第四十八單元　函數的微分

在歷史上，微分與積分是平行發展的，求曲線的切線、物體運動的瞬時變化率與極大極小值問題刺激了微分的發展；而積分學主要源自對於面積與體積的計算。直到牛頓(Newton)與萊布尼茲(Leibnize) 發展出一個普遍用於計算導數和積分的方法，而將微分、積分的概念連結在一起，他們分別發現了「**微積分基本定理**」，微積分基本定理呈現了函數微分與積分之間是逆運算的關係，就像加和減與乘和除一樣。這個定理發現之後，「微積分」這個學科就正式登上數學的舞台。

(甲)導數的意義

(1)導數的定義：

回顧前面涉及的“速度”和“切線”問題：

- 切線斜率 $m=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$。(割線斜率的極限)
- 瞬時速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{s(t_0+h)-s(t_0)}{t_0+h-t_0}$。　(平均速度的極限)

這兩個古典問題，以數學的觀點來審視，都歸結到同一個問題—「**求函數的導數**」。

什麼是“**函數的導數**”呢？

它就是函數在某一點差商的極限，求函數 $f(x)$在 $x=x_0$ 處的導數可以分成二個步驟：

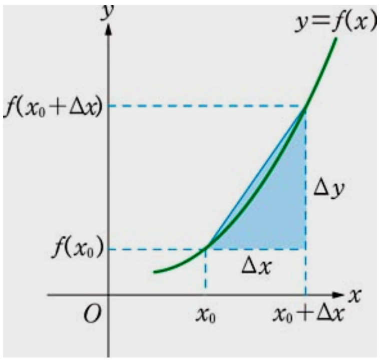
(a)求函數的差商：

若函數 $f(x)$在 $x=x_0$ 處及其鄰近區間上是連續函數。

在 x_0 附近的 x，令$\Delta x=x-x_0$(Δx 稱爲 x 的差量可正、可負)，

相對應的 $f(x)$在 $x=x_0$ 的差量Δf 爲$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，

比值$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$　(類似於割線斜率或平均速度)



稱爲函數 $f(x)$從在 $x=x_0$ 的差商，如右圖所示。

另一方面，令 $x=x_0+\Delta x$，

函數 $f(x)$從在 $x=x_0$ 的差商$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。

(b)求差商的極限：

考慮函數 $f(x)$的“差商”$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，當$\Delta x\to 0$ 時，差商極限值存在，則稱此極限值爲爲 $f(x)$在 $x=x_0$ 處的**導數(Derivative)**，記作 $\boldsymbol{f'}(x_0)$。

即 $\boldsymbol{f'}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

另一方面，當 $x=x_0+\Delta x$ 時，$\Delta x\to 0$ 的充要條件爲 $x\to x_0$，因此

函數 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 處的導數也可寫成 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。即 $\boldsymbol{f'}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。

由導數的定義知，求函數 $f(x)$在 $x=x_0$ 處的導數 $f'(x_0)$，可分成二個步驟：

(1°)　求函數 $f(x)$差商：　$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$(或$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$)。

(2°)　求差商的極限(導數)：　$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。(或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$)

當差商的極限值存在時，則此極限值以 $f'(x_0)$表示，稱為 $f(x)$在 $x=x_0$ 處的**導數**。
當 $f(x)$在 $x=x_0$ 處導數存在時，則稱 $f(x)$在 $x=x_0$ **可微分**。

接下來舉實例來討如何求函數的導數：

[例題1] 求函數 $f(x)=x^3$ 在 $x=1$ 處的導數 $f'(1)$。

[解法]：

根據求導數的步驟：

(1°)求 $f(x)$在 $x=1$ 的差商：$\Delta f=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^3-1=3(\Delta x)+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$

差商$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=3+3(\Delta x)+(\Delta x)^2$

(2°)求差商的極限(導數)：

因為$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3+3(\Delta x)+(\Delta x)^2]=3$，所以 $f(x)$在 $x=1$ 處的導數 $f'(1)=3$。

[例題2] 試求函數 $f(x)=\dfrac{x\cdot|2x-4|}{|x|-2}$在 $x=3$ 處的導數。　Ans：2

是不是任何連續函數在每個點都有導數呢？我們看下一個例題：

[例題3] 設函數 $f(x)=|x|$，試問 $f(x)$在 $x=0$ 處的導數是否存在呢？

[解法]：

根據求導數的步驟：

(1°)求 $f(x)$在 $x=0$ 的差商：

$\Delta f=f(x)-f(0)=|x|-|0|=|x|$，差商$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{|x|}{x}$

(2°) 求差商的極限(導數)：

因為$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$，且$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$，

所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$不存在，故 $f(x)$在 $x=0$ 處的導數不存在。

上例中，差商的極限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$不存在，此時稱 $f(x)=|x|$在 $x=0$ 處**不可微分**。

根據例題二的討論，一般而言，

若差商的極限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$不存在，則稱函數 $f(x)$在 $x=x_0$ 處**不可微分**。

(2)導數與切線

設Γ代表 $f(x)$的圖形，設 P 爲Γ上的一點，考慮在 P 點附近取Γ上另一點 Q，作割線 $\overleftrightarrow{PQ}$，

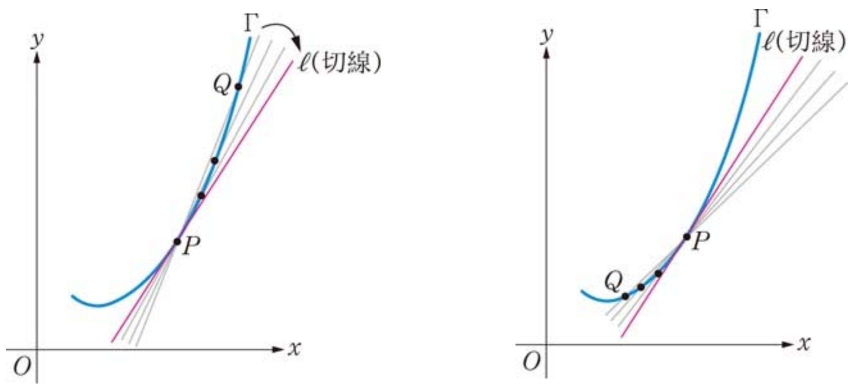
讓 Q 點沿著曲線逐漸趨近 P 點，若此時割線 PQ 有「**極限直線**」L，則直線 **L** 稱爲曲線Γ在 **P** 點處的**切線**，P 點稱爲**切點**。

根據以上的定義，我們提出以下的注意事項：

(1°)切線是割線的極限位置(如下圖一)

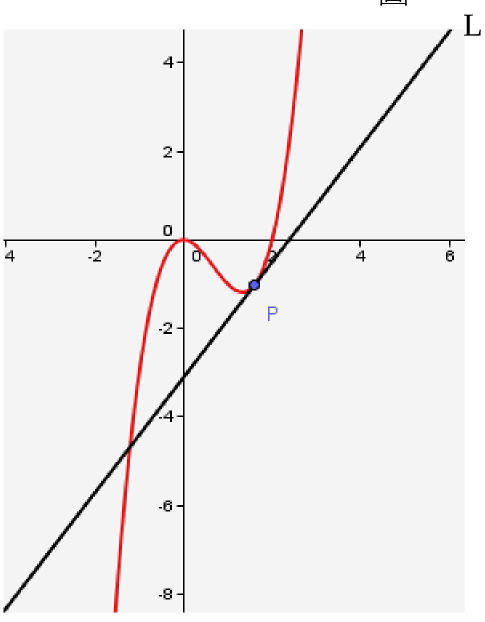
(2°)曲線 Γ 在 P 的切線 L，不一定與 Γ 只交於切點。(如圖二)

(3°)與曲線 Γ 交於一點 P 的直線，不一定是以 P 爲切點的切線。(如圖三)



