第二章排列組合

§2−1 計數原理

(甲)集合元素的計數

(1)設 A 是一個有限集合，則集合 A 的元素個數以 n(A)或|A|表示之。

例：設 A={a,b,c,d,e}，則 n(A)=5 或|A|=5。

(2)二個集合的排容原理(處理計數問題最基本的工具)：

設 A,B 是二個有限集合，則 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

實例說明：設 A={1,3,5}，B={1,2,3,7}，求 $n(A\cup B)$=？

(3)三個集合的排容原理：設 A,B,C 是三個有限集合，

則 $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

[例題1] 52 個學生參加數學測驗，測驗題分 A，B，C 三題，結果，答對 A 題者 37 人，答對 B 題者 30 人，答對 C 題者 25 人，答對 A，B 題者 20 人，答對 A，C 題者 16 人，答對 B，C 題者 13 人，三題均答對者 5 人，則：

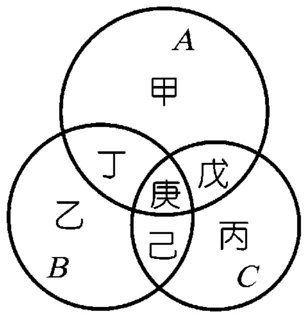
(1)A，B，C 三題中至少答對一題者有__________人。

(2)三題均答錯者有________人。

(3)恰答對一題者有________人。

(4)至少答對兩題者有_________人。

Ans：(1)48(2)4(3)9(4)39



(練習1) 在十張犁這個小村莊裡，僅有聯合、中國、民生三種報紙供應．已知全村 60 個訂報戶中，訂聯合、中國、民生的分別有 25 戶、32 戶、33 戶，且三種報紙皆訂者有 7 戶，試問在 60 個訂報戶中恰訂兩種報紙者有幾戶？恰訂一種報紙者有幾戶？ Ans：16,37

(練習2) 某次數學競試有 100 個學生參加，試題僅A，B，C三題，測驗結果如下：答對A者有 51 人，答對B者有 36 人，只答對C者有 16 人，答對B，C兩題者有 13 人，答對A或C者有 75 人，答對B或C者有 59 人，而只答對A，B，C三題之一者有 66 人，則

(1)只答對A者有__________人。(2)三題都答錯者有__________人。

Ans：(1)33(2)8

(練習3) 有一首流行歌曲「姐姊妹妹站起來」，其中一段歌詞是「十個男人七個傻，八個呆，九個壞」，根據這段歌詞，請問：

(1)這十個男人中最少有多少位又傻又呆的？這十個男人中最多有多少位又傻又呆的？

(2)這十個男人中最少有多少位又傻又呆又壞的？這十個男人中最多有多少位又傻又呆的？

Ans：(1)5，7 (2)4，7

(乙)樹狀圖的使用

(1) 最基本的計數方法(窮舉法)：

通過一一的列舉而導致結論的方法,所計數目不大時,使用這種方法可見效。

(2)樹狀圖的設計

①樹狀圖是一種樹枝形狀的圖形，用來列舉一連串事件發生時所有可能情況的一種工具。

②樹狀圖是用窮舉法解題時的一種工具，通常樹狀圖的作法是由左而右逐層分類，分步，使複雜情況明顯化。

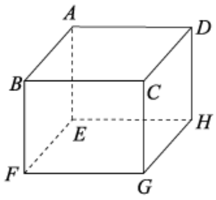
③樹狀圖在計數問題處理的過程中，可以呈現直觀的、具體的模型，使得分類、分層的工作容易進行，且可以避免重疊與遺漏的現象。

(3)實例解說：A,B 兩隊比賽籃球，最先贏得 2 場之隊爲勝，比賽沒有和局，試求比賽之所有可能發生的情形有幾種？

[例題2] 甲、乙二棒球隊舉行七場比賽，以先勝 4 場的爲勝隊，今已比賽 3 場，結果是 A 對一勝二敗，則往後的比賽，有__________種情形才能決定出勝負，又其中 A 對獲勝的情形有__________種。但是，每場比賽規定要賽出勝負，不許有和局。Ans：10；4

