§4–5　n 次方程式

(甲)n 次方程式的引入與解的意義

(1)由 n 次多項式到 n 次方程式

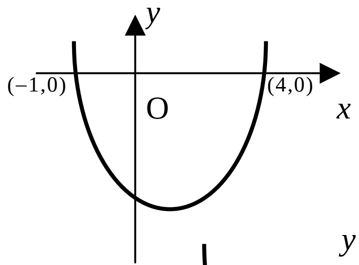
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 是 n 次多項式，
方程式 $f(x)=0$ 稱為 **n 次(多項)方程式**。

例如：$3x-\sqrt{35}=0$，$x^2-3x-54=0$，$(1+\frac{x}{100})^3=1.2$ 分別是 1 次、2 次、3 次方程式。

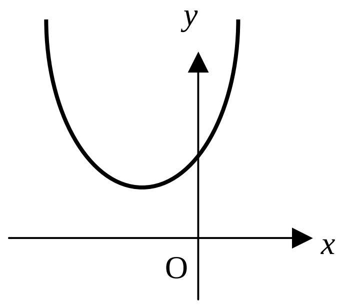
(2)方程式的根：
一個數 $\boldsymbol{x_0}$ 若滿足 $f(x_0)=0$，就稱 x_0 為方程式 $f(x)=0$ 的**根**或**解**。有時特別強調 x_0 為複數、實數、有理數或整數，x_0 又稱為複數根、實根、有理根或整數根。

(3)**實根的幾何解釋**：

例如：
(a)$y=f(x)=x^2-3x-4$ 的圖形，如右圖所示：
　圖形與 x 軸相交於兩點$(-1,0)$、$(4,0)$，
　其橫坐標-1 與 4 就是 $x^2-3x-4=0$ 的實根。



(b)$y=g(x)=x^2+x+1$ 的圖形，如右圖所示：
　圖形與 x 軸沒有交點，因為 $y=g(x)=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$，
　所以沒有任何實數 x，使得 $g(x)=0$，故 $g(x)=0$ 沒有實根。
　方程式 $x^2+x+1=0$ 的解 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 。



一般而言，n 次函數 $y=f(x)$的圖形是**一條波浪形、平滑的連續曲線**。
若該曲線和 x 軸相交，那麼交點 $P(x_0,f(x_0))$的橫坐標 x_0 必滿足 $f(x_0)=0$，所以 x_0 是方程式 $f(x)=0$ 的一個實根，如果該曲線與 x 軸沒有交點，此時任何實數均不是方程式 $f(x)=0$ 的根，因此方程式 $f(x)=0$ 無實根。

實係數 n 次方程式 $f(x)=0$ 的實根$\alpha \Leftrightarrow n$ 次函數 $y=f(x)$的圖形與 x 軸交於點$(\alpha,0)$

(乙) n 次方程式的基本概念

討論 n 次方程式，就是要處理下面三個問題：

有沒有解？
有多少解？
如何找出解？

有沒有解的問題

一個實係數的 n 次方程式，不一定有實數解。例如 $x^2+1=0$ 就沒有實數解，為此我們引進了複數，在複數系中，$x^2+1=0$ 有兩個複數根 i 及 $-i$。但就一般的 n 次方程式，在複數系中，是不是一定有根呢？這個存在性的問題，在西元 1799 年時，德國數學家高斯(Gauss 1777–1855)在他的博士論文中證明了在複數系中，n 次方程式一定有根，它所討論的方程式不限於實係數而是複數的係數，但實數亦可看作是複數，所以這個結果亦可用到實係數的 n 次方程式。我們將高斯的結果寫成下列的定理：

代數基本定理：每一個 n 次方程式，只要 $n\geq 1$，就至少有一個複數根。

有了代數基本定理之後，我們不用擔心是否要為了找根而要一直擴展數系，
因為它告訴我們，一個複係數的 n 次方程式，在複數系中，一定有複數根。
所以我們只要將數系擴展到複數系，就解方程式而言就足夠了。

解的個數

一次方程式恰有一個根，二次方程式如果重根算是兩個，那麼二次方程式就恰有兩個根。
一般而言，如果計算重根的個數，(重根算二個、三重根算三個，...)那麼根據代數基本定理以及因式定理，我們可推得以下定理：

