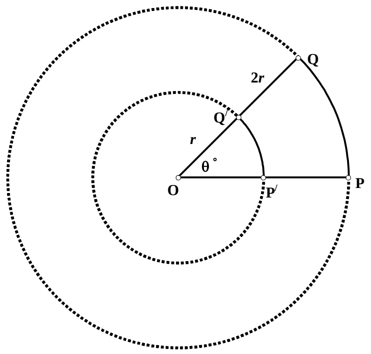
# 第三章 三角函數的性質與應用

## §3–1 三角函數的圖形

### (甲)弧度制

我們觀察量角器，發現整個半圓分成 180 等分，1 等分所對應的角度大小就定義成 1 度。這種定義方式是人爲的，就像重量的單位有公斤、磅、台斤等，有時候是某些習慣用法或歷史上的因素，同理，我們對於角度的大小也可以定義不同的度量的單位，去表示角度的大小。

[觀察]：

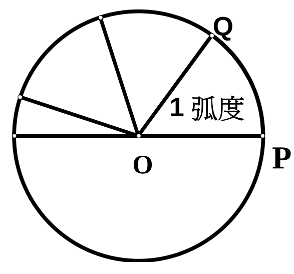



觀察上圖，計算$P'Q'$的弧長=$\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\times 2\pi r=\frac{\pi\theta r}{180}$，PQ的弧長=$\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\times 4\pi r=\frac{\pi\theta r}{90}$，觀察這個結果可以發現$P'Q'$的弧長：PQ的弧長=1：2=$r$：2$r$，因此**只要圓心角固定，弧長與半徑的比值是一個定值**。數學上就利用這個定值來定義角度，這個比值本身是一個實數，有別於用特定的單位去定義角度，也因此能將三角函數視爲定義在實數或實數的子集合上的函數，對於後續的應用與理論的發展有很重要的影響。

(1)弧度的定義：

設有一圓，圓心爲O，半徑爲$r$。在圓周上取一段圓弧$\overset{\frown}{PQ}$，

使得圓弧$\overset{\frown}{PQ}$的長度等於$r$，規定這一段圓弧$\overset{\frown}{PQ}$所對的圓心角∠POQ就定義成 1 **弧度**。符號：∠POQ=1 弧度=1 弳=1。




①當$\overset{\frown}{PQ}$的長度爲$r$時，就說∠POQ =1 弧度。

②當$\overset{\frown}{PQ}$的長度爲 2$r$時，就說∠POQ =__________弧度。

③當$\overset{\frown}{PQ}$的長度爲 3$r$時，就說∠POQ =__________弧度。

④當$\overset{\frown}{PQ}$的長度爲$xr$時　就說∠POQ =__________弧度。

由此可得：半圓的周長爲$\pi r$，是半徑$r$的$\pi$倍，所以半圓的圓周角爲$\pi$弧度，又半圓的圓周角也是 180 度(以國中所學“°”度爲單位)。所以用 180 度與$\pi$弧度所代表的角度大小都是一樣的。這個情形就好像重量單位中，1 磅與 0.454 公斤所代表的重量是相同的。

(2)度與弧度之互換：

設$x$弧度相當於$y^{\circ}$，因爲π弧度相當於 $180^{\circ}$，所以$\dfrac{x}{\pi}=\dfrac{y}{180}$。

$1^{\circ}=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度約等於 0.01745 弧度

1 弧度$=(\dfrac{180}{\pi})^{\circ}$約等於 $57.2958^{\circ}(57^{\circ}17'45'')$，注意弧度可以省略。即 $1=(\dfrac{180}{\pi})^{\circ}$

結論：

(a)π不論用在什麼場合，始終要堅持其近似值爲 3.1416，當π用在角度時，由於是省略弧度，才會變成 180°，也就是π弧度≒3.1416(弧度)≒3.1416×(1 弧度)≒$3.1416\times(57^{\circ}17'45'')=180^{\circ}$

例如：π°表 3.1416°⇒π°小於一直角。但π (單位故意不寫)表 180°。

$\pi^{\circ}\neq\pi$弧度。

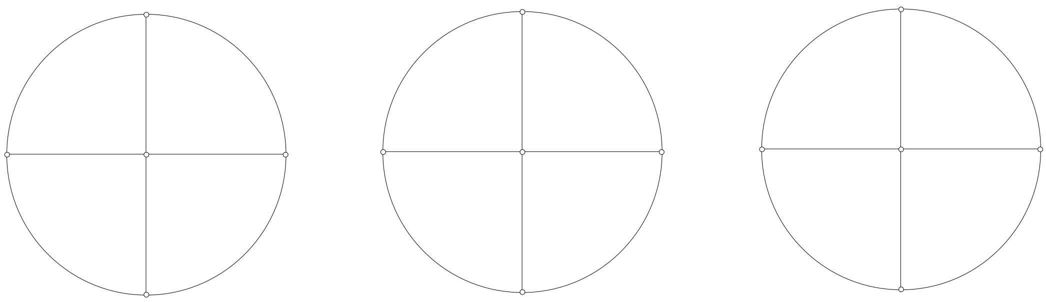
書寫上，如果一個數字沒有加度或°，我們都視爲是弧度，即$x^{\circ}\neq x$因此在角度符號上的使用要特別注意。

(b) $x$弧度相當於$y^{\circ}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x}{\pi}=\dfrac{y}{180}$。

①度化弧度⇒去度“°”，乘以$\dfrac{\pi}{180^{\circ}}$即可。　②弧度化度⇒乘$\dfrac{180^{\circ}}{\pi}$

(c) 象限角的情形

①度度量　　②弧度制　　③弧度制的近似值



[例題1] 將下列各度數化爲弧度：

(1)60°　　(2)(45.6)°　　(3)$42^{\circ}24'36''$

Ans：(1)$\dfrac{\pi}{3}$　(2)$\dfrac{19\pi}{75}$　(3)$\dfrac{4241\pi}{18000}$

[例題2] 將下列各弧度化為度數：

(1)$\frac{5\pi}{6}$ (2)$-2$(弧度) (3)$\frac{\pi+1}{6}$ Ans：(1)150° (2) $-\frac{360°}{\pi}$ (3)$30°+\frac{30°}{\pi}$

(練習1) 完成下表中的角度單位的互換：

| 度 | 10° | 15° | 18° | | 45° | 60° | | 90° | 120° | 135° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 弧度 | | | | $\frac{\pi}{6}$ | | | $\frac{5\pi}{12}$ | | | |
| 度 | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | | 315° | | 360° |
| 弧度 | | | | | | | $\frac{5\pi}{6}$ | | $\frac{11\pi}{6}$ | |

(練習2) 在直角坐標上，(cos4，tan6)所表的點 P 在那一個象限？
Ans：第三象限

(練習3) 下列最大的數為？
(A) sin1 (B) sin2 (C) sin3 (D) sin4 (E) sin5。
Ans：(B)

(練習4) 寫出下列各角的最小正同界角 (1)50(2)$-60$Ans：(1)$50-14\pi$ (2)$20\pi-60$

(練習5) 請問下列關係何者正確？

(A)$\sin(180-\theta)=\sin\theta$(B)$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ (C)$\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta$

(D)$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$(E)$\sin(\theta+360)=\sin\theta$。Asns：(B)(C)(D)

