§1–2 指數函數及其圖形

(甲)指數函數的定義

(1)$a>0$，函數 $f(x)=a^x$ 稱為以 a 為底的指數函數。
定義域：$\{x|x\in R\}$
值　域：$\{y|y>0\}$
(2)指數函數的特性：由指數律 $a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$ 可導出 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，這是指數函數的特性。
(3)事實上，如果有一個函數 f 滿足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，則函數 f 一定是 $f(x)=a^x$ 的形式。

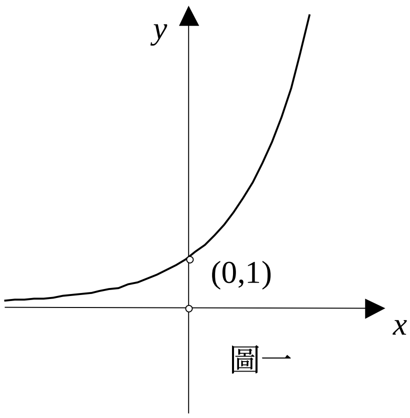
(乙)指數函數的圖形

(1)兩個例子：
我們觀察 $f(x)=2^x$ 的圖形：

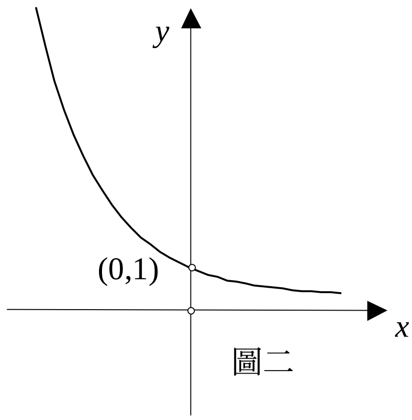
描點：

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4	$4\sqrt{2}$	8

用勻滑曲線將這些點連接起來，可得 $y=2^x$ 的圖形，如下圖一所示：



圖一



圖二

觀察 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的圖形：
描點：

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$(\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$\frac{1}{8}$

用勻滑曲線將這些點連接起來，可得 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的圖形，如上圖二所示：

(2)指數函數圖形的特性：指數函數 $f(x)=a^x$，$a>0$，$a\neq1$ 具有以下的特性

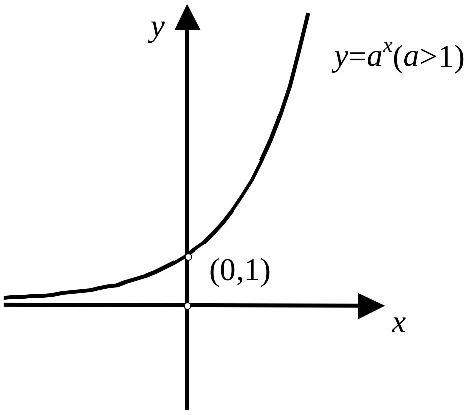
(a)恆在 x 軸的上方(即 $a^x>0$)

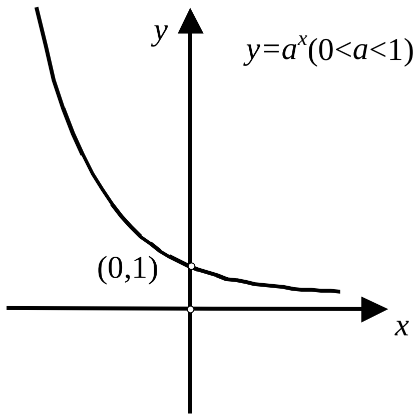
(b)恆過點(0,1)

(c)對於任意實數 x_1,x_2，恆有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$。

(d)$f(x)$為一對一函數。
[平行於 x 軸且在 x 軸上方的每一條直線都恰與 $y=a^x$ 的圖形交於一點。]

(e)當 $a>1$ 時，$f(x)=a^x$ 為增函數。
圖形由左向右逐漸升高，愈向右邊升高得愈快，愈向左邊圖形愈接近 x 軸。
當 $0<a<1$ 時，$f(x)=a^x$ 為減函數。
圖形由左向右逐漸降低，愈向右邊降得愈慢，愈向右邊圖形愈接近 x 軸。





