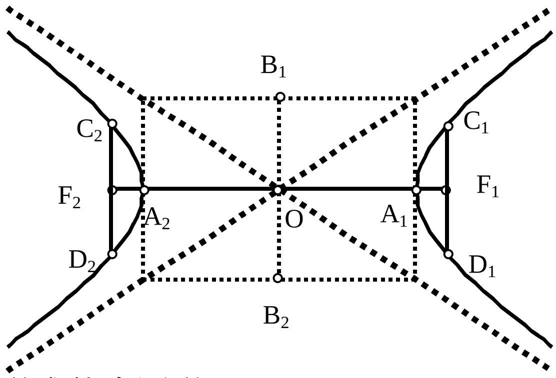
§1–3 雙曲線

(甲)雙曲線的基本定義與性質

(1)定義：

平面上有兩個定點F_1、F_2，及一定長 $2a$且$\overline{F_1F_2}>2a$，則在此平面上所有滿足$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a$的P點所形成的圖形稱爲**雙曲線**。其中$F_1$、$F_2$稱爲**焦點**。



[討論]：

若 $2a=\overline{F_1F_2}$，則P點會形成什麼圖形？

若 $2a>\overline{F_1F_2}$，則P點會形成什麼圖形？

(2)名詞介紹：

(a)兩焦點連線段的中點(O)稱爲**中心**。

(b)過兩焦點的直線與雙曲線的交點A_1、A_2稱爲雙曲線的**頂點**。

(c)線段$\overline{A_1A_2}$稱爲**貫軸**，線段$\overline{B_1B_2}$稱爲**共軛軸**。($\overline{OB_1}^2=\overline{OB_2}^2=\overline{OF_1}^2-\overline{OA_1}^2$)

(d)雙曲線上任一點與焦點的連線段稱爲此雙曲線的**焦半徑**。

(e)雙曲線上兩相異點的連線段，稱爲此雙曲線的**弦**，過焦點的弦稱爲**焦弦**。

焦弦中與貫軸垂直者稱爲**正焦弦**($\overline{C_1D_1}$、$\overline{C_2D_2}$)。

(f)如圖，包含矩形對角線的直線稱爲雙曲線的**漸近線**。

(3)基本性質：

(1°)貫軸兩頂點A_1與A_2對稱於O點，共軛軸軸兩頂點B_1與B_2對稱於O點。

即$\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=a$爲貫軸半長，貫軸長$=2a$；以$\overline{OB_1}=\overline{OB_2}=b$爲共軛軸半長，共軛軸長$=2b$。

[說明]：

因爲A_1、A_2在雙曲線上，

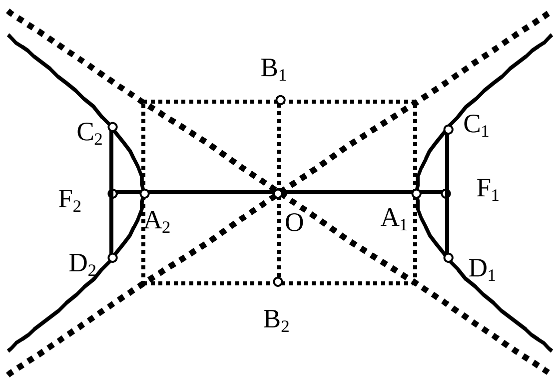
所以$A_1F_2-A_1F_1=2a=A_2F_1-A_2F_2$

$\Rightarrow A_1A_2+A_2F_2-A_1F_1=A_2A_1+A_1F_1-A_2F_2$

$\Rightarrow A_1F_1=A_2F_2$

又因爲$OF_1=OF_2$

$\Rightarrow OF_1-A_1F_1=OF_2-A_2F_2 \Rightarrow OA_1=OA_2$



(2°)雙曲線的漸近線：

(a)橢圓與雙曲線的畫法：

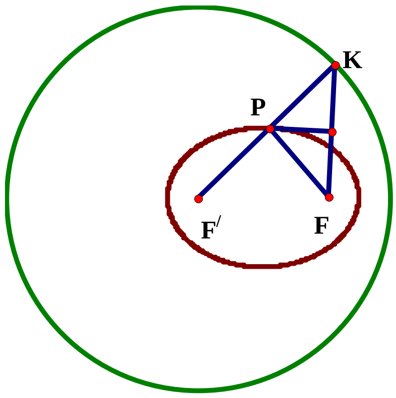
給定一個圓，假設圓心爲F'，在平面上再取一點F，設K點在圓F上移動，

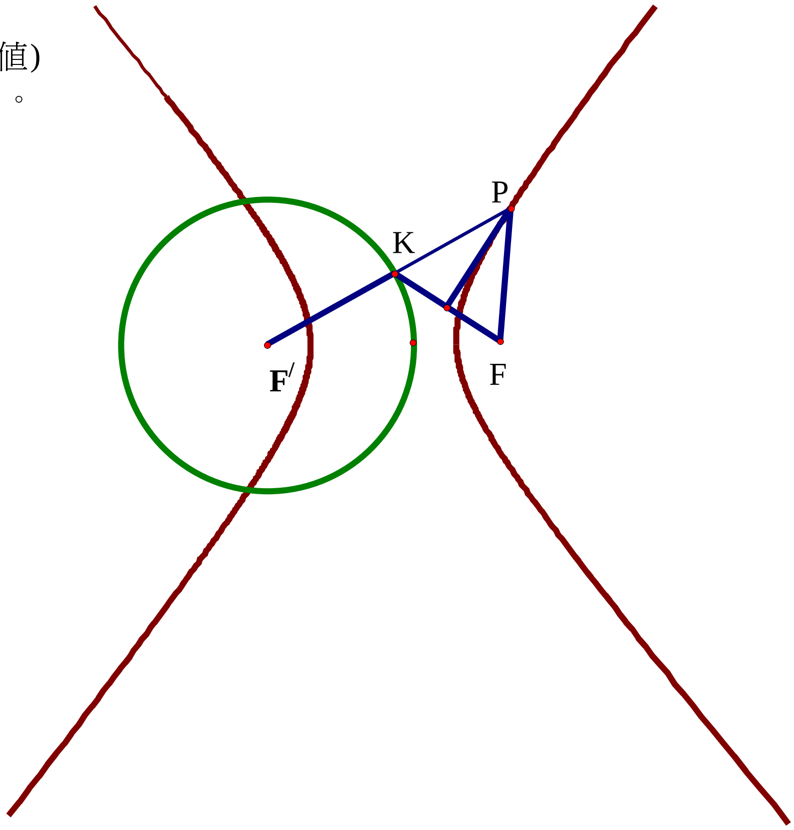
P點是$\overline{KF}$的中垂線與直線KF'的交點。試問P點的軌跡是什麼圖形？

F點在圓內：

考慮$PF+PF'=PK+PF'=F'K=$圓半徑(定值)