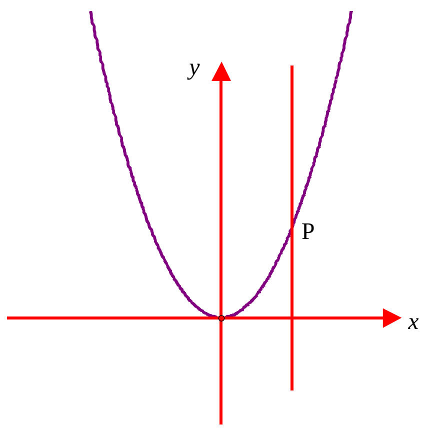
Q 從 P 之右側趨近 P　　Q 從 P 之左側趨近 P

圖一



圖二

切線 L 不只與Γ交於一點



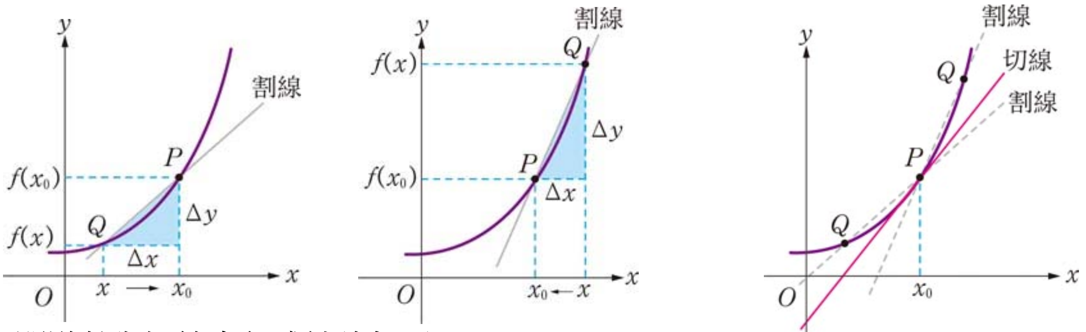
圖三

L 與Γ交於一點，但不爲切線

根據切線的定義，我們用函數的導數求切線的方程式：

設 $P(x_0, f(x_0))$是函數 $f(x)$ 圖形上一個定點，而 Q $(x，f(x))$是該圖形上異於 P 的另一動點，則差商$\dfrac{\Delta \boldsymbol{f}}{\Delta \boldsymbol{x}}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$就是「**割線 PQ 的斜率**」。

若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，則導數 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$就是 $f(x)$圖形上「**在 P 點處之切線的斜率**」。

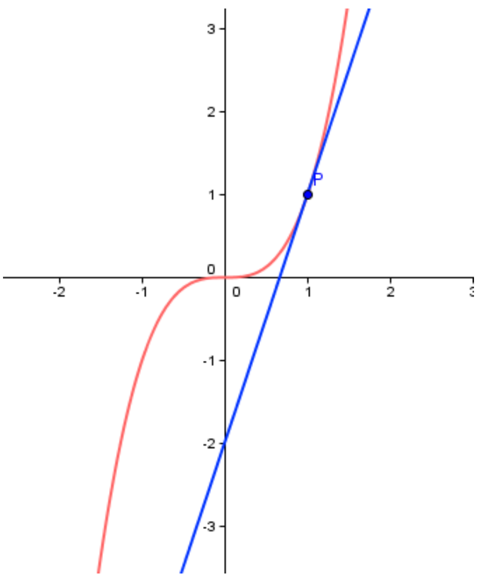


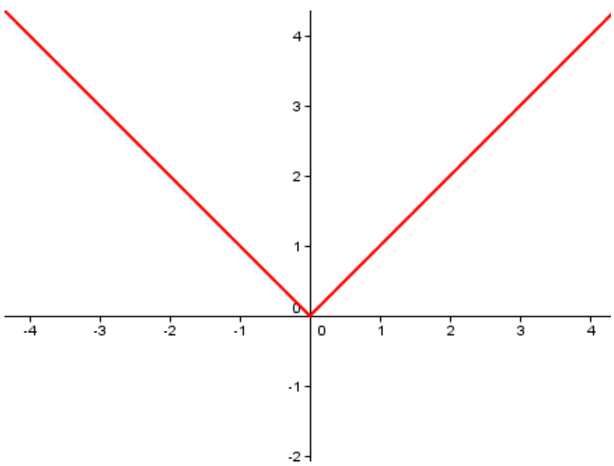
有關導數與切線方程式結論如下：

切線方程式 設 P(x_0,$f(x_0)$)為函數 $f(x)$圖形Γ上一定點， 且 $f'(x_0)$存在，則 (1)以 P(x_0,$f(x_0)$)為切點之切線斜率就是導數 $f'(x_0)$。 (2)圖形Γ上以 P 為切點的切線方程式為 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$。

例題 1 中 $f(x)=x^3$ 在 $x=1$ 處的導數 $f'(1)=3$,故以(1,1)為切點的切線為 $y-1=3(x-1)$。

例題 3 中 $f(x)=|x|$在 $x=0$ 處的導數 $f'(0)$不存在，雖然過(0,0)可以作很多直線與 $y=|x|$交於一點，但是根據前述切線的定義，這些直線都不是(0,0)處的切線，特別是 x 軸與圖形只交於(0,0)，但是 x 軸不是通過(0,0)割線($y=x$ 或 $y=-x$)的極限直線(如下圖)，它並不是切線，以(0,0)為切點的切線不存在！



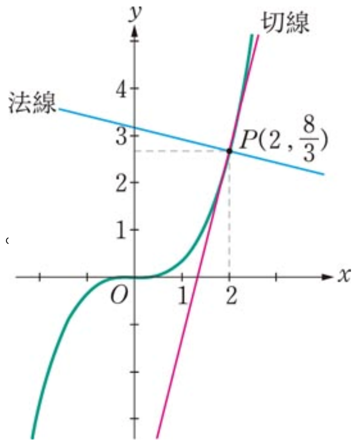


底下用實例來說明，用導數解決求切線的問題：

[例題4] 已知點 $P\left(2，\frac{8}{3}\right)$在函數 $y=\frac{1}{3}x^3$ 的圖形 Γ 上。試求 Γ 上

(1) 以 P 為切點之切線斜率 m 及切線方程式。

(2) 通過 P 點之法線方程式。



Ans：(1)$m=4$，$y-\frac{8}{3}=4(x-2)$ (2) $y-\frac{8}{3}=\frac{-1}{4}(x-2)$

[解法]：

(1)函數 $f(x)=\frac{1}{3}x^3$ 的圖形在 $x=2$ 處之切線斜率為 $f'(2)$，

$$m=f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{3}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{3}(x^3-2^3)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=4，所以\ m=4。$$

由點斜式知過 $P\left(2，\frac{8}{3}\right)$之切線方程式為 $y-\frac{8}{3}=4(x-2)$。

(2) 因法線垂直於切線（垂足為切點），即法線的斜率為$\frac{-1}{4}$，

故過切點 $P\left(2，\frac{8}{3}\right)$之法線方程式為 $y-\frac{8}{3}=\frac{-1}{4}(x-2)$。

[例題5] 設函數 $f(x)=x^2+x$ 的圖形為 Γ，試求通過 Γ 外一點 $Q(1，1)$且與 Γ 相切的直線方程式。

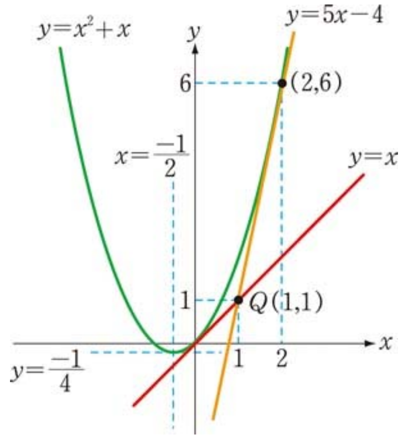
[解法]：

因 $Q(1，1)$不在圖形 Γ 上（$1\neq 1^2+1$），所以點 $Q(1，1)$不是切點。

設切點為 $P(a，a^2+a)$，那麼過 P 點之切線 L 之斜率為 $f'(a)$，而

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2+x)-(a^2+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)+(x-a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a+1)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a+1)=2a+1，$$



所以 $f'(a)=2a+1$。

故切線 L 的方程式為 $y-(a^2+a)=(2a+1)(x-a)$。

因為切線 L 通過 Q(1,1)， 故可得 $1-(a^2+a)=(2a+1)(1-a)$

整理得 $a^2-2a=0$，$a=0$ 或 2。

(i) 當 $a=0$ 時，切點 $P(0，0)$，切線斜率 $f'(0)=1$，

故切線方程式為 $y=x$。

(ii) 當 $a=2$ 時，切點 $P(2，6)$，

切線斜率 $f'(2)=5$，

故切線方程式為 $y-6=5(x-2)$，即 $5x-y=4$。

所以，通過圖形Γ外一點 Q (1，1)，且與Γ相切之切線有兩條
L_1：$y=x$，切點 P (0，0)，L_2：$5x-y=4$，切點 P (2，6)。

[例題6] 設 $f'(a)=-1$，求(1)$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$=？ (2)$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ Ans：(1)1 (2)−3

