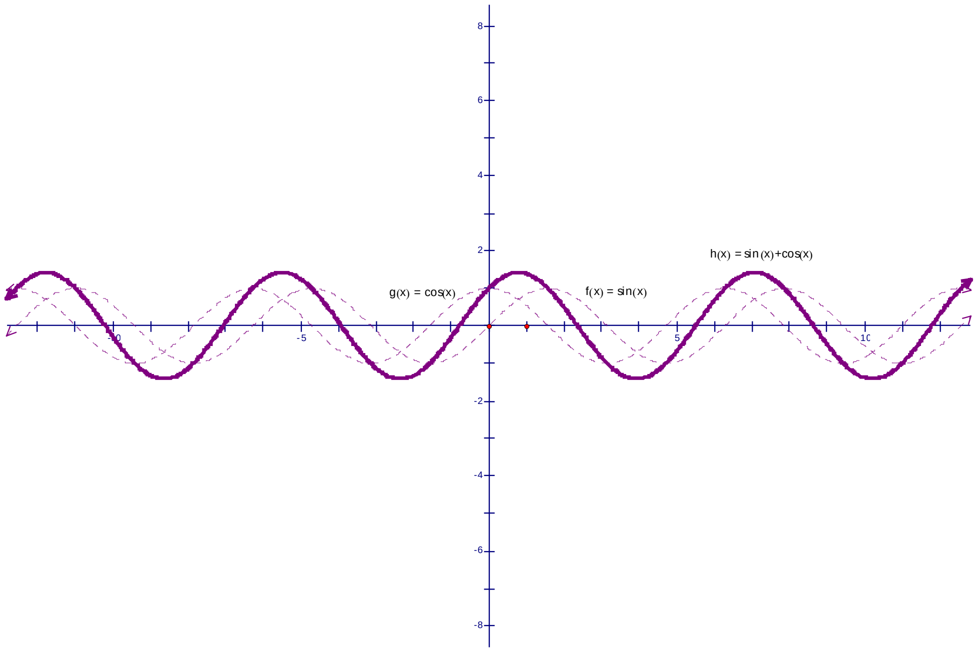
§3–6 正弦餘弦函數之疊合

(甲)正餘弦的疊合

我們考慮正餘弦函數圖形，如圖中虛線的圖，圖形像波動的形狀，有高有低，起伏很規則。高的地方就是波峰，低的地方就是波谷。如果兩個波動同時進行，疊合在一起後，會變成什麼樣子呢？



從上圖可以看出，$y=\sin x+\cos x$的圖形基本上與$y=\sin x$(或$y=\cos x$)的圖形類似，只是振幅與位置有些改變或移動。進一步觀察，當$\sin x=\cos x$時，此時$y=\sin x+\cos x$的圖形出現波峰與波谷，且$y=\sin x+\cos x$的圖形向右移動若干單位。我們猜測$y=\sin x+\cos x$ 可表爲$y=r\sin(x+\theta)$，要如何決定r與θ 呢？

$y=r\sin(x+\theta)=r(\sin x\cdot\cos\theta+\cos x\cdot\sin\theta)=\sin x+\cos x \Rightarrow r\cdot\cos\theta=1$ 且 $r\cdot\sin\theta=1$

$\Rightarrow r^2=2 \Rightarrow r=\sqrt{2}$

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$可取$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\ \sin(x+\dfrac{\pi}{4})$

(1)疊合的方法：

考慮$y=f(x)=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$，$a,b$爲實數，根據前面例子的推測，我們也按照前面例子的做法，將$y=f(x)=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$化成$y=f(x)=r\sin(x+\theta)$

$y=r\sin(x+\theta)=r(\sin x\cdot\cos\theta+\cos x\cdot\sin\theta)=a\sin x+b\cos x$

$$\Rightarrow\begin{cases} r\cdot\cos\theta=a\cdots(*) \\ r\cdot\sin\theta=b\cdots(**)\end{cases} \Rightarrow(*)^2+(**)^2 \Rightarrow r^2=a^2+b^2 \quad\Rightarrow r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 且 $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