⇒P點形成一個以F、F'爲焦點的橢圓。



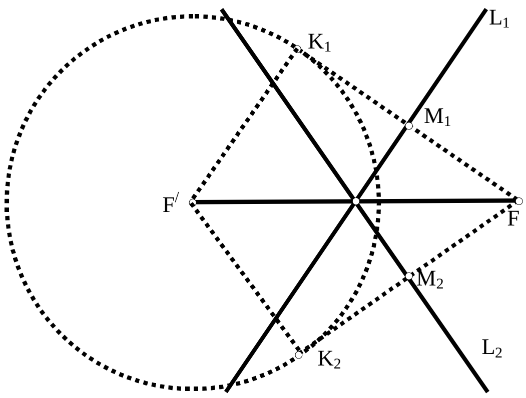


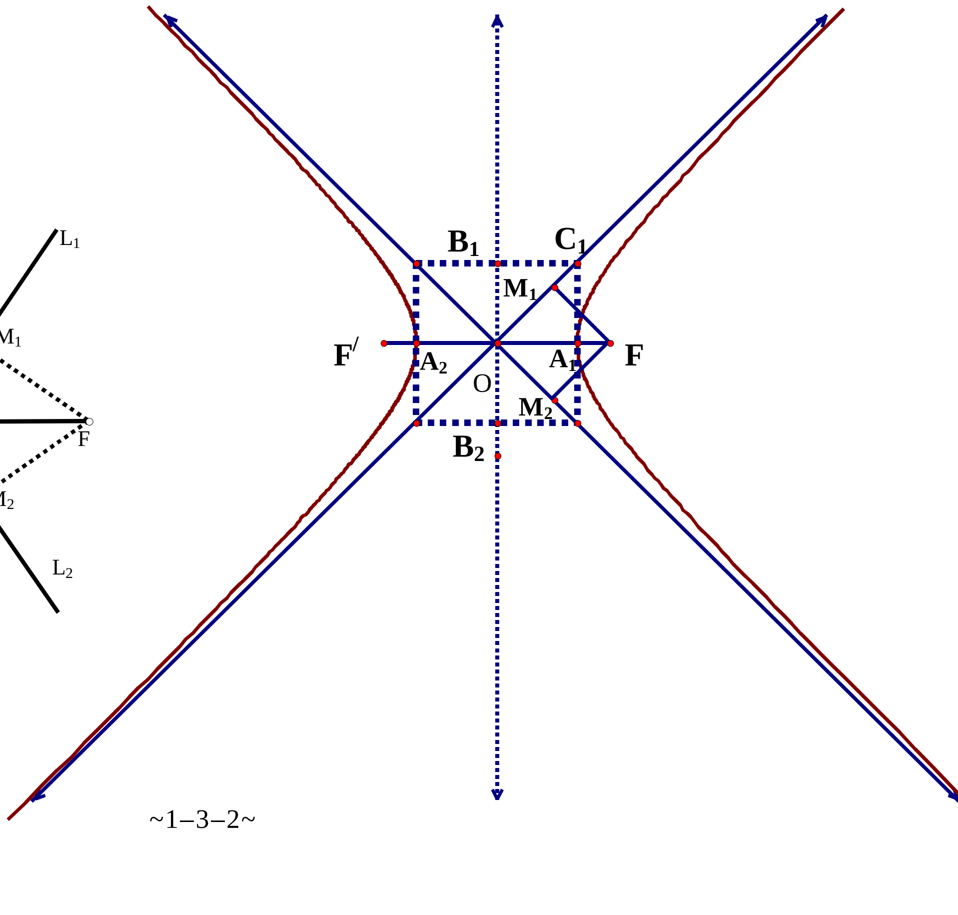
F點在圓外：

考慮$|PF-PF'|=|PF'-PK|=F'K=$圓半徑(定值)

⇒P點形成一個以F、F'爲焦點的雙曲線。

(b)漸近線的形成：





定義雙曲線的漸近線：

在上左圖中，雙曲線與線段KF的中垂線交於P點，當點K在圓上移動使得$\overline{KF}$與$\overline{KF'}$垂直時，(即圖中的K_1、K_2的位置)$\overline{KF}$的中垂線就與直線KF'平行，因此交點P可視爲在無窮遠處，此時$\overline{KF}$的中垂線通過中心O。如上圖此時的$\overline{K_1F}$與$\overline{K_2F}$的中垂線L_1、L_2稱爲此**雙曲線的漸近線(兩條漸近線通過雙曲線的中心)。**

(3°)$\overline{OF}^2=\overline{OA_1}^2+\overline{OB_1}^2$

如上右圖，因爲M_1與M_2分別爲$\overline{K_1F}$與$\overline{K_2F}$的中點，且O爲$\overline{FF'}$的中點，

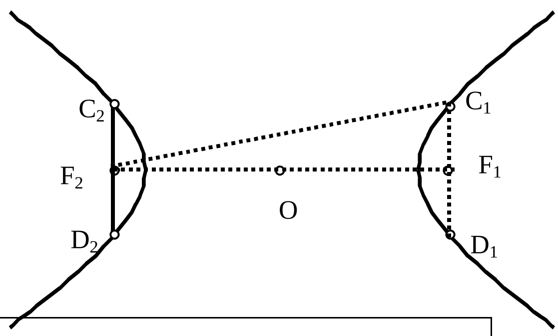
故$\overline{OM_1}=\frac{1}{2}\overline{K_1F'}=\frac{1}{2}(2a)=a=\overline{OA_1}$，令$\overline{OF}=\overline{OF'}=c$時$\Rightarrow\overline{M_1F}=\sqrt{c^2-a^2}=b=\overline{OB_1}=\overline{A_1C_1}$

$\Rightarrow\Delta OA_1C_1\cong\Delta OM_1F\Rightarrow\overline{OC_1}=\overline{OF}=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow c^2=a^2+b^2$

($\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=a$爲貫軸半長，$\overline{OB_1}=\overline{OB_2}=b$爲共軛軸半長，$c=\overline{OF}=\overline{OF'}$)

(4°)雙曲線的正焦弦長爲 $\dfrac{\textbf{(共軛軸長)}^2}{\textbf{貫軸長}}=\dfrac{2b^2}{a}$。($a$ 爲貫軸半長、b 爲共軛軸半長)

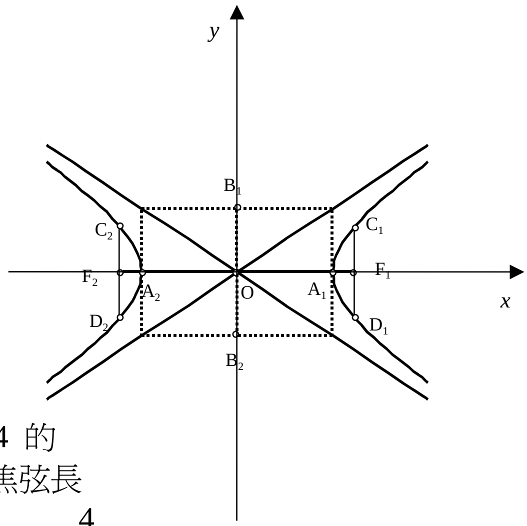
[說明]：因爲$\overline{C_1D_1}$爲正焦弦，
所以$\Delta C_1F_1F_2$爲直角三角形
設$C_1F_1=x$，$\Rightarrow C_1F_2=2a+x$，
$\Rightarrow(2a+x)^2=x^2+(2c)^2$
$\Rightarrow 4a^2+4ax+x^2=x^2+4c^2$
$\Rightarrow x=\dfrac{c^2-a^2}{a}=\dfrac{b^2}{a}$
$\Rightarrow C_1F_1=\dfrac{b^2}{a}$
$\Rightarrow C_1D_1=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{(2b)^2}{2a}=\dfrac{\textbf{(共軛軸長)}^2}{\textbf{貫軸長}}$



