第三十六單元 條件機率、貝氏定理與獨立事件

(甲)條件機率

(1)條件機率的意義：

例一：

假設小安參加一個電視益智節目，他必須在 3 個信封(顏色分別是紅、黃、綠)中選一個，然後會得到所選信封中紙片上所寫的金額：其中有兩個信封中的紙片寫的是 100 元，第三個寫的是十萬元。

情況一：如果主持人沒有給任何提示，小安任選一個信封，得到十萬元的機率是$\frac{1}{3}$。

情況二：如果主持人在小安選擇之前，先打開紅信封，並給小安看裡面的紙片寫著 100 元，那麼小安再選信封，得到十萬元的機率是$\frac{1}{2}$，而非情況一中的$\frac{1}{3}$。

在這個例子中很容易可以看出，得到十萬元的機率有兩個不同的值，因此一個事件的機率會隨著情境的不同(提供訊息的改變)而可能會有所改變，這便是**條件機率**的意義。

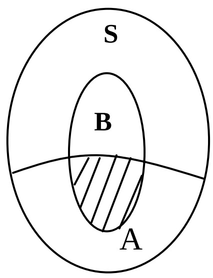
(2)條件機率的定義：

(a)定義：

若設 A、B 爲樣本空間 S 的兩事件，且 $P(A)\neq 0$，則在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的機率稱爲**條件機率**，符號爲 $P(B|A)$，其值定義成 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$。

[討論]：

(1)在古典機率的情形下，$P(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$，$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$



故 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$

[結論]：

(a) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$ (在古典機率的情形下)

(b)以樣本空間 S 的觀點來說，$P(B|A)$爲 $P(A\cap B)$與 $P(A)$的比值；

(c)若以事件 A 爲新的樣本空間，則 $P(B|A)$可視爲$\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$。

例如：擲一均勻骰子，在點數和爲 6 的條件下，求其中有一骰子出現 2 點的機率。

[解法]：

設 A 代表點數和爲 6 的事件，B 代表其中有一骰子出現 2 點的事件

樣本空間 $S=\{(x,y)|1\le x,y\le 6$，x,y 爲自然數$\}$，$n(A)=5$，$n(B)=6$，$n(A\cap B)=2$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{2}{5}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$ 。

[例題1] 某高中高一新生健康檢查的結果，體重超重佔 40%，有心臟疾病者佔 10%，兩者都有的佔 8%，今任選一人檢驗，
(1)若已知此人的體重超重，則他有心臟疾病的機率爲多少？
(2)若已知此人有心臟疾病，則他的體重超重的機率爲多少？
Ans：(1)$\frac{1}{5}$　(2)$\frac{4}{5}$

[例題2] 設袋中有 10 個球，其中白球 6 個，紅球 4 個，今自袋中取球每次取一個，取後不放回共取三次，假設在取出之三球中恰有二白球的條件下，求第二次抽到白球的機率。　Ans：$\frac{2}{3}$

(3)條件機率的性質：
設 A、B、B_1、B_2 爲樣本空間 S 中的事件
(a)$P(\phi|A)=0$，
(b)$P(A|A)=1$
(c)$0\le P(B|A)\le 1$
(d)$P(B'|A)=1-P(B|A)$
(e)$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1\cap B_2|A)$
[證明]：

[例題3] 設 A，B 爲二事件，P(A)=$\frac{3}{8}$，P(B)=$\frac{3}{4}$，P(A∪B)=$\frac{7}{8}$，試求：
(1) $P(A|B)=$________。(2) $P(A'|B)=$________。(3) $P(A'|B')=$_________。
Ans：(1)$\frac{1}{3}$ (2)$\frac{2}{3}$ (3)$\frac{1}{2}$

(練習1) 假設根據統計，汽車駕駛人中有 0.005 是酒醉駕車，又酒醉駕車且肇事者占駕駛人的 0.003，求駕駛人在酒醉的情況下肇事的機率爲_______。
Ans：$\frac{3}{5}$

(練習2) 假設有一個人摸黑回家，走到家門口時，四周黑漆漆的，他鑰匙圈上的 5 支鑰匙中有一把可以打開大門。如果此人隨意選，請問第一次就試對的機率爲何？如果此人同一支鑰匙他不會試第二次，則已知第一把不對之後，他試第二支試對的機率爲何？Ans：$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{4}$

(練習3) 某一家庭有兩個小孩，
(1)若已知兩個小孩至少有一個男孩，求兩個均爲男孩的機率=______。
(2)若已知大孩子爲男孩，求兩個都是男孩的機率=______。
Ans：(1)$\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$

(練習4) 袋中有 N 個球，其中 M 個白球，N−M 個黑球，從中一次次取球，每次取一球，取後不放回，求第一次取到白球的條件下，第二次取到黑球的機率。 Ans：$\frac{N-M}{N-1}$

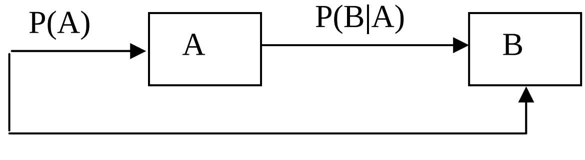
(練習5) 擲三次均勻骰子，設三次中至少出現一次 6 點的事件爲 A，至少出現一

次 1 點的事件爲 B，則 P(B|A)=______________。Ans：$\dfrac{30}{91}$

(練習6) 擲三枚相同且均勻的銅板一次，則在至少出現一個正面的條件下，恰好出現兩個正面的機率爲 _________ 。Ans：$\dfrac{3}{7}$

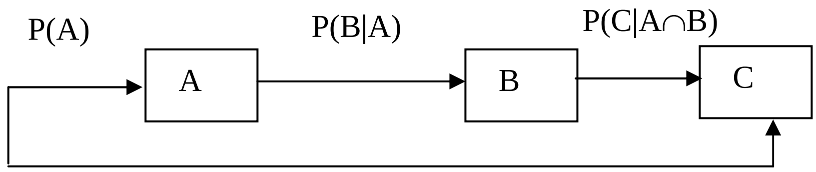
(練習7) 設 A,B 爲樣本空間 S 中的二事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{3}$ ，$P(B)=\dfrac{1}{4}$ ，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$ ，
求(1)P(A|B) (2)P(B|A) (3)$P(A'|B')$ (4)$P(B'|A')$
Ans：(1) $\dfrac{2}{3}$ (2)$\dfrac{1}{2}$ (3)$\dfrac{7}{9}$(4)$\dfrac{7}{8}$

(4)機率的乘法與加法原理：
例子：一袋中有藍球 3 個、白球 5 個，從袋中取球取後不放回，試求：
第一次取得籃球而第二次取得白球的機率。
[解法]：
設 A 代表第一次取得籃球的事件，B 代表第二次取得白球的事件，
因此我們要求 P(A∩B)。
[古典機率的觀點]：
考慮兩次取球取後不放回的隨機試驗，一袋中有 $b_1,b_2,b_3,w_1,w_2,w_3,w_4,w_5$ 八個球
令 $K=\{b_1,b_2,b_3,w_1,w_2,w_3,w_4,w_5\}$，樣本空間 $S=\{(x,y)|\ x\neq y，x,y\in K\}$，故 $n(S)=8\times7$
$A\cap B=\{(b_1,w_1)、(b_1,w_2),\ldots(b_3,w_5)\}$，$n(A\cap B)=3\times5$
故 $P(A\cap B)=\dfrac{3\times5}{8\times7}$ 。
[條件機率的觀點]：
設 A 代表第一次取得籃球的事件，B 代表第二次取得白球的事件，這兩個事件 A、B 它的發生可能會有時間順序，A 發生後再發生 B，要求 P(A∩B)，可以考慮使用條件機率。
因爲 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{5}{7}$ ，這個結果與古典機率的觀點所求出來的值相同。
(a)機率的乘法原理：
①設 A,B 爲任意二事件，
若 P(A)>0，P(B)>0，
則 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$。



