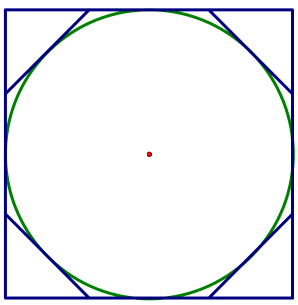
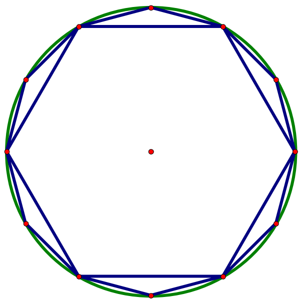
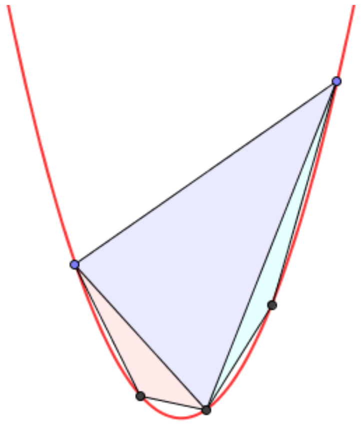
第五十一單元　積分的意義

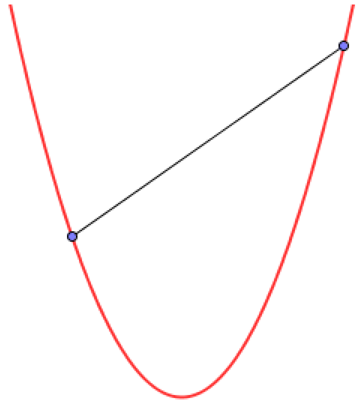
在人類文明發展的歷程中，測量土地面積向來是重要的工作，對於邊界爲平直線段的多邊形區域，我們可以將它分割成有限個三角形區域，這些三角形的面積總和就是多邊形區域的面積。

對於有些邊界是曲線的區域來說，求區域的面積就不是那麼容易的事情。阿基米德(Archimedes ,約 287BC~211BC)就曾利用圓外切正多邊形與圓內接正多邊形來「分割」、「逼近」圓，進而估計了圓周率的近似值；他也研究過拋物線弓形面積的計算方法，並且利用了「窮盡法」求得拋物線弓形面積的面積。本單元從面積的問題出發，發展定積分的概念，並且介紹微積分基本定理的涵義，最後再將焦點放在介紹簡單的不定積分與定積分的計算。









(甲)定積分的意義

◆　黎曼和與定積分

(1)分割逼近求面積

回顧求函數圖形上某一點切線的想法：利用割線斜率來「近似」切線的斜率，最後透過求割線斜率的「極限」來求切線的斜率。

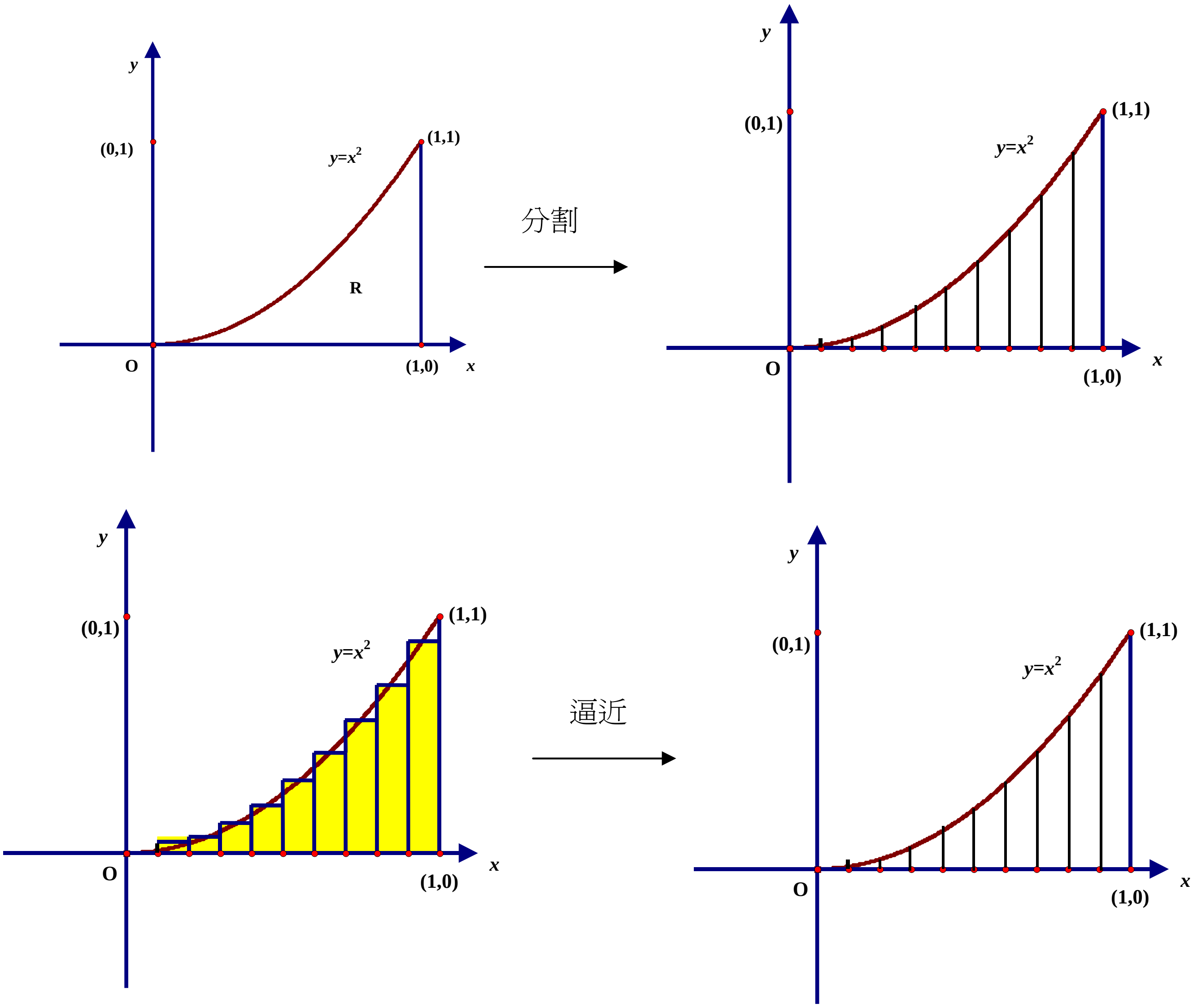
非多邊形區域 R 來說，可以利用「**找近似、求極限**」的想法來求面積：

設 R 是由 $f(x)=x^2$ 的圖形、直線 $x=1$、$x=0$ 及 x 軸所圍成的一個區域。

(1°)分割求近似：

如下圖，將區間[0,1]平分成 n 等分，每一段的寬度均爲$\frac{1}{n}$，

分割點：$0, 0+\frac{1}{n}, 0+\frac{1}{n}\times 2 ,\ldots, 0+\frac{1}{n}\times(n-1), 1$，過分割點分別做作 x 軸的垂直線將區域 R 分隔成 n 個長條形，設第 i 個長條形 R_i 的面積爲 A_i，因此 $A_1+A_2+\ldots+A_n=$區域 R 的面積。



如下圖，取第 i 個長條形 R_i 來看，在$[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$中任取一個數 t_i，考慮長 $f(t_i)$，寬$\frac{1}{n}$的矩形面積來當 A_i 的近似值，因此$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{1}{n}$可以當成區域 R 面積的近似值。

爲了計算方便起見，考慮兩種特殊的矩形，因爲 $f(x)=x^2$ 在[0,1]上是遞增的，

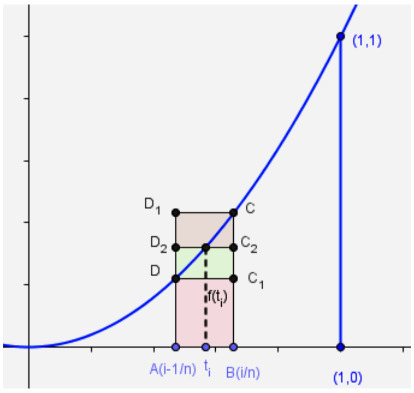
所以 $f(\frac{i-1}{n})\leq f(t_i)\leq f(\frac{i}{n})$，如下圖來看，可以得知：

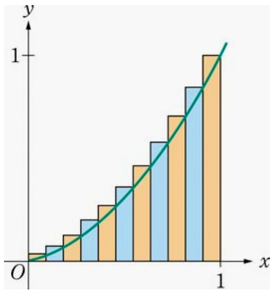
矩形 ABC_1D 的面積≤矩形 ABC_2D_2 的面積≤矩形 $ABCD_1$ 的面積

矩形 ABC_1D 的面積≤長條型 R_i 的面積≤矩形 $ABCD_1$ 的面積

我們稱矩形 $ABCD_1$ 為**上矩形**、矩形 ABC_1D 為**下矩形**。每個長條形根據同樣的方法都可以做出上矩形與下矩形，全部上矩形面積的和稱為**上和**，全部下矩形面積的和稱為**下和**，因此可得

「下和≤$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{1}{n}$ ≤上和」 且 「下和≤區域 R 的面積≤上和」。





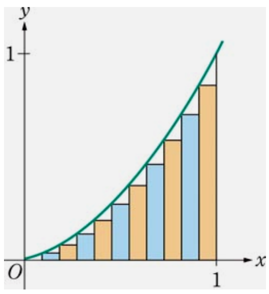
令上和為 U_n、下和為 L_n：

因為上矩形的長分別為$(\frac{1}{n})^2,(\frac{2}{n})^2,\ldots,(\frac{n-1}{n})^2,1^2$，寬均為$\frac{1}{n}$，

所以 $U_n=\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{n}\times(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}\times(\frac{2}{n})^2+\ldots.+\frac{1}{n}\times(\frac{n-1}{n})^2+\frac{1}{n}\times(\frac{n}{n})^2$

$=\frac{1}{n^3}\times(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$ $=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$。



因為下矩形的長分別為 $0^2,(\frac{1}{n})^2,(\frac{2}{n})^2,\ldots,(\frac{n-1}{n})^2$，寬均為$\frac{1}{n}$，

因此 $L_n=\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i-1}{n})\cdot\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{n}\times0^2+\frac{1}{n}\times(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}\times(\frac{2}{n})^2+\ldots.+\frac{1}{n}\times(\frac{n-1}{n})^2$

$=\frac{1}{n^3}\times(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)=\frac{1}{n^3}\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ $=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$。

根據前面的討論，可知當 n 是任意正整數時，恆有以下的結果：

$L_n<$ 區域 R 的面積 $<U_n$ 且 $L_n<\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{1}{n}<U_n$

