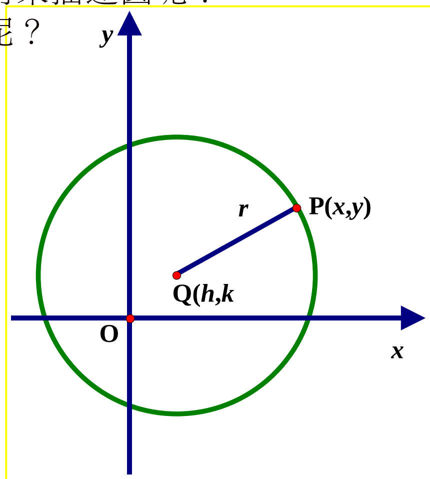
第四章 圓與球面

§4–1 圓

(甲)圓的方程式

(1)圓的定義：
平面上跟一個定點O等距離r的點P所形成的軌跡稱爲**圓**。
其中O稱爲圓心，r稱爲半徑。

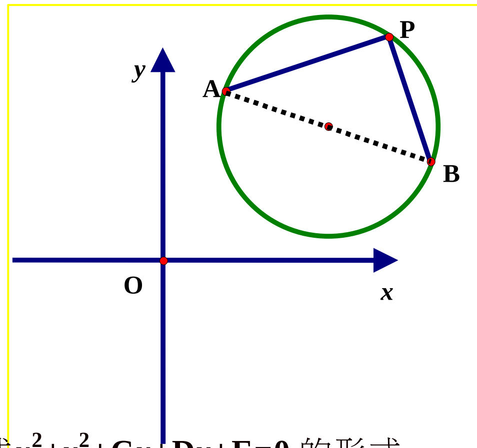
(2)圓的方程式：
從坐標幾何的觀點來看，給定圓心O(h,k)，半徑r，如何來描述圓呢？
圓這個圖形可否能像直線一樣能用一個方程式來表示呢？



(a)圓的標準式：
若設圓心O(h,k)，半徑爲r，
則此圓的方程式爲$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。
[推導]：設P(x,y)爲圓上的點，

$$\Leftrightarrow \overline{PO}=r$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$
$$\Leftrightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

要點：
(1)已知圓心Q(h,k)，半徑爲r，即可得圓的方程式$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。
(2)方程式$(x-h)^2+(y-k)^2=A$ $(A>0)$ 代表圓心(h,k)，半徑$\sqrt{A}$ 的圓。



(b)圓的直徑式：
若圓的直徑兩端點A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)
則此圓的方程式爲$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$
[推導]：設P(x,y)爲圓上的任意點

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-x_1,y-y_1)\cdot(x-x_2,y-y_2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

(c)圓的一般式：
圓的方程式$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$可化成二元二次方程式$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$的形式。
反過來說，一個二元二次方程式$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$，是否就代表圓呢？
例如：

$$2x^2+2y^2-4x+6y+1=0 \Rightarrow 2(x^2-2x+1)+2(y^2+3y+(\frac{3}{2})^2)=-1+2+\frac{9}{2}$$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2+2(y+\frac{3}{2})^2=\frac{11}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{11}{4} \Rightarrow$圓心$(1,\frac{-3}{2})$，半徑$=\frac{\sqrt{11}}{2}$。

一般而言：$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$
配方成 $(x+\frac{C}{2})^2+(y+\frac{D}{2})^2=\frac{C^2+D^2-4E}{4}$

當$C^2+D^2-4E>0$時，$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$代表一圓，

$$\text{圓心}\left(\frac{-C}{2},\frac{-D}{2}\right)\text{半徑}=\sqrt{\frac{C^2+D^2-4E}{4}}$$

當$C^2+D^2-4E=0$時，$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$代表一點$\left(\frac{-C}{2},\frac{-D}{2}\right)$。

當$C^2+D^2-4E<0$時，$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$ 沒有實數解，沒有圖形。