(練習4) 有一跳蚤在數線上從原點向左或向右跳動,假設牠每次跳的距離為一個單位。同時牠如跳到+2 或−3 時便停止,不然的話只要跳 5 次便不再跳了,試問會有多少種可能的情況發生?Ans:20 種

(練習5) 由一個正六面體的一頂點A沿著稜線走到對角線的另一頂角G,每一個頂點只能經過一次,有__________種走法。Ans:18



(丙)乘法原理與加法原理

(1)乘法原理的要點(乘法原理的基本型⇒分步驟⇒且)

完成一件事E,須經$S_1,S_2,S_3,\ldots,S_k$兩個步驟(有先後),作第一步(S_1)有m_1種方法,作第二步驟(S_2)有m_2種方法,…,作第k步驟(S_k)有m_k種方法那麼完成這件事(E)共有 $m_1\times m_2\times\ldots\times m_k$種方法。

說例:

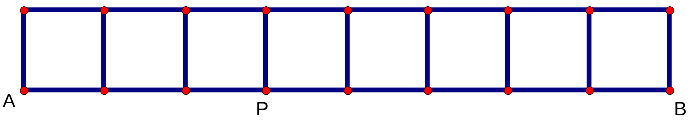
某人由高雄到台中有 3 種方法,由台中到台北有 2 種方法,問此人由高雄經台中到台北,一共有幾種走法?

[例題3] 自 A 到 B 規定其行走方向為「→,↑,↓」三種

(1)不經過 P 的走法有多少種?

(2)經過 P 的走法有多少種?

Ans:(1)64 種 (2)192 種



[例題4] 用 0,1,2,3,4,5 排成一個四位數,

(1)若數字可重複,請問可作成幾個四位數。

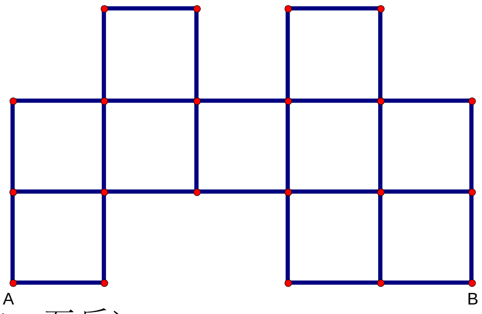
(2)若數字不可重複,請問可作成幾個四位數。

Ans:(1)5×6^3 (2)300

(練習6) 設二次函數$f(x)=ax^2+bx+c$之係數$a,b,c\in\{3,4,5\}$請問共有多少個不同的二次函數？ Ans：3^3

(練習7) 請問 720 的正因數個數有多少個？Ans：30 個

(練習8) 如右圖之街道規定其行走方向為「→,↑,↓」三種，求由 A 到 B 之走法有幾種？Ans：216 種



(2)加法原理的要點(加法原理的基本形⇒分類法⇒互斥)

作一件事E，完成E有$C_1,C_2,....,C_n$等n類互斥的辦法，在第一類C_1辦法中有m_1種方法，在第二類C_2辦法中有m_2種方法，,....,在第n類辦法中有m_n種方法，那麼這件事共有$m_1+m_2+.....+m_n$ 種不同的方法。

舉例：某人由甲地到乙地走陸路有 3 種方法，走水路有 2 種走法，問此人由甲地到乙地一共有幾種幾法？

[例題5] 將 15 用三個自然數之和來表示，方法有幾種？Ans：19
(15=1+1+13 與 15=1+13+1 視爲同一種，即不考慮順序)

[例題6] 用 10 元、50 元、100 元硬幣組成 1000 元，共有幾種方法？Ans：121

(練習9) 用三個自然數的和來表示 10，共有幾種表示法？Ans：8
(「項」的順序不考慮，如 2+3+5 與 5+2+3 算同一種表法)

(練習10) 將 100 元紙鈔一張兌換成 50 元硬幣，10 元硬幣，或 5 元硬幣(每種硬幣不一定都要兌換)，有多少種不同的兌換方法？Ans：共有 18 種不同的兌換方法。

(戊)加法原理與乘法原理的綜合應用

乘法原理的精神是分好完成事情的一連串步驟，而加法原理著重於如何將事情做適當的分類，在實際作計數的過程中，我們要練習如何適當的使用乘法與加法原理，即如何將事物作分類、分步驟，以助於去計算事物的個數。

例子：若把從 1 到 1000 的整數列出來，試問其中不含有數字 3 的有多少種？又至少含有一個數字 3 的有多少種？

[解說]：

(A)首先我們將 1 到 1000 的數，分成一位數、二位數、三位數、四位數
然後在這些分類中算出不含有數字 3 的數有多少個

(1°)一位數：1,2,4,5,6,7,8,9⇒8 個

(2°)二位數：十位數字有 8 個數可以用，個位數字有 9 個數字可以用，因此用乘法原理可知有 8×9 個數字。

(3°)三位數：百位數字有 8 個數可以用，十位數字有 9 個數字可以用，個位數字有 9 個數字可以用，因此用乘法原理可知有 $8\times9\times9$ 個數字。

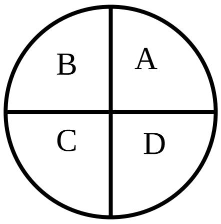
(4°)四位數：只有 1000 一個數字

根據以上的分類，由加法原理知共有 $8+8\times9+8\times9^2+1=729$ 個不含有數字 3 的數。

(B)1~1000 中至少含有一個數字 3 的數字個數
=1000−(1~1000 中不含有數字 3 的數的個數)=1000−729=271。

[例題7] 有 5 個不同的門，甲乙兩人由不同之門進入，不同的門出來
(1)自己可由相同之門進出有多少種方法？
(2)自己不可由相同之門進出有多少種方法？
Ans：(1)400 (2)260

[例題8] 如圖，用 5 個不同的顏色去塗 A、B、C、D 四個區域，將每個區域塗上一種顏色，相鄰區域不得同色，則有幾種方法？　Ans：260



[例題9] 1 元硬幣 6 個，5 元硬幣 1 個，10 元硬幣 3 個，

(1)共有幾種不同的付款方法？(例如：5 個 1 元硬幣+1 個五元硬幣與 1 個 10 元硬幣代表兩種不同的付款方式)

(2)共可付出幾種不同的款項？

Ans：(1)55　(2)47

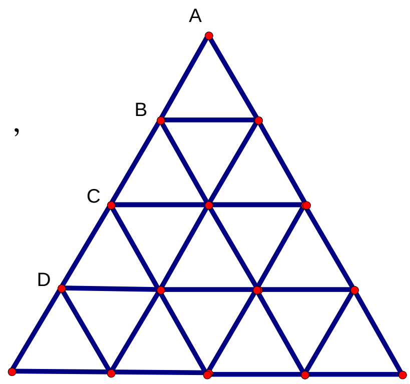
(練習11) 若球道設計如圖所示，兩兩相鄰的節點間距離皆為 1，請問

(1)共有多少個面積為$\frac{\sqrt{3}}{4}$的三角形。

(2)共有多少條長度為 1 的線段。

(3)球由 A 點進入，經 B 層的兩個節點之一再依斜線路徑進入 C 層，依次類推往下掉落到最底層，共有多少種走法？

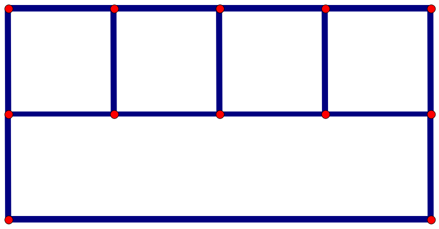
Ans：(1)16 (2)30 (3)16



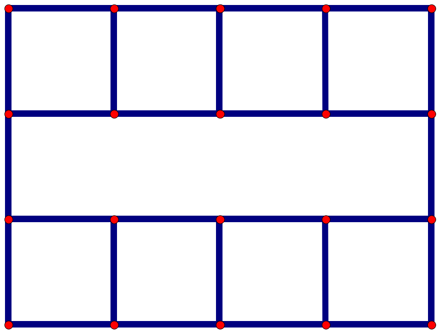
(練習12) 小安口袋中有百元紙鈔 2 張，50 元硬幣 5 個，10 元硬幣 3 個去便利商點買東西，請問在不用找零錢的情形下，可以付出多少種金額？
Ans：39

