

# 基于几何分析的多波束测深模型

## 摘 要

多波束测深是一种通过同时发射多个声波束来实现对海底地形的全面覆盖,提供更均匀且全面的地形数据的水深测量技术。本文通过建立数学模型,利用模型的几何直观特征,在保证条带重叠率最优的条件下,计算了一定坡度下不同指标点的相关参数值,并确定了最短航线。进一步推广初始模型,得到在复杂地形的矩形区域内测量船的最优航线。

**针对问题一:**在问题一中,本文解决了在一定海底坡度下计算多波束测深的覆盖宽度和相邻条带之间重叠率的问题。本文应用了几何模型和相似三角形的原理,根据海底坡面的坡度、多波束测深的开角以及海域中心点处的海水深度,建立了数学模型。结合 Python 程序语言,可计算距离中心点附近 1600m 的海域内每隔 200 米的海水深度、覆盖宽度和与前一条测线的重叠率。

**针对问题二:**在问题二中,本文解决了不同测线方向上,计算多波束测深覆盖宽度的问题。本文建立了一个三维几何模型,计算了在给定角度变化范围内声波的测线宽度,考虑了测线方向与海底坡面法线投影的夹角 $\beta$ 的变化。通过几何关系和三角换算,建立数学模型。通过 Python 程序语言,本文得到了在距海域 2.1 海里范围内多波束测深的覆盖宽度的具体结果。

**针对问题三:**在问题三中,本文解决了在一个给定矩形海域内,如何寻找一组最短测线,能够完全覆盖整个海域的问题,并满足重叠率在 10%-20%的要求。为了解决这个问题,我们应用了数学模型和分类讨论的方法。在分析过程中,本文发现平行测线之间的间距应最大化,且角度接近  $90^\circ$  时能够得到更优解。基于这个观察,本文提出了六种方案,并通过 MATLAB 程序计算得出了在角度为  $90^\circ$  时可以得到最短测线长度。

**针对问题四:**问题四中,本文针对已知矩形海域的单波束测量数据,设计了满足条件的最优测线方案。通过将复杂的海底地形近似为多个平坦的斜坡,并结合最短航线算法,可以实现对整个海域的尽可能完整的覆盖。首先,根据地形数据的方差分析,将海域划分为四个矩形区域,并计算每个区域的深度平均值。然后,利用最小二乘法拟合出每个矩形区域的南北和东西方向上的最优回归曲线,得到了最佳拟合坡度。将这些坡度数据代入问题三的计算模型,得到了每个矩形区域的最优测线方案,并将各个区域测线进行加和,得到测线总长度。

最终,我们对模型进行了总结,提出了模型的优缺点,并对于模型进行了推广。

**关键词:** 多波束测深, 覆盖率, 几何, 线性拟合

## 一、问题重述

### 1.1 问题背景

多波束测深技术是在回声测深技术的基础上于 20 世纪 70 年代发展起来的一种水深测量技术。20 世纪 80-90 年代,随着技术的成熟,先后出现了产品化的浅、中、深水多波束系统。多波束测深技术通过同时发射多个声波束来实现对海底地形的全面覆盖<sup>[1]</sup>。与单波束测深相比,多波束测深系统把测深技术从原先的点,线状推展到面状,可以在海底平坦区域内测量出具有一定宽度的全覆盖水深条带,效率更高、精度更高、分辨率更高<sup>[2]</sup>。这种技术可以提供更均匀且全面的地形数据,相邻测线之间存在一定的重叠,确保数据的完整性和准确性。多波束测深系统在海洋测绘等领域有广泛应用,正日益受到海道测量同行的认可,并在实际生产中发挥着越来越重要的作用<sup>[3]</sup>。

### 1.2 问题的提出

当前主流多波束测深仪采用一发多收的策略,其阵列布置为 T 型的发射阵和接收阵,发射波束和接收波束在海底形成 Mills 交叉,在数据端进行电子波束形成后,获得声呐下方一定宽度范围内的波束图像。<sup>[1]</sup>然而,在实际海底地形中,起伏变化较大。采用海区平均水深设计测线间隔可能导致浅水区漏测,影响测量质量;按最浅处水深设计间隔可能导致深水区测量条带重叠过多,降低效率。本文既要保证有 10%-20%的重合率保证测量结果完整准确,同时也不能使重合率太高从而影响测量精确度。因此需权衡不同水深区域需求,以获得合理测量结果。

基于以上背景信息,需要建立数学模型解决以下问题:

