§1–4 對數函數

(甲)對數函數的意義

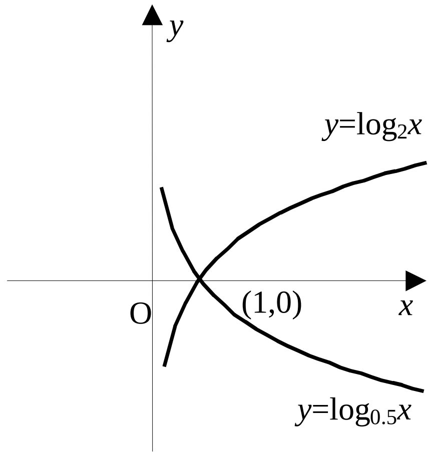
(1)定義：設 $a>0$，$a\neq1$，$x>0$，$f(x)=\log_a x$ 稱為一個以 a 為底數的對數函數。

定義域：$\{x|x>0\}$

值　域：$\{y|y\in R\}$

(2)對數函數 $f(x)=\log_a x$ 具有 $f(xy)=f(x)+f(y)$的性質。x,y 為任意正實數。

(乙)對數函數的圖形



(1)描點畫圖：

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y=\log_2 x$	-2	-1.5850	-1	0	1	1.5850	2

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2

結論：

(a)$y=\log_a x$ 的圖形都在 y 軸的右方。(即 $x>0$)

(b)$y=\log_a x$ 的圖形與 x 軸交於點(1,0)。

(c)平行 x 軸的直線都恰與 $y=\log_a x$ 的圖形交於一點。

(d)$y=\log_a x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$的圖形對稱於 x 軸。

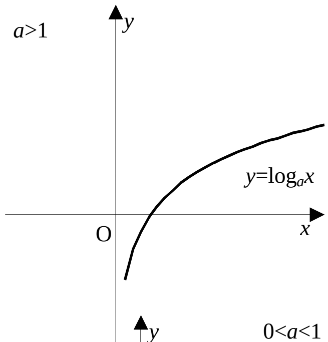
(e)$y=\log_a x$ 的遞增與遞減

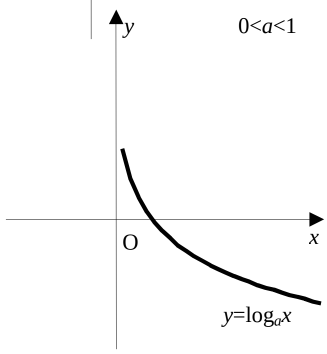
① 當 $a>1$ 時，

$f(x)=\log_a x$ 的圖形向右上升

$\Leftrightarrow$ $f(x)=\log_a x$ 為遞增函數

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{x_1>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1>\log_a x_2}}$





② 當 $0<a<1$ 時，

$f(x)=\log_a x$ 的圖形向右下降

$\Leftrightarrow$ $f(x)=\log_a x$ 為遞減函數

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{x_1>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1<\log_a x_2}}$

(2)對數函數與指數函數圖形的關係：

① 對數函數與指數函數有以下的關係：$\boldsymbol{y=\log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x=a^y}$ 。

換句話說，以 a 為底數的對數函數，其**自變數** $\boldsymbol{x}$ 及**應變數** $\boldsymbol{y}$ 分別是以 a 為底數的指數函數的**應變數**及**自變數**。我們稱有這種特殊關係的兩個函數互為**反函數**，即**同底的對數函數與指數函數互為反函數**。

符號：$\boldsymbol{f(x)}$的反函數為 $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$。

