第 2 單元　集合的基本概念

集合論是在十九世紀後葉由 Boole(1815~1864)及 Cantor(1845~1918)所發展出來，Boole 爲英國數學家及邏輯學家，他在西元 1854 年出版「An Investigation of Laws of Thought」一書，被認爲是符號邏輯方面，第一部有系統的著作。而 Cantor 生於俄國聖彼得堡(St.Petersburg)，其後全家移民到德國，Cantor 及其門徒在西元 1874 年到 1895 年間奠定了現代集合論的基礎，但是在他生前，德國數學界卻未能認識它的貢獻，晚年 Cantor 患有抑鬱症，最後死於精神療養院。

(甲)集合及其表示法

(1)在日常生活和數學學習中，常把一些對象放在一起，當作一個整體來觀察與研究。舉例來說：
(a)一輛公車上的所有乘客。
(b)一條直線上的所有點。
(c)某高中一年一班全體學生。
(d)一元二次方程式 $x^2-x-12=0$ 的解。
像上述的例子，**把可以明確指定的某些對象看做一個整體，這個整體稱為「集合」。**
組成集合的每個對象，稱爲這個集合的**元素**。
一個集合元素的個數可以是**有限的**，像「一輛公車上的所有乘客」；
也可以是**無限的**，像「一條直線上的所有點」。
只含有限元素的集合稱爲**有限集合**，含有無限元素的集合稱爲**無限集合**。

(2)集合的表示法：
常用的集合表示法有**列舉法**與**描述法**。
列舉法：
把集合中的元素一一列舉出來，並寫在大括號內，這種表示集合的方法稱爲列舉法。

例如：天干所成的集合可表爲{甲,乙,丙,丁,戊,己,庚,辛,壬,癸}

描述法：
如果在大括號內寫出這個集合元素的一般形式，再畫一條豎線或冒號，而在豎線或冒號的右邊寫上這個集合元素的公共屬性，那麼這種表示集合的方法稱爲描述法。
即$\{x|$描述 x 的屬性$\}$

例如：所有偶數所成的集合可表爲$\{2n|n$ 爲整數$\}$
　　被 3 除餘 2 的整數所成的集合可表爲$\{3k+2|k$ 爲整數$\}$
(3)集合與元素的關係：
　習慣上，一個集合常用大寫字母 A、B、C、…表示，元素用小寫字母 $a,b,c,x,y,\dots$表示，如果 x 是集合 A 的元素，記爲 $x\in$A，讀做 x 屬於 A；

而符號 $x\notin$A 表示 x 不是 A 的元素。

例如 A={−1,−4，5,6,8,10}，−4∈A，11∉A。

習慣上，N、Z、Q、R 分別代表全體自然數、整數、有理數、實數所成的集合。

$x\in$N 表示 x 為自然數；$x\notin$Q 表示 x 不是有理數。

(練習1) 用列舉法表示集合$\{x\in R|x^2-4x+3=0\}$。Ans：{3，1}

(練習2) 用描述法表示「被 7 除餘 2 的所有自然數」所成的集合。
Ans：$\{n|n=7k+2$，k 為非負整數$\}$

(練習3) 用符號∈∉去填下列空格：

(1)$-\sqrt{3}$ (　) Q　(2)−5(　)Z　(3)0.35(　)N　Ans：∉，∈，∉

(乙)集合之間的關係

(1)子集合

一個集合中部份元素形成的集合，我們稱為原集合的**子集合(部分集合)**。

例如：全班身高超過 175 公分的學生形成一個集合 A，而這個集合可以稱為由全班學生形成的集合 S 的子集合。當然 A 有可能是 S 本身。

定義：
如果集合 A 內任一個元素都屬於集合 B，我們就稱 A 是 B 的子集，記做 A⊂B 或 B⊃A(讀作 A 包含於 B 或 B 包含 A)。若集合 A 中存在一個元素 a 使得 $a\notin$B，那麼 A 就不是 B 的子集，記作 A⊄B(讀作 A 不包含 B)。

