第二十四單元　圓方程式

(甲)圓的軌跡方程式

(1)圓的方程式：

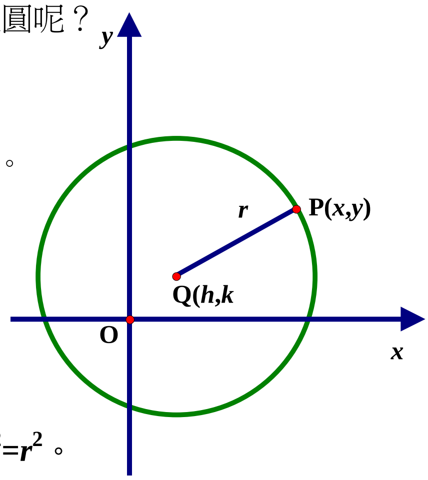
(a)圓的定義：

平面上跟一個定點O等距離r的點P所形成的軌跡稱為**圓**。

其中O稱為圓心，r稱為半徑。

從坐標幾何的觀點來看，給定圓心O(h,k)，半徑r，如何來描述圓呢？

圓這個圖形可否能像直線一樣能用一個方程式來表示呢？



(b)圓的標準式：

若設圓心O(h,k)，半徑為r，則此圓的方程式為$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。

[推導]：設P(x,y)為圓上的點，

$$\Leftrightarrow \overline{PO}=r \quad \Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

$$\Leftrightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

要點：

(1)已知圓心Q(h,k)，半徑為r，即可得圓的方程式$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。

(2)方程式$(x-h)^2+(y-k)^2=A\ (A>0)$ 代表圓心(h,k)，半徑$\sqrt{A}$ 的圓。

(c)圓的一般式：

圓的方程式$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$可化成二元二次方程式$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$的形式。

反過來說，一個二元二次方程式$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$，是否就代表圓呢？

例如：

$$2x^2+2y^2-4x+6y+1=0 \Rightarrow 2(x^2-2x+1)+2(y^2+3y+(\frac{3}{2})^2)=-1+2+\frac{9}{2} \quad \Leftrightarrow 2(x-1)^2+2(y+\frac{3}{2})^2=\frac{11}{2} \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{11}{4} \Rightarrow \text{圓心}(1,\frac{-3}{2})\text{，半徑}=\frac{\sqrt{11}}{2}\text{。}$$

一般而言：二元二次方程式：$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$

配方成 $(x+\frac{C}{2})^2+(y+\frac{D}{2})^2=\frac{C^2+D^2-4E}{4}$

當$C^2+D^2-4E>0$時，$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$代表一圓， 圓心$(\frac{-C}{2},\frac{-D}{2})$半徑$=\sqrt{\frac{C^2+D^2-4E}{4}}$

當$C^2+D^2-4E=0$時，$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$代表一點$(\frac{-C}{2},\frac{-D}{2})$。

當$C^2+D^2-4E<0$時，$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$ 沒有實數解，沒有圖形。

結論：

求一個圓的方程式主要是要求得圓心與半徑。

[補充]：求圓方程式的幾種想法：

(a) 坐標幾何的觀點：

令圓心 O(a,b)，試著找出兩個獨立的條件求出 a,b 的關係式(方程式)，再聯立解出 a,b 的值。

(b) 幾何作圖的觀點：

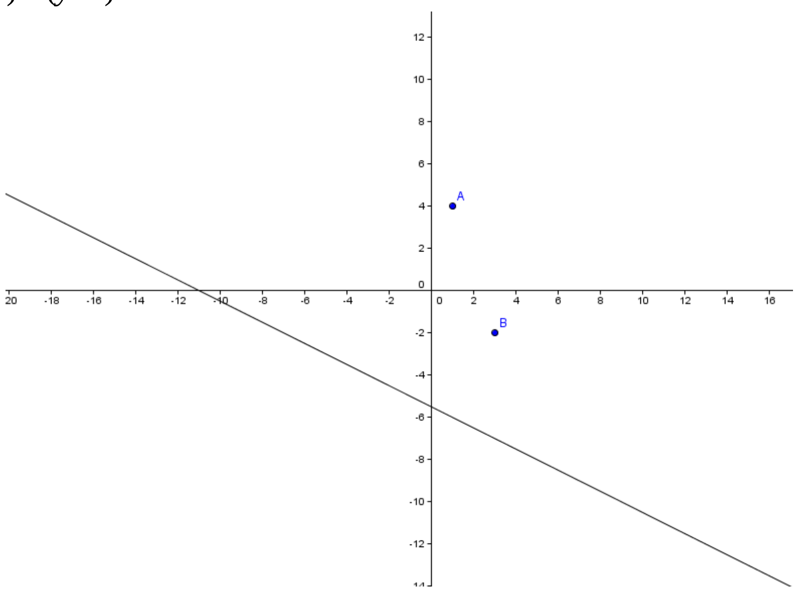
要找到一個點無非是直線與直線、直線與圓、圓與圓交出點來，因此先依據作圖的觀念找交點(圓心)，即解一些圓與圓、圓與直線、直線與直線的方程式，加以聯立求出其解(圓心)，然後再求出半徑。

下列所指出的關係或許會對於求圓的方程式有幫助：

圓心到圓上的點之距離=圓心到切線的距離=圓心到切點之距離=半徑
圓與兩軸相切：圓心($\boldsymbol{a,b}$)，$|a|=|b|$=半徑
圓心到弦中點的連線垂直平分弦。

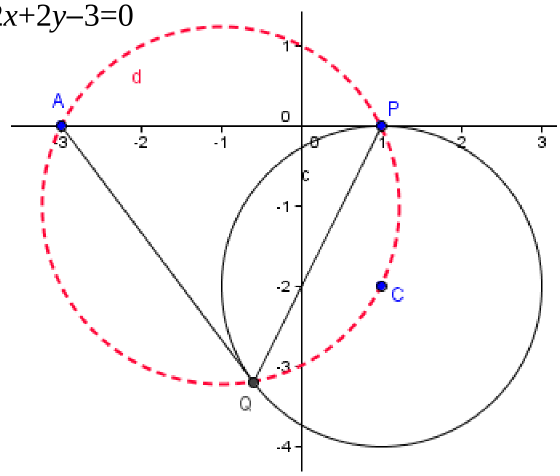
[例題1] 設$P_1(1,4)$、$P_2(3,-2)$為座標平面上兩點，若$\overline{P_1P_2}$為圓上的一弦，且距離圓心為$\sqrt{10}$，則圓C的方程式為何？Ans：$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$

[例題2] (不容易作圖，坐標方法較有用)
求過點A(1,4)、B(3,–2)且與直線L：$x+2y+11=0$ 相切之圓方程式。
Ans：$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-23)^2+(y-8)^2=500$



[例題3] (坐標方法配合作圖的精神)

圓$x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 之圓心爲C，過A$(-3,0)$作此圓之切線，切點爲P,Q，試求ΔAPQ之外接圓方程式。Ans：$x^2+y^2+2x+2y-3=0$



