§1–2 獨立事件

(甲)獨立事件

(1)引入獨立事件：

設一個袋子中有 5 個紅球，3 個白球，甲乙二人依序在袋中抽取一球，

(a)若取後不放回，則在甲抽中紅球的情形下，求乙抽中紅球的機率？

(b)若取後放回，則在甲抽中紅球的情形下，求乙抽中紅球的機率？

[解法]：設A代表甲抽中紅球的情形，B代表乙抽中紅球的情形

(a)取後不放回：$P(B|A)=\frac{4}{7}$，

另一方面，$P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{5}{8}\Rightarrow P(B|A)\neq P(B)$。

顯然甲取中紅球會影響到乙取中紅球的機率。

(b)取後放回：$P(B|A)=\frac{5}{8}$，

另一方面，$P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')=\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{8}\Rightarrow P(B|A)=P(B)$。

顯然甲取中紅球並不會影響到乙取中紅球的機率。

一般而言，當事件B發生的機率不會受事件A是否已發生的影響，我們就稱事件A、B是獨立的，寫成數學式子為$P(B|A)=P(B)$。

又因為$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=P(B)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$。

因此可用$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$來定義獨立事件。

(2)定義：

(a)當兩事件A、B滿足$\mathbf{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$的關係時，稱A、B為獨立事件
(或稱A、B是獨立的)。

(b)若A,B不為獨立事件，則稱A,B為相關事件。

例如：擲一骰子，設事件A、B、C各為A={1,2,3}，B={2,4}，C={4,5,6}

①因為$P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=P(A\cap B)$，所以A、B為獨立事件。

②因為$P(A)\times P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\neq P(A\cap C)=0$，所以$A$、$C$不是獨立事件。

這個例子告訴我們，即使是同一個隨機試驗，各個事件之間有的獨立有的相關，沒有一定的關係，因此判別兩事件獨立，不可憑直覺，一定要從定義出發。

(3)性質：

(a)若A,B獨立，則①A',B ②A,B' ③A',B' 也是獨立事件。

[證明]：

① $P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)P(B)$
$=P(B)(1-P(A))=P(A')P(B)$

③ $P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B)$
$=(1-P(A))(1-P(B))=P(A')P(B')$

(b)任何一事件與空事件必為獨立事件。

(c)任何一事件與全事件必為獨立事件。

(d)設A,B為互斥事件，且P(A)>0,P(B)>0，則A,B必為相關事件。
[證明]：
$\because P(A\cap B)=P(\phi)=0$，$P(A)\cdot P(B)>0$
$\therefore \because P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$
$\Rightarrow$A,B必為相關事件。

(4)三事件獨立：

(a)定義：若 $\begin{cases} (1)P(A\cap B)=P(A)P(B) \\ (2)P(A\cap C)=P(A)P(C) \\ (3)P(B\cap C)=P(B)P(C) \\ (4)P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$ 四式同時成立，

則稱三事件A,B,C獨立，4 個條件均必得成立，缺一不可。

由定義知：
①若A,B,C三事件獨立時，則A與B，B與C，A與C兩兩事件必為獨立事件。
②A,B,C三事件中任兩事件獨立時，A,B,C不一定獨立。(因為還要(4))
例如：
袋中有 9 個球，編號為 1~9。自袋中取一球，
取到 1,5,9 的事件為A，取到 2,5,8 的事件為B，取到 3,5,7 的事件為C，
問A,B,C是否獨立？答案：否
理由：

$$\begin{cases} (1)P(A\cap B)=P(A)P(B) \\ (2)P(A\cap C)=P(A)P(C) \\ (3)P(B\cap C)=P(B)P(C) \\ \text{但}(4)P(A\cap B\cap C)\neq P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

(b)性質：
若A,B,C獨立，則
①A,B，A',B，A,B'，A',B' 獨立。
②A,C，A',C，A,C'，A',C' 獨立。
③ B,C，B',C，B,C'，B',C' 獨立。
④A',B,C，A,B',C，A,B,C' 獨立。
⑤ A',B',C，A',B,C'，A,B',C' 獨立。
⑥A',B',C' 獨立。

[例題1] 令 A，B 表示事件，且 P(A)=0.4，P(A∪B)=0.7，
(1)若 A 和 B 為互斥事件，則 P(B)=__________。
(2)若 A 和 B 為獨立事件，則 P(B)=__________。
Ans：(1)0.3　(2)0.5

