§1–3 對數

(甲)對數概念的引進

(1)對數的引入：
西元 1554 年，Michael Stifel 在<<整數算術>>一書中寫出兩個數列：

(0) a	…	–2	–1	0	1	2	3	4	5	…	x	…	y	…	$x+y$
2^a	…	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	…	M	…	N	…	M×N

現在想要計算 M×N，如果能得知 x,y 的值(或是近似值)，根據指數律可知：
$M=2^x$，$N=2^y \Rightarrow M\times N=2^x\cdot 2^y=2^{x+y} \Rightarrow$ 因此只要能得出上表就可得出 $x+y$ 所對的值 M×N。這樣想法經過數學化之後就形成了**對數**的概念。

數學化

根據前面的想法，已知一個正數 M，我們想要定義一個符號來代表一數 x，使得 $M=2^x$，而這個工作是由英國的納皮爾(John Napier 1550~1617)完成的。如何定義呢？

給定底數 2，大家知道 2 的 3 次方等於 8。反過來說，如果已知 8，我們想知道 8 是 2 的幾次方，這等於求方程式 $2^x=8$ 的解，通常以符號 $\log_2 8$ 表示之，即 $3=\log_2 8$。

$$2^3=8 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 8=3$$
$$10^2=100 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{10}100=2$$
$$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$$

(2)對數的定義：
如果 $a>0$，且 $a\neq 1$，當 $a^x=b$ 時，我們用符號 $\log_a b$ 來表示 x，即 $\log_a b=x$，我們稱 $\boldsymbol{\log_a b}$ 為以 a 為**底數**時 b 的對數，b 稱為**真數**。
反過來說，如果 $\log_a b=x$，那麼 $a^x=b$，即 $a^{\log_a b}=b$。

為何 a 要大於 0，不等於 1 呢？
我們在討論指數 a^x 時，a 必須大於 0，所以規定對數時，我們也假設 $a>0$，，因為 $a>0$，$a^x>0$ 所以只有正數的對數才有意義。因此 b 必須大於 0，當 $a=1$ 時，因為 $1^2=1$，$1^3=1$，那麼 $\log_1 1$ 到底要代表 2 或是 3 呢？這就無法定義清楚了，所以我們不以 1 為底數，

結論：
(1) $\boldsymbol{\log_a b}$ **有意義** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a>0}$ **且** $\boldsymbol{a\neq 1}$，$\boldsymbol{b>0}$。
(2) $\boldsymbol{\log_a b=x \Leftrightarrow a^x=b \Leftrightarrow}$ $a^{\log_a b}=b$

[例題1] 將下列的 x 值用對數表示：

(1)$4^x=\frac{1}{64}$　(2)$5^x=100$　(3)$8^x=17$

Ans：(1)$\log_4\frac{1}{64}$　(2)$\log_5 100$　(3)$\log_8 17$

[例題2] 求下列各式的值：

(1)$\log_3 1$　(2)$\log_{0.5}\frac{1}{2}$　(3)$\log_2\sqrt{8}$　(4)$\log_{10}1000^{\frac{1}{10}}$　(5)$\log_4 8$　(6) $2^{\log_2 5}$

Ans：(1)0(2)1(3)$\frac{3}{2}$(4)$\frac{3}{10}$ (5)$\frac{3}{2}$ (6)5

[例題3] 求下列各式的 x。

(1)$\log_{25}x=-2.5$。　(2)$\log_x 9\sqrt{3}=5$　(3)$\log_x 81=\frac{4}{3}$

Ans：(1)$\frac{1}{3125}$　(2)$\sqrt{3}$　(3)27

(練習1) 將下列等式中的 x 值用對數表示：

(1)$3^x=8$　(2)$(2.51)^x=7$　(3)$5^x=17$。

Ans：(1)$\log_3 8$ (2)$\log_{2.51}7$ (3)$\log_5 17$

(練習2) 求下列各式的值：

(1) $3^{\log_3 7}$　(2) $5^{\log_5 9}$　(3) $a^{\log_a b}$

Ans：(1)7 (2)9 (3)b

(練習3) 試求下列各對數值：(1)$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$ (2)$\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}$ (3)$\log_{\frac{3}{4}}1$ (4)$\log_2\sqrt[3]{2}$

