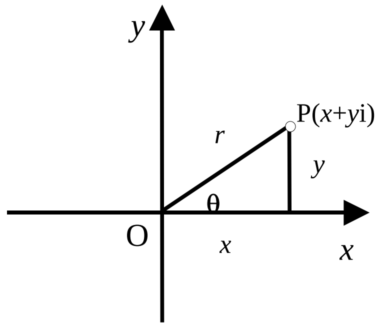
第四十四單元　複數的幾何意涵

第一冊中，我們曾引進了複數系，有了複數系之後，使得一元二次方程式有了圓滿的結果，更一般而言，一元 n 次方程式都有 n 個複數根(包括重根)。本單元要介紹複數的另一個表示法—**極式**，並藉以探討複數的幾何意涵與複數 n 次方根的問題。

(甲)複數的極式

(1)複數平面：



將複數 $x+yi$ 對應坐標平面上的點 P(x,y)[位置向量(x,y)]，這種對應是一對一的對應。即任一個複數都可找到坐標平面上唯一一點(向量)與之對應，反之，給定坐標平面上一個點(向量)，可找到唯一的一個複數與之對應。這種與複數對應的平面稱爲**複數平面**，x 軸又稱**實軸**，y 軸又稱爲**虛軸**，我們也可以說複數平面上點 P 的複數坐標爲 $x+yi$。

複數 $a+bi$	↔	實數數對 (a,b)	↔	坐標平面 點$(a\,,b)$	↔	位置向量 向量$(a\,,b)$

例如：

點$(-3,0)$，代表實數-3，點$(0,6)$代表純虛數 $6i$，點$(-4,6)$代表$-4+6i$。

(2)複數的絕對值：

數線上實數 x 絕對值$|x|$代表點 x 與原點的距離。

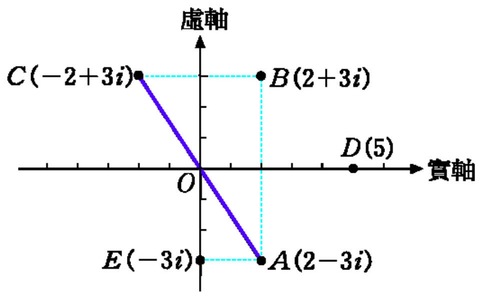
複數平面上點 $z=a+bi$(a,b 爲實數)與原點 $0+0i$ 的距離$\sqrt{a^2+b^2}$ 也定義爲複數 z 的絕對值，仍然寫成$|z|$，即$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ 。

給了兩個複數 $z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$(此處 a_1，b_1，a_2，b_2 皆爲實數)，則

$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$

依照絕對值定義得

$|z_1-z_2|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$ 它代表複數平面上 z_1 與 z_2 兩點的距離。



例如：

在複數平面上，可以描出下列複數的位置，並求其絕對值。

(1)$2-3i$． (2)$2+3i$． (3)$-2+3i$． (4)5． (5)$-3i$．

解法：

如圖：A 點表 $2-3i$，B 點表 $2+3i$，C 點表$-2+3i$，D 點表 5，E 點表$-3i$．

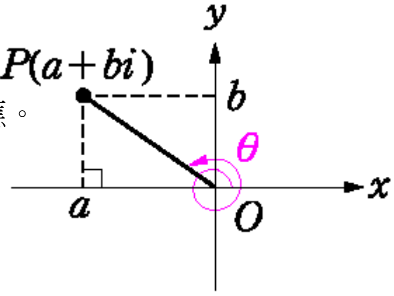
(練習1)試問滿足$|z-1|=5$的複數 z 在複數平面上所形成的圖形爲何？
Ans：圓

(3)複數的極式

複數 $a+bi$(a,b 爲實數)在複數平面上所代表的點，可以用「**距離與方位**」來描述其位置。例如將$\sqrt{3}+i$ 畫在複數平面上，它在直角坐標平面上對應點 P($\sqrt{3}$, 1)。

若以原點 O 爲極點，x 軸正向爲極軸，$\overline{OP}=2$，P 點對應的方向角爲$\frac{\pi}{3}$，因此 P 點的極坐標爲$[2,\frac{\pi}{3}]$，即$\sqrt{3}=2\cos\frac{\pi}{3}$，$1=2\sin\frac{\pi}{3}$，

故$\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$，這是複數$\sqrt{3}+i$ 極坐標的表示法，簡稱爲「**極式**」。



一般而言，任意一個複數都可以表成極式：
設非零複數 $z=x+yi(x,y\in R)$，可在複數平面上找到一點 P(x,y)與之對應。

令$\overline{OP}=r$，設θ表示從始邊 x 軸正向到終邊$\overrightarrow{OP}$的有向角，

則 r,θ與 x,y 有以下的關係：$x=r\cos\theta$ ，$y=r\sin\theta$ ，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ ，
因此 $z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，

絕對值：

$r=|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$ 稱爲複數 $x+yi$ 的絕對值(或向徑)。

輻角：

以 x 軸的正向爲始邊，$\overrightarrow{OP}$爲終邊所形成之**有向角**θ，稱爲複數 z 的**輻角**，記爲：arg(z)。

特別是當 $0\le\theta<2\pi$時，此時的輻角θ稱爲**主輻角**，符號記爲 Arg(z)。

複數的極式：

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$爲**複數的極式**。
複數 0 的極式規定爲 $0(\cos\theta+i\sin\theta)$。

例如：

$z=3$，$|z|=3$，$\arg(z)=0+2k\pi$,k 爲整數，$\mathrm{Arg}(z)=0\Rightarrow$ $3=3(\cos0+i\sin0)$

$z=1+\sqrt{3}\,i$，$|z|=2$，$\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$,k 爲整數，$\mathrm{Arg}(z)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow$ $1+\sqrt{3}i=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$z=-5i$，$|z|=5$，$\arg(z)=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,k 爲整數；$\mathrm{Arg}(z)=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow$ $-5i=5(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$

一個非零複數的輻角有很多，但是它的主輻角卻只有一個。
例如複數 $z=-\sqrt{3}+i$，

(1)z 的絕對值$|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$

(2)z 的輻角可爲…、$\frac{5\pi}{6}-2\pi$、$\frac{5\pi}{6}$、$\frac{5\pi}{6}+2\pi$、…(它們都是$\frac{5\pi}{6}$的同界角)

(3)z 的主輻角爲$\frac{5\pi}{6}$

我們選取 z 的各種輻角，可得複數 z 的極式：

$z=2(\cos\frac{-7\pi}{6}+i\sin\frac{-7\pi}{6})$或 $z=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$或 $z=2(\cos\frac{17\pi}{6}+i\sin\frac{17\pi}{6})$…..

其中 $z=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$是選取主輻角的極式。

注意：

(a)若θ爲 z 之輻角，則$\theta+2k\pi(k\in Z)$亦爲複數 z 的輻角。若 $0\le\theta<2\pi$，則此時的θ爲主輻角，因此主輻角只有一個，而輻角卻有無限多個。

(b)複數 z 的極式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$中，須注意 $r\ge 0$，而角度必須相同，且以 cosθ 爲實部，sinθ爲虛部。

例如

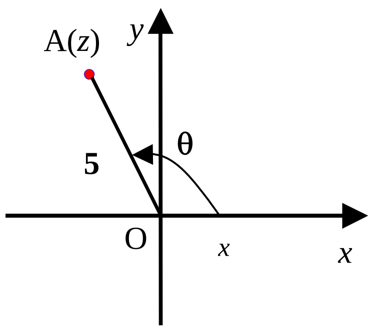
$z=-2(\cos35^\circ+i\sin35^\circ)$，$z=2(\sin15^\circ+i\cos15^\circ)$，$z=4(\cos30^\circ-i\sin30^\circ)$均不爲極式。

例如：請完成下表：

	$\sqrt{3}+i$	$-\sqrt{3}+i$	$3i$	-2
對應點坐標				
絕對值 r				
主輻角 Argz				

(練習2)如圖，複數平面上一點 A(z)，$\overline{OA}=5$，θ=120°

試問 z=？Ans：$z=5(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)$



(練習3)已知$\frac{1}{z}$的輻角爲$\frac{-\pi}{3}$，且$|z|=3$，試求 z=？

Ans：$\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(練習4)設非零複數 z_1 與 z_2 的極式分別表成 $z_1=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$z_2=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$

若 $z_1=z_2$，試寫出 r_1、r_2 與α、β的關係。

Ans：$r_1=r_2$，α與β成同界角

結論：若 **$z_1=z_2$，則 z_1 與 z_2 絕對值相等，z_1 與 z_2 的輻角互爲同界角。**

[例題1] 一般式化極式

將下列各複數化成極式：

(1)-3　(2)$-5i$　(3)$-2+2i$　(4)$1-\sqrt{3}\ i$ (5) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}$

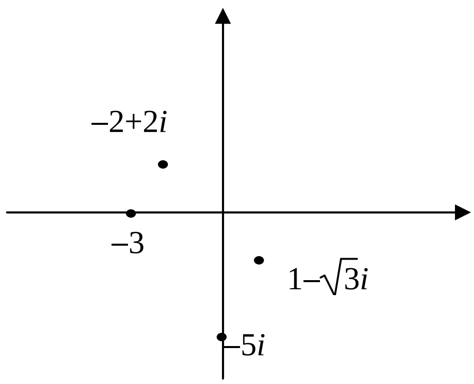
Ans：

(1) $-3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$ (2)$-5i=5(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2})$(3) $-2+2i=2\sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4})$

(4)$2(\cos\dfrac{-\pi}{3}+i\sin\dfrac{-\pi}{3})$ (5) $\dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6})$

[解法]：

將這些複數畫在複數平面上，可得各複數的極式。



[例題2] 設 $z=2(\sin40°+i\cos40°)$，試求下列各小題：

(1)將 z 化成級式。(2)將 $\bar{z}$ 化成級式。(3)將$-z$ 化成級式。

解法：

(1)$|z|=\sqrt{(2\sin40°)^2+(2\cos40°)^2}=2$　，令 z 的輻角爲θ

　$z=2(\sin40°+i\cos40°)=2(\cos\theta+i\sin\theta)$，比較實部與虛部，

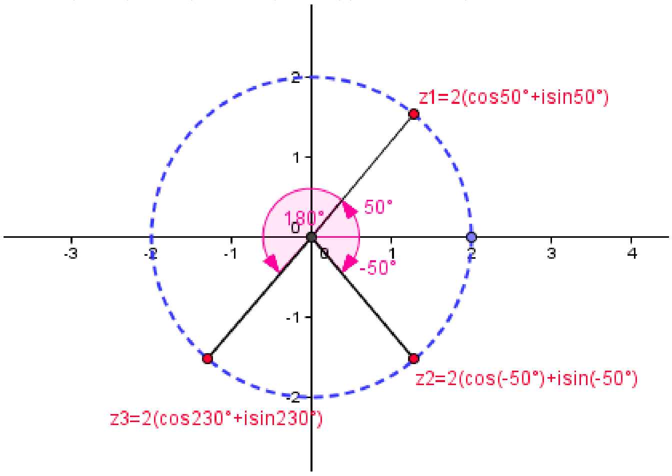
可得 $\cos\theta=\sin40°$且 $\sin\theta=\cos40°$，可取$\theta=50°$。

