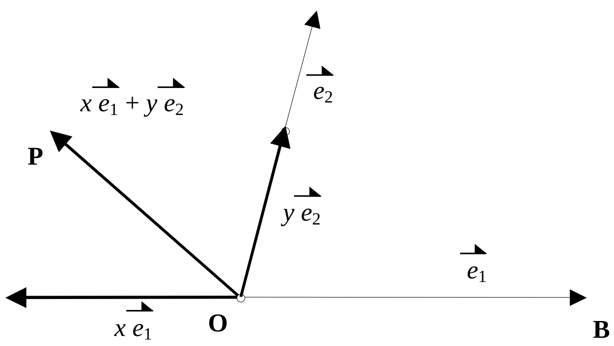
第二章 平面上的坐標變換

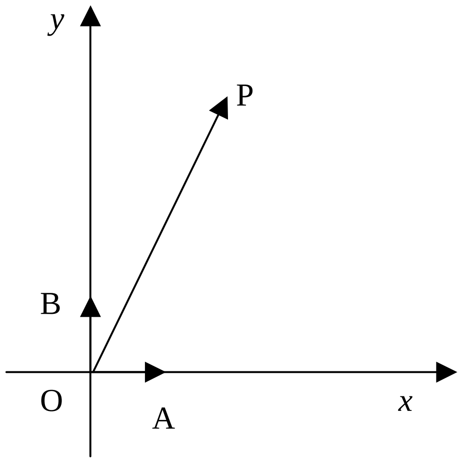
§2−1 平移坐標軸

(甲)平面坐標的意義

(1)平面坐標的意義：

給定平面上一個定點O與兩個不平行的向量$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$，平面上任意點P，可以找到實數x,y滿足$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，我們稱**S≡ (O；$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$)**為平面上的一個坐標系，而$(x,y)$稱爲**P點相關於S的坐標**。簡記爲**S坐標**，其中O點稱爲這個座標的基準點**(原點)**，而$\overrightarrow{e_1}$**,**$\overrightarrow{e_2}$稱爲**S的基底**。





(2)直角坐標系：

在平面上選定一個基準點O及一組互相垂直且長度相等的向量$\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$，當作基底，這樣構成的坐標系稱爲直角坐標系。通過O點且包含$\overrightarrow{i}$的直線定爲***x*軸**，通過O點且包含$\overrightarrow{j}$的直線定爲***y*軸**。

[討論]：

(a)設$\overrightarrow{i}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{j}=\overrightarrow{OB}$，請問A、B的坐標如何表示？

$\because \overrightarrow{OA}=1\cdot\overrightarrow{i}+0\cdot\overrightarrow{j}$，$\therefore$A的坐標爲(1,0)。

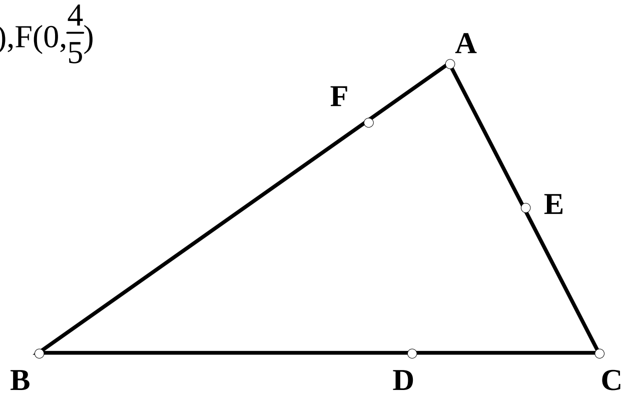
$\because \overrightarrow{OB}=0\cdot\overrightarrow{i}+1\cdot\overrightarrow{j}$，$\therefore$B的坐標爲(0,1)。

(b)設$\overrightarrow{OP}=x\cdot\overrightarrow{i}+y\cdot\overrightarrow{j}$，則P的坐標爲$(x,y)$。

