第六單元　多項式

(甲)多項式的基本定義與性質

(1)何謂多項式：

在代數中，我們通常會引進一些符號 x,y,z 等，用以表示一給定問題的未知數，有了這一些符號，可將問題中量與量之間的關係列成算式，而將給定的問題轉成方程式的問題，而在解方程式的過程中，跟數一樣，會牽涉到數與式之間的運算。將數及具有數的性質的符號 x,y,z 等，經過加、減、乘的運算所形成的式子，叫做**多項式**。

多項式中，只含有一個符號 x，叫做**單元多項式**，含有多於一個的符號，叫做**多元多項式**，高中的範圍多項式指的是單元多項式。

(2)單元多項式：

若 $a_n,a_{n-1},\ldots a_1,a_0$ 均為實數，形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 這樣的式子稱為 x 的單元多項式，也可簡稱為 **x 的多項式**。

(3)相關的名詞說明：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，$a_n,a_{n-1},\ldots a_1,a_0$ 均為實數

①項：$a_nx^n,a_{n-1}x^{n-1}$，$\ldots,a_1x,a_0$ 分別稱為此多項式的 n 次項,$n-1$ 次項,…一次項,常數項。

②係數：$a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$ 分別為此多項式的 n 次項,$n-1$ 次項,…一次項,常數項的係數。

③領導係數：多項式中最高次項之係數(不為 0)稱為此多項式之領導係數。

④次數：當 $a_n\neq0$ 時，稱此多項式為 n 次多項式，記為：$\deg f(x)=n$。

⑤單項式：只有一項的多項式稱為單項式。

⑥常數多項式：若一多項式僅含常數項 a_0，則稱此多項式為常數多項式。
當 $a_0\neq0$，又稱為零次多項式。當 $a_0=0$，又稱為零多項式。

⑦升冪與降冪式：若一多項式一變數 x 的次方
由大而小排列者稱為降冪式，由小而大排列者稱為升冪式。

⑧由多項式的係數決定多項式全體所成的集合：

Z[x]表由全體整係數多項式所成的集合

Q[x]表由全體有理係數多項式所成的集合

R[x]表由全體實係數多項式所成的集合

C[x]表由全體複係數多項式全體所成的集合

[本單元中，若沒有指定多項式的係數所在的數系，則多項式均為實係數多項式]

(4)多項式的相等：

兩個多項式 $f(x)$與 $g(x)$為兩個非零多項式，

若 $f(x)$與 $g(x)$相等⇔兩者的次數相同，對應項的係數也一樣。

[例題1] $f(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，則

各項係數之和= ，常數項=

奇次項係數之和= ，偶數項的係數之和=

$a_0-a_2+a_4-a_6+\ldots\ldots=$ ，$a_1-a_3+a_5-a_7+\ldots=$

結論：

$f(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，則

各項係數之和=$f(1)$，常數項=$f(0)$

奇次項係數之和= $\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$，偶數項的係數之和= $\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$

$f(i)$之實部=$a_0-a_2+a_4-a_6+\ldots\ldots$，$f(i)$之虛部=$a_1-a_3+a_5-a_7+\ldots.$

(乙)多項式的運算

(1)多項式的加減法：兩多項式相加減，則同次項的係數相加減。

例如：$f(x)=6x^4-7x^3+2x+7$，$g(x)=-5x^5+2x^3-3x^2+8x-9$

$f(x)+g(x)=-5x^5+6x^4-5x^3-3x^2+10x-2$

$f(x)-g(x)=5x^5+6x^4-9x^3+3x^2-6x+16$

$\boxed{\deg\,(f(x)\pm g(x)) \le \mathrm{Max}(\deg f(x),\deg g(x))\text{或 } f(x)\pm g(x)=0}$

(2)多項式的乘法：利用乘法對加法的分配律，再合併同類項。

例如：$f(x)=3x^3-2x^2+x-4$，$g(x)=4x^2-6x+1$

直式運算：$f(x)\cdot g(x)$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
 & 3x^3 & - & 2x^2 & + & x & - & 4 & & & & \\
\times & 4x^2 & - & 6x & + & 1 & & & & & & \\
\hline
 & 12x^5 & - & 8x^4 & + & 4x^3 & - & 16x^2 & & & & \\
 & & - & 18x^4 & + & 12x^3 & - & 6x^2 & + & 24x & & \\
 & & & & & 3x^3 & - & 2x^2 & + & x & - & 4 \\
\hline
 & 12x^5 & - & 26x^4 & + & 19x^3 & - & 24x^2 & + & 25x & - & 4
\end{array}$$

橫式運算：$f(x)\cdot g(x)$

$(3x^3-2x^2+x-4)\times(4x^2-6x+1)$
$=(3x^3-2x^2+x-4)\times 4x^2+(3x^3-2x^2+x-4)\times(-6x)+(3x^3-2x^2+x-4)\times 1$
$=(12x^5-8x^4+4x^3-16x^2)+(-18x^4+12x^3-6x^2+24x)+(3x^3-2x^2+x-4)$
$=12x^5-26x^4+19x^3-24x^2+25x-4$

