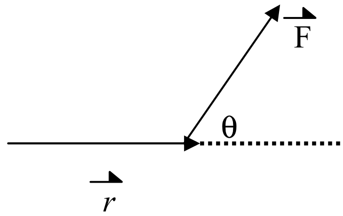
第三十單元 外積、體積與三階行列式

(甲)空間向量的外積

在物理學中，設力$\overrightarrow{F}$作用在位移$\overrightarrow{r}$的終點上，它的力矩定義為一個向量$\overrightarrow{M}$，其大小為$|\overrightarrow{F}||\overrightarrow{r}|\sin\theta$，方向垂直$\overrightarrow{F}$與$\overrightarrow{r}$，且$\overrightarrow{M}$與$\overrightarrow{r}$、$\overrightarrow{F}$構成右手系，符號寫成：

$\overrightarrow{M}=\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{F}$這樣的概念抽象化之後，形成「**外積**」的定義。



(1)外積的定義：

設空間中兩向量$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的外積為一個向量，符號記為$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$，

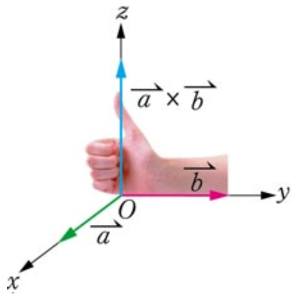
設空間中兩向量$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的外積為一個**向量**，記為$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$，

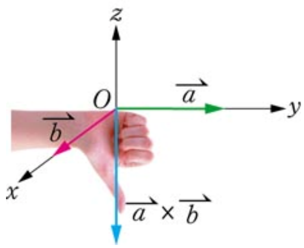
當$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$為非零向量，且不平行：

$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$的**大小**為$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta$，其中θ為$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的夾角；

$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$的**方向**定法如下：

伸出右手，使得四指與大拇指垂直，四指先指向$\overrightarrow{a}$的方向，然後沿著握拳的方向，指向$\overrightarrow{b}$的方向，那麼大拇指所指的方向就是$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$的方向。





根據這樣的作法，可以得到$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{b}$。

當$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$平行：定義$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=0$

結論：
(1°) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$
(2°) $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{a}\times\vec{b}$ 成右手則的關係。
(3°) $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ ， $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$

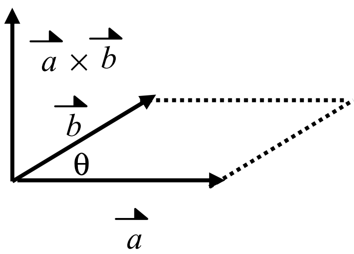
(2)外積的性質：

設 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 為空間中的三個向量，

(a) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ 。

(b) $(r\vec{a})\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})$，$r$ 為任意實數。

(c) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$ [證明請參閱補充教材]



(d)若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 是不平行的向量，

則 $|\vec{a}\times\vec{b}|$=由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所展成的平行四邊形的面積。

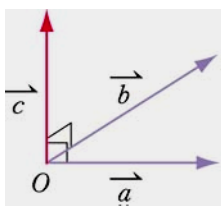
(e)若 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$ ，則 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ 。

(3)外積的坐標表示：

設 $\vec{a}=(a_1，a_2，a_3)$， $\vec{b}=(b_1，b_2，b_3)$ 是空間中**兩個不平行的非零向量**，

若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 有共同的始點 O，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 可決定一個平面 E。過 O 點恰有一條直線垂直 E，這條垂線的方向向量都會垂直 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，所以 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 會有**公垂向量**。

因為 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ ， $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$ ，所以 $\vec{a}\times\vec{b}$ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的公垂向量，因此我們先求 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 非零向量的公垂向量 $\vec{c}=(x，y，z)$。



由 $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ 與 $\vec{c}\cdot\vec{b}=0$ 可得

$\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z=0 \\ b_1x+b_2y+b_3z=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} a_1x+a_2y=-a_3z \\ b_1x+b_2y=-b_3z \end{cases}$。

因 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為**不平行的非零向量**，不妨令 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，由克拉瑪公式得

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -a_3z & a_2 \\ -b_3z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}z，y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & -a_3z \\ b_1 & -b_3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}z。$$

於是 $x:y:z=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$。

令 $x=\lambda\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$，$y=\lambda\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}$，$z=\lambda\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$，其中 λ 為實數，且 $\lambda\neq 0$。

故 $\vec{c}=(\lambda\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\lambda\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\lambda\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})$。

反之，若 $\vec{c}=(\lambda\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\lambda\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\lambda\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})$，則 $\vec{c}\perp\vec{a}$，$\vec{c}\perp\vec{b}$。

由上面的討論，我們知道空間中兩個向量的公垂向量有無限多個，不過它們彼此之間是互相平行的。

根據前面的討論，$\vec{a}\times\vec{b}$ 會是$(\lambda\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\lambda\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\lambda\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})$，其中λ等於某個不為 0 的實數，再由$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$、$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{a}\times\vec{b}$ 成右手則的關係。可以知道選取λ=1，可以滿足這些要求。即

$\vec{a}=(a_1，a_2，a_3)$，$\vec{b}=(b_1，b_2，b_3)$，$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})$。

> 空間向量外積的坐標表示法：
> 設 $\vec{a}=(a_1，a_2，a_3)$，$\vec{b}=(b_1，b_2，b_3)$ 是空間向量，
> 則向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的外積 $\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})$

