§4–3 線性規劃

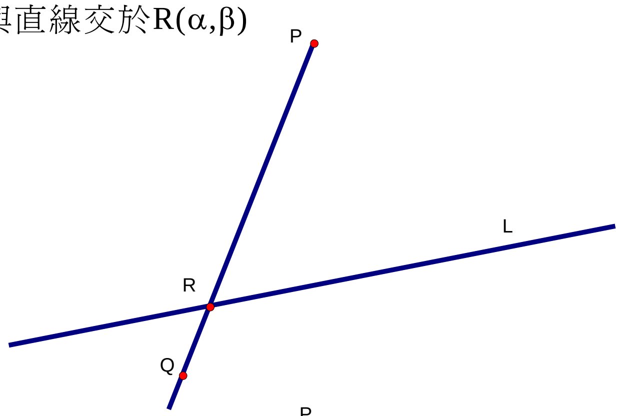
(甲)二元一次不等式解的區域

所謂的二元一次不等式是指$ax+by+c>(<,\geq,\leq)0$ 這種形式的不等式。
求二元一次不等式$ax+by+c>(<,\geq,\leq)0$ 的解，
就是要找出所有滿足該不等式的解(x_0,y_0)。

(1)如何判別兩點在一直線的同側或異側？
原理：
設L：$px+qy+r=0$，P(x_1,y_1)、Q(x_2,y_2)，
(a)若P、Q兩點在直線L的異側，則$(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)<0$。
(b)若P、Q兩點在直線L的同側，則$(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)>0$。

[證明]：

(a)因為P、Q兩點在直線L的異側，令$\overline{PQ}$與直線交於R(α,β)



設$\dfrac{PR}{RQ}=m$，根據分點公式，可得

$\alpha=\dfrac{x_1+mx_2}{1+m}$,$\beta=\dfrac{y_1+my_2}{1+m}$

因為R(α,β)在直線L上

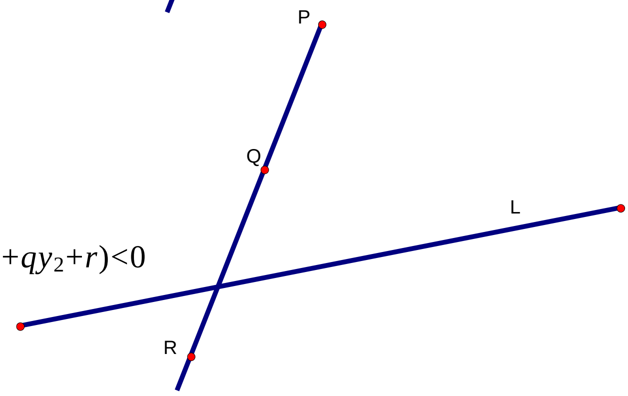
$\Rightarrow p(\dfrac{x_1+mx_2}{1+m})+q(\dfrac{y_1+my_2}{1+m})+r=0$

$\Rightarrow(px_1+qy_1+r)+m(px_2+qy_2+r)=0$

$\Rightarrow m=\dfrac{-(px_1+qy_1+r)}{(px_2+qy_2+r)}>0$

$\Rightarrow(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)<0$

(b)設在直線PQ上取一點R，
使得R(α,β)分別與P、Q落在直線L異側
根據(a)的證明可得
$(p\alpha+q\beta+r)(px_1+qy_1+r)<0$ 且$(p\alpha+q\beta+r)(px_2+qy_2+r)<0$
$\Rightarrow(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)>0$。

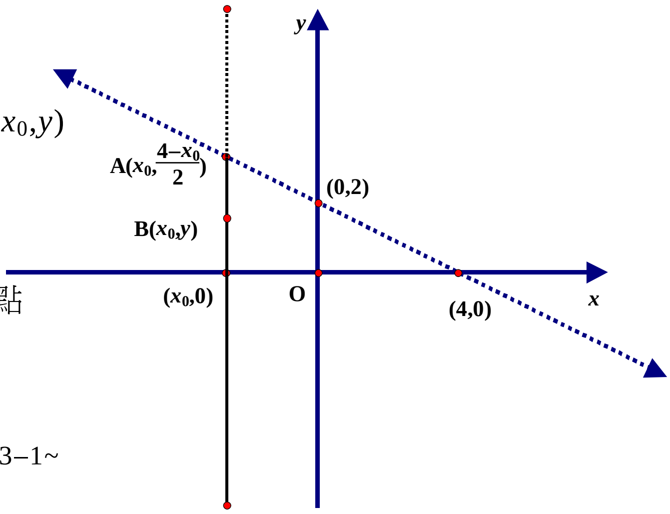


(2)如何找出二元一次不等式的解？

例子一：請在座標平面上畫出滿足$x+2y-4<0$ 的點(x,y)所形成的區域？
[解法一]：
如右圖，考慮鉛直線$x=x_0$，它與$x+2y-4=0$
的交點為A$(x_0,\dfrac{4-x_0}{2})$，又在A點正下方設B(x_0,y)

很顯然$y<\dfrac{4-x_0}{2}$ $\Rightarrow x_0+2y-4<0$

因此B(x_0,y)滿足$x+2y-4<0$。
換句話說，鉛直線上落在A點下方的所有點
(x,y)均滿足$x+2y-4<0$。現在讓$x=x_0$作變動
它會通過所有$x+2y-4<0$ 的解(x,y)，



因此可以得到，滿足$x+2y-4<0$ 的點(x,y)形成的
圖形區域是直線$x+2y-4=0$ 的下方區域。

[解法二]：
利用判別兩點在直線的同側與異側的條件，可以先代一個已知點A(0,0)
顯然(0,0)是$x+2y-4<0$ 的解，因此與A(0,0)同側的點都是$x+2y-4<0$ 的解，而與A(0,0)異側的點都不是$x+2y-4<0$ 的解，因此$x+2y-4<0$ 的解(x,y)所形成的區域是與(0,0)同側的點所成的圖形，因此是直線$x+2y-4=0$ 的下方區域。

