第十四單元　三角測量

(甲)測量的基礎概念與名詞

(1) 基本測量知識

(a)拿著細繩的一端，懸錘於另一端，得一鉛直線，垂直於鉛直線的線，稱之為水平線。

(b)觀測「目的物」時，設想過「目的物」有一鉛直線。從觀察者之目作直線垂直於鉛直線，乃得一水平線。

(c)從觀察者之目至「目的物」，作一射線(即表視線)。設視線與水平線所成的角為θ，若為仰視(視線在水平線之上)，則稱θ為**仰角**；

若為俯視(視線在水平線之下)則稱θ為**俯角**。

(2)名詞解釋：

(a)鉛直線：通過地球球心的直線。

(b)水平線：垂直鉛直線的直線。

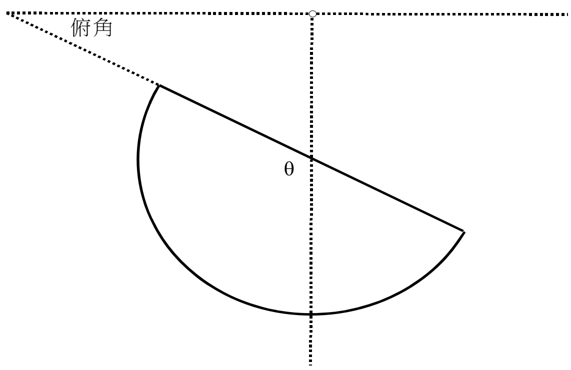
(c)測物線：眼睛與觀測物所成之直線。

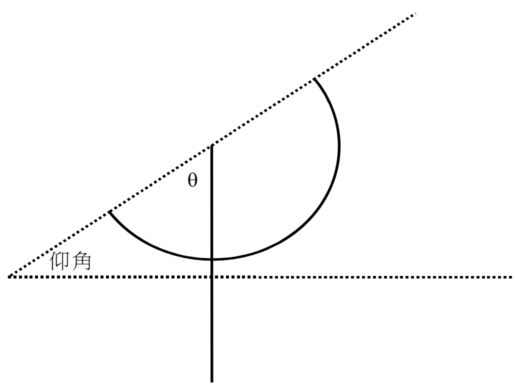
(d)仰角：測物線與水平線之夾角，此時觀測物在水平線之上方。

(e)俯角：測物線與水平線之夾角，此時觀測物在水平線之下方。

(3)用量角器作粗略測量

量角器可作為粗略測量仰角及俯角的工具，其方法為在中心處挖一個小孔並繫上一細繩，在繩子的另一端繫上一個重物。測量時，將量角器 0°這一端靠近眼睛，另一端對準目標物觀測點。俯視目標物時，若細繩所示的角度為θ°，則俯角為$(\theta^{\circ}-90^{\circ})$。仰視物體時，若細繩所示的角度為$\theta^{\circ}$，可知仰角為$(90^{\circ}-\theta^{\circ})$。





(3)解題原則：

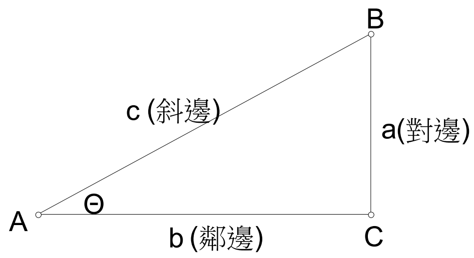
(a)一遇直角三角形，最大要訣⇒以三角函數值表示幾何量

對邊(a)=斜邊(c)×對角的正弦值(sinA)

=鄰邊(b)×對角的正切值(tanA)

鄰邊(b)=斜邊(c)×對角的餘弦值(cosA)

=對邊(a)×對角的餘切值(cotA)



