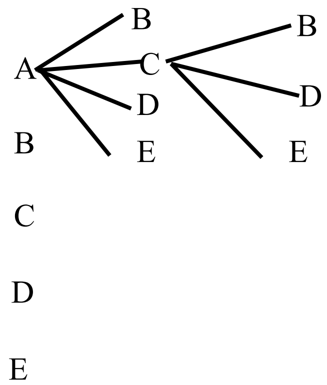
§2−2 排列

（甲）直線排列

(1)直線排列的引入：

例子：**從建中高二某班 5 個同學中，選出 3 人排成一列，有幾種排法？**



解法：5 個同學以 ABCDE 表示，選出 3 人排成一列，
我們將這個過程，分成 3 個步驟，配合樹狀圖，
可得排法共有 $5\times4\times3$ 種方法。

數學上，我們將這樣的排列方法稱爲在 5 個不同的事物中，選取 3 個排成一列，符號上以 P^5_3 來表示。即 $P^5_3=5\times4\times3$。

(2)直線排列的定義：

從 n 個**不同**的事物中，選取 m 個 $(1\le m\le n)$ 來排列，共有 $\boldsymbol{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}$ 種方法**[$\boldsymbol{n}$往下乘$\boldsymbol{m}$個]**。我們將這樣的方法數，用 P^n_m 來表示。

即 $P^n_m=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$。

爲了方便表示，規定 $n!=1\times2\times3\times\ldots\times n$，$0!=1$

因此 $P^n_m=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)\cdots2\cdot1}{(n-m)\cdots2\cdot1}=\dfrac{n!}{(n-m)!}$。

特別 $P^n_n=\dfrac{n!}{0!}=n!$。

結論：

(1)從 n 個**不同**的事物中，選取 m 個 $(1\le m\le n)$ 來排列，共有 P^n_m 種方法。

(2) $P^n_m=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

例子：$3!=6$，$4!=24$，$5!=120$，$6!=720$

例子：$P^6_4=6\times5\times4\times3=\dfrac{6!}{(6-4)!}=\dfrac{6!}{2!}$，$P^{10}_4=10\times9\times8\times7=\dfrac{10!}{6!}$

[例題1] 請計算下列各小題：

(1) $2P_3^{\,n}=3\cdot P_2^{\,n+1}+6P_1^{\,n}$，求 n=？(2) $5P_n^{\,9}=6P^{10}_{n-1}$，求 n=？

Ans：(1) $n=5$ (2) $n=7$

[例題2] 請求出下列各小題的方法數：

(1)甲乙丙三人在排成一列的 8 個座位中，選坐相連的三個座位，則有幾種坐法？

(2)9 個人組成一個少棒隊，已知三、四棒的人選已定，而投手與捕手要安排在第七、八、九棒，請問教練可以排出幾種不同的打擊順序？

Ans：(1)36 (2)720

(練習1) 設$P_3^{n+1}=10P_2^{n-1}$，求n=？ Ans：n=4 或 5

(練習2) 若 $2P^8_{n-2}=P^8_n$，則n=？ Ans：8

(練習3) 請證明：$P_r^n=P_r^{n-1}+r\,P_{r-1}^{n-1}$。

這個式子可以做這樣的解釋：

假設 50 個人中含有一人爲甲，則從 50 個人中選取 6 個之排列數爲P^{50}_6。利用加法原理，可將這樣的過程分成兩類：

不含甲之排列數爲P^{49}_6與含甲的排列數爲$P^6_1\times P^{49}_5$(某甲先選座位，剩下 5 個座位再由其他 49 人選取排列)。因此可得$P^{50}_6= P^{49}_6+ P^6_1\times P^{49}_5$。

(練習4) 某桌球隊要從 10 名選手中排出 5 名，分別參加五場單打友誼賽，10 名選手中近況特佳的有 3 位，教練決定任意安排他們分別在第一、三、五場出賽，另外兩場則由其餘選手任意選出排定，則此球隊出場比賽的名單順序一共可以有【　　】種。Ans：252

(練習5) 甲、乙、丙三人在排成一列的八個座位中選坐三個座位，但不能三個座位全相連，共有【　　】種坐法。Ans：300

(練習6) 兄弟二人在排成一列的 20 個空位中，選坐不相鄰的兩個座位，則有多少種不同的坐法。 Ans：342 (83 學科)

(3)有限制條件之直線排列：

(a)若要求 k 個人相連，先將這 k 個人視爲一整體，排定後再排此 k 個人。

(b)若要求 k 個人分開，則先排其他人，在將這 k 個人安排至其他人的空隙中。

(c)男女相間隔的排列，先排女人(或男人)，再插排入男人(或女人)。

(d)考慮反面計算：全部方法−不合的方法。

(e)應用排容原理。

[例題3] (有限制條件之直線排列)

甲乙丙丁等 7 人排成一列，請求出下列情形的方法數：

(1)甲乙丙三人相鄰　(2)甲乙丙分開　(3)甲乙相鄰，丙丁不相鄰

(4)甲不排首位 (5)甲不排首位，乙不排尾 (6)甲乙相鄰，甲丙不相鄰

Ans：(1)$3!\times5!=720$ (2)$4!\times P^5_3=1440$　(3)$4!\times2!\times P^5_2=960$

(4)$7!-6!=4320$(5)3720　(6)1200

[例題4] (有限制條件之直線排列)

(1)五男四女排成一列，男女相間隔之排法有幾種？

(2)五男五女排成一列，男女相間隔之排法有幾種？

Ans：(1)$5!\times4!$　(2)$2\times(5!)^2$

[例題5] 設a_1,a_2,a_3,a_4,a_5是 1,2,3,4,5 的一種排列(例如 13254,15432,…等均是 1,2,3,4,5 的一種排列)求滿足下列各式的排列數：

