第二章極限的應用

§2−1 導數的概念

(甲)切線與瞬時變化率

(1)曲線的割線與切線：

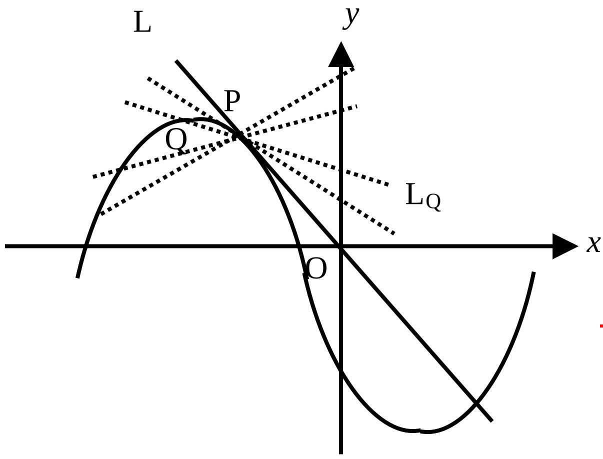
設L為曲線Γ的一條割線，L與曲線Γ交於P、Q兩點。固定P點而讓Q點沿著曲線逐漸趨近P點，當Q點與P點非常接近時，若割線L與直線L_0也非常接近，我們就稱$\mathbf{L_0}$為曲線Γ在**P**點的切線，P點為切點。

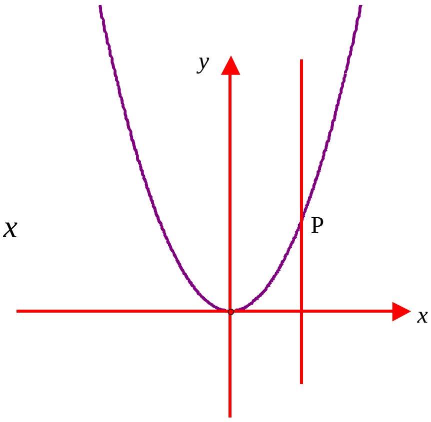
根據以上的定義，我們可得知以下的結論：

(1°)切線是割線的極限位置

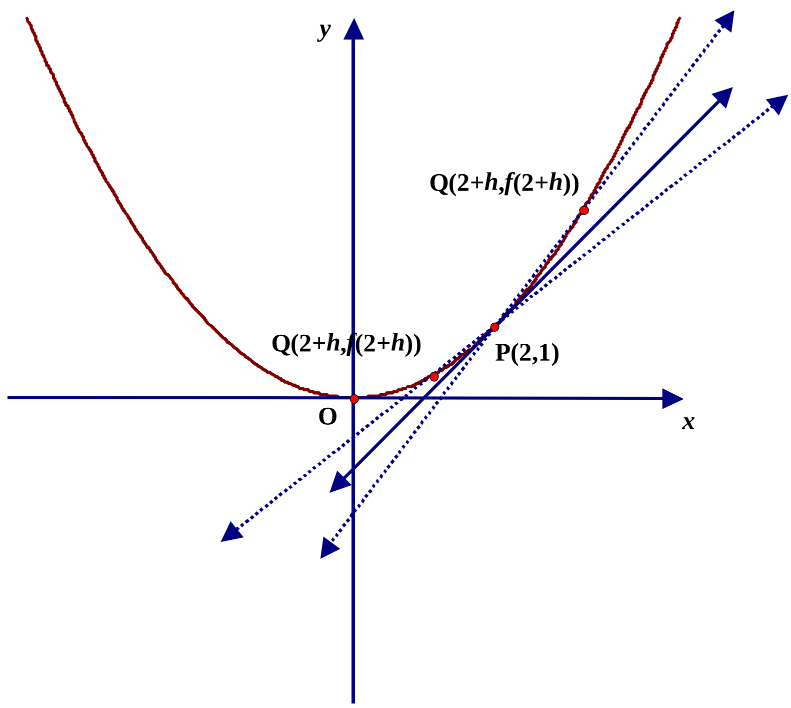
(2°)曲線Γ在**P**的的切線**L**，不一定只與Γ交於一點。

(3°)與曲線Γ交於一點**P**的直線，不一定是以**P**為切點的切線。





例子一：設P(2,1)為曲線$y=f(x)=\frac{1}{4}x^2$上一點，請求以P點為切點的切線方程式。



[解法]：
在P點附近取一點Q(2+h,f(2+h))(注意：h可正可負)
考慮割線PQ的斜率= $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{h^2+4h}{h}\right)$
當Q點沿著曲線$y=f(x)$ 逐漸接近P點時，h會逐漸接近 0。此時割線PQ會逐漸趨近於直線L，此時L爲通過P點的切線。因此當h趨近於 0 時，割線PQ的斜率也會隨著趨近於切線L的斜率。

割線**PQ** $\xrightarrow{Q\to P}$ 切線**L** $\Rightarrow$ 割線**PQ**的斜率 $\xrightarrow{h\to 0}$ 切線**L**的斜率。

此時計算$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{h^2+4h}{h}\right)\right]=1$。

所以以P點爲切點的切線方程式爲$y-1=1(x-2)$。

根據上面的例子，可以得一般情形的結果：

若 P(a,$f(a)$)爲函數 $y=f(x)$圖形上一定點，而在 P 點附近取動點 Q($a+h$,$f(a+h)$)，
計算割線 PQ 的斜率爲 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$，
若$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$存在，則函數 $y=f(x)$圖形上以 P 點爲切點的切線存在，且此切線的斜率爲$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$。
而過 P 點的法線爲過 P 點與切線垂直的直線。

(2)平均變化率與瞬時變化率：
例子二：
設$f(t)$表示t時刻時某質點在直線上所走的距離，
質點在時刻t_0到t_0+h間的平均速度=$\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{t_0+h-t_0}$，牛頓引進極限的概念來討論瞬時速度，當$t_0+h$很接近$t_0$時，$\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{t_0+h-t_0}$很接近質點在$t=t_0$的速度，因此質點在時刻$t_0$的瞬時速度=$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{t_0+h-t_0}$。
在自然科學的研究方面，科學家經常會討論隨時間改變的量在某一時刻的瞬時變化率，像前面的例子中，某一時刻距離的瞬時變化率爲某一時刻的速度；或是某一時刻速度的瞬時變化率爲某一時刻的加速度。

設$y=f(t)$是以時間t爲函數的物理量($f(t)$可爲距離、質量、溫度…)，
考慮時間由t_0變化到t_0+h時，
$y=f(t)$在$t=t_0$的平均變化率=$\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{t_0+h-t_0}$，

$y=f(t)$在$t=t_0$的瞬時變化率$=\lim\limits_{h\to 0}[\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{t_0+h-t_0}]$

結論：$y=f(t)$在$t=t_0$的瞬時變化率$=\lim\limits_{h\to 0}$($t=t_0$的平均變化率)$=\lim\limits_{h\to 0}[\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{t_0+h-t_0}]$。

[例題1] 已知P(2,−3)為曲線$y=f(x)=x^3-3x^2+1$ 上一點，
(1)試求以P點為切點的切線、法線方程式。
(2)切線L與此曲線是否還有其他交點？
Ans：(1)切線$y=-3$，法線$x=2$ (2)有另一交點(−1,−3)

[例題2] 一球形氣體體積$V(r)=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，試求
(1)在半徑$r=2$ 增至$r=4$ 時，體積的平均變化率=？
(2)在半徑$r=2$ 時的瞬時變化率=？
Ans：(1)$\dfrac{112}{3}\pi$ (2)16π

(練習1) 求函數 $f(x)=\sqrt{x}$在點(4,2)的切線方程式。
Ans：$y-2=\dfrac{1}{4}(x-4)$

(練習2) 已知質點在直線上運動，其位移與時間t的函數關係為$f(t)=2t^2+3t$，試求
(1)此質點在時間$t=2$ 至$t=4$ 之間的平均速度。
(2)此質點在時間$t=2$ 的瞬時速度。
Ans：(1)15(2)11

