第三十二單元　三元一次聯立方程組

解決許多實際問題時，通常我們假設未知數，根據問題的條件限制，可以形成型如(A)或(B)的一次聯立方程式：

$$\text{(A)}\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}\qquad\qquad \text{(B)}\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$$

我們用幾何的觀點來看(A)(B)的解：
坐標平面上，二元一次方程式的圖形是一條直線，討論型如(A)的解，就相當於討論兩直線在平面上的相交情形。
空間坐標中，三元一次方程式的圖形是一個平面，同樣的，討論型如(B)的解，就相當於討論三個平面在空間中的相交情形。

透過消去法或二階行列式來得到二元一次方程組的解(克拉瑪公式)，並且判別兩直線的關係，本單元會有類似的想法。
(1)用消去法來解三元一次方程組。
(2)用三階行列式來表示三元一次方程組的解(克拉瑪公式)。
(3)用平面的法向量或三階行列式來判別三平面的關係。

(甲)消去法

透過假設未知數，解決許多實際的問題會形成解幾個三元一次的方程式的共同解，以下面的例子來說：
某群顧客到早餐店買了 4 個漢堡，3 個貝果，3 杯牛奶，共計 350 元；第二群顧客買 4 個漢堡，2 個貝果，5 杯牛奶，共計 360 元；第三群顧客買 8 個漢堡，8 個貝果，10 杯牛奶，共計 840 元。問漢堡、貝果與牛奶的單價各為多少元？

假設每個漢堡 x 元，每個貝果 y 元，每杯牛奶 z 元，
根據問題的內容，可以列出三元一次聯立方程式

$$(*)：\begin{cases}4x+3y+3z=350\\ 4x+2y+5z=360\\ 8x+8y+10z=840\end{cases}$$

由幾個三元一次方程式所形成的一次聯立方程式，我們統稱為**三元一次方程組**。

解三元一次方程組的方法，使用加減消去法是一個很自然的想法，先消去一個未知數，形成二元一次方程組，再利用二元一次方程組的解法，將三元一次方程組的解依序求出來。
我們以解方程組(*)為例，來說明如何用加減消去法解三元一次方程組：

[例題1] 試求三元一次方程式組：$\begin{cases}4x+3y+3z=350\\4x+2y+5z=360\\8x+8y+10z=840\end{cases}$ 的解。

[解法]：

利用加減消去法來求三元一次方程式組(A)：$\begin{cases}4x+3y+3z=350.....(1)\\4x+2y+5z=360......(2)\\8x+8y+10z=840......(3)\end{cases}$ 的解：

$$\begin{cases}4x+3y+3z=350.....(1)\\4x+2y+5z=360......(2)\\8x+8y+10z=840......(3)\end{cases}\xrightarrow[(1)\times-2+(3)]{(1)\times-1+(2)}\begin{cases}-y+2z=10....(4)\\2y+4z=140....(5)\end{cases}$$

根據上面的步驟，可將三元一次方程組消去一個未知數 x，產生 y,z 的二元一次方程組，

接下來利用加減消去法求出一次方程組$\begin{cases}-y+2z=10....(4)\\2y+4z=140....(5)\end{cases}$的解，將

(4)×2+(5)，得 $8z=160$，解得 $z=20$，代入第(4)式，得 $y=30$。

最後再以 $y=30$，$z=20$ 代入第(1)式，得 $x=50$。

所以得知漢堡一個 50 元，貝果一個 30 元，牛奶一杯 20 元。

[例題2] 試求三元一次方程組：$\begin{cases}x+2y+z=7\\2x+y-z=5\\7x+8y+z=31\end{cases}$ 的解。

[解法]：

利用加減消去法來求三元一次方程式組$\begin{cases}x+2y+z=7 & (1)\\2x+y-z=5 & (2)\\7x+8y+z=31 & (3)\end{cases}$的解：

$$\begin{cases}x+2y+z=7 & (1)\\2x+y-z=5 & (2)\\7x+8y+z=31 & (3)\end{cases}\xrightarrow[(1)-2)]{(1)+(2)}\begin{cases}3x+3y=12.......(4)\\-6x-6y=-24.......(5)\end{cases}$$

根據上面的步驟，可將三元一次方程組消去一個未知數 z，產生 x,y 的二元一次方程組，

因為二元一次方程組$\begin{cases}3x+3y=12.......(4)\\-6x-6y=-24.......(5)\end{cases}$代表同一個方程式 $x+y=4$，令 $x=t$，則 $y=4-t$

再代入(1)解得 $z=t-1$。所以原方程組的解為$\begin{cases}x=t\\y=4-t\\z=-1+t\end{cases}$，其中 t 為任意實數。

