§2−2 函數的微分

(甲)函數的導函數

(1)導函數的引入：

例子一：

設$f(x)=x^2$，a為任意數。 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}=2a$

對於$f(x)$的定義域中的每一個a而言，$f(x)$在$x=a$處的導數為$f'(a)=2a$。

a	1	$\frac{3}{2}$	2	$\sqrt{5}$	3	…
$f'(a)$	2	3	4	$2\sqrt{5}$	6	…

根據上表，可知$f(x)$定義域中的每個點$a \longrightarrow f(x)$在$x=a$的導數為 $2a$

此種對應關係成了另一種函數，稱之為$f(x)$的**導函數**。

一般而言，給定一個函數$f(x)$，

若$x=a$在定義域中，且$f'(a)$存在，則$a\to f'(a)$形成一個新的函數稱為**$f(x)$的導函數**。

符號記為$f'(x)$或$\dfrac{df(x)}{dx}$ $[f'$ 或$\dfrac{df}{dx}$]

故例子一中，$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$或$\dfrac{df(x)}{dx}=2x$。

當$f(x)$的式子很長時，例如$f(x)= x^3+2x^2+x+\sqrt{x^2+1}$，導函數可寫成。$(x^3+2x^2+x+\sqrt{x^2+1})'$

為了配合導函數的表示法，$f(x)$在$x=a$處的導數可表為下：$f'(a)=\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=a}=f'(x)\Big|_{x=a}$

(3)導數與導函數：

$f(x)$在$x=a$的導數是一個數，它代表切線斜率、順時變化率等；而$f(x)$的導函數$f'(x)$是一個函數，若a在$f'(x)$的定義域中，那麼$f(x)$在$x=a$的導數是導函數$f'(x)$在$x=a$的函數值。

(2)高階導數：

$f(x)\to f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}\to f''(x)=\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}\dots\to \boxed{}$。

我們稱$f'(x)$為$f(x)$的一階導函數，$f''(x)$為$f(x)$的二階導函數，…

….$f^{(n)}(x)$為$f(x)$的n階導函數。

結論：
(a)$f(x)$在$x=a$處有導數，則稱$f(x)$在$x=a$處可微分。
(b)$f(x)$在定義域中的每一點都可微分，則稱$f(x)$為一**可微分函數**。
(c)若$f(x)$為一可微分函數，則由$f(x)$求$f'(x)$這個過程稱為**將$f(x)$微分**。

[例題1] 證明$f(x)=x^n$的導函數$f'(x)=nx^{n-1}$。(n爲自然數)

[例題2] 請求出$f(x)=|x^2-4|$的導函數。Ans：$f'(x)=\begin{cases} 2x\ ,\ x>0 \\ -2x\ ,\ x<0 \end{cases}$

(3)微分與連續

(a)若設$f(x)$在$x=a$處可微分，則$f(x)$在$x=a$處連續。

[證明]：

$\because f(x)-f(a)=(x-a)\cdot[\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}]$，$f(x)=f(a)+(x-a)\cdot(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a})$

$\therefore \lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}[f(a)+(x-a)\cdot(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a})]=f(a)+0\cdot f'(a)=f(a)$。

根據以上的定理，若$f(x)$在$x=a$處不連續，則$f(x)$在$x=a$處不可微分。

例如：$f(x)=[x]$在$x=2$不連續$\Rightarrow f(x)$在$x=2$不可微。

(b)「**若設$f(x)$在$x=a$處連續，則$f(x)$在$x=a$處可微分**」**這個敘述是錯誤的。**

反例：設$f(x)=|x|$，考慮(0,0)這一點，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{|x|}{x}$

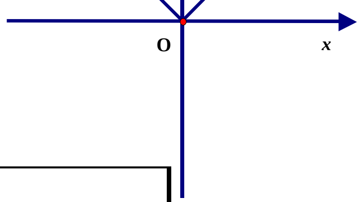
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，所以$f'(0)$不存在，但是$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，