所以$|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{1}{n}$–區域 R 的面積$|<U_n-L_n=\frac{1}{n}$，其中 t_i 是$[x_{i-1}, x_i]$中任取的數

當 n 增加時，U_n 與 L_n 的差 $\frac{1}{n}$ 會愈來愈接近 0。

故$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{1}{n}$與區域$\Re$的面積之間的誤差愈來愈接近 0，即當我們將[0,1]分割得愈細時(即 n 愈大時)，n 個矩形的面積和$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{1}{n}$會很接近區域 R 的面積。

(2°)逼近求極限：

因為「$L_n<$ 區域 R 的面積 $<U_n$ 且 $L_n<\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{1}{n}<U_n$」恆成立。

且$\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\frac{1}{3}$，根據夾擠定理，

所以不管 t_i 是$[x_{i-1}, x_i]$中的哪一個數，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{3}$。

故可以得知區域 R 的面積$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{3}$，其中 t_i 是$[x_{i-1}, x_i]$中任取的數。

由(1°)(2°)可以得知：對於區域 R(有一邊界是曲線)來說，可以透過「分割、逼近」的方式求得區域的面積。

◆ 黎曼和的意義

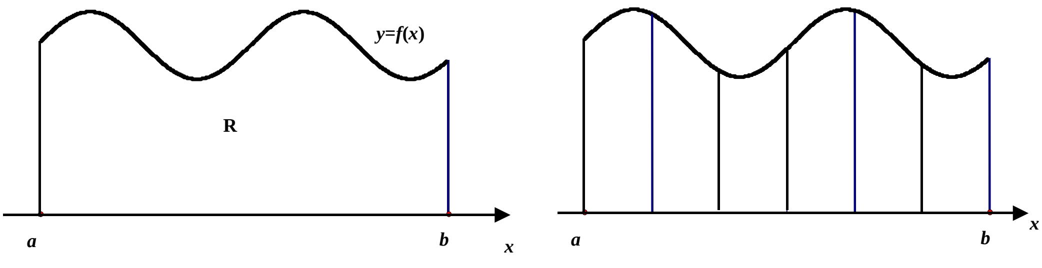
一般來說，設函數 $f(x)$為閉區間$[a,b]$上的非負連續函數，要求由 $y=f(x)$的圖形、直線 $x=a$、$x=b$ 及 x 軸所圍成的區域 R 之面積，上述的過程仍然適用。

(1°)分割求近似：

將區間$[a,b]$等分成 n 小段，分割點：$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$，令$\Delta x=\frac{b-a}{n}$，

其中 $x_i=a+(\Delta x)i$，$(i=0,1,2,\ldots,n)$。

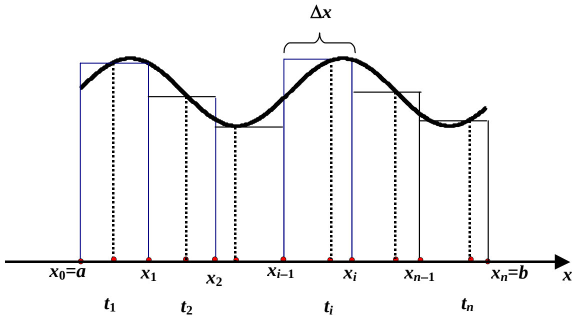
過每個等分點分別作 x 軸的垂直線，將區域 R 分割成 n 個長條形（如下圖），



在$[x_{i-1}, x_i]$中任取 t_i，則這 n 個矩形的面積和$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$ 可以當成區域 R 面積的近似值。

這 n 個矩形的面積和$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$ 稱為

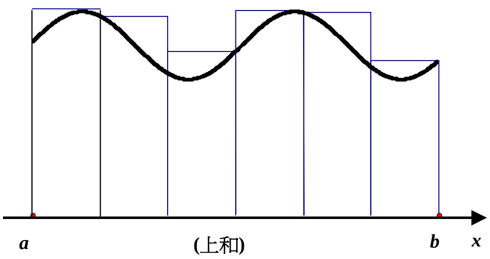
$f(x)$在$[a,b]$上對於分割點 x_0、x_1、…、x_n 的**黎曼和**。

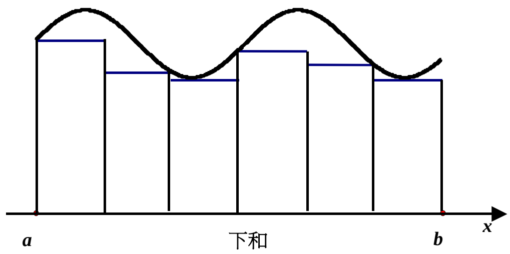


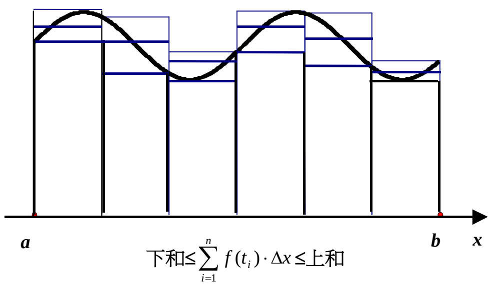
因為 $f(x)$為一個連續函數，所以在每一個區間$[x_{i-1},x_i]$ (i=1,2,…,n)中，$f(x)$都有最大值與最小值。設在區間$[x_{i-1},x_i]$上，$f(x)$的最大值為 M_i，最小值為 m_i，可得

上和(U_n)＝$\sum_{i=1}^{n} M_i$ ‧Δx，下和(L_n)＝$\sum_{i=1}^{n} m_i$ ‧Δx。由上和與下和的定義，

可以得知對於任意正整數 n，恆有 $L_n \leqq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x \leqq U_n$。







(2°)逼近求極限：

事實上，**當 $f(x)$為閉區間上的連續函數時，數列<L_n>與<U_n>的極限都會存在且相等，**

令$\lim_{n\to\infty} L_n=\lim_{n\to\infty} U_n$=A，則$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$會等於 A，其中 t_i是$[x_{i-1}, x_i]$中任取的數。

故區域 R 的面積等於 A。

根據前面的討論，黎曼和$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$與面積之間的關係如下：

非負連續函數黎曼和與面積： 設 $f(x)$為$[a,b]$上的連續函數且 $f(x)\geq 0$， $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$ 為 $f(x)$在$[a,b]$上對於分割點 x_0、x_1、…、x_n的一個黎曼和， 其中 $x_i-x_{i-1}=\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，$1\leq i\leq n$，而 t_i 為〔x_{i-1}，x_i〕中的任一點。

由函數 $f(x)$的圖形與直線 $x=a$，$x=b$ 及 x 軸所圍成的區域面積等於 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$ 。

當 $f(t_i)$為 $f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$中的最大值(最小值)時，則黎曼和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$ 為上和 U_n(下和 L_n)，此時所求的區域面積等於 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n(\lim\limits_{n\to\infty}L_n)$。

[例題1] 利用“分割”與“逼近”的方法，求函數 $f(x)=x^3$的圖形與直線 $x=0$，$x=2$ 及 x 軸所圍成區域的面積。

[解法]：

(1)分割求近似：

將〔0，2〕平分成 n 等分，分割：$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=2$。

令 $\Delta x=\dfrac{2}{n}$，在〔 x_{i-1}，x_i 〕中取 $t_i=x_i=\dfrac{2i}{n}$，$i=1$，2，⋯，n，

黎曼和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x=\dfrac{2}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3=\dfrac{2}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2i}{n}\right)^3$

$$=\frac{16}{n^4}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{16}{n^4}\cdot\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$=4+\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}。$$

(2)逼近求極限：

因為 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\dfrac{8}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)=4$，故所求區域面積為 4。

[例題2] 已知圓 $x^2+y^2=a^2$，其面積為 πa^2，試利用“黎曼和”求橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 內部的面積(其中 $a>0$，$b>0$)。

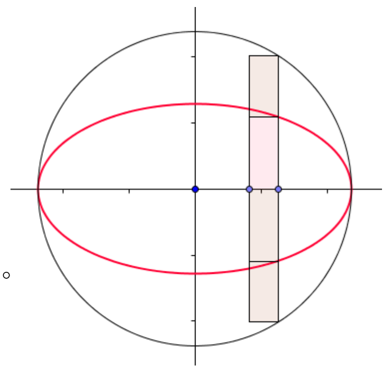
解法：

我們先考慮圓：$x^2+y^2=a^2$ 及橢圓：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 內部在第一象限的面積：

將閉區間〔0，a〕平分成 n 等分，分點為 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=a$，令$\Delta x=\dfrac{a}{n}$ 。

在每個區間$[x_{i-1},x_i]$中任取 t_i，

設 $R_n(f)$與 $R_n(g)$分別為 $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ 與 $g(x)=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 在$[a,b]$上的黎曼和：



$R_n(f)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$

$R_n(g)=\sum\limits_{i=1}^{n} g(t_i)\cdot\Delta x=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b}{a}f(t_i)\cdot\Delta x=\dfrac{b}{a}\cdot R_n(f)$

因為四分之一圓的面積為$\dfrac{1}{4}\pi a^2$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(f)=\dfrac{1}{4}\pi a^2$。

故可得 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(g)=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{b}{a}\cdot R_n(f))=\frac{b}{a}(\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f))=\frac{1}{4}ab\pi$，

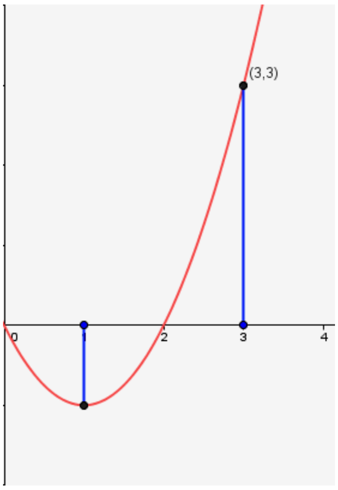
因此整個橢圓的面積為 $\frac{\pi ab}{4}\times 4=ab\pi$。

(練習1)利用“分割”與“逼近”的方法，求函數 $f(x)=2x+3$ 的圖形與直線 $x=0$，$x=2$ 及 x 軸所圍成區域的面積。 Ans：10

(練習2)求出橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 內部的面積。Ans：6π

◆ 定積分的意義

前面討論了非負連續函數 $f(x)$在$[a,b]$上的黎曼和與面積的關係，事實上，對於連續函數 $f(x)$而言，它可能代表物理量(速度、加速度、力等等)，仍然可以用同樣的方式定義 $f(x)$的黎曼和，而此時 $f(x)$在區間$[a,b]$上的黎曼和自然不代表面積而是相關的物理量。我們用下面的實例來說明：



如圖，函數 $f(x)=x^2-2x$ (公尺/秒)代表一個質點在直線上運動速度與時間的關係，

試求 $x=1$ 秒到 $x=3$ 秒之間質點所作的位移 S。

[解法]：

我們採用「**分割**」與「**逼近**」的方法求位移。

將區間[1,3]等分成 n 等分，

即 $1=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=3$，且$\Delta x=x_i-x_{i-1}=\frac{2}{n}$ $(i=1,2,\ldots,n)$