$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

②設 A、B、C 爲任意三事件，
若 $P(A\cap B)>0$，
則 $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$



$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$

一般而言，我們可利用數學歸納法，得出以下的結果：
機率的乘法原理：
設 $A_1,A_2,\ldots,A_k$ 爲 k 事件，若 $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1})>0$，
則 $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_k|A_1\cap A_2\cap\ldots A_{k-1})$

例子：
設甲袋中有藍球 3 個、白球 5 個；乙袋中有藍球 2 個、白球 1 個、紅球 2 個。先依機會均等的原則選出甲袋或乙袋，再從中取出一球，求取出藍球的機率。
[解法]：
設 A 代表選出甲袋的事件，B 代表取出藍球的事件，
因爲整個隨機試驗的過程是先選袋子再取球，因此我們取球之前要先考慮取出來是甲袋或乙袋。

若取中甲袋，則取出藍球的機率= $\frac{3}{8}$；若取中乙袋，則取出藍球的機率= $\frac{2}{5}$。

因此取出藍球的機率=$\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{31}{80}$ 。

上述的過程牽涉到條件機率，我們用符號來說明：

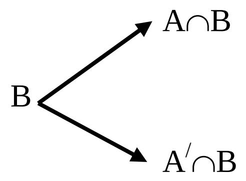
$P(A)=P(A')=\frac{1}{2}$，$P(B|A)=\frac{3}{8}$，$P(B|A')=\frac{2}{5}$

因爲 $B=(B\cap A)\cup(B\cap A')$ 且 $(B\cap A)\cap(B\cap A')=\phi$
所以 $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')$

$$=P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{31}{80}$$

(b)機率的加法原理：

$P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')$



一般而言：

$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(B\cap A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\cdot P(B\mid A_k)$ 。

[例題4] 一袋中有 4 個紅球，5 個藍球，小安從袋中取球兩次，
試分成取後放回、不放回兩種情形求下列各小題：
(1)兩次都取到紅球的機率
(2)第一次取得藍球、第二次取得紅球的機率
(3)若第一次取得紅球，則第二次取得藍球的機率
(4)取得一個紅球、一個藍球的機率

Ans：取後放回(1)$\frac{16}{81}$ (2)$\frac{20}{81}$ (3)$\frac{5}{9}$ (4)$\frac{40}{81}$

取後不放回(1)$\frac{12}{72}$ (2)$\frac{20}{72}$ (3)$\frac{5}{8}$ (4)$\frac{40}{72}$

[例題5] 一袋中有 5 個白球、8 個黑球。從袋中連續取出 3 個球，取出之球不再放回。求(1)依序取出白球、黑球、白球的機率。(2)第一次取出爲黑球的機率。(3)第二次取出黑球的機率。Ans： (1)$\frac{160}{1716}$ (2)$\frac{8}{13}$ (3) $\frac{8}{13}$

[例題6] 設一袋中有 n 支籤其中有 r 支有獎，每支籤被抽中的機會均等。甲乙丙三人依次抽一支，取後不放回，試證：甲乙丙三人中獎的機率相同。

證明：（方法一）

$$P(甲)=\frac{r}{n}$$

$$P(乙)=P(甲\cap乙)+P(甲'\cap乙)=\frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1}+\frac{n-r}{n}\cdot\frac{r}{n-1}=\frac{r}{n}\cdot(\frac{r-1}{n-1}+\frac{n-r}{n-1})=\frac{r}{n}$$

$$P(丙)=P(甲\cap乙\cap丙)+P(甲'\cap乙\cap丙)+P(甲\cap乙'\cap丙)+P(甲'\cap乙'\cap丙)$$

$$=\frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1}\cdot\frac{r-2}{n-2}+\frac{n-r}{n}\cdot\frac{r}{n-1}\cdot\frac{r-1}{n-2}+\frac{r}{n}\cdot\frac{n-r}{n-1}\cdot\frac{r-1}{n-2}+\frac{n-r}{n}\cdot\frac{n-r-1}{n-1}\cdot\frac{r}{n-2}$$

$$=\frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1}\cdot(\frac{r-2}{n-2}+\frac{n-r}{n-2})+\frac{n-r}{n}\cdot\frac{r}{n-1}\cdot(\frac{r-1}{n-2}+\frac{n-r-1}{n-2})$$

$$=\frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1}+\frac{n-r}{n}\cdot\frac{r}{n-1}=\frac{r}{n}\cdot(\frac{r-1}{n-1}+\frac{n-r}{n-1})=\frac{r}{n}$$

故可得知甲乙丙三人抽中的機率相等。（均爲 $\frac{r}{n}$ ）

(方法二）

可視爲將此 n 支籤排成一列，再由甲乙丙等人依順序取對等順序的籤設第 i 個位子排中獎籤的機率爲 p_i，則

$$p_i=\frac{1\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot(n-r)!}}{\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}}=\frac{r}{n}$$ 故知每人抽中獎籤的機率均相等。（皆爲 $\frac{r}{n}$ ）

[例題7] 設甲袋中有 5 個白球、2 個紅球，乙袋中有 4 個白球、3 個紅球，今擲骰子一次，擲得 1,2 點則選取甲袋，擲得 3,4,5,6 點則選取乙袋，從選出的袋中任取 2 球，求選出的球爲 1 白、1 紅的機率。Ans：$\frac{34}{63}$

[例題8] (遞迴方法求機率)

已知 A 箱內有一黑球與一白球，B 箱內有一白球。現輪流取球，每次先自 A 箱內任取一球，放入 B 箱內，再由 B 箱內任取一球，放入 A 箱內，這樣稱爲一局。

(1)求第二局結束時，黑球在 A 箱內之機率。

(2)求第三局結束時，黑球在 A 箱內之機率。

(3)求第 n 局結束時，黑球在 A 箱內之機率。

(練習8) 袋中有 4 個白球，3 個黑球，

(1)任取 3 球，求取得 2 白球 1 黑球之機率。

(2)每次任取一球，取後不放回，求依次取得白球、白球、黑球的機率。

(3)每次任取一球，取後放回，取 3 次，求取得 2 次白球、1 次黑球的機率。Ans：(1)$\frac{18}{35}$ (2)$\frac{6}{35}$ (3)$\frac{144}{343}$