(1)$(2-a_4)(1-a_3)=0$　　(2)$(1-a_1)(3-a_3)\neq 0$

(3) $(1-a_1)(2-a_2)(3-a_3)(4-a_4)(5-a_5)\neq 0$

Ans：(1)42 (2)78 (3)44

(練習7) 一對新婚夫妻家庭有 6 人排成一列拍結婚照,但新婚夫妻一定排在中間的兩個位置，請問共有幾種排法？ Ans：48

(練習8) 有 4 個女生 3 個男生排成一列，若要求男生排在一起，女生排在一起，則其排列方法有______種；若要求男女相間隔排列，
排列方法有_____種，3 個男生要分開排列的方法有_____種。
Ans：288，144，1440

(練習9) 甲乙丙丁戊己六人排成一列，求下列的排列數？
(1)乙丙均與甲相鄰 (2)甲乙相鄰，甲丙不相鄰 (3)甲乙丙中恰二人相鄰
Ans：(1)48 (2)192 (3)432

(練習10) 某班一天有七節課，每一節課均排不同的科目，其中體育課不排第四節，數學課不排第七節，請問這一天的課表有幾種排法？Ans：3720

(練習11) 甲,乙,丙…… 等七人排成一列，求甲不排首，乙不排次，丙不排三的排列數。Ans：3216

(練習12) 設 A,B,C,D 等十人排成一列，規定 A,B 不排首，C,D 不排末之方法有幾種？**Ans：8！×58**
[提示：全部−(A,B 排首)−(C,D 排末)+(A,B 排首且 C,D 排末)]

(練習13) 五對夫婦參加舞會，每個先生均不與他的太太共舞的情形有幾種？
Ans：44

(練習14) 有 A，B，C，D，E，F 六家，除 B 與 C 外，其餘任兩家之間均有直路相通，且無任三家在一直線上，今有一人自 A 出發，訪問其他五家，又返回 A，但每家不得重複訪問，則有【　　】種方法。Ans：72
[提示：若 ABCDEF 表示 A⇒B⇒C⇒D⇒E⇒F⇒A，以 A 爲起點，A 爲

終點，中間 B,C,D,E,F 任意排列，每一種排法對應一種走法，但 B,C 相鄰需排除掉，即 B,C 要分開]

(乙)有相同物的直線排列

例子：四個英文字母AAAB排成一列，請問有幾種排法？

[方法]：先將AAA這三個相同的字母視爲不同，設爲$A_1A_2A_3$

所以先視爲$A_1A_2A_3B$這 4 個不同字母的排列，共有 4！種，如下所示：

$A_1A_2A_3B$，$A_1A_3A_2B$，$A_2A_1A_3B$，$A_2A_3A_1B$，$A_3A_1A_2B$，$A_3A_2A_1B$

$A_1A_2BA_3$，$A_1A_3BA_2$，$A_2A_1BA_3$，$A_2A_3BA_1$，$A_3A_1BA_2$，$A_3A_2BA_1$

$A_1BA_2A_3$，$A_1BA_3A_2$，$A_2BA_1A_3$，$A_2BA_3A_1$，$A_3BA_1A_2$，$A_3BA_2A_1$

$BA_1A_2A_3$，$BA_1A_3A_2$，$BA_2A_1A_3$，$BA_2A_3A_1$，$BA_3A_1A_2$，$BA_3A_2A_1$

但是當我們將$A_1A_2A_3$還原成AAA的時候

$A_1A_2A_3B$，$A_1A_3A_2B$，$A_2A_1A_3B$，$A_2A_3A_1B$，$A_3A_1A_2B$，$A_3A_2A_1B$

以上 6 種排列情形，均代表同一種AAAB

換句話說 3！種的排列要視爲同一種，因此排列方法有$\frac{4!}{3!}$=4 種。

(1)有相同物的直線排列：

設有n件物品，共有k種不同不同種類，第一類有m_1個，第二類有m_2個，….,第k類有m_k個。(此處$n=m_1+m_2+m_3+\ldots+m_k$)，此處此n件物品排成一列，

共有$\frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\ldots\cdot m_k!}$種不同的排法。

例如：用 3 個相同的紅球，2 個相同的黃球，4 個相同的黑球，
排成一列有幾種排法？

[解法]：$\frac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 4!}$

[例題6] **pallmall** 一字中各字母排成一列

(1)有幾種排法？(2)所有之 l 皆相鄰而兩個 a 分開。

(3)其中三個 l 在一起，另一 l 分離

Ans：(1)840(2)36 (3)240

[例題7] 有 2 個相同的紅球，3 個相同的白球，4 個相同的黑球分給
(1)9 人 (2)11 人 每人至多一球，球一定要分完，請問有幾種分法？

[例題8] 鳴放氣笛作信號，長鳴一次需 4 秒，短鳴一次需 1 秒，每次間隔時間爲 1 秒，
請問 30 秒的時間可作出多少種的信號？Ans：235

[例題9] A,B,C,D,E,F,G 排成一列，求下列排列數：
(1)A,B,C 順序不變　(2)A 在 B,C 之前
(3)A 在 B 之前，F 在 G 之後　(4)A,B 在 C,D,E 之前
Ans：(1)840 (2)1680 (3)1260 (4)504

(練習15) Δ□□%%%&Σ以上 8 個符號排成一列，若%%%均不相鄰，
共有幾種排法？ Ans：1200

(練習16) 用 0,0,1,2,2,,2,3,3 排成一列
(1)形成幾個八位數？ (2)形成幾個八位偶數？
(3)形成幾個八位數且為 5 的倍數？Ans：(1)1260 (2)810 (3)360
[提示：(1)可考慮反面情形的計算 (2)偶數表示末位為 0 或 2
(3)末位數為 0]

