§2–5 曲線下的面積

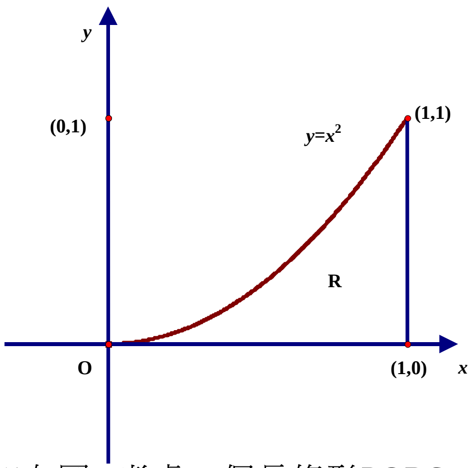
在人類文明發展的歷程中，測量土地面積一直是重要的工作，土地面積的測量往往會遇到土地的形狀是多邊形區域或圓形區域，甚至有些是邊界爲曲線的區域。對於多邊形區域的面積，我們可以利用「分割」的方法將它分割成有限個三角形或四邊形(如圖 3–1(a))，再求這些圖形面積的總和。但是對於圓而言，它無法完全分割成若干個三角形或四邊形，歷史上阿基米得與劉徽都曾使用圓外切正多邊形與圓內接正多邊形來「分割」、「逼近」圓，進而估計了圓周率。

(甲)曲線下的面積

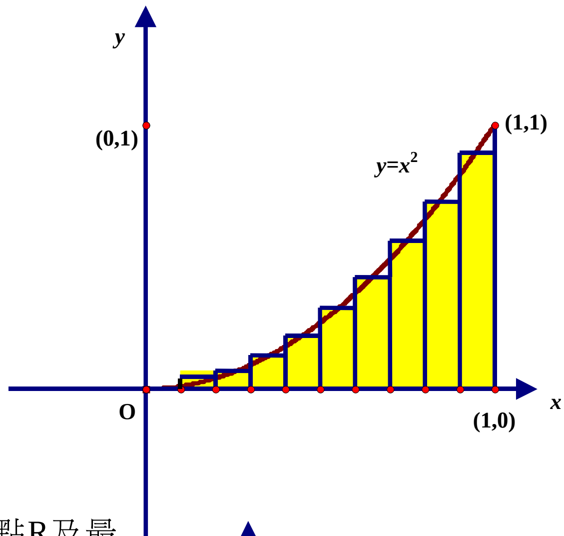
當一個區域的邊界含有曲線時，它的面積經常都不能單憑簡單的「分割」，還要藉助「逼近」的想法才能求得面積。接下來我們就利用「分割」與「逼近」的方法來求曲線所圍成的區域面積。

例子：求$f(x)=x^2$的圖形，直線$x=1$，$y=0$ 所圍成的一個區域R的面積。

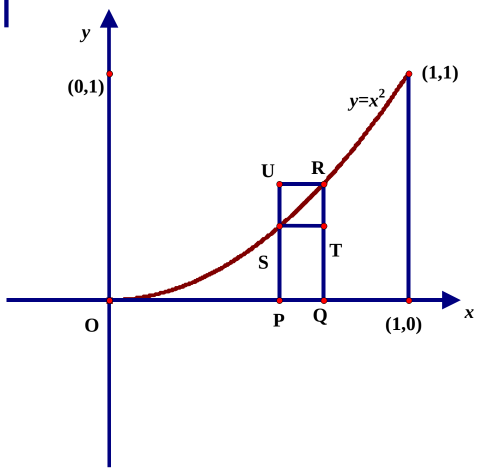
設R是由$y=x^2$的圖形、直線$x=1$ 及$y=0$ 所圍成的一個區域。我們將(0,0)到(1,0)之間的線段分割成n段，然後過這些分點做x軸的垂直線；這些垂直線將區域R分隔成n個長條形，設第i個長條形的面積爲R_i，因此$R_1+R_2+\ldots+R_n$=區域R的面積。這些長條形雖然很像矩形，不過它們到底不是矩形，我們用n個矩形來估計這n個長條形的面積，直觀來看，當我們將長條形分得愈細，那麼每個矩形的面積就會愈接近長條形的面積，因此當n愈大時，這n個矩形的面積和就會與區域R的面積愈接近。



分割



如右圖，考慮一個長條形PQRS，在長條形最高點R及最低點S分別做水平線，顯然地，長條形PQRS的面積都介於矩形PQRU的面積及矩形PQTS的面積之間。我們稱矩形PQRU爲**上矩形**與矩形PQTS爲**下矩形**。每個長條形根據同樣的方法都可以做出上矩形與下矩形，全部上矩形面積的和稱爲**上和**，全部下矩形面積的和稱爲**下和**，根據上矩形、長條形與下矩形面積間的關係，可得「**下和<區域R的面積<**上和」。



