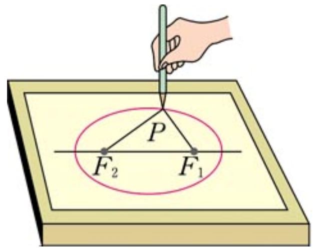
第四十二單元 橢圓

(甲)橢圓的定義與基本性質

(1)定義：



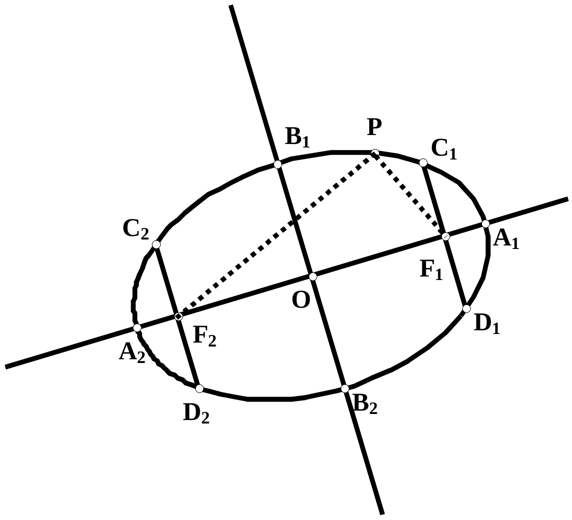
平面上有兩個定點 F_1、F_2，及一定長 $2a$ 且$\overline{F_1F_2}<2a$，則在平面上所有

滿足$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$ 的 P 點所形成的圖形稱爲**橢圓**。

其中 F_1、F_2 稱爲**焦點**。

[討論]：

若 $2a=\overline{F_1F_2}$，則 P 點會形成什麼圖形？



若 $2a<\overline{F_1F_2}$，則 P 點會形成什麼圖形？

(2)橢圓的名詞介紹：

(a)兩焦點連線段的中點稱爲**中心**。

(b)連接兩焦點的直線與橢圓交於 A_1、A_2 兩點，過中心 O 作$\overline{A_1A_2}$之垂線交橢圓

於 B_1、B_2 兩點，A_1、A_2、B_1、B_2 稱爲橢圓的**頂點**。

(c)線段$\overline{A_1A_2}$稱爲**長軸**，線段$\overline{B_1B_2}$ 稱爲**短軸**。

(d)橢圓上任一點與任一焦點的連線段稱爲此橢圓的**焦半徑**(**PF_1、PF_2**)。

(e)橢圓上兩相異點的連線段，稱爲此橢圓的**弦**，過焦點的弦稱爲**焦弦**。

焦弦中與長軸垂直者稱爲**正焦弦**($\overline{C_1D_1}$、$\overline{C_2D_2}$)