(c)根據向量的坐標表示法，可以將$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{i}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{j}=\overrightarrow{OB}$用坐標表成

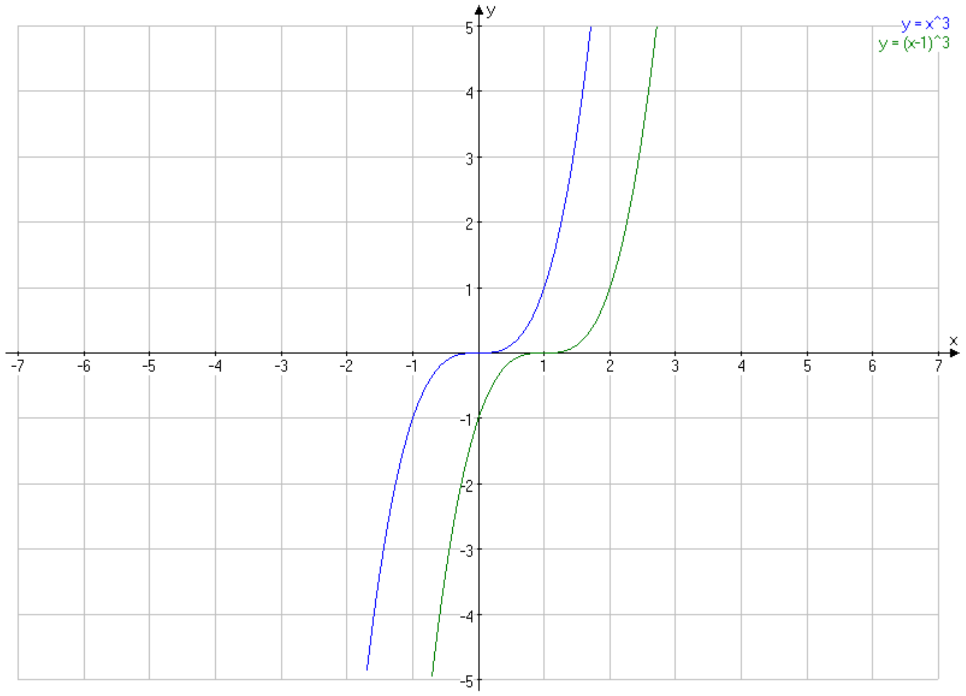
$\overrightarrow{OP}=(x,y)$、$\overrightarrow{i}=\overrightarrow{OA}=(1,0)$、$\overrightarrow{j}=\overrightarrow{OB}=(0,1)$。

[例題1] 在ΔABC中，D、E、F分別在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上，
且BD：DC=2：1， AE：EC=1：1，AF：FB=1：4。
若取基準點為B，$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{BC}$，
請問：A、B、C、D、E、F在坐標系$(B;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$的坐標為何？
Ans：$A(0,1),B(0,0),C(1,0),D(\frac{2}{3},0),E(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),F(0,\frac{4}{5})$



(乙)坐標軸的平移

(1)坐標平移可以簡化方程式：
如下圖，觀察Γ：$y=x^3$與 Γ'：$y=x^3-3x^2+3x-1$ 這兩個方程式的圖形：



這兩個圖形「長相一樣」，只要將Γ向右平移一單位就會與Γ'重合，換一個說法，若是我們將坐標原點向右移一個單位，而基底不變，圖形Γ'不動，那麼從新的坐標系來看的話，Γ'對於新坐標系的相對位置與Γ對於原坐標系的相對位置是一樣。因此在新坐標系下Γ'的方程式的樣子$y'=(x')^3$就會與Γ的方程式$y=x^3$相同。總之，「平移」的目的是選擇更好的觀察點，幫助我們認識客觀的世界。

