§1–5 斜坐標的介紹與應用

(1)坐標的意義：

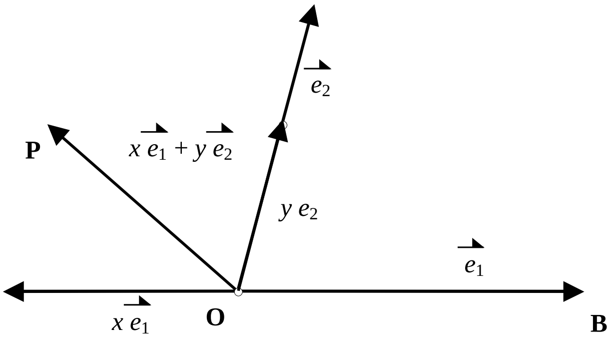
一維的情形：

給定一直線L，取其上一點O，再取不同於O點的E，設$\overrightarrow{e}=\overrightarrow{OE}$，則對於L上任意點P，$\overrightarrow{OP}$均與$\overrightarrow{OE}$平行，即存在一個實數$x$，使得$\overrightarrow{OP}=x\cdot\overrightarrow{e}$。

我們稱**S≡{O；$\overrightarrow{e}$}為L上的一個坐標系**，而***x*稱為P點相關於S的坐標**。簡記為**S–坐標**，其中**O點**稱為這個座標的**基準點(原點)**，而$\overrightarrow{e}$稱為**S**的**基底**。

二維的情形：

給定平面上一個定點O與兩個不平行的向量$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$，平面上任意點P，可以找到實數x,y滿足$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，我們稱**S≡{O；$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$}為平面上的一個坐標系**，而**($x$,$y$)稱為P點相關於S的坐標**。簡記為**S–坐標**，其中**O點**稱為這個座標的**基準點(原點)**，而$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$稱為S的**基底**。



[討論]：點P對於S坐標系的坐標(x,y)是否唯一？

[討論]：

根據坐標系的定義，我們熟悉的座標系$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$應該如何取？

我們熟悉的直角坐標，座標系$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$可取為兩個長度為 1，且互相平行的兩個向量。例如：$\overrightarrow{e_1}$可取成(1,0)，$\overrightarrow{e_2}$可取成(0,1)

例如：設$\overrightarrow{e_1}=(2,1)$，$\overrightarrow{e_2}=(1,2)$，O(0,0)，若$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}$，
則我們稱P點相關於S的坐標為(2,3)。

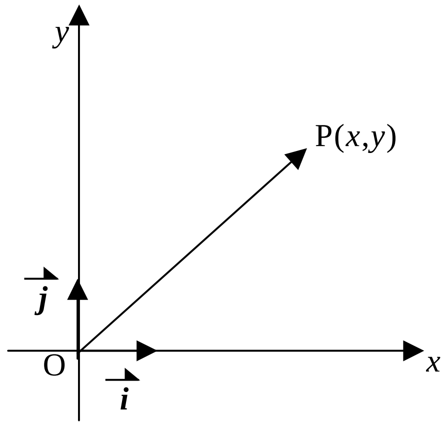
例如：直角坐標系：

在平面上選定一個基準點O及一組互相垂直且長度等於 1 的向量$\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$，當作基底，這樣構成的坐標系稱為**直角坐標系**。

通過O點且包含$\overrightarrow{i}$的直線定為x軸，通過O點且包含$\overrightarrow{j}$的直線定為y軸。

[問題]：設$\overrightarrow{i}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{j}=\overrightarrow{OB}$，
請問A、B的坐標如何表示？

[問題]：在此直角坐標系下，
$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$如何用坐標來表示？



[例題1] 在ΔABC中，D、E、F分別在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上，且BD：DC=2：1，
AE：EC=1：1，AF：FB=1：4。