②圖形關係：

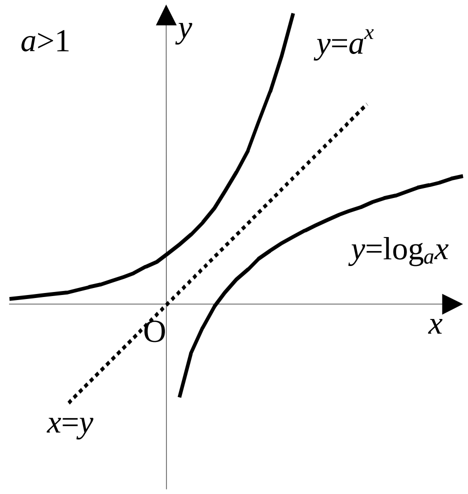
如果考慮兩個反函數的圖形，根據反函數的意義：

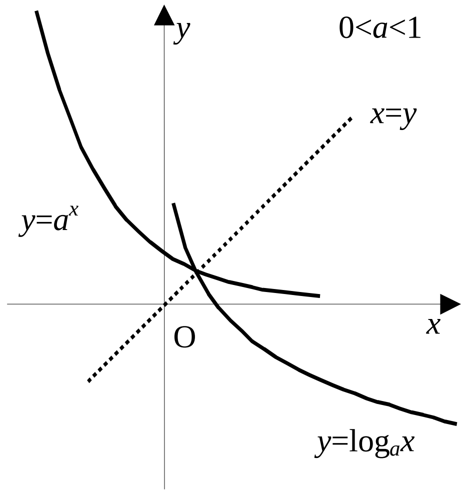
點$(x_0\ ,\ y_0)$在 $y=\log_a x$ 的圖形上 $\Leftrightarrow$ 點$(y_0\ ,\ x_0)$在 $y=a^x$ 的圖形上

而點$(x_0\ ,\ y_0)$與$(y_0\ ,\ x_0)$對稱於直線 $x=y$,

因此 $y=\log_a x$ 的圖形與 $y=a^x$ 的圖形對稱於直線 $x=y$。

如下兩圖所示：





(3)對數函數圖形的凹凸性：

(a)當 $a>1$ 時，$f(x)=\log_a x$ 的圖形為凹向下，即圖形上任兩點 A,B 的連線在 A,B 兩點間的圖形下方。

因此 $\dfrac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)\le\log_a\dfrac{x_1+x_2}{2}$， x_1,x_2 為任意的正實數。

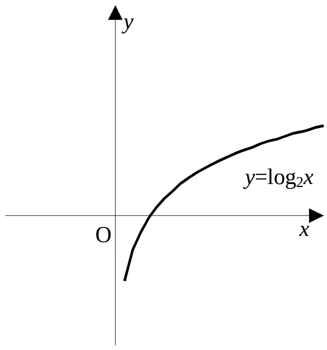
(b)當 $0<a<1$ 時，$f(x)=\log_a x$ 的圖形為凹向上，即圖形上任兩點 A,B 的連線在 A,B 兩點間的圖形上方。

因此 $\dfrac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)\ge\log_a\dfrac{x_1+x_2}{2}$， x_1,x_2 為任意的正實數。

