§1–2 函數的極限

(甲)函數極限的概念

(1)以求瞬時速度為例：

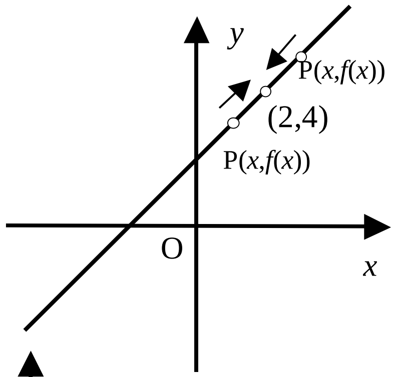
一質點的位移函數是 $s(t)=t^2$，求此質點在 $t=2$ 的瞬時速度 $v(2)=$？

2 秒與$(2+t)$秒的平均速度$=\dfrac{s(2+t)-s(2)}{t+2-2}=\dfrac{(2+t)^2-2^2}{t}=\dfrac{t^2+4t}{t}=t+4$

$v(2)=$2 秒與$(2+t)$秒的瞬時速度

=當 t 趨近於 0 時，2 秒與$(2+t)$秒平均速度的極限值

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{s(2+t)-s(2)}{t+2-2}=\lim\limits_{t\to 0}(t+4)=4$。



(2)以函數圖形為例：

設 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=$？

觀察點(2,4)附近 $y=f(x)$的圖形上的點 $P(x,f(x))$，

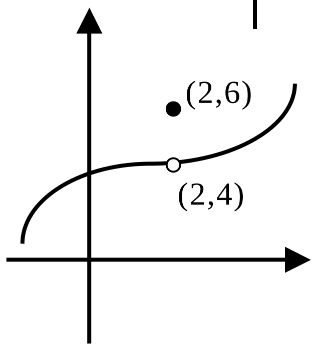
當點 P 逐漸靠近(2,4)時，y 會接近 4

因此 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$，**但此時 $f(2)\neq 4$**。

此時可以得知極限值與函數值並不相關。

[例題1] $f(x)$之圖形如右：求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=$？

Ans：4



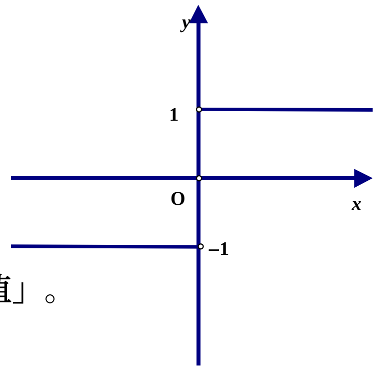
[例題2] 設 $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $(x\neq 0)$，試問：當 x 趨近 0 時，函數值 $g(x)$是否會趨近一個「定值」？

[解法]：

$g(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & ,x>0\\ -1 & ,x<0\end{cases}$

x 從 0 的右邊趨近，則 $g(x)$會趨近 1。

x 從 0 的左邊趨近，則 $g(x)$會趨近-1。



所以當 x 趨近 0 時，函數值 $g(x)$不會趨近一個「定值」。

[例題3] 設 $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$，試問當 x 趨近 0 時，函數值 $h(x)$是否會趨近一個「定值」？

[解法]：

x 趨近 0 時，x^2 會愈來愈小，因此 $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$會愈來愈大。

所以當 x 趨近 0 時，函數值 $h(x)$不會趨近一個「定值」。

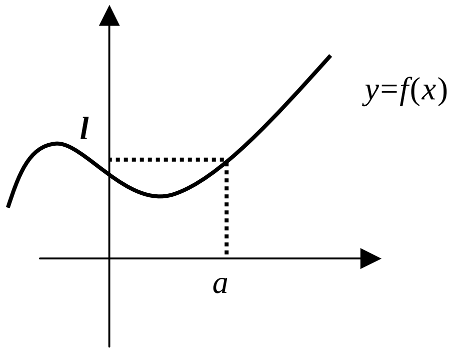
(3) 函數極限值的定義：

(a)設 $f(x)$為一函數，若 x 從 a 的左右兩邊趨近 a(但 $\boldsymbol{x\neq a}$)時，則函數 $f(x)$非常趨近一確定的實數 l，就稱 x 趨近 a 時($x\to a$)時 ，函數 $f(x)$的極限為 $l(f(x)\to l)$。符號記為：$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$。

(b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$不一定存在，但若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在，其值必唯一。

(c)函數圖形的觀點：

考慮點 $P(x,f(x))$，當 x 趨近 a 時，點 $P(x,f(x))$會趨近點(a,l)，則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$。



(d)理論上的定義：(僅供參考)

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l \iff$ 給定一個正數ε，可以找到一個正數δ=δ(ε)，

使得當 x 滿足 $0<|x-a|<\delta$，$|f(x)-l|<\varepsilon$

(4)函數值與極限值：

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

(a)函數 $f(x)$在 $x=a$ 處不一定有意義。

(b)即使 $f(a)$有定義，當 $x\to a$ 時，$f(x)$也不一定趨近於 $f(a)$。

例子：設 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & ,x\neq 2\\ 5 & ,x=2\end{cases}$，請求出 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$？

[解法]：注意 $x\to 2$ 的過程中，$x\neq 2$，所以 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2$。

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{x^2-4}{x-2})=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4\neq f(2)$。

