第五章　模拟信号的数字化

王玮
浙江大学信电系
wangw@zju.edu.cn

模拟消息在数字通信中首先要把它数字化，变成数字消息。模拟消息数字化有三大步骤：

① 首先是把模拟信号抽样，用时间离散的消息样本值表示时间连续信号；

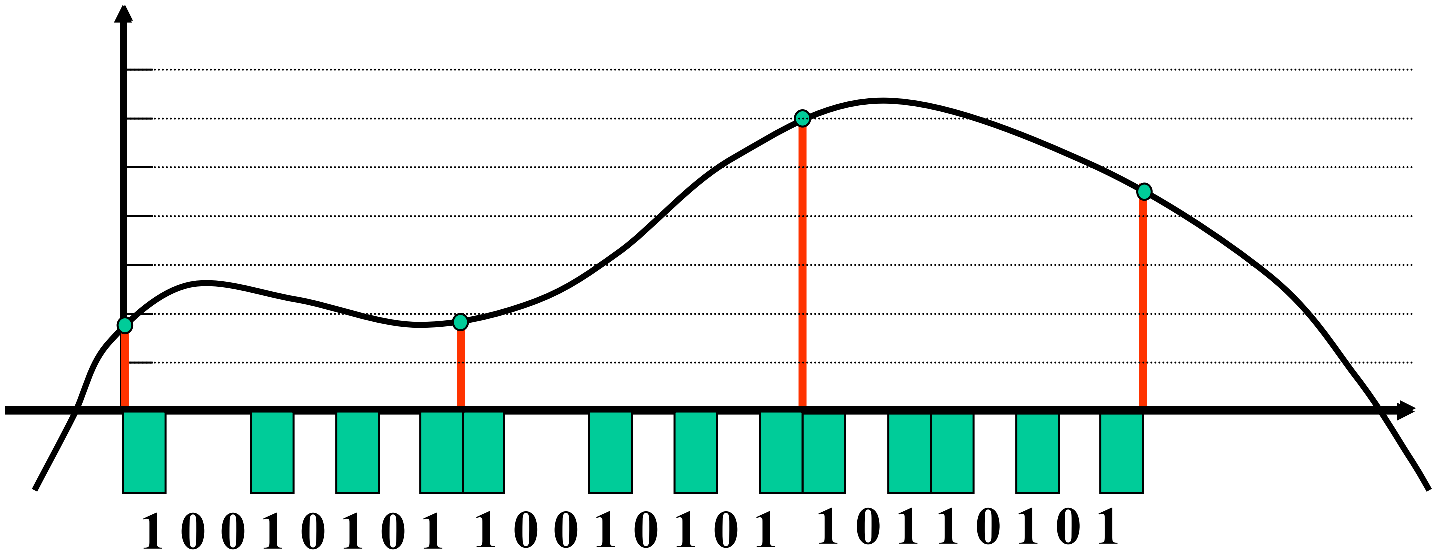
② 然后对样本值进行量化，即把样本幅度值用有限数目的离散电平值近似；

③ 最后对这有限个量化电平值用数字编码；从而得到模拟消息的数字表示；

模拟信号数字化的性能指标：

① 数字化信号恢复成模拟信号后失真要小，或者说信噪比要高；

② 信号数字化的码率要低，有利于频带有效传输；



对于普通话音的PCM，采样频率8k，每个样本用8bit，于是码率为64kb/s;

§ 5.1 模拟信号的抽样

一、低通信号的抽样

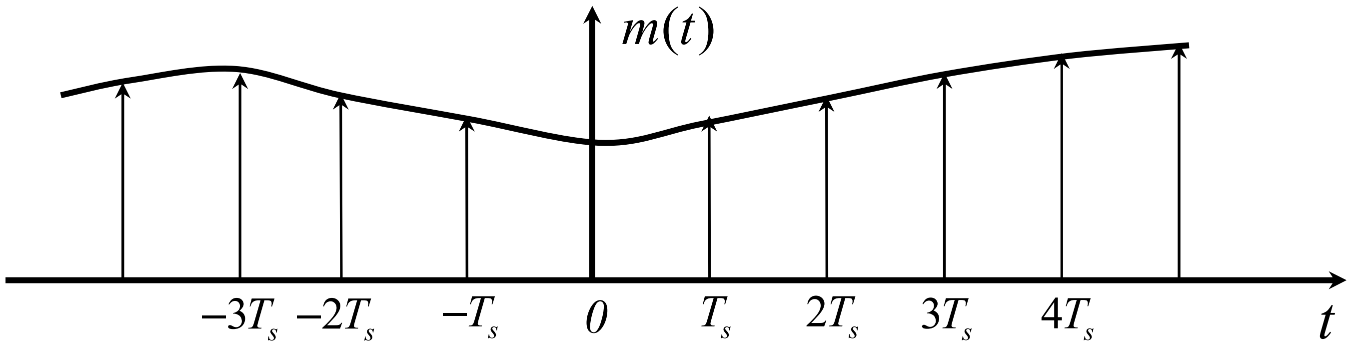


图5.1.1 低通信号采样

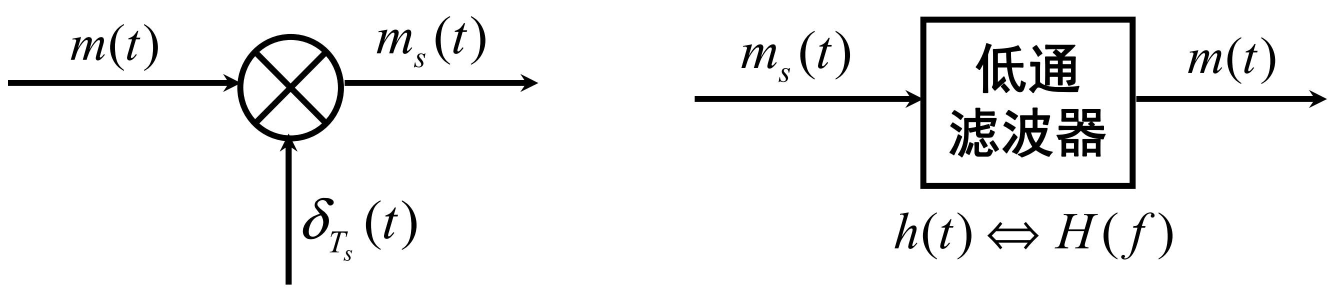


图5.1.2 低通信号采样和恢复

设 $m(t)$ 低通模拟信号，$\delta_{T_s}(t)$ 是脉冲序列

$$\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

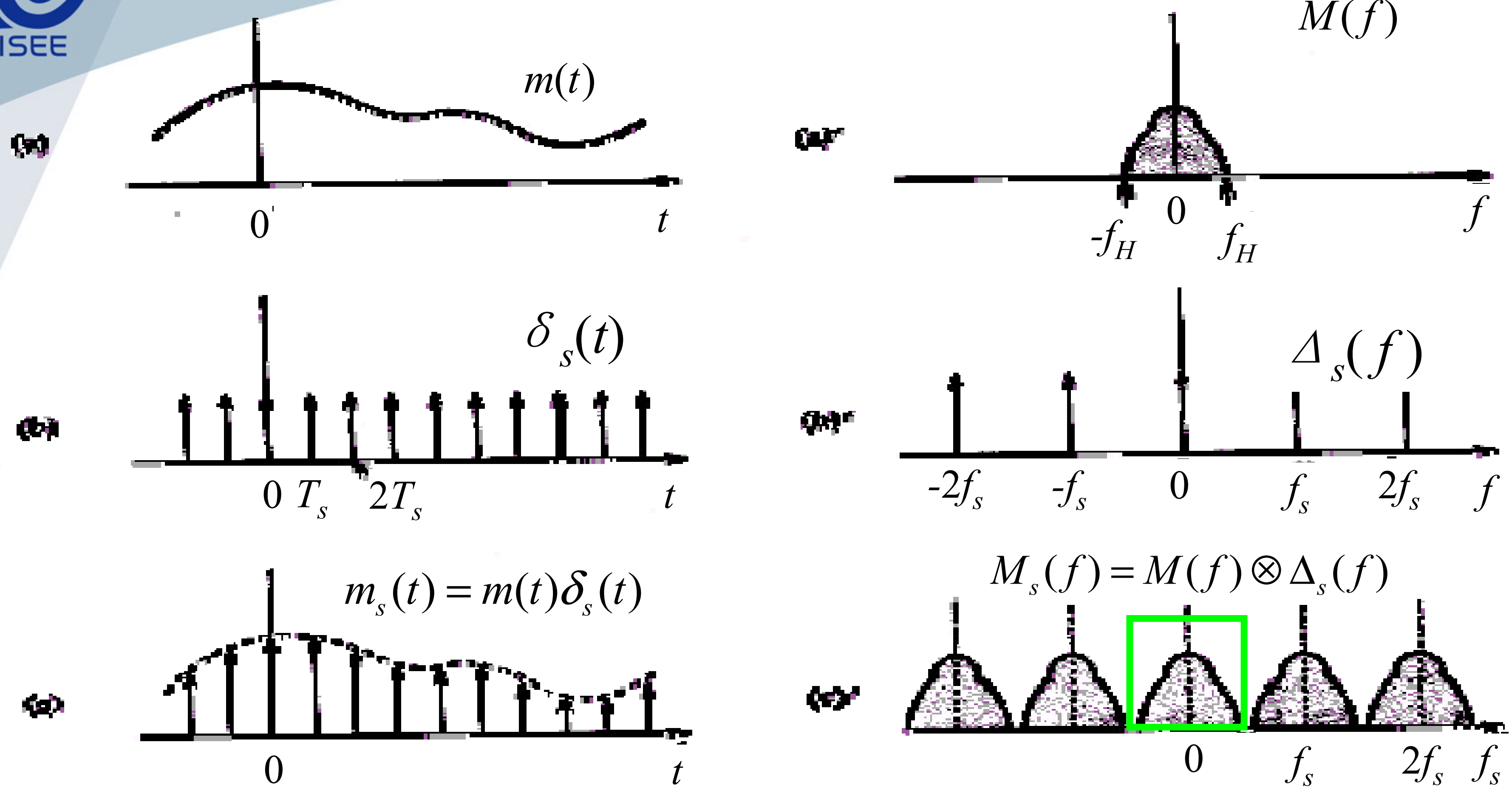
则 $$m_s(t)=m(t)\times\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}m(t)\delta(t-nT_s)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(t)h(t-nT_0)\Leftrightarrow\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}H\left(\frac{l}{T_0}\right)G\left(f-\frac{l}{T_0}\right)$$ （泊松公式）

$$m_s(t)\Leftrightarrow M_s(f)$$

$$M_s(f)=\frac{1}{T_s}\sum_{l=-\infty}^{\infty}M(f-\frac{l}{T_s})=\frac{1}{T_s}\sum_{l=-\infty}^{\infty}M(f-lf_s)$$

其中 $f_s=\dfrac{1}{T_s}$, $\qquad M(f)\Leftrightarrow m(t)$

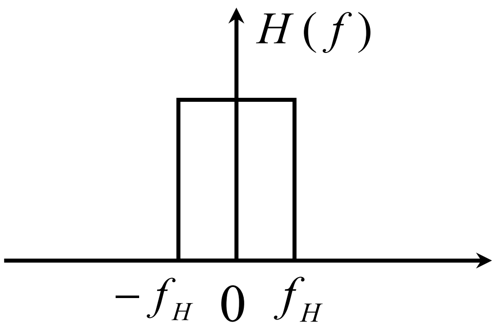


要使抽样序列$m_s(t)$的频谱不相交迭，则要求$f_s \ge 2f_H$，其中f_H是低通信号的带宽，即要求：

$$\boxed{T_s \le \frac{1}{2f_H}}$$

被抽样信号恢复

为了从 $m_s(t)$ 中恢复出原来信号 $m(t)$，只要把 $m_s(t)$ 通过截止频率为 f_H 的低通滤波器。设低通滤波器脉冲响应为 $h(t)$，传递函数为 $H(f)$；



$$H(f)=\begin{cases}1 & |f|\le f_H \\ 0 & |f|>0\end{cases}$$

$$h(t)=\frac{\sin 2\pi f_H t}{\pi t}=2f_H\sin c(2f_H t)$$

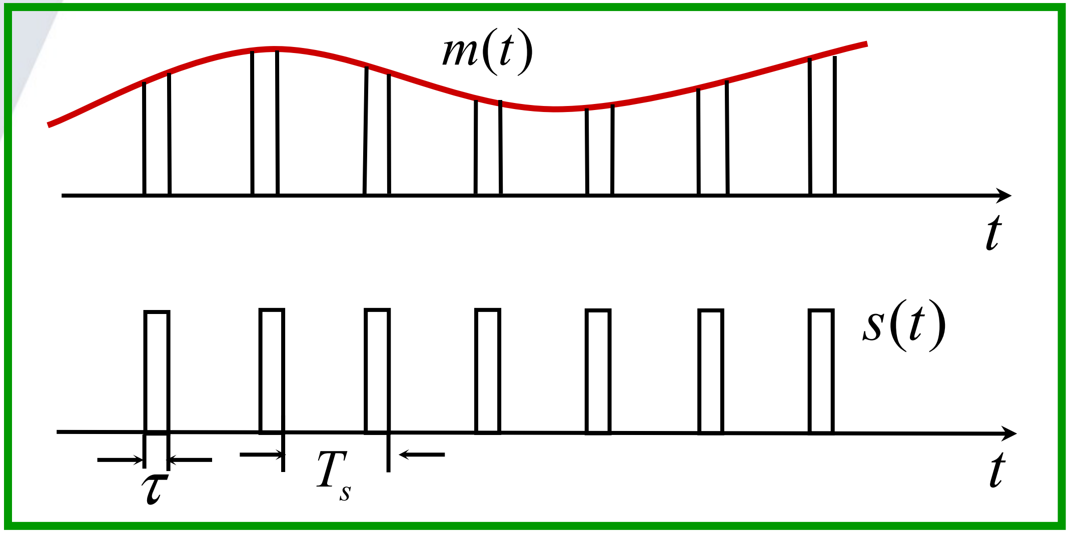
输出信号为： $$m_s(t)\otimes h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}m(nT_s)\delta(t-nT_s)\otimes h(t)$$

$$=2f_H\sum_{n=-\infty}^{\infty}m(nT_s)\cdot\sin c\left[2f_H(t-nT_s)\right]$$

取 $2f_H=f_s$， $$m_s(t)\otimes h(t)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}m(nT_s)\cdot\mathrm{sinc}\left[2f_H(t-nT_s)\right]$$

