第五十二單元　定積分的應用

(甲)函數 $f(x)$、$g(x)$圖形間區域的面積

前面單元已經討論了函數 $f(x)$的圖形與直線 $x=a$、$x=b$ 與 x 軸所圍成的區域面積，接下來進一步用定積分來表示求連續函數 $f(x)$與 $g(x)$的圖形與直線 $x=a$、$x=b$ 所圍成的區域 R 之面積。

(1)設 $f(x)$、$g(x)$爲連續函數且在區間$[a,b]$上滿足 $f(x)\geq g(x)$，(如下圖)

將函數 $f(x)$與 $g(x)$的圖形向上平移 k 單位，使得函數 $f(x)+k$、$g(x)+k$ 的圖形在$[a,b]$間的圖形都落在 x 軸上方，所以

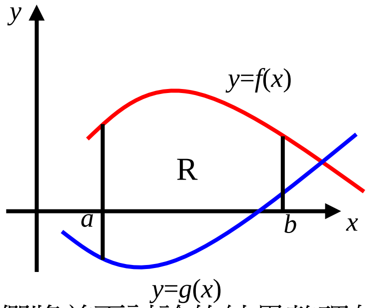
區域 R 的面積

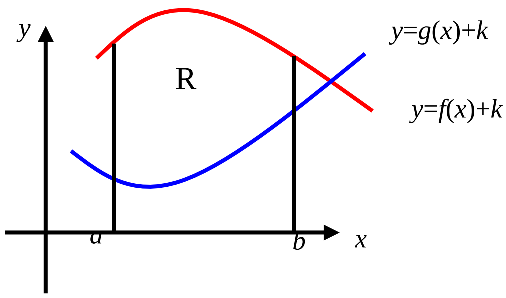
=(函數 $f(x)+k$ 的圖形與直線 $x=a$、$x=b$ 與 x 軸所圍成的區域面積)減去

(函數 $g(x)+k$ 的圖形與直線 $x=a$、$x=b$ 與 x 軸所圍成的區域面積)

$$=\int_a^b (f(x)+k)\,dx-\int_a^b (g(x)+k)\,dx$$

$$=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx\text{ 。}$$





我們將前面討論的結果整理如下：

設 $f(x)$、$g(x)$是定義在區間$[a,b]$上的連續函數，且滿足 $f(x)\geq g(x)$，則由 $f(x)$、$g(x)$的圖形與直線 $x=a$、$x=b$ 圍成的區域面積等於 $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$ 。

[例題1] 試求拋物線 $y=x^2$ 與 $y=4x-x^2$ 所圍成的區域面積。

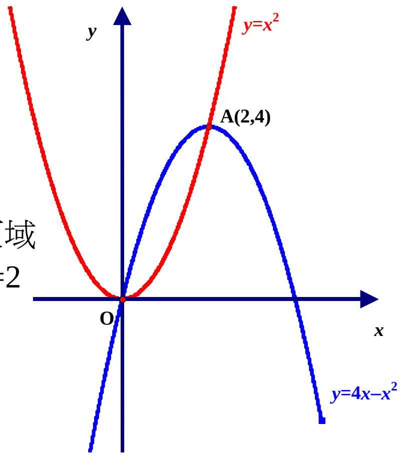
[解法]：

由於拋物線 $y=x^2$ 與 $y=4x-x^2$ 相交於(0,0)及(2,4)兩點，

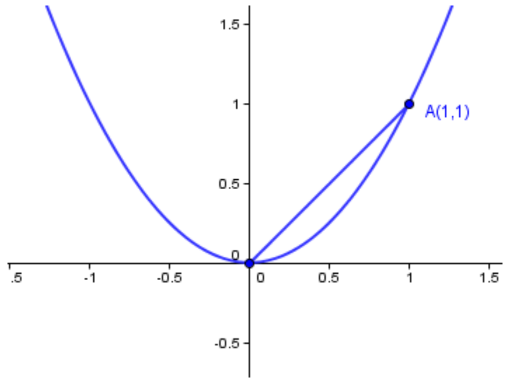
且當 $0\leq x\leq 2$ 時

都有 $4x-x^2\geq x^2$。如右圖，拋物線 $y=x^2$ 與 $y=4x-x^2$ 所圍成的區域可視爲是由函數 $f(x)=4x-x^2$ 與 $g(x)=x^2$ 的圖形與直線 $x=0$、$x=2$ 所圍成的區域。依前面的討論可知所求的區域面積

$$=\int_0^2 [(4x-x^2)-x^2]\,dx=\int_0^2 (4x-2x^2)\,dx=2x^2-\frac{2}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{8}{3}\text{ 。}$$

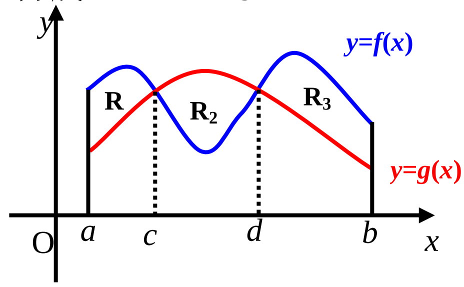


(練習1)如右圖，試求直線 OA 與拋物線 $y=x^2$ 所圍成的區域面積。Ans：$\dfrac{1}{6}$



(2)設 $f(x)$、$g(x)$爲連續函數，在$[a,b]$上 $f(x)\geq g(x)$或 $f(x)\leq g(x)$都會發生，我們只要分段考慮 $f(x)$與 $g(x)$圖形的上下相關位置，再根據前面的討論，即可以求得函數 $f(x)$與 $g(x)$的圖形與直線 $x=a$、$x=b$ 所圍成的區域面積。

函數 $f(x)$與 $g(x)$的圖形與直線 $x=a$、$x=b$ 所圍成的區域 R 可以分成 R_1、R_2、R_3，



當 $a\leq x\leq c$ 或 $d\leq x\leq b$ 時，$f(x)$的圖形在 $g(x)$的圖形上方，

當 $c\leq x\leq d$ 時，$f(x)$的圖形在 $g(x)$的圖形下方，

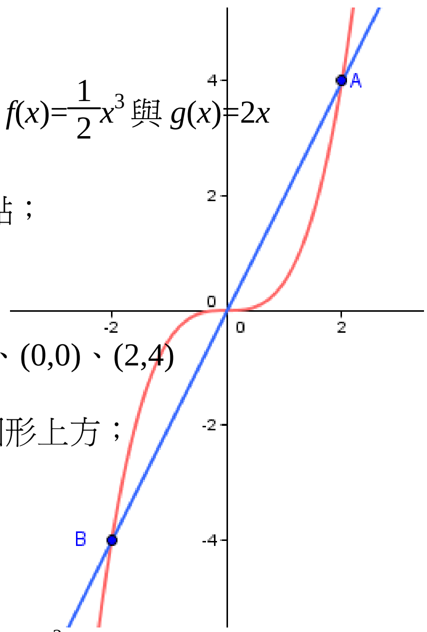
故可以得知：

區域 R 的面積

=區域 R_1 的面積+區域 R_2 的面積+區域 R_3 的面積。

$$=\int_a^c [f(x)-g(x)]\,dx+\int_c^d [g(x)-f(x)]\,dx+\int_d^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

[例題2] 試求函數 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3$ 與 $g(x)=2x$ 的圖形所圍成的區域面積。



[分析]：

(1)函數 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3$ 與 $g(x)=2x$ 的圖形所圍成的區域是指以 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3$ 與 $g(x)=2x$ 的圖形爲邊界的封閉區域。

(2)要找此區域的面積，先求函數 $f(x)$、$g(x)$圖形的的交點；然後決定兩圖形的上下相關位置，再分段求面積。

[解法]：

因爲$\dfrac{1}{2}x^3-2x=\dfrac{1}{2}x(x-2)(x+2)$，故兩圖形的交點爲$(-2,-4)$、$(0,0)$、$(2,4)$

如圖 2–62，當$-2\leq x\leq 0$ 時，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^3$ 的圖形在 $g(x)=2x$ 圖形上方；

