第三章 矩陣

§3–1 矩陣的運算

(甲)矩陣的基本認識

(1)矩陣的引入：

聯立方程組：$\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-3z=-3 \\ 3x-y+2z=6 \end{cases}$ $\leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

矩陣 M=$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ 直行橫列 $\rightarrow$列 $\downarrow$行

(2)矩陣的基本名詞：

(a)元(element)：矩陣中列出來的每個數稱爲矩陣的**元**。

(b)列(row)：同一水平線各元合稱此矩陣的**一列**。

(c)行(column)：同一鉛直線各元合稱此矩陣的**一行**。

(d)位於第 i 列，第 j 行的元稱爲**(i,j)元**。

(e)當一個矩陣 M 有 n 列 m 行時，我們稱 M 爲 **$n\times m$ 階的矩陣**。

(f)當一個矩陣M有n列n行時，我們稱M爲**n階方陣**。

(3)矩陣的相等：

設A=$[a_{ij}]_{m\times n}$，B=$[b_{ij}]_{p\times q}$，若$m=p$，$n=q$，且對於任意i與j恆有$a_{ij}=b_{ij}$，
則稱A和B相等，以A=B表示。

(4)特殊矩陣：

(a)設A=$[a_{ij}]_{m\times n}$是一個$n\times m$階矩陣，作一$n\times m$階的矩陣B=$[b_{ij}]_{m\times n}$，其中$b_{ij}=a_{ji}$，
則稱矩陣B爲矩陣A的**轉置矩陣**，符號：B=A^T。

例如：A=$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -9 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$，$A^T$=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -9 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(b)設A=$[a_{ij}]_{m\times n}$是一個n階方陣，若$a_{ij}=a_{ji}$，則稱A是**對稱方陣**。

例如A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$爲一個對稱方陣。

(c)設A=$[a_{ij}]_{m\times n}$是一個n階方陣，若$a_{ij}=-a_{ji}$，則稱A是**反對稱方陣**。
注意主對角線a_{ii}=0

例如：$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$是反對稱方陣。

(d)單位方陣：若一個n階方陣，由左上角到右下角的對角線上各位置的元(即(1,1),(2,2)…(n,n)元)都是 1，而其餘各元都是 0，則稱爲**n階單位方陣**，以$\mathbf{I}_n$表之。例：$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，…..，$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$。

(乙)矩陣的加減法與係數積

(1)矩陣的加法：

加法的定義：設$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{i\times j}$，則$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$。

例題：設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

求(1)A+B，B+A (2)A+(B+C)，(A+B)+C

由上面的例子，可知**A+B=B+A，A+(B+C)=(A+B)+C**

(2)減法的定義：設$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{i\times j}$，則$A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$。

例題：：設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，求 A−B，B−A

由上例可知 A−B≠B−A。

(3)矩陣加法與減法的基本性質：

(a)加法單位元素：

若 A 爲 $m\times n$ 階矩陣，若存在一個 $m\times n$ 階矩陣 O，使得 A+O=O+A，則稱 O 爲 $m\times n$階矩陣之加法的單位元素。$O=\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$稱爲 $m\times n$階**零矩陣**。

(b)加法反元素：

設A=$[a_{ij}]_{m\times n}$為一 $m\times n$ 階矩陣，若存在一個矩陣$-$A，使得A+($-$A)+($-$A)+A=O，則稱$-$A為A的$m\times n$階矩陣之**加法反元素**。即$-$A=$[-a_{ij}]_{m\times n}$

根據加法反元素的定義，可知A$-$B=A+($-$B)

(c)設 A、B、C 為 $m\times n$ 階矩陣，則下列性質成立：

①交換律：A+B=B+A

②結合律：A+(B+C)=(A+B)+C

③A+($-$A)+($-$A)+A=O

④$-$($-$A)=A

⑤$-$(A+B)=$-$A+($-$B)

(d)移項法則：

設 A、B、C 都是同階方陣，且 A+B=C，則 A=C$-$B 且 B=C$-$A。

[證明]：

因為 A+B=C，等式兩邊同加($-$B)得

(A+B)+($-$B)=C+($-$B)

A+(B+($-$B))=C+($-$B)

