離散數學

(A)邏輯與集合

一、敘述的基本概念

(1)數學的語言裡，可以判斷其為真或為偽的語句，稱為**敘述**。

下列的語句都是敘述：

(1)“所有正整數都大於零”，　　此一敘述為“真”。

(2)“平行四邊形的對角線互相平分”，此一敘述為“真”。

(3)“平面上三角形的內角和為 360°”，此一敘述為“偽”。

(4)“$\sqrt{3}$是有理數”，　　此一敘述為“偽”。

(2)敘述的否定

設 p 是一個敘述，否定 p 而成的新敘述，稱為 p 的否定敘述，記作～p (讀作非 p)。

例如：

題號	敘述 p	否定敘述～ p
(1)	$\triangle ABC$ 是銳角三角形	$\triangle ABC$ 不是銳角三角形
(2)	是無理數	不是無理數
(3)	$10-3=7$	$10-3\neq 7$
(4)	全班同學都出席	班上有人缺席
(5)	數學測驗有人考不及格	數學測驗全部考及格

(3) 含有「且」與「或」的敘述

(a)數學上常用“且”或用“或”連接兩個敘述，稱為**複合敘述**。

有些數學式的意義是含有「且」與「或」的敘述，例如：

(1)　“$2<x<5$”，意指“$x>2$ 且 $x<5$”。

(2)　“$x\geq 7$”，意指“$x>7$ 或 $x=7$”，故「$5\geq 5$」是真的敘述。

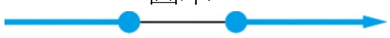
(3)　“$ab\neq 0$”即“$a\neq 0$ 且 $b\neq 0$”。

(4)　“$ab=0$”即“$a=0$ 或 $b=0$”。

當敘述 p 與 q 都是“真”的，則“p 且 q”(記作 $p\wedge q$) 才是“真”，否則就是“偽”。
當敘述 p 與 q 中，至少有一個是“真”的，則“p 或 q”(記作 $p\vee q$)為“真”，否則為“偽”。

(b)$p\wedge q$”與“$p\vee q$”的否定敘述

先看看下面的例子：

複合敘述	複合敘述的否定
$a^2=4$ 即“$a=2$”或“$a=-2$” $(p\vee q)$	$a^2\neq 4$ 即“$a\neq 2$”且“$a\neq -2$” $(\sim p\wedge \sim q)$
$ab=0$ 即“$a=0$”或“$b=0$” $(p\vee q)$	$ab\neq 0$ 即“$a\neq 0$”且“$b\neq 0$” $(\sim p\wedge \sim q)$
$a^2+b^2=0$ 即“$a=0$”且“$b=0$” $(p\wedge q)$	$a^2+b^2\neq 0$ 即“$a\neq 0$”或“$b\neq 0$” $(\sim p\vee \sim q)$
$2<x<5$ 即“$2<x$”且“$x<5$” $(p\wedge q)$ 圖示:  	“$x\leq 2$”或“$x\geq 5$” $(\sim p\vee \sim q)$ 圖示: 

二、集合的基本概念

(1)集合的運算

(a)集合 A 與集合 B 的共同元素所組成的集合稱為 A 與 B 的交集，記作 A∩B，讀作 A 交集 B，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

例如：A={1,2,3,4,5}、B={–4,3,4,7,8}，A∩B={3,4}。

例如：A 為所有偶數所成的集合，B 為所有奇數所成的集合。

(b)集合 A 與集合 B 的所有元素所組成的集合，記作 A∪B，讀作 A 與 B 的聯集。

即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$。

例如：A={1,2,3,4,5}、B={–4,3,4,7,8}，A∪B={–4,1,2,3,4,5,7,8}。

(c)差集合與餘集合：

在集合 A 中但不在集合 B 中的元素所成的集合，稱為 A 減 B 的差集，記為 A–B，

即 $A-B=\{x|x\in A$ 但 $x\notin B\}$。

例如：設 A={1,2,3,4,5}、B={2,4,7,8,9}，則 A–B={1,3,5}，B–A={7,8,9}

(b)宇集合與補集合：

餘集合的概念：在討論問題時，若討論的對象均為固定一個集合的子集合，這樣一個固定的集合稱為**宇集合**。

例如：在討論不等式 $x_2+4x-5\leq 0$ 的“解”時，變量 x 涉及的是“實數”(虛數不分大

小)，此不等式的“解”必然在全體實數所成的集合 R 中，
由於 $x^2+4x-5=(x+5)(x-1)\le 0$ 其解集合為 $A=\{x\,|-5\le x\le 1，x\in R\}$，
顯然地，A 是 R 的一個子集（$A\subset R$），稱 R 為宇集，而 $A'=R-A$ 稱為 A 在 R 中的補集（或餘集）。顯然地，A 與 A'是互斥的。
若 U 為一個宇集合，A 為 U 的一個子集合，則 $U-A=\{x|x\in U$ 但 $x\notin A\}$稱為 A 的餘集合，

記作 A'或 $\overline{A}$ 或 A^C。

例如：U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}，A={1,3,4,5,6}，A'={2,7,8,9,10}

三、取捨原理
(1)二個集合的取捨原理：
設 A,B 是二個有限集合，則 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(2) 三個集合的取捨原理：
設 A,B,C 是三個有限集合，
則 $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

(B)排列與組合中的幾種思考模式：
(1)分類計算：
在計數的過程中，常會因為需求的不同，例如順序、排法、分組、…等等，會將一類的事物視為相同一種，因此在計算上會先將其視為不同，再計算相同的事物有幾類，進而求出方法數。
(a)不完全相異物的排列：
有 3 個相同紅球，1 個白球排成一列，共有幾種排法？
[解法]：
先將 3 個紅球視為不同：R_1、R_2、R_3，白球為 W，先將其排成一列，共有 4！種排法。
但例如 $R_1R_2R_3W$、$R_1R_3R_2W$、$R_2R_1R_3W$、$R_2R_3R_1W$、$R_3R_1R_2W$、$R_3R_2R_1W$ 這六種，因為紅球是相同的，所以這 6(3！)種。均視為相同，即 4！排法中，每 3！種視為一類，所以

3 個相同紅球，1 個白球排成一列共有$\frac{4!}{3!}$=4 種。

(b)保持一定順序：
有甲乙丙丁四人排成一列，若要保持甲在乙丙的中間，請問有幾種排法？
[解法]：甲乙丙丁四人排成一列，共有 4！種排法，依照甲乙丙排列的順序，可將 24 種排法分成 3！類，例如：甲乙丙丁、甲乙丁丙、甲丁乙丙、丁甲乙丙視為同一類，其中每

一類的排法均相同，因此每一類有$\frac{4!}{3!}$種排法。題目要求甲在乙丙的中間，這種情形分別

代表 3！中的兩類(順序可為乙甲丙、丙甲乙這兩類)，所以排法共有$\frac{4!}{3!}\times 2$ 種排法。

(c)分組問題：

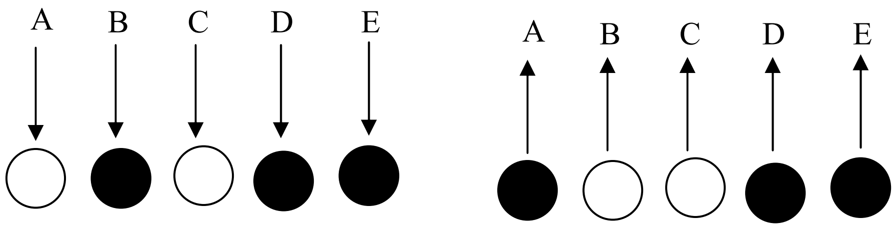
ABCDEF 六人分成 2 人,2 人,2 人三組共有幾種分法？

[解法]：考慮 $C^6{}_2 \cdot C^4{}_2 \cdot C^2{}_2$ 的意義，根據數狀圖的原理，可知(AB,CD,EF)、(AB,EF,CD)、(CD,AB,EF)、(CD,EF,AB)、(EF,AB,CD)、(EF,CD,AB)算成不同的 6(3！)種，就分組的意義而言，應該算成同一種，所以六人分成 2 人,2 人,2 人三組共有$(C^6{}_2 \cdot C^4{}_2 \cdot C^2{}_2)\times\frac{1}{3!}$種分法。

(2)配對的模式：

例子：從 ABCDE 五人中選出 3 人去打掃，請問有幾種選法？

現在我們考慮 5 個球，其中 3 個黑球，2 個白球，並且做以下的配對：



對應到黑球的人被選中，反過來說選中的人對應到黑球，因此選法與排法之間便有了一個對應，而且不同的選法對應不同的排法，不同的排法對應不同的選法，排法與選法都有被對應，此時我們就可以說選法的數目與排法的數目都一樣。

這樣的觀念就是配對的想法。

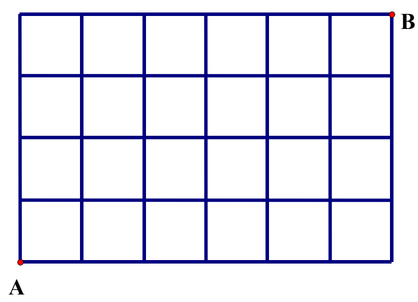
抽象化：f：A→B 為一個一對一且映成的函數，則 A 的元素個數與 B 的元素個數相等。

例子：如圖，一人走捷徑由 A 到 B(即只能走→↑)走捷徑有幾種走法？

[解法]：

由 A 到 B 走捷徑向右要 6 步，向上 4 步，若以 E、N 分別代表向右與向上。

我們可以觀察出：6 個 E 與 4 個 N 的排列數與走捷徑的方法可以 1−1 配對，因此走捷徑的方法數= $\frac{10!}{6!4!}$ 。



例子：

從 1 到 20 之中，選取 3 個數字，要求這 3 個數字沒有 2 個連續整數的取法有幾種？

[解法]：根據前面的說明，可以取 3 個黑球，17 個白球排成一列，排完之後，再與 1~20 的數字對應，與黑球對應的數字，即是被選取的數字，這種對應方式為 1−1 的配對。

若要求 3 個數字沒有 2 個連續整數，則黑球在排列的過程中就要不相連，因此先排其他 17 個白球，再將 3 個黑球插入白球中，因此有 $C^{18}{}_3$ 種排法，而每一種排法對應一種取球的方法，一種取球的方法對應一種排法，因此共有 $C^{18}{}_3$ 種取球的方法。

(B) (1)二項定理的要點：

(a) $(a+b)^n=\mathrm{C}^n{}_0a^nb^0+\mathrm{C}^n{}_1a^{n-1}b+\ldots+\mathrm{C}^n{}_ka^{n-k}b^k+\ldots+\mathrm{C}^n{}_nb^n=\sum_{i=1}^{n}C_i^n a^{n-i}b^i$ 。