(練習17) 七本書分給 10 個人，每人至多一本
(1)書本相同有幾種分法？ (2)書本不同有幾種分法？
Ans：(1)120 (2)604800

(練習18) LKKLMM 排成一列，要求同字不相鄰，方法有幾種？
Ans：30

(練習19) pontoon 一字，各字母排成一列，求下列各排列數：
(1)全部任意排成一列 (2)三個「o」完全在一起
(3)恰有兩個「o」在一起 (4) 三個「o」完全分開
Ans：(1)420 (2)60 (3)240 (4)120

(練習20) 甲，乙，丙，…，庚等 7 人排成一列，甲在乙的左方，
且在丙的左方有__________種排法。Ans： 1680

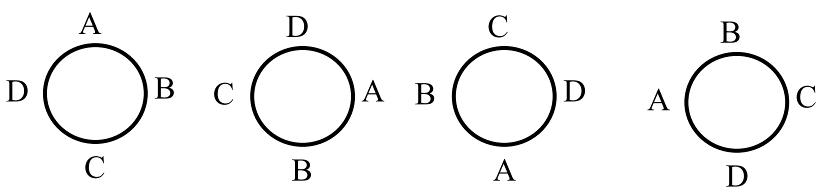
(練習21) factoring 中各字母，每次全取排列
(1)母音保持 a,o,i 之順序有幾種排法？
(2) 母音保持 a,o,i 之順序,同時子音保持 f,c,t,r,n,g 之順序有幾種排法？
Ans：(1)$\frac{9!}{3!}$ (2)$\frac{9!}{3!6!}$

(練習22) cabbage 一字，各字母排成一列，其中相同字母不相鄰，有幾種排法？
Ans：660[提示：考慮反面情形的計算]

(練習23) 一樓梯有 8 級，某人上樓，每步走一級或二級或三級，則此人上樓的方法有幾種？ Ans：81

(丙)環狀排列

例子：ABCD四個人圍成一個圓圈，請問有幾種方法？
[解法]：若將ABCD四人視為直線排列，共有 4！種方法，就圍成一圈的觀點



以上的四種排列ABCD、DABC、CDAB、BCDA均視為同一種排法，因此ABCD四個人圍成一個圓圈，共有$\dfrac{4!}{4}$種方法。

例子：在 6 人中選取四人圍成一個圓圈，請問有幾種方法？

[解法]：

先將在 6 人中選取 4 人作直線排列，有$P^6{}_4$種方法。

假設選了ABCD四個人作環狀排列，由前面的說明可知ABCD、DABC、CDAB、BCDA均視為同一種排法，因此每 4 個排法視為同一種，因此在 6 人中選取四人圍成一個圓圈共有$P^6{}_4\times\dfrac{1}{4}$種方法。

(1)環狀排列的定義：

自n個相異事物中，每次取m個沿圓周或封閉曲線排列，其排列數為$P^n{}_m\times\dfrac{1}{m}$。

[例題10] 5 對夫妻圍圓桌而坐，在下列情形中之排法有幾種？

(1)任意圍成一圓圈 (2)男女相間隔 (3)夫妻相鄰

(4)夫妻相鄰且男女相間隔 (5)男女相對 (6)夫妻相對

Ans：(1)$9!$ (2)$4!\times5!$ (3)$4!\times2^5$ (4)$4!\times2$ (5)$4!\times2^4\times5!$ (6)$4!\times2^4$

[例題11] 12 人圍坐下列情形之桌子，每邊所坐人數相同，則坐法有幾種？

(1)正三角形桌 (2)正方形桌 (3)正六角形桌 (4)長方形桌長邊 4 人，短邊 2 人。

Ans：(1)$\dfrac{12!}{3}$ (2)$\dfrac{12!}{4}$ (3)$\dfrac{12!}{6}$ (4)$\dfrac{12!}{2}$

結論：

(a)正 k 邊形之排列：

正 k 邊形的桌子，每邊坐的人數相同，則 n 人之排列數爲$\frac{1}{k}\times$(直線排列數)。

(b)長方形桌子之排列：

長方形桌，兩個長邊所作人數相同，另兩短邊所作人數亦相同，其排列數爲$\frac{1}{2}\times$(直線排列數)。

[例題12] 有紅色、藍色、綠色、紫色 4 種不同的水晶，串成一串項鍊，請問可以串成幾種不同的項鍊？　Ans：$\frac{1}{2}\times 4!\times\frac{1}{4}$

結論：

(a)取n個相異的珠子串成一個項鍊，有$\frac{1}{2}\times(n-1)!$種方法。

(b)n個相異的珠子，每次取m個串成一個項鍊，有$\frac{1}{2}\times P^{n}{}_{m}\times\frac{1}{m}$種方法。

(練習24) 爸爸，媽媽，哥哥，妹妹四人參加喜宴，與其他客人坐滿一張 12 人座位的圓桌。若四人座位相鄰，且哥哥與妹妹夾坐於爸爸，媽媽之間，則共有幾種不同的坐法？Ans：161280　(83 自)

(練習25) 甲乙丙丁....等 8 人爲成一個圓圈而坐，若甲乙相鄰且丙丁相對，有幾種排法？ Ans：192

(練習26) 紅，黃，白，…等 12 顆不同色的珠子，

(1)任選 8 顆作環狀排列，有__________種不同的排法。

(2)任選 8 顆(含紅，黃，白)串成一項圈，且紅，黃，白三色均不得相鄰，則可串出__________種不同的項圈。

Ans：(1)$\frac{P^{12}{}_{8}}{8}=2494800(2)P^{9}{}_{5}\times\frac{1}{5}\times P^{5}{}_{3}\times\frac{1}{2}$

(練習27) 8 人圍坐，

(1)坐一正方桌，每邊 2 人，有__________種坐法。

(2)坐一長方桌，長邊 3 人，短邊 1 人，則有__________種坐法。

Ans：(1)$\frac{8!}{4}=10080$(2)$\frac{8!}{2}=20160$

(練習28) A,B,C,D,E,F,G,H 共 8 人作環狀排列，求下列各排列數：

(1)A、B、C 互不相鄰　(2)A 恰與 B,C,D 之一相鄰。

Ans：(1)1440　(2)2880[提示：考慮 AC 相鄰−(CAB,BAC,DAC,CAD 之情形)=2×6！−5！×4=960，同理 AB,AD 相鄰也是同樣的方法]