注意：

① 當 $a>1$ 時，$f(x)=a^x$ 為增函數，即 $x_1>x_2 \Leftrightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$

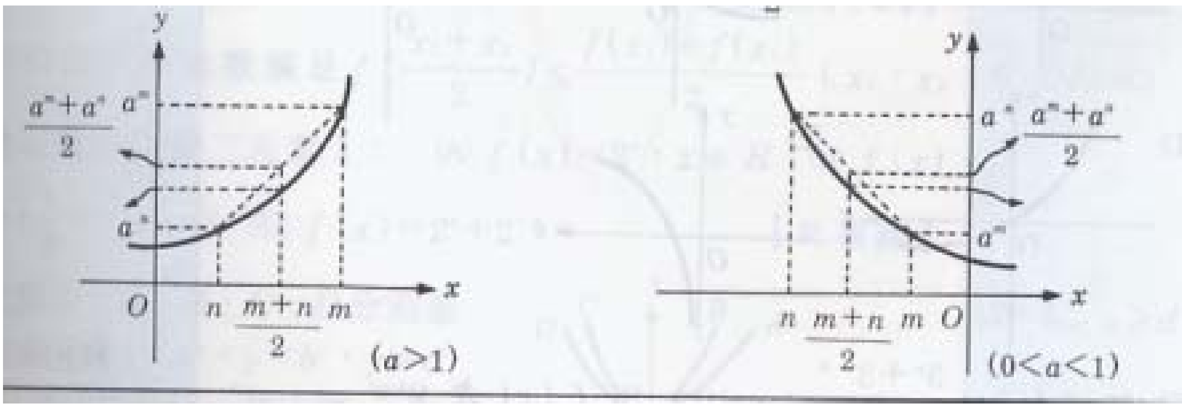
② 當 $0<a<1$ 時，$f(x)=a^x$ 為減函數，即 $x_1>x_2 \Leftrightarrow a^{x_2}>a^{x_1}$

③若函數 $f(x)$為遞增或遞減的函數，則 $f(x)$為 1–1 函數。

(3)指數函數圖形的凹凸性：
對於任意的正數 a 實數 m , n 而言下列的不等式成立：

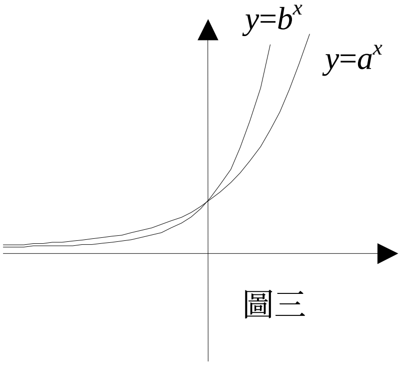
$\frac{1}{2}(a^m+a^n)\geq a^{\frac{m+n}{2}}$ ，等號成立⇔$m=n$。

幾何解釋：

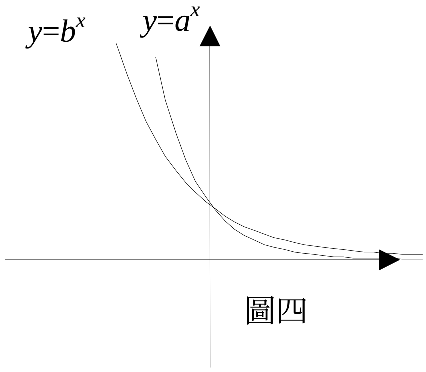


不等式證明：

(4)當 a 變化時，$y=a^x$ 的圖形變化：
　觀察下列兩個圖：



圖三



圖四

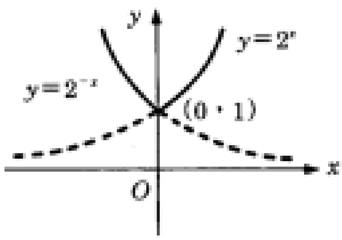
① 當 $1<a<b$ 時，如果 $x<0$，$a^x>b^x$；如果 $x>0$，$a^x<b^x$。