故 $z=2(\sin40°+i\cos40°)$的極式爲 $2(\cos50°+i\sin50°)$。

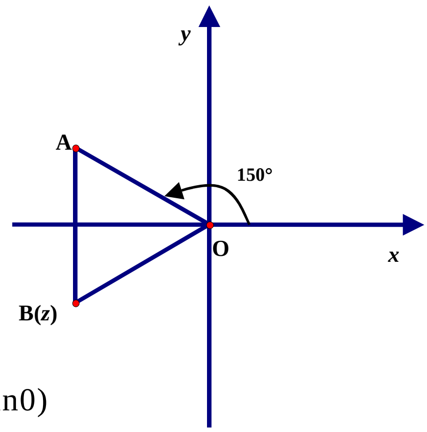
(2)(3)

如下圖，因爲 $\bar{z}$ 與 z 對稱於實軸，$-z$ 與 z 對稱於原點，再根據 z 在複數平面上的位置，就可以求出 $\bar{z}$ 與$-z$ 的極式爲

$\bar{z}=2(\cos(-50°)+i\sin(-50°))$，$-z=2(\cos230°+i\sin230°)$。



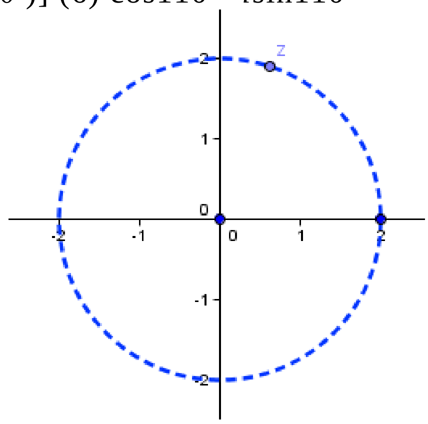
(練習5) 如圖，ΔAOB 為邊長 2 的正三角形，
試寫出 B 點所代表的複數 z 之極式。
Ans：$z=2(\cos210°+i\sin210°)$



(練習6) 將下列複數化成極式：
(1)$z=-3+3i$　(2)$z=4$　(3)$z=-2i$
(4) $2-2\sqrt{3}i$ (5) $-1+(\sqrt{3}-2)\,i$
Ans：(1)$z=3\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$ (2)$z=4(\cos0+i\sin0)$
(3)$z=2(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2})$(4) $4(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$
(5) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12})$

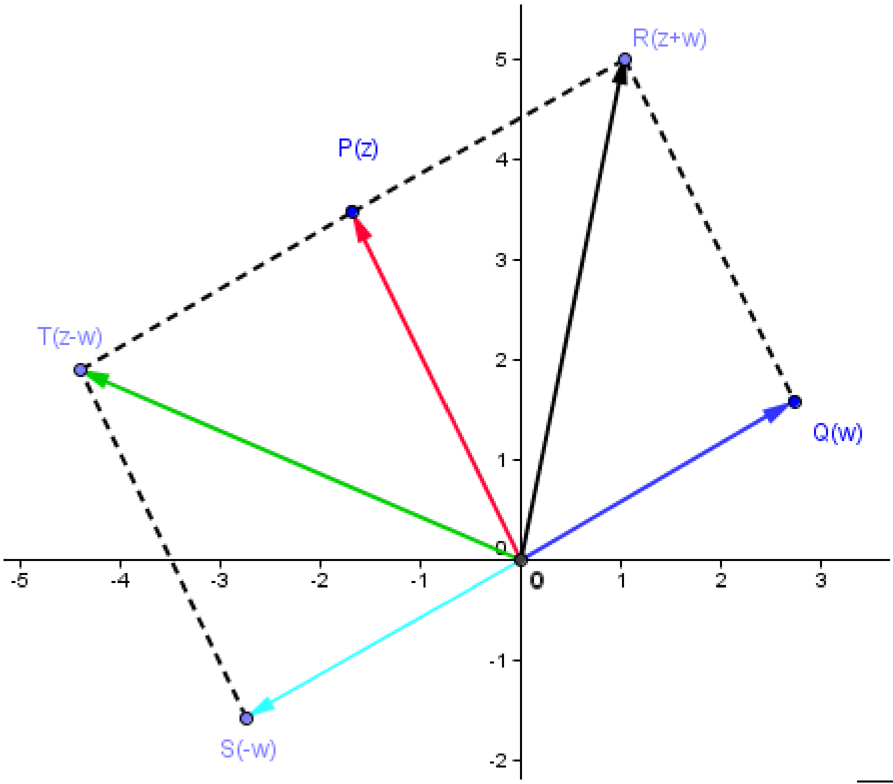
(練習7) 試求下列各複數的極式：
(1)$z=\sin20^{\circ}+i\cos20^{\circ}$　(2)$z=\cos135^{\circ}-i\sin45^{\circ}$　(3)$z=-3(\cos25^{\circ}+i\sin25^{\circ})$
(4)$3(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6})$　(5)$3(\cos\theta-i\sin\theta)$　(6)$\sin200°-i\cos160°$
Ans：
(1)$z=\cos70°+i\sin70°$ (2)$z=\cos225°+i\sin225°$(3)$z=3(\cos205°+i\sin205°)$
(4) $3(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ (5) $3[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$ (6) $\cos110°+i\sin110°$

(練習8) 如右圖，試畫出$-z$、$\bar{z}$、iz。



(乙)複數運算的幾何意涵

(1)複數加減的幾何意涵：
在複數平面上，設 P、Q、R、T 分別代表複數 z , w, $z+w$, $z-w$，如下圖，可知當 O、P、Q 三點不共線時，四邊形 OPRQ 與 OPTS 均為平行四邊形。
用位置向量的觀點來看：設 $z=a+bi$，$w=c+di$ (a,b,c,d 為實數)
複數 z ↔ 位置向量$\overrightarrow{OP}=(a,b)$
複數 w ↔ 位置向量$\overrightarrow{OQ}=(c,d)$
複數 $z+w$ ↔ 位置向量$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(a+c,b+d)$
複數 $z-w$ ↔ 位置向量$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(a-c,b-d)$
換句話說， P(z)沿著 O 至 Q(w)的方向平移就可得到 R($z+w$)。
P(z)沿著 O 至 S($-w$)的方向平移就可得到 T($z-w$)。

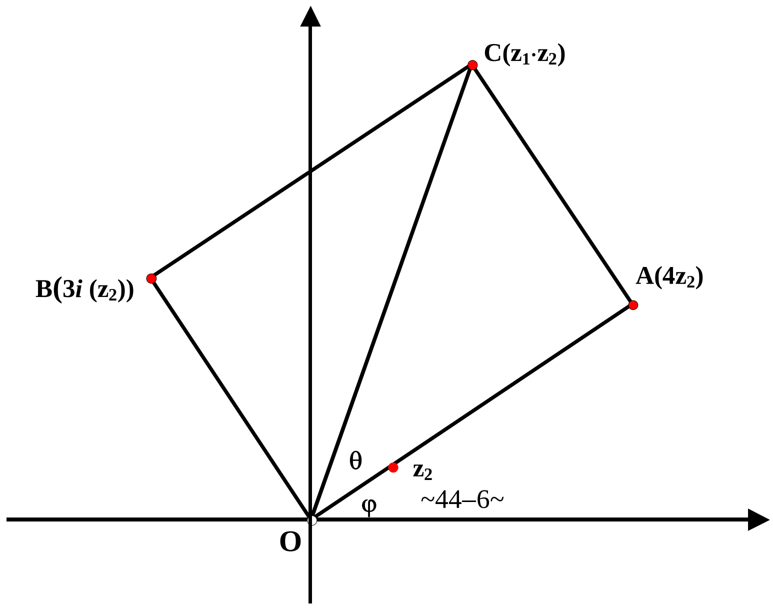


[例題3] 設 P、Q 兩點在複數平面上分別代表複數 z_1、z_2，今在$\overline{PQ}$取一點 R，且滿足$\overline{PR}$：$\overline{RQ}$=2：3，試以 z_1、z_2 來表示 R 點所代表的複數。

Ans：$\dfrac{2z_2+3z_1}{2+3}$

(2)複數乘除的幾何意涵：

第一冊曾學過複數的乘法，例如$(4+3i)(3+2i)=4(3+2i)+3i(3+2i)=6+17i$，過程中我們基本上用到的原理是複數乘法對加法的分配律。若我們將複數用極式來表示，那麼複數乘法除法會不會有不一樣的形式呢？



以$(4+3i)(3+2i)$爲例，
設 $z_1=4+3i=5(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z_2=3+2i=\sqrt{13}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$
因爲 $z_1\cdot z_2=(4+3i)(3+2i)=4(3+2i)+3i(3+2i)=4z_2+3i(z_2)$

由上圖，可以看出 A、B 分別代表複數 $4z_2$、$3i(z_2)$，且$\overline{OA}\perp\overline{OB}$；
又因爲 $z_1\cdot z_2=4z_2+3i(z_2)$，所以矩形 AOBC 的頂點 C 代表複數 $z_1\cdot z_2$。

考慮 z_1z_2 的絕對值與輻角：

$|z_1z_2|^2=\overline{OC}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=|4z_2|^2+|3i\cdot z_2|^2=16|z_2|^2+9|z_2|^2==25|z_2|^2=|z_1|^2|z_2|^2$

因爲 $z_1=4+3i$，所以$\angle AOC=\theta$爲 z_1 的輻角，所以從上圖可以得知 z_1z_2 的輻角爲$\theta+\varphi$

由前面的分析，可以得知：

複數 z_1、z_2 的乘積 z_1z_2 的絕對值爲兩複數 z_1、z_2 的絕對值相乘，
而 z_1z_2 的輻角爲兩複數 z_1、z_2 的輻角相加。

這個結果對於使用複數的極式來做乘法與除法的計算就會有很大的便利性，例如想求$(1+\sqrt{3}\,i)^{10}$的值，如果用第一冊的方法，我們必須將$(1+\sqrt{3}i)$連乘 10 次，過程繁複，不容易算出結果，但是$=1+\sqrt{3}\,i=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$，根據前面的結果，這 10 個複數相乘，**絕對值自乘 10 次，而輻角自加 10 次**，於是$(1+\sqrt{3}\,i)^{10}$的絕對值$=2^{10}$，而$(1+\sqrt{3}\,i)^{10}$的輻角爲$\frac{10\pi}{3}$，因此$(1+\sqrt{3}\,i)^{10}=2^{10}(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3})$。

這個結果就是**棣美弗定理**。

◆ 複數的乘除：

定理 1：

若設 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，其中 $r_k=|z_k|$，$\theta_k=\arg(z_k)$，$k=1,2$
則 $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$
[複數相乘：絕對值相乘，輻角相加]

證明：

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=[\,r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)]\cdot[\,z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)]\\&=r_1\cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)]\\&=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

定理 2：若 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z\neq 0$，則$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

證明：

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot(\cos\theta-i\sin\theta)}$$

$$=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=\frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

定理 3：

若設 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，$z_2\neq 0$ 其中 $r_k=|z_k|$，$\theta_k=\arg(z_k)$，$k=1,2$ 則 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}((\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$

[複數相除：絕對值相除，輻角相減]

證明：

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1(\frac{1}{z_2})=[r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)]\cdot[\frac{1}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}]\text{(由定理 2)}$$

$$=[r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)]\cdot[\frac{1}{r_2}(\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2))]\quad\text{(由定理 1)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}((\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

例如：

$z_1=2(\cos15^\circ+i\sin15^\circ)$，$z_2=3(\cos105^\circ+i\sin105^\circ)$

$\Rightarrow z_1\cdot z_2=6(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)$，$\frac{z_2}{z_1}=\frac{3}{2}(\cos90^\circ+i\sin90^\circ)$

