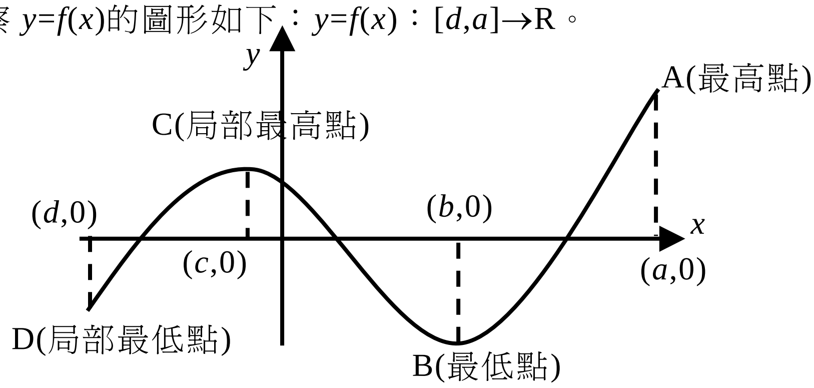
§2−3 函數的極值

(甲)極值的意義

觀察 $y=f(x)$的圖形如下：$y=f(x)$：$[d,a]\to$R。



最大值：

若對於 $f(x)$的定義域中的每一點 x，$f(a)\geq f(x)$都成立，則我們稱 $f(a)$是函數 $f(x)$的最大值或 $f(x)$在 $x=a$ 有最大值 $f(a)$。如上圖，A 點為最高點，A 點的 y 坐標是函數 $f(x)$的最大值。

最小值：

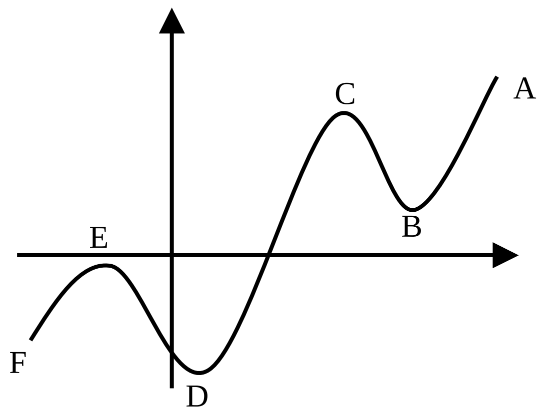
若對於 $f(x)$的定義域中的每一點 x，$f(b)\leq f(x)$都成立，則我們稱 $f(b)$是函數 $f(x)$的最小值或 $f(x)$在 $x=b$ 有最小值 $f(b)$。如上圖，B 點為最低點，B 點的 y 坐標是函數 $f(x)$的最小值。

極大值：(局部的最大值)

若在 $f(x)$的定義域中非常接近 c 的 x，$f(c)\geq f(x)$都成立，則我們稱 $f(c)$是函數 $f(x)$的一個極大值，或 $f(x)$在 $x=c$ 處有一個極大值 $f(c)$。如上圖，A 點與 C 點的 y 坐標都是函數 $f(x)$的極大值。

極小值：(局部的最小值)

若在 $f(x)$的定義域中非常接近 d 的 x，$f(d)\leq f(x)$都成立，則我們稱 $f(d)$是函數 $f(x)$的一個極小值，或 $f(x)$在 $x=d$ 處有一個極小值 $f(d)$。如上圖，B 點與 D 點的 y 坐標都是函數 $f(x)$的極小值。



說明：

(a)最大(小)值⇔函數值中最大(小)者。
　極大(小)值⇔函數在某點附近最大(小)值。
(b)最大(小)值必為極大(小)值。
(c)最大值與最小值最多只能各有一個，而極大值、極小值不一定各只有一個。
(d)最大值≥最小值，但極大值不一定大於極小值，而極小值不一定小於極大值。

如前圖，B 點的 y 坐標為 $f(x)$的一個極小值，E 點的 y 坐標為 $f(x)$的一個極大值，可是，E 點的 y 坐標卻小於 B 點的 y 坐標，表示 E 點對應的極大值小於 B 點對應的極小值。

(e)在閉區間$[a,b]$上的連續函數一定有最大值與最小值，而全部的極大值與極小值中，最大一個就是最大值，最小的就是最小值。

(乙)如何用一次導數判別極值

(1)導數與極值的關係：

觀察一個實例：

$f(x)=ax^2+bx+c$，由配方可知$f(x)$在$x=\frac{-b}{2a}$有極值，而$f'(x)=2ax+b$，所以$f'(\frac{-b}{2a})=0$。