A+O=C$-$B

A=C$-$B，同理 B=C$-$A。

[討論]：若 A+B=A+C，則 B=C 恆成立嗎？

(4)係數積的定義：

(a)定義：

若A=$[a_{ij}]_{m\times n}$為一$m\times n$階矩陣，而r是任意實數，則 rA=$[ra_{ij}]_{m\times n}$，

此時稱rA是A係數積。

例題：設A=$\begin{bmatrix}3&1&4\\2&-1&-2\\2&4&1\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&4&-1\\-2&1&1\end{bmatrix}$，試求 2A，3B，2A+3B。

性質：設 A、B 為同階的矩陣，r,s 為實數，則下列性質成立：

(a)r(A+B)=rA+rB (b)(r+s)A=rA+sA (c)(rs)A=r(sA)

注意事項：

(a)二矩陣若大小一樣(都是 m 列 n 行)，則可以相加減。

例如：A=$\begin{bmatrix}9&4&0\\-5&6&7\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}-1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$，A+B=$\begin{bmatrix}8&6&3\\-1&11&13\end{bmatrix}$

但是，$\begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -5 & 6 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$不能相加

(b)一矩陣可以乘上 r 倍(r 爲實數，相當於**每個位置都乘上 *r* 倍**)

例如：A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，則 2A=$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$，$-$A=$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

[例題1] 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，

試解方程式 $3X-2B+3A=2X-5C$。

[解答]：

$\because 3X-2B+3A=2X-5C$

$\Rightarrow\ X=-3A+2B-5C$

$=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -15 & -20 & 35 \\ -25 & -10 & -5 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} -16 & -20 & 41 \\ -21 & -12 & -8 \end{bmatrix}$

(練習1) 設 A=$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$、B=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$、C=$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$，求下列各題中的矩陣 X。

(1)A−B+2X=C+3A+X。 (2)3X+A+B+C=A−2B+4C+X

Ans：(1) $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 9 & 6 & 12 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 & \frac{-3}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{-3}{2} & -3 & 6 \end{bmatrix}$

(練習2) 設M={$x|x$爲整數，$-3\le x\le 4$}，若 3 階方陣A之元素$a_{ij}\in$M，

試問(1)A爲對稱方陣有幾個？ (2) A爲反對稱方陣有幾個？

Ans：(1)8^6 (2)7^3

(練習3) 設 A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$，求 $(A+B)^T$ 與 A^T+B^T。

Ans：(A+B) = $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 11 \\ 11 & 8 & 11 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $(A+B)^T$ = $\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 3 & 8 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$

$A^T+B^T=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 3 & 8 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 顯然 $A^T+B^T=(A+B)^T$

(丙)矩陣的乘法

(1)矩陣乘法的定義：

若A為一個$m\times n$的矩陣，而B為是一個$n\times p$的矩陣，則其乘積AB是一個$m\times p$的矩陣，而且AB的(i,j)元是由A的第i列中各元(有n個)與B中的第j行中各對應元(有n個)之乘積和。

即 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np} \end{bmatrix}$，

AB=C $\Leftrightarrow$ 對於每組(i,j)元c_{ij}，$i=1,2,\dots,m$、$j=1,2,\dots,p$都有

c_{ij}= 第 i 列 $[a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ a_{i3}\ \ \dots\ \ a_{in}]$ 與第 j 行 $\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \cdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ 的元素對應相乘

$$=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

根據前面的定義：

$$\underset{m\times n}{\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{第} & i & \text{列} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}}\times\underset{n\times p}{\begin{bmatrix} \vdots & \text{第} & \vdots \\ \vdots & j & \vdots \\ \vdots & \text{行} & \vdots \end{bmatrix}}=\underset{m\times p}{\begin{bmatrix} & & \\ & \square & \\ & & \end{bmatrix}}$$

第 i,j 位置等於
第一個的第 i 列和第二個的第 j 行作內積

可以看出**兩矩陣的大小必須互相配合才能相乘**，由上述理論可得

($m\times n$ 的矩陣)‧($n\times p$ 的矩陣)= ($m\times p$ 的矩陣)

例子：

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (2,5)\text{和}(0,1)\text{的內積} & (2,5)\text{和}(-2,-3)\text{的內積} & (2,5)\text{和}(0,6)\text{的內積} \\ (-1,4)\text{和}(0,1)\text{的內積} & (-1,4)\text{和}(-2,-3)\text{的內積} & (-1,4)\text{和}(0,6)\text{的內積} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2\cdot 0+5\cdot 1 & 2\cdot(-2)+5\cdot(-3) & 2\cdot 0+5\cdot 6 \\ (-1)\cdot 0+4\cdot 1 & (-1)\cdot(-2)+4\cdot(-3) & (-1)\cdot 0+4\cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 5 & -19 & 30 \\ 4 & -10 & 24 \end{bmatrix}$$