定理：**n 次方程式就恰有 n 個根。**

有沒有公式解

另一個存在性的問題就是 n 次方程式有無求公式解(將係數加減乘除開根號)的方法？

先來看一看幾個例子：

$n=1$ 時　$ax+b=0$ 的解是　$x=-\dfrac{b}{a}$。

n=2 時　$ax^2+bx+c=0$ 的解是　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

至於 n=3 或 4 的公式解，一度曾經是數學競技鬥智的焦點。期間頗多戲劇化的情節發展。結果三次方程式由卡丹(Carden)於 1545 年公佈其解法於其著作「Ars Magna」中，而據傳說此解法是由 Tartaglia 教給 Carden，並以保守此秘密為條件，不料 Carden 竟然背信，將解法公佈，並據為己有，可見 Carden 此人為達目的不擇手段。至於四次方程式的公式解是由 Carden 的弟子斐拉利(Ferrari 1522−1565)所提出的。

但是對於五次方程式的堡壘，卻久攻不下，這個問題持續了兩三百年，直到 1832 年，一位法國青年 Galois 在其決鬥前夕，在它的遺書中，這位偉大的青年數學家引進了「群」的理論，證明了：**五次及五次以上的方程式，不可能有公式解**。從此數學家才解除了尋找公式解的惡夢。

(丙)多項方程式解的性質：

例子：

$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2$ 或 3

$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$x^3-x^2+4x-4=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+4)=0 \Rightarrow x=1,\ 2i,-2i$

$x^4+5x^2+4=0 \Rightarrow (x^2+1)(x^2+4)=0 \Rightarrow x=i\ ,-i,2i,-2i$

[討論]：能否造出一個實係數的二次方程式以 $1-i$ 為它的一個虛根？
否造出一個只含一個虛根 $1-i$ 的實係數二次方程式？

(1)**實係數 *n* 次方程式虛根成對：**

定理一：

若 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 為一實係數 n 次多項式，z 為一個複數，則 $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$。

引理 1：若 z_1,z_2 為二複數，則(a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$　(b) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$　。

證明：

引理 2：$\overline{z^n}=(\bar{z})^n$，其中 n 為正整數。

證明：

[定理一證明]：

定理二：設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 為一實係數 n 次方程式，

若 z 為 $f(x)=0$ 的一根，則共軛虛數 $\bar{z}$ 亦為 $f(x)=0$ 的一根。

[證明]：

[討論]：

(a)若 $f(x)=0$ 為一個 3 次的實係數方程式，是否一定有實根呢？

(b)若 $f(x)=0$ 為一個 4 次的實係數方程式，是否一定有實根呢？

一般的情形：

(a)若 $f(x)=0$ 為一個奇數次的實係數方程式，一定有實根。

(b)若 $f(x)=0$ 為一個偶數次的實係數方程式，一定有偶數個實根。

(可能沒有實根)

(2)無理根成對：

先舉一個例子：
設 $f(x)=x^4-6x^3+7x^2+6x-2$
(a)驗證 $2+\sqrt{3}$是有理係數 $f(x)=0$ 的一個無理根。
(b)取 $g(x)=[x-(2+\sqrt{3})][x-(2-\sqrt{3})]=x^2-4x+1$，請問 $f(x)$是否能被 $g(x)$整除？
(c)請問 $2-\sqrt{3}$是否為 $f(x)=0$ 的另一個無理根。

一般情形：
設 $f(x)$為有理係數多項式，a,b 為有理數，且$\sqrt{b}$為無理數
若 $x=a+\sqrt{b}$為 $f(x)=0$ 之一根，則 $x=a-\sqrt{b}$亦為其根。
[證明]：

[例題1] 設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 為一實係數 n 次方程式：
(1)若 $f(2-3i)=-4+5i$，求 $f(2+3i)=$？
(2)若 $f(-1+6i)=-5$，求 $f(-1-6i)=$？ Ans：(1)$-4-5i$ (2)-5

[例題2] 實係數方程式 $x^4-5x^3-2x^2+14x-20=0$ 有一根 $1+i$ ，則求方程式所有的根。
Ans：$1+i$，$1-i$，-2，5

[例題3] 設 a,b 為實數，若 $2i-1$ 為 $x^4+3x^3+(a+1)x^2+ax+b=0$ 的一根，則求 a,b 之值。
Ans：$a=7$，$b=5$

