第十九單元　反三角函數

(甲)反函數的概念

(1)反函數的定義：

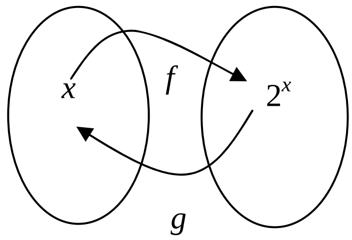
函數 $f(x)$、$g(y)$，設 x,y 分別是 $f(x)$、$g(y)$定義域內任意元素，如果 $g(f(x))=x$ 且 $f(g(y))=y$ 則稱 $f(x)$與 $g(y)$互為**反函數**，$f(x)$的反函數記為 $f^{-1}(x)$，即 $g(x)=f^{-1}(x)$。

此時 $f(x)$、$g(x)$的定義域與值域互換，即 $f(x)$的定義域為 $f^{-1}(x)$的值域，$f(x)$的值域為 $f^{-1}(x)$的定義域。

例一：

設 $f(x)=2^x$，定義域=R，值域=$\{y\mid y\geq 0\}$，我們來討論 $f(x)$的反函數 $g(y)$，

因為 $2\xrightarrow{f}4$，$0.5\xrightarrow{f}2^{0.5}$，$\sqrt{3}\xrightarrow{f}2^{\sqrt{3}}$，$x\xrightarrow{f}2^x$



所以 $4\xrightarrow{g}2$，$2^{0.5}\xrightarrow{g}0.5$，$2^{\sqrt{3}}\xrightarrow{g}\sqrt{3}$，$2^x\xrightarrow{g}x$

由對數的定義可知 $g(y)=\log_2 y$，定義域=$\{y\mid y\geq 0\}$，值域=R

例二：

設 $f(x)=x^2$，定義域=R，值域=$\{y\mid y\geq 0\}$，觀察它的對應情形

$1\xrightarrow{f}1$,$-1\xrightarrow{f}1$，$2\xrightarrow{f}4$,$-2\xrightarrow{f}4$，$\pm 3\xrightarrow{f}9$，$\pm x\xrightarrow{f}x^2$，當我們求它的反函數時，會遭遇到一個問題，到底 x^2 要對應回去 x 或是$-x$ 呢？

因為 $f(x)=x^2$ 是一個 2 對 1 的函數，**因此反函數定義時會遭遇到 1 對 2 無法形成函數，這個情形與(1)的情形不同**，$f(x)=2^x$ 是一個 1 對 1 的函數，故直接對應回來就能定義反函數；而 $f(x)=x^2$ 是一個 2 對 1 的函數，我們要定義反函數時，就要採取彈性的方法，**所謂彈性的方法就是限制原函數的定義域，使得原函數在限制下的定義域是一個 1 對 1 的函數**。當定義域限制成$\{x|x\geq 0\}$時，可定義反函數 $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$，當定義域限制成$\{x|x\leq 0\}$時，可定義反函數 $f^{-1}(y)=-\sqrt{y}$。

例三：

處理三角函數的情形，與處理 $f(x)=x^2$ 的情形類似，考慮 $f(x)=\sin x$，因為$\frac{\pi}{3}+2k\pi\xrightarrow{f}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 它是一個多對 1 的函數，所以要處理正弦函數的反函數問題時，要將定義域做適當的限制，其它的 5 個三角函數也是用同樣的方法來處理。

(2)函數 $f(x)$與 $f^{-1}(x)$圖形的關係：

設Γ_1與Γ_2分別代表函數 $f(x)$與 $f^{-1}(x)$的圖形

設點(a,b)在Γ_1上 $\Leftrightarrow$ $b=f(a)\Leftrightarrow a=f^{-1}(b)\Leftrightarrow$ 點(b,a) 在Γ_2上

因為點(a,b)與(b,a)對稱直線 $x-y=0$，所以Γ_1與Γ_2對稱直線 $x-y=0$
故函數 $f(x)$與 $f^{-1}(x)$的圖形對稱於直線 $x-y=0$。