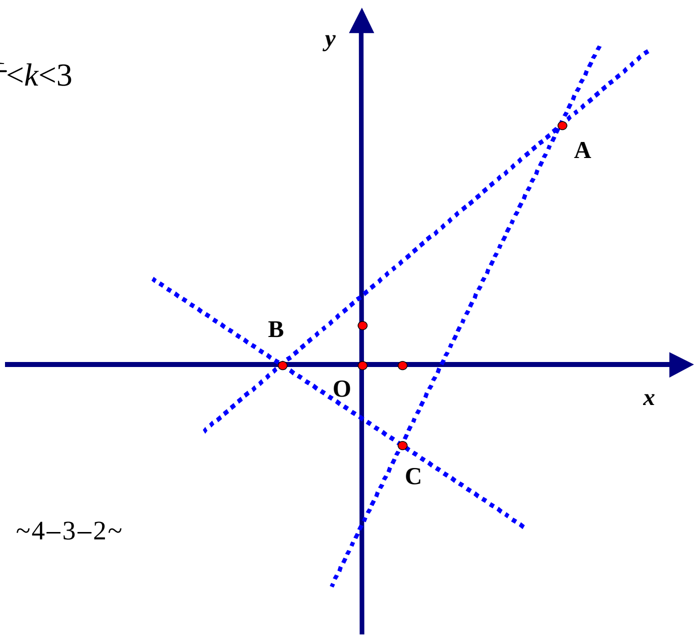
結論：設L：$px+qy+r=0$
(a)若P、Q兩點在直線L的異側，則$(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)<0$。
若P、Q兩點在直線L的同側，則$(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)>0$。

(b)設直線L將座標平面分成兩個半平面H_1、H_2。
設$(x_0,y_0)\in H_1$且$px_0+qy_0+r>0$，則對於任意點$(x,y)\in H_1$恆有$px+qy+r>0$，而對於任意點$(x,y)\in H_2$，恆有$px+qy+r<0$。

[例題1] (1)已知二定點 P(3,1)、Q(−4,6)，若$\overline{PQ}$與直線 $3x-2y+k=0$ 相交，
則 k 值的範圍爲________ 。
(2)若點 P(3,1)、Q(−4,6)在直線 $3x-2y+k=0$ 的反側，
則 k 的範圍爲________ 。 Ans：(1)$-7\le k\le 24$ (2)$-7<k<24$

[例題2] 設 A(5,6)，B(−2,0)，C(1,−2) 爲坐標平面上的三點
(1) 試以聯立不等式表示ΔABC 的內部？________ 。
(2) 若 $P(k,k-1)$爲ΔABC 內部一點，則實數 k 的範圍爲_____________ 。

Ans：(1)$\begin{cases}6x-7y+12>0\\2x-y-4<0\\2x+3y+4>0\end{cases}$ (2)$\frac{-1}{5}<k<3$



[例題3] 若 $0\le a\le 1$，$0\le b\le 2$ 且 $x=3a+b$，$y=a-b$

(1)試求 x，y 所滿足的聯立不等式。

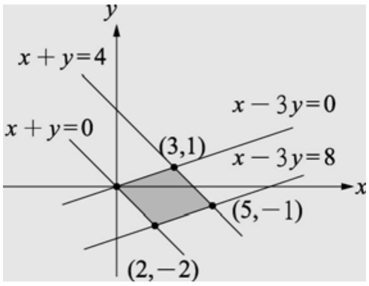
(2)作出(1)所表示的聯立不等式的圖形，並求此圖形所圍成區域的面積。

Ans：(1)$\begin{cases}0\le x+y\le 4\\0\le x-3y\le 8\end{cases}$；(2)面積為 8 (平方單位)

(1)$\begin{cases}3a+b=x\\a-b=y\end{cases}\Rightarrow a=\frac{x+y}{4}$，$b=\frac{x-3y}{4}$

但$\begin{cases}0\le a\le 1\\0\le b\le 2\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}0\le \frac{x+y}{4}\le 1\\0\le \frac{x-3y}{4}\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x+y\le 4\\0\le x-3y\le 8\end{cases}$

(2)$\begin{cases}0\le x+y\le 4\\0\le x-3y\le 8\end{cases}$作圖如附圖之區域



頂點為 (0，0)，(3，1)，(5，–1)，(2，–2)

$\therefore$ 面積為$\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}0&3&5&2&0\\0&1&-1&-2&0\end{Vmatrix}=\frac{1}{2}\times 16=8$

(練習1) 某人手邊有 50 元，打算購買橘子和香瓜，橘子的個數至少要是香瓜個數的 2 倍，若橘子每個 3 元，香瓜每個 4 元，問有幾種可能的買法（當然包括橘子與香瓜都不買的情形）。(A)40 (B)52 (C)30 (D)50 (E)54

Ans：(E)

(練習2) 若 k 為整數且滿足點(3,–1)，(2,–4)在直線 $2x+3y+k=0$ 的相反兩側，則 k 的總和為________。Ans：25

(練習3) A(2,1)，B(3,4)，若線段$\overline{AB}$與直線 $y=mx+3$ 相交(有公共點)，

則實數 m 的範圍為______________。Ans：$-1\le m\le\frac{1}{3}$

(練習4) 設 P (－2，3)，Q (4，0)，R (－2，－3)為$\triangle PQR$ 的頂點，

若 A ($2t+1$，t) 為三角形及其內部的一點，則實數 t 的範圍為

____________。Ans：$\frac{-3}{2}\le t\le\frac{3}{4}$ (說明：$\boxed{\text{三角形}}$及其內部的一點⇒有等號)

(練習5) 試作不等式 $6-2x\le y-2\le x\le 6$ 的圖形，並求此圖形所圍成的區域的面積。

Ans：24

(說明：$6-2x\le y-2\le x\le 6\Rightarrow\begin{cases}6-2x\le y-2\\y-2\le x\\x\le 6\end{cases}$ 求三直線所圍面積即為所求)

(練習6) 若 $0\le a\le 2$，$2\le b\le 4$，且點 $P(x,，y)$滿足 $x=2a-b+2$，$y=a+b-3$，

(A) $a=\dfrac{x+y+1}{3}$　(B) $b=\dfrac{-x+2y+8}{3}$

(C) $(x，y)$ 滿足聯立不等式$\begin{cases}-1\le x+y\le 5\\ -4\le x-2y\le 2\end{cases}$

(D) 所有 P 點所表示的區域爲一個平行四邊形

(E) 所有 P 點所表示的區域面積爲 12。Ans：(A)(B)(C)(D)(E)

