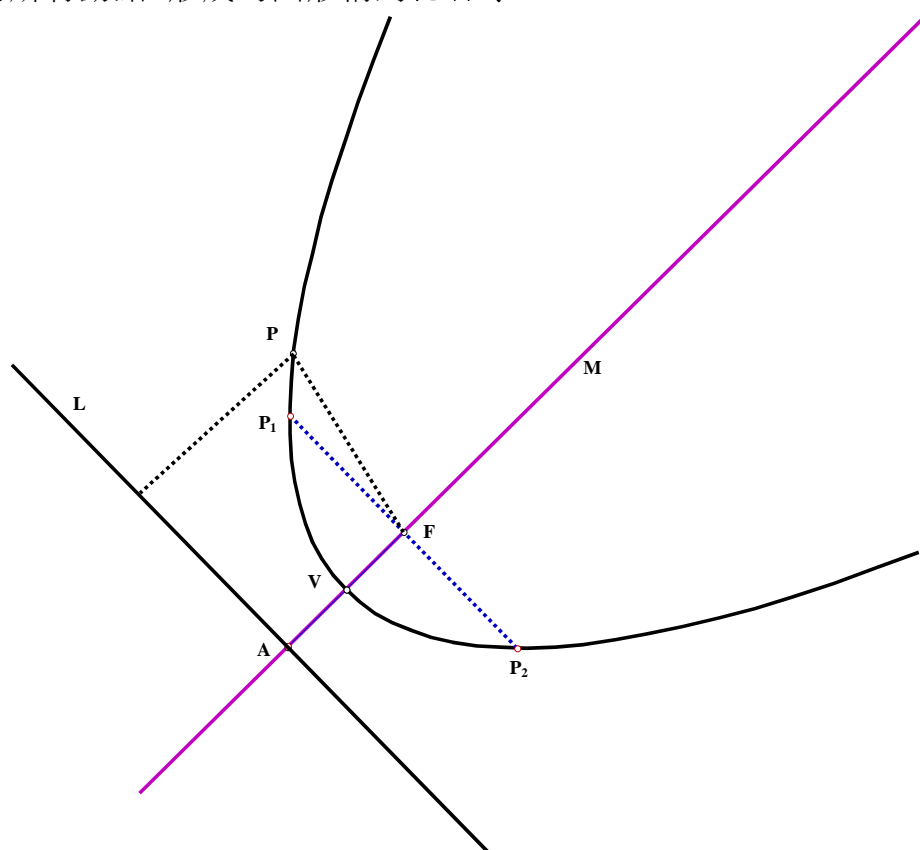


## §1-2 拋物線

### (甲)拋物線的定義與基本性質

(1)定義：

設平面上有一定直線 $L$ 、定點 $F$ ，其中 $F$ 不在 $L$ 上，則在平面上到直線的距離等於到定點 $F$ 的所有動點 $P$ 形成的圖形稱為**拋物線**。



(2)拋物線的名詞介紹：

(a)直線 $L$ 稱為**準線**， $F$ 點稱為**焦點**。

(b)過焦點垂直準線的直線 $M$ 稱為**對稱軸**(簡稱)**軸**。

(c)對稱軸與拋物線的交點 $V$ 稱為**頂點**， $VF$ 稱為**焦距**。

(d)拋物線上兩點的連線段稱為**弦**，過焦點的弦稱為**焦弦**。

垂直對稱軸的焦弦 $\overline{P_1P_2}$ 稱為**正焦弦**。

[討論]：

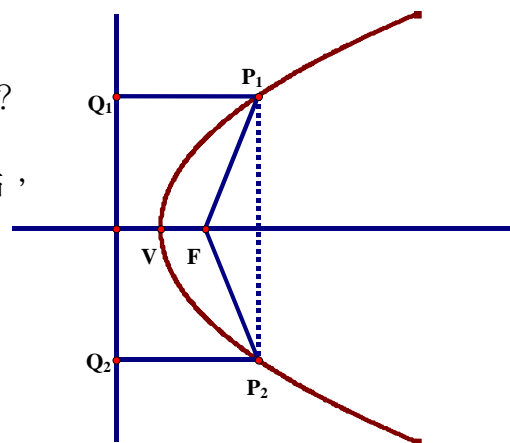
如何說明過焦點垂直準線的直線 $M$ 為拋物線的對稱軸？

[說明]：

設 $P_1$ 是拋物線上的點( $P_1 \neq V$ )， $P_2$ 是 $P_1$ 對直線 $M$ 的對稱點， $P_1$ 、 $P_2$ 分別對準線 $L$ 作垂線，垂足分別為 $Q_1$ 、 $Q_2$

因為 $\overline{P_1F} = \overline{P_2F}$ 且 $\overline{P_1F} = \overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2}$ ，故 $\overline{P_2F} = \overline{P_2Q_2}$

