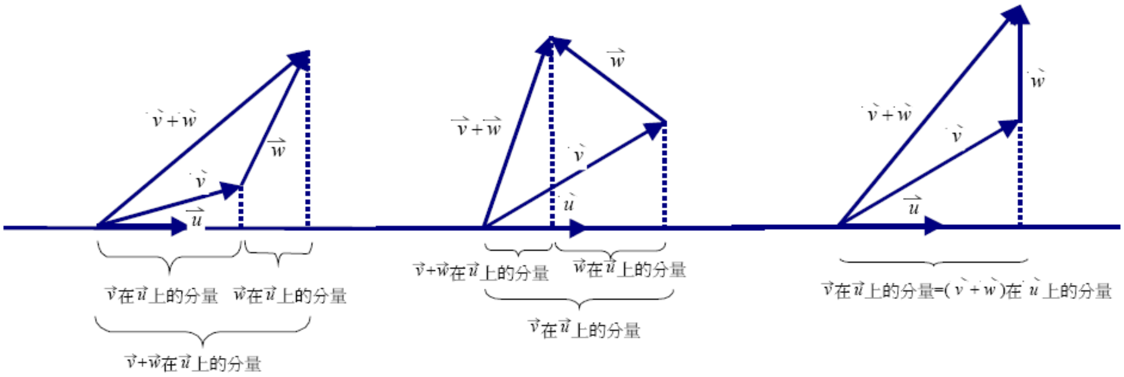
(f) $|\vec{a}\pm\vec{b}|^2=(\vec{a}\pm\vec{b})\cdot(\vec{a}\pm\vec{b})=|\vec{a}|^2\pm2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

[討論]：利用圖解法去說明(b)(c)(f)的性質。

性質(b)



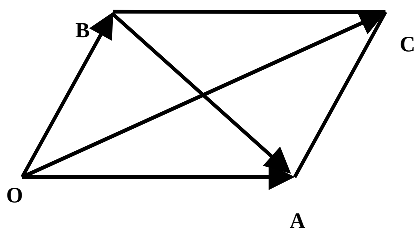




性質(c)以 r=3 或 r=–3 爲例：

(f)

令 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$



$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$，

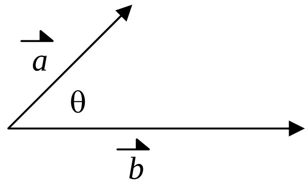
$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

可以寫成：

$|\overrightarrow{BA}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$，當 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 不平行時，上式爲餘弦公式。

[例題7] 二向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ ，若 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，且 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ ，
則(1) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角爲何？ (2) $|3\vec{a}+2\vec{b}|=$？　Ans：(1)$\frac{2\pi}{3}$ (2)$\sqrt{73}$

[例題8] 如圖，平面上兩個向量 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ ，其夾角θ滿足$\tan\theta=\frac{2}{5}$
且 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，試求



(1) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影量。(2) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影。

Ans：(1)$\dfrac{15}{\sqrt{29}}$ (2) $\dfrac{5}{\sqrt{29}}\vec{b}$

[例題9] $\vec{u}$、$\vec{v}$是二向量，試證明：

(1)$|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le|\vec{u}||\vec{v}|$。

(2)$|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$

不等式$|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le|\vec{u}||\vec{v}|$稱爲**柯西不等式**，我們將在後面再做進一步的討論。

不等式$|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$稱爲**三角形不等式**。

[例題10] 設$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$|\vec{c}|=7$，且$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，試求：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________。(2) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角爲________。

Ans：(1)$\dfrac{15}{2}$ (2)$\dfrac{\pi}{3}$

(練習11) 設$\vec{a}\perp\vec{b}$，且$|\vec{a}|=3\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=1$，

若 $\overrightarrow{a}+(t^2+5)\overrightarrow{b}$ 與 $-\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 互相垂直，則實數 t＝_______。Ans：t=2

(練習12) 正三角形ABC的邊長為 2，M為$\overline{BC}$的中點，試求

(1)$(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AC}$ =？ (2)$(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AM})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM})$=？

