§4–4 多項函數

(甲)多項函數

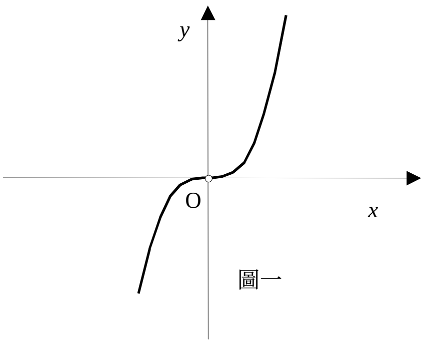
(1)定義多項函數：
由實係數的 n 次多項式所定義的一個函數, 稱為**多項函數**, 又可稱為 ***n* 次函數**。

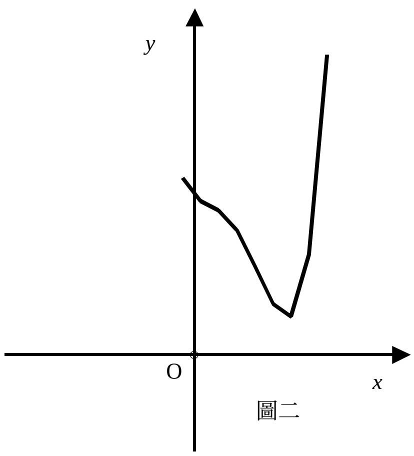
多項函數的實例：
函數 f：$x\rightarrow x^2+x+1$，即 $f(x)=x^2+x+1$ 為一個二次函數。
函數 f：$x\rightarrow x^3+2x^2+x+4$，即 $f(x)=x^3+2x^2+x+4$ 為一個三次函數。

多項函數的定義域：所有的實數所成的集合。

(2)函數的圖形：$y=f(x)$的圖形是由點$(x,f(x))$所形成的圖形。

例如：圖一是 $f(x)=x^3$ 的圖形，圖二是 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-x+3$ 的圖形





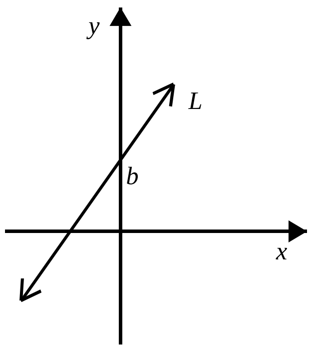
從圖一、圖二可以觀察出來，這些圖形都是連續不斷的。
結論：多項函數的認識
(a)實係數多項式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+a_1x+a_0$,
所定義的函數 $y=f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+a_1x+a_0$，稱為多項函數。
若 $a_n\neq0$，則 $y=f(x)$稱為 n 次多項函數，簡稱為 n 次函數。
其中 x 稱為自變量，而 y 稱為應變量。
當 x 用 a 代入函數時，得到 $f(a)$稱為 $x=a$ 的函數值。
(b)多項函數 $y=f(x)$的圖形,即為點集合$\{(x,y)\mid y=f(x)\}$構成一條連續不斷的曲線。

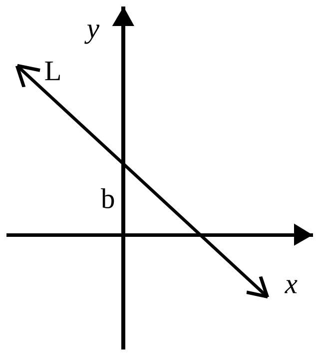
(乙)線性函數

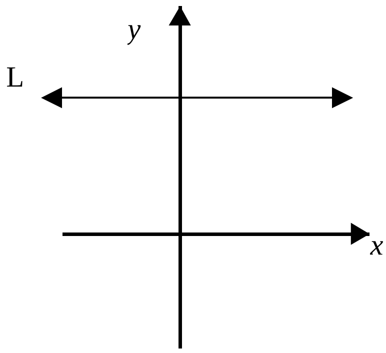
(1)線性函數：凡能化成 $y=f(x)=mx+b$ 形成的函數，就叫做線性函數。

(2)線性函數的圖形：

(i) m>0　　　　　　(ii)m<0　　　　　　(iii)m=0







(3)斜率的意義：

若假設 $P_1(x_1,y_1)$與 $P_2(x_2,y_2)$在直線 L 上，則斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，

換句話說，y_2-y_1 的值等於 $a(x_2-x_1)$，因此可得以下的結論：

①若 $m>0$，則當 x 的值增加 $d(d>0)$時，其相應的 y 值必增加 md。

②若 $m=0$，則不論 x 的值如何變動，其相應的 y 值恆為一個常數。

③若 $m<0$，則當 x 的值增加 $d(d>0)$時，其相應的 y 值必減少$|md|$。

[例題1] 實驗的結果顯示：氣溫攝氏 15 度時，音速為每秒 340 公尺，而氣溫每升高攝氏 1 度，音速就增加 0.63 公尺/秒，試求(1)攝氏 0 度時的音速。(2)攝氏 50 度的音速。Ans：(1)330.55 公尺/秒 (2)362.05 公尺/秒

