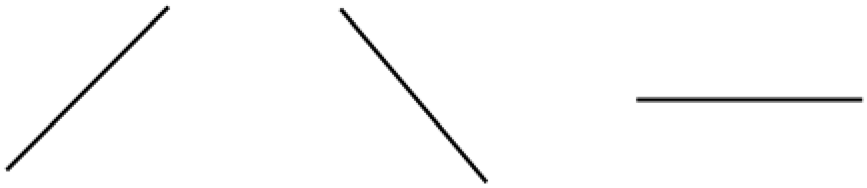
坐標幾何

重點整理

一、直線方程式

(1)直線的斜率

向右移動 a 單位，上升 b 單位，斜率$=\frac{b}{a}$，向右移動 a 單位，下降 b 單位，斜率$=\frac{-b}{a}$



斜率爲正　　斜率爲負　　斜率爲 0

(a)直線斜率的絕對值代表傾斜程度：傾斜程度愈大，則其斜率的絕對值也愈大。

(b)平行與垂直：設直線 L_1、L_2 的斜率為 m_1、m_2

若 $L_1//L_2$，則 $m_1=m_2$。

若 $L_1\perp L_2$，則 $m_1\cdot m_2=-1$。

(c)斜角與斜率：斜率=斜角的正切值。(當斜角$\neq 90^\circ$)

(2)直線的方程式：

兩個條件(點與方向)決定一條直線的方程式

(a)$y-y_0=m(x-x_0)$　　(b)$y=mx+b$

(c)$ax+by=c$　斜率為$-\frac{a}{b}$　$b\neq 0$，法向量 $\overrightarrow{n}=(a,b)$

(d)參數式：

直線 L 的方向向量 $\overrightarrow{l}=(a,b)$，L 過 $P(x_0,y_0)$，則 L 的參數式：$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$，$t$ 為任意實數。

(3)直線的交角與點到直線的距離：

(a)直線的交角

若設 L_1，L_2 為平面上之兩相交的直線，L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$

L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$，設兩直線的法向量夾角為α，

則兩直線的交角為α，$180^\circ-\alpha$。

(b) 點到直線的距離：

一定點 $P(x_0,y_0)$到一直線 L：$ax+by+c=0$ 之距離為$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

二、坐標平面上圓的方程式

(A)圓的方程式：

圓：平面上與一定點 O 等距離 r 的所有點所成的圖形。其中 O 為圓心，r 為半徑。

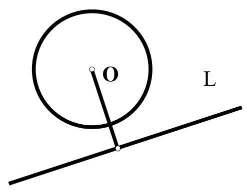
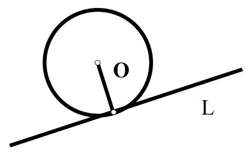
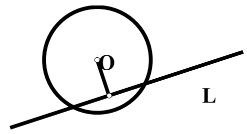
(1)圓的方程式：

標準式：圓心(a,b)，半徑 r 的圓 $\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

直徑式：圓直徑的二端點(x_1,y_1)，$(x_2,y_2) \Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

一般式：$x^2+y^2+ax+by+c=0$

(B)圓與直線的關係：

圖示			
圓與直線的關係	相離 d(O,L)>半徑	相切 d(O,L)=半徑	相割 d(O,L)<半徑
交點數	0	1	2
坐標幾何	$\begin{cases} \text{L：}ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+dx+ey+f=0 \end{cases}$ 無解	$\begin{cases} \text{L：}ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+dx+ey+f=0 \end{cases}$ 恰有一解	$\begin{cases} \text{L：}ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+dx+ey+f=0 \end{cases}$ 有兩組相異解

(1)圓切線的性質：

(a)圓的切線中，除了切點 P 之外，其餘的點都在圓的外部。

(b)圓心與切點的連線必垂直於切線。

(c)圓心到切線的距離等於半徑。

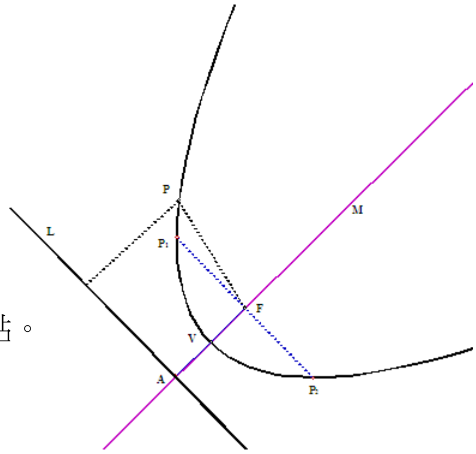
(2)切線的求法：

求圓的切線均可利用「圓心到切線的距離等於半徑」、「圓心與切點的連線必垂直於切線」這些觀念去解決。

三、圓錐曲線：

(A)圓錐曲線的基本定義

(1)拋物線、橢圓、雙曲線的定義：



P 點在拋物線上$\Leftrightarrow d(\mathrm{P},\mathrm{L})=\overline{\mathrm{PF}}$，L 為準線、F 為焦點。

P 點在橢圓上 $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathrm{PF_1}}+\overline{\mathrm{PF_2}}=2a$，$\overline{\mathrm{F_1F_2}}<2a$，$\mathrm{F_1}$、$\mathrm{F_2}$ 為焦點。

P 點在雙曲線上 $\Leftrightarrow$ $|\overline{\mathrm{PF_1}}-\overline{\mathrm{PF_2}}|=2a$，$\overline{\mathrm{F_1F_2}}>2a$，$\mathrm{F_1}$、$\mathrm{F_2}$ 為焦點。

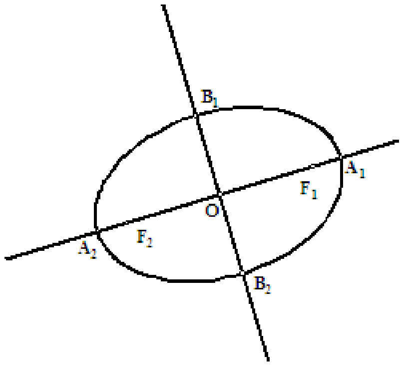
(B)圓錐曲線的基本定義性質

(1)拋物線的基本性質：

(a)設對稱軸與準線的交點為 A，則頂點 V 為$\overline{\mathrm{AF}}$的中點。

(b)拋物線的正焦弦長為焦距的 4 倍。

(2)橢圓的基本性質：



(1°) a,b,c 的意義：

a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離$=\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{PF_1}}+\overline{\mathrm{PF_2}})$

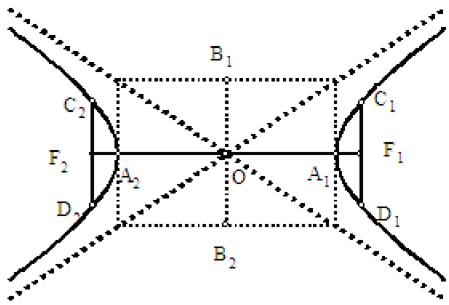
b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離

$c=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{FF'}}$=中心到焦點之距離

(2°) $\boxed{a^2=b^2+c^2}$

(3°) $\boxed{\text{橢圓的正焦弦長}=\frac{(\text{短軸長})^2}{\text{長軸長}}=\frac{2b^2}{a}\text{。}}$

(3)雙曲線的基本性質；



(1°)a,b,c 的意義：

a=貫軸長之半=中心到貫軸頂點(頂點)之距離$=\frac{1}{2}|\overline{\mathrm{PF_1}}-\overline{\mathrm{PF_2}}|$

b=共軛軸長之半=中心到共軛軸頂點之距離

$c=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{FF'}}$=中心到焦點之距離

(2°)$\boxed{c^2=a^2+b^2}$

(3°) $\boxed{\text{雙曲線的正焦弦長為}\ \frac{(\text{共軛軸長})^2}{\text{貫軸長}}=\frac{2b^2}{a}\text{。}}$

(4°)兩漸近線的交點為雙曲線的中心。

(5°)以 $\mathrm{L_1}$、$\mathrm{L_2}$ 為漸近線的雙曲線，兩對稱軸為 $\mathrm{L_1}$、$\mathrm{L_2}$ 的角平分線。

(6°)等軸雙曲線：漸近線互相垂直的雙曲線稱為等軸雙曲線。

標準式為等軸雙曲線$\Leftrightarrow$ 中央矩形為正方形$\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow$ 貫軸長=共軛軸長

(7°)共軛雙曲線：

雙曲線Γ_1與Γ_2互為共軛雙曲線

$\Leftrightarrow\Gamma_1$與Γ_2有相同的漸近線且Γ_1的貫軸、共軛軸分別為Γ_2的共軛軸與貫軸。

(C)圓錐曲線的標準式：

(1)標準式：

(A)拋物線：

$(y-k)^2=4c(x-h)$的特徵：

(a)$c>0$，開口向右；$c<0$，開口向左。(b)焦距$=|c|$，正焦弦長$=4|c|$。(c)頂點(h,k)

$(x-h)^2=4c(y-k)$的特徵：

(a)$c>0$，開口向上；$c<0$，開口向下。(b)焦距$=|c|$，正焦弦長$=4|c|$。(c)頂點(h,k)

(B)橢圓：

$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$(**橫臥的橢圓**)的特徵：

(1°)中心(h,k)

(2°)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離$=\frac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

橢圓方程式$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$(**直立的橢圓**)的特徵：

(1°)中心(h,k)

(2°)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離$=\frac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

(C)雙曲線：

$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ **(左右開口的雙曲線)的特徵：**

(1°)中心(h,k)

(2°)a=貫軸長之半=中心到貫軸頂點之距離$=\frac{1}{2}(\overline{PF_1}-\overline{PF_2})$。

b=共軛軸長之半=中心到共軛軸頂點之距離。

雙曲線方程式 $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$ **(上下開口的雙曲線)的特徵：**

(1°)中心(h,k)

(2°)a=貫軸長之半=中心到貫軸頂點之距離$=\frac{1}{2}(\overline{PF_1}-\overline{PF_2})$。

b=共軛軸長之半=中心到共軛軸頂點之距離。

四、空間中的直線與平面：

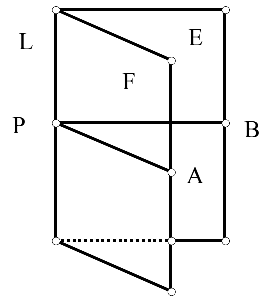
(A)基本空間概念：

(1)三垂線定理：

一平面 E 及其上一條直線 L，又平面外一點 A，若直線 AB 垂直於平面 E 點 B，且$\overline{BC}$與直線 L 垂直於點 C，則直線 AC 也與直線 L 垂直於點 C。

(2)二面角的意義：

若兩個平面 E、F 的交線 L 上取一點 P，分別在 E、F 上作兩射線 PA、PB，其中射線 PA、PB 分別與 L 垂直，則∠APB 稱為 E、F 兩平面的二面角。



(B)空間中的平面與直線的表示法：

(1)平面方程式：

求空間中平面方程式的要點：

掌握法向量$\vec{n}$，平面上的一點 P，即可用點法式去表示平面方程式。

(a)點法式：

已知平面 E 的$\vec{n}=(a,b,c)$，過 $P(x_0,y_0,z_0) \Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

(b)一般式：$ax+by+cz+d=0$， 法向量$\vec{n}=(a,b,c)$。

(2)空間中的直線方程式：

求直線表示法的原則：掌握方向向量與直線上的一點，如果牽扯到直線的計算，通常參數式會派上用場，而如果只是表示直線的型式，則三種表示皆可。

(a)參數式：

已知直線 L 的方向向量$\vec{l}=(a,b,c)$，過 $P(x_0,y_0,z_0)$的參數式為$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt, t\in R \\ z=z_0+ct \end{cases}$。

(b)比例式：

已知直線 L 的方向向量$\vec{l}=(a,b,c)$其中 $abc\neq 0$，過 $P(x_0,y_0,z_0)$的比例式為

$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ 。

已知直線 L 的方向向量$\vec{l}=(a,b,0)$其中 $ab\neq 0$，過 $P(x_0,y_0,z_0)$

的對稱比例式為$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$，$z=z_0$。

(c)二面式：$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ mx+ny+lz+k=0 \end{cases}$，表示直線為兩平面的交線。

(C)空間中平面與平面、平面與直線、直線與直線的關係：
當它們有交點或交線時，可求其交點、交線與交角；
當它們沒有交點時，可求它們的距離。

(1)兩平面的關係：
設二平面 E_1:$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，E_2:$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

法向量分別為 $\overrightarrow{n_1}=(a_1,b_1,c_1)$、$\overrightarrow{n_2}=(a_2,b_2,c_2)$

(a)重合、平行⇒ $\overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2}$

(b)相交於一直線⇒ $\overrightarrow{n_1}$ 不與 $\overrightarrow{n_2}$ 平行。

(c) $E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$

(d)若設兩平面的法向量 $\overrightarrow{n_1}$ 、$\overrightarrow{n_2}$ 的夾角為 α，則平面 E_1 與 E_2 的交角為 α，$\pi-\alpha$。

(2)直線 L 與平面 E 的關係：

直線 L：$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt, t\in R \\ z=z_0+ct \end{cases}$，平面 E：$px+qy+r=0$，將 L 的參數式代入平面 E 的方程式

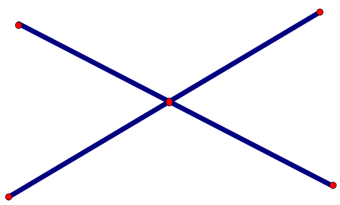
(1°)代數觀點：
參數 t 有唯一解，則直線 L 與平面 E 只有一個交點，若是 t 無解，則可知 L 與 E 無交點；要是 t 有無限多個解，則 L 在平面 E 上。