所以$f(x)=|x|$在$x=0$不可微分，但是在$x=0$處連續。

注意：

$f(x)$在$x=0$不可微分，因此x軸並不是(0,0)處的切線，

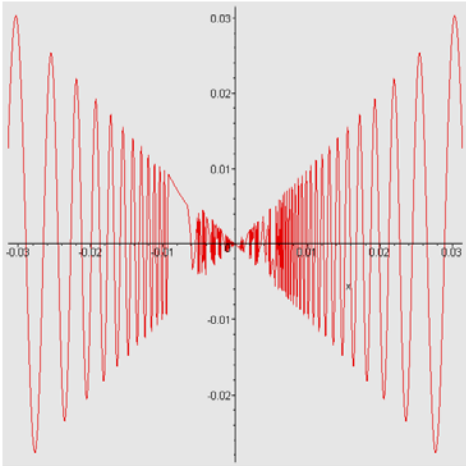
在(0,0)處沒有切線。



由圖形來判別微分與連續：
(1)函數圖形上的斷點：不連續的點。
(2)函數圖形上的斷點、尖點、跳躍點或跳動很厲害的點：不可微分的點。

[例題3] 設 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$，請問 $f(x)$在 $x=0$ 連續嗎？可微分嗎？

Ans：f 在 $x=0$ 連續但不可微分。



(練習1) 設 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$，利用定義證明 $f(x)$在 $x=0$ 可微分。

[提示：利用夾擠原理]

(練習2) 請利用導數的定義求出$f(x)=x|x|$的導函數。Ans：$f'(x)=\begin{cases} 2x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -2x & x<0 \end{cases}$

(練習3) (1)請畫出 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 之圖形。(2)請問 $f(x)$在 $x=0$ 可微分嗎？

(乙)基本函數的微分公式

(1)幾個基本的微分公式：

(a)$(x^n)'=nx^{n-1}$，$n\in$N 。 (b)$(\sqrt[n]{x})'=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$，$n$爲自然數。 (c)$(k)'=0$

(d)$(\sin x)'=\cos x$ (e)$(\cos x)'=-\sin x$ [(d)(e)僅供參考]

[證明]：

(b)設a爲$f(x)=\sqrt[n]{x}$定義域中的任意點，

則$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a})[(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}\cdot\sqrt[n]{a}+\ldots+(\sqrt[n]{a})^{n-1}]}$$

$$=\frac{1}{n(\sqrt[n]{a})^{n-1}}=\frac{1}{n}(a^{\frac{1-n}{n}})=\frac{1}{n}(a^{\frac{1}{n}-1})$$

(d) 設a爲任意實數，$f(x)=\sin x$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}$$

計算$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}\right)=\cos a$。

[注意：此處用到$\cos x$爲連續函數]

(丙)導函數的四則運算

(1)$f(x)$與$g(x)$爲可微分的函數。⇒$f(x)+g(x)$爲可微分的函數。

且$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$成立。 另一種表示法：$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx}(g(x))$

證明：令$h(x)=f(x)+g(x)$，設a爲$h(x)$定義域中的任一點

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)+\lim_{x\to a}\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=f'(a)+g'(a)$$

例：求$(x^5+\sqrt[3]{x})'=$？

推論：$(f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x))'=(f_1(x))'+(f_2(x))'+\ldots+(f_n(x))'$

(2)設$f(x)$爲可微分的函數。⇒$cf(x)$爲可微分的函數。且$(cf(x))'=c\cdot f'(x)$

另一種表示法：$\frac{d}{dx}(cf(x))=c\frac{df(x)}{dx}$，特別$c=-1$時，$\frac{d}{dx}(-f(x))=-\frac{df(x)}{dx}$。

利用(1)(2)可得：

$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$另一種表示： $\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\frac{df(x)}{dx}-\frac{dg(x)}{dx}$

$(c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x))'=c_1(f_1(x))'+c_2(f_2(x))'+\ldots+c_n(f_n(x))'$

例如：

(1) $(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0)'=$？

(2)$(3x^5-2x^3+4\sqrt[5]{x})'=$？

(3) $f(x)$，$g(x)$爲可微分的函數$\Rightarrow$$f(x)g(x)$爲可微分的函數。

且$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

另一種表示：$\dfrac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x))=\dfrac{d}{dx}(f(x))\cdot g(x)+f(x)\cdot\dfrac{d}{dx}(g(x))$