因此 $P_2$ 在拋物線上。



(3)拋物線的基本性質：

(a) 設對稱軸與準線的交點為  $A$ ，則頂點  $V$  為  $\overline{AF}$  的中點。

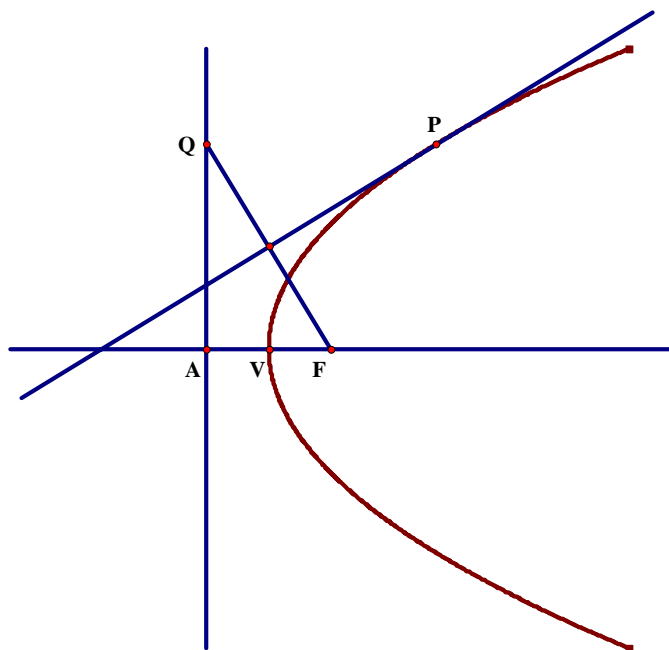
[說明]：因為  $V$  為拋物線上的點， $VF = d(V, L) = \overline{AV}$ ，所以  $V$  為  $\overline{AF}$  的中點。

(b) 拋物線的正焦弦長為焦距的 4 倍。

[說明]：因為  $P_1P_2 = 2P_1F$ ，且  $P_1F = d(P_1, L) = \overline{AF} = 2 \cdot \overline{VF}$ ，所以正焦弦長  $P_1P_2 = 4 \cdot \overline{VF}$ 。

[例題1] (拋物線的作圖)

設拋物線  $\Gamma$  以  $L$  為準線， $F$  為焦點，在  $L$  上任取一點  $Q$ ，過點  $Q$  作直線  $L$  的垂線  $N$ ，再作  $\overline{QF}$  的中垂線交直線  $N$  於  $P$ ，請證明  $P$  點在拋物線  $\Gamma$  上，並藉此說明拋物線沒有界限。



[例題2] 在座標平面上，設  $\Gamma$  是以  $F(3, -1)$  為焦點， $L: x - y + 1 = 0$  為準線的拋物線，求(1) $\Gamma$  的頂點。(2) $\Gamma$  的對稱軸方程式。(3)正焦弦長(4) $\Gamma$  的方程式

Ans：(1) $(\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$  (2) $x + y - 2 = 0$  (3) $5\sqrt{2}$  (4) $x^2 + 2xy + y^2 - 14x + 6y + 19 = 0$

(練習1) 關於方程式  $|\frac{3x+y-19}{\sqrt{10}}| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$

所代表的錐線圖形 $\Gamma$ ，下列何者為真？

- (A) $\Gamma$ 為拋物線 (B)(1,-2)為 $\Gamma$ 的焦點  
(C) $3x+y-19=0$  為 $\Gamma$ 的漸近線  
(D) $x-3y+7=0$  為 $\Gamma$ 的對稱軸  
(E) (3,1)是 $\Gamma$ 的頂點。 Ans : (A)(D)

(練習2) 若一拋物線以 $F(1,1)$ 為焦點， $L: x+y+2=0$  為準線，求(1)拋物線的方程式(2)對稱軸方程式(3)正焦弦長(4)頂點坐標

Ans : (1) $x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$ (2) $x-y=0$ (3) $4\sqrt{2}$ (4)(0,0)

(練習3) 設一拋物線之頂點  $V(1,2)$ ，準線  $L$  之方程式  $x+y+6=0$ ，求其焦點坐標。

Ans :  $(\frac{11}{2}, \frac{13}{2})$

(練習4) 設拋物線 $\Gamma$ 的焦點  $F$ 、準線  $L$ ，平面上的點，除了 $\Gamma$ 之外，被分成兩個區域，其中包含焦點  $F$  的區域稱為拋物線內部，不包含焦點  $F$  的區域稱為拋物線的外部。試拋物線的定義證明：

(1)若  $R$  點在拋物線內部，則 $\overline{RF} < d(R, L)$ 。

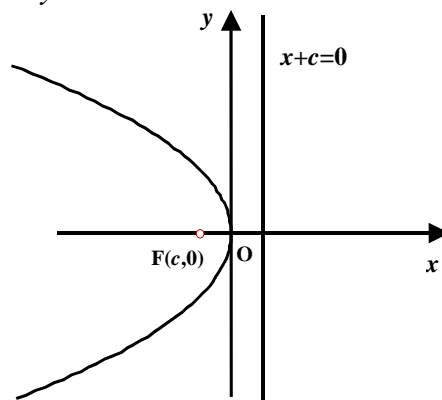
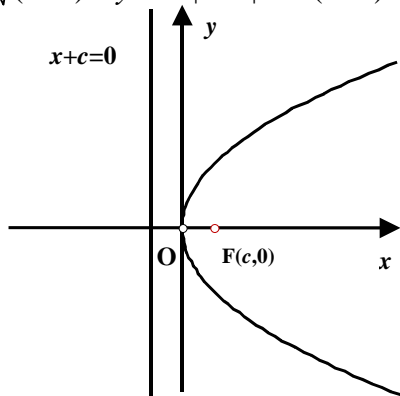
(2)若  $R$  點在拋物線外部，則 $\overline{RF} > d(R, L)$ 。

