§3–2 行列式與其應用

(甲)二階行列式

(1) 引入二階行列式：

解二元一次方程組：$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \cdots(1) \\ a_2x+b_2y=c_2 \cdots(2) \end{cases}$，其中$x,y$是未知數，

我們使用代入消去法解之

$(1)\times b_2-(2)\times b_1 \Rightarrow (a_1b_2-a_2b_1)x=(c_1b_2-c_2b_1)$

$(1)\times a_2-(2)\times a_1 \Rightarrow (a_2b_1-a_1b_2)y=(c_1a_2-c_2a_1)$

當$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 時，解得唯一解：$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$

為了簡化過程與符號，定義二階行列式。

定義：當a,b,c,d為 4 個數，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$。

(它是左上與右下的乘積減去右上與左下的乘積)

引入二階行列式的符號之後，重新考慮解$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \cdots(1) \\ a_2x+b_2y=c_2 \cdots(2) \end{cases}$的過程，

可得$\begin{cases} \Delta\cdot x=\Delta_x \\ \Delta\cdot y=\Delta_y \end{cases}$，其中$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$。

當$\Delta\neq 0$ 時，方程組$(x,y)=(\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\dfrac{\Delta_y}{\Delta})$ [此稱為克拉瑪公式]

當$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，方程組有無限多解。

當$\Delta=0$，而Δ_x、Δ_y有一不為 0 時，方程組無解。

[**例題**1] 試就實數 k 之值，試討論方程組$\begin{cases} (k+1)x+4y=4 \\ x+(k-2)y=1 \end{cases}$。

Ans：$k\neq 3$ 且 $k\neq -2$，方程組有唯一解；$k=3$，解 $x=1-t$，$y=t$；$k=-2$，無解

(練習1) 就 k 值討論方程式的解：$\begin{cases}(k-2)x-2y=2k\\3x+(2k+1)y=-k-2\end{cases}$。

Ans：當 $k\neq 1$，$\frac{3}{2}$時，恰有一組解，當 k=1 時，有無限多組解，當 k= $\frac{3}{2}$時，無解。

(2)二階行列式的性質：$\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=ad-bc$

(a)有一列(行)全為 0，其值為 0。

$\begin{vmatrix}0 & 0\\b_1 & b_2\end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix}0 & a_2\\0 & b_2\end{vmatrix}=0$

(b)每一列**(**行**)**可提公因數。

$\begin{vmatrix}ka_1 & ka_2\\b_1 & b_2\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}ka_1 & a_2\\kb_1 & b_2\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{vmatrix}$

(c)兩列(行)互換，其值變號。

$\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\a_1 & a_2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}a_2 & a_1\\b_2 & b_1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{vmatrix}$

(d)一列**(**行**)**乘以一數加至另一列**(**行**)**，其值不變。

$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\b_1+ka_1 & b_2+ka_2\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2+ka_1\\b_1 & b_2+kb_1\end{vmatrix}$

[例題2] 設$\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=2$，

(1)求$\begin{vmatrix}3a & 12b\\c & 4d\end{vmatrix}=$？　(2)求$\begin{vmatrix}5a-7b & 4a+3b\\5c-7d & 4c+3d\end{vmatrix}=$？

Ans：(1)24 (2)86

(練習2) 求$\begin{vmatrix}390 & 104\\150 & 20\end{vmatrix}=$______。Ans：−7800

(練習3) 試解下列方程式，$\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 3 & x-2 \end{vmatrix}=3$。Ans：$x=5$ 或-1

(練習4) 若$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=5$，則求(1)$\begin{vmatrix} 3a & 4b \\ 3c & 4d \end{vmatrix}=$_____。(2)$\begin{vmatrix} 3a-2b & a+5b \\ 3c-2d & c+5d \end{vmatrix}=$________。
Ans：(1)60　(2)85

(乙)三階行列式

(1)三階行列式的定義：

給定一個 3 階方陣，A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，根據這個方陣A的元，可以定一出一個算式稱爲方陣A的行列式，記爲det(A)=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$。