② 當 $0<a<b<1$ 時，如果 $x<0$，$a^x>b^x$；如果 $x>0$，$a^x<b^x$。

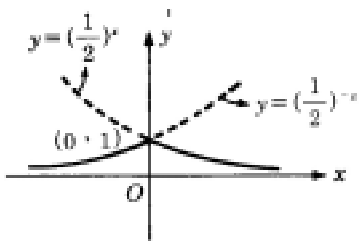
[例題1] 請做下列各函數的圖形：

(1)$y=2^{|x|}$　(2)$y=(\frac{1}{2})^{|x|}$　(3)$y=-(\frac{1}{2})^{|x|}$　(4)$y=-2^{-x}$

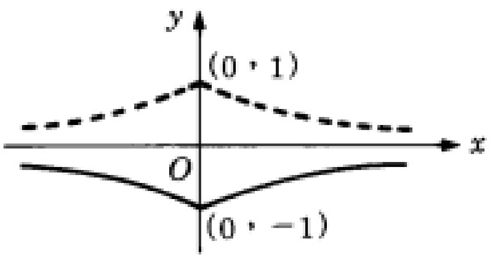
(1)



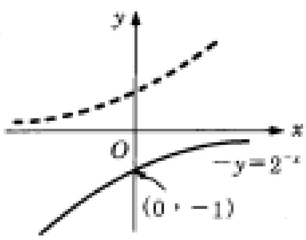
(2)



(3)



(4)



[例題2] (函數圖形與方程式的根)

試問方程式 $x^2=2^{-|x|}$ 有幾個實數解？

[答案]：：2 個

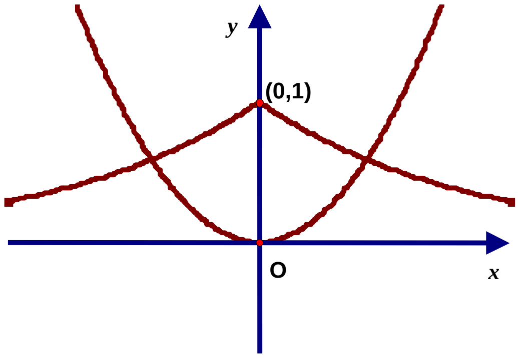
[解法]：

方程式 $x^2=2^{-|x|}$ 實根的個數

=函數 $y=x^2$ 與 $y=2^{-|x|}$ 兩圖形的交點個數。

如圖，可知 $y=x^2$ 與 $y=2^{-|x|}$ 兩圖形有 2 個交點。

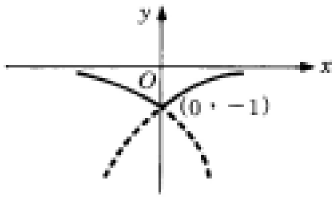
所以方程式 $x^2=2^{-|x|}$ 有 2 個實數解。



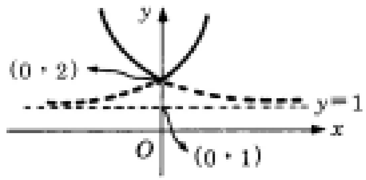
(練習1) 設 $a>0$，$a\neq1$，函數 $y=a^x$ 中，當 x 值增加 2 時，y 值為原來的 9 倍，則 $a=$？　Ans：3

(練習2) 利用 $y=2^x$ 與 $y=(\frac{1}{2})^x$ 之圖形求作(1)$y=-2^{-|x|}$　(2)$y=2^{|x|}+1$ 的圖形。

(1)



(2)



(練習3) (1) 方程式 $2^x+x=0$ 有多少個實根。Ans：1 個

(2)方程式 $x^2=(\frac{1}{2})^x$ 有幾個實根。　Ans：3 個

[例題3] (1)下列那一個數值最小？

(A) $(0.9)^{-3.5}$ (B)$(0.9)^{-2.5}$ (C)$(0.9)^{-1.5}$ (D) $(0.9)^{-\sqrt{3}}$ (E) $(0.9)^{-\sqrt{5}}$　Ans：(C)

