第四十六單元　函數的概念

(甲)函數的定義與圖形

(1)函數的表徵

設 x 與 y 是兩個變數，若 y 的值隨著 x 所取的值依某一種「對應法則 f」而唯一確定時，我們稱這種對應法則為『y 是 x 的函數』，並用符號 $\boldsymbol{y=f(x)}$表示。

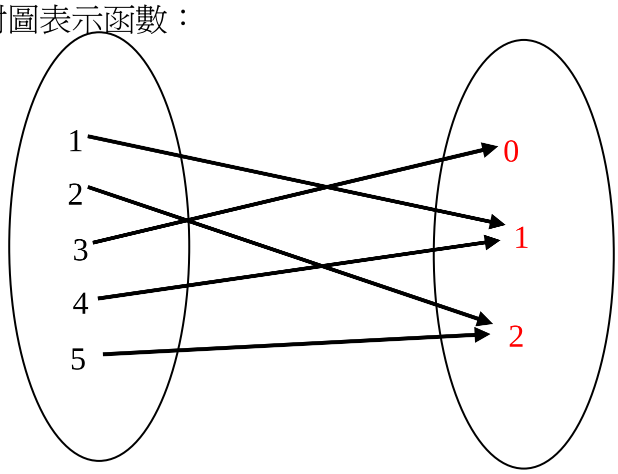
從前面的敘述，可以得知函數的概念是由三部分構成：

定義域 —— 對應法則 f ——→ 值域

一般來說，對應法則 f (函數)的表現方式有幾種類型：

(1°)用映射圖表示函數：

例如：



上述映射圖表示 1,2,3,4,5 分別對應它們除以 3 所得的餘數。

(2°)用數學式子表示函數：

$f(x)=3x^2-5x-6$　　(多項式函數)

$f(x)=2^x$　　(指數函數)

$f(x)=\log_3 x$　　(對數函數)

$f(x)=\sin x$　　(正弦函數)

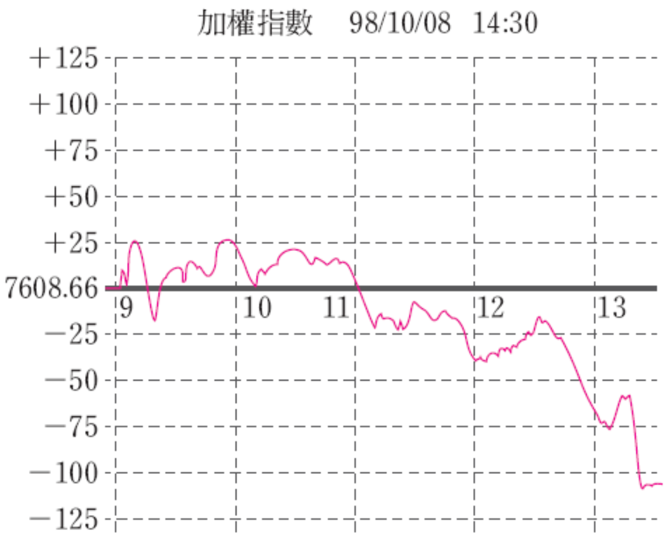
(3°)用圖或表格來表示函數：

設 $a_n(n=1,2,\ldots,10)$表示 $3n$ 除以 4 所得的餘數，下表可以用來表示 n 對應到 a_n 的函數關係，

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2

表 1–1

右圖是 2009 年 10 月 8 日，台北股票市場的大盤走勢圖，這個圖代表了當日加權指數的漲跌點數與時間的函數關係。



(4°)用敘述來表示函數：

<u>刻卜勒</u>(Johannes Kepler, 1571~1630)行星運動的第三定律：「行星公轉時間(T)的平方和行星到太陽的平均距離(R)的立方成正比。」這段話描述了行星公轉時間(T)與行星到太陽的平均距離(R)的函數關係。

(2)函數的定義

要探討函數的極限、函數的微分、積分及函數圖形的描繪，這些題材需要更豐富的函數知識做爲基礎。我們熟悉的函數中，所涉及的都是兩個變數 x 和 y 之間的一種對應關係，而 x 和 y 變動的範圍都可用“集合”來描述。

函數中所涉及的都是自變數(量)x 和應變數(量)y 之間的一種對應關係，而 x 和 y 變動的範圍都可用“集合”來描述。

自變數(量)x 所成的集合稱爲**定義域**。

應變數(量)y 所成的集合稱爲**值域**。

例如：

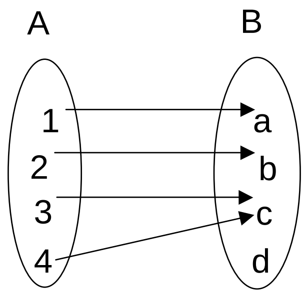
(1°)如表 1–1，設函數 f 代表 n 對應到 a_n 的函數，即 $f(n)=a_n$。

定義域爲{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}。值域爲{0,1,2,3}

(2°)正方形面積 A 與邊長 x 的關係爲 $A=x^2$，x 對應到 A 爲一個函數關係。

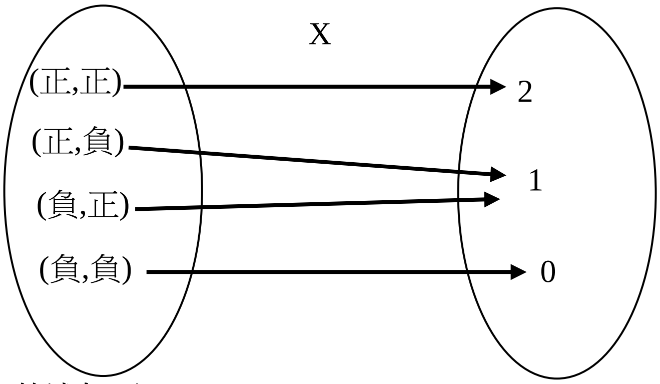
定義域爲$\{x|x>0\}$，值域爲{A|A>0}。

(3°)設 A={1,2,3,4}、B=$\{a,b,c,d\}$，從 A 對應 B 的函數關係 f，如下圖 1–16 的映射圖所示定義域爲{1,2,3,4}，值域爲$\{a,b,c\}$



(4°)指數函數 $f(x)=2^x$：R→R
定義域為 R，值域為$\{y|y>0\}$。

(5°)擲二個均勻銅板一次，設隨機變數 X 代表出現正面的次數，
則 X 是定義在樣本空間 S 上的函數，其中 S 為{(正,正)、(正,負)、(負,正)、(負,負)}。
定義域為樣本空間 S，值域為{0,1,2}

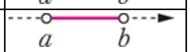


底下用集合的觀點把函數的概念進一步敘述如下：

函數的定義： 設 A、B 是兩個非空集合，若集合 A 中的任一個元素 x，在集合 B 中恰有一元素 y 與 x 對應，此種對應法則 f 稱為從 A 映到 B 的函數，記為 f：A→B。

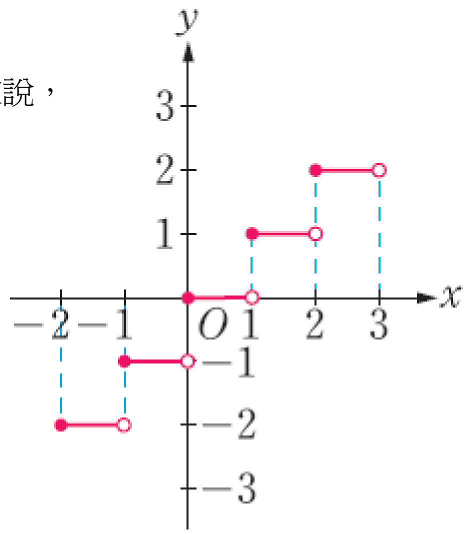
1.定義域與值域：
在函數 f：A→B 中，自變數(量)所成的集合 A 稱為函數 f 的**定義域**，集合 B 稱為 f 的**對應域**。應變數(量)$f(x)$ 所形成的集合$\{ f(x) \mid x\in A \}$ 稱為 f 的**值域**，它是 B 的子集，記作 $f(A)$，即 $f(A)=\{ f(x) \mid x\in A \}$。
我們一般討論的定義域與對應域均為實數集 R 或實數集 R 的子集合，當函數 $f(x)$ 的\「定義域」特別聲明時，$f(x)$的「定義域」指的是"使應變量 $f(x)$ 為實數"之所有實數 x 組成的集合。
2.函數的圖形：
若 A、B 為實數 R 的子集合，當 x 在 A 內變動時，坐標平面上所有點$(x,f(x))$形成的軌跡稱為函數 f 的圖形。