矩陣的乘法就像是向量內積的推廣！

[例題2] (1)$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}=$？ (2)$\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}=$？

(3)$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & -6 & 9 & 6\\0 & -7 & 10 & 7\\5 & 8 & -11 & -8\end{bmatrix}=$？(4)$\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\2 & 1 & -3\\4 & -3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\2 & 1 & 1 & 1\\1 & -2 & 1 & 2\end{bmatrix}=$？

Ans：(1) $\begin{bmatrix}1 & 4 & 4\\3 & 5 & -2\end{bmatrix}$(2) 不能相乘

(3)$\begin{bmatrix}19 & 4 & -4 & -4\end{bmatrix}$ (4)$\begin{bmatrix}-3 & -3 & 0 & 1\\1 & 15 & 0 & -5\\-3 & 15 & 0 & -5\end{bmatrix}$

(練習4) 設 A=$\begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\5 & 8 & 0\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}2 & -5 & 1 & 4\\4 & 2 & 0 & 3\\-3 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$，試求 AB，並觀察 BA 是否存在？

Ans：$\begin{bmatrix}23 & -3 & 0 & 20\\42 & -9 & 5 & 44\end{bmatrix}$，BA 不存在

(練習5) 設二階方陣A=$\begin{bmatrix}0 & -1\\x & y\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}-x & 0\\x & y\end{bmatrix}$

(1)若$A^3=-A$，求實數x,y之值。

(2)求AB=？

Ans：(1)$x=1,y=0$ (2) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}$

(練習6) 若A=$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，則$(AB)^T$=？$B^TA^T$=？

(2)矩陣乘法的性質：

(a)若 A、B、C 為矩陣，且(AB)C 與 A(BC)都有意義，
則有(AB)C=A(BC)。

(b)若 A、B、C 為矩陣，且以下各矩陣運算都有意義，
則 A(B+C)=AB+AC，(B+C)A=BA+CA。

(c)若 A、B 為矩陣，*r* 為實數，且以下各矩陣運算都有意義，
則 *r*(AB)=(*r*A)B=A(*r*B)。

矩陣沒有以下性質：

(a)**交換律不成立**：AB≠BA(除了特殊情形外)

例如：設 A=$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$⇒AB=$\begin{bmatrix}-5 & 4\\ 4 & 8\end{bmatrix}$，BA=$\begin{bmatrix}-6 & 1\\ 2 & 9\end{bmatrix}$，AB≠BA

例如：設 A=$\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

⇒ AB=$\begin{bmatrix}-1 & 8 & 7\\ 9 & 12 & 7\\ 12 & 18 & 11\end{bmatrix}$，BA=$\begin{bmatrix}13 & 29\\ 10 & 9\end{bmatrix}$，AB≠BA

例如：A=$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$，AB=$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}$，BA=$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}$，**AB=BA**

(b)**消去律不成立**：$AB=AC$時$\not\Rightarrow$ $B=C$ (除了特殊情形外)

例如：$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$但$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

(c)若 AB=O(零矩陣)，則 A=O 或 B=O 是**錯誤的**。

例如：$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，但前二者都不是零矩陣。

(d)**二項式定理不能適用於矩陣：**

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$不能寫成$A^2+2AB+B^2$($AB=BA$才可以)

(練習7) 下列各敘述何者正確？

(A)若 A 是 n 階方陣，B 是 m 階方陣，則 AB 是 $n+m$ 階方陣

(B)兩矩陣相乘滿足交換律，即 $AB=BA$

(C)矩陣對乘法滿足消去律，也就是說：若 $AB = AC$，則 $B = C$
(D)若 A、B、C 為矩陣，且對運算有意義時，則滿足分配律，
即 $A(B + C) = AB + AC$
(E)若 A、B 為矩陣，r 為實數，且對運算有意義時，則滿足乘法對係數積的結合律，即 $r(AB) = (rA)B = A(rB)$　Ans：(D)(E)

(練習8) 設A、B、C均為n階方陣，下列性質何者成立？(A)(A+B)C=AC+BC (B)$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$(C)若$A^2=O$，則A=O (D)若AB=AC，且A≠O，則B=C (E)(A+B)C=AC+BC。Ans：(A)(E)