(2°)幾何觀點

判別平面 E 與直線 L 的相交情形，亦可用法向量 $\overrightarrow{n}$ 與方向向量 $\overrightarrow{l}$ 來判別。

(a) $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{l}$ ⇒直線 L 與平面 E 平行或重合。

(b) $\overrightarrow{n}$ 與 $\overrightarrow{l}$ 不垂直⇒直線 L 與平面 E 交於一點。



(3)兩直線的關係：
兩直線的關係：

(1°)方向向量平行：重合、平行

(2°)方向向量不平行：相交於一點、歪斜。

(D)距離問題：

(1)點 P(x_0,y_0,z_0)到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距離為$\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

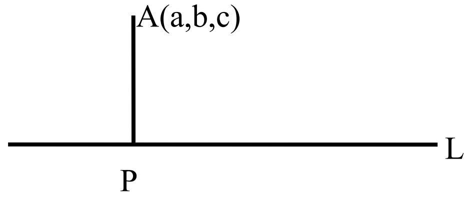
(2)若兩平行平面 E_1：$ax+by+cz+d_1=0$，E_2：$ax+by+cz+d_2=0$，

則兩平面 E_1、E_2 的距離 $d(E_1,E_2)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

(3)點到直線的距離：

取 L 的參數式，利用 $\overrightarrow{AP}\perp$L 的方向向量求 P，

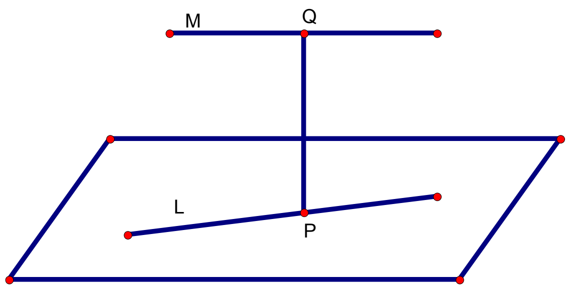
而$|\overrightarrow{AP}|$即為點 P 到 L 的距離。

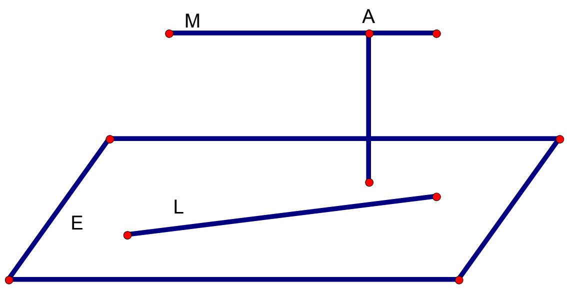


(4)二歪斜線的距離：

(法一)：求 L，M 之公垂線 N 與 L,M 的交點 P,Q 則 L,M 的距離為$\overline{PQ}$。

(法二)：先求一平面 E 包含直線 L，且平行 L，在取 M 上一點 A，求 A 點到 E 的距離，即為 L,M 的距離





五、線性規劃

(A)二次不等式

二元一次不等式的解區域：

二元一次不等式是指 $ax+by+c>(<,\geq,\leq)0$ 這種形式的不等式。

二元一次不等式 $ax+by+c>(<,\geq,\leq)0$ 的**解區域**，即為所有滿足該不等式的解(x_0,y_0)所形成的**圖形**。

(B)如何判別兩點在一直線的同側或異側？

原理：

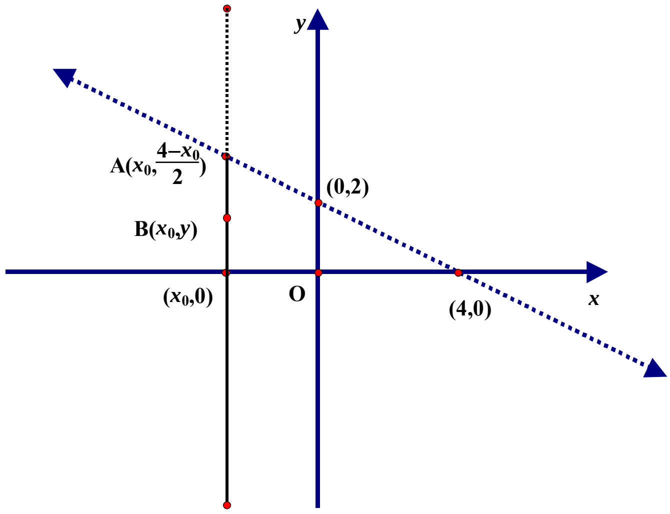
設 L：$px+qy+r=0$，P(x_1,y_1)、Q(x_2,y_2)，

(a)若 P、Q 兩點在直線 L 的異側，則$(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)<0$。

(b)若 P、Q 兩點在直線 L 的同側，則$(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)>0$。

例題：
請在座標平面上畫出滿足 $x+2y-4<0$ 的點(x,y)所形成的區域？
[解法一]：
如右圖，考慮鉛直線 $x=x_0$，它與 $x+2y-4=0$ 的交點為
$A(x_0,\frac{4-x_0}{2})$，又在 A 點正下方設 $B(x_0,y)$

很顯然 $y<\frac{4-x_0}{2}$ $\Rightarrow x_0+2y-4<0$，因此 $B(x_0,y)$滿足
$x+2y-4<0$。
換句話說，鉛直線上落在 A 點下方的所有點(x,y)均滿足 $x+2y-4<0$。現在讓 $x=x_0$ 作變動它會通過所有 $x+2y-4<0$ 的解(x,y)，因此可以得到，滿足 $x+2y-4<0$ 的點(x,y)形成的圖形區域是直線 $x+2y-4=0$ 的下方區域。



[解法二]：
利用判別兩點在直線的同側與異側的條件，可以先代一個已知點 A(0,0)
顯然(0,0)是 $x+2y-4<0$ 的解，因此與 A(0,0)同側的點都是 $x+2y-4<0$ 的解，而與 A(0,0)異側的點都不是 $x+2y-4<0$ 的解，因此 $x+2y-4<0$ 的解(x,y)所形成的區域是與(0,0)同側的點所成的圖形，因此是直線 $x+2y-4=0$ 的下方區域。

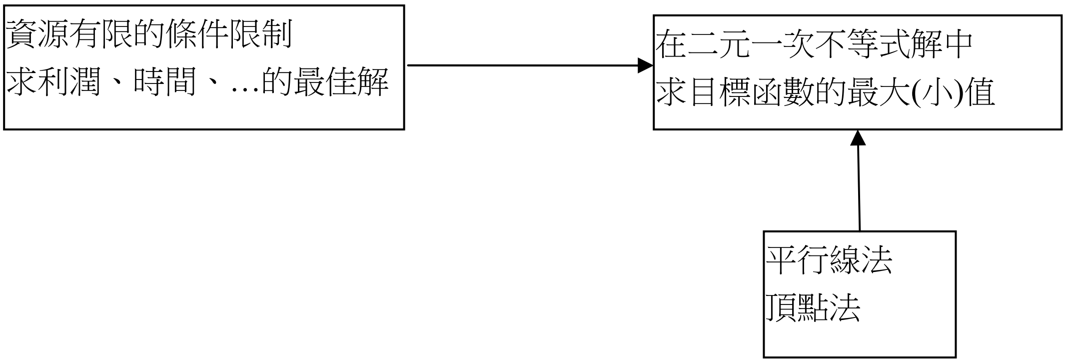
結論：設 L：$px+qy+r=0$
(a)若 P、Q 兩點在直線 L 的異側，則$(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)<0$。
若 P、Q 兩點在直線 L 的同側，則$(px_1+qy_1+r)(px_2+qy_2+r)>0$。

(b)設直線 L 將座標平面分成兩個半平面 H_1、H_2。
設$(x_0,y_0)\in H_1$ 且 $px_0+qy_0+r>0$，則對於任意點$(x,y)\in H_1$ 恆有 $px+qy+r>0$，而對於任意點$(x,y)\in H_2$，恆有 $px+qy+r<0$。

(C)線性規劃
在二元一次不等式組的限制下，尋求符合實際應用的最佳解答，這是應用數學中的一門學問，稱為**線性規劃(Linear Programming)**。
常見的有兩類：
①某些條件限制下，研究最節省的人力或物力就可完成目標。
②在一定的人力、物力限制下，創造最高的利潤。

條件的限制通常會得到二元一次不等式組，將不等式組的解畫在坐標平面上會形成一個區域，稱為可行解區域。

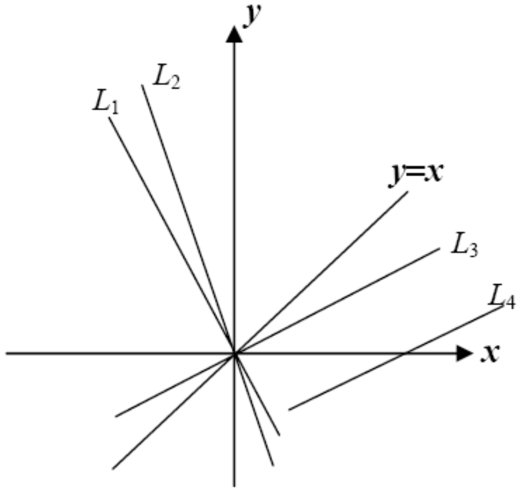
符合實際應用的條件可以寫成目標函數 $f(x,y)=ax+by+c$(其中 a,b 不全為 0)
利用平行線法與頂點法求目標函數的最大(小)值。



[例題1] 坐標平面上四條直線 L_1、L_2、L_3、L_4 與 x 軸、y 軸及直線 $y=x$ 的相關位置如圖所示，其中 L_1 與 L_3 垂直，而 L_3 與 L_4 平行。設 L_1、L_2、L_3、L_4 的方程式分別為 $y=m_1x$、$y=m_2x$、$y=m_3x$、以及 $y=m_4x+c$。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $m_3>m_2>m_1$　(2) $m_1\cdot m_4=-1$

(3) $m_1<-1$　(4) $m_2\cdot m_3<-1$　(5) $c>0$。



[答案]：(2)(3)(4)

[解答]：

(1) $m_3>0$，但 $m_2<m_1<0$，故(1)不真

(2) 因為 L_3 與 L_4 平行，且 L_1 與 L_3 垂直，
從而 L_1 與 L_4 垂直，故 $m_1\cdot m_4=-1$

(3) 因為 $0<m_3<1$，所以 $|m_1|>1$。又因為 $m_1<0$，
故 $m_1<-1$

(4) 因為 $m_2<m_1\Rightarrow m_2m_3<m_1m_3=-1$

(5) c 為 L_4 的 Y 軸截距，如附圖，顯然 $c<0$

[例題2] 設 A(3,3)、B(−1,−5)、C(6,0)及直線 L：$y=mx-8m-6$，若直線 L 與 ΔABC 相交，則求 m 的範圍。

[答案]：$-3\le m\le\frac{-1}{9}$

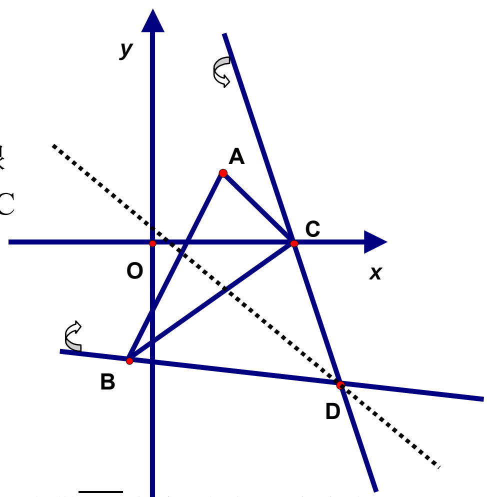
[解答]：

$y=mx-8m-6\Rightarrow y+6=m(x-8)$ 代表通過(8,−6)斜率為 m 的直線

直線 L 與 ΔABC 相交，直線 L 會從直線 DB 變化到直線 DC

因此斜率 m 在 $m_{DB}=\frac{-1}{9}$ 與 $m_{DC}=-3$ 間變化

$\Rightarrow -3\le m\le\frac{-1}{9}$。



[例題3] 坐標平面上有相異兩點 P、Q，其中 P 點的坐標為(s,t)。已知線段$\overline{PQ}$的中垂線 L 的方程式為 $3x-4y=0$，試問下列那些選項是正確的？(2007 學科能力測驗)

(1)向量$\overrightarrow{PQ}$與向量(3,−4)平行

(2)線段$\overline{PQ}$的長度等於$\frac{|6s-8t|}{5}$

(3)Q 點的坐標為(t,s)

(4)過 Q 點與直線 L 平行之直線必過點$(-s,-t)$

(5)以 O 表示原點，則向量$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$與向量$\overrightarrow{PQ}$的內積為 0