(練習1) 試說明三平面 $\begin{cases} 4x+3y+3z=350 \\ 4x+2y+5z=360 \\ 8x+8y+10z=840 \end{cases}$ 相交情形。 Ans：三平面交於一點。

(練習2)試解三元一次方程組 $\begin{cases} x+y-z=5, \\ x+2y+z=8, \\ 5x+8y+z=1. \end{cases}$，並解釋其所代表的三平面相交情形。

Ans：無解，三平面兩兩相交於一直線，三直線不相交

(1)加減消去法的原理

在例題一的解法中，我們可以觀察出解一次方程組 $\begin{cases} 4x+3y+3z=350 \\ 4x+2y+5z=360 \\ 8x+8y+10z=840 \end{cases}$ 的解，透過加減消去法轉化成解一次方程組 $\begin{cases} 4x+3y+3z=405 \\ -y+2z=10 \\ 2y+4z=140 \end{cases}$ 的解，這兩個方程組的解會相同嗎？

使用加減消去法做一次方程組間的轉化，前後方程組的解會有什麼關係：

若 $E_1=0$、$E_2=0$ 代表三元一次方程式，使用加減消去法作兩個一次方程組間的轉化：

$$(*):\begin{cases} E_1=0....(1) \\ E_2=0....(2) \end{cases} \underset{(3)\times(-a)+(4)}{\overset{(1)\times a+(2)}{\rightleftarrows}} (**):\begin{cases} E_1=0........(3) \\ a\cdot E_1+E_2=0.......(4) \end{cases}$$

若(x_0,y_0,z_0)為(*)的解， (x_0,y_0,z_0)代入 $a\cdot E_1+E_2=0$ 也會成立，因此(x_0,y_0,z_0)也是(**)的解。反過來說，若(m,n,l)為(**)的解， (m,n,l)代入$(-a)\cdot E_1+(a\cdot E_1+E_2)=0$ 也會成立，即代入 $E_2=0$ 會成立，因此(m,n,l)也會是(*)的解。即**一次方程組(B)與(C)解的形式是相同的**。

故可以得知一次方程組經過加減消去法的轉化，前後的解會保持不變。

若適當選取 a，就可以使得 $aE_1+E_2=0$ 轉化成二元一次方程式，因此在求解三元一次方程組時，可以利用加減消去法先消去一個未知數，使得原方程組轉化成二元一次方程組，再解出二元一次方程組的解，進而求出三元一次方程組的解。

(練習3)設 $f(x)$為一個二次多項式函數，且滿足 $f(1)=4$，$f(-3)=24$，$f(2)=9$，試求 $f(x)$。

Ans：$f(x)=2x^2-x+3$。

(乙)克拉瑪公式

回顧二元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2。\end{cases}$ 的克拉瑪公式

令$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，

若$\Delta\neq 0$，則二元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2。\end{cases}$ 恰有一組解 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$。

(1)三元一次方程組的克拉瑪公式：

考慮三元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \cdots(1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \cdots(2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \cdots(3) \end{cases}$，其中 x,y,z 為未知數，

使用代入消去法解之：

由(1) $\Rightarrow a_1x+b_1y=-c_1z+d_1$，由(2) $\Rightarrow a_2x+b_2y=-c_2z+d_2$

由二元一次方程組之求解可知$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}x=\begin{vmatrix} -c_1z+d_1 & b_1 \\ -c_2z+d_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}y=\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z+d_1 \\ a_2 & -c_2z+d_2 \end{vmatrix}$

整理可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}x=-\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}z+\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}\text{……………..(4)}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}y=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}z-\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}\text{……………..(5)}$$

將(3)× $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 得 $a_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}x+b_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}y+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}z=d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$………(6)

(4)(5)代入(6)，消去 x,y 兩個未知數

$$a_3\left(-\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}z+\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)+b_3\left(\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}z-\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}\right)+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}z=d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

整理之後得

$$\left(a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)z=a_3\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\text{……(**)}$$

y,z 為未知數，

引用三階行列式的符號，

令$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

則可得$\begin{cases} \Delta\cdot x=\Delta_x \\ \Delta\cdot y=\Delta_y \\ \Delta\cdot z=\Delta_z \end{cases}$，當$\Delta\neq0$，可得 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ ，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$ 稱為**克拉瑪公式**。

結論：

(a)若$\Delta\neq0$，則方程組恰有一解：$(\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\dfrac{\Delta_y}{\Delta},\dfrac{\Delta_z}{\Delta})$。[克拉瑪公式]

(b)若$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，則方程組無解或無限多解。

(c)若$\Delta=0$，Δ_x 、 Δ_y 、 Δ_z 有一不為 0，則方程組無解。

[例題3] 試利用克拉瑪公式，解一次方程組$\begin{cases} x-y+z=10 \\ 3x+2y=5 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$。

