第一章向量

§1–1 有向線段與向量

(甲)向量的引入

(1)以「位移」為例：某甲從A點出發，朝西北方前進，走了 10 公里到達B地。某乙從A點出發，朝北走了 10 公里到達C點，我們考慮從A點到B點與C點雖然路徑相同，但方向卻不一樣。有向線段AB的始點A其方向為西北方，其長度 10 公里。同樣的有向線段AC的始點A其方向為北方，長度為 10 公里。

(2)以「力」為例：甲、乙兩人拔河，甲用大小 2F的水平力向右邊拉，乙用大小F的水平力向左邊拉，我們亦可用有向線段來表示這兩個力，其始點為施力點，方向分別是兩力的方向，而長度分別是兩力的大小。

像位移、力、速度、加速度等，這些物理量包含大小與方向雙重觀念，我們引進「**向量**」的觀念，將這些物理觀念(朝西北移動 10 公里、向右 2F的水平拉力)看成有向線段，而引入向量，物理觀念經數學化之後，便於物理觀念的溝通與物理量的計算。

(3)向量的概念：

(a)以A為始點，B為終點的有向線段，我們稱之為向量，符號：$\overrightarrow{AB}$，它的方向是由A指向B，大小為$\overline{AB}$，記為$|\overrightarrow{AB}|$，即$|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}$。當A=B時，$\overrightarrow{AB}$為零向量，記為$\overrightarrow{AB}=\vec{0}$；$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{BA}$長度相等，但方向相反，記為：$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$。

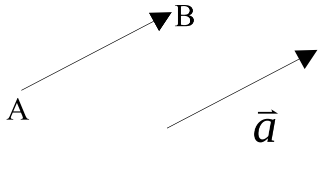
注意：$\vec{0}$**的大小為** 0，**但沒有方向**。

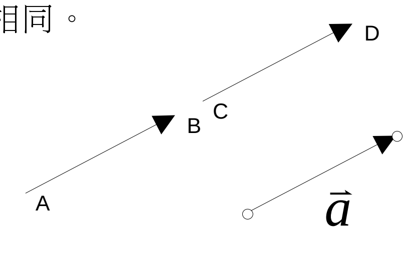
(b)兩個向量若大小相等，方向相同，則稱兩個向量相等。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\mathbf{CD}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{CD}}$ 方向相同且$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=|\overrightarrow{\mathbf{CD}}|$

根據這個結果可知，**向量可以自由的平行移動**。

(c)給定一個向量$\vec{a}$，則過任一點A都可作一個向量$\overrightarrow{AB}$與$\vec{a}$同向並等長，記為$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$。同樣地，可用另一個向量$\overrightarrow{CD}$來代表$\vec{a}$，只要$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{CD}$代表同一個向量，即兩者的大小相等，方向相同。





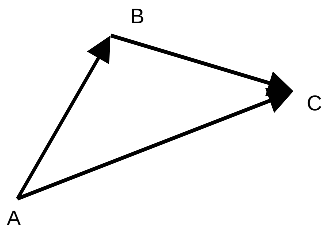
(練習1) 正六邊形 ABCDEF 的邊長為 2，設$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，由此正六邊形的頂點為始點或終點，可決定多少不同的向量？(不包含零向量)
(A) 6　(B) 12　(C) 18　(D) 36　(E) 30。Ans：(C)

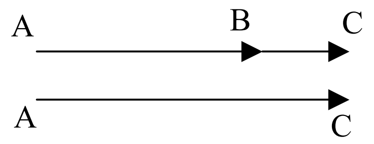
(乙)向量的加減法

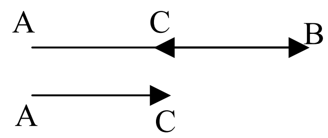
(1)向量的加法：給定二個向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 如何定義 $\vec{a}+\vec{b}$ 呢？

(a)三角形法：由向量的意義，可設 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，

則定義 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ (可以用位移爲例)