結論：

複數 z_1、z_2 乘除運算的幾何意義：

$z_1\cdot z_2$ 的絕對值等於 z_1 與 z_2 絕對值的**積**，而 $z_1\cdot z_2$ 的輻角等於 z_1 與 z_2 輻角的**和**；

$\frac{z_1}{z_2}$的絕對值等於 z_1 與 z_2 絕對值的**商**，而 $\frac{z_1}{z_2}$ 的輻角等於 z_1 與 z_2 輻角的**差**。

◆ 棣美弗定理：

例子：$(\cos\theta+i\sin\theta)^2$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$ (由定理 1)

$=\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)=\cos2\theta+i\sin2\theta$

例子：$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-2}$

$=[(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}]^2$ (由定理 2)

$=[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^2$ (由定理 1)

$=\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)$

棣美弗定理：

若 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，其中 n 為整數。

[證明]：

(A)當 n 是正整數時，用數學歸納法證明之。

Step1：$n=1$ 時，$z^1=r^1(\cos\theta+i\sin\theta)$

Step2：若設 $n=k$ 時原式成立，即 $z^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$

則當 $n=k+1$ 時，$z^{k+1}=z^k\cdot z=[r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)][r^1(\cos\theta+i\sin\theta)]$

$\Rightarrow z^{k+1}=r^{k+1}(\cos k\theta\cdot\cos\theta-\sin k\theta\cdot\sin\theta)+i(\sin k\theta\cdot\cos\theta+\cos k\theta\cdot\sin\theta)$

$\Rightarrow z^{k+1}=r^{k+1}(\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta)$

則當 $n=k+1$ 時，原式成立。

(B)當 n 是非正整數時：

(1)再證 $n=0$ 時，亦成立。

$\because z^0=1$，$r^0(\cos0+i\sin0)=1\Rightarrow$成立。

(2)n 為負整數時，令 $n=-m$，m 為正整數

$$z^n=z^{-m}=\frac{1}{z^m}=\frac{1}{r^m(\cos m\theta+i\sin m\theta)}$$

$$=\frac{1}{r^m}(\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta))$$

$$=r^{-m}(\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta))$$

$$=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

[例題4] 化簡下列各小題：

(1)$\dfrac{(\cos8^\circ+i\sin8^\circ)^6\times(\cos25^\circ+i\sin25^\circ)^4}{(\cos4^\circ+i\sin4^\circ)^7}$ (2)$\left(\dfrac{1+i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{12}$

(3)$(\sqrt{3}-i)^3\left(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6(-1-i)^8$ (4) $(\sin15^\circ+i\cos15^\circ)^{10}$

Ans：(1) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (2)$\dfrac{-1}{64}$ (3)-128 (4)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

[例題5] 已知$\left|\dfrac{z}{z+1}\right|=3$，$\mathrm{Arg}\dfrac{z+1}{z}=\dfrac{\pi}{3}$，求 z=？Ans：$z=\dfrac{-15-3\sqrt{3}i}{14}$

(練習9) 設 $z_1=\sqrt{3}-i$，$z_2=-3+3i$，$z_3=1+i$，求(1)$z_1\times z_2$ (2)$\dfrac{z_1\times z_2}{z_3}$ 之極式

Ans：(1)$6\sqrt{2}(\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12})$ (2)$6(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})$

(練習10) 求下列各式的值：

(1)$[(\cos20°+i\sin20°)(\cos10°+i\sin10°)]^7$=＿＿＿＿＿。Ans：$\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1}{2}i$

(2)$\dfrac{(\cos9°+i\sin9°)^5(\cos40°+i\sin40°)}{\cos25°+i\sin25°}$=＿＿＿＿＿。Ans：$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(3)$\dfrac{(\sin65^\circ+i\cos65^\circ)^4(\cos4^\circ+i\sin4^\circ)^7}{(\cos7^\circ-i\sin7^\circ)^{16}}$=＿＿＿＿＿。Ans：$\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(練習11) 求下列各式的值：

(1)$\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}\right)^6$ (2)$\dfrac{1}{(1+\sqrt{3}i)^8}$ (3) $\left(\dfrac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ (4)$(\sin20^\circ-i\cos20^\circ)^{15}$

Ans：(1)-8 (2)$\dfrac{-1}{512}+\dfrac{-\sqrt{3}}{512}i$ (3)$\dfrac{\sqrt{3}}{64}-\dfrac{1}{64}i$ (4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

(練習12) 設 $x=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$，試求 $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{84}$=？ Ans：1

[提示]：$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{84}=\dfrac{1-x^{85}}{1-x}$，利用棣美弗定理求 x^{85} 的值。

(練習13) 設 $n\in\mathrm{N}$，使$(\sqrt{3}+i)^n$是一個純虛數的 n，最小的是多少？Ans：3

[解法]：$\sqrt{3}+i=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\ \dfrac{1}{2})=2(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})$

$(\sqrt{3}+i)^n=2^n(\cos\dfrac{n\pi}{6}+i\ \sin\dfrac{n\pi}{6})$為純虛數，則 $\cos\dfrac{n\pi}{6}=0$ 且 $\sin\dfrac{n\pi}{6}\neq0\Rightarrow n=3$ 為最小值。

(練習14) a,b 為實數，$\alpha=1+bi$，$\beta=\sqrt{3}+a\,i$，若$|\alpha|=|\beta|$，且 $\mathrm{Arg}(\dfrac{\alpha}{\beta})=\dfrac{\pi}{2}$，則 a=？b=？

Ans：$a=-1$，$b=\sqrt{3}$

(練習15) 設 $n\in N$，$x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$，證明：$x^n+\dfrac{1}{x^n}=2\cos n\theta$。

[解法]：

(1) $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta \quad \Rightarrow x^2-(2\cos\theta)x+1=0 \quad \Rightarrow x=\cos\theta\pm i\sin\theta$

(2)①當 $x=\cos\theta+i\sin\theta$時

$$x^n+\frac{1}{x^n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}$$
$$=\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$$
$$=\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos n\theta-i\sin n\theta=2\cos n\theta$$

②當 $x=\cos\theta-i\sin\theta$時

$$x^n+\frac{1}{x^n}=[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^n+[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^{-n}$$
$$=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)+\cos n\theta+i\sin n\theta=2\cos n\theta$$

◆ 乘除的幾何意涵

設坐標平面上 A(2,3)以原點 O 爲中心旋轉 60°得到 B(m,n)，A、B 兩點的坐標會滿足下列的關係：

$$\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}m=2\cos 60^\circ-3\sin 60^\circ\\ n=2\sin 60^\circ+3\cos 60^\circ\end{cases}$$

用複數平面上來看，

$m+ni=(2\cos60°-3\sin60°)+i(2\sin60°+3\cos60°)=2(\cos60°+i\sin60°)+3i(\cos60°+i\sin60°)$

$=(2+3i)(\cos60°+i\sin60°)$

換句話說，

運算式「**$(m+ni)=(2+3i)(\cos60°+i\sin60°)$**」代表

幾何變換「**A($2+3i$)以原點 O 爲中心旋轉 60°得到 B($m+ni$)**」。

事實上，**複數乘法蘊含了旋轉與伸縮變換**，這是相當有趣的特性。

[例題6] 已知 $z=-\sqrt{3}+i$，令 $z_1=z\cdot(\cos60°+i\sin60°)$，$z_2=z\cdot[\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)]$，$z_3=z\cdot〔2(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)〕$

(1)試求 z、z_1、z_2、z_3的極式。

(2)試分別描述 B(z_1)、C(z_2)、D(z_3)與 A(z)之間的變換關係(旋轉、伸縮)。

[解法]：

(1)$z=-\sqrt{3}+i=2(\cos150°+i\sin150°)$

$z_1=z\cdot(\cos60°+i\sin60°)$

$=2(\cos(150°+60°)+i\sin(150°+60°))$

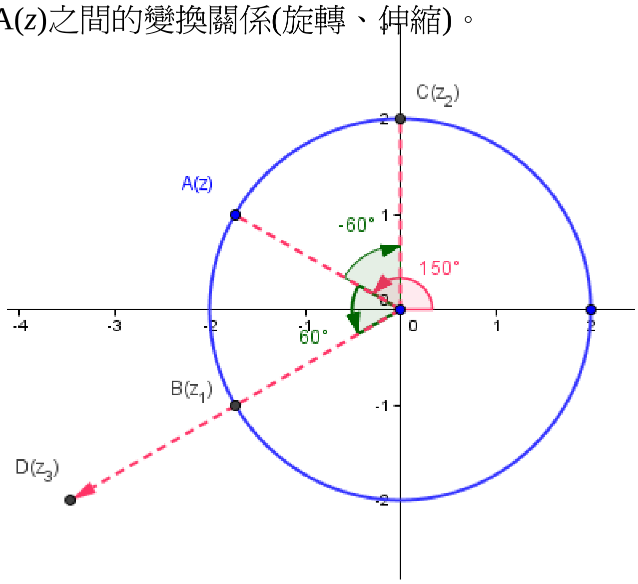
$=2(\cos210°+i\sin210°)$

$z_2=z[\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)]$

$=2(\cos(150°-60°)+i\sin(150°-60°))$

$=2(\cos90°+i\sin90°)$

$z_3=4(\cos(150+60°)+i\sin(150+60°))$



$=4(\cos210°+i\sin210°)$

(2)

觀察 z、z_1、z_2、z_3 的絕對值與輻角，可以得知$|z|=|z_1|=|z_2|=2$，$|z_3|=2|z_1|=4$

z 的輻角$=150°$，z_1 的輻角$=150°+60°$，z_2 的輻角$=150°-60°$，z_3 的輻角$=150°+60°$

所以如圖 2–68，可將這些點畫在複數平面上，並且可以得出以下結果：

$A(z)\xrightarrow{\text{繞原點逆時針旋轉}60^{\circ}}B(z_1)$

$A(z)\xrightarrow{\text{繞原點順時針旋轉}60^{\circ}}C(z_2)$

$A(z)\xrightarrow{\text{繞原點逆時針旋轉}60^{\circ}}B(z_1)\xrightarrow{\text{以原點為中心伸長}2\text{倍}}D(z_3)$

從上面例題的討論，可以得知複數的乘法中蘊含了旋轉與伸縮的變換，
接下來我們討論複數乘法與旋轉與伸縮變換間的關係：

設兩個非零複數 z 與 w 的極式為 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，$w=s(\cos\theta+i\sin\theta)$，

根據極式的乘法公式：$zw=rs(\cos(\varphi+\theta)+i\sin(\varphi+\theta))$

(1)設 $s=1$，即 $zw=z(\cos\theta+i\sin\theta)$，

根據乘法的意義：$|zw|=|z||w|=|z|$，zw 的輻角等於 z 的輻角加θ。

由右圖，可以得知「P 點繞原點 O 旋轉θ角得到 Q 點」。

當$\theta>0$ 時，逆時針旋轉θ角；當$\theta<0$ 時，順時針旋轉$|\theta|$角

複數 z	P(z)點繞原點 O 旋轉θ角 ⟶ $\theta>0$ 逆時針旋轉θ角； $\theta<0$ 順時針旋轉$\|\theta\|$角	複數 $z(\cos\theta+i\sin\theta)$