(丁)乘法反矩陣

(1)矩陣的乘法反元素：
在實數 R 中，
設 a 為一個實數，$a\cdot1=1\cdot a=a$，我們在數學上稱 **1** 為**乘法單位元素**。
若 $a\neq0$，$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$，稱 a 與$\frac{1}{a}$互為**乘法反元素**。
在矩陣的乘法運算中，是否有類似實數乘法的結構呢？

例題：設 $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$，可否找到一個 2 階方陣 I，使得 AI=IA=A 呢？
令 $I=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，因為 AI=IA=A $\Rightarrow\begin{cases}a+3c=1\\2a+4c=2\end{cases}$且$\begin{cases}b+3d=3\\2b+4d=4\end{cases}\Rightarrow a=1$，$b=0$，$c=0$，$d=1$ 即 $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

(a)單位方陣：
若一個 n 階方陣，由左上角到右下角的對角線上各位置的元(即(1,1),(2,2)…(n,n)元)都是 1，而其餘各元都是 0，則稱為***n*階單位方陣**，以$\mathbf{I}_n$表之。

例：$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，.....，$I_n=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&&&0\\0&&\ddots&&0\\\vdots&&&1&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$。

(b)設 A為$m\times n$階的矩陣，則$AI_n=I_mA=A$。
當$m=n$時，A為n階方陣，且$A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$，
此時我們可以稱$\mathbf{I}_n$為n階方陣乘法的單位元素。

(c)矩陣的乘法反元素：
設A是一個n階方陣，若有n階方陣B使下列成立$AB=BA=I_n$，
則稱B為A的**乘法反元素(反矩陣)**，記為$\mathbf{B=A^{-1}}$。
[問題與討論]：
若$AB_1=B_1A=I_n$且$AB_2=B_2A=I_n$，則$B_1=B_2$會成立嗎？

(2)如何找乘法反元素(反矩陣)：

例子：設A=$\begin{bmatrix}1&2\\3&7\end{bmatrix}$，求一 2 階方陣B使得AB=$I_2$，令B=$\begin{bmatrix}x&u\\y&v\end{bmatrix}$，則可得

兩個聯立方程組：$\begin{cases}x+2y=1\\3x+7y=0\end{cases}$與$\begin{cases}u+2v=0\\3u+7v=1\end{cases}$，因為det(A)=$\begin{vmatrix}1&2\\3&7\end{vmatrix}$≠0，這兩個聯立方程組的係數矩陣都是原來的矩陣A，而解這個聯立方程組可以利用A的增廣矩陣的列運算，即

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&7&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列運算}}\begin{bmatrix}1&0&7\\0&1&-3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&2&0\\3&7&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列運算}}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix},$$

此時B=$\begin{bmatrix}7&-2\\-3&1\end{bmatrix}$，但我們可以觀察上面兩個增廣矩陣的列運算，我們可以使用相同的基本列運算，使得它們的前兩行的係數都相同，因此此處可以將它們合併來計算

$$M=\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&7&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{(-3)R_1+R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&-3&1\end{array}\right]\xrightarrow{(-2)R_2+R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&7&-2\\0&1&-3&1\end{array}\right]$$

(1)一般找反矩陣的方法：

n階方陣A=$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$仿照上述的方法，做一個$n\times 2n$矩陣M，

M=$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}a_{11}&a_{12}&\cdots&\cdots&a_{1n}&1&0&\cdots&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&\cdots&a_{2n}&0&1&&&0\\\vdots&\vdots&\ddots&&\vdots&\vdots&&\ddots&&\vdots\\\vdots&\vdots&&\ddots&\vdots&\vdots&&&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&\cdots&a_{nn}&0&0&\cdots&\cdots&1\end{array}\right]$=[A|$I_n$]，對M作基本列算，

若經過一連串的列運算，可得M'=[I|B]，則B即為A的反矩陣。

(2)二階反矩陣：

若設 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，若 $\det(A)=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$，

則反矩陣 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

記法：*a,d* 對調；*b,c* 變號⇒主對調,副變號,再除以 det(A)

[證明]：設 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，$A^{-1}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{bmatrix}$，$AA^{-1}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

即$\begin{cases} ax_1+by_1=1 \\ cx_1+dy_1=0 \end{cases}$，$\begin{cases} ax_2+by_2=0 \\ cx_2+dy_2=1 \end{cases}$，利用克拉瑪公式

