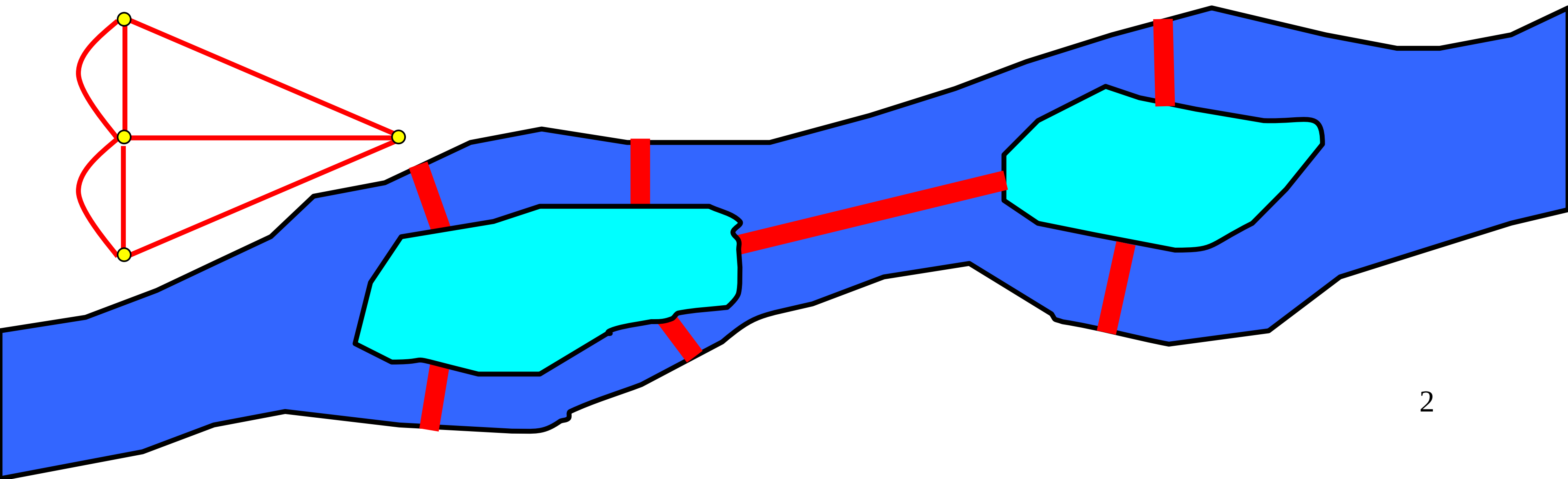
# 图与网络分析 Graph Theory and Network Analysis

图论简介:

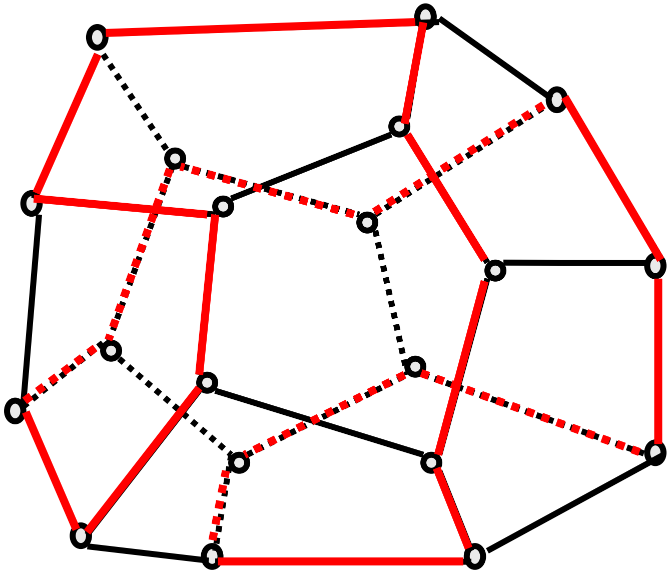
**1.**图论的起源可以追溯到**18**世纪，早期的图论主要研究一些游戏或纯理论问题，诸如：迷宫问题、博奕问题、哈密尔顿问题等。

## 2. 欧洲七桥问题

十八世纪，哥尼斯堡城中有一条河（普雷格尔河）穿城而过，河中有两个小岛，和两岸有 7 座桥连接。当时那里的人们热衷于这样一个游戏：一个散步者能否走过这 7 座桥，而且每座桥只走一次，最后回到原出发点。没有人想出走法，又无法说明走法不存在，这就是著名的“哥尼斯堡 7 桥”难题。



# 3. 哈密尔顿问题（环球旅行问题）



十二面体

# 4. 中国邮递员问题

在一个街道分布既定的街区网络图中，各街道的长度用相应赋权的边表示，邮递员从邮局出发，经过所有街道完成邮件递送（收发）任务后返回邮局，按什么线路行走，可使总路程最短？这类问题，国际上统称为中国邮递员问题。

- 图论是运筹学中广泛应用的一个重要分支

# 图与网络的基本概念

成都某旅行社服务上乘而久负盛誉，预测假期旅游需求旺盛，策划假期首都游，但是折扣机票已预定一空！为顾客着想，旅行社想到取道它地的折扣机票，并推出了多地游，紧急电传其在全国各地的办事处要求协助解决此问题。很快，各办事处将其已订购机票的情况传到了总社。根据此资料，总社要作出计划，最多能将多少游客从成都送往北京以及如何取道转机。下面是各办事处已订购机票的详细情况表：

# 图与网络的基本概念

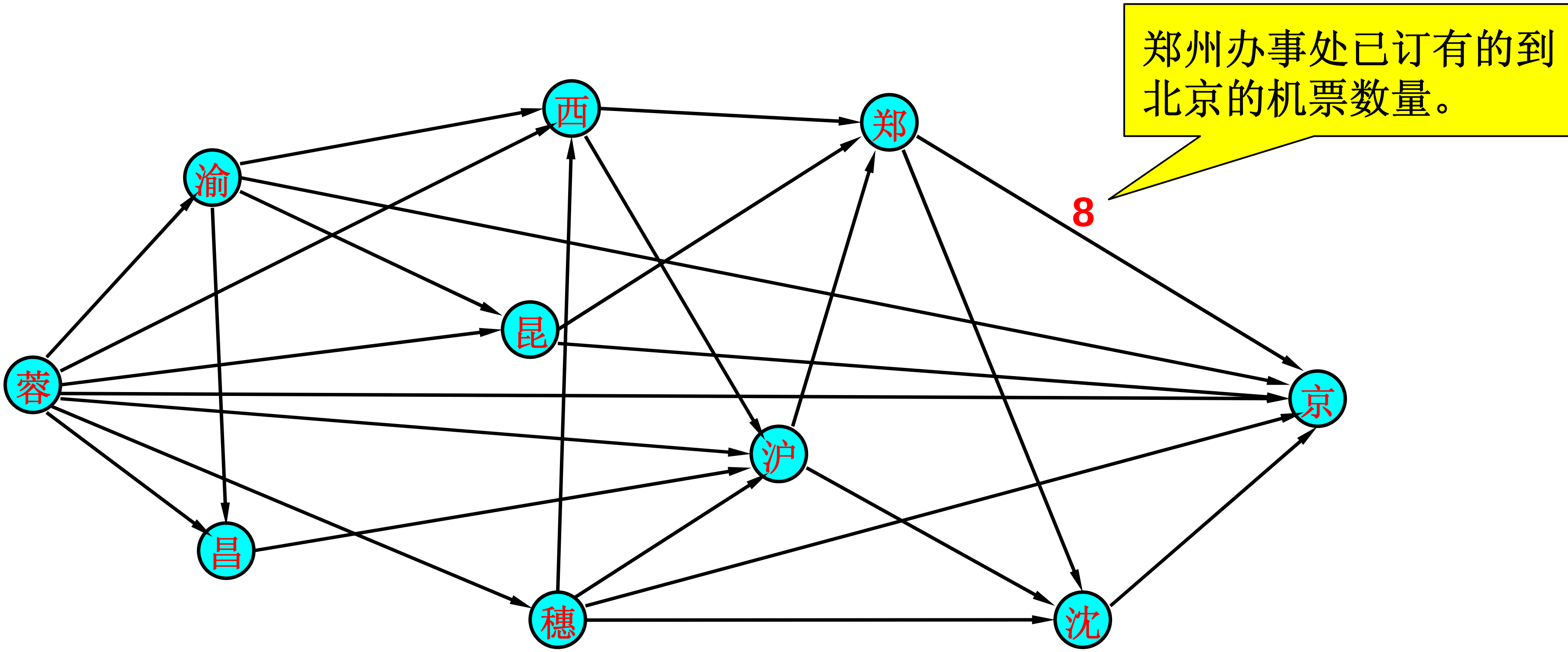
各办事处已订购机票情况表：

| | 成都 | 重庆 | 武汉 | 上海 | 西安 | 郑州 | 沈阳 | 昆明 | 广州 | 北京 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 成都 | | **10** | **5** | **15** | **8** | | | **12** | **10** | **30** |
| 重庆 | | | **5** | | **6** | | | **15** | | **25** |
| 武汉 | | | | **10** | | | | | | |
| 上海 | | | | | | **15** | **8** | | | |
| 西安 | | | | **8** | | **6** | | | | |
| 郑州 | | | | | | | **14** | | | **8** |
| 沈阳 | | | | | | | | | | **18** |
| 昆明 | | | | | | **8** | | | | **10** |
| 广州 | | | | **8** | **2** | | **6** | | | **10** |