(練習1) 測量氣溫，常用攝氏和華氏兩種度數，已知攝氏 0 度時，華氏 32 度；攝氏 100 度時，華氏 212 度，今設攝氏 x 度時，試將 y 表示成 x 的函數。

Ans：$y=\frac{9}{5}x+32$

(丙)二次函數

(1)何謂二次函數：

設 a,b,c 為給定的實數，若 $a\neq0$，則 $f(x)=ax^2+bx+c$ 稱為二次函數。

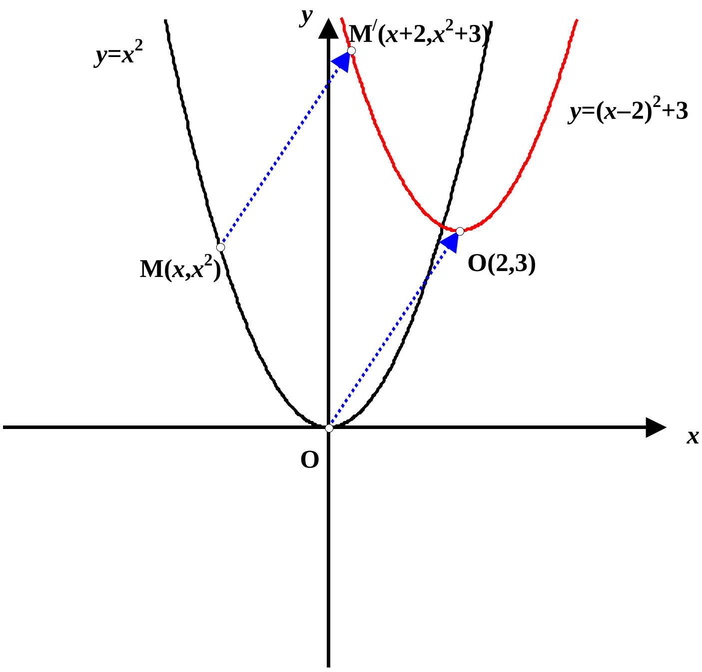
(2)二次函數的圖形：

二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形上的點為$(x,f(x))$，點$(x,f(x))$形成二次函數的圖形。一般說來，二次函數的圖形是拋物線，基本的作圖方式是描點，更精確點，則觀察其對稱軸與極值，可幫助我們做圖。

(3)二次函數圖形的認識：

(a)$y=x^2$ 與 $y=(x-h)^2+k$ 之圖形的關係：

以 $y=x^2$ 與 $y=(x-2)^2+3$ 為例：
將 $y=x^2$ 上的任意點 $M(x,x^2)$向右平移 2 單位，向上平移 3 單位，成為 $M'(x+2,x^2+3)$
M'形成的函數圖形是 $y=(x-2)^2+3$。



結論：
設 $y=x^2$ 的圖形為 G_1，$y=(x-h)^2+k$ 的圖形為 G_2，則 $G_1 \xrightarrow[\text{鉛直移動 } k]{\text{水平移動 } h} G_2$
當 $h>0$ 時，表示向右平移$|h|$單位；當 $h<0$ 時，表示向左平移$|h|$單位。

