**概率分布函数性质**：F(x)单调不减、右连续、. **联合分布函数性质**：**极限**; **非负性**：中任意区间

**N维随机变量转换公式:** 设, ，与有1-1对应关系时，若对且则：. 例：若是独立同分布的，作极坐标及取值变换于,则也独立。**随机变量特征函数**：连续性随机变量离散型随机变量. **特征函数性质**：**1)**  **2)** 在上一致连续。**3）**若随机变量X的n阶矩存在，那么X的特征函数可微分n次，且当时，有; **4)** 是非负定的; **5）**设是独立随机变量，则的特征函数,式中，是的特征函数，随机变量的分布函数由其特征函数唯一确定。

**N维正态分布联合分布密度**： ，其中,C是协方差矩阵。正态随机过程的有限维分布密度完全的由其**期望和协方差函数**所确定。**N维正态分布特征函数**：则. **N维正态随机变量相关性质**:1)，若正定，则即正态随机变量经线性变换还是正态随机变量；2)。{X(t), t∈T}是**高斯过程的充要条件**是它的任意有限个元X(t1),X(t2)…X(tn)的任意线性组合都是一个一维正态随机变量或常数。高斯过程是**二阶矩过程**。**正态独立定理**：**正态过程**{X(t), t∈T}是**独立过程的充要条件**是协方差函数C(s,t) = 0, s != t。**二阶矩**过程的协方差函数、相关函数总是存在的。

**均方极限唯一定理**：若,且，则P{X=Y} = 1，即均方极限在概率为1相等的意义下唯一。**均方极限性质**：**1**.均方极限与数学期望可交换次序。；**2**.若,且，则。**3.**均方极限线性性质。**4.**数列,X是随机变量，有。**5**.存在⬄；**6.**在性质(2)条件下不能得到,。**均方连续性定理**：随机过程{X(t), t∈T}在T上均方连续⬄其相关函数Rx(t1,t2)在{(t,t): t∈T}的所有点上是连续的。**均方可导性定理：**随机过程{X(t), t∈T}在t处均方可导⬄极限存在。**均方连续性性质：1.**若过程X(t)在t处可导, 则它在t处连续。**2.**求导数记号与数学期望符号可交换次序。**3.**随机过程X(t)之均方导数X’(t)相关函数是二重微分关系。**4.**随机变量均方导数=0。5.均方导数线性性质。**均方可积性定理**：f(t)X(t)在区间[a,b]上均方可积的充分条件是二重积分存在，且有。**均方积分性质：1.**若X(t)在[a,b]上均方连续🡺均方可积。**2.**期望与均方积分符号可互换。**3.**均方积分的线性性质。**4.**随机变量可拿到积分符号外。**5.**X(t)在[a,b]上均方连续，则,在[a,b]上均方连续，均方可导，且Y’(t) = X(t)。**6.**X(t)在[a,b]上均方可导，X‘(t)在[a,b]上均方连续，则。

**宽平稳随机过程**:,与t无关。二阶距过程**严平稳必定宽平稳，正态过程严平稳和宽平稳等价**。**宽平稳相关函数的性质(2)**|| **(3)** **(4)**非负定性 协方差函数c同样具有上述性质，第一条改为。**时间平均** P{<X(t)>=}=1;**时间相关函数** P{<X(t)X(t+)>= }=1。**期望各态历经定理**：。**相关函数各态历经定理:** ; 。**期望各态历经定理(上半轴)**：。**相关函数各态历经定理(上半轴):** ; ;**期望各态历经定理(离散)** 。**相关函数各态历经定理(离散):** ,其中，x为平稳过程或平稳序列。**谱密度函数与自相关转换**：; ; ; ; **谱密度函数是实的，非负的偶函数。**

**C-K方程：** 。**周期极限定理**：设状态i的周期为d，则存在正整数M，对一切n>=M有>0。**首次返回概率**：表示**系统从i出发**, 经n步首次返回i的概率。;。若则称i是**常返状态**；若则称是i**非常返状态或滑过状态**。**n步转移概率分解定理**：对任意状态i，j∈S, n>1,有，显然有。**周期计算等价定理**：状态i的周期可由首次到达状态i的步数的GCD求出。**状态周期判定定理**：**(1)** 若存在正整数n,使,,则i非周期。**(2)** 若存在正整数m,使m步转移矩阵中对应于状态j的那列元素全不为0，则j非周期。**平均返回时间：**表示由i出发再返回i的平均返回时间。设状态i是**常返**的. 若,则称i是正常返的；若，则称i是**零常返**的。非周期的正常返态称为**遍历态。常返性判定定理：**状态常返的充要条件为，如果i非常返，则。若j为非常返状态，则对任意i∈S,有，。**周期常返极限定理**：设状态i常返且有周期d，则。**n步转移概率极限定理**：设i是常返状态，则：(1) i是零常返状态⬄ ;(2) i是遍历状态⬄ 。

