第二十七單元　二階行列式

(甲)二階行列式

介紹二階行列式之前，我們先來觀察討論下面兩個例子：

例一：解二元一次方程組

解二元一次方程組：$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \cdots(1) \\ a_2x+b_2y=c_2 \cdots(2) \end{cases}$，其中 x,y 是未知數，

我們使用代入消去法解之

$(1)\times b_2-(2)\times b_1 \Rightarrow (a_1b_2-a_2b_1)x=(c_1b_2-c_2b_1)$

$(1)\times a_2-(2)\times a_1 \Rightarrow (a_2b_1-a_1b_2)y=(c_1a_2-c_2a_1)$

當 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 時，解得唯一解：$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$。

例二：求平行四邊形的面積

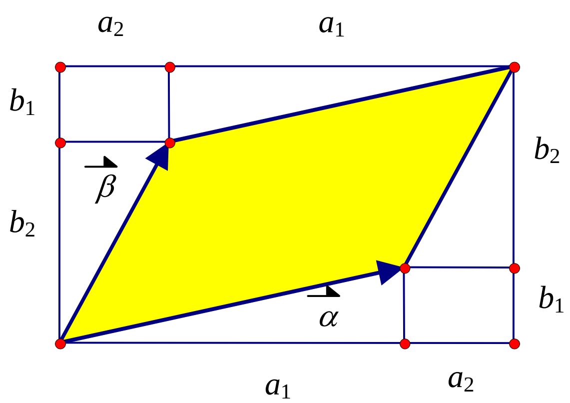
設 $\vec{\alpha}=(a_1,b_1)$、$\vec{\beta}=(a_2,b_2)$為平面上兩個向量，

由 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 所展成的平行四邊形面積

$=\sqrt{|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2}$

$=\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2)^2}$

$=|a_1b_2-a_2b_1|$



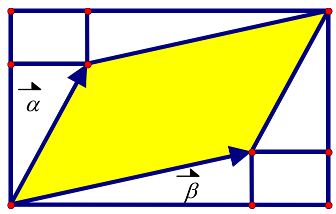
事實上，

(1°)若 $\vec{\alpha}$ 繞著起點逆時針旋轉θ到 $\vec{\beta}$ 且 $0<\theta<\pi$，($\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 的關係如圖所示)，

利用基本的面積關係計算出由 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 所展成的平行四邊形面積$=a_1b_2-a_2b_1$。

(2°)若 $\vec{\alpha}$ 繞著起點旋轉θ到 $\vec{\beta}$ 且 $\pi<\theta<2\pi$，($\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 的關係如圖所示)，

由 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 所展成的平行四邊形面積$=-(a_1b_2-a_2b_1)$。



(1)定義二階行列式：

根據前的討論，我們可以得到一個模式，有兩組數a_1、b_1與a_2、b_2它們交叉乘再相減$a_1b_2-a_2b_1$分別代表解方程組中會不會有解的條件或是平行四邊形的面積。

數學上將這樣的模式稱爲二階行列式。

(a)二階行列式的定義：

當 a,b,c,d 爲 4 個數，定義二階行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$。

$\boxed{\text{(它是左上與右下的乘積減去右上與左下的乘積)}}$

符號$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$中，$(a,b)$與$(c,d)$稱爲第一列、第二列；$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$與$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$稱爲第一行、第二行。

引入二階行列式的符號之後，重新考慮解$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \cdots (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 \cdots (2) \end{cases}$的過程，

可得$\begin{cases} \Delta\cdot x=\Delta_x \\ \Delta\cdot y=\Delta_y \end{cases}$，其中$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$。

當$\Delta\neq 0$ 時，方程組有唯一解$(x,y)=(\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\dfrac{\Delta_y}{\Delta})$ [此稱爲**克拉瑪公式**]