由圖形上來說，表示$y=f(x)$的圖形拋物線在頂點處的切線爲水平線。這個結果可推廣到一般的函數，我們寫成定理一。

定理一：若函數$f(x)$在$x=a$處有極值，而且$f(x)$在$x=a$處可微分，則$f'(a)=0$。

證明：

不妨假設$(a,f(a))$爲$f(x)$的極大點，根據定義$f(x)$在$(a,f(a))$最大

如果$x>a$，則$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le 0$

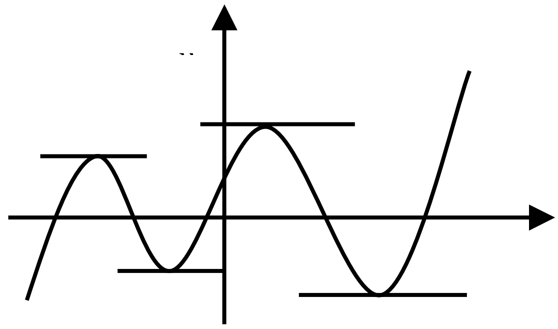
如果$x<a$，則$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ge 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ge 0$

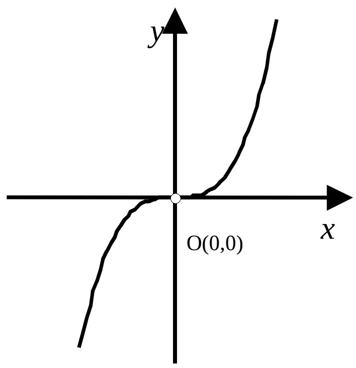
因爲$f'(a)$存在，所以$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$

因此$f'(a)=0$

幾何解釋：

定理一：若A點是$y=f(x)$圖形上的一個局部最高點或最低點，而且A點爲切點的切線存在，則此切線必爲水平線。





[討論]：

(1)定理一中$f'(a)$存在的條件，可以去掉嗎？

不可以！反例：$f(x)=|x|$，$a=0$

因此不可微分的點可能會發生極值。

(2)定理一的逆定理成立嗎？

逆定理不成立，反例$f(x)=x^3$在$x=0$處$f'(0)=0$，

但$f(x)$在$x=0$不發生極值。

結論：

對於一個函數$f(x)$而言，它的極值只可能出現在下面這些點：

(1)滿足$f'(a)=0$的點a。

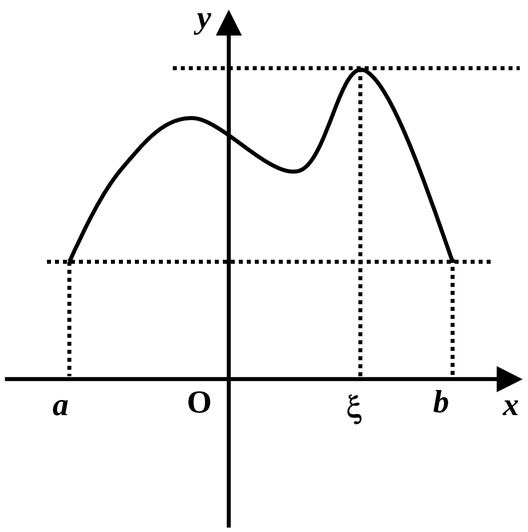
(2)$f(x)$的不可微分的點(圖形上的尖點、跳躍點、轉折點)

