# §3–3 倍角公式

## (甲)倍角公式

(1)二倍角公式：

由和角公式：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$，令$\alpha=\beta=\theta$，可得

(a)$\boxed{\sin2\theta=2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta}$

由和角公式：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$，令$\alpha=\beta=\theta$，可得

(b)$\boxed{\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta}$

由和角公式：$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$，令$\alpha=\beta=\theta$，可得

(c)$\boxed{\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$

[注意]：根據公式(b) $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$，可知已知$\theta$的正弦值、餘弦值，可得 $2\theta$ 的餘弦值。

另一方面，若已知$\alpha$的餘弦值，就可得$\dfrac{\alpha}{2}$的正弦值、餘弦值。

例如：已知$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，請求出$\cos2\theta=$？

根據$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2(\dfrac{2}{3})^2-1=\dfrac{-1}{9}$

已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，且$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，試求$\cos\dfrac{\alpha}{2}=$？

根據(b)令 $2\theta=\alpha$，可得$\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1$

所以$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{5}{6}\Rightarrow\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}\Rightarrow\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{5}{6}}$

結論：我們整理倍角公式如下：

(a)$\sin2\theta=2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$

(b)$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

(c)$\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

(d) $\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

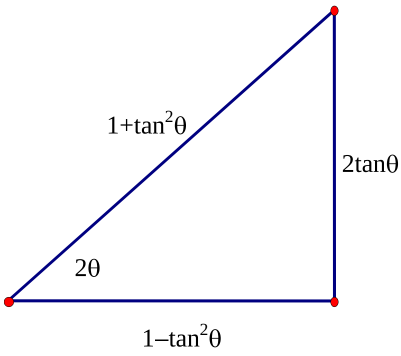
(e)$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$，$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$

(2)以正切表示二倍角

$$\boxed{\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}}$$

證明：

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\ \cos^2\theta=2\tan\theta(\dfrac{1}{\sec^2\theta})=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$




$$\boxed{\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}$$

證明：

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{2}{\sec^2\theta}-1=\dfrac{2}{1+\tan^2\theta}-1=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

結論：利用tanθ可以將sin2θ，cos2θ，tan2θ表示出來，整理如下：

(a) $\sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$　(b) $\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$　(c) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

[討論]：

利用tanθ 來表示sin2θ、cos2θ、tan2θ，主要是將sinθ、cosθ、tanθ表示成分式的形式，即$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$，其中$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$爲任意實數，可以應用於求某些三角函數的積分。

(3)三倍角公式

(a)$\boxed{\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta}$

證明：

$\sin 3\theta=\sin(\theta+2\theta)=\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta$

$=\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+\cos\theta(2\sin\theta\cos\theta)$

$=\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta\cos^2\theta$

$=\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta(1-\sin^2\theta)$

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(b)$\boxed{\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta}$

證明：

$\cos 3\theta=\cos(\theta+2\theta)=\cos\theta\cos 2\theta-\sin\theta\sin 2\theta$

$=\cos\theta(2\cos^2\theta-1)-\sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)$

$=\cos\theta(2\cos^2\theta-1)-2\sin^2\theta\cos\theta$

$=\cos\theta(2\cos^2\theta-1)-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

[例題1] 已知 $\tan\theta=\frac{-3}{4}$ 且 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，求 $\cos2\theta$、$\tan2\theta$、$\sin\frac{\theta}{2}$、$\tan\frac{\theta}{2}$ 的值。

Ans：$\cos2\theta=\frac{7}{25}$、$\tan2\theta=\frac{-24}{7}$、$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$、$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{-1}{3}$

[例題2] 試求 $\sin\frac{\pi}{8}$，$\cos\frac{\pi}{8}$，$\tan\frac{\pi}{8}$ 之值。Ans：$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$，$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$，$-1+\sqrt{2}$

[例題3] 若 $3\cdot\sin2\theta+2\cos2\theta=3$，求 $\tan\theta$ 之值。 Ans：1 或 $\frac{1}{5}$