θ的找法如下：

在以原點爲圓心之單位圓上，根據$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 且 $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，先判別出θ終邊的位置，在找出θ的值。我們將這些結果寫成一個定理：

> **若設a,b爲實數，且$a^2+b^2\neq0$，**
> **則函數$y=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$可以表爲$y=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\theta)$，**
> **其中θ爲滿足$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$的角θ。**

證明：

因爲$y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x)$，

而且$(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2+(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2=1$，點$P(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$在單位圓上，因此可找到一個角度θ，使得$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

所以$y=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cdot\sin x+\sin\theta\cdot\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\ \sin(x+\theta)$。

[討論]：

如果選擇點 $Q(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$，則點 Q 亦在單位圓上，因此可找到 一個角度φ，滿足 $\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

於是 $y=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\varphi\sin x+\cos\varphi\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$。

例如：

將 $y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x$ 疊合成正弦與餘弦函數

(1)將 $y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x$ 疊合成正弦函數先求兩係數的平方和的正平方根$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，再將原式提出 2

$y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x)=2(\sin x\cdot\cos\theta+\cos x\cdot\sin\theta)=2\sin(x+\theta)$

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$且 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$θ爲第一象限角$\Rightarrow$取$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

$\Rightarrow y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x=2\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$

(2) 將 $y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x$ 疊合成餘弦函數先求兩係數的平方和的正平方根$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，再將原式提出 2

$y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x)=2(\sin x\cdot\sin\theta+\cos x\cdot\cos\theta)=2\cos(x-\theta)$

$\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$且 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$θ爲第一象限角$\Rightarrow$取$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow y=f(x)=\sqrt{3}\ \sin x+\cos x=2\cos(x-\dfrac{\pi}{3})$

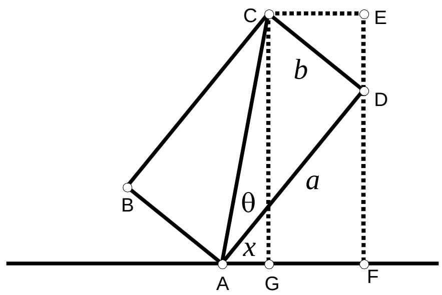
(2)圖解正餘弦函數的疊合：

DF+DE=$a\sin x+b\cos x$

CG=AC·sin(x+θ)，其中 AC=$\sqrt{a^2+b^2}$ ，而 $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$

因為 DF+DE=CG

所以 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\ \sin(x+\theta)$



結論：

(1)可將正餘弦函數的線性組合 $a\sin x+b\cos x$ 化成正弦函數，也可化成餘弦函數。

(2)$-\sqrt{a^2+b^2}\le y=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$

(3) $f(x)=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$ 的週期為 2π 。

(4)$y=\ a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\ \sin(x+\theta)$的圖形是先將正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形向左(θ>0 時)，或向右(θ<0 時)平移|θ|單位後，再上下伸縮$\sqrt{a^2+b^2}$ 倍而得到的圖形。

(5)函數 $y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\ \sin(x+\theta)$的週期為 2π，振幅為$\sqrt{a^2+b^2}$ ，
最大值為$\sqrt{a^2+b^2}$ ，最小值為$-\sqrt{a^2+b^2}$ 。

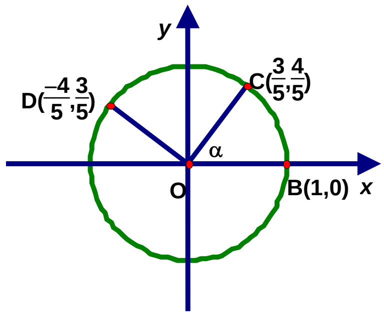
[例題1] 設 $270^\circ<A<360^\circ$ 且 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2004^\circ$，若 $A=m^\circ$，
則 $m=$ ________。(93 學科能力測驗) Ans：306

[例題2] 設 $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x+1$，在下列範圍內，求 y 的最大值與最小值。

(1)$x\in$R (2) $\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{5\pi}{6}$ Ans：(1)3,−1 (2) 2,−1