# 图与网络的基本概念

将此问题通过图的模型描述：

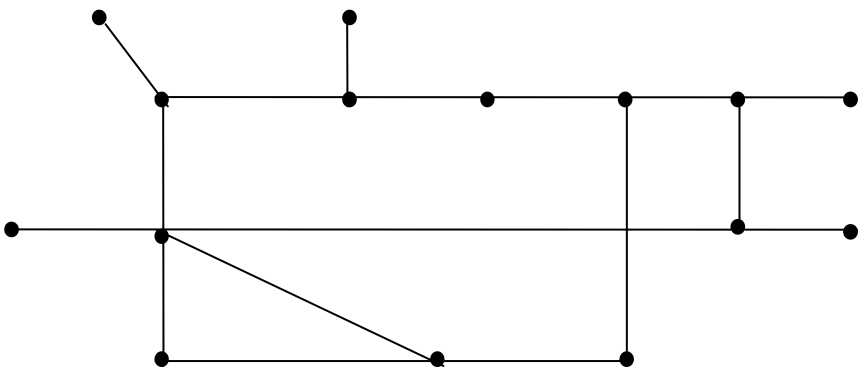
下图中，点——各城市，带箭头连线——从箭尾城市到箭头城市已订购有机票，带箭头连线旁的数字——机票数量。



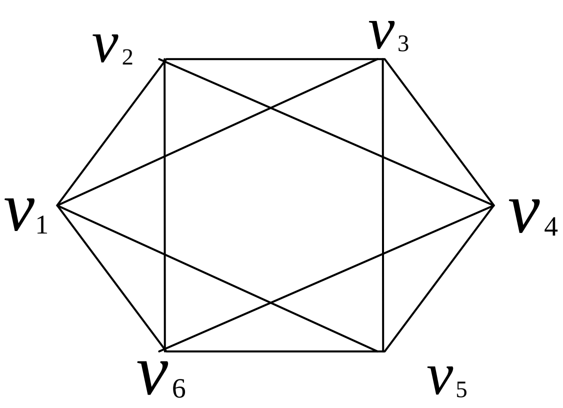
# 图与网络的基本概念

- 日常生产和生活中，人们常用点和线画出的示意图来反映一些对象之间的关系。

- **图论与网络分析理论所研究的问题十分广泛，内容极其丰富。正如一位数学家所说：“可以说，图论为任何一个包含了某种二元关系的系统提供了一种分析和描述的模型。”**



铁路交通图




比赛关系图

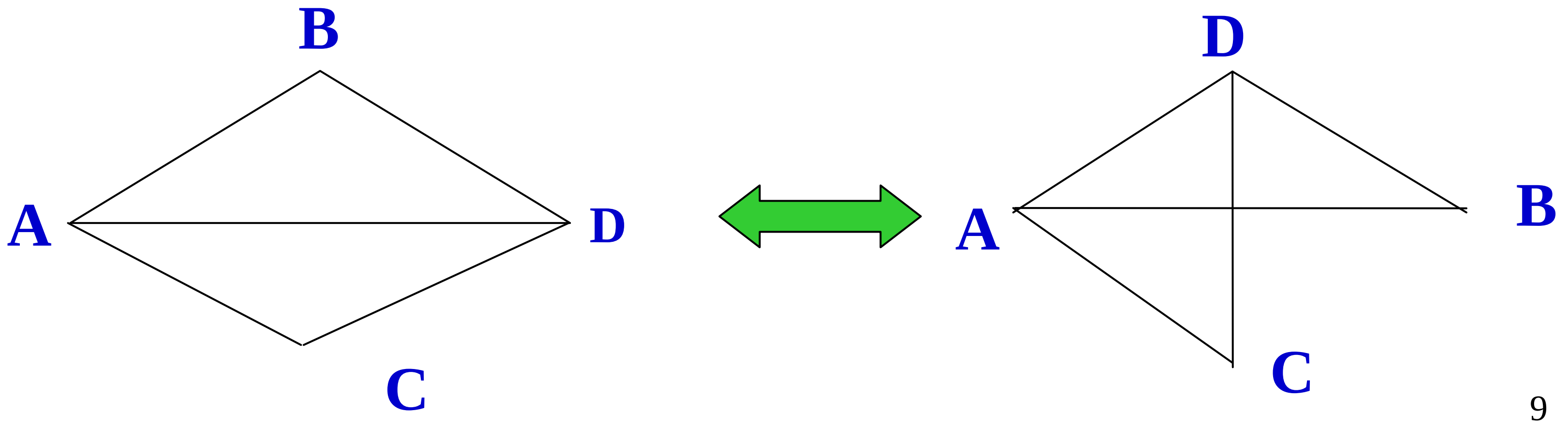
# 图的基本特征

图中的点代表研究对象，点与点间的连线表示这两个对象之间的特定关系。它不同于通常的几何图和函数图，有如下特点：

**1.**点只是某种事物的一种抽象；连线代表某些事物之间的关系。

**2.**点与连线的画法具有随意性。

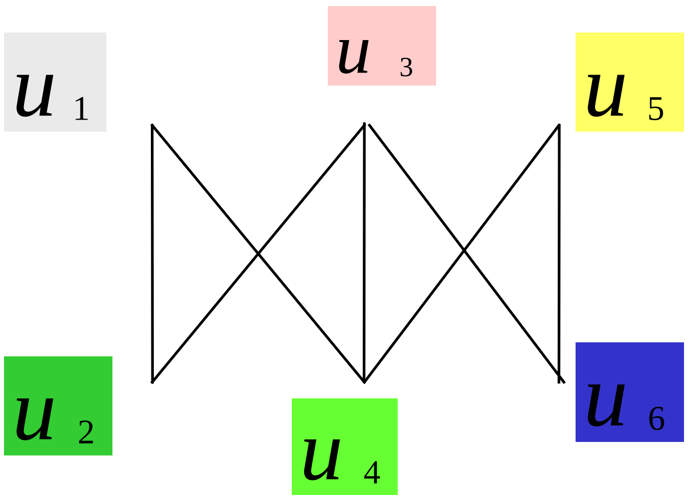
**3.**这种图是一种关系示意图，保持相对位置与关系不变的前提下，点的位置、线的长度不需按实际位置和实际长度来表示。

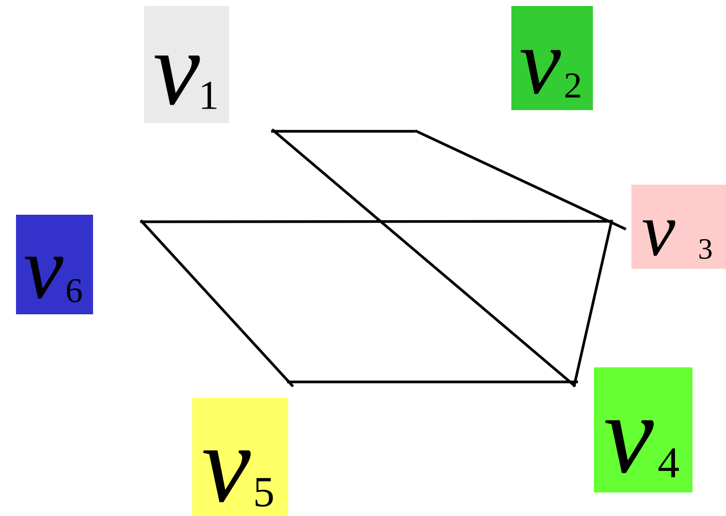


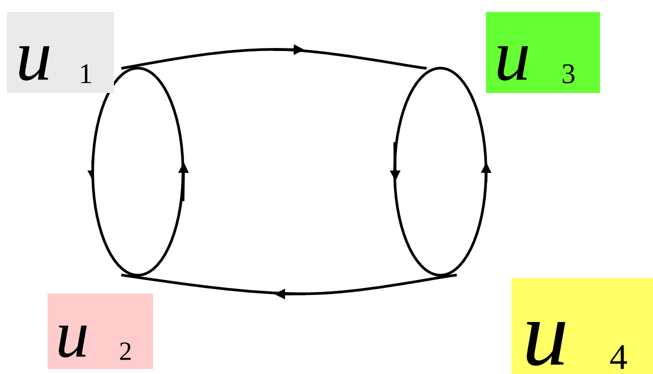

( a )　　( b )