(b)$(a+b)^n$ 展開式中的一般式為 $\mathrm{C}^n{}_ka^{n-k}b^k$

(c)$(a+b)^n$ 若按 a 的降冪排列，則第 $k+1$ 項為 $\mathrm{C}^n{}_ka^{n-k}b^k$。

(d)$(a+b)^n$ 的展開式共有 $n+1(\mathrm{H}^2{}_n)$項。

(e)$(1+x)^n=\mathrm{C}^n{}_0+\mathrm{C}^n{}_1x+\mathrm{C}^n{}_2x^2+\mathrm{C}^n{}_3x^3+\ldots+\mathrm{C}^n{}_kx^k+\ldots+\mathrm{C}^n{}_nx^n$ 。

[例題1] 某一班共有 45 人，問卷調查有手機與平板電腦的人數。從統計資料顯示此班有 35 人有手機，而有 24 人有平板電腦。設：

A 為同時有手機與平板電腦的人數

B 為有手機， 但沒有平板電腦的人數

C 為沒有手機， 但有平板電腦的人數

D 為沒有手機， 也沒有平板電腦的人數

請選出恆成立的不等式選項。

(1) A＞B (2) A＞C (3) B＞C (4) B＞D (5) C＞ D (2015 學科能力測驗)

[答案]：(2)(3)(4)

[解法]：

依題意：

n(平板)=A+C=24，n(手機)=A+B=35⇒n(平板∪手機)=35+24−A=59−A

59−A+D=45⇒A−D=14

⇒A≥14 且 A≤24，故 14≤A≤24。

A+C=24⇒0≤C=24−A≤10

A+B=35 ⇒11≤B=35−A≤21

D=A−14⇒0≤D≤10

(1)錯誤，反例 A=16，B=19，C=8，D=2

(2)正確，A>C

(3)正確，B>C

(4)正確，B>D

(5)錯誤，反例 A=24，B=11，C=0，D=10

[例題2] 有 4 個女生 3 個男生排成一列，若要求男生排在一起，女生排在一起，則

(1)其排列方法有______種；(2)要求男女相間隔排列，排列方法有________種，

(3)3 個男生要分開排列的方法有_______種。

[答案]：(1)288(2)144(3)1440

[解法]：

(1)將男生、女生分別視為一人，再分別考慮各自排列的情形。

$\Rightarrow 2! \times 4! \times 3! = 288$。

(2)先排 3 個男生，再將女生排入男生的間隔中$\Rightarrow 3! \times P^4_4 = 144$。

(3)先排 4 個女生，再將男生排入女生的間隔中$\Rightarrow 4! \times P^5_3 = 1440$。

[例題3] pontoon 一字，各字母排成一列，求下列各排列數：

(1)全部任意排成一列　(2)三個「o」完全在一起

(3)恰有兩個「o」在一起 (4) 三個「o」完全分開

[答案]：(1)420 (2)60 (3)240 (4)120

[解法]：pontoon 一字中有 poootnn 7 個字母。

(1)排法$=\frac{7!}{3!2!}=420$ 種。 (2)將 ooo 視為一體，排法$=\frac{5!}{2!}=60$ 種。

(3)先將 ptnn 排成一列，再將 oo,o 分別排入 ptnn 排列的間隔中。

$\Rightarrow \frac{4!}{2!} \times P^5_2 = 240$ 種。

(4)先將 ptnn 排成一列，再將 3 個 o 分別排入 ptnn 排列的間隔中$\Rightarrow \frac{4!}{2!} \times P^5_3 \times \frac{1}{3!} = 120$ 種。

[例題4] 自棒球選手 9 人，游泳選手 6 人中選出 3 人擔任福利委員

(1)選法有幾種？　(2)棒球、游泳選手至少有一人被選中之選法有幾種？

(3)至少有 2 位游泳選手之選法有幾種？

[答案]：(1)455 (2)351 (3)155

[解法]：

(1)從 15 人中選出 3 人的選法有 $C^{15}_3 = 455$ 種。

(2)委員會中棒球選手與游泳選手的組成人數為 2,1 或 1,2

選法$=C^9_2 \times C^6_1 + C^9_1 \times C^6_2 = 351$ 種。

(3)委員會中棒球選手與游泳選手的組成人數為 1,2 或 0,3

選法$=C^9_1 \times C^6_2 + C^6_3 = 155$ 種。

(注意：$C^6_2 \times C^{13}_1$ 的解法是錯誤的，這樣會有重複選人的情形)

[例題5] 台鐵自強號從第一車至第十車共有十節車廂。要指定其中 4 節車廂安裝行動電話的充電裝置，則

(1)共有幾種指定的方法？

(2)若更要求此四節車廂兩兩不相銜接，則共有幾種指定方法？

[答案]：210 ，35

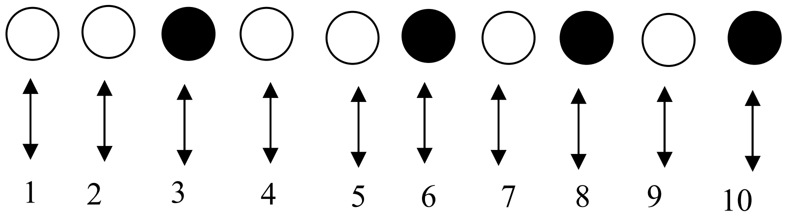
[解法]：

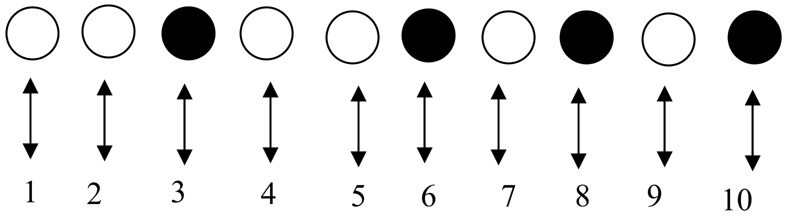
(1)1~10 節車廂，指定 4 節車廂，指定方法$=C^{10}_4 = 210$ 種。

(2)本題相當於自 1~10 號中，選取 4 個號碼，而要求這 4 個號碼不相連

利用配對的原理，取 4 個黑球、6 個白球排成一列，黑球對應選中的號碼。

如下圖，選中了 3,6,8,10 號。





所以 4 個號碼不相連 $\Leftrightarrow$4 個黑球、6 個白球排成一列，而這 4 個黑球不相連
先排 6 個白球，再將 4 個黑球排入間隔中的排法$=C^7_3=35$ 種。

[例題6] (重複組合與排列)

求下列各小題的方法數：

(1)同時擲 2 粒相同的骰子，有幾種可能的情形？

(2)有 4 名候選人，18 名選舉人，記名投票時，有幾種情形？不記名投票時，有幾種情形？(假設每個人都去投票，而且沒有廢票)

[答案]：(1)21 (2)4^{18}，H^4_{18}

[解法]：

(1)設 x_i 表示出現 i 點的次數 $i=1,2,\ldots,6\Rightarrow x_1+x_2+\ldots+x_6=2$
上述不定方程式的非負整數解與骰子出現點數的情形 1−1 對應
所以有 $H^6_2=C^7_2=15$ 種情形。

(2)記名投票為重複排列$\Rightarrow 4^{18}$。
不記名投票：設 x,y,z,w 為四位候選人的票數$\Rightarrow x+y+z+w=18$
上述不定方程式的非負整數解與得票情形 1−1 對應
所以有 H^4_{18} 種結果。

[例題7] (分組與分堆)

有 8 本不同的書本，

(1)平分成兩堆 (2)按照 4,2,2 分成三堆 (3)按照 4,3,1 分成三堆(4)平分給甲乙兩人
(5)甲給 4 本，乙給 2 本，丙給 2 本 (6)按照 4,3,1 自由分配給甲乙丙三人

[答案]：(1)35 (2)210 (3)280 (4)70 (5)420(6)1680

[解法]：

(1)8 本不同的書分成 4,4 兩堆$\Rightarrow C^8_4\times C^4_4\times\frac{1}{2}=35$。

(2)8 本不同的書分成 4,2,2 三堆$\Rightarrow C^8_4\times C^4_2\times C^2_2\times\frac{1}{2}=210$。

(3)8 本不同的書分成 4,3,1 三堆$\Rightarrow C^8{}_4\times C^4{}_3\times C^1{}_1=280$。

(4)平分成甲乙兩人的分法=先將 8 本不同的書分成 4,4 兩堆，再分給甲乙兩人

分法$=(C^8{}_4\times C^4{}_4\times\frac{1}{2})\times 2!=70$。

(5) 甲給 4 本，乙給 2 本，丙給 2 本的分法=先將 8 本不同的書分成 4,2,2 三堆，再分給甲乙丙三人。

分法$=(C^8{}_4\times C^4{}_2\times C^2{}_2\times\frac{1}{2})\times 2!=420$。

(6) 按照 4,3,1 自由分配給甲乙丙三人=先將 8 本不同的書分成 4,3,1 三堆，再分給甲乙丙三人。

分法 $=(C^8{}_4\times C^4{}_3\times C^1{}_1)\times 3!=1680$。

[例題8] (有特定條件的分組問題)

(1)9 人平分成三組，其中甲乙丙三人必不在同一組的方法有幾種？

(2)9 人平分成三組，其中甲乙在同一組的方法有幾種？

[答案]：(1)90 (2)70

[解法]：

(1)$\because$ 甲乙丙三人必不在同一組，

$\therefore$先將其他 6 人分成 2,2,2 三組，再將甲乙丙分配至這三組。

分法$=(C^6{}_2\times C^4{}_2\times C^2{}_2\times\frac{1}{3!})\times 3!=90$。

(2)先將其他 7 個人分成 3,3,1 三組，再將甲乙兩人分配進去。

分法$=(C^7{}_3\times C^4{}_3\times C^1{}_1\times\frac{1}{2!})\times 1=70$。

[例題9] 將$(x^2+y)^{12}$展開集項後，請選出正確選項？

(1) x^{24}的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數(2) $x^{12}y^6$的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數

(3) $x^{14}y^5$的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數(4) x^8y^8的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數。(2012 指定乙)

[答案]：(1)(4)

[解法]：

$(x^2+y)^{12}$展開集項後 $x^{10}y^7$ 的係數$=C^{12}_7$

(1)正確：$(x^2+y)^{12}$展開集項後 x^{24} 的係數$=1<C^{12}_7$

(2)錯誤：$(x^2+y)^{12}$展開集項後 $x^{12}y^6$ 的係數$=C^{12}_6>C^{12}_7$ 。

(3)錯誤：$(x^2+y)^{12}$展開集項後 $x^{14}y^5$ 的係數$=C^{12}_5=C^{12}_7$ 。

(4)正確：$(x^2+y)^{12}$ 展開集項後 x^8y^8 的係數$=C_8^{12}<C_7^{12}$ 。

(練習1) 若數列 $a_1,a_2\ldots,a_k,\ldots,a_{10}$ 中每一項皆為 1 或–1，則 $a_1+\ldots+a_k+\ldots+a_{10}$ 之值有多少種可能？

