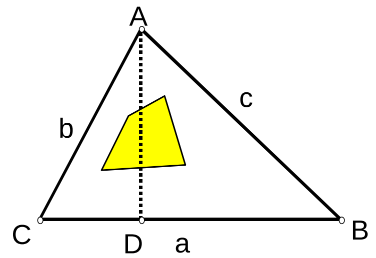
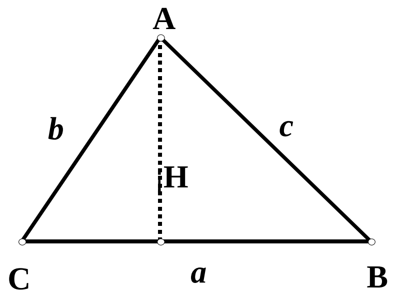
第十三單元　正弦與餘弦定理

(甲)三角形的面積

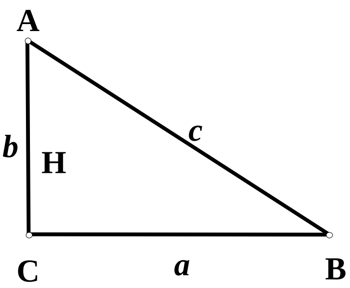
三角形的面積公式：

國中△ABC 面積= $\frac{1}{2}$×底×高，以底與高的長度表示面積但是當$\overline{BC}$邊上的『高』不容易求出來的時候(如有障礙物)，我們可以利用三角函數邊角的關係式間接求出高，於是△ABC 的面積=$\mathbf{\frac{1}{2}\times \mathit{a}\times \mathit{b}sinC}$

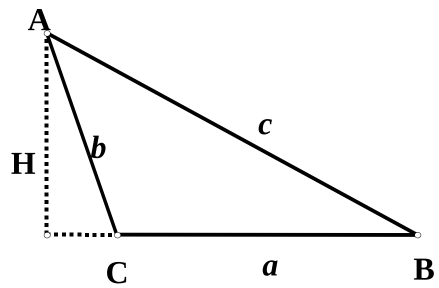




∠C 是銳角



∠C 是直角



∠C 是鈍角

事實上圖中，∠C 是銳角，當∠C 是直角或是鈍角時 △ABC，

$\overline{BC}$邊上的高仍然是 $\boxed{\mathbf{\mathit{b}\times sinC}}$ ∴△ABC 面積=$\mathbf{\frac{1}{2}\times \mathit{a}\times \mathit{b}sinC}$

同理由對稱性得△ABC 的面積公式=$\mathbf{\frac{1}{2}\times \mathit{a}\times \mathit{b}\times sinC= \frac{1}{2}\times \mathit{b}\times \mathit{c}\times sinA= \frac{1}{2}\times \mathit{c}\times \mathit{a}\times sinB}$

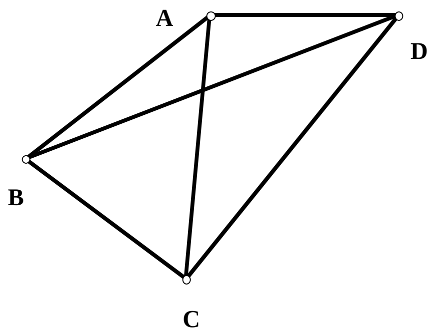
結論：

△面積記憶法⇒利用三角函數定義，由△=$\frac{1}{2}$×底×高，導出兩邊夾角求面積，即△=$\mathbf{\frac{1}{2}}$

$\mathbf{\times \mathit{a}\times \mathit{b}\times sinC= \frac{1}{2}\times \mathit{b}\times \mathit{c}\times sinA= \frac{1}{2}\times \mathit{c}\times \mathit{a}\times sinB}$ (兩邊夾一角)

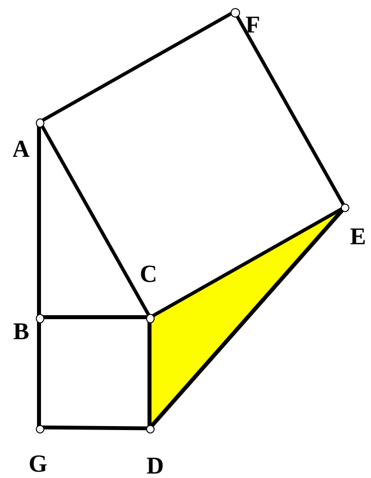
[例題1] 四邊形 ABCD，設θ為對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的一個交角，

求證：此四邊形的面積為$\frac{1}{2}\ \overline{AC}\cdot\overline{BD}\cdot\sin\theta$。



(練習1) 設ΔABC 為直角三角形，ACEF 是以$\overline{AC}$為一邊向外作出的正方形，BCDG 是以$\overline{BC}$為一邊向外作出的正方形，若 AC=5、AB=4、BC=3，試求(a)cos(∠DCE) (b)ΔDCE 的面積。

Ans：(a)$\frac{-3}{5}$ (b)6



(練習2) 已知一三角形 ABC 的二邊 AC=5，AB=8，$\cos A=\frac{4}{5}$，則ΔABC 的面積為________。 Ans：12

(練習3) 利用三角形的面積公式證明：

設 P 為ΔABC 上$\overline{BC}$或其延長線上的點，

(1)若直線 AP 為∠A 的內角平分線，則$\frac{BP}{PC}=\frac{BA}{AC}$。

(2)若直線 AP 為∠A 的外角平分線，則$\frac{BP}{PC}=\frac{BA}{AC}$。

(乙)正弦定理

國中幾何曾經學過「大邊對大角」這個性質，但這個性質只說角大則邊大，邊大則角大，這種說法似乎只是一種對於邊角關係的「**定性描述**」，那麼邊角之間有沒有「**定量的描述**」呢?我們用以下的定理來回答這個問題：

> **正弦定理：**
> 在ΔABC 中，以 a,b,c 表示∠A，∠B，∠C 之對邊長度，
> 則$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 為ΔABC 外接圓的半徑。