$$=\frac{1}{T_s}m(t)$$

注意1：曲顶抽样



设采样脉冲序列为：

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(t-nT_s)$$

$$h(t)=\begin{cases}A & |t|\le\tau/2\\ 0 & |t|\ge\tau/2\end{cases}$$

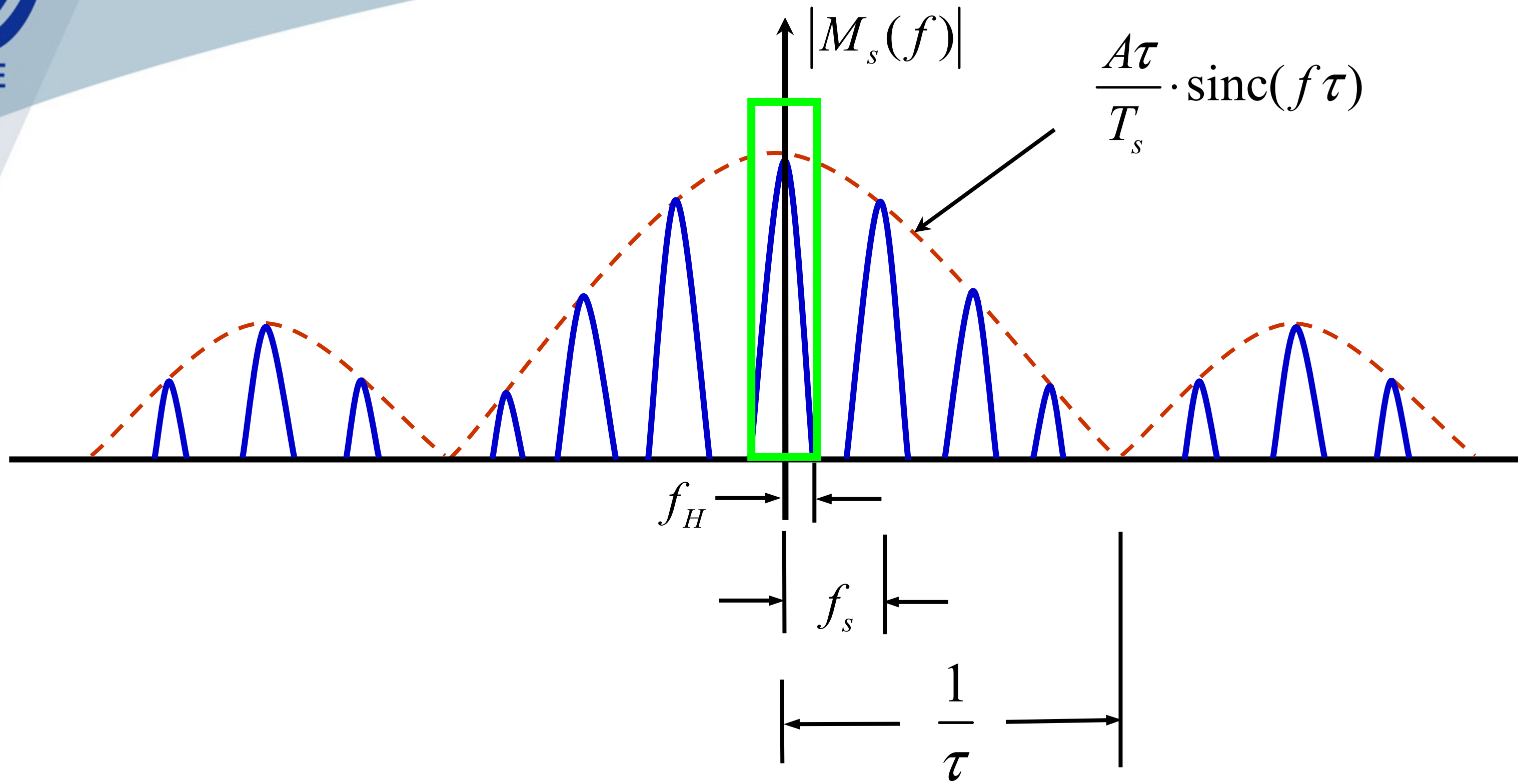
$$H(f)=A\tau\cdot\operatorname{sinc}(f\tau)$$

于是

$$m_s(t)=m(t)\cdot s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}m(t)\cdot h(t-nT_s)$$

$$M_s(f)=\frac{1}{T_s}\sum_{l=-\infty}^{\infty}H(lf_s)\cdot M(f-lf_s)$$

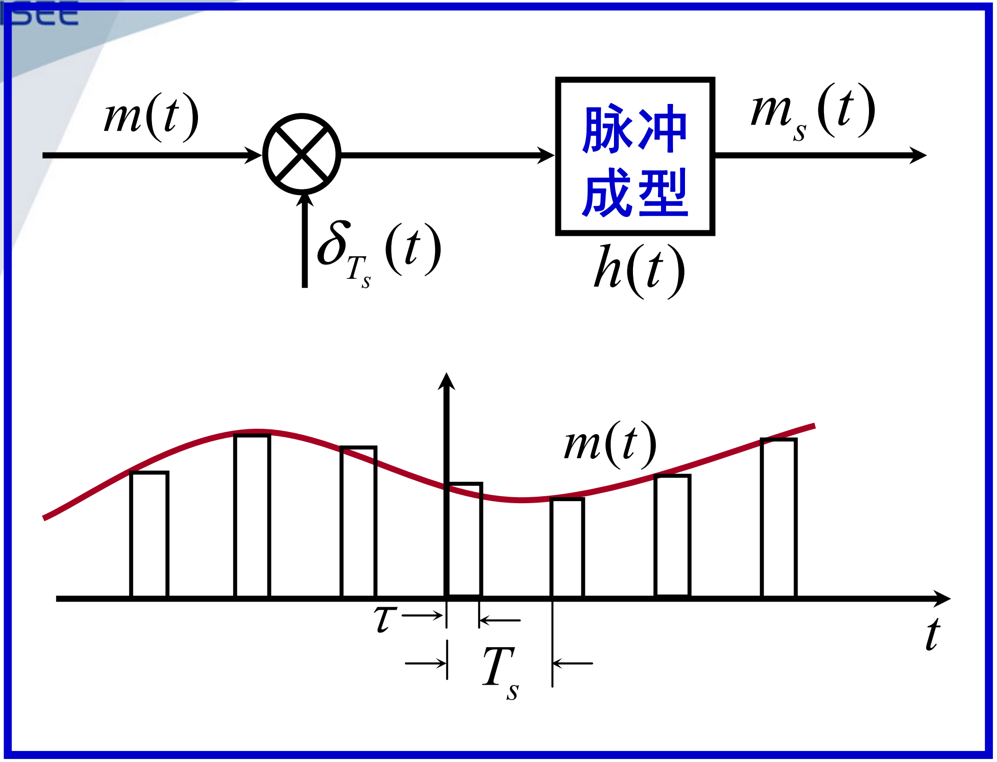
$$=\frac{A\tau}{T_s}\sum_{l=-\infty}^{\infty}M(f-lf_s)\cdot\operatorname{sinc}(lf_s\tau)$$



要求频谱不重迭 $f_s \geq 2f_H$， $T_s \leq \dfrac{1}{2f_H}$

用截止频率为 f_H **的低通滤波器，可以滤出低通信号** $m(t)$。

注意2：平顶抽样



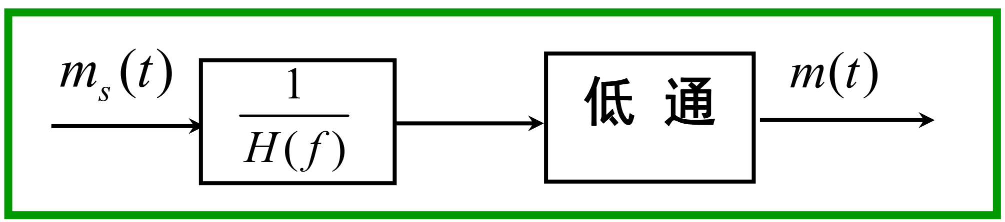
$$m_s(t)=h(t)\otimes\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

$$M_s(f)=H(f)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_s}M(f-nf_s)$$

$$H(f)\Leftrightarrow h(t)$$

当 $h(t)=\begin{cases}1 & |t|<\tau\\ 0 & |t|>\tau\end{cases}$

$$H(f)=\tau\,\mathrm{sinc}(\tau f)$$



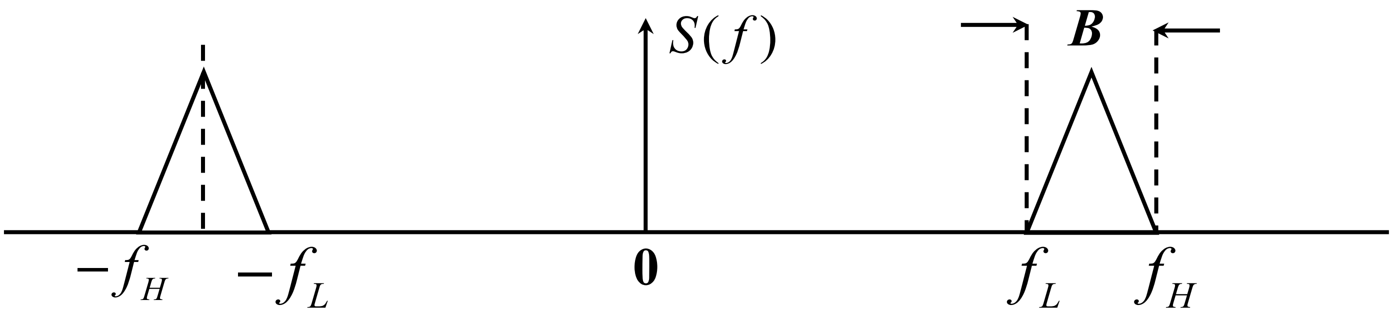
如果 $f_s\geq 2f_H$，用截止频率为 f_H的滤波器滤出 $\frac{1}{T_s}H(f)M(f)$。

在低通滤波之前用频率响应为 $1/H(f)$ 的网络进行校正

二、带通信号的抽样

带通信号 $s(t)$ 的频谱 $S(f)$ 限制在 $f_L \le |f| \le f_H$ ，

带宽为 $B = f_H - f_L$

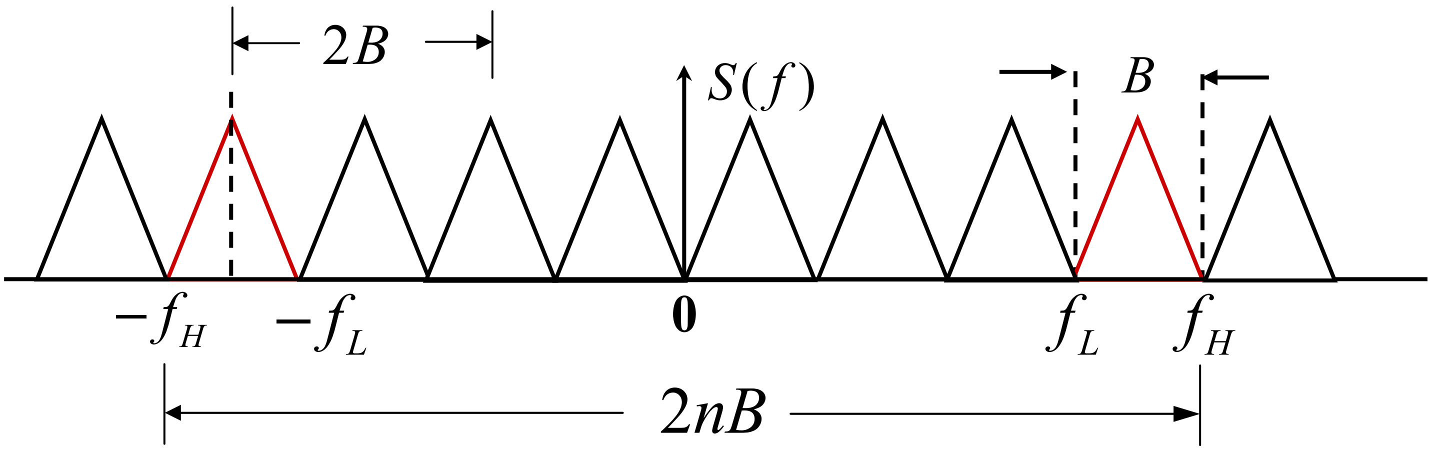


信号 $s(t)$ 经抽样频率为 f_s 的脉冲序列抽样后，它的频谱为：

$$\frac{1}{T_s}\sum_{l=-\infty}^{\infty} S(f - lf_s)$$

要求从抽样序列中不失真的恢复出原来信号 $s(t)$，则要求 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f-nf_s)$ 不相重迭。

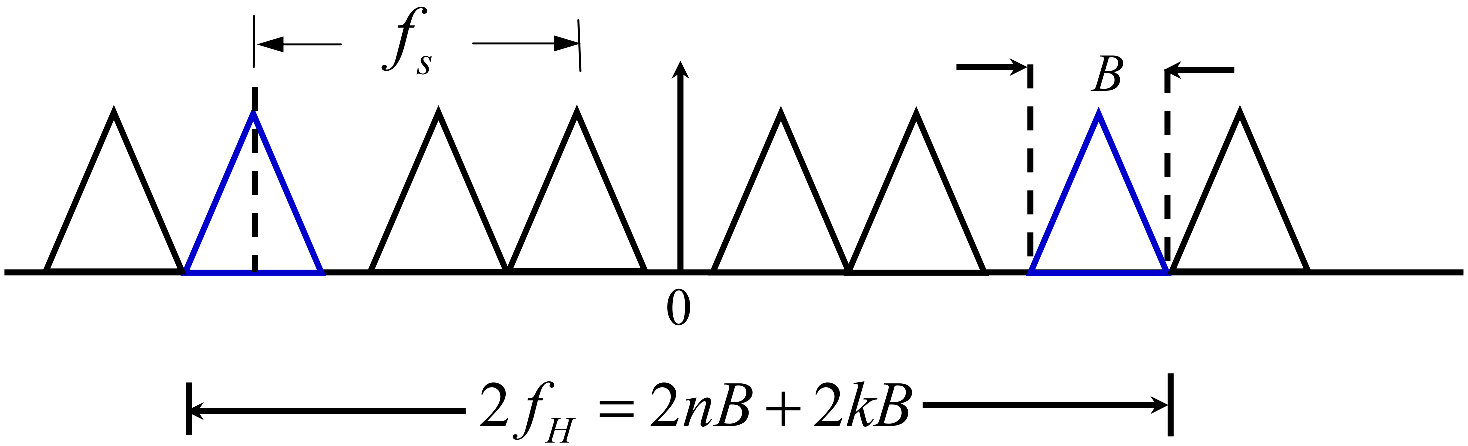
（1）当 $2f_H = 2nB$



若选 $f_s = 2B$，或 $T_s = 1/2B$，则可以保证平移后的频谱不相重迭。

这时可以用通带为 $(f_L \sim f_H)$ 的带通滤波器选出这个带通信号。

(2) 当 $f_H = nB + kB$ ， $0 < k < 1$ 时



同样如果抽样频率 f_s 满足 $nf_s = 2f_H$ ，则频谱搬移过程中不会发生重迭的。

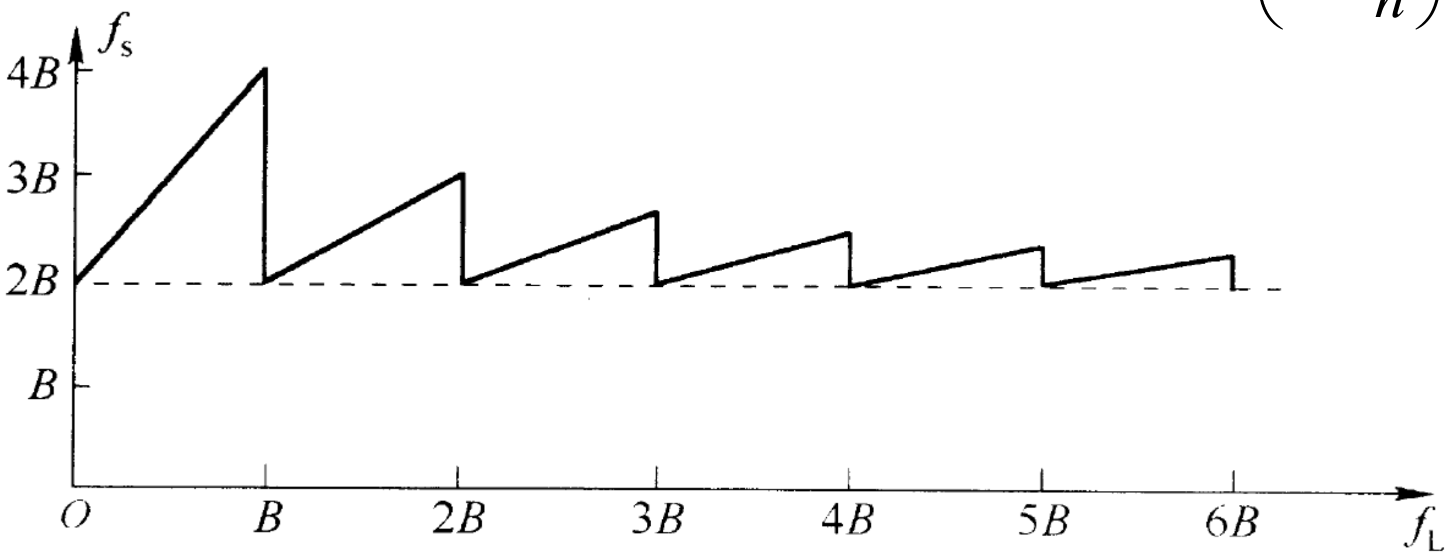
$$\boxed{f_s = \frac{2f_H}{n} = 2B\left(1 + \frac{k}{n}\right) \qquad n = 1, 2, \cdots}$$

$$f_s=\frac{2f_H}{n}=2B\left(1+\frac{k}{n}\right)\qquad n=1,2,\cdots$$

$n=1,\quad k$ 从 $0\to1,\quad$ 则 f_s 从 $2B\to4B$

$n=2,\quad k$ 从 $0\to1,\quad$ 则 f_s 从 $2B\to3B$

一般 $n\geq1,\quad k$ 从 $0\to1,\quad$ 则 f_s 从 $2B\to2B\left(1+\frac{1}{n}\right)$



注意：低通信号的不重迭抽样频率要求 $f_s\geq2B$，带通信号则要求，

$f_s=2B\left(1+\frac{k}{n}\right)$，等号要求比较严格成立。

§ 5.2 模拟值的量化

量化是一种近似，即以一定精度来表示样本值 。

我们把连续样本值可能的取值区间分成M部分（M个子区间），落入某一子区间的样本值都用某一个固定的量化值（恢复值）表示。

如图所示，采样值$s(kT)$的取值范围为从 $m_0=-\infty$到 $m_8=\infty$ ，把(m_0,m_8)分成8部分。每个子区间中取一个代表点（恢复值），比如在$[m_i,m_{i+1}]$，区间对应的代表点为q_{i+1}，于是