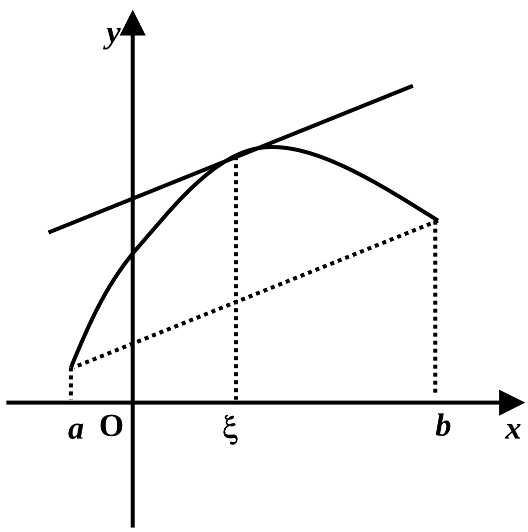
(3)$f(x)$的定義域的端點。

(2)函數的遞增與遞減：
若$x_1>x_2$，則$f(x_1)\ge f(x_2)$，具有上述性質的函數$f(x)$稱爲**遞增函數**。
若$x_1>x_2$，則$f(x_1)\le f(x_2)$，具有上述性質的函數$f(x)$稱爲**遞減函數**。
若$x_1>x_2$，則$f(x_1)>f(x_2)$，具有上述性質的函數$f(x)$稱爲**嚴格遞增函數**。
若$x_1>x_2$，則$f(x_1)<f(x_2)$，具有上述性質的函數$f(x)$稱爲**嚴格遞減函數**。

從圖形的觀點來看：
遞增函數的圖形向右移動時，圖形隨著上升，而遞減函數的圖形則剛好相反。
例如：$f(x)=x^3$爲遞增函數，$g(x)=-x^3$爲遞減函數。

Rolle's定理：(僅供參考)
設f：$[a,b]\to R$爲連續函數，且$f'(x)$存在，$\forall x\in(a,b)$，
若$f(a)=f(b)$，則存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$。
[證明]：
(1)若$f(x)$在$[a,b]$是常數函數，則結論自然成立。
(2)若$f(x)$在$[a,b]$不是常數，因爲f在$[a,b]$爲連續函數，所以$f(x)$在$[a,b]$上有最大值與最小值， 因爲$f(a)=f(b)$，不妨假設$f(x)$在$x=\xi$發生最大值，且$\xi\in(a,b)$，根據定理一的結果，可知$f'(\xi)=0$。





Lagrange中間值定理：(僅供參考)
設f：$[a,b]\to R$爲連續函數，且$f'(x)$存在，$\forall x\in(a,b)$，則存在$\xi\in(a,b)$，
使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。
[證明]：
(1)如果$f(a)=f(b)$，根據Rolle's定理，可知存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$，
因此結論自然成立。
(2)如果$f(a)\ne f(b)$，定義$\varphi(x)=f(x)-[f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]$
顯然$\varphi(x)$爲$[a,b]$上的連續函數，且$\varphi(a)=\varphi(b)$，$\varphi'(x)$存在$\forall x\in(a,b)$
$\Rightarrow$根據Rolle's定理，存在$\xi\in(a,b)$，使得$\varphi'(\xi)=0\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

定理二：
設$f(x)$在(a,b)內每一點都可微分
(1)若$f'(x)\geq 0$，$\forall x\in(a,b)$，則$f(x)$在(a,b)上爲遞增。
(2)若$f'(x)\leq 0$，$\forall x\in(a,b)$，則$f(x)$在(a,b)上爲遞減。

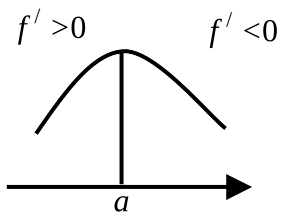
[證明]：
(1)$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，其中$x_1<x_2$，由Lagrange中間值定理
$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$，$c\in(a,b)$，因爲$f'(c)\geq 0$
$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)\geq 0 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$。
(2) $\forall x_1,x_2\in(a,b)$，其中$x_1<x_2$，由Lagrange中間值定理
$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=f'(e)(x_2-x_1)$，$e\in(a,b)$，因爲$f'(e)\leq 0$
$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)\leq 0 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$。

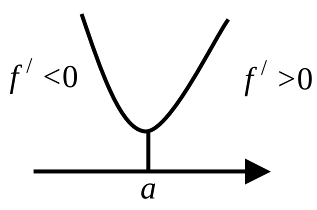
說明：
(a) 設$f(x)$在(a,b)上可微分，
若$f'(x)>0$ ($f'(x)<0$)，$\forall x\in(a,b)$，則$f(x)$在(a,b)上爲嚴格遞增(嚴格遞減)。
但是$f(x)$嚴格遞增不見得$f'(x)\geq 0$。
反例：$f(x)=x^3$在R上爲嚴格遞增，但$f'(x)=3x^2\geq 0$。

(b)若$f(x)$在$[a,b]$上連續，且$f'(x)\geq 0$($f'(x)\leq 0$)，$\forall x\in(a,b)$，
則稱$f(x)$在$[a,b]$上爲遞增(遞減)。