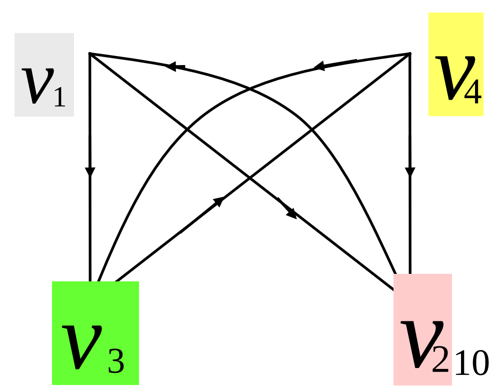
# 图的基本特征

两个图,各对应元素的关联关系(相邻关系)完全相同,称为同构



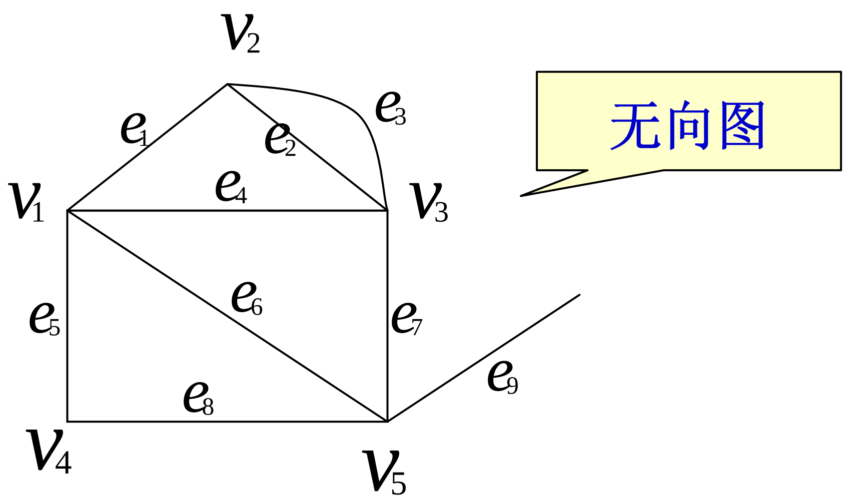
# 图及其分类

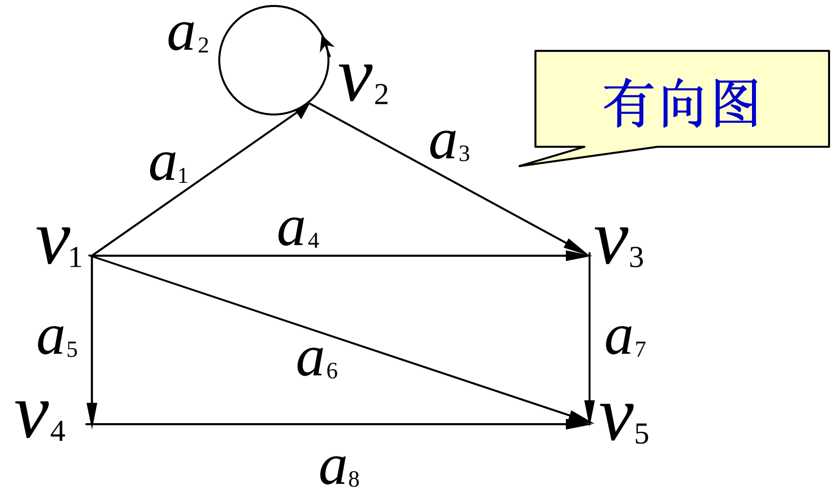
定义：图由有限个顶点的集合V和表达顶点之间关系的线集L所组成。 **G=（V，L）**

**V={ $v_1$， $v_2$ ， … ， $v_n$}**，表示**n**个事物构成的非空点集,

**L**反映了各事物之间的联系，有**L={ $l_1$， $l_2$ ， …， $l_n$ }**。

# 图及其分类




1.无向图（记为G=（V，E））　有向图（ 记为 D=（V，A））

2.多重边和多重弧

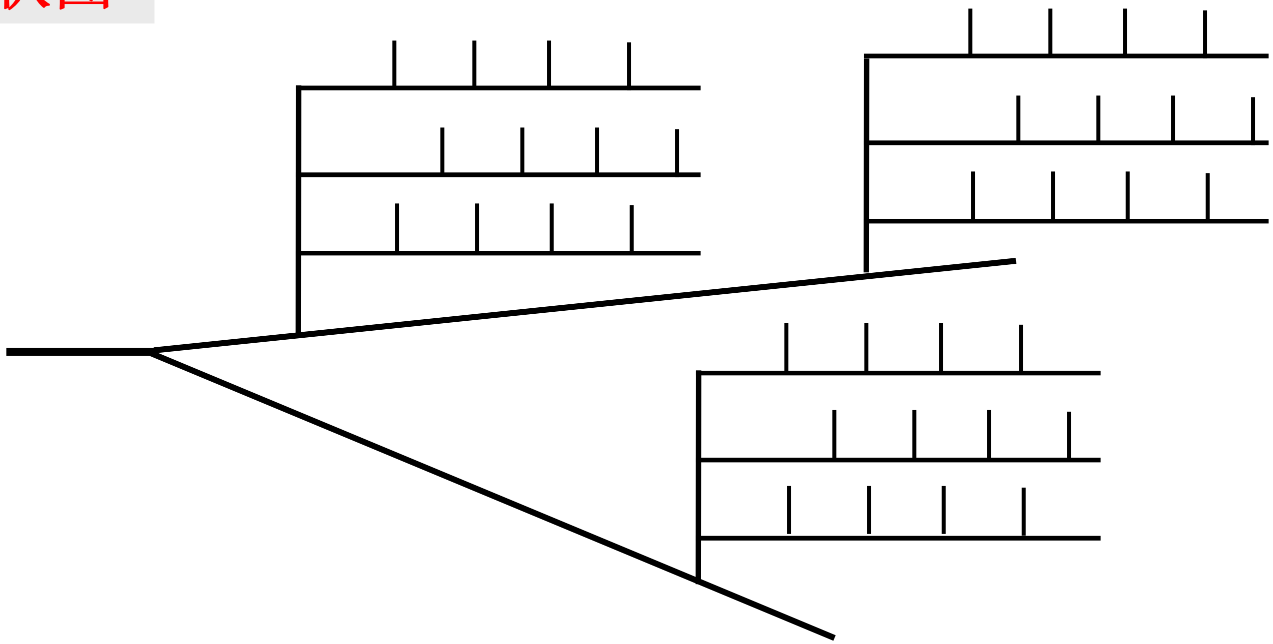
3.环

4.简单图

# 最 小 生 成 树

## 一、基本概念

某单位供电
示意树状图



# 最小生成树

## 1、树的性质

- 树中任意两个顶点间必有且仅有一条链;
- 在树中不相邻的两顶点间添加一条枝,则恰好得到一个圈;
- 树中任意去掉一条枝, 就变成分离图;
- 设T是棵有n个顶点的树, 则T的树枝数为n-1;
- 一棵树至少有两个悬挂点。

无圈的连通图称为树

# 最小生成树

## 树是连通且边数最少的图

## 2、最小生成树

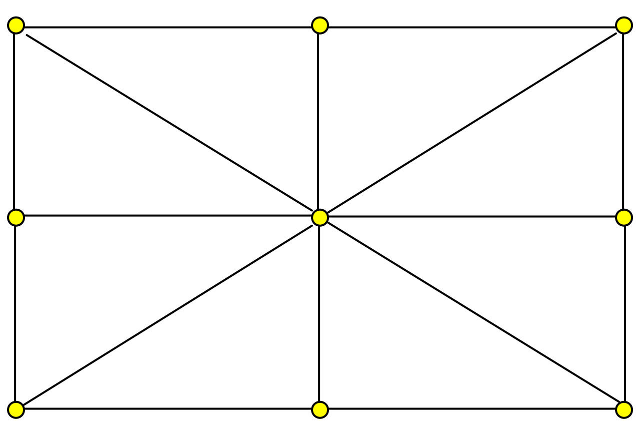
生成树:如果图T是图G的一个生成子图,而且又是一棵树,则称树T是图G的一个生成树(支撑树)。