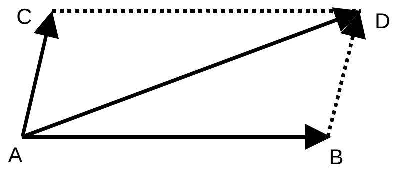




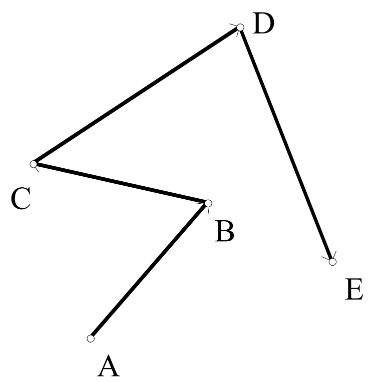
(b)平行四邊形法：由三角形法，如果 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，則 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AD}$，

ABDC爲平行四邊形。(可以用合力爲例)

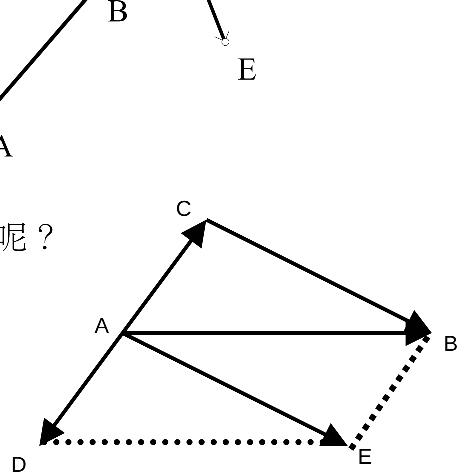
[說明]：因爲 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$



[討論]：如右圖，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=$？



(2)向量的減法：　給定兩個向量 $\vec{a}, \vec{b}$，如何定義 $\vec{a}-\vec{b}$ 呢？



[說明]：設 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AC}$，我們定義 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

根據右圖可知 $\overrightarrow{AD}=-\vec{b}$，ADEB爲平行四邊形，

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$

即 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$。

[結論]：

(a)任何一個向量$\overrightarrow{BC}$，我們都可以把它拆解爲$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$兩向量的和，其中A爲任一點。即$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$。(可以以位移爲例)

(b)任何一個向量$\overrightarrow{BC}$，我們都可以把它拆解爲$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$兩向量的差，其中A點爲任一點。即$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$。(可以相對運動爲例)

(3)向量加法的性質：

(a)交換性：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(b)結合性：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

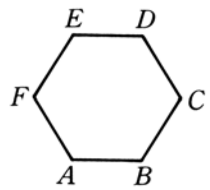
(c)零向量：$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$，$\vec{0}$表示起點與終點重合的向量，稱爲零向量。

(d)可逆性：對於任一向量$\vec{a}$，若以$\overrightarrow{AB}$表示$\vec{a}$，則$\overrightarrow{BA}$所表示的向量以$-\vec{a}$表示，

由於$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$，故$\vec{a}+(-\vec{a})=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$

[例題1] 在正六邊形ABCDEF中，令$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，試以$\vec{a}$和$\vec{b}$表示下列諸向量：(1)$\overrightarrow{AC}$ (2)$\overrightarrow{BD}$ (3) $\overrightarrow{CD}$。

Ans：(1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $2\vec{b}-\vec{a}$ (3) $-\vec{a}+\vec{b}$

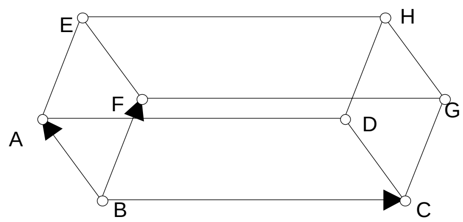


(練習2) 正六邊形 ABCDEF，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，則 Ⓐ $\overrightarrow{BE}=2\vec{b}-2\vec{a}$ Ⓑ $\overrightarrow{BD}=2\vec{b}-\vec{a}$ Ⓒ $\overrightarrow{BF}=\vec{b}-2\vec{a}$ Ⓓ $\overrightarrow{BF}=2\vec{a}-\vec{b}$ Ⓔ $\overrightarrow{BD}=\vec{a}-2\vec{b}$。

