习题课

Chapter2 Solution

忻杨璇
邮箱：xinyx@zju.edu.cn
微信：　18867151153

Chapter 2

- 2-3 一个带宽为50Hz的低通信号$x(t)$以奈奎斯特速率抽样，抽样值如下所示：

$$x(nT_s)=\begin{cases}-1,-4\le n<0\\ 1,0<n\le 4\\ 0, \quad\quad\quad 其他\end{cases}$$

（1）确定$x(0.005)$；

（2）此信号是功率型信号还是能量型信号？确定其功率或者能量值。

知识点：采样定理公式，P53

$$X(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(kT_s)sinc(2W(t-kT_s))\ (2.3.45)$$

Solution:

（1） $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT_s)sinc(2W(t-kT_s))$，其中$T_s$为采样间隔

$T_s=\frac{1}{2W}=0.01(s)$，代入采样地理化简得到

$$x(0.005)=\sum_{k=1}^{4}sinc(0.5-k)+\sum_{k=-4}^{-1}(-1)\times sinc(0.5-k)$$

$$=\sum_{k=1}^{4}[sinc(0.5-k)-sinc(0.5+k)]=0.566$$

Chapter 2

- 2-3 一个带宽为50Hz的低通信号$x(t)$以奈奎斯特速率抽样，抽样值如下所示：

$$x(nT_s)=\begin{cases}-1, -4\le n<0\\ 1, 0<n\le 4\\ 0, \qquad\qquad \text{其他}\end{cases}$$

（2）此信号是功率型信号还是能量型信号？确定其功率或者能量值。

知识点：能量型信号和功率型信号，P22

Solution:

（2） $E=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}[\sum_{k=-4}^{4}x(kT_s)sinc\big(2W(t-kT_s)\big)]^2\,dt$ 平方后分两类

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}x(k_1T_s)x(k_2T_s)sinc\big(2W(t-k_1T_s)\big)sinc(2W(t-k_2T_s))\,dt \text{ 交叉项，均为0}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}x(k_1T_s)^2sinc^2\big(2W(t-k_1T_s)\big)\,dt \qquad\qquad \text{8个平方项}\end{cases}$$

证明交叉项为0

交叉项$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc\big(2W(t-k_1T_s)\big)sinc(2W(t-k_2T_s))\,dt$

令$y(t)=sinc\big(2W(t-k_1T_s)\big)sinc(2W(t-k_2T_s))$，即需证$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt=0$

由傅里叶变换的定义式$Y(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi ft}dt$可知：$Y(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt$

所以，证明$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt=0$等价于证明$Y(0)=0$

令$y_1(t)=sinc\big(2W(t-k_1T_s)\big)$，$y_2(t)=sinc\big(2W(t-k_2T_s)\big)$，则$y(t)=y_1(t)y_2(t)$

时域相乘相当于频域卷积：$Y(f)=Y_1(f)*Y_2(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} Y_1(\tau)Y_2(f-\tau)d\tau$

$$\boxed{y_1(t)=sinc\big(2W(t-k_1T_s)\big)\xleftrightarrow{\text{傅里叶变换}}\frac{1}{2W}e^{-j2\pi k_1 f},|f|\le W}$$

则有：$Y(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} Y_1(\tau)Y_2(-\tau)d\tau=\frac{1}{4W^2}\int_{-W}^{W} e^{-j2\pi k_1 f}\cdot e^{j2\pi k_2 f}\,df$

$$=\frac{1}{4W^2}\cdot\frac{1}{j2\pi f(k_2-k_1)}e^{j2\pi(k_2-k_1)f}\Big|_{-W}^{W}=0$$

平方项

根据巴塞瓦尔公式$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df$，时域换到频域求能量

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-4}^{4}[x(kT_s]^2[sinc(2W(t-kT_s))]^2dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}8\times|sinc(2W(t-kT_s))|^2dt=8\times\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df$$

$$\boxed{y_1(t)=sinc\big(2W(t-k_1T_s)\big)\xLeftrightarrow{\text{傅里叶变换}}\frac{1}{2W}e^{-j2\pi k_1 f},|f|\le W}$$

则有：$E=8\times\int_{-W}^{W}\left|\frac{1}{2W}e^{-j2\pi k_1 f}\right|^2df=8\times\left(\frac{1}{2W}\right)^2\times 2W=0.08$