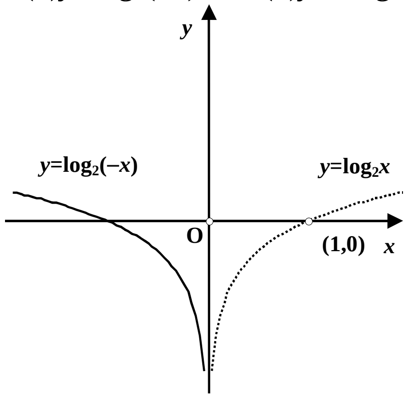
對數函數的圖形

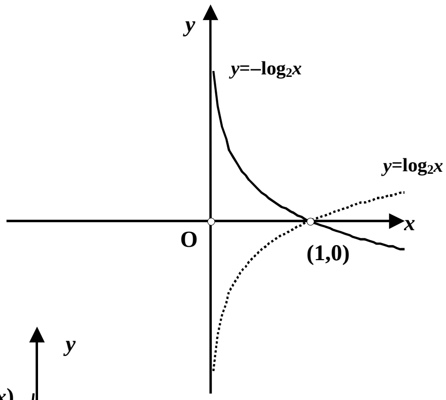
[例題1] 設 $y=\log_2 x$ 之圖形為右圖,

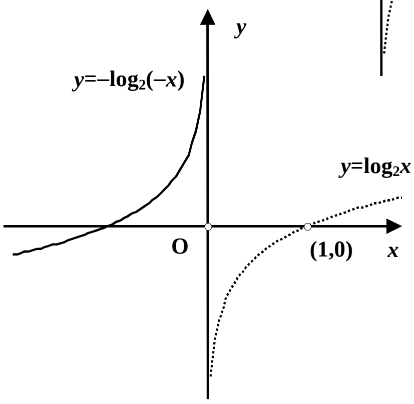
試利用對稱的性質作下列各圖形。



(1)$y=\log_2(-x)$　(2)$y=-\log_2 x$　(3)$y=-\log_2(-x)$







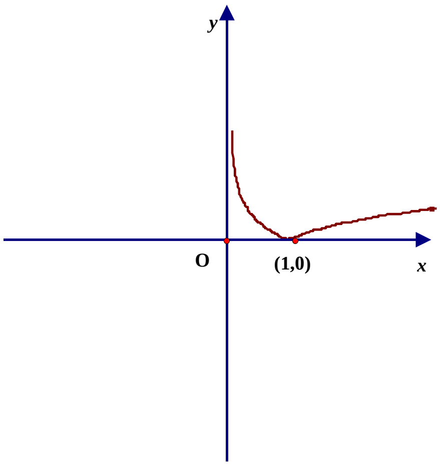
結論：

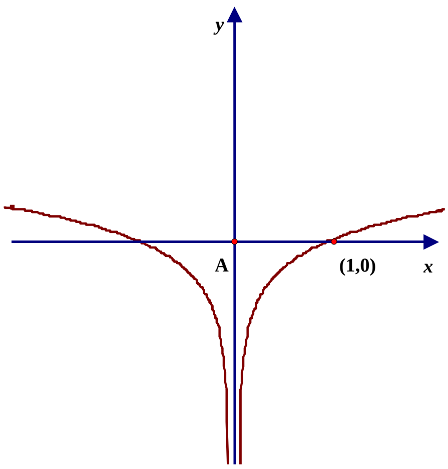
(1)$y=f(x)$的圖形與 $y=f(-x)$的圖形對稱於 y 軸。

(2)$y=f(x)$的圖形與 $y=-f(x)$的圖形對稱於 x 軸。

[例題2] 利用 $y=\log_2 x$ 的圖形作下列各函數的圖形：

(1)$y=f(x)=|\log_2 x|$　(2)$y=f(x)=\log_2|x|$

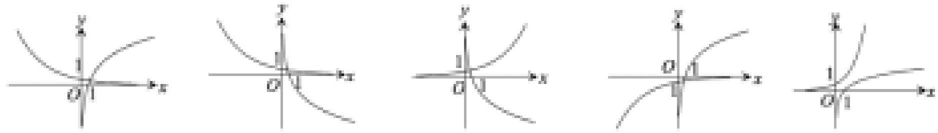




結論:將 **$y=f(x)$圖形中在 x 軸下方的部分對稱 x 軸形成的圖形為 $y=|f(x)|$的圖形。**

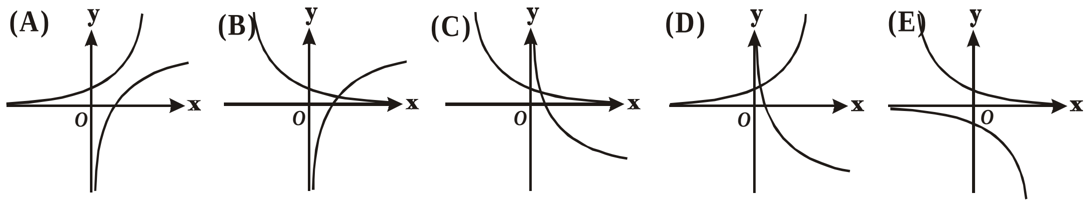
(練習1) 設 $a>1$，則下列那一個選項，表示函數 $y=\log_a x$ 與 $y=a^{-x}$ 的圖形？

(A)　(B)　(C)　(D)　(E)



Ans：(A)

(練習2) 設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，試問下列何者可能為 $y=a^x$ 為 $y=\log_a x$ 之圖形？



Ans：(A)(C)

(練習3) 比較 $y=\log_2 x$，$y=\log_3 x$ 的圖形，　$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖形

(練習4) 下圖中，$y=\log_a x$ 與 $y=\log_d x$ 兩圖形對稱於 x 軸.

