第 3 單元函數的基本概念

(甲)函數的概念

16 世紀中葉，歐洲科學革命的興起，科學和技術有了長足的進步，有關運動的研究已在自然科學領域中逐漸居主導的地位，這就影響了數學研究的方法：從定量觀念爲中心轉移到以變量觀念爲中心，而實現這一轉變的關鍵人物是笛卡爾、牛頓、萊布尼茲，函數的概念在解析幾何、微積分誕生的背景下，被引入數學的殿堂。

現在公認最早的函數定義是由德國數學家萊布尼茲給出的，他在一篇手稿中，首先採用「函數」(拉丁文 functio，英文 function)一詞，並用函數表示曲線上的點的「橫坐標」、「縱坐標」、「切線長度」等，由此可見一開始人們對於函數的認識是相當膚淺的，後來函數的概念經過一次一次的修正，內涵逐漸的擴大，瑞士數學家歐拉在他寫的「無窮小分析引論」書中明確指出：變量的函數是由這個變量和一些定量通過任何方式形成的解析表達式」，例如：$f(x)=x^2$，這個定義在 18 世紀被認爲是標準的函數概念。西元 1821 年，法國數學家柯西在「分析教程」中給出了自變數的概念，並且初步有了對應的概念，不過他並沒有特別強調。西元 1837 年德國數學家狄利克雷引入新的函數定義：對於某區間上每個確定的 x 值，只要 y 有完全確定的值與之對應，不論 x,y 所建立之對應方式爲何，y 都稱爲 x 的函數。

有名的狄利克雷函數 $f(x)=\begin{cases}1 & ,x\text{爲有理數}\\ 0 & ,x\text{爲無理數}\end{cases}$，就說明了狄利克雷對於函數的看法。

19 世紀末，德國數學家 Cantor 創立了集合論，人們把函數的定義提昇到更抽象的層次：設 A、B 是非空的集合，，f 是一法則，若 A 中的每個元素 x，經由法則 f，總有集合 B 中確定的元素 y 與之對應，則稱 f 是定義於集合 A 上的一個函數。這個抽象的定義，提煉出函數概念的精隨，使它爲 17 世紀函數概念萌芽、發展做了一個完美的結果，也使得函數在 20 世紀有更廣泛的應用。

(1)函數的表徵：

函數的表達方式有很多種，下面的例子呈現出函數的不同表徵：

例一：(用圖表描述函數)

東京飛台北的班機降落中正機場時，降落前 10 分鐘，小安記錄了飛行高度與時間，並用下表來表示：

落地前時間(分)	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
飛行高度(公尺)	3399	2150	1616	1523	1521	1519	1320	903	709	270	0

落地前 10 分鐘內，每一分鐘都有唯一的飛行高度與之對應。這代表了落地前 10 分鐘內，每分鐘與飛行高度的函數關係。

例二：(用圖表描述函數)

右圖是 2009 年 10 月 8 日，台北股票市場的大盤走勢圖，這個圖代表了當日加權指數的漲跌點數與時間的函數關係。

例三：(用代數式描述函數)

設正方形的面積 A 是由它的邊長 x 所決定，即 $A=x^2$，當邊長 x 確定了，則面積 A 亦隨之確定。換句話說，給定一個邊長 x，都有一個面積值與之對應。

例四：(用語言描述函數)

刻卜勒(Johannes Kepler, 1571~1630)行星運動的第三定律：「行星公轉時間(T)的平方和行星到太陽的平均距離(R)的立方成正比。」這段話描述了行星公轉時間(T)與行星到太陽的平均距離(R)的函數關係。

(2)函數的定義：

什麼是函數呢？

設 x 和 y 是兩個變量，若<u>**每一個 x 都有一個且只有與之對應的 y 值**</u>，我們稱這種對應關係為『y 是 x 的函數』，並用符號 $\boldsymbol{y=f(x)}$ 表示，$f(x)$讀作「x 的函數 f」