3. 區間的表示法
討論函數的定義域或值域，常用到區間的概念，下表是一些常用的區間符號。

名　稱	集　合	符　號	數軸表示
閉區間	$\{ x \mid a\le x\le b \}$	$[a,b]$	
開區間	$\{ x \mid a<x<b \}$	(a,b)	
半開半閉區間	$\{ x \mid a\le x<b \}$	$[a,b)$	
半開半閉區間	$\{ x \mid a<x\le b \}$	$(a,b]$	
閉區間	$\{ x \mid a\le x \}$	$[a,\infty)$	

開區間	$\{x \mid x<b\}$	$(-\infty, b)$	

[例題1] 設 x 爲實數，高斯符號 $[x]$ 爲不大於 x 的最大整數。
例如：$[-5]=5$，$[-3.2]=-4$，$[6.2]=6$，….
定義高斯符號函數 $f(x)=[x]$
(1)試求高斯符號函數 $f(x)$的值域。
(2)繪出高斯符號函數 $f(x)$的圖形。
[解法]：
(1)根據高斯符號$[x]$的定義，對於任意的整數 k 來說，
當 $k\le x<k+1$ 時，$f(x)=[x]=k$
故函數 $f(x)$的值域爲所有整數所成的集合。
(2)因爲　$k\le x<k+1$ 時，$f(x)=[x]=k$
所以我們可以分段來繪製函數 $f(x)$的圖形
當$-2\le x<-1$ 時，$f(x)=[x]=-2$，
當$-1\le x<0$ 時，$f(x)=[x]=-1$
當 $0\le x<1$ 時，$f(x)=[x]=0$
當 $1\le x<2$ 時，$f(x)=[x]=1$
…………
因此可以繪出函數 $f(x)$的部分圖形。

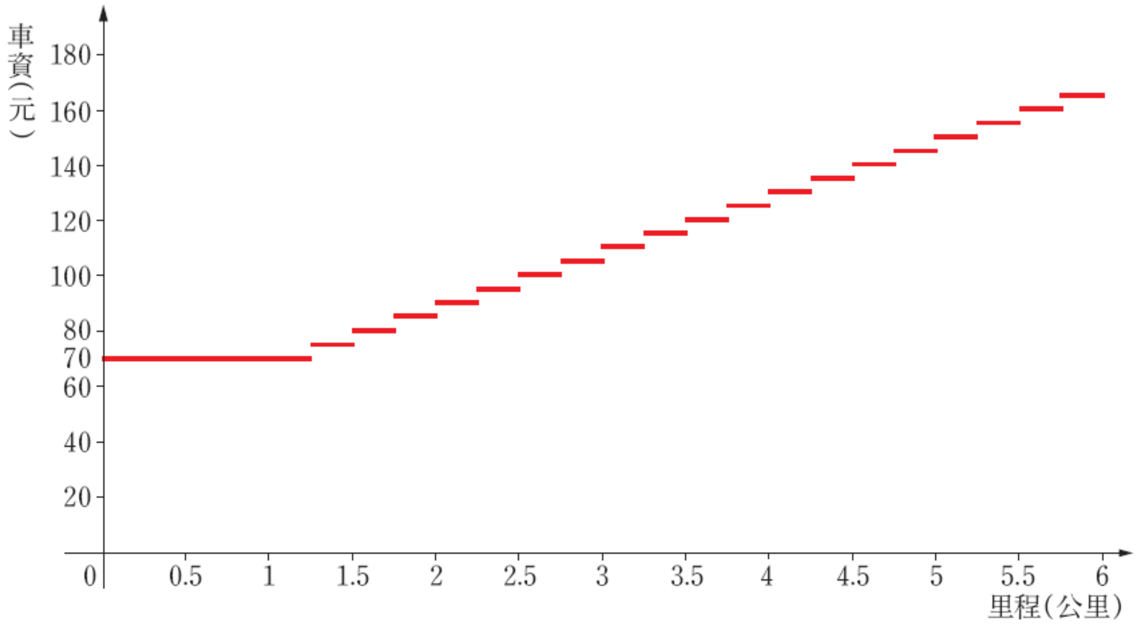


例題一中高斯函數的圖形爲階梯狀的函數，日常生活中像是計車車資與里程數、稅額與收入、用電量與電費間的函數關係，它們的圖形也像是階梯狀。

[例題2] 台北市計程車費率
一般計程車的車資爲里程的函數，以台北市的計程車爲例，早上 6 時至晚上 11 時期間，若是車速在 5 公里/時以上(即不計怠速時間的車資)，起程後在 1.25 公里內，基本費用 70 元，之後每隔 250 公尺跳表一次，一次增加 5 元。一般民眾搭計程車的里程大約都在 6 公里的範圍內，在這段範圍內可以建立計程車車資與里程的函數關係：
設車子行駛了 x 公里，其中 $0\le x\le 6$，計程車的車資爲 $f(x)$元，
(1)試畫出 $f(x)$的圖形。
(2)小安搭計程車行駛了 5.2 公里時，試求車資 $f(5.2)$爲多少元？
(3)試寫出 $f(x)$的值域。
[解答]：
(1)要計算車資就必須考慮，計算車資的表跳了幾次，每跳一次車資會多 5 元，因爲從 1.25 公里之後，每隔 0.25 公里跳表一次，里程數與車資的關係，可以用下表來表示：

里程 x 公里	$0<x\le 1.25$	$1.25<x\le 1.5$	$1.5<x\le 1.75$	…	$1.25+0.25(k-1)<x\le 1.25+0.25k$	…	$1.25+0.25\times 18<x\le 1.25+0.25\times 19$
車資 $f(x)$ 元	70	$70+5$	$70+5\times 2$	…	$70+5\times k$	…	$70+5\times 19$

$f(x)$的圖形如下所示：



(2) 因為 5.2−1.25=3.95，$\dfrac{3.95}{0.29}$=15.8，所以表跳了 16 次，因此車資 $f(5.2)=70+5\times16=150$(元)。

