§3–7 複數的極式

(甲)複數的極式

第一冊中，我們曾引進了複數系，有了複數系之後，使得一元二次方程式有了圓滿的結果，更一般而言，一元 n 次方程式都有 n 個複數根(包括重根)。在第一冊中，我們知道複數都是呈 $x+yi$ 的形式，這一單元我們要介紹複數的另一個表示法—**極式**，並藉以探討複數 n 次方根的問題。

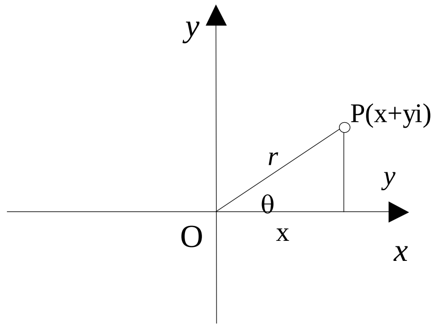
(1)複數平面

複數是表示成 $x+yi(x,y$ 為實數)的數，我們將複數 $x+yi$ 對應坐標平面上的點 $P(x,y)$，我們發現這種對應是一對一的對應。即任一個複數都可找到坐標平面上唯一一點與之對應，反之，給定坐標平面上一個點，可找到唯一一個複數與之對應。這種與複數對應的平面稱為複數平面，x 軸又稱**實軸**，y 軸又稱為**虛軸**。而我們也可以說複數平面上點 P 的複數坐標為 $x+yi$。

例如：x 軸上的點(−3,0)，代表實數−3，y 軸上的點(0,6)代表純虛數 $6i$，

點(−4,6)代表 $-4+6i$。

(2)絕對值與輻角



設複數 $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$，可在複數平面上找到一點 $P(x,y)$與之對應。

令 $\overline{OP}=r$，並以θ表示一以 x 軸正向為始邊，$\overline{OP}$為終邊的有向角。

則 r,θ與 x,y 有以下的關係：$x=r\cos\theta$ ，$y=r\sin\theta$ ，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ ，$\tan\theta=\frac{y}{x}$

絕對值：$r=|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$ 稱為複數 $x+yi$ 的絕對值(或向徑)。

輻角：

以 x 軸的正向為始邊，$\overrightarrow{OP}$ 為終邊所形成之**廣義有向角**θ，稱為複數 z 的**輻角**，符號記為：arg(z)。特別是當 $0\le\theta<2\pi$時，我們稱此時的輻角θ為**主輻角**，符號記為 Arg(z)。

例如：

$z=3$，$|z|=3$，$\arg(z)=0+2k\pi$,k 為整數；$\mathrm{Arg}(z)=0$

$z=1+\sqrt{3}\ i$，$|z|=2$，$\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$,k 為整數；$\mathrm{Arg}(z)=\frac{\pi}{3}$

$z=-5i$，$|z|=5$，$\arg(z)=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,k 為整數；$\mathrm{Arg}(z)=\frac{3\pi}{2}$

例如：請完成下表：

	$\sqrt{3}+i$	$-\sqrt{3}+i$	$3i$	-2
對應點坐標				
絕對值 r				
主幅角 Argz				

(3)複數的極式：

根據前面的定義，可得$z=x+yi=r(\cos\theta+i\ \sin\theta)$，其中$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ，$\theta=\arg(z)$，
我們稱$\mathbf{z}=\boldsymbol{r}(\mathbf{cos}\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{i}\ \mathbf{sin}\boldsymbol{\theta})$**爲複數的極式**。

注意：

(a)若θ爲z之輻角，則$\theta+2k\pi(k\in Z)$亦爲複數z的輻角。若 $0\le\theta<2\pi$，則此時的θ 爲主輻角，因此主輻角只有一個，而輻角卻有無限多個。

(b)複數z 的極式$z=r(\cos\theta+i\ \sin\theta)$中，須注意$r\ge0$，而角度必須相同，且以$\cos\theta$爲實部，$\sin\theta$爲虛部。

例如

$z=-2(\cos35^\circ+i\sin35^\circ)$，$z=2(\sin15^\circ+i\cos15^\circ)$，$z=4(\cos30^\circ-i\sin30^\circ)$均不爲極式。

[例題1] 一般式化極式

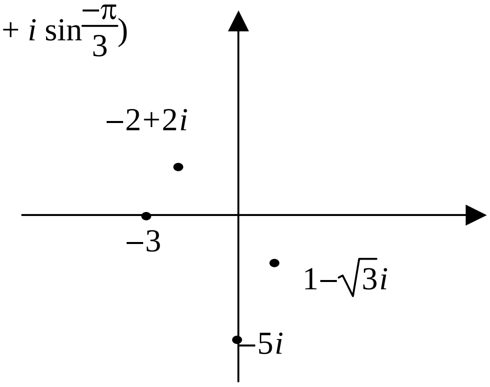
將下列各複數化成極式：

(1)-3 (2)$-5i$ (3)$-2+2i$ (4)$1-\sqrt{3}\ i$ (5) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}$

Ans：(1) $-3=3(\cos\pi+i\ \sin\pi)$ (2)$-5i=5(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\ \sin\dfrac{3\pi}{2})$

(3) $-2+2i=2\sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\ \sin\dfrac{3\pi}{4})$ (4)$2(\cos\dfrac{-\pi}{3}+i\ \sin\dfrac{-\pi}{3})$

(5) $\dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\ \sin\dfrac{11\pi}{6})$



[例題2] 一般式化極式

將下列各複數化成極式：

(1)$\cos560^\circ - i\sin160^\circ$　(2)$\sin25^\circ + i\cos25^\circ$　(3)$\cos70^\circ - i\sin70^\circ$

Ans：(1)$\cos200^\circ + i\sin200^\circ$　(2)$\cos65^\circ + i\sin65^\circ$　(3)$\cos(-70^\circ) + i\sin(-70^\circ)$

解題要訣：

(a)題目中所給的數在第幾象限？

(b)在該象限中以何角度取代題中所給的角度而不改變原數的值？

(練習1) 將下列複數化成極式：

(1)$z=-3+3i$　(2)$z=4$　(3)$z=-2i$ (4) $2-2\sqrt{3}i$ (5) $-1+(\sqrt{3}-2)i$

Ans：(1)$z=3\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$ (2)$z=4(\cos0+i\sin0)$ (3)$z=2(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2})$

(4) $4(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$ (5) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12})$

(練習2) 試求下列各複數的極式：

(1)$z=\sin20^\circ+i\cos20^\circ$　(2)$z=\cos135^\circ-i\sin45^\circ$　(3)$z=-3(\cos25^\circ+i\sin25^\circ)$

(4)$3(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6})$　(5)$3(\cos\theta-i\sin\theta)$　(6)$\sin200^\circ-i\cos160^\circ$

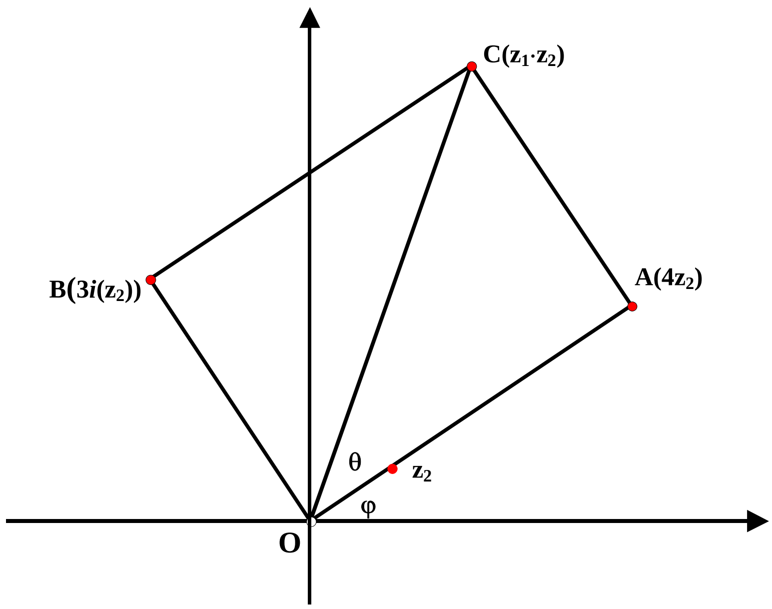
Ans：

(1)$z=\cos70^\circ+i\sin70^\circ$ (2)$z=\cos225^\circ+i\sin225^\circ$(3)$z=3(\cos205^\circ+i\sin205^\circ)$