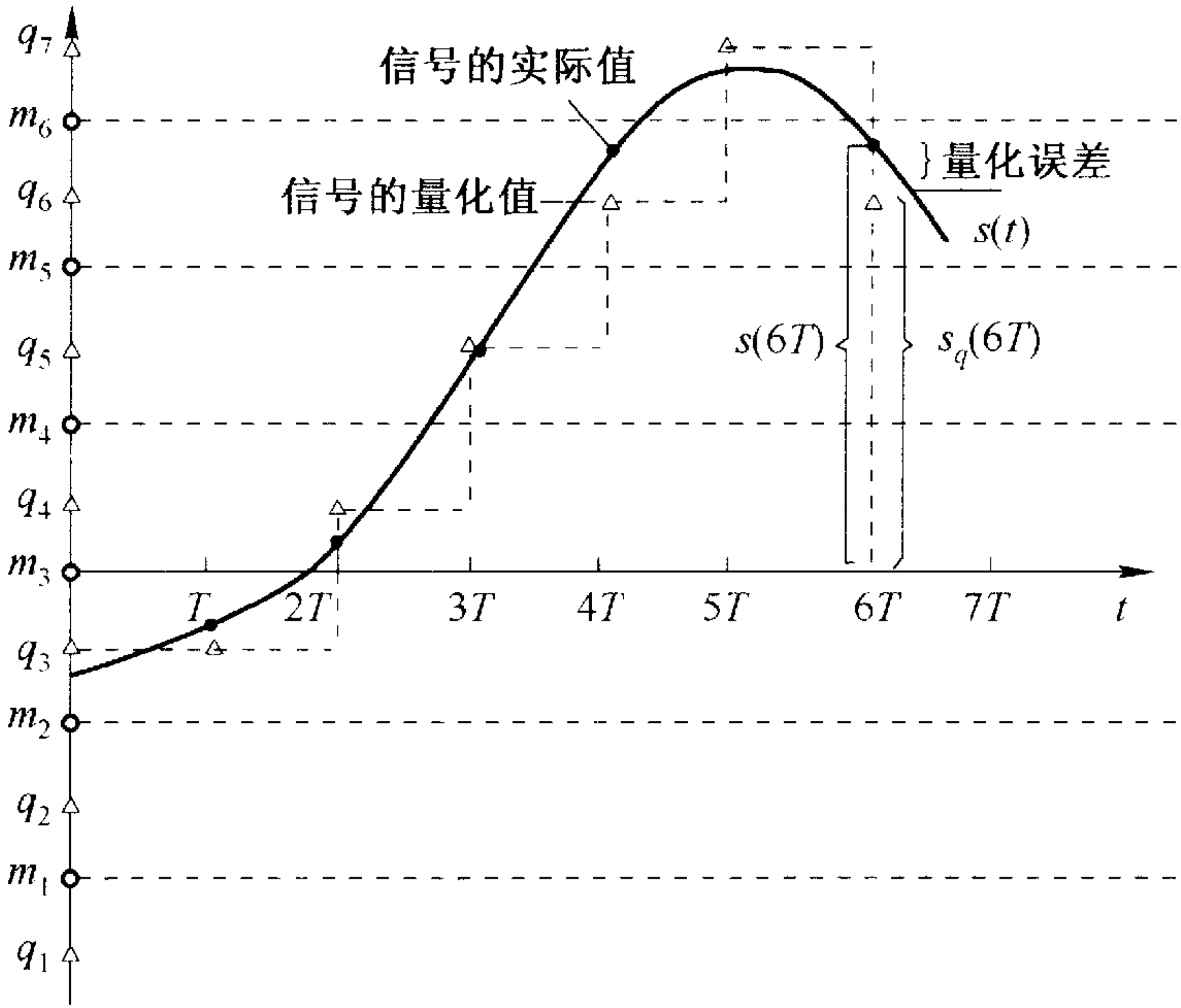
$$\hat{s}(kT)=q_{i+1},\qquad m_i\le s(kT)<m_{i+1}$$

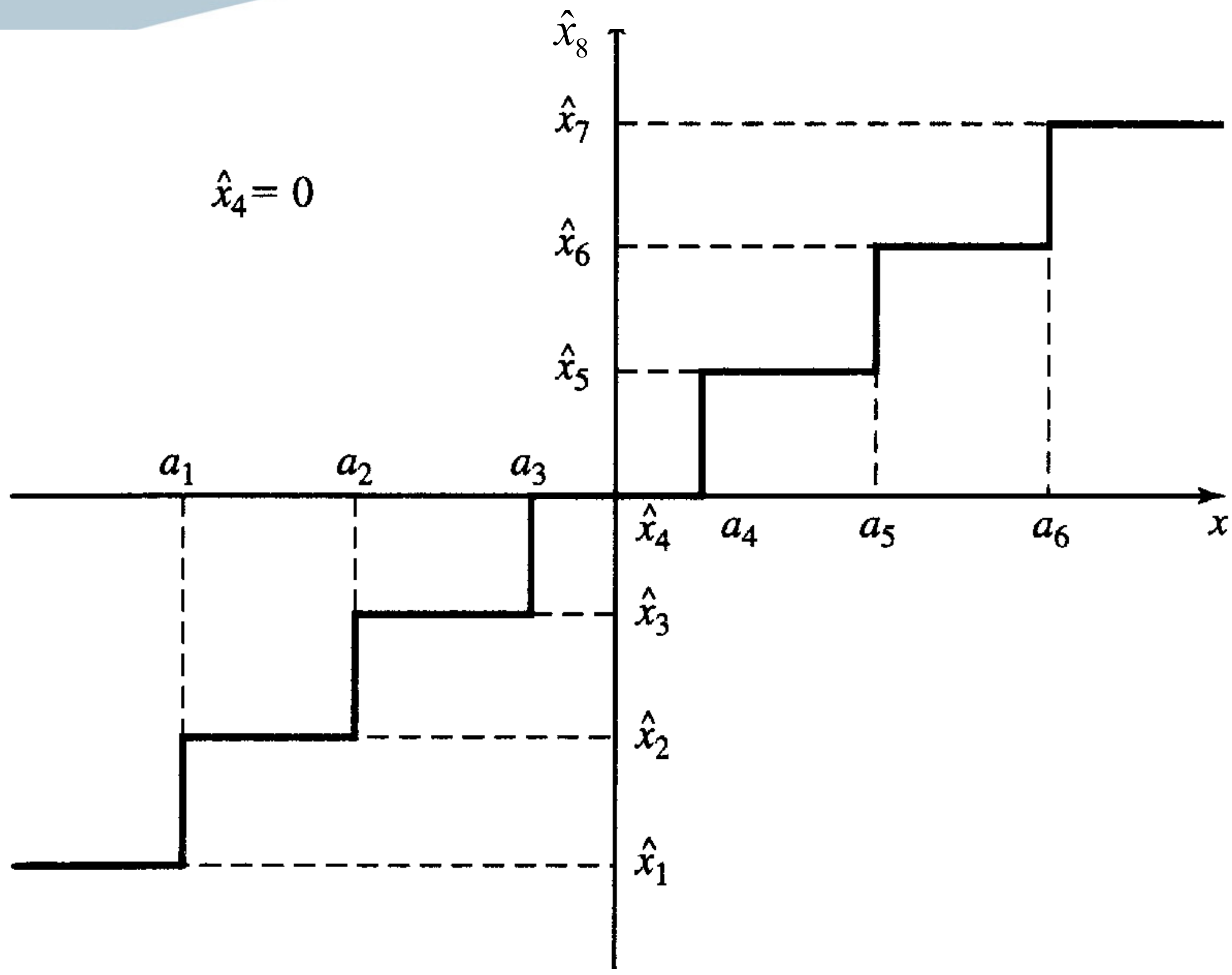
量化误差为： $\Delta=s(kT)-\hat{s}(kT)$

量化信噪比：

$$\boxed{(SNR)_Q=\frac{P_s}{P_{N_Q}}=\frac{E\left[s^2(kT)\right]}{E\left[(s(kT)-\hat{s}(kT))^2\right]}}$$

$$s(kT) \longrightarrow \boxed{\text{量化器}} \longrightarrow \hat{s}(kT)$$





$\hat{x}_8$
$\hat{x}_7$
$\hat{x}_4 = 0$
$\hat{x}_6$
$\hat{x}_5$
a_1
a_2
a_3
$\hat{x}_4$
a_4
a_5
a_6
x
$\hat{x}_3$
$\hat{x}_2$
$\hat{x}_1$

量化特性曲线

一、均匀量化

设输入信号X的取值范围为 $[a,b]$，采用M电平均匀量化，量化间隔为：

$$\Delta v=(b-a)/M$$

当 $m_{i-1}\le X<m_i$ 时，量化器输出：

$$\hat{X}=q_i$$

其中

$$m_i=a+\Delta v\cdot i,\qquad i=1,2,\cdots,M$$

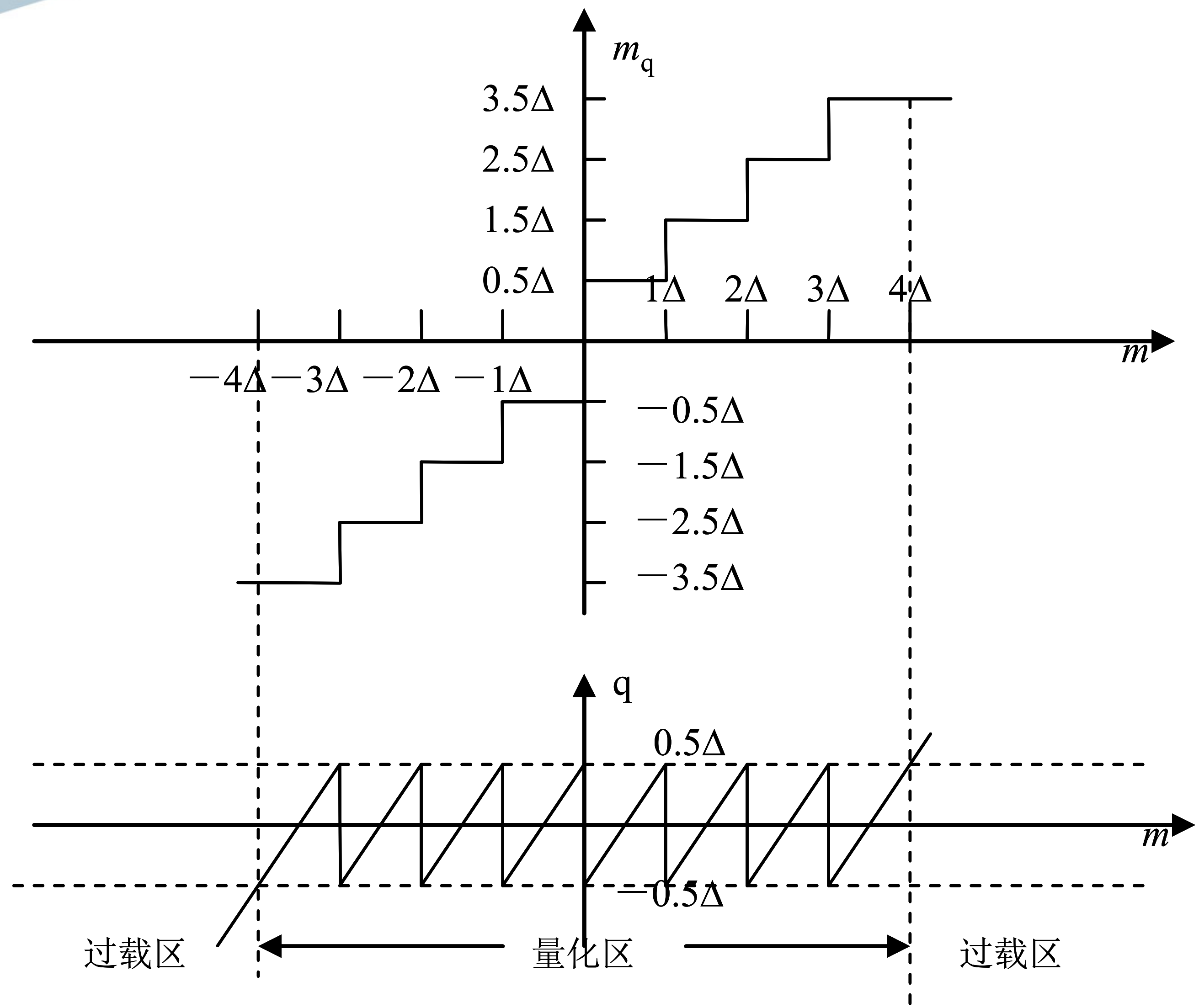
$$m_0=a,\qquad m_M=b$$

量化误差值为：

$$\Delta=X-\hat{X}$$

$$P_{N_Q}=E\left[\left(X-\hat{X}\right)^2\right]=\int_a^b(x-\hat{x})^2\cdot p(x)dx$$

$$=\sum_{i=1}^{M}\int_{m_{i-1}}^{m_i}(x-q_i)^2p(x)dx$$


m_q
3.5Δ
2.5Δ
1.5Δ
0.5Δ
1Δ
2Δ
3Δ
4Δ
m
−4Δ
−3Δ
−2Δ
−1Δ
−0.5Δ
−1.5Δ
−2.5Δ
−3.5Δ
q
0.5Δ
m
−0.5Δ
过载区
量化区
过载区

若 X 是 $[-A, A]$ 上均匀分布的随机变量，即

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2A} & -A \le x \le A \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