當 $0\leq x\leq -2$ 時，$g(x)=2x$ 圖形在 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3$ 的圖形上方。

函數 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3$ 與 $g(x)=2x$ 的圖形所圍成的區域面積

$$=\int_{-2}^{0}(\frac{1}{2}x^3-2x)\,dx+\int_0^2(2x-\frac{1}{2}x^3)\,dx=[\frac{1}{8}x^4-x^2]\Big|_{-2}^{0}+[x^2-\frac{1}{8}x^4]\Big|_0^2$$

$=[0-(2-4)]+[(4-2)-0]=4$。

[例題3] 試計算定積分$\int_{-1}^{1}|1+x-\sqrt{1-x^2}|dx$。

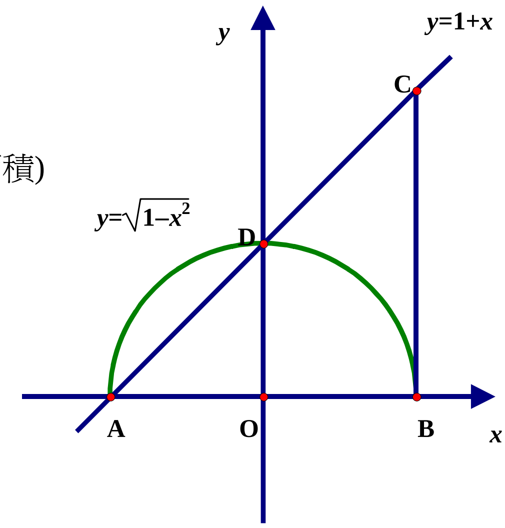
[解法]：

$\int_{-1}^{1}|1+x-\sqrt{1-x^2}|dx$表示直線 y=1+x 與半圓 $y=\sqrt{1-x^2}$ 在$-1\le x\le 1$ 範圍內所夾的區域面積。

$=\int_{-1}^{0}[\sqrt{1-x^2}-(1+x)]dx+\int_{0}^{1}[(1+x)-\sqrt{1-x^2}]dx$

$(\frac{1}{4}$圓面積$-\Delta$OAD 面積)+(梯形 OBCD 面積$-\frac{1}{4}$圓面積)

$=(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})+(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4})=1$



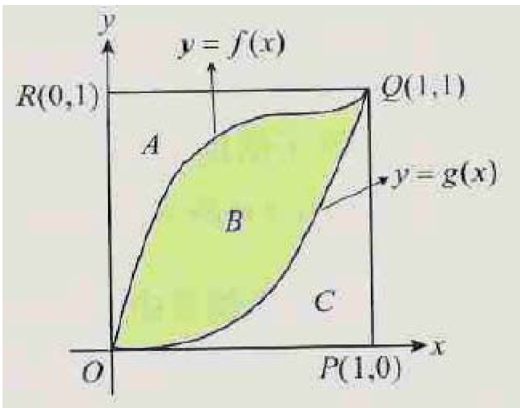
(練習2)求拋物線 $y=x^2$ 與 $y=-x^2+2x+4$ 所圍成之區域面積。 Ans：9

(練習3)求 $f(x)=x^3-2x^2$ 的圖形與 $g(x)=x-2$ 的圖形所圍成之區域面積。 Ans：$\frac{37}{12}$

(練習4)在坐標平面的第一象限內，求曲線 $y=\sqrt{x}$ 以及直線 x 軸與 $y=x-2$ 所圍成的區域面積。 Ans：$\frac{10}{3}$

(練習5)利用曲線間的面積來計算定積分：$\int_{-1}^{1}|x-\sqrt{1-x^2}|dx$。Ans：$1+\frac{\pi}{4}$

(練習6)已知坐標平面上四點 O(0,0)、P(1,0)、Q(1,1)、R(0,1)。多項式函數 $f(x)$與 $g(x)$在區間[0,1]上的圖形將正方形 OPQR 分成 A、B、C 三區域。如圖所示。設 A、B、C 三區域的面積分別為 a,b,c，選出正確選項：



(1)$a=1-\int_{0}^{1}f(x)dx$

(2)$c=\int_{0}^{1}g(x)dx$ (3)$b+c=\int_{0}^{1}f(x)dx$

(4)$a=\int_{0}^{1}(1-f(x))dx$ (5)$b=\int_{0}^{1}(f(x)-g(x))dx$ 。

Ans：(1)(2)(3)(4)(5)

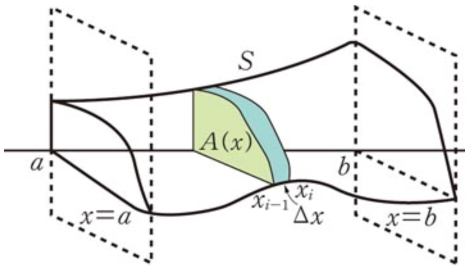
(練習7)試求 $y=\sin x$ 的圖形與直線 $y=x$、$x=\frac{\pi}{2}$、$x=\pi$所圍成的區域面積。Ans：$\frac{3\pi^2-8}{3}$

(練習8)試求 $y=\sqrt{x+3}$ 的圖形與直線 $y=\frac{x+3}{2}$所圍成的區域面積。Ans：$\frac{4}{3}$

(乙)定積分求體積

(1)立體體積與定積分：

設立體 S 位於兩平行平面 $x=a$ 與 $x=b$ ($a<b$)之間，如何求此立體 S 的體積呢？



如圖所示，首先考慮用垂直 x 軸於$(x,0,0)$的平面 P_x 來截立體 S，就好像我們拿刀子來切這個立體一樣。若截平面的面積可由 x 來確定，令 $A(x)$爲平面 P_x 截這個立體所成截面的面積，當 x 由 a 到 b 變化時，設 $A(x)$可以視爲$[a,b]$上的連續函數。

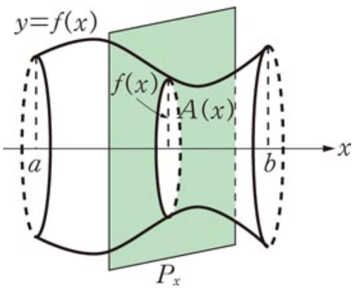
接下來，將$[a,b]$平分成 n 等分，分點爲 $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$，再用平面 $P_{x_0},P_{x_1},\ldots P_{x_n}$ 來截立體 S，將立體 S 切成 n 個小段，設它們的體積分別爲 V_1、V_2、…、V_n，在每個分段$[x_{i-1},x_i]$中任取一點 t_i，產生 n 個高爲$\Delta x=\frac{b-a}{n}$，底面面積爲 $A(t_i)$ $(1\le i\le n)$的柱體，用第 i 個柱體的體積 $A(t_i)\cdot\Delta x$ 來作爲第 i 個小段體積 V_i的近似值，因此 n 個柱體的體積和 $\sum_{i=1}^{n}A(t_i)\cdot\Delta x$ 可做爲立體 S 體積的近似值，直觀來說，當 n 越來越大時，$\sum_{i=1}^{n}A(t_i)\cdot\Delta x$ 會越接近立體 S 的體積，因此立體 S 的體積等於 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A(t_i)\cdot\Delta x$ 。

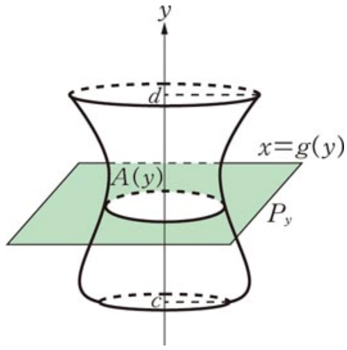
根據定積分的定義，$\sum_{i=1}^{n}A(t_i)\cdot\Delta x$ 爲連續函數 $A(x)$在$[a,b]$上的黎曼和，因此立體 S 的體積等於 $\int_a^b A(x)\,dx$ 。