(4) $3(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ (5) $3[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$ (6) $\cos110^\circ+i\sin110^\circ$

(乙)複數的乘除與棣美弗定理

第一冊曾學過複數的乘法，例如$(4+3i)(3+2i)=4(3+2i)+3i(3+2i)=6+17i$，過程中我們基本上用到的原理是複數乘法對加法的分配律。若我們將複數用極式來表示，那麼複數乘法除法會不會有不一樣的形式呢？



以$(4+3i)(3+2i)$爲例，設$z_1=4+3i=5(\cos\theta+i\ \sin\theta)$，$z_2=3+2i=\sqrt{13}\ (\cos\varphi+i\ \sin\varphi)$

因爲$z_1 \cdot z_2=(4+3i)(3+2i)=4(3+2i)+3i(3+2i)=4z_2+3i(z_2)$

由上圖，可以看出A、B分別代表複數 $4z_2$、$3i(z_2)$，且$\overline{OA}\perp\overline{OB}$；
又因爲$z_1 \cdot z_2=4z_2+3i(z_2)$，所以矩形AOBC的頂點C代表複數$z_1 \cdot z_2$。

考慮z_1z_2的絕對值與輻角：

$|z_1z_2|^2=\overline{OC}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=|4z_2|^2+|3i \cdot z_2|^2=16|z_2|^2+9|z_2|^2==25|z_2|^2=|z_1|^2|z_2|^2$

因爲$z_1=4+3i$，所以∠AOC=θ爲z_1的輻角，所以從上圖可以得知z_1z_2的輻角爲θ+φ

由前面的分析，**可以得知兩個複數z_1、z_2的乘積z_1z_2的絕對值爲兩複數z_1、z_2的絕對值相乘，而z_1z_2的輻角爲兩複數z_1、z_2的輻角相加。**

這個結果對於使用複數的極式來做乘法與除法的計算就會有很大的便利性，例如想求$(1+\sqrt{3}\ i)^{10}$的值，如果用第一冊的方法，我們必須將$(1+\sqrt{3}\ i)$連乘 10 次，過程繁複，不容易算出結果，但是$=1+\sqrt{3}\ i=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\ \sin\frac{\pi}{3})$，根據前面的結果，這 10 個複數相乘，**絕對值自乘 10 次，而輻角自加 10 次**，於是$(1+\sqrt{3}\ i)^{10}$的絕對值$=2^{10}$，而$(1+\sqrt{3}\ i)^{10}$的輻角爲$\frac{10\pi}{3}$，因此$(1+\sqrt{3}\ i)^{10}=2^{10}(\cos\frac{10\pi}{3}+i\ \sin\frac{10\pi}{3})$。這個結果就是棣美弗定理。接下來，我們就將上面的結果加以一般化。

(1)複數的乘除：
定理 1：

若設$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，其中$r_k=|z_k|$，$\theta_k=\arg(z_k)$，$k=1,2$
則 $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$　[絕對值相乘，輻角相加]

證明：

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=[\ r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)]\cdot[\ z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)]\\&=r_1\cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)]\\&=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

定理 2：**若$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z\neq 0$，則$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$**

證明：

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}&=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\\&=\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot(\cos\theta-i\sin\theta)}\\&=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\\&=\frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))\end{aligned}$$

定理 3：

若設$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，$z_2\neq 0$ 其中$r_k=|z_k|$，$\theta_k=\arg(z_k)$，
$k=1,2$ 則$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}((\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$　[絕對值相除，輻角相減]

證明：

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=z_1\left(\frac{1}{z_2}\right)=[r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)]\cdot\left[\frac{1}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\right](\text{由定理 2})\\&=[r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)]\cdot\left[\frac{1}{r_2}(\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2))\right]\quad(\text{由定理 1})\\&=\frac{r_1}{r_2}((\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))\end{aligned}$$

例如：$z_1=2(\cos15^\circ+i\sin15^\circ)$，$z_2=3(\cos105^\circ+i\sin105^\circ)$

$\Rightarrow z_1\cdot z_2=6(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)$，$\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{3}{2}(\cos90^\circ+i\sin90^\circ)$

(2)棣美弗定理：

$\boxed{\text{若}z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\text{，則}z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\text{，其中}n\text{為整數。}}$

例子：$(\cos\theta+i\sin\theta)^2$

$$\begin{aligned}&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(\text{由定理 1})\\&=\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)\\&=\cos2\theta+i\sin2\theta\end{aligned}$$

例子：$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-2}$

$$\begin{aligned}&=[(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}]^2\quad(\text{由定理 2})\\&=[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^2\quad(\text{由定理 1})\\&=\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)\end{aligned}$$

[證明]：

(A)當n是正整數時，用數學歸納法證明之。

Step1：$n=1$ 時，$z^1=r^1(\cos\theta+i\sin\theta)$

Step2：若設$n=k$時原式成立，即$z^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$

則當$n=k+1$ 時，$z^{k+1}=z^k\cdot z=[r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)][r^1(\cos\theta+i\sin\theta)]$

$\Rightarrow z^{k+1}=r^{k+1}(\cos k\theta\cdot\cos\theta-\sin k\theta\cdot\sin\theta)+i(\sin k\theta\cdot\cos\theta+\cos k\theta\cdot\sin\theta)$

$\Rightarrow z^{k+1}=r^{k+1}(\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta)$

則當$n=k+1$ 時，原式成立。

(B)當n是非正整數時：

(1)再證$n=0$ 時，亦成立。

$\because z^0=1$，$r^0(\cos 0+i\sin 0)=1\Rightarrow$成立。

(2)n爲負整數時，令$n=-m$，m爲正整數

$$z^n=z^{-m}=\frac{1}{z^m}=\frac{1}{r^m(\cos m\theta+i\sin m\theta)}$$

$$=\frac{1}{r^m}(\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta))$$

$$=r^{-m}(\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta))$$

$$=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

[例題3] 化簡下列各小題：

(1)$\dfrac{(\cos 8°+i\sin 8°)^6\times(\cos 25°+i\sin 25°)^4}{(\cos 4°+i\sin 4°)^7}$ (2)$\left(\dfrac{1+i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{12}$

(3)$(\sqrt{3}-i)^3\left(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6(-1-i)^8$ (4) $(\sin 15°+i\cos 15°)^{10}$

Ans：(1) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (2)$\dfrac{-1}{64}$ (3)-128 (4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

(練習3) 設$z_1=\sqrt{3}-i$，$z_2=-3+3i$，$z_3=1+i$，求(1)$z_1\times z_2$ (2)$\dfrac{z_1\times z_2}{z_3}$ 之極式

Ans：(1)$6\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$ (2)$6(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

(練習4) 求下列各式的值：

(1)$[(\cos20°+i\sin20°)(\cos10°+i\sin10°)]^7$=＿＿＿＿＿＿。Ans：$\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1}{2}i$