[答案]：

[解答]：

(1) 中垂線 L 的方程式為 $3x-4y=0$ ，故法向量為(3,–4)，

故(3,–4)與向量 $\overrightarrow{PQ}$ 平行

(2) 線段 $\overline{PQ}$ 的長度等於 P 點到中垂線 L 的距離之兩倍，

即 $\dfrac{|3s-4t|}{5}\times 2=\dfrac{|6s-8t|}{5}$

(3) 點 (t,s) 與點 (s,t) 對稱於直線 $y=x$

(4) 過 P 點與直線 L 平行之直線方程式為 $3x-4y=3s-4t$

過 Q 點與直線 L 平行之直線方程式為 $3x-4y=-3s+4t$

又 $3x-4y=-3s+4t$ 過點 $(-s,-t)$

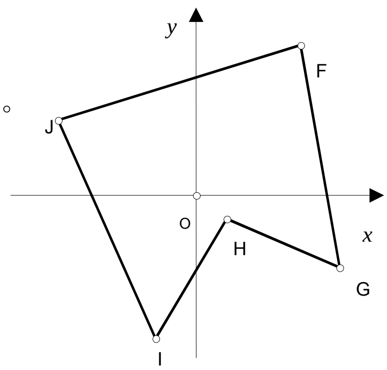
(5) 向量 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 與直線 L 的方向向量平行，且與向量 $\overrightarrow{PQ}$ 垂直，

故與向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的內積必為 0 ，選(1)(2)(3)(5)

(練習1) 如右圖，試問下列那一條直線的斜率最小？

(A)直線 FG (B)直線 GH (C)直線 HI (D)直線 IJ (E)直線 JF。

[答案]：(A)



(練習2) 已知直線 L：$2x+3y=1$，則下列那一個向量會與 L 垂直？

(A)(2,3) (B)(–2,3) (C)(3,2) (D)(3,–2) (E)(1,1)。

[答案]：(A)

(練習3) 二直線 L_1：$x-2=0$，L_2：$x=-2y+6$ 所夾鈍角為θ，則 cosθ=？

[答案]：$\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$

[例題4] 設 $P_1(1,4)$、$P_2(3,-2)$為座標平面上兩點，若 $\overline{P_1P_2}$ 為圓上的一弦，且距離圓心為 $\sqrt{10}$，則圓 C 的方程式為何？

[答案]：$(x+1)^2+y^2=20$ 或 $(x-5)^2+(y-2)^2=20$

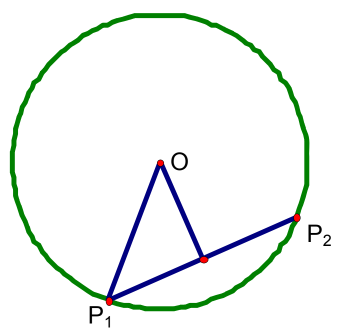
[解答]：

設圓心 $O(a,b)$，半徑 $=r$

$\because \overline{OP_1}=\overline{OP_2}$，

$\therefore (a-1)^2+(b-4)^2=(a-3)^2+(b+2)^2 \Rightarrow a-3b+1=0 \ldots\ldots(1)$

$\because \overline{P_1P_2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ 且 $\overline{P_1P_2}$ 距離 $\sqrt{10} \Rightarrow r^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2=20$



$\overline{OP_1}^2=20 \Rightarrow (a-1)^2+(b-4)^2=20$……..(2)

由(1)$a=3b-1$ 代入(2)$\Rightarrow (3b-2)^2+(b-4)^2=20 \Rightarrow b=0$ 或 $2 \Rightarrow a=-1$ 或 5

圓心為(−1,0)或(5,2)⇒圓方程式為$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$

[例題5] 設Γ：$x^2+y^2-10x+9=0$ 為坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？

(1) Γ 的圓心坐標為(5,0)

(2) Γ上的點與直線 L：$3x+4y-15=0$ 的最遠距離等於 4

(3)直線 L_1：$3x+4y+15=0$ 與Γ相切

(4) Γ上恰有兩個點與直線 L_2：$3x+4y=0$ 的距離等於 2

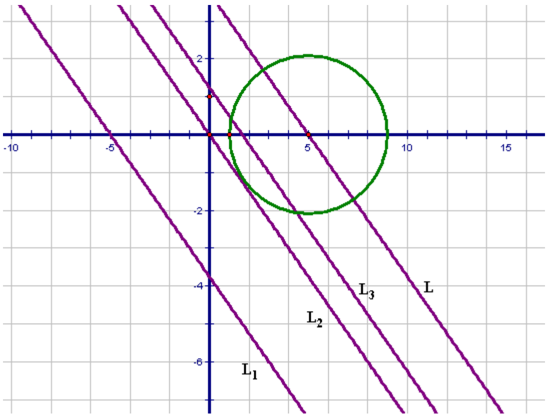
(5) Γ上恰有四個點與直線 L_3：$3x+4y-5=0$ 的距離等於 2　(2008 學科能力測驗)

[答案]：(1)(2)(4)

[解法]：Γ：$x^2+y^2-10x+9=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+y^2=16$，圓心(5,0)半徑 4

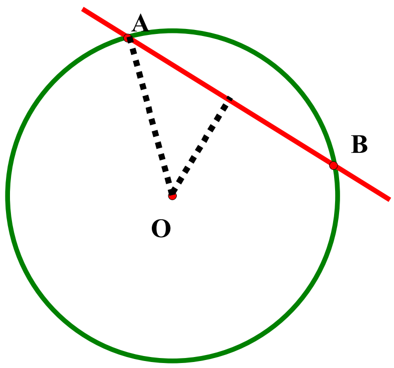
可透過畫圖與計算圓心到直線 L、L_1、L_2、L_3 的距離來判斷(2)(3)(4)(5)各選項。

故選(1)(2)(4)



[例題6] 設直線 $y=mx$ 與圓：$x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 交於 A、B 兩點，若$\overline{AB}=\sqrt{6}$，則 $m=$？

[答案]：$m=\frac{1}{3}$或-3



[解答]：

圓：$x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 配方成$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

圓心 O(2,−1)，半徑 $r=2$

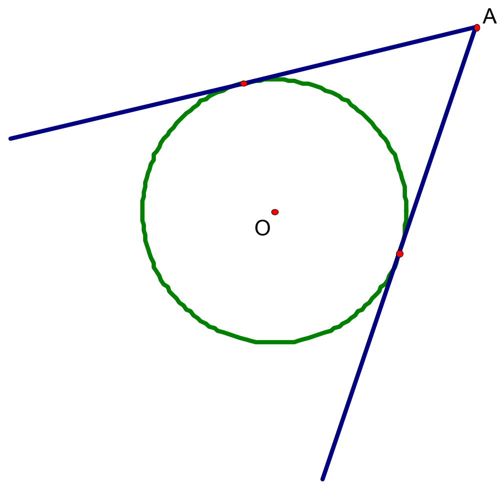
弦$\overline{AB}=\sqrt{6}$，如右圖

$\Rightarrow [d(O,\overleftrightarrow{AB})]^2=2^2-(\frac{\sqrt{6}}{2})^2=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow (\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}})^2=\frac{5}{2} \Rightarrow m=\frac{1}{3}$或$-3$。

[例題7] 求通過 A(4,2)與圓 $x^2+y^2-4x+4y-2=0$ 相切的直線。

[答案]：$y-2=\frac{1}{3}(x-4)$或 $y-2=-3(x-4)$



[解法]：

點 A(4,2)在圓外，所以會有兩條切線

設切線的斜率為 m，切線方程式為 $y-2=m(x-4)$

圓 $x^2+y^2-4x+4y-2=0$ 配方成$(x-2)^2+(y+2)^2=10$

圓心 O(2,−2)，半徑 $r=\sqrt{10}$

利用「圓心到切線距離等於半徑」的原理

$\Leftrightarrow \dfrac{|2m+2-4m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow 3^{(}+8m-3=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{3}$或$-3$

切線方程式為 $y-2=\frac{1}{3}(x-4)$或 $y-2=-3(x-4)$

(練習4) 在坐標平面上，以 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 及 $(1,-1)$ 等四個點為頂點的正方形，與圓 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 有幾個交點？

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個

[答案]：(2)

(練習5) 設一圓通過二點 A(5,1)、B(3,1)，而圓心 O 在直線 $x+2y-3=0$ 上，則此圓的方程式為何？

[答案]：$(x-4)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{13}{4}$

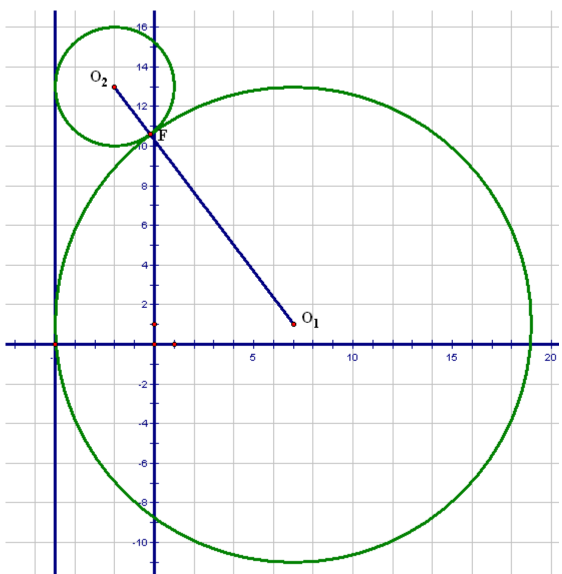
(練習6) 已知點 T(2,7)在圓 $x^2+y^2+2x-6y-15=0$ 上，試求以 T 點為切點的切線方程式。

[答案]：$3x+4y-34=0$

(練習7) 試求斜率為−1，圓 $x^2+y^2-6x-4y+5=0$ 的切線。

[答案]：$y=-x+1$ 或 $y=-x+9$

[例題8] 已知坐標平面上圓 O_1：$(x-7)^2+(y-1)^2=144$ 與 O_2：$(x+2)^2+(y-13)^2=9$ 相切，且此兩圓均與直線 L：$x=-5$ 相切。若Γ為以 L 為準線的拋物線，且同時通過 O_1 與 O_2 的圓心，則Γ的焦點坐標為________________。(化為最簡分數)



[答案]：F$(\frac{-1}{5},\frac{53}{5})$

[解法]：

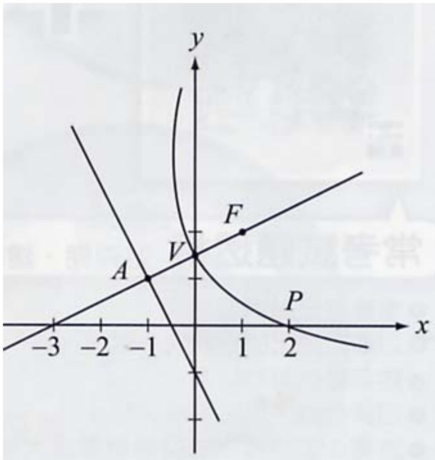
如圖，設焦點為 F，根據橢圓的定義可知

$\overline{O_1F}=d(O_1,L)=12$，$\overline{O_2F}=d(O_2,L)=3\Rightarrow$F 同時落在圓 O_1、O_2 上

根據題意，圓 O_1、O_2 相外切，因此焦點 F 為切點。

$\overline{O_1F}：\overline{O_2F}=12：3=4：1\Rightarrow F(\frac{-1}{5},\frac{53}{5})$。

[例題9] 設 k 為一常數。已知一拋物線通過點(2,0)，且焦點為(1,2)，準線為 $kx+y+1=0$，求此拋物線頂點的坐標。(2004 指定考科甲)



[答案]：$(0,\frac{3}{2})$

[解法]：拋物線Γ的焦點$F(1,2)$，準線 L：$kx+y+1=0$ 且 $P(2,0)\in\Gamma$

由定義：$\overline{PF}=d(P,L)$

$$\Rightarrow\sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2}=\frac{|2k+0+1|}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$\Rightarrow 5(k^2+1)=4k^2+4k+1\Rightarrow k=2$$

對稱軸過焦點 F 且垂直於準線 L，可知軸方程式為 $x-2y+3=0$，

軸與準線交點 $A(-1,1)$ $\overline{AF}$ 中點即為頂點，故頂點為$(0,\frac{3}{2})$。

[例題10] 坐標平面上有一個橢圓，已知在(8,4), (9,11), (15,5)和(16,12)這四個點中，有兩個是焦點，另外兩個是頂點，則此橢圓的半長軸長度等於__________。

[答案]：$\sqrt{50}$ (2003 指定考科甲)

[解法]：

設 A(8,4)、B(9,11)、C(15,5)、D(16,12)$\because m_{AD}\cdot m_{BC}=-1$

$\therefore$A、D 為焦點(或頂點)，B、C 為頂點(或焦點)

$\frac{1}{2}\overline{AD}=4\sqrt{2}$，$\frac{1}{2}\overline{BC}=3\sqrt{2}$

又 $a^2=b^2+c^2=32+18=50$，故半長軸長 $a=\sqrt{50}$。

[例題11] (圓錐曲線的標準式)

請求出滿足下列條件的圓錐曲線方程式：

(1)已知拋物線的頂點 A(1,−1)，正焦弦長 8，軸平行 x 軸。

(2)兩焦點為(−3,−1)與(−3,1)，橢圓上點到兩焦點的距離和 10，求此橢圓方程式。

(3)共軛軸在 x=1 上，焦點是(6,3)，且過點(5,3)之雙曲線方程式為何？

[答案]：(1)$(y-1)^2=\pm8(x+1)$ (2) $\dfrac{(x+3)^2}{24}+\dfrac{y^2}{25}=1$ (3) $\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

[解法]：

(1)∵軸平行 x 軸，頂點 A(1,−1)，∴可設拋物線的方程式為$(y+1)^2=4c(x-1)$
依題意正焦弦長$=4|c|=8\Rightarrow c=\pm2\Rightarrow$方程式為$(y-1)^2=\pm8(x+1)$。