(3)扇形的弧長與面積：

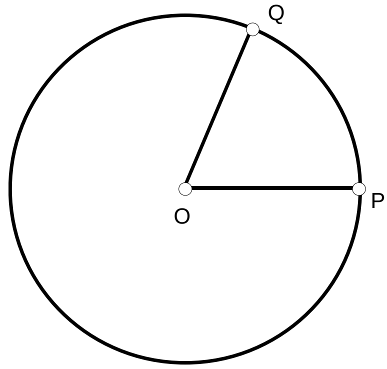
(a)弧長公式與扇形面積公式：

若設有一圓O，其半徑為$r$，扇形OPQ中的圓心角∠POQ為θ(**弧度**)，

則①$\overset{\frown}{PQ}$ 的弧長$s=\cdot r\cdot\theta$ ②扇形OPQ的面積$A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r\cdot s$

**注意：單位是弧度，而不是度**

證明：




例如：有一扇形，其半徑為 15 公分，圓心角為$\dfrac{\pi}{3}$，

試求面積與其弧長。

解答：弧長$=15\cdot\dfrac{\pi}{3}=5\cdot\pi$(約 15.7 公分)　面積$=\dfrac{1}{2}(15)^2\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{225}{6}\cdot\pi$(約 117.81 公分)

結論：半徑為$r$，中心角為$\theta$ 弧度之扇形(POQ)

(1)弧長$L=r\cdot\theta$

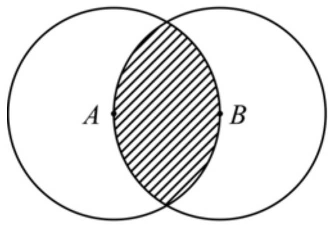
(2)周長$=2\cdot r+r\cdot\theta$

(3)面積$=\dfrac{1}{2}\cdot r^2\cdot\theta=\dfrac{1}{2}\cdot r\cdot L$

[例題3] $\overline{AB}=10$cm，求斜線部分的面積。

分別以 A，B 為圓心，以$\overline{AB}$為半徑所作的兩個圓的相交部分。

Ans：$\dfrac{200\pi}{3}-50\sqrt{3}$

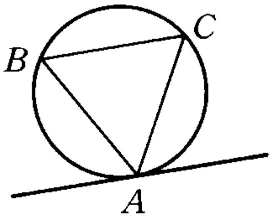



[例題4] 有一輪子直徑為 30 公分，讓它在地上自 A 點逆時針滾動 $20\cdot\pi$公分的長度，問輪子繞軸轉動幾度？問此時 A 點離地面幾公分？

Ans：$\dfrac{4\pi}{3}$，$15(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2})$公分

(練習6) 有一個輪子，半徑 50 公分，讓它在地上滾動 200 公分的長度，問輪子繞軸轉動________度。(度以下四捨五入)　(88 學科)
Ans：229°

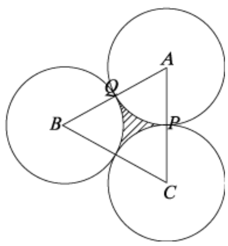
(練習7) 有一扇形的面積爲 1，弧長爲 2，則此扇形所對的圓心角爲________弧度。　Ans：2

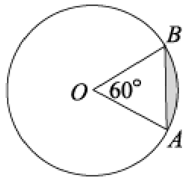



(練習8) 如圖，有一輪子，直徑 80 公分，外接於一正△ABC，切地面於 A。讓它向右滾動，則$\overline{BC}$於下一次平行地面時，輪子繞軸轉動了【　　　】弧度，此時輪子向右滾動了【　　　】公分。Ans：π，40π

(練習9) 若一扇形周長等於所在圓的周長，則扇形的中心角爲________。
Ans：$2\pi-2$

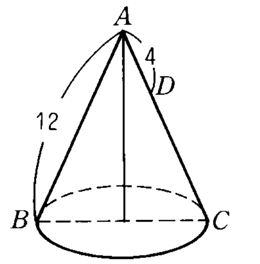
(練習10) 半徑爲 1 的三個圓互相外切，則此三圓間所圍成的面積爲__________。
Ans：$\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$




(練習11) 如右上圖，圓$C$的圓心爲$O$，半徑爲 1，$\angle AOB=60°$，則陰影部分的面積爲__________。Ans：$\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

(練習12) 一直圓錐面底之半徑爲 5，高爲 12，若將此直圓錐沿一斜高剪開成一扇形，則中心角爲_________弧度。　Ans：$\frac{10\pi}{13}$




(練習13) 如圖的直圓錐，$\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AD}=4$，
若 C 處有一隻螞蟻，則：
(1)繞一圈又回到 C 的最短路線長爲【　　　　】。
(2)繞一圈至 D 的最短路線長爲【　　　　】。
Ans：(1)$12\sqrt{2}$(2)$4\sqrt{10}$

## (乙)三角函數的圖形

(1)週期函數：
定義：一函數 $y=f(x)$的圖形，若每隔一固定單位長都一樣，即可以找到固定的正數α，使得對於每個定義域中的元素 $x$，$f(x+\alpha)=f(x)$，我們就稱這個函數 $f(x)$爲一個週期函數。如果又可以找到滿足上述性質的最小正數 $p$，稱 $p$ 爲週期函數 $f(x)$的週期。

例如：
$f(x)=\sin x$ 因為 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$，即 $a=2k\pi$，當 $k=1$ 時，$p=2\pi$最小。
因此 $f(x)=\sin x$ 為週期函數且週期為 $2\pi$。

$f(x)=\tan x$ 因為 $\tan(x+k\pi)=\tan x$，即 $a=k\pi$，當 $k=1$ 時，$p=\pi$最小。
因此 $f(x)=\tan x$ 為週期函數且週期為$\pi$。

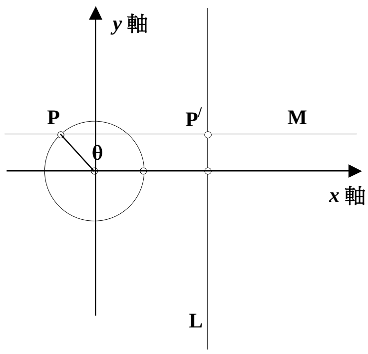
[例題5] 求下列各三角函數的週期：
(1)$f(x)=\sin 2x$ (2)$f(x)=2-\tan 3x$ (3)$f(x)=|\sin x|$
Ans：(1)$\pi$ (2)$\frac{\pi}{3}$ (3)$\pi$

結論：
(1)正弦、餘弦、正割、餘割函數的週期為 $2\pi$。正切、餘切函數的週期為$\pi$。
(2)設 F 表 sin，cos，sec，csc 中某一個函數，
則(a)形如 $a\mathrm{F}(kx+b)+c$ 的函數週期為$\frac{2\pi}{k}$，其中 $a,b,c$ 為實數，$k$ 為正實數。
(b)形如$|\mathrm{F}(kx+b)|$的函數週期為$\frac{\pi}{k}$。
(3)設 F 表 $\tan\theta$，cot 中之某一個函數，
則(a)形如 $a\mathrm{F}(kx+b)+c$ 的週期為$\frac{\pi}{k}$，其中 $a,b,c$ 為實數，$k$ 為正實數。
(b)形如$|\mathrm{F}(kx+b)|$的函數週期為$\frac{\pi}{2k}$。
(2)三角函數的圖形：
我們知道廣義角的三角函數是一個角對應到一個數的函數，例如sinA正弦函數是一個把角A對應到sinA的函數。在前一段中，介紹了角的另一個單位：弧度，而且還強調角度為$x$弧度時可以把單位省略不寫。對於任一個實數$x$，必有一個實數$x$，必有一個$x$弧度的角與它對應，因此，我們可以從另一個角度來看三角函數，我們可將三角函數看成把實數對應到實數的函數。換句話說，對於任意實數$x$，我們先取$x$弧度的角，然後再考慮此角的三角函數值，例如sin2 是代表 2 弧度角的正弦函數值；對於實數$\frac{\pi}{6}$而言，$\sin\frac{\pi}{6}$是代表$\frac{\pi}{6}$弧度角，即 $30^{\circ}$角的正弦函數值，所以$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$。
(a)正弦函數的圖形：
(法一)描點法：
描繪函數圖形最直接的方法就是描點法：先求出某些特殊的 $x$ 值所對應的 $\sin x$ 值，並列表如下：

| $x$ | … | $\frac{-\pi}{4}$ | $\frac{-\pi}{6}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin$x$ | … | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | … |

再依此標出圖形上的點，然後用平滑曲線將這些線連結起來。

(法二)利用廣義角之正弦值作圖：
以座標原點爲圓心作一個單位圓，對於任一個有向角θ，
假設此角度的終邊爲OP，其中P在圓上，則P點的縱座標爲sinθ，
因此若過(θ,0)點且垂直於$x$軸的直線L與過P點且平行$x$軸的
直線M相交於P′，則P′的座標爲(θ,sinθ)，
因此P′點在$y$=sin$x$的函數圖形上。



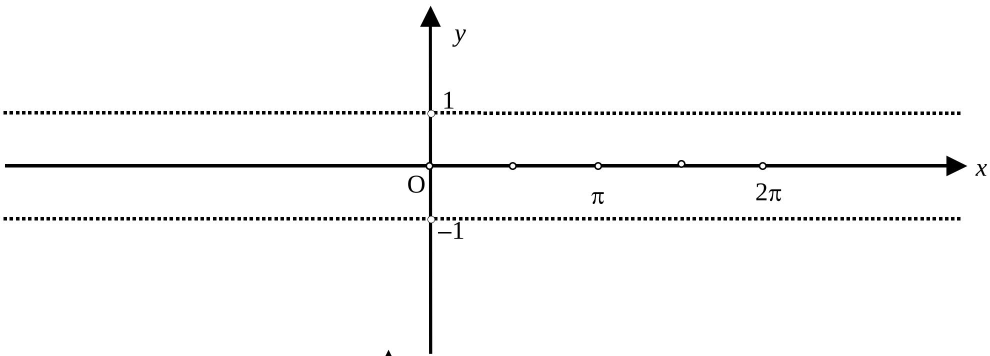

根據前面兩個方法可得正弦函數的圖形：

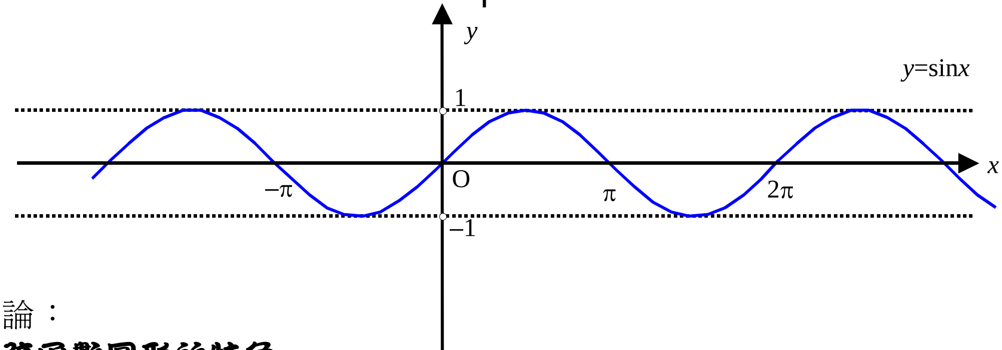
正弦函數$y$=sin$x$之作圖法

Step1：**描點**⇒五點法描點(即$x=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$)

Step2：**作圖**⇒描點於坐標系中(橫軸表角度，縱軸表函數值)

Step3：**複製**⇒週期爲 2π，故沿$x$軸向左，右兩邊，每隔 2π單位，重複描出相同之圖形，即得$y$=sin$x$全部圖形。




結論：

**正弦函數圖形的特色**

(a)圖形的對稱中心爲($n\pi$,0)，圖形的對稱軸爲 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k$ 爲整數。

(b)圖形與 $x$ 軸的交點($n\pi$,0)，圖形與 $y$ 軸的交點(0,0)。

(c)正弦函數 $y$=sin$x$ 的週期為 $2\pi$。

(d)正弦函數 $y$=sin$x$ 的振幅為 1

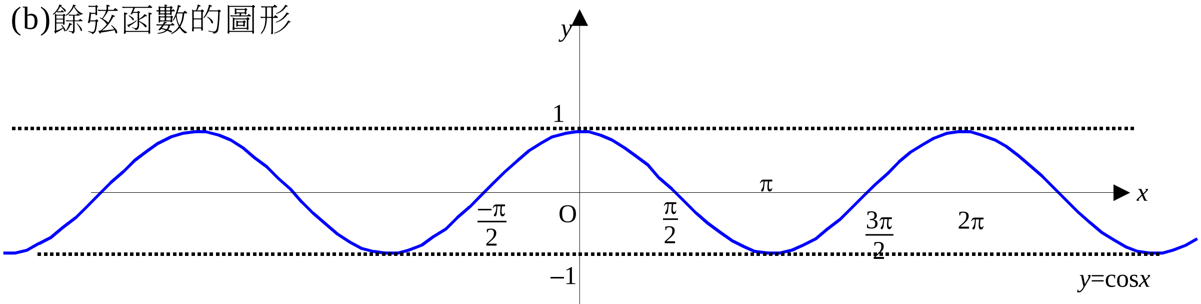
**正弦函數的特色**

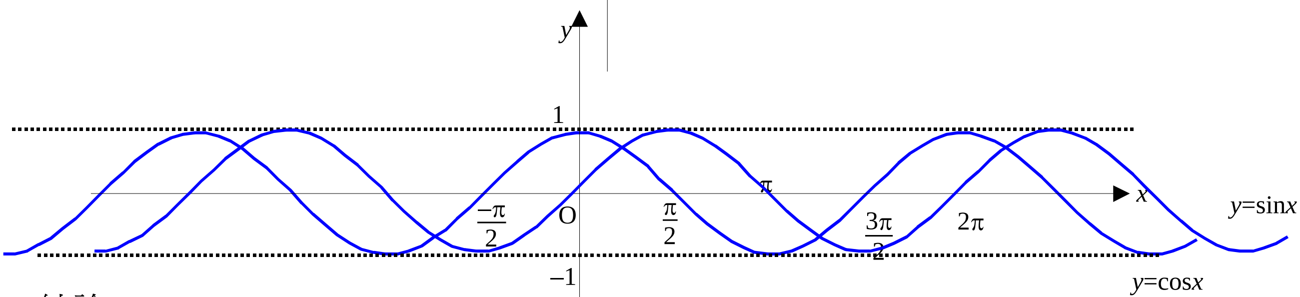
(a)正弦函數 $y$=sin$x$ 的定義域為 R。

(b)正弦函數 $y$=sin$x$ 的值域為$\{y \mid -1\le y\le 1\}$，即$-1\le \sin x\le 1$，最大值=1，最小值=−1。

