第二章 空間中的平面與直線

§2–1 空間概念

空間與平面的區別：
(1)平面：只有「前後」與「左右」兩種方向的運動，其範圍必在平面上。
(2)空間：具有「前後」、「左右」與「上下」三種方向的運動，其範圍爲空間。

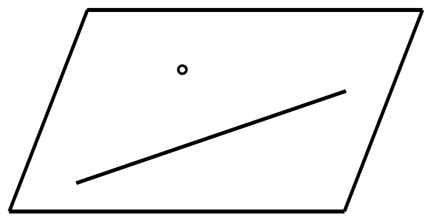
(甲)平面的基本性質

我們曾經學過一些有關平面幾何中點、直線、三角形、圓、平行四邊形等圖形的特性，或是這些圖形彼此之間的關係：平行、垂直、全等、相似等等。由於這些性質與關係都在平面上來討論，因此對於平面的概念與特性，往往不會特別提及。但是在空間中討論問題時，因爲空間中有許多不同的平面，因此就無法避免要討論空間中平面的概念與關係。底下列出一些基本性質，作爲討論問題的起點。

公理一：
若一條直線上的兩點在同一個平面上，則這條直線上所有點都在這個平面上。

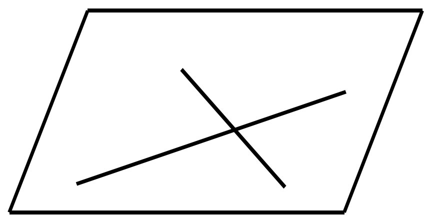
公理二：
若兩個平面有一個公共點，則兩個平面有且只有一條通過這個公共點的交線。

公理三：
經過不在同一直線上的三點，有且只有一個平面。

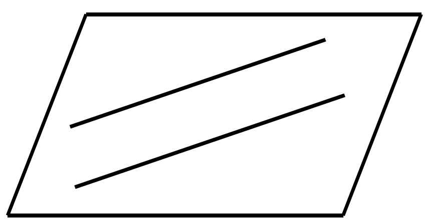


根據這三個公理，可推出底下三個定理：

定理一：經過一直線與線外一點，有且只有一個平面。
[證明]：
取直線上的兩點，由公理三只有一個平面E通過這三點，再根據公理一，可知此直線上所有的點都在平面E上，所以經過一直線與線外一點，有且只有一個平面E。



定理二：經過兩相交直線，有且只有一個平面。
[證明]：
設兩相交直線爲L、M，交點爲P，在L、M上
各取一點A、B，由公理三，可得只有一個平面F通過A、B、P。
因爲L有A、P兩點在平面F上，且M有B、P兩點在平面F上，由公理一，可知L、M均在平面F上。



定理三：經過兩平行線，有且只有一個平面。
[證明]：
設$L_1 // L_2$，P在L_1上，則只有一個平面E通過P與L_2，但是L_1與L_2共平面，
所以只有一個平面E通過L_1,L_2。

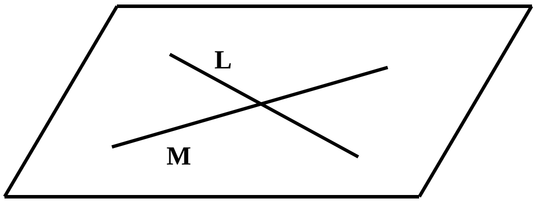
結論：決定平面的條件：
(1) 經過不在同一直線上的三點，有且只有一個平面。
(2) 經過一直線與線外一點，有且只有一個平面。
(3) 經過兩相交直線，有且只有一個平面。
(4) 經過兩平行線，有且只有一個平面。

(練習1) 若平面E與兩平面E_1、E_2分別交直線L_1,L_2，則$L_1//L_2$。

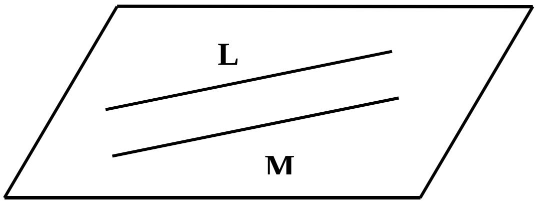
(乙)空間中直線、平面間的關係

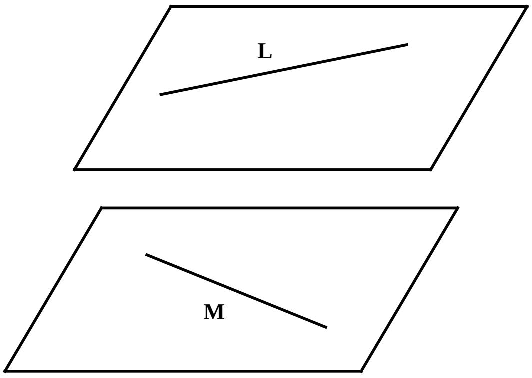
(1)空間中兩直線的關係：

(a)交於一點。



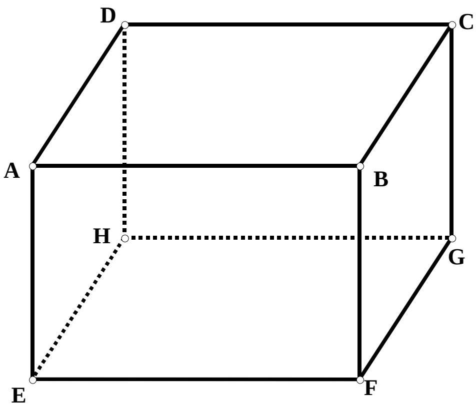
(b)不相交：
平行線：共平面而無交點的兩直線稱爲**平行線**。
歪斜線：不共平面的兩直線稱爲**歪斜線**。