(2)設 $a=5^{\frac{1}{2}}$，$b=4^{\frac{2}{3}}$，$c=3^{\frac{3}{4}}$，則 a,b,c 的大小順序為何？ Ans：$b>c>a$

(練習4) 將下列各數依大小順序排列之：

$2^{\frac{2}{3}},4^{\frac{5}{2}}\cdot8^{-1},(\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}},2^{-3},(2^{-\frac{2}{9}})^9$　Ans：$4^{\frac{5}{2}}\cdot8^{-1}>(\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}}>2^{\frac{2}{3}}>(2^{-\frac{2}{9}})^9>2^{-3}$

(練習5) 設 $a=\sqrt{\frac{1}{2}}$，$b=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$，$c=\sqrt[5]{\frac{1}{5}}$，則 a,b,c 的大小順序為何？Ans：$c>a>b$

[例題4] 試解下列不等式：

(1) $2^{x+2}>4^{11-x}$　(2) $(0.001)^{x^2-x+3}<(0.1)^{2x^2+5x-1}$

Ans：(1) $x>\frac{20}{3}$　(2) $x>4+\sqrt{6}$ 或 $x<4-\sqrt{6}$

[例題5] 解 $27^x-4\cdot 3^{2x-1}+3^{x-1}<0$。　Ans：$-1<x<0$

(練習6) 解下列不等式：

(1) $16^{x^2-x}>8$　(2) $(0.2)^{x^2-3x-1}>0.008$　Ans：(1) $x>\frac{3}{2}$ 或 $x<-\frac{1}{2}$　(2) $x<-1$

(練習7) 解下列不等式：

(1) $2^{2x+2}<9\cdot 2^x-2$　(2) $(\frac{1}{9})^x+(\frac{1}{3})^x>12$　Ans：(1) $-2<x<1$　(2) $x<-1$

[例題6] 設 $x\leq 3$，試求 $f(x)=2^{x+2}-4^x$ 之最大值、最小值。

Ans：4，-32

(練習8) 設 $-2\leq x\leq 2$，若 $x=\alpha$ 時，$f(x)=9^x-3^{x+1}$ 有最大值 M，求 α 與 M。

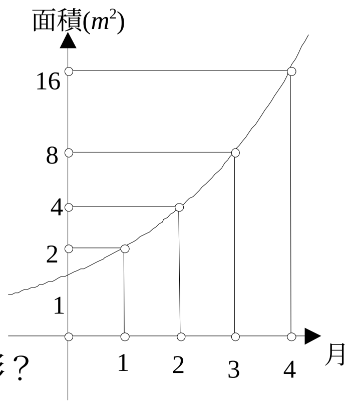
Ans：$\alpha=2$，M=54

綜合練習

(1) 下列那一個選項的圖形與直線 $x+y=0$ 恰有一個交點？

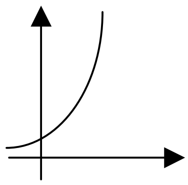
(A)$y=2^x$ (B)$y=2^{-x}$ (C)$y=2^{|x|}$ (D)$y=-2^{-x}$ (E)$y=x^2$。

(2) (如圖)為某池塘中布袋蓮蔓延的面積與時間的關係圖，假設其關係為指數函數，試問下列何者為真？
(A)此指數的底數為 2 (B)在第 5 月時，布袋蓮的面積就會超過 $30m^2$ (C)布袋蓮從 $4m^2$ 蔓延到 $12m^2$ 只需 1.5 個月 (D)設布袋蓮蔓延到 $2m^2$，$3m^2$，$6m^2$，所需的時間分別為 t_1，t_2，t_3，則 $t_1+t_2=t_3$ (E)布袋蓮在第 1 到第 3 個月之間蔓延平均速度等於第 2 到第 4 個月之間蔓延平均速度。
(87 學科)