(c)正弦函數 $y$=sin$x$ 為奇函數。即 $\sin(-x)=-\sin x$。

(b)餘弦函數的圖形




結論：

**餘弦函數圖形的特色**

(a)圖形的對稱中心為($\frac{\pi}{2}+k\pi$,0)，圖形的對稱軸為 $x=n\pi$，$n$ 為整數。

(b)圖形與 $x$ 軸的交點($\frac{\pi}{2}+k\pi$,0)，圖形與 $y$ 軸的交點(0,1)。

(c)餘弦函數 $y$=cos$x$ 的週期為 $2\pi$。

(d)餘弦函數 $y$=cos$x$ 的振幅為 1

(e)$y$=cos$x$ 的圖形是由 $y$=sin$x$ 的圖形向左平移$\frac{\pi}{2}$單位所成的圖形。

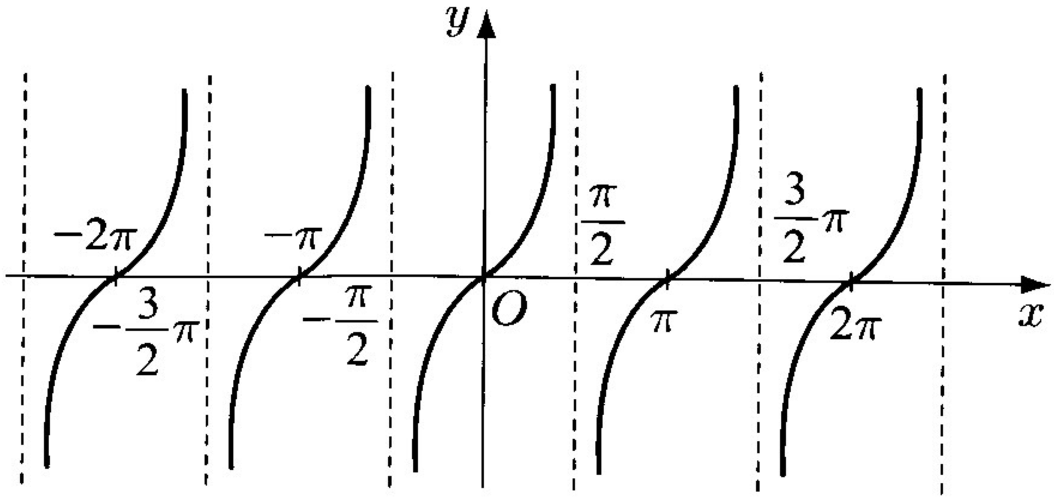
**餘弦函數的特色**

(a)餘弦函數 $y$=cos$x$ 的定義域為 R。

(b)餘弦函數 $y$=cos$x$ 的值域為$\{y \mid -1\le y\le 1\}$，即$-1\le \sin x\le 1$，最大值=1，最小值=−1。

(c)餘弦函數 $y$=cos$x$ 為偶函數。即 $\cos(-x)=\cos x$。

(c)正切函數的圖形：




結論

**正切函數圖形的特色**：

(a)圖形的對稱中心為$(n\pi,0)$。

(b)圖形與 $x$ 軸的交點$(n\pi,0)$，圖形與 $y$ 軸的交點(0,0)。

(c)圖形在 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$($k$ 為整數)處不連續。

(d)圖形的漸近線：$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k$ 為整數。

**正切函數的特色**：

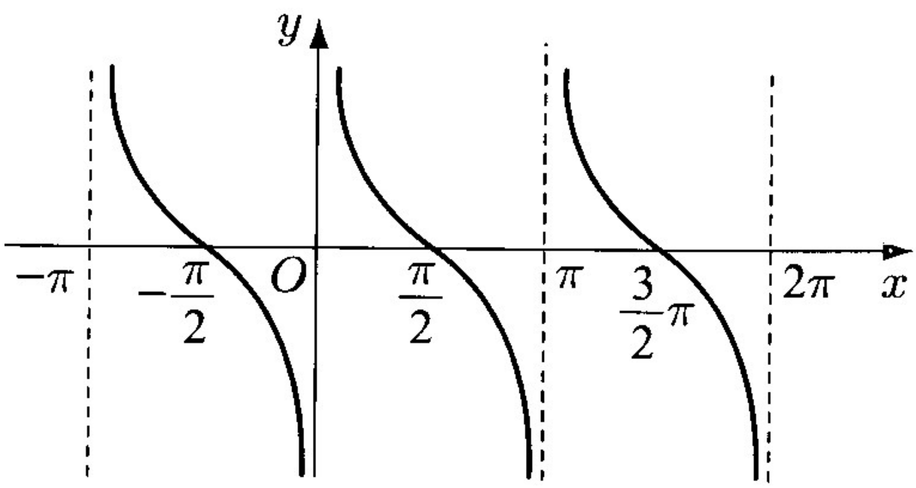
(a)正切函數 $y=\tan x$ 的定義域為$\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k$ 為整數，$x\in R\}$。

(b)正切函數 $y=\tan x$ 的值域為 R。

(c)正切函數 $y=\tan x$ 的週期為$\pi$。

(d)正切函數 $y=\tan x$ 為奇函數。即 $\tan(-x)=-\tan x$。

(d)餘切函數的圖形：



結論

**餘切函數圖形的特色**：

(a)圖形的對稱中心爲($\frac{\pi}{2}+k\pi$,0)。($k$ 爲整數)

(b)圖形與 $x$ 軸的交點($\frac{\pi}{2}+k\pi$,0)($k$ 爲整數)。

(c)圖形在 $x=k\pi$($k$ 爲整數)處不連續。

(d)圖形的漸近線：$x=k\pi$，$k$ 爲整數。

**餘切函數的特色**：

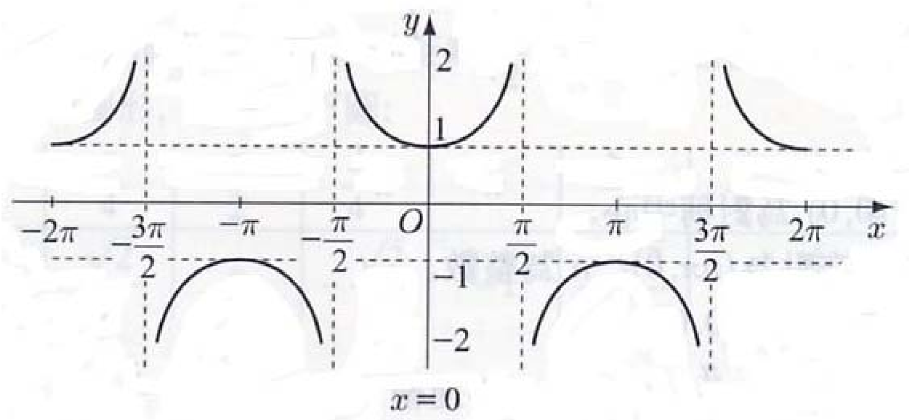
(a)餘切函數 $y=\cot x$ 的定義域爲$\{x|x\neq k\pi, k$ 爲整數，$x\in R\}$。

(b)餘切函數 $y=\cot x$ 的值域爲 R。

(c)餘切函數 $y=\cot x$ 的週期爲π。

(d)餘切函數 $y=\cot x$ 爲奇函數。即 $\cot(-x)=-\cot x$。

(e)正割函數的圖形：




結論：

**正割函數圖形的特色**

(a)圖形的對稱軸爲 $x=n\pi$，$n$ 爲整數。

(b)圖形的漸近線：$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k$ 爲整數。

(c)圖形在 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$($k$ 爲整數)處不連續。

(d)正割函數 $y=\sec x$ 的週期爲 2π。

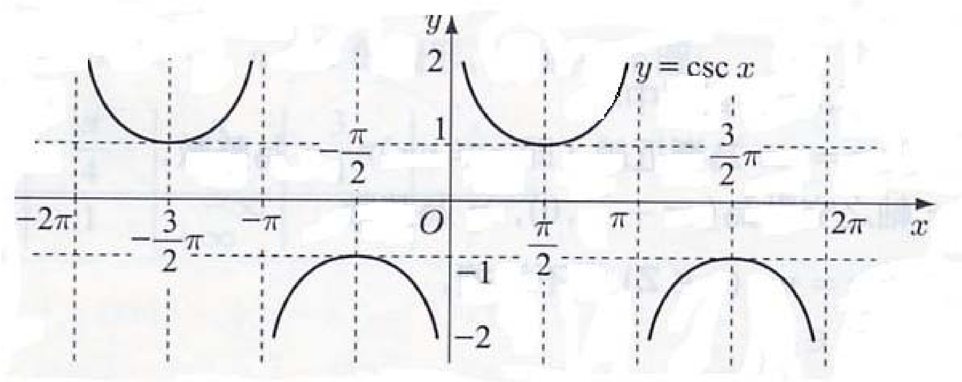
**正割函數的特色**

(a)正割函數 $y=\sec x$ 的定義域爲$\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k$ 爲整數，$x\in R\}$。