證明：

令$h(x)=f(x)g(x)$，設a爲$h(x)$定義域中的任一點

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)(f(x)-f(a))+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}g(x)[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}]+\lim_{x\to a}f(a)[\frac{g(x)-g(a)}{x-a}]$$

$$=g(a)f'(a)+f(a)g'(a)$$

而上面極限的運算中，使用了$g(x)$在$x=a$可微分，所以$g(x)$在$x=a$連續。

即$\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$。

例如：試求$\dfrac{d}{dx}((x^2+x-3)(3x^2-2x+1))=$？

例如：試求$(x^2+2x+3)^3$的導函數。

推論：

(a) $\dfrac{d}{dx}(f_1f_2\cdots f_n)=\dfrac{df_1}{dx}f_2\cdots f_n+\cdots+f_1f_2\cdots\dfrac{df_n}{dx}$ (逐次輪流微分)

(b)如果 $f_1=f_2=\cdots f_n=f$ ，則可得$[(f(x))^n]'=n(f(x))^{n-1}(f'(x))$。

(4)若$f(x)$，$g(x)$在$x=a$可微分，且 $g(a)\neq 0$ ，

則 $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{f(x)}{g(x)})|_{x=a}=\dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$。 因此可得：$(\dfrac{f(x)}{g(x)})'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

若$f(x)=1$，則$(\dfrac{1}{g(x)})'=-\dfrac{1}{(g(x))^2}\cdot g'(x)$

[證明]：

令$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，設a爲$h(x)$定義域中的任一點

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}[\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}]$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}[\frac{g(a)(f(x)-f(a))-f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}]$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}\cdot\lim_{x\to a}\left[\frac{g(a)(f(x)-f(a))-f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}\right]$$
$$=\frac{1}{(g(a))^2}\cdot\left(\lim_{x\to a}g(a)\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]-\lim_{x\to a}f(a)\left[\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]\right.$$
$$=\frac{1}{(g(a))^2}\cdot(g(a)f'(a)-f(a)g'(a))$$

而上面極限的運算中，使用了$g(x)$在$x=a$可微分，所以$g(x)$在$x=a$連續。

即$\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$，且$g(a)\neq 0$。

例如：試求$\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$的導函數。

例如：求$\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)'=$？

[例題4] 證明$\dfrac{dx^r}{dx}=rx^{r-1}$，$r$ 爲有理數。

[例題5] 求下列各函數的導函數：

(1) $(x^2+2x)(x^2+3x+2)$ (2) $(x-2)^3(x^2-1)$ (3)$\dfrac{3}{x^3+2x+1}$ (4)$\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$

Ans：(1)$4x^3+15x^2+16x+4$ (2)$(x-2)^2(5x^2-4x-3)$

(3)$\dfrac{-3(3x^2+2)}{(x^3+2x+1)^2}$ (4)$\dfrac{-(x+1)(x+5)}{(x-1)^4}$

[例題6] 設$f(x)=\sqrt[3]{x^2}+x^2-5$，試求以點P(1,−3)爲切點的切線方程式。

Ans：$y+3=\dfrac{8}{3}(x-1)$

(練習4) 請利用$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$的結果證明：

$(\tan x)'=\sec^2 x$，$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$

(練習5) 試求下列各函數的導函數：

(1)$x^3-6x^2+7x-11$ (2)$(x^3+3x)^2(2x+1)$(3) $(x+1)(2x^2+2)(3x^2+x+1)$ (4)$(2x^3+x+1)^5$

Ans：(1)$3x^2-12x+7$ (2)$2(x^3+3x)(3x^2+3)(2x+1)+2(x^3+3x)^2$

(3) $(2x^2+2)(3x^2+x+1)+(x+1)\cdot(4x)\cdot(3x^2+x+1)+(x+1)(2x^2+2)\cdot(6x+1)$

(4) $5(2x^3+x+1)^4\cdot(6x^2+1)$

(練習6) 求下列各函數的導函數。

(1)$f(x)=\dfrac{x^3+x+1}{2x^2+x+3}$ (2)$f(x)=\dfrac{3x}{x^2+3x+1}$ (3)$f(x)=\dfrac{1}{4x^3+3x^2+2x+1}$ (4)$f(x)=\dfrac{1}{x^3+2x+1}$

Ans：(1)$\dfrac{2x^4+2x^3+7x^2-4x+2}{(2x^2+x+3)^2}$ (2)$\dfrac{-3x^2+3}{(x^2+3x+1)^2}$ (3) $\dfrac{-1}{(4x^3+3x^2+2x+1)^2}\cdot(12x^2+6x+2)$

