§4–2 絕對不等式與極值

討論不等式P(x)>0 的解，就是要找出所有滿足P(x)>0 的實數x的範圍。
一個不等式對於所有的實數x都成立，這樣的不等式稱爲絕對不等式。
例如：$\boldsymbol{a^2+b^2\geq 2ab}$，$\boldsymbol{-1\leq\cos\theta\leq 1}$ 等都是絕對不等式。

(甲)算幾不等式與極值

算幾不等式：

設$a_1,a_2,\ldots,a_n$都是正數，$\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$、$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$ 分別稱爲$a_1,a_2,\ldots,a_n$的算術平均數、幾何平均數，它們之間有以下的大小關係，稱爲算幾不等式。

$\boxed{\text{若設}\boldsymbol{a_1,a_2,\ldots,a_n}\text{都是正數，則}\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\text{。}}$

$\boxed{\text{等號成立的充要條件是}\boldsymbol{a_1=a_2=\ldots=a_n}\text{。}}$

[證明]：

(1)n=2 時，$\dfrac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\dfrac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2}\geq 0$，等號成立$\Leftrightarrow\sqrt{a_1}=\sqrt{a_2}\Leftrightarrow a_1=a_2$。

(2)n=3 時，

[分析]：

設$d=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$，欲證明：$d\geq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}\Leftrightarrow d^3\geq a_1a_2a_3\Leftrightarrow d^4\geq a_1a_2a_3d\Leftrightarrow d\geq\sqrt[4]{a_1a_2a_3d}$

另一方面a_1,a_2,a_3,d的算術平均數$=\dfrac{a_1+a_2+a_3+d}{4}=d$

$$\Rightarrow d=\frac{a_1+a_2+a_3+d}{4}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+d}{2}}{2}\geq\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+d}{2}\right)}\geq\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3d}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3d}\text{。}$$

[證明]：

(3)n=4 時，

[分析]：設$d=\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$，

欲證明：$d\geq\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\Leftrightarrow d^4\geq a_1a_2a_3a_4\Leftrightarrow d^6\geq a_1a_2a_3a_4d^2\Leftrightarrow d\geq\sqrt[6]{a_1a_2a_3a_4d^2}$

(爲何要選擇d^6呢？因爲前面已經證明過n=3 成立)

另一方面a_1,a_2,a_3,a_4,d,d的算術平均數$=\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4+d+d}{6}=d$

$$\Rightarrow d=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+d+d}{6}=\frac{\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+\frac{a_4+d+d}{3}}{2}\geq\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)\left(\frac{a_4+d+d}{3}\right)}$$

$\geq\sqrt{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}\cdot\sqrt[3]{a_4d\cdot d}}=\sqrt[6]{a_1a_2a_3a_4d^2}$

[證明]：

(4)利用數學歸納法證明算幾不等式：

step1：當n=2 時，由(1)的結果可知其成立。

step2：

若設$n=k$，k爲大於等於 2 的正整數時，

算幾不等式成立且等號成立時$a_1=a_2=\ldots=a_k$

則當$n=k+1$ 時，令$d=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}}{k+1}$

考慮$a_1,a_2,\ldots,a_{k+1},\overbrace{d,d,\ldots,d}^{k-1\text{個}}$這 $2k$個數的算術平均數

$$d=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}+\overbrace{d+d+\ldots+d}^{k-1\text{個}}}{2k}$$

$$=\frac{\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}+\dfrac{a_{k+1}+d+\ldots+d}{k}}{2}$$

$$\geq\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\right)\left(\frac{a_{k+1}+d+\ldots+d}{k}\right)}$$

$$\geq\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}\cdot d\cdot d\cdots d}}=\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{k+1}\cdot d^{k-1}}$$

$\Rightarrow d^{2k}\geq a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}.d^{k-1}\Rightarrow d^{k+1}\geq a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}$

$$\Rightarrow\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}}{k+1}\geq\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}}$$

等號成立 $\Leftrightarrow a_1=a_2=\ldots=a_k$且$a_{k+1}=d\Leftrightarrow a_1=a_2=\ldots=a_k=a_{k+1}$

[例題1] 設x,y,z爲正數且$x+y+z=1$，求(1)xyz的最大值。(2)x^2yz之最大值。

Ans：(1)$\dfrac{1}{27}$ (2)$\dfrac{1}{64}$

[例題2] 設$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{3q}=12$，其中 p，q 是正數，則 $3\log_{\frac{1}{3}}p+\log_{\frac{1}{3}}q$ 的最大值爲何？此時 p，q 各爲多少？ Ans：(1) 8 (2) $p=\dfrac{1}{9}$，$q=\dfrac{1}{9}$