量化间隔： $$\Delta v = \frac{2A}{M}$$

量化恢复电平： $$q_i = a + \Delta v \cdot i - \frac{\Delta v}{2}$$ ，即 $$q_i = \frac{1}{2}(m_{i-1} + m_i)$$

量化噪声功率： $$P_{N_Q} = \frac{(\Delta v)^2}{12} = \frac{A^2}{3M^2}$$

输入信号功率： $$P_s = E\left[X^2\right] = \frac{A^2}{3}$$

量化信噪比： $$(SNR)_Q = M^2 = 20\log M \quad \text{(db)}$$

固定的均匀量化器的最大缺点：对小信号量化时信噪比变差。

二、最佳标量量化

对于一个随机变量的量化，称为是**标量量化**。如果我们知道随机变量的概率分布，则对于给定的量化电平数，我们可以构成**量化误差功率最小的最佳量化器**。

设随机变量X的概率分布为 $p_X(x)$，取值范围为 $(-\infty,\infty)$ 。N电平量化把实数轴分为N部分，

$$-\infty < a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_{N-1} < \infty$$

相应的恢复电平为： $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \cdots, \hat{x}_N,$

平均量化误差功率：

$$D = \int_{-\infty}^{a_1} (x-\hat{x}_1)^2 p_X(x)dx + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x-\hat{x}_{i+1})^2 p_X(x)dx$$

$$+\int_{a_{N-1}}^{\infty} (x-\hat{x}_N)^2 P_X(x)dx$$

如何选定这 $2N-1$ 个变量，使 D 最小？

$$\frac{\partial}{\partial a_i}D = P_X(a_i)\left[(a_i-\hat{x}_i)^2-(a_i-\hat{x}_{i+1})^2\right]=0$$

得到 $a_i=\frac{1}{2}(\hat{x}_i+\hat{x}_{i+1})$

量化的边界点等于相邻二个量化恢复值的平均数。

确定 $\{\hat{x}_i\}$ 值，

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i}D=\int_{a_{i-1}}^{a_i}2(x-\hat{x}_i)p_X(x)dx=0$$

$$\hat{x}_i=\frac{\int_{a_{i-1}}^{a_i}x\cdot p_X(x)dx}{\int_{a_{i-1}}^{a_i}p_X(x)dx}=\frac{\int_{a_{i-1}}^{a_i}xp_X(x)dx}{P\{a_{i-1}<X\le a_i\}}$$

$$=\int_{a_{i-1}}^{a_i}x\cdot\frac{P_X(x)}{P\{a_{i-1}<X\le a_i\}}dx=E\left[X\,|a_{i-1}<X\le a_i\right]$$

最佳量化器的恢复值是条件均值，相当于分布质量线条的质心。

最佳标量量化器的二个必要条件，它们被称 **Lloyd-Max条件**：

① 量化区间的边界是相应二个量化恢复值的中点；

② 量化恢复值等于量化区间的质心位置；

最佳值不能用闭合公式表示，通常通过迭代方法逐次逼近。

[例5.2.1] 设高斯随机变量 $X \sim N(0,400)$ ，即

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{800\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{800}\right\} \qquad -\infty < x < \infty$$

若采用 $N=8$ 电平均匀量化，则边界点和恢复点为：

$$a_1 = -60, a_2 = -40, a_3 = -20, a_4 = 0, a_5 = 20, a_6 = 40, a_7 = 60$$

$$\hat{x}_1 = -70, \hat{x}_2 = -50, \hat{x}_3 = -30, \hat{x}_4 = -10, \hat{x}_5 = 10, \hat{x}_6 = 30, \hat{x}_7 = 50, \hat{x}_8 = 70$$

$$D = 33.38$$

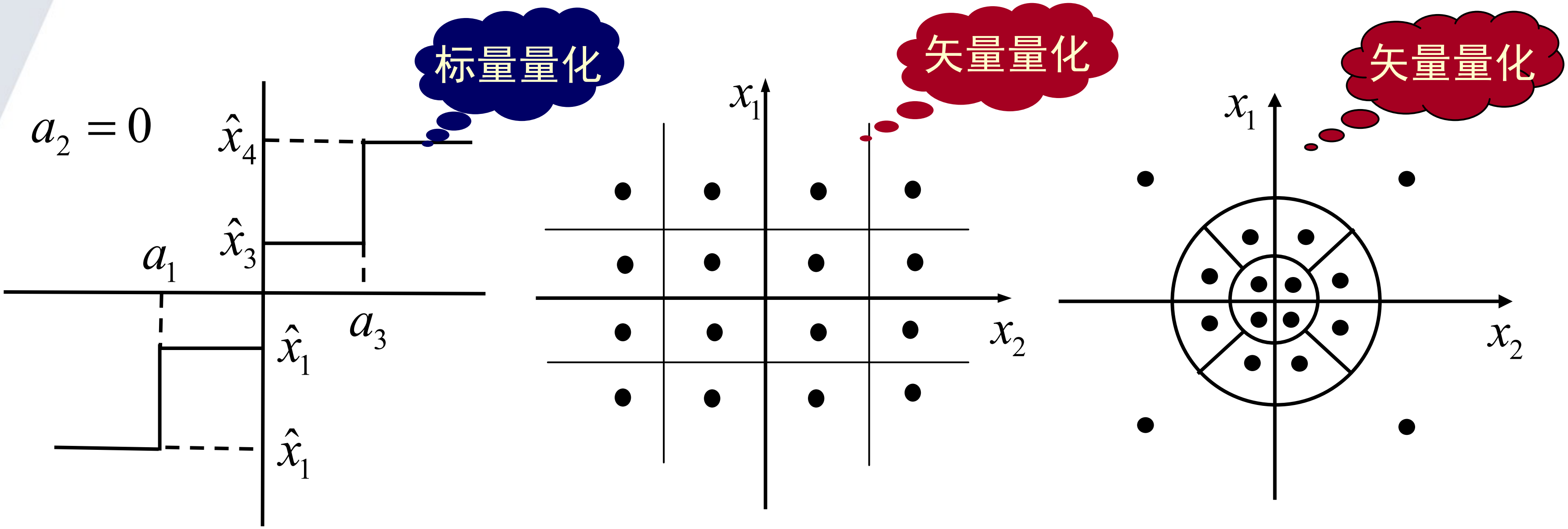
若采用 $N=8$ 电平的**最佳量化器**，则边界点和恢复点为：

$$a_1=-a_7=-34.96, a_2=-a_6=-21, a_3=-a_5=-10.012, a_4=0$$

$$\hat{x}_1=-\hat{x}_8=-43.04, \hat{x}_2=-\hat{x}_7=-26.88, \hat{x}_3=-\hat{x}_6=-15.12, \hat{x}_4=-\hat{x}_5=-4.902$$

$$D=13.816$$

三、矢量量化



每个样本值2比特量化

$$x_n \Rightarrow \hat{x}_n$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, \cdots$$

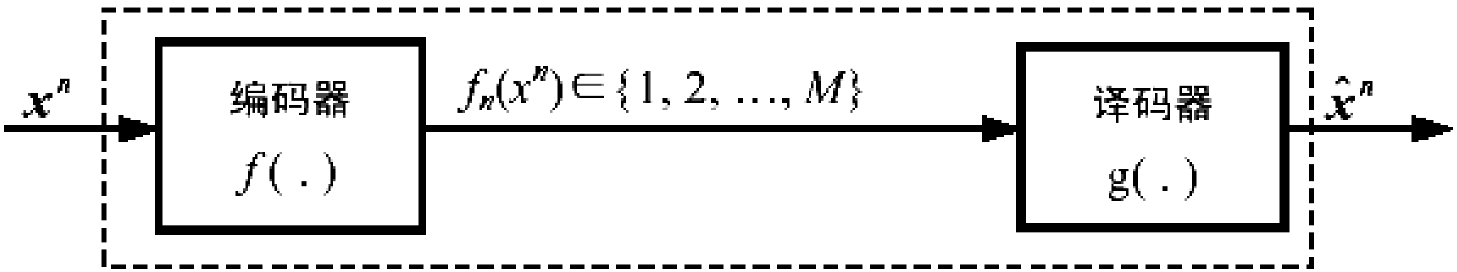
两个样本值4比特量化

$$(x_n, x_{n+1}) \Rightarrow (\hat{x}_n, \hat{x}_{n+1})$$

$$x_1, x_2, \vdots x_3, x_4, \vdots x_5, x_6, \vdots x_7, x_8, \vdots \cdots$$

每次把n个信源样本值作为一组输入到量化器，进行n 维矢量量化。

把n维空间 R^n 分划为M个区域$\{R_i, 1 \le i \le M\}$，在每个区域中选一个再生恢复点$\hat{\boldsymbol{x}}_i^n \in R_i, 1 \le i \le M$ 。这M个再生恢复点组成一部码书，$C = \{\hat{\boldsymbol{x}}_i^n, i = 1, 2, \cdots, M\}$ 。每组长度为n 的信源输出样本用矢量表示 $\boldsymbol{x}^n = (x_1, x_2, \cdots, x_M)$，如果样本矢量 $\boldsymbol{x}^n \in R_i$，则这个样本矢量就量化成 $\hat{\boldsymbol{x}}_i^n$



$$f\left(x^n\right) = i, \quad if \;\; x^n \in R_i$$

$$g(i) = \hat{\boldsymbol{x}}_i^n, i = 1, 2, \cdots, M$$

$$R = \frac{\log_2 M}{n} \text{ 比特/样本}$$

$$D = \frac{1}{n}\int_{R^n} (\boldsymbol{x}^n - \hat{\boldsymbol{x}}^n)^2 p(\boldsymbol{x}^n) d\boldsymbol{x}^n$$

四、非均匀量化

① 均匀量化的缺点在于对于小信号量化性能的变差；

② 最佳量化必须知道被量化量的概率分布，没有闭合的公式解；

语音信号：

① 语音信号没有合适的概率分布近似；

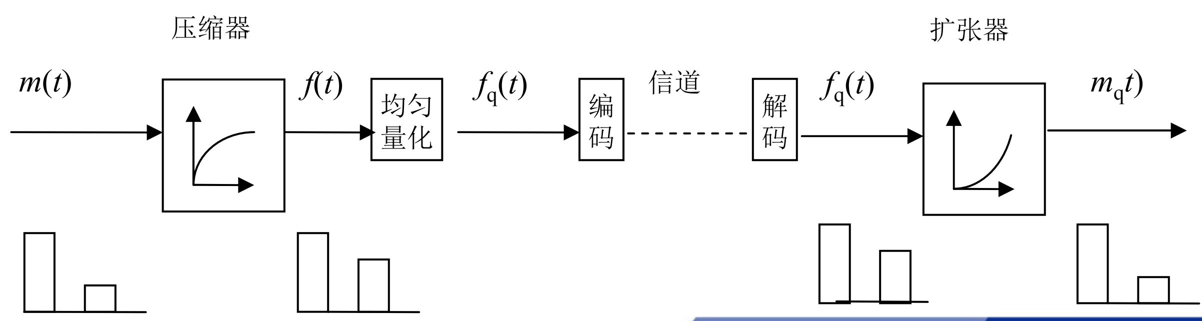
② 语音信号中小信号的概率比较大；

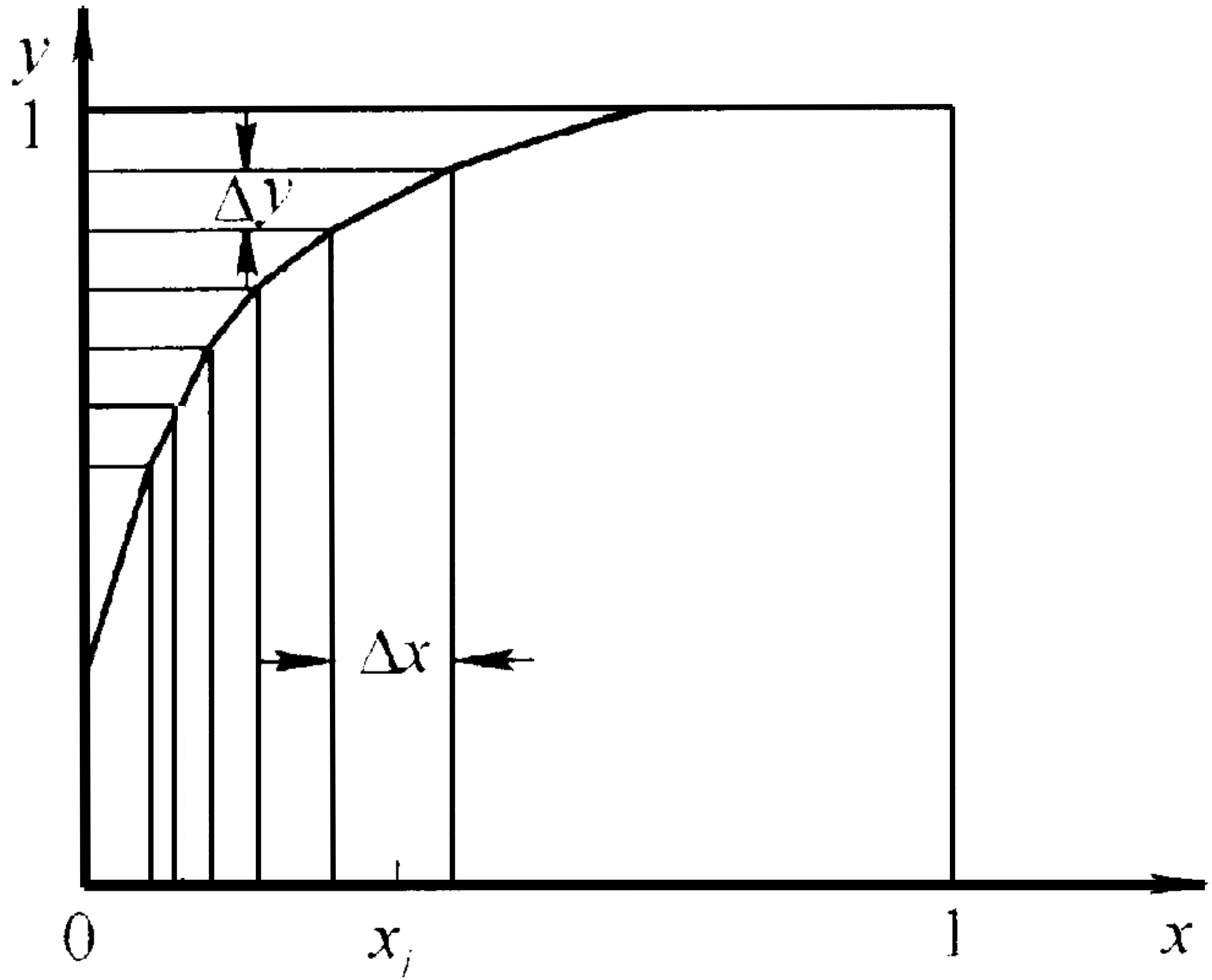
非均匀量化：对小信号量化间隔变细，对于大信号量化间隔放大。

非均匀量化：先对输入信号 X 进行非线性变换（称为非线性压缩），

$$y = f(x), \qquad x = f^{-1}(y)$$

然后对Y实行均匀量化




y
1
Δy
Δx
0
x_i
1
x

理想压缩特性：

当量化区间分得细时，可把每量化区间中的压缩特性曲线近似为直线，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' \qquad \Delta x = \left(\frac{dx}{dy}\right) \cdot \Delta y$$

压缩器的输入、输出限制在0-1之间。对于Y轴是均匀量化，当0-1区间被均匀分成N部分时，则$\Delta y = 1/N$，所以

$$\Delta x = \left(\frac{dx}{dy}\right)\Delta y = \frac{1}{N}\frac{dx}{dy}$$

要求 $\Delta x \propto x$

则， $$\frac{dx}{dy} = kx \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = ky + c$$

