§3–2 無窮等比級數

(甲)數列的極限

(1)數列的極限：

(a)什麼是極限？

一個無窮數列$<a_n>$若隨著項數的增加，而越來越靠近某一個定實數 k，則此稱此**數列收斂**，且說此數列$<a_n>$的極限為 k，符號記為 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k$ 。

若一無窮數列的極限不存在，則稱此**數列發散**。

例如：$<a_n>=<\frac{1}{n}>$，$a_1=1,a_2=\frac{1}{2}$,$a_3=\frac{1}{3}$,…，越來越靠近 0，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，但請注意：數列$<a_n>$極限為 0，但每一項 $a_n\neq 0$，因此這裡的等號是一種越來越接近 0 的狀態，而不代表到了最後有 $a_n=0$。

例如：$<a_n>=<2^n>$，$a_1=2,a_2=2^2,\ldots$,越來越大，不可能會接近一個定實數，因此$<a_n>$發散。

(b)收斂的幾個型態：將 a_n 逐項畫在數線上，觀察數線上 a_n 的行為：

①單一方向靠近一個定實數：

例如：$a_n=1+\frac{1}{n}$ ，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$，$b_n=3-(\frac{1}{2})^n$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$ 。

②左右振動，並且逐漸靠近一個定實數：

例如：$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ ，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ，$b_n=(\frac{-1}{3})^n$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

③最後在某一點跳動：

例如：$a_n=5$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$

(c)發散的幾個型態：

①越來越趨向∞或−∞

例如：$a_n=n^2$，$b_n=-3^n$

②左右振動，但越來越分開

例如：$a_n=(-3)^n$

③在二點或二點以上振動

例如：$a_n=2+(-1)^n$ ， $b_n=\begin{cases}0 & , n=3k \\ 1 & , n=3k+1 \\ 2 & , n=3k+2\end{cases}$

(d)極限的性質：

設兩個無窮數列$<a_n><b_n>$均為收斂，令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$，

則數列$<a_n\pm b_n>$，$<a_nb_n>$，$<\frac{a_n}{b_n}>$ $(\beta\neq 0)$均為收斂，且

① $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$　　② $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha \cdot \beta$

③ $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot \alpha$，其中 c 為實數　　④ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

注意：

(1)若無窮數列$\langle a_n\rangle\langle b_n\rangle$均為發散，則$\langle a_n \pm b_n\rangle$，$\langle a_n b_n\rangle$有時收斂，有時發散。

例如：$a_n=n+1$，$b_n=-n$，則$\langle a_n+b_n\rangle=\langle 1\rangle$收斂。

$a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^n$，則$\langle a_n+b_n\rangle=\langle 1\rangle$收斂。

(2)若無窮數列$\langle a_n\rangle\langle b_n\rangle$均為收斂，且$\langle b_n\rangle$之各項均不為 0，且 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$，

則$\langle \frac{a_n}{b_n} \rangle$可能會發散。

例如：$a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=\frac{1}{n^2}$ 均為收斂於 0 的數列，但$\langle \frac{a_n}{b_n} \rangle=\langle n\rangle$顯然發散。

[例題1] 求下列無窮數列的極限：

(a)$\langle \frac{(-1)^n}{n^2} \rangle$　(b)$\langle (\frac{5}{3})^n \rangle$　(c)$\langle 3+\frac{100}{n} \rangle$　(d)$\langle (-1)^n \rangle$　(e)$\langle (\frac{1}{3})^n \rangle$ (f)$\langle (-5)^n \rangle$

Ans：(a)0 (b)發散 (c)3 (d)發散 (e)0 (f)發散

[例題2] 試討論等比數列$\langle ar^n\rangle$的斂散性。(其中 $a\neq0$)

結論：等比數列$\{ar^n\}$($a\neq0$)的斂散性：

(a)當$-1<r<1$ 時，$\lim_{n\to\infty} ar^n=0$

(b)當 $r=1$ 時，$\lim_{n\to\infty} ar^n=a$

(c)當 $r\leq-1$ 或 $r>1$ 時，$\{ar^n\}$發散。

[例題3] 求下列各數列的極限：

(a)$\langle\frac{n^2-5}{2n^2+1}\rangle$ (b)$\langle\frac{n-5}{2n^2+1}\rangle$ (c)$\langle\frac{n^3-5}{2n^2+4}\rangle$ (d)$\langle\frac{2^n+9}{3^n}\rangle$ (e)$\langle\frac{3^n+4^n}{3^n-4^{n+1}}\rangle$