(2)∵橢圓兩焦點為(−3,−1)與(−3,1)，∴所求橢圓為直立橢圓且中心為(−3,0)

令橢圓方程式$\dfrac{(x+3)^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$，依題意橢圓上點到兩焦點的距離和 10

$\Rightarrow 2a=10\Rightarrow a=5$，$2c=2\Rightarrow c=1\Rightarrow b^2=a^2-c^2=24$

橢圓方程式為$\dfrac{(x+3)^2}{24}+\dfrac{y^2}{25}=1$。

(3)∵ 共軛軸在 $x=1$ 上，焦點是(6,3)，∴此雙曲線的中心為(1,3)且左右開口

令雙曲線方程式為$\dfrac{(x-1)^2}{a^2}-\dfrac{(y-3)^2}{b^2}=1$

$c=$中心到焦點距離$=5$，又雙曲線過$(5,3)\Rightarrow\dfrac{4^2}{a^2}=1\Rightarrow a=4\Rightarrow b^2=c^2-a^2=9$

雙曲線方程式為$\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$。

[例題12] 設 E_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$(其中 $a>0$)為焦點在(3,0),(−3,0)的橢圓；E_2：焦點在(3,0)且準線為 $x=-3$ 的拋物線。已知 E_1、E_2 的交點在直線 $x=3$ 上，則 $a=$________。 (2011 學科能力測驗)

[答案]：$3+3\sqrt{2}$

[解法]：

令 $F_1(3,0)$ 、 $F_2(-3,0)$ ，E_2 的準線 L：$x=-3$，E_1、E_2 的交點為 P

∵ $\overline{PF_1}$ 為橢圓的正焦弦之半， ∴ $\overline{PF_1}=\dfrac{b^2}{a}$

又 $\overline{PF_1}=d(P,L)=6$ ，所以 $b^2=6a$ …………(1)

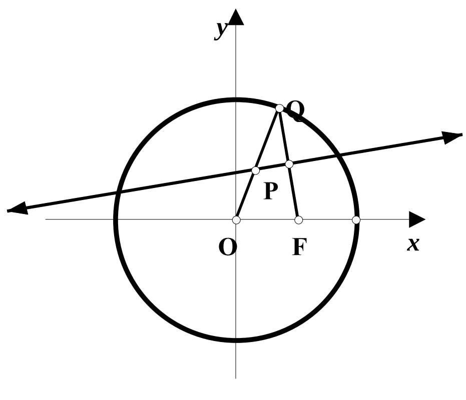
∵橢圓 E_1 的 $c=3$ ∴ $a^2=b^2+9$ …………(2)

解(1)(2)可得 $a^2=6a+9 \Rightarrow a=3+3\sqrt{2}$ $(3-3\sqrt{2}<0$ 不合$)$

[例題13] 右圖中，圓 O 的半徑為 6，F 的坐標為(4,0)， Q 在圓 O 上，

P 為$\overline{FQ}$的中垂線與$\overline{OQ}$的交點。當 Q 在圓 O 上移動時，動點 P 的軌跡方程式。

(87 學科能力測驗)



[答案]：$\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

[解法]：

$\because$ 動點 P 在$\overline{QF}$的中垂線上，$\therefore \overline{PF}=\overline{PQ}$

$\Rightarrow \overline{PO}+\overline{PF}=\overline{PO}+\overline{PQ}=\overline{OQ}=6$，又 $6>\overline{OF}$

$\Rightarrow$P 點的軌跡圖形是以 O(0,0)、F(4,0)為焦點，$2a=6$ 的橢圓。

中心(2,0)，$2a=6$，$c=2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=5$

方程式為$\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

[例題14] 坐標平面上有一雙曲線，其漸近線為 $x-y=0$ 和 $x+y=0$。關於此雙曲線的性質，請選出正確的選項。

(1)此雙曲線的方程式為$\dfrac{x^2}{r^2}-\dfrac{y^2}{r^2}=1$ 或$\dfrac{x^2}{r^2}-\dfrac{y^2}{r^2}=-1$

(2)此雙曲線的貫軸長等於共軛軸長

(3)若點(a,b)為此雙曲線在第一象限上一點，則當 $a>1000$ 時，$|a-b|<1$。

(4)若點$(a,b),(a',b')$為此雙曲線在第一象限上兩點且 $a<a'$，則 $b<b'$

(5)此雙曲線同時對稱於 x 軸與 y 軸

[答案]：(1)(2)(4)(5)

[解法]：

(1)正確，因為漸近線為 $x-y=0$ 和 $x+y=0$，所以此雙曲線的貫軸、共軛軸為鉛直線或水平線(水平線或鉛直線)，中心為漸近線交點(0,0)且兩漸近線互相垂直，所以此雙曲線為等軸雙曲線，因此此雙曲線的方程式為$\dfrac{x^2}{r^2}-\dfrac{y^2}{r^2}=1$ 或$\dfrac{x^2}{r^2}-\dfrac{y^2}{r^2}=-1$。

(2)正確，等軸雙曲線中央矩形為正方形，故此雙曲線的貫軸長等於共軛軸長。

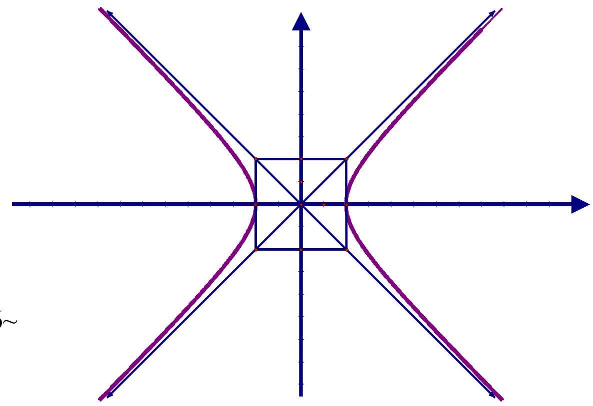
(3)錯誤，這個結果發生圖形很靠近漸近線時，會成立，不過雙曲線的圖形並不是一開始就接近漸近線。若(a,b) 點很接近貫軸頂點，那就可能會錯。例如：

若雙曲線的方程式為$\dfrac{x^2}{r^2}-\dfrac{y^2}{r^2}=1$，只要取 $a=1001$，$r=1000$，直觀來說，此時(a,b)點很接近貫軸頂點，尚未接近 $x-y=0$，因此$|a-b|$會大於 1，實際計算$|a-b|=|a-\sqrt{a^2-r^2}|=\dfrac{r^2}{a+\sqrt{a^2-r^2}}$

$=\dfrac{1000^2}{1001+\sqrt{2001}}>1$。

(4)正確，因為雙曲線在第一象限的圖形都是遞增的。

(5)正確，此雙曲線同時對稱於 x 軸與 y 軸。



(練習8) 一橢圓形撞球台，其長軸長為 10，且其兩焦點 F_1、F_2，今有一人從 F_1 將一球依直線方向打至邊上一點 A，反彈過 F_2，撞至邊上另一點 B，再回到原焦點處 F_1，試求ΔABF_1的周長。
[答案]：20

(練習9) 拋物線 $x^2=8y$ 上有兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$且$\overline{AB}$過焦點 F，，已知$\overline{AB}=16$，試問 $y_1+y_2=$？　[答案]：12

(練習10) 關於方程式$\left|\dfrac{3x+y-19}{\sqrt{10}}\right|=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$
所代表的錐線圖形Γ，下列何者為真？
(A)Γ為拋物線 (B)(1,−2)為Γ的焦點 (C)$3x+y-19=0$ 為Γ的漸近線
(D)$x-3y+7=0$ 為Γ的對稱軸 (E) (3,1)是Γ的頂點。
[答案]：(A)(D)

(練習11) 已知平面上一橢圓的兩焦點為(6,0)及(0,8)，長軸長為 20，則下列那些敘述是正確的？(A)(3,4)為橢圓的中心 (B)短軸的斜率為$\dfrac{3}{4}$ (C)(9,−4)為長軸上一個頂點
(D)橢圓與正 x 軸只有一個交點。
[答案]：全

(練習12) 設一橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ，其中 $a>0$，$b>0$，設 F 為其一焦點，已知橢圓在 x 軸上的兩個頂點分別與 F 的距離為 5 單位與 1 單位，試求$(a,b)=$？
(2002 指定考科乙)
[答案]：$(a,b)=(3，\sqrt{5}\ )$

(練習13) 設雙曲線Γ：$4x^2-y^2-8x-4y+4=0$，試求Γ的貫軸長 、正焦弦長、焦點、漸近線。
[答案]：4，1，$(1，-2\pm\sqrt{5}\ )$，$2x+y=0$ 或 $2x-y-4=0$

(練習14) 求合於下列條件的拋物線的方程式：
(1)以 F(−1,1)為焦點，準線平行 y 軸且正焦弦長為 4。
(2)以 F(1,2)為焦點，V(−1,2)為頂點。
(3)軸平行 y 軸，且過(0,1)、(1,0)、(2,0)三點。
[答案]：(1)$(y-1)^2=4(x+2)$或$(y-1)^2=-4x$　(2)$(y-2)^2=8(x+1)$　(3)$y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+1$

(練習15) 求合於下列條件的橢圓方程式：
(1)二焦點 $F_1(4,0)$、$F_2(-4,0)$，一頂點 A(5,0)。
(2)中心(0,0)，軸為座標軸，且過(2,3)及(−1,4)二點。

(3)長軸在 x=5 上，短軸在 y=1 上，短軸長是長軸長的$\frac{3}{5}$倍，

中心到焦點的距離 12。

[答案]：(1)$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ (2)$\frac{7x^2}{55}+\frac{3y^2}{55}=1$ (3)$\frac{(x-5)^2}{81}+\frac{(y-1)^2}{225}=1$

(練習16) 求滿足下列條件的雙曲線方程式：

(1)求貫軸在 $x+1=0$ 上且長度為 4 一漸近線為 $2x+y=0$。

(2)以 $y\pm2x=0$ 為漸近線且過點(3,8)。

(3)求以 $F_1(-2,-2)$、$F_2(8,-2)$為焦點，一漸近線的斜率為$\frac{3}{4}$。

(4)等軸且中心(1,2)，貫軸平行 x 軸長度為 6。

[答案]：(1)$\frac{-(x+1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ (2) $(2x+y)(2x-y)=-28$

(3)$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ (4)$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$

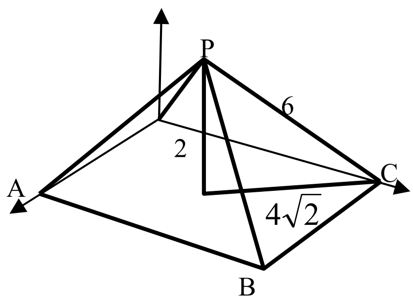
(練習17) 在坐標平面上，到直線 $x=-1$ 之距離是到點 F(1,0)之距離的兩倍的所有點所形成的圖形是一個橢圓，其中 F(1,0)為此橢圓之一焦點，則另一個焦點 F'的坐標為__________。 [答案]：($\frac{7}{3}$,0)

[例題15] 坐標空間中 xy 平面上有一正方形，其頂點為 O(0,0,0),A(8,0,0),B(8,8,0)C(0,8,0)。另一點 P 在 xy 平面的上方，且與 O、A、B、C 四點的距離皆等於 6。若 $x+by+cz=d$ 為通過 A、B、P 三點的平面，則(b,c,d)=__________。(2009 學科能力測驗)

[答案]：(0,2,8)

[解法]：(0,2,8)

如右圖：由題意，易知 P 點的座標為(4,4,2)。



由 $\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}=(4,-4,-2)\times(4,4,-2)$

$=(16,0,32)=16(1,0,2)$

可取 $(1,0,2)$ 平面的法向量，又平面過點 A(8 , 0 , 0)

故所求的平面為 $x+2z=8$。

即$(b,c,d)=(0,2,8)$

[例題16] 設坐標空間中三條直線 L_1 , L_2 , L_3 的方程式分別為

L_1：$\frac{x}{1}=\frac{y+3}{6}=\frac{z+4}{8}$，$L_2$：$\frac{x}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+4}{4}$，$L_3$：$\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$。

試問下列哪些選項是正確的？

(1)L_1 與 L_2 相交 (2)L_2 與 L_3 平行 (3)點 P(0,−3,−4)與 Q(0,0,0)的距離即為點 P 到 L_3 的

最短距離(4)直線 L：$\begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+4}{-3} \end{cases}$ 與直線 L_1,L_2 皆垂直　(5)三直線 L_1,L_2,L_3 共平面

(2008 學科能力測驗)

[答案]：(1)(2)(4)(5)

[解法]：

(1)正確：交點(0,–3,–4)⇒ L_1 與 L_2 相交

(2)正確：$\vec{l_2}\,//\,\vec{l_3}$，而點(0,–3,–4)不在 L_3 上，故 L_2 與 L_3 平行

(3)錯誤：$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{l_3}\neq 0$

(4)正確：$\vec{l}=(0,4,-3)\perp\vec{l_1}$ 且 $\vec{l}=(0,4,-3)\perp\vec{l_2}$，L 過 L_1 與 L_2 的交點。

(5)正確：先確定通過 L_1 與 L_2 的平面 E，再檢查 L_3 是否在 E 上。

[例題17] 坐標空間中，直線 L 上距離點 Q 最近的點稱為 Q 在 L 上的投影點。已知 L 為平面 $2x-y=2$ 上通過點(2,2,2)的一直線。請問下列哪些選項中的點可能是原點 O 在 L 上的投影點？