(乙)其他二元不等式解的區域

若 $f(x,y)=0$ 爲一封閉區域，

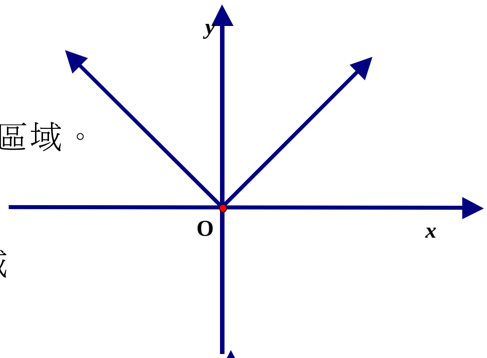
則通常滿足 $f(x,y)>0$ 或 $f(x,y)<0$ 的點(x,y)會形成一個區域。

例一：

考慮 $y=|x|$的圖形(此時 $f(x,y)=y-|x|$)，如右圖，

它是一個折線，而 $f(x,y)>0$ 的圖形爲折線上方的區域

$f(x,y)<0$ 的圖形爲折線下方的區域

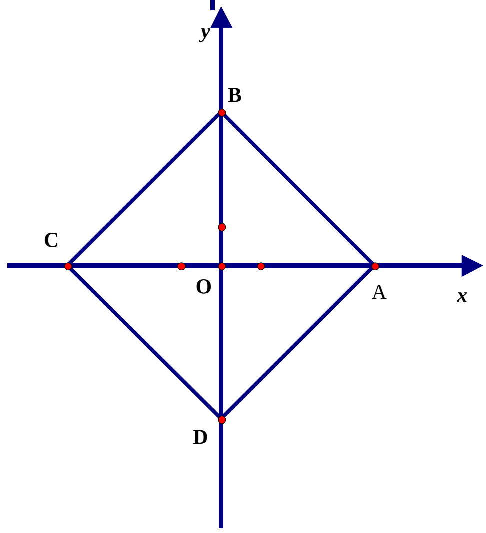


例二：

如右圖，考慮 $f(x,y)=|x|+|y|-4=0$ 的圖形爲菱形 ABCD

則滿足 $f(x,y)<0$ 的點(x,y)會形成菱形 ABCD 的內部。

而滿足 $f(x,y)>0$ 的點(x,y)會形成菱形 ABCD 的外部。



[例題4] 試圖示$|x|\le y\le 11-|x-6|$所表示之區域，並求此區域面積。

Ans：面積$=\dfrac{85}{2}$

[例題5] 求不等式$(3|x|+2|y|-6)(2|x|+3|y|-6)\le 0$的圖形之面積爲__。Ans：$\dfrac{24}{5}$

[例題6] (1)請畫出 $y=||x|-2|$之圖形，

(2)請就 k 的值，討論$||x|-2|=k$ 的實數解的個數。

[分析]：

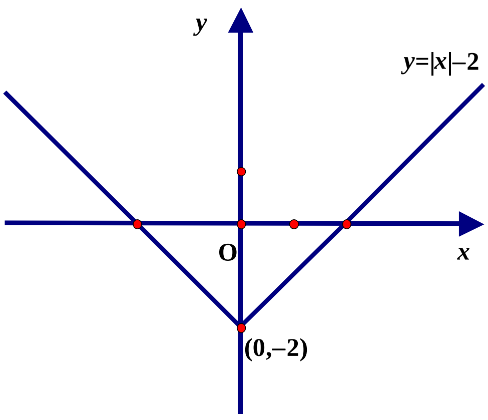
(1)將 $y=f(x)$的圖形在 x 軸下方的部分對 x 軸作對稱，再加上 $y=f(x)$原先在 x 軸上方的圖形，即可構成 $y=|f(x)|$的圖形。

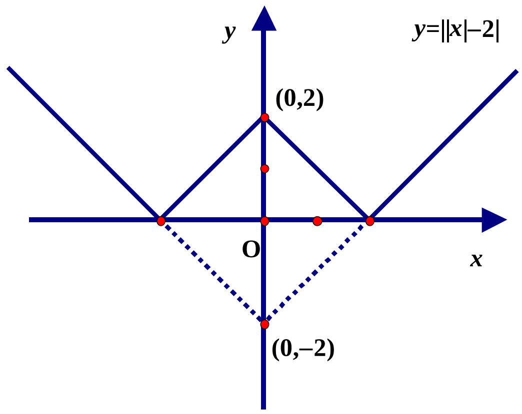
(2)$f(x)=k$ 的實數解個數=$\begin{cases} y=f(x) \\ y=k \end{cases}$交點個數。

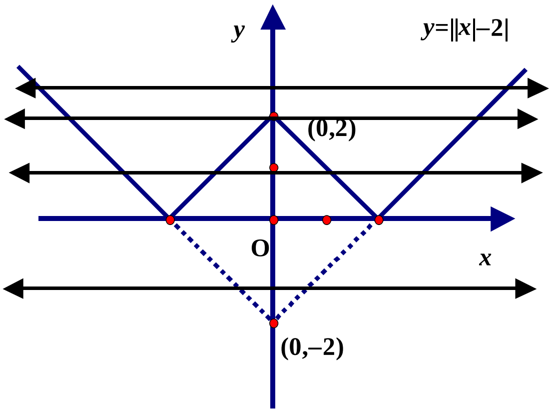
[解法]：

先畫 $y=|x|-2$ 的圖形：

再將 $y=|x|-2$ 的圖形在 x 軸下方的部分對 x 軸作對稱，即可得 $y=||x|-2|$之圖形







(2)考慮$\begin{cases} y=||x|-2| \\ y=k \end{cases}$的交點個數。可得

$k<0$ 無實數解。

$k=0$ 或 $k>2$ 有二個實數解。

$0<k<2$ 有四個實數解。

$k=2$ 有三個實數解。

(練習7) 求$|12x-4|+|6y-3|\le 24$所圍面積=________。Ans：16

(練習8) 下列哪些方程式圖形所圍的面積與$\dfrac{|x|}{2}+\dfrac{|y|}{3}=1$所圍區域面積大小相等？(1)$\dfrac{|x-1|}{2}+\dfrac{|y-2|}{3}=1$ (2)$\dfrac{|x|}{3}+\dfrac{|y|}{2}=1$ (3)$\dfrac{|x-2|}{3}+\dfrac{|y-1|}{2}=1$
(4)$2|x|+3|y|=1$ (5)$3|x|+2|y|=6$ Ans：(1)(2)(3)(5)