$\boxed{\deg(f(x)\cdot g(x))=[\deg f(x)]+[\deg g(x)]}$ (其中 $f(x)$與 $g(x)$均不為零多項式。)

(3)多項式的除法：

除法原理：
設 $f(x)$，$g(x)$為二多項式且 $g(x)$不是零多項式，則可找到唯一的多項式 $q(x)$及 $r(x)$滿足 $f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$，其中 **$r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$**。
此時稱 $f(x)$為**被除式**，$g(x)$為除式，$q(x)$為**商式**，$r(x)$為**餘式**。

例如：設 $f(x)=2x^3+5x^2+x-2$，$g(x)=x^2+2x-3$
(a)長除法：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x+1 \\
\hline
x^2+2x-3 & 2x^3+5x^2+x-2 \\
 & 2x^3+4x^2-6x \\
\hline
 & \quad\ x^2+7x-2 \\
 & \quad\ x^2+2x-3 \\
\hline
 & \qquad\quad 5x+1
\end{array}
$$

(b)綜合除法：
綜合除法：
綜合除法的目的就是根據被除式中的各項係數和除式中的常數項，算出商式的各項係數和餘式的值。
①當除式 $g(x)=x-a$ 時，我們介紹綜合除法去求商式、餘式。

例如：設 $f(x)=2x^4+x^2-5x$，$g(x)=x-2$，求 $f(x)$除以 $g(x)$的商式、餘式。

$$
\begin{array}{ccccc|c}
2 & 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\
\downarrow & 4 & 8 & 18 & 46 & \\
\hline
2 & 4 & 9 & 23 \ , & 46 &
\end{array}
$$

商　　式，餘　式

②綜合除法的原理：
設 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，$g(x)=x-b$，若存在商式 $q(x)=c_2x^2+c_1x+c_0$，餘式 $r(x)=d$。
由除法的定義：$(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=(c_2x^2+c_1x+c_0)(x-b)+d$

經比較係數可得：$\begin{cases} a_3=c_2 \\ a_2=-c_2b+c_1 \\ a_1=-c_1b+c_0 \\ a_0=-c_0b+d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2=a_3 \\ c_1=a_2+c_2b \\ c_0=a_1+c_1b \\ d=a_0+c_0b \end{cases}$

上面的關係可寫成以下的形式：

$f(x)=$	a_3	a_2	a_1	a_0	
$(+)$	$\downarrow$	c_2b	c_1b	c_0b	b
	a_3	a_2+c_2b	a_1+c_1b	$,a_0+c_0+b$	
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	
$q(x)=$	c_2	c_1	c_0	$,d$	$=r(x)$

③ 當 $f(x)$除以 $g(x)=ax+b$ 時，我們也可利用綜合除法求餘式 $r(x)$、商式 $q(x)$。

由除法的定義：$f(x)=(ax+b)\cdot q(x)+r(x)=(x+\dfrac{b}{a})\cdot[aq(x)]+r(x)$

可先利用綜合除法求出 $f(x)$除以$(x+\dfrac{b}{a})$的商式 $q^{/}(x)=aq(x)$與餘式 $r(x)$，

而要求的商式 $q(x)=\dfrac{1}{a}\ q^{/}(x)$，餘式 $r(x)$不變。

例如：$f(x)=3x^3+5x^2-46x+42$ 除以 $g(x)=3x-7$

$f(x)=$	3	5	-46	42	$\frac{7}{3}$
$(+)$	$\downarrow$	7	28	-42	
$3\cdot q(x)=$	3	12	-18	$,0$	$=r(x)$
$q(x)=$	1	4	-6		

[討論]：

令 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，$g(x)=x-b$，$f(x)$除以 $g(x)$

所得的商式為 $q(x)=c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\ldots+c_1x+c_0$，餘式$=r$。

如何由 a_n , a_{n-1} , ….,a_1 , a_0 , b 去求 c_n , c_{n-1} ,….,c_0。

[討論]：
設 $f(x)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，$g(x)=x^2+bx+c$，
$f(x)$除以 $g(x)$所得的商式為 $q(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$，餘式 $r(x)=mx+n$，仿照前面的討論，可否找到類似綜合除法的方式去求出 $q(x)$、$r(x)$。

(練習1) 設 $f(x)$為一多項式，a,b 為實數，$a\neq 0$，若以 $x-\frac{b}{a}$ 除以 $f(x)$，所得的商式為 $Q(x)$，餘式為 r。則
(1)以 $ax-b$ 除 $f(x)$，得商為_______，餘式為_______。
(2)以 $x-b$ 除 $f(\frac{x}{a})$，得商為_______，餘式為_______。
(3)以 $x-b$ 除 $a\,f(\frac{x}{a})$，得商為_______，餘式為_______。
(4)以 $x-\frac{1}{a}$ 除 $f(bx)$，得商為_______，餘式為_______。
Ans：(1)$\frac{1}{a}Q(x)$，r (2)$\frac{1}{a}Q(\frac{x}{a})$，$r$ (3)$Q(\frac{x}{a})$，ar (4)$b\cdot Q(bx)$，r

