# §2–4 空間中的直線

## (甲)直線的表示法

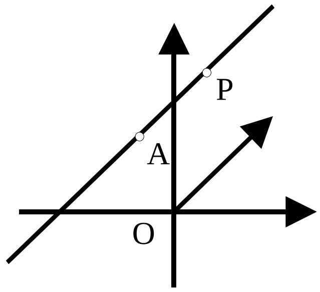
(1)空間中直線參數式

### 坐標平面上的直線

在坐標平面上，一直線L過A($x_0$,$y_0$)，且與一向量$\vec{v}=(a,b)$($\vec{v}\neq\vec{0}$)平行。

若($x$,$y$)為L上任意點，則$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$，$t$為一實數，這個式子稱為L的**參數式**。

證明：設P($x$,$y$)為直線L上任一點，




$\overrightarrow{AP}\,//\,\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=t\vec{v} \Leftrightarrow (x-x_0,y-y_0)=t(a,b)$

所以$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$，$t$為實數。

注意：
用參數式表示直線，重點在於用$t$表示直線的點坐標。換句話說，直線上任一點P($x$,$y$)皆可找到一個實數$t$使得$x=x_0+at$，$y=y_0+bt$；另一方面，當$t$代入任何實數後，形成的點構成一條直線。

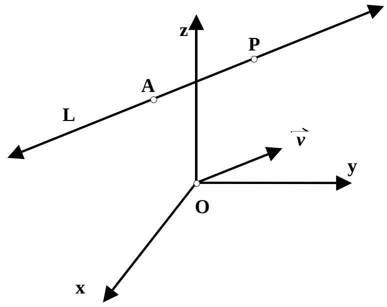
　　不管是空間坐標或是平面坐標，直線的方向向量都可以定義成直線上兩個相異點所形成的向量。換句話說，方向向量會與直線平行，也就是說空間中的直線也可以用方向向量來表示其方向，因此我們不禁要問：若空間坐標系中，一直線L通過點A($x_0$,$y_0$,$z_0$)且方向向量$\vec{v}=(a,b,c)$，那麼直線L如何表示呢？

### 空間中的直線

類似坐標平面上直線的參數式，用直線的方向向量與一點來表示空間中的直線。

設A($x_0$,$y_0$,$z_0$)是直線L上一個定點，且直線L的方向向量為$\vec{v}=(a,b,c)$

則直線L的參數式為$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$，$t$為實數。




[證明]：

設P($x$,$y$,$z$)為直線L上任一點，則$\overrightarrow{AP}$平行$\vec{v}$，

所以存在一個實數$t$，使得$\overrightarrow{AP}=t\vec{v}$，

因此$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=t(a,b,c)$，即$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$。

反之，空間坐標系中滿足上式形式的點$P(x_0+at,y_0+bt,z_0+ct)$，
因爲$\overrightarrow{AP}=(at,bt,ct)$，所以$\overrightarrow{AP}$平行$\overrightarrow{v}$，因此P點會落在直線L上，
我們稱$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$爲直線L的參數方程式，簡稱參數式，實數$t$稱爲參數。

**[例題1]** 空間中，兩點A(1,–1,2)，B(3,0,5)求$\overleftrightarrow{AB}$的參數式。

Ans：$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$，$t$爲實數

(2)空間中直線的比例式、二面式：

例子：

設直線L的方向向量$\overrightarrow{v}=(2,3,5)$，A(–2,4,3)在直線L上，由前面的推倒可知L的參數式爲$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$，$t$爲實數

$\Rightarrow t=\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-3}{5}$ 我們稱$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-3}{5}$爲直線L的比例式。

例子：

設直線L的方向向量$\overrightarrow{v}=(2,0,5)$，A(–2,4,3)在直線L上，由前面的推倒可知L的

參數式為$\begin{cases} x=-2+2t \\ y=4 \\ z=3+5t \end{cases}$，$t$為實數

$\Rightarrow t=\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{z-3}{5}$ 且$y=4$，我們稱$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{z-3}{5}$，$y=4$為直線L的比例式。