(練習9) 某公司產 20 個產品中，有 4 個不良品，現在逐一加以檢查，

(1)取出後不放回，在第四次發現第二個不良品之機率為_________。

(2)取出後放回，在第四次發現第二個不良品之機率為_________。

Ans：(1) $\frac{24}{323}$ (2) $\frac{48}{625}$

(練習10) 10 支籤中，有獎籤 3 支，今依甲、乙之順序抽籤，試求下列問題：

(1)甲乙均抽中有獎籤的機率為________。

(2)甲沒抽中有獎籤，乙抽中有獎籤的機率為_______。

(3)在甲沒抽中有獎籤的條件下，乙抽中有獎籤的機率為_______。

(4)乙抽中有獎籤之機率為_______。

Ans：(1)$\frac{1}{15}$ (2)$\frac{7}{30}$ (3)$\frac{1}{3}$ (4)$\frac{3}{10}$

(練習11) 不透明箱子內有編號 1 號到 9 號的九個球，每次隨機取出一個球，紀錄其編號後放入箱內；以 $P(n)$表示前 n 次取球的編號之總和為偶數的機率。已知存在常數 r,s 使得 $P(n+1)=r+sP(n)$對於任意正整數 n 都成立，則(r,s)=_________。Ans：($\frac{5}{9}$，$\frac{-1}{9}$)

(乙)貝氏定理

(1)貝氏定理的引入：

例一：

勤業公司由甲乙兩個供應商分別提供 70%與 30%的液晶螢幕，經過組裝生產出電視機。若從勤業公司生產的電視機中任意抽出一個，則此電視機的液晶螢幕來自甲供應商的機率是 0.7，來自乙供應商的機率是 0.3，這兩個機率稱為「**事前機率**」。如果提供抽樣的電視機是不良品，而且由過去的資料顯示：甲供應商提供的液晶螢幕有 3%是不良品，乙供應商提供的液晶螢幕有 6%是不良品，以上的資訊即為液晶螢幕是不良品的資訊，那麼此不良品來自甲供應商的機率是否仍為 0.7 呢？

[解法]：

令 A 表示液晶螢幕來自甲供應商的事件，B 表示液晶螢幕是不良品的事件

則「事前機率」電視機的液晶螢幕來自甲、乙供應商的機率分別是

$P(A)=0.7$、$P(A')=0.3$

但當我們提供了液晶螢幕是不良品的資訊，

即 $P(B|A)=0.03$、$P(B|A')=0.06$

那麼不良品來自甲供應商的機率$=P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

我們分別計算 $P(A\cap B)$與 $P(B)$

$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')=P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')}=\frac{0.7\cdot 0.03}{0.7\cdot 0.03+0.3\cdot 0.06}=\frac{21}{39}。$$

因此當未提供「不良品」資訊時，液晶螢幕來自甲供應商的機率是 0.7，但是提供了「不良品」資訊後，此液晶螢幕來自甲供應商的機率是$\frac{21}{39}\approx 0.5385$，此機率稱為「**事後機率**」，機率可能會隨著提供的資訊而有所變化。

例二：

醫學上常用心電圖篩檢心臟疾病，根據統計，有 90%的心肌梗塞病患可由心電圖篩檢出來，但也有 5%的健康者的心電圖會被誤判為患有心肌梗塞。如果某一個城市有 0.2%的市民患有心肌梗塞的疾病。請問若某人的心電圖檢查結果被判定成患有心肌梗塞的疾病，則他真正患有心肌梗塞疾病的機率是多少？

[解法]：

令 A 表示此城市真正患有心肌梗塞人之事件，

B 表示此城市心電圖檢查顯示有心肌梗塞的人之事件。

根據所給的資料可知 $P(A)=0.002$，$P(A')=0.998$，$P(B|A)=0.9$，$P(B|A')=0.05$

對於一個醫療檢查而言，已知有病，再檢查出有病，並不是關注的問題，而檢查出有病，真的有病才是醫療檢查是否有效的關鍵。

因此事前機率 $P(A)=0.002$，$P(A')=0.998$ 會隨著提供心電圖的新資訊：$P(B|A)=0.9$，$P(B|A')=0.05$，而得出事後機率 $P(A|B)$，$P(A|B)$代表心電圖的準確率。

$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')=P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')}$$

$$=\frac{0.002\times0.9}{0.002\times0.9+0.998\times0.05}=\frac{0.0018}{0.0018+0.0499}=\frac{18}{517}\doteqdot0.0348\text{。}$$

從已知資訊看來，事後機率 0.0348 這個值似乎太低了，不過在沒做心電圖檢查之前，我們假設某個人患有心肌梗塞的機率是 0.002，提供了「心電圖檢查被判定成患有心肌梗塞」的資訊之後，某人確定患有心臟病的機率增加到了 0.0348。

(2)貝氏定理

通常我們需要對某種感興趣的事件估計它發生的機率(稱爲事前機率)，然後經由抽樣、研究報告或產品測試等資料的蒐集，對此事件獲得某些資訊，根據這些資訊再對此事件發生的機率重新估計，此更新後的機率稱爲事後機率。貝氏定理就是提供計算這種事後機率的方法。

$$\boxed{\text{事前機率}}\xrightarrow{\text{資訊}}\boxed{\text{事後機率}}$$

貝氏定理是機率論中較早的結果，於西元 1763 年在貝士(Thomas Bayes，十八世紀英國牧師)的遺著中所發現的。

貝氏定理：

設 A,B 爲樣本空間 S 中的任意二事件，若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，

則 $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$。

證明：

而由條件機率的乘法原理，

可得 $P(B)= =P(B\cap A)+P(B\cap A')=P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')}\text{。}$$

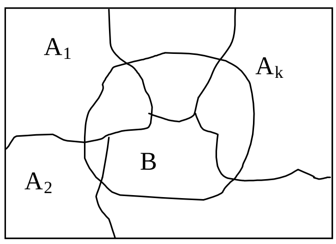
(a)分割：

設 $A_1,A_2\ldots A_r$ 爲樣本空間 S 中的任意 r 個事件。若這 r 個事件滿足：聯集爲 S，兩兩的交集爲ϕ ，則稱{ $A_1,A_2\ldots A_r$}爲樣本空間 S 的一個分割。

例如：設 S={a,b,c,d}， 則{{a},{b},{c},{b}}，{{a,b},{c},{d}}都是 S 的分割。

(b)設{ $A_1,A_2\ldots A_r$}爲樣本空間 S 的一個分割，B 爲任意的事件。

若 $P(B)>0$，$P(A_i)>0$，$i=1,2\ldots,r$，對自然數 k 而$1\le k\le r$



則 $P(A_k\mid B)=\dfrac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{r}P(A_i)P(B\mid A_i)}$

[證明]：

由條件機率的定義，可知 $P(A_k|B)=\dfrac{P(A_k\cap B)}{P(B)}$，又 $A_1,A_2\ldots A_r$ 爲樣本空間 S 的一個分割，且 B 爲樣本空間 S 中的一事件。

$\Rightarrow B=B\cap S=B\cap(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r)=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup\ldots\cup(B\cap A_r)$

又對於任意 $i\neq j$，$(i,j=1,2,\ldots,r)$，$A_i\cap A_j=\phi$，所以$(B\cap A_i)\cap(B\cap A_j)=\phi$，

因此 $P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\ldots+P(B\cap A_r)$

$$=\sum_{i=1}^{r}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{r}P(A_i)P(B|A_i)$$