(2)$\frac{(\cos9°+i\sin9°)^5(\cos40°+i\sin40°)}{\cos25°+i\sin25°}$=＿＿＿＿＿＿。Ans：$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(3)$\frac{(\sin65^{\circ}+i\cos65^{\circ})^4(\cos4^{\circ}+i\sin4^{\circ})^7}{(\cos7^{\circ}-i\sin7^{\circ})^{16}}$＝＿＿＿＿＿＿。Ans：$\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(練習5) 求下列各式的值：

(1)$(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}})^6$ (2)$\frac{1}{(1+\sqrt{3}i)^8}$ (3) $(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i})^{10}$ (4)$(\sin20^{\circ}-i\cos20^{\circ})^{15}$

Ans：(1)-8 (2)$\frac{-1}{512}+\frac{-\sqrt{3}}{512}i$ (3)$\frac{\sqrt{3}}{64}-\frac{1}{64}i$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

(練習6) 設$x=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$，試求 $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{84}$=？ Ans：1

[提示]：$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{84}=\frac{1-x^{85}}{1-x}$，利用棣美弗定理求$x^{85}$的值。

(丙)複數在幾何與三角的應用

(A)複數運算的幾何意義：

(1)複數絕對值的幾何意義：

複數 $z=a+bi$ 的絕對值定義為複數 z 到原點 O 的距離$\Rightarrow$ $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

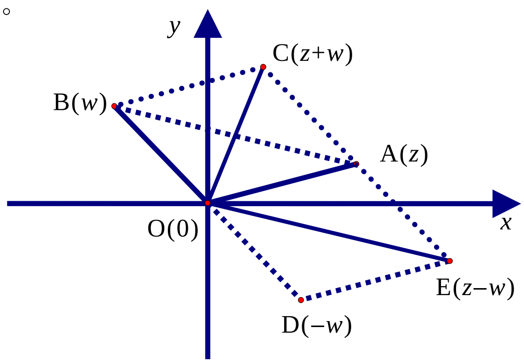
複數平面上有兩個點 P(z)、Q(w)，其中 $z=a+bi$、$w=c+di$ $\Rightarrow\overline{PQ}=|z-w|$。

(2)複數加減法的幾何意義：

如圖，若設 $z=a+bi$，$w=c+di$，而複數平面上 A、B 兩點的複數坐標為 A(z)、B(w)

則 C 點、E 點的複數坐標分別為 C($z+w$)、E($z-w$)。

其中 OACB、OAED 是平行四邊形。

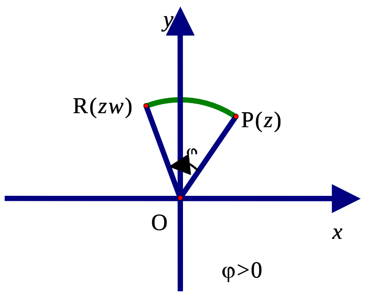


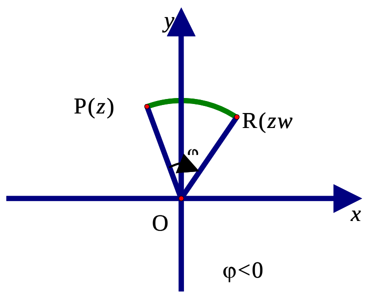
(3)複數乘法的幾何意義：

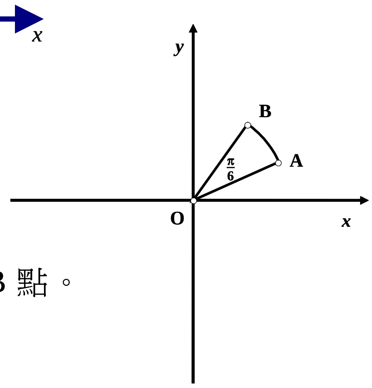
設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$w=s(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，其中 $r>0$ 且 $s>0$
根據複數乘法的原則 $z\cdot w=r\cdot s(\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi))$
令 P(z)、R(zw)

(a)旋轉運動：
設 $s=1$，$z\cdot w=z\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$
此時$|zw|=|z||w|=|z|$，且$\theta+\varphi$可以為 zw 的幅角。

因此$\overline{OP}=\overline{OR}$且以$\overline{OP}$為始邊，$\overline{OR}$為終邊的方向角為$\varphi$
結論：R 點是由 P 點繞原點 O 旋轉角度φ得到的，
當$\varphi>0$ 時，逆時針旋轉；當$\varphi<0$ 時，順時針旋轉



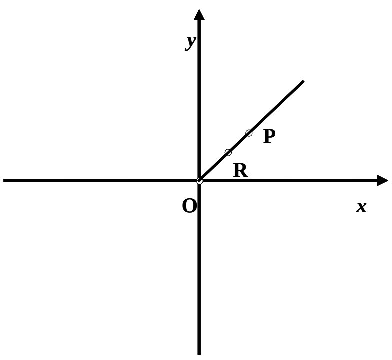




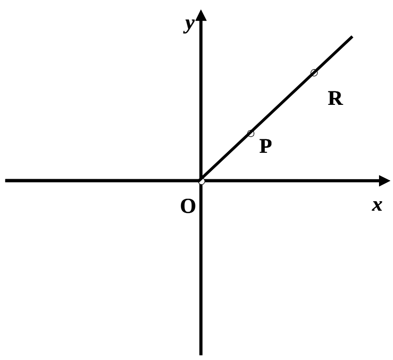
例如：
若複數平面上，A 點所對應的複數為 z，
B 點代表的複數為 $z\cdot(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$，則 A 點繞原點旋轉$\frac{\pi}{6}$得到 B 點。

(b)伸縮運動：
設$\varphi=0$ 時，即 $w=s$，$zw=sz$，其中 s 為正實數
此時$|zw|=s|z|$，且θ可以為 zw 的幅角。

因此$\overline{OR}=s\overline{OP}$，且方向角為$\theta$，
結論：R 點是由 P 點以原點 O 為伸縮中心，伸縮 s 倍得到的點。

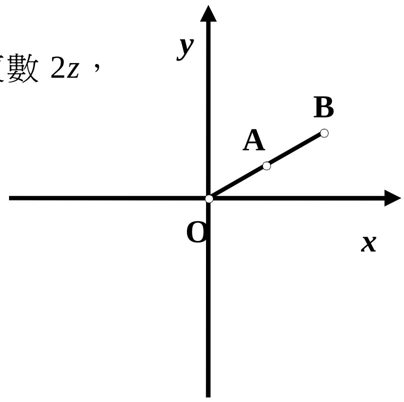


$0<s<1$



$s>1$

例如：
若複數平面上，A 點所對應的複數爲 z，B 點所代表的複數 $2z$，
則 A 點以原點爲伸縮中心，伸縮 2 倍，可得 B 點。

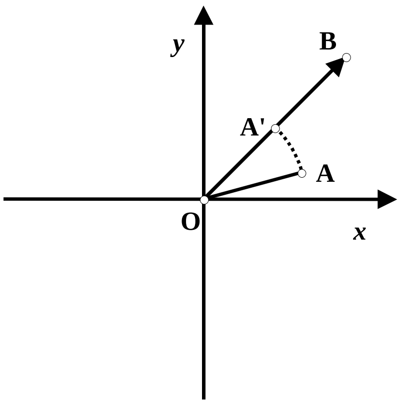


(c)旋轉與伸縮：
設 $z=r(\cos+i\ \sin\theta)$，$w=s(\cos\varphi+i\ \sin\varphi)$，其中 $r>0$ 且 $s>0$
根據複數乘法的原則 $z\cdot w= r\cdot s(\cos(\theta+\varphi)+i\ \sin(\theta+\varphi))$

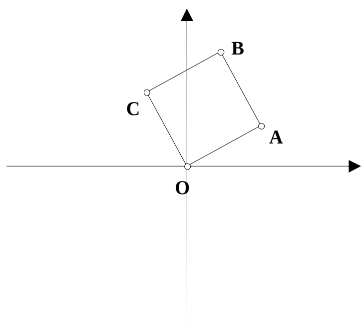
由(a)(b)的說明，可知 $\overline{OR}=|zw|=|z||w|=rs=s\overline{OP}$，且 $\theta+\varphi$ 爲 zw 的輻角。
結論：
R 點是由 P 點繞原點 O 旋轉角度 φ，再以原點 O 爲伸縮中心，伸縮 s 倍得到的點
例如：

若複數平面上，A 點所對應的複數爲 z，B 點所代表的複數 $z\cdot[2(\cos\frac{\pi}{6}+i\ \sin\frac{\pi}{6})]$

則 A 點繞原點旋轉 $\frac{\pi}{6}$，再以原點爲伸縮中心，伸縮 2 倍得到 B 點。



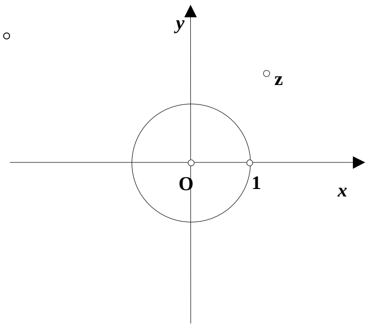
[例題4] 右圖是一正方形 OABC，已知 A(2+i)，試求 B、C 點的複數坐標。
Ans：B(1+3i)、C(−1+2i)



(練習7) 若$(4+3i)(\cos\theta+i\ \sin\theta)$爲小於 0 的實數，則$\theta$是第幾象限角？
(1)第一象限角 (2)第二象限角 (3)第三象限角 (4)第四象限角 (5)

條件不足，無法判斷。 (2003 學科) Ans：(2)

(練習8) 如圖，給定 z 點的位置，且$|z|=2$，試描繪出$\dfrac{1}{z}$的位置。



(練習9) 試說明滿足下列各式的複數 z 所代表的幾何意義：
(1) $|z-4i|=|z+1-3i|$ (2)$|z-(1+2i)|=4$
Ans：(1)直線 (2)圓

(B)已知一個複數的絕對值與輻角，可以求出這個複數：

[例題5] (1)已知$|z|=3$,Arg$z=\dfrac{\pi}{3}$，求 z=？Ans：$z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

(2)已知$\left|\dfrac{z}{z+1}\right|=3$，Arg$\dfrac{z+1}{z}=\dfrac{\pi}{3}$，求 z=？Ans：$z=\dfrac{-15-3\sqrt{3}i}{14}$

(練習10) a,b 爲實數，$\alpha=1+bi$，$\beta=\sqrt{3}+a\,i$，若$|\alpha|=|\beta|$，且 Arg$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，則 a=？b=？
Ans：$a=-1$，$b=\sqrt{3}$

(C)複數在三角函數的應用：

三倍角公式的證明：$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ ，$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ 。

考慮$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$，

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta+i\sin\theta)^3&=\cos^3\theta+3(\cos\theta)^2(i\sin\theta)+3(\cos\theta)(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3\\
&=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta+i(3\cos^2\theta\cdot\sin\theta-\sin^3\theta)\\
&=\cos 3\theta+i\sin 3\theta
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta=\cos^3\theta-3(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$。

$\Rightarrow\sin 3\theta=3\cos^2\theta\cdot\sin\theta-\sin^3\theta=3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

[例題6] 設$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$，n爲大於 1 的正整數，試證：

$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=0$ 且 $\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=0$ 。

(Hint：令$z=\cos\theta+i\sin\theta$ ，考慮$z+z^2+\ldots z^n$的實部與虛部。)

[例題7] 設$n\in N$，$x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$，證明：$x^n+\dfrac{1}{x^n}=2\cos n\theta$。

[解法]：

(1) $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta \Rightarrow x^2-(2\cos\theta)x+1=0 \Rightarrow x=\cos\theta\pm i\sin\theta$

(2)①當$x=\cos\theta+i\sin\theta$時

$x^n+\dfrac{1}{x^n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}$

$=\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$

$=\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos n\theta-i\sin n\theta=2\cos n\theta$

②當$x=\cos\theta-i\sin\theta$時

$x^n+\dfrac{1}{x^n}=[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^n+[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^{-n}$

$=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)+\cos n\theta+i\sin n\theta=2\cos n\theta$

(練習11) 利用棣美弗定理證明：

$\cos4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta-1$，$\sin4\theta=4\sin\theta\cos\theta-8\sin^3\theta\cos\theta$

(練習12) 若z爲複數，且滿足$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$，則$z^{101}+\dfrac{1}{z^{101}}=$____。Ans：$-1$

(練習13) 設$n\in$N，使$(\sqrt{3}+i)^n$是一個純虛數的n，最小的是多少？Ans：3

$\sqrt{3}+i=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\,\dfrac{1}{2})=2(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})$

$(\sqrt{3}+i)^n=2^n(\cos\dfrac{n\pi}{6}+i\sin\dfrac{n\pi}{6})$爲純虛數，則$\cos\dfrac{n\pi}{6}=0$ 且$\sin\dfrac{n\pi}{6}\neq0$

$\Rightarrow n=3$ 爲最小值。

(丁)求複數的 n 次方根

(1)1 的n次方根：
設w爲 1 的n次方根，則$w^n=1$。因此方程式$z^n=1$ 的n個根(代數基本定理)
都是 1 的n次方根。

例如：
當$n=2$ 時，$z^2-1=0$ 兩根爲 1，-1 所以 1 的二次平方根(平方根)爲±1。

當$n=3$ 時，解$z^3-1=0$，因爲$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$，所以$z^3=1$ 的三個根爲 1，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$，
即 1 的三次方根(立方根)爲 1，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$。
當$n=4$ 時，因爲$z^4-1=(z^2+1)(z^2-1)$，所以 1 的 4 次方根爲±1，$\pm i$。

但當n的次數增加時，像解$z^5-1=0$，我們就不易直接求解，因此必須介紹新的方法，才能順利將 1 的n次方根找出來。

(2)如何解$z^n=1$？
例子：
試解$z^7=1$ 之根。(求 1 的 7 次方根)
考慮根的絕對值：$|z|^7=1 \quad \Rightarrow |z|^7=1 \Rightarrow |z|=1$
考慮根的輻角：$\arg(z^7)=\arg(1)=0+2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 7\cdot\arg(z)= 0+2k\pi \Rightarrow \arg(z)=\dfrac{2k\pi}{7}$

如何解$z^n=1$？
[解法一]：
設複數z滿足$z^n=1$，令$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中$r=|z|$，$\arg(z)=\theta$ 將z代入$z^n=1$，

可得$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=1=1\cdot(\cos 0+i\sin 0)$，則$r=1$ 且$\cos n\theta=\cos 0$，$\sin n\theta=\sin 0$，
因此$r=1$，且$n\theta$與 0 互爲同界角，即$n\theta=2k\pi \Rightarrow \theta=\dfrac{2k\pi}{n}$，$k$爲整數。
所以$z^n=1$ 的根有下列之形式：$z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$，其中$k$爲一整數。
但又因爲正弦函數與餘弦函數的週期爲 2π，因此k只要代n個連續整數，
就可以表示所有的n個根，故我們可將 1 的n個n次方根寫成：

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}，k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

[解法二]：
考慮根的絕對值：$|z^n|=1 \Rightarrow |z|^n=1 \Rightarrow |z|=1$
考慮根的輻角：$\arg(z^n)=\arg(1)=0+2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\cdot\arg(z)= 0+2k\pi \Rightarrow \arg(z)=\dfrac{2k\pi}{n}$。
結論：
設解方程式$z^n=1$(求 1 的n次方根)，

則n個根$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$，$k=0,1,2,\ldots,n-1$。

例如：$z^4=1$ 的解為$z_k=\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}$，$k=0,1,2,3$

$z_0=\cos0+i\sin0=1$，$z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$，$z_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$z_3=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$，這四個根與前面直接解的根相同。

1 的n次方根記憶要訣：

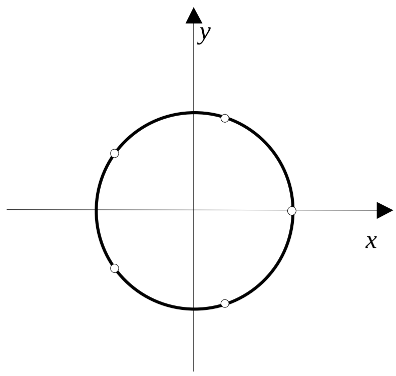
Step1：化極式：將 1 化成極式 $1=1(\cos0+i\sin0)$

Step2：同界：0 的同界角為 $2k\pi$ $\Rightarrow 1=1(\cos2k\pi+i\sin2k\pi)$

Step3：開方：將n次方根根視為$1^{\frac{1}{n}}$ $\Rightarrow$$n$次方根的絕對值為$\sqrt[n]{1}$，輻角為$\frac{2k\pi}{n}$

$$\Rightarrow z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}，k=0,1,2,\ldots,n-1。$$

[例題8] (1)試求 1 的五個 5 次方根，並將代表它們的點描在坐標平面上。
(2)解方程式$z^4+z^3+z^2+z+1=0$。
Ans：(1)$z_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$，$k=0,1,2,3,4$ (2) $z_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$，$k=1,2,3,4$



討論：
於上一題中，1 的 5 個 5 次方根依次相連得一個內接於單位圓的正 5 邊形。一般而言，1 的n個n次方根恰好是內接於單位圓的正n邊形的n個頂點。其中一個

頂點爲$z_0=1$，其餘的頂點z_1，z_2，…z_{n-1}分別是z_0繞原點逆時針在單位圓上旋轉$\frac{2\pi}{n}$，$\frac{2\pi}{n}\times 2$，$\frac{2\pi}{n}\times 3$，…$\frac{2\pi}{n}\times(n-1)$所形成的。

(3)如何求複數a的n次方根？
根據前面 1 的n次方根之定義方式，可知a的n次方根w，w滿足$w^n=a$，
因此$z^n=a$**的n個根就是a的n次方根**。
例子：
求 $1+i$的 7 次方根。
考慮根的絕對值：$|z|^7=|1+i|=\sqrt{2}$ $\Rightarrow |z|^7=\sqrt{2}$ $\Rightarrow |z|=\sqrt[14]{2}$
考慮根的輻角：$\arg(z^7)=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in Z$

$\Rightarrow 7\cdot\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \Rightarrow \arg(z)=\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{7}$

如何解$z^n=a$？
[解法一]：
設$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中$r=|z|$，$\arg(z)=\theta$，$a=|a|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，$z$滿足$z^n=a$。
所以$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=|a|(\cos\varphi+i\sin\varphi) \Rightarrow r^n=|a|$且$\cos n\theta=\cos\varphi$，$\sin n\theta=\sin\varphi$
即$r=\sqrt[n]{|a|}$且$n\theta$與φ互爲同界角($n\theta=\varphi+2k\pi$)$\Rightarrow \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$，$k$爲整數。
由於正弦函數與餘弦函數的週期爲 2π ，因此k只要代n個連續整數，
就可以表示所有的n個根，故我們可將a的n個n次方根寫成：

$$z_k=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)，k=0,1,2,\ldots,n-1$$

[解法二]：
考慮根的絕對值：$|z^n|=|z|^n=|a|$ $\Rightarrow |z|=\sqrt[n]{|a|}$
考慮根的輻角：
$\arg(z^n)=\arg(a)=\varphi+2k\pi$，$k\in Z$
$\Rightarrow n\cdot\arg(z)=\varphi+2k\pi \Rightarrow \arg(z)=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}$

a的n次方根記憶要訣：

Step1：化極式：將a化成極式$a=|a|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

Step2：同界：φ的同界角爲$\varphi+2k\pi \Rightarrow a=a(\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi))$

Step3：開方： n次方根的絕對值爲$\sqrt[n]{|a|}$，輻角爲$\frac{\varphi+2k\pi}{n}$

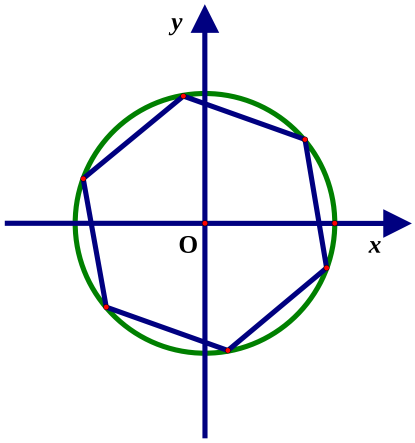
$$\Rightarrow z_k=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)，k=0,1,2,\ldots,n-1。$$

結論：

$z^n=a$的解(求a的n次方根)爲$z_k=\sqrt[n]{|a|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$，$k=0,1,2,\ldots,n-1$

[例題9] 試解$z^6=-8-8\sqrt{3}\ i$，並將代表其根的點畫在坐標平面上，試求此六邊形的面積。

Ans：$z_k=\sqrt[6]{16}\left(\cos\dfrac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{6}+i\sin\dfrac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{6}\right)$，$k=0,1,2,3,4,5$；$3\sqrt[6]{108}$



(練習14) (1)求 1 的 7 次方根，並將它們標示在複數平面上。
(2)解方程式$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$

Ans：(1)$z_k=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$ ，$k=0,1,2,3,4,5,6$

(2)$x_k=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$ ，$k=1,2,3,4,5,6$

(練習15) 方程式 $x^6=64$ 的六個根在高斯平面上的對應點恰可圍成一個正六邊形，(1)求其解爲__________。(2)此六邊形的面積爲__________。

Ans：(1)$2(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3})$，$k=0$，1，2，3，4，5 (2)$6\sqrt{3}$

(練習16) 試求$-1+i$的五個 5 次方根。(即解方程式$x^5+1-i=0$)

Ans：$x_k=2^{\frac{1}{10}}(\cos\frac{3\pi+8k\pi}{20}+i\sin\frac{3\pi+8k\pi}{20})$ $k=0,1,2,3,4$

(練習17) (1)求 $1+i$ 的所有 8 次方根。
(2)複數平面上，以 $1+i$ 的所有 8 次方根爲頂點的多邊形，其面積爲何？

Ans：(1)八個根爲：$\sqrt[16]{2}(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{8}+i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{8})$，$k=0,1,2,3,4,5,6,7$

(2)$2\sqrt[8]{32}$

(4)1 的n次方根$\boldsymbol{\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+ i\sin\frac{2\pi}{n}}$ 的性質：

(a) 方程式$\boldsymbol{z^n=1}$ 的根為$\boldsymbol{z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}}$，$\boldsymbol{k = 0,1,2,\ldots,n-1}$

[說明]：

若令$\omega=z_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，則$z_2=\omega^2$，$z_3=\omega^3$，…，$z_{n-1}=\omega^{n-1}$

故方程式$z^n=1$ 的根為 $1, \omega$，ω^2，…，ω^{n-1}，其中$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$。

(b)方程式$\boldsymbol{z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z^2+z+1=0}$ 的根為可寫成$\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{\omega^2}$，**…**，$\boldsymbol{\omega^{n-1}}$，

其中$\boldsymbol{\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}}$。

[說明]：

$\because z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z^2+z+1)=0$

$\therefore z^n=1$ 的所有根去掉$z_0=1$ 這個根形成方程式$z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z^2+z+1=0$ 的根。

故方程式$z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z^2+z+1=0$ 的根為$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$，$k = 1,2,\ldots,n-1$

或寫成ω，ω^2，…，ω^{n-1}，其中$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$。

(c) $\boldsymbol{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\ldots+\omega^{n-1}=0}$，其中$\boldsymbol{\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}}$。

因為方程式$z^n=1$ 的根為 $1, \omega$，ω^2，…，ω^{n-1}，其中$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$。

所以$\omega^n=1$，且 $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\ldots+\omega^{n-1}=0$。

(d) $\boldsymbol{z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z^2+z+1=(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)\ldots(z-\omega^{n-1})}$，其中$\boldsymbol{\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}}$。

[說明]：

因為方程式$z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z^2+z+1=0$ 的根為ω，ω^2，…，ω^{n-1}，其中$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$。

所以$z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z^2+z+1=(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)\ldots(z-\omega^{n-1})$。

[例題10] 設ω為$x^5-1=0$ 的一虛根，即取$\boldsymbol{\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}}$，則求下列各小題：

(1)$\omega^5=$？

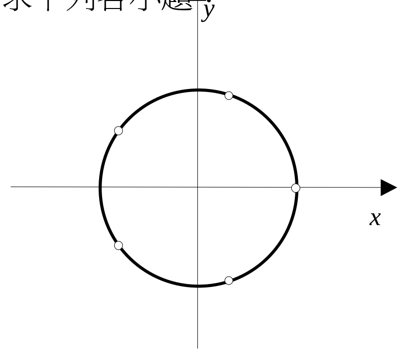
(2)$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=$？

(3)$1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\frac{1}{\omega^4}=$？

(4)$x^5-1=0$，五根為：

(5)$x^4+x^3+x^2+x+1=0$，四根為：

(6)因式分解$x^4+x^3+x^2+x+1=$



(7)求$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)=$

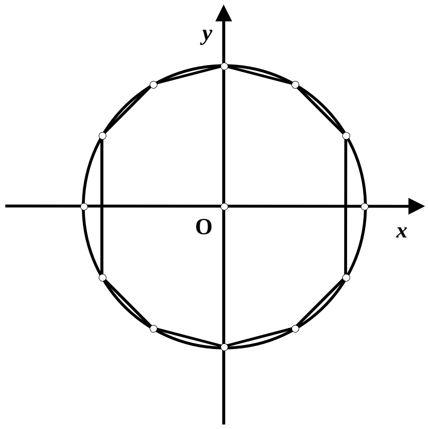
(8)求$(2+\omega)(2+\omega^2)(2+\omega^3)(2+\omega^4)=$

(9)$x^5=1$ 的 5 個根在複數平面上依序對應到A,B,C,D,E五點

求$\overline{AB}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\overline{AE}=$？

Ans：(1)1 (2)0(3)0 (7)5 (8)11(9)5

[例題11] 在複數平面上，以方程式$x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=0$ 的 10 個虛根為頂點所連成的 10 邊形面積為何？ Ans：$2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



(練習18) 設$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$試求

(1)$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6=$？

(2)$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)(1-\omega^5)(1-\omega^6)=$？

Ans：(1)0 (2)7

(練習19) 設$\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，則求下列各小題：

(1)$\omega^{65}+\omega^{66}+\omega^{67}+\ldots+\omega^{365}=$？　(2)$\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4}+\frac{\omega^3}{1+\omega^6}+\frac{\omega^4}{1+\omega^8}=$？

Ans：(1) 1 (2)2

(練習20) 滿足$z^6+z^4+z^2+1=0$ 諸根在複數平面上的對應點決定的凸多邊形為____邊形，面積為_____。　Ans：六，$\sqrt{2}+1$

(戊)極坐標

(1)在引進複數的極式時，我們可知要描述複數平面上一點 $P(a+bi)$，除了知道實部 a，虛部 b 之外，只要能指出 P 點離原點 O 多遠，及 P 點是哪一個有向角θ的終邊上，亦可標示出 P 點。

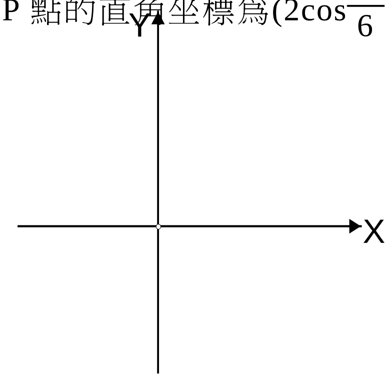
(2)在平面上選定一點 O，再過 O 作一數線 L，以其正向為始邊，繞定點 O 旋轉，使 P 點恰在其上。若其旋轉量θ，θ為一有向角(逆時針為正、順時針為負)，$\overline{OP}=r$，我們就可以利用 r，θ來描述 P 點的位置，符號：$P[r,\theta]$。這種表示法就是極坐標表示法，其中 O 點稱為該極坐標系的極(或極點)，數線 L 稱為極軸。並以$[r,\theta]$為 P 點的極坐標。極坐標從複數的表示形式而來

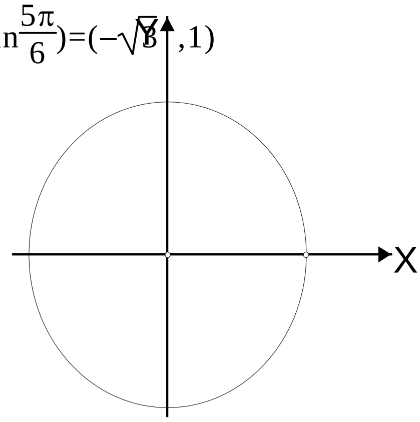
①標準式：$x+yi\Rightarrow$代表平面坐標(x,y)

②極　式：$r(\cos\theta+i\sin\theta)\Rightarrow$代表極坐標$[r,\theta]$

例如：在極坐標上點 $P[2,\frac{5\pi}{6}]$

P 點的直角坐標為$(2\cos\frac{5\pi}{6}，2\sin\frac{5\pi}{6})=(-\sqrt{3},1)$





例如：在直角坐標上 $Q(-1，\sqrt{3})$

設在極坐標上 $Q[r,\theta]$

$\Rightarrow r\cdot\cos\theta=-1$ 且 $r\cdot\sin\theta=\sqrt{3}$　　$\Rightarrow r=2$ 且$\theta=\frac{2\pi}{3}+2n\pi$，$n$ 為整數

$\Rightarrow$Q 點的極坐標可表為 $Q[2,\frac{2\pi}{3}+2n\pi]$

[例題12] 將六個複數$-1+i$，$1-\sqrt{3}i$，5，-2，$-3i$，$\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$：

(1)求向徑及主輻角

(2)化為極式

(3)寫出各點的極坐標

Ans：(1)$\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$ $[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}]$ (2)$2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$ $[2,\frac{5\pi}{3}]$

(3)$5(\cos 0+i\sin 0)$ $[5,0]$ (4)$2(\cos\pi+i\sin\pi)$ $[2,\pi]$

(5)$3(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$ $[3,\frac{3\pi}{2}]$ (6)$(\cos\frac{-\pi}{5}+i\sin\frac{-\pi}{5})$ $[1,\frac{-\pi}{5}]$

[例題13] 設在極坐標中 $A[1,\frac{\pi}{6}]$、$B[3,\frac{5\pi}{6}]$，試求$\overline{AB}$=？ Ans：$\sqrt{13}$

(練習21) 求下列各點的極坐標：

(1)$A(-2,2)$ (2)$B(1+\sqrt{3},1-\sqrt{3})$ (3)$C(4\cos\frac{\pi}{7},4\sin\frac{\pi}{7})(4)D(0,-3)$

