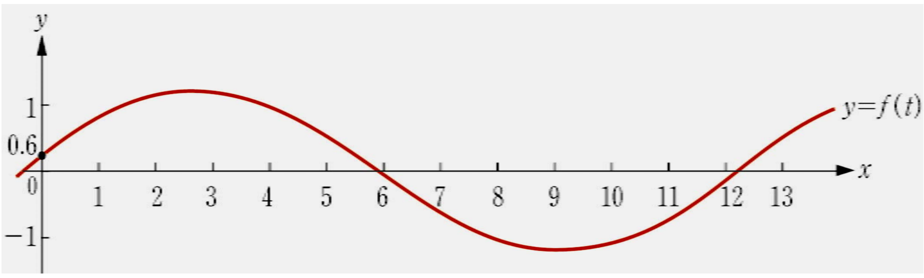
第十八單元正餘弦函數的應用

十五單元介紹了正弦函數與餘弦函數的圖形與性質，它們的圖形都呈波浪形且週期性的重複出現，這樣的圖形常用來描述波動的現象，像是地震的震波、振動的琴弦所產生的聲波以及雷達、微波爐、手機等發出的電磁波。像是地震時建築物會受到外力而搖晃，如果震波中某一波動的週期，恰好與建築物振動的週期相同的話，那麼兩者就會產生「**共振現象**」使得振幅變大，此時建築物就容易倒塌。當兩個波振動週期相同時，經由「**疊合**」後，會產生所謂「共振現象」，這是本節所要討論的重點：「**正弦與餘弦函數的疊合**」。

(甲)正弦(餘弦)函數與波動現象

在自然界或日常生活中常可以看到許多週期性的波動現象，例如：樂器簧片或琴弦的振動、彈簧的伸縮、水面上小船的沉浮或鐘擺的擺動、水波、聲波、電磁波等。不管這些波動現象多複雜，它們都是由一種最簡單、最基本的正弦波（餘弦波）所組成。

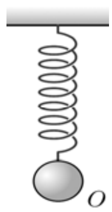
當我們觀察物體 (視為質點) 作簡諧運動時，它的位移 y (以平衡位置為準，向上為正，向下為負) 與時間 t 的函數 $f(t)$ 可以用正弦函數來表示，



[例題1] 如右圖所示，一鉛直懸掛的輕彈簧（彈力常數為 k），其上端繫在天花板上，下端繫一質量為 m 公斤的物體。靜止之後，將物體往下拉 y_0 公尺（在彈性範圍內），放手之後，則物體將作上下回復的週期振動，若不計摩擦力，根據物理原理，此物體的振動週期為 $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$， 試回答下列兩小題：

(1)若此彈簧的彈力常數為 2，下掛一質量 18 公斤的物體，試求此物體上下回復振動的週期。

(2)若以平衡位置為原點，向上為正，向下為負。設開始觀察時物體的位移是 $\dfrac{y_0}{2}$ 公尺，t 秒後物體的位移為 y 公尺，物理學家發現 y 可用函數 $y=A\sin(\omega t+\alpha)$ 表示，其中 A，ω 為正數，試求此函數。



[解法]：

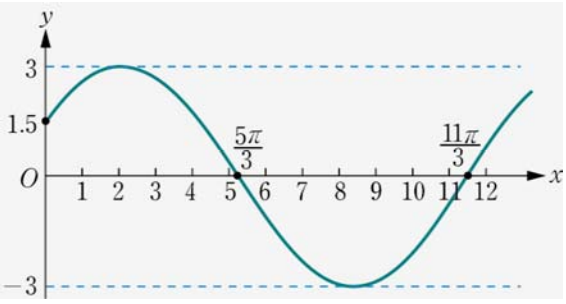
(1) 週期為 $2\pi\sqrt{\dfrac{18}{2}}=6\pi$(秒)。

(2)因為物體往下拉 y_0 公尺，所以 $f(t)$的最大值為 y_0，故 $A=y_0$。因為週期為 6π，所以$\dfrac{2\pi}{\omega}=6\pi$，所以 $\omega=\dfrac{1}{3}$。又一開始時物體的位移是$\dfrac{y_0}{2}$公尺，所以

$f(0)=y_0\sin\alpha=\dfrac{y_0}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，選取 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$。

即 $f(t)=y_0\sin\left(\dfrac{t}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$，故位移 $y=y_0\sin\left(\dfrac{t}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$。

(練習1)承例題 1，若此彈簧的彈力常數 k 為 0.5，下掛一質量 m 公斤的物體，若以平衡位置為原點，向上為正，向下為負，設 t 秒時物體的位移為 y 公尺，而 y 可用正弦函數 $y=A\sin(\omega t+\alpha)$，其中 A，α 為正數來表示，其圖形如下圖所示：



請回答下列各問題：

(1) 此物體振動的週期與彈簧最大伸長量。

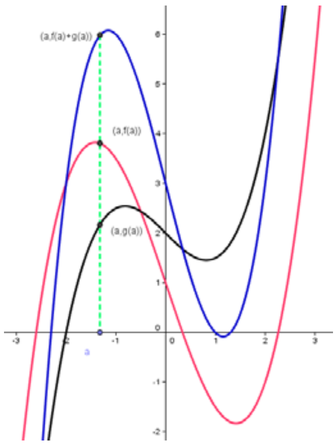
(2) 試求 m 的值。

(3) 寫出表示 y 的函數。

Ans：(1)4π、3 公尺　(2)$m=2$　(3)$y=3\sin\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