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det(A)}=\dfrac{d}{\det(A)} \\ y_1=\dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)}=\dfrac{-c}{\det(A)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det(A)}=\dfrac{-b}{\det(A)} \\ y_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)}=\dfrac{a}{\det(A)} \end{cases}，得 A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(3)三階反矩陣：

設A=$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$，且detA≠0，如何找$A^{-1}$呢？

令B=$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$，且滿足BA=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

且 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$，
$\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$，$\vec{q}=(q_1,q_2,q_3)$，$\vec{r}=(r_1,r_2,r_3)$

因爲BA=$\begin{bmatrix} \vec{p}\cdot\vec{a} & \vec{p}\cdot\vec{b} & \vec{p}\cdot\vec{c} \\ \vec{q}\cdot\vec{a} & \vec{q}\cdot\vec{b} & \vec{q}\cdot\vec{c} \\ \vec{r}\cdot\vec{a} & \vec{r}\cdot\vec{b} & \vec{r}\cdot\vec{c} \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \vec{p}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{p}\cdot\vec{c}=0$，所以$\vec{p}$與$\vec{b}$、$\vec{c}$均垂直，

同理$\vec{q}$與$\vec{c}$、$\vec{a}$均垂直；$\vec{r}$與$\vec{a}$、$\vec{b}$均垂直。

因爲$\vec{p}$與$\vec{b}$、$\vec{c}$均垂直，且detA≠0

所以$\vec{p}=t(\vec{b}\times\vec{c})$，又$\vec{p}\cdot\vec{a}=1\Rightarrow t(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=1\Rightarrow t=\dfrac{1}{\det(A)}$。

故$\vec{p}=\dfrac{1}{\det(A)}(\vec{b}\times\vec{c})$。

同理$\vec{q}=\dfrac{1}{\det(A)}(\vec{c}\times\vec{a})$，$\vec{r}=\dfrac{1}{\det(A)}(\vec{a}\times\vec{b})$

所以$A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} \vec{b}\times\vec{c} \\ \vec{c}\times\vec{a} \\ \vec{a}\times\vec{b} \end{bmatrix}$。

(5)反矩陣的性質：

(a) **A有反矩陣的充要條件是det(A)≠0**。

例子：解聯立方程組$\begin{cases} x+2z=1 \\ 2x-y+3z=2 \\ 4x+y+8z=3 \end{cases}$的解。

將聯立方程組用矩陣的乘法表示為$\begin{bmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

令A=$\begin{bmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{bmatrix}$，X=$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$\Rightarrow$AX=$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

det(A)≠0 $\Leftrightarrow$ 聯立方程組恰有一解 $\Leftrightarrow$ X=$A^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow$ A有反矩陣

因此A有反矩陣的充要條件是det(A)≠0。

從上一個例題中，若A為一個 2 階或 3 階方陣，我們可以將聯立方程組寫成AX=C，此處的X=$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$，C=$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$，

聯立方程組有唯一解的充要條件是det(A)≠0。

結論： 設**A、B、C**為n階方陣
(1)A有反矩陣的充要條件是det(A)≠0。
(2)AB=AC，若det(A)≠0 (即 A^{-1}存在) ，則B=C
(3)AX=B，且A^{-1}存在$\Rightarrow$X=A^{-1}B
(4)XA=B，且A^{-1}存在$\Rightarrow$X=BA^{-1}
(5)AXB=C，且A^{-1}、B^{-1}存在$\Rightarrow$X=A^{-1}CB^{-1}

(b)若A、B都是n階方陣，且A和B都有反矩陣，則AB有反矩陣，
且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

[證明]：

$AB(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$

(c)$(ABA^{-1})^n=AB^nA^{-1}$

[證明]：

$(ABA^{-1})^n=(ABA^{-1})(ABA^{-1})(ABA^{-1})\ldots\ldots(ABA^{-1})(ABA^{-1})=AB^nA^{-1}$

再用數學歸納法即可得證

[例題3] (1)若矩陣$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，則反矩陣$A^{-1}=$________。

(2)若方陣X滿足$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}3 & -2\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -3 & 1\end{bmatrix}$，則$X=$__________。

Ans：(1) $\begin{bmatrix}\frac{1}{13} & \frac{5}{13}\\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13}\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}24 & 13\\ -34 & -18\end{bmatrix}$

[例題4] 請利用列運算求矩陣A=$\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 2 & -1\\ 4 & 2 & 1 & 16\end{bmatrix}$的反矩陣$A^{-1}$。