(練習1) (1)請利用算幾不等式$n=2$ 的結果去推導$n=4$ 的結果。
(2)利用數學歸納法證明$n=2^k$,k爲正整數的結果。

(練習2) 根據練習 1 的結論，

請證明：若$a_1,a_2,\ldots,a_6$爲正數，則 $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_6}{6}\geq\sqrt[6]{a_1a_2\cdots a_6}$ 。

(練習3) 設$x,y,z\in R^+$，且 $3x+2y+z=12$
(1)當$x=$_____，$y=$_____，$z=$______時，xyz有最大值=__________。
(2)當$x=$_____，$y=$_____，$z=$______時，$x^3y^2z^1$有最大值=__________。
(3)當$x=$_____，$y=$_____，$z=$______時，$x^2y^1z^3$有最大值=__________。
Ans：(1) $\dfrac{4}{3},2,4,Max=\dfrac{32}{3}$ (2) $2,2,2,Max=64$ (3) $\dfrac{4}{3},1,3,Max=384$

(練習4) 設x,y 是正實數，且$xy^2=2$，
(1)當$x=$______，$y=$________時，$2x+y^2$有最小值=__________。
(2)當$x=$______，$y=$________時，$2x+y$有最小值=__________。
Ans：(1)$1,\sqrt{2},4$ (2)$\dfrac{1}{2},2,3$

(練習5) 若$-3\leq x\leq 2$，則當$x=$________時，$(2-x)^3(x+3)^2$有最大值____________。
Ans：當$x=-1$ 時，有最大值 108
[提示：令$a=2-x,b=x+3$，a,b均爲正數，$a+b=5$，求a^3b^2的最大值。]

(乙)柯西不等式與極值

柯西不等式：

若設$a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$爲任意實數，

則$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$。

等號成立 $\Leftrightarrow$ $(a_1,a_2,\ldots,a_n)=k(b_1,b_2,\ldots,b_n)$。

(1)$n=2$ $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$ 等號成立$\Leftrightarrow(a_1,a_2)=k(b_1,b_2)$

$n=3$ $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_2^3)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$等號成立$\Leftrightarrow(a_1,a_2,a_3)=k(b_1,b_2,b_3)$

[證明]：

①代數證明：

因$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_2^3)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2\geq0$故得證

等號成立$\Leftrightarrow(a_1,a_2,a_3)=k(b_1,b_2,b_3)$

②幾何證明：

令$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則由內積定義$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$

故$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|\leq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ (因爲$|\cos\theta|\leq1$)

$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$，二邊平方即得證

等號成立$\Leftrightarrow\cos\theta=\pm1\Leftrightarrow$二向量同向或反向$\Leftrightarrow(a_1,a_2,a_3)=k(b_1,b_2,b_3)$。

(2)一般情形的證明：

設$A=(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)$，$B=(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$，$C=(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)$

欲證明$AB\geq C^2\Leftrightarrow(2C)^2-4AB\leq0$，設計一個二次函數$f(x)=Ax^2-2Cx+B$，

若函數$f(x)$恆大於等於 0，則$(2C)^2-4AB\leq0$。至於$f(x)$是否會恆大於等於 0 呢？

$f(x)=(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$

$\Rightarrow f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2$恆大於等於 0

[證明]：

(1)$a_1=a_2=\ldots=a_n=0$

原不等式自然成立。

(2)$a_1,a_2,\ldots,a_n$不全爲 0

二次函數$f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2$恆大於等於 0

$\Leftrightarrow f(x)=(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$恆大於等於 0

$\Leftrightarrow(-2(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n))^2-4(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\leq0$

$\Leftrightarrow(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$

[例題3] 設x,y,z爲實數且$x^2+y^2+z^2=9$，求

(a)$2x-y+3z$之最大値並求此時之x,y,z。

(b)若$x+y+kz$之最大値爲$3\sqrt{6}$，求$k=$？

Ans：(a)$3\sqrt{14}$ ，$x=\frac{6}{\sqrt{14}},y=\frac{-3}{\sqrt{14}},z=\frac{9}{\sqrt{14}}$ (b)$k=\pm2$

[例題4] 設 x,y,z 爲正數，且 $x+y+z=1$，則當$(x,y,z)=$？時，$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$ 有最小値=？