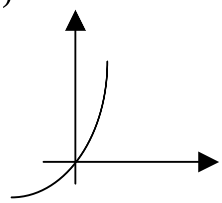


(3) 若 $a>0$ 且 $a\neq1$,則下列何者可能是指數函數 $y=a^x$ 的部分圖形？

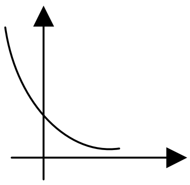
(A)



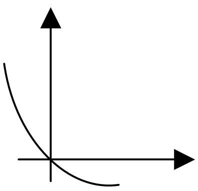
(B)



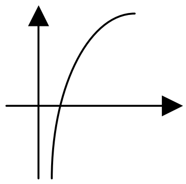
(C)



(D)



(E)



(87 社)

(4) 觀察相關的圖形，判斷下列選項何者為真？

(A)$10^x=x$ 有實數解。 (B)$10^x=x^2$ 有實數解。 (C)x 為實數解時，$10^x>x$ 恆成立。
(D)$x>0$ 時，$10^x>x$ 恆成立。 (E)$10^x=-x$ 有實數解。 (91 學科能力測驗)

(5) $y=x^2$ 與 $y=2^x$ 有幾個交點？

(6) 試問下列各函數的圖形與 $y=3^x$ 之圖形有何關係？

(a)$y=3^{x-2}$ (b)$y=9\cdot3^x+3$ (c)$y=1-3^x$

(7) 假設世界人口自 1980 年起，50 年內每年增長率均固定。已知 1987 年世界人口達 50 億，1999 年第 60 億人誕生在賽拉佛耶。根據這些資料推測 2023 年世界人口數最接近下列哪一個數？

(A) 75 億(B) 80 億(C) 86 億(D) 92 億(E) 100 億 (89 學科)

(8) 下列五數中，何者為最小？(A) $2^{\frac{1}{3}}$ (B)$(\frac{1}{8})^{-2}$ (C) $2^{\frac{-1}{4}}$ (D) $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ (E) $8^{\frac{-1}{3}}$ (88 學科)

(9) 設 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$。下列選項何者為真？

(A) $a>b>c$ (B) $a<b<c$ (C) $a=c>b$ (D) $a=c<b$ (E) $a=b=c$ (90 學科)

(10) 試比較下列各數之大小順序\：

(a) $a=(0.6)^{\sqrt{2}}, b=(0.6)^{\sqrt{3}}, c=(0.6)^{-\sqrt{2}}, d=(0.6)^{-\sqrt{3}}, e=(0.6)^{1.4}$

(b) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[6]{30}$

(11) 解 $3^{2x}+3^{x-2}>3^{x+2}+1$。

(12) x 為實數，若 $(0.25)^{3x^2}<(0.5)^{10x+4}$，則 x 的範圍為何？

(13) 請問方程式 $|x|=2^{-|x|}$ 的實數解有幾個？

進階問題

(14) 下列哪一個函數，滿足 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)], x_1\neq x_2$

(A) $f(x)=2^x$ (B) $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ (C) $f(x)=2^x+2^{-x}$

(15) 已知 $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$，且 $x\neq0$，則以 $f(x)$ 表 9^x 得______，又 $f(a)=\frac{5}{4}$，則 a=____。

(16) 設 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$，$x$ 為非零的實數，若 $f(a)=2$，$f(b)=3$，則 $f(a+b)$=？

(17) 若 $f(x)=2^{x+1}+2^{-2x+1}-7(2^x+2^{-x})+9$

(a)若 $t=2^x+2^{-x}$，試以 t 表 $f(x)$。

(b)若 $f(x)<0$，求 t 的範圍。

綜合練習解答

(1) (A)(D)

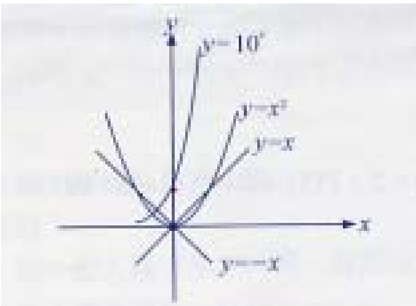
(2) (A)(B)(D)

