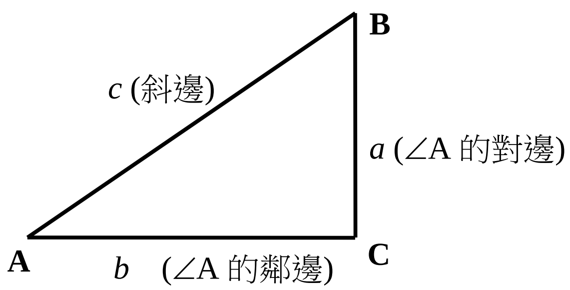
第十二單元　廣義角的三角比

(甲)銳角三角比

(1)銳角三角比的定義：

設ΔABC 為直角三角形，其中∠C 為直角三角形，$\overline{AB}$為斜邊，兩股$\overline{BC}$與$\overline{AC}$分別是∠A 的對邊與鄰邊。

設$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，則我們定義∠A 的三角比如下：



∠A 的**正弦**=sinA= $\dfrac{對邊}{斜邊}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{c}$

∠A 的**餘弦**=cosA= $\dfrac{鄰邊}{斜邊}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}$

∠A 的**正切**=tanA= $\dfrac{對邊}{鄰邊}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{a}{b}$

∠A 的**餘切**=cotA= $\dfrac{鄰邊}{對邊}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{b}{a}$

∠A 的**正割**=secA= $\dfrac{斜邊}{鄰邊}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{c}{b}$

∠A 的**餘割**=cscA= $\dfrac{斜邊}{對邊}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{c}{a}$

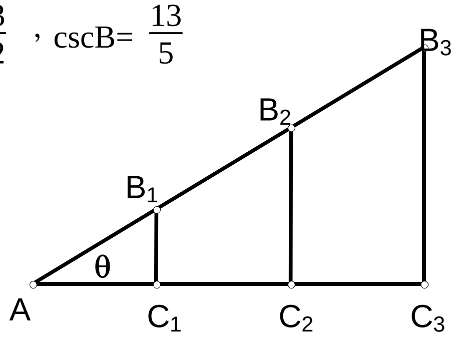
例如：直角三角形 ABC 各邊為 $c=13$，$a=12$，$b=5$ 依據定義：

sinB= $\dfrac{5}{13}$ ，cosB= $\dfrac{12}{13}$ ，tanB= $\dfrac{5}{12}$ cotB= $\dfrac{12}{5}$ ，secB= $\dfrac{13}{12}$ ，cscB= $\dfrac{13}{5}$

給定一銳角∠A(即θ)它的六個三角比亦隨之確定了。

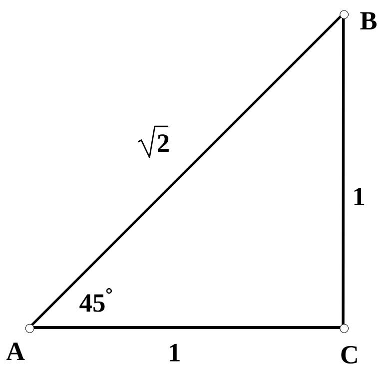
直角$\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2 \sim \triangle AB_3C_3 \sim$……，

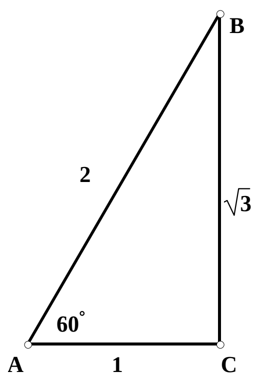
因 $\sin A=\sin\theta==\dfrac{B_1C_1}{AB_1}=\dfrac{B_2C_2}{AB_2}=\dfrac{B_3C_3}{AB_3}\cdots$

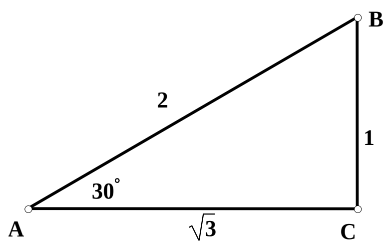


故知∠A(即θ)的六個三角比只受∠A(即θ)的大小影響，而不在乎三角形的大小。

(2)特殊角的三角比：





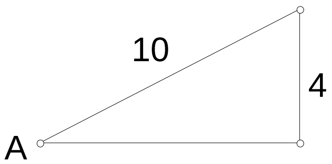


(練習1)　完成下表：

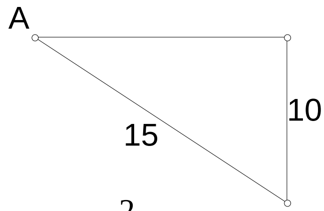
θ	sinθ	cosθ	tanθ	cotθ	secθ	cscθ
30°						
45°						
60°						

(練習2)　在下列各三角形，分別計算 sinA，cosA，tanA 之值。

(1)



(2)



Ans：(1)sinA= $\frac{2}{5}$ ，cosA= $\frac{\sqrt{21}}{5}$，tanA= $\frac{2}{\sqrt{21}}$

(2)sinA= $\frac{2}{3}$ ，cosA=$\frac{\sqrt{5}}{3}$，tanA= $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(練習3)　設θ為銳角且 tanθ＝ $\sqrt{2}$，則 sinθ＝__________，而 secθ＝__________。

Ans：$\frac{\sqrt{6}}{3}$；$\sqrt{3}$

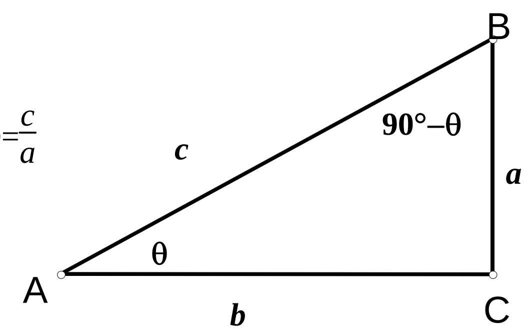
(2)銳角三角比的關係：

若三角形△ABC 中，∠C=90°，∠A 的度數為θ，以 a,b 與 c 分別表示三邊$\overline{BC}$，$\overline{AC}$與$\overline{AB}$之長，則可發現這六個三角比並非毫不相干，而是具有某些關聯的。