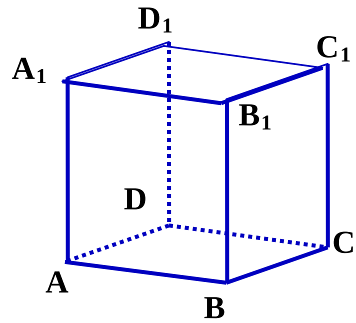


(c)歪斜線的公垂線：
互爲歪斜線的兩直線L_1與L_2有一公垂線，而且只有一條，其公垂線段長，是兩歪斜線上各取一點之連線段長的最小值。

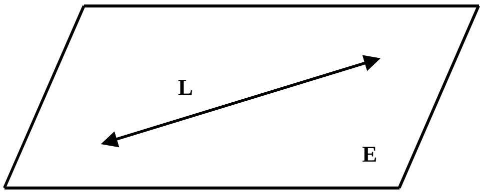
[例題1] 如圖，長方體 ABCD−EFGH 的 12 條稜線延長爲 12 條直線，共可決定幾對歪斜線？
Ans：24 對

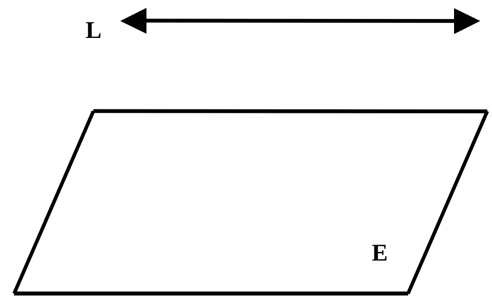


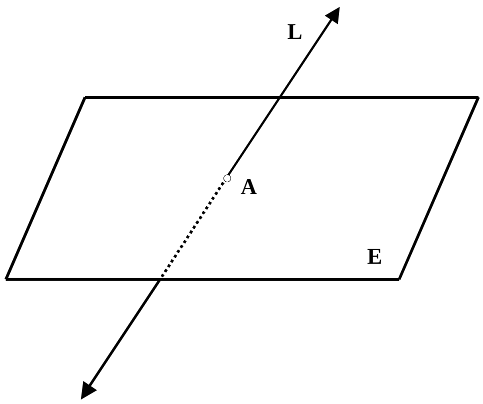
(練習2) 如圖是一個正立方體，請找出下列各線段所在直線間的關係：
(1)線段AB與線段CC_1　(2)線段A_1C與線段BD_1
(3)線段AA_1與線段CC_1。



(2)平面與直線的關係：
(a)直線與平面重合：直線上的每一點都落在平面上。
(b)直線與平面交於一點。
(c)直線與平面平行：直線與平面沒有交點。

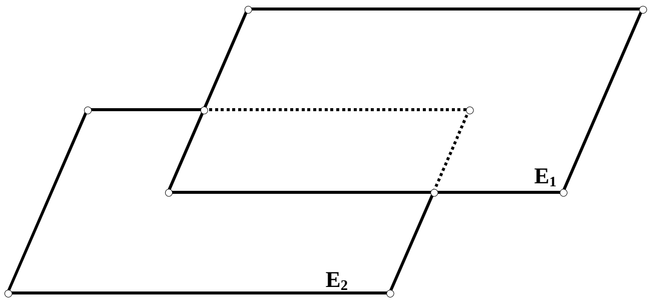


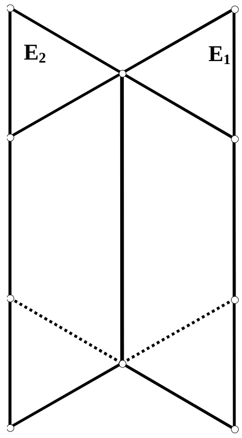




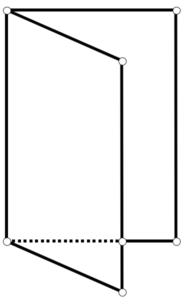
(3)空間中兩平面的關係：
(a)空間中兩平面無交點，稱為兩平面平行。

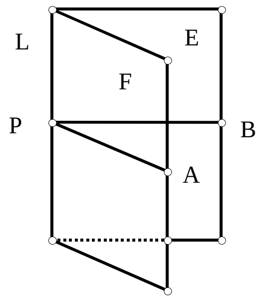
(b)兩平面交於一直線：
空間中兩平面E_1、E_2的公共點構成一直線，稱為平面E_1、E_2的交線。