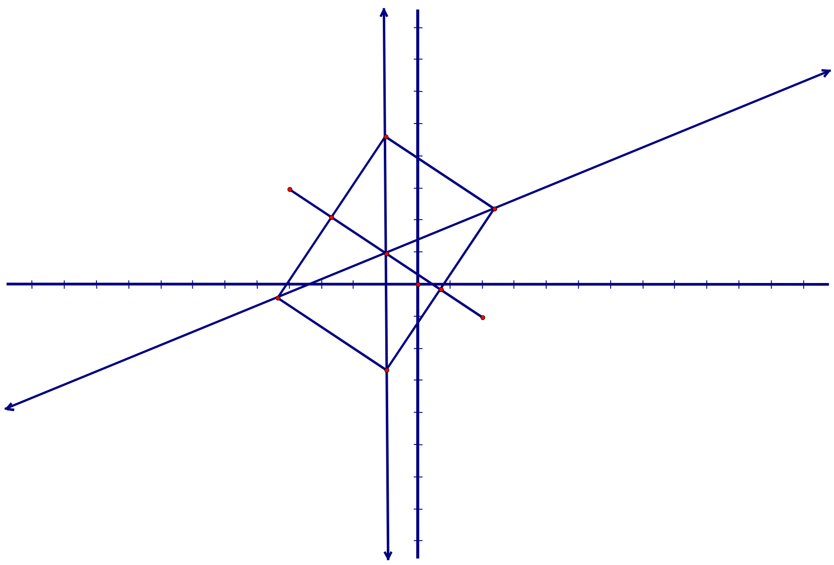
結論：
(1)a,b,c 的意義如下：
a=貫軸長之半=中心到貫軸頂點(頂點)之距離=$\frac{1}{2}|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|$
b=共軛軸長之半=中心到共軛軸頂點之距離
$c=\frac{1}{2}\cdot\overline{F_1F_2}$=中心到焦點之距離
(2)a,b,c的關係：$\boxed{c^2=a^2+b^2}$
(3)雙曲線的正焦弦長爲 $\dfrac{\textbf{(共軛軸長)}^2}{\textbf{貫軸長}}=\dfrac{2b^2}{a}$。($a$爲貫軸半長、$b$爲共軛軸半長)

(4)雙曲線的描繪：
如右上圖，當我們要描繪雙曲線的圖形時，首先描出貫軸與共軛軸的四個端點A_1,A_2,B_1,B_2，通過A_1、A_2作平行於共軛軸的直線，過B_1、B_2作平行貫軸的直線，這兩雙平行線形成一個矩形。

其次連接矩形的兩條對角線，向兩端延長便是雙曲線的漸近線。
最後在兩條漸近線之間描繪雙曲線，並且沿漸近線向四方無限延伸，
如此畫出的雙曲線較爲寫真。



[例題1] 求雙曲線$\left|\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}-\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}\right|=4$ 的
(1)中心坐標與焦點坐標。(2)頂點坐標 (3)正焦弦長
Ans：(1)中心$(-1,1)$焦點$(2,-1)$ $(-4,3)$ (2)$(\frac{6}{\sqrt{13}}-1,1-\frac{4}{\sqrt{13}})$ (3)9



(練習1) 設雙曲線的貫軸長爲 6，共軛軸長爲 8，求此雙曲線的正焦弦長。
Ans：$\frac{32}{3}$

(練習2) 設雙曲線Γ的貫軸長與共軛軸長等長，且長度爲 $2a$，求
(1)中心與任一正焦弦端點所圍成的三角形面積。
(2)以任一正焦弦爲一組隊邊的矩形面積。
Ans：(1)$\sqrt{2}a^2$ (2)$4\sqrt{2}a^2$

(練習3) 求雙曲線$\left|\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}\right|=6$ 的
(1)中心坐標 (2)正焦弦長 (3)貫軸方程式 (4)共軛軸方程式 (5)頂點。
Ans：(1)$(-1,-1)$ (2)$\frac{8}{3}$ (3)$2x+3y+5=0$ (4)$3x-2y+1=0$ (5)$(-1-\frac{9}{\sqrt{13}},-1+\frac{6}{\sqrt{13}})$

(乙)雙曲線的標準式

(1)雙曲線的標準式：

(a)給定兩個定點$F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$，雙曲線$\Gamma=\{P||PF_1-PF_2|=2a，\overline{F_1F_2}>2a\}$的方程式爲$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$。

[證明]：

($\Rightarrow$)(證明滿足$|PF_1-PF_2|=2a$的點$P(x,y)$是方程式的解)

設$P(x,y)$滿足$|PF_1-PF_2|=2a$，則$|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}|=2a$ 移項變成

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$ 兩端平方

得 $(x-c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$

$\Rightarrow \pm a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$，兩端平方，再化簡可得

$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=(c^2-a^2)a^2$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1 \quad \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

($\Leftarrow$)(證明方程式的解$P(x,y)$滿足$|PF_1-PF_2|=2a$)

設點$P(x,y)$滿足$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

則$PF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

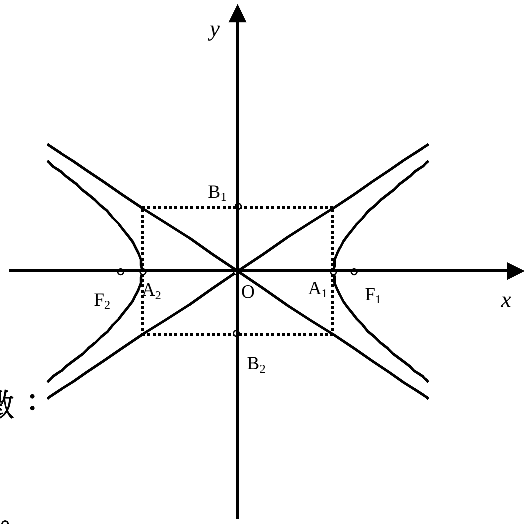
$=\sqrt{(x^2-2cx+c^2)+b^2(\dfrac{x^2}{a^2}-1)}=\sqrt{(\dfrac{a^2+b^2}{a^2})x^2-2cx+(c^2-b^2)}$

$=\sqrt{(\dfrac{c}{a}x)^2-2cx+a^2}$ $(\because b=\sqrt{a^2-c^2})$

$=\sqrt{(\dfrac{c}{a}x-a)^2}=|\dfrac{c}{a}x-a|$

同理可得$PF_2=|\dfrac{c}{a}x+a|$

由於點$P(x,y)$滿足$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，所以$\dfrac{x^2}{a^2}\geq 1 \Rightarrow |x|\geq a$



(1°)$x\geq a$：

$\dfrac{c}{a}x\geq c$，$\dfrac{c}{a}x-a\geq c-a>0$，$\dfrac{c}{a}x+a\geq c+a>0$

故得焦半徑$PF_1=|\dfrac{c}{a}x-a|=\dfrac{c}{a}x-a$，$PF_2=|\dfrac{c}{a}x+a|=\dfrac{c}{a}x+a$

於是$|PF_1-PF_2|=2a$

(2°)$x\leq -a$ 同理可證出$|PF_1-PF_2|=2a$。

結論：雙曲線方程式$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$(**左右開口的雙曲線**)的特徵：

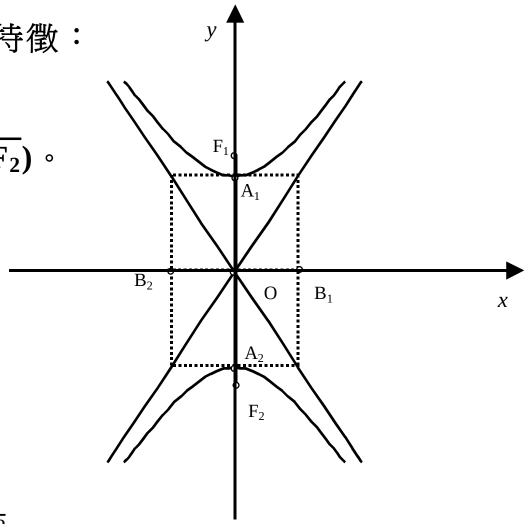
(1)中心(0,0)