[另一種觀點]：

設在空間坐標上取 $\vec{\boldsymbol{i}}=(1,0,0)$、$\vec{\boldsymbol{j}}=(0,1,0)$、$\vec{\boldsymbol{k}}=(0,0,1)$，

空間中的向量 $\vec{v}=(a,b,c)=a\vec{\boldsymbol{i}}+b\vec{\boldsymbol{j}}+c\vec{\boldsymbol{k}}$，

且根據外積的定義，可得 $\vec{\boldsymbol{i}}\times\vec{\boldsymbol{j}}=\vec{\boldsymbol{k}}$、$\vec{\boldsymbol{j}}\times\vec{\boldsymbol{k}}=\vec{\boldsymbol{i}}$、$\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{j}}=\vec{\boldsymbol{i}}$

設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，

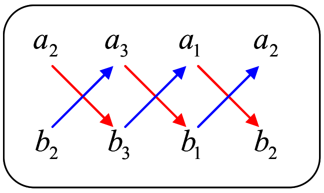
$\vec{a}=a_1\vec{\boldsymbol{i}}+a_2\vec{\boldsymbol{j}}+a_3\vec{\boldsymbol{k}}$，$\vec{b}=b_1\vec{\boldsymbol{i}}+b_2\vec{\boldsymbol{j}}+b_3\vec{\boldsymbol{k}}$，

根據 $\vec{\boldsymbol{i}}\times\vec{\boldsymbol{j}}=\vec{\boldsymbol{k}}$、$\vec{\boldsymbol{j}}\times\vec{\boldsymbol{k}}=\vec{\boldsymbol{i}}$、$\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{j}}=\vec{\boldsymbol{i}}$，可得

$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{\boldsymbol{i}}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{\boldsymbol{j}}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{\boldsymbol{k}}$，因此可以定義 $\vec{a}\times\vec{b}$ 如下：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)。\left(\text{或}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\right)$$

快速算法：



[例題1] 設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$為空間中兩個不平行的向量，請利用三角形的面積公式計算出由 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所展成的平行四邊形面積為 $\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$

(練習1) 設$\overrightarrow{OA}=(-1,2,3)$、$\overrightarrow{OB}=(4,6,-1)(1)\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=$？ (2)$\Delta AOB$ 的面積=？

Ans：(1) $(-20,11,-14)$ (2)$\frac{1}{2}\sqrt{717}$

(練習2) 請利用坐標化的結果證明：

(1)$(r\vec{a})\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})$，$r$ 為任意實數。

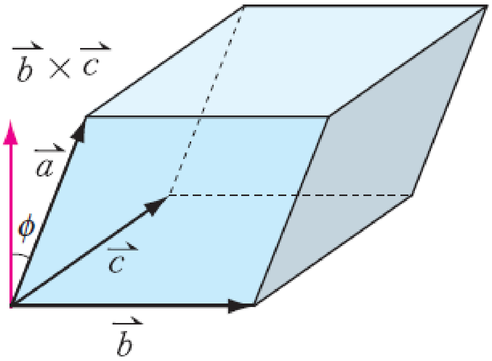
(2) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$

(乙)平行六面體的體積

(1)平行六面體的引入：

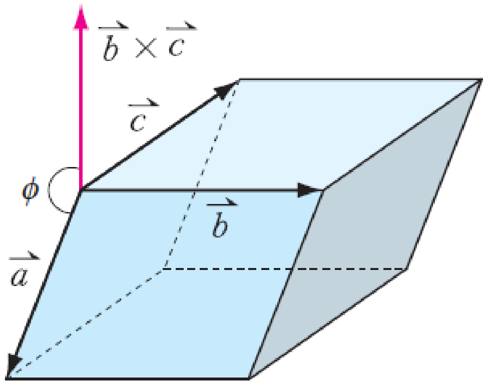
由 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$三向量所展成的**平行六面體**是指由

$\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 所展成的平行四邊形區域，沿 $\vec{a}$ 移動，而形成的立體，這個立體有六個面，每個面都是平行四邊形。



(a) ϕ 為銳角

平行六面體一



(b) ϕ 為鈍角

平行六面體二

考慮上述兩種平行六面體，平行六面體一中 $\vec{b}\times\vec{c}$ 與 $\vec{a}$ 的夾角φ為**銳角**，

而平行六面體二中 $\vec{b}\times\vec{c}$ 與 $\vec{a}$ 的夾角φ為**鈍角**。

(2)計算平行六面體的體積：

由 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$三向量所展成的平行六面體的體積

=(由 $\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 所展成的平行四邊形面積)×高

由 $\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 所展成的平行四邊形面積$=|\vec{b}||\vec{c}|\sin\alpha=|\vec{b}\times\vec{c}|$

高 $=\vec{a}$ 在$(\vec{b}\times\vec{c})$方向上的投影長度$=|\vec{a}|\cos\phi$的絕對值。

平行六面體的體積

$=|\vec{b}\times\vec{c}||\vec{a}||\cos\phi|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|$，φ為 $\vec{b}\times\vec{c}$ 與 $\vec{a}$ 的夾角

$=|\,(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix})\cdot(a_1,a_2,a_3)\,|$

