第七單元 n 次方程式與不等式

(甲)n 次方程式的引入與解的意義

(1)由 n 次多項式到 n 次方程式

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ 是 n 次多項式，方程式 $f(x)=0$ 稱為 **n 次(多項式)方程式**。

例如：$3x-\sqrt{35}=0$，$x^2-3x-54=0$，$(1+\frac{x}{100})^3=1.2$ 分別是 1 次、2 次、3 次方程式。

(2)方程式的根：

一個數 x_0 若滿足 $f(x_0)=0$，就稱 x_0 為方程式 $f(x)=0$ 的根或解。

若 x_0 為複數、實數、有理數或整數，x_0 又稱為複數根、實根、有理根或整數根。

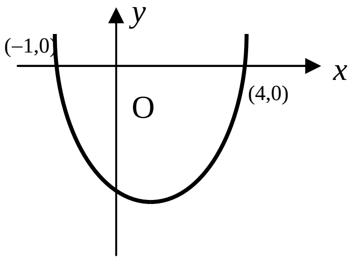
(3)實根的幾何解釋：

例如：

(a)$y=f(x)=x^2-3x-4$ 的圖形，如右圖所示：

圖形與 x 軸相交於兩點$(-1,0)$、$(4,0)$，

其橫坐標-1 與 4 就是 $x^2-3x-4=0$ 的實根。

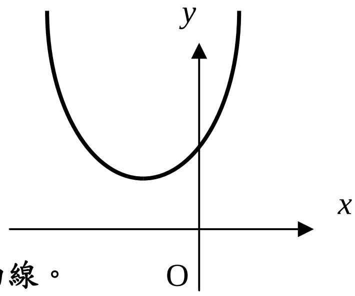


(b)$y=g(x)=x^2+x+1$ 的圖形，如右圖所示：

圖形與 x 軸沒有交點，因為 $y=g(x)=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$，

所以沒有任何實數 x，使得 $g(x)=0$，故 $g(x)=0$ 沒有實根。

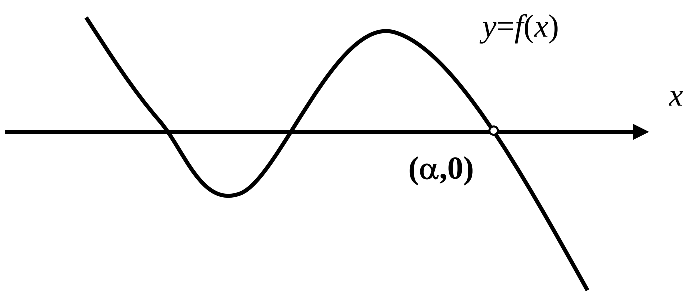
方程式 $x^2+x+1=0$ 的解 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 。



一般而言，n 次函數 $y=f(x)$的圖形是**一條波浪形、平滑的連續曲線。**

若該曲線和 x 軸相交，那麼交點 $P(x_0,f(x_0))$的橫坐標 x_0 必滿足 $f(x_0)=0$，所以 x_0 是方程式 $f(x)=0$ 的一個實根，如果該曲線與 x 軸沒有交點，此時任何實數均不是方程式 $f(x)=0$ 的根，因此方程式 $f(x)=0$ 無實根。

實係數 n 次方程式 $f(x)=0$ 的實根α $\Leftrightarrow$ n 次函數 $y=f(x)$的圖形與 x 軸交於點$(\alpha,0)$



(乙)n 次方程式的基本概念

討論 n 次方程式，就是要處理下面三個問題：

有沒有解？
有多少解？
如何找出解？

有沒有解的問題

一個實係數的 n 次方程式，不一定有實數解。例如 $x^2+1=0$ 就沒有實數解，引進了複數之後，在複數系中，$x^2+1=0$ 有兩個複數根 i 及 $-i$。但就一般的 n 次方程式，在複數系中，是不是一定有根呢？

這個存在性的問題，在西元 1799 年時，德國數學家高斯(Gauss 1777−1855)在他的博士論文中證明了「**在複數系中，n 次方程式一定有根**」，它所討論的方程式不限於實係數而是複數的係數，但實數亦可看作是複數，所以這個結果亦可用到實係數的 n 次方程式。我們將高斯的結果寫成下列的定理：

代數基本定理：每一個 n 次方程式，只要 $n\geq 1$，就至少有一個複數根。

有了代數基本定理之後，不用擔心是否要為了找根而要一直擴展數系，它告訴我們，一個複係數的 n 次方程式，在複數系中，一定有複數根。所以我們只要將數系擴展到複數系，就解方程式而言就足夠了。

解的個數

一次方程式恰有一個根，二次方程式若重根重複計算，那麼二次方程式就恰有兩個根。一般而言，若重複計算重根的個數，(二重根算二個、三重根算三個，…)則根據代數基本定理與因式定理，可推得以下定理：

定理：**n 次方程式就恰有 n 個根**。

有沒有公式解

另一個問題就是 n 次方程式有無求解的公式(將係數加減乘除開根號得到根)？

先來看一看幾個例子：

$n=1$ 時　$ax+b=0$ 的解是　$x=-\dfrac{b}{a}$。

n=2 時　$ax^2+bx+c=0$ 的解是　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

至於 n=3 或 4 的公式解，一度曾經是數學競技鬥智的焦點。期間頗多戲劇化的情節發展。結果三次方程式由卡丹(Carden)於 1545 年公佈其解法於其著作「Ars Magna」中，而據傳說此解法是由 Tartaglia 教給 Carden，並以保守此秘密為條件，不料 Carden 竟然背信，將解法公佈，並據為己有，可見 Carden 此人為達目的不擇手段。至於四次方程式的公式解是由 Carden 的弟子斐拉利(Ferrari 1522−1565)所提出的。

但是對於五次方程式的堡壘，卻久攻不下，這個問題持續了兩三百年，直到 1832 年，一位法國青年 Galois 在其決鬥前夕所寫的遺書中，這位偉大的青年數學家引進了「群」的理論，證明了：**五次及五次以上的方程式，不可能有公式解**。從此數學家才解除了尋找公式解的惡夢。

(丙)多項方程式解的性質：

(1)實係數 n 次方程式虛根共軛成對：

例子：

$x^2-5x+6=0\ \Rightarrow x=2$ 或 3

$x^2+x+1=0\ \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$x^3-x^2+4x-4=0\Rightarrow(x-1)(x^2+4)=0\Rightarrow x=1$，$2i,-2i$

$x^4+5x^2+4=0\Rightarrow(x^2+1)(x^2+4)=0\Rightarrow x=i,-i,2i,-2i$

[討論]：能否造出一個實係數的二次方程式以 $1-i$ 為它的一個虛根？
否造出一個只含一個虛根 $1-i$ 的實係數二次方程式？

實係數 n 次方程式虛根共軛成對
設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 為一實係數 n 次多項式方程式(n 次方程式)，
若 $a+bi$(a,b 為實數，$b\neq0$)為 $f(x)=0$ 的一根，則 $a-bi$ 亦為 $f(x)=0$ 的一根。

根據這個定理與因式定理，可知 n 次多項式 $f(x)$，一定可以因式分解成一次與二次實係數多項式的乘積。

即 $f(x)=A(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_l)^{k_l}(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)\cdots(x^2+b_mx+c_m)$

引理 1：若 z_1,z_2 為二複數，則(a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (b) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ 。

證明：設 $z_1=a_1+ib_1,z_2=a_2+ib_2$

$z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$，$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_2b_1+a_1b_2)$