(3)橢圓的基本性質：

(1°)長軸兩頂點 A_1 與 A_2 對稱於 O 點，短軸兩頂點 B_1 與 B_2 對稱於 O 點。

長軸長=$2a$，而 ***a* 爲長軸半長**；$\overline{OB_1}$以 b 表示，**短軸長=$2b$**，***b* 稱爲短軸半長**。

[說明]：

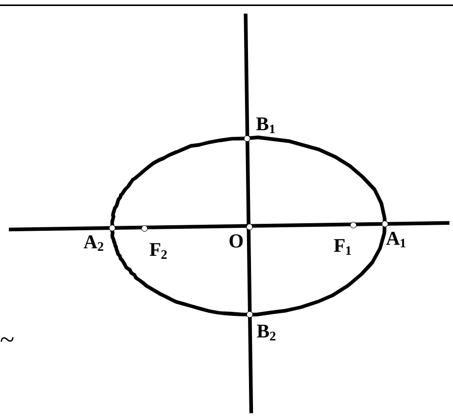
因爲 A_1、A_2 在橢圓上，

所以 $A_1F_1+A_1F_2=2a$，$A_2F_1+A_2F_2=2a$

$\Rightarrow A_1F_1++A_1F_2=A_2F_1+A_2F_2=2a$

$\Rightarrow 2A_1F_1+F_1F_2=2A_2F_2+F_1F_2\Rightarrow A_1F_1=A_2F_2$

因爲 $OF_1=OF_2\Rightarrow OA_1=OA_2$

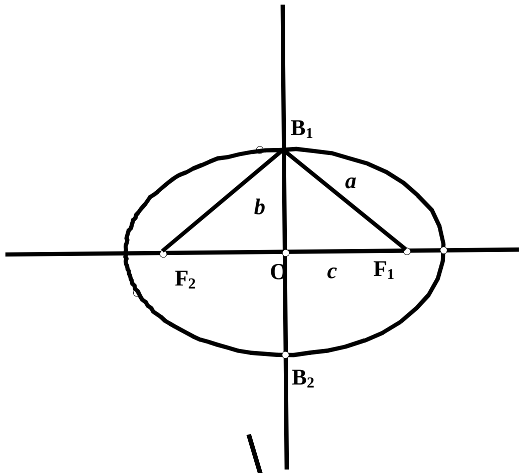


$\Rightarrow A_1A_2=A_1F_1+F_1A_2=A_1F_1+A_1F_2=2a$

故長軸兩頂點 A_1 與 A_2 對稱於 O 點，且長軸長=$2a$。

另外因為 B_1、B_2 對稱於長軸，所以 $OB_1=OB_2$。

故短軸兩頂點 B_1 與 B_2 對稱於 O 點，且短軸長=$2b$。



(2°)若令$\overline{OF_1}=\overline{OF_2}=c$，則 $a^2=b^2+c^2$。

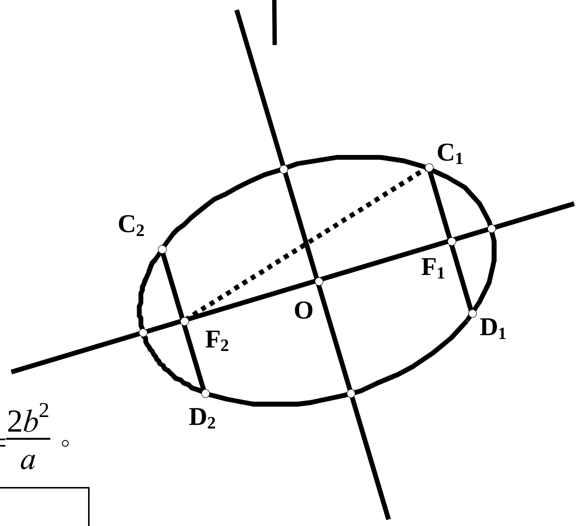
[說明]：

因為 B_1 在橢圓上，所以 $B_1F_1+B_1F_1=2a$，

又 $B_1F_1=B_1F_2=a$(ΔB_1OF_1 與ΔB_1OF_2 相似)，

由直角三角形 B_1OF_1，

可得 $B_1F_1^2=OB_1^2+OF_1^2 \Rightarrow a^2=b^2+c^2$



(3°)橢圓的正焦弦長=$\dfrac{(\text{短軸長}2b)^2}{\text{長軸長}2a}=\dfrac{2b^2}{a}$。

(a 為長軸半長、b 為短軸半長)

[說明]：

令 $C_1F_1=x$，則正焦弦長 $C_1D_1=2x$

因為 C_1 在橢圓上，所以 $C_1F_2=2a-x$

$\Rightarrow x^2+(2c)^2=(2a-x)^2 \Rightarrow x=\dfrac{a^2-c^2}{a}=\dfrac{b^2}{a}\Rightarrow$正焦弦長 $C_1D_1=\dfrac{2b^2}{a}$。

結論：

(1)a,b,c 的意義如下：

a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離=$\frac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

$c=\frac{1}{2}\cdot\overline{F_1F_2}$=中心到焦點之距離。

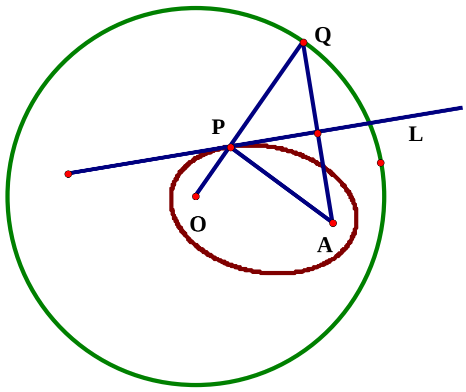
(2)a,b,c 的關係：$a^2=b^2+c^2$

(3) 橢圓的正焦弦長=$\dfrac{(\text{短軸長}2b)^2}{\text{長軸長}2a}=\dfrac{2b^2}{a}$。

(a 為長軸半長、b 為短軸半長)

(4)橢圓的作圖：

已知一圓 O 與圓內部一點 A



step1：在圓上任取一點 Q　　step2：作$\overline{AQ}$的中垂線 L

step3：作 L 與直線 OQ 的交點 P，

則 P 為以 O、A 為焦點的橢圓上的點。

驗證：

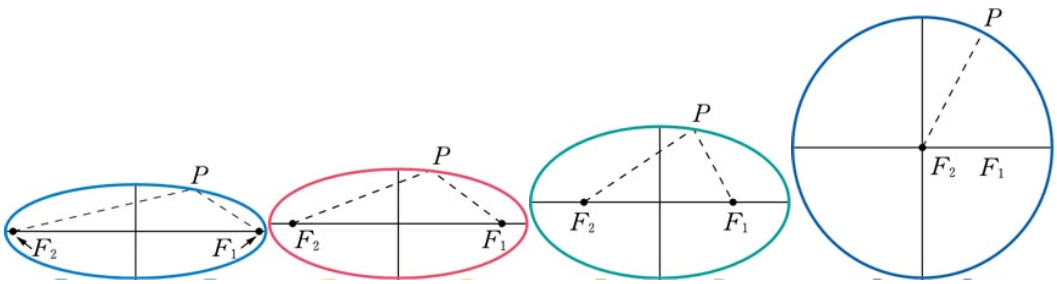
(5)橢圓形狀的變化：

橢圓形狀（較扁或較圓）與比值$\dfrac{\overline{F_1F_2}}{\text{繩長}(2a)}$的大小有關。

令 $2c=\overline{F_1F_2}$，$2a=$繩長，$e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{c}{a}$　$(0<e<1)$，

則 e 愈大，形狀愈扁；e 愈小，形狀愈圓，如下圖所示。

（下圖中，繩長 $2a$ 固定，而$\overline{F_1F_2}$由大而小逐漸改變）



$e=0.82$　$e=0.73$　$e=0.64$　$e=0$

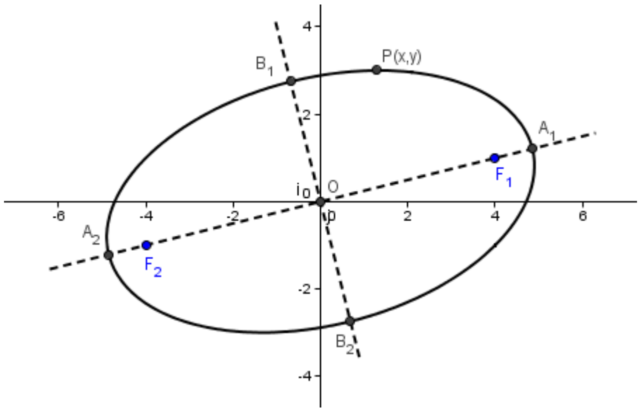
(a)　(b)　(c)　(d)