(乙)函數的導數

(1)導數的定義：

設$y=f(x)$在$x=a$處及其附近有意義，

若$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$存在，我們將$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$稱爲函數$y=f(x)$在$x=a$處的**導數(Derivative)**，此時稱$f(x)$在$x=a$處**可微分**，

符號以$\boldsymbol{f'(a)}$或$\boldsymbol{\dfrac{df}{dx}\Big|_{x=a}}$來表示，即$\boldsymbol{f'(a)=\dfrac{df}{dx}\Big|_{x=a}=}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$。

若$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$不存在，則稱函數$y=f(x)$在$x=a$處**不可微分**。

若令$a+h=x$，當$h\to 0$時，$x\to a$，函數$y=f(x)$在$x=a$處的導數也可寫成

$\boldsymbol{f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$。

結論：函數$y=f(x)$在$x=a$處及其附近有意義
(1)函數$y=f(x)$在$x=a$處的導數$\boldsymbol{f'(a)=}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{x\to a}\boldsymbol{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$。
(2)函數$y=f(x)$的圖形以P$(a,f(a))$爲切點的切線斜率$=f'(a)$。
(3)函數$y=f(x)$的圖形以P$(a,f(a))$爲切點的切線方程式爲$y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$。
若$f'(a)\neq 0$，則通過P點的法線方程式爲$y-f(a)=\dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$

[例題3] 請利用導數的定義求$f(x)=\dfrac{3x-2}{2x+1}$在$x=1$處的導數$f'(1)=$？Ans：$\dfrac{7}{9}$

[例題4] 若函數$f(x)=\begin{cases}x^3+x & 當x>1\\ ax^2+b & 當x\le 1\end{cases}$，若$f(x)$在$x=1$處可微分，則數對$(a,b)=$？

Ans：(2,0)

(練習3) 設$f(x)=2x^2+5x+10$，求$f'(2)=$？ Ans：13

(練習4) 設$g(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$，試求$g'(1)=$？ Ans：-1

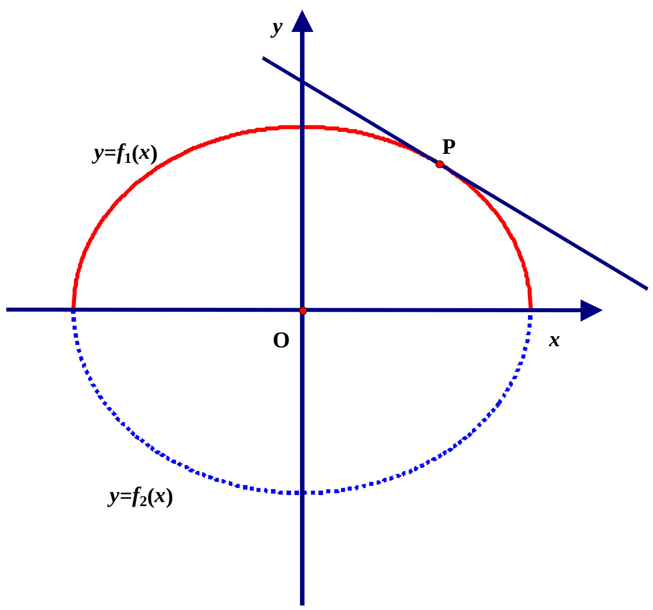
(練習5) 設$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{x-4}$，求$\dfrac{df}{dx}\Big|_{x=1}=$？ Ans：$\dfrac{8}{3}$

(練習6) 試求函數 $f(x)=\dfrac{x\cdot|2x-4|}{|x|-2}$在 $x=3$ 處的導數。 Ans：2

[例題5] 求通過曲線$y=x^2+x+1$ 外一點P(1,2)的切線方程式。
Ans：$x-y+1=0$ 或 $5x-y-3=0$

[例題6] 試求通過橢圓$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的圖形上，點 P$(4,\dfrac{12}{5})$的切線方程式、法線方程式。

Ans：切線方程式：$y-\dfrac{12}{5}=\dfrac{-16}{15}(x-4)$，法線方程式：$y-\dfrac{12}{5}=\dfrac{15}{16}(x-4)$