當$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，方程組有無限多解。

當$\Delta=0$，而Δ_x、Δ_y有一不爲 0 時，方程組無解。

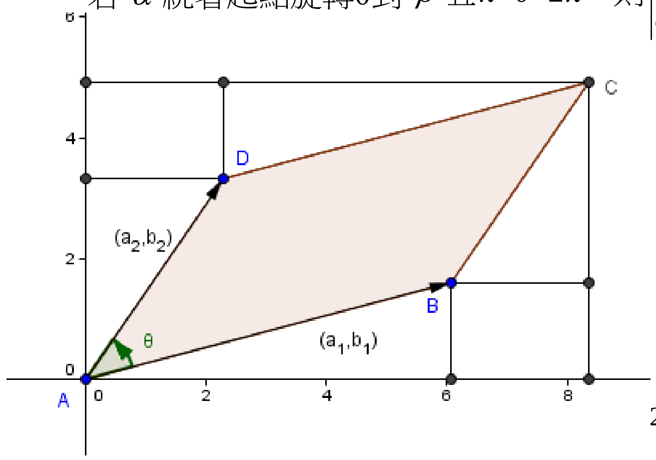
(b)二階行列式的幾何意義：

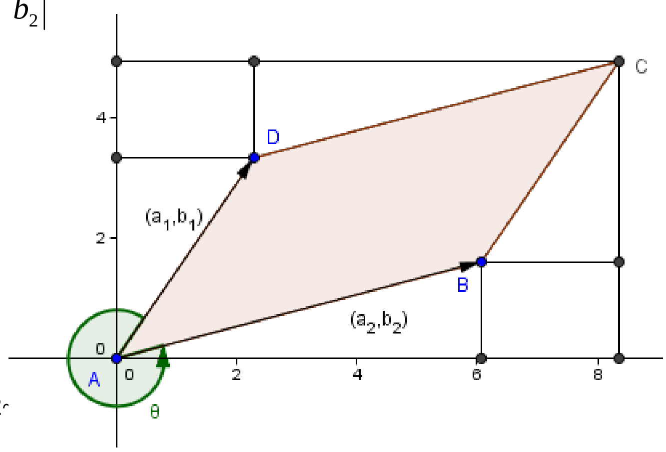
設$\overrightarrow{\alpha}=(a_1,b_1)$、$\overrightarrow{\beta}=(a_2,b_2)$爲平面上兩個向量，根據前面的討論，可以得知

由$\overrightarrow{\alpha}$、$\overrightarrow{\beta}$所展成的平行四邊形面積=$\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|$

若$\overrightarrow{\alpha}$繞著起點旋轉θ到$\overrightarrow{\beta}$且 $0<\theta<\pi$，則$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1>0$。

若$\overrightarrow{\alpha}$繞著起點旋轉θ到$\overrightarrow{\beta}$且$\pi<\theta<2\pi$，則$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1<0$。





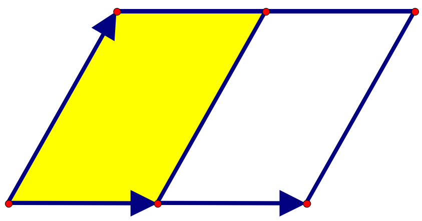
[例題1] 設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$且 $\overrightarrow{a}$ 繞起點旋轉θ到 $\overrightarrow{b}$ 且 $0\le\theta\le\pi$，

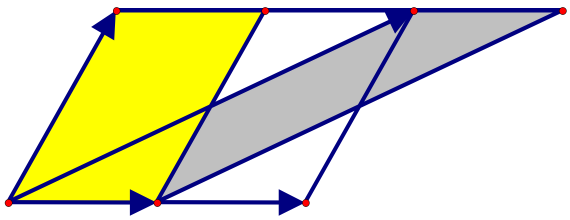
令$<\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}>$代表$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$，請使用面積的觀點來解釋下列的性質：

(1)$<k\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}>=k<\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}>$ 即$\begin{vmatrix}ka_1 & ka_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$

(2)$<\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}>=-<\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}>$ 即$\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$

(3)$<\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}+k\overrightarrow{a}>=<\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}>$ 即$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$





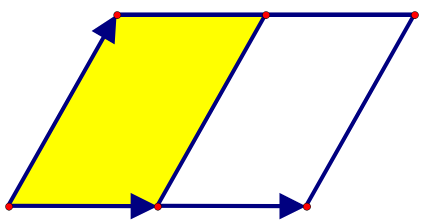
(2)行列式的性質：

(a)**有一列(行)全為 0，其值為 0。**

$\begin{vmatrix}0 & 0\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix}0 & a_2\\ 0 & b_2\end{vmatrix}=0$

(b)**每一列(行)可提公因數。**

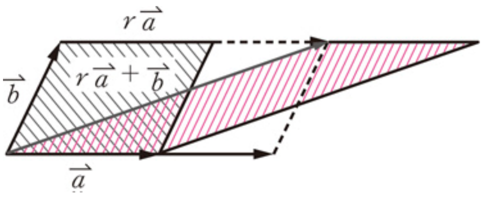
$\begin{vmatrix}ka_1 & ka_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}ka_1 & a_2\\ kb_1 & b_2\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$



(c)兩列(行)互換，其值變號。

$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ ， $\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

(d)一列(行)乘以一數加至另一列(行)，其值不變。



$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+ra_1 & b_2+ra_2 \end{vmatrix}$ ， $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2+ra_1 \\ b_1 & b_2+rb_1 \end{vmatrix}$