**问题一:** 已知海底地形为一个平坦的斜坡,且海底坡面坡度为  $\alpha$ ,探测船测线沿着测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为  $90^\circ$ 。建立计算多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间的重叠率的数学模型,并依据此模型计算在多波束换能器的开角为  $120^\circ$ ,坡度为  $1.5^\circ$ ,海域中心点处的海水深度为 70 m 的情况下,需要计算距离中心点附近 1600m 的海域内每隔 200 米的海水深度、覆盖宽度和与前一条测线的重叠率。

**问题二:** 已知海底地形为一个平坦的斜坡,且海底坡面坡度为  $\alpha$ ,探测船测线沿着测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为  $\beta$ 。考虑一个三维长方体海底区域,建立计算多波束测深覆盖宽度的数学模型,并依据此模型计算在多波束换能器的开角为  $120^\circ$ ,坡度为  $1.5^\circ$ ,海域中心点处的海水深度为 120 m 的情况下距海域 2.1 海里范围内多波束测深的覆盖宽度。

**问题三:** 已知南北长 2 海里、东西宽 4 海里的矩形海域内,海域中心点处的海水深度为 110 m,西深东浅,坡度为  $1.5^\circ$ ,多波束换能器的开角为  $120^\circ$ 。利用当前建立的数学模型,在相邻条带之间的重合率满足 10%-20%的条件下,找到一组测量长度最短并且可以完全覆盖整个待测海域的测线。

**问题四:** 已知南北长 5 海里、东西宽 4 海里的矩形海域的单波束测量数据,设计测线。设计要求包括:尽可能覆盖整个海域;控制相邻条带的重叠率在 20%以下;尽量缩短总长度。设计完成后,需要计算测线的总长度、漏测海区的百分比以及重叠区域中超过 20%重叠部分的总长度。

## 二、问题分析

## 2.1 问题总分析

首先，了解多波束测深原理后，建立二维平面几何模型解决问题一，其次构建三维立体模型，根据边角关系构建方程，解决问题二，在前两问的基础上结合第三问提供的海底地形条件假设出测线绘制的六种方案，遍历分析后得出问题三最优解，最后根据第四题海底深度数据表绘制具体地形，根据地形特点分割区域，计算测线长度得出问题四最优解。

本文的总体分析流程图如下：

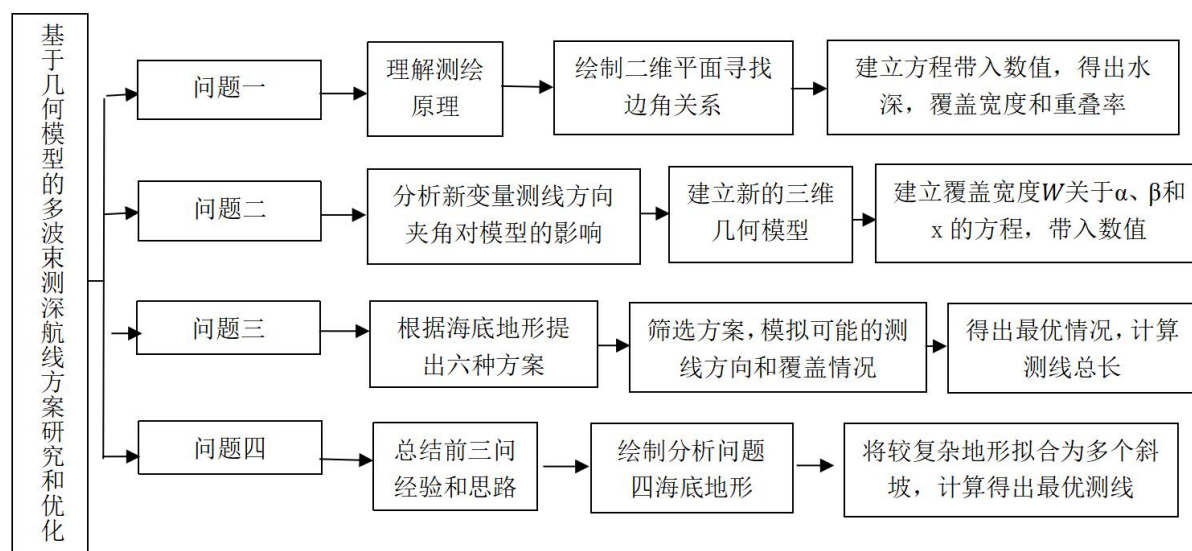


图 1 问题的总分析

## 2.2 具体问题分析

### 2.2.1 问题一的分析

问题一要求根据已知的海底坡面坡度、多波束测深的开角以及海域中心点处的海水深度，建立数学模型来计算距离中心点附近 1600m 的海域内每隔 200 米的海水深度、覆盖宽度和与前一条测线的重叠率。据此本文在二维平面建立几何模型，以测线距中心点处的距离为变量建立海水深度、覆盖宽度和重叠率的方程，代入具体数值计算几何模型中的指标值。