(a)預備公式

銳角三角比的定義

$\sin\theta=\frac{a}{c}$，$\cos\theta=\frac{b}{c}$ ，$\tan\theta=\frac{a}{b}$，$\cot\theta=\frac{b}{a}$，$\sec\theta=\frac{c}{b}$，$\csc\theta=\frac{c}{a}$



(b)倒數關係：

①$\sin\theta\times\csc\theta=1$②$\cos\theta\times\sec\theta=1$③$\tan\theta\times\cot\theta=1$

(c)平方關係(利用畢式定理可得)

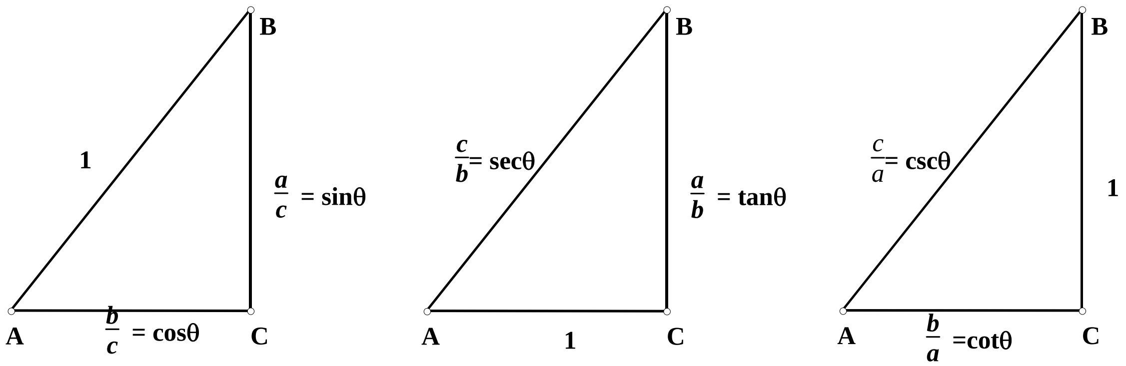
① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　② $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$　③$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

(注意：$\sin^2\theta=(\sin\theta)^2$　$\cos^2\theta=(\cos\theta)^2$)

$\sin^2A+\cos^2A=(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=\frac{c^2}{c^2}=1 \Rightarrow \sin^2A+\cos^2A=1$

上式兩邊同除以 $\cos^2A$，則可得$\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}+1=\dfrac{1}{\cos^2A}=\sec^2A \Rightarrow \tan^2A+1=\sec^2A$

若將 $\sin^2A+\cos^2A=1$ 的兩邊除以 $\sin^2A$，則可得 $1+\cot^2A=\csc^2A$



(d)餘角關係：直角三角形的兩銳角互為餘角關係

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$　$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$　$\tan(90°-\theta)=\cot\theta$

$\cot(90°-\theta)=\tan\theta$　$\sec(90°-\theta)=\csc\theta$　$\csc(90°-\theta)=\sec\theta$

上述的直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A+\angle B=90^\circ$，我們可以觀察∠A 的對邊剛好為∠B 的鄰邊，∠A 的鄰邊剛好是∠B 的對邊，由正弦和餘弦函數的定義可知：

$\sin B=\dfrac{\angle B\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\cos A$。

(e)銳角三角比的範圍：

若 $0°<\theta<90°$，則

①$0<\sin\theta<1 \Rightarrow$倒數 $\csc\theta>1$②$0<\cos\theta<1\Rightarrow$倒數 $\sec\theta>1$③$\tan\theta$為任意實數$\Rightarrow\cot\theta$任意實數

(f)上述各種關係對於任意銳角θ都成立，根據這些關係，我們若知道 sinθ，cosθ，tanθ，cotθ，secθ，cscθ六個三角比中之一個，就可推得他五個的值。

(練習4)　已知θ為銳角且 $\tan\theta=\dfrac{5}{6}$，試求 sinθ，cosθ，tanθ，cotθ，secθ，cscθ之值。

Ans：$\sin\theta=\dfrac{5}{\sqrt{61}}$，$\cos\theta=\dfrac{6}{\sqrt{61}}$，$\tan\theta=\dfrac{5}{6}$，$\cot\theta=\dfrac{6}{5}$，$\sec\theta=\dfrac{\sqrt{61}}{6}$，$\csc\theta=\dfrac{\sqrt{61}}{5}$

[例題1] 設θ為銳角，且 $2\sin\theta+\cos\theta=2$，求 sinθ 與 cosθ 。

Ans：$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

[例題2] 設θ為銳角，且 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{4}{3}$，求下列各小題的值：

(1)$\sin\theta\cdot\cos\theta$ (2)$\sin\theta-\cos\theta$ (3)$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ (4)$\tan\theta+\cot\theta$ 。

Ans：(1)$\dfrac{7}{18}$ (2)$\dfrac{\pm\sqrt{2}}{3}$ (3)$\dfrac{22}{27}$ (4)$\dfrac{18}{7}$

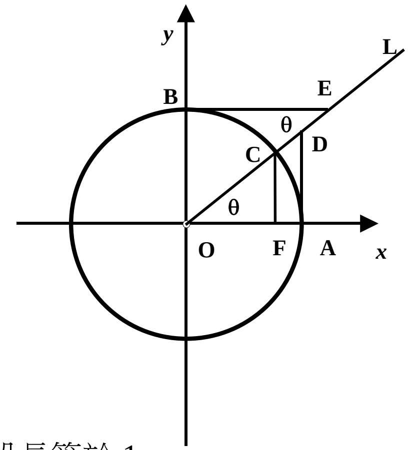
[例題3] (用線段表銳角的三角比)

在坐標平面上以原點 O 為圓心，1 為半徑畫一圓，交 x 軸正向於 A 點，y 軸正向於 B 點，再畫一直線 L 過原點並交圓 O 於 C,C′兩點。過 A 點與 B 點作圓的切線，分別交直線 L 於 D 點與 E 點並自 C 點作 x 軸的垂線交 x 軸於 F 點，設∠COA=θ。

(1)在上圖中分別找出長度等於 $\sin\theta,\cos\theta,\tan\theta,\cot\theta,\sec\theta,\csc\theta$ 的單一線段。

(2)試比較 $\sin\theta,\tan\theta,\sec\theta$ 的大小。

(3)試比較 $\cos\theta,\cot\theta,\csc\theta$ 的大小。



[答案]：

(1)$\sin\theta=\overline{CF}$，$\cos\theta=\overline{OF}$，$\tan\theta=\overline{AD}$