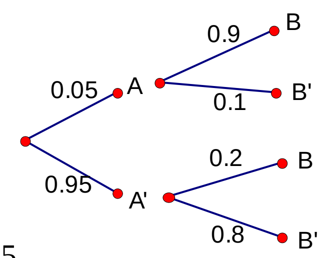
故 $P(A_k|B)=\dfrac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{r}P(A_i)P(B|A_i)}$ 。

貝氏定理是統計推理的基礎，在定理中 $P(A_i)$ $(i=1,2,\ldots,r)$稱爲**事前機率**，必須知道它，才能推算 $P(A_i|B)$，稱爲**事後機率**。通常 $P(A_i)$的值已過去的經驗爲基礎，由事件發生前的資訊爲依據，才能推算事後機率。

[例題9] 已知豬得口蹄疫的機率爲 0.05，今有一口蹄疫檢驗法，對健康的豬能作出正確檢驗的機率爲 0.8，罹患口蹄疫的豬能作出正確檢驗的機率爲 0.9。今有一豬作此檢驗，求

(1) 此豬檢驗爲健康的機率。

(2) 此豬檢驗爲健康，但其確實罹患口蹄疫的機率。



解答：設 A 表示豬得口蹄疫的事件，

B 表示豬被檢驗出有口蹄疫的事件

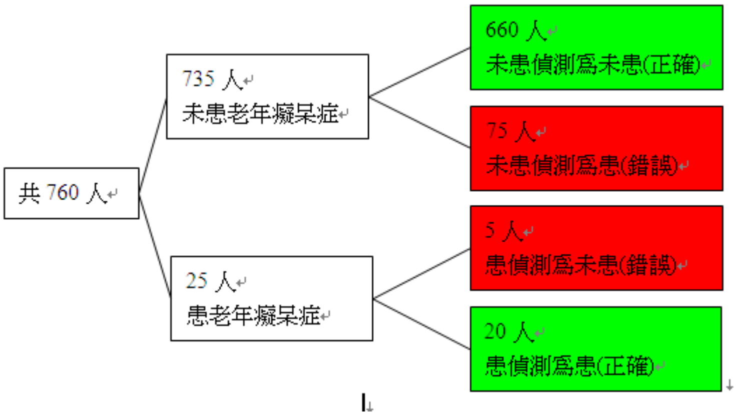
(1)

$P(B')=P(A\cap B')+P(A'\cap B')=0.05\times0.1+0.95\times0.8=0.765$

(2) $P(A|B')=\dfrac{P(A\cap B')}{P(B')}=\dfrac{0.005}{0.765}=\dfrac{1}{153}$

[例題10] 某實驗室欲評估血液偵測老年癡呆症技術的誤判率（ 即偵測錯誤的機率）。共有 760 人接受此血液偵測技術實驗， 實驗前已知樣本中有 735 人未患老年癡呆症。實驗後， 血液偵測判斷爲未患老年癡呆症者有 665 人， 其中真正未患老年癡呆症有 660 人。試問此血液偵測技術的誤判率爲__________。(化爲最簡分數) (2009 指定乙)

[解答]：



故誤判率(偵測錯誤的機率)爲$\dfrac{75+5}{760}=\dfrac{80}{760}=\dfrac{2}{19}$。

[例題11] 某公司生所產的省電燈泡，是由甲廠、乙廠、丙廠三家生產的比例分別爲 40%，35%，25%，根據統計，甲廠、乙廠、丙廠生產的瑕疵品分別佔各廠生產品的比例爲 3%、2%、4%，
(1)若將公司生產的燈泡集中在倉庫裡，從中任取一個燈泡，則取到瑕疵品的機率爲何？
(2)若從中取得的燈泡是瑕疵品，則此燈泡是甲廠生產的機率爲何？
解答：

(1) 取到瑕疵品的機率 $=40\%\times3\%+35\%\times2\%+25\%\times4\%=\dfrac{29}{1000}$

(2) 條件機率$=\dfrac{\frac{12}{1000}}{\frac{29}{1000}}=\dfrac{12}{29}$

(練習12) 有某種診斷方法，依過去的經驗知道患癌症的人，經過檢驗後發現有癌症的可能性爲 0.90，不患癌症的人經過同樣的檢驗後發現有癌症的可能性爲 0.05。假設一群人中有 6%的人患有癌症。現從此群人中任選一人而加以檢驗，求
(1)檢驗出有癌症的機率；(2)設檢驗出有癌症，求此人確有癌症的機率。
Ans：(1)0.101(2)$\dfrac{54}{101}$

(練習13) 醫療主管機關在持續追蹤某傳染病多年後，發現如果體檢受檢人感染該傳染病，就一定可以檢測出來。但是卻有 4%的機率，將一不患該傳染病之受檢者誤檢爲患有該病。已知全部男性人口中有 0.2%的機率患有此病。現於兵役體檢時進行檢測，若該梯次役男共有十萬人受檢，而且某役男被告知患有該病。請問下列哪些敘述爲真？
(A)該役男確實染病的機率大於 3% (B)該役男確實染病的機率大於 4%
(C)該役男確實染病的機率大於 5% (D)該役男確實染病的機率大於 90%
Ans：(A)(B)　　　(2002 指定考科甲)

(練習14) 設某工廠由甲、乙、丙三台機器製造某一產品。甲生產全部產品的 50%，乙生產全部產品的 30%，丙生產全部產品的 20%。又依過去的經驗知甲的產品中有 3%，乙有 4%，丙有 5%爲不良品。從產品中任選一產品，
(1)求選出之產品爲不良品的機率；
(2)若該產品爲不良品，求此產品爲甲機器製造的機率。
Ans：(1)0.037(2)$\frac{15}{37}$

(練習15) 甲說實話的機率爲$\frac{7}{10}$，乙說實話的機率爲$\frac{9}{10}$，今有一袋內藏 3 白球，7 黑球，自袋中任取一球，甲乙二人均說是白球，則此球確實爲白球之機率爲何？　Ans：$\frac{9}{10}$

(練習16) 交通規則測驗時，答對有兩種可能：一種是會做而答對，一種是不會做但猜對。已知小華練習交通規則筆試測驗，會做的機率是 0.8。現有一題 5 選 1 的交通規則選擇題，設小華會做就答對，不會做就亂猜。已知此題小華答對，試問在此條件之下，此題小華是因爲會做而答對(不是亂猜)的機率是多少？(以最簡分數表示) (89.學科)　Ans：20/21

(練習17) 某地區之天氣，依多年的統計得知，每年晴天佔了 40%，非晴天佔了 60%，又天氣預報可能不完全準確，將晴天說成晴天的機率爲 0.7，將非晴天說成晴天之機率爲 0.2，試問：若天氣預報說明天是晴天，則明天確爲晴天的機率爲_______。Ans：$\frac{7}{10}$

(丙)獨立事件

(1)引入獨立事件：
設一個袋子中有 5 個紅球，3 個白球，甲乙二人依序在袋中抽取一球，
(a)若取後不放回，則在甲抽中紅球的情形下，求乙抽中紅球的機率？
(b)若取後放回，則在甲抽中紅球的情形下，求乙抽中紅球的機率？
[解法]：設 A 代表甲抽中紅球的情形，B 代表乙抽中紅球的情形

