第五十六單元 指數與對數函數的微分與積分

(甲)對數函數的微分與積分

(1)對數函數的導函數：
首先觀查察 $f(x)=\log_a x$ 在 $x=1$ 處的導數。

$\because \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{\log_a^x-\log_a^1}{x-1}=\log_a^{x^{\frac{1}{x-1}}}$ ，$\therefore$ $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\log_a^{x^{\frac{1}{x-1}}}$

要求上式的級限，要先知道 $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$ 之值，令 $t=x-1$，則可得：$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ ，

故我們必須對 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ 作一些探討。

在數列級數的部分，已經討論過 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$ ，同樣可以定義 $\boxed{e=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x}$ ，

令 $t=\dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e$

所以 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\log_a^{x^{\frac{1}{x-1}}}=\log_a e$。
一般而言，討論對數函數的導函數都與「e」脫不了關係。

接下來，我們來討論對數函數的導函數：
設 $f(x)=\log_a x$ ，如何求 $f(x)$的導函數 $f'(x)$呢？
設α爲正數，計算 $f'(\alpha)=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\log_a(\dfrac{x}{\alpha})^{\frac{1}{x-\alpha}}$

因爲 $\lim\limits_{x\to\alpha}(\dfrac{x}{\alpha})^{\frac{1}{x-\alpha}}=\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{t+\alpha}{\alpha})^{\frac{1}{t}}=e^{\frac{1}{\alpha}}$ (令 $t=x-\alpha$)

$\Rightarrow f'(\alpha)=\log_a e^{\frac{1}{\alpha}}=\dfrac{1}{\alpha}\cdot\log_a e$。 因此 $f'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\log_a e$。

特別地，當 $a=e$ 時，並令 $\log_e x=\ln x$，那麼 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\log_e e=\dfrac{1}{x}$。

此時我們稱 $\ln x$ 爲「**自然對數**」，而 e 稱爲「**自然對數的底**」。

[例題1] 設 $x\neq 0$，試求 $(\ln|x|)'=$？

因爲 $\ln|x|=\begin{cases}\ln x & x>0\\ \ln(-x) & x<0\end{cases}$ ，

所以 $x>0$ 時，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；$x<0$ 時，$[\ln(-x)]'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$。

故 $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$。

根據例題一的結果，再利用微積分基本定理，可以得知$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$。

結論：

(1)$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$ [即$(\log_a^x)'$與$\frac{1}{x}$成比例，比例常數爲$\frac{1}{\ln a}$。]

(2) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

(3)$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$

[例題2] 試求下列各小題 $f'(x)$

(1)$f(x)=\ln(\sin x)$，$0<x<\pi$ (2)$f(x)=\ln(x^2+4)$ (3)$f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$

(4) $f(x)=\log_5^{(x^3+4)}$ (5) $f(x)=\log_3^{\sin x}$ (6) $f(x)=\log_3^{\sqrt{x^2-x+1}}$

Ans：(1)$\frac{\cos x}{\sin x}$ (2)$\frac{2x}{x^2+4}$ (3)$\frac{2}{x^2-1}$ (4)$\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{3x^2}{x^3+4}$ (5)$\frac{1}{\ln 3}\tan x$ (6)$\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{2x-1}{2(x^2-x+10)}$

當我們對一些經由乘法、除法或乘冪所形成的函數作微分時，可以先將它們取對數，然後再微分，會比較容易求得導函數。

給定一個經由乘法、除法或乘冪所形成的函數 $f(x)$，令 $g(x)=\ln f(x)$，(若 $f(x)<0$，則令 $g(x)=\ln|f(x)|$)由例題 1 的結果與合成函數的微分法則，可得 $g'(x)=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ 。

[例題3] 試求下列各題的導函數：

(1) $y=(x+1)(x^2+1)(x+2)^2$ (2) $y=\frac{(x-3)^3(x-1)^4}{(x+2)^2}$ (3) $y=\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

Ans：(1) $y'=(x+1)(x^2+1)(x+2)^2(\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2}{x+2})$

(2) $y' = \dfrac{(x-3)^3(x-1)^4}{(x+2)^2}(\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{2}{x+2})$ (3) $y' = \dfrac{1}{\cos x}\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

[例題4] (1)若 $x>0$，試證 $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$ 。

(2)當 $x>0$ 時，試討論 $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 的增減情形。

(練習1) 試求下列各導函數：

(1)$f(x)=\ln(x^2+2x+10)$ (2) $f(x)=\ln(x^3\cdot\ln x)$

(3) $y=\log_{10}^{(\sec x+\tan x)}$ (4) $y=\log_3^{\sqrt{x^2-x+1}}$

Ans：(1)$\dfrac{2x+2}{x^2+2x+10}$ (2)$\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x\ln x}$ (3)$\dfrac{\sec x}{\ln 10}$ (4)$\dfrac{2x-1}{2(x^2-x+1)\ln 3}$

(練習2) 試求 $\dfrac{dy}{dx}$： $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ (2)$y=x^{\sin x}$

Ans：

(1) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4})$ (2) $x^{\sin x}(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x})$

(練習3) 若 $0<a<b$，利用例題 4 的結果證明：$(1+a)^b>(1+b)^a$。

[例題5] 試求下列不定積分：

(1)$\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}dx$ (2)$\displaystyle\int\tan x\,dx$ (3)$\displaystyle\int\frac{\ln x^n}{x}dx$ (n 為自然數)

Ans：(1)$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$ (2)$\ln|\sec x|+C$ (3)$\frac{n}{2}(\ln x)^2+C$

[例題6] (1)$\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{x+1}dx=?$ (2)$\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x^2+2}dx=?$ (3)$\displaystyle\int_{-1}^0\frac{x^2-2}{x^3-6x+1}dx=?$ (4)$\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$

Ans：(1)ln2 (2)$\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2)$ (3)$\frac{-1}{3}\cdot\ln 6$ (4)ln2

(練習4) (1)$\displaystyle\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx=?$ (2)$\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x^4}{3x}dx=?$ (3)$\displaystyle\int_1^e\frac{(\ln x^3)^2}{x}dx=?$(4) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cot x\,dx=?$

Ans：(1)ln5 (2)$\frac{4}{3}$ (3)3 (4)ln2

[例題7] $y=\frac{1}{x}$與 $x=2$，$x=4$，x 軸圍成之面積爲何?又此區域繞 x 軸旋轉一周所得的立體體積爲何?　Ans：$\ln 2$，$\frac{\pi}{4}$

[例題8] 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$=?　Ans：$\ln 2$

(練習5) 試求 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$與 $x=0$、$x=1$ 與 x 軸所圍成的區域繞 y 軸所成的旋轉體體積。　Ans：$\pi\ln 2$

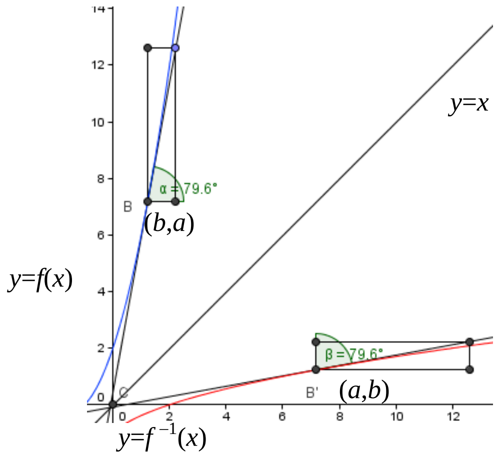
(乙)指數函數的微分與積分

(1)反函數的導函數：

設 $f(x)$爲 1–1 的連續函數，我們知道將 $y=f(x)$的圖形，對直線 $x=y$ 作對稱，就會得到 $y=f^{-1}(x)$的圖形，直觀來說，$y=f^{-1}(x)$的圖形也會是連續函數，故我們可以得出以下的結果：

若 $f(x)$爲區間 I 上的 1 對 1 且連續的函數，則 $f^{-1}(x)$也會是連續函數。

進一步來說，若 $f(x)$爲一個 1 對 1 且可微的函數，直觀來說，它的圖形平滑而沒有尖點，$y=f(x)$的圖形對直線 $x=y$ 作對稱得到 $y=f^{-1}(x)$的圖形，這個圖形直觀來說，也會沒有尖點，因此我們期待 $y=f^{-1}(x)$也會是可微分的(排除發生鉛直切線的地方)。



從右圖，設 $b=f^{-1}(a)$，那麼在(a,b)的切線知斜角爲α，而(b,a)的切線斜角爲$\frac{\pi}{2}-\alpha$，可以得知

$(f^{-1})'(a)=\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{f'(b)}$。

這個事實，就是以下的定理：

定理：

若設 $f(x)$為 1−1 的可微分函數，令 $g(x)=f^{-1}(x)$且 $f'(g(a))\neq 0$，

則 $g(x)$在 $x=a$ 可微分且 $g'(a)=\dfrac{1}{f'(g(a))}$。

[證明]：令 $y=g(x)$，由於 $g(x)=f^{-1}(x)$，故 $y=g(x)\Leftrightarrow x=f(y)$

又因爲 $g(x)$爲連續函數，所以 $x\to a$ 時 $y\to g(a)=b$，$g(a)=b\Leftrightarrow a=f(b)$

$$g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{y\to b}\frac{y-b}{f(y)-f(b)}=\lim_{y\to b}\frac{1}{\dfrac{f(y)-f(b)}{y-b}}\quad(\because f'(g(a))\neq 0)$$

$$=\frac{1}{\displaystyle\lim_{y\to b}\frac{f(y)-f(b)}{y-b}}=\frac{1}{f'(b)}=\frac{1}{f'(g(a))}。$$