最小生成树：具有最小权的生成树，简称最小树。

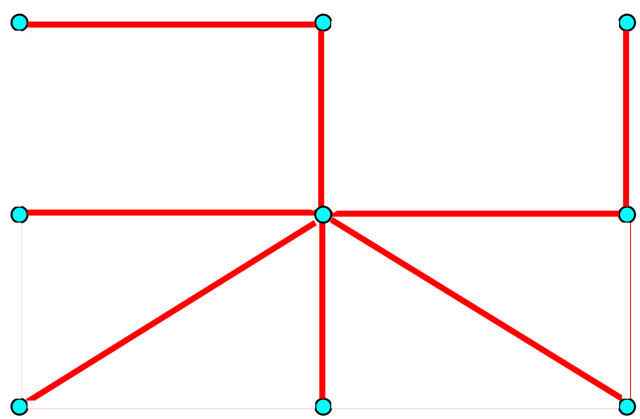
# 最小树的常用算法

## 1. 丢边法(破圈法)

在连通无向图G中，任取一个圈，将该圈中权最大的一条边（如有两条或两条以上这样的边，可任取其一）去掉；在余下的圈中重复这一步骤，直到不含圈为止，就得到了最小树。



图G



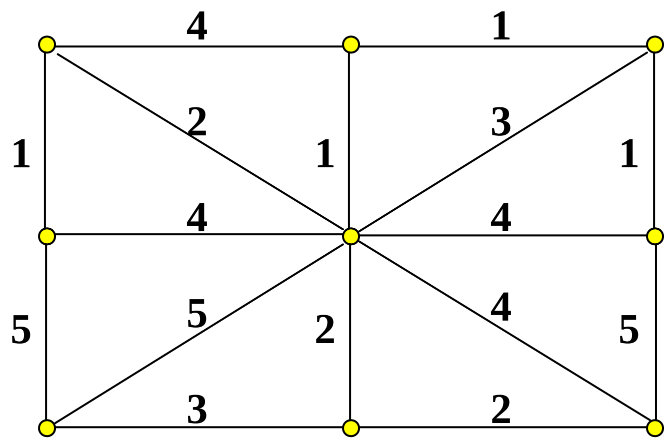
生成树T

# 1. 丢边法(破圈法)

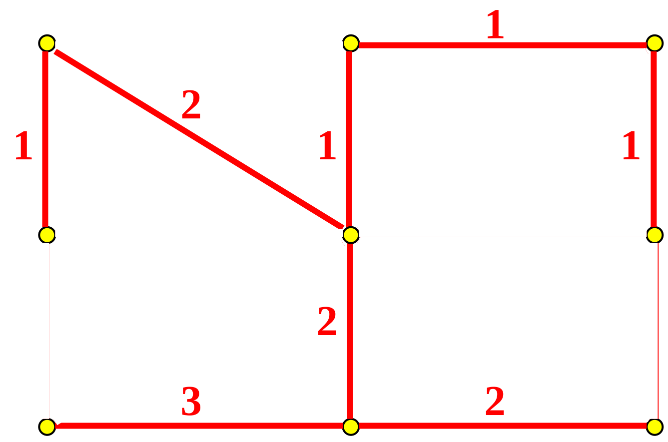
图的树与最小树问题

树（Tree）和最小树

破圈法求最小生成树：



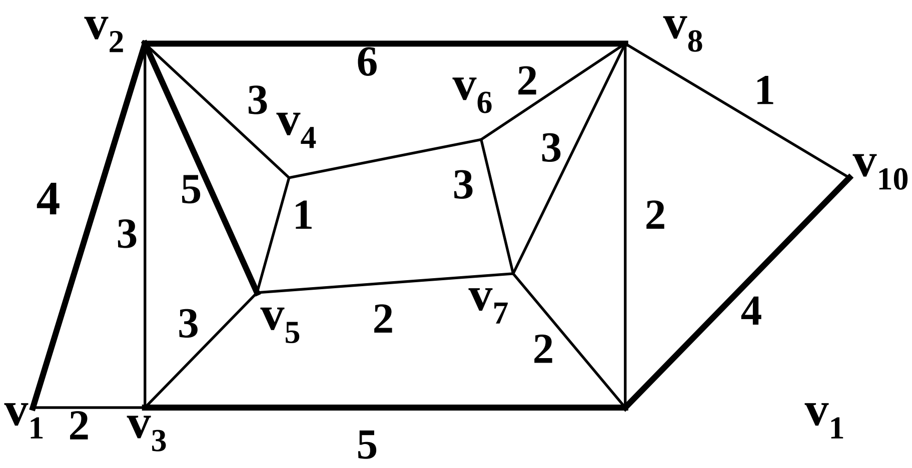

图G




生成最小树T

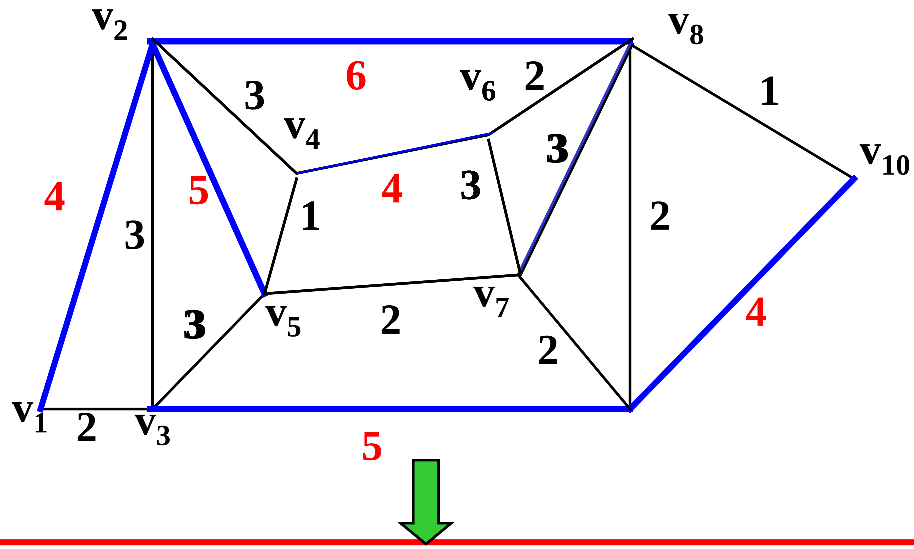
# 1. 丢边法(破圈法)

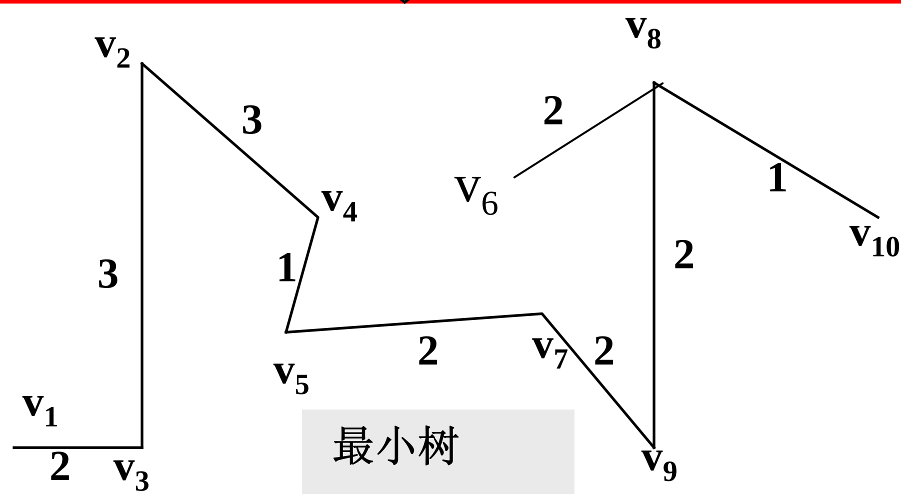
例：用破圈法求下图所示赋权的最小树。




赋权图

# 1. 丢边法(破圈法)

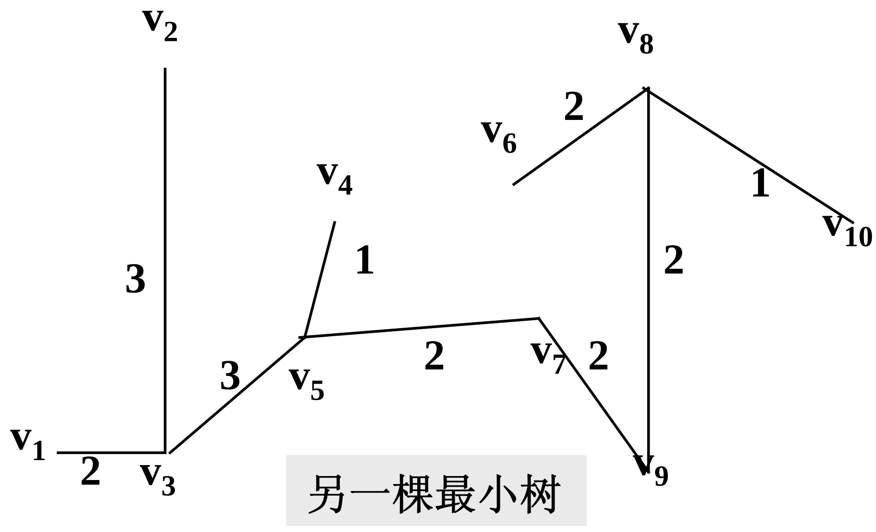


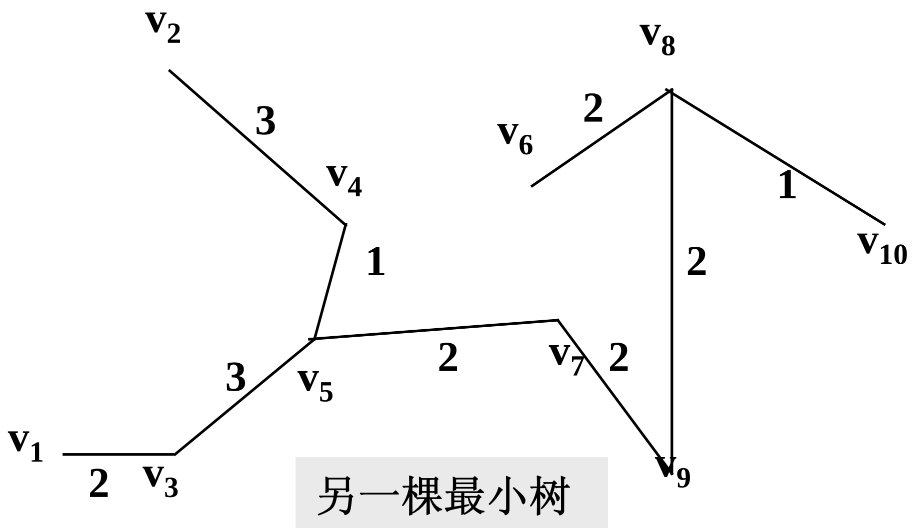

最小树

(总权为18）

# 1. 丢边法(破圈法)



$v_2$
$v_8$
2
$v_6$
$v_4$
1
$v_{10}$
3
1
2
2
3
$v_5$
2
$v_7$
2
$v_1$
2
$v_3$
另一棵最小树
$v_9$

$v_2$
$v_8$
3
2
$v_6$
$v_4$
1
1
$v_{10}$
2
3
$v_5$
2
$v_7$
2
$v_1$
2
$v_3$
另一棵最小树
$v_9$

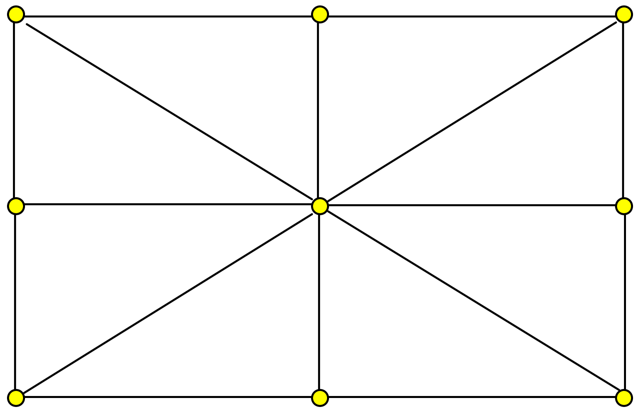
# 2. 加边法(避圈法)

图的树与最小树问题

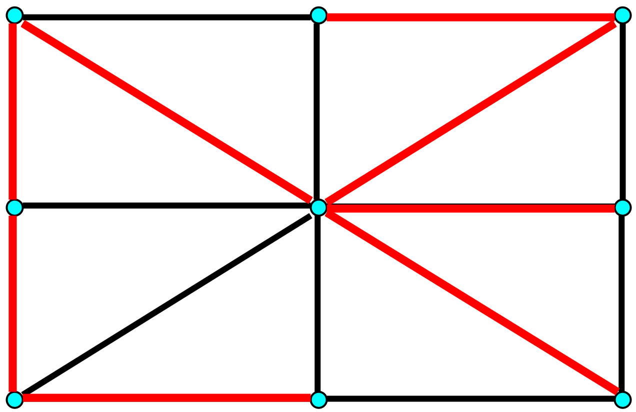
树（Tree）和最小树

避圈法求生成树：

对含n个点的连通无向图G，从中选出一条权最小的边纳入树中；在余下的边中再选出一条权最小且与已边不构成圈的边，将其纳入树中；如此重复，直至树中含有n-1条边为止，这就构成了最小树。