[解法]：

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4+3-2+6=11\neq0$，所以原方程組恰有一組解。

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=40+5-4+10=51$，

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=10+6-5-60=-49$，

$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4-5+30-20-5+6=10$，

故 $x=\dfrac{51}{11}$ ，$y=-\dfrac{49}{11}$ ，$z=\dfrac{10}{11}$ 。

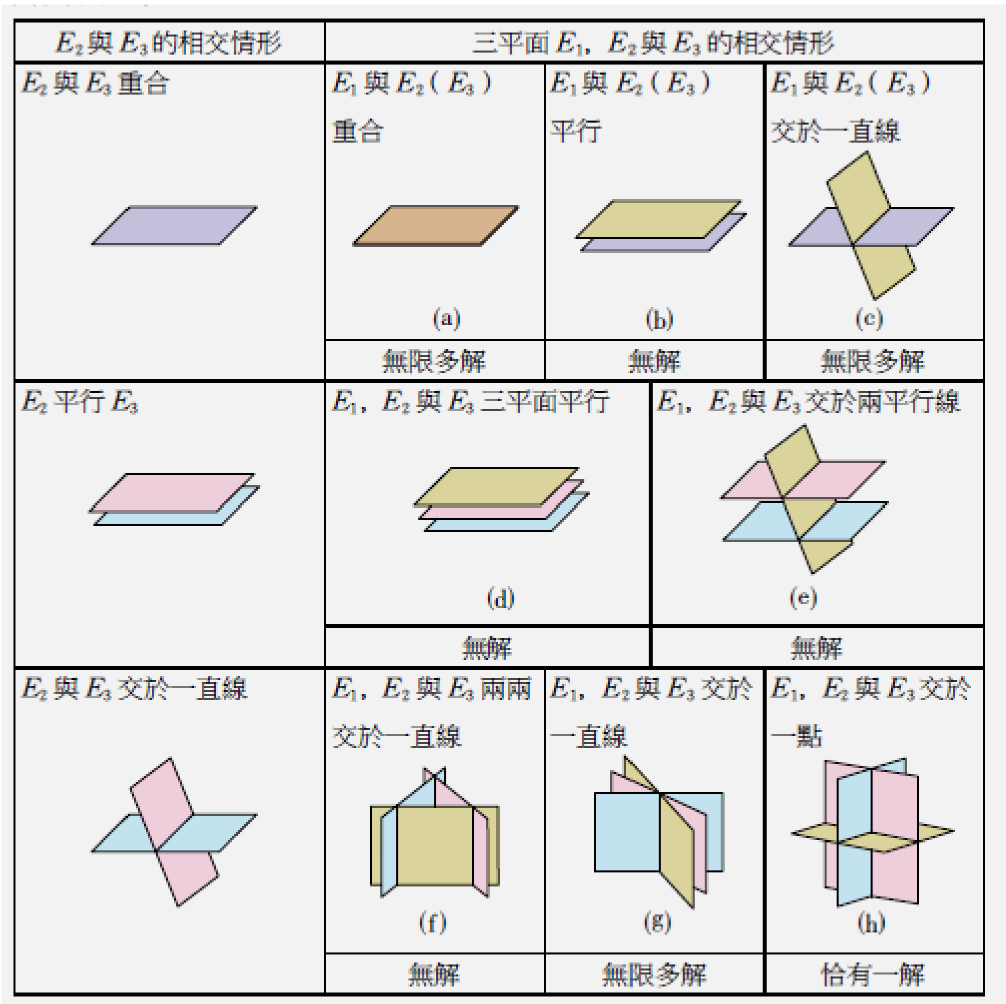
(練習4)試以克拉瑪公式解方程組$\begin{cases} 7x+3y-2z-7=0 \\ 2x+5y+3z-20=1 \\ 5x-y+5z-10=8 \end{cases}$Ans：$x=1,y=2,z=3$

(2)三元一次方程組的解之幾何意義：

前面利用三階行列式推導了三元一次方程組的克拉瑪公式，現在用幾何的角度來探討

三元一次方程組(L)：$\begin{cases} E_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ E_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ E_3: a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 的解，而討論(L)的解，就相當於討論空間中三平面 E_1、E_2、E_3 的相交情形。