(4)$\dfrac{-3x^2-2}{(x^3+2x+1)^2}$

(練習7) 設 $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2-x+1}$請求出函數圖形 $y=f(x)$在$(0,2)$處的切線方程式。

Ans：$y=5x+2$

(練習8) 設$f(x)=x^3-3x^2+2x+1$，(1)請求出$f'(x)$=？　(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)-f(2-2h)}{3h}$=？

Ans：(1) $f'(x)=3x^2-6x+2$　(2)$\dfrac{10}{3}$

(丁)連鎖法則

(1)合成函數：

(a)設 $f(x)=x^2+x+1, g(y)=\sqrt[3]{y}$ ，則 $g(f(x))=\sqrt[3]{x^2+x+1}$ 。

$x\xrightarrow{f} x^2+x+1 \xrightarrow{g} \sqrt[3]{x^2+x+1}$ ，$(g\circ f)(x)=\sqrt[3]{x^2+x+1}$

所以$(g\circ f)(x)$爲x的函數。

(b) $g\circ f\neq f\circ g$

(2)連鎖法則：既然$(g\circ f)(x)$爲x的函數，我們就可以討論$\dfrac{d}{dx}(g\circ f)(x)$=？

例子：設$f(x)=x^2+2$，$g(y)=y^3$，則$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(x^2+2)^3$

利用$\dfrac{d}{dx}((f(x))^n=n(f(x))^{n-1}\dfrac{df(x)}{dx}$，可得$\dfrac{d}{dx}((x^2+2)^3)=3(x^2+2)\cdot 2x=\dfrac{d}{dy}g(y)|_{y=x^2+2}\cdot\dfrac{df(x)}{dx}$

上式並不是巧合，一般的情形亦是如此，我們稱爲連鎖法則。

定理：(連鎖法則　Chain Rule)

若 $f(x)$,$g(y)$都是可微分的函數，則合成函數$(g\circ f)(x)$亦可微分，

而且$\dfrac{d}{dx}((g\circ f)(x))=\dfrac{dg(y)}{dy}|_{y=f(x)}\cdot\dfrac{df(x)}{dx}$或$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)$。

[證明]：

[例題7] 求$(\sqrt[3]{x^2+x+1})'=$？ Ans：$\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{-2}{3}}(2x+1)$

[例題8] 設$f(x)=(\frac{x^2+2}{x^2+1})^5$，求$f'(1)=$？ Ans：$\frac{-405}{32}$

(練習9) 設$f(x)$可微分，求$(\sqrt[n]{f(x)})'=$？($n\geq 2$ 的正整數)

Ans：$\frac{1}{n}((f(x))^{\frac{1-n}{n}}(f'(x))$

(練習10) $\left[\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}\right]'=$? Ans：$\frac{2(2x+1)}{3\cdot\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

(練習11) 設$f(x)=(x^2-x+1)^{10}$，請問$f'(x)=$？Ans：$10(x^2-x+1)^9(2x-1)$

(練習12) 設$f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{3x-5}}$ ，則$f'(x)=$？Ans：$\frac{6x-23}{2(3x-5)\sqrt{3x-5}}$

(練習13) 試求$\sqrt[4]{\frac{x}{3x+1}}$的導函數。 Ans：$\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3(3x+1)^5}}$

(戊)隱函數的微分

討論曲線的切線，本是幾何中的一個重要題材；但是，許多曲線並不是函數圖形，對於這類曲線，前面利用微分一個函數來求切線斜率的方法，無法直接利用在這類的曲線上。而我們知道基本上求曲線上一個點的切線，只須要這個點附近的圖形即可，因此可將曲線分成若干部分，使每一個部分都是函數圖形，再微分通過這個切

點的函數，求出切線斜率，進一步求出切線的方程式。

例：試求$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$以點$(\frac{12}{5}，\frac{-6}{5})$爲切點的切線方程式。

(一)利用函數圖形：橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$不是函數圖形，

(二)利用隱函數的微分法：

顯函數與隱函數：

前面所提的函數，都是以x表示y，叫做顯函數(explicit function)，例如：$y=x^3-x$，$y=\frac{x^2}{x+1}$ 都是顯函數。若方程式$F(x,y)=0$，可以定義出函數$y=f(x)$，而非解出y以x表示，則稱y爲x的隱函數(implicit function)。如方程式 $x^2-xy+y-4=0$ 可定義出一個函數$y=f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}$，$x\neq1$。故方程式$x^2-xy+y-4=0$ 中的y爲x的隱函數。