[例題3] 設$y=3\sin x+4\cos x+10$，$0\le x\le\frac{\pi}{2}$，則當$x=$？時，y有最大值M=？

Ans：$x=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{4}{5}$，時M=15



[例題4] 設 $0\le x\le\pi$，求 $y=3-2\cdot\cos(\frac{\pi}{6}-x)+2\sin x$ 的最大值，最小值。

Ans：5，$3-\sqrt{3}$ (利用和角公式先化簡 $\cos(\frac{\pi}{6}-x)$)

(練習1) 求$\csc 10^\circ-\sqrt{3}\ \sec 10^\circ$之值。　Ans：4

(練習2) 設$\sin x-\sqrt{3}\cos x=a\cos(x-\theta)$，
其中$a>0$，而 $0<\theta<2\pi$，則$a=$__________，而$\theta=$__________。Ans：
$a=2$；$\theta=\frac{5\pi}{6}$

(練習3) (1)$y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$　⇒最大值爲________，最小值爲________。
(2)$y=\sqrt{3}\sin x-\cos x+1$　⇒最大值爲________，最小值爲________。
(3)$y=5\sin x-12\cos x$　⇒最大值爲________，最小值爲________。
(4) $y=-40\sin x+9\cos x$　⇒最大值爲________，最小值爲________。

(練習4) 試求下列各函數的極大值與極小值
(1)$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x+5$
(2)$g(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{6})+2\cos x+5$

(3)設 $x-y=\frac{\pi}{6}$，求 $h(x)=2\cos x+2\sin y+5$ 的極大值與極小值。

Ans：(1)極大值=7，極小值=3 (2)同 1(3)同 1

(練習5) 設 $y=\sin(\frac{\pi}{6}-2x)+\cos 2x$

(1)若 $y=a\sin(2x+b)$，其中 $a>0$，$0\le b<2\pi$，求實數 a,b 之值。

(2)若 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，求 y 之最大值______與最小值_______。

Ans：(1)$a=\sqrt{3}$，$b=\frac{2\pi}{3}$ (2)$\frac{3}{2}$，$-\sqrt{3}$

(乙)三角函數的極值

[例題5] 在下列條件下，求$y=2\sin^2 x-3\cos x+1$ 之最大值及最小值。

(1)$0\le x\le 2\pi$， Ans：M=$\frac{33}{8}$，m=-2 (2)$0\le x\le\frac{\pi}{3}$，Ans：M=1，m=-2

[例題6] (2 倍角+疊合求極值)

設 $0\le x\le\pi$，若$f(x)=3\sin^2 x+4\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x$，則

(1)當x=______時，$f(x)$有最大值=_______。

(2)當x=______時，$f(x)$有最小值=_______。

[答案]：(1)$\frac{\pi}{3}$，5 (2)$\frac{5\pi}{6}$，-3

[解法]：

將$f(x)=3\sin^2 x+4\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x$

$$=3\times\frac{1-\cos 2x}{2}+4\sqrt{3}\times\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$=2\sqrt{3}\sin 2x-2\cos 2x+1$$

$$=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x)+1$$

$$=4\sin(2x-\frac{\pi}{6})+1$$

因為 $0\le x\le\pi$，所以$-\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{11\pi}{6}\Rightarrow -1\le\sin(2x-\frac{\pi}{6})\le 1$

當 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$，$f(x)$有最大值 5。

當 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}$，$f(x)$有最小值$-3$。

作法：正餘弦偶次式，求極值

$f(x)=a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x+d$

(1)判定角方相同(∵角方依次為：x^2,xx,x^2，均視為 2 次方)

(2)利用降次公式化同角，

$\sin^2x=$____________，$\sin x\cos x=$_____________，$\cos^2x=$______________

(3)產生疊合標準型⇒將正弦+餘弦化為單一函數

$f(x)=a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x+d$

$=a\times$__________$+b\times$__________$+c\times$___________$+d$

$=\frac{b}{2}\sin 2x+\frac{c-a}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}(a+c+2d)$