結論：
設有一個立體 S 位於平面 $x=a$ 與 $x=b$ ($a<b$)之間，若多項式函數 $A(x)$爲垂直 x 軸於$(x,0,0)$的平面截 S 所成截面的面積，則立體 S 的體積等於 $\int_a^b A(x)\,dx$ 。

(2)旋轉體體積與定積分：

設 $f(x)$為$[a,b]$上的連續函數，且 $f(x)\ge 0$，由函數 $y=f(x)$的圖形與直線 $x=a$，$x=b$ 及 x 軸圍成的區域繞 x 軸所成的旋轉體為 S。





如圖所示，垂直 x 軸的平面 P_x 截 S 的截面面積為 $A(x)=\pi[f(x)]^2$，因此旋轉體 S 的體積為$\int_a^b \pi\cdot[f(x)]^2\,dx$。

同理，若 $g(y)$為$[c,d]$上的連續函數，且 $g(y)\ge 0$，由函數 $x=g(y)$的圖形與直線 $y=c$，$y=d$ 及 y 軸圍成的區域分別繞 y 軸所成的旋轉體體積為$\int_c^d \pi\cdot[g(y)]^2\,dy$。

結論：

(1)若 $f(x)$為$[a,b]$上的連續函數，且 $f(x)\ge 0$，由 $y=f(x)$的圖形與直線 $x=a$，$x=b$ 及 x 軸圍成的區域繞 x 軸所成的旋轉體體積為$\int_a^b \pi\cdot[f(x)]^2\,dx$。

(2)若 $g(y)$為$[c,d]$上的多項式函數，且 $g(y)\ge 0$，由 $x=g(y)$的圖形與直線 $y=c$，$y=d$ 及 y 軸圍成的區域繞 y 軸所成的旋轉體體積為$\int_c^d \pi\cdot[g(y)]^2\,dy$。

[例題4] 證明：底面為邊長 a 的正方形，高為 h 的直四角錐之體積為$\frac{1}{3}a^2h$。

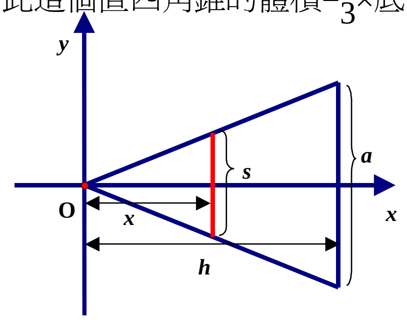
解法：

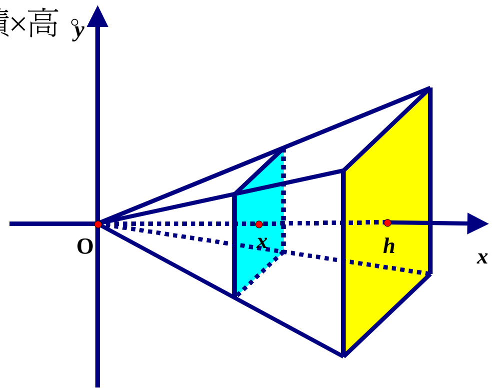
將此四角錐置於空間坐標中(z 軸朝上)，使得錐頂為原點 O。

設垂直 x 軸的平面 P_x 截四角錐體的截面面積為 $A(x)$，截面為一個正方形，設此正方形邊長為 s，如圖所示，可得$\frac{x}{h}=\frac{s}{a}\Rightarrow s=\frac{ax}{h}$，故 $A(x)=s^2=(\frac{ax}{h})^2=\frac{a^2}{h^2}x^2$。

直四角錐的體積$=\int_0^h A(x)\,dx=\int_0^h(\frac{a^2}{h^2}x^2)dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{h^2}x^3\Big|_0^h=\frac{1}{3}\frac{a^2}{h^2}(h^3-0^3)=\frac{1}{3}a^2h$。

因此這個直四角錐的體積$=\frac{1}{3}\times$底面積×高。





[例題5] 證明半徑為 r 的球體體積為$\dfrac{4\pi r^3}{3}$。

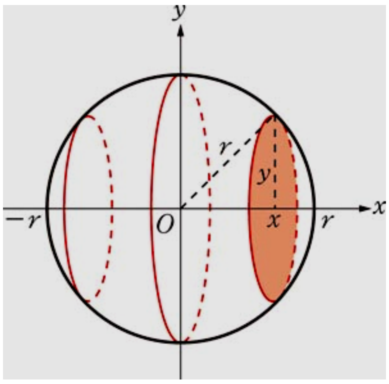
解法：

如圖所示，將球體置於空間坐標中(z 軸朝上)，使得球心 O 為原點。

設垂直 x 軸的平面 P_x 截球體的截面圓面積為 $A(x)$，因為截面圓半徑=$\sqrt{r^2-x^2}$ ，

因此 $A(x)=\pi y^2=\pi(r^2-x^2)$。

球體的體積為



$$\int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)\,dx$$

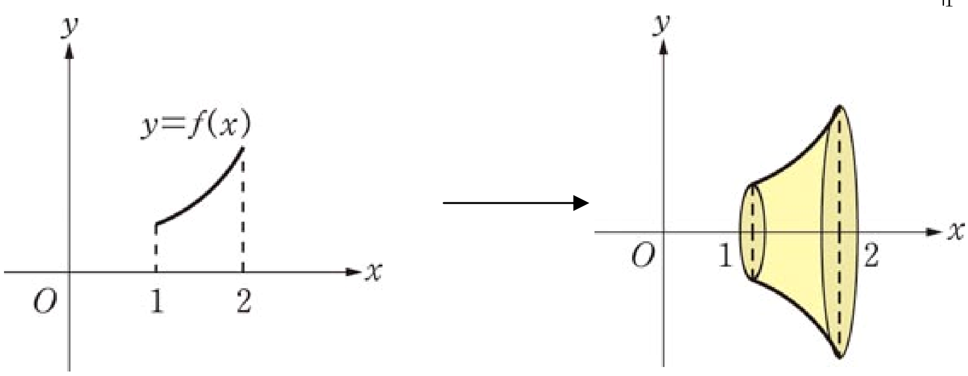
$$=\pi\cdot\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\cdot\left(r^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-r}^{r}$$

$$=\pi[(r^3-\frac{1}{3}r^3)-(-r^3+\frac{1}{3}r^3)]\ =\ \frac{4\pi r^3}{3}$$

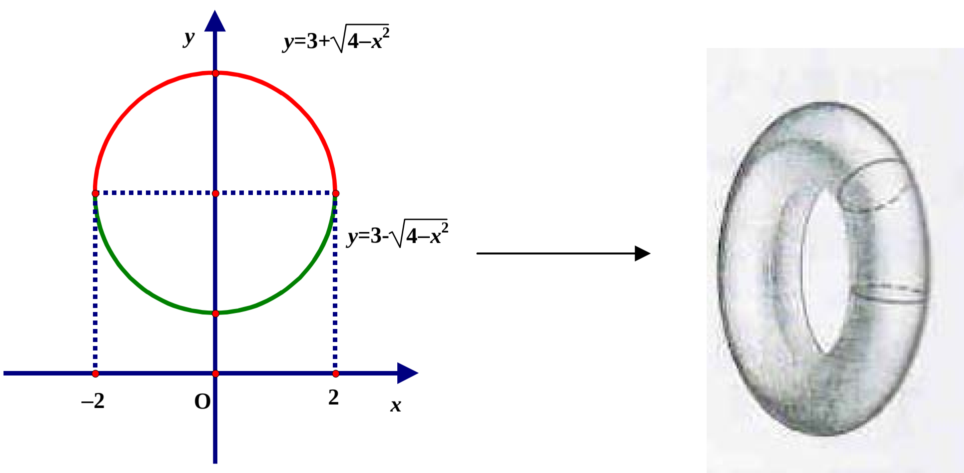
[例題6] 試求 $y=x^2$ 的圖形與直線 $x=1$，$x=2$ 及 x 軸圍成的區域繞 x 軸所成的旋轉體體積。