$y=\log_b x$ 與 $y=\log_c x$ 兩圖形對稱

則下列何者為真？

(A) $a>b>c>d$

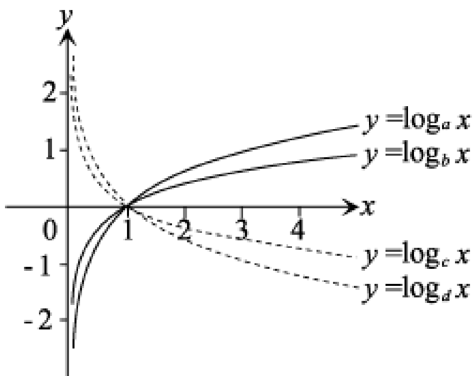
(B) $b>a>c>d$

(C) $b>a>d>c$

(D) $ad=1$

(E) $abcd=1$。

Ans：(C)(D)(E)



(練習5) 試畫出(1)$y=\log_2 x^2$ $(x\neq 0)$　　(2)$|y|=\log_2|x|$ 的圖形。

圖形交點與方程式的實根個數

[例題3] 求下列方程式之實根個數：

(1)$x-\log x=0$　(2)$x-1=\log_2 x$。Ans：(1)0　(2)2

(練習6) 下列何者與 $y=x$ 恰交於一點？

(A)$y=2^{|x|}$　(B)$y=(\frac{1}{2})^{|x|}$　(C)$y=\log|x|$　(D)$y=|\log x|$。　Ans：(B)(C)(D)(E)

(練習7) 由作 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 與 $y=x^2$ 之圖形可知方程式 $\log_{\frac{1}{2}}x=x^2$ 之實數解的個數為？

Ans：1

(練習8) 方程式 $x-1=|\log_2 x|$ 有______個實根。 Ans：2

(練習9) 方程式 $|\log_2 x|=(\frac{1}{2})^{|x|}$ 之實數解有多少個？ Ans：2

對數比大小

[例題4] 設 $a=\frac{3}{2}$，$b=\log_4 9$，$c=\log_9 25$，試比較 a,b,c 的大小。 Ans：$b>a>c$

(練習10) 設 $a=\log_{0.2}0.2, b=\log_{0.3}0.2, c=\log_2 0.2, d=\log_3 2$。請比較 a,b,c,d 的大小。

(練習11) 下列何者之值大於 1？(A)$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}$ (B)$\log_{1.4}1.7$ (C)$\log_{0.3}0.8$ (D)$\log_{0.7}0.3$

Ans：(A)(B)(D)

(練習12) 設 x,y,z 為正數，且 $2^x=3^y=5^z$，比較 $2x,3y,5z$ 的大小。
Ans：$5z>2x>3y$ [提示：可令 $2^x=3^y=5^z=K$，則 $x=\log_2 K$，$y=\log_3 K$，$z=\log_5 K$，再比較 $2x,3y,5z$ 的大小]

對數函數的定義域問題

[例題5] (1)$\log_2(1+2x-3x^2)$有意義，求 x 的範圍。
(2)$\log_{(2x-1)}(-3x^2+11x-6)$ 有意義，求 x 的範圍。
Ans：(1)$\frac{-1}{3}<x<1$ (2)$\frac{2}{3}<x<3$，但 $x\neq 1$

(練習13) 若 $\log_a x>0$，試就 a 討論 x 的範圍。

Ans：$a>1$ 時，$x>1$；$0<a<1$ 時，$0<x<1$

(練習14) 求下列函數的定義域：

(1)$f(x)=\log_{(x^2-3x+2)}(x^2+2x-3)$　(2)$f(x)=\log_2(\log_{\frac{1}{3}} x)$

Ans：(1)$\{x|x<-3$ 或 $x>2$ 但 $x\neq\frac{3+\sqrt{5}}{2}\}$　(2)$\{x|0<x<1\}$

(1)提示：$\log_{(x^2-3x+2)}(x^2+2x-3)$ 有意義 $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3>0 \\ x^2-3x+2>0 \\ x^2-3x+2\neq 1 \end{cases}$。

