第三十四單元　二項式定理

(甲)二項式定理

(1)從一個例子談起：

(a)觀察二項和的平方：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，

三項和的平方：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

如過要推廣到二項和的 n 次方$(a+b)^n$，是否其展開式有一般的公式呢？

首先我們觀察 $n=4$，$(a+b)^4$ 的不同類項有 a^4、a^3b、a^2b^2、ab^3、b^4 五項，即一般項可以寫成 $a^{4-k}b^k$，$k=0,1,2,3,4$，問題是它們的係數是多少呢？先考慮 a^3b 項的係數要如何計算？

因爲$(a+b)^4=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$，要乘出 a^3b 項，4 個$(a+b)$項的相乘式中，有三項選 a，一項選 b，相乘情形如下表所示：

	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$
第 1,2,3 括號選 a，第 4 括號選 b	a	a	a	b
第 1,2,4 括號選 a，第 3 括號選 b	a	a	b	a
第 1,3,4 括號選 a，第 2 括號選 b	a	b	a	a
第 2,3,4 括號選 a，第 1 括號選 b	b	a	a	a

以上四種情形，均能乘出 a^3b，所以合併之後，展開式中 a^3b 的係數爲 4

根據上表，我們可以看出 a^3b 項的係數是由 3 個 a,1 個 b 作不儘相異物的排列數

$\dfrac{4!}{3!1!}$，或是 4 個括號選 3 個括號拿 a 出來乘的組合數 $C^4_3=C^4_1=4$。

同理，我們可以求其他不同類項的係數：

a^2b^2 項的係數是 2 個 a,2 個 b 作不儘相異物的排列數$\dfrac{4!}{2!2!}=C^4_2$。

ab^3 項的係數是 1 個 a,3 個 b 作不儘相異物的排列數$\dfrac{4!}{1!3!}=C^4_3$。

b^4 項的係數是 4 個 b 的排列數 $1=C^4_4$。

a^4 項的係數是 4 個 a 的排列數 $1=C^4_0$。

所以$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$。以組合的符號來寫，可得

$(a+b)^4=C^4_0a^4+C^4_1a^3b+C^4_2a^2b^2+C^4_3ab^3+C^4_4b^4$。

(b)由$(a+b)^4$ 推$(a+b)^5$

$(a+b)^5=(a+b)^4(a+b)$

$=(C^4_0a^4+C^4_1a^3b+C^4_2a^2b^2+C^4_3ab^3+C^4_4b^4)(a+b)$

$=(C^4_0a^5+C^4_1a^4b+C^4_2a^3b^2+C^4_3a^2b^3+C^4_4ab^4)+(C^4_0a^4b+C^4_1a^3b^2+C^4_2a^2b^3+C^4_3ab^4+C^4_4b^5)$

$=C^4_0a^5+(C^4_1+C^4_0)a^4b+(C^4_2+C^4_1)a^3b^2+(C^4_3+C^4_2)a^2b^3+(C^4_4+C^4_3)ab^4+C^4_4b^5$

$=C^5_0a^5+C^5_1a^4b+C^5_2a^3b^2+C^5_3a^2b^3+C^5_4ab^4+C^5_5b^5$。

最後一個式子，用了巴斯卡定理：$C^n{}_m=C^{n-1}{}_m+C^{n-1}{}_{m-1}$。

(2)二項式定理：

$$\boldsymbol{(a+b)^n}=C_0^n\,\boldsymbol{a^nb^0}+C_1^n\,\boldsymbol{a^{n-1}b}+\ldots+C_k^n\,\boldsymbol{a^{n-k}b^k}+\ldots+C_n^n\,\boldsymbol{b^n}=\sum_{i=1}^{n}C_i^n a^{n-i}b^i\ 。$$

[證明]：

(1)當 $n=1$ 時，$(a+b)^1=C^1{}_0a+C^1{}_1b$。等式顯然成立。

(2)若設 $n=k$ 時，等式成立，即$(a+b)^k=\sum_{i=1}^{k}C_i^k a^{k-i}b^i$ 。

則當 $n=k+1$ 時，

$(a+b)^{k+1}$

$=(a+b)^k(a+b)$

$=(C^k{}_0a^kb^0+C^k{}_1a^{k-1}b+\ldots+C^k{}_ia^{k-i}b^i+\ldots+C^k{}_kb^k)(a+b)$

$=(C^k{}_0a^{k+1}b^0+C^k{}_1a^kb+\ldots+C^k{}_ia^{k-i+1}b^i+\ldots+C^k{}_kab^k)$

$+(C^k{}_0a^kb+C^k{}_1a^{k-1}b^2+\ldots+C^k{}_ia^{k-i}b^{i+1}+\ldots+C^k{}_kb^{k+1})$