(1) $\overline{z_1+z_2}=(a_1+a_2)-i(b_1+b_2)=(a_1-ib_1)+(a_2-ib_2)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1\cdot z_2}=(a_1a_2-b_1b_2)-i(a_2b_1+a_1b_2)$，

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a_1-ib_1)(a_2-ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)-i(a_2b_1+a_1b_2)$ 所以 $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

引理 2：$\overline{z^n}=(\overline{z})^n$ ，其中 n 為正整數。

證明：

(a)$n=1$ 時，自然成立。

(b)若設 $n=k$(k 為自然數)時，$\overline{z^k}=(\overline{z})^k$

則當 $n=k+1$ 時，$\overline{z^{k+1}}=\overline{z^k\cdot z}=\overline{z^k}\cdot\overline{z}=(\overline{z})^k\cdot\overline{z}=(\overline{z})^{k+1}$

所以 $n=k+1$ 時，原式成立。

根據(a)(b)由數學歸納法原理可以得證。

定理一：

若 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 為一**實係數** n 次多項式，z 為一個複數，

則 $\overline{f(z)}=f(\overline{z})$ 。[$f(z)$與 $f(\overline{z})$互為共軛複數]

[證明]：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 為實係數多項式

$\overline{f(z)}=\overline{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}$ (根據引理一)

$=\overline{a_nx^n}+\overline{a_{n-1}x^{n-1}}+\ldots+\overline{a_1x}+\overline{a_0}$ (根據引理一)

$=\overline{a_n}\cdot\overline{x^n}+\overline{a_{n-1}}\cdot\overline{x^{n-1}}+\ldots+\overline{a_1}\cdot\overline{x}+\overline{a_0}$ (根據引理二，a_n、a_{n-1}、…、a_0 為實數)

$=a_n\cdot\overline{x^n}+a_{n-1}\cdot\overline{x^{n-1}}+\ldots+a_1\cdot\overline{x}+a_0$

(**練習**1) 設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 為一實係數 n 次多項式：

(1)若 $f(2-3i)=-4+5i$，求 $f(2+3i)=$？

(2)若 $f(-1+6i)=-5$，求 $f(-1-6i)=$？ Ans：(1)$-4-5i$ (2)-5

實係數 n 次方程式虛根共軛成對的證明：

因為 $a+bi$ 為 $f(x)=0$ 的一根，所以 $f(a+bi)=0$

由定理一可知：$f(a+bi)$與$\overline{f(a+bi)}$互為共軛複數，所以

$\overline{f(a+bi)}=\overline{0}=0=f(\overline{a+bi})=f(a-bi)$，所以 $a-bi$ 亦為 $f(x)=0$ 的一根。

[討論]：

(1)實係數方程式虛根成對的應用：

若 $f(x)=0$ 為一個 3 次的實係數方程式，是否一定有實根呢？

若 $f(x)=0$ 為一個 4 次的實係數方程式，是否一定有實根呢？

一般的情形：

(a)若 $f(x)=0$ 為一個奇數次的實係數 n 次方程式，一定有實根。 (b)若 $f(x)=0$ 為一個偶數次的實係數方程式，一定有偶數個實根。(可能沒有實根)

[討論]：

n 次方程式 $f(x)=0$ 的係數要有什麼條件才會使得無理根成對？

先做以下實例：

設 $f(x)=x^4-6x^3+7x^2+6x-2$

(a)驗證 $2+\sqrt{3}$是有理係數 $f(x)=0$ 的一個無理根。

(b)取 $g(x)=[x-(2+\sqrt{3})][x-(2-\sqrt{3})]=x^2-4x+1$，請問 $f(x)$是否能被 $g(x)$整除？

(c)請問 $2-\sqrt{3}$是否為 $f(x)=0$ 的另一個無理根。

(**練習2**) 設 $f(x)$為有理係數多項式，a,b 為有理數，且$\sqrt{b}$為無理數
試證明：若 $x=a+\sqrt{b}$為 $f(x)=0$ 之一根，則 $x=a-\sqrt{b}$亦為其根。

[例題1] 實係數方程式 $x^4-5x^3-2x^2+14x-20=0$ 有一根 $1+i$ ，則求方程式所有的根。
Ans：$1+i$，$1-i$，-2，5

[例題2] 設 a,b 為實數，若 $2i-1$ 為 $x^4+3x^3+(a+1)x^2+ax+b=0$ 的一根，則求 a,b 之值。
Ans：$a=7$，$b=5$

(練習3) $f(x)$為實係數多項式，已知 $f(3+5i)=7-2i$，則 $f(3-5i)=$？ Ans：$7+2i$

(練習4) $f(x)=x^4-8x^3+25x^2-30x+8$，試求 $f(2+i)=$？$f(2-i)=$？Ans：$6i,-6i$

(練習5) 已知 $2+i$ 為 $f(x)=x^4-4x^3+8x^2-12x+15=0$ 的一根，求 $f(x)=0$ 所有的根。
Ans：$2\pm i$，$\pm\sqrt{3}\ i$

(練習6) 設 $f(x)$為實係數三次多項式，且 $f(i)=0$ $(i=\sqrt{-1})$，則函數 $y=f(x)$的圖形與 x 軸有幾個交點？
(A)0(B)1(C)2(D)3(E)因 $f(x)$而異。 Ans：(B)

(練習7) 設實係數多項式 $f(x)=2x^3+3x^2+mx+n$，若 $f(i-1)=0$，則數對$(m,n)=$？
Ans：$(2,-2)$

(練習8) 設 a 為有理數，若 $2+\sqrt{3}$ 為 $x^4-4x^3+2x^2-4x+a=0$ 之一根，則 $a=$？
Ans：$a=1$

(2)**根與係數的關係**：

[例題3] 設三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根為α,β,γ，試求根與係數之關係：
(1)$\alpha+\beta+\gamma=$____ (2)$\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha=$_____ (3)$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=$_____ 。
Ans：(1)$-\frac{b}{a}$ (2)$\frac{c}{a}$ (3)$-\frac{d}{a}$

[例題4] 設四次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 之四根為$\alpha,\beta,\gamma,\delta$，試求根與係數的關係：
(1)四根之和，(2)任意相異兩根乘積之和，(3)任意相異三根乘積之和，(4)四根之積。 Ans：(1)$-\frac{b}{a}$ (2)$\frac{c}{a}$ (3)$\frac{-d}{a}$ (4)$\frac{e}{a}$

[討論]：設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 為 n 次方程式，其根為α_1、α_2、…、α_n
根與係數的關係如何表示？

(練習9) 設方程式 $2x^3+3x-5=0$ 的三根為α、β、γ，求下列各式的值：
(a)$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$ (b)$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ Ans：(a) $\frac{3}{5}$ (b)-3

(練習10) 已知方程式 $x^4-x^3-56x^2+ax+b=0$ 的根中，有二根的比為 2：3，而另二根的差為 1，求整數 a,b 之值。 Ans：$a=36,b=720$

(丁)解根的方法：

(1)找整係數的 $\boldsymbol{n}$ 次方程式的有理根：

(a)一次因式檢驗定理：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 為一個**整係數** n 次多項式，
若整係數一次式 $ax-b$ 是 $f(x)$的因式，且 a,b 互質，則 $a|a_n$ 且 $b|a_0$。

(b)有理根檢驗定理：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 為一個**整係數** n 次方程式，
若 $x=\dfrac{b}{a}$ 為 $f(x)=0$ 之一有理根，a,b 為整數且互質，則 $a|a_n$ 且 $b|a_0$。