[例題4] 若 a,b 為有理數，若 $1-\sqrt{2}$ 為 $x^4+ax^3-6x^2+bx+1$ 之一根求 a,b 之值，並解此方程式。 Ans：$a=0,b=0$；$1\pm\sqrt{2}$ ，$-1\pm\sqrt{2}$

(練習1) $f(x)$為實係數多項式，已知 $f(3+5i)=7-2i$，則 $f(3-5i)=$？ Ans：$7+2i$

(練習2) $f(x)=x^4-8x^3+25x^2-30x+8$，試求 $f(2+i)=$？$f(2-i)=$？Ans：$6i,-6i$

(練習3) 已知 $2+i$ 為 $f(x)=x^4-4x^3+8x^2-12x+15$ 的一根，求 $f(x)=0$ 所有的根。
Ans：$2\pm i$，$\pm\sqrt{3}\ i$

(練習4) 設 $f(x)$為實係數三次多項式，且 $f(i)=0$ ($i=\sqrt{-1}$)，則函數 $y=f(x)$的圖形

與 x 軸有幾個交點？
(A)0(B)1(C)2(D)3(E)因 $f(x)$而異。　Ans：(B)

(練習5) 設實係數多項式 $f(x)=2x^3+3x^2+mx+n$，若 $f(i-1)=0$，則數對(m,n)=？
Ans：(2,−2)

(練習6) 設 a 為有理數，若 $2+\sqrt{3}$ 為 $x^4-4x^3+2x^2-4x+a$ 之一根，則 a=？
Ans：a=1

(3)根與係數的關係：

[例題5] 設三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根為α,β,γ，試求根與係數之關係：
(1)$\alpha+\beta+\gamma$=____ (2)$\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha$=_____ (3)$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$=_____ 。
Ans：(1)$-\frac{b}{a}$　(2)$\frac{c}{a}$　(3)$-\frac{d}{a}$

[例題6] 設四次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 之四根為$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 試求根與係數的關係：
(1)四根之和，(2)任意相異兩根乘積之和，(3)任意相異三根乘積之和，(4)四根之積。　Ans：(1)$-\frac{b}{a}$ (2)$\frac{c}{a}$ (3)$\frac{-d}{a}$ (4)$\frac{e}{a}$

[討論]：一般的 n 次方程式根與係數的關係：

(練習7) 設方程式 $2x^3+3x-5=0$ 的三根為α、β、γ，求下列各式的值：

(a)$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ (b)$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

Ans：(a) $\dfrac{3}{5}$ (b)-3

(練習8) 已知方程式 $x^4-x^3-56x^2+ax+b=0$ 的根中，有二根的比為 2：3，而另二根的差為 1，求整數 a,b 之值。 Ans：$a=36,b=720$

(丁)解根的方法：

(1)整係數的 n 次方程式找有理根：

(a)一次因式檢驗定理：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 為一個整係數 n 次多項式，若整係數一次式 $ax-b$ 是 $f(x)$的因式，且 a,b 互質，則 $a|a_n$ 且 $b|a_0$。

(b)有理根檢驗定理：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 為一個整係數 n 次方程式，

若 $x=\dfrac{b}{a}$ 為 $f(x)=0$ 之一有理根，a,b 為整數且互質，則 $a|a_n$ 且 $b|a_0$。

[例題7] 解方程式 $2x^4+x^3-21x^2-2x+6=0$。Ans：3, $\dfrac{1}{2}$, $-2+\sqrt{2}$, $-2-\sqrt{2}$

[例題8] 設 a,b,c 為整數，且 $x^4+ax^3+bx^2+cx+9=0$ 之四根為相異之有理數，求 a,b,c 之值。 Ans：$a=0,b=-10,c=0$

[例題9] 證明：$\sqrt[3]{2}$為無理數。

(練習9) 試求方程式 $f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2=0$ 之有理根。　Ans：$\frac{2}{3}$，$\frac{-1}{2}$

(練習10) 設 $f(x)=12x^4-56x^3+89x^2-56x+12=0$

(1)令 $x+\frac{1}{x}=t$，將 $\frac{f(x)}{x^2}=0$ 化為 t 的方程式。

(2)試解出 t，再解出 x。

Ans：(1)$12t^2-56t+65=0$ (2)$t=\frac{5}{2}$，$\frac{13}{6}$，$x=\frac{1}{2},2,\frac{2}{3},\frac{3}{2}$