根據前面定理的證明，我們可以得到 $f(x)$反函數 $g(x)$的導函數爲 $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$。

從合成函數微分的觀點來看：

$x\xrightarrow{f}f(x)\xrightarrow{g}x$，即 $f(g(x))=x$

兩邊對 x 微分可得 $f'(g(x))\cdot g'(x)=1$，故 $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$。

[例題9] 設 $f(x)=3+x^2+\tan(\frac{\pi x}{2})$，$-1<x<1$，試求$(f^{-1})'(3)=$？ Ans：$\dfrac{2}{\pi}$

[例題10] 試求：$\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$-1<x<1$。

(練習6) 試求下列各小題中$(f^{-1})'(a)$的值：

(1)$f(x)=x^3+x+1$，$a=1$

(2)$f(x)=x^5-x^3+2x$，$a=2$

(3)$f(x)=2x+\cos x$，$a=1$

Ans：(1)1　(2)$\frac{1}{4}$　(3)$\frac{1}{2}$

(練習7) 試求$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$，$-1<x<1$。

(練習8) 試求$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$。

(2)指數函數的導函數

設指數函數 $f(x)=a^x$，已知 $g(x)=\log_a x$ 為其反函數，根據前面反函數的導函數的說明，我們將藉由 $g(x)$的導函數來求 $f(x)$的導函數。

(a) $f(x)=e^x$ 的導函數：

由於$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，為了方便起見，我們先考慮 $f(x)=e^x$ 的導函數：

令 $g(x)=\ln x$，因為 $g(f(x))=x\Rightarrow g'(f(x))\cdot f'(x)=1\Rightarrow\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=1\Rightarrow f'(x)=f(x)$。

因此可以得到$(e^x)'=e^x$。

(b)一般指數函數 $f(x)=a^x$ 的導函數：

因為 $a^x=e^{x\ln a}$，所以$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}\cdot(x\ln a)'=e^{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a\cdot a^x$。

即 $f'(x)=\ln a\cdot f(x)$。

這個事實是指數函數很重要的特性：

指數函數的導函數(變化率)與原函數成比例關係。

結論：

(1)**指數函數的導函數(變化率)與原函數成比例關係。**

(2) $(a^x)'=\ln a\cdot a^x$

(3) $(e^x)'=e^x$

[例題11] 求(1)$\frac{d}{dx}(a^{bx})=$？　(2) $\frac{d}{dx}(x^r)=$？

[例題12] 試求下列各導函數：

(1) $y=e^{x^2}$ (2) $y=x^2e^{2x}$ (3) $y=e^{(\ln x)^2}$ (4) $y=e^{\sin x^2}$

Ans：(1) $2xe^{x^2}$ (2) $2xe^{2x}+2x^2e^{2x}$ (3) $e^{3x}(2x+3x^2)$ (4) $2x\cos x^2e^{\sin x^2}$

[例題13] 求下列各導函數：

(1)$y=4^{6x}$ (2) $y=10^{x^2}$ (3)$y=3x^2$ (4)$y=x^3\cdot 7^x$ (5) $y=2^{e^{2x}}$

Ans：(1)$6\ln4\cdot4^{6x}$ (2)$2\ln10\cdot x\cdot10^{x^2}$ (3)$6x$ (4) $7^x\cdot x^2\cdot(3+x\ln7)$ (5) $2e^{4x}\cdot2\ln2$

[例題14] (1)試求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot e^{-x}=$？

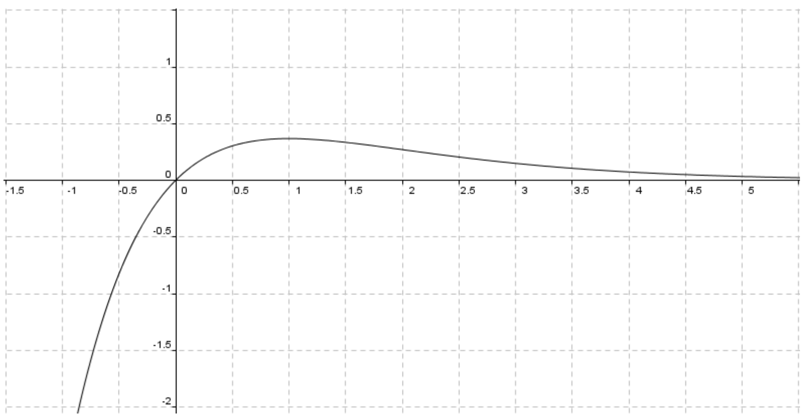
(2)試描繪 $f(x)=x\cdot e^{-x}$ 之圖形，並求其極值、反曲點坐標及漸近線方程式。

Ans：

(1)0

(2)$f(1)=e^{-1}$ 極大值

$(2,2e^{-2})$反曲點



(練習9) (1) $\dfrac{d}{dx}(e^{\sin x^2})=$？ (2) $\dfrac{d}{dx}(x^2\cdot e^{3x})=$？

(3)$\dfrac{d}{dx}[(1-e^{4x})^2]=$？ (4) $\dfrac{d}{dx}(2^{5x}\cdot 3^{x^2})=$？

Ans：(1)$2x\cos x^2\, e^{\sin x^2}$ (2)$e^{3x}(2x+3x^2)$ (3)$8e^{4x}(e^{4x}-1)$ (4) $3^{x^2}\cdot 2^{5x}(5\ln 2+2x\ln 3)$

(練習10) $y=f(x)=x\cdot e^x$，試求(1) $f^{\prime}(x)$=? (2) $f^{\prime\prime}(x)$=? (3)極小點 (4)反曲點

Ans：(1) $e^x(x+1)$ (2) $e^x(x+2)$ (3) $(-1,-\dfrac{1}{e})$ (4) $(-2,-\dfrac{2}{e^2})$

(練習11) (1)$x>0$，證明：$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$。

(2)利用(1)的結果，證明：$\dfrac{43}{30}\leq\int_0^1 e^{x^2}dx<e$。

(2)指數函數的積分

(a) $\int_a^b e^x dx=e^x|_\alpha^\beta$

(b) $\int_\alpha^\beta a^x dx=\dfrac{1}{\ln a}\cdot a^x\ |_\alpha^\beta$

[例題15] 試求下列各積分的值：

(1) $\int_0^1 e^{2x}dx$=? (2) $\int_1^2 2^x dx$=? (3) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$=?

(4) $\int_0^1 (e^x+e^{-x})^2 dx$=? (5) $\int_0^1 (3x^2+1)\exp(x^3+x-1)dx$=?

Ans：(1)$\dfrac{1}{2}(e^2-1)$ (2)$\dfrac{2}{\ln 2}$ (3)$\dfrac{1}{2}(e-1)$ (4)$\dfrac{1}{2}(e^2-e^{-2})+2$ (5)$e-e^{-1}$

[例題16] 曲線 $y=e^x$ 與直線 $x=1$，$x=-1$ 及 x 軸所圍成的區域為 R。

(1)R 的面積為? (2)R 繞 x 軸旋轉所得的體積為?

Ans：(1)$e-\dfrac{1}{e}$ (2)$\dfrac{\pi}{2}(e^2-e^{-2})$

(練習12) (1) $\int_0^2 (3e^x+1)dx=?$ (2) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx=?$ (3) $\int_1^2 (e^x-\frac{2}{x})dx=?$(4) $\int_0^2 5^x\,dx=?$

Ans：(1) $3e^2-1$ (2) $\ln(e+1)-\ln 2$ (3) $e^2-2\ln 2-e$ (4) $\frac{24}{\ln 5}$

(練習13) 求二曲線 $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 與二直線 x=1，x=−1 所圍成區域之面積。
Ans： $2(e+e^{-1})-4$

(練習14) 設Γ表示曲線 $f(x)=\ln x$ 的圖形，試求下列各小題：
(1)過原點 O 與 Γ 相切之直線 L 之方程式爲何？
(2)Γ與切線 L 及 x 軸所圍成之區域 R 的面積爲何？
(3)R 繞 y 軸旋轉，所得的旋轉體體積=？Ans：(1)$y=\frac{1}{e}x$ (2)$\frac{e-2}{2}$ (3)$\pi(\frac{e^2}{6}-\frac{1}{2})$

(丙)指數函數的應用

(1)一個現象的成長或衰微的狀況，如果能以函數來表示，則通常可以該函數的導函數來表示變化率。

(2)我們已知指數函數的變化率與原函數成比例關係，反過來說，假設某一現象(用 $f(t)$ 表示)的變化率($f'(t)$)與現象本身成正比，那麼 $f(t)$會與指數函數有密切的關係。

