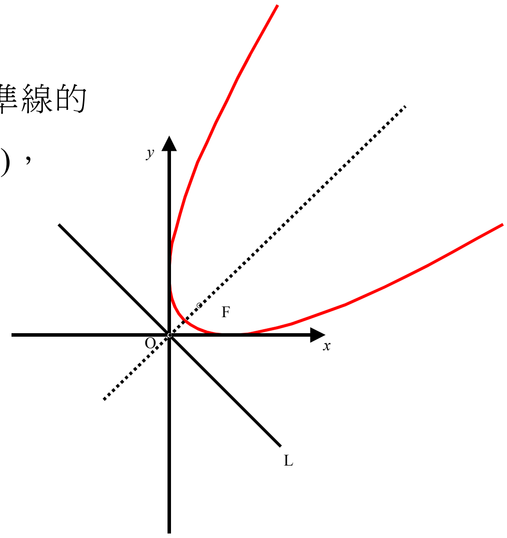
§2−2 旋轉坐標軸

(甲)轉軸公式

考慮一個以點F(2,2)為焦點，以直線L：$x+y=0$ 為準線的拋物線Γ方程式是Γ ：$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}}$ ……..(*)，
(*)式平方後可化成Γ：$x^2-2xy+y^2-8x-8y+16=0$…(**)，
但是從(**)很難辨識它是一條拋物線，
是否可以利用適當的坐標變換，
來辨識(**)式為一條拋物線。
我們如果將坐標軸看成此拋物線的軸與過頂點與軸垂直的直線，則此拋物線就成為一條開口向上的拋物線，方程式也會化成$y^{/\!/}=ax^{/\!/2}$的形式，
因此接下來要考慮坐標軸的旋轉，以化簡Γ的方程式。



(1)推導轉軸公式：

將直角坐標系$S\equiv(O,\vec{i},\vec{j})$繞原點旋轉一個有向角θ，得到一個新坐標系$S^{/\!/}\equiv(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$，像這種「坐標原點及長度單位都不變，只改變坐標的方向」的坐標變換稱為坐標軸的旋轉，簡稱**轉軸**。

基底$\vec{e_1}=(\cos\theta,\sin\theta)=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$，

$\vec{e_2}=(\cos(\theta+\frac{\pi}{2}),\sin(\theta+\frac{\pi}{2}))=(-\sin\theta,\cos\theta)=(-\sin\theta)\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}$

設P點在坐標系$S\equiv(O,\vec{i},\vec{j})$與$S^{/\!/}\equiv(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$下的坐標為$(x,y)$、$(x^{/\!/},y^{/\!/})$

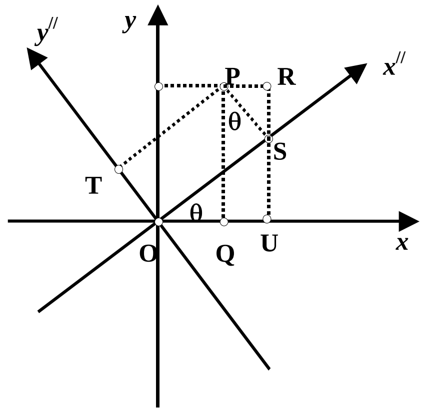
$\overrightarrow{OP}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$

$=x^{/\!/}\vec{e_1}+y^{/\!/}\vec{e_2}$

$=x^{/\!/}(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})+y^{/\!/}((-\sin\theta)\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j})$

$=(x^{/\!/}\cos\theta-y^{/\!/}\sin\theta)\,\vec{i}+(x^{/\!/}\sin\theta+y^{/\!/}\cos\theta)\,\vec{j}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=x^{/\!/}\cos\theta-y^{/\!/}\sin\theta\\ y=x^{/\!/}\sin\theta+y^{/\!/}\cos\theta\end{cases}$ 這個式子稱為**轉軸公式**。



[幾何解釋]：

如右圖，$\overline{OQ}=\overline{OU}-\overline{QU}=\overline{OS}\cos\theta-\overline{PS}\sin\theta=x^{/\!/}\cos\theta-y^{/\!/}\sin\theta$