Ans：(A)(B)(C)

(練習3) 如圖所示，設四邊形ABCD、EFGH、DCGH、ABFE、ADHE和BCGF都是平行四邊形，$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BF}=\vec{d}$，試以$\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$表示$\overrightarrow{CE}$和$\overrightarrow{AG}$。

Ans：$\vec{a}-\vec{c}+\vec{d}$，$-\vec{a}+\vec{d}+\vec{c}$



(乙)向量的係數積

(1)向量的係數積

設$\vec{a}$是一個向量，r是一個實數，則$r\vec{a}$仍是一個向量，定義如下：

長度：$|r\vec{a}|=|r||\vec{a}|$

例：$|5\vec{a}|$=_____；$|-100\vec{a}|$=___________

方向：若$r>0$，則$r\vec{a}$與$\vec{a}$同向；

若$r<0$，則$r\vec{a}$與$\vec{a}$反向

若$r=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$，則$r\vec{a}=\vec{0}$

注意：

(a)**$0\cdot\vec{a}$、$r\cdot\vec{0}$ 均為零向量 $\vec{0}$ ，而不是 0。**

(b)**利用係數積可使向量在同向($r>0$)或反向($r<0$)，伸縮向量的長度。**

(2)向量平行與係數積：

當兩向量同向或反向時，稱此兩向量平行。

為了方便起見，我們規定**零向量與任何向量平行**。

向量$\vec{a}$平行$\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ 可找到實數t，使得$\vec{a}=t\vec{b}$或$\vec{b}=s\vec{a}$

例如：設A,B,C為一直線上的三點，且$\overline{AB}:\overline{BC}=3:2$，

則$\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}=\dfrac{-2}{3}\overrightarrow{BA}$。

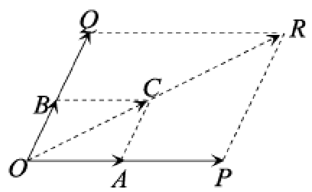
(3)係數積的基本性質

設 $r,s\in$R，$\vec{a}$與$\vec{b}$為二任意向量，則：

(a)分配律一：$r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$

(b)分配律二：$(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$

(c)結合律：$r(s\vec{a})=(rs)\vec{a}$



(4)由方向與長度⇒決定向量的係數積

實例：設相異三點A,B,C共線

若C為線段$\overline{AB}$之中點，則$\overrightarrow{AC}$=________$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CA}$ =________$\overrightarrow{CB}$

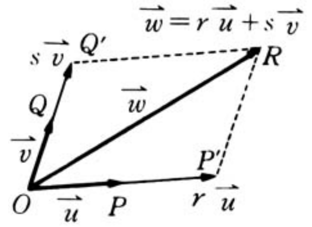
若C在線段$\overline{AB}$上，且$\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，則$\overrightarrow{BC}$=_______$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}$ =________$\overrightarrow{AC}$

(5)線性組合：

若$\vec{u}$和$\vec{v}$不平行，則在$\vec{u}$及$\vec{v}$所決定的平面上的每一個

向量$\vec{w}$都可以寫成$r\vec{u}+s\vec{v}$之形式。

(存在性)設 $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$，$\vec{v}=\overrightarrow{OQ}$，$\vec{w}=\overrightarrow{OR}$，如圖所示：因為O，P，Q，R都在同一平面上，過R點作一直線與 $\vec{v}$ 平行，則此直線必與直線OP相交，設其交點為P′。同理，過R點作一直線與 $\vec{u}$ 平行，則此直線必與直線OQ相交,設其交點為Q′。又因為P′，Q′分別在直線OP與直線OQ上，所以存在實數r與s，使$\overrightarrow{OP'}=r\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ'}=s\overrightarrow{OQ}$，故得



$$
\begin{aligned}
\vec{w} &= \overrightarrow{OR} \\
&= \overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ'} \\
&= r\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OQ} \\
&= r\vec{u}+s\vec{v}。
\end{aligned}
$$