定理三：
設函數$f(x)$在$x=a$的附近可微分，且$f'(a)=0$。
(1)若在a點附近，當$x<a$時，$f'(x)>0$；當$x>a$時，$f'(x)<0$，
則$f(x)$在$x=a$處有(相對)極大值。
(2)若在a點附近，當$x<a$時，$f'(x)<0$；當$x>a$時，$f'(x)>0$，
則$f(x)$在$x=a$處有(相對)極小值。

註：可以下面的圖形爲模形：





[證明]：
(1)在a點附近，
設$x<a$，$f(x)-f(a)=f'(t)(x-a)<0$，t介於x、a之間$\Rightarrow f(x)<f(a)$
設$x>a$，$f(x)-f(a)=f'(s)(x-a)<0$，s介於x、a之間$\Rightarrow f(x)<f(a)$
所以$f(x)$在$x=a$處有(相對)極大值。

(2)在a點附近，

設$x<a$，$f(x)-f(a)=f^{/}(t)(x-a)>0$，$t$介於$x$、$a$之間$\Rightarrow f(x)>f(a)$
設$x>a$，$f(x)-f(a)=f^{/}(s)(x-a)>0$，$s$介於$x$、$a$之間$\Rightarrow f(x)>f(a)$
所以$f(x)$在$x=a$處有(相對)極小值。

[例題1] 試問$f(x)=x^4-2x^2+1$ 在那些區間會遞增、遞減？
Ans：$x\geq 1$ 遞增，$0\leq x\leq 1$ 遞減，$-1\leq x\leq 0$ 遞增，$x\leq -1$ 遞減

[例題2] 設$f(x)=x^3-ax^2+2x+1$，若$f(x)$爲遞增函數，則a的範圍爲何？
Ans：$-\sqrt{6}\leq a\leq\sqrt{6}$

[例題3] 求$f(x)=(x+3)^3(x-2)^2$的極大值、極小值。
Ans：極大值$f(0)=108$，極小值$f(2)=0$

[例題4] 請求出函數 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$ 之極大值與極小值。
Ans：$f(-1)$爲極小值，$f(3)=\dfrac{1}{6}$爲極大值

(練習1) 設$f(x)=-x^3+ax^2+ax+1$ 恆為遞減函數，則a的範圍為何？
Ans：$-3\le a\le 0$

(練習2) 已知函數 $f(x)=x+\dfrac{x}{x-1}$ 請求出遞增與遞減的區間。
Ans：$x\ge 2$ 或 $x\le 0$ 遞增，$0\le x\le 2$ 且 $x\ne 1$ 遞減

(練習3) 設函數 $f(x)$定義為 $f(x)=\begin{cases} 3x+5 & 當x\le -1 \\ x+3 & 當-1\le x<1 \\ x^2-4x+7 & 當1\le x\le 4 \end{cases}$，(1)試畫 $f(x)$的圖形。 (2) 試求 $f(x)$的極大值、極小值、最大值、最小值。
Ans：(2)極大值：7，4；極小值：3，；最大值：7，最小值：沒有

(練習4) 求函數$f(x)=3x^5-5x^3$的極大值、極小值。
Ans：極大值$f(-1)=2$，極小值$f(1)=-2$

(練習5) 求函數$f(x)=2x^3-9x^2+12x+3$ 的極值。 Ans：極大值=8，極小值=7

(練習6) 試求 $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3}$的極值。 Ans：極大值 $f(3)=\dfrac{1}{6}$，極小值 $f(1)=\dfrac{1}{2}$。

[例題5] 設$f(x)=x^3-12x+2$，$-3\le x\le 5$，，試求 $f(x)$ 之極大值，極小值，最大值，最小值。
Ans：極大值：$f(-2)=18$，$f(5)=67$，極小值：$f(-3)=11$，$f(2)=-14$，
最大值：$f(5)=67$，最小值：$f(2)=-14$

[例題6] 試求函數 $f(x)=x\cdot\sqrt{1-x^2}$的最大值及最小值。

Ans：最大值：$\dfrac{1}{2}$，最小值：$\dfrac{-1}{2}$

(練習7) 設$f(x)=x^4+x^3-2x^2-3x$，當 $0\le x\le 2$ 時，則$f(x)$的極大值為______，極小值為______；最大值為________，最小值為________。