[說明]：

設 $f'(t)=k\,f(t)$且 $f(t)>0$

$\Rightarrow\frac{f'(t)}{f(t)}=k\Rightarrow\int\frac{f'(t)}{f(t)}dt=\int k\,dt$ $\Rightarrow\ln f(t)=kt+C\Rightarrow f(t)=e^{kt+c}\Rightarrow f(t)=k_0e^{kt}$。

令 t=0 代入上式，$f(0)=k_0e^0=k_0$，因此 $f(t)=f(0)e^{kt}$。

[例題17] 放射性元素的衰變率與當時原子核數量成正比。意思是說：若在 t 時刻的原子核數爲 $f(t)$，則在時刻 t 衰變的速度 $f'(t)$與 $f(t)$成正比(但比值爲負數)。
(1)設原子核經過 T 時刻數量會減至原來的一半，此時 T 稱爲半衰期。求 T=？
(2)鐳之半衰期爲約 1600 年，今有 150mg 之純鐳，
(a)試求經過 t 年後之剩餘量。(b)經過多少年僅存 30mg。
Ans：(1) $\frac{\ln 2}{k}$ (2)$150\times 2^{\frac{-t}{1600}}$，3715 年。

(練習15) 細菌在適當的環境下繁殖的速度與當時的細菌數成正比，若 t 時刻的細菌數爲 $f(t)$，則在 t 時刻細菌的增加率 $f'(t)$與 $f(t)$成正比。假設 t=0 時的細菌數爲 n_0，而 $f'(t)=0.2\,f(t)(k>0)$，求時刻 t=3 時的細菌數。Ans：$n_0e^{0.6}$

(練習16) 牛頓的冷卻定律是說
物體溫度的變率(冷卻)跟物體溫度與周圍的溫度之差成正比。
假設有一支金屬棒放入水中，如果水的溫度保持固定為 20°C，而 2 分鐘後金屬棒的溫度由 50°C 降到 40°C，試求 6 分鐘後金屬棒的溫度。
Ans：$\frac{260}{9}$°C

(練習17) 小明在大湖邊烤肉，湖水溫度測定為 20°C，10 點正時，他把一根熱金屬棒放入水中，10 點零 2 分取回金屬棒，測得其溫度為 40°C，然後立刻把金屬棒又放入湖水中。10 點零 6 分，取出再測其溫度為 30°C。問小明第一次把金屬棒放入水中時，金屬棒的溫度約為多少度？
(A)30°C~40°C (B)40°C~50°C (C)50°C~60°C
(D)60°C~70°C(E)70°C~80°C
Ans：(B)

(丁)積分的技巧

(1)分部積分法：
設 $u(x)$、$v(x)$均為一階連續可微分
因為 $d(uv)=udv+vdu$

兩邊積分可得 $uv=\int u\,dv+\int v\,du$。

$\Rightarrow \int u\,dv = uv-\int v\,du$。這稱為不定積分的部分分式公式。

部分分式將需要計算的積分 $\int u\,dv$ 轉化為另一個積分 $uv-\int v\,du$，因此計算的關鍵是選取適當的函數 $u(x)$、$v(x)$。

[例題18] 計算下列不定積分：
(1) $\int xe^x\,dx$ (2) $\int x\cdot(\ln x)^2\,dx$ (3) $\int \ln x\,dx$
Ans：(1) xe^x-e^x+C (2) $\frac{1}{2}(x^2\cdot(\ln x)^2-x^2\cdot\ln x+\frac{x^2}{2})+C$ (3) $x\ln x-x+C$

[例題19] 設 $I_m=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$，請利用分部積分法建立遞迴式

$I_m=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m(I_m-a^2\cdot I_{m+1})$。

[解法]：

$I_m=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}-\int xd(x^2+a^2)^{-m}$

$=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{m+1}}dx$

$=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m(\int\frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{m+1}}dx-\int\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{m+1}}dx)$

$=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m(I_m-a^2\cdot I_{m+1})$。

(練習18) 計算下列不定積分：

(1) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$　　(2) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

Ans：(1)$\frac{1}{a^2+b^2}\ e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)+C$　(2) $\frac{1}{a^2+b^2}\ e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)+C$

(練習19) 計算下列不定積分：

(1) $\int x\cdot\cos 2x\,dx$　　(2) $\int x^2\cdot\sin 2x\,dx$　　(3) $\int x\cdot\tan^{-1}x\,dx$

[提示：$\frac{d(\tan^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$]

Ans：(1)$\frac{1}{2}(x\cdot\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)+C$　(2) $\frac{1}{2}(x\cdot\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x-x^2\cos 2x)+C$

(3)$\frac{1}{2}[(x^2+1)\tan^{-1}x-x]+C$

(練習20) 計算 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln x\,dx=$？　Ans：$\frac{2}{e}$

(練習21) 試計算(1)$\int_0^1\frac{e^{3x}}{e^x+1}dx=$?　(2)$\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx=$?

Ans：(1)$\frac{e^2}{2}-e+\ln\frac{e+1}{2}+\frac{1}{2}$ (2)$1-\ln(e+1)+\ln 2$

[提示：可令 $u=e^x$]

(2)有理函數、三角有理函數的積分法：

(a)有理函數的積分法：

設 $P(x)$、$Q(x)$是 x 的多項式，$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$稱爲 x 的有理函數，記爲 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

當 $\deg P(x)\geq\deg Q(x)$時，$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=f(x)+\dfrac{P'(x)}{Q(x)}$，其中$\dfrac{P'(x)}{Q(x)}$爲真分式，因此對於 $R(x)$ 不定積分的計算只須考慮真分式不定積分的計算。

設 $P(x)$爲首項係數=1 的 n 次實係數多項式，利用代數基本定理與實係數方程式虛根成對的性質，可將 $P(x)$化成

$P(x)=(x-a_1)^{i_1}(x-a_1)^{i_2}\ldots(x-a_s)^{i_s}(x^2-p_1x+q_1)^{j_1}(x^2-p_2x+q_2)^{j_2}\ldots(x^2-p_tx+q_t)^{j_t}$

$p_k^2-4q_k<0$。$1\leq k\leq t$，

因此 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ 總能分解成下列 4 種最簡分式的和：

$\dfrac{A}{x-a}$、$\dfrac{A}{(x-a)^m}$、$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$、$\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$

($m>1$，$p^2-4q<0$)，其中 A、B 爲不同時爲 0 的常數。

因爲 $x^2+px+q=(x+\dfrac{p}{2})^2+q-\dfrac{p^2}{4}$，所以我們還可將上面四個型式再作進一步簡化，

可得 4 種最簡分式的和：$\dfrac{1}{x-a}$、$\dfrac{1}{(x-a)^m}$、$\dfrac{1}{x^2+a^2}$、$\dfrac{1}{(x^2+a^2)^m}$

而這些最簡的分式都是可以積分的：

$\displaystyle\int\frac{1}{x-a}\,dx=\ln|x-a|+C$

$\displaystyle\int\frac{1}{(x-a)^m}\,dx=\frac{1}{1-m}(x-a)^{1-m}+C$

$\displaystyle\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}(\tan^{-1}\frac{x}{a})+C$

$\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+a^2)^m}=I_m$，由分部積分法可得遞迴式

$I_m=\dfrac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m(I_m-a^2\cdot I_{m+1})$，因爲 $I_1=\dfrac{1}{a}(\tan^{-1}\dfrac{x}{a})+C$，可以計算出 $I_m(m>1)$。

總之，根據上面的推導可知，有理函數的積分，理論上而言均可以積分出來，只要我們能將有理函數分解成一些最簡分式的和。

[例題20] 計算不定積分：$\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)}dx$。Ans：$\frac{1}{9}[2\ln|x+1|+7\ln|x-2|-\frac{15}{x-2}]+C$

[例題21] 求不定積分：$\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}dx$。Ans：$\frac{1}{4}\ln\frac{1+x^2}{(1+x)^2}+\frac{x-1}{2(1+x^2)}+C$

(b)三角有理函數的積分：

三角有理函數是由 $\sin x$、$\cos x$ 與常數經過有限次四則運算而得到的代數有理式，記為 $R(\sin x,\cos x)$。

對有理函數的不定積分 $\int R(\sin x,\cos x)dx$，可以令 $t=\tan\frac{x}{2}$後，一定能化成 t 的有理函數的不定積分 $\int R_1(t)dt$，再根據有理函數的不定積分法去求不定積分 $\int R_1(t)dt$。

[過程]：$t=\tan\frac{x}{2} \Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \int R(\sin x,\cos x)dx=\int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \text{。}$$

[例題22] 求不定積分 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=$？Ans：$\tan\frac{x}{2}-2\ln|\cos\frac{x}{2}|+C$

(練習22) 求不定積分：$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx=$？Ans：$\frac{-3}{2}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+2|+C$

(練習23) 求不定積分：$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx=$？ Ans：$x-\tan\frac{x}{2}+C$

(練習24) (a) $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}dx=$? (b) $\int_{0}^{\pi/3}\frac{1}{\cos x}dx=$? (c) $\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\sin x}dx=$?