Ans：$(x,y,z)=(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2})$，36

[討論]：例題 4 的做法中，如果利用算幾不等式：

$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}>0$，$\frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}\cdot\frac{9}{z}}>0$

將兩式相乘可得$\frac{(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z})}{9}\geq\sqrt[3]{36}$，又因爲 $x+y+z=1$

故$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\geq9\sqrt[3]{36}$，這個答案與例題 4 不同，請問問題出在那裡？

(練習6) 設a,b,c爲實數且$a^2+4b^2+9c^2=100$，求$a+2b-3c$之最大值與最小值。

Ans：$10\sqrt{3}$，$-10\sqrt{3}$

(練習7) 設 x,y,z 為正數，且，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=12$，則 $9x+4y+z$ 有最小值=？Ans：3

(練習8) 設x,y為實數且滿足$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，則$x+2y$何時會有最大值=？

Ans：當$(x,y)=(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$時，有最大值$=2\sqrt{2}$

(練習9) 設 x,y,z 為實數，若點 $P(x,y,z)$在曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}+\frac{(z+2)^2}{1}=1$ 上，

則 $3x+y-z+2$ 之最大值=？Ans：$5+\sqrt{46}$

(丙)不等式的處理與證明

處理不等式(或求極值)通常可用

①代數方法：熟悉代數運算，例如乘法公式，配方法等等。

幾個常用的公式：

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

②幾何方法：用圖形來看，考慮求值式與條件所代表的幾何意義。

③用現成的不等式−利用算幾或柯西不等式

例 1：解$x^2-6x+8>0$

[代數觀點]：

$x^2-6x+8>0\Leftrightarrow(x-2)(x-4)>0\Leftrightarrow x>4$ 或$x<2$

[幾何觀點]

畫出$y=x^2-6x+8$ 的圖形，因此$x>4$ 或$x<2$ 時，函數值$y>0$

例 2：已知 $2x+3y=1$，求x^2+y^2的最小值？

[代數觀點]：

$y=\frac{1-2x}{3}$，則$x^2+y^2=x^2+(\frac{1-2x}{3})^2=\frac{13}{9}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{1}{9}=\frac{13}{9}(x-\frac{2}{13})^2+\frac{1}{13}$

因此最小值為$\frac{1}{13}$，此時$x=\frac{2}{13}$，$y=\frac{3}{13}$

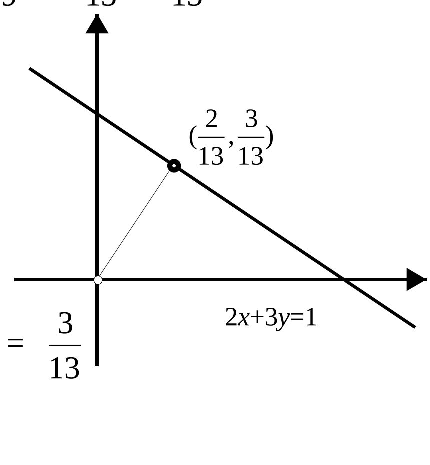
[幾何觀點]：

已知$P(x,y)$在 $2x+3y=1$ 上，

求「$P(x,y)$到原點距離」再平方的最小值

$\Rightarrow$因此取垂足為解，垂足為$(\frac{2}{13},\frac{3}{13})$

$\Rightarrow$故最小值為$(\frac{2}{13})^2+(\frac{3}{13})^2=\frac{1}{13}$，此時$x=\frac{2}{13}$，$y=\frac{3}{13}$



[用現成的不等式]：

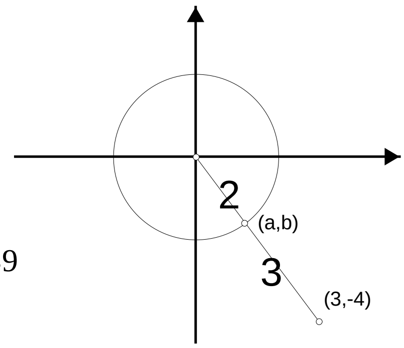
由柯西不等式知 $[x^2+y^2][2^2+3^2] \geq [2x+3y]^2 \quad \Rightarrow x^2+y^2 \geq \frac{1}{13}$，故最小值爲 $\frac{1}{13}$

等號成立：$\begin{cases} 一次式：2x+3y=1 \\ 比例式：\frac{x}{2}=\frac{y}{3} \end{cases}$ 可解出 $x=\frac{2}{13}$，$y=\frac{3}{13}$