(2)提示：$\log_2(\log_{\frac{1}{3}} x)$ 有意義 $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x>0 \\ x>0 \end{cases}$

對數不等式

[例題6] 解下列不等式：

(1)$\log_{0.5}(2x-3)>0$　(2)$(5^{-x})(\log_{\frac{1}{3}} x)>0$

(3)$\log_2(\log_{\frac{1}{3}} x)<1$　(4)$\log(6x-x^2)<1+\log(5-x)$

Ans：(1)$\frac{3}{2}<x<2$　(2)$0<<1$　(3)$\frac{1}{9}<x<1$　(4)$0<x<8-\sqrt{14}$

[例題7] 解 $\log_3(3^x+8)<\frac{x}{2}+1+\log_3 2$。 Ans：$\log_3 4<x<\log_3 16$

(練習15) 解下列不等式：

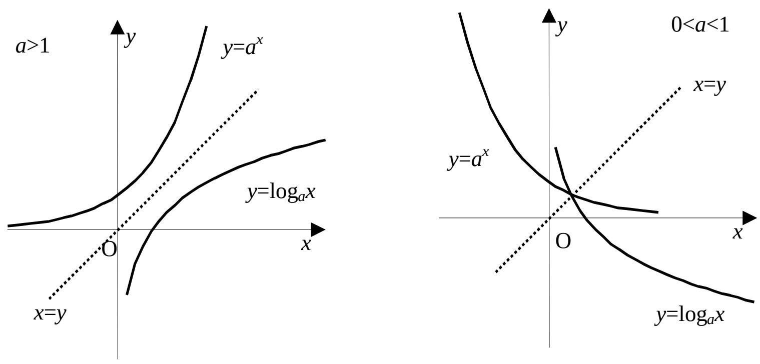
(1)$\log(x^2-4x+3)\geq \log(2x-1)^2+\log 3$ (2) $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_{\frac{1}{3}} x>1$

Ans：(1)$0\leq x\leq\frac{8}{11}$ ， $x\neq\frac{1}{2}$ (2) $(\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{3}$

(練習16) 不 等 式 $\log_{0.5}(x-2)>\log_{0.25}(4x^2-17x+4)$ 的 解 為 (A)$4<x$ (B)$2<x<4$ (C)$4<x<\frac{13}{3}$ (D)$\frac{13}{3}<x$ (E)以上皆非 Ans：(D)

(練習17) 解 $\log_2(2^x+16)<\frac{x}{2}+1+\log_2 5$。 Ans：$2<x<6$

求反函數



(a)$y=\log_a x$ 與 $y=a^x$ 互為反函數。[$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y \xrightarrow{x與y互換} y=a^x$]

(b)點(x_0,y_0)在 $y=\log_a x$ 圖形上 $\Leftrightarrow$ 點(y_0,x_0)在 $y=a^x$ 圖形上。

(c) $y=\log_a x$ 與 $y=a^x$ 兩圖形對稱於直線 $x-y=0$。

(d)求反函數的法則：

已知函數 $f(x)$，求反函數 $f^{-1}(x)=$？

令 $y=f(x)$，用 x 解出 y，(即表成 y 是 x 的函數)，再將 x 與 y 互換，即求得 $f^{-1}(x)$。

[例題8] 求下列各函數的反函數：

(1)$y=f(x)=3x+5$　(2)$y=f(x)=\log_2(x-2)$　(3)$y=3^{x+2}-5$

Ans：(1)$f^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{3}$　(2)$f^{-1}(x)=2^x+2$　(3)$f^{-1}(x)=\log_3(x+5)-2$

(練習18) 求下列各函數之反函數：

(1)$f(x)=\log_2(x-3)$，$x>3$　(2)$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$，$x\neq 0$　(3)$f(x)=(0.2)^{-x}+1$