(練習2) 多項式 $f(x)=(x^5-2x^3+x+1)^{1999}$ 展開式中，試求下列各小題：
(1)各項係數和 (2)常數項 (3)奇數項係數和 (4)偶數項係數和
Ans：(1)1,(2)1,(3)0,(4)1

(練習3) 已知 x^2+ax+1 能整除 x^3+3x^2+bx+2，試求 a,b 之值。 Ans：$a=1,b=3$

(練習4) 利用綜合除法計算下列各題之商式與餘式：
(1)以 $x+4$ 除 $2x^4+3x^2-5x-4$；(2)以 $3x+7$ 除 $6x^3+12x^2+11$
Ans：(1)商式$=2x^3-8x^2+35x-145$,餘式$=576$(2)商式$=2x^2-\frac{2}{3}x+\frac{14}{9}$,餘式$=\frac{1}{9}$

(丙)除法原理的應用

(1)餘式定理：多項式 $f(x)$除以 $x-a$ 的餘式等於 $\boldsymbol{f(a)}$。
證明：
由多項式的除法原理得知，恰有兩多項式 $q(x)$及 r(r 為常數多項式)
滿足 $f(x)=(x-a)\cdot q(x)+r$，而此等式為恆等式，
因此將 $x=a$ 代入上式，得 $f(a)=(a-a)\cdot q(a)+r = r$。

推廣：多項式 $f(x)$除以 $ax+b$ 的餘式等於 $f(-\frac{b}{a})$。

$f(a)$的雙重意義： ①多項函數 $f(x)$在 $x=a$ 的函數值。 ②多項式 $f(x)$除以 $x-a$ 的餘式。

[例題2] 求下列二小題：

(1)求$(x^3+2x^2-x-4)^3$除以 $x+3$ 的餘式。

(2)設 $f(x)=1250x^6-2790x^5-3125x^4+707x^3+100x^2+45x-62$，則 $f(3)=$？

Ans：(1)-1000　(2)217

[例題3] 試求下列各小題：

(1)設多項式 $f(x)$不低於 2 次，以 $x-1$ 除之餘 2，以 $x+2$ 除之餘-1，則以$(x-1)(x+2)$除 $f(x)$的餘式為何？

(2)設多項式 $f(x)$不低於 3 次，以 $x-1$ 除之餘 3，以 $x+1$ 除之餘 1，以 $x-2$ 除之餘-2，則求以$(x-1)(x+1)(x-2)$除 $f(x)$的餘式。

(3) 多項式 $f(x)$以 x^2+2x+3 除之，餘式為 $x+12$，以$(x+1)$除之餘式為-1，則 $f(x)$除以$(x+1)(x^2+2x+3)$之餘式為何？

Ans：(1)$x+1$　(2)$-2x^2+x+4$　(3) $-6x^2-11x-6$

(練習5) $f(x)=2x^4+3x^3+5x^2-6$，求 $2x-1$ 除 $f(x-3)$的餘式。 Ans：$\frac{113}{2}$

(練習6) 試求 $11^5-4\cdot11^4-72\cdot11^3-56\cdot11^2+15\cdot11+7$ 之值為________。Ans：51

(練習7) 多項式 $f(x)$除以 $x-3$ 得餘式 16，除以 $x+4$ 得餘式-19，則 $f(x)$除以$(x-3)(x+4)$所得的餘式為________。 Ans：$5x+1$

(練習8) 多項式 $f(x)$以 x^2-3x+2 除之餘式為 3，以 x^2-4x+3 除之得餘式為 $3x$，則以 x^2-5x+6 除之餘式為________。 Ans：$6x-9$

(練習9) 多項式 $f(x)$以 x^2+2x+2 除之，餘式為 $x+3$，以$(x+1)$除之餘式為-1，則 $f(x)$除以$(x+1)(x^2+2x+3)$之餘式為何？ Ans： $-3x^2-5x-3$

(2)因式定理

設 $f(x)$、$g(x)$為兩個多項式，且 $g(x)$不是零多項式，
若 $f(x)$被 $g(x)$整除(餘式為零多項式)，則存在一個多項式 $q(x)$，使得 $f(x)=g(x)\cdot q(x)$，
此時 $g(x)$稱為 $f(x)$的**因式**，$f(x)$稱為 $g(x)$的**倍式**。符號可以記為 $g(x)|f(x)$。

[問題與討論]：

設 $f(x)=x^2-9=(x-3)(x+3)$

請問 $x-3,\frac{1}{2}(x-3),\sqrt{5}\ (x-3)$都是 $f(x)$的因式嗎？

因式定理：

設 $f(x)$是一個 n 次多項式，且 $a\neq0$，則 $ax-b$ 是 $f(x)$的因式 $\Leftrightarrow f(\frac{b}{a})=0$。

因式定理是餘式定理的推論，其概念是整除 $\Leftrightarrow$ 餘式為零多項式
根據因式定理對一個多項式 $f(x)$而言，$f(a)=0$ 代表下列四個涵義：
(1°)$f(x)$在 $x=a$ 的取值為 0。
(2°)a 為方程式 $f(x)=0$ 的一個根(解)。
(3°)$f(x)$除以 $x-a$ 的餘式 $f(a)$等於 0。
(4°)$x-a$ 為 $f(x)$的因式。