[例題7] 設$f'(a)=-1$，求(1)$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{h}=$？ (2)$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ Ans：(1)1 (2)-3

(練習7) 求拋物線$y^2=x+2$ 在點(2,2)之切線方程式及法線方程式。

Ans：切線：$y-2=\dfrac{1}{4}(x-2)$，法線：$y-2=-4(x-2)$

(練習8) 求橢圓$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上以點$(\dfrac{6}{5},\dfrac{-12}{5})$爲切點的切線方程式。

Ans：$9x-8y=30$

(練習9) 試求過拋物線$y=x^2-2x+2$ 外一點P$(-1,1)$的切線方程式。

Ans：$y=1$ 及 $8x+y+7=0$

(練習10) 若多項式$f(x)$滿足$f(1)=0$，$f'(1)=-15$，則$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)}{3h}=$? Ans：$-5$

(練習11) 設$f(x)$在$x=a$處可微分，且$f'(a)=m$，試以m表示 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}$。

Ans：$5m$

綜合練習

(1) 設$f(x)=\sqrt[3]{x}$，求$f'(3)=$？

(2) 設$f(x)=x^{100}$，則$f'(1)=$？

(3) $f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+10)}$，求$f'(1)=$？

(4) 函數$f(x)=|3x-1|+3x^2$，請求出$f'(\dfrac{2}{3})=$？ $f'(\dfrac{1}{3})=$？

(5) 設函數 $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ 試求此函數在點(4,5)的切線方程式。

(6) 試求 $y=\dfrac{4}{x-1}$的圖形上以(2,4)爲切點的切線方程式。

(7) 設函數$f(x)=x^3-x^2-2x+2$ 的圖形上，

(a)請問$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=$？(b)求出斜率爲 -1 的切線方程式。

(8) 設$f'(a)$存在，求$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$？

(9) 設$f'(a)=k$，求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{2h}$ = ？(以k表示)

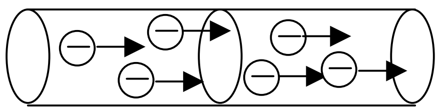
(10) 直線$ax+y=2$與曲線$y=x^3$相切，求實數$a=$？

(11) 只要電荷移動，就會產生電流，電荷以庫倫(Coulomb)當單位，電流以安培(Ampere)作單位，1 安培=1 庫倫/秒，設在t時刻，流經圓形截面的電荷量是Q(t)。

(a)試解釋 $\dfrac{Q(t+h)-Q(t)}{h}$ ，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{Q(t+h)-Q(t)}{h}$

這兩個式子的物理意義。

(b)設$Q(t)=t^3-2t^2+6t+2$，求$t=1$時的電流。



綜合練習解答

(1) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{9}}$

(2) 100

(3) $\dfrac{-1}{110}$

(4) $f'(\dfrac{2}{3})=7$ $f'(\dfrac{1}{3})$不存在

(5) $y=\dfrac{4}{5}(x-4)+5$

(6) $4x+y-12=0$

(7) (a)$3a^2-2a-2$ (b)$x+y-1=0$ 或 $27x+27y-59=0$

(8) Ans：$f(a)-af'(a)$

[提示：$\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\dfrac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-a\cdot\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$]

(9) $\dfrac{3k}{2}$

(10) -3[提示：設切點爲(t,t^3)，根據導數的定義，可以求出切線的斜率爲 $3t^2$，所以 $3t^2=-a$，又因爲$at+t^3=2$，聯立解出a、t]

(11) (a) $\dfrac{Q(t+h)-Q(t)}{h}$ 爲t時刻與$t+h$時刻之間流經圓形截面的平均電荷變化率。

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{Q(t+h)-Q(t)}{h}$ 爲t時刻流經圓形截面的瞬時電荷變化率，即爲t時刻的電流大小。

(b)計算$Q'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^3-2(1+h)^2+6(1+h)+2-(1^3-2\cdot 1^2+6\cdot 1+2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h^2+h+5)$

$=5$