當 $k>0$ 時，表示向上平移$|k|$單位；當 $k<0$ 時，表示向下平移$|k|$單位。

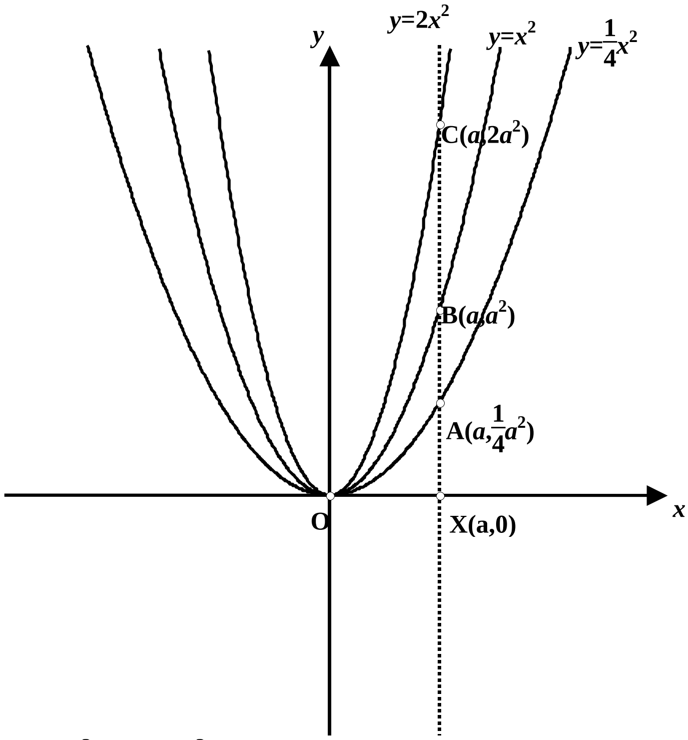
(b)$y=x^2$ 與 $y=ax^2$ 之圖形的關係：

觀察 $y=x^2$、$y=2x^2$、$y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形

①開口大小：

$\boxed{}$ 的開口最大。

$\boxed{}$ 的開口最小。



②畫一條鉛直線 $x=a$ 分別與 $y=\frac{1}{2}x^2$、$y=x^2$、$y=2x^2$ 交於 A、B、C 三點，

而三點坐標分別為 $A(a,\frac{1}{2}a^2)$、$B(a,a^2)$、$C(a,2a^2)$，觀察 A、B、C 三點的 y 坐標，

可知 A 點的 y 坐標=(B 點的 y 坐標)$\times\frac{1}{2}$，C 點的 y 坐標=(B 點的 y 坐標)$\times$**2**

$y=\frac{1}{2}x^2$ 上的點 $A(a,\frac{1}{2}a^2)$與 $y=x^2$ 上的點 $B(a,a^2)$有 A 點的 y 坐標=(B 點的 y 坐標)$\times\frac{1}{2}$的

關係，則稱 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形是由 $y=x^2$ 的圖形$\boxed{\text{沿 } y \text{ 軸伸縮} \frac{1}{2} \text{倍}}$而得到的。

$y=2x^2$ 上的點 $C(a,2a^2)$與 $y=x^2$ 上的點 $B(a,a^2)$有 C 點的 y 坐標=(B 點的 y 坐標)$\times 2$ 的關係，則稱 $y=2x^2$ 的圖形是由 $y=x^2$ 的圖形$\boxed{\text{沿 } y \text{ 軸伸縮 2 倍}}$而得到的。

結論：

設 $y=x^2$ 的圖形為 G_1，$y=ax^2$ 的圖形為 G_3

(1)$a>0$，G_3 開口向上；$a<0$，G_3 開口向下

(2)$|a|$愈大，G_3 的開口愈小。

(3)$y=x^2 \xrightarrow{\text{沿 } y \text{ 軸伸縮} a \text{倍}} y=ax^2 \quad (a>0)$

(4)$y=x^2 \xrightarrow{\text{對} x \text{軸做鏡射}} y=-x^2 \xrightarrow{\text{沿 } y \text{ 軸伸縮} |a| \text{倍}} y=ax^2 \quad (a<0)$

(c)$y=a(x-h)^2+k$ 的圖形與 $y=x^2$ 圖形的關係：

若 $a>0$，則 $y=x^2 \xrightarrow{\text{沿 } y \text{ 軸伸縮} a \text{倍}} y=ax^2 \xrightarrow[\text{鉛直移動 } k]{\text{水平移動 } h} y=a(x-h)^2+k$

若 $a<0$，則 $y=x^2 \xrightarrow{\text{對} x \text{軸做鏡射}} y=-x^2 \xrightarrow{\text{沿 } y \text{ 軸伸縮} |a| \text{倍}} y=ax^2 \xrightarrow[\text{鉛直移動 } k]{\text{水平移動 } h} y=a(x-h)^2+k$

(3)利用配方法找二次函數的頂點與對稱軸：

考慮二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 之圖形為拋物線，利用配方法

$$y= ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}\ x)+c =a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}= a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

可知拋物線之對稱軸為 $x=-\ \frac{b}{2a}$，頂點為$(-\ \frac{b}{2a},\ -\ \frac{b^2-4ac}{4a})$

[例題2]

設 a,b 為實數，且二次函數 $f(x)=a(x-1)^2+b$ 滿足 $f(3)>0$，$f(4)<0$，則下列那些敘述為真？

(A)$a>0$ (B)$b>0$ (C)$f(-1)>0$ (D)$f(-2)>0$ (E)$a+b>0$。

[答案]：(B)(C)(E)

[解法]：

根據題意，可以知道拋物線的對稱軸為 $x=1$ 且點$(3,f(3))$在 x 軸上方，$(4,f(4))$在 x 軸下方

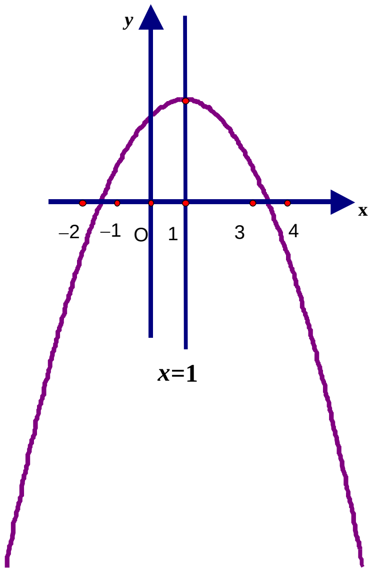
$\Rightarrow$圖形開口向下，頂點在 x 軸上方$\Rightarrow a<0$，$b>0$