[例題4] 因式定理的推廣

若設 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ 為相異實數，且 $f(a_i)=0$，$i=1,2,\ldots,n$
則 $f(x)$含有 n 次因式$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$。

[例題5] 試求三次多項式 $f(x)$，滿足 $f(11)=f(12)=f(13)=1$，$f(14)=19$
Ans：$f(x)=3(x-11)(x-12)(x-13)+1$

(練習10) (1)若 $f(x)=3x^4+mx^2+nx-2$ 含有因式 x^2-x-2，試求係數 m,n。
(2)若 $f(x)=3x^4+mx^2+nx-2$ 含有因式 x^2-x+2，試求係數 m,n。
Ans：(1)$m=-8$、$n=-7$　(2)$m=7$、$n=2$

(練習11) 試求三次多項式 $g(x)$滿足 $g(1)=g(3)=g(5)=0$，且 $g(7)=96$。
Ans：$g(x)=2(x-1)(x-3)(x-5)$

(練習12) a,b,c 為整數，$0<a<b$，若 $x-c$ 為 $x(x-a)(x-c)-17$ 的因式，則$(a,b,c)=$？
Ans：(2,18,1)

(3)一次因式檢驗定理：
設 $f(x)=2x+3$，$g(x)=5x^2-x+7$，$h(x)=f(x)\cdot g(x)=10x^3+13x^2+11x+21$，$10x^3$ 是 $2x\cdot5x^2$ 來的，21 是 $3\cdot7$ 來的，因此觀察一次式 $2x+3|h(x)$，而 $2|10$，$3|21$，這個結果對於一般整係數的多項式也是成立，我們將它寫成下面的定理：

定理：設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 為一個**整係數** n 次多項式，
若整係數一次式 $\boldsymbol{ax-b}$ 是 $\boldsymbol{f(x)}$的因式，且 $\boldsymbol{a,b}$ **互質**，則 $\boldsymbol{a|a_n}$ 且 $\boldsymbol{b|a_0}$。

證明：

注意：

(a)一次因式檢驗定理的逆敘述不成立。

例如：$f(x)=3x^3+5x^2+4x-2$，$f(-\frac{1}{3})\neq 0$。

(b)由一次因式檢驗定理，可知若一次式 $cx-d$ 中 c 不為 a_n 的因數或 d 不為 a_0 的因數的話，則 $cx-d$ 必不為 $f(x)$的因式。**故只有滿足 $a|a_n$ 且 $b|a_0$ 的一次式 $ax-b$ 才有可能成為 $f(x)$的因式，因此我們只要從滿足 $a|a_n$ 且 $b|a_0$ 這些 $ax-b$ 去找一次因式就可以了。**

例如：

求整係數 $f(x)=3x^3+5x^2+4x-2$ 的整係數一次因式。

根據一次因式檢驗定理，假設 $ax-b$ 為 $f(x)$的一次因式，則 $a|3$ 且 $b|2$。

我們將所有可能的 $ax-b$ 組合 $x+1,x-1,x+2,x-2,3x+1,3x-1,3x+2,3x-2$，再利用綜合除法檢驗看看那一個是 $f(x)$的因式⇒$3x-1$ 是 $f(x)$的因式。

[討論]：設 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\in Z[x]$，則方程式 $f(x)=0$ 的有理根必為整數根嗎？

[例題6] 求 $f(x)=2x^4+5x^3-x^2+5x-3$ 的一次因式。 Ans：$2x-1$ 與 $x+3$

[例題7] 設 a,b,c 為整數，且 $x^4+ax^3+bx^2+cx+9=0$ 之四根為相異之有理數，求 a,b,c 之值。
Ans：$a=0,b=-10,c=0$

(練習13) 找出 $f(x)=6x^4-7x^3+6x^2-1$ 的所有整係數一次式。
Ans：$2x-1$、$3x+1$

(練習14) 設 $f(x)=x^4-x^3+kx^2-2kx-2$ 為整係數多項式，且 $f(x)$有整係數一次因式，求 k 之值。 Ans：$0,-2$

(練習15) p,q 為整數，且方程式 $x^4-2x^3+px^2+qx+35=0$ 有四個相異有理數，求其最大之有理根____。 Ans：7

(練習16) 求證：在 Z[x]中找不到一個多項式 $f(x)$滿足 $f(7)=5$ 且 $f(15)=10$。

(3)多項式的求值

[例題8] 設多項式 $f(x)=2x^4-7x^3+x^2+5x+5= a(x+1)^4+b(x+1)^3+c(x+1)^2+d(x+1)+e$
(1)求 a,b,c,d,e 之值。
(2)求$(x+1)^2$除 $f(x)$ 之餘式。
(3)求 $f(-0.999)$的近似值到小數點後第三位。
Ans：(1)$a=2,b-15,c=34,d=-26,e=10$ (2)$-26x-26$ (3)9.974

[例題9] 求 $4(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})^4-8(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})^3-15(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})^2+13(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})+1$ 之值。Ans：2

(練習17) 設 $2x^4-23x^3+31x-7=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$，
則求 a,b,c,d,e 之值。Ans：$a=2,b=-7,c=-90,d=-181,e=-97$