**闭集相关结论**（C是闭集）:整个状态空间S是闭集，是最大的闭集；吸收状态i是闭集，是最小的闭集。**状态空间分解方法1**：分解为：；其中每个是常返状态组成的不可约闭集。中的状态或全是正常返状态，或全是零常返状态，且有相同的周期；是由全体非常返状态组成，自中的状态不能到达中的状态。注：分解定理中的不一定是闭集，但如果S为有限集，一定是非闭集。**状态空间分解方法2：**周期为d的不可约马尔可夫链，其状态空间S可唯一地分解为d各个互不相交的子集之和，即,且使得自中任一状态出发，经一步转移必进入，。约定：**。分解公式**：任意取定一状态，令。因S是不可约的，即S中的状态是互通的，故S是不可约的，即S中的状态是互通的，故。

**非常返状态和零常返状态极限定理：**若是非常返状态或零常返状态，则，有。**推论：**如果马尔可夫链的状态空间S是有限集，则S中的状态不可能全是非常返状态，也不可能含有零常返状态，从而**不可约有限马尔可夫链的状态都是正常返状态**。**马尔可夫链遍历性定义**：若对于一切,极限存在，则该马尔可夫链具有遍历性，此链又称遍历链。**遍历态性**：若j是非周期，正常返状态（即遍历态）且，则,其中为状态j的平均返回时间。**遍历性判定：**大前提：不可约的马尔可夫链；**1)** 非周期+正常返 🡺 遍历性;**2)** 非周期+状态有限🡺遍历性。

**平稳分布的定义:**设马尔可夫链有转移矩阵P=(),若存在一个概率分布,其满足称为该马尔可夫链的平稳分布 。**平稳分布的性质**：马尔可夫链的初始分布是一平稳分布=>则该马尔可夫链任何时刻的绝对分布都与初始分布相同**。非周期不可约的马尔可夫链正常返的充要条件**是它存在平稳分布，且此平稳分布就是极限分布**。**马氏链**存在平稳分布的判定方法**：**1)**对不可约非周期马尔可夫链，若所有状态都正常返，则存在平稳分布，且平稳分布就是极限分布.若所有状态是非常返或所有状态是零常返，则不存在平稳分布。**2)**不可约非周期有限状态马氏必存在平稳分布。**3)**若是马氏链对平稳分布，则

**泊松过程定义1**：设随机过程{X(t),t∈[0,∞]}的无限状态空间是S={0,1,2…},若满足两个条件: (1) X(t)是平稳独立增量过程.(2) 任意a,t>=0,每一增量X(t+a)-X(a)非负,且服从参数为λt（λ>0）的泊松分布，即有，则称X(t)是具有参数λ的泊松过程。**泊松过程定义2**：设随机过程{X(t),t∈[0,∞]}的无限状态空间是S={0,1,2…},若满足两个条件: (1) X(t)是平稳独立增量过程. (2) 任意a,t>=0,每一增量X(t+a)-X(a)非负,且有,,则称X(t)是具有参数λ的泊松过程。**数字特征：期望**EX(t) = λt; **方差**DX(t) = λt; **自相关函数**Rx(s,t) =λs(λt+1); **协方差函数**Cx(s,t) = λ\*min(s,t)。

**两角和公式**sin(A+B) = sinAcosB+cosAsinB ; sin(A-B) = sinAcosB-cosAsinB ; cos(A+B) = cosAcosB-sinAsinB ; cos(A-B) = cosAcosB+sinAsinB ；**二倍角**：Sin2A=2SinA•CosA; Cos2A = - = = ; **和差化积**：; ; ; ; **积化和差**：; ; ; ; **三角不等式**：CosA – 1 <= A; ;