先考慮 E_2 與 E_3 相交情形──重合、平行、交於一線，然後再加入 E_1 一併考慮三平面的相交情形。我們將三平面相交的情形與對應一次方程組的解列表如下：



E_2與E_3的相交情形	三平面E_1, E_2與E_3的相交情形		
E_2與E_3重合	E_1與E_2(E_3)重合 (a) 無限多解	E_1與E_2(E_3)平行 (b) 無解	E_1與E_2(E_3)交於一直線 (c) 無限多解
E_2平行E_3	E_1, E_2與E_3三平面平行 (d) 無解	E_1, E_2與E_3交於兩平行線 (e) 無解	
E_2與E_3交於一直線	E_1, E_2與E_3兩兩交於一直線 (f) 無解	E_1, E_2與E_3交於一直線 (g) 無限多解	E_1, E_2與E_3交於一點 (h) 恰有一解

當$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$時，可以利用三階行列式可以推導三元一次方程組的克拉瑪公式，

上面表格中三平面相交的情形，也可以用Δ是否等於 0 來做一些分類。

設三平面 E_1、E_2、E_3 的法向量依序為 $\overrightarrow{n_1}=(a_1,b_1,c_1)$、$\overrightarrow{n_2}=(a_2,b_2,c_2)$、$\overrightarrow{n_3}=(a_3,b_3,c_3)$，

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$=(a_1,b_1,c_1)\cdot(\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix})=\overrightarrow{n_1}\cdot(\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{n_3})$

(1)若 E_2 與 E_3 平行或重合，則 $\overrightarrow{n_2}\,//\,\overrightarrow{n_3}$，因此 $\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{n_3}=\overrightarrow{0}$，故$\Delta=\overrightarrow{n_1}\cdot(\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{n_3})=0$

(2)若 E_2 與 E_3 交於一直線 L，則 $\overrightarrow{n_2}$ 不平行 $\overrightarrow{n_3}$，因此 $\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{n_3}\neq\overrightarrow{0}$，

此時 $\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{n_3}$ 為交線 L 的方向向量。

(1°)若 E_1 與 L 平行或重合(三平面兩兩相交於一直線或三平面交於一直線)，

此時 $\overrightarrow{n_1}\perp(\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{n_3})$，故$\Delta=\overrightarrow{n_1}\cdot(\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{n_3})=0$。

(2°)若 E_1 與 L 恰交於一點(三平面交於一點)，此時 $\overrightarrow{n_1}$ 與$(\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{n_3})$不垂直，

故$\Delta=\overrightarrow{n_1}\cdot(\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{n_3})\neq 0$。

根據前面的討論，我們將這些結果整理如下：

(一)三平面$\begin{cases} E_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ E_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ E_3: a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$的相交情形與對應解的個數有以下幾種情形：

(A)$\Delta=0$ ，三平面的關係有下列七種：

(1°)至少兩個平面平行或重合(至少兩個平面的法向量平行)

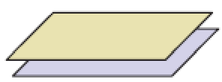
①

三平面重合

（無限多解）

(a)

②

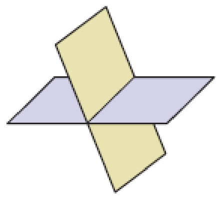


二平面重合且與第三平面平行

（無解）

(b)

③

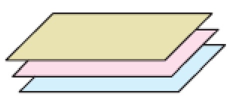


二平面重合且與第三平面相交於一直線

（無限多解）

(c)

④

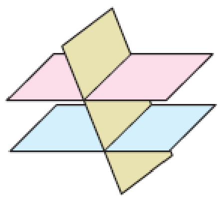


三平面平行

（無解）

(d)

⑤



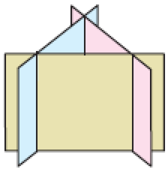
E_1與平行面 E_2，E_3 各相交於一直線

（無解）

(e)

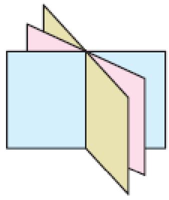
(2°)三平面中任兩平面均不平行與重合(三平面的法向量均不互相平行)

⑥



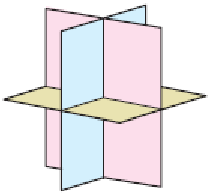
三平面兩兩相交於一直線，三交線兩兩平行
（無解）
(f)

⑦



三平面相交於一直線
（無限多解）
(g)

(B)$\Delta\neq0$，三平面恰相交於一點(三平面法向量不共平面)



三平面交於一點（恰有一解）

(二)一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$的解依$\Delta$來分類，可以分成：

(1)$\Delta=0$ 時，方程組可能無解或無限多解。
(2)$\Delta\neq0$ 時，方程組恰有一組解。

[例題4] 試判別方程組$\begin{cases} x+y+4z=2 \\ 2x+3y+13z=7 \\ 4x+5y+21z=11 \end{cases}$中三平面的關係，並求其解。

[分析]：

$\because$三平面的法向量均不互相平行，且$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 13 \\ 4 & 5 & 21 \end{vmatrix}=0$。