(2)二面角：





(a)兩個平面E、F的交線L上取一點P，分別在E、F上作兩射線PA、PB，則 $\angle APB$稱爲E、F兩平面的二面角。

[討論]：這樣定義的二面角與P的選擇有關嗎？

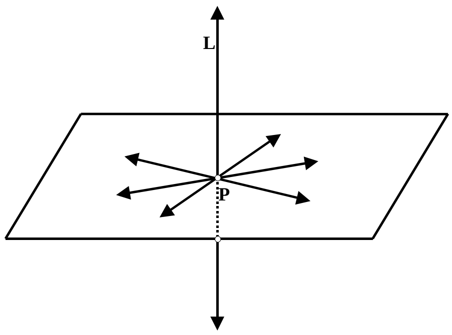
(b)兩平面垂直：當兩平面的二面角爲 90°，則稱兩平面互相垂直。

(丙)直線與平面間的垂直線與垂直平面

(1)過點對於直線的垂線：

(a)給定一直線 L 及線外一點 P，恰有一直線通過 P 且垂直於直線 L。

(b)給定一直線 L 及線上一點 P，有無限多直線通過 P 且垂直於直線 L，而且這些直線構成一平面。



(2)直線垂直平面：

(a)定義：

若直線 L 與平面 E 相交於 P 點，且平面 E 上所有通過 P 點的每一直線都和 L 垂直，則稱直線 L 垂直於平面 E，以 $L \perp E$ 表示。

[註解]：

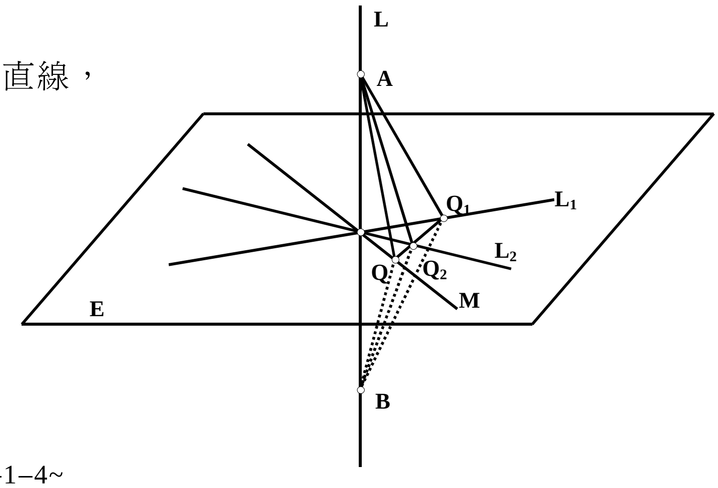
若根據以上的定義去判別直線與平面是否垂直，那麼就會沒完沒了，因爲必須去檢查平面E上每一條過P點的直線是否垂直直線L，可否找一個比較適合的判別性質呢？

判別性質：

若平面E上存在兩條通過P點的相異直線L_1、L_2分別與L垂直，則L垂直於平面E。

[證明]：

設M是平面E上過點P且異於L_1、L_2的任一直線，



在L上取兩點A、B使得P點爲$\overline{AB}$的中點，

又在直線L_1、L_2、M上分別取Q_1、Q_2、Q使得這三點共線。

由垂直平分的性質得到

$\overline{Q_1A}=\overline{Q_1B}$，$\overline{Q_2A}=\overline{Q_2B}$

$\Rightarrow \Delta AQ_1Q_2 \cong \Delta BQ_1Q_2$

$\Rightarrow \angle AQ_1Q_2=\angle BQ_1Q_2$

$\Rightarrow\Delta AQ_1Q\cong\Delta BQ_1Q\Rightarrow\overline{AQ}=\overline{BQ}\Rightarrow M$是$\overline{AB}$的中垂線$\Rightarrow M\perp L$。

(3)平面的垂直線與垂直平面：

(a)給定一平面E與其上的一點A，恰有一直線L通過A點且與平面E垂直。

(b)給定一平面E與其外的一點P，恰有一直線L通過P點且與平面E垂直。

(c)給定一平面E與其上的一點A，有無限多個平面通過A點且與平面E垂直。

(d)給定一平面E與其外的一點P，有無限多個平面通過P點且與平面E垂直。

(e)若直線L與平面E垂直，則空間中包含直線L的每個平面都與平面E垂直。

(f)給定一平面E與其外一直線L(不垂直於平面E)，
恰有一平面包含L且垂直於E。

[例題2] 下列那些敘述是正確的？
(A)在平面上，若兩相異直線不相交，則它們必平行。
(B)在空間中，若兩相異直線不相交，則它們必平行。
(C)在平面上，任意兩相異直線一定有公垂線(仍在該平面上)
(D)在空間中，任意兩相異直線一定有公垂線。
(E)在空間中，相交的兩相異平面一定有公垂面。
(公垂面是指與該兩平面都垂直的平面)　Ans：(A)(D)(E)　(87社)