[解法]：

根據旋轉體的體積公式，所求的旋轉體體積=$\int_1^2(x^2)^2dx=\int_1^2x^4dx=\frac{1}{5}x^5\Big|_1^2=\frac{31}{5}$



[例題7] 求圓 C：$x^2+(y-3)^2=4$ 內部區域繞 x 軸旋轉所得之旋轉體的體積。



[解法]：

圓 C：$x^2+(y-3)^2=4$ 可以視爲兩個函數 $f(x)$、$g(x)$的圖形所組成
其中 $f(x)=3+\sqrt{4-x^2}$ 與 $g(x)=3-\sqrt{4-x^2}$
設 R_1 爲函數 $f(x)=3+\sqrt{4-x^2}$ 圖形與直線 $x=2$、$x=-2$ 所圍成的區域
R_2 爲函數 $g(x)=3-\sqrt{4-x^2}$ 圖形與直線 $x=2$、$x=-2$ 所圍成的區域
圓 C 內部區域繞 x 軸旋轉所得之旋轉體可以視爲
R_1 繞 x 軸旋轉所得之旋轉體中間挖去由 R_2 繞 x 軸旋轉所得之旋轉體
故圓 C 內部區域繞 x 軸旋轉所得之旋轉體體積

$$=\int_{-2}^{2}\pi(f(x))^2\,dx-\int_{-2}^{2}\pi(g(x))^2\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\pi[(f(x))^2-(g(x))^2]\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\pi[(3+\sqrt{4-x^2})^2-(3-\sqrt{4-x^2})^2]\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\pi[(9+6\sqrt{4-x^2}+4-x^2)-(9-6\sqrt{4-x^2}+4-x^2)]\,dx=\int_{-2}^{2}\pi(12\sqrt{4-x^2})\,dx$$

$$=12\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=12\pi\cdot 2\pi=24\pi^2$$

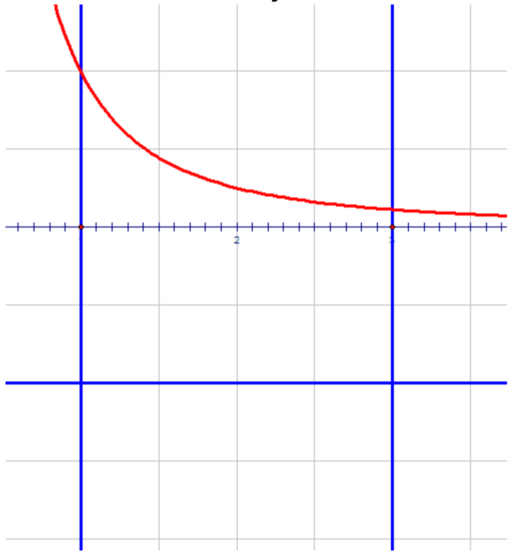
($\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ 代表圓 $x^2+y^2=4$ 上半圓區域的面積，故 $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=2\pi$)

(3)根據上面的例題，我們可以得到以下的結果：
設 $f(x)$、$g(x)$是定義在$[a,b]$上的連續函數，而且 $f(x)\ge g(x)\ge 0$，設由函數 $f(x)$、$g(x)$的圖形與直線 $x=a$、$x=b$ 所圍成的區域爲 R，由函數 $f(x)$的圖形與直線 $x=a$、$x=b$ 所圍成的區域爲 R_1，由函數 $g(x)$的圖形與直線 $x=a$、$x=b$ 所圍成的區域爲 R_2，
將區域 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體可以視爲區域 R_1 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體中間挖去區域 R_2 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體。
區域 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積
= (區域 R_1 繞 x 軸旋轉體體積)− (區域 R_2 繞 x 軸旋轉體體積)

$$=\pi\int_a^b(f(x))^2\,dx-\pi\int_a^b(g(x))^2\,dx=\pi\int_a^b[(f(x))^2-(g(x))^2]dx$$

> 結論：
> 函數 $f(x),g(x)$的圖形與直線 $x=a,x=b$ 所圍成的區域
> 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積$=\pi\int_a^b[(f(x))^2-(g(x))^2]dx$ 。

[例題8] 試求 $y=\frac{1}{x^2}$的圖形與直線 $x=1$、$x=3$ 與 $y=0$ 圍成的區域分別繞 $y=-1$ 所成的旋轉體體積。 Ans：$\frac{134}{81}\pi$



(練習9) 設 S 為球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所包圍的球體，試求 S 在$\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ 範圍內的立體體積。 Ans：$\frac{5\pi}{24}$

(練習10) 求直線 $y=x+1$ 的圖形與直線 x 軸、$x=0$ 及 $x=2$ 所圍成的區域繞 x 軸旋轉所得之旋轉體的體積。Ans：$\frac{26}{3}\pi$

(練習11) 將拋物線 $y=x^2$ 在 $0\leq x\leq 1$ 範圍內的圖形下區域繞 x 軸旋轉，求旋轉所得的旋轉體體積。 Ans：$\frac{\pi}{5}$

(練習12) 試求 $y=x^2$ 的圖形與直線 $y=1$，$y=4$ 及 y 軸圍成的區域分別繞 y 軸所成的旋轉體體積。 Ans：$\frac{15\pi}{2}$

(練習13) 試求 $y=\frac{1}{x}$的圖形與直線 $x=1$，$x=2$ 及 x 軸圍成的區域分別繞 x 軸所成的旋轉體體積。 Ans：$\frac{\pi}{2}$

(練習14) 試求 $y=x^{\frac{2}{3}}$的圖形與直線 $x=1$，$y=0$ 圍成的區域分別繞 y 軸所成的旋轉體體積。 Ans：$\frac{3\pi}{4}$

(丙)定積分求變化量

前面的單元曾提到函數 $f(x)$的導函數 $f'(x)$代表 $f(x)$的變化率函數，例如：
(1)$f(x)$代表位移對時間的函數，則 $f'(x)$代表速度對時間的函數。
(2)$f(x)$代表流經電線截面的總電荷量對時間的函數，則 $f'(x)$代表電流對時間的函數。
(3)$f(x)$代表血壓對用藥量的函數，則 $f'(x)$代表血壓對用藥量的敏感度。
因此微分函數 $f(x)$代表由函數 $f(x)$求其對自變數 x 的變化率函數。
根據微積分基本定理，積分是微分的逆運算，因此我們可以根據變化率函數求得自變量 $x=a$ 到 $x=b$ 的變化量。

$$\text{變化量函數 } f(x) \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} \text{變化率函數 } f'(x)$$

◆ 由變化率求變化量
設多項式函數 $f(t)$代表函數 $g(t)$對時間的變化率函數，即 $f(t)=g'(t)$，根據微積分基本定理，可以得知：從 $x=a$ 到 $x=b$ 這段期間的變化量 $g(b)-g(a)=\int_a^b f(t)\,dt$ 。

故我們可以透過變化率函數的定積分求變化量。
以速度與位移的關係來說：
設質點 m 在直線上做運動，t 秒時其質點的速度為 $V(t)$ (公尺/秒)(向右為正，向左為負)，而 $V(t)$為位移對時間的變化率函數，故 $t=a$(秒)到 $t=b$(秒)這段時間位移的變化量為 $\int_a^b V(t)\,dt$ 。

