第八單元　指數

(甲)整數指數

自然數指數：對於每個實數 a，我們以記號 a^n 代表 a 自乘 n 次的乘積。

即 $\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}^{n個}=a^n$

(1)正整數指數的運算性質(**指數律**)：

①$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　　②$(a^m)^n=a^{mn}$　　③$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$

例如：$3^{12}\cdot 3^4=3^{16}$，$4^5=(2^2)^5=2^{10}$，$3^4\cdot 2^4=(2\cdot 3)^4$

上面所討論的指數，都是自然數，而接下來我們打算將指數的範圍從自然數逐步推廣至整數系、有理數系、實數系，而且希望推廣之後指數的運算都能滿足指數律。

換句話說，就是要規定型如： a^0, a^{-2} $a^{3/4}$, $a^{\sqrt{2}}$ ，…等記號的意義。

推廣的原則：

①要求新規定的指數記號仍然滿足指數律。②適當限制 a 使得指數有意義。

整數比自然數多了 0 與負整數，因此我們將要適當的規定 a^0 與 $a^{-n}(n\in\mathrm{N})$。

(2)規定 a^0：

設 $a\neq 0$，由指數律① 可得 $a^0\cdot a^n=a^{0+n}=a^n$，因為 $a\neq 0$，所以 $a^0=1$。換句話說，要使得指數律① 成立的話， 則必須定義 $a^0=1$。

新定義的 $a^0=1$ 能否使得指數律② ③ 成立。

檢驗指數律②：$(a^0)^n=1^n=1=a^0=a^{0\cdot n}$，$(a^m)^0=1=a^0=a^{m\cdot 0}$，$(a^0)^0=1^0=1=a^{0\cdot 0}$

檢驗指數律③：$a^0\cdot b^0=1\cdot 1=1=(a\cdot b)^0$

由以上的檢驗可得：

$(a^m)^n=a^{mn}$，$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$ 當 m,n 為正整數或 0 時會成立。

(3)規定 a^{-n}：

假設 $a\neq 0$，且 n 為正整數，由指數律① 可得 $a^{-n}\cdot a^n=a^{-n+n}=a^0=1$，

所以 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ 。換句話說，要使得指數律①成立的話，則必須定義 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ ，。

新定義的 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ 能否使得指數律① ② ③ 成立。

檢驗指數律①：$a^{-m}\cdot a^n=\dfrac{1}{a^m}\cdot a^n=\begin{cases}a^{-m+n}, & n\geq m\\ \dfrac{1}{a^{m-n}}=a^{-m+n}, & n\leq m\end{cases}$ 。 (m,n 為正整數)

檢驗指數律②：$(a^{-m})^n=(\dfrac{1}{a^m})^n=\dfrac{1}{(a^m)^n}=\dfrac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}$。($m,n$ 為正整數)

檢驗指數律③：$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$ 留做作業。
結論：
當底數 a,b 是非零的實數，指數 m,n 為整數

(1)$a^0=1$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

(2)下面指數律成立：

①$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　　②$(a^m)^n=a^{mn}$　　③$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$

(練習1) 檢驗指數律③：$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$，其中 n 為整數。

(練習2) 化簡下列各式：

(1)$2^{b-c}\cdot 2^{c-b}$　(2)$(-3)^3\div(-3)^5$　(3)$\dfrac{3a^{-2}}{5x^{-1}y}$　(4)$(a^2)^3-(a^3)^2$

(5)$(x^{-2}+4)(x^{-2}-4)$　(6)$(c^x+2c^{-x}-7)(5-3c^{-x}+2c^{-x})$

(7)$(p^{2n}-1+p^{-2n})(5p^n-3p^{-n})$　(8)$(16a^{-3}+\dfrac{6}{a^2}+\dfrac{5}{a}-6)\div(2a^{-1}-1)$