(練習29) aaabb 作環狀排列共有幾種排法？　Ans：2

(丁)重複排列

例子：用 12345 五個字母排成一個三位數，

(1)數字可重複，可作出幾個三位數？

(2)數字不可重複，可作出幾個三位數？

[解法]：

(1)百位數、十位數、個位數都有 5 種方法⇒5^3種三位數字。(重複排列)

(2)百位數、十位數、個位數分別有 5、4、3 種方法⇒5×4×3 種三位數字。

(1)重複排列的定義：

從m種不同之事物選取n個排成一列(n,m無大小關係)，但可以重複選取，這種排列稱為重複排列，排列方法有m^n個。

[例題13] 請求出下列各小題的排列數：

(1)有 10 位選舉人，3 位候選人，採記名投票，每人都要投，請問有幾種結果？

(2)一個多重選擇題，有A,B,C,D,E五個選項，請問答案有幾種型式？

(3)10 名學生要爭奪 3 項比賽的錦標，請問得到冠軍的可能性有幾種？

(4)5 個人於十字路口話別後，同時離開(沒有 5 人同走一條路)共有幾種可能情形？

Ans：(1)3^{10} (2)2^5-1 (3)10^3 (4)4^5-4

[例題14] 設有渡船 3 艘，每船安全載量為 5 人，求下列人數安全過渡的方法有幾種？

(1)4 人　(2)6 人　(3)7 人

Ans：(1)3^4 (2)3^6-3 (3)2142

[例題15] 有 5 封不同的信件，投入甲乙丙丁 4 個不同的郵筒，則甲乙丙三郵筒均至少投入一封郵件的投法有幾種？　Ans：390

(練習30) 投擲 3 個不同的骰子，請問會有幾種不同的結果？
Ans：216

(練習31) 我國自用小汽車的牌照號碼，前兩位爲大寫英文字母，後四位爲數字，例如：AB－0950，若最後一位數字不用 4，且後四位數沒有 0000 這個號碼，那麼我國可能有的自用小汽車牌照號碼有多少個(A) $26\times25\times(4320-1)$ (B) $26\times25\times4320-1$(C) $26\times25\times(5040-1)$ (D) $26\times26\times(9000-1)$ (E) $26\times26\times9000-1$　個。Ans：(D)

(練習32) 7 個不同的書本分贈給 4 人，請求依下列情形分配的方法有幾種？
(1)甲至少分得一本書。 (2)甲恰得一本書
(3)甲至少二本書　(4)每人至少一本書
Ans：(1)4^7-3^7 (2)7×3^6 (3)$4^7-3^7-7\times3^6$ (4)$4^7-4\cdot3^7+6\cdot2^7-4\cdot1^7+1\cdot0^7$

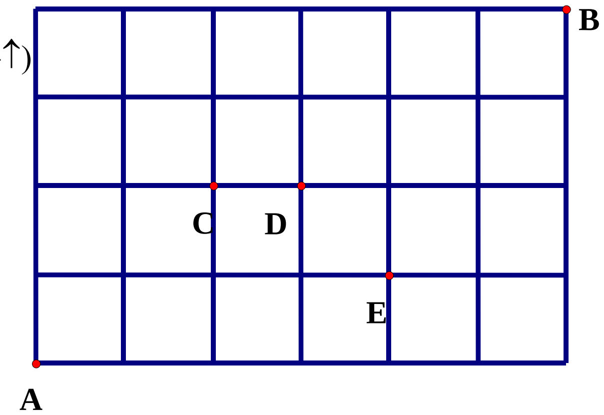
(練習33) 5 本不同的玩具，分贈給甲乙丙 3 人，每人至少得一件之方法有幾種？
Ans：150

(練習34) 渡船三隻，每船可載 6 人，則(1) 8 人過渡，有__________種安全渡法。
(2) 7 人過渡，但甲坐A船，有__________種安全渡法。
Ans： (1) 6510(2) 728

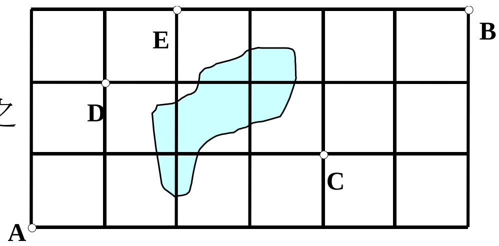
(戊)排列的應用

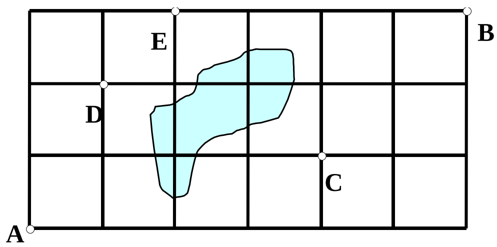
(1)走捷徑：

[例題16] 如圖，一人走捷徑由 A 到 B(即只能走→↑)
(1)走捷徑有幾種走法？
(2)若每次需經過 D，其走法有幾種？
(3)若不經過 C 且不經過 D，
其走法有幾種？
Ans：(1)210 (2)100 (3)80

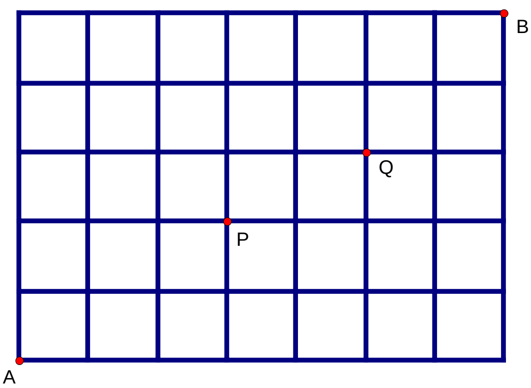


[例題17] 如圖，由 A 走到 B 走捷徑，但不走斜線部分區域之路徑，依下列情形求走法數。
(1)經 C (2)經 D (3)自由走但不經斜線區域。
Ans：(1)50 (2)8 (3)23