(練習1)求過三點A(0,0)、B(0,4)、C(3,3)的圓方程式。Ans：$x^2+y^2-2x-4y=0$

(練習2)將下列方程式化爲$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，並說明幾何意義？

(1) $x^2+y^2+-2x+4y-31=0$　　Ans：圓心$(1,-2)$半徑爲 6 的圓

(2) $x^2+y^2+-2x+4y+5=0$　　Ans：點$(1,-2)$

(3)$x^2+y^2+-2x+4y+8=0$　　Ans：無圖形

(練習3) 設C：$x^2+y^2+2x-6y+k=0$

(1)若C代表一圓，則k之範圍爲何？

(2)若C代表一點，則k之範圍爲何？　　Ans：(1)$k<10$　(2)$k=10$

(練習4) $x^2+y^2+2(m+1)x-2my+3m^2-2=0$ 表一圓，(1)求m範圍

(2)求此圓最大面積　Ans：(1)$-1<m<3$　(2)$r=2\Rightarrow 4\pi$

(練習5)設一圓通過二點(5,1)、(3,1)，而圓心在直線$x+2y-3=0$ 上，則此圓的方程式爲何？Ans：$(x-4)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{13}{4}$

(練習6)設$P_1(2,0)$、$P_2(8,0)$且$\overline{P_1P_2}$爲圓O上一弦，且弦心距爲 4，則圓O的方程式爲何？Ans：$(x-5)^2+(y-4)^2=25$ 或$(x-5)^2+(y+4)^2=25$

(練習7)試求切於直線$y=x$，並過(2,0)，(4,0)兩點的圓方程式。

Ans：$(x-3)^2+(y+7)^2=50$ 或$(x-3)^2+(y-1)^2=2$

(練習8)試求與兩直線$x+5y-4=0$，$x+5y-12=0$ 相切且圓心在直線$x-2y-1=0$ 之上的圓方程式。Ans：$(x-3)^2+(y-1)^2=(\frac{4}{\sqrt{26}})^2$

(3)求一般圖形的軌跡：

如何求動點的軌跡方程式：

設所求的動點 P(x,y)，透過題目的條件，找出 x,y 的關係式 $f(x,y)=0$，

再檢查滿足 $f(x,y)=0$ 的點都具有題設的條件。

[討論]：

利用 GSP 畫出滿足下列條件的軌跡圖形：

(a)給定平面上兩點 A、B，試畫出滿足$\overline{PA}=2\cdot\overline{PB}$的 P 點之軌跡圖形。

(b)設 A 為圓 C 內部一點，試畫出過點 A 所有弦的中點之軌跡圖形。

(c)設 A 為圓 C 內部一點，直線 L 為過 A 點的直線，L 與圓 C 的交弦$\overline{BC}$，令 P 為 L 上的點，且滿足$\overline{BP}$：$\overline{PC}$=2：3，試畫出 P 點的軌跡。

[例題4] 設A(0,0)，B(6,0)，試求滿足$\overline{PA}=2\overline{PB}$的P點軌跡方程式，並作出它的圖形。

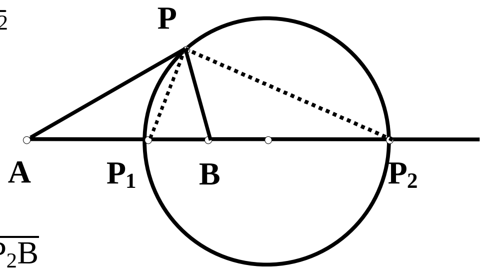
Ans：$(x-8)^2+(y-0)^2=4^2$

[坐標幾何]：

設點P(x,y)，滿足$\overline{PA}=2\overline{PB}$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x^2+y^2}=2\cdot\sqrt{(x-6)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=4[(x-6)^2+y^2]$

$\Leftrightarrow (x-8)^2+(y-0)^2=4^2$



[綜合法]：

在直線AB上找兩點P_1、P_2，其中$\overline{P_1A}=2\overline{P_1B}$且$\overline{P_2A}=2\overline{P_2B}$

設P為滿足$\overline{PA}=2\overline{PB}$且不在直線AB上的點

$\Leftrightarrow$ PP_1為ΔPAB中$\angle$P的內角平分線，PP_2為ΔPAB中$\angle$P的外角平分線

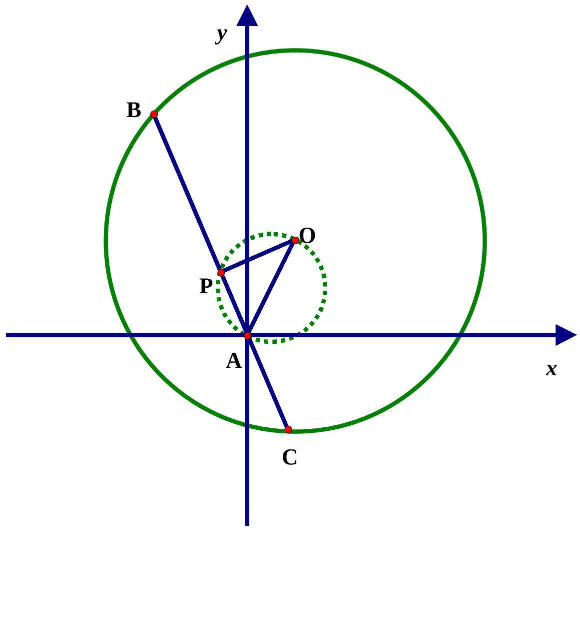
$\Leftrightarrow$ $\overline{PP_1}\perp\overline{PP_2}$ $\Leftrightarrow$ P落在以$\overline{P_1P_2}$為直徑的圓上。

[例題5] (求軌跡)

設A(0,0)為圓$(x-1)^2+(y-2)^2=16$ 內部一點，

求過點A所有弦的中點軌跡方程式。

Ans：$x^2+y^2-x-2y=0$



下面的練習你可以使用 GSP 先做出圖形，再與練習中坐標化的結果比較：

(練習9) 自定點A(6,0)作線段$\overline{AP}$，當P點繞原點繞一圈圓，且此圓的半徑為 2，則$\overline{AP}$之中點所形成的圖形之方程式為何？
Ans：$(x-3)^2+y^2=1$

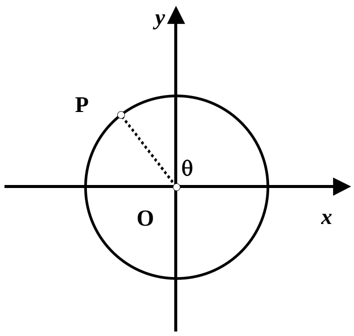
(練習10) ΔPQR中，∠P=90°，Q(−2,3)、R(1,−1)請問P點所成的圖形方程式。
Ans：$x^2+y^2+x-2y-5=0$ 去掉Q(−2,3)、R(1,−1)兩點

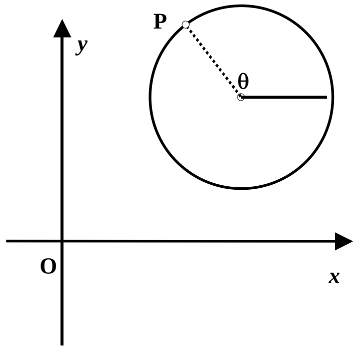
(乙)圓的參數式

(1)圓的參數式：

(a)圓$x^2+y^2=r^2$的參數式為$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，θ為實數。