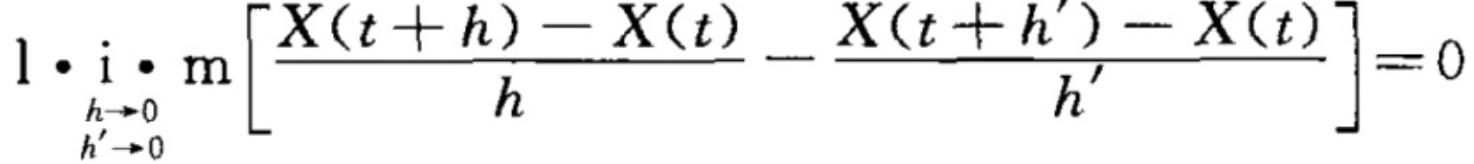
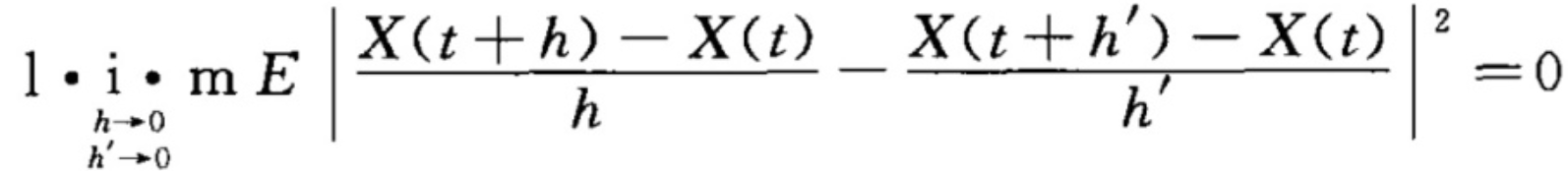
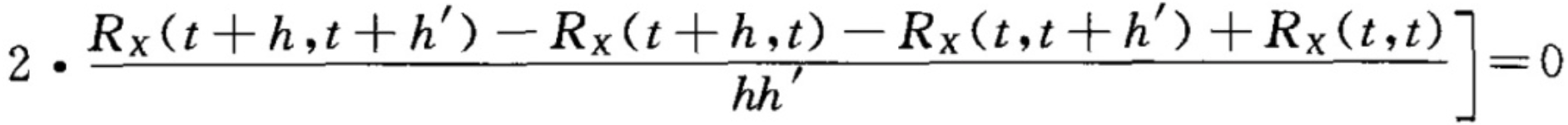
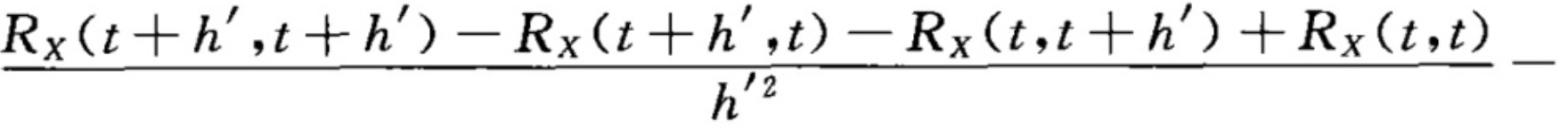
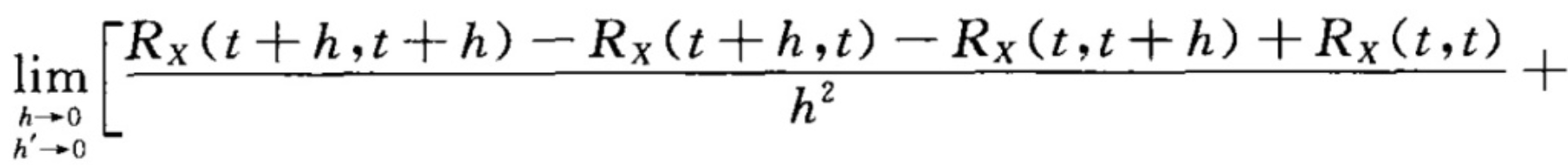
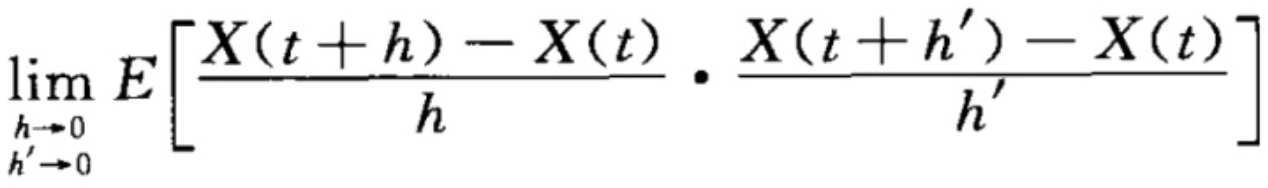
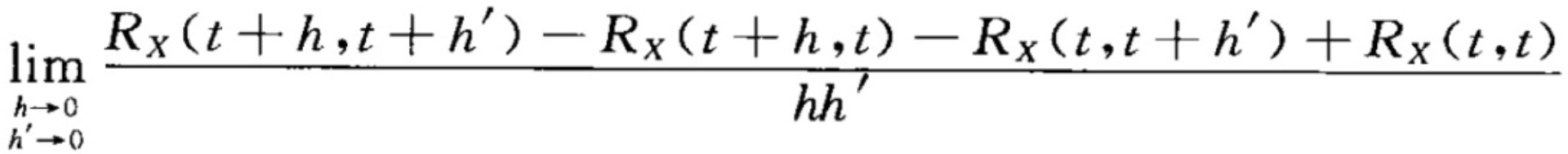
**随机变量数字特征**：**1) 二项分布B(n,p)**:. **2) 柏松分布P(λ)**:. **3) 几何分布G(p)**:. **4) 均匀分布U(a,b)**:. **5) 正态分布N(a,σ2)**:. **6} 指数分布E(λ)**:. **7) 伽马分布Г(a,λ)**:,E=