(乙)反正弦函數

(1)反正弦 $\sin^{-1}a$ 的定義：

對於每一個實數 $a\in[-1,1]$，在區間$[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$內，都恰有一個實數 x，使得 $\sin x=a$。這個唯一的實數 x，就記為 $\sin^{-1}a$(有時也記為 $\arcsin a$)，讀做 *arcsinea*。

例如：

因為在$[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$內只有$\frac{\pi}{6}$使得 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，所以 $\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$。因為在$[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$內只有$\frac{-\pi}{4}$使得 $\sin\frac{-\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin^{-1}(\frac{-\sqrt{2}}{2})=\frac{-\pi}{4}$。

問題與討論：

(a)$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$，為什麼 $\sin^{-1}\frac{1}{2}\neq\frac{5\pi}{6}$呢？

(b)$\sin^{-1}\frac{4}{3}$有意義嗎？為什麼？

結論：

$$\boxed{\sin^{-1}a=\theta \iff a\in[-1,1]，\theta\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \text{ 且 } \sin\theta=x}$$

(練習1)　完成下表：

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin^{-1}a$									

[例題1]　求下列各式的值：

(1) $\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{5})$　(2) $\sin^{-1}\sin\frac{4\pi}{3}$　(3) $\sin^{-1}\sin 2$

Ans：(1) $\frac{\pi}{5}$　(2) $-\frac{\pi}{3}$　(3) $\pi-2$

[例題2] 求下列各式的值：

(1)$\sin\sin^{-1}\frac{2}{5}$　(2)$\sin\sin^{-1}(\frac{-2}{5})$　(3)$\sin\sin^{-1}2$

Ans：(1)$\frac{2}{5}$ (2)$\frac{-2}{5}$ (3)無意義

(練習2)　求下列各小題的值：

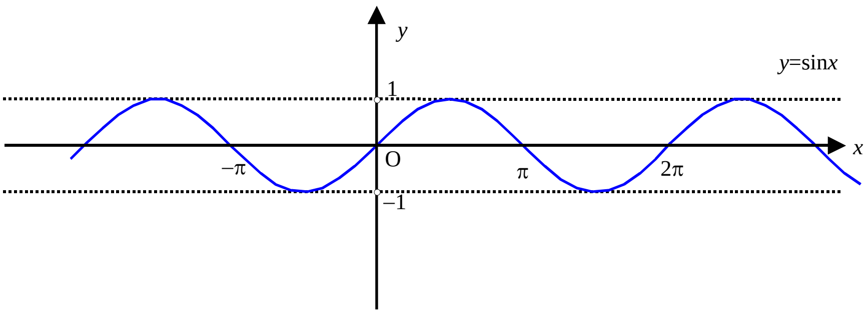
(1)$\sin^{-1}1=$ ？　(2)$\sin^{-1}\frac{2}{5}$ [利用三角函數值表]　(3)$\sin^{-1}\frac{\pi}{3}=$ ？

(4)$\sin^{-1}(\cos\frac{5\pi}{6})=$ ？ (5)$\sin(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2})=$ ？　(6) $\sin^{-1}(\sin 10)$　(7) $\sin^{-1}\sin\frac{5\pi}{8}$

Ans：(1)$\frac{\pi}{2}$ (2)約 0.41 弧度　(3)無意義 (4)$\frac{-\pi}{3}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (6) $3\pi-10$ (7) $\frac{3\pi}{8}$

(練習3)在△ABC 中，若$\overline{BC}=2\sqrt{2}$,$\overline{CA}=6$,∠B=135°,求∠A。Ans：$\angle A=\sin^{-1}\frac{1}{3}$

(2)反正弦函數：



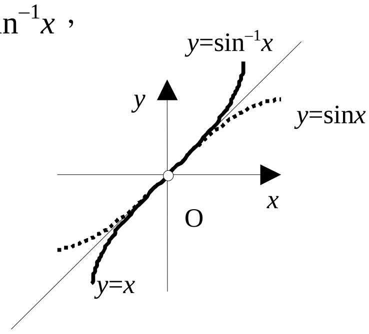
由 $y=\sin x$ 的圖形可知定義域限制在$[\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2}]$內時，$y=\sin x$ 為一個 1−1 函數。