(2)a=貫軸長之半=中心到貫軸頂點之距離$=\dfrac{1}{2}(\overline{PF_1}-\overline{PF_2})$。

b=共軛軸長之半=中心到共軛軸頂點之距離。

(b)若選取$F_1(0,c)$、$F_2(0,-c)$，雙曲線$\Gamma=\{P||PF_1-PF_2|=2a，\overline{F_1F_2}>2a\}$
的方程式為$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$。

結論：雙曲線方程式$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$**(上下開口的雙曲線)**的特徵：



(1)中心(0,0)

(2)a=貫軸長之半=中心到貫軸頂點之距離=$\frac{1}{2}(\overline{PF_1}-\overline{PF_2})$。

b=共軛軸長之半=中心到共軛軸頂點之距離。

(2)利用坐標的方法解釋雙曲線的漸近線：

設雙曲線的方程式為$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

當x很大時，$\sqrt{x^2-a^2}\approx\sqrt{x^2}$ 點$(x,\pm\frac{b}{a}x)$與點$(x,\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2})$會很接近，

於是我們可以猜測兩直線$y=\pm\frac{b}{a}x$為漸近線。

[說明]：

設$P(x_0,y_0)$在雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上，取$L_1$：$bx-ay=0$，$L_2$：$bx+ay=0$

計算：$d(P,L_1)\cdot d(P,L_2)=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{b^2+a^2}}\cdot\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{|b^2x_0^2-a^2y_0^2|}{b^2+a^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ (定值與P無關)

我們得到$d(P,L_1)\cdot d(P,L_2)$為定值，因此當P點離L_2越遠時，則P點離L_1越近；同樣地，P點離L_1越遠時，則P點離L_2越近。

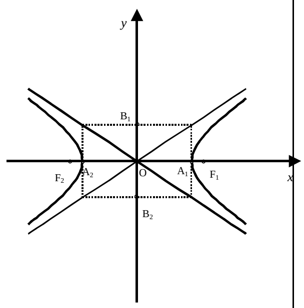
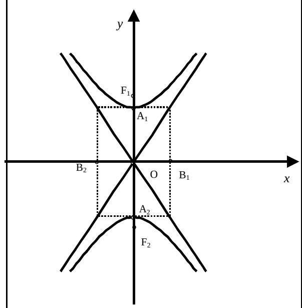
於是雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的雙曲線為$bx-ay=0$、$bx+ay=0$。

結論：

(a)雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的漸近線為 $bx\pm ay=0$。

(b)雙曲線$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$的漸近線為 $by\pm ax=0$。

(c)雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上的點 P 到兩漸近線的距離乘積為定值=$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$。

雙曲線的標準式	焦點	中心	對稱軸	漸近線	圖形
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$(\pm c,0)$				
$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$(0,\pm c)$				

(練習4) 試求雙曲線$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的中心、焦點、頂點、貫軸長、共軛軸長、正焦弦長、漸近線方程式？

(3)平移雙曲線的標準式：

例子：設雙曲線Γ：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 沿向量$\vec{l}=(3,2)$平移，所得的圖形為Γ'，

(1)請求出Γ'的方程式。

(2)並求Γ'的中心、焦點、頂點、貫軸、共軛軸所在直線方程式、漸近線方程式、正焦弦長、貫軸長。

[解法]：

(1)設$P'(x',y')$為Γ'上的任意點，令$P(x,y)$為Γ上的點，且$\overrightarrow{PP'}=(3,2)$，即P點沿向量$\vec{l}$平移到$P'$，所以$(x'-x,y'-y)=(3,2)\Rightarrow x=x'-3,y=y'-2$

$\Rightarrow \frac{(x'-3)^2}{9}-\frac{(y'-2)^2}{16}=1$ 故Γ'的方程式為$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$。

$\Rightarrow a^2=9$，$b^2=16,c^2=a^2+b^2=25\Rightarrow a=3,b=4,c=5$

根據a,b,c的意義，可知中心到貫軸頂點距離爲 3，中心到焦點的距離爲 5

(2)Γ的中心(0,0)，貫軸頂點(±3,0)、焦點坐標(±5,0)、貫軸方程式$y=0$、共軛軸方程式$x=0$、漸近線 $4x\pm3y=0$、正焦弦長$\frac{2\cdot16}{3}=\frac{32}{3}$、貫軸長=6。

平移過程中，雙曲線的中心、焦點、頂點坐標、貫軸、共軛軸、漸近線方程式會隨之作平移，而貫軸長、共軛軸長、正焦弦長不變。所以可得Γ'的各項資料：

Γ'的中心(3,2)，貫軸頂點坐標(3±3,2)、焦點坐標(3±5,2)、貫軸方程式$y=2$

共軛軸方程式$x=3$、漸近線 $4(x-3)\pm3(y-2)=0$，正焦弦長$\frac{2\cdot16}{3}=\frac{32}{3}$、貫軸長=6。

結論：

(1)$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow{沿\vec{l}=(h,k)平移} \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

雙曲線方程式$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (*左右開口的雙曲線*)的特徵：

(1°)中心(h,k)

(2°)a=貫軸長之半=中心到貫軸頂點之距離=$\frac{1}{2}(\overline{PF_1}-\overline{PF_2})$。

b=共軛軸長之半=中心到共軛軸頂點之距離。

(2) $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \xrightarrow{沿\vec{l}=(h,k)平移} \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

雙曲線方程式 $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ (上下開口的雙曲線)的特徵：

(1°)中心(h,k)

(2°)a=貫軸長之半=中心到貫軸頂點之距離=$\frac{1}{2}(\overline{PF_1}-\overline{PF_2})$。

b=共軛軸長之半=中心到共軛軸頂點之距離。

(3)平移前後的圖形，中心、焦點、頂點、漸近線方程式都同時平移一個向量，但雙曲線的形狀、貫軸、共軛軸的長度，這些幾何性質不會因位置不同而改變。

(4)雙曲線的一些要點整理：

(a)請先觀察題目的條件是否可以使用雙曲線的基本定義。

(b)給定一個雙曲線方程式如何求中心、頂點、焦點、貫軸、共軛軸長、正焦弦長？

1°掌握雙曲線的基本性質與a,b,c的意義。

2°將中心求出來，再根據中心到長軸頂點、短軸頂點、焦點的距離分別是a,b,c。找出中心、頂點、焦點的坐標，貫軸、共軛軸長、正焦弦長。

(c)如何根據條件求雙曲線的標準式：

1°判別是否爲標準式：

「標準式」的特徵⇒**雙曲線的貫軸、共軛軸與坐標軸平行(或重合)**

2°求雙曲線方程式的步驟：

step1：由貫軸、共軛軸決定型式

(1)直接判別⇒看貫軸、共軛軸是否平行x軸還是平行y軸

貫軸水平(共軛軸軸鉛直)⇔開口左右的雙曲線

貫軸鉛直(共軛軸水平)⇔開口上下的雙曲線

(2)間接判別⇒

貫軸上有五個重要的點，包括一個中心，兩個焦點，兩個頂點。

step2：求雙曲線中心(h,k)

step3：求a,b。

常用關係：

(1)三角形關係$c^2=a^2+b^2$

(2)正焦弦長$=\dfrac{\text{短軸長平方}}{\text{長軸長}}=\dfrac{2b^2}{a}$

(3)利用點在雙曲線上，點代入必滿足雙曲線方程式。

(4)注意漸近線的方程式$b(x-h)\pm a(y-k)=0$。

step4：代入標準式開口左右的雙曲線$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

開口上下的雙曲線$\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$

[例題2] 求滿足下列條件的雙曲線：

(1)共軛軸在$x=1$上，焦點是(6,3)，且過點(5,3)之雙曲線爲何？

(2)中心原點，一焦點爲(0,–13)，一頂點爲(0,12)。

(3)設雙曲線的二焦點爲F(5,2)、F′(–1,2)，且過(7,6)，則此雙曲線的方程式爲？

(4)一焦點爲$(1,2+\sqrt{5})$，兩漸近線爲$x+2y-5=0$、$x-2y+3=0$。

Ans：

(1)$\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1(2)\dfrac{-x^2}{25}+\dfrac{y^2}{144}=1(3)\dfrac{(x-2)^2}{5}-\dfrac{(y-2)^2}{4}=1(4)\dfrac{(y-2)^2}{1}-\dfrac{(x-1)^2}{4}=1$