因為對稱軸為 $x=1$

所以 $f(-1)=f(3)>0$，$f(-2)=f(4)<0$

$f(0)=a+b>0$

故應選(B)(C)(E)

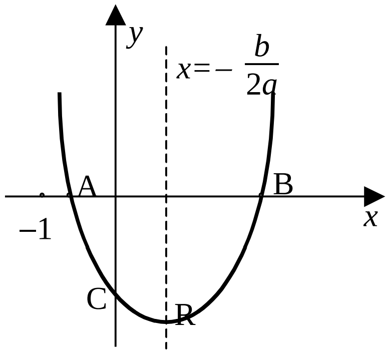


[例題3] 將 $y=x^2$ 的圖形應如何伸縮、對稱、平移才得到 $y=-3x^2-6x-4$ 的圖形。

Ans：

$$y=x^2 \xrightarrow{\text{對}x\text{軸做鏡射}} y=-x^2 \xrightarrow{\text{沿 }y\text{ 軸伸縮3倍}} y=-3x^2 \xrightarrow{\text{沿 }x\text{ 軸向左移動1單位}} y=-3(x+1)^2$$
$$\xrightarrow{\text{沿 }y\text{ 軸向下移動1單位}} y=-3(x+1)^2-1$$

[例題4] 設 a,b,c 為實數，且 $a\neq0$，已知 $y=ax^2+bx+c$ 之圖形如右，圖形與 x 軸的交點為 A(α ,0)、B(β,0)則下列何者為真？



(1)(A)$a>0$ (B)$b>0$ (C)$c>0$ (D)$b^2-4ac>0$

(E)$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{b^2-4ac}{a^2}$。(F)$a-b+c>0$

(2)若 R 為頂點，求 $\overline{AB}=$？，ΔABC 的面積

Ans(1)(A)(D)(F)(2)$\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$，$-\dfrac{c\cdot\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(練習2) 試將下列二次函數化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式：

(1)$y=-3x^2-4x+5$　　(2)$y=4x^2-8x+9$　　(3)$y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{4}{5}x-6$

Ans：(1)$y=-3(x+\dfrac{2}{3})^2+\dfrac{19}{3}$　(2)$y=4(x-1)^2+5$　(3)$y=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{4}{5})^2-\dfrac{316}{50}$

(練習3) 將 $y=2x^2-6x+8$ 的圖形水平移動 3，鉛直移動-5，形成另一個圖形，求此圖形的頂點與對稱軸。Ans：$(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2})$，$x=\dfrac{3}{2}$

(練習4) 二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形的頂點為$(-2,3)$，並經過$(0,-9)$，求 $f(x)=$？Ans：$-3x^2-12x-9$

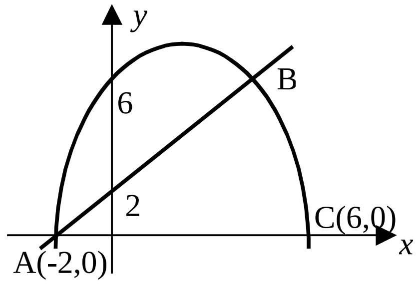
(練習5) 將 $y=x^2$ 的圖形應如何伸縮、對稱、平移才得到 $y=2(x+1)^2-2$ 的圖形。

Ans：

$y=x^2\xrightarrow{\text{沿 }y\text{ 軸伸縮2倍}}y=2x^2$

$\xrightarrow{\text{沿 }x\text{ 軸向左移動1單位}}y=2(x+1)^2\xrightarrow{\text{沿 }y\text{ 軸向下移動2單位}}y=2(x+1)^2-2$

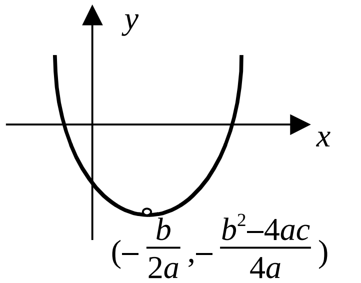
(練習6) 設 $f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+\ldots+(x-9)^2$，當 $x=$______時，$f(x)$有最小值。Ans：5



(練習7) 如右圖，二次函數 $y=f(x)$與一次函數 $y=g(x)$，圖形相交於 A$(-2,0)$，B 兩點，一次函數在 y 軸

上截距是 2，二次函數圖形在 y 軸上的截距是 6，
且與 x 軸的另一個交點為 C(6,0)，求(1)$f(x)$=？(2)B 點坐標。
Ans：$-\frac{1}{2}x^2+2x+6$，(4,6)