(練習1) 設 $f(x)=2x^2+5x+10$，求 $f'(2)$=？ Ans：13

(練習2) 請利用導數的定義求 $f(x)=\frac{3x-2}{2x+1}$在 $x=1$ 處的導數 $f'(1)$=？Ans：$\frac{7}{9}$

(練習3) 已知函數 $y=f(x)$的圖形在 $x=2$ 處的切線方程式為 $y+3=-5(x-2)$
試求(1)$f(2)$及 $f'(2)$ (2)函數 $y=f(x)$的圖形在 $x=2$ 處的法線方程式。
Ans：(1)$f(2)=-3$，$f'(2)=-5$ (2)$y+3=\frac{1}{5}(x-2)$

(練習4) 試求過拋物線 $y=x^2-2x+2$ 外一點 P(−1,1)的切線方程式。
Ans：$y=1$ 及 $8x+y+7=0$

(練習5) 若多項式 $f(x)$滿足 $f(1)=0$，$f'(1)=-15$，則 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{3h}$=？ Ans：−5

(練習6) 設 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分，且 $f'(a)=m$，試以 m 表示 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}$。
Ans：$5m$

(乙)函數的微分

(1)導函數的引入：
在例題 1 中，我們求差商的極限來計算 $f(x)=x^3$ 在 $x=1$ 處的導數，若是要求其它的導數 $f'(-1)$、$f'(\sqrt{2})$….等，是否每次都要用求差商的極限呢？
下面我們引入**導函數**的概念，來簡化求導數的過程。
設 $f(x)=x^3$，a 為任意實數，

因為 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x^2+ax+a^2)=3a^2$

所以對於每個實數 a 而言，$f(x)$在 $x=a$ 處的導數為 $f'(a)=3a^2$。

經過了上面的程序之後，每次要計算 $f(x)=x^3$ 在 $x=a$ 處的導數 $f'(a)$時，就不用每次都得算一次差商的極限，只要將 a 的值，代入 $3a^2$ 即可。

a	1	$\frac{4}{3}$	2	$\sqrt{5}$	3	…
$f'(a)$	3	$\frac{16}{3}$	12	15	27	…

因此每個實數 $a\longrightarrow f(x)$在 $x=a$ 的導數 $3a^2$，形成了一個對求導數有意義的對應，此對應關係形成的函數稱為 $f(x)=x^3$ 的**導函數**。

導函數的定義：
若函數 $f(x)$在區間(a,b)內的每一點導數都存在，當 x_0 在(a,b)內變動時，對應 $x_0\to f'(x_0)$
這個函數稱為 $f(x)$在區間(a,b)上的**導函數**，記作 $\boldsymbol{f'(x)}$，此時稱 $f(x)$在區間(a,b)上**可微分**。
若函數 $f(x)$在定義域中的每一點都可以微分，則稱 $f(x)$為**可微分函數**。

故例子一中，$f(x)=x^3\Rightarrow f'(x)=3x^2$。

當 $f(x)$的式子很長時，例如 $f(x)=x^3+2x^2+x+\sqrt{x^2+1}$，導函數可寫成。$(x^3+2x^2+x+\sqrt{x^2+1})'$
為了配合導函數的表示法，

(2)導數與導函數：

由導數與導函數的定義，

$f(x)$在 $x=x_0$ 的導數 $f'(x_0)$是一個**數**，而 $f(x)$的導函數 $f'(x)$是一個**函數**。

例如函數 $f(x)=x^3$ 的導函數 $f'(x)=3x^2$，而「**$f(x)=x^3$ 在 $x=1$ 處的導數**」就等於
「**導函數 $f'(x)=3x^2$ 在 $x=1$ 處的函數值 $f'(1)=3$**」。

若是求得函數 $f(x)$的導函數 $f'(x)$，那麼求「**$f(x)$在 $x=x_0$ 處的導數**」就等於「**導函數 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 的函數值 $f'(x_0)$**」。

由函數 $f(x)$求它的導函數 $f'(x)$的過程稱為「將函數 $f(x)$微分」。

(3)高階導數：

$f(x)\xrightarrow{\text{微分}}f'(x)\xrightarrow{\text{微分}}f''(x)\ldots\xrightarrow{\text{微分}}f^n(x)$。

我們稱 $\boldsymbol{f'(x)}$為 $f(x)$的一階導函數，$\boldsymbol{f''(x)=(f'(x))'}$為 $f(x)$的二階導函數，…….$f^{(n)}(x)$為 $f(x)$的 n 階導函數。

結論：
(a)$f(x)$在 $x=a$ 處有導數，則稱 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分。
(b)$f(x)$在定義域中的每一點都可微分，則稱 $f(x)$為一可微分函數。
(c)若 $f(x)$為一可微分函數，則由 $f(x)$求 $f'(x)$這個過程稱為將 **$f(x)$微分**。

[例題7] 證明 $f(x)=x^n$ 的導函數 $f'(x)=nx^{n-1}$。(n 爲自然數)

[證明]：

設 a 爲任意實數，

則 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1})$

$=(a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots+a^{n-1})$

$=na^{n-1}$。

所以 $f(x)=x^n$ 的導函數 $f'(x)=nx^{n-1}$。

[例題8] 證明：$(\sqrt[n]{x})'=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$。

[證明]：

設 a 爲 $f(x)=\sqrt[n]{x}$ 定義域中的任意點，

則 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a})[(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}\cdot\sqrt[n]{a}+\ldots.+(\sqrt[n]{a})^{n-1}]}$

$=\dfrac{1}{n(\sqrt[n]{a})^{n-1}}=\dfrac{1}{n}(a^{\frac{1-n}{n}})=\dfrac{1}{n}(a^{\frac{1}{n}-1})$

所以$(\sqrt[n]{x})'=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$。

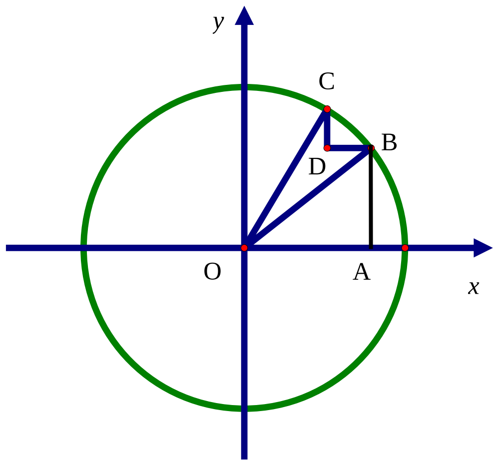
[例題9] 證明：$(\sin x)'=\cos x$

[證明]：

設 a 爲任意實數，$f(x)=\sin x$

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\dfrac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}$

計算 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}\right)=\cos a$。



[討論]：

(1) $\lim\limits_{\Delta\theta\to 0}\dfrac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta}=\cos\theta$ 的另一種看法：

右圖中，B$(\cos\theta,\sin\theta)$、C$(\cos(\theta+\Delta\theta),\sin(\theta+\Delta\theta))$

$\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta$代表$\overline{CD}$，BC 弧長爲$\Delta\theta$

當Δθ越來越小時，BCD 可以近似為ΔBCD，

$\dfrac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta}$與$\dfrac{CD}{BC}$越來越接近，且ΔBCD 與ΔBOA 相似

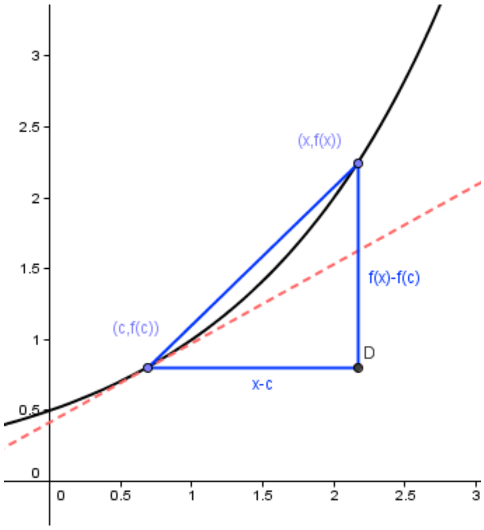
$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta} \approx \frac{CD}{BC} = \frac{OA}{OB} = \cos\theta$$

(2)你可以仿照上述的方法來解釋 $\lim\limits_{\Delta\theta\to 0}\dfrac{\cos(\theta+\Delta\theta)-\cos\theta}{\Delta\theta} = -\sin\theta$ 嗎？

(練習7) 仿照例題 8 證明：$(\cos x)'=-\sin x$。

結論：基本的微分公式
(1)$\dfrac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$，$n\in N$。 (2)$\dfrac{d\sqrt[n]{x}}{dx}=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}, n\in N$。 (3)$\dfrac{dc}{dx}=0$，其中 c 為常數。
(4)$(\sin x)'=\cos x$ (5)$(\cos x)'=-\sin x$