$=|\ a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\ |$

$=|\ a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\ |$

$=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}\,|$。

同理平行六面體的體積$=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}\,|=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|$

上面的計算中，$(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$.....(*)

在平行六面體一中，(*)是正數(ϕ為銳角)；在平行六面體二中，(*)是負數(ϕ為鈍角)

(練習3) 試求由$\vec{a}=(0,3,2)$, $\vec{b}=(2,2,4)$, $\vec{c}=(3,1,-1)$為相鄰三邊所展成的平行六面體體積。　Ans：34

(練習4) 設由$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$為相鄰三邊所展成的平行六面體體積為 V，試問
(1)由$2\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$為相鄰三邊所展成的平行六面體體積為多少？
(2)由$\vec{a}$、$\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{c}$為相鄰三邊所展成的平行六面體體積為多少？
Ans：(1)2V　(2)V

(丙)三階行列式

考慮三元一次方程組：

考慮三元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1\cdots(1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\cdots(2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\cdots(3) \end{cases}$，其中 x,y,z 為未知數，

使用代入消去法解之：

由(1) $\Rightarrow a_1x+b_1y=-c_1z+d_1$，由(2) $\Rightarrow a_2x+b_2y=-c_2z+d_2$

由二元一次方程組之求解可知

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} -c_1z+d_1 & b_1 \\ -c_2z+d_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1z+d_1 \\ a_2 & -c_2z+d_2 \end{vmatrix}$

整理可得

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}$……………..(4)

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}$……………..(5)

將(3)× $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$得

$a_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x + b_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z = d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$………(6)

(4)(5)代入(6)，消去 x,y 兩個未知數

$a_3\left(-\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) + b_3\left(\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}\right) + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z = d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

整理之後得

$\left(a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) z = a_3\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$……(**)

(1)定義三階行列式：

根據前面的討論，我們可以得到一個模式，在(*)與(**)兩式中，都出現了三個數分別與三個二階行列相乘相加，這些值分別與平行六面體體積與三元一次方程組的解有關。數學上我們將這樣的模式定義成**三階行列式**。

考慮九個數 $a_{ij}(1\le i\le 3, 1\le j\le 3)$，

設 $\vec{p}=(a_{11},a_{12},a_{13})$、$\vec{q}=(a_{21},a_{22},a_{23})$、$\vec{r}=(a_{31},a_{32},a_{33})$為空間中三個向量，我們定義三階行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$為 $\vec{p}\cdot(\vec{q}\times\vec{r})$。

我們稱三階行列式中(a_{i1},a_{i2},a_{i3})為第 i 列$(1\le i\le 3)$，$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \end{pmatrix}$為第 k 行$(1\le k\le 3)$

[討論]：

(1)利用空間坐標向量來內積與外積的定義，

證明：$\vec{p}\cdot(\vec{q}\times\vec{r})=\vec{q}\cdot(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}\cdot(\vec{p}\times\vec{q})$

(2)解釋上式的幾何意義：

根據前面的討論，我們進一步將三階行列式的定義重新整理如下：

定義一：(降階展開)

三階行列式可根據某一行或某一列降成二階行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ (就第一列展開) [$\vec{p}\cdot(\vec{q}\times\vec{r})$]

$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ (就第一行展開)

$=-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ (就第二列展開)[$\vec{q}\cdot(\vec{r}\times\vec{p})$]

$=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{k+i}a_{ki}\Delta_{ki}$ ，(k=1,2,3) Δ_{ki}為去掉 a_{ki}所屬的行、列所得到的二階行列式。

$=\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+i}a_{ki}\Delta_{ki}$ ，(i=1,2,3) Δ_{ki} 為去掉 a_{ki} 所屬的行、列所得到的二階行列式。

定義二：(直接展開)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32})$$

例如：計算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$的值。

(2)三階行列式的性質：利用降階展開可以得到一些性質

(a)**行列互換，其值不變。**

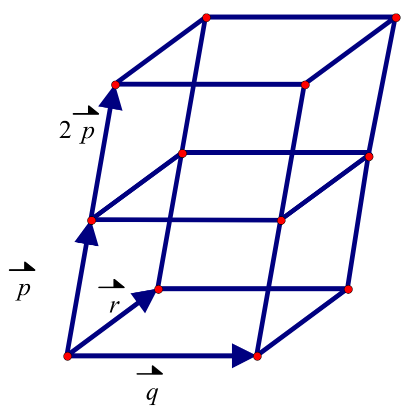
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(b)**每一列(行)可提公因數。**

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}。$$

[說明]：

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=ka_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-kb_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+kc_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$



$$=k(a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix})=k\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}。$$

[幾何意義]：設 $\overrightarrow{p}=(a_1,b_1,c_1)$、$\overrightarrow{q}=(a_2,b_2,c_2)$、$\overrightarrow{r}=(a_3,b_3,c_3)$為空間中三個向量，

$$\begin{vmatrix}ka_1 & kb_1 & kc_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=k\overrightarrow{p}\cdot(\overrightarrow{q}\times\overrightarrow{r})=k[\overrightarrow{p}\cdot(\overrightarrow{q}\times\overrightarrow{r})]$$

(c)兩列(行)互換，其值變號。

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_3 & b_3 & c_3\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_1 & b_1 & c_1\end{vmatrix}\text{(第一三列互調)}$$

$$=-\begin{vmatrix}b_1 & a_1 & c_1\\ b_2 & a_2 & c_2\\ b_3 & a_3 & c_3\end{vmatrix}\text{(第一二行互調)}$$

