第二十九單元 空間坐標系與空間向量

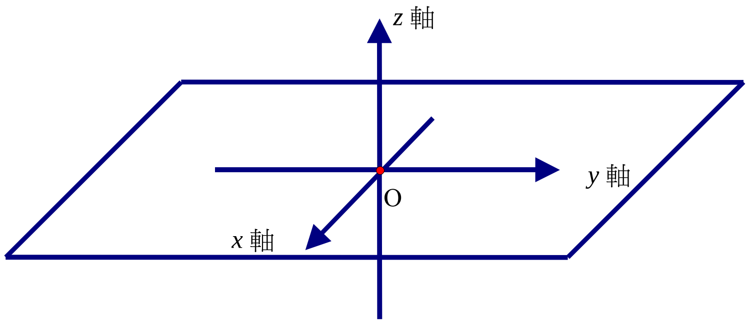
(甲)空間坐標系

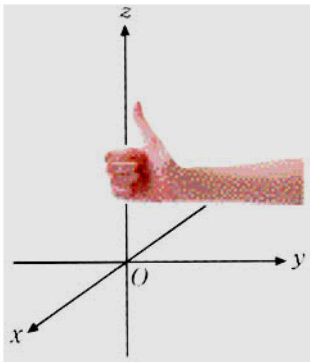
(1)建立空間坐標系：

如同平面坐標系可以描述平面上的點，我們也可以在空間中建立坐標系，來描述空間中的點。首先在一個平面上，建立直角坐標系，通過原點 O 做一條直線分別與 x 軸、y 軸垂直，我們稱此直線為 **z 軸**。z 軸的方向通常符合「右手螺旋法則」，即伸出右手，讓四指與大拇指垂直，並使四指先指向 x 軸的正向，然後四指沿握拳方向旋轉 90°指向 y 軸正向，此時大拇指所指的方向即為 z 軸的正向，我們稱這樣的坐標為「**右手系的坐標**」。x 軸、y 軸再加上 z 軸就成為一個**空間坐標系**，這三個軸稱為**坐標軸**。

x 軸與 y 軸所決定的平面稱為 xy 平面，同理亦有 yz 平面、zx 平面，

這三個平面稱為**坐標平面**。





事實上，根據直線垂直平面的判別定理，可知 x 軸,y 軸,z 軸分別會垂直 yz 平面,zx 平面,xy 平面。有時為了圖形簡潔，我們把坐標軸的負向部分省略不畫出來。

三個坐標平面將空間分為八個區，每一區稱為一個**卦限**。通常我們將坐標皆為正的那個卦限稱為**第 I 卦限**，其他七個區就不給特別的順序編號。

(2)利用空間坐標系描述點的位置

在空間坐標系中，如何用坐標來描述點 P 的位置呢？

[方法一]：

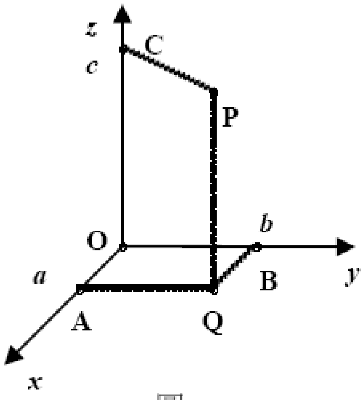
如下圖一，首先作過 P 點垂直於 xy 平面的垂線，垂足為 Q(即 Q 點為 P 點在 xy 平面的投影點)，過 Q 點分別作垂直於 x 軸,y 軸的直線，交 x 軸,y 軸於 A、B 兩點，過 P 點再作 z 軸之垂線，交 z 軸於 C 點，A、B、C 三點分別在 x,y,z 軸上之坐標依次設為 a,b,c，我們就用這一個有序實數組(a,b,c)來表示 P 點在空間中的位置。

稱(a,b,c)為 P 點的坐標，記作 P(a,b,c)，其中 a,b,c 分別為 P 點的 x,y,z 坐標。

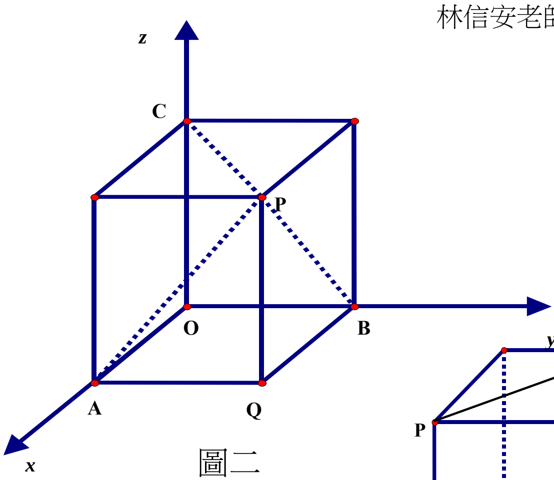
[方法二]：

若 P 點在 x,y,z 軸上的投影點在該數軸上的坐標為 m,n,l 時，那麼 P 點的坐標為(m,n,l)。

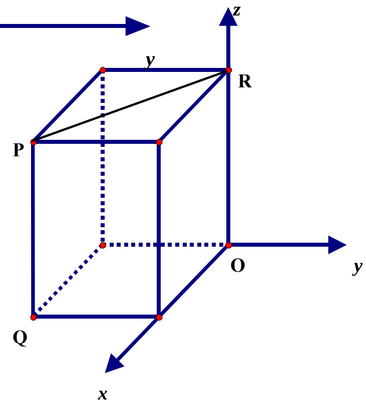
[討論]：請問方法一與方法二所決定的 P 點坐標會相同嗎？



圖一



圖二



[如何決定坐標]：

給定有序實數組(a,b,c)，如何找到坐標為(a,b,c)的點呢？

給定有序實數組(a,b,c)，如右圖，首先在 xy 平面上找出 x 坐標為 a,y 坐標為 b 的點 Q，在 z 軸上找坐標為 c 的點 R，過 Q 對 xy 平面作垂線，並自 R 點作前述直線的垂足點 P，則 P 點的坐標就是(a,b,c)。