### 2.2.2 问题二的分析

问题二要求建立数学模型来计算在已知平坦斜坡海底地形情况下，多波束测深的覆盖宽度。本题有以下已知条件：海底坡的坡度  $\alpha$ 、多波束换能器的开角为  $120^\circ$ 、海域中心点处的海水深度为 120 米。本文需要计算船只在距海域 2.1 海里范围内进行多波束测深时的覆盖宽度。在计算过程中，本文不能确定测线的方向，即测线方向与海底坡面的法线在水平面上的投影角度  $\beta$  是不确定的。因此，本文可以在三维空间中建立几何模型，计算声波所在平面与坡面的交点与水平面之间的夹角  $\varphi$ ，以及航线所在平面与坡面交点与水平面之间的夹角  $\gamma$ 。通过这些计算，本文可以得到一个数学模型来计算多波束测深的覆盖宽度。根据题目给定的条件，本文可以计算出在不同  $\beta$  角度下，2.1 海里范围内声波的测线宽度。

### 2.2.3 问题三的分析

问题三要求在已知矩形海域内，已知海域中心点处的海水深度，海域南北长、东西宽，且海底呈现西深东浅的斜坡，坡度为  $1.5^\circ$ ，多波束换能器的开角为  $120^\circ$  的情况下，找到一组测量长度最短的测线，使得相邻测线之间的重合率满足  $10\%$  至  $20\%$  之间的要求，并且测线能够完全覆盖整个待测海域。注意，此时相邻测线之间的间距可以是不相等的。

由题意可以得出，相邻航线之间应该是平行的，这与多波束测深系统测量技术行业规定的要求<sup>[4]</sup>符合一致。由于目标海域是一个矩形，夹在两条平行线之间的平行线距离相等。那么要使得总的测线长度最短，即基本满足平行线之间的测线条数最少，即相邻测线之间的间距最大。题干所给出的海域是一个西深东浅的斜坡，当  $\beta$  角在  $90^\circ$  至  $180^\circ$  之间变化过程中，要使得测线间距最大，即每一条测线的最高点处深度最深，即最靠近西边深水区。由此可以定性分析得到， $\beta$  角越靠近  $90^\circ$  可得测线长度最短。 $\beta$  角在  $180^\circ$  至  $270^\circ$  之间变化同理。

根据题目中给出的条件，本文进行分类讨论（值得注意的是，本文所讨论的  $\beta$  角范围在  $90^\circ$  至  $270^\circ$  之间）：

- ①  $\beta=90^\circ$  此时一定可以实现海域测深全覆盖，且在海底地形由浅到深的过程中，相邻的测线之间是间距可以依据覆盖率要求作出相应调整。
- ②  $\beta=180^\circ$  此时一定可以实现海域测深全覆盖，但是必须同时满足最浅的海域处测线重叠率均大于  $10\%$ ，最深的海域处测线重叠率均小于  $20\%$ 。
- ③  $90^\circ < \beta < 180^\circ$  或  $180^\circ < \beta < 270^\circ$  此时测线为斜线，如图 2 为相应的测深俯视图，梯形面积为由深到浅的覆盖条带。

