第三十九單元 矩陣的基本概念與高斯消去法

(甲)矩陣的基本認識

(1)矩陣的基本概念：

$$M=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{第 1 列} \\ \leftarrow \text{第 2 列} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{第 } m \text{ 列} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{第} & \text{第} & & \text{第} \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \text{行} & \text{行} & & \text{行} \end{array} \end{array}$$

M 中每一個元素 a_{ij} 的“足碼”是“雙足碼”

(左碼「i」表“列數”，右碼「j」表“行數”)

例如：

a_{12} 是位在第 1 列，第 2 行的元素，

a_{21} 是位在第 2 列，第 1 行的元素，

a_{ij} 是位在第 i 列，第 j 行的元素，

(2)矩陣的基本名詞：

(a)元：矩陣中列出來的每個數稱為矩陣的元(element)。

(b)列：同一水平線各元合稱此矩陣的一列(row)。

(c)行：同一鉛直線各元合稱此矩陣的一行(column)。

(d)位於第 i 列，第 j 行的元稱為 **(i,j)**元。

(e)當一個矩陣 M 有 n 列 m 行時，我們稱 M 為 **$n\times m$ 階的矩陣**。

(f)當一個矩陣 M 有 n 列 n 行時，我們稱 M 為 **n 階方陣**。

例如：$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & -4 & 2 & 3 \\ 6 & 11 & -13 & 15 \end{bmatrix}=[a_{ij}]_{3\times 4}$，

A 是一個 3×4 階的矩陣，$a_{21}=5$，$a_{32}=11$。

(3)矩陣的相等：

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{p\times q}$，若 $m=p$，$n=q$，且對於任意 i 與 j 恆有 $a_{ij}=b_{ij}$，

則稱 A 和 B 相等，以 A=B 表示。

(4)特殊矩陣：

(a)設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 是一個 $m\times n$ 階矩陣，作一 $n\times m$ 階的矩陣 $B=[b_{ij}]_{n\times m}$，其中 $b_{ij}=a_{ji}$，

則稱矩陣 B 為矩陣 A 的**轉置矩陣**，符號：$B=A^T$。

例如：A=$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -9 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$，$A^T$=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -9 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(b)設 A=$[a_{ij}]_{m\times n}$是一個 n 階方陣，若 $a_{ij}=a_{ji}$，則稱 A 是**對稱方陣**。

例如 A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$爲一個對稱方陣。

(c)設 A=$[a_{ij}]_{m\times n}$是一個 n 階方陣，若 $a_{ij}=-a_{ji}$，則稱 A 是**反對稱方陣**。
注意主對角線 $a_{ii}=0$

例如：A=$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$是反對稱方陣。

(d)單位方陣：若一個 n 階方陣，由左上角到右下角的對角線上各位置的元(即(1,1),(2,2)…(n,n)元)都是 1，而其餘各元都是 0，則稱爲 ***n* 階單位方陣**，以 $\mathbf{I}_n$ 表之。

例：$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，…..，$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$。

(e)三角矩陣：
對於方陣 A 來說，
若 A 非零元只出現在對角線及其上(或右)方，
則稱方陣 A 爲上三角矩陣。(upper triangular matrix)

若 A 非零元只出現在對角線及其下(或左)方，
則稱方陣 A 爲下三角矩陣。(lower triangular matrix)

若 A 既是上三角矩陣也是下三角矩陣，則稱方陣 A 爲對角矩陣。(diagonal matrix)
例如：

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 21 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$爲上三角矩陣；$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -8 & 10 & 7 & 0 \\ 9 & 42 & 9 & -1 \end{bmatrix}$爲下三角矩陣；

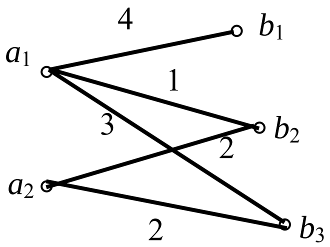
$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$爲對角矩陣。

(5)矩陣問題的實例：

許多實際問題用數學來描述時，都要使用矩陣的概念，此處介紹幾個簡單的例子：

例一：(通路矩陣)

A 地區有兩個城市 a_1、a_2 和 B 地區有三個城市 b_1、b_2、b_3 的交通聯結情形如圖所示：每條線上的數字代表聯結兩城市之間的道路數目，由該圖所提供的訊息，可以用矩陣的形式來表示，稱之爲通路矩陣。



$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

例二：(價格矩陣)

四種食品在三家商店中，單位量的價格(元)可用以下的矩陣給出：

$\begin{bmatrix} 17 & 7 & 11 & 21 \\ 15 & 9 & 13 & 19 \\ 18 & 8 & 15 & 19 \end{bmatrix}$，此處的列表示四種食品在三家商店中的價格。

例三：(原子矩陣)

在複雜化學反應系統中，涉及到眾多的化合物。爲了定量地研究反應、平衡等問題，可以引進表示這種系統的原子矩陣。像下面的矩陣代表合成氨生產的甲烷與水蒸氣合成氣的階段，系統內除一些惰性氣體外，還存在以下 7 種物質：

$CH_4,H_2O,H_2,CO,CO_2,C,C_2H_6$，此時候可以寫出原子矩陣：

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} CH_4 & H_2O & H_2 & CO & CO_2 & C & C_2H_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ H \\ O \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(練習1)已知矩陣 $B=[b_{ij}]_{3\times4}$，且每個元 $b_{ij}=2i-j$，求 B=？Ans：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(練習2)設方陣$\begin{bmatrix} 2a-b & -1 \\ 9 & c+3d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 6c-5d \\ 3a+b & 19 \end{bmatrix}$，試求 a,b,c,d。

Ans；a=2,b=3,c=4,d=5

(練習3)矩陣 A=$[a_{ij}]_{3\times3}$，$a_{ij}\in\{-1,0,1,2,3\}$

(1)若矩陣 A 滿足 A^T=A，則此種矩陣共有幾個？

(2)若矩陣 A 滿足 A^T=−A，則此種矩陣共有幾個？

Ans：(1)5^6　(2)3^3

(練習4)設 A 為 3 階方陣，且 A=$[a_{ij}]$，其中 $a_{ij}=i^2+2j-1$，請寫出 A^T。

Ans：$A^T=\begin{bmatrix}2&5&10\\4&7&12\\6&9&14\end{bmatrix}$

(乙)高斯消去法與矩陣的列運算

(1)利用高斯消去法解聯立方程組：

以一次方程組$\begin{cases}2x+3y-z=-2\\x-y+z=8\\3x-2y-9z=9\end{cases}$　為例來說明，

(1°)為了計算方便起見，將 $2x+3y-z=-2$ 與 $x-y+z=8$ 兩式對調，

$$\begin{cases}2x+3y-z=-2\\x-y+z=8\\3x-2y-9z=9\end{cases}\xrightarrow{\text{對調前面兩式}}(L)：\begin{cases}x-y+z=8.....(1)\\2x+3y-z=-2.....(2)\\3x-2y-9z=9......(3)\end{cases}$$

利用**(1)**式消去**(2)**式與**(3)**式中 ***x*** 項的係數：

$$(L)：\begin{cases}x-y+z=8.....(1)\\2x+3y-z=-2.....(2)\\3x-2y-9z=9......(3)\end{cases}\xrightarrow{(1)\times-2+(2),(1)\times-3+(3)}\begin{cases}x-y+z=8\\0\cdot x+5y-3z=-18\\0\cdot x+y-12z=-15\end{cases}$$

(2°)再將上述方程組中第二式與第三式對調，

$$\begin{cases}x-y+z=8\\0\cdot x+5y-3z=-18\\0\cdot x+y-12z=-15\end{cases}\xrightarrow{\text{對調第二式與第三式}}(L')：\begin{cases}x-y+z=8.....(1')\\0\cdot x+y-12z=-15.....(2')\\0\cdot x+5y-3z=-18.....(3')\end{cases}$$

在**(L′)**中除了第一式外，其餘各式之中 ***x*** 項的係數都為 **0**。

(3°)利用**(2′)**式消去 **(3′)**式中的 ***y*** 項係數：

$$\begin{cases} x-y+z=8.....(1') \\ 0\cdot x+y-12z=-15.....(2') \\ 0\cdot x+5y-3z=-18.....(3') \end{cases} \xrightarrow{(2')\times -5+(3')} (\mathrm{L}'')：\begin{cases} x-y+z=8.....(1'') \\ 0\cdot x+y-12z=-15.....(2'') \\ 0\cdot x+0y+57z=57.....(3'') \end{cases}$$