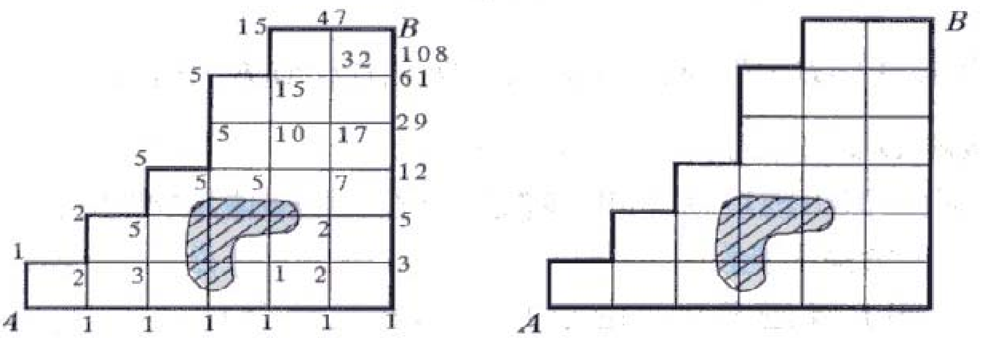




(練習35) 棋盤街道如右圖，南北街道有 8 條，東西街道有 6 條，某人自 A 取捷徑走到 B，下列走法各有多少種？
(1)走捷徑 (2)必須經過 P
(3)必須經過 P 與 Q (4)不許經過 P,Q
Ans：(1)792 (2)350 (3)180 (4)286



(練習36) 如右圖，由 A 走到 B 取捷徑。
但不許經過斜線區之方法有幾種？
Ans：108



(練習37) 在坐標平面上，自 A(−4,−3)走捷徑到 B(3,3)，
(1)要經過第二象限，請問有幾種走法？
(2)不經過原點有幾種走法？

(1) 經第二象限的走法

$$= (A-P-B) + (A-Q-B) + (A-R-B)$$

$$= \frac{7!}{3!\,4!}\cdot\frac{6!}{4!\,2!}+\frac{7!}{2!\,5!}\cdot\frac{6!}{5!\,1!}+\frac{7!}{1!\,6!}\cdot 1$$

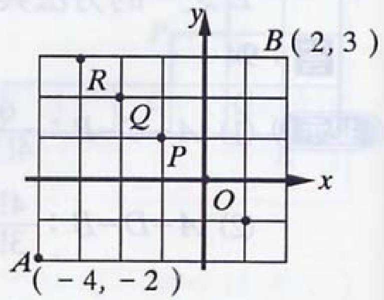
$$= 35\times 15+21\times 6+7\times 1$$

$$= 525+126+7 = 658$$

(2) 不經原點 = (全部) − (經原點)

$$= \frac{13!}{7!\,6!}-\frac{7!}{4!\,3!}\cdot\frac{6!}{3!\,3!} = 1716-700$$

$$= 1016$$



(2)數字問題：
數字排列的一些常識：
(a)首位數字不為 0
(b)奇數⇒末位數字奇數；偶數⇒末位數字為偶數；
4 的倍數⇒末兩位為 4 的倍數；3(9)的倍數⇒數字和為 3(9)的倍數
5 的倍數⇒末位數字 0 或 5

(c)字典式排列數之大小，由首位、次位數，...，之大小逐個計算。
(d)所有整數的和=(個位數字的和)+(十位數字的和)×10+(百位數字的和)×100+...
(e)不可含某數字：由個位數、十位數、看各位數字之其他可能情形，再用乘法原理，但要注意首位數字不為 0。
(f)至少含某一個數字=所有情形−(不含某數字)

[例題18] 用 0,1,2,3,4,5 作相異數字之四位數，請求出滿足下列要求的四位數個數？
(1)數字相異四位數 (2)偶數 (3)3 的倍數 (4)4 的倍數 (5)5 的倍數。
Ans：(1)300 (2)156 (3)96 (4)72 (5)108

[例題19] 以 0,1,2,3,4 不重複所作的三位數之總和為？
Ans：12990

(練習38) 用 2,3,4,5,6 五個數字排成三位數
(1)數字可以重複，有多少個不同的三位數。
(2)數字不可以重複，則所有三位數的和=？
Ans：(1)125 (2)26640

(練習39) 二位數中：(1)個位數字>十位數字共有幾個？(2)十位數字>個位數字共右幾個？ Ans：(1)36 (2)45

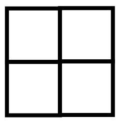
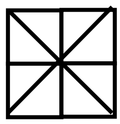
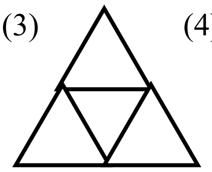
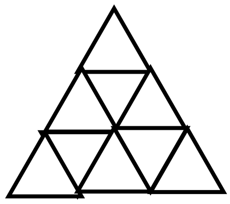
(練習40) 用 0,1,2,3,4,5 組成數字相異的四位數，求其中小於 2345 者共有幾個？
Ans：92

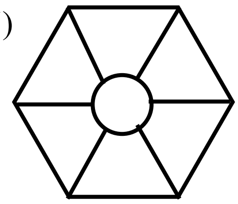
(練習41) 自 1~1000 之正整數中，至少有一個數字 7 的共有幾個？
Ans：271

(練習42) 用 0,1,2,3,4,5 作成四位數，
(1)數字不可重複，則大於 2100 者有多少個？
(2)數字可重複，則大於 2100 者有多少個？
Ans：(1)228 (2)827