Ans：(a)$\frac{1}{2}$ (b)0 (c)發散 (d)0 (e)$\frac{-1}{4}$

(練習1) 下列敘述何者為真？

(A)$\langle 3\cdot 2^n\rangle$為收斂數列。(B)$\langle 3+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^n\rangle$為收斂數列。(C)$\langle\frac{n}{(-2)^n}\rangle$為收斂數列。 (D)$\langle 5+(-3)^n\rangle$為收斂數列。(E)$\langle 100-\frac{1}{n^5}\rangle$為收斂數列。

Ans：(B)(C)(E)

(練習2) 下列無窮數列是收斂數列，試求 x 的範圍？

(1)$\langle(\frac{-x}{3})^n\rangle$ (2)$\langle(\frac{2x+5}{3})^n\rangle$

Ans：(1)$-3\le x<3$ (2)$-4<x\le -1$

(練習3) 試求下列各小題的極限值：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-100}{103})^n$ (2)$\lim\limits_{n\to\infty}(123+\frac{-3}{n^2})$

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{5+3\cdot 5^n}{2+5^n})$ (4)$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3n^2-n+5}{4n^2+n+89})(5)\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{5n+6}{7n^3-7n+9})$

Ans：(1)0 (2)123 (3)3 (4)$\frac{3}{4}$ (5)0

(乙)無窮級數的和

(1)無窮的幽靈：

假設移動一條直線上的 x 點，把它從 a 移到 b。此時，x 在有限的時間內通過 a,b 之間的無窮多點。換句話說，雖然線段 ab 的長度有限，然而這個線段上卻充滿了無限多個點。因此只要產生運動，就不可能讓「無限」這個怪物永遠沉睡不醒。

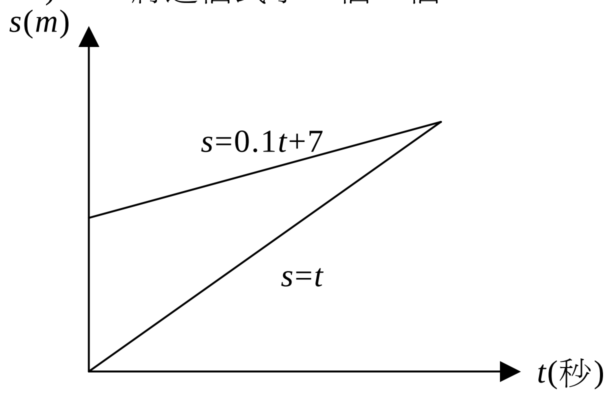
Zeno′s 詭辯—Achilles 和烏龜

「假設 Achilles 每秒走 1 公尺，烏龜每秒走 0.1 公尺，現在烏龜在 Achilles 前方 7 公尺的地方與 Achilles 同時出發，Zeno 說 Achilles 永遠追不上烏龜！」

Zeno 的說法：當 Achilles 來到烏龜出發的地方，此時烏龜又向前走了 0.1×7 公尺，當 Achilles 又往前走了 0.1×7 公尺，此時烏龜又走了$(0.1)^2\times 7$….，如此下

去，Achilles 永遠追不上烏龜。

Achilles 所追趕的距離=$7+7\times(0.1)+7\times(0.1)^2+7\times(0.1)^3+\ldots$將這個式子一個一個加下去永遠不會結束，