[例題4] 設 $\sin2\theta=\frac{-3}{5}$，$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{4}$，試求下列之值：

(1)$\sin\theta-\cos\theta$ (2)$\cos^4\theta-\sin^4\theta$ (2)$\tan\theta+\cot\theta$ (3)$\sin^6\theta+\cos^6\theta$

Ans：(1)$\sqrt{\frac{8}{5}}$ (2)$\frac{-4}{5}$ (2)$\frac{-10}{3}$ (3)$\frac{73}{100}$

結論：

底下是一些有用的公式：

(a)$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$　　　(b)$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

(c)$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

(d)$\sin^6\theta+\cos^6\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3-3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

(e)$\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin2\theta}$

(f)$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta\pm2\sin\theta\cos\theta=1\pm\sin2\theta$

[例題5] 已知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$ 求 $\cos3\theta=$？Ans：$\dfrac{-117}{125}$

(練習1) 設$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$且 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，求 $\sin2\theta$及 $\sin\dfrac{\theta}{2}$、$\sin3\theta$的值。

Ans：$\sin2\theta=\dfrac{-24}{25}$，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$、$\sin3\theta=\dfrac{117}{125}$

(練習2) $\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，則 $\sin\dfrac{\theta}{2}=$____，$\cos\dfrac{\theta}{2}=$____。Ans：$\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ ，$\dfrac{-1}{\sqrt{10}}$

(練習3) 設$\cos2\theta=t$，試以$t$表示 $4(\cos^6\theta-\sin^6\theta)=$？ Ans：$t^3-3t$

(練習4) 設$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ，且 $3\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta=0$，

則$\sin2\theta+\cos2\theta=$_____。Ans：$\frac{-7}{13}$

(練習5) 設 $\sin x=3\cos x$， 則 $\cos2x=$______，$\sin2x=$______。Ans：$\frac{-4}{5}$，$\frac{3}{5}$

(練習6) 試求$\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$的值。Ans：$\frac{3}{2}$

(練習7) $\frac{-\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$， 且$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$，

則(1)$\sin2\theta=$____ (2)$\cos2\theta=$_____，(3)$\sin^3\theta+\cos^3\theta=$_____。

Ans：(1)$\frac{-15}{16}$(2)$\frac{\sqrt{31}}{16}$ (3)$\frac{47}{128}$

(練習8) 若$\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$，$\sin2\theta=a$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$__________。Ans：$-\sqrt{1-a}$

## (乙)倍角公式的應用

[例題6] 試求$\sin18^\circ$的值。 Ans：$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

[例題7] 求$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$之積。 Ans：$\frac{-1}{16}$

(練習9) 利用$\sin 18^\circ$的值求出$\cos 36^\circ$的值。Ans：$\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

(練習10) 設$f(x)=4x^3-3x+1$，則$f(x)$被$x-\sin\dfrac{\pi}{9}$除後所得的餘式=______。

Ans：$1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (提示：利用三倍角公式與餘式定理)

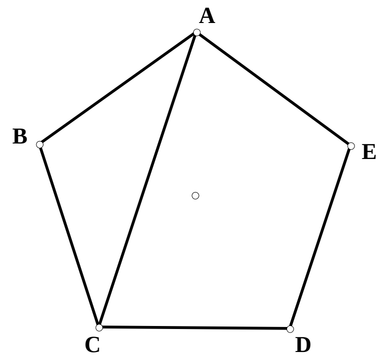
(練習11) 求下列的值：

(1)$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ (2)$\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{3\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7}$ Ans：(1)$\dfrac{1}{8}$ (2)$\dfrac{-1}{8}$

(練習12) 如圖，假設正五邊形的邊長為 $a$，

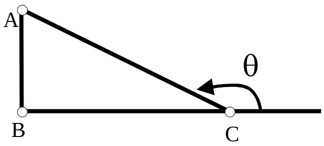
請求出對角線$\overline{AC}$的長度。Ans：$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$

註：$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$**稱為黃金比例數**



# 綜合練習

(1) 如圖，θ爲一個有向角，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=5$，則 $\sin2\theta=$____。