[例題1] 設橢圓Γ的兩焦點 F_1、F_2，長軸長爲 $2a$，平面上除了橢圓Γ之外，其餘的點可分成兩個部分，包含焦點 F_1、F_2的部分，稱爲橢圓內部，不包含焦點 F_1、F_2的部分，稱爲橢圓外部。試利用橢圓的定義證明：

(1)若 R 點爲橢圓Γ內部的點，則$\overline{RF_1}+\overline{RF_2}<2a$。

(2)若 R 點爲橢圓Γ外部的點，則$\overline{RF_1}+\overline{RF_2}>2a$。

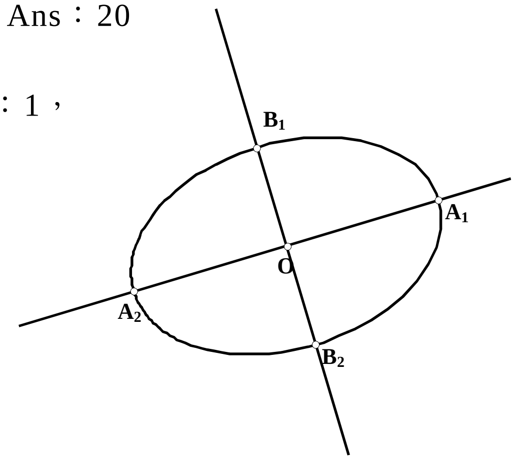
[例題2] 橢圓方程式：$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}=10$，
求(1)焦點(2)中心(3)長軸頂點(4)長軸長(5)短軸長(6)正焦弦長
Ans：(1)(4,1)(−4,−1)(2)(0,0) (3)$(\frac{20}{\sqrt{17}},\frac{5}{\sqrt{17}})$ $(-\frac{20}{\sqrt{17}},-\frac{5}{\sqrt{17}})$ (4)10(5)$2\sqrt{2}$ (6)$\frac{16}{5}$



(練習1) 一橢圓形撞球台，其長軸長為 10，且其兩焦點 F_1、F_2，今有一人從 F_1 將一球依直線方向打至邊上一點 A，反彈過 F_2，撞至邊上另一點 B，再回到原焦點處 F_1，試求ΔABF_1的周長。 Ans：20

(練習2) 假設一個橢圓的長軸長與短軸長之比為 2：1，求此橢圓的短軸長與正焦弦長的比。
Ans：2：1

(練習3) 如右圖，已知橢圓的長軸與短軸的頂點，試利用尺規找出焦點的位置。



(練習4) 已知平面上一橢圓的兩焦點為(6,0)及(0,8)，長軸長為 20，則下列那些敘述是正確的？(A)(3,4)為橢圓的中心 (B)短軸的斜率為$\frac{3}{4}$ (C)(9,−4)為長軸上一個頂點 (D)橢圓與正 x 軸只有一個交點。 Ans：全

(乙)橢圓的標準式

(1)橢圓的標準式：

(a)給定兩個定點 **$F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$，橢圓$\Gamma=\{P|PF_1+PF_2=2a$，$\overline{F_1F_2}<2a\}$**
的方程式為**$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$。$(a^2=b^2+c^2)$**

[證明]：

$(\Rightarrow)$(證明滿足 $PF_1+PF_2=2a$ 的點 $P(x,y)$都是方程式的解)

設 $P(x,y)$滿足 $PF_1+PF_2=2a$，則

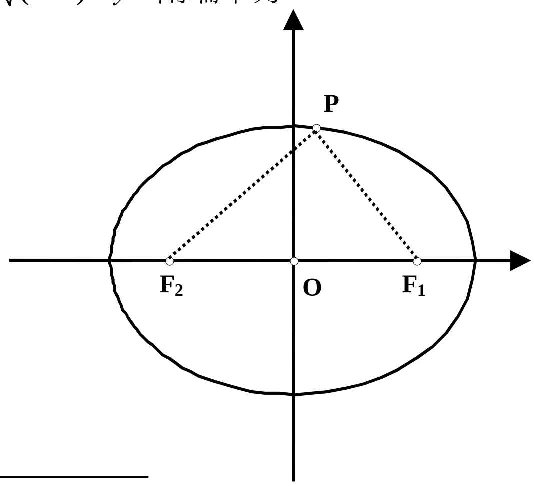
$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$ 移項變成$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ 兩端平方

$\Rightarrow(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$

$\Rightarrow a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$，兩端平方，再化簡可得

$\Rightarrow(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)a^2$

$\Rightarrow\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1\quad\Rightarrow\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



$(\Leftarrow)$(證明方程式的解 $P(x,y)$都滿足 $PF_1+PF_2=2a$)

設點 $P(x,y)$滿足$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，則

$PF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x^2-2cx+c^2)+b^2(1-\dfrac{x^2}{a^2})}=\sqrt{(\dfrac{a^2-b^2}{a^2})x^2-2cx+(b^2+c^2)}$

$=\sqrt{(\dfrac{c}{a}x)^2-2cx+a^2}=\sqrt{(a-\dfrac{c}{a}x)^2}=|a-\dfrac{c}{a}x|\quad(\because b=\sqrt{a^2-c^2})$