根據三平面的相交情形，可以得知它們的相交情形只可能為：
三平面兩兩相交於一直線，三直線沒有交點或三平面相交於一直線。
因此我們可以先求出二平面的交線 L，再討論 L 與另一平面相交情形。
[解法]：

先求二平面$\begin{cases} x+y+4z=2 \\ 2x+3y+13z=7 \end{cases}$的交線，令 $z=t$，代入平面的方程式得

$\begin{cases} x+y=2-4t\cdots\cdots(1) \\ 2x+3y=7-13t\cdots\cdots(2) \end{cases}$，(1)×3−(2)可得 $x=-1+t$，代入(2)得到 $y=3-5t$

所以交線 L 可表為$\begin{cases} x=-1+t \\ y=3-5t \\ z=t \end{cases}$，$t$ 為實數。

接下來考慮直線 L 與平面 $4x+5y+21z=11$ 的關係：

將 L 的參數式代入 $4x+5y+21z=11$

$\Rightarrow 4(-1+t)+5(3-5t)+21t=11$

$\Rightarrow 11=11$。這代表直線 L 上的任一點都在平面 $4x+5y+21z=11$ 上

故三平面相交於一直線，即一次方程組的解為$\begin{cases} x=-1+t \\ y=3-5t \\ z=t \end{cases}$，$t$ 為實數。

[例題5] 就 k 值，討論下列三平面相交的情形：$\begin{cases} x+3y-z=-4 \\ 2x+5y+z=-1 \\ x+5y-7z=k \end{cases}$

[解法]：

因為$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}=-35-10+3+5-5+42=0$，且三平面的法向量均不平行，

因此三平面的相交情形只可能為：

三平面兩兩相交於一直線，三直線沒有交點或三平面相交於一直線。

接下來我們先求二平面$\begin{cases} x+3y-z=-4 \\ 2x+5y+z=-1 \end{cases}$的交線：

令 $z=t$，代入上面二平面，可得$\begin{cases} x+3y=t-4\cdots\cdots(1) \\ 2x+5y=-t-1\cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\times5-(2)\times3$ 可得 $x=-8t+17$，再代入(1)，得到 $y=3t-7$。

將直線 L 的參數式$\begin{cases} x=-8t+17 \\ y=3t-7 \\ z=t \end{cases}$ (t 為實數)，再代入平面 $x+5y-7z=k$

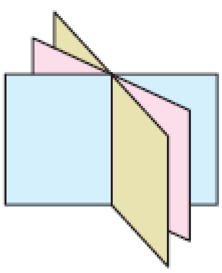
$(-8t+17)+5(3t-7)-7t=k$，$\Rightarrow 0t-18=k$…..(*)

當 $k=-18$ 時(*)為恆等式，即直線 L 會落在平面 $x+5y-7z=-18$ 上，

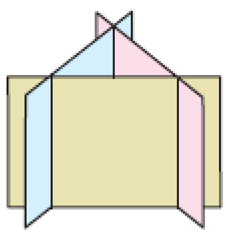
此時三平面交於一直線。

當 $k\neq-18$ 時，(*)無解，即直線 L 與平面 $x+5y-7z=-18$ 平行，

此時三平面兩兩相交於一直線，三直線沒有交點。



$k=-18$



$k\neq-18$

[例題6] 齊次方程組：$\begin{cases} E_1: a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ E_2: a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ E_3: a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 至少會有(0,0,0)的解，

試證明：$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$。

結論：

齊次方程組：$\begin{cases} E_1: a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ E_2: a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ E_3: a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 至少會有(0,0,0)的解，所以

(a)若$\Delta\neq 0$，則齊次方程組只有一組解(0,0,0)。

(b)若$\Delta=0$，則齊次方程組除了(0,0,0)之外，尚有其他的解。

(練習5)已知方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$恰有一組解$(\alpha,\beta\,\gamma)$，$\alpha\beta\gamma\neq0$

則方程組$\begin{cases} a_1x+2b_1y+3c_1z=4d_1 \\ a_2x+2b_2y+3c_2z=4d_2 \\ a_3x+2b_3y+3c_3z=4d_3 \end{cases}$之解為何？Ans：$(4\alpha\,,2\beta\,,\frac{4\gamma}{3})$

(練習6)解下列方程組，並判斷其幾何關係：

(1)$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+5y+3z=7 \\ 3x-y+z=-1 \end{cases}$ (2)$\begin{cases} x+4y+2z=1 \\ -3x+z=2 \\ -2x+4y+3z=3 \end{cases}$ (3)$\begin{cases} -4x+2y-z=-1 \\ 3x+y+3z=1 \\ 2x+4y+5z=3 \end{cases}$