(練習11) 解下列方程式：

(1)$2x^3+7x^2-7x-5=0$　(2)$3x^4+x^3-8x^2+x+3=0$

(3)$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$

Ans：(1)$x=-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$　(2)$x=1,1,$或 $\frac{-7\pm\sqrt{13}}{6}$

(3) $x=-2,-6,-4\pm\sqrt{6}$ [提示：方程式可化為 $(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15=0\Rightarrow(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$，令 $y=x^2+8x$ $\Rightarrow(y+7)(y+15)+15=0$，解 y，再解 x。]

(練習12) 設整係數方程式 $x^4+3x^3+bx^2+cx+10=0$ 有四個相異有理根，則其最大根為_______。　Ans：2

(練習13) 設 p,q 為自然數，且 $f(x)=x^5-2px^4+x^3-qx^2+x-2$ 有整係數一次因式，則求 p,q 之值。　Ans：$p=1,q=2$

(練習14) 證明：$\sqrt[3]{5}$為無理數。

(2)無理根的問題：

利用整係數一次因式檢驗定理，可解決有理根的問題，但是就一般的方程式而言，要找出解，尤其是高次的方程式，通常不是一件容易的事情。
例如：$f(x)=x^5+3x^2-7x+2=0$，由於它是整係數的 5 次多項式，所以一定有實根，先考慮是否有理根，根據牛頓定理，$x=\pm1$，±2 逐一代入多項函數 $f(x)$中，去看 $f(x)$值的變化：

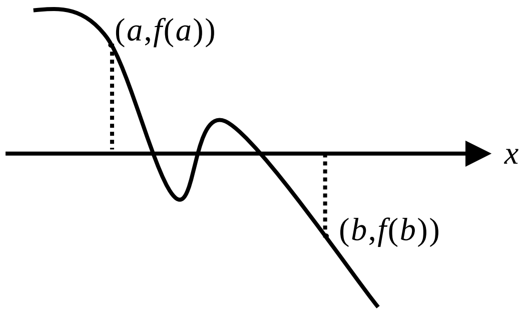
x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-4	11	-1	32

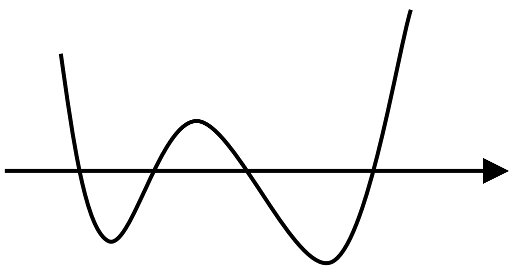
可以看出，$f(x)=0$ 並無有理根，因為它一定有實根，所以它的實根必為無理根。通常我們無法直接求出 $f(x)=0$ 無理根的形式，只能求得它的近似值。從上面的資料我們可以掌握一些重要的訊息：

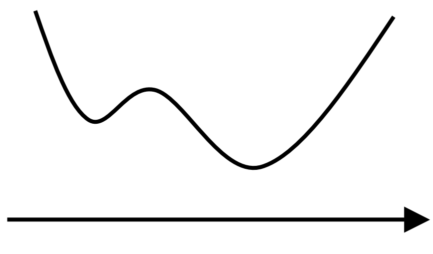
當 x 從-2「連續地」變化到-1 時，對應的函數值 $f(x)$也從-4「連續地」變化到 11。所以函數值 $f(x)$在-4 與 11 之間一定會有等於 0 的情形發生，換句話說，在-2 與-1 之間一定有一個數α，$f(\alpha)=0$；同理，在-1 與 1 之間會有一個數β，1 與 2 之間會有一個數γ分別使得 $f(\beta)=0$，$f(\gamma)=0$。

推廣這個概念可得以下的定理：

勘根定理：
設 $f(x)=0$ 為實係數 n 次多項方程式，a,b 是兩個實數，
若 $f(a)\cdot f(b)<0$，則在 a,b 之間至少有一個 $f(x)=0$ 的實根。
[定理的說明]：







注意：

①從觀察圖形可知，當 $f(a)\cdot f(b)<0$ 時，則 a,b 之間的根必有奇數個根。
②從圖形的觀察，當 $f(a)\cdot f(b)>0$ 時，$f(x)=0$ 在 a,b 之間可能有根，也可能無根，但若有根一定是偶數個根。

[例題10] 試問在那些連續整數之間，$f(x)=12x^3-8x^2-23x+11=0$ 有實根？
Ans：-2 與 -1，0 與 1，1 與 2

[例題11] $f(x)=2x^3+7x^2+3x-3$，試證：在 0 與 1 之間，存在一定數 k，使得 $f(k)=5k+1$。
[Hint：令 $g(x)=f(x)-(5x+1)$，證明 $g(x)=0$ 在 0 與 1 之間有實根 k]

[例題12] 設 a 是一個固定的正數，試證明：方程式 $x^n=a$ (n 為自然數)恰有一正實根。

(練習15) $f(x)=12x^3-8x^2-23x+11=0$ 在 0 與 1 之間有一實根，試求其近似值到小數點以下第二位。(第三位四捨五入)Ans：0.47

(練習16) 討論方程式 $x^3+x-5=0$ 是否有實根？有多少個實根？
Ans：此方程式有一實根。

(練習17) 設 $f(x)=x^3+2x-5$，$g(x)=2x^2-3$，證明：方程式 $f(x)g(x)=0$ 在 1 與 2 之間至少存在一實根。

綜合練習

(1) 解下列方程式：
(a)$2x^3+3x^2+11x+5=0$　(b)$2x^4-x^3-9x^2+13x-5=0$。

(2) 已知方程式 $x^4-5x^3-2x^2+14x-20=0$ 之一根為 $1+i$，試解出此方程式其它的根。

(3) 設三次方程式 $x^3-17x^2+32x-30=0$ 有兩複數根 $a+i$，$1+bi$，其中 a,b 是不為 0 的實數，試求它的實根。　(89 學科能力測驗)

(4) 設 $f(x)$為三次實係數多項式，且知複數 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 之一解。
試問下列哪些敘述是正確的？
(A)$f(1-i)=0$　(B)$f(2+i)\neq0$　(C)沒有實數滿足 $f(x)=0$ (D)沒有實數滿足 $f(x^3)=0$
(E)若 $f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，則 $f(4)<0$　(93 學科能力測驗)

(5) 設整係數方程式 $x^4+3x^3+bx^2+cx+10=0$ 有四個相異有理根，試求 b,c 的值。

(6) 設 a,b 為實數，$a\neq0$，若方程式 $ax^3+x^2+bx+1=0$ 之一根為 $2+\sqrt{2}\,i$，試求 a,b 的值。

(7) 已知方程式 $x^4+ax^3+ax^2+11x+b=0$ 有二根 3，-2，求 a,b 的值及其它兩根。

(8) 找出方程式 $x^4-x^3-9x^2+2x+12=0$ 所有實根的位置是在那些連續整數之間。

(9) 方程式 $x^4-4x^3-3x^2+x+1=0$ 在下列哪兩個整數之間有實數根?
(A) -3 與 -2 之間　(B) -2 與 -1 之間　(C) -1 與 0 之間　(D) 0 與 l 之間　(E) 1 與 2 之間。(91 指定考科乙)

(10) 設 a 為實數，令 α,β 為二次方程式 $x^2+ax+(a-2)=0$ 的兩根。試問當 a 為何值時，$|\alpha-\beta|$的值最小？答 $a=$________。(93 指定考科乙)

(11) 設方程式 $x^5=1$的五個根為$1,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$，則$(3-\omega_1)(3-\omega_2)(3-\omega_3)(3-\omega_4)=$
(1) 81　(2) 162　(3) 121　(4) 242。(93 指定考科甲)

(12) 二次方程式 $ax^2-(a-1)x-6=0$ 有一根介於 1 與 2 之間，另一根介於-1 與-2 之間，求實數 a 之範圍。

(13) 設 $f(x)$與 $g(x)$為實係數多項式，用 x^2-3x+2 除 $f(x)$得餘式 $3x-4$，用 $x-1$ 除 $g(x)$得餘式 5，且 $g(2)=-3$。
(a)試求以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$的餘式。
(b)試證明：$f(x)\cdot g(x)=0$ 在 1 與 2 之間有實根。

(14) 設 $a<b<c$, 若 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ 有兩實根α,β，且$\alpha<\beta$，比較 a,b,c,α,β 的大小。

(15) 設 $f(x)=x^4-3x^3-16x^2+3x+35$，試問 $y=f(x)$的圖形在下面那個範圍中與 x 軸有交點？(A)$-1<x<0$ (B)$0<x<1$ (C)$1<x<2$ (D)$2<x<3$ (E)$3<x<4$。

(16) 方程式 $2x^3-3x^2+19x-60=0$ 的根，符合下列那些情形？
(A)有一根介於-3 與-4 之間 (B)有一根介於 2 與 3 之間 (C)有 3 個實根
(D)恰有一個有理根 (E)有兩個無理根。

(17) 實係數多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，請問下列選項那些是正確的？
(A)若 a,b 為實數，且 $f(a)f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 在 a,b 之間有實根。
(B)若 a,b 為實數，且 $f(x)=0$ 在 a,b 之間有實根，則 $f(a)f(b)<0$。
(C)若 $1-5i$ 為 $f(x)=0$ 之根，則 $1+5i$ 亦為 $f(x)=0$ 的根。
(D)若 整係數一次因式 $ax+b|f(x)$，則 $a|a_n$ 且 $b|a_0$。
(E)若 $f(1-\sqrt{2})=0$，則 $f(1+\sqrt{2})=0$。

(18) 已知實係數四次多項函數 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，若 $f(x)$值之正負如下表：且 $f(-3+2i)=0$。

x	小於-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$值	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

下面那些結論是正確的？(A)$-3,-2$ 之間有實根 (B)$-1,0$ 之間恰有一個實根 (C)$f(x)=0$ 有四個實根 (D) $f(x)=0$ 恰有一正根(E) $-3-2i$ 為 $f(x)=0$ 的根。

(19) $y=f(x)$為一多項函數，若 $f(0)>0$，$f(1)<1$，試證在 0,1 之間存在一實數 c，使得 $f(c)=c^2$ 。

(20) 已知方程式 $x^4-4x^3-34x^2+ax+b=0$ 之四根成等差數列，試求 a,b 的值及四個根。

(21) 已知方程式 $x^4+3x^3-x^2-5x-12=0$，其中有兩根之乘積為-4，試解此方程式。

進階問題

(22) 解下列方程式：
(a)$x^4-4x^3+x^2+4x+1=0$ (b) $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\dfrac{5}{2}$ (c)$2x^2-6x-5\sqrt{x^2-3x-1}=5$

(23) 證明存在一正實數 r，使得 $r^4+2r+1=\sqrt{2}$ 。

(24) 設二多項式 $f(x)$與 $g(x)$，對於二相異實數 a,b 有下列關係 $f(a)<g(a)$，$f(b)>g(b)$，證明：在 a,b 之間存在一個實數 c 使得 $f(c)=g(c)$。

(25) 設 a,b,c 滿足 $\begin{cases} a+b+c=2 \\ ab+bc+ca=-5 \\ abc=-6 \end{cases}$，求以 a,b,c 為三根的三次方程式，並解出 a,b,c。

(26) 令 $f(x)=x^4-4x^3+11x^2-14x+10$，並設α ,β ,γ , δ是方程式 $f(x)=0$ 的四根。
(a)試求以α−1,β−1,γ−1, δ−1 為四根的四次方程式 $g(x)=0$。
(b)先求 $g(x)=0$ 的四根，再求 $f(x)=0$ 的四根。

綜合練習解答

(1) (a)$\frac{-1}{2}$，$\frac{-1\pm\sqrt{19}i}{2}$ (b) $1,1,1,\frac{-5}{2}$

(2) $1-i$，5，-2

(3) 15
[解法]：
因 $x^3-17x^2+32x-30=0$ 為實係數 3 次方程式
所以 $a+i$，$1+bi$ 為共軛虛根 $\Rightarrow a=1$ 且 $b=-1$
$\Rightarrow [x-(1+i)][x-(1-i)]$整除 $x^3-17x^2+32x-30$
$\Rightarrow x^2-2x+2 \mid x^3-17x^2+32x-30$
因此可以長除法將 $x^3-17x^2+32x-30$ 除以 x^2-2x+2 得其商式為$(x-15)$
即 $x^3-17x^2+32x-30=(x^2-2x+2)(x-15)$
故 $x^3-17x^2+32x-30=0$ 有另一實根為 15

