第二十一單元　級數

(甲)級數的意義

曉華參加某銀行零存整付的專案，他從 1 月底開始，每個月存入銀行 1 萬元，月利率 1%複利計算，設 n 月底存入的 1 萬元，到隔年 1 月底的本利和為 a_n，a_n 的值列表如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n (萬元)	$1\times(1.01)^{12}$	$1\times(1.01)^{11}$	$1\times(1.01)^{10}$	$1\times(1.01)^{9}$	$1\times(1.01)^{8}$	$1\times(1.01)^{7}$	$1\times(1.01)^{6}$	$1\times(1.01)^{5}$	$1\times(1.01)^{4}$	$1\times(1.01)^{3}$	$1\times(1.01)^{2}$	$1\times(1.01)$

一年之後，曉華領出來的錢為 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{12}=1\times(1.01)^{12}+1\times(1.01)^{11}+\ldots+1\times(1.01)$萬元，因此我們不僅要關心數列$\{a_n\}$的規則，數列的和 $a_1+a_2+\ldots+a_{12}$ 也是我們要關心的對象。

(1)級數的意義與記號：

給定一個有限數列＜a_k＞：a_1、a_2、…、a_n，將這個數列各項相加起來成為 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$，我們稱 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ 為由數列＜a_k＞所定義的級數，簡稱**級數**。

當數列＜a_k＞是等差數列，則稱 $a_1+a_2+\ldots+a_n$ 為**等差級數**。

當數列＜a_k＞是等比數列，則稱 $a_1+a_2+\ldots+a_n$ 為**等比級數**。

例如：

(1°)數列＜$2k-1$＞：1,3,5,…,19 所定義的級數：$1+3+5+\cdots+19$(公差為 2 的等差級數)

(2°)數列＜$1\times(1.01)^k$＞：$1\times(1.01)$、$1\times(1.01)^2$、…、$1\times(1.01)^{12}$ 所定義的級數：

$1\times(1.01)+1\times(1.01)^2+\ldots+1\times(1.01)^{12}$(公比為 1.01 的等比級數)

(3°)數列＜k^2＞：1、4、9、…、100 所定義的級數：$1+4+9+\ldots+100$

(4°)無限數列$<(-\frac{1}{2})^{k-1}>$所定義的級數為 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$

(a)有限級數：有限數列所定義的級數稱為**有限級數**。

數列：$\langle a_n\rangle_{n=1}^{k}=<a_1,a_2,\ldots\ldots,a_k>$

級數：$a_1+a_2+\ldots+a_k=\sum\limits_{l=1}^{k}a_l$　($\sum$ 讀作 **sigma**)

(b)無窮級數：由無限數列所定義的級數稱為**無窮級數**。

數列：$\langle a_n\rangle_{n=1}^{\infty}=<a_1,a_2,\ldots\ldots,a_k,\ldots\ldots>$

級數：$a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots\ldots=\sum\limits_{l=1}^{\infty}a_l$

(2) $\sum$ 這個符號：

(a) $\sum$ 這個符號表示級數：

用接下來我們舉例來說明如何將級數用符號 Σ 來表示：

(1) 11＋14＋17＋⋯＋305．(等差級數)

(2) $3+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4}+\ldots\ldots+\dfrac{3}{2^{12}}$ ．(等比級數)

將級數(1)(2)表示成 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 的過程，首先將數列的一般項 a_k 表示成 k 的式子，再求出項數(n 的值)。

等差級數(1)：

$a_1=11$、$a_2=14$、…、$a_n=305$ 是一個首項為 11，公差為 3 的等差數列，

求一般項 a_k：$a_k=11+(k-1)\times3=3k+8$

求項數 n：　$a_n=11+(n-1)\times3=305$，得到 $n=99$

因此級數 11＋14＋17＋⋯＋305 可表為 $\sum\limits_{k=1}^{99}(3k+8)$ 。

等比級數(2)：

$a_1=3$、$a_2=\dfrac{3}{2}$、$a_3=\dfrac{3}{4}$、…、$a_n=\dfrac{3}{2^{12}}$是一個首項 3，公比為$\dfrac{1}{2}$的等比數列，

求一般項 a_k：$a_k=3\cdot(\dfrac{1}{2})^{k-1}$

求項數 n：　$a_n=3\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}=\dfrac{3}{2^{12}}$ 得到 $n=13$

因此級數 $3+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4}+\ldots\ldots+\dfrac{3}{2^{12}}$ 可表為 $\sum\limits_{k=1}^{13}3\cdot(\dfrac{1}{2})^{k-1}$

級數除了等差、等比級數之外，還有許多不同形式的級數，而上面所介紹的步驟，同樣可以將一般的級數用符號 Σ 來表示：

[例題1] 將下列的級數用符號 Σ 來表示：

(1) $1^2+2^2+\ldots+n^2$ (從 1 開始連續 n 個正整數的平方和)