(b)若為任意三角形

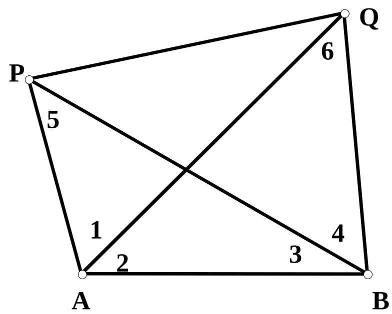
已知一邊二角(角比邊多)⇒用正弦定理

已知二邊一角(邊比角多)⇒用餘弦定理

(c)立體測量：

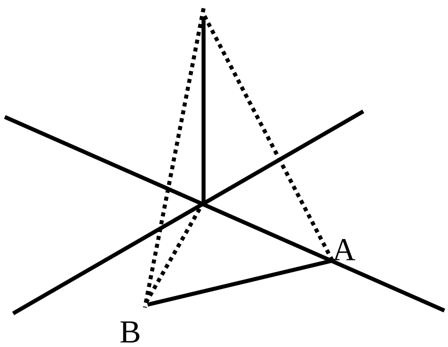
處理立體測量的問題時，通常將要求出的量(塔高、山高、距離..)與題目所給的條件(方位、距離、仰角、俯角)，通通轉化成一個三角形的邊長或內角，然後就可將立體的問題化成平面三角形的問題，此時正餘弦等在三角形上解決邊角問題的技巧就可以派上用場。

[例題1] 如圖所示，設$\overline{AB}$=30，∠1=60°，∠2=45°，∠3=30°，∠4=60°，求$\overline{PQ}$。Ans：$15\sqrt{6}$

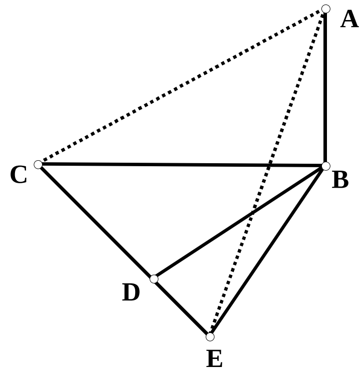


[例題2] 自塔之東一點 A，測得塔頂之仰角為 45°；在塔之南 60°東一點 B，測得塔頂之仰角為 30°。設 A、B 兩點相距 10 公尺，則塔高為__________公尺。

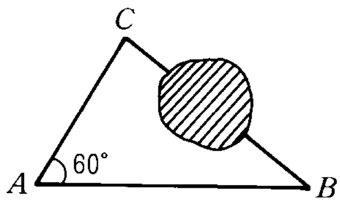
Ans：10 公尺



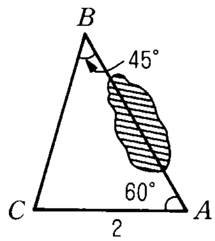
[例題3] 一直線上三點 C、D、E 測得山頂之仰角分別為 30°、45°、60°(但 C、D、E 三點與山頂之垂足不共線)，若$\overline{CD}$=60 公尺，$\overline{DE}$=40 公尺，則山高為多少公尺？
Ans：$20\sqrt{15}$



(練習1) 如下圖，地面上兩點 B，C 被一池塘隔開，
在地面上找一點 A，量得$\overline{AB}$＝80 公尺，
$\overline{AC}$＝50 公尺，並測得∠ CAB＝60°，
則 $\overline{BC}$=______公尺。 Ans：70



(練習2) 如下圖所示，某人欲測 A 和 B 兩點的距離，
得到資料如下：$\overline{AC}$=2 公里，∠ CAB＝60°，
∠ CBA＝45°，則$\overline{AB}$=_________公里。
Ans：$\sqrt{3}$+1 公里。



(練習3) 設一颱風中心為 O，下午 3 時被測出在 A 地南 60°西，距 A 地 100 公里的海上，正朝東以每小時 $\dfrac{50}{\sqrt{3}}$公里速度侵襲，且其暴風半徑為 $\dfrac{100}{\sqrt{3}}$公里。假定這颱風半徑及行進方向與速度均不變，試預測何時 A 地會進入暴風圈，何時可望脫離？Ans：下午 5 時進入暴風圈，下午 7 時脫離

(練習4) 一塔高 25 公尺，某人由塔頂 A 測得海面上二點 B,C 俯角分別為 30°及 θ ，若 $\sin\theta=\dfrac{5}{6}$，且∠BAC=120°，則 B,C 二點之距離為______公尺。
Ans：70

(練習5) 某人在燈塔$\overline{AB}$的頂端 A 測得一船在正西方 C 點，俯角為 45°，5 分鐘後再測得該船在西 30°南的 D 點，其俯角為 60°，已知 $\overline{AB}$＝200 公尺，求船的時速。Ans：$800\sqrt{3}$公尺／小時