(1)(2,2,2)　(2) (2,0,2)　(3) $(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},0)$　(4) $(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},-2)$　(5) $(\frac{8}{9},-\frac{2}{9},-\frac{2}{9})$

(2010 學科能力測驗)

[答案]：(1)(3)(5)

[解法]：

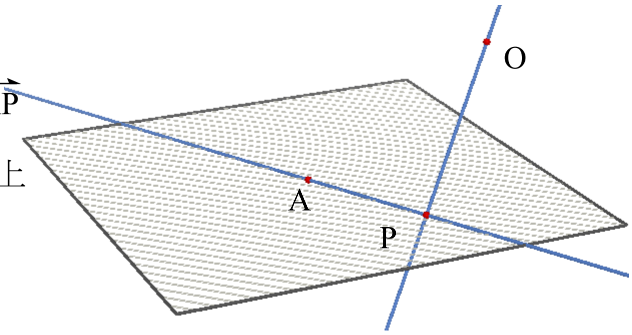
如右圖,令 A(2,2,2)，

若點 P 符合條件要求那麼 P 在 $2x-y=2$ 上且 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AP}$

因此可以據此檢查選項中的點是否符合在 $2x-y=2$ 上

且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

故選(1)(3)(5)



[例題18] 設 a,b,c 為實數，下列有關線性方程組 $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$ 的敘述哪些是正確的？

(1)若此線性方程組有解，則必定恰有一組解

(2)若此線性方程組有解，則 $11a-3b\neq 7$

(3)若此線性方程組有解，則 $c=14$

(4)若此線性方程組無解，則 $11a-3b=7$

(5)若此線性方程組無解，則 $c\neq 14$。　(2009 學科能力測驗)

[答案]：(4)(5)

[解法]：

$$\begin{cases} x+2y+az=1\cdots(1) \\ 3x+4y+bz=-1\cdots(2) \\ 2x+10y+7z=c\cdots(3) \end{cases}，$$

(1)×2−(2)，(1)×5−(3)可得

$x+(b-2a)z=-3$，$3x+(5a-7)z=5-c$

線性方程式可能會有無限多解或恰有一解。

方程式有解 $\Rightarrow \begin{cases} x+(b-2a)z=-3 \\ 3x+(5a-7)z=5-c \end{cases}$ 有解 $\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{b-2a}{5a-7}=\frac{-3}{5-c}$ 或 $\frac{1}{3}\neq\frac{b-2a}{5a-7}$

故(1)(2)(3)不真

方程組無解 $\Rightarrow \begin{cases} x+(b-2a)z=-3 \\ 3x+(5a-7)z=5-c \end{cases}$ 無解 $\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{b-2a}{5a-7}\neq\frac{-3}{5-c}$，故(4)(5)為真。

(練習18) H：$x-y+z=2$ 為坐標空間中一平面，L 為平面 H 上一直線。已知點 P(2,1,1)為 L 上距離原點 O 最近的點，則(2,_________)為 L 的方向向量。Ans：−1,−3
(2011 學科能力測驗)

(練習19) 求兩平面 $\begin{cases} 2x-y+3z-4=0 \\ x+4y-2z+7=0 \end{cases}$ 的交線 L 的比例式。

[答案]：$\frac{x-1}{-10}=\frac{y+2}{7}=\frac{z}{9}$

(練習20) 試求下列諸平面的方程式：

(a)過點(−1,3,2)，法線方向為(−4,1,3)。

(b)過三點 A(2,7,3)、B(4,6,2)、C(5,6,1)。

(c)過點 A(2,1,−1)、B(1,1,2)二點且與平面 $7x+4y-4z=0$ 垂直

[答案]：(a) $4x-y-3z+13=0$ (b) $x+y+z-12=0$(c) $12x-17y+4z-3=0$

(練習21) 設α為平面 $2x+y-z=4$ 與 xy 平面之夾角，則 sinα=？[答案]：$\frac{\sqrt{30}}{6}$

(練習22) 設直線 L 的方程式為 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$，則下列那一個平面與 L 平行？

(A)$2x-y+z-1=0$ (B)$x+y-z-2=0$ (C)$3x-y+2z-1=0$ (D)$3x+2y+z-2=0$
(E)$x-3y+z-1=0$

[答案]：(B)

(練習23) 試判別直線 L_1：$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{2}$，$L_2$：$\frac{x+2}{2}=\frac{y+14}{3}=\frac{z-1}{1}$的相交情形，若相交求交點。[答案]：相交，(6,−2,5)

(練習24) 二平行線 L_1：$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$，$L_2$：$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$，求 L_1 與 L_2 的距離。

[答案]：3

(練習25) L_1：$\frac{x-11}{4}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z+7}{-1}$，$L_2$：$\frac{x+5}{3}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-6}{-2}$，若 L_1、L_2 的公垂線為 L，請求出 L 與 L_1、L_2 的交點 P、Q 坐標。[答案]：P(3,1,−5)、Q(1,−4,2)

(練習26) 說明下列各方程組所表示的平面相交的情形

(1) $\begin{cases}2x+y-3z=0\\6x+3y-8z=0\\2x-y+5z=-4\end{cases}$ Ans：三平面相交於一點(−1,2,0)

(2) $\begin{cases}x+2y-3z=4\\2x+4y-6z=7\\3x+6y+z=5\end{cases}$ Ans：兩面平行，另一面交兩線

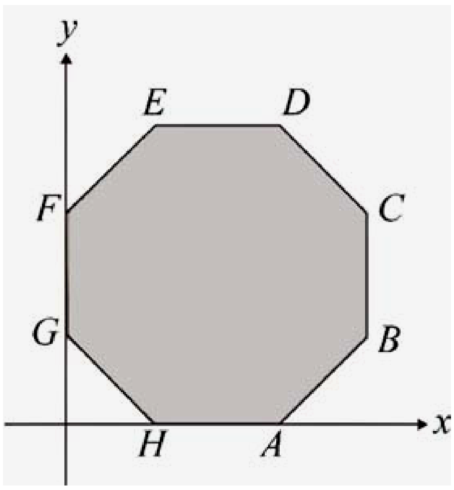
(3) $\begin{cases}x+y+2z=2\\2x+y+z=2\\x+2y+5z=2\end{cases}$ Ans：三平面兩兩相交於一直線且三交線不共點

(練習27) 設 a 為不等於 0 的實數，關於方程式組$\begin{cases}ax+y+\frac{z}{a}=1\\x+ay+z=-1\\\frac{x}{a}+y+az=1\end{cases}$的解，下列選項那些是正確的？(A)當 a=3 時，無解 (B)當 a=1 時，恰有一組解 (C)當 $a=\frac{1}{2}$時，恰有一組解 (D)當 a=−1 時，有無限多組解 (E)當 a=−4 時，有無限多組解。

Ans：(C)(D)

[例題19] 一線性規劃問題的可行解區域為坐標平面上的正八邊形 ABCDEFGH 及其內部，如右圖。已知目標函數 $ax+by+3$(其中 a,b 為實數)的最大值只發生在 B 點。請問當目標函數改為 $3-bx-ay$ 時，最大值會發生在下列哪一點？

(1) A (2) B (3) C (4) D (5) E



[答案]：(1)

[解法]：

∵ 目標函數 $ax+by+3$(其中 a,b 為實數)的最大值只發生在 B 點。且直線 AB 斜率=1

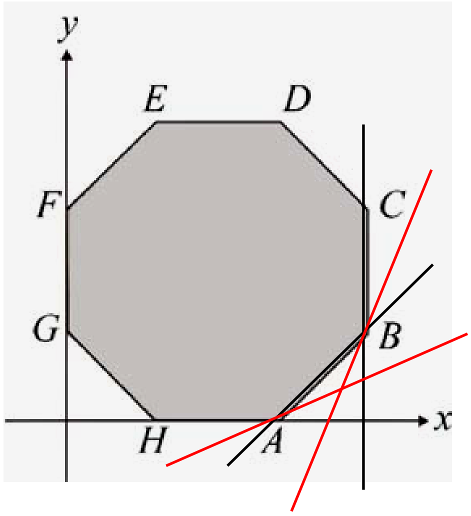
∴ 直線 $ax+by+3=k$ 代表一群斜率大於 1 的直線，即$\frac{-a}{b}>1$

且平行移動過程中在 B 點 y 截距$\frac{k-3}{b}$ 最小，此時 k 要最大，因此 $b<0$。

再令 $3-bx-ay=l$ 代表一群斜率 $0<\dfrac{-b}{a}<1$ 的直線，

要求 l 最大值，因為 $a>0$，故此時平行移動過程中到達的點 y 截距為$\dfrac{3-l}{a}$ 最小。

利用平行線法，經檢查只有 A 點符合。故選(1)。



[例題20] 已知一個線性規劃問題的可行解區域為四邊形 ABCD 及其內部，其中 A(4,0)，B(8,10) ,C(6,14) , D(2,6)為坐標平面上的四個點。若目標函數 $k=ax+by+32$（a ,b 為實數）在四邊形 ABCD 的邊界上一點(4,10) 有最小值 18，試求數對(a,b)=？ (2010 指定乙)

[解答]：

因為可行解區域為四邊形區域，且目標函數 $k=ax+by+32$

所以最小值會發生在頂點或邊界上。

已知最小值發生在邊界的內點 E(4,10)，故邊界上的點(包含頂點)都會發生最小值。經畫圖或檢查斜率，可以得知 E(4,10)會落在$\overline{CD}$上，因此目標函數 $k=ax+by+32$ 會在頂點 C、D 上發生最小值。

故可以得到 $18=4a+10b+32$，$18=2a+6b+32$，解得 $a=14$ 或 $b=-7$。

(練習28) 設 k 為實數，F 為坐標平面上由下列不等式所定義之區域：$\begin{cases} x+2y\le 4 \\ x-y\le 1 \\ x\ge 0\,,\,y\ge 0 \end{cases}$，

若 $z=x+ky$ 在(2,1)處有最大值，試求 k 之範圍。[答案]：$-1\le k\le 2$

(練習29) 設 x、$y\in R$ 且滿足 $x\ge 0$ ，$y\ge 0$，$3x+y\le 3$，$2x+3y\le 6$，

則下列各選項何者正確？

(A)$2x-y$ 的最大值為 2 (B)$2x-y$ 的最小值為-1 (C)$(x-2)^2+(y-1)^2$ 的最小值為 $\dfrac{8}{5}$ (D)$\dfrac{y+1}{x+2}$的最大值為$\dfrac{3}{2}$ [答案]：(A)(C)(D)

綜合練習

1. 在坐標平面上，設 A 為直線 $3x-y=0$ 上一點，B 為 x 軸上一點。若線段$\overline{AB}$的中點坐標為$(\frac{7}{2},6)$，則點 A 的坐標為_________，點 B 的坐標為_________。(2008 學科能力測驗)

2. 坐標平面上有兩條平行直線。它們的 x 截距相差 20 ， y 截距相差 15。則這兩條平行直線的距離為______。(2009 學科能力測驗)

3. 設 A(1,1),B(3,5),C(5,3),D(0,−7),E(2,−3)及 F(8,−6)為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 個恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為______。(2012 學科能力測驗)

4. 坐標平面上給定兩點 A(1,0)與 B(0,1)，又考慮另外三點 P(π,1)、Q($-\sqrt{3}$,6)與 R(2,$\log_4 32$)。令ΔPAB 的面積為 p、ΔQAB 的面積為 q、ΔRAB 的面積為 r。請問下列哪一個選項是正確的？
(1) $p<q<r$ (2) $p<r<q$ (3) $q<p<r$ (4) $q<r<p$ (5) $r<q<p$。 (2010 學科能力測驗)

5. 在坐標平面上，圓 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ 與 $y=|2x+1|$的圖形有幾個交點？
(1) 1 個 (2) 2 個(3)3 個(4) 4 個(5) 0 個 。(2014 指定甲)

6. 試問共有多少個正整數 n 使得坐標平面上通過點 A($-n$,0)與點 B(0,2)的直線亦通過點 P(7,k)，其中 k 為某一個正整數？
(1)2 個 (2)4 個 (3)6 個 (4)8 個 (5)無窮多個。 (2007 學科能力測驗)

7. 標平面上有一質點沿方向 $\vec{u}=(1,2)$ 前進。現欲在此平面上置一直線 L，使得此質點碰到 L 時依光學原理(入射角等於反射角)反射，之後沿方向 $\vec{v}=(-2,1)$前進，則直線 L 的方向向量應為 $\vec{w}=$__________。

8. 坐標平面上，直線 L_1 與 L_2 的方程式分別為 $x+2y=0$ 與 $3x-5y=0$。為了確定平面上某一定點 P 的坐標，從 L_1 上的一點 Q_1 偵測得向量$\overrightarrow{Q_1P}=(-7,9)$，再從 L_2 上的一點 Q_2 偵測得向量$\overrightarrow{Q_2P}=(-6,-8)$，則 P 點的坐標為__________。

9. 坐標平面上考慮兩點 $Q_1(1,0)$ ， $Q_2(-1,0)$ 。在下列各方程式的圖形中，請選出其上至少

有一點 P 滿足內積 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}_2}<0$ 的選項。

(1) $y=\dfrac{1}{2}$ (2) $y=x^2+1$ (3) $-x^2+2y^2=1$ (4) $4x^2+y^2=1$

(5) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ (2013 學科能力測驗)