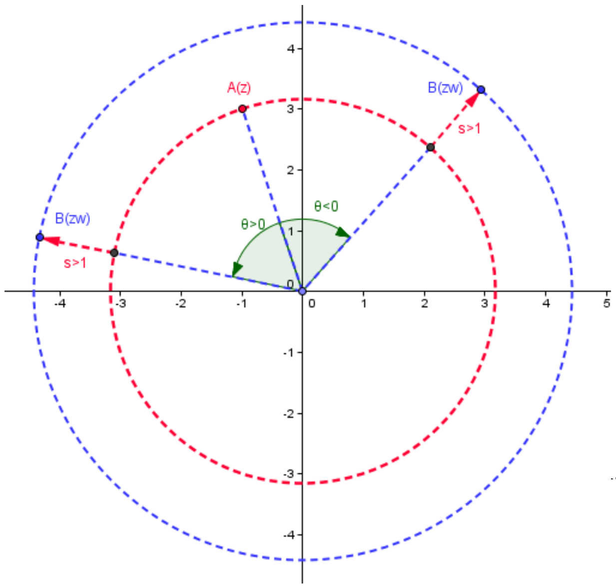
特別地，

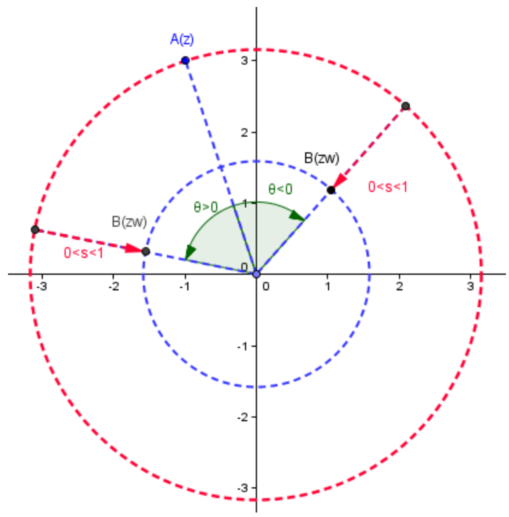
一個非零複數 z 乘以 $i=\cos90^{\circ}+i\sin90^{\circ}$，就是將 A($z$)依逆時針方向繞原點旋轉 90°．

(2)$s\neq1$，即 $zw=rs(\cos(\varphi+\theta)+i\sin(\varphi+\theta))$

根據乘法的意義：$|zw|=|z||w|$，zw 的輻角等於 z 的輻角加θ。

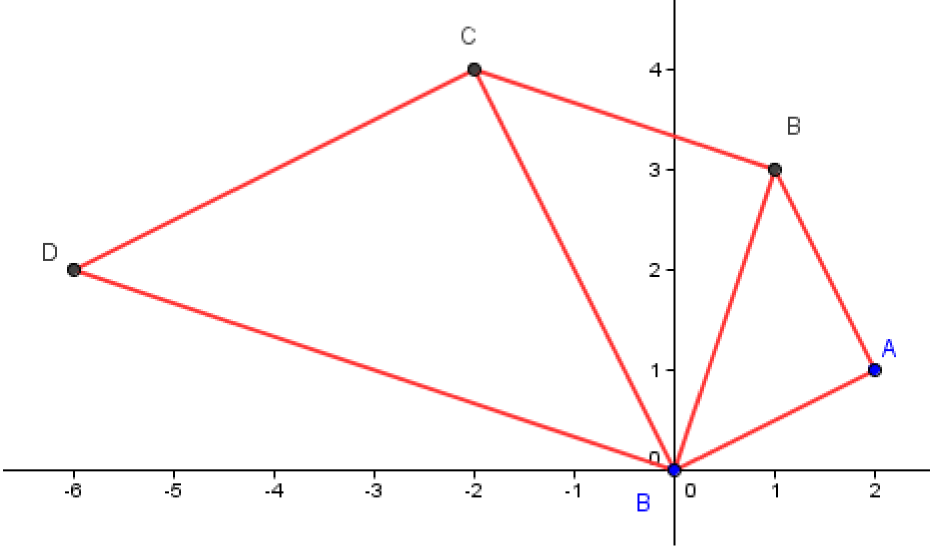
由圖 2–73，可以得知「P 點先繞原點 O 旋轉θ角，再以 O 為中心伸縮 s 倍而得到 Q 點」。





複數 $z \xrightarrow{\text{A(z)點繞原點 O 旋轉}\theta\text{角}}$ 複數 $z\cdot(\cos\theta+i\sin\theta) \xrightarrow{\text{以原點 O 為中心伸縮 } s \text{ 倍}}$ 複數 $z\cdot s(\cos\theta+i\sin\theta)$

[例題7] 如圖，在坐標平面上，已知ΔOAB、ΔOBC、ΔOCD 均為等腰直角三角形，且∠A=∠B=∠C=90°，又已知 A(2,1)、O(0,0)，試求頂點 D 的坐標．



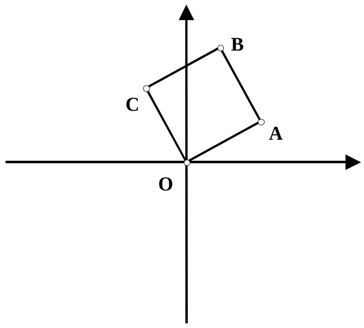
[解法]：設 A、B、C、D 所代表的複數分別為 2+i、z、u、w
根據圖 2–71，我們可以從 A 點利用旋轉與伸縮變換得到 D 點。即

$$A \xrightarrow[\text{以原點為中心伸縮}\sqrt{2}\text{ 倍}]{\text{繞原點逆時針旋轉 }45^\circ} B \xrightarrow[\text{以原點為中心伸縮}\sqrt{2}\text{ 倍}]{\text{繞原點逆時針旋轉 }45^\circ} C$$

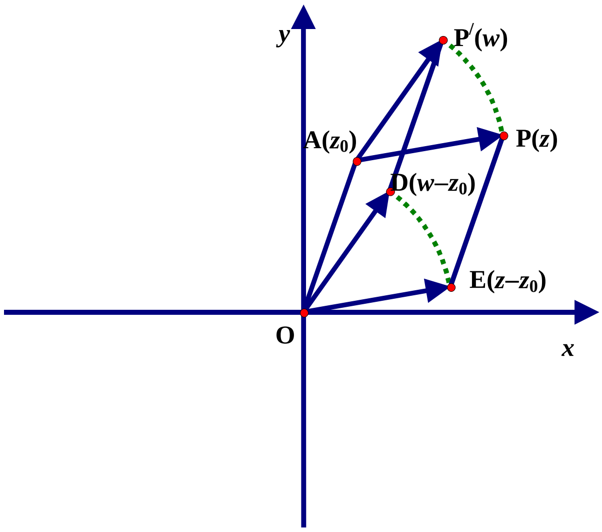
$$C \xrightarrow[\text{以原點為中心伸縮}\sqrt{2}\text{ 倍}]{\text{繞原點逆時針旋轉 }45^\circ} D$$

因為繞原點逆時針旋轉 45°再以原點為中心伸縮$\sqrt{2}$倍，相當於乘
$\sqrt{2}(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)$，故 $z=(2+i)\cdot\sqrt{2}(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)$，$u=z\sqrt{2}(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)$，
$w=u\sqrt{2}(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)$
所以 $w=(2+i)[\sqrt{2}(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)]^3=(2+i)[2\sqrt{2}(\cos135^\circ+i\sin135^\circ)]=-6+2i$。
所以 D 點的坐標為(–6,2)。

[例題8] 右圖是一正方形 OABC，已知 A(2+i)，試求 B、C 點的複數坐標。
Ans：B(1+3i)、C(−1+2i)



[例題9] 設 P(z)繞點 A(z_0)旋轉θ角度，得到點 P$'$(w)，請問 z 與 w 之間的關係為何？



[討論]： P(z)繞點 A(z_0)旋轉θ角度到點 P$'$(w)，可以視為 $\overrightarrow{AP}$ 射線繞 A 點旋轉θ角度得到 $\overrightarrow{AP'}$ 射線。根據例題 15，會有$(w-z_0)=(z-z_0)(\cos\theta+i\sin\theta)$，因此可以得到 $\mathrm{Arg}(\frac{w-z_0}{z-z_0})=\theta$。

換句話說，$\mathrm{Arg}(\frac{w-z_0}{z-z_0})=\theta$ 代表 $\overrightarrow{AP}$ 射線繞 A 點旋轉θ角度得到 $\overrightarrow{AP'}$ 射線。

[例題10] 設 $z=1-\cos140°+i\sin140°$，則(a)$|z|$=？ (b)Arg(z)=？
Ans：(a)$2\sin70^{\circ}$ (b)20°

[例題11] 複數平面上三點 z_1、z_2、z_3 共線的充要條件爲 $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\lambda$，($\lambda$爲實數)

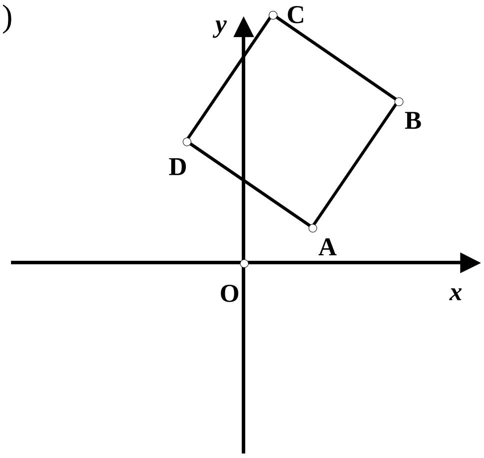
(練習16) 設 $z=\cos 40°+i\sin 40°$，試將 $w=1-z$ 化成極式。
Ans：$w=2\sin 20°(\cos(-70°)+i\sin(-70°))$

(練習17) 設 $z_1=\cos 78^{\circ}+i\sin 78^{\circ}$，$z_2=\cos 18^{\circ}+i\sin 18^{\circ}$
(a)求複數 z_1-z_2 的主輻角。
(b)若$(z_1-z_2)^5=a+bi$，a,b 爲實數，求$(a,b)=$？
Ans：(a)138°　(b)$(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1}{2})$

(練習18) 試說明滿足下列各式的複數 z 所代表的幾何意義：
(1) $|z-4|=|z-1|$　(2)$|z-i|=4$　Ans：(1)直線 (2)圓

(練習19) 複數平面上，O爲原點，$A(1+i)$，若三角形OAB爲正三角形，試求B點的複數座標。Ans：$(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$ 或 $(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$

(練習20) 一正六邊形 ABCDEF 其中心爲原點，而 A 的坐標爲(4,2)，求 C 點的坐標。Ans：C$(-2-\sqrt{3},2\sqrt{3}-1)$



(練習21) 如圖，ABCD 爲正方形，其中 A(2,1)、B(5,5)
試求 C、D 的坐標。Ans：D(−2,4)、C(1,8)

(練習22) 複數平面上三點 z_1、z_2、z_3 共線的充要條件爲存在三個不全爲 0 的實數λ_1、λ_2、λ_3，使得$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$ 且$\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_3 z_3=0$。

(丙)求複數的 *n* 次方根

(1)1 的 n 次方根：
設 w 爲 1 的 n 次方根，則 $w^n=1$。因此方程式 $z^n=1$ 的 n 個複數根(代數基本定理)都是 1 的 n 次方根。