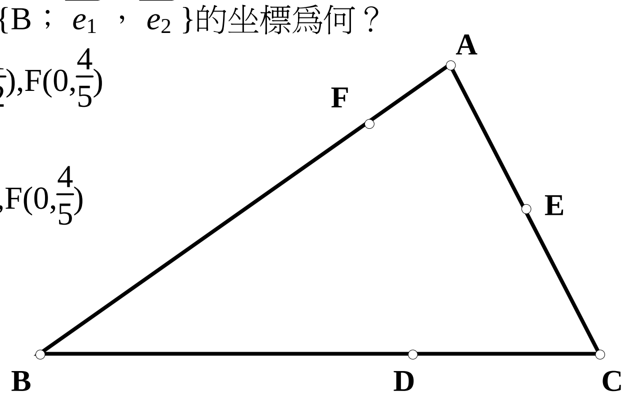
若取基準點為B，$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{BC}$，

請問：A、B、C、D、E、F在坐標系{B；$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$}的坐標為何？

Ans：A(0,1),B(0,0),C(1,0),D$(\frac{2}{3},0)$,E$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,F$(0,\frac{4}{5})$

[解法]：根據坐標的意義，

可得A(0,1),B(0,0),C(1,0),D$(\frac{2}{3},0)$,E$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,F$(0,\frac{4}{5})$



[例題2] 設P點落在直線AB上，O點在直線AB外，現在以O為原點，$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$為基底，
設P點相關於坐標{O；$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$}的坐標為(x,y)，請求出直線AB的方程式。
Ans：$x+y=1$
[解法]：因為$\overrightarrow{OP}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OC}$，

且P點在直線AB上 $\Leftrightarrow x+y=1$
所以直線AB的方程式爲$x+y=1$

[例題3] 設P點落在線段AB上，且$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，O點在直線AB外，現在以O爲原點，$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$爲基底，在坐標$\{O;\overrightarrow{OA}、\overrightarrow{OB}\}$上，設P點的坐標爲$(x,y)$，請問$(x,y)$=？

Ans：$(\dfrac{n}{m+n},\dfrac{m}{m+n})$

[解法]：

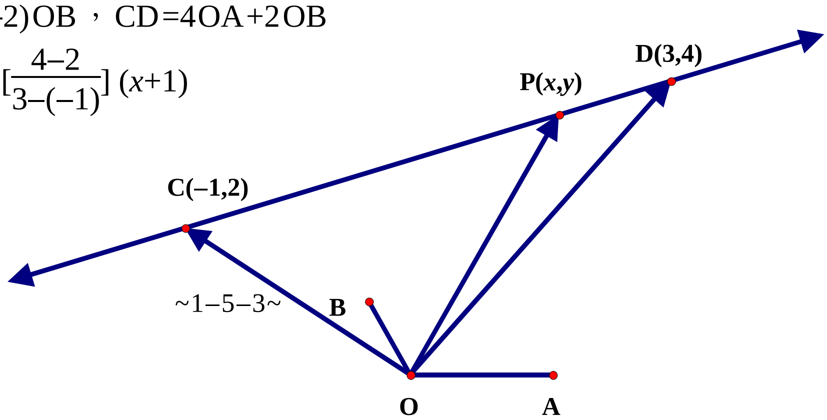
根據分點公式，可得$\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$

所以P點在關於坐標系$\{O;\overrightarrow{OA}、\overrightarrow{OB}\}$下的坐標爲$(\dfrac{n}{m+n},\dfrac{m}{m+n})$。

[例題4] 在坐標$\{O;\overrightarrow{OA}、\overrightarrow{OB}\}$上，C、D兩點的坐標爲$(-1,2)$、$(3,4)$，
請問直線CD的方程式爲何？
[解法]：
設$P(x,y)$爲直線CD上的任一點
依坐標的意義：
$\overrightarrow{OC}=(-1)\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$
因爲P點在直線CD上，所以$\overrightarrow{CP}\,//\,\overrightarrow{CD}$
而$\overrightarrow{CP}=(x+1)\overrightarrow{OA}+(y-2)\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{2}$ $\Leftrightarrow y-2=[\dfrac{4-2}{3-(-1)}](x+1)$

$\Leftrightarrow y-2=\dfrac{1}{2}(x+1)$。



這樣的做法跟直坐標系的結果完全一致。

只是$\frac{1}{2}$不能解釋成直線CD的斜率。

[例題5] ΔABC中，D是$\overline{AB}$中點，E點在$\overline{AC}$上，且$\overline{AE}$：$\overline{EC}$=2：1，$\overline{CD}$與$\overline{BE}$交於P，