(練習9) 求作$|x+1|\le y\le 5-|x-2|$的圖形，其區域面積為_______。Ans：8

(練習10) 作下列不等式之圖形,
並求其面積：$(|x|+|y|-1)(|x|+|y|-2)(|x|+|y|-3)\le 0$。
Ans：面積＝12

(練習11) $y=||x|-2|$之圖形與$y=mx+5$之圖形恰有二個交點，請問m的範圍=？
Ans：$m\le -1$或$m\ge 1$

(丙)線性規劃

許多數學應用問題在二元一次不等式組的限制下，尋求符合實際應用的最佳解答，這是應用數學中的一門學問，稱為**線性規劃(Linear Programming)**。
常見的有兩類：
①某些條件限制下，研究最節省的人力或物力就可完成目標。
②在一定的人力、物力限制下，創造最高的利潤。

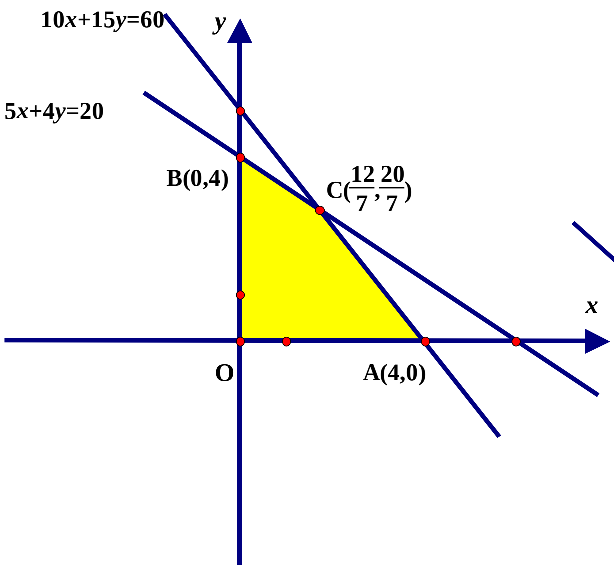
例子：某工廠用兩種不同的原料均可生產同一產品，若採用甲原料，每噸成本1000元，運費500元，可生產出產品90公斤；若採用乙原料，每噸成本1500元，運費400元，可生產出產品100公斤。現在工廠的預算是成本不可超過6000元，運費不得超過2000元，請問在此預算下，最多可生產出多少公斤的產品？
[解法]：

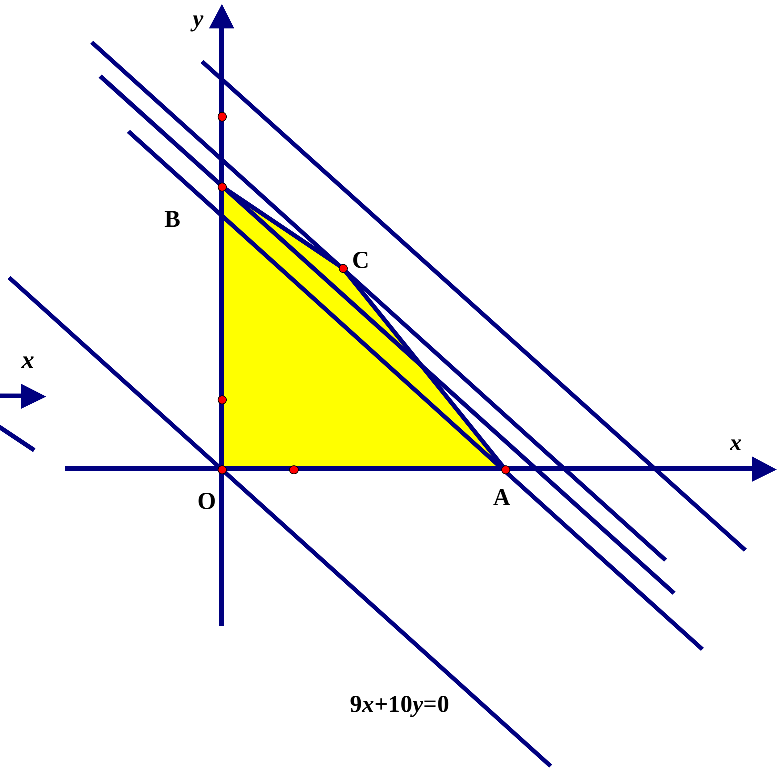
(1)設甲原料用x噸，乙產品用y噸根據預算可得聯立不等式組：$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 10x+15y\le 60 \\ 5x+4y\le 20 \end{cases}$，

將這個聯立不等式組的解(x,y)畫在坐標平面上所形成的區域，稱為**可行解區域**。
甲原料用x噸，乙產品用y噸可以生產出$f(x,y)=90x+100y$公斤
因此整個問題的核心，就是要在聯立不等式組的條件下(在預算的限制下)，
求$f(x,y)$的最大值，我們稱$f(x,y)$為**目標函數**。這樣的過程就是線性規劃最簡單的形式：

接下來的問題是，要如何在聯立不等式組：$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 10x+15y\le 60 \\ 5x+4y\le 20 \end{cases}$的條件下，

找出目標函數$f(x,y)$= $90x+100y$的最大值。
(2)首先，先畫出可行解區域，如左下圖
當點P(x,y)在可行解區域中，目標函數$f(x,y)=90x+100y$的最大值爲何？
令$k=90x+100y$，因此可以將 $90x+100y=k$視爲一群平行直線 $9x+10y=0$ 的直線
在可行解區域中的點P(m,n)，代入$f(x,y)$得到的k_0
⇔ 直線 $90x+100y=k_0$會與可行解區域交於點P(m,n)
另一方面，
直線 $90x+100y=k_1$與可行解區域沒有交點
⇔可行解區域中的任何點P(m,n)代入$f(x,y)$中都不會有k_1的值產生





根據前面的說明，可知在與可行解區域有交點的平行直線中，要找出最大的 k 相當於求最大的 x 截距$\frac{k}{90}$，。因此從圖形可以看出來，當平行線通過 C 點時，會有最大的 x 截距$\frac{k}{90}$，所以當$(x,y)=(\frac{12}{7},\frac{20}{7})$時，$f(\frac{12}{7},\frac{20}{7})=440$ 爲最大值。
(3)頂點法：
從另一觀點來看，當可行解區域爲凸區域時，而目標函數爲 $f(x,y)$= $90x+100y=k$ 視爲一群平行直線，而 k 的最大值與最小值都會發生在頂點之處。因此另一方法就是將各頂點代入 $f(x,y)$，即可求出最大值。

頂點	A(4,0)	B(0,4)	C($\frac{12}{7}$,$\frac{20}{7}$)	O(0,0)
$f(x,y)$= $90x+100y$	360	400	440	0