(2) $\underbrace{5+5+\ldots.+5}_{100\text{個}}$ (100 個 5 相加)

(3) $3\times5+6\times7+9\times9+\ldots+57\times41$ (第 k 項為 $3k(2k+3)$)

[分析]：

要將這些級數表為 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 的形式，必須要將 a_k 用 k 的式子來表示，並且找出一共有多少項。

[解法]：

(1) $a_1=1^2$、$a_2=2^2$、…、$a_n=n^2$，一般項 $a_k=k^2$，共有 n 項

所以級數 $1^2+2^2+\ldots+n^2=\sum_{k=1}^{n} a_k$

(2)$a_1=5$、$a_2=5$、…$a_n=5$，一般項 $a_k=5$，共有 100 項

所以級數 $\underbrace{5+5+....+5}_{100個}=\sum_{k=1}^{100} 5$

(3)$a_1=3\times5$、$a_2=6\times7$、….、$a_n=57\times41$，

數列的每一項可以視為兩個數字相乘，前一個數字：3、6、9、…、57 為首項 3 公差為 3 的等差數列，一般項為 $3k$；而後一個數字：5、7、9、…41 為首項 5 公差為 2 的等差數列

一般項為 $2k+3$。因此一般項 $a_k=3k(2k+3)$，第 n 項 $a_n=3n(2n+3)=57\times41$，

得到 $n=19$。所以級數 $3\times5+6\times7+9\times9+\ldots+57\times41=\sum_{k=1}^{19} 3k(2k+3)$。

(練習1)將下列級數用符號 Σ 來表示：

(1) $b_3+b_4+b_5+\ldots b_{78}$
(2) $3\cdot2+5\cdot2^2+7\cdot2^3+\ldots+(2k+1)\cdot2^k+\ldots+199\cdot2^{99}$
(3) $4c+5c+6c+\ldots+30c$
(4) $(c-1)+(c-3)+\ldots[c-(2n-1)]$
(5) $d^1+d^2+d^3+\ldots d^{19}$
(6) $1\times2+2\times3+\ldots+n(n+1)$
(7) $\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{7\times7}+\ldots+\frac{1}{79\times43}$
(8) $\underbrace{k+k+....+k}_{n個}$

Ans：(1) $\sum_{k=3}^{78} b_k$ (2) $\sum_{k=1}^{99}(2k+1)\cdot2^k$ (3) $\sum_{k=1}^{27}(k+3)\cdot c$ (4) $\sum_{k=1}^{n}[c-(2k-1)]$

(5) $\sum_{i=1}^{19} d^i$ (6) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ (7) $\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{(4n-1)\cdot(2n+3)}$ (8) $\sum_{i=1}^{n} k$

(練習2)將下列各式寫成級數的形式(用加號連接的形式)：

(1) $\sum_{k=1}^{10}(3k-1)$ (2) $\sum_{i=2}^{6}(2i-1)\cdot2^i$

Ans：

(1) $\sum_{k=1}^{10}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+\ldots+(3\times10-1)$。

(2) $\sum_{i=2}^{6}(2i-1)\cdot2^i$

$=(2\times2-1)\cdot2^2+(2\times3-1)\cdot2^3+(2\times4-1)\cdot2^4+(2\times5-1)\cdot2^5+(2\times6-1)\cdot2^6$。

結論：

Σ用法的要點：

由前面的例子，我們可觀察出些要點：

- 注意各項中那些符號是不變的，那些符號隨著項數作有規律的改變，請注意下標、係數、指數、一般項等等。
- 注意哪些隨著項數改變的項是從多少到多少？
- 假設式中第 n 項 a_n 已經寫明，那只要把第 n 項改寫成第 k 項，寫成 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 。

(2) 符號Σ的運算性質：

(1°) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$ ，

(2°) $\sum_{k=1}^{n}c\cdot a_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$ （c 為常數)

(3°) $\sum_{k=1}^{n}c=n\cdot c$ （c 為常數)

[證明]：

(1°) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$

$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\ldots+(a_n+b_n)=(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)$ 。

$=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2°) $\sum_{k=1}^{n}c\cdot a_k$

$=ca_1+ca_2+ca_3+\ldots+ca_n$ $=c(a_1+a_2+a_3+\ldots a_n)$ $=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$ 。

(3°) $\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+....+c}_{n個}=nc$ 。

注意事項：

• $\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k\neq\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k$ • $\sum_{k=1}^{n}2\neq 2$

• $a_1+a_2+\ldots a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{l=1}^{n}a_l$ ，不可寫成 $\sum_{k=1}^{n}a_n$ 。