(b)圓$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$的參數式為$\begin{cases} x=x_0+r\cos\theta \\ y=y_0+r\sin\theta \end{cases}$，θ為實數。

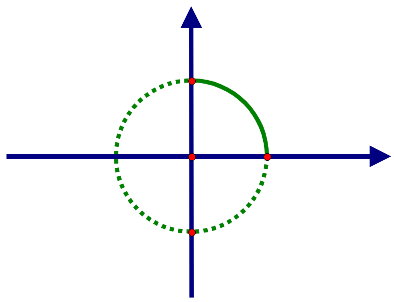




(2)圓的參數式的應用：

(a)當我們限制θ的範圍時，可以表示出圓的部分圖形。

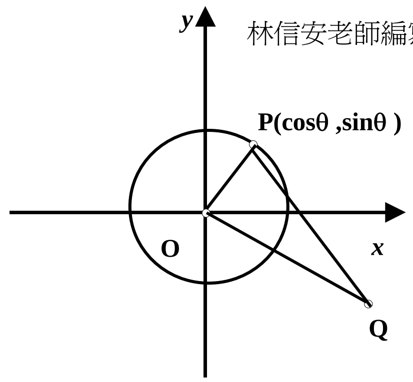
例如：參數式：$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，就代表$\frac{1}{4}$單位圓。



(b)當我們求與圓有關的最大值或最小值問題時，可以利用參數式來解決。

[例題6] 若P為單位圓$x^2+y^2=1$上任一點，令O為原點(0,0)，Q為點(3,−2)，則求ΔPOQ面積的最大值。 Ans：$\frac{\sqrt{13}}{2}$

[代數方法]：



[幾何方法]：

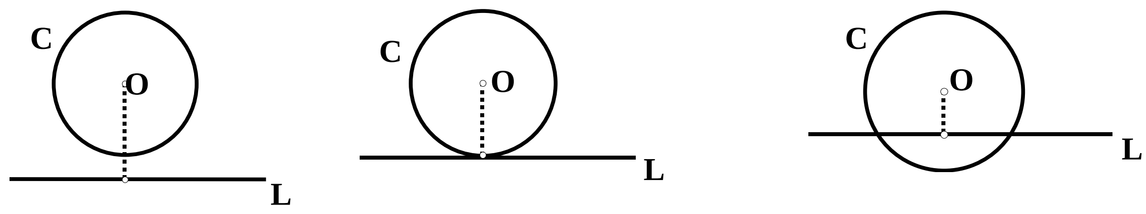
(練習11)坐標平面上，以原點 O 為圓心的圓上三個相異點 A(1,0)、B、C，且$\overline{AB}=\overline{BC}$。已知銳角三角形 OAB 的面積為$\frac{3}{10}$，則ΔOAC 的面積________。(化為最簡分數)內容

(練習12)平面上有兩定點A(−1,0)與B(1,0)，試在圓C：$(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上一點P，使$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$有最大值或最小值。
Ans：(1)當P($\frac{21}{5},\frac{28}{5}$)時，有最大值 100；(2)當P($\frac{9}{5},\frac{12}{5}$)時，有最小值 20

(練習13)設 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，試求$\sqrt{(3-2\cos\theta)^2+(4-2\sin\theta)^2}$ 的最大值與最小值。
Ans：最大值$\sqrt{20}$，最小值 4

(丙)圓與直線的關係

(1)圓與直線相交情況：



不相交(相離)　　相交於一點(相切)　　相交於相異兩點(相割)

(2)圓與直線的關係之判別(代數觀點)：

(a)原理：利用「圖形的交點就是聯立方程式的實數解」的觀念判別之。

(b)方法：已知聯立方程式$\begin{cases}x^2+y^2+dx+ey+f=0\\ ax+by+c=0\end{cases}$將一次式代入二次式中，得到一元二次方程式，令其判別式爲 D。

結論：相離⇔D<0　相切⇔D=0　相割⇔D>0

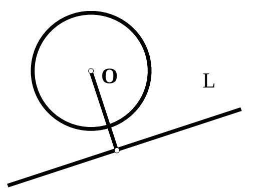
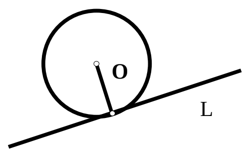
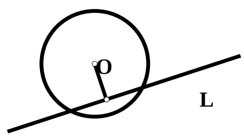
(3)圓與直線的關係之判別(幾何觀點)：

(a)原理：利用「圓心到直線的距離」與「半徑」的關係判別之。

(b)方法：設圓 C 的圓心爲 O，半徑爲 r，由 O 到直線 L 的距離爲 d，

則　相離⇔$d>r$　相切⇔$d=r$　相割⇔$d<r$

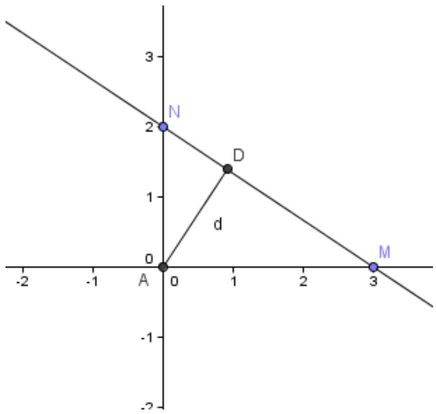
結論：

			
圓與直線的關係	相離 d(O,L)>半徑	相切 d(O,L)=半徑	相割 d(O,L)<半徑
交點數	0	1	2
坐標幾何	$\begin{cases}x^2+y^2+dx+ey+f=0\\ ax+by+c=0\end{cases}$ 無解	$\begin{cases}x^2+y^2+dx+ey+f=0\\ ax+by+c=0\end{cases}$ 恰有一解	$\begin{cases}x^2+y^2+dx+ey+f=0\\ ax+by+c=0\end{cases}$ 有兩組相異解

[課內討論]：點到平面的距離：

給定一點A(x_0,y_0)，直線L的方程式$ax+by+c=0$，令d代表A點到L的距離。

不失一般性，可以先假設$ab\neq0$，A不在L上



(1°)先令(x_0,y_0)=(0,0)，直線L的x,y截距分別爲$\dfrac{-c}{a}$、$\dfrac{-c}{b}$

如右圖，可以得知$\overline{MN}\cdot d=\overline{OM}\cdot\overline{ON}$

$$\Rightarrow\sqrt{(\frac{-c}{a})^2+(\frac{-c}{b})^2}\cdot d=|\frac{-c}{a}|\,|\frac{-c}{b}|$$

化簡可得 $d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。

(2°) $(x_0,y_0)\neq(0,0)$

將L沿著A至原點O方向來移動至L'