從另一個觀點來看：畫 $s-t$ 圖

解聯立方程式$\begin{cases} s=t \\ s=0.1t+7 \end{cases}$

$\Rightarrow s=0.1s+7 \Rightarrow s=\dfrac{7}{1-0.1}$。

因此，雖然 $7+7\times(0.1)+7\times(0.1)^2+7\times(0.1)^3+\ldots$

這個式子無法一個一個加下去，

但有趣的是用有限次的計算可得的答案應為$\dfrac{7}{1-0.1}$。

[討論]：

一隻螞蟻從 O 點走到 A 點，$\overline{OA}=1$ 公尺，它的運動過程可以如此描述：首先它會經過$\overline{OA}$的中點 A_1，然後再經過$\overline{A_1A}$的中點 A_2，$\overline{A_2A}$的中點 A_3，…請問這樣一來，螞蟻是否永遠到不了 A 點？

無限加法與有限加法的差異：

例如：$1-1+1-1+1-1+\ldots\ldots=$？

(a)令 $x=1-1+1-1+1-1+\ldots$

$x-1=-(1-1+1-1+\ldots)$

$\Rightarrow x-1=x \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$。

(b)$x=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$

$=0+0+0+\ldots$

$=0$

同學對於(a)(b)兩個答案有何看法？

結論：

無限加法不一定可以交換，不一定有答案，與有限加法的結合律、交換律，一定有答案，成強烈的對比。因此我們對於無窮級數的和要有不一樣的看法，不能再像對付有現項加法一樣，逐項相加求和。

(2)無窮級數的計算方法：

由一個例子談起：<<莊子•天下篇>>記述了一段話「一尺之棰，日取其半，萬世不竭。」這段話的原意是一尺長的棍子假設每日去掉其自身長度的二分之一，這樣可以世世代代不斷的分割下去，永遠不會結束。將此表為算式可為$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots$，因為世世代代不斷的分割下去，因此上面的式子構成了一個

無窮級數。直觀上而言，因爲棍子的長度爲一尺，故只要能不停的分割棍子，當然這只能用想像的才辦得到，那麼所有被分割下來的棍子長度合起來一定是一尺，如果到了某一天不砍了，那麼一定還有一小段棍子剩下來。而這些話可用下面二個式子來表示：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}<1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

(*)式中的等號，並不像(**)式中可以逐項相加而得到和，因此，我們應如何去定義(*)式中的和而使得其結果與想像的答案一致呢？

設 S_i=到第 i 日爲止，所分割的棍子長度總和。

故 $S_1=\frac{1}{2}$，$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=1-(\frac{1}{2})^2$，$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=1-(\frac{1}{2})^3$，….，$S_n=1-(\frac{1}{2})^n$，….

我們觀察<S_n>這個數列，可得 $\lim_{n\to\infty}S_n=1$，而這個極限值與我們想像的和是一樣的。這就是說：當我們一直分割下去時，雖然每個 S_n都小於 1，但透過極限的定義(人類的想像)即使我們無法在真實的世界中一直分割棍子，但依然可以來定義(*)式中的和。

數學化：無窮級數如何求和？

設<a_n>爲一無窮數列，我們仿照前例中所觀察的結果，考慮$\langle S_n\rangle_{n=1}^{\infty}$這個數列的極限，其中 $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$，來決定<a_n>所定義之無窮級數的和。

①若 $\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$，則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$，此時 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 不僅代表級數本身，意代表它的和。

用符號上的關係來看：$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$

若<S_n>發散，則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 發散，即不能求和。此時 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 不代表一個數，僅代表該級數本身。

②如何求 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 呢？首先將 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 用 n 來表示，再計算 $\lim_{n\to\infty}S_n$。

若 $\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$，則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$；若<$S_n$>發散，則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 發散。

例如：求無窮等比級數 $1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^3+\ldots\ldots$的和。

[例題4] 試討論無窮級數 $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}+\ldots$的和？

結論： $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & , \quad -1<r<1 \\ \text{發散} & , \quad \text{其他} \end{cases}$ **(設 $a\neq 0$)**

[例題5] 求下列無窮等比級數的和：

(1)$1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}-\dfrac{8}{27}+\ldots$的和。 (2)$\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\ldots+\dfrac{2}{3^n}+\ldots$的和。

[例題6] 將下列循環小數化成分數：

(1) $0.\overline{4}$ (2) $0.2\overline{15}$ Ans：(1)$\dfrac{4}{9}$ (2)$\dfrac{213}{990}$