Ans：極大值$f(0)=0$，$f(2)=2$ 也是最大值，極小值$f(1)=-3$ 也是最小值。

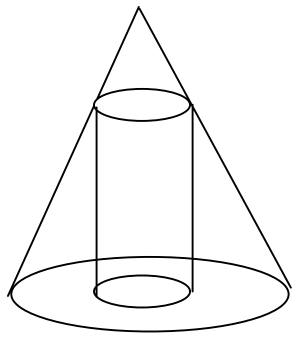
(練習8) 試求函數 $f(x)=x\cdot\sqrt{2x-x^2}$的最大值、最小值。

Ans：最大值 $f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，最小值 $f(0)=f(2)=0$

[例題7] 曲線$y=x^2-x-2$ 上的點P與A(8,3)之距離最小時，P之坐標為____，有最小距離_______。Ans：(3,4)，$\sqrt{26}$

[例題8] 試證明：若$x>0$，則$\dfrac{5}{3}x^3+x>2x^2$恆成立。

[例題9] 一直圓柱內接於一已知定直圓錐內(底重合)，當直圓柱有最大體積時求圓柱與圓錐高之比。 Ans：$\frac{1}{3}$



[例題10] 傳說中孫悟空的「如意金箍棒」是由「定海神針」變形得來的。這定海神針在變形時永遠保持爲圓柱體，其底圓半徑原爲 12 公分且以每秒 1 公分的等速率縮短，而長度以每秒 20 公分的等速率增長。已知神針之底圓半徑只能從 12 公分縮到 4 公分爲止， 且知在這段變形過程中， 當底圓半徑爲 10 公分時其體積最大。

(1)試問神針在變形開始幾秒時其體積最大？

(2)試求定海神針原來的長度。

(3)假設孫悟空將神針體積最小時定形成金箍棒，試求金箍棒的長度。

(2006 指定甲) Ans：(1)2 秒時體積最大(2)60 公分 (3)220 公分

(練習9) 已知函數$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$在$x=1$、-3有相對極值，求a,b之值。
Ans：$a=3$，$b=-9$

(練習10) 點A(0,1)到拋物線$y=x^2-x$上點的最短距離爲何？ Ans：$\frac{\sqrt{5}}{4}$

(練習11) $a>0$，$f(x)=ax^3-3ax^2-9ax+b$有相對極大值 10，相對極小值-22，則(a,b)=?Ans：(1,5)

(練習12) 設 A(14,0)，B(14,3)，P$\in\overline{OA}$，Q 在 y 軸正向上，$\angle$BPQ 爲直角，當 P,Q 移動時，求ΔBPQ 之最大面積。 Ans：75 (Hint：請注意ΔPOQ 與ΔBAP 相似)

(練習13) 設函數$f(x)=2\sin^2x\cos4x+3\cos2x\cdot\cos4x$

(1)令$t=\cos2x$，請用t表示$f(x)$。(2)求$f(x)$在$\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{\pi}{4}$中的最大值。

Ans：(1)$f(x)=4t^3+2t^2-2t-1$ (2)$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

(練習14) 設拋物線$y=4-x^2$之頂點A，交x軸於B、C兩點，今有一直線平行x軸交拋物線於P、Q，則構成凸五邊形之最大面積=？Ans：10

綜合練習

(1) 討論$f(x)=x^4-2x^3+1$其遞增區間爲何？遞減區間爲何？

(2) 設$f(x)=x^3-ax^2+2x+1$，若$f(x)$爲遞增函數，則a的範圍爲何？

(3) 求下列各函數的極大值與極小值：
(a)$f(x)=x^3+3x^2-9x+10$ (b)$f(x)=8x^2-x^4$ (c)$f(x)=(x+3)(2x-7)^3$

(4) 求下列各函數的最大值與最小值：
(a)$f(x)=3x-x^3$ $(0\le x\le2)$
(b)$f(x)=\cos^3x-\cos^2x+2$
(c)$f(x)=(x+2)(4x-1)^3$ $(0\le x\le1)$
(d)$f(x)=\frac{3x}{x^2+3x+4}$ $(-3\le x\le3)$

(5) 設 $f(x)=x^2+a(1-x^2)$ 爲一實係數多項式函數，a 爲常數。下列敘述何者正確：
(A) 不論 a 是何值，$f(x)$ 的函數圖形都不可能是直線。
(B) 不論 a 是何值，若 $f(x)$ 有極值，則極值都等於 a。
(C) 0 有可能是 $f(x)$ 的極大值。
(D) 若 $a\ne0$ 方，則 $f(x)=0$ 無重根 (2005 指定甲)