$\sec\theta=\overline{OD}$，$\cot\theta=\overline{BE}$，$\csc\theta=\overline{OE}$。

(2)當 $0<\theta<45°$，$\sin\theta<\cos\theta$；當 $45°<\theta<90°$，$\sin\theta>\cos\theta$

(3)$\sin\theta<\tan\theta<\sec\theta$

[解法]：

(1)考慮六個銳角三角比的定義，

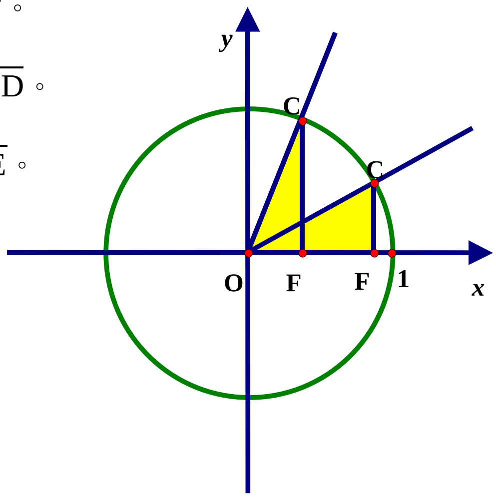
若希望用單一線段表示三角比，那麼可以讓分母的線段長等於 1。

考慮ΔCOF，$\sin\theta=\dfrac{CF}{OC}=\overline{CF}$，$\cos\theta=\dfrac{OF}{OC}=\overline{OF}$。

考慮ΔAOD，$\tan\theta=\dfrac{AD}{OA}=\overline{AD}$，$\sec\theta=\dfrac{OD}{OA}=\overline{OD}$。

考慮ΔBOE，$\cot\theta=\dfrac{BE}{OB}=\overline{BE}$，$\csc\theta=\dfrac{OE}{OB}=\overline{OE}$。

(2)如右圖，可以得知



當 $0<\theta<45°$，$\overline{CF}<\overline{OF}\Rightarrow\sin\theta<\cos\theta$；

當 $45°<\theta<90°$，$\overline{CF}>\overline{OF}\Rightarrow\sin\theta>\cos\theta$

(3)根據圖形，

因為$\overline{CF}<\overline{AD}<\overline{OD}$，所以 $\sin\theta<\tan\theta<\sec\theta$。

(練習5)　設θ為銳角，且令 $\tan\theta=k$，請用 k 表示下列各三角比的值：

(1)secθ　(2)cosθ　(3)sinθ　Ans：(1)$\sqrt{1+k^2}$　(2)$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$　(3) $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

(練習6)　設θ為銳角，且 $\tan\theta+\sec\theta=\frac{3}{2}$，試求 $\tan\theta=$？　Ans：$\frac{5}{12}$

(練習7)　設θ為銳角，$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，請計算下列各小題的值：

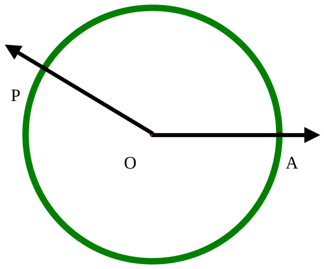
(1)$\sin\theta\cdot\cos\theta$　(2)$\sin\theta+\cos\theta$　(3)$\tan\theta+\cot\theta$

Ans：(1)$\frac{3}{8}$　(2)$\frac{\sqrt{7}}{2}$　(3)$\frac{8}{3}$

(練習8)　設θ為銳角，若 $\cos\theta=\tan\theta$，求 $\sin\theta=$？　Ans：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(乙)廣義角的意義

摩天輪常常成為某個城市或地區的地標，它的運動可以視為一個等速率的圓周運動，如何來描述摩天輪上車廂的運動呢？首先設 O 為摩天輪的圓心，並以 A 為觀察的基準點，一段時間之後車廂運動到 P 點位置，A 點繞 O 點順時針轉動或逆時針轉動運動，都會到達 P 點的位置，而且可能轉動的圈數超過一圈，因此我們有必要引進新的角度概念來描述「如何由 A 點繞 O 點旋轉到 P 點的運動狀態」。



(1)廣義角的概念：

以射線 OA 為始邊，射線 OB 為終邊，從射線 OA 繞 O 點旋轉至射線 OB 的旋轉量，稱為**有向角**，並且規定**逆時針旋轉為正向角，順時針旋轉為負向角**。

如上圖，若用量角器量出∠AOP=153°，若是 A 點順時針繞 O 點轉到 P，此時有向角為−207°，若是 A 順時針繞 O 點先逆時針轉一圈再轉到 P，此時有向角為 513°，這些旋轉量打破角度 180°的限制，而將角度的範圍擴充到任何的實數，像這樣的角度就稱為**廣義角(或稱為有向角)**。

當 A 點繞 O 點逆時針轉一圈、二圈…回到 A 點，此時廣義角為 360°、720°…；
當 A 點繞 O 點順時針轉一圈、二圈…回到 A 點，此時廣義角為−360°、−720°…

若 A 點繞 O 點並沒轉動，此時規定廣義角為 0°。

(2)同界角的概念：

如上所述，廣義角−207°、513°、153°，它們的始邊與終邊都是相同的射線，這樣的角度稱之為**同界角**。

同界角的定義：

兩個廣義角θ ,φ 有共同的始邊與終邊，我們將這樣的θ ,φ 稱為**同界角**。而兩個同界角之間，因為始邊與終邊相同，因此差別只是所繞的圈數不同，故可得

$\theta-\varphi=k\cdot 360^{\circ}$，$k$ 為整數。

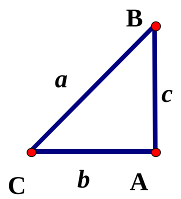
例如：57°的同界角都可寫成 $57^{\circ}+360^{\circ}\times k$ (k 為整數)