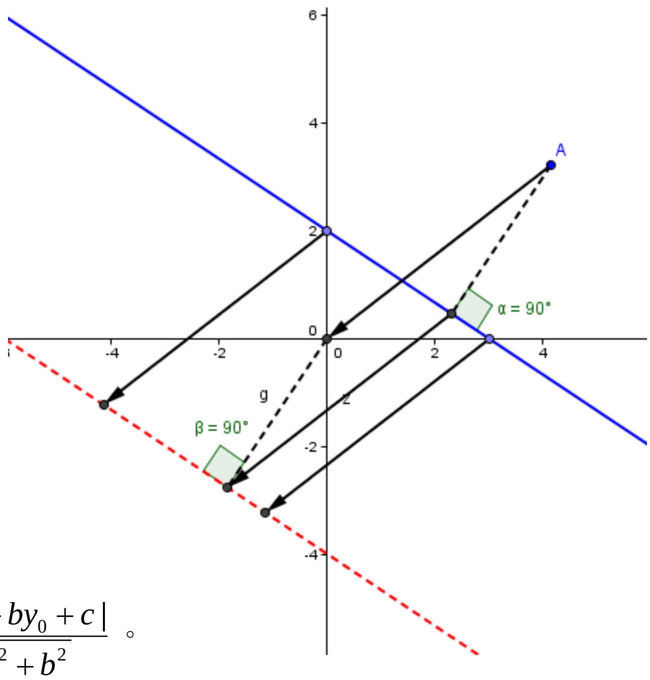
L'的方程式爲$a(x+x_0)+b(y+y_0)+c=0$

$\Leftrightarrow ax+by+(ax_0+by_0+c)=0$

如右圖，可以得知，d=原點O到L'的距離

由(1°)的結果，

$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

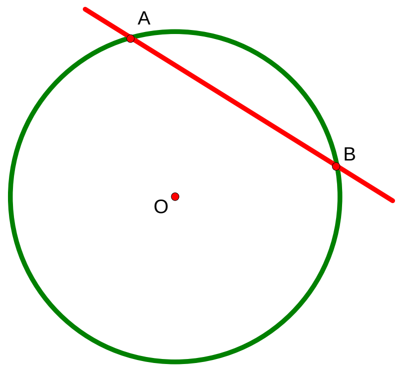


結論：

點A(x_0,y_0)到直線L：$ax+by+c=0$ 的距離爲$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。

(練習14) 試就實數k值討論直線L：$kx+y-3=0$ 與圓C：$x^2+y^2=3$ 的相交情況。
Ans：(1)相離，$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ (2)相切，$k=\sqrt{2}$，或$k=-\sqrt{2}$ (3)相交，$k>\sqrt{2}$或$k<-\sqrt{2}$

[例題7] 設直線$y=mx$與圓：$x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 交於A、B兩點，若$\overline{AB}=\sqrt{6}$ ，則m=？
Ans：$m=\dfrac{1}{3}$或-3

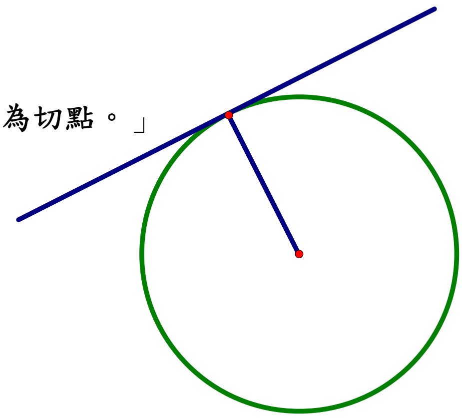


(練習15) 求線L：$4x-3y+1=0$ 在圓$x^2+y^2=41$ 內的弦長。Ans：$\dfrac{32}{5}$

(練習16) 設直線$y=mx+4-m$與圓：$x^2+y^2=25$ 交於A、B兩點，若$\overline{AB}=6$，則m=？
Ans：0 或$\dfrac{-8}{15}$

(丁)圓的切線

(1)切線的定義：
國中時圓的切線是這樣定義的：
「**與圓恰有一個交點的直線稱為圓的切線，該交點稱為切點。**」



(2)圓切線的性質：
(a)圓心與切點的連線必垂直於切線。
(b)圓心到切線的距離等於半徑。
[說明]：

(3)切線的求法：
(a)求圓切線之型態分成三類：
過已知點求切線、已知切線斜率求切線、通過圓外一點求切線。

不管是那一種型態，求圓的切線均可利用「**圓心到切線的距離等於半徑**」、「**圓心與切點的連線必垂直於切線**」這些觀念去解決。

(b)過圓上一點求切線的方法：
設T(x_1,y_1)爲圓C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 上給定的一點，求以T爲切點的直線，可以利用「**圓心與切點的連線必垂直於切線**」這個觀念去解決。

(c)過圓外一點求切線的方法：
設P(x_1,y_1)在圓$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 外，則過此點之切線方程式求法：
設所求切線方程式爲$y-y_1=m(x-x_1)$，利用「**圓心到切線的距離等於半徑**」，求斜率m。
(注意：當m只有一個值時，還有另一切線爲鉛直線$x-x_1=0$)

(c)已知切線斜率(m)求切線：
設切線斜率爲$y=mx+k$，利用「**圓心到切線的距離等於半徑**」，求y截距k。

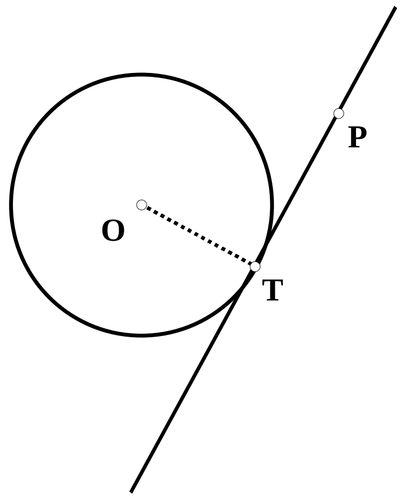
(練習17) 試證：圓C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$上，已知斜率爲m之切線方程式爲
$y-k=m(x-h)\pm r\sqrt{1+m^2}$

(4)切線公式整理(僅供參考)：

(a)圓上一點求切線
設T(x_1 ,y_1)為圓C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 上給定的一點，
則以T為切點的切線方程式為 $x_1x+y_1y+d(\frac{x_1+x}{2})+e(\frac{y_1+y}{2})+f=0$。

[證明]：
設P(x,y)為切線L上的任意點

$x^2+y^2+dx+ey+f=0 \Leftrightarrow (x+\frac{d}{2})^2+(y+\frac{e}{2})^2=\frac{d^2+e^2-4f}{4}$，所以O($\frac{-d}{2},\frac{-e}{2}$)



$\Leftrightarrow \overline{PT}\perp\overline{OT} \Leftrightarrow \overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TO}=0$

$\Leftrightarrow (x-x_1,y-y_1)\cdot(\frac{-d}{2}-x_1,\ \frac{-e}{2}-y_1)=0$

$\Leftrightarrow (x-x_1)(\frac{-d}{2}-x_1)+(y-y_1)(\frac{-e}{2}-y_1)=0$

$\Leftrightarrow xx_1+\frac{d}{2}x-x_1^2-\frac{d}{2}x_1+y_1y+\frac{e}{2}y-y_1^2-\frac{e}{2}y_1=0$…….(*)

再利用T(x_1,y_1)在圓C上，即$x_1^2+y_1^2+dx_1+ey_1+f=0$……..(**)

(*)+(**) $\Rightarrow x_1x+y_1y+d(\frac{x_1+x}{2})+e(\frac{y_1+y}{2})+f=0$。

(b)已知斜率求切線：
設圓C：$x^2+y^2=r^2$，則斜率為m的切線為$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$。
設圓C：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，則斜率為m的切線為$y-y_0=m(x-x_0)\pm r\sqrt{1+m^2}$。