$x = 0 \not\Rightarrow y = 0$

由边界条件 $x = 1$，$y = 1$，所以理想压缩特性

$$\boxed{y = 1 + \frac{1}{k}\ln x}$$

理想压缩特性

$$y = 1 + \frac{1}{k}\ln x$$

理想压缩特性不满足 $x = 0 \Rightarrow y = 0$ 要求对理想特性作修正。

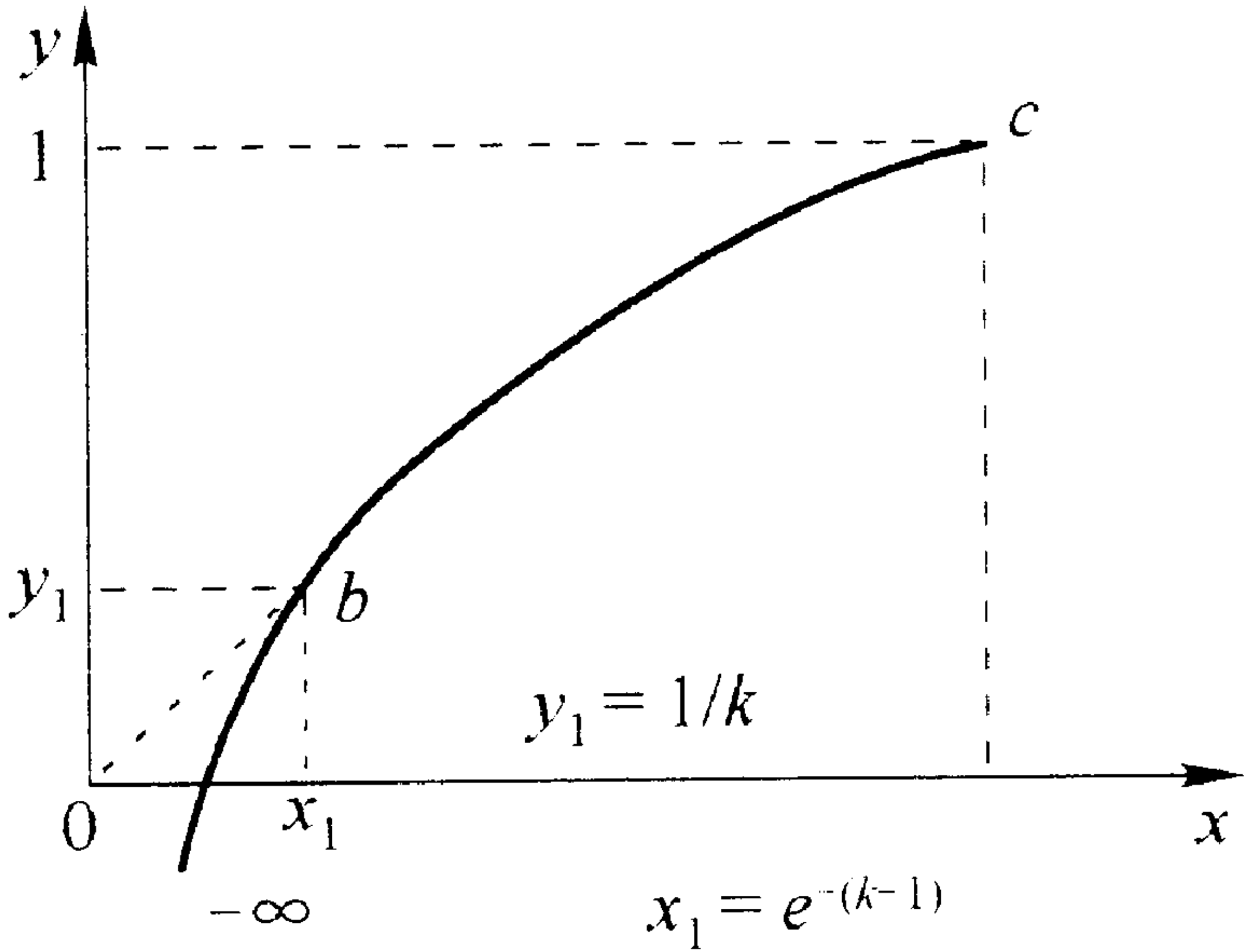
① A律压缩

$$y = \begin{cases} \dfrac{Ax}{1+\ln A} & 0 < x \le \dfrac{1}{A} \\ \dfrac{1+\ln(Ax)}{1+\ln A} & \dfrac{1}{A} \le x \le 1 \end{cases}$$

其中 x 为归一化输入信号，y 为归一化输出信号，A为压缩常数

$$x = \frac{\text{压缩器输入电平}}{\text{压缩器输入的最大电平}}$$

$$y = \frac{\text{压缩器输出电平}}{\text{压缩器输出最大电平}}$$



从原点 *o* 到曲线作切线 *ob*，用这直线段 *ob* 代替原来相应的曲线段。

切点在 (x_1, y_1)，在该点理想压缩曲线 $y=1+\frac{1}{k}\ln x$ 的斜率为，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}=\frac{1}{kx_1}$$

直线 ob 的方程为： $y=\frac{x}{kx_1}$

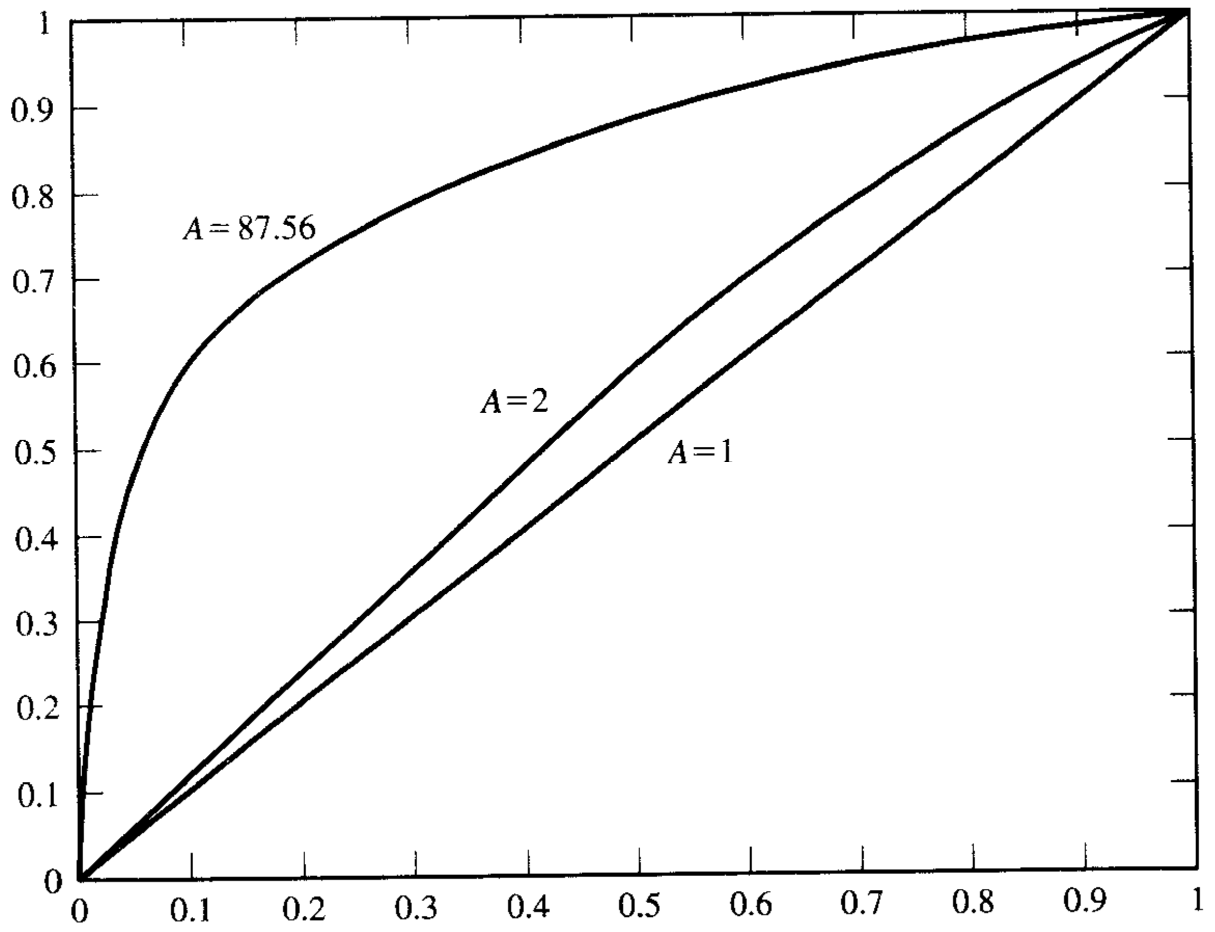
在切点处的纵座标 y_1 满足， $y_1=1+\frac{1}{k}\ln x_1=\frac{1}{k}$

所以， $x_1=e^{1-k}\triangleq\frac{1}{A}\Longrightarrow k=1+\ln A$

于是修正后的压缩特性为：

$$\boxed{y=\begin{cases}\dfrac{Ax}{1+\ln A} & 0<x\le\dfrac{1}{A}\\[2ex] \dfrac{1+\ln(Ax)}{1+\ln A} & \dfrac{1}{A}\le x\le 1\end{cases}}$$

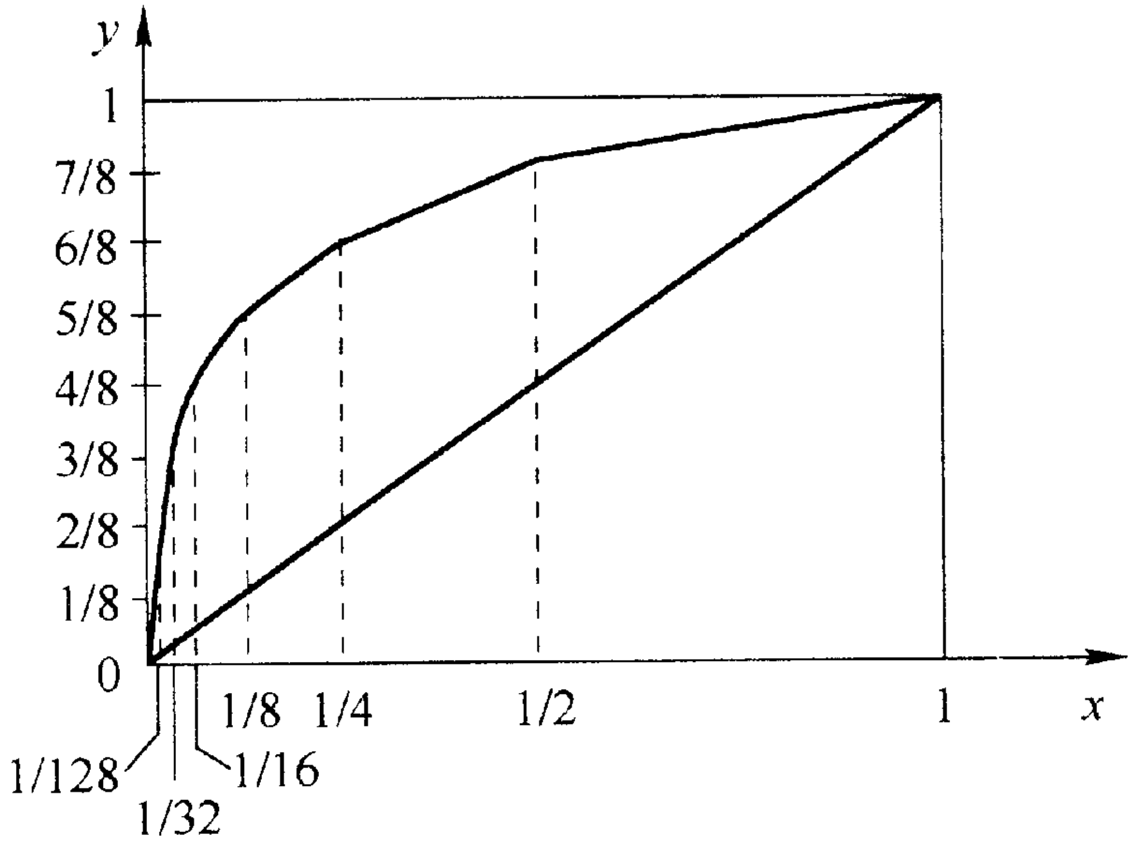
A是调节压缩特性的参数，实际中选 $A = 87.56$



② 13折线近似——A律压缩的近似实现

为了用电路来实现A律压缩，只能用折线来近似。13折线近似是一种比较巧妙、理想的近似。轴在（0,1）区间中不均匀地分为8段，

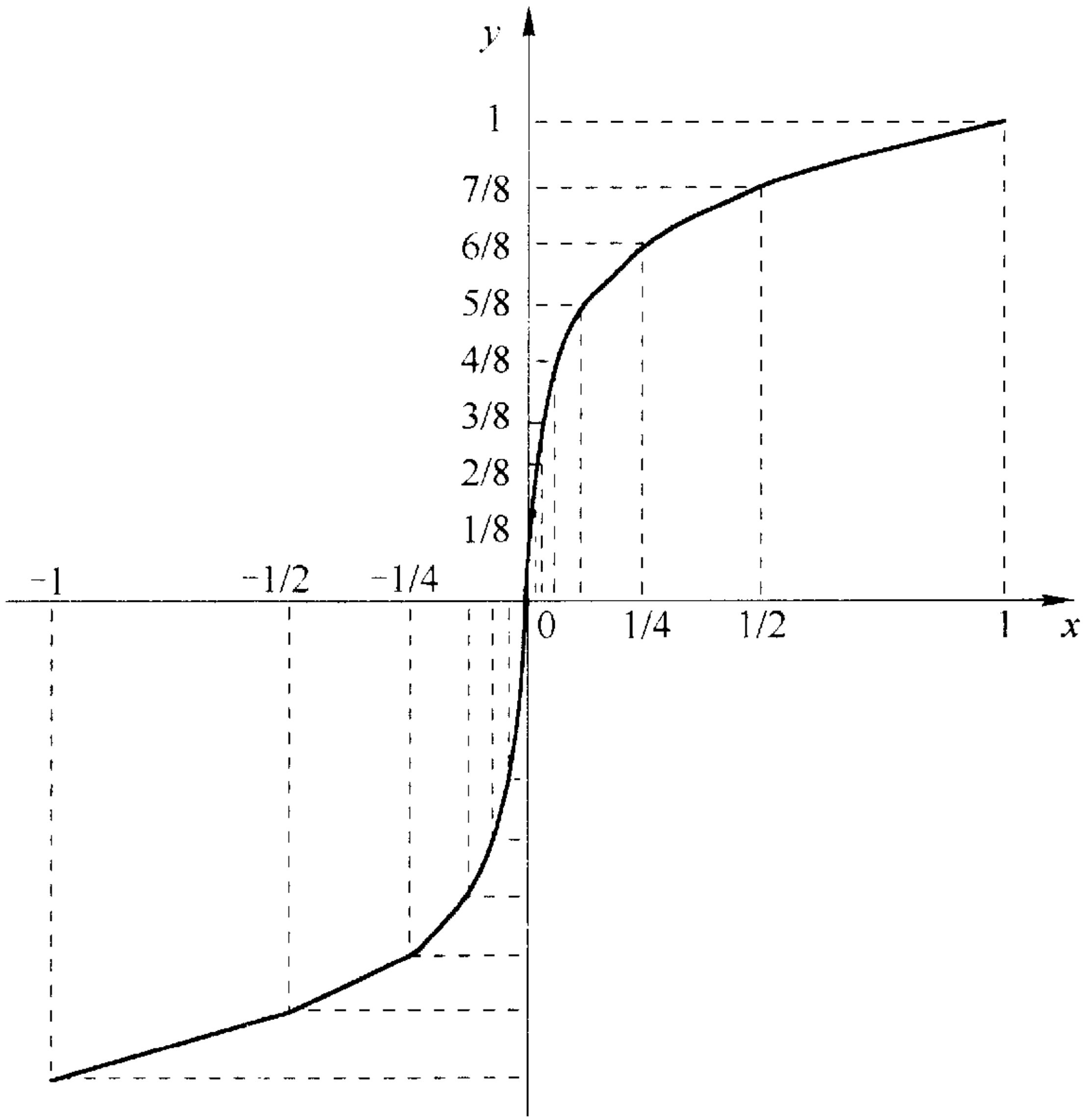
用8段折



y 值	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1
按A律算出的x值	0	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{60.6}$	$\frac{1}{30.6}$	$\frac{1}{15.4}$	$\frac{1}{7.79}$	$\frac{1}{3.93}$	$\frac{1}{1.98}$	1
按折线近似的x值	0	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