設質點在時間 x_{i-1} 到 x_i 內的位移是 S_i，則 $S=\sum\limits_{i=1}^{n} S_i$

因為速率函數 $f(t)$是連續的，故在很小的一段時間內，可以將質點視為等速度運動，

故在時間間隔$[x_{i-1},x_i]$中任取 t_i，可以用 $f(t_i)(x_i-x_{i-1})=f(t_i)\Delta x$ 來近似位移 S_i，即

位移 $S_i\approx f(t_i)\Delta x$。

故黎曼和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})=\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ 是[1,3]這段時間內位移 $S=\sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ 的一個近似值。

直觀來說，**隨著 n 愈大，即時間的間隔分得愈細，那麼近似的程度愈好。**

因為 $f(x)$是連續函數，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x=$位移 S

取 $t_i=x_i=1+\frac{2i}{n}$ $(i=1,2,\ldots,n)$，$f(t_i)=t_i^2-t_i=(t_i-1)^2-1=(\frac{2i}{n})^2-1$

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}[(\frac{2i}{n})^2-1]\frac{2}{n}=\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}=\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n\cdot\frac{2}{n}=\frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3}-2$$

故位移 S=$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3}-2]=\dfrac{8}{6}-2=\dfrac{-4}{3}$。

一般而言，**黎曼和的極限值**$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$ 並不只是與面積有關，它可能會代表位移、體積等等。事實上，當 $f(x)$為連續函數時，不管 t_i 如何選取，**黎曼和的極限值** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$ 都會存在(證明超出高中課程範圍)，我們稱它為函數 $f(x)$的定積分，定義如下：

> 定積分的定義：
> 若 $f(x)$是定義在區間$[a,b]$上的連續函數，將$[a,b]$平分成 n 等分，分割點：
> $a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=b$，
> 其中 $x_i-x_{i-1}=\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，$1\le i\le n$，在$[x_{i-1},x_i]$ $(1\le i\le n)$任取一數 t_i
> 則黎曼和的極限值$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ 稱為函數 $f(x)$在區間$[a,b]$上的**定積分**，以符號
> $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示，a 與 b 分別稱為定積分的**下限**與**上限**。即$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$。

根據上述的定義，例題 1 與練習 1 的結果，可以表成$\int_0^3 x^3\,dx=4$ 與$\int_1^3 (x^2-2x)\,dx=\dfrac{-4}{3}$。

一般而言，若$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ 存在，此時稱 $f(x)$在$[a,b]$上**可積分**。對於不能積分的函數，我們並不加以探討這方面的理論。

根據前面的定義，我們提出以下的說明：

(1°)定積分是一個**數**，這個數是一個**和式的極限值**，它只與函數 $f(x)$及區間$[a,b]$有關，與過程中出現 t_i 的選取無關，因此定積分與符號中的變量 x 無關，即

$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(r)\,dr$。

$$\begin{array}{c}\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x\\ \Big\downarrow\;\Big\downarrow\;\Big\downarrow\;\; \Delta x\to 0\\ \int_a^b f(x)\,dx\end{array}$$

(2)定積分的符號「$\int$ 」它是由<u>萊布尼茲</u>(Leibnize)首先使用的，是將字母 S 拉長一點而得到的，S 是英文字 sum(和)的第一個字母，這就表示定積分是一個求和過程的推廣，而計算$\int_a^b f(x)\,dx$ 的值，須要通過求和與取極限的步驟，因此定積分$\int_a^b f(x)\,dx$ 這個符號可以想像成，當$\Delta x\to 0$ 時，由$\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ 變化而來的。

[例題3] (1)利用定積分的符號來表示右圖中上半圓區域的面積。

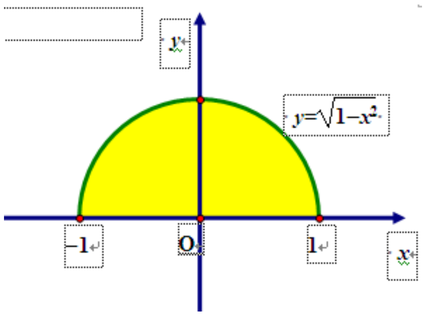
(2)用定積分與面積的關係求 $\int_{-1}^{3}(2x-1)\,dx$ 的值。

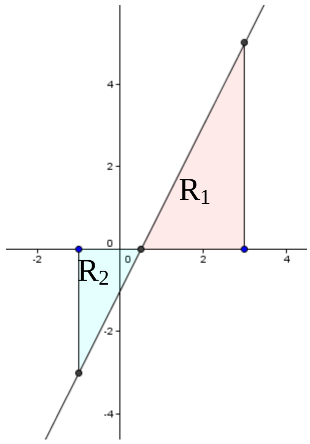
[解法]：

(1)如下圖，上半圓的圓心(0,0)且半徑為 1，因此這是方程式 $x^2+y^2=1$ 圖形的上半部，因此上半圓可以用函數 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的圖形來表示。上半圓區域可視為 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的圖形與 x 軸、$x=1$、$x=-1$ 所圍成的區域面積，根據定積分與面積的關係，可知上半圓區域的面積$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$，且根據圓面積的公式，可以得知 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$。

(2)如下圖，

$\int_{-1}^{3}(2x-1)\,dx=$區域 R_1 的面積$-$區域 R_2 的面積$=\frac{1}{2}(3-\frac{1}{2})\times5-\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-(-1)]\times3=4$。





[例題4] 試求 $\int_{0}^{b}x^2\,dx$ 的值，其中 $b>0$。

[解法]：

將$[0,b]$平分成 n 等分，其分割點依序為 $0=x_1<x_2<\ldots<x_n=b$，其中 $x_i=0+\frac{b}{n}\times i$，$i=0,1,\ldots,n$

取 $t_i=x_i$，$f(t_i)=(\frac{bi}{n})^2$，黎曼和 $\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(\frac{bi}{n})^2\cdot\frac{b}{n}=\frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{b^3}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

因為 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}[\frac{b^3}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]=\lim_{n\to\infty}[b^3\cdot\frac{1\cdot(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}]=\frac{b^3}{3}$。

[例題5] 試求 $\int_{0}^{b}x^3\,dx$ 的值，其中 $b>0$。

[解法]：

將$[0,b]$平分成 n 等分，其分割點依序為 $0=x_1<x_2<\ldots<x_n=b$，其中 $x_i=0+\frac{b}{n}\times i$，$i=0,1,\ldots,n$

取 $t_i=x_i$，$f(t_i)=(\frac{bi}{n})^3$，黎曼和 $\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(\frac{bi}{n})^3\cdot\frac{b}{n}=\frac{b^4}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{b^4}{n^4}$

$\times[\frac{n(n+1)}{2}]^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}b^4$

因爲$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}b^4]=\frac{b^4}{4}$。

(練習3)用定積分與面積的關係求$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$的值(其中 r 爲正數)。

Ans：$\frac{\pi r^2}{2}$

(練習4)試求下列定積分的值：

(1) $\int_0^5 x^2\,dx$　(2) $\int_0^{\sqrt{3}} x^2\,dx$的值。　Ans：(1)$\frac{125}{3}$　(2)$\sqrt{3}$

(練習5)試求下列定積分的值：

(1) $\int_0^2 x^3\,dx$　(2) $\int_0^{\sqrt{2}} x^3\,dx$的值。　Ans：(1)4　(2)1

◆　定積分的性質

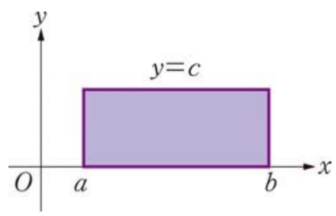
根據定積分的定義，計算定積分必須對黎曼和求極限，但是黎曼和的極限有時候不是很容易計算，接下來介紹定積分的一些性質，以便發展出更簡便的方法來計算定積分。這些運算性質的證明超出高中學習的範圍，因此本書加以省略，僅用特例來驗證這些性質。。

設 $f(x)$，$g(x)$爲定義在〔a，b〕上的多項式函數，可以得出以下的運算性質：

性質一：

$\int_a^b c\,dx=c\cdot(b-a)$，其中 c 爲任意實數。

當 $f(x)=c>0$，且 $b>a$ 時，可用圖 2–46 來說明性質一。



性質二：

$\int_a^b(f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

性質二說明了兩個函數和的定積分等於兩個函數定積分的和。

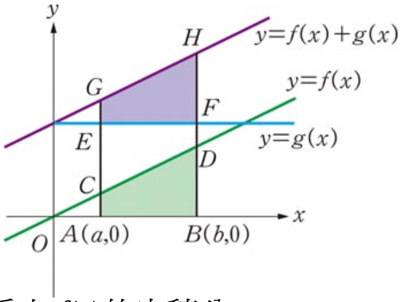
因爲對黎曼和求極限可求得定積分，故

$\int_a^b(f(x)+g(x))\,dx$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(f(t_i)+g(t_i))\Delta x=\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x+\sum\limits_{i=1}^{n}g(t_i)\Delta x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x+\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}g(t_i)\Delta x$

$=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

當 $f(x)>0$，$g(x)=c>0$ 時，可用右圖來說明性質二。



性質三：

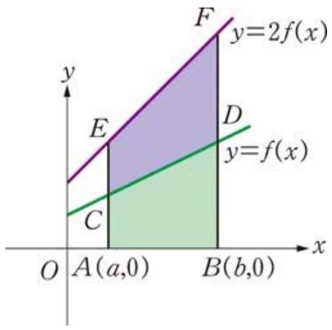
$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$，其中 c 爲實數。

性質三說明了一個函數 $c\cdot f(x)$的定積分會等於常數 c 乘上 $f(x)$的定積分。
如同前面的作法，

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c\cdot f(t_i)\Delta x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(c\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x\right)=c\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x=c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

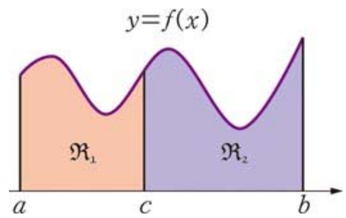
當 $f(x)=\frac{1}{2}x+1$，$c=2$ 時，可用右圖來說明性質三。



性質四：

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$，其中 c 介於 a,b 之間。

要證明這個性質，一般而言不是很容易，我們僅用面積來說明這個結果
設 $f(x)>0$，如右圖



$\int_a^b f(x)dx$

=函數 $f(x)$的圖形與直線 x 軸、$x=a$、$x=b$ 所圍成的區域面積
=區域 R_1 的面積+區域 R_2 的面積

$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ 。

我們將定積分的運算性質整理如下：

性質一	$\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$，其中 c 爲實數。
性質二	$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
性質三	$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$，其中 c 爲實數
性質四	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$，其中 c 介於 a,b 之間。