Ans：$A^{-1}=\begin{bmatrix}-10 & 43 & -4 & -5\\ 29 & -128 & 13 & 15\\ 14 & -60 & 6 & 7\\ -2 & 9 & -1 & -1\end{bmatrix}$

[例題5] 請求出 A=$\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -3 & -2\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}$的反矩陣。Ans：$\begin{bmatrix}-7 & -1 & 4\\ -11 & -2 & 6\\ 13 & 2 & -7\end{bmatrix}$

(練習9) 若二階方陣X滿足$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}X+2\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，則$X=$______。

Ans：$\begin{bmatrix}12 & -\frac{33}{2}\\ -5 & \frac{13}{2}\end{bmatrix}$

(練習10) 求 A=$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$的乘法反元素。Ans：$\frac{1}{15}\begin{bmatrix}0 & 9 & -3\\ -5 & 1 & 3\\ 5 & -4 & 3\end{bmatrix}$

(練習11) 若 A=$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & a\\ 1 & a & 3\end{bmatrix}$沒有乘法反元素，則 a=？ Ans：a=2 或−3

(練習12) 設$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 4\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}$

(1)試求A^{-1}，(2)若$AX=B$，求X，(3)若$XA=B$，求X .

Ans：(1)$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -4 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$，(2)$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，(3)$\begin{bmatrix}-12 & 3 & 7\\ -3 & 2 & 3\\ -21 & 5 & 12\end{bmatrix}$

(練習13) 設A為二階方陣，$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$O=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$；若$A^2-5A+6I_2=O$，則下列何者是 $5I_2-A$的乘法反矩陣？(A)A (B)$-A$ (C)$A-5I_2$ (D)$\frac{1}{6}A$ (E)A^2-5A . Ans：(D)

(丁)一些特殊矩陣的乘冪

[例題6] (對角矩陣的乘法)

若A=$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求$A^2$、$A^3$、$A^n$。

Ans：$A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3^2&0\\0&0&2^2\end{bmatrix}$、$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3^3&0\\0&0&2^3\end{bmatrix}$、$A^n=\begin{bmatrix}1^n&0&0\\0&3^n&0\\0&0&2^n\end{bmatrix}$

一般而言，若A=$\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$，則$A^n=\begin{bmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{bmatrix}$。

[例題7] (上三角矩陣的乘法⇒二項式定理)

設A=$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，對於任意正整數$n$，

(a)若$A=I_3+B$，請問B=？(b)請求B^2=？ B^3=？B^4=？(c)請求出A^n=？

Ans：(a)B=$\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ (b)$B^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$B^3=B^4=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

(c)$A^n=\begin{bmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$

嚴格上三角矩陣 $A=\begin{bmatrix}0 & d & f\\ 0 & 0 & e\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & de\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$A^n$=O($n\geq 3$)

[例題8] (矩陣的對角化)

$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，$D=PAP^{-1}$，求矩陣D？又$A^n$＝？

Ans：$D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$，$A^n=\begin{bmatrix}2^{n+1}-3^n & 3^n-2^n\\ 2^{n+1}-2\cdot 3^n & 2\cdot 3^n-2^n\end{bmatrix}$

[例題9] $I=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$與$J=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$，若二實數$a$與$b$滿足

$(\mathrm{I}+\frac{1}{5}J)^8=a\mathrm{I}+b\mathrm{J}$，求$a$，$b$之值？Ans：$a=1$，$b=51$

J 矩陣：

①二階矩陣： $J=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow J^2=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}=2J$ ，

$$\Rightarrow J^3=(J^2)J=(2J)J=2J^2\Rightarrow J^n=2^{n-1}J$$

②三階矩陣： $J=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow J^2=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}=3J$

$$\Rightarrow J^3=(J^2)J=(3J)J=3J^2=3^2J\Rightarrow J^n=3^{n-1}J$$

(練習14) 設A=$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，若$A^3-2A^2+5I=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$，I=$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

則數對(a,b,c)=？ Ans：$(a,b,c)=(5,2,14)$

(練習15) 設A=$\begin{bmatrix}2&1&2\\0&2&3\\0&0&2\end{bmatrix}$，A=$kI_3$+B，其中$k$為大於 1 的自然數，B中的元素均不為負，則B^3=？又令A^5=$[c_{ij}]_{3\times3}$，則c_{ij}中的最大值=？