(練習3)設 $\sum_{k=2}^{4}(ak+b)=93$ ， $\sum_{k=0}^{3}(ak+b)=70$ ，則求 $a-2b=$？ Ans：1

[例題2] 設有一數列$\langle a_n \rangle$之前 n 項和為 $3n^2+4$，則 $a_{10}=$？$a_k=$？

Ans：$a_{10}=57$，$a_k=\begin{cases} 7, k=1 \\ 6k-3, k\geq 2 \end{cases}$

(練習4)試以Σ表示出級數$\frac{5}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{-1}{3^5}+\ldots$(至第 n 項)。Ans：$\sum_{k=1}^{n}\frac{-2k+7}{3^{k+1}}$

(練習5)若一數列$\langle a_n \rangle$滿足 $a_1+2a_2+\ldots+na_n=n^2+3n+1$，則求 $a_n=$？

Ans：$a_n=\begin{cases} 5, n=1 \\ \frac{2n+2}{n}, n\geq 2 \end{cases}$

(乙)等差、等比級數

(1)等差數列、級數：

設$\langle a_n \rangle$為以 d 為公差之等差數列：

第 k 項 $a_k=a_1+(k-1)d$　，$a_m=a_n+(m-n)d$

首 n 項和 $S_n=\frac{項數}{2}$ (首項+末項)$=\frac{n}{2}\times(a_1+a_1+(n-1)d)$

(2)等比數列、級數：

設$\langle a_n \rangle$為以 r 為公比之等比數列：

第 k 項 $a_k=a_1\times r^{k-1}$

首 n 項和 $S_n=\begin{cases} na & , r=1 \\ \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} & , r\neq 1 \end{cases}$

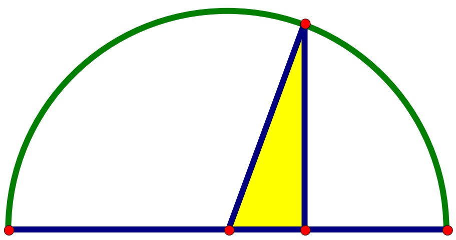
(3)等差、等比中項

①設 a,c,b 成等差，則 $c=\frac{a+b}{2}$ 稱為 a,b 的等差中項(又稱算術平均數)。

設 a,c,b 成等比，則 $c^2=ab$ 稱為 a,b 的等比中項(又稱幾何平均數)。

②設 a,b 為兩正數，則 a,b 的算術平均數大於等於幾何平均數。

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$　　等號成立$\Leftrightarrow a=b$



[例題3] 等比級數：$a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}$ 的公式

設 $S_n=a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\ldots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}$

$$S_n=a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1} \quad ①$$

$$-)\ rS_n=\quad a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}+a_1r^n \quad ②$$

$$(1-r)S_n=a_1 \qquad -a_1r^n$$

所以 $(1-r)S_n=a_1-a_1r^n=a_1(1-r^n)$． ③

兩式相減之後，中間各項都被消去，只留下前後兩項相減。

(1)如果 $r=1$，由①式知 $S_n=n\cdot a_1$．

(2)如果 $r\neq1$，由③式知 $S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$．

[例題4] 設 $\langle a_n\rangle$ 為一等比數列，且每一項均為實數，若 $S_{10}=2$，$S_{30}=14$，求 $S_{60}=$？
Ans：126

[例題5] 有兩等差數列 $\langle a_n\rangle=\langle 3,8,13,18,\ldots,373\rangle$ 共有 m 項，$\langle b_n\rangle=\langle 2,9,16,23,\ldots,373\rangle$ 共有 l 項，由這兩個數列的所有共同項依序排列，得另一數列 $\langle c_n\rangle$ 共有 k 項，則 (1)c_1 之值 (2)求 $\sum_{i=1}^{k}c_i=$？ Ans：(1)23 (2)2178

(練習6) 設有一等差數列 $\langle a_1、a_2、\ldots、a_{99}\rangle$，已知 $a_1+a_{99}=8$，
請問(1)$a_{50}=$？ (2)$a_{11}+a_{89}=$？ (3)此數列的級數和 $S_{99}=$？
Ans：(1)4 (2)8 (3) 396

(練習7) 有一個 101 項的等差數列 $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$，其和為 0，且 $a_{71}=71$。
問下選項哪些正確？
(A)$a_1+a_{101}>0$(B)$a_2+a_{100}<0$(C)$a_3+a_{99}=0$(D)$a_{51}=51$(E)$a_1<0$。
Ans：(C)(E)

(練習8) 試求下列等比級數的和：
(1)$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+(\dfrac{1}{2})^{n-1}$．

$(2) 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots+(\frac{-1}{4})^{n-1}$。