(乙)正餘弦的疊合

(1)考慮 $f(x)$與 $g(x)$兩個函數的圖形，將這兩個函數相加所得的新函數為 $h(x)=f(x)+g(x)$，$h(x)$圖形上的點$(a,h(a))$均可表為$(a,f(a)+g(a))$，因此透過 $f(x)$與 $g(x)$的圖形可以得到 $h(x)$的圖形。



我們知道正弦函數與餘弦函數都可以用來描述波動的週期現象，兩個週期相同的波會產生共振現象，例如兩個頻率(週期)相同的聲波或震波合在一起就會使得振幅(強度)加大，因此我們特別稱兩個週期相同的正弦與餘弦函數相加得到的新函數 $y=a\sin kx+b\cos kx$ 為「**正弦函數與餘弦函數的疊合**」。

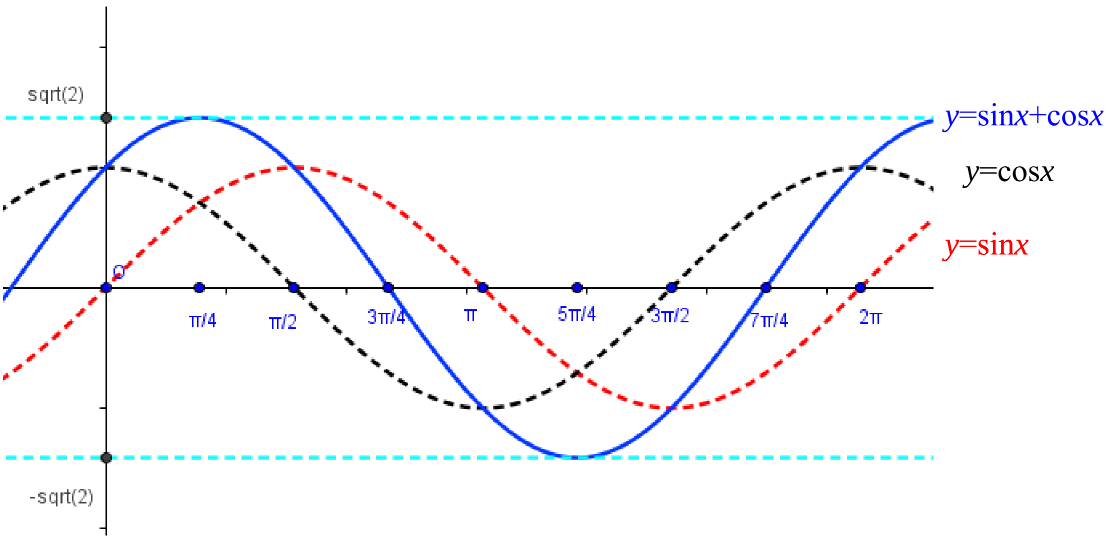
(2)$y=\sin x+\cos x$ 圖形的性質：

首先我們要問 $y=\sin x+\cos x$ 的圖形會是什麼樣子？是否會是有規律的波浪形呢？

先用描點法並列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin x+\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1

畫出 $y=\sin x+\cos x$ 的圖形如下



從上圖中，可以觀察出 $y=\sin x+\cos x$ 的圖形基本上與 $y=\sin x$(或 $y=\cos x$)的圖形類似，都是週期等於 2π的波浪圖形，而且振幅變大了。因此猜測 $y=\sin x+\cos x$ 應該可以表成 $y=r\sin(x+\theta)$的形式，用和角公式來驗證我們的猜測。

$y=r\sin(x+\theta)$

$=r(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)$

$=(r\cos\theta)\sin x+(r\sin\theta)\cos x$

$=\sin x+\cos x$

所以得到 $r\cos\theta=1$…..(1)且 $r\sin\theta=1$……(2)

$a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1^2+1^2=2\Rightarrow a=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ 。

代入(1)(2)式可得 $\cos\theta=\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，所以θ為第一象限角，取 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$。

所以 $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\ \sin(x+\dfrac{\pi}{4})$。

從另一個角度來看，直接利用和角公式，可得

$y=\sin x+\cos x$

$=\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x)$ (此處提出 $\sqrt{2}$ 是經過選擇的)

$=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}\sin x+\sin\dfrac{\pi}{4}\cos x)=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$

根據前面的說明，$y=\sin x+\cos x$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形**鉛直伸縮 $\sqrt{2}$ 倍**，再**向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 單位**。因此振幅為 $\sqrt{2}$，週期為 2π，這樣的結論符合上面觀察的結果。

(3)疊合的方法：

考慮 $y=f(x)=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$，$a,b$ 為實數，仿照前例子的做法，亦可將

$y=f(x)=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$ 化成 $y=f(x)=r\sin(x+\theta)$

$y=r\sin(x+\theta)=r(\sin x\cdot\cos\theta+\cos x\cdot\sin\theta)=a\sin x+b\cos x$

$$\Rightarrow\begin{cases} r\cdot\cos\theta=a\cdots(*) \\ r\cdot\sin\theta=b\cdots(**)\end{cases}\quad\Rightarrow(*)^2+(**)^2\Rightarrow r^2=a^2+b^2\quad\Rightarrow r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \text{且}\ \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}。$$