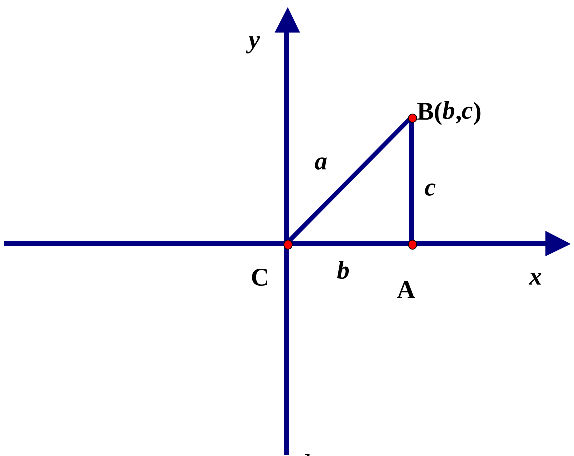
(丙)廣義角三角比

想要定義廣義角的三角比，首先我們要先清楚「**三角比(正弦、正切、..)它們是角度的函數**」這個事實，因此當我們選定廣義角時，可以試圖以此廣義角來定義 6 個三角比，換句話說，我們想要定義 sin(−120°)、cos370°、tan0°…的值，而它們的值應如何定義才好？

(1)廣義角三角比的定義：

(a)回顧銳角三角比的定義：





直角ΔABC 中，根據銳角三角比的定義可得 $\sin C=\dfrac{c}{a}$，$\cos C=\dfrac{b}{a}$，現在將 C 點移至座標原點，如上右圖所示，可得 B(b,c)，所以正弦與餘弦的定義，可用另一觀點來看：

$\sin C=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\text{B點的}y\text{坐標}}{\text{B到原點的距離}}$，$\cos C=\dfrac{b}{a}=\dfrac{\text{B點的}x\text{坐標}}{\text{B到原點的距離}}$

根據上面的式子，可以將定義由線段長度，延伸至坐標，因為坐標可正可負，因此當我們推廣銳角三角比定義時至廣義角三角比時，就可以引用坐標來定義。

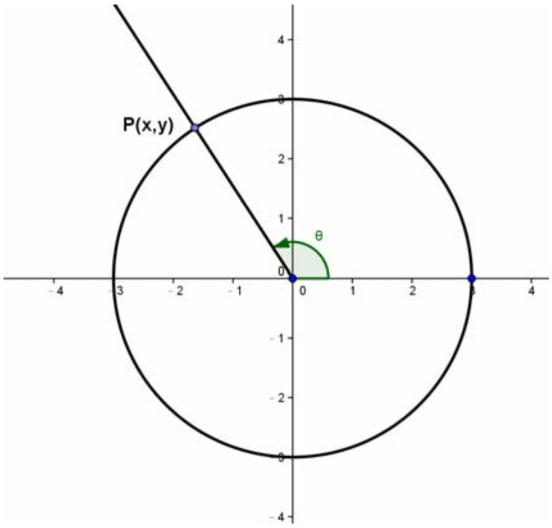
(b)定義廣義角的正餘弦：

在坐標平面上做一個以原點為圓心，半徑等於 r 的圓，給定一個廣義角θ，規定**θ的始邊為 x 軸的正向**，角的頂點為原點，稱為將θ置於標準位置，根據θ 的旋轉量，可畫

出終邊的位置。

設終邊與圓交於 P(x,y)，令 $r=\overline{OP}$，定義廣義角θ的正弦(sinθ)與餘弦(cosθ)如下：

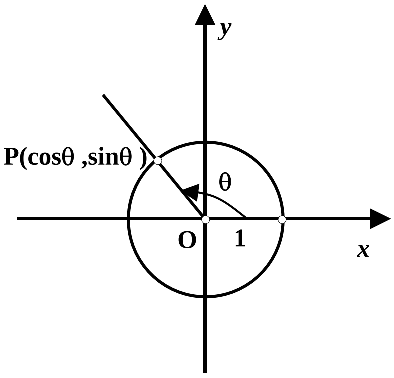
$\boxed{\sin\theta=\dfrac{y}{r}，\cos\theta=\dfrac{x}{r}}$



特別情形：

當 r=1 時 $\sin\theta=\dfrac{y}{1}=y$，$\cos\theta=\dfrac{x}{1}=x$

所以單位圓上的點 P 的坐標可以寫成 P(cosθ ,sinθ)



(c)其他三角比的定義：

仿照銳角三角比間的關係，可定義其它的廣義角三角比：

若將θ至於標準位置，且設終邊與圓交於 P(x,y)，令 $r=\overline{OP}$，此時 $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$

則定義 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$ ($x\neq0$)，$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$，$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$，($y\neq0$)

結論：設角θ終邊上的點 P(x,y)，$r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$

(1)

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$	$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ ($x\neq0$)	$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$ ($x\neq0$)
$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$	$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$ ($y\neq0$)	$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$ ($y\neq0$)

(2)由終邊的位置判別三角比的正負：

(a)廣義角θ的終邊在第一二三四象限的角稱為θ的第**一二三四象限角**。

　廣義角θ的終邊在 x 軸或 y 軸上，稱為**象限角**。

(b)sinθ之正負⇒看 y 在第一、二象限為正，y 在第三、四象限為負

　所以 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$在**第一、第二象限為正，在第三、第四象限為負**

(c)cosθ之正負⇒看 x 在第一、四象限為正，x 在第二、三象限為負

所以 $\cos\theta = \frac{x}{r}$ 在第一、第四象限為正，在第二、第三象限為負

(d)整理成表格如下：

象限 函數	一	二	三	四
sinθ與 cscθ	+	+	–	–
cosθ與 secθ	+	–	–	+
tanθ與 cotθ	+	–	+	–

(練習9)根據廣義角三角比的定義，完成下表：

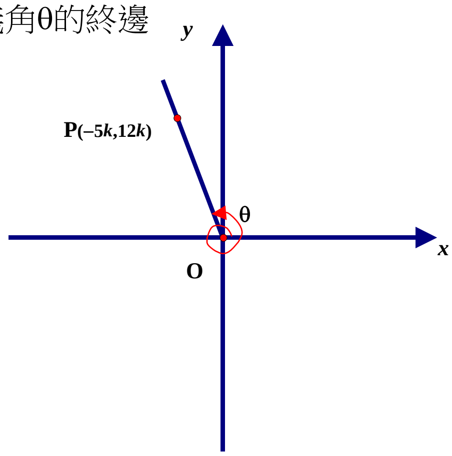
角度θ	**0°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**	**120°**	**135°**	**150°**	**225°**	**300°**	**330°**
sinθ											
cosθ											
tanθ											

[討論]：根據廣義角三角比的定義，討論六個三角比的範圍：

[例題4]

如圖所示，點 P(–5k,12k)為位於標準位置的廣義角θ的終邊上之一點，其中 k>0，

試求 sinθ、cosθ、tanθ、cotθ、secθ、cscθ的值。



Ans：$\sin\theta=\frac{12}{13}$、$\cos\theta=\frac{-5}{13}$、$\tan\theta=\frac{-12}{5}$、