[例題5] 解方程式 $2x^4+x^3-21x^2-2x+6=0$。Ans：3，$\dfrac{1}{2}$ ，$-2+\sqrt{2}$ ，$-2-\sqrt{2}$

[例題6] 設 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 為整係數的 n 次方程式，
若α為 $f(x)=0$ 為有理根，試證明α為整數。

[例題7] 證明：$\sqrt[3]{2}$ 為無理數。

(練習11) 試求方程式 $f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2=0$ 之有理根。 Ans：$\frac{2}{3}$ ，$\frac{-1}{2}$

(練習12) 設 a,b,c 為整數，且 $x^4+ax^3+bx^2+cx+9=0$ 之四根為相異之有理數，求 a,b,c 之值。 Ans：$a=0,b=-10,c=0$

(練習13) 設 p,q 為自然數，且 $f(x)=x^5-2px^4+x^3-qx^2+x-2$ 有整係數一次因式，則求 p,q 之值。 Ans：$p=1,q=2$

(練習14) 證明：$\sqrt[3]{5}$ 為無理數。

(2)找實係數 *n* 次方程式的無理根：

利用整係數一次因式檢驗定理，可解決有理根的問題，但是就一般的方程式而言，要找出解，尤其是高次的方程式，通常不是一件容易的事情。

[討論]：

找方程式 $x^5+3x^2-7x+2=0$ 的實根。

問題一：是否有實根？

問題二：是否有有理根？

問題三：實根可能在哪個範圍？

(1)令 $f(x)=x^5+3x^2-7x+2$，由於它是整係數的 5 次多項式，所以 $f(x)=0$ 必有實根。

(2)根據牛頓定理，$x=\pm1$，±2 逐一代入多項式函數 $f(x)$中，去看 $f(x)$值的變化：

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-4	11	-1	32

可以看出，$f(x)=0$ 並無有理根，因為它一定有實根，故它的實根必為無理根。

(3)通常我們無法直接求出 $f(x)=0$ 無理根的形式，只能求得它的近似值。從上面的資料我們可以掌握一些重要的訊息：

當 x 從-2「連續地」變化到-1 時，對應的函數值 $f(x)$也從-4「連續地」變化到 11。所以函數值 $f(x)$在-4 與 11 之間一定會有等於 0 的情形發生，換句話說，在-2 與-1 之間一定有一個數α，$f(\alpha)=0$；同理，在-1 與 1 之間會有一個數β，1 與 2 之間會有一個數γ分別使得 $f(\beta)=0$，$f(\gamma)=0$。

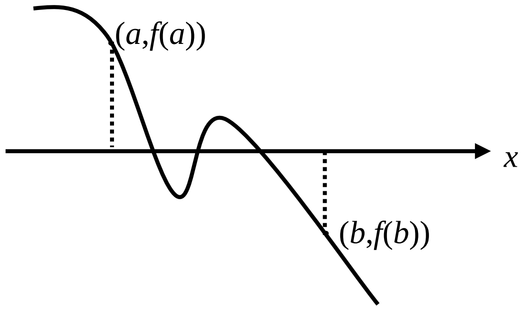
推廣這個概念可得以下的定理：

勘根定理：

設 $f(x)=0$ 為實係數 n 次多項方程式，a,b 是兩個實數，

若 $f(a)\cdot f(b)<0$，則在 a,b 之間至少有一個 $f(x)=0$ 的實根。

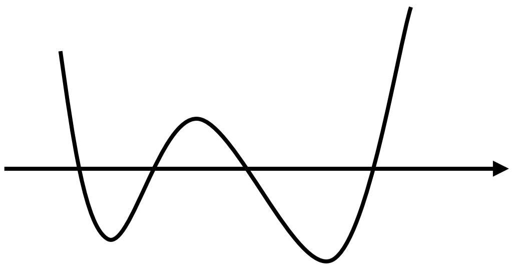
[說明]：

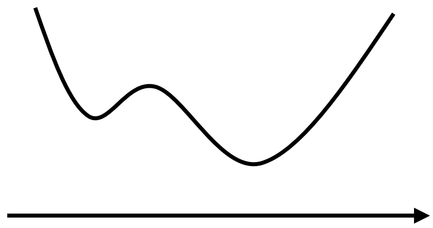


注意：

(a)從觀察圖形可知，當 $f(a)\cdot f(b)<0$ 時，則 a,b 之間的根必有實根。

(b)從圖形的觀察，當 $f(a)\cdot f(b)>0$ 時，$f(x)=0$ 在 a,b 之間可能有實根，
也可能無實根。





[例題8] 試問在那些連續整數之間，$f(x)=12x^3-8x^2-23x+11=0$ 有根？

Ans：-2 與-1，0 與 1，1 與 2

[例題9] 設 a 是一個固定的正數，試證明：方程式 $x^n=a$ (n 為自然數)恰有一正實根。

(1)證明存在性：

設 $f(x)=x^n-a$，$\because f(0)=-a<0$，$f(1+a)=(1+a)^n-a>(1+a)-a=1>0$

故在(0,1)之間存在一正實根。

(2)證明唯一性：

設 α，β 皆為方程式 $x^n-a=0$ 的正根，$\therefore \alpha^n-a=0$，$\beta^n-a=0$

兩式相減得$\alpha^n-\beta^n=0$

$\alpha^n-\beta^n=(\alpha-\beta)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+---+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})=0$

$\because\alpha,\beta$ 皆為正數，$\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+---+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}>0\therefore\alpha=\beta$

$\therefore$方程式 $x^n-a=0$ 有唯一的正根

附註；我們將$x^n-a=0$唯一的正根定義為$\sqrt[n]{a}$

[討論]：

(1)方程式 $x^7=-5$ 有幾個實根？實根中正根有幾個？負根有幾個？

(2)如何定義$\sqrt[7]{-5}$？

[例題10] 設二多項式 $f(x)$與 $g(x)$，對於二相異實數 a,b 有下列關係 $f(a)<g(a)$，$f(b)>g(b)$，證明：在 a,b 之間存在一個實數 c 使得 $f(c)=g(c)$。

(練習15) 舉兩個多項式，滿足 $f(a)f(b)>0$，但是 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間有實根或沒有實根。

(練習16) 證明存在一正實數 r，使得 $r^4+2r+1=\sqrt{2}$ 。

(練習17) 討論方程式 $x^3+x-5=0$ 是否有實根？有多少個實根？
Ans：此方程式有一實根。

(戊)*n* 次不等式的基礎概念

(1)n 次不等式：

設 $y=f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots..+a_1x+a_0$ 是實係數 n 次多項式，那麼不等式 $f(x)>0$、$f(x)<0$、$f(x)\ge0$、$f(x)\le0$ 就叫做**多項不等式**或 ***n* 次多項不等式**(簡稱 n 次不等式)。

例：$2x-3>0$, $x^2-3x+2>0$ 分別為一次、二次不等式。

(2)不等式的解：**滿足 *n* 次不等式的值，叫做 *n* 次不等式的解。**

(3)不等式的基本性質：

三一律：$a>b, a=b, a<b$ 三式中恰有一式會成立

遞移律：若 $a>b$ 且 $b>c$，則 $a>c$

加法律：若 $a>b$，則 $a+c > b+c$ ($c\in R$)

乘法律：若 $a>b$，且 $c>0$，則 $ac>bc$ (不變號)