(練習18) 設 $f(x)=54x^3-99x^2+66x-20 = a(3x-1)^3+b(3x-1)^2+c(3x-1)+d$，
(1)試求數對$(a.,b,c,d)$=？ (2)求 $f(0.333)$的近似值到小數點後第三位。
Ans：(1)$a=2,b=-5,c=6,d=-7$ (2)-7.006

(練習19) 將 $f(x)=(x-3)^4+5(x-3)^3+6(x-3)^2+11(x-3)+13$ 展成 x 的多項式，依降次排列為何？ Ans：$x^4-7x^3+15x^2+2x+20$
[提示：可令 $y=x-3\Rightarrow x=y+3$，原來的多項式可化為

$f(y)=y^4+5y^3+6y^2+11y+13$，再利用綜合除法將 $f(y)$化為 $y+3$ 的多項式即為所求。]

(練習20) $8(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^3-16(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2+2(\frac{\sqrt{5}+1}{2})+15$ 的值可以化成 $a+b\sqrt{5}$(a,b 為整數)
試求(a,b)=？　　Ans：$(a,b)=(8,1)$

(4)插值多項式

(a)造 Lagrange 多項式

某地區冬天的氣溫變化下表所示：

時間 t(時)	18	19	20	21
氣溫 y(°C)	8	6	10	12

估計 t=19.5 時該地區的氣溫約多少°C？

氣溫的變化圖可以視為連續函數，借用多項式函數 $y=f(x)$來逼近，先求出一個通過四點的「三次函數 $f(x)$」，即 $f(18)=8$、$f(19)=6$、$f(20)=10$、$f(21)=12$

再用 $f(19.5)$來估計氣溫。如何求 $f(x)$呢？

介紹法國數學家拉格朗日(Lagrange)的方法：

引入三次函數 P(x)、Q(x)、R(x)、T(x)滿足

x	18	19	20	21
P(x)	**1**	**0**	**0**	**0**
Q(x)	**0**	**1**	**0**	**0**
R(x)	**0**	**0**	**1**	**0**
T(x)	**0**	**0**	**0**	**1**

令 $f(x)=8\cdot P(x)+6\cdot Q(x)+10\cdot R(x)+12\cdot T(x)$，則 $f(x)$滿足 $f(18)=8$、$f(19)=6$、$f(20)=10$、$f(21)=12$

如何找 P(x)、Q(x)、R(x)、T(x)

$P(x)=\alpha(x-19)(x-20)(x-21)\Rightarrow P(18)=\alpha(18-19)(18-20)(18-21)\Rightarrow$

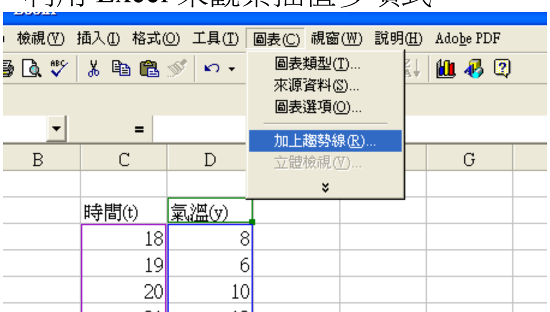
$\alpha=\frac{1}{(18-19)(18-20)(18-21)}$，故 $P(x)=\frac{(x-19)(x-20)(x-21)}{(18-19)(18-20)(18-21)}$。

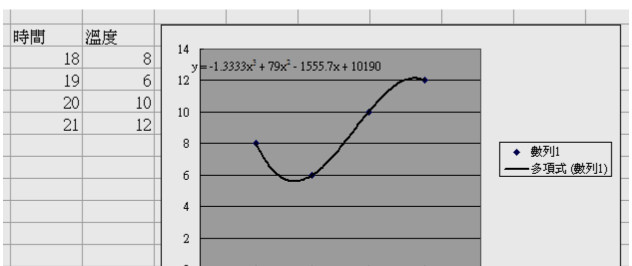
同理 $Q(x)=\frac{(x-18)(x-20)(x-21)}{(19-18)(19-20)(19-21)}$，$R(x)=\frac{(x-18)(x-19)(x-21)}{(20-18)(20-19)(20-21)}$，

$T(x)=\frac{(x-18)(x-19)(x-20)}{(21-18)(21-19)(21-21)}$。

$$\text{故 } f(x)=8\cdot\frac{(x-19)(x-20)(x-21)}{(18-19)(18-20)(18-21)}+6\cdot\frac{(x-18)(x-20)(x-21)}{(19-18)(19-20)(19-21)}$$
$$+10\cdot\frac{(x-18)(x-19)(x-21)}{(20-18)(20-19)(20-21)}+12\cdot\frac{(x-18)(x-19)(x-20)}{(21-18)(21-19)(21-21)}\text{。}$$

利用 Excel 來觀察插值多項式：





上述的想法可以推廣到一般情形。

拉格朗日(Lagrange)插值公式

(1)圖形通過(a_1,b_1)、(a_2,b_2)、(a_3,b_3)三點的二次插值多項式為

$$f(x)=b_1\cdot\frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+b_2\cdot\frac{(x-a_3)(x-a_1)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)}+b_3\cdot\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\text{。}$$