(3)因為在 6 公里的範圍內，車資最少 70 元，最多 165 元，且車資成等差，故 $f(x)$的值域為{70,75,80,…..,165}。

對於一個公民來說，要繳納多少稅額很重要的公共議題，下面的例題就是探討我國所得淨額與綜合所得稅間的關係：

[例題3] 我國的綜合所得稅是採取分級課稅的原則，下表是 99 年度綜合所得稅的計算公式：

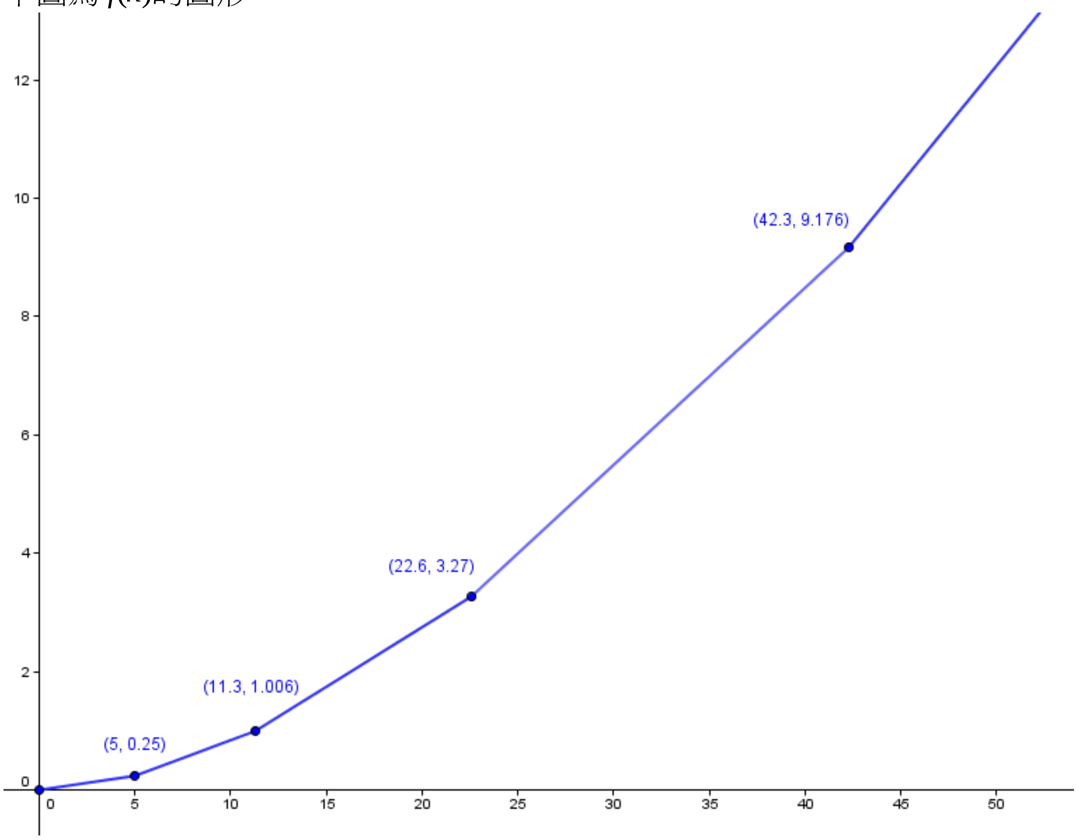
99 年度起綜合所得稅速算公式一覽表（單位：新臺幣元）			
綜合所得淨額	稅率	累進差額	全年應納稅額
500,000 元以下	5% −	0 元	＝全年應納稅額
500,000 元～1,130,000 元	12% −	35000 元	＝全年應納稅額
1,130,000 元～2,260,000 元	20% −	125,400 元	＝全年應納稅額
2,260,000 元～4,230,000 元	30% −	351,400 元	＝全年應納稅額
4,230,000 元以上	40% −	774,400 元	＝全年應納稅額

全年應繳納稅額是綜合所得淨額的函數，設綜合所得淨額收入 x 元，全年應

繳納稅額爲 $f(x)$元。
(1)一對兄弟 99 年度綜合所得淨額分別爲 112 萬元與 114 萬元，
他們應該繳納的稅額爲多少元？
(2)試畫出 $f(x)$的圖形。
[解法]：
(1)根據上表，可以得知：
$f(1120000)=1120000\times12\%-35000=99400$(元)。
$f(1140000)=1140000\times20\%-125400=102600$(元)
所得 114 萬元比 112 萬元多了 2 萬元，並且適用的稅率由 12%變成 20%，相差的稅額爲 102600–99400=3200 元，並不是 2 萬元×20%=4000 元，所以增加的 2 萬元的稅率並不是 20%。而是 1 萬元的稅率 12%，另外 1 萬元稅率 20%。
(2)根據上表：

當 $0\le x\le500000$ 時，	$f(x)=0.05x$
當 $50000<x\le1130000$ 時，	$f(x)=0.12x-35000$
當 $1130000<x\le2260000$ 時，	$f(x)=0.20x-125400$
當 $2260000<x\le4230000$ 時，	$f(x)=0.30x-351400$
當 $4230001<x$ 時，	$f(x)=0.40x-774400$

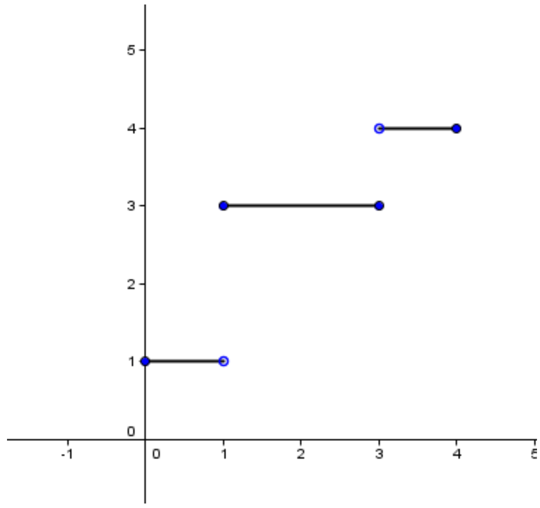
因此 $f(x)$的圖形是由一些線段與射線所組成的折線，每段折線的斜率就是綜合所得淨額在各段的稅率。
下圖爲 $f(x)$的圖形：



從上面例題的圖形可以得知，所得淨額雖然在 500000 元、1130000 元、2260000 元、4230000 元前後稅率不同，不過函數 $f(x)$的圖形是連續不斷，也就是說，所得淨額在 500000 元、1130000 元、2260000 元、4230000 元附近時，儘管稅率不同，但是繳納的稅額相差不大。

(練習1)$f(x)$的圖形如圖所示：試求：

(1)$f(1)$、$f(2.5)$的值。(2)$f(x)$的值域。



(練習2)設函數 $g(x)=\frac{|x|}{x}$，$x\neq 0$，

(1)試求此函數 $g(x)$的定義域、值域爲何？

(2)畫出 $g(x)$的圖形。

Ans：(1)R−{0}、{−1,1}

(3)函數相等

函數　$f(x)=|x|+|x-2|$　　　　(A)

去掉絕對值可化成　$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (x\leq 0)\\ 2 & (0\leq x\leq 2)\\ 2x-2 & (x\geq 2)\end{cases}$　　　　(B)

(B)式就是函數 $f(x)$的“分段定義”。

(A)與(B)所定義的函數，外觀（表徵）雖然不同，但它們其實是同一個函數或說它們是“相等函數”。什麼是相等的函數呢？

$\boxed{\text{若兩個函數 } f(x)\text{、}g(x)\text{的定義域相同，且對應法則相同，則稱 } f(x)\text{與 } g(x)\text{兩函數相等。}}$

例如：函數 $f(x)=x$ 與 $g(x)=\frac{x^2}{x}$，

因爲 $f(x)$的定義域 R 與 $g(x)$的定義域 $R-\{0\}=\{x\mid x\in R，x\neq 0\}$ 爲不同的集合，儘管對於每一個 $x\neq 0$，$f(x)=g(x)$。所以“f 與 g 不相等”。

如果 $f(x)=x$ 的定義域也限制在集合 $R-\{0\}$ 內，那麼 f 與 g 就是同一個函數了。

一般而言，當一個函數 $y=f(x)$ 的“定義域”未特別聲明時，$f(x)$的“定義域”指的是“使 $f(x)$ 爲實數之所有實數 x 組成的集合”。

[例題4] 設 $f(x)=x+1$，$g(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$。

(1)求函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的定義域，並問 $f(x)$ 與 $g(x)$ 相等嗎？

(2)描出 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形。

[解法]：

(1)　$g(x)$ 要有意義，其分母 $x-2$ 必須異於 0，即 x 不等於 2，因此 g 的定義域爲

$D=\{x\mid x\in R，x\neq 2\}$ (實軸 R 上剔除一點“$x=2$”)。

當 $x\in D$ 時，$g(x)=\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2}\overset{(x\neq 2)}{=}x+1$，

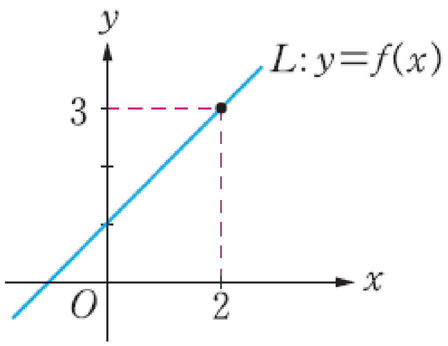
而 $f(x)=x+1$ (一次函數) 之定義域爲 R (全體實數集)。

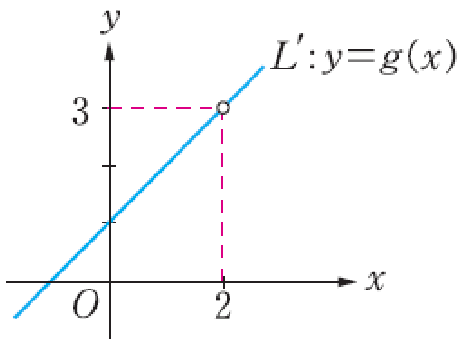
由於 $D\neq R$，故 $f\neq g$。

(2)