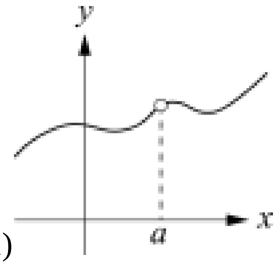
換句話說，當 $\boldsymbol{x\to a}$ 時，$\boldsymbol{f(x)}$之極限值並不依賴函數 $\boldsymbol{f}$ 在點 $\boldsymbol{x=a}$ 的函數值。

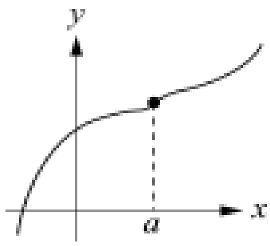
[例題4] 設 $f(x)=\begin{cases}x+1 & (x>0)\\ -2x+1 & (x<0)\end{cases}$

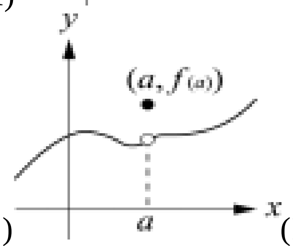
(1)請問 $f(0)$是否有意義？ (2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$是否存在？

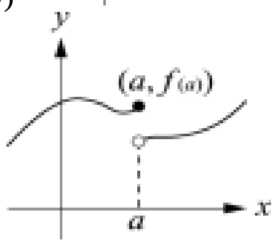
Ans：(1)無意義 (2)1

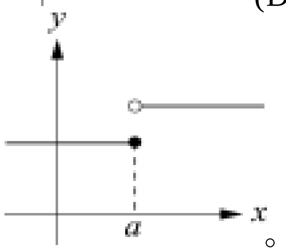
(練習1) 函數 $f(x)$之圖形如下所示，並已標出實數 a 之位置，
則哪一個函數中 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在？

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

。 Ans：(D)(E)

(練習2) 試分別作下列各函數的極限值：

(1) $f_1(x)=x+2$ (2) $f_2(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ (3) $f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}, & 若x\neq 3\\ 1, & 若x=3\end{cases}$。

Ans： $\lim\limits_{x\to 3} f_1(x)=5$， $\lim\limits_{x\to 3} f_2(x)=5$， $\lim\limits_{x\to 3} f_3(x)=5$。

(乙)函數極限的性質與求法

(1)函數極限的四則運算：

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=s, \lim\limits_{x\to a} g(x)=t$， c 為一常數，則

(a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=s+t$

(b) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\cdot s$

(c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=st$

(d)若 $t\neq 0$， $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{s}{t}$

注意：即使 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to a} g(x)$ 不一定存在。

例如：$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ， $g(x)=\dfrac{-1}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))=0$ 但 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$， $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$不存在。

[說明]：

(c) $\because |f(x)g(x)-st|=|g(x)(f(x)-s)+s(g(x)-t)|\leq|g(x)||f(x)-s|+|s||g(x)-t|$

$\because \lim\limits_{x\to a} f(x)=s, \lim\limits_{x\to a} g(x)=t$

$\therefore$當 x 很趨近 a 時，$|f(x)-s|$、$|g(x)-t|$會很小，且$|g(x)|\le M$

$\Rightarrow|f(x)g(x)-st|\le|g(x)||f(x)-s|+|s||g(x)-t)|\le M|f(x)-s|+|s||g(x)-t)|$

故當 x 很趨近 a 時$|f(x)g(x)-st|$會很趨近於 0。

即$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=st$

(d)$\because|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{s}{t}|=|\dfrac{f(x)t-sg(x)}{g(x)t}|=|\dfrac{t(f(x)-s)+s(t-g(x))}{g(x)t}|\le|\dfrac{1}{g(x)t}|[|t||f(x)-s]|+|s||g(x)-t)|]$

$\because\lim\limits_{x\to a} f(x)=s,\lim\limits_{x\to a} g(x)=t\ (t\neq0)$

$\therefore$當 x 很趨近於 a 時，$|f(x)-s|$、$|g(x)-t)|$會很小，且$|\dfrac{1}{g(x)}|\le M(\neq0)$

$\Rightarrow|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{s}{t}|\le|\dfrac{1}{g(x)t}|[|t||f(x)-s]|+|s||g(x)-t)|]\le M[|t||f(x)-s]|+|s||g(x)-t)|]$

故當當 x 很趨近 a 時，$|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{s}{t}|$會很趨近於 0。

即$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{s}{t}$

[例題5] 若$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=6$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=2$，求$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=$？Ans：8

(2)函數極限的求法：

(1°)直接代入法：

假定我們要計算$\lim\limits_{x\to a} f(x)$，其中的 $f(x)$是由多項式、有理式或根式經過加、減、乘、除等四則運算而成的函數，只要「把 $f(x)$中的 x 以 a 代入，不會出現分母為 0 這種無意義的情形」則$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$。

[例題6] (1)$\lim\limits_{x\to3}(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1})=$？(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$？(3)$\lim\limits_{x\to2}\sqrt[3]{\dfrac{x^3-4x-1}{x+6}}=$？

(4)$\lim\limits_{x\to3}5=$？Ans：(1) 1 (2)1 (3)$\dfrac{-1}{2}$ (4)5

(2°)若代入出現$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0\times\infty$這種沒意義的結果，則必須將函數作適當的變形，變形的目的，就是要使它不再出現$\frac{0}{0}$的結果。通常以下列兩種方法求極限：

(a)把分子分母的公因式約去，再代入。

(b)把分子或分母有理化，約去使分母為 0 的式子，再代入。

[例題7] (約去公因式)

(1) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12}=?$ (2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=?$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=?$ (4) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=?$