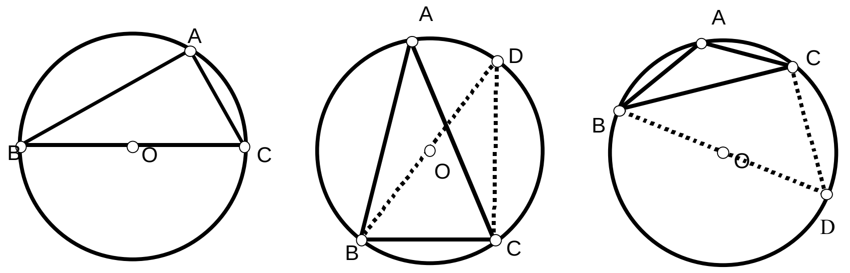
證明：

由前面三角形的面積公式：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times a\times b\times \sin C=\frac{1}{2}\times b\times c\times \sin A=\frac{1}{2}\times c\times a\times \sin B$

等號兩邊同除 abc，可得 $\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 。

但是$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 等於多少呢？我們由以下的證明來說明：

我們將ΔABC 分成直角、銳角、鈍角三種情形來討論，如下圖所示：



(1)當$\angle A=90^\circ$　(2)當$\angle A<90^\circ$　(3)當$\angle A>90^\circ$

(1)$\angle A=90^\circ\Rightarrow\frac{a}{\sin 90^\circ}=a=\overline{BC}$=外接圓直徑$=2R\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

(2)$\angle A$ 為銳角：

過 B 做圓 O 的直徑$\overline{BD}$，因為$\angle A$ 與$\angle D$ 對同弧($\overset{\frown}{BC}$)，因此$\angle A=\angle D$。

考慮直角三角形 BCD，由銳角三角形的定義可知$\frac{BC}{BD}=\sin D=\sin A$

$\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=BD$=外接圓直徑$=2R\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$。

(3)$\angle A$ 為鈍角：

過 B 做圓 O 的直徑$\overline{BD}$，因為$\angle A+\angle D=180^\circ$，所以 $\sin\angle D=\sin(180^\circ-\angle A)=\sin A$

考慮直角三角形 BCD，由銳角三角形的定義可知$\frac{BC}{BD}=\sin D=\sin A$

$\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=BD$=外接圓直徑$=2R\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$。

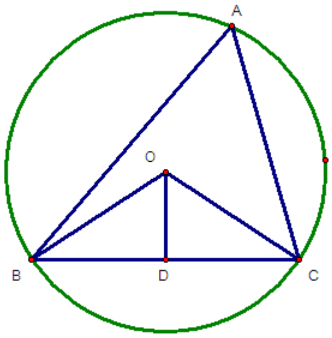
結論：正弦定理與邊角變換：

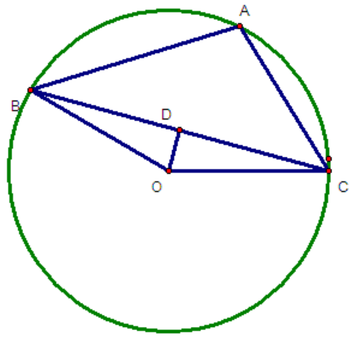
(a) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$。

(b)邊化角：$a=2R\cdot\sin A$，$b=2R\cdot\sin B$，$c=2R\cdot\sin C$。

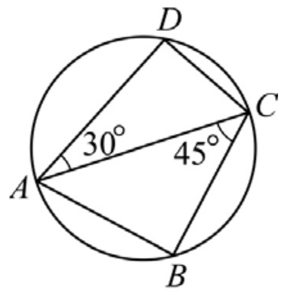
(c)角化邊：$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$。

[例題2] 如下圖，請證明：$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ (R 為ΔABC 外接圓的半徑)





[例題3] 設圓內接四邊形 ABCD 中∠CAD=30°，∠ACB=45°，$\overline{CD}=2$，則$\overline{AB}=$________。
Ans：$2\sqrt{2}$



(練習4)利用三角形的面積公式與正弦定理，證明：ΔABC 的面積為$\dfrac{abc}{4R}$。

(練習5)ΔABC 中 ，a,b,c 分別代表∠A，∠B，∠C 之對邊長度：
(1)若$(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7$，試求 sinA:sinB:sinC。
(2)若∠B=55°，∠C=65°，a=10 公分，試求外接圓半徑。
Ans：(1)4:3:2 (2)$\dfrac{10\cdot\sqrt{3}}{3}$ 公分

(練習6)在下列各條件下，求△ABC 的外接圓半徑 R。
(1)∠B=70°，∠C=80°，a=3。(2)b=2，cosB= $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Ans：(1)R=3(2)R=2

(練習7)以 a,b,c 分別表示△ABC 之三邊$\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$的長，試在下列各條件下，
求 sinA：sinB：sinC。(已知 $\sin75°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$)
(1)∠A=30°,∠B=45° (2)∠A：∠B：∠C=3：4：5
(3)$-a+2b-c=0$ 且 $3a+b-2c=0$ (4)$(a+b)：(b+c)：(c+a)=5：6：7$
Ans：

(1)2：$2\sqrt{2}$：$\sqrt{6}+\sqrt{2}$ (2)$2\sqrt{2}$：$2\sqrt{3}$：$\sqrt{6}+\sqrt{2}$ (3)3：5：7 (4)3：2：4

(丙)餘弦定理

直角三角形中的寶藏是畢氏定理。即在直角△ABC 中，若夾角∠C=90°則知兩鄰邊 a,b，可由畢氏定理 $c^2=a^2+b^2$ 求出對邊 c；對於一般的三角形，如果夾角給定，但不一定是直角，如何求第三邊的長呢？餘弦定理就代替了直角三角形特有的畢氏定理。