例如：設集合 S={α,β,γ,δ}，請在下列空格中填入∈,∉,⊄,⊂,⊃

則(1)α(　)S　，φ(　)S　(2){α}(　)S　，{α,β}(　)S　{α,1,δ}(　)S

定義：集合的相等
設有兩個集合 A 與 B，若 A 的每一個元素均屬於 B(即 A⊂B)，且 B 中的每個元素均屬於 A(即 B⊂A)，則稱集合 A 與集合 B 相等，記作 A=B。

例如：A={3,5,5,1,1}、B={3,3,5,1}根據定義 A=B。

從集合相等的角度來看，集合的元素是不考慮先後順序、重複次數的，

因此{3,5,5,1,1}={3,3,5,1}={1,3,5}

實數的子集合：

$[a,b]=\{x\in R|a\leq x\leq b\}$(閉區間)

$(a,b)=\{x\in R|a<x<b\}$(開區間)

$(a,b]=\{x\in R|a<x\leq b\}$(半開或半閉區間)

$[a,b)=\{x\in R|a\leq x<b\}$(半開或半閉區間)，

注意上述的符號均表集合，不需要再加{}之符號。

(2)集合的交集與聯集：

(a)交集的定義：

由集合 A 與集合 B 的共同元素所組成的集合稱爲 A 與 B 的交集，記作 $A\cap B$，讀作 A 交集 B，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

例如：$A=\{1,2,3,4,5\}$、$B=\{-4,3,4,7,8\}$，$A\cap B=\{3,4\}$。

例如：A 爲所有偶數所成的集合，B 爲所有奇數所成的集合。

A 與 B 沒有共同的元素，此時為了集合理論的完整，我們引入了空集合。

空集合：我們稱不含任何元素的集合爲**空集合**。記爲 ϕ 或 **{ }**。

規定空集合是任何一個集合的子集合。

(b)聯集的定義：

由集合 A 與集合 B 的所有元素所組成的集合，記作 $A\cup B$，讀作 A 與 B 的聯集。即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$。

例如：$A=\{1,2,3,4,5\}$、$B=\{-4,3,4,7,8\}$，$A\cup B=\{-4,1,2,3,4,5,7,8\}$。

性質：設 A、B、C 爲三個集合

(a)$A\subset(A\cup B)$，$B\subset(A\cup B)$。

(b)$(A\cap B)\subset A$，$(A\cap B)\subset B$。

(c)$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

(c)若 $A\subset B$，則$(A\cup B)=B$，$(A\cap B)=A$。

(d)$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(e) $A\cap\phi=\phi\cap A=\phi$，$A\cup\phi=\phi\cup A=A$

(f)$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$。$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$。

[例題1] 設 $A=\{1,2,3\}$，請找出 A 的所有子集合，並問 A 的子集合的個數。

Ans：ϕ、{1}、{2}、{3}、{1,2}、{1,3}、{2,3}、{1,2,3}；8

[例題2] A={ {},1,{1},{2,3}}下列敘述何者正確

(A){}∈A (B){}⊂A (C){1}∈A (D){1}⊂A (E)2∈A

(F){2,3}⊂A (G){1,{2,3}} ⊂A

Ans：ABCDG

[例題3] 利用文氏圖形來說明(A∪B)∩C=(A∩C)∪(B∩C)。(A∩B)∪C=(A∪C)∩(B∪C)。

(練習4) 設 A={x|−2<x<2}，B={x|1<x<3}，求 A∩B 與 A∪B。

Ans：A∩B={x|1<x<2}，B={x|−2<x<3}。

(練習5) 設 A={(x,y)|x+2y=2，x,y 為實數}，B={(x,y)|x−4y=6,x,y 為實數}

試求 A∩B=？ Ans：$\{(\frac{10}{3},\frac{-2}{3})\}$

(練習6) 設 A={−2,a−2,3}，B={1,a^2−a−3,−5}，若 A∩B={3}，則 a=？Ans：a=−2

(3)集合的差集合與餘集合：

(a)差集的定義：

在集合 A 中但不在集合 B 中的元素所成的集合，稱為 A 減 B 的差集，記為 A−B，即 A−B={x|x∈A 但 x∉B}。

例如：設 A={1,2,3,4,5}、B={2,4,7,8,9}，則 A−B={1,3,5}，B−A={7,8,9}

餘集合的概念：在討論問題時，若討論的對象均為固定一個集合的子集合，這樣一個固定的集合稱為宇集合。例如我們討論如何才能組成最強的排球班隊，那麼各種組成的方式，均為全班同學所成集合的子集合，那麼全班同學所成的集合稱為**宇集合**。