Ans：(1)5(2)$\frac{1}{3}$ (3)6(4)$2x$

[例題8] (分母、分子有理化，再代入)

(1) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}=?$ (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=?$ (3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2}}{x}=?$

Ans：(1)6 (2)$\frac{1}{2}$(3) $\sqrt[3]{2}/6$

[例題9] (分式合項再約公因式)

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x^2+4x-8}{x^2+x-2}\right)=$？ Ans：$\dfrac{7}{3}$

[例題10] $\boxed{\text{若} \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=\text{A(一定值)，則 } f(a)=0}$

(1)若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a-4x+x^2}{1-x}=b$，則求 a=?,b=? Ans：a=3,b=2

(2)若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+ax+b}=\dfrac{3}{7}$，則 a=?,b=? Ans：a=3,b=−10

(練習3) 求下列各函數的極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+4)=$？ (2) $\lim\limits_{x\to 7}\sqrt[3]{x^2+15}=$？ (3) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x+2\sqrt{x}}=$？

Ans：(1)6 (2)4 (3)$2\sqrt{2}$

(練習4) (1) $\lim\limits_{x\to 1000}[x-[x]]=$？ (2) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)(x-3)=$？ (3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-5}{x-2}=$？

Ans：(1)0 (2)−1 (3)−2

(練習5) (1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\dfrac{x}{x-3}-4}{x-4}=?$ (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=?$ (3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+1)^{10}-1}{x+2}=?$

Ans：(1)−3，(2)12，(3)−10

(練習6) 求下列函數的極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-3}}{\sqrt{6x-2}-\sqrt{3x+7}}$ (4) $\lim\limits_{x\to 4}(\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4}{x-4})$

Ans：(1)$\dfrac{-1}{6}$ (2)$\dfrac{1}{12}$ (3)$\dfrac{-8}{9}$ (4)$\dfrac{1}{4}$

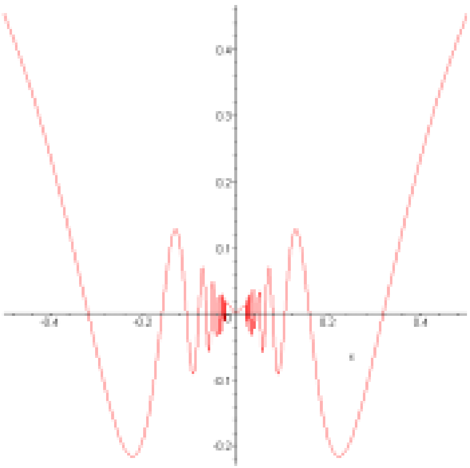
(練習7) 試定 a,b 之值：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+5x+b}{x^2-1}=3$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a\sqrt{x^2+3}-b}{x-1}=2$

Ans：(1)$a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{-11}{2}$ (2)$a=4,b=8$

(3)夾擊原理：
設 c 是開區間(a,b)內的一個定點，
若 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$在(a,b)內滿足下列條件：
(1°)$f(x)\le g(x)\le h(x)$ (2°)$\lim\limits_{x\to c}f(x)=L=\lim\limits_{x\to c}h(x)$
則 $\lim\limits_{x\to c}g(x)=L$。
[說明]：
$\because$ $f(x)\le g(x)\le h(x)$，$\forall x\in(a,b)$
$\therefore|g(x)-L|\le|f(x)-L|+|h(x)-L|$
$\because$ $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L=\lim\limits_{x\to c}h(x)$
$\therefore$當 x 趨近於 c 時，$|f(x)-L|$、$|h(x)-L|$會很小，故$|g(x)-L|$也會很小
$\Rightarrow\lim\limits_{x\to c}g(x)=L$。

[例題11] 設 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$，請求出$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$？ Ans：0



(練習8) 請求出 $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)\sin\dfrac{1}{x^2}=$？

(丁)函數的左右極限值

(1)左右極限的概念：
當 x 很趨近於 a 時，我們發現 x 可以由 a 的左右側來趨近 a。由此可以產生左右極限的概念。當 x 由 a 的右邊趨近 a 時，符號記為 $x\to a^+(x>a$ 且 $x\to a)$；當 x 由 a 的左邊趨近 a 時，符號記為 $x\to a^-(x<a$ 且 $x\to a)$

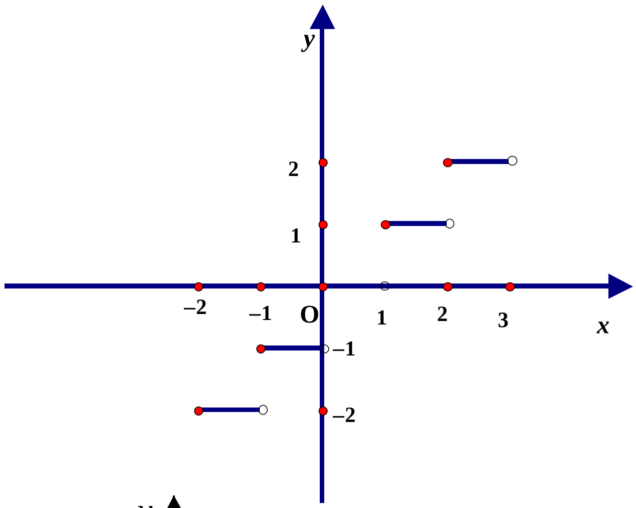
(a)$f(x)$在 $x=a$ 的右極限為 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$；$f(x)$在 $x=a$ 的左極限為 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

例子一：

設 $f(x)=[x]$ (不大於 x 的最大整數)