根據定積分的定義，若要計算定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$，$a<b$ 似乎是一個自然的限制，若將上下限顛倒，即 a、b 分別爲上限、下限，根據黎曼和的定義，因爲 $\Delta x=\frac{a-b}{n}=-\frac{b-a}{n}$，因此顛倒上下限，黎曼和會差一個負號，故我們做以下的規定：

(1)當 $b>a$ 時，$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ 。

(2)當 $a=b$ 時，$\int_a^a f(x)\,dx = 0$ 。

性質一~性質四亦適用於推廣後的定積分，我們就不再贅述。

[例題6] 利用定積分的運算性質計算下列的定積分：

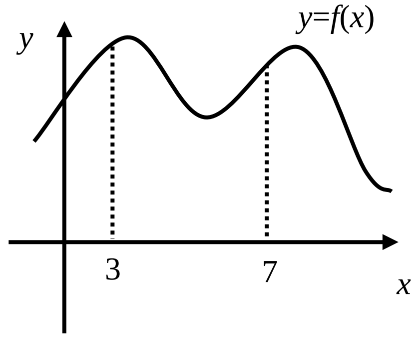
(1) $\int_0^5 (4+3x^2)\,dx$　　(2) $\int_3^0 x^2 dx$　　(3) $\int_0^1 (2\sqrt{1-x^2}-3x^2)dx$

Ans：(1)145　(2)−9　(3)$\frac{\pi}{2}-1$

[例題7] 設 $f(x)$爲一個連續函數，且 $f(x)$在[0,7]中的值大於 0，已知定積分

$\int_0^7 f(x)\,dx$ =M，$\int_0^3 f(x)\,dx$ =N，試求$\int_3^7 f(x)\,dx$ 的值。

Ans：M−N



(練習6) 設 $f(x)$與 $g(x)$爲多項式函數，已知$\int_0^5 f(x)\,dx$ =α且$\int_0^5 g(x)\,dx$ =β，

試求$\int_0^5 [2f(x)-3g(x)]\,dx$的值。　Ans：2α−3β

(練習7) 設 $f(x)$爲多項式函數，已知$\int_{-3}^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx - \int_{-3}^4 f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

試求 a,b 的值。　Ans：a=4，b=2

(練習8) 設 $f(x)=|x-1|+|x-2|$，試求$\int_0^3 f(x)\,dx$ 。　Ans：5

◆　定積分與面積

設連續函數 $f(x)$的圖形與直線 $x=a$、$x=b(a<b)$與 x 軸所圍成的區域為 R，我們要討論如何用定積分來表示 R 的面積：

(1)當 $f(x)$在區間$[a,b]$上，滿足 $f(x)\geq 0$ 時：

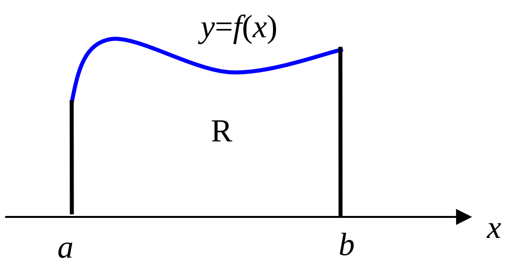
根據前面的討論可以得知定積分$\int_a^b f(x)\,dx$等於區域 R 的面積。

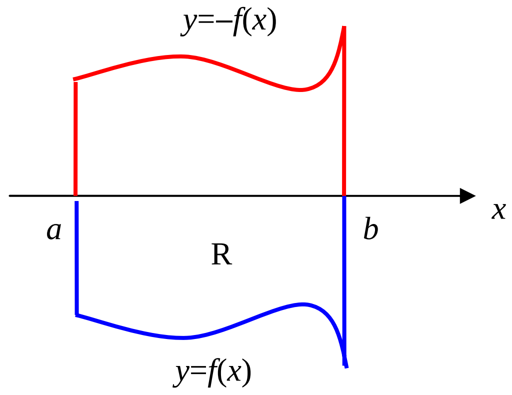
(2)當 $f(x)$在區間$[a,b]$上，滿足 $f(x)\leq 0$ 時：

因為 $y=f(x)$的圖形與 $y=-f(x)$的圖形對稱 x 軸，所以區域 R 的面積等於$-f(x)$與直線 $x=a$、$x=b$ 與 x 軸所圍成的區域面積，又在區間$[a,b]$上函數$-f(x)\geq 0$，

所以定積分$\int_a^b -f(x)\,dx$等於區域 R 的面積，再根據定積分的性質，可得

區域 R 的面積為$-\int_a^b f(x)\,dx$。





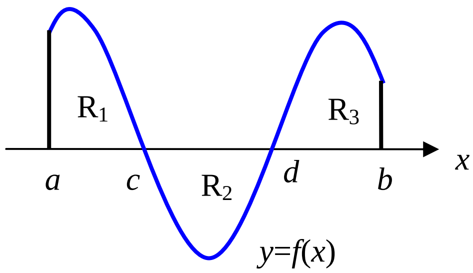
(3)當 $f(x)$為$[a,b]$上的多項式函數：

如右圖，令 $f(x)$在區間$[a,c]$、$[d,b]$上滿足 $f(x)\geq 0$，在區間$[c,d]$上滿足 $f(x)\leq 0$，此時區域 R 被分成 R_1、R_2與 R_3三個小區域，其面積分別為 A_1、A_2與 A_3，根據前面的說明，可以得知

區域 R 的面積

$=A_1+A_2+A_3$

$=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx$ 。



特別注意的是，

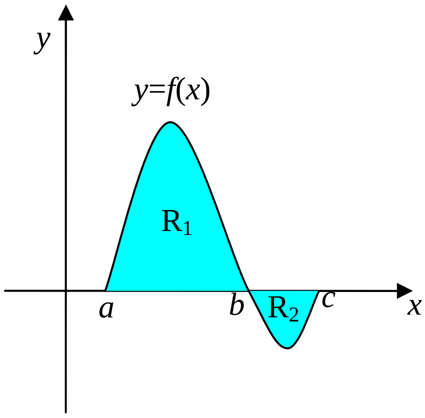
定積分$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx=A_1-A_2+A_3$。

由(1)(2)(3)的說明，可得以下結論：

(1°)要求多項式函數 $f(x)$的圖形與直線 $x=a$、$x=b$ 與 x 軸所圍成的區域面積時，可以先畫出 $f(x)$的圖形，然後再分段求其面積，然後求其面積的總和。

(2°)定積分$\int_a^b f(x)\,dx$等於函數 $f(x)$的圖形、x 軸、$x=a$、$x=b$ 所圍成的區域在 x 軸上方部份的面積和減去在 x 軸下方部份的面積和。

(練習9)$f(x)$的圖形如右圖所示，設$\int_a^b f(x)dx=m$，$\int_b^c f(x)dx=n$，試求下列各小題：
(1)區域 R_1 的面積
(2)區域 R_2 的面積
(3) 陰影部分的面積總和。
(4)定積分$\int_a^c f(x)dx$的值。
Ans：(1)m　(2)$-n$　(3)$m-n$　(4)$m+n$



(乙)微積分基本定理

◆　微積分基本定理

根據例題 4、5 可知$\int_0^b t^2\,dt=\frac{b^3}{3}$、$\int_0^b t^3\,dt=\frac{b^4}{4}$，當 b 代入一個正數，定積分$\int_0^b t^2\,dt$、$\int_0^b t^3\,dt$表示函數 $y=x^2$、$y=x^3$ 的圖形分別與直線 $x=0$、$x=b$ 與 x 軸圍成的區域面積，隨著 b 的改變，上述的面積也會隨之改變，因此若將上限 b 視為自變數，那麼定積分$\int_0^b t^2\,dt$、$\int_0^b t^3\,dt$即為上限 b 的函數。

令 $g_1(x)=\int_0^x t^2\,dt=\frac{x^3}{3}$，$g_2(x)=\int_0^x t^3\,dt=\frac{x^4}{4}$，可以得知 $g_1'(x)=x^2$，$g_2'(x)=x^3$，即 $g_1(x)$與 $g_2(x)$的導函數就是被積分的函數。

$\int_0^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}$　將 b 對應到$\frac{b^3}{3}$的函數為 $g_1(x)=\frac{x^3}{3}$

$g_1'(x)=x^2$

$\int_0^b x^3\,dx=\frac{b^4}{4}$　將 b 對應到$\frac{b^4}{4}$的函數為 $g_2(x)=\frac{x^4}{4}$

$g_2'(x)=x^3$

上述的結果對於一般的連續函數來說是正確的，即

令 $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ，則 $g'(x)=f(x)$。

這個關係式的發現要歸功於牛頓(Newton)與萊布尼茲(Leibnize)，他們發展出一個普遍用於計算導數和積分的方法，並且分別獨立發現「**微積分基本定理**」，就像「加和減」與「乘和除」一樣，微積分基本定理呈現了函數微分與積分之間是逆運算的關係。

微積分基本定理： 若 f：$[a,b]\to$R 為一連續函數，令 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ ， $a<x<b$ ， 則 $g(x)$為(a,b)上的可微分函數，且 $g'(x)=f(x)$。

這個定理會在後面的附錄，做進一步的說明，

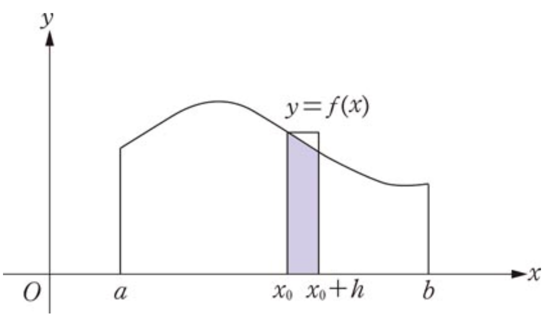
接下來我們用面積的觀點來解釋這個定理。

設 $f(x)$是區間$[a,b]$上的連續函數且 $f(x)>0$，在$[a,b]$上取一點 x_0，如下圖，

$g(x_0+h)-g(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$ 代表函數 $f(x)$的圖形，直線 $x=x_0$、$x=x_0+h$ 與 x 軸所圍成的區域面積，直觀來說，當 h 很小時，$g(x_0+h)-g(x_0)$會與長 $f(x_0)$與寬 h 的矩形面積很接近，即 $g(x_0+h)-g(x_0)\approx f(x_0)h$，

所以$\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$ 會與 $f(x_0)$很接近，即 $\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\approx f(x_0)$

而且當 h 愈來愈小時，$\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$會與 $f(x_0)$愈接近，



因此我們可以得到 $g'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=f(x_0)$。

[證明]：

令 x_0 與 x_0+h 都在(a,b)內，

$g(x_0+h)-g(x_0)$

$=\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt$

$=\int_a^{x_0} f(t)\,dt+\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt \;=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$