[例題2] 甲，乙，丙三人同射一靶，各打一發，

設甲、乙、丙三人的命中率分別爲$\frac{1}{3},\frac{3}{4},\frac{2}{5}$且三人射擊互不影響，則

(1)此靶被命中的機率爲____________。

(2)此靶被打中三發的機率爲____________。

(3)此靶被打中二發的機率爲____________。

(4)此靶恰被打中一發的機率___________。

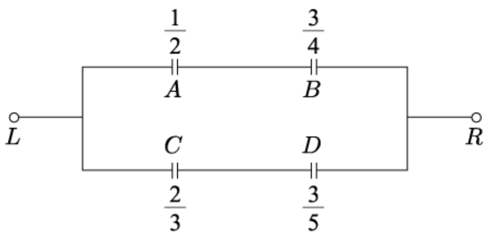
(5)若此靶恰中一發，則是甲命中的機率爲________。

Ans：(1) $\frac{9}{10}=\frac{54}{60}$ (2) $\frac{1}{10}=\frac{6}{60}$ (3) $\frac{23}{60}$ (4) $\frac{25}{60}$ (5)$\frac{3}{25}$

[例題3] 在下面的電路圖中有 4 個開關，以 A, B, C, D 表示。

電流通過各個開關的機率依次爲$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$。每一開關彼此互不影響，試求在某一瞬間，電流能從左端 L 通到右端 R 的機率=______。

Ans：$\frac{5}{8}$



[例題4] 若三事件A,B,C獨立，則三事件A'、B'、C'爲獨立事件。

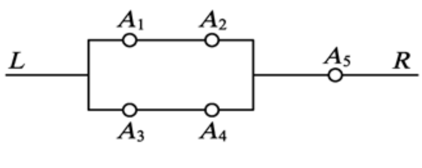
[例題5] 愛國者飛彈之命中率爲 40%，今要使打中敵方飛彈的機率達到 90%以上，則一次要發射若干枚飛彈？(設每枚飛彈射擊不互相影響，且 log2=0.3010，log3=0.4771)　Ans：5 枚

(練習1) 林先生和陳小姐一起到遊樂場玩打靶遊戲，林先生射擊命中靶的機率是 $\frac{2}{5}$，陳小姐的機率是 $\frac{1}{2}$，林先生先射，陳小姐後射；林先生射中與否不會影響陳小姐的命中率，若他們兩人向靶各射一次，問只有陳小姐射中的機率爲多少？Ans：$\frac{3}{10}$【84 學測】

(練習2) 以 A,B 分別表示甲、乙活過十年以上的事件。設 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{3}$。若 A,B 二事件爲獨立事件，試求(1)兩人都活過十年以上的機率；(2)至少有一人活十年以上的機率；(3)沒有一人活過十年以上的機率。
Ans：(1)$\frac{1}{12}$ (2)$\frac{1}{2}$ (3)$\frac{1}{2}$

(練習3) 甲乙丙三射手同設一靶，設甲乙丙命中率各爲 0.5,0.6,0.8；並設各人中靶的事件爲獨立事件。則
(1)各射一發，求靶面恰中一發的機率。
(2)各射一發，求沒有人命中靶的機率。
(3)若靶面恰中一發，求是由甲命中的機率。
Ans：(1)0.26 (2)0.04 (3)$\frac{2}{13}$

(練習4) 下圖有 5 個開關，以 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 表示，



電流通過各開關的機率分別爲 $\frac{7}{10}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，
若各開關的操作獨立，求電流從左端 L 流到右端 R 的機率爲_______。
Ans：$\frac{31}{125}$

(練習5) 設某藥物對一般病人有過敏反應的機率爲 0.1，今有三位病人接受此藥物的治療，如果此三位病人是否有過敏反應互不影響，試求至少有一位

病人有過敏反應的機率。Ans：0.271

(練習6) 設袋中有 120 個相同的球，編號爲 1 到 120 號。自袋中任取一球，設每一球被取到的機會均等，且設取出球號爲 2 的倍數的事件爲 A，3 的倍數的事件爲 B，5 的倍數的事件爲 C。證明 A,B,C 爲獨立事件。