折线段号	1	2	3	4	5	6	7	8
折线斜率	16	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

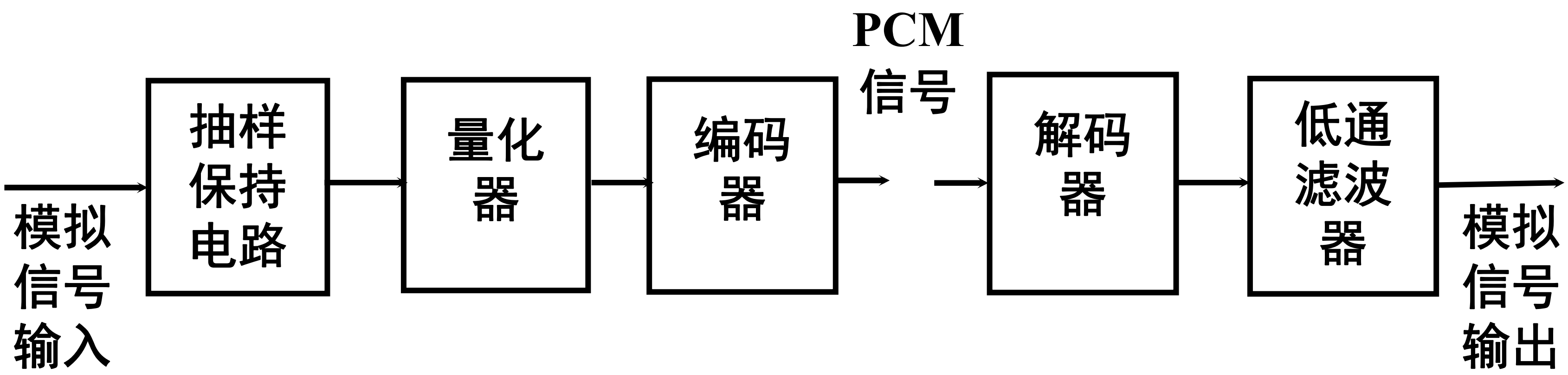
第一段和第二段折线斜率相同，是一条直线，另外考虑到在区间上A律压缩曲线是奇对称的，所以折线近似也应该是奇对称的。在第一象限中第一段和第二段折线与第三象限中第一段，第二段折线的斜率都等于16，所以这四段折线事实上是一条直线，因此总共只要用13条折线可以近似区间上的A律压缩特性。


y
1
7/8
6/8
5/8
4/8
3/8
2/8
1/8
−1
−1/2
−1/4
0
1/4
1/2
1
x

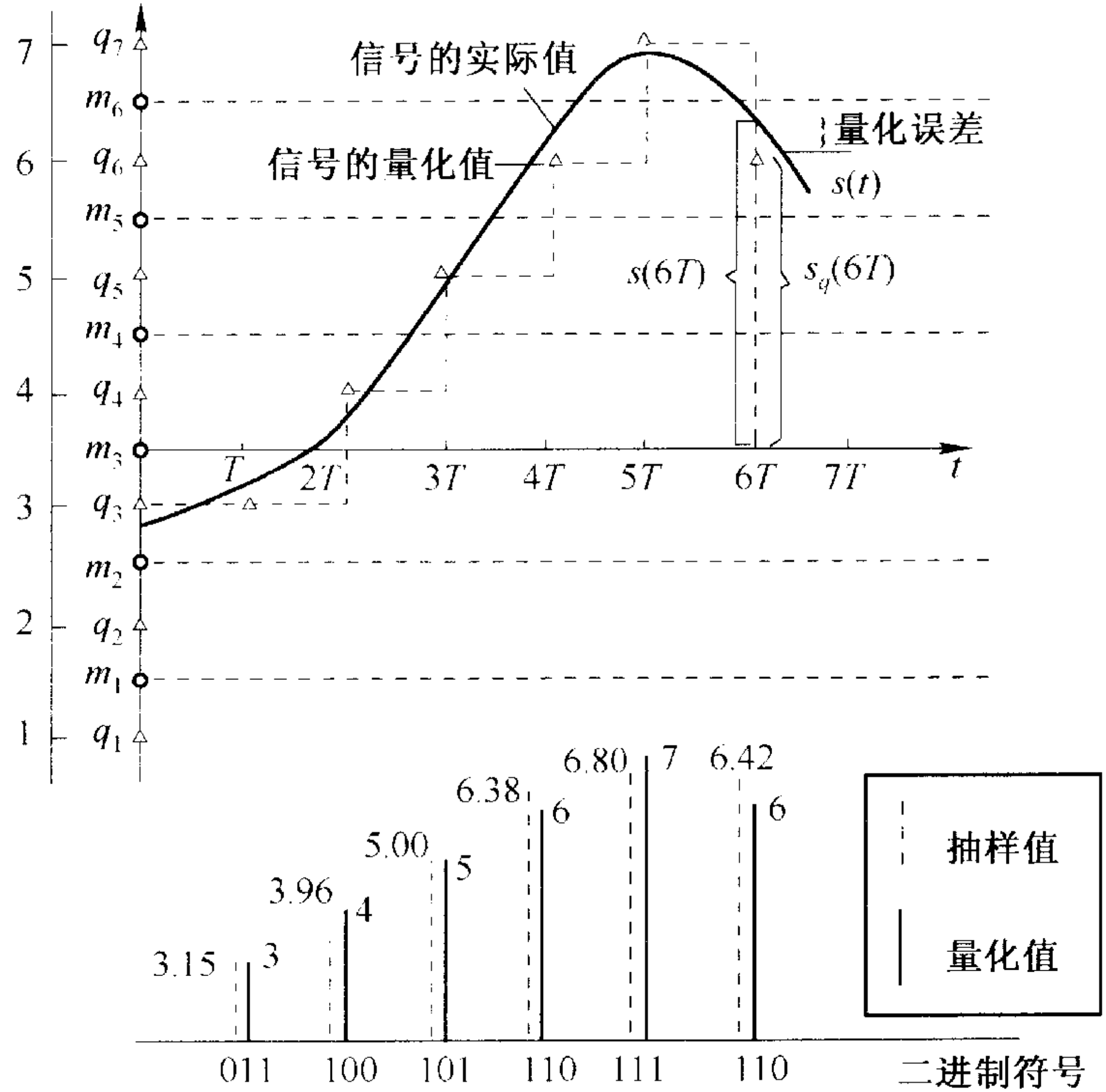
§ 5.3 脉冲编码调制（PCM）

一、PCM的基本原理

量化后的信号已经是时间离散、数值离散的数字信号，接下来就要对这些数字信号进行编码。常用二进制符号表示它。通常把模拟信号抽样、量化，直到变成二进制符号的过程称为脉冲编号调制PCM。



PCM的编码和译码原理框图


信号的实际值
信号的量化值
量化误差
s(t)
s(6T)
s_q(6T)
T 2T 3T 4T 5T 6T 7T t
q7 m6 q6 m5 q5 m4 q4 m3 q3 m2 q2 m1 q1
1 2 3 4 5 6 7
3.15 3
3.96 4
5.00 5
6.38 6
6.80 7
6.42 6
011 100 101 110 111 110
二进制符号
抽样值
量化值

二、自然二进制码与折迭二进制码

量化值序号	量化电压极性	自然二进制码	折迭二进制码
15	正极性	1111	1111
14		1110	1110
13		1101	1101
12		1100	1100
11		1011	1011
10		1010	1010
9		1001	1001
8		1000	1000
7	负极性	0111	0000
6		0110	0001
5		0101	0010
4		0100	0011
3		0011	0100
2		0010	0101
1		0001	0110
0		0000	0111

折迭码的一个优点是对于小电平信号（绝对值小），若发生一个“比特”错误所产生的误差比自然码小。

A律量化的PCM用8个比特表示一个样本值。编码采用折迭码，也就是由一个比特表示极性，正负极性编码对称。

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$$

C_1：表示极性，“1”表示正极性，“0”表示负极性；

$C_2C_3C_4$：段落码，表示样本落到（0, 1）中8个量化区域中哪一个

$C_5C_6C_7C_8$：段内码；每一段等间隔分为16个量化间隔；

段落序号	段落码$C_2C_3C_4$
8	111
7	110
6	101
5	100
4	011
3	010
2	001
1	000

量化序号	段内码$C_5C_6C_7C_8$
15	1111
14	1110
13	1101
12	1100
11	1011
10	1010
9	1001
8	1000
7	0111
6	0110
5	0101
4	0100
3	0011
2	0010
1	0001
0	0000

第一段落中的量化间隔最小，为

$$\Delta = \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2048}$$

如果用 $\Delta = 1/2048$ 作为度量单位，则各段的起始电平为

段落序号	1	2	3	4	5	6	7	8
起始电平	0	16Δ	32Δ	64Δ	128Δ	256Δ	512Δ	1024Δ
段内量化区间长度	Δ	Δ	2Δ	4Δ	8Δ	16Δ	32Δ	64Δ

[例5.3.1] 设输入抽样值为$U=+1270\Delta$，用13折线A律特性编成8位码。这8位码分别用$C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8$表示：

① 确定极性码 C_1：因输入信号 U 是正极性的，所以$C_1=1$；

② 确定段落码 $C_2C_3C_4$：输入样本 U 落到第8段，所以段落码为：

$C_2C_3C_4$=111

③ 段内码 $C_5C_6C_7C_8$：在第8段内，量化间隔为64Δ，由于

$$(1024+3\times64)\Delta < U < (1024+4\times64)\Delta$$

U 处于第8段落中序号为3的量化间隔中，所以段内码为

$C_5C_6C_7C_8$=0011，

整个码字为：$\boxed{C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8=11110011}$

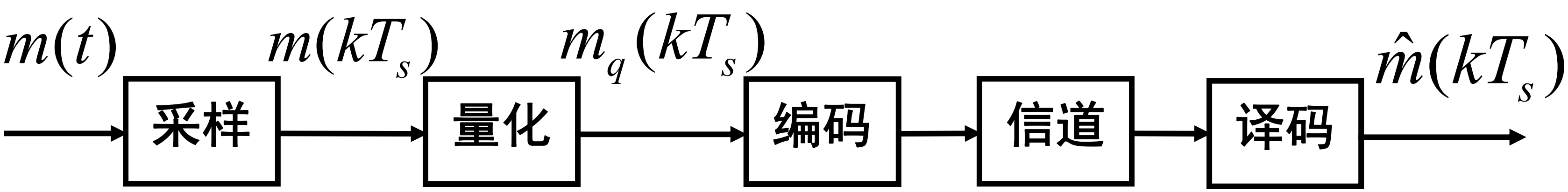
相应恢复电平为量化区间的中间值，即 $(1024+3.5\times64)\Delta=1248\Delta$

量化误差为：$|1248\Delta-1270\Delta|=22\Delta$

三、PCM系统的噪声性能

假定信号样本值是取值在 $(-A, A)$ 中的均匀分布随机变量，并采用

M电平均匀量化器。PCM信号传输过程如图



PCM接收端译码器输出可表示为：

$$\hat{m}(kT_s) = m(kT_s) + n_q(kT_s) + n_c(kT_s)$$

其中 $m(kT_s)$ 采样值，是信号分量，$n_q(kT_s)$ 是由量化误差引起的

噪声， $n_c(kT_s)$ 是由信道误码引起的噪声，所以输出信噪比为，

$$\frac{P_s}{P_N} = \frac{E\left[m^2(kT_s)\right]}{E\left[n_q^2(kT_s)\right] + E\left[n_c^2(kT_s)\right]}$$

（1）先不考虑信道误码引起的噪声：

M 电平均匀量化所引起的量化噪声功率为，

$$E\left[n_q^2(kT_s)\right]=\frac{(\Delta v)^2}{12}, \qquad \Delta v=\frac{2A}{M}$$

信号样本功率：$$E\left[m^2(kT_s)\right]=\frac{(M\Delta v)^2}{12}$$

输出信噪比：$$\frac{P_s}{P_N}=M^2$$

若采用N比特量化：$M=2^N$，

输出信噪比：$$\frac{P_s}{P_N}=2^{2N}$$

（2）考虑信道误码引起的噪声：

假设信道的误比特率为 P_b ，则一个样本的N个比特构成的码字错误概率$P_e \le NP_b$。通常 P_b 很小，所以在一个码字的N个比特中错2个或2个以上比特的概率非常小，可以近似认为每个码字如果出错，则错误也只有一个比特构成。

若样本N个比特采用自然编码，不同位的权值是不一样的。这N位的权值分别为 $2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^{N-1}$，如果一个码字出了错，则均方误差值为：

$$E\left[\Delta^2\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(2^{i-1}\cdot\Delta v)^2$$

$$= \frac{2^{2N}-1}{3N}\cdot(\Delta v)^2$$

$$\approx \frac{2^{2N}}{3N}\cdot(\Delta v)^2$$

码字错误概率为 $P_e \approx NP_b$，平均每隔 $T_a = T_s / P_e = T_s / NP_b$ 时间发生一个样本码字错误。信道误码引起的噪声功率为：

$$E\left[n_c^2(kT)\right] = E\left[\Delta^2\right] \cdot P_e = \frac{2^{2N}}{3N} \cdot (\Delta v)^2 \cdot NP_b$$

$$= \frac{2^{2N}}{3} \cdot (\Delta v)^2 \cdot P_b$$

考虑到信道误码后，**PCM**的输出信噪比为

$$\frac{P_s}{P_N} = \frac{E\left[m^2(kT_s)\right]}{E\left[n_q^2(kT_s)\right] + E\left[n_c^2(kT_s)\right]} = \frac{2^{2N}}{1 + 4P_e \cdot 2^{2N}}$$