(a)定義反正弦函數：

根據 $\sin^{-1}x$ 的定義，可知我們限制 $y=\sin x$ 的定義域到$[\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2}]$，

此時 $y=\sin x$ 為 1 對 1 的函數，因此可以定義反正弦函數 $y=f(x)=\sin^{-1}x$，

可知**定義域**$=\{x|-1\le x\le 1\}$，**值域**$=\{y|\frac{-\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\}$。



(b)反正弦函數的圖形：

對於 $a\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，點$(a,b)$在 $y=\sin x$,的圖形上

$\Leftrightarrow$ 點(b,a)在 $y=\sin^{-1}x$ 的圖形上。

所以 $\boldsymbol{y=\sin x}$，$\boldsymbol{x\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$**與** $\boldsymbol{y=\sin^{-1}x}$ **的圖形對稱於直線** $\boldsymbol{y=x}$。

(3)反正弦函數的性質：

性質 1：$y=\sin^{-1}x$ 圖形**對稱原點**，為**奇函數**。 $\boldsymbol{\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}(x)}$，$\boldsymbol{-1\le x\le 1}$

性質 2：若$-1\le x\le 1$，則 $\sin(\sin^{-1}x)=x$。

性質 3：若$\frac{-\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$，則 $\sin^{-1}(\sin x)=x$。

性質 4：若 $x\in\mathbb{R}$，則 $\sin^{-1}(\sin x)\ne x$，例 $\sin^{-1}(\sin\frac{5\pi}{6})=\sin^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}\ne\frac{5\pi}{6}$。

（丙）反餘弦函數

(1)反餘弦 $\cos^{-1}a$ 的定義：

對於每一個 a，$-1\le a\le 1$，在區間$[0,\pi]$上都恰有一個實數 x 使得 $\cos x=a$ 這個唯一的實數 x，就記為 $\cos^{-1}a$(有時也記做 $\arccos a$)，讀做 *arc cosinea*。

(練習4)完成下表

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\cos^{-1}a$									
$\sin^{-1}a$									
$\sin^{-1}a+\cos^{-1}a$									

例如：因為 $0\le\frac{\pi}{3}\le\pi$，$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，所以 $\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$。

因為 $0\le\frac{5\pi}{6}\le\pi$，$\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$，所以 $\cos^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})=\frac{5\pi}{6}$。

問題與討論：

(1)$\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$，為何 $\cos^{-1}\frac{1}{2}\ne\frac{5\pi}{3}$呢？

(2)$\cos^{-1}\frac{3}{2}$是否有意義？

結論：

$\boxed{\mathbf{\cos^{-1}}\boldsymbol{a}\mathbf{=\theta \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\in[-1,1]，\theta\in[0,\pi]}\ \text{且}\ \mathbf{\cos\theta=\boldsymbol{x}}}$

[例題3] 求下列各式的值：

(1)$\cos^{-1}\cos\frac{5\pi}{7}$ (2)$\cos^{-1}(\cos\frac{-\pi}{3})$ (3)$\cos^{-1}\cos4$

Ans：(1)$\frac{5\pi}{7}$ (2)$\frac{\pi}{3}$ (3)$2\pi-4$

[例題4] (1)$\cos(\cos^{-1}(-1))$ (2) $\cos(\cos^{-1}(\frac{\pi}{2}))$ (3)$\cos[\cos^{-1}(-\frac{2}{3})]$

Ans：(1)-1 (2)無意義 (3)$\frac{-2}{3}$

(練習5) 求下列各小題的值：

(1)$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2)$\cos^{-1}\pi$ (3)$\cos^{-1}(\cos1000\pi)$ Ans：(1)$\frac{\pi}{6}$ (2)無意義 (3)0