例 3：$P(a，b)$爲 $x^2+y^2=4$ 上任一點，則 $(a-3)^2+(b+4)^2$ 的最小值爲____。

[幾何觀點]：

表「圓上一點(a,b)到(3,−4)的距離」再平方 ⇒最小值是 9



[用現成的不等式]：

已知 $a^2+b^2=4$，$(a-3)^2+(b+4)^2=\boldsymbol{-6a+8b+29}$

由 $[a^2+b^2][(-6)^2+8^2] \geq [-6a+8b]^2$，$4\times100 \geq \boldsymbol{[-6a+8b]^2}$

使 $-20 \leq -6a+8b \leq 20$ 同加 29 $\Rightarrow 9 \leq -6a+8b+29 \leq 49$

故 $(a-3)^2+(b+4)^2$ 的最小值是 9

[例題5] 設 a,b,c 爲正實數，請證明 $(a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}) \geq \frac{9}{2}$。

[分析]：

[證明]：

[例題6] 設 a,b 爲正數，且 p,q 爲正整數，試證 $(\frac{pa+qb}{p+q})^{p+q} \geq a^p b^q$。

[分析]：

[證明]：

[例題7] 設a,b,c為正實數，請證明：$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abc(a+b+c)$。

[分析]：

[證明]：

[例題8] 求$a^2+b^2+(2a-b-3)^2$之最小值。Ans：$\frac{3}{2}$

[例題9] 設x,y,z為實數，求$x^2+y^2+z^2-2x+6y-10z+50$ 的最小值，此時x,y,z為何值？

Ans：當$x=1,y=-3,z=5$ 時，最小值=15

(練習10) 設 a,b,c 爲正實數，請證明$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\geq\frac{3}{2}$。

[提示：根據例題 5 的不等式加以變形]

(練習11) 設x,y爲實數，請問當(x,y)=？時，$x^2+xy+y^2-2x+4y-1$ 會有最小值。

Ans：$(x,y)=(\frac{8}{3},\frac{-10}{3})$

(練習12) 設a,b,c爲實數，請證明$a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$。

(練習13) 利用例題 6 的結果證明$x^xy^y\geq(\frac{x+y}{2})^{x+y}$，其中$x,y$爲正整數。

(練習14) 設 a,b,c 爲正數，求證$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$。

綜合練習

(1) 下列選項何者爲真？(A)$\frac{(\frac{1}{2})^{10}+(\frac{1}{2})^{20}}{2}>\sqrt{(\frac{1}{2})^{10}\cdot(\frac{1}{2})^{20}}$ (B)$\sqrt{10}+\sqrt{20}>\sqrt{30}$

(C)$\log 10+\log 20>\log 30$ (D)$\frac{2^{10}+2^{20}}{2}>\sqrt{2^{10}\cdot 2^{20}}$ (E)$\frac{10^2+20^2}{2}>(\frac{10+20}{2})^2$

【89 社】

(2) 設 a、b、c、$d\in R$，「$a<b$、$c<d$」的必要條件是下列哪些選項？

(A)$a+c<b+d$ (B)$a-c<b-d$ (C)$(b-a)(c-d)<0$ (D)$ac<bd$

(E)$\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$

(3) 設實數 a，b 滿足 $0<a<1$，$0<b<1$，則下列選項那些必定爲真？

(1) $0<a+b<2$ (2) $0<ab<1$ (3) $-1<b-a<0$ (4) $0<\frac{a}{b}<1$

(5) $|a-b|<1$ (91 學測補)

(4) 下面有四個條件：

甲：a 爲正，乙：b 爲正，丙：c 爲正，丁：d 爲正

已知 $a>b$，$c>d$，還要加上甲、乙、丙、丁中的哪些條件成立，就能得到 $ac>bd$

的結論？
(1)只要加上條件乙即可(2)只要加上條件丙即可
(3)只要加上條件丁即可(4)乙和丙同時成立即可
(5)除非四個條件同時成立，否則不足以得到 $ac>bd$ 的結論

(5) 當 x 的範圍被限制在$\frac{-\pi}{2}$和$\frac{\pi}{2}$之間時，亦即$\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，有關函數 $f(x)=\cos x+\frac{4}{\cos x}$ 的敘述，哪些是正確的？
(1) $f(x)=f(-x)$ (2) $f(x)\geq 4$ (3) $f(x)$ 的最小值是 4 (4) $f(x)$ 有最大值。