化$f(x)=A\sin 2x+B\cos 2x+C$ 型後，求最大最小值。

[例題7] 設$f(\theta)=\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta+1$

(1)θ為任意實數時，$f(\theta)$之最大值為______，最小值為______。

(2)$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$時，$f(\theta)$之最大值為______，最小值為______。

[提示：令$t=\sin\theta+\cos\theta$]

Ans：(1)$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，0　(2) $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，2

[解答]：先令 $t=\sin\theta+\cos\theta$ 則$t^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$\therefore\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$ 且$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

(1)原式 $f(\theta)=\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta+1$

$=\frac{t^2-1}{2}+t+1=\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2$

又$\theta\in R\Rightarrow-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$\therefore f(\theta)$之最大值為$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2$，最小值為 0。

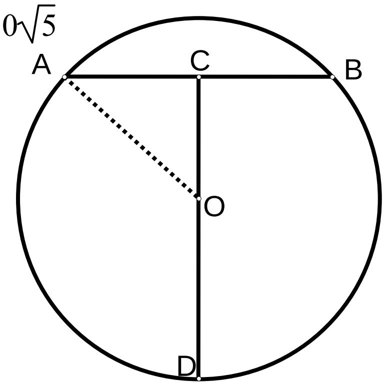
(2) $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$時$\Rightarrow\frac{\pi}{2}\le\theta+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le1$

$1\le\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}\Rightarrow1\le t\le\sqrt{2}$

$\therefore f(\theta)$之最大值為$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2$，最小值為 2。

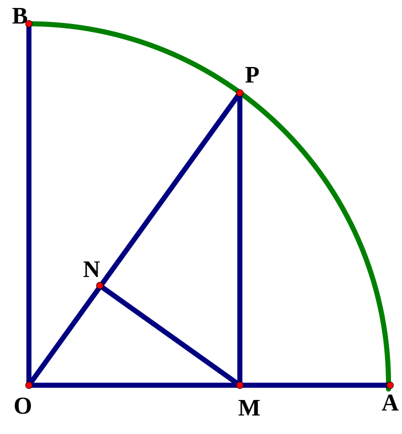
[例題8] 某公園內有一半徑 50 公尺的圓形池塘，池塘內有美麗的荷花池與錦鯉。為了方便遊客觀賞，並使整體景觀更為雅緻，打算在池塘上建造一座“T”字型木橋(如右圖)。試問這座木橋總長$\overline{AB}+\overline{CD}$最長有多長？此時$\overline{AB}$與$\overline{CD}$兩段木橋的長度各為多少？

Ans：總長 $50+50\sqrt{5}$公尺，此時$\overline{AB}=40\sqrt{5}$, $\overline{CD}=50+10\sqrt{5}$



[例題9] 如圖，扇形OAB的中心角∠AOB=90°，半徑$\overline{OA}=\overline{OB}=1$，P為弧AB上的動點，$\overline{PM}\perp\overline{OA}$，$\overline{MN}\perp\overline{OP}$，令∠AOP=θ，$\overline{MN}+\overline{ON}=S$，

(1)請以θ表示S。(2)求S之最大值。 Ans：(1)$\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta$ (2)$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$



(練習6) $y=\cos^2x-3\cos x+3$ 之最大值爲______，最小值爲_______。Ans：7,1

(練習7) 設 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，則$f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+2\cos^2x$最大值爲__________，最小值爲__________。Ans：$\frac{3+\sqrt{2}}{2}$；1

(練習8) 設 $0\le x\le 2\pi$，$f(x)=1+\sin x+\cos x-\sin x\cos x$ ，則下列何者爲真？

(A)$f(x)$最大值爲 2 (B)$f(x)$最小值爲 $1-\sqrt{2}$ (C)$x=0,\frac{\pi}{2},2\pi$時 $f(x)$有最大值

(D)$x=225°$時，$f(x)$之值爲最小值 (E)$f(x)$之最大值與最小值之和爲$\frac{5}{2}-\sqrt{2}$

Ans：(A)(C)(D)(E)

綜合練習

(1) 求$\frac{\sqrt{3}}{\sin 15°}-\frac{1}{\cos 15°}$ 的值。

(2) 關於函數 $y=f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$的圖形，

下列敘述那些是正確的?