因為 $h\neq 0$，所以$\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\dfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$

我們設 $h>0$，因為 $f(t)$在$[x_0,x_0+h]$上連續，我們可以在$[x_0,x_0+h]$上找到兩個數α、β，使得 $f(\alpha)=$M 且 $f(\beta)=m$，其中 M、m 分別是 $f(x)$在$[x_0,x_0+h]$上的最大值與最小值。因為 $f(x)$在$[x_0,x_0+h]$上的黎曼和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$ ，滿足

$m\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x\le\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x\le \text{M}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x$ ，故可得知 $m\cdot h\le\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x\le \text{M}\cdot h$

因此我們可以得到 $m\cdot h\le\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\le \text{M}\cdot h$，進而推知 $f(\beta)\le\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\le f(\alpha)$，所以 $f(\beta)\le\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\le f(\alpha)$

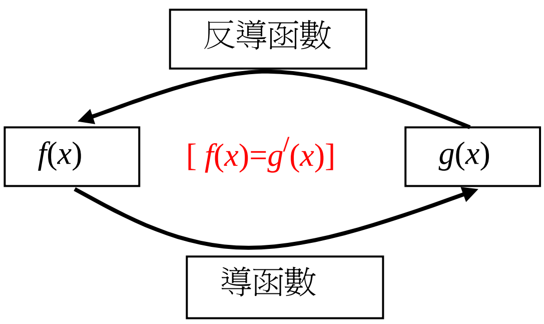
當 $h<0$ 時，我們仍然可以得到 $f(\beta)\le\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\le f(\alpha)$這個結果，因為 $f(x)$為$[a,b]$上的連續函數，且α,β介於 x_0 與 x_0+h 之間，故 $\lim\limits_{h\to 0} f(\alpha)=\lim\limits_{h\to 0} f(\beta)=f(x_0)$，根據夾擠原理，可以得知 $g'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=f(x_0)$。

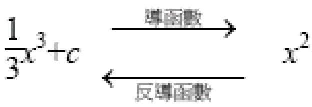
◆ 反導函數

(1)反導函數的定義：

從微積分基本定理可以得知 $g'(x)=f(x)$，若 $f(x)$為一多項式函數，要求定積分 $\int_a^c f(t)\,dt$，只要能求得 $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，那麼 $g(c)=\int_a^c f(t)\,dt$，因此它提供了一個不同於「分割求近似和、逼近求極限值」的程序與思維。

反導函數的定義： 滿足「$g'(x)=f(x)$」這個關係的所有函數 $g(x)$稱為 $f(x)$的**反導函數**，通常用符號$\int f(x)dx$表示。$f(x)$的反導函數$\int f(x)dx$也稱為 $f(x)$的**不定積分**。





[例題8] 試求下列各函數的反導函數：

(1)函數 x^2 的反導函數$\int x^2dx$。

(2)函數 x^3 的反導函數$\int x^3dx$。

(3)函數 x^2+x^3 的反導函數$\int (x^2+x^3)dx$。

[解法]：

(1)根據多項式函數的微分公式$(x^k)'=kx^{k-1}$,$k=0,1,2\ldots.$

設函數 x^2 的反導函數為 $g(x)$，所以 $g'(x)=x^2$，因此 $g(x)=ax^3+b$，其中 a,b 為常數又$(ax^3+b)'=x^2\Rightarrow 3a=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}$，所以函數 x^2 的反導函數為$\frac{1}{3}x^3+b$，即

$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+b$，其中 b 爲常數。

(2)設函數 x^3 的反導函數爲 $h(x)$，所以 $h'(x)=x^3$，因此 $h(x)=mx^4+n$，其中 m,n 爲常數又$(mx^4+n)'=x^3\Rightarrow 4m=1\Rightarrow m=\frac{1}{4}$，所以函數 x^3 的反導函數爲$\frac{1}{4}x^4+n$，即

$\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+n$，其中 n 爲常數。

(3)根據微分的運算性質，可以得知$(g(x)+h(x))'=g'(x)+h'(x)=x^2+x^3$

所以 $g(x)+h(x)$爲函數 x^2+x^3 的反導函數，所以

$\int (x^2+x^3)dx=\frac{1}{3}x^3+b+\frac{1}{4}x^4+n=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+c$，其中 c 爲常數。

從前面的討論，可以得知多項式函數 $f(x)$的反導函數恆存在，但是它可能有不同的反導函數。

例如$\frac{x^3}{3}$，$\frac{x^3}{3}+2$，$\frac{x^3}{3}-4$ 這些函數都是函數 x^2 的反導函數，因此函數 x^2 的反導函數並不是唯一的，而這些反導函數$\frac{x^3}{3}+c$(c 爲任意實數)都相差一個常數，因此不定積分 $\int x^2dx$ 代表$\frac{x^3}{3}+c$ 是一群相差一個常數的函數，而定積分$\int_a^b x^2\,dx$ 卻是一個數。

一般而言，**由函數 $f(x)$求反導函數$\int f(x)\,dx$ 這個過程，稱之爲將函數 $f(x)$積分。**

定義了反導函數之後，就可用反導函數發展計算連續函數定積分$\int_a^b f(x)\,dx$的方法了：

設可以找到 $f(x)$的一個反導函數 $F(x)$，根據微積分基本定理，$g(x)=\int_a^x f(t)dt$ 也是 $f(x)$的反導函數，故 $F'(x)=g'(x)=f(x)$，即$(F(x)-g(x))'=0$，

根據微分常數原理：

微分常數原理：

若 $g(x)$與 $h(x)$均爲連續函數 $f(x)$的反導函數，即 $g'(x)=h'(x)=f(x)$，

則 $g(x)$與 $h(x)$只差一個常數，即 $h(x)=g(x)+c$，c 爲常數。

[證明]：

令 $k(x)=g(x)-h(x)\Rightarrow k'(x)=g'(x)-h'(x)=0\Rightarrow k(x)=c$ (c 爲常數)

故 $h(x)=g(x)+c$。

因爲$(F(x)-g(x))'=0$，故 $F(x)=g(x)+c$，其中 c 爲常數

因爲 $g(b)=\int_a^b f(t)\,dt$ ，$g(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$

所以 F(b)=g(b)+c，F(a)=g(a)+c=c

故$\int_a^b f(t)\,dt = g(b)-g(a) = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$。

這個結果通常也稱爲微積分基本定理，我們將它整理如下：

> 設 $f(x)$爲區間$[a,b]$上的連續函數，若 $\mathrm{F}'(x)=f(x)$，即 F(x)爲 $f(x)$的一個反導函數，
> 則$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$。

◆ 找定積分$\int_a^b f(x)dx$的程序：

根據前面的討論，可得以下求定積分$\int_a^b f(x)dx$的步驟：

> step1：找出一個 $f(x)$的反導函數 F(x) (這個過程稱爲將 $f(x)$積分)
> step2：$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$

例如：

(1°)求定積分$\int_2^4 x\,dx$的值：

[解法]：

找出一個 $f(x)=x$ 的反導函數 $h(x)=\frac{1}{2}x^2+c$，則$\int_2^4 x\,dx = \frac{1}{2}x^2+c\,|_2^4 = h(4)-h(2)=6$。

(2°)求定積分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$的值：

[解法]：

找出 $f(x)=\cos x$ 的反導函數 $h(x)=\sin x+c$，則$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x + c\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$。

(3°)每個基本初等函數的不定積分不一定可以用基本初等函數來表示：
根據微積分基本定理，當我們找到了 $f(x)$的反導函數 F(x)之後，可以得到

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$，不過在實際應用時，當我們計算某些函數的定積分值，並無法找到一個用基本初等函數能表達或描述的反導函數 $h(x)$，

例如：$\mathrm{S}(x)=\int_0^x \sin(\frac{\pi t^2}{2})dt$ (Fresnel 函數)就無法用基本初等函數來表示。

(丙)求反導函數的方法

(1)基本不定積分公式：

(a) $\int 1\,dx = x+C$ ⟷ $(x)'=1$

(b) $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq -1)$ ⟷ $(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C)'=x^{\alpha}$

(c) $\int \sin x\,dx = -\cos x+C$ ⟷ $(\cos x)'=-\sin x$

(d) $\int \cos x\,dx = \sin x+C$ ⟷ $(\sin x)'=\cos x$

(e) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x+C$ ⟷ $(\tan x)'=\sec^2 x$

(f) $\int \sec x\cdot\tan x\,dx = \sec x+C$ ⟷ $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$

(2)根據導函數的線性性質，可以得到不定積分的線性性質：

$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad (k\neq 0)$

$\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

根據(1)(2)可以求出一些簡單函數的不定積分：

[例題9] 計算下列兩小題：

(1) $\int (x^3-x^2-2x-1)dx$ (2) $\int_2^4 (x^3-x^2-2x-1)dx$

Ans：(1) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2-x+C$ (2) $\frac{82}{3}$

[例題10] 計算下列兩小題：

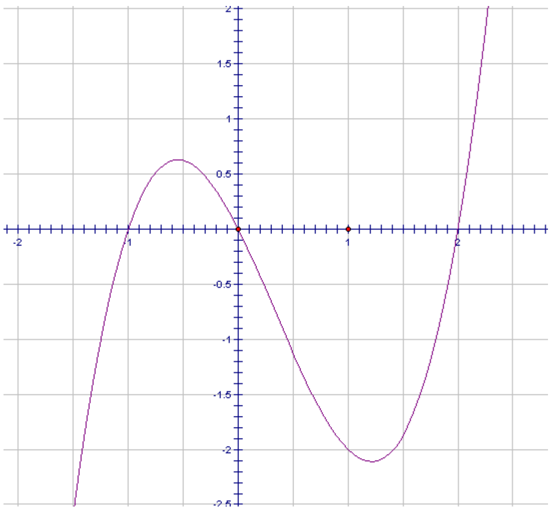
(1) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}}dx$ (2) $\int_1^9 \frac{3x-2}{\sqrt{x}}$

Ans：(1) $2x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}$+C (2)44

[例題11] 試求多項式函數 $f(x)=x^3-x^2-2x$ 的圖形與 x 軸所圍成的區域面積。

[解法]：因爲 $f(x)=x(x+1)(x-2)$，所以可得下表：

x	**$x<-1$**	**$-1<x<0$**	**$0<x<2$**	**$x>2$**
$f(x)$	–	+	–	+



所求區域面積爲 $f(x)$的圖形與直線

x 軸、$x=-1$、$x=2$ 所圍成的區域面積

$=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_0^2(-f(x))\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)\,dx$

$=(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\Big|_{-1}^{0})+(\frac{-1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\Big|_0^2)=\frac{37}{12}$

(練習10) 試求下列不定積分：

(1) $\int x^{\frac{-3}{4}}dx$ (2) $\int (x^3-2x+5)dx$ (3) $\int (1-t)(2+t^2)dt$

(4) $\int (\sin\theta+3\cos\theta)d\theta$ (5) $\int \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}dx$ (6) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}dx$