線性規劃的方法

(a)整理資料，依問題設定變數，列出$\boxed{\text{不等式組}}$及$\boxed{\text{目標函數}}$。

(b)依聯立不等式組繪製圖形，找出$\boxed{\text{可行解區域}}$。

(c)利用頂點法或平行線法找極值，(注意格子點的限制)

求得的最大值或最小值就是本問題的$\boxed{\text{最佳解}}$。

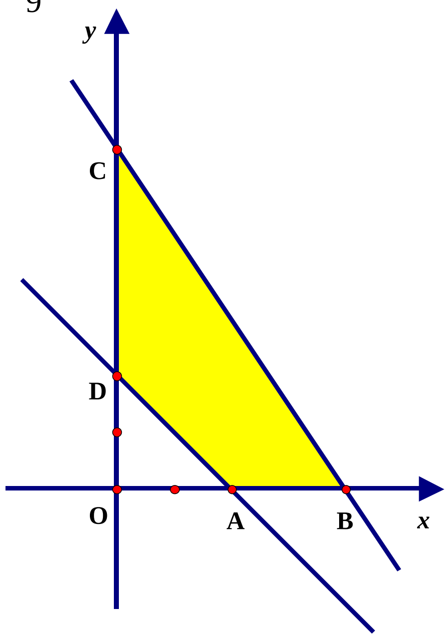
[例題7] 若x,y滿足$x\geq0,y\geq0$，$3x+2y-12\leq0$，$x+y-2\geq0$，則

(1)$(x,y)=$？時，$2x-y+3$ 有最大值=？

(2)x^2+y^2的最大值=？最小值=？

(3)$\dfrac{y+2}{2x+1}$ 的最大值=？最小值=？

Ans：(1)$(x,y)=(4,0)$，最大值=11 (2)36，2 (3)8，$\dfrac{2}{9}$

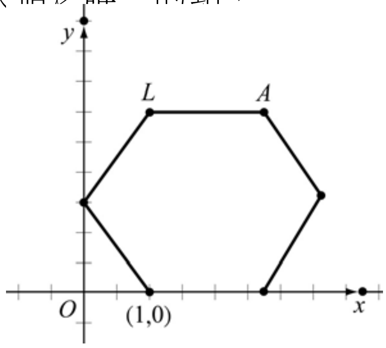


[例題8] 設(x,y)滿足$\begin{cases}2x-y-7\leq0\\2x-5y+13\geq0\\2x+3y-11\geq0\end{cases}$，若$x=4$，$y=1$可使$kx-y+27$取得最大值，求

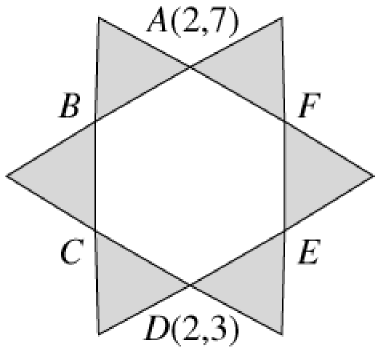
k值的範圍為________。Ans：$\dfrac{-2}{3}\leq k\leq2$

(練習12) 設x、y滿足 $2\le x\le 5$，$x+y\le 8$，$x+3y\ge 5$，試求：
(1) $2x+y+3$ 的最大值為_______，最小值為_________。Ans：16,8
(2) x^2+y^2的最大值為_________，最小值為__________。Ans：40,5
(3) $\dfrac{y+1}{x+1}$的最大值為__________，最小值為__________。Ans：$\dfrac{7}{3}$,$\dfrac{1}{6}$

(練習13) 設一線性規畫的可行解區域為如圖所示之正六邊形內部(含邊界)，而目標函數為 $y-ax$，若已知 A 點為此目標函數取得最大值之唯一的點，則 a 值的範圍要有限制。
若以不等式表示，則 a 之範圍為________。
Ans：$-\sqrt{3}<a<0$【87 自】



(練習14) 如圖$ABCDEF$為正六邊形，
將各邊延長形成一個六角星形。
令正六邊形所圍之區域為R_1，
灰色區域為R_2，
設 $f(x,y)=5x-4y$，
則 $f(x,y)$在R_1上之最大值為_______，
$f(x,y)$在R_2上之最小值為_______。
Ans：$-6+5\sqrt{3}$；$-22-5\sqrt{3}$【84 自】



(練習15) 在$|x|\le\dfrac{1}{2}$，$y\ge 0$，$|x|+y\le 1$ 的條件下，
求 $3x+8y$ 的最小值與最大值。
Ans：$\dfrac{-3}{2}$，8

[例題9] 一農民有田 2 甲，根據他的經驗；
若種水稻，每年成本為每甲 12 萬元，產量為每甲 8000 公斤，售價為每公斤 30 元；
若種花生，每年成本為每甲 4 萬元，產量為每甲 2000 公斤，售價為每公斤 50 元；
假設今年他只有 20 萬元成本，且只種水稻和花生，試問這兩種作物應各種若干甲，才能得到最大利潤？
Ans：水稻 1.5 甲，花生 0.5 甲，最大利潤 21 萬元

[解法]：

設水稻種 x 甲，花生種 y 甲

目標函數：$f(x,y)=x\times 8000\times 30+y\times 2000\times 50-200000$

$=(24x+10y-20)\times 10000$

可行解區域：$\begin{cases} x+y\le 2 \\ 12x+4y\le 20 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ 當 $x=\frac{3}{2},y=\frac{1}{2}$時，$f(x,y)$有最大值 210000

[例題10] 某歌唱訓練班根據以往的經驗得知：

每花 10 萬元在報章雜誌上替歌手打廣告可以提升歌手的形象指數 5 點,知名度指數 10 點；反之，若是在電台上，同樣花 10 萬元替歌手打廣告，則可以提升歌手的形象指數 6 點，知名度指數 4 點。

根據市場調查發現成爲名歌星的形象指數至少 160 點,知名度指數亦至少 160 點，而且綜合指數(形象指數與知名度指數的和)至少 360 點。試問：歌唱訓練班要讓一位新歌手(假設其形象指數與知名度指數皆爲 0)成爲名歌星至少應該花多少廣告費?這些廣告費報章雜誌與電台應各分配多少,效果最好。(請在坐標平面上畫圖求解) 【91 指定考科乙】