(a)取後不放回：$P(B|A)=\frac{4}{7}$，

另一方面，$P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{5}{8}\Rightarrow P(B|A)\neq P(B)$。

顯然甲取中紅球會影響到乙取中紅球的機率。

(b)取後放回：$P(B|A)=\frac{5}{8}$，

另一方面，$P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')=\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{8}\Rightarrow P(B|A)=P(B)$。

顯然甲取中紅球並不會影響到乙取中紅球的機率。

一般而言，當事件 B 發生的機率不會受事件 A 是否已發生的影響，我們就稱事件 A、B 是獨立的，寫成數學式子為 $P(B|A)=P(B)$。

又因為 $P(B|A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=P(B)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$。

因此可用 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$來定義獨立事件。

(2)定義：

(a)當兩事件 A、B 滿足 $\mathbf{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$的關係時，稱 A、B 為獨立事件
(或稱 A、B 是獨立的)。

(b)若 A,B 不為獨立事件，則稱 A,B 為相關事件。

例如：擲一骰子，設事件 A、B、C 各為 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4\}$，$C=\{4,5,6\}$

①因為 $P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=P(A\cap B)$，所以 A、B 為獨立事件。

②因為 $P(A)\times P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\neq P(A\cap C)=0$，所以 A、C 不是獨立事件。

這個例子告訴我們，即使是同一個隨機試驗，各個事件之間有的獨立有的相關，沒有一定的關係，因此判別兩事件獨立，不可憑直覺，一定要從定義出發。

(3)性質：

(a)若 A,B 獨立，則① A',B ② A,B' ③ A',B' 也是獨立事件。

[證明]：

① $P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)P(B)$
$=P(B)(1-P(A))=P(A')P(B)$

③ $P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B)$
$=(1-P(A))(1-P(B))=P(A')P(B')$

(b)任何一事件與空事件必為獨立事件。

(c)任何一事件與全事件必為獨立事件。

(d)設 A,B 為互斥事件，且 $P(A)>0,P(B)>0$，則 A,B 必為相關事件。

[證明]：

$\because P(A\cap B)=P(\phi)=0$，$P(A)\cdot P(B)>0$

$\therefore\because P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$

$\Rightarrow$A,B 必為相關事件。

如果 A、B 互斥，則二者不可能同時發生，因此若其中一個發生了，就提供了有關另一個的資訊，也就是說，另一個事件必定沒有發生。而若 A、B 二事件獨立，則兩者就一定有可能同時發生，這兩個性質差異很大。

(4)三事件獨立：

(a)定義：若$\begin{cases}(1)\ P(A\cap B)=P(A)P(B)\\(2)\ P(A\cap C)=P(A)P(C)\\(3)\ P(B\cap C)=P(B)P(C)\\(4)\ P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)\end{cases}$ 四式同時成立，

則稱三事件 A,B,C 獨立，4 個條件均必得成立，缺一不可。

由定義知：

①若 A,B,C 三事件獨立時，則 A 與 B，B 與 C，A 與 C 兩兩事件必爲獨立事件。

②A,B,C 三事件中任兩事件獨立時，A,B,C 不一定獨立。(因爲還要(4))

例如：

袋中有 9 個球，編號爲 1~9。自袋中取一球，

取到 1,5,9 的事件爲 A，取到 2,5,8 的事件爲 B，取到 3,5,7 的事件爲 C，

問 A,B,C 是否獨立？答案：否

理由：

$$\begin{cases}(1)P(A\cap B)=P(A)P(B)\\(2)P(A\cap C)=P(A)P(C)\\(3)P(B\cap C)=P(B)P(C)\\\text{但}(4)P(A\cap B\cap C)\neq P(A)P(B)P(C)\end{cases}$$

(b)性質：

若 A,B,C 獨立，則

①A,B，A',B，A,B'，A',B' 獨立。

②A,C，A',C，A,C'，A',C' 獨立。

③ B,C，B',C，B,C'，B',C' 獨立。

④A',B,C，A,B',C，A,B,C' 獨立。

⑤ A',B',C，A',B,C'，A,B',C' 獨立。

⑥A',B',C' 獨立。

[證明]：若三事件 A,B,C 獨立，則三事件 A'、B'、C'爲獨立事件。

[例題12] 甲，乙，丙三人同射一靶，各打一發，

設甲、乙、丙三人的命中率分別為$\frac{1}{3},\frac{3}{4},\frac{2}{5}$且三人射擊互不影響，則

(1)此靶被命中的機率為______________。

(2)此靶被打中三發的機率為______________。

(3)此靶被打中二發的機率為______________。

(4)此靶恰被打中一發的機率_____________。

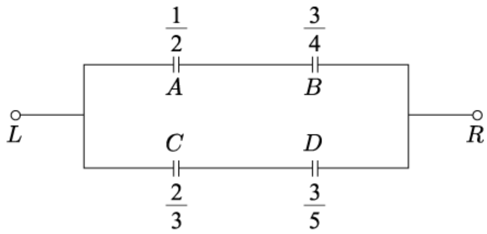
(5)若此靶恰中一發，則是甲命中的機率為__________。

Ans：(1) $\frac{9}{10}=\frac{54}{60}$ (2) $\frac{1}{10}=\frac{6}{60}$ (3) $\frac{23}{60}$ (4) $\frac{25}{60}$ (5)$\frac{3}{25}$

[例題13] 在下面的電路圖中有 4 個開關，以 A, B, C, D 表示。

電流通過各個開關的機率依次為$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$。每一開關彼此互不影響，試求在某一瞬間，電流能從左端 L 通到右端 R 的機率=_______。

Ans：$\frac{5}{8}$



(練習18) 愛國者飛彈之命中率為 40%，今要使打中敵方飛彈的機率達到 90%以上，則一次要發射若干枚飛彈？(設每枚飛彈射擊不互相影響，且 log2=0.3010，log3=0.4771) Ans：5 枚

(練習19) 以 A,B 分別表示甲、乙活過十年以上的事件。設 P(A)=$\frac{1}{4}$ ，P(B)=$\frac{1}{3}$ 。若 A,B 二事件為獨立事件，試求(1)兩人都活過十年以上的機率；(2)至少有一人活十年以上的機率；(3)沒有一人活過十年以上的機率。

Ans：(1)$\frac{1}{12}$ (2)$\frac{1}{2}$ (3)$\frac{1}{2}$

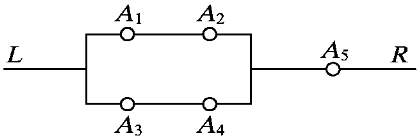
(練習20) 甲乙丙三射手同設一靶，設甲乙丙命中率各爲 0.5,0.6,0.8；並設各人中靶的事件爲獨立事件。則

(1)各射一發，求靶面恰中一發的機率。

(2)各射一發，求沒有人命中靶的機率。

(3)若靶面恰中一發，求是由甲命中的機率。

Ans：(1)0.26 (2)0.04 (3)$\frac{2}{13}$



(練習21) 右圖有 5 個開關，以 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 表示，

電流通過各開關的機率分別爲 $\frac{7}{10}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，