數學上，稱$r\vec{u}+s\vec{v}$之形式稱為$\vec{u}$和$\vec{v}$的線性組合。

(唯一性)：

「設$\vec{u}$和$\vec{v}$不平行，若$\vec{w}=r_1\vec{u}+s_1\vec{v}=r_2\vec{u}+s_2\vec{v}$，則$r_1=r_2$且$s_1=s_2$。」

與「若$r\vec{u}+s\vec{v}=\vec{0}$，則$r=s=0$」等價。

設$\vec{u}$和$\vec{v}$不平行，r,s為實數，證明：若$r\vec{u}+s\vec{v}=\vec{0}$，則$r=s=0$

證明：用反證法，假設$r\neq0$，則$\vec{u}=(\frac{-s}{r})\vec{v}$，

此與$\vec{u}$和$\vec{v}$不平行的前提矛盾，故α=0，再代入$r\vec{u}+s\vec{v}=\vec{0}$，可得$s=0$。

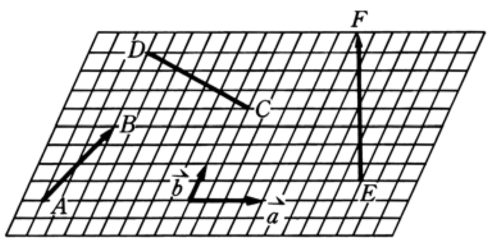
[例題2] 如右圖，試求：

(1)以$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\overrightarrow{CD}$＝__________。

(2)若$\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{EF}$，

則數對(x,y)＝____________。

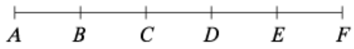
Ans：(1)$\frac{-7}{4}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$　(2) $(\frac{-11}{8},\frac{17}{16})$



(練習4) 已知 $3(\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{a})+\frac{1}{4}(2\vec{b}-5\vec{x}+\vec{c})+4\vec{x}=\vec{0}$，請用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 表示 $\vec{x}$。

Ans：$\vec{x}=\frac{6}{23}\vec{a}-\frac{2}{23}\vec{b}-\frac{1}{23}\vec{c}$

(練習5) 如圖 A，B，C，D，E，F 共線，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}$，則下列敘述何者正確？



(A) $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AF}$ (B) $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$ (C) $\overrightarrow{BE}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{DB}$ (D) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{BC}$

(E) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AF}$。Ans：(A)(B)(C)(D)

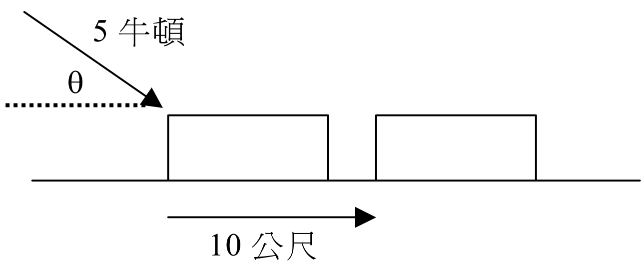
(練習6) 設正六邊形ABCDEF中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CD}=$ ，$\overrightarrow{AD}=x\vec{a}+y\vec{b}$，求 x,y 之值。

Ans：$x=2,y=2$

(丙)向量的內積

物理學告訴我們：一個物體在定力 f 作用下，若在力 f 的方向上有一位移 d，則該力對物體所作的 $W=f\cdot d$；但當力的方向與位移的方向有一夾角時，所作的功就不再單純的只是力與位移的乘積，而與夾角有關。

例子：如右圖，對一個重物施以與水平方向成 θ 角大小 5 牛頓的力 f 使得重物沿水平方向移動 10 公尺，試求所作的功=？



[解答]：因為 f 的水平分力為 $5\cos\theta$，
因此所作的功 $W=(5\cos\theta)\cdot 10$(焦耳)

