# 第一章 基礎概念

## §1–1 集合的基本概念

集合論是在十九世紀後葉由 Boole(1815~1864)及 Cantor(1845~1918)所發展出來，Boole 為英國數學家及邏輯學家，他在西元 1854 年出版「An Investigation of Laws of Thought」一書，被認為是符號邏輯方面，第一部有系統的著作。而 Cantor 生於俄國聖彼得堡(St.Petersburg)，其後全家移民到德國，Cantor 及其門徒在西元 1874 年到 1895 年間奠定了現代集合論的基礎，但是在他生前，德國數學界卻未能認識它的貢獻，晚年 Cantor 患有抑鬱症，最後死於精神療養院。

### (甲)集合及其表示法

(1)在日常生活和數學學習中，我們常把一些對象放在一起，當作一個整體來觀察與研究。舉例來說：

(a)一輛公車上的所有乘客。
(b)一條直線上的所有點。
(c)某高中一年一班全體學生。
(d)一元二次方程式$x^2-x-12=0$ 的解。

像上述的例子，把可以明確指定的某些對象看做一個整體，這個整體稱為**集合**，組成集合的每個對象，稱為這個集合的**元素**。
一個集合元素的個數可以是有限的，像「一輛公車上的所有乘客」；也可以是無限的，像「一條直線上的所有點」。
只含有限元素的集合稱為**有限集合**，含有無限元素的集合稱為**無限集合**。

(2)集合的表示法：
常用的集合表示法有列舉法與描述法。
列舉法：把集合中的每個元素一一列舉出來，並寫在大括號內，那麼這種表示集合的方法稱為列舉法。

例如：天干：甲乙丙丁戊己庚辛壬癸所成的集合可表為
{甲,乙,丙,丁,戊,己,庚,辛,壬,癸}

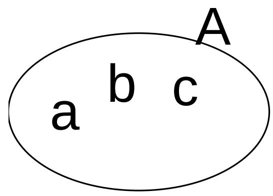
描述法：如果在大括號內寫出這個集合元素的一般形式，再畫一條豎線或冒號，而在豎線或冒號的右邊寫上這個集合元素的公共屬性，那麼這種表示集合的方法稱為描述法。即{$x$|描述$x$的屬性}

例如：所有偶數所成的集合可表為{$2n$|$n$為整數}
被 3 除餘 2 的整數所成的集合可表為{$3k+2$|$k$為整數}

(3)集合與元素的關係：
習慣上，一個集合常用大寫字母A、B、C、…表示，元素用小寫字母$a,b,c,x,y,\ldots$表示，如果$x$是集合A的元素，記為$x\in$A，讀做$x$屬於A；
而符號$x\notin$A表示$x$不是A的元素。
例如A={–1,–4，5,6,8,10}，$-4\in$A，$11\notin$A。

習慣上，N、Z、Q、R分別代表全體自然數、整數、有理數、實數所成的集合。
$x\in$N表示$x$爲自然數；$x\notin$Q表示$x$不是有理數。

**觀念一：**
**集合的基本概念**
**(1)集合：一群明確而可鑑別的東西所組成的群體，**
**通常以大寫英文字母 A,B,C,……等表集合。**
**(2)元素：集合中的每一個明確的事物，**
**通常以小寫英文字母 a,b,c,……等表元素。**




(練習1) 用列舉法表示集合$\{x\in R|x^2-4x+3=0\}$。Ans：{3，1}

(練習2) 用描述法表示「被 7 除餘 2 的所有自然數」所成的集合。
Ans：{$n|n=7k+2$，$k$ 爲非負整數}

(練習3) 用符號∈∉去填下列空格：

(1)$-\sqrt{3}$ (　) Q　(2)$-5$(　)Z　(3)0.35(　)N　Ans：∉，∈，∉

## (乙)集合之間的關係

(1)子集合

一個集合中部份元素形成的一個集合，我們稱這樣的集合爲原集合的子集合**(**部分集合**)**。

例如：全班身高超過 175 公分的學生形成一個集合 A，而這個集合可以稱爲由全班學生形成的集合 S 的子集合。當然 A 有可能是 S 本身。

**定義：如果集合 A 內任一個元素都屬於集合 B，我們就稱 A 是 B 的子集，記做 A⊂B 或 B⊃A(讀作 A 包含於 B 或 B 包含 A)。若集合 A 中存在一個元素 *a* 使得 *a*∉B，那麼 A 就不是 B 的子集，記作 A⊄B(讀作 A 不包含 B)。**

例如：設集合 S={α,β,γ,δ}，請在下列空格中填入∈,∉,⊄,⊂,⊃
則(1)α(　)S　，φ(　)S　(2){α}(　)S　，{α,β}(　)S　{α,1,δ}(　)S