(乙)重複試驗

在一隨機試驗中，每次成功的機率爲p，每次失敗的機率爲 $1-p$，

若n次試驗互不影響，則在連續n次試驗中，

(a)n次試驗均成功的機率爲p^n

(b)n次試驗均不成功的機率爲$(1-p)^n$

(c)n次試驗中至少一次成功的機率爲 $1-(1-p)^n$

(d)n次試驗中恰成功k次的機率爲 $C_k^n p^k(1-p)^{n-k}$

[說明]：

以O表示成功，以×表示失敗，則n次試驗中，有k次成功，$n-k$次失敗相當於k個O，$n-k$個×排成一列的情形，共有$\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=C_k^n$種，也就是說可以分成$C_k^n$種互斥的情形，每一種情形發生的機率爲$p^k(1-p)^{n-k}$，因此恰成功$k$次的機率爲$C_k^n p^k(1-p)^{n-k}$。

[例題6] 已知一個不均勻銅板，出現正面的機率爲$\frac{2}{3}$，出現反面的機率爲$\frac{1}{3}$，今丟此銅板 5 次，試求：

(1)恰出現 3 次正面的機率爲________。

(2)恰在第 5 次，出現第 3 次正面的機率爲________。

Ans：(1)$\frac{80}{243}$ (2)$\frac{16}{81}$

[例題7] (重複輪流試驗)

一袋中有 3 個白球，2 個黑球，甲乙二人輪流自其中取出一個球，今約定先取得白球者爲勝，

(1)若所取出的球不放回袋子中時，甲乙兩人獲勝的機率爲何？

(2)若取出的球再放回袋中時，甲乙兩人獲勝的機率爲何？

Ans：(1)甲、乙獲勝的機率爲$\frac{7}{10}$、$\frac{3}{10}$ (2) 甲、乙獲勝的機率爲$\frac{5}{7}$、$\frac{2}{7}$

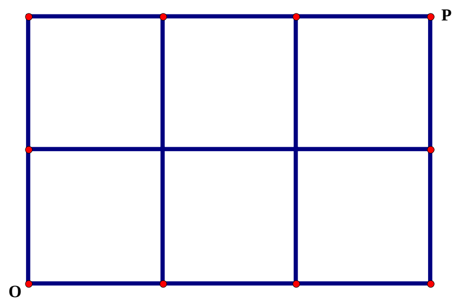
(練習7) 投擲一均勻骰子 10 次，求下列事件之機率：

(1)恰好出現 6 次 1 點 (2)恰在第 10 次出現第 2 次 6 點的機率

Ans：(1)$C^{10}{}_{6}(\frac{5}{6})^4(\frac{1}{6})^6$ (2)$C^{9}{}_{1}(\frac{5}{6})^8(\frac{1}{6})^1$

(練習8) 如圖，從 O 點出發，投擲一骰子，若點數爲 1 或 6，則向右走一步，若出現其他點數，則向上走一格，求投 5 次到達 P 點之機率=？

Ans：$\frac{40}{243}$



(練習9) n 次的重複試驗中，一次成功的機率爲 p，求證成功次數之期望值爲 np。

(練習10) 一袋中有 4 個白球，3 個黑球，甲乙二人輪流自其中取出一個球，取後放回，今約定先取得白球者爲勝，求甲勝的機率=？

Ans：$\frac{7}{10}$

綜合練習

(1) A,B,C 三人參加某次考試，及格的機率為$\frac{2}{5}$,$\frac{3}{4}$,$\frac{1}{3}$ ，求恰有二人及格的機率。

(2) 設A、B、C為獨立事件，若$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{36}$，$P(A'\cap B'\cap C')=\frac{1}{6}$，則P(B)+P(C)=？

(3) 已知 P(A)=0.2，P(B)=b，P(A∪B)=0.6，若 A、B 為相關事件，求 b 的範圍。

(4) 甲乙丙三人同時翻譯一封用密碼寫成的信，甲乙丙三人亦出之機率依次為$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{3}$，且每人譯出均不互相影響，求此封信被譯出之機率為______，若此封信被譯出，求恰是甲一人意出的機率=________。

(5) 設兩人同時被一家公司任用，一年之後兩人是否離職或繼續在該公司是獨立的。若一年之後兩人中至少有一人仍在該公司的機率是$\frac{4}{9}$，而只有一人仍在該公司工作的機率是$\frac{2}{9}$，請計算一年後兩人都在公司的機率。

(6) 甲乙丙三射手同射一靶，每人一發，設甲乙丙三人命中率依序為 0.4、0.5 及 0.6，且各人命中靶面的事件為獨立事件，試求
(a)靶面恰中二發之機率=？
(b)已知靶面恰中二發，求是由甲及乙命中的機率=？

(7) 某次考試共有 10 題是非題，每題答對得 1 分，答錯倒扣 1 分，不作答得 0 分。設甲生確定會作答得有 4 題，其餘 6 題都不經考慮隨意猜答。如果甲生確定會的 4 題都答對，那麼甲生得分超過 4 分的機率為_________。

(8) 有一種丟銅板的遊戲，其規則為：出現正面則繼續丟，出現反面就出局。那麼連續丟 5 次後還可繼續丟的機率為$(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{32}$。某班有 40 名學生，每人各玩一局，設班上至少有一人連續丟 5 次後還可繼續丟的機率為p，則：(A) $0.4\le p<0.5$ (B) $0.7\le p<0.8$ (C) $0.6\le p<0.7$ (D) $0.5\le p<0.6$ (E) $0.8\le p<0.9$【86 學測】

(9) 擲一公正之銅板兩次，
A 表第一次出現反面之事件，
B 表第二次出現正面之事件，
C 表示正面、反面均出現一次之事件，
則下列何者為獨立事件？何者為相關事件？
(a)A,B 為___________事件。(b)B,C 為___________事件。
(c)A,C 為___________事件。(d)A,B,C 為___________事件。

(10) 一屋於一年內失火被燒毀的機率為$\frac{1}{5000}$，失火殃及鄰屋的機率為$\frac{1}{5}$，今有 A、B 兩屋相鄰，其中 A 屋保火險 50 萬，則 A 屋一年至少應付多少保費才合理？

(保險公司之人事費用與合理開支不列入保費的計算)

(11) 美國 NBA 職業籃球聯賽之總冠軍爲七戰四勝制，且每次比賽均無和局(都能分出勝負)，已知目前賽完 4 場中，湖人隊以 2 勝 2 敗暫時與溜馬隊打成平手，根據資料分析，湖人隊每場比賽勝溜馬隊的機率爲$\frac{2}{3}$，若每場比賽皆爲獨立事件，則溜馬隊擊敗湖人隊的機率=？

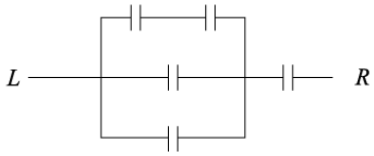
(12) 一種飛彈命中目標的機率每發爲$\frac{1}{10}$

(a)求發射 n 次中，至少命中一發的機率爲何？

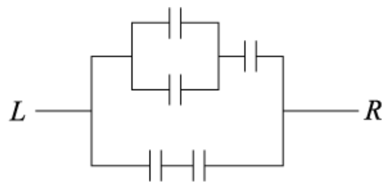
(b)求發射至少幾發，才能使至少命中一發之機率大於 0.98？

(13) 下圖是一個繼電器構造，每個繼電器「┤ ├」能正常讓電流暢通的機率爲 p，且所有繼電器獨立運作，試求下列的電路電流從 L 到 R 暢通的機率？

(a)



(b)



(14) 一圓形跑道上有 S、A、B 三地點，一跑車自 S 出發，經 A 再經 B 環繞跑道，但跑車再 A、B 兩處發生故障(停止不動)的機率分別爲$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{21}$，且在 A、B 兩處故障的情形互不影響，試求：

(a)跑車能繞完一圈的機率。(b)跑車能完成 n 圈且在第 n+1 圈發生故障的機率。

(c)跑車環繞跑道圈數的期望值。(90 台北區指定考科模擬測驗甲 2)

進階問題

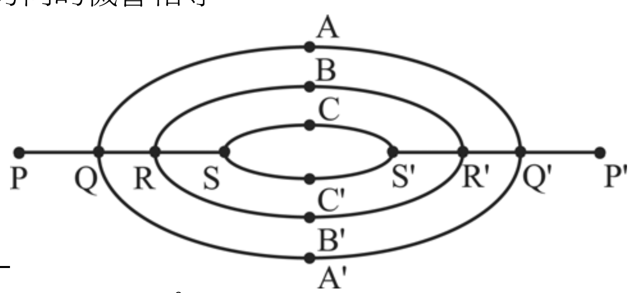
(15) x,y,z 爲自然數，每個數爲偶數之機率皆爲 p，試求下列問題：

(a)試求 $xy+z$ 爲奇數的機率爲 $f(p)$=？　(b)若 $f(p)>\frac{1}{2}$，請求出 p 的解集合。

(16) 設路線圖中$\overline{PQ}=\overline{P'Q'}$，$\overline{QR}=\overline{Q'R'}$，$\overline{RS}=\overline{R'S'}$，