結論：

對於空間中任一點 P，都可以用一組有序實數組(a,b,c)來表示；反過來說，任何一組有序實數組(a,b,c)都可以找到唯一的一點 P，使得 P 的坐標為(a,b,c)。

(3)坐標軸與坐標平面上的點之坐標

根據空間坐標系中點坐標的定義，xy 平面上的點 z 坐標為 0，yz 平面上的點 x 坐標為 0，zx 平面上的點 y 坐標為 0，即 xy 平面, yz 平面, zx 平面上點坐標分別可表為 $(a,b,0),(0,b,c),(a,0,c)$。又 x 軸為 xy 平面與 zx 平面的交點，所以 x 軸上的點 y,z 坐標分別為 0，同理可得 y 軸上的點 z,x 坐標分別為 0，z 軸上的點 x,y 坐標分別為 0，即 x,y,z 軸上的點坐標可表為 $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$。

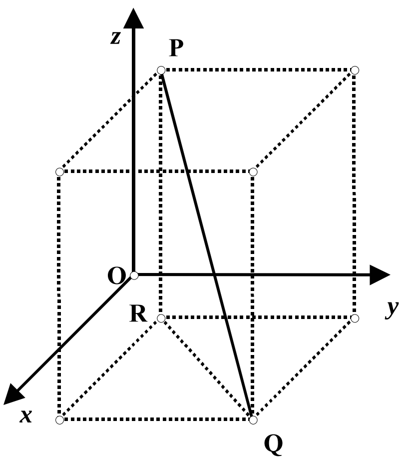
結論：

(1)點 P(a,b,c)對 x,y,z 軸的投影點分別為$(a,0,0)$、$(0,b,0)$、$(0,0,c)$。
(2)點 P 對 xy 平面的投影點 Q，Q 對 x,y 平面的投影點 A、B，分別是 P 對 x,y 軸的投影點。
(3) xy 平面, yz 平面, zx 平面上點坐標分別可表為$(a,b,0),(0,b,c),(a,0,c)$。
(4) x,y,z 軸上的點坐標可表為 $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$。

(4)空間中的距離公式：

設 P(x_1,y_1,z_1)、Q(x_2,y_2,z_2)為空間中兩點，

則$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ 。



[證明]：

(1°)若 P、Q 兩點 x、y、z 坐標均不同，如圖，R(x_1,y_1,z_2)、

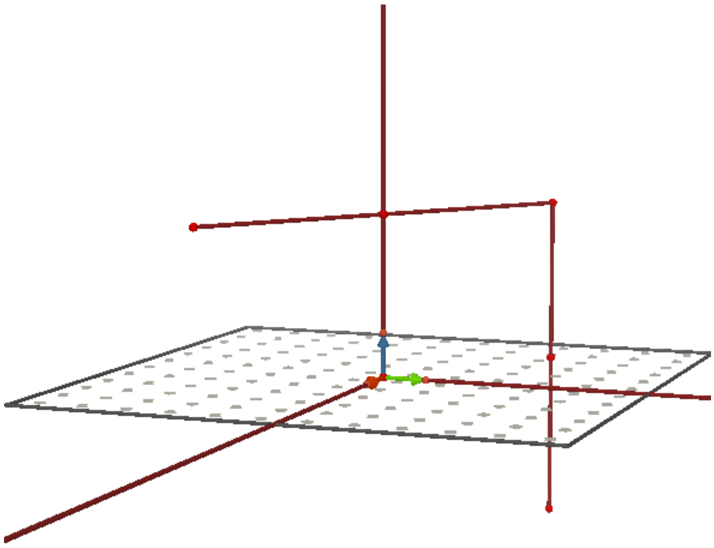
$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2$