θ的找法如下：

在以原點為圓心之單位圓上，根據 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 且 $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，先判別出θ終邊的位置，在找出θ的值。我們將這些結果寫成一個定理：

若設 a,b 為實數，且 $a^2+b^2\neq 0$，
則函數 $y=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$ 可以表為 $y=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\theta)$，
其中θ為滿足 $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 的角θ。

[討論]：

如果選擇點 $Q(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$，則點 Q 亦在單位圓上，因此可找到 一個角度φ，滿

足 $\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

於是 $y=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\varphi\sin x+\cos\varphi\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$。

例如：

將 $y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x$ 疊合成正弦與餘弦函數

(1)將 $y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x$ 疊合成正弦函數先求兩係數的平方和

的正平方根 $=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，再將原式提出 2

$y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x)=2(\sin x\cdot\cos\theta+\cos x\cdot\sin\theta)=2\sin(x+\theta)$

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow\theta$ 為第一象限角 $\Rightarrow$ 取 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

$\Rightarrow y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x=2\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$

(2) 將 $y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x$ 疊合成餘弦函數先求兩係數的平方和的

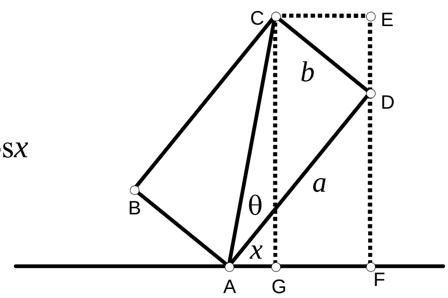
正平方根 $=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，再將原式提出 2

$y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x)=2(\sin x\cdot\sin\theta+\cos x\cdot\cos\theta)=2\cos(x-\theta)$

$\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow\theta$ 為第一象限角 $\Rightarrow$ 取 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x=2\cos(x-\dfrac{\pi}{3})$

(4)圖解正餘弦函數的疊合：



如圖，設 $\angle DAF=x$，$\angle CAD=\theta$，可得 $\overline{DF}=a\sin x$，$\overline{DE}=b\cos x$

$\Rightarrow\overline{DF}+\overline{DE}=a\sin x+b\cos x$

$\overline{CG}=\overline{AC}\cdot\sin(x+\theta)$，其中 $\overline{AC}=\sqrt{a^2+b^2}$，而 $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$

因為 $\overline{DF}+\overline{DE}=\overline{CG}$，所以 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\ \sin(x+\theta)$

結論：

(1)可將正餘弦函數的線性組合 $a\sin x+b\cos x$ 化成正弦函數，也可化成餘弦函數。

(2)$y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\ \sin(x+\theta)$ 的圖形是先將正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形左右平移 $|\theta|$ 單

位(θ>0 時，左移；θ<0 時，右移)，再鉛直伸縮$\sqrt{a^2+b^2}$ 倍而得到的圖形。

(3)函數 $y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$的週期為 2π，振幅為$\sqrt{a^2+b^2}$ ，

最大值為$\sqrt{a^2+b^2}$ ，最小值為$-\sqrt{a^2+b^2}$ 。

[例題2] 將函數 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 表示成 $y=r\cos(x+\theta)$的形式，其中 $r>0$ 且 $0<\theta<2\pi$。

解法：

若函數 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 要化成 $y=r\cos(x+\theta)$的形式

則 $r\cos(x+\theta)$

$=r(\cos x\cos\theta-\sin x\sin\theta)$

$=\sin x-\sqrt{3}\cos x$

因此 r,θ 要滿足：$\begin{cases} r\cdot\cos\theta=-\sqrt{3} \\ r\cdot\sin\theta=-1 \end{cases}$

將上面兩式平方相加，可得 $r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=(-1)^2+(-\sqrt{3})^2$

再利用平方關係，可得 $r^2=1^2+(\sqrt{3})^2=4$

所以 $r=2$(因為 $r>0$)，再代回原來的式子，可得

$\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$且 $\sin\theta=\dfrac{-1}{2}$ ，可取$\theta=\dfrac{-\pi}{6}$ 。

所以 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 可以化成 $f(x)=2\cos(x-\dfrac{\pi}{6})$。

[例題3] 設$270°<A<360°$且$\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2004°$，若$A=m°$，

則 $m=$ ________。(93 學科能力測驗) Ans：306

(練習2)設 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=a\cos(x-\theta)$，

其中 $a>0$，而 $0<\theta<2\pi$，則 $a=$__________，而$\theta=$__________。

Ans：$a=2$；$\theta=\dfrac{5\pi}{6}$

(乙)三角函數的極值

[例題4] 設 $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x+1$，在下列範圍內，求 y 的最大值與最小值。

(1)x 為任意實數　　(2) $\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{5\pi}{6}$

Ans：(1)3,−1　　(2) 2,−1

[問題與討論]：

設 $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x+1$，$x$ 為實數，y 的最大值為何不是 $\sqrt{3}+2$ 呢？

[例題5] 設 $y=3\sin x+4\cos x+10$，$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$，則當 $\tan x=$？時，y 有最大值 M=？

Ans：$x=\frac{3}{4}$，時 M=15

[例題6] 求函數 $y=\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{6})-\sin x$.在下列範圍的最大值與最小值，並求此時 x 的值。(1)$0\leq x\leq 2\pi$　　(2)$0\leq x\leq\pi$