Ans：(1)5 (2)−8

(練習13) 一稜長為a之正四面體ABCD，$\overline{CD}$之中點為M，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ =？

Ans：$\dfrac{a^2}{2}$

(練習14) 設 $\overline{OA}=2$，$\overline{OB}=3$，$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$之夾角為 60°，試求：

(1)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$＝_______。(2)$|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$＝_________。

(3)$|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}|$＝_________。

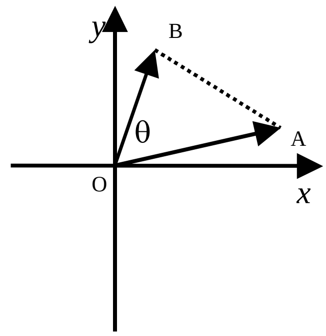
(4)$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2$＝________。

Ans：(1)3(2)$\sqrt{37}$(3)$2\sqrt{7}$(4)26

(己)坐標化的向量內積

(1)設$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，我們如何用a_1,a_2,b_1,b_2表示$\vec{a}\cdot\vec{b}$呢？

$\boxed{\vec{a}\text{ 與 }\vec{b}\text{ 不平行：}}$



設$\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$和$\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2)$且兩向量的夾角爲θ，

因爲$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(a_1-b_1，a_2-b_2)$

$|\overrightarrow{BA}|^2=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

根據前面的定義，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{BA}|^2)$

$=\frac{1}{2}[(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]]=\boxed{\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2}}$

故$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$。

$\boxed{\vec{a}\text{ 平行 }\vec{b}\text{ ：}}$

可令$\vec{a}=t\vec{b}\Leftrightarrow(a_1,a_2)=t(b_1,b_2)\Leftrightarrow a_1=tb_1$且$a_2=tb_2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(t\vec{b})\cdot\vec{b}=t|\vec{b}|^2=t(b_1^2+b_2^2)$

$a_1b_1+a_2b_2=(tb_1)b_1+(tb_2)b_2=t(b_1^2+b_2^2)$

故$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$。

根據前面的計算，$\boxed{\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}}$。

根據這個結果，可知當我們將$\vec{a}$、$\vec{b}$坐標化之後，$\vec{a}\cdot\vec{b}$就可以容易由分量計算出來，此時可以反過來向量的夾角與長度。

結論：設$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$

(a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$。

(b) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$ (向量與垂直的關係)

(c)若$\vec{a}$與$\vec{b}$皆不爲$\vec{0}$，則$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$(向量與角度)

(d) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$。(向量與長度)

由(c)與(d)可知內積與求角度、長度都有關係，這也是內積重要的地方。

[課內討論]：設$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$、$\vec{c}=(c_1,c_2)$，檢查下列內積的性質是對的：

(1°) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交換性)

(2°) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (分配性)

[例題11] 設ΔABC 的三頂點爲 A(3，−2)、B(−1,−4)、C(6,−3)，求內角∠A 的角度。
Ans：135°

[例題12] 設向量$\vec{a}$與另一向量$\vec{b}=(\sqrt{3},1)$的夾角是 120° 且$|\vec{a}|=8$，試求向量$\vec{a}$。
Ans：$\vec{a}=(0,-8)$或$(-4\sqrt{3},4)$

(練習15) 設$\vec{u}=(k,1)$, $\vec{v}=(2,3)$,求 k 使：

(1) $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 垂直　(2) $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 平行　(3) $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 的夾角爲 60°

Ans：(1)$k=\dfrac{-3}{2}$　(2)$k=\dfrac{2}{3}$　(3)$k=-8+\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$

(練習16) 設$A(4，0)$，$B(0，-3)$，動點P爲直線$x+y=0$上之一點。則$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$之最小值＝__________。Ans：$\dfrac{-49}{8}$

(練習17) 設 A(1,−2)、B(0,2)、C(−3,4)爲ΔABC 之三頂點，求 sinA=？
Ans：$\dfrac{5}{\sqrt{221}}$

(練習18) 設$\overrightarrow{OA}=(3,1)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,2)$，若$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{OA}$，且$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，則$\overrightarrow{OD}$=？　Ans：(11,6)