(b)正割函數 $y=\sec x$ 的值域爲$\{y \mid y\geq 1$ 或 $y\leq -1\}$。$|\sec x|\geq 1$

(c)正割函數 $y=\sec x$ 爲偶函數。即 $\sec(-x)=\sec x$。

(f)餘割函數的圖形：




結論：

**餘割函數圖形的特色**

(a)圖形的對稱軸為，$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k$ 為整數。

(b)圖形的漸近線：$x=k\pi$，$k$ 為整數。

(c)圖形在 $x=k\pi$($k$ 為整數)處不連續。

(d)正割函數 $y=\csc x$ 的週期為 $2\pi$。

**餘割函數的特色**

(a)正割函數 $y=\csc x$ 的定義域為$\{x|x\neq k\pi,\ k$ 為整數，$x\in R\}$。

(b)正割函數 $y=\csc x$ 的值域為$\{y\mid y\geq 1$ 或 $y\leq -1\}$。$|\csc x|\geq 1$

(c)正割函數 $y=\csc x$ 為奇函數。即 $\csc(-x)=-\csc x$。

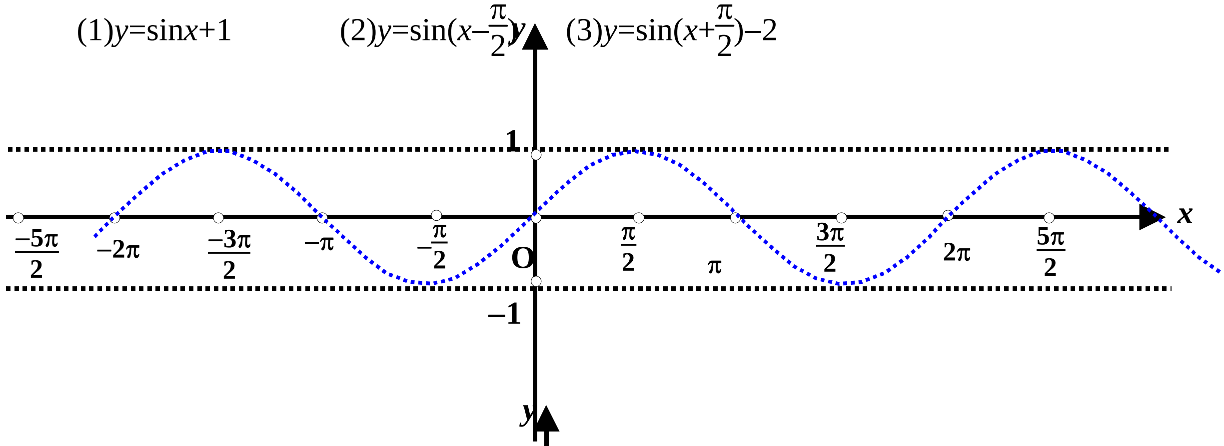
[例題6] 【平移法作圖問題⇒作 $y=\sin(x-\theta)+b$ 的圖形】

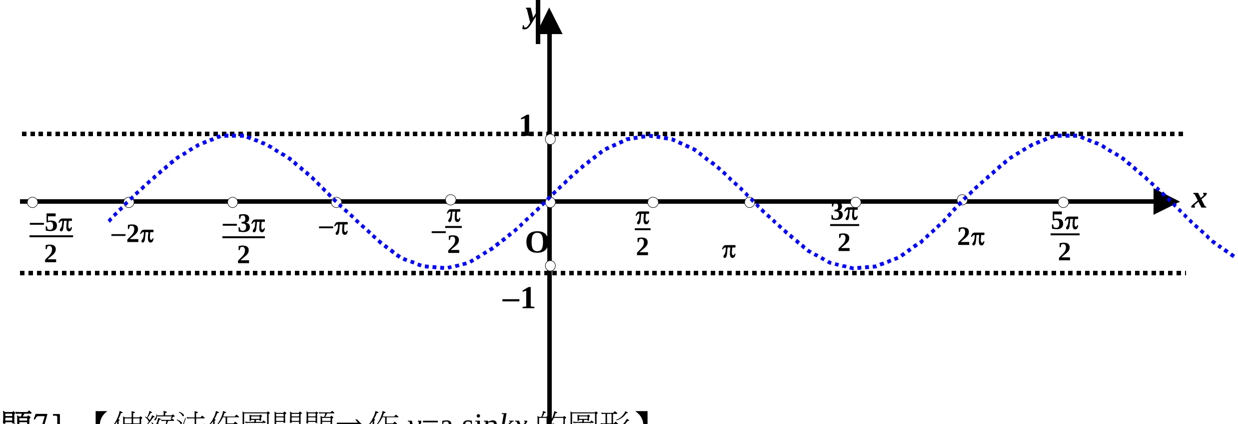
Step1：先作基本圖形 $y=\sin x$

Step2：上下平移 b 單位　Step3：左右平移θ單位

試利用正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形，描繪下列各三角函數的圖形。

(1)$y=\sin x+1$　　(2)$y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$　　(3)$y=\sin(x+\frac{\pi}{2})-2$