Ans：(1)2(2)$\frac{1}{2}$(3)0(4)$\frac{1}{3}$

(練習4) 設 $\log_{10}2=p$，$\log_{10}=q$，則 $10^{3p+2q+1}$=？ Ans：720

(練習5) 試求下列的 x 值：

(1)$\log_x 27=6$ (2)$\log_7 x=\frac{3}{2}$ (3)$\log_x 8\sqrt{2}=7$

Ans：(1)$\sqrt{3}$ (2)$7\sqrt{7}$ (3)$\sqrt{2}$

(練習6) 設 $\log_a b=r$，a 是不等於 1 的正數，則下列何者為真？

(A) $b>0$ (B) $r>0$ (C) $b>1$ (D) $r>1$ (E) $b=a^r$。

Ans：(A)(E)

(乙)對數的基本性質

設 $a>0$，且 $a\neq1$，b,r,s 均為正數

(1) $\boxed{\text{設 } a>0\text{，且 } a\neq1\text{，} b>0\text{，} a^{\log_a b}=b}$

說明：$\log_a b$ 代表一個數，a 的這個數次方就等於 b，換句話說，a 的 $\log_a b$ 次方等於 b。寫成式子：$x=\log_a b \Leftrightarrow b=a^x=a^{\log_a b}$

(2) $\boxed{\log_a 1=0\text{，}\log_a a=1}$

證明：因為 $a^0=1$，$a^1=a$。

(3) $\boxed{\log_a r+\log_a s=\log_a rs\text{ ，}\log_a r-\log_a s=\log_a\frac{r}{s}}$

同底的對數相加等於真數相乘，同底的對數相減等於真數相除

證明：因為 $a^{\log_a r}=r$，$a^{\log_a s}=s$，

所以 $rs=a^{\log_a r}\cdot a^{\log_a s}=a^{\log_a r+\log_a s} \Rightarrow \log_a rs=\log_a r+\log_a s$

$\frac{r}{s}=a^{\log_a r}\div a^{\log_a s}=a^{\log_a r-\log_a s} \Rightarrow \log_a\frac{r}{s}=\log_a r-\log_a s$

(4) $\boxed{\log_a r^t=t\cdot\log_a r \quad (t\text{ 為實數})}$

證明：$r=a^{\log_a r} \Rightarrow r^t=(a^{\log_a r})^t=a^{t\cdot\log_a r}$

$\Rightarrow \log_a r^t=t\cdot\log_a r$

(5) $\boxed{\log_{a^t} r=\frac{1}{t}\log_a r \quad (t\text{ 為實數})}$

證明：$r=a^{\log_a r} \Rightarrow r=(a^t)^{\frac{1}{t}\log_a r} \Rightarrow \log_{a^t} r=\frac{1}{t}\log_a r$

從(4) (5)可以得到：$\boxed{\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b}$。

(6) $\boxed{\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}\text{，其中 } c>0\text{，}c\neq 1\quad\text{(換底公式)}}$

先觀察一個例子：$\log_2 3=\log_{5^{\log_5 2}} 5^{\log_5 3}=\dfrac{\log_5 3}{\log_5 2}\cdot\log_5 5=\dfrac{\log_5 3}{\log_5 2}$。

證明：$\log_a b=\log_{c^{\log_c a}} c^{\log_c b}=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}\cdot\log_c c=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$。

(7) $\boxed{\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}\quad (b>0\text{，}b\neq 1)\text{，}\quad \log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d\quad\text{(連鎖律)}}$

證明：由換底公式，$\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$。

換底公式的用意：

只要 a 是異於 1 的正實數，a 都可以當對數的底數，所以對數的底數有無限多個. 當我們求對數值需要去查對數表時, 是不是需要製作不同底數的對數表呢？接下來我們介紹換底公式，利用換底公式可以使對數值處理更容易。