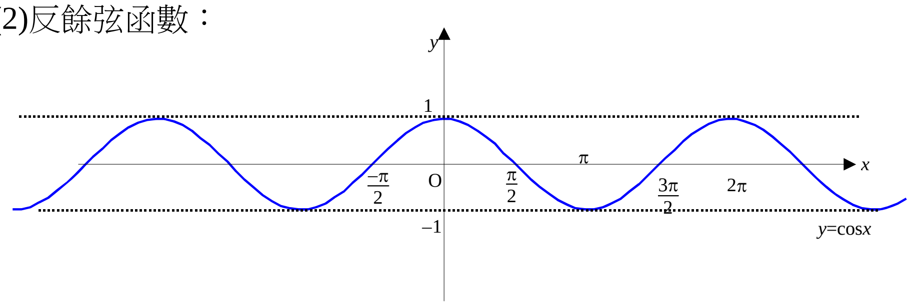
(練習6) 求下列各小題的值：

(1)$\cos^{-1}(\cos2\pi)$ (2)$\cos^{-1}(\frac{-\pi}{3})$ (3)$\cos^{-1}(\cos\frac{4\pi}{3})$

(4) $\cos^{-1}(\cos3)$ (5) $\cos^{-1}(\cos5)$

Ans：(1)0 (2)無意義 (3)$\frac{2\pi}{3}$ (4)3 (5)$2\pi-5$

(2)反餘弦函數：

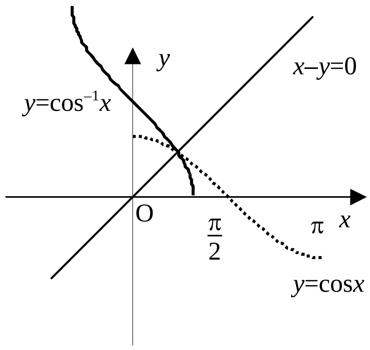


由 $y=\cos x$ 的圖形可知定義域限制在$[0,\pi]$內時，$y=\cos x$ 為一個 1−1 函數。

(a)定義反餘弦函數：

根據 $\cos^{-1}x$ 的定義，可知我們限制 $y=\cos x$ 的定義域到$[0,\pi]$，此時 $y=\cos x$ 為 1 對 1 的函數，因此可以定義反餘弦函數 $y=f(x)=\cos^{-1}x$，

可知**定義域**=$\{x|-1\le x\le 1\}$，**值域**=$\{y|0\le y\le \pi\}$。



(b)反餘弦函數的圖形：

對於 $a\in[0,\pi]$，點(a,b)在 $y=\cos x$ 的圖形上

⇔ 點(b,a)在 $y=\cos^{-1}x$ 的圖形上。

所以 **$y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$與 $y=\cos^{-1}x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$**。

(3)反餘弦函數的性質：

性質 1：若$-1\le x\le 1$，則 $\cos(\cos^{-1}x)=x$。

性質 2：若 $0\le x\le \pi$，則 $\cos^{-1}(\cos x)=x$。

性質 3：若 $x\in R$，則 $\cos^{-1}(\cos x)\ne x$

例：$\cos^{-1}(\cos\frac{4\pi}{3})=\cos^{-1}(\frac{-1}{2})=\frac{2\pi}{3}\ne\frac{4\pi}{3}$

性質 4：$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

性質 5：若$-1\le a\le 1$，則 $\cos^{-1}(-a)=\pi-\cos^{-1}a$

例：$\cos(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\pi-\cos^{-1}\frac{1}{2}$

（丁)反正切函數

(1)反正切 $\tan^{-1}a$ 的意義：

對於每一個實數 a，在區間$(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$內，都恰有一個實數 x，使得 $\tan x=a$。這個唯一的實數 x，就記為 $\tan^{-1}a$(有時也記為 arctan$a$)，讀做 *arctangenta*。

例如：因為在$(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$內只有$\frac{\pi}{4}$使得 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，所以 $\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$。