$\cot\theta=\frac{-5}{12}$、$\sec\theta=\frac{-13}{5}$、$\csc\theta=\frac{13}{12}$

[例題5] 設 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，且θ為第二象限角，試用

(1)三角恆等式，決定其他三角比(2)標準位置角，決定其他三角比

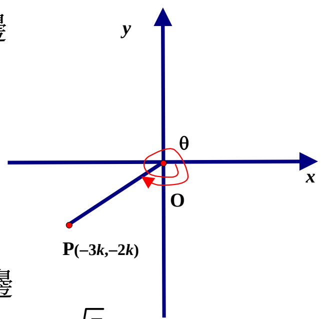
Ans：$\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{-3}{5}$，$\tan\theta=\frac{4}{-3}$，$\cot\theta=\frac{-3}{4}$，$\sec\theta=\frac{5}{-3}$，$\csc\theta=\frac{5}{4}$

(練習10) 在 xy 平面上，以 x 軸之正向為始邊作一廣義角θ，其終邊上有一點 P 之坐標如下表所示，試填寫θ的各三角比值。

P 點坐標	(5,12)	(3,–4)	(–1,–2)	(3,–1)	(5,0)	(0,3)	(–4,0)	(0,–3)
OP 長度								
sinθ								
cosθ								
tanθ								
cotθ								
secθ								
cscθ								

(練習11) 如圖所示，點 $P(-3k,-2k)$為位於標準位置的廣義角θ的終邊上之一點，其中 $k>0$，試求 sinθ、cosθ、tanθ的值。

[答案]：$\sin\theta=\frac{-2}{\sqrt{13}}$ 、$\cos\theta=\frac{-3}{\sqrt{13}}$、$\tan\theta=\frac{2}{3}$



(練習12) 座標平面上，O 為原點，θ為第二象限角，$P(x,2)$是θ角終邊上一點，已知$\overline{OP}=3$，求 x 及 cosθ之值。Ans：$x=-\sqrt{5}$，$\cos\theta=\frac{-\sqrt{5}}{3}$

(練習13) (1)$\sin\theta=\frac{-4}{5}$，且θ為第三象限角，求其他三角比。

(2)$\tan\theta=\frac{-4}{3}$，且θ為第四象限角，求其他三角比。

Ans：(1)$\cos\theta=\frac{-3}{5}$，$\tan\theta=\frac{4}{3}$，$\cot\theta=\frac{3}{4}$，$\sec\theta=\frac{5}{-3}$，$\csc\theta=\frac{5}{-4}$

(2) $\sin\theta=\frac{-4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\cot\theta=\frac{3}{-4}$，$\sec\theta=\frac{5}{3}$，$\csc\theta=\frac{5}{-4}$

(2)三角比的化簡：

(a)角度θ終邊的位置與三角比的正負：

象限 / 函數	一	二	三	四
sinθ與 cscθ	+	+	–	–
cosθ與 secθ	+	–	–	+
tanθ與 cotθ	+	–	+	–

(b)角度化簡的原則：

①凡是同界角均有相同的三角比：

若θ_1與θ_2為同界角，由於同界角具有相同的始邊與終邊，所以同界角具有相同的三角比值，利用此觀念可將任意角度的三角比化成角度在 0°到 360°間的三角比。

$\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}\,(n\times360^{\circ}+\theta)$

$=\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}\,(\theta)$

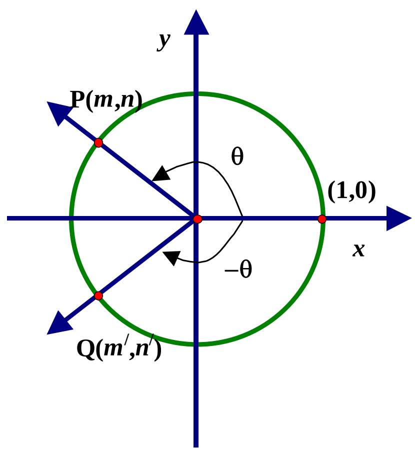
例如：sin789°=sin(2．360°+69°)=sin69°，

tan(–1000°)=tan(–3．360°+80°)=tan80°

②負角之三角比的變換：

$\boxed{\sin，\tan，\cot，\csc}(-\theta)=-\boxed{\sin，\tan，\cot，\csc}\,(\theta)$

$\boxed{\cos，\sec}\,(-\theta)=\boxed{\cos，\sec}\,(\theta)$



[說明]：

如右圖，P 點與 Q 點分別是廣義角θ,–θ終邊與單位圓的交點

根據定義可知

$m=\cos\theta,n=\sin\theta$ ；$m'=\cos(-\theta),n'=\sin(-\theta)$

又因為 P、Q 分別對稱於 x 軸，

$\Rightarrow m=m'$，$n=-n'$

$\Rightarrow\cos\theta=\cos(-\theta)$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$。

其餘四個三角比，可由 sinθ,cosθ 的關係推得。

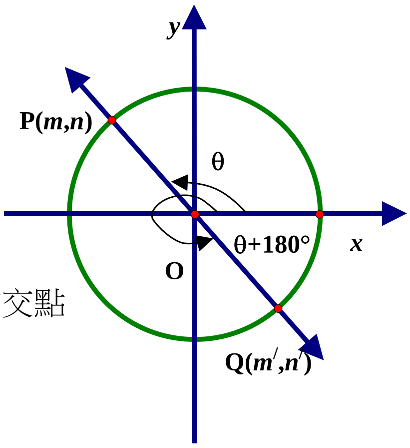
例如：cos(–123°)=cos123°，sin(–125°)=–sin125°，tan(–200°)=–tan200°

③角 $180°\pm\theta$之三角比的變換：

$\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}\,(180°\pm\theta)$

$=\pm\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}\,(\theta)$

♦ ±號的選定可將θ 視為銳角去判斷正負



[說明]：

如右圖，P 點與 Q 點分別是廣義角θ,180°+θ終邊與單位圓的交點

根據定義可知

$m=\cos\theta, n=\sin\theta$ ；$m'=\cos(180°+\theta), n'=\sin(180°+\theta)$

又因為 P 與 Q 對稱於 O 點

$\Rightarrow m'=-m, n'=-n$。

$\Rightarrow \cos(180°+\theta)=-\cos\theta，\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$。