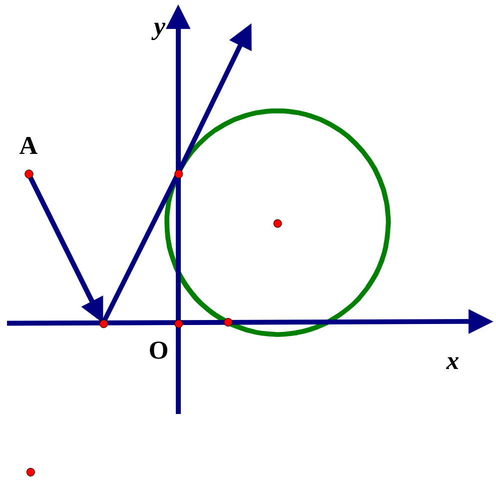
[例題8] (1)求通過$x^2+y^2=25$ 上一點A(3,4)的切線方程式。
(2)已知點B(2,7)在圓$x^2+y^2+2x-6y-15=0$ 上，試求過B點的切線方程式。
Ans：(1)$3x+4y=25$　(2)$3x+4y-34=0$

[例題9] 求通過A(4,2)與圓$x^2+y^2-4x+4y-2=0$ 相切的直線。

Ans：$y-2=\frac{1}{3}(x-4)$或$y-2=-3(x-4)$

[例題10] 自點A(−3,3)發出的光線L射到x軸上，被x軸反射，其反射光線所在直線與圓$x^2+y^2-4x-4y+3=0$ 相切，求光線L所在的直線方程式。

Ans：$2x+y+3=0$



[例題11] 設 $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta+3}{\cos\theta-2}$的最大值與最小值。

(練習18) 圓C：$(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 及一點P(4,5)，求過P點而與圓C相切之切線方程式。 Ans：$4x-3y-1=0$ 或$x=4$

(練習19) 試求斜率爲−1，圓$x^2+y^2-6x-4y+5=0$ 的切線。

Ans：$y=-x+1$ 或$y=-x+9$

(練習20) 直線 $5x-y-a=0$ 與圓 $3x^2+3y^2-2x+4y+b=0$ 相切於$(c,-1)$，求實數a,b,c之值。Ans： $a=11,b=-7,c=2$

(練習21) 設$\sqrt{x(4-x)}=mx+4$有兩相異實數解，
求 m 的範圍。Ans：$-1\le m<\frac{-3}{4}$

(練習22) 設$\begin{cases} y=m(x-3)+4 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$有兩解，求 m 的範圍。Ans：$\frac{12-2\sqrt{21}}{5}<m<\frac{12+2\sqrt{21}}{5}$

綜合練習

(1) 下列哪一方程式所表圖形爲一圓？(A)$y=\sqrt{9-x^2}$ (B)$x=1+\sqrt{9-y^2}$
(C)$\sqrt{x^2+y^2}=2$ (D)$x^2+y^2-6x+4y+15=0$ (E)$x^2+y^2+2x-8y+3=0$

(2) 試就k值，討論方程式$x^2+y^2+2(k+1)x+2ky+3k^2-2=0$ 的圖形。

(3) $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$ 表一圓，(a)求m範圍 (b)當m爲何值時此圓有最大面積？

(4) 請就實數 k 值討論方程組$\begin{cases} x+2y+k=0 \\ x^2+y^2+2x-6y-6=0 \end{cases}$的解的個數。

(5) 在坐標平面上，一圓通過點$(-2,7)$，且與直線 $4x+3y-14=0$ 相切於點$(-1,6)$，若此圓的方程式爲$x^2+y^2+ax+by+c=0$，則(a,b,c)=__________。(2007 指定甲)

(6) 一圓的方程式爲$x^2+y^2-8x+4y-5=0$，考慮此圓之任意兩條互相垂直切線的交點，則所有這種交點所成圖形的方程式爲_________。 (87 大學社)

(7) 設Γ：$x^2+y^2-10x+9=0$ 爲坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？
(1) Γ 的圓心坐標爲(5,0)
(2) Γ上的點與直線L：$3x+4y-15=0$ 的最遠距離等於 4
(3)直線L_1：$3x+4y+15=0$ 與Γ相切
(4) Γ上恰有兩個點與直線L_2：$3x+4y=0$ 的距離等於 2
(5) Γ上恰有四個點與直線L_3：$3x+4y-5=0$ 的距離等於 2 (2008 學科能力測驗)

(8) 試問坐標平面上共有幾條直線，會使得點 O(0 0)，到此直線之距離爲 1，且點 A(3 0)，到此直線之距離爲 2？
(1) 1 條 (2) 2 條 (3) 3 條 (4) 4 條 (5)無窮多條。 (2009 學科能力測驗)

(9) 一圓過兩點 A(1,2)、B(3,4)且被 x 軸所截線段長爲 6，求此圓之方程式。

(10) (a)設$P(x_1,y_1)$爲圓$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 外部一點，
則自P點所作的切線段長爲$\sqrt{x_1^2+y_1^2+dx_1+ey_1+f}$ 。
(b)試求點P(5,8)到圓 $2x^2+2y^2-4x+6y+1=0$ 之切線段長度。

(11) xy平面上有一定點$A(-1,2)$及一圓：$x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 試求
(a)點A到圓C的切線段長。
(b)過A的直線與圓C相交於P,Q兩點，求$\overline{AP}\times\overline{AQ}$之值。

(12) 試求過 A(1,2)且與 x 軸，y 軸均相切的圓方程式。

(13) L_1：$2x+3y=12$ 與L_2：$x-2y+1=0$ 之交點A，自P(1,0)到二直線之垂線分別交於B,C，求過P,A,B,C之圓方程式。

(14) 設點A(24,37)，求圓：$x^2+y^2=10y$上離點A最近的點。

(15) 設$x^2+y^2=16$ 求
(a)$4x+3y$之最大值。 (b)x^2+2y之最大值。
(c)xy之最大值。 (d)圓上的點距離 $3x-4y=25$ 之最短距離。

(16) 求P(6,8)到圓$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 之
(a)最近距離m=_____，此時點坐標爲__________。
(b)最遠距離M=_____，此時點坐標爲__________。

(17) 求參數式：$\begin{cases} x=1+\sin t \\ y=2+\cos t \end{cases}$，$0\le t\le\frac{2\pi}{3}$所表示圖形之長度。

(18) 請問$x^2+(|y|-1)^2=4$ 所圍成區域的面積。

(19) 在坐標平面上(7,5)處有一光源，將圓$x^2+(y-1)^2=1$ 投影到x軸的影長爲______。

(20) 設直線L：$x+y-4=0$ 與圓C：$x^2+y^2+2x-2y-14=0$ 相交於A,B二點，試求
(a)通過A,B二點及原點的圓方程式。
(b)通過A,B二點且與直線$x+y+2=0$ 相切的圓方程式。

(21) 過P(1,2)對圓$x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 作兩切線，若切點爲Q、R，則
(a)請問ΔPQR的外接圓方程式。(b)直線QR的方程式。(c)兩切線的方程式。