$\because [x]=a \Leftrightarrow a\le x<a+1$，$a$ 為整數。

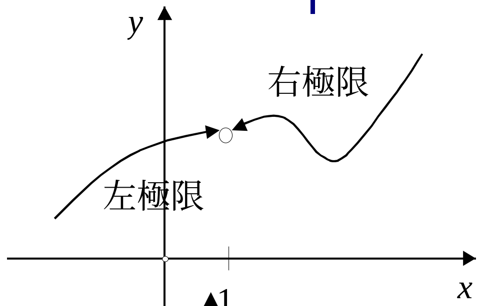
函數 $y=f(x)=[x]$的圖形如右圖，



$\lim\limits_{x\to 2^+}[x]=2$，$\lim\limits_{x\to 2^-}[x]=1$

$\lim\limits_{x\to 1.2^+}[x]=1$，$\lim\limits_{x\to 1.2^-}[x]=1$

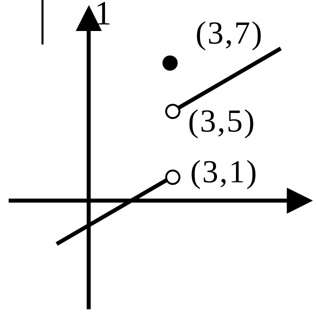
(b)左右極限與極限的關係：



$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$

例子一中，$\lim\limits_{x\to 2}[x]$不存在，$\lim\limits_{x\to 1.2}[x]$存在。

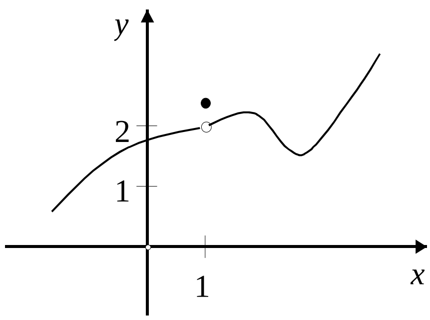
例子二：如右圖：



$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=5$，$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1$，

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=5\ne 1=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$不存在。

例子三：如右圖：$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$，$f(1)\ne 2$



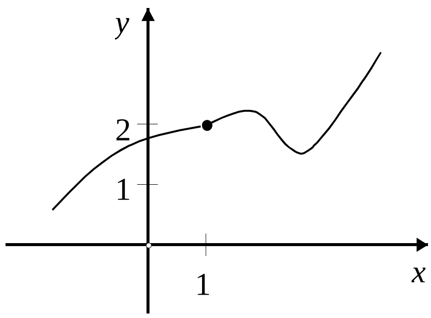
在 $x=1$「有極限」的條件是「左極限」=「右極限」

即 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$存在$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，

亦即兩側要逼近到同樣的高度。

注意：在 $x=1$ 極限值仍然和 $x=1$ 的函數值無關

例子四：如右圖：$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$，$f(1)=2$



在 $x=1$「有極限」的條件是「左極限」=「右極限」

即 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$存在$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2=f(1)$

在前面兩個例子中，我們可以發現不管 $f(1)$的定義是否為 2，只要 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，則 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$存在且等於 2。

因此在這裡可以更近一步感受到求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$的過程中

只與函數 $f(x)$在 x=1 的附近的行為表現有關，與 $f(1)$的定義毫無關係。
特別的是在例子四中，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2=f(1)$，從圖形來看，整個圖形在 x=1 附近都是連續不斷的，這就是接下來要談的函數的連續性問題。

[例題12] (1)設 $f(x)=\dfrac{|x|^3+x^3}{x}$，請問 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$=？

(2)設 $g(x)=\dfrac{2|x-2|}{x-2}$，請問 $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$=？

Ans：(1)0(2)不存在

(練習9) 設 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 當x\ge 2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{2} & 當x<2 \end{cases}$，試求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$=？ Ans：2

(練習10) 試求下列極限：

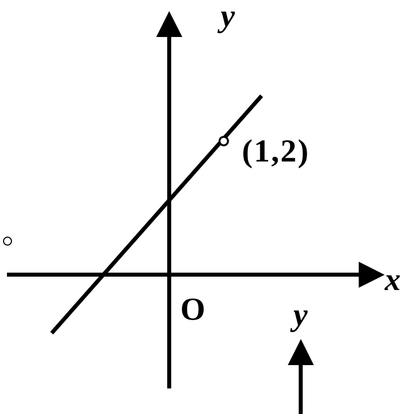
(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$=？ (2) $\lim\limits_{x\to 5}(x-[x])$

Ans：(1)不存在 (2)不存在

(戊)函數的連續性

(1)引入連續性的概念：

(a)有缺洞的不連續點：

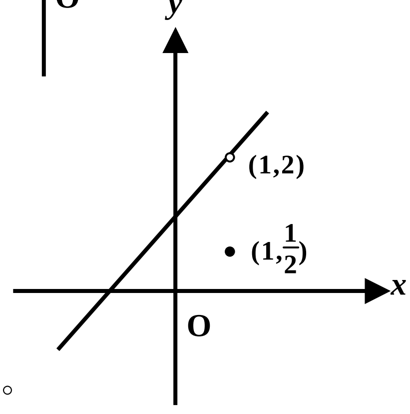


例子：$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的圖形如右，

函數 $f(x)$在 x=1 無定義，但 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ 存在。

而圖形在 x=1 處有「**缺洞**」。

(b)函數值跳躍的不連續點：

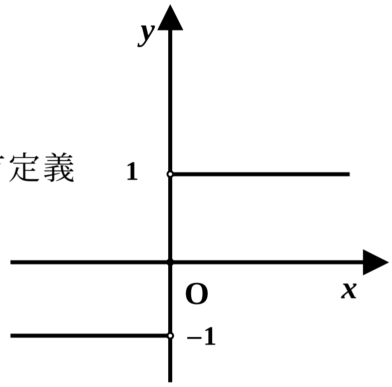


設 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x\ne 1 \\ \dfrac{1}{2} & x=1 \end{cases}$的圖形如右圖，與上圖不同