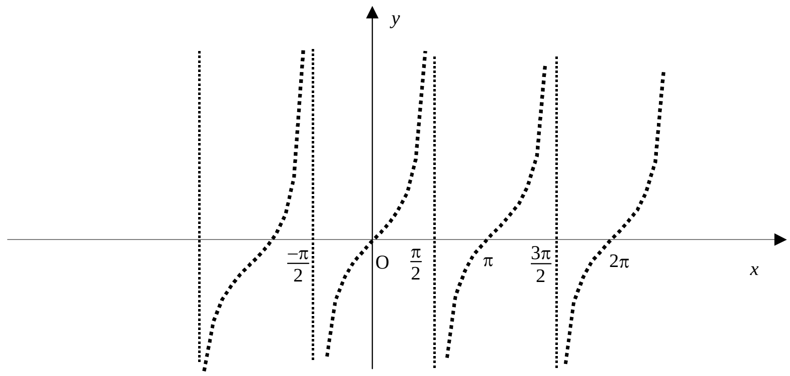
因為在$(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$內只有$\frac{-\pi}{3}$使得 $\tan\frac{-\pi}{3}=-\sqrt{3}$，所以 $\tan^{-1}(-\sqrt{3})=\frac{-\pi}{3}$。

注意：$\tan\frac{5\pi}{6}=\frac{-1}{\sqrt{3}}$，為什麼 $\tan^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}})\neq\frac{5\pi}{6}$呢？

結論：

$$\boxed{\tan^{-1}a=\theta \Leftrightarrow a\in\mathbf{R}，\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2})\text{ 且 }\tan\theta=x。}$$

(2)反正切函數：

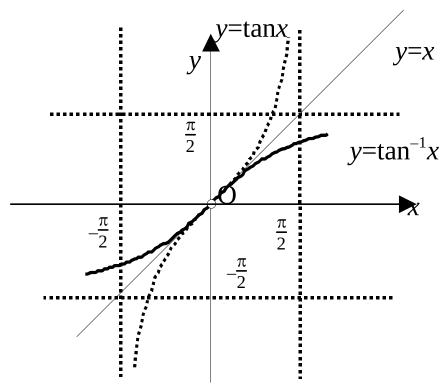


由 $y=\tan x$ 的圖形可知限制定義域在$(\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2})$時，$y=\tan x$ 是 1−1 的函數。

(a)定義反正切函數

根據 $\tan^{-1}x$ 的定義，可知我們限制 $y=\tan x$ 的定義域到$(\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2})$，此時 $y=\tan x$ 為 1 對 1 的函數，因此可以定義反正切函數 $y=f(x)=\tan^{-1}x$，

可知定義域=R，值域=$\{y|\frac{-\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\}$。



(b)反正切函數的圖形：

對於 $b\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，點$(a,b)$在 $y=\tan x$,的圖形上

$\Leftrightarrow$ 點(b,a)在 $y=\tan^{-1}x$ 的圖形上。

所以 $y=\tan x$，$x\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$與 $y=\tan^{-1}x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$。

(3)反正切函數的性質：

$\boxed{\text{性質 1：} y=\tan^{-1}x \text{ 圖形}\textbf{對稱原點}\text{，為}\textbf{奇函數}\text{。} \tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x}$

$\boxed{\text{性質 2：若 } x\in\mathrm{R}\text{，則 } \tan\tan^{-1}x=x}$

$\boxed{\text{性質 3：若} -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\text{，則 } \tan^{-1}\tan x=x}$

$\boxed{\text{性質 4：若 } x\in\mathrm{R}\text{，則 } \tan^{-1}\tan x\neq x}$

例如：$\tan^{-1}(\tan\frac{3\pi}{4})=\tan^{-1}(-1)=\frac{-\pi}{4}\neq\frac{3\pi}{4}$

[例題5] 求下列各小題的值：

(1)$\tan^{-1}(-1)$ (2)$\tan^{-1}(\tan\frac{7\pi}{12})$ (3)$\tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{2})$ (4)$\tan(\tan^{-1}(100))$

Ans：(1)$\frac{-\pi}{4}$ (2)$\frac{-5\pi}{12}$ (3)無意義 (4)100

(練習7) 求下列各小題的值：

(1)$\tan^{-1}(\sqrt{3})$ (2)$\tan^{-1}(\tan 200\pi)$ (3)$\tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{4})$ (4)$\tan(\tan^{-1}123)$

Ans:(1)$\frac{\pi}{3}$ (2)0 (3)$\frac{\pi}{4}$ (4)123

[例題6] 設 $0\le x\le 2\pi$，且 $\cos x=\frac{1}{3}$，請問 $x=$？Ans：$x=\cos^{-1}\frac{1}{3}$或 $2\pi-\cos^{-1}\frac{1}{3}$