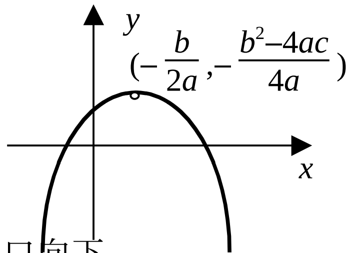
（丁）二次函數的極值



(1)沒有範圍限制求極值：
考慮二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 利用配方法

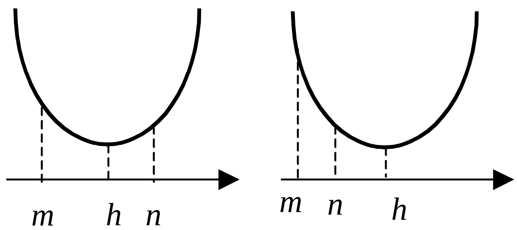
$y=ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}$

$=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$…..(∗)



(a)$a>0$ 時，由(∗)式可得 $y\geq-\frac{b^2-4ac}{4a}$，所以拋物線的開口向上，最低點為$(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$，因為**圖形最低點的 y 坐標為最小值**，故最小值為$-\frac{b^2-4ac}{4a}$。

(b)$a<0$ 時，由(∗)式可得 $y\leq-\frac{b^2-4ac}{4a}$，所以拋物線的開口向下，
最高點為$(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$，因為**圖形最高點的 y 坐標為最大值**，
故最大值為$-\frac{b^2-4ac}{4a}$。



(2)有範圍限制求極值：
問題：$y=a(x-h)^2+k$，$m\leq x\leq n$，求 y 的最大值，最小值。

①$m\leq h\leq n$，則比較 $f(m),f(h),f(n)$可求得最大，最小。
$a>0\Rightarrow f(h)$最小，m,n 中離對稱軸較遠者發生最大值。
$a<0\Rightarrow f(h)$最大，m,n 中離對稱軸較遠者發生最小值。

②h 不在 m,n 之間，
$a>0$：m,n 中離對稱軸較遠者發生最大值，離對稱軸較近者發生最小值。
$a<0$：m,n 中離對稱軸較遠者發生最小值，離對稱軸較近者發生最大值。
或是比較 $f(m),f(n)$可求得最大值、最小值。

[例題5] 函數 $y=f(x)=x^2+2x-3$

(1)若$-2\le x\le 2$，則 $x=$_____時，$f(x)$有最大值_______；$x=$_____時，$f(x)$有最小值________。

(2)若 $0\le x\le 3$，則 $x=$_____時，$f(x)$有最大值_______；$x=$_____時，$f(x)$有最小值________。

Ans：(1)$x=2$ 時 $f(x)$有最大值$=5$，$x=-1$ 時 $f(x)$有最大值$=-4$

(2)$x=3$ 時 $f(x)$有最大值$=12$，$x=0$ 時 $f(x)$有最大值$=-3$

[例題6] 設 x,y 為實數，且 $x^2+3y^2=1$，則 $4x+3y^2$ 之最小值、最大值為何？

Ans：當 $x=1$ 有最大值 4；當 $x=-1$ 時，有最小值-4

(練習8) 二次函數 $y=ax^2+bx+5$，於 $x=2$ 時，有最小值 1，則 $a=$？$b=$？

Ans：$a=1,b-4$

(練習9) $0\le x\le 3$，$y=-x^2+2x-5$ 之最大值為_____，最小值為______。

(練習10) x 為實數，求 $y=(x^2+3x+1)(x^2+3x+2)+3x^2+9x+2$ 之最小值。

Ans：$x=-\dfrac{3}{2}$，y 有最小值$-\dfrac{71}{16}$

[提示：令 $t=x^2+3x$，並且要注意 t 的範圍]

(練習11) 甲、乙兩船航行於海上，甲的位置在乙船的北方 125 浬，以每小時 15 浬的速度向東行駛，乙船以每小時 20 浬的速度向北行駛，問幾小時之後兩船最靠近。 Ans：4 小時

(3)絕對值函數的圖形：

說例：$f(x)=|x|+|x-1|$

速畫練習(1)$f(x)=|x|+|x-1|$ (2)$f(x)=|x|+|x-1|+|x-2|$ (3)$f(x)=|x|+|x-1|+|x-2|+|x-3|$

一般情形：
有關絕對值函數 $f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\dots+|x-a_k|$
①圖形是一條折線。
②折點$(a_1,f(a_1))$、$(a_2,f(a_2))$、…、$(a_k,f(a_k))$ (這些點可能相同)
③$a_1,a_2,\dots,a_k$相異
若 k 是奇數，則圖形的中間是尖點；
若 k 是偶數，則圖形的中間是一段水平的線段。