$\Rightarrow\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$。

(2°)若若 P、Q 兩點 x、y、z 坐標有一個相同，那麼這個情形，就可以回到平面坐標上的情形，故距離公式依然成立。

(5)投影與對稱點：

(a)點 P 在各坐標平面與各坐標軸的投影點：



點 P(x,y,z)對 yz 平面之投影點為 $(0,y,z)$ 。

點 P(x,y,z)對 zx 平面之投影點為 $(x,0,z)$ 。

點 P(x,y,z)對 xy 平面之投影點為 $(x,y,0)$ 。

點 P(x,y,z)對 x 軸之投影點為 $(x,0,0)$ 。

點 P(x,y,z)對 y 軸之投影點為 $(0,y,0)$ 。

點 P(x,y,z)對 z 軸之投影點為 $(0,0,z)$ 。

(b)點 P 對於各坐標平面與各坐標軸的對稱點：

點 P(x,y,z)關於 yz 平面之對稱點為 $(-x,y,z)$ 。

點 P(x,y,z)關於 zx 平面之對稱點為 $(x,-y,z)$ 。

點 P(x,y,z)關於 xy 平面之對稱點為 $(x,y,-z)$ 。

點 P(x,y,z)關於 x 軸之對稱點為 $(x,-y,-z)$ 。

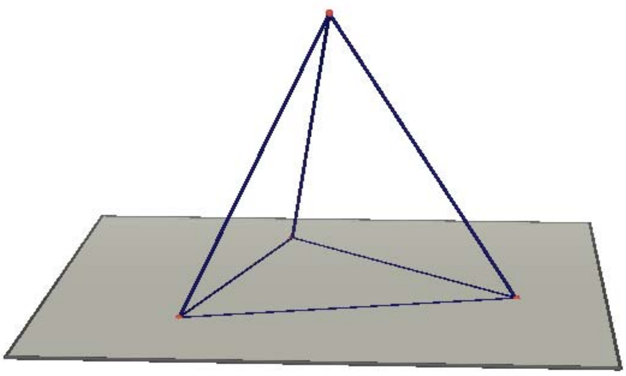
點 P(x,y,z)關於 y 軸之對稱點為 $(-x,y,-z)$ 。

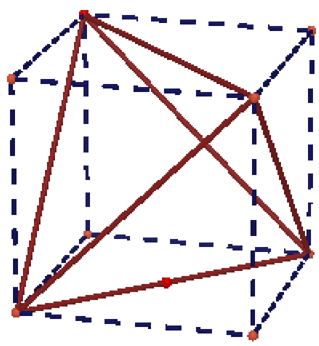
點 P(x,y,z)關於 z 軸之對稱點為 $(-x,-y,z)$ 。

結論：

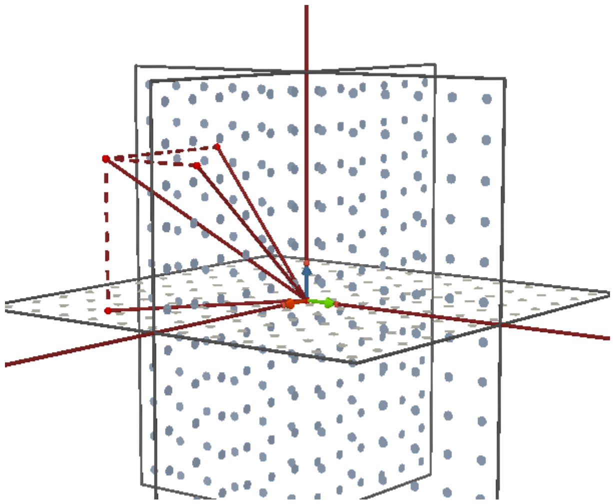
(a) 點 P 與其對於各坐標平面與各坐標軸的對稱點的中點為點 P 在各坐標平面與各坐標軸的投影點。
(b) 點 P 與其在各坐標平面與各坐標軸的投影點之距離為點 P 到各坐標平面與各坐標軸的距離。

[例題1] 設正四面體 A−BCD 的稜長為 a，請建立兩種不同的坐標系來表示 A、B、C、D 這四點的位置。

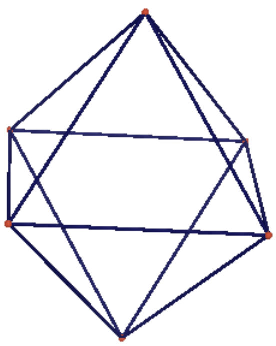




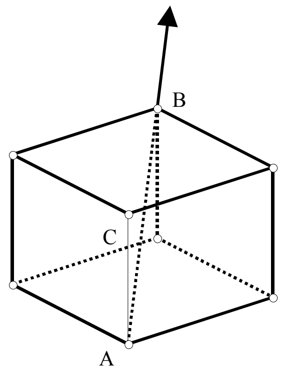
[例題2] 線段$\overline{PQ}$在 xy 平面、yz 平面及 zx 平面上的投影長，分別為$\sqrt{13}$ 、5、$\sqrt{20}$ ，則$\overline{PQ}$長度為何？Ans：$\sqrt{29}$



(練習1) 設有一個稜長為 a 的正八面體，
請建立一個坐標系來描述頂點的位置。

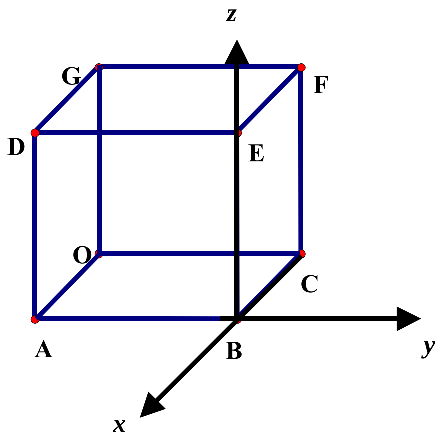


(練習2)如右圖，有一邊長為 1 的正立方體，
今置頂點 A 於空間坐標系中之原點(0,0,0)，
頂點 B 於正 z 軸上，則頂點 C 之 z 坐標為__________。
Ans：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



(練習3)如圖，在長方體 OABC−GDEF 中建立一個

空間坐標系，其中 B 為原點，而 C、A、E 分別在 x,y,z 軸上，且已知 A(0,−3,0)、F(−1,0,4)，試求其它頂點的坐標。
Ans：O(−1,−3,0)、C(−1,0,0)、D(0,−3,4)、E(0,0,4)
G(−1,−3,4)



(乙)空間向量的坐標化

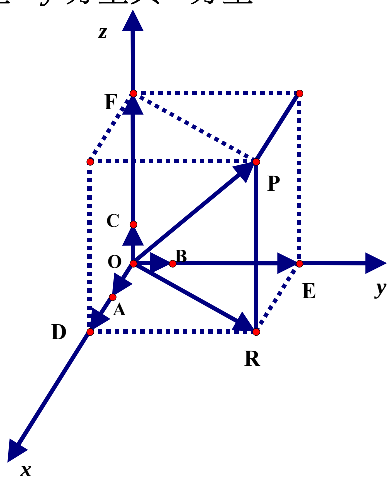
(1)空間向量的坐標表示：
仿照平面坐標系中向量的表示法，在空間坐標系中，向量也可以用坐標表示。