[例題7] 【伸縮法作圖問題⇒作 $y=a\sin kx$ 的圖形】

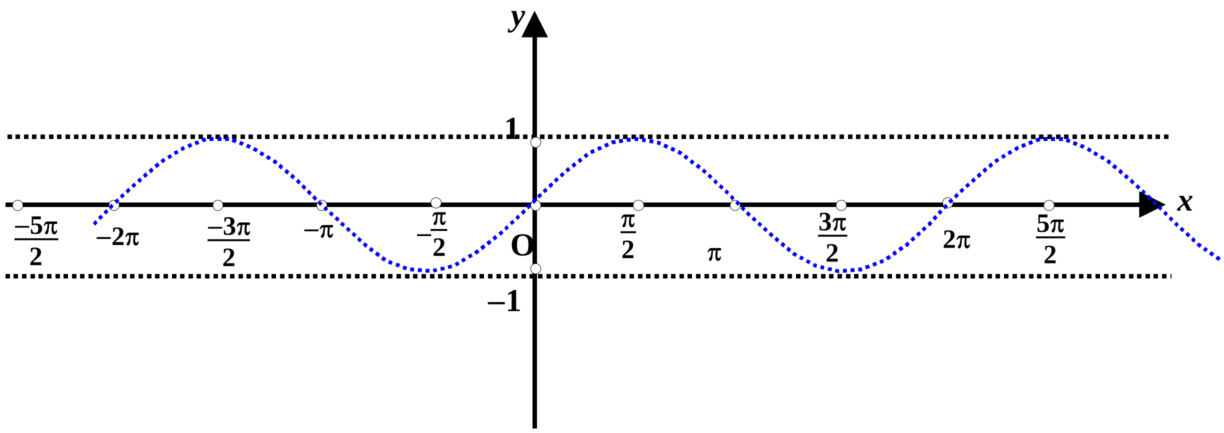
Step1：先作基本圖形 $y=\sin x$

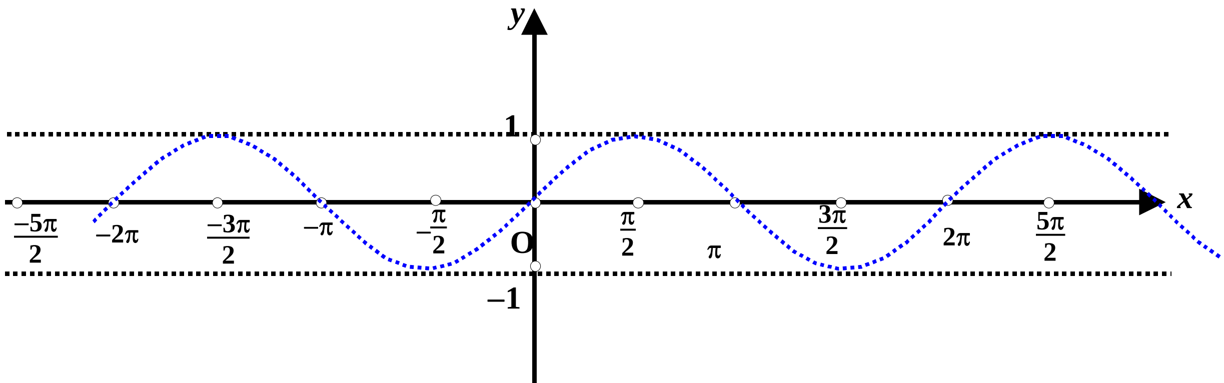
Step2：$y=\sin x$ 上每一點的縱坐標乘以 a (a>0)

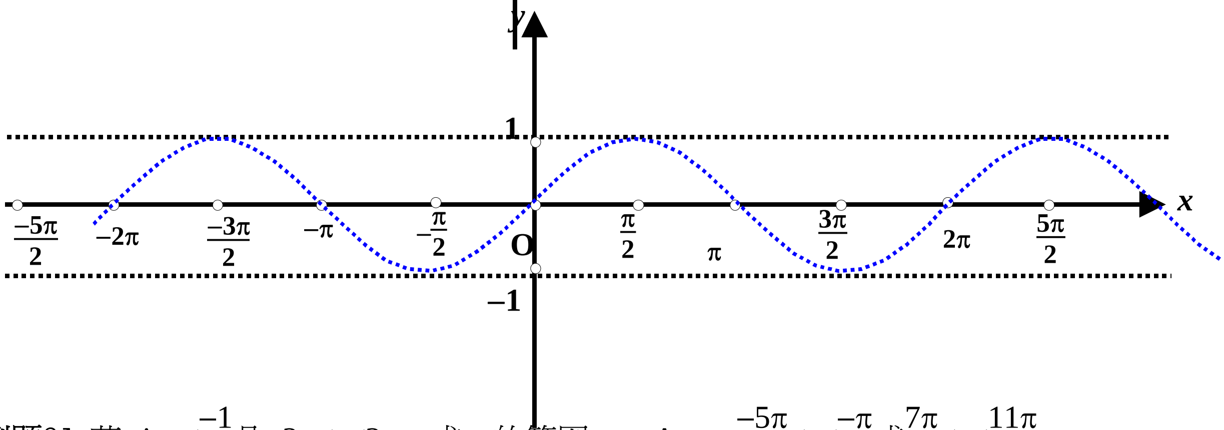
Step3：每一點的橫坐標乘以 $\frac{1}{k}$。

試利用正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形，描繪下列各三角函數的圖形。

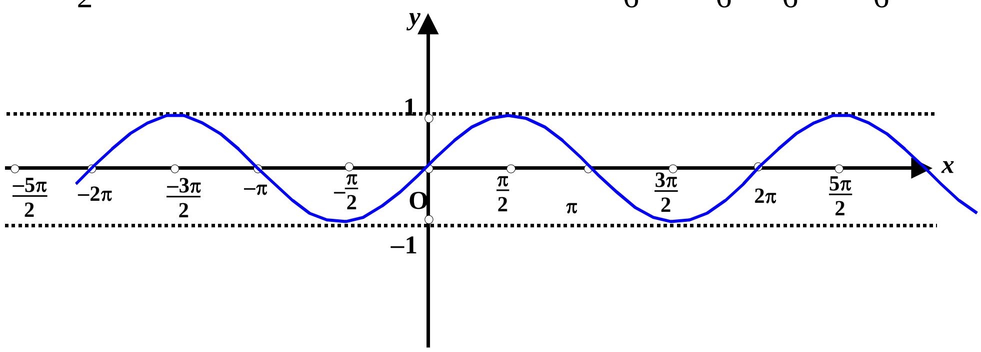
(1)$y=2\sin x$　　(2)$y=\sin 3x$　　(3)$y=3\sin 2x$



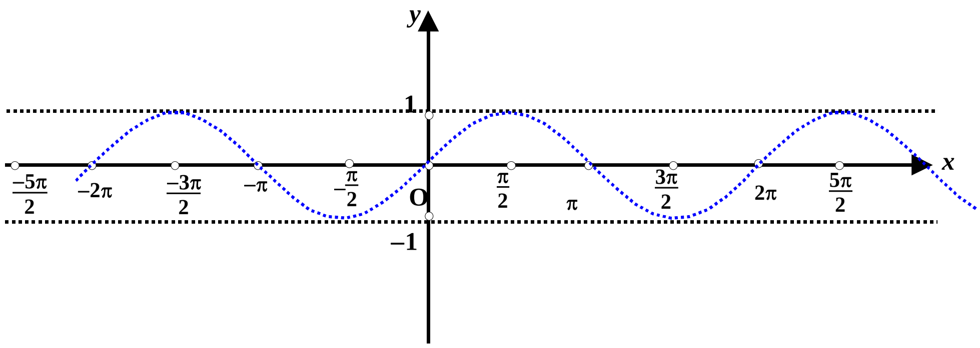


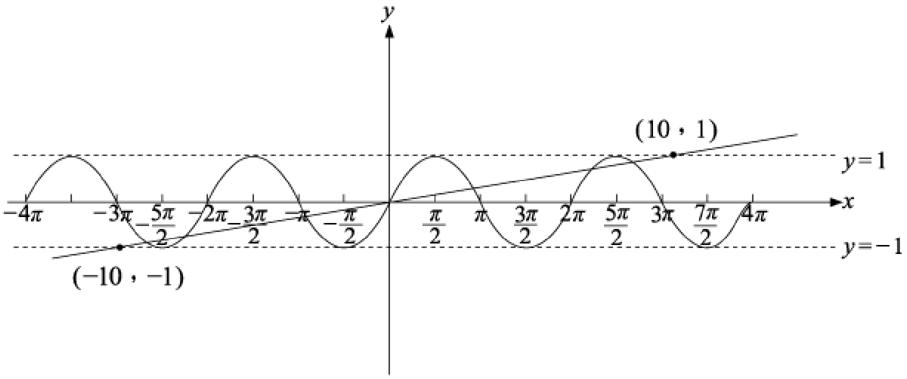

[例題8] 若 $\sin x \le \frac{-1}{2}$ 且 $-2\pi \le x \le 2\pi$，求 $x$ 的範圍。　Ans：$\frac{-5\pi}{6} \le x \le \frac{-\pi}{6}$ 或 $\frac{7\pi}{6} \le x \le \frac{11\pi}{6}$