[例題2] 設$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$=2，(1)求$\begin{vmatrix} 3a & 12b \\ c & 4d \end{vmatrix}=$？ (2)求$\begin{vmatrix} 5a-7b & 4a+3b \\ 5c-7d & 4c+3d \end{vmatrix}=$？

Ans：(1)24 (2)86

(練習1) 求$\begin{vmatrix} 390 & 104 \\ 150 & 20 \end{vmatrix}$=______。Ans：−7800

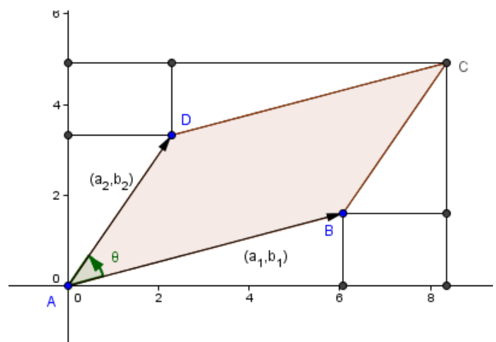
(練習2) 試解下列方程式，$\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 3 & x-2 \end{vmatrix}$=3。Ans：$x$=5 或−1

(練習3) 若$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$=5，則求(1)$\begin{vmatrix} 3a & 4b \\ 3c & 4d \end{vmatrix}$=_____。(2)$\begin{vmatrix} 3a-2b & a+5b \\ 3c-2d & c+5d \end{vmatrix}$=________。

Ans：(1)60 (2)85

(乙)二階行列式的應用式

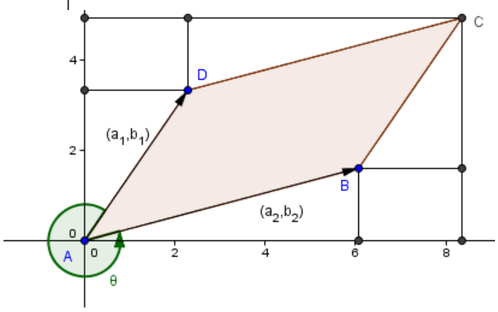
(1)平行四邊形的面積：



設$\vec{\alpha}=(a_1,b_1)$、$\vec{\beta}=(a_2,b_2)$爲平面上兩個向量，

由$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$所展成的平行四邊形面積

(以$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$爲相鄰兩邊的平行四邊形面積)



$=\sqrt{|\overrightarrow{\alpha}|^2|\overrightarrow{\beta}|^2-(\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta})^2}$

$=\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2)^2}$

$=|a_1b_2-a_2b_1|$

[例題3] 設 $A(3，2)$，$B(5，1)$，$C(4，-3)$，求△ABC 的面積。

[解法]：

$\overrightarrow{AB}=(2，-1)$，$\overrightarrow{AC}=(1，-5)$，

△ABC 即爲以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 爲兩邊的三角形，故其面積爲

$S=\frac{1}{2}|2\times(-5)-(-1)\times1|=\frac{9}{2}$。

(練習4) 設 $\overrightarrow{a}=(1，-2)$，$\overrightarrow{b}=(3，2)$。

(1) 求以 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 爲兩鄰邊的平行四邊形的面積。

(2) 求以 $2\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 爲兩鄰邊的平行四邊形的面積。

Ans：(1)8　(2)16

(2)克拉瑪公式：

解二元一次方程組：$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\cdots(1)\\a_2x+b_2y=c_2\cdots(2)\end{cases}$，其中 x,y 是未知數，

我們使用代入消去法解之

$(1)\times b_2-(2)\times b_1\Rightarrow(a_1b_2-a_2b_1)x=(c_1b_2-c_2b_1)$

$(1)\times a_2-(2)\times a_1\Rightarrow(a_2b_1-a_1b_2)y=(c_1a_2-c_2a_1)$

令$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}$，可得$\begin{cases}\Delta\cdot x=\Delta_x\\\Delta\cdot y=\Delta_y\end{cases}$

當$\Delta\neq0$ 時，方程組有唯一解$(x,y)=(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta})$ [此稱爲**克拉瑪公式**]

當$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，方程組有無限多解。

當$\Delta=0$，而Δ_x、Δ_y有一不爲 0 時，方程組無解。

[例題4] 試利用克拉瑪公式解方程組$\begin{cases}3x+5y=-1，\\7x-4y=29。\end{cases}$

[解法]：

$\triangle=\begin{vmatrix}3 & 5\\7 & -4\end{vmatrix}=3\times(-4)-5\times7=-47$，

$\triangle_x=\begin{vmatrix}-1 & 5\\29 & -4\end{vmatrix}=(-1)\times(-4)-5\times29=-141$，