(A)$y=f(x)$的週期爲 π 。(B) $y=f(x)$的振幅爲$\sqrt{2}$ 。

(C)$y=f(x)$的圖形與 y 軸的交點爲$(0,\frac{1}{2})$。

(D)$y=f(x)$的圖形與 x 軸有無限多個交點。

(E)$y=f(x)$的圖形對稱於原點。

(3) 關於函數 $y=\sin x-\cos x$ 之圖形(A)週期爲 2π (B)週期爲π (C) y 之最大值爲 2 (D) y 之最大值爲$\sqrt{2}$ (E)對稱於原點。

(4) 下列哪些函數的最小正週期爲 π ？____________。(92 學科能力測驗)

(1)$\sin x+\cos x$ (2)$\sin x-\cos x$ (3)$|\sin x+\cos x|$ (4)$|\sin x-\cos x|$ (5)$|\sin x|+|\cos x|$

(5) $y=\cos x-\sqrt{3}\sin x$，$0\le x\le\pi$ ，在 $x=\alpha$時，有最大值 M，在 $x=\beta$時，有最小值 m，求 α,β,M,m。

(6) 下列各題經過變換後，求其最大值與最小值。

(a)求 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})$之最大值與最小值。

(b)求 $y=2\sin x+2\sin(x+\frac{\pi}{2})$之最大值與最小值。

(7) 函數 $y=12\sin x-5\cos x$，x 的範圍如下，分別求 y 的最大值與最小值。

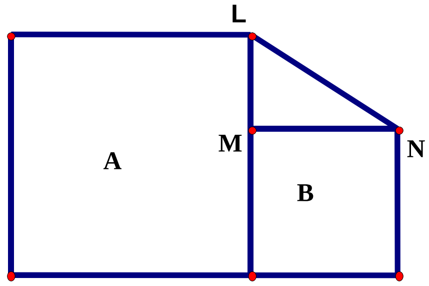
(a)$x\in R$ (b)$0\le x\le\frac{\pi}{2}$

(8) 設$\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{7\pi}{6}$，$y=\cos^2x-4\sin x-3$，

則(a)當 $x=$_________時，y 有最小値爲_________。

(b)當 $x=$_________時，y 有最大値爲_________。

(9) 設$\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，解$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$。



(10) 如右圖，正方形 A 與 B 的面積和爲 1，

(a)設正方形 A 與 B 的邊長分別爲 $\sin\theta$、$\cos\theta$，請利用 $\sin\theta$與 $\cos\theta$來表示ΔMNL 的面積。

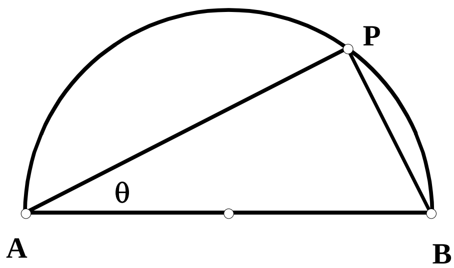
(b)請求出ΔMNL 的面積的最大值。

(11) 設 $x+y=\frac{2\pi}{3}$，求 $\sin x+2\sin y$ 的最大値爲何？

(12) 求$y=3\sin^2x+4\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2x$　其中$\frac{\pi}{12}\leq x\leq\frac{3}{4}\pi$，求$y$的最大値與最小值，並說明此時$x$値爲何？。

(13) 如右圖，以$\overline{AB}$爲直徑做一圓，且$\overline{AB}=2$，P 點在半圓上，設$\angle PAB=\theta$，

(a)試以θ表示 $3\overline{AP}+4\overline{BP}$ (b)試求 $3\overline{AP}+4\overline{BP}$的最大値。