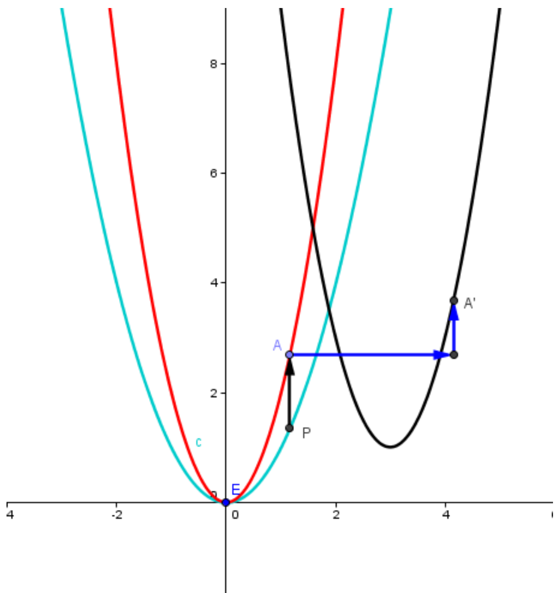
$f(x)=x+1$ 的圖形是一條直線 L，如下右圖。

$g(x)=x+1\ (x\neq 2)$ 的圖形 L'是“$y=f(x)$之圖形 L 去掉一點$(2，3)$，如下左圖。





(乙)函數圖形的變換



如右圖，函數 $y=x^2$ 經由伸縮平移可以得到 $y=2(x-3)^2+1$ 的圖形。一般而言，透過平移、伸縮等變換，可以將函數 $y=f(x)$的圖形變換成另一個函數的圖形，而這些新的函數與 $y=f(x)$具有特定的關係，接下來，我們來探討這些關係。

(1)水平與鉛直的平移

設$(a,f(a))$爲函數 $y=f(x)$圖形上的任一點，將$(a,f(a))$作水平與鉛直的平移，結果如下表：

點	變換　(c 爲正數)	點
$(a,f(a))$	向右平移 c 單位	$(a+c , f(a))$
$(a,f(a))$	向左平移 c 單位	$(a-c , f(a))$
$(a,f(a))$	向上平移 c 單位	$(a , f(a)+c)$
$(a,f(a))$	向下平移 c 單位	$(a , f(a)-c)$

根據上表，可以得知以下結果：

點$(a,f(a))$在$y=f(x)$圖形上 ⇔ 點$(a+c,f(a))$在$y=f(x-c)$的圖形上
點$(a,f(a))$在$y=f(x)$圖形上 ⇔ 點$(a-c,f(a))$在$y=f(x+c)$的圖形上
點$(a,f(a))$在$y=f(x)$圖形上 ⇔ 點$(a,f(a)+c)$在$y=f(x)+c$的圖形上
點$(a,f(a))$在$y=f(x)$圖形上 ⇔ 點$(a,f(a)-c)$在$y=f(x)-c$的圖形上
整理以上的結果，可以得知下表的結果：

變換前(原函數)	變換 (c 爲正數)	變換後(新函數)
$f(x)$	向右平移 c 單位	$f(x-c)$
	向左平移 c 單位	$f(x+c)$
	向上平移 c 單位	$f(x)+c$
	向下平移 c 單位	$f(x)-c$

(2)水平與鉛直的伸縮
設$(a,f(a))$爲函數$y=f(x)$圖形上的任一點，將$(a,f(a))$作水平與鉛直的伸縮，結果如下表：

點	變換 (c 爲正數)	點
$(a,f(a))$	水平伸縮 c 倍	$(ac , f(a)$
$(a,f(a))$	鉛直伸縮 c 倍	$(a , cf(a))$

根據上表，可以得知以下結果：

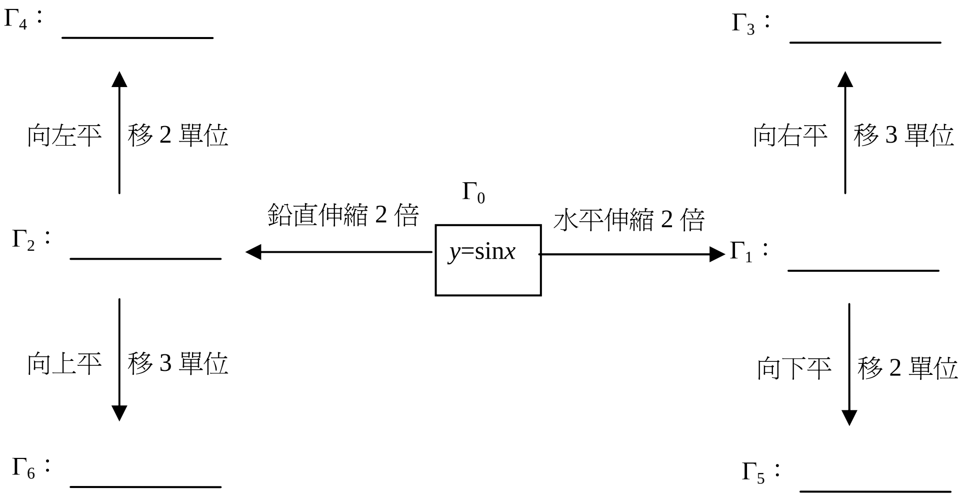
點$(a,f(a))$在$y=f(x)$圖形上 ⇔ 點$(ac , f(a))$在$y=f(\frac{x}{c})$的圖形上

點$(a,f(a))$在$y=f(x)$圖形上 ⇔ 點$(a , cf(a))$在$y=cf(x)$的圖形上

整理以上的結果，可以得知下表的結果：

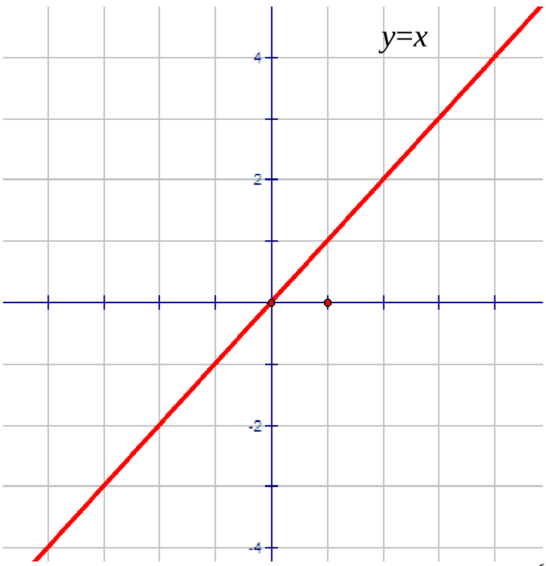
變換前(原函數)	變換 (c 爲正數)	變換後(新函數)
$f(x)$	水平伸縮 c 倍	$f(\frac{x}{c})$
	鉛直伸縮 c 倍	$cf(x)$

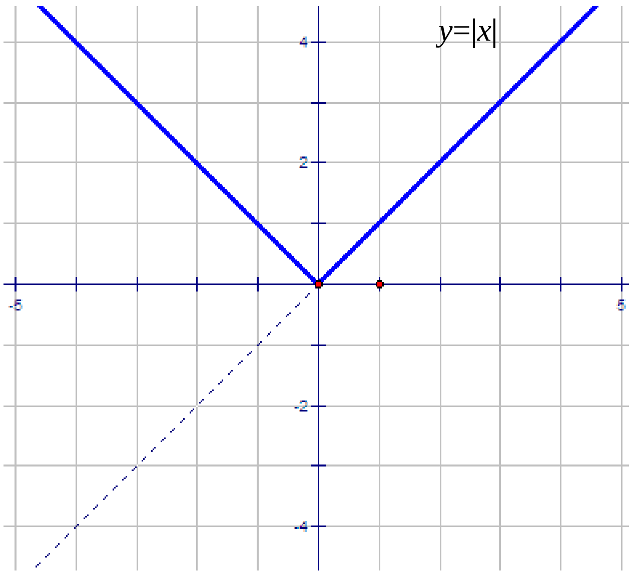
(練習3)寫出下列各空格所對應的函數：



(2) 絕對值函數 $y=|f(x)|$的圖形

前面討論了將函數圖形經由平移與伸縮形成新函數的圖形，而除了平移與伸縮之外，將函數 $y=f(x)$加絕對值形成一個新的函數 $y=|f(x)|$，$y=|f(x)|$的圖形與 $y=f(x)$的圖形，也會有特定的關係。