Ans：至少 290 萬元廣告費，報章雜誌分配 140 萬元，電台分配 150 萬元。

[例題11] 【實際可行解只爲整數：格子點】
有甲、乙兩種維他命丸，
甲種每粒含 5 單位維他命 A，9 單位維他命 B，每粒售價 10 元；
乙種每粒含 6 單位維他命 A，4 單位維他命 B，每粒售價 8 元。
假設每人每天最少需要 29 單位維他命 A 及 35 單位維他命 B，
則這兩種維他命丸應各吃幾粒(完整的維他命)，
才能使花費最少而能從中攝取足夠的維他命 A 與 B?
Ans：每天吃甲，乙兩種維他命丸各 3 粒，達維他命需求量且花費最小=54 元
[解法]：

(練習16) 某公司所生產的產品，存放在甲、乙兩倉庫分別有 50 單位、40 單位，現在市場 A、市場 B 分別的需求量是 20 單位、30 單位，下表是各倉庫運輸到各市場的每單位運輸成本：

	市場 A	市場 B
倉庫甲	500元	450元
倉庫乙	400元	300元

在滿足 A、B 市場的需求下，最節省的運輸成本爲______________元。
Ans：18000【92 社】

(練習17) 某產品用 A 種原料每噸可以生產 25 公斤，用 B 種原料每噸可以生產 12 公斤，此兩種原料 A，B 每噸價格分別爲 15 萬元，12 萬元，在生產的過程中要處理的廢物，若用 A 種原料每噸有 75 公斤，若用 B 種原料每噸有 25 公斤，今$\boxed{\text{假設用原料 } A，B \text{ 各 } x，y \text{ 噸}}$，則
(1)當原料價格在 240 萬元以下時應滿足
(A)$5x+4y\le 80$(B)$4x+5y\le 80$(C)$3x+y\le 30$(D)$x+3y\le 30$(E)以上皆非
(2)廢物總量在 750 公斤以下時
(A)$5x+4y\le 80$(B)$4x+5y\le 80$(C)$3x+y\le 30$(D)$x+3y\le 30$(E)以上皆非

(3)在(1)(2)之條件下，最大產品量爲（四捨五入計算）

(A)392(B)298(C)296(D)390(E)297 公斤

Ans：(1)A (2)C (3)E

(練習18) 某公司有甲、乙二廠生產三種型式的彩色電視機，
其營業狀況如下表所示：

每日生產量（架）＼廠別／型式	甲廠	乙廠	每週至少需要量（架）
I	12	3	36
II	4	4	24
III	6	12	48
每日開支（元）	20000	15000	

問甲、乙兩廠每週開工幾日就可以最節省的方式供應所需?

Ans：每週甲開工 2 日，乙開工 4 日最節省

(練習19) 王先生採收酪梨共獲 1080 粒，要打包裝箱上市。已知大箱一箱可裝 25 粒，小箱一箱可裝 8 粒；每個大箱子成本 60 元，每個小箱子成本 20 元。試問能將這 1080 粒的酪梨剛好裝完，所用的箱子成本最少爲______________元。Ans：2600【89 社】

【詳解】

設用大箱子 x 個，小箱子 y 個

$25x+8y=1080 \Rightarrow$ 設 $x=8t$，$y=135-25t$ 且 $\begin{cases} x=8t \geq 0 \Rightarrow t \geq 0 \\ y=135-25t \geq 0 \Rightarrow t \leq 5.8 \end{cases}$

所以 $t=0,1,2,3,4,5$

成本：$60x+20y=60(8t)+20(135-25t)=2700-20t$

當 $t=5$ 時，成本有 Min=2600

綜合練習

(1) 試作不等式$(2x+y-8)(x+y-5)\le 0$與 x 軸及 y 軸圍成的區域及其面積。

(2) 設聯立方程組$\begin{cases}|4x+y|\le 2\\ |x-y|\le 2\end{cases}$的解形成的區域面積爲________。

(3) 設 $A(4,4), B(2,1)$ 爲 xy 平面上兩點，而直線 $y=ax+b$ 與線段 $\overline{AB}$ 相交，作一圖，以 a 爲橫坐標，b 爲縱坐標，將數對(a,b)的範圍表示出來。
【89 自】

(4) 設 $A(-1,3)$，$B(4,1)$，$C(5,6)$，直線 $y=mx-1$ 恆與 ΔABC 相交，則 m 的範圍爲________。

(5) 坐標平面上滿足聯立不等式$|x|+|y|\le 2$，$|x|+|y-1|\le 2$ 之區域的面積爲________。【91 指定考科甲】

(6) (a)試求不等式$\begin{cases}(x+y-1)(2x-y+2)\le 0\\ x-y\le 0\\ y\le 2\end{cases}$ 所圍成圖形之面積爲何？

(b)若直線 $y=mx-3$ 與(a)圖形相交，則實數 m 之範圍爲何？

(7) 考慮滿足下列兩個條件的二位數：
(1)個位數字的 2 倍減去十位數字的差大於 2。
(2)十位數字的 3 倍與個位數字的和小於 23。
求其中最大的一個二位數爲多少？

(8) 在一個牽涉到兩個未知量, $x\,y$ 的線性規劃作業中，有三個限制條件。坐標平面上符合這三個限制條件的區域是一個三角形區域。假設目標函數 $ax+by$ (a , b 是常數)，在此三角形的一個頂點(19,12)上取得最大值 31，而在另一個頂點(13,10)取得最小值 23。現因業務需要，加入第四個限制條件，結果符合所有限制條件的區域變成一個四邊形區域，頂點少了(19,12)，新增了(17,13)和(16,11)。在這四個限制條件下，請選出正確的選項。
(A) $ax+by$ 的最大值發生在(17,13)　(B) $ax+by$ 的最小值發生在(16,11)
(C) $ax+by$ 的最大值是 30　(D) $ax+by$ 的最小值是 27
【92 指定考科甲】

(9) 爲預防禽流感， 營養師吩咐雞場主人每天必須從飼料中提供至少 84 單位的營養素 A、至少 72 單位的營養素 B 和至少 60 單位的營養素 C 給他的雞群。這三種營養素可由兩種飼料中獲得，且知第一種飼料每公斤售價 5 元並含有 7 單位的營養素 A，3 單位的營養素 B 與 3 單位的營養素 C； 第二種飼料每公斤售價 4 元並含有 2 單位的營養素 A，6 單位的營養素 B 與 2 單位的營養素 C。
(1)若雞場主人每天使用 x 公斤的第一種飼料與 y 公斤的第二種飼料就能符合營養師吩咐，則除了 $x\ge 0$ $y\ge 0$ 兩個條件外， 寫下, $x\,y$ 必須滿足的不等式組。
(2)若雞場主人想以最少的飼料成本來達到雞群的營養要求， 則, $x\,y$ 的值爲何？ 最少的飼料成本又是多少？ (2006 指定考科乙)