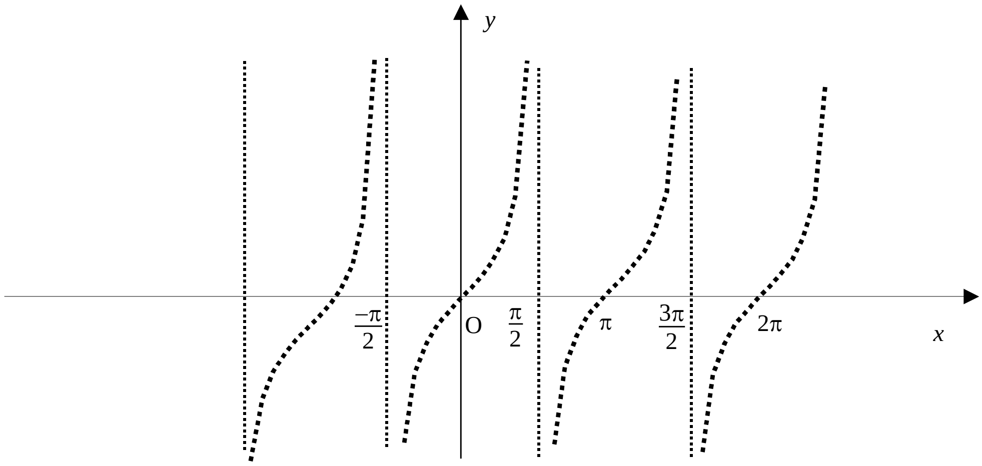

[例題9] 試繪出函數 $f(x)=\sin x-|\sin x|$，



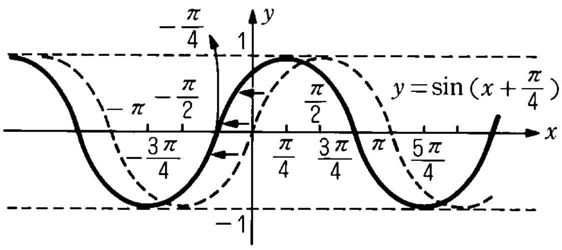
[例題10] 求方程式 $10\sin x = x$ 有幾個實數解？(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7 個。
Ans：(D)




[例題11] 請描繪 $y=|\tan x|$的圖形。




(練習14) 試作 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$之圖形，
並說明與 $y=\sin x$ 的圖形間的關係。
Ans：




【作法】$y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$的圖形，

係將 $y=\sin x$ 的圖形沿著 $x$ 軸方向向左平行移動$\frac{\pi}{4}$單位。

(練習15) 若 $\sin x \le \frac{-1}{2}$ 且 $0\le x\le 2\pi$，試求 $x$ 的範圍。　Ans：$\frac{7\pi}{6}\le x\le\frac{11\pi}{6}$

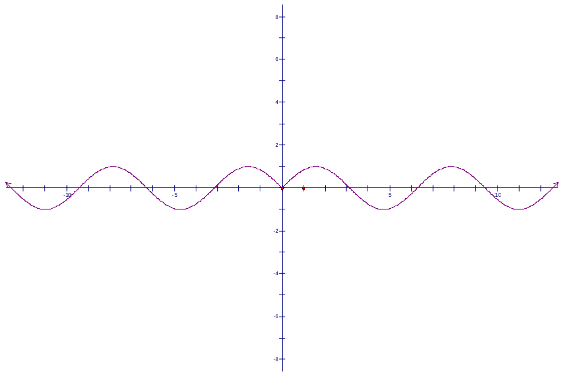
(練習16) 請求出函數 $y=3\sec(\frac{x}{4}+8)-12$ 的週期與振幅。　Ans：週期=8π，振幅=3

(練習17) 請繪出函數 $f(x)=\cos x+|\cos x|$，並求出它的週期。　Ans：2π

(練習18) 請繪出 $y=|\cos x|$的圖形，並求出它的週期。　Ans：π

(練習19) 求方程式 $\tan x=-x$ 在 $-\pi<x<\pi$ 間解的個數。Ans：3

(練習20) 請繪出 $y=\sin|x|$ 的圖形，並請問它是否爲週期函數？Ans：否



# 綜合練習

(1) 下列敘述何者正確？

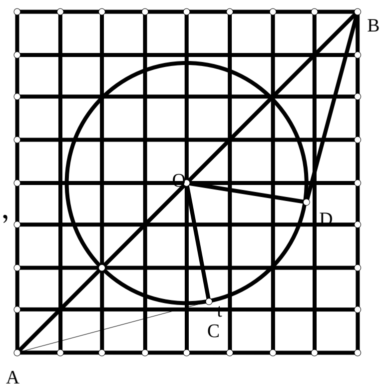
(A)$\sin 9.8>0$　(B)$\sin 9.8=\sin(3\pi-9.8)$　(C)$\sec\frac{\pi}{2}$ 無意義 (D)$(\csc 2,\cot 2)$在第四象限 (E)$\cos(\alpha-\pi)=\cos\alpha$。

(2) 設 $0\le x\le 2\pi$，$-1<k<0$ 是一個常數。已知 $y=k$ 和 $y=\sin x$ 的圖形交於兩點，此二點的 $x$ 坐標和為(A)0 (B)$\frac{\pi}{2}$ (C)$3\pi$ (D)$\frac{3\pi}{2}$ (E)$2\pi$。(93 大考中心研究用試題)

(3) 下列那些值是有意義的？

(A)$\sin 90$　(B)$\tan 90$　(C)$\sec\frac{\pi}{2}$　(D)$\cos 100^\circ$　(E)$\cos 100$。

(4) 設 $a=\sin 1$，$b=\sin 2$，$c=\sin 3$，$d=\cos 4$，$e=\cos 5$ 請比較 $a,b,c,d,e$ 的大小。

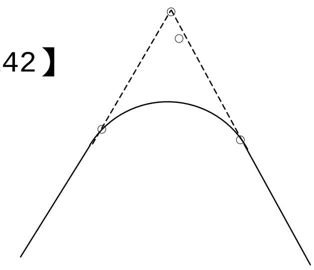



(5) 小萍拿一個周長為 60 公分的輪子在地上滾動，它共滾動了 1 公尺 20 公分的長度，設輪子繞軸滾動了$\theta$，求$\theta=$？

(6) 如下圖所示，每個小方格的邊長為 1，圓 O 的圓心為 O，半徑為$\frac{1}{2}\overline{OA}$；AC 與 BD 均為圓 O 的切線，切點分別為 C 點與 D 點。

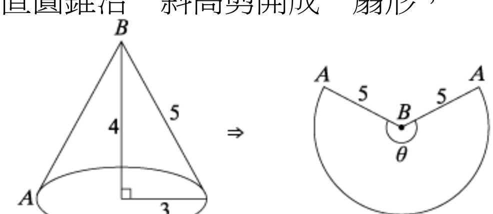
(a)試求$\angle COD$ 。 (b)求線段$\overline{AC}$、圓弧$\overset{\frown}{CD}$及線段$\overline{BD}$的長度和。 (88 社)

(7) 兩條公路 $k$ 及 $m$，如果筆直延伸將交會於 C 處成 60°夾角，如圖所示。為銜接此二公路，規劃在兩公路各距 C 處 450 公尺的 A、B 兩點間開拓成圓弧型公路，使 $k$，$m$ 分別在 A，B 與此圓弧相切，則此圓弧長＝________公尺。(90 學科)
(公尺以下四捨五入)【$\sqrt{3}\approx 1.732$, $\pi\approx 3.142$】



(8) 設一扇形之周長為 10，則此扇形面積最大為何？此時中心角為何？

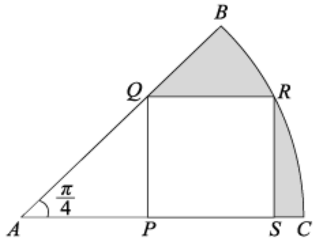
(9) 一直圓錐面底之半徑為 3，高為 4，若將此直圓錐沿一斜高剪開成一扇形，則中心角為________弧度。