Ans：(1) $2\cdot〔1-(\frac{1}{2})^n〕$ (2) $\frac{4}{5}〔1-(\frac{-1}{4})^n〕$

(練習9) 二等差數列之首 n 項和之比為$(3n+1):(7n-11)$，求此二數列第 7 項之比。
Ans：1：2

(練習10) 一等差數列前 n 項和為 9，前 $2n$ 項和為 12，則前 $3n$ 項和=？
Ans：9

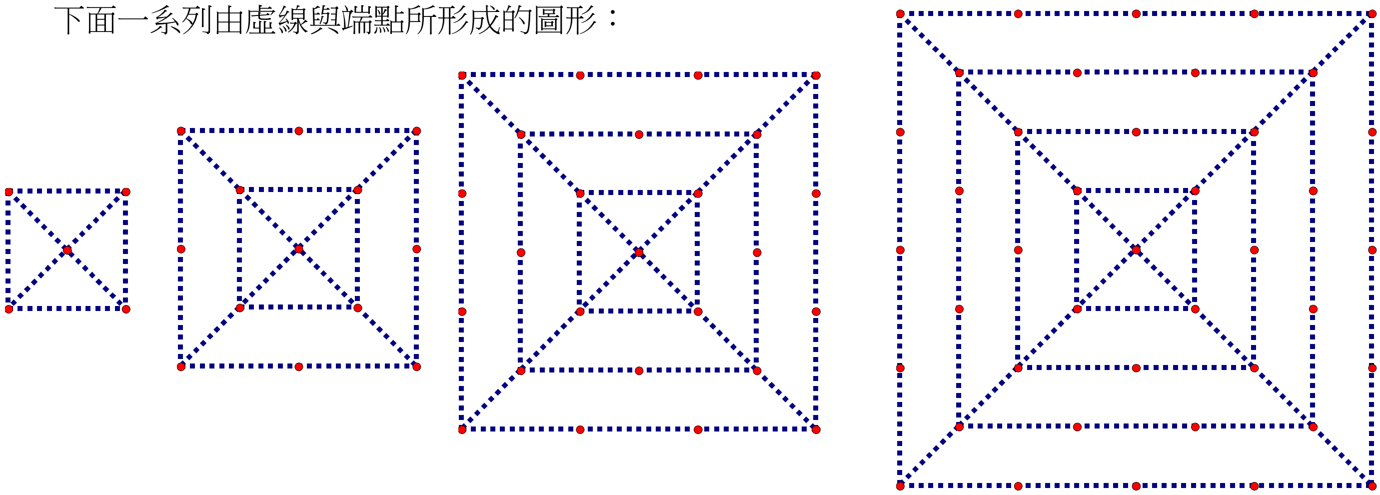
(練習11) 有一等比數列$<a_n>$，前 n 項的和為 S_n，如果 $S_n=24$，$S_{2n}=30$，則求 $S_{3n}=$？
Ans：$\frac{63}{2}$

(練習12) 若三數成等比數列，其和為 39，若各數依次減去 1,2,12 之後，則成等差數列，求此三數。 Ans：4,10,25 或 25,10,4

(練習13) 設 x,y 為正實數，且 $xy=6$，則 $3x+2y$ 之最小值為__________。Ans：12

(丙)有限級數的求和

下面一系列由虛線與端點所形成的圖形：



第 1 個圖形　第 2 個圖形　第 3 個圖形　第 4 個圖形

根據上一節的討論，可以得知第 n 個圖形點的總數 $a_n=2n^2+2n+1$。
若我們想求前 20 個圖形所有點的個數和，即求級數

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{20}=\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}(2k^2+2k+1)$的和，除了直接計算之外，根據Σ的運算性質：$\sum_{k=1}^{20}(2k^2+2k+1)=2\sum_{k=1}^{20}k^2+2\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}1$，因此若是可以將級數$\sum_{k=1}^{n}k$、$\sum_{k=1}^{n}k^2$的和

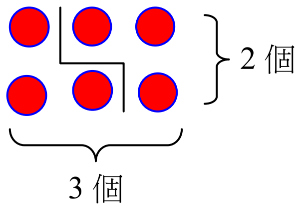
用項數 n 來表示，那麼級數 $\sum_{k=1}^{20}(2k^2+2k+1)$ 的和就可以很容易求出來。

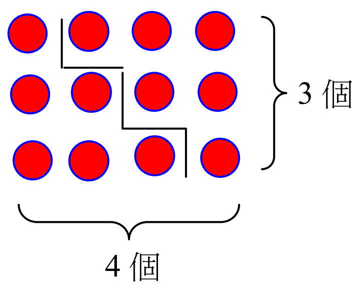
(1)級數 $\sum_{k=1}^{n}k$ 、 $\sum_{k=1}^{n}k^2$ 與 $\sum_{k=1}^{n}k^3$