的是 $f(x)$在 x=1 有定義，但 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ 存在。

但是圖形仍然有「**缺洞**」，在 x=1 的點是**跳躍**的點。

(c)函數值斷裂的不連續點：



設 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$的圖形如右圖，雖然 $f(0)=0$ 有定義

但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在。圖形中在 $x=0$ 處有斷裂的點。

(2)連續的定義：

(1°)

若下列三個條件都滿足：

(a)$f(a)$有定義 (b) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在 (c) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

則稱 $f(x)$ 在點 a 連續。

(2°)若 f 在(a,b)內的每一點都連續，則稱 $f(x)$在(a,b)上連續。

(3°)設 $f(x)$定義在閉區間$[a,b]$,

若 $f(x)$在(a,b)上連續；$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$；$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$

則稱 $f(x)$在$[a,b]$上連續。

(3)一個函數 $f(x)$在 $x=a$ 處不連續，其不連續點概略可分成以下幾類：

(a)函數 f 在 $x=a$ 處未定義。

(b)函數值 $f(x)$在 $x=a$ 處的極限不存在。

(c)函數值 $f(x)$在 $x=a$ 處的極限存在，但其極限值不等於 $f(a)$。

[例題13] 設函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{當}x\neq 1\\ 0, & \text{當}x=1\end{cases}$，則

(1) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$________。(2)函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 處是否連續？

Ans：(1)2 (2)否

[例題14] 設 a、b 為固定常數，且 $f(x)=\begin{cases}4 & x\le 1\\ ax+b, & 1<x<3\\ -4 & x\ge 3\end{cases}$ 為一連續函數，

則 $a=$________，$b=$________。Ans：-4，8

(練習11) (1) $f(x)=x^2+x-1$，說明 $f(x)$在 x=3 連續，且為一個連續函數。

(2) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\ne 1\\ 1, & x=1\end{cases}$，說明 $f(x)$在 x=a，$a\ne 1$連續，在 x=1 不連續。

(練習12) 若設函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x+4}, & 當x\ne -4\\ a, & 當x=-4\end{cases}$，則 $a=$________時，

函數 $f(x)$ 在 x=-4 處連續？Ans：-8

(練習13) 設函數 $f(x)=\begin{cases}a & 當x=1\\ b & 當x=-1\\ \dfrac{3-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{5-x^2}-2} & 當-\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}, x\ne\pm 1\end{cases}$，若 $f(x)$在 x=1,-1 處連續，試求 a,b 的值。　Ans：$a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{2}{3}$

(3)連續函數的性質：

(a)若函數 $f(x)$、$g(x)$在 x=a 處連續，b 是常數，則下面的四則運算：

(1°)$f(x)\pm g(x)$　(2°)$f(x)\cdot g(x)$　(3°)$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(a)\ne 0$) (4°)$b\cdot f(x)$ 在 x=a 處連續。

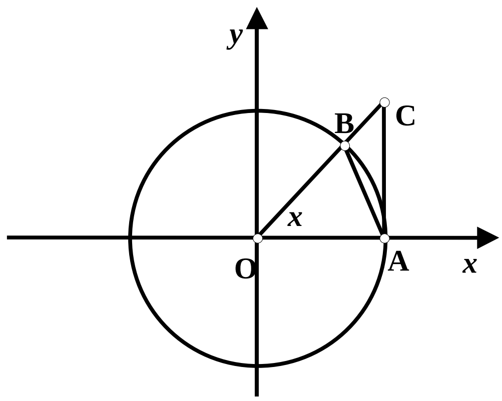
(b)若設函數 $g(x)$在 $x=a$ 連續，且函數 $f(x)$在 $g(a)$點連續，
則合成函數$(f\circ g)(x)=f(g(x))$在 $x=a$ 也連續。

(己)基本初等函數的連續性

這裡所稱的**基本函數**可以分成以下五類：
冪函數：$y=x^{\alpha}$，(α是實數)
指數函數：$y=a^{x}$ ($a>0$，且 $a\neq 1$)
對數函數：$y=\log_{a}x$ ($a>0$，且 $a\neq 1$)
三角函數：$y=\sin x$，$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$，$y=\sec x$,$y=\csc x$
反三角函數：$y=\sin^{-1}x$，$y=\cos^{-1}x$,$y=\tan^{-1}x$,$y=\cot^{-1}x$，$y=\sec^{-1}x$,$y=\csc^{-1}x$
將基本函數和常數經過有限次四則運算、合成而得出的函數，統稱為**初等函數**。

(1)**一個重要極限** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ **的證明**：

(a)先證明$\dfrac{-\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，$x\neq 0$，則$|\sin x|<|x|<|\tan x|$。
證明：
(1°)先設 x 是正數，在右圖中，有向角$\angle AOB=x$ 弧度，
直線 AC 與圓相切於 A，O,B,C 共線。
由圖形：$\Delta ABC<$扇形 AOB$<\Delta AOC$



$$\left.\begin{aligned}\Delta AOB&=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin x\\ \text{扇形}AOB&=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x\\ \Delta AOC&=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\tan x\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\tan x$$