隱函數的微分：

一般而言，方程式$F(x,y)=0$ 不一定都可以定義出函數$y=f(x)$。縱使可以，想解出y以x表示，有時亦很困難，例如：$\sin y+2y+x=0$，甚至不可能。在此情形下，我們可將y視爲x的可微分函數，全式對x微分，即可求得 $\frac{dy}{dx}$，此種方法稱爲隱函數的微分法。若假定$y=f(x)$存在且可微分，則$y=f(x)$在**曲線上點$\boldsymbol{P(x_0,y_0)}$的導數**，記做$\frac{dx}{dy}|_{(x_0,y_0)}$或$\frac{dy}{dx}|_P$。

$F(x,y)=0$

視 y 爲 x 的函數　↓　等號兩邊對 x 微分

以x,y表示y'

例如：$F(x,y)=x^2+y^2-4=0$，將y視爲x的可微分函數，全式對x微分，則
$\frac{d}{dx}(F(x,y))=\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(4)=0$，即 $2x+2y\frac{dy}{dx}=0$，故$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$，$y\neq 0$。

[例題9] 試求 $2x^2+xy+y^2-4=0$ 以點$P(-1,2)$爲切點的切線方程式。Ans：$y-2=\frac{2}{3}(x+1)$

[例題10] 求曲線$x^2+xy-2y^2=4$ 上與 $5x-2y=0$ 平行的切線。Ans：$5x-2y=\pm 8$
[隱函數微分]：

[判別式的方法]：

(練習14) 設二次曲線Γ：$xy=4$，試求此曲線在(1,4)處的切線方程式。
Ans：$4x+y-8=0$

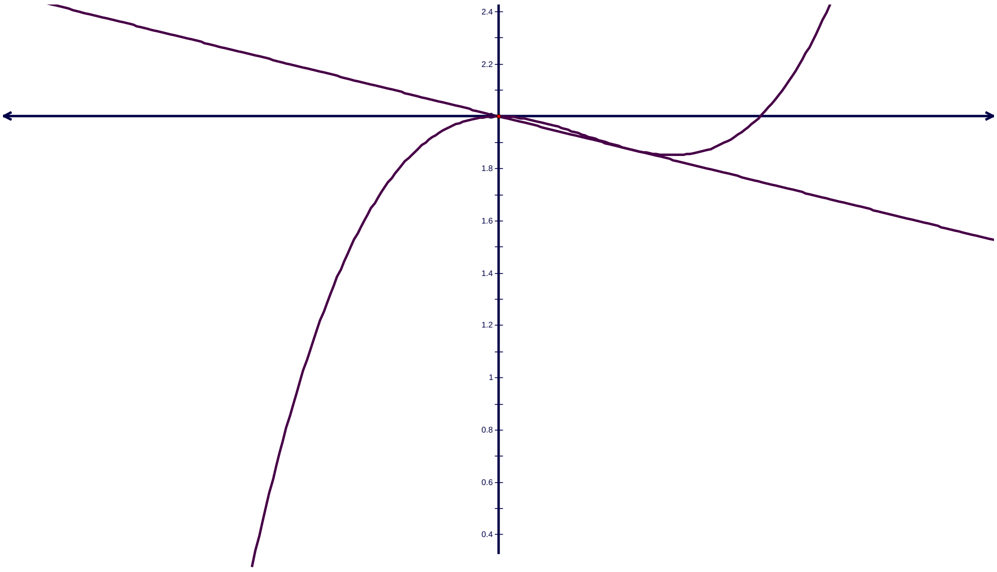
(練習15) 若直線$x-4y+11=0$ 爲Γ：$x^2+4y^2+2x-19=0$ 的一條切線，求其切點的坐標。
Ans：$(-3,2)$[提示：可令切點爲$(4t-11,t)$，再利用隱含數的微分法，求出
$y'=\frac{-x-1}{4y}$，故$\frac{-4t+10}{4t}=\frac{1}{4}\Rightarrow t=2$，故切點爲$(-3,2)$]