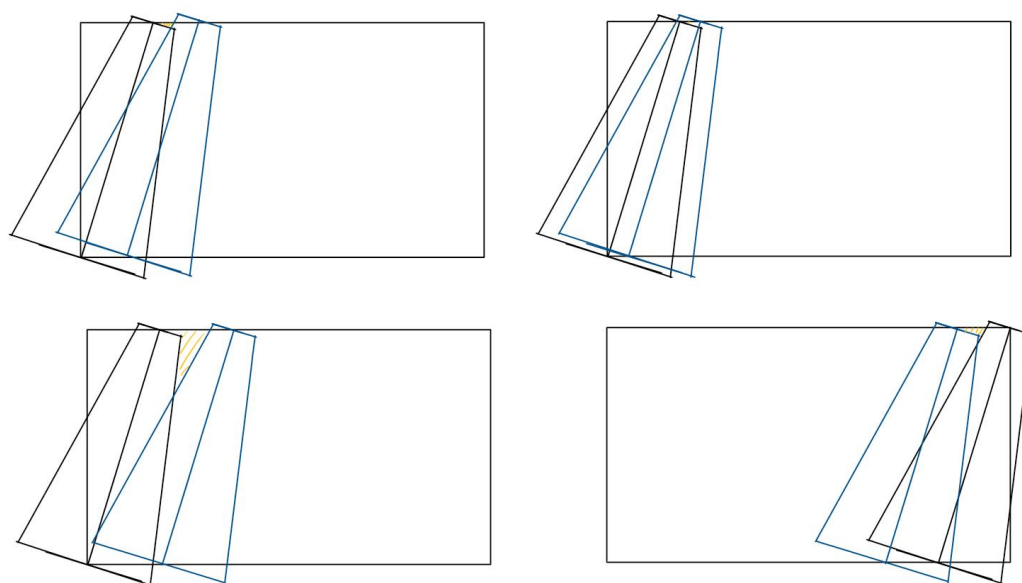


图 2 测深条带俯视图

在考虑保证重叠率的前提下，本文发现矩形海域内的斜向平行测线的覆盖宽度总是无法完全覆盖整个海域平面。由此，本文基于此观察提出了以下六种方案（值得注意的是，本文所讨论的  $\beta$  角范围在  $90^\circ$  至  $270^\circ$  之间）：

- ① 完全覆盖方案（ $90^\circ$ ， $180^\circ$ ）：这种方案保证了测线完全覆盖整个海域平面。
- ② 完全覆盖方案，但深水区的重叠率超出范围：尽管该方案能够实现完全覆盖，但它可能导致深水区的重叠率超过预定的范围。
- ③ 部分覆盖方案，满足重叠率并尽量减小未覆盖面积（深水区重叠率较高）：该

方案无法完全覆盖整个海域平面，但可以在满足重叠率要求的同时，尽量减小未覆盖的面积，尤其是深水区。

④ 部分覆盖方案，满足重叠率并尽量减小测线总长度（深水区重叠率较低）：与方案 3 类似，该方案无法完全覆盖整个海域平面，但可以在满足重叠率要求的同时，尽量减小测线的总长度，尤其是在深水区。

⑤ 折中方案，寻求在方案 3 和方案 4 之间达到相对平衡的计算结果。

⑥ 不完全覆盖方案，可能在浅水区超出重叠率范围，但整体测线长度较短：该方案无法实现对整个海域平面的完全覆盖，且在浅水区可能超出重叠率的范围，然而测线的总长度较短。

为了得到更优的解决方案，本文将首先具体求解方案 1，然后对具有相同原理的方案 3、4 和 5 进行统一的阐释。为了尽可能满足题目要求，本文将对方案 2 和方案 6 不做过多讨论。

## 2.2.4 问题四的分析

根据问题四的要求，在已知单波束测量数据的矩形海域基础上，设计满足条件的最优测线。然而，通过附件数据我们可以观察到海底地形不是单一的坡面，并且单波束测量数据是离散且不连续的。因此，为了对复杂的地形进行处理，本文将采用拟合方法将其近似为多个平坦的斜坡。然后，结合第三题中的求解最短航线的方法，来优化测线设计。运用最小二乘法，通过将较复杂的地形拟合为多个平坦斜坡，并结合最短航线算法，能够得到满足条件的最优测线方案。

## 三、模型假设

1. 假设海平面是平静无风的。
2. 假设海底地形为平坦的斜坡，且坡度可以测得。
3. 假设声波在海水中以恒定速度传播，不考虑声波在水中的折射。
4. 假设测量船的相邻测线是相互平行的。
5. 假设测深工作不存在随着船受风、浪、涌、流的影响发生横摇，纵摇和垂直起伏的情况<sup>[2]</sup>。

## 四、符号说明

符号	说明	单位
$W$	多波束测深条带的覆盖宽度	米
$\theta$	换能器开角	度
$D$	海水深度	米
$d$	相邻两条测线间距	米
$\eta$	相邻条带之间的重叠率	/
$\alpha$	坡度	度
$\beta$	测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角	度
$\theta$	声波所在平面与坡面的交线与水平面之间的夹角	度