Ans：(1)$[2\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}]$ (2)$[2\sqrt{2},\frac{-\pi}{12}]$ (3)$[4,\frac{\pi}{7}]$ (4)$[3,\frac{3\pi}{2}]$

(練習22) 求下列各點的直角坐標：

(1)$A[4,\frac{4\pi}{3}]$ (2)$B[2,\frac{7\pi}{12}]$ (3)$C[0,\frac{\pi}{5}]$ (4) $D[5,-1]$ (5)$E[3,\cos^{-1}\frac{3}{5}]$

Ans：(1)$(-2,-2\sqrt{3})$(2)$(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})(3)(0,0)$

(4)$(5\cos 1,-5\sin 1)$ (5)$(\frac{9}{5},\frac{12}{5})$

(練習23) 在極坐標格子圖上，標出下列各題中之 A 與 B 點，並求$\overline{AB}$之長：

(1)A 點的極坐標為$(1,\frac{\pi}{6})$，B 點的極坐標為$(2,\frac{7\pi}{6})$

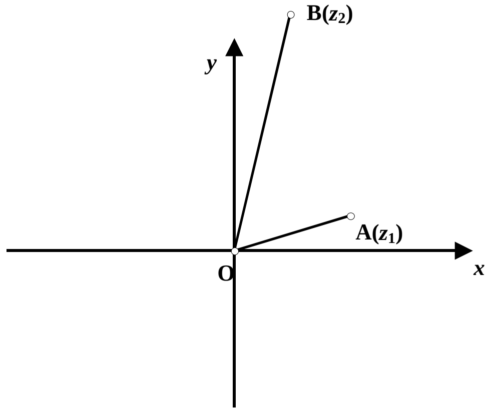
(2)A 點的極坐標為$(3,\frac{\pi}{3})$，B 點的極坐標為$(4,\pi)$ Ans：(1)3 (2)$\overline{AB}=\sqrt{37}$

綜合練習

(1) 若複數 z 與$\sqrt{3}+i$ 之積為$-2\sqrt{3}+2i$ ，則 z 之主輻角為＿＿＿＿＿。 (86 自然組)

(2) 令z為複數且 $z^6=1, z\neq1$ ，則下列選項何者為真？
(A) $|z|=1$(B) $z^2=1$ (C) $z^3=1$ 或$z^3=-1$(D) $|z^4|=1$ (E) $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$ (90 學科)

(3) 如圖，已知OB=2·OA=4，且∠AOB=60°
試求 $\dfrac{z_2}{z_1}$ =＿＿＿＿＿＿＿＿。



(4) 試求下列各小題：
(a)$\left|\dfrac{(\sqrt{3}+i)^4(\sqrt{5}-\sqrt{5}i)}{3+\sqrt{3}i}\right|$
(b)設 $a>0$，若$\left|\dfrac{(1+i)^3(a-i)^2}{\sqrt{2}(a-3i)^2}\right|=\dfrac{2}{3}$ ，求 $a=$？

(5) 化簡下列各小題：
(a)$\dfrac{(\cos43^\circ+i\sin223^\circ)(\cos137^\circ+i\sin763^\circ)}{\sin124^\circ+i\cos56^\circ}$ (b)$(-1+i)^{10}(2\sqrt{3}-2i)^8$

(6) 化簡$\dfrac{1+i\tan\frac{\pi}{8}}{1-i\tan\frac{\pi}{8}}$之值為＿＿＿＿＿。

(7) 設$z=1-\cos140^\circ+i\sin140^\circ$，則(a)$|z|=$？ (b)Arg($z$)=？

(8) ΔABC 的三內角為 A、B、C，請問$(\cos A+i\sin A)(\cos B+i\sin B)(\cos C+i\sin C)=$？

(9) 在ΔABC 中若$\dfrac{\cos A+i\sin A}{(\cos B+i\sin B)(\cos C+i\sin C)}$為實數，則此三角形的形狀為何？

(10) 設 O 表原點，$A(\alpha)$，$B(\beta)$ 為複數平面的二點，
$\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$，$\beta=3\left(\cos\dfrac{8\pi}{15}+i\sin\dfrac{8\pi}{15}\right)$，
則(a)△OAB 的面積為＿＿＿＿＿＿＿＿＿。 (b)$\overline{AB}$的長度為＿＿＿＿＿＿＿＿。

(11) 設$|z|=2|z+1|$，且 $\text{Arg}\left(\dfrac{z+1}{z}\right)=\dfrac{\pi}{3}$，則 z 的極式表示式為何？

(12) 設$z_1=2+ai$，$z_2=2b+(2-b)i$，其中a,b為實數，$i=\sqrt{-1}$ ，若$|z_1|=\sqrt{2}|z_2|$，且$\dfrac{z_1}{z_2}$的輻角為$\dfrac{\pi}{4}$，則數對$(a,b)=$？ (85 自)

(13) 設$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，$1, \omega,\omega^2,\ldots, \omega^{n-1}$為 1 的$n$次方根，證明$z^n=\alpha$ 之n個根為

$z_0, z_0\omega,z_0\omega^2,\ldots, z_0\omega^{n-1}$，其中$z_0=\sqrt[n]{|\alpha|}(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n})$，$\theta=\arg(\alpha)$。

(14) 解方程式：(a)$x^2-i=0$ (b)$x^2=8+6i$

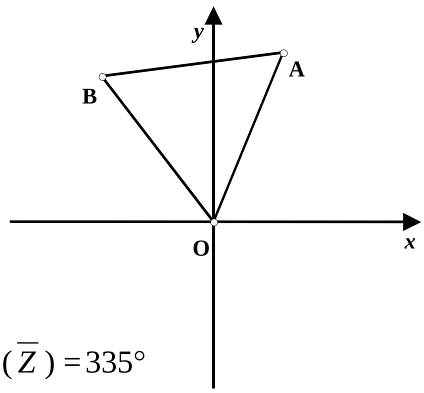
(15) 求下列方程式的根：

(a)$x^5=\sqrt{3}-i$ (b) $z^6=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

(c) $(z+3)^6=8-8\sqrt{3}i$ (d)$x^3-6x^2+12x+8=0$

(16) 試解$(z-1+2i)^4=-8-8\sqrt{3}i$之根，並在複數平面上求以四根為頂點所得四方形之面積。

(17) 若$z^2-2(\cos 8°)z+1=0$，求$z^{15}+\frac{1}{z^{15}}=$？



(18) 設$z_1=\cos 78^\circ+i\sin 78^\circ$，$z_2=\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ$

(a)求複數z_1-z_2的主輻角。

(b)若$(z_1-z_2)^5=a+bi$，a,b為實數，求$(a,b)=$？

(19) $Z=1-\cos 130^\circ+i\sin 130^\circ$，則下列何者正確？

(A) $|Z|=2\sin 65°$ (B) $\mathrm{Arg}(Z)=65°$ (C) $\mathrm{Arg}(\overline{Z})=335°$

(D) Z^{18}為純虛數 (E) Z^{36}為實數。

(20) 設$\alpha=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$，試求$\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^8+\alpha^{10}+\alpha^{12}+\alpha^{14}$ 之值。

(21) 設$z=\cos\theta+i\sin\theta\neq 1$，且$z^5=1$，則

(a)$\cos 4\theta+\cos 3\theta+\cos 2\theta+\cos\theta=$？

(b)$\sin 4\theta+\sin 3\theta+\sin 2\theta+\sin\theta=$？

進階問題

(22) (a)設z為一複數，$\overline{z}$為其共軛複數，若$|z|=1$，求證：$\frac{1+z}{1+\overline{z}}=z$。

(b)若$\theta=\frac{\pi}{24}$，求$\left(\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}\right)^{100}$之值。