(1)從畢氏定理到餘弦定理：

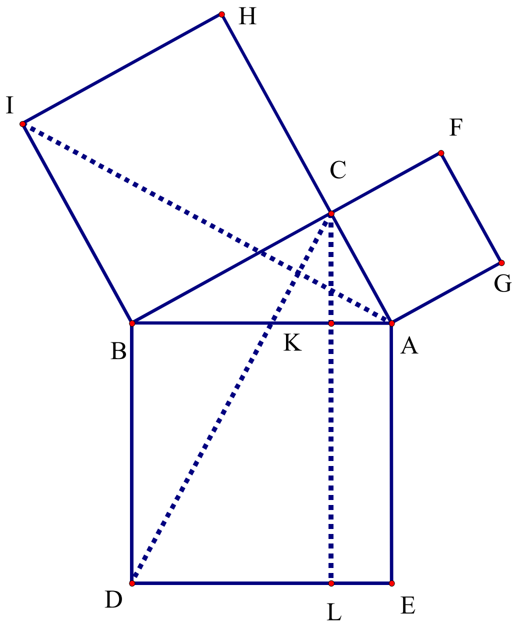
畢氏定理第一個證明是《幾何原本》所記載的，《幾何原本》中證明了正方形 ABDE 的面積等於正方形 ACFG 與正方形 BCHI 的面積和，這個證明出現在第一卷命題 47，它證明的要點如下：

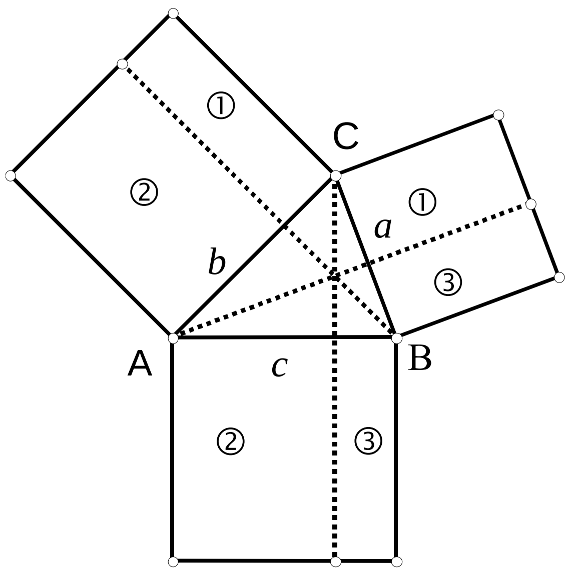
(1°)證明ΔBCD≅ΔBIA，

(2°)證明矩形 BDLK 面積＝ΔBCD 面積×2，正方形 BCHI 面積＝ΔBIA 面積×2，

因此矩形 BDLK 面積＝正方形 BCHI 面積。

同理可以證明矩形 AELK 面積＝正方形 AGFC 面積，





將《幾何原本》中的證明推廣成一般的三角形，

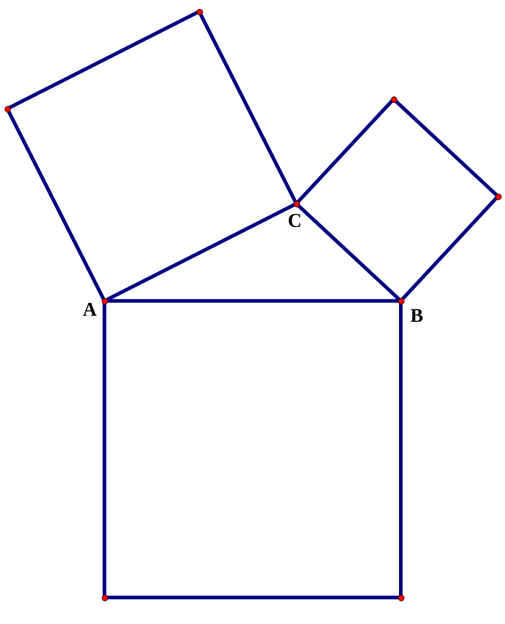
延續這個精神可以得出一般三角形類似的邊角關係。

如右上圖，可以得出：

c^2 =②+③ =(①+②)+(①+③) −2×① =$b^2+a^2-2ab\cdot\cos C$

[討論]：

如圖，∠C 為鈍角，請問上述的結果會成立嗎？



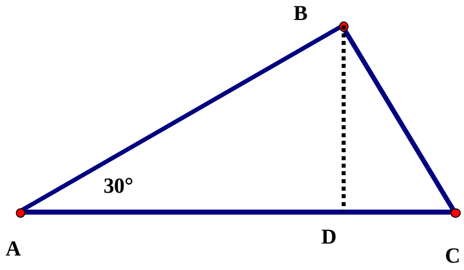
(2)餘弦定理的證明：

例子：設ΔABC 中，∠A=30°，$\overline{AB}$=6,$\overline{AC}$ =7，請求出$\overline{BC}$=？

[解法]：

作高$\overline{BD}$，$\overline{AD}=6\cdot\cos30°$，$\overline{BD}=6\cdot\sin30°\Rightarrow\overline{CD}=7-6\cdot\cos30°$

在ΔBDC 中，∠BDC=90°



$\Rightarrow\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$

$\Rightarrow\overline{BC}^2=(6\cdot\sin30°)^2+(7-6\cdot\cos30°)^2$

$=6^2(\sin^2 30°)+7^2-2\times6\times7\times\cos30°+6^2(\cos^2 30°)$

$=6^2(\sin^2 30°+\cos^2 30°)+7^2-2\times6\times7\times\cos30°$

$=6^2+7^2-2\times6\times7\times\cos30°$

上例的解法，對於∠A 為鈍角或直角時都會成立，我們將其寫成底下的定理。

餘弦定理：

在ΔABC 中，若 a,b,c 為∠A，∠B，∠C 之對邊長，則

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

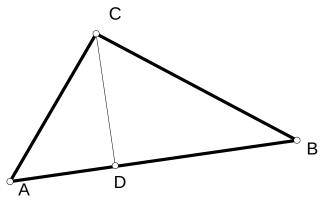
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$