Ans：(1) $4x^{\frac{1}{4}}$+C (2)$\frac{1}{4}x^4-x^2+5x$+C (3)$\frac{-1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3-t^2+2t$+C

(4)$-\cos\theta+3\sin\theta$+C (5)$\sec x$+C (6)$2\sin x$+C

(練習11) 求下列定積分：

(1) $\int_4^9 \sqrt{x^3}dx=$? (2) $\int_1^2 (x+\frac{1}{x})^2dx=$？ (3) $\int_{-1}^2 (3x+1)^2dx=$？

(4) $\int_0^{\pi}(4\sin\theta-3\cos\theta)d\theta$　　(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$　　(6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

Ans：(1) $\frac{422}{5}$　(2) $\frac{29}{6}$　(3) 39　(4)8　(5)$1+\frac{\pi}{4}$　(6)$2-\sqrt{2}$

(練習12) 試求下列兩小題：

(1) $\int_{-1}^{2}(x-2|x|)dx$　　(2) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}}|\sin x|$　　Ans：(1)$\frac{-7}{2}$　(2)3

(練習13) 試求函數 $y=\cos x$ 與直線 $x=0$、$x=\frac{\pi}{3}$與 x 軸所圍成的區域面積。Ans：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(練習14)設 $g(x)=\int_{-2}^{x}(t^3-2t+5)\,dt$ ，試求 $g'(x)$。　Ans：$g'(x)=x^3-2x+5$

(練習15) 試求下列兩小題：

(1) $\int_{-1}^{2}(x-2|x|)dx$　　(2) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}}|\sin x|$　　Ans：(1)$\frac{-7}{2}$　(2)3

(練習16) 試求函數 $y=\cos x$ 與直線 $x=0$、$x=\frac{\pi}{3}$與 x 軸所圍成的區域面積。Ans：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)變數變換積分法：

根據連鎖法則(Chain Rule)，可以得知：$\frac{d}{dx}[F(g(x))]=F'(g(x))g'(x)$，

所以$\int F'(g(x))\cdot g'(x)\,dx=F(g(x))+C$

現在我們用 $u=g(x)$來做變數變換，代入上式，可得

$\int F'(g(x))\cdot g'(x)\,dx=F(g(x))+C=F(u)+C=\int F'(u)du$ 。

當我們令 $F'=f$，則上式右可以寫成：$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$ 。

我們將上述的過程寫成以下法則：

變數變換法則：
若 $u=g(x)$在區間 I 上可微分，$f(x)$在 I 上連續，則$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$ 。

例如：計算不定積分$\int x^3\cos(x^4+2)dx$ 。

我們令 $u=u(x)=x^4+2$，$\frac{du}{dx}=4x^3$，可以寫成 $du=(4x^3)dx$，故 $x^3dx=\frac{1}{4}du$。

$\int x^3\cos(x^4+2)dx=\int \cos u\cdot\frac{1}{4}du=\frac{1}{4}\int\cos u\,du=\frac{1}{4}\sin u+C=\frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$。

根據上面的結果，

計算$\int_0^1 x^3\cos(x^4+2)dx=[\frac{1}{4}\sin(x^4+2)]\Big|_0^1=\frac{1}{4}\sin3-\frac{1}{4}\sin2\quad=\frac{1}{4}\sin u\Big|_{u(0)}^{u(1)}$ (3=u(1)，2=u(0))

我們將這個結果稱爲**定積分的變數變換法則**

定積分的變數變換法則： 若 $g'(x)$在$[a,b]$上連續且 $f(x)$在 $u=g(x)$的值域上連續， 則$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)}f(u)du$ 。

[說明]：令 F(x)爲 $f(x)$的反導函數

$\because \int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=\int F'(g(x))\cdot g'(x)\,dx=F(g(x))+C$

$\therefore$ F($g(x)$)爲 $f(g(x))g'(x)$的反導函數

根據微積分基本定理二，可知

$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))\Big|_a^b=F(g(b))-F(g(a))=\int_{g(a)}^{g(b)}f(u)du$ 。

[例題12] 計算下列定積分：

(1)$\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$　　(2)$\int\cos5x\,dx$　　(3)$\int\sqrt{2x+1}\,dx$

Ans：(1)$\frac{-1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ +C　(2)$\frac{1}{5}\sin5x$+C　(3)$\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$+C

[例題13] 計算下列定積分值：

(1)$\int_1^2\frac{dx}{(3-5x)^2}$　　(2)$\int_0^{\sqrt{\pi/2}}x\cdot\cos(x^2)\,dx$　　(3)　$\int_1^{10}\frac{4x+4}{\sqrt[3]{x^2+2x+5}}dx$

Ans：(1) $\frac{1}{14}$　(2)$\frac{1}{2}$　(3)63

(練習17) 計算下列不定積分：

(1) $\int \sin 3x\,dx$ (2) $\int x(4+x^2)^{10}dx$ (3) $\int \cos^4 x\cdot\sin x\,dx$

Ans：(1) $\frac{-1}{3}\cos 3x+C$ (2) $\frac{1}{22}(4+x^2)^{11}+C$ (3) $\frac{-1}{5}\cos^5 x+C$

(練習18) 計算下列定積分：

(1) $\int_0^2 (x-1)^{25}dx$ (2) $\int_0^7 \sqrt{4+3x}\,dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$ (4) $\int_0^4 \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}dx$ (提示：令 $u(x)=x^2+2x+2$)

Ans：(1)0 (2)26 (3)1 (4) $\frac{3}{13}$

[例題14] 設 $g(x)=\int_{-2}^{x}(t^3+t^2-2t)\,dt$，

(1)試求 $g'(x)$。

(2)試求 $g(x)$的極大值與極小值。

Ans：(1) x^3+x^2-x (2)極大值：$g(0)=\frac{2}{3}$，極小值：$g(-2)=0$，$g(1)=\frac{3}{4}$

[例題15] $f(x)$表一實係數多項式，已知 $f(x)=4x^3+3x^2-2x(\int_1^2 f(x)\,dx)+3$，

試求(1) $\int_1^2 f(x)\,dx$ 的值。 (2)多項式 $f(x)$。(1) $\frac{25}{4}$ (2) $4x^3+3x^2-\frac{25}{2}x+3$

[例題16] 關於 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left((n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\ldots+(2n)^2\right)$------------------ ①

(1)試利用 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$ 的公式求①之值。(2)試利用積分的定義求①之值。Ans：$\frac{7}{3}$

[例題17] 試求函數$\int_0^{x^3} \frac{t}{\sqrt{1+t^3}}dt$的導函數。

Ans：$\frac{3x^5}{\sqrt{1+x^9}}$

(練習19) 求 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$的函數圖形與 x 軸所圍成的區域面積。Ans：$\frac{1}{2}$

(練習20) 試求 $y=\sin x(0\le x\le 2\pi)$與 x 軸所圍成的區域面積。Ans：4

(練習21) 試求$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^4}{n^5}$。 Ans：$\frac{1}{5}$

(練習22) (1)$\frac{d}{dx}\left(\int_6^x (3t^2-2t+4)dt\right)$=? (2)$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{53} (t^{10}-3t+2)dt\right)$=?

Ans：(1)$3x^2-2x+4$ (2)$-x^{10}+3x-2$

(練習23) 設 $f(x)=\int_0^x (\sin t+\sqrt{3}\cos t)^2 dt$，則$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$=？Ans：3

綜合練習

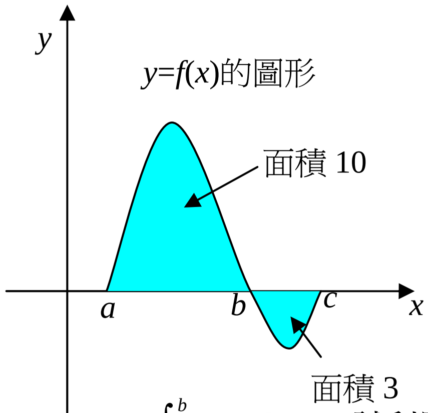
(1) 設函數 $f(x)=4-x^2$ 定義在區間[0,3]上，

(a)將區間[0,3]平分成 6 等分，其分點為 $0=x_0<x_1<\ldots<x_6=3$，取 t_i 為$[x_{i-1},x_i]$的左端點，試求黎曼和 $\sum_{i=1}^{6} f(t_i)\Delta x$，其中$\Delta x=\dfrac{3}{6}$。

(b)將區間[0,3]平分成 n 等分，其分點為 $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=3$，取 t_i 為$[x_{i-1},x_i]$的左端點，試求黎曼和 $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$，其中$\Delta x=\dfrac{3}{n}$。

(c)利用黎曼和求 $\int_0^3 (4-x^2)\,dx$。

(2) 利用右圖求下列各小題：



(a) $\int_a^b f(x)dx$ (b) $\int_b^c f(x)dx$

(c) $\int_a^c f(x)dx$ (d) $\int_a^c |f(x)|\,dx$

(3) 設 $f(x)$為一個多項式函數，已知定積分 $\int_a^b f(x)\,dx=m$，$\int_a^b g(x)\,dx=n$，試利用 m,n 來表示下列的定積分值。

(a) $\int_a^b 2f(x)\,dx$ (b) $\int_a^b [3f(x)-2g(x)]\,dx$ (c) $\int_b^a f(x)\,dx$ 。

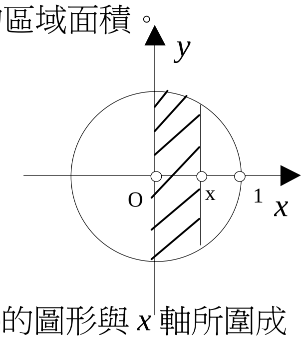
(4) 已知多項式函數 $f(x)$定義在$[a,b]$上，c 為$[a,b]$內任一點，下列各式何者成立？

(A) $\int_a^a f(x)dx=0$ (B) $\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(x)dx$

(C) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ (D) $\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_a^b f(x)dx$

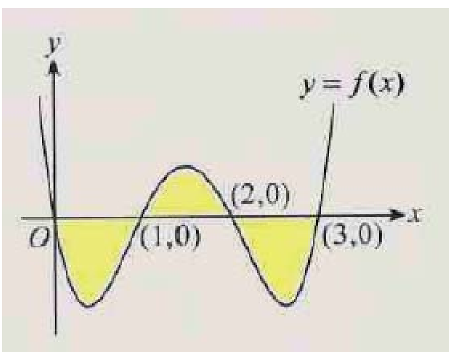
(E) $\int_a^b f(x)dx$ 表示 $y=f(x)$的圖形與直線 x 軸、$x=a,x=b$ 所圍成的區域面積。