Ans：(a)$\ln\sqrt{3}$ (b)$\ln(2+\sqrt{3})$ (c)1

綜合練習

(1) (自然對數的另一種定義)

設 $x>0$，我們定義 $\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ ，試回答下列問題：

(a)設 x,y 為兩正數，試證明 $\ln(xy)=\ln x+\ln y$。

(b)利用黎曼和的觀念，證明$\frac{1}{2}<\ln 2<\frac{3}{4}$。

(c)試證明：若 $0<a<b$，則 $\ln a<\ln b$。

(d)定義 e 為滿足$\int_1^e \frac{1}{t}\,dt=1$ 的實數，即 $\ln e=1$，試證明 $2<e<3$。

(已知$\sum_{k=5}^{12}\frac{1}{k}\approx 1.01988>1$)

(2) 若已知$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x},\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$ ，則試導出$\frac{d}{dx}(\log_a^x)$與$\frac{d}{dx}(a^x)$。

(3) 求下列各函數的導函數：

(a)$f(x)=\ln(\cos x)$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$　(b) $f(x)=\exp(x^3+x-1)$　(c) $f(x)=\log_4^{(x^4+1)}$

(d) $f(x)=3^{x^2+1}$　(e) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

(4) 利用對數微分法求下列函數的導函數：

(a)$y=(2x+1)^5(x^4-3)^6$　(b)$y=\sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$　(c)$y=x^{\sin x}$　(d)$y=x^{\frac{1}{x}}$

(5) 求下列不定積分：

(a)$\int\frac{2-x^2}{6x-x^3}dx$　(b) $\int\frac{\cos x}{2+\sin x}dx$　(c) $\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx$　(d)$\int x2^{x^2}dx$

(6) 求下列不定積分：

(a)$\int\cos(\ln x)dx$　(b)$\int x(\ln x)dx$　(c)$\int\sec^3 x\,dx$

(7) 試求下列各定積分之值：

(a)$\int_1^e\frac{\ln x^4}{x}dx$　(b)$\int_0^1 3^{2x}dx$　(c)$\int_0^1 3^{\sin x}\cos x\,dx$　(d)$\int_0^4(\frac{1}{x+1}+2x)dx$　(e)$\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx$

(f)$\int_0^2 3xe^{x^2}dx$　(g)$\int_1^5(e^{x+1}+1)dx$

(8) 試求下列各定積分之值：

(a)$\int_e^{e^2}\frac{dt}{1-t^2}$　(b)$\int_3^5\frac{1}{(x-2)(x+3)}dx$ (c)$\int_1^2\frac{3x+1}{2x^2+3x-2}dx$

(9) (a)試求 $y=\ln 5x$ 在點$(\frac{1}{5},0)$的切線方程式。

(b)設曲線 $y=e^{\sin x}(0\le x\le\frac{\pi}{2})$ 的反曲點為$(a,e^{\sin a})$，則$\sin a=$____。

(10) 常態分布曲線：

在機率統計中有一群曲線 $y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 稱為常態密度函數(normal density function)，它的圖形稱為常態分布曲線，其中μ、σ分別為常態分布的算術平均數與標準差。為了方便討論其圖形，令 $f(x)=e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$，試求下列各小題：

(a)畫出 $f(x)$的圖形，並求出其漸近線、對稱軸與極值、反曲點。

(b)利用平移與伸縮的觀念，去討論 $g(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 的圖形。

並求 $g(x)$的最大值與對稱軸、漸近線。

(11) 設 $g(x)$為 $f(x)=2x+\ln x$ 的反函數，試求 $g'(2)=$？

(12) 設$a>0$，令 R 表示由 x 軸、y 軸，直線 $x=a$，以及曲線 $y=\frac{1}{x+1}$所圍成之區域。試求

(a)R 繞 x 軸旋轉。所得旋轉體之體積。

(b)R 繞 y 軸旋轉。所得旋轉體之體積。

(13) 試求 $y=e^{-x^2}$，直線 $y=0$、$x=0$ 與 $x=1$ 所圍成的區域繞 y 軸旋轉所形成的旋轉體體積。

(14) 試證：不論 x 是任何正數，$1-\frac{1}{x}\le\ln x\le x-1$都成立。

(15) 試求曲線 $y=\ln(x^3-7)$上以(2,0)為切點的切線方程式。

(16) (a)設 r 為大於 1 的正數，試證：$(1-x)^r>1-rx$ 對每一個小於 1 但不為 0 的 x 都成立。

(b)利用(a)證明：若$-1<b<a<0$，則$(1+b)^{\frac{1}{b}}>(1+a)^{\frac{1}{a}}$。

(17) 試討論 $y=\frac{\ln x}{x^2}$ 的增減情形，並求其極值。

(18) 一放射性元素的樣本在 10 年內衰變了 80%，則此放射性元素之半衰期為何？

(19) 設 $f(x)=xe^x$，

(a)試求 $f'(x), f''(x), f'''(x)$。

(b)試由(1)推測 $f^{(n)}(x)$，並利用數學歸納法證明之。

(20) 設函數 $F(x)=\int_0^x t\sin t\,dt$ 。考慮此$(0,\frac{7\pi}{2})$內

(a)已知 $x=x_0$ 時 $F(x)$有最小值，則 x_0 爲　(A)π (B)$\frac{3\pi}{2}$ (C)2π (D)$\frac{5\pi}{2}$ (E)3π

(b)此函數在開區間$(0,\frac{7\pi}{2})$內有多少個反曲點？

(A)0 個(B) 1 個(C) 2 個(D) 3 個(E) 4 個

(21) 設 $z=\dfrac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}$ 的實部爲 $\Re(z)$ ，則$|z|$=______ ，$\int_0^{\pi}\Re(z)\,d\theta$=_____ 。

(22) 警方在早上 7：00 發現一具屍體，法醫測得屍體的溫度是 23.1°C，屍體所在房間的溫度是 12.1°C。兩個小時之後他又測了一次，屍體的溫度是 17.6°C。由此法醫根據牛頓冷卻定律可以得知這個人的死亡時間是何時？

(23) 中國學者在長沙市馬王堆漢朝墓地於 1972 年出土，考古學家測得同時出土的木炭標本的 C^{14} 原子衰變爲每分鐘 29.78，而考古學家在測得新燒成的木炭的 C^{14} 原子衰變爲每分鐘 38.37 次，試估計該墓地建成的年代。
(C^{14} 的半衰期爲 5730 年)

(24) 在某一個封閉的社區中，一則謠言經過 t 時之後，社區中會有 $p(t)$%的人會聽聞這則謠言，其中 $p(t)=\dfrac{1}{1+ae^{-kt}}$ ，而 a,k 都是正的常數。

(a)試求 $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)$。

(b)試求謠言傳播的速率。

(c)當 $a=10$，$k=0.5$ 時，請畫出 $p(t)$的圖形；並利用圖形估計社區中 80%的人聽過謠言的時間大概是多少小時之後。(可以使用電腦軟體)

進階問題

(25) 計算 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ ，$n=0,1,2,..$

(a)請利用分部積分法求出遞迴式 $I_n=\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$。

(b)$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}$，$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$。

(c)請計算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx=$？

(26) 設 $I_n(x)=\int_0^x \dfrac{t^n}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt$　($a>0$，n 爲自然數)

證明當 $x\geq 2$ 時，$nI_n(x)=x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2}-(n-1)a^2 I_{n-2}(x)$。

(27) (a)設 k 爲自然數，證明：$\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$。 (考慮 $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$ 的幾何意義)

(b)利用(a)推導出 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}<\ln(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，並藉此解釋 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 爲發散級數。

(28) 藉由面積的比較大小證明：

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<\ln n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}$。

(29) 設曲線 $y=mx$ 與 $y=\frac{x}{x^2+1}$ 會有兩個交點，

(a)試求 m 的範圍。

(c)試求曲線 $y=mx$ 與 $y=\frac{x}{x^2+1}$ 所圍成的區域面積。

(30) k 爲定數，函數 $f(x)=ax^2$ 與函數 $g(x)=\ln x$ 在 P 點處有共同的切線，

(1)試求 a 的值。

(2)試求由兩函數圖形、x 軸所圍成的區域面積。

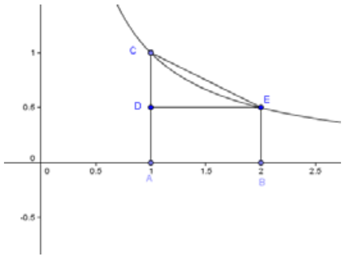
(31) 試求常數λ使得 $y=e^{\lambda x}$ 滿足 $y+y'=y''$。

綜合練習解答

(1) (a) $\ln(xy)=\int_1^{xy}\frac{1}{t}\,dt=\int_1^{x}\frac{1}{t}\,dt+\int_x^{xy}\frac{1}{t}\,dt=\int_1^{x}\frac{1}{t}\,dt+\int_1^{y}\frac{1}{u}\,du$ (令 $u=\frac{t}{x}$)$=\ln x+\ln y$

(b)根據圖形即可得證：

$\frac{1}{2}\cdot 1<\int_1^{2}\frac{1}{t}\,dt<\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})\cdot 1$