在(L'')中$(3'')$式中 x,y 項的係數爲 0，$(2'')$式中 x 項的係數爲 0

將$(3'')\times\frac{1}{57}$，得$\begin{cases} x-y+z=8.....(1''') \\ 0\cdot x+y-12z=-15.....(2''') \\ 0\cdot x+0\cdot y+z=1.....(3''') \end{cases}$

由$(3''')$可解得 $z=1$，反代入$(2''')$解得 $y=-3$，再以 $z=1,y=-3$
得出 $x=4$，故一次方程組的解爲 $x=4,y=-3,z=1$。

回顧前例中解一次方程組的過程，過程中進行了以下幾個動作，而且這些動作都不會改變原來一次方程組的解。

(1°)對調方程式的位置。
(2°)將某一方程式等號兩邊乘上一個不爲 0 的常數。
(3°)將某一方程式乘上一個不爲 0 的常數，加到另一個方程式。

並且一次用一個方程式去消去其它方程式中特定的未知數，最後可將一次方程組轉化成$\begin{cases} x-y+z=8 \\ \quad y-12z=-15 \\ \qquad\quad z=1 \end{cases}$的形式。

一般而言，我們利用前面(1°)(2°)(3°)的動作逐步將一次方程組$\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x-y+z=8 \\ 3x-2y-9z=9 \end{cases}$轉化成

一次方程組$\begin{cases} x-y+z=8 \\ \quad y-12z=-15 \\ \qquad\quad z=1 \end{cases}$的方法，就稱爲<u>高斯</u>消去法。

一般而言，將方程組(A)經過列運算化簡爲方程組(B)

$$(\mathrm{A})\ \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \xrightarrow{\text{列運算}} (\mathrm{B})\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ \quad b_2'y+c_2'z=d_2' \\ \qquad\quad c_3''z=d_3'' \end{cases}$$

方程組(A)的解$(x_0\,,y_0\,,z_0)$顯然必爲方程組(B)的解，而由於三種列運算是可逆的，即方程組(B)亦可經由列運算化成方程組(A)，所以方程組(B)的解$(x_1\,,y_1\,,z_1)$也是方程組

(A)的解，故方程組(A)(B)的解是相同的。
而方程組(B)的解，一般而言比較容易用計算機來求解，這就是爲何要用列運算化成方程組(B)的形式的原因。

高斯消去法解線性方程組：
任一個線性方程組(A)經「三種列運算」消去某些變數，化成易於求解的上三角模式(或下三角模式)之線性方程組(B)，則(A)與(B)的解完全相同。

[例題1] 下列那些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成$\begin{pmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$？

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&2&3&5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-1&3&-1&0\\-1&1&1&0\\3&1&-7&0\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&1&2&5\\1&-1&1&2\\1&1&2&5\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}2&1&3&6\\-1&1&1&0\\-2&2&2&1\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}1&3&2&7\\0&1&1&2\\0&1&0&1\end{pmatrix}$。(2007 學科能力測驗) Ans：(1)(5)

(練習5)已知方程組(A)$\begin{cases}x+2y-z=10\\2x+3y+3z=1\\3x+4y+5z=4\end{cases}\xrightarrow{\text{高斯消去法(列運算)}}(B)\begin{cases}x+2y-z=10\\y-5z=19\\-2z=12\end{cases}$

試說明方程組(A)代表的幾何意涵。
Ans：三平面交於一點

(2)矩陣與高斯消去法：

一次方程組(L)：$\begin{cases}x-y+z=8\\2x+3y-z=-2\\3x-2y-9z=9\end{cases}$可以產生兩個有意義的矩陣：

$\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&3&-1\\3&-2&-9\end{bmatrix}$與$\begin{bmatrix}1&-1&1&8\\2&3&-1&-2\\3&-2&-9&9\end{bmatrix}$，分別稱爲方程組(L)的**係數矩陣**與**增廣矩陣**。

(a)係數矩陣：將方程組(L)的係數依序列出來的矩陣稱爲**係數矩陣**。
(b)增廣矩陣：將方程組(L)的係數及常數項依序列出來的矩陣稱爲**增廣矩陣**。

(3)矩陣的列運算：
我們使用高斯消去法求解一次方程組，在求解的過程中，運用(1°)(2°)(3°)的動作，將原方程式變形，整個過程產生的新方程組可以它的增廣矩陣來代替，如此就把方程組的變形過程轉成增廣矩陣的變形。

$$(\mathrm{L})\begin{cases}x-y+z=8\ldots\ldots(1)\\2x+3y-z=-2\ldots\ldots(2)\\3x-2y-9z=9\ldots\ldots(3)\end{cases}\xrightarrow{(1)\times-2+(2),(1)\times-3+(3)}\begin{cases}x-y+z=8\\0\cdot x+5y-3z=-18\\0\cdot x+y-12z=-15\end{cases}$$

$$\mathrm{M}=\begin{bmatrix}1&-1&1&8\\2&3&-1&-2\\3&-2&-9&9\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\times(-2)+R_2,R_1\times(-3)+R_3}\mathrm{M}'=\begin{bmatrix}1&-1&1&8\\0&5&-3&-18\\0&1&-12&-15\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}x-y+z=8\\0\cdot x+5y-3z=-18\\0\cdot x+y-12z=-15\end{cases}\xrightarrow{\text{對調第二式與第三式}}(\mathrm{L}')：\begin{cases}x-y+z=8\ldots\ldots(1')\\0\cdot x+y-12z=-15\ldots\ldots(2')\\0\cdot x+5y-3z=-18\ldots\ldots(3')\end{cases}$$

$$\mathrm{M}'=\begin{bmatrix}1&-1&1&8\\0&5&-3&-18\\0&1&-12&-15\end{bmatrix}\xrightarrow{R_{23}}\mathrm{M}''=\begin{bmatrix}1&-1&1&8\\0&1&-12&-15\\0&5&-3&-18\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}x-y+z=8\ldots\ldots(1')\\0\cdot x+y-12z=-15\ldots\ldots(2')\\0\cdot x+5y-3z=-18\ldots\ldots(3')\end{cases}\xrightarrow{(2')\times-5+(3')}(\mathrm{L}'')：\begin{cases}x-y+z=8\ldots\ldots(1'')\\0\cdot x+y-12z=-15\ldots\ldots(2'')\\0\cdot x+0y+57z=57\ldots\ldots(3'')\end{cases}$$

$$\mathrm{M}''=\begin{bmatrix}1&-1&1&8\\0&1&-12&-15\\0&5&-3&-18\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\times(-5)+R_3}\mathrm{M}'''=\begin{bmatrix}1&-1&1&8\\0&1&-12&-15\\0&0&57&57\end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{L}^{//})：\begin{cases} x-y+z=8.....(1^{//}) \\ 0\cdot x+y-12z=-15.....(2^{//}) \\ 0\cdot x+0y+57z=57.....(3^{//}) \end{cases} \xrightarrow{(3^{//})\times\frac{1}{57}} \begin{cases} x-y+z=8.....(1^{///}) \\ 0\cdot x+y-12z=-15.....(2^{///}) \\ 0\cdot x+0\cdot y+z=1.....(3^{///}) \end{cases}$$

$$\mathrm{M}^{///}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 57 & 57 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3\times\frac{1}{57}} \mathrm{M}^{////}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

前面所述的(1°)(2°)(3°)的動作對應在矩陣上的變換，稱爲**矩陣的列運算**：

矩陣的基本列運算：
(a)第 ***i*** 列與第 ***j*** 列對調，並用 $\mathbf{R}_{ij}$ 表示。
(b)將第 ***i*** 列乘上一個非零常數 ***r***，並用 $r\mathbf{R}_i$ 表示。
(c)將第 ***i*** 列乘上一個常數 ***r*** 加到另一列，並用 $r\mathbf{R}_i+\mathbf{R}_j$ 表示。**(**第 ***i*** 列沒改變**)**

[例題2] 利用矩陣的列運算，求聯立方程式$\begin{cases} x+2y-7z=0 \\ 2x-y-4z=5 \\ 5x-3y-9z=13 \end{cases}$的解。

Ans：$x=2+3t, y=-1+2t, z=t$，t 爲實數

[例題3] 利用矩陣的列運算，求聯立方程式$\begin{cases}2x-y+7z=0\\x+2y+3z=4\\x-3y+4z=5\end{cases}$的解。