例如：

當 n=2 時，$z^2-1=0$ 兩根爲 1，−1 所以 1 的二次平方根(平方根)爲±1。

當 n=3 時，解 $z^3-1=0$，因爲 $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$，所以 $z^3=1$ 的三個根爲 1，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$，

即 1 的三次方根(立方根)爲 1，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$。

當 n=4 時，因爲 $z^4-1=(z^2+1)(z^2-1)$，所以 1 的 4 次方根爲±1，$\pm i$。

但當 n 的次數增加時，像解 $z^5-1=0$，我們就不易直接求解，因此必須介紹新的方法，才能順利將 1 的 n 次方根找出來。

(2)如何解 $z^n=1$？

例子：

試解 $z^7=1$ 之根。(求 1 的 7 次方根)

考慮根的絕對值：$|z|^7=1 \quad \Rightarrow |z|^7=1 \Rightarrow |z|=1$

考慮根的輻角：$\arg(z^7)=\arg(1)=0+2k\pi$，$k\in \mathrm{Z} \Rightarrow 7\cdot\arg(z)= 0+2k\pi \Rightarrow \arg(z)=\dfrac{2k\pi}{7}$

如何解 $z^n=1$？

[解法一]：

考慮根的絕對值：$|z^n|=1 \Rightarrow |z|^n=1 \Rightarrow |z|=1$

考慮根的輻角：$\arg(z^n)=\arg(1)=0+2k\pi$，$k\in \mathrm{Z} \Rightarrow n\cdot\arg(z)= 0+2k\pi \Rightarrow \arg(z)=\dfrac{2k\pi}{n}$。

[解法二]：

設複數 z 滿足 $z^n=1$，令 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $r=|z|$，$\arg(z)=\theta$ 將 z 代入 $z^n=1$，

可得 $r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=1=1\cdot(\cos 0+i\sin 0)$，則 $r=1$ 且 $\cos n\theta=\cos 0$，$\sin n\theta=\sin 0$，

因此 $r=1$，且 $n\theta$與 0 互爲同界角，即 $n\theta=2k\pi \Rightarrow \theta=\dfrac{2k\pi}{n}$，$k$ 爲整數。

所以 $z^n=1$ 的根有下列之形式：$z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$，其中 k 爲一整數。

但又因爲正弦函數與餘弦函數的週期爲 2π，因此 k 只要代 n 個連續整數，就可以表示所有的 n 個根，故我們可將 1 的 n 個 n 次方根寫成：

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}，k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

結論：

設解方程式 $z^n=1$(求 1 的 n 次方根)，

則 n 個根 $z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$，$k = 0,1,2,\ldots,n-1$。

例如：$z^4=1$ 的解爲 $z_k=\cos\dfrac{k\pi}{2}+i\sin\dfrac{k\pi}{2}$，$k=0,1,2,3$

$z_0=\cos 0+i\sin 0=1$，$z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$，$z_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$z_3=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$，這四個根與前面直接解的根相同。

[例題12] (1)利用棣美弗定理求 1 的五次方根，
(2)在複數平面上描出 1 的五次方根所代表的點，並解釋其幾何意義。
(3)解方程式 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$。

[解法]：

(1)求 1 的五次方根 ⇔ 解方程式 $z^5=1$ 的根

將 1 的五次方根寫成極式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，即 $z^5=1$，而 $1=1(\cos 0+i\sin 0)$，故 $z^5=r^5(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)=1(\cos 0+i\sin 0)$

兩個複數相等，即表示它們絕對值相等，輻角互為同界角。

故 $\begin{cases} r^5=1 & \text{(絕對值相等)} \\ 5\theta=0+2k\pi & \text{(輻角同界)} \end{cases}$ 其中 k 為整數，因為絕對值 $r>0$,所以

$r=\sqrt[5]{1}=1$，$\Rightarrow \begin{cases} r=1 & \text{(1的絕對值之正五次方根)} \\ \theta=\dfrac{2k\pi}{5} & \text{(1的輻角}2k\pi\times\frac{1}{5}\text{)} \end{cases}$，其中 k 為整數。

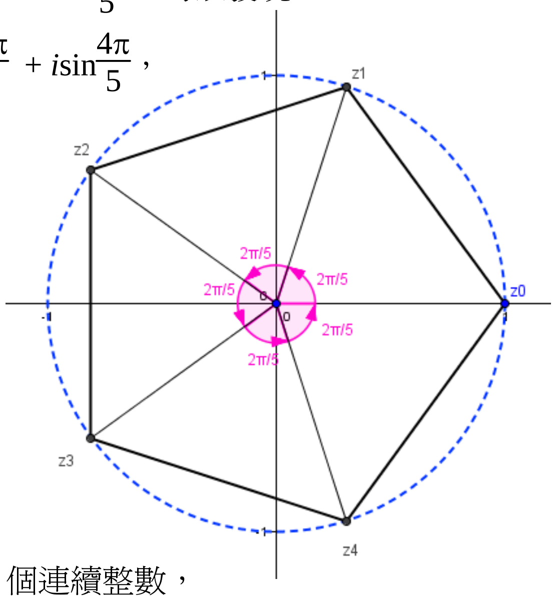
故 1 的五次方根具有以下的形式：$z_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$，$k$ 為整數。

根據代數基本定理，方程式 $z^5=1$ 的根恰有五個。

實際上，將 $k=0$ 到 $k=9$ 逐一代入 $z_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$，可以發現

$z_0=\cos 0+i\sin 0$，$z_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，$z_2=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$，

$z_3=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$，$z_4=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$



由於正弦與餘弦函數的週期都是 2π，因此

$z_5=\cos\frac{10\pi}{5}+i\sin\frac{10\pi}{5}=z_0$，

$z_6=\cos\frac{12\pi}{5}+i\sin\frac{12\pi}{5}=z_1$，

$z_7=\cos\frac{14\pi}{5}+i\sin\frac{14\pi}{5}=z_2$

$z_8=\cos\frac{16\pi}{5}+i\sin\frac{16\pi}{5}=z_3$

$z_9=\cos\frac{18\pi}{5}+i\sin\frac{18\pi}{5}=z_4$，同理只要 k 代入 5 個連續整數，

所以 1 的五次方根可以寫成：$z_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$，$k=0,1,2,3,4$。

(2)1 的五次方根之幾何意義：

考慮 z_k 的絕對值與輻角，可以發現：

$|z_k|=1$ $(k=0,1,2,3,4)$，即 1 的五次方根 z_k 都落在以原點為圓心的單位圓上；

$z_1=z_0(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})$，$z_2=z_1(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})$，$z_3=z_2(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})$，

$z_4=z_3(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})$

根據複數乘法的幾何意義，可以得知：

$z_0\xrightarrow{\text{繞原點}O\text{逆時針旋轉}\frac{2\pi}{5}}z_1$，$z_1\xrightarrow{\text{繞原點}O\text{逆時針旋轉}\frac{2\pi}{5}}z_2$，

$z_2\xrightarrow{\text{繞原點}O\text{逆時針旋轉}\frac{2\pi}{5}}z_3$，$z_3\xrightarrow{\text{繞原點}O\text{逆時針旋轉}\frac{2\pi}{5}}z_4$。

因此將 z_0、z_1、z_2、z_3、z_4 畫在複數平面上，如上圖所示。

它們恰好是一個**單位圓內接正五邊形的五個頂點**。

(3) $\because z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$

$\therefore z^5=1$ 的解除了 1 之外,其餘都是 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ 的解。

故解方程式 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ 的解爲 $z_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$，$k=1,2,3,4$

[注意]：

1 的 5 個 5 次方根依次相連得一個內接於單位圓的正 5 邊形。一般而言，1 的 n 個 n 次方根恰好是內接於單位圓的正 n 邊形的 n 個頂點。其中一個頂點爲 $z_0=1$，其餘的頂點 z_1，z_2，…z_{n-1} 分別是 z_0 繞原點逆時針在單位圓上旋轉$\frac{2\pi}{n}$，$\frac{2\pi}{n}\times2$，$\frac{2\pi}{n}\times3$，…$\frac{2\pi}{n}\times(n-1)$ 所形成的。

(3)如何求複數 a 的 n 次方根？

根據前面 1 的 n 次方根之定義方式，可知 a 的 n 次方根 w，w 滿足 $w^n=a$，

因此 **$z^n=a$ 的 n 個根就是 a 的 n 次方根**。

例子：

求 $1+i$ 的 7 次方根。

考慮根的絕對值：$|z|^7=|1+i|=\sqrt{2}\quad\Rightarrow|z|^7=\sqrt{2}\quad\Rightarrow|z|=\sqrt[14]{2}$

考慮根的輻角：$\arg(z^7)=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in Z\quad\Rightarrow7\cdot\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi\Rightarrow\arg(z)=\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{7}$

$1+i$ 的 7 次方根可表爲 $\sqrt[14]{2}\,(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{7}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{7})$。

如何解 $z^n=a$？

[解法一]：

考慮根的絕對值：$|z^n|=|z|^n=|a|\quad\Rightarrow|z|=\sqrt[n]{|a|}$

考慮根的輻角：

$\arg(z^n)=\arg(a)=\varphi+2k\pi$，$k\in Z$

$\Rightarrow n\cdot\arg(z)=\varphi+2k\pi\Rightarrow\arg(z)=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$

[解法二]：

設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $r=|z|$，$\arg(z)=\theta$，$a=|a|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，$z$ 滿足 $z^n=a$。

所以 $r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=|a|(\cos\varphi+i\sin\varphi)\Rightarrow r^n=|a|$ 且 $\cos n\theta=\cos\varphi$，$\sin n\theta=\sin\varphi$

即 $r=\sqrt[n]{|a|}$ 且 $n\theta$ 與 φ 互爲同界角$(n\theta=\varphi+2k\pi)\Rightarrow\theta=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}$，$k$ 爲整數。

由於正弦函數與餘弦函數的週期爲 2π，因此 k 只要代 n 個連續整數，

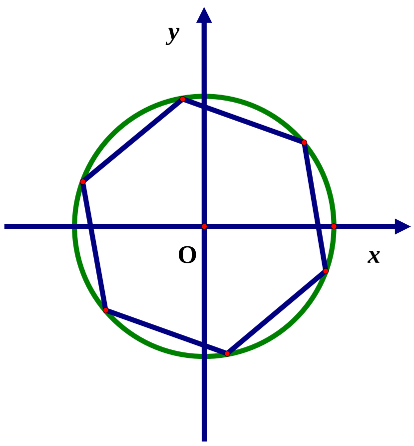
就可以表示所有的 n 個根，故我們可將 a 的 n 個 n 次方根寫成：

$$z_k=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)，k=0,1,2,\ldots,n-1。$$

結論：$z^n=a$ 的解(求 a 的 n 次方根)爲 $z_k=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$，$k=0,1,2,\ldots,n-1$

[例題13] 試解 $z^6=-8-8\sqrt{3}\,i$，並將代表其根的點畫在坐標平面上，試求此六邊形的面積。

Ans：$z_k=\sqrt[6]{16}\left(\cos\dfrac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{6}+i\sin\dfrac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{6}\right)$，$k=0,1,2,3,4,5$；$3\sqrt[6]{108}$



[討論]：

例題五中 $z^6=-8-8\sqrt{3}\,i$ 六個複數根畫在複數平面上，會形成正六邊形的頂點嗎？

(練習23) (1)求 1 的 7 次方根，並將它們標示在複數平面上。
(2)解方程式 $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$

Ans：(1)$z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{7}+i\sin\dfrac{2k\pi}{7}$，$k=0,1,2,3,4,5,6$