對數的底數中，以 10 為底數較常使用。

我們想問 $\log_2 3$ 如何用 $\log_{10}3$ 與 $\log_{10}2$ 來表示？

計算要訣：

(1)同底對數相加(減)，真數相乘(除)

(2)對數相乘考慮換底公式。

對數的計算

[例題4] 計算下列各式：

(1) $\log_{\sqrt{2}} 8$　(2) $(\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{5}} 7}$　(3) $\log_{2\sqrt{2}} 32\sqrt[5]{2}$

(4) $\log_{10}4-\log_{10}5+2\log_{10}\sqrt{125}$　(5) $\log_4\dfrac{28}{15}-2\log_4\dfrac{3}{14}+3\log_4\dfrac{6}{7}-\log_4\dfrac{2}{5}$

Ans：(1) 6 (2)7(3)2 (4)3(5)$\dfrac{52}{15}$

[例題5] 試求下列各值：

(1)$(\log_{10}2)^3+(\log_{10}5)^3+\log_{10}5\cdot\log_{10}8$ (2)$\dfrac{\log_4 27}{\log_2 3}+3\log_9\frac{1}{4}$

(3)$\log_2 3\cdot\log_7 64\cdot\log_3 5\cdot\log_5 49$ (4) $(\log_2 5+\log_4 0.2)(\log_5 2+\log_{25}0.5)$

Ans：(1)1 (2)2 (3) 12 (4)$\frac{1}{4}$

(練習7) 設 a 是不等於 1 的正數，x，y 為正數，則下列何者為真？

(A) $\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$ (B) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(C) $\log_a(x-y)=\log_a x-\log_a y$ (D) $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

(E) $\log_a\dfrac{x}{y}=\dfrac{\log_a x}{\log_a y}$。Ans：(B)(D)

(練習8) 化簡下列各式：

(1)$\log_{10}\dfrac{50}{9}-\log_{10}\dfrac{3}{70}+\log_{10}\dfrac{27}{35}$ (2)$\log_{10}\dfrac{4}{7}-\dfrac{4}{3}\log_{10}\sqrt{8}+\dfrac{2}{3}\log_{10}\sqrt{343}$

(3)$\log_3 54+\log_3 6-2\log_3 2$ Ans：(1)2(2)0(3)4

(練習9) 試求下列各值：

(1) $2^{-\log_2 3}$ (2) $2^{\frac{\log 3}{2\log 2}}$ (3) $\log_{144}\sqrt[3]{2}+\log_{144}\sqrt[6]{3}$ (4) $\log_2(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{999}\log\frac{k+1}{k}$ (6) $\dfrac{\log_4 27}{\log_2 3}$ (7) $\dfrac{\log_5 16}{\log_{25} 8}$

Ans：(1)$\frac{1}{3}$ (2)$\sqrt{3}$ (3)$\frac{1}{12}$ (4)$\frac{1}{2}$ (5)3(6)$\frac{3}{2}$ (7)$\frac{8}{3}$

(練習10) $5^{\frac{\log_2 6}{\log_2 5}}+4^{\frac{1}{\log_5 4}}=$？。Ans：11

(練習11) 設 a,b,c 為正數，且 $c\neq1$，試證 $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

[例題6] 由對數表知 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log7=0.8451$(皆為近似值)，試求：

(1)$\log_{10}1$ (2)$\log_{10}2$ (3)$\log_{10}3$ (4)$\log_{10}4$ (5)$\log_{10}5$

(6)$\log_{10}6$ (7)$\log_{10}7$ (8)$\log_{10}8$ (9)$\log_{10}9$ (10)$\log_{10}10$

[例題7] 設 $a=\log_{10}2$，$b=\log_{10}3$，試將下列各數值以 a,b 表示：

(1)$\log_6 24$ (2)$\log_2\sqrt{3}+\log_3\sqrt[3]{2}$ (3)$\log_5\sqrt{6}$ (4)$\log_{0.75}100$

Ans：(1)$\dfrac{3a+b}{a+b}$ (2)$\dfrac{b}{2a}+\dfrac{a}{3b}$ (3)$\dfrac{a+b}{2(1-a)}$ (4)$\dfrac{2}{b-2a}$