图G



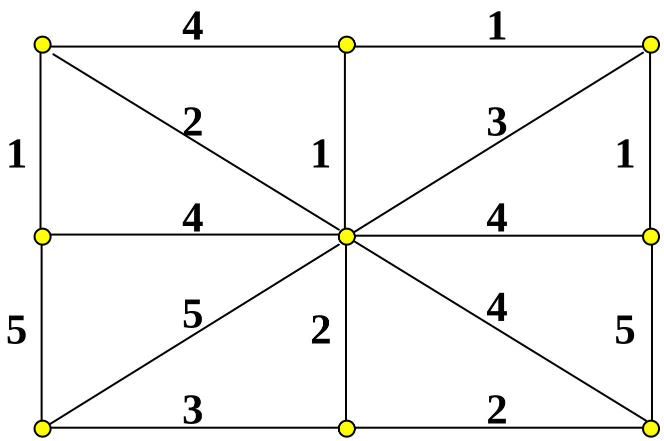
生成树T

# 2. 加边法(避圈法)

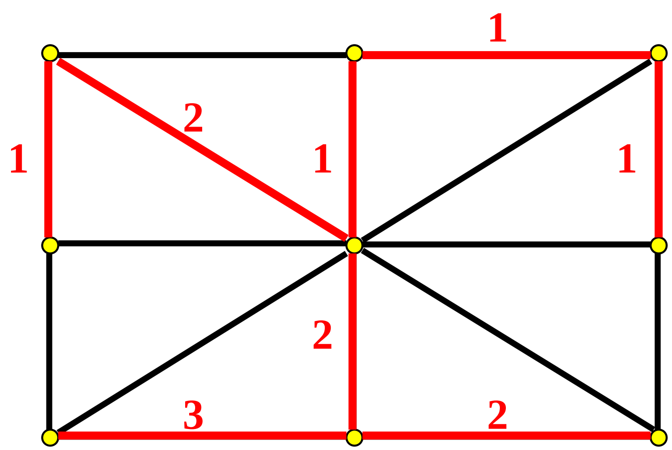
图的树与最小树问题

树（Tree）和最小树

避圈法求最小生成树：



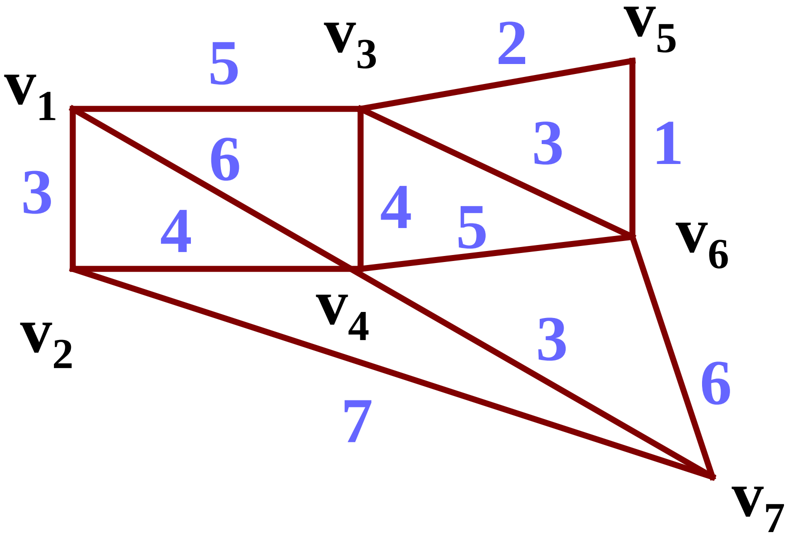

图G




生成最小树T

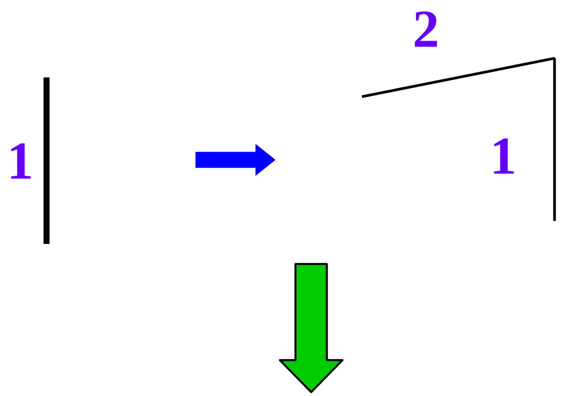
# 2. 加边法(避圈法)