[例題7] 求下列各小題的值：

(1)$\sin[\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}+\cos^{-1}(\frac{-2}{\sqrt{5}})]$ (2)$\cos[\frac{1}{2}\cdot\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}]$

Ans：(1)$\frac{\sqrt{2}}{10}$ (2)$\sqrt{\frac{5}{6}}$

(練習8) 設 $0\le x\le 2\pi$，且 $\tan x=\frac{1}{3}$，請問 $x=$？Ans：$x=\tan^{-1}\frac{1}{3}$或$\pi+\tan^{-1}\frac{1}{3}$

(練習9) 試求 $\cos[\tan^{-1}(\frac{-4}{3})+\sin^{-1}\frac{12}{13}]=$？ Ans：$\frac{63}{65}$

(練習10) 試求 $\sin[\frac{1}{2}\cos^{-1}(\frac{-2}{3})]=$？ Ans：$\frac{\sqrt{30}}{6}$

[✿**數學與電腦**]：

(1)利用 Geogebra 畫出 $y=\sin x$ 與 $y=\sin^{-1}x$($y=\arcsin(x)$)的圖形並比較它們的關係。

(2)利用 Geogebra 畫出 $y=\cos x$ 與 $y=\cos^{-1}x$($y=\arccos(x)$)的圖形並比較它們的關係。

(3)利用 Geogebra 畫出 $y=\tan x$ 與 $y=\tan^{-1}x$($y=\arcsin(x)$)的圖形並比較它們的關係。

綜合練習

(1) 求下列各式的值：

(a)$\sin(\sin^{-1}\frac{\pi}{4})$　(b)$\sin^{-1}(\sin 2)$　(c)$\cos(\cos^{-1}\frac{\pi}{3})$

(d)$\cos^{-1}(\cos 3\pi)$　(e)$\tan(\tan^{-1}2\pi)$　(f)$\tan^{-1}(\tan 2\pi)$

(2) 下列有關反函數的敘述那些是正確的？

(A)$\sin^{-1}\sin\frac{4\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$　(B)$\tan^{-1}\tan 4=4$　(C)$\cos[\cos^{-1}\pi]=\pi$　(D)$\sin(\cos^{-1}\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E)$\cos^{-1}(\cos\frac{-\pi}{3})=\frac{\pi}{3}$。

(3) 有關 $f(x)=\sin^{-1}x$，$-1\le x\le 1$ 的敘述，何者正確？

(A) $f(x)$為一對一函數　(B) $f(x)$的反函數為正弦函數

(C) $f(x)$為遞增函數　(D) $f(x)$之定義域為$\{x\,|-1\le x\le 1\}$

(E) $f(x)$的值域為$\{y\,|-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\}$。

(4) 有關 $f(x)=\cos^{-1}x$，$-1\le x\le 1$ 的敘述，何者正確？

(A) $f(x)$為一對一函數　(B) $f(x)$的反函數為餘弦函數

(C) $f(x)$為遞增函數　(D) $f(x)$之定義域為$\{x\,|-1\le x\le 1\}$

(E) $f(x)$的值域為$\{y\,|-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\}$。

(5) 計算下列各小題：

(a)$\tan[\sin^{-1}\frac{-4}{5}+\cos^{-1}\frac{-5}{13}]$　(b)$\cos[2\cdot\sin^{-1}(\frac{-4}{5})]$　(c)$\cos[3\cdot\tan^{-1}(\frac{-4}{3})]$

(d)$\sin[\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{5}{13}]$　(e)$\cos[2\sin^{-1}\frac{4}{5}-\frac{\pi}{3}]$

(6) 解下列方程式：

(a)$\cos^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{3}$　(b)$\cos^{-1}\frac{x}{2}=-\sin^{-1}\frac{3}{5}$　(c)$\cos^{-1}\frac{7}{25}=\tan^{-1}(3x+3)$。