分析：觀察函數 $y=\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{6})-\sin x$.，雖然 $y=\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{6})$與 $y=\sin x$ 兩個函數週期都是 2π，不過乍看之下並不符合疊合的形式，但是透過和角公式，還

是可以化成 $y=a\sin x+b\cos x$ 的形式。

Ans：(1) 當 $x=\frac{5\pi}{6}$，$y=1$ 為最大值；當 $x=\frac{11\pi}{6}$，$y=-1$ 為最小值。

(2) 當 $x=\frac{5\pi}{6}$，$y=1$ 為最大值；當 $x=\frac{11\pi}{6}$，$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$為最小值。

[例題7] (2 倍角+疊合求極值)

設 $0\le x\le\pi$，若 $f(x)=3\sin^2x+4\sqrt{3}\ \sin x\cdot\cos x-\cos^2x$，則

(1)當 $x=$______時，$f(x)$有最大值=_______。

(2)當 $x=$______時，$f(x)$有最小值=_______。

[答案]：(1)$\frac{\pi}{3}$，5 (2)$\frac{5\pi}{6}$，-3

[解法]：

將 $f(x)=3\sin^2x+4\sqrt{3}\ \sin x\cos x-\cos^2x$

$=3\times\frac{1-\cos2x}{2}+4\sqrt{3}\ \times\frac{\sin2x}{2}\ -\frac{1+\cos2x}{2}$

$=2\sqrt{3}\ \sin2x-2\cos2x+1$

$=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x)+1$

$=4\sin(2x-\frac{\pi}{6})+1$

因為 $0\le x\le\pi$，所以$-\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{11\pi}{6}$ $\Rightarrow -1\le\sin(2x-\frac{\pi}{6})\le 1$

當 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$，$f(x)$有最大值 5。當 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}$，$f(x)$有最小值$-3$。

[例題8] 設 $f(\theta)=\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta+1$

(1)θ為任意實數時，$f(\theta)$之最大值為______，最小值為______。

(2)$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$時，$f(\theta)$之最大值為______，最小值為______。

Ans：(1)$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，0 (2) $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，2

[解答]：先令 $t=\sin\theta+\cos\theta$ 則 $t^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$\therefore\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$ 且 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

(1)原式 $f(\theta)=\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta+1$

$=\frac{t^2-1}{2}+t+1=\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2$ 又$\theta\in R\Rightarrow-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$\therefore f(\theta)$之最大值為$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2$，最小值為 0。

(2) $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$時$\Rightarrow\frac{\pi}{2}\le\theta+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le 1$

$1\le\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}\Rightarrow 1\le t\le\sqrt{2}$ $\therefore f(\theta)$之最大值為$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2$，最小值為 2。

(練習3) (1)$y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ $\Rightarrow$最大值為_______，最小值為_______。

(2)$y=\sqrt{3}\sin x-\cos x+1$ $\Rightarrow$最大值為_______，最小值為_______。

(3)$y=5\sin x-12\cos x$ $\Rightarrow$最大值為_______，最小值為_______。

(4) $y=-40\sin x+9\cos x$ $\Rightarrow$最大值為_______，最小值為_______。

(練習4) 試求下列各函數的最大值與最小值

(1)$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x+5$

(2)$g(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{6})+2\cos x+5$

(3)設 $x-y=\frac{\pi}{6}$，求 $h(x)=2\cos x+2\sin y+5$ 的極大值與極小值。

Ans：(1)極大值=7，極小值=3 (2)同 1(3)同 1

(練習5) 設 $y=\sin(\frac{\pi}{6}-2x)+\cos 2x$

(1)若 $y=a\sin(2x+b)$，其中 $a>0$，$0\le b<2\pi$，求實數 a,b 之值。

(2)若 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，求 y 之最大值_______與最小值_______。

Ans：(1)$a=\sqrt{3}$，$b=\frac{2\pi}{3}$ (2)$\frac{3}{2}$，$-\sqrt{3}$

(練習6) 若當 $x=\alpha$ 時，$f(x)=12\cos x+5\sin x$ 有最小值，則 $\cos\alpha=$________。

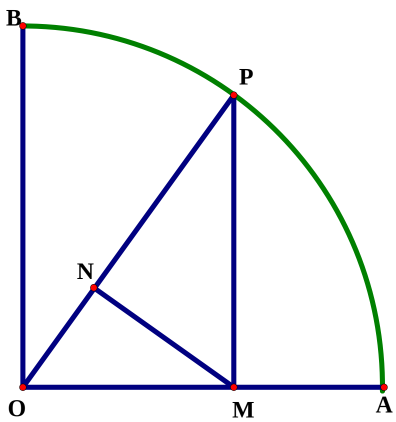
Ans：$\dfrac{-12}{13}$

(練習7) $y=\cos^2 x-3\cos x+3$ 之最大值為______，最小值為_______。Ans：7,1

(練習8) 設 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，則 $f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x+2\cos^2 x$ 最大值為__________，最小值為__________。Ans：$\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$；1

[例題9] 如圖，扇形 OAB 的中心角∠AOB=90°，半徑 $\overline{OA}=\overline{OB}=1$，P 為弧 AB 上的動點，$\overline{PM}\perp\overline{OA}$，$\overline{MN}\perp\overline{OP}$，令∠AOP=θ，$\overline{MN}+\overline{ON}=S$，