[說明]：

$$\begin{vmatrix}a_3 & b_3 & c_3\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_1 & b_1 & c_1\end{vmatrix}=-a_2\begin{vmatrix}b_3 & c_3\\ b_1 & c_1\end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix}a_3 & c_3\\ a_1 & c_1\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

(d)兩列(行)成比，其值為 0。

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ ka_1 & kb_1 & kc_1\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0$$

[說明]：

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ ka_1 & kb_1 & kc_1\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=k\cdot 0=0\text{[按第三列展開]}$$

[幾何意義]：設 $\vec{p}=(a_1,b_1,c_1)$、$\vec{q}=(a_2,b_2,c_2)$、$\vec{r}=(a_3,b_3,c_3)$為空間中三個向量，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\vec{p}\cdot(k\vec{p}\times\vec{r})=\vec{r}\cdot(\vec{p}\times k\vec{p})=0$$

(e)**一列(行)乘以一數加至另一列(行)，其值不變。**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

[說明]：按第三列展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & c_2+kc_1 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \end{vmatrix}$$

$$=a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

[幾何意義]：設 $\vec{p}=(a_1,b_1,c_1)$、$\vec{q}=(a_2,b_2,c_2)$、$\vec{r}=(a_3,b_3,c_3)$為空間中三個向量，

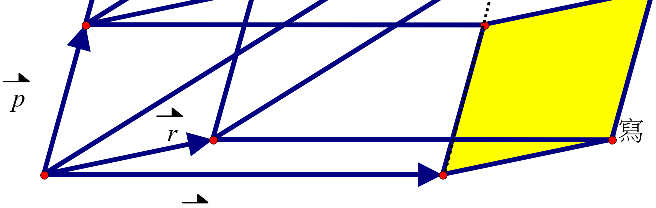
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{p}\cdot[(\vec{q}+k\vec{p})\times\vec{r}]$$

$$=\vec{p}\cdot[\vec{q}\times\vec{r}+k\vec{p}\times\vec{r}]$$

$$=\vec{p}\cdot(\vec{q}\times\vec{r})+\vec{p}\cdot(k\vec{p}\times\vec{r})$$

$$=\vec{p}\cdot(\vec{q}\times\vec{r})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



（練習5） 空間三向量 $\bar{u}=(u_1,u_2,u_3)$，$\bar{v}=(v_1,v_2,v_3)$，$\bar{w}=(w_1,w_2,w_3)$所張成的平行四面體的體積為 5，則由 $2\bar{u}+3\bar{v},\bar{v},2\bar{w}$ 所張成的平行六面體的體積為？
Ans：20

(3)行列式計算時之注意事項：

(a) 降階求值：
利用(5)(e)之性質，將行列式化至某一行、列，的各項中，出現至多一個不為 0，再利用該行、列降階求值，因為其他二項皆為 0，因此只需計算一個二階行列式即可。
(b)觀察各行、列是否有公因數(式)，若有，提公因數(式)，以簡化數字。
(c)觀察各行、列是否有成等差，若有可利用(5)(e)之性質，將行列式化某一行、列會成比例。
(d)觀察各行、列，逐項相加是否相等，若相等可利用(5)(e)之性質，將其加到某一項，再提公因數，降階求值。

[例題2] 計算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 33 \\ -2 & 0 & 8 \\ 14 & -3 & -92 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 20 & -10 & 15 \\ 15 & 21 & -3 \\ 28 & -14 & 21 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 11 & 21 & 31 \\ 21 & 31 & 11 \\ 31 & 11 & 21 \end{vmatrix}$

Ans：(1)78 (2)0 (3)0 (4)–18900

[例題3] (1)證明：$\begin{vmatrix} a+a' & d & g \\ b+b' & e & h \\ c+c' & f & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & d & g \\ b' & e & h \\ c' & f & i \end{vmatrix}$

(2) 設$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=5$，則$\begin{vmatrix} a_2+a_3 & 3a_1+a_2 & a_1-4a_3 \\ b_2+b_3 & 3b_1+b_2 & b_1-4b_3 \\ c_2+c_3 & 3c_1+c_2 & c_1-4c_3 \end{vmatrix}=$？Ans：55

[例題4] 因式分解下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$ (2)$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$

Ans：(1)$2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ (2)$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(練習6) 計算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 110 & 120 & 260 \\ 22 & 4 & 13 \\ 33 & 8 & 39 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1999 & 2000 & 2001 \\ 88 & 89 & 90 \\ 10 & 20 & 40 \end{vmatrix}$

Ans：(1)−34320 (2)48 (3)0 (4)19110

(練習7) 證明：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$ [Vandermonde 行列式]

(練習8) 設$\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}=1$，求$\begin{vmatrix} 2x+3a & 2y+3b & 2z+3c \\ p-3x & q-3y & r-3z \\ a-2p & b-2q & c-2r \end{vmatrix}=$？ Ans：−20

(練習9) 計算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

Ans：(1)0 (2)$2(a+b+c)^3$

(練習10) 解方程式：$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0$ Ans：$x=5$，−3