[討論]：$0.\overline{9}=1$ 這是怎麼回事呢？

[解釋]：

設 $1-0.\overline{9}=\alpha>0$，則由阿基米德性質

(對於任意正數 a，及任意實數 b 而言，必存在一個正整數，使得 $na>b$)

可找到一個正整數 n 使得 $10^n\alpha>1$，及$\alpha>\dfrac{1}{10^n}$，所以 $1-0.\overline{9}>\dfrac{1}{10^n}$

$\Rightarrow 1-\dfrac{1}{10^n}>0.\overline{9}$，即$0.\underbrace{999\cdots9}_{n個9}>0.\overline{9}$此與循環小數的意義矛盾。

[例題7] 試求下列無窮級數的和：

(1)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})=$？

(2)0.9+0.099+0.00999+0.0009999+…..=？

(3)$1+2+3+\ldots+100+(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2+\ldots+(\frac{1}{2})^n+\ldots$.Ans：(1)$\frac{3}{2}$ (2)$\frac{100}{99}$ (3)5051

(練習4) 求下列各級數的和：

(1)$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots=$？

(2)無窮等比級數$(\sqrt{3}-1)+(2-\sqrt{3})+\dfrac{3\sqrt{3}-5}{2}+\ldots=$？

(3)試求$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}=$？ Ans：(1)$\frac{2}{3}$ (2)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$

(練習5) 試求$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{3^n}=$？ Ans：$\frac{1}{2}$

(練習6) (1)化循環小數$2.3\overline{12}$爲分數。 (2)化循環小數$3.\overline{51}$爲分數。

Ans：(1)$\frac{763}{330}$ (2)$\frac{348}{99}$

(練習7) 設 x 為實數且無窮級數 $1+(1-3x)+(1-3x)^2+\ldots+(1-3x)^{n-1}+\ldots$ 收斂，求 x 的範圍與級數的和。Ans：$0<x<\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3x}$

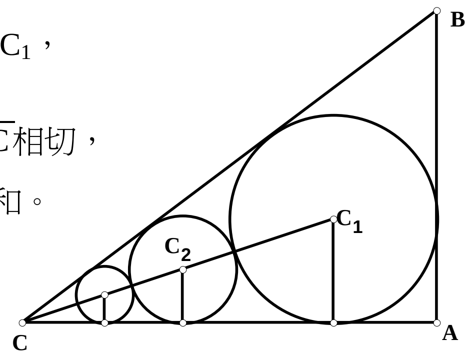
[例題8] 一皮球自離地面 10 公尺高處落下，首次反彈高度為$\frac{10}{3}$ 公尺，此後每次反彈高度為其前次反彈高度的$\frac{1}{3}$，則此球到完全靜止前，所經過路徑的總長度為多少公尺？　Ans：20 公尺

[例題9] ΔABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=5$，做內切圓 C_1，

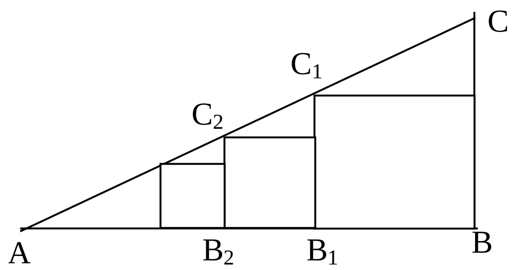
若無限多個 $C_1,C_2,C_3,\ldots$ 彼此外切，且與 $\overline{AC},\overline{BC}$ 相切，

求(1) C_1 圓的半徑 $r_1=$？ (2)無限多個圓之面積和。

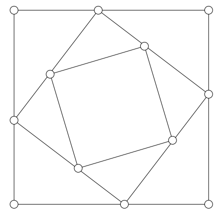
Ans：(1)1 (2)$\frac{20+11\sqrt{10}}{40}\pi$



(練習8) 右圖中，$\overline{AB}=2,\overline{BC}=1$，$\angle B=90^{\circ}$，
S_1 爲ΔABC 之內接正方形，
S_2 爲ΔAB_1C_1 之內接正方形，……
(1)求 S_1 之面積。
(2)求 S_1，S_2，….之面積和。
Ans：(1)$\frac{4}{9}$ (2)$\frac{4}{5}$