[數學化]：現在將力 f 視為向量 $\vec{f}$，位移視為向量 $\vec{d}$，因為力與水平方向夾角為 θ，則可視為 $\vec{f}$ 與 $\vec{d}$ 的夾角為 θ，所作的功

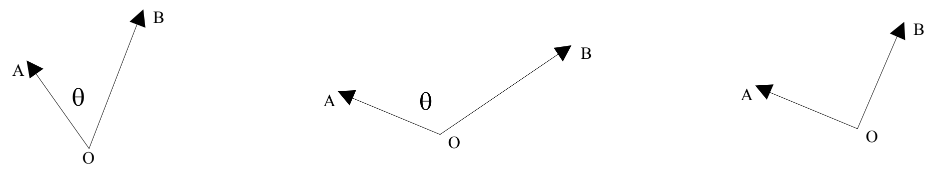
$W=(5\cos\theta)\cdot 10=(|\vec{f}|\cos\theta)\cdot|\vec{d}|=|\vec{f}||\vec{d}|\cos\theta$，其中θ 爲$\vec{f}$與$\vec{d}$的夾角，這樣的概念數學化之後，就稱爲**向量$\vec{f}$與$\vec{d}$的內積**。

(1)向量的夾角：

$\vec{a}$、$\vec{b}$爲平面上的兩個非零向量，根據向量的意義，我們可以將兩個向量平行移動，使得$\vec{a}$與$\vec{b}$的起點重合(如圖)，

即$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$我們定義兩向量的夾角θ爲∠AOB。

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$　　　　$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$　　　　$\theta=\frac{\pi}{2}$



$\theta=0$　　　　$\theta=\pi$

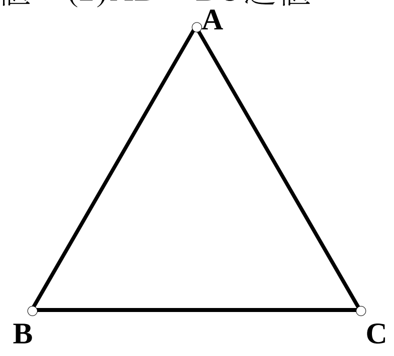
(2)向量的內積：

定義：設$\vec{a}$與$\vec{b}$爲兩向量，θ爲其夾角，定義$\vec{a}$與$\vec{b}$的內積爲$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

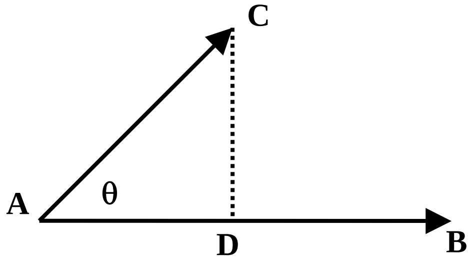
　　，符號記爲：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，"·"念成dot。

　請注意：$\vec{a}\cdot\vec{b}$**是一個實數而非向量，就好像功是一個純量，而沒有方向。**

例：設正三角形ABC之邊長爲 1，求(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$之值；(2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$之值。

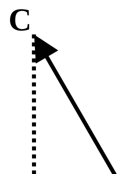


(4)內積與投影量



令$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，θ 爲$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角

(a)當 $0<\theta<\pi$



如圖，$|\vec{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=\overline{AD}$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\overline{AB}\cdot\overline{AD}>0$

(b)當$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

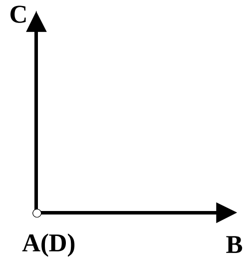
如圖，$|\vec{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=-\overline{AD}$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-\overline{AB}\cdot\overline{AD}<0$

(c)當$\theta=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

如圖，$|\vec{b}|\cos\theta=0$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$



根據前面的說明，我們稱$|\vec{b}|\cos\theta$ 爲 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的**投影量(不一定爲正)**，向量$\overrightarrow{AD}$爲 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影(或正射影)。