表 1 符号说明

## 五、模型建立与求解

### 5.1 问题一的模型

#### 5.1.1 模型的建立

考虑到问题一中为航线的剖面图，本文在二维平面上建立数学模型，通过相似三角形以及角度关系建立如下模型：

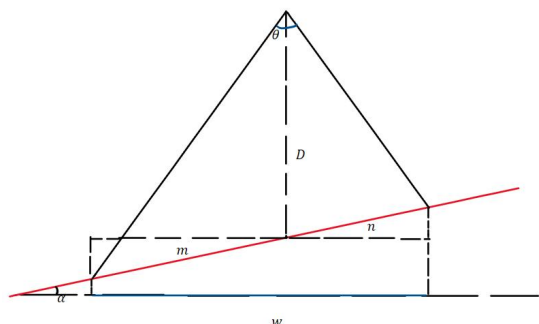


图 3.1 问题一的示意图（1）

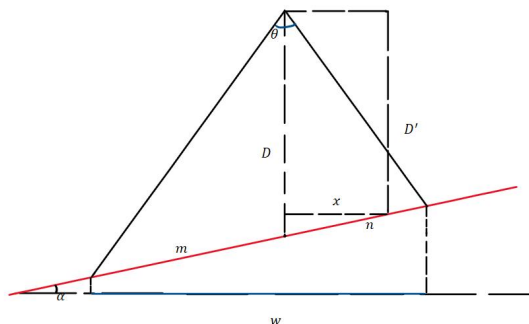


图 3.2 问题一的示意图（2）

本文由平面几何知识可以知道，图 3.1 所示中  $m$ 、 $n$  值可以由正弦定理得到：

$$m = \frac{D \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha \right)}$$

$$n = \frac{D \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha \right)}$$

由初始的  $D_0$  值是 70 米，如图 3.2 所示。其中  $x$  是测线距离，单位为米，由三角关系可以得到：

$$D' = D_0 - x \cdot \tan \alpha$$

联立可得：

$$W = \frac{D' \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha \right)} + \frac{D' \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha \right)}$$

#### 5.1.2 模型的求解

本文使用 Python 程序，将求得数学模型输入并且获得以下结果：

测线距中心点处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	49.051	54.288	59.526	64.763	70.000	75.237	80.474	85.712	90.949
覆盖宽度	170.26	188.44	206.62	224.80	242.98	261.16	279.34	297.52	315.70

/m	9	8	8	7	7	6	6	6	5
与前一条测线的重叠率/%	——	-0.06%	0.03%	0.11%	0.18%	0.23%	0.28%	0.33%	0.37%

表 2 result1

### 5.1.3 模型的误差分析

在计算重叠率时，使用平坦地形的重叠率计算公式 $\eta=1-d/w$ ，实际情况下  $1.5^\circ$  的坡度会对重叠率产生影响，不同测线下声波覆盖宽度存在微小差异，代入公式的覆盖宽度小于实际值，导致覆盖率测量值偏小。

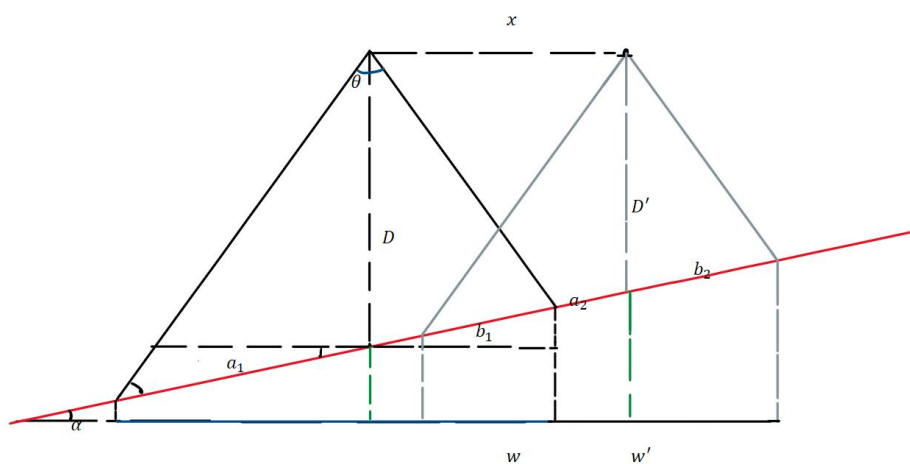


图 4 问题一误差模型

具体误差计算公式为：

$$\frac{\text{测量值}}{\text{实际值}} = \frac{\cos \alpha \cