§3–4 和差與積互化

(甲)公式推導

(1)積化爲和差

由正餘弦的和角公式：

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ……①

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ……②

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ ③

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$ ……④

可得出：

① +② $\Rightarrow 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$
① −② $\Rightarrow 2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$
③ +④ $\Rightarrow 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$
③ −④ $\Rightarrow 2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

我們將其整理成：

(a) $\boxed{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$

(b) $\boxed{2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$

(c) $\boxed{2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$

(d) $\boxed{2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$

例如：

將下列三角函數的乘積，化成三角函數的和差

$\sin82.5^\circ\cos37.5^\circ=\frac{1}{2}(\sin120^\circ+\sin45^\circ)=\frac{1}{2}[\sin120^\circ-\sin(-45^\circ)]$

$\cos82.5^\circ\sin37.5^\circ=\frac{1}{2}(\sin120^\circ-\sin45^\circ)=\frac{1}{2}[\sin120^\circ+\sin(-45^\circ)]$

cos與sin相乘如果sinθ的角度比cos的角度大，適合用公式(a)
cos與sin相乘如果sinθ的角度比cos的角度小，適合用公式(b)

$\cos23^\circ\cos37^\circ=\frac{1}{2}[\cos60^\circ+\cos(-14^\circ)]=\frac{1}{2}(\cos60^\circ+\cos14^\circ)$

$\sin23^\circ\sin37^\circ=\frac{1}{2}[\cos(-14^\circ)-\cos60^\circ]=\frac{1}{2}[\cos14^\circ-\cos60^\circ]$

cos與cos相乘　一定是cos+cos角度兩個相加、兩個相減。
sin與sin相乘　一定是cos−cos角度(兩個相減)減去(兩個相加)。

(2)和差化為積

想法：任何兩角x,y一定可以找到二數α,β使得$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{cases}$，此時$\alpha=\dfrac{x+y}{2}$ 、$\beta=\dfrac{x-y}{2}$，代入積化為和的關係式中，可得

$$\boxed{\textbf{(a)}\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\ \cos\frac{x-y}{2}}$$

$$\boxed{\textbf{(b)}\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\ \sin\frac{x-y}{2}}$$

$$\boxed{\textbf{(c)}\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\ \cos\frac{x-y}{2}}$$

$$\boxed{\textbf{(d)}\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\ \sin\frac{x-y}{2}}$$ **(注意此式中有負號)**

例如：

$\sin110^\circ+\sin10^\circ=2\sin60^\circ\cos50^\circ$

$\sin110^\circ-\sin10^\circ=2\cos60^\circ\sin50^\circ$

$\cos110^\circ+\cos10^\circ=2\cos60^\circ\cos50^\circ$

$\cos110^\circ-\cos10^\circ=-2\sin60^\circ\sin50^\circ$

上面的公式，角度的原則都是(前+後)/2，(前−後)/2。

[例題1] 化簡下列各式：

(1)$\cos65^\circ\cdot\sin110^\circ+\cos25^\circ\cdot\sin20^\circ$ (2)$\sin37.5^\circ\cdot\sin7.5^\circ$ (3)$\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ$

Ans：(1)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2)$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$ (3)$\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

[例題2] 化簡下列兩式：

(1)$\sin 10^\circ - \sin 110^\circ + \sin 130^\circ$　(2) $\sin^2\theta + \sin^2(\frac{\pi}{3}+\theta) + \sin^2(\frac{\pi}{3}-\theta)$

Ans：(1)0 (2)$\frac{3}{2}$

[例題3] 化簡$\dfrac{(\cos 3\theta - \cos\theta)(\sin 8\theta + \sin 2\theta)}{(\sin 5\theta - \sin\theta)(\cos 6\theta - \cos 4\theta)}$。Ans：1

(練習1) 化簡下列各式：

(1) $\sin 100^\circ \sin 140^\circ \sin 160^\circ$

(2)$\cos 100^\circ \cos 120^\circ \cos 140^\circ \cos 160^\circ \cos 180^\circ$

(3) $\sin 100^\circ \sin(-160^\circ) + \cos 200^\circ \cos(-280^\circ)$

(4) $\cos 55^\circ \cos 65^\circ + \cos 65^\circ \cos 175^\circ + \cos 175^\circ \cos 55^\circ$