Ans：無解

根據前面的例子，一般三元一次方程組(含三個方程式)的增廣矩陣經過列運算之後，最後所得的矩陣，可有下列三種情形：

(a)形如$\begin{bmatrix}1&0&0&*\\0&1&0&*\\0&0&1&*\end{bmatrix}$的矩陣，其中*爲常數，如此原方程組恰有一組解。

(b)出現某一列之最後一行的元不爲 0，而該列其餘各行的元皆爲 0，此時形如 0 0 0 * ，其中*是不爲 0 的常數，此時原方程組無解。

(c)形如$\begin{bmatrix}1&0&*&*\\0&1&*&*\\0&0&0&0\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$的矩陣，其中*爲常數，此時先將各元爲 0 的列去掉，其餘各列分別還原成方程式，它的解有無限多個。

使用矩陣的列運算來求解一次聯立方程組，雖然過程用人工來計算看起來並沒有比較簡便，不過這是一個有程序的方法，因此適合用計算機來求解，尤其是一般的 n 元一次聯立方程組(m 個方程式)，這也是發展並介紹高斯消去法(矩陣列運算)的主要目的。

[例題4] 利用增廣矩陣的列運算，求聯立方程式$\begin{cases}x+y+2u=-1\\x-y+2z+3u=-2\\2x+3y-z+3u=-4\end{cases}$的解。

Ans：$x=-14-t$，$y=3+t, z=t, u=5$

[例題5] 方程組$\begin{cases} 3x-2y=9a \\ 4x+y=5a+3 \\ 5x+4y=4a \end{cases}$ 恰有一組解，試求 a 的值與方程組的解。

Ans：a=2，x=4,y=−3

(練習6) 設矩陣 A=$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

(1)試求矩陣 A 所對應的方程組 L。
(2)化矩陣 A 爲簡化矩陣。
(3)試寫出(L)的解。

Ans：(1)L：$\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-3z=-3 \\ 3x-y+2z=6 \end{cases}(2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}(3)x$=1,$y$=1,$z$=2

(練習7) 利用增廣矩陣的列運算，求下列方程組的解。

(1)$\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x-y+2z=1 \\ 5x-3y+6z=6 \end{cases}$ (2)$\begin{cases} x-4y+2z=0 \\ 2x-8y+4z=-1 \\ -3x+8y+z=2 \end{cases}$

Ans：(1) $x=-3, y=-7+2t, z=t$ (2)無解

(練習8) 試求 a 的值使方程組$\begin{cases} 3x+y+z=a \\ x+3y-3z=1+a \\ x-y+2z=1-a \end{cases}$有解。Ans：$a$=$\dfrac{3}{2}$

(丙)矩陣的加減法與係數積

(1)矩陣的加法與減法：

矩陣加法的定義：設 A、B 為 $m\times n$ 階矩陣，

若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則 $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$。

矩陣減法的定義：設 A、B 為 $m\times n$ 階矩陣，

若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則 $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$。

設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&0\\3&-1\\1&2\end{bmatrix}$求 $A-B=\begin{bmatrix}-1&2\\0&5\\4&4\end{bmatrix}$，$B-A=\begin{bmatrix}1&-2\\0&-5\\-4&-4\end{bmatrix}$，

由上例可知 $A-B\neq B-A$。

(2)矩陣的係數積：

係數積的定義：若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 為一 $m\times n$ 階矩陣，而 r 是任意實數，則 $rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$，此時稱 rA 是 A 係數積。

例題：設 $A=\begin{bmatrix}3&1&4\\2&-1&-2\\2&4&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1&2\\3&4&-1\\-2&1&1\end{bmatrix}$，試求 2A，3B，2A+3B。

注意事項：

(1°)二矩陣若階數一樣(都是 m 列 n 行)，則可以相加減。

例如：$A=\begin{bmatrix}9&4&0\\-5&6&7\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$，$A+B=\begin{bmatrix}8&6&3\\-1&11&13\end{bmatrix}$但是，

$\begin{bmatrix}9&4&0\\-5&6&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$不能相加

(2°)一矩陣可以乘上 r 倍(r 為實數，相當於**每個位置都乘上 r 倍**)

例如：$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$，則 $2A=\begin{bmatrix}2&4&6\\8&10&12\end{bmatrix}$，$(-1)A=-A=\begin{bmatrix}-1&-2&-3\\-4&-5&-6\end{bmatrix}$

(3)矩陣加減法的基本性質：

(a)加法單位元素：

若 A 為 $m\times n$ 階矩陣，若存在一個 $m\times n$ 階矩陣 O，使得 A+O=O+A，

則稱 O 為 $m\times n$ 階矩陣之加法的單位元素。$O=\begin{bmatrix}0&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots\\0&\ldots&0\end{bmatrix}$稱為 $m\times n$ 階**零矩陣**。

(b)加法反元素：

設 A=$[a_{ij}]_{m\times n}$ 為 $m\times n$ 階矩陣，若存在一個矩陣−A，使得 A+(−A)+(−A)+A=O，
則稱−A 為 A 的 $m\times n$ 階矩陣之**加法反元素**。即−A=$[-a_{ij}]_{m\times n}$
根據加法反元素的定義，可知 A−B=A+(−B)

(c)設 A、B、C 為 $m\times n$ 階矩陣，則下列性質成立：
①交換律：A+B=B+A
②結合律：A+(B+C)=(A+B)+C
③A+(−A)+(−A)+A=O
④−(−A)= A
⑤−(A+B)= −A+(−B)

(d)移項法則：

$\boxed{\text{設 A、B、C 都是同階方陣，且 A+B=C，則 A=C−B 且 B=C−A。}}$

[證明]：
因為 A+B=C，等式兩邊同加(−B)得
(A+B)+(−B)=C+(−B)，A+(B+(−B))=C+(−B)
A+O=C−B　A=C−B，同理 B=C−A。

(4)矩陣加減法與係數積的基本性質：
設 A、B 為同階的矩陣，r,s 為實數，則下列性質成立：
(a)r(A+B)=rA+rB　(b)(r+s)A=rA+sA　(c)(rs)A=r(sA)
(d) $r\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix}$，但 $r\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ra & rb \\ c & d \end{vmatrix}$ (注意矩陣、行列式之間的不同)

[例題6] 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，
試解方程式 $3X-2B+3A=2X-5C$。
[解答]：
$\because 3X-2B+3A=2X-5C$
$\Rightarrow\ X=-3A+2B-5C$
$=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -15 & -20 & 35 \\ -25 & -10 & -5 \end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix} -16 & -20 & 41 \\ -21 & -12 & -8 \end{bmatrix}$

(練習9)設 A=$\begin{bmatrix}1&3&2\\3&1&1\end{bmatrix}$、B=$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&3\end{bmatrix}$、C=$\begin{bmatrix}3&0&4\\1&1&7\end{bmatrix}$，求下列各題中的矩陣 X。

(1)A−B+2X=C+3A+X。　(2)3X+A+B+C=A−2B+4C+X

Ans：(1) $\begin{bmatrix}6&7&9\\9&6&12\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}3&\frac{-3}{2}&\frac{9}{2}\\\frac{-3}{2}&-3&6\end{bmatrix}$

(練習10)設 A=$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}3&1&8\\6&2&5\end{bmatrix}$，求 $(A+B)^T$ 與 A^T+B^T。

Ans：$(A+B)=\begin{bmatrix}4&3&11\\11&8&11\end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^T=\begin{bmatrix}4&11\\3&8\\11&11\end{bmatrix}$

$A^T+B^T=\begin{bmatrix}1&5\\2&6\\3&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&6\\1&2\\8&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&11\\3&8\\11&11\end{bmatrix} \Rightarrow$ 顯然 $A^T+B^T=(A+B)^T$

(丁)矩陣的乘法

實例：

已知甲、乙、丙三位同學的指考成績及他們想選填的學校成績的加權情形如下表所示：

	國	英	數	歷	地
甲	70	80	100	60	50
乙	90	80	80	80	70
丙	80	90	60	60	70

	T大電機系	C大醫學系
國	1	1
英	1.5	1
數	2	1
歷	0	1
地	0	1

試求甲、乙、丙三位同學選填這三校財經系的加權分數。

	T大電機系	C大醫學系
甲		
乙		
丙		

可以更有效率的表達你的算法嗎？

矩陣的乘法：

$$\begin{bmatrix}70 & 80 & 100 & 60 & 50\\ 90 & 80 & 80 & 80 & 70\\ 80 & 90 & 60 & 60 & 70\end{bmatrix}_{3\times5}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1.5 & 1\\ 2 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{5\times2}$$

$$=\begin{bmatrix}70\times1+80\times1.5+100\times2+60\times0+50\times0 & 70\times1+80\times1+100\times1+60\times1+50\times1\\ 90\times1+80\times1.5+80\times2+80\times0+70\times0 & 90\times1+80\times1+80\times1+80\times1+70\times1\\ 80\times1+90\times1.5+60\times2+60\times0+70\times0 & 80\times1+90\times1+60\times1+60\times1+70\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}390 & 360\\ 370 & 400\\ 335 & 360\end{bmatrix}_{3\times2}$$