用集合的觀點把函數的概念進一步敘述如下：

函數的定義： 設 A、B 是兩個集合，若對於集合 A 中的任一個元素 x，在集合 B 中恰有一元素 y 與 x 對應，此種對應法則 f 稱為從 A 映到 B 的函數。記為 f：A→B。

$$\boxed{定義域} \xrightarrow{\boxed{對應法則\ f}} \boxed{值域}$$

接下來我們介紹函數相關的概念如下：

1.定義域與值域：

在函數 f：A→B 中，自變數所成的集合 A 稱為函數 f 的**定義域**，集合 B 稱為 f 的**對應域**，而全體函數值 $f(x)$ 所形成的集合$\{ f(x) \mid x\in A \}$ 稱為 f 的**值域**，記作 $f(A)$，即

$f(A)=\{ f(x) \mid x\in A \}$。值域 $f(A)$ 是對應域 B 的子集。

2.函數的圖形：

若 A、B 為實數 R 的子集合，當 x 在 A 內變動時，所有這樣的點（x，$f(x)$）組成的集合 $\Gamma=\{ (x, f(x)) \mid x\in A \}$稱為函數 f 的圖形。

3. 區間的表示法

討論函數的定義域或值域，常用到區間的概念，下表是一些常用的區間符號。

名　稱	集　合	符　號	數軸表示
閉區間	$\{x \mid a\le x\le b\}$	〔a，b〕	
開區間	$\{x \mid a< x< b\}$	（a，b）	
半開半閉區間	$\{x \mid a\le x< b\}$	〔a，b）	
半開半閉區間	$\{x \mid a< x\le b\}$	（a，b〕	
閉區間	$\{x \mid a\le x\}$	〔a，∞）	
開區間	$\{x \mid x<b\}$	($-\infty$，b〕	

例一：

設高中一年級某班學生的座號與體重之間的關係如下表所示：

座號	1	2	3	4	5	….	45	46	47
體重	63 公斤	56 公斤	75 公斤	70 公斤	55 公斤	…	67 公斤	75 公斤	63 公斤

定義域={1,2,3,…,47}，對應域=R，

值域={63 公斤，56 公斤，75 公斤，70 公斤，55 公斤，…，67 公斤}

例二：

設正方形的面積 A 是由它的邊長 x 所決定，即 $A=x^2$

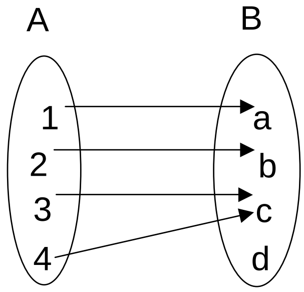
定義域=$\{x|x>0\}$，對應域=R，值域=$\{A|A>0\}$

例三：

函數 f：$A\to B$

A：定義域={1,2,3,4}，B：對應域={a,b,c,d}

值域 $f(A)=\{a,b,c\}$



[例題1] $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{1,2,3\}$試判斷下列對應法則何者爲由 A 映至 B 的函數？

(1)f：$a\to1$，$b\to3$，$c\to2$。

(2)g：$a\to1$，$b\to3$，$c\to2$，$d\to3$。

(3)h：$a\to1$，$b\to2$，$b\to3$，$c\to1$，$d\to1$。

(4)k：$a\to1$，$b\to1$，$c\to1$，$d\to3$。

Ans：(2)(4)

結論：

函數的判斷法則：

(a)定義域要對完。

(b)1 對 1,多對 1⇒是函數，但 **1 對多**不是函數。

[例題2] 試求下列各函數的定義域

(1)$y=\dfrac{2x+1}{x-1}$　　(2)$y=\sqrt{x+1}$　　(3)$y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

Ans：(1)$\{x|x\neq1，x\in R\}$ (2)$\{x|x\geq-1，x\in R\}$　(3)$\{x|x\neq1$ 且 $x\geq-1，x\in R\}$

[例題3] 試求下列定義在實數上的函數之值域。

(1)$f(x)=2x-1$　(2)$f(x)=3x^2+4x+7$　(3)$f(x)=\dfrac{x+5}{2x-3}$

Ans：(1)R　(2)$\{y|y\geq\dfrac{17}{3}\}$　(3)$\{y|y\neq\dfrac{1}{2}\}$

(練習1) 設 A={a,b,c,d}，B={1,2,3}，試判斷下列何者爲函數？

(A)f：a→1,b→3,c→2

(B)g：a→1,b→3,c→2,d→3

(C)h：a→1,b→2,b→3,c→1,d→1

(D)k：a→1,b→1,c→2,d→2

Ans：(B)(D)