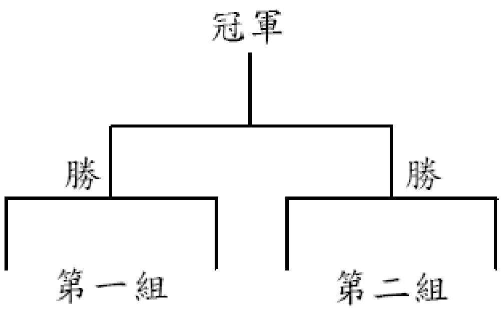
若各開關的操作獨立，求電流從左端 L 流到右端 R 的機率爲_______。

Ans：$\frac{31}{125}$

(練習22) 設某藥物對一般病人有過敏反應的機率爲 0.1，今有三位病人接受此藥物的治療，如果此三位病人是否有過敏反應互不影響，試求至少有一位病人有過敏反應的機率。Ans：0.271

綜合練習

(1) 某棒球比賽有實力完全相當的甲乙丙丁四隊參加， 先將四隊隨機抽籤分成兩組比賽， 兩組的勝隊再參加冠亞軍決賽。如下圖：



根據過去的紀錄， 所有隊伍比賽時各隊獲勝的機率均為 0.5。則冠亞軍決賽由甲、乙兩隊對戰的機率為_______ （ 四捨五入到小數三位）。(2007 指定乙)

(2) 以符號 P(C)代表事件 C 發生的機率，符號 P(C|D)代表在事件 D 發生的條件下，事件 C 發生的機率。今設 A、B 為樣本空間中兩個事件，已知 P(A)=P(B)=0.6。請選出正確的選項。
(1)$P(A\cup B)=1$ (2)$P(A\cap B)=0.2$ (3)$P(A|B)=1$ (4)$P(A|B)=P(B|A)$
(5)A、B 是獨立事件。 (2011 指定乙)

(3) 某種疾病有甲、乙、丙三種檢測方法。若受檢者檢測反應為陽性，以符號「＋」表示，反之則記為「－ 」。一個受檢者接受三種檢測方法呈現之結果共有 $A_1,\dots,A_8$ 八種不同的可能情況， 例如事件 A_1 表示該受檢者以三種方法檢測反應皆為陽性， 其餘類推（ 如下表）：

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
方法甲	＋	＋	＋	－	＋	－	－	－
方法乙	＋	＋	－	＋	－	＋	－	－
方法丙	＋	－	＋	＋	－	－	＋	－

以 $P(A_1),\dots,P(A_8)$分別代表事件 $A_1,\dots,A_8$ 發生之機率。請問下列哪些選項是正確的？
(1)$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$。
(2)以方法乙檢測結果為陽性的機率是 $P(A_1)+P(A_2)+P(A_4)+P(A_6)$。
(3)以方法甲與方法乙檢測，結果一致的機率是 $P(A_1)+P(A_2)$。
(4)以方法甲、乙、丙檢測，結果一致的機率是 $P(A_1)$。 (2011 指定乙)

(4) 某校數學複習考有 400 位同學參加，評分後校方將此 400 位同學依總分由高到低排序：前 100 人為 A 組， 次 100 人為 B 組， 再次 100 人為 C 組， 最後

100 人為 D 組。校方進一步逐題分析同學答題情形， 將各組在填充第一題（考排列組合）和填充第二題（考空間概念）的答對率列表如下：

	A 組	B 組	C 組	D 組
第一題答對率	100%	80%	70%	20%
第二題答對率	100%	80%	30%	0%

請選出正確的選項。
(1) 第一題答錯的同學，不可能屬於 B 組
(2) 從第二題答錯的同學中隨機抽出一人，此人屬於 B 組的機率大於 0.5
(3) 全體同學第一題的答對率比全體同學第二題的答對率高 15%
(4) 從 C 組同學中隨機抽出一人，此人第一、二題都答對的機率不可能大於 0.3
(2011 指定乙)

(5) 彩票公司每天開獎一次，從 1、2、3 三個號碼中隨機開出一個。開獎時，如果開出的號碼和前一天相同，就要重開，直到開出與前一天不同的號碼為止。如果在第一天開出的號碼是 3，則在第五天開出號碼同樣是 3 的機率是________(以最簡分數表示)。 (2002 指定甲)

(6) 甲、乙、丙三人參加一投擲公正銅板的遊戲，每一局三人各擲銅板 1 次；在某局中，當有一人投擲結果與其他二人不同時，此人就出局且遊戲終止；否則就進入下一局，並依前述規則繼續進行，直到有人出局為止。試問下列哪些選項是正確的？

(A)第一局甲就出局的機率是$\frac{1}{3}$ (B)第一局就有人出局的機率是$\frac{1}{3}$

(C)第三局才有人出局的機率是$\frac{3}{64}$ (D)已知第十局才有人出局，則甲出局的機率是$\frac{1}{3}$ (E)該遊戲在終止前，至少玩了六局的機率大於$\frac{1}{1000}$。 (2008 指定甲)

(7) 擲三粒均勻的骰子，已知點數和為 5 的倍數，求點數和不超過 10 的機率。

(8) 由 1 到 9 的 9 個數字中任取 2 數，且取過的數字不再取，若其和為偶數，求二者均為偶數的機率。

(9) 設 A、B、C 為獨立事件，若 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{36}$，$P(A'\cap B'\cap C')=\frac{1}{6}$，則 P(B)+P(C)=？

(10) 擲一公正之銅板兩次，
A 表第一次出現反面之事件，
B 表第二次出現正面之事件，
C 表示正面、反面均出現一次之事件，
則下列何者為獨立事件？何者為相關事件？

(a)A,B 爲___________事件。(b)B,C 爲___________事件。
(c)A,C 爲___________事件。(d)A,B,C 爲___________事件。

(11) 設正整數 x,y,z 爲偶數的機率爲$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，在 xy 爲偶數的條件下，
$xy+z$ 爲奇數的機率爲_____。

(12) 若一個袋子中有 20 個球，其中 4 個白球，每次取一個球，取出後不放回，若第一次取到白球，求第二次也取到白球的機率爲________。

(13) 設袋中有 12 個球，其中有 8 個白球，從袋中逐次取出 4 球，
若每次取球時，每球被取到的機會相等，試求
(a)取後放回，抽中 3 白球的機率=_________。
(b)取後放回，在抽中 3 白球的條件下，第三個是白球的機率=_______。
(c)取後不放回，抽中 3 白球的機率=_________。
(d)取後不放回，在抽中 3 白球的條件下，第三個是白球的機率=______。

(14) 袋中有 4 紅球，3 白球，今自袋中每次取一球，連取 4 次，每次均不放回，問第 3 次取到白球的機率=_______。

(15) 某公司共有 6 個工廠，各工廠的產量都一樣，且所生產的產品都放進同一倉庫中。由過去的經驗知道，第 k 個工廠的產品不良率爲$\frac{k}{50}$，其中 k =1,2,3, 4,5,6 ，爲了檢驗倉庫中這一批產品的品質， 從倉庫中任意抽出一件， 若爲不良品，則此不良品是來自第五個工廠的機率爲__________。 (2007 指定甲)

(16) 課外活動社團共有 20 位同學參加，已知其中高一、高二、高三同學所佔的比例分別爲 55%、25%、20%。若由該社團中任選二人，
則此二人是不同年級學生的機率=_______________。 (90 社)