(b)餘集合的定義：

若 U 為一個宇集合，A 為 U 的一個子集合，則 U−A={x|x∈U 但 x∉A}稱為 A 的餘集合，

記作 A'或 $\overline{A}$ 或 A^C。

例如：U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}，A={1,3,4,5,6}，A'={2,7,8,9,10}

性質：

(a)$A'=U-A$，$(A')'=A$

(b)$A\cap A'=\phi$，$A\cup A'=U$

(c)若 $A\cap B=\phi$，則 $A-B=A$，$B-A=B$

(d)$A\subset B \Leftrightarrow A'\supset B'$

(e)$A-B=A\cap B'$

(f)笛摩根定理：(De Morgan’s Law)　$(A\cup B)'=A'\cap B'$，　$(A\cap B)'=A'\cup B'$

[例題4] U={1,2,3,4,5,6,7,8}，A={2,3,4,7}，B'={3,6,8}，

求 A'，B，$A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$。

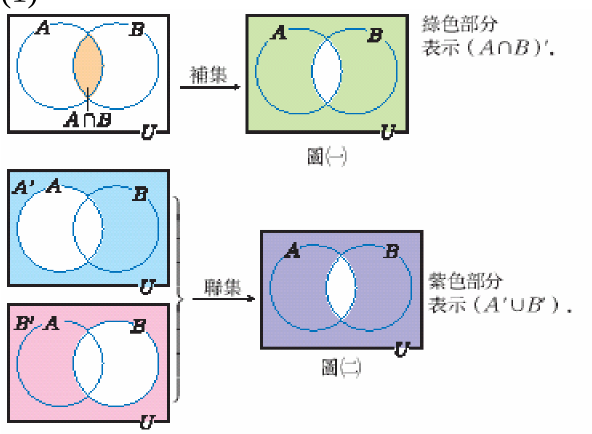
Ans：{1,5,6,8}，{1,2,4,5,7}，{1,2,3,4,5,7}，{2,4,7}，{3}

[例題5] 利用文氏圖證明笛摩根定理：(De Morgan’s Law)

(1)　$(A\cap B)'=A'\cup B'$　(2)$(A\cup B)'=A'\cap B'$

[解法]：

(1)



(2)自己畫

(練習7) 已知 A={$x\in$Z| $|x+2|<3$}，B={$x\in$Z|$x^2\geq 4$}，試求 A−B=？

Ans：{−1,0}

(練習8) 利用文式圖說明 $A\subset B \Leftrightarrow A'\supset B'$。

(丙)集合的計數(排容原理)

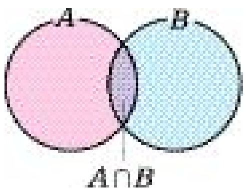
將某一有限個數的群體分類，各類間如果沒有共同元素時，那麼群體的計數就是各類計數的和，但有時將群體分類，各類間也可能有共同的元素，對於這種情形，我們如何計算群體的總數呢？現在先從兩個有限集合聯集的計數談起。

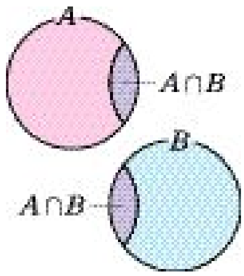
(1) 兩個有限集合聯集的計數

設 S 的元素個數是有限個，$n(S)$表示 S 的元素個數。

設 A 與 B 爲二有限集合，則其聯集 $A\cup B$ 也是有限集合。因爲 $A\cup B$ 是由 A 與 B 的所有元素所組成，若 $A\cap B\neq\varphi$ 時，則上面 $n(A)+n(B)$的計數中，$n(A\cap B)$ 被算了 2 次，（在 $n(A)$與 $n(B)$中各算了 1 次），而集合的計數是不可重複的，所以必須再扣除 $n(A\cap B)$，才能得到正確的 $n(A\cup B)$，

即 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$（容納）$-n(A\cap B)$。（排除）





所以我們知道：當兩集合的計數與交集的計數爲已知時，就能算出兩集合聯集的計數，即 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。此公式因歷經”容納”與”排除”兩過程，故稱爲**排容原理。**

(2) 三個有限集合聯集的計數

我們可以利用兩個有限集合聯集的計數來推導三個有限集合的排容原理。

設 A、B 與 C 分別爲三個有限集合

$n(A\cup B\cup C)$

$=n((A\cup B)\cup C)$

$=n(A\cup B)+n(C)-n((A\cup B)\cap C)$

$=n(A\cup B)+n(C)-n((A\cap C)\cup(B\cap C))$

$=n(A\cup B)+n(C)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$。

[例題6] 令 A 爲從 1 到 100 能被 2 整除的自然數所成之集合，B 爲從 1 到 100 能被 3 整除的自然數所成之集合。宇集 U 爲從 1 到 100 的自然數所成之集合，求 $n(A)$，$n(B)$，$n(A\cap B)$，$n(A\cup B)$，$n[(A\cup B)']$。

[解法]：集合 A，B 與 $A\cap B$ 可以分別寫成

$A=\{2k\mid k=1,2,\cdots,50\}$，得 $n(A)=50$；

$B=\{3k\mid k=1,2,\cdots,33\}$，得 $n(B)=33$；

$A\cap B=\{6k\mid k=1,2,\cdots,16\}$，得 $n(A\cap B)=16$。

而且由排容原理，得

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=50+33-16=67$。

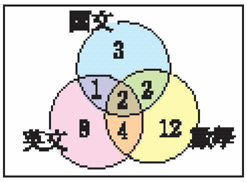
又 $n(U)=100$，再由補集的計數得

$n[(A\cup B)']=n(U)-n(A\cup B)=100-67=33$。

[例題7] 某班學生第一次段考，國文、英文、數學成績不及格人數分別爲 8 位，15 位與 20 位，國文、英文兩科都不及格的有 3 位，國文、數學兩科都不及格的有 4 位，英文、數學兩科都不及格的有 6 位，國文、英文、數學三科都不及格的有 2 位，請問：全班國文、英文、數學三科至少有一科不及格的有多少位？

[解法]：

令 A，B，C 分別表示此班第一次段考國文、英文、數學不及格學生所成集合，則由題意得



$n(\mathrm{A})=8$，$n(\mathrm{B})=15$，$n(\mathrm{C})=20$，$n(A\cap B)=3$，$n(A\cap C)=4$，$n(B\cap C)=6$，

$n(A\cap B\cap C)=2$。

又國文、英文、數學三科至少有一科不及格的學生所成集合爲 $A\cup B\cup C$。

再由排容原理得

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})+n(\mathrm{C})-〔n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)〕+n(A\cap B\cap C)$

$=8+15+20-(3+4+6)+2=32$ (位)。

(練習9) 在十張犁這個小村莊裡，僅有聯合、中國、民生三種報紙供應．已知全村 60 個訂報戶中，訂聯合、中國、民生的分別有 25 戶、32 戶、33 戶，且三種報紙皆訂者有 7 戶，試問在 60 個訂報戶中恰訂兩種報紙者有幾戶？恰訂一種報紙者有幾戶？ Ans：16,37

(練習10) 某次數學競試有 100 個學生參加，試題僅 A，B，C 三題，測驗結果如下：答對 A 者有 51 人，答對 B 者有 36 人，只答對 C 者有 16 人，答對 B，C 兩題者有 13 人，答對 A 或 C 者有 75 人，答對 B 或 C 者有 59 人，而只答對 A，B，C 三題之一者有 66 人，則