[例題5] 設 L_1：$a_1x+b_1y=c_1$、L_2：$a_2x+b_2y=c_2$、L_3：$a_3x+b_3y=c_3$ 表三相異直線，

則 L_1、L_2、L_3 相交於一點⇒ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$。

[例題6] (1)設 P(x,y,z)為平面 ABC 上的任一點，其中 A(a_1,a_2,a_3)、B(b_1,b_2,b_3)、C(c_1,c_2,c_3)

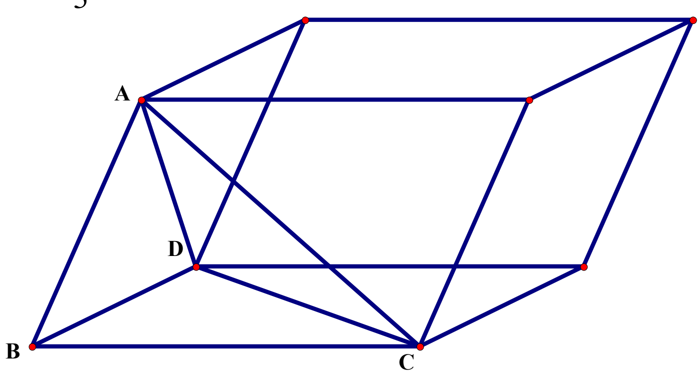
試證明：$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0$

(2) 空間中四點 A(1,1,1)、B(1,2,t)、C(3,4,5)、D(4,5,t)，若 A,B,C,D 四點共面，求 t=？ Ans：t=5

[例題7] 空間四點 A(1,−1,0)，B(0,1,0)，C(2,3,4)，D(−1,1,3)，求

(1)$\overline{AB},\overline{AC}$,$\overline{AD}$為相鄰三邊的平行六面體體積(2)四面體 ABCD 的體積

(3)ΔABC 的面積　Ans：(1)26　(2)$\frac{13}{3}$　(3)$\sqrt{29}$



(練習11) 設ΔABC之三頂點為 $A(-1,2)$、$B(1,4)$、$C(4,k)$，若ΔABC的面積為 3，則 $k=$？ Ans： 10 或 4

(練習12) 三直線 $kx+y=3$，$3x+2ky=7$，$9kx-4y=1$ 相交於一點，求 $k=$？
Ans：$k=1$ 或$\frac{3}{4}$

(練習13) 設坐標空間中四點 $A(2,0,-1)$、$B(3,1,4)$、$C(-2,5,2)$、$D(1,4,-3)$
(1)求ΔABC的面積。 (2)求$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$所決定的平行六面體體積。
(3)四面體 ABCD 的體積。Ans：(1)$\frac{1}{2}\sqrt{1094}$ (2)88 (3)$\frac{44}{3}$

綜合練習

(1) 試求下列各小題中兩向量的外積$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$

(a) $\overrightarrow{u}=(2,1,-3)$、$\overrightarrow{v}=(3,2,-4)$ (b) $\overrightarrow{u}=(0,-4,1)$、$\overrightarrow{v}=(-4,0,1)$

(2) 已知$\overrightarrow{u}=(-3,2,0)$、$\overrightarrow{v}=(0,-2,1)$，若$\overrightarrow{w}$為$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$的公垂向量，

且$|\overrightarrow{w}|=7$，試求$\overrightarrow{w}$。

(3) 考慮向量$\overrightarrow{u}=(a,b,0)$、$\overrightarrow{v}=(c,d,1)$，其中$a^2+b^2=c^2+d^2=1$。請選出正確選項。

(1) 向量$\overrightarrow{v}$與z軸正向的夾角恆為定值(與c,d之值無關)

(2) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$的最大值為$\sqrt{2}$

(3) $\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$夾角的最大值為135°

(4) $ad-bc$的值可能為$\frac{5}{4}$

(5) $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|$的最大值為$\sqrt{2}$。 (2013 指定甲)

(4) 下列選項中的行列式，那些與行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$相等？

(A)$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ (B)$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (C)$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(D)$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1\cdot c_1 & b_2\cdot c_2 & b_3\cdot c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (E)$\begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}$ (88 學科)

(5) 將行列式$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$

展開得到多項式$f(x)$。下列有關$f(x)$的敘述，何者為真？

(A) $f(x)$是一個三次多項式(B) $f(1)=0$

(C) $f(2)=0$ (D) $f(-3)=0$ (E) $f(5)=0$ (89 學科)

(6) 計算下列各行列式值：

(a) $\begin{vmatrix} 43 & -26 & 34 \\ 71 & 52 & -68 \\ 85 & 91 & -119 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 6 & -7 \\ -12 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 20 & 25 & 30 \\ -12 & 18 & 36 \\ 16 & -7 & -24 \end{vmatrix}$

(7) 試證明下列各小題：

(a) $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & a+c & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}=4abc$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$

(c) $\begin{vmatrix} a & bc & b+c \\ b & ca & c+a \\ c & ab & a+b \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(8) 設 a,b,c 為方程式 $2x^3-5x^2+1=0$ 之三根，則$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=$？