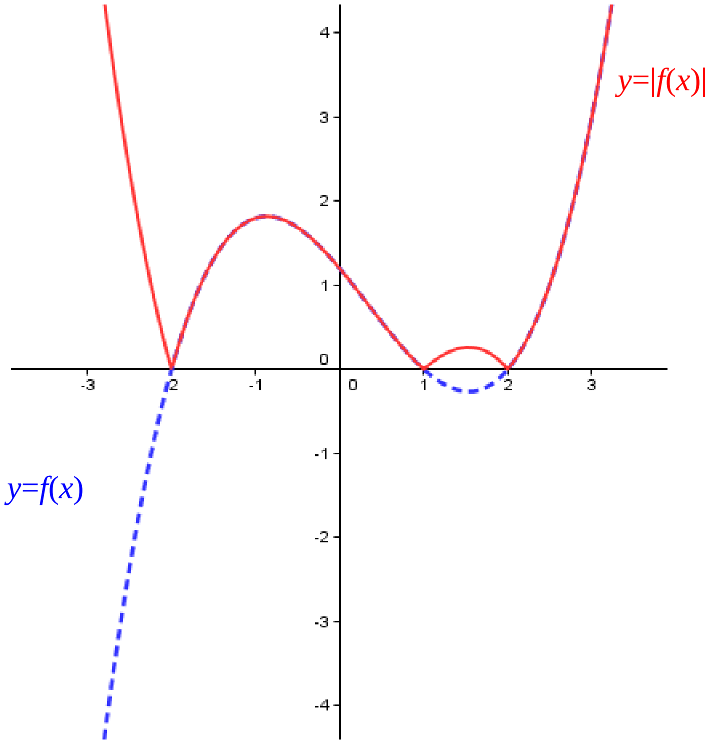


觀察函數 $y=x$ 與 $y=|x|$的圖形，因為$|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x\leq 0 \end{cases}$，故可以得知

$x\geq 0$ 的部分它們都是相同的射線。

$x\leq 0$ 的部分，將 $y=x$ 在 x 軸下方的圖形對 x 軸作對稱圖形，即可得到 $y=|x|$的圖形。

上面的結果，可以歸結成函數 $y=x$ 在 x 軸上方的圖形不變，而在 x 軸下方的圖形對 x 軸作對稱圖形，這樣即可形成函數 $y=|x|$的圖形。



一般而言

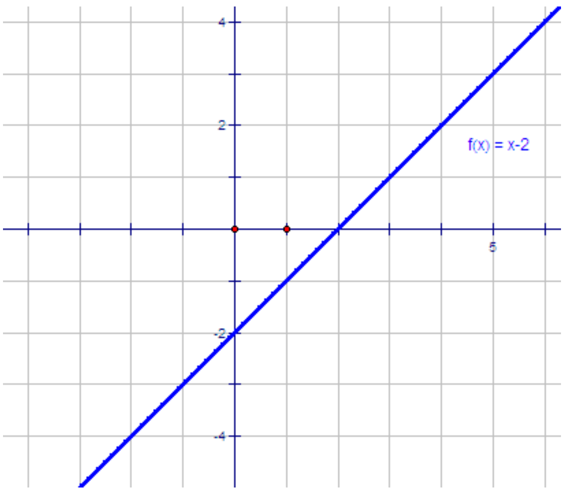
函數 $y=f(x)$與 $y=|f(x)|$兩圖形的關係，因爲

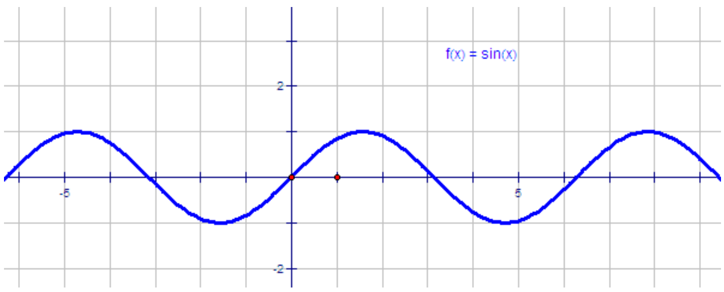
$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ -f(x) & f(x)\leq 0 \end{cases}$，因此上述討論的結果，對於一般函數 $y=|f(x)|$的圖形也適用。

函數 $y=f(x)$位於 x 軸上方的圖形不變，位於 x 軸下方的圖形對 x 軸作對稱圖形，就是函數 $y=|f(x)|$的圖形。

(練習4)請根據 $y=f(x)$的圖形，畫出 $y=|f(x)|$的圖形：

(1)$f(x)=x-2$　　　　(2)$f(x)=\sin x$





(丙)函數的四則運算

設函數 $f(x)=\sin x$、$g(x)=\cos x$ 是定義在實數集 R 上的函數，根據三角函數的定義與差角公式，以下的這些函數

$h_1(x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin x+\cos x$、$h_2(x)=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=\sin x-\cos x$、

$h_3(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x=\sin x\cdot\cos x$、$h_4(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

可以視爲由 $f(x)=\sin x$、$g(x)=\cos x$ 所產生的新函數，分別稱爲函數 f、g 的和、差、積、商函數。

(1)函數的四則運算

若函數 f、g 都是定義在集合 A、B 上的函數，其中 A、B 都是實數集 R 的子集合。則我們可以定義函數 f、g 的和、差、積、商函數如下：

(1)和函數 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$。　　定義域 $A\cap B$

(2)差函數 $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$。　　定義域 $A\cap B$

(3)積函數 $(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)$。　　定義域 $A\cap B$

(4)商函數 $(\dfrac{f}{g})(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (其中 $g(x)\neq 0$)。定義域=$\{x|x\in A\cap B，g(x)\neq 0\}$

值得注意的是和、差、積、商函數 $f+g$、$f-g$、fg、$\dfrac{f}{g}$的定義域，

是 A 與 B 的交集，且使得新函數有意義的實數所成的集合。

函數的表徵	函數的對應關係
函數 f，g	$a\xrightarrow{f}f(a)$，$a\xrightarrow{g}g(a)$
f，g 的和函數 $(f+g)$	$a\xrightarrow{f+g}f(a)+g(a)$
f，g 的差函數 $(f-g)$	$a\xrightarrow{f-g}f(a)-g(a)$
f，g 的積函數 $(f\cdot g)$	$a\xrightarrow{f\cdot g}f(a)\cdot g(a)$
f，g 的商函數 $(\dfrac{f}{g})$	$a\xrightarrow{\frac{f}{g}}\dfrac{f(a)}{g(a)}$ $(g(a)\neq 0)$

例如

函數 $h(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-9}$ 是兩多項式函數 $f(x)=x^2+x+1$ 與 $g(x)=x^2-9$ 的商函數，它的定義域爲使分母 x^2-9 不爲 0 的實數所成的集合$\{x|x\in R，x^2\neq 9\}$。

函數 $k(x)=\dfrac{5}{x^3}$ 是兩多項式函數 $f(x)=5$ 與 $g(x)=x^3$ 的商函數，它的定義域爲使分母 x^3 不爲 0 的實數所成的集合$\{x|x\in R，x\neq 0\}$。

[例題5] 設函數 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$，$g(x)=\sqrt{x}$

(1)試求函數 f 與 g 的定義域。

(2)試求函數 $f-g$ 與$\dfrac{f}{g}$的定義域。

[解法]：

(1)因為根號內的數必須大於等於 0，故

函數 f 與 g 的定義域分別為 A={x|$-3\le x\le 3$}、B={x|$x\ge 0$}

(2)和函數$(f+g)(x)=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x}$ 的定義域為 A∩B={x|$0\le x\le 3$}

商函數$(\frac{f}{g})(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x}}$ 的定義域為{x|$0<x\le 3$}