設 $\vec{u}$ 為一個空間向量，取一個空間坐標系，其中 O 為原點，如何用坐標來表示 $\vec{u}$ 呢？

可以取 P 點使得 $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$。設 P 點的坐標為$(a,b,c)$，我們就用 P 點的坐標$(a,b,c)$來表示向量 $\vec{u}$，記為 $\vec{u}=(a,b,c)$。而 a、b 和 c 分別稱為向量 $\vec{u}$ 的 **x 分量**、**y 分量**與 **z 分量**。

因為 $\vec{u}$ 的長度為$\overline{OP}$，所以$|\vec{u}|=\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 。
取 A(1,0,0)、B(0,1,0)、C(0,0,1)，
令 $\vec{i}=\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$、$\vec{j}=\overrightarrow{OB}=(0,1,0)$、$\vec{k}=\overrightarrow{OC}=(0,0,1)$

那麼向量 $\vec{u}=(a,b,c) \Leftrightarrow \vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ 仍然會成立。



空間坐標系中設 A(x_1,y_1,z_1)、B(x_2,y_2,z_2)，如何用坐標來表示$\overrightarrow{AB}$呢？

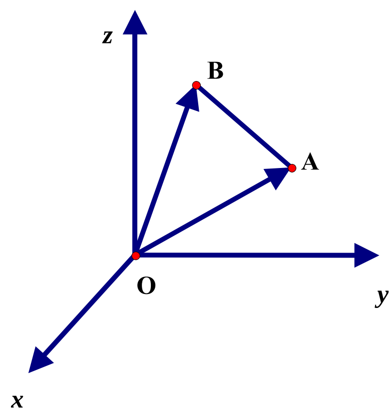
因為$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})-(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})$

$=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$

$=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

故$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$。



結論：

(1) 空間向量 $\vec{u}$ 可用有序組(a,b,c)表示，

其中 a 稱為 $\vec{u}$ 的 x 分量，b 稱為 $\vec{u}$ 的 y 分量，c 稱為 $\vec{u}$ 的 z 分量。

(2)若 $\vec{u}=(a,b,c)$，則$|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 。

(3)若 $\vec{u}=(a,b,c)$，$\vec{v}=(p,q,r)$則 $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow a=p,b=q,c=r$。

(4)若設 $\vec{i}=(1,0,0)$、$\vec{j}=(0,1,0)$、$\vec{k}=(0,0,1)$，

則向量 $\vec{u}=(a,b,c)\Leftrightarrow\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$

(5) 設 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$為坐標平面上的兩點，則$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$。

(2)空間坐標向量的加法、減法與係數積：

設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則

(a) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3)$

(b) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1，a_2-b_2，a_3-b_3)$

(c) $r\cdot\vec{a}=(ra_1,ra_2,ra_3)$，$r\in R$

(d)兩向量平行 $\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow(a_1,a_2,a_3)$與$(b_1,b_2,b_3)$ 各分量成比例。

[說明]：

$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ ，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$

(a) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})+(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$

$=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}+(a_3+b_3)\vec{k}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$

(b) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})-(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$

$=(a_1-b_1)\vec{i}+(a_2-b_2)\vec{j}+(a_3-b_3)\vec{k}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$

(c)設 r 為任意實數，

$r\vec{a}=r(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})=(ra_1)\vec{i}+(ra_2)\vec{j}+(ra_3)\vec{k}=(ra_1,ra_2,ra_3)$

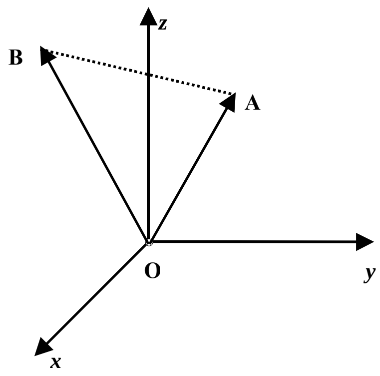
(d) $\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow a=t\vec{b}$ 或 $\vec{b}=s\vec{a}\Leftrightarrow(a_1,a_2,a_3)$與$(b_1,b_2,b_3)$ 各分量成比例。

(3)空間坐標向量的內積：

若 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

[證明]：

(1°)設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 不平行：



設 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$和 $\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)$且兩向量的夾角為θ，

在ΔAOB 中利用餘弦定理，

可得$|\overrightarrow{BA}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$

因為$\overrightarrow{BA}=(a_1-b_1，a_2-b_2，a_3-b_3)$

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$$=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{BA}|^2)$$

$$=\frac{1}{2}\{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2]\}$$

$$=\frac{1}{2}(2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3)\quad=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

(2°) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 平行

設 $\vec{a}=t\vec{b}$，即$(a_1,a_2,a_3)=t(b_1,b_2,b_3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(t\vec{b})\cdot\vec{b}=t|\vec{b}|^2=t(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

另一方面，$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=(tb_1)b_1+(tb_2)b_2+(tb_3)b_3=t(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$。

[討論]：

設 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$

請利用 $\vec{i}$ 、$\vec{j}$ 、$\vec{k}$ 的基本定義來說明 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$。

(4)內積的性質

(a)若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 都不是零向量，則. $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。

(b)$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$

(c)$|m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}|^2=|m\overrightarrow{a}|^2+2mn\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|n\overrightarrow{b}|^2$

(d)$(r\cdot\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(r\cdot\overrightarrow{b})=r(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$

(e)$\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$

(5)內積的應用：$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$

(a)求夾角：$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

(b)求面積：

設$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$為非平行的兩向量，

則由$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$所張成的三角形面積為$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}$。

(c) 求正射影：$\overrightarrow{a}$對$\overrightarrow{b}$的正射影為$\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\right)\overrightarrow{b}$。

(d)柯西不等式：

向量形式：

設$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$為平面上任意二向量，則$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|\le|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$，等號成立 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$。

證明：

因為$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$，$\theta$為其夾角，$|\cos\theta|\le1$

所以$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\cos\theta|\le|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$

等號成立 $\Leftrightarrow|\cos\theta|=1\Leftrightarrow\theta=0$ 或$\pi\Leftrightarrow\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$

一般形式：

若 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 為任意六個實數，

則$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$，等號成立$\Leftrightarrow(a_1,a_2,a_3)=t(b_1,b_2,b_3)$

證明：可設$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，因為$|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\ge|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|^2$

所以$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$。

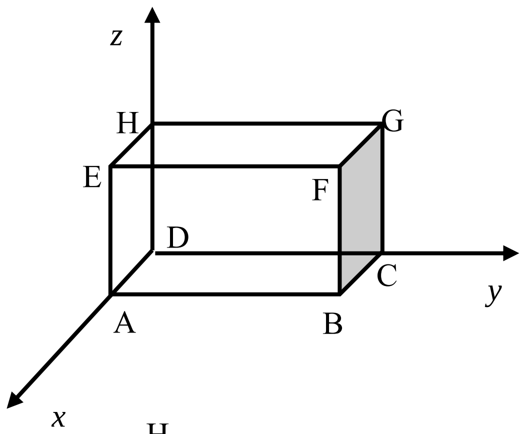
等號成立 $\Leftrightarrow\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}\Leftrightarrow(a_1,a_2,a_3)=t(b_1,b_2,b_3)$。

[例題3] (1)設 $\vec{a}=(1,2,1)$、$\vec{b}=(2,k,-4)$，若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 60°，則 k=？

(2)t 為實數，且 t>0，$\overrightarrow{OA}=(2,1,-3)$、$\overrightarrow{OB}=(1,0,2)$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，

若 $\overrightarrow{OC}$ 平分∠AOB，則 t=？　Ans：(1)$\frac{26}{5}$　(2)$\frac{\sqrt{70}}{5}$

[例題4] (坐標化用內積求幾何量)



右圖為長方體 ABCD−EFGH 中，AB=4，AD=2，

AE=3，則

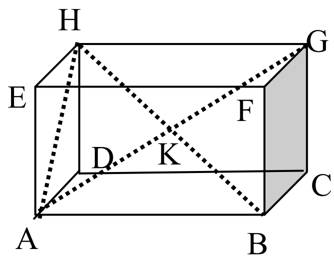
(1)$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$ =？

(2)設直線 AG、BH 的銳交角為α，試求 cosα=？

(3)ΔFAC 的面積=？

[答案]：(1)16 (2)$\frac{3}{29}$(3)$\sqrt{61}$

[坐標化]：



(1)如右圖，將 D 點置於坐標原點

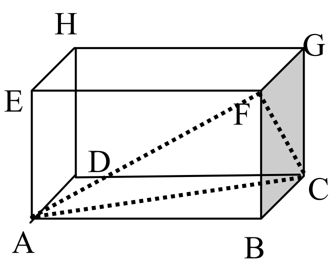
A(2,0,0)、B(2,4,0)、C(0,4,0)、H(0,0,3)、F(2,4,3)、G(0,4,3)

$\overrightarrow{AC}=(-2,4,0)$，$\overrightarrow{AF}=(0,4,3)\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=16$

(2)將直線 AG、BH 的交角視為 $\overrightarrow{AG}$、$\overrightarrow{BH}$ 的夾角θ，

$\because\overrightarrow{AG}=(-2,4,3)$、$\overrightarrow{BH}=(-2,-4,3)$

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{BH}|}=\dfrac{-3}{29}\Rightarrow\alpha=180-\theta$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{3}{29}$



(3)ΔFAC 的面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2|\overrightarrow{AF}|^2-(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20\times25-16^2}$

$=\sqrt{61}$ 。

[非坐標化]

(1)連 AF、AC，在ΔACF 中使用餘弦公式

$\overline{FC}^2=\overline{AF}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AF}\cdot\overline{AC}\cdot\cos(\angle FAC)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=\overline{AF}\cdot\overline{AC}\cdot\cos(\angle FAC)=\frac{1}{2}(25+20-13)=16$。

(2)連 $\overline{AG}$、$\overline{BH}$，設 $\overline{AG}$、$\overline{BH}$ 的交點為 K，在ΔAKH 中使用餘弦公式

$\Rightarrow\overline{AH}^2=\overline{KH}^2+\overline{KA}^2-2\overline{KH}\cdot\overline{KA}\cdot\cos(\angle AKH)$

$\Rightarrow \cos(\angle AKH)=\dfrac{3}{29}$。

(3)ΔFAC 的面積$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2|\overrightarrow{AF}|^2-(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{20\times25-16^2}=\sqrt{61}$。

[例題5] 空間中有三點 P(6.−4,6)，Q(2,1,2)，R(3,−1,4)，求

(1)ΔPQR 的面積=_________

(2)P 點到直線 QR 的距離=__________

(3)求$\overrightarrow{PQ}$在$\overrightarrow{PR}$上的正射影為__________ 。

Ans：(1)$\dfrac{\sqrt{29}}{2}$ (2)$\dfrac{\sqrt{29}}{3}$ (3)$\dfrac{35}{22}$ $(-3,3,-2)$

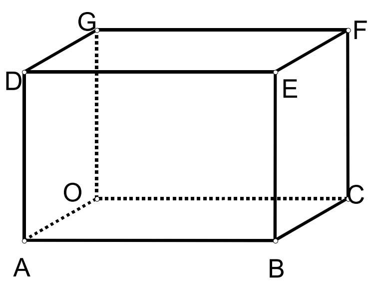
[例題6] 設 x,y,z 為實數，且 $x^2+y^2+z^2=9$，求 $2x+2y-z$ 之