(a)直線的比例式：

有一直線L的方向向量$\vec{v}=(a,b,c)$，過P$(x_0,y_0,z_0)$

L的比例式有下列兩種形式：

$abc\neq0$　　$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ $\Rightarrow \vec{v}=(a,b,c)$，過P$(x_0,y_0,z_0)$

$ab\neq0$，$c=0$　　$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}, z=z_0$ $\Rightarrow \vec{v}=(a,b,c)$，過P$(x_0,y_0,z_0)$

$ac\neq0$，$b=0$　　$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{z-z_0}{c}, y=y_0$ $\Rightarrow \vec{v}=(a,b,c)$，過P$(x_0,y_0,z_0)$

$bc\neq0$，$a=0$　　$\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}, x=x_0$ $\Rightarrow \vec{v}=(a,b,c)$，過P$(x_0,y_0,z_0)$

(b)直線的兩面式：

一般而言，若E$_1$：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，E$_2$：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$是兩個不平行的平面，相交於直線L，則聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$的圖形即為交線L，此聯立方程式稱為直線L的二面式。

[例題2] 求兩平面$\begin{cases} 2x-y+3z-4=0 \\ x+4y-2z+7=0 \end{cases}$的交線L的比例式。 Ans：$\dfrac{x-1}{-10}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z}{9}$

結論：

**掌握方向向量與直線上的一點，如果牽扯到直線的計算，通常參數式會派上用場，而如果只是表示直線的型式，則三種表示皆可。**

(練習1) 直線L有一方向向量 $\vec{v}$ =(4,−5,−2)，且L上有一點A(1,−3,0)，求L的參數式。Ans：$\begin{cases} x=1+4t \\ y=-3-5t \\ z=0-2t \end{cases}$，$t$為實數。

(練習2) 設L：$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2-7t \\ z=5+2t \end{cases}$，$t$為實數，求直線L上$t$=0的點坐標，並寫出此直線的一個方向向量。 Ans：(−1,2,5)，(3,−7,2)

(練習3) 設直線L有一方向向量 $\vec{v}$ =(4,3,−1)，且過點A(−2,5,3)，則求直線L的比例式與參數式。 Ans：$\frac{x+2}{4}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-3}{-1}$，$\begin{cases} x=-2+4t \\ y=5+3t \\ z=3-t \end{cases}$ ,$t\in$R

(練習4) 設L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z+5}{7}$，試寫出直線L上一點坐標，L的一個方向向量，L的參數式。

(練習5) 二平面$E_1$：$x+3y-z+4=0$，$E_2$：$2x+5y+z+1=0$的交線之對稱比例式為何？
Ans：$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{-1}$

(練習6) 化直線L的比例式$\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-7}{7}$ 為二面式。
Ans：$\begin{cases} x+5y+9=0 \\ 7y+z+7=0 \end{cases}$

## (乙)直線與平面的關係

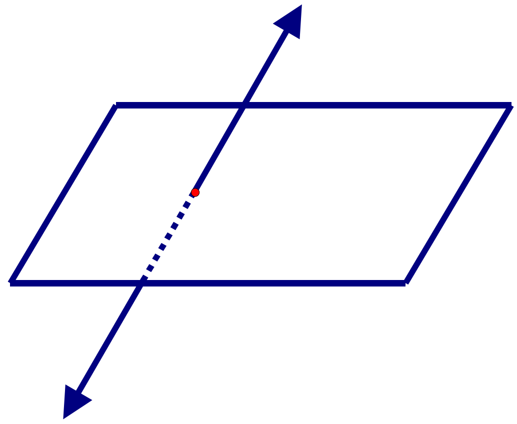
(1)求直線與平面的交點：

例如：

設直線L：$\begin{cases} x=5+2t \\ y=-3-2t \\ z=1+t \end{cases}$，$t\in$R，平面E：$3x-2y-4z-2=0$，請問直線L與平面E是否相交？若相交，則交點坐標為何？