(5) 令 $f(x)$表右圖單位圓內斜線的面積，$0<x<1$，則 $f'(x)=$



(A)$\sqrt{1-x^2}$ (B)$-\sqrt{1-x^2}$ (C)$2\sqrt{1-x^2}$ (D)$-2\sqrt{1-x^2}$ (E)π

(6) 下圖是多項式函數 $f(x)$的圖形，則下列哪些選項的值等於 $f(x)$的圖形與 x 軸所圍成之區域的面積？



(A) $\int_0^3 f(x)\,dx$

(B)$-\int_0^3 f(x)\,dx$

(C) $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$

(D) $\int_0^1 f(x)\,dx-\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$

(E) $-\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx-\int_2^3 f(x)\,dx$ 。

(7) 若 $f(x)$,$g(x)$為兩個多項式函數，而且 $g(x)$是 $f(x)$的一個反導函數，則下列哪些選項也是 $f(x)$的反導函數？

(A)$g(x)-4$ (B)$g(x)+1000$ (C)$g(x)+x$ (D)$3g(x)$ (E)$f(x)+g(x)$。

(8) 求出下列多項式函數的不定積分

(a) $\int 5\,dx$ (b) $\int (u+2)^3\,du$

(c) $\int (x^3-2x+5)\,dx$ (d) $\int (t^4-2t^3+2t^2+t-1)\,dt$

(9) 利用反導函數求下列定積分：

(a) $\int_1^3 (x^2-3)\,dx$ (b) $\int_5^2 (4r^3-r+1)\,dr$

(c) $\int_{-1}^2 (y-1)^3\,dy$ (d) $\int_3^1 (3x^2+5x-8)dx$

(10) 試求下列定積分值：

(a) $\int_{-3}^3 |2x+1|\,dx$ (b) $\int_0^3 (|x-2|+2x)dx$

(11) 將下列極限換成定積分，並計算出極限值：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-(\dfrac{k}{n})^2}$ 。

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{16n^2-(4k)^2}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}[(2n+1)^2+(2n+2)^2+\ldots+(2n+n)^2]$

(12) 利用微積分基本定理，求下列各小題中 $g(x)$的導函數 $g'(x)$：

(a)$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-3)^{100}\,dt$ (b)$g(x)=\int_5^x \dfrac{t}{t^2+1}dt$

(13) 求 $f(x)=x^3-3x^2+2x$ 的圖形與直線 $y=0$ 所圍成之區域面積。

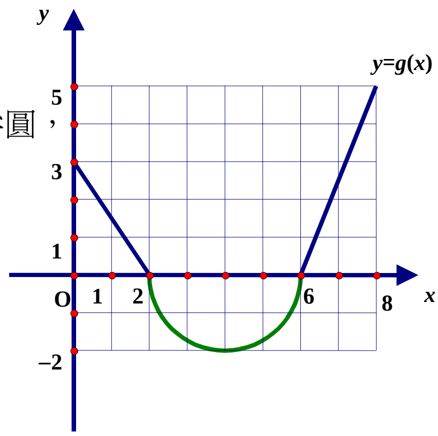
(14) 利用定積分，求無窮級數 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2}{n}(1+\dfrac{2i}{n})^3$ 的和：

(a)設 $f(x)=(1+x)^3$，試用 $f(x)$在[0,2]上的黎曼和來表示 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2}{n}(1+\dfrac{2i}{n})^3$ 。

(b)求無窮級數 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2}{n}(1+\dfrac{2i}{n})^3$ 的和。

(15) 如右圖所示，設連續函數 $y=g(x)$的圖形包含兩條直線與一個半圓，試利用圖形的面積來計算下列定積分：

(a) $\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $\int_0^8 g(x)\,dx$ (c) $\int_2^6 g(x)\,dx$



(16) 設 $f(t)$與 $g(t)$爲兩個多項式函數，

若$\int_1^x (2f(t)-g(t))\,dt=3x^2+5x+a$，

且$\int_1^x (f(t)+2g(t))\,dt=5x^3-x^2+b$，其中 a,b 爲兩個常數，

(a)試求這兩個多項式函數 $f(x)$與 $g(x)$。

(b)試求 a,b 的值。

(17) 設 $f(x)$爲一個多項式函數，且滿足$\int_k^x f(t)dt=x^2-3x$，

(a)求 $f(x)$　(b)求 k。

(18) 試求多項式函數 $f(x)=x(x+2)(x-2)$的圖形與 x 軸所圍成的兩區域面積的和。

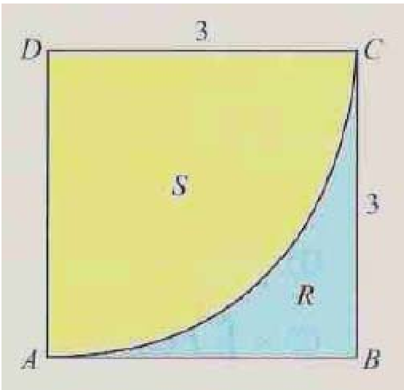
(19) 設 $f(x)$是二次函數，滿足 $f(1)=0$，$f(2)=0$ 且 $f(3)=2$，求$\int_0^4 f(x)\,dx$。

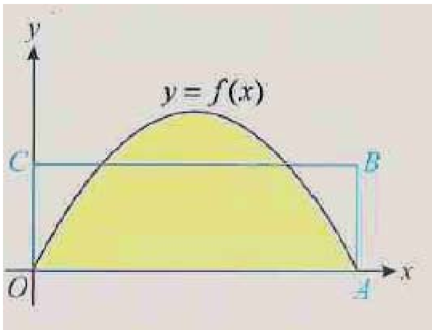
(20) $f(x)$表一實係數多項式，已知 $f(x)=4x^3+3x^2-2x(\int_1^2 f(x)\,dx)+3$，

試求(a)$\int_1^2 f(x)\,dx$的值。 (b)多項式 $f(x)$。

進階問題

(21) 已知 ABCD 是一個邊長爲 3 的正方形，曲線 AC 是以 A 爲頂點，直線 AD 爲對稱軸之拋物線的一部分，同時曲線 AC 將正方形分成 R,S 兩塊區域，如圖所示，求 R 與 S 之面積的比。



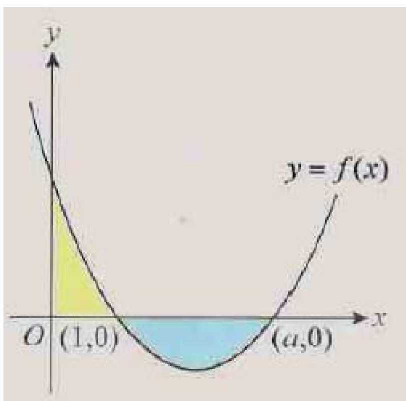


(22) 右上圖是 $f(x)=\frac{-1}{3}x^2+2x$ 的圖形，已知 $f(x)$其圖形與 x 軸交於 O、A 兩點，且其所圍成之區域的面積與矩形 OABC 的面積相同，求$\overline{AB}$的長。

(23) 設二次函數 $f(x)=x^2+bx+c$ 的圖形通過點(1,0)、(a,0)，其中 a>1，如圖所示，

(a)若 x 軸上方的區域面積等於 x 軸下方的區域面積，則 a=？

(b)若 x 軸上方的區域面積等於 x 軸下方的區域面積的二分之一，則 a=？

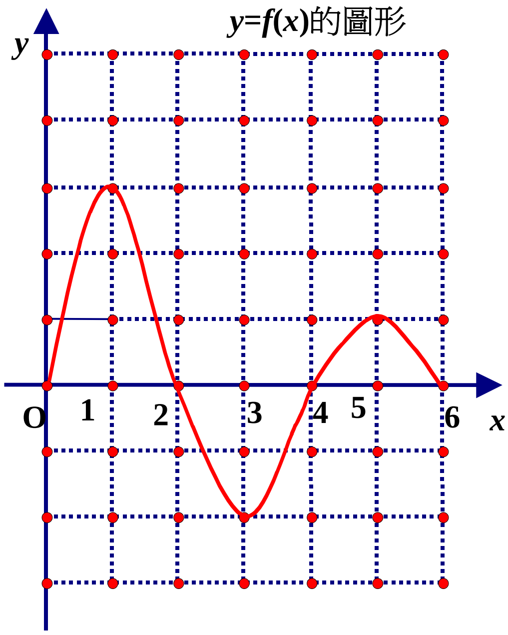


(24) 設 $y=x^2$ 與直線 $y=0$、$x=2$ 所圍成的區域為$\Re$，若直線 $x=k$ 平分區域$\Re$的面積，試求 k 的值。

(25) 解不等式$\int_0^x (3t^2+2t-6)dt \le 0$。

(26) 設函數 $f(x)=x^3-kx^2-x+k$(其中$-1\le k\le 1$)的圖形與 x 軸所圍成的區域的面積為 A(k)。
(a)試以 k 來表示 A(k)。
(b)求 A(k)的最大值與最小值。
(提示：$f(x)=(x+1)(x-1)(x-k)$)

(27) 右圖為連續函數 $y=f(t)$的圖形，設 $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，
試求下列各小題：
(a)$y=g(x)$會在何處產生極值？
(b)$y=g(x)$會在那些範圍凹口向上？
(c)若 $g(1)=\frac{3}{2}$，$g(2)=\frac{10}{3}$，$g(3)=2$，$g(4)=\frac{4}{5}$，$g(5)=\frac{5}{3}$
$g(6)=2$，試描繪 $y=g(x)$的略圖。



綜合練習解答

(1) (a)$\frac{41}{8}$ (b)$3+\frac{27}{2n}-\frac{9}{2n^2}$ (c)3

(2) (a)10 (b)-3 (c)7 (d)13

(3) (a)$2m$ (b)$3m-2n$ (c)$-m$

(4) (A)(C)(D)

(5) (C)

(6) (E)

(7) (A)(B)

(8) (a)$5x+c$ (b)$\frac{u^4}{4}+2u^3+6u^2+8u+c$ (c)$\frac{x^4}{4}-x^2+5x+c$ (d)$\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{2}+\frac{2t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t+c$
其中 c 爲常數

(9) (a)$\frac{8}{3}$ (b)$\frac{-1203}{2}$ (c)$\frac{-15}{4}$ (d)-30

(10) (a)$\frac{37}{2}$ (b)$\frac{23}{2}$

(11) (a)$\frac{\pi}{4}$ (b)4π (c)$\frac{19}{3}$

(12) (a)$g'(x)=(x-3)^{100}$ (b)$g'(x)=\frac{x}{x^2+1}$

(13) $\frac{1}{2}$

(14) (a)$\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}(1+\frac{2i}{n})^3$ 爲 $f(x)=(1+x)^3$ 對於分割點 $0=x_0<x_1<\ldots.<x_n$，$x_k=\frac{2k}{n}$，的黎曼和
(b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}(1+\frac{2i}{n})^3=\int_0^2(1+x)^3\,dx=20$