Ans：(1)三平面交於一點$(\frac{-2}{39},\frac{47}{39},\frac{14}{39})$ (2)三平面交於一線$(t,\frac{-3}{4}+\frac{-7}{4}t,3t+2)$

(3)三平面兩兩相交於一直線且三交線不共點

(練習7)說明下列各方程組所表示的平面相交的情形

(1) $\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 6x+3y-8z=0 \\ 2x-y+5z=-4 \end{cases}$ Ans：三平面相交於一點$(-1,2,0)$

(2) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+4y-6z=7 \\ 3x+6y+z=5 \end{cases}$ Ans：兩面平行，另一面交兩線

(3) $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+5z=2 \end{cases}$ Ans：三平面兩兩相交於一直線且三交線不共點

(練習8)試就 a 值討論方程組 $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$ 的解。

Ans：若 $a\neq 1,-2$ 時，恰有一解$(\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2})$；若 $a=1$，$(x,y,z)=(s,t,1-s-t)$

若 $a=-2$ 時，無解。

(丙)空間向量的線性組合

回顧平面向量的線性組合：

「若給定不平行的平面向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$，則平面上任一向量 $\overrightarrow{c}$ 都能唯一表成 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的線性組合。」這個結果，用坐標的語言來描述，可以寫成以下的結果：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1 , a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1 , b_2)$, $\overrightarrow{c}=(c_1 , c_2)$，則 $\overrightarrow{c}$ 可以唯一表成 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的線性組合之充要條件是$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$(即 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 不平行)。

給定空間向量 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$，我們稱型如 $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c}$ (x,y,z 為實數)的向量為 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的**線性組合**。

接下來，我們要問：

「$\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 要滿足什麼條件，才會使得空間中任一向量 $\overrightarrow{d}$ 可以唯一表成 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的線性組合？」

給定 $\overrightarrow{a}=(a_1 , a_2 , a_3)$、$\overrightarrow{b}=(b_1 , b_2 , b_3)$、$\overrightarrow{c}=(c_1 , c_2 , c_3)$，則

對於任意向量 $\overrightarrow{d}=(d_1 , d_2 , d_3)$，$\overrightarrow{d}$ 可以唯一表成 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的線性組合

$\Leftrightarrow$ 可以找到唯一的一組實數 x_0,y_0,z_0 使得 $\overrightarrow{d}=x_0\overrightarrow{a}+y_0\overrightarrow{b}+z_0\overrightarrow{c}$

$\Leftrightarrow$可以找到唯一的一組實數 x_0,y_0,z_0 使得

$(d_1 , d_2 , d_3)=x_0(a_1 , a_2 , a_3)+y_0(b_1 , b_2 , b_3)+z_0(c_1 , c_2 , c_3)$

$\Leftrightarrow$ 三元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$恰有一組解$(x_0 , y_0 , z_0)$。

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$(即$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{c}$不共平面)

上面的結果用幾何的觀點來說，當空間中任一向量$\overrightarrow{d}$可以唯一表成$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{c}$的線性組合時，則三向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{c}$不共平面；反過來說，當空間中三向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{c}$不共平面時，那麼空間中任一向量$\overrightarrow{d}$可以唯一表成$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{c}$的線性組合。

舉例來說，空間坐標中，考慮標準單位向量$\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$ **=(1,0,0)**、$\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ **=(0,1,0)**、$\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ **=(0,0,1)**，顯然這三個向量不共平面，因此空間中任一向量$\overrightarrow{d}=(d_1,d_2,d_3)$都可以唯一表成$\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$、$\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$、$\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$的線性組合，即$\overrightarrow{d}=d_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+d_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}}+d_3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$的表示法是唯一的。

我們將前面的結果整理如下：

向量線性組合的唯一性

設$\overrightarrow{a}=(a_1 , a_2 , a_3)$、$\overrightarrow{b}=(b_1 , b_2 , b_3)$、$\overrightarrow{c}=(c_1 , c_2 , c_3)$與$\overrightarrow{d}=(d_1 , d_2 , d_3)$，則$\overrightarrow{d}$可以唯一表成$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{c}$的線性組合之充要條件是$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$(即$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$不共平面)。

[例題7] 空間中不共線三相異點 A(a_1 , a_2 , a_3)、B(b_1 , b_2 , b_3)、C(c_1 , c_2 , c_3)，

試證明平面 ABC 的方程式為$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}$=0。

(練習9)試判斷下列各題中，$\overrightarrow{d}$是否可以唯一表成$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{c}$的線性組合：

(1) $\overrightarrow{a}=(1,-2,3)$、$\overrightarrow{b}=(4,3,-5)$、$\overrightarrow{c}=(-2,-7,11)$