結論：

求一個圓的方程式主要是要求得圓心與半徑。

求圓方程式的幾種想法：

(a) 坐標幾何的觀點：

令圓心 $O(a,b)$，試著找出兩個獨立的條件求出 a,b 的關係式(方程式)，再聯立解出 a,b 的值。

(b)幾何作圖的觀點：

要找到一個點無非是直線與直線、直線與圓、圓與圓交出點來，因此先依據作圖的觀念找交點(圓心)，即解一些圓與圓、圓與直線、直線與直線的方程式，加以聯立求出其解(圓心)，然後再求出半徑。

下列所指出的關係或許會對於求圓的方程式有幫助：

圓心到圓上的點之距離=圓心到切線的距離=圓心到切點之距離=半徑
圓與兩軸相切：圓心(a,b)，$|a|=|b|$=半徑
圓心到弦中點的連線垂直平分弦。

[例題1] 試求通過A(–1，5)，B(3，9)，C(5，5)三點的圓方程式，圓心，及半徑。

Ans：$(x-2)^2+(y-6)^2=10$ 圓心(2,6) 半徑$\sqrt{10}$

[坐標幾何的觀點]：

[幾何作圖的觀點]：

[例題2] 設$P_1(1,4)$、$P_2(3,-2)$爲座標平面上兩點，若$\overline{P_1P_2}$爲圓上的一弦，且距離圓心爲$\sqrt{10}$，則圓C的方程式爲何？Ans：$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$

[幾何作圖的觀點]：跟隨幾何作圖精神去找圓心。

[座標幾何]：設圓心$O(a,b)$直接根據條件找方程式，解出圓心座標。

(練習1) 求過三點A(0,0)、B(0,4)、C(3,3)的圓方程式。Ans：$x^2+y^2-2x-4y=0$

(練習2) 試求(1)圓心在點Q(1,2)且半徑爲 2 的圓方程式。

(2)圓心在點(−1,4)且通過點(2,0)的圓方程式。

Ans：(1)$(x-1)^2+(y-2)^2=4$ (2)$(x+1)^2+(y-4)^2=25$

(練習3) 將下列方程式化爲$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，並說明幾何意義？

(1) $x^2+y^2+-2x+4y-31=0$ Ans：圓心(1,−2)半徑爲 6 的圓

(2) $x^2+y^2+-2x+4y+5=0$ Ans：點(1,−2)

(3)$x^2+y^2+-2x+4y+8=0$ Ans：無圖形

(練習4) 設方程式$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 表示xy平面上的一個圓，則下列敘述，何者正確？

(A) $a=1$ (B) $b=0$ (C) c之值可爲-2 (D) $a=c$

(E) $d^2+e^2-4af>0$。Ans：(B)(C)(D)(E)

(練習5) 設C：$x^2+y^2+2x-6y+k=0$

(1)若C代表一圓，則k之範圍為何？

(2)若C代表一點，則k之範圍為何？ Ans：(1)$k<10$ (2)$k=10$

(練習6) $x^2+y^2+2(m+1)x-2my+3m^2-2=0$ 表一圓，(1)求m範圍

(2)求此圓最大面積 Ans：(1)$-1<m<3$ (2)$r=2\Rightarrow 4\pi$

(練習7) 設A(5,–3)，B(3,7)，試求以$\overline{AB}$為直徑的圓方程式。Ans：$(x-4)^2+(y-2)^2=26$

(練習8) 設一圓通過二點(5,1)、(3,1)，而圓心在直線$x+2y-3=0$ 上，則此圓的方程式為何？Ans：$(x-4)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{13}{4}$

(練習9) 設$P_1(2,0)$、$P_2(8,0)$且$\overline{P_1P_2}$為圓O上一弦，且弦心距為 4，則圓O的方程式為何？Ans：$(x-5)^2+(y-4)^2=25$ 或$(x-5)^2+(y+4)^2=25$

[例題3] (不容易作圖，坐標方法較有用)

求過點A(1,4)、B(3,–2)且與直線L：$x+2y+11=0$ 相切之圓方程式。

Ans：$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-23)^2+(y-8)^2=500$

[例題4] (幾何作圖容易)

圓$x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 之圓心為C，過A(–3,0)作此圓之切線，切點為P,Q，試求ΔAPQ之外接圓方程式。Ans：$x^2+y^2+2x+2y-3=0$

[例題5] 設A(0,0)，B(6,0)，試求滿足$\overline{PA}=2\overline{PB}$的P點軌跡方程式，並作出它的圖形。

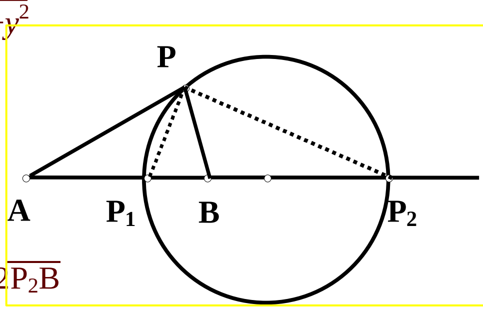
Ans：$(x-8)^2+(y-0)^2=4^2$

[坐標幾何]：

設點P(x,y)，滿足$\overline{PA}=2\overline{PB}$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x^2+y^2}=2\cdot\sqrt{(x-6)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=4[(x-6)^2+y^2]$

$\Leftrightarrow (x-8)^2+(y-0)^2=4^2$



[綜合法]：

在直線AB上找兩點P_1、P_2，其中$\overline{P_1A}=2\overline{P_1B}$且$\overline{P_2A}=2\overline{P_2B}$

設P爲滿足$\overline{PA}=2\overline{PB}$且不在直線AB上的點

$\Rightarrow PP_1$爲ΔPAB中$\angle P$的內角平分線，PP_2爲ΔPAB中$\angle P$的外角平分線

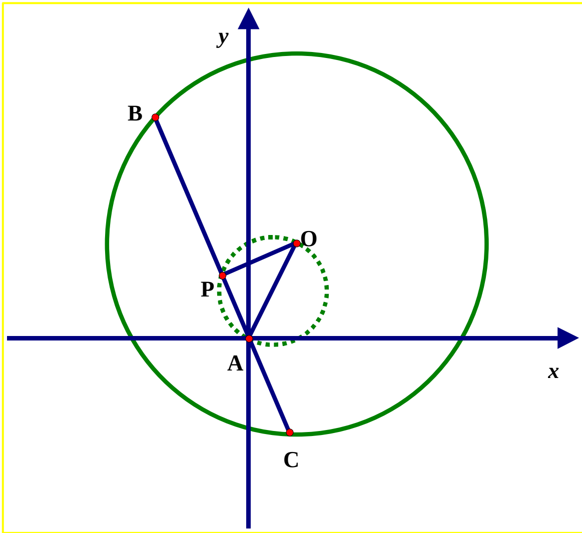
$\Rightarrow \overline{PP_1}\perp\overline{PP_2}\Rightarrow$P落在以$\overline{P_1P_2}$爲直徑的圓上。

[例題6] (求軌跡)

設A(0,0)爲圓$(x-1)^2+(y-2)^2=16$ 內部一點，

求過點A所有弦的中點軌跡方程式。

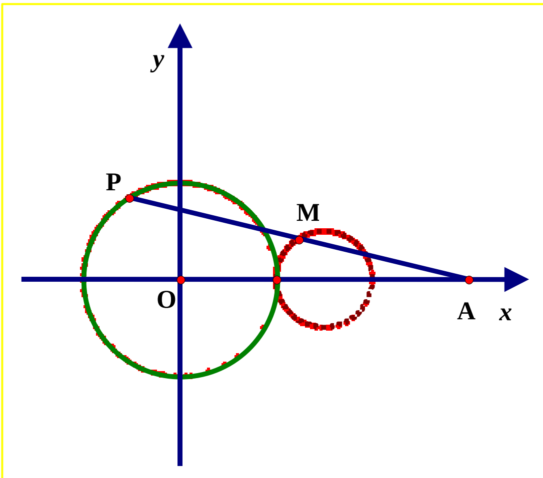
Ans：$x^2+y^2-x-2y=0$



[例題7] (求軌跡)

自定點A(6,0)作線段$\overline{AP}$，當P點繞原點繞一圈圓，且此圓的半徑爲 2，則$\overline{AP}$之中點所形成的圖形之方程式爲何？

Ans：$(x-3)^2+y^2=1$



如何求動點的軌跡方程式：
設所求的動點 **P(x,y)**，透過題目的條件，找出 **x,y** 的關係式 **$f(x,y)=0$**，
再檢查滿足 **$f(x,y)=0$** 的點都具有題設的條件。

(練習10) 平面上至A(−3,1)、B2,1)之距離比為 3:2 之點P所成的軌跡方程式為何？
Ans：$x^2+y^2-12x-2y+1=0$

(練習11) ΔPQR中，∠P=90°，Q(−2,3)、R(1,−1)請問P點所成的圖形方程式。
Ans：$x^2+y^2+x-2y-5=0$ 去掉Q(−2,3)、R(1,−1)兩點

(練習12) 已知A(3,0)為圓$(x-1)^2+(y-2)^2=16$ 內一點，求過A所有弦的中點軌跡方程式。 Ans：$x^2+y^2-4x-2y+3=0$

(練習13) 已知A(3,0)為圓$(x-1)^2+(y-2)^2=8$ 上一點，求過A所有弦的中點軌跡方程式。 Ans：$x^2+y^2-4x-2y+3=0$ 去掉(3,0)這一點。

(練習14) 試求切於直線$y=x$，並過(2,0)，(4,0)兩點的圓方程式。
Ans：$(x-3)^2+(y+7)^2=50$ 或$(x-3)^2+(y-1)^2=2$

(練習15) 試求與兩直線$x+5y-4=0$，$x+5y-12=0$ 相切且圓心在直線$x-2y-1=0$ 之上的圓方程式。Ans：$(x-3)^2+(y-1)^2=(\frac{4}{\sqrt{26}})^2$

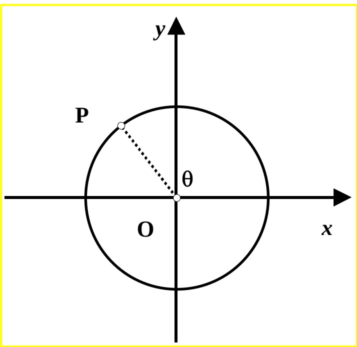
(練習16) 設O為原點，且Q是圓$(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 上的動點，若$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OQ}$，則動點P所成的圖形方程式為何？Ans：$(x-2)^2+(y+4)^2=36$

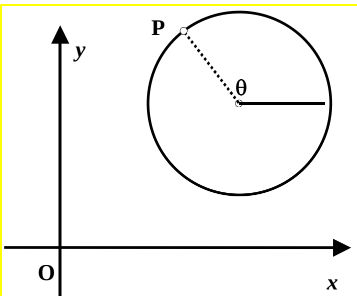
(乙)圓的參數式

(1)圓的參數式：

(a)圓$x^2+y^2=r^2$的參數式為$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，θ為實數。

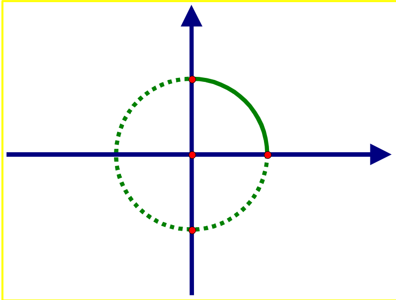
(b)圓$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$的參數式為$\begin{cases} x=x_0+r\cos\theta \\ y=y_0+r\sin\theta \end{cases}$，θ為實數。





(2)圓的參數式的應用：

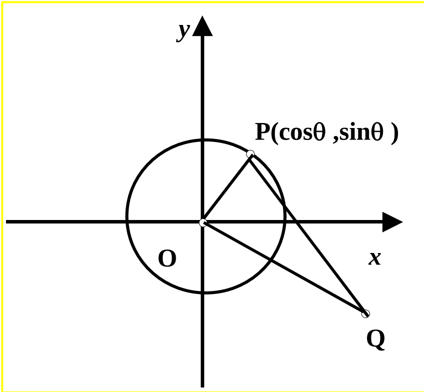
(a)當我們限制θ的範圍時，可以表示出圓的部分圖形。



例如：參數式：$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，就代表$\frac{1}{4}$單位圓。

(b)當我們求與圓有關的最大值或最小值問題時，可以利用參數式來解決。

[例題8] 若P為單位圓$x^2+y^2=1$ 上任一點，令O為原點(0,0)，Q為點(3,−2)，則求ΔPOQ面積的最大值。　Ans：$\frac{\sqrt{13}}{2}$



[代數方法]：

[幾何方法]：

[例題9] 設P(x,y)爲方程式$x^2+y^2=9$ 上一點，試求

(1)$3x+4y+5$ 的最大值　　(2)x^2+2y^2的最大值　(3)$xy+x+y$的最大值

Ans：(1)20 (2)18(3)$\frac{9+6\sqrt{2}}{2}$

(練習17) 在xy平面上有二定點A(4,0)，B(1,3)，及圓C：$x^2+y^2=4$，設P爲圓C上的動點，試求△PAB面積的最大值及最小值。

Ans：△PAB面積的最大值 $6+3\sqrt{2}$，最小值 $6-3\sqrt{2}$

(練習18) 平面上有兩定點A(−1,0)與B(1,0)，試在圓C：$(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上一點P，使$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$有最大值或最小值。

Ans：(1)當P($\frac{21}{5}$,$\frac{28}{5}$)時，有最大值 100；(2)當P($\frac{9}{5}$,$\frac{12}{5}$)時，有最小值 20

[例題10] 設Γ：$(|x|-1)^2+(|y|-1)^2=4$，試求Γ之周長及其所圍成之面積。

Ans：周長=$\frac{20}{3}\pi$，面積=$4+4\sqrt{3}+\frac{20}{3}\pi$

方程式 $f(x,y)=0$ 圖形的對稱：

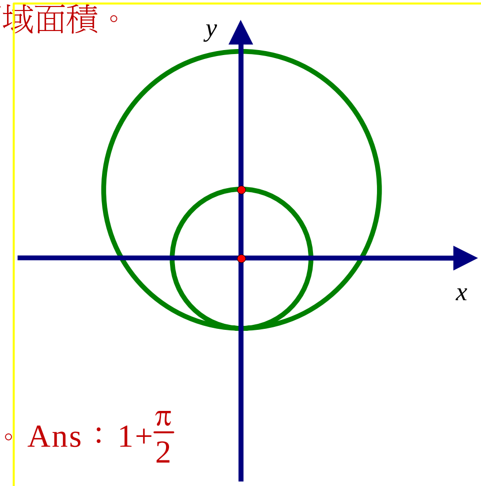
$f(x,y)=f(x,-y)$ ⇔圖形對稱 x 軸

$f(x,y)=f(-x, y)$ ⇔圖形對稱 y 軸

$f(x,y)=f(-x,-y)$ ⇔圖形對稱原點

$f(x,y)=f(y,x)$ ⇔圖形對稱直線 $x-y=0$

[例題11] 試繪出$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2y-3)\leq 0$ 之圖形，並求此區域面積。
Ans：3π



(練習19) 繪出$\begin{cases} x^2+y^2\leq 1 \\ x^2+y^2\geq 2x-2y-1 \end{cases}$之圖形，並求其面積。Ans：$1+\frac{\pi}{2}$

(練習20) 試作下列各方程式的圖形：
(1)$x=\sqrt{3+2y-y^2}$　(2)$y=-1+\sqrt{4-x^2}$

(練習21) 請繪出 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的圖形，並求面積。Ans：$\frac{\pi}{2}$

[例題12] 兩圓C_1：$x^2+y^2=25$，圓C_2：$(x-6)^2+(y-8)^2=k$，請就下列情形求k的範圍。
(1)外離 (2)外切 (3)交於兩點 (4)內切 (5)內離。
Ans：(1)$0<k<25$ (2)$k=25$ (3)$25<k<225$ (4)$k=225$ (6)$k>225$

(練習22) 設圓O_1：$(x-a)^2+(y+2a)^2=5a^2$ $(a>0)$，在圓O_2：$x^2+y^2=9$ 內部，求a的範圍。

Ans：$0<a<\frac{3\sqrt{5}}{10}$

綜合練習

(1) 今有兩圓$x^2+y^2-2x-4y-95=0$及$x^2+y^2-8x-12y+28=0$，則
(a)此兩圓的圓心距離爲(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 8 。
(b)此兩圓的關係爲(A)內離 (B)內切 (C)相交於兩點 (D)外切 (E)外離 。
(85 大學自)

(2) 下列哪一方程式所表圖形爲一圓？(A)$y=\sqrt{9-x^2}$ (B)$x=1+\sqrt{9-y^2}$
(C)$\sqrt{x^2+y^2}=2$ (D)$x^2+y^2-6x+4y+15=0$ (E)$x^2+y^2+2x-8y+3=0$

(3) 若圓C_2與圓C_1：$x^2+y^2-2x-4y-4=0$有相同之圓心，且平分C_1的面積，則C_2的方程式爲何？

(4) 試就k值，討論方程式$x^2+y^2+2(k+1)x+2ky+3k^2-2=0$的圖形。

(5) 一圓的方程式爲$x^2+y^2-8x+4y-5=0$，考慮此圓之任意兩條互相垂直切線的交點，則所有這種交點所成圖形的方程式爲__________。 (87 大學社)

(6) $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$表一圓，(a)求$m$範圍 (b)當$m$爲何值時此圓有最大面積？

(7) 設△ABC的三邊包含三直線，L_1：$x+y-1=0$，L_2：$x+2y-3=0$，
L_3：$y-1=0$，試求其外接圓的方程式。

(8) 試求兩直線$2x-5y-6=0$，$2x-5y+10=0$相切且圓心在直線$x-2y+2=0$上的圓方程式。(84 大學自)

(9) L_1：$2x+3y=12$與L_2：$x-2y+1=0$之交點A，自P(1,0)到二直線之垂線分別交於B,C，求過P,A,B,C之圓方程式。

(10) 一圓切y軸於(0,4)又被x軸所截弦長爲 6，求此圓的方程式。

(11) 一圓過兩點 A(1,2)、B(3,4)且被x軸所截線段長爲 6，求此圓之方程式。

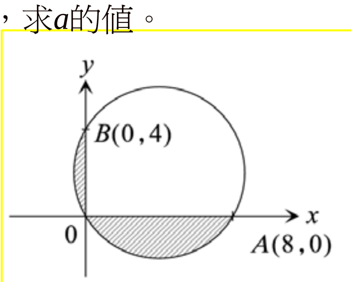
(12) 在同一平面上，設 A$(\frac{1}{2},0)$、B$(\frac{3}{4},0)$是兩個相異的定點，則所有滿足$\overline{PA}=2\cdot\overline{PB}$的動點 P 所成的圖形爲何？

(13) A(3,–2)，B(2,1)，P在圓$(x-1)^2+(y+2)^2=4$上，則△PAB之重心軌跡在一圓上，試求此圓半徑長。

(14) 從點A(4,0)通過圓C：$x^2+y^2=4$得割線$\overline{BC}$，試求以$\overline{BC}$的中點M的軌跡方程式。

(15) 設$x^2+y^2+ax+4y+5=0$對$x+y=0$之對稱圖形仍爲本身，求a的值。

(16) 如下圖，一圓過O，A，B三點，
則斜線部分面積爲__________。



(17) 已知兩圓C_1：$x^2+y^2=9$與C_2：$(x-3)^2+(y-0)^2=27$，試求C_2被C_1所截的劣弧長。

(18) 設點A(24,37)，求圓：$x^2+y^2=10y$上離點A最近的點。

(19) 設$x^2+y^2=16$ 求

(a)$4x+3y$之最大値。 (b)x^2+2y之最大値。

(c)xy之最大値。 (d)圓上的點距離 $3x-4y=25$ 之最短距離。

(20) 求參數式：$\begin{cases} x=1+\sin t \\ y=2+\cos t \end{cases}$，$0\le t\le\frac{2\pi}{3}$所表示圖形之長度。

進階問題

(21) 請問$x^2+(|y|-1)^2=4$ 所圍成區域的面積。

(22) 不等式$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2)(x^2+y^2-3)\le 0$ 所表示區域的面積=？

(23) 圓$x^2+y^2=25$ 內之格子點(x,y坐標都是整數的點)有幾個？

(24) 設 k 爲實數，請問 $y+kx-2k=0$，$ky-x-2=0$ 之交點的軌跡方程式爲何？

(25) 設拋物線$y=ax^2+bx+c$與x軸交於A、B兩點，求以$\overline{AB}$爲直徑的圓方程式。

綜合練習解答

(1) (a)(D) (b)(A)

(2) (C)(E)

(3) $(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{9}{2}$

(4) (a)當$-1<k<3$ 時，圖形爲一圓 (b)$k=3$ 或-1 時，圖形爲一點

(c)$k>3$ 或 $k<-1$ 時，圖形爲空集合

(5) $(x-4)^2+(y+2)^2=50$

(6) (a)$-3<m<1$ (b)$m=-1$，4π

(7) $x^2+y^2-x-5y+4=0$

(8) $(x+6)^2+(y+2)^2=\frac{64}{29}$

(9) $(x-1)(x-3)+(y-0)(y-2)=0$

(10) $(x-5)^2+(y-4)^2=25$ 或$(x+5)^2+(y-4)^2=25$

(11) $x^2+y^2+12x-22y+27=0$ 或$x^2+y^2-8x+2y+7=0$

(12) $(x-\frac{4}{3})^2+y^2=\frac{4}{9}$

(13) $\frac{2}{3}$

(14) $x^2+y^2-4x=0$[提示：設中點M(x,y)圓心O(0,0)，MO⊥AM]

(15) $a=-4$[提示：$x+y=0$ 通過圓心]

(16) $10\pi-16$

(17) $\sqrt{3}\pi$

(18) (3,9)

(19) (a)20 (b)17 (c)8 (d)1 [提示：令 $x=4\cos\theta$，$y=4\sin\theta$ ， 代入各式求極值]

(20) $\frac{2\pi}{3}$

(21) $\frac{16}{3}\pi+2\sqrt{3}$

(22) 2π

(23) 81 個

(24) $x^2+y^2=4$ 點(2,0)除外

(25) $ax^2+ay^2+bx+c=0$

[提示：設A(α,0)、B(β,0)，其中α、β為$ax^2+bx+c=0$ 的兩相異實根，所以 $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$，以$\overline{AB}$為直徑的圓方程式為 $(x-\alpha)(x-\beta)+y^2=0$ $\Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+y^2=0\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+y^2=0 \Rightarrow ax^2+ay^2+bx+c=0$]