(練習13) 從 4 種顏色塗下列兩圖，使同色不相鄰之塗法共有多少種？

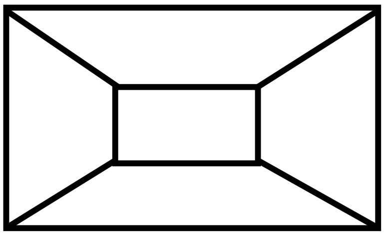
(1)



(2)



(3)



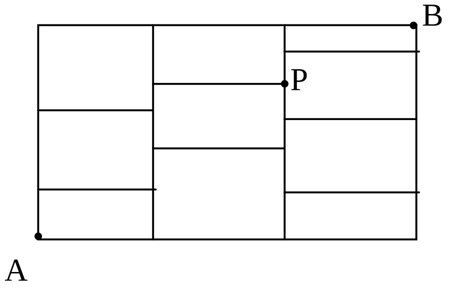
Ans：(1)96　(2)2304　(3)420

(練習14) 用一粒骰子連擲三次，把擲出的數字順次排成一個三位數，此時
(1)各位數字互不相同的三位數有多少個？
(2)可以排出多少個不同的三位數？
(3)在三位數中恰好有兩個相同之數有多少個？
Ans：(1)120　(2)216　(3)90

(練習15) 用 0,1,2,3,4,5,6 作成一個四位數，
(1)數字可重複有__________個。
(2)數字不可重複有__________個。
(2)數字不可重複且為 5 的倍數有_________個。
Ans：(1)6×7^3　(2)720　(3)220

(練習16) 四位正整數，中共有多少個 0(例如：1400 為 2 個 0，1301 為 1 個 0)
Ans：2700

(練習17) 如右圖，自 A 走到 B，規定其行走方向為「→,↑,↓」三種，求下列的走法？
(1)A 至 B　(2)不經過 P　(3)必經過 P
Ans：(1)80 (2)32 (3)48



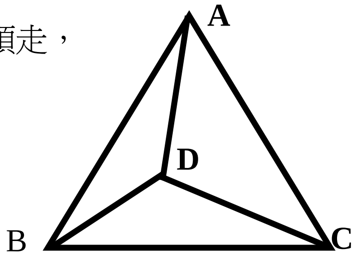
(練習18) 有一長方形牆壁，尺寸 12×1(即長 12 單位長，寬 1 單位長)，若有許多白色與咖啡色壁磚，白色壁磚尺寸 2×1，咖啡色壁磚尺寸 4×1，用這些壁磚貼滿此長方形，問可貼成幾種不同的圖案？　　Ans：13 (88 學科)

綜合練習

(1) 有一個十字路口，規定不可以迴轉，東西向不可以左轉，南北向可以左右轉，求此路口有________種車流動向。

(2) 三位數中，百位數與個位數之差的絕對值爲 2 的共有_____種。　(87 學科)

(3) 如圖，某人由 A 點出發，沿著路走，不許循原路回頭走，當同一點經過二次才不再前進，請問有多少種走法？



(4) 小萍對於穿著有其特有的品味與意見，每次出門前總會拿出不同的裙子 4 件，長褲 2 件，襯衫 5 件，褲襪 3 雙，短襪 5 雙，若穿裙子時必穿褲襪，穿長褲時必穿短襪，而且裙子與長褲不同時穿，一次只穿一種，請問小萍出門有多少種不同的穿著方式？

(5) 某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有________種不同款式的「阿民」公仔。(2007 學科)