(22) 設P,Q爲y軸上兩定點且Q(0,−3)，若P到圓C：$4x^2+4y^2-32x+20y+53=0$ 的切線段長等於$\overline{PQ}$長,求P坐標及切線段長。

(23) 設C_1：$x^2+y^2-6x+4y+9=0$，C_2：$x^2+y^2-20x+84=0$ 之外公切線之交角θ，求sinθ之值。

進階問題

(24) 設$|\theta|\le\frac{\pi}{2}$，若$x^2+y^2+2x\sin\theta-2y\sin2\theta+1=0$ 表一圓，求θ之範圍。

(25) 設拋物線$y=ax^2+bx+c$與x軸交於A、B兩點，求以$\overline{AB}$爲直徑的圓方程式。

(26) 設$\begin{cases} C_1: x^2+y^2-2x+6y-10=0 \\ C_2: x^2+y^2+2x+2y-6=0 \end{cases}$ 交於 A，B，則以$\overline{AB}$爲直徑之圓方程式。

(27) 已知圓心(4,2)的圓 C 與 x 軸相切，若自點 A(−2,1)發射光線 L 經 x 軸反射後與此圓相切(L 不可在與 x 軸接觸前先碰到圓 C)，則光線 L 所在的直線斜率爲何？

綜合練習解答

(1) (C)(E)

(2) (a)當$-1<k<3$時，圖形為一圓 (b)$k=3$或-1時，圖形為一點 (c)$k>3$或$k<-1$時，圖形為空集合

(3) (a)$-3<m<1$ (b)$m=-1$，4π

(4) $-5-4\sqrt{5}<k<-5+4\sqrt{5}$ 兩組解，$k=-5\pm4\sqrt{5}$ 一組解，$k>-5+4\sqrt{5}$ $k<-5-4\sqrt{5}$ 無實數解

(5) $a=10,b=-6,c=9$

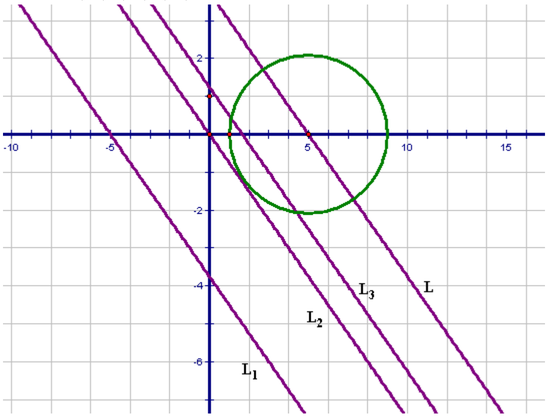
(6) $(x-4)^2+(y+2)^2=50$

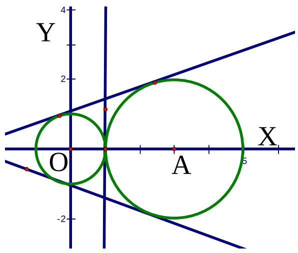
(7) (1)(2)(4)

[解法]：Γ：$x^2+y^2-10x+9=0$ $\Leftrightarrow$ $(x-5)^2+y^2=16$，圓心$(5,0)$半徑 4

可透過畫圖與計算圓心到直線L、L_1、L_2、L_3的距離來判斷(2)(3)(4)(5)各選項。

故選(1)(2)(4)





(8) (3)

如右圖：以 O 及 A 為圓心，分別作半徑為 1 與 2 的圓，

則一條內公切線及兩條外公切線為所有滿足條件的三條直線。

(9) $x^2+y^2+12x-22y+27=0$ 或$x^2+y^2-8x+2y+7=0$

(10) (a)切線段長$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-(\text{半徑})^2}$,其中 O 為圓心，A 為切點(b)$\dfrac{3\sqrt{46}}{2}$

(11) (a)$2\sqrt{3}$ (b)12

(12) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 及$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

(13) $(x-1)(x-3)+(y-0)(y-2)=0$

(14) (3,9)

(15) (a)20 (b)17 (c)8 (d)1 [提示：令 $x=4\cos\theta$，$y=4\sin\theta$ ， 代入各式求極值]

(16) (a) $m=4$，$(\frac{18}{5}，\frac{24}{5})$ (b) $M=6$，$(\frac{12}{5}，\frac{16}{5})$

(17) $\dfrac{2\pi}{3}$

(18) $\dfrac{16}{3}\pi+2\sqrt{3}$

(19) $\dfrac{16}{3}$

(20) (a)$2x^2+2y^2-3x-11y=0$ (b)$3x^2+3y^2-x-13y-14=0$

(21) (a)$x^2+y^2-3x-y=0$ (b)$x-3y+4=0$ (c)$y=2$ 或$y-2=\dfrac{3}{4}(x-1)$

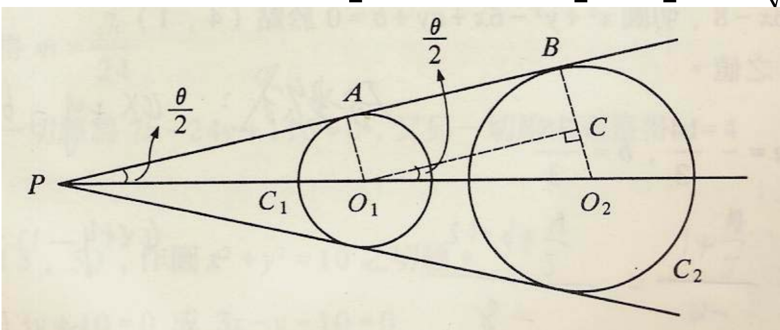
(22) P$(0,\dfrac{17}{4})$切線段長$\dfrac{29}{4}$

(23) $\dfrac{38}{53}$，

[解法]：圓C_1之心為$O_1(3,-2)$，$r_1=2$，圓C_2之心為$O_2(10,0)$，$r_2=4$

如圖：$\overline{O_1C}\perp\overline{O_2B}$ $\therefore\overline{O_2C}=2$，又$\overline{O_1O_2}=\sqrt{53}$

$\therefore\overline{O_1C}=7$，$\angle CO_1O_2=\dfrac{\theta}{2}$ $\therefore\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}=2\times\dfrac{2}{\sqrt{53}}\times\dfrac{7}{\sqrt{53}}=\dfrac{28}{53}$



(24) $\dfrac{\pi}{6}<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$

(25) $ax^2+ay^2+bx+c=0$

[提示：設A(α,0)、B(β,0)，其中α、β為$ax^2+bx+c=0$ 的兩相異實根，所以 $\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$，以$\overline{\text{AB}}$為直徑的圓方程式為$(x-\alpha)(x-\beta)+y^2=0$ $\Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+y^2=0\Rightarrow x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}+y^2=0\Rightarrow ax^2+ay^2+bx+c=0$]

(26) $x^2+y^2+3x+y-5=0$

(27) $\dfrac{-9-\sqrt{41}}{16}$

補充教材

(甲)圓系

(1)若設圓C_1：$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$，與圓C_2：$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$，則過兩圓交點之所有圓方程式可設爲$k_1(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+k_2(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$，其中$k_1^2+k_2^2\neq 0$