[解法]：
設交點P(5+2$t$,−3−2$t$,1+$t$)，代入E的方程式，
如果$t$有一解，則直線L與平面E有一個交點
如果$t$無解，則直線與平面E平行。

如果$t$有無限多解，則直線與平面E重合。
$\Rightarrow 3(5+2t)-2(-3-2t)-4(1+t)-2=0$
$\Rightarrow t=-3$
$\Rightarrow$L與E有一個交點P$(-1,3,-2)$



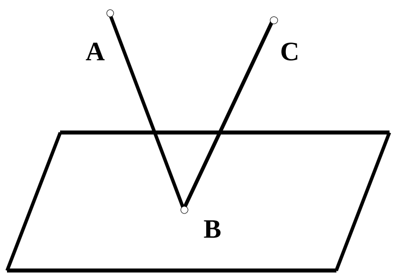
[代數觀點]：
根據上一題的解法，參數$t$有唯一解，則直線L與平面E只有一個交點，若是$t$無解，則可知L與E無交點；要是$t$有無限多個解，則L在平面E上。

[幾何觀點]：
判別平面E與直線L的相交情形，亦可用法向量 $\vec{n}$ 與方向向量 $\vec{l}$ 來判別。

(a) $\vec{n} \perp \vec{l}$ $\Rightarrow$直線L與平面E平行或重合。

(b) $\vec{n}$ 與 $\vec{l}$ 不垂直 $\Rightarrow$ 直線L與平面E交於一點。

**[例題3]** 令E表過點A(1,2,3)，且法向量爲(1,1,1)的平面。由原點(0,0,0)沿向量$(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$的方向射出一點狀槍彈，依直線前進，則在平面E上的彈著點坐標爲何？ Ans：$(6-3\sqrt{2},6\sqrt{2}-6,6\text{-}3\sqrt{2})$




**(練習7)** 如圖，光線經A(1,2,3) 入射，經C(3,2,2)反射，而反射面爲E：$2x+y+z=1$，求B點的坐標。
Ans：$(\frac{-3}{5},\frac{4}{5},\frac{7}{5})$

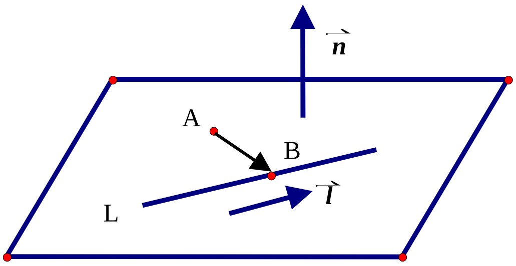
**(練習8)** 設直線L的方程式爲$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$，則下列那一個平面與L平行？
(A)$2x-y+z-1=0$ (B)$x+y-z-2=0$ (C)$3x-y+2z-1=0$ (D)$3x+2y+z-2=0$
(E)$x-3y+z-1=0$ Ans：(B)

(練習9) 求直線$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$與平面$2x+4y-z+2=0$交點之坐標。
Ans：$(9,-2,12)$

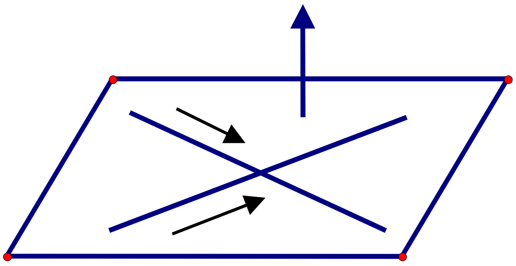
## (丙)由點、線決定的平面

決定平面的四個條件：
(a)不共線的相異三點(b)一線與其線外一點。(c)二相交直線(d)二平行線

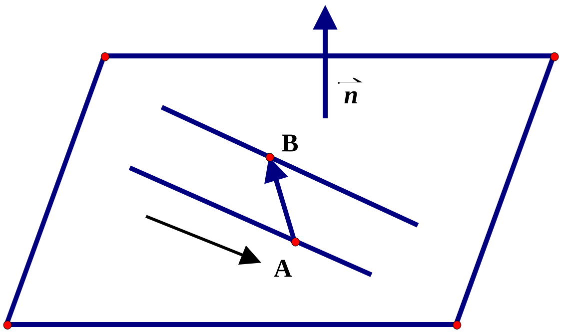
[例題4] 求過點A(4,3,1)且包含直線L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$之平面方程式。
Ans：$2x-6y+z+9=0$