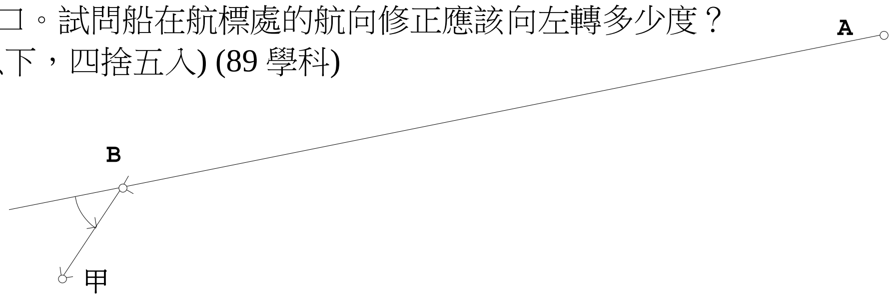
(練習6) 從一直線上之三點 A,B,C 測得一山之仰角各為 30°，45°，60°，已知 A,B,C 與山腳不共線，AB =300 公尺，BC =200 公尺，求山高。Ans：$100\sqrt{15}$公尺

綜合練習

(1)　氣象局測出在 20 小時期間，颱風中心的位置由恆春東南方 400 公里直線移動到恆春南 15°西的 200 公里處，試求颱風移動的平均速度。(整數以下，四捨五入)　(89 學科)

(2) 在坐標平面的 x 軸上有 A(2,0),B(−4,0)兩觀測站，同時觀察在 x 軸上方的一目標 C 點，測得∠BAC 及∠ABC 之值後，通知在 D($\frac{5}{2}$,−8)的砲台此兩個角的正切值分別為$\frac{8}{9}$及$\frac{8}{3}$。那麼砲台 D 至目標 C 的距離為_________。 (90 學科)

(3) 如下圖所示，有一船位於甲港口的東方 27 公里北方 8 公里 A 處，直朝位於港口的東方 2 公里北方 3 公里 B 處的航標駛去，到達航標後即修正航向以便直線駛入港口。試問船在航標處的航向修正應該向左轉多少度？
(整數以下，四捨五入) (89 學科)



(4) 假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆為 20 公里。兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮。今在一比例精準的地圖上量得兩公路的夾角為 45°，則丙、丁兩鎮間的距離約為
(1) 24.5 公里 (2) 25 公里 (3) 25.5 公里 (4) 26 公里 (5) 26.5 公里
(98 學科)

(5) 在 A、B 兩支旗竿底端連線段中某一點測得 A 旗竿頂端的仰角為 29°、B 旗竿頂端的仰角為 15°。在底端連線段中另一點測得 A 旗竿頂端的仰角為 26°、B 旗竿頂端的仰角為 19°。
則 A 旗竿高度和 B 旗竿高度的比值約為______________(四捨五入到小數點後第一位)

θ	15°	19°	26°	29°
$\cot\theta$	3.73	2.90	2.05	1.80

(6) 莎韻觀測遠方等速率垂直上升的熱氣球。在上午10:00 熱氣球的仰角為30°，到上午10:10 仰角變成34°。請利用下表判斷到上午10:30時，熱氣球的仰角最接近下列哪一個度數？

θ	30°	34°	39°	40°	41°	42°	43°
$\sin\theta$	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
$\cos\theta$	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
$\tan\theta$	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

(1) 39° (2) 40° (3) 41° (4) 42° (5) 43°　(2013 學科能力測驗)

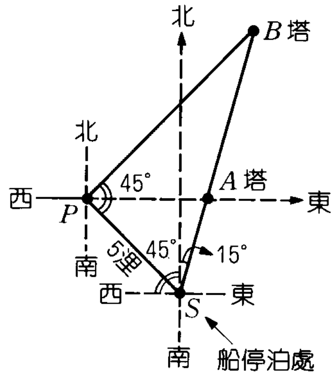
(7) 小山頂有一砲台，台頂上有高為 60 尺之瞭望塔，今在平地上一點，側得山頂、台頂、塔頂之仰角依次為 45°，60°，75°，

則山高為____尺，砲台高為______尺。　$\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(8) A,B,C 三地兩兩相距 14 公里。甲從 A 地出發走向 B 地，在同一時間乙從 B 地出發走向 C 地，已知甲速為乙速的 2 倍，試求甲、乙兩人間的最短距離。