(c)可以分段討論 $0<a<1<b$，$0<a<b<1$，$1<a<b$ 的情形。

(d)根據(b)(c)的結果，只要證明 $\ln 3>1$ 即可

考慮平分[1,3]為 8 等份的下和 $L_8=\sum_{k=5}^{12}\frac{1}{k}>1$

(2) ∵ $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$，∴ $\frac{d}{dx}(\log_a^x)=\frac{d}{dx}(\frac{\ln x}{\ln a})=\frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$。

∵ $a^x=e^{x\ln a}$，∴ $\frac{d}{dx}(a^x)=\frac{d}{dx}(e^{x\ln a})=e^{x\ln a}\cdot\frac{d}{dx}(x\ln a)=a^x\cdot\ln a$。

(3) (a)$f'(x)=-\tan x$ (b)$f'(x)=(3x^2+1)\exp(x^3+x-1)$ (c) $f'(x)=\frac{2x^3}{\ln 2\cdot(x^4+1)}$

(d) $f'(x)=(2\ln 3)x\cdot 3^{x^2+1}$ (e)$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(4) (a)$y'=(2x+1)^5(x^4-3)^6(\frac{10}{2x+1}-\frac{24x^3}{x^4-3})$ (b)$y'=\frac{x}{2}(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{4}}(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1})$

(c)$y'=\sin x\ln x(\cos\ln x+\frac{\sin x}{x})$ (d)$y'=x^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\ln x)$

(5) (a)$\frac{1}{3}\ln|6x-x^3|+C$ (b)$\ln(2+\sin x)+C$ (c)$\frac{1}{3}(\ln x)^3+C$ (d)$\frac{1}{\ln 2}(\frac{2^{x^2}}{2})$

(6) (a)$\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C$ (b)$\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$

(c)$\frac{1}{2}[\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|]+C$

(7) (a)2 (b)$\frac{4}{\ln 3}$ (c) $\frac{1}{3}(e-1)$(d)$16+\ln 5$ (e)$\ln 5$(f)$\frac{3}{2}(e^4-1)$ (g)e^6-e^2+4

(8) (a)$\frac{1}{2}\ln\frac{(e+1)^2}{e^2+1}$ (b)$\frac{1}{5}\ln\frac{9}{4}$ (c)$\ln\frac{4}{\sqrt{3}}$

(9) (a)$5x-y-1=0$(b)$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

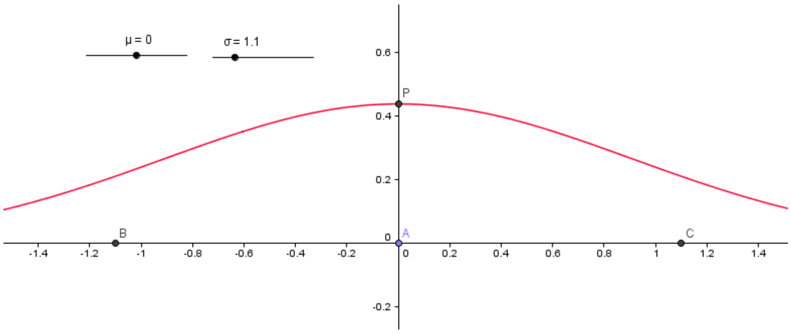
(10) (a)漸近線：$y=0$，對稱軸：$x=0$；最大值(極大值)$=f(0)=1$，

反曲點$(\sigma,e^{\frac{-1}{2}})$、$(-\sigma,e^{\frac{-1}{2}})$

(b)設Γ與Γ'分別代表 $y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 與 $y=e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$ 的圖形

$\Gamma'\xrightarrow{\text{水平平移}\mu}y=e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 的圖形 $\xrightarrow{\text{鉛直伸縮}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\text{倍}}\Gamma$。

最大值 $g(\mu)$，對稱軸 $x=\mu$、漸近線 $y=0$



上圖是$\mu=0$、$\sigma=1.1$ 的部分圖形

(11) $\frac{1}{3}$

[解法：$f(g(x))=x \Rightarrow f'(g(x))g'(x)=1 \Rightarrow f'(g(2))g'(2)=1 \Rightarrow f(g(2))=2 \Rightarrow g(2)=1$

$\Rightarrow f'(x)=2+\frac{1}{x}$ $\Rightarrow f'(1)=3$ 故 $g'(2)=\frac{1}{3}$。]

(12) (a)$\frac{\pi a}{1+a}$(b)$2a\pi-2\pi\ln(1+a)$

(13) $\pi(1-\frac{1}{e})$ [提示：體積$=2\pi\int_0^1 xe^{-x^2}dx$。]

(14) 略

(15) $y=12(x-2)$

(16) (a)令 $f(x)=(1-x)^r-(1-rx)$，$(x<1$，$x\neq0)$

$f'(x)=r(1-x)^{r-1}(-1)+r=r[1-(1-x)^{r-1}]$，$0<x<1 \Rightarrow f'(x)>0$；$x<0 \Rightarrow f'(x)<0$，

可以證明出 $f(x)>f(0)$。

(b) $(1+b)^{\frac{1}{b}}>(1+a)^{\frac{1}{a}} \Leftrightarrow (1+b)<(1+a)^{\frac{b}{a}} \Leftrightarrow [1-(-a)\frac{b}{a}]<[1-(-a)]^{\frac{b}{a}}$

令 $r=\frac{b}{a}>1$，$0<x=-a<1$，再根據(a)的證明。

(17) 當 $0<x<\sqrt{e}$ 時為增函數，當 $x>\sqrt{e}$ 時為減函數；極大值$\frac{1}{2e}$。

(18) $10\cdot\log_5 2$ 年

(19) (a)$f'(x)=(x+1)e^x$，$f''(x)=(x+2)e^x$，$f'''(x)=(x+3)e^x$

(b) 利用數學歸納法證明 $f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$。

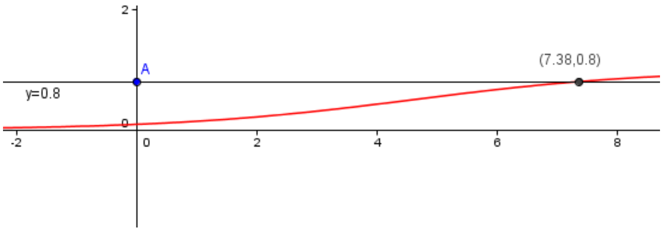
(20) (a) (C) (b)(D)

(21) 1 ,2

(22) 約發現屍體的 2.36 小時前

(23) $\frac{5730}{\ln2}\ln\frac{29.78}{38.37}$ (約 2085)年

(24) (a)1 (b)$p'(t)=\frac{ake^{-kt}}{(1+ae^{-kt})^2}$ (c)約 7.38 小時



(25)　(a)$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,d(-\cos x)$

$=-\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x\,dx$

$=0+(n-1)[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx]=(n-1)(I_{n-2}+I_n)$

(b)$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$，$n=2,3,4\ldots$，因為 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$

所以 $I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}=\frac{2n}{2n+1}\ \frac{2n-2}{2n-1}\ I_{2n-3}=\ldots=\frac{2n}{2n+1}.\frac{2n-2}{2n-1}.\ldots.\frac{2}{3}$

同理可得 $I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}.\frac{2n-3}{2n-2}.\ldots.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$。

(c)$\frac{8}{15}$

(26)　令 $y=\sqrt{t^2+a^2}$　$\frac{dy}{dt}=t(t^2+a^2)^{\frac{-1}{2}}$

$\Rightarrow I_n(x)=\int_a^{\sqrt{x^2+a^2}}t^{n-1}dy=t^{n-1}\sqrt{t^2+a^2}\Big|_0^x-\int_0^x\sqrt{t^2+a^2}(n-1)t^{n-2}dt$。

(27)　(a)利用區間$[k,k+1]$的上矩形與下矩形的概念，即可得證.

(b)令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，由(a)可以得知 $\ln(n+1)<S_n$，而且當 n 愈大，$\ln(n+1)$要多大就多大，故 S_n 要多大就多大，故$\langle S_n\rangle$發散。

(28)　將$[1,n]$分成 n 等份，再考慮$\int_1^n\frac{1}{x}dx$的上和 U_n 與下和 L_n。

(29)　(a)$0<m<1$　(b)$m-1-\ln m$

[提示：$y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$　$\therefore y'(0)=1$，故 $0<m<1$ 時，兩曲線會有二交點。

$\because$兩交點分別為$(0,0)$、$(\sqrt{\frac{1-m}{m}},\sqrt{m(1-m)})$，

因此面積$=\int_0^{\sqrt{\frac{1-m}{m}}}(\frac{x}{1+x^2}-mx)dx=m-1-\ln m$。]

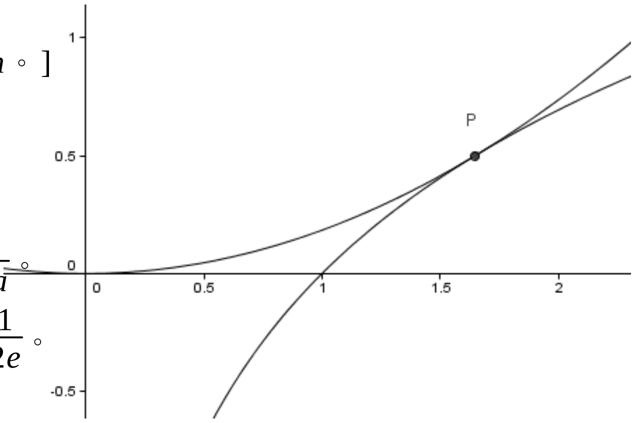
(30)　[解法]：

(1)設 $P(t,\ln t)$，依題意：

$at^2=\log t\ldots.(*)$

又 $f'(x)=2ax$，$g'(x)=\frac{1}{x}$　$\Rightarrow 2at=\frac{1}{t}$　$\Rightarrow t^2=\frac{1}{2a}$。