(練習3) 下列敘述何者正確？______________。
(A)設一直線L交一平面E於A，若在E上過A有一直線L'與L垂直，
則L垂直E。
(B)平行於同一平面的二直線必平行。
(C)在空間中，若E爲AB之垂直平分面，若點P滿足AP＝BP，則P在E上。
(D)已知相異兩平面F,M交於一直線L，若L垂直一平面E，則F,M均垂直E。
(E) 垂直於同一直線的二直線必平行。　Ans：(C)(D)

(練習4) (是非題)
(1)設一直線L交一平面E於A，若在E上過A有一直線L'與L垂直，
則L垂直於平面E。
(2)已知相異二平面F、M交於一直線，若L垂直一平面E，則F、M均

垂直於E。

(3)兩歪斜線在一平面E之正射影有可能爲二平行線。

(4)相異三平面E_1、E_2、E_3兩兩相交於不同之三線必平行。

(5)平行於同一平面的二直線必共共面。

(6)平行於同一平面的二直線必共平行。

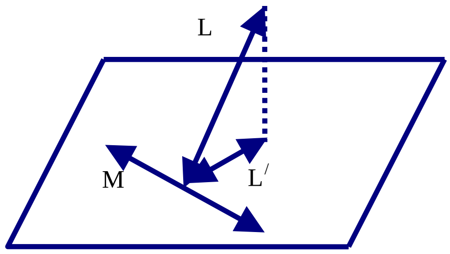
Ans：(1)× (2)O (3) O(4) × (5) × (6) ×

(丁)三垂線定理

如圖，直線M在平面E上，直線L不在E上，有時候我們不是很容易能判別L與M是否垂直？如果我們從平面E上方俯視下去，看到的直線L'與M垂直，那麼直觀上來說，L會與M垂直，而這種視覺的直觀看法是否正確呢？

換句話說，將L上的每一點投影到平面E上，形成直線L'，若同時落在平面E上的L'與M垂直時，那麼可否根據L'垂直於M的前提，來得到L與M垂直的結論呢？

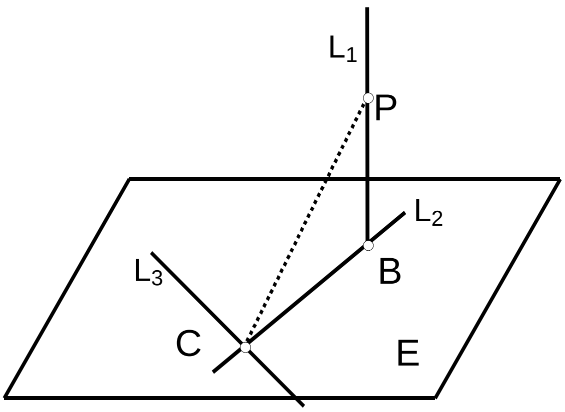
接下來我們介紹「三垂線定理」來回答這個問題。

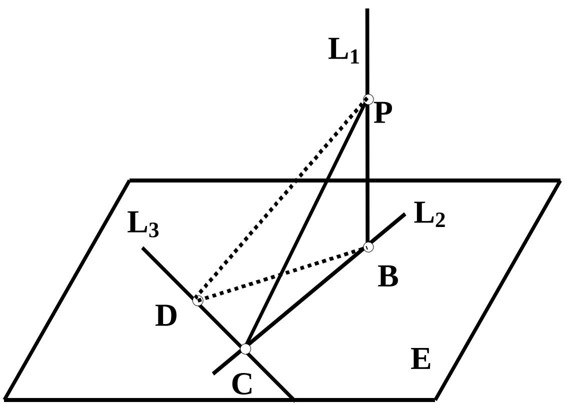


三垂線定理：

如圖，設$L_1 \perp L_2$交於B點，L_3也在平面E上，

(1)若$L_2 \perp L_3$交於C點，則$\overline{PC} \perp L_3$。(P爲L_1上任取的一點)





[證明]：

設D爲L_3上異於C的一點，

則$\overline{PD}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{DB}^2$ (因爲直線BD垂直L_1)

$= \overline{PB}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{CB}^2$ (因爲L_2垂直L_3，所以$\overline{DB}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CB}^2$)

$= \overline{PC}^2 + \overline{DC}^2$ (因爲L_1垂直L_2，所以$\overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{CB}^2$)

因此$\overline{PD}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{DC}^2$， 所以$\overline{PC} \perp \overline{CD}$，即$\overline{PC} \perp L_3$。

[分析]：

(1)三垂線定理的意義：
上述的證明中，L_3、直線PC分別爲平面E上的直線、平面E上的斜線，根據證明的結果，可以得知平面E上的斜線的正射影L_2與平面E上的直線L_3垂直時，可以保證平面E上的直線L_3與平面E上的斜線($\overleftrightarrow{PC}$)垂直。所以可以得知
三垂線定理主要是在探討平面E內的直線M與平面E上的斜線L之垂直問題。
當直線M垂直於斜線L在平面E上的正射影$L^{/}$時，就可以保證斜線L與直線M垂直。