(練習5) 已知雙曲線 $4y^2-25x^2=100$，求其中心、焦點、頂點、貫軸長、共軛軸長、正焦弦長、漸近線方程式？

Ans：(1)中心(0,0)(2)焦點$(0,\sqrt{29})(0,-\sqrt{29})$(3)頂點(0,5)(0,−5)(4)貫軸長=10(5)共軛軸長=4(6)正焦弦長=$\frac{8}{5}$(7)漸近線 $2y\pm5x=0$

(練習6) 求雙曲線$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{16}=1$的中心、頂點、焦點座標及貫軸、共軛軸及漸近線方程式，並作圖形。

Ans：O(−2,5) 頂點(1,5)、(−5,5)、焦點座標(3,5)、(−7,5)、貫軸 $y=5$、共軛軸 $x+2=0$、漸近線 $4(x+2)\pm3(y-5)=0$

(練習7) 雙曲線$\left|\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}\right|=6$，則：

(1)焦點______。(2)中心______。(3)貫軸長為___。(4)正焦弦長是___。

Ans：(1)(−4,1)(2,−3) (2)(−1,−1) (3)6 (4)$\frac{8}{3}$

(練習8) 求滿足下列條件的雙曲線方程式：

(a)$F_1(5,0)$，$F_2(-5,0)$是雙曲線的二個焦點，且P為雙曲線上一點，

若$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=8$。

(b)設雙曲線中心為(3,5)，貫軸平行x軸且長為 6，共軛軸長為 10

(c) 已知$F_1(-1,7)$，$F_2(-1,-3)$是雙曲線的二個焦點，正焦弦長為$\frac{32}{3}$

(d)以 $2x+y=0$ 與 $2x-y=0$ 為漸近線且一焦點為$(\sqrt{35},0)$

(e)以原點為中心，正焦弦長為 4，兩焦點間的距離為 $2\sqrt{15}$，且焦點在y軸上。

Ans：(a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ (b) $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{25}=1$(c) $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{16}=1$

(d) $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{28}=1$ (e) $-\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1$

(練習9) 雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的兩焦點$F_1$、$F_2$，若雙曲線上一點P滿足$\angle F_1PF_2=90°$且$\overline{PF_1}=2\overline{PF_2}$，$\overline{F_1F_2}=10$，求$a$，$b$之值。Ans：$a=\sqrt{5}$, $b=2\sqrt{5}$

(練習10) 雙曲線 $4x^2-y^2-8x-4y+4=0$ 之(1)頂點坐標為__________。(2)漸近線方程式為__________。(3)雙曲線上任一點到二漸近線之距離之積＝。Ans：(1)(1，−4)，(1，0)(2) $2x-y-4=0$，$2x+y=0$(3)$\frac{4}{5}$

(丙)雙曲線與漸近線

(1)已知漸近線如何表示雙曲線呢？

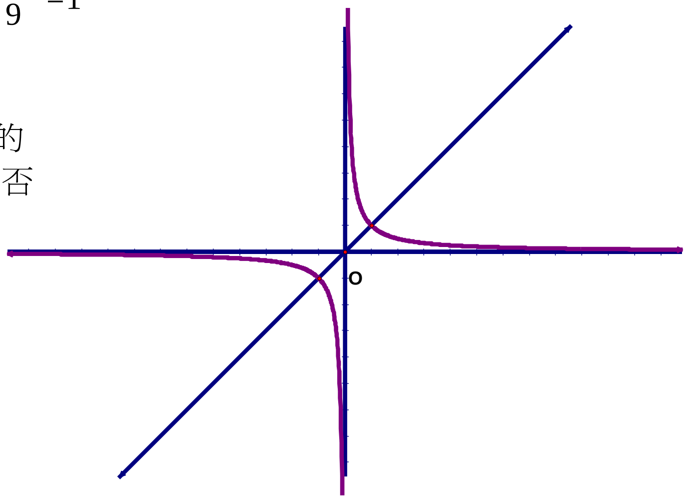
例子：

假設雙曲線Γ的方程式為$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$，$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

$\Rightarrow 9x^2-16y^2=144 \Rightarrow (3x+4y)(3x-4y)=144$

另一方面漸近線為 $3x+4y=0$、$3x-4y=0$

觀察上面的式子，我們猜想如果有一雙曲線的漸近線為 $3x+4y=0$、$3x-4y=0$，則此雙曲線是否為$(3x+4y)(3x-4y)=k(k\neq 0)$的形式？



例子：

請畫出$xy=4$ 的圖形？

觀察右圖，可知x,y軸為雙曲線的漸近線。

若設L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$ 和L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$ 是相交於一點的兩條直線，則$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=k$ $(k\neq 0)$ 代表以L_1、L_2為漸近線的雙曲線。

[說明]：

設Γ是以L_1、L_2為漸近線之一雙曲線，P(x,y)是Γ上的任一點，由漸近線的性質可知「P點到L_1、L_2之距離乘積是一個定值」。

即 $\dfrac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\times\dfrac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=k_1$

$\Rightarrow(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=\pm k_1\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}$ 。

結論：

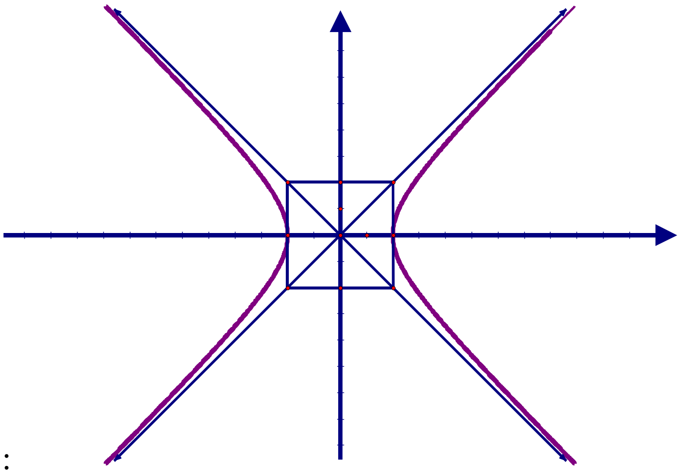
(a)若設L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$，L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$ 為雙曲線Γ的漸近線，
則雙曲線Γ可表為$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=k$ $(k\neq 0)$。