**傅立叶变换性质**： 。**卷积性质：**。**RS转换公式：1)**  **2)** **3)** **4)** **5)** **6)** **7)** **8)** ；**9）,**

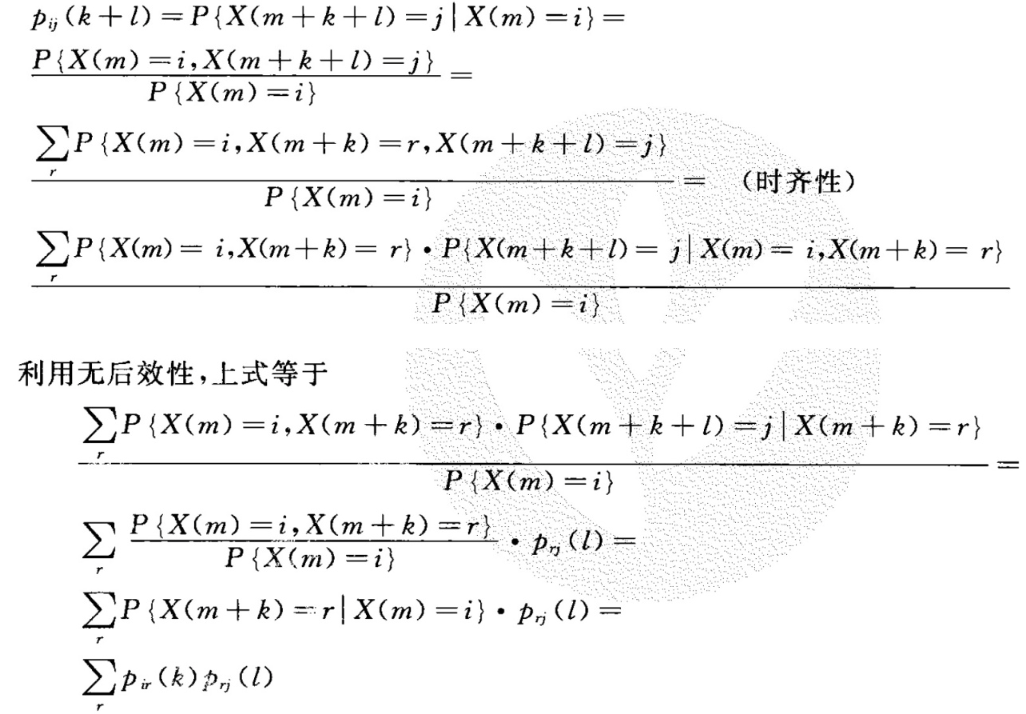
**商的概率密度公式**：, ; **欧拉公式：** ,；**级数求和**：，其中|x|<1；，其中x!=1；;**柯西不等式：；** **均值不等式**：; ; ; ; 则。**δ函数**:。

**证明1**：**均方极限与期望可以交换位置。**利用DY=E- 0,有｜E-EX｜=|E()| 而已知 0,所以｜E-EX｜。**证明2：均方导数与期望可以交换位置**。(t)=EX’(t)=E = =(t)。**证明3**：**均方积分与期望可以交换位置**。E 。

**证明4**：**随机过程在t处可导等价于极限存在**。

存在。由均方极限性质（5），只要，即，亦即，因为式（2.1）的极限存在，而此极限在h=h’时亦存在，且极限数值不变，所以上式为0成立，于是存在; “=>“，设X(t)在处可导，利用均方极限性质（2），并知 存在，可得存在，亦即存在。