[證明]：

令$f_1(x,y)=x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1$，$f_2(x,y)=x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2$，

圓C_1的方程式爲$f_1(x,y)=0$，圓C_2的方程式爲$f_2(x,y)=0$，

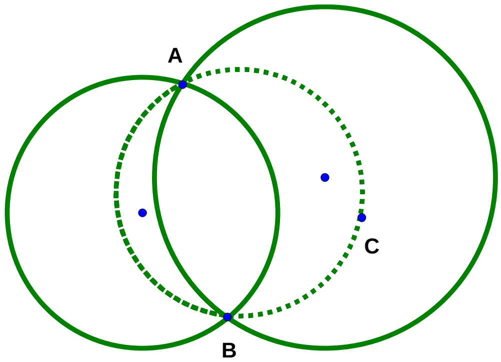
假設C_1、C_2的交點爲$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$

所以$f_1(x_i,y_i)=0$，$f_2(x_i,y_i)=0$，$i=1,2$

今圓O過A、B兩點，

令$C(m,n)$爲圓O上異於A、B兩點的點，

取$k_1=f_2(m,n)$，$k_2=-f_1(m,n)$



考慮$f_2(m,n)\ (x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)-f_1(m,n)(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$

將A、B、C三點代入均成立，因此上式所代表的圓通過A、B、C三點

而過A、B、C三點的圓只有一個。

所以$f_2(m,n)\ (x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)-f_1(m,n)(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$ 爲通過A、B兩點的圓。

根據前面的結果，當$k_1\neq 0$，通過兩圓交點的圓，可寫成：

$(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+k(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$，其中$k=\frac{k_2}{k_1}$。

(2)通過圓C_1：$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$，與圓C_2：$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$，則過兩圓交點之所有圓方程式可設爲$(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+k(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$ (不包含圓C_2)

(3)通過圓C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 與直線L：$ax+by+c=0$ 之交點之圓系方程式可設爲：$(x^2+y^2+dx+ey+f)+k(ax+by+c)=0$，$k$爲任意實數。

[證明]：方法同(1)

(4)若圓C_1：$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$，與圓C_2：$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$，且兩圓相交於A、B兩點，則直線AB方程式爲$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$。

[證明]：

令$f_1(x,y)=x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1$，$f_2(x,y)=x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2$，

圓C_1的方程式爲$f_1(x,y)=0$，圓C_2的方程式爲$f_2(x,y)=0$，

假設C_1、C_2的交點爲$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$

考慮$f_1(x,y)-f_2(x,y)=(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$ 這個方程式

因爲$f_1(x_i,y_i)=0$，$f_2(x_i,y_i)=0$，$i=1,2$

所以$(d_1-d_2)x_i+(e_1-e_2)y_i+(f_1-f_2)=0$，$i=1,2$

因此$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$ 通過A、B兩點

又過A、B兩點只有一直線

故直線AB方程式爲$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$

[例題1] 求過圓$x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 與直線 $2x-y+4=0$ 之交點且與y軸相切之圓方程式。

解答：

設過交點之圓系爲$x^2+y^2+2x-4y+1+t(2x-y+4)=0$

整理得$x^2+y^2+(2+2t)x-(4+t)y+1+4t=0$，令 $x=0$ (即y軸之方程式)，

得$y^2-(4+t)y+1+4t=0$，因與y軸相切故上式有等根，故令

$\Delta_y=(4+t)^2-4(1+4t)=0$ 得$t=2$ 或 6，代回圓系，

故得$x^2+y^2+14x-10y+25=0$ 或$x^2+y^2+6x-6y+9=0$

[例題2] 設圓C：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$ 與直線L：$x+2y=0$ 交於A、B兩點，

(1) 設定點P(1,1)。試求ΔPAB的外接圓方程式。

(2)設圓C$'$：$(x-2)^2+y^2=9$，試求通過圓C與圓C$'$交點的直線方程式。

Ans：(1)$3x^2+3y^2-2x+2y-6=0$ (2)$2x-2y+3=0$

(練習1)求過兩圓$x^2+y^2=4$、$x^2+y^2+2x-3=0$ 之交點且半徑爲 4 之圓方程式。

Ans：$x^2+y^2+8x=0$ 或$x^2+y^2-6x-7=0$

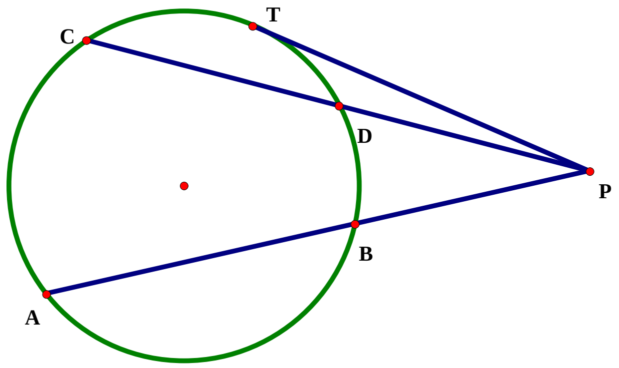
(練習2)過$x^2+y^2-4x-28=0$，$x^2+y^2-4x-20y+52=0$ 的交點，且與直線$x-7=0$

相切得圓方程式。 Ans： $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ 或$x^2+y^2+4x-14y+28=0$

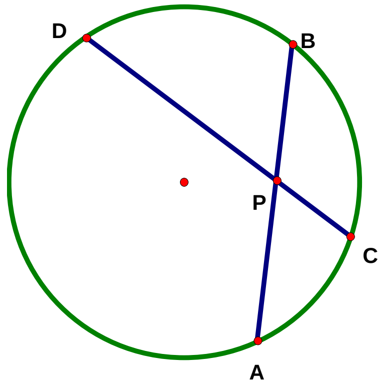
(乙)圓冪的意義

(1)切割線性質：

(a)$PT^2=PA\times PB=PC\times PD$



(b) $PA\times PB=PC\times PD$

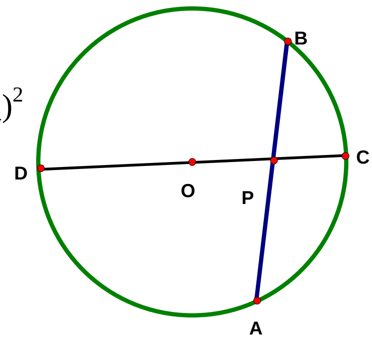


(2)圓冪的定義：

點$P(x_0,y_0)$對圓C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 的冪(power)= $x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f$。

圓冪的幾何意義：

$x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f=(x_0+\frac{d}{2})^2+(y_0+\frac{e}{2})^2-(\frac{d^2+e^2-4f}{4})=\overline{\mathbf{OP}}^2-$(圓C的半徑)^2