(7) 化簡 $\tan^{-1}3+\tan^{-1}2=$__________。

(8) 比較 $a=\sin^{-1}\sin 1$，$b=\cos^{-1}\cos 2$，$c=\tan^{-1}\tan 3$，的大小。

(9) 試比較 $a=\sin^{-1}(\frac{-3}{4})$，$b=\cos^{-1}\frac{5}{6}$，$c=\tan^{-1}(\frac{-1}{2})$ 之大小。

(10) 設 a,b 為方程式 $x^2-3x+2=0$ 的二根，試求 $\tan(\tan^{-1}a+\tan^{-1}b)$之值。

(11) 解方程式 $\cos x=\frac{-2}{3}$，$0\le x\le 2\pi$

進階問題

(12) 解方程式：$2\cos 2x+\sin x+1=0$，其中 $0\le x\le 2\pi$。

(13) (a)證明：$|x|\le 1$，$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$。(b)解方程式 $4\cos^{-1}x+\sin^{-1}x=\frac{3\pi}{4}$。

綜合練習解答

(1) (a)$\frac{\pi}{4}$ (b)$\pi-2$ (c)無意義 (d)π (e)2π (f)0

(2) (D)(E)

(3) (A)(C)(D)(E)

(4) (A)(D)

(5) (a)$\frac{56}{33}$ (b)$\frac{-7}{25}$ (c)$\frac{-117}{125}$ (d)$\frac{56}{65}$ (e)$\frac{1}{50}(24\sqrt{3}-7)$

(6) (a)$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (b)$\frac{8}{5}$ (c)$\frac{1}{7}$ [提示：(a)令$\alpha=\cos^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{3}$ $\Rightarrow\cos\alpha=x$ 且 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$]

(7) $\frac{3\pi}{4}$[提示：令$\alpha=\tan^{-1}3,\beta=\tan^{-1}2$，$\tan\alpha=3$，$\tan\beta=2$，計算 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$之值]

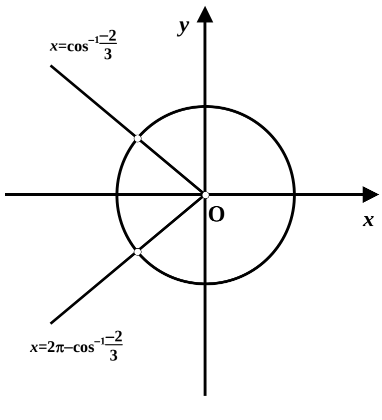
(8) $c<a<b$[提示：$a=\sin^{-1}\sin 1=1$，$b=\cos^{-1}\cos 2=2$，$c=\tan^{-1}\tan 3=3-\pi$]

(9) $b>c>a$

(10) -3 [提示：令 $\tan^{-1}a=\alpha$，$\tan^{-1}b=\beta$ $\Leftrightarrow$ $\tan\alpha=a$，$\tan\beta=b$ 所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{a+b}{1-ab}=-3$]

(11) $2\pi-\cos^{-1}\frac{-2}{3}$或 $\cos^{-1}\frac{-2}{3}$

[提示：$x=\cos^{-1}\frac{-2}{3}$ 是一個解，且$\frac{\pi}{2}<\cos^{-1}\frac{-2}{3}<\pi$，但是在 $0\le x\le 2\pi$的範圍內，還有其他的解，如圖這個解為 $2\pi-\cos^{-1}\frac{-2}{3}$。]



(12) $\frac{\pi}{2}$或 $2\pi+\sin^{-1}(\frac{-3}{4})$或$\pi-\sin^{-1}(\frac{-3}{4})$[提示：原方程式$\Rightarrow 2(1-\sin^2x)+\sin x+1=0$

$\Rightarrow 4\sin^2 x-\sin x-3=0$ $\Rightarrow \sin x=1$ 或 $\dfrac{-3}{4}$ $\Rightarrow$ 因為 $0\leq x\leq 2\pi$ 所以 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $2\pi+\sin^{-1}(\dfrac{-3}{4})$

或$\pi-\sin^{-1}(\dfrac{-3}{4})$]

(13) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ [提示：(a)令 $\sin^{-1}x=\theta$，欲證明 $\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-\theta \Leftrightarrow \cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=x$]