證明：在ΔABC 中，依∠A 為銳角、直角、鈍角三種情形來說明：

設 C 點對 AB 邊或其延長線的垂足點為 D

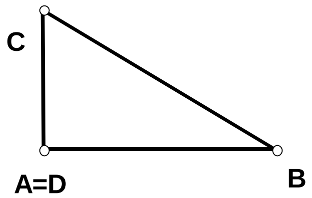
(1) ∠A 為銳角



$\because\cos A>0$

$\therefore\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=c-b\cdot\cos A$

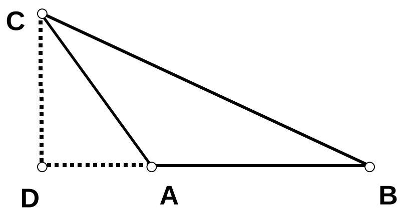
(2) ∠A 為直角



$\because\cos A=0$

$\therefore\ \overline{BD}=\overline{AB}=c-b\cdot\text{coA}$

(3) ∠A 為鈍角



$\because\cos A<0$

$\therefore\ \overline{BD}=\overline{AB}+\overline{AD}=c+|b\cdot\cos A|$

$=c-b\cdot\cos A$

由以上的討論可知：不論∠A 為銳角、直角、鈍角均可得$\overline{BD}=c-b\cdot\cos A$。

又因為 $a^2=\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$

$=(c-b\cdot\cos A)^2+(b\cdot\sin A)^2=c^2-2bc\cdot\cos A+b^2\cdot\cos^2A+b^2\cdot\sin^2A=c^2+b^2-2bc\cdot\cos A$

故 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，同理可證 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$。

結論：

(a)由餘弦定理，可知 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(b)從(a)可知 $\angle A=90^\circ \Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$　$\angle A<90^\circ \Leftrightarrow a^2<b^2+c^2$　$\angle A>90^\circ \Leftrightarrow a^2>b^2+c^2$

[例題4] 在ΔABC 中已知 sinA:sinB:sinC= 4：5：7，則求 cosC = ? sinC= ?

Ans：$\dfrac{-1}{5}$、$\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

(練習8)ΔABC 中，若$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，則$\angle$C=________。　Ans：60°

(練習9)設 a,b,c 為ΔABC 的三邊長且滿足$(a-2b+c)^2+(3a+b-2c)^2=0$，若θ為ΔABC 的最大內角，求 $\cos\theta$ =______。　Ans：$\dfrac{-1}{2}$

(丁)正餘弦定理的應用

(1)三角形的邊角關係：

(a)三角形的全等性質有 SSS、SAS、AAS、ASA、斜股性質，我們可以利用正餘弦定理來解出唯一的三角形。

(b)SSA 型的討論：ΔABC 中，若已知 a,b 及$\angle$A

[想法]：設$\overline{AC}=b$，利用尺規在$\angle$A 的邊 $\overrightarrow{AX}$ 上做出 B 點使得$\overline{BC}=a$。想要找出另一個頂點 B，則圓規打開的半徑大小 a，一定要比頂點 C 到 $\overrightarrow{AX}$ 的距離大才有交點。

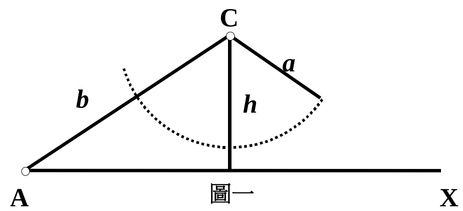
$(1^\circ)$$\angle$A 為銳角時，頂點 C 到 $\overrightarrow{AX}$ 的距離 $h=b\cdot\sin A$。

$a<h$ 時，找不到 B 點 $\Rightarrow$無解。(如圖一)
$a=h$ 時，找到唯一一點 B $\Rightarrow$恰有一解　(如圖二)
$h<a<b$ 時，有兩個 B 點 $\Rightarrow$有兩解 (如圖三)
$b\le a$ 時，找到唯一一點 B $\Rightarrow$恰有一解　(如圖四)

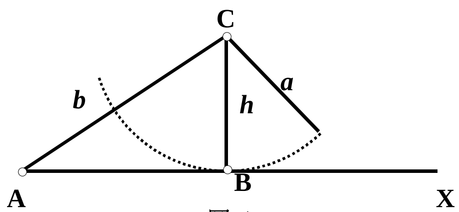
$(2^\circ)$$\angle$A 為鈍角時，頂點 C 到 $\overrightarrow{AX}$ 的距離=b

$a \le b$ 時，找不到 B 點 $\Rightarrow$無解。(如圖五)

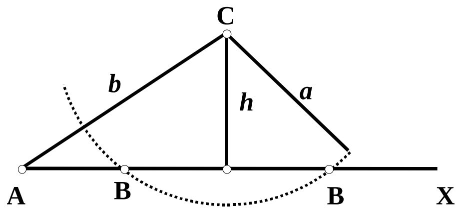
$a > b$ 時，找到唯一一點 B $\Rightarrow$恰有一解　(如圖六)



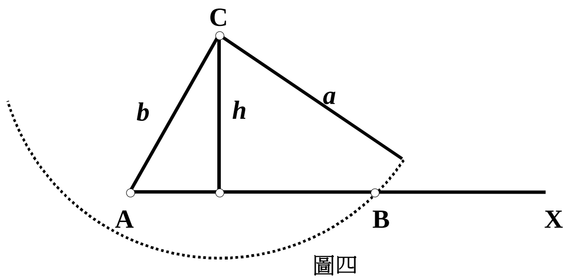
圖一



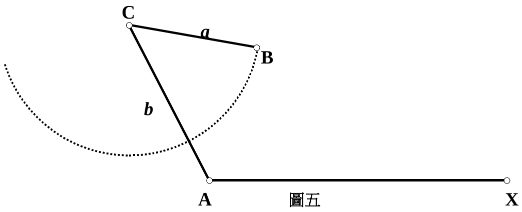
圖二



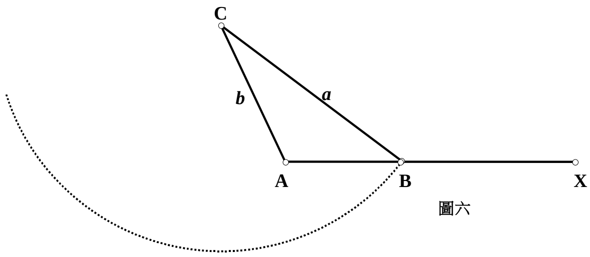
圖三



圖四



圖五



圖六

[例題5] 已知ΔABC中，$\overline{AC}=15$，$\overline{AB}=15\sqrt{3}$，$\angle B=30^\circ$，

則$\angle A=$？$\overline{BC}=$？　Ans：$\angle A=90^\circ$，$\overline{BC}=30$；$\angle A=30^\circ$，$\overline{BC}=15$