(1)只答對 A 者有__________人。

(2)三題都答錯者有__________人。

Ans：(1)33(2)8

綜合練習

(1) 用列舉法寫出下面的集合：

(a)$A=\{x|x^2-9x+20=0\}$　(b)$B=\{\frac{m}{n}|m,n\in N$ 且 $m+n=5\}$

(2) 設 A={1，{1}，{2}，{1,2}}，則下列那些是正確的？
(A){1}∈A　(B){1}⊂A　(C)2∈A　(D){1,2}⊂A　(E){1,2}∈A。

(3) 設 S={φ，1，{1,2}，3}，則下列那些是正確的？
(A) φ∈S (B)φ⊂S (C)2∈S (D){1,2}∈S (E){1,2,3}⊂S。

(4) 設 $A=\{x|\ f(x)=0\}$，$B=\{x|g(x)=0\}$，$C=\{x|h(x)=0\}$，則請寫出下列方程式(組)的解集合。(用集合 A、B、C 表示)

(a)$f(x)\cdot g(x)=0$　(b)$\frac{g(x)}{h(x)}=0$　(c)$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)h(x)=0 \end{cases}$。

(5) 設 $A=\{x,y,z\}$，$B=\{x+1,2,3\}$，若 A=B，則有序數對(x,y,z)共有幾組？

(6) 設 A 集合有 7 個元素，B 集合有 5 個元素，則(1) A∩B 至多有幾個元素？(2) A∩B 至少有幾個元素？

(7) 在 1 到 1000 的所有自然數中
(a)為 7 的倍數的有________個
(b)不為 2 或 5 或 7 倍數的有__________個
(c)為 2 或 5 的倍數，但不為 7 倍數的有___________個
(d)為 2 且為 5 的倍數，但不為 7 倍數的有___________個

(8) 利用 U={1,2,3…,10}，A={1,3,5}，B={2,3,5}去驗證笛摩根定律。

(9) 設 S={1,2,3,4,5}，則求(a)S 的子集合個數。(b)含三個元素的子集合有幾個。

(10) 設 $P=\{2,4,a^2-2a-3\}$，$T=\{-4,a^2+2a+2,a^2-3,2a^2-3a-9\}$，且 P∩T={2,5}，試求 a 的值與集合 T。

(11) 令宇集合 U 表示從 1 到 10 的所有正整數所成的集合，A 與 B 為其子集合，若 $A'\cap B'=\{1,9,10\}$，$A\cap B=\{3\}$，$A'\cap B=\{2,5,8\}$，則集合 A=？集合 B=？

(12) 設宇集合 U 為全體實數所成的集合，令 $A=\{x|\ x$ 是實數，$0<x<\frac{3}{4}\}$，

$B=\{\ x|\ x$ 是實數，$\frac{-1}{4}<x<1\}$，$C=\{x|\ x$ 是實數，$0<x<\frac{1}{2}\}$，則求下列兩個集合。

(a)$((A\cap B)'\cup C)'$　(b) $(A\cup B)'\cap(A'\cup C)'$

(13) 設集合 $A=\{x|x>3$ 或 $x<-1\}$，$B=\{x|\ |x-a|\le b\ \}$，若 A∪B=R，$A\cap B=\{x|3<x\le 4\}$，試求 a,b 之值。

(14) 設 A、B、C 是三個集合，試證明：$A\cap B=A\cup B \Rightarrow A=B$。

綜合練習解答

(1)　(a){5,4}　(b)$\{\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4}\}$

(2)　(A)(B)(E)

(3)　(A)(B)(D)

(4)　(a)$A\cup B$　(b)$B-C$　(c)$A\cap(B\cup C)$

(5)　5

(6)　$A\cap B$ 至多 5 個至少 0 個

(7)　(a)142　(b)343　(c)515　(d)86

(8)　略

(9)　32，10

(10)　$a=-2$，T={−4,1,2,5}

(11)　A={3,4,6,7}、B={2,3,5,8}

(12)　(a)$\{x|\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{4}$，$x$ 為實數}　(b)ϕ

(13)　$a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{5}{2}$

(14)　(a)$x\in A\subset A\cup B=A\cap B$，$x\in A\cap B\Rightarrow x\in B$，所以 $A\subset B$，同理可證明 $B\subset A$，所以 A=B。