(4)微分與連續



(a)若設 $f(x)$在 $x=c$ 處可微分，則 $f(x)$在 $x=c$ 處連續。

[證明]：

$\because f(x)-f(c)=(x-c)\cdot[\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}]$，$f(x)=f(c)+(x-c)\cdot(\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c})$

$\therefore \lim\limits_{x\to c}f(x)=\lim\limits_{x\to c}[f(c)+(x-c)\cdot(\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c})]=f(c)+0\cdot f'(c)=f(c)$。

根據以上的定理，

若 $f(x)$在 $x=c$ 處**不連續**，則 $f(x)$在 $x=c$ 處**不可微分**。

例如：$f(x)=[x]$在 $x=2$ 不連續$\Rightarrow f(x)$在 $x=2$ 不可微。

(b)「**若設 $f(x)$在 $x=c$ 處連續，則 $f(x)$在 $x=c$ 處可微分**」這個敘述是錯誤的。

反例：設 $f(x)=|x|$，考慮(0,0)這一點，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{|x|}{x}$

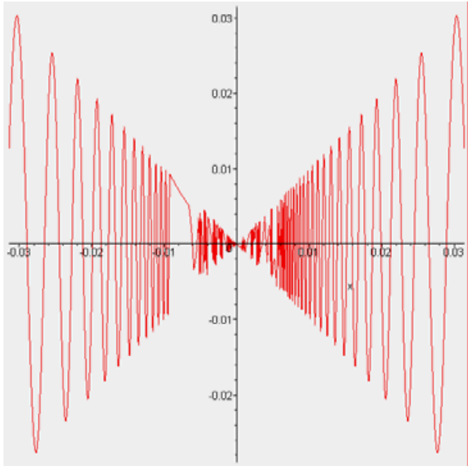
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，所以 $f'(0)$不存在，但是$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，

所以 $f(x)=|x|$在 $x=0$ 不可微分，但是在 $x=0$ 處連續。

由圖形來判別微分與連續：
(1)函數圖形上的斷點：不連續的點。
(2)函數圖形上的斷點、尖點、跳躍點或跳動很厲害的點：不可微分的點。

[例題10] 設 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$，請問 $f(x)$在 $x=0$ 連續嗎？可微分嗎？

Ans：f 在 $x=0$ 連續但不可微分。



(練習8) 利用導函數的定義證明 $f(x)=x^3+x^2+1$ 的導函數為 $f'(x)=3x^2+2x$

(練習9) 請利用導數的定義求出 $f(x)=x|x|$的導函數。Ans：$f'(x)=\begin{cases} 2x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -2x & x<0 \end{cases}$

(練習10) (1)請畫出 $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 之圖形。(2)請問 $f(x)$在 $x=0$ 可微分嗎？

(丙)微分的運算性質

(1)$f(x)$與 $g(x)$為可微分的函數⇒$f(x)+g(x)$為可微分的函數。

且**$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$**成立。

[證明]：

令 $h(x)=f(x)+g(x)$，設 a 為 $h(x)$定義域中的任一點

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)+\lim_{x\to a}\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=f'(a)+g'(a)$$

推論：$(f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x))'=(f_1(x))'+(f_2(x))'+\ldots+(f_n(x))'$

例題：求 $(x^5+\sqrt[3]{x})'=$？

(2)設 $f(x)$爲可微分的函數⇒$cf(x)$爲可微分的函數。

且$(cf(x))'=c\cdot f'(x)$

利用(1)(2)可得：$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$

推論：$(c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+...+c_nf_n(x))'=c_1(f_1(x))'+c_2(f_2(x))'+\ldots+c_n(f_n(x))'$

根據前面的性質，可以很容易求得**多項式函數的導函數**：

例如：$f(x)=3x^4-2x^3+5x^2-3x+6$ 的導函數

$$\begin{aligned}f'(x)&=(3x^4-2x^3+5x^2-x+6)'\\&=(3x^4)'+(-2x^3)'+(5x^2)'+(-3x)'+(6)'\\&=3(x^4)'+(-2)(x^3)'+5(x^2)'+(-3)(x)'+(6)'\\&=12x^3-6x^2+10x^2-3\end{aligned}$$

設 n 次多項式函數 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$，可以得到：

$$\begin{aligned}&(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0)'\\&=(a_nx^n)'+(a_{n-1}x^{n-1})'+\ldots+(a_1x)'+(a_0)'\\&=a_n(x^n)'+a_{n-1}(x^{n-1})'+\ldots+a_1(x)'+(a_0)'\\&=a_n(nx^{n-1})+a_{n-1}(n-1)x^{n-1}+\ldots+a_1+0\\&=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1\text{。}\end{aligned}$$

多項式函數導函數的公式：
設 n 次多項式函數 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$，則導函數 $f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1$。

[例題11] 設多項式函數 $f(x)=3x^5-4x^3+x^2-2$，試求
(1)$f'(x)$。 (2)$f'(-1)$ (3)試求函數 $f(x)$的圖形以點$(-1,0)$爲切點的切線方程式。
[解法]：
(1)根據多項式函數的微分公式， $f'(x)=15x^4-12x^2+2x$
(2)$f'(-1)=15(-1)^4-12(-1)^2+2(-1)=1$
(3)因爲以點$(-1,0)$爲切點的切線斜率爲 $f'(-1)=1$
所以切線方程式爲 $y-0=1(x+1)$。

[例題12] 設函數 $f(x)=x^2+x$ 的圖形爲Γ，試求通過Γ外一點 $Q(1，1)$且與Γ相切的直線方程式。
[分析]：
因爲 $Q(1，1)$爲Γ外一點，要找切線必須先找到切點，並求出導數(斜率)。
設切點爲 $P(a，a^2+a)$，求出 a 的值與導數，就可以找到切線的方程式。
[解法]：
因 $Q(1，1)$不在圖形Γ上（$1\neq1^2+1$），所以點 $Q(1，1)$不是切點。
設切點爲 $P(a，a^2+a)$，以 P 點爲切點之切線 L 之斜率爲 $f'(a)=2a+1$，
故切線 L 的方程式爲 $y-(a^2+a)=(2a+1)(x-a)$。
因爲切線 L 通過 Q(1,1)， 故可得 $1-(a^2+a)=(2a+1)(1-a)$

整理得 $a^2-2a=0$，$a=0$ 或 2。

(i)　當 $a=0$ 時，切點 $P(0，0)$，切線斜率 $f'(0)=1$，

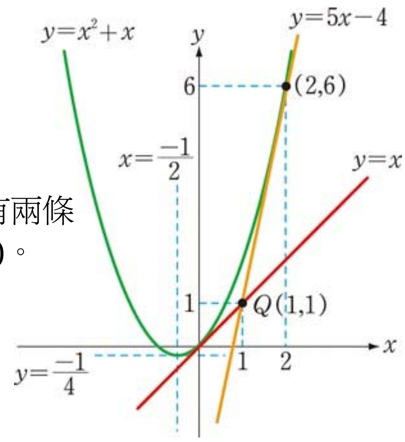
故切線方程式為 $y=x$。

(ii)　當 $a=2$ 時，切點 $P(2，6)$，切線斜率 $f'(2)=5$，

故切線方程式為 $y-6=5(x-2)$，即 $5x-y=4$。

所以，通過圖形 Γ 外一點 $Q(1，1)$，且與 Γ 相切之切線有兩條

L_1：$y=x$，切點 $P(0，0)$，L_2：$5x-y=4$，切點 $P(2，6)$。



(練習11)設函數 $f(x)=3x^4-2x^3+4x^2-7$，試求

(1)$f(x)$的一階導函數 $f'(x)$。

(2) $f(x)$的二階導函數 $f''(x)$

(3)$f'(-2)$、$f''(1)$的值。

Ans：(1) $f'(x)=12x^3-6x^2+8x$　(2) $f''(x)=36x^2-12x+8$　(3)-136，32

(練習12)設 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$，(1)請求出 $f'(x)=$？　(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)-f(2-2h)}{3h}=$？

Ans：(1) $f'(x)=3x^2-6x+2$　(2)$\dfrac{10}{3}$

(練習13)設函數 $f(x)=x^2+1$ 的圖形為Γ，P 為Γ上的點，已知在 P 點處的切線 L 平行直線 $y=2x+1$，

試求(1)P 點的坐標。　(2)求切線 L 的方程式。

Ans：(1)$P(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4})$　(2)$y-\dfrac{5}{4}=2(x-\dfrac{1}{2})$