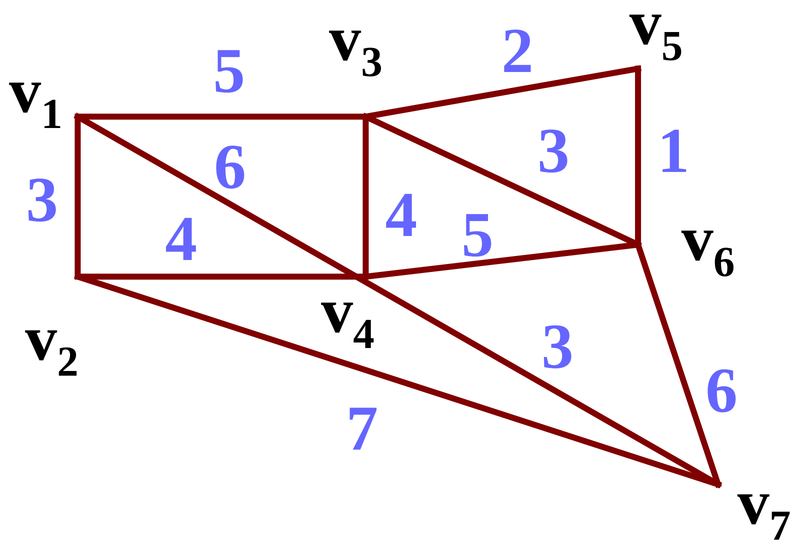
用避圈法求下图所示赋权图的最小树。

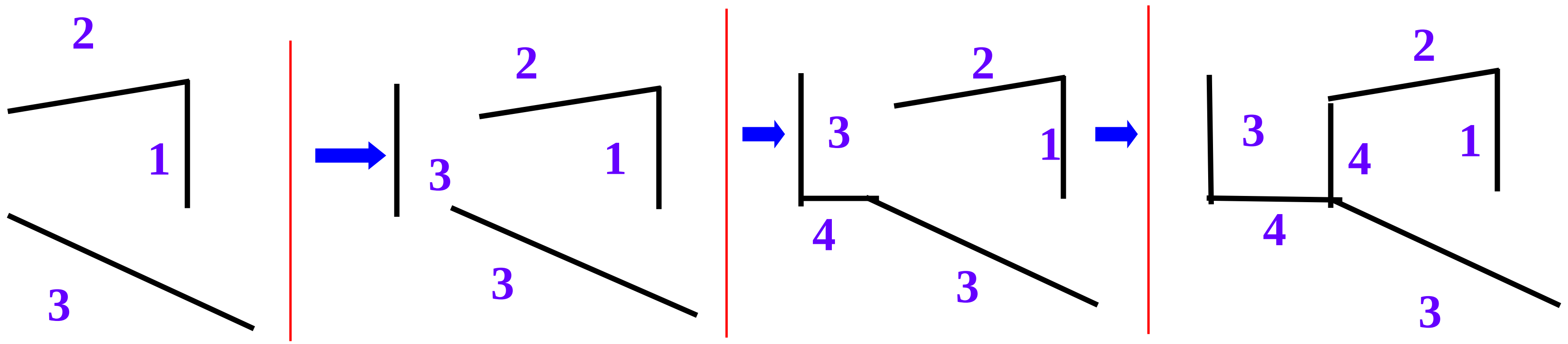


# 2. 加边法(避圈法)

把各边按其权的递增顺序排列



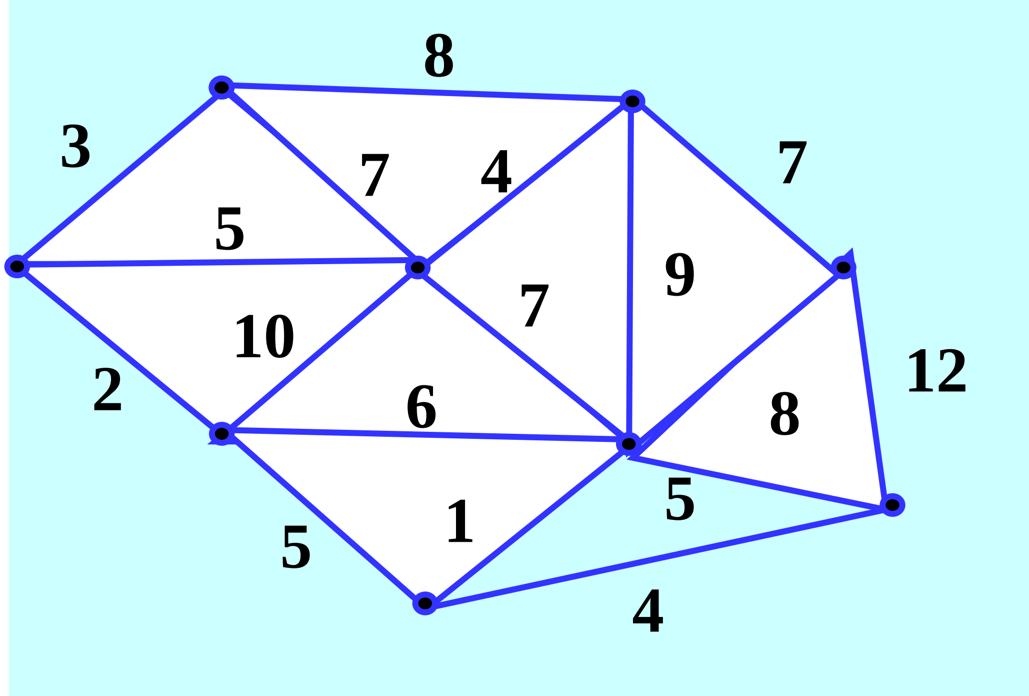



最 小 树 生 成 过 程

# 最小树的应用

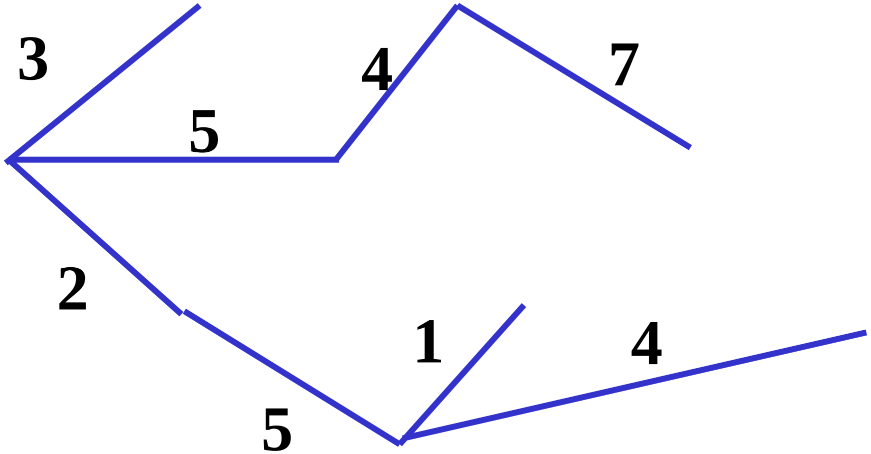
## 例. 线路铺设问题

下图是一个城镇的地图，现在要在该城镇的各地点铺设管道，已知各点相互之间的铺设费用（单位：千元），如何设计铺设线路，使各地互通的总铺设费用最少？



# 最小树的应用

**解：** **求各边相通且总费用最少的方案，实际上求最小树，保证了各点之间连通且费用最少。**

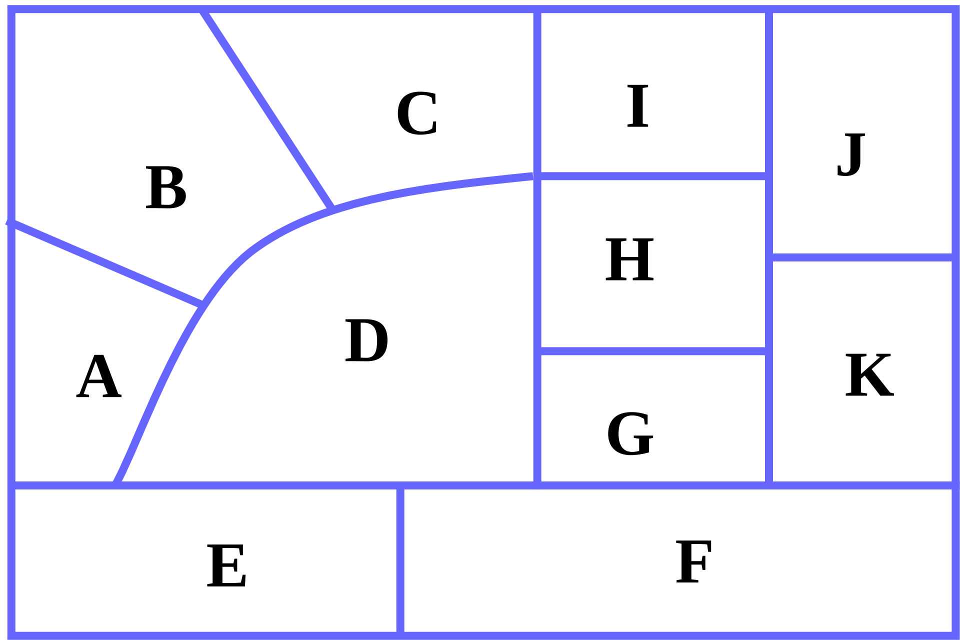



其总费用为：**31**千元

# 最小树的应用

## 例. 房屋设计问题

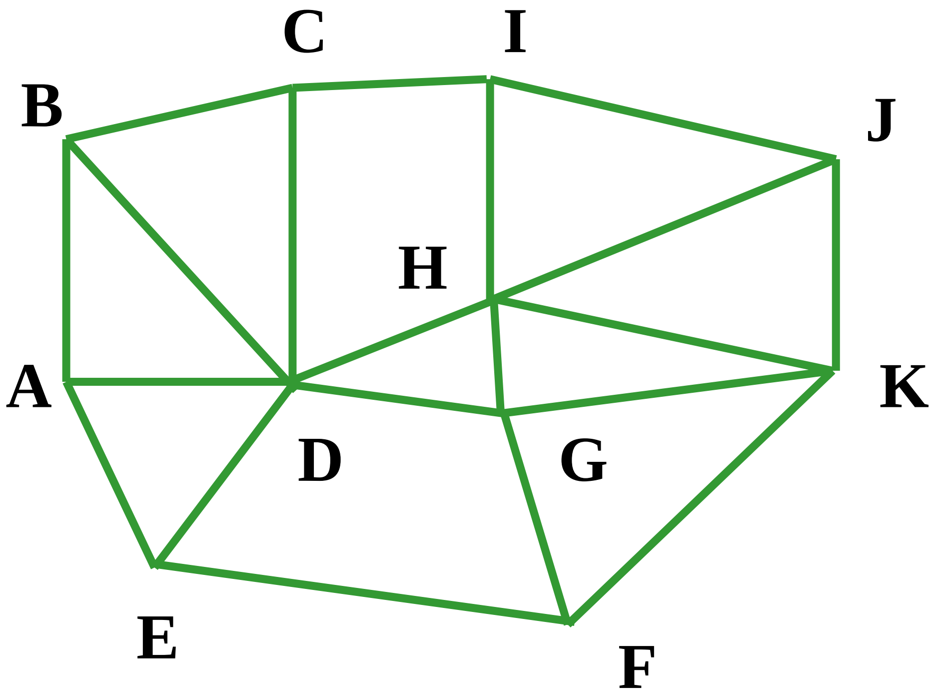
下图是某建筑物的平面图，要求在建筑物的内部从每一房间都能走到别的所有房间，问至少要在墙上开多少门？试给出一个开门的方案。