## (乙)拋物線的標準式

(1) 設拋物線 $\Gamma$ 的焦點 $F$ 為 $(c,0)$ 、準線 $L: x+c=0$ ，則 $\Gamma$ 的方程式為 $y^2=4cx$ 。

設 $P(x,y)$ 為 $\Gamma$ 上任意點，根據定義 $PF=d(P,L)$ 可得

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |x+c| \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 \Leftrightarrow y^2 = 4cx。$$



方程式 $y^2=4cx$ 的特徵：

(a) $c>0$ ，開口向右； $c<0$ ，開口向左。

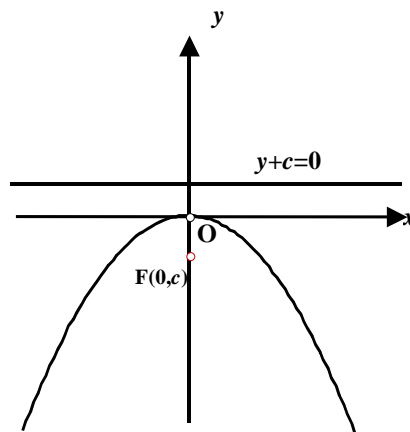
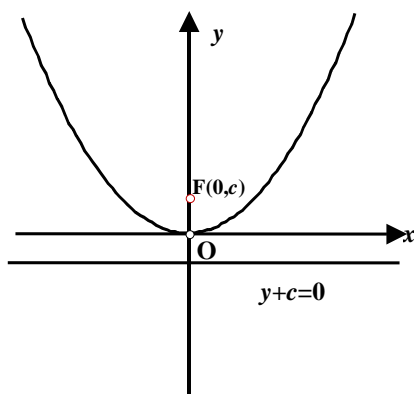
(b)焦距 $=|c|$ ，正焦弦長 $=4|c|$ 。

(c)頂點 $(0,0)$

(2) 設拋物線 $\Gamma$ 的焦點 $F$ 為 $(0,c)$ 、準線 $L:y+c=0$ ，則 $\Gamma$ 的方程式為 $x^2=4cy$ 。

設 $P(x,y)$ 為 $\Gamma$ 上任意點，根據定義 $PF=d(P,L)$ 可得

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=|y+c| \Leftrightarrow x^2+(y-c)^2=(y+c)^2 \Leftrightarrow x^2=4cy。$$



方程式 $x^2=4cy$ 的特徵：

(a) $c>0$ ，開口向上； $c<0$ ，開口向下。

(b)焦距 $=|c|$ ，正焦弦長 $=4|c|$ 。

(c)頂點 $(0,0)$

列表整理：

1.方程式	一次項的變量為 $x$		一次項的變量為 $y$	
	$y^2=4cx$ ( $c>0$ )	$y^2=4cx$ ( $c<0$ )	$x^2=4cy$ ( $c>0$ )	$x^2=4cy$ ( $c<0$ )
2.圖形 (一次項正負號，定開口)				
3.對稱軸 (二次)				
4.頂點				
5.焦點				
6.準線				
7.焦距				
8.正焦弦長	任一標準式所表拋物線的正焦弦長都是 $ 4c $ ，			
9.常用公式	常數 $c$ 與 $F,V$ 的關係 $\Rightarrow  c =VF$			

例子：

將拋物線 $\Gamma: y^2=6x$ 沿著向量 $\vec{l}=(3,2)$ 平行移動得到一個新的拋物線 $\Gamma'$ ，試求 $\Gamma'$ 的方程式。

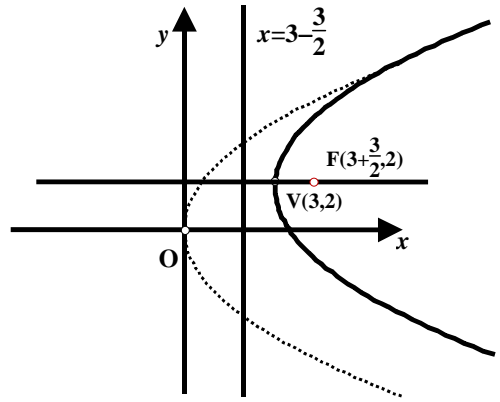
[解答]：

(1)設 $\Gamma'$ 上的任一點 $Q(x',y')$ ，因為 $Q(x',y')$ 沿向量 $-\vec{l}=(-3,-2)$ 可得 $P(x,y)$ 在 $\Gamma$ 上，即 $x-x'=-3$ ， $y-y'=-2 \Rightarrow x=x'-3$ ， $y'=y-2 \Rightarrow (y'-2)^2=6(x'-3)$ 。因此 $\Gamma'$ 的方程式為 $(y-2)^2=6(x-3)$ 。

(2)考慮 $\Gamma$ 的頂點 $(0,0)$ 、焦點 $(\frac{3}{2},0)$ 、正焦弦長 $=6$ 、對稱軸 $y=0$ 、準線 $x=-\frac{3}{2}$ 。

考慮 $\Gamma'$ 的頂點 $(3,2)$ 、焦點 $(\frac{3}{2}+3,2)$ 、正焦弦長 $=6$ 、對稱軸 $y=3$ 、準線 $x=\frac{-3}{2}+3$ 。