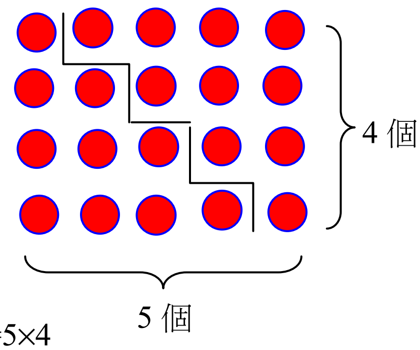
接下來我們分別來介紹幾個有限級數的和：

◆ 級數 $\sum_{k=1}^{n}k$ 的和：

令 $T_n=\sum_{k=1}^{n}k$ ，我們考慮以下幾個圖形：







觀察這些圖形，可以歸納出：$2T_2=3\times2$，$2T_3=4\times3$，$2T_4=5\times4$

故 $T_2=\dfrac{3\times2}{2}$ ，$T_3=\dfrac{4\times3}{2}$ ，$T_4=\dfrac{5\times4}{2}$

我們可以猜測：「對於任意的自然數 n，$T_n=\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{(n+1)n}{2}$都成立。」

接下來，利用數學歸納法來驗證上述的臆測：

令 $P(n)$ 代表等式：$1+2+3+\ldots+n=\dfrac{(n+1)n}{2}$

(1)驗算 $n=1$ 時，$1=\dfrac{(1+1)\times1}{2}$，故 $P(1)$成立。

(2)若 $n=k$ (k 為自然數) 時，$P(k)$成立，即 $1+2+3+\ldots+k=\dfrac{(k+1)k}{2}$ 。

則當 $n=k+1$ 時，

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)k}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)k+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1+1)(k+1)}{2}$$

所以 $1+2+3+\ldots+(k+1)=\dfrac{(k+1+1)(k+1)}{2}$，故 $n=k+1$ 時，$P(k+1)$成立。

由(1)，(2)兩個步驟根據數學歸納法得證結論：$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\ldots+n=\dfrac{(n+1)n}{2}$ 。

◆ 級數 $\sum_{k=1}^{n}k^2$ 的和：

令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+\ldots+n^2$，$T_n=1+2+3+\ldots+n$

由前面的討論，可知 T_n 為 n 的一次式，我們猜想 S_n 可能為 n 的二次式，而$\dfrac{S_n}{T_n}$可能為

n 的一次式。接下來我們列表觀察$\frac{S_n}{T_n}$的值：

n	1	2	3	4	…..	n
S_n	1^2	1^2+2^2	$1^2+2^2+3^2$	$1^2+2^2+3^2+4^2$	…..	$1^2+2^2+\ldots+n^2$
T_n	1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	…..	$1+2+3+\ldots+n$
觀察$\frac{S_n}{T_n}$的規則	$1=\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$	$\frac{30}{10}=\frac{9}{3}$	…..	$\frac{2n+1}{3}$ (猜測)

觀察上表中$\frac{S_n}{T_n}$的規律，我們可以猜測$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+1}{3}$，因為 $T_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

所以我們猜測 $S_n=\frac{2n+1}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$對於所有的自然數 n 都成立，接下來的例題中，利用數學歸納法來證明這個臆測是正確的。

假設 $P(n)$代表等式：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$．

(1)驗算：$n=1$ 時，$1^2=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3$，所以 $P(1)$成立．

(2)若設 $n=k$ 時，$P(k)$：$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ 成立，

則當 $n=k+1$ 時，

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}k+1)(k+2)(2k+3)\text{．}$$

所以 $1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$

故 $n=k+1$ 時，$P(k+1)$亦成立．

由(1)，(2)兩個步驟根據數學歸納法得證結論：

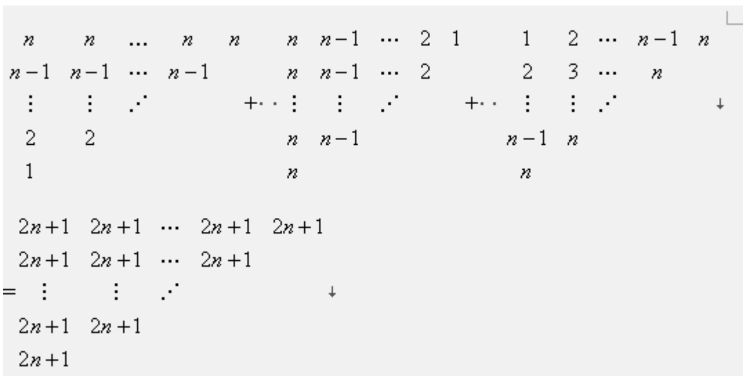
等式 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 對所有的自然數 n 都會成立．