(練習2) 飲料自動販賣機中，所賣的飲料所成的集合爲 A，飲料的價格所成的集合爲 B，請問：

(1)可以定義出從 A 映至 B 的函數嗎？爲什麼？

(2)可以定義出從 A 映至 B 的函數嗎？爲什麼？

(練習3) 下列各題中，實數 y 都隨著實數 x 變動而變動，試問 y 是否爲 x 的函數？

(1)$2x+3y=4$　(2)$xy=2$，其中 $x\neq0$ (3)$x^2=y-5$ (4)$y^2-3x+4=0$

(5)$y=\begin{cases}1, 當x\geq0\\0, 當x<0\end{cases}$　Ans：(1)(2)(3)(5)

(練習4) 設 $f(x)=\begin{cases}3x-1，若x>3\\x^2-2，若-2\leq x\leq3\\2x+3，若x<-2\end{cases}$　試求(1)$f(0)$　(2)$f(5)$　(3)$f(-4)$

Ans：(1)−2　(2)14　(3)−5

(練習5) 試求函數 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-5}$ 的值域與定義域。

Ans：定義域=$\{x|x\neq5\}$，值域=$\{y|y\neq2\}$

(練習6) 設 $f(n)$表示$\frac{2}{7}$化成小數，小數點後第 n 位數字。

(a)$f(1)$=？　$f(5)$=？　$f(2002)$=？

(b)設 n 爲任意自然數，請問 $f(n)$是否爲 n 的函數？

(c)請寫出 f 的值域。

Ans：(a)$f(1)=2$，$f(5)=1$，$f(2002)=7$　(b)是　(c)$\{2,8,5,7,1,4\}$

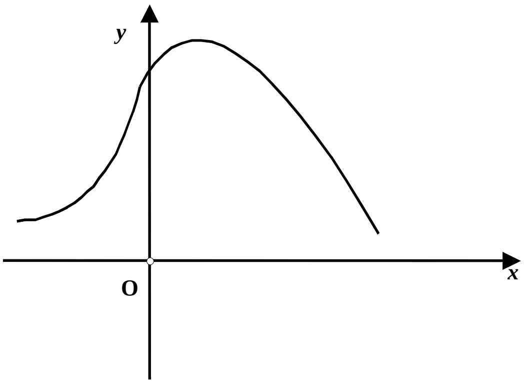
(乙)函數的圖形

函數圖形的定義：

設 $y=f(x)$是一個給定的函數(其中 x,y 均爲實數)，如果將(x,y)視爲平面直角坐標系中的橫坐標與縱坐標，則所有滿足 $y=f(x)$的點(x,y)構成一個圖形(可能是直線、曲線或其他圖形)，這個圖形稱爲函數 f 的圖形。

由集合的觀點來看：

函數 f：A→B (A,B⊂R)的圖形爲點集合 G=$\{(x,f(x))|x\in A\}$



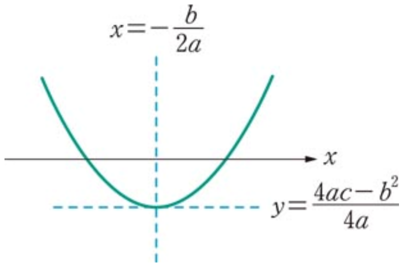
例四：二次函數的圖形

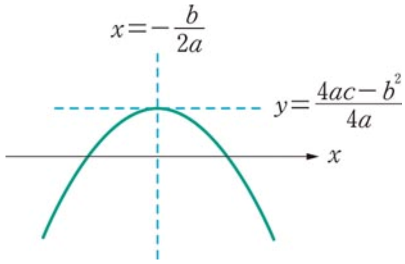
二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

的定義域是 R，其值域 $f(R)$說明如下：

當 $a>0$ 時，$f(R)=\{y\,|\,y\in R，y\geq\dfrac{4ac-b^2}{4a}\}$，當 $a<0$ 時，$f(R)=\{y\,|\,y\in R，y\leq\dfrac{4ac-b^2}{4a}\}$。

如下圖所示：





[例題4] 高斯符號函數

設 x 為實數，定義符號 $[x]$ 為不大於 x 的最大整數。

例如：$[-5]=5$，$[-3.2]=-4$，$[6]=6$，….