(練習16) 自點$(-1,5)$至雙曲線$x^2-2y^2=7$ 作切線，求其方程式。
Ans：$3x+2y-7=0$ 及 $19x-6y+49=0$

[例題11] (1)求過點(0,2)而與曲線$y=f(x)=x^3-x^2+2$ 之相切的直線。

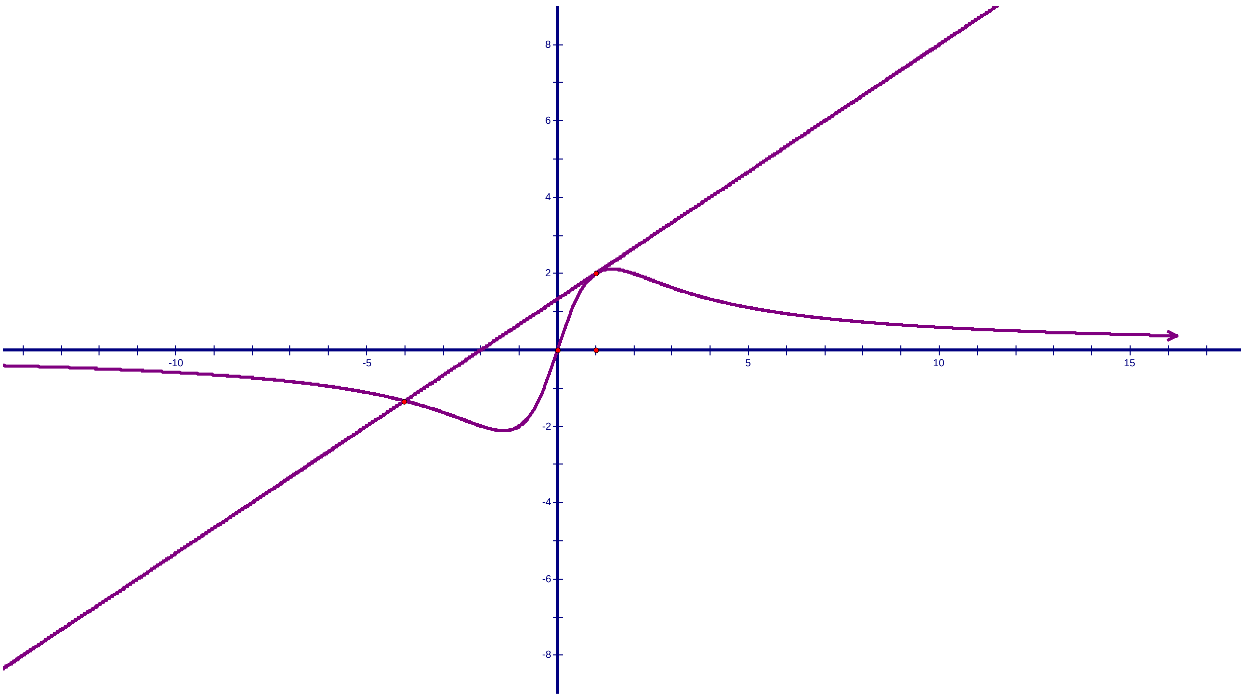
(2)曲線$y=f(x)=x^3-x^2+2$ 以(0,2)為切點的切線方程式為何？

Ans：(1)切線$y-2=0$ 或$x+4y=8$ (2)$y-2=0$



[例題12] $y=\dfrac{6x}{x^2+2}$ 上以 P(1,2)為切點之切線方程式為何？

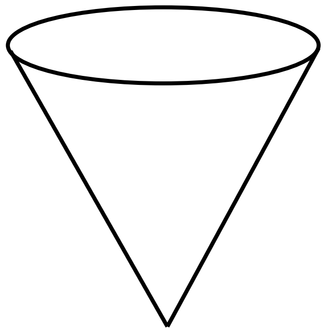
此切線與曲線的另一交點為何？Ans：$y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}$， $(-4,\dfrac{-4}{3})$



[例題13] 函數圖形$y=f(x)=x^3+ax^2+b$之圖形通過P(1,1)且以P點爲切點的切線斜率爲 5，請問數對(a,b)=？　Ans：(1,−1)

[例題14] 試求過點$(\frac{13}{6},9)$且與$y=2x^3$相切的直線。Ans：$y=6x-4$，$y=54x-108$，$y=\frac{27}{8}x+\frac{27}{16}$