課內討論：

根據右圖，你可以得出什麼式子？

根據這個式子，你可以求出

級數 $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ 的和嗎？



◆ 求級數$\sum_{k=1}^{n}k^3$的和

令 $U_n=\sum_{k=1}^{n}k^3$，計算 U_1 , U_2 , U_3，觀察歸納 U_n 的規則，試猜測 U_n 的通式。

列表觀察歸納 U_m(m 為自然數)的值：

n	1	2	3	……	n
U_n	$1^3=1$	$1^3+2^3=9$	$1^3+2^3+3^3=36$	……	$1^3+2^3+\ldots+n^3$
觀察 U_n 的規則	$1^3=1^2$	1^3+2^3 $=(1+2)^2$	$1^3+2^3+3^3$ $=(1+2+3)^2$	…..	$1^3+2^3+\ldots+n^3$ $=(1+2\ldots+n)^2$ (猜測)

觀察上表，可以得知

$U_1=1^2$

$U_2=3^2=(1+2)^2$

$U_3=6^2=(1+2+3)^2$

每一項都是完全平方數，而且底數分別是 1、1+2、1+2+3，故

我們猜測 $U_n=\sum_{k=1}^{n}k^3=(1+2\ldots+n)^2=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$，對於所有自然數 n 都成立。

(練習14)利用數學歸納法證明：「$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$，對於所有自然數 n 都成立」。

(練習15)試求下列級數的和：

(1)$1^2+2^2+3^2+\ldots+20^2$

(2)$11^3+12^3+\ldots+20^3$

Ans：(1)2870 (2)41075

◆ 利用**遞迴法**求$\sum_{k=1}^{n}k^p$的和：

[例題6] 設 $b_k=(1+k)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$，

(1)試求級數$\sum_{k=1}^{n}b_k$的和(用 n 表示)。

(2)利用(1)的結果推導出 $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ 的公式。

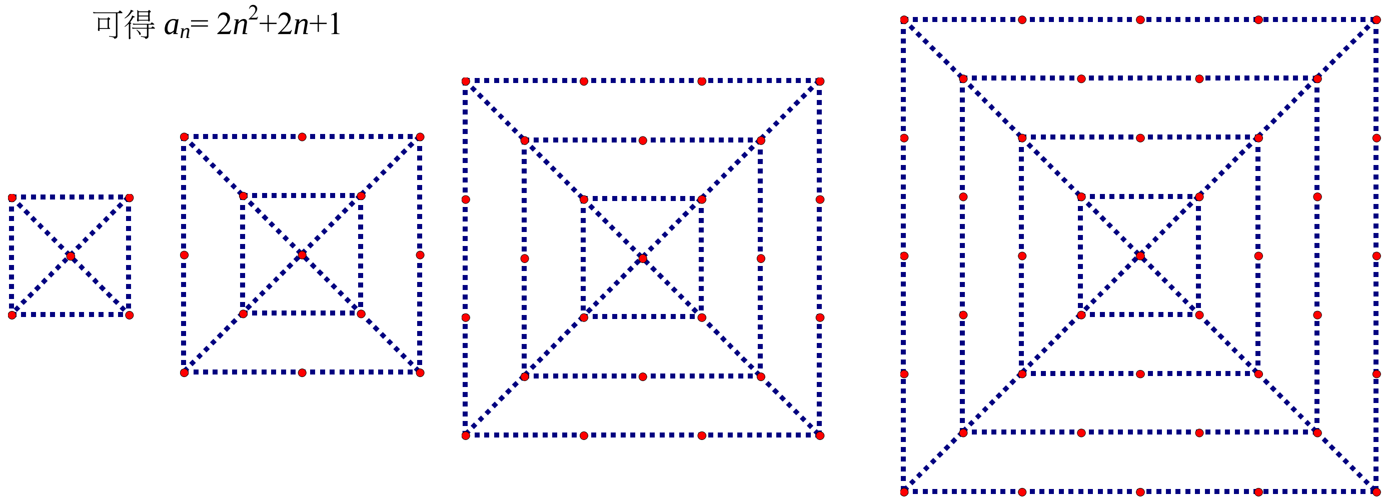
(練習16) 考慮$(1+x)^3-x^3=3x^2+3x+1$.....(*)
令 $x=1,2,\ldots,n$ 代入(*)，推導 $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ 的公式。

(練習17) 利用遞迴法推導出$\sum_{k=1}^{n}k^4$ 。

(2)求簡單有限級數的和

根據前面的討論與驗證，已經將級數$\sum_{k=1}^{n}k$、$\sum_{k=1}^{n}k^2$、$\sum_{k=1}^{n}k^3$的和用項數 n 來表示，利用Σ的性質，我們就可以將一些簡單的級數之和用項數來表示：

[例題7] 如下圖，設第 n 個圖形中點總數為 a_n 個，根據 1−1 節的討論，
可得 $a_n=2n^2+2n+1$



第 1 個圖形　　第 2 個圖形　　第 3 個圖形　　第 4 個圖形

(1)試求級數$\sum_{k=1}^{20}a_k$ 的和。

(2)試求級數$\sum_{k=1}^{n}a_k$ 的和(用 n 來表示)。

[解法]：

(1) $\sum_{k=1}^{20}a_k$

$=\sum_{k=1}^{20}(2k^2+2k+1)=2\sum_{k=1}^{20}k^2+2\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}1$