$\overline{PQ}=\overline{RS}+\overline{SU}=\overline{PS}\cos\theta+\overline{OS}\sin\theta=x^{/\!/}\sin\theta+y^{/\!/}\cos\theta$

透過$\begin{cases}x=x^{/\!/}\cos\theta-y^{/\!/}\sin\theta\\ y=x^{/\!/}\sin\theta+y^{/\!/}\cos\theta\end{cases}$可解得$\begin{cases}x^{/\!/}=x\cos\theta+y\sin\theta\\ y^{/\!/}=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}$

從另一個角度來看，把新坐標系$S^{/\!/}$繞原點O旋轉有向角−θ就可變成原坐標系S，即$(x^{/\!/},y^{/\!/})$看成原坐標，(x,y)看成轉軸後的新坐標，那麼由轉軸公式得到

$$\begin{cases}x^{/\!/}=x\cos(-\theta)-y\sin(-\theta)=x\cos\theta+y\sin\theta\\ y^{/\!/}=x\sin(-\theta)+y\cos(-\theta)=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}$$

結論：

(1)將直角坐標系的x、y軸旋轉θ角度，得到新的坐標軸$x^{//}$、$y^{//}$軸

點P作這兩個坐標下的坐標分別爲(x,y)、$(x^{//},y^{//})$，

(x,y)與$(x^{//},y^{//})$滿足下列關係：$\begin{cases} x = x^{//}\cos\theta - y^{//}\sin\theta \\ y = x^{//}\sin\theta + y^{//}\cos\theta \end{cases}$。

(2)記憶法：

	$x^{//}$	$y^{//}$	(新坐標)
x	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	
y	$\sin\theta$	$\cos\theta$	
(原坐標)			

[例題1] 設將原坐標系旋轉θ，θ 如下所示，試分別將原坐標爲(x,y)之點的新坐標以x,y表示。(1)$\theta=30°$ (2)$\theta=\cos^{-1}\frac{1}{3}$

Ans：(1)$x^{//}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y$，$y^{//}=\frac{-1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$ (2)$x^{//}=\frac{1}{3}x+\frac{2\sqrt{2}}{3}y$，$y^{//}=\frac{-2\sqrt{2}}{3}x+\frac{1}{3}y$

(練習1) 將坐標軸旋轉$\theta=\frac{\pi}{6}$，

(1)若點 A(2,1)，求點 A 之新坐標。

(2)若點 B 之新坐標爲(−2,3)，求點 B 的原坐標。

Ans：(1)($\sqrt{3}+\frac{1}{2}$，$-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$)　(2)($-\sqrt{3}-\frac{3}{2}$，$-1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$)

(練習2) 將坐標軸旋轉$\theta=\cos^{-1}\frac{3}{5}$，若P(2，−1)之新坐標$(h,k)$，而Q$(r,s)$之新坐標爲(2，−1)，求$(h,k)$、$(r,s)$。　Ans：$(h,k)$=($\frac{2}{5}$，$\frac{-11}{5}$)，$(r,s)$=(2，1)

(練習3) 平面上一點 A(2,5)試分別就下列情形求 A 點的新坐標。

(1)先將坐標軸平移至(1,4)，再將新坐標軸以新原點爲中心旋轉$\frac{\pi}{4}$。

(2)先將坐標軸以原點爲中心旋轉$\frac{\pi}{4}$，再依新坐標軸平移(1,4)。

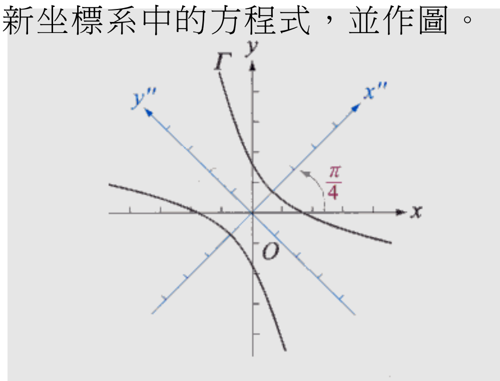
(3)於(2)中若先將坐標軸以原點爲中心旋轉$\frac{\pi}{4}$後應平移至何處，則得 A 點所得之新坐標才與(1)相同。