(2) $\overrightarrow{a}=(1,-2,3)$、$\overrightarrow{b}=(4,3,-5)$、$\overrightarrow{c}=(3,-1,1)$。

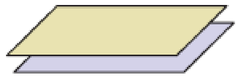
Ans：(1)否　(2)是

綜合練習

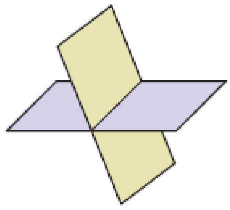
(1) 請判斷各小題中三平面的關係，並在每個小題之後，填入適當的編號來代表三平面的關係：

(A)

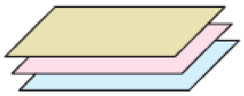
(B)



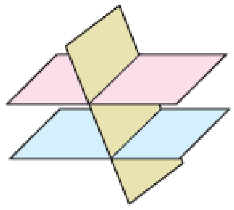
(C)



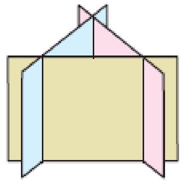
(D)



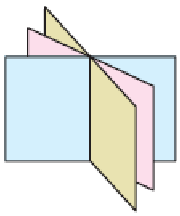
(E)



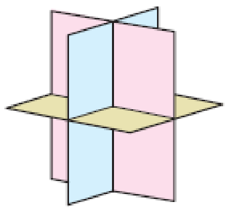
(F)



(G)



(H)



(a) $\begin{cases} 3x+2y+z=-2 \\ 6x+4y+2z=-4 \\ 2x+5y-z=2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x+2y+3z=5 \\ 2x+5y-z=-2 \\ x-3y-2z=13 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 4x+3y+z=2 \\ x+y+z=-1 \\ 3x+2y=3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x+2y-7z=4 \\ 2x+y-5z=2 \\ 5x+3y-12z=0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 2x+4y-2z=3 \\ 3x-5y-6z=11 \end{cases}$

(2) 試判別下列各小題中三平面的關係，並求一次方程組的解。

(a) $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-7z=7 \\ x+y+z=9 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x-7y+5z=13 \\ x-4y+2z=3 \\ 8x-17y+13z=36 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x-y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x-8y-5z=-4 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 4x+4y+4z=4 \\ x+y=2 \end{cases}$

(3) 設 a 為不等於 0 的實數，關於方程式組 $\begin{cases} ax+y+\dfrac{z}{a}=1 \\ x+ay+z=-1 \\ \dfrac{x}{a}+y+az=1 \end{cases}$ 的解，下列選項那些是正確的？(A)當 a=3 時，無解 (B)當 a=1 時，恰有一組解 (C)當 $a=\dfrac{1}{2}$時，恰有一組解 (D)當 a=−1 時，有無限多組解 (E)當 a=−4 時，有無限多組解。

(4) 若 $\begin{cases} x+2y-3z=-9 \\ ax+y+z=4 \\ 2x-y+z=8 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 2x+by-z=1 \\ x-2y+3z=13 \\ 2x+y-cz=12 \end{cases}$ 為同義方程組，且恰有一解，則(a,b,c)=？

(5) 已知方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 恰有一組解(5,−2 8)，

則方程組 $\begin{cases} (2a_1+3b_1)x+2b_1y+3c_1z=d_1 \\ (2a_2+3b_2)x+2b_2y+3c_2z=d_2 \\ (3a_3+3b_3)x+2b_3y+3c_3z=d_3 \end{cases}$ 之解為何？

(6) 若 $\begin{cases} x-y-2z=3 \\ 2x+2y+z=1 \\ 3x+ay-z=b \end{cases}$ 有無限多解，則(a)a=？b=？ (b)方程組的解。

(7) 齊次方程組：

(a) $\begin{cases} 3x-ay=0 \\ x-2y=b+4 \end{cases}$ 除(0,0)外尚有其他解，則 a=？b=？

(b) $\begin{cases} ax+2y+3z=0 \\ 3x+2y+3z=0 \\ x+5y+7z=0 \end{cases}$ 有異於(0,0,0)的解，則 a=？ 解為何？

(8) 三元一次方程組的幾何意義：

(a)就 k 值討論下列三平面相交的情形 $\begin{cases} x+3y-z=-4 \\ 2x+5y+z=-1 \\ x+5y-7z=k \end{cases}$

(b)就 a 值討論下列四平面相交的情形 $\begin{cases} 3x+5y-z=-1 \\ x-y+4z=11 \\ x+7y-9z=-23 \\ 4x+20y-23z=a \end{cases}$

(9) 王先生去歐洲旅行，他在法國每天的食、宿、保險費分別為 2500 元，2000 元，300 元；在德國的食、宿、保險費分別為 2200 元，2800 元,300 元；在西班牙的食、宿、保險費分別為 2000 元,2000 元,300 元。已知他在這三個國家總共的食、宿、保險費各花了 25100 元，24400 元，3300 元。問他在這三個國家分別停留幾天？