[例題8] 設 $\log_2 3=a$，$\log_3 11=b$，試以 a,b 表 $\log_{66}44$。Ans：$\dfrac{2+ab}{1+a+ab}$

(練習12) 設 $\log_3 4=a$，則 $\log_6 72=$______。(答案以 a 表之)Ans：$\dfrac{4+3a}{2+a}$

(練習13) 設 $a=\log_2 3$, $b=\log_3 11$, 以 a, b 表出(1) $\log_2 12=$__________。(2) $\log_{66}18$ $=$__________。Ans：(1) $2+a$(2) $\dfrac{1+2a}{1+a+ab}$

$\boxed{\text{對數與指數方程式}}$

[例題9] 求下列方程式之解：

(1)$2^{2x}-7\times 2^x+12=0$　　(2)$2^{3x}-10\times 2^{2x}+31\times 2^x-30=0$

Ans：(1)$x=2$ 或 $\log_2 3$　　(2)$x=1$ 或 $\log_2 3$ 或 $\log_2 5$

[例題10] 解下列方程式：

(1)$\log_6 x+\log_6(x^2-7)=1$　(2) $\log_{\frac{1}{4}} x+(2\log_{16} x^2)-\frac{3}{2}=0$

(3)$\log_{10}x-6\cdot\log_x 10=1$　(4) $\log_{10}(10^x+100)=\frac{x}{2}+1+\log_{10}2$

Ans：(1)$x=3$ (2)$x=8$　(3)$x=10^3$ 或$\frac{1}{100}$ (4) $x=2$

(練習14) 試解下列方程式：

(1)$1+\log_4(x-1)=\log_2(x-9)$　(2)$\log_3(3^x+6)=\frac{x}{2}+\log_3 5$

(3)$\log_5 x+\log_5(x^2-6)=1$　(4) $x^{\log x}=10^8x^2$

Ans：(1)$x=17$　(2)2 或 $2\log_3 2$　(3)$x=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

(4)$x=10^4$ 或 10^{-2}　[提示：等號兩邊取對數 $\log(x^{\log x})=\log(10^8x^2)$]

綜合練習

(1) 陳老師證明了 $x^2=2^x$ 有兩個正實數解及一個負實數解後，進一步說，此方程式兩邊各取 $\log_2$，得 $2\log_2 x=x$；陳老師要同學討論此新的方程式有多少實數解？
小英說：恰有三個實數解；
小明說：恰有兩個正實數解；
小華說：最多只有兩個實數解；
小毛說：仍然有兩個正實數解及一個負實數解；
小芬說：沒有實數解。
請問哪些人說的話，可以成立？＿＿＿＿＿＿
(1)小英　(2)小明　(3)小華　(4)小毛　(5)小芬　(92 指定考科乙)

(2) 根據對數表，$\log 2$ 的近似值是 0.3010，$\log 3$ 的近似值是 0.4771。下列選項有哪些是正確的？ (1) $10^9>9^{10}$　(2) $10^{12}<12^{10}$　(3) $10^{11}>11^{10}$　(4) 方程式$10^x=x^{10}$ 有一負根。(93 指定考科甲)

(3) 設 $f(\log x)=x$，$x>0$ 則 $f(5)=$(A)$\log 5$ (B)$\log_5 10$ (C)5^{10} (D)10^5 (E)$10\log 5$ 。

(4) 下列哪些式子是正確的？
(A)$\log_7(-3)^2=2\log_7(-3)$ (B)$\log_7 7=1$ (C)$\log_{81}3=4$ (D)$\log_6(3+4)=\log_6 3+\log_6 4$
(E)$\log_{\sqrt{6}}\sqrt{7}=\log_6 7$

(5) 方程式 $2^{\log_3 x}=\dfrac{1}{4}$的解是(A)$x=\dfrac{1}{9}$ (B)$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C)$x=\sqrt{3}$ (D)$x=9$。