(2)圖形通過(a_1,b_1)、(a_2,b_2)、(a_3,b_3)、(a_4,b_4)四點的三次插值多項式為

$$f(x)=b_1\cdot\frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}+b_2\cdot\frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}$$

$$+b_3\cdot\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)}+b_4\cdot\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}\text{。}$$

上述的想法可以推廣到一般情形：

> 給定兩兩不同的數 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 及任意的 $y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n$
>
> 則多項式 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}(y_i\cdot\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{x-x_j}{x_i-x_j})$ 滿足條件 $f(x_k)=y_k$ $(k=1,2,..,n)$

[解法]：

根據前面的方法，可以得知令多項式 $f_i(x)=y_i\cdot(\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{x-x_j}{x_i-x_j})$ 會滿足 $f_i(x_k)=\begin{cases}y_i\ ,k=i\\ 0\ ,k\ne i\end{cases}$。

因此 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)=\sum_{i=1}^{n}(y_i\cdot\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{x-x_j}{x_i-x_j})$。

[討論]：還有其它方法可以找一個通過四點的「三次函數 $f(x)$」，滿足 $f(18)=8$、$f(19)=6$、$f(20)=10$、$f(21)=12$ 嗎？

(b)唯一性：

求出一個通過四點的「三次函數 $f(x)$」，滿足 $f(18)=8$、$f(19)=6$、$f(20)=10$、$f(21)=12$

這樣的三次函數唯一存在嗎？不同的方法，求出來的多項式函數會一樣嗎？

設三次多項式 $g(x)$滿足 $g(18)=8$、$g(19)=6$、$g(20)=10$、$g(21)=12$

令 $h(x)=f(x)-g(x)$，則 $h(18)=h(19)=h(20)=h(21)=0$，

根據因式定理：$h(x)$含有三次因式$(x-18)(x-19)(x-20)$

故可令 $h(x)=a(x-18)(x-19)(x-20)$，又 $h(21)=0\Rightarrow a=0$。因此 $f(x)=g(x)$。

一般情形：

設多項式 $f(x)$與 $g(x)$的次數$\leq n$，若有$(n+1)$個值：$x_1 , x_2 , \ldots, x_n , x_{n+1}$，

滿足 $f(x_i)=g(x_i)$，$i=1,2,..,n+1$，則 $f(x)$與 $g(x)$就是同一個多項式，即 $f(x)=g(x)$。

(練習21) 找三次多項式 $f(x)$使得 $f(1)=1$，$f(2)=3$，$f(3)=2$，$f(4)=5$。

Ans：

$$f(x)=1\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}+3\cdot\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$
$$+2\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}+5\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

(練習22) 設 a,b,c 兩兩相異，且 n 次多項式 $f(x)$ $(n\geq 3)$除以$(x-a)(x-b)(x-c)$的餘式 $r(x)$為二次式。試說明：二次函數 $y=r(x)$就是通過 $y=f(x)$圖形上三點 $A(a,f(a))$、$B(b,f(b))$、$C(c,f(c))$的拋物線。

[✿**數學與電腦**]：

給定下列資料：

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	1	4	9	16	25

利用 GeoGebra 與 Excel，各找出一個符合上述關係的函數 $f(x)$。

綜合練習

(1) 設多項式 $f(x)$除以 x^3-1 的餘式為 x^2-1，求 $f(x)$除以 x^2+x+1 的餘式。

(2) 設 $f(x)=9x+4$，$p(x)$為一個 m 次多項式且 $m>1$，又 $p(x)=g(x)f(x)+r(x)$，其中 $r(x)$為常數多項式。則下列敘述何者正確？

(A)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其商式為 $9g(x)$　(B)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其商式為 $g(x)$

(C)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其商式為$\frac{1}{9}g(x)$　(D)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其餘式為 $r(x)$

(E)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其商式為 $r(x)+9$

(3) 設 $f(x)=(x-2)^8$，$g(x)=(x^2-x+1)^{10}$，試求
(a)$f(x)\cdot g(x)$乘積中各項係數和。
(b) $f(x)\cdot g(x)$乘積中偶次項係數和。

(4) 設 $f(x)=x^3-4x^2+7x-1=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$，$a,b,c,d$ 為實數
(a)求 a,b,c,d 的值。
(b)求 $f(2.003)$的近似值至小數點後第三位。
(c)求 $f(2+\sqrt{3})$的值。
(d)以$(x-2)^2$除 $f(x)$的餘式。

(5) 若 $f(x)=x^3-2x^2-x+5$，則多項式 $g(x)=f(f(x))$除以 $x-2$ 所得的餘式為多少？
(A) 3　(B) 5　(C) 7　(D) 9　(E) 11　(92 學科)

(6) 學生練習計算三次多項式 $f(x)$除以一次多項式 $g(x)$的餘式。已知 $f(x)$的三次項係數為 3，一次項係數為 2。甲生在計算時把 $f(x)$的三次項係數錯看成 2(其他係數沒看錯)，乙生在計算時把 $f(x)$的一次項係數錯看成-2(其他係數沒看錯)。而甲生和乙生算出來的餘式剛好一樣。試問 $g(x)$可能等於以下那些一次式？
(1)x　(2)$x-1$　(3)$x-2$　(4)$x+1$　(5)$x+2$。　(95 學科)