(1)請以θ表示 S。(2)求 S 之最大值。 Ans：(1)$\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta$ (2)$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$



[例題10] (1)設 $x\in R$，試問方程式 $5=\dfrac{3-\sin x}{\cos x+2}$ 是否有解？

(2) 設 $x\in R$，$y=\dfrac{3-\sin x}{\cos x+2}$，試問 x 有解時，y 的範圍為何？

Ans：(1)否 (2)$\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}\le f(x)\le\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$

[解法]：

(1) $5=\dfrac{3-\sin x}{\cos x+2}\Rightarrow 5\cos x+10=3-\sin x\Rightarrow 5\cos x+\sin x=-7$

但是 $-\sqrt{26}\le 5\cos x+\sin x\le\sqrt{26}$，故方程式無解。

(2)令 $y=\dfrac{3-\sin x}{\cos x+2}$，則 $\sin x+y\cos x=3-2y$

$\because|\sin x+y\cos x|\le\sqrt{1+y^2}$，$\therefore|3-2y|\le\sqrt{1+y^2}$

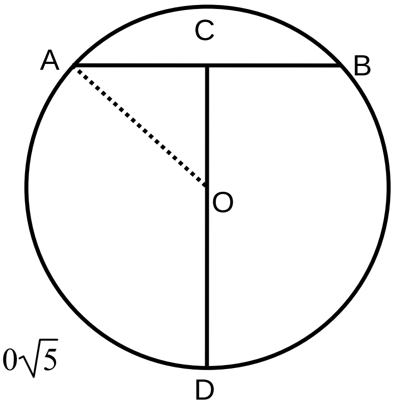
$\Rightarrow (3-2y)^2 \le 1+y^2 \quad \Rightarrow 3y^2-12y+8 \le 0$

$\Rightarrow \dfrac{6-2\sqrt{3}}{3} \le y \le \dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$

(練習9) $y=\cos^2 x-3\cos x+3$ 之最大值為______，最小值為_______。Ans：7,1

(練習10) 設 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，則 $f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x+2\cos^2 x$ 最大值為__________，最小值為__________。Ans：$\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$；1

(練習11) 某公園內有一半徑 50 公尺的圓形池塘，池塘內有美麗的荷花池與錦鯉。為了方便遊客觀賞，並使整體景觀更為雅緻，打算在池塘上建造一座“T”字型木橋(如右圖)。



試問這座木橋總長$\overline{AB}+\overline{CD}$最長有多長？

此時$\overline{AB}$與$\overline{CD}$兩段木橋的長度各為多少？

Ans：總長 $50+50\sqrt{5}$公尺，此時$\overline{AB}=40\sqrt{5}$,$\overline{CD}=50+10\sqrt{5}$

(練習12) 設 $0\le x\le 2\pi$，$f(x)=1+\sin x+\cos x-\sin x\cos x$ ，則下列何者為真？

(A)$f(x)$最大值為 2 (B)$f(x)$最小值為 $1-\sqrt{2}$ (C)$x=0,\frac{\pi}{2},2\pi$時 $f(x)$有最大值

(D)$x=225°$時，$f(x)$之值為最小值 (E)$f(x)$之最大值與最小值之和為$\frac{5}{2}-\sqrt{2}$

Ans：(A)(C)(D)(E)

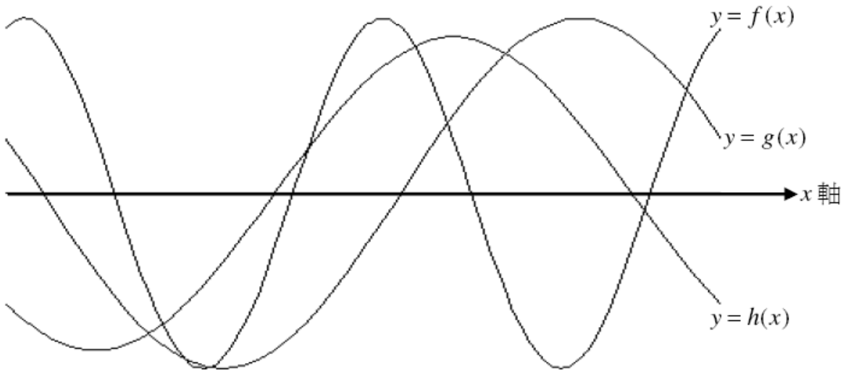
(練習13)設 $x\in R$， $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{3+\cos x}$ ，試求 $f(x)$的範圍。Ans： $0\le f(x)\le\dfrac{3}{4}$

綜合練習

(1) 求$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 15^\circ}-\dfrac{1}{\cos 15^\circ}$的值。

(2) 設 270°<A<360°且$\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2012^\circ$，若$A=m^\circ$，試求 m 的值。

(3) 函數 $y=3\sin x-\cos x$、$y=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$y=2\sin x+2\cos x$ 的圖形繪於同一坐標平面上，其與 x 軸的相關位置如下圖：