(2)推導移軸公式：
從上面的說明，我們將這種僅改變原點的位置而基底不變(即座標軸的方向和長度單位不變)的坐標變換，稱爲座標軸的平移，簡稱移軸。

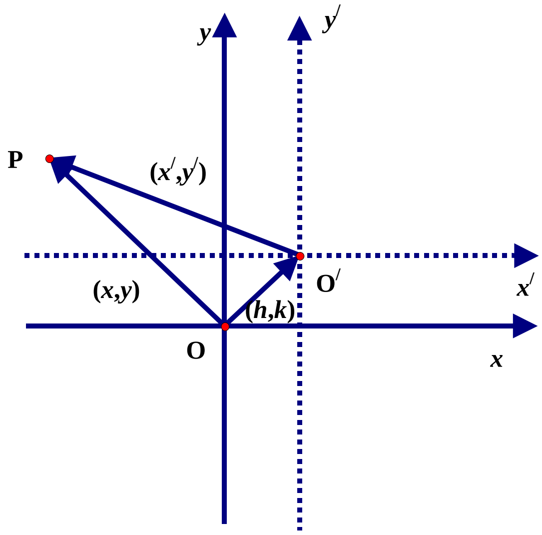
[推導移軸公式]：

若設點P在$S\equiv(O,\vec{i},\vec{j})$與$S'\equiv(O',\vec{i},\vec{j})$下的坐標爲分別爲$(x,y)$、$(x',y')$，其中$O'$在S坐標系下坐標爲$(h,k)$，

則點P的原坐標(x,y)與新坐標(x',y')的關係式爲$\begin{cases}x=x'+h\\y=y'+k\end{cases}$。

[過程]：

根據已知條件$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}$，$\overrightarrow{O'P}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$
因爲$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$
$\Rightarrow x\vec{i}+y\vec{j}=h\vec{i}+k\vec{j}+x'\vec{i}+y'\vec{j}$
$\Rightarrow(x,y)=(h,k)+(x',y')$
$\Rightarrow x=x'+h$，$y=y'+k$



例子：
平移座標軸，把原點移到點$O'(2,1)$，
試求下列各點的新坐標：A(3,4)、
[解法]：
設A點新的坐標爲(m,n)
根據前面的結果可知 $(3,4)=(2,1)+(m,n)$
$\Rightarrow 3=m+2$，$4=n+1\Rightarrow m=1,n=3$
所以A點的新坐標爲(1,3)。

(練習1) 平面上一坐標系，若將坐標軸平移，以$O'(2,1)$爲新的原點，
則請寫出下列表格：

舊坐標	(2,1)		(a,b)	
新坐標		(3,−4)		(a,b)

Ans：

舊坐標	$(-2,-1)$	$(5,-3)$	(a,b)	$(a+2,b+1)$
新坐標	$(-4,-2)$	$(3,-4)$	$(a-2,b-1)$	(a,b)

(3)移軸後方程式的變化：

考慮圓C方程式$x^2+y^2-4x-2y=0$，我們現在移軸到適當的原點(h,k)，根據移軸公式$\begin{cases}x=x'+h\\ y=y'+k\end{cases}$可得$(x'+h)^2+(y'+k)^2-4(x'+h)-2(y'+k)=0$，

經整理可得，$x'^2+y'^2+(2h-4)x'+(2k-2)y'+(h^2+k^2-4h'-2k)=0$，這是移軸後所得的方程式，現在取新原點$O'(2,1)$，則新的方程式中$x'$、$y'$項的係數爲 0，新的方程式變爲$x'^2+y'^2=5$，所以圓C是一個以$O'(2,1)$爲圓心，半徑$\sqrt{5}$ 的圓。在這裡我們得到一個啓示：當我們移軸到適當的原點時，可使方程式消去某些項，幫助我們辨識方程式所繪製的圖形，使得新的方程式比原方程式更加簡明。

結論： 在平面坐標上，若圖形Γ的方程式爲$\boldsymbol{f(x,y)=0}$，經平移坐標軸的原點至$O'(h,k)$，則圖形Γ的新方程式爲$\boldsymbol{f(x'+h,y'+k)=0}$。