若 $a>b$，且 $c<0$，則 $ac<bc$ (要變號)

(己)一次與二次不等式

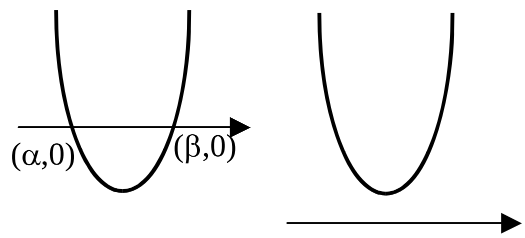
(1)一次不等式是形如 $ax+b>0(\geq 0)$或 $ax+b<0(\leq 0)$的不等式。

二次不等式是形如 $ax^2+bx+c>(\geq)0$ 或 $ax^2+bx+c<(\leq)0$，其中 a,b,c 為實數。

(2)解二次不等式：

設不等式 $ax^2+bx+c(>,<,\geq,\leq)0$，先將 a 調整為正

先解一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根α、β



(a)設 $a>0$，$D=b^2-4ac>0$，α ,β (α<β)為兩實數

因為 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

分段討論 ax^2+bx+c 的正負：

x	$x<\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x>\beta$
$x-\alpha$	–	+	+
$x-\beta$	–	–	+
$(x-\alpha)(x-\beta)$	+	–	+

根據上面的討論可得：

解 $ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x>\alpha$或 $x<\beta$(大於大的根或小於小的根)

解 $ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow \alpha<x<\beta$ (介於兩實根之間)

(b)設 $a>0$，$D=b^2-4ac=0$， α=β為兩相等實數

因為 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$

分段討論 ax^2+bx+c 的正負：

x	$\alpha<x$	$x>\alpha$
$x-\alpha$	–	+
$(x-\alpha)^2$	+	+

根據上面的討論可得：

解 $ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x\neq\alpha$(或β) [$x>\alpha$或 $x<\alpha$]

(c)設 $a>0$，$D=b^2-4ac<0$，α、β均為虛數

$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，因為 $a>0$ 且 $b^2-4ac<0$，所以$\frac{4ac-b^2}{4a}>0$

故不管 x 代入那一個實數，ax^2+bx+c 恆正。

解 $ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow$ 所有實數均為解。　　解 $ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow$ 無解。

[例題11] 有一項運動協會，要從 250 位會員代表中選出 7 位理事，250 位代表每人投一票互選。如果想選上理事，至少要得多少票，才能保證當選？
Ans：32 票

[例題12] 解下列各不等式：
(1)$x^2+4x-1>0$　(2)$x^2-2x+3<0$　(3)$x^2-2\sqrt{3}\ x+5>0$　(4)$-3x^2+6x-1\geq 0$
Ans：(1)$x>-2+\sqrt{5}$或 $x<-2-\sqrt{5}$ (2)無解 (3)所有實數 (4)$1-\frac{\sqrt{6}}{3}\leq x\leq 1+\frac{\sqrt{6}}{3}$

(練習18) 解下列各不等式：
(1)$16x^2-22x-3\leq 0$　(2)$3x^2-2x+5<0$　(3) $-4\leq x^2-5x<6$
(4) $x^2-2x+1>0$(5)$9x^2+1\leq 6x$　(6)$3x^2-2x-7\geq 0$
Ans：(1)$-\frac{1}{8}\leq x\leq\frac{3}{2}$　(2)無解　(3) $-1<x\leq 1$ 或 $4\leq x<6$
(4) $x\neq 1$　(5)$x=\frac{1}{3}$　(6) $x\geq\frac{1+\sqrt{22}}{3}$ 或 $x\leq\frac{1-\sqrt{22}}{3}$

(練習19) 若 $x^2+ax+b<0$ 之解為 $-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}<x<-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$，則 $x^2+ax-4b>0$ 之解為何？
Ans：$x>1$ 或 $x<-4$

(庚)高次不等式的解法

(1)代數解法：

1.基本實例：

解不等式$(x-1)(x-2)(x+3)<0$

2.領導係數為負

解$(x-1)(x-3)(5-x)<0$　Ans：$1<x<3$ 或 $5<x$

3.有恆正的因式

解不等式$(x^2+x+1)(x-1)(x+1)\le 0$　Ans：$-1\le x\le 1$

4.有重因式時

解不等式$(x+3)^3(x-1)^2(x-2)<0$　Ans：$-3<x<2$，且 $x\ne 1$

解不等式$(x+3)^3(x-1)^2(x-2)\le 0$　Ans：$-3\le x\le 2$

(2)幾何解法：

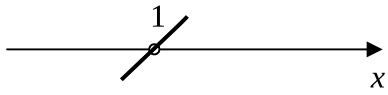
$$f(x)=A(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_l)^{k_l}(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)\cdots(x^2+b_mx+c_m)$$

在 $x=a_1$、a_2、…、a_l 附近的圖形特徵：

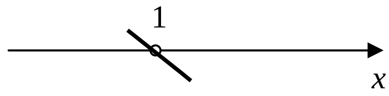
(a)$f(x)=(x-1)Q(x)$,其中 $Q(1)\neq 0$

在 $x=1$ 附近：$f(x)\approx Q(1)(x-1)$，因此 $f(x)$的圖形特徵與 $y=Q(1)(x-1)$類似

Q(1)>0



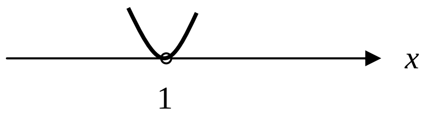
Q(1)<0



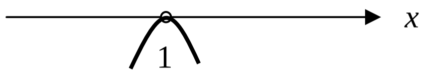
(b)$f(x)=(x-1)^2Q(x)$，其中 $Q(1)\neq 0$

在 $x=1$ 附近：$f(x)\approx Q(1)(x-1)^2$，因此 $f(x)$的圖形特徵與 $y=Q(1)(x-1)^2$ 類似

Q(1)>0



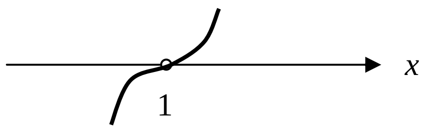
Q(1)<0



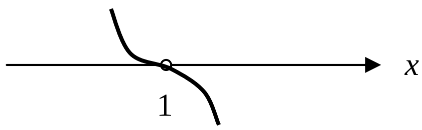
(c) $f(x)=(x-1)^3Q(x)$，其中 $Q(1)\neq 0$

在 $x=1$ 附近：$f(x)\approx Q(1)(x-1)^3$，因此 $f(x)$的圖形特徵與 $y=Q(1)(x-1)^3$ 類似

Q(1)>0



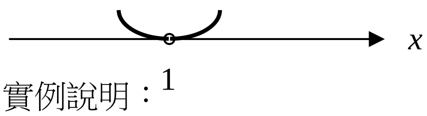
Q(1)<0



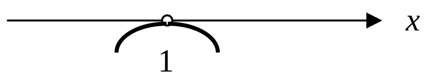
(d) $f(x)=(x-1)^4Q(x)$，其中 $Q(1)\neq 0$

在 $x=1$ 附近：$f(x)\approx Q(1)(x-1)^4$，因此 $f(x)$的圖形特徵與 $y=Q(1)(x-1)^4$ 類似

Q(1)>0



Q(1)<0



實例說明：

設 $f(x)=0.1(x-1)^2(x+1)(x-2)^3(x^2+x+1)$，

如何探討 $f(x)$的圖形在 $f(x)=0$ 的實根$-1,1,2$ 附件的圖形特徵(包括零根位置、重根的意涵、函數值的正負)