接下來，我們來計算區域 R 的面積：

(1)分割：

將(0,0)到(1,0)之間的線段等分成n段，每一段的寬度均

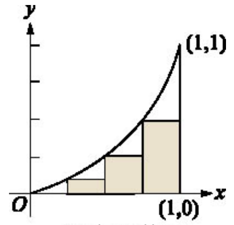
爲$\frac{1}{n}$，其兩端點與等分點爲 $0,0+\frac{1}{n},0+\frac{1}{n}\times2,\ldots,0+\frac{1}{n}\times(n-1),1$，因爲$f(x)=x^2$在$[0,1]$之間爲遞增函數，所以下矩形的高分別爲 $0^2,(\frac{1}{n})^2,(\frac{2}{n})^2,\ldots,(\frac{n-1}{n})^2$，

因此下和$=\frac{1}{n}\times0^2+\frac{1}{n}\times\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\times\frac{4}{n^2}+\ldots.+\ \frac{1}{n}\times\frac{(n-1)^2}{n^2}$

$=\frac{1}{n^3}\times(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)$

$=\frac{1}{n^3}\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$。



（下矩形的和）

另一方面，n個上矩形的寬度都是 $\frac{1}{n}$ ，而上矩形的高分別爲

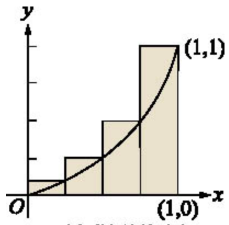
$(\frac{1}{n})^2,(\frac{2}{n})^2,\ldots,(\frac{n-1}{n})^2,1^2$，

因此上和$=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\times\frac{4}{n^2}+\ldots.+\ \frac{1}{n}\times\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{1}{n}\times1$

$=\frac{1}{n^3}\times(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$

$=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$。



（上矩形的和）

根據前面的討論，可知當 n 是任意正整數時，恆有

$\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}<$ 區域 R 的面積 $<\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$

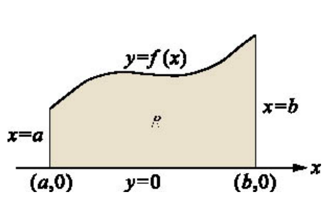
(2)逼近：

根據夾擠原理，

可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2})=\frac{1}{3}$ =區域 R 的面積。

一般而言，要計算函數$f(x)$的圖形與直線$y=0,x=a,x=b$所圍成的區域S的面積時(假設$f(x)\geq0$，$\forall x\in[a,b]$)，可依上例分成三步驟：

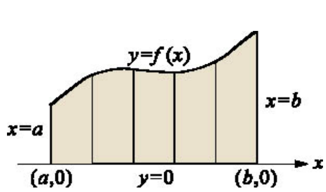
第一步：分$[a,b]$爲n等分，每等分長$=\frac{b-a}{n}$



第二步：

計算下和$=L_n=\frac{b-a}{n}\ (m_1+m_2+\ldots m_n)$

計算上和$=U_n=\frac{b-a}{n}\ (M_1+M_2+\ldots+M_n)$ 對於$i=1,2,3,\ldots,n$



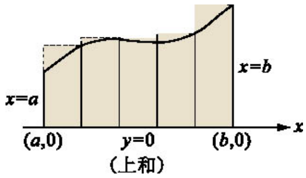
$m_i=f(x)$在$\left[a+\frac{(i-1)(b-a)}{n},a+\frac{i(b-a)}{n}\right]$的最小值=下矩形的高。

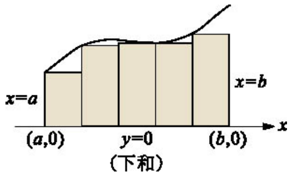
$M_i=f(x)$在$\left[a+\frac{(i-1)(b-a)}{n},a+\frac{i(b-a)}{n}\right]$的最大值=上矩形的高。

故$L_n\leq S\leq U_n$，$\forall n\in N$

第三步：$\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$ =A　(夾擠原理)

根據上面三個步驟，可得區域S的面積爲A。



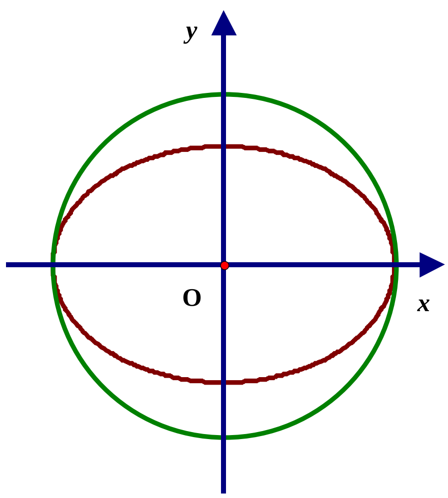


[例題1] $y=f(x)=x^3$與$y=0$、$x=1$、$x=2$ 圍成之區域爲R，若把區間[1,2]分成n等份，所得的n個等寬的長條，令長條之面積上和爲U_n，下和爲L_n。則