Ans：(1)$\frac{\sqrt{3}}{8}$ (2)$\frac{-1}{16}$ (3) $\frac{-1}{2}$ (4) $\frac{-3}{4}$

(練習2) 化簡下列各式：

(1)$\cos 80^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$ (2)$\cos^2\theta + \cos^2(\frac{\pi}{3}+\theta) + \cos^2(\frac{\pi}{3}-\theta)$

(3)$\sin 5^\circ + \sin 125^\circ - \sin 115^\circ$ (4)$\cos 10^\circ + \cos 110^\circ + \cos 130^\circ$

Ans：(1)0 (2)$\frac{3}{2}$ (3)0 (4)0

(練習3) 求$\dfrac{\sin 55^\circ \sin 35^\circ}{\cos 80^\circ + \cos 40^\circ}$ 之值。　Ans：$\frac{1}{2}$

(練習4) 設 $\sin(x+y)=\frac{33}{65}$，$\sin(x-y)=\frac{-63}{65}$，求 $\cos x\sin y$ 之值。Ans：$\frac{48}{65}$

(練習5) $\theta=\frac{\pi}{8}$，求$\frac{\sin5\theta+\sin\theta}{\cos5\theta+\cos\theta}$之值。Ans：$\sqrt{2}+1$

[例題4] 證明：$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{-1}{2}$。

[例題5] 求 $\cos\frac{\pi}{9}\ \cos\frac{2\pi}{9}\ \cos\frac{4\pi}{9}$ 之值。 Ans：$\frac{1}{8}$

數字角連乘與連加問題

(1)遇到 $\sin\theta,\cos\theta$之連乘積問題：

①正統解法⇒積化和差解題

②特殊解法⇒遇 $\cos\theta$連乘積，當角度成等比，乘除以最小角的正弦解題

(2)遇到 $\sin\theta,\cos\theta$之連加問題：

①正統解法⇒和差化積解題

②特殊解法⇒當角度成等差，公差爲 d 時，乘以 $2\sin\frac{d}{2}$解之

[例題6] 在ΔABC 中，試證：$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$

[例題7] 已知 $\cos x+\cos y=1$，$\sin x+\sin y=\frac{1}{2}$，試求下列各式的值：

(1)$\tan\frac{x+y}{2}$ (2)$\tan(x+y)$ (3)$\cos(x+y)$ (4)$\cos(x-y)$

Ans：(1)$\frac{1}{2}$ (2)$\frac{4}{3}$ (3)$\frac{3}{5}$ (4)$\frac{-3}{8}$

(練習6) 求 $\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}$ 之值。 Ans：$\frac{-1}{2}$

(練習7) 求 $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$ Ans：$\frac{1}{8}$

(練習8) 設∠A,∠B,∠C 爲ΔABC 的三內角，若 $\sin C=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$，試問ΔABC 的形狀爲何？ Ans：直角三角形

(練習9) 在ΔABC 中，試證明下列各等式：

(1)$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$。

(2)$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$。

(練習10) 設$x+y=k$(定值)，$0<x<\frac{\pi}{2}$，$0<y<\frac{\pi}{2}$

(1)試求$\cos x\cdot\cos y$的最大值。

(2)試求$\cos x+\cos y$的最大值。Ans：(1)$\cos^2\frac{k}{2}$ (2)$2\cos\frac{k}{2}$

綜合練習

(1) 求$\dfrac{2\sin 80^\circ-\cos 70^\circ}{\cos 20^\circ}=$？

(2) 化簡下列各式：

(a)$2\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}$ (b)$\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\sin 50^\circ$

(c)$\sin^2 10^\circ+\cos^2 20^\circ-\sin 10^\circ\cos 20^\circ$ (d)$\cos 20^\circ-\cos 40^\circ-\cos 80^\circ$