綜合練習

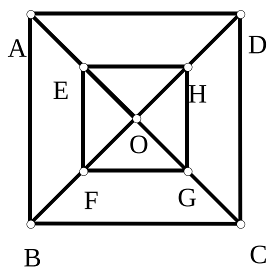
(1) 由正五邊形的邊，可決定__________個不同的向量。

(2) 有一正立方體，其邊長為 1，如果向量 $\vec{a}$ 的起點與終點都是此正立方體的頂點，且$|\vec{a}|=1$，則共有多少個不相等的向量 $\vec{a}$ ？
(A)3 (B) 6 (C)12 (D)24 (E)28 。 (86 學科)

(3) 在坐標平面上，A(150,200)、B(146,203)、C(−4,3)、O(0,0)，則下列敘述何者為真？
(A)四邊形 ABCO 是一個平行四邊形。
(B)四邊形 ABCO 是一個長方形。
(C)四邊形 ABCO 的兩對角線互相垂直。
(D)四邊形 ABCO 的對角線$\overline{AC}$長度大於 251。
(E)四邊形 ABCO 的面積為 1250。 (90 學科)

(4) 在坐標平面上有四點O(0,0),A(−3,−5),B(6,0),C(x,y)。今有一質點在O點沿$\overrightarrow{AO}$方向前進$\overline{AO}$距離後停在P，再沿$\overrightarrow{BP}$方向前進 $2\overline{BP}$距離後停在Q。假設此質點繼續沿$\overrightarrow{CQ}$方向前進 $3\overline{CQ}$距離後回到原點O，則(x,y)=________ 。
(2009 學科能力測驗)

(5) 如右圖所示，O為正方形ABCD對角線的交點，且E、F、G、H分別為線段OA，OB，OC，OD的中點。試問下列何者為真？
(A)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}$ (B)$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{EF}$
(C)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$ (D)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GC}$ (E) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$
(86 社)



(6) 若$|\vec{b}|=2|\vec{a}|\neq 0$，且$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b})$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為何？

(7) 坐標平面上A(2,−1)、B(3,2)，若$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$，且$\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{OA}$，則C之坐標為何？

(8) 設 $\vec{u}$ 、$\vec{v}$ 為兩非零向量，以$|\vec{u}|$表示 $\vec{u}$ 之長度，若$|\vec{u}|=2|\vec{v}|=|2\vec{u}+3\vec{v}|$，且θ表示 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 的夾角，則 $\cos\theta$=_________ 。 (2006 指定甲)

(9) 若向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角為 60°，且$|\vec{b}|=4$，$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=-72$，則$|\vec{a}|$=？

(10) 引擎馬力的計算公式是P= $\frac{1}{75}(\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v})$，其中 $\overrightarrow{F}$ 是引擎所帶動物體的重量，單位是kgw， $\overrightarrow{v}$ 是引擎帶動物體的速度，單位是m/sec。
現在有一貨車拉動軌道上重 1000 公斤的貨車，而纜線與水平線的夾角是 30°，貨車的速度是 15m/sec，求貨車引擎的馬力。

(11) 設正五邊形ABCDE之每一邊長均為 1，則(a)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$=？ (b)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$=？

(12) 設ABCD是平行四邊形，$\overline{AB}$=2，$\overline{BC}$=3，則$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$=？

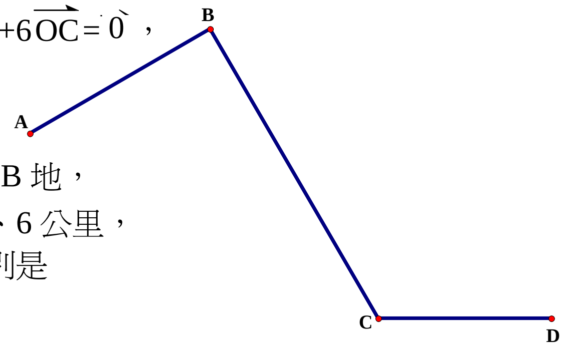
(13) ΔABC 中，設 A(−2,1),B(1,2),C(−4,3)，試求ΔABC 的垂心 H。