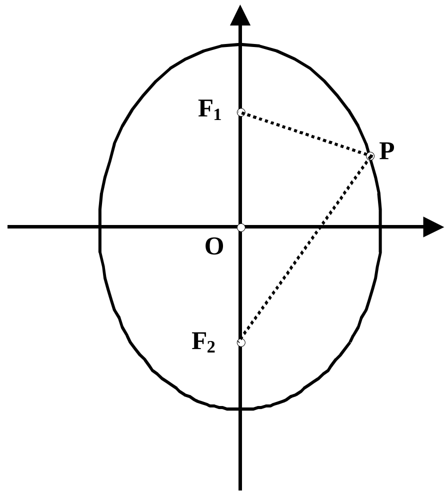
同理可得 $PF_2=|a+\dfrac{c}{a}x|$

由於點 $P(x,y)$滿足$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，所以$\dfrac{x^2}{a^2}\le1\Rightarrow-a\le x\le a$，$-c\le\dfrac{c}{a}\cdot x\le c$

$\Rightarrow a-c\le a-\dfrac{c}{a}x\le a+c$，$a-c\le a+\dfrac{c}{a}x\le a+c$

橢圓兩焦半徑：$PF_1=a-\dfrac{c}{a}x$且 $PF_2=a+\dfrac{c}{a}x$

於是 $PF_1+PF_2=|a-\dfrac{c}{a}x|+|a+\dfrac{c}{a}x|=(a-\dfrac{c}{a}x)+(a+\dfrac{c}{a}x)=2a$。



根據焦半徑的公式：**焦半徑的最大值$=a+c$，最小值$=a-c$。**

結論：橢圓方程式$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$(**橫臥的橢圓**)的特徵：

(1)中心(0,0)

(2)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離=$\frac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

(b)若選取 $F_1(0,c)$、$F_2(0,-c)$，橢圓Γ={P|PF+PF=2a，$\overline{F_1F_2}$ <2a}
的方程式為$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$。($a^2=b^2+c^2$)

結論：橢圓方程式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(**直立的橢圓**)的特徵：

(1)中心(0,0)

(2)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離=$\frac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

(練習5) 求橢圓方程式$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的中心、焦點、長短軸頂點坐標、正焦弦長。

Ans：(0,0)、$(\pm\sqrt{7},0)$、$(\pm4,0)$、$(0,\pm3)$、$\frac{9}{2}$

(練習6) 求橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1$ 的中心、焦點、長短軸頂點坐標、正焦弦長。

Ans：(0,0)、 $(0,\pm\sqrt{3})$、$(0,\pm\sqrt{7})$、$(\pm2,0)$、$\frac{8}{\sqrt{7}}$

(2)平移橢圓標準式：

例子：設橢圓Γ：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 平移一個向量$\vec{l}$=(5,4)後得另一個橢圓Γ′，

試求Γ′的方程式及中心、焦點、長短軸頂點坐標、正焦弦長、長軸長、短軸長。

[解答]：

設點 $P'(x',y')$為橢圓Γ′的任意點，則$\overrightarrow{PP'}=\vec{l}$=(5,4)，其中 $P(x,y)$為橢圓Γ上的點。

$\Rightarrow x'-x=5$，$y'-y=4 \Rightarrow x=x'-5$ 且 $y=y'-4$

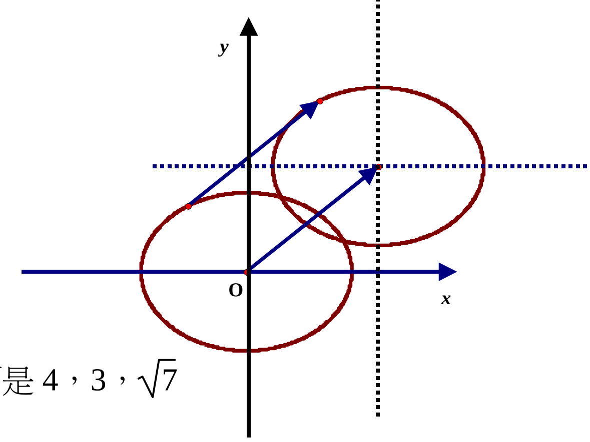
因為 $P(x,y)$為橢圓Γ上的點

$\Rightarrow \frac{(x'-5)^2}{16}+\frac{(y'-4)^2}{9}=1$

所以Γ′的方程式為$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$。

$\Rightarrow a^2=16$，$b^2=9$，$c^2=16-9=7 \Rightarrow a=4$，$b=3$，$c=\sqrt{7}$

即中心到長軸頂點、短軸頂點、焦點的距離分別是 4，3，$\sqrt{7}$



Γ'的中心為(5,4)、焦點$(5\pm\sqrt{7},4)$、長軸頂點(5±4,4)、短軸頂點(5,4±3)、

正焦弦長=$\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{9}{2}$，長軸長=8，短軸長=6。

Γ的中心(0,0)、焦點$(\pm\sqrt{7},0)$、長軸頂點(±4,0)、短軸頂點(0,±3)、

正焦弦長=$\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{9}{2}$，長軸長=8，短軸長=6

比較Γ、Γ'的中心、焦點、長短軸頂點坐標、正焦弦長、長軸長、短軸長，可以得知，點坐標會平移而長度部分不變。

結論：

(1)$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow{\text{沿}\vec{l}=(h,k)\text{平移}} \dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

橢圓方程式$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$(**橫臥的橢圓**)的特徵：

(1°)中心(h,k)

(2°)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離=$\dfrac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

(2) $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1 \xrightarrow{\text{沿}\vec{l}=(h,k)\text{平移}} \dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