(b)兩漸近線的交點為雙曲線的中心。

(c)以**L_1、L_2**為漸近線的雙曲線，兩對稱軸為**L_1、L_2**的角平分線。

(2)等軸雙曲線

漸近線互相垂直的雙曲線稱為等軸雙曲線。



性質：

標準式爲等軸雙曲線 ⇔ $a=b$ ⇔ 貫軸長=共軛軸長 ⇔ 中央矩形爲正方形

[說明]：

設雙曲線$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$爲等軸雙曲線

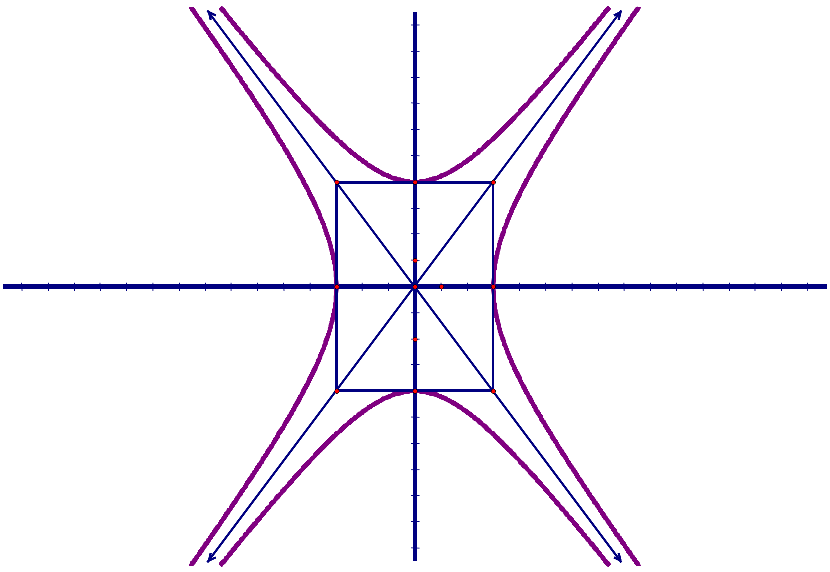
⇔ 漸近線$b(x-h)\pm a(y-k)=0$ 互相垂直⇔ $(\dfrac{b}{a})(\dfrac{-b}{a})=-1$ ⇔ $a=b$

例如：

$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 、$xy=k$ $(k\neq 0)$均爲等軸雙曲線。

(3)雙曲線Γ_1與Γ_2互爲共軛雙曲線

⇔Γ_1與Γ_2有相同的漸近線且Γ_1的貫軸、共軛軸分別爲Γ_2的共軛軸與貫軸。



上圖中，兩個雙曲線共用一個中央矩形，它們互爲共軛雙曲線。

例如：

雙曲線$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 與 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\mathbf{-1}$ 它們的貫軸、共軛軸互相對調因此互為共軛雙曲線。

性質：

(a)共軛雙曲線共用中央矩形，具有相同的漸近線。

(b) $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$的共軛雙曲線為$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=-1$

$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$的共軛雙曲線為$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=-1$

(c)雙曲線$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=\pm k$ $(k\neq 0)$ 互為共軛雙曲線。

[例題3] (1)一雙曲線之二漸近線為 $2x-y=0$，$2x+y=0$ 且貫軸長為 6，求其方程式。

(2)求以$(1,2+\sqrt{5})$為一焦點，兩漸近線為 $x+2y-5=0$ 與 $x-2y+3=0$ 的雙曲線方程式？Ans：(1)$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ 或$\frac{-4x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1$ (2)$\frac{(y-2)^2}{1}-\frac{(x-1)^2}{4}=1$

[例題4] 一等軸雙曲線通過(1,0)，且中心為(1,–2)，有一條漸近線為 $x+2y+3=0$，試求另一漸近線方程式與此等軸雙曲線的方程式。

Ans：$2x-y-4=0$，$(2x-y-4)(x+2y+3)=-8$

[例題5] 已知雙曲線G的二漸近線 $3x+2y-7=0$，$3x-2y+1=0$，又G的共軛雙曲線G'通過定點(3,0)，請問(1)G的方程式。　(2)G的正焦弦長。

Ans：(1)$(3x+2y-7)(3x-2y+1)=-20$　(2)$\frac{40}{9\sqrt{5}}$

(練習11) 一雙曲線Γ之漸近線爲 $3x+4y+2=0$、$3x-4y+10=0$，且一焦點$(-2,5)$
(1)請將Γ化爲標準式。
(2)請求出頂點坐標、正焦弦長。
(3)Γ的共軛雙曲線方程式。

Ans：(1) $\frac{-(x+2)^2}{\frac{256}{25}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{144}{25}}=1$ (2)$(-2,\frac{17}{5})$、$(-2,\frac{-7}{5})$(3) $\frac{(x-2)^2}{\frac{256}{25}}-\frac{(y-1)^2}{\frac{144}{25}}=1$

(練習12) 求以(1,3)爲中心，貫軸平行 y 軸，貫軸長爲 8，漸近線之斜率$=-1$ 之雙曲線方程式。　Ans：$\frac{-(x-1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$

(練習13) 已知雙曲線爲 $4y^2-9x^2-24y-18x-9=0$，試求其共軛雙曲線的方程式。
Ans：$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$

(練習14) 一等軸雙曲線的中心在(1,1)，過點(0,0)，且一漸近線爲 $x+2y-3=0$，其方程式爲何？　Ans：$(x+2y-3)(2x-y-1)=3$

(練習15) 雙曲線Γ以(1,2)爲中心，$3x+ay+1=0$、$3x+by-7=0$ 爲漸近線，且Γ通過(3,0)，請問(1)a,b 之值。 (2)Γ的正焦弦長。
Ans：(1)$a=-2$ $b=2$　(2)$3\sqrt{5}$

(丁)雙曲線的其他特性

(1)共焦點：

共焦點的二曲線Γ_1、Γ_2共焦點 $\Leftrightarrow$ 中心相同、c的值一樣。

[例題6] 已知一雙曲線的兩個焦點與橢圓$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{36}=1$ 的兩焦點都相同，且共軛軸長是$2\sqrt{3}$，求此雙曲線的方程式。Ans：$-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{27}=1$

(練習16) 已知一雙曲線的兩個焦點與橢圓$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的兩焦點都相同，且共軛軸長是 4，求此雙曲線的方程式。Ans：$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$

(練習17) 設與雙曲線$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$ 共焦點，且貫軸長爲 4 之雙曲線爲Γ，求Γ的方程式。Ans：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{37}=1$

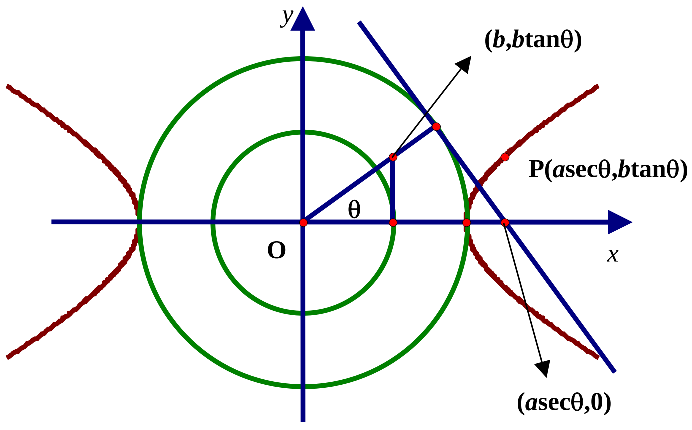
(練習18) 已知圓$(x-1)^2+(y-2)^2=9$、橢圓$\dfrac{(x-1)^2}{25}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ 現有一橢圓的長軸恰等於雙曲線的貫軸，且橢圓與圓相切，請問此橢圓的方程式爲何？
Ans：$\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

(2)雙曲線的參數式：

雙曲線：$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

上的任一點 P(x,y)可表爲

$x=h+a\sec\theta$，$y=k+b\tan\theta$。



[例題7] 求點A(3,0)與方程式$x^2-4y^2=4$ 圖形上動點P之距離最小值為何？並求P點之坐標。 Ans：$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，P($\frac{12}{5}$,$\pm\frac{\sqrt{11}}{5}$)

(練習19) 點Q(1,4)為平面上一定點，試在雙曲線$x^2-9y^2-2x=8$ 上找一點P，使得$\overline{\mathbf{PQ}}$最短，則P點的坐標為何？又$\overline{\mathbf{PQ}}$之最小值為何？
Ans：P($\pm\frac{3\sqrt{29}}{5}+1,\frac{2}{5}$)，$\sqrt{\frac{117}{5}}$