因爲 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=(|\vec{b}|\cos\theta)\cdot|\vec{a}|$，故 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 是 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的**投影量**乘以 $\vec{a}$ 的長度。

[討論]：(a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 可以解釋成 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影量乘以 $\vec{b}$ 的長度嗎？

(b) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 會等於 $\vec{b}\cdot\vec{a}$ 嗎？

(4)垂直的向量

當 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角爲直角時，我們稱 $\vec{a}$ **與** $\vec{b}$ **垂直**，記爲 $\vec{a}\perp\vec{b}$。

因爲一向量$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{0}$之夾角可視爲任意角，爲了方便起見，**我們將任何向量與零向量都視爲垂直**，於是$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$表示$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$或$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$或$\theta=\frac{\pi}{2}$，但不管是那一種情形，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$所以規定：$\boldsymbol{\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0}$。

(5)向量的性質：

設$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$爲任意三向量，r爲任意實數，則

(a) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$ (交換性)

(b) $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$ (分配性)

(c) $r(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})=(r\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(r\overrightarrow{b})$

(d) $\overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{a}=0$ (注意：$\overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{a}=0$而非零向量)

(e) $|\overrightarrow{a}|^2=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}\geq 0$，$|\overrightarrow{a}|^2=0\Leftrightarrow\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$

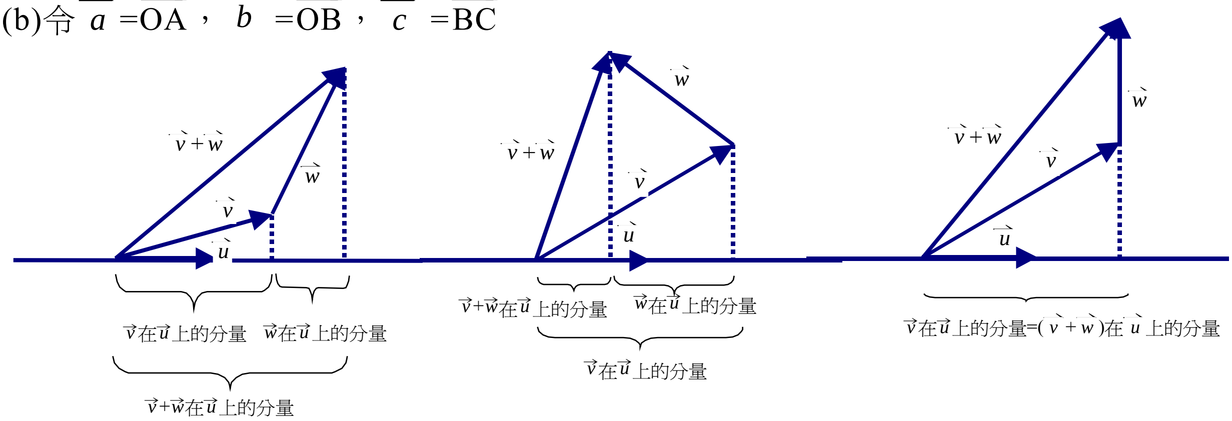
注意：$\boldsymbol{|\overrightarrow{a}|^2=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}}$

這個性質可以讓我們在內積與長度之間轉換，是一個簡單但重要的性質。

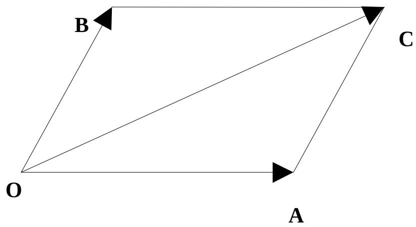
(f) $|\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}|^2=(\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b})=|\overrightarrow{a}|^2\pm 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