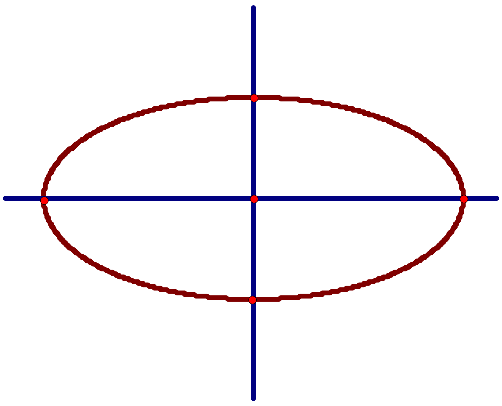
橢圓方程式$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$(**直立的橢圓**)的特徵：

(1°)中心(h,k)

(2°)a=長軸長之半=中心到長軸頂點之距離=$\dfrac{1}{2}(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})$。

b=短軸長之半=中心到短軸頂點之距離。

[例題3] 試求橢圓 $x^2+9y^2+8x+54y+61=0$ 的(1)中心坐標(2)焦點坐標(3)頂點坐標(4)長軸的長(5)短軸的長(6)正焦弦長。Ans：(1)(−4,−3) (2)$(-4+4\sqrt{2},-3)$、$(-4-4\sqrt{2},-3)$ (3)(2,−3)(−10,−3)(−4,−1)(−4,−5)(4)12(5)4(6)$\dfrac{4}{3}$



[例題4] 試求滿足下列諸條件的橢圓方程式：

(1) 中心爲(−3,2)，長軸半長爲 2，短軸半長爲 1，且長軸平行於 x 軸。

(2) 兩焦點爲(−3,−1)與(−3,1)，橢圓上點到兩焦點的距離和 10

(3) 中心在原點，軸爲座標軸，且過(2,3)、(−1,4)。

(4) 長軸在 x=5 上，短軸在 y=1 上，短軸長是長軸長的$\frac{3}{5}$倍，中心到焦點的距離爲 12。

Ans：(1)$\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$ (2) $\frac{(x+3)^2}{24}+\frac{y^2}{25}=1$ (3) $\frac{7x^2}{55}+\frac{3y^2}{55}=1$ (5)$\frac{(x-5)^2}{81}+\frac{(y-1)^2}{225}=1$

[例題5] 已知橢圓Γ_1爲 $\frac{x^2}{k^2+1}+\frac{y^2}{7-k}=1$，試求

(1)若Γ_1的焦點在 x 軸上，則 k 的範圍爲何？

(2)Γ_1與橢圓$\frac{x^2}{90}+\frac{y^2}{24}=1$ 共焦點，則 k 的值爲何？

Ans：(1)$k<-3$ 或 $2<k<7$ (2)-9

[例題6] 描繪下列方程式的圖形：

(1)$y=\sqrt{4-\frac{4}{9}x^2}$ (2)$x=-\sqrt{4-\frac{4}{9}y^2}$

(練習7) 求滿足下列條件的橢圓方程式：
(1)中心在(2,2)，其軸平行於坐標軸，長軸為短軸的三倍，並通過(4,0)，
(2)已知兩焦點為(3,6)與(3,−2)，短軸長為 6
(3) 已知兩焦點$(0,2\sqrt{3})$，$(0,-2\sqrt{3})$，且過點$(\sqrt{3},2)$，求此橢圓方程式。
(4) 有一焦點坐標為 F(−3，2)，短軸一端點為 B(1，−1)，長軸平行 x 軸。
(5) 中心在(1，2)，長軸平行 x 軸，長軸長為短軸長的 3 倍，
且過(4，3)。
Ans：(1)$\frac{(x-2)^2}{40}+\frac{9(y-2)^2}{40}=1$ 或$\frac{9(x-2)^2}{40}+\frac{(y-2)^2}{40}=1(2)\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$
(3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ (4) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ (5) $\frac{(x-1)^2}{18}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$

(練習8) 設點 P 為橢圓 $2x^2+y^2-4x+4y+2=0$ 上任一點，F_1 與 F_2 為其二焦點，
則$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$=__________。Ans：4

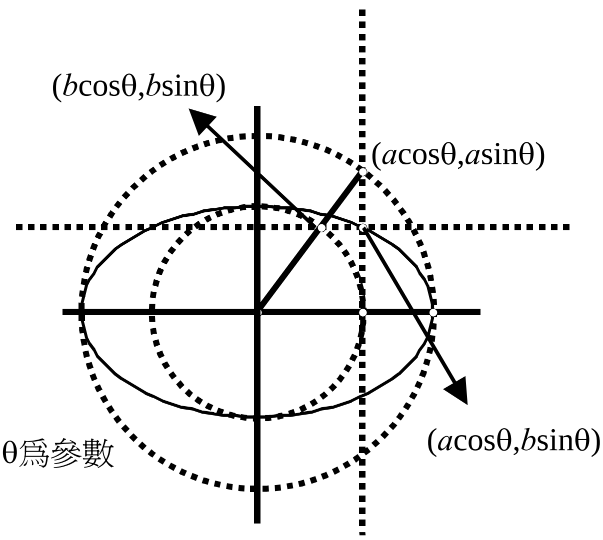
(練習9) 坐標平面上，若$\frac{x^2}{15-k}+\frac{y^2}{24-k}=1$ 表示一個橢圓，
求此橢圓的兩焦點坐標。 Ans：$(0,\pm3)$

(練習10) 某行星繞一恆星之軌道為橢圓，且恆星在其一焦點處。據觀察得知此行星與恆星的最近距離為 100 萬公里，最遠是 300 萬公里，則此橢圓的正焦弦長為_____萬公里。Ans：300