10. 已知坐標平面上的四個點，$A(-1,2)$，$B(0,0)$，$C(1,2)$，$D(x,y)$，其中 D 為 $\overline{AB}$ 中點與 $\overline{BC}$ 中點的連線段的中點。設有一拋物線通過 A、D、C 三點，則此拋物線的焦點坐標為____________。 (2003 指定考科乙)

11. 有一橢圓與一雙曲線有共同的焦點 F_1、F_2，且雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長相等。設 P 為此橢圓與雙曲線的一個交點，且 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=64$，則 $\overline{F_1F_2}=$________。
(2009 學科能力測驗)

12. 令橢圓 Γ_1：$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$、$\Gamma_2$：$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=2$、$\Gamma_3$：$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=\dfrac{2x}{5}$ 的長軸分別為 l_1、l_2、l_3。
請問下列哪一個選項是正確的？
(1) $l_1=l_2=l_3$ (2) $l_1=l_2<l_3$ (3) $l_1<l_2<l_3$ (4) $l_1=l_3<l_2$ (5) $l_1<l_3<l_2$。 (2010 學科能力測驗)

13. 坐標平面上滿足方程式 $\left(\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}\right)\left(\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}\right)=0$ 的點 (x,y) 所構成的圖形為
(1) 只有原點 (2) 橢圓及原點 (3) 兩條相異直線 (4) 橢圓及雙曲線 (5) 雙曲線及原點
(2011 學科能力測驗)

14. 平面上兩點 F_1、F_2 滿足 $\overline{F_1F_2}=4$。設 d 為一實數，令 Γ 表示平面上滿足 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=d$ 的所有 P 點所成的圖形，又令 C 為平面上以 F_1 為圓心、6 為半徑的圓。
請問下列選項是正確的？
(1) 當 $d=0$ 時，Γ 為直線
(2) 當 $d=1$ 時，Γ 為雙曲線
(3) 當 $d=2$ 時，Γ 與圓 C 交於兩點
(4) 當 $d=4$ 時，Γ 與圓 C 交於四點
(5) 當 $d=8$ 時，Γ 不存在。 (2012 學科能力測驗)

15. 設為 F_1,F_2 橢圓 Γ 的兩個焦點。S 為以 F_1 為中心的正方形(的各邊可不與 Γ 的對稱軸平行)。試問 S 可能有幾個頂點落在 Γ 上？
(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 0 (2013 學科能力測驗)

16. 設 m,n 為正實數，橢圓 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$ 的焦點分別為 $F_1(0,2)$、$F_2(0,-2)$。若此橢圓上有一點 P 使得 ΔPF_1F_2 為一正三角形，則 $m=$______，$n=$______。 (2012 學科能力測驗)

17. 假設 Γ_1 為坐標平面上一開口向上的拋物線，其對稱軸為 $x=\frac{-3}{4}$ 且焦距（焦點到頂點的距離為 $\frac{1}{8}$。若 Γ_1 與另一拋物線 $\Gamma_2 : y=x^2$ 恰交於一點，則 Γ_1 的頂點之 y 坐標為________ 。(化成最簡分數) (2009 學科能力測驗)

18. 設 a、b 為實數。已知坐標平面上拋物線 $y=x^2+ax+b$ 與 x 軸交於 P、Q 兩點，且 $\overline{PQ}=7$。若拋物線 $y=x^2+ax+(b+2)$ 與 x 軸交於 R、S，則 $\overline{RS}=$_______ 。(2010 學科能力測驗)

19. 在只有皮尺沒有梯子的情形下，想要測出一拋物線形拱門的高度。已知此拋物線以過最高點的鉛垂線為對稱軸。現甲、乙兩人以皮尺測得拱門底部寬為 6 公尺，且距底部 $\frac{3}{2}$ 公尺高處其寬為 5 公尺。利用這些數據可推算出拱門的高度為_______公尺。(化成最簡分數) (2003 學科能力測驗)

20. 如圖所示，線段 $\overline{AB}$ 的長度為定值，且 $\overline{AC}:\overline{CB}=2:1$。
保持點 A 在 y 軸上，上下移動，且點 B 在 x 軸上左右移動時，點 C 所經過的路徑會形成一圖形。試問此圖形為何？
(A) 一橢圓 (B) 一圓 (C) 一雙曲線 (D) 一菱形 (E) 一線段 (2004 指定考科乙)

21. 設 O (0,0,0) 為坐標空間中某長方體的一個頂點，且知(2,2,1),(2, 1, 2),(3, 6,6)為此長方體中與 O 相鄰的三頂點。若平面: $E：x+by+cz=d$ 將此長方體截成兩部分，其中包含頂點 O 的那一部分是個正立方體，則(b ,c ,d) =____________ 。(2008 學科能力測驗)

22. 平面 $x-y+z=0$ 與三平面 $x=2$，$x-y=-2$，$x+y=2$ 分別相交所得的三直線可圍成一個三角形。此三角形之周長化成最簡根式，可表為 $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ ，其中 a,b,c,d 為正整數且 $b<d$，則 a=______，b=_______，c=_______，d=_______ 。(2015 學科能力測驗)

23. 李探長為了尋找槍手的可能位置，他假設一空間坐標，先從(0,0,2)朝向(5,8,3)發射一固定雷射光束，接著又從點(0,7,a)沿平行 x 軸方向發射另一雷射光束，試問當 a 為何值時，兩雷射光束會相交？(2004 指定考科乙)

24. 設 $F_a：x-4y+az=10$ (a 為常數)、$E_1：x-2y+z=5$ 及 $E_2：2x-5y+4z=-3$ 為坐標空間中的三個平面。試問下列哪些敘述是正確的?____________ 。
(1) 存在實數 a 使得 F_a 與 E_1 平行；
(2) 存在實數 a 使得 F_a 與 E_1 垂直；
(3) 存在實數 a 使得 F_a，E_1，E_2 交於一點；
(4) 存在實數 a 使得 F_a，E_1，E_2 交於一直線；

(5) 存在實數 a 使得 F_a，E_1，E_2 沒有共同交點。 (2003 學科能力測驗)

25. 設實數 a>0。若 x、y 的方程組$\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-2y=a \\ x-ay=122 \end{cases}$ 有解，則 a=______。(2010 學科能力測驗)

26. 設 a,b,c,d 為實數。已知一次方程組$\begin{cases} ax+3y+5z=b \\ \quad y+cz=0 \\ \quad 2y+dz=e \end{cases}$ 的解的圖形是坐標空間中包含 x 軸的一個平面，則(a,b,c)=____________。(化為最簡分數) (2012 指定甲)

27. 設 a,b,c 為實數，下列有關線性方程組$\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$的敘述哪些是正確的？

(1)若此線性方程組有解，則必定恰有一組解

(2)若此線性方程組有解，則 $11a-3b\neq7$

(3)若此線性方程組有解，則 c=14

(4)若此線性方程組無解，則 $11a-3b$=7

(5)若此線性方程組無解，則 $c\neq14$。 (2009 學科能力測驗)

28. 考慮坐標平面上以 O(0,0)、A(3,0)、B(0,4)為頂點的三角形，令 C_1、C_2 分別為ΔOAB 的外接圓、內切圓。請問下列哪些選項是正確的？

(1) C_1 的半徑為 2。

(2) C_1 的圓心在直線 $y=x$ 上

(3) C_1 的圓心在直線 $4x+3y=12$ 上

(4) C_2 的圓心在直線 $y=x$ 上

(5) C_2 的圓心在直線 $4x+3y=7$ 上。 (2011 學科能力測驗)

29. 在坐標平面上，圓 C 的圓心在原點且半徑為 2，已知直線 L 與圓 C 相交，請問 L 與下列哪些圖形一定相交？(2011 學科能力測驗)

(1) x 軸 (2) $y=(\frac{1}{2})^x$ (3) $x^2+y^2=3$ (4) $(x-2)^2+y^2=16$ (5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

30. 在坐標空間中，平面 $x-2y+z=0$ 上有一以點 $P(1,1,1)$ 為圓心的圓 Γ， 而 $Q(-9,9,27)$ 為圓 Γ 上一點。若過 Q 與圓 Γ 相切的直線之一方向向量為 $(a,b,1)$，則 $a=$？，$b=$？ (2004 學科能力測驗)

31. 坐標平面上，若平面 E：$ax+by+cz=1$ 滿足以下三條件：

(1)平面 E 與平面 F：$x+y+z=1$ 有一夾角 30°，

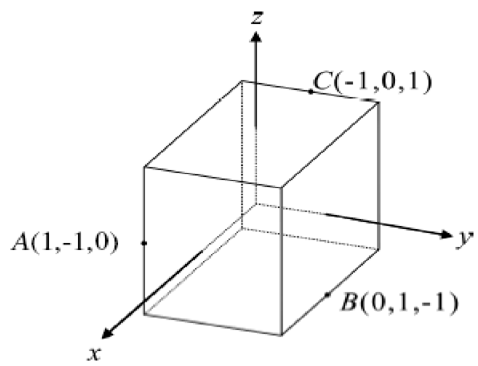
(2)點 A(1,1,1)到平面 E 的距離等於 3，

(3)$a+b+c>0$

則 $a+b+c$ 的值為________。(化為最簡分數)

(2011 指定甲)

32. 在坐標空間中，有一邊長為 2、中心在原點 O 的正立方體，且各稜邊都與三坐標平面平行或垂直，如圖所示。已知 A(1,−1,0) 、B(0,1,−1)、C(−1,0,1) 這三點都是某平面 E 和正立方體稜邊的交點。試問下列哪些點也是平面 E 和正立方體稜邊的交點？



(1)$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$　(2)(−1,1,0)　(3)(0,−1,−1)　(4)(−2,1,1)。

(2011 指定甲)

33. 橢圓的兩焦點 $F_1(-1,5)$、$F_2(-1,-1)$，弦$\overline{AB}$過 F_1，ΔABF_2 的周長為 20，則橢圓的方程式為何？

34. 已知橢圓Γ為 $\frac{x^2}{k^2+1}+\frac{y^2}{7-k}=1$，Γ與橢圓$\frac{x^2}{90}+\frac{y^2}{24}=1$ 共焦點，則 k 的值為何？

35. 小明從家中往正東方直行至海岸邊 A 處，他在 A 處發現他的正東方之海上有一座小島，A 到小島的距離為 80 公尺。小明觀察發現兩件事實：

(1)在海岸邊的任一位置，到他家的距離與到小島的距離之差均為 450 公尺。

(2)在海岸邊的任一位置，到他家的距離大於到小島的距離。根據上述資料，請你算出小明家到海岸邊 A 處的距離是______公尺。

36. 有一圓心為 O(0,0)半徑為 4 的圓與點 A(6,0)，今在圓上找動點 Q，考慮$\overline{AQ}$的中垂線與直線 OQ 的交點 P，請求出 P 點的軌跡方程式。

37. 空間中一直線 L：$\begin{cases}2x+y-z=0\\x+2y-z=1\end{cases}$，則下列何者為真？

(A)L 的方向向量為(1,−1,3) (B)點(0,1,1)在直線 L 上 (C)L 與$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-7}{3}$ 重合。

(D)L 與$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$ 垂直 (E)L 在平面上 $x-y+1=0$ 上。

38. 已知空間中三點 A(2,2,1)、B(1,3,−1)、C(1,1,−1)，若在空間中與 A、B、C 三點等距離的點所形成的圖形之方程式為Γ，則下列有那些是正確的？

(A) Γ：$x-y-2z+1=0$ (B) Γ：$\begin{cases}x=1-2t\\y=2\\z=t\end{cases}$，$t\in R$

(C) Γ中與原點最接近之點為$(\frac{1}{5},2,\frac{2}{5})$。(D) Γ中與原點之距離為$\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}$。

答案與詳解

1. [答案]：A(4,12)、B(3,0)

[解法]：設 A($3t,t$)、B(s,0)，因為$\overline{\text{AB}}$中點$(\frac{7}{2},6)\Rightarrow\frac{t+s}{2}=\frac{7}{2}$，$\frac{3t+0}{2}=6\Rightarrow t=4$，$s=3$

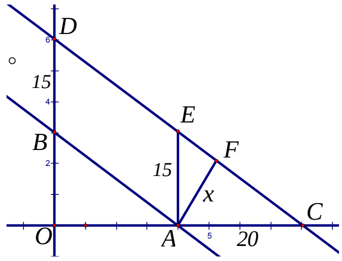
$\Rightarrow$A(4,12)、B(3,0)。

2. [答案]：12

[解法]：12

本題的問法隱含了直線所在的象限及直線所在的位置與解答無關。

故可作圖如右：



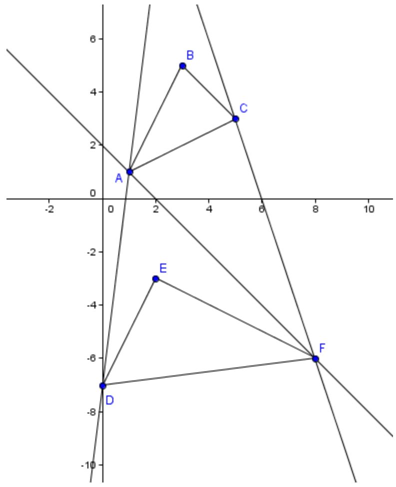
將線段$\overline{BD}$平移到線段$\overline{AE}$，則由題意：

在△ACE 中，設斜邊$\overline{CE}$上的高$\overline{AF}$為 x，斜邊長$\overline{CE}$為 25，由

$\Delta ACE=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AE}=\frac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{AF}$，得$25x=300$。故$x=12$。