(6) 考慮多項式函數$f(x)=x^5+2x^4-x^3-5x^2+3$，試問下列那些選項是正確的？

(A)$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(k)}{f(k+100)}=0$　(B)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$　(C)函數f在區間$[\frac{1}{2},1]$遞增。

(D)若$x\geq0$，則$f(x)\geq0$　(E)在坐標平面上$y=f(x)$的圖形與直線$y=3$恰有兩個交點。

(2006 指定甲)

(7) 以 O 表示坐標平面上的原點。給定一點 A(4,3)，而點 B(x,0)在正 x 軸上變動。若 $l(x)$表示$\overline{\text{AB}}$長，則ΔOAB 中兩邊長比值$\dfrac{x}{l(x)}$ 的最大值爲__________。

(化成最簡分數)　(2006 指定甲)

(8) 函數$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

(a)若$f(x)$在$x=-1$ 時有極大值，在$x=2$ 時有極小值，求a,b。

(b)承(a)若極大值爲 3，求極小值。

(c)承(a)(b)之結果求$y=f(x)$斜率最小的切線方程式。

(9) 設 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$在 $x=-2$ 時有極值-2，求數對$(a,b)=$？

(10) 求函數 $f(x)=x\cdot\sqrt{16-x^2}$的極值。

(11) 設$f(x)=|x^2-1|$，試求$f(x)$的極大值與極小值。

(12) 試證明對於任意實數x，$x^4-2x^3+2x\geq\dfrac{-11}{16}$。

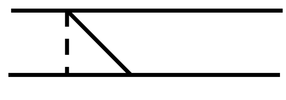
(13) 設m爲實數，已知四次方程式 $3x^4-4mx^3+1=0$ 無實數根，求m的範圍。

(14) 函數$f(x)=\cos^3x-12\cos x$，$x\in\mathbb{R}$，請求出$f(x)$的最大值與最小值。

(15) 設一直圓錐的高爲 27 底半徑爲 12，若有一直圓柱內接於此圓錐(底重合)，試求此直圓柱的最大體積。

(16) 有一地方 A，一日之間降雨之機率爲 p，不降雨之機率爲 $1-p$，今連續三日只有一日降雨之機率設爲 Q，則(a)求 Q 表爲 p 之函數。(b)試問當 $p=$？時，Q 有最大值=？

(17) 如右圖，河寬 5 公里，$\overline{BC}=8$公里，今老李欲從 A 到 B，已知老李划船時速 3 公里/小時，路上步行的時速 5 公里，問老李應於何處上岸，到達 B 點用時最少？

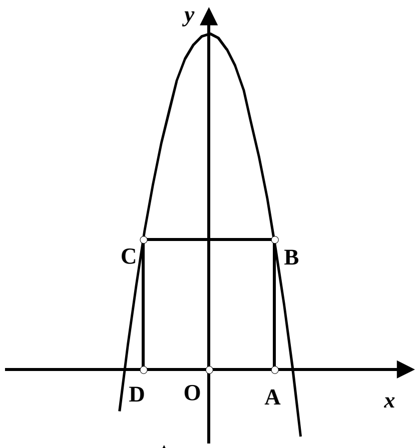


(18) 已知三次函數$f(x)=x^3+ax^2+b$，a,b爲實數

(a)若$f(x)$之圖形通過(1,4)，且過此切點的切線斜率爲-3，則求a,b之值。

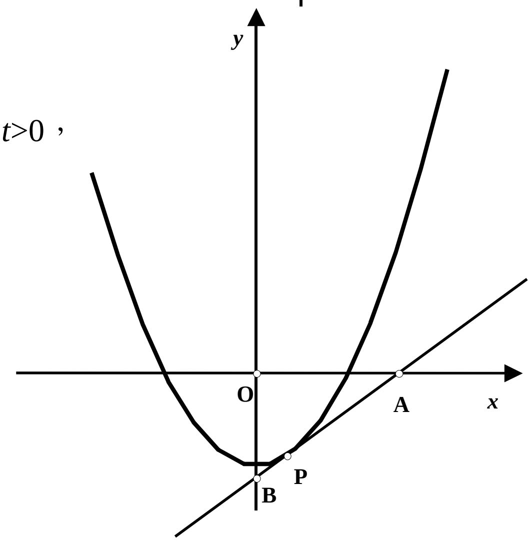
(b)由(1)求$y=f(x)$之相對極大值、相對極小值。

(19) 設ABCD為矩形，B、C兩點在拋物線$y=16-x^2$上(如圖)，
求此矩形之最大面積。



進階問題

(20) 設拋物線$y=x^2-1$的右半圖形上一點$P(t,t^2-1)$，其中$t>0$，
點P的切線與x,y軸分別切於A、B兩點，
(a)將ΔOAB的面積用t表示。
(b)求ΔAOB面積的最小值，並問此時的P點。