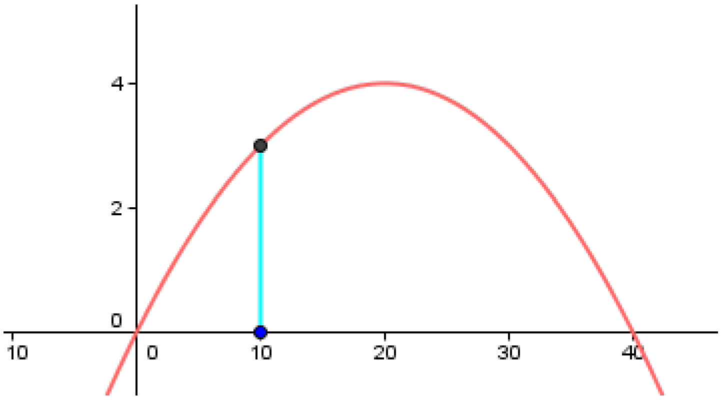
接下來，我們舉一些例子說明如何由變化率函數的定積分求變化量：

[例題9] 若一物體只受重力影響作自由落體運動，重力加速度為 g(m/sec^2)，初速度為 V_0(m/sec)，設 t 秒後的速度為 $V(t)$ (m/sec)，位移為 $S(t)$m，
試推導自由落體的距離公式：$S(t)= V_0t+\frac{1}{2}gt^2$。

[解法]：
物體只受重力影響作自由落體運動，則此物體會在一直線上作等加速度運動，其加速度為重力加速度。
因為 $V'(t)$為物體 t 秒後的加速度，因此 $V'(t)=g$，故可得 $V(t)=gt+c$，又 $V(0)=V_0=c$， 故 $V(t)= V_0+gt$ 故 $S(t)=\int_0^t V(x)\,dx=$

$$\int_0^t (V_0+gx)\,dx=[V_0x+\frac{1}{2}gx^2]\Big|_0^t=V_0t+\frac{1}{2}gt^2。$$

[例題10] 人類記憶訊息的速率(每分鐘記得的單字數目)最初隨時間遞增，但是，在達到一個最大速率之後就開始遞減。如圖，某一次特定的記憶實驗中，以函數 $f(t)=-0.009t^2+0.4t$ 來近似記憶單字的速率(單位：單字數目/分)，試問最初的 10 分鐘內記住了多少單字。



[解法]：

因爲函數 $f(t)=-0.009t^2+0.4t$ 近似記憶單字的速率，故最初的 10 分鐘內記住的單字數約爲

$$\int_0^{10} f(t)\,dt$$

$$=\int_0^{10}(-0.009t^2+0.4t)\,dt$$

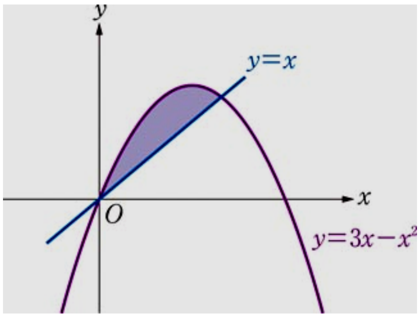
$$=[-0.003t^3+0.2t^2]\Big|_0^{10}=-3+20=17(\text{個})。$$

(練習15)設某一個質點 m 做直線運動，t 秒時的速度爲 $V(t)$ (公尺/秒)其中 $V(x)=t^2-t+2$，試求從 $t=2$(秒)至 $t=4$(秒)質點 m 的位移。Ans：$\frac{50}{3}$公尺

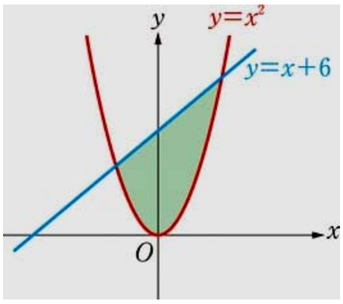
綜合練習

(1) 找出下列區域的面積：

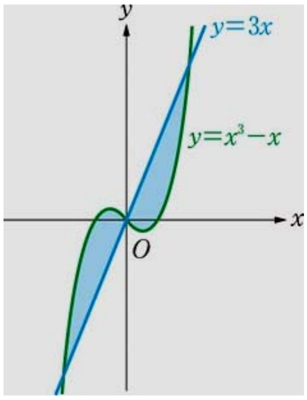
(1)



(2)



(3)

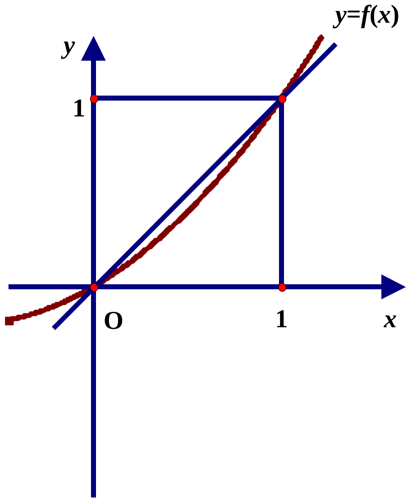


(2) 試求以各小題中曲線或直線所圍成的區域之面積：

(a)$y=8-x^2$、$y=x^2$、$x=-3$、$x=3$ (b)$y=x(x+3)(x-2)$、x 軸 (c)$y=x^2+3x$、$y=x+3$

(3) 試求 $y=\sin\pi x$、$y=x^2-x$、$x=2$ 所圍成的區域面積。

(4) 如圖，設函數 $f(x)$為定義在[0,1]上遞增連續函數，且 $f(0)=0$、$f(1)=1$。經濟學家稱 $y=f(x)$的圖形為羅倫茲(Lorenz)曲線，它描述一個國家家庭收入的分布。例如 $f(\frac{3}{100})=\frac{5}{100}$代表家庭總收入最低的 3%的家庭收入小於或等於整個國家家庭總收入的 5%。設 $y=f(x)$與 $y=x$ 所圍成的區域面積為 A，$y=x$ 與直線 $x=1$、x 軸、y 軸圍成的區域面積為 B，1912 年義大利的統計學家吉尼(Gini)定義$\frac{A}{B}$來描述一個國家家庭收入分布不平均的情形，稱為吉尼係數(**Gini coefficient**)，



吉尼係數愈大代表一個國家家庭收入分布不平均的程度愈大。

(a)試證明：吉尼係數$=2\int_0^1[x-f(x)]dx$

(b)設某一個國家的羅倫茲曲線為 $y=f(x)=\frac{3}{7}x^2+\frac{4}{7}x$，

試求此國家的吉尼係數。

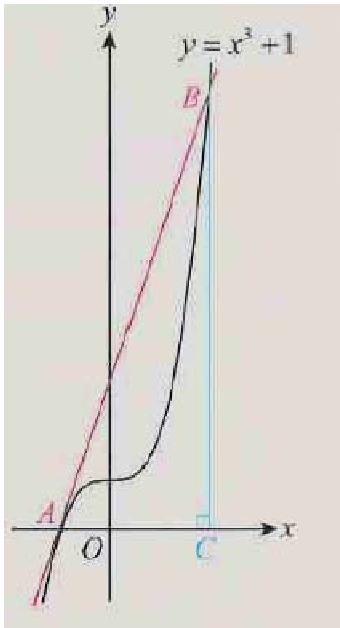
(5) 如右圖，曲線 $y=x^3+1$ 與 x 軸交於 A 點，以 A 點為切點的切線交曲線於 B 點，自 B 點作鉛直線交 x 軸於 C 點試選出正確選項：

(1)A 點坐標為(–1,0)

(2)直線 AB 的方程式為 $3x-y+3=0$

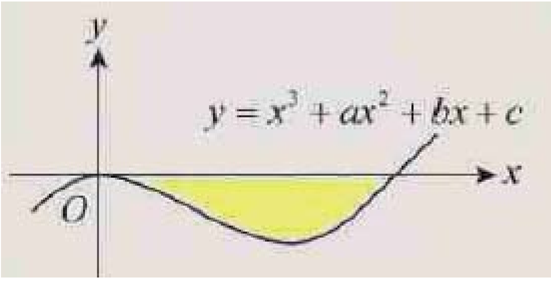
(3)B 點坐標為(2,9)