(練習11) 橢圓兩焦點 $F_1(0,6)$、$F_2(0，-6)$，弦$\overline{AB}$過 F_1，ΔABF_2 的周長為 40，請求出此橢圓的方程式為何？Ans：$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

(練習12) 求過點(3,2)，且與$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 共焦點的橢圓方程式。Ans：$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$

(丙)橢圓的參數式



(1)橢圓的參數式：
(a)標準式的橢圓參數式
(1°)圓：$x^2+y^2=r^2$ 上的點 $P(m,n)$
$\Rightarrow m=r\cdot\cos\theta$ ，$n=r\cdot\sin\theta$ 。
圓：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 上的點 $P(m,n)$
$\Rightarrow m=h+r\cos\theta$，$n=k+r\sin\theta$
(2°)橢圓：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的參數式為$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$，θ為參數
[圖形觀點]：如右圖所示

[代數觀點]：

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 可寫成$(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$，並與三角公式$(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=1$ 比較

(b)平移標準式的橢圓參數式

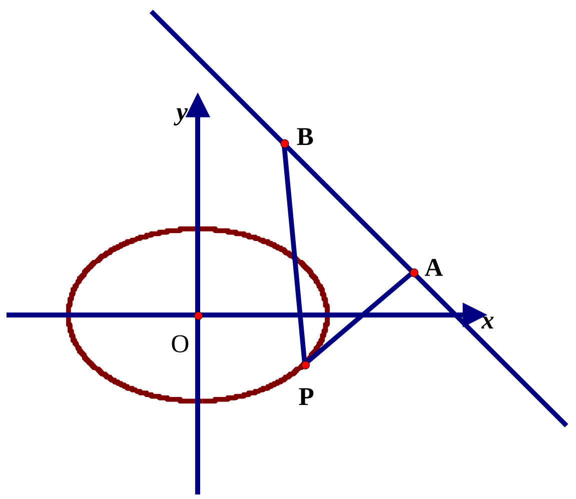
⇒橢圓：$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 的參數式$\begin{cases} x=h+a\cos\theta \\ y=k+b\sin\theta \end{cases}$，θ爲參數

[例題7] 已知橢圓Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$之兩焦點爲 $F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$，其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$

利用橢圓的參數式證明：

(1)$\overline{PF_1}=|a-c\cdot\cos\theta|$　(2)$a-c\le\overline{PF_1}\le a+c$ 並說明等號成立的條件。

[例題8] 設 A(5,1)，B(2,4)，P 是橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的動點，求△ABP 面積的最大值與最小值。Ans：最大值爲$\frac{3}{2}(6+\sqrt{13})$，最小值爲$\frac{3}{2}(6-\sqrt{13})$

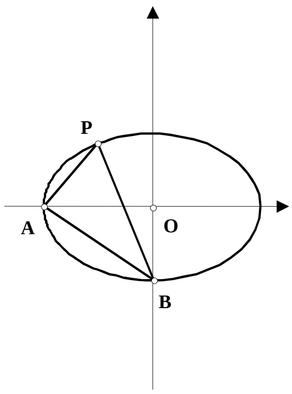


[例題9] 求橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的內接矩形(邊與坐標軸平行)中，
(a)最大面積為＿＿＿＿＿＿＿＿＿，此時其周長為＿＿＿＿＿。
(b)最大周長為＿＿＿＿＿＿＿＿＿，此時其面積為＿＿＿＿＿。
Ans：(1)$2ab,2\sqrt{2}(a+b)$　(2)$4\sqrt{a^2+b^2},\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

(練習13) 在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別為 4、2。如圖所示，通過橢圓的中心 O 且與 x 軸的夾角為 45 度的直線在第一象限跟橢圓相交於 P。則此交點 P 與中心 O 的距離為
(A)1.5 (B)$\sqrt{1.6}$　(C)$\sqrt{2}$　(D)$\sqrt{2.5}$　(E)$\sqrt{3.2}$　。　(B)　(91 學科)

(練習14) 求橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 上任一點 P，到直線 L：$x-2y+10=0$ 的距離之最小值為何？相應的 P 點坐標為何？Ans：$\sqrt{5}$，P($\frac{-9}{5},\frac{8}{5}$)

(練習15) 如右圖，A、B 為橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之兩頂點，其中 a,b 為兩正數，若 P 為第一象限橢圓弧上一點，則ΔABP 的最大面積為何？
Ans：$\frac{\sqrt{2}+1}{2}ab$　(88 大學自)



(練習16) 設橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，A(2,0)，試求 A 點到橢圓上任一點 P 距離的最小值。
Ans：$\frac{9}{\sqrt{5}}$

[**例題**10] (圓與橢圓的關係)

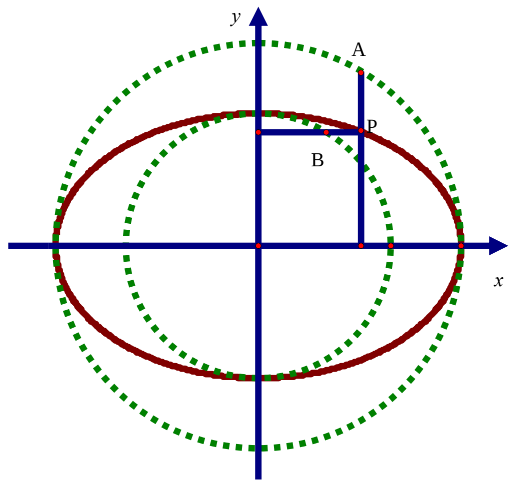
如圖，設橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$、圓 C_1：$x^2+y^2=a^2$、圓 C_2：$x^2+y^2=b^2$ (其中 a,b 均爲正數)，設 $A(x,\sqrt{a^2-x^2})$、$B(\sqrt{b^2-y^2},y)$