$=2\times\frac{20(20+1)(40+1)}{6}+2\times\frac{(20+1)\times 20}{2}+20\times 1=6180$。

(2) $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}3k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=2\cdot\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n\times(n+1)}{2}+1\times n=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{3}+n(n+1)+n$

$=\frac{n(n+1)(2n+4)+3n}{3}=\frac{2n^3+6n^2+7n}{3}$。

[例題8] (1)用Σ表示 $1\times3+3\times5+5\times7+\ldots+29\times31=$？
(2)求(1)的和。
(3)求 $1\times3+3\times5+5\times7+\ldots+$(第 n 項)=？
Ans：(1) $\sum_{k=1}^{15}(2k-1)(2k+1)$ (2)4945 (3)$\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$

[例題9] 求級數 $1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots(1+2+\ldots+n)=$？ Ans：$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

(練習18)試求 $\sum_{k=5}^{n}k(k+3)=$？ Ans：$\frac{n(n+1)(n+5)}{3}-60$

(練習19)級數 $1\times2+2\times5+3\times8+\ldots+$第 n 項
(1)用Σ表示此級數。(2)求此級數的和。Ans：(1) $\sum_{k=1}^{n}k(3k-1)$ (2)$n^2(n+1)$

(練習20)求 $1+(1+3)+(1+3+5)+\ldots(1+3+5+\ldots+2n-1)=$？ Ans：$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

求級數和除了運用符號Σ的性質與 $\sum_{k=1}^{n}k$、$\sum_{k=1}^{n}k^2$ 的公式外，還有其它的方法，我們舉例來說明：

[例題10] 試求下列級數的和：
(1) $\sum_{i=1}^{99}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\ldots+\frac{1}{99\times100}$
(2) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}$
[解法]：
觀察一般項 $\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$ ，

(1) $\sum_{i=1}^{99}\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^{99}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})$

$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots+(\frac{1}{98}-\frac{1}{99})+(\frac{1}{99}-\frac{1}{100})=\frac{1}{1}-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$。

(2) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$。

上例中一般項$\frac{1}{i(i+1)}$化成$\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$，在求級數和$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$的過程中，$i=1,2,\ldots,n$ 逐次代入後，只剩下$\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}$，其餘的項都正負相消了，因此這樣的想法有助於簡化求級數和的過程。

(練習21)試求級數$\sum_{i=1}^{200}\frac{3}{i(i+1)}$的和。

(練習22)(1)試求$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots\ldots+\frac{1}{30\cdot31}=$？

(2)$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$？

Ans：(1)$\frac{30}{31}$ (2) $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$

(練習23)$1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\ldots+n\cdot2^{n-1}=$？ Ans：$(n-1)\cdot2^n+1$

綜合練習

(1) 將下列級數用Σ來表示：

(a)$-3+1+5+9+\ldots+81$

(b)$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots+\frac{1}{3^{11}}$

(c) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{1}{k}+\quad+\frac{1}{99}$

(d) $1\times2+2\times3+\ldots+n(n+1)$

(e) $\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{7\times7}+\ldots.+\frac{1}{(4n-1)(2n+3)}$

(f) $\frac{5}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{-1}{3^5}+\ldots$ (至第 n 項)。

(2) 下列有關Σ這個符號的用法，哪些是正確的？

(A)$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=2}^{11}a_{k-1}$ (B) $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_n$ (C) $\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{i=1}^{10}a_i$

(D) $b_3+b_4+b_5+\ldots b_{78}=\sum_{k=1}^{78}b_k$ (E) $\underbrace{5+5+....+5}_{n個}=\sum_{i=1}^{n}k$

(3) 已知一等比數列的公比為 $\frac{1}{2}$ ，第 8 項為 $\frac{2}{3}$ ，試求此 8 項之和。

(4) 設 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列，首項為-200，公差為 7

(a)若 $\sum_{k=1}^{n}a_k$ 之值最小，則 $n=$？(b)承上題，此時 $\sum_{k=1}^{n}a_k=$？

(5) 設有一數列 $\langle a_n\rangle$ 之前 n 項和為 $3n^2+4$，試求

(a)第 10 項 a_{10} 的值。 (b)一般項 a_k 的通式。

(6) 求下列級數的和：

(a) $\sum_{k=1}^{20}(3k-4)$ (b) $\sum_{k=1}^{10}(\frac{1}{2})^k$ (c) $\sum_{k=1}^{8}(3k+1)(k-2)$