综上可知能量是有限的，因此假设成立，此信号是能量型信号，能量值为

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=0.08$$

Chapter 2

- 2-11　带通信号$x(t) = sinc(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$通过具有脉冲响应$h(t) = sinc^2(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)$的带通滤波器。利用输入信号和脉冲响应的低通等效表示式，找出输出信号的低通等效表示式，并由此确定输出信号$y(t)$。

知识点：用低通等效复包络求窄带信号通过窄带系统，P24-29

带通信号低通等效复包络及频域表示，P25-28

$$x(t) = sinc(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\text{Hilbert变换}} \hat{x}(t) = sinc(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$

带通信号低通等效复包络：　$x_l(t) = sinc(t)$　　复包络频域表示：$X_l(f) = \begin{cases} 1, |f| < \dfrac{1}{2} \\ 0, |f| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

同理　$h(t) = sinc^2(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\text{Hilbert变换}} \hat{h}(t) = -sinc^2(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

脉冲响应低通等效复包络：　$h_l(t) = sinc^2(t) e^{-j\frac{\pi}{2}}$　　复包络频域表示：

$$H_l(f) = \begin{cases} (1-f)/j, 0 \le f \le 1 \\ (1+f)/j, -1 \le f \le 0 \end{cases}$$

• 2-11　带通信号$x(t) = sinc(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t)$通过具有脉冲响应$h(t) = sinc^2(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t)$的带通滤波器。利用输入信号和脉冲响应的低通等效表示式，找出输出信号的低通等效表示式，并由此确定输出信号$y(t)$。

知识点：用低通等效复包络求窄带信号通过窄带系统，P28-29

利用P29的窄带信号通过窄带系统的低通频率响应公式(2.1.80)：

$$Y_l(f) = \frac{1}{2}X_l(f)H_l(f)$$

得到输出信号低通等效复包络的频域表示为：
$$Y_l(f) = \begin{cases} (1-f)/2j, 0 \le f < \frac{1}{2} \\ (1+f)/2j, -\frac{1}{2} \le f \le 0 \end{cases}$$

作傅里叶反变换，得到输出信号低通等效复包络：

$$y_l(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Y_l(f)e^{j2\pi ft}df = \frac{1}{2j}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-f)e^{j2\pi ft}df + \frac{1}{2j}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1+f)e^{j2\pi ft}df$$

利用公式(2.1.82)，求得输出信号：

$$y(t) = Re\left[y_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] = \left\{\frac{1}{4\pi^2 t^2}(1-cos\pi t) + \frac{1}{4\pi t}sin\pi t\right\}\sin(2\pi f_0 t)$$

Chapter 2

- 2-19 设随机过程$\xi(t)$可表示成$\xi(t)=2\cos(2\pi t+\theta)$，式中$\theta$是一个随机变量，且$P(\theta=0)=P\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$，试求$E[\xi(1)]$以及$R_{\xi}(0,1)$。

知识点：随机变量的数字特征，相关函数计算，P42-43

$$E[\xi(1)]=P(\theta=0)\cdot 2\cos(2\pi)+P\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\cos(2\pi)-\frac{1}{2}\times 2\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$=1$$

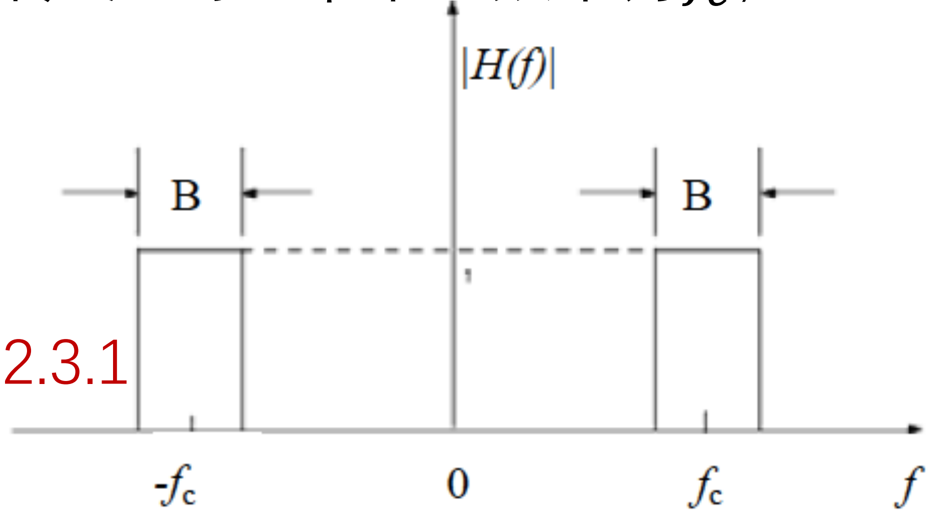
$$R_{\xi}(0,1)=E[\xi(0)\xi(1)]=E[2cos\theta\cdot 2\cos(2\pi+\theta)]$$