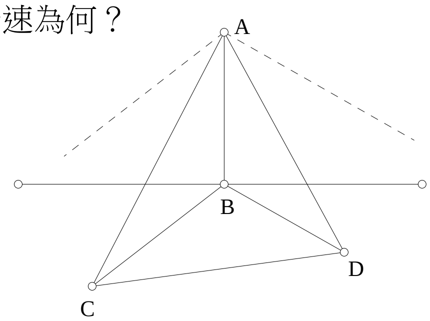
(9) 淡水河岸 A，B 兩點距離為 400 公尺，$\overline{CD}$ 為新光三越大樓，D 為樓頂，C 為基底。若 $\angle BAC = 105^\circ$，由 A 測得 D 的仰角為 14°，又 $\angle ABC = 45^\circ$，求 $\overline{CD}$ 高度。(但 $\sin 14^\circ = \dfrac{1}{8}$，$\cos 14^\circ = \dfrac{24}{25}$，$\tan 14^\circ = \dfrac{1}{4}$)

(10) 如圖(1)，自停泊中一船測兩燈塔均在北 15°東之方向，此船向北西方向前進 5 浬後再看燈塔，則一在正東，另一在北東，則兩塔距離為(A)$15-5\sqrt{3}$ (B) $15-6\sqrt{3}$ (C) $15-4\sqrt{3}$ (D) $15-2\sqrt{3}$ (E) $15-\sqrt{3}$ 浬



圖(1)

(11) 某人在岸邊小土墩上 A 點看一漁船在海岸附近慢行，已知土墩高出水面 20 公尺，當他第一眼看到漁船在 C 點時，俯角 30°，過 5 分鐘後，船行至 D 點，再測得俯角為 45°，且∠DAC=45°，則船速為何？



(12) 從平地上三點 A,B,C 測得某山頂之仰角均為 15°，設∠BAC=30°，BC=250 公尺，求山高。(註：$\cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}$)

(13) 自地面上共線的相異三點 A，B，C 測得一山頂的仰角分別為 30°，45°，60°。若點 B 介 A，C 之間且 $\overline{AB} = 200$ 公尺，$\overline{BC} = 100$ 公尺，並且山腳與三點 A，B，C 不共線，試求山高。

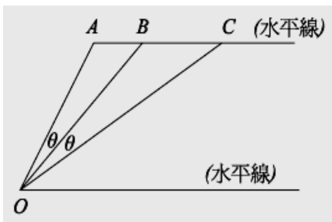
(14) 某甲觀測一飛行中之熱氣球，發現其方向一直維持在正前方，而仰角則以等速遞減。已知此氣球的高度維持不變，則氣球正以
(A)等速飛行　(B)加速向某甲飛來　(C)減速向某甲飛來　(D)加速離某甲飛去
(E)減速離某甲飛去。

(15) 一直線上三點 A、B、C，測一山之仰角各為 30°、45°、60°
(但 A、B、C 三點與山頂之垂足不共線)，若$\overline{AB}=\overline{BC}=80$ 公尺，求山高。

(16) 某人測得一山峰之仰角為θ，當他向山峰前進距離a後，再測得山峰之仰角增大為ϕ，則山峰的高度為$\dfrac{a\sin\phi\sin\theta}{\sin(\phi-\theta)}$，證明之。

綜合練習解答

(1)　17 公里/時
(2)　13
(3)　45 度
(4)　(1)
(5)　3.3
(6)　(3)
(7)　30，$30(\sqrt{3}-1)$
(8)　$\sqrt{21}$
(9)　$100\sqrt{2}$
(10)　(A)
(11)　$4\sqrt{2}$ 公尺/分
(12)　$250(2-\sqrt{3})$公尺 (Hint：A,B,C 三點共圓　Why？)
(13)　300 公尺
(14)　(D)(詳解)：如上圖，令熱氣球由A沿水平線飛至B與由B飛至C所需時間均為t秒，又因為仰角以等速遞減故$\angle AOB=\angle BOC=\theta$故由幾何性質得知：$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$因為$\overline{OC}>\overline{OA}$，所以$\overline{BC}>\overline{AB}$。再令$V_1$及$V_2$分別表熱氣球由$A$至$B$及由$B$至$C$的速度，則$V_1=\dfrac{\overline{AB}}{t}$，$V_2=\dfrac{\overline{BC}}{t}$因為$\overline{BC}>\overline{AB}$，顯然可得$V_2>V_1$故熱氣球加速離某甲飛去，故應選(D)



(15)　$40\sqrt{6}$
(16)　如右下圖，$\angle CAB=\varphi-\theta$，由正弦定理

可得$\overline{AC}=\sin\theta\cdot\dfrac{a}{\sin(\varphi-\theta)}$，而高$h=\overline{AC}\cdot\sin\varphi$

所以高$=\dfrac{a\sin\phi\sin\theta}{\sin(\phi-\theta)}$