[例題15] 如圖，半徑 8 公分，高 16 公分的圓錐容器以每秒 3cm^{3}的速度注水，請問當水深達 4 公分時水面上升的速度=？Ans：$\frac{3}{4\pi}$cm/sec



(練習17) 求曲線$y=-x^3+3x^2$之切線中，斜率為最大之切線方程式。
Ans：$y-2=3(x-1)$

(練習18) 試求曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ 的圖形上以$(\frac{5}{4},\frac{3}{4})$為切點的切線方程式。
Ans：$5x-3y=4$

(練習19) 請求出過點(0,0)且與曲線$y=x^3-3x^2-3x+4$ 的切線。
Ans：$3x+y=0$[請注意(0,0)不在曲線上]

(練習20) 設$f(x)=x^3+4x+2$ 的切線與直線$y=7x-2$ 平行者有二條，則此兩切線之間的距離為何？ Ans：$\frac{4}{\sqrt{50}}$

綜合練習

(1) 令 $f(x)=x[x]$在 $x=0$ 是否可微分？

(2) 令$f(x)=|x^2-3x|$，請問$f(x)$在$x=0$ 是否可以微分？

(3) 設函數 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-3x+1$，則

(a)極限值$\lim\limits_{x\to8}\dfrac{f(x)-f(8)}{x-8}=$？(b) 極限值$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(8+3h)-f(8-4h)}{2h}=$？

(4) 已知$f(x)=x^3-2x^2+5x-1$，則$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f'(x)-f'(3)}{x-3}=$？

(5) 設$f(x)=|x-4|+|x+1|$，則$f'(x)=$？

(6) 設 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，若$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{f(x)-2}{x-5}=\dfrac{1}{3}$，則 $y=f(x)$的圖形上以$(5,f(5))$爲切點的切線方程式爲____________。

(7) (a) $y=\left(\dfrac{3x-5}{4x^2+1}\right)^3$，求$\dfrac{dy}{dx}=$？

(b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，求$f'(\dfrac{1}{2})=$？

(c)$f(x)=x^3(x^3+5x)^{10}$，求$f'(x)=$？

(8) 求下列各函數的導函數：

(a) $f(x)=\sqrt[3]{(x^2+1)^5}$ (b) $f(x)=(\dfrac{x^2+2}{x^2+1})^5$ (c) $f(x)=\dfrac{(2x+1)^4}{(x^2+1)^5}$

(9) 曲線 $y=\dfrac{x^2}{x^3+x+1}$在以點$(-1,-1)$爲切點之切線方程式。

(10) 若P(2,3)爲$x^2+xy+y^2=19$ 上一點，求以P爲切點之切線方程式。

(11) 設$f(x)=x^3+ax^2+b$，$a,b\in R$，若$y=f(x)$之圖形通過點(1,4)且在此點的斜率爲-3，則求a,b 之值爲何？

(12) 過曲線$y=x^2+x+1$ 外一點P(1,2)的切線方程式。

(13) 設P點爲拋物線Γ：$y=f(x)=x^2+2x-7$ 外一點，已知過P點的切線有二條，其斜率分別爲 2，-4，則P點坐標爲何？

(14) 若直線$y=x$與曲線$y=x^3-3x^2+ax$相切，試求$a=$？

(15) 曲線$y=f(x)=x^3-6x$有一切線斜率爲 6，求此切線方程式爲何？

(16) 過點$(2,\frac{-2}{3})$，且與曲線$y=\frac{1}{3}x^3-x$相切的直線有幾條？其斜率分別爲何？

進階問題

(17) 設$P(x_0,y_0)$爲圓錐曲線$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 上一點，

則過$P(x_0,y_0)$的切線方程式：$ax_0x+b\cdot(\frac{x_0y+y_0x}{2})+cy_0y+d(\frac{x_0+x}{2})+e(\frac{y_0+y}{2})+f=0$

(18) 求曲線$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$在點$(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$的切線及法線方程式

(19) 試求橢圓$x^2+5y^2=5$ 與圓$(x+2)^2+y^2=5$ 之公切線之方程式。

綜合練習解答

(1) 不可微分 $[\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x[x]}{x}=0$，而$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x[x]}{x}=-1]$

