

§4-2 餘式定理、因式定理

(甲)餘式定理

除法原理： $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$ ， $\deg r(x)<\deg g(x)$ 或 $r(x)=0$

餘式定理：多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的餘式等於 $f(a)$ 。

證明：由多項式的除法原理得知，恰有兩多項式 $q(x)$ 及 r (r 為常數多項式) 滿足 $f(x)=(x-a)\cdot q(x)+r$ ，而此等式為恆等式，
因此將 $x=a$ 代入上式，得 $f(a)=(a-a)\cdot q(a)+r=r$ 。

推廣：多項式 $f(x)$ 除以 $ax+b$ 的餘式等於 $f(-\frac{b}{a})$ 。

$f(a)$ 的雙重意義：①多項函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的函數值。
②多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的餘式。

[例題1] 求下列二小題：

(1) 求 $(x^3+2x^2-x-4)^3$ 除以 $x+3$ 的餘式。

(2) 設 $f(x)=1250x^6-2790x^5-3125x^4+707x^3+100x^2+45x-62$ ，則 $f(3)=?$

Ans：(1)-1000 (2)217

[例題2] 二次式 ax^2+bx-4 以 $x+1$ 除之，得餘式 3，以 $x-1$ 除之，得餘式 1，若以 $x-2$ 除之，所得的餘式為_____。Ans：18

(練習1) 試求 $11^5-4\cdot 11^4-72\cdot 11^3-56\cdot 11^2+15\cdot 11+7$ 之值為_____。Ans：51

(練習2) 設二多項式 $f(x), g(x)$ 以 $2x^2-3x-2$ 除之，餘式分別為 $3x+2, -4x+7$ ，則 $f(x)+g(x)$ 以 $2x+1$ 除之，其餘式為何？ Ans： $\frac{19}{2}$

(練習3) $f(x)=2x^4+3x^3+5x^2-6$ ，求 $2x-1$ 除 $f(x-3)$ 的餘式。 Ans : $\frac{113}{2}$

Hint : 可令 $g(x)=f(x-3)$ ，再利用餘式定理。

[例題3] 試求下列各小題：

(1) 求多項式 $f(x)=x^7-50x^5+8x^4-5x^3-19x^2+41x+6$ 除以 $(x-1)(x-7)$ 之餘式。

(2) 設多項式 $f(x)$ 不低於 2 次，以 $x-1$ 除之餘 2，以 $x+2$ 除之餘 -1，則以 $(x-1)(x+2)$ 除 $f(x)$ 的餘式為何？

(3) 設多項式 $f(x)$ 不低於 3 次，以 $x-1$ 除之餘 3，以 $x+1$ 除之餘 1，以 $x-2$ 除之餘 -2，則求以 $(x-1)(x+1)(x-2)$ 除 $f(x)$ 的餘式。

Ans : (1) $11x-29$ (2) $x+1$ (3) $-2x^2+x+4$

[例題4] 試求下列各小題：

(1) 多項式 $f(x)$ 以 x^2-3x-4 ， $2x^2-3x+1$ 除之餘式各為 $4x-1$ ， $2x+7$ ，試求 $f(x)$ 以 $2x^2-9x+4$ 除之餘式為何？

(2) 多項式 $f(x)$ 以 $x(x-1)$ 除之，餘式為 $-x+3$ ，以 $x(x+1)$ 除之餘式為 $-3x+3$ ，則 $f(x)$ 除以 $x(x^2-1)$ 之餘式為何？ Ans : x^2-2x+3

(練習4) 多項式 $f(x)$ 除以 $x-3$ 得餘式16, 除以 $x+4$ 得餘式-19, 則 $f(x)$ 除以 $(x-3)(x+4)$ 所得的餘式爲_____。 Ans : $5x+1$

(練習5) 多項式 $f(x)$ 以 x^2-3x+2 除之餘式爲3, 以 x^2-4x+3 除之得餘式爲 $3x$, 則以 x^2-5x+6 除之餘式爲_____。 Ans : $6x-9$