定義一：(直接展開)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32})$$

速算法則：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

定義二：(降階展開) 三階行列式可根據某一行或某一列降成二階行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\quad \text{(就第一列展開)}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\quad \text{(就第一行展開)}$$

$$=-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\quad \text{(就第二列展開)}$$

$=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{k+i}a_{ki}\Delta_{ki}$ ，(k=1,2,3) Δ_{ki}爲去掉a_{ki}所屬的行、列所得到的二階行列式。

$=\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+i}a_{ki}\Delta_{ki}$ ，(i=1,2,3) Δ_{ki}爲去掉a_{ki}所屬的行、列所得到的二階行列式。

例如：計算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$的值。

(2)三階行列式的性質：利用降階展開可以得到一些性質

(a)**行列互換，其值不變。**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(b)**每一列(行)可提公因數。**

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\text{。}$$

[說明]：

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=ka_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - kb_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + kc_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=k(a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix})$$

$$=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\text{。}$$

(c)**兩列(行)互換，其值變號。**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \text{(第一三列互調)}$$

$$= -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{(第一二行互調)}$$

[說明]：

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = -a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(d)**兩列(行)成比，其值為 0。**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

[說明]：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\cdot 0 = 0 \text{[按第三列展開]}$$

(e)**一列(行)乘以一數加至另一列(行)，其值不變。**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

[說明]：按第三列展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & c_2+kc_1 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \end{vmatrix}$$

$$=a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(3)**行列式計算時之注意事項：**

(a) 降階求值：

利用(2)(e)之性質，將行列式化至某一行、列，的各項中，出現至多一個不爲 0，再利用該行、列降階求值，因爲其他二項皆爲 0，因此只需計算一個二階行列式即可。

(b)觀察各行、列是否有公因數(式)，若有，提公因數(式)，以簡化數字。

(c)觀察各行、列是否有成等差，若有可利用(2)(e)之性質，將行列式化某一行、列會成比例。

(d)觀察各行、列，逐項相加是否相等，若相等可利用(2)(e)之性質，將其加到某一項，再提公因數，降階求值。

[例題3] 計算下列行列式：

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 33 \\ -2 & 0 & 8 \\ 14 & -3 & -92 \end{vmatrix} \quad (2)\begin{vmatrix} 20 & -10 & 15 \\ 15 & 21 & -3 \\ 28 & -14 & 21 \end{vmatrix} \quad (3)\begin{vmatrix} 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \end{vmatrix} \quad (4)\begin{vmatrix} 11 & 21 & 31 \\ 21 & 31 & 11 \\ 31 & 11 & 21 \end{vmatrix}$$

Ans：(1)78 (2)0 (3)0 (4)–18900

[例題4] 證明：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$ [Vandermonde 行列式]

[例題5] (1)證明：$\begin{vmatrix} a+a' & d & g \\ b+b' & e & h \\ c+c' & f & i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a' & d & g \\ b' & e & h \\ c' & f & i \end{vmatrix}$

(2) 設$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=5$，則$\begin{vmatrix} a_2+a_3 & 3a_1+a_2 & a_1-4a_3 \\ b_2+b_3 & 3b_1+b_2 & b_1-4b_3 \\ c_2+c_3 & 3c_1+c_2 & c_1-4c_3 \end{vmatrix}=$？Ans：55

(練習5) 計算下列行列式的值：

$$(1)\begin{vmatrix}110 & 120 & 260\\ 22 & 4 & 13\\ 33 & 8 & 39\end{vmatrix}\ (2)\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 9 & 16\\ 8 & 27 & 64\end{vmatrix}\ (3)\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & c+a\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix}\ (4)\begin{vmatrix}1999 & 2000 & 2001\\ 88 & 89 & 90\\ 10 & 20 & 40\end{vmatrix}$$

Ans：(1)−34320 (2)48 (3)0 (4)19110

(練習6) 因式分解下列行列式：

$$(1)\begin{vmatrix}1 & a^2 & (b+c)^2\\ 1 & b^2 & (c+a)^2\\ 1 & c^2 & (a+b)^2\end{vmatrix}\qquad (2)\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\ 1 & b & b^3\\ 1 & c & c^3\end{vmatrix}$$

Ans：(1)2(a−b)(b−c)(c−a)(a+b+c)　(2)(a−b)(b−c)(c−a)(a+b+c)