例子 1：

平移坐標軸到新原點$O'(h,k)$

(a)求曲線Γ：$x^2-6xy+y^2-8x+8y+12=0$ 之新方程式。

(b)Γ對新坐標系的方程式是否仍是二元二次方程式。

(c)Γ的新方程式可以消去兩個一次項嗎？

[解法]：

(a)由移軸公式$\begin{cases}x=x'+h\\ y=y'+k\end{cases}$代入曲線Γ的方程式

$(x'+h)^2-6(x'+h)(y'+k)+(y'+k)^2-8(x'+h)+8(y'+k)+12=0$

化簡爲$(x')^2-6x'y'+(y')^2+(2h-6k-8)x'+(-6h+2k+8)y'+(h^2-6hk+k^2-8h+8k+12)=0$

(b)新的方程式仍爲二元二次方程式。

(c)若$O'(h,k)$滿足$\begin{cases}2h-6k-8=0\\ -6h+2k+8=0\end{cases}$，此時$(h,k)=(1,-1)$，

即可讓新的方程式中x'、y'的係數爲 0。

新的方程式化爲$(x')^2-6x'y'+(y')^2+4=0$

例子 2：

平移座標軸到新原點$O'(h,k)$

(a)求曲線Γ：$4x^2-4xy+y^2-2x-4y+8=0$ 之新方程式。

(b)Γ對新坐標系的方程式是否仍是二元二次方程式。

(c)Γ的新方程式可以消去兩個一次項嗎？

[解法]：

(a)由移軸公式$\begin{cases}x=x'+h\\ y=y'+k\end{cases}$代入曲線Γ的方程式

$\Rightarrow 4(x'+h)^2-4(x'+h)(y'+k)+(y'+k)^2-2(x'+h)-4(y'+k)+8=0$

$\Rightarrow 4(x')^2-4x'y'+(y')^2+(8h-4k-2)x'+(-4h+2k-4)y'+(4h^2-4hk+k^2-2h-4k+8)=0$

(b)新的方程式仍爲二元二次方程式。

(c)要消去兩個一次項 $\Leftrightarrow \begin{cases} 8h-4k-2=0 \\ -4h+2k-4=0 \end{cases}$，但這個聯立方程組無解！

因此**無法**找到(h,k)使得Γ的新方程式可以消去兩個一次項。

(4)二元二次方程式的化簡：

從上面兩個例子，可知移軸後，特殊的二元二次方程式對新的坐標系的方程式仍是「二元二次」並且$\boxed{\text{二次項的對應係數不改變}}$，這樣的結果對於一般的二元二次方程式

Γ ：$\boldsymbol{ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0}$ $\quad$ $\boldsymbol{(a^2+b^2+c^2\neq 0)}$ ……..①

是否會成立？

[推導一般情形]：

把移軸公式：$\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases}$代入$\Gamma$的原方程式得

$$a(x'+h)^2+b(x'+h)(y'+k)+c(y'+k)^2+d(x'+h)+e(y'+k)+f=0$$

乘開後按①式的形式整理得$\boldsymbol{ax'^2+bx'y'+cy'^2+d'x'+e'y'+f'=0}$……..②

其中$\begin{cases} d'=2ah+bk+d \\ e'=bh+2ck+e \\ f'=ah^2+bhk+ck^2+dh+ek+f \end{cases}$ 比較①②可以發現

移軸後，二元二次方程式對新坐標系的方程式仍是二元二次方程式，並且二次項的對應係數不改變。

另一方面，考慮$\begin{cases} d'=2ah+bk+d \\ e'=bh+2ck+e \end{cases}$中$h,k$的係數行列式$\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix}$

當$\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix}=4ac-b^2\neq 0$ 時，

方程組$\begin{cases} 2ah+bk+d=0\ (d'=0) \\ bh+2ck+e=0\ (e'=0) \end{cases}$可以解出唯一的新原點$O'(h_0,k_0)$。