(4)繪圖的基本做法：分段討論。

[例題7] (1)畫出函數 $y=|x|+|x+1|+|x-2|$的圖形。
(2)試問此函數圖形的最低點坐標、函數值的最小值。
(3)方程式$|x|+|x+1|+|x-2|=k$ 有實數解之充要條件為何？
Ans：(2)(0,3)，3 (3)$k\geq 3$

[例題8] 請畫出 $y=f(x)=x|x+4|+5$ 的圖形。

(練習12) 請畫出 $f(x)=|x|+|x-1|-|x-2|$的圖形，並求最小值。Ans：-1

(練習13) 設 $y=f(x)=|x^2-3x|+x+1$ 且$-1\leq x\leq 4$，則求 y 之最大值、最小值。Ans：5,1
[提示：$x\geq 3$ 或 $x\leq 0$ 時 $f(x)=x^2-3x+x+1$，$0\leq x\leq 3$ 時，$f(x)=-x^2+3x+x+1$]

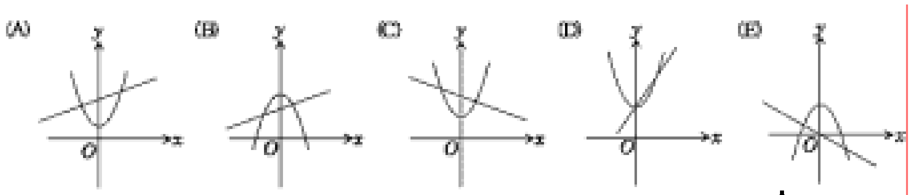
(練習14) 將 $y=f(x)$的圖形向左平移 3 單位鉛直向上移動 2 單位後得出 $y=|x+2|-1$ 的圖形，請問 $f(x)=$？ Ans：$f(x)=|x-1|-3$

綜合練習

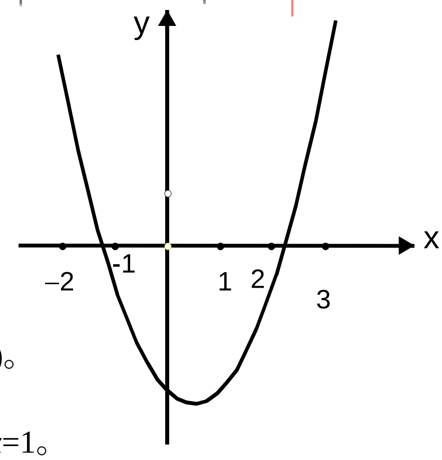
(1) 設 $f(x)$為一次函數,
(a)如果 x 增加 4 單位時，其對應之 $f(x)$就增加 10 單位，又 $f(4)=12$，　則 $f(x)=$？
(b)若 $f(x)=1998x+9876$，則求$\dfrac{f(56789)-f(12345)}{56789-12345}=$________。

(2) 某班數學測驗，成績最低者為 20 分，最高者為 90 分。請您設計一線性函數使原來 40 分者為 60 分，原來 90 分者為 100 分。則此函數將最低分者調為_____分。

(3) 下列何者可能為直線 $y=ax+b$ 與拋物線 $y=ax^2+b$ 圖形的聯集？



(4) $y=f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$圖形右圖，判斷下列正負
(a)α_____(b)β_____
(c) γ______(d)$\beta^2-4\alpha\gamma$________
(e)$\alpha+\beta+\gamma$_________
(f)$\alpha-\beta+\gamma$_________
(g)$9\alpha+3\beta+\gamma$________



(5) 已知二次函數 $y=f(x)$滿足下列條件，試求 $f(x)$。
(a)圖形以$(1,-3)$為頂點，又通過$(3,5)$。
(b)圖形過$(2,-1)$，$(3,5)$，且對稱軸方程式為 $x=1$。
(c)圖形過$(-2,0)$，$(5,0)$，且與 y 軸交於$(0,10)$

(6) 設 a,b,c 為實數。若二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過$(0,-1)$且與 x 軸相切，則下列選項何者為真？
(A) $a<0$(B) $b>0$(C) $c=-1$(D) $b^2+4ac=0$(E) $a+b+c\leq 0$ (90 學科能力測驗)

(7) 設 a,b 均為實數，且二次函數 $f(x)=a(x-1)^2+b$ 滿足 $f(4)>0$，$f(5)<0$，試問下列何者為真？
(A)$f(0)>0$ (B)$f(-1)>0$ (C)$f(-2)>0$ (D)$f(-3)>0$ (E)$f(-4)>0$
(87 學科能力測驗能力測驗)

(8) (a)請作出 $y=|x-1|$的圖形。
(b)利用(a)的圖形說明如何由水平位移與鉛直位移得出下列圖形：
①$y=|x-4|$②$y=|x+1|+3$

(9) 求 $f(x)=-x^2+4x+2$ $(-3\leq x\leq 5)$ 的最大值與最小值。

(10) x 為實數，設 $f(x)=\sum_{n=1}^{5}(x-n)^2+\sum_{n=21}^{25}(x-n)^2$，則 x=？時，$f(x)$有最小值=？