Ans：$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，400

(練習16) 設方陣$A=\begin{bmatrix}0.7&0.4\\0.3&0.6\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}4&-1\\3&1\end{bmatrix}$，試求：

(1) P^{-1}。(2) $P^{-1}AP$。(3) A^n。

Ans：(1)$\begin{bmatrix}\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\\-\frac{3}{7}&\frac{4}{7}\end{bmatrix}(2)\begin{bmatrix}1&0\\0&0.3\end{bmatrix}(3)\begin{bmatrix}\frac{4+3(0.3)^n}{7}&\frac{4-4(0.3)^n}{7}\\\frac{3-3(0.3)^n}{7}&\frac{3+4(0.3)^n}{7}\end{bmatrix}$

綜合練習

(1) 設 A=$\begin{bmatrix}3&2&-1\\4&0&5\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}2&5&-4\\-3&2&1\end{bmatrix}$，C=$\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&-3\end{bmatrix}$試求一矩陣 X 滿足 2(X+B–A)=–(2B–3X)+A 成立。

(2) 設$\begin{bmatrix}\sin\theta+\cos\theta & \sin2\theta\\ \cos2\theta & \cos\theta-\sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & b\\ a & c\end{bmatrix}$，但$a>0\,,c>0$，則下列何者爲真？

(A)$a=\dfrac{1}{4}$ (B)$a=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ (C)$b=-\dfrac{3}{4}$ (D)$b=\dfrac{3}{4}$ (E)$c=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(3) 設 A、B、C 皆爲 3×3 矩陣，則下列敘述哪些是正確的?
(A) AB=BA 恆成立 (B)(AB)C=A(BC)恆成立 (C)若 AB=0 則 A=0 或 B=0
(D)若 det(A)≠0 且 AB=AC，則 B=C (E)$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 恆成立

(4) 設A、B皆爲二階方陣且I、O分別爲二階單位方陣與零矩陣，
則下列何者錯誤？
(A)若AB=O，則BA=O (B)若AB=I，則BA=I (C)A^2–I=(A+I)(A–I)
(D)若A^2=I，則A=I或A=–I (E)若AB=O，則A=O或B=O。

(5) 已知A、B、C爲n階方陣，$O_{n\times n}$爲n階零矩陣，則下列何者爲真？
(A)det(A+B)=det(A)+det(B) (B)若k爲實數，det(kA)=$k$det(A) (C)若AB=AC且 det(A)≠0，則B=C (D)若A、B均爲可逆方陣，則$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
(E)若AB=BA，則$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$。

(6) 直角坐標系動點 P 的坐標爲(x,y)，
且滿足$[x,y]\begin{bmatrix}5&-2\\2&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=[3,2]\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$，則一切 P 點所成的圖形其正焦弦長=？

(7) 設實係數二階方陣 A 滿足 A$\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，A$\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$，若 A=$\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$，則
a=_____，b=______，c=_______，d=________。(2006 指考數學甲)

(8) 已知兩個 2 階方陣X及Y滿足X+Y=$\begin{bmatrix}2&2\\2&5\end{bmatrix}$，X–Y=$\begin{bmatrix}0&2\\4&3\end{bmatrix}$，求$X^2-Y^2$=？

(9) 若矩陣A滿足方程式$X^2-2X-3I=O$ (I、O分別代表單位方陣與零矩陣)，則A的乘法反元素=？

(10) 若A=$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 3\\ 3 & -4 & 2\end{bmatrix}$，X=$\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$，且AX=$\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$，

(a)請求出A^{-1}=？ (b)X=？ (c)det(5A)=？

(11) 設A=$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$、P=$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$且$D=PAP^{-1}$，則

(a)矩陣D=？ (b)利用$D=PAP^{-1}$，計算A^n=？

(12) 設方陣A=$\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}$，其中$a\neq0$，證明：$A^n=\begin{bmatrix}a^n & na^{n-1}\\ 0 & a^n\end{bmatrix}$。

(13) 設A為n階方陣，試證：$A^2=I_n$的充要條件是$(A+I_n)(A-I_n)=O$。

(14) 若$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，則$A^5$=________。

進階問題

(15) 設A為n階方陣，試證明(a)$A+A^t$為對稱矩陣。(b)$A-A^t$為反對稱矩陣。

(16) 設AB有意義，求證：$(AB)^t=B^tA^t$。

(17) 設A為n階方陣，其元素皆為自然數排列情形如下？

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6 & 10 & \cdots\\ 2 & 5 & 9 & \cdots & \cdots\\ 4 & 8 & 13 & \cdots & \\ 7 & 12 & \cdots & & \end{bmatrix}$$，求a_{37}=？a_{ij}=？