故 $\sin x<x<\tan x$，因為 $\sin x,\tan x$ 均為正，

故$|\sin x|<|x|<|\tan x|$。

(2°)若$\dfrac{-\pi}{2}<x<0$，則 $0<-x<\dfrac{\pi}{2}$，由上面的證明：$\sin(-x)<-x<\tan(-x)$
故$|\sin x|<|x|<|\tan x|$。

(b)由(a)，因為 $x\neq 0,\dfrac{-\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，且$|\sin x|<|x|<|\tan x|$。

故 $\dfrac{1}{|\sin x|}>\dfrac{1}{|x|}>\dfrac{|\cos x|}{|\sin x|}$ ，且 $1>\dfrac{|\sin x|}{|x|}>|\cos x|$。

因為 $\cos x>0$,且 $\sin x$與x同號，故 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1\Rightarrow 0<1-\dfrac{\sin x}{x}<1-\cos x$

又 $0\le\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|=1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\cdot(\frac{x}{2})^2=\frac{1}{2}x^2$,

故 $0\le\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\frac{1}{2}x^2$。

由夾擠原理：$\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|=0$，因此可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(2)sin$x$、cos$x$ 的連續性：

設 $f(x)=\sin x$，a 為任意實數，$|f(x)-f(a)|=|\sin x-\sin a|=|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}|\le 2|\sin\frac{x-a}{2}|$

當 x 很接近 a 時，$|f(x)-f(a)|\le 2|\sin\frac{x-a}{2}|\le 2\cdot\frac{|x-a|}{2}=|x-a|$

根據夾擠原理 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}|f(x)-f(a)|=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$。　所以 $f(x)=\sin x$ 為連續函數。

同理可證明，$g(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$，可以看成 $g(x)=f(h(x))$，其中 $h(x)=x+\frac{\pi}{2}$，因為 $f(x)$、$h(x)$均為連續函數，所以 $g(x)=f(h(x))=\cos x$ 為連續函數。

(3)四個三角函數($y=\tan x,y=\cot x$，$y=\sec x,y=\csc x$)在其定義域上均為三角函數。

[說明]：

[例題15] (1)請證明：$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ (a 為正數)。

(2)請證明：$f(x)=\sqrt{x^2+1}$ 為 R 上的連續函數。

[例題16] 求下列極限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　Ans：(1)2(2)$\frac{1}{2}$

(練習14) 利用函數 $f(x)$在 $x=a$ 連續的定義證明：$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ 在 R 中的每一點都連續。(用極限的四則運算)

(練習15) 請利用函數連續的基本性質說明下列兩函數在其定義域是連續的：

(1)$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ，(−1,1)　(2)$g(x)=|x^2-1|$，R

(練習16) 判別下列那一個函數在所有的實數 R 上的每一點都連續？
(1)$f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$　(2)$f(x)=2^x$　(3)$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$　(4)$f(x)=\sin x+\cos x$。
Ans：(1)不是 (2)是 (3)是 (4)是

(練習17) 下列各函數在 $x = 0$ 時函數值定義為 0，則何者在 $x = 0$ 為連續？

(A) $f(x) = |\,x\,|$　(B) $f(x) = x - [\,x\,]$　(C) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{|\,x\,|}$

(D) $f(x) = \sin x$　(E) $f(x) = \dfrac{|\,x\,|^3 + x^3}{x}$。Ans：(A)(D)(E)

(練習18) 求下列極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 3x}$　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\tan x}{x^2}$　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\cdot\sin x}$

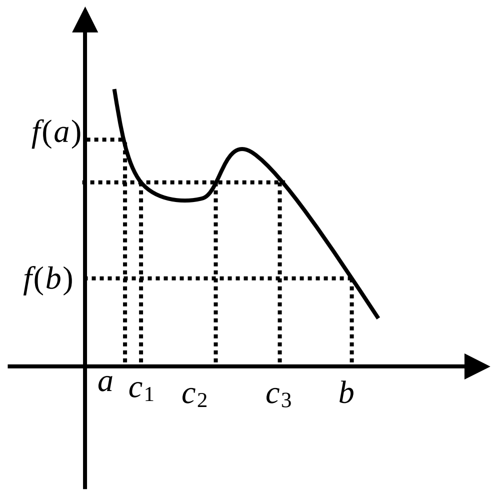
Ans;(1)$\frac{1}{3}$ (2)$\frac{3}{5}$ (3)1 (4)2

結論：基本初等函數在其定義域上是連續的。

(庚)中間值定理

若函數 $y=f(x)$是一個連續函數，其圖形 $y=f(x)$是一條連續函數。反過來說，當 f 是一個定義在$[a,b]$上的連續函數，對於任一個介於 $f(a)$與 $f(b)$之間的實數 k 而言，在區間$[a,b]$內是否存在一個數 c，使得 $f(c)=k$？答案是：**YES**！