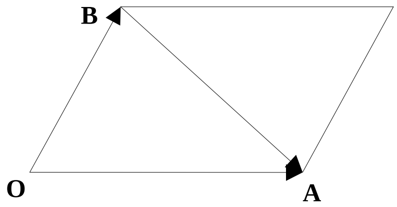
[討論]：利用圖解法去說明(b)(f)的性質。

(b)令$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{BC}$



(f)令$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$

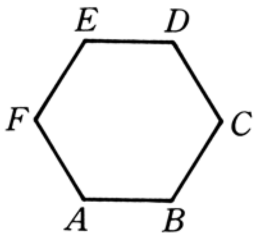




[例題3] 如右圖，ABCDEF 為一正六邊形，則下列向量內積中，何者最大？

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ (B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

(D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$ (E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$。Ans：(B)



[例題4] ΔABC之三邊長為$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$，

則求(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$？ (2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$？ Ans：(1)$\frac{27}{2}$ (2)$\frac{-5}{2}$

[例題5] 二向量$\vec{a}$, $\vec{b}$，若$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，且$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$，

則(1) $\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角為何？ (2)$|3\vec{a}+2\vec{b}|=$？ Ans：(1)$\frac{2\pi}{3}$ (2)$\sqrt{73}$

[例題6] 在四邊形ABCD中，$\angle A=120°$，$\overline{AB}=1$、$\overline{AD}=2$，且$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$，

則$\overline{AC}$的長度為何？ Ans：$\sqrt{13}$

[例題7] 設$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$|\vec{c}|=7$，且$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，試求：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$________。

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________。(3) $\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角為________。

Ans：(1)$\frac{-83}{2}$(2)$\frac{15}{2}$(3)$\frac{\pi}{3}$

(練習7) △ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______。(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$________。Ans：(1)19(2)–6

(練習8) 設 $\vec{a}\perp\vec{b}$，且 $|\vec{a}|=3\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=1$，

若 $\vec{a}+(t^2+5)\vec{b}$ 與 $-\vec{a}+t\vec{b}$ 互相垂直，則實數 $t=$_______。Ans：$t=2$

(練習9) 正三角形ABC的邊長為 2，M為$\overline{BC}$的中點，試求

(1)$(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AC}=$？ (2)$(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AM})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM})=$？Ans：(1)5 (2)−8

(練習10) 一稜長為a之正四面體ABCD，$\overline{CD}$之中點為M，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=$？

Ans：$\frac{a^2}{2}$

(練習11) 設 $\overline{OA}=2$，$\overline{OB}=3$，$\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 之夾角為 60°，試求：

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$_______。(2) $|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=$_________。

(3) $|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}|=$_________。

(4) $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2=$________。

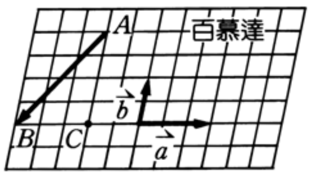
Ans：(1)3(2)$\sqrt{37}$(3)$2\sqrt{7}$(4)26

(練習12) 設三向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ，已知 $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ ，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=-3$，則$|\vec{a}|=$？ Ans：$\sqrt{5}$ (考慮 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})$)

綜合練習

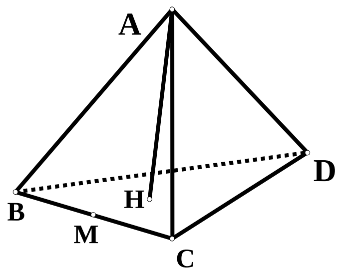
(1) 由正五邊形的邊，可決定__________個不同的向量。

(2) 有一正立方體，其邊長為 1，如果向量 $\vec{a}$ 的起點與終點都是此正立方體的頂點，且$|\vec{a}|=1$，則共有多少個不相等的向量 $\vec{a}$ ？
(A)3 (B) 6 (C)12 (D)24 (E)28 。 (86 學科)