(18) (a)設a為實數，試證明：對於所有的自然數n，$\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

(b)設A=$\begin{bmatrix}-5 & 4\\ -9 & 7\end{bmatrix}$，P=$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，求$P^{-1}AP$=？

(c)試求A^n=？

(19) 【Cayley−Hamilton 定理】

設二階方陣$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，試證$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$(零矩陣)。

綜合練習解答

(1) $\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 0 & -3 & -6\end{bmatrix}$

(2) (B)(C)(E)

(3) (B)(D)

【解法】

(A) × ：矩陣乘法沒有交換性

(B) ○

(C) × ：例如：$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，但前二者都不是零矩陣。

(D)○ ：行列式值不為 0 是有反方陣的充要條件，

故 $\det(A)\neq 0$ 表 A^{-1} 存在，

又 $AB=AC\Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}AC\Rightarrow B=C$

(E) × ：$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

這是矩陣基本性質，矩陣在某些性質上和「數字」很不相同，

容易混淆，因此學習上要特別澄清這些觀念。

(4) (A)(D)(E)

[提示：(A)反例 A=$\begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix}$、B=$\begin{bmatrix}-3&6\\1&-2\end{bmatrix}$滿足 AB=O 但 BA≠O，(D)反例 A=$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$(E)反例同(A)]

(5) (C)(D)(E)

(6) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

(7) a=4，b=−3，c=−9，d=7

(8) $\begin{bmatrix}6&10\\17&21\end{bmatrix}$

(9) $A^{-1}=\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}I$ [提示：$A^2-2A-3I=O\Rightarrow A(A-2I)=3I\Rightarrow A(\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}I)=I$]

(10) (a) $\begin{bmatrix}-6&8&-3\\-5&7&-3\\-1&2&-1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}19\\16\\4\end{bmatrix}$ (c)−125

(11) (a) $\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2^n-3^n&3^n-2^n\\2^{n+1}-2\times3^n&2\times3^n-2^n\end{bmatrix}$

(12) [提示：對 n 用數學歸納法]

(13) 證明略

(14) $\begin{bmatrix}32&80&400\\0&32&240\\0&0&32\end{bmatrix}$

[解法]

A=2I+B，其中 $B=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}$，且 $B^2=\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$B^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

利用二項式定理展開

$$A^5=(2I+B)^5$$
$$=C_0^5(2I)^5+C_1^5(2I)^4B^1+C_2^5(2I)^3B^2+\underbrace{C_3^5(2I)^2B^3+C_4^5(2I)^1B^4+C_5^5B^5}_{\text{爲}O\text{,因爲}B^3=0}$$
$$=32I+80B+80B^2$$
(15) 直接檢查定義

(16) [證明]：

(1)可令A=$[a_{ij}]_{m\times n}$，B=$[b_{ij}]_{r\times s}$，$\because$ AB有意義，$\therefore n=r$，則AB=C其階數爲$m\times s$，$\therefore (AB)^t$之階數爲$s\times m$。而A^t之階數爲$n\times m$，B^t之階數爲$s\times r$，$\because n=r$ $\therefore B^tA^t$有意義，且階數爲$s\times m$。

(2)$(AB)^t$之(i,j)元爲取(AB)之(j,i)元

=A之第j列與B之第i行的對應元素之積的和

$=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\ldots+..$

B^tA^t之(i,j)元爲B^t之第i列配乘上A^t的第j行

=B之第i行配乘上A之第j列

$=b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\ldots$

所以可知$(AB)^t$之(i,j)元=B^tA^t之(i,j)元。

(17) 43，$\dfrac{(i+j-2)(i+j-1)}{2}+j$

(18) (a)利用數學歸納法 (b) $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1-6n&4n\\-9n&6n+1\end{bmatrix}$

(19) 【詳解】

$$A^2=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{bmatrix}$$
$$\left(a+d\right)A=\left(a+d\right)\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+cd&ab+bd\\ac+cd&ad+d^2\end{bmatrix}$$
$$\left(ad-bc\right)I_2=\left(ad-bc\right)\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{bmatrix}$$
可得 $A^2-\left(a+d\right)A+\left(ad-bc\right)I_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=O_2$