(練習9) 如右圖，一正方形的邊長爲 a，以 3：4 的順序內分各邊，再連各分點得第二個正方形，再以同順序內分第二個正方形各邊，連接各分點得第三個正方形，如此繼續下去，則一切正方形的面積總和爲多少？
Ans：$\frac{49}{24}a^2$



[例題10] 已知無窮等比級數的和爲$\frac{9}{2}$，其第二項爲-2，

(1)求首項與公比。

(2)若 S_n 表示級數的前 n 項和且$|S_n-\frac{9}{2}|<\frac{1}{10^3}$成立的最小自然數 n 的值。

Ans：(1)6，$\frac{-1}{3}$ (2)8

[例題11] (1)試求級數$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}$的和。

(2)試求無窮級數$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots$之和。

Ans：(1)$\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$ (2)$\frac{3}{4}$

[例題12] 試求級數$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^{n-1}}$的和。 Ans：6

(練習10) (1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$？

(2) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots\ldots=$？

Ans：(1) $1-\frac{1}{n+1}$ (2)1

(練習11) 試求$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}]=$？ Ans：$\frac{1}{2}$

[提示：原式可視爲求無窮級數$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots.$的和]

綜合練習

(1) 判斷下列的數列是否有極限，若有極限，請求出它的極限值：

(a)$a_n=1+\dfrac{100}{n^2}$ (b)$a_n=\dfrac{1}{2}[1+(-1)^n]$ (c)$a_n=\dfrac{5n^2+n-7}{3n^2-n+5}$ (d)$a_n=(\dfrac{-4}{7})^n$ (e)$a_n=(\dfrac{11}{10})^n$

(2) 試求下列各題的極限：

(a)$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n}{n+1}-\dfrac{n+1}{2n})$ (b)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 3^{n-1}}{3^{n+1}}$ (c)$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2-1}{n+1}-\dfrac{n^2+2}{n+2})$ (d)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-1}-3^n}{2^n+3^{n-1}}$

(3) 下列那些選項是正確的？

(A)$10^{10}+2-2+2-2+\ldots\ldots=10^{10}$

(B)$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots+(\dfrac{-1}{3})^{n-1}+\ldots=\dfrac{1}{1-(\dfrac{-1}{3})}$

(C)$1+0.9+0.09+0.009+\ldots<2$

(D)$3-6+12-24+\ldots\ldots+3(-2)^{n-1}+\ldots=\dfrac{3}{1-(-2)}$

(E)$10+10^2+10^3+\ldots+10^{1000}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10^2}+\ldots+(\dfrac{1}{10})^n+\ldots$收斂

(4) 試選出正確的選項：(A)$0.3\overline{43}$不是有理數 (B)$0.\overline{34}>\dfrac{1}{3}$ (C)$0.\overline{34}>0.343$

(D)$0.\overline{34}<0.35$ (E)$0.\overline{34}=0.3\overline{43}$ (88 學科)

(5) 若$2.\overline{9}$表示無窮級數 $2+\dfrac{9}{10}+\dfrac{9}{10^2}+\ldots\ldots$之和，則下列敘述那些是正確的？

(A)$2.\overline{9}<3$(B)$2.\overline{9}=3$(C)$2.\overline{9}\le 3$(D)$2.\overline{9}$的整數部分是 2

(E)$2.\overline{9}$的整數部分是 3。

(6) 求下列無窮級數之和：

(a)$\dfrac{4}{5}+(\dfrac{4}{5})^2+(\dfrac{4}{5})^3+\ldots$(b)$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{3}{7^{k+1}}$ (c)$\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{27}-\dfrac{16}{81}+\ldots$

(7) 求下列無窮級數的和：

(a)$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{27}+\ldots=$？(b)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-2}+4+(-1)^{n+1}}{5^{n-1}}=$？

(c)$0.7+0.077+0.00777+0.0007777+\ldots+0.\overbrace{00\ldots0}^{n-1個0}\overbrace{77\ldots7}^{n個7}+\ldots$