(3)由(1)(2)，可以得知就點坐標、方程式而言，形式會改變，但正焦弦長不變。



結論：

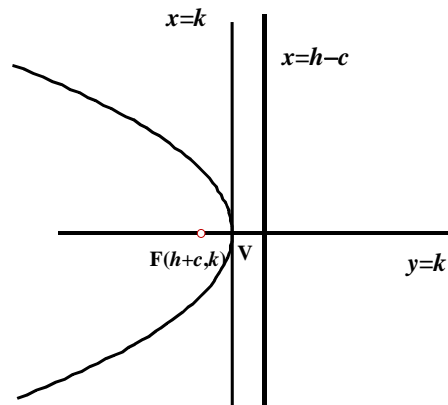
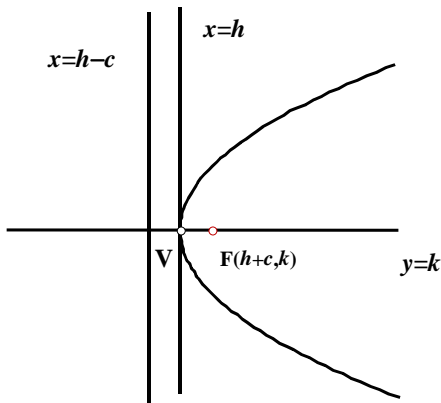
(1)方程式 $f(x,y)=0$ 的圖形沿向量 $\vec{l}=(h,k)$ 平移，所得的圖形的方程式為 $f(x-h,y-k)=0$ 。(即原方程式中的 $x,y$ 用 $x-h,y-k$ 來取代)

(2)方程式 $(y-k)^2=4c(x-h)$ 的特徵：

(a) $c>0$ ，開口向右； $c<0$ ，開口向左。

(b)焦距 $=|c|$ ，正焦弦長 $=4|c|$ 。

(c)頂點 $(h,k)$

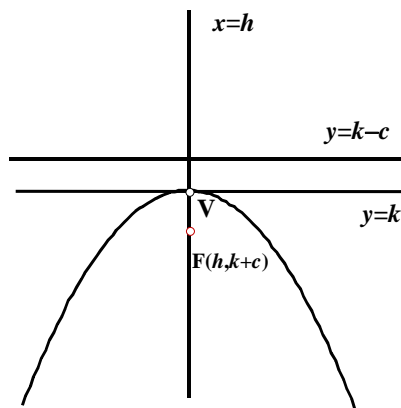
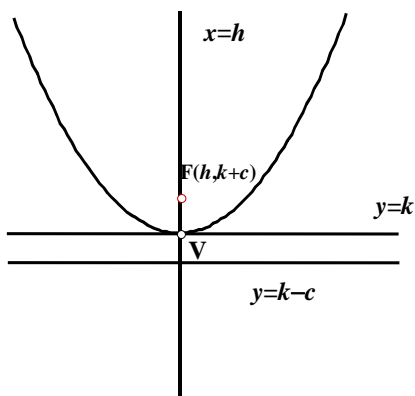


(3)方程式 $(x-h)^2=4c(y-k)$ 的特徵：

(a) $c>0$ ，開口向上； $c<0$ ，開口向下。

(b)焦距 $=|c|$ ，正焦弦長 $=4|c|$ 。

(c)頂點 $(h,k)$



[例題3] 求拋物線 $x^2-8x+3y+10=0$ 的(1)對稱軸(2)頂點(3)焦點(4)準線(5)正焦弦長(6)圖形  
 Ans : (1) $x=4$ (2) $V(4,2)$ (3) $F(4, \frac{5}{4})$ (4) $y-\frac{11}{4}=0$ (5)3

(練習5) 拋物線 $y^2-4x-2y-7=0$ ，下列何者正確？  
 (A)開口向上 (B)頂點 $(-2, 1)$  (C)正焦弦長 $=4$  (D)焦點 $F(2, 1)$  (E)準線 $\rho: x+3=0$ 。  
 Ans : (B)(C)(E)

(練習6) 求拋物線 $(y+1)^2=-8(x-3)$ 的頂點、焦點坐標及對稱軸、準線方程式。  
 Ans : 頂點 $(3, -1)$ 、焦點 $(1, -1)$ ，準線 $x=5$ 、對稱軸 $y=-1$

[例題4] 求合乎下列條件之拋物線方程式：

- (1)通過 $(2,3)$ 、 $(-1,6)$ 二點，其對稱軸為 $x=1$
- (2)焦點 $(3,-4)$ ，準線與軸的交點為 $(-1,-4)$
- (3)焦點 $(-2,0)$ ，準線平行於 $y$ 軸，正焦弦長為 $12$ 。
- (4)正焦弦的兩端點為 $(1,5)$ 、 $(1,-1)$

Ans : (1) $(x-1)^2=y-2$  (2) $(y+4)^2=8(x-1)$

(3) $y^2=-12(x-1)$ 或 $y^2=12(x+5)$  (4) $(y-2)^2=6(x+\frac{1}{2})$ 或 $(y-2)^2=-6(x-\frac{5}{2})$