(2)$x_k=\cos\dfrac{2k\pi}{7}+i\sin\dfrac{2k\pi}{7}$，$k=1,2,3,4,5,6$

(練習24) 方程式 $x^6=64$ 的六個根在高斯平面上的對應點恰可圍成一個正六邊形，(1)求其解爲__________。(2)此六邊形的面積爲__________。

Ans：(1)$2(\cos\dfrac{k\pi}{3}+i\sin\dfrac{k\pi}{3})$，$k=0$，1，2，3，4，5　(2)$6\sqrt{3}$

(練習25) 試求$-1+i$ 的五個 5 次方根。(即解方程式 $x^5+1-i=0$)

Ans：$x_k=2^{\frac{1}{10}}(\cos\dfrac{3\pi+8k\pi}{20}+i\sin\dfrac{3\pi+8k\pi}{20})$ $k=0,1,2,3,4$

(4)1 的 n 次方根$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ 的性質：

(a) **方程式 $z^n=1$ 的根爲 $z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$，$k=0,1,2,\dots,n-1$**

[說明]：

若令$\omega=z_1=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，則 $z_2=\omega^2$，$z_3=\omega^3$，...，$z_{n-1}=\omega^{n-1}$

故方程式 $z^n=1$ 的根爲 $1,\omega$，ω^2，...，ω^{n-1}，其中$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$。

(b)**方程式 $z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z^2+z+1=0$ 的根爲可寫成ω，ω^2，...，ω^{n-1}，　其中$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$。**

[說明]：

$\because z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z^2+z+1)=0$

$\therefore z^n=1$ 的所有根去掉 $z_0=1$ 這個根形成方程式 $z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z^2+z+1=0$ 的根。

故方程式 $z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z^2+z+1=0$ 的根爲 $z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$，$k=1,2,\dots,n-1$

或寫成ω，ω^2，...，ω^{n-1}，其中$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$。

(c) **$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\dots+\omega^{n-1}=0$，其中$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$。**

因爲方程式 $z^n=1$ 的根爲 $1,\omega$，ω^2，...，ω^{n-1}，其中$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$。

因爲$\omega^n=1\Rightarrow\omega^n-1=(\omega-1)(\omega^{n-1}+\omega^{n-2}+\dots+\omega^2+\omega+1)$，因爲$\omega\neq1$，

所以 $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\dots+\omega^{n-1}=0$。

(d) **$z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z^2+z+1=(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)\dots(z-\omega^{n-1})$，其中$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$。**

[說明]：

因爲方程式 $z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z^2+z+1=0$ 的根爲ω，ω^2，...，ω^{n-1}，其中$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$。

所以 $z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z^2+z+1=(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)\dots(z-\omega^{n-1})$。

[例題14] 設ω爲 $x^5-1=0$ 的一虛根，即取 $\boldsymbol{\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}}$，則求下列各小題：

(1) $\omega^5=$？

(2) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=$？

(3) $1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\frac{1}{\omega^4}=$？

(4) $x^5-1=0$，五根爲：

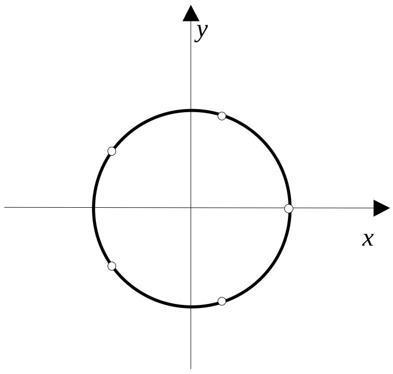
(5) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$，四根爲：

(6)因式分解 $x^4+x^3+x^2+x+1=$

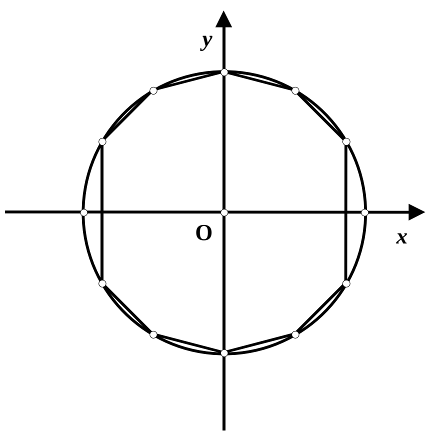
(7)求 $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)=$

(8)求 $(2+\omega)(2+\omega^2)(2+\omega^3)(2+\omega^4)=$

Ans：(1)1 (2)0(3)0 (7)5 (8)11



[例題15] 在複數平面上，以方程式 $x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=0$ 的 10 個虛根爲頂點所連成的 10 邊形面積爲何？ Ans：$2+\frac{\sqrt{3}}{2}$



[例題16] 設$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$爲 $x^n=1$ 的虛根，設方程式 $x^n=k$ 的一個解爲α，
證明：方程式 $x^n=k$ 的解爲α、$\alpha\omega$、$\alpha\omega^2$、…、$\alpha\omega^{n-1}$。

(練習26) $x^5=1$ 的 5 個根在複數平面上依序對應到 A,B,C,D,E 五點，
求$\overline{AB}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\overline{AE}$=？Ans：5

(練習27) 設$\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$試求
(1)$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6$=？
(2)$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)(1-\omega^5)(1-\omega^6)$=？Ans：(1)0 (2)7

(練習28) 設$\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，則求下列各小題：
(1)$\omega^{65}+\omega^{66}+\omega^{67}+\ldots+\omega^{365}$=？ (2)$\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4}+\frac{\omega^3}{1+\omega^6}+\frac{\omega^4}{1+\omega^8}$=？
Ans：(1) 1 (2)2

(練習29) 滿足 $z^6+z^4+z^2+1=0$ 諸根在複數平面上的對應點決定的凸多邊形爲____邊形，面積爲__________。 Ans：六，$\sqrt{2}+1$

(練習30) 設 $x^n=1$ 的 n 個根爲 1, ω，ω^2，…，ω^{n-1}，其中$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$。
證明：$\omega^{n-k}=\overline{\omega^k}$，$0\le k\le n$。

綜合練習

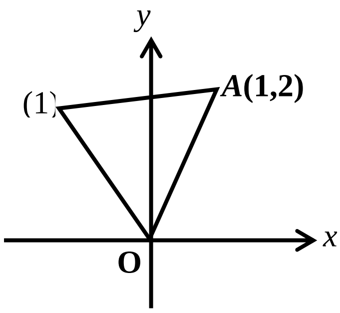
(1) 若複數 z 與 $\sqrt{3}+i$ 之積為 $-2\sqrt{3}+2i$ ，則 z 之主輻角為________。

(2) 令 z 為複數且 $z^6=1, z\neq 1$ ，則下列選項何者為真？
(A) $|z|=1$ (B) $z^2=1$ (C) $z^3=1$ 或 $z^3=-1$ (D) $|z^4|=1$ (E) $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$ (2002 學科)

(3) 若 $\Gamma=\{z|z$ 為複數且 $|z-1|=1\}$，則下列那些點會落在圖形 $\Omega=\{w|w=iz，z\in\Gamma\}$ 上？
(1) $2i$ (2) $-2i$ (3) $1+i$ (4) $1-i$ (5) $-1+i$。(2007 學科)

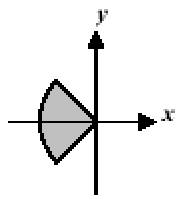
(4) 令 $i=\sqrt{-1}$ ， $\bar{z}$ 表複數 z 的共軛複數。在複數平面上，所有滿足方程式 $(1+i)z-(1-i)\bar{z}=0$ 的複數 z ，會形成下列哪種的圖形？
(1)一點 (2)一圓 (3)一直線 (4)兩直線(2005 指定甲)

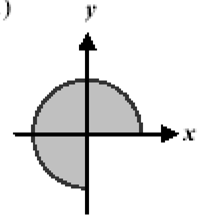
(5) 如圖所示在坐標平面上，ΔOAB 為一正三角形，其中點 A 的坐標為(1,2)，點 B 為 (b_1,b_2)。試問下列何者為真？

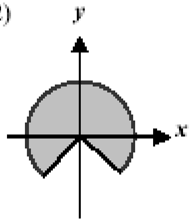


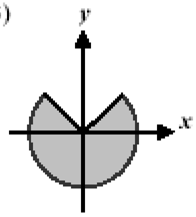
(A) $b_1+ib_2=(\cos 60°+i\sin 60°)(1+2i)$
(B) $b_1+ib_2=(\cos 60°-i\sin 60°)(1+2i)$
(C) $(b_1,b_2)=(-1,2)$
(D) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
(E) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 60° & \sin 60° \\ \sin 60° & -\cos 60° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2003 指定考科乙)

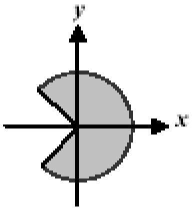
(6) 右圖陰影部分所示為複數平面上區域
$A=\{z:z=r(\cos\theta+i\sin\theta),0\le r\le 1,\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}\}$ 之略圖。
令 $D=\{w:w=z^3,z\in A\}$ ，試問下列選項中之略圖，何者之陰影部分與區域 D 最接近？

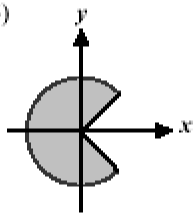


(1)


(2)


(3)


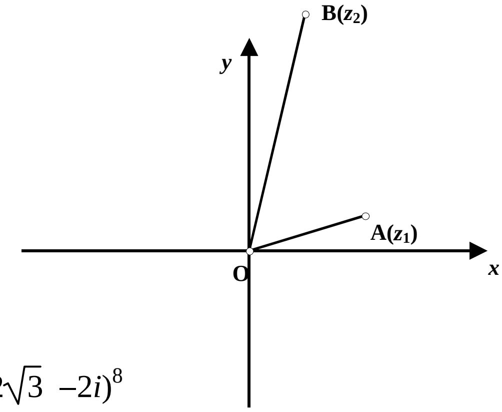
(4)


(5)


(7) 設 O、A、B 分別爲複數平面上代表 0、$1+i$ 以及 $1-i$ 的點。請問下列哪些選項對應的點落在ΔOAB 的內部？ (2011 學科能力測驗)

(1)$\cos60°$　(2)$\cos50°+i\sin50°$　(3) $\dfrac{4-3i}{5}$　(4)$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$　(5)$(\cos30°+i\sin30°)^{25}$。

(8) 如圖，已知$\overline{OB}=4$，$\overline{OA}=2$，且∠AOB=60°試求 $\dfrac{z_2}{z_1}$ =________________。



(9) 試求下列各小題：

(a)$\left|\dfrac{(\sqrt{3}+i)^4(\sqrt{5}-\sqrt{5}i)}{3+\sqrt{3}i}\right|$

(b)設 $a>0$，若$\left|\dfrac{(1+i)^3(a-i)^2}{\sqrt{2}(a-3i)^2}\right|=\dfrac{2}{3}$ ，求 a=？

(10) 化簡下列各小題：

(a)$\dfrac{(\cos43^\circ+i\sin223^\circ)(\cos137^\circ+i\sin763^\circ)}{\sin124^\circ+i\cos56^\circ}$ (b)$(-1+i)^{10}(2\sqrt{3}-2i)^8$