(d)$0.22+0.0202+0.002002+0.00020002+\ldots$

(8) 有一無窮等比級數的首項為$0.\overline{2}$，第二項為$0.0\overline{4}$，試求此級數之和。

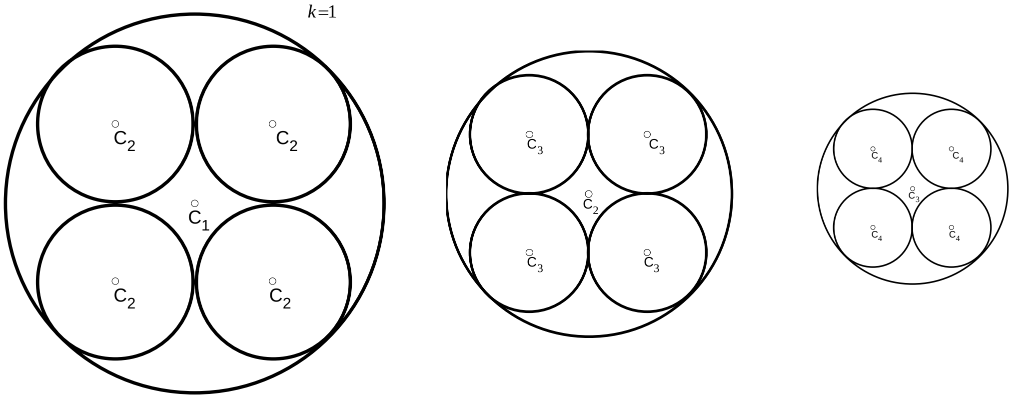
(9) 某一無窮等比數列之和為 28，其各項之平方和為 112，求此級數的首項與公比。

(10) 設無窮等比級數 $1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\ldots$.的和爲 S，其前 n 項之和爲 S_n，

(a)試求 S=？ (b)前 n 項的和 S_n=？ (c)若 $|S-S_n|<\frac{1}{1000}$，則 n 至少爲多少？

(11) 設 C_1、C_2、C_3…爲一群圓，其作法如下：C_1 是半徑爲 a 的圓，在圓 C_1 的內部作四個相等的圓 C_2(如圖)，每個圓 C_2 和圓 C_1 都內切，且相鄰的兩個圓 C_2 外切；再由任一個圓 C_2 中用同樣的作法得到四個圓 C_3，依此類推可作出 C_4、C_5、….。

(a)求圓 C_2 的半徑長(用 a 表示) (b)假設每一個 C_k 之面積爲 a_k(其中 k=1,2,3,,n,)，求面積和 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ =？(用 a 表示)



(12) 設一正三角形 ABC 的邊長爲 2，連接各邊中點 A_1,B_1,C_1 形成 $\Delta A_1B_1C_1$，再連接其三邊中點形成 $\Delta A_2B_2C_2$，依此規則繼續下去，試求這些三角形的面積總和。

(13) 有一條長度爲 1 的繩子，切取 $\frac{2}{3}$ 爲周長做一正三角形，令其面積爲 S_1，從剩下的 $\frac{1}{3}$ 中再切取 $\frac{2}{3}$ 爲周長做第二個正三角形，令其面積爲 S_2，依此規則下取得到的正三角形的面積爲 S_3、S_4、…，試問這些三角形面積的總和=？

(14) 設 a,b 均爲實數，若 $\frac{a}{2^1}+\frac{b}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\frac{b}{2^4}+\ldots+\frac{a}{2^{2n-1}}+\frac{b}{2^{2n}}+\ldots.=3$，則 $2a+b$=____。 (87 學科)

(15) (a)試求 $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+n}$ 的和。

(b)試求無窮級數 $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+n}+\ldots..$ 之和。

進階問題

(16) (a)若 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=A[\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}]$，請問 A=？

(b)試求 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$ =？

(c)試求 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$ =？

(17) 設 $a_n=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$？

(18) 一數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n=n(n+1)(n+2)$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{a_n}$ =？

(19) 試求下列無窮級數的和：

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\ldots+2^n}{3^n}=$？ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{n}-\frac{k^2}{3n^3})$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2-1}$ (d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^k}=$？