在 $x=-1$ 附近：$f(x)=(x+1)[0.1(x-1)^2(x-5)^3(x^2+x+1)]=(x+1)Q_1(x)$，

當 x 接近-1 時，$f(x)\approx Q_1(-1)(x+1)$，其中 $Q_1(-1)<0$，因此 $f(x)$的圖形特徵與 $y=Q_1(-1)(x+1)$類似。

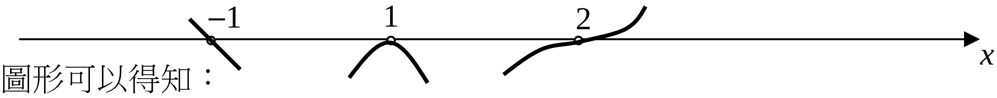
在 $x=1$ 附近：$f(x)=(x-1)^2[0.1(x+3)(x-5)^3(x^2+x+1)]=(x-1)Q_2(x)$，

當 x 接近 1 時，$f(x)\approx Q_2(1)(x-1)^2$，其中 $Q_2(1)<0$，因此 $f(x)$的圖形特徵與 $y=Q_2(1)(x-1)^2$類似。

在 $x=2$ 附近：$f(x)=(x-2)^3[0.1(x-1)^2(x+3)(x^2+x+1)]=(x-2)^3Q_3(x)$，

當 x 接近 2 時，$f(x)\approx Q_3(2)(x-5)^3$，其中 $Q_3(2)>0$，因此 $f(x)$的圖形特徵與 $y=Q_3(2)(x-2)^3$ 類似。

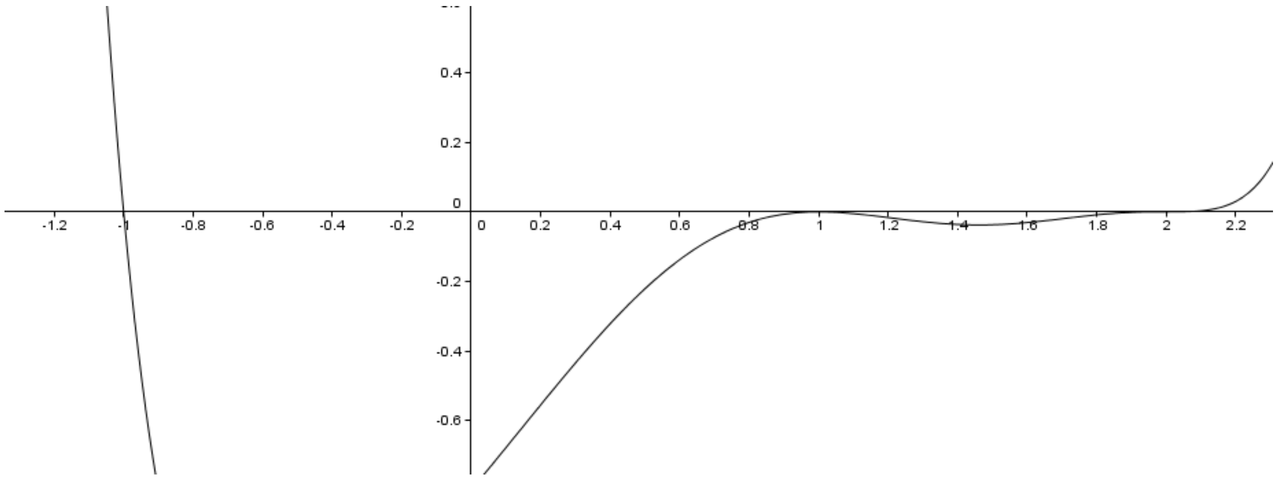
根據前面的分析，可以大略得知 $f(x)$的圖形在實根−3,1,2 附近的圖形特徵：



根據圖形可以得知：

x	$-1>x$	$-1<x<1$	$1<x<2$	$x>2$
$f(x)$	+	−	−	+

整體圖形可以使用電腦軟體繪製：



[例題13] 解分式不等式：

(1)$x>\dfrac{1}{x}$　(2) $\dfrac{x+2}{(x^2+x+1)(x-1)}\leq 0$　　Ans：(1)$x>1$ 或$-1<x<0$　(2)$-2\leq x<1$

(練習20) 解下列不等式：

(a)$(x^2-4)(2x+1)(-x+3)\geq 0$ (b) $x^3-5x^2+2x+8<0$ (c)$(x+1)^2(x-2)(x-3)\leq 0$

(d) $x^3+3x^2+3x+9\leq 0$ (e)$(x-1)^2(x^2-3x-18)<0$ (f)$(x^2+3x+6)(x^2-x-3)<0$

Ans：(a)$-2\leq x\leq\frac{-1}{2}$或 $2\leq x\leq 3$ (b) $x<-1$ 或 $2<x<4$ (c)$2\leq x\leq 3$ 或 $x=-1$

(d) $x\leq -3$ (e)$-3<x<6$ 且 $x\neq 1$ (f)$\frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

(練習21) 解分式不等式：

(a)$\frac{2x+5}{3x-4}\geq 0$ (b)$\frac{x^2+2x-4}{2x^2-x-2}\geq 1$ (c)$\frac{1}{x+1}<\frac{x+3}{x^2+x-2}$

Ans：(a)$x\leq\frac{-5}{2}$ 或 $x>\frac{4}{3}$ (b)$\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x\leq 1$ 或$\frac{1+\sqrt{17}}{4}<x\leq 2$

(c)$x>1$ 或$\frac{-5}{3}<x<-1$ 或 $x<-2$

(辛)二次函數恆正或恆負的條件

設二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，$a\neq 0$，$D=b^2-4ac$

(1)二次不等式解的幾何解釋：

考慮二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形：

$f(x)=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，頂點為$(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$

(a)解 $ax^2+bx+c>0$

$\Leftrightarrow$在圖形上找那些實數 x 使得其所對應的點(x,ax^2+bx+c)在 x 軸的上方。

解 $ax^2+bx+c<0$

$\Leftrightarrow$在圖形上找那些實數 x 使得其所對應的點(x,ax^2+bx+c)在 x 軸的下方。

(b)二次函數恆正與恆負的條件：

①對於所有的實數 x，$f(x)>0$ (恆正)

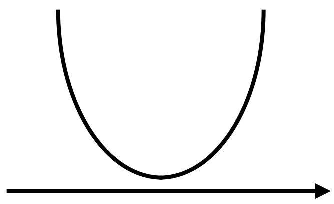
$\Leftrightarrow$圖形上的每一點的 y 坐標均大於 0(圖形在 x 軸上方)

$\Leftrightarrow$ $a>0$ 且 $D<0$ (開口向上，與 x 軸無交點)

②對於所有的實數 x，$f(x)<0$ (恆負)

$\Leftrightarrow$圖形上的每一點的 y 坐標均小於 0(圖形在 x 軸下方)

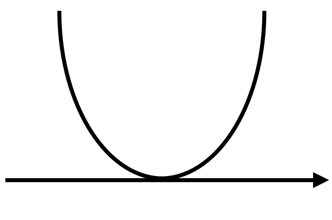
$\Leftrightarrow$ $a<0$ 且 $D<0$ (開口向下，與 x 軸無交點)



③對於所有的實數 x，$f(x)\geq 0$ (不為負)