(11) 設 A(2,3)、B(4,9)請在 x 軸上找一點 P，使得$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$的值最小。

(12) 點(x,y)在直線 $4x+y=5$ 上移動，則 $4x^2+y^2$ 之最小值為____。

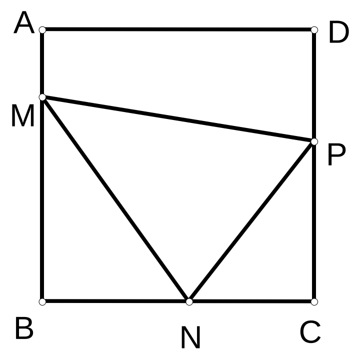
(13) 正方形 ABCD 之邊長為 1，在$\overline{AB}$邊及$\overline{AD}$邊上各取一點 E、F 使得$\overline{AE}=\overline{AF}$，且四邊形 BCFE 之面積為最大，則此最大面積為？

(14) 已知 x_1、x_2 是方程式 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 的兩個實數根，則 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值為多少？

進階問題

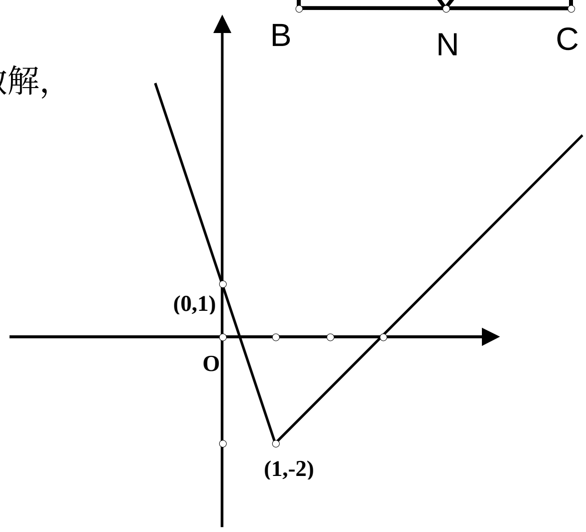
(15) 設 $x\in$R，若 $y=f(x)=(-x^2+3x+14)-|x^2-x-2|$，求 $f(x)$的最大值。

(16) 如圖所示，正方形 ABCD 的邊長為 1，
若動點 M,N,P 分別在$\overline{AB}$,$\overline{BC}$,$\overline{CD}$邊上，
且$\overline{AM}=\overline{BN}=\frac{1}{2}\overline{CP}$，求△MNP 面積的最小值。



(17) (a)作出 $y=x|x-2|$的圖形。
(b)設 a 為實數，若 $x|x-2|=a$ 恰有一個實數解，求 a 的範圍。

(18) $f(x)=ax+b+c|x+d|$，a,b,c,d 為實數，而 $y=f(x)$的圖形如右，求 $a+b+c+d$=？



(19) $f(x)=|x-a|+b$ 和 $g(x)=-|x-c|+d$ 的圖形相交於(–2, 3), (8, 5)兩點，則 $a+c$ =______。

綜合練習解答

(1) (a)$\frac{5}{2}x+2$(b)1998

(2) 44 分

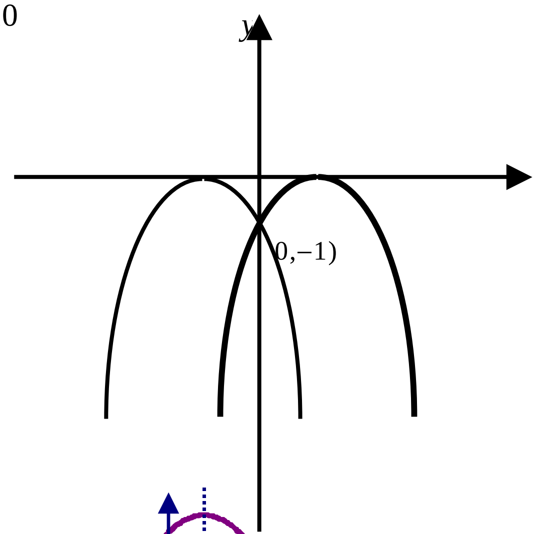
(3) D

(4) (a)+ (b)−(c)−(d)+(e)−(f)−(g)+

(5) (a)$f(x)=2x^2-4x-1$　(b)$f(x)=2x^2-4x-1$　(c)$f(x)=-x^2+3x+10$

(6) [答案]：(A)(C)(E)

[解法]：



觀察右圖，可設 $f(x)=ax^2+bx+c$ 與 x 軸相切於 A$(\alpha,0)$

(A)因開口向下⇒ $a<0$……(○)