[例題5] 試求包含二相交直線$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$,$L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$的平面方程式。Ans：$5x-4y-3z-10=0$



[例題6] 試求過二平行線$L_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{2}$,$L_2:\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+4}{2}$之平面方程式。Ans：$2x-3y+2z+11=0$



(練習10) 已知直線L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{-1}$ 與點P(−2,1,3)試求

(1)直線L與點P所決定的平面方程式。

(2)包含直線L且垂直平面$x-y+z=3$的平面方程式。

Ans：(1)$6x+y+15z-34=0$　(2)$2x-3y-5z+2=0$

(練習11) 求包含二平行線$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-1}$ 與 $\begin{cases} x=2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$，($t$爲實數)的平面方程式。Ans：$x-7z-5z-2=0$

(練習12) 空間中兩相交直線$L_1$：$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+2z+2=0 \end{cases}$，L：$\begin{cases} 2x+y+z-3=0 \\ 3x+y+2z-4=0 \end{cases}$

則求通過$L_1$、$L_2$的平面。Ans：$x-2y+3z+1=0$

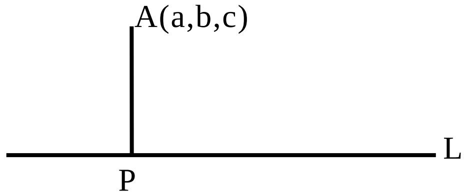
## (丁)兩直線的關係與距離問題

(1)兩直線的關係：

①方向向量平行：重合、平行

②方向向量不平行：相交於一點、歪斜。

[例題7] 試判別直線$L_1:\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{2}, L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y+14}{3}=\frac{z-1}{1}$的相交情形，若相交求交點。 Ans：相交，(6,−2,5)