(14) 設 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 均非零向量，若 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 方向的投影量為$|\overrightarrow{b}|$的 3 倍，而 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 方向的投影量為$|\overrightarrow{a}|$的$\frac{1}{6}$倍，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角為何？

(15) 三向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ ，若 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$ ，且$|\overrightarrow{a}|$=2，$|\overrightarrow{b}|$=3，$|\overrightarrow{c}|$=4，則
(a) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}$=？ (b)求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角θ，cosθ=？

(16) 圓外切等腰梯形 ABCD， $\overline{AB}=2$， $\overline{CD}=6$， $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$ ，
則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ =________。

(17) 一單位圓之內接ΔABC，圓心O，若 $4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$ ，
則(a)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$=？ (b)$\overline{AB}$=？



(18) 如圖所示，一公路依地形迂迴而建，從 A 地到 B 地，B 地到 C，C 地到 D 地，距離分別是 $4\sqrt{3}$、11、6 公里，而 AB 與 BC，BC 與 CD 間，兩公路的夾角分別是 90°、120°，試求 A 地到 D 地的直線距離。

進階問題

(19) 空間中有A,B,C,D四點。已知$\overline{AB}$=1，$\overline{BC}$=2，$\overline{CD}$=3，∠ABC=∠BCD=120°而$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{CD}$之夾角為 60°，則$\overline{AD}$之長為何？ (86 自)

(20) △ABC 中， $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$， $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$， $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{OC}$， $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$ ，
$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-1$， $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=-2$， $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=-3$，則：
(a) $|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}+4\overrightarrow{c}|$ =__________。(b)△ABC 之面積為_________。

(21) 若$|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq 0$， 且$|\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}|\vec{a}|$，求$\vec{a}$，$\vec{b}$之夾角。

(22) 坐標平面上，A、B、C三點不共線，若$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2}$，求(a)$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$之夾角θ的正弦值， (b)ΔABC的面積。
(c)$|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=$？

綜合練習解答

(1) 10

(2) (B)

(3) (A)(B)(E)

(4) $(-4,20)$

(5) (全)

(6) $60°$

(7) $(\frac{-7}{2},\frac{21}{4})$

(8) $\frac{-7}{8}$

(9) 6

(10) $100\sqrt{3}$

(11) (a)$\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ (b)$\frac{1}{2}$

(12) 5[提示：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})$]

(13) $(\frac{-5}{2},\frac{-3}{2})$

(14) $45°$ [提示：$\vec{a}$對$\vec{b}$方向的投影量爲$|\vec{a}|\cos\theta$，其中θ爲$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角]

(15) (a)$\frac{-29}{2}$ (b)$\frac{1}{4}$

(16) -4

(17) (a)$\frac{-1}{8}$ (b)$\frac{3}{2}$ [提示：$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$]

(18) $7\sqrt{7}$公里

[提示：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$]

(19) 5 [提示：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$，再利用$|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|^2$求$|\overrightarrow{AD}|$]

(20) (a)$\sqrt{15}$(b)$\frac{3\sqrt{11}}{2}$

[提示：(a) $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0 \Rightarrow |\vec{a}|=2$ 同理可以求得$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{c}|=\sqrt{5}$，

再求$|2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}|^2$的值。(b)$\Delta ABC=\Delta OAB+\Delta OBC+\Delta OCA$]

(21) $\frac{\pi}{6}$[提示：可令$\vec{a}$，$\vec{b}$之夾角θ，因爲$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，所以$|\vec{a}+\vec{b}|=2|\vec{a}|\cos\frac{\theta}{2}$.，$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|\sin\frac{\theta}{2}$]

(22) (a)$\frac{\sqrt{7}}{4}$ (b)$\frac{3\sqrt{7}}{4}$ (c)$\sqrt{22}$