(4) [答案]：(A)(B)(E)
[解法]：
因為 $f(x)=0$ 為三次實係數方程式，所以虛根成對
$\Rightarrow$ $f(x)=0$ 有一個實根且二個虛根為 $1+i$、$1-i$
(A)因 $f(x)$有虛根 $1-i \Rightarrow f(1-i)=0$……(○)
(B)因 $f(x)$只有二虛根 $1+i,1-i \Rightarrow 2+i$ 不為其根，所以 $f(2+i)\neq0$……(○)
(C)因 $f(x)=0$ 有一實根，所以有一實數滿足 $f(x)=0$
(D)因 $f(x)=0$ 為三次實係數方程式$\Rightarrow f(x^3)=0$ 為九次實係數方程式，因此虛根成對
$\Rightarrow$至少有一實數滿足 $f(x^3)=0$
(E) 因 $f(x)=0$ 只有一實根，所以 $y=f(x)$的圖形與 x 軸只有一個交點
又因 $f(0)f(2)<0$，所以 $y=f(x)$的圖形與 x 軸的交點在 0 與 2 之間，所以 $f(4)\neq0$
我們先假設 $f(4)>0$，可得 $f(2)f(4)<0$，則 $y=f(x)$的圖形與 x 軸有另一交點在 2 與 4 之間，此與 $y=f(x)$的圖形與 x 軸只有一個交點矛盾。故 $f(4)<0$……(○)

(5) $b=-11$，$c=-3$

(6) $a=\frac{-5}{24}$，$b=\frac{-23}{12}$

(7) $a=-3$, $b=6$, 1,1

(8) -3 與 -2, -2 與 -1, 1 與 2, 3 與 4

(9) (D)

[解法]：令 $f(x)=x^4-4x^3-3x^2+x+1$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	160	35	2	1	-4	-25

因 $f(0)f(1)<0$, 故 $f(x)=0$ 在 0,1 之間有實數解

(10) 2

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-a\\ \alpha\beta=a-2\end{cases}\Rightarrow|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{a^2-4a+8}=\sqrt{(a-2)^2+4}\geq 2$$

當 $a=2$ 時 $|\alpha-\beta|$ 有最小值 2。

(11) (3)

[解法]：$x^5-1=(x-1)(x-\omega_1)(x-\omega_2)(x-\omega_3)(x-\omega_4)$

$x=3$ 代入, $3^5-1=(3-1)(3-\omega_1)(3-\omega_2)(3-\omega_3)(3-\omega_4)$,

故所求為121

(12) $2<a<\dfrac{7}{2}$

(13) (a)4 (b) 證明 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$ 在 1 與 2 之間有實根即可。

(14) $a<\alpha<b<\beta<c$

(15) (C)

(16) (B)(D)

(17) (A)(C)

[解法]：

(A)由勘根定理可知正確。……(○)

(B)舉例：$f(x)=(x-1)(x-2)$, 則 $f(0)f(3)>0$, 但 $f(x)=0$ 在 0 與 3 之間有實根 1,2

(C)因 $f(x)=0$ 為實係數方程式, 可知虛根成對,

所以若 $f(1-5i)=0\Rightarrow f(1+5i)=0$……(○)

(D)此項敘述必須加上 **$(a,b)=1$** 的條件才成立

(E)此項敘述必須在 **$f(x)$為有理係數方程式**的條件下才成立。

(18) (B)(D)(E)

(19) [提示：考慮 $F(x)=f(x)-x^2$]

(20) $a=76, b=105$, 4 根為 $-5,-1,3,7$

(21) $\dfrac{-1\pm\sqrt{17}i}{2}$，$-1\pm\sqrt{2}\ i$

[提示：可令方程式會化為$(x^2+ax-4)(x^2+bx+3)=0$，展開之後，再比較係數]

(22) (a)$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ (b)$0,-8,1,3$ (c)$5,-2$

(23) [提示：令方程式 $f(x)=x^4+2x+1-\sqrt{2}$ ，證明 $f(x)=0$ 有一實根]

(24) [提示：考慮 $\mathrm{F}(x)=f(x)-g(x)$，證明 $\mathrm{F}(x)=0$ 在 a,b 之間有一實根]

(25) $x^3-2x^2-5x+6=0$；$(a,b,c)=(1,3,-2)(1,-2,3)(3,1,-2)(3,1,-2)(3,-2,1),(-2,1,3)(-2,3,1)$

(26) (a)$g(x)=x^4+5x^2+4$ (b)$1\pm i$ $1\pm 2i$