(3) $f(x)$，$g(x)$為可微分的函數⇒$f(x)g(x)$為可微分的函數。

且$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

[證明]：

令 $h(x)=f(x)g(x)$，設 a 為 $h(x)$定義域中的任一點

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g(x)(f(x)-f(a))+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}g(x)[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}]+\lim_{x\to a}f(a)[\frac{g(x)-g(a)}{x-a}]$$

$$=g(a)f'(a)+f(a)g'(a)$$

而上面極限的運算中，使用了 $g(x)$在 $x=a$ 可微分，所以 $g(x)$在 $x=a$ 連續。

即$\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$。

例如：試求$((x^2+x-3)(3x^2-2x+1))'=$？

例如：試求$(x^2+2x+3)^3$的導函數。

推論：

(a) $(f_1f_2\cdots f_n)' = (f_1)' f_2\cdots f_n + \cdots + f_1f_2\cdots(f_n)'$ (逐次輪流微分)

(b)如果 $f_1 = f_2 = \cdots f_n = f$ ，則可得$\mathbf{[(f(x))^n]'=n(f(x))^{n-1}(f'(x))}$。

(4)若 $f(x)$，$g(x)$在 $x=a$ 可微分，且 $g(a)\neq 0$ ，則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 可微分。

因此可得：$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

若 $f(x)=1$，則$\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{1}{(g(x))^2}\cdot g'(x)$

[證明]：

令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，設 a 為 $h(x)$定義域中的任一點

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\left[\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\right]$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}\left[\frac{g(a)(f(x)-f(a))-f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}\right]$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}\cdot\lim_{x\to a}\left[\frac{g(a)(f(x)-f(a))-f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}\right]$$

$$=\frac{1}{(g(a))^2}\cdot\left(\lim_{x\to a}g(a)\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]-\lim_{x\to a}f(a)\left[\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]\right.$$

$$=\frac{1}{(g(a))^2}\cdot(g(a)f'(a)-f(a)g'(a))$$

而上面極限的運算中，使用了 $g(x)$在 $x=a$ 可微分，所以 $g(x)$在 $x=a$ 連續。

即$\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$，且 $g(a)\neq 0$。

例如：試求$\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$的導函數。

例如：求$\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)'=$？

[例題13] 求下列各函數的導函數：

(1) $(x^2+2x)(x^2+3x+2)$ (2) $(x-2)^3(x^2-1)$

(3)$(x^2+x+1)(4x^3+x-4)(x+3)$ (4)$\dfrac{3}{x^3+2x+1}$ (5)$\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$

Ans：(1)$4x^3+15x^2+16x+4$ (2)$(x-2)^2(5x^2-4x-3)$

(3)$(2x+1)(4x^3+x-4)(x+3)+(x^2+x+1)(12x^2+1)(x+3)+(x^2+x+1)(4x^3+x-4)$

(4)$\dfrac{-3(3x^2+2)}{(x^3+2x+1)^2}$ (5)$\dfrac{-(x+1)(x+5)}{(x-1)^4}$

[例題14] 請利用$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$的結果證明：

$(\tan x)'=\sec^2 x$，$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$

(練習14) 試求下列的導函數：

(1)$x^3-6x^2+7x-11$　　(2)$(x^3+3x)^2(2x+1)$

(3) $(x+1)(2x^2+2)(3x^2+x+1)$　　(4)$(2x^3+x+1)^5$

Ans：(1)$3x^2-12x+7$　　(2)$2(x^3+3x)(3x^2+3)(2x+1)+2(x^3+3x)^2$

(3) $(2x^2+2)(3x^2+x+1)+(x+1)\cdot(4x)\cdot(3x^2+x+1)+(x+1)(2x^2+2)\cdot(6x+1)$

(4) $5(2x^3+x+1)^4\cdot(6x^2+1)$

(練習15) 設函數 $f(x)=(x^2+x-1)^6$，Γ代表 $y=f(x)$的圖形，點 P$(-2,1)$在Γ上，試求

(1) $f'(-2)$　　(2)以 P 點爲切點的切線方程式。

Ans：(1)-18　(2) $y-1=(-18)(x+2)$

(練習16) 求下列各函數的導函數。

(1)$f(x)=\dfrac{x^3+x+1}{2x^2+x+3}$　　(2)$f(x)=\dfrac{3x}{x^2+3x+1}$

(3)$f(x)=\dfrac{1}{4x^3+3x^2+2x+1}$　　(4)$f(x)=\dfrac{1}{x^3+2x+1}$

Ans：(1)$\dfrac{2x^4+2x^3+7x^2-4x+2}{(2x^2+x+3)^2}$　　(2)$\dfrac{-3x^2+3}{(x^2+3x+1)^2}$

(3) $\dfrac{-1}{(4x^3+3x^2+2x+1)^2}\cdot(12x^2+6x+2)$　　(4)$\dfrac{-3x^2-2}{(x^3+2x+1)^2}$

(練習17) 證明$\dfrac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$，$\dfrac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$

(練習18) 設 $h(2)=4$，$h'(2)=-3$，試求$\dfrac{h(x)}{x}$在 $x=2$ 的導數=？

Ans：$\dfrac{-5}{2}$

(練習19) 設 $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2-x+1}$請求出函數圖形 $y=f(x)$在$(0,2)$處的切線方程式。

Ans：$y=4x+2$

(丁)導數與變化率

由於導數 $f^{/}(x_0)$相當於 $f(x)$在 $x=x_0$ 處的變化率，故在自然科學、社會科學的領域中有許多應用。

例如

(1)$f(x)$代表位移對時間的函數，則變化率 $f^{/}(x_0)$為 $x=x_0$ 時的速度。

(2)$f(x)$代表流經電線截面的總電荷量對時間的函數，則變化率 $f^{/}(x_0)$為 $x=x_0$ 時的電流大小。

(3)$f(x)$代表血壓對用藥量的函數，則變化率 $f^{/}(x_0)$代表用藥量 $x=x_0$ 時血壓對用藥量的敏感度。

(4)$f(x)$代表人口對時間的函數，則變化率 $f^{/}(x_0)$代表 $x=x_0$ 時人口的增長率。

[例題15] 某種藥物經動物實驗得到以下的結果：
服用此藥物 x(cc)後，24 小時內的最高收縮壓可以近似表成
$P(x)=-0.3x^3+0.04x^2+80$ (cm−Hg)
試求　(1)敏感度函數 $P^{/}(x)$　　(2)試求服用此藥物 2cc 時的血壓變化率(敏感度)。

[解法]：

(1)$P^{/}(x)=-0.9x^2+0.08x$。

(2)服用此藥物 2cc 時的血壓變化率(敏感度)為 $P^{/}(2)=-2.44$。

[例題16] 設一根棍子從左側開始測量，在 x 公尺的地方測量從左端到此處的質量為 $f(x)$ 公斤。已知 $f(x)=\sqrt{x}$ $(0\le x\le 2)$，試求此棍子在 $x=1$ 的線密度(linear density)。
Ans：0.5(kg/m)

(練習20)某個城鎮的人口從最初的 10000 人經過 t 年之後增加到數量 $P(t)$人，$P(t)$可以近似表成 $P(t)=200t^2+100t+10000$ $(0\le t\le 10)$，試求
(1)$P^{/}(t)$　　(2)$t=5$ 的人口增長率。　Ans：(1)$400t+100$　(2)2100

(練習21)只要電荷移動，就會產生電流，電荷以庫倫(Coulomb)當單位，電流以安培(Ampere)作單位，1 安培=1 庫倫/秒，設在 t 時刻，已流經圓形截面的總電荷量是 $Q(t)$。設 $Q(t)=t^3-t^2+4t+2$，求 $t=1$ 時的電流。　Ans：5 安培

(戊)合成函數的微分

接下來討論$\frac{d}{dx}(g\circ f)(x)$應該如何表示？

回顧前面的例子：

設 $f(x)=x^2+2, g(x)=y^3$ ，則$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(x^2+2)^3$

利用$\frac{d}{dx}((f(x))^n=n(f(x))^{n-1}\frac{df(x)}{dx}$ ，可得

$$\frac{d}{dx}((x^2+2)^3)=3(x+2)^2\cdot 2x=\frac{d}{dy}g(y)|_{y=x^2+2}\cdot\frac{df(x)}{dx}$$

上式並不是巧合，一般的情形亦是如此。

定理：(連鎖法則　Chain Rule)

若 $f(x),g(y)$都是可微分的函數，令 F= $f\circ g$ ，即 F(x)=$f(g(x))$

則 F(x)為可微分函數，且 F$^{/}$(x)=$(f\circ g)^{/}(x)=f^{/}(g(x))g^{/}(x)$ 。

[證明]：

[例題17] 令 F(x)=$\sqrt{x^2+1}$ ，試求 F$^{/}$(x)=？　Ans：$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

[例題18] 求下列函數的導函數：

(1)$f(x)=\sin^2 x$ 的導函數。

(2)$g(x)=\cos(x^2+x-1)$

(3)$h(x)=\tan^3 x$

Ans：(1)$2\sin x\cdot\cos x$　(2)$-\sin(x^2+x-1)\cdot(2x+1)$　(3) $3\tan^2 x\cdot\sec^2 x$

(練習22) 設 n 爲正整數且 $f(x)$爲可微分的函數，試用連鎖律去計算$(f(x))^n$ 的導函數。Ans：$n(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$

(練習23) 設 n 爲正整數，$n\geq2$，$f(x)$爲可微分的函數，試用連鎖律去計算 $(\sqrt[n]{f(x)})'$ 的導函數。　Ans：$\frac{1}{n}(f(x))^{\frac{n-1}{n}}(f'(x))$

(練習24) 試求下列兩小題：

(1)求$\left[\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}\right]'=$?