(B)$\alpha=-\dfrac{b}{2a}$可正亦可負 ⇒ b 可能大於 0 亦可能小於 0

(C)因圖形過$(0,-1)$，將其代入可求得 $c=-1$……(○)

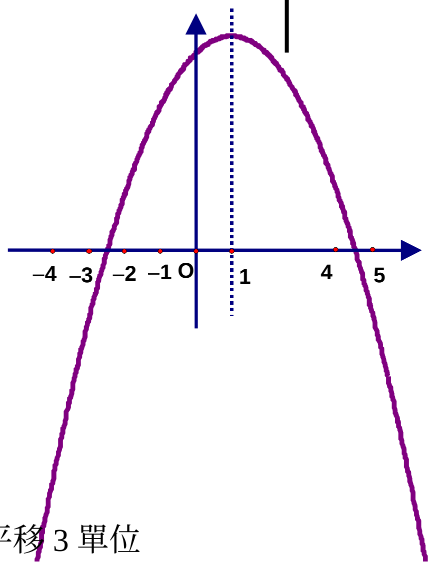
(D)因圖形與 x 軸相切 ⇒ $b^2-4ac=0$

(E) $a+b+c=f(1)$，而圖形與 $x=1$ 之交點

必在第四象限或 x 軸上 ⇒ $a+b+c\le 0$……(○)

(7) (A)(B)(C)

[解法]：



根據題意，可以知道拋物線的對稱軸為 $x=1$ 且

點$(4,f(4))$在 x 軸上方，$(5,f(5))$在 x 軸下方

⇒圖形開口向下，頂點在 x 軸上方⇒$a<0$，$b>0$

因為對稱軸為 $x=1$

所以 $f(0)=f(2)>0$，$f(-1)=f(3)>0$，$f(-2)=f(4)>0$

$f(-3)=f(5)<0$，$f(-4)=f(6)<0$

$f(0)=a+b>0$　故應選(A)(B)(C)

(8) (a)略 (b) ①向右 3 單位② 向左平移 2 單位，向上平移 3 單位

(9) 最大值 6，最小值−19

(10) 13，1020

(11) (3,0)[提示：令 P$(x,0)$代入 AP^2+BP^2 計算]

(12) 5

(13) $\dfrac{5}{8}$

(14) 18

[解法]：

根據根與係數的關係 $x_1+x_2=(k-2)$，$x_1\cdot x_2=k^2+3k+5$

又 x_1、x_2 為實數，$D=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)\ge 0 \Leftrightarrow -4\le k\le\dfrac{-4}{3}$

$x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)$

$=-k^2-10k-6$

$=-(k+5)^2+19$

x_1、x_2 為實數 $\Leftrightarrow$ $-4\le k\le\frac{-4}{3}$ ，所以 $k=-4$ 時有最大值 18

注意：因為 $k=-5$ 時，x_1,x_2 不為實數，所以最大值不是 19

(15) 16[考慮 $x\ge2$ 或 $x\le-1$ 與 $-1\le x\le2$ 兩種情形，再畫圖找函數圖形的最高點.]

(16) $\frac{1}{3}$ [提示：可以令 $\overline{AM}=\overline{BN}=x$，$0\le x\le1$，再將△MNP 面積表示成 x 的二次函數，再求其最小值。]

(17) (a)略 (b) $a>1$ 或 $a<0$

[解法]：

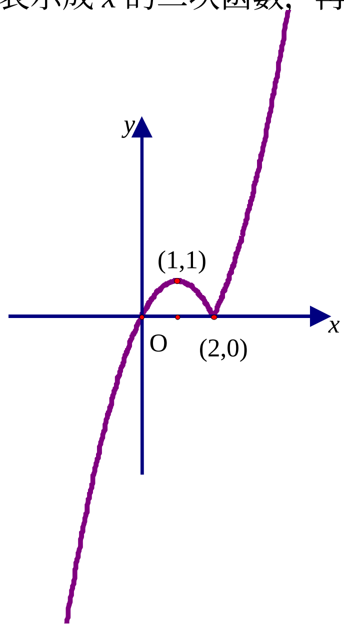
(a) 當 $x\ge2$ 時，$f(x)=x^2-2x$

；當 $x\le2$ 時，$f(x)=-x^2+2x$

(b)考慮 $y=f(x)=x|x-2|$ 與 $y=a$ 兩個圖形的交點，

若有一個交點，則方程式 $x|x-2|=a$ 有一個實數解

$\Rightarrow a>1$ 或 $a<0$



(18) -1[提示：轉折點 $(-1,0)\Rightarrow d=-1\Rightarrow f(x)=ax+b+c|x+1|$

$x\ge1\Rightarrow f(x)=ax+b+c(x-1)$；$x\le1\Rightarrow f(x)=ax+b+c(1-x)$]

(19) 6