(2)三垂線定理常用來證明或驗證空間中兩條直線的垂直性。

(3)三垂線定理之逆定理仍然成立。

設$L_1 \perp L_2$交於B點，L_3也在平面E上， 若 $\overline{PC} \perp L_3$，則$L_2 \perp L_3$。

[例題3] 給定一個正立方體$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，
求證：(1)直線$A_1C \perp$直線BC_1。(2)直線$A_1C \perp$平面C_1DB。

(練習5) 平面 E 上有一個三角形 ABC，設 H 爲ΔABC 的垂心，P 爲平面 E 外一點，且直線$\overleftrightarrow{PH}$是平面 E 的垂線，請問直線$\overleftrightarrow{PA}$與$\overleftrightarrow{BC}$是否會垂直？
(提示：考慮直線$\overleftrightarrow{PA}$在平面 E 上的正射影直線$\overleftrightarrow{AH}$，再檢驗直線$\overleftrightarrow{AH}$與$\overleftrightarrow{BC}$是否會垂直？)

(戊)其他補充的性質

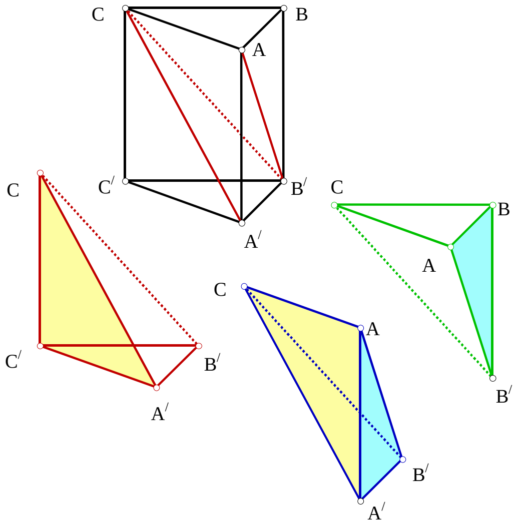
(1)錐體體積：

如果三角錐的底面積是s，高是h，體積=$\frac{1}{3}sh$。

[說明]：由右圖可知，三個錐體的體積都相等

且三個錐體組成一個三角柱。

故三角錐的體積=$\frac{1}{3}$(三角柱的體積) =$\frac{1}{3}$×底面積×高。



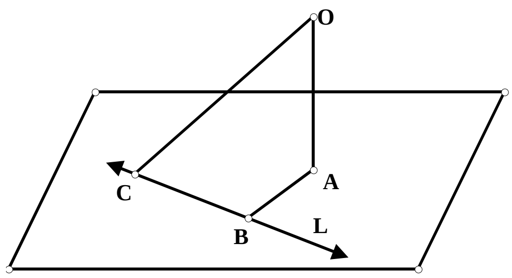
(2) E、F二平面之銳夾角爲θ，區域R在E上，而R在F之投影區域爲R'，則$R'=R\cdot\cos\theta$ 。

[例題4] 設 O 點在平面 E 上的投影點爲 A，A 在平面 E 上一直線 L 之投影點爲 B，C 爲 L 上一點

(1)若$\overline{BC}=12$，$\overline{OC}=13$，$\overline{AB}=4$，求$\overline{OA}=$？

(2)ΔABC 與ΔOBC 所在平面的二面角爲θ，求 cosθ=？

Ans：(1)3 (2)$\frac{4}{5}$

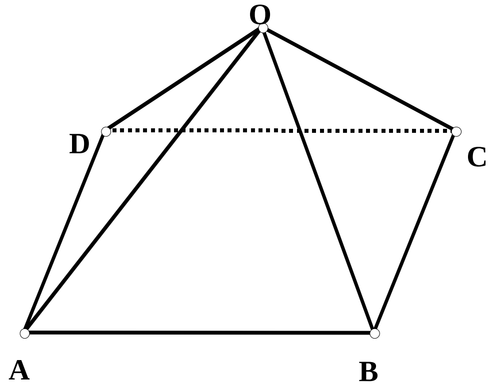


[例題5] 如圖，底面爲正方形，側面均爲正三角形之金字塔之各稜長均爲a，

(1)求兩側面ΔOAD與ΔOCD所在平面的二面角。

(2)求ΔABO與底面ABCD所在平面的二面角。

Ans：(1)$\cos^{-1}\frac{1}{3}$ (2)$\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$