(6) $2x+2\log_{10}(2+10^{-x})-\log_{10}(\dfrac{1}{4}+10^x+10^{2x})=$ (A)2×10^x (B)$x\cdot\log_{10}\dfrac{1}{4}$ (C)1
(D)$2\cdot\log_{10}2$ (E)$2x+10^{2x}$。

(7) 試化簡下列各式：
(a)$\log_{2\sqrt{2}}16\sqrt[3]{4}$ (b)$2^{2\log_2 3}$ (c)$\dfrac{\log_5 16}{\log_{25}8}$
(d)$\log_2(\log_2 49)+\log_2(\log_7 2)$ (e)$3^{\frac{\log 4}{2\log 3}}$

(8) 試求下列各值：
(a)$(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$
(b)$\log_3\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{6}$
(c)$(\log_5 2+\log_{25}8)(\log_4 3+\log_{\sqrt{2}}27)(\log_3 0.2+\log_9 5)$
(d)$(\log_2 9)\cdot(\log_3 4)\cdot(\log_{\frac{1}{4}}8)$

(9) 設 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$。
(a)試求 $\log_{10}20$，$\log_{10}\dfrac{25}{4}$ ，$\log_{10}\dfrac{1}{4}$ ，$\log_{10}\dfrac{128}{5}$ 之值。
(b)比較 $6^{\sqrt{8}}$，$8^{\sqrt{6}}$ 的大小。

(10) 設 $10^{-\log_2 x}=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$ ，求 x 之值。

(11) 已知 $2x=\log_2 3$，則 $\dfrac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}=$？

(12) 試求下列二小題：
(a)若 $a=\log 2$，$b=\log 3$ ，則 $\log 7.5=$？ ($\log x=\log_{10}x$)

(b)若 $\log(1+\frac{1}{7})=a$，$\log(1+\frac{1}{49})=b$，則 $\log 2=$？$\log 7=$？

(13) 若 $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，試以 a,b 表示 $\log_{42}\frac{56}{9}=$？

(14) 若 $2^{x-1}+2^x=5^{x-1}+5^x$，則(a)$\frac{5^x}{2^x}=$？　(b)求 x 的值化為小數，小數點以後第一位為何？

(15) 方程式 $\log x+\log(x-3)=1$ 與下列那一個方程式的「解」完全相同。
(A)$\log x(x-3)=1$　(B)$x(x-3)=10$　(C)$10^{x(x-3)}=10^{10}$　(D)$10^x\cdot 10^{x-3}=10^{10}$
(E)$x>3$，且 $x(x-3)=10$。

(16) 解下列各方程式：
(a)$\log(2x-3)+\log(4x-1)=2\log 5$
(b)$2\log(3x-1)+\log(x+1)$
(c)$1+\log_4(x-1)=\log_2(x-9)$
(d)$4^x-2^{x+3}+15=0$

(17) 解下列方程式：
(a)$\log_x(x+3)-\frac{1}{2}\log_x(x+6)=\log_x 2$
(b)$x^{\log x}=10^6 x$
(c)$\log_8(8^x+128)=\frac{x}{2}+1+\log_8 3$

(18) 設α、β為方程式$(\log x)^2-\log x^2-6=0$ 之二相異實根，則 $\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=$？

進階問題

(19) 在方程式 $\log_2 x+a\cdot\log_x 2+b=0$ 中，甲生誤寫 b，得二根為$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，乙生誤寫 a，得二根為$\frac{1}{2}$，64，則 $a=$？$b=$？又正確解為何？

(20) α、β為方程式 $x^2+2x\log 5+\log 2.5=0$ 之二根，求 $10^\alpha+10^\beta=$？

(21) 設 a,b,c,d 為異於 0 的實數，且 $2^a=3^{-b}=5^c=\sqrt{90^d}$，請證明：$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=2(\frac{1}{b}+\frac{1}{d})$。

(22) 設 $184^x=32$，$23^y=8$，則 $\frac{5}{y}-\frac{3}{x}=$？

(23) 求 $\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8+\ldots$至第 100 項的和。