(6) 令 A={$(x,y)|x,y$ 皆爲非負整數，且 $3x+5y\le 10$}，試問集合 A 的元素個數爲多少？

(7) (a)不超過 1000 的正整數中，能被 3 或 5 整除的正整數有多少個？
(b)不超過 1000 的正整數中，不能被 3 或 5 整除的正整數有多少個？
(c)不超過 1000 的正整數中，與 15 互質的正整數有多少個？

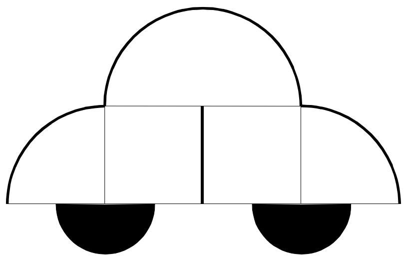
(8) 若 A={0,2,4,6,8}，B={1,3,5}，令 C={$a+b|a\in$A 且 $b\in$B}，請問 n(C)=？

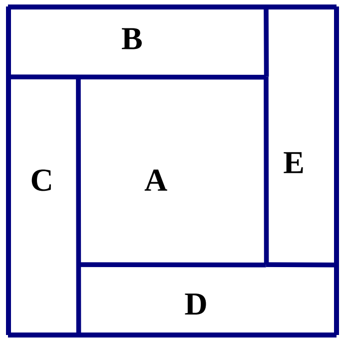
(9) .坐標平面上的圓C：$(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上有________個點與原點的距離正好是整數值。(2004 學科)

(10) $|x|+|y|\le 3$ 的圖形中有幾個整數坐標點？

(11) 三邊長均爲正整數且最大邊長爲 11 的三角形共有多少個？

(12) 用五種不同的顏色塗左下圖中五個空白區域，相鄰的區域塗不同的顏色，則有幾種塗法？ (86 社)





(13) 用五種不同的顏色塗右圖中五個空白區域，
相鄰的區域塗不同的顏色，
則有幾種塗法？

(14) 從 1 到 999 的正整數中，總共寫了多少個 0？

(15) 由 1,2,3,4,5,6,7 七個數字所組成的四位數中(數字可重複)，含有奇數個 5 的共有多少個？

(16) 欲檢查整係數方程式 $360x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx-361=0$ 有理根的個數，則最後需總共檢驗多少個有理數才知道？

(17) 8 個棒球隊，舉行淘汰賽，每次賽到分出勝負，到冠軍隊產生，共需比賽多少場？若改為雙敗淘汰賽(敗二場則被淘汰)，則到冠軍隊產生，至多需比賽多少場？

(18) 有相同紅球 5 個，白球 4 個，黃球 3 個，藍球 2 個，則從其中任意取出 4 球的方法有幾種？

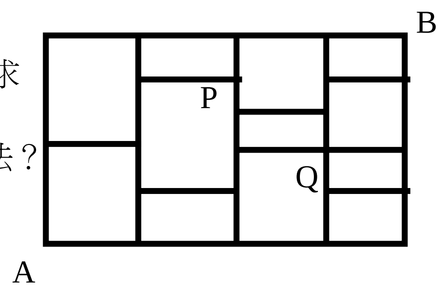
進階問題

(19) 在各位數字互不相同的所有四位正整數，滿足下列條件的各有多少個？
(a)偶數數字(包含 0)與奇數數字交換排列。
(b)個位數字不為 0，其反序數和原數的和為偶數。

(20) 若一個房間有 5 個不同的門，甲乙丙三人由不同的門進出這房間一次，但每個人不得由同一個門進出，請問三人進出此房間共有多少種方法？

(21) 以 245000 為最小公倍數的兩個正整數 A 與 B，請問數對(A,B)有幾組？

(22) 如圖，自 A 到 B，規定其行走方向為「→,↑,↓」三種，求
(a)A 到 B 有幾種走法？ (b)不經過 P 有幾種走法？
(c)經過 P 有幾種走法？ (d)不過 P 且不過 Q 有幾種走法？
(e)經過 P 且經過 Q 有幾種走法？