Ans：(1)$(\sqrt{2}\ ,0)$　(2)$(\frac{7\sqrt{2}}{2}-1，\frac{3\sqrt{2}}{2}-4)$　(3)平移至$(\frac{5\sqrt{2}}{2}，\frac{3\sqrt{2}}{2})$

(乙)轉軸化簡方程式

例子：

將坐標軸旋轉$\frac{\pi}{4}$，求曲線Γ：$x^2+4xy+y^2=3$ 在新坐標系中的方程式，並作圖。



[解法]：

設坐標軸旋轉θ角度，

根據轉軸公式$\begin{cases} x = x''\cos\theta - y''\sin\theta \\ y = x''\sin\theta + y''\cos\theta \end{cases}$代入

曲線Γ的方程式$x^2+4xy+y^2=3$，得

$(x''\cos\theta-y''\sin\theta)^2+4(x''\cos\theta-y''\sin\theta)(x''\sin\theta+y''\cos\theta)+(x''\sin\theta+y''\cos\theta)^2=3$

整理可得：

$(\cos^2\theta+4\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)x''^2+(-2\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta-4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)x''y''$
$+(\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)y''^2=3$……(*)

若要選取角度θ，使得$x''y''$項的係數=0

$\Rightarrow -2\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta-4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=4(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0 \Rightarrow \cos^2\theta=\sin^2\theta$

可以取$\theta=\frac{\pi}{4}$，再代入(*)中，可得$\frac{x''^2}{1}-\frac{y''^2}{3}=1$　，故可知Γ是一個雙曲線。

(1)化簡方程式：

由前面例題，我們發現適當選擇旋轉的角度θ，可以使二次曲線的新方程式中消去xy項，**但是對於一般的二次曲線Γ：$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ ($b\neq0$)……..(A)**
如何選擇轉軸的角度θ，才可以使Γ的新方程式中缺少xy項呢？

將$\begin{cases} x = x''\cos\theta - y''\sin\theta \\ y = x''\sin\theta + y''\cos\theta \end{cases}$代入二次曲線Γ的方程式中：

可得

$a(x''\cos\theta-y''\sin\theta)^2+b(x''\cos\theta-y''\sin\theta)(x''\sin\theta+y''\cos\theta)+c(x''\sin\theta+y''\cos\theta)^2$
$+d(x''\cos\theta-y''\sin\theta)+e(x''\sin\theta+y''\cos\theta)+f=0$

上面的方程式展開後，整理成$a''x''^2+b''x''y''+c''y''^2+d''x''+e''y''+f''=0$……(B)

其中$a''=a\cos^2\theta+b\cdot\sin\theta\cos\theta+c\sin^2\theta$，

$b''=-2a\sin\cos\theta+b(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2c\sin\theta\cos\theta=b\cos2\theta-(a-c)\sin2\theta$

$c''=a\sin^2\theta-b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$

$d''=d\cos\theta+e\sin\theta$

$e''=-d\sin\theta+e\cos\theta$

$f''=f$　**(常數項不變)**

如果選取轉軸的角度θ使得$\boxed{b\cos2\theta-(a-c)\sin2\theta=0}$，則$x''y''$項的係數$b''=0$，

所以當$\cot2\theta=\frac{a-c}{b}$　($b\neq0$)時，$x''y''$項的係數$b''=0$。

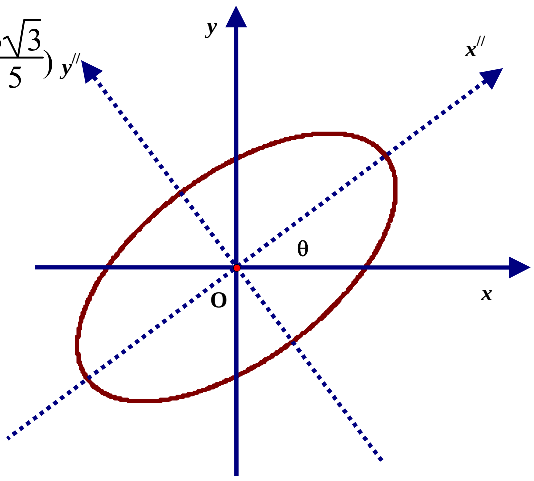
結論：

可以取得銳角θ滿足$\cot 2\theta=\dfrac{a-c}{b}$，選擇這樣的銳角θ作爲轉軸旋轉的角度，變換後的二次曲線Γ：$a''x''^2+c''y''^2+d''x''+e''+y''+f''=0$ ($f''=f$)。

[例題2] 坐標軸旋轉θ角度($0<\theta<\frac{\pi}{2}$)，使得曲線Γ：$52x^2-72xy+73y^2=100$
之新方程式中沒有xy項。(1)求cot2θ、sinθ 、cosθ 的值。
(2)寫出轉軸公式。 (3)求Γ的新方程式。(4)請求出焦點的坐標

Ans：(1)$\frac{7}{24}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{4}{5}$ (2)$x=\frac{4}{5}x''-\frac{3}{5}y''$，$y=\frac{3}{5}x''+\frac{4}{5}y''$

(3)$\frac{x''^2}{4}+\frac{y''^2}{1}=1$(4)($\frac{4\sqrt{3}}{5},\frac{3\sqrt{3}}{5}$)、($-\frac{4\sqrt{3}}{5},-\frac{3\sqrt{3}}{5}$)



[例題3] 設Γ爲以原點$O(0,0)$爲頂點，$F(1,2)$爲焦點之拋物線，將原坐標系S旋轉
$\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$得到新坐標系S''，則F對$S'$的坐標爲__________，Γ對$S'$坐標系的新方程式爲__________，Γ對原坐標系S的方程式爲__________。
(化爲二元二次式)

Ans：($\sqrt{5}$，0)，$y'^2=4\sqrt{5}x'$，$4x^2-4xy+y^2-20x-40y=0$

[解法]

$\theta=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$，原坐標S旋轉θ得到新坐標系S''，根據轉軸公式

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{5}}(x''-2y'')\\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x''+y'')\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x''=\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)\\ y''=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+7)\end{cases}$$

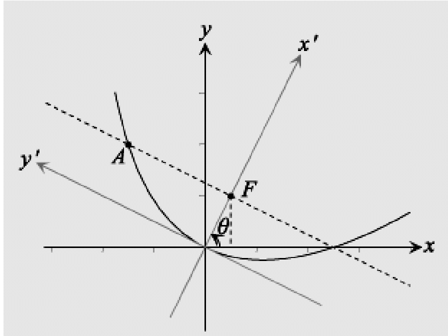
由$\overline{OF}=\sqrt{5}$ 知焦點F對於S''的坐標爲($\sqrt{5}$，0)

$\therefore$ 在S'坐標系中，Γ：$y''^2 = 4\sqrt{5}\,x''$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5}(-2x+y)^2 = 4\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)$

$\Leftrightarrow 4x^2-4xy+y^2 = 20x+40y$

$\therefore$ 在S中，Γ：$4x^2-4xy+y^2-20x-40y=0$。



(練習4) 設θ爲坐標軸旋轉的角度，試求下列二次曲線旋轉坐標軸後的新方程式。

(1)$\theta=\frac{\pi}{4}$，$xy=\sqrt{2}$　(2)$\theta=\frac{\pi}{4}$，$5x^2-6xy+5y^2=32$

Ans：(1)$x''^2-y''^2=2\sqrt{2}$　(2)$\frac{x''^2}{16}+\frac{y''^2}{4}=1$

(練習5) 將坐標軸旋轉θ角($0<\theta<\frac{\pi}{2}$)，使得曲線Γ：$2x^2-\sqrt{3}xy+y^2=10$ 對新坐標系中的方程式消去xy項，請問θ=？新的方程式爲何？

Ans：$\frac{\pi}{3}$，$\frac{x''^2}{20}+\frac{y''^2}{4}=1$

(練習6) 將坐標軸旋轉θ角($0<\theta<\frac{\pi}{2}$)，使得曲線Γ：$2x^2+4xy+5y^2=12$ 對新坐標系中的方程式消去xy項，