(1)矩陣乘法的定義：

若 A 爲 $m\times n$ 的矩陣，而 B 爲是 $n\times p$ 的矩陣，則其乘積 AB 是 $m\times p$ 的矩陣，而且 AB 的(i,j)元是由 A 的第 i 列中各元(有 n 個)與 B 中的第 j 行中各對應元(有 n 個)之乘積和。

即 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np}\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p}\\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np}\end{bmatrix}$，

可以看出兩矩陣的大小必須互相配合才能相乘，

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}}_{m\times n\text{ 階矩陣 }A}\underbrace{\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np}\end{bmatrix}}_{n\times p\text{ 階矩陣 }B}=\underbrace{\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp}\end{bmatrix}}_{m\times p\text{ 階矩陣 }C}$$

AB=C $\Leftrightarrow$ 對於 C 的 (i,j) 元 c_{ij}，$i=1,2,\dots,m$、$j=1,2,\dots,p$ 都有

c_{ij}= 第 i 列 $[a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ a_{i3}\ \ \dots\ \ a_{in}]$ 與第 j 行 $\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ b_{3j}\\ \cdots\\ b_{nj}\end{bmatrix}$ 的元素對應相乘

$$=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

根據前面的定義：

$$\underset{m\times n}{\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 第 & i & 列 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}} \times \underset{n\times p}{\begin{bmatrix} \vdots & 第 & \vdots \\ \vdots & j & \vdots \\ \vdots & 行 & \vdots \end{bmatrix}} = \underset{m\times p}{\begin{bmatrix} & & \\ & \odot & \\ & & \end{bmatrix}}$$

相等

第 i,j 位置等於
第一個的第 i 列和
第二個的第 j 行作內積

可以看出**兩矩陣的大小必須互相配合才能相乘**，由上述理論可得
($m\times n$ 的矩陣)．($n\times p$ 的矩陣)= ($m\times p$ 的矩陣)

例子：

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2,5)和(0,1)的內積 & (2,5)和(-2,-3)的內積 & (2,5)和(0,6)的內積 \\ (-1,4)和(0,1)的內積 & (-1,4)和(-2,-3)的內積 & (-1,4)和(0,6)的內積 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 0+5\cdot 1 & 2\cdot(-2)+5\cdot(-3) & 2\cdot 0+5\cdot 6 \\ (-1)\cdot 0+4\cdot 1 & (-1)\cdot(-2)+4\cdot(-3) & (-1)\cdot 0+4\cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -19 & 30 \\ 4 & -10 & 24 \end{bmatrix}$$ 矩陣的乘法就像是向量內積的推廣！

[例題7] (1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$？ (2) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} =$？

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -6 & 9 & 6 \\ 0 & -7 & 10 & 7 \\ 5 & 8 & -11 & -8 \end{bmatrix} =$？ (4) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$？

Ans：(1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ (2) 不能相乘

(3) $\begin{bmatrix} 19 & 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

[例題8] 若 A 為一個 $m\times n$ 的矩陣，而 B 為是一個 $n\times p$ 的矩陣，
利用矩陣的定義證明：$(AB)^T=B^T A^T$。

[例題9] 已知$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$；

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$，試寫出下列矩陣的乘積：

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}_{3\times 3}$。

(練習11) 設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，試求 AB，並觀察 BA 是否存在？

Ans：$\begin{bmatrix} 23 & -3 & 0 & 20 \\ 42 & -9 & 5 & 44 \end{bmatrix}$，BA 不存在

(練習12) 設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ x & y \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -x & 0 \\ x & y \end{bmatrix}$

(1)若 $A^3=-A$，求實數 x,y 之值。(2)求 AB=？

Ans：(1)$x=1,y=0$ (2) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(練習13) 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$，試求一個 2×3 階矩陣 X 滿足

方程式 $3(X-A)=2(X-2B)$。Ans：$X=\begin{bmatrix} 7 & -20 & -26 \\ 2 & 17 & 2 \end{bmatrix}$

(練習14) 已知 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 27 \\ 13 \end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix}$，則 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix}=$? Ans：$\begin{bmatrix} -5 & 27 \\ 13 & 13 \end{bmatrix}$

(2)矩陣乘法的性質：

(a)若 A、B、C 為矩陣，且(AB)C 與 A(BC)都有意義，則有(AB)C=A(BC)。

(b)若 A、B、C 為矩陣，且以下各矩陣運算都有意義，
則 A(B+C)=AB+AC，(B+C)A=BA+CA。

(c)若 A、B 為矩陣，r 為實數，且以下各矩陣運算都有意義，
則 r(AB)=(rA)B=A(rB)。

矩陣沒有以下性質：

(a)**交換律不成立**：AB≠BA(除了特殊情形外)

例如：設 A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$⇒AB=$\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$，BA=$\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$，AB≠BA

例如：設 A=$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ⇒ AB=$\begin{bmatrix} -1 & 8 & 7 \\ 9 & 12 & 7 \\ 12 & 18 & 11 \end{bmatrix}$，BA=$\begin{bmatrix} 13 & 29 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}$，AB≠BA

例如：A=$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$，AB=$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$，BA=$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$，**AB=BA**

(b)**消去律不成立**：$AB=AC$ 時 $\not\Rightarrow$ $B=C$ (除了特殊情形外)

例如：$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$但$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c)若 AB=O(零矩陣)，則 A=O 或 B=O 是**錯誤的**。

例如：$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，但前二者都不是零矩陣。

(d)二項式定理$\boxed{\text{不能}}$適用於矩陣：

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$不能寫成$A^2+2AB+B^2$（$AB=BA$才可以）

(練習15) 下列各敘述何者正確？
(A)若 A 是 n 階方陣，B 是 m 階方陣，則 AB 是 $n+m$ 階方陣
(B)兩矩陣相乘滿足交換律，即 $AB=BA$
(C)矩陣對乘法滿足消去律，也就是說：若 $AB=AC$，則 $B=C$
(D)若 A、B、C 為矩陣，且對運算有意義時，則滿足分配律，
即 $A(B+C)=AB+AC$
(E)若 A、B 為矩陣，r 為實數，且對運算有意義時，則滿足乘法對係數積的結合律，即 $r(AB)=(rA)B=A(rB)$ Ans：(D)(E)

(練習16) 設 A、B、C 均為 n 階方陣，下列性質何者成立？(A)(A+B)C=AC+BC (B)$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$(C)若 $A^2=O$，則 A=O (D)若 AB=AC，且 A≠O，則 B=C (E)(A+B)C=AC+BC。Ans：(A)(E)

(戊)乘法反方陣

(1)矩陣的乘法反元素：
在實數 R 中，
設 a 為一個實數，$a\cdot1=1\cdot a=a$，數學上稱 **1** 為**乘法單位元素**。
若 $a\neq0$，$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$，稱 a 與$\frac{1}{a}$互為**乘法反元素**。
在矩陣的乘法運算中，是否有類似實數乘法的結構呢？

例題：設 A=$\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$，可否找到一個 2 階方陣 I，使得 AI=IA=A 呢？

令 I=$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，因為 AI=IA=A $\Rightarrow\begin{cases}a+3c=1\\2a+4c=2\end{cases}$且$\begin{cases}b+3d=3\\2b+4d=4\end{cases}$ $\Rightarrow a=1$，$b=0$，$c=0$，$d=1$

即 I=$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

(a)單位方陣：
若一個 n 階方陣，由左上角到右下角的對角線上各位置的元(即(1,1),(2,2)…(n,n)元)都是 1，而其餘各元都是 0，則稱為 ***n* 階單位方陣**，以 $\mathbf{I}_n$ 表之。

例：$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，…..，$I_n=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&&&0\\0&&\ddots&&0\\\vdots&&&1&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$。