(7) 試證明下列兩小題：
(1)$x-1$ 為 x^n-1 的因式。 (n 為正整數)
(2)$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$。

(8) 設 r,s 為整數，已知整係數多項式 $x^3+rx+s=0$ 的因式分解是
$x^3+rx+s=(x+a)^2(x+b)$，其中 a,b 為相異實數，求證 a,b 都是有理數。

(9) 設 x^2+2x+3 為 $f(x)=3x^4+8x^3+ax^2+4x+b$ 之因式，則 $a=$____，$b=$____。

(10) 設 $a>b>c>0$，a,b,c 為整數，若 $x-c$ 為 $f(x)=x(x-a)(x-b)-2$ 的因式，
則求 $a+b+c$ 之值。

(11) 設 n 次多項式 $f(x)$分別除以$(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$的餘式依次為 5 , 3, 7 ，試求 $f(x)$除以$(x-1)(x-2)(x-3)$所得的餘式。

(12) 設 $f(x)$與 $g(x)$為實係數多項式，以 x^2-3x+2 除 $f(x)$得餘式 $3x-4$，以 $x-1$ 除 $g(x)$得餘式 5，試求以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$的餘式。

(13) 求以 $7x^5+x^4+x^3+x^2+x-6$ 之整係數一次因式。

(14) 設 $f(x)$為一多項式，若$(x+1)\cdot f(x)$除以 x^2+x+1 的餘式為 $5x+3$，則 $f(x)$除以 x^2+x+1 的餘式為________。

(15) 設多項式 $f(x)$分別除以 x^2+x-2，x^2-x-6，x^2+x-12 所得餘式依次為 $2x+3$，$3x+a$，$4x+b$，試求 a,b 之值。

(16) $\deg f(x)\ge 3$，以 $2x^2+x+3$ 除 $f(x)$餘式 $2x+5$，以 $x+2$ 除 $f(x)$餘式 19，則以$(2x^2+x+3)(x+2)$除 $f(x)$ 的餘式為何？

(17) 設 $f(n)=1^2+2^2+\ldots+n^2$ (從 1^2 連續加 n 項到 n^2)為一個 n 的三次函數，
即 $f(1)=1^2$，$f(2)=1^2+2^2$，…
(a)試求 $f(1)$、$f(2)$、$f(3)$、$f(4)$的值。
(b)利用拉格蘭日插值法求 $f(n)$。

(18) 一個人運動時，每分鐘的心跳次數不應當超過一個最大值(此最大值稱為最大心律)，最大心律與性別、年齡和靜止心律(沒運動時，每分鐘的心跳次數)有關，下表是 20 歲的女性靜止心律與其最大心律：

靜止心律 **x**(每分鐘的心跳次數)	最大心律 **y**(每分鐘的心跳次數)
50	**170**
60	**172**
70	**175**
80	**182**

(a)找一個三次函數 $y=f(x)$通過資料點(50,170)、(60,172)、(70,175)、(80,182)。
(b)利用這個三次函數來估計當靜止心律為 72 時，最大心律的值。
(四捨五入至整數位)

進階問題

(19) 歷史學家為了推敲大數學家歐幾里得的出生年份，發現在西元前 336 年時，流傳了一則有趣的故事：那一年的某一天，歐幾里得造了一個整係數的多項式，並興高采烈的跟旁人說「**我現在的年齡剛好是這個多項式的一個根。**」旁人為了想知道歐幾里得的年齡，於是將 7 及一個比 7 大的整數代入歐幾里得的多項式，結果得到 77 及 85 的值。這時候歐幾里得笑著說：「**我的年齡有你代的數那麼小嗎？**」你能根據這些史料推測出歐幾里得出生的年份嗎？

(20) 設 $\deg f(x)\ge 3$，且 $f(x)$以$(x-1)^2$除之，餘 $3x+2$，以$(x+2)^2$除之，餘 $5x-3$，則求(a)以 $x-1$ 除之的餘式。(b)以$(x-1)(x+2)$除之的餘式。(c)以$(x-1)^2(x+2)$除之的餘式。

(21) 設 $f(x)=(x+1)(x+3)(x+5)\cdots(x+29)(x+31)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$，但 $a_n\neq 0$，試求 n，a_n，a_{n-1}，a_{n-2}。

(22) (a)設 $f(x)$是多項式，n 為自然數，$h\neq k$ 證明：$\deg f(x)=n \Leftrightarrow \deg[f(x+h)-f(x+k)]=n-1$。
(b)若多項式 $f(x)$對於所有的實數 x 滿足 $f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=x+1$，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，求 $f(x)=$？

(23) $f(x)$之各項係數和為 12，奇次項係數和為 18，且 $f(x)$除以 $x-3$ 之餘式為-4，商為 $Q(x)$，則以 $Q(x)$除以 $x+1$ 之餘式為________。