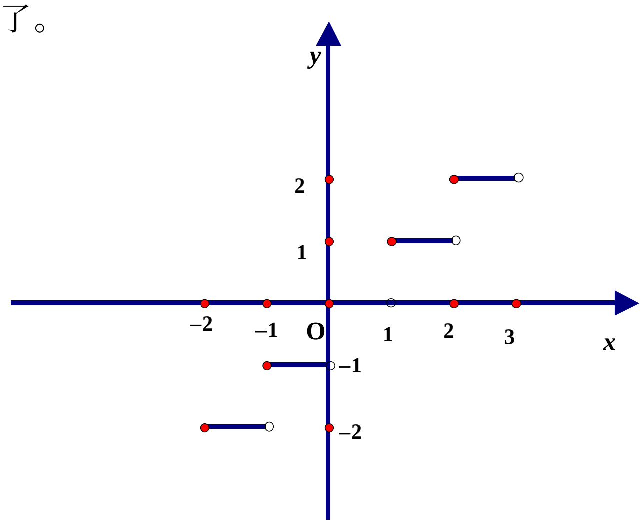
(1)中間值定理：
設 f 是$[a,b]$上的連續函數，且 $f(a)\neq f(b)$，
若 k 是任意一個介於 $f(a)$與 $f(b)$之間的實數，
則在$[a,b]$內至少有一點 c，使得 $f(c)=k$。



(2)上述的中間值定理，函數 $f(x)$的連續性是整個定理成立的關鍵，如果函數 $f(x)$在某一點不連續，則中間值定理就不會成立了。

例如：設 $f(x)=[x]$，因為 $f(1)=1$，$f(2)=2$，

但是 $[1,2]$內不存在一個 c 使得 $f(c)=1.5$。



[例題17] 利用中間值定理證明勘根定理：設 f 是$[a,b]$上的連續函數，若 $f(a)f(b)<0$，則至少存在一個 $c\in[a,b]$，使得 $f(c)=0$。

(練習19) 三次方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$在下列那些連續整數之間有根 ？
(A) -2 與 -1之間 (B) -1與 0 之間 (C) 0 與 1 之間
(D) 1 與 2 之間 (E) 2 與 3 之間 Ans：(A)(B)(D)【88 學測】

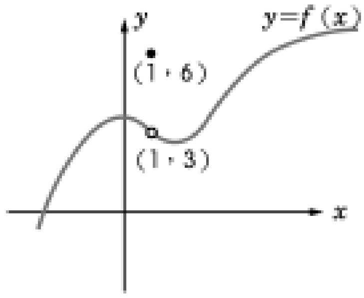
(練習20) 已知三次多項式 $f(x)$除以 $x+2$，得商式 $2x^2-15x+52$，餘式為-119；若 $f(x)$除以 $x-3$，得商式為 $2x^2-5x+7$，餘式為 6，試問下列何者正確？
(A)對每一大於 3 的實數都有 $f(r)\ge0$(B)對每一小於-2 的實數都有 $f(r)\le0$
(C)方程式 $f(x)=0$ 的實根必小於 2 (D)方程式 $f(x)=0$ 有三實根
(E)方程式 $f(x)=0$ 恰有一實根 Ans：(A)(B)(C)(E)

(練習21) 已知方程式 $x^4+ax^3+2x^2-3x-2a=0$在-2與-1之間，1 與 2 之間都恰有一實根，求 a 的範圍為________。Ans：$2<a<3$

(練習22) 設 $f(x)=5x^3-3$，$g(x)=2x^2+1$，試證明：在 1,2 之間有一個實數 c，使得 $f(c)=g(c)$。
[提示：令 $h(x)=f(x)-g(x)$，證明 $h(x)=0$ 在 1 與 2 之間有實根 c]

(練習23) 試證明：在(1,2)之間至少存在一個實根 c 使得 $\log_2 c=\sin c$。

綜合練習



(1) 有一函數 $f(x)$，其圖形如下圖，試求：

(a) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ (d) $f(1)$

(2) 求下列各函數的極限：(a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}=$？ (b) $\lim\limits_{x\to-2}(\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{3x-2}{(x+2)(x+4)})=$？

(c) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=$？ (d) $\lim\limits_{x\to27}\dfrac{27-x}{\sqrt[3]{x}-3}=$？ (e) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{20x+6+\sqrt{x^2+x-1}}=$？

(f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x+3}}-\sqrt{3}}{x-1}$ (g) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1-x^{12}}{1-x}-1)$ (h) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin x=$？

(3) 設$[x]$表示高斯函數，求下列各極限值

(a) $\lim\limits_{x\to1}x[x]$ (b) $\lim\limits_{x\to2.5}x[x]$ (c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{|x^2-1|}$

(4) 設 $f(x)=\begin{cases}2x-4, & 當x\ge4\\ \sqrt{x+6\sqrt{x}}, & 當0\le x<4\end{cases}$，試求 $\lim\limits_{x\to4}f(x)=$？

(5) (a)若 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\dfrac{5}{3}$，則 $a=$？，$b=$？

(b)若 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-x-1}{2x^2+ax+b}=-3$，則 $a=$？，$b=$？

(6) $[x]$表不大於 x 之最大整數，則下列何者正確？

(A) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{[x]}{x}=0$ (B) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$ (C) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{[x]}{x}$不存在 (D) $\lim\limits_{x\to0^-}x^2[x]$ 不存在

(E) $\lim\limits_{x\to1..5}x-[x]=1$。

(7) 下列那些敘述是正確的？

(A)$f(x)=x[x]$在 $x=0$ 連續。(B)$f(x)=x\sin x$ 在 R 上連續。

(C)$f(x)=\sqrt{x+2}$ 在 $x=2$ 連續。(D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|^3+x^3}{x} & ,x\ne0\\ 0, & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 連續。

(E) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & ,x\ne0\\ 0 & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 連續。

(8) 設 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & ,x\ne0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$，請問 $f(x)$是連續函數嗎？