(練習7) 解方程式：$\begin{vmatrix}x^2 & x & 1\\ 25 & 5 & 1\\ 9 & -3 & 1\end{vmatrix}=0$　Ans：x=5，−3

(練習8) 設$\begin{vmatrix}a & p & x\\ b & q & y\\ c & r & z\end{vmatrix}$=1，求$\begin{vmatrix}2x+3a & 2y+3b & 2z+3c\\ p-3x & q-3y & r-3z\\ a-2p & b-2q & c-2r\end{vmatrix}$=？　Ans：−20

(練習9) 計算下列行列式：

$$(1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab\end{vmatrix}\qquad (2)\begin{vmatrix}a+b+2c & a & b\\ c & b+c+2a & b\\ c & a & c+a+2b\end{vmatrix}$$

Ans：(1)0 (2)2(a+b+c)^3

(丙)行列式的應用

(1)設平面上有三點A(a_1,b_1),B(a_2,b_2),C(a_3,b_3)，則

$$\Delta\text{ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 1\\ a_2 & b_2 & 1\\ a_3 & b_3 & 1\end{vmatrix}\text{的絕對值}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a_2-a_1 & b_2-b_1\\ a_3-a_1 & b_3-b_1\end{vmatrix}\text{的絕對值。}$$

[證明]：

設$\overrightarrow{AB}$=(a_2−a_1,b_2−b_1)、$\overrightarrow{AC}$=(a_3−a_1,b_3−b_1)

ΔABC的面積=$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$ =

$$\frac{1}{2}\sqrt{[(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2][(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2]-[(a_2-a_1)(a_3-a_1)+(b_2-b_1)(b_3-b_1)]^2}$$

$=\frac{1}{2}|(a_2-a_1)(b_3-b_1)-(b_2-b_1)(a_3-a_1)|$

(2)若$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ dx+ey+fz=0 \end{cases}$，且$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}$中至少有一個不爲 0，

則$x：y：z=\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$。

[證明]假設$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}\neq 0$，$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ dx+ey+fz=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ax+by=-cz \\ dx+ey=-fz \end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -cz & b \\ -fz & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}，y=\frac{\begin{vmatrix} a & -cz \\ d & -fz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow x：y：z=\frac{\begin{vmatrix} -cz & b \\ -fz & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}：\frac{\begin{vmatrix} a & -cz \\ d & -fz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}：z=\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}。$$

從空間向量的觀點來看：

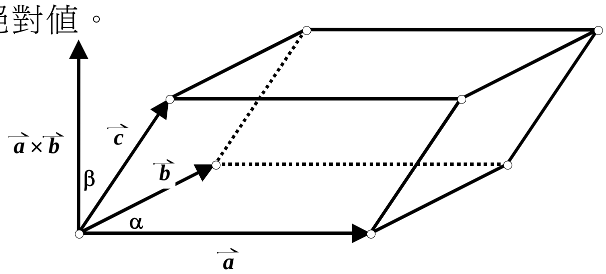
設$\vec{A}=(a,b,c)$、$\vec{B}=(d,e,f)$，$\vec{n}=(x,y,z)$，

$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ dx+ey+fz=0 \end{cases}$代表$\vec{A}\perp\vec{n}$且$\vec{B}\perp\vec{n}\Rightarrow\vec{n}//\vec{A}\times\vec{B}$，

又因爲$|(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix})|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$，所以$\vec{A}\times\vec{B}=(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix})$。

(3)由$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$三向量

所展成的平行六面體的體積=$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$的絕對值。



[證明]：

平行六面體的體積

=(由$\vec{a}$、$\vec{b}$所展成的平行四邊形面積)×高

由$\vec{a}$、$\vec{b}$所展成的平行四邊形面積=$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha=|\vec{a}\times\vec{b}|$

高= 在(×)方向上的投影長度=$|\vec{c}|\cos\beta$的絕對值。

平行六面體的體積

=$||\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\beta|=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$，β爲$\vec{a}\times\vec{b}$與$\vec{c}$的夾角

=$|\ (\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})\cdot(c_1,c_2,c_3)\ |$

$$=\left|\ c_1\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\ \right|$$

$$=\left|\ c_1\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\ \right|$$

$$=\left|\ \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\ \right|$$

(4) 設L_1：$a_1x+b_1y=c_1$、L_2：$a_2x+b_2y=c_2$、L_3：$a_3x+b_3y=c_3$表三相異直線，

則L_1、L_2、L_3相交於一點$\Rightarrow$ $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0$。