(b)設 A 爲 $m\times n$ 階的矩陣，則 $AI_n=I_mA=A$。

當 $m=n$ 時，A 爲 n 階方陣，且 $A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$，

此時我們可以稱 **I_n 爲 n 階方陣乘法的單位元素。**

(c)矩陣的乘法反元素：

設 A 是一個 n 階方陣，若有 n 階方陣 B 使下列成立 $AB=BA=I_n$，

則稱 B 爲 A 的**乘法反方陣(反元素)**，記爲 $\mathbf{B=A^{-1}}$。

當方陣 A 有乘法反方陣時，A 稱爲**可逆方陣**。

例如：

(1) 設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}$ $(\neq O)$，對任一個 $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，恆使 $AB=\begin{bmatrix}a+2c&b+2d\\0&0\end{bmatrix}\neq I$。

(2) 設 $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$ $(\neq O)$，取 $B=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}$，則 $AB=I=BA$。

[問題與討論]：

若 $AB_1=B_1A=I_n$ 且 $AB_2=B_2A=I_n$，則 $B_1=B_2$ 會成立嗎？

(2)可逆方陣的條件：

我們以二階方陣來說明：一個方陣須滿足何種條件，才是“可逆方陣”。

給了一個二階方陣 $A=\begin{bmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{bmatrix}$。

假設二階方陣 $B=\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{bmatrix}$ 滿足“$AB=I$”(B 右乘 A)，則

$$\begin{bmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}a_1x_1+a_2x_2&a_1y_1+a_2y_2\\b_1x_1+b_2x_2&b_1y_1+b_2y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ (1) $\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2=1\\b_1x_1+b_2x_2=0\end{cases}$ 與(2) $\begin{cases}a_1y_1+a_2y_2=0\\b_1y_1+b_2y_2=1\end{cases}$。

方程組(1)與(2)之“係數矩陣”就是原方陣 $A=\begin{bmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{bmatrix}$，

當 $\det(A)=\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\neq 0$ 時，方程組(1)與(2)恰有一解，換句話說：

"$\det(A)\neq 0 \Longleftrightarrow B=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ 唯一存在"。

再假設二階方陣 $B'=\begin{bmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$，滿足"$B'A=I$"（$B'$左乘 A），

則$\begin{bmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_1x_1'+b_1x_2' & a_2x_1'+b_2x_2' \\ a_1y_1'+b_1y_2' & a_2y_1'+b_2y_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (1)' \begin{cases} a_1x_1'+b_1x_2'=1 \\ a_2x_1'+b_2x_2'=0 \end{cases}$ 與 $(2)' \begin{cases} a_1y_1'+b_1y_2'=0 \\ a_2y_1'+b_2y_2'=1 \end{cases}$。

方程組(1)'與(2)'之"係數矩陣"同為方陣 $A^T=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$。此方陣$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$是將原方陣 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ 之"第一列調到第一行，第二列調到第二行"而形成的。

因 $\det(A^T)=\det(A)=a_1b_2-a_2b_1$。（行、列依序交換，行列式的值不改變）。
當 $\det(A^T)\neq 0$（即 $\det(A)\neq 0$）時，方程組(1)'與(2)'都恰有一解。也就是說：

"$\det(A)\neq 0 \Longleftrightarrow B'=\begin{bmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$ 唯一存在"。

由上面的論述知：當 $\det(A)\neq 0$ 時，存在二階方陣 B 與 B'滿足
"$AB=I=B'A$"，那麼上式的 B 與 B'會"相等"嗎？

（結合律）

因 $B'=B'I=B'(AB)=(B'A)B=IB=B$，故 $B'=B$。

上面導出的結論 $B'=B$ 有兩層意義：
(i)當 $\det(A)\neq 0$ 時，則 $B'=B$。
由此知 B 就是 A 的乘法反方陣，故方陣 A 是"可逆方陣"。
(ii)當 $\det(A)\neq 0$ 時，欲求方陣 A 的"乘法反方陣 B"，只須求出一個同階方陣 B，滿足下列兩個條件之一即可。
"$AB=I$"（B 右乘 A）或 "$BA=I$"（B 左乘 A）。

可逆方陣的充要條件
設 A，B，B'都是二階方陣，
(1) 若 $AB=I_2=B'A$，則 $B=B'$。
(2) A 為可逆方陣 $\Longleftrightarrow$ A 的行列式值 $\det(A)\neq 0$。

(3)如何找乘法反矩陣：

例子：設 A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$，求一 2 階方陣 B 使得 AB=$I_2$，令 B=$\begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix}$，則可得兩個聯立方程組：$\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x+7y=0 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} u+2v=0 \\ 3u+7v=1 \end{cases}$，因為 det(A)=$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}\neq 0$，這兩個聯立方程

組的係數矩陣都是原來的矩陣 A，而解這個聯立方程組可以利用 A 的增廣矩陣的列運算，即

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&7&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列運算}}\begin{bmatrix}1&0&7\\0&1&-3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&2&0\\3&7&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列運算}}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix},$$

此時 B=$\begin{bmatrix}7&-2\\-3&1\end{bmatrix}$，但我們可以觀察上面兩個增廣矩陣的列運算，我們可以使用相同的基本列運算，使得它們的前兩行的係數都相同，因此此處可以將它們合併來計算

$$M=\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&7&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{(-3)R_1+R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&-3&1\end{array}\right]\xrightarrow{(-2)R_2+R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&7&-2\\0&1&-3&1\end{array}\right]$$

(1)找乘法反方陣的一般方法：

n 階方陣 A=$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$仿照上述的方法，做一個 $n\times2n$ 矩陣 M，

$$M=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}a_{11}&a_{12}&\cdots&\cdots&a_{1n}&1&0&\cdots&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&\cdots&a_{2n}&0&1&&&0\\\vdots&\vdots&\ddots&&\vdots&\vdots&&\ddots&&\vdots\\\vdots&\vdots&&\ddots&\vdots&\vdots&&&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&\cdots&a_{nn}&0&0&\cdots&\cdots&1\end{array}\right]=[A|I_n]$$

，對 M 作基本列算，

若經過一連串的列運算，可得 M'=[I|B]，則 B 即爲 A 的反矩陣。

(2)二階反矩陣：

若設 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，若 $\det(A)=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc\neq0$，

則反矩陣 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

記法：*a,d* 對調；*b,c* 變號⇒主對調,副變號,再除以 det(A)

[證明]：設 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，$A^{-1}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{bmatrix}$，$AA^{-1}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

即$\begin{cases} ax_1+by_1=1 \\ cx_1+dy_1=0 \end{cases}$，$\begin{cases} ax_2+by_2=0 \\ cx_2+dy_2=1 \end{cases}$，利用克拉瑪公式

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det(A)}=\dfrac{d}{\det(A)} \\ y_1=\dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)}=\dfrac{-c}{\det(A)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det(A)}=\dfrac{-b}{\det(A)} \\ y_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)}=\dfrac{a}{\det(A)} \end{cases}，得 A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(4)三階乘法反方陣的找法(補充)：

設 A=$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$，且 detA≠0，如何找 A^{-1} 呢？

令 B=$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$，且滿足 BA=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

且$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$，

$\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$，$\vec{q}=(q_1,q_2,q_3)$，$\vec{r}=(r_1,r_2,r_3)$

因爲 BA=$\begin{bmatrix} \vec{p}\cdot\vec{a} & \vec{p}\cdot\vec{b} & \vec{p}\cdot\vec{c} \\ \vec{q}\cdot\vec{a} & \vec{q}\cdot\vec{b} & \vec{q}\cdot\vec{c} \\ \vec{r}\cdot\vec{a} & \vec{r}\cdot\vec{b} & \vec{r}\cdot\vec{c} \end{bmatrix}$$\Rightarrow \vec{p}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{p}\cdot\vec{c}=0$，所以$\vec{p}$與$\vec{b}$、$\vec{c}$均垂直，

同理$\vec{q}$與$\vec{c}$、$\vec{a}$均垂直；$\vec{r}$與$\vec{a}$、$\vec{b}$均垂直。

因爲$\vec{p}$與$\vec{b}$、$\vec{c}$均垂直，且 detA≠0

所以$\vec{p}=t(\vec{b}\times\vec{c})$，又$\vec{p}\cdot\vec{a}=1\Rightarrow t(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=1\Rightarrow t=\dfrac{1}{\det(A)}$。

故$\vec{p}=\dfrac{1}{\det(A)}(\vec{b}\times\vec{c})$。

同理$\vec{q}=\dfrac{1}{\det(A)}(\vec{c}\times\vec{a})$，$\vec{r}=\dfrac{1}{\det(A)}(\vec{a}\times\vec{b})$

所以 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}\vec{b}\times\vec{c}\\ \vec{c}\times\vec{a}\\ \vec{a}\times\vec{b}\end{bmatrix}$。