(2)求$(x\cdot\sqrt{2x-1})'=$？

(3)求 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+1}$的導函數。

Ans：(1) $\frac{2(2x+1)}{3\cdot\sqrt[3]{x^2+x+1}}$　(2) $\frac{3x-1}{\sqrt{2x-1}}$　(4) $f'(x)=\frac{x-3}{(3x+1)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}$

(練習25) 求下列各小題 y'

(1) $y=x\sin x$　(2) $y=\cos^3 x$　(3) $y=5\cos(2x+1)$

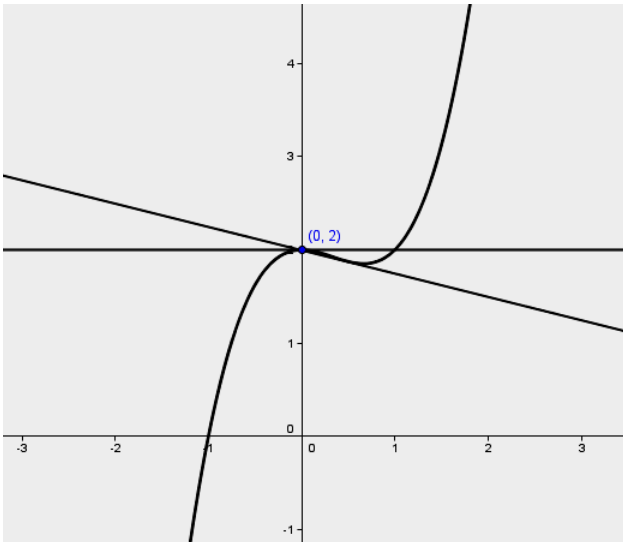
(4) $y=\sin x\cos 4x$　(5) $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$

Ans：

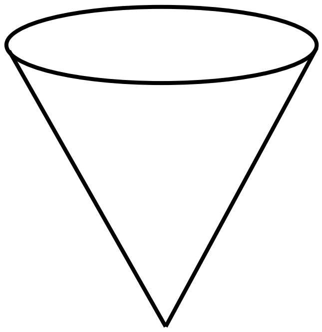
(1)$\sin x+x\cos x$ (2)$-3\cos^2 x\sin x$ (3)$-10\sin(2x+1)$

(4) $\cos x\cos 4x-4\sin x\sin 4x$　(5) $\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

[例題19] (1)求過點(0,2)而與曲線 $y=f(x)=x^3-x^2+2$ 之相切的直線。
(2)曲線 $y=f(x)=x^3-x^2+2$ 以(0,2)為切點的切線方程式為何？
Ans：(1)切線 $y-2=0$ 或 $x+4y=8$ (2)$y-2=0$



[例題20] 如圖，半徑 8 公分，高 16 公分的圓錐容器以每秒 3cm^3 的速度注水，請問當水深達 4 公分時水面上升的速度=？Ans：$\dfrac{3}{4\pi}$cm/sec



(練習26) $y=\dfrac{6x}{x^2+2}$ 上以 P(1,2)為切點之切線方程式為何？
此切線與曲線的另一交點為何？Ans：$y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}$， $(-4,\dfrac{-4}{3})$

(練習27) 函數圖形 $y=f(x)=x^3+ax^2+b$ 之圖形通過 P(1,1)且以 P 點為切點的切線斜率為 5，請問數對(a,b)=？ Ans：(2,−2)

(練習28) 試求過點$(\frac{13}{6},9)$且與 $y=2x^3$ 相切的直線。

Ans：$y=6x-4$，$y=54x-108$，$y=\frac{27}{8}x+\frac{27}{16}$

(練習29) 試求曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ 的圖形上以$(\frac{5}{4},\frac{3}{4})$爲切點的切線方程式。

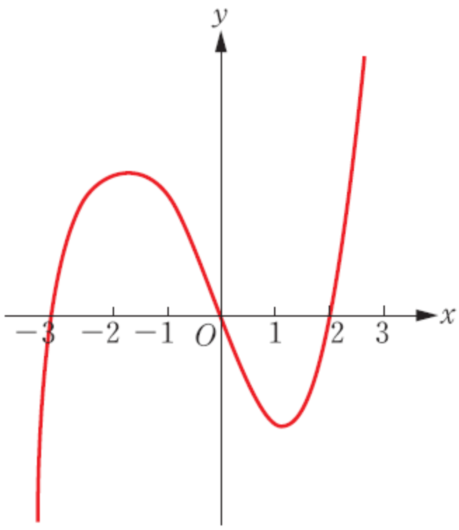
Ans：$5x-3y=4$

(練習30) 請求出過點(0,0)且與曲線 $y=x^3-3x^2-3x+4$ 的切線。
Ans：$3x+y=0$[請注意(0,0)不在曲線上]

(練習31) 設 $f(x)=x^3+4x+2$ 的切線與直線 $y=7x-2$ 平行者有二條，則此兩切線之間的距離爲何？ Ans：$\frac{4}{\sqrt{50}}$

(練習32) 設 a,b,c 爲實數，已知二曲線 $y=x^2+ax+b$ 與 $y=-x^3+c$ 在點 P(1,−2)處相切，則$(a,b,c)=$？ Ans：(−5,2,−1)

綜合練習



(1) 試利用求導數的程序，求下列各函數的導數：

(a)$f(x)=x^3-2x+5$，求 $f'(-2)$的值。

(b) $h(x)=|x-3|$，求 $h'(0)$的值。

(c) $g(x)=x|x|$，求 $g'(0)$的值。

(2) 下圖為 $y=f(x)$的部分圖形，試比較下列各數值的大小：
$0, f'(-1), f'(0), f'(2), f'(3)$

(3) 試求下列各函數在 $x=2$ 處的導數：

(a)$f(x)=4$

(b)$f(x)=x^4-2x^3+x^2-6$

(c)$f(x)=(x^2-3x+1)^4$

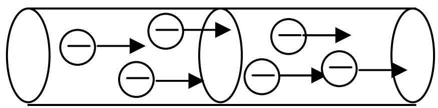
(4) 設多項式函數 $f(x)$的圖形Γ於點 P(3,−2)處的切線通過點 Q(2,−3)，試求 $f'(3)$的值。

(5) $f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+10)}$，求 $f'(1)=$？

(6) 設 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ，若 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-2}{x-5}=\dfrac{1}{3}$ ，則 $y=f(x)$ 的圖形上以 $(5, f(5))$ 為切點的切線方程式為____________。

(7) 設 $f(x)=[x]$，試求 $f'(5)=$？ $f'(\frac{5}{2})=$？

(8) 只要電荷移動，就會產生電流，電荷以庫倫(Coulomb)當單位，電流以安培(Ampere)作單位，1 安培=1 庫倫/秒，設在 t 時刻，已流經圓形截面的總電荷量是 $Q(t)$。



(a)試解釋 $\dfrac{Q(t+h)-Q(t)}{h}$ ，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{Q(t+h)-Q(t)}{h}$ 這兩個式子的物理意義。

(b)設 $Q(t)=t^3-2t^2+6t+2$，求 $t=1$ 時的電流。

(9) 一個圓柱形的水槽裝有 100 公升的水，在 2 小時內從底部的開口將水放掉。設放水 t 分鐘後，水槽的水體積為 $V(t)=100(1-\frac{t}{120})^2$ 公升。$(0\le t\le 120)$

(a)試求水在水槽底部開口處流速函數(以時間 t 來表示)

(b)試求 $t=6$ 分鐘時，水槽底部開口水的流速。

(10) 設函數 $f(x)=x^3-x^2-2x+2$ 的圖形上，

(a)請問 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=$？(b)求出斜率為 -1 的切線方程式。

(11) 設 $f(x)=x^3+ax^2+b$， $a,b\in R$ ，若 $y=f(x)$之圖形通過點(1,4)且在此點的斜率為−3，則求 a,b 之值為何？