(17) 某校橋藝社由甲乙丙三班同學組成，各佔 40%、30%、30%。社員中甲班人數的$\frac{1}{5}$，乙班人數的$\frac{1}{5}$，丙班人數的$\frac{1}{3}$ 亦爲籃球校隊隊員。某次橋藝社推選新社長，每人當選的機會相等，求(a)籃球隊員當選的機率；(b)若籃球隊員當選社長，求他是甲班同學的機率。

(18) 甲乙丙三人同時翻譯一封用密碼寫成的信，甲乙丙三人亦出之機率依次爲$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{3}$，且每人譯出均不互相影響，求此封信被譯出之機率爲______，若此封信被譯出，求恰是甲一人譯出的機率=________。

(19) 假設被選中參加一項刑案審判的陪審團，不論被告有罪或無罪，都有 0.95 的機率做出正確判決。另外還假設當地警方執法非常嚴謹，在被審判的人當中，有 99%事實上是有罪的。若已知陪審團判某被告無罪，則該名被告真的是無罪之機率是多少？

(20) 根據過去紀錄知，某電腦工廠檢驗其產品的過程中，
將良品檢驗爲不良品的機率爲 0.20，將不良品檢驗爲良品的機率爲 0.16。
又知該產品中，不良品佔 5%，良品佔 95%。若一件產品被檢驗爲良品，
但該產品實際上爲不良品之機率爲________。

(21) 某項胸部 X 光檢查的可靠程度如下：
對於有結核病者，90%可發現，10%未發現。對於無結核病者，99%爲正確，1%不正確。設地區廣大人口中患有結核病者佔 0.1%，若其中任意一人經 X 光檢查有結核病嫌疑，則此人確有結核病的機率爲____。

(22) 宿舍大門在晚上 10 點到 11 點之間上鎖的機率爲 $\frac{1}{2}$。某生的抽屜中有 10 把鑰匙，其中有兩把是大門鑰匙。有一天中午，此生任意抓走 3 把鑰匙外出。請問他在晚上 10 點半回來時，能打開宿舍大門的機率是 ________？

(23) 設每次甲訪問別人家裏而告辭時忘記帶傘的機率爲 $\frac{1}{5}$，某日甲帶傘出去，順次去乙，丙，丁的家訪問，最後回家時發現傘沒有帶回，問此傘遺忘在丙家之機率是 ________？

(24) 設兩人同時被一家公司任用，一年之後兩人是否離職或繼續在該公司是獨立的。若一年之後兩人中至少有一人仍在該公司的機率是 $\frac{4}{9}$，而只有一人仍在該公司工作的機率是 $\frac{2}{9}$，請計算一年後兩人都在公司的機率。

(25) 某工業區的防盜系統都與轄區的派出所連線，如果警報器響了，派出所就會派一名員警過去查看。假設每次派出所收到示警訊息，其爲假警報的機率爲 0.1，而每次訊號之間互相獨立。若這間派出所在 24 小時內總共收到了四次警報訊號，則四次都是真的的機率爲多少？四次當中恰有一次爲假警報的機率爲多少？

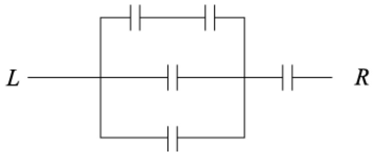
(26) 甲乙丙三射手同射一靶，每人一發，設甲乙丙三人命中率依序爲 0.4、0.5 及 0.6，且各人命中靶面的事件爲獨立事件，試求
(a)靶面恰中二發之機率=？
(b)已知靶面恰中二發，求是由甲及乙命中的機率=？

(27) 一種飛彈命中目標的機率每發爲 $\frac{1}{10}$
(a)求發射 n 次中，至少命中一發的機率爲何？
(b)求發射至少幾發，才能使至少命中一發之機率大於 0.98？

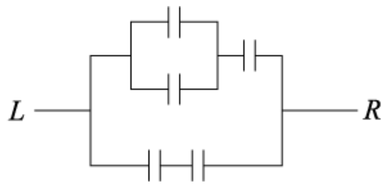
(28) 某次考試共有 10 題是非題，每題答對得 1 分，答錯倒扣 1 分，不作答得 0 分。設甲生確定會作答得有 4 題，其餘 6 題都不經考慮隨意猜答。如果甲生確定會的 4 題都答對，那麼甲生得分超過 4 分的機率爲_________。

(29) 設有甲、乙兩個袋子，甲袋內有一白球、一黑球，乙袋內有兩個白球。
今從甲袋取一球放入乙袋，再從乙袋取一球放入甲袋，然後再由甲袋取一球放入乙袋，最後再由乙袋取一球放入甲袋。試求：
(a)最後甲袋內有一白球一黑球的機率=_________。
(b)最後乙袋內有一白球一黑球的機率=_________。

(30) 下圖是一個繼電器構造，每個繼電器「┤ ├」能正常讓電流暢通的機率爲 p，且所有繼電器獨立運作，試求下列的電路電流從 L 到 R 暢通的機率？
(a)



(b)



(31) 美國總統常常從經濟顧問委員會尋求各種建議，假設有三類具有不同經濟主張的顧問 A、B、C，總統正在考慮採取一項關於工資與價格控制的新政策，並關注此政策對於失業率的影響。每位顧問就這影響給總統一個預測，他們預測的失業率變化的機率如下表所示：

	下降	維持原狀	上升
顧問 A	0.1	0.1	0.8
顧問 B	0.6	0.2	0.2
顧問 C	0.2	0.6	0.2

根據以往與顧問一起工作的經驗，總統已經形成了關於每個顧問有正確的經濟理論的可能性的一個先驗估計分別爲：

P(顧問 A 正確)=$\frac{1}{6}$，P(顧問 B 正確)=$\frac{1}{3}$，P(顧問 A 正確)=$\frac{1}{2}$

假設總統採納了顧問所提的政策，一年之後，失業率上升了，請問總統應如何調整其顧問的理論正確性的估計。

進階問題

(32) 設甲袋中有 5 個銀幣、1 個金幣，乙袋中有 3 個銀幣，今自甲袋中任取 4 個硬幣放入乙袋，再由乙袋中任取 5 個硬幣放入甲袋．試求
(a)金幣在乙袋的機率? (b)若金幣在甲袋，則甲取得 4 銀幣的機率?