**定義：**集合的相等
**設有兩個集合 A 與 B，若 A 的每一個元素均屬於 B(即 A⊂B)，且 B 中的每個元素均屬於 A(即 B⊂A)，則稱集合 A 與集合 B 相等，記作 A=B。**

例如：A={3,5,5,1,1}、B={3,3,5,1}根據定義 A=B。
**從集合相等的角度來看，集合的元素是不考慮先後順序、重複次數的，**

因此{3,5,5,1,1}={3,3,5,1}={1,3,5}

**實數的子集合：**

$[a,b]=\{x\in R|a\le x\le b\}$(閉區間)

$(a,b)=\{x\in R|a<x<b\}$(開區間)

$(a,b]=\{x\in R|a<x\le b\}$(半開或半閉區間)

$[a,b)=\{x\in R|a\le x<b\}$(半開或半閉區間)

注意上述的符號均表集合，不需要再加**{}**之符號。

**觀念二：**

**(1)集合元素的特性：**

**無序性：集合中的元素可不考慮其排列的次序** {a,b,c}＝{a,b,c}

**互異性：集合中的元素不可重複出現** {a,b,c,c}＝{a,b,c}

**明確性：元素為明確的事物**

**(2)屬於$\in$ 與不屬於$\notin$ 意義：聯結集合與元素的記號。**

(2)集合的交集與聯集：

(a)交集的定義：

由集合 A 與集合 B 的共同元素所組成的集合稱爲 A 與 B 的交集，記作 $A\cap B$，讀作 A 交集 B，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

例如：A={1,2,3,4,5}、B={−4,3,4,7,8}，$A\cap B$={3,4}。

例如：A 爲所有偶數所成的集合，B 爲所有奇數所成的集合。

A 與 B 沒有共同的元素，此時爲了集合理論的完整，我們引入了**空集合**。

空集合：我們稱不含任何元素的集合爲**空集合**。記爲$\phi$或{ }。

**空集合是任何一個集合的子集合。**

(b)聯集的定義：

由集合 A 與集合 B 的所有元素所組成的集合，記作 $A\cup B$，讀作 A 與 B 的聯集。即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$。

例如：A={1,2,3,4,5}、B={−4,3,4,7,8}，$A\cup B$={−4,1,2,3,4,5,7,8}。

性質：設 A、B、C 爲三個集合

(a)$A\subset(A\cup B)$，$B\subset(A\cup B)$。

(b)$(A\cap B)\subset A$，$(A\cap B)\subset B$。

(c)$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

(c)若 $A\subset B$，則$(A\cup B)=B$，$(A\cap B)=A$。

(d)$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(e) $A\cap\phi=\phi\cap A=\phi$，$A\cup\phi=\phi\cup A=A$

(f)$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$。$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$。

[例題1] 設 $A=\{2k+1|k\in Z\}$，$B=\{4k+1|k\in Z\}$，請問 A 和 B 有何關係？

[例題2] 設 $A=\{1,2,3\}$，請找出 A 的所有子集合，並問 A 的子集合的個數。
Ans：$\phi$、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$、$\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$\{1,2,3\}$；8

[例題3] $A=\{\ \{\},1,\{1\},\{2,3\}\}$下列敘述何者正確
(A)$\{\}\in A$　(B)$\{\}\subset A$　(C)$\{1\}\in A$　(D)$\{1\}\subset A$　(E)$2\in A$
(F)$\{2,3\}\subset A$　(G)$\{1,\{2,3\}\}\ \subset A$
Ans：ABCDG

(練習4) 請用定義說明$[1,2]\subset(-2,5)$。

(練習5) 考慮平面上的圖形：令 $A=\{x|x$ 為正方形$\}$、$B=\{x|x$ 為菱形$\}$、
$C=\{x|x$ 為四邊形$\}$，請指出 A、B、C 的關係。Ans：$A\subset B\subset C$

(練習6) 設 $S=\{\phi,1,\{1,3\},2\}$，　下列敘述那些是正確的？
(A) $\phi\in S$ (B) $\phi\subset S$ (C)$2\notin S$ (D)$\{1,3\}\in S$ (E)$\{1,2\}\subset S$。Ans：(A)(B)(D)(E)