(1)10 (2)11 (3) P_2^{10} (4) C_2^{10} (5)2^{10} (2010 學科能測驗)

[答案] ：(2)

(練習2) 坐標平面上的圓 C：$(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上有________個點與原點的距離正好是整數值。(2004 學科能力測驗)

[答案] ：12

(練習3) 某班一天有七節課，每一節課均排不同的科目，其中體育課不排第四節，數學課不排第七節，請問這一天的課表有幾種排法？

[答案] ：3720

(練習4) 某地共有 9 個電視頻道，將其分配給 3 個新聞台、4 個綜藝台及 2 個體育台共三種類型。若同類型電視台的頻道要相鄰，而且前兩個頻道保留給體育台，則頻道的分配方式共有__________種。(95 學科能力測驗)

[答案]：576

(練習5) 我國自用小汽車的牌照號碼，前兩位為大寫英文字母，後四位為數字，例如：AB－0950，若最後一位數字不用 4，且後四位數沒有 0000 這個號碼，那麼我國可能有的自用小汽車牌照號碼有多少個(A) 26×25×（4320－1）(B) 26×25×4320－1 (C) 26×25×（5040－1）(D) 26×26×（9000－1）(E) 26×26×9000－1 個。

(84 學科能力測驗)

[答案] ：(D)

(練習6) 欲將八位新生平均分發到甲乙丙丁四班，共有____種分法。

(87 大學聯考社會組) [答案] ：2520

(練習7) 有學生 10 人，住 A,B,C 三間房，若 A 房住 4 人，B,C 各住 3 人

(1)住法有幾種？ (2)若甲乙兩人住同房，其住法有幾種？

[答案] ：(1)4200 (2)1120

(練習8) 棒球比賽每隊的先發守備位置有九個： 投手、捕手、一壘手、二壘手、三壘手、游擊手、右外野、中外野、左外野各一位。某一棒球隊有 18 位可以先發的球員，由教練團認定可擔任的守備位置球員數情形如下：

(一)投手 4 位、捕手 2 位、一壘手 1 位、二壘手 2 位、三壘手 2 位、游擊手 2 位；

(二)外野手 4 位（ 每一位外野手都可擔任右外野、中外野或左外野的守備）；

(三)另外 1 位是全隊人氣最旺的明星球員， 他可擔任一壘手與右外野的守備。

已知開幕戰的比賽， 確定由某位投手先發，而且與此投手最佳搭檔的先發捕手

也已確定， 並由人氣最旺的明星球員擔任一壘手守備，其餘六個守備位置就上述可擔任的先發球員隨意安排，則此場開幕戰共有_____種先發守備陣容。
（當九個守備位置只要有一個球員不同時， 就視為不同的守備陣容）
[答案]：192 (2010 指定乙)

(練習9) 某動物園的遊園列車依序編號 1 到 7，共有 7 節車廂，今想將每節車廂畫上一種動物。如果其中的兩節車廂畫企鵝， 另兩節車廂畫無尾熊， 剩下的三節車廂畫上貓熊， 並且要求最中間的三節車廂必須有企鵝、無尾熊及貓熊， 則 7 節車廂一共有_________種畫法。(2009 指定乙)

[答案]：72

(C)古典機率

(1)古典機率的定義

設 S 為有 n 個樣本點的樣本空間，假設其中各基本事件出現的機會均相等。若 $A\subset S$ 為一事件，則事件 A 發生的機率為 A 之元素個數與 n 之比，記為 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{n(A)}{n}$ 。

重要觀念：

(a)古典機率最主要的精神在於**<u>各基本事件出現的機會均等</u>**。

(b)因為各物無論是否相異，總會佔去一個被取走的機會，故各事物均可視為相異。

(2) 機率的性質：

(a)$P(\phi)=0$。

(b)$P(S)=1$。

(c)若 $A\subset S$ 為一事件，則 $0\le P(A)\le 1$。

(d)餘事件的機率：若 $A\subset S$ 為一事件，則 $P(A')=1-P(A)$。

(e)排容原理：

若 A，B 為 S 中的兩事件，則 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

若 A,B,C 是樣本空間的三個事件，

則 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$。

(f)機率的單調性：若 A，B 為 S 中的兩事件，且 $A\subset B$，則 $P(A)\le P(B)$。

擲二個或三個骰子，求點數和的問題，常考，我們整理如下。

擲兩粒相同的骰子，其點數和與發生的機率表：

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
機率$\frac{n}{36}$(n 值)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

擲三粒相同的骰子，其點數和與發生的機率表：

點數和	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
機率$\frac{n}{216}$(n 值)	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

(D)條件機率：

(1)條件機率的定義：

若設 A、B 為樣本空間 S 的兩事件，且 $P(A)\neq 0$，則在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的機率稱為**條件機率**，符號為 $P(B|A)$，其值定義成 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$。

在古典機率的情形下，$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$

(2)條件機率的性質：

設 A、B、B_1、B_2 為樣本空間 S 中的事件

(a)$P(\phi|A)=0$，

(b)$P(A|A)=1$

(c)$0\leq P(B|A)\leq 1$

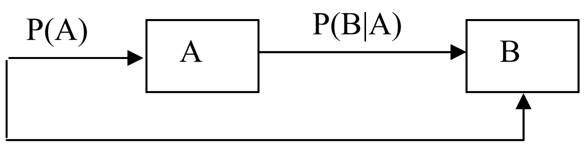
(d)$P(B'|A)=1-P(B|A)$

(e)$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1\cap B_2|A)$

(3)**機率的乘法原理**：

(a)設 A,B 為任意二事件，

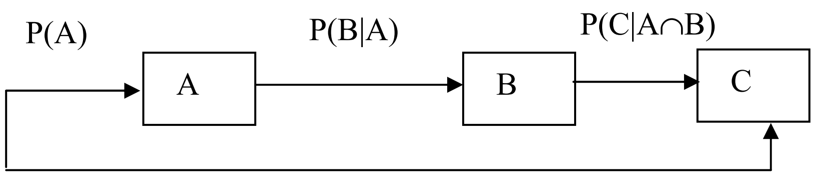
若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，則 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$。



$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

(b)設 A、B、C 為任意三事件，

若 $P(A\cap B)>0$，則 $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$



$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$

設 $A_1,A_2,\ldots,A_k$ 為 k 事件，若 $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1})>0$，

則 $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_k|A_1\cap A_2\cap\ldots A_{k-1})$

(4)機率的加法原理：

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n} P(B\cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\cdot P(B\mid A_k)$$

(5) 貝氏定理：

通常我們需要對某種感興趣的事件估計它發生的機率(稱為事前機率)，然後經由抽樣、研究報告或產品測試等資料的蒐集，對此事件獲得某些資訊，根據這些資訊再對此事件發生的機率重新估計，此更新後的機率稱為事後機率。貝氏定理就是提供計算這種事後機率的方法。

$$\boxed{\text{事前機率}} \xrightarrow{\text{資訊}} \boxed{\text{事後機率}}$$

設{ $A_1,A_2\ldots A_r$}為樣本空間 S 的一個分割，B 為任意的事件。

若 P(B)>0，$P(A_i)>0$，$i=1,2\ldots,r$，對自然數 k 而$1\le k\le r$

則 $P(A_k\mid B)=\dfrac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{r} P(A_i)P(B\mid A_i)}$

(E)獨立事件：

(1)當兩事件 A、B 滿足 **P(A∩B)=P(A)．P(B)**的關係時，稱 A、B 為獨立事件
(或稱 A、B 是獨立的)。若 A,B 不為獨立事件，則稱 A,B 為相關事件。

例如：擲一骰子，設事件 A、B、C 各為 A={1,2,3}，B={2,4}，C={4,5,6}

①因為 P(A)×P(B)=$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$=P(A∩B)，所以 A、B 為獨立事件。

②因為 P(A)×P(C)=$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\neq$P(A∩C)=0，所以 A、C 不是獨立事件。

(2)兩事件獨立的性質：

若 A,B 獨立，則①A',B ②A,B' ③A',B' 也是獨立事件。

(3)三事件獨立的定義：

若$\begin{cases}(1)\ P(A\cap B)=P(A)P(B)\\(2)\ P(A\cap C)=P(A)P(C)\\(3)\ P(B\cap C)=P(B)P(C)\\(4)\ P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)\end{cases}$ 四式同時成立，則稱三事件 A,B,C 獨立。

(4) 三事件獨立的性質

若 A,B,C 獨立，則

①A,B，A',B，A,B'，A',B' 獨立。

②A,C，$A^{/}$,C，A,$C^{/}$，$A^{/}$,$C^{/}$ 獨立。
③ B,C，$B^{/}$,C，B,$C^{/}$，$B^{/}$,$C^{/}$ 獨立。
④$A^{/}$,B,C，A,$B^{/}$,C，A,B,$C^{/}$ 獨立。
⑤ $A^{/}$,$B^{/}$,C，$A^{/}$,B,$C^{/}$，A,$B^{/}$,$C^{/}$ 獨立。
⑥$A^{/}$,$B^{/}$,$C^{/}$ 獨立。

(F)單變量數據分析：
(1)衡量資料集中情形的統計量：算術平均數、幾何平均數
(a)算術平均數：
一群數值的算術平均數，為此各項數值的總和除以此群數值的個數所得的商。

即 n 個實數值分別為 $x_1,x_2,\ldots\ldots.x_n$，則其算術平均數$\mu=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$。

(b)幾何平均數

一組正數資料 $x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots,x_n$ 的幾何平均數(簡寫成 G.M.)，定義為 G.M.=$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 。

實例：2,4,8,16,32 的幾何平均數為$\sqrt[5]{2^{15}}$ =8，算術平均數為$\frac{62}{5}$。

應用：
人類的經濟活動，常常要表達薪資、經濟指標、營業額、投資報酬率等每年的變化率，我們在表達在一段時間內的變化率或成長率的平均值，常以幾何平均數來表示。
例如：某公司去年的銷售量比前年成長 20%，而今年的銷售額比去年衰退 20%，請問這兩年間的平均銷售量為多少？
[解法]：
設前年的銷售量為 A，則去年的銷售量為 A(1+20%)，
而今年的銷售量為 A(1+20%)(1−20%)=A(1−4%)=A·96%
設這兩年的平均成長率為 x，則去年的銷售量為 A(1+x)，今年的銷售量為 $A(1+x)^2$
$\Rightarrow A(1+x)^2= A(1+20\%)(1-20\%)$
$\Rightarrow(1+x)^2=1.2\times0.8 \Rightarrow 1+x=\sqrt{1.2\times0.8} \Rightarrow x=\sqrt{0.96}-1=-0.0202$
所以這兩年的平均成長率為−2.02%
(即銷售量成負成長，平均每年減少銷售量的 2.02%)。
結論：
若 n 年的成長率分別為 y_1、y_2、y_3、…、y_n，

則這 n 年的平均成長率為$\sqrt[n]{(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_n)}-1$。

(2)衡量資料分散程度的統計量：全距、標準差。
(a)全距：
一群統計資料中，最大數據與最小數據之差，叫做全距，以 R 表之。

(b)變異數與標準差

一組資料 $x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots,x_n$ 的變異數σ^2為 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$。μ為資料的算術平均數

標準差$\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}=\sqrt{(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-\mu^2}$

(3)統計量的變換性質：

n 筆數據 x_1，x_2，…，x_n 的平均數為 μ_x，標準差為 σ_x，將每筆數據乘 a，再加 b 成另一組數據 y_1，y_2，…，y_n，即 $y_i=ax_i+b$，$i=1$，2，…，n，令 μ_y，σ_y 為 y_1，y_2，…，y_n 的平均數與標準差。

則(1) $\mu_y=a\mu_x+b$。(2) $\sigma_y=|a|\cdot\sigma_x$。

(G)分析單變量的統計量之特性：

(1)算術平均數的特性：

(a)在任一數列中，各項數值與其算術平均數之差的總和為零。

(b)公式簡單，計算容易，適於代數處理。

(c)易受極端度量影響。

(d)應用前需考慮：所有資料的數值十分集中、各數值具有同等的重要性。

(2)全距的特性：

(a)易於瞭解、計算簡單。

(b)缺點：感應不靈敏、受樣本數的影響很大。

(3)標準差的特性：

(a)以算術平均數為中心的標準差，較任何其它的平均數為中心的標準差小。

(b)標準差的特性與算術平均數相同。

(c)標準差易於做代數運算。

(4)資料轉換時統計量的關係：

若設原資料以 X 表示，將 X 中的每筆資料乘以 a 再加上 b，形成新的資料 Y，
我們將其寫成 Y=aX+b。
則 Y 的平均量數(算術平均數、中位數、)= a(X 的平均量數)+b
Y 的差異量數(全距、標準差)=$|a|$(X 的差異量數)。

(5)數據的標準化：

令 x_i 表第 i 筆原數據，而 x_i'表第 i 筆新數據，則 $x_i'=\dfrac{x_i-\mu}{\sigma}$，

其中 μ，σ 是原數據的平均數與標準差，由於數據 x_i 的平均數 μ 與標準差 σ 是同單位，所以標準化後的 x_i'為無單位。

轉換後的數據稱為**標準分數**或 ***z* 分數**。

(H)雙變量數據的分析：

(1)相關係數的定義：

衡量兩個變數直線相關的程度的統計量—相關係數定義如下：

對於兩組數據 X、Y

X	x_1	x_2	…	x_n
Y	y_1	y_2	…	y_n

定義相關係數

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\mu_x\cdot\mu_y}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{/}\cdot y_i^{/}}{n},$$

$x_i^{/}=\dfrac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}$，$y_i^{/}=\dfrac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}$ (標準化資料)

其中μ_x、μ_y為 X、Y 的算術平均數；σ_x、σ_y為 X、Y 的標準差。

(2)相關係數的性質：

(a)$-1\leqq r\leqq 1$

(b)正的 r 值顯示變數之間有正相關，負的 r 值顯示變數之間有負相關，r 值若很接近 0，表示變數之間有很弱的直線相關。$r=1$ 時，表示樣本點都落在斜率為正的一條直線上，$r=-1$ 時，表示樣本點都落在斜率為負的一條直線上。

(c)相關係數的絕對值(直線相關的強度)與單位無關：

若設 $x_i^*=a+bx_i$，$y_i^*=c+dy_i$，$i=1,2,\ldots,n$，其中 a,b,c,d 為給定之常數，

則當 $bd>0$ 時，$r=r^*$，當 $bd<0$ 時，$r=-r^*$。

(d)相關係數會受少數極端觀測值得嚴重影響，

(e)兩個變數之間有很強的相關，也不一定代表兩者之間有因果關係。

(3)最小平方法：

對於給定有限個樣本點(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、…、(x_n,y_n)，要求出一條直線 $y=a+bx$ 使得誤差的平方和 E=$\sum[y_i-(a+bx_i)]^2$ 最小。

這樣的直線 $y=a+bx$ 稱為 y 對 x 的**最佳直線**或**迴歸直線**。

(4)最佳直線：

(a)給定 X、Y 兩個變數，如表所示

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

，將 X、Y 兩個變數標準化，化成 X'、Y'，Y'對 X'的最佳直線 L'為 $y'=rx'$，其中 r 為 X、Y 的相關係數。

(b)若給定 X、Y 兩個變數，如表所示

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

，

則 Y 對 X 的最佳直線 L：$y=a+bx$ 必通過點(μ_x, μ_y)，斜率 $b=\dfrac{r\sigma_Y}{\sigma_X}$。

[例題10] (取數字)

自 1,2,3,…,10 中任取相異 3 數，則

(1)此三數成等差之機率=？ (2)此三數成等比之機率=？

[答案]：(1)$\frac{1}{6}$ (2)$\frac{1}{30}$

[解法]：

樣本空間 S 為 1~10 的三個相異正整數 a,b,c 所成的集合。$\Rightarrow n(S)=C^{10}_{3}=120$。

(1)a,b,c 成等差 $\Leftrightarrow 2b=a+c$

a,c 為兩偶數或兩奇數$\Rightarrow$事件 A 的元素個數$=C^{5}_{2}+C^{5}_{2}=20\Rightarrow P(A)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$。

(2)a,b,c 為等比 $\Leftrightarrow b^2=ac\Leftrightarrow a,b,c$ 可為 1,2,4、1,3,9、2,4,8、4,6,9$\Rightarrow$機率$=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$。

[例題11] (分組與分堆)

阿貴和阿美及其他 8 名同學共 10 名學生輪到本周擔任值日生。本周 5 個上課日每天從尚未當過的同學中抽籤選出 2 位輪值。則阿貴和阿美同一天擔任值日生的機率為__________。（答案以最簡分數表示）(93 指定考科乙)

[答案]：$\frac{1}{9}$

[解法]：

樣本空間是先將 10 位同學分成 2,2,2,2,2 五組，再分配到周一到周五，

事件是將阿貴和阿美分在同一組，其餘 8 人再分成 2,2,2,2 四組，

再分配到周一到周五

$$\text{機率}=\frac{(C^{8}_{2}\cdot C^{6}_{2}\cdot C^{4}_{2}\cdot C^{2}_{2}\cdot\frac{1}{4!})\times 5!}{(C^{10}_{2}\cdot C^{8}_{2}\cdot C^{6}_{2}\cdot C^{4}_{2}\cdot C^{2}_{2}\cdot\frac{1}{5!})\times 5!}=\frac{1}{9}$$

[例題12] (取球問題)

一袋中有 3 個白球，4 個黑球，5 個紅球，從袋中任取 3 球，

求下列各事件的機率：

(1)取出 1 個黑球，2 個紅球 (2)此 3 球同色 (3)此 3 球顏色都不同

[答案]：(1)$\frac{2}{11}$ (2)$\frac{3}{44}$ (3)$\frac{3}{11}$

[解法]：

設 3 個白球 W_1、W_2、W_3，4 個黑球，B_1、B_2、B_3、B_4，

5 個紅球 R_1、R_2、R_3、R_4、R_5。

樣本空間 S 為 W_1、W_2、W_3、B_1、B_2、B_3、B_4、R_1、R_2、R_3、R_4、R_5 中選取 3 個球所成的集合，$\Rightarrow n(S)=C^{12}_{3}=220$。

(1)事件 A 取得 1 個黑球，2 個紅球

$\Leftrightarrow$ B_1、B_2、B_3、B_4 中取一個，R_1、R_2、R_3、R_4、R_5 中取 2 個

$n(A)=C^4_1\times C^5_2=40$。$\Rightarrow P(A)=\frac{40}{220}=\frac{2}{11}$。

(2)事件 B 三球同色

$\Leftrightarrow$ 3 個白球 W_1、W_2、W_3 取 3 個或 4 個黑球，B_1、B_2、B_3、B_4 取 3 個或 5 個紅球 R_1、R_2、R_3、R_4、R_5 取 3 個

$n(B)=C^3_3+C^4_3+C^5_3=15\Rightarrow P(B)=\frac{15}{220}=\frac{3}{44}$。

(3)事件 C 三球顏色不同 $\Leftrightarrow$ 3 個白球 W_1、W_2、W_3，4 個黑球，B_1、B_2、B_3、B_4，5 個紅球 R_1、R_2、R_3、R_4、R_5 中各取一個

$n(C)=C^3_1\times C^4_1\times C^5_1=60\Rightarrow P(C)=\frac{60}{220}=\frac{3}{11}$

[例題13] 某訓練班招收 100 名學員，以報到先後順序賦予 1 到 100 的學號。開訓一個月之後，班主任計畫從 100 位學員中抽出 50 位來參加時事測驗。他擬定了四個抽籤方案：

方案一：在 1 到 50 號中，隨機抽出 25 位學員；同時在 51 到 100 號中，也隨機抽出 25 位學員，共 50 位學員參加測驗

方案二：在 1 到 60 號中，隨機抽出 32 位學員；同時在 61 到 100 號中，也隨機抽出 18 位學員，共 50 位學員參加測驗

方案三：將 100 位學員平均分成 50 組；在每組 2 人中，隨機抽出 1 人，共 50 位學員參加測驗

方案四：擲一粒公正的骰子：如果出現的點數是偶數，則由學號是偶數的學員參加測驗； 反之，則由學號是奇數的學員參加測驗，請選出正確的選項。

(1) 方案一中， 每位學員被抽中的機率相等

(2) 方案二中， 每位學員被抽中的機率相等

(3) 方案三中， 每位學員被抽中的機率相等

(4) 方案四中， 每位學員被抽中的機率相等。(2011 指定乙)

[答案]：(1)(3)(4)

[解法]：

從 N 個人中隨機抽取 n 個人，假設每個人被抽中的機會相等，那麼每個人被抽中的機會

等於 $\frac{C_{n-1}^{N-1}}{C_n^N}=\frac{n}{N}$。

故(1)(3)(4)中學員被選中的機率均為$\frac{1}{2}$。

(2)中 1~60 號每個人被選中的機率為$\frac{32}{60}$，61~100 號每個人被選中的機率為$\frac{18}{40}$。

[例題14] 某公司員工中有 15%為行政人員，35%為技術人員，50%為研發人員。這些員工中，

60%的行政人員有大學文憑，40%的技術人員有大學文憑，80%的研發人員有大學文憑。從有大學文憑的員工中隨機抽選一人，他（或她）是技術人員的機率是下列哪一個選項？。(1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{4}{9}$ (4) $\frac{1}{5}$ (5) $\frac{2}{5}$ (2012 指定甲)