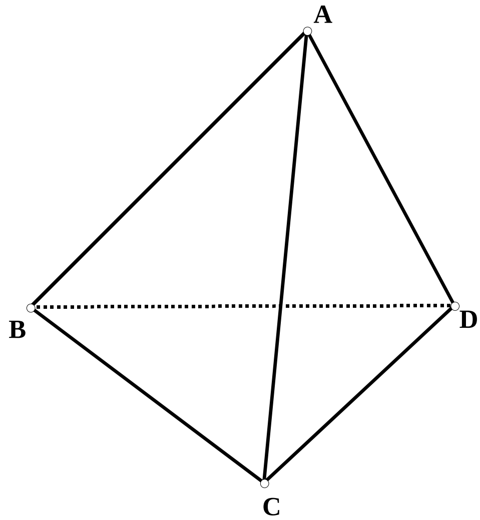
[例題6] 設一正四面體各稜長均爲a

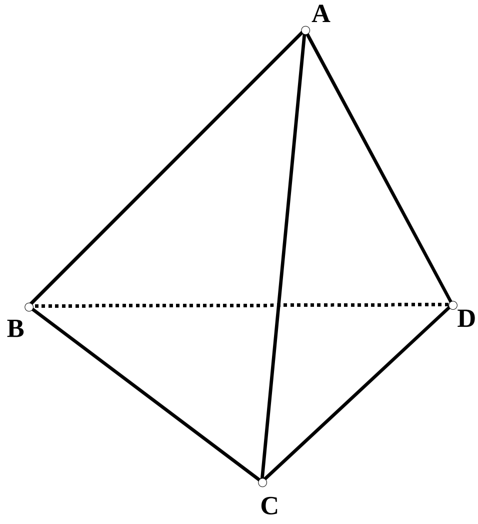
(1)求頂點A到底面BCD的距離。(2)求此四面體的體積。

(3)求直線AB、CD的距離爲多少？(4)內切球的半徑爲多少？

(5)外接球的半徑爲多少？

Ans：(1)$\frac{\sqrt{6}}{3}a$ (2)$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ (3)$\frac{\sqrt{2}}{2}a$ (4)$\frac{\sqrt{6}}{12}a$ (5)$\frac{\sqrt{6}}{4}a$



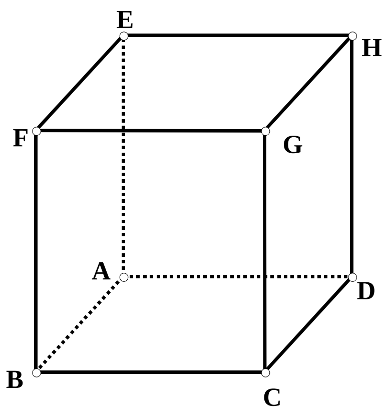


(練習6) 長方體 ABCD−EFGH 中，$\overline{AB}$=3，$\overline{AD}$=4，$\overline{AE}$=5

(1)求四面體 E−ABCD 之體積。

(2)ΔABD 與ΔBDE 所在平面之二面角之角度爲θ，tanθ=？

Ans：(1)10 (2)$\frac{25}{12}$



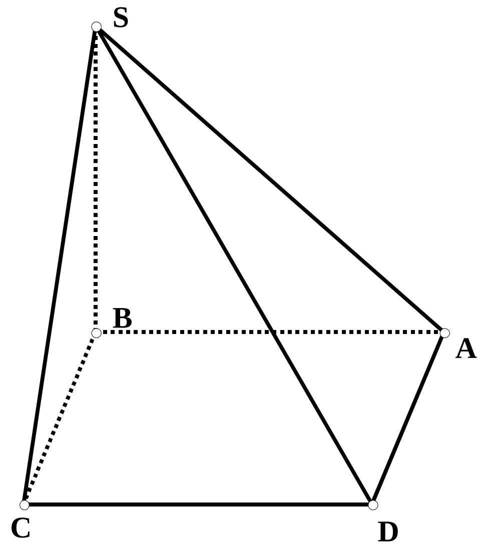
(練習7) 右圖的四角錐，底面 ABCD 爲一矩形

$\overline{AB}$=8，$\overline{BC}$=6，側面爲四個全等的等腰三角形

$\overline{OA}$=$\overline{OB}$=$\overline{OC}$=$\overline{OD}$=13，求

(1)此角錐的高之長。　(2)ΔOAB 之面積。

Ans：(1)12 (2)$4\sqrt{153}$



(練習8) 如圖，四角錐 S−ABCD 的底面是邊長爲 1 的正方形，側稜$\overline{SB}$垂直於底面，並且$\overline{SB}$=$\sqrt{3}$，用α表示∠ASD，求 sinα的值。Ans：$\frac{1}{\sqrt{5}}$

(練習9) 空間中，A 點在平面 E 的垂足爲 H，$\overline{AH}$=3，L 爲平面 E 上一直線，由 H 作 L 的垂線交 L 於 B 點，$\overline{HB}$=2，C 是 L 上一點，且$\overline{AC}$=7，求$\overline{BC}$=？

Ans：$\overline{BC}$=6

(練習10) 設四面體 ABCD 中，$\overline{AC}$=$\overline{AD}$=$\overline{BC}$=$\overline{BD}$=5，$\overline{AB}$=4，$\overline{CD}$=6，令平面 ACD 與平面 BCD 所成的兩面角爲θ，(θ爲鋭角)，則 cosθ=？

Ans：$\frac{1}{2}$

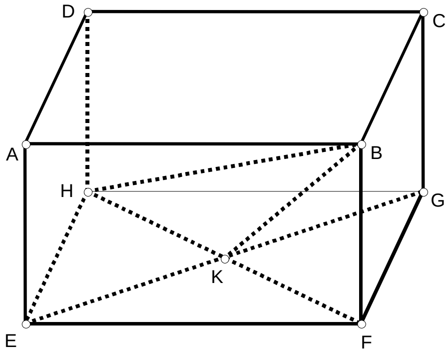
(練習11) 已知直線 AB 垂直平面 E 於 B，直線 L 在 E 上，直線 AC 垂直 L 於點 C，設 D 在 L 上，若$\overline{BC}$=24，$\overline{CD}$=$24\sqrt{3}$，則$\overline{BD}$=？