定義函數 $f(x)=[x]$

(1)試求此函數 $f(x)$的定義域、值域為何？

(2)繪出函數 $f(x)$的圖形。

[解法]：

(1)因為對於任意實數 x，$[x]$都有意義。

故函數 f 的定義域為 R(實數集)。

根據符號$[x]$的定義，對於任意的整數 k 來說，

當 $k\le x<k+1$ 時，$f(x)=[x]=k$

故函數 f 的值域為所有整數所成的集合。

(2)因為　$k\le x<k+1$ 時，$f(x)=[x]=k$

所以我們可以分段來繪製函數 $f(x)$的圖形

當$-2\le x<-1$ 時，$f(x)=[x]=-2$，

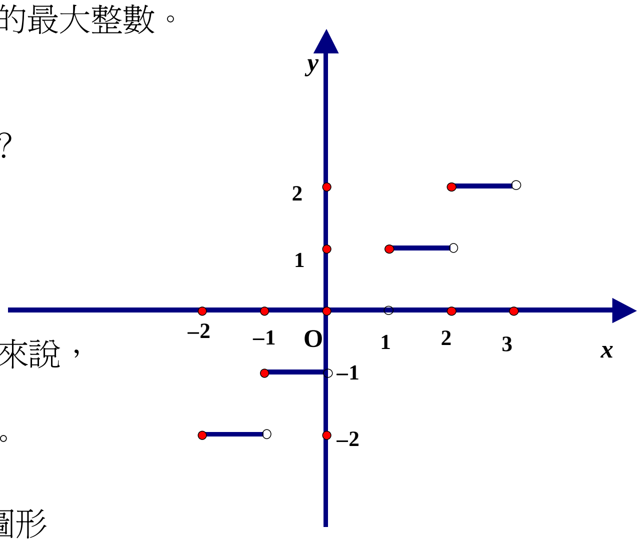
當$-1\le x<0$ 時，$f(x)=[x]=-1$

當 $0\le x<1$ 時，$f(x)=[x]=0$

當 $1\le x<2$ 時，$f(x)=[x]=1$

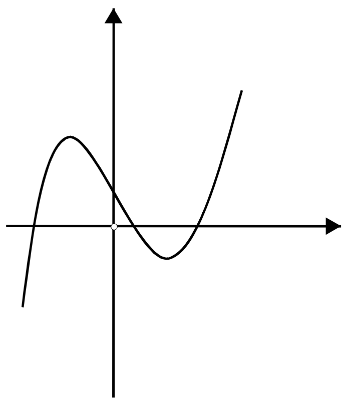
…………

因此可以繪出函數 f 的部分圖形。

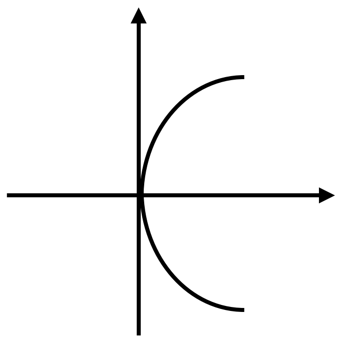


[例題5] 下列何者是 y 為 x 的函數圖形？

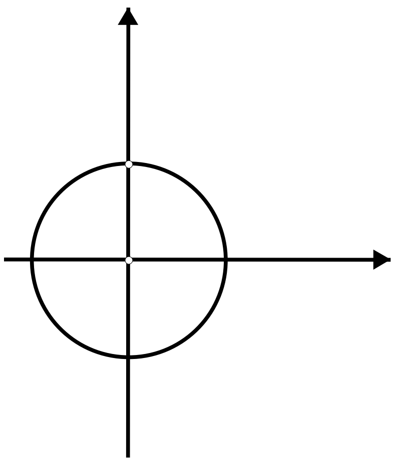
(A)