(3) 令$\theta=\frac{\pi}{18}$，求$\dfrac{\sin 5\theta+\sin\theta}{\cos 5\theta+\cos\theta}$ 的值。

(4) 函數 $f(x)=\frac{1}{2}(\cos 10x-\cos 12x)$，$x$ 為實數。則下列選項那些是正確的？

(A)$f(x)=\sin 11x\sin x$ 恆成立 (B)$|f(x)|\le 1$ (C)$f(x)$的最大值是 1 (D)$f(x)$的最小值是-1 (E)$f(x)=0$ 有無窮多解。 (91 學科)

(5) 設 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，求下列各式之最大值與最小值：

(a)$y=\sin x\cos(x-\frac{\pi}{6})$ (b)$y=\cos x\cos(x+\frac{\pi}{3})$

(6) ΔABC中，設$\angle B=60^\circ$，求$\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}$ 之值。

(7) 求$\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ$之值。

(8) 試證：$\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ=\frac{3}{4}$。

(9) 設 $0\le x<\pi$，解 $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$。

(10) 在ΔABC中，已知$\sin B\sin C=\cos^2\frac{A}{2}$，試問這三角形的形狀為何？

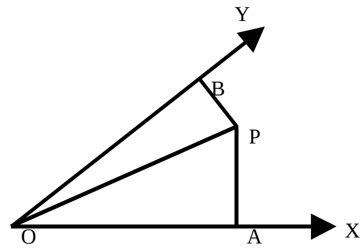
(11) 已知 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$且 $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{3}$ ，求 $\cos(\alpha-\beta)$與 $\cos(\alpha+\beta)$的值。

(12) ΔABC 為銳角三角形，
試證：$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$

(13) ΔABC中，$\angle A=60^\circ$
(a)求$\sin B+\sin C$之範圍。(b)求$\sin B\cdot\sin C$之範圍。

進階問題

(14) 過銳角$\angle$XOY 內部一點 P 作$\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}$之垂線，垂足為 A、B，
若$\angle XOY=\theta$ ，試證：$\dfrac{\overline{PA}+\overline{PB}}{\overline{OA}+\overline{OB}}=\tan\dfrac{\theta}{2}$ 。



(15) 設$x+y=\frac{\pi}{3}$，求下列各式的最大值與最小值。
(a)$\sin^2x-\sin^2y$ (b)$\sin x\sin y$

(16) 設$\frac{-\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$，解$\cos 2x+\cos^4x+\cos 6x=3$。

(17) 設 $0\le x_1,x_2,x_3,x_4\le\pi$ ，試證：
(a)$\dfrac{\sin x_1+\sin x_2}{2}\le\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}$ (何時等號成立？)
(b)$\dfrac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3+\sin x_4}{4}\le\sin\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$ (何時等號成立？)

(18) 求$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\theta}{2^k}\cdot\cos\frac{3\theta}{2^k}=$？

綜合練習解答

(1) $\sqrt{3}$ [提示：化 $2\sin 80^\circ=\sin 80^\circ+\sin 80^\circ$]

(2) (a)0 (b)$\frac{1}{4}$ (c)$\frac{3}{4}$ (d)0

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(4) (A)(B)(D)(E) [提示：由和差化積的公式，可得 $f(x)=\frac{1}{2}(\cos 10x-\cos 12x)=$

$\sin 11x\sin x$，因爲$|\sin 11x|\le 1$ 且$|\sin x|\le 1$，所以$|f(x)|\le 1$，當 $f(x)=1$ 時$\sin 11x\sin x=1$，但是並沒有 x 滿足這個結果，所以 $f(x)$的最大值不是 1，當$x=\frac{\pi}{2}$時，$f(\frac{\pi}{2})=-1$，所以 $f(x)$的最小值是-1]

(5) (a)最大值$\frac{3}{4}$，最小值 0 。(b)最大值$\frac{1}{2}$，最小值$\frac{-1}{4}$ 。

(6) $\sqrt{3}$

[提示：原式=$\dfrac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}+\sin B}{2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}+\cos B}=\dfrac{2\sin 60^\circ\cos\frac{A-C}{2}+\sin 60^\circ}{2\cos 60^\circ\cos\frac{A-C}{2}+\cos 60^\circ}=\sqrt{3}$]