(練習7) 求合乎下列條件的拋物線方程式：

- (1)頂點 $V(2,3)$ ，軸平行 $x$ 軸，正焦弦長 $=9$
- (2)準線平行 $x$ 軸，焦點 $(3,-2)$ 且頂點在焦點上方，正焦弦長 $16$
- (3)頂點在 $y$ 軸上，對稱軸為 $y=2$ ，而焦點在直線 $x+2y=7$ 上
- (4)頂點在 $x$ 軸上，對稱軸平行 $y$ 軸，且過點 $(1,1)$ 、 $(4,4)$
- (5)已知頂點 $V(5,-2)$ ，準線方程式 $L: y+4=0$

Ans：(1) $(y-3)^2=9(x-2)$ 或 $(y-3)^2=-9(x-2)$  (2) $(x-3)^2=-16(y-2)$   
(3) $(y-2)^2=12x$  (4) $(x-2)^2=y$ 或 $(x+2)^2=9y$  (5) $(x-5)^2=8(y+2)$

(練習8) 在拋物線 $y^2=20x$ ，求一點 $P$ 使 $P$ 與焦點的距離等於 $15$ ，求 $P$ 的坐標為何？

Ans： $P(10, \pm 10\sqrt{2})$

(練習9) 設二次函數的圖形 $y=f(x)=2x^2-4x+7$ ，

- (1)請將此二次函數的圖形化成 $(x-h)^2=4c(y-k)$ 的形式。
- (2)試求此拋物線的焦點與正焦弦長

Ans：(1) $(x-1)^2=\frac{1}{2}(y-5)$  (2)焦點 $(1, \frac{41}{8})$ 、正焦弦長 $=\frac{1}{2}$

(練習10) 拋物線 $\Gamma$ 過 $(1,1)$ ， $(3,2)$ ， $(3,-1)$ 三點且軸平行 $x$ 軸，則：(1)  $\Gamma$ 之方程式為

。(2)  $\Gamma$ 之焦點為\_\_\_\_\_。Ans：(1)  $x=y^2-y+1$  (2)  $(1, \frac{1}{2})$

(練習11) 一拋物線的軸平行 $y$ 軸，並經過 $(1,1)$ 、 $(2,3)$ 、 $(-1,3)$ 三點，

(1)請求出此拋物線的方程式。

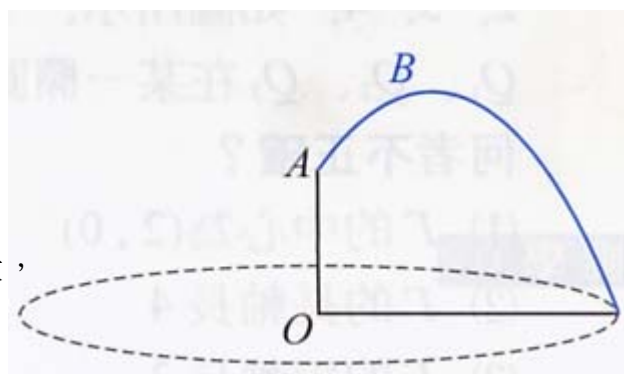
(2)拋物線的焦點坐標、準線方程式。Ans：(1) $y=x^2-x+1$  (2) $(\frac{1}{2}, 1)$ 、 $y=\frac{1}{2}$

[例題5] 坐標平面上有一以點  $V(0,3)$  為頂點、 $F(0,6)$  為焦點的拋物線。設  $P(a,b)$  為此拋物線上一點， $Q(a,0)$  為  $P$  在  $x$  軸上的投影，滿足  $\angle FPQ=60^\circ$ ，則  $b=$ \_\_\_\_\_。  
(2007 學科能力測驗) Ans：12

[例題6] 在拋物線  $y^2=12x$  上求一點  $P$  使得  $P$  到焦點  $F$  與定點  $A(5,4)$  之距離和  $PF+PA$  為最小，求  $P$  點的坐標為何？Ans：( $\frac{4}{3}, 4$ )

[例題7] 過點  $(7,8)$  且與  $y^2=4x$  同焦點且同軸的拋物線方程式。  
Ans：  $y^2=-32(x-9)$  或  $y^2=8(x+1)$

(練習12) 某花園位節水推行噴灌技術，  
噴頭裝在管柱  $\overline{OA}$  的頂端  $A$  處，  
噴出的水流在各個方向上呈拋物線狀，  
現要求水流最高點  $B$  離地面 5 公尺，





點 B 到管柱  $\overline{OA}$  所在直線的距離為 4 公尺，  
且水流落在地面圓心為點 O，

半徑為 9 公尺的圓上，則管柱高  $\overline{OA}$  = \_\_\_\_\_ 公尺。 Ans :  $\frac{9}{5}$

(練習13) 設拋物線之軸與  $x$  軸垂直且過  $A(0,2)$ 、 $B(3,5)$ ，而其頂點在直線  $x-y=0$  上，  
求其方程式。 Ans :  $(x-6)^2 = -9(y-6)$

(練習14) 拋物線  $y=x(ax+b)$  之焦點  $(4,-3)$  求數對  $(a,b)=?$  Ans :  $(\frac{1}{4}, -2)$  或  $(\frac{-1}{16}, \frac{1}{2})$

(練習15) 設拋物線之頂點  $(1,16)$  其軸平行  $y$  軸，若其圖形截  $x$  軸所得線段之長為 8，  
求其方程式。 Ans :  $(x-1)^2 = -(y-16)$