$\triangle_y=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 29 \end{vmatrix}=3\times 29-(-1)\times 7=94$，

得$x=\dfrac{\triangle_x}{\triangle}=\dfrac{-141}{-47}=3$，$y=\dfrac{\triangle_y}{\triangle}=\dfrac{94}{-47}=-2$。

(3) 二元一次方程組解的幾何意義：

解二元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$的解，

相當於討論直線L_1：$a_1x+b_1y=c_1$、L_2：$a_2x+b_2y=c_2$的相交情形。

(a)當$\triangle\neq 0$時，二元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$恰有一組解$x=\dfrac{\triangle_x}{\triangle}$，$y=\dfrac{\triangle_y}{\triangle}$，

即在坐標平面上，

L_1：$a_1x+b_1y=c_1$與L_2：$a_2x+b_2y=c_2$兩直線恰交於一點（$\dfrac{\triangle_x}{\triangle}$，$\dfrac{\triangle_y}{\triangle}$）。

從向量的觀點來看，因爲L_1：$a_1x+b_1y=c_1$與L_2：$a_2x+b_2y=c_2$表坐標平面上的兩直線，且$\overrightarrow{n_1}=(a_1, b_1)$與$\overrightarrow{n_2}=(a_2, b_2)$分別爲$L_1$與$L_2$的法向量（$\overrightarrow{n_1}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{n_2}\neq\overrightarrow{0}$），

當$\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$，則$\overrightarrow{n_1}$與$\overrightarrow{n_2}$不平行，於是此兩直線$L_1$與$L_2$不平行也不重合，所以$L_1$與$L_2$恰交於一點。

(b)當$\triangle=0$時，情形又是如何呢？

當$\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，則$\overrightarrow{n_1}\,/\!/\,\overrightarrow{n_2}$（法向量互相平行），此兩直線$L_1$與$L_2$平行或重合。

更進一步：

(1°) 若$\triangle_x$，$\triangle_y$有一不爲0時，則由上述解方程組過程中，得到的

$\begin{cases} \triangle\cdot x=\triangle_x, \\ \triangle\cdot y=\triangle_y。\end{cases}$顯然是無解的，所以原方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$無解。此時，

坐標平面上兩直線L_1：$a_1x+b_1y=c_1$與L_2：$a_2x+b_2y=c_2$是平行的。

(2°) 若$\triangle_x=\triangle_y=0$時，由行列式的性質可知存在實數$k$，使得$a_1=ka_2$，$b_1=kb_2$，$c_1=kc_2$。

所以原方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$的解與方程式$a_1x+b_1y=c_1$的解會完全相同，於是原方程組有無限多組解，此時坐標平面上兩直線$a_1x+b_1y=c_1$與$a_2x+b_2y=c_2$是重合的。

結論：

$\triangle$，$\triangle_x$，$\triangle_y$之値的分類，將二元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$之解的情況與幾何意義整理如下：

行列式 $\triangle$，$\triangle_x$，$\triangle_y$之值	方程組的解	幾何意義
$\triangle\neq0$	恰有一組解	兩直線恰交於一點
$\triangle=0$，且$\triangle_x$，$\triangle_y$有一不爲 0	無　解	兩直線平行
$\triangle=\triangle x=\triangle y=0$	有無限多組解	兩直線重合

[例題5] 試就實數k之值，討論二元一次方程組，$\begin{cases}(k+1)x+4y=4\text{，}\\ x+(k-2)y=1\end{cases}$ 的解。

先計算$\triangle$，$\triangle_x$，$\triangle_y$之值：

$$\triangle=\begin{vmatrix} k+1 & 4 \\ 1 & k-2 \end{vmatrix}=(k+1)(k-2)-4\times1$$

$$=k^2-k-6=(k+2)(k-3)\text{，}$$

$$\triangle_x=\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & k-2 \end{vmatrix}=4(k-2)-4\times1=4(k-3)\text{，}$$

$$\triangle y=\begin{vmatrix} k+1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(k+1)\times1-4\times1=k-3\text{。}$$

(1) 當$\triangle\neq0$，即$k\neq-2$ 且$k\neq3$ 時，原方程組恰有一組解，

$$x=\frac{\triangle_x}{\triangle}=\frac{4(k-3)}{(k+2)(k-3)}=\frac{4}{k+2}\text{，}$$

$$y=\frac{\triangle_y}{\triangle}=\frac{(k-3)}{(k+2)(k-3)}=\frac{1}{k+2}\text{。}$$