[例題6] $\triangle ABC$中,$\angle A=45^\circ$,$\angle B=60^\circ$，$\overline{BC}=7$，求$\overline{AB}$及$\overline{AC}$之長。($\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$)

Ans：$\overline{AB}=\dfrac{7}{2}(\sqrt{3}+1)$，$\overline{AC}=\dfrac{7}{2}\sqrt{6}$

(練習10) 由下列條件解△ABC，何者恰有一解？(A) $\angle A=40°$，$\angle B=60°$，$\angle C=80°$ (B) $a=2$，$b=4$，$c=6$ (C) $a=1$，$b=2$，$\angle A=30°$ (D) $a=1$，$b=3$，$\angle A=30°$ (E) $a=1$，$b=4$，$\angle C=40°$。
Ans：(C)(E)

(練習11) ΔABC 中，設 $c=8$，∠A=105°，∠B=45°，求 b=？ Ans：$8\sqrt{2}$

(2)求三角形的面積：

(a)**Heron 公式**

設ΔABC 中，a,b,c 分別為∠A，∠B，∠C 之對邊長，令 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，

則 $S_{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

[證明]：

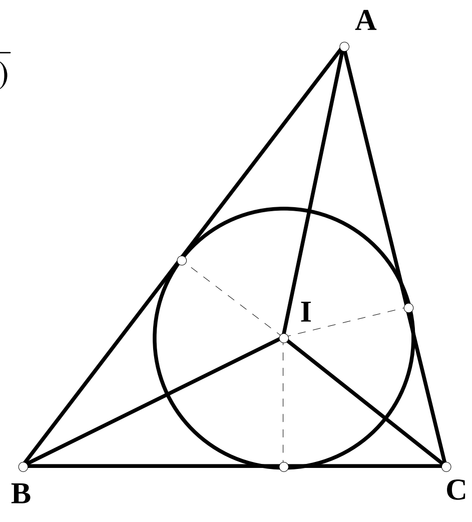
由餘弦定理，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=\frac{1}{2}ac\cdot\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{1}{2}ac\sqrt{1-(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})^2}=\frac{1}{2}ac\cdot\frac{1}{2ac}\cdot\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)]^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2s)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(b)三角形 ABC 的面積= $r\cdot s$
(r 為三角形 ABC 內切圓的半徑)
[證明]
三角形 ABC 的面積
=ΔABI+ΔBCI+ΔCAI
$=\frac{1}{2}c\cdot r+\frac{1}{2}a\cdot r+\frac{1}{2}b\cdot r=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r=r\cdot s$



ΔABC 的面積= $\frac{1}{2}$ 底×高
$=\frac{1}{2}bc\sin A$($\frac{1}{2}$ 兩邊乘積×夾角的正弦值)
$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ s=周長之半
$=\dfrac{abc}{4R}$ (R 為三角形 ABC 外接圓的半徑)
$=r\cdot s$ (r 為三角形 ABC 內切圓的半徑)

結論：

(a)已知三邊：ΔABC=$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ **(Heron 公式)**

(b)已知二邊與夾角：ΔABC=$\frac{1}{2}ab\cdot\sin C=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}ca\cdot\sin B$

($\frac{1}{2}$ 兩邊乘積×夾角的正弦值)

(c)已知內切圓半徑 r：ΔABC=rs。

(d)已知外接圓半徑 R：ΔABC=$\frac{abc}{4R}$。

(e)任意凸多邊形面積=$\frac{1}{2}\cdot l\cdot m\cdot\sin\theta$ (l,m 為對角線長，θ表示兩對角線之一夾角)

(練習12)已知ΔABC 之三邊長分別為 4,6,8，則
(1)ΔABC 的面積=？(2)邊長 6 所對應的高=？
(3)ΔABC 的內切圓半徑=？(4)ΔABC 的外接圓半徑=？
Ans：(1)$3\sqrt{15}$ (2)$\sqrt{15}$ (3)$\frac{\sqrt{15}}{3}$ (4)$\frac{16\sqrt{15}}{15}$

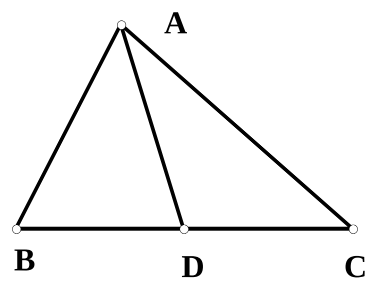
(練習13) 有一凸多邊形 ABCD，若$\overline{AB}$=2，$\overline{BC}$=6,$\overline{CD}$=4，$\overline{BD}$=6，∠ABD=30°，則此四邊形的面積=？ Ans：$3+8\sqrt{2}$

(3)三角形或多邊形的邊角計算：

正弦與餘弦定理是處理三角形或多邊形的邊角計算的重要工具，許多問題都會用到這兩個重要的結果，接下來利用一些實例來處理這兩個定理的應用：

[例題7] 三角形的中線定理

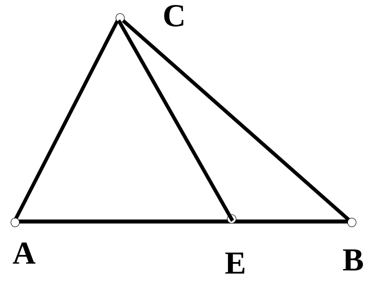
三角形 ABC 中， D 為 BC 之中點，試證：$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$。