(3)塗色問題：

[例題20] 今用 10 種不同的顏色，試塗下列可轉動(不可翻動)的積木板，但規定每一區域著不同的顏色，問各有幾種塗法？

(1)  (2)  (3)  (4) 

(5) 

[分析]：先固定塗色(視爲直線排列)，在除以旋轉合併數(觀察每幾類旋轉視爲同一種)]

Ans：(1)$\frac{P^{10}_4}{4}$ (2)$\frac{P^{10}_8}{4}$ (3)$\frac{P^{10}_4}{3}$ (4)$\frac{P^{10}_9}{3}$ (5)$\frac{P^{10}_7}{6}$

[例題21] 用 6 種顏色塗一正立方體每個面，且各面須不同色，有幾種不同的塗法？

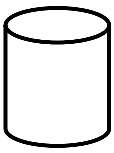
結論：可翻轉的立體圖色

(a)用 n 種不同的顏色塗正 y 面體(每面爲正 x 面體)，使每面不同色之塗法=$\dfrac{P^{n}_{y}}{x\cdot y}$ 。

(b)排列數=$\dfrac{\text{定位排列數}}{\text{平面上的旋轉}\times\text{空間中的翻轉}}$ 。

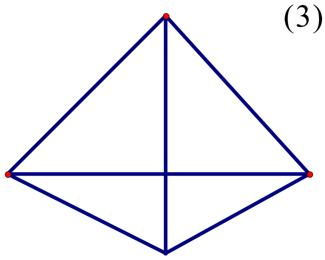
(練習43) 用 10 種不同的顏色塗下列各立體，請問有幾種塗法？

(1)



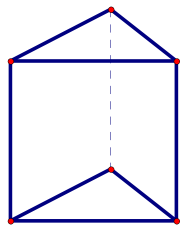
(直圓柱)

(2)



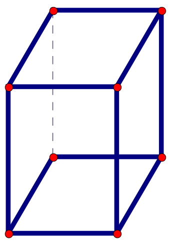
(正四面體)

(3)



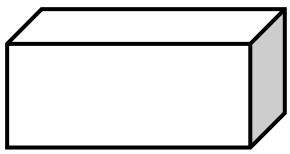
(正三角柱)

(4)



(正四角柱，底面正方形)

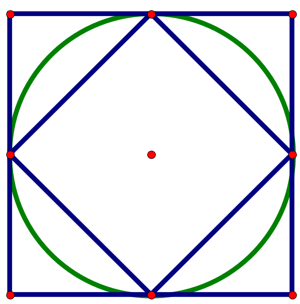
(5)



(底面是長方形的長方體)

Ans：(1)$\dfrac{P^{10}_{3}}{2}$ (2)$\dfrac{P^{10}_{3}}{3\times4}$ (3) $\dfrac{P^{10}_{3}}{3\times2}$ (4) $10\times9\times\dfrac{P^{8}_{4}}{4}\times\dfrac{1}{2}$(5) $10\times9\times\dfrac{P^{8}_{4}}{2}\times\dfrac{1}{2}$

(練習44) 用 9 種不同的顏色塗右圖中的 9 個區域，
每一個區域的顏色都不同，
則有幾種塗法(圖形可以旋轉)
Ans：90720



綜合練習

(1) 老師將 12 枝相同的鉛筆分給甲乙丙丁戊己六位小朋友，其兩位分得四枝，兩位分得兩支，而有兩位沒分到， 則有______種分法 。 (83 自)

(2) 由 1,2,3,4,5,6,7,8 這八位數字中取出五個不同數字作成五位數，且第一位,第三位,第五位均限用奇數，問可作成若干不同之數？

(3) 4 男 4 女排成二列，如圖：

O O O O
O O O O

求下列之排法數：

(a)上排是男生，下排是女生。 (b)上下兩排均是男女相間隔
(c)上下左右均是男女相間隔。

(4) A,B,C,D,E 等 7 人排成一列，求 A,B,C 三人都不與 D 相鄰的排法有多少種？

(5) 甲乙丙丁戊 5 人排成一列，
(a)若甲乙丙要保持順序不變(不一定要相鄰)，則排列方法有幾種？
(b)若甲一定要排在丙丁之間，則排列方法有幾種？

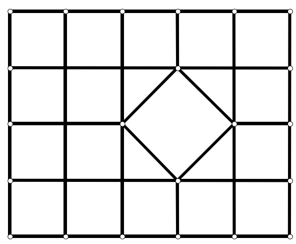
(6) 設x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6是 1,2,3,4,5,6 的任一排列，求下列的排列數：
(a)$(x_1-1)(x_2-2)(x_3-3)=0$ (b) $(x_1-1)(x_2-2)(x_3-3)(x_4-4)\neq 0$
(c) $(x_1-1)(x_2-2)(x_3-3)(x_4-4)(x_5-5)(x_6-6)$爲奇數

(7) 把「庭院深深深幾許」七個字全取而排列之，則：

(a)任意排列之方法有【 】種。
(b)使其中三個「深」字不完全連在一起的排法有【 】種。
(c)使其中三個「深」字完全分開的排法有【 】種。
(d)使其中三個「深」字至少有兩個相鄰的排法有【 】種。
(e)使其中三個「深」字恰有兩個相鄰的排法有【 】種。

(8) 左下圖所示爲一個含有斜線的棋盤街道圖。
今某人欲從 A 取捷徑走至 B，共有_____種走法。

A



B

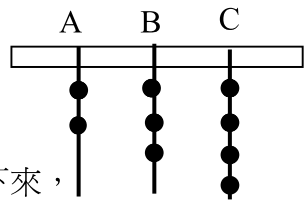
(9) 下圖共 12 格(每格有編號，以表示位置固定)，
今以黃色塗 3 格，紅色塗 4 格，綠色塗 2 格，
其餘 3 格不塗色，請問有幾種塗法？