甲自 P 往 P'，乙自 P' 往 P，兩人同時分別由 P，P' 出發，

以相同速度前進，在分叉點選擇各個前進方向的機會相等，



求：(a)甲、乙兩人在途中不相遇的機率=___

(b)若兩人相遇，求相遇於 C 之機率=___________。

綜合練習解答

(1) $\frac{23}{60}$

(2) $\frac{5}{6}$

(3) $0.4\le b<0.6$，$b\neq 0.5$[提示：$P(B)<P(A\cup B)=0.6$，
又 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow b=0.4+P(A\cap B)\ge 0.4$，又 A、B 爲相關事件，
$P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)\Rightarrow b\neq 0.5$]

(4) $\frac{3}{5}$、$\frac{1}{6}$

(5) $\frac{1}{9}$

(6) (a)$\frac{19}{50}$ (b)$\frac{4}{19}$

(7) $\frac{11}{32}$

(8) (B)

[提示：不能連續丟 5 次後再繼續之機率爲 $\frac{31}{32}$ ∴　班上至少有一人連續丟 5 次後還可繼續丟的機率 $p=1-(\frac{31}{32})^{40}$

$$\log(\frac{31}{32})^{40}=40(\log 31-\log 32)=40(1.4914-1.5051)$$

$$=-0.548=-1+0.452 \quad \therefore \quad 0.4518<0.452<0.4533$$

$\therefore \quad 0.283<(\frac{31}{32})^{40}<0.284 \quad \Rightarrow \quad 0.716<p<0.717 \quad \therefore$　正確爲(B)]

(9) (a)獨立(b)獨立(c)獨立(d)相關

(10) 120 元

(11) $\frac{7}{27}$

(12) (a)$1-(\frac{9}{10})^n$(b)38 發

(13) (a) $p^2(2-2p^2+p^3)$(b) $3p^2-p^3-2p^4+p^5$

(14) (a)$\frac{6}{7}$ (b)$(\frac{6}{7})^n\times\frac{1}{7}$ (c)6

[提示：(a)P(跑完一圈)=P(在A處不故障且在B處不故障)$=(1-\frac{1}{10})(1-\frac{1}{21})=\frac{6}{7}$

(b)P(不能跑完一圈)$=1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}\Rightarrow$P(完成$n$圈且在第$n+1$ 圈發生故障)$=(\frac{6}{7})^n\times\frac{1}{7}$

(c)期望值$E=1\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{7}+2(\frac{6}{7})^2\cdot\frac{1}{7}+\ldots+n(\frac{6}{7})^n\times\frac{1}{7}+\ldots\ldots$ ……. ①

$\frac{6}{7}E=1\cdot(\frac{6}{7})^2\cdot\frac{1}{7}+2(\frac{6}{7})^3\cdot\frac{1}{7}+\ldots+n(\frac{6}{7})^{n+1}\times\frac{1}{7}+\ldots$　……. ②

①−② $\Rightarrow\frac{1}{7}E=1\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{7}+1\cdot(\frac{6}{7})^2\cdot\frac{1}{7}+1\cdot(\frac{6}{7})^3\cdot\frac{1}{7}+\ldots=\dfrac{1\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{7}}{1-\frac{6}{7}}=\frac{6}{7}$

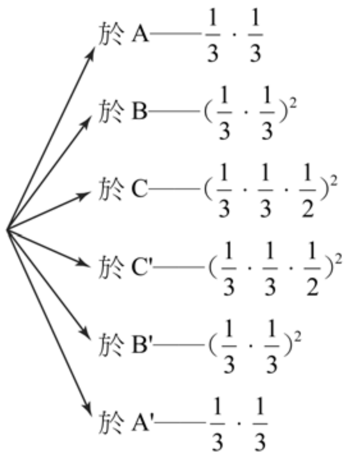
$\Rightarrow E=\frac{6}{7}\times 7=6$。

(15)　(a)$p(1-p)(3-2p)$　(b)$p>\frac{2+\sqrt{2}}{2}$或$\frac{2-\sqrt{2}}{2}<p<\frac{1}{2}$

(16)　(a)$\frac{121}{162}$　(b)$\frac{1}{82}$

[提示

(a)以 M 表相遇的事件相遇



途中相遇之機率為 $2(\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{324})=\frac{2(36+4+1)}{324}=\frac{41}{162}$，

所求為 $1-\frac{41}{162}=\frac{121}{162}$。

(b) $P(C\mid M)=\frac{P(C\cap M)}{P(M)}=\frac{1}{82}$。]