[例題8] **斯圖爾特(Stewart)定理**

設 E 為ΔABC 中$\overline{AB}$上的點，

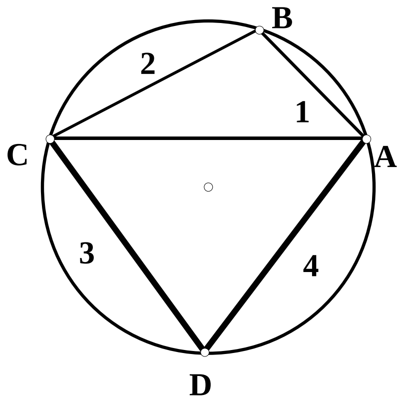
則$\overline{AC}^2\cdot\overline{EB}+\overline{BC}^2\cdot\overline{AE}=\overline{CE}^2\cdot\overline{AB}+\overline{AE}\cdot\overline{EB}\cdot\overline{AB}$。



[例題9] 已知圓內接四邊形 ABCD 的各邊長為$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\overline{AD}=4$，

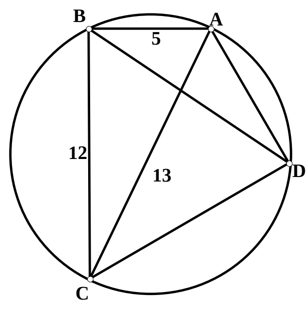
則(1)$\overline{AC}$ =？ (2)$\sin\angle ABC$=？ (3)ABCD 的面積

Ans：(1)$\sqrt{\dfrac{55}{7}}$ (2)$\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$ (3)$2\sqrt{6}$



[例題10] 圓內接四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，$\overline{AC}=13$，$\angle A=120°$，

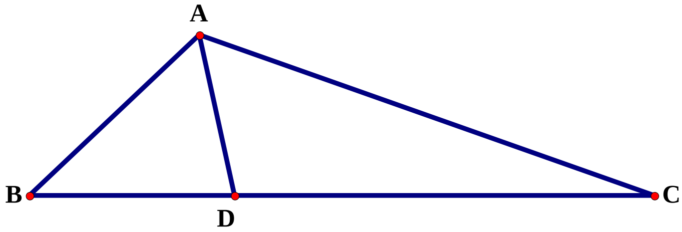
則$\overline{BD}$=？ Ans：$\dfrac{13\sqrt{3}}{2}$



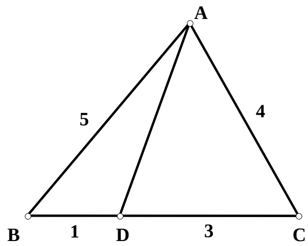
[例題11] ΔABC 中，$\angle$A 之內角平分線交$\overline{BC}$於 D，$\overline{AB}$ =3，$\overline{AC}$ =6，$\angle$A=120°，

則$\overline{AD}$=__________；$\overline{CD}$ =___________。

Ans：2；$2\sqrt{7}$



(練習14) 證明：平行四邊形 ABCD 中，對角線平方和=四個邊的平方和。



(練習15) 如右圖，試求$\overline{AD}$=？Ans：$\dfrac{\sqrt{79}}{2}$

(練習16) 設$\overline{AM}$為ΔABC 上$\overline{BC}$的中線，

證明：$\overline{AM}^2=\dfrac{1}{4}(b^2+c^2+2bc\cos A)$。

(練習17) 如右圖，ΔABC 中，$\overline{AB}$ =6,$\overline{AC}$=10,$\angle$BAC=120°，

$\angle$BAD=30°，則$\overline{AD}$=_______。Ans：$\dfrac{30\sqrt{3}}{13}$

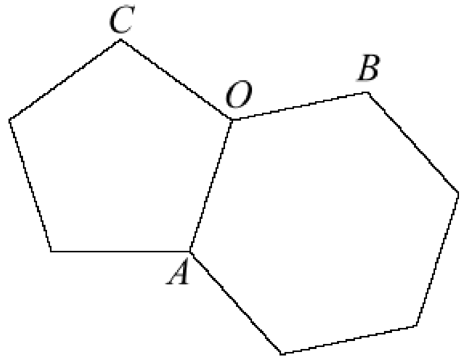
(練習18) ΔABC 中若滿足以下條件則其形狀為何？

(1)2cosBsinA=sinC　(2)$a\cdot\cos A-b\cdot\cos B+c\cdot\cos C=0$

Ans：(1)等腰三角形 (2)直角三角形

綜合練習

(1) 嘌呤是構成人體基因的重要物質，它的化學結構式主要是由一個正五邊形與一個正六邊形構成(令它們的邊長均為 1)的平面圖形， 如下圖所示：
是回答下列各小題：

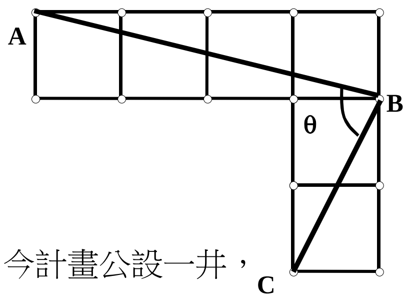


(a)$\angle BAC$、$\angle ABC$、$\angle ACB$ 的度數。
(b)請指出ΔABC 的外接圓半徑與圓心。
(c)將ΔABC 的邊長用正弦來表示。
(d)利用餘弦定理證明：

$\sin^2 54°+\sin^2 66°-\sin 54°\sin 66°=\frac{3}{4}$。

(2) ΔABC 中，設 $a=3$，$b=4$，$\tan A=\frac{3}{4}$，求 $c=$？

(3) 如圖，設每一小格皆為正方形，求 $\cos\theta=$？



(4) 設ΔABC 之三高為 $h_a=6$，$h_b=4$，$h_c=3$，
則求最小內角之餘弦為________；最小邊長=______ 。

(5) 郊外有甲，乙，丙三家，兩兩相距 70，80，90 公尺，今計畫公設一井，井到三家必須等距，則此距離為________公尺。

(6) 在ΔABC 中，M 為$\overline{BC}$邊之中點，若$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，且$\angle BAC=120°$，
則 $\tan\angle BAM=$__________ 。(2007 學科)