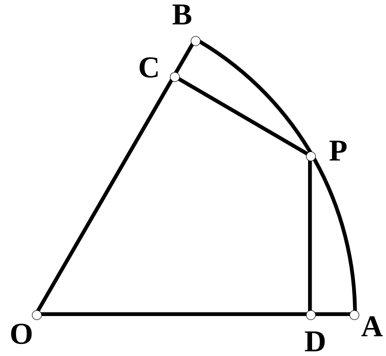
進階問題

(14) 求 $y=\frac{1+\sin x}{3+\cos x}$的極值。

(15) 半徑爲 r 的圓內接矩形，令其對角線夾角爲θ；

(a)試以 r，θ 表其周長。　(b)試求周長的最大值。

(16) 已知扇形 OAB 的圓心角爲$\frac{\pi}{3}$，半徑爲 1，P 爲 AB 弧上的動點，$\overline{PC}\perp\overline{OA}$於 C 點，$\overline{PD}\perp\overline{OB}$於 D 點，試求四邊形 PCOD 的最大面積。



綜合練習解答

(1) $4\sqrt{2}$

(2) (C)(D)

(3) (A)(D)

(4) (3)(4)

(5) $\alpha=0$，M=1；$\beta=\dfrac{2\pi}{3}$，$m=-2$

(6) (a)最大值為$\sqrt{2}$，最小值$-\sqrt{2}$ (b)最大值為 $2\sqrt{2}$，最小值$-2\sqrt{2}$

(7) (a)M=13,m= −13(b)M=12, m= −5

(8) (a) $\dfrac{\pi}{2},-7$ (b)$\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{-1}{4}$

(9) $x=\dfrac{\pi}{6}$

(10) (a)$\dfrac{1}{2}\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$ (b)$\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$

[解法]：

(a) $\Delta MNL=\dfrac{1}{2}\overline{MN}\cdot\overline{ML}=\dfrac{1}{2}\cdot\cos\theta\cdot(\sin\theta-\cos\theta)$

(b) $\dfrac{1}{2}\cdot\cos\theta\cdot(\sin\theta-\cos\theta)=\dfrac{1}{2}(\cos\theta\sin\theta-\cos^2\theta)=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2}\sin2\theta-\dfrac{1+\cos2\theta}{2}]$

$=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2}\sin2\theta-\dfrac{1}{2}\cos2\theta-\dfrac{1}{2}]=\dfrac{1}{2}\cdot[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\theta-\dfrac{\pi}{4})-\dfrac{1}{2}]$ ΔMNL的面積的最大值為$\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$

(11) $\sqrt{7}$ [提示：$y=\dfrac{2\pi}{3}-x$，$\sin x+2\sin y=\sin x+2\sin(\dfrac{2\pi}{3}-x)=2\sin x+\sqrt{3}\cos x$]

(12) $x=\dfrac{\pi}{3}$，最大值 5 與 $x=\dfrac{3\pi}{4}$最小值 $1-2\sqrt{3}$

(13) (a)$6\cos\theta+8\sin\theta$ (b)10

(14) $0\le y\le\dfrac{3}{4}$ [提示：令 $y=\dfrac{1+\sin x}{3+\cos x}\Rightarrow\sin x-y\cdot\cos x=3y-1\Rightarrow\sqrt{y^2+1}$

$\sin(x+\alpha)=3y-1\Rightarrow\sin(x+\alpha)=\dfrac{3y-1}{\sqrt{y^2+1}}\Rightarrow|\dfrac{3y-1}{\sqrt{y^2+1}}|\le1\Rightarrow0\le y\le\dfrac{3}{4}$。]

(15) (a)$4r(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2})$，(b)$4\sqrt{2}r$

(16) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$[提示：連$\overline{OP}$，並設$\angle POB=\theta$，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}$，則四邊形 PCOD 的面積$=\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\dfrac{1}{2}$

$\sin(\dfrac{\pi}{3}-\theta)\cos(\dfrac{\pi}{3}-\theta)=\dfrac{1}{4}[\sin2\theta+\sin(\dfrac{2\pi}{3}-2\theta)]=\dfrac{1}{4}(\dfrac{3}{2}\sin2\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos2\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{6})$]