(23) 設$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}$，n為自然數。

(a)試求一個n最小值使得z^n為實數。

(b)求$|z^{n+1}-z^n|=$？

(c)試求$\sum_{n=1}^{\infty}|z^{n+1}-z^n|=$？ Ans：(a)3 (b)$\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$ (c)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(24) 設n為大於 1 的整數，若$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$，
試求$a_0-a_2+a_4-a_6+\ldots$之值。

(25) 設 n 為正整數，$\theta=\dfrac{2\pi}{2n+1}$，求 $\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\ldots+\cos n\theta$ 之值。

(26) 設α,β 為複數，且滿足$\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0$ 且$\beta\neq0$，令$P(\alpha),Q(\beta)$,，試求ΔOPQ的三邊長之比。

(27) A,B,C,D表$x^4-x^2+1=0$ 的四個根在複數平面上所對應的點，P點代表i，試求PA、PB、PC、PD之積。

(28) 設$z_1=-6+6i$，$z_2=2+6i$，$z=t+t\,i$，t為實數，試求t之值使$|z-z_1|+|z-z_2|$的值最小？並求此最小值？

(29) 設z為複數，且$|z|=1$，試求$|z^2-z+1|$的範圍？

綜合練習解答

(1) $\dfrac{2\pi}{3}$

(2) (A) (C) (D) (E)

(3) $1+\sqrt{3}\,i$

(4) (a)$\dfrac{8\sqrt{30}}{3}$ (b)$\sqrt{3}$

(5) (a)$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (b) $2^{20}(\sqrt{3}+i)$

(6) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

[提示：$\dfrac{1+i\tan\frac{\pi}{8}}{1-i\tan\frac{\pi}{8}}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}}{\cos(\frac{-\pi}{8})+i\sin(\frac{-\pi}{8})}$]

(7) (a)$2\sin70^\circ$ (b)20°

[解法]：$z=1-\cos140^\circ+i\sin140^\circ$
$=1-(1-2\sin^270^\circ)+i(2\sin70^\circ\cos70^\circ)$
$=2\sin^270^\circ+i(2\sin70^\circ\cos70^\circ)$
$=2\sin70^\circ(\sin70^\circ+i\cos70^\circ)$
$=2\sin70^\circ(\cos20^\circ+i\sin20^\circ)$

(8) -1

(9) 直角三角形

(10) (a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (b)$\sqrt{7}$ [提示：在複數平面上，考慮極式的意義去求解]

(11) $\frac{2}{\sqrt{3}}(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$

(12) $(\frac{10}{3}，\frac{4}{3})$

(13) $z^n=\alpha$的根爲 $z_k=\sqrt[n]{|\alpha|}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})=\sqrt[n]{|\alpha|}(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n})(\cos\frac{2k\pi}{n}$

$+i\sin\frac{2k\pi}{n})=\sqrt[n]{|\alpha|}(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n})[(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})]^k=\sqrt[n]{|\alpha|}(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n})\cdot\omega^k k=0,1,2,\ldots,n-1$

其中$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$。

(14) (a)$\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)$ (b)$\pm(3+i)$

[提示：可以令 $a+bi$ 爲根，代入方程式，比較實部與虛部，再解 a,b]

(15) (a)$\sqrt[5]{2}(\cos\frac{\frac{-\pi}{6}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{-\pi}{6}+2k\pi}{5})$，$k=0,1,2,3,4$

(b) $z_k=\cos\frac{5\pi/6+2k\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi/6+2k\pi}{6}$，$k=0,1,2,3,4,5$

(c) $z_k=-3+\sqrt[6]{16}(\cos\frac{5\pi/3+2k\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi/3+2k\pi}{6})$，$k=0,1,2,3,4,5$

(d)$x=2+2\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3})$，$k=0,1,2$

[提示：原方程式可化爲$(x-2)^3=-16$]

(16) $z_k=1+2i+2[\cos\theta(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3})],k=0,1,2,3$；8

(17) -1 [提示：應用例題 8 的結果]

(18) (a)138° (b)$(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2})$

(19) (A)(C)(D)(E) {提示：參考例題 3

(20) 0

(21) (a)-1 (b)0 [提示：仿照例題 7 的方法]

(22) (a)利用$z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$

$\Rightarrow \dfrac{1+z}{1+\bar{z}}=\dfrac{z(1+z)}{z+z\cdot\bar{z}}=\dfrac{z(1+z)}{z+1}=z$ (b)令$z=\cos\theta+i\sin\theta$ ，再利用(a)的結論得

$(\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta})^{100}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ 。

(23)

[提示：(a)$z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})\Rightarrow z^n=(\dfrac{1}{2})^n(\cos\dfrac{n\pi}{3}+i\sin\dfrac{n\pi}{3})$ 爲實數 $\Rightarrow \sin\dfrac{n\pi}{3}=0$
$\Rightarrow n=3k$，k爲整數

(b) $|z^{n+1}-z^n|=|z^n(z-1)|=|z^n||z-1|=|z|^n|z-1|=(\dfrac{1}{2})^n\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|z^{n+1}-z^n|=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(24) $2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}$ [提示：將i代入$(1+x)^n$中，再考慮$(1+i)^n$的實部即爲$a_0-a_2+a_4-a_6+\ldots$]

(25) $\dfrac{-1}{2}$[提示：令$z=\cos\theta+i\sin\theta$，考慮$z+z^2+\ldots+z^n=\dfrac{z(1-z^n)}{1-z}$ 的實部。]

(26) OP：OQ：PQ=2：1：$\sqrt{3}$ [提示：$\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0\Rightarrow(\dfrac{\alpha}{\beta})^2-2(\dfrac{\alpha}{\beta})+4=0\Rightarrow\dfrac{\alpha}{\beta}=1\pm\sqrt{3}$

i (a)$\dfrac{\alpha}{\beta}=1+\sqrt{3}\ i=2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})\Rightarrow\alpha=\beta\cdot[2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})]\Rightarrow|\alpha|=2|\beta|$且$\angle QOP=\dfrac{\pi}{3}$。(b) $\dfrac{\alpha}{\beta}$

$=1-\sqrt{3}\ i=2(\cos\dfrac{-\pi}{3}+i\sin\dfrac{-\pi}{3})\Rightarrow\alpha=\beta\cdot[2(\cos\dfrac{-\pi}{3}+i\sin\dfrac{-\pi}{3})]\Rightarrow|\alpha|=2|\beta|$且$\angle QOP=\dfrac{\pi}{3}$]

(27) 3[提示：因爲A,B,C,D表$x^4-x^2+1=0$ 的四個根，且令A(z_1)、B(z_2)、C(z_3)、D(z_4)，所以$x^4-x^2+1=0$ 有四個根z_k，$k=1,2,3,4$，$\Rightarrow x^4-x^2+1=(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)(x-z_4)\Rightarrow$
$PA\cdot PB\cdot PC\cdot PD=|i-z_1||i-z_2||i-z_3||i-z_4|=|(i-z_1)(i-z_2)(i-z_3)(i-z_4)|=|i^4-i^2+1|=3$]

(28) $t=3$，$4\sqrt{10}$ [提示：$|z-z_1|+|z-z_2|$可視爲在直線$x-y=0$ 的點P(t,t)到A$(-6,6)$、B$(2,6)$的距離和]

(29) $0\le|z^2-z+1|\le3$ [提示：$z^2-z+1=(z-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}$ $||z-\dfrac{1}{2}|^2-\dfrac{3}{4}|\le|(z-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}|\le|(z-\dfrac{1}{2})^2|+\dfrac{3}{4}$， 當$z=-1$

時，$(z-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}=3$ 爲最大值，當$z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$時，有最小值 0]