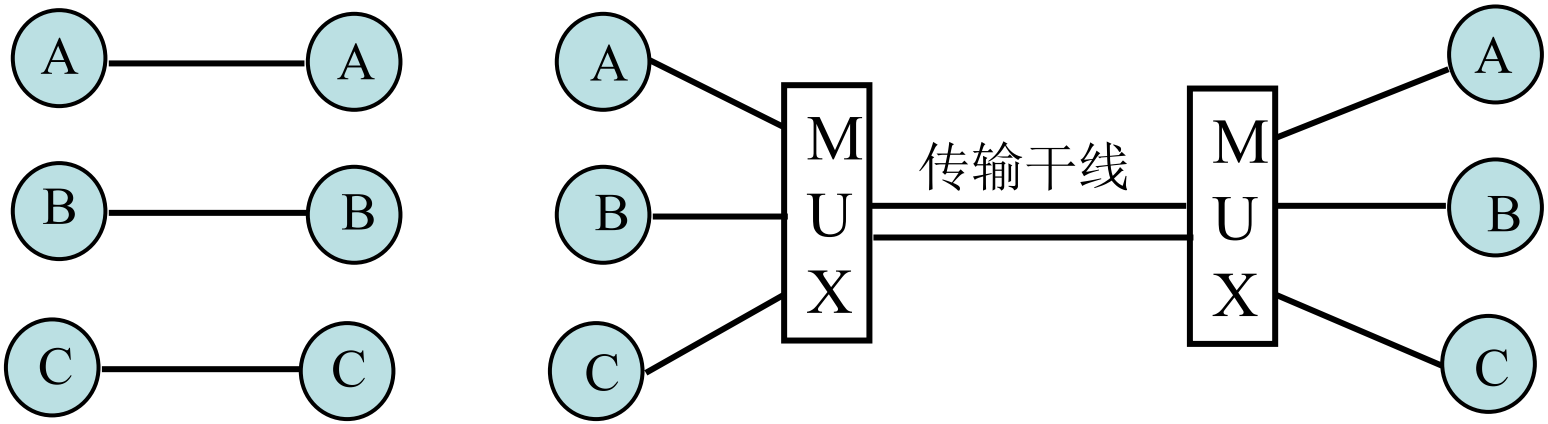
在大信噪比时，信道误码较小 $4P_e \cdot 2^{2N} \ll 1$

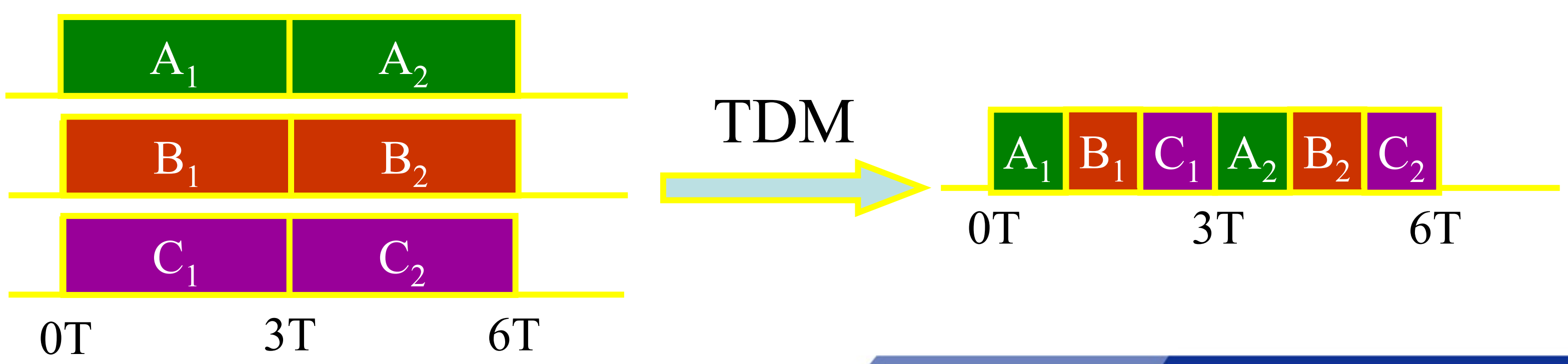
$$\frac{P_s}{P_N} = 2^{2N}$$

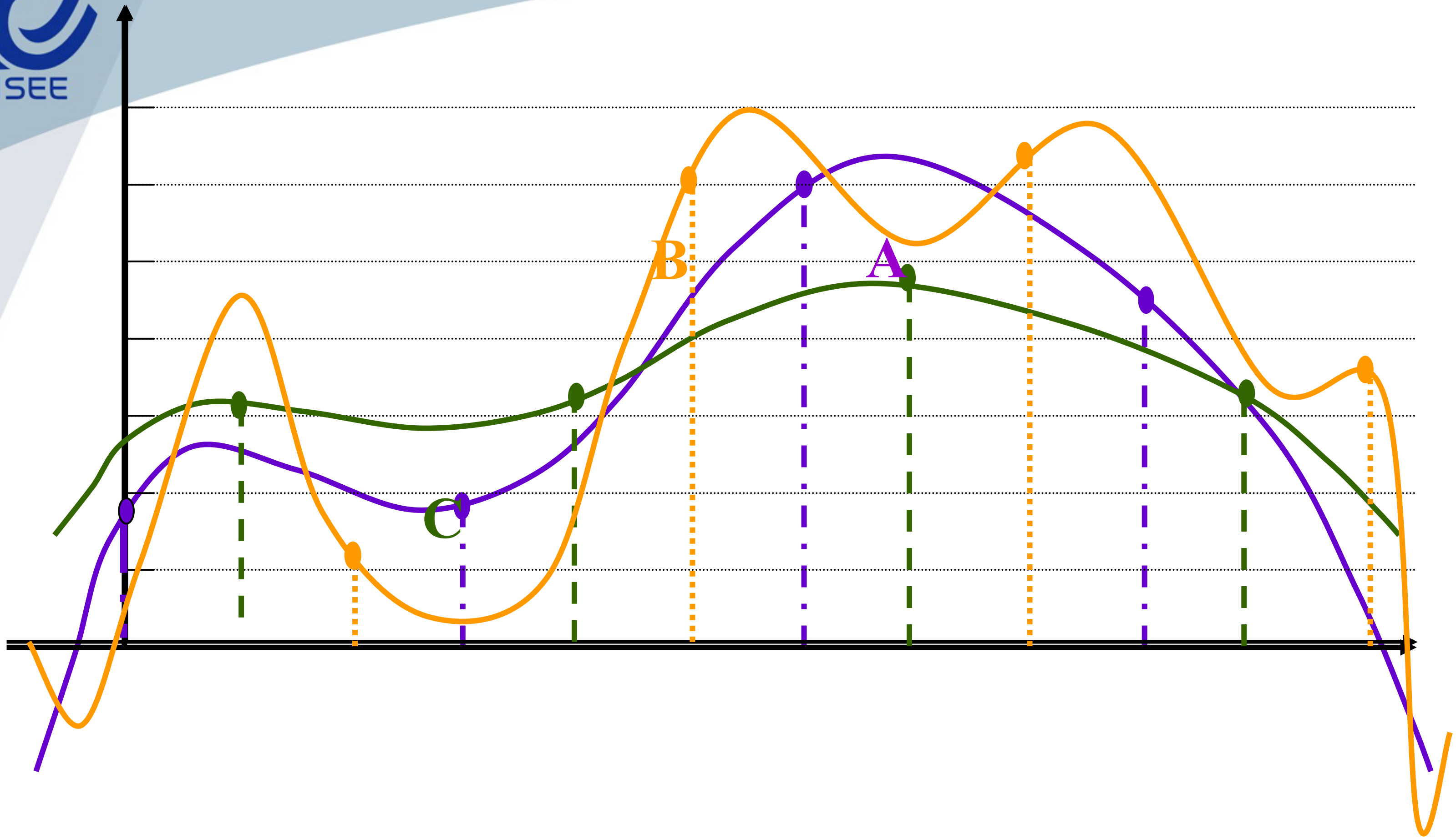
信道误码较大时， $4P_e \cdot 2^{2N} \gg 1$

$$\frac{P_s}{P_N} = \frac{1}{4P_e}$$

四、PCM的时分复用


A
B
C
A
B
C
A
B
C
MUX
传输干线
MUX
A
B
C

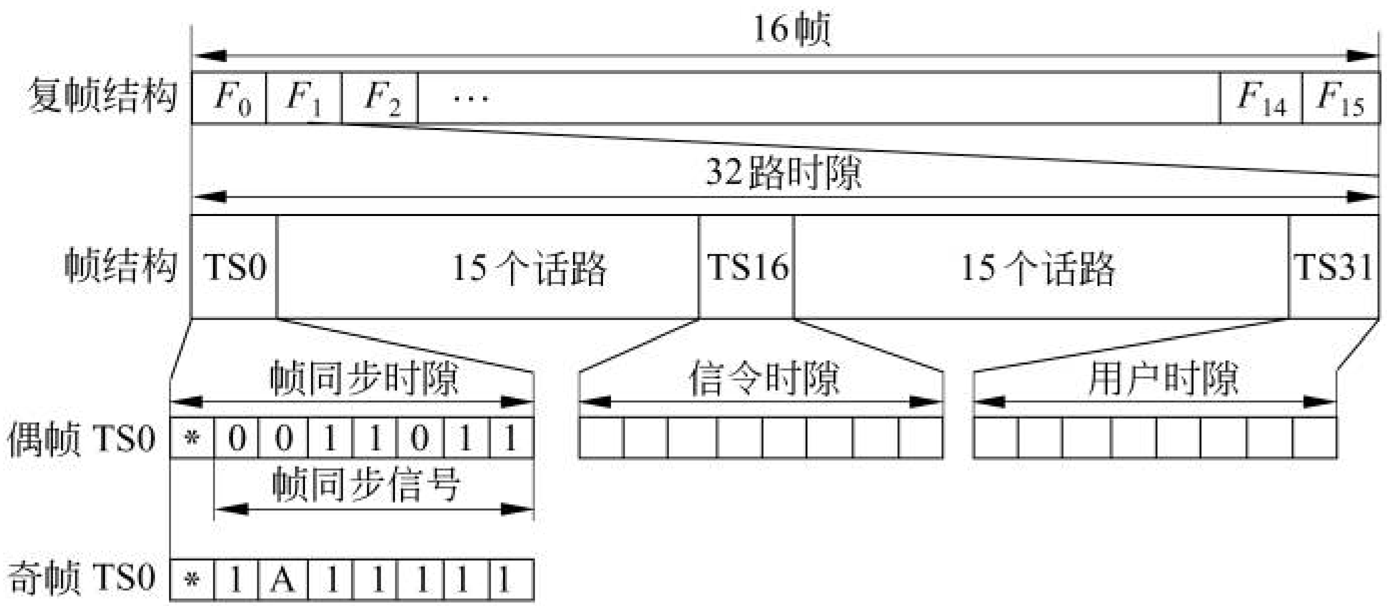

A1
A2
B1
B2
C1
C2
0T
3T
6T
TDM
A1 B1 C1 A2 B2 C2
0T
3T
6T



普通话音的PCM，采样频率8k，每个样本用8bit，码率为64k b/s;

若3路复用，则码率为192k b/s ;

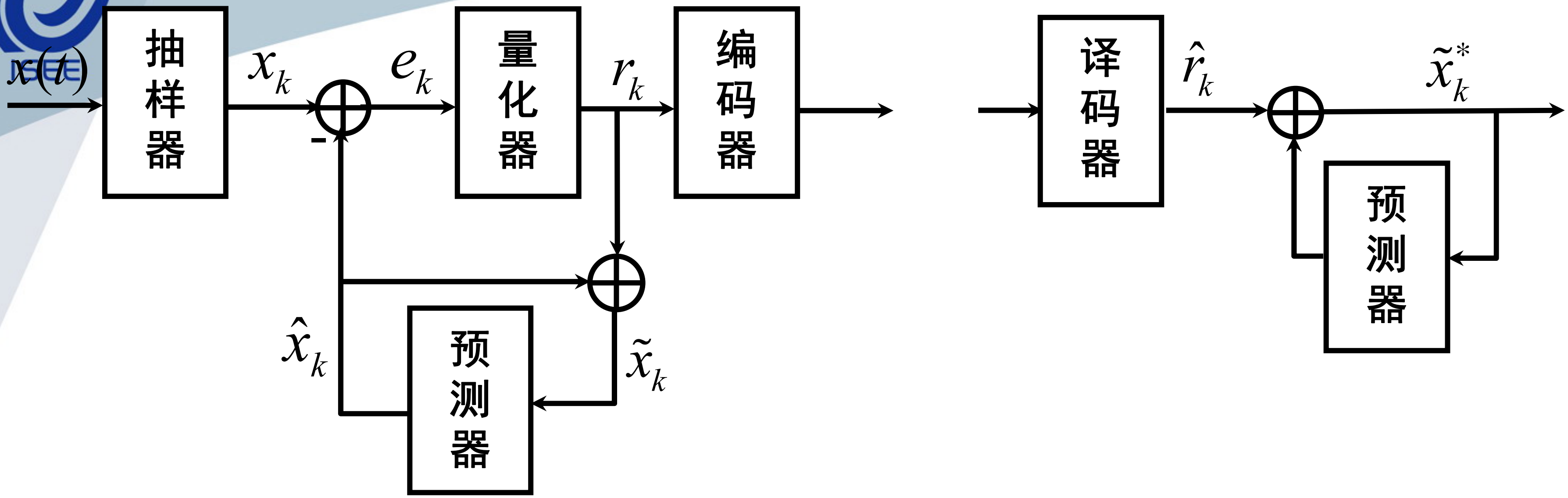
PCM30/32路基群系统帧结构



§ 5.4 差分脉冲编码调制（DPCM）和增量调制（ΔM）

一、差分脉冲编码调制（DPCM）原理

利用信源记忆性，用前面的样本预测后面的样本，可以改善PCM的性能。使在相同量化电平数目下，量化误差减少；或者在相同量化误差下使量化电平数M减少，从而降低码率。DPCM技术正是利用以前的样本值来预测当前样本值，然后对样本值与预测值的差值进行量化，这样可以减少量化电平数 。



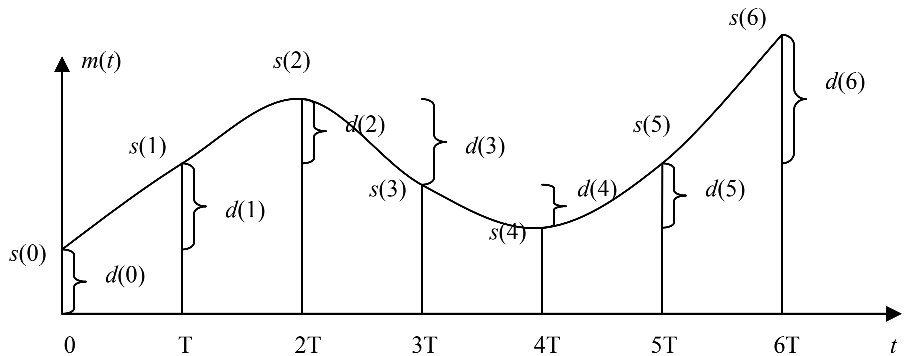
如果调制和解调上的预测器相同，而且信道传输没有误码，则

$$\hat{r}_k = r_k, \qquad \tilde{x}_k^* = \tilde{x}_k$$

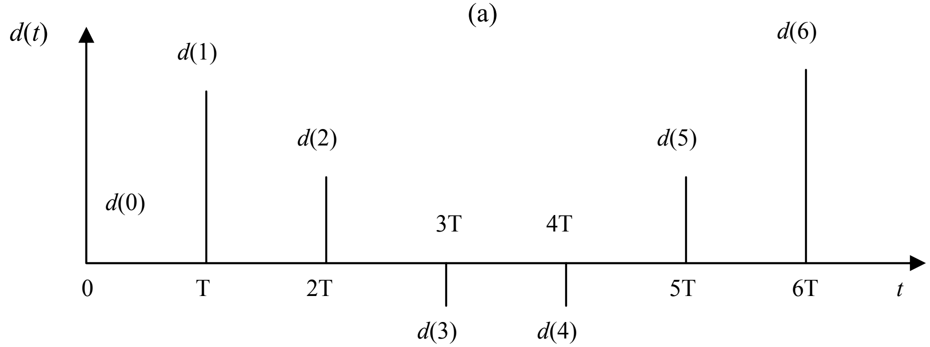
当采用 p 级线性预测器时：
$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^{p} a_i \tilde{x}_{k-i}$$