(11) 化簡$\dfrac{1+i\tan\frac{\pi}{8}}{1-i\tan\frac{\pi}{8}}$之值爲__________。

(12) 若$(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)$爲小於 0 的實數，則θ是第幾象限角？
(1)第一象限角　(2)第二象限角　(3)第三象限角　(4)第四象限角　(5)條件不足，無法判斷。　(2003 學科)

(13) ΔABC 的三內角爲 A、B、C，請問$(\cos A+i\sin A)(\cos B+i\sin B)(\cos C+i\sin C)$=？

(14) 在ΔABC 中若$\dfrac{\cos A+i\sin A}{(\cos B+i\sin B)(\cos C+i\sin C)}$爲實數，則此三角形的形狀爲何？

(15) 設 O 表原點，$A(\alpha)$，$B(\beta)$ 爲複數平面的二點，

$\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$，$\beta=3\left(\cos\dfrac{8\pi}{15}+i\sin\dfrac{8\pi}{15}\right)$，

則(a)△OAB 的面積爲_________________。 (b)$\overline{AB}$的長度爲______________。

(16) 設$|z|=2|z+1|$，且 $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z+1}{z}\right)=\dfrac{\pi}{3}$，則 z 的極式表示式爲何？

(17) 設 $z_1=2+ai$，$z_2=2b+(2-b)i$，其中 a,b 爲實數，$i=\sqrt{-1}$ ，若$|z_1|=\sqrt{2}|z_2|$，且$\dfrac{z_1}{z_2}$的幅角爲$\dfrac{\pi}{4}$，則數對(a,b)=？　(85 自)

(18) 解方程式：(a)$x^2-i=0$ (b)$x^2=8+6i$

(19) 求下列方程式的根：

(a)$x^5=\sqrt{3}-i$ (b) $z^6=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

(c) $(z+3)^6=8-8\sqrt{3}i$ (d)$x^3-6x^2+12x+8=0$

(20) 試解$(z-1+2i)^4=-8-8\sqrt{3}i$之根，並在複數平面上求以四根爲頂點所得四方形之面積。

(21) 若 $z^2-2(\cos 8°)z+1=0$，求 $z^{15}+\frac{1}{z^{15}}=$？

(22) $Z=1-\cos 130°+i\sin 130°$，則下列何者正確？

(A) $|Z|=2\sin 65°$ (B) $\text{Arg}(Z)=65°$ (C) $\text{Arg}(\overline{Z})=335°$

(D) Z^{18}爲純虛數 (E) Z^{36}爲實數。

(23) 設$\alpha=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$，試求$\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^8+\alpha^{10}+\alpha^{12}+\alpha^{14}$ 之值。

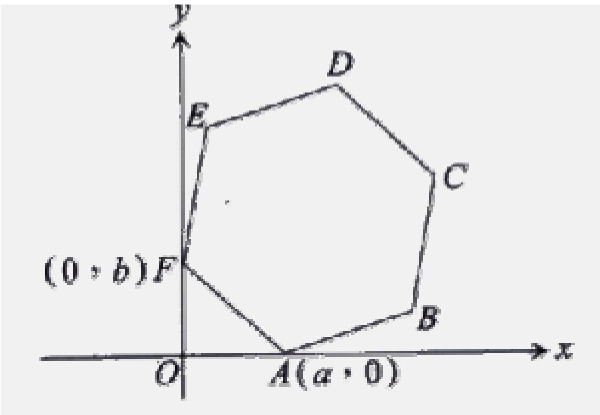
(24) 設 $z=\cos\theta+i\sin\theta\neq 1$，且 $z^5=1$，則

(a)$\cos 4\theta+\cos 3\theta+\cos 2\theta+\cos\theta=$？

(b)$\sin 4\theta+\sin 3\theta+\sin 2\theta+\sin\theta=$？

進階問題

(25) 正六邊形 ABCDEF 邊長爲 r，其中 $B(9,\sqrt{3})$，其中 $A(a,0)$、$F(0,b)$ 兩點分別在 x,y 軸上，試求數對$(a,b)=$？



(26) (a)設 z 爲一複數，$\overline{z}$ 爲其共軛複數，若$|z|=1$，求證：$\frac{1+z}{1+\overline{z}}=z$。

(b)若$\theta=\frac{\pi}{24}$，求$\left(\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}\right)^{100}$之值。

(27) 設 $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}$，n 爲自然數。

(a)試求一個 n 最小值使得 z^n 爲實數。

(b)求$|z^{n+1}-z^n|=$？

(c)試求$\sum_{n=1}^{\infty}|z^{n+1}-z^n|=$？

(28) 設 n 爲大於 1 的整數，若$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$，
試求 $a_0-a_2+a_4-a_6+\ldots$之值。

(29) 設 n 爲正整數，$\theta=\dfrac{2\pi}{2n+1}$ ，求 $\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\ldots+\cos n\theta$ 之值。

(30) 設α,β 爲複數，且滿足$\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0$ 且$\beta\neq0$，令 $P(\alpha),Q(\beta)$,，試求ΔOPQ 的三邊長之比。

(31) A,B,C,D 表 $x^4-x^2+1=0$ 的四個根在複數平面上所對應的點，P 點代表 i，試求 PA、PB、PC、PD 之積。

(32) 設複數 $z_1=-3-\sqrt{3}i$，$z_2=\sqrt{3}+i$，$z=\sqrt{3}\cos\theta+i(\sqrt{3}\sin\theta-2)$，則當 $z=$_____時，
$|z-z_1|+|z-z_2|$會有最小值。

(33) 設 z 爲複數，且$|z|=1$，試求$|z^2-z+1|$的範圍？

綜合練習解答

(1) $\dfrac{2\pi}{3}$

(2) (A) (C) (D) (E)

(3) (1)(3)(5)

(4) (3)

(5) (A)(D)

(6) (5)

(7) (1)(3)(5)

(8) $1+\sqrt{3}\,i$

(9) (a)$\dfrac{8\sqrt{30}}{3}$ (b)$\sqrt{3}$

(10) (a)$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (b) $2^{20}(\sqrt{3}+i)$

(11) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

[提示：$\dfrac{1+i\tan\frac{\pi}{8}}{1-i\tan\frac{\pi}{8}}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}}{\cos(\frac{-\pi}{8})+i\sin(\frac{-\pi}{8})}$]

(12) (2)

(13) -1

(14) 直角三角形

(15) (a) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (b)$\sqrt{7}$ [提示：在複數平面上，考慮極式的意義去求解]

(16) $\frac{2}{\sqrt{3}}(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$

(17) $(\frac{10}{3}，\frac{4}{3})$

(18) (a)$\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)$ (b)$\pm(3+i)$

[提示：可以令 $a+bi$ 爲根，代入方程式，比較實部與虛部，再解 a,b]

(19) (a)$\sqrt[5]{2}(\cos\frac{\frac{-\pi}{6}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{-\pi}{6}+2k\pi}{5})$，$k$=0,1,2,3,4

(b) $z_k=\cos\frac{5\pi/6+2k\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi/6+2k\pi}{6}$，$k$=0,1,2,3,4,5

(c) $z_k=-3+\sqrt[6]{16}\,(\cos\frac{5\pi/3+2k\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi/3+2k\pi}{6})$，$k$=0,1,2,3,4,5

(d)$x=2+2\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3})$，$k$=0,1,2

[提示：原方程式可化爲$(x-2)^3=-16$]

(20) $z_k=1+2i+2[\cos\theta(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3})],k=0,1,2,3$；8

(21) -1

(22) (A)(C)(D)(E)

(23) 0

(24) (a)-1 (b)0

(25) $(4,2\sqrt{3})$

(26) (a)利用$\cdot\bar{z}=|z|^2=1$

$\Rightarrow\frac{1+z}{1+\bar{z}}=\frac{z(1+z)}{z+z\cdot\bar{z}}=\frac{z(1+z)}{z+1}=z$ (b)令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，再利用(a)的結論得

$(\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta})^{100}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$。

(27) (a)3 (b)$\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$ (c)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

[提示：(a)$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\Rightarrow z^n=(\frac{1}{2})^n(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})$ 爲實數 $\Rightarrow\sin\frac{n\pi}{3}=0\Rightarrow n=3k$，$k$ 爲整數

(b) $|z^{n+1}-z^n|=|z^n(z-1)|=|z^n||z-1|=|z|^n|z-1|=(\frac{1}{2})^n\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$(c) $\sum_{n=1}^{\infty}|z^{n+1}-z^n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(28) $2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$ [提示：將 i 代入$(1+x)^n$ 中，再考慮$(1+i)^n$ 的實部即爲 $a_0-a_2+a_4-a_6+\ldots$]

(29) $\frac{-1}{2}$[提示：令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，考慮 $z+z^2+\ldots+z^n=\frac{z(1-z^n)}{1-z}$ 的實部。]

(30) OP：OQ：PQ=2：1：$\sqrt{3}$ [提示：$\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0\Rightarrow(\frac{\alpha}{\beta})^2-2(\frac{\alpha}{\beta})+4=0\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=1\pm\sqrt{3}\,i$ (a)$\frac{\alpha}{\beta}=1+\sqrt{3}\,i=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\Rightarrow\alpha=\beta\cdot[2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})]\Rightarrow|\alpha|=2|\beta|$且

$\angle$QOP=$\frac{\pi}{3}$。(b) $\frac{\alpha}{\beta}=1-\sqrt{3}\ \ i=2(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3})\ \ \Rightarrow\alpha=\beta\cdot[2(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3})]$

$\Rightarrow|\alpha|=2|\beta|$且$\angle$QOP=$\frac{\pi}{3}$]

(31) 3[提示：因爲 A,B,C,D 表 $x^4-x^2+1=0$ 的四個根，且令 A(z_1)、B(z_2)、C(z_3)、D(z_4)，所以 $x^4-x^2+1=0$ 有四個根 z_k，$k=1,2,3,4$，$\Rightarrow$ $x^4-x^2+1=(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)(x-z_4)\Rightarrow$
$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}=|i-z_1||i-z_2||i-z_3||i-z_4|=|(i-z_1)(i-z_2)(i-z_3)(i-z_4)|=|i^4-i^2+1|=3$]

(32) $\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

[解法]：

$z+2=\sqrt{3}(\cos\theta+i\ \sin\theta)$，故在複數平面上，$z$ 爲以-2 爲圓心，$\sqrt{3}$爲半徑的圓上的動點。

令 A(z_1)、B(z_2)、P(z)

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=|z-z_1|+|z-z_2|\geq\overline{\mathrm{AB}}$，因爲$\overline{\mathrm{AB}}$恰爲切線，

所以當 P 爲切點時，即 $z=\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ 時，$|z-z_1|+|z-z_2|$會有最小值。

(33) $0\leq|z^2-z+1|\leq3$ [提示：$z^2-z+1=(z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\quad ||z-\frac{1}{2}|^2-\frac{3}{4}|\leq|(z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}|\leq|(z-\frac{1}{2})^2|+\frac{3}{4}$，

當 $z=-1$ 時，$(z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=3$ 爲最大值，當 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 時，有最小值 0]

補充教材

(甲)複數在三角函數上的應用

(1)由棣美弗定理推導倍角公式：

以三倍角公式為例：

考慮$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta$，

$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3(\cos\theta)^2(i\sin\theta)+3(\cos\theta)(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$

$=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta+i(3\cos^2\theta\cdot\sin\theta-\sin^3\theta)$

$=\cos3\theta+i\sin3\theta$

$\Rightarrow\cos3\theta=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta=\cos^3\theta-3(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$。