$\Leftrightarrow$圖形上的每一點的 y 坐標均大於等於 0(圖形不在 x 軸下方)

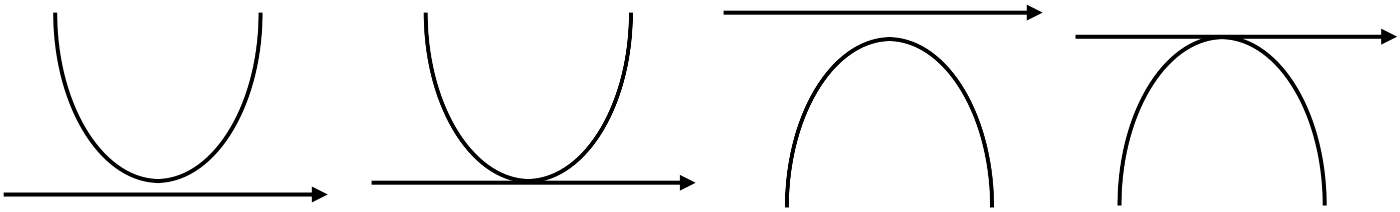
$\Leftrightarrow$ $a>0$ 且 $D\leq 0$ (開口向上，與 x 軸無交點或相切)



④ 對於所有的實數 x，$f(x)\le 0$ (不為正)

$\Leftrightarrow$圖形上的每一點的 y 坐標均小於等於 0(圖形不在 x 軸上方)

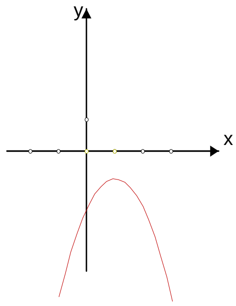
$\Leftrightarrow$ $a<0$ 且 $D\le 0$　(開口向下，與 x 軸無交點或相切)



[例題14] 設 $f(x)=(3-a)x^2+ax-2a>0$ 對於所有的實數 x 都成立，請求出 a 的範圍。
Ans：$a<0$

[例題15] 不等式 $x^2+2(m+2)x+2m^2<0$ 無解，求 m 的範圍。
Ans：$m>2+2\sqrt{2}$ 或 $m<2-2\sqrt{2}$

[例題16] $\forall\ x\in R$，$f(x)=x^2-(k-3)x+4$，$g(x)=-x^2+(k-1)x+(k-2)$，$f(x)$恆在 $g(x)$上方時，求 k 範圍。Ans：$-2<k<4$



(練習22) $y=f(x)=kx^2+2x+k$ 之圖形如右，求實數 k 的範圍？
Ans：$k<-1$

(練習23) a 為實數，且對於所有實數 x，不等式$\frac{x^2+2ax+1}{3x^2-2x+3}\le 5$恆成立，則求 a 值之範圍。 Ans：$-19\le a\le 9$

(練習24) 令 $g(x)=-x^2+2(3m-1)x-(8m^2+17)$，$m$ 為實數，求使得 $g(x)\ge 0$ 無解之 m 的範圍。 Ans：$-2<m<8$

綜合練習

(1) 實係數多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，請問下列選項那些是正確的？
(A)若 a,b 為實數，且 $f(a)f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 在 a,b 之間有實根。
(B)若 a,b 為實數，且 $f(x)=0$ 在 a,b 之間有實根，則 $f(a)f(b)<0$。
(C)若 $1-5i$ 為 $f(x)=0$ 之根，則 $1+5i$ 亦為 $f(x)=0$ 的根。
(D)若 整係數一次因式 $ax+b|f(x)$，則 $a|a_n$ 且 $b|a_0$。
(E)若 $f(1-\sqrt{2})=0$，則 $f(1+\sqrt{2})=0$。

(2) 設三次方程式 $x^3-17x^2+32x-30=0$ 有兩複數根 $a+i$，$1+bi$，其中 a,b 是不為 0 的實數，試求它的實根。 (89 學科能力測驗)

(3) 設 $f(x)$為三次實係數多項式，且知複數 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 之一解。
試問下列哪些敘述是正確的？
(A)$f(1-i)=0$ (B)$f(2+i)\neq 0$ (C)沒有實數滿足 $f(x)=0$ (D)沒有實數滿足 $f(x^3)=0$
(E)若 $f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，則 $f(4)<0$ (93 學科能力測驗)

(4) 設一元二次整係數方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有一根 $4+3i$ 。若將此方程式的兩根與原點在複數平面上標出，則此三點所圍成的三角形面積為
(1)5 (2)6 (3)12 (4)16 (5)24。(95 學科能力測驗)

(5) 設 $f(x)=x^4-5x^3+x^2+ax+b$ 為實係數多項式，且知 $f(i)=0$ (其中 $i^2=-1$)。請問下列哪些選項是多項式方程式 $f(x)=0$ 的根？(101 學科能力測驗)
(1) $-i$ (2) 0 (3) 1 (4) -5 (5) 5。

(6) 方程式 $x^4-4x^3-3x^2+x+1=0$ 在下列哪兩個整數之間有實數根?
(A)-3 與-2 之間 (B)-2 與-1 之間 (C)-1 與 0 之間 (D) 0 與 l 之間 (E) 1 與 2 之間。(91 指定考科乙)

(7) 設 $f(x)=x^4-3x^3-16x^2+3x+35$，試問 $y=f(x)$的圖形在下面那個範圍中與 x 軸有交點？(A)$-1<x<0$ (B)$0<x<1$ (C)$1<x<2$ (D)$2<x<3$ (E)$3<x<4$。

(8) 已知實係數四次多項函數 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，若 $f(x)$值之正負如下表：且 $f(-3+2i)=0$。

x	小於-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$值	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

下面那些結論是正確的？(A)$-3,-2$ 之間有實根 (B)$-1,0$ 之間恰有一個實根
(C)$f(x)=0$ 有四個實根 (D) $f(x)=0$ 恰有一正根(E) $-3-2i$ 為 $f(x)=0$ 的根。

(9) 設 a 為實數，令α,β為二次方程式 $x^2+ax+(a-2)=0$ 的兩根。試問當 a 為何值時，$|\alpha-\beta|$的值最小？答 $a=$________。(93 指定考科乙)

(10) 設方程式 $x^5=1$ 的五個根為 $1,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$，則 $(3-\omega_1)(3-\omega_2)(3-\omega_3)(3-\omega_4)=$
(1) 81 (2) 162 (3) 121 (4) 242。(93 指定考科甲)

(11) 二次方程式 $ax^2-(a-1)x-6=0$ 有一根介於 1 與 2 之間，另一根介於-1 與-2 之間，求實數 a 之範圍。

(12) 設 $f(x)$與 $g(x)$為實係數多項式，用 x^2-3x+2 除 $f(x)$得餘式 $3x-4$，用 $x-1$ 除 $g(x)$ 得餘式 5，且 $g(2)=-3$。
(a)試求以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$的餘式。(b)試證明：$f(x)\cdot g(x)=0$ 在 1 與 2 之間有實根。

(13) 設 $a<b<c$，若 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ 有兩實根 α,β，且 $\alpha<\beta$，比較 a,b,c,α,β 的大小。