$=C^k{}_0a^{k+1}b^0+(C^k{}_1+C^k{}_0)a^kb+(C^k{}_2+C^k{}_1)a^{k-1}b^2+\ldots$

$+(C^k{}_i+C^k{}_{i-1})a^{k-i+1}b^i+\ldots+(C^k{}_k+C^k{}_{k-1})ab^k+C^k{}_kb^{k+1}$

利用巴斯卡定理 $C^k{}_i+C^k{}_{i-1}=C^{k+1}{}_i$，$C^k{}_0=C^{k+1}{}_0$ 與 $C^k{}_k=C^{k+1}{}_{k+1}$

所以$(a+b)^{k+1}=C^{k+1}{}_0a^{k+1}+C^{k+1}{}_1a^kb+\ldots+C^{k+1}{}_i\,a^{k+1-i}b^i+\ldots+C^{k+1}{}_{k+1}b^{k+1}$。

因此 $n=k+1$ 時等式成立。所以由數學歸納法可知$(a+b)^n=\sum_{i=1}^{n}C_i^n a^{n-i}b^i$ 。

結論：

(a) $\boldsymbol{(a+b)^n}=C_0^n\,\boldsymbol{a^nb^0}+C_1^n\,\boldsymbol{a^{n-1}b}+\ldots+C_k^n\,\boldsymbol{a^{n-k}b^k}+\ldots+C_n^n\,\boldsymbol{b^n}=\sum_{i=1}^{n}C_i^n a^{n-i}b^i$ 。

(b)$(a+b)^n$ 展開式中的一般式爲 $C_k^n\,a^{n-k}b^k$

(c)$(a+b)^n$ 若按 a 的降冪排列，則第 $k+1$ 項爲 $C_k^n\,a^{n-k}b^k$。

(d)$(a+b)^n$ 的展開式共有 $n+1$($H^n{}_2$)項。

(e)$(1+x)^n=C^n{}_0+C^n{}_1x+C^n{}_2x^2+C^n{}_3x^3+\ldots+C^n{}_kx^k+\ldots+C^n{}_nx^n$。

[例題1] (1)在$(2x-y^2)^6$的展開式中，x^4y^4的係數爲何？

(2)求$(x-\frac{1}{3x^2})^{18}$展開式中，x^6項的係數、不含x之項、x^4項之係數。

Ans：(1)240 (2)$\frac{340}{9}$、$\frac{6188}{243}$、0

[例題2] $(1+x^2)+(1+x^2)^2+(1+x^2)^3+\cdots+(1+x^2)^{20}$的展開式中，$x^4$的係數爲__________。Ans：$C^{21}_3=1330$

(練習1) 在$(2x-3y)^8$的展開式中，x^3y^5的係數爲何？Ans：-108864

(練習2) 在$(2x^2-\frac{1}{x})^8$的展開式中，x^7的係數爲何？Ans：-1792

(練習3) 請問$(x-1)(x^2-2y)^{10}$的展開式中$x^{15}y^3$項的係數等於多少？
Ans：-960

(練習4) $[(a-2b)^2-c]^5$之展開式中，共有________個不同類項；其中$a^2b^2c^3$項的係數爲________。 Ans：36，-240

(練習5) $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ldots\ldots+(1+x)^{20}$ 展開式中，x^3 項之係數爲________。
Ans：5985

(練習6) 設$(1+x)^n$之展開式中，按x的升冪排列，第5,6,7項的係數成等差數列，則$n=$？ Ans：7或14

(乙)二項式定理的應用

(1) 組合恆等式：

由$(1+x)^n= C^n_0+C^n_1x+C^n_2x^2+C^n_3x^3+\ldots+C^n_kx^k+\ldots+C^n_nx^n\ldots(*)$

可導出一些組合恆等式。

(a)活用公式：

①$x=1$ 代入(*)得：_____= ______________________________

②$x=-1$ 代入(*)得：_____= ______________________________

③$x=2$ 代入(*)得：_____= ______________________________

④$x=\frac{1}{3}$代入(*)得：_____= ______________________________

(c)從組合意義來看組合恆等式：$C^n_0+C^n_1+C^n_2+C^n_3+\ldots+C^n_k+\ldots+C^n_n=2^n$

百貨公司服飾專櫃，推出當季最新的服飾，共有 5 種款式，小萍想要購買服飾，每種款式最多買一件，也可以都不買，請問小萍有幾種購買服飾的情形？

❋ 5 種款式的服飾，買與不買有 2 種情形⇒有 2^5 種情形。

❋ 從購買服飾的件數來分類：

沒有買⇒$1=C^5_0$，買 1 件⇒C^5_1，買 2 件⇒C^5_2，買 3 件⇒C^5_3，買 4 件⇒C^5_4，

買 5 件⇒$1=C^5_5$，

因此 $\mathbf{C^5_0+C^5_1+C^5_2+C^5_3+C^5_4+C^5_5=2^5}$。

[例題3] 化簡下列各式：

(1)$C^n_2+C^n_4+C^n_6+\cdots+$(有意義的最後一項)＝__________

(2) $C^n_1+C^n_3+C^n_5+\cdots+$(有意義的最後一項)＝__________

Ans：(1)2^{n-1} (2)2^{n-1}

[例題4] 設 n 爲自然數，試證：$C_1^n+2C_2^n+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$。