(練習5)設函數 $f(x)=\sqrt{2-x}$ ，$g(x)=\sqrt{3+x}$

(1)試求函數 f 與 g 的定義域。

(2)試求函數 $f+g$ 與$\frac{f}{g}$的定義域。

Ans：(1){x|$x\le 2$}、{x|$x\ge -3$}　(2){x|$-3\le x\le 2$}、{x|$-3<x\le 2$}

(丁)合成函數、有理函數、根式函數與隱函數

在經濟活動中，商品的價格會影響銷售量，而銷售量會影響利潤，因此商品價格會影響利潤，三者的關係可以圖示如下：

商品價格⟶銷售量⟶利潤

透過銷售量的媒介，利潤為商品價格的函數，這就是合成函數的概念。

我們舉例來進一步說明：

設某種商品的價格為 x(單位：仟元)，銷售量為 y(單位：件)，利潤為 z(單位：萬元)，銷售量與商品價格的關係為 $y=f(x)=100-5x$；

利潤與銷售量的關係為 $z=g(y)=30y$

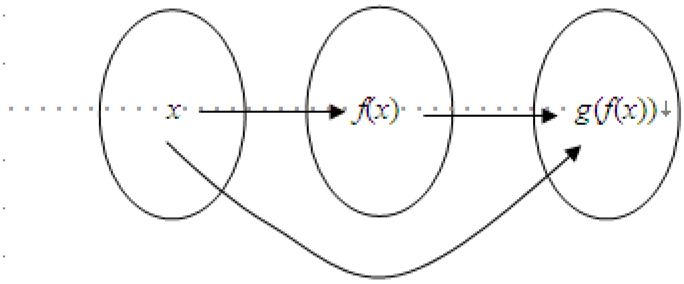
因此 z 可以用 x 來表示：$z=30(100-5x)$，令 $z=h(x)=30(100-5x)$

那麼函數 $h(x)=30(100-5x)$可以視為「先經由函數 $f(x)$，再經由函數 $g(y)$」的對應所得到的函數，此時稱 $h(x)$為函數 $y=f(x)$與 $z=g(y)$的合成函數。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & y=100-5x \arrow[r, "g"] & z=30(100-5x) \end{tikzcd}$$

(1)合成函數的定義：

給定兩個函數 $f(x)$：A→R、$g(x)$：B→R，若 f(A)爲 B 的子集合(函數 f 的值域爲函數 g 定義域的子集合)，則定義 f 與 g 的合成函數 $g∘f$ 爲 $(g∘f)(x)=g(f(x))$。
合成函數 $g∘f$ 的定義域爲函數 f 的定義域的子集。



$g∘f$

[例題6] 設 $f(x)=x^2-2x-8$，$g(x)=\sqrt{x}$

(1)求 $(f∘g)(x)=$？，並求合成函數 $f∘g$ 的定義域。

(2)求 $(g∘f)(x)=$？，並求合成函數 $g∘f$ 的定義域。

[解法]：

(1) $(f∘g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}-8$，合成函數 $f∘g$ 的定義域爲 $\{x|x\geq 0\}$。

(2) $(g∘f)(x)=g(f(x))=g(x^2-2x-8)=\sqrt{x^2-2x-8}$

因爲 x 滿足 $x^2-2x-8\geq 0$，即 $x\geq 4$ 或 $x\leq -2$，根式 $\sqrt{x^2-2x-8}$ 才會有意義。

故合成函數 $g∘f$ 的定義域爲 $\{x|\ x\geq 4$ 或 $x\leq -2\ \}$。

根據例題五，$(f∘g)(x)=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}-8$，$(g∘f)(x)=\sqrt{x^2-2x-8}$，這兩個函數並不相同。函數 $(f∘g)(x)$ 是代表 x 先經由函數 g 的對應，再經由函數 f 的對應所得的值；而 $(g∘f)(x)$ 是代表 x 先經由函數 f 的對應，再經由函數 g 的對應所得的值。一般而言，它們並不是同一個函數，即 $f∘g\neq g∘f$。

[例題7] 試將下列各函數，用合成函數 $f∘g$ 的形式來表示：

(1) $F(x)=(x-1)^3$ (2) $G(x)=|x+2|$ (3) $H(x)=\sin(\frac{x}{2})$ (4) $K(x)=\sqrt{x^2-1}$

[解法]：

(1)取 $g(x)=x-1$，$f(x)=x^3$，

$f∘g$：$x\xrightarrow{g}x-1\xrightarrow{f}(x-1)^3$ 故 $F(x)=(f∘g)(x)=(x-1)^3$。

$y=x^3$ 的圖形右移 1 單位可得 $y=(x-1)^3$ 的圖形。

(2)取 $g(x)=x+2$，$f(x)=|x|$

$f∘g$：$x\xrightarrow{g}x+2\xrightarrow{f}|x+2|$ 故 $G(x)=(f∘g)(x)=|x+2|$。

將 $y=|x|$ 的圖形左移 2 單位可得 $y=|x+2|$ 的圖形。

(3) 取 $g(x)=\frac{x}{2}$，$f(x)=\sin x$

$f∘g$：$x\xrightarrow{g}\frac{x}{2}\xrightarrow{f}\sin(\frac{x}{2})$ 故 $H(x)=(f∘g)(x)=\sin(\frac{x}{2})$。

將 $y=\sin x$ 的圖形水平伸縮 2 倍可得 $y=\sin(\frac{x}{2})$ 的圖形。

(4) 取 $g(x)=x^2-1$，$f(x)=\sqrt{x}$

$f \circ g：x \xrightarrow{g} x^2-1 \xrightarrow{f} \sqrt{x^2-1}$ 故 $H(x)=(f \circ g)(x)=\sqrt{x^2-1}$ 。

$y=\sqrt{x^2-1}$ 的圖形代表 $x^2+y^2=1$ 的上半圓部分。

在教育統計上，通常會計算成績的 T 分數，可以用來做分數的比較與加總。某生成績之 T 分數是先將原成績標準化，而該成績的 T 分數=10×標準化成績+50，經過調整後的 T 分數其算術平均數爲 50 分，而標準差爲 10 分，原成績對應 T 分數的關係就可以用合成函數來描述。

[例題8] (計算 T 分數)

某次考試全班學生的數學成績平均爲 65 分，標準差爲 5 分，

設學生的原成績 x 分化成標準分數爲 y 分，其中 $y=\dfrac{x-65}{5}$；而 $t=10y+50$ 爲原成績的 T 分數

(1)文昌的數學成績爲 75 分，試求其 T 分數。

(2)設原成績 x 分所對應的 T 分數爲 $T(x)$分，試求 $T(x)$。

[解法]：

(1) 數學成績爲 75 分的標準分數爲$\dfrac{75-65}{5}=2$，所以 T 分數爲 $10\times2+50=70$。

(2)根據 T 分數的計算方式，令 $y=f(x)=\dfrac{x-65}{5}$，$g(y)=10y+50$

即原成績 $x_0 \xrightarrow{f}$ 標準化成績 $y_0 \xrightarrow{g}$ T 分數 $T(x_0)$

故 $T(x)=g(f(x))=g(\dfrac{x-65}{5})=10(\dfrac{x-65}{5})+50$。即函數 $T(x)$爲 $g(y)$與 $f(x)$的合成函數。

(練習6)設 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=x^5$，

(1)求$(f \circ g)(x)=$？，(2)求$(g \circ f)(x)=$？

Ans：(1)$x^{10}+1$ (2)$(x^2+1)^5$

(練習7)試將下列各函數，用合成函數 $f \circ g$ 的形式來表示：

(1)$A(x)=(x+3)^4$ (2)$B(x)=|x^2-2|$。

Ans：(1)$g(x)=x+3$、$f(y)=y^4$ (2)$g(x)=x^2-2$，$f(y)=|y|$

(2)有理函數與根式函數：

根據前面的討論，我們可以經由函數的四則運算與合成函數產生新的函數。

例如：由函數 $f(x)=x^3$，$g(x)=x^2-1$，$h(x)=\sqrt{x}$ ，$k(x)=|x|$，可以得到

商函數 $(\dfrac{f}{g})(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$。$g$ 與 h 的合成函數$(h \circ g)(x)=\sqrt{x^2-1}$

g 與 k 的合成函數$(k \circ g)(x)=|x^2-1|$

我們知道有理數爲型如$\dfrac{a}{b}$(其中 a,b 爲整數，$b\neq0$)的數，類似的，多項式函數 $f(x)$、$g(x)$

的商函數$\dfrac{f(x)}{g(x)}$稱爲**有理函數**。

例如：$h(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$、$k(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^3+x+3}$均爲有理函數。