(2) 設 $\cos\theta=\frac{3}{5}$且$\frac{3\pi}{5}<\theta<2\pi$，求(a)$\sin2\theta$　(b)$\sin3\theta$　(c)$\cos\frac{\theta}{2}$

(3) 設 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，且$\cos\alpha=\frac{11}{61}$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$，請求出

(a)$\cos(\alpha-\beta)$　(b)$\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$　(c)$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$。

(4) 下列何者爲 $8x^3-6x+1=0$ 之根？　(A) $\sin10^\circ$(B) $\sin30^\circ$(C) $\sin130^\circ$　(D) $\sin160^\circ$　(E)$\sin250^\circ$。

(5) 設 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,若 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos\beta=\frac{5}{13}$則(A)$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ (B)$\tan(\alpha-\beta)=\frac{-16}{63}$(C)$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (D)$\sin2\beta=\frac{120}{169}$

(6) 求$y=2\sin^2x$的週期。

(7) 化簡$\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=$____。

(8) 化簡$-\cos^2\theta+\cos^2(\frac{\pi}{6}+\theta)+\cos^2(\frac{\pi}{6}-\theta)=$____。

(9) 若 $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，請計算 $\sin2(x-\frac{\pi}{4})=$？

(10) 設 $\tan\frac{\theta}{2}=x$，試以 $x$ 表示 $\cos2\theta$。

(11) 設 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，求 $\tan\frac{\theta}{2}$之值。

(12) 設 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，試化簡$\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}$。

(13) 設$x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+1=0$ 有一根 $2+\sqrt{3}$，求$\sin2\theta=$____。

(14) $2x^2+ax-1=0$ 有一根爲$\sin30^\circ+\cos30^\circ$，求$a$的值。

(15) 以$x-\cos40^\circ$除$f(x)=3x-4x^3$之餘式爲__________。

(16) 化簡$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$。

(17) 設$\pi<x<2\pi$，化簡$\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}$。

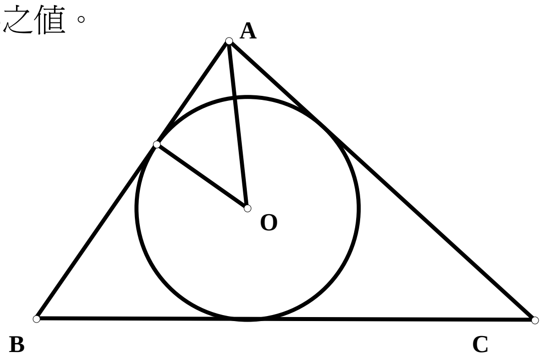
# 進階問題

(18) 求$\sin^6x+\cos^6x$的範圍。

(19) 設 sinα+sinβ=1，cosα+cosβ=0，求 cos2α+cos2β之值。

(20) ΔABC 中，BC=$a$，CA=$b$，AB=$c$，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，

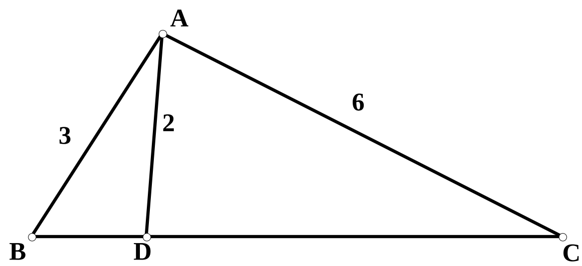
試證：$\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$




(21) 在右圖ΔABC 中，$\overline{AB}=3$,$\overline{AC}=6$,$\overline{AD}=2$，且∠BAD=θ，∠DAC=2θ ：