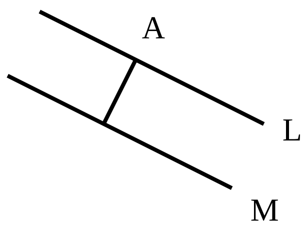



(2)距離問題：

(a)點到直線的距離：

取L的參數式，利用$\overline{AP}\perp L$的方向向量，求P，

而$\overline{AP}$即爲點P到L的距離。



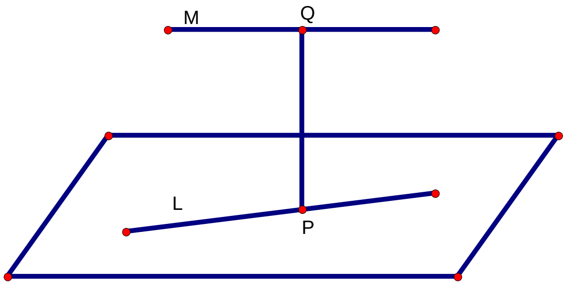

(b) 二平行線的距離：

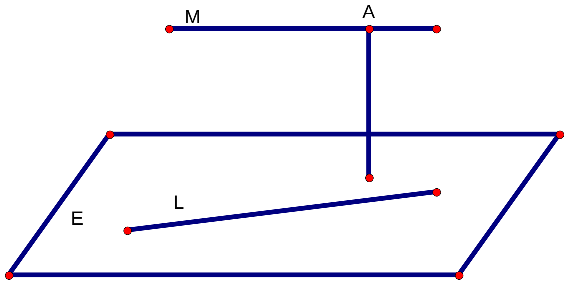
在L上取一點A，作A到直線M的距離即爲二平行線的距離。

(c)二歪斜線的距離：

(法一)：

求L，M之公垂線N與L,M的交點P,Q則L,M的距離爲$\overline{PQ}$。




(法二)：

先求一平面E包含直線L，且平行L，在取M上一點A，求A點到E的距離，即爲L,M的距離

[例題8] 設點P(–5,0,–8)，直線L：$\frac{x-3}{1}=\frac{2-y}{2}=\frac{z+1}{2}$

(1)自P點作直線L的垂足點Q，求Q點坐標。(2)求點P到L的距離。

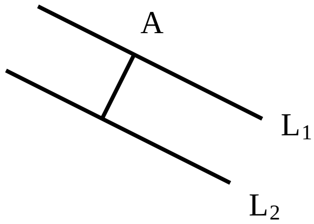
(3)求P點對直線L的對稱點$P^{/}$坐標。

(4)過P點做L的垂線$L^{/}$，求$L^{/}$的對稱比例式。

Ans：(1)(1,6,–5) (2)9 (3)(7,12,–2) (4) $\frac{x+5}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+8}{1}$

[例題9] 二平行線$L_1$：$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$，$L_2$：$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$，求$L_1$與$L_2$的距離。

Ans：3




(練習13) 設點A(1,−1,2)及直線L：$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{5}$，求

(a)A點對於直線L的垂足點H的坐標。

(b)A點對於直線L的對稱點$A'$的坐標。

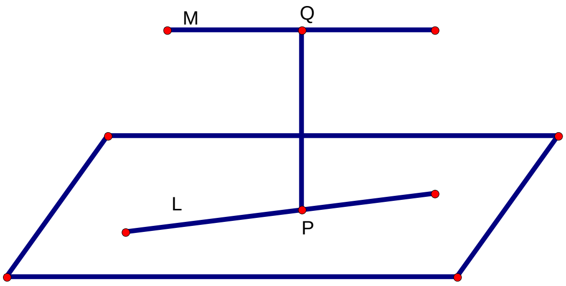
Ans：(a)$(\frac{-7}{30},\frac{7}{15},\frac{17}{6})$ (b)$(\frac{-22}{15},\frac{29}{15},\frac{11}{3})$

(練習14) 在空間坐標中，點P(1,−1,2)到直線$\begin{cases} x=-t \\ y=-1+2t \\ z=3+t \end{cases}$，$t$為實數的最短距離為多少？此時之投影點坐標為何？ Ans：$\frac{2}{\sqrt{3}}$，$(\frac{1}{3},\frac{-5}{3},\frac{8}{3})$

[例題10] 設L：$\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z+2}{1}$，M：$\frac{x+9}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$，

(1)試判別L、M的相關位置。(2)求L、M的公垂線方程式。

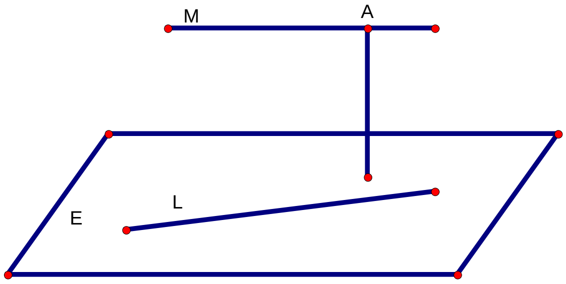
(3)求$d$(L,M)=？Ans：(1)歪斜 (2)$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{7}$ (3)$\sqrt{62}$



[例題11] 設二直線L:$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}$，M:$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{1}$為空間中二直線

(1)求包含L且與M平行的平面。(2)求$d$(L,M)

Ans：(1)$5x-2y+z-7=0$ (2)$\frac{\sqrt{30}}{6}$




(練習15) 試求兩平行線$L_1$：$\frac{x-6}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-4}{2}$,$L_2$：$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{2}$的距離。Ans：3

(練習16) $L_1$：$\frac{x-11}{4}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z+7}{-1}$，$L_2$：$\frac{x+5}{3}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-6}{-2}$，若$L_1$、$L_2$的公垂線為L，請求出L與$L_1$、$L_2$的交點P、Q坐標。