(33) 一袋中有 6 個紅球，4 個黑球，依次在袋中任取一球，取後不放回，在已知紅球先取完的情形下，求前 6 次取出皆爲紅球的機率=？

(34) x,y,z 爲自然數，每個數爲偶數之機率皆爲 p，試求下列問題：
(a)試求 $xy+z$ 爲奇數的機率爲 $f(p)$=？ (b)若 $f(p)>\frac{1}{2}$，請求出 p 的解集合。

(35) (Polya 模式)

設袋中裝有 b 個黑球，r 個紅球，現在任取一球，然後放回，並且再放入 d 個與取出的顏色相同的球，而後再從袋中取出一球，試求

(a)最初取出的球是黑球，第二次取出的球也是黑球的機率。

(b)重複前面的作法，設取了三次，試問三次取出的球的顏色依次是黑、紅、紅的機率是多少？

(c)若將上述作法重複進行 n 次，取出的正好是 n_1 個黑球，n_2 個紅球($n_1+n_2=n$)，的機率。

(d)證明：任何一次取得黑球的機率都是$\frac{b}{b+r}$，任何一次取得紅球的機率都是$\frac{b}{b+r}$。

(e)證明：第 m 次與第 n 次($m<n$)取出都是黑球的機率是$\frac{b(b+d)}{(b+r)(b+r+d)}$。

綜合練習解答

(1) 0.167

(2) (4)

[解法]：

若 $A\cup B\neq S$(樣本空間)，例如 $P(A\cup B)=0.8=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cap B)=0.4$，$P(A|B)=\frac{2}{3}$，$P(A\cap B)=0.4\neq P(A)\cdot P(B)$

故(1)(2)(3)(5)不正確。$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\neq\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=P(B|A)$，故選(4)。

(3) (1)(2)

[解法]：

(1)$\because A_1\cap A_2=\phi$，$\therefore P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$。

(2)如表格，方法乙爲陽性，而方法甲與方法丙的結果可爲(+,+)、(+,–)、(–,+)、(–,–)故這些情形爲事件 A_1、A_2、A_4、A_6，而他們彼此互斥，

故方法乙檢測結果爲陽性的機率是 $P(A_1)+P(A_2)+P(A_4)+P(A_6)$。

(3) 以方法甲與方法乙檢測，結果一致的事件爲 A_1、A_2、A_7、A_8，故(3)錯誤。

(4) 以方法甲、乙、丙檢測，結果一致的事件爲 A_1、A_8，故(4)錯誤。

(4) (3)(4)

[解法]：

根據表格，可以得知

A、B、C、D 組答對第一題的人數分別爲 100、80、70、20 人

A、B、C、D 組答對第二題的人數分別爲 100、80、30、0 人

B 組的人有 20 人答錯第一題。

A、B、C、D 各組答錯第一題的人數分別爲 0、20、70、100 人，

$\therefore$ 從第二題答錯的同學中隨機抽出一人，此人屬於 B 組的機率 $=\frac{20}{20+70+100}<0.5$。

全體同學第一題答對率$\frac{270}{400}$，全體同學第二題答對率$\frac{210}{400}$，

故全體同學第一題的答對率比全體同學第二題的答對率高 15%。

因爲 C 組中答對第二題的人只有 30 人，而 C 組中共有 100 人，

第一、二題都答對的機率$\leq\frac{30}{100}=0.3$。故選(3)(4)。

(5) $\frac{3}{8}$

(6) (C)(D)

(7) $\frac{33}{43}$

(8) $\frac{3}{8}$

(9) $\frac{5}{6}$

(10) (a)獨立(b)獨立(c)獨立(d)相關

(11) $\frac{3}{4}$

(12) $\frac{3}{19}$

(13) (a) $\frac{32}{81}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{224}{495}$ (d) $\frac{3}{4}$

(14) 這是抽籤問題，P（第 3 次白球）＝P（第 1 次白球）＝ $\frac{3}{7}$

(15) $\frac{5}{21}$

(16) $\frac{119}{190}$

(17) (a)$\frac{24}{100}$ (b)$\frac{1}{3}$

(18) $\frac{3}{5}$、$\frac{1}{6}$

(19) 0.161(這個機率看起來，好像太低了，不過在沒審判之前，我們假設這名被告無罪的機率是 0.01，在經過審判獲判無罪之後，這個值增加到了 0.161)

(20) $\frac{1}{96}$

(21) $\frac{10}{121}$

(22) $\frac{23}{30}$

[提示：正面解法 $(1-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\cdot\frac{C_2^2\cdot C_1^8+C_1^2\cdot C_2^8}{C_3^{10}}=\frac{1}{2}+\frac{8}{30}=\frac{23}{30}$ 。

反面解法 $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{C_3^8}{C_3^{10}}=1-\frac{7}{30}=\frac{23}{30}$ 。]

(23) $\dfrac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{20}{61}$

(24) $\frac{2}{9}$

(25) $(0.9)^4$，$C^4{}_1(0.9)^3(0.1)$

(26) (a)$\frac{19}{50}$ (b)$\frac{4}{19}$

(27) (a)$1-(\frac{9}{10})^n$(b)38 發

(28) $\frac{11}{32}$

(29) (a)$\frac{5}{9}$ (b)$\frac{4}{9}$

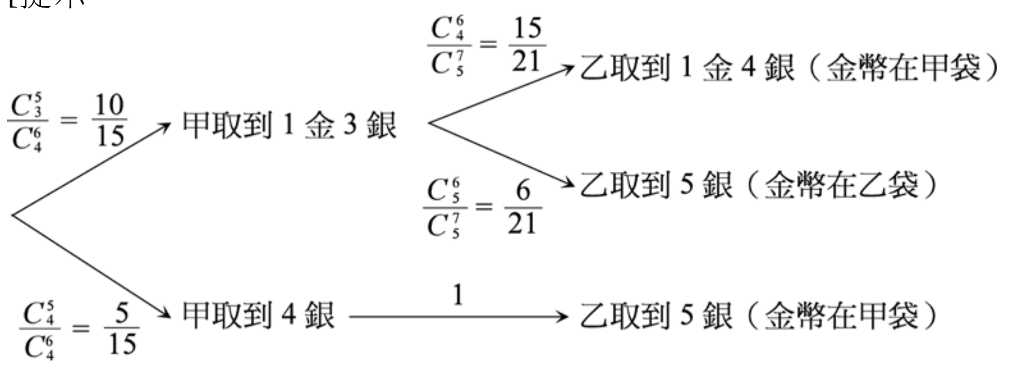
(30) (a) $p^2(2-2p^2+p^3)$(b) $3p^2-p^3-2p^4+p^5$

(31) P(顧問 A 正確|失業率上升)=$\frac{4}{9}$，P(顧問 B 正確|失業率上升)=$\frac{2}{9}$，

P(顧問 C 正確|失業率上升)=$\frac{3}{9}$。

(32)　(a) $\frac{4}{21}$，(b) $\frac{7}{17}$

[提示：



(a)金幣在乙袋的機率為 $\frac{10}{15}\cdot\frac{6}{21}=\frac{4}{21}$.

(b)所求條件機率為 $\dfrac{\frac{5}{15}\cdot 1}{\frac{10}{15}\cdot\frac{15}{21}+\frac{5}{15}\cdot 1}=\frac{7}{17}$.]

(33)　$\frac{1}{84}$ [提示：設 A 代表紅球先取完的情形，B 代表前 6 次取出皆為紅球的情形

$P(A)=\frac{4}{10}$，$P(A\cap B)=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{10\times9\times8\times7\times6\times5}=\frac{1}{210}$]

(34)　(a)$p(1-p)(3-2p)$　(b)$\frac{2-\sqrt{2}}{2}<p<\frac{1}{2}$

(35)　(a)$\frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+d}{b+r+d}$　(b) $\frac{b}{b+r}\cdot\frac{r}{b+r+d}\cdot\frac{r+d}{b+r+2d}$　(c) $C_{n_1}^{n}\dfrac{\prod_{i=0}^{n_1-1}(b+id)\prod_{j=0}^{n_2-1}(r+jd)}{\prod_{k=0}^{n-1}(b+r+kd)}$

(d)(e)可以考慮數學歸納法