(10) 正方形$ABCD$邊長為 2，分別以$A$，$B$，$C$為圓心，2 為半徑，在正方形內部作三個圓弧如下圖，則

(a) $\overset{\frown}{BPD}$ 與 $\overset{\frown}{BQD}$ 兩弧圍成眼形區域面積爲＝＿＿＿＿＿。

(b) $\overset{\frown}{BP}$ ，$\overset{\frown}{PC}$ 與 $\overline{BC}$ 圍成區或面積爲＝＿＿＿＿＿。

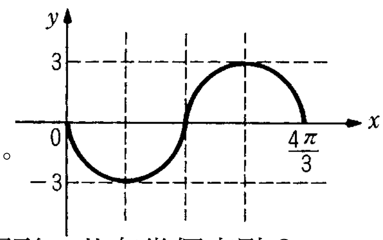



(11) 左圖扇形A– $\overset{\frown}{BC}$ ，中心角$\angle BAC=\frac{\pi}{4}$，
半徑 $\overline{AB}=\overline{AC}=10$，$PQRS$爲內接正方形，
則(a)正方形$PQRS$的邊長爲＝＿＿＿＿＿。
(b)斜線部分面積爲＝＿＿＿＿＿。

(12) 考慮函數 $f(x)=2\sin 3x$，試問下列選項何者爲真？
(A)$-2\le f(x)\le 2$ (B)$f(x)$在 $x=\frac{\pi}{6}$時有最大値 (C)$f(x)$的週期爲$\frac{2\pi}{3}$ (D)$y=f(x)$的圖形對稱於直線 $x=\frac{\pi}{2}$ (E)$f(2)>0$　(88 社)

(13) 求下列各函數的週期：
(a)$-2\sin\frac{x}{3}$ (b)$|\sec 3x|$ (c)$4+3\sin(5x+2)$ (d)$\tan(\frac{\pi-2x}{3})$

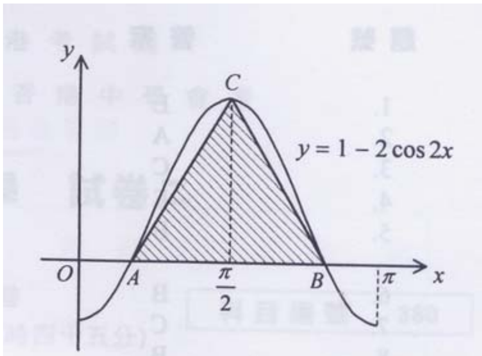
(14) 把函數$y=\cos x$圖形向右平移$\frac{\pi}{6}$單位，成爲函數＿＿＿＿＿之圖形，接著向上平移$\frac{1}{2}$單位，成爲函數＿＿＿＿＿之圖形。




(15) 如圖，若 $y=a\sin bx$，$b>0$，則數對$(a,b)$=＿＿＿＿＿＿。

(16) 當 $x$ 介於 0 與 $2\pi$ 之間，直線 $y=1-x$ 與函數 $y=\tan x$ 的圖形，共有幾個交點？
(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 (E)4　(87 學科)

(17) 如右圖，請問$\Delta ABC$ 的面積是
(A)$\frac{\pi}{3}$ (B)$\frac{2\pi}{3}$ (C)$\pi$ (D)$\frac{4\pi}{3}$ (E)$2\pi$。




(18) 求方程式 $\sin x=\frac{1}{3}$在$[0,4\pi]$內根的個數。

(19) 求方程式$\frac{2}{3}x\sin x=1$ 在$-\pi<x<\pi$的區間內有多少個實根？

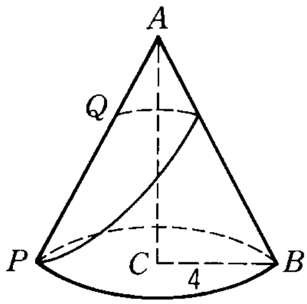
(20) 求方程式 $\cos x=\frac{x}{10}$ 的實根個數。

(21) 若 $\sin x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $0\le x\le 2\pi$，求 $x$ 的範圍。

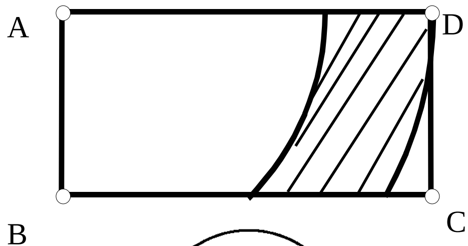
## 進階問題

(22) 設 $x,y$ 爲正實數，且 $x+y\ne 0$，若 $\sec 2\theta=\frac{4xy}{(x+y)^2}$ ，求$\frac{x}{y}$=？

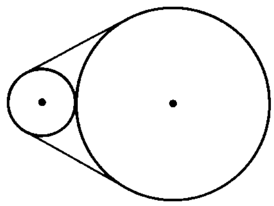
(23) 如圖的直圓錐，底半徑 4，高 $8\sqrt{2}$，試求：
(a)直圓錐之側表面積爲多少？
(b)若自錐底 P 點出發，沿圓錐側面繞行一圈，到達斜高 $\overline{AP}$ 之中點 Q 停止，則路線長之最小值爲多少？




(24) 設 AB=$a$，AD=$2a$，在矩形 ABCD 中，以 A 爲圓心，$\sqrt{2}a$ 及 $2a$ 爲半徑作圓，試求斜線部分的面積。




(25) 半徑爲 3，1 的兩圓輪相外切，如圖，一皮帶緊繞此兩圓輪，則此皮帶長爲____________。



(26) 請問$\sin x=\log_{10}x$之實數解有多少個？

## 綜合練習解答

(1) (B)(C)(D)

(2) (C)

(3) (A)(B)(D)(E)

(4) $b>a>e>c>d$

(5) $4\pi$

(6) (a)$60^\circ$ (b)$4\sqrt{6}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

(7) 544

(8) 中心角爲 2，面積最大爲$\frac{25}{4}$ [提示：設扇形的圓心角θ，半徑爲$r$，根據題設可知 $2r+r\theta=10$，欲求面積$A=\frac{1}{2}r^2\theta$的最大值，$10=2r+r\theta\geq 2\sqrt{2r^2\theta}$ ]

(9) $\frac{6\pi}{5}$

(10) (a) $2\pi-4$(b)$\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

(11) (a) $2\sqrt{5}$(b)$\frac{25\pi}{2}-30$

(12) (A)(B)(C)(D)

(13) (a)$6\pi$ (b)$\frac{\pi}{3}$ (c)$\frac{2\pi}{5}$ (d)$\frac{3\pi}{2}$

(14) (a) $y=\cos(x-\frac{\pi}{6})$(b) $y=\cos(x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$

(15) $(-3,\frac{3}{2})$

(16) (D)

(17) (C)

(18) 4

(19) 4

(20) 7

(21) $\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{2\pi}{3}$

(22) 1[提示：$\sec 2\theta\geq 1 \Rightarrow \frac{4xy}{(x+y)^2}\geq 1 \Rightarrow (x-y)^2\leq 0 \Rightarrow x=y$]

(23) (a)$48\pi$ (b)$6\sqrt{7}$

(24) $(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-1}{2})a^2$[提示：如何處理弧問題(a)遇到弧先找弧心(b)找弧徑(c)由弧的兩端到弧心作輔助線，形成扇形]

(25) $\frac{19\pi}{3}+4\sqrt{3}$

(26) 3