(10) 相傳包子是三國時白羅家族發明的。孔明最喜歡吃他們所做的包子，因此白羅包子店門庭若市，一包難求，必須一大早去排隊才買的到。事實上，白羅包子店只賣一種包子，每天限量供應 999 個，且規定每位顧客限購三個；而購買一個、兩個或三個包子的價錢分別是 8、15、21 分錢。在那三國戰亂的某一天，包子賣完後，老闆與老闆娘有如下的對話：老闆說：「賺錢真辛苦，一個包子成本就要 5 分錢，今天到底賺了多少錢？」
老闆娘說：「今天共賣了 7195 分錢，只有 432 位顧客買到包子」
(a)請問當天白羅包子店淨賺多少錢？
(b)聰明的你，請幫忙分析當天購買一個、兩個及三個包子的人數各是多少人？

(11) 設 $a_1,a_2,\ldots,a_{50}$ 是從 -1 , 0 , 1 這三個整數中取值的數列。若 $a_1+a_2+......+a_{50}=9$ 且 $(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+......+(a_{50}+1)^2=107$ ，則 $a_1,a_2,\ldots,a_{50}$ 當中有幾項是 0？
(2003 學科能力測驗)

(12) 一礦物內含 A、B、C 三種放射性物質，放射出同一種輻射。已知 A、B、C 每公克分別釋出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又已知 A、B、C 每過半年其質量分別變為原質量的 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$ 倍。於一年前測得此礦物的輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，則目前此礦物中 A、B、C 物質之質量分別為多少公克。
(2011 年學科能力測驗)

(13) 設空間坐標中 $\overrightarrow{a}=(1,1,0)$、$\overrightarrow{b}=(0,0,1)$、$\overrightarrow{c}=(2,-1,0)$，若 $\overrightarrow{u}=(-4,5,4)$ 可以表成 $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c}$ 的形式，試求實數 x,y,z。

(14) 設三個相異平面 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$。 相交於直線 L，點 A(3,2,1)落在 L 上。
現在考慮三元一次聯立方程式：$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$。 …..(*)，
設 $(x,y,z)=(-2,4,5)$ 為(*)的一個解，試問下列哪些選項是正確的？
(A)向量(3,2,1)為 L 的方向向量
(B)行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$
(C) $(x,y,z)=(-5,2,4)$ 為(*)的解
(D)(*)恰有一組解
(E)(*)的解可以表為 $(x,y,z)=(-2+3t,4+2t,5+t)$，其中 t 為實數。

(15) 設方程組(L)為$\begin{cases} -x+y+z=ax \\ x-y+z=ay \\ x+y-z=az \end{cases}$ 若(L)除 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 之解外，尚有其他解，求 a 之值。

綜合練習解答

(1) (a) (C) (b)(H) (c)(G) (d)(F) (e)(E)

(2) (a)三平面恰交於一點(6,2,1)

(b)三平面交於一直線，解$\begin{cases} x=5-6t \\ y=1+t \\ z=1+5t \end{cases}$ t 為實數。

(c)三平面兩兩相交於一直線，三直線沒有交點，無解

(d)兩平面平行，另一平面與兩平行平面交於平行兩直線，無解。

(3) (C)(D)

(4) (1,0,−3)

(5) $(\frac{5}{2},\frac{-19}{2},8)$

(6) (a)a=1,b=4 (b)$x=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}t$，$y=\frac{-5}{4}+\frac{-5}{4}t$，$z=t$

(7) (a)a=6，b=−4 (b)a=3 解為$(-t,-18t,13t)$

(8) (a) $k=-18$ 時，共線；$k\neq-18$ 時，三平面各交一線，三線平行。(b)$a=-58$ 時，共線；$a\neq-58$ 時，前三平面的交線與第四平面平行[提示：先考慮前三個平面的相交狀況，結果為三平面交於一直線，將此直線的參數式代入 $4x+20y-23z$，得到值 58，所以 $a=-58$ 時，共線；$a\neq-58$ 時，前三平面的交線與第四平面平行]

(9) 法國 5 天、德國 3 天、西班牙 3 天

(10) (a)2200 分錢 (b)買一個包子有 95 人，買二個包子有 107 人，買三個包子有 230 人

(11) 11

(12) A、B、C 物質之質量分別為 4、1、2 公克。

(13) x=2，y=4，z=−3

(14) (A)(B)(C)(E)

[提示：三平面$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$。經過平移可得

三平面$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$。，而交線的方向向量不變。]

(15) a=1 或−2 [提示Δ=0]