[證明]：

設(x_0,y_0)為L_1、L_2、L_3的交點$\Rightarrow$ $a_1x_0+b_1y_0=c_1$、$a_2x_0+b_2y_0=c_2$、$a_3x_0+b_3y_0=c_3$

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1-a_1x_0-b_1y_0\\ a_2 & b_2 & c_2-a_2x_0-b_2y_0\\ a_3 & b_3 & c_3-a_3x_0-b_3y_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 0\\ a_2 & b_2 & 0\\ a_3 & b_3 & 0\end{vmatrix}=0$$

注意：這個命題的逆命題不成立。反例呢？

[例題6] 空間四點 A(1,–1,0)，B(0,1,0)，C(2,3,4)，D(–1,1,3)，求

(1)$\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$為相鄰三邊的平行六面體體積(2)四面體 ABCD 的體積

(3)△ABC 的面積　Ans：(1)26　(2)$\frac{13}{3}$　(3)$\sqrt{29}$

[例題7] 空間中四點 A(1,1,1)、B(1,2,t)、C(3,4,5)、D(4,5,t)
(1)若 A,B,C,D 四點共面，求 t=？
(2)若四面體 ABCD 的體積為 6，則 t=？
Ans：(1)5　(2)−7 或 17

[例題8] 空間三向量$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$，$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$，$\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$所張成的平行四面體的體積為 5，則由$2\vec{u}+3\vec{v},\vec{v},2\vec{w}$所張成的平行六面體的體積為？Ans：20

[例題9] 相異三直線L_1：$x+2y+3-k=0$，L_2：$(1-k)x+2y+3=0$，L_3：$x+(2-k)y+3=0$ 不能圍成一個三角形，求k值。　Ans：k=3 或 6

(練習10) 設 $xyz\neq0$，若 $x+3y+5z=0$，$2x+4y+7z=0$ 則
(1)$x:y:z$=？　(2)$\dfrac{3x^2-4y^2+4z^2-2yz-4zx+5xy}{2x^2+4y^2+4z^2}$ =？　Ans(1)1:3:(−2) (2)$\dfrac{1}{3}$

(練習11) 設ΔABC 之三頂點為 A(−1,2)、B(1,4)、C(4,k)，若ΔABC 的面積為 3，則 k=？　Ans：　10 或 4

(練習12) 三直線 $kx+y=3$，$3x+2ky=7$，$9kx-4y=1$ 相交於一點，求 k=？
Ans：k=1 或$\dfrac{3}{4}$

(練習13) 設坐標空間中四點A(2,0,−1)、B(3,1,4)、C(−2,5,2)、D(1,4,−3)

(1)求ΔABC的面積。　(2)求$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$所決定的平行六面體體積。

Ans：(1)$\frac{1}{2}\sqrt{1094}$　(2)88

(丁)行列式的其他應用

[例題10] 【根與係數的關係配合三階行列式】

設a,b,c爲方程式 $2x^3-5x^2+1=0$ 之三根，則$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$=？ Ans：$\frac{-125}{8}$

[例題11] 設 a,b,c 是△ABC 之∠A,∠B,∠C 的對邊長，試求$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \sin A & \sin B & \sin C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$之值。Ans：0

[例題12] 化簡$\begin{vmatrix} a^2+1 & ba & ca \\ ab & b^2+1 & cb \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$=____。Ans：$a^2+b^2+c^2+1$

(練習14) 若a,b,c爲$x^3-2x^2-3x+7=0$ 之三根，試求$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$之值。Ans：−10

(練習15) 設△ABC 的三邊長爲 a,b,c 且三內角的度數爲α,β,γ

若 $x=\begin{vmatrix} a & a^2 & \sin\alpha \\ b & b^2 & \sin\beta \\ c & c^2 & \sin\gamma \end{vmatrix}$ 試求 Cos$x$ 之值。Ans：1

(練習16) 設ω爲$x^2+x+1=0$ 的虛根，請計算$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$= ? Ans：0