(1)請寫出轉軸公式(2)新的方程式爲何？

Ans：(1)$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}(x''-2y'') \\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x''+y'') \end{cases}$，(2)$\frac{x''^2}{2}+\frac{y''^2}{12}=1$

(練習7) 將坐標軸旋轉θ角($0<\theta<\frac{\pi}{2}$)，使得曲線Γ：$\sqrt{3}xy+y^2=12$ 對新坐標系中的方程式消去xy項，

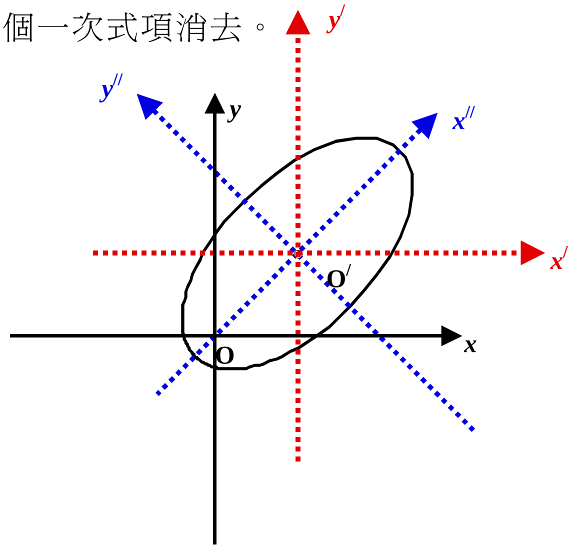
(1) 請問θ=？(2)新的方程式爲何？　Ans：(1)$\frac{\pi}{3}$，(2)$\frac{x''^2}{8}-\frac{y''^2}{24}=1$

(練習8) 曲線Γ：$x^2-2xy+y^2-4\sqrt{2}(x+y)=0$，
將坐標軸旋轉45°，
(1) 可得新坐標方程式爲________。
(2) 其圖形爲何？答：________。
Ans：(1) $(y'')^2=4(x'')$；(2) 拋物線

(丙)移軸與轉軸化簡方程式

例子：利用坐標變換，將曲線Γ：$5x^2-6xy+5y^2-4x-4y-4=0$ 化成標準式。

[先移軸]：因爲 $\delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot5\cdot5<0$，由前面的討論可知，可以選擇適當的原點 $O'(h,k)$ 來移軸，使得Γ的新方程式中的兩個一次式項消去。



將移軸公式 $\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases}$ 代入Γ的原方程式，

可得Γ：$5x'^2-6x'y'+5y'^2+dx'+ey'+f'=0$

其中 $\begin{cases} d=10h-6k-4\cdots(1) \\ e=-6h+10k-4\cdots(2) \\ f=5h^2-6hk+5k^2-4h-4k-4\cdots(3) \end{cases}$，

令(1)(2)中 $d=e=0$，可得 $h=1,k=1$

所以移軸到 $O'(1,1)$ 可得

新的方程式爲 $5x'^2-6x'y'+5y'^2=8$ ……..(4)

[再轉軸]：取一銳角θ滿足 $\cot2\theta=\frac{a-c}{b}=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$，因此可得轉軸公式

$$\begin{cases} x'=x''\cos\frac{\pi}{4}-y''\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x''-y'') \\ y'=x''\sin\frac{\pi}{4}+y''\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x''+y'') \end{cases}$$，代入(4)中，

$5\cdot\frac{1}{2}(x''-y'')^2-6\cdot\frac{1}{2}(x''^2-y''^2)+5\cdot\frac{1}{2}(x''+y'')^2=8$，

整理可得Γ：$\frac{x''^2}{4}+\frac{y''^2}{1}=1$。所以Γ是橢圓，對稱中心在 $O'(1,1)$。

[討論]：

這個橢圓的長軸、短軸所在直線方程式(對於原坐標而言)爲何？正焦弦長=？

[討論]：如果先移軸，再轉軸的話，結果會一樣嗎？

例子：利用坐標變換，將曲線Γ：$4x^2-4xy+y^2-2x-4y+8=0$ 化成標準式。

因爲 $\delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot4\cdot1=0$，因此移軸無法消去兩個一次項，
因此先轉軸消去xy項，再用配方法化成標準式。
[先轉軸]：
取一個銳角θ滿足$\cot2\theta=\dfrac{a-c}{b}=\dfrac{-3}{4}$，由此知$\dfrac{\pi}{2}<2\theta<\pi$，因此$\cos2\theta=\dfrac{-3}{5}$。

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

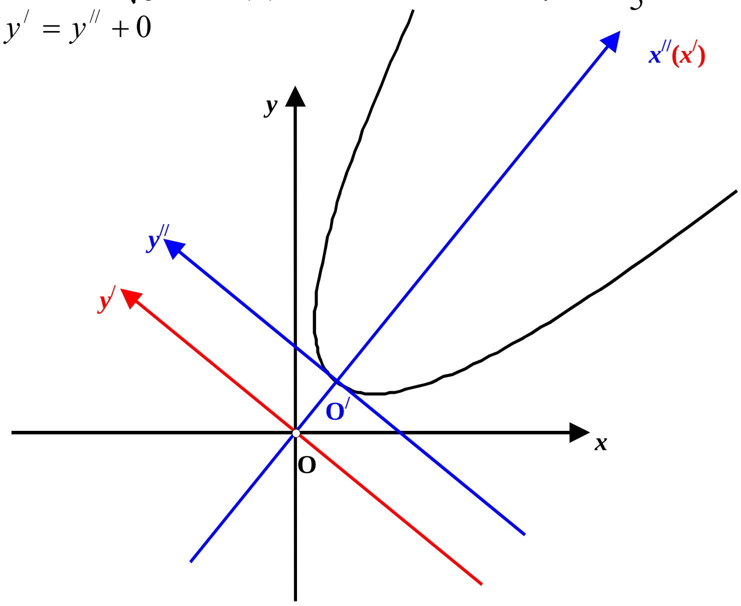
於是可得轉軸公式$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x'-2y') \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y') \end{cases}$

代入Γ 的方程式中，化簡可得Γ：$25y'^2-10\sqrt{5}\,x'+40=0$，

配方得$y'^2=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\left(x'-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$..........(1)。

[再移軸]：根據配方的結果，將原點移至$O'\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}},0\right)$ (對轉軸後的新坐標而言)，

並將移軸公式：$\begin{cases} x'=x''+\dfrac{4}{\sqrt{5}} \\ y'=y''+0 \end{cases}$ 代入(1)得到Γ的標準式：$y''^2=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x''$，所以Γ是一條拋物線。



[討論]：這個拋物線的對稱軸、準線方程式(對x,y座標而言)爲何？正焦弦長=？

[例題4] 設Γ：$4x^2-24xy+11y^2+40x+30y-145=0$

(1)先移軸至$O'(h,k)$，使得x,y項的係數為 0，此時方程式為何？

(2)在將坐標軸繞O'旋轉θ角度($0<\theta<\frac{\pi}{2}$)，使得(1)中的式子沒有xy項，此時方程式為何？

(3)求$(x-4)^2+(y-3)^2$的最小值。

(4)求Γ的正焦弦長。

Ans：(1)$4x'^2-24x'y'+11y'^2=20$　(2)$\frac{y''^2}{1}-\frac{x''^2}{4}=1$　(3)1　(4)8

(練習9) 於xy平面上，方程式 $5x^2-6xy+5y^2-4x-4y-4=0$，

(1)標移軸轉軸化簡方程式成標準式。

(2)請問中心、長軸頂點、焦點坐標為何？

Ans：(1)$\frac{x''^2}{4}+\frac{y''^2}{1}=1$(2)中心(1,1)、焦點($\frac{\sqrt{6}}{2}+1$，$\frac{\sqrt{6}}{2}+1$)、($-\frac{\sqrt{6}}{2}+1$，$-\frac{\sqrt{6}}{2}+1$)、

長軸頂點($\sqrt{2}+1$，$\sqrt{2}+1$)、($-\sqrt{2}+1$，$-\sqrt{2}+1$)