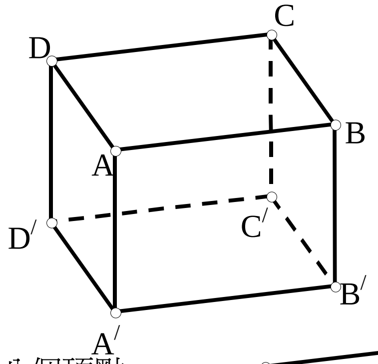
Ans：48

(練習12) 平面 E 上有一個三角形，其邊長爲 7,8,9，已知 E 與水平面之夾角爲 60°，求此三角形在水平面上投影區域的面積。Ans：$6\sqrt{5}$

綜合練習

(1) 如下右圖，正立方體 ABCD−EFGH 中，
$\overline{HF}$ 與 $\overline{EG}$ 交於 K 點，則下列敘述何者正確？
(A)EB⊥BG (B)HF⊥EG (C)KB⊥EG (D)KB⊥HF (E)KB⊥BC。

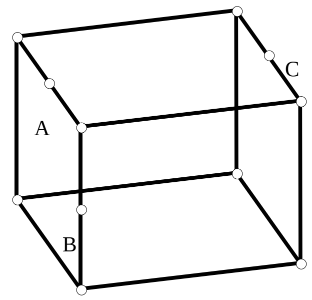




(2) 如右上圖，ABCD−A′B′C′D′爲立方體的八個頂點，

試問下列那些線段會與線段$\overline{A'B}$共平面？

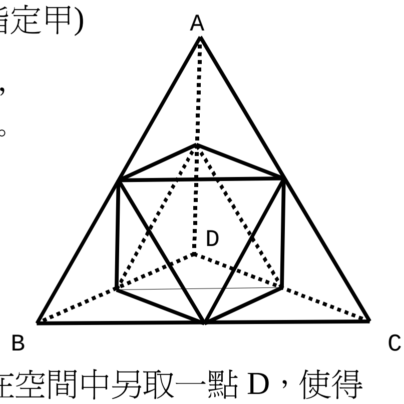
(A)$\overline{BC'}$ (B)$\overline{AC}$ (C)$\overline{DB'}$ (D)$\overline{DD'}$ (E)$\overline{CD'}$ (89 大學社)



(3) 右圖爲一正立方體，A,B,C 分別爲所在的邊之中點，
通過 A,B,C 三點的平面與此立方體表面相截，
問下列何者爲其截痕的形狀？
(A)直角三角形 (B)非直角三角形 (C)正方形 (D)非正方形的長方形 (E)六邊形。(88 學科)

(4) 一正立方體的八個頂點中有四個頂點，各頂點彼此之間的距離都是 1，則此正立方體的體積爲(A)$2\sqrt{2}$ (B)$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C)1 (D)2。 (91 指定甲)

(5) 將一個正四面體的四個面上的各邊中點用線段連接，
可得四個小正四面體及一個正八面體，如下圖所示。
如果原四面體 ABCD 的體積爲 12，
那麼此正八面體的體積________。 (90 學科)

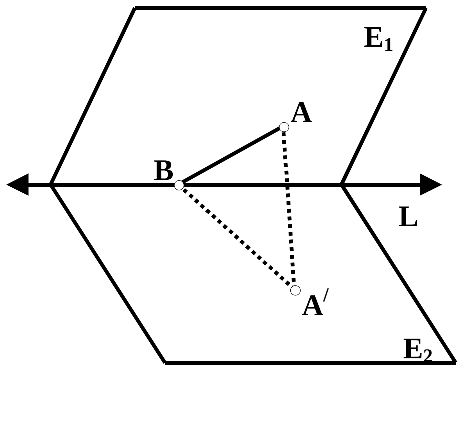


(6) 設 A,B,C 爲空間中相異三點，且不在同一直線上，在空間中另取一點 D，使得 A,B,C,D 成爲一平行四邊形的四個頂點，則這樣的 D 一共有幾個？
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)無窮。 (86 自)

(7) 設L爲二平面E_1及E_2的交線，而E_1、E_2
所成的二面角之一爲 60°，若A點在E_1上
但不在L上，B點在L上，

$\overleftrightarrow{AB}$ 與L所夾銳角爲 30°，$\overline{AB}$=2，

試求$\overline{AB}$在E_2上的投影$\overline{A'B}$的長度。



(8) 一四面體 A−BCD 中，令$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=4$，$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DB}=2$，若θ爲平面 ABC 和平面 BCD 所夾成之二面角的度量，則
(a)cosθ =？ (b)四面體的體積=？