[答案]：(1)

[解法]：設事件 A：抽中有大學文憑的員工，事件 B：抽中技術人員

所求為 $P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.35\times0.4}{0.15\times0.6+0.35\times0.4+0.5\times0.8}=\frac{2}{9}$。故選(1)

[例題15] 某個城市的普查（全面調查）發現 60%的高中生有打工的經驗，也發現 70%的高中生有意願就讀大學。如果使用簡單隨機抽樣，由該城市的高中生中抽出一位同學。請選出正確的選項。

(1) 被抽出同學有意願就讀大學的機率為 0.7

(2) 被抽出同學有打工的經驗、且有意願就讀大學的機率至多為 0.6

(3) 被抽出同學有打工的經驗、且有意願就讀大學的機率至少為 0.35

(4) 被抽出同學有打工的經驗、但是無意願就讀大學的機率為 0.18。 (2012 指定乙)

[答案]：(1)(2)

[解法]：

設 A 代表抽中的高中生有打工經驗的事件，B 代表抽中的高中生有意願就讀大學的事件

依題意：$P(A)=0.6$、$P(B)=0.7$

(1)正確：$P(B)=0.7$

(2)正確：$P(A\cap B)\leq P(A)=0.6$。

(3)錯誤：$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.7+0.6-P(A\cup B)\geq1.3-1=0.3$

(4)錯誤：$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$不一定等於 0.18。

[例題16] 某疾病可分為兩種類型：第一類占 70%，可藉由藥物 A 治療，其每一次療程的成功率為 70%，且每一次療程的成功與否互相獨立；其餘為第二類，藥物 A 治療方式完全無效。在不知道患者所患此疾病的類型，且用藥物 A 第一次療程失敗的情況下，進行第二次療程成功的條件機率最接近下列哪一個選項？

(1) 0.25 (2) 0.3 (3) 0.35 (4) 0.4 (5) 0.45 (2014 學科能力測驗)

[答案]：(2)

[解法]：

設 C、D 分別代表用藥物 A 第一次療程失敗的事件、第二次療程成功的事件

$P(D|C)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{0.7\times0.3\times0.7}{0.7\times0.3+0.3}=\frac{49}{170}$ 。

故選(2)。

[例題17] 袋中有 4 個白球，3 個黑球，

(1)任取 3 球，求取得 2 白球 1 黑球之機率。

(2)每次任取一球，取後不放回，求依次取得白球、白球、黑球的機率。

(3)每次任取一球，取後放回，取 3 次，求取得 2 次白球、1 次黑球的機率。

[答案]：(1)$\frac{18}{35}$ (2)$\frac{6}{35}$ (3)$\frac{144}{343}$

[解法]：

(1)取得 2 白球 1 黑球之機率=$\frac{C_2^4\cdot C_1^3}{C_3^7}=\frac{18}{35}$ 。

(2)取後不放回：

依次取得白球、白球、黑球的機率=$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$ 。

(3)取後放回：

取得 2 次白球、1 次黑球的機率=$C_2^3\times\frac{4\times4\times3}{7^3}=\frac{144}{343}$ 。

[例題18] 設甲袋中有 5 個白球、2 個紅球，乙袋中有 4 個白球、3 個紅球，今擲骰子一次，擲得 1,2 點則選取甲袋，擲得 3,4,5,6 點則選取乙袋，從選出的袋中任取 2 球，求選出的球為 1 白、1 紅的機率。

[答案]：$\frac{34}{63}$

[解法]：

設 A 代表選中甲袋的事件，B 取出 1 白、1 紅的事件

$P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)$

$=P(A)\times P(B|A)+P(A')\times P(B|A')$

$=\frac{2}{6}\times\frac{C_1^5\times C_1^2}{C_2^7}+\frac{4}{6}\times\frac{C_1^4\times C_1^3}{C_2^7}$

$=\frac{34}{63}$

[例題19] 已知豬得口蹄疫的機率為 0.05，今有一口蹄疫檢驗法，對健康的豬能作出正確檢驗的機率為 0.8，罹患口蹄疫的豬能作出正確檢驗的機率為 0.9。今有一豬作此檢驗，求

(1) 此豬檢驗為健康的機率。

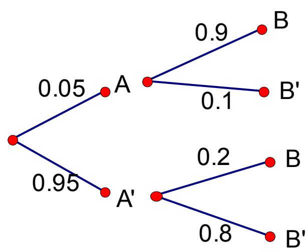
(2) 此豬檢驗為健康，但其確實罹患口蹄疫的機率。

[解法]：設 A 表示豬得口蹄疫的事件，

B 表示豬被檢驗出有口蹄疫的事件

(1) $P(B')=P(A\cap B')+P(A'\cap B')=0.05\times0.1+0.95\times0.8=0.765$

(2) $P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{0.005}{0.765}=\frac{1}{153}$



[例題20] 某公司生所產的省電燈泡，是由甲廠、乙廠、丙廠三家生產的比例分別為 40%，

35%，25%，根據統計，甲廠、乙廠、丙廠生產的瑕疵品分別佔各廠生產品的比例為 3%、2%、4%，

(1)若將公司生產的燈泡集中在倉庫裡，從中任取一個燈泡，則取到瑕疵品的機率為何？

(2)若從中取得的燈泡是瑕疵品，則此燈泡是甲廠生產的機率為何？

[解法]：

(1) 取到瑕疵品的機率 $=40\%\times 3\%+35\%\times 2\%+25\%\times 4\%=\dfrac{29}{1000}$

(2) 條件機率 $=\dfrac{\frac{12}{1000}}{\frac{29}{1000}}=\dfrac{12}{29}$

[例題21] 愛國者飛彈之命中率為 40%，今要使打中敵方飛彈的機率達到 90%以上，則一次要發射若干枚飛彈？(設每枚飛彈射擊不互相影響，且 log2=0.3010，log3=0.4771)

[答案]：5 枚

[解法]：

發射 n 枚飛彈擊中敵方飛彈的機率$=1-(0.6)^n\geq 0.9 \quad \Leftrightarrow 0.1\geq(0.6)^n$

$\log(0.1)\geq n\times\log(0.6) \quad \Leftrightarrow n\geq\dfrac{\log 0.1}{\log 0.6}\approx 4\ldots$，故 $n\geq 5$。

(練習10) 自 10 到 99 中任取一數，請求出下列事件的機率：

(1)個位數>十位數 (2)個位數=十位數

[答案]：(1)$\frac{2}{5}$ (2)$\frac{1}{10}$

(練習11) 擲一均勻骰子 10 次，求恰好出現 4 次 6 點的機率是多少？

[答案]：$\dfrac{C_4^{10}\cdot 5^6}{6^{10}}$

(練習12) 金先生在提款時忘了帳號密碼，但他還記得密碼的四位數字中，有兩個 3，一個 8，一個 9，於是他就用這四個數字隨意排成一個四位數輸入提款機嘗試。請問他只試一次就成功的機率有多少？(化成最簡分數) (92 學科能力測驗)

[答案]：$\frac{1}{12}$

(練習13) 擲三次均勻骰子，設三次中至少出現一次 6 點的事件為 A，至少出現一次 1 點的事件為 B，則 P(B|A)=______________。[答案]：$\frac{30}{91}$

(練習14) 擲三枚相同且均勻的銅板一次，則在至少出現一個正面的條件下，恰好出現兩

個正面的機率為 ________ 。[答案]：$\frac{3}{7}$

(練習15) 某一家庭有兩個小孩，

(1)若已知兩個小孩至少有一個男孩，求兩個均為男孩的機率=______。

(2)若已知大孩子為男孩，求兩個都是男孩的機率=______。

[答案]：(1)$\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$

(練習16) 有某種診斷方法，依過去的經驗知道患癌症的人，經過檢驗後發現有癌症的可能性為 0.90，不患癌症的人經過同樣的檢驗後發現有癌症的可能性為 0.05。假設一群人中有 6%的人患有癌症。現從此群人中任選一人而加以檢驗，求

(1)檢驗出有癌症的機率；(2)設檢驗出有癌症，求此人確有癌症的機率。

[答案]：(1)0.101(2)$\frac{54}{101}$

(練習17) 設某工廠由甲、乙、丙三台機器製造某一產品。甲生產全部產品的 50%，乙生產全部產品的 30%，丙生產全部產品的 20%。又依過去的經驗知甲的產品中有 3%，乙有 4%，丙有 5%為不良品。從產品中任選一產品，

(1)求選出之產品為不良品的機率；

(2)若該產品為不良品，求此產品為甲機器製造的機率。

[答案]：(1)0.037(2)$\frac{15}{37}$

(練習18) 以 A,B 分別表示甲、乙活過十年以上的事件。設 $P(A)=\frac{1}{4}$ ，$P(B)=\frac{1}{3}$ 。若 A,B 二事件為獨立事件，試求(1)兩人都活過十年以上的機率；(2)至少有一人活十年以上的機率；(3)沒有一人活過十年以上的機率。

[答案]：(1)$\frac{1}{12}$ (2)$\frac{1}{2}$ (3)$\frac{1}{2}$

(練習19) 甲乙丙三射手同設一靶，設甲乙丙命中率各為 0.5,0.6,0.8；並設各人中靶的事件為獨立事件。則

(1)各射一發，求靶面恰中一發的機率。

(2)各射一發，求沒有人命中靶的機率。

(3)若靶面恰中一發，求是由甲命中的機率。

[答案]：(1)0.26 (2)0.04 (3)$\frac{2}{13}$

[例題22] 某地區連續 5 年的人口成長率依序為 1.5%，1.4%，1.4%，1.3%，1.2%，試求這 5 年來的平均年成長率。

[解法]：

若連續 5 年的人口成長率依序為 r_1 ，r_2 ，r_3 ，r_4 ，r_5

其中 $r_1=1.5\%$ ， $r_2=1.4\%$ ， $r_3=1.4\%$ ， $r_4=1.3\%$ ， $r_5=1.2\%$

設平均人口成長率為 r，則 $(1+r)^5=(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)(1+r_5)$

即

$1+r=\sqrt[5]{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)(1+r_5)}=\sqrt[5]{1.015\times1.014\times1.014\times1.013\times1.012}\fallingdotseq$

$\sqrt[5]{1.06987}$ 故平均年成長率約為 1.4%

[例題23] 求數據：2，3，10，7，8 的標準差。

[解法]：

算術平均數$\mu=\dfrac{2+3+10+7+8}{5}=6$

標準差$\sigma=\sqrt{\dfrac{(2-6)^2+(3-6)^2+(10-6)^2+(7-6)^2+(8-6)^2}{5}}=\sqrt{\dfrac{46}{5}}\fallingdotseq3.033$。

[例題24] (統計量的性質)

某商店進一批水果， 平均單價為每個 50 元， 標準差為 10 元。今每個水果以進價的 1.5 倍為售價出售，則水果平均售價為每個______元，標準差為_______元。

(2010 指定乙)

[答案]：75，15

[解答]：

設水果進價 x 元，售價 y 元

$\because$ 每個水果以進價的 1.5 倍為售價出售，$\therefore$ $y=1.5x$

根據平均數與標準差的性質，可以得知 $\overline{y}=1.5\overline{x}$ ，$S_y=1.5S_x$。

所以水果平均售價為每個 50×1.5=75(元)

水果售價的標準差為 10×1.5=15(元)。

[例題25] 已知以下各選項資料的迴歸直線(最適合直線)皆相同且皆為負相關，

請選出相關係數最小的選項。

(1)

x	2	3	5
y	1	13	1

(2)

x	2	3	5
y	3	10	2

(3)

x	2	3	5
y	5	7	3

(4)

x	2	3	5
y	9	1	5

(5)

x	2	3	5
y	7	4	4

[答案]：(5)

[解法]：

已知迴歸直線斜率相同，且為負相關，而 $m = r_{x,y} \times \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

由觀察知 σ_x 相同，得 $r_{x,y} \times \sigma_y$ 為定值，又 $r_{x,y} < 0$，在 σ_y 最小時，$r_{x,y}$ 最小

故只須找 σ_y 最小即可，由(1)之 $\sigma_y = 4\sqrt{2}$ (2) 之 $\sigma_y = \sqrt{\dfrac{38}{3}}$

(3)之 $\sigma_y = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$ (4)之 $\sigma_y = 4\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (5)之 $\sigma_y = \sqrt{2}$ (最小)

故選(5)

[例題26] 有 8 位學生參加語文測驗，試題分白話文和文言文兩種，其成績統計如下

編號	1	2	3	4	5	6	7	8
白話文	80	63	74	67	87	55	64	70
文言文	70	56	64	68	82	50	53	61

(1) 求此次測驗，白話文與文言文二項成績之算術平均數各為多少？

(2) 求此次測驗，白話文與文言文二項成績之相關係數為多少？

[解法]：

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	合計
白話文(x)	80	63	74	67	87	55	64	70	560
文言文(y)	70	56	64	68	82	50	53	61	504
$x-\bar{x}$	10	-7	4	-3	17	-15	-6	0	
$y-\bar{y}$	7	-7	1	5	19	-13	-10	-2	
$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	70	49	4	-15	323	195	60	0	686
$(x-\bar{x})^2$	100	49	16	9	289	225	36	0	724
$(y-\bar{y})^2$	49	49	1	25	361	169	100	4	758

(1) $\bar{x} = \dfrac{560}{8} = 70$, $\bar{y} = \dfrac{504}{8} = 63$ (2) $r = \dfrac{686}{\sqrt{724} \cdot \sqrt{758}} = 0.93$

[例題27] 調查某國某一年 5 個地區的香煙與肺癌之相關性，所得的數據為(x_i , y_i)，i=1,2,3,4,5，其中變數 X 代表每人每年香煙消費量(單位：十包)，Y 代表每十萬人死於肺癌的人數。若已計算出下列數值：

$\sum_{i=1}^{5} x_i = 135$，$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 3661$，$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 2842$，$\sum_{i=1}^{5} y_i = 105$，$\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 2209$，

則 X 與 Y 的相關係數 r=______。 (2010 指定乙)

(參考說明：相關係數 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\cdot\bar{x}^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\cdot\bar{y}^2}}$)

[答案]：0.875

[解答]：

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\cdot\bar{x}^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\cdot\bar{y}^2}}=\frac{2842-5\times27\times21}{\sqrt{3661-5(27)^2}\cdot\sqrt{2209-5(21)^2}}=\frac{7}{\sqrt{16}\sqrt{4}}=\frac{7}{8}$$

=0.875。

[例題28] 有五組數據 (x,y) ： $(1,2),(2,3),(3,2),(4,4),(5,4)$ ，則

(1) 此 5 組數據的相關係數 r 為________。

(2) 若 y 對 x 的最佳直線（迴歸直線）為 $y=a+bx$ ，則數對 $(a,b)=$______。

[解法]：

(1) 相關係數 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-3)\cdot(y_1-3)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-3)^2\cdot\sum_{i=1}^{5}(y_1-3)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{40}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$=0.79

(2) y 對 x 的最佳直線（迴歸直線）為 $y=a+bx$ 　 $\mu_x=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$ ，

$\mu_y=\dfrac{2+3+2+4+4}{5}=3$ 　 $\Rightarrow b=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-3)\cdot(y_i-3)}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-3)^2}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

故 $a=\mu_y-b\mu_x=\dfrac{3}{2}$ 　因此 $(a,b)=(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2})$

(練習20) 已知 2011 筆數據 $x_1,x_2,\cdots,x_{2011}$ 的算術平均數為 4，標準差為 3，則：

(1) $-3x_1+5,-3x_2+5,\cdots,-3x_{2011}+5$ 的標準差為何？

(2) $3x_1^2+25,3x_2^2+25,\cdots,3x_{2011}^2+25$ 的算術平均數為何？

[答案]：(1)9 (2) 100

(練習21) 某班期中考數學平均為 37 分，標準差為 7.1 分，因為考太差，林老師決定把每個人的成績減 8 分再乘以 2，則此班平均分數變為_____分，標準差為_____分。

[答案]：58，14.2

(練習22) 兩變量 X 與 Y ，若 $\sum_{i=1}^{10} x_i = 1250$ ， $\sum_{i=1}^{10} x_i^{\ 2} = 158500$ ， $\sum_{i=1}^{10} y_i = 800$ ，

$\sum_{i=1}^{10} y_i^{\ 2} = 64810$ ， $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 101080$ ，求 X 與 Y 的相關係數。

[答案]：0.8

(練習23) 若 X 與 Y 的相關係數為 0.6，則 $2X+3$ 與 $-3Y+2$ 的相關係數為何?

[答案]：-0.6

(練習24) 設有一組數據 (x_i, y_i) ，算術平均數分別為 $\overline{x} = 65$ ， $\overline{y} = 70$ ，標準差分別為

$S_x = 10$ ， $S_y = 5$ 。已知 y 對 x 的迴歸直線過 $(75,73)$ ，求 x 與 y 的相關係數。

[答案]：0.6

(練習25) 已知 10 筆數據 (x_i, y_i) 的相關係數 $r = 0.8$，$\sigma_x = 2$，$\sigma_y = 6$，$\mu_x=10$，$\mu_y=40$，

求： y 對 x 的迴歸線斜率=______，y 軸截距=______。

[答案]：2.4，16

綜合練習

1. 有一個兩列三行的表格如右下圖。在六個空格中分別填入數字 1、2、3、4、5、6（不得重複），則 1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有________種。

(2010 學科能力測驗)

2. 學校規定上學期成績須同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。
一、國文成績或英文成績 70 分(含)以上；
二、數學成績及格。
已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生的資格。
請問下列哪一個選項的推論是正確的？
(1)小文的英文成績未達 70 分
(2)小文的數學成績不及格
(3)小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格
(4)小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格
(5)小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格。
(2013 學科能力測驗)

3. 有 6 男 4 女共 10 名學生擔任本週值日生，導師規定在本週五個上課日中，每天兩名值日生，且至少需有 1 名男生，試問本週安排值日生的方式有____________種。
(2001 大學聯考社會組)

4. 籃球 3 人鬥牛賽，共有甲乙丙丁戊己庚辛壬癸 9 人參加，組成 3 隊，且甲乙兩人不在同一隊的組隊方法有多少種？　(2001 學科能力測驗)

5. 因乾旱水源不足自來水公司計畫在下周一至週日的 7 天中選擇 2 天停止供水。若要求停水的兩天不相連，則自來水公司共有多少種選擇方式？　(2002 指定考科乙)

6. 新新鞋店為與同業進行促銷戰，推出「第二雙不用錢---買一送一」的活動。該鞋店共有八款鞋可供選擇，其價格如下：

款式	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛

價格	670	670	700	700	700	800	800	800

定所送的鞋之價格一定少於所買的價格（例如：買一個「丁」款鞋，可送甲、乙兩款鞋之一）。若有一位新新鞋店的顧客買一送一，則該顧客所帶走的兩雙鞋，其搭配方法一共有__________種。(2006 學科能力測驗)

7. 某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有____種不同款式的「阿民」公仔。(2007 學科能力測驗)

8. 某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼為 O 以外的英文大寫字母，後四碼為 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4。例如： AA1234 ,AB4434 為可出現的車牌號碼；而 AO1234 ,AB3444 為不可出現的車牌號碼。則所有第一碼為 A 且最後一碼為 4 的車牌號碼個數為

(1) 25×9^3 (2) $25\times9^2\times10$ (3) 25×900 (4) 25×990 (5) 25×999 (2008 學科能力測驗)

9. 從玫瑰、菊花、杜鵑、蘭花、山茶、水仙、繡球等七盆花中選出四盆靠在牆邊排成一列， 其中杜鵑及山茶都被選到， 且此兩盆花位置相鄰的排法有_______種。
(2013 指定乙)

10. 設 $(1+\sqrt{2})^6=a+b\sqrt{2}$，其中 a,b 為整數。請問 b 等於下列哪一個選項？

(1) $C_0^6+2C_2^6+2^2C_4^6+2^3C_6^6$

(2) $C_1^6+2C_3^6+2^2C_5^6$

(3) $C_0^6+2C_1^6+2^2C_2^6+2^3C_3^6+2^4C_4^6+2^5C_5^6+2^6C_6^6$

(4) $2C_1^6+2^2C_3^6+2^3C_5^6$

(5) $C_0^6+2^2C_2^6+2^4C_4^6+2^6C_6^6$ (2014 學科能力測驗)

11. 高三甲班共有 20 位男生、15 位女生，需推派 3 位同學參加某項全校性活動。班會中大家決定用抽籤的方式決定參加人選。若每個人中籤的機率相等，則推派的三位同學中有男也有女的機率為__________。(2011 學科能力測驗)

12. 將 1、2、3、4 四個數字填入右方 2×2 的方格中，每個方格中恰填一數字，但數字可重複使用。試問事件「A 方格的數字大於 B 方格的數字且 C 方格的數字大於 D 方格的數字」的機率為多少？

A	*B*
C	*D*

(1) $\frac{1}{16}$ (2) $\frac{9}{64}$ (3) $\frac{25}{64}$ (4) $\frac{9}{256}$ (5) $\frac{25}{256}$。(2011 指定甲)