(9) 若$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=7$，求下列各小題的值：

(a) $\begin{vmatrix} a_1 & 3a_2 & 2a_3 \\ b_1 & 3b_2 & 2b_3 \\ c_1 & 3c_2 & 2c_3 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 2a_1-3b_1 \\ a_2 & b_2 & 2a_2-3b_2 \\ a_3 & b_3 & 2a_3-3b_3 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & 3a_2-5a_3 & a_3-2a_1 \\ b_1+b_2 & 3b_2-5b_3 & b_3-2b_1 \\ c_1+c_2 & 3c_2-5c_3 & c_3-2c_1 \end{vmatrix}$

(10) 設 A(−1,2,1),B(2,−1,2),C(1,2,3),D(−t−1,t,1)為空間中不共面四點，

(a)試以 t 表出由$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$所決定的平行六面體體積。

(b)設 ABCD 決定的四面體體積為 10，求 t。

(11) 空間中三向量$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$，$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$，$\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$所張平行六面體體積為$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$的絕對值。今已知$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$三向量所張平行六面體體積為 5，求$(2\vec{a}+3\vec{b}),\vec{b},\vec{c}$三向量所張平行六面體體積。

(12) 坐標平面上，相異三點 A(a_1,a_2)、B(b_1,b_2)、C(c_1,c_2)，試證明若 A、B、C 三點共線，則$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}=0$。

(13) 設$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$為非零向量，且$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$，試證明：$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$為兩兩互相垂直的單位向量。

進階問題

(14) 設$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d}$，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}=\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{d}$，求證：$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{d}$與$\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$平行。

(15) 設$\theta=\dfrac{\pi}{8}$，請計算$\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ \cos\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=$？

(16) 設坐標平面上三點 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P_3(x_3,y_3)$，其中 x_1、x_2、x_3 互異

(a)請證明：$\begin{vmatrix} {x_1}^2 & x_1 & 1 \\ {x_2}^2 & x_2 & 1 \\ {x_3}^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$。

(b)恰存在一組實數 a,b,c，使得函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形通過 P_1、P_2、P_3 三點。

(17) 計算$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ g(x_1) & g(x_2) & g(x_3) \end{vmatrix}$，其中 $f(x)=a_0x+a_1$，$g(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$。

(18) 化簡$\begin{vmatrix} a^2+1 & ba & ca \\ ab & b^2+1 & cb \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}=$____。

綜合練習解答

(1)　(a) $(2,-1,1)$　(b)$(-4,-4,-16)$

(2)　$(2,3,6)$或$(-2,-3,-6)$

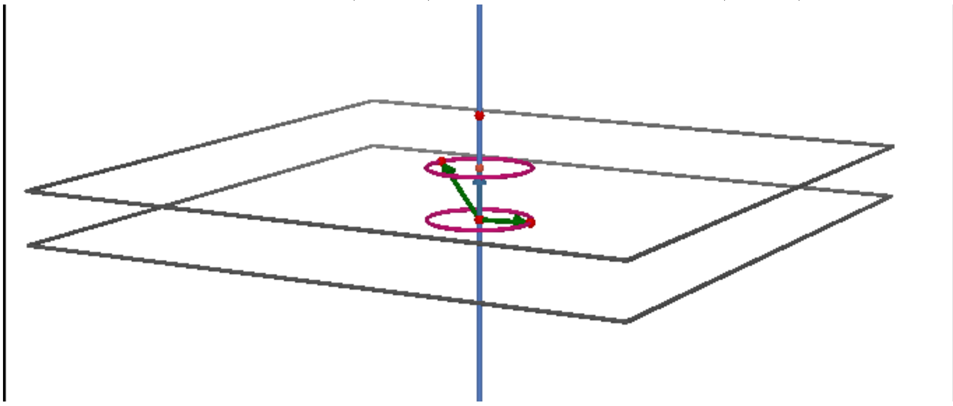
(3)　(1)(3)(5)

[解法]：

$\because$ $\overrightarrow{u}=(a,b,0)$、$\overrightarrow{v}=(c,d,1)$，且 $a^2+b^2=c^2+d^2=1$

$\therefore$ $\overrightarrow{u}$ 可以視為起點為$(0,0,0)$，終點在 $z=0$ 上以$(0,0,0)$為圓心的圓上的點

$\overrightarrow{v}$ 可以視為起點為$(0,0,0)$，終點在 $z=1$ 上以$(0,0,1)$為圓心的圓上的點



(1) 向量 $\overrightarrow{v}$ 與 z 軸正向的夾角恆為 45°(與 c,d 之值無關)

(也可以根據 $\overrightarrow{v}\cdot(0,0,1)=1$ 來得知)

(2) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\leq|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|=\sqrt{2}$，但是 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 並不會平行，因此等號不成立，故(2)錯誤。

$\because$ $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=ac+bd$，

根據科西不等式$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$，$\therefore -1\leq ac+bd\leq 1$，

且當 $\overrightarrow{v}$ 在 $z=0$ 平面上投影向量 $\overrightarrow{v'}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 同向時，等號會成立。故最大值 $=1$

(3)設 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$ 夾角為θ

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=ac+bd=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta$

$\because$ $-1\leq ac+bd\leq 1$，且 $ac+bd=-1$ 會成立，$\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\leq\cos\theta\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 夾角的最大值為 135°

(4)設 $\overrightarrow{v}$ 在 $z=0$ 平面上投影向量 $\overrightarrow{v'}$

$|ad-bc|=$ $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v'}$ 所張成的平行四邊形面積$\leq|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v'}|=1$ 故(4)錯誤