Ans：P(3,1,−5)、Q(1,−4,2)

## (戊)平面族

設$E_1$：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，$E_2$：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，二平面交於一直線，則通過此直線的平面可設為：　$a_1x+b_1y+c_1z+d_1+k(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$

[例題12] 過直線$\begin{cases}7x+y-2z-4=0\\3x+2y+4z-6=0\end{cases}$，且與直線$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$平行的平面方程式。

Ans：$15x-y-14z=0$

(練習17) (1)求包含二平面$2x+y-4=0$，$y+2z=0$之交線且垂直平面$3x+2y+3z-6=0$之平面方程式。

(2)求過直線$\begin{cases}x+y-z+1=0\\x+2y-3=0\end{cases}$，且與$x$軸平行的平面方程式。

Ans：(1)$x-z-2=0$ (2)$y+z-4=0$

(練習18) 求包含平面$3x+2y-2z+1=0$、$x+y-5z-6=0$交線的平面，且與$4x+2y+3z+1=0$的平面方程式。Ans：$37x+28y-68z-51=0$

[例題13] A(–5,4,3)、B(13,12,5)爲空間中二點，P爲$x$軸上的一個動點，當$\overline{AP}+\overline{BP}$小時，P之坐標爲何？ Ans：P(0,0,0)

[例題14] $L_1$：$\frac{x-4}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{-3}$，$L_2$：$\frac{x-4}{3}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z}{2}$

(1)$L_1$與$L_2$的交點坐標。 (2)$L_1$、$L_2$二線交角平分線之方程式。

Ans：(1)(4,–5,0) (2)$\frac{x-4}{4}=\frac{y+5}{1}=\frac{z}{-1}$或$\frac{x-4}{2}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z}{5}$

[例題15] 求$x$軸與平面$6x-3y+2z=12$交角為θ，求sinθ =？ Ans：$\frac{6}{7}$

(練習19) A(12,10,5)、B(4,−8,3)為空間中二點，P是$y$軸上一個動點，當 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 小時，P之坐標為何？ Ans：(0,−3,0)

(練習20) 過點(3,2,−1)與(0,4,1)二點的直線與平面$2x-y-z+7=0$之交角為θ，求 sinθ=？ Ans：$\frac{10}{\sqrt{102}}$

## 綜合練習

(1) 試求符合下列條件之直線方程式：

(a)過點(3,3,−1)且平行$y$軸

(b)過點(9,8,7)且平行直線$\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ 5x-y+2z+2=0 \end{cases}$

(c)過點(11,4,−6)且垂直於直線$\begin{cases} x=4-t \\ y=7+2t \\ z=-1+t \end{cases}$，$t$為實數。

(2) 空間中，下列何者代表直線：

(A)$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-2y+z=1 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$ (B)$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-4t \\ z=4 \end{cases}$ $t$為任意實數。(C)$\begin{cases} x-y+z=5 \\ 2x-2y+2z=3 \end{cases}$

(D)$\frac{x-2}{-2}=\frac{y+4}{1}=\frac{x+1}{-5}$ (E)$3x+2y=1$。

(3) 空間中一直線L：$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$，則下列何者為真？

(A)L的方向向量為(1,−1,3) (B)點(0,1,1)在直線L上 (C)L與$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-7}{3}$重合。(D)L與$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$垂直 (E)L在平面上$x-y+1=0$上。

(4) 空間中有一直線L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{6}$，請回答下列兩個小題：

(a)那一條直線與L歪斜？

(A) $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{6}=\frac{z}{12}$ (B) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-6}{6}$ (C)$\begin{cases}x=-1+2t\\y=-1+2t\\z=-6+3t\end{cases}$

(D) $\frac{x}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{5}$ (E) $\begin{cases}3x-2y+8=0\\2y-z-3=0\end{cases}$