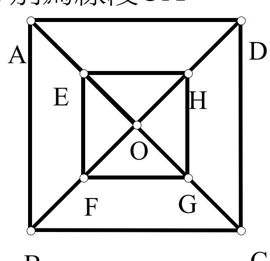


(3) 如右圖，傳說船駛達百慕達三角洲時，
須遵循下列兩個怪異磁場 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 的方向；
否則會神奇失蹤。今一艘救援艇已開到此海域 A 處，
準備前往 B 處尋找一艘載滿黃金的船。若欲完成任務，它應遵循圖示 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 的方向，
走了 $x\vec{a}+y\vec{b}$ ，x，y 是實數，則(A) $x=2$，$y=-1$ (B) $x=-2$，$y=1$
(C) $x=-2$，$y=0$ (D) $x=-1$，$y=1$ (E) $x=-1$，$y=-2$。

(4) 如圖，正四面體ABCD，每邊長為a，M為$\overline{BC}$之中點，
H為ΔBCD的重心，則下列敘述何者是正確的？
(A)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$ (B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ (C)$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$
(D)$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AM}=\dfrac{a^2}{2}$ (E) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{3a^2}{4}$。



(5) 如右圖所示，O為正方形ABCD對角線的交點，且E、F、G、H分別為線段OA，OB，OC，OD的中點。試問下列何者為真？



(A)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}$ (B)$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{EF}$
(C)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$ (D)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GC}$ (E) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$
(86 社)

(6) 若$|\vec{b}|=2|\vec{a}|\neq 0$，且$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b})$，

則$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角為何？

(7) 設正五邊形ABCDE之每一邊長均為 1，則(a)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=$？ (b)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$？

(8) 設ABCD是平行四邊形，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$，則$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$？

(9) 三向量$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$，若$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，且$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$，則
(a) $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$？ (b)求$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角θ，cosθ=？

(10) 圓外切等腰梯形 ABCD，$\overrightarrow{AB}=2$，$\overrightarrow{CD}=6$，$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$，

則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$_________。

(11) 一單位圓之內接ΔABC，圓心O，若 $4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

則(a)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$？ (b)$\overline{AB}=$？

(12) 空間中有A,B,C,D四點。已知$\overline{AB}$=1，$\overline{BC}$ =2，$\overline{CD}$ =3，∠ABC=∠BCD=120°而$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{CD}$之夾角為 60°，則$\overline{AD}$之長為何？ (86 自)

進階問題

(13) △ABC 中，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-2$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=-3$，則：

(a) $|2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}|$ =__________。(b)△ABC 之面積為__________。

(14) 若$|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq 0$， 且$|\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}|\vec{a}|$，求$\vec{a}$ ，$\vec{b}$之夾角。

(15) 坐標平面上，A、B、C三點不共線，若$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2}$ ，求(a)$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$之夾角θ的正弦值， (b)ΔABC的面積。
(c)$|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|$=？

綜合練習解答

(1) 10

(2) (B)

(3) (E)

(4) (A)(B)(C)(D)

(5) (全)

(6) 60°

(7) (a)$\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ (b)$\frac{1}{2}$

(8) 5[提示：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})$]

(9) (a)$\frac{-29}{2}$ (b)$\frac{1}{4}$

(10) –4

(11) (a)$\frac{-1}{8}$ (b)$\frac{3}{2}$ [提示：$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$]

(12) 5 [提示：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$，再利用$|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|^2$求$|\overrightarrow{AD}|$]

(13) (a)$\sqrt{15}$(b)$\frac{3\sqrt{11}}{2}$

[提示：(a) $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0\Rightarrow|\vec{a}|=2$ 同理可以求得$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{c}|=\sqrt{5}$，再求$|2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}|^2$的值。(b)$\Delta ABC=\Delta OAB+\Delta OBC+\Delta OCA$]

(14) $\frac{\pi}{6}$[提示：可令$\vec{a}$, $\vec{b}$之夾角θ，因爲$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，所以$|\vec{a}+\vec{b}|=2|\vec{a}|\cos\frac{\theta}{2}$.，$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|\sin\frac{\theta}{2}$]

(15) (a)$\frac{\sqrt{7}}{4}$ (b)$\frac{3\sqrt{7}}{4}$ (c)$\sqrt{22}$