(24) 設 $f(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 為一整係數 n 次多項式，
若 $f(x)=(px+q)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0)$，其中 p,q 為兩個互質的整數，
則 $b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0\in Z[x]$。

(25) 設 $f(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots b_1x+b_0$ 為一整係數 n 次多項式，而 a 為整數。
求證：$f(f(a)+a)$恆有 $f(a)$之因數。

綜合練習解答

(1) $-x-2$

(2) (A)(D)

(3) (a)1 (b)$\dfrac{3^{18}+1}{2}$

(4) (a)$a=1,b=2,c=3,d=5$ (b)5.009 (c)$11+6\sqrt{3}$ (d)$3x-1$

(5) (E)[解法]：由餘式定理可知：
$g(x)$除以 $x-2$ 所得的餘式$=g(2)=f(f(2))=f(2^3-2\times2^2-2+5)=f(3)=11$

(6) (1)(3)(5)

(7) (1)利用因式定理。 (2)可以利用長除法或綜合除法。

(8) 由 $x^3+rx+s=(x+a)^2(x+b)$可得 $2a+b=0$，$2ab+a^2=r$，$a^2b=s$，將 $b=-2a$ 代入後面兩式，可得 $r=-3a^2$，$s=-2a^3$，因為假設 $a=0\Rightarrow b=0$ 不合，因此 $a\neq0$，故 r,s 均不為 0。$\Rightarrow\dfrac{s}{r}=\dfrac{2a}{3}\Rightarrow a=\dfrac{2r}{3s}$ 因為 r,s 均為整數且 $s\neq0$，故 a 為有理數$\Rightarrow b$ 為有理數。

(9) $a=12$，$b=-3$

(10) 6

(11) $3x^2-11x+13$

(12) 4

(13) $7x-6$

(14) $2x+5$
[提示：可令 $f(x)=(x^2+x+1)\mathrm{Q}(x)+mx+n$，因為$(x+1)f(x)$除以$(x^2+x+1)$的餘式為 $5x+3\Rightarrow(x+1)(mx+n)$除以 x^2+x+1 的餘式為 $5x+3$]

(15) $a=5$，$b=2$
[解法]：依題意可得 $f(x)=(x^2+x-2)\mathrm{Q}_1(x)+2x+3=(x-1)(x+2)\mathrm{Q}_1(x)+2x+3$……(1)
$f(x)=(x^2-x-6)\mathrm{Q}_2(x)+3x+a=(x+2)(x-3)\mathrm{Q}_2(x)+3x+a$……(2)
$f(x)=(x^2+x-12)\mathrm{Q}_3(x)+4x+b=(x-3)(x+4)\mathrm{Q}_3(x)+4x+b$……(3)
由(1)、(2)式可得 $f(-2)=2\times(-2)+3=3\times(-2)+a\Rightarrow a=5$
由(2)、(3)式可得 $f(3)=3\times3+5=4\times3+b\Rightarrow b=2$

(16) $4x^2+4x+11$

(17) (a)$f(1)=1$、$f(2)=5$、$f(3)=14$、$f(4)=30$

$$(b)f(n)=1\cdot\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}+5\cdot\frac{(n-1)(n-3)(n-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}+14\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}+30\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

(18) $$(a)f(x)=170\cdot\frac{(x-60)(x-70)(x-80)}{(50-60)(50-70)(50-80)}+172\cdot\frac{(x-50)(x-70)(x-80)}{(60-50)(60-70)(60-80)}+175\cdot\frac{(x-50)(x-60)(x-80)}{(70-50)(70-60)(70-80)}+182\cdot\frac{(x-50)(x-60)(x-70)}{(80-50)(80-60)(80-70)}$$
(b)$f(72)\approx176$

(19) 請看提示 [提示：設歐幾里得提及的多項式為 $f(x)$，而歐幾里得有 a 歲，且 $f(7)=77$，$f(b)=85$，且 $b>7$，由例題 13 可得 $b-7|f(b)-f(7)\Rightarrow b-7|8$，且 $7-a|f(7)-f(a)=77$，$b-a|f(b)-f(a)=85$，再根據這些條件，去求得 a 的值，$a=14$，所以歐幾里得出生的年份是西元前 323 年。]

(20) (a)5 (b)$6x-1$ (c)$-x^2+5x+1$

(21) 16，1，256，30040[Hint：$(1+3+5+\ldots+2n-1)^2=1^2+3^2+\ldots.+(2n-1)^2+2\cdot a_{n-2}$]

(22) (b)$\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x$

(23) 5

(24) 令 $b_k=\frac{c_k}{d_k}$ $0\le k\le n-1$ 且$(c_k,d_k)=1$，比較
$f(x)=(px+q)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0)$的係數，可知 $a_n=p\cdot b_{n-1}$
$a_i=pb_{i-1}+qb_i$，$1\le i\le n-1$，$a_0=qb_0$，再透過這些關係式證明 $d_{n-1}=1\Rightarrow b_{n-1}\in Z$。再利用 $b_{n-1}\in Z$ 證明 $b_i\in Z$ $(1\le i\le n-1)$。

(25) 根據除法原理，$f(x)=(x-a)Q(x)+f(a)$，令 $x=f(a)+a$，代入上式中，即可得證。