Ans：(1)$f^{-1}(x)=2^x+3$，$x\in R$　(2)$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{x+1}{x-1}$，$x<1$ 或 $x>1$

(3)$f^{-1}(x)=\log_5(x-1)$　$x>1$

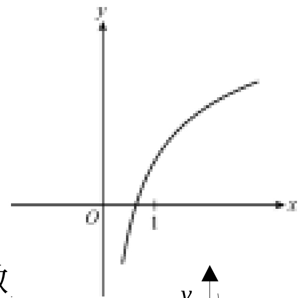
綜合練習

(1) 右圖為函數 $y=\log_b ax$ 的部分圖形，其中 a，b 皆為常數且 $a>0$，$b>0$，則下列何者為真？

(A)$a>1$，$b>1$(B)$0<a<1$，$b>1$

(C)$a=1$，$b>1$(D)$a>1$，$0<b<1$

(E)$0<a<1$，$0<b<1$。

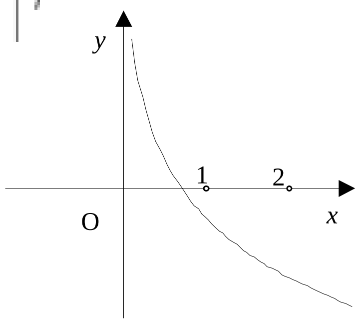


(2) 右圖為函數 $y=a+\log_b x$ 之部分圖形，其中 a,b 為常數，則下列何者為真？

(A)$a<0$，$b>1$ (B)$a>0$，$b>1$ (C)$a=0$，$b>1$ (D)$a>0$，$0<b<1$

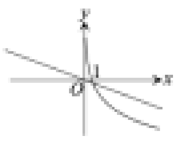
(E)$a<0$，$0<b<1$

(88 社)

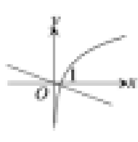


(3) 設 $0<a<1$，則下列那一個選項，表示函數 $y=\log_a x$ 與 $y=(1-a)x$ 的圖形？

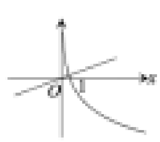
(A)



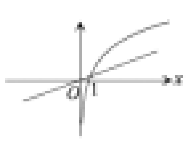
(B)



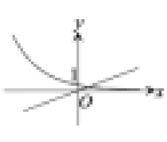
(C)



(D)

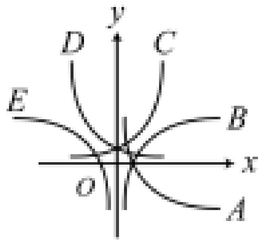


(E)



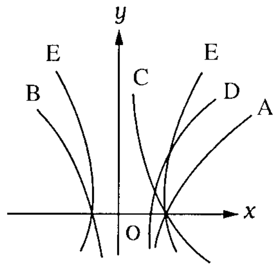
(4) 設 $y=3^x$，$y=3^{-x}$， $y=\log_2 x$， $y=\log_2(-x)$， $y=-\log_2 x$ 的圖形皆在右圖中，A，B，C，D，E 何者是 $y=-\log_2 x$ 的圖形？