試問圖中的圖形 $y=f(x)$、$y=g(x)$、$y=h(x)$所代表的函數應為下列哪一個選項？

(1) $f(x)=3\sin x-\cos x$、$g(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$h(x)=2\sin x+2\cos x$
(2) $f(x)=3\sin x-\cos x$、$h(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$g(x)=2\sin x+2\cos x$
(3) $g(x)=3\sin x-\cos x$、$f(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$h(x)=2\sin x+2\cos x$
(4) $g(x)=3\sin x-\cos x$、$h(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$f(x)=2\sin x+2\cos x$
(5) $h(x)=3\sin x-\cos x$、$f(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$g(x)=2\sin x+2\cos x$

(4) 關於函數 $y=f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$的圖形，
下列敘述那些是正確的?
(A)$y=f(x)$的週期為 π 。(B) $y=f(x)$的振幅為$\sqrt{2}$ 。
(C)$y=f(x)$的圖形與 y 軸的交點為$(0,\frac{1}{2})$。
(D)$y=f(x)$的圖形與 x 軸有無限多個交點。
(E)$y=f(x)$的圖形對稱於原點。

(5) 關於函數 $y=\sin x-\cos x$ 之圖形(A)週期為 2π (B)週期為π (C) y 之最大值為 2 (D) y 之最大值為$\sqrt{2}$ (E)對稱於原點。

(6) 下列哪些函數的最小正週期為 π ？__________。(92 學科能力測驗)
(1)$\sin x+\cos x$ (2)$\sin x-\cos x$ (3)$|\sin x+\cos x|$ (4)$|\sin x-\cos x|$ (5)$|\sin x|+|\cos x|$

(7) 一根長為 l 公尺的細線，一端固定，另一端懸掛一個小球，假設忽略摩擦力且小球擺動的角度很小，當小球擺動時，與平衡點 (小球運動時經過的最低點)

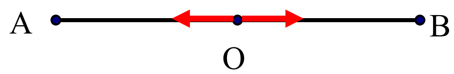
的水平位移（以平衡點為中心，向右為正，向左為負）和時間 t 秒的關係式，可以用 $f(t)=3\sin(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t+\frac{\pi}{6})$ 來表示，其中重力加速度 $g=9.8\ m/sec^2$，($\pi\approx3.14$)。

若小球擺動的週期為 4.71 秒，試求細線的長度。(算至小數點後一位)

(8) 如圖，一質點 P 在 $\overline{AB}$ 之間做簡諧運動，其中原點 O 為 $\overline{AB}$ 中點，以為此運動質點 P 的平衡位置，今規定向右為位移正方向。若已知振幅(即 $\overline{OB}$=5 公分)，週期為 3 秒，且物體向右運動到距 O 點最遠的 B 點時，開始計時，試求

(a)點 P 對點 O 的位移為 x(公分)與時間 t(秒)的函數。

(b)點 P 在 t=5 秒時的位置。



(9) $y=\cos x-\sqrt{3}\sin x$，$0\le x\le\pi$，在 $x=\alpha$ 時，有最大值 M，在 $x=\beta$ 時，有最小值 m，求 α,β,M,m。

(10) 下列各題經過變換後，求其最大值與最小值。

(a)求 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 之最大值與最小值。

(b)求 $y=2\sin x+2\sin(x+\frac{\pi}{2})$ 之最大值與最小值。

(11) 函數 $y=12\sin x-5\cos x$，x 的範圍如下，分別求 y 的最大值與最小值。

(a) $x\in\mathbb{R}$　　(b) $0\le x\le\frac{\pi}{2}$

(12) 設 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{7\pi}{6}$，$y=\cos^2x-4\sin x-3$，

則(a)當 x=＿＿＿＿＿時，y 有最小值為＿＿＿＿＿。

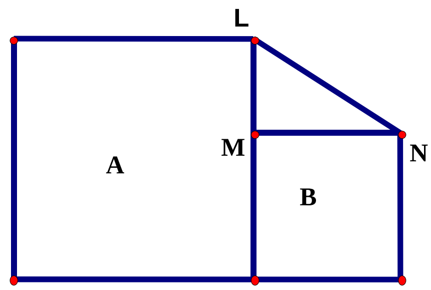
(b)當 x=＿＿＿＿＿時，y 有最大值為＿＿＿＿＿。

(13) 設 $\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，解 $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$。

(14) 如右圖，正方形 A 與 B 的面積和為 1，

(a)設正方形 A 與 B 的邊長分別為 $\sin\theta$、$\cos\theta$，請利用 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 來表示 ΔMNL 的面積。

(b)請求出 ΔMNL 的面積的最大值。

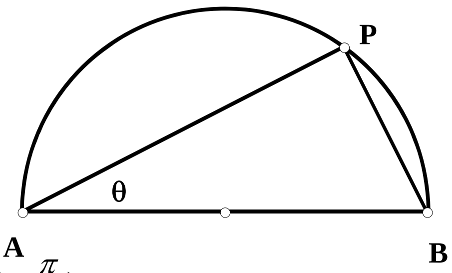


(15) 求 $y=3\sin^2x+4\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2x$　其中 $\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{3}{4}\pi$，求 y 的最大值與最小值，並說明此時 x 值為何？。

(16) 如右圖，以$\overline{AB}$為直徑做一圓，且$\overline{AB}=2$，P 點在半圓上，設$\angle PAB=\theta$，

(a)試以θ表示 $3\overline{AP}+4\overline{BP}$

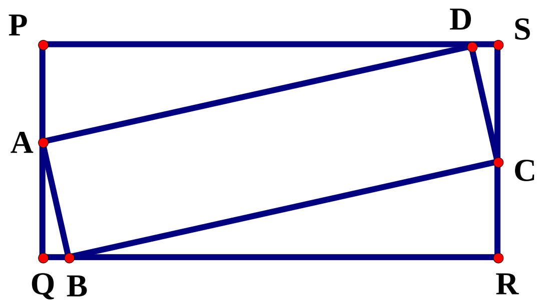
(b)試求 $3\overline{AP}+4\overline{BP}$的最大值。