(練習6) 以 x^2+2x+3 除 $f(x)$ 餘 $x+12$, 以 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 餘 $5x+4$, 則以 $(x+1)(x^2+2x+3)$ 除 $f(x)$ 的餘式爲_____。 Ans : $-6x^2-11x-6$

(練習7) 設多項式 $f(x)$ 除以 $(x+1)^3$ 得餘式 $2x^2+8$, 除以 $(x-2)^2$ 得餘式 $15x+40$, 若 $\deg f(x) \geq 4$, 則 $f(x)$ 除以 $(x+1)^3(x-2)$ 的餘式爲_____。
Ans : $2x^3+8x^2+6x+10$

[例題5] 求多項式 $(x^2+3x+2)^3$ 被 x^2+2x+3 除之餘式爲何? Ans : $10x+14$

[例題6] 用 $(x-1)^2$ 除 $x^{10}+2$ 所得的餘式爲何? Ans : $10x-7$

[例題7] 多項式 $f(x)=x^{12}+x^9-3x^6+4x^2-5$ ，求

(1) 除以 x^3+1 其餘式為_____。

(2) 除以 x^5-1 其餘式為_____。 Ans : (1) $4x^2-8$ (2) x^4+5x^2-3x-5

(練習8) 求多項式 $(x^5+x^2+2x+3)^3$ 除以 (x^4+x+1) 所得的餘式為何？

Ans : $x^3+9x^2+27x+27$

(練習9) 以 $(x+1)^3$ 除 $f(x)$ 之餘式為 x^2-2x+3 ，則以 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 之餘式為_____。

Ans : $-4x+2$

(練習10) 以 $(x+1)^2$ 除 $x^{50}+1$ 之餘式為_____。 Ans : $-50x-48$

(練習11) x^{100} 除以 x^3+2x^2+2x+1 的餘式為_____。

[例題8] 設 $f(x)$ 為三次多項式， $f(x)$ 除以 x^2+x+1 得餘式 $5x-3$ ， $f(x)$ 除以 $x-1$ 餘 -4 ，試求多項式 $f(x)$ 。

(練習12) 設 $f(x)$ 為 x 的三次多項式，且 $f(0)=1, f(1)=9, f(2)=8, f(3)=4$ ，試求 $f(4)=?$

Ans : 3

(練習13) 設 $\deg f(x)=3$ ，若已知 $f(x)$ 除以 $x+1$ ， $x-1$ ， $(x+2)^2$ 分別得餘式 -8 ， -10 ， $x-2$ ，則請問：

(1) 以 $(x+1)(x-1)$ 除 $f(x)$ 所得的餘式為_____。

(2) $f(x)=?$ Ans : (1) $-x-9$ (2) $2x^3+5x^2-3x-14$

(練習14) 設 $\deg f(x)=4$ ，若 $f(x)$ 以 $(x-1)^3$ 除之餘式為 3，以 $x-2$ 除之餘式為 6，以

$x+2$ 除之餘式為 138，則 $f(x)=?$ Ans : $2x^4-7x^3+9x^2-5x+4$

(乙) 因式定理與一次因式檢驗定理

(1) 因式定理：設 $f(x)$ 為一多項式，則 $x-\alpha$ 為 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow f(\alpha)=0$ 。
證明：

推廣： $ax-b$ 為 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow f(\frac{b}{a})=0$

[例題9] 因式定理的應用：

(1) 試問下列何者為 $f(x)=4x^5+8x^4+7x^3-22x^2-2x+5$ 的因式？

(a) $x-1$ (b) $x+2$ (c) $2x-1$ (d) $x-2$

(2) 設 $f(x)=x^4-2x^3+4x^2+ax+3$ 之一因式為 $x-3$ ，求 a 之值。

[例題10] 若 $(x-1)^2 \mid ax^8-bx^7+1$ ，求常數 a, b 的值。 Ans : $a=7, b=8$

(練習15) 設 $f(x)=4x^4-11x^3+14x^2-10x+3$ ，則下列何者為 $f(x)$ 之因式？

(A) $x+1$ (B) $4x+3$ (C) $4x-3$ (D) $3x-2$ (E) $x-1$ Ans : (C)(E)