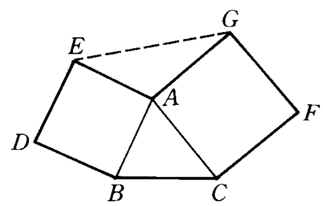
(7) 在ΔABC 中，D 為$\overline{BC}$邊上一點且$\overline{AD}$平分$\angle BAC$。已知$\overline{BD}=5$；$\overline{DC}=7$，且$\angle ABC=60°$

(a)試求 $\sin\angle ACB$ 之值。(b)試求 $\sin\angle BAC$ 之值。(c)試求$\overline{AB}$邊之長。
(2012 指定甲)

(8) 圓內接四邊形 ABCD，$\overline{AB}=5$，$\angle ADC=105^{\circ}$，$\angle DCB=90^{\circ}$，$\angle ABD=60^{\circ}$，

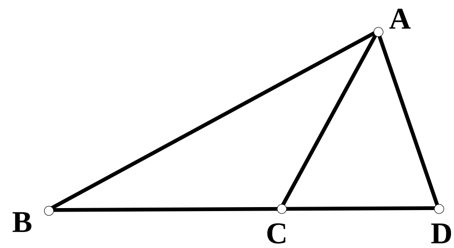
求對角線$\overline{BD}$、$\overline{AC}$的長度。

(9) 如圖，三角形 ABC 之三邊長為 $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=8$，$\overline{CA}=9$，
若 ABDE，ACFG 皆為正方形，則$\overline{EG}=$_________ 。



(10) 已知ΔABC 三邊長分別為$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=3$，

延長$\overline{BC}$至 D，如右圖所示，使得$\overline{CD}=2$，則$\overline{AD}=$？



(11) 設$\angle BAC=60°$，P 為其內部一點且$\overline{AP}=10$，又 P 對於$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的對稱點分別為 Q、R，則$\overline{QR}$=？

(12) ΔABC 中滿足 $a\cos A=b\cos B$，請問此三角形之形狀為何？

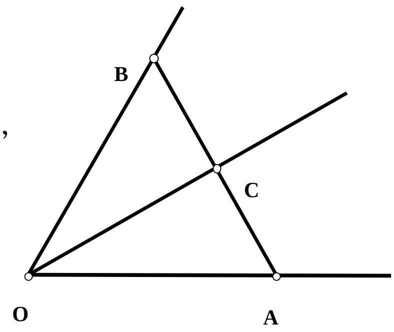
(13) 在ΔABC 中，$\angle ABC=75^{\circ}$，$\angle ABD=30^{\circ}$，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=\sqrt{2}$，則$\overline{BD}$=？

(14) ΔABC 中，$\angle A=60^{\circ}$，$\overline{AB}=15$，$\overline{AC}=24$，則$\angle A$ 的外角平分線$\overline{AD}$長為多少？

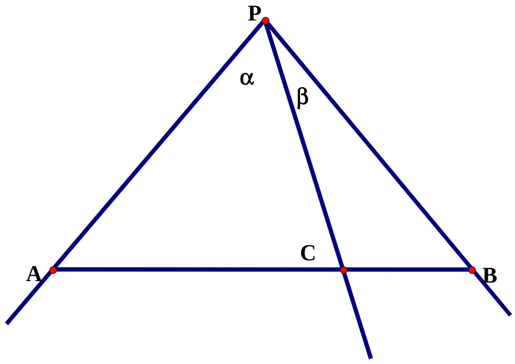
(15) 在ΔABC 中，$\overline{AB}=10,\overline{AC}=9,\cos\angle BAC=\frac{3}{8}$。設點 P、Q 分別在邊 AB、AC 上使得$\Delta APQ$ 之面積為ΔABC 面積之一半，則$\overline{PQ}$之最小可能值為＿＿＿＿＿＿。(化成最簡分數)　(2009 學科能力測驗)

進階問題

(16) 如圖，$\overline{OA}=a,\ \overline{OB}=b,\ \overline{OC}=c$，$\angle AOC=\angle BOC=30^{\circ}$，試證 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{\sqrt{3}}{c}$ 。



(17) (張角定理)
設 A、B、C 順次分別是平面內一點 P 所引的三條射線 PA、PB、PC 上點，線段 AB、AC 對點 P 的張角分別為α、β，且α+β<180°，則 A、B、C 三點共線的充要條件是：$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\frac{\sin\alpha}{PB}+\frac{\sin\beta}{PA}$。



(18) 在ΔABC 中，若 a,b,c 分別代表ΔABC 的三邊長$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$之長。
(1)試證：$a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$，$b=a\cdot\cos C+c\cdot\cos B$，$c=a\cos B+b\cos A$
(2)利用(1)去證明：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$。

(19) ΔABC 中，周長為 20，$\angle A=60^{\circ}$，外接圓的半徑為 $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$ 則求各邊的邊長 a,b,c，又三角形的內切圓半徑為何?

(20) 設ΔABC 之三邊長為$\sqrt{3}$,x , y，且邊長$\sqrt{3}$之對角為 60°，試求 $x+y$ 的範圍。

(21) 設凸四邊形 ABCD 之對角線 AC=p，BD=q，兩對角線之交角為θ 。

(a)試證：凸四邊形 ABCD 之面積=$\frac{1}{2}\ pq\sin\theta$

(b)若 AC+BD=10，則凸四邊形 ABCD 面積之最大值為何？

(22) ΔABC 中，設 $a=2,b=1$

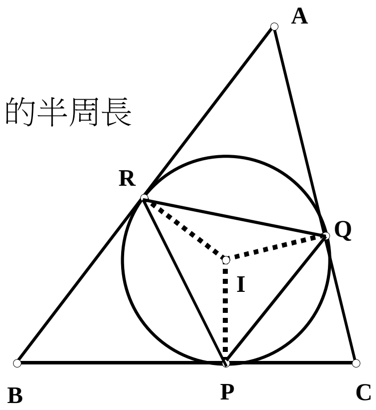
(a)當ΔABC 面積最大時，求 c。(b)當$\angle$B 最大時，求 c。