(2) 當$\triangle=0$，即$k=-2$ 或$k=3$，

當$k=-2$，則$\triangle=0$，$\triangle_x\neq0$，$\triangle_y\neq0$，方程組無解。

當$k=3$，則$\triangle=0$，$\triangle_x=\triangle_y=0$，方程組有無限多組解，

其解就是$x+y=1$ 的解，可表爲$\begin{cases}x=t\text{，}\\ y=1-t\end{cases}$，$t$爲實數。

(練習5)試就實數 k 之值，試討論方程組$\begin{cases}(k+1)x+4y=4\\ x+(k-2)y=1\end{cases}$。

Ans：$k\neq3$ 且 $k\neq-2$，方程組有唯一解；$k=3$，解 $x=1-t$，$y=t$；$k=-2$，無解

(練習6)就 k 值討論方程式的解：$\begin{cases}(k-2)x-2y=2k\\ 3x+(2k+1)y=-k-2\end{cases}$。

Ans：當 $k\neq1$，$\frac{3}{2}$時，恰有一組解，當 $k=1$ 時，有無限多組解，

當 $k=\frac{3}{2}$時，無解。

綜合練習

(1) 試求下列各行列式的值：

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$　(b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$。

(c) $\begin{vmatrix} 2009 & 2010 \\ 2011 & 2012 \end{vmatrix}$。　(d) $\begin{vmatrix} 31 & 58 \\ 63 & 117 \end{vmatrix}$。

(2) 設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=2$，求 $\begin{vmatrix} 3a-2c & 3c \\ 3b-2d & 3d \end{vmatrix}$ 之值。

(3) 設 $A(1，0)$，$B(-1，2)$，$C(3，k)$。
(a) 若△ABC 的面積為 4，求 k 值。
(b) 若 A，B，C 三點共線，求 k 值。

(4) 試利用克拉瑪公式，解下列一次方程組：

(a) $\begin{cases} 4x-y=13， \\ 3x+5y=4。 \end{cases}$　(b) $\begin{cases} 2x+3y=4， \\ 30x+31y=62。 \end{cases}$

(5) 設方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解為 $x=2$，$y=3$，求方程組 $\begin{cases} a_1x+2b_1y=3c_1 \\ a_2x+2b_2y=3c_2 \end{cases}$ 的解。

(6) 設以 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 為兩鄰邊的平行四邊形面積為 5，求以 $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 和 $-3\overrightarrow{a}$ 為兩鄰邊的平行四邊形的面積。

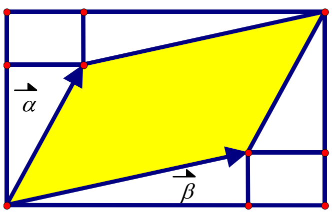
(7) 試求實數 k 之值，使得一次方程組 $\begin{cases} 2x+(5-k)y=k+3， \\ (5-k)x+2y=9-k。 \end{cases}$
(a) 恰有一組解。(b) 有無限多組解。(c) 無解。

(8) 設 $xyz\neq0$，若 $3x-4y+3z=0$，且 $x-y+2z=0$，試求 $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$ 之值。

(9) 已知 a，b 為整數且行列式 $\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix}$，求 $|a+b|$ 之值。

(10) 設 $\overrightarrow{a}=(a_1，a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1，b_2)$，$\overrightarrow{c}=(c_1，c_2)$，
則 $\overrightarrow{c}$ 可唯一表為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的線性組合的充要條件為 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq0$。證明這個結果！

(11) 若 $\overrightarrow{\alpha}$ 繞著起點旋轉θ到 $\overrightarrow{\beta}$ 且π<θ<2π，($\overrightarrow{\alpha}$ 、 $\overrightarrow{\beta}$ 的關係如圖所示)，
證明：由 $\overrightarrow{\alpha}$ 、 $\overrightarrow{\beta}$ 所展成的平行四邊形面積= $-(a_1b_2-a_2b_1)$。



綜合練習解答

(1) (a)34 (b)-8 (c)-2 (d)-27

(2) 18

(3) (a)-6 或 2 (b)-2

(4) (a) $(3,-1)$ (b)$\left(\frac{31}{14},\frac{-1}{7}\right)$

(5) $\left(6,\frac{9}{2}\right)$

(6) 15

(7) (a)$k\neq 3$ 且 7 (b)$k=3$ (c)$k=7$

(8) 5

(9) 32

(10) $\overrightarrow{c}$可唯一表為$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的線性組合

$\Leftrightarrow$ 恰有一組實數 x，y，使得$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$ 恰有一組解

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$不平行。

(11) 仿照課文的解法