3. [答案]：-3

[解法]：



直線 AD、CF、AF 的斜率分別為 $8,-3$、-1

故 L 的斜率之最小可能值為-3。

4. [答案]：(1)

[解法]：

ΔPAB、ΔQAB、ΔRAB 的底均可以$\overline{\text{AB}}$為底，高分別為 P、Q、R 到直線 AB($x+y-1=0$)

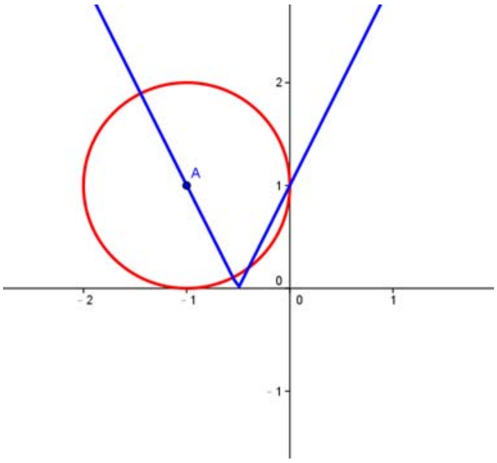
的距離 d_1、d_2、d_3。

$d_1=\frac{|\pi+1-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$，$d_2=\frac{|-\sqrt{3}+6-1|}{\sqrt{2}}=\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，$d_3=\frac{|2+\log_4 32-1|}{\sqrt{2}}=\frac{3.5}{\sqrt{2}}\Rightarrow d_3>d_2>d_1\Rightarrow p<q<r$。

5. [答案]：(4)

[解法]：

畫出圓 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ 與 $y=|2x+1|$的圖形：



可得答案為(4)

6. [解答]：

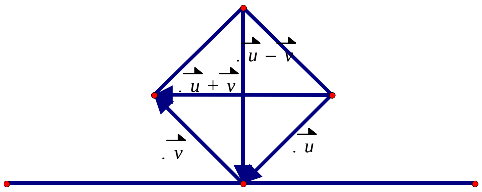
如圖， $A(-n,0)$ ， $B(0,2)$ ， $P(7,k)$ 三點共線，

則 $m_{BA}=m_{PB}\Rightarrow \dfrac{2}{n}=\dfrac{k-2}{7}\Rightarrow k=\dfrac{14}{n}+2$

故正整數 n 只可能為 $1,2,7,14$ ，能使得 $k=16,9,4,3$ 亦為正整數有 4 種可能，選(2)

7. [答案]：$(-1,3)$

[解法]：



如圖，因為 $|\vec{u}|=|\vec{v}|$，入射角=反射角，所以 $\vec{u}+\vec{v}=(-1,3)$ 平行 L 的方向向量

8. [答案]：$(9,1)$

[解法]：

依題意，令 $Q_1(-2t,t)$、$Q_2(5s,3s)$、$P(x,y)$

$\overrightarrow{Q_1P}=(x+2t,y-t)=(-7,9)$

$\overrightarrow{Q_2P}=(x-5s,y-3s)=(-6,-8)$

得到 $\begin{cases}x+2t=-7\cdots(1)\\ y-t=9\cdots(2)\end{cases}$ 與 $\begin{cases}x-5s=-6\cdots(3)\\ y-3s=-8\cdots(4)\end{cases}$

(1)−(3)得到 $2t+5s=-1$，(4)−(2) 得到 $t-3s=-17$

解得 $s=3$、$t=-8$

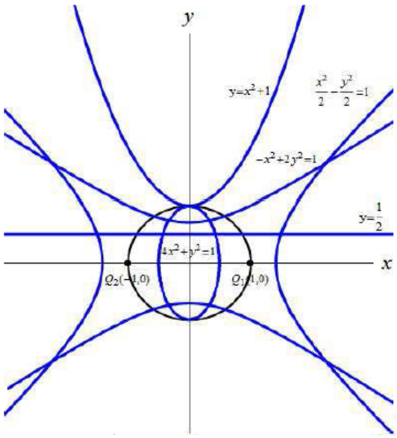
故 $(x,y)=(9,1)$，因此 P 點坐標為 $(9,1)$。

9. [答案]：(1)(3)(4)

[解法]：

若 $\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=0$ 點 P 在以 $Q_1(1,0)$，$Q_2(-1,0)$ 為直徑兩端點的圓 $x^2+y^2=1$ 上，

因為 $\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}<0$ ，則點 P 在圓 $x^2+y^2=1$ 的內部，



故各個選項的圖形必須有一部分在圓 $x^2+y^2=1$ 內部方可符合條件，作圖如右：故選(1)(3)(4)

10. [答案]：$(0,\frac{5}{4})$

[解法]：∵D 為 $\overline{AB}$ 中點與 $\overline{BC}$ 中點的連線段的中點，∴D(0,1)

∵A、C 是以 y 軸為對稱軸的二點∴此拋物線以 D 為頂點，並過 A、C 兩點

設拋物線的方程式為 $x^2=4c(y-1)$ 以(1,2)代入，可得 $c=\frac{1}{4}$，焦點坐標為 $(0,1+\frac{1}{4})=(0,\frac{5}{4})$。

11. [答案]：16

[解法]：16

假設題中的橢圓的長短軸分別為 a、b，則雙曲線的貫軸為 $2b$，且所求的 $\overline{F_1F_2}$ 為 $2c$，

其中 $c^2=a^2-b^2$。由橢圓的觀點，$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$。由雙曲線的觀點，$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2b$。

可得 $\overline{PF_1}=a+b$，同時 $\overline{PF_2}=a-b$。因此，

$\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=(a+b)(a-b)=a^2-b^2=c^2=64$，故 $c=8$，即 $\overline{F_1F_2}=16$

12. [答案]：(4)

[解法]：

Γ_1：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1\Rightarrow l_1=10$，$\Gamma_2$：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=2\Leftrightarrow\frac{x^2}{2\times5^2}+\frac{y^2}{2\times3^2}=1\Rightarrow l_2=10\sqrt{2}$

Γ_3：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=\frac{2x}{5}\Leftrightarrow\frac{(x-5)}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1\Rightarrow l_3=10$　故選(4)

13. [答案]：(3)

[解法]：$(\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2})(\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2})=0\Leftrightarrow\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=0\Leftrightarrow(4x)^2-(3y)^2=0\Leftrightarrow(4x+3y)(4x-3y)=0$，故選(3)。

14. [答案]：(1)(2)(5)

[解法]：

(1)正確：當 $d=0$ 時，Γ 為 $\overline{F_1F_2}$ 的中垂線。

(2)正確：當 $d=1$ 時，$d<\overline{F_1F_2}$，Γ 為雙曲線。

(3)錯誤：當 $d=2$ 時，Γ 為雙曲線，且 Γ 與 C 交於 4 個點。

(4)錯誤：當 $d=4$ 時，Γ 為以 F_1、F_2 為端點的兩射線

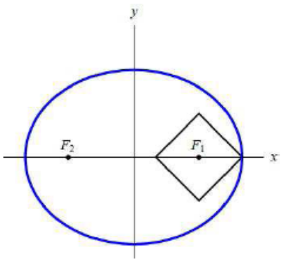
Γ 與 C 交於 2 個點。

(5)正確：當 d=8 時，Γ不存在。

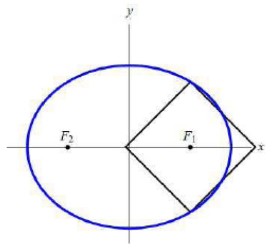
15. [答案]：(1)(2)(5)

[解法]：

(1)

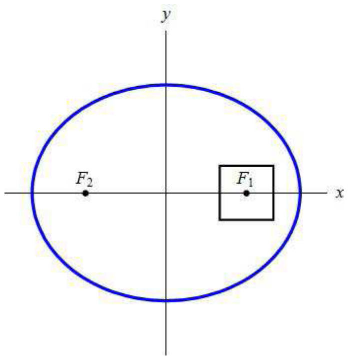


(2)



(3) 橢圓 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$之一焦點 $F(b,0)$，若 $P(x_0,y_0)$在橢圓上，由橢圓的圖形之對稱性可知最多只有兩個點 $P(x_0,y_0)$與 $Q(x_0,-y_0)$與焦點 $F(b,0)$的距離相同，故不可能有超過 2 個頂點落在橢圓 Γ 上。

(4)由(3)可知不可能



(5) 故選(1)(2)(5)

16. [答案]：m=12，n=16

[解法]：

$\because \Delta PF_1F_2$ 為一正三角形，$\therefore$ P 點必為短軸頂點，故 $PF_1=PF_2=F_1F_2=4$

$PF_1+PF_2=8=2a\Rightarrow n=a^2=16$

$c=2\Rightarrow m=b^2=a^2-c^2=12$。

17. [答案]：$\dfrac{9}{8}$

[解法]：

設Γ_1的頂點為$(-\dfrac{3}{4},k)$，則Γ_1的方程式可表為$\Gamma_1:(x+\dfrac{3}{4})^2=\dfrac{1}{2}(y-k)$

將$\Gamma_2:y=x^2$代入Γ_1中$\Rightarrow (x+\dfrac{3}{4})^2=\dfrac{1}{2}(x^2-k)$

$\Rightarrow x^2+3x+(\frac{9}{8}+k)=0$

因 Γ_1 與 Γ_2 恰交一點，所以 $D=9-4\,(\frac{9}{8}+k)=0 \quad \Rightarrow k=\frac{9}{8}$

18. [答案]：$\sqrt{41}$

[解法]：

設 R(x_1,y_1)、S(x_2,y_2)、P(u_1,v_1)、Q(u_2,v_2)

依題意，$x^2+ax+b=0$ 兩根為 u_1、u_2，且 $\overline{PQ}=|u_1-u_2|=7$；

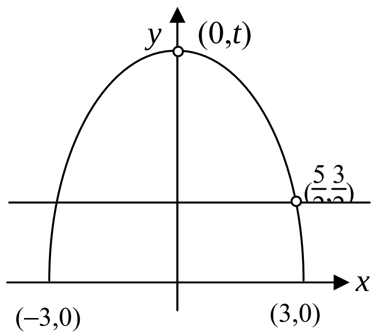
$x^2+ax+(b+2)=0$ 兩根為 x_1、x_2，且 $\overline{RS}=|x_1-x_2|$

由根與係數的關係，可以得知：

$u_1+u_2=-a$，$u_1u_2=b\Rightarrow 49=(u_1-u_2)^2=(u_1+u_2)^2-4u_1u_2=a^2-4b$

$x_1+x_2=-a$，$x_1x_2=b+2\Rightarrow(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=a^2-4(b+2)=a^2-4b-8=41$，故 $\overline{RS}=\sqrt{41}$ 。

19. [答案]：$\frac{54}{11}$



[解法]：坐標化此拱門如右圖所示，

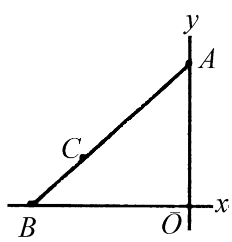
設拋物線的方程式為 $y-t=ax^2$

$\because$ 過(3,0)、$(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$二點，$\therefore \begin{cases}-t=9a \\ \frac{3}{2}-t=\frac{25}{4}a\end{cases} \Rightarrow a=\frac{-6}{11}$，$t=\frac{54}{11}$

故拱門的高度為$\frac{54}{11}$公尺。

20. [答案]：(A)

[解法]：



設 A(0,a)、B(b,0)，且$\overline{AB}=t\Rightarrow$滿足 $a^2+b^2=t^2$

設滿足 $\overline{AC}:\overline{CB}=2:1$的 C($x$,$y$)$\Rightarrow x=\frac{2}{3}b$，$y=\frac{1}{3}a$

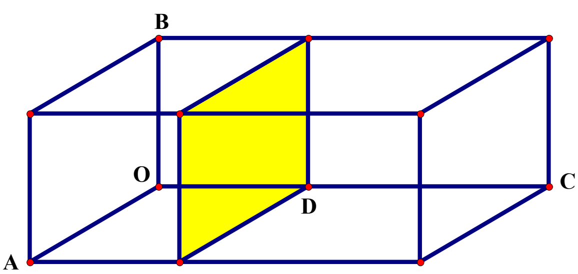
$\begin{cases}x=\frac{2}{3}b \\ y=\frac{1}{3}a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=\frac{3}{2}x \\ a=3y\end{cases}$代入 $a^2+b^2=t^2 \Rightarrow \frac{9}{4}x^2+9y^2=t^2 \Rightarrow 9x^2+36y^2=4t^2$

圖形表一橢圓。

21. [答案]：(−2,2,9)

[解法]：

令 A(2,2,1)、B(2,−1,−2)、C(3,−6,6)，如圖，平



面 E 為過 D 而與平面 OAB 平行的平面

因為$\overline{OD}$：$\overline{OC}$=1：3⇒D(1,–2,2)，而 E 的法向量與$\overline{OC}$平行，取法向量 $\vec{n}$ =(1,–2,2)，故可得到 E：$x-2y+2z=9$。