(5)反矩陣的性質：

(a)這裡提出一個方陣乘法與行列式的基本性質：

若 A、B 爲 *n* 階方陣，則 det(AB)=det(A)．det(B)。

僅說明 A、B 爲 2 階方陣的情形：

設 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}$

$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{bmatrix}$

$\det(AB)=(ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg)$

$=ad(eh-fg)-bc(eh-fg)$

$=(ad-bc)(eh-fg)$

$=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}e & f\\ g & h\end{vmatrix}=\det(A)\cdot\det(B)$。

[其他情形，請參閱線性代數的專書]

(b)解聯立方程組與乘法反方陣：

將聯立方程組$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=c_1\\ a_{21}x+a_{22}y=c_2\end{cases}$或$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=c_1\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=c_2\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=c_3\end{cases}$寫成 AX=C，此處的

$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}$，

若方陣 A 是可逆的，則解 $X=A^{-1}C$。

(c)若方陣 A 爲可逆的，且 AB=AC，則 B=C。

[證明]：

$\because$方陣 A 爲可逆的，$\therefore A^{-1}$存在

$\Rightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)\Rightarrow(A^{-1}A)B=(A^{-1}A)C\Rightarrow B=C$。

(e)若 A、B 都是 *n* 階方陣，且 A 和 B 都有反矩陣，則 AB 有反矩陣，

且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

[證明]：

$AB(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$

(f)$(ABA^{-1})^n=AB^nA^{-1}$

[證明]：

$(ABA^{-1})^n=(ABA^{-1})(ABA^{-1})(ABA^{-1})\ldots\ldots(ABA^{-1})(ABA^{-1})=AB^nA^{-1}$

再用數學歸納法即可得證

結論： 設 **A、B、C** 為 ***n*** 階方陣

(1)A 有反矩陣的充要條件是 det(A)≠0。

(2)AB=AC，若 det(A)≠0 (即 A^{-1} 存在) ，則 B=C

(3)AX=B(或 XA=B)，且 A^{-1} 存在⇒$X=A^{-1}B$(或 $X=BA^{-1}$)

(4)AXB=C，且 A^{-1}、B^{-1} 存在⇒$X=A^{-1}CB^{-1}$

(5)若 A 和 B 都有反矩陣，則 AB 有反矩陣，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

(6)$(ABA^{-1})^n=AB^nA^{-1}$。

[例題10] (1)若矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，則反矩陣 $A^{-1}=$________。

(2)若方陣 X 滿足$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}3 & -2\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -3 & 1\end{bmatrix}$，則 $X=$__________。

Ans：(1) $\begin{bmatrix}\frac{1}{13} & \frac{5}{13}\\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13}\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}24 & 13\\ -34 & -18\end{bmatrix}$

[例題11] 若二階方陣 A 滿足 $A^3=\begin{bmatrix}3 & -10\\ 2 & -7\end{bmatrix}$，$A^5=\begin{bmatrix}7 & -25\\ 5 & -18\end{bmatrix}$，求 A。

Ans：A=$\begin{bmatrix}2 & -5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$

[例題12] (利用矩陣的運算求反矩陣)

若矩陣 A 滿足方程式 $X^2-2X-3I=O$，試求 A 的反矩陣。(以 A 來表示)

Ans：$A^{-1}=\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}I$

[例題13] 設 2 階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$且 $A\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$，試求方陣 A。

Ans：$A=\begin{bmatrix}-23 & -13\\1 & 0\end{bmatrix}$

[例題14] 求 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\2 & 1 & 1\\1 & 3 & 3\end{bmatrix}$的乘法反元素。Ans：$\frac{1}{15}\begin{bmatrix}0 & 9 & -3\\-5 & 1 & 3\\5 & -4 & 3\end{bmatrix}$

(練習17) 若二階方陣 X 滿足$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}X+2\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\2 & -1\end{bmatrix}$，則 $X=$______。

Ans：$\begin{bmatrix}12 & -\frac{33}{2}\\-5 & \frac{13}{2}\end{bmatrix}$

(練習18) 設 A 爲二階方陣，$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，$O=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$；若 $A^2-5A+6I_2=O$，則下列何者是 $5I_2-A$ 的乘法反矩陣？

(A)A (B)$-A$ (C)$A-5I_2$ (D)$\frac{1}{6}A$ (E)A^2-5A . Ans：(D)

(練習19) 設 2 階方陣 A 滿足 A$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$且 A$\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$，試求方陣 A。

Ans：A=$\begin{bmatrix}7 & -2\\11 & -5\end{bmatrix}$

(練習20) 已知 $A^2=\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix}5 & 8\\8 & 13\end{bmatrix}$，求二階方陣 A。Ans：A=$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$

(練習21) 請求出 A=$\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\1 & -3 & -2\\4 & 1 & 3\end{bmatrix}$的反矩陣。Ans：$\begin{bmatrix}-7 & -1 & 4\\-11 & -2 & 6\\13 & 2 & -7\end{bmatrix}$

(練習22) 若 A=$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 3 & a\\1 & a & 3\end{bmatrix}$沒有乘法反元素，則 a=？ Ans：a=2 或−3

(練習23) 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\3 & 2 & 4\\3 & 5 & 1\end{bmatrix}$

(1)試求 A^{-1}，(2)若 AX＝B，求 X，(3)若 XA＝B，求 X .

Ans：(1) $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\-4 & 1 & 2\\2 & 0 & -1\end{bmatrix}$，(2)$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 0 & 2\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，(3)$\begin{bmatrix}-12 & 3 & 7\\-3 & 2 & 3\\-21 & 5 & 12\end{bmatrix}$

矩陣裡的“可逆方陣 A”（$\det(A)\neq 0$）與實數裡之“實數 a”（$a\neq 0$），
在乘法性質上可以類比。（ 如下表 ）

可逆方陣乘法性質	異於 0 的實數乘法性質
1. 若 $\det(A)\neq 0$，則存在 A^{-1} 滿足 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$。	1. 若 $a\neq 0$，則存在 a^{-1} 滿足 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$。
2. 若 $\det(A)\neq 0$，$\det(B)\neq 0$，則 $\det(AB)\neq 0$ 且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。	2. 若 $a\neq 0$，$b\neq 0$，則 $ab\neq 0$，且 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$。
3. 乘法消去律成立：若 $AB=AC$，且 $\det(A)\neq 0$，則 $B=C$。	3. 乘法消去律成立 若 $ab=ac$ 且 $a\neq 0$，則 $b=c$。
4. 若 $\det(A)\neq 0$ 且 $AX=B$，則 $X=A^{-1}B$。	4. 若 $a\neq 0$，且 $ax=b$，則 $x=a^{-1}b$。

(己)一些特殊矩陣的乘冪

[例題15] (對角矩陣的乘法)

若 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求 A^2、A^3、A^n。

Ans：$A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3^2&0\\0&0&2^2\end{bmatrix}$、$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3^3&0\\0&0&2^3\end{bmatrix}$、$A^n=\begin{bmatrix}1^n&0&0\\0&3^n&0\\0&0&2^n\end{bmatrix}$

一般而言，若 A=$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$，則 A^n=$\begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$。

[例題16] 設 A=$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，試證明：$A^n$=$\begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$。

[例題17] (矩陣的對角化)

A＝$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$，P＝$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，D＝$PAP^{-1}$，求矩陣 D？又 A^n＝？

Ans：D＝$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，$A^n$＝$\begin{bmatrix} 2^{n+1}-3^n & 3^n-2^n \\ 2^{n+1}-2\cdot 3^n & 2\cdot 3^n-2^n \end{bmatrix}$

[例題18] (補充：上三角矩陣的乘法⇒二項式定理)

設 A=$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，對於任意正整數 n，

(a)若 A=I_3+B，請問 B=？(b)請求 B^2=？ B^3=？B^4=？(c)請求出 A^n=？

Ans：(a)B=$\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ (b)B^2=$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$B^3$=$B^4$=$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

(c)A^n=$\begin{bmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$

(練習24) 嚴格上三角矩陣 $A=\begin{bmatrix}0&d&f\\0&0&e\\0&0&0\end{bmatrix}$試證明：$A^n$=O(n≥3)。

(練習25) 設 A=$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，若 A^3-2A^2+5I=$\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$，I=$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

則數對(a,b,c)=？ Ans：(a,b,c)=(5,2,14)