(練習10) 若$p(x,y)$為曲線Γ：$3x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2=12$ 上之動點則

(1) p到原點之最大距離為____。(2) p到原點之最小距離為____。

(3) x^2+y^2的最大值=_______。　(4) x^2+y^2的最小值=_______。

Ans：(1) $\sqrt{6}$　(2) $\sqrt{2}$　(3)6　(2)2

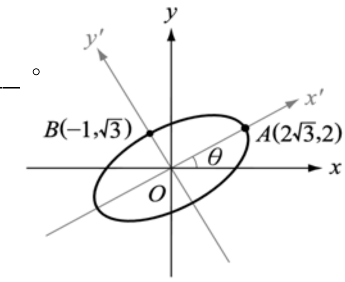
綜合練習

(1) 坐標軸旋轉θ角度($0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$)，使曲線Γ：$2x^2+4xy+5y^2=12$ 的新方程式消去xy項。
(a)寫出轉軸公式。
(b)化簡Γ的方程式，並說明Γ的形狀。
(c)求Γ的正焦弦長、焦點坐標。

(2) 旋轉坐標軸θ角($0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$)，可使方程式 $4x^2-12xy+13y^2+2x-3y+6=0$ 不具xy項，則$\cos\theta$=(A) $\dfrac{3}{4}$ (B) $\dfrac{3}{5}$ (C) $\dfrac{2}{5}$ (D) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (E) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(3) 在坐標平面上，設曲線Γ的方程式為 $7x^2-48xy-7y^2+25=0$，若將原坐標系旋轉$\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$，則Γ的新方程式為何？

(4) 如右圖，將坐標軸旋轉θ角後，
(a)θ=______。
(b)橢圓對新坐標系的方程式為______________________。
(c)橢圓的原方程式為____________________。



(5) 利用移軸、轉軸化簡下列曲線的方程式：
(a)$5x^2+4xy+8y^2-2x+28y-7=0$
(b)$7x^2-6xy-y^2-26x+2y+7=0$

(6) 將坐標軸旋轉θ角 ($0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) 使得曲線 $\Gamma: 52x^2-72xy+73y^2=100$ 的新方程式沒有xy項。
(a) $\cot 2\theta$ ____。(b) $\sin\theta$ = ____。(c)轉軸公式為_________________。
(d)則Γ的新方程式為 _________________。
(e) Γ之焦點的原坐標____________及對稱軸之原方程式____________。

(7) 設二次曲線Γ：$2x^2+4xy+5y^2=12$，
若將原坐標系旋轉一銳角θ，使新方程式中沒有xy項，則(a)$\sin\theta$=_____。
(b)曲線Γ的長軸所在的直線方程式為____________。【92 建中】

(8) 將坐標軸旋轉 45°，得新坐標系$S''\equiv(O；x'',y'')$，
有一曲線Γ：$xy=4$，試求：
(a) Γ對S''的新方程式為__________________________。
(b) Γ之貫軸長______________。(c) Γ之正焦弦長_______________。
(d) Γ之焦點的原坐標____________________。
(e)若焦點為F_1,F_2，P點在Γ上，則$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|$=________________。

(9) 將坐標軸旋轉θ (0°<θ<90°)，得一新坐標系$S'\equiv(O；x',y')$，
使曲線Γ：$11x^2-24xy+4y^2+20=0$ 的新方程式中沒有xy項，試求：

(a)$\cot 2\theta$=__________。(b) Γ的新方程式=________________________。
(c) Γ之焦點的原坐標爲__________________。
(d) Γ之兩對稱軸之原方程式爲_______________________。
(e)若x,y 滿足 $11x^2-24xy+4y^2+20=0$，求x^2+y^2的最小值=_____________。

(10) 關於二元二次方程式Γ：$x^2+xy+y^2=6$ 的敘述下列那一個選項是正確的？
(A)Γ的圖形是雙曲線。(91 指定考科模擬試題 3)
(B)$F(0,2\sqrt{2})$是Γ的一個焦點。
(C)直線$x+y=0$ 是Γ的一條對稱軸。
(D)若$P(a,b)$爲Γ上一點，則a^2-b^2的最大值爲 $4\sqrt{3}$ 。