(1)U_n=？　(2)L_n=？　(3)R的面積。

Ans：(1)$U_n=\frac{15}{4}+\frac{14n+3}{4n^2}$ (2)$L_n=\frac{15}{4}+\frac{-14n+3}{4n^2}$ (3)$\frac{15}{4}$

[例題2] 已知圓$x^2+y^2=a^2$，其面積爲πa^2，試利用「分割逼近」的方法求橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面積。　Ans：$ab\pi$



[例題3] 已知某運動質點的速度函數$y=f(t)=t^2+4t$，試求時刻$t=0$到$t=2$所作的位移。

Ans：$\frac{32}{3}$

(練習1) 函數$f(x)=9-x^2$之圖形與直線$x=0$、$x=2$、$y=0$ 圍成區域S，若把區間[0,2]分成n等份，所得的n個等寬的長條，令長條之面積上和爲U_n，下和爲L_n。則(1)U_n=？ (2)L_n=？ (3)S的面積。

Ans：(1)$\frac{46n^2+12n-4}{3n^2}$ (2) $\frac{46n^2-12n-4}{3n^2}$ (3)$\frac{46}{3}$

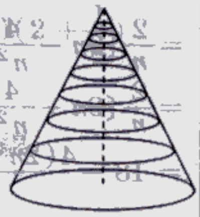
(練習2) 已知在圓$x^2+y^2=25$內含一個橢圓$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，設圓內部在兩直線$x=1$、及$x=2$之間的面積爲$R_1$，而橢圓內部在此兩直線之間的面積爲$R_2$，則$\frac{R_1}{R_2}$=？ Ans：$\frac{5}{3}$

(練習3) 已知某一區域 t 年的人口變化率爲 $f(t)=100+500t$，$0\le t\le 4$，試求這 4 年內的人口共增加多少人？Ans：4400 人

[例題4] 一圓錐體之底面積爲 A，高爲 h，求證其體積=$\frac{1}{3}Ah$。

【證明】：1° 作高 $\overline{AB}$ 之 n 等分點作平行底面之橫截面，

則錐體爲所截各塊之體積和。

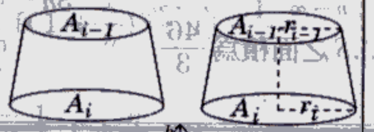


2° 就其中一塊之體積 V_i 而言

有 $\Rightarrow A_{i-1}(\frac{h}{n})<V_i<A_i(\frac{h}{n})$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_{i-1}(\frac{h}{n})<\sum_{i=1}^{n} V_i<\sum_{i=1}^{n} A_i(\frac{h}{n})$$

3° 令 A_i 之半徑爲 r_i，則 $\frac{r_i}{r}=\frac{(\frac{i}{n})h}{h}$



$\therefore r_i=(\frac{i}{n})r$

$$\therefore A_i(\frac{h}{n})=\pi(\frac{i}{n}r)^2\cdot(\frac{h}{n})=\frac{\pi r^2 h}{n^3}(i^2)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_{i-1}(\frac{h}{n})=\frac{\pi r^2 h}{n^3}[0^2+1^2+\cdots\cdots+(n-1)^2]$$

$$=\frac{\pi r^2 h}{n^3}\times\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_{i-1}(\frac{h}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi r^2 h}{6}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{n^3}$$

$$=\frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(\frac{h}{n})=\frac{\pi r^2 h}{n^3}(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)$$

$$=\frac{\pi r^2 h}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_i(\frac{h}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi r^2 h}{6}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

$$=\frac{\pi r^2 h}{3}$$

4° 所求體積 $V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} V_i$，

但由2°知 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_{i-1}(\frac{h}{n})\le\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} V_i\le\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_i(\frac{h}{n})$

$$\Rightarrow \frac{\pi r^2 h}{3}\le V\le\frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}(\pi r^2)\cdot h=\frac{1}{3}\times\text{底面積}\times\text{高}=\frac{1}{3}Ah$$