(3) (A)(C)

(4) (B)(C)(D)(E)

[解法]：若 $f(x)=g(x)$ 有實數解 $\Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ 兩圖形有交點

畫出 $y=10^x$，$y=x$，$y=x^2$，$y=-x$ 之圖形如右



可知：(A) $10^x=x$ 沒有實數解

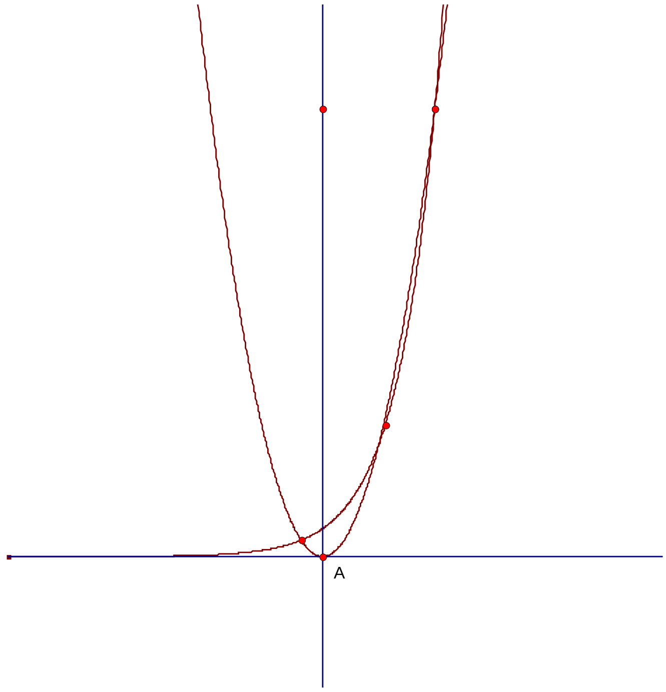
(B) $10^x=x^2$ 恰有一負實數解

(C) $10^x>x$，$\forall x\in R$ 均成立

(D) $10^x>x^2$，$x>0$ 均成立

(E) $10^x=-x$ 有實數解

(5) 3 個(提示：$x \geq 4$，$2^x \geq x^2$)
如右圖所示



(6) (a) $y=3^{x-2}$ 的圖形是由 $y=3^x$ 之圖形向右平行移動 2 單位得到的。(b) $y=9\cdot3^x+3$ 的圖形是由 $y=3^x$ 之圖形向左平行移動 2 單位之後，再向上移動 3 單位得到的。。(c) $y=1-3^x$ 的圖形是由 $y=3^x$ 之圖形先對 x 軸取對稱，再向上平行移動 1 單位得到的。

(7) (C)

(8) (E)

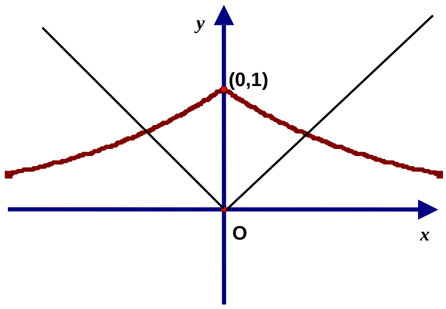
(9) (C)

(10) (a) $b<a<e<c<d$ (b) $\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}<\sqrt[6]{30}<\sqrt[4]{10}$

(11) $x>2$

(12) $x>2$ 或 $x<\frac{-1}{3}$

(13) 2 個[解法]：
如圖，可知有 2 個實數解。



(14) (A)(B)(C)

(15) $\frac{f(x)+1}{f(x)-1}$ ，$a=1$

(16) $\frac{7}{5}$ (提示：$f(x)=\frac{2^{2x}+1}{2^{2x}-1}$，用 $f(x)$表示 2^{2x}。)

(17) (a)$2t^2-7t+5$ (b)$2\leq t<\frac{5}{2}$