(b)那一個平面與L平行？

(A)$2x+3y+6z=0$(B)$3x-4y+z+5=0$(C)$3x-2y+7=0$(D)$xy$平面(E) $x+y+z=4$

(5) 考慮空間中二歪斜線$L_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$,$L_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{-1}$，及一點A$(a,a,a)$。令$E_1$爲過點A且包含直線$L_1$的平面，$E_2$爲過點A且包含直線$L_2$的平面。

(a)設$a=1$，則$E_1$的方程式爲何？

(b)試問$a$爲何值時，平面$E_1$，$E_2$互相垂直。 (85日大社)

(6) 設二直線$L_1$:$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$，$L_2$:$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$

(a)證明：$L_1$與$L_2$平行。 (b)求$d(L_1,L_2)$ (c)求包含$L_1$與$L_2$的平面方程式。

(d)若直線L//$L_1$且L//$L_2$，且$d(L,L_1)=2\cdot d(L,L_2)$，求L的方程式。

(7) 設L爲$x-y+z=1$與$x+y-z=1$兩平面的交線，則直線L上與點(1,2,3)距離最近之點的坐標爲____，並求最近距離爲_____。

(8) 空間中有二直線$L_1:\begin{cases}x-y+z-1=0\\2x+y-2z+1=0\end{cases}$,$L_2:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$

(a)求包含$L_1$且與$L_2$平行的平面E的方程式。

(b)$L_1$與$L_2$的距離。

(9) $L_1$：$\begin{cases}x+3y=1\\3y+z=2\end{cases}$、$L_2$：$\begin{cases}2x-z+1=0\\y-3=0\end{cases}$，求過點(3,6,−12)且與$L_1$、$L_2$均平行的平面方程式。

(10) 設$L_1$：$\begin{cases}3x+2y=6\\z=0\end{cases}$，$L_2$：$z$軸，若$L_1$上一點P、$L_2$上一點Q，使得$\overline{PQ}$分別與$L_1$、$L_2$垂直，求Q點坐標及$\overline{PQ}$之長。

(11) 設二直線$L_1$:$\frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2}$，$L_2$:$\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$爲空間中二直線

(a)求$L_1$與$L_2$的交點。(b)求交角平分線。(c)求包含$L_1$與$L_2$的平面方程式。

(12) A(1,2,3)、B(−2,3,4)爲空間中二點，$\overline{AB}$交平面$x-y+z=1$於Q，

(a)求$\dfrac{AQ}{BQ}$=？ (b)Q點坐標 (c)$\overline{AB}$在此平面上的投影長度。

(13) 設A(3,1,0)、B(1,2,3)對稱於平面$ax+by+cz-2=0$，求

(a) $(a,b,c)$=？ (b)$\overline{AB}$與此平面的交點。

(14) 設A(1,−1,2)、B(1,5,−4)及平面E：$x+y+z-5=0$，求E上的一點P使得$\overline{AP}+\overline{BP}$最小。

(15) 一平面過點(1,2,1)並通過二平面$x+2y-3z=0$與$x-y+z=1$的交線，求此平面的方程式。

## $\boxed{\text{進階問題}}$

(16) (a)若$\vec{a}=(1,-2,2)$, $\vec{b}=(8,4,-1)$，$\vec{c}=t\cdot\vec{a}+\vec{b}$，若$\vec{c}$與$\vec{a}$的夾角等於$\vec{c}$與$\vec{b}$的夾角，求$\vec{c}$。

(b)已知直線$L_1$：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$，直線$L_2$：$\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-1}$，求$L_1$與$L_2$的交角平分線的參數式。

(17) ΔABC的三頂點坐標爲A(2,−3,5)，B(3,0,10)，C($x$,$y$,0)，則使ΔABC的周長最小的點C的坐標爲？

(18) 設直線$L_1$：$\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-3t \end{cases}$、$L_2$：$\begin{cases} x=2+s \\ y=-1-2s \\ z=-s \end{cases}$

(a)證明$L_1$、$L_2$爲歪斜線。

(b)設P($t$,−$t$,−3$t$)在$L_1$上，Q、R爲$L_2$的兩相異點，且ΔPQR爲正三角形時，試以$t$表示ΔPQR的面積。

(c)請問當正ΔPQR的面積最小時，P點坐標爲何？

(19) 空間中平面α：$-x+y+2z-10=0$，直線β：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$