(17) 半徑為 r 的圓內接矩形，令其對角線夾角為θ $(0<\theta\le\frac{\pi}{2})$

(a)試以 r 、θ表示矩形的周長？ (b)試求周長的最大值？

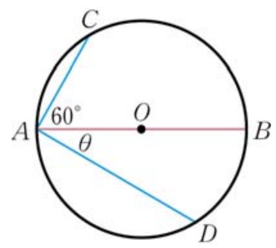
(18) 如下圖，矩形 ABCD 的四個頂點分別在矩形 PQRS 的四個邊上，若$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=7$，且$\overline{AB}$與$\overline{AQ}$的夾角為α，則當α等於多少度時，矩形 PQRS 的周長最大



(19) 如右圖， 圓 O 的半徑為 1，$\overline{AB}$ 為直徑，C 點在圓周上且$\angle CAB=60^\circ$，D 點在下半圓弧上移動，令$\angle BAD=\theta$，

(a) 以 $\sin\theta$ ，$\cos\theta$ 表示 $\sin\angle CAD$。

(b) 設 $S(\theta)$ 表示$\triangle ACD$ 的面積，試問當θ為多少時，$S(\theta)$ 會有最大值，並問此值是多少。

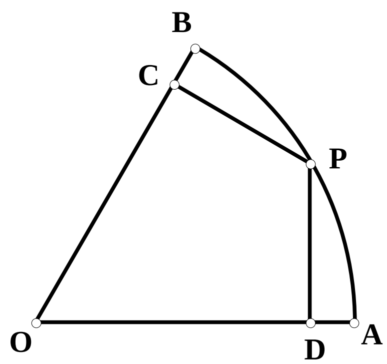


進階問題

(20) (a)設 $x\in R$ ，試問方程式$5=\dfrac{3-\sin x}{\cos x+2}$是否有解？

(b) 設 $x\in R$ ，$y=\dfrac{3-\sin x}{\cos x+2}$ ，試問 x 有解時， y 的範圍為何？

(21) 已知扇形 OAB 的圓心角為$\frac{\pi}{3}$，半徑為 1，P 為 AB 弧上的動點，$\overline{PC}\perp\overline{OA}$於 C 點，$\overline{PD}\perp\overline{OB}$於 D 點，試求四邊形 PCOD 的最大面積。



(22) 設 $x+y=\frac{2\pi}{3}$，求 $\sin x+2\sin y$ 的最大值為何？

(23) 斜邊長為 6 的直角三角形中，求周長的最大值？

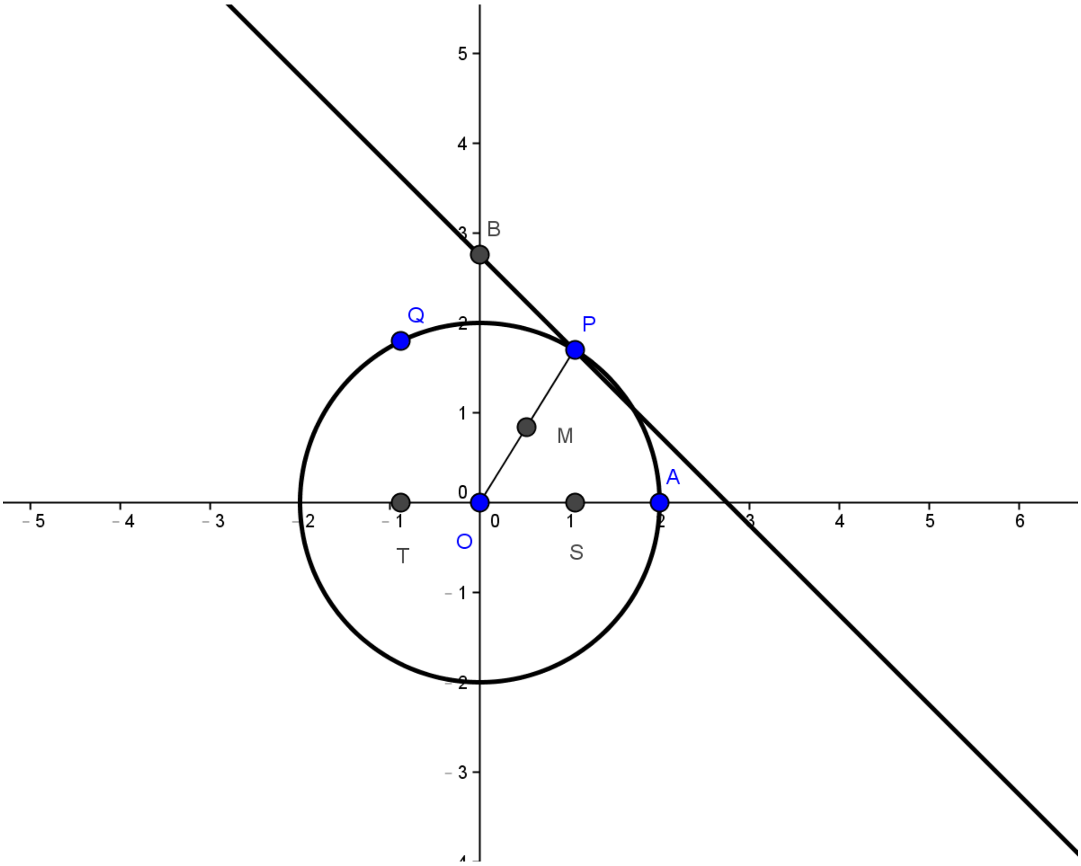
(24) 如圖，平面上，圓 C 的圓心為 O，半徑為 2 點，A(2,0)、P、Q 為圓上的動點，$\angle AOP=\angle POQ=\theta$，