若選擇新原點$O'(h_0,k_0)$來平移坐標軸，可使曲線Γ的新方程式化簡成

$$\boldsymbol{\Gamma：ax'^2+bx'y'+cy'^2+f'=0}\text{………………③}$$

③式中的二次項的係數不改變，並且兩個一次項同時消去，而常數項$\boldsymbol{f'}$的值是將新原點$\boldsymbol{(h_0,k_0)}$代入下列的二次式$\boldsymbol{g(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f}$，即$\boldsymbol{f'=g(h_0,k_0)}$。

[討論]：

若$\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix}=0$ $(b^2-4ac=0)$時，是否可以選取坐標原點$O'(h,k)$，使得②式中一次項的係數均為 0？

結論：
設$\boldsymbol{g(x,y)= ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f}$，二次曲線Γ：$\boldsymbol{g(x,y)=0}$，若$\boldsymbol{b^2-4ac\neq 0}$ 時，移軸到新原點$\mathbf{O'}(\boldsymbol{h_0,k_0})$，可使Γ的方程式消去一次項而化簡成Γ：$\boldsymbol{ax'^2+bx'y'+cy'^2+f'=0}$，其中$(\boldsymbol{h_0,k_0})$是方程組$\begin{cases}2ah+bk+d=0\\ bh+2ck+e=0\end{cases}$的解，常數項$\boldsymbol{f'=g(h_0,k_0)}$。

[例題1] 將坐標系適當的平移，使方程式$x^2+xy+y^2+4x+5y+6=0$ 的x,y項係數爲 0，得新方程式爲何？　Ans：$x'^2+x'y'+y'^2-1=0$

[例題2] 二次曲線Γ ：$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，若$b^2-4ac\neq 0$，對移軸至新原點$O'(h,k)$的新坐標系而言，Γ的新方程式爲$ax'^2+bx'y'+cy'^2+f'=0$，
請證明Γ對稱於$O'(h,k)$。
[證明]：
$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 對稱於$O'(h,k)$ $\Leftrightarrow$ $ax'^2+bx'y'+cy'^2+f'=0$ 對稱於$(0,0)$
因此只須證明$ax'^2+bx'y'+cy'^2+f'=0$ 對稱於$(0,0)$
設$P(m,n)$爲$ax'^2+bx'y'+cy'^2+f'=0$ 上的一點，
$\Rightarrow am^2+bmn+cn^2+f'=0$
$\Rightarrow a(-m)^2+b(-m)(-n)+c(-n)^2+f'=0$
故P點對原點$(0,0)$之對稱點$Q(-m,-n)$亦在$ax'^2+bx'y'+cy'^2+f'=0$。
故得證 Γ對稱於$O'(h,k)$。
一般而言，二次曲線Γ ：$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$
當$b^2-4ac\neq 0$ 時，
二次曲線Γ可找到對稱中心(h,k)就是消去一次項的平移新原點。此時二次曲線Γ稱爲**有心錐線**。
當$b^2-4ac=0$ 時，
二次曲線Γ沒有對稱中心，此時二次曲線Γ稱爲**無心錐線**。

(練習2) 在坐標平面上，移軸到新原點$(-4,3)$，

(1)若A點的原坐標爲$(-3,5)$，則A點的新坐標爲______________。

(2)若B點的新坐標爲$(1,4)$，則B點的原坐標爲_______________。

(3)已知直線L的原方程式爲 $2x-3y+4=0$，

則直線L的新方程爲____________________。

(4)已知圓C的新方程式爲$x'^2+y'^2=25$，

則圓C的原方程式爲________________________。

Ans：(1)$(1,2)$　(2)$(-3,7)$　(3)$2x'-3y'-13=0$　(4) $(x+4)^2+(y-3)^2=25$

(練習3) 設拋物線Γ：$y^2-4x+4y+8=0$，將原坐標系平移(h,k)後，Γ的新方程式爲 $y'^2=4x'$，求(h,k) =_____________。Ans：$(1,-2)$