### (丙)軌跡問題與參數式

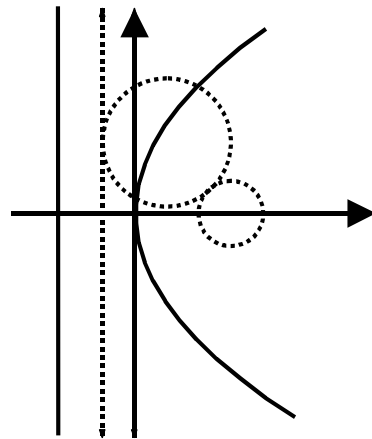
(1)求動點的軌跡：

如何求動點的軌跡方程式：

設所求的動點  $P(x,y)$ ，透過題目的條件，找出  $x,y$  的關係式  $f(x,y)=0$ ，再檢查滿足  $f(x,y)=0$  的點都具有題設的條件。

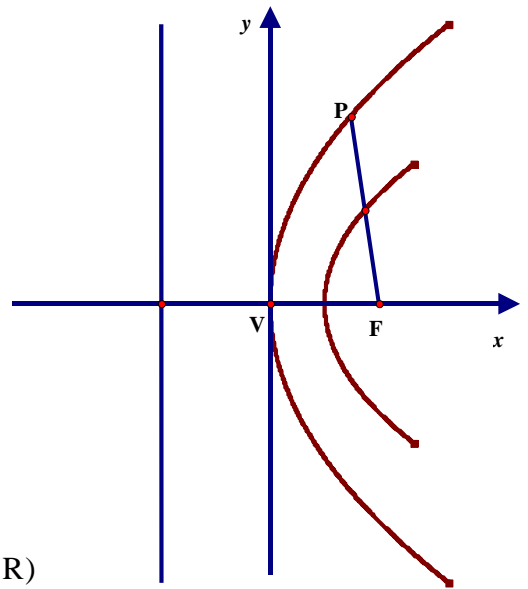
[例題8] (求軌跡問題)

設圓  $C$  與圓  $C' : x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$  及直線  $x+2=0$  相外切，  
求動圓  $C$  之圓心軌跡方程式。 Ans :  $y^2 = 16x$



[例題9] (求軌跡問題)

拋物線  $y^2 = 8x$  上任一點  $P$  與焦點  $F$  所成線段為  $\overline{PF}$ ，求  $\overline{PF}$  中點之軌跡方程式。  
Ans :  $y^2 = 4(x-1)$



(2)拋物線的參數式 $\Rightarrow$ 可求最大值及最小值

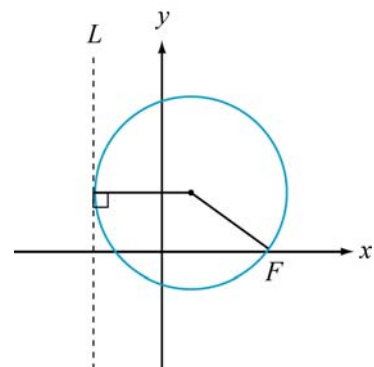
標準式的拋物線參數式

1. $y^2=4cx$ 的參數式爲\_\_\_\_\_( $t \in \mathbb{R}$ )

2. $x^2=4cy$ 的參數式爲\_\_\_\_\_( $t \in \mathbb{R}$ )

[例題10] (拋物線的參數式)

試求拋物線 $y=x^2$ 上距離 $A(0,1)$ 最近之點。Ans :  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ 或 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$



(練習16) 求平面上通過點 $F(5, 0)$ 且和直線 $L: x + 5 = 0$ 相切的所有圓的圓心軌跡方程式？

Ans :  $y^2 = 20x$

(練習17) 試求拋物線 $y^2=16x$ 上與直線  $4x-3y+24=0$  距離

最短之點的坐標，及最短距離？Ans :  $(\frac{9}{4}, 6)$ ，最短距離爲 3。

(練習18) 已知拋物線 $y^2=x+1$ ，定點 $A(3,1)$ ， $B$ 爲拋物線上任意一點，點 $P$ 在線段 $\overline{AB}$

上，且有 $\overline{PB} : \overline{PA} = 1 : 2$ ，當 $B$ 點在拋物線上變動時，求點 $P$ 的軌跡方程式。Ans :  $(y-\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{3}(x-\frac{1}{3})$

## 綜合練習

(1) 求下列各拋物線之方程式：

- (a) 頂點 $(-1, 2)$ ，準線 $x-2=0$ 。
- (b) 焦點 $(1, -1)$ ，準線為 $y+3=0$ 。
- (c) 焦點 $(1, 1)$ ，對稱軸 $x-1=0$ ，焦點與準線的距離為 4。
- (d) 焦點 $(-2, 0)$ ，準線平行於 $y$ 軸，正焦弦長 8。
- (e) 以 $y+1=0$ 為對稱軸且過 $(3, 1)$ ， $(9, 3)$ 。
- (f) 與 $y^2=4x$ 同軸同焦點且過 $(7, 8)$ 。