(3)二次曲線圖形的討論：

圖形的討論：$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$

圓：A=B>0

橢圓：A>0，B>0，A≠B

雙曲線：AB<0

[例題8] 設Γ：$\frac{x^2}{25-t}+\frac{y^2}{16-2t}=1$ ，請就 t 值討論Γ所代表的圖形名稱。
Ans：$t=-9$ 表圓，$t<8$，$t\neq-9$ 時表橢圓，$8<t<25$ 雙曲線，$t\geq25$ 或 $t=8$ 無圖形。

(練習20) 設Γ：$\frac{x^2}{5+k}+\frac{y^2}{3+k}=1$ ，Γ′：$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$

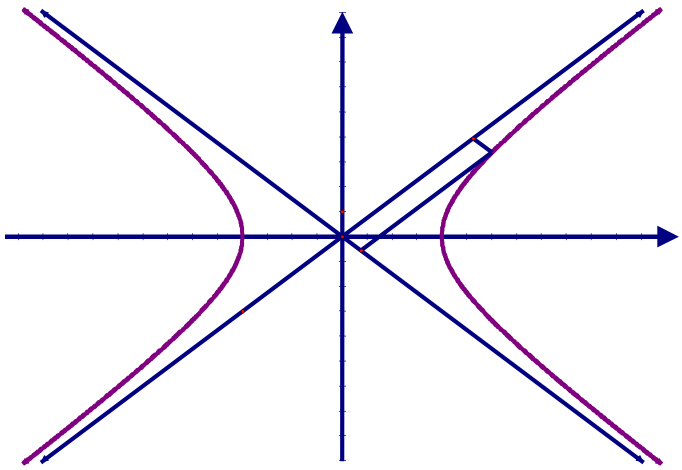
(1)請就$k(k\neq-5,-3)$值討論Γ的圖形。

(2)若Γ為一雙曲線，請問焦點坐標為何？

Ans：(1)$k>-3$ 時橢圓，$-5<k<-3$ 時，雙曲線，$k<-5$，無圖形。
(2)$(\pm\sqrt{2}\ ,0)$

(4)雙曲線的其他性質：

[例題9] 點 P 爲雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$上任一點，過 P 作二漸近線之平行線，此二直線與二漸近線所圍成平行四邊形的面積爲定值$\frac{ab}{2}$。



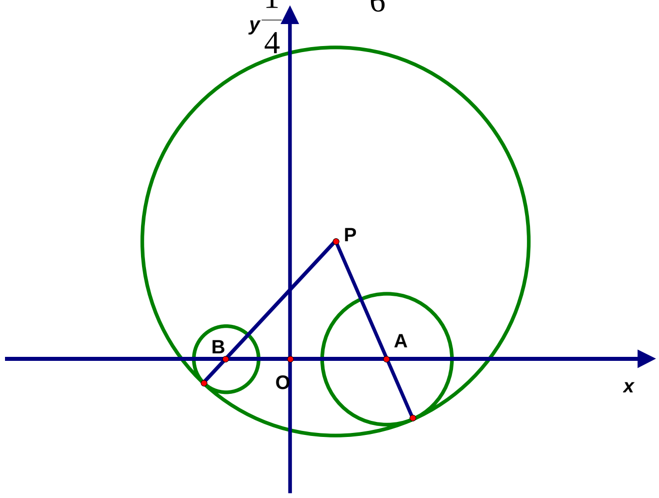
(練習21) 直線 L 經過雙曲線的焦點，且與漸近線垂直，證明中心到直線 L 之距離等於貫軸長度一半。

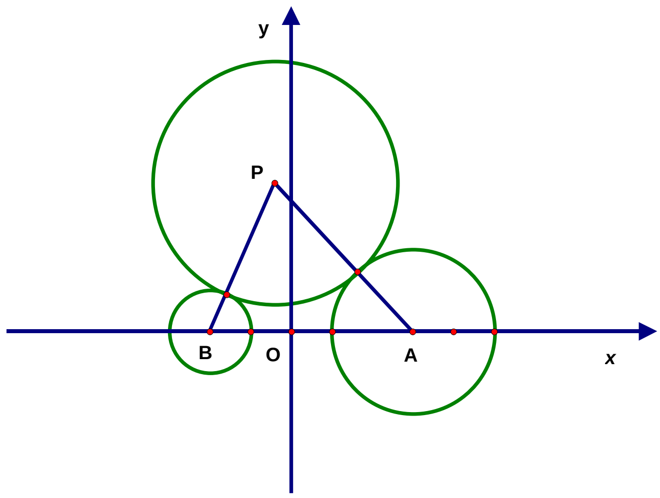
(練習22) 證明：雙曲線上一個焦點到一條漸近線的距離等於共軛軸長度的一半。

(練習23) 試證明一雙曲線之一頂點至其共軛雙曲線之一頂點之距離必等於中心到焦點之距離。

(5)軌跡問題：
如何求動點的軌跡方程式：
設所求的動點 P(x,y)，透過題目的條件，找出 x,y 的關係式 $f(x,y)=0$，再檢查滿足 $f(x,y)=0$ 的點都具有題設的條件。

[例題10] 設圓C_1：$(x-3)^2+y^2=4$，圓C_2：$(x+2)^2+y^2=1$，今有一動圓與圓C_1與圓C_2均相切(外切或內切)，則此動圓之圓心軌跡方程式為何？Ans：$\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{6}=1$





[例題11] 平面上點P到F(3,0)的距離等於點P到直線L：$x-1=0$ 的 2 倍，請求出P點的軌跡方程式。　Ans：$3x^2-y^2-2x-5=0$

(練習24) 一圓C與$(x+1)^2+y^2=9$ 相切，並過點A(4,0)，試求動圓C的圓心所成的圖形之軌跡方程式。 Ans：$\dfrac{(x-\frac{3}{2})^2}{\frac{9}{4}}-\dfrac{y^2}{4}=1$

(練習25) 有一圓心爲 O(0,0)半徑爲 4 的圓與點 A(6,0)，今在圓上找動點 Q，考慮$\overline{AQ}$的中垂線與直線 OQ 的交點 P，請求出 P 點的軌跡方程式。

Ans：$\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$

綜合練習

(1) 在坐標平面上，以(–1 , 1)，(3 , 1)爲焦點，且通過點(3 , 4)畫一雙曲線．試問此雙曲線也會通過下列哪些點?
(A)(1 , 1)(B)(–1 ,4)(C)(3 ,–2)(D)(–1 ,–2)(E)(3 , 1)。

(2) 設F_1與F_2爲坐標平面上雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的兩個焦點，P爲Γ上一點，使得此三點構成一等腰三角形。試問以下那些值可能是這些等腰三角形的周長？
(A)20 (B)24 (C)28 (D)32 (E)36。 (2005 學科能力測驗)

(3) 求滿足下列條件的雙曲線方程式：
(a)求貫軸在$x+1=0$ 上且長度爲 4 一漸近線爲 $2x+y=0$。
(b)以$y\pm2x$爲漸近線且過點(3,8)。
(c)求以$F_1(-2,-2)$、$F_2(8,-2)$爲焦點，一漸近線的斜率爲$\dfrac{3}{4}$。
(d)等軸且中心(1,2)，貫軸平行x軸長度爲 6。
(e)中心(0,0)，焦點F、F'在x軸上，A爲其一頂點，且$AF=6$，$AF'=12$。