**证明5：随机过程在T上均方连续⬄相关函数第一象限所有点连续** **证明6：Ck方程**

**证明7：泊松过程定义1与定义2等价性定理**

定义1🡺定义2：；

定义2🡺定义1：

bs

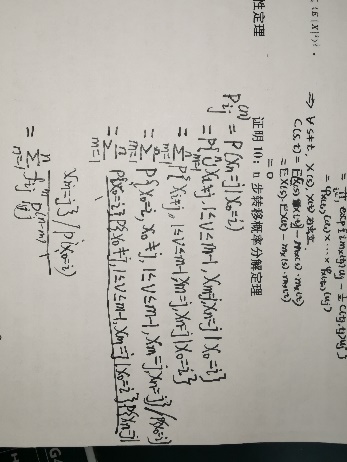
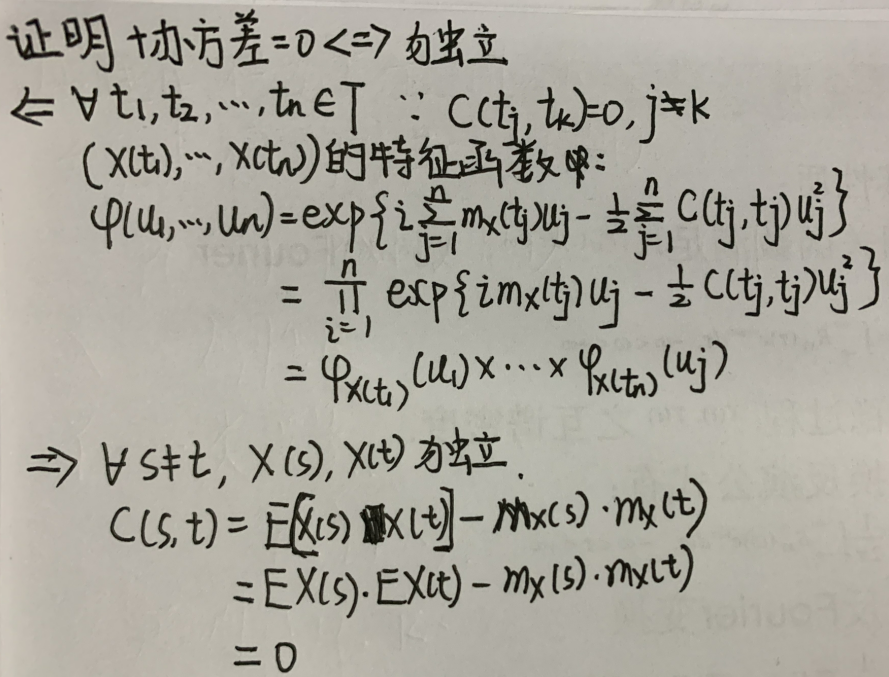
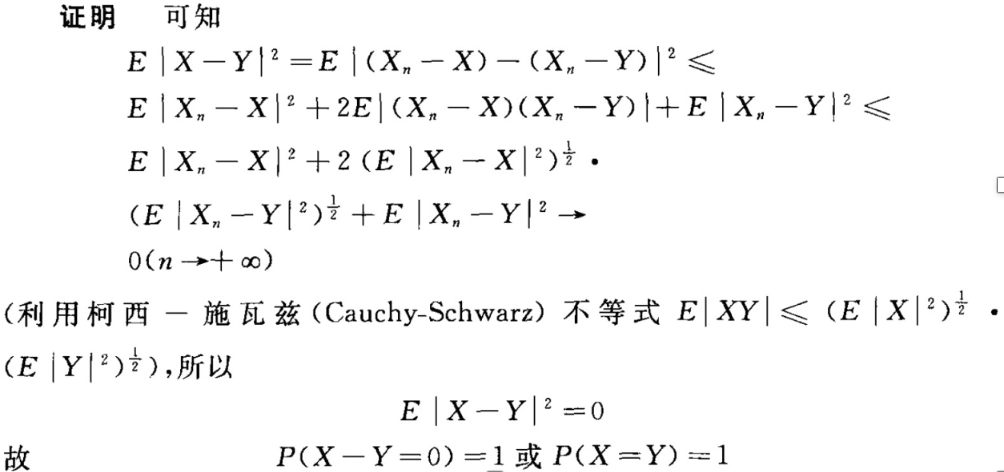
;s;b;b

;b

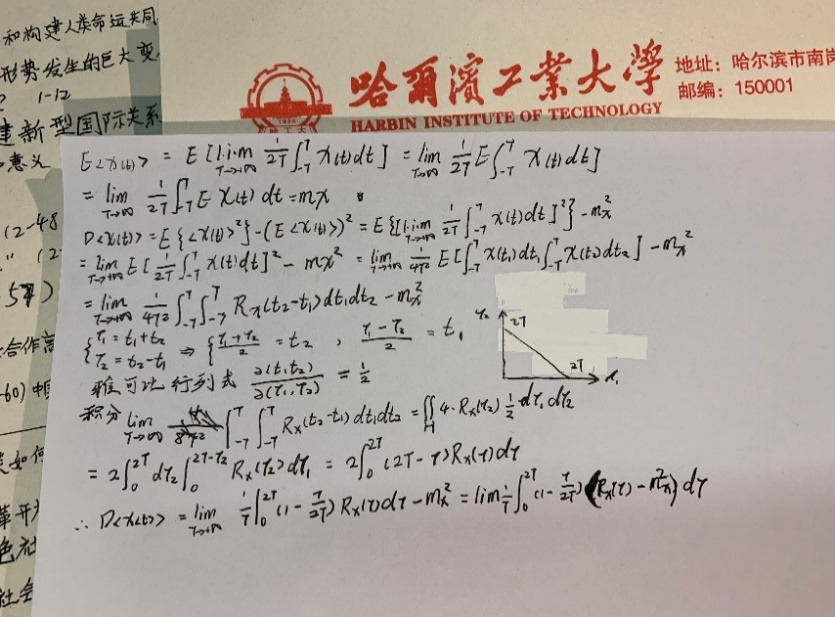
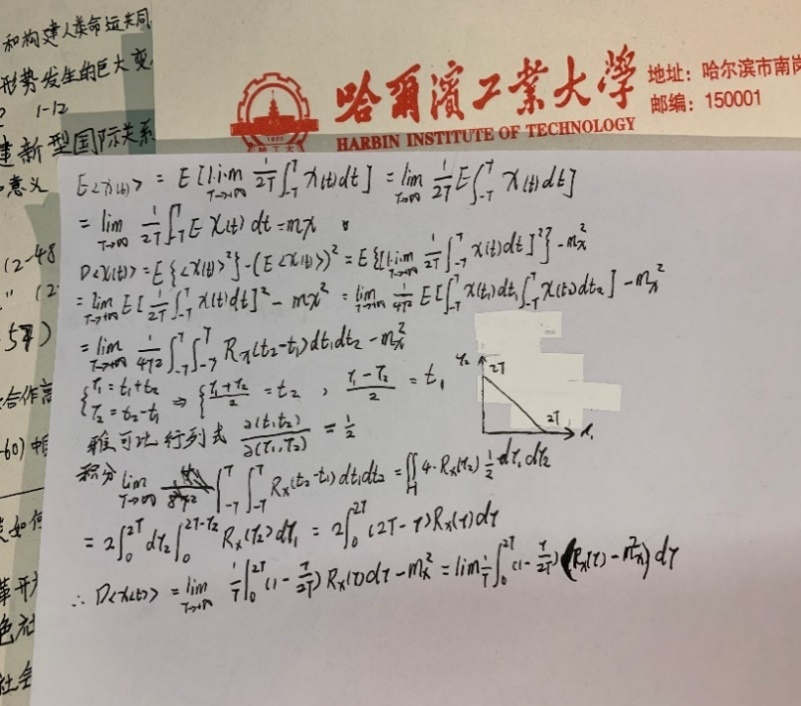
;s;