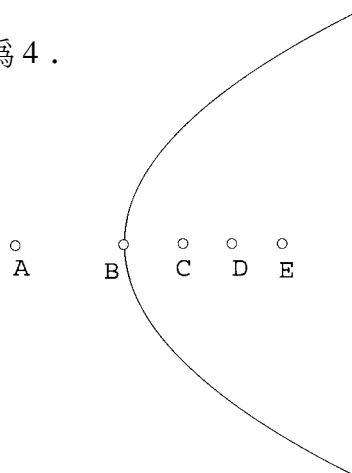
(2) 右下圖為一拋物線的部分圖形，

且 A、B、C、D、E 五個點中有一為其焦點。

試判斷哪一點是其焦點？

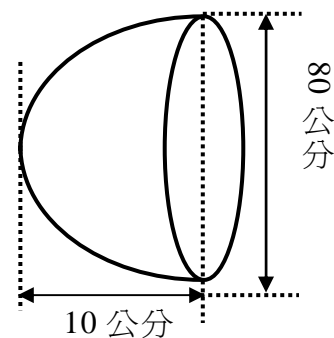
(可利用你手邊現有簡易測量工具)

- (1) A (2) B (3) C (4) D (5) E (90 學科)



(3) 一拋物面鏡的橫截面縱深 10 公分，橫長 80 公分，

如圖，則焦距長為(A)10 (B)20 (C)30 (D)40 (E)50 公分。



(4) 設一拋物線的方程式為 $\frac{(3x+4y-7)^2}{25}=(x-4)^2+(y-5)^2$ ，則

此拋物線的

- (a) 焦點坐標為\_\_\_\_\_， (b) 頂點坐標為\_\_\_\_\_，
- (c) 準線方程式是\_\_\_\_\_， (d) 對稱軸方程式是\_\_\_\_\_，
- (e) 正焦弦長為\_\_\_\_\_。

(5) 設拋物線 $y^2=12x$ 上一點P與A(3,0)、B(b,0)，其中 $b>3$ ，形成一個正三角形PAB，試求 $b=$ ？

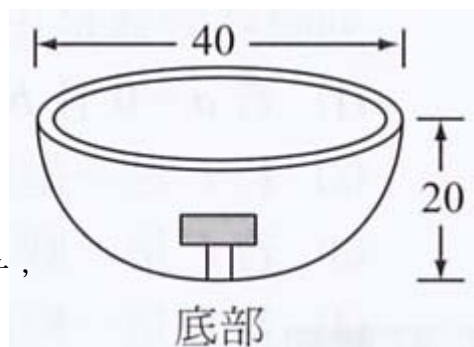
(6) 拋物線通過P(6, 5)且和拋物線 $y^2-4x+6y+5=0$ 有相同的對稱軸與相同的焦點，求此拋物線的方程式。

(7) 一拋物線的準線垂直 $x$ 軸，且過 $(1,0)$ ， $(-1,1)$ ， $(5,-1)$ 三點，則此拋物線方程式為何？其焦點坐標為何？

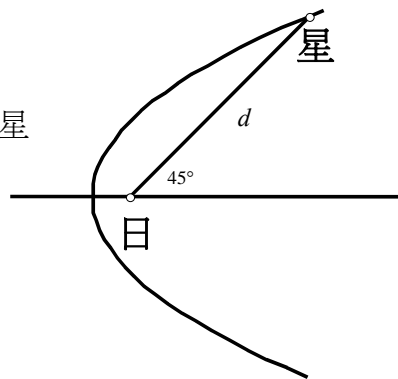
(8) 有一開口向上的拋物線 $\Gamma$ ， $\Gamma$ 的焦點為F，直線PQ過F並且交 $\Gamma$ 於P、Q兩點，已知 $\overline{PF}=4$ 、 $\overline{QF}=6$ ，令 $\theta$ 為直線PQ與對稱軸的銳夾角，試問 $\cos\theta=$ ？

(9)  $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 之焦點 $(-1,3)$ 且圖形過 $(3,3)$ ，則數對 $(a,b,c)=$ ？

(10) 有一太陽爐灶，它由拋物線繞軸旋轉而成之拋物面做成的，開口直徑 40 公寸，開口距底部之深為 20 公寸，試問烤肉盤應置於距底部\_\_\_\_\_公寸，



才容易烤熟。(烤肉盤至於焦點處才容易烤熟肉類)



- (11) 某彗星軌道為一拋物線，而以太陽為焦點，當此彗星與太陽距離為  $d$  時，兩者連線與拋物線之軸成  $45^\circ$  之夾角(如圖)，則

(a) 當兩者與軸垂直時，其距離為\_\_\_\_\_。  
 (b) 兩者最近時，其距離為\_\_\_\_\_。

- (12) 拋物線  $x^2=8y$  上有兩點  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$  且  $\overline{AB}$  過焦點  $F$ ，已知  $\overline{AB}=16$  試問  $y_1+y_2=?$  [考慮拋物線的定義]

- (13) 求兩拋物線  $x^2-x+3y+1=0$  與  $x^2+x+2y+2=0$  的交點坐標。

- (14) 已知拋物線  $y=ax^2+bx+2a+b(a \neq 0)$  之頂點為  $(1, 2)$ ，求  $a, b$  之值。

- (15) 設  $a$  為實數，試求拋物線  $y=x^2+ax+1$  的頂點所成軌跡的方程式。

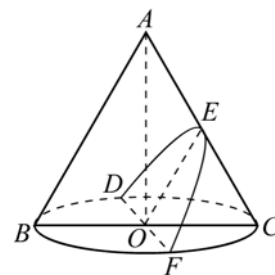
- (16) 平面上  $P$  點滿足「 $P$  點與  $F(4, 0)$  之距離」比「 $P$  點到直線  $L: x+7=0$  之距離」少 1，求  $P$  點的軌跡。