(練習4) 試求出Γ：$5x^2-6xy+5y^2-6x-22y+21=0$ 的對稱中心。

Ans：$(3,4)$

(練習5) 請選擇適當的新原點$O'(h,k)$，平移坐標軸，使得下列的二次曲線的新方程式不含一次項x'及y'。

(a)$x^2+y^2+x=\frac{7}{4}$　(b)$3x^2+y^2+6x+2y+1=0$　(c)$y^2-x^2+x+y=3$

(d)$xy+x+y=0$　(e)$x^2+xy+y^2-2x+3y+4=0$

Ans：(a)$x'^2+y'^2=2$，$O'(\frac{-1}{2},0)$ (b)$\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{3}=1$，$O'(-1,-1)$

(c)$\frac{y'^2}{3}-\frac{x'^2}{3}=1$，$O'(\frac{1}{2},\frac{-1}{2})$ (d)$x'y'=1$，$O'(-1,-1)$

(e)$x'^2+x'y'+y'^2=\frac{7}{3}$，$O'(\frac{7}{3},\frac{-8}{3})$

(練習6) 下列哪一方程式無法利用坐標軸平移至新原點$O'(h,k)$後，

使其沒有x、y項？

(A)$x^2+y^2+4x-6y+12=0$　(B)$y^2-4x-6y+1=0$　(C)$4x^2-4xy+y^2-2x-4y+8=0$

(D)$x^2-6xy+y^2-8x+8y+12=0$(E)$x^2+2xy+2y^2+x+y+6=0$

Ans：(B)(C)

(丙)圖形的平移

(1)圖形平移：

方程式$f(x,y)=0$ 的圖形Γ沿著$\vec{a}=(h,k)$平移可得方程式$f(x-h,y-k)=0$ 的圖形Γ'

(2)坐標軸平移：

方程式$f(x-h,y-k)=0$ 的圖形Γ'在移軸至(h,k)的座標(x',y')下方程式爲$f(x',y')=0$

[例題3] (1)試畫出 $\frac{|x|}{4}+\frac{|y|}{2}=1$ 之圖形。

(2)利用(1)及坐標軸的平移畫$\frac{|x-4|}{4}+\frac{|y-2|}{2}=1$ 之圖形。

[例題4] 圖形Γ：$3x^2+2y^2-6x-1=0$ 沿著向量 $\vec{a}=(3,-2)$平移，請問新的圖形Γ'的方程式為何？　Ans：$3x^2+2y^2-24x+8y+54=0$

(練習7) (1)請畫出$\dfrac{|x|}{3}+\dfrac{|y|}{4}=1$ 之圖形。

(2)利用坐標平移的方法，畫出$\dfrac{|x-1|}{3}+\dfrac{|y+2|}{4}=1$ 之圖形。

(練習8) 將圖形Γ：$x^2+2y^2-4=0$ 依平行直線 $3x-y-2=0$ 之方向，向右上方移動$\sqrt{10}$單位後，形成新的圖形Γ'，請問Γ'的方程式為何？
Ans：$x^2+2y^2-2x-12y+15=0$

綜合練習

(1) 將坐標軸平移，以$(-1,1)$爲新原點，若圖形Γ之方程式爲$x^2+xy+2y^2-x-2y-1=0$，則Γ之新方程式爲____________________，又欲使新方程式不含一次項，則此平移應以________爲新原點。

(2) 方程式 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$ 請利用平移坐標軸的方法，判別出這是那一種曲線？

(3) 在直角坐標中，曲線C的方程式爲$y=\cos x$，現在平移坐標軸，將原點移至$O'(\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2})$，則在新的坐標系中，曲線C的方程式爲