$t>0$，$t=\frac{1}{\sqrt{2a}}$代入$(*)\Rightarrow a\cdot\frac{1}{2a}=\log\frac{1}{\sqrt{2a}}$　$\Rightarrow a=\frac{1}{2e}$。



(2)

因爲 P($\sqrt{e}$,$\frac{1}{2}$)，

故面積=$\int_0^{\sqrt{e}} ax^2dx-\int_1^{\sqrt{e}}(\ln x)dx=\frac{2}{3}\sqrt{e}-1$。

(31) $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

補充教材—數學模型與常微分方程初步

函數的導數代表變化率，許多我們想要研究的自然現象都與變化率有關，因此許多現象的規律都可以用函數與其導函數的關係來描述。

以自由落體爲例，物體在落下的過程中受到空氣阻力與物體落下的速度成正比，因此作用在物體上的力爲 F=$mg-kv$

由 Newton 第二運動定律 F=ma 或 F=$\frac{d(mv)}{dt}=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d^2S}{dt}$

根據上面的結果，可以得到：

物體速度與導函數間的關係：$m\frac{dv}{dt}+kv=mg$ ……………………………..(A)

物體位移與其導函數的關係：$m\frac{d^2S}{dt}+k\frac{dS}{dt}=mg$……………………………(B)

上述的這些關係式稱爲**微分方程**，建立數學模型，求解微分方程已經成爲認識客觀世界的重要手段，尤其是近 50 年來，微方方程愈來愈多出現在生物學、經濟學及社會科學的領域中。在微分方程中，如果涉及的函數都是一元函數，則稱爲**常微分方程**。

(甲)常微分方程的基本概念

含有未知函數導函數的方程式中，未知函數本身是否出現反而不是很重要，在常微分方程中要注意分清自變量和因變量，例如(A)(B)中自變量均爲時間 t，而(A)的因變量爲速度，(B)的因變量爲位移。在方程式中出現的導函數之最高階數稱爲常微方方程的階(order)，因此(A)爲一階常微方方程，(B)爲二階常微分方程。

[例題1] 證明函數 $y=e^{-2x}+1$ 滿足常微分方程$\frac{dy}{dx}+2y=2$。

[證明]：

$\frac{dy}{dx}+2y=-2e^{-2x}+2(e^{-2x}+1)=2$

我們還可以驗證出 $y=Ce^{-2x}+1$ (其中 C 爲常數)都滿足常微分方程$\frac{dy}{dx}+2y=2$

一般而言，若函數 $f(x)$與其導函數代入常微分方程後使得等號兩側恆成立，這個函數稱爲常微方方程的解。常微分方程的解都是函數，解的圖形稱爲積分曲線。

例題一中，函數 $y=Ce^{-2x}+1$ 都是常微分方程$\frac{dy}{dx}+2y=2$ 的解。常微方方程不含任何常數的解稱爲**特解**(particular solution)，含有互相獨立的任意常數，而且常數個數等於常微分方程的階數的解稱爲**一般解或通解**(general solution)。

例題一中，$y=e^{-2x}+1$ 稱爲$\frac{dy}{dx}+2y=2$ 的特解，而 $y=Ce^{-2x}+1$ 則是$\frac{dy}{dx}+2y=2$ 的通解，當常數 C 遍取實數時，可以將$\frac{dy}{dx}+2y=2$ 的所有解都表示出來。

許多問題要尋找某一特定條件的解，此時選定的附加條件可以用來確定通解中的常數所要取的值，這類的條件稱為初始條件(initial condition)，這種具有附加條件的常微分方程稱為初始值問題(initial-value problem)。

[例題2] (1)證明 $y=\dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$ 為微方方程式 $y'=\dfrac{1}{2}(y^2-1)$的解。

(2)請求出初始值問題$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{2}(y^2-1) \\ y(0)=2 \end{cases}$的解。Ans：(2)$y=\dfrac{3+e^t}{3-e^t}$

(乙)常微分方程與數學模型

接下來先介紹幾個基本重要的與常微分方程有關的數學模型：

◆ 指數增長與衰變模式

自然界中許多量的變化率與量的大小成一定的比率，例如細菌的繁殖、放射性元素的質量等。

例一：(Malthus 人口模型)

Malthus 於 1798 年根據 100 多年的人口統計資料，提出一個對於人口數的數學模型：「**人口增長的速度與當時的人口數目成正比**」，雖然人口數本身是離散的，但是數量很大時而且時間比較長的情形下，可以將時間 t 年的人口數 $P(t)$視為連續可微的函數。

根據模型可以得知： $\dfrac{dP(t)}{dt} = kP(t)$，其中 $k>0$。

例二：(元素衰變模型)

英國物理學家 E.Rutherford 因對元素衰變的研究獲得 1908 年的諾貝爾化學獎。

他發現在「任意時刻 t，物質的放射性與該物質當時的原子數 $N(t)$成正比」。

根據這個理論，可以得知$\dfrac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$，其中$\lambda>0$ 稱為衰變常數。

為了描述元素衰變的快慢，物理上引進了半衰期的概念，表示放射性元素的原子核有半數發生衰變的時間，記為τ。

[例題3] 牛頓冷卻定律(Newton's Law of Cooling)：
物體溫度的變率(冷卻貨加熱)跟物體溫度與周圍的溫度之差成正比。
設整個大環境的溫度大致不改變爲 T_0，物體在時間 t 時的溫度爲 $T(t)$，一開始物體的溫度爲 T_0，試寫出能夠描述上述定律的初始値問題。

[例題4] 學習曲線
心理學家通常會對於某人學習一項技能的學習曲線感到興趣。
設 $P(t)$代表某人在時間 t 時學習某項技能的成效，
而$\frac{dP}{dt}$則代表技能學習成效改進的速度。
(1)你認爲何時 $P(t)$增加得最快？
(2)你認爲當 t 增加時，$\frac{dP}{dt}$會如何？
(3)若 M 代表學習此項技能成效的極限，如何解釋下列微分方程：
$\frac{dP}{dt}=k(M-P)$，$k>0$
(4)畫一個簡單的圖形來描述(3)的解。

◆ Logistic 模式

例三：(人口阻滯增長模型)

例一中提到的 Malthus 人口成長模式，其實是一種很理想的情形，由於地球的資源視有限的，生物族群的數量不會一直無限制的成長，因此這個模型需要被改善。實際上來說，當人口數很少的時候，而且環境與資源都適合人類生長，人口會迅速以指數的增長，但是隨著當人口接近一個容許量 K 時，人口增加的速度會減緩，最後會人口會接近容許量 K，上面的描述，若是用微分方程來表示的話，可以表成：

若 $P(t)$很小時 $\frac{dP(t)}{dt}\approx kP(t)$ (即一開始，成長的速度與人口數成正比)

若 $P(t)$欲接近 K，$\frac{dP(t)}{dt}$愈小(即人口數欲接近 K，人口成長的速度趨緩。)

若 $P(t)>K$，$\frac{dP(t)}{dt}<0$(即人口數超過 K 之後，人口負成長。

1840 年代荷蘭的生物數學家 Pierre-Francois Verhulst 提出一個數學模型，來解釋上述的現象：$\frac{dP(t)}{dt}=kP(t)(1-\frac{P(t)}{K})$

上述的方程式稱為 Logistic 方程式。

[例題5] 解讀 $\frac{dP(t)}{dt}=kP(t)(1-\frac{P(t)}{K})$

(1)當 $P(0)<K$，接下來一段時間，人口是正成長或是負成長？
(2)當 $P(t_1)>K$，接下來一段時間，人口是正成長或是負成長？
(3)當 $P(t)$很接近 K 時，對於人口的成長率會有何影響呢？

(練習1) 函數 $y(t)$滿足 $\frac{dy}{dt}=y^4-6y^3+5y^2$

(1)若 $y(t)=k$，k 為常數，$k=$？
(2)當 y 在哪個範圍內時，y 會是上升的？
(3)當 y 在哪個範圍內時，y 會是下降的？
Ans：(1)$k=0$、1、5　(2)$y>5$ 或 $y<1$　(3)$1<y<5$

(練習2) 時間 t 時，某地區的人口為 $P(t)$，且滿足$\frac{dP}{dt}=1.2P(1-\frac{P}{4200})$

(1)當 P 在哪個範圍內時，人口數是上升的？
(2)當 P 在哪個範圍內時，人口數是下降的？
(3)請問平衡的狀態的解為何？
Ans：(1)$0<P<4200$　(2)$P>4200$　(3)$P=0$ 或 $P=4200$