[例題5] 求出 $C_0^{10}C_8^{10}+C_1^{10}C_7^{10}+C_2^{10}C_6^{10}+\cdots\cdots+C_8^{10}C_0^{10}=$？

Ans：C_8^{20}

[討論]：

請給出下列式子的組合意義：

(1) $C_m^n\cdot C_0^r+C_{m-1}^{n-1}\cdot C_1^{r+1}+C_{m-2}^{n-2}\cdot C_2^{r+2}+\ldots+C_0^{n-m}\cdot C_m^{r+m}=C_m^{n+r+1}$ 。

(2) $C_r^r+C_r^{r+1}+C_r^{r+2}+\ldots+C_r^n=C_{r+1}^{n+1}$ 。

(3) $C_1^n+2C_2^n+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$

（練習7） $C^{12}_{2}+C^{12}_{4}+C^{12}_{6}+\cdots\cdots+C^{12}_{12}=$___________。Ans：2047

（練習8） 設 n 為正偶數，則 $C^{n}_{0}+3^{2}C^{n}_{2}+3^{4}C^{n}_{4}+\cdots\cdots+3^{n}C^{n}_{n}=$__________。
(A)2^{2n-1} (B)2^{2n+1} (C)$2^{n-1}+2^{n+1}$ (D)$2^{n-1}+2^{2n-1}$ (E)2^{n} Ans：(D)

（練習9） 滿足 $1+(-\frac{1}{3})C^{n}_{1}+(-\frac{1}{3})^{2}C^{n}_{2}+(-\frac{1}{3})^{3}C^{n}_{3}+\cdots\cdots+(-\frac{1}{3})^{n}C^{n}_{n}<\frac{1}{500}$ 之最小正整數 n=______。（已知 log2＝0.3010，log3＝0.4771）Ans：16

（練習10） 求 $C^{10}_{0}\cdot C^{8}_{3}+C^{10}_{1}\cdot C^{8}_{2}+C^{10}_{2}\cdot C^{8}_{1}+C^{10}_{3}\cdot C^{8}_{0}=$？ Ans：$C^{18}_{3}$。

（練習11） $2C^{n}_{1}+5C^{n}_{2}+8C^{n}_{3}+\ldots+(3n-1)C^{n}_{n}=$？ Ans：$(3n-2)\cdot 2^{n-1}+1$

（練習12） 證明：$(C^{n}_{0})^{2}+(C^{n}_{1})^{2}+(C^{n}_{2})^{2}+\ldots+(C^{n}_{n})^{2}=C^{2n}_{n}$。

(2) 多項式定理：
設 m,n 為自然數，$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_m$ 為任意數，則

$$(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n=\sum\frac{n!}{p_1!\,p_2!\cdots p_m!}\,a_1^{p_1}\cdot a_2^{p_2}\cdots a_m^{p_m}\ ,\ n=p_1+p_2+\ldots+p_m$$。

[例題6] $(x+2y-z)^5$ 展開式中有多少個同類項？ 且 x^2y^2z 之係數為何？
Ans：21，–120

[例題7] $(1+2x-x^2)^{10}$ 展開式中 x^3 之係數=？ Ans：780

(練習13) 求$(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+x^3)^6$展開式中 x^5 項的係數。　Ans：-120

(練習14) $(1+x-x^2)^{50}=1+ax+bx^2+\dots+cx^{100}$，則數對$(a,b,c)=$？
Ans：(50,1175,1226)

(練習15) $(x+y+z+u)^5$ 展開式中
(1)不同類項有_______個。(2)x^2y^2z 項的係數=________。
Ans：(1)56 (2)30

綜合練習

(1) $[(a-2b)^2-3c]^5$ 展開式中 $a^3b^3c^2$ 項的係數爲何？

(2) $(9x+\dfrac{1}{3\sqrt{x}})^{12}$ 展開式中，常數項之係數爲________。

(3) $(5x+3)^{20}$ 展開式中，a_kx^k 項的係數 a_k 最大，請問 k=？

(4) $C^3_3+C^4_3+C^5_3+\ldots+C^8_3+C^9_3=$？

(5) 若$(ax^3+\dfrac{2}{x^2})^4$ 展開式中 x^2 項係數爲 6，則實數 a 之值爲何？

(6) 將$(-3x^2+2x+1)^{10}$ 展開式中，x 項的係數爲多少？

(7) $(x^2-2x+\dfrac{1}{x^2})^6$ 展開式中常數項=？

(8) 取$(1.05)^{10}$ 的近似值到小數點後一位(第二位四捨五入)爲何？

(9) $(x-1)^3$ 除$(2x^2-4x+3)^{10}$ 之餘式爲何？

(10) 11^{18} 除以 1000 的餘數爲何？

(11) $(x+y+z+u+t)^6$ 展開式中，則：
(a)共有__________個不同類項。
(b)其中 x^3y^2z 項之係數爲__________，有__________個同型項。
(c)又 x^2y^2ut 項之係數爲__________，而有__________個同型項。