(6) 下列各選項，哪些成立？
(A) $x\in R$ ，$2^x=\log_2 x$ 有異於 0 之解
(B) $x\in R$ ，$\sin^4 x-\cos^4 x=2$ 有異於 0 之解
(C) $x\in R$ ，$2^x<\frac{-1}{2^x}$ 沒有解
(D)若 $0<x<\frac{\pi}{2}$ ，則 $2\csc x+8\sin x$ 的最小值爲 8
(E)若 $0<x<\frac{\pi}{2}$ ，則 $27\sec x+3\cos x$ 的最小值爲 18

(7) 考量道路的摩擦係數與路口寬度的因素，某交叉路口的「閃黃燈秒數」 $f(v)$ 秒應以 $f(v)=\frac{v}{10}+\frac{90}{v}+1$ 這則公式規範較適宜，其中 v 代表該路段的最高時速限制，
(a)現在這條道路的最高時速限制爲每小時 60 公里，依公式這交叉路口的「閃黃燈秒數」應該是幾秒？
(b)證明：無論此路口的最高時速限制 v(公里/小時)如何訂定，這交叉路口的「閃黃燈秒數」都不小於 7 秒。
(c)將最高時速限制 v(公里/小時)訂爲何值時，會讓這交叉路口的「閃黃燈秒數」剛好是 7 秒。

(8) 表面積爲 54 平方公尺的長方體紙箱的最大體積＝________。

(9) 設x,y,z爲正數，$x^3y^2z=576$，則$x+2y+3z$之最小值爲______________。

(10) 設 x、y、z 爲自然數，且 $x+y+3z=15$ ，則 $\log_3 x+2\log_9 y+9\log_{27} z$ 之最大值爲________。

(11) 設 x,y,z 爲正實數，且$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=9$，則 $x+y+z$ 的最小值=？

(12) x,y,z爲實數，若$x+y-2z=4$，求$x^2+y^2+z^2-2x+4y+1$ 的最小值=？

(13) 設 a,b 爲正數，則$(a+\frac{25}{b})(b+\frac{4}{a})$之最小值爲
(A)25 (B)30 (C)35 (D)49 (E)40。

(14) 請證明下列不等式：
(a)$a^4+b^4+c^4\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}$。(b)$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq(\frac{a+b+c}{3})^2$

(15) 設 n 爲大於 1 的自然數，請證明$\frac{n+1}{2}>\sqrt[n]{n!}$ 。

(16) 設a,b,c爲正整數，請證明：$(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c})^{a+b+c}\geq a^a b^b c^c$ 。

(17) 若 a,b,c 爲非負的實數，且 $a+b+c=8$，求$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$之最大値與最小値。

(18) 設 a,b,c 爲正數，求證$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}$。

(19) 設 a,b,c 爲ΔABC 三邊長，證明：$abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$。

(20) 設 $f(x)=\frac{x}{1+x}$，試證明：

(a)若 $0\leq x\leq y$，則 $f(x)\leq f(y)$。

(b)若 x,y 都≥0，則 $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$。

(c)利用(a)(b)證明：$\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}\geq\frac{|a+b|}{1+|a+b|}$ 。

進階問題

(21) 設 $x+y+z=1$ 且 x,y,z 均不爲負，且 a,b,c 爲正數，$ay\geq bz$，$bx\geq cy$，$cz\geq ax$，求 x,y,z。

(22) 設 $x>-1$，則 $y=f(x)=x+\frac{4}{x+1}$的最小値爲______，此時 x=______ 。

(23) 設$\frac{-1}{2}<x<\frac{5}{2}$，求$(2x+1)(5-2x)$的最大値爲____________ 。

(24) 周長爲定値的ΔABC 中，以正三角形的面積爲最大。

(25) 設 $x\in$ R，則$\frac{x^4+7x^2+14}{x^2+2}$之最小値爲__________ 。

(26) 設$x\geq0$，$y\geq0$，$x+y=1$ 試求 3^x+3^y的最大値和最小値。

綜合練習解答

(1) (A)(B)(C)(D)(E)

(2) (A)(C)

(3) (1)(2)(5)

(4) (4)

(5) (1)(2)

(6) (C)(D)

(7) (a)8.5 秒　(b)算幾不等式　(c)30(公里/小時)

(8) 27 立方公尺 (已知 $2ab+2bc+2ca=54$ 求 abc 的 Max)