(丙)特殊類型常微分方程的解法

接下來我們介紹一些簡單的常微分方程的解法：

◆ 一階線性常微分方程

若方程式經過整理之後可以化成以下的形式：

$\frac{dy}{dx}+Py=Q$，其中 P、Q 均為 x 的函數

則稱為**一階線性常微分方程**。當 $Q(x)=0$ 時，則稱為**一階線性齊次常微分方程**。

(1) $\dfrac{dy}{dx}=ky$ (k 爲常數)

[法一]：(分離變量法)

$\dfrac{dy}{dx}=ky \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y}=kdx \Leftrightarrow \int\dfrac{dy}{y}=\int kdx \Leftrightarrow \ln|y|=kx+C$

$|y(x)|=e^{kx+C}=e^{C}e^{kx}$，去掉絕對值之後，正負號轉移到常數上，因此一般解爲

$y(x)=Ce^{kx}$，C 爲常數。

[法二]：(積分因子法)

等號兩邊同乘 e^{-kx}

$e^{-kx}\dfrac{dy}{dx}=e^{-kx}(ky) \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx}(e^{-kx}y)=-k\,e^{-kx}y+e^{-kx}\dfrac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow e^{-kx}y=C \Leftrightarrow y(x)=Ce^{kx}$，C 爲常數。

(2) $\dfrac{dy}{dx}+ay=b$ (a,b 爲常數)

[法一]：(分離變量法)

$\dfrac{dy}{dx}=-a(y-\dfrac{b}{a}) \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y-\frac{b}{a}}=-adx \Leftrightarrow \int\dfrac{dy}{y-\frac{b}{a}}=\int -a\,dx \Leftrightarrow \ln|y-\dfrac{b}{a}|=-ax+c$

$\Leftrightarrow |y-\dfrac{b}{a}|=e^{c}\cdot e^{-ax} \Leftrightarrow y=Ce^{-ax}+\dfrac{b}{a}$ C 爲常數。

[法二]：(積分因子法)

等號兩邊同乘 e^{ax}

$e^{ax}(\dfrac{dy}{dx}+ay)=be^{ax} \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx}(e^{ax}y)=be^{ax} \Leftrightarrow e^{ax}y=\int be^{ax}\,dx \Leftrightarrow e^{ax}y=\dfrac{b}{a}e^{ax}+C$

$\Leftrightarrow y=Ce^{-ax}+\dfrac{b}{a}$ ，C 爲常數。

上式的通解中，$y=\dfrac{b}{a}$爲非齊次方程式$\dfrac{dy}{dx}+ay=b$ 的特解，

而 $y=Ce^{-ax}$ 爲齊次方程式$\dfrac{dy}{dx}+ay=0$ 的一般解。

(3) $\dfrac{dy}{dx}+ay=Q(x)$，其中 a 爲常數

(積分因子法)

等號兩邊同乘 e^{ax}

$e^{ax}(\dfrac{dy}{dx}+ay)=e^{ax}Q(x) \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx}(e^{ax}y)=e^{ax}Q(x) \Leftrightarrow e^{ax}y=\int Q(x)e^{ax}\,dx+C$

$\Leftrightarrow y(x)=Ce^{-ax}+e^{-ax}\int Q(x)e^{ax}\,dx$ 。

上式的通解中，$y(x)=Ce^{-ax}$ 爲齊次方程式 $\frac{dy}{dx}+ay=0$ 的一般解。

而 $y(x)=e^{-ax}\int Q(x)e^{ax}\,dx$ 爲非齊次方程式 $\frac{dy}{dx}+ay=Q(x)$的特解。

(4) $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

(積分因子法)

希望等號兩邊同時乘上 $e^{f(x)}$，使得左邊成爲某個函數的導函數

即 $e^{f(x)}\left(\frac{dy}{dx}+P(x)y\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}y\right)\Leftrightarrow e^{f(x)}\left(\frac{dy}{dx}+P(x)y\right)=e^{f(x)}\frac{dy}{dx}+e^{f(x)}f'(x)\,y$

故 $f'(x)=P(x)$ ，即 $f(x)=\int P(x)dx$

因此取 $f(x)=\int P(x)dx$ ，等號兩邊同時乘上 $e^{f(x)}$

$e^{f(x)}\left(\frac{dy}{dx}+P(x)y\right)=e^{f(x)}Q(x)\quad\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}y\right)=e^{f(x)}Q(x)\quad\Leftrightarrow e^{f(x)}y=\int e^{f(x)}Q(x)dx+C$

$y(x)=Ce^{-f(x)}+e^{-f(x)}\int e^{f(x)}Q(x)dx$ ，其中 C 爲常數，$f(x)=\int P(x)dx$

[例題6] 試求 Malthus 人口模型：$\frac{dP(t)}{dt}=kP(t)$，其中 $k>0$，的解。

[例題7] (C^{14} 年齡測定法)

馬王堆一號墓於 1792 年出土，專家測得同時出土的木炭標本的 C^{14} 原子衰變爲每分鐘 29.78 次，而當時新燒成的木炭的 C^{14} 原子衰變爲每分鐘 38.37 次，試估計該墓建成的年代。Ans：約 2085 年前

[例題8] 鑑識人員在早晨 0700 發先一具屍體，測得屍體的溫度是 23.1°C，屍體所在的房間的溫度爲 12.1°C。兩小時後又測得屍體的溫度爲 17.6°C。試利用牛頓冷卻定律估計此人死亡的時間。　Ans：約早晨 0440

[例題9] 在例題 8 中，若考慮房間的溫度是遞增的，設房間的溫度變化用 $T^*(t)=12.1e^{0.05t}$ 近似來表示，儘管變化不大，於是鑑識人員修改了模型，

(1)試問新的模型爲何？

(2)利用新的模型來估計此人死亡的時間。

Ans：(1) $\begin{cases} \dfrac{dT}{dt}=-k(T-12.1e^{0.05t}) \\ T(0)=23.1 \end{cases}$　(2) 約早晨 0454

(練習3) 藥丸的溶解

高血壓病人服用的一種球形藥丸在胃裡溶解時，直徑的變化率與表面積成正比。藥丸最初的直徑是 0.50cm。在實驗室中作實驗時測得：藥丸進入胃裡 2 分鐘後的直徑是 0.36cm，

(1)設藥丸進入胃部 t 分鐘後的直徑爲 $y(t)$cm，試求 $y(t)$。

(2)試問在多長的時間後藥丸的直徑小於 0.02cm？

Ans：(1) $y(t)=\dfrac{1}{2-0.1238\pi t}$　(2)123 分後

(練習4) 實驗證實化學反應：$N_2O_5\rightarrow 2NO_2+\frac{1}{2}O_2$ 在 45°C 時，N_2O_5 濃度減少的速度正比於當時 N_2O_5 的濃度。即 $\dfrac{d[N_2O_5]}{dt}=-0.0005[N_2O_5]$

(1)若一開始 $[N_2O_5]=C$，試問 t 秒之後，N_2O_5 的濃度爲何？

(2)經過多久的時間，N_2O_5的濃度會減少到原先的 90%？

Ans：(1)$Ce^{-0.0005t}$　(2)約 211 秒

(練習5)　一杯冷飲從冰箱中拿出來，一開始的溫度為 5°C，室內當時的溫度為 20°C，25 分鐘後冷飲的溫度上升到 10°C。

(1)試問經過 50 分鐘後，飲料的溫度為何？

(2)何時飲料的溫度會到達 15°C？

Ans：(1)13.33°C　(2)67.72 分

(練習6)　鹽水稀釋問題

將 20kg 的鹽放入裝有 5000L 水的容器中，然後將濃度 0.03kg/L 的鹽水以 25L/min 的速度注入容器中，若注入的鹽水充分混合，而且以容器再以 25L/min 的速度排出鹽水。

(1)設經過 t 分鐘後，鹽有 $y(t)$kg，試寫出滿足上述條件的微分方程式。

(2)試問經過 30 分鐘之後，容器內有多少 kg 的鹽？

Ans：(1)$\frac{dy}{dt}=0.75-\frac{y}{200}$　(2)$y(t)=150-130\,e^{\frac{-t}{120}}$，$y(30)\approx 38.1$Kg

◆　可分離變數的常微分方程

(1)$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

(分離變量法)

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{g(y)}dy=f(x)\,dx\quad\Leftrightarrow\quad\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)\,dx$$