Ans：(1)1(2)$\dfrac{1}{9}$(3)$\dfrac{3x}{5a^2y}$(4)0(5)$x^{-4}-16$(6)$2c^{2x}-9c^x-34+31c^{-x}-6c^{-2x}$

(7)$5p^{3n}-8p^n+8p^{-n}-3p^{-3n}(8)8a^{-2}+7a^{-1}+6$

(練習3) 若 $9^3\times12^5\times18^{10}=2^x\times3^y$，求自然數 x, y 之值。
Ans：$(x, y) = (20, 31)$

(乙)分數指數

(1)設 $a>0$，如果 $r=\dfrac{m}{n}$為一有理數，(n 為大於等於 2 的正整數，m 為整數)

應該如何定義 a^r 呢？

就指數律② 而言 $a^{\frac{m}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}$，根據前面推廣指數的原則，只要定義 $a^{\frac{1}{n}}$ 即可。

(2)規定 $a^{\frac{1}{n}}$：

根據指數律② $(a^{\frac{1}{n}})^n=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a$，即 $a^{\frac{1}{n}}$ 是方程式 $x^n=a$ 的根，根據第一冊第三章

勘根定理的推論，**$x^n=a$ 恰有一正實根，即 a 的正 n 次方根$\sqrt[n]{a}$ 。**

因此我們就定義 a 的正 n 次方根為 $a^{\frac{1}{n}}$ 的定義，即 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ 。

當 m 為整數時，因為$((\sqrt[n]{a})^m)^n=((\sqrt[n]{a})^n)^m=a^m$，所以$(\sqrt[n]{a})^m$ 為 $x^n=a^m$ 的正根，

即$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$。因為$a^{\frac{m}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}$，所以$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$。

(3)由前面的說明，我們可得以下結論：

① 當 $a>0$，n 為大於等於 2 的正整數，定義$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$。

② 當 $a>0$，$r=\dfrac{m}{n}$，(其中 n 為大於等於 2 的正整數,m 為整數)，

定義$a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$。

(4)為何定義分數指數時，a 要為正數？
當我們定義分數指數時，引用了第一冊第三章的勘根定理的應用：$x^n=a$ 恰有一個正實根，而這樣的性質在 $a<0$ 時就不成立了，且 $x^n=a$ 還不一定有實根存在，例如 $x^2=-1$ 就沒有實根，所以找不到適當的實數來作為$(-1)^{\frac{1}{2}}$的定義。

[討論]：
小安做數學問題時，發現兩個迷惑的問題：

(迷惑一)：$(-3)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-3}=\sqrt{3}\ i$ 是虛數，但$(-3)^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{(-3)^2}=\sqrt[4]{9}$是實數，

於是得出$(-3)^{\frac{1}{2}}\neq(-3)^{\frac{2}{4}}$。

(迷惑二)：書本說：$16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}$，那麼$(-16)^{\frac{1}{4}}$是否等於$\sqrt[4]{-16}$？如果是的話，

符號$\sqrt[4]{-16}$是代表方程式 $x^4=-16$ 的那一個「解」呢？請討論小安的迷惑呢？

(5)我們定義了分數指數後，我們還要看看是否滿足指數律。
假設 a,b 為正數，p,q 為有理數

檢驗指數律①：令 $p=\dfrac{m}{n}$,$q=\dfrac{s}{r}$ (n,r 為正整數)，

$$a^p\cdot a^q=(\sqrt[n]{a^m})\cdot(\sqrt[r]{a^s})=\sqrt[nr]{a^{mr}}\cdot\sqrt[nr]{a^{ns}}=\sqrt[nr]{a^{mr+ns}}=a^{\frac{mr+ns}{nr}}=a^{p+q}$$

檢驗指數律②：

$$(a^p)^q=(\sqrt[n]{a^m})^{\frac{s}{r}}=\sqrt[r]{(\sqrt[n]{a^m})^s}=\sqrt[r]{\sqrt[n]{a^{ms}}}=\sqrt[nr]{a^{ms}}=a^{pq}$$

檢驗指數律③：$a^p\cdot b^p=(a\cdot b)^p$，留做作業

結論：

當底數 a 是大於 0 的實數，指數 m,n 為整數

(1) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ ，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$

(2)當底數 a,b 是大於 0 的實數，p,q 為有理數，

①$a^p\cdot a^q=a^{p+q}$ ②$(a^p)^q=a^{pq}$ ③$a^p\cdot b^p=(a\cdot b)^p$

[問題與討論]：

設 $a>0$，且 $a\neq1$，x,y 為有理數，請討論下列下列兩個性質：

(1)當 $a>1$，$a^x>a^y\Leftrightarrow x>y$。

(2)當 $0<a<1$，$a^x>a^y\Leftrightarrow x<y$。

[例題1] 將根式化簡為指數的形式：

(1)$\sqrt[5]{a^{20}}\cdot\sqrt{\sqrt{a^{12}}}$ (2)$(\sqrt{8})^{\frac{-2}{3}}\times(\sqrt[3]{10^2})^{\frac{9}{2}}\div\sqrt[3]{10^5}$ (3)$\sqrt[3]{3^{\frac{-3}{2}}\cdot(\frac{1}{3})^{-8}}$

Ans：(1)a^7 (2)$2^{-1}\times10^{-5}$ (3)3^{-4}

(練習4) 化簡下列各式

(1)$1000\cdot(8^{-\frac{2}{3}})$ (2)$3(\frac{9}{4})^{-\frac{3}{2}}$ (3)$\dfrac{9a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}\cdot 3a^{\frac{1}{3}}}$ (4)$\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[6]{y^{-2}}\cdot\sqrt[4]{x^6}}$

Ans：(1)250 (2)$\frac{8}{9}$ (3)$\frac{3}{2a}$ (4)y

(練習5) (1)已知 $a^{\frac{3}{5}}=27$，求 a 之值。 (2)已知 $25^x=81$，求 125^{-x}。

Ans：(1)243 (2)$\frac{1}{729}$

(練習6) 若 $3^{1.83622}=k$，試以 k 表示 $3^{2.16378}$ 之值。Ans：$\frac{81}{k}$

(練習7) 設於某項新實驗中，細菌數 1 日後增加 a 倍，且已知 3 日後細菌數為 200000，$4\frac{1}{2}$ 日後其數為 1600000，試求：

(1)a 的值 (2)5 日後的細菌數 (3)$\frac{3}{2}$ 日後的細菌數 (4)細菌數為 800000 時所需的日數。 Ans：(1)3 (2)3200000 (3)25000 (4)4 日

(丙)實數指數

(1)設 $a>0$，對於所有的有理數 x，我們已經定義了 a^x，例如 $2^{-2}=\frac{1}{4}$，$2^0=1$，$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ 等等，接下來我們希望將 x 的範圍擴充到所有的實數，換句話說，我們想要知道 $2^{\sqrt{3}}$ 這種符號的意義。

(2)對於一般的無理數 x，我們可利用逼近的方法去定義 2^x 的值。

例如：考慮有理數數列 $a_1=1.7$，$a_2=1.73$，$a_3=1.732$，…，a_n，…且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$。

因為 $2^{1.7}$，$2^{1.73}$，$2^{1.732}$，…，2^{a_n}..都有定義，且為一個遞增的數列，但比 2^2 小，這種數列會越來越接近一個正實數，這個正實數就定義為 $2^{\sqrt{3}}$，

它大約等於 3.3220。

(3)一般而言，對於任意一正實數 a 與任意一個無理數 x，利用(2)中定義 $2^{\sqrt{3}}$ 的逼近方法，也可來求 a^x 的估計值，進一步還可證明這樣定義無理指數後，指數律依然成立。

[例題2] 解下列方程式：
(1)$2^{x+4}=7^{x+4}$ (2)$5^{2x+1}-6\cdot5^x+1=0$ (3)$2(4^x+4^{-x})-7(2^x+2^{-x})+10=0$
Ans：(1)$x=-4$ (2)$x=0$ 或-1 (3)$x=0$

(練習8) 化簡下列各式：
(1) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ (2)$2^{\pi+1}\cdot 2^{-\pi}$ (3) $36^{\sqrt{5}}\div 6^{\sqrt{20}}$
Ans：(1)9 (2)2 (3)1

(練習9) 設 $a\neq0$，若 $2^a=3^b=\sqrt{6^c}$ ，則$\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}=$？ Ans：2

(練習10) 解下列方程式：
(1)$4^{-2x}=(0.25)^{5x-1}$ (2) $\sqrt[3]{4^x}=\sqrt{2^{3x+1}}$ (3) $(\sqrt{3})^{3x+2}=\dfrac{27\sqrt{3}}{3^x}$
Ans：(1)$\dfrac{1}{3}$ (2)$-\dfrac{3}{5}$ (3)1

(練習11) 試解 $4(4^x+4^{-x})-12(2^x+2^{-x})+13=0$ Ans：$x=1$ 或-1

(練習12) 設 $a>0$，$x\in$R，$a^{3x}+a^{-3x}=52$，
求(1)a^x+a^{-x}之值 (2)求 $a^{2x}+a^{-2x}$之值 (3)求 a^x 之值。
Ans：(1)4(2)14(3)$2\pm\sqrt{3}$

(練習13) 若 $x>1$， $x^2+x^{-2}=6$，求下列各式之值：
(1) $x-x^{-1}$ (2) x^2-x^{-2} (3) x^3+x^{-3} (4) x^5-x^{-5} (5) x^7+x^{-7}
Ans：(1) 2 (2) $4\sqrt{2}$ (3)$10\sqrt{2}$ (4) 82 (5) $338\sqrt{2}$

綜合練習

(1) 將下列根式化為指數型：

(a)$(2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}\times(2-\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}=$______(b)$729^{\frac{-1}{3}}+32^{\frac{3}{5}}+(\frac{1}{27})^{\frac{-1}{3}}=$______(c)$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4}}}=$______

(2) 物理學上，放射性元素的原子數衰變減少一半所需的時間，稱為半衰期。今有一半衰期為 6 日之甲元素，問：
(a) n 日後的原子數是 $n+3$ 日後原子數的幾倍？
(b) 1 個月(30 日)後的原子數是 2 個月後原子數的幾倍？
(c)若 3 個月後甲元素的數量為 N，則幾天後的甲元素的數量為 $16N$？

(3) 一莫耳的粒子數是6×10^{23}個，地球半徑為 6400 公里。假設一立方公分的容積可裝 100 粒米，若將 10 莫耳的米均勻灑在地球上(把地球表面想像成球面)，其高度最接近下列哪個選項？(半徑為 R 的球之表面積為$4\pi R^2$)
(1)一本書的厚度 (2)一個人的高度 (3)總統府的高度 (4)玉山的高度

(4) 假設地球與太陽的平均距離為 1 天文單位(AU)，天文學波德在 1766 年提出波德法則(Titius-Bode Law)：行星與太陽的距離 d(AU)可以用「$d=\alpha+\beta\cdot2^n$」這個數學式子來表示：，下表是行星所對應的 n 值表：

行星	對應的 n 值
金星	0
地球	1
火星	2
木星	4
土星	5
天王星	6

已知火星與太陽的平均距離比金星與太陽的平均距離多 0.9(AU)，
試求下列各小題：
(1)火星與太陽的平均距離。
(2)天王星是繼土星之後，離太陽較近的行星，計算天王星與太陽的平均距離。
(3)高斯的朋友在高斯的幫忙下，在 1802 年發現第一顆小行星—「穀神星」，它距離太陽有 2.8(AU)。試問穀神星所對應的 n 值是多少？
(4)當 n 趨近於負無窮大時，波德公式就給出了水星與太陽的平均距離，試求水星到太陽的平均距離。
(註：有關波德法則(Titius-Bode Law)的內容，可以連上 http://en.wikipedia.org/wiki/Titius%E2%80%93Bode_law，查閱)