(21) 若函數$f(x)=\frac{4}{3}\sin^3x-\cos^2x+\cos2x$，$\frac{-\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$，則
(a)當$x=$？時，$f(x)$的最大值=？(b) 當$x=$？時，$f(x)$的最小值=？

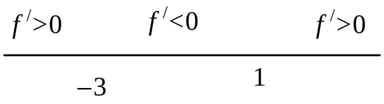
(22) P為曲線$y=x^2+2$上的動點，A為直線$y=x$上的動點，且B(2,3)
試求$\overline{AB}+\overline{AP}$之最小值=？此時P點的坐標為何？A點的坐標為何？

(23) 設$x>0$，令$x+\frac{1}{x}=t$
(a)請將$y=\frac{x^4+x^2+1}{x^3+x}$ 表為t的有理式。
(b)請求出y的最小值。

(24) 設$a>0$，O(0,0)為原點，在拋物線$ay=a^2-x^2$上取一點$P(s,t)$，$(s>0)$過P作拋物線之切線，交x,y軸於Q,R兩點，當P點變動時，ΔQOR面積的最小值。

綜合練習解答

(1) $x\geq\frac{3}{2}$遞增，$x\leq\frac{3}{2}$遞減

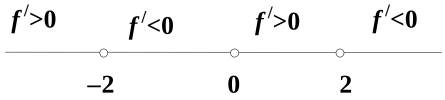


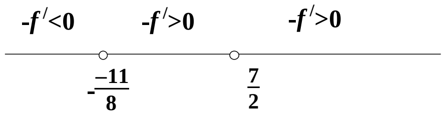
(2) $-\sqrt{6}\leq a\leq\sqrt{6}$

(3) (a)極大值$f(-3)=37$，極小值$f(1)=5$

(b)極大值$f(2)=16$，$f(-2)=16$，極小值$f(0)=0$

(c)極小值$f(\frac{-11}{8})=\frac{-6169176}{4096}$。





[詳解]：

(a)$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

(b)$f'(x)=16x-4x^3=4x(4-x^2)=-4x(x-2)(x+2)$

(c)$f'(x)=(2x-7)^2(8x+11)$

(4) (a)最大值$f(1)=2$，最小值$f(2)=-2$

(b)最大值$=2$，最小值$=0$

(c)最大值$f(1)=81$，最小值$f(0)=-2$

(d)最大值$f(2)=\frac{3}{7}$，最小值$f(-2)=-3$

[詳解]：(a)$f'(x)=3-3x^2=-3(x+1)(x-1)$，

由下表可知

x	$0<x<1$	$1<x<2$
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

極小值爲$f(0)=0$，$f(2)=-2$，極大值$f(1)=2$ 因爲最大值與最小值存在，
所以極大值中最大者爲最大值，極小值中最小者爲最小值。故最大值$f(1)=2$，
最小值$f(2)=-2$

(b)設$t=\cos x$，則$f(x)=g(t)=t^3-t^2+1$，其中$-1\leq t\leq 1$

$g'(t)=3t^2-2t=t(3t-2)\Rightarrow g'(t)=0\Rightarrow t=0$ 或$\frac{2}{3}$

列表如下：

t	$-1\leq t<0$	$0<t<\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}<t\leq 1$
$g'(t)$	+	–	+
$g(t)$	↗	↘	↗

因爲最大值與最小值存在，所以極大值中最大者爲最大值，極小值中最小者爲最小值。故最大值 $g(0)=g(1)=2$，最小值 $g(-1)=0$。

(c)$f'(x)=(4x-1)^2(16x+23)\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{-23}{16}$，但 $0\leq x\leq 1$ 因爲 $0\leq x\leq 1\Rightarrow f'(x)>0$

所以極大值 $f(1)=81$，極小值 $f(0)=-2$ 因爲最大值與最小值存在，所以極大值中最大者爲最大值,極小值中最小者爲最小值。所以最大值 $f(1)=81$ 最小值 $f(0)=-2$。