- (17) 平面上圓  $C: x^2+y^2=16$ ，直線  $L: x-6=0$ ，若動點  $P$  到圓  $C$  的切線段長等於到直線  $L$  的距離，求點  $P$  的軌跡方程式。

- (18) 若  $P$  為拋物線  $y=\frac{1}{2}x^2+2x+3$  上的一點， $A(1, -1)$ 、 $B(3, 2)$ ，求  $\triangle ABP$  面積之最小值。

- (19) 如右圖，直圓錐頂點為  $A$ ， $\overline{BC}$  為底面之直徑， $O$  為圓心，

$\overline{AE} = \overline{CE}$ ， $\overline{DF} \perp \overline{BC}$  於  $O$ ， $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 6$ ，  
 則  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點所在平面截圓錐得一截痕，  
 則其正焦弦長為\_\_\_\_\_。



### 進階問題

- (20) 設  $P(a^2, 2a)$ ， $a > 0$ ，為拋物線  $y^2=4x$  上一點， $P$  與焦點之連線交拋物線於另一點  $Q$ 。設點  $R$  的坐標為  $(3, 0)$ ，則  $\triangle PQR$  的面積為\_\_\_\_\_，若  $P$  在拋物線上移動，當  $a=_____$  時， $\triangle PQR$  的面積最小。

- (21) 設  $\overline{BC}$  為等腰三角形  $ABC$  之底邊，且  $\overline{BC}=2$ ，點  $A$  在以  $B$  為頂點  $C$  為焦點的一拋物線上，求  $\triangle ABC$  之腰長。

- (22) 若拋物線之頂點  $V(-1, 0)$  其軸為  $x$  軸，與圓  $x^2+y^2-3x=0$  恰交兩點，求拋物線的方程式。

- (23) 求函數  $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}+\sqrt{x^4-3x^2-8x+20}$  的最小值？  
 (88 年北市數學能力競賽)

## 綜合練習解答

- (1) (a) $(y-2)^2 = -12(x+1)$ , (b) $(x-1)^2 = 4(y+2)$ , (c) $(x-1)^2 = 8(y+1)$ 或  
 $(x-1)^2 = -8(y-3)$ , (d) $y^2 = -8x$ 或 $y^2 = 8(x+4)$ , (e) $(y+1)^2 = 2(x-1)$ ,  
 (f) $y^2 = 8(x+1)$ 或 $y^2 = -32(x-9)$
- (2) (3)
- (3) (D)
- (4) (a)(4, 5)(b) $(\frac{5}{2}, 3)$ (c) $3x+4y-7=0$ (d) $4x-3y-1=0$ (e)10
- (5)  $b=15$
- (6)  $(y+3)^2 = 8(x+2)$ 或 $(y+3)^2 = -32(x-8)$
- (7)  $x=y^2-3y+1$ ;  $(-1, \frac{3}{2})$
- (8)  $\frac{1}{5}$
- (9)  $(a, b, c) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{9}{8})$
- (10) 5
- (11) (a) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}d$  (b) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}d$
- (12) 12
- (13)  $(-1, -1)(-4, -7)$
- (14)  $a=-2, b=4$
- (15)  $y=-x^2+1$
- (16)  $y^2=20(x+1)$
- (17)  $y^2 = -12x + 52$
- (18)  $\frac{43}{8}$  [提示：可令 $P(x, \frac{1}{2}t^2+2t+3)$ ，計算P點到直線AB的距離的最小值]
- (19) 3 [提示：再拋物線所在的平面上建立一個坐標系，取 $E(0,0)$ 、 $O(3,0)$ 、  
 $D(3,3)$ 、 $F(3,-3)$ ，可令拋物線為 $y^2=4cx$   
 再代入 $D(3,3) \Rightarrow 4c=9 \Rightarrow$ 正焦弦長=9]
- (20)  $\triangle PQR$  的面積為  $2a + \frac{2}{a}$ ,  $a=1$
- (21) 3 [提示：建立坐標系取 $B(0,0)$ 、 $C(2,0) \Rightarrow$ 此時拋物線方程式為 $y^2=8x$ ，再  
 令 $A(2,y)$ ，代入方程式計算 $y$ ，再計算腰長]
- (22)  $y^2=x+1$  [提示：令拋物線方程式為 $y^2=k(x+1)$ ，因為圓與拋物線均對稱於 $x$   
 軸，所以兩交點亦對稱 $x$ 軸，因此聯立方程組  $\begin{cases} y^2 = k(x+1) \\ x^2 + y^2 - 3x = 0 \end{cases}$  的解為 $(x, y_1)$ 、  
 $(x, y_2)$ ，因此將 $y^2=k(x+1)$ 代入 $x^2+y^2-3x=0$ 中，可得 $x^2+(k-3)x+k=0$  只有一個  
 正解 $\Rightarrow D=(k-3)^2-4k=0 \Rightarrow k=1$  或  $9$ ，但重根為正根，因此 $k=1$ ]
- (23) 4 [提示： $x^4-3x^2+4=(x-0)^2+(x^2-2)^2$ ， $x^4-3x^2-8x+20=(x-4)^2+(x^2-2)^2$ 考慮  
 動點 $P(x, x^2)$ (P在拋物線 $y=x^2$ 上)及兩定點 $(0,2)$ ， $(4,2)$ 距離的最小值]