$$=P(\theta=0)\times[2cos0\cdot 2\cos(2\pi)]+P\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)\times\left[2cos\frac{\pi}{2}\cdot 2\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=2$$

Chapter 2

- 2-25 将一个均值为零，功率谱密度为$N_0/2$的高斯白噪声加到一个中心频率为f_c，带宽为B的理想滤波器上，如图所示



（1）滤波器输出噪声的自相关函数；

（2）写出输出噪声的一维概率密度函数；

知识点：自相关函数的傅里叶变换是功率谱密度，定理2.3.1

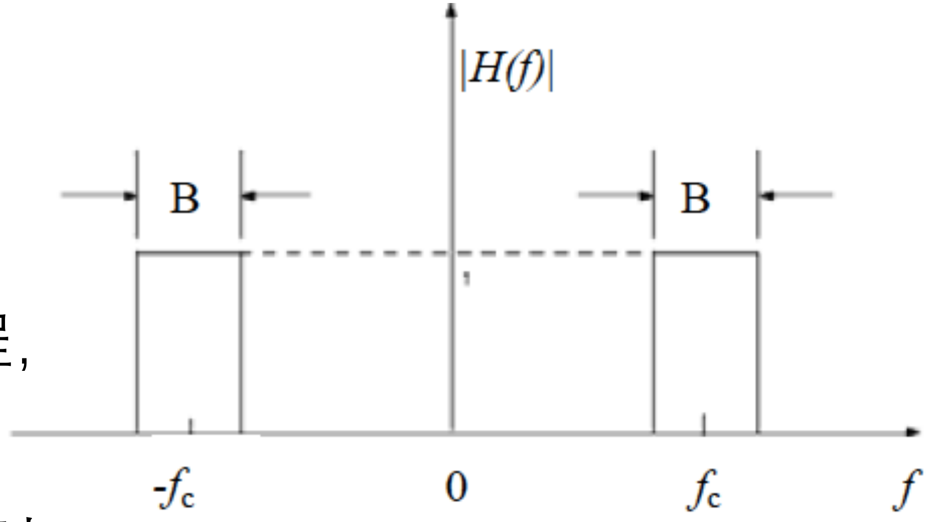
（1）由书P50的公式，计算输出噪声的功率谱：

$$P_N(f) = P_X(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, |f - f_c| < \frac{B}{2} \\ \frac{N_0}{2}, |f + f_c| < \frac{B}{2} \\ 0\ , \qquad else \end{cases}$$

$$R_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} P_N(f) e^{j2\pi f\tau} df = N_0 B \cdot sinc(B\tau) \cdot \cos(2\pi f_c \tau)$$

Chapter 2

- 2-25 将一个均值为零，功率谱密度为$N_0/2$的高斯白噪声加到一个中心频率为f_c，带宽为B的理想滤波器上，如图所示



（2）写出输出噪声的一维概率密度函数；

知识点：线性系统，高斯过程正态分布的PDF，P46

（2）由于高斯过程通过线性系统的输出也是高斯过程，则输出为高斯噪声

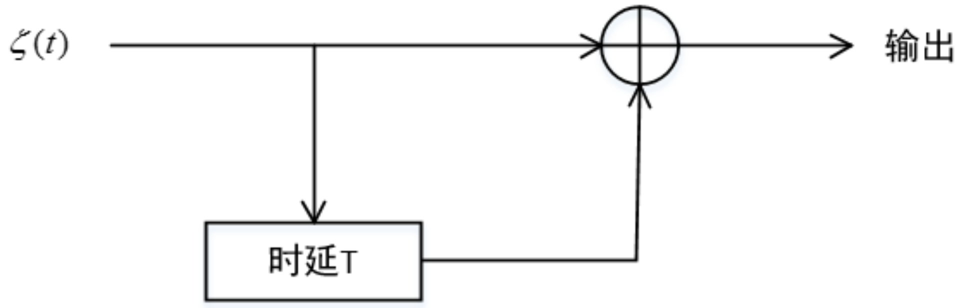
又由题（1）得：$R_\tau = N_0B \cdot sinc(B\tau) \cdot \cos(2\pi f_c\tau)$，则：