(9) 12

(10) 5

(11) 4

(12) $\frac{1}{6}$

(13) (D)[提示：本題若用算幾不等式 $a+\frac{25}{b}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{25}{b}}$ ，$b+\frac{4}{a}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{4}{a}}$

兩式相乘可得$(a+\frac{25}{b})(b+\frac{4}{a})\geq 40$。不過這不是最小值，因爲等號不會同時成立。]

(14) [提示：可利用柯西不等式]

(15) [提示：可利用算幾不等式]

(16) [提示：$\dfrac{\overbrace{a+a+\ldots+a}^{a個}+\overbrace{b+b+\ldots+b}^{b個}+\overbrace{c+c+\ldots+c}^{c個}}{a+b+c}\geq \sqrt[a+b+c]{a^a b^b c^c}$]

(17) 最大值$=2\sqrt{6}$，最小值$=2\sqrt{2}$

[提示：$(a+b+c)(1+1+1)=((\sqrt{a}\ )^2+(\sqrt{b}\ )^2+(\sqrt{c}\ )^2)(1^2+1^2+1^2)\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$

$\Rightarrow -2\sqrt{6}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq 2\sqrt{6}$，但$a,b,c$爲非負的實數，所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$的最小值不是

$-2\sqrt{6}$。利用$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=a+b+c+2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})=8+2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\geq 8$

等號成立$\Leftrightarrow$ a,b,c中有兩數爲 0，另一個數=8]

(18) [提示：考慮 $2(a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})=[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\,(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})$

再用柯西不等式]

(19) [提示：$\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}\geq\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}$ $\Rightarrow b\geq\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}$ >0]

(20) (a)證明 $f(x)-f(y)=\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}\leq 0$。

(b)$\because 0\leq x+y\leq x+y+xy\Rightarrow f(x+y)\leq f(x+y+xy)=\frac{x+y+xy}{1+x+y+xy}\leq\frac{x(1+y)+y(1+x)}{(1+x)(1+y)}=f(x)+f(y)$。

(c)令 $x=|a|,y=|b|$代入(b)的結果，再利用$|a+b|\leq|a|+|b|$，即可得證。

(21) $x=\frac{c}{a+b+c}$，$y=\frac{b}{a+b+c}$，$z=\frac{a}{a+b+c}$。[提示：由已知$\frac{y}{b}\geq\frac{z}{a}\geq\frac{x}{c}\geq\frac{y}{b}$ $\Rightarrow\frac{y}{b}=\frac{z}{a}=\frac{x}{c}$]

(22) 3，此時 $x=1$ [解法：$y=f(x)=x+\frac{4}{x+1}=(x+1)+\frac{4}{x+1}-1\geq 2\sqrt{(x+1)\frac{4}{x+1}}-1=3$

等號成立$\Rightarrow x+1=\frac{4}{x+1}\Rightarrow x=1$]

(23) 32[提示：令 $a=2x+1,b=5-2x\Rightarrow a,b$均爲正數且 $a+b=6$，求ab^2之最大值。]

(24) 三角形的邊長均為$\frac{2s}{3}$(正三角形)時，面積有最大值為$\frac{\sqrt{3}}{9}s^2$，其中$a+b+c=2s$

[提示：$\Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，考慮$\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\geq\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\Rightarrow(\frac{s}{3})^3\geq(s-a)(s-b)(s-c)\Rightarrow s(\frac{s}{3})^3\geq s(s-a)(s-b)(s-c)=(\Delta ABC)^2$]

(25) 7【詳解】$\frac{x^4+7x^2+14}{x^2+2}=x^2+5+\frac{4}{x^2+2}=(x^2+2)+\frac{4}{x^2+2}+3$ (長除法)

$\geq 2\sqrt{(x^2+2)\frac{4}{x^2+2}}+3=7$

(26) $2\sqrt{3}\leq 3^x+3^y\leq 4$ 【詳解】 $x\geq 0$，$y\geq 0\Rightarrow 3^x\geq 1$，$3^y\geq 1$ 利用算幾不等式

$\frac{3^x+3^y}{2}\geq\sqrt{3^x\times 3^y}=\sqrt{3^{x+y}}=\sqrt{3}\Rightarrow 3^x+3^y\geq 2\sqrt{3}$

$3^x-1\geq 0$，$3^y-1\geq 0$ 所以$(3^x-1)(3^y-1)\geq 0\Rightarrow 3^{x+y}-3^x-3^y+1\geq 0\Rightarrow 3^x+3^y\leq 4$