(練習16) 若 $f(x)=x^3-5x^2+mx+n$ 有因式 x^2+x-6 ，則 $m+n=?$ Ans : 24

(練習17) a, b, c 為整數， $0 < a < b$ ，若 $x-c$ 為 $x(x-a)(x-b)-17$ 的因式，則 $(a, b, c)=?$

Ans : (2, 18, 1)

(2)一次因式檢驗定理：

設 $f(x)=2x+3$ ， $g(x)=5x^2-x+7$ ， $h(x)=f(x) \cdot g(x)=10x^3+13x^2+11x+21$ ， $10x^3$ 是 $2x \cdot 5x^2$ 來的， 21 是 $3 \cdot 7$ 來的，因此觀察一次式 $2x+3|h(x)$ ，而 $2|10$ ， $3|21$ ，這個結果對於一般整係數的多項式也是成立，我們將它寫成下面的定理：

定理：設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ 為一個整係數 n 次多項式，

若整係數一次式 $ax-b$ 是 $f(x)$ 的因式，且 a, b 互質，則 $a|a_n$ 且 $b|a_0$ 。

證明：

注意：

(a)一次因式檢驗定理的逆敘述不成立。

例如： $f(x)=3x^3+5x^2+4x-2$ ， $f(-\frac{1}{3}) \neq 0$ 。

(b)由此定理，可知若一次式 $cx-d$ 中 c 不為 a_n 的因數或 d 不為 a_0 的因數的話，則 $cx-d$ 必不為 $f(x)$ 的因式。故只有滿足 $a|a_n$ 且 $b|a_0$ 的一次式 $ax-b$ 才有可能成為 $f(x)$ 的因式，因此我們只要從滿足 $a|a_n$ 且 $b|a_0$ 這些 $ax-b$ 去找一次因式就可以了。

例如：

求整係數 $f(x)=3x^3+5x^2+4x-2$ 的整係數一次因式。

根據一次因式檢驗定理，假設 $ax-b$ 為 $f(x)$ 的一次因式，則 $a|3$ 且 $b|2$ 。

我們將所有可能的 $ax-b$ 組合 $x+1, x-1, x+2, x-2, 3x+1, 3x-1, 3x+2, 3x-2$ ，再利用綜合除法檢驗看看那一個是 $f(x)$ 的因式 $\Rightarrow 3x-1$ 是 $f(x)$ 的因式。

[例題11] 求 $f(x)=2x^4+5x^3-x^2+5x-3$ 的一次因式。 Ans： $2x-1$ 與 $x+3$

[例題12] 設 a, b, c 為整數，且 $x^4+ax^3+bx^2+cx+9=0$ 之四根為相異之有理數，求 a, b, c 之值。
Ans : $a=0, b=-10, c=0$

[例題13] 設 $f(x)$ 為整係數多項式， a, b 為不同的整數，證明： $(a-b)|f(a)-f(b)$ 。

(練習18) 找出 $f(x)=6x^4-7x^3+6x^2-1$ 的所有整係數一次式。

Ans : $2x-1$ 、 $3x+1$

(練習19) 設 $f(x)=x^4-x^3+kx^2-2kx-2$ 為整係數多項式，且 $f(x)$ 有整係數一次因式，求 k 之值。 Ans : $0, -2$

(練習20) 設 $f(x)$ 為整係數多項式，求證：不存在三個不同的整數 a, b, c ，使得 $f(a)=b$ ， $f(b)=c$ ， $f(c)=a$ 。 [提示：利用例題 13 的結果]

(練習21) p, q 為整數，且方程式 $x^4-2x^3+px^2+qx+35=0$ 有四個相異有理數，求其最大之有理根_____。 Ans : 7

綜合練習

(1) 設 $f(x)=x^7-50x^5+6x^4+4x^3+25x^2-30x-11$ ，則 $f(7)=?$ (86 學科)

(2) 若 $f(x)=x^3-2x^2-x+5$ ，則多項式 $g(x)=f(f(x))$ 除以 $x-2$ 所得的餘式為多少？

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11 (92 學科能力測驗)

(3) 求以 $2x+1$ 除 x^5+2 所得的餘式。

(4) 若 $f(x)$ 以 x^2-1 除之餘 $3x+2$ ； $g(x)$ 以 x^2+2x-3 除之餘 $5x+2$ ，求 $(x+3)f(x)+(5x^2+1)g(x)$ 以 $(x-1)$ 除之所得的餘式。

- (5) 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為實係數多項式，以 x^2-3x+2 除 $f(x)$ 得餘式 $3x-4$ ，以 $x-1$ 除 $g(x)$ 得餘式 5 ，試求以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 的餘式。
- (6) 求以 $7x^5+x^4+x^3+x^2+x-6$ 之整係數一次因式。
- (7) 設 $f(x)$ 為一多項式，若 $(x+1) \cdot f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $5x+3$ ，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為_____。
- (8) 設多項式 $f(x)$ 分別除以 x^2+x-2 ， x^2-x-6 ， x^2+x-12 所得餘式依次為 $2x+3$ ， $3x+a$ ， $4x+b$ ，試求 a, b 之值。
- (9) 以 x^2+3x-4 除多項式 $f(x), g(x)$ 所得之餘式分別為 $3x+2, -4x+7$ ，則求
(a) $f(x)$ 之各項係數總和。(b) 以 $x+4$ 除 $(2x+3)f(x)-(x+5)g(x)$ 之餘式。
- (10) $\deg f(x) \geq 3$ ，以 $2x^2+x+3$ 除 $f(x)$ 餘式 $2x+5$ ，以 $x+2$ 除 $f(x)$ 餘式 19 ，則以 $(2x^2+x+3)(x+2)$ 除 $f(x)$ 的餘式為何？
- (11) 設 $\deg f(x) \geq 3$ ，且 $f(x)$ 以 $(x-1)^2$ 除之，餘 $3x+2$ ，以 $(x+2)^2$ 除之，餘 $5x-3$ ，則求(a) 以 $x-1$ 除之的餘式。(b) 以 $(x-1)(x+2)$ 除之的餘式。(c) 以 $(x-1)^2(x+2)$ 除之的餘式。
- (12) 求以 x^2+2x+3 除 $(x^2+3x+4)^4$ 所得的餘式。
- (13) 設 x^2+2x+3 為 $f(x)=3x^4+8x^3+ax^2+4x+b$ 之因式，則 $a=$ ____， $b=$ ____。
(可直接用長除法)
- (14) 設 $f(x)=x^4+5x^3+ax^2+bx+c$ 可被 $(x-1)^3$ 整除，則求 $(a, b, c)=$ ？
- (15) 已知 x^2-x+b 為 $6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ 之因式，則求 a, b 之值。

進階問題

- (16) 若 $\deg f(x)=4$ ，以 $(x-3)^3$ 除之餘 3 ，以 $(x-2)^2$ 除之餘 2 ，則求 $f(x)=$ ？
- (17) $f(x)$ 之各項係數和為 12 ，奇次項係數和為 18 ，且 $f(x)$ 除以 $x-3$ 之餘式為 -4 ，商為 $Q(x)$ ，則以 $Q(x)$ 除以 $x+1$ 之餘式為_____。
- (18) 實係數多項式 $f(x)$ 被 x^2+1, x^2+2 除，餘式分別為 $4x+4, 4x+8$ ，求
(a) $f(i)=$ ____。(b) $f(x)$ 被 $(x^2+1)(x^2+2)$ 除的餘式。
- (19) 求以 $(x-1)^2$ 除 $x^{10}+1$ 所得的餘式。