均值：$E^2(X) = R(\infty) = 0 \Rightarrow \mu = 0$

方差：$\sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) = R(0) - R(\infty) = N_0B$

则一维概率密度函数为：$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 B}} exp\left\{-\frac{n^2}{2N_0B}\right\}$

- 2-30 若$\xi(t)$是平稳随机过程，自相关函数为$R_\xi(\tau)$，试求它通过图示系统后的自相关函数及功率谱密度。



知识点：自相关函数的定义，P46

自相关函数的傅里叶变换是功率谱密度，定理2.3.1

由图可知，输出为：$Y(t)=\xi(t)+\xi(t-T)$

输出的自相关函数为：

$$R_Y(\tau)=E[Y(t_1)Y(t_2)]=E\big[\big(\xi(t_1)+\xi(t_1-T)\big)\big(\xi(t_2)+\xi(t_2-T)\big)\big]$$
$$=E[\xi(t_1)\xi(t_2)]+E[\xi(t_1-T)\xi(t_2)]+E[\xi(t_1)\xi(t_2-T)]+E[\xi(t_1-T)\xi(t_2-T)]$$
$$=2R_\xi(\tau)+R_\xi(\tau-T)+R_\xi(\tau+T)$$

功率谱密度为：

$$P_Y(f)=\mathcal{F}\big[R_\xi(\tau)\big]=\mathcal{F}\big[2R_\xi(\tau)+R_\xi(\tau-T)+R_\xi(\tau+T)\big]$$
$$=P_\xi(f)\big(2+e^{-j2\pi fT}+e^{j2\pi fT}\big)=2P_\xi(f)(1+cos2\pi fT)$$

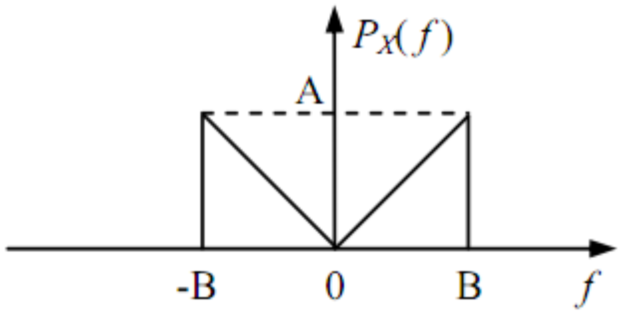
- 2-35 设两个平稳过程$X(t)$和$Y(t)$之间有以下关系：

$$Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta) - \hat{X}(t)\sin(2\pi f_0 t + \Theta)$$

其中f_0为常数，Θ是$[0,2\pi]$上均匀分布随机变量，Θ与$X(t)$统计独立。若已知$X(t)$的功率谱密度如图所示，试求$Y(t)$的功率谱密度，并画出其图形。

知识点：希尔伯特变换性质；自相关函数的傅里叶变换是功率谱密度，定理2.3.1

首先求自相关$R_Y(\tau) = E[Y(t+\tau)Y(t)]$



$$\begin{aligned}
Y(t+\tau)Y(t) = &\frac{1}{2}X(t+\tau)X(t)[\cos(2\pi f_0\tau) + \cos(4\pi f_0 t + 2\Theta + 2\pi f_0\tau)] \\
&+\frac{1}{2}\hat{X}(t+\tau)\hat{X}(t)[\cos(2\pi f_0\tau) - \cos(4\pi f_0 t + 2\Theta + 2\pi f_0\tau)] \\
&-\frac{1}{2}X(t+\tau)\hat{X}(t)[-\sin(2\pi f_0\tau) + \sin(4\pi f_0 t + 2\Theta + 2\pi f_0\tau)] \\
&-\frac{1}{2}\hat{X}(t+\tau)X(t)[\sin(2\pi f_0\tau) + \sin(4\pi f_0 t + 2\Theta + 2\pi f_0\tau)]
\end{aligned}$$