(9) 設 k 為一定數，欲使函數 $f(x)=\begin{cases} x-2, x\geq 0 \\ x^2+k, x<0 \end{cases}$ 為一連續函數，則 k=____？

(10) 設函數 $f(x)=\begin{cases} 2x-5 & 當 x<-1 \\ ax-1 & 當 -1\leq x<2 \\ bx+11 & 當 x\geq 2 \end{cases}$，若 $f(x)$在所有實數 R 上每一點皆連續，試求 a,b 的值。

(11) 若函數 $f(x)=\begin{cases} a & ,x=4 \\ \dfrac{1}{x-4}(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2}), x>0, x\neq 4 \end{cases}$，在 $x=4$ 處為連續，試求 a 之值。

(12) 判別下列那一個函數在定義域上的每一點皆連續？

(a)$f(x)=[x]$ (b)$f(x)=\log x$ (c)$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & 當 x\geq 2 \\ \dfrac{1}{x-1} & 當 x<2 \end{cases}$ (d)$f(x)=\tan x$。

(13) 關於多項式 $f(x)=x^4-15$，下列選項何者為真？

(A) $f(x)=0$ 在-2 與-1 之間有一實根 (B) $f(x)=0$ 沒有大於 2 的實根 (C) $f(x)=0$ 在 1 與 2 之間有一實根 (D) $f(x)=0$ 沒有小於-2 的實根 (E) $f(x)=0$ 有四個實根。

(14) 設 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$，試證在開區間(0，1)內有一數 a，使得 $f(a)=a$。

(15) 已知 $f(x)=8x^2-13x-2$ 與 $g(x)=x^2+kx-k^2+k$ 兩圖形交於(a,b)、(c,d)兩點，若 $0<a<1<c<2$，求 k 之範圍為_______。

進階問題

(16) 求下列各函數的極限：

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}=$？ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n+x^{n-1}+\ldots+x^2+x-n}{x-1}=$？

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[10]{x})}{(1-x)^9}=$？

(17) $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$，請問 $f(x)$在 $x=0$ 連續嗎？

(18) 設多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$a\neq 0$

且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$，求 $f(x)=$_______。

(19) 求下列各函數的極限：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m,n 正整數) (b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 6x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$ (d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

(20) 判定方程式 $x\sin x=7$ 是否有實數解？

綜合練習解答

(1) (a)3 (b)3 (c)3 (d)6

(2) (a)3 (b) $-\dfrac{5}{2}$ (c) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (d)-27(e)3(f)$\dfrac{1}{8\sqrt{3}}$(g)11(h)0

(3) (a)不存在 (b)5 (c)0

(4) 4[考慮左右極限 $\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=4$]

(5) (a)$-3,-2$ (b)3,1

(6) (A)(B)(C)

(7) (A)(B)(C)(D)

(8) 連續函數[提示：$-|x|\le x\sin\dfrac{1}{x}\le|x|$，$x\neq 0$，再利用夾擠原理求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$，其他各點 $f(x)$都連續]

(9) -2

(10) $a=6$，$b=0$[提示：$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=f(-1)=-7\Rightarrow a=6$；$\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=f(2)\Rightarrow b=0$]

(11) $\dfrac{-1}{16}$

【詳解】：$f(4)=a$ $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}(\dfrac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}})=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{-1}{16}$

(12) (b)(c)(d)而(a)$f(x)=[x]$在整數點不連續。

(13) (A)(B)(C)(D)

(14) 【詳解】

令 $g(x)=f(x)-x$

則∵ x^2-x+1，x^2+1，x 均為連續函數且 $x^2+1>0$∴ $g(x)$為連續函數

又 $g(0)=f(0)-0=1>0$

$g(1)=f(1)-1=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}<0$

∵ $g(0)g(1)<0$∴ 由勘根定理，$\exists a\in(0,1)$使得 $g(a)=0$，即 $f(a)=a$

(15) $-2<k<-1$ 或 $3<k<4$

[提示：令 $F(x)=f(x)-g(x)$，因為 $0<a<1<c<2$，所以 $F(x)=0$ 在 0 與 1、1 與 2 之間恰有一實根 a,c，所以 $F(0)F(1)<0$ 且 $F(1)F(2)<0$]

(16) (a)$\sqrt{6}$ (b)$\dfrac{n(n+1)}{2}$ (c)$\dfrac{1}{10\,!}$

(17) $f(x)$在 x=0 不連續。

[提示：當 $x_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}$ 時，$f(x_n)=1$；當 $t_n=\dfrac{1}{\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi}$ 時，$f(t_n)=-1$]

(18) $3x^3-13x^2+18x-8$

【詳解】

設 $f(x)=(x-1)(x-2)(ax+\dfrac{d}{2})$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to1}(x-2)(ax+\dfrac{d}{2})=1\\ \lim\limits_{x\to2}(x-1)(ax+\dfrac{d}{2})=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+\dfrac{d}{2}=-1\\ 2a+\dfrac{d}{2}=2\end{cases}\text{解得 } a=3,\ \ d=-8$$

$\therefore\ f(x)=(x-1)(x-2)(3x-4)=3x^3-13x^2+18x-8$

(19) (a)$\dfrac{m}{n}$ (b)$\dfrac{-1}{2}$ (c)1 (d)$\cos a$

(20) 【詳解】

令 $f(x)=x\sin x-7$，則 $f(0)<0$，$f(\dfrac{5\pi}{2})>0$，

所以 $f(x)$ 在 0 與 $\dfrac{5\pi}{2}$ 之間有實數解。