# 最小树的应用

**解：** **把每一房间看作一个顶点，如果两房间相邻（有共同的隔墙），则用边把对应的两个顶点连起来，这样就得到一个无向图，如图。**

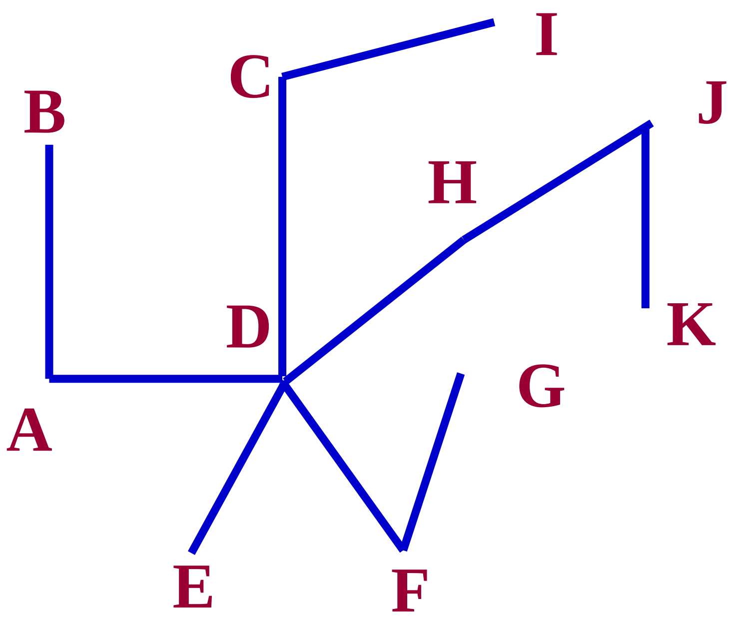
从一个房间到另一房间相当于从这个顶点有一条链能到另一个顶点。




**图的任意一个连通的生成子图，在它的所有边对应的隔墙上开门，即可达到要求。**

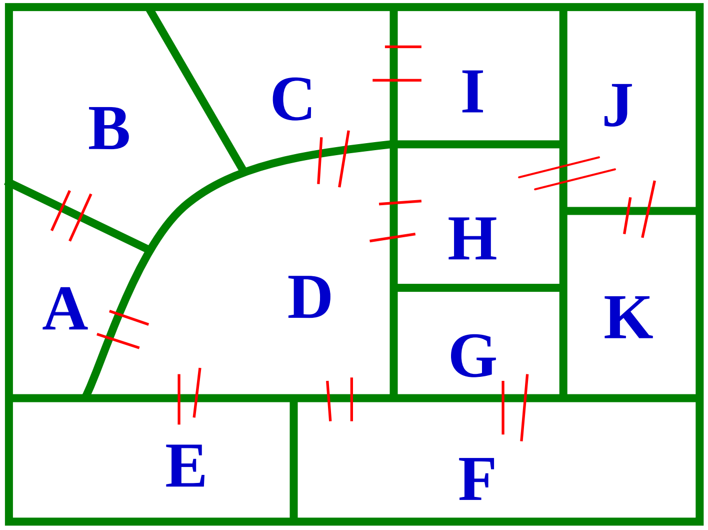
# 最小树的应用

令所有边的权为1，为了使开的门尽可能少，就要使这个连通子图的生成子图的边尽可能少，即求图的最小生成树。



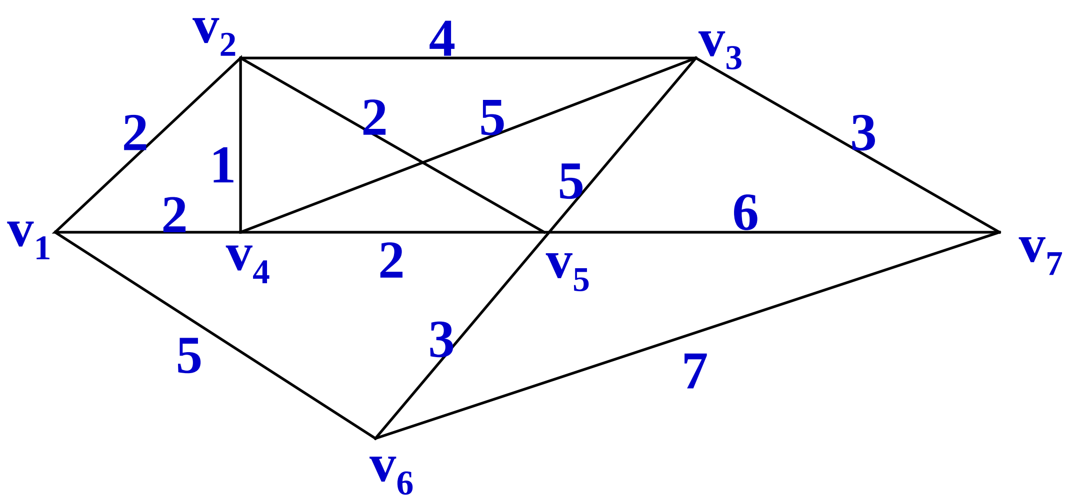

最小生成树

对应的开门方案如图所示，共开10个门。




开门方案

# 中国邮递员问题




上图是一个街区的街道分布网络图，各边的权表示相应街道的长度，要求一个邮递员从$v_1$出发，经过所有街道完成邮件递送任务后返回$v_1$，按什么线路行走，可使总路程最短？这类问题，国际上统称为中国邮递员问题。

# 中 国 邮 递 员 问 题

一般定义：邮递员从邮局出发经过他所管辖的街、巷，完成信件、报纸的投递任务以后回到邮局，要求邮递员经过各条街道至少一次，如何安排邮递员的行走线路，才能使总路程最短（或费用最少等）？

同类问题在生产、经济活动中经常可以遇到。

# 无向网络的邮递员问题

- 问题归结为：

在赋权图G中寻求重复边总权最小的方案，以实现最佳的欧拉巡回路线。

- **这里考虑的是非欧拉图的邮路问题。**

（1）使图G成为总权最小的欧拉图的充要条件是：

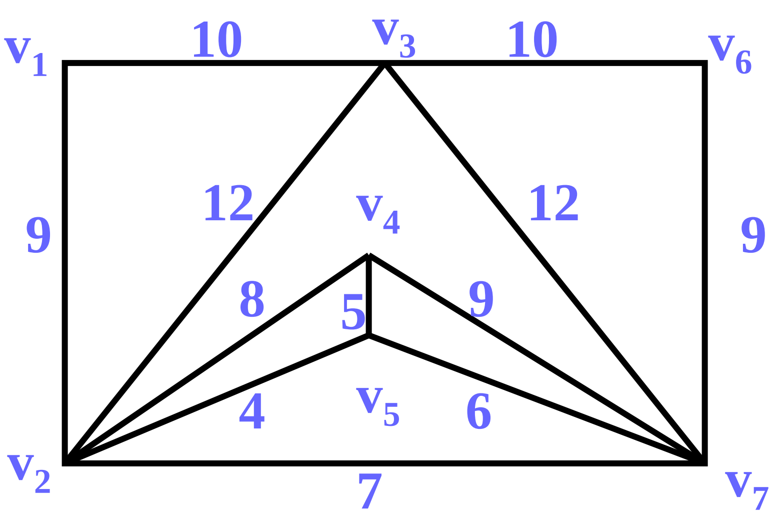
- 在有奇次顶点的图G中，通过加重复边的方法使图不再包含奇次顶点，但原图的每条边最多只能加一条重复边。
- 图G的每个圈上，重复边总权不超过该圈非重复边总权。

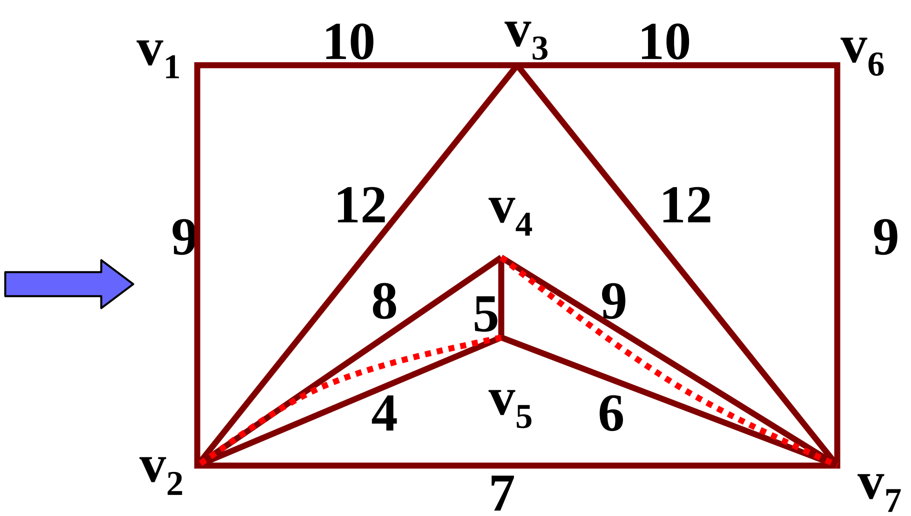
# 奇偶点图上作业法求解

- 任给一初始方案，使网络各顶点皆为偶次，网络变成赋权欧拉图；
- 若添加边含两条或以上平行边，删除偶数条平行边；
- 对G中任一圈，检查重复边集，是否有重复边总权不超过非重复边总权；
- 若条件已满足，现行方案为最优解；否则，转下步；
- 调整，将重复边集与非重复边集对换。

# 奇偶点图上作业法求解

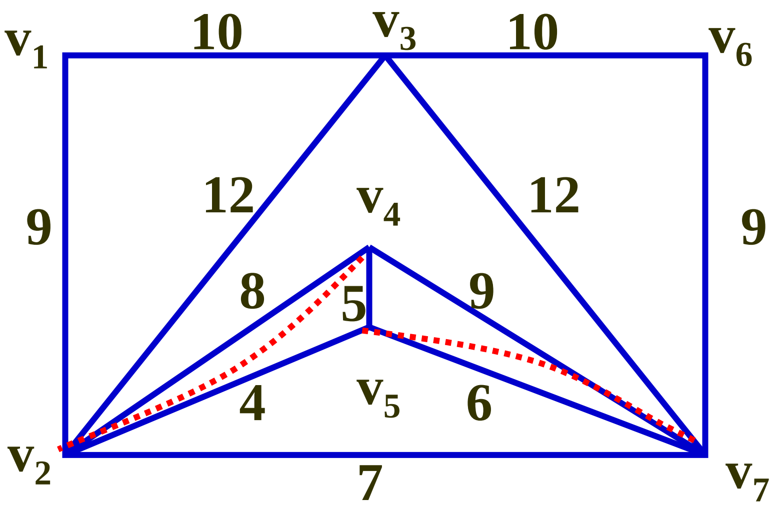
例：求下图最优邮递员路线。

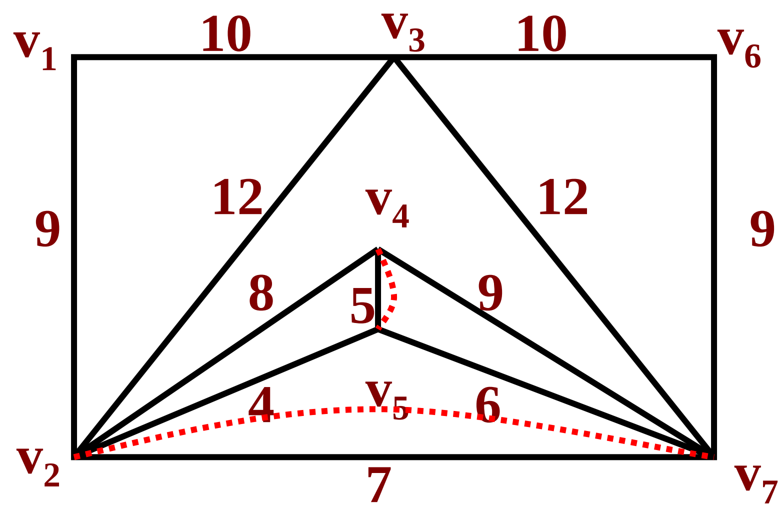



重复边总权为13，非重复边总权为12，不满足最优性条件。

# 奇偶点图上作业法求解



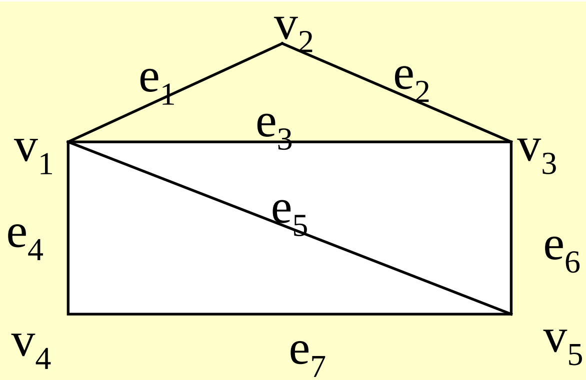




重复边总权为14，非重复边总权为12，不满足最优性条件。

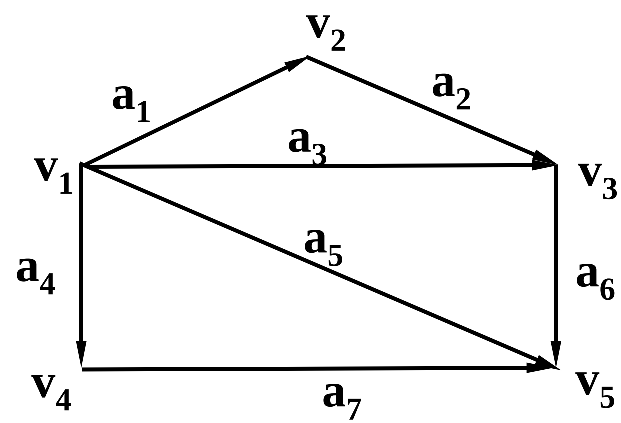
最优欧拉回路

# （一） 链和圈

- **链**：图 $G(V,E)$中，一个点、边的交替序列 $(v_1,e_1,v_2,\ldots,e_{k-1},v_k)$
- 若满足 $e_t=\{v_t,v_{t+1}\}(t=1,2,\ldots,k-1)$，则称为一条联接 $v_1$和 $v_k$ 的链。