(1)試求 P 點的座標。

(2)請利用水平或鉛直伸縮，使得 A 點變換到 P 點。

(3)請利用水平或鉛直伸縮，使得 B 點變換到 P 點。

(4)試利用水平或鉛直伸縮，將Γ變換到 C_1 與 C_2。



Anss：(1)$P(x,\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2})$或 $P(\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},y)$

(2)$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{b}{a}\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}\dfrac{a}{b} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(4)利用$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{b}{a}\end{bmatrix}$Γ變換到 C_1

利用$\begin{bmatrix}\dfrac{a}{b} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$Γ變換到 C_2

[**例題**11] 試證明橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 內部區域的面積爲πab。

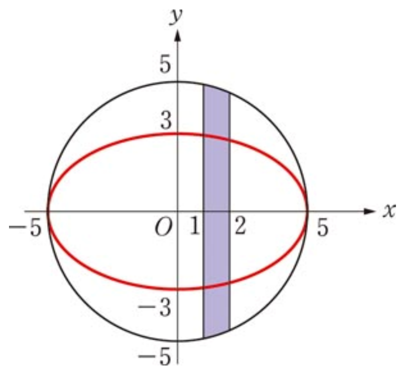
(**練習**17)一個圓 $x^2+y^2=1$ 上的點 $P(x,y)$先沿水平方向伸長 3 倍，再沿 y 軸方向伸長 2 倍。得到另一個點 $Q(x',y')$，

(a)請找出一個 2 階方陣 A 使得 $A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$。

(b)Q 點形成另一個圖形，請問此圖形的方程式。

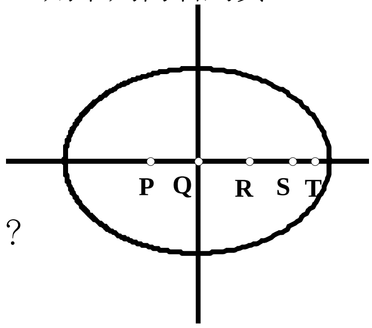
Ans：$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

(練習18)已知在圓 $x^2+y^2=25$ 內含一橢圓$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$，設圓內部在兩直線 $x=1$ 及 $x=2$ 之間的面積為 R_1，而橢圓內部在此兩直線之間的面積為 R_2，則$\dfrac{R_1}{R_2}$的值為何？　Ans：$\dfrac{5}{3}$



綜合練習

(1) 關於橢圓Γ：$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=6$，則下列何者爲真?
(A)(0 , 0)是Γ的中心 (B)(1 , 2),(–1 ,–2)爲Γ的焦點
(C)Γ的短軸長爲 4(D)Γ對稱於直線 $x=y$
(E)Γ 對稱於(1 , 2)與(–1 ,–2)的連線。



(2) 右圖是一個橢圓，試問下列那一個點是此橢圓的焦點？
(A)P (B)Q (C)R(D)S (E)T

(3) 坐標平面上有一個橢圓，已知在(8,4), (9,11), (15,5)和(16,12)
這四個點中，有兩個是焦點，另外兩個是頂點，則此橢圓的半長軸長度=？

(4) 設一橢圓方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ，其中 $a>0$，$b>0$，設 F 爲其一焦點，已知橢圓在 x 軸上的兩個頂點分別與 F 的距離爲 5 單位與 1 單位，試求(a,b)=？
(91 指定乙)

(5) 令橢圓Γ_1：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$、$\Gamma_2$：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=2$、$\Gamma_3$：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=\frac{2x}{5}$的長軸分別爲 l_1、l_2、l_3。請問下列哪一個選項是正確的？
(1)$l_1=l_2=l_3$ (2)$l_1=l_2<l_3$ (3)$l_1<l_2<l_3$ (4)$l_1=l_3<l_2$ (5)$l_1<l_3<l_2$。
(2010 學科能力測驗)

(6) 設 E_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(其中 $a>0$)爲焦點在(3,0),(–3,0)的橢圓；E_2：焦點在(3,0)且準線爲 $x=-3$ 的拋物線。已知 E_1、E_2的交點在直線 $x=3$ 上，則 a=_______ 。
(2011 學科能力測驗)

(7) 設坐標平面上有 A、B、C 三點，若 A(5,0)、B(–5,0)，線段$\overline{AC}$的長爲 $3\sqrt{10}$ ，線段$\overline{BC}$的長爲$\sqrt{10}$ 。求以 A、B 爲焦點，且通過 C 的橢圓方程式。

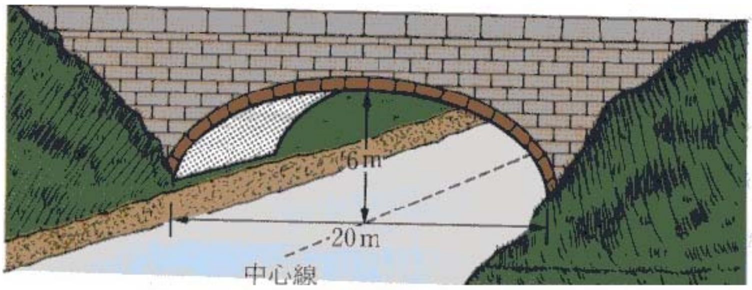
(8) 設 $a\in R$，方程式$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}=2a$，則(a)表一橢圓，則 a 值之範圍爲？(b)表一線段，則 a=_________。(c)無圖形，則 a 值之範圍爲__________。