(4) 已知等軸雙曲線Γ的一條漸近線爲 $x-y=0$，中心的坐標(1 , 1)，且Γ過點(3 , 0)，試問下列敘述哪些是正確的？(A)Γ的兩漸近線互相垂直(B)$x+y=0$ 爲Γ的另外一條漸近線(C)Γ的貫軸在直線 $y=1$ 上(D)點$(1 , \sqrt{3}-1)$爲Γ的一個頂點(E)點$(1 , \sqrt{6}-1)$爲Γ的一個焦點。

(5) 雙曲線$\left|\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}-\sqrt{(x+1)^2+(y+5)^2}\right|=6$ 化簡後方程式爲_______，頂點爲__________，共軛雙曲線方程式爲________。

(6) 雙曲線$\left|\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}-\sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2}\right|=8$ 的共軛軸方程式。

(7) 已知二頂點$A_1(5,3)$，$A_2(-3,3)$，一漸近線的斜率爲$\dfrac{3}{4}$，試求此雙曲線的方程式。

(8) 試求經過 $M(8\sqrt{2}\ ,10)$且與雙曲線$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$ 有相同漸近線的雙曲線方程式。

(9) 設一雙曲線過點$(\sqrt{6},1)$，又與橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$ 共頂點，且貫軸與長軸重合，請問此雙曲線的方程式為何？

(10) 試求下列各小題：

(a)求中心$(2,-3)$，一漸近線為 $2x-y-7=0$ 且過$(1,-2)$的等軸雙曲線。

(b)已知一雙曲線與橢圓$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{36}=1$ 共焦點，且共軛軸長 $2\sqrt{3}$，則此雙曲線的共軛雙曲線為何？

(11) 設雙曲線Γ過點 $P(\sqrt{6},1)$，又與$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$ 共頂點，且貫軸與長軸一致，求雙曲線Γ的方程式。

(12) 設F，F'為雙曲線：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0，b>0)$二焦點，$\overline{FF'}=10$，P在雙曲線上，且$\angle FPF'=90°$，$\overline{PF'}=2\overline{PF}$，則雙曲線的二漸近線為__________，共軛雙曲線為__________。

(13) 設雙曲線二漸近線為 $2x-y=0$，$2x+y-4=0$，且為過點$(6,10)$，則此雙曲線的方程式？雙曲線上任一點到兩漸近線距離之乘積=？

(14) 設橢圓C_1與雙曲線C_2有相同的兩個焦點，已知直線$y=x$為C_2之一漸近線，點$(\sqrt{6},\sqrt{3})$為C_1與C_2之一交點．若C_1的方程式為$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中$|a|>|b|$，求$a^2$，$b^2$。

(15) 若曲線$\frac{(x-1)^2}{15-k}+\frac{(y+2)^2}{24-k}=1$ 表一雙曲線，則(a)k 的範圍為何？ (b)焦點坐標。

(16) 設C_1：$x^2+y^2=1$，C_2：$(x-8)^2+y^2=25$，則與二圓相切(外切、內切)之圓的圓心P之軌跡方程式。

(17) 平面上點 P 到 $F(-5,0)$的距離等於點 P 到直線 L：$x+1=0$ 的 2 倍，請求出 P 點的軌跡方程式。

(18) 設直線L_1：$3x-4y-11=0$，L_2：$3x+4y+5=0$，動點$P(x,y)$到直線L_1與L_2之距離乘積為定值$\frac{144}{25}$，求證P點所成圖形為雙曲線，並求此雙曲線之漸近線方程式。

(19) 設 $0°\le\alpha\le180°$，請討論Γ_α：$x^2+y^2\cos\alpha=1$ 的圖形。

(20) 設$A(6,0)$，P是雙曲線 $2x^2-y^2=8$ 上任一點，求$\overline{AP}$最小值，並求P點坐標。

(21) 一雙曲線上有一點P，到兩頂點之距離為$PF_1=4$，$PF_2=10$，又$\angle F_1PF_2=\cos^{-1}\frac{1}{4}$，則$F_1F_2=$？

進階問題

(22) 試證明雙曲線Γ和它的共軛雙曲線Γ'的四個焦點在同一個圓上。

(23) 設O為雙曲線$x^2-y^2=1$ 的中心，F_1、F_2 為二焦點，P為此雙曲線上任一點。試證明：$OP^2=PF_1\cdot PF_2$。

(24) 點$A(4,0)$，$B(10,0)$，圓C：$x^2+y^2=64$，直線L：$x+12=0$，求
(a)與直線L相切且與圓C外切的圓之圓心軌跡方程式．
(b)過A且與圓C相切之動圓圓心的軌跡方程式．
(c)過B且與圓C相切之動圓圓心的軌跡方程式．

(25) 設過原點之直線L與L_1：$x+y=2$，L_2：$x-y=2$ 交於A、B兩點，求$\overline{AB}$中點的軌跡方程式。

綜合練習解答

(1) (B)(C)(D)

(2) (B)(E)

(3) (a) $\frac{-(x+1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ (b) $\frac{-x^2}{7}+\frac{y^2}{28}=1$ (c) $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ (d)$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$ (e)$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{72}=1$

(4) (A)(C)

(5) $-\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，頂點$(-1,3)(-1,-3)$，共軛雙曲線$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

(6) $3x+4y=0$

(7) $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$

(8) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{100}=1$

(9) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$

(10) (a) $(2x-y-7)(x+2y+4)=-3$，(b)$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{27}=1$

(11) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$

(12) $2x\pm y=0$，$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=-1$

(13) $(2x-y)(2x+y-4)=36$，$\frac{36}{5}$

(14) $a^2=12$，$b^2=6$

(15) (a)$15<k<24$ (b)$(1,-5)$、$(1,1)$

(16) $\frac{(x-4)^2}{1}-\frac{y^2}{12}=1$

(17) $3x^2-y^2-2x-21=0$

(18) $3x-4y-11=0$ 與 $3x+4y+5=0$

(19) $\alpha=0°$時，圓；$0°<\alpha<90°$時，圖形為直立的橢圓；$\alpha=90°$時，圖形為兩平行線；$90°<\alpha<180°$，圖形為左右開口的雙曲線；$\alpha=180°$時，圖形為等軸雙曲線。

(20) P(2,0)時，有$\overline{AP}$最小值為 4。

(21) $4\sqrt{6}$

(22) 可假設兩雙曲線為$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 、$\frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，而四個焦點坐標分別為$(c,0)$、

$(-c,0)$、$(0,c)$、$(0,-c)$所以四個焦點在同一個圓上(圓心為$(0,0)$半徑為 c)]

(23) 令$P(x,y)$、$F_1(\sqrt{2},0)$、$F_2(-\sqrt{2},0)$ $\Rightarrow PF_1^{\,2}\cdot PF_2^{\,2}=$
$[(x-\sqrt{2})^2+y^2][(x+\sqrt{2})^2+y^2]=(x^2+y^2)^2-4(x^2-y^2)+4=(x^2+y^2)^2=OP^2$，
因為$x^2-y^2=1$]

(24) (a)$y^2=40(x+10)$，(b)$\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$，(c)$\dfrac{(x-5)^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

(25) $(x-1)^2-y^2=1$，但不包含$(2,0)$[提示：設$y=mx$，則$A(\dfrac{2}{1+m},\dfrac{2m}{1+m})$、$B(\dfrac{2}{1-m},\dfrac{2m}{1-m})$,
因此$\overline{AB}$的中點$(\dfrac{2}{1-m^2},\dfrac{2m}{1-m^2})$令$x=\dfrac{2}{1-m^2}$，$y=\dfrac{2m}{1-m^2}$ $\Rightarrow y=mx$ $\Rightarrow$再代入$x=\dfrac{2}{1-m^2}$
$\Rightarrow x^2-y^2=2x$ ，因為A、B相異，所以不包含L_1、L_2的交點$(2,0)$]