$\Rightarrow\sin3\theta=3\cos^2\theta\cdot\sin\theta-\sin^3\theta=3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

[例題1] 利用棣美弗定理證明：

$\cos4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta-1$，$\sin4\theta=4\sin\theta\cos\theta-8\sin^3\theta\cos\theta$

(練習1) 利用棣美弗定理與二項式定理證明：

$\cos n\theta$

$=\cos^n\theta-C_2^n\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_4^n\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta+\ldots+(-1)^kC_{2k}^n\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta+\ldots$。

$\sin n\theta$

$=C_1^n\cos^{n-1}\theta\sin\theta+C_3^n\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\ldots+(-1)^kC_{2k-1}^n\cos^{n-2k+1}\theta\sin^{2k-1}\theta+\ldots$

(練習2) 設$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$，n為大於1的正整數，試證：

$\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\theta=0$且$\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\theta=0$。

(Hint：令$z=\cos\theta+i\sin\theta$，考慮$z+z^2+\ldots z^n$的實部與虛部。)

(2)三角級數求和與求積：

[例題2] 求(1)$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos(\alpha+(n-1)\beta)=$？

(2)$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin(\alpha+(n-1)\beta)=$？

Ans：(1)$\dfrac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cos(\alpha+\dfrac{n-1}{2}\beta)$ (2) $\dfrac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\sin(\alpha+\dfrac{n-1}{2}\beta)$

[例題3] (三角級數的乘積)

(1)試證明：$x^{2m}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{m-1}(x^2-2x\cos\dfrac{k\pi}{m}+1)$ 。

(2) $\sin\dfrac{\pi}{2m}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{2m}\cdots\cdot\sin\dfrac{(m-1)\pi}{2m}=\cos\dfrac{\pi}{2m}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{2m}\cdots\cos\dfrac{(m-1)\pi}{2m}=\dfrac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$ 。

(練習3) 試證明：

(1)$x^{2m+1}-1=(x-1)\prod_{k=1}^{m}(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2m+1}+1)$。

(2) $\sin\frac{\pi}{2m+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2m+1}\cdots\sin\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$。

(3) $\cos\frac{\pi}{2m+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2m+1}\cdots\cos\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{1}{2^m}$。

(練習4) 試求下列各式：

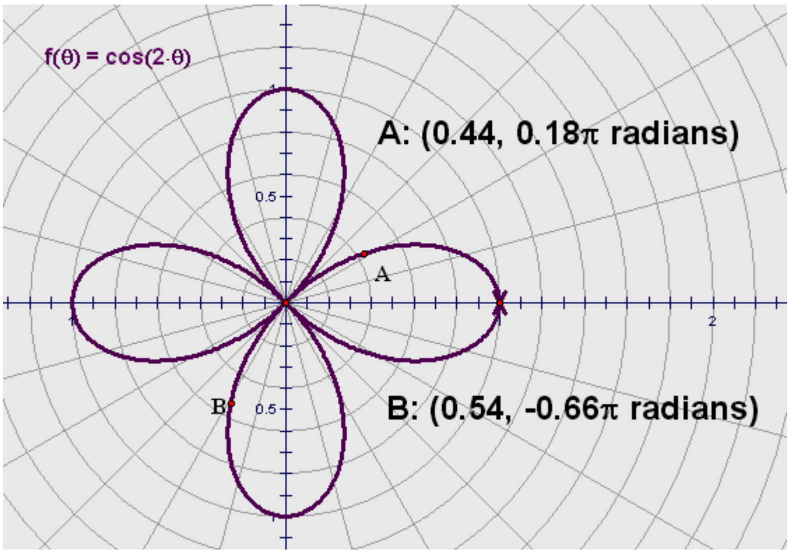
(1)$\sin\frac{\pi}{15}\cdot\sin\frac{2\pi}{15}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \sin\frac{7\pi}{15}$。

(2) $\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{2\pi}{10}\cdot\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{4\pi}{10}$。Ans：(1)$\frac{\sqrt{15}}{128}$ (2)$\frac{\sqrt{5}}{16}$

(乙)極坐標方程式

(1)極坐標方程式的圖形：

下圖中是方程式 $r=\cos2\theta$的圖形，圖形中的 A、B 兩點都至少有一個極坐標是 $r=\cos2\theta$的解，另一方面，方程式的解例如$[\frac{-1}{2},\frac{\pi}{3}]$、$[-1,\frac{\pi}{2}]$…都會在圖形上。



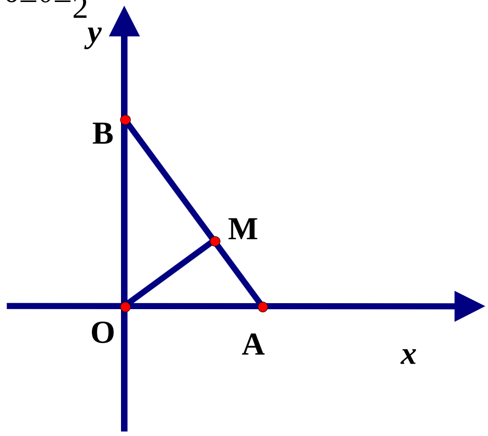
定義：設曲線Γ與極坐標方程式 $f(r,\theta)=0$，若

(1)曲線Γ上任一點 P 的極坐標中，至少有一個坐標$[r,\theta]$滿足方程式 $f(r,\theta)=0$；

(2)滿足方程式 $f(r,\theta)=0$ 的極坐標$[r,\theta]$所對應的點 P 都在曲線Γ上。

則我們稱方程式 $f(r,\theta)=0$ 爲曲線Γ的極坐標方程式，曲線Γ稱爲方程式 $f(r,\theta)=0$ 的圖形。

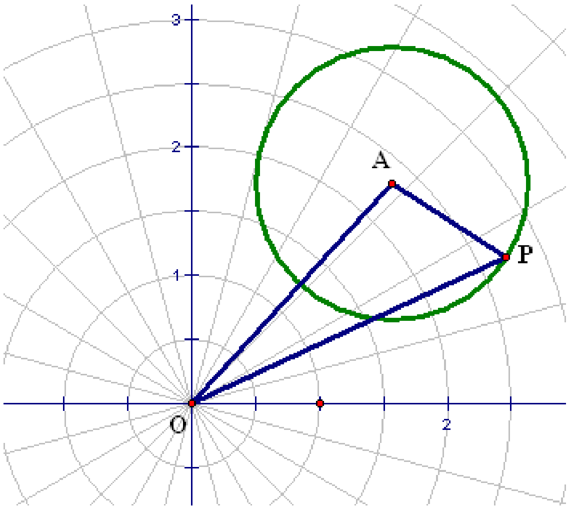
[例題4] 設直角三角形兩邊所在的射線為 x,y 軸的正向，$\overline{AB}=2a$，取直角頂點 O 為極點，x 軸正向為極線，建立一個極座標系，設$\overline{OM}$為斜邊$\overline{AB}$上的高，試求垂足 M 的軌跡方程式。 Ans：$r=a\sin 2\theta$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$



[例題5] 圓的極坐標方程式：

試求圓心 O[ρ,α]，半徑為 l 的圓之極坐標方程式。

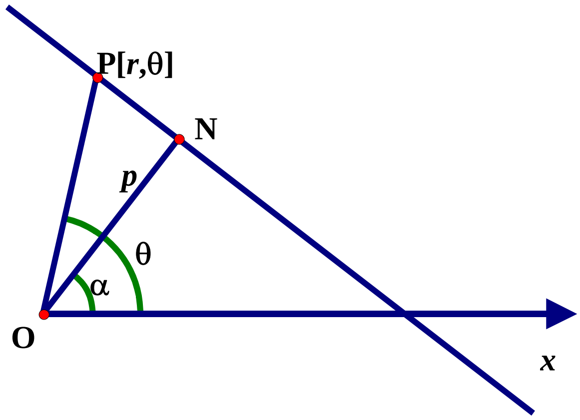
Ans：$r^2-2\rho r\cos(\theta-\alpha)=l^2-\rho^2$



[例題6] 直線的極坐標方程式(法線式)

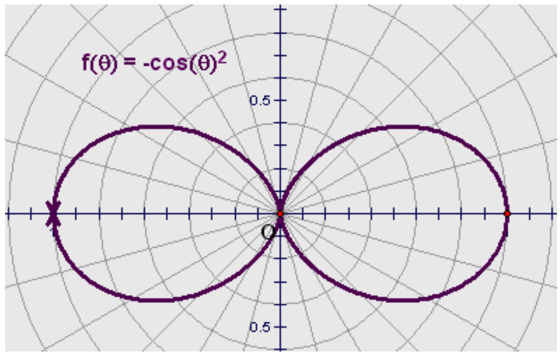
設 P 爲直線 L 上任一點，極點 O 到直線 L 的距離$\overline{ON}$爲 p，且 x 軸正向與法線 ON 的交角爲α，試求直線 L 的極坐標方程式。

Ans：$r\cos(\theta-\alpha)=p$



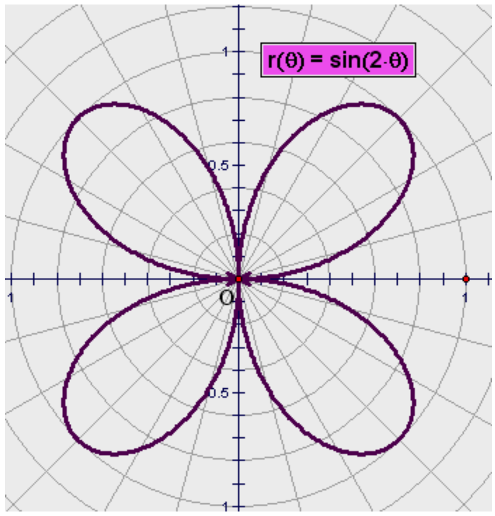
[例題7] 將極坐標方程式 $r=-\cos^2\theta$ 化成直角坐標方程式。

Ans：$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=x^2$



[例題8] 化直角坐標方程式$(x^2+y^2)^3-4a^2x^2y^2=0$ 爲極坐標方程式。

Ans：$r=a\sin2\theta$或 $r=-a\sin2\theta$



根據例題 7 或例題 8 可以看出有些曲線的直角坐標方程式是比極坐標方程式來得複雜，一般來說，如果曲線是由動點旋轉而產生的軌跡，那麼這個軌跡(曲線)的極坐標方程式會比直角坐標方程式來得簡單。因此對於這類曲線而言，用極坐標來研究會比直角坐標來得簡便。

(練習5) 設 $r=f(\theta)$，爲曲線 C 的極坐標方程式，試證明：對於任何整數 k，$r=-f(\theta+(2k+1)\pi)$

(練習6) 在直角坐標系中，直線 $ax+by+c=0$，將這個方程式化成極坐標方程式。

Ans：$a\cos\theta+c\sin\theta=\frac{-c}{r}$

(練習7) 極坐標系中，設直線 L 通過點 $P_0[3,\frac{2\pi}{7}]$，且 x 軸的正向與 L 的交角爲$\frac{\pi}{3}$，試求直線 L 的極坐標方程式。Ans：$r\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=3\sin(\frac{\pi}{21})$

(練習8) 已知$\overline{OA}$爲圓 C 的直徑，過圓 C 上任一點 M 作圓的切線，求切線與∠AOM 平分線的交點的軌跡極坐標方程式。

Ans：$r=\frac{2a\cos^2 2\theta}{\cos 3\theta}$　(a 爲圓 O 的半徑)