13. 某公司員工中有 15%為行政人員， 35%為技術人員， 50%為研發人員。這些員工中，60%的行政人員有大學文憑， 40%的技術人員有大學文憑， 80%的研發人員有大學文憑。從有大學文憑的員工中隨機抽選一人， 他（ 或她）是技術人員的機率是下列哪一個選項？。

(1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{4}{9}$ (4) $\frac{1}{5}$ (5) $\frac{2}{5}$ (2012 指定甲)

14. 作某項科學實驗共有三種可能結果 A、B、C，其發生的機率分別為 $p_A=\log_2 a$、$p_B=\log_4 a$、$p_C=\log_8 a$；其中 a 為一正實數。試問 p_A 為下列哪一個選項？

(1) $\frac{5}{9}$ (2) $\frac{6}{11}$ (3) $\frac{7}{13}$ (4) $\frac{8}{15}$ (5)$\frac{9}{17}$ 。 (2012 指定甲)

15. 某披薩專賣店舉辦「買大送大」的優惠活動，杰倫班上訂購了 3 個大披薩，加上贈送的 3 個(口味亦可任選)，共有 6 個大披薩。今天店裡有海鮮、什錦、總匯、夏威夷四種口味，在任選的狀況下，總共有________種不同的選擇方式。

16. 小燦預定在陽台上種植玫瑰、百合、菊花和向日葵等四種盆栽。如果陽台上的空間最多能種 8 盆，可以不必擺滿，並且每種花至少一盆，則小燦買盆栽的方法共有______種。(2015 學科能力測驗)

17. 袋中有 7 個相同的球，分別標示 1、2、…、7 號；若自袋中隨機取出 4 個球(取出之球不再放回)，則取出之球上的標號和為奇數的機率為_____。

18. 某校要從高一的「忠、孝、仁、愛」四個班中隨機選取一個班級進行數學抽測。考慮甲、乙兩種抽樣方法：甲方法是從四個班級的導師中隨機選取一人，被選中導師的班級為抽測班級；乙方法是從所有高一學生中隨機選取一名學生，被選中學生的班級為抽測班級。若各班人數都不相同，其中「愛」班人數最多。則下列敘述有哪些是正確的？

(1) 甲方法中，每位高一學生被抽測的機率相等
(2) 乙方法中，每位高一學生被抽測的機率相等
(3) 甲方法中，四個班級被抽測的機率相等
(4) 乙方法中，四個班級被抽測的機率相等
(5) 「愛」班被抽測的機率，使用甲方法較使用乙方法高。(2004 指定考科乙)

19. 某高中共有 20 個班級，每班各有 40 位學生，其中男生 25 人，女生 15 人。若從全校 800 人中以簡單隨機抽樣抽出 80 人，試問下列哪些選項是正確的？

(1) 每班至少會有一人被抽中
(2) 抽出來的男生人數一定比女生人數多
(3) 已知小文是男生，小美是女生，則小文被抽中的機率大於小美被抽中的機率

(4) 若學生甲和學生乙在同一班，學生丙在另外一班，則甲、乙兩人同時被抽中的機率跟甲、 丙兩人同時被抽中的機率一樣

(5) 學生 A 和學生 B 是兄弟，他們同時被抽中的機率小於$\frac{1}{100}$ (2008 學科)

20. 從集合$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a,b,c \text{ 為 } 0,1,2 \text{ 或 } 3\right\}$中隨機抽取一個矩陣，其行列式值為 0 的機率等於__________。（ 化為最簡分數）(2008 指定乙)

21. 經濟學者分析某公司服務年資相近的員工之「年薪」與「就學年數」的資料，得到這樣的結論：『員工就學年數每增加一年，其年薪平均增加 8 萬 5 千元』。試問上述結論可直接從下列哪些選項中的統計量得到？

(1)「年薪」之眾數與「就學年數」之眾數

(2)「年薪」之全距與「就學年數」之全距

(3)「年薪」之平均數與「就學年數」之平均數

(4)「年薪」與「就學年數」之相關係數

(5)「年薪」對「就學年數」之迴歸直線斜率 (2009 指定乙)

22. 擲一均勻硬幣， 若連續三次出現同一面就停止。設：

a 為恰好投擲三次停止的機率；

b 為在第一次是反面的情況下，恰好在第四次停止的條件機率；

c 為在第一、二次都是反面的情況下，恰好在第五次停止的條件機率。

則下列哪一個選項是正確的？

(1) $a=b=c$ (2) $a>b>c$ (3) $a<b<c$ (4) $a<b=c$ (5) $a>b=c$

(2009 指定甲)

23. 有兩組供機器運作的配件 A、B，其單獨發生故障的機率分別為 0.1、0.15。只有當 A, B 都發生故障時，此機器才無法運作。A、B 兩配件若用串接方式，前面故障會導致後面故障，但若後面故障則不會影響前面的故障情形；若用並列方式，則故障情形互不影響。若考慮以下三種情形：

(一) 將 B 串接於 A 之後

(二) 將 A 串接於 B 之後

(三) 將 A, B 獨立並列

在情況(一)、(二)、(三)之下，機器無法運作的機率分別為 p_1、p_2、p_3。

請選出正確的選項。

(1)$p_1>p_2>p_3$ (2)$p_2>p_1>p_3$ (3)$p_3>p_2>p_1$ (4)$p_3>p_1>p_2$ (5)$p_1=p_2>p_3$ (2015 學科能力測驗)

24. 某校數學複習考有 400 位同學參加，評分後校方將此 400 位同學依總分由高到低排序：前 100 人為 A 組， 次 100 人為 B 組， 再次 100 人為 C 組， 最後 100 人為 D 組。校方進一步逐題分析同學答題情形， 將各組在填充第一題（考排列組合）和填充第二題（考空間概念）的答對率列表如下：

	A 組	B 組	C 組	D 組
第一題答對率	100%	80%	70%	20%
第二題答對率	100%	80%	30%	0%

請選出正確的選項。

(1) 第一題答錯的同學，不可能屬於 B 組

(2) 從第二題答錯的同學中隨機抽出一人，此人屬於 B 組的機率大於 0.5

(3) 全體同學第一題的答對率比全體同學第二題的答對率高 15%

(4) 從 C 組同學中隨機抽出一人，此人第一、二題都答對的機率不可能大於 0.3

(2011 指定乙)

25. 某手機公司共有甲、乙、丙三個生產線，依據統計，甲、乙、丙所製造的手機中分別有 5% ,3% ,3%是瑕疵品。若公司希望在全部的瑕疵品中，由甲生產線所製造的比例不得超過$\frac{5}{12}$，則甲生產線所製造的手機數量可占全部手機產量的百分比至多為________%。 (2011 指定甲)

26. 某實驗室欲評估血液偵測老年癡呆症技術的誤判率（ 即偵測錯誤的機率）。共有 760 人接受此血液偵測技術實驗， 實驗前已知樣本中有 735 人未患老年癡呆症。實驗後，血液偵測判斷為未患老年癡呆症者有 665 人， 其中真正未患老年癡呆症有 660 人。試問此血液偵測技術的誤判率為__________ 。
(化為最簡分數) (2009 指定乙)

27. 一個抽獎活動依排隊順序抽獎，輪到抽獎的人有一次抽獎機會，抽獎方式為丟擲一枚公正銅板，正面為中獎，反面為沒中獎。獎品有三份，活動直到三份獎品都被抽中為止。則在排第四位的人可以抽獎的情況下，排第五位的人可以抽獎的條件機率為_____ 。(化為最簡分數) (2010 指定甲)

28. 袋子裡有 3 顆白球，2 顆黑球。由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會相等，請問在甲和乙抽到相同顏色球的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？ (1)$\frac{1}{3}$ (2) $\frac{5}{12}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{3}{5}$ (5) $\frac{2}{3}$ (2013 學科)

29. 已知以下各選項資料的迴歸直線(最適合直線)皆相同且皆為負相關，請選出相關係數最小的選項。

(1) $\begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 1 & 13 & 1 \end{array}$ (2) $\begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 3 & 10 & 2 \end{array}$ (3) $\begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 5 & 7 & 3 \end{array}$ (4) $\begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 9 & 1 & 5 \end{array}$ (5) $\begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 7 & 4 & 4 \end{array}$

30. 小明參加某次路跑 10 公里組的比賽，下表為小明手錶所記錄之各公里的完成時間、平均心率及步數：

	完成時間	平均心率	步數
第一公里	5:00	161	990
第二公里	4:50	162	1000
第三公里	4:50	165	1005
第四公里	4:55	162	995
第五公里	4:40	171	1015
第六公里	4:41	170	1005
第七公里	4:35	173	1050
第八公里	4:35	181	1050
第九公里	4:40	171	1050
第十公里	4:34	188	1100

在這 10 公里的比賽過程，請依據上述數據，選出正確選項。

(1)由每公里的平均心率得知小明最高心率爲 188

(2)小明此次路跑， 每步距離的平均小於 1 公尺

(3)每公里完成時間和每公里平均心率的相關係數爲正相關

(4)每公里步數和每公里平均心率的相關係數爲正相關

(5)每公里完成時間和每公里步數的相關係數爲負相關 (2015 學科能力測驗)

答案與詳解

1. [答案]：432

[解法]：

1、2 在同一行：2×3×4！=144

1、2 在同一列：P^3_2×2×4！=288

故 1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有 144+288=432 種。

2. [答案]：(5)

參選模範生的資格為：(一)國文成績或英文成績 70 分(含)；(二)數學成績及格

兩項要求都要符合　　只要(一)或(二)不符，就不符合參選模範生的資格

而小文學期國文成績 65 分，卻不符合參選模範生的資格，則小文英文成績未 70 分(違反(一))；或數學成績不及格(違反(二))，故選(5)

3. [答案]：43200

[解法]：

將男生分成 1,1,1,1,2 五組，再與 4 位女生配對，最後再分配周一到周五的值日生。

$(C^6_1\times C^5_1\times C^4_1\times C^3_1\times C^2_2\times\frac{1}{4!})\times 4!\times 5!=43200$

4. [答案]：210

[解法]：先將其他 7 人分成 3,2,2 三組，再將甲乙排入，$(C^7_3\times C^4_2\times C^2_2\times\frac{1}{2!})\times 2!=210$。

5. [答案]：15

[解法]：

如例題 4 的想法，相當於 1~7 這 7 個數字選兩個不相連的數字。選法=C^6_2=15。

6. [答案]：21

[解法]：

買丙或丁或戊(700 元)者，可送甲或乙，方法有：3×2＝6 種

買己或庚或辛(800 元)者，可送甲或乙或丙或丁或戊，方法有：3×5＝15 種

共有 6＋15＝21 種。

7. [答案]：25

[解法]：

若球衣為白色時，最多有$1\times 3=3$種方法

若球衣為綠色時，最多有$4\times 3-1=11$種方法(扣除紅色球帽配灰色球鞋)