(7) 1[原式=$\dfrac{\sin 6^\circ\sin 66^\circ\sin 42^\circ\sin 78^\circ}{\cos 6^\circ\cos 66^\circ\cos 42^\circ\cos 78^\circ}=\dfrac{(\cos 60^\circ-\cos 72^\circ)(\cos 36^\circ-\cos 120^\circ)}{(\cos 72^\circ+\cos 60^\circ)(\cos 120^\circ+\cos 36^\circ)}$]

(8) $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ=\frac{1-\cos 20^\circ}{2}+\frac{1+\cos 80^\circ}{2}+\sin 10^\circ\cos 40^\circ$

$=1-\frac{1}{2}(\cos 20^\circ-\cos 80^\circ)+\sin 10^\circ\cos 40^\circ=1-\frac{1}{2}(2\sin 50^\circ\sin 30^\circ)+\frac{1}{2}(\sin 50^\circ-\sin 30^\circ)=\frac{3}{4}$

(9) $x=0$ 或$\frac{\pi}{2}$或$\frac{2\pi}{3}$

[提示：$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0\Rightarrow\sin 2x(2\cos x+1)=0$，$\sin 2x=0$ 或 $\cos x=\frac{-1}{2}$]

(10) 等腰三角形[提示：$\sin B\sin C-\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}[\cos(B-C)-\cos(B+C)]=\frac{1}{2}[\cos(B-C)+\cos A]-\frac{1+\cos A}{2}=0$]

(11) $\cos(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{-59}{72}$

[提示：$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$ …….(A)，$\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{3}$ ……..(B)，

$(A)^2+(B)^2\Rightarrow 2+2\cos(\alpha+\beta)=\frac{13}{36}$，

由(A)$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}$，由(B)$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{3}$，將兩式

相除，得$\tan\frac{\alpha-\beta}{2}$，再求$\cos(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$]

(12) [證明：

$\sin A+\sin B>\cos A+\cos B$、$\sin B+\sin C>\cos B+\cos C$、$\sin C+\sin A>\cos C+\cos A$。

$\sin A+\sin B-(\cos A+\cos B)=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\cos\frac{A-B}{2}(\sin\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A+B}{2})=2\cos\frac{A-B}{2}(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2})>0$，$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{4}$]

(13) (a)$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin B+\sin C\le\sqrt{3}$ (b)$0<\sin B\cdot\sin C\le\frac{3}{4}$

(14) [提示：設∠POA=α，∠POB=β，PA=OP·sinα，PB=OP·sinβ OA=OP·cosα，

OB=OP·cosβ $\dfrac{PA+PB}{OA+OB}=\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\tan\dfrac{\theta}{2}$。]

(15) (a)最大值=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，最小值=$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) 最大值=$\dfrac{1}{4}$，最小值=$-\dfrac{3}{4}$

(16) $0,\pi$ [提示：因爲$-1\le\cos\theta\le 1$，所以$\cos 2x=1$ 且$\cos^4 x=1$ 且$\cos 6x=1$]

(17) (a) $\dfrac{\sin x_1+\sin x_2}{2}=\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\cos\dfrac{x_1-x_2}{2}\le\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}$

(b) $\dfrac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3+\sin x_4}{4}=$

$$\dfrac{\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}+\frac{\sin x_3+\sin x_4}{2}}{2}\le\dfrac{\sin(\frac{x_1+x_2}{2})+\sin(\frac{x_3+x_4}{2})}{2}\le\sin\dfrac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}$$

(a)等號成立 $\Leftrightarrow x_1=x_2$ (b) 等號成立 $\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=x_4$

(18) $\dfrac{1}{2}(\sin 2\theta-\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}})$

[提示：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\theta}{2^k}\cdot\cos\frac{3\theta}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}(\sin\frac{\theta}{2^{k-2}}-\sin\frac{\theta}{2^{k-1}})=\frac{1}{2}(\sin 2\theta-\sin\frac{\theta}{2^{n-1}})$]