(14) 解下列方程式：
(a)$2x^3+3x^2+11x+5=0$ (b)$2x^4-x^3-9x^2+13x-5=0$。

(15) 已知方程式 $x^4-5x^3-2x^2+14x-20=0$ 之一根為 $1+i$，試解出此方程式其它的根。

(16) 設整係數方程式 $x^4+3x^3+bx^2+cx+10=0$ 有四個相異有理根，試求 b,c 的值。

(17) 設 a,b 為實數，$a\neq0$，若方程式 $ax^3+x^2+bx+1=0$ 之一根為 $2+\sqrt{2}\,i$，試求 a,b 的值。

(18) 已知方程式 $x^4+ax^3+ax^2+11x+b=0$ 有二根 3，-2，求 a,b 的值及其它兩根。

(19) $y=f(x)$為一多項函數，若 $f(0)>0$，$f(1)<1$，試證在 0,1 之間存在一實數 c，使得 $f(c)=c^2$ 。

(20) 已知方程式 $x^4-4x^3-34x^2+ax+b=0$ 之四根成等差數列，試求 a,b 的值及四個根。

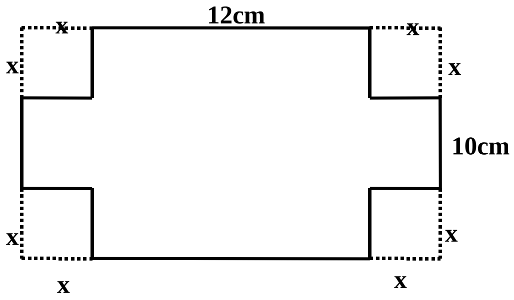
(21) 已知方程式 $x^4+3x^3+x^2-5x-12=0$，其中有兩根之乘積為-4，試解此方程式。

(22) 試解下列各二次不等式：
(a)$-x^2+x-1>0$
(b)$-x^2+x-1<0$
(c)$x^2<x+1$
(d)$x^2>x+1$
(e)$-x^2+6x-9<0$
(f)$x^2+8x+4<0$
(g)$x^2-4x-4<0$

(23) 解下列不等式：
(a)$(x-1)^{80}(x^2+x+1)(x-2)(x-3)(x-4)^4<0$
(b)$(x^2+x+1)(x-1)(x-2)^2(x-3)^{33}<0$
(c)$(x^2+3x+6)(x^2-x-3)<0$

(24) 若已知一實係數方程式 $f(x)=x^3+ax+b=0$ 之一複數根為 $1-2i$，求
(a)數對(a,b)=？。(b)$f(x)=0$ 之所有解。(c)不等式 $f(x)<0$ 的解。

(25) 如下圖，將一個無蓋容器展開，欲使容器的容積至少為 80cm^3，求 x 值的範圍。



(26) (a)解不等式 $\dfrac{2}{x+1}<x$ 的解。(b)解不等式$\dfrac{x^2(x-1)}{(2-x)(x+1)}\geq 0$

(27) 對於任意一個實數 x，$y=2x^2-2ax+(5+2a)$的圖形恆在 $y=ax^2$ 的上方，則實數 a 的範圍為__________。

(28) 設對所有實數 x，$(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6$ 之值恆為正，求實數 m 的範圍？

進階問題

(29) 設 a_1、a_2、…、a_n 與 b_1、b_2、…、b_n 均為實數，

(a)令 $f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots(a_nx-b_n)^2$，

試說明對於任意實數 x，$f(x)\geq 0$ 恆成立。

(b)根據(a)的結果證明下列不等式：

$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$ (柯西不等式)

並討論等號成立的充要條件。

(30) 設 $a_1<a_2<a_3$ 且 b_1、b_2、b_3 均為正數

試證明：$\dfrac{b_1}{x-a_1}+\dfrac{b_2}{x-a_2}+\dfrac{b_3}{x-a_3}=1$ 有三相異實根。

(31) 解下列方程式：

(a)$x^4-4x^3+x^2+4x+1=0$

(b) $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\dfrac{5}{2}$

(c)$2x^2-6x-5\sqrt{x^2-3x-1}=5$

(32) 試證明：實係數 n 次方程式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_3x^3+x^2+x+1=0$，$n\geq 3$ 的根不能全為實數。

(33) 利用 $y=|x^2-2x-3|$與直線 $y=x+1$ 之圖形，求$|x^2-2x-3|\geq x+1$ 的解。

(34) 若 $ax^2+(1-5a)x+6a=0$ 之二根皆大於 1，試求 a 的範圍。

(35) 設 $f(x)=2x^2+(a-1)x-a(a-1)$，在 $0\leq x\leq 1$ 間的值恆為負，則 a 之範圍為何？

(36) 設 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots.+a_1x+a_0$ 為整係數多項式，若已知有四個相異正整數 a,b,c,d 使得 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=3$，證明：方程式 $f(x)=8$ 無整數解。

綜合練習解答

(1) (A)(C)

(2) 15

(3) (A)(B)(E)
(4) (3)
(5) (1)(2)(5)
(6) (D)
(7) (C)
(8) (B)(D)(E)
(9) 2

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-a\\ \alpha\beta=a-2\end{cases}\Rightarrow|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{a^2-4a+8}=\sqrt{(a-2)^2+4}\geq 2$$

當 a=2 時|α−β|有最小值 2。

(10) (3)

[解法]： $x^5-1=(x-1)(x-\omega_1)(x-\omega_2)(x-\omega_3)(x-\omega_4)$ x=3 代入，

$3^5-1=(3-1)(3-\omega_1)(3-\omega_2)(3-\omega_3)(3-\omega_4)$，故所求為121。

(11) $2<a<\frac{7}{2}$

(12) (a)4 (b) 證明 $f(x)$=0 或 $g(x)$=0 在１與２之間有實根即可。

(13) $a<\alpha<b<\beta<c$

(14) (a) $\frac{-1}{2}$，$\frac{-1\pm\sqrt{19}i}{2}$ (b) 1,1,1,$\frac{-5}{2}$

(15) $1-i$，5，-2

(16) $b=-11$，$c=-3$

(17) $a=\frac{-5}{24}$，$b=\frac{-23}{12}$

(18) $a=-3$，$b=-6$，1,1

(19) [提示：考慮 $F(x)=f(x)-x^2$]

(20) $a=76, b=105$，4 根為$-5,-1,3,7$

(21) $\frac{-1\pm\sqrt{17}i}{2}$，$-1\pm\sqrt{2}\ i$

[提示：可令方程式會化為$(x^2+ax-4)(x^2+bx+3)=0$，展開之後，再比較係數]

(22) (a)無解 (b)$x\in$R (c)$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (d)$x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或 $x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(e)$x\neq 3$

(f) $-4-2\sqrt{3}<x<-4+2\sqrt{3}$ (g)$2-2\sqrt{2}<x<2+2\sqrt{2}$

(23) (a) $2<x<3$ (b) $1<x<3$ 且 $x\neq 2$ (c) $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

(24) (a)(a,b)=(1,10) (b)$-2, 1-2i, 1+2i$ (c)$x<-2$

(25) $1\leq x\leq 5-\sqrt{5}$

(26) (a)$-2<x<-1$ 或 $x>1$ (b)$x<-1$ 或 $x=0$ 或 $1\leq x<2$

(27) $-2<a<\frac{5}{3}$

(28) $m>3$

(29) (b)利用二次函數恆≥0 的條件，即可得證。

(30) 提示：

$\frac{b_1}{x-a_1}+\frac{b_2}{x-a_2}+\frac{b_3}{x-a_3}=1$ 的實根與

$b_1(x-a_2)(x-a_3)+b_2(x-a_1)(x-a_3)+b_3(x-a_2)(x-a_3)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$相同