另外一方面，

$\cos(180°-\theta)=\cos(180°+(-\theta))=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$。

$\sin(180°-\theta)=\sin(180°+(-\theta))=-\sin(-\theta)=\sin\theta$。

例如：$\sin230°=\sin(180°+50°)=-\sin50°，\cos230°=\cos(180°+50°)=-\cos50°$

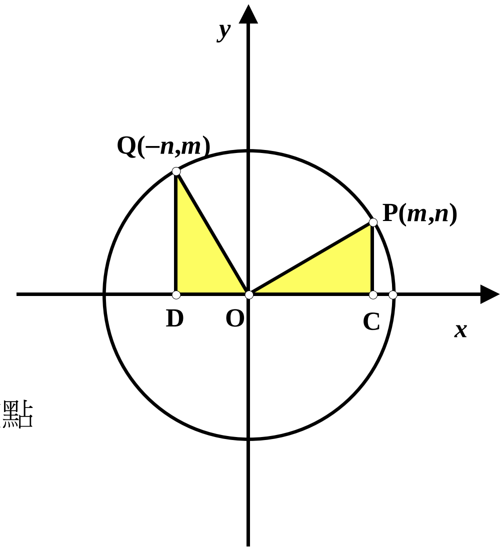
$\sin140°=\sin(180°-40°)=\sin40°，\cos140°=\cos(180°-40°)=-\cos40°$

④角 $90°\pm\theta$ ，$270°\pm\theta$ 之三角比的變換：

$\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}\,(90°\pm\theta，270°\pm\theta)$

$=\pm\boxed{\cos，\sin，\cot，\tan，\csc，\sec}\,(\theta)$

♦ ±號的選定可將θ 視為銳角去判斷正負



請注意上式中正餘三角比互換。

[說明]：

如右圖，P 點與 Q 點分別是廣義角θ,90°+θ終邊與單位圓的交點

從圖形可以得知$\Delta COP\cong\Delta DQO$，因此若 P 點坐標為$(m,n)$，

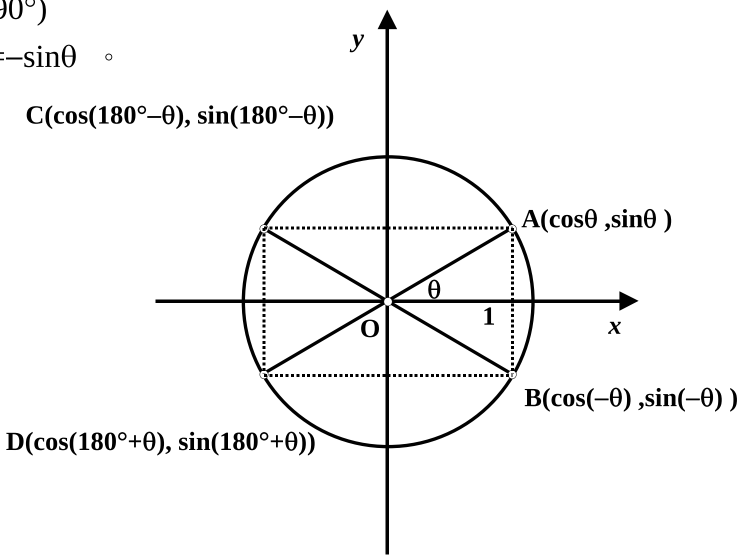
那麼 Q 點坐標為$(-n,m)$，根據三角比的定義，

$m=\cos\theta，n=\sin\theta；-n=\cos(\theta+90°)，m=\sin(\theta+90°)$

所以可以得到 $\sin(\theta+90°)=\cos\theta，\cos(\theta+90°)=-\sin\theta$ 。

例如：$\sin130°=\sin(90°+40°)=\cos40°$

$\cos130°=\cos(90°+40°)=-\sin40°$



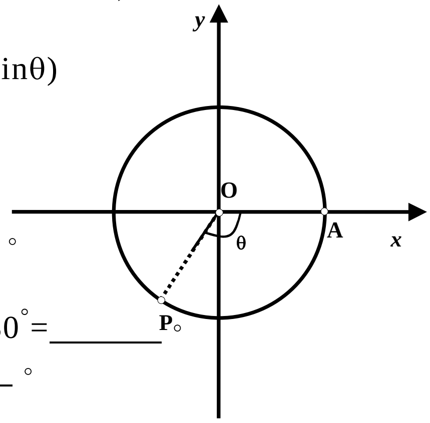
[例題6] 請化簡下列各三角比：
(a)$\sin 1800°$ (b)$\cos 1560°$ (c)$\sin(-1050°)$ (d)$\tan 945°$

[例題7] 設 $\cot\theta=\frac{-5}{12}$，且θ為第二象限角，試求
(1)$\sin\theta$ (2)$\cos(\theta+90°)$(3)$\tan(180°-\theta)$ 的值。
Ans：(1)$\frac{12}{13}$ (2)$\frac{-12}{13}$ (3)$\frac{12}{5}$

[例題8] 設 $\cos 100^{\circ}=k$，試以 k 表
(1)$\sin(-260^{\circ})$=______。(2)$\tan(-260^{\circ})$=_____。
(3)$\cos(-80^{\circ})$=_______。(4)$\sin(-80^{\circ})$=_______。
Ans：(1)$\sqrt{1-k^2}$ (2)$\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ (3)$-k$ (4)$-\sqrt{1-k^2}$

(練習14) 化簡 $\dfrac{\sin(180^\circ+\theta)\tan^2(180^\circ-\theta)}{\cos(270^\circ+\theta)}-\dfrac{\sin(270^\circ-\theta)\csc^2(90^\circ+\theta)}{\sin(90^\circ+\theta)}$ 。Ans：1

(練習15) 右圖為一圓心在原點的單位圓，且∠AOP=θ(非有向角)。則圓弧上一點P的坐標為？
(A) (cosθ,sinθ)　(B)(cosθ,−sinθ)　(C) (−cosθ,sinθ)
(D) (−cosθ,−sinθ)　(E)(−sinθ,cosθ)　Ans：(B)