(A)$y'=\sin x'+\frac{\pi}{2}$ (B)$y'=-\sin x'+\frac{\pi}{2}$ (C)$y'=\sin x'-\frac{\pi}{2}$ (D)$y'=-\sin x'-\frac{\pi}{2}$。

(4) 方程式Γ：$(x-2y+3)(x+2y-5)=4$，現在移軸到新原點$(-1,4)$，請問新的方程式爲何？

(5) 請證明圓的方程式$x^2+y^2+ax+by+c=0$，經過移軸之後半徑不變。

(6) 將坐標軸平移至新原點$O'(h,k)$後，兩直線 $2x+3y-4=0$ 和$x-2y+1=0$ 對新坐標的方程式分別爲 $2x'+3y'-3=0$ 和$x'-2y'+5=0$，試求(h,k)=？

(7) 設拋物線Γ：$y=x^2$上有兩點P、Q，當坐標軸平移到$O'(h,k)$後，P、Q的新坐標依次爲$(5,7)$、$(7,19)$，

(a)求新坐標$O'(h,k)$？ (b)求拋物線Γ的新方程式？

(8) 下列的二次曲線，那一條有對稱中心，若有請求出來；若無，說明理由。

(a)$5x^2+4xy+8y^2-2x+28y-7=0$

(b)$7x^2-6xy-y^2-26x+2y+7=0$

(c)$4x^2-4xy+y^2+2x+4y+8=0$

進階問題

(9) 使拋物線$y = 2x^2 - x - 2$ 沿直線L_1：$y = 2x$方向平行移動，求與直線L_2：$x + y = 1$，相切之拋物線方程式爲________。(請注意這個問題是移動圖形，而非坐標)

圖形依$y=2x$的方向移動，代表圖形沿著向量$(k,2k)$平移。

(10) 請求出$|3x-2|+|2y+1|=6$ 的圖形所圍成之區域的面積=？

綜合練習解答

(1) $x'^2+x'y'+2y'^2-2x'+y'=0$，$(\frac{2}{7},\frac{3}{7})$

(2) 雙曲線 [提示：將新原點置於$O'(3,2)$，即可得新的方程式$y'=\frac{1}{x'}$]

(3) (B)

(4) $(x'-2y'-6)(x'+2y'+2)=4$

(5) 略

(6) $(2,-1)$

(7) (a) $(-3,-3)$　(b) $y'-3=(x'-3)^2$

[提示： x以$x'+h$，y以$y'+k$代入 Γ：$y=x^2$得新方程式：$y'+k=(x'+h)^2$

新坐標(5,7)、(7,19)代入求$h,k \Rightarrow \begin{cases} 7+k=(5+h)^2 \\ 19+k=(7+h)^2 \end{cases}$，解出$(h,k)=(-3,-3)$]

(8) (a)對稱中心$(1,-2)$ (b)對稱中心$(1,-2)$

(c)因為$(-4)^2-4\cdot4\cdot1=0$，故無對稱中心。

(9) $y=2x^2-5x+3$

[解法]： ∵沿著斜率為 2 的直線移動， ∴ x以$x-\alpha$，y以$y-2\alpha$

代入 Γ：$y=2x^2-x-2$ 得$y-2\alpha=2(x-\alpha)^2-(x-\alpha)-2\cdots\cdots(1)$

此與直線L_2：$x+y=1$ 相切，

消去y得　$1-x-2\alpha=2(x^2-2\alpha x+\alpha^2)-x+\alpha-2$

整理得 $2x^2-4\alpha x+2\alpha^2+3\alpha-3=0$　有二重根，

因而判別式$D_x=(-4\alpha)^2-4\times2\times(2\alpha^2+3\alpha-3)=0$

得$\alpha=1$　代入(1)得$y=2x^2-5x+3$

(10) 12 [提示：$3|x-\frac{2}{3}|+2|y+\frac{1}{2}|=6 \Rightarrow \frac{|x+\frac{2}{3}|}{2}+\frac{|y+\frac{1}{2}|}{3}=1$]