(24) (a)設 a,b 均為正數，證明：$a^{\log b}=b^{\log a}$。
(b)求解 $2^{\log x}\cdot x^{\log 2}-3\cdot x^{\log 2}-2^{1+\log x}+4=0$。

綜合練習解答

(1) (2)(3)

[解法]：

由新方程式 $2\log x=2^x$ 思考，因 x 為真數，所以 $x>0$。

$\Leftrightarrow \log_2 x^2=x$，$x>0$

$\Leftrightarrow x^2=2^x$，$x>0$，但原方程式 $x^2=2^x$ 有二正一負實數解

故 $2\log_2 x=x$ 恰有兩正實數解$\Rightarrow$小明，小華說法正確。

(2) (3) (4)

[解法]：

(1) $9\cdot\log 10=9<10\cdot\log 9=20\cdot\log 3=9.542\Rightarrow 10^9<9^{10}$

(2) $12\cdot\log 10=12>10\cdot\log 12=10\cdot(2\log 2+\log 3)=10.791\Rightarrow 10^{12}>12^{10}$

(3) $11\cdot\log 10=11>10\cdot\log 12=10.791>10\cdot\log 11\Rightarrow 10^{11}>12^{10}>11^{10}$

(4) 令 $f(x)=10^x-x^{10}$，因 $f(0)=1>0$ 且 $f(-1)=10^{-1}-1<0$

故存在實數 $a\in(-1,0)$ 使得 $f(a)=0$　即 $10^x=x^{10}$ 有一負根。

(3) (D)

(4) (B)(E)

(5) (A)

(6) (D)

(7) (a)$\frac{28}{9}$ (b)9 (c)$\frac{8}{3}$ (d)1 (e)2

(8) (a)5 (b)-1 (c)$-\frac{65}{8}$ (d)-6

(9) (a)1.3010，0.7960，-0.6020，1.4080 (b) $6^{\sqrt{8}}<8^{\sqrt{6}}$

(10) $x=2\sqrt{2}$

(11) $\frac{13}{6}$

(12) (a)$1-2a+b$　(b)$\log 2=\frac{2a-b+2}{7}$　$\log 7=\frac{-a-3b+6}{7}$

(13) $\dfrac{ab-2a+3}{ab+a+1}$

(14) (a)$\dfrac{5}{4}$ (b)2

(15) (E)

(16) (a)$x=\dfrac{11}{4}$ (b)$x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{6}$ (c)$x=17$ (d)$x=\log_2 3$ 或 $\log_2 5$

(17) (a)$x=3$ (b)$x=\dfrac{1}{100}$或 1000 (c)$x=2$ 或$\dfrac{8}{3}$

(18) 令 $t=\log x$, 原方程式可化為 $t^2-2t-6=0$, 因為α、β為原方程式的二相異實根, 所以 $\log\alpha$、$\log\beta$為 $t^2-2t-6=0$ 的兩根，所以 $\log\alpha+\log\beta=2$，$(\log\alpha)(\log\beta)=-6$
$\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\dfrac{\log\beta}{\log\alpha}+\dfrac{\log\alpha}{\log\beta}=\dfrac{-8}{3}$。

(19) $a=6,b=-5$，$x=4,8$ [提示：可令 $A=\log_2 x$]

(20) $\dfrac{1}{2}$

(21) 提示：可令 $t=2^a=3^{-b}=5^c=\sqrt{90^d}$ $\Rightarrow a=\log_2 t$，$b=-\log_3 t$，$c=\log_5 t$，$\dfrac{d}{2}=\log_{90} t$，$\Rightarrow\dfrac{1}{a}=\log_t 2$，$\dfrac{1}{b}=-\log_t 3$，$\dfrac{1}{c}=\log_t 5$，$\dfrac{2}{d}=\log_t 90$，再代入驗證即可

(22) 3

(23) 5050

(24) (a)證明 $\log(a^{\log b})=\log(b^{\log a})$ (b)可令 $A=2^{\log x}=x^{\log 2}$，原方程式可化為 $A^2-5A+4=0$，解得 A=1 或 4，再解 $x=1$ 或 100