(a)利用ΔABC 之面積=ΔABD 面積+ΔADC 面積，以θ之三角函數列出方程式。

(b)試利用(a)的結果求 cosθ 之值。




(22) 設α,β為 $a\cos x+b\sin x+c=0$ 的相異二根，$a\neq0$，$-\pi<\alpha,\beta<\pi$

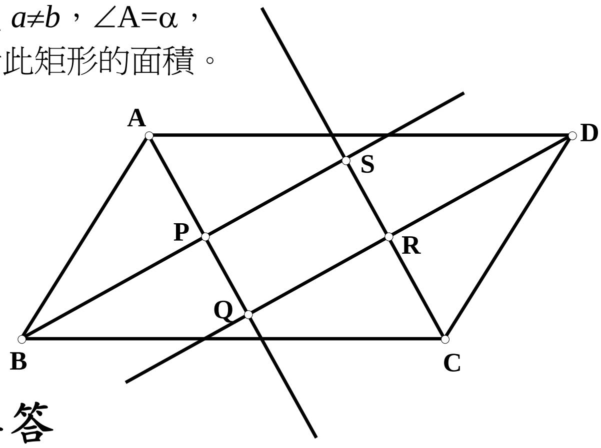
(a)令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$，試將上述方程式化成 $t$ 的方程式。

(b)求 $x$ 在$-\pi$與$\pi$之間有二實根的條件。

(c)求 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 之值。

(23) 平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=a$，$\overline{AD}=b$，且 $a\neq b$，∠A=α，

其內角平分線圍成一矩形，試以 $a,b,\alpha$表示此矩形的面積。




## 綜合練習解答

(1) $\dfrac{-20}{29}$

(2) (a)$\dfrac{-24}{25}$ (b)$\dfrac{-44}{125}$ (c)$\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$

(3) (a)$\dfrac{273}{305}$ (b)$\dfrac{16}{305}$ (c)$\dfrac{49}{305}$

(4) (A)(C)(E)

(5) (B)(C)(D)

(6) $\pi$

(7) $\frac{3}{2}$

(8) $\frac{1}{2}$

(9) $2-\sqrt{5}$

(10) $\cos 2\theta = \frac{1-6x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}$ [提示：因爲$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$t=\tan\frac{\theta}{2}$，所以$\cos\theta=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ，再利用$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$，求出$\cos 2\theta = \frac{1-6x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}$ ]

(11) $\sqrt{2}-1$

(12) $2\sin\frac{\alpha}{2}$ [提示：$1+\sin\alpha=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2})^2$ ，$1-\sin\alpha=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2})^2$]

(13) $\frac{1}{2}$

(14) $-2$

(15) $\frac{1}{2}$

(16) $\frac{1}{16}$ (Hint： $\cos\frac{3\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ )

(17) $\sqrt{2}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})$ [提示：利用$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=1-2\sin^2\frac{x}{2}$]

(18) $\frac{1}{4}\le \sin^6 x+\cos^6 x \le 1$ [提示：$\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}(\sin 2x)^2$]

(19) 1[提示：$\sin\alpha=1-\sin\beta$，$\cos\alpha=-\cos\beta$，兩式平方相加可得 $\sin\beta=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2}$ 再計算 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta$]

(20) [提示：$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{r^2}{OA^2}$，因爲$r=\frac{\Delta}{s}$ 所以$r^2=\frac{1}{s^2}\cdot s(s-a)(s-b)(s-c)$ $=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$，$OA^2=r^2+(s-a)^2=\frac{(s-a)[(s-b)(s-c)+s(s-a)]}{s}$，$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{r^2}{OA^2}=\frac{(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)+s(s-a)}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$]

(21) (a)$3\sin 3\theta=\sin\theta+2\sin 2\theta$ (b)$\frac{1+\sqrt{13}}{6}$

(22) (a)$(c-a)t^2+2bt+(a+c)=0$ (b)$a^2+b^2\ge c^2$ (c)$\frac{b}{a}$

(23) $\frac{1}{2}(b-a)^2\sin\alpha$ [提示：$BS=BC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=b\sin\frac{\alpha}{2}$，$BP=BA\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ $=a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$

$PS=BS-BP=(b-a)\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$AQ=AD\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$AP=AB\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$PQ=AQ-AP=(b-a)\cos\dfrac{\alpha}{2}$，故矩形面積$=PS\cdot PQ=\dfrac{1}{2}(b-a)^2\sin\alpha$。]