(d) $f'(x)=\dfrac{-3(x-2)(x+2)}{(x^2+3x+4)^2}$ $\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=2$ 或 -2

x	$-3\le x<-2$	$-2<x<2$	$2<x\le 3$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘

極大值爲 $f(-3)=\dfrac{-9}{4}$，$f(2)=\dfrac{3}{7}$ $\Rightarrow$最大值 $f(2)=\dfrac{3}{7}$極小值 $f(-2)=-3$，$f(3)=\dfrac{9}{22}$

$\Rightarrow$最小值 $f(-2)=-3$

(5) (B)(D)

(6) (B)(D)(E)

(7) $\dfrac{5}{3}$

(8) (a) $a=\dfrac{-3}{2}$，$b=-6$ (b) $\dfrac{-21}{2}$ (c) $54x+8y+3=0$

(9) (8,6)

(10) 極大值 $f(-4)=0$，$f(2\sqrt{2})=8$，極小值 $f(-2\sqrt{2})=-8$，$f(4)=0$

(11) 極大值不存在，極小值$=f(1)=f(-1)=0$

(12) 設$f(x)=x^4-2x^3+2x$，證明$f(x)$的最小值是$\dfrac{-11}{16}$

(13) $-1<m<1$[提示：令$f(x)=3x^4-4mx^3+1$，$f(x)=0$ 無實數解$\Leftrightarrow y=f(x)$的圖形在x軸上方 $\Leftrightarrow f(x)$的最小值>0]

(14) 最大值$=11$，最小值$=-11$[令 $t=\cos x$，$-1\le t\le 1$]

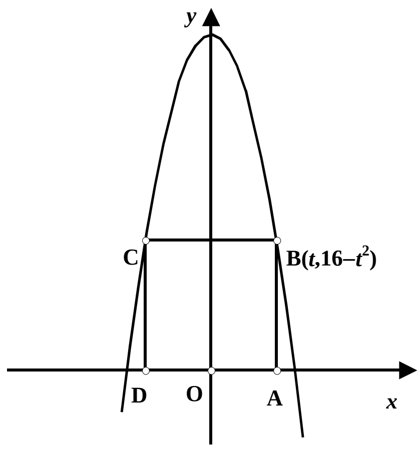
(15) 576π

(16) (a) $3(p^3-2p^2+p)$ (b) $\dfrac{4}{9}$

(17) 離 C 點$\dfrac{15}{4}$公里

(18) (a) $a=-3$，$b=6$ (b)相對極大值 6，相對極小值 2

(19) $\dfrac{256\sqrt{3}}{9}$



[詳解]：

設B$(t,16-t^2)$，面積$f(t)=2t(16-t^2)=32t-2t^3$ $(0<t<4)$

$f'(t)=32-6t^2=0 \Rightarrow t=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$因爲$t<\dfrac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow f'(t)>0 \Rightarrow f(t)<f(\dfrac{4}{\sqrt{3}})=\dfrac{256\sqrt{3}}{9}$

$t>\frac{4}{\sqrt{3}}\Rightarrow f'(t)<0\Rightarrow f(t)<f(\frac{4}{\sqrt{3}})=\frac{256\sqrt{3}}{9}\Rightarrow$最大值為$f(\frac{4}{\sqrt{3}})=\frac{256\sqrt{3}}{9}$。

(20) (a) $\frac{(t^2+1)^2}{4t}$ (b) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$，P($\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{-2}{3}$)

(21) Ans：(a)$\frac{\pi}{2}$，$\frac{1}{3}$ (b)$\frac{-\pi}{2}$，$\frac{-7}{3}$

(22) $\sqrt{5}$，P(1,3)、A($\frac{7}{3}$,$\frac{7}{3}$)[提示：假設B點對$y=x$的對稱點為B$'$(3,2)，$\overline{AB}+\overline{AP}=\overline{AB'}+\overline{AP}$，因此當B$'$、A、P三點共線時，會有最小值$\overline{B'P}$。令$f(t)=\overline{B'P}^2=(t-3)^2+(t^2+2-2)^2=t^4+t^2-6t+9$，再求最小值。]

(23) (a)$y=\frac{t^2-1}{t}$ (b)當 $x=1$ 時有最小值$\frac{3}{2}$

(24) $\frac{4\sqrt{3}a^2}{9}$[提示：ΔQOR 面積$=f(s)=\frac{(a^2+s^2)^2}{4as}$]