(練習7) 設 $A=\{x\in Z|\ |x-1|\le 2\}$，請問 A 的元素有幾個？A 的子集合共有幾個？
Ans：5，32

[例題4] 設A={2,4,$a$+1}，B={−4,$a$−2,$a^2$−2$a$−3}，已知A∩B={2,5}，則$a$=？

Ans：$a$=4

[例題5] 設 A、B、C 是三個集合，試說明：

(1)(A∪B)∩C=(A∩C)∪(B∩C)。

(2)(A∩B)∪C=(A∪C)∩(B∪C)。

(練習8) 設 A={$x$|−2<$x$<2}，B={$x$|1<$x$<3}，求 A∩B 與 A∪B。

Ans：A∩B={$x$|1<$x$<2}，B={$x$|−2<$x$<3}。

(練習9) 設 A={($x$,$y$)|$x$+2$y$=2，$x$,$y$ 爲實數}，B={($x$,$y$)|$x$−4$y$=6,$x$,$y$ 爲實數}

試求 A∩B=？　Ans：$\{(\frac{10}{3},\frac{-2}{3})\}$

(練習10) 設A={−2,$a$−2,3}，B={1,$a^2$−$a$−3,−5}，若A∩B={3}，則$a$=？Ans：$a$=−2

(3)集合的差集合與餘集合：

(a)差集的定義：

在集合A中但不在集合B中的元素所成的集合，稱爲A減B的差集，記爲A−B，即A−B={$x$|$x$∈A但$x$∉B}。

例如：設A={1,2,3,4,5}、B={2,4,7,8,9}，則A−B={1,3,5}，B−A={7,8,9}

餘集合的概念：在討論問題時，若討論的對象均爲固定一個集合的子集合，這樣一個固定的集合稱爲宇集合。例如我們討論如何才能組成最強的排球班隊，那麼各種組成的方式，均爲全班同學所成集合的子集合，那麼全班同學所成的集合稱爲宇集合。

(b)餘集合的定義：
若U爲一個宇集合，A爲U的一個子集合，則$U-A=\{x|x\in U但x\notin A\}$稱爲A的餘集合，記作$A'$或$\overline{A}$或$A^C$。

例如：U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}，A={1,3,4,5,6}，$A'$={2,7,8,9,10}

性質：
(a)$A'=U-A$，$(A')'=A$
(b)$A\cap A'=\phi$，$A\cup A'=U$
(c)若$A\cap B=\phi$，則$A-B=A$，$B-A=B$
(d)$A\subset B \Leftrightarrow A'\supset B'$
(e)$A-B=A\cap B'$
(f)笛摩根定理：(De Morgan's Law)
$(A\cup B)'=A'\cap B'$，　$(A\cap B)'=A'\cup B'$

**觀念三：**
(1) $A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$，$A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$。
(2) $A-B=\{x\mid x\in A且x\notin B\}=A\cap B'$
(3)①$(A\cup B)'=A'\cap B'$　**即聯集的補集等於補集的交集**
②$(A\cap B)'=A'\cup B'$　**即交集的補集等於補集的聯集**
(4)**分配律：**
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

[例題6] 證明笛摩根定理：(De Morgan's Law)
(1)$(A\cup B)'=A'\cap B'$ (2) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

(練習11) 已知A={$x$∈Z| |$x$+2|<3}，B={$x$∈Z|$x^2$≥4}，試求A−B=？
Ans：{−1,0}

(練習12) U={1,2,3,4,5,6,7,8}，A={2,3,4,7}，$B'$={3,6,8}，
求$A'$，B，A∪B，A∩B， A−B。
Ans：{1,5,6,8}，{1,2,4,5,7}，{1,2,3,4,5,7}，{2,4,7}，{3}

(練習13) 利用文式圖說明$A\subset B \Leftrightarrow A'\supset B'$。

(練習14) 利用文式圖說明笛摩根定理。

## (丙)集合個數的計算

集合元素個數的求法：
設 A 的元素個數是有限個，$n$(A)表示 A 的元素個數。
(1)$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(2)$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

(3)$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

[例題7] 某班有學生 50 人去解甲、乙兩題，已知解對甲題有 34 人，解對乙題者有 28 人，兩題都解對者 20 人，問：
(1)至少解對其中一題者有幾人？ (2)兩題均未解對者有幾人？
(3)僅解對甲題的人數？Ans： 42，8，14

[例題8] 100 到 1000 之自然數中不為 2 或 3 或 5 的倍數者有____個。
Ans： 241

(練習15) 一公寓共有 47 戶人家，有自由時報、民生報二種報紙供應，已知每戶至少訂一份，訂自由時報的有 32 戶，訂民生報有 25 戶，則只訂自由時報的有________戶。Ans： 22

(練習16) 從 1 至 1000 共一千個自然數中，刪去 3 之倍數，並刪去 5 之倍數，若剩下 m 個數，則 m=____________。Ans：m=533