(練習16) 試求下列各值：
(1)$\cos570^\circ\cdot\sin150^\circ+\sin(-330^\circ)\cdot\cos(-390^\circ)$=_____。
(2)$\sin210^\circ+\tan(-135^\circ)+\cos(-390^\circ)$=_____。
(3)$\sin60^\circ\cdot\cos150^\circ-\cos225^\circ\sin315^\circ+\tan300^\circ\cdot\sec180^\circ$=_______。
(4)$\sin1560^\circ\tan(-510^\circ)+\cos(-240^\circ)\cot495^\circ$=______。
Ans：(1)0 (2)$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ (3)$\dfrac{4\sqrt{3}-5}{4}$ (4)1

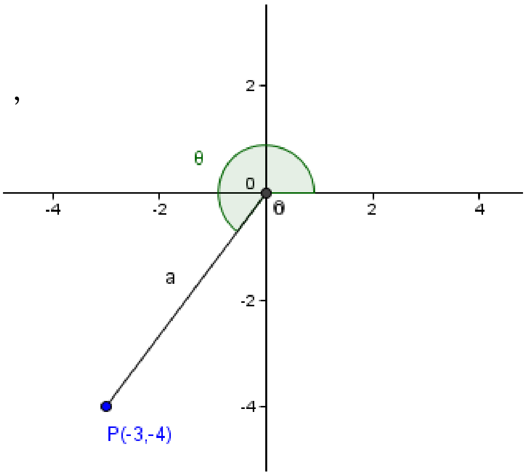
(練習17) 設 0°≤θ<360°，求滿足下列條件的θ值：
(1)sinθ=$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(2)cosθ=$\dfrac{-1}{2}$　(3)sinθ=−1　(4)tanθ=0 (5)cscθ=−2
[答案]：(1)45°或 135°　(2)120°或 240°　(3)270°
(4)0°或 180°　(5)210°或 330°

(練習18) 設 tan20°=k，試求 sec250°=______。 Ans：$\dfrac{-\sqrt{k^2+1}}{k}$

(練習19) 設 0°≤θ<360°，求滿足下列各條件的θ值：
(1)sinθ=$\dfrac{-1}{2}$　(2)cosθ=$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(3)tanθ=$-\sqrt{3}$。
Ans：(1)210°或 330°　(2)45°或 315°　(3)120°或 300°

(練習20) 請求出 sin1°+sin2°+…+sin360°=？　Ans：0

綜合練習



(1) 如圖所示，點 P(–3,–4)落在廣義角θ的終邊上，
則下列哪些敘述是正確的？

(A) $\tan\theta=\frac{3}{4}$ (B)$\sin\theta=\frac{-4}{5}$ (C) $\cos(\theta+180°)=\frac{3}{5}$

(D) $\sin(90°+\theta)=\frac{-3}{5}$ (E) $\sin(360°+\theta)=\frac{4}{5}$。

(2) 試求下列各式的值：

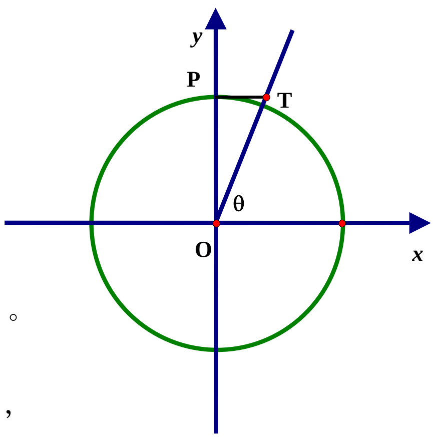
(a)$2\cos^2 30°-1$ (b)$2\sin30°\cos30°$ (c)$\frac{2\tan30°}{1-\tan^2 30°}$ (d)$\sin60°\cos60°\tan60°\cot60°\sec60°$

(e)$\tan45°+\sqrt{3}\tan60°-\sin^2 30°(f)1+\sin^2 45°-\tan30°\cot60°$

(3) 設 $0°<\theta<90°$，$\tan\theta=k$，則下列敘述何者正確？

(A) $\sec\theta=\sqrt{k^2+1}$ (B) $\csc\theta=k^2+1$ (C) $\cot\theta=\frac{1}{k}$

(D) $\sin\theta=\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ (E) $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ 。

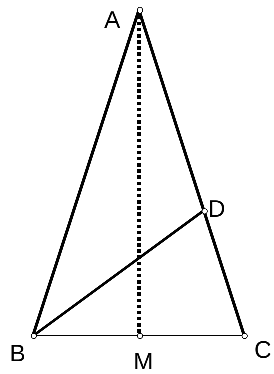


(4) 如右圖，圓 O 為單位圓，已知 $\sin\theta=\frac{12}{13}$，則$\overline{PT}$=？

(5) 求一個半徑 r 的圓內接正 n 邊形與圓外切正 n 邊形的周長。

(6) 設ΔABC 中，$\cos\angle ABC=\frac{4}{5}$，$\cos\angle ACB=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\overline{BC}$之中點 M，

而$\overline{AH}\perp\overline{BC}$於 H，若$\overline{MH}=5$，求$\overline{BC}$=？



(7) △ABC 是一個頂角為 36°的等腰三角形，

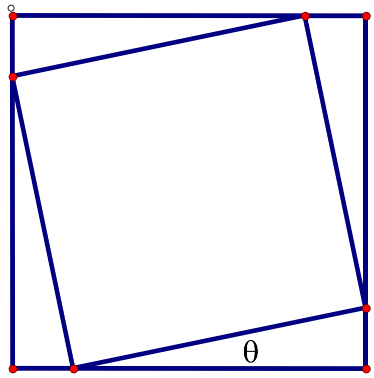
$\overline{AM}$與$\overline{BD}$分別是∠A 與∠B 的分角線，
如右上圖所示。試利用△BCD~△ABC，求 sin18°之值。

(8) 如圖，$\angle B=90°$，$3\overline{CD}=2\overline{BD}$，$\overline{AB}=\overline{BD}$，
則 $\tan\angle CAD$ 之值為__________。

(9) 設 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，則求下列各小題的值：

(a)$\sin\theta\cdot\cos\theta$=____。(b)$\sin\theta-\cos\theta$ =_____。
(c)$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ =_____。(d)$\sin^6\theta+\cos^6\theta$ =______。

(10) 有一塊正方形的壓克力版，其中有一個角落附近有瑕疵，現在要將它依右圖的方式截成一塊較小的正方形壓克力，小正方形的邊與大正方形的邊成一個角度 $\theta(0<\theta<45°)$使得其面積為原來面積的$\frac{3}{4}$，試問 $\tan\theta$=_______