設$\overrightarrow{AP}=x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{AC}$，求數對$(x,y)$=？ Ans：$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$

[解答]：

考慮坐標系{A；$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$}，

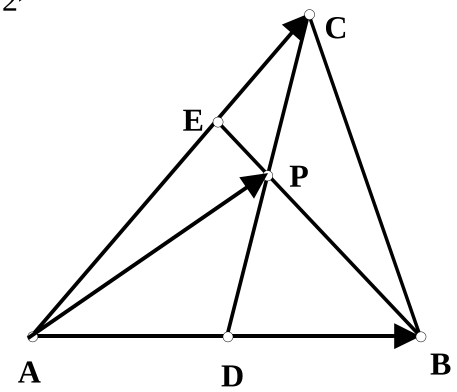
因爲$\overrightarrow{AP}=x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{AC}$，所以P點坐標爲$(x,y)$

所以A(0,0)、B(1,0)、C(0,1)、D$(\frac{1}{2},0)$、E$(0,\frac{2}{3})$

算出直線BE、CD的方程式：

BE：$2x+3y=2$，CD：$2x+y=2$

因此P點的坐標爲$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$。



[例題6] 設P點落在ΔABC所在的平面中，且滿足$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$，

請依下列s,t的條件，求出P點所形成的圖形。

(1)$t=0$，$-1\le s\le 2$ (2)$s+t=2$ (3)$0\le s\le 1$，$0\le t\le 1$ (4)$-1<s+t<2$

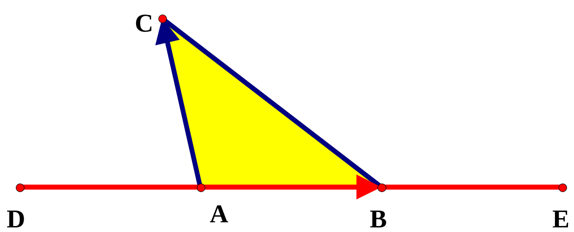
[解法]：

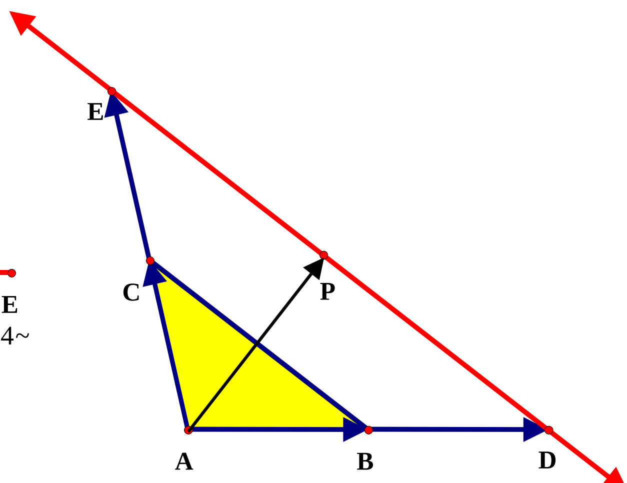
[向量的觀點]：

(1)$t=0\Rightarrow\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}$，

$s=-1$，$\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$，$s=2$，$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}$

因爲$-1\le s\le 2$，所以P點形成的圖形是$\overline{DE}$。





(2)因爲$s+t=2\Rightarrow\frac{s}{2}+\frac{t}{2}=1$

$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{s}{2}\cdot(2\overrightarrow{AB})+\frac{t}{2}\cdot(2\overrightarrow{AC})$

令 $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$，$2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{s}{2}\cdot(\overrightarrow{AD})+\frac{t}{2}\cdot(\overrightarrow{AE})$且$\frac{s}{2}+\frac{t}{2}=1$

根據三點共線的條件可知P點會在直線DE上。

因此P點所形成的圖形爲DE直線。

(3)設$s=k$，$\overrightarrow{AP}=k\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow k\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CE}$，此時因爲 $0\le t\le 1$

所以P在$\overline{DE}$上移動，而另一方面，

k在 0 與 1 之間變動，那麼D會在$\overline{AB}$間移動，

因此P點會形成的圖形爲平行四邊形與其內部。

(4)