22. [答案]：$a=6$，$b=2$ ，$c=2$，$d=6$

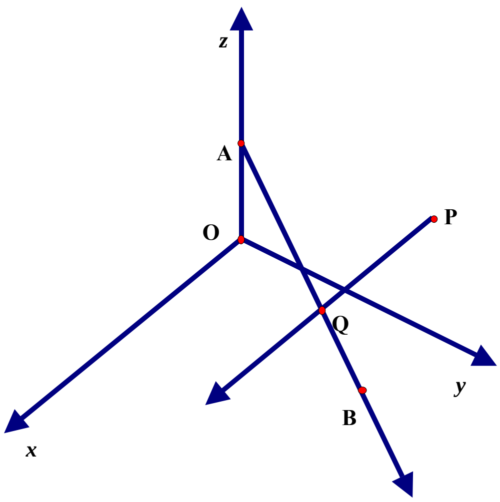
[解法]：

依題意，設 E：$x-y+z=0$，E_1：$x=2$，E_2：$x-y=-2$，E_3：$x+y=2$

聯立 E、E_1、E_2，E、E_1、E_3，E、E_2、E_3 求出三角形的各頂點 A(2,4,2)、B(2,0,–2)、C(0,2,2)

ΔABC 的周長=$\overline{AB}$ +$\overline{BC}$+$\overline{AC}$=$4\sqrt{2}+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$。

23. [答案]：$a=\dfrac{23}{8}$



[解法]：設 A(0,0,2)、B(5,8,3)、P(0,7,a)、交點 Q

直線 AB 的參數式為$\begin{cases} x=0+5t \\ y=0+8t \\ z=2+t \end{cases}$，

直線 PQ 的參數式為$\begin{cases} x=0+s \\ y=7 \\ z=a \end{cases}$ ∵Q 為兩雷射光束的交點，∴Q 點的坐標可表為$(0+5t,0+8t,2+t)$與$(0+s,7,a)$

$\Rightarrow 5t=s$，$8t=7$，$2+t=a \Rightarrow t=\dfrac{7}{8}$，$a=2+\dfrac{7}{8}=\dfrac{23}{8}$。

24. [答案]：(2)(3)(5)

[解法]：

(1)$F_a // E_1 \Rightarrow$兩平面的法向量$(1,-4,a)//(1,-2,1)$，不可能。

(2)$F_a \perp E_1 \Leftrightarrow$ 兩平面的法向量$(1,-4,a)\perp(1,-2,1) \Leftrightarrow 1+8+a=0 \Leftrightarrow a=-9$。

(3) F_a，E_1，E_2 交於一點 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -4 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a\neq 5$。

(4)(5)當 $a=5$ 時，F_5：$x-4y+5z=10$，解聯立方程組$\begin{cases} x-4y+5z=10....(1) \\ x-2y+z=5....(2) \\ 2x-5y+4z=-3.....(3) \end{cases}$

(1)(2)消去 z 之後，可得 $4x-6y=15$，(2)(3)消去 z 之後 $2x-3y=23$

故方程組無解，所以存在實數 a 使得 F_a，E_1，E_2 沒有共同交點。故選(2)(3)(5)

25. [答案]：14

[解法]：由$\begin{cases}2x-y=1\\x-2y=a\end{cases}$可解得 $x=\frac{2-a}{3}$，$y=\frac{1-2a}{3}$，再代入 $x-ay=122$

得到 $a^2-a-182=0$，解得 $a=14$ 或-13(不合)

26. [答案]：$(0,0,\frac{5}{3})$

[解法]：

$\because$ 解的圖形是坐標空間中包含 x 軸的一個平面

$\Rightarrow$解包含(0,0,0)，$\Rightarrow b=0$、$e=0$

又$\because$ $ax+3y+5z=b$ 的法向量$(a,3,5)$與$(1,0,0)$垂直$\Rightarrow a=0$

$\Rightarrow 3y+5z=0$ 與 $y+cz=0$ 代表相同的平面 $\Rightarrow c=\frac{5}{3}$。

27. [答案]：(4)(5)

[解法]：

$$\begin{cases}x+2y+az=1\cdots(1)\\3x+4y+bz=-1\cdots(2)\\2x+10y+7z=c\cdots(3)\end{cases}，$$

(1)×2−(2)，(1)×5−(3)可得

$x+(b-2a)z=-3$，$3x+(5a-7)z=5-c$

線性方程式可能會有無限多解或恰有一解。

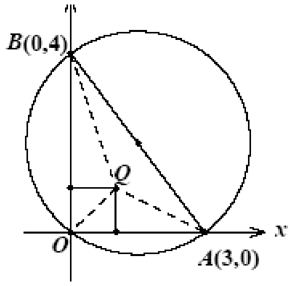
方程式有解 $\Rightarrow\begin{cases}x+(b-2a)z=-3\\3x+(5a-7)z=5-c\end{cases}$有解 $\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{b-2a}{5a-7}=\frac{-3}{5-c}$ 或$\frac{1}{3}\neq\frac{b-2a}{5a-7}$

故(1)(2)(3)不真

方程組無解 $\Rightarrow\begin{cases}x+(b-2a)z=-3\\3x+(5a-7)z=5-c\end{cases}$無解 $\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{b-2a}{5a-7}\neq\frac{-3}{5-c}$，故(4)(5)為真。

28. [答案]：(3)(4)

(1)(2)(3) ∵ ΔOAB 爲直角三角形，



∴ C_1的半徑 $=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{5}{2}$，

且圓心爲$\overline{AB}$的中點$(\dfrac{3}{2},2)$，

在直線$\overleftrightarrow{AB}$：$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$上，即在 $4x+3y=12$ 上。

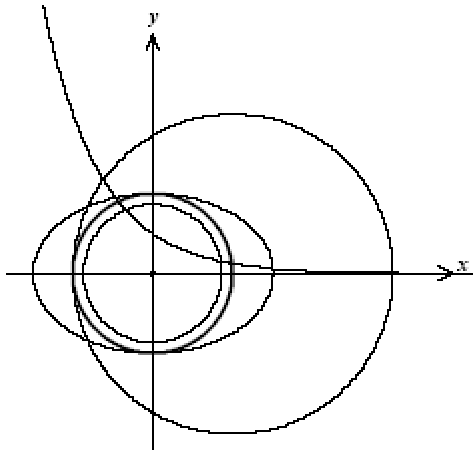
(4)(5) 令C_2的圓心爲 Q，半徑爲 r，則

$$\Delta OAB=\Delta QOA+\Delta QOB+\Delta QAB\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=\frac{1}{2}\cdot3\cdot r+\frac{1}{2}\cdot4\cdot r+\frac{1}{2}\cdot5\cdot r$$

$\Rightarrow$ $r=1$，所以 $Q(1, 1)$，在直線 $y=x$ 上。

[解法]：

29. [答案]：(4)(5)



根據右圖可以得知(4)(5)正確。

(1)錯誤，反例：$y=2$

(2)錯誤，反例：$y=-2$

(3)錯誤，反例：$y=1.9$

30.

[答案]：$a=5$，$b=3$

[解法]：$\overrightarrow{PQ}=(-10,8,26)\perp(a,b,1)$，$\vec{n}=(1,-2,1)\perp(a,b,1)$

$$\Rightarrow\begin{cases}5a-4b-13=0\\a-2b+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}$$

31. [答案]：$\dfrac{1}{3}$

[解法]：

$\overrightarrow{n_E}=(a,b,c)$、$\overrightarrow{n_F}=(1,1,1)$，依題意：

$\because a+b+c>0$ ∴ $\cos30°=\dfrac{\overrightarrow{n_E}\cdot\overrightarrow{n_F}}{|\overrightarrow{n_E}||\overrightarrow{n_F}|}=\dfrac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{3}}$ ……(*)

∵點 A(1,1,1)到平面 E 的距離等於 3

∴ $\dfrac{|a+b+c-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3$……..(**) 令 $a+b+c=t$ $(t>0)$

由(**)$\dfrac{|t-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3$，由(*)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{t}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，可得$|t-1|=2t$ $\Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$($-1$ 不合)

32. [答案]：(2)

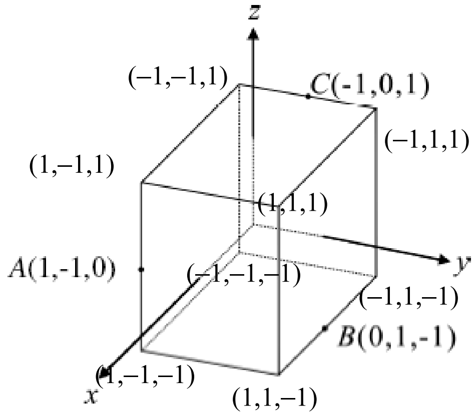
[解法]：

計算平面 ABC 的方程式：$x+y+z=0$

並且找出正立方體個頂點的坐標，

並且檢查選項中各點是否在稜上與平面 ABC 上

可得只有(2)為正確答案。



33. [答案]：$\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1$

[解法]：橢圓的兩焦點為 $F_1(-1,5)$、$F_2(-1,-1)\Rightarrow$中心$(-1,2)$的直立橢圓，$2c=6$

又$\because \Delta ABF_2$的周長$=(\overline{AF_1}+\overline{AF_2})+(\overline{BF_1}+\overline{BF_2})=20$，根據橢圓的定義

$\Rightarrow 4a=20\Rightarrow a=5\quad \Rightarrow b^2=a^2-c^2=16\quad \Rightarrow$方程式為$\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1$。

34. [答案]：-9

[解法]：

$\because \Gamma$與橢圓$\dfrac{x^2}{90}+\dfrac{y^2}{24}=1$ 共焦點，$\therefore \Gamma$為中心$(0,0)$的橫臥橢圓且 $c^2=90-24=66$

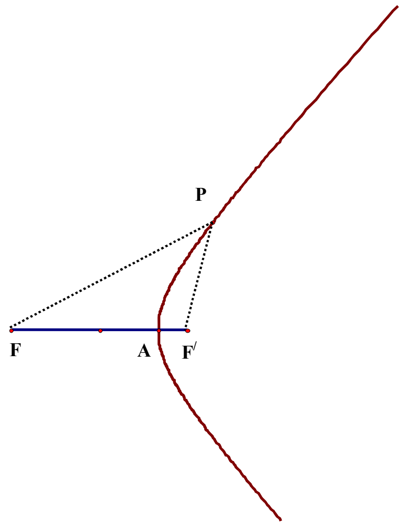
$\Rightarrow k^2+1-(7-k)=c^2=66\Rightarrow k=8$ 或-9($k=8$ 不合，$\because 7-k$ 要大於 0)$\Rightarrow k=-9$。

35. [答案]：530

[解法]：設 F 表示小明的家，F′表示小島，

海岸線上任一點 P，$\overline{PF}-\overline{PF'}=450$，$\Rightarrow$海岸線為雙曲線的一支，其貫軸長為 450 公尺

$a=225$，$80=\overline{AF'}=c-a\Rightarrow c=305\Rightarrow \overline{AF}=a+c=530$。



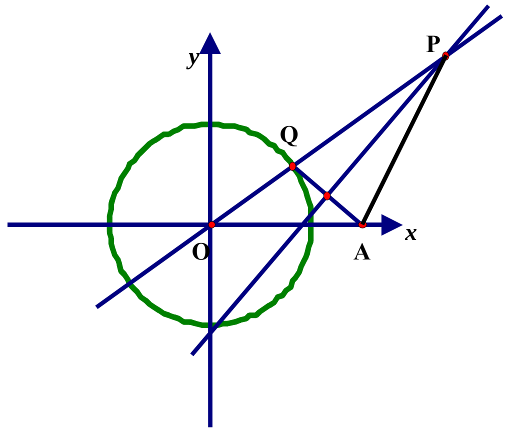
36. [答案]：$\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$

[解法]：$\because$ P 點在$\overline{AQ}$的中垂線上，$\therefore \overline{AP}=\overline{PQ}$

$|\overline{PO}-\overline{PA}|=|\overline{PO}-\overline{PQ}|=\overline{OQ}=4$，又 $6<\overline{OA}$

$\Rightarrow$P 點形成的軌跡圖形為以$(0,0)$、$(6,0)$為焦點且 $2a=6$ 的雙曲線。中心$(3,0)$，$2a=4$，$c=3\Rightarrow b^2=5$

$\Rightarrow$方程式為$\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$。



37. [答案]：(B)(D)(E)

[解法]：直線 L：$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$的方向向量 $\overrightarrow{l}$ //(2,1,−1)×(1,2,−1)=(1,1,3)

(A) L 的方向向量為(1,1,3) (B)(0,1,1)代入方程組合 (C)∵ $\overrightarrow{l}$ 與(1,−1,3)不平行

所以 L 與$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-7}{3}$ 不重合。(D) $\overrightarrow{l}$ ⊥(−1,−2,1)，且(0,1,1)為兩直線的交點，所以兩直線垂直。 (E) $\overrightarrow{l}\perp\overrightarrow{n}$ =(1,−1,0)，且點(0,1,1)在平面上，所以 L 在平面上 $x-y+1=0$ 上。

38. [答案]：(B)(C)(D)

[解法]：

設 P 滿足$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$⇒P 在$\overline{AB}$與$\overline{AC}$的垂直平分面上。

$\overline{AB}$的垂直平分面為 E_1：$x-y+2z+1=0$，$\overline{AC}$的垂直平分面為 E_2：$x+y+2z-3=0$

即Γ：$\begin{cases} x-y+2z+1=0 \\ x+y+2z-3=0 \end{cases}$⇒Γ：$\begin{cases} x=1-2t \\ y=2 \\ z=t \end{cases}$ $t\in R$

$\overline{OP}=\sqrt{(1-2t)^2+2^2+t^2}=\sqrt{5t^2-4t+5}=\sqrt{5(t-\frac{2}{5})^2+\frac{21}{5}}\geq\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}$，

當 $t=\frac{2}{5}$時，即 P$(\frac{1}{5},2,\frac{2}{5})$，$\overline{OP}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}$最短。