(2) 不可微$[\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{-x^2+3x}{x})=3$，$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2-3x}{x}=-3]$

(3) (a)$\frac{-8}{3}$ (b)$\frac{-28}{3}$[提示：$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(8+3h)-f(8-4h)}{2h}=\frac{7}{2}f'(8)$]

(4) 14[提示：$\lim\limits_{x\to3}\frac{f'(x)-f'(3)}{x-3}=f''(3)$]

(5) $f'(x)=\begin{cases}2 & x>4\\ 0 & -1<x<4\\ -2 & x<-1\end{cases}$

(6) $y-2=\frac{1}{3}(x-5)$ [提示：$\because\lim\limits_{x\to5}\frac{f(x)-2}{x-5}=\frac{1}{3}$，$\therefore f(5)=2$，且切線斜率爲$\frac{1}{3}$]

(7) (a) $\frac{dy}{dx}=\frac{3(3x-5)^2(-12x^2+40x+3)}{(4x^2+1)^4}$ (b)$\frac{-4\sqrt{3}}{9}$ (c) $(x^3+5x)^9(33x^5+65x^3)$

(8) (a)$f'(x)=\frac{10x\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}{3}$ (b)$f'(x)=\frac{-10x(x^2+2)^4}{(x^2+1)^6}$ (c) $f'(x)=\frac{(2x+1)^3(8-10x-12x^2)}{(x^2+1)^6}$

(9) $2x+y+3=0$

(10) $y-3=\frac{-7}{8}(x-2)$

(11) $a=-3,b=6$

(12) $y-1=x$，$y-7=5(x-2)$

[提示：設切點爲(t,t^2+t+1)，切線斜率$=2t+1\Rightarrow$切線$y-(t^2+t+1)=(2t+1)(x-t)$

又切線通過$P(1,2)\Rightarrow t^2-2t=0\Rightarrow t=0$ 或 2]

(13) P($\frac{-3}{2}$,−10) [提示：$f'(x)=2x+2$，解$f'(x)=2$ 或$f'(x)=-4\Rightarrow x=0$ 或−3

可得切點與切線分別爲(0,−7)、$2x-y=7$ 或(−3,−4)、$4x+y=-16$]

(14) $a=1$ 或$\frac{13}{4}$ [提示：設切點爲$(t,t)\Rightarrow 3t^2-6t+a=1$，又因爲切點在曲線上$\Rightarrow t^3-3t^2+at=t$

聯立解上述兩個方程式$\Rightarrow a=1$ 或$\frac{13}{4}$]

(15) $y+4=6(x-2)$或$y-4=6(x+2)$ [提示：設切點$(t,t^3-6t)\Rightarrow 3t^2-6=6\Rightarrow t=\pm1$]

(16) 3 ，0，$3\pm2\sqrt{3}$

(17) [提示：令$y=f(x)$代入圓錐曲線方程式得$ax^2+bxf(x)+c(f(x))^2+dx+ef(x)+f=0$

兩邊對x微分$\Rightarrow 2ax+bf(x)+bx\cdot f'(x)+2cf(x)\cdot f'(x)+d+ef'(x)=0\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2ax-bf(x)-d}{bx+2cf(x)+e}$

所以過點$P(x_0,y_0)$之切線斜率爲$f'(x_0)=\dfrac{-2ax_0-bf(x_0)-d}{bx_0+2cf(x_0)+e}=\dfrac{-2ax_0-by_0-d}{bx_0+2cy_0+e}$ $(\because y_0=f(x_0))$

由點斜式可得切線方程式爲$y-y_0=(\dfrac{-2ax_0-by_0-d}{bx_0+2cy_0+e})(x-x_0)$

$\Rightarrow(2ax_0+by_0+d)x+(bx_0+2cy_0+e)y=2ax_0^2+2bx_0y_0+2cy_0^2+dx_0+ey_0$

$\Rightarrow(2ax_0+by_0+d)x+(bx_0+2cy_0+e)y=-(dx_0+ey_0+2f)$

$\Rightarrow ax_0x+b\cdot(\dfrac{x_0y+y_0x}{2})+cy_0y+d(\dfrac{x_0+x}{2})+e(\dfrac{y_0+y}{2})+f=0$

(18) $x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x-y=0$

(19) $x-2y-3=0$ 或 $x+2y-3=0$