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

(10) 某地共有 9 個電視頻道，將其分配給 3 個新聞台、4 個綜藝台及 2 個體育台共三種類型。若同類型電視台的頻道要相鄰，而且前兩個頻道保留給體育台，則頻道的分配方式共有__________種。(2006 學科)

(11) attribute 一字，各字母排成一列，求下列的排列數：
(a)子音排奇數位，母音排偶數位 (b)母音保持 a,i,u,e 之順序
(c)子音保持 t,t,,r,b,t 之順序 (d)子音母音的順序不變

(12) 鳴放氣笛作信號，長鳴一次需 15 秒，短鳴一次需 10 秒，每次間隔時間為 5 秒，請問 75 秒的時間可作出多少種的信號？



(13) 空中懸吊著 A、B、C 三串珠子，某神射手用槍彈一個個把珠子擊落，不分 A、B、C 的順序，任意射擊，但每次只能打落一粒珠子，請問 9 粒珠子全部打下來，共有多少種方法？

(14) 黑白棋排成上下二列，每列 9 個，上列 3 白 6 黑，下列 2 白 7 黑，二列棋子一一對應，若上下白子不相對，請問有幾種排法？

(15) 6 男 4 女圍成一圈而坐，女性不相鄰的坐法有幾種？

(16) (a)設有 12 人分三層，手拉手圍成三個圓圈，內層 3 人，中層 4 人，外層 5 人，則其排法有幾種？
(b)若 12 人等分為 3 組，不分組每 4 人圍成一圈其排法有幾種？

(17) 一根繩子長 100cm，從端點開始每 20cm 染上一種顏色，將其分乘 5 個區段，若已知繩子粗細一樣，有 5 種顏色可以染：
(a)5 個區段顏色均不同，共有多少種染好的結果？(注意：紅黃藍黑綠與綠黑藍黃紅算同一種染色的結果)
(b)相鄰區段不同色，共有多少種染好的結果？

(18) 高二有四個才藝班，開學時，來了五個轉學生，(a)如果每班最多安插三個人，則有__________種方法。(b)如果五個人中，甲，乙兩人不分在同一班，且每班安插的人數不限，則有__________種方法。

(19) 用紅、綠、黃 3 種顏色塗 5 個大小不同的木板，每一個木板只塗一色，要求三色都要用完，請問有幾種塗法？

(20) 在坐標平面上自 A(−3,−2)到 B(3,4)走捷徑，求下列情形有幾種走法？
(a)所有走法有幾種？(b)過原點 (c)不經過第二象限(d)不過(1,1)及(−2,3)

(21) 0，1，2，3，4，5 等六個數字所排成的三位數中，數字不重複者，共有__________個，其中可被 3 整除的，共有__________個。

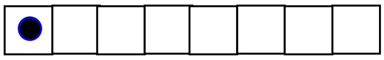
(22) 鉛印 1,2,3,…到 1000，則排字工人共需要多少個鉛字？

(23) 由 1 到 10000，則數字 3 共寫了幾次？

進階問題

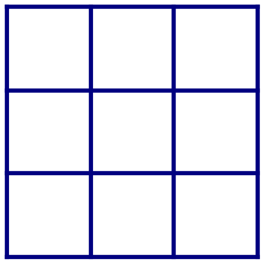
(24) 編號 1~6 之 6 個球滾入編號 1~6 的 6 個洞中，每洞 1 球
(a)恰有一球號與洞號相同，方法有______種。
(b)所有球號與洞號皆不相同，方法有______種。

(25) 將右圖黑棋向右移動，每次移動 1~3 格，移到最右一格。共有幾種移法？



(26) 將 a,a,a,b,b,c,d,e,f 全取排成一列，相同字母不相鄰的排法有幾種？

(27) 以黑白兩色塗右圖的 9 個同樣同樣大小的正方形，每格限塗一色
(a)將正方形旋轉 90°，若旋轉後的圖形，與未旋轉前的圖形相同，那麼這樣的塗法有多少種？
(b)將正方形旋轉 180°，若旋轉後的圖形，與未旋轉前的圖形相同，那麼這樣的塗法有多少種？



(28) 用長 6 公分，寬 3 公分的長方形 4 塊，及邊長 3 公分正方形 1 塊，每塊顏色互異，則五塊拼成一正方形，其樣式有幾種？

(29) A、B 兩人競選，選舉得票數共 11 張，唱票時，A 一直保持領先，且最後 A 恰以多一票獲勝，則唱票的情形有多少種？

綜合練習解答

(1) $\dfrac{12!}{4!4!2!2!}=90$

(2) 480

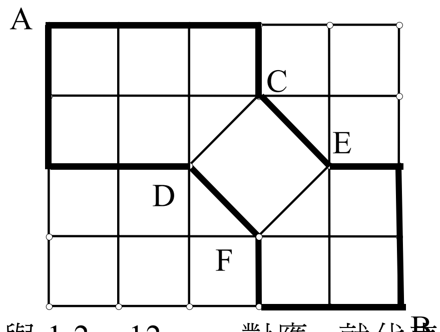
(3) (a)$4!\times4!=576$ (b)$(P^4{}_2)^2\times(P^2{}_2)^2\times4=2304(c)P^4{}_4\times P^4{}_4\times2=1152$

(4) 1440

[提示：(a)全−(AD相鄰或BD相鄰或CD相鄰)(b)D排首或排尾且與E,F,G之一相鄰=$3\times5!\times2=720$，D插在E,F,G之間的排法有$P^3{}_2\times5!=720$]

(5) (a)20 (b)40

(6) (a)$5!\times3-4!\times3+3!=294$ (b)$6!-[5!\times4-6\times4!+4\times3!-2!]=362$ (c)$3!\times3!=36$



(7) (a)840(b)720(c)240(d)600(e)480

(8) 30

[提示：考慮 A→C→E→B 與 A→D→F→B 兩種路線的走法]