進階問題

(11) 設P、Q在坐標系$S\equiv(O,\vec{i},\vec{j})$與$S''\equiv(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$下的坐標爲$(a_1,a_2)$、$(b_1,b_2)$與$(a_1',a_2')$、$(b_1',b_2')$，其中$\vec{e_1},\vec{e_2}$分別是由$\vec{i},\vec{j}$繞原點O旋轉θ角度得到的。請利用轉軸公式證明：
(a)P、Q兩點的距離，在轉軸後不變。
(b)$\overrightarrow{OP}$與$\overrightarrow{OQ}$的內積，在轉軸後不變。
(c)ΔOPQ的面積，在轉軸後不變。
這個結果說明，這樣的坐標變換，不會使得距離、角度有所變化。

綜合練習解答

(1) (a)$x=\frac{1}{\sqrt{5}}(x''-2y'')$，$y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x''+y'')$ (b)$\frac{x''^2}{2}+\frac{y''^2}{12}=1$ ，橢圓
(c)$\frac{2}{\sqrt{3}}$，$(-2\sqrt{2},\sqrt{2})$、$(2\sqrt{2},-\sqrt{2})$

(2) (D)

(3) $x''^2-y''^2=1$

(4) (a)30° (b)$x''^2+4y''^2=16$(c)$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-64=0$

(5) (a)$\frac{x''^2}{4}+\frac{y''^2}{9}=1$ (b)$\frac{y''^2}{1}-\frac{y''^2}{4}=1$

(6) (a) $\dfrac{7}{24}$ ，(b) $\dfrac{3}{5}$ ，(c) $\begin{cases} x=\dfrac{4}{5}x'-\dfrac{3}{5}y' \\ y=\dfrac{3}{5}x'+\dfrac{4}{5}y' \end{cases}$ ，(d) $\dfrac{x'^2}{4}+\dfrac{y'^2}{1}=1$

(e) $F_1(\dfrac{4\sqrt{3}}{5},\dfrac{3\sqrt{3}}{5})$ 及 $F_2(\dfrac{-4\sqrt{3}}{5},\dfrac{-3\sqrt{3}}{5})$ ； $\underbrace{-3x+4y=0}_{長軸}$ 及 $\underbrace{4x+3y=0}_{短軸}$

(7) (a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (b) $x+2y=0$

(8) (a) $\dfrac{x''^2}{8}-\dfrac{y''^2}{8}=1$ (b) $4\sqrt{2}$ (c) $4\sqrt{2}$ (d) $(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$ 及 $(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$ (e) $4\sqrt{2}$

(9) (a) $\dfrac{-7}{24}$ (b) $\dfrac{x'^2}{4}-\dfrac{y'^2}{1}=1$ (c) $(\dfrac{3\sqrt{5}}{5},\dfrac{4\sqrt{5}}{5})$ 及 $(\dfrac{-3\sqrt{5}}{5},\dfrac{-4\sqrt{5}}{5})$
(d) $3x+4y=0$ 及 $-4x+3y=0$ (e) 4

(10) (C)(D)[提示：(D)由 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a''-b'')$ ，$b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a''+b'')$ 代入 $a^2-b^2=-2a''b''$

又 (a'',b'') 在 $\dfrac{x'^2}{4}+\dfrac{y'^2}{12}=1$ 上，由平均數不等式 $\dfrac{a''^2}{4}+\dfrac{b''^2}{12}\geq 2\sqrt{\dfrac{(a'')^2}{4}\cdot\dfrac{(b'')^2}{12}}=\dfrac{|a''b''|}{4\sqrt{3}}$

$\Rightarrow -4\sqrt{3}\leq a^2-b^2=-2a''b''\leq 4\sqrt{3}$ 。]

(11) (a)直接用轉軸公式去檢驗 $(a_1-a_1')^2+(b_1-b_1')^2=(a_2-a_2')^2+(b_2-b_2')^2$
(b)直接用轉軸公式去檢驗 $a_1b_1+a_2b_2=a_1'b_1'+a_2'b_2'$ 。
(c)利用向量的三角形面積公式，即可得證。