一般而言，即使等號左側的積分能積分出來，方程式的解一般來說也不一定能寫出明確的表達式，在解題過程中應留意是否遺漏了特解 $g(y)=0$。

[例題10] 試求$\frac{dP}{dt}=kP(1-\frac{P}{K})$的解。

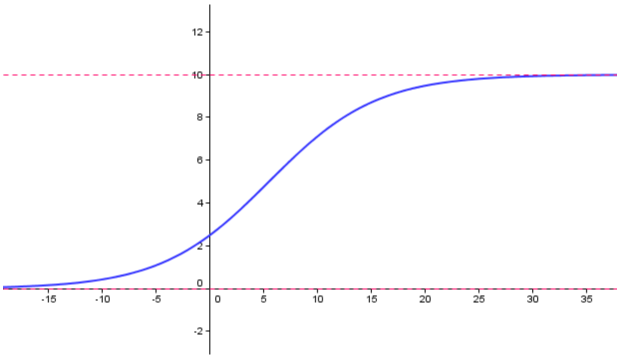
Ans：$P(t)=\frac{K}{1+Ce^{-kt}}$。

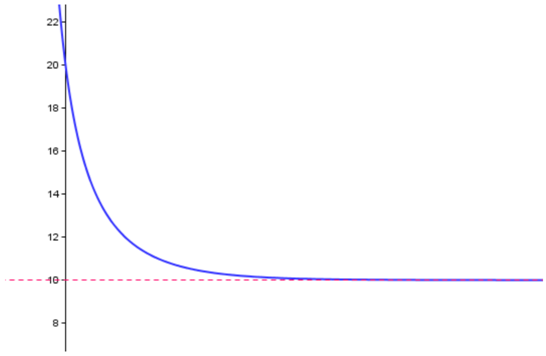
例題 10 中，

若初始條件 P(0)=2.5，k=0.2，K=10 時，解爲 $P(t)=\dfrac{10}{1+3e^{-0.2t}}$

若初始條件 P(0)=20，k=0.2，K=10 時，解爲 $P(t)=\dfrac{10}{1-0.5e^{-0.2t}}$，

上述兩個解的圖形如下：





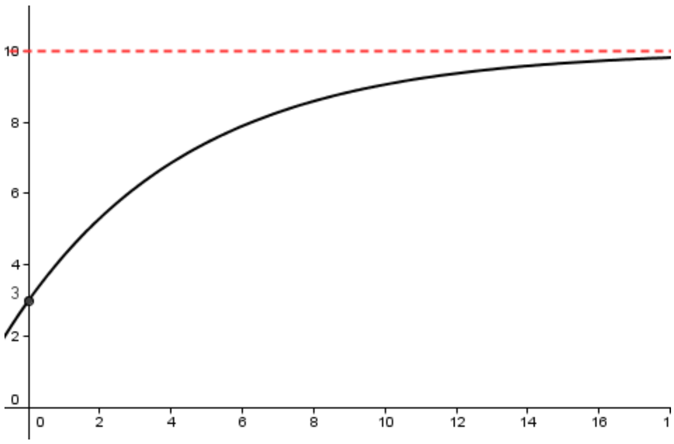
上述圖形中，可以得知：
若 P(0)<K，一開始人口增加的速度比較大，隨著人口的增加，人口增加的速度趨緩；
若 P(0)>K，一開始人口減少的速度比較大，隨著人口的減少，人口減少的速度趨緩。

另一方面，$\lim\limits_{t\to\infty} P(t)=10$，這表示經過長時間之後，不管一開始的人口數爲何，人口數會趨於穩定。

[例題11] 某一項技能的學習模式爲：$\dfrac{dP}{dt}=k(M-P)$，$k>0$

試求上述方程式的解。　　Ans：$P(t)=M+Ce^{-kt}$，C 爲常數

例題 11 中，當 P(0)=3，M=10，k=0.2，解 $P(t)=10-7e^{-0.2t}$，其圖形如下：



(練習7) 試解出初始問題：$\begin{cases}\dfrac{dP}{dt}=0.08P(1-\dfrac{P}{1000})\\ P(0)=100\end{cases}$ 的解。Ans：P(t)=$\dfrac{1000}{1+9e^{-0.08t}}$

(練習8) 葡萄糖溶液以等速 r 經由靜脈供給到血液中，當葡萄糖供給到血液中時，它會轉變成其它許多物質，因此葡萄糖從血液中流失的速度正比於當時葡萄糖的濃度(設比率為 k)。設時刻 t 時葡萄糖的濃度為 C(t)， 且一開始葡萄糖溶液的濃度為 C_0，

(1)請寫出滿足上述條件的微分方程式。(2)試解出 C(t)。

(3)設 $C_0<\dfrac{r}{k}$，試求 $\lim\limits_{t\to\infty}$C(t)，並解釋之。

Ans：(1)$\begin{cases}\dfrac{dC}{dt}=r-kC\\ C(0)=C_0\end{cases}$ (2)C(t)=($C_0-\dfrac{r}{k})e^{-kt}+\dfrac{r}{k}$

(3) $\lim\limits_{t\to\infty}$C(t)= $\dfrac{r}{k}$，長時間後，葡萄糖的濃度會趨於穩定。

(練習9) 太平洋的大比目魚的漁況，可以用底下的微分方程式來描述：

$$\frac{dy}{dt}=ky(1-\frac{y}{K})，$$

其中 $y(t)$(單位：公斤)表示 t 年後大比目魚的生物質量(所有大比目魚的總質量)，K 約為 8×10^7 公斤，k 約為 0.71

(1)若 $y(0)=2\times10^7$ 公斤，試估計一年後大比目魚的生物質量。

(2)要花多久的時間大比目魚的生物質量才會達到 4×10^7 公斤？

Ans：(1)3.23×10^7Kg (2)約 1.55 年

(練習10) 在基本的化學反應 A+B→C 中，反應速率$\dfrac{d[C]}{dt}$與 A、B 的濃度的乘積成正比，即$\dfrac{d[C]}{dt}=k[A][B]$。

若一開始反應時[A]=a mole/L、[B]=b mole/L，經過 t 秒之後，[C]=$x(t)$ mole/L

(1) 試寫出滿足上述條件的微分方程式。

(2) 若 $a\neq b$，再利用初始條件 $x(0)=0$，試求 $x(t)$。

(3) 若 $a=b$，且已知 20 秒之後，[C]=$\dfrac{a}{2}$，試求 $x(t)$。

Ans：(1)$\dfrac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$ (2)$x(t)=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a-b}{2}[\dfrac{\frac{b}{a}e^{(a-b)kt}+1}{\frac{b}{a}e^{(a-b)kt}+1}]$

(3)$x(t)=a-\dfrac{1}{kt+c}$，$c=\dfrac{2}{a}-20k$

(練習11) 設組織培養的實驗中 A(t)代表 t 時刻時組織形成的面積，M 代表生長完成時組織最後的面積。大部分的細胞分裂都發生在組織的最外圍，且外圍細胞的數目正比於$\sqrt{A(t)}$，因此一個組織生長的速度正比於$\sqrt{A(t)}$ 與 M−A(t)的乘積。

(1)寫出描述組織成長的微分方程式。(2)證明當 A(t)=$\frac{M}{3}$時，組織生長的速度最快。(3)解出 A(t)。

Ans：(1)$\frac{dA}{dt}=k\sqrt{A(t)}\,(M-A)$　(2)略　(3)$A(t)=M(\frac{ce^{\sqrt{M}kt}-1}{ce^{\sqrt{M}kt}+1})^2$，

其中 $c=\frac{\sqrt{M}+\sqrt{A_0}}{\sqrt{M}-\sqrt{A_0}}$，$A(0)=A_0$

(2) $\frac{dy}{dx}=F(\frac{y}{x})$　(齊次型一階常微分方程)

令$\frac{y}{x}=u$，$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$，代入原方程式可以得出可分離變數的常微分方程

$x\frac{du}{dx}+u=F(u) \Leftrightarrow \frac{1}{F(u)-u}du=\frac{1}{x}dx$

$\int\frac{1}{F(u)-u}du=\int\frac{1}{x}dx$

[例題12] 解$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+y^2}{3xy}$。

Ans：$x(\frac{x^2+4y^2}{x^2})^{\frac{3}{8}}=C$,C 爲常數

◆　可降階的二階常微分方程

(1)$y''=f(x)$

此類的解法就是逐次積分即可求得解。

(2)自變量 x 不出現

$F(y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2})=0$

$p(y)=\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx})=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$

故 $F(y,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2})=0$ 可以化成關於 $p(y)$的一階方程式。

(3)自變量 y 不出現

$F(x,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2})=0$，$p(x)=\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$，於是 $F(y,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2})=0$ 可化成關於 $p(x)$的一階方程式。

[例題13] 將質量 m 的火箭自地面發射，初速度 v_0 應該達到多大時，才會使得火箭脫離地球的引力範圍？

(練習12) 解下列初始值問題：

(1)$\begin{cases} y''=2x-\cos x \\ y(0)=1,\ y'(0)=-1 \end{cases}$　(2)$\begin{cases} xy''+(y')^2-y'=0 \\ y(1)=1-\ln 2,\ y'(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

(3)$\begin{cases} y''=3\sqrt{y} \\ y(0)=1,\ y'(0)=2 \end{cases}$

Ans：(1)$y=\dfrac{1}{3}x^3+\cos x-x$　(2)$y=x-\ln(1+x)$　(3)$y=(\dfrac{1}{2}x+1)^4$

(練習13) 求下列方程式的解：

(1)$(1+x^2)y''-2xy'=0$　(2)$y''+\dfrac{2}{1-y}(y')^2=0$

Ans：(1)$y=c_1(x+\dfrac{x^3}{3})+c_2$　(2)$y=\dfrac{1}{c_1x+c_2}+1$

(練習14) 已知曲線 $y=y(x)$滿足 $yy''+(y')^2=1$，且該曲線與 $y=e^{-x}$ 相切於點(0,1)，試求該曲線的方程式。 Ans：$y=1-x$