(a)求直線β與平面α的交點A之坐標。

(b)自直線β上之點P向平面α做垂線，垂足爲Q，使ΔAPQ之面積爲$\dfrac{20\sqrt{2}}{3}$，求P之坐標。

## 綜合練習解答

(1) (a)$x=3$、$y=3+t$、$z=-1$ (b)$\dfrac{x-9}{7}=\dfrac{y-8}{1}=\dfrac{z-7}{-17}$ (c) $\dfrac{x-11}{4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+6}{-2}$

(2) (A)(B)(D)

(3) (B)(D)(E)

(4) (a)(D) (b)(C)

(5) (a)$y-2z+1=0$ (b)$a=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

(6) (a)略 (b)$\sqrt{5}$ (c)$2x+y+5z=11$ (d)$\dfrac{3x-2}{6}=\dfrac{3y+1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$或$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$

(7) $(1,\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2})$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(8) (a)$x+5y-7z+5=0$ (b)$\dfrac{7\sqrt{3}}{15}$

(9) $2x+3y-z=36$

(10) Q(0,0,0)、$\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

(11) (a) $(\dfrac{-2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3})$ (b)$\dfrac{3x+2}{1}=\dfrac{3y-1}{4}=\dfrac{3z-5}{-1}$ 或$\dfrac{3x+2}{3}=\dfrac{3z-5}{3}$ ，$3y=1$ (c)$2x-y-2z+5$

(12) (a)$\dfrac{1}{2}$ (b)$(0,\dfrac{7}{3},\dfrac{10}{3})$ (c)$2\sqrt{2}$

(13) (a)$(-2,1,3)$ (b)$(2,\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$

(14) (2,3,0)

(15) $3x-z-2=0$

(16) (a) $(11,-2,5)$ (b)$\begin{cases} x=1+11t \\ y=1-2t \\ z=1+5t \end{cases}$，$t$爲實數或$\begin{cases} x=1+5t \\ y=1+10t \\ z=1-7t \end{cases}$，$t$爲實數。

[提示：因爲$\vec{c}$與$\vec{a}$的夾角等於$\vec{c}$與$\vec{b}$的夾角，所以$|t\cdot\vec{a}|=|\vec{b}|$，且$t>0$]

(17) $(\frac{7}{3},-2,0)$[提示：$\Delta ABC$周長$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$，而$\overline{AB}$爲定值，因此原問題可化爲在$xy$平面上找一點C，使得$\overline{BC}+\overline{CA}$最小，C點爲A點對$xy$平面的對稱點$A'(2,-3,-5)$與B點連線的交點.]

(18) (a)證明$L_1$、$L_2$無交點且方向向量不平行。 (b)$\frac{1}{\sqrt{3}}(5t^2+2t+\frac{7}{3})$ (c)$(\frac{-1}{5},\frac{1}{5},\frac{3}{5})$

[提示：(b)先求P點到$L_2$的距離，此距離爲正三角形PQR的高，進一步求面積]

(19) (a)$A(5,-5,10)$ (b)$P(7,-7,16)$或$(3,-3,4)$

[解法]：

(a)令$A(2+t,-2-t,1+3t)$代入$\alpha$的方程式，可得$t=3\Rightarrow A(5,-5,10)$。

(b)令$PA=l$，去求$\beta$的方向向量與$\alpha$的法向量的銳夾角爲$\theta$，$\Rightarrow\angle PAQ=90^\circ-\theta$

$\sin(\angle PAQ)=\frac{4}{\sqrt{66}}$，由$\Delta APQ$之面積爲$=\frac{20\sqrt{2}}{3}\Rightarrow l=2$ 設$P(5+s,-5-s,10+3s)$ 因爲$AP=2\Rightarrow s=\pm2\Rightarrow$P點坐標$(7,-7,16)$或$(3,-3,4)$