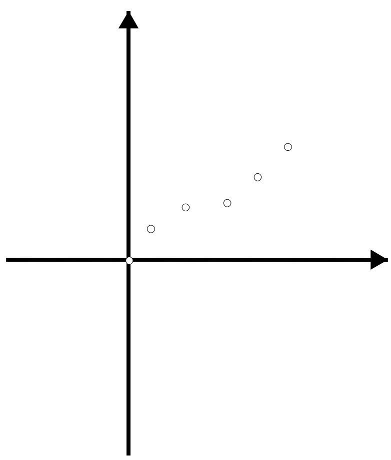
(B)



(C)



(D)

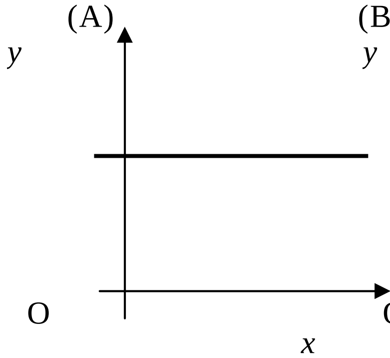


Ans：　AD

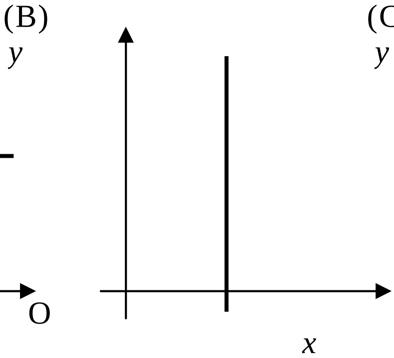
判斷函數圖形的方法：若是函數圖形，作鉛直線與圖形最多一個交點。

(練習7) 在直角坐標平面上，下列圖形何者表示 y 為 x 的函數 $y=f(x)$ 的部分圖形？

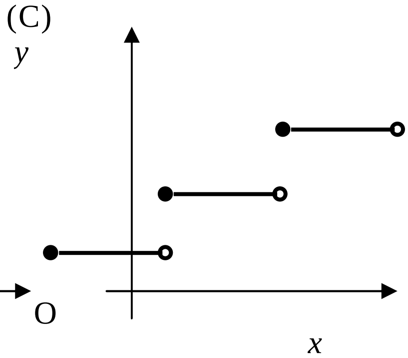
(A)



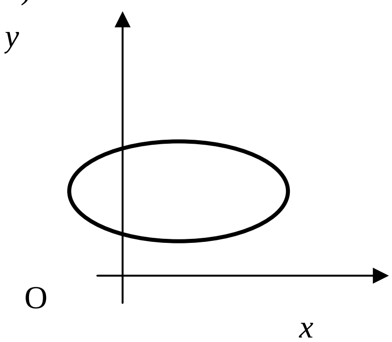
(B)



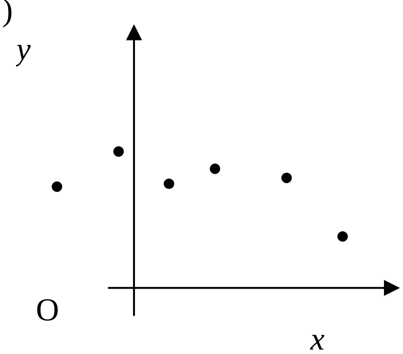
(C)



(D)



(E)



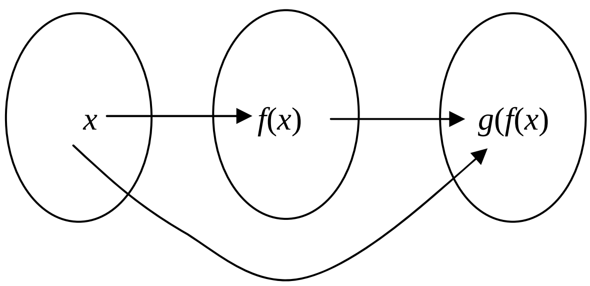
Ans：(A)(C)(E)