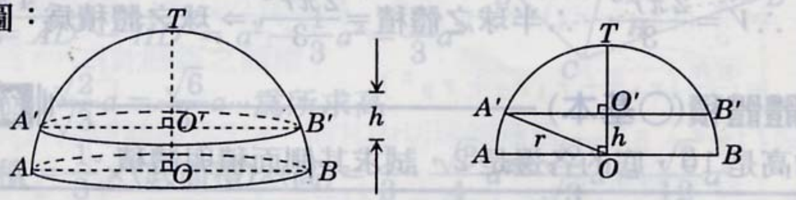
5° 其他底面積爲 A，高爲 h 之錐體，可視爲由上述之直圓錐，

推溯而成，其體積仍應爲 $\frac{1}{3}\times$底面積×高

[例題5] 試證明：半徑r之球體積爲$\frac{4}{3}\pi r^3$。

【證明】：1^o 先證半球的體積 $V=\frac{2}{3}\pi r^3$。

2^o 如圖：



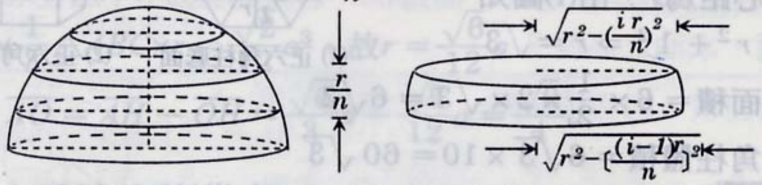
作與底面平行的任一橫截面，則截面爲一圓，

設其圓心與球心距離 $\overline{O'O}=h$，

則其半徑 $\overline{O'A'}=\sqrt{\overline{OA'}^2-\overline{O'O}^2}=\sqrt{r^2-h^2}$，

故其面積爲$\pi(r^2-h^2)$。

3^o 今以平行於底面而間隔爲 $\frac{r}{n}$ 的平面，將半球體切割成 n 塊



令 V_i 表示由下而上第 i 塊的體積，則其上底半徑

爲 $\sqrt{r^2-(\frac{ir}{n})^2}$，下底半徑爲 $\sqrt{r^2-[\frac{(i-1)r}{n}]^2}$，

故 $\Rightarrow \pi[r^2-(\frac{ir}{n})^2]\frac{r}{n}\leq V_i\leq \pi\{r^2-[\frac{(i-1)r}{n}]^2\}\frac{r}{n}$

$\Rightarrow \frac{\pi r^3}{n}[1-(\frac{i}{n})^2]\leq V_i\leq \frac{\pi r^3}{n}[1-(\frac{i-1}{n})^2]$

$\therefore$半球體積 V滿足

$\frac{\pi r^3}{n}[n-\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2]\leq V\leq \frac{\pi r^3}{n}[n-\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i-1}{n})^2]$

$\Rightarrow \pi r^3-\frac{\pi r^3}{n^3}(\sum\limits_{i=1}^{n}i^2)\leq V\leq \pi r^3-\frac{\pi r^3}{n^3}[\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1)^2]$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\pi r^3-\frac{\pi r^3}{n^3}(\sum\limits_{i=1}^{n}i^2)\leq \lim\limits_{n\to\infty}V$

$\leq \lim\limits_{n\to\infty}\pi r^3-\frac{\pi r^3}{n^3}[\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1)^2]$ ……①

4^o 但 $\lim\limits_{n\to\infty}[\pi r^3-\frac{\pi r^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[\pi r^3-\frac{\pi r^3}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]$

$=\pi r^3-\frac{\pi r^3}{3}=\frac{2\pi r^3}{3}$ ………②

同理 $\lim\limits_{n\to\infty}\{\pi r^3-\frac{\pi r^3}{n^3}[0^2+1^2+\cdots\cdots+(n-1)^2]\}$

$=\frac{2\pi r^3}{3}$ ………③

5^o 又 $\lim\limits_{n\to\infty}V=V$，由①②③知 $\frac{2\pi r^3}{3}\leq V\leq\frac{2\pi r^3}{3}$

$\therefore V=\frac{2\pi r^3}{3}$ $\therefore$半球之體積$=\frac{2\pi r^3}{3}\Rightarrow$球之體積爲$\frac{4\pi r^3}{3}$

$\boxed{\text{綜合練習}}$

(1) 已知某一外文的單字學習課程，在t小時的學習速度函數為$f(t)=-t^2+8t$，$0\le t\le 5$，試求前 3 個小時內共可學會多少個單字？

(2) 試求拋物線$y=x^2+2x-3$與x軸所圍成的圖形區域面積。

(3) 試求函數$f(x)=-x^2+4x$的圖形與直線$y=2x$所圍成的區域面積。

(4) 直角三角形之三邊長分別為 3,4,5，

(a)以$\overline{AB}$為軸旋轉一周掃過之部分的體積=？

(b)以$\overline{AC}$為軸旋轉一周掃過之部分的體積=？

綜合練習解答

(1) 27 個單字

(2) $\frac{32}{3}$

(3) $\frac{4}{3}$

(4) (a)16π (b)$\frac{48}{5}\pi$