(31) (a)$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，$\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ (b)0,−8,1,3 (c)5,−2

(32) 提示：令 $t=\frac{1}{x}$，將 $x=\frac{1}{t}$代入 $f(x)=0$ 可得 $g(t)=t^n+t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n=0$，若 $f(x)=0$ 的根 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 均為實數，那麼 $t_1,t_2,\ldots,t_n$ 的根也是實根，再利用根與係數的關係製造矛盾。

(33) $x\geq4$ 或 $x\leq2$

(34) $a<\frac{-1}{2}$或 $a\geq5+2\sqrt{6}$

(35) $a<-1$ 或 $a>3$[提示：$f(x)=2x^2+(a-1)x-a(a-1)$圖形開口向上，在 $0<x<1$ 範圍內之最大值出現在 $x=0$ 或 $x=1$]

(36) [解法]：

設 $g(x)=f(x)-3$，因為 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=3$，所以 $g(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)Q(x)$

其中 $Q(x)$為整係數多項式。

若存在一個整數α，使得 $f(\alpha)=8$

$\Rightarrow g(\alpha)=f(\alpha)-3=5$

$\Rightarrow(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)(\alpha-d)Q(\alpha)=5$

$\because(\alpha-a)$、$(\alpha-b)$、$(\alpha-c)$、$(\alpha-d)$、$Q(\alpha)$均為整數，

而 5 要是分解成 5 個整數相乘，其中一定有兩個數相等(都等於 1 或−1)，此與 a,b,c,d 為四個相異正整數矛盾。

補充教材

(甲)實係數三次、四次方程式的公式解

(1)實係數一元三次方程式的解法：
三次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的求根公式是在 16 世紀由 Tartaglia(1499~1557)和 Cardano(1501~1576)所得到的，它的一般解解法如下：

(a)作代換 $y=x+\frac{1}{3}a$，將 $x^3+bx^2+cx+d=0$ 化為三次方程式 $y^3+py+q=0$，

其中 $p=b-\frac{a^2}{3}$，$q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$

(b)再解 $y^3+py+q=0$ 的解，令 $y=\alpha+\beta$，因為$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow y^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta y$，與 $y^3+py+q=0$ 比較係數可得$\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=-q\\ \alpha\beta=\frac{-p}{3}\end{cases}$

根據一元二次方程式根與係數的關係，可知α^3、β^3 為 $t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$ 的兩根

令判別式 $D=q^2+\frac{4p^3}{27}$，因此可以解出α^3、β^3 為$\alpha^3=\frac{-q+\sqrt{D}}{2}$，$\beta^3=\frac{-q-\sqrt{D}}{2}$。

進一步解出$\alpha^3=\frac{-q+\sqrt{D}}{2}$的解為$\alpha_1$、$\alpha_1\omega$、$\alpha_1\omega^2$,其中$\alpha_1=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{D}}{2}}$，$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

再利用$\alpha\beta=\frac{-p}{3}$，可以求出$\beta=\beta_1$、$\beta_1\omega^2$、$\beta_1\omega$，其中$\beta_1=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{D}}{2}}$，$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

所以 $y^3+py+q=0$ 的解為 $y_1=\alpha_1+\beta_1$、$y_2=\alpha_1\omega+\beta_1\omega^2$、$y_3=\alpha_1\omega^2+\beta_1\omega$

(c) $x^3+bx^2+cx+d=0$ 的解為 x_1、x_2、x_3，其中 $x_i=y_i-\frac{1}{3}a$。

[討論]：

(1)令$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$，請就$\Delta$來討論方程式 $y^3+py+q=0$ 根的性質。

(2)利用 GeoGebra 描繪出 $g(x)=x^3+px+q$ 的圖形，並驗證(1)的討論結果。

(2)實係數一元四次方程式的解法：

實係數一元四次方程式的求根公式是由 Ferrari(1522~1565)給出來的：

解實係數一元四次方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的方法如下：

(a)令 $y=x^2$，將原方程式可寫成 $y^2+(ax+t)y+(b-t)x^2+cx+d=0$，其中 t 為代定的參數。

上述的方程式可以視為 y 的二次方程式，因此

判別式 $\mathrm{D}=(ax+t)^2-4[(b-t)x^2+cx+d]$為完全平方式

$\Leftrightarrow y^2+(ax+t)y+(b-t)x^2+cx+d=(y+\dfrac{ax+t+\sqrt{\mathrm{D}}}{2})(y+\dfrac{ax-t+\sqrt{\mathrm{D}}}{2})$

因此 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 等價於$(x^2+\dfrac{ax+t+\sqrt{\mathrm{D}}}{2})(x^2+\dfrac{ax-t+\sqrt{\mathrm{D}}}{2})=0$

又因為 $\mathrm{D}=(ax+t)^2-4[(b-t)x^2+cx+d]=[a^2-4(b-t)]x^2+2(at-2c)x+t^2-4d$ 為完全平方式的充要條件是$(at-2c)^2-[a^2-4(b-t)][t^2-4d]=0$ ，即 $t^3-bt^2+(ac-4d)t-c^2-d(a^2-4b)=0$…..(*)

(*)是一個 t 的實係數一元三次方程式，

解出一個實根 t_0 再代入$(x^2+\dfrac{ax+t+\sqrt{\mathrm{D}}}{2})(x^2+\dfrac{ax-t+\sqrt{\mathrm{D}}}{2})=0$

再解兩個關於 x 的一元二次方程式，即可求得原方程式的解。

(練習1)

求解方程式 $x^3-3x^2-3x+11=0$

Ans：$1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$ 、$1+\dfrac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})i$、$1+\dfrac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})i$

(乙)特殊方程式的解法

[例題1] (倒數方程式)

設 $f(x)=12x^4-56x^3+89x^2-56x+12=0$

(1)令 $x+\dfrac{1}{x}=t$，將 $\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 化為 t 的方程式。

(2)試解出 t，再解出 x。

Ans：(1)$12t^2-56t+65=0$ (2)$t=\frac{5}{2}$，$\frac{13}{6}$，$x=\frac{1}{2},2,\frac{2}{3},\frac{3}{2}$

[例題2] (利用根與係數的關係解根)

設 a,b,c 滿足$\begin{cases} a+b+c=2 \\ ab+bc+ca=-5 \\ abc=-6 \end{cases}$，求以 a,b,c 為三根的三次方程式，

並解出(a,b,c)。

Ans：$x^3-2x^2-5x+6=0$；$(a,b,c)=(1,3,-2)(1,-2,3)(3,1,-2)(3,-2,1),(-2,1,3)(-2,3,1)$

(練習2)

解下列方程式：

(1)$2x^3+7x^2-7x-5=0$ (2)$3x^4+x^3-8x^2+x+3=0$

(3)$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$

Ans：(1)$x=-\frac{1}{2}$ 或$\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$ (2)$x=1,1,$或$\frac{-7\pm\sqrt{13}}{6}$

(3) $x=-2,-6,-4\pm\sqrt{6}$

[提示：方程式可化為$(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15=0$

$\Rightarrow(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$，令 $y=x^2+8x$

$\Rightarrow(y+7)(y+15)+15=0$，解 y，再解 x。]

(練習3)

設 a,b,c 滿足$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=29 \\ abc=-24 \end{cases}$ 解出(a,b,c)。

Ans：$(a,b,c)=(2,3,-4)$、$(2,-4,3)$、$(3,2,-4)$、$(3,-4,2)$、$(-4,3,2)$、$(-4,2,3)$