(丙)一些特殊函數

(1)映成函數：設 A、B 為兩個非空集合，f：A$\rightarrow$B 為一函數，若 f(A)=B，
則稱 f 為映成函數。

(2)1−1 函數：設 A、B 為兩個非空集合，f：A$\rightarrow$B 為一函數，對於任意 $x_1,x_2\in$A，
若 $x_1\neq x_2\Leftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$，則稱函數 f 為 1−1 函數。

(3)合成函數：給定兩個函數 f：A→B 與 g：B→C，我們定義 f 與 g 的合成函數
g。f：A→C 為 g。$f(x)=g(f(x))$。



(4)奇函數與偶函數：

設 A、B 爲兩個非空集合，f：A→B 爲一函數

若 $x\in$A，$f(-x)=f(x)$，則稱 f 爲偶函數。

若 $x\in$A，$f(-x)=-f(x)$，則稱 f 爲奇函數。

例如：$f(x)=x^2+4$ 爲偶函數，$f(x)=x^3-x$ 爲奇函數。

[例題6] 設 $f(x)=x^2+1,g(x)=x-3$,求(1)$f(g(-2))$=______，(2)$g(f(0))$=______，

Ans：(1)26　(2)−2

[例題7] 設 $f(x)=3x-6$，若 $g(3x+2)=f(2x+1)$，求 $g(x)$=？　Ans：$g(x)=2x-7$

[解法]：

設 $t=3x+2 \Leftrightarrow x=\dfrac{t-2}{3}$

$g(t)=f(2\cdot\dfrac{t-2}{3}+1)=f(\dfrac{2t-1}{3})=3(\dfrac{2t-1}{3})-6=2t-7$。

(練習8) 設函數 $f(x)=2x^2+3$，$g(y)=3y-4$，求函數 $f(g(y))$=__________。

Ans：$18y^2-48y+35$

(練習9) 設 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x>1) \\ 3-2x & (x\le 1)\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases} x^3 & (x>1) \\ 2x^2-x & (x\le 1)\end{cases}$，

則 $f(g(2))+g(f(0))$=？　　　　Ans：91

(練習10) 設 f：A→B 爲一個函數，定義 $g(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)+f(-x))$，$h(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)-f(-x))$

請證明：$g(x)$爲一個偶函數，$h(x)$爲一個奇函數。

綜合練習

(1) 函數 f：A→B，則下列何者真？

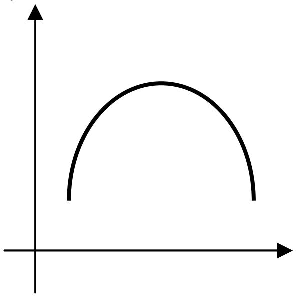
(A)f(A)⊂B　(B)若 $f(x)\in f$(A)，則 $x\in$A　(C)若 $x\in$A，則 $f(x)\in f$(A)∩B

(D)若 D⊂A，則 f(D)⊂B　(E)若 B⊂f(A)，則 f 爲映成函數。

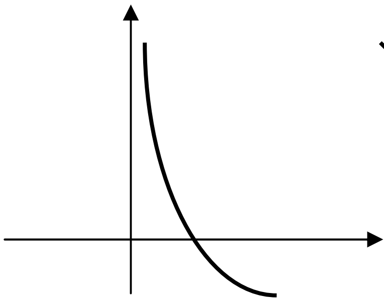
(2) 設集合 C={−1,0,1,2}，定義函數 f：C→Z 如右：$f(x)=\begin{cases} 2x & (x<0) \\ 1 & (x=0) \\ x+3 & (x>0) \end{cases}$，請寫出此函數的定義域、值域。

(3) 在 xy 平面上，有下列四個圖形，試問何者表示 y 爲 x 的圖形？

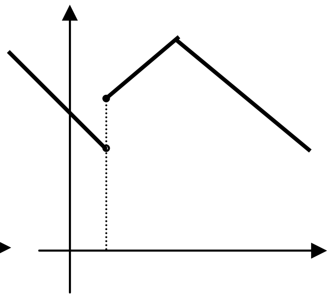
(A)