(7) 考慮一個 n 層三角垛，將每一層的圓圈數目呈現如下圖：

(a)第 n 層有幾個圓圈？ (b)由第 1 層至第 n 層共有幾個圓圈？

(8) 試求 $69\times71+68\times72+67\times73+\ldots+2\times138+1\times139$ 之值。

(9) 級數 $1\times1\times4+2\times3\times7+3\times5\times10+\ldots+10\times19\times31$ 具有規則性，
(a)將此級數以Σ表示。(b)求此級數的和。

(10) 級數 $1\cdot2+2\cdot5+3\cdot8+4\cdot11+\ldots+$ 第 n 項，則第 n 項=__________，其和=________。

(11) 設 $a_n=1+2+\ldots+n$，則 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=$？

(12) 試求下列級數和
(a) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+$ 至第 n 項
(b) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}=$？

進階問題

(13) 有兩個等差數列$\{a_n\}$與$\{b_n\}$，S_n，T_n分別表示前 n 項之和，若 $S_n：T_n=(7n+1)：(4n+27)$，試求 $a_{11}：b_{11}$ 之比值。

(14) 求下列級數和：
(a)9+99+999+…+(第 n 項)
(b)0.9+0.99+0.999+…(第 n 項)
(c)7.7+77.77+777.777+…(第 n 項)

(15) 自然數由小而大排列，去掉 2 的倍數、3 的倍數、5 的倍數得 1,7,11,13,…
(a)此數列中小於 60 之數有幾個？
(b)求第 1000 項的值。
(c)求 S_{1000}=？

(16) $\frac{3}{1^2}+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+\ldots+\frac{2n+1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}=$？

(17) 設數列$\langle a_n\rangle$，$a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$，則 $\sum_{k=1}^{120}\frac{1}{a_k}=$？

(18) 求級數 $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=$？ (用 n 表示)
(註：1！=1，2！=1×2，3！=1×2×3，…,n！=1×2×3×…×n)

(19) 試求 $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=$？

(20) $1,3,5,\ldots,(2n-1)$中任選二個數相乘，試求這些乘積的和。

綜合練習解答

(1) (a) $\sum_{i=1}^{22}(4i-7)$ (b) $\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{3^k}$ (c) $\sum_{k=1}^{99}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (d) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

(e) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)(2k+3)}$ (f) $\sum_{k=1}^{n}\frac{-2k+7}{3^{k+1}}$

(2) (A)(C)

(3) 170

(4) (a)29 (b)-2958

(5) (a)57 (b) $a_1=7$，$a_k=6k-3(k\geq 2)$

(6) (a)550 (b)$1-(\frac{1}{2})^{10}$ (c)416

(7) (a)$\frac{1}{2}n(n+1)$ (b)$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

[解法]：

(a)設第 n 層的圓圈有 a_n 個，$a_n=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$。

(b)由第 1 層至第 n 層圓圈數

$=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$

$=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k)=\frac{1}{2}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2})$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

(8) 226205

(9) (a)$\sum_{k=1}^{10}k(2k-1)(3k+1)$ (b)17710

(10) $n(3n-1)$，$n^2(n+1)$

(11) $2(1-\frac{1}{n+1})$[提示：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$]

(12) (a)$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$ (b)$\frac{1}{2}(\frac{2}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$

(13) 4：3

[提示：由$\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+1}{4n+27}$ 可得$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2b_1+(n-1)d_2}=\frac{7n+1}{4n+27}\Rightarrow\frac{a_1+\frac{n-1}{2}d_1}{b_1+\frac{n-1}{2}d_2}=\frac{7n+1}{4n+27}\Rightarrow$

$\frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{a_1+10d_1}{b_1+10d_2}=\frac{7\times 21+1}{4\times 21+27}=\frac{4}{3}$。令一種想法：$n$ 項和=中間項×項數$\Rightarrow\frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{a_{11}\times 21}{b_{11}\times 21}=\frac{S_{21}}{T_{21}}$]

(14) (a)$\frac{10}{9}(10^n-1)-n$ (b)$n-\frac{1}{9}(1-\frac{1}{10^n})$ (c)$\frac{7}{81}(10^{n+1}-11+\frac{1}{10^n})$

(15) (a)16 (b)3749 (c)1875000

[提示：因為 2,3,5 的最小公倍數為 30，所以先考慮 1~30 的數中，去掉 2,3,5 的倍數，結果只剩下 1,7,11,13,17,19,23,29，而這些數每次加 30 就是自然數中去掉 2,3,5 的倍數後，所剩下的數。]

(16) $\dfrac{6n}{n+1}$

(17) 10

(18) $1-\dfrac{1}{(n+1)!}$ [提示：$\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$]

(19) $\dfrac{2575}{10302}$ (提示：$\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}]$)

(20) $\dfrac{n(n-1)(3n^2-n-1)}{6}$