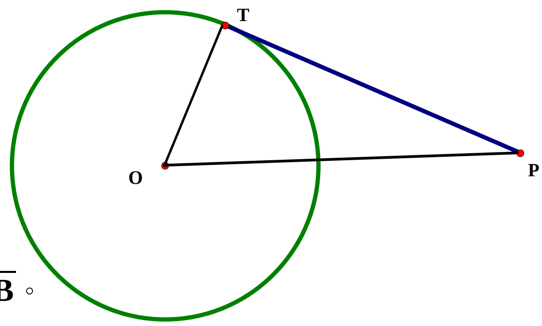


(a)點P在圓C外面：

圓冪$=\overline{\mathbf{OP}}^2-$(圓C的半徑)$^2=\overline{\mathbf{PT}}^2=\overline{\mathbf{PA}}^2\times\overline{\mathbf{PB}}^2$。

(b)點P在圓C上面：

圓冪$=\overline{\mathbf{OP}}^2-$(圓C的半徑)$^2=0$



(c)點P在圓C內部：

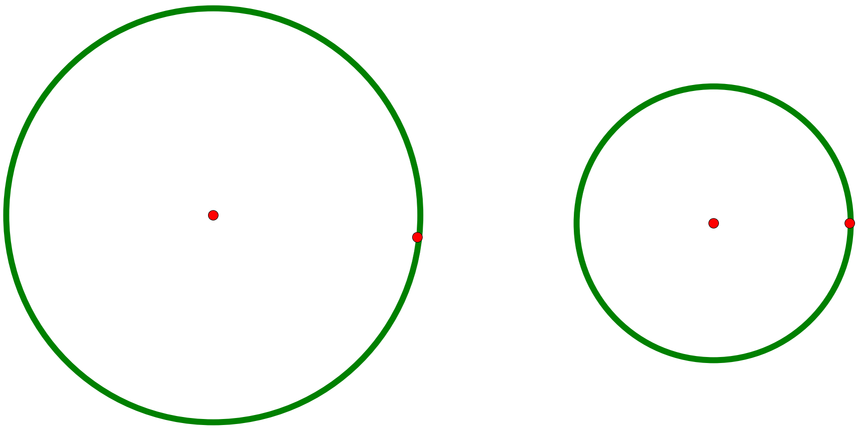
圓冪$=\overline{\mathbf{OP}}^2-$(圓C的半徑)^2

$=(\overline{OP}+$圓C的半徑$)(\overline{OP}-$圓C的半徑$) = -\overline{PD}\times\overline{PC}= -\overline{\mathbf{PA}}\times\overline{\mathbf{PB}}$。

[例題3] 設兩圓$\begin{cases} C_1: x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \\ C_2: x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0 \end{cases}$不同心，試證明：平面上對於圓$C_1$、$C_2$等冪的點所成的軌跡方程式為$(d_1-d_2)x(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$。

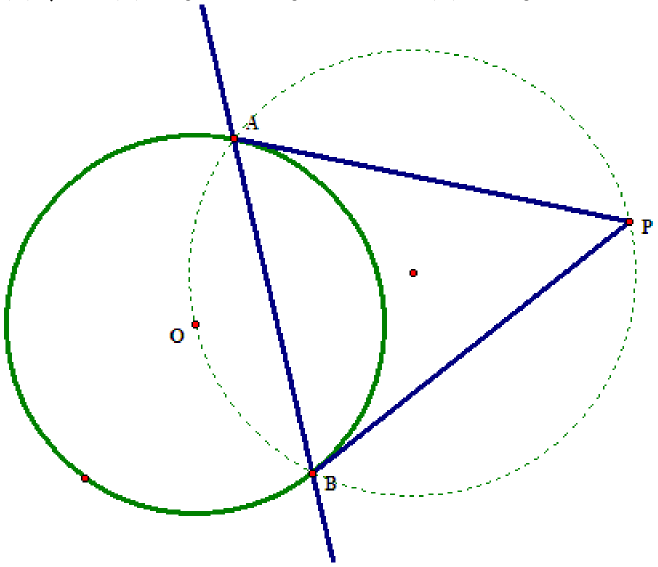
[註：此線稱為圓C_1、C_2的根軸或等冪軸]

[挑戰題]：如圖，請利用圓規與直尺畫出圓C_1、C_2的根軸。



[例題4] 點P(4,6)為圓C：$(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 外一點，過P作圓C的兩切線，其切點分別為A、B，(1)試求切線段$\overline{PA}$。 (2)ΔPAB的外接圓方程式。 (3)直線AB的方程式。

Ans：(1)$\sqrt{21}$ (2)$x^2+y^2-5x-8y+12=0$ (3)$3x+4y-15=0$



[例題5] 自圓C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 外一點$P'(x',y')$作圓C之二切線，設切點為$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，則$\overleftrightarrow{P_1P_2}$之方程式為$x'x+y'y+\frac{d}{2}(x'+x)+\frac{e}{2}(y'+y)+f=0$，試證之。

解答：

∵過P_1之切線方程式為

$x_1x+y_1y+\frac{d}{2}(x_1+x)+\frac{e}{2}(y_1+y)+f=0$

又過P_2之切線方程式為

$x_2x+y_2y+\frac{d}{2}(x_2+x)+\frac{e}{2}(y_2+y)+f=0$

令此二切線過P'，則

$x'x_1+y'y_1+\frac{d}{2}(x'+x_1)+\frac{e}{2}(y'+y_1)+f=0$……….①

$x'x_2+y'y_2+\frac{d}{2}(x'+x_2)+\frac{e}{2}(y'+y_2)+f=0$……….②

由①，②易知P_1、P_2在直線$x'x+y'y+\frac{d}{2}(x'+x)+\frac{e}{2}(y'+y)+f=0$ 上

因爲過P_1、P_2的直線是唯一的，故$\overleftrightarrow{P_1P_2}$之方程式即爲上式。

[註：$\overleftrightarrow{P_1P_2}$亦名切點弦]

(練習3)點P(3,4)對圓：$x^2+y^2=9$ 所引之切點連線的方程式。Ans：$3x+4y=9$

(練習4)(a)已知點$P(x_0,y_0)$，圓C：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，若過點P引一直線交圓C於A、B兩點，則$PA\cdot PB==|x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F|$，試證之。

(b)已知$\overline{AB}$爲圓C：$x^2+y^2+2x-6y-3=0$ 之一弦，P(−2,5)爲$\overline{AB}$之三等分點，求$\overline{AB}$。

Ans：

(a)當P點在圓外時，$PA\cdot PB=PT^2=x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F$，

當P點在圓內部時，引一弦$\overline{CD}$通過圓心O與P點，

$\Rightarrow PA\cdot PB=PC\cdot PD=(r-\overline{OP})(r+\overline{OP})=r^2-\overline{OP}^2=-(x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F)$

結論：$PA\cdot PB==|x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F|$　(b)6

(練習5)在坐標平面上有一圓C：$x^2+y^2=37$，$\overline{AB}$爲圓C之一弦且點P(1,2)恰爲$\overline{AB}$之三等分點，試求直線AB之方程式。(二解)

Ans：$y-2=\frac{3}{4}(x-1)$及$x-1=0$

[提示：用練習 2 的結果，可知$PA\cdot PB=32\Rightarrow PA=8,PB=4\Rightarrow\overline{AB}=12$，　令直線AB的方程式爲$y-2=m(x-1)$，利用弦中點與圓心連線垂直平分弦的性質，⇒圓心到直線AB的距離=1⇒$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1\Rightarrow m=\frac{3}{4}$，但此種直線有兩條，所以令一直線是$x-1=0$]