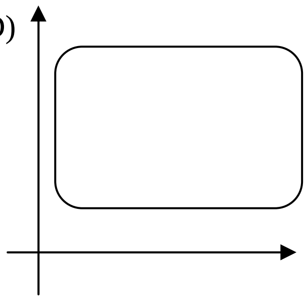
(B)



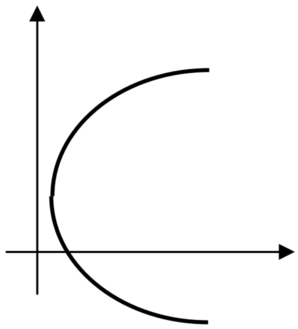
(C)



(D)



(E)



(4) 根據上一題的圖形，那些是 y 爲 x 的 1−1 函數？

(5) 函數 f 定義如右：$f(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0) \\ 3x & (x>0) \end{cases}$，請寫出此函數的定義域、值域。

(6) 求(a)$f(x)=\dfrac{2x-3}{3x+1}$　(b)$f(x)=\sqrt{-x^2+6x+16}$之定義域與值域？

(7) 試求下列函數的值域：

(a)$f(x)=2x-3$　(b)$f(x)=\sqrt{2x-3}$　(c)$f(x)=x^2-3x+5$　(d)$f(x)=\dfrac{4x-5}{3x+2}$

(8) 函數 $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{|x-1|}$，請問此函數的定義域爲何？並做其圖形。

(9) 設 $f(x)=\begin{cases} 2x+5，若x>9 \\ x^2-|x|，若-9\le x\le 9 \\ x-4，若x<-9 \end{cases}$，設 $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{|x|}，若x<-2 \\ \sqrt{x^2+7}，若-2<x\le 8 \\ |x+1|-12-x，若x>8 \end{cases}$

(a)$g(-5)$=________(b)$f\circ g(9)$=________(c)$g\circ f(-5)$=______________

(10) 已知一函數 $f(x)$有下列的性質：

$f(x+5)=f(x)$，$f(-x)=-f(x)$，$f(\frac{1}{3})=1$，試求(a)$f(\frac{16}{3})$ (b)$f(\frac{29}{3})$ (c)$f(11)+f(-6)$的值。

(11) $f(\frac{x+1}{2x-1})=x+7$，求 $f(\frac{2}{3})$=________。

(12) 設 $f(x)=\frac{2x-3}{3x+1}$，若 $g(\frac{2x-1}{x+1})=f(x+1)$，則 $g(x)$=_________。

(13) 根據記載：從地面向上升高，在 11 公里以下的高度，每升高 1 公里，氣溫降低 6°C：在 11 公里以上的高度，氣溫幾乎不變。

(a)假設地面溫度為 20°C，上空 x 公里處的大氣溫度是 y°C，試寫出函數關係式 $y=f(x)$。

(b)離開地面 5500 公尺的高空，氣溫是多少度？

綜合練習解答

(1) (A)(B)(C)(D)(E)

(2) 定義域=C，值域={−2,1,4,5}

(3) (A)(B)(C)

(4) (B)

(5) 定義域=R，值域=$\{y|y\ge 0\}$

(6) (a)定義域=$\{x|x\neq -\frac{1}{3}\}$值域=$\{y|y\neq\frac{2}{3}\}$

(b)定義域=$\{x|-2\le x\le 8\}$值域=$\{y|0\le y\le 5\}$

(7) (a)R (b)$\{y|y\ge 0\}$ (c)$\{y|y\ge\frac{11}{4}\}$ (d)$R-\{\frac{4}{3}\}$

(8) $\{x\in R|x\neq 1\}$

(9) (a)$\frac{1}{5}$ (b)−15 (c)−11

(10) (a)1 (b)−1 (c)0

(11) 12

(12) $g(x)=\frac{3x}{11-x}$

(13) (a)$y=f(x)=\begin{cases} 20-6x & (0\le x\le 11) \\ -46 & (x\ge 11) \end{cases}$ (b)零下 13°C