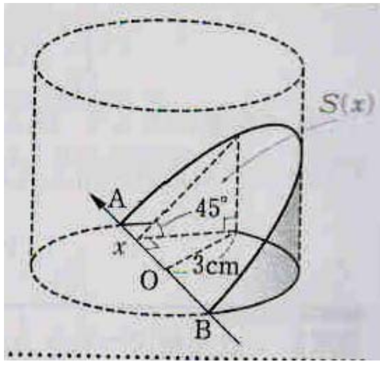
(4)直線 AB 與曲線 $y=x^3+1$ 所圍成的區域面積為 6



(5)曲線 $y=x^3+1$ 將ΔABC 的面積二等份。

(6) 下圖為曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 的部分圖形，若曲線與直線 $y=0$ 在原點相切，且此切線與曲線圍成之區域的面積為 108，求實數 a,b,c 的值。

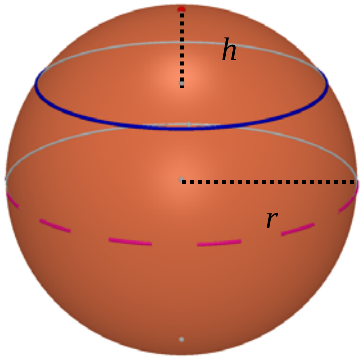




(7) 如右圖所示，有一個底半徑為 3 公分的圓柱體，

被一個通過直徑$\overline{AB}$且與底面成 45°角的平面所截，
試求所截出的立體體積。

(8) 已知直線 L：$x-y=1$ 與 $y=x^3-3x^2+3x-1$ 的圖形相交於三點，
並圍成 A 與 B 兩個封閉區域，試求：
(a)三個交點坐標。
(b)證明：A 與 B 兩塊區域的面積相等。



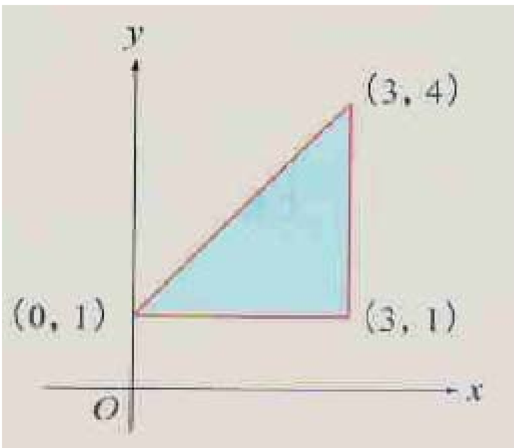
(9) 設 $y=x^3$ 的圖形、x 軸、直線 $x=1$、$x=2$ 所圍成的區域為 R，
試求 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積。

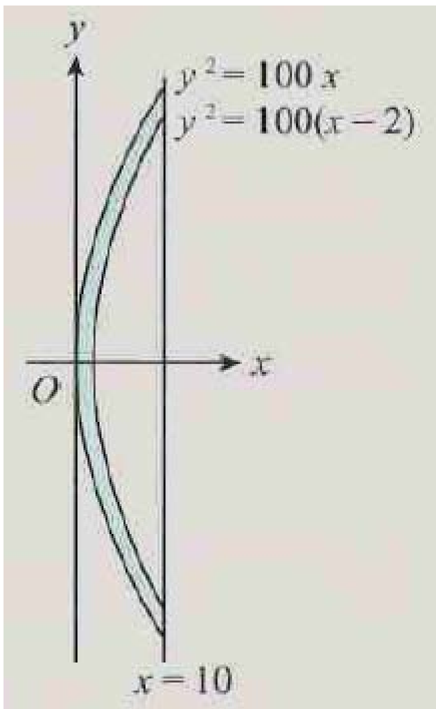
(10) 試求 $y^2=4-x$，$x=0$ 所圍成的區域繞 y 軸旋轉，
所產生的立體體積。

(11) 右圖是半徑為 r 的球體中，高為 h 的球帽試求此球帽的體積。

(12) 設 a 是正實數且拋物線 $y=x(x-a)$與直線 $y=x$ 所圍的區域面積是 36，求 a 的值。

(13) 將下圖的三角形區域繞 x 軸旋轉，
求所得的旋轉體體積。





(14) 有一拋物面鏡是由拋物線 $y^2=100x$，$y^2=100(x-2)$及直線 $x=10$ 所圍成的區域繞 x 軸旋轉所得的旋轉體設計而成的，如上圖所示，求此拋物面鏡的體積。

(15) 由 $y=0$、$y=\sin x$、$0\le x\le\pi$所圍成的區域繞 $y=1$ 旋轉，求所得的旋轉體體積。

(16) $y=x^2$ 與 $x=y^2$ 所圍成的區域面積繞 $x=-1$ 旋轉，求所得的旋轉體體積。

(17) 一些微積分的先驅者，例如 Kepler 與 Newton 都曾探索酒桶的體積問題。通常他們將酒桶的邊緣大約視爲某一個拋物線的圖形。

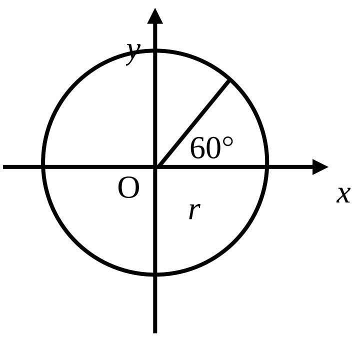
一個高度爲 h，最大半徑爲 R 的酒桶可以視爲由 $y=R-cx^2$ (c 爲正數)，$\frac{-h}{2}\le x\le\frac{h}{2}$與 x 軸所圍成的區域繞 x 軸所圍成的立體。

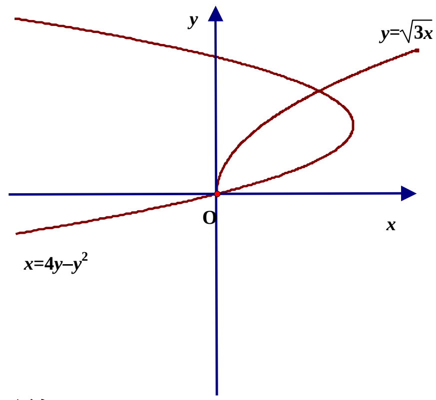
(1)試證明酒桶底部(頂端)的半徑 $r=R-d$，$d=\frac{ch^2}{4}$。

(2)試證明：酒桶的體積爲$\frac{1}{3}\pi h(2R^2+r^2-\frac{2}{5}d^2)$

進階問題

(18) 試求如圖中心角θ=60°，半徑 r 之扇形 R 繞 x 軸旋轉所得旋轉體之體積。



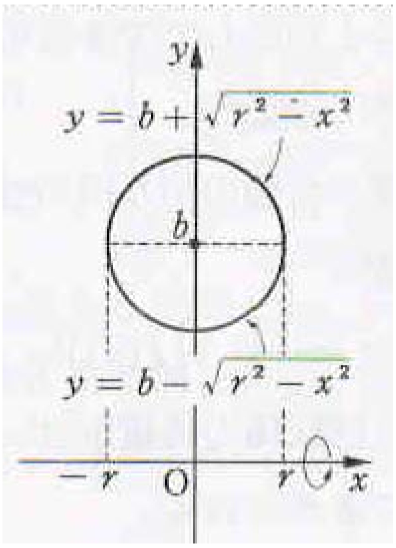


(19) 如圖，試求曲線 $x=4y-y^2$ 與 $y=\sqrt{3x}$ 所圍成的區域面積。
[提示：$x=4y-y^2$ 與 $y=\sqrt{3x}$可視 x 爲 y 的函數]

(20) 若拋物線 $y=x^2$ 與直線 $y=mx(m>0)$所圍成的區域面積爲$\frac{9}{2}$，試求 m 的值。

(21) 如圖，設 $0<r<b$，試求圓 $x^2+(y-b)^2=r^2$ 繞 x 軸旋轉一周所得的旋轉體的體積。

(已知：$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ 等於半徑爲 r 的半圓的面積等於$\frac{1}{2}\pi r^2$)



(22) 試求橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積。

(23) 設 $f(x)=\frac{1}{2}x+3$，$g(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2$，試求

(a)由 $f(x)$與 $g(x)$所圍成的封閉區域 R 的面積。

(b)設直線 $y=mx+2$ ($m<0$)，將區域 R 的面積分成 1：3，試求 m 的值。

(24) 將半球形狀的容器裝滿水，再將其傾斜α°($0<\alpha<90$)，試問：

(a)流出的水量是全體水量的多少?