(A)A (B)B (C)C (D)D (E)E。



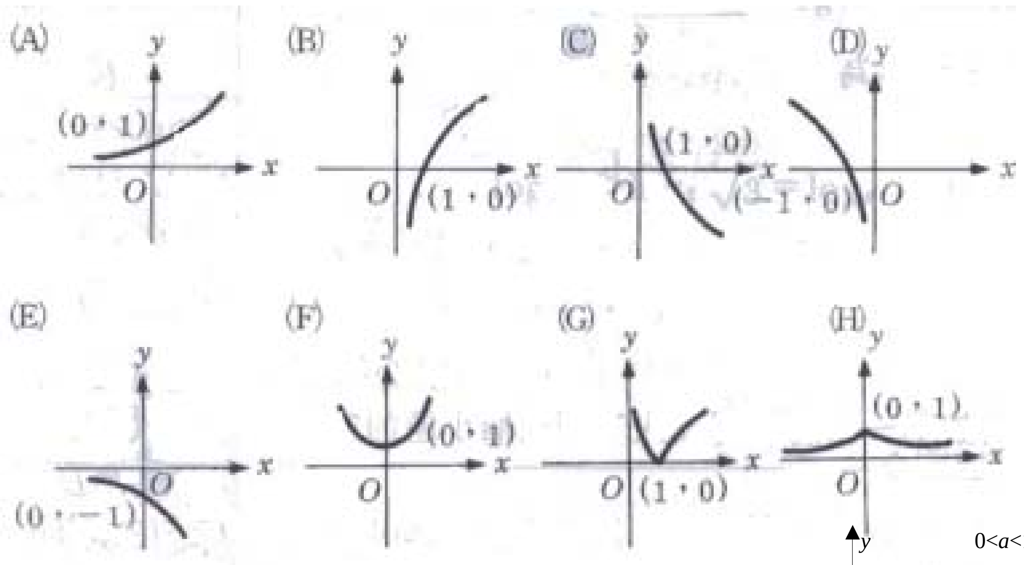
(5) 右圖中，A，B，C，D，E 何者為 $y=\log_2 2x$ 之圖形？

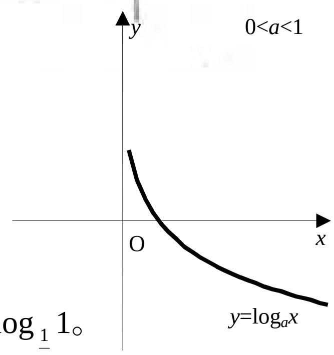
(A)A (B)B (C)C (D)D (E)E。



(6) 若函數 $y=a^x$ 之圖形右圖，則下列圖形何者(以 A、B、….G、H 表示)是下列函數的圖形。

(a)$y=(\frac{1}{a})^x$ (b)$y=\log_a x$ (c)$y=a^{-|x|}$ (d) $y=\log_{\frac{1}{a}}(-x)$ (e)$y=|\log_a x|$





(7) 試求方程式 $x^2+\log|x|=0$ 有____個實數解。

(8) 請問 $2^x=\log_{0.5}|x|$的實數解有______個。

(9) 下列各值最小的是

(A) $\log_{\frac{1}{3}}3$ (B) $\log_{\frac{1}{3}}5$ (C) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}$ (D) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$ (E) $\log_{\frac{1}{3}}1$。

(10) 若 $a=\log_2 3,b=\log_4 3,c=3^{\log_3\sqrt{5}},d=\log_{0.5}3$，則四數的大小為何？

(11) 對函數 f 而言，若 a,b 為正數，且 $a\neq b$

若 $f(\frac{a+b}{2}) > \frac{1}{2}(f(a)+f(b))$，則 $f(x)$的圖形為凹向下。

若 $f(\frac{a+b}{2}) < \frac{1}{2}(f(a)+f(b))$，則 $f(x)$的圖形為凹向上。

設 $f(x)=\log_m x$ ($m>0$，且 $m\neq1$)試證：

(a)當 $m>1$ 時，$f(x)$的圖形為凹向下。
(b)當 $0<m<1$ 時，$f(x)$的圖形為凹向上。

(12) 設 $a>b>1000$，令 $p=\sqrt{\log_7 a\cdot\log_7 b}$，$q=\frac{1}{2}(\log_7 a+\log_7 b)$，
$r=\log_7(\frac{a+b}{2})$，則下列敘述何者正確？
(A) $q=\log_7\sqrt{a\,b}$ (B) $q>r$ (C) $r<p<q$ (D) $p<q<r$ (E) $q<p<r$。

(13) 設 $f(x)=\log_3(\log_{0.3}(\log_9 x))$，試求(a)$f(3^{0.054})=$？ (b)$x$ 的範圍。

(14) 解下列不等式：
(a)$\log_x(x-1)>0$ (b)$\log_a(x-7)+\log_a(x+3)<\log_a(2x-5)$
(c)$\log_{\frac{1}{3}}(\log_4 x)\geq -1$ (d)x 為不等於 1 的正數，解 $\log_3 x+\log_x 3<\frac{10}{3}$
(e) $2\log_{\frac{1}{4}}(3-x)\geq\log_{\frac{1}{2}}(x-2)-1$