(練習26) 設 A=$\begin{bmatrix}2&1&2\\0&2&3\\0&0&2\end{bmatrix}$，A=$kI_3$+B，其中 k 為大於 1 的自然數，B 中的元素均不為負，則 B^3=？又令 $A^5=[c_{ij}]_{3\times3}$，則 c_{ij} 中的最大值=？

Ans：$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，400

(練習27) 設方陣 $A=\begin{bmatrix}0.7&0.4\\0.3&0.6\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}4&-1\\3&1\end{bmatrix}$，試求：

(1) P^{-1}。(2) $P^{-1}AP$。(3) A^n。

Ans：(1)$\begin{bmatrix}\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\\-\frac{3}{7}&\frac{4}{7}\end{bmatrix}(2)\begin{bmatrix}1&0\\0&0.3\end{bmatrix}(3)\begin{bmatrix}\frac{4+3(0.3)^n}{7}&\frac{4-4(0.3)^n}{7}\\\frac{3-3(0.3)^n}{7}&\frac{3+4(0.3)^n}{7}\end{bmatrix}$

(練習28) 設 A=$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，若 $A^n=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，其中 n 為自然數，試求滿足此條件的最小正整數。 Ans：6

(練習29) 設 A= $\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}$，試求 A^n=？ (n 為自然數)

Ans：n 為奇數 A^n=A，n 為偶數，$A^n=I_2$

綜合練習

(1) 對矩陣$\begin{pmatrix}4&9&a\\3&7&b\end{pmatrix}$作列運算若干次後得到$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，則$(a,b)$=________。
(2009 指定甲)

(2) <u>小惠</u>有一台自行車，平時用一副四位數密碼的號碼鎖鎖住。有一天，<u>志明</u>向她借用這台自行車，她答應借用，但只告訴志明號碼鎖的密碼 $abcd$ 符合以下二階方陣的等式：

$$\begin{bmatrix}5&-15\\-10&35\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0\\0&5\end{bmatrix}$$

<u>志明</u>卻一直無法解出正確的密碼， 而不能使用這台自行車。請你(妳)幫忙<u>志明</u>求出這副號碼鎖的正確密碼。 (2010 指定乙)

(3) 設 A=$\begin{bmatrix}4&a\\9&b\end{bmatrix}$、B=$\begin{bmatrix}6&7\\c&d\end{bmatrix}$。已知 AB=$\begin{bmatrix}3&10\\-2&15\end{bmatrix}$且 A 的行列式之值為 2，試問下列哪些選項是正確的？
(1) $9a-4b=-2$(2) $ac=-24$(3) $d=-15$ (4) $\begin{bmatrix}b&-a\\-9&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&a\\9&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$。
(2011 指定甲)

(4) 利用矩陣的列運算解下列方程組：

(a)$\begin{cases}x+2y-z+u=7\\2x-y+3z-u=4\\3x-4y+7z-3u=1\end{cases}$ (b)$\begin{cases}x-2y+3z=5\\2x+y-3z=-3\\3x-y+2z=6\end{cases}$

(5) 2 階方陣 A=$\begin{bmatrix}t&5\\1&t-4\end{bmatrix}$，試回答下列問題：
(a)若 A 不為可逆方陣，求 t 的值。
(b)若 A 為可逆方陣，用 t 表示 A^{-1}。
(c)$-2A-I=\begin{bmatrix}x^2&-3x-y\\y-9&z+2\end{bmatrix}$，試求滿足此條件的 x,y,z,t 的值。

(6) 設$\begin{bmatrix}\sin\theta+\cos\theta&\sin2\theta\\\cos2\theta&\cos\theta-\sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&b\\a&c\end{bmatrix}$，但$a>0,c>0$，則下列何者為真？

(A)$a=\frac{1}{4}$ (B)$a=\frac{\sqrt{7}}{4}$ (C)$b=-\frac{3}{4}$ (D)$b=\frac{3}{4}$ (E)$c=\frac{\sqrt{7}}{2}$

(7) 設 A、B、C 皆為 3x3 矩陣，則下列敘述哪些是正確的?
(A) AB=BA 恆成立 (B)(AB)C=A(BC)恆成立 (C)若 AB=0 則 A=0 或 B=0

(D)若 $\det(A)\neq 0$ 且 $AB=AC$，則 $B=C$ (E) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 恆成立

(8) 設 A、B 皆爲二階方陣且 I、O 分別爲二階單位方陣與零矩陣，
則下列何者錯誤？
(A)若 AB=O，則 BA=O (B)若 AB=I，則 BA=I (C)$A^2-I=(A+I)(A-I)$
(D)若 $A^2=I$，則 A=I 或 A=−I (E)若 AB=O，則 A=O 或 B=O。

(9) 已知 A、B、C 爲 n 階方陣，$O_{n\times n}$ 爲 n 階零矩陣，則下列何者爲真？
(A)det(A+B)=det(A)+det(B) (B)若 k 爲實數，det(kA)=$k$det(A) (C)若 AB=AC
且 det(A)≠0，則 B=C (D)若 A、B 均爲可逆方陣，則$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
(E)若 AB=BA，則$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$。

(10) 設 A，B 均爲 3 階方陣，A^{-1}存在，C 爲非零矩陣，I 爲 3 階單位方陣，O 爲零矩陣，請選出下列正確的選項：
(A) $\det(A)\det(A^{-1})=1$
(B) $\det(5A)=125\det(A)$
(C) $(AB)^2=A^2B^2$
(D)若 $AB=O$，則 $A=O$ 或 $B=O$
(E)若方程組 $AX=C$ 恰存在一組解，則 $\det(A)\neq 0$

(11) 設 A=$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$、B=$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$試求下列矩陣：
(a)A^{-1}=？ (b)B^{-1} (c)A^n=？ (n 爲自然數) (d)B^{20}=？ (e)$AB^{100}A^{-1}$=？

(12) 有關矩陣 A=$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$與矩陣 B=$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，試問下列哪些選項是正確的？
(1)AB=BA (2)$A^2B=BA^2$ (3)$A^{11}B^3=B^6A^5$ (4)$AB^{12}=A^7$ (5)$(ABA)^{15}=AB^{15}A$。
(2007 指定甲)

(13) 設實係數二階方陣 A 滿足 A$\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，A$\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$，若 A=$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$，則
a=_____，b=______，c=_______，d=________。(2006 指定甲)

(14) 三個二階可逆方陣 A=$\begin{bmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$、B=$\begin{bmatrix}x & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$、C=$\begin{bmatrix}x & 1\\ y & 3\end{bmatrix}$，且滿足 $BA^{-1}=C^{-1}B$
試求實數 x,y 的值。

(15) 若矩陣 A 滿足方程式 $X^2-2X-3I=O$ (I、O 分別代表單位方陣與零矩陣)，則 A 的乘法反元素=？

(16) 設 A=$\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{bmatrix}$、P=$\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$且 D=PAP^{-1}，則

(a)矩陣 D=？ (b)利用 D=PAP^{-1}，計算 A^n=？

(17) 設 A 為 n 階方陣，試證：A^2=I$_n$ 的充要條件是(A+I$_n$)(A−I$_n$)=O。

(18) 若二階方陣 A 滿足 A^3=$\begin{bmatrix}3 & -10\\2 & -7\end{bmatrix}$且 A^5=$\begin{bmatrix}7 & -25\\5 & -18\end{bmatrix}$，試求 A=？

(19) 兩數列$\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$滿足$a_1=1$，$b_1=3$，且$\begin{cases}a_{n+1}=a_n-3b_n\\b_{n+1}=-3a_n+b_n\end{cases}$，

假設$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$，其中$A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，則：

(a) $P=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$，則$P^{-1}AP=$____________________。

(b)利用A^n可求得$a_n=$______________。

(20) 設$\begin{cases}a_n=a_{n-1}-2b_{n-1}\\b_n=a_{n-1}+4b_{n-1}\end{cases}$表為$\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$=A$\begin{bmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{bmatrix}$，則：

(a)令 P=$\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & -1\end{bmatrix}$時，求 P^{-1}AP。

(b)利用 P^{-1}A^{n}P=(P^{-1}AP)^n，n 為自然數，求 A^n=？

(21) (Cayley−Hamilton 定理)

設二階方陣$A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，試證$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$(零矩陣)。

(22) 設$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & -1\end{bmatrix}$，利用上一題得

$A^2=(a+d)A-(ad-bc)I_2=A-I_2$ (1)

試利用(1)式求出A^2，A^6，A^{32}。

(23) 設二階可逆方陣 A 滿足：A$\begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\b\end{bmatrix}$且 A$\begin{bmatrix}1\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix}$，試以 a,b 表示矩陣 A。