(b)若(1)中求得的值爲全體的$\frac{11}{16}$，試求出傾斜角α°=?

(25) 設 a,b 爲兩個定實數，函數 $f(x)=\int_0^x (t-a)(t-b)\,dt$ 滿足下列三個條件：

(A)$f(x)$在 $x=\frac{1}{2}$ 會有極值。 (B)$f(a)-f(b)=\frac{1}{6}$ 。 (C)$f'(0)>0$

(a)試求 a,b 的值。

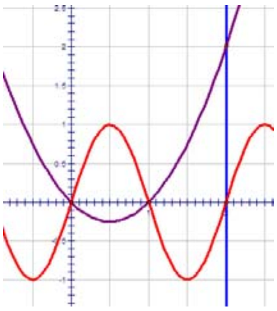
(b)已知 $y=f(x)$以(0,0)爲切點的切線爲 L，

試求 $y=f(x)$的圖形與 L 所圍成的區域面積

綜合練習解答

(1) (a)$\frac{4}{3}$ (b)$\frac{125}{6}$ (c)8

(2) (a)$\frac{92}{3}$ (b)$\frac{253}{12}$ (c)$\frac{32}{3}$



(3) $\frac{4}{\pi}+1$

[提示：所圍成的區域面積

$=\int_0^1(\sin\pi x - x^2 + x)dx + \int_1^2(x^2 - x - \sin\pi x)dx$]

(4) (a) $\frac{A}{B} = \dfrac{\int_0^1(x-f(x))dx}{\frac{1}{2}} = 2\int_0^1[x-f(x)]dx$ (b)$\frac{1}{7}$

(5) (1)(2)(3)(5)

(6) $a=-6, b=0, c=0$

(7) 18cm^3

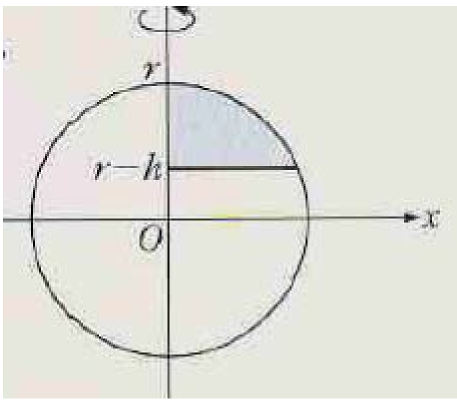
(8) (a)(0,–1)、(1,0)、(2,1) (b)利用定積分來證明。

(9) $\frac{127}{7}\pi$

(10) $\frac{512}{15}\pi$

(11) $\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$

[提示：球帽可以視爲 $x=f(y)=\sqrt{r^2-y^2}$ 圖形與 y 軸，$y=r-h$，$y=r$ 圍成之區域繞 y 軸旋轉所得之旋轉體。故球帽體積 $=\pi\int_{r-h}^{r}(r^2-y^2)dy = \frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$]



(12) 5

(13) 18π

(14)　1800π

(15)　$\pi(4-\frac{\pi}{2})$ [提示：體積$=\pi\int_0^{\pi}[1^2-(1-\sin x)^2]dx$]

(16)　$\frac{29}{30}\pi$

(17)　(1)$y=R-cx^2$ 當 $x=0$ 時拋物線的最高點爲 R，故酒桶的最大半徑爲 R。底部或頂端的半徑 $r=R-c(\frac{h}{2})^2=R-\frac{ch^2}{4}$。

(2)體積$=2\int_0^{\frac{h}{2}}\pi(R-cx^2)^2dx=\frac{1}{3}\pi h(2R^2+r^2-\frac{2}{5}d^2)$。

(18)　$\frac{\pi r^3}{3}$

∴體積

$$=\pi\int_0^{r\cos 60^\circ}(\sqrt{3}x)^2dx+\pi\int_{r\cos 60^\circ}^{r}(\sqrt{r^2-x^2})^2dx$$

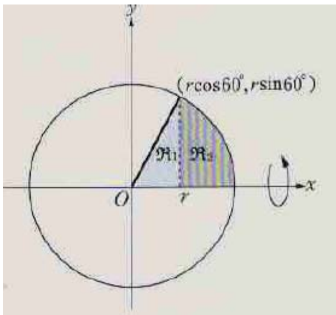
$$=\pi\int_0^{\frac{r}{2}}3x^2dx+\pi\int_{\frac{r}{2}}^{r}(r^2-x^2)dx$$

(19)　6

(20)　3

(21)　$2br^2\pi^2$

(22)　16π



(23)　(a)$\frac{8}{3}$　(b)$\frac{-1}{4}$

(24)　(a)$\frac{1}{2}(3\sin\alpha^\circ-\sin^3\alpha^\circ)$ (b)30°

留下來的水體積$=\pi\int_{\sin\alpha}^{1}(\sqrt{1-y^2})^2dy=\pi(\sin\alpha-\frac{1}{3}\sin^3\alpha)$ (設半徑爲 1)

(25)　(a)$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$　(b)$\frac{9}{4}$

補充教材

(甲)殼層法求旋轉體體積

有些旋轉體的體積用前面提及的方法，很難求出其體積，例如：要求曲線 $y=2x^2-x^3$ 與 x 軸圍成的區域繞 y 軸旋轉所得的轉體體積，因爲我們不容易將 x 表爲 y 的函數 $g(y)$，

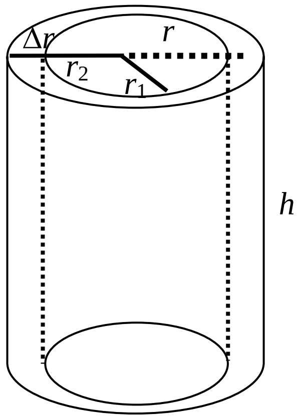
因此對於定積分 $\int_c^d g(y)dy$ 並不易計算。接下來，

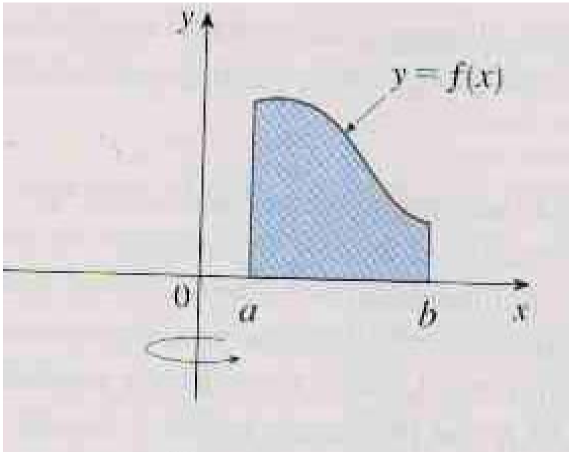
我們介紹另一種計算旋轉體體積的方法稱爲**殼層法**(method of cylindrical shells)