(1)最小值=_______，此時(x,y,z)=________ 。

(2)最大值=_______，此時(x,y,z)=_________ 。

Ans：(1)−9，(−2,−2,1) (2)9，(2,2,−1)

(練習4) 設$\vec{u}=(2,1,3)$，$\vec{v}=(1,0,2)$，$\vec{w}=\vec{u}+t\vec{v}$ ($t\in$ R)則 t=_____時，$|\vec{w}|$有最小為何？Ans：$t=\dfrac{-8}{5}$，$|w|$的最小值為$\dfrac{\sqrt{30}}{5}$



(練習5) 如右圖，立方體 ABCODEFG，

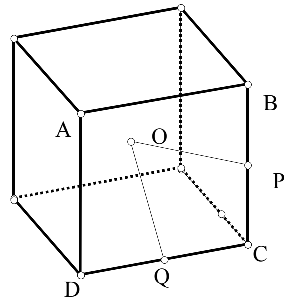
$\overline{OA}=1$，$\overline{AB}=3$，$\overline{OG}=2$，$\overline{OE}$與$\overline{GB}$之夾角為θ，

試求 sinθ。Ans：$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

(練習6) 若空間中三點 A(−1,3,2)、B(1,0,2)、C(k+3m,1,2k−m)共線，
求實數 k,m。Ans：$k=\dfrac{19}{21}$，$m=\dfrac{-4}{21}$

(練習7) 已知空間中三點坐標為 A(4,1,−1)、B(0,5,0)、C(1,1,2)，
試求(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$之值。(2)cos∠BAC 之值。Ans：(1)15 (2)$\dfrac{5}{\sqrt{66}}$

(練習8) 如右圖，ABCD 為正立方體的一個面，P、Q
分別為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$的中點，O 為正立方體的中心，
則 cos(∠POQ)=？Ans：$\dfrac{1}{2}$ (90 大學自)



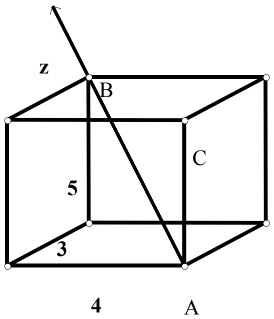
(練習9) 設 A(2,−1,1)、B(1,−3,5)，C(3，−4,−4),則
(1)ΔABC 的面積為何？ (2)A 點到 BC 直線的距離。
Ans：(1)$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{510}$ (2)$\sqrt{\dfrac{510}{86}}$

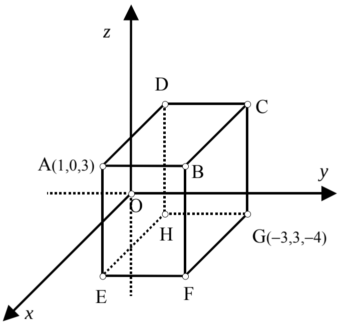
(練習10) 設 $\overrightarrow{a}$=(1,−1,2)、$\overrightarrow{b}$=(4,−5,3)為空間中兩向量，請求
(1) $\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$之夾角。 (2) $\overrightarrow{a}$在$\overrightarrow{b}$上的正射影。Ans：(1)$\dfrac{\pi}{6}$ (2)$\dfrac{3}{10}$(4,−5,3)

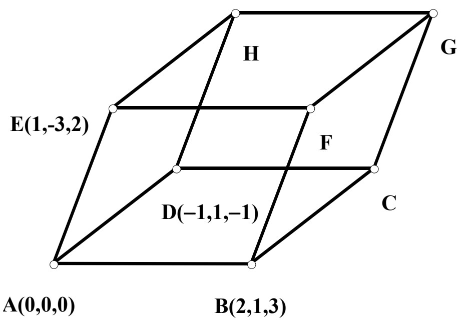
綜合練習

(1) 設$(\sqrt{2},2,0)$，$(-\sqrt{2},2,0)$,$(-\sqrt{2},-2,0)$,$(\sqrt{2},-2,0)$為一正立方體的四個頂點，則下列那些點也為此正立方體的頂點？(A)$(\sqrt{2},0,2)$ (B)$(0,2,\sqrt{2})$ (C)$(\sqrt{2},2,4)$ (D)$(\sqrt{2},2,2\sqrt{2})$ (E)$(-\sqrt{2},0,-2)$

(2) 如左下圖，有一個長方體的長、寬、高分別為 3,4,5，考慮一個空間坐標系，以 A 為原點(0,0,0)，B 點置於正 z 軸上，則頂點 C 之 z 坐標為__________。



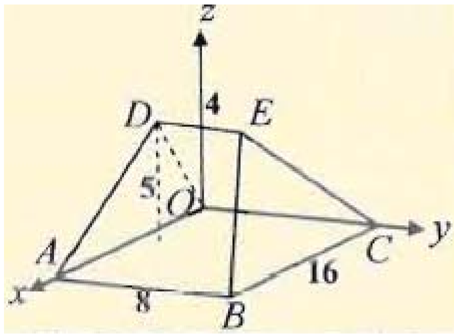




(3) 如圖，每一個面皆為平行四邊形的六面體，稱為平行六面體，求 G 點的坐標。

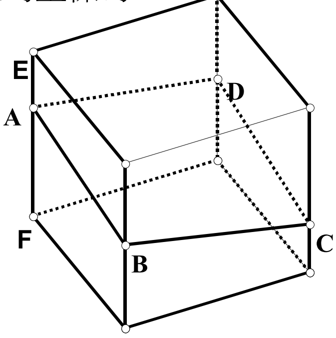
(4) 如右上圖，長方體 ABCD−EFGH，已知 A(1,0,3)、G(−3,3,−4)，求
(a)點 F 的坐標為____________。
(b)點 A 到 xy 平面的距離=_________。
(c)點 G 對 z 軸的對稱點坐標為___________。