(9) 已知方程式 $x^2+4y^2+2x+4y+k=0$ 之圖形爲一個橢圓，試求實數 k 的取值範圍？

(10) 設一橢圓長軸長 16，短軸長 10，求此橢圓最長的焦半徑與最短的焦半徑。

(11) 設點 P 在橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 且 P 與兩焦點的連線互相垂直，已知點 P 在第一象限內，求 P 的座標。

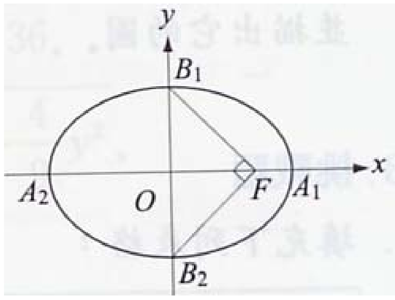
(12) 下圖是一座設計成半橢圓的拱橋，河寬 20 公尺，河寬之中心線的水面處拱高 6 公尺，問距離河寬中心線 5 公尺處的拱高為多少公尺？



(13) 橢圓$\sqrt{x^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+(y+4)^2}=10$ 的短軸長為_________。

(14) 一橢圓形撞球台，外圍的方程式為$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，且其兩焦點 F_1、F_2，今有一人從 F_1 將一球依直線方向打至邊上一點 A，反彈過 F_2，撞至邊上另一點 B，再回到原焦點處 F_1，試求ΔABF_1的周長。

(15) 已知 F 是橢圓一焦點，B_1、B_2 是短軸的頂點，且 $B_1FB_2=90°$，A_1 是長軸上距離 F 較近的一個端點，若$\overline{A_1F}=\sqrt{10}-\sqrt{5}$，求橢圓的方程式。



(16) 設橢圓$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 有一點 P 滿足 PF：PF$'$=5：11，則 P 點坐標為何？

(17) 設 Γ：$\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{k-4}=1$　$(k\in R)$，(a)若 Γ 表一橢圓，求 k 的範圍。(b)若 Γ 表一焦點在 x 軸的橢圓，求 k 的範圍。(c)若 Γ 表一焦點在 y 軸的橢圓，求 k 的範圍。

(18) 求橢圓$\frac{(2x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$ 上任一點 P 到直線 L：$2x+y-8=0$ 的最大距離。

(19) 平面上有兩定點 A(1,6)，B(−5,3)，取橢圓$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ 上任一點 P，求 P 點坐標為何？此時△PAB 之面積最大為多少？

(20) 設 A(4,0)為一定點，P(x,y)為橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 上的動點，求$\overline{AP}$的最大值及使$\overline{AP}$最大的點 P 之坐標。

(21) 自橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的點 P 到直線 L：$x-2y+10=0$ 作垂線，求垂線長的最大值 M 及最小值 m。

進階問題

(22) 設 P、Q 為橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$上任意兩點，求ΔOPQ 面積的最大值。

(23) 已知單位圓 $x^2+y^2=1$ 之內接三角形中以正三角形的面積最大，其面積為$\frac{3\sqrt{3}}{4}$，請利用上面的事實，求橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 內接三角形的最大面積。

(24) 橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的內部在第一象限所形成的$\frac{1}{4}$橢圓區域，直線 $y=mx$ 平分該區域，試求 m 的值。

綜合練習解答

(1) (A)(B)(C)(E)

(2) (D)

(3) $\sqrt{50}$

(4) $(a,b)=(3，\sqrt{5})$

(5) (4)

(6) $3+3\sqrt{2}$

(7) $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$

(8) (a)$a>\frac{5}{2}$ (b)$a=\frac{5}{2}$ (c)$a<\frac{5}{2}$

(9) $k<2$

(10) $8+\sqrt{39}$，$8-\sqrt{39}$

(11) $(\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}})$

(12) $3\sqrt{3}$ 公尺

(13) 6

(14) 20

(15) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$

(16) $(\pm2,\pm\frac{\sqrt{21}}{2})$

(17) (a) $4<k<9$ 且 $k\neq\frac{13}{2}$ (b) $4<k<\frac{13}{2}$ (c) $\frac{13}{2}<k<9$

(18) $\frac{13}{\sqrt{5}}$

(19) $P(\frac{4}{5},\frac{-3}{5})$，△PAB 之面積最大為$\frac{39}{2}$

(20) 最大值 6，P(0,−2)

(21) $M=3\sqrt{5},m=\sqrt{5}$

(22) $\frac{1}{2}ab$ [提示：設 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$、$Q(a\cos\varphi,b\sin\varphi)$，則$\Delta OPQ=\frac{1}{2}ab|\sin(\theta-\varphi)|$]

(23) $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$[提示：令橢圓內接三角形 ABC 的頂點坐標 A($a$cosα,$b$sinα)、B($a$cosβ,$b$sinβ)、C($a$cosγ,$b$sinγ)，ΔABC 的面積=$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a\cos\alpha & b\sin\alpha & 1 \\ a\cos\beta & b\sin\beta & 1 \\ a\cos\gamma & b\sin\gamma & 1 \end{vmatrix}\right|$

$=\frac{1}{2}ab\left|\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \cos\beta & \sin\beta & 1 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1 \end{vmatrix}\right|\le\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$]

(24) $m=\frac{b}{a}$

[提示：將橢圓經由鉛直伸縮變換$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} \end{bmatrix}$成 $x^2+y^2=a^2$，而 $y=x$ 會平分在第一象限的$\frac{1}{4}$圓區域，因此 $y=mx$ 經由鉛直伸縮變換$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} \end{bmatrix}$成 $y=x$。]