DPCM误差为

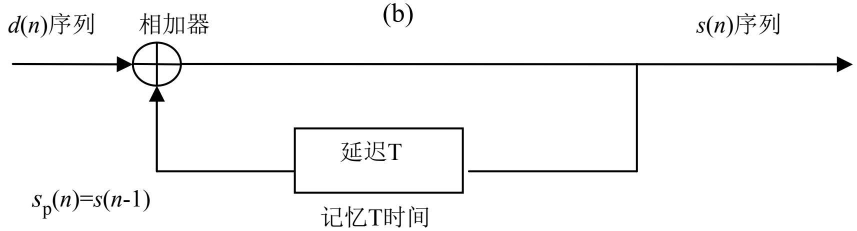
$$\begin{aligned} q(k) &= x_k - \tilde{x}_k^* = x_k - \tilde{x}_k \\ &= (\hat{x}_k + e_k) - (r_k + \hat{x}_k) \\ &= (e_k - r_k) \end{aligned}$$


m(t)
s(0)
s(1)
s(2)
s(3)
s(4)
s(5)
s(6)
d(0)
d(1)
d(2)
d(3)
d(4)
d(5)
d(6)
0
T
2T
3T
4T
5T
6T
t

(a)


d(t)
d(0)
d(1)
d(2)
d(3)
d(4)
d(5)
d(6)
0
T
2T
3T
4T
5T
6T
t

(b)


d(n)序列
相加器
s(n)序列
延迟T
记忆T时间
sp(n)=s(n-1)

(c)

DPCM是一种有记忆的量化器。最佳线性预测器的预测系数 $\{a_i\}$ 可以通过使均方预测误差最小求得。

$$D = E\left[X_n - \sum_{i=1}^{p} a_i X_{n-i}\right]^2$$

$$= R_X(0) - 2\sum_{i=1}^{p} a_i R_X(i) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_i a_j R_X(i-j)$$

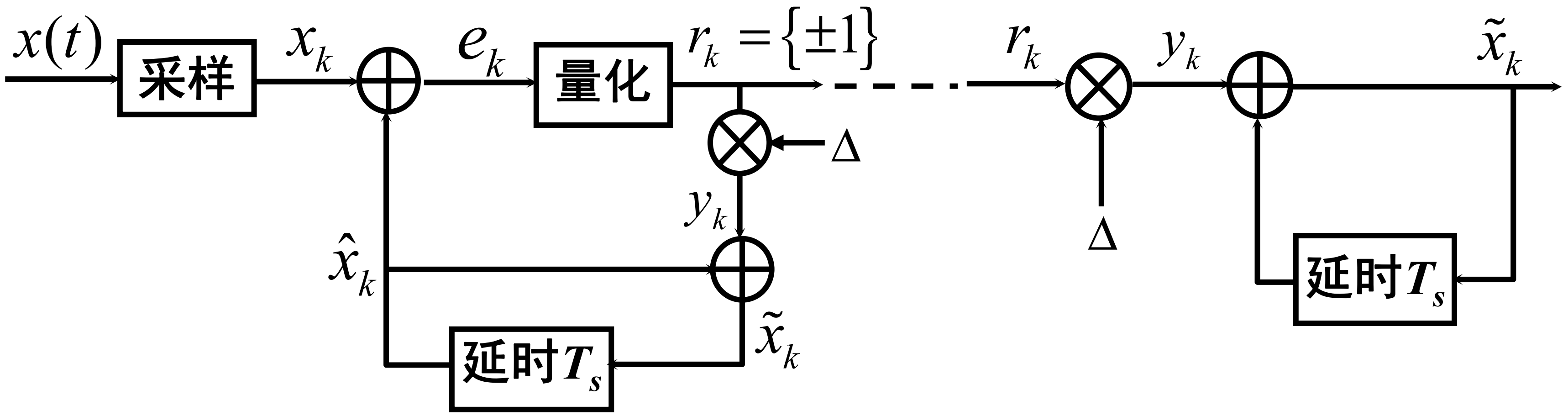
为了求 ***D*** 的极小值，可通过令偏导数等于零，

$$\frac{\partial D}{\partial a_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, p$$

$$\sum_{i=1}^{p} a_i R_X(i-j) = R_X(j) \qquad 1 \le j \le p$$

二、增量调制（ΔM）

增量调制（ΔM）是一种最简单的DPCM，其中量化器的量化电平数取为2，预测器是一个延时一个抽样间隔的延时器。

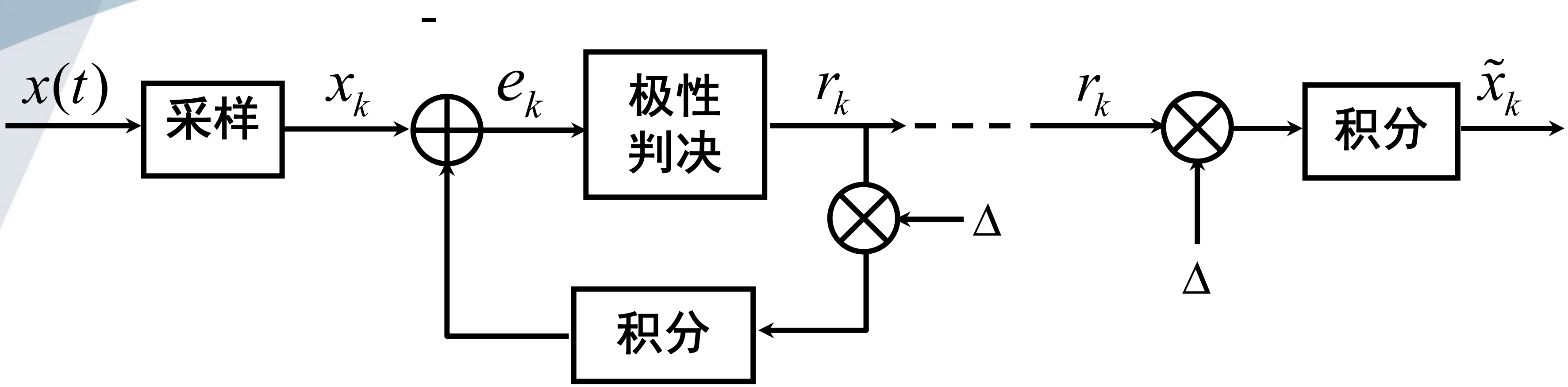


信道传输无误码时，ΔM的解调输出为 $\tilde{x}_k$ 。

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_{k-1} \quad ,$$

$$\tilde{x}_k = y_k + \tilde{x}_{k-1} = \sum_{i=0}^{k} y_k$$

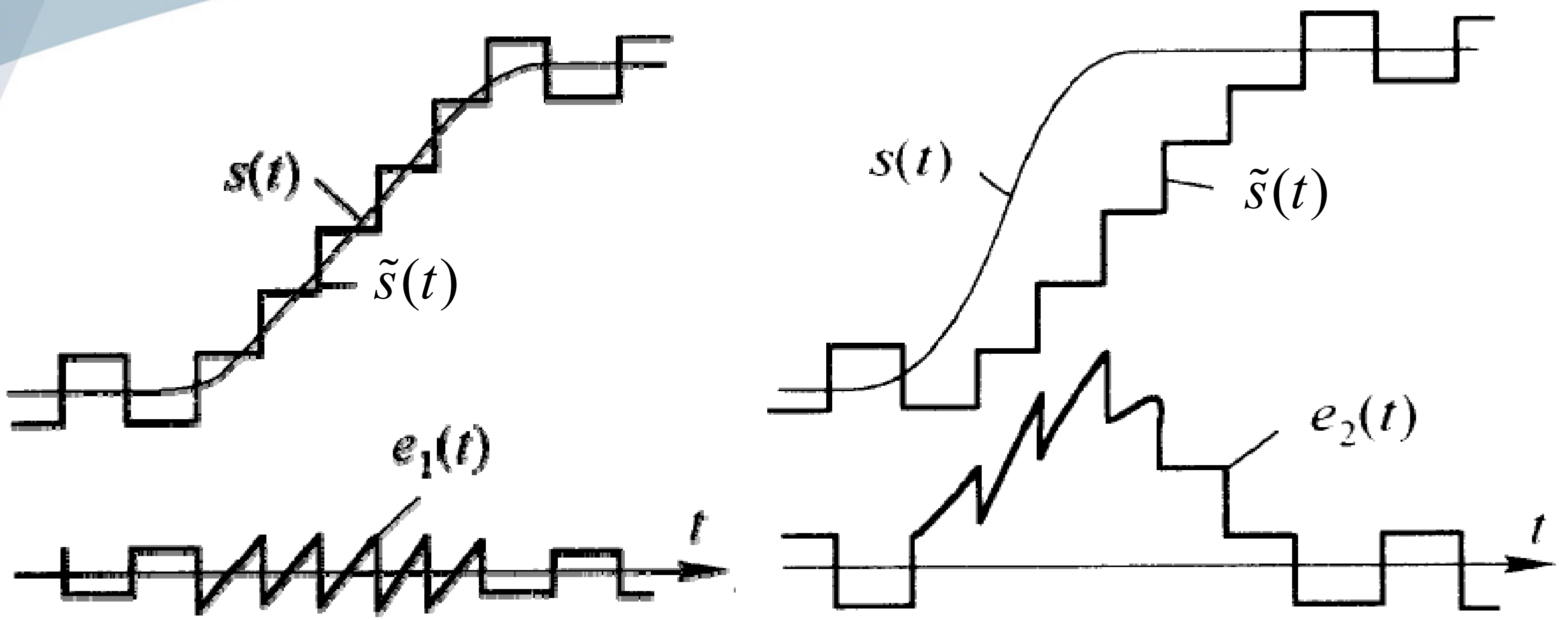
实际上 $\tilde{x}_k$ 是对 y_k 的累加，可以用积分器代替它。



增量调制的失真（噪声）分二种情况：

① 当采样频率较高时，阶梯波形跟得上原来信号的变化，这时的失真称为颗粒量化噪声（granular noise）

② 当阶梯波形跟不上原来信号变化时，这时失真较大，称为过载量化噪声。



不发生过载噪声条件：

$$\boxed{\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|_{\max} \le \frac{\Delta}{T_s} = \Delta \cdot f_s}$$

例如对于正弦信号 $s(t) = A\sin 2\pi f_k t$

$$A \cdot 2\pi f_k \le \Delta \cdot f_s \quad \text{或} \quad A \le \frac{\Delta \cdot f_s}{2\pi \cdot f_k}$$

增量调制的噪声性能

假定输入信号为频率 f_k 的正弦信号，为了保证不产生过载量化噪声，要求正弦波最大幅度不超过，

$$A_{\max} = \frac{\Delta}{2\pi} \cdot \frac{f_s}{f_k}$$

信号功率为：
$$P_{s_o} = \frac{A^2{}_{\max}}{2} = \frac{\Delta^2}{8\pi^2} \cdot \frac{f_s^2}{f_k^2}$$

颗粒量化噪声看成是在 $(-\Delta, \Delta)$ 上均匀分布的随机变量，噪声功率为：

$$E\left[e^2(t)\right] = \int_{-\Delta}^{\Delta} e^2 \cdot p(e)de = \frac{1}{2\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta} e^2 de = \frac{\Delta^2}{3}$$

由于采样周期为 T_s，可以认为颗粒量化噪声功率密度在 $(0, f_s)$ 中均匀

$$P_e(f) = \frac{\Delta^2}{3f_s} \quad , \qquad 0 < f < f_s$$

增量调制解调后低通滤波的带宽满足：

$$f_k \le f_L \le f_s$$

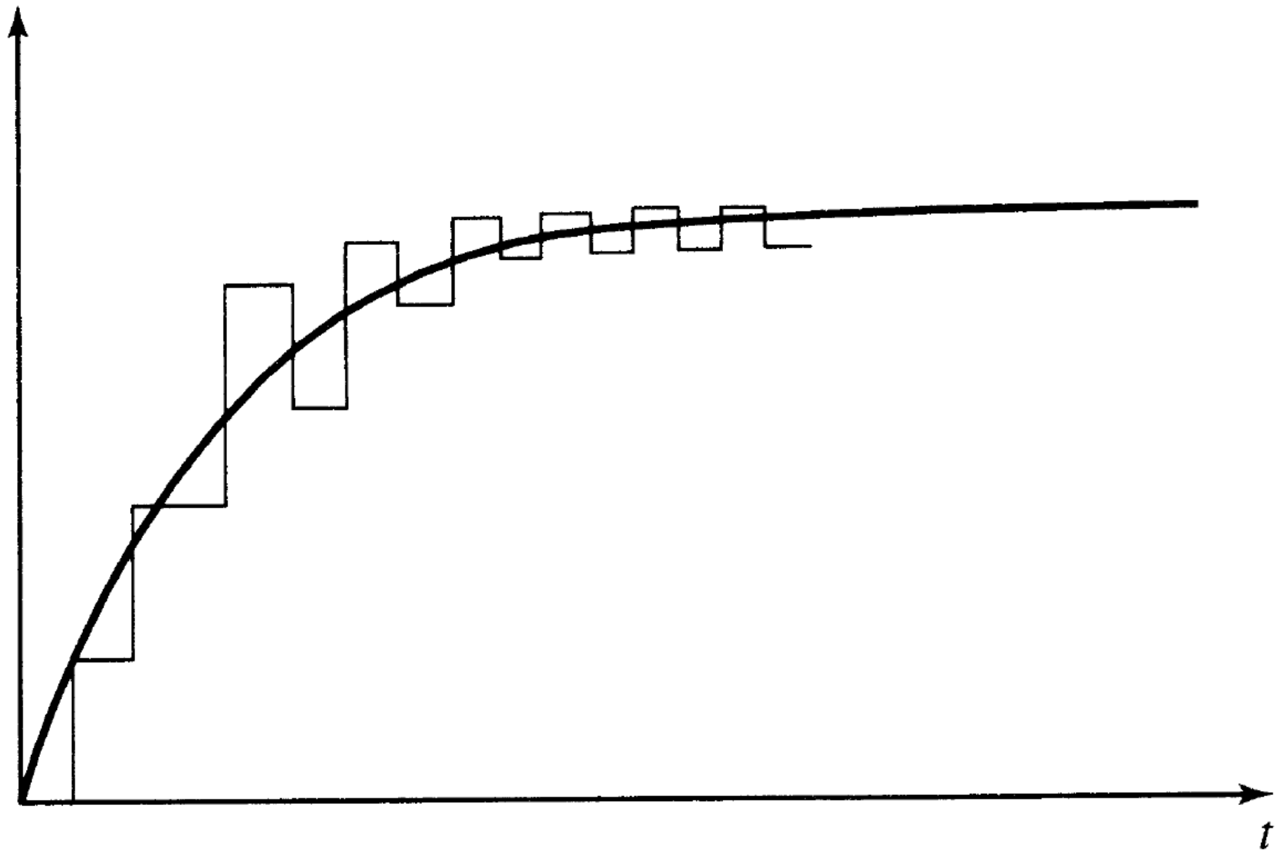
低通滤波后的输出噪声功率为，

$$P_{N_o} = \frac{\Delta^2 f_L}{3 f_s}$$

增量调解调后的输出信噪比为

$$\frac{P_{S_o}}{P_{N_o}} = \frac{3}{8\pi^2}\left(\frac{f_s^3}{f_k^2 \cdot f_L}\right)$$

输出信噪比与采样频率的三次方成比例，所以对于用于语音编码的增量调制，要求采样频率 f_s 在几十 kHz 以上。一般来说的增量调制的码率比PCM低，但语音质量也不如 PCM好。现在也出现一些改进的增量调制技术，如自适应调制等。



自适应增量调制的波形图

作业

- 5.1, 5.4
- 5.10, 5.11
- 5.14, 5.16