(10) 設 x、$y\in R$ 且滿足 $x\ge 0$ ，$y\ge 0$ ，$3x+y\le 3$ ，$2x+3y\le 6$ ，
則下列各選項何者正確？
(A)$2x-y$ 的最大值為 2　　　(B)$2x-y$ 的最小值為-1
(C) $(x-2)^2+(y-1)^2$ 的最小值為 $\frac{8}{5}$　(D) $\frac{y+1}{x+2}$ 的最大值為 $\frac{3}{2}$

(11) 南北生技農場今年生產一種植物共 1 萬公斤，該植物每 200 公斤可提煉 1 公斤的中草藥，每 5 公斤可製成 1 公斤的健康食品。中草藥每公斤可獲利 5000 元，健康食品每公斤可獲利 100 元；根據市場調查，每年中草藥最大需求量為 30 公斤，健康食品最大需求量是 1800 公斤。如果南北生技農場決定提煉中草藥x公斤，並製成健康食品y公斤，設P為其可獲利潤。
(a) 試以x,y表示P。
(b) 如果想獲得最大利潤，則x,y的值為何？說明理由。(2004 指定乙)

(12) 一農民有田五甲，手頭資金共 48000 元，依他的經驗，在他田地上種稻每甲每年產量為 8000 公斤，種花生則為 2000 公斤，但種稻成本每甲每期為 16000 元，花生為 4000 元。今設稻米之收益為每公斤 2.6 元，花生為 6.5 元。試問這位農民能得到的最大收益為 ＿＿＿＿＿ 元。

(13) 某農夫的果園最少須施氮肥 5 公斤，磷肥 4 公斤，鉀肥 7 公斤。若他從農會買回甲、乙兩種肥料。甲肥料每公斤 100 元，其中含氮 20% ，磷 10% ，鉀 20% ，乙肥料每公斤 140 元，其中含氮 10% ，磷 20% ，鉀 20% 。試問：此農夫必須向農會買甲、乙兩種肥料各多少公斤，加以混合後施肥，才能使花費最少，又有足夠量的氮肥、磷肥和鉀肥？又他的總花費是多少？

(14) 一五金商有二工廠，第一廠有產品 40 單位，第二廠有產品 50 單位，該商人自甲、乙二鎮獲貨單，甲鎮申購產品 30 單位，乙鎮申購產品 40 單位，如果自第一、二廠運產品至甲、乙兩鎮，每單位運費如下表所示，應如何分配二廠產品數量至甲、乙，以使運費最低?
(a)第一廠運＿＿＿＿＿單位到甲鎮，＿＿＿＿＿單位到乙鎮 .
(b)第二廠運＿＿＿＿＿單位到甲鎮，＿＿＿＿＿單位到乙鎮 .
(c)最低運費＿＿＿＿＿元 .

	甲鎮	乙鎮
第一廠	10 元	14 元
第二廠	12 元	15 元

(15) 某貨運公司有載重 4 噸的「小」貨車 7 輛，載重 5 噸的「大」貨車 4 輛，及 9 名司機，現在受託每天至少要運送 30 噸的煤，則
(a) 這家公司有幾種調度車輛的辦法？
(b) 設運送一趟的成本，「小」貨車需花費 500 元，「大」貨車需花費 800 元，則公司如何調派才能使成本最節省？花費多少元？

(16) 設 x,y 為實數，請就 a 的值來討論方程組$\begin{cases} |x|+|y|=a \\ |x+y|+|x-y|=4 \end{cases}$解的個數。

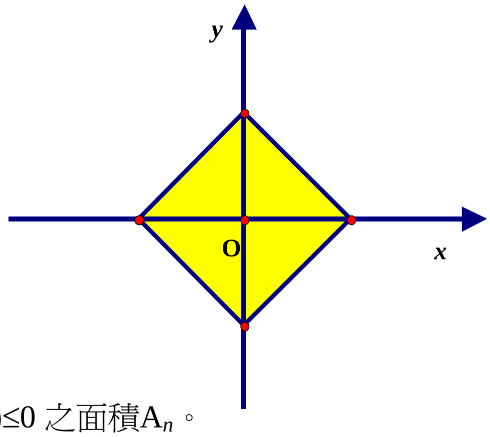
(17) $p\geq 0,q\geq 0,r\geq 0$，$p+q+r=1$，求滿足 $x=p+3q+4r$，$y=2p+q+3r$，之點(x,y)所形成區域面積。

(18) 設 $a\geq b\geq c\geq -2$，$3a+2b-c=4$，則 $a+2b+c$ 的最大值=？

(19) 若 x,y 滿足 $x\geq 0,y\geq 0,2x+y-2\leq 0,x+2y-2\leq 0$，則 xy 的最大值=？最小值=？

進階問題

(20) 在坐標平面上，$|x|+|y|-1\leq 0$ 的圖形，如右圖所示：



(a)請畫出$(|x|+|y|-1)(|x|+|y|-\frac{1}{2})\leq 0$ 的圖形。

(b)請畫出$(|x|+|y|-1)(|x|+|y|-\frac{1}{2})(|x|+|y|-\frac{1}{4})\leq 0$ 的圖形。

(c)請求出$(|x|+|y|-1)(|x|+|y|-\frac{1}{2})(|x|+|y|-\frac{1}{4})\cdots(|x|+|y|-\frac{1}{2^{n-1}})\leq 0$ 之面積A_n。

(d)求出$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$=？

(21) 已知 $0\leq x\leq 1$，$f(x)=|2x-1|$，試求

(a)作出 $y=f(f(x))$之圖形。

(b)滿足方程式 $f(f(f(x)))=x$ 的值有幾個。(91 台北區指定考科模擬測驗 2)

(22) 實係數二次方程式$x^2-ax+b=0$ 的二實根α,β滿足$-1\leq\alpha\leq 0$，$1\leq\beta\leq 2$，如此的(a,b)圍成一區域，試求