若球衣為藍色時，最多有$4\times 3-1=11$種方法(扣除紅色球帽配灰色球鞋)

故共有$3+11+11=25$種方法。

8. [答案]：(4)

[解法]：第二碼可填入 25 個字母，後四碼可以填入 10^3-10 種號碼，由乘法原理故所有第一碼為 A 且最後一碼為 4 的車牌號碼個數為 25×990。

9. [答案]：120

[解法]：$C_2^5\times3!\times2=120$

10. [答案]：(2)

[解法]：

利用二項式定理展開

$$(1+\sqrt{2})^6=C_0^6+C_1^6\sqrt{2}+C_2^6(\sqrt{2})^2+C_3^6(\sqrt{2})^3+C_4^6(\sqrt{2})^4+C_5^6(\sqrt{2})^5+C_6^6(\sqrt{2})^6$$

所以 $b=C_1^6+2C_3^6+2^2C_5^6$，故選(2)。

11. [答案]：$\dfrac{90}{119}$

[解法]：$\dfrac{C_2^{20}C_1^{15}}{C_3^{35}}+\dfrac{C_1^{20}C_2^{15}}{C_3^{35}}=\dfrac{90}{119}$。

12. [答案]：(2)

因為 A 填入 2，B 可填入 1；A 填入 3，B 可填入 1,2；A 填入 4，B 可填入 1,2,3（由 1,2,3,4 中任取 2 個放入 A，B 方法有 $C_2^4=6$ 種）

同理 C 填入 2，D 可填入 1；C 填入 3，D 可填入 1,2；C 填入 4，D 可填入 1,2,3（由 1,2,3,4 中任取 2 個放入 C，D 方法有 $C_2^4=6$ 種）

所求事件的機率為$\dfrac{6\times6}{4^4}=\dfrac{9}{64}$。

13. [答案]：(1)

[解法]：

設事件 A：抽中有大學文憑的員工，事件 B：抽中技術人員

所求為 $P(B|A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=\dfrac{0.35\times0.4}{0.15\times0.6+0.35\times0.4+0.5\times0.8}=\dfrac{2}{9}$。故選(1)

14. [答案]：(2)

[解法]：

因為 $p_A+p_B+p_C=1 \Leftrightarrow \log_2 a+\log_4 a+\log_8 a=1 \quad \Leftrightarrow \log_2 a+\dfrac{1}{2}\log_2 a+\dfrac{1}{3}\log_2 a=1$

$\Rightarrow \log_2 a=\dfrac{6}{11}$。

15. [答案]：84

[解法]：選擇方式的個數=$x+y+z+u=6$ 的非負整數解個數=$C^9{}_6=84$。

16. [答案]：70

[解法]：

設玫瑰、百合、菊花和向日葵等四種盆栽買的數目分別為 A、B、C、D 盆，依題意小燦買盆栽的方法數等於　A+B+C+D≤8 的正整數解個數。

A+B+C+D≤8 的正整數解個數

= $A'+B'+C'+D'\le 4$ 的非負整數解個數

=$x+y+z+u+t=4$ 的非負整數解個數

=C^8_4=70。

17. [答案]：$\frac{16}{35}$

[解法]：1~7 號中，偶數 2,4,6，奇數 1,3,5,7

4 個球的號碼和為奇數，4 個球的號碼可分為 3 奇數 1 偶數，1 奇數 3 偶數

P(4 個球的號碼和為奇數)=$\frac{C_3^4\times C_1^3}{C_4^7}+\frac{C_1^4\times C_3^3}{C_4^7}=\frac{16}{35}$。

18. [答案]：(1) (3)

[解法]：

甲方法中，每一位學生被抽到的機率均為$\frac{1}{4}$

乙方法中，因「愛」班人數最多，故被抽中的同學為「愛」班者機率最高，即「愛」班同學被抽測的機率最高。

19. [答案]：(4)(5)

[解法]：

(1)「每班至少會有一人被抽中」不一定會成立。

(2)「抽出來的男生人數一定比女生人數多」不一定會成立。

(3) 小文被抽中的機率等於小美被抽中的機率=$\frac{80}{800}$。

(4)正確

(5)A、B 同時被抽中的機率為$\frac{80}{800}\times\frac{79}{799}<\frac{1}{100}$。故選(4)(5)

20. [答案]：$\frac{7}{16}$

[解法]：$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix}=ac=0\Rightarrow a$ 與 c 中至少有一個為 0，而 b 為 0 , 1 , 2 , 3 之任意數

故機率為 $\frac{4\times 7}{4^3}=\frac{7}{16}$

21. [答案]：(5)

[解法]：

「 眾數、平均數、全距 」都是一維數據，前二者只能用以探索單種數據的集中趨勢；後者則用以觀察一組數據的離散趨勢，這三者都未討論兩組資料的關係。

「相關係數、迴歸直線」則用以分析二維數據，然前者只討論直線相關的正負方向與相關強度，並未討論各別資料點中二數據的彼此關係；後者則常用最小平方法，經由計算分析求得最佳的逼近直線 $y=a+bx$，是即迴歸直線，藉以經由 x 值估計得到相關之 y 的最好預測值。

迴歸直線 $y=a+bx$ 中， x 值每增加 1，y 值就增加 b，即 b 為此迴歸直線之斜率。

因此，分析某公司服務年資相近員工之「年薪(y)」與「就學年數(x)」的資料，若此二者的迴歸直線為 $y=a+85000x$，則參據此一迴歸直線的斜率，即可直接得到此公司『員工就學年數每增加一年，其年薪平均增加 8 萬 5 千元』的結論。故只選 (5)。

22. [答案]：(5)

[解法]：依題意，可知 a 為連續三次皆正面或連續三次皆反面的機率；

b 為第二、三、四次，連續三次皆正面的機率；

c 為第三、四、五次，連續三次皆正面的機率；

$\Rightarrow$ $a=2b=2c=2\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$。 選 (5)。

23. [答案]：(2)

[解法]：

根據題意：

p_1=0.1×0.15+0.1　p_2=0.1×0.15+0.15　p_3=0.1×0.15

故選(2)

24. [答案]：(3)(4)

[解法]：

根據表格，可以得知

A、B、C、D 組答對第一題的人數分別為 100、80、70、20 人

A、B、C、D 組答對第二題的人數分別為 100、80、30、0 人

B 組的人有 20 人答錯第一題。

A、B、C、D 各組答錯第一題的人數分別為 0、20、70、100 人，

$\therefore$ 從第二題答錯的同學中隨機抽出一人，此人屬於 B 組的機率$=\frac{20}{20+70+100}<0.5$。

全體同學第一題答對率$\frac{270}{400}$，全體同學第二題答對率$\frac{210}{400}$，

故全體同學第一題的答對率比全體同學第二題的答對率高 15%。

因為 C 組中答對第二題的人只有 30 人，而 C 組中共有 100 人，

第一、二題都答對的機率$\le\frac{30}{100}=0.3$。故選(3)(4)。

25. [答案]：30

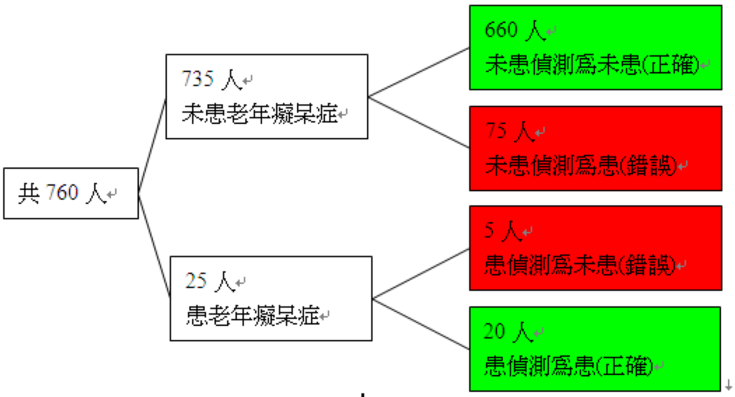
[解法]：

設甲、乙、丙三生產線製造的手機數量可占全部手機產量的比例為 x,y,z，其中 $x+y+z=1$

依題意：$\dfrac{0.05x}{0.05x+0.03y+0.03z} \le \dfrac{5}{12} \Rightarrow \dfrac{5x}{5x+3(1-x)} \le \dfrac{5}{12} \Rightarrow x \le 0.3=30\%$。

26. [答案]：$\dfrac{2}{19}$

[解答]：



故誤判率(偵測錯誤的機率)為 $\dfrac{75+5}{760}=\dfrac{80}{760}=\dfrac{2}{19}$。

27. [答案]：$\dfrac{11}{14}$

[解法]：

設 A、B 分別表示「排第四位的人可以抽獎」、「排第五位的人可以抽獎」的事件

$P(A)=1-(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{7}{8}$

$P(A\cap B)=\dfrac{1}{16}$(前四次都沒中獎) + $\dfrac{4}{16}$ (前四次只中獎 1 次)+ $\dfrac{6}{16}$ (前四次只中獎 2 次)=

$\dfrac{11}{16}$。故 $P(B|A)=\dfrac{\frac{11}{16}}{\frac{7}{8}}=\dfrac{11}{14}$。

28. [答案]：(3)

[解法]：

P(丙抽到白球｜甲和乙抽到相同顏色球)$=\dfrac{\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times 1}{\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$，故選(3)

29. [答案]：(5)

已知迴歸直線斜率相同，且為負相關，而$m=r_{x,y}\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

由觀察知σ_x相同，得$r_{x,y}\times\sigma_y$為定值，又$r_{x,y}<0$，在σ_y最小時，$r_{x,y}$最小

故只須找σ_y最小即可，由(1)之$\sigma_y=4\sqrt{2}$ (2) 之$\sigma_y=\sqrt{\dfrac{38}{3}}$

(3)之$\sigma_y=\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ (4)之$\sigma_y=4\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (5)之$\sigma_y=\sqrt{2}$ (最小)

故選(5)

30. [答案]：(2)(4)(5)

[解法]：

(1)由每公里的平均心率得知小明最高平均心率爲 188 而非最高心率，故錯誤。

(2)計算總步數為 10260，因此每步的平均距離$\dfrac{10000}{10260}$公尺<1 公尺，故正確。

(3)(4)(5)的選項，先計算完成時間的平均為 4：44，平均心率的平均為 170.4，步數的平均為 1026

(3)觀察數據，完成時間>(<)4：44，平均心率大都<(>)170.4，判斷為負相關。故錯誤

(4)觀察數據，步數>(<)1026，平均心率大都>(<)170.4，判斷為正相關。故正確。

(5)觀察數據，完成時間>(<)4：44，步數<(>)1026，判斷為負相關。故正確。