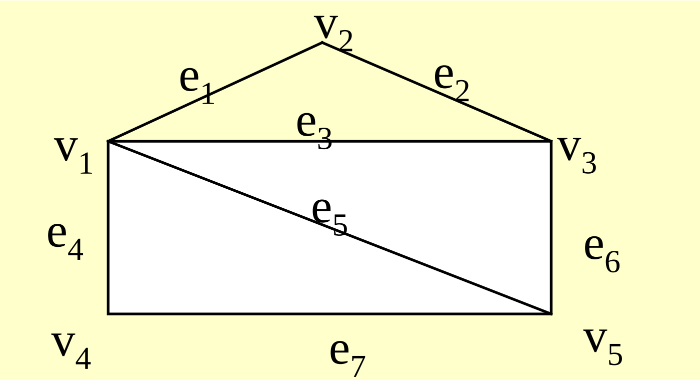

链和图示例



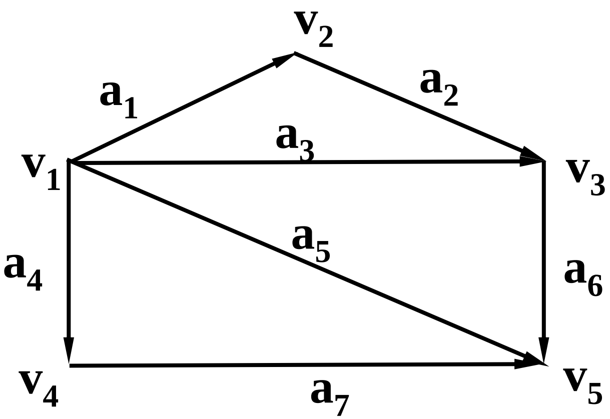

路和回路示例

# （一） 链和圈

**若链的起点和终点相同，称该链为圈。**




链和图示例




路和回路示例

链(圈)中所有边均不相同时，称其为简单链(圈)

若链(圈)中所有顶点均不相同(对圈而言，除第一个和最后一个顶点相同外)，则称为初等链(圈)

# 初等链的应用

## 例：比赛安排问题

有五名运动员参加游泳比赛，下表给出了每位运动员参加的比赛项目，问如何安排比赛，才能使每位运动员都不连续地参加比赛？

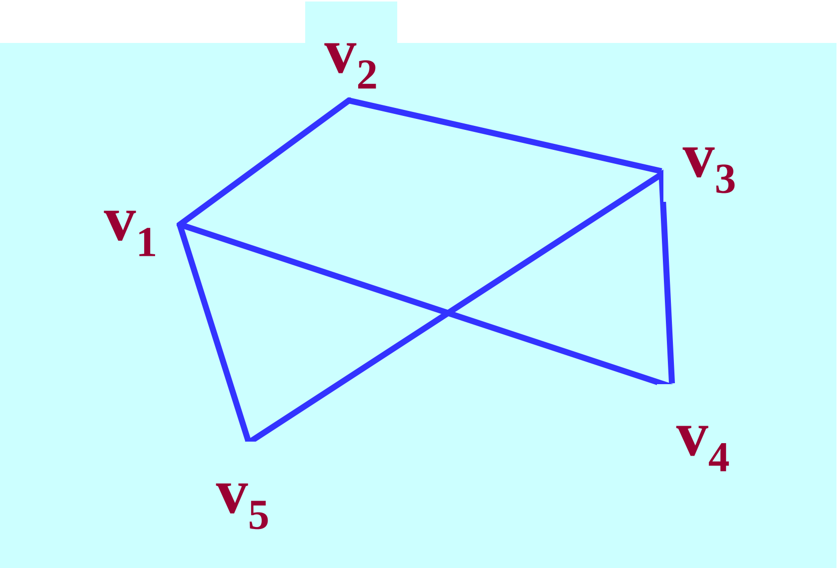
| 运动员 | 50m仰泳 | 50m蛙泳 | 100m蝶泳 | 100m自由泳 | 200m自由泳 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | * | | | | |
| B | | * | | * | * |
| C | * | | * | | |
| D | | * | | | * |
| E | | * | | * | |

# 初等链的应用

**解：** 用顶点$v_1$，$v_2$，$v_3$，$v_4$，$v_5$表示五项比赛项目

如果两项比赛没有同一名运动员参加，把这两项紧排在一起

用一条边把代表这两个项目的顶点连接起来。这样得到下图




**为了解决这个问题，只需找到一条包含所有顶点的初等链。**

如：{$v_4$，$v_1$，$v_2$，$v_3$，$v_5$}是一条初等链，对应的比赛是：

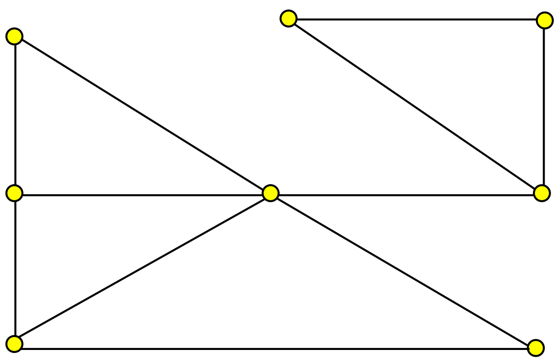
**100m**自由泳，**50m**仰泳，**50m**蛙泳，**100m**碟泳，**200m**自由泳。

此问题的方案不唯一。

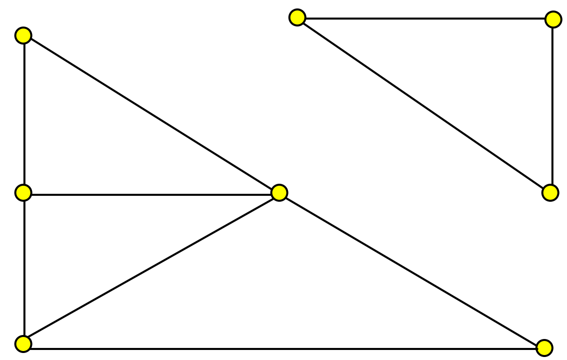
# 连通图

若图的任何两点之间至少存在一条链，这个图就称为连通图。

若一个连通图含有回路，则移去回路之任一边后，剩下的部分仍然连通。



连通图

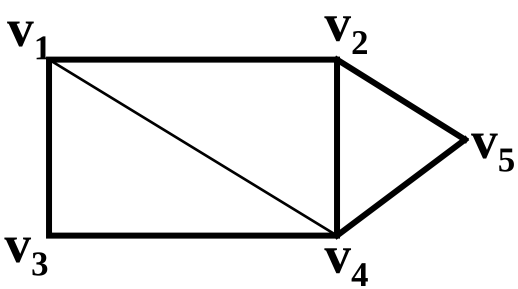


不连通图

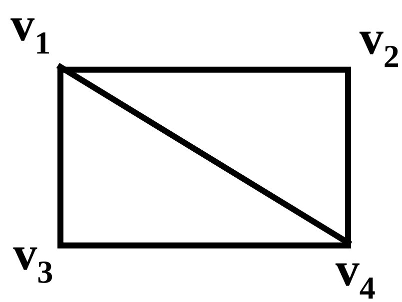
# 子图和生成子图

子图：设有图$G_1=(V_1,E_1)$和$G_2=(V_2,E_2)$，若 $V_1\subseteq V_2, E_1\subseteq E_2$ 就称$G_1$是$G_2$的子图，并写作$G_1\subseteq G_2$

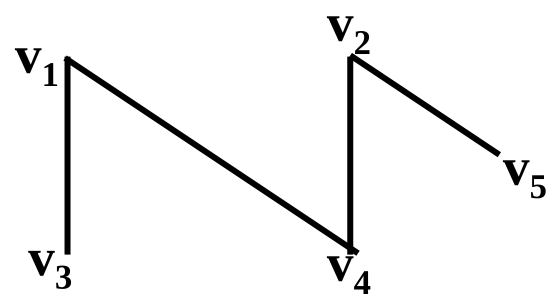
生成子图：若 $V_1=V_2, E_1\subseteq E_2$，就称图 $G_1=(V_1,E_1)$ 是 $G_2=(V_2,E_2)$ 的生成子图（支撑子图）。




图




子图




生成子图

# 欧拉图

- 连通无向图G中，若存在经过每条边恰好一次的一个圈(链)，就称此圈(链)为欧拉圈**(链)**
- 若图**G**中含有一条欧拉圈，就称该图为欧拉图
- 连通无向图G为欧拉图的充要条件:全部顶点都是偶点。
- 连通无向图G为欧拉链的充要条件:它恰含两个奇次顶点
- 若连通无向图**G**无奇次顶点，则可由任一点起一笔画成并回到起点；