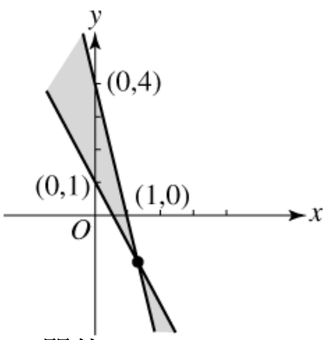
(a)$2a+b$的最大值=？最小值=？ (b)a^2+b^2的最小值=？

綜合練習解答

(1) $\frac{11}{2}$

(2) $\frac{16}{5}$

(3) $(4a+b-4)(2a+b-1)\leq 0$

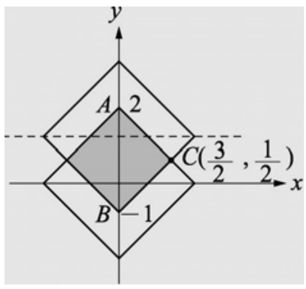


(4) $m\leq -4$ 或 $m\geq\frac{1}{2}$

(5) $\frac{9}{2}$【詳解】

$|x|+|y-1|=2$ 即 $|x|+|y|=2$ 上移 1 單位

可得所求面積之對角線$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=\frac{3}{\sqrt{2}}$，所以面積=$\frac{9}{2}$



(6) (a)$\frac{29}{12}$ (b)$m\leq\frac{-1}{2}$或 $m\geq 7$

(7) 一共有 32 個可能的整數解，其中 57 最大。

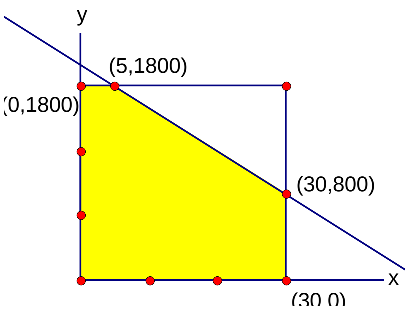
(8) (A)(C)

(9) (1)$\begin{cases}7x+2y\geq 84\\ x+2y\geq 24\\ 3x+2y\geq 60\end{cases}$ (2)目標函數 $f(x,y)=5x+4y$ 在$(x,y)=(18,3)$時有最小值 102。

(10) (A)(C)(D)

(11) Ans：(a) $P=5000x+100y$ (b) 依題意(x,y)滿足

$:\begin{cases}0\leq x\leq 30\\ 0\leq y\leq 1800\\ 200x+5y\leq 10000\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leq x\leq 30\\ 0\leq y\leq 1800\\ 40x+y\leq 2000\end{cases}$



可行解區域如右圖$P=5000x+100y$表斜率爲-50的直線在可行解區域平行移動到過$(30,800)$時有最大值，提煉中草藥 30 公斤，製成健康食品 800 公斤，可獲得最大利潤

(12) 83200 元

(13) 甲肥料 30 公斤，乙肥料 5 公斤時，總花費 3700 元最少

(14) (a)30，10，(b)0，30，(c)890

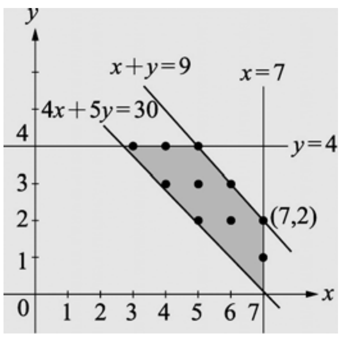
(15) (a) 10 種；(b)小貨車 5 輛，大貨車 2 輛，花費最省花費 4100 元

【詳解】

(1)

設小貨車用 x 輛，大貨車用 y 輛

$\begin{cases}0\leq x\leq 7\\ 0\leq y\leq 4\\ 0\leq x+y\leq 9\\ 4x+5y\geq 30\end{cases}$ $x，y\in Z$



在可行解區域可找到的格子點有

x	3	4	5	6	7
y	4	3，4	2，3，4	2，3	1，2

共有 10 個格子點$\Rightarrow$有 10 種調度車輛的方式

(2)目標函數 $f(x，y)=500x+800y$

將格子點代入，則 $f(5，2) = 4100$ 有最小值

∴ 需小貨車 5 輛，大貨車 2 輛，花費最省爲 4100 元

(16) 若 $a=2$ 或 4，則有 4 組解。若 $2<a<4$，則有 8 組解，若 $a<2$ 或 $a>4$，則無解。

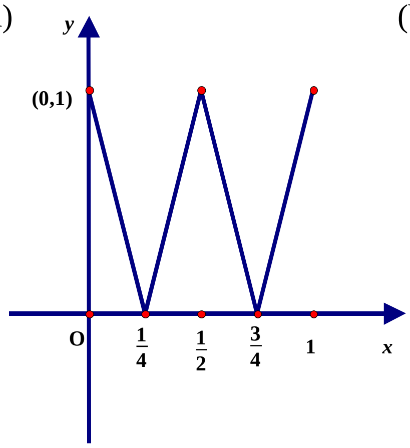
(17) $\frac{5}{2}$ [提示：用 x,y 表示 $p,q,r \Rightarrow p=\frac{-2x+y+5}{5},q=\frac{x-y+1}{2},r=\frac{-x+3y-5}{10}$，再根據 $p\geq 0,q\geq 0,r\geq 0$ 求出滿足條件之點(x,y)的區域。]

(18) 4

(19) $\frac{4}{9}$，0

(20) (c)$A_n=\frac{8}{5}[1-(\frac{-1}{4})^n]$ (d)$\frac{8}{5}$

(21) (a)



(b)8 個解

[提示：先作 $y=|2x-1|$的圖形，再將 $y=|2x-1|$的圖形沿 y 軸伸縮 2 倍再下移 1 單位，再將 x 軸下方的圖形對 x 軸作鏡射即可得(a)的圖形。(b)$y=f(f(f(x)))$的圖形是將(a)的圖形沿 y 軸伸縮 2 倍再下移 1 單位，再將 x 軸下方的圖形對 x 軸作鏡射所得到的，再討論與 $y=x$ 的交點即可知有 8 個交點。]

(22) (a)4，-1 (b)$\frac{1}{2}$

[提示：令$y=f(x)=x^2-ax+b$，根據$-1\leq\alpha\leq 0$，$1\leq\beta\leq 2$

可得$f(-1)>0$，$f(0)<0$，$f(1)<0$，$f(2)>0 \Rightarrow \begin{cases} 1+a+b>0 \\ b<0 \\ 1-a+b<0 \\ 4-2a+b>0 \end{cases}$]