例如：等速走 10 公里，時間 t 與速度 v 成反比例，即 $v=\dfrac{10}{t}$，此時速度 v 爲時間 t 的有理函數。

同樣的多項式函數 $f(x)$與 $y=\sqrt{x}$ 的合成函數 $y=\sqrt{f(x)}$ 稱爲**根式函數**。

例如：$g(x)=\sqrt{x^2-1}$ 、$h(x)=\sqrt{x^3-x+5}$ 均爲根式函數。

例如：某次考試，老師要調整成績將每個人的成績開根號乘以 10，得到新的成績。設原來 x 分，調整後的成績爲 y 分，則 $y=10\sqrt{x}$ ，此時 y 爲 x 的根式函數。

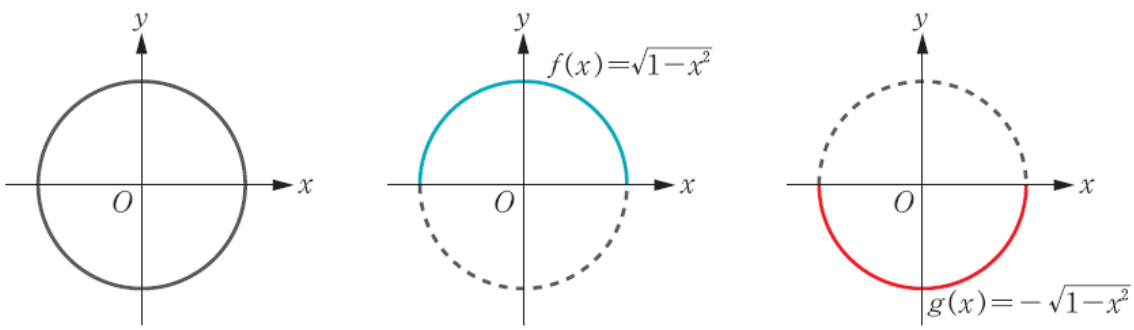
(3)隱函數：
前面所介紹的函數 $f(x)$都是可以用 x 的式子直接表示出來，例如：$f(x)=x^2+2x+3$、$f(x)=\sqrt{x^2-1}$ 。不過有些函數關係卻是隱藏在某些 x,y 的關係式中，例如：

單位圓：$x^2+y^2=1$…………(A)　　　或
葉型線(Folium of Descartes)：$x^3+y^3=6xy$……….(B)

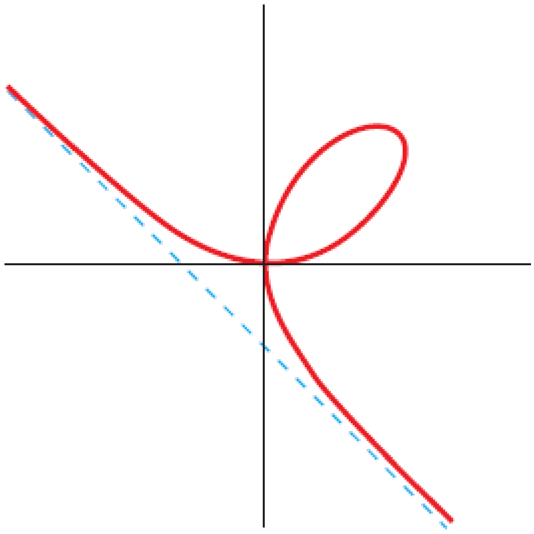
方程式 (A)可以解得 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ ，函數 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的圖形即爲上半圓，函數 $g(x)=-\sqrt{1-x^2}$ 的圖形即爲下半圓，因此單位圓 $x^2+y^2=1$ 可以視爲由 $f(x)$與 $g(x)$兩個函數圖形所組成(如下圖一)。

另一方面，想要從方程式(B)中將 y 用 x 解出來，就不像(A)那麼容易，不過方程式(B)的圖形依然可以視爲由幾個函數所組成的圖形(如下圖二)。

一般來說，由 x,y 的關係式所定義的函數， y 不一定可以明確用 x 表示出來，此時 x,y 間的函數關係，並不是那麼顯而易見，我們稱 y 爲 x 的**隱函數**。



圖一



圖二

綜合練習

(1) 試求下列各函數的定義域：

(a)$f_1(x)=\dfrac{1}{x+2}$　(b)$f_2(x)=\sqrt{-x^2+x+2}$　(c)$f_3(x)=\sin 2x$

(2) 試求下列各函數的值域：

(a)$g_1(x)=\cos x$　(b)$g_2(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$　(c)$g_3(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$

(3) 設函數 $f(x)=\sqrt{2+x}$ ，$g(x)=\sqrt{2-x}$ ，試寫出下列各函數：$f+g$、$f-g$、$f\cdot g$、$\dfrac{f}{g}$ 的定義域。

(4) 試求下列各小題：

(a)設 $f(x)=2x^2+x$，$g(x)=3x-1$，試求函數 $f\circ g$、$g\circ f$，並求其定義域。

(b)設 $f(x)=2x-1$，$g(x)=\sqrt{x}$ ，試求函數 $f\circ g$、$g\circ f$，並求其定義域。

(5) 考慮下表：

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	1	2	0	3	1
$g(x)$	-1	-2	1	3	0	3

試求下列各函數值：

(a)$(f\circ g)(-1)$　(b)$(g\circ f)(-1)$　(c)$(f\circ f)(2)$　(d)$(g\circ g)(-2)$

(6) 某宅急便公司寄送包裹至國內各地的費用是依據立方體包裹的長寬高之和來計算運費，其運費如下表所示：

包裹尺寸		60 cm 以下		61 cm～90 cm		91 cm～120 cm		121 cm～150 cm	
一般宅急便	區域	本島	澎湖、金門	本島	澎湖、金門	本島	澎湖、金門	本島	澎湖、金門
	常溫	120 元	220 元	160 元	280 元	200 元	320 元	240 元	360 元
	低溫	150 元	260 元	210 元	340 元	270 元	400 元		

設立方體包裹的長寬高之和爲 x 公分，常溫運送至本島的運費爲 $f(x)$元，常溫運送至澎湖、金門的運費爲 $g(x)$元

(a)試求函數 $f(x)$、$g(x)$的定義域與值域。

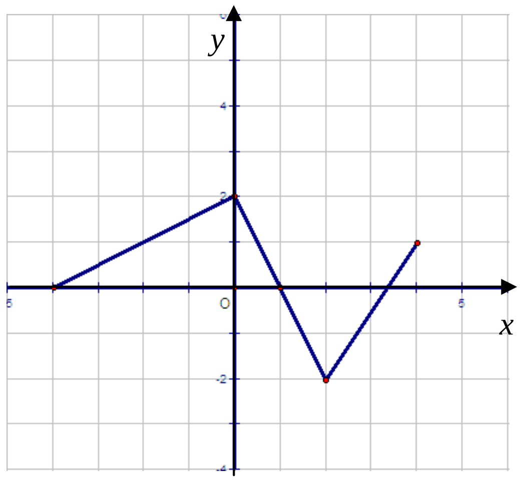
(b)請畫出 $f(x)$與 $g(x)$的圖形。

(7) 函數 $y=f(x)$的圖形，如下圖所示，

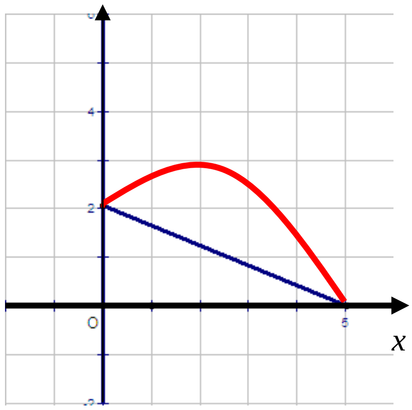
(a)畫出 $y=f(x-2)$的圖形。

(b)畫出 $y=f(2x)$的圖形

(c)畫出 $y=|f(x)|$的圖形



(8) 右圖表示函數 f、g 的圖形，
試畫出函數 $f+g$ 的圖形。



(9) 下列表格中哪些函數是型如 $y=c\cdot a^{x}$ 的指數函數？
哪些函數是線性函數 $y=mx+n$？或者兩者皆不是？
若函數是指數函數或線性函數請寫出函數的代數形式。

x	f(x)
0	16
1	24
2	36
3	54
4	81

x	g(x)
0	14
1	20
2	24
3	27
4	35

x	h(x)
0	5.1
1	6.4
2	7.7
3	9
4	10.3

(10) 某製造玩具工廠， 每次接到訂單都需開模 2 萬元， 製造每一千個玩具材料費需 4 萬元，由此建立生產的基本成本函數 $f(x)=2+4x$ ，其中 x 以千個為單位。依過去經驗， 接到訂單數量與報價總值有如下關係：