(12) 設 $p(x)$為三次實係數多項式函數，其圖形通過(1,3),(−1,5)兩點。若 $p(x)$的圖形在點(1,3)的切線斜率為 7，而在點(−1,5)的切線斜率為−5，試求 $p(x)$。(2008 指考甲)

(13) 過曲線 $y=x^2+x+1$ 外一點 P(1,2)的切線方程式。

(14) 設 P 點為拋物線Γ：$y=f(x)=x^2+2x-7$ 外一點，已知過 P 點的切線有二條，其斜率分別為 2，−4，則 P 點坐標為何？

(15) 求曲線 $y=-x^3+3x^2$ 之切線中，斜率為最大之切線方程式。

(16) 設函數 $f(x)=\begin{cases} x^3 \ , & x\le 2 \\ x^2+ax+b \ , & x>2 \end{cases}$，若 $f(x)$在 $x=2$ 處可微分，試求數對(a,b)=？

(17) 設 $f'(a)$存在，求$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$=？

(18) 設 $f'(a)=k$，求$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{2h}$ = ？(以 k 表示)

(19) 令 $f(x)=x[x]$在 $x=0$ 是否可微分？

(20) 令 $f(x)=|x^2-3x|$，請問 $f(x)$在 $x=0$ 是否可以微分？

(21) 設 $f(x)=3x^3-4x^2+2x+1$，試求$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-4h)}{2h}$=？

(22) 已知 $f(x)=x^3-2x^2+5x-1$，則$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f'(x)-f'(3)}{x-3}$ =？

(23) 求下列各函數的導函數：

(a) $f(x)=\sqrt[3]{(x^2+1)^5}$ (b) $f(x)=\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^5$ (c) $f(x)=\dfrac{(2x+1)^4}{(x^2+1)^5}$

(24) 請求出 $f(x)=|x^2-4|$的導函數。

(25) 設函數 $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ 試求此函數在點(4,5)的切線方程式。

(26) 曲線 $y=\dfrac{x^2}{x^3+x+1}$ 在 $x=-1$ 處之切線方程式。

(27) 設拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 與直線 $7x-y-8=0$ 相切於點(2,6)，而與直線 $x-y+1=0$ 相切，求 a,b,c 之值。

進階問題

(28) 試求下列各函數的導函數：

(a) $f(x)=\sin\sqrt{x}$ (b) $f(x)=\sqrt{\cos x}(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2})$ (c) $f(x)=\tan\dfrac{1}{x}$

(d) $f(x)=\sin(x^2-1)$ (e) $f(x)=\sin^2(x^3)$ (f) $f(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$ (g) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

(29) 若直線 $y=x$ 與曲線 $y=x^3-3x^2+ax$ 相切，試求 $a=$？

(30) 直線 $ax+y=2$ 與曲線 $y=x^3$ 相切，求實數 $a=$？

(31) 曲線 $y=f(x)=x^3-6x$ 有一切線斜率為 6，求此切線方程式為何？

(32) 過點$(2,\dfrac{-2}{3})$，且與曲線 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x$ 相切的直線有幾條？其斜率分別為何？

(33) k 為整數，若二函數圖形 $f(x)=x^3-2x+1$ 與 $g(x)=x^2+2kx+1$ 在交點處有共同的切線，試求(a)$k=$？ (b)公切線方程式。

(34) 設 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$，

(a)利用定義證明 $f(x)$在 $x=0$ 可微分。(b)試求 $f'(x)=$？

綜合練習解答

(1) (a)10 (b)1 (c)0

(2) $f^{/}(0)<f^{/}(-1)<0<f^{/}(2)<f^{/}(3)$

(3) (a) 4 (b)12 (c)-4

(4) 1

(5) $\frac{-1}{110}$

(6) $y-2=\frac{1}{3}(x-5)$ [提示：$\because \lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-2}{x-5}=\frac{1}{3}$，$\therefore f(5)=2$，且切線斜率爲$\frac{1}{3}$]

(7) 不存在，0

(8) (a) $\frac{Q(t+h)-Q(t)}{h}$ 爲 t 時刻與 $t+h$ 時刻之間流經圓形截面的平均電荷變化率。$\lim\limits_{h\to 0}\frac{Q(t+h)-Q(t)}{h}$ 爲 t 時刻流經圓形截面的瞬時電荷變化率，即爲 t 時刻的電流大小。

(b)計算 $Q^{/}(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-2(1+h)^2+6(1+h)+2-(1^3-2\cdot 1^2+6\cdot 1+2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(h^2+h+5)=5$

(9) (a) $V^{/}(t)=200(1-\frac{t}{120})(\frac{-1}{120})$ (b)$\frac{-19}{12}$(公升/分鐘)

(10) (a)$3a^2-2a-2$ (b)$x+y-1=0$ 或 $27x+27y-59=0$

(11) $a=-3,b=6$

(12) $p(x)=x^3+3x^2-2x+1$

[提示：設 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，利用 $p^{/}(1)=7$，$p^{/}(-1)=-5$，$p(1)=3$，$p(-1)=5$ 解出 a,b,c,d。]

(13) $y-1=x$，$y-7=5(x-2)$

[提示：設切點爲(t,t^2+t+1)，切線斜率$=2t+1\Rightarrow$切線 $y-(t^2+t+1)=(2t+1)(x-t)$ 又切線通過 $P(1,2)\Rightarrow t^2-2t=0\Rightarrow t=0$ 或 2]

(14) $P(\frac{-3}{2},-10)$ [提示：$f^{/}(x)=2x+2$，解 $f^{/}(x)=2$ 或 $f^{/}(x)=-4\Rightarrow x=0$ 或-3 可得切點與切線分別爲$(0,-7)$、$2x-y=7$ 或$(-3,-4)$、$4x+y=-16$]

(15) $y-2=3(x-1)$

(16) $(a,b)=(8,-12)$

(17) $f(a)-af^{/}(a)$

[提示：$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\frac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-a\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$]

(18) $\frac{3k}{2}$

(19) 不可微分 [$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x[x]}{x}=0$，而 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x[x]}{x}=-1$]

(20) 不可微[$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{-x^2+3x}{x})=3$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x^2+3x}{x}=-3$]

(21) 77

(22) 14[提示：$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f^{/}(x)-f^{/}(3)}{x-3}=f^{//}(3)$]

(23) (a)$f'(x)=\dfrac{10x\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}{3}$ (b)$f'(x)=\dfrac{-10x(x^2+2)^4}{(x^2+1)^6}$

(c) $f'(x)=\dfrac{(2x+1)^3(8-10x-12x^2)}{(x^2+1)^6}$

(24) $f'(x)=\begin{cases}2x\,,|x|>2\\-2x\,,|x|<2\end{cases}$

(25) $y-5=\frac{4}{5}(x-4)$

(26) $2x+y+3=0$

(27) $a=3,b=-5,c=4$

(28) (a)$\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (b)$\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$ (c)$-\frac{1}{x^2}\sec^2\dfrac{1}{x}$ (d)$2x\cos(x^2-1)$

(e)$6x^2\sin(x^3)\cos(x^3)$ (f) $\dfrac{-\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}$ (g)$\sin x\sec^2 x+\sin x$

(29) $a=1$ 或$\dfrac{13}{4}$ [提示：設切點爲$(t,t)\Rightarrow 3t^2-6t+a=1$，又因爲切點在曲線上

$\Rightarrow t^3-3t^2+at=t$ 聯立解上述兩個方程式$\Rightarrow a=1$ 或$\dfrac{13}{4}$]

(30) -3[提示：設切點爲(t,t^3)，根據導數的定義，可以求出切線的斜率爲 $3t^2$，所以 $3t^2=-a$，又因爲 $at+t^3=2$，聯立解出 a、t]

(31) $y+4=6(x-2)$或 $y-4=6(x+2)$ [提示：設切點$(t,t^3-6t)\Rightarrow 3t^2-6=6\Rightarrow t=\pm1$]

(32) 3 ，0，$3\pm2\sqrt{3}$

(33) (a)$k=-1$ (b)$2x+y=1$

(34) (a)利用$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$(利用夾擊原理)

(b)當 $x\neq0$，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}+x^2(\cos\dfrac{1}{x})(\dfrac{1}{x})'=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$

補充教材

(甲)隱函數的微分

討論曲線的切線，本是幾何中的一個重要題材；但是，許多曲線並不是函數圖形，對於這類曲線，前面利用微分一個函數來求切線斜率的方法，無法直接利用在這類的曲線上。而我們知道基本上求曲線上一個點的切線，只須要這個點附近的圖形即可，因此可將曲線分成若干部分，使每一個部分都是函數圖形，再微分通過這個切點的函數，求出切線斜率，進一步求出切線的方程式。