綜合練習

(1) 下列選項中的行列式，那些與行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$相等？

(A)$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (C)$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(D)$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1\cdot c_1 & b_2\cdot c_2 & b_3\cdot c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (E) $\begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}$ (88 學科)

(2) 計算下列各行列式值：

(a) $\begin{vmatrix} 43 & -26 & 34 \\ 71 & 52 & -68 \\ 85 & 91 & -119 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 6 & -7 \\ -12 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ (c)$\begin{vmatrix} 20 & 25 & 30 \\ -12 & 18 & 36 \\ 16 & -7 & -24 \end{vmatrix}$

(3) 試證明下列各小題：

(a) $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & a+c & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}=4abc$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$

(c) $\begin{vmatrix} a & bc & b+c \\ b & ca & c+a \\ c & ab & a+b \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(4) 將行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$

展開得到多項式 $f(x)$。下列有關 $f(x)$的敘述，何者為真？

(A) $f(x)$是一個三次多項式(B) $f(1)=0$

(C) $f(2)=0$ (D) $f(-3)=0$

(E) $f(5)=0$ (89 學科)

(5) 若$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$=7，求下列各小題的值：

(a) $\begin{vmatrix} a_1 & 3a_2 & 2a_3 \\ b_1 & 3b_2 & 2b_3 \\ c_1 & 3c_2 & 2c_3 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 2a_1-3b_1 \\ a_2 & b_2 & 2a_2-3b_2 \\ a_3 & b_3 & 2a_3-3b_3 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & 3a_2-5a_3 & a_3-2a_1 \\ b_1+b_2 & 3b_2-5b_3 & b_3-2b_1 \\ c_1+c_2 & 3c_2-5c_3 & c_3-2c_1 \end{vmatrix}$

(6) 空間中三向量 $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$，$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$，$\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$所張平行六面體體積為$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$的絕對值。今已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 三向量所張平行六面體體積為5，求$(2\vec{a}+3\vec{b})$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 三向量所張平行六面體體積。

(7) 設A(−1,2,1),B(2,−1,2),C(1,2,3),D(−t−1,t,1)為空間中不共面四點，

(a)試以t表出由$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AD}$所決定的平行六面體體積。

(b)設ABCD決定的四面體體積為 10，求t。

(8) 空間中四點 A(0,1,2)，B(−1,−1,3)，C(3,0,1)，D(k,2,1)

(a)若共平面，試求 k 值。

(b)若不共平面四面體 ABCD 的體積為 4，則 k 值為何？

(9) 坐標平面上，相異三點A(a_1,a_2)、B(b_1,b_2)、C(c_1,c_2)，試證明若A、B、C三點共線，則$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$=0。

進階問題

(10) 設$\theta=\frac{\pi}{8}$，請計算$\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos3\theta & \sin3\theta \\ \cos\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$=？

(11) 設坐標平面上三點$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P_3(x_3,y_3)$，其中x_1、x_2、x_3互異

(a)請證明：$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$。

(b)恰存在一組實數a,b,c，使得函數$y=ax^2+bx+c$的圖形通過P_1、P_2、P_3三點。

(12) 計算$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ g(x_1) & g(x_2) & g(x_3) \end{vmatrix}$，其中$f(x)=a_0x+a_1$，$g(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$。

綜合練習解答

(1) (B)(C)

(2) (a) 0 (b)61 (c)–2520

(3) 略

(4) (A)(B)(C)(D)

(5) (a)42 (b)0 (c)91

(6) 10

(7) (a)|2t+8|　(b)26 或–34

(8) (a)k=$\frac{5}{3}$(b)k=$\frac{29}{3}$或$\frac{-19}{3}$

(9) [提示：ΔABC=0]

(10) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

(11) [提示：(a) $\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = -(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$。　(b)若函數$y=ax^2+bx+c$的圖形通

過P_1、P_2、P_3三點 $\Rightarrow \begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$ 即(a,b,c)爲方程組$\begin{cases} x_1^2u + x_1v + 1\cdot w = y_1 \\ x_2^2u + x_2v + 1\cdot w = y_2 \\ x_3^2u + x_3v + 1\cdot w = y_3 \end{cases}$的

解，因爲$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ 此方程組恰有一解。]

(12) $a_0b_0(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)$