(23) 設 ABCD 為半圓內接四邊形，$\overline{\text{AD}}$為直徑長為 d，若$\overline{\text{AB}}=a$，$\overline{\text{BC}}=b$，$\overline{\text{CD}}=c$，試證明：d 為方程式 $x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$ 的一根。

(24) 試證明：ΔABC 的內切圓半徑 $r=(s-a)\tan\frac{\text{A}}{2}$。 s=ΔABC 的半周長

(25) 如圖，設ΔABC 之內切圓半徑為 r，外接圓半徑為 R，內切圓切三邊於 P,Q,R，則

$\frac{\Delta\text{PQR的面積}}{\Delta\text{ABC的面積}}$之值為何？



(26) 設圓內接四邊形 ABCD 四邊之長分別為$\overline{\text{AB}}=a$，$\overline{\text{BC}}=b$，$\overline{\text{CD}}=c$，$\overline{\text{AD}}=d$，試證：

(a)$\overline{\text{AC}}^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$。 (b)$\overline{\text{BD}}^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$ (c)$\overline{\text{AC}}\cdot\overline{\text{BD}}=ac+bd$。

(27) 已知三角形 ABC 的邊$\overline{\text{AB}}$=9，$\overline{\text{AC}}$=8，$\angle$A=40°，在$\overline{\text{AB}}$上取一點 D，在$\overline{\text{AC}}$上取一點 E 而$\overline{\text{DE}}$把△ABC 的面積等分為二，試問：若要求$\overline{\text{DE}}$之長度最短，$\overline{\text{AD}}$及$\overline{\text{AE}}$之值應為何？

綜合練習解答

(1) (a)$\angle BAC=66^\circ$、$\angle ABC=54^\circ$、$\angle ACB=60^\circ$

(b)O 為ΔABC 的外接圓圓心，半徑=1

(c)$\overline{BC}=2\sin 66^\circ$、$\overline{AC}=2\sin 54^\circ$、$\overline{AB}=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$

(d)利用$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos\angle ACB$，即可得證。

(2) 5 或$\frac{7}{5}$

(3) $\frac{2}{\sqrt{85}}$

(4) $\frac{7}{8}$ ；$\frac{16\cdot\sqrt{15}}{15}$

(5) $\frac{65}{6}$

(6) $21\sqrt{5}$

(7) (a)$\frac{5\sqrt{3}}{14}$ (b)$\frac{4\sqrt{3}}{7}$ (c)$\frac{15}{2}$

(8) $5\sqrt{3}$

(9) $\overline{BD}=10$、$\overline{AC}=\frac{5(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$

(10) 14

(11) $\sqrt{7}$

(12) $10\sqrt{3}$ [提示$\angle QAR=120^\circ$]

(13) 等腰或直角三角形[提示：利用 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ 代入 $a\cos A=b\cos B$，化簡可得$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$]

(14) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$

(15) 40

(16) $\frac{15}{2}$

因為$\triangle APQ$與$\triangle ABC$共用一個$\angle A$，這兩個三角形的面積比為其共角夾邊的乘積比，即欲使$\triangle APQ$之面積為$\triangle ABC$面積之一半，則須$\overline{AP}\times\overline{AQ}=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}=45$。

假設$x=\overline{AP}$，$y=\overline{AQ}$，$t=\overline{PQ}$。$\triangle APQ$中，$t^2=x^2+y^2-2xy\cos A$。因為$x^2+y^2\geq 2xy=90$，所以，$t^2\geq 90-\frac{135}{4}=\frac{225}{4}\Rightarrow t\geq\frac{15}{2}$。

(17) [提示：考慮$\Delta AOB=\Delta AOC+\Delta BOC$，再利用三角形的面積公式，即可得證]

(18) 提示：ΔABP 的面積=ΔACP 面積+ΔCBP 面積提示：

(19) 略

(20) $a=7$，$b=8$，$c=5$ 或 $a=7$，$b=5$，$c=8$ $r=\sqrt{3}$

(21) $\sqrt{3}<x+y\le 2\sqrt{3}$

[提示：根據餘弦定理$=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy$ $\Rightarrow (x+y)^2=3(xy+1)$，因為 $xy=x^2+y^2-3\ge 2xy-3 \Rightarrow xy\le 3 \Rightarrow (x+y)^2=3(xy+1)\le 12$]

(22) (b)$\frac{50}{4}$ [提示：利用 $pq\le\frac{1}{4}(p+q)^2$]

(23) (a)$\sqrt{5}$ (b)$\sqrt{3}$ (提示：(b)$\cos B=\frac{c^2+3}{2c}=\frac{1}{2}(c+\frac{3}{c})\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$)

(24) [提示：$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D$，因為 $\angle ACD=90^\circ$，$\cos D=\frac{c}{d}$，代入前面的式子化簡即可得證]

(25) [提示：如(24)題圖，只需證明$\overline{AR}=s-a$ 即可]

(26) $\frac{r}{2R}$

[提示：如(24)題圖，$\Delta PQR=\Delta RQI+\Delta RPI+\Delta PQI=\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-A)+\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-B)+\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-C)=\frac{1}{2}r^2(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{1}{4R}r^2(a+b+c)=\frac{r^2s}{2R}$，$\Delta ABC=rs$]

(27) [提示：利用$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D$，而且$\angle B+\angle D=180^\circ$]

(28) $\overline{AD}=\overline{AE}=6$ [提示：設$\overline{AD}=x$，$\overline{AE}=y$，$\Delta ADE=\frac{1}{2}xy\sin 40^\circ=\frac{1}{2}\ \Delta ABC=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times 9\times 8\times\sin 40^\circ) \Rightarrow xy=36$。又因為

$\overline{DE}^2=x^2+y^2-2xy\cos 40^\circ\ge 2xy-2xy\cos 40^\circ=72(1-\cos 40^\circ)$等號成立時，$x=y=6$。]