其中$\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$。M 為$\overline{OP}$ 中點，直線 L 為過 P 點且斜率為−1 的直線，B 點為直線 L 與 y 軸的交點。

(a)若 P、Q 在 x 軸上的投影點分別為 S、T，求$\overline{ST}$ 長的最大值。

(b)若$\overline{BM}^2=a\sin(2\theta+b)+c$，其中 $a>0$，$0\leq b\leq\frac{\pi}{2}$，$c\geq 0$，試求 a,b,c 的值。

(c)試求$\overline{BM}^2$的最大值。



綜合練習解答

(1) $4\sqrt{2}$
(2) 282
(3) (3)
(4) (C)(D)
(5) (A)(D)
(6) (3)(4)
(7) 5.5 公尺
(8) (a)$x=5\sin(\frac{2\pi}{3}t+\frac{\pi}{2})$ (b)$\frac{-5}{2}$

[提示：可令 $x=A\sin(\omega t+\alpha)$，A=5、$\frac{2\pi}{\omega}=3$、$t=0$ 時 $x=5$]

(9) $\alpha=0$，M=1；$\beta=\frac{2\pi}{3}$，$m=-2$
(10) (a)最大值為$\sqrt{2}$，最小值$-\sqrt{2}$ (b)最大值為 $2\sqrt{2}$，最小值$-2\sqrt{2}$
(11) (a)M=13,m= −13(b)M=12, m= −5
(12) (a) $\frac{\pi}{2}$,−7 (b)$\frac{7\pi}{6}$,$\frac{-1}{4}$
(13) $x=\frac{\pi}{6}$
(14) (a)$\frac{1}{2}\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$ (b)$\frac{\sqrt{2}-1}{4}$

[解法]：

(a) $\Delta MNL=\frac{1}{2}\overline{MN}\cdot\overline{ML}=\frac{1}{2}\cdot\cos\theta\cdot(\sin\theta-\cos\theta)$

(b) $\frac{1}{2}\cdot\cos\theta\cdot(\sin\theta-\cos\theta)$ $=\frac{1}{2}(\cos\theta\sin\theta-\cos^2\theta)$ $=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\sin2\theta-\frac{1+\cos2\theta}{2}]$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\sin2\theta-\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}]$ $=\frac{1}{2}\cdot[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}]$ ΔMNL 的面積的最大值為$\frac{\sqrt{2}-1}{4}$

(15) $x=\frac{\pi}{3}$，最大值 5 與 $x=\frac{3\pi}{4}$最小值 $1-2\sqrt{3}$
(16) (a)$6\cos\theta+8\sin\theta$ (b)10
(17) (a) $4r(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})$ (b) $4\sqrt{2}r$
(18) 45°，$20\sqrt{2}$
(19) (a)$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$ (b)$\frac{\pi}{12}$、最大值$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$
(20) (a)否 (b) $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\le f(x)\le\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$

[解法]：

(1) $5=\dfrac{3-\sin x}{\cos x+2}$ $\Rightarrow 5\cos x+10=3-\sin x$ $\Rightarrow 5\cos x+\sin x=-7$

但是$-\sqrt{26}\le 5\cos x+\sin x\le\sqrt{26}$，故方程式無解。

(2)令 $y=\dfrac{3-\sin x}{\cos x+2}$，則$\sin x+y\cos x=3-2y$

$\because|\sin x+y\cos x|\le\sqrt{1+y^2}$，$\therefore|3-2y|\le\sqrt{1+y^2}$

$\Rightarrow(3-2y)^2\le 1+y^2$ $\Rightarrow 3y^2-12y+8\le 0$

$\Rightarrow\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}\le y\le\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$

(21) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$[提示：連$\overline{\text{OP}}$，並設∠POB=θ，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}$，則四邊形 PCOD 的面積$=\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{\pi}{3}-\theta)\cos(\dfrac{\pi}{3}-\theta)=\dfrac{1}{4}[\sin2\theta+\sin(\dfrac{2\pi}{3}-2\theta)]=\dfrac{1}{4}(\dfrac{3}{2}\sin2\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos2\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{6})$]

(22) $\sqrt{7}$ [提示：$y=\dfrac{2\pi}{3}-x$，$\sin x+2\sin y=\sin x+2\sin(\dfrac{2\pi}{3}-x)=2\sin x+\sqrt{3}\cos x$]

(23) $6\sqrt{2}+6$

(24) (a)$\dfrac{9}{4}$ (b)$a=2\sqrt{2}$，$b=\dfrac{\pi}{4}$，$c=3$ (c)5