數量(千個)	報價總值(萬元)
15	45
20	40
25	25

以此資料建立一個二次函數的報價總值函數 $g(x)$ ，以及獲利函數 $h(x)=g(x)-f(x)$ 。

(a)若接到訂單為 20 千個，試問交貨時，每千個玩具的基本成本平均是多少萬元？

(b)試求報價總值函數 $g(x)$ 。

(c)根據 $h(x)$，試問訂單數量是多少時， 獲利總值最高？

(11) 試將下列各函數，用合成函數 $f\circ g$ 的形式來表示：

(a)$F(x)=\dfrac{1}{x+2}$　(b)$G(x)=|\sin x|$　(c)$H(x)=\cos 2x$　(d)$K(x)=\sqrt{x^2-9}$

(12) 設Γ代表函數 $y=|x|$的圖形，試回答下列各小題：

(1)將Γ向下平移 2 單位，形成 $y=f(x)$的圖形，試求 $f(x)$。

(2)畫出 $y=|f(x)|$的圖形。

(3)試問方程式 $f(x)=1$ 的實根個數。

(13) 電學中常用 Heaviside 函數 H(t)= $\begin{cases} 0 & 若\quad t<0 \\ 1 & 若\quad t\ge 0 \end{cases}$ 來表示開關打開的一瞬間，電路中的電壓。

(a)請畫出 H(x)的圖形。

(b)在時間 t=0 秒到 120 秒電路的電壓，在時間 t=3 秒時，打開電路的開關，此時電壓瞬間達到 110 伏特，電壓都保持不變，設 V(t)代表這段時間的電壓，請利用 H(t)來表示 V(t)，並畫出 y=V(t)的圖形。

(c)在時間 t=5 秒時，打開電路的開關，從 t=0 秒到 15 秒，電壓以每秒 0.5 伏特的速率增加，設 V(t)代表這段時間的電壓，請利用 H(t)來表示 V(t)，並畫出 y=V(t)的圖形。

綜合練習解答

(1) (a)$\{x|x\neq -2\}$ (b)$\{x|-1\le x\le 2\}$ (c)R

(2) (a)$\{y|-1\le y\le 1\}$ (b)$\{y|y\neq 1$，y 為實數$\}$ (c)$\{y|\ y\ge\sqrt{3}\}$

[提示：(b)$x=\dfrac{2y+1}{1-y}$]

(3) $f+g$ 的定義域$=\{x|-2\le x\le 2\}$，$f-g$ 的定義域$=\{x|-2\le x\le 2\}$、

$f\cdot g$ 的定義域$=\{x|-2\le x\le 2\}$，$\dfrac{f}{g}$的定義域$=\{x|-2\le x<2\}$

(4) (a)R、R (b)$\{x|x\ge 0\}$、$\{x|x\ge\dfrac{1}{2}\}$

(5) (a)-2 (b)3 (c)1 (d)-2

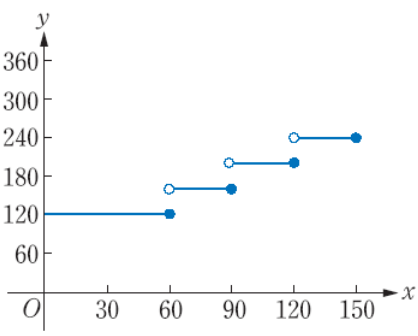
(6) (a)$f(x)$的定義域$=\{x|0\le x\le 150\}$、$g(x)$的定義域$=\{x|0\le x\le 150\}$

$f(x)$的值域$=\{120$、160、200、$240\}$，

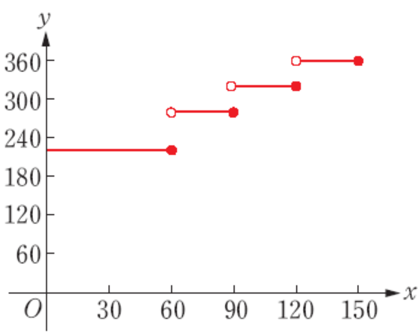
$g(x)$的值域$=\{220$、280、320、$360\}$

(b)

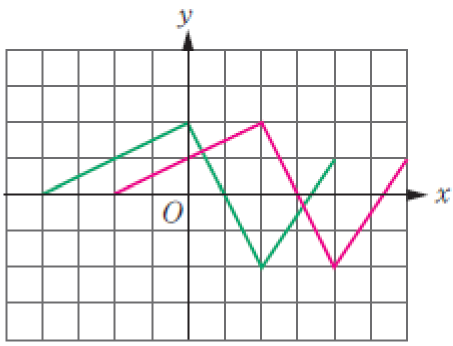
$f(x)$ 的圖形



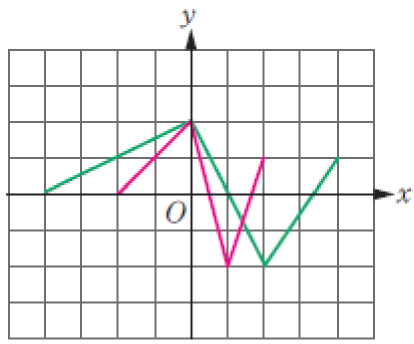
$g(x)$ 的圖形



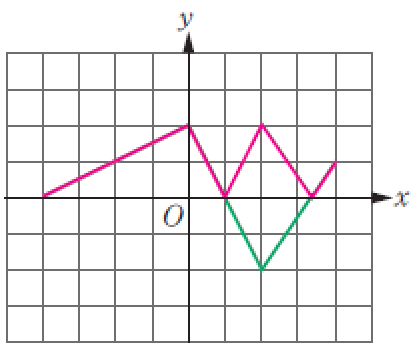
(7) (a)



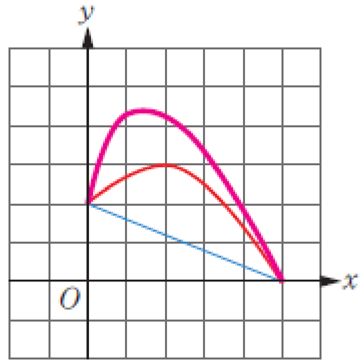
(b)



(c)



(8)



(9) $f(x)=16(1.5)^x$、$g(x)$兩者皆不是、$h(x)=1.3x+5.1$

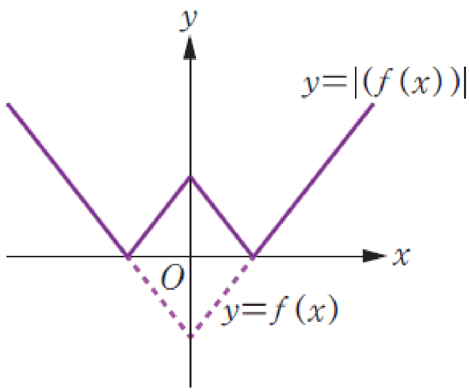
(10) (a)4.1(萬元) (b)$g(x)=\frac{-1}{5}x^2+6x$ (c)當訂單數量是 5 千個時獲利爲 3 萬元最高

(11) (a)$g(x)=x+1$，$f(y)=\frac{1}{y}$ (b)$g(x)=\sin x$，$f(y)=|y|$

(c)$g(x)=2x$，$f(y)=\cos y$ (d)$g(x)=x^2-9$，$f(y)=\sqrt{y}$

(12) (a)$y=|x| \xrightarrow{\text{下移2單位}} y=|x|-2$，$f(x)=|x|-2$

(b)



(c)4 個實根

(13) (a)圖形如下

(b)$V(t)=110H(t-3)$，$0\le t\le 120$

(c)$V(t)=0.5t\,H(t-5)$，$0\le t\le 15$