s;s;b;s;s。

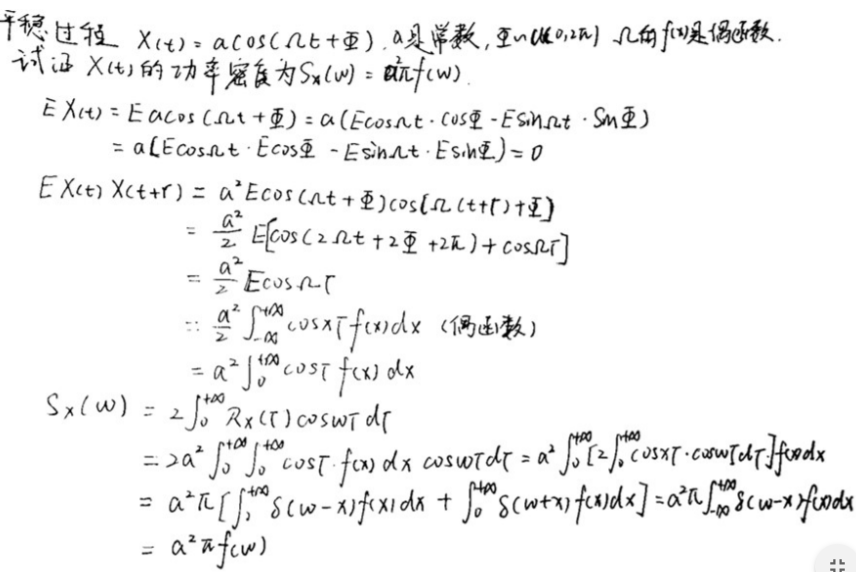
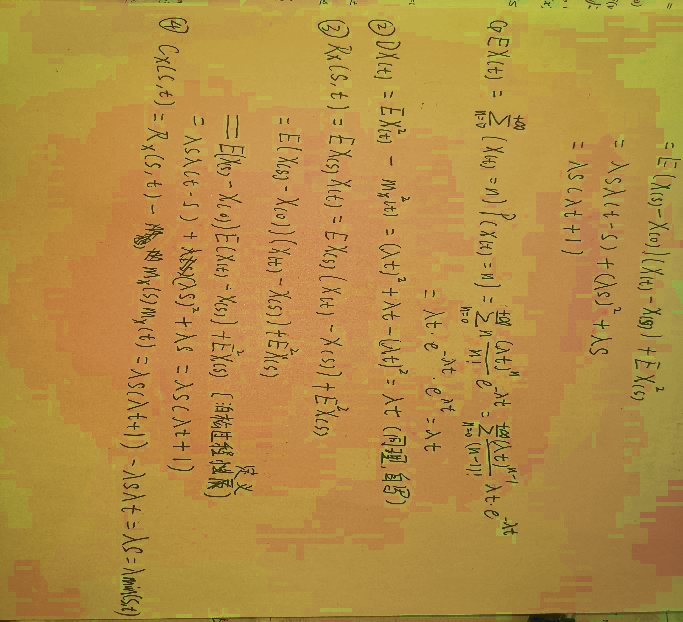
**证明8：均方极限在概率为1相等的意义下唯一** **证明9：正态过程独立定理 证明10：n步转移概率分解定理**