(20) 平面上一動點 P 自原點 O 出發沿 x 軸正向前進一個單位，其次沿 y 軸正方向前進 $\frac{2}{3}$ 單位，再沿 x 軸負方向前進 $(\frac{2}{3})^2$ 單位，然後再沿 y 軸負方向前進 $(\frac{2}{3})^3$ 單位，以下依此種方式重複類推下去，求點 P 極限位置的坐標爲何？

綜合練習解答

(1) (a)1 (b)發散 (c)$\frac{5}{3}$ (d)0 (e)發散

(2) (a)$\frac{3}{2}$ (b)$\frac{2}{9}$ (c)1 [$\frac{n^2-1}{n+1}-\frac{n^2+2}{n+2}=\frac{n-4}{n+2}$] (d)$-3$

(3) (B)(E)

(4) (B)(C)(D)(E)

(5) (B)(C)(E)

(6) (a)4 (b)$\frac{1}{4}$ (c)$\frac{2}{5}$

(7) (a)$\frac{7}{4}$ (b)$\frac{20}{3}$ (c)$\frac{700}{891}$ [提示：原式=$\frac{7}{9}$ (0.9+0.099+0.00999+….)](d)$\frac{24}{99}$[提示：每一項拆成兩個分數之和，例如：0.0202=$\frac{2}{100}+\frac{2}{10000}$]

(8) $\frac{5}{18}$

(9) 7，$\frac{3}{4}$ [提示：將一個無窮等比級數的各項平方，依然是一個無窮等比級數，且公比爲原來公比的平方]

(10) (a)$\frac{3}{2}$ (b) $\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]$ (c)7

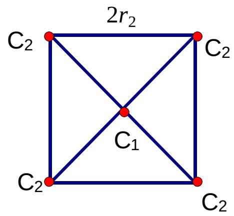
(11) (a) $(\sqrt{2}-1)a$　(b)$(\frac{\sqrt{2}+1}{2})\pi a^2$

[解法]：

設圓 C_k 之半徑為 r_k

(a)如右圖所示，可得 $a-r_2=\overline{C_1C_2}=\sqrt{2}\ r_2$　　$\therefore r_2=\frac{a}{\sqrt{2}+1}$

(b)同理 $r_2-r_3=\sqrt{2}\ r_3 \Rightarrow r_3=\frac{r_2}{\sqrt{2}+1}$依此規律可得 $r_n=\frac{r_{n-1}}{\sqrt{2}+1}$



$\Rightarrow \frac{r_3}{r_2}=\frac{r_4}{r_3}=\ldots\ldots=\frac{r_n}{r_{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow \langle r_n \rangle$形成一個等比數列

且公比為$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\ldots\ldots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=(\sqrt{2}-1)^2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} a_k=\frac{a^2\pi}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi a^2$$

(12) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

(13) $\frac{\sqrt{3}}{72}$

(14) 9

(15) (a) $2(1-\frac{1}{n+1})$ (b)2

(16) (a) $\frac{1}{4}$ (b)$\frac{1}{4}[\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}]$　(c)$\frac{1}{12}$

(17) $\frac{1}{2}$ [提示：$a_n=\frac{(2-1)(2+1)}{2\cdot 2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3\cdot 3}\cdots\cdots\frac{(n-1-1)(n-1+1)}{(n-1)(n-1)}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\frac{n+1}{2n}$]

(18) $\frac{2}{3}$　[提示：$na_n=n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)=3n(n+1) \Rightarrow a_n=3(n+1)$]

(19) (a)$\frac{7}{2}$ [提示：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\ldots+2^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{3^n}=\frac{7}{2}$](b)$\frac{8}{9}$ [提示：

$\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n}-\frac{k^2}{3n^3})=1-\frac{1}{3n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=1-\frac{1}{3n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$](c)$\frac{3}{4}$ [提示：先求

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$](d) $\frac{5}{16}$

[提示：請參考例題 12 的做法，求 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{5^k}=\frac{5}{16}[1-(\frac{1}{5})^n]-\frac{4}{5}(\frac{n}{5^{n+1}})$]

(20) $\left(\frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right)$