(5) $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\alpha$

當α=90°時,等號會成立 ($\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$ 在 $z=0$ 平面上投影向量 $\overrightarrow{v'}$)，(5)正確。

(4)　(B)(C)

(5)　(A)(B)(C)(D)

(6) (a) 0 (b)61 (c)−2520

(7) 略

(8) $\dfrac{-125}{8}$

(9) (a)42 (b)0 (c)91

(10) (a)|2t+8| (b)26 或−34

(11) 10

(12) [提示：ΔABC=0]

(13) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})=0$，同理$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0$，令$|\overrightarrow{a}|=x,|\overrightarrow{b}|=y,|\overrightarrow{c}|=z$ $\because\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$，所以$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin 90°=|\overrightarrow{c}|\Rightarrow xy=z$，同理，$yz=x$，$zx=y$，可得 $x=y=z=1$。

(14) 證明：$(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})=0$

(15) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

(16) [提示：(a) $\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}=-(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$。 (b)若函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形通過 P_1、P_2、P_3 三點 $\Rightarrow\begin{cases} y_1=ax_1^2+bx_1+c \\ y_2=ax_2^2+bx_2+c \\ y_3=ax_3^2+bx_3+c \end{cases}$ 即(a,b,c)為方程組 $\begin{cases} x_1^2u+x_1v+1\cdot w=y_1 \\ x_2^2u+x_2v+1\cdot w=y_2 \\ x_3^2u+x_3v+1\cdot w=y_3 \end{cases}$ 的解，因為$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ 此方程組恰有一解。]

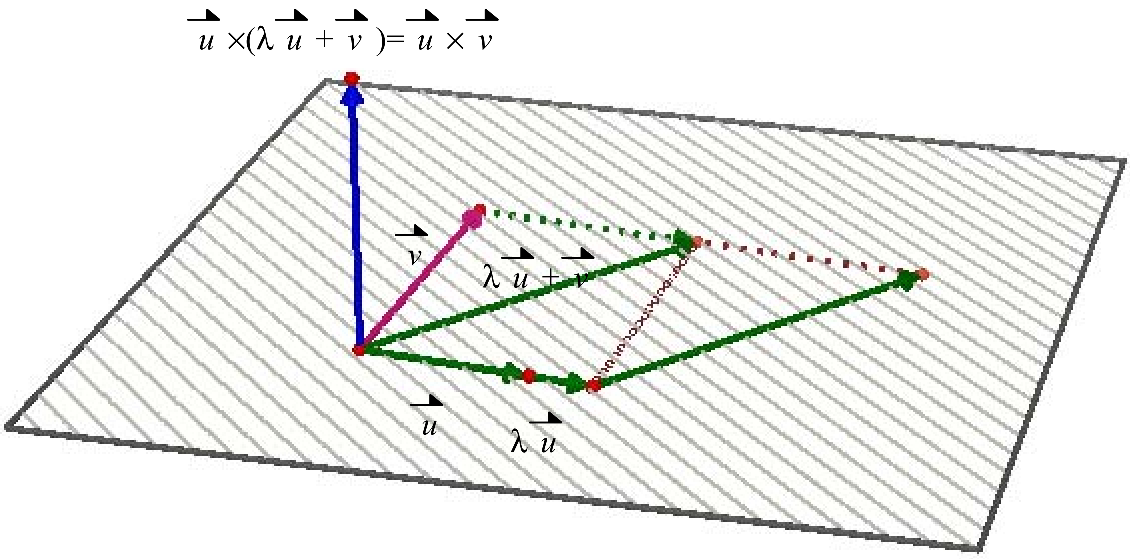
(17) $a_0b_0(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)$

(18) $a^2+b^2+c^2+1$

補充教材

外積對向量加法的分配律：$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

(1)先證明：對於任意向量$\vec{u}$、$\vec{v}$和實數λ，$\vec{u}\times(\lambda\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\times\vec{v}$



設$\lambda\neq0$，因為由$\vec{u}$、$\lambda\vec{u}+\vec{v}$所張成的平行四邊形面積=$\vec{u}$、$\vec{v}$所張成的平行四邊形面積。即$|\vec{u}\times(\lambda\vec{u}+\vec{v})|=|\vec{u}\times\vec{v}|$，

設從$\vec{u}$逆時針轉到$\vec{v}$的角度為θ，從$\vec{u}$逆時針轉到$\lambda\vec{u}+\vec{v}$的角度為α

$\because$ $0°<\theta-\alpha<180°$或是$0°<\alpha-\theta<180°$
所以當$0°<\theta<180°$時，$0°<\alpha<180°$；
當$180°<\theta<360°$時，$180°<\alpha<360°$