(5) 如右圖，OABC−DE 是一個對稱的屋頂形狀的五面體，其中$\overline{AD}=\overline{OD}$，OABC 是一個長方形，$\overline{AB}=8$，$\overline{OA}=16$，$\overline{DE}$與長方形 OABC 平面平行，且在其上距離 5 處，若$\overline{DE}=4$，試求
(a)E 之坐標　(b)$\overline{AE}$=？

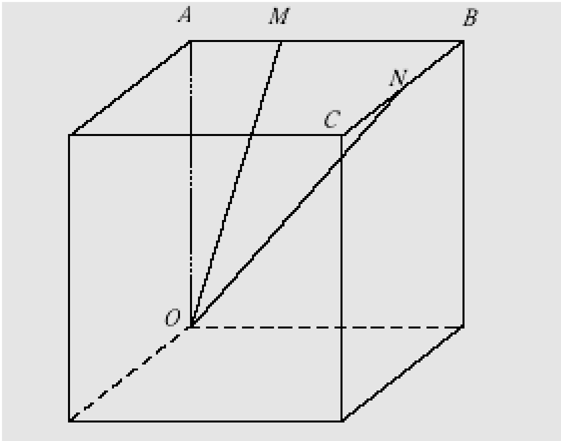


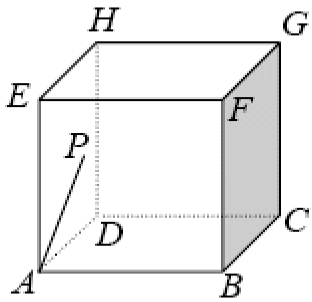
(6) 在空間坐標中，設 xy 平面為一鏡面，有一光線通過點 P(1,2,1)，射向鏡面上的點 O(0,0,0)，經鏡面反射後通過點 R，若$\overline{OR}=2\overline{PO}$，則 R 點的坐標為？

(7) 上右圖是一個正立方體，被平面截出一個四邊形 ABCD，其中 B、D 分別是稜的中點，且$\overline{EA}:\overline{AF}=1:2$。則 $\cos\angle DAB$=________。　(91 學科)



(8) 下左圖為一正立方體，若 M 在線段$\overline{AB}$上，$\overline{BM}=2\overline{AM}$，N 為線段$\overline{BC}$之中點，則 cos∠MON=________。（分數要化成最簡分數）(95 學科)





(9) 如上右圖所示，ABCD−EFGH 為邊長等於 1 之正立方體。若 P 點在立方體之內部且滿足$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$，則 P 點至直線 AB 之距離為________。
(化成最簡分數) (94 學科)

(10) 設 A、B、C、D 為空間中四個相異點，且直線 CD 垂直平面 ABC。已知$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=10$，sin∠ABC=$\frac{4}{5}$，且∠ABC 為銳角，則$\overline{AD}$ =________。
(化成最簡根式) (2013 指定甲)

(11) 於 xyz 空間中有三點 A(1,2,3)，B(−1,0,1)，C(0,−1,2)，
令∠ABC=θ，則：(a)cosθ=____(b)sinθ=____(c)點 A 到直線 BC 的距離。

(12) 設 A(1,−1,2)、B(3,2,1)、C(−1,3,5)，則
(a)ΔABC 之面積=__________。(b)A 到直線 BC 的距離為__________。

(13) 設 A(2,1,1)、B(3,1,2)、O(0,0,0)為空間中三點，
(a)試求以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$所展成的平行四邊形面積。
(b)若$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中$-1\le\alpha\le2$，$0\le\beta\le1$，試求在空間坐標中所有 P 點所成的圖形的面積。

(14) 已知$\vec{a}=(1,3,-2)$、$\vec{b}=(2,-1,3)$，且 $p+q=1$，若$|p\vec{a}+q\vec{b}|$有最小值 m，請求出 m 的值，並問此時(p,q)=？

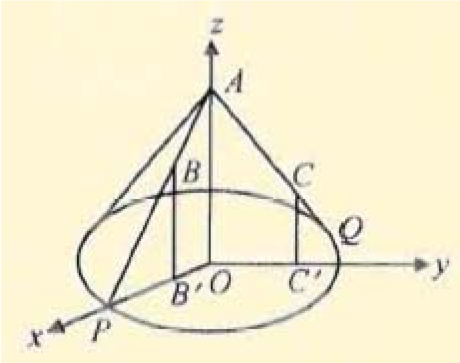
(15) 已知空間中二向量$\overrightarrow{OA}=(2,2,1)$、$\overrightarrow{OB}=(x,y,z)$，設 $x^2+y^2+z^2=16$，試求
(a)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最大值。 (b)若$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$交角為 60°時，求$\overline{AB}$的長度。

(16) 設 x,y,z 為實數，若$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}+\frac{(z-2)^2}{25}=2$，求 $x-y+z+2$ 的最大值為何？此時(x,y,z)=？

(17) 設 a,b,c 為正數，且$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{36}{c}=3$，求 $a+b+c$ 之最小值。

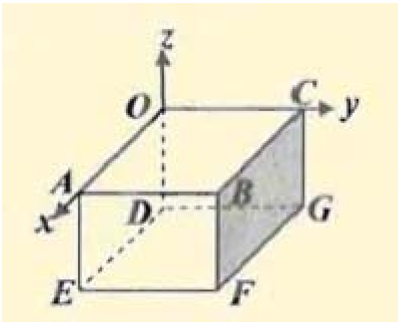
(18) 設$\overrightarrow{OA}=(-2,2,1)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,1,0)$且$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{OB}$，$t$ 為實數，若射線 OC 平分$\angle AOB$，則 t=______。