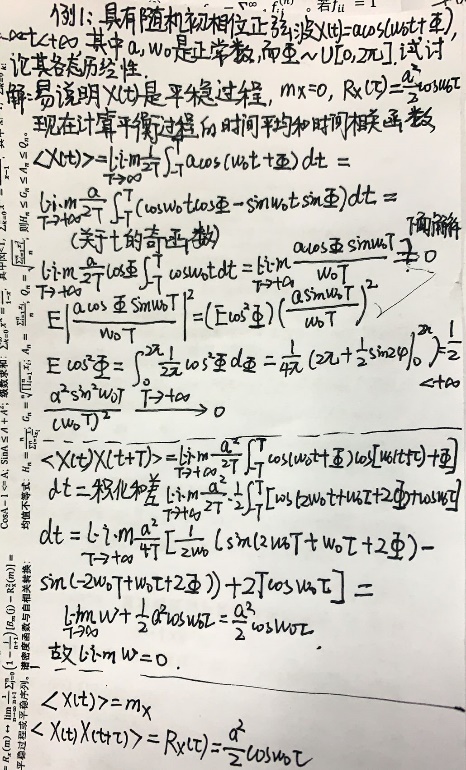


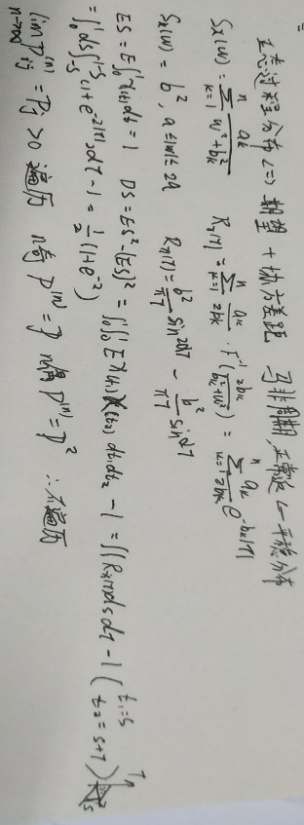
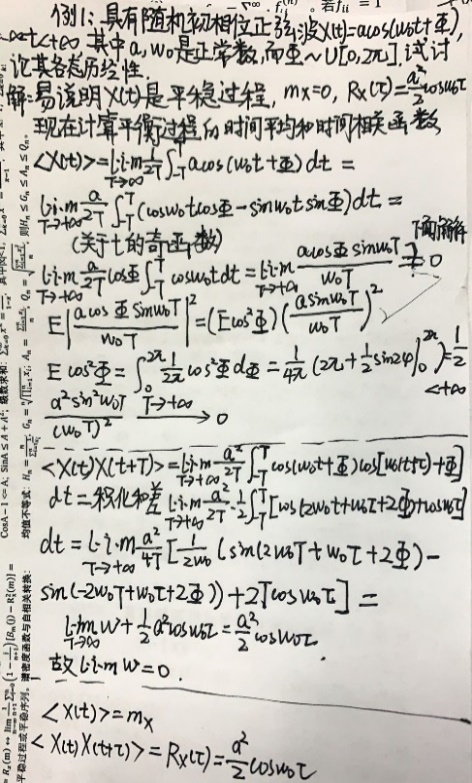
**证明11：期望各态历经性证明 ：下页开始**

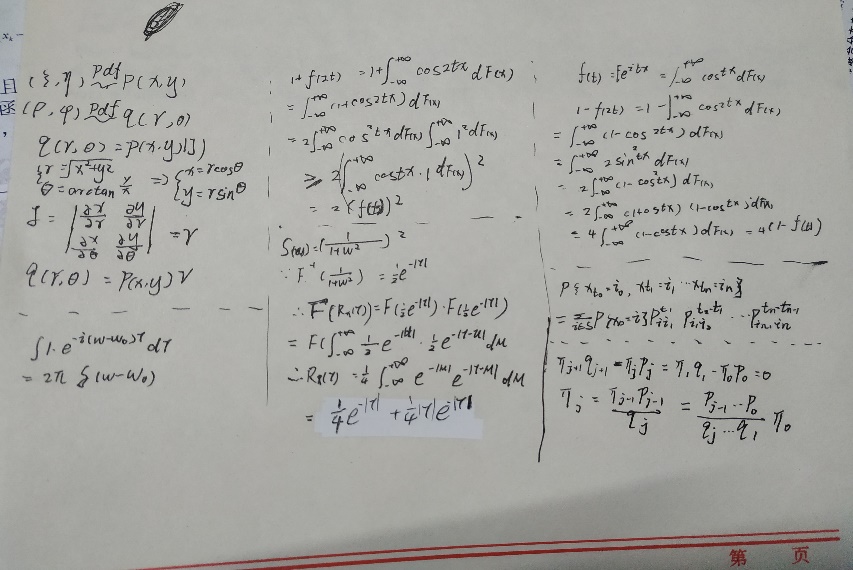
****

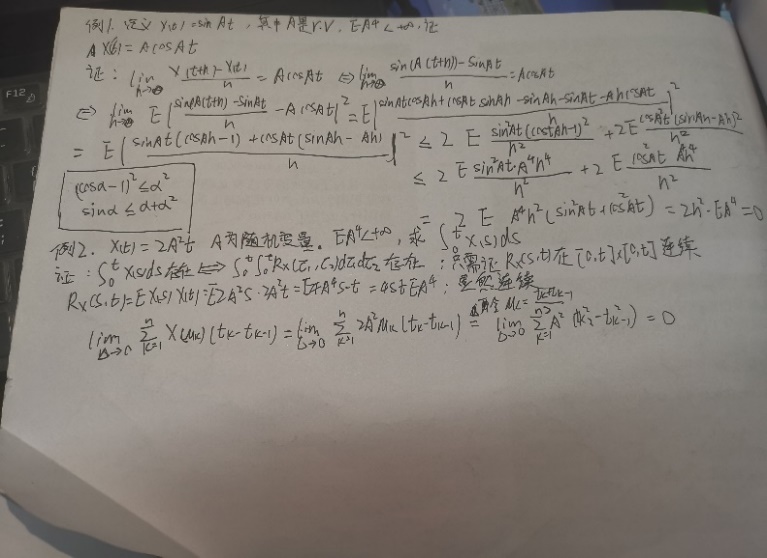
**计算1：泊松分布数字特征**

****

****

****

****

** **

**贡献者（8.305全体成员）: LiuLu，JiangJiaWei，QiaoZhi，QiuYongZe**