(11) 求下列各函數的值。
(a)$\sin870°$(b)$\sin(-1215°)$(c)$\cos(-105°)$(d)$\tan2010°$

(12) 設 $\cot\theta=\frac{-4}{3}$，且 $\sin\theta>0$，試求 $\frac{3\sin\theta+5\cos\theta}{2\sin\theta+6\cos\theta}$=______。

(13) 設 $4\cos^2\theta-8\cos\theta-5=0$，求 $\sin\theta$之值。

(14) 假設 $\cos\theta+3\sin\theta=2$，且 $0<\theta<90°$，求 $\cos\theta+\sin\theta$之值。

(15) 若 $90^\circ<\theta<180^\circ$，且 $\cos\theta+\sin\theta=\frac{1}{5}$，請求下列兩小題的值：

(a)$\cos\theta$=？ (b)$\frac{\sec\theta}{\tan\theta}+\frac{\csc\theta}{\cot\theta}$=？ (c)$\sin\theta\cos\theta$=？

(16) 設 $45<\theta<90^\circ$，令 $a=\log_{\frac{1}{2}}\sin\theta$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\cos\theta$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\tan\theta$，$d=\log_{\frac{1}{2}}\sec\theta$
試比較 a,b,c,d 之大小。

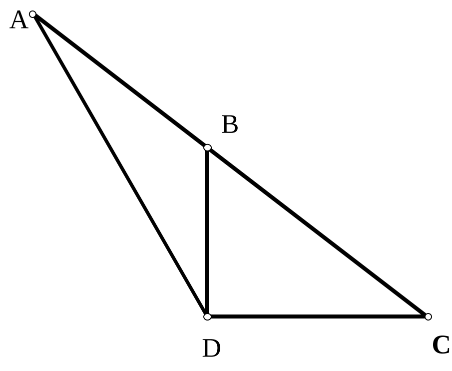
(17) 銳角ΔABC 之三邊長為 a,b,c，其所對應的高為 h_a, h_b, h_c，
已知 $\tan A=1$，$\tan B=2$，$\tan C=3$，則$\frac{abc}{h_ah_bh_c}$=？

進階問題

(18) 若 $0^\circ<\theta<45^\circ$，求$\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}$ 之值。

(19) 設 $A+B+C=180^\circ$，求證：
(a)$\tan\frac{A+B}{2}=\cot\frac{C}{2}$ (b)$\sin A=-\cos(\frac{3A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2})$ (c)$\sin(\frac{A}{2}+B)=\cos(\frac{B}{2}-\frac{C}{2})$。

(20) 如右圖，$\angle BDC=90^\circ$，$\angle ADB=30^\circ$，A、B、C 共線，
且$\overline{AB}=\overline{CD}=1$，求$\overline{BC}$的長。



(21) 將半徑為 1 的半圓周$\overset{\frown}{AB}$ 分成 180 等分，
設等分點依次為 P_1、P_2、P_{179}，求 $\sum_{k=1}^{179}\overline{AP_k}^2$ 之和。

(22) 設 $\sin\theta$為 $x^2+x+a=0$ 的一根，求 a 值的範圍。

綜合練習解答

(1)　(B)(C)(D)

(2)　(a)$\frac{1}{2}$ (b)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c)$\sqrt{3}$ (d)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e)$\frac{15}{4}$ (f)$\frac{7}{6}$

(3)　(A)(C)(D)(E)

(4)　$\frac{5}{12}$

(5)　$2nr\sin\frac{180^{\circ}}{n}$，$2nr\tan\frac{180^{\circ}}{n}$

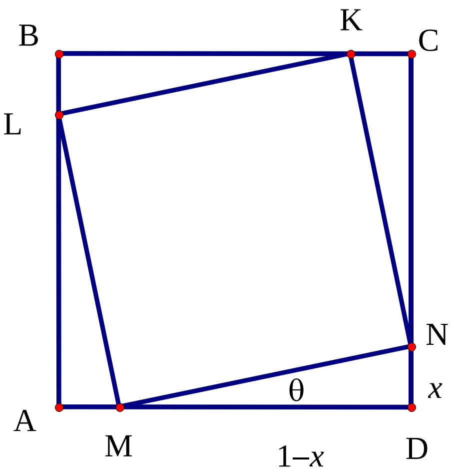
(6)　$\overline{BC}=22$

(7)　$\sin18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

(8)　$\frac{1}{4}$

(9)　(a)$-\frac{1}{4}$ (b)$\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ (c)$\frac{5\cdot\sqrt{2}}{8}$ (d) $\frac{3}{16}$

(10)　$3-2\sqrt{2}$



[解法]：設大正方形邊長為 1，

則小正方形邊長為$\frac{\sqrt{3}}{2}$，令$\overline{ND}=x$

因為ΔMDN、ΔNCK 全等，所以$\overline{MD}=\overline{CN}=1-x$

故$\frac{3}{4}=x^2+(1-x)^2\Rightarrow x=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$($\frac{2+\sqrt{2}}{4}$不合)，$\tan\theta=\frac{x}{1-x}=3-2\sqrt{2}$。

(11)　(a)$\frac{1}{2}$ (b)$\frac{-\sqrt{2}}{2}$ (c)$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (d)$\frac{1}{\sqrt{3}}$

(12)　$\frac{11}{18}$

(13)　①θ在第二象限，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，；②θ在第三象限，$\sin\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

(14)　$\frac{4+\sqrt{6}}{5}$

(15)　(a)$\frac{-3}{5}$ (b)$\frac{-5}{12}$ (c)$\frac{-12}{25}$

(16)　$b>a>c>d$

(17)　$\frac{5}{3}$ (Hint：考慮$\frac{c}{h_a},\frac{b}{h_c},\frac{a}{h_b}$的值)

(18)　$-2\sin\theta$[提示：$1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$]

(19)　提示：(b) $\frac{3A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=A+\frac{A+B+C}{2}=A+90^{\circ}$　(c) $\frac{A}{2}+B=(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})+\frac{B}{2}=(90^{\circ}-\frac{C}{2})+\frac{B}{2}$

(20)　$\sqrt[3]{2}$

(21)　358[提示：可令 $P_k(\cos k^{\circ},\sin k^{\circ})$，$\Rightarrow$ $\overline{AP_k}^2=2-2\cos k^{\circ}$]

(22)　$-2\le a\le\frac{1}{4}$ [提示：$a=-\sin^2\theta-\sin\theta=-(\sin\theta+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$，且$-1\le\sin\theta\le1$]