(19) 若 $\vec{a}=(2,1,-1)$、$\vec{b}=(1,3,2)$、$\vec{c}=(-2,3,1)$，則$|\vec{a}-s\vec{b}-t\vec{c}|$有最小值時，數對$(s,t)$=？



進階問題

(20) 空間坐標系中，有一個直圓錐，其頂點 A 在 z 軸上，底在 xy 平面上，且圓心在原點，半徑為 6，側面有二點 B、C，在底面的正射影為 B′、C′，且 B′點在 x 軸上，C′點在 y 軸上，$\overline{OA}=12$，$\overline{OB'}=2$，$\overline{OC'}=4$，求$\overline{BC}$=？



(21) 在空間中一長方體之位置如右圖所示，且$\overline{OD}<\overline{OC}<\overline{OA}$，O 為原點，若$\overline{OD}+\overline{OC}+\overline{OA}=6$，且其表面積為 22，體積為 6，求 A、G、F 三點坐標。

(22) 一三角形之三邊長分別為 4,5,6，三角形內一點到各邊之距離分別為 x,y,z，試求 $x^2+y^2+z^2$ 之極小值。

(23) 設 a,b 為實數，求 $a^2+b^2+(2a-3b-2)^2$ 之最小值為何？此時(a,b)=？

(24) 在空間四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$且$\overline{BD}=\overline{CD}$，

(a)求證：$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$

(b)若$\overline{AD}=\overline{BC}$，E、F、G、H 分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{CD}$、$\overline{BD}$的中點，證明：$\overrightarrow{EG}\perp\overrightarrow{FH}$。

綜合練習解答

(1) (A)(E)[提示：因為 $A(\sqrt{2},2,0)$，$B(-\sqrt{2},2,0)$,$C(-\sqrt{2},-2,0)$,$D(\sqrt{2},-2,0)$均在 xy 平面上，且$\overline{AD}=\sqrt{2}\ \overline{AB}$，其他四個頂點落在同一平面上，即為 yz 平面。]

(2) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

(3) $G(2,-1,4)$

(4) (a)$(1,3,-4)$ (b)3 (c)$(3,-3,-4)$

(5) (a)$E(8,6,5)$ (b)$5\sqrt{5}$

(6) $(-2,-4,2)$

(7) $\dfrac{1}{37}$

(8) $\dfrac{4\sqrt{10}}{15}$

(9) $\dfrac{5}{6}$

(10) $6\sqrt{5}$

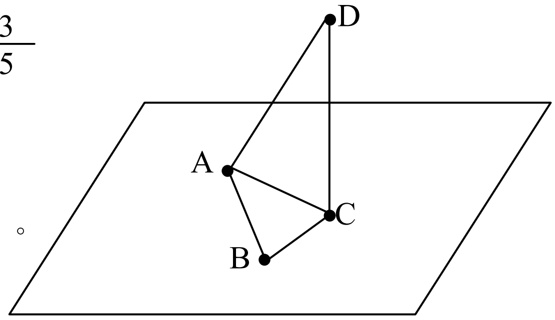
[解法]：

連 AC，令$\angle ABC=\theta$，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

$\overline{AC}^2=10^2+10^2-2\times10\times10\times\cos\theta\Rightarrow\overline{AC}^2=80$

$\because$直線 CD 垂直平面 ABC$\therefore$ $\angle ACD=90°$

故$\overline{AD}^2=\overline{CD}^2+\overline{AC}^2=180\Rightarrow\overline{AD}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$。



(11) (a)$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$(b)$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(c)\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

(12) (a)$\dfrac{\sqrt{381}}{2}$ (b)$\sqrt{\dfrac{127}{11}}$

(13) (a)$\sqrt{3}$ (b)$3\sqrt{3}$

(14) $m=\sqrt{\dfrac{7}{2}}$，$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

(15) (a)12 (b)$\sqrt{13}$

(16) 16，$(\dfrac{14}{5},\dfrac{-21}{5},7)$

[提示：$[\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{16}+\dfrac{(z-2)^2}{25}][3^2+(-4)^2+5^2]\ge[(\dfrac{x-1}{3})\cdot3+(\dfrac{y+1}{4})\cdot(-4)+(\dfrac{z-2}{5})\cdot5]^2$]

(17) 27[提示：$(a+b+c)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{36}{c})\ge(1+2+6)^2$]

(18) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$[提示：$\overrightarrow{OC}=(-2-t,2+t,1)$，設$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OC}$的夾角$\alpha$，$\overrightarrow{OC}$與$\overrightarrow{OB}$的夾角$\beta$，利用 $\cos\alpha=\cos\beta\Rightarrow t=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$]

(19) $(\frac{12}{23},\frac{-11}{23})$

[提示：$|\vec{a}-s\vec{b}-t\vec{c}|$最小$\Rightarrow(\vec{a}-s\vec{b}-t\vec{c})\perp\vec{b}$且$(\vec{a}-s\vec{b}-t\vec{c})\perp\vec{c}$]

(20) 6

(21) A(3,0,0)、G(0,2,−1)、F(3,2,−1)

(22) $\frac{225}{44}$

(23) $\frac{2}{7}$，$(\frac{2}{7},\frac{-3}{7})$

[提示：$[a^2+b^2+(2a-3b-2)^2][(-2)^2+3^2+1^2]\geq[-2a+3b+(2a-3b-2)]^2=4$，等號成立 $\Leftrightarrow \frac{a}{-2}=\frac{b}{3}=\frac{2a-3b-2}{1}=k\Rightarrow a=-2k$，$b=3k$，代入 $2a-3b-2=k\Rightarrow k=\frac{1}{7}$]

(24) (a)證明：$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

(b)令$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$、$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$、$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$，推導出$\overrightarrow{EG}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$、$\overrightarrow{FH}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$，再計算$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{FH}=0$