綜合練習解答

(1) 10 種(東西向各有 2 種，南北向各有 3 種)

(2) 150

(3) 18(畫樹狀圖即可解決)

(4) 110

(5) 25

(6) 7

(7) (a)467(b)533(c)533

(8) 7

(9) 12

[因爲圓 C 上的點 P 與原點 O 距離$\overline{OP}$的最大值爲$\sqrt{113}+3$，最小值爲$\sqrt{113}-3$，因此$\overline{OP}$=8,9,10,11,12,13，而這樣的$\overline{OP}$均各有 2 點，因此共有 2×6=12 點]

(10) 25 [分成 x=0，$|x|$=1，$|x|$=2,$|x|$=3 分別去討論(x,y)均爲整數的點有幾個]

(11) 36

[提示：可設三邊長爲 $a=11\geq b\geq c$，因爲 $2b\geq b+c>a=11 \Rightarrow 11\geq b\geq 5.5$ 因此可討論 b=6,7…,11，符合條件的(a,b,c)各有 1,3,….,11，因此共有 1+3+5+…+11=36 個]

(12) 960

(13) 420

[提示：塗顏色的順序可爲A,B,C,D,E你可以利用樹狀圖，去討論塗法。或是考慮塗法的順序A,B,D,C,E當B,D同色$\Rightarrow 5\times4\times3^2$當B,D異色$\Rightarrow 5\times4\times3\times2\times2$]

(14) 189 個[提示：可分成有 1 個 0、2 個 0 這兩種情形來計數]

(15) 888 個 [提示：含有 1 個 5 共有 $6^3\times4$，含有 3 個 5 共有 6×4]

(16) 144[提示：設有理根爲$\frac{a}{b}$，則a,b互質，且$a|361=19^2$，$b|360=2^3\times3^2\times5$，因此去討論$(a,b)$有幾組]

(17) 7，15

[說明：單敗淘汰，7 隊被淘汰；雙敗淘汰，7 隊被淘汰，共比了 14 場，而冠軍隊至多敗一場，因此至多比賽 15 場]

(18) 30

[提示：利用顏色的同異來分類，可分成 4 同$\Rightarrow$2 種，3 同 1 異.3×3=9 種，2 同 2 同$\frac{4\times3}{2}$=6 種，2 同 2 異$\Rightarrow$4×3=12 種，4 異$\Rightarrow$1 種]

(19) (a)720 (b)1792

(20) 1920 [提示：令五個門爲 ABCDE，甲乙丙進入房間的方法有 5×4×3，假設甲、乙、丙各由 A、B、C 進入，甲出來時可選 BCDE，這可以分兩類，當甲選 B 或 C 時(與乙或丙其中一人進來的門一樣)，根據樹狀圖可知，

乙丙出去時各有 9 種方法；當甲選 D 或 E 時(與乙或丙其中一人進來的門不一樣)，則乙丙出去時各有 7 種方法，因此共有 $9\times2+7\times2=32$ 種，所以三人進出此房間共有 $5\times4\times3\times32=1920$ 種方法]

(21) 315

[提示：$245000=2^3\times5^4\times7^2$，設 $A=2^a\times5^b\times7^c$，$B=2^\alpha\times5^\beta\times7^\gamma$，討論 $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ 有幾種情形，就可以得知(A,B)的數對有幾組，因為 (a,α) 有 $2\times4-1=7$ 種情形((3,0)、(3,1)、(3,2)、(0,3)、(1,3)、(2,3)、(3,3))，同理 (b,β) 有 $2\times5-1=9$ 種情形，(c,γ) 有 $2\times3-1=5$ 種，因此數對(A,B)有 $7\times9\times5=315$ 組]

(22) (a)240 (b)105 (c)135 (d)30 (e)93

[提示：注意，整過問題是不經過某一點的走法比較容易算，(e)先計算過 P 或過 Q 的走法 $=240-30=210$，故經過 P 且經過 Q 的走法有 $(135+168)-210=93$ 種]