如右圖，兩個高爲 h，半徑分別爲 r_1、r_2 的圓柱體間的體積爲

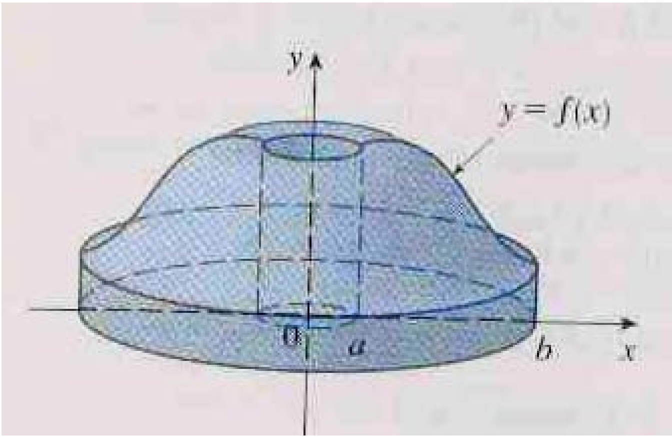
$V=\pi r_2^2h-\pi r_1^2h=\pi h(r_2+r_1)(r_2-r_1)=2\pi\frac{r_2+r_1}{2}h(r_2-r_1)$

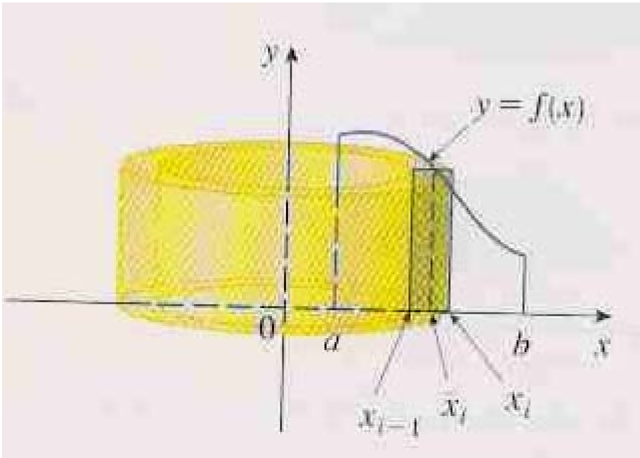
若令 $\Delta r=r_2-r_1$，$r=\frac{r_2+r_1}{2}$，$V=2\pi rh\ \Delta r$=[周長]·[高]·[厚度]





如圖，設由 $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$的圖形，直線 $x=a$、$x=b$ 與 x 軸所圍成的區域爲 R
將區域 R 繞 y 軸旋轉得到一個旋轉體 S，要求 S 的體積。

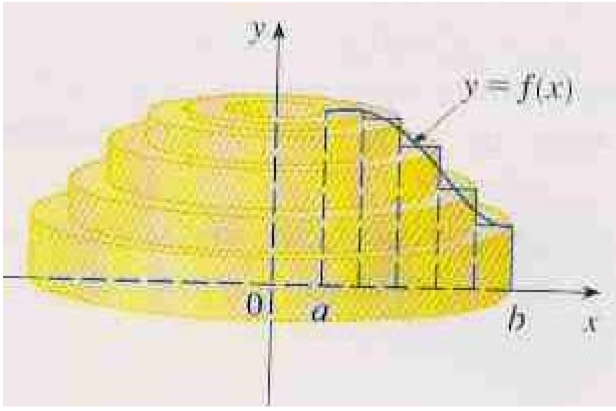




我們將$[a,b]$平分為 n 等份，即 $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$，$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$考慮區間$[x_{i-1},x_i]$，

令 $t_i=\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$，考慮底$[x_{i-1},x_i]$高 $f(t_i)$的矩形，繞 y 軸旋轉旋轉，可得

一個兩圓柱體間的立體，其體積為 V_i，根據前面的討論，$V_i=(2\pi t_i)(f(t_i))\Delta x$。



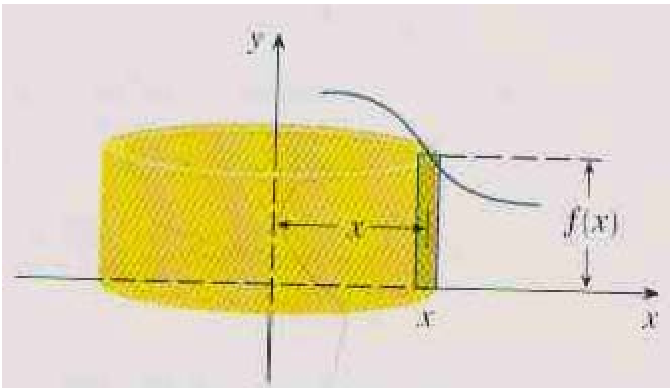
則$\sum\limits_{i=1}^{n}V_i=\sum\limits_{i=1}^{n}(2\pi\, t_i)\,f(t_i)\Delta x$可以視為旋轉體體積 V 的近似值，且 n 愈來愈大時，

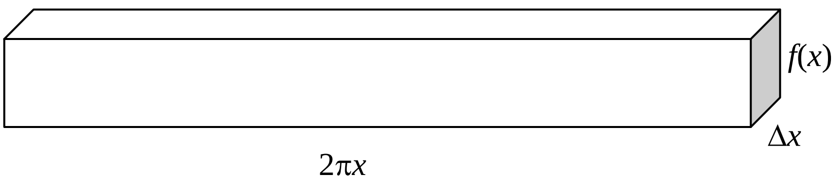
$\sum\limits_{i=1}^{n}(2\pi\, t_i)\,f(t_i)\Delta x$愈接近旋轉體體積 V，

故旋轉體體積 V=$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(2\pi\, t_i)\,f(t_i)\Delta x$，因此旋轉體體積 V=$\int_a^b 2\pi\, x f(x)\,dx$。

結論：

設由 $y=f(x)$：$[a,b]\to\mathbb{R}$，且 $f(x)\geq 0$，$y=f(x)$的圖形，直線 $x=a$、$x=b$ 與 x 軸所圍成的區域為 R，將區域 R 繞 y 軸旋轉得到一個旋轉體 S，則 S 的體積為$\int_a^b 2\pi\, x f(x)\,dx$。





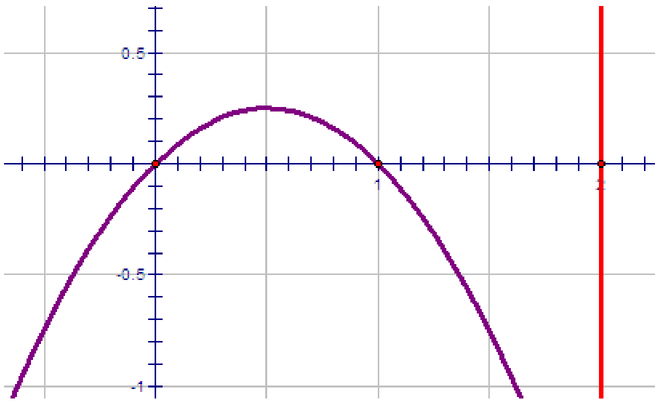
如上圖，上述體積公式$\int_a^b 2\pi\, x f(x)\,dx$可以視爲$\int_a^b \underbrace{2\pi\, x}_{\text{周長}} \cdot \underbrace{f(x)}_{\text{高度}}\,dx$以便於記憶。

[例題1] 求曲線 $y=2x^2-x^3$ 與 x 軸圍成的區域繞 y 軸旋轉所得的轉體體積。

Ans：$\frac{16}{5}\pi$

[例題2] 求曲線 $y=x-x^2$ 與 x 軸圍成的區域繞 $x=2$ 旋轉所得的轉體體積。

Ans：$\frac{\pi}{2}$



(練習1) 試求 $y=x$ 與 $y=x^2$ 所圍成的區域繞 y 軸旋轉所成的立體體積。

Ans：$\frac{\pi}{6}$

(練習2) 利用殼層法求 $y=\sqrt{x}$ 的圖形與直線 $x=0$、$x=1$ 與 x 軸所圍成的區域繞 x 軸旋轉所成的立體體積。Ans：$\frac{\pi}{2}$

(練習3) 利用殼層法求 $y=x^2$ 的圖形與直線 $x=1$、$x=2$ 與 x 軸所圍成的區域繞 $x=4$ 旋轉所成的立體體積。Ans：$\frac{67}{6}\pi$