(15) 求解 $\log_{1.5}(x+1)>\log_{2.25}(x^2-x-1)$

(16) (a)設 $y=f(x)=\frac{x}{10^x-1}-1+\frac{x}{2}$，$x$ 為不等於 0 的實數，試證明：$f(x)=f(-x)$。
(b)設 $y=f(x)=x\cdot\log_{10}(x+\sqrt{x^2+1})$，$x$ 為實數，試證明：$f(x)=f(-x)$。

(17) 求 $f(x)=x^{1-\log x}$，$1\leq x\leq 100$，之最大值與最小值。

進階問題

(18) 令 $S_n=\log_a\sqrt{3}+\log_a\sqrt{\sqrt{3}}+\log_a\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}+\cdots+$(共 n 項)，
(a)請問若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在時，a 的範圍為何？ (b)此時 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$？。

(19) 設 $f(x)=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$，$x$ 為實數
(a)證明：若 $x_1>x_2$，則 $f(x_1)>f(x_2)$。(b)$y=f(x)$，則 y 之範圍為何？
(c)求 $f^{-1}(x)=$？

(20) 求解下列不等式：
(a)$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{10}}(x+1)+2\log_{100}(x-2)\geq 1$。(b)$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geq\log_{\frac{1}{4}}|x-2|-1$。

(21) 求 $f(x)=\frac{10^x-10^{-x}}{2}$，($x$ 為實數)的反函數。

(22) 設 x 為型如 3^m(m 為正整數)的數，且滿足$-1<\log_3(\log_9(\log_{27}x))<1$，則此種 x 共有多少個？

(23) 若方程式 $x^4+2\sqrt{3}(\log_2 k)x^2+1-(\log_2 k)^2=0$ 有兩相異實根及兩共軛虛根，則實數 k 的範圍為何？

(24) 設 $x>0$，$y>0$ 若 $x+2y=12$，則 $\log_2 x+\log_2 y$ 之最大值為______。

(25) 求滿足 $n^4<10^6<(n+1)^4$ 的正整數 n。

(26) 對任意實數 x，$\log(x^2+2x+a)>0$ 恆成立，求 a 的範圍。

綜合練習解答

(1) (A)

(2) (E)

(3) (C)

(4) (A)

(5) (D)

(6) (a)(A)(b)(C)(c)(F)(d)(D)(e)(G)

(7) 2

(8) 2

(9) (B)

(10) $d<b<a<c$

(11) [提示：請利用算幾不等式]

(12) (A)(D)

(13) (a)1　(b)$1<x<9$

(14) (a)$x>2$ (b)$a>1$ 時, $7<x<8$；$0<a<1$ 時, $x>8$ (c)$1<x\leq 64$　(d)$0<x<1$ 或 $\sqrt[3]{3}<x<27$ (e) $\frac{7}{3}\leq x<3$

(15) $-\frac{2}{3}<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(16) 略

(17) $\sqrt[4]{10}$, $\frac{1}{100}$ [提示：$\log f(x)=(1-\log x)\cdot\log x$ $=-(\log x)^2+\log x=-(\log x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$, 因為 $1\leq x\leq 100$, 所以 $0\leq\log x\leq 2$, 所以 $\log f(x)$的最大值為$\frac{1}{4}$, 最小值為-2。]

(18) (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}<a<\sqrt{3}$, $a\neq 1$ 時, 所求值存在；(b)$\log_a 3$ [考慮公比$\frac{1}{2}\log_a 3$ 絕對值小於 1]

(19) (a)略 (b)$-1<y<1$ (c)$f^{-1}(x)=\log_{10}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(20) (a) $x\geq 4$ (b) $x=1$ 或 $5-2\sqrt{2}\leq x<3$

(21) $f^{-1}(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

(22) 17

(23) $0<k<\frac{1}{2}$ 或 $k>2$

(24) $1+\log_2 9$ (Hint：利用算術平均數大於幾何平均數)

(25) 31

(26) $a>2$