(a)令$k=s+t$($k\neq 0$，$-1<k<2$)

$\overrightarrow{AP}=\frac{s}{k}\cdot(k\overrightarrow{AB})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{AC})$，令$k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$，$k\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$，$s'=\frac{s}{k}$，$t'=\frac{t}{k}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AP}=s'\cdot\overrightarrow{AD}+t'\cdot\overrightarrow{AE}$，$s'+t'=1$

因此P點會在直線DE上移動，

(b)當$k=0$ 時，$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}-s\cdot\overrightarrow{AC}=s\cdot\overrightarrow{CB}$，

P點形成的圖形爲過A點與$\overleftrightarrow{BC}$平行的直線。

(c)設$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF}$，$-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}$，$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}$，$2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}$

當k在-1 到 2 之間變化($k\neq 0$)時，那麼D由F變化到H，E由G變化到I

且保持 $\overleftrightarrow{DE}\,//\,\overleftrightarrow{BC}$ 。因此P點形成一個帶狀區域。

[斜坐標的觀點]：

考慮坐標系{A；$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$}，

因爲$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$，所以P點坐標爲$(s,t)$，因此(1)~(4)各題可以視爲

P點坐標滿足(1)$t=0$，$-1\le s\le 2$ (2)$s+t=2$ (3)$0\le s\le 1$，$0\le t\le 1$ (4)$-1<s+t<2$

所形成的圖形。因此各題的圖形如下：

(1) (2)

(3) (4)

(練習1) 在ΔABC中，考慮坐標系{A；$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$}設$\overline{AB}=c,\overline{BC}=a,\overline{AC}=b$

請問重心G與內心I的坐標為何？

Ans：G$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$、I$(\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c})$ [提示：考慮G與I向量的性質]

(練習2) 設O,A,B三點不共線，若$\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=5\overrightarrow{OB}$，

令AD與BC交於一點E，若$\overrightarrow{OE}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}$，求$x,y$。

Ans：$x=\frac{16}{19}, y=\frac{15}{19}$

(練習3) 坐標平面上有一ΔABC與一點D，若 $7\overrightarrow{AD}=8\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}$，

請求出$\frac{\Delta ABD面積}{\Delta ABC面積}$=？ Ans：$\frac{6}{7}$

(練習4) 設ΔABC爲平面上的一個三角形，P爲平面上一點且$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，其中$t$爲一實數。試問下列哪一個選項爲$t$的最大範圍，使得$P$落在△$ABC$的內部？(A)$0<t<\frac{1}{4}$ (B)$0<t<\frac{1}{3}$ (C)$0<t<\frac{1}{2}$ (D)$0<t<\frac{2}{3}$ (E)$0<t<\frac{3}{4}$

(93 學科能力測驗)　(D)

(練習5) 在ΔABC的三邊$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$上分別取D、E、F三點，

使得$\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$。

設G爲ΔDEF的重心，$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則α=？β=？

Ans：$\alpha=\frac{17}{45}$，$\beta=\frac{8}{45}$

(練習6) 平行四邊形ABCD中，E爲$\overline{AD}$上一點，且$\overline{AE}=2\overline{ED}$，F爲$\overline{AB}$上一點且$\overline{AF}=3\overline{FB}$，若$\overline{BE}$與$\overline{DF}$交於點P，且$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則(a)$(x,y)$=？ (b)DP：PF=？Ans：(a) $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ (b)2：1

(練習7) 設P點落在ΔABC所在的平面中，且滿足$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$，

請依下列s,t的條件，求出P點所形成的圖形。

(1)$s+2t=3$　(2)$1\le s+t\le 2$，$s\ge 0$，$t\ge 0$

(練習8) 平面上三點A(3,−2)、B(−1,1)、C(5,4)

(1)若點P滿足$\overrightarrow{AP}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$，且$-1\le r\le 2$，$0\le s\le 2$，

　則求點P所成區域之面積。

(2)若點Q滿足$\overrightarrow{AQ}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$，且$r\ge -1$，$s\ge 1$，$r+s\le 2$

　則求點Q所成區域之面積。Ans：(1)15 (2)60