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2}R_X(\tau)cos2\pi f_0\tau + \frac{1}{2}R_{\hat{X}}(\tau)cos2\pi f_0\tau + \frac{1}{2}R_{X\hat{X}}(\tau)sin2\pi f_0\tau - \frac{1}{2}R_{\hat{X}X}(\tau)sin2\pi f_0\tau$$

根据希尔伯特变换性质P54： $R_{X\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau), R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau), R_{\hat{X}X}(\tau) = \hat{R}_{\hat{X}}(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$

则： $R_Y(\tau) = R_X(\tau)cos2\pi f_0\tau - \hat{R}_X(\tau)sin2\pi f_0\tau$

- 2-35 设两个平稳过程$X(t)$和$Y(t)$之间有以下关系：

$$Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta) - \hat{X}(t)\sin(2\pi f_0 t + \Theta)$$

其中f_0为常数，Θ是$[0,2\pi]$上均匀分布随机变量，Θ与$X(t)$统计独立。若已知$X(t)$的功率谱密度如图所示，试求$Y(t)$的功率谱密度，并画出其图形。

知识点：希尔伯特变换性质；自相关函数的傅里叶变换是功率谱密度，定理2.3.1

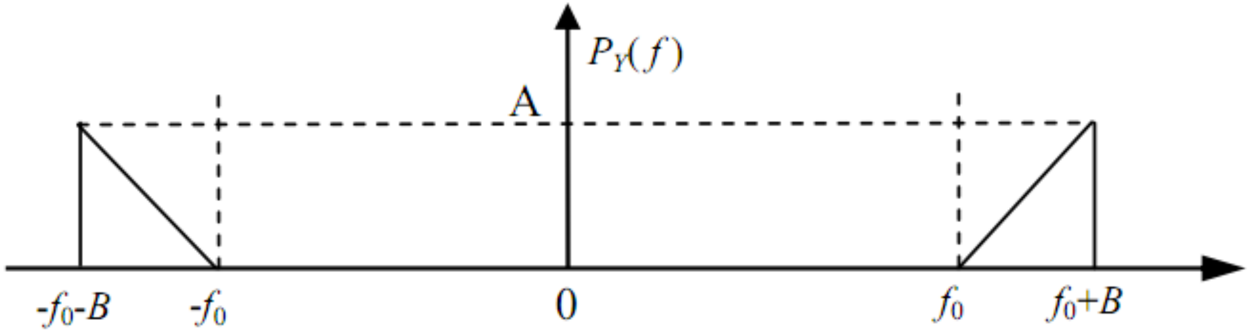
$R_Y(\tau) = R_X(\tau)cos2\pi f_0\tau - \hat{R}_X(\tau)sin2\pi f_0\tau$

根据定理2.3.1有：

$$P_Y(f) = \mathcal{F}[R_Y(\tau)] = \frac{P_X(f-f_0)+P_X(f+f_0)}{2} - [-j\mathrm{sgn}(f)P_X(f)]\otimes\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}$$

$$= \frac{P_X(f-f_0)}{2}[1+\mathrm{sgn}(f-f_0)] + \frac{P_X(f+f_0)}{2}[1-\mathrm{sgn}(f+f_0)]$$

$$= \begin{cases} P_X(f-f_0), & f_0 \le f \le f_0 + B \\ P_X(f+f_0), & -B-f_0 \le f \le -f_0 \\ 0, & else \end{cases}$$



Chapter 2

- 2-37 定义随机过程$X(t)=A+Bt$，其中A、B是互相独立的随机变量，并且在[-1,1]上均匀分布。求$m_X(t)$与$R_X(t_1,t_2)$。

知识点：随机变量数字特征，相关函数定义

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[A+Bt]=E[A]+E[Bt]$$
$$=0$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[(A+Bt_1)(A+Bt_2)]=E[A^2]+E[B^2]t_1t_2$$
$$=\frac{1}{3}(1+t_1t_2)$$

对于均匀分布在$[a,b]$上的随机变量，其均值为$\frac{b-a}{2}$，方差为$\frac{(b-a)^2}{12}$

因此$E[A]=E[B]=0,Var(A\}=Var(B)=\frac{1}{3}$