因此$\vec{u}\times\vec{v}$與$\vec{u}\times(\lambda\vec{u}+\vec{v})$方向相同。

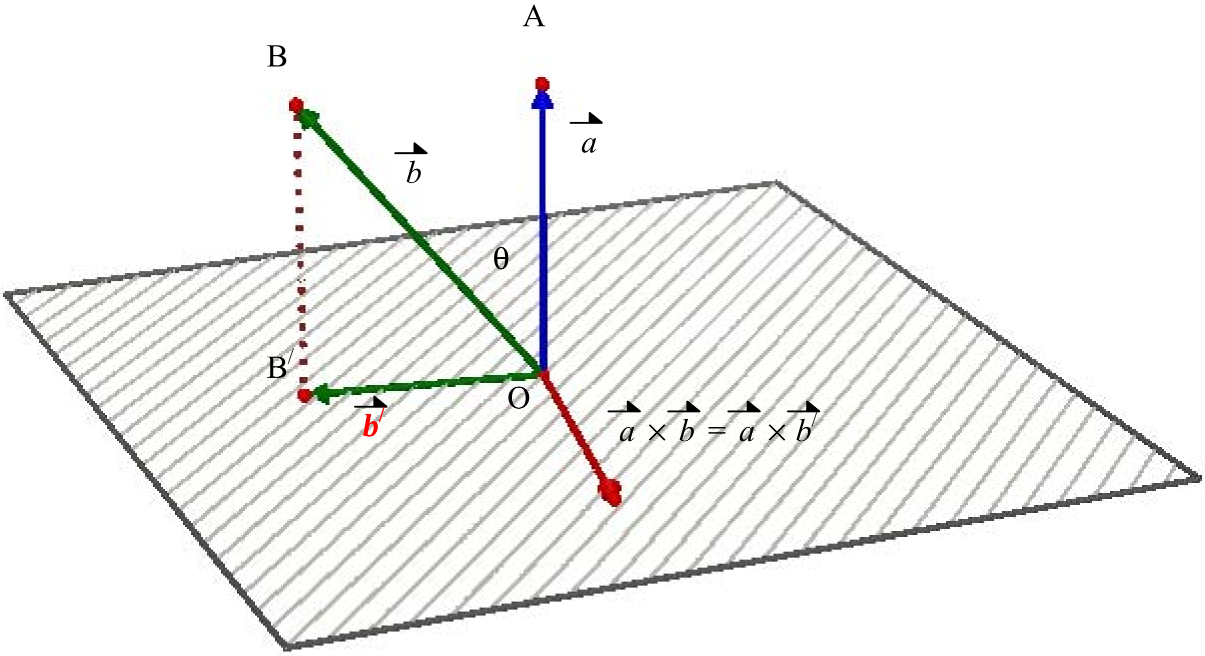
(2)設 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，E 為過 O 點且與直線 OA 垂直的平面，

$\vec{b}$ 在 E 上的正射影 $\vec{b'}=\overrightarrow{OB'}$，如下圖，

因為$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|\vec{a}||\vec{b'}|\sin 90°=|\vec{b'}||\vec{a}|$，

$\vec{a}\times\vec{b'}$ 與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向相同都是平面 E 上將 $\vec{b'}$ 逆時針轉 90°的方向。

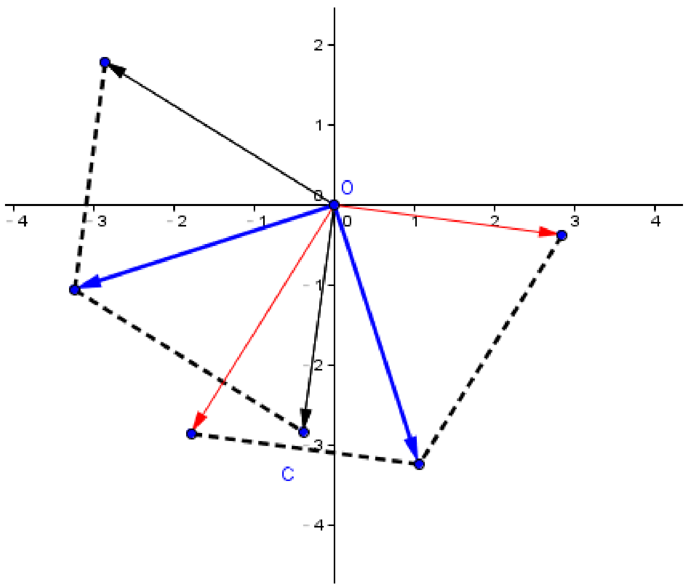
所以 $\vec{a}\times\vec{b'}=\vec{a}\times\vec{b}$ 。



同理對於 $\vec{c}$ 而言，設 $\vec{c}$ 在 E 上的正射影 $\vec{c'}$ ，

也有 $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c'}$ ，且方向為平面 E 上將

$\vec{c'}$ 逆時針轉 90°的方向，大小為$|\vec{c'}||\vec{a}|$。



根據下圖，

$\vec{b'}\xrightarrow{R(O,90°)}\vec{a}\times\vec{b'}$ ，

$\vec{c'}\xrightarrow{R(O,90°)}\vec{a}\times\vec{c'}$

故 $\overrightarrow{b'}+\overrightarrow{c'} \xrightarrow{R(O,90^\circ)} \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b'}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c'}=\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b'}+\overrightarrow{c'})$

即 $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b'}+\overrightarrow{c'})=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b'}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c'}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}$ 。

因為直線 BB'//直線 OA，故存在實數λ，使得 $\overrightarrow{b'}-\overrightarrow{b}=\lambda\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b'}=\overrightarrow{b}+\lambda\overrightarrow{a}$

同理，存在實數μ，使得 $\overrightarrow{c'}-\overrightarrow{c}=\mu\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{c'}=\overrightarrow{c}+\mu\overrightarrow{a}$

所以 $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b'}+\overrightarrow{c'})=\overrightarrow{a}\times[(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})]=\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$

因此 $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}$ 。