(5) 若 $a>0$，a∈R，設 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$，試求下列各式的值：
(a)$a+a^{-1}$ (b)$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$ (c)a^2+a^{-2} (d)a^3+a^{-3} (e)$a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}$

(6) $2^{0.6}=a$，$2^{0.03}=b$，則 $2^{2.23}=$？

(7) 解下列各指數方程式：

(a) $(\sqrt{3})^{3x+23}=\dfrac{81\sqrt{3}}{9^x}$　(b) $(\dfrac{2}{3})^x\cdot(\dfrac{9}{8})^x=\dfrac{81}{256}$　(c) $25^{3x^2}=625\cdot 5^{10x}$

(d) $2^{5x+3}\times(-\dfrac{1}{2})^{4x+8}=(\dfrac{1}{4})^{3x^2}$ (e) $2^{2x-1}+2^{3x-2}=5\cdot 2^{x+2}$。

(8) 解下列各指數方程式：

(a) $6^x-8\cdot 3^x-9\cdot 2^x+72=0$　(b) $2(4^x+4^{-x})-3\cdot(2^x+2^{-x})-1=0$

(9) 設 x,y 為實數，$53^x=9$，$477^y=243$，

(a) $9^k=53$，$(243)^m=477$，試以 x,y 表示 k、m。

(b) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}=$？

進階問題

(10) 設 $a>0,b>0$，且 $ab\neq1$，設 $a^x=b^y=(ab)^z$，試求 x,y,z 的關係。

(11) 設 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，$x\in R$，(a)試證：若 $a+b=1$，則 $f(a)+f(b)=1$。

(b)承(a)，試求 $f(\dfrac{1}{2000})+f(\dfrac{2}{2000})+f(\dfrac{3}{2000})+\ldots\ldots+f(\dfrac{1999}{2000})=$______。

(12) 試解 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=4$，

(13) 若 $2^x+3^y=8$，$2^{x+1}+\dfrac{1}{3}\cdot 3^y=5$，求 $5\cdot 3^y-5\cdot 2^x=$？

綜合練習解答

(1)　(a)1　(b) $11\dfrac{1}{9}$　(c) $a^{\frac{-1}{10}}$

(2)　(a) $\sqrt{2}$　(b)32　(c)66

(3)　(3)

(4)　(a)1.6(AU)　(b)19.6(AU)　(c) $n=3$　(d)0.4(AU)

[提示：利用 $\alpha+2\beta=1$，　$(\alpha+4\beta)-(\alpha+\beta)=0.9\Rightarrow\alpha=0.4$，$\beta=0.3$]

(5)　(a)23(b)110(c)527(d)12098(e) $\sqrt{7}$

(6)　$2a^2b$

(7)　(a) $x=-2$ (b) $x=4$　(c) $x=2$ 或 $x=-\dfrac{1}{3}$　(d) $x=\dfrac{5}{6}$ 或 -1　(e) $x=3$

(8)　(a) $x=2$ 或 $x=3$ (b) $x=1$ 或 $x=-1$

(9) (a)$k=\frac{1}{x}$ 、$m=\frac{1}{y}$ (b)$\frac{53}{477}=\frac{9^{\frac{1}{x}}}{243^{\frac{1}{y}}}=\frac{3^{\frac{2}{x}}}{3^{\frac{5}{y}}}\Rightarrow\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=-2$

(10) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$

(11) (b)$\frac{1999}{2}$

(12) $x=2$ 或-2

[提示：$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$，故令$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{x}=\text{A}$，則$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{x}=\frac{1}{\text{A}}$]

(13) 26 (提示：令 $\text{A}=2^x,\text{B}=3^y$)