(15) (a)3 (b)$8-2\pi$ (c)-2π

(16) (a)$f(x)=3x^2+2x+2$ ，$g(x)=6x^2-2x-1$
[提示：$2f(x)-g(x)=(3x^2+5x+a)'$，$f(x)+2g(x)=(5x^3-x^2+b)'$]
(b)$a=-8$，$b=-4$

(17) (a)$2x-3$ (b)$k=0$ 或 3

(18) 8

(19) $\frac{16}{3}$

(20) (a)$\frac{25}{4}$ (b)$4x^3+3x^2-\frac{25}{2}x+3$

(21) 1：2

(22)　2

(23)　(a)3 (b)$2+\sqrt{3}$

(24)　$\sqrt[3]{4}$

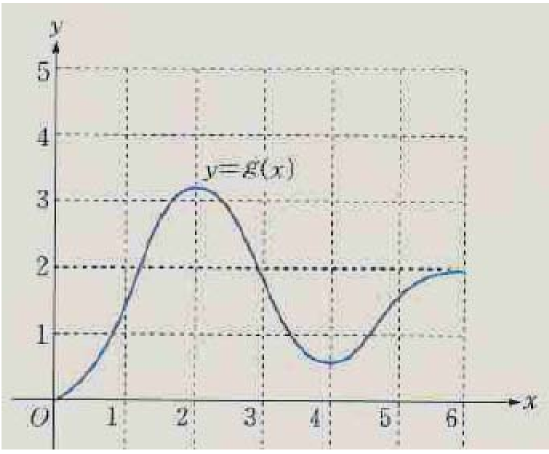
(25)　$0\le x\le 2$ 或 $x\le -3$

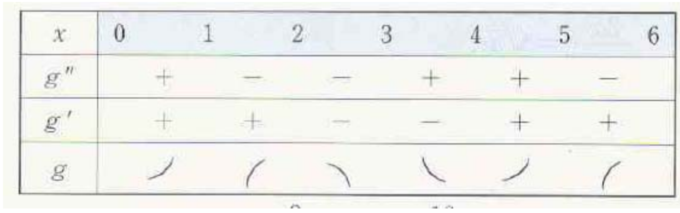
(26)　(a)$\dfrac{-k^4}{6}+k^2+\dfrac{1}{2}$　(b)最大值$\dfrac{4}{3}$，最小值$\dfrac{1}{2}$

(27)　(a)在 x=0、4 處有極小值　在 x=2,6 有極大值

(b)[0,1]、[3,5]

(c)





x	0		1		2		3		4		5		6
g''		+		−		−		+		+		−	
g'		+		+		−		−		+		+	
g													

補充問題

(1) 試回答下列兩小題：

(a)試利用定積分的意義來證明：

若連續函數 $f(x)$在 $a<x<b$ 時，滿足 $m\le f(x)\le M$，

則 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$。

(b) 試利用(a)證明：$\frac{\pi}{6}\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\le\frac{\pi}{3}$。

(2) 試求函數 f 與實數 a 使得 $6+\int_a^x\frac{f(t)}{t^2}dt=2\sqrt{x}$。

(3) 設 $g(x)=\int_{2x}^{3x}\frac{u^2-1}{u^2+1}du$ ，試求 $g'(x)=$？

(4) 試計算下列各小題：

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{dx}(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3})\,dx=$？

(b)$\frac{d}{dx}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3})\,dx=$？

(c) $\frac{d}{dx}\int_x^{\frac{\pi}{2}}(\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{3})\,dt$

(5) 設 $f(x)$、$g(x)$均爲$[a,b]$上的連續函數，試問下列敘述何者正確？

(A)$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=(\int_a^b f(x)\,dx)\cdot(\int_a^b g(x)\,dx)$。

(B)若 $a\le x\le b$ 時 $f(x)\ge g(x)$，則$\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx$ 。

(C) 若 $f(x)\ge 0$，則$\int_a^b\sqrt{f(x)}\,dx=\sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$ 。

(D) $\int_a^b x\cdot f(x)\,dx=x\int_a^b f(x)\,dx$ 。

(E) $\int_a^b t\cdot f(x)\,dx=t\int_a^b f(x)\,dx$ 。

(6) 設 $f(x)$爲$[-t,t]$上的連續函數，其中 a 爲正數

(a)若 $f(x)$爲偶函數($f(-x)=f(x)$)，則$\int_{-t}^{t}f(x)\,dx=2\int_0^t f(x)\,dx$ 。

(b)若 $f(x)$爲奇函數($f(-x)=-f(x)$)，則$\int_{-t}^{t}f(x)\,dx=0$。

(7) 利用(6)的結果，求下列定積分：

(a)$\int_{-2}^{2}\frac{\tan x}{1+x^2+x^4}dx$ 。　　(b)$\int_{-100}^{100}\cos x\,dx$　　(c) $\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$

(8) 試求下列不定積分：

(a) $\int(3x-2)^{20}dx$ (b) $\int\sqrt{4-t}\,dt$ (c) $\int\dfrac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}dx$

(d) $\int x^{\alpha}\sqrt{b+cx^{\alpha+1}}dx$ (α≠−1) (e) $\int\dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$ (f) $\int\sec 2\theta\cdot\tan 2\theta\, d\theta$

(g) $\int\sqrt{x}\cdot\sin(1+x^{\frac{3}{2}})dx$ (h) $\int\sin t\sec^2(\cos t)dt$

(9) 試求下列定積分值：

(a) $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5dx$ (b) $\int_0^2(x^2-x+1)^3(2x-1)dx$ (c) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cdot\cos(x^2)dx$

(d) $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx$ (a 爲正數) (e) $\int_{-a}^a x\sqrt{a^2-x^2}dx$ (a 爲正數) (f) $\int_0^4\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}}dx$

(10) 試求 $y=2\sin x-\sin 2x$ ，$0\leq x\leq\pi$的圖形與 x 軸所圍成的區域面積。

(11) 設 $f(x)$爲 R 上的連續函數，且滿足$\int_0^4 f(x)dx=10$，試求下列兩小題：

(a) $\int_0^2 f(2x)dx=$？ (b) $\int_0^2 x\cdot f(x^2)dx$ 。

(12) 設 a,b 爲正數，證明：$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx=\int_0^1 x^b(1-x)^a dx$ 。

(13) 設 $f(x)$爲 R 上的連續函數，證明：$\int_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ 。

(14) 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[(\dfrac{1}{n})^p+(\dfrac{2}{n})^p+(\dfrac{3}{n})^p+\ldots+(\dfrac{n}{n})^p]=$？($p$ 爲正數)

(15) 試求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\int_2^{2+h}\sqrt{1+t^3}dt$ 的值。

(16) 對於任意正整數 n，設 $A(n)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$，$B(n)=\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}+\ldots+\dfrac{1}{4n}$

試證明：$\lim\limits_{n\to\infty}A(n)=\lim\limits_{n\to\infty}B(n)$。

答案

(1) (a)直接利用定積分的定義即可。

(b)$\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\sin x\leq 1$

(2)$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$，$a=9$ [提示：令 $g(x)=\int_a^x\frac{f(t)}{t^2}dt=2\sqrt{x}-6\Rightarrow\frac{f(x)}{x^2}=g'(x)=x^{\frac{-1}{2}}$]

(3)$\frac{27x^2-3}{9x+1}-\frac{8x^2-2}{4x^2+1}$

[提示：$g(x)=\int_0^{3x}\frac{u^2-1}{u^2+1}du-\int_0^{2x}\frac{u^2-1}{u^2+1}du$ ，而利用 Chain Rule 可得

$\left(\int_0^{3x}\frac{u^2-1}{u^2+1}du\right)'=\frac{(3x)^2-1}{(3x)^2+1}\cdot(3x)'$]

(4)(a)$\frac{\sqrt{6}}{4}$ (b)0 (c)$-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}$

(5)(B)(E)

(6)(a) $\int_{-t}^{t}f(x)\,dx=\int_{-t}^{0}f(x)\,dx+\int_0^t f(x)\,dx=\int_{-t}^{0}f(-x)\,dx+\int_0^t f(x)\,dx=2\int_0^t f(x)\,dx$

(b) $\int_{-t}^{t}f(x)\,dx=\int_{-t}^{0}f(x)\,dx+\int_0^t f(x)\,dx=-\int_{-t}^{0}f(-x)\,dx+\int_0^t f(x)\,dx=0$

注意$\int_{-t}^{0}f(-x)\,dx=-\int_y^0 f(y)\,dx$(令 $y=-x$) $=\int_0^y f(y)\,dx$

(7)(a)0 (b)2sin100 (c)0

(8)(a)$\frac{1}{63}(3x-2)^{21}+C$ (b)$\frac{-2}{3}\sqrt{(4-t)^3}+C$ (c)$\sqrt{ax^2+bx+c}+C$

(d)$\frac{2}{3c(\alpha+1)}(b+cx^{\alpha+1})^{\frac{3}{2}}+C$ (e)$2\sin\sqrt{t}+C$ (f)$\frac{1}{2}\sec2\theta+C$

(g)$-\frac{2}{3}\cos(1+x^{\frac{3}{2}})+C$ (h)$-\tan(\cos t)+C$

(9)(a)$\frac{182}{9}$ (b) 20 (c)0 (d)$\frac{1}{3}a^3$ (e)0 (f)$\frac{10}{3}$(提示：令 $t=\sqrt{1+2x}$)

(10)4

(11)(a)5 (b)5

(12)令 $t=1-x$ $0\leq x\leq 1\Leftrightarrow 0\leq t\leq 1$

左式$=\int_1^0-(1-t)^a t^b dt=\int_0^1(1-t)^a t^b dt=$右式

(13)提示：令 $u=\pi-x$ ，$du=-dx$

$\int_0^{\pi}x\cdot f(\sin x)dx$

$=\int_{\pi}^{0}-(\pi-u)\cdot f(\sin(\pi-u))du$

$=\int_{0}^{\pi}(\pi-u)\cdot f(\sin u)du$

$=\pi\cdot\int_{0}^{\pi}f(\sin u)du-\int_{0}^{\pi}u\cdot f(\sin u)du$

(14)$\frac{1}{p+1}$

(15)3 [提示：令 $F(x)=\int_{0}^{x}\sqrt{1+t^3}dt$，$F'(x)=\sqrt{1+x^3}$，原式$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}=F'(2)=3$]

(16)$A(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}]$爲

$f(x)=\frac{1}{1+x}$對於分割點 $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n}{n}$的黎曼和。

$B(n)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\dots+\frac{1}{4n}=\frac{1}{2n}[\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{2n}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{2n}{2n}}]$爲

$f(x)=\frac{1}{1+x}$ 對於分割點 $0,\frac{1}{2n},\frac{2}{2n},\dots,\frac{2n}{2n}$的黎曼和。故$\lim\limits_{n\to\infty}A(n)=\lim\limits_{n\to\infty}B(n)=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x}dx$。