(12) 若$(1+x)^n$ 之展開式中，依升冪排列，第二、三、四項之係數成等差，求 n=？

(13) 設 $500<C^n_1+C^n_2+C^n_3+\cdots\cdots+C^n_n<1000$，則 n＝______ 。

(14) 設 n 爲自然數，且 $C^n_0+\dfrac{C^n_1}{2}+\dfrac{C^n_2}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{C^n_n}{n+1}=\dfrac{31}{n+1}$，
則 n＝？

(15) $C^n_0C^m_r+C^n_1C^m_{r-1}+C^n_2C^m_{r-2}+\ldots+C^n_rC^m_0=$？

(16) 設$C_0^{50}C_1^{50}+C_1^{50}C_2^{50}+C_2^{50}C_3^{50}+\cdots\cdots+C_{49}^{50}C_{50}^{50}=C_k^n$，
則 n＋k＝________________。

進階問題

(17) $(1+x)+(1+x)^2+\ldots+(1+x)^n$ 展開式中，x^2 的係數為 $a_n(n\geq2)$，試求$\sum_{n=2}^{20}\frac{1}{a_n}$ = ?

(18) (1)證明：$\frac{1}{k+1}C^n{}_k=\frac{1}{n+1}C^{n+1}{}_{k+1}$

(2)證明：$C_0^n+\frac{C_1^n}{2}+\frac{C_2^n}{3}+\cdots\cdots+\frac{C_n^n}{n+1}=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$。

(19) 證明由數字 0,1,2 生成的長度 n 的字串中

(a)0 出現偶數次的字串有$\frac{3^n+1}{2}$個。

(b)證明：$C_0^n2^n+C_2^n2^{n-2}+\ldots+C_q^n2^{n-q}=\frac{3^n+1}{2}$，其中 $q=2[\frac{n}{2}]$。

綜合練習解答

(1) -14400

(2) 495

(3) 13 [提示：$a_k=C^{20}{}_k\cdot 5^k(20)^{20-k}$ 最大，則 $a_k\geq a_{k+1}a_k\geq a_{k-1}\Rightarrow k=13$]

(4) 210

(5) $\pm\frac{1}{2}$

(6) 20

(7) 260

(8) 1.6

[提示：

$(1+0.05)^{10}=1^{10}+C^{10}{}_1(0.05)+C^{10}{}_2(0.05)^2+\ldots+C^{10}{}_{10}(0.05)^{10}$

$\approx 1^{10}+C^{10}{}_1(0.05)+C^{10}{}_2(0.05)^2=1.6125$]

(9) $20x^2-40x+21$ [提示：$(2x^2-4x+3)^{10}=[2(x-1)^2+1]^{10}$，再利用二項式定理展開，$(x-1)^3$ 除$(2x^2-4x+3)^{10}$ 之餘式爲 $C^{10}{}_1 2(x-1)^2+1$。]

(10) 481

(11) (a)210(b)60；60(c)180；30

(12) 7

(13) 9

(14) 4

(15) $C^{n+m}{}_r$ [提示：考慮$(1+x)^n(1+x)^m$ 展開式中 x^r 項的係數]

(16) 149 或 151

(17) $\frac{209}{140}$ [提示：求值式$=\frac{(1+x)[(1+x)^n-1]}{1+x-1}=\frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)}{x}$，所以 x^n 的係數爲 $a_n=C^{n+1}{}_3=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$，$\frac{1}{a_n}=\frac{6}{(n+1)n(n-1)}=3[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}]$，

$\sum_{n=2}^{20}\frac{1}{a_n}=3[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{19\cdot 20}-\frac{1}{20\cdot 21}]=3\{\frac{1}{2}-\frac{1}{20\cdot 21}\}=\frac{209}{140}$。]

(18) 略

(19) (a)設長度 n 的字串中 0 出現偶數次的字串有 a_n 個，可以得出 $a_n=a_{n-1}+3^{n-1}$(好好想想)$\Rightarrow a_n=\frac{3^n+1}{2}$

(b)將 n 分類求字串的長度，可得 0 出現偶數次的字串有

$C_0^n 2^n+C_2^n 2^{n-2}+\ldots+C_q^n 2^{n-q}$，再直接算出結果。