(9) $\dfrac{12!}{2!3!4!3!}=277200$

[提示：將 YYYRRRRGG××× 排成一列再與 1,2,..,12 一一對應，就代表所有的塗法]

(10) 576

(11) (a)480 (b)2520 (c)3024 (d)126

[提示：(a)$\dfrac{5!}{3!}\times4!=480$ (b)$\dfrac{9!}{3!4!}=2520$ (c)$\dfrac{9!}{5!}=3024$ (d)$\dfrac{9!}{5!4!}=126$]

(12) 6

(13) 1260[提示：可視爲 AABBBCCCC 的排列數因爲打法與排法一一對應]

(14) 1260 [提示：$\dfrac{9!}{3!2!4!}=1260$]

(15) $5!\times P^6{}_4=43200$

(16) (a)$7983360=(P_3{}^{12}\times\frac{1}{3})\times(P^9{}_4\times\frac{1}{4})\times(P^5{}_5\times\frac{1}{5})$ (2)$1247400=P_4{}^{12}\cdot P^8{}_4\cdot P^4{}_4(\frac{1}{4})^3\times\frac{1}{3!}$

(17) (a)$\dfrac{5!}{2}=60$ (b)$\dfrac{1}{2}\times1200+80=680$

[提示：(a)紅黃藍黑綠與綠黑藍黃紅算同一種染色的結果，即 2 種算一種，因此共$\dfrac{5!}{2}$種。(b)考慮 5×4^3中的塗法，對稱的情形(5×4^2種)：紅黃藍黃紅用中間的區段作對稱還是紅黃藍黃紅，但非對稱的情形($5\times4^4-5\times4^2$)：紅黃藍黑綠用中間的區段作對稱是綠黑藍黃紅，因此每 2 種算 1 種，因此共有

$\frac{1}{2}(5\times4^4-5\times4^2)+5\times4^2$種。]

(18) (a) 960(b) 768

(19) $3^5-3\times2^5+3\times1=150$[提示：用排容原理，參考例題 15]

(20) (a)924 (b)350 (c)462 (d)538[提示：(3)全部−(經過第二象限)]

(21) 100；36

[提示：(1)首位數可從 1，2，3，4，5 中取一個數，第二、三位數從剩下 5 個數取兩數排列，共有 $5\times P^5_2=100$ 種排法(2)在(1)中可被 3 整除的三位數，必須考慮三個數字和為 3 的倍數的情況，依含 0 與不含 0 分類如下：含 0 的三個數：(0，1，2)，(0，1，5)，(0，2，4)，(0，4，5)不含 0 的三個數：(1，2，3)，(1，3，5)，(2，3，4)，(3，4，5)含 0 的三個數，排成三位數有 3 種方法，不含 0 的有 3！＝6 種方法，所以，三位數中，被 3 整除的有 4×3+4×6＝36 個]

(22) 2893[提示：$9+9\times10\times2+9\times10^2\times3+4=2893$]

(23) 4000

[提示：□□□3 之個位數 3，共出現了 000,001,…,999⇒1000 次；□□3□之十位數 3，共出現了 10^3次，…..]

(24) (a)264 (b)265

[提示：(a)6×(其他 5 個號碼與洞的號碼不同)=6×44=264

(b)6！−6×5！+15×4！−20×3！+15×2！−6×1！+0！=265]

(25) 44 [提示：設每次移動 1 格 x 次，移動 2 格 y 次，移動 3 格 z 次，依題意可得 $x+2y+3z=7$]

(26) 10200

[提示：先排b,b,c,d,e,f(bb相鄰共有 5！=120 種排法，bb不相鄰有$\frac{6!}{2!}-5!$ =240 種排法)，再插入a,a,a，若bb相鄰：□ c □ b a b □ d □ e □ f □⇒$\frac{1}{2}\times P^6{}_2=15$；

若bb不相鄰：□ c □ b □ d □ e □ b □ f □ ⇒$\frac{1}{3!}\times P^7{}_3=35$，

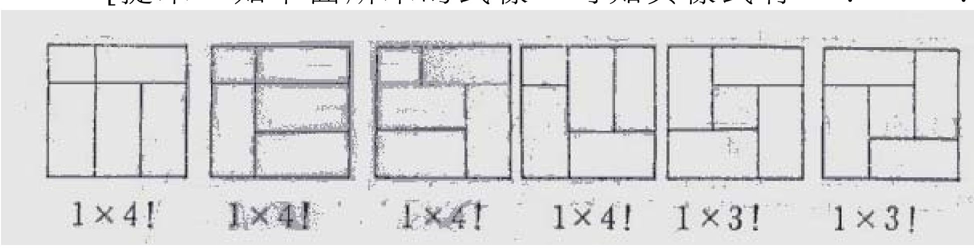
所以共有 120×15+240×35=10200]

(27) (a)8 (b)32

[提示：(a)如圖，當 1,3,9,7 同色，2,4,8,6 同色即可達到題目的要求。(2)當 1,9、3,7、4,6、2,8 同色即可得到題目要求]

1	**4**	**7**
2	**5**	**8**
3	**6**	**9**

(28) 108[提示：如下面所示的式樣，可知其樣式有 4！×4+3！×2=108]



(29) 42 [提示：將 A 的得票數與 B 的得票數分別記在 x 軸，y 軸，唱票時 A 一直保持領先，故第一票為 A 所得，即自 P(1,0)出發，第二票必是 A 獲得，故由(1,0)移動到(2,0)，令 A、B 的得票數分別為 a,b，則形成點(a,b)，其中 $a>b$。最後 A 恰以一票獲勝，因此終點為 Q(6,5)，即自 P 點開始沿實線取捷徑走到 Q 點的方法，會與唱票時，A 一直保持領先，且最後 A 恰以多一票獲勝的唱票情
形一一對應。]