(24) 設 A=$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，試求 A^{-1}=？

(25) 若 A=$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\2 & -3 & 3\\3 & -4 & 2\end{bmatrix}$，X=$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$，且 AX=$\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$，

(a)請求出 A^{-1}=？ (b)X=？ (c)det(5A)=？

(26) 設三階方陣 A=$\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&4\\1&3&x\end{bmatrix}$，其中 x 為實數，

(a)若 A 為可逆方陣，則 x 要滿足什麼條件？ (b)若 x=4，則 A^{-1}=？

(27) 設 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}$，若將 X(原始碼)編碼依 $AX=\begin{bmatrix}9\\3\\3\end{bmatrix}$得接收碼，若依此方式，今接收到 $Y=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，欲將 Y 解碼，即求得原始碼=$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$，求 $a+b+c$=__________。

(28) 設 A=$\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&0&-1\end{bmatrix}$，$B_1$、$B_2$ 為兩個 2 階方陣，Q 為 3 階方陣，且這些方陣滿足下列關係：

$B_1AQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，$B_2AQ=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}$且 $B_1+B_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

(a)試求 B_1 與 B_2。

(b)若 $AQ^2=\begin{bmatrix}1&1&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}$，則 Q=？

(29) 設 a 為實數，方陣 A=$\begin{bmatrix}8&-10\\4&-6\end{bmatrix}$、P=$\begin{bmatrix}5&1\\2&1\end{bmatrix}$，B 為 2 階方陣且滿足 AB=BA

$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}-1&a\\0&8\end{bmatrix}$，試回答下列問題：

(a)試求 $P^{-1}AP$=？ (b)試求 a 的值與方陣 B (c)試求$(A+B)^n$=？

進階問題

(30) 將 1,2,…,100 等 100 個正整數，依下列方式排入一個 10 階方陣$[a_{ij}]$：

$$\begin{bmatrix}1&3&6&10&\cdots\\2&5&9&\cdots&\cdots\\4&8&\cdots&\cdots&97\\7&\cdots&\cdots&96&99\\\cdots&\cdots&95&98&100\end{bmatrix}_{10\times10}$$

(a)若 $1\le j\le10$，試求 a_{1j} (b)$1\le i\le10$，試求 a_{i1}

(c)$1\le j\le10$，試求 a_{10j} (d)試求 25 與 75 所在的位置 (e)試求 a_{56}。

(31) 設 A 為 n 階方陣，試證明(a)$A+A^t$ 為對稱矩陣。(b)$A-A^t$ 為反對稱矩陣。

(32) 設 A 為 n 階方陣，其元素皆為自然數排列情形如下？

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots \\ 2 & 5 & 9 & \cdots & \cdots \\ 4 & 8 & 13 & \cdots & \\ 7 & 12 & \cdots & & \end{bmatrix}$$，求 a_{37}=？a_{ij}=？

(33) (a)設 a 為實數，試證明：對於所有的自然數 n，$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

(b)設 $A=\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，求 $P^{-1}AP$=？

(c)試求 A^n=？

(34) 矩陣 $P=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$C=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$，若 $PCP^{-1}=Q$，試求矩陣 Q 與 P。

(35) 若 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，則 A^5=________。

綜合練習解答

(1)(13,10)
(2)a=7,b=3,c=2,d=1
(3)(1)(3)
(4)(a)$(x,y,z)=(-s+\frac{t}{5}+3,s-\frac{3}{5}t+2,s,t)$ (b)(x,y,z)=(1,1,2)
(5)(a)t=5 或−1 (b)$A^{-1}=\frac{1}{t^2-4t-5}\begin{bmatrix} t-4 & -5 \\ -1 & t \end{bmatrix}$ (c)x=1，y=7，z=7，t=−1
(6)(B)(C)(E)
(7)(B)(D)

【解法】

(A) × ：矩陣乘法沒有交換性

(B) ○

(C) × ：例如：$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，但前二者都不是零矩陣。

(D)○ ：行列式值不為 0 是有反方陣的充要條件，
故 $\det(A)\neq 0$ 表 A^{-1} 存在，
又 $AB=AC\Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}AC\Rightarrow B=C$

(E) × ：$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

這是矩陣基本性質，矩陣在某些性質上和「數字」很不相同，
容易混淆，因此學習上要特別澄清這些觀念。

(8)(A)(D)(E)

[提示：(A)反例 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$滿足 AB=O 但 BA≠O，(D)反例 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$(E)反例同(A)]

(9)(C)(D)(E)
(10)(A)(B)(E)
(11)(a) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (b)B (c) $\begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ (d)$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
(12)(2)(4)(5)
(13)a=4，b=−3，c=−9，d=7
(14)x=5，y=0 [提示：利用 CB=BA 去找 x,y 的關係式，並注意 det(B)≠0]
(15)$A^{-1}=\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}I$ [提示：$A^2-2A-3I=O\Rightarrow A(A-2I)=3I\Rightarrow A(\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}I)=I$]
(16)(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2^n-3^n & 3^n-2^n \\ 2^{n+1}-2\times 3^n & 2\times 3^n-2^n \end{bmatrix}$
(17)證明略
(18)$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

[提示：先求$(A^3)^{-1}$，可得 $A^2=(A^3)^{-1}\cdot A^5$，再求$(A^2)^{-1}$，則 $A=(A^2)^{-1}\cdot A^3$]

(19)(a)$\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ (b)$a_n=2\times(-2)^{n-1}-4^{n-1}$

(20)(a) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-3^n+2^{n+1} & -2\cdot 3^n+2^{n+1}\\ 3^n-2^n & 2\cdot 3^n-2^n\end{bmatrix}$

(21)【詳解】

$A^2=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{bmatrix}$

$(a+d)A=(a+d)\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+cd & ab+bd\\ ac+cd & ad+d^2\end{bmatrix}$

$(ad-bc)I_2=(ad-bc)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & ad-bc\end{bmatrix}$

可得 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O_2$

(22)$A^2=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$，$A^6=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$A^{32}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$

(23)$A=\dfrac{1}{ab-1}\begin{bmatrix}b-a & a^2-1\\ b^2-1 & a-b\end{bmatrix}$

(24)$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(25)(a) $\begin{bmatrix}-6 & 8 & -3\\ -5 & 7 & -3\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$ (b)$\begin{bmatrix}19\\ 16\\ 4\end{bmatrix}$ (c)-125

(26)(a)$x\neq 6$ (b)$\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$

(27)0

(28)(a)$B_1=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，$B_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ (b)$Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(29)(a)$\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ (b)$a=0$，$B=\begin{bmatrix}-7 & 15\\ -6 & 14\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}5\cdot 3^{n-1}-4\cdot 6^{n-1} & -5\cdot 3^{n-1}+10\cdot 6^{n-1}\\ 2\cdot 3^{n-1}-4\cdot 6^{n-1} & -2\cdot 3^{n-1}+10\cdot 6^{n-1}\end{bmatrix}$

[提示：(b)$AB=BA\Rightarrow(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=(P^{-1}BP)(P^{-1}AP)\Rightarrow a=0\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-7 & 15\\ -6 & 14\end{bmatrix}$

(c)$P^{-1}(A+B)P=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow[P^{-1}(A+B)P]^n=P^{-1}(A+B)^nP=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}3^n & 0\\ 0 & 6^n\end{bmatrix}$]

(30) (a)$\frac{1}{2}j(j+1)$ (b)$\frac{1}{2}i(i-1)+1$ (c)$46+\frac{1}{2}(22-j)(j-1)$ (d)$a_{44}=25$，$a_{86}=75$ (e)51

(31)直接檢查定義

(32)43，$\dfrac{(i+j-2)(i+j-1)}{2}+j$

(33)(a)利用數學歸納法 (b) $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1-6n & 4n\\-9n & 6n+1\end{bmatrix}$

(34)Q=$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$、P=$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$

(35)$\begin{bmatrix}32 & 80 & 400\\0 & 32 & 240\\0 & 0 & 32\end{bmatrix}$

[解法]

A=2I+B，其中 $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，且 $B^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$B^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

利用二項式定理展開

$$\begin{aligned}A^5&=(2I+B)^5\\&=C_0^5(2I)^5+C_1^5(2I)^4B^1+C_2^5(2I)^3B^2+\underbrace{C_3^5(2I)^2B^3+C_4^5(2I)^1B^4+C_5^5B^5}_{爲O,因爲B^3=0}\\&=32I+80B+80B^2\end{aligned}$$