(練習17) 50 個學生參加數學競試，題目分為 A、B、C 三道題，結果答對 A 題者有 37 人，答對 B 題者有 30 人，答對 C 題者有 25 人，而同時答對 A、B 兩題者有 20 人，同時答對 A、C 兩題者有 16 人，同時答對 B、C 兩題者有 13 人，三題均答對者 5 人，試問：
(1)至少答對一題有幾人？ (2)三題均答錯有幾人？
(3)三題中恰答對一題有幾人？
Ans：(1)48 人 (2)2 人 (3)9 人

## 綜合練習

(1) 用列舉法寫出下面的集合：
(a)A=$\{x|x^2-9x+20=0\}$ (b)B=$\{\frac{m}{n}|m,n\in$N且$m+n=5\}$

(2) 設 A={1，{1}，{2}，{1,2}}，則下列那些是正確的？
(A)$\{1\}\in$A (B)$\{1\}\subset$A (C)$2\in$A (D)$\{1,2\}\subset$A (E)$\{1,2\}\in$A。

(3) 設 S={$\phi$，1，{1,2}，3}，則下列那些是正確的？
(A) $\phi\in$S (B)$\phi\subset$S (C)$2\in$S (D)$\{1,2\}\in$S (E)$\{1,2,3\}\subset$S。

(4) 設 A=$\{x|\ f(x)=0\}$，B=$\{x|g(x)=0\}$，C=$\{x|h(x)=0\}$，則請寫出下列方程式(組)的解集合。(用集合 A、B、C 表示)
(a)$f(x)\cdot g(x)=0$ (b)$\dfrac{g(x)}{h(x)}=0$ (c)$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)h(x)=0 \end{cases}$。

(5) 設 A=$\{x,y,z\}$，B=$\{x+1,2,3\}$，若 A=B，則有序數對$(x,y,z)$共有幾組？

(6) 設 A 集合有 7 個元素，B 集合有 5 個元素，則(1) A$\cap$B 至多有幾個元素？(2) A$\cap$B 至少有幾個元素？

(7) 在 1 到 1000 的所有自然數中
(a)為 7 的倍數的有________個

(b)不為 2 或 5 或 7 倍數的有__________個
(c)為 2 或 5 的倍數，但不為 7 倍數的有___________個
(d)為 2 且為 5 的倍數，但不為 7 倍數的有___________個

(8) 利用 U={1,2,3…,10}，A={1,3,5}，B={2,3,5}去驗證笛摩根定律。

(9) 設 S={1,2,3,4,5}，則求(a)S 的子集合個數。(b)含三個元素的子集合有幾個。

(10) 設$P=\{2,4,a^2-2a-3\}$，$T=\{-4,a^2+2a+2,a^2-3,2a^2-3a-9\}$，且$P\cap T=\{2,5\}$，試求$a$的值與集合T。

(11) 令宇集合U表示從 1 到 10 的所有正整數所成的集合，A與B為其子集合，若$A'\cap B'=\{1,9,10\}$，$A\cap B=\{3\}$，$A'\cap B=\{2,5,8\}$，則集合A=？集合B=？

(12) 設宇集合U為全體實數所成的集合，令$A=\{x|\ x$是實數，$0<x<\frac{3}{4}\}$，
$B=\{\ x|\ x$是實數，$\frac{-1}{4}<x<1\}$，$C=\ \{x|\ x$是實數，$0<x<\frac{1}{2}\}$，則求下列兩個集合。
(a)$((A\cap B)'\cup C)'$ (b) $(A\cup B)'\cap(A'\cup C)'$

(13) 設集合 $A=\{x|x>3$ 或 $x<-1\}$，$B=\{x|\ |x-a|\le b\ \}$，若 $A\cup B=R$，$A\cap B=\{x|3<x\le 4\}$， 試求 $a,b$ 之值。

(14) 設 A、B、C 是三個集合，試證明：$A\cap B=A\cup B \Rightarrow A=B$。

## 綜合練習解答

**(1)** (a){5,4} (b)$\{\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4}\}$

**(2)** (A)(B)(E)

**(3)** (A)(B)(D)

**(4)** (a)$A\cup B$ (b)$B-C$ (c)$A\cap(B\cup C)$

**(5)** 5

**(6)** $A\cap B$ 至多 5 個至少 0 個

**(7)** (a)142 (b)343 (c)515 (d)86

**(8)** 略

**(9)** 32，10

**(10)** $a=-2$，T={−4,1,2,5}

**(11)** A={3,4,6,7}、B={2,3,5,8}

**(12)** (a)$\{x|\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{4}$，$x$ 為實數$\}$ (b)$\phi$

**(13)** $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{5}{2}$

**(14)** (a)$x\in A\subset A\cup B=A\cap B$，$x\in A\cap B\Rightarrow x\in B$，所以 $A\subset B$，同理可證明 $B\subset A$，所以 A=B。