- (20) 設 $a > b > c > 0$ ， a, b, c 為整數，若 $x-c$ 為 $f(x)=x(x-a)(x-b)-2$ 的因式，則求 $a+b+c$ 之值。
- (21) 設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ 為一整係數 n 次多項式，若 $ax-b$ 是 $f(x)$ 之因式，且 a, b 互質，則 $a-b|f(1)$ ， $a+b|f(-1)$ 。試證之！
- (22) 設 $f(x)=x^{38}-2x^{36}+3x^{11}-x+2$
 (a) 求以 x^3-1 除 $f(x)$ 的餘式。
 (b) 求以 x^2+x+1 除 $f(x)$ 的餘式。
- (23) 以 x^4-x 除 $x^{87}-2x^{44}-x^3+3x^2+1$ 所得的餘式為何？
- (24) 歷史學家為了推敲大數學家歐幾里得的出生年份，發現在西元前 336 年時，流傳了一則有趣的故事：那一年的某一天，歐幾里得造了一個整係數的多項式，並興高采烈的跟旁人說「**我現在的年齡剛好是這個多項式的一個根。**」旁人爲了想知道歐幾里得的年齡，於是將 7 及一個比 7 大的整數代入歐幾里得的多項式，結果得到 77 及 85 的值。這時候歐幾里得笑著說：「**我的年齡有像代的數那麼小嗎？**」你能根據這些史料推測出歐幾里得出生的年份嗎？

綜合練習解答

(1)-25

(2)(E)[解法]：由餘式定理可知：

$$g(x) \text{ 除以 } x-2 \text{ 所得的餘式} = g(2) = f(f(2)) = f(2^3 - 2 \times 2^2 - 2 + 5) = f(3) = 11$$

(3) $\frac{63}{32}$

(4) 62

(5) 4

(6) $7x-6$

(7) $2x+5$

(8) $a=5$ ， $b=2$

[解法]：依題意可得 $f(x)=(x^2+x-2)Q_1(x)+2x+3=(x-1)(x+2)Q_1(x)+2x+3\dots\dots(1)$

$$f(x)=(x^2-x-6)Q_2(x)+3x+a=(x+2)(x-3)Q_2(x)+3x+a\dots\dots(2)$$

$$f(x)=(x^2+x-12)Q_3(x)+4x+b=(x-3)(x+4)Q_3(x)+4x+b\dots\dots(3)$$

由(1)、(2)式可得 $f(-2)=2 \times (-2) + 3 = 3 \times (-2) + a \Rightarrow a=5$

由(2)、(3)式可得 $f(3)=3 \times 3 + 5 = 4 \times 3 + b \Rightarrow b=2$

(9)(a) 5 (b) 27

(10) $4x^2+4x+11$

(11)(a)5 (b) $6x-1$ (c) $-x^2+5x+1$

(12)4

(13) $a=12$, $b=-3$

(14) $(-21,23,4)$

(15) $(a,b)=(-7,-1)$ 或 $(-12,-2)$

(16) $(x-3)^3(3x-5)+3$

(17)5

(18)(a) $4i+4$ (b) $-4x^2+4x$

(19) $9x+2$

(20)6

(21)略

(22)(a) $2x^2-x+1$ (b) $-3x$

(23) x^2+1 [提示：先求 $f(x)$ 除以 $x \cdot x^3-1$ 的餘式，再計算 $f(x)$ 除以 x^4-x 的餘式。]

(24)請看提示 [提示：設歐幾里得提及的多項式為 $f(x)$ ，而歐幾里得有 a 歲，且 $f(7)=77$ ， $f(b)=85$ ，且 $b>7$ ，由例題 13 可得 $b-7|f(b)-f(7) \Rightarrow b-7|8$ ，且 $7-a|f(7)-f(a)=77$ ， $b-a|f(b)-f(a)=85$ ，再根據這些條件，去求得 a 的值， $a=14$ ，所以歐幾里得出生的年份是西元前 323 年。]