(9) 如圖，將一張正方形的紙 ABCD 沿著對角線 BD 摺起，使得∠ABC=60°，試求二平面 ABD 與 BCD 的夾角。

(10) 有一四面體 OABC，它的一個底面 ABC 是邊長爲 4 的正三角形，且知 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=a$；如果直線 OA 與直線 BC 間的公垂線段長(亦即此兩直線間的距離)是$\sqrt{3}$，則 a =？

(提示：取$\overline{BC}$中點 D，作$\overline{DE}\perp\overline{OA}$，∵ $\overline{OE}\perp\overline{DE}$，$\overline{OD}\perp\overline{BC}$，

根據三垂線定理⇒$\overline{DE}\perp\overline{BC}$)

(11) 側稜長爲 3 公分，底面邊長爲 4 公分的正四角錐的體積爲多少？

(12) 設在四面體 ABCD 中，$\overline{AB}=3$，ΔABC 與ΔABD 的面積分別爲 15、12，且它們所在平面的二面角爲 30°，求四面體 ABCD 的體積。

(13) 有一個三腳架，三腳等長 PA=PB=PC，P 在ΔABC 所在的平面上的正射影爲 O，

(a)證明：O 爲ΔABC 的外心。(b)若$\overline{AC}=7$,$\overline{BC}=5$,$\overline{AB}=8$，$\overline{PA}=10$，求$\overline{PO}$=？

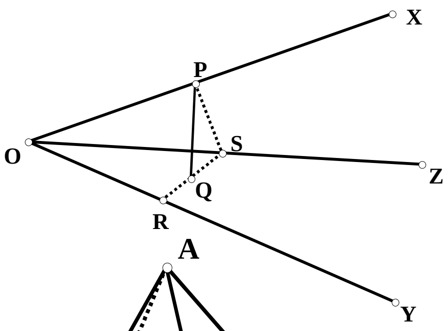
進階問題

(14) $\overline{OX}$、$\overline{OY}$、$\overline{OZ}$爲空間中三線段兩兩夾角爲 30°，

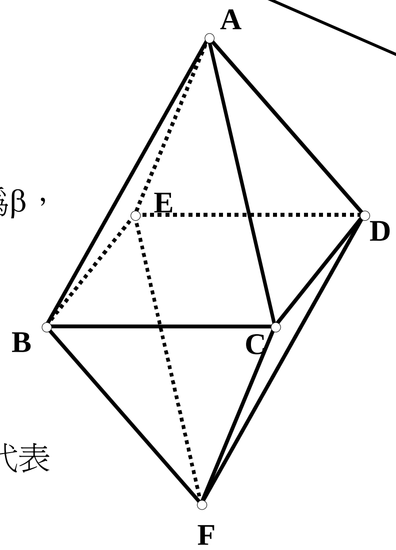
P 點在$\overline{OX}$上，且$\overline{OP}=2$，P 在平面 OYZ 上之

正射影爲 Q，過 Q 且垂直$\overline{OY}$之直線交$\overline{OY}$於 R，

交$\overline{OZ}$於 S，求$\overline{QR}+\overline{PS}$ =？



(15) A−BCDE 與 F−BCDE 爲二正四角錐，
即 BCDE 爲正方形且二正四角錐之
側面均爲正三角形，若ΔABC 與ΔACD 所
在二面角爲α，ΔABC 與ΔBCF 所在之二面角爲β，
試證明：α=β。



(16) 設平面ABC與平面E之交線爲$\overleftrightarrow{BC}$，
交角爲α，且ΔABC中，∠A=90°，又$\overleftrightarrow{AB}$
與$\overleftrightarrow{AC}$與平面E之夾角分別爲β、γ，
求證：$\sin^2\alpha=\sin^2\beta+\sin^2\gamma$。(直線與平面的夾角代表
直線在該平面上的投影直線與直線的交角)

(17) 設$\overleftrightarrow{PQ}$垂直平面 E 於 Q 點，L 是平面 E 上不過 Q 點的一直線，試於 L 上求取

一點 S，使$\overline{PS}+\overline{QS}$爲最小。

綜合練習解答

(1) (B)(C)

(2) (A)(E)

(3) (D)

(4) (B)

(5) 6

(6) (C)

(7) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

(8) (a)$\frac{\sqrt{5}}{15}$ (b)$\frac{2\sqrt{11}}{3}$

(9) 90°

(10) $\frac{8}{3}$

(11) $\frac{16}{3}$立方公分

(12) 20

(13) (a)欲證明 OA=OB=OC (b)$\frac{\sqrt{753}}{3}$

(14) $2\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{2}-3$

(15) 略

(16) [提示：如圖，設$\overline{AA'}=h$，$\overline{AB}=h\csc\beta$，$\overline{AC}=h\csc\gamma$，$\overline{AD}=h\csc\alpha$因為AB·AC=BC·AD

$\Rightarrow AD=\dfrac{AB\cdot AC}{\sqrt{AB^2+AC^2}} \Rightarrow \sin^2\alpha=\sin^2\beta+\sin^2\gamma$。]

(17) 過 Q 點作 L 之垂線，垂足 S 即為所求。