例：試求$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$以點$(\frac{12}{5}，\frac{-6}{5})$爲切點的切線方程式。

(一)利用函數圖形：橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$不是函數圖形，

(二)利用隱函數的微分法：

顯函數與隱函數：

前面所提的函數，都是以 x 表示 y，叫做顯函數(explicit function)，例如：$y=x^3-x$，$y=\frac{x^2}{x+1}$ 都是顯函數。若方程式 $F(x,y)=0$，可以定義出函數 $y=f(x)$，而非解出 y 以 x 表示，則稱 y 爲 x 的隱函數(implicit function)。如方程式 $x^2-xy+y-4=0$ 可定義出一個函數 $y=f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}, x\neq 1$。故方程式 $x^2-xy+y-4=0$ 中的 y 爲 x 的隱函數。

隱函數的微分：

一般而言，方程式 $F(x,y)=0$ 不一定都可以定義出函數 $y=f(x)$。縱使可以，想解出 y 以 x 表示，有時亦很困難，例如：$\sin y+2y+x=0$，甚至不可能。在此情形下，我們可將 y 視爲 x 的可微分函數，全式對 x 微分，即可求得$\frac{dy}{dx}$，此種方法稱爲隱函數的微分法。若假定 $y=f(x)$存在且可微分，則 $y=f(x)$在曲線上點 **$P(x_0,y_0)$的導數**，記做$\frac{dx}{dy}|_{(x_0,y_0)}$或$\frac{dy}{dx}|_P$。

$F(x,y)=0$

視 y 爲 x 的函數 ↓ 等號兩邊對 x 微分

以 x,y 表示 y'

例如：

$F(x,y)=x^2+y^2-4=0$，將 y 視為 x 的可微分函數，全式對 x 微分，則$\dfrac{d}{dx}(F(x,y))=$ $\dfrac{d}{dx}(x^2)+\dfrac{d}{dx}(y^2)-\dfrac{d}{dx}(4)=0$，即 $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$，故$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x}{y}$，$y\neq0$。

[例題1] 若 $xy+y^2-x^2=1$ 試以隱函數的微分法求$\dfrac{dy}{dx}$與$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

Ans：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x+2y}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{10}{(x+2y)^3}$

[例題2] 試求 $2x^2+xy+y^2-4=0$ 以點 $P(-1,2)$為切點的切線方程式。Ans：$y-2=\dfrac{2}{3}(x+1)$

[例題3] 利用隱函數微分法來證明橢圓的光學性質。

[例題4] (已知切線⇒切點)

若直線 $x-4y+11=0$ 為Γ：$x^2+4y^2+2x-19=0$ 的一條切線，求其切點的坐標。

Ans：$(-3,2)$

(練習1) 試由方程式 $y^3+3xy+x^3-5=0$，求 $y'=$？ Ans：$y'=-\dfrac{x^2+y}{x+y^2}$

(練習2) 試由 $3x^2-2xy-y^2=3$，求$\dfrac{dy}{dx}|_{(1,0)}$。Ans：3

(練習3) 對方程式 $x^2-2xy-3y^2+2x-y-3=0$，令 $y=f(x)$，試求(1)$f'(x)$。(2)過點$(1,-1)$之切線方程式。

Ans：(1) $\dfrac{2x-2f(x)+2}{2x+6f(x)+1}$ (2)$x-2y-3=0$

(練習4) 求雙曲線 $x^2-4y^2-16y-17=0$ 上以點$(1,-2)$爲切點的切線方程式。
Ans：$x-1=0$

(練習5) 求曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$在點$(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$的切線及法線方程式。

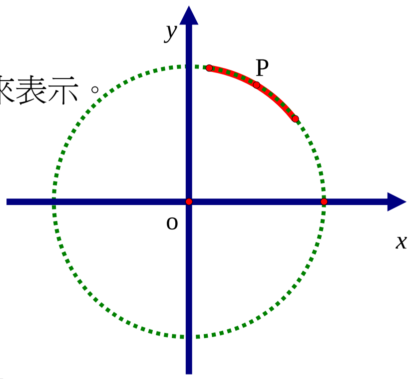
Ans：$x+y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x-y=0$

(練習6) 求曲線 $x^2+xy-2y^2=4$ 上與 $5x-2y=0$ 平行的切線。Ans：$5x-2y=\pm 8$

(乙)含參數的微分

前面講過函數 $y=f(x)$的微分，有時候 x 與 y 的函數關係不是直接確定的，而是通過一個輔助變量(稱爲參數)給出的。例如在運動問題中，常常將時間做爲參數。平面上的曲線除了用 $y=f(x)$表示之外，也可以用參數形式與極座標的形式來表示。

例如：當我們考慮 $P(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$附件的單位圓，如右圖



我們可以用參數式$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$，$\frac{\pi}{3}-\delta\le t\le\frac{\pi}{3}+\delta(\delta>0)$來表示。

P 點附近的圓可以用函數 $y=f(x)$來表示，

故可得 $y(t)=f(x(t))$，因爲 $x'(t)\neq 0$，$y'(t)\neq 0$

所以根據連鎖法則，$y'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)$

當 $t=\frac{\pi}{3}$時，$f'(x(\frac{\pi}{3}))=\dfrac{y'(\frac{\pi}{3})}{x'(\frac{\pi}{3})}\Rightarrow f'(\frac{1}{2})=\dfrac{\cos\frac{\pi}{3}}{-\sin\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

因此以 P 爲切點的切線爲 $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=(-\frac{1}{\sqrt{3}})(x-\frac{1}{2})$。

一般而言，如何由參數 t 來計算 y 對於 x 的導函數或導數？

設 $x=x(t)$、$y(t)$定義在$[\alpha,\beta]$上，且都對於 t 可微分，而且 $x'(t)$和 $y'(t)$不同時爲 0，

不妨假設 $x'(t_0)\neq 0$，則函數 $x=x(t)$可以確定 t 是 x 的可微分的函數 $t=t(x)$(在 t_0 附近)且 $t'(x_0)\neq 0$，$x_0=x(t_0)$

因爲 $y(t)=f(x)=f(x(t))$，根據連鎖法則，$y'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)$

若 $t=t_0$ 且 $x'(t_0)\neq 0$，則 $f'(x(t_0))=\dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$。

上述的過程只要 $x^{/}(t_0)\neq 0$ 就會成立。因此我們可以寫成

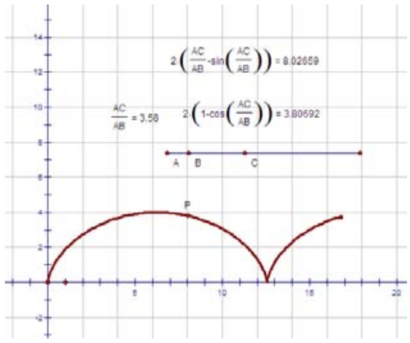
當 $x^{/}(t)\neq 0$，y 對於 x 的導函數 $f^{/}(x(t))=\dfrac{y^{/}(t)}{x^{/}(t)}$，亦可以用 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 來表示。

[例題5] 考慮一平面曲線 $\begin{cases} x=r(t-\sin t) \\ y=r(1-\cos t) \end{cases}$，$0<t<2\pi$，

(1)試用 GSP 畫出 $r=2$ 時的圖形。

(2)試求以 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 時，所對應點爲切線的方程式。

Ans：(2) $y-\dfrac{r}{2}=\sqrt{3}\left(x-r\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$



[例題6] 曲線Γ用極座標來表示($r=r(\theta)$)此曲線的參數形式可表爲：$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$，

$\alpha\leq\theta\leq\beta$，試求 $\dfrac{dy}{dx}=$？　　Ans：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{r^{/}(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r^{/}(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$。

(練習7) 曲線Γ是由參數方程式 $\begin{cases} x(t)=t^2 \\ y(t)=t^3-3t \end{cases}$

(1)試說明 Γ在點(3,0)處有兩條切線，並找出切線方程式。

(2)曲線Γ在 A 點的切線爲水平線，試求 A 點座標。

Ans：(1) $y=\sqrt{3}(x-3)$、$y=-\sqrt{3}(x-3)$　(2)A(1,−2)或(1,2)

(練習8) 考慮心臟線 C：$r=1+\sin\theta$，試利用例題 6 的結果，求下列兩小題：

(1)當 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 時，試求所對應的點爲切點的切線斜率。

(2)是找出曲線 C 的水平切線所對應的切點。

Ans：(1)−1　　(2) $[2,\dfrac{\pi}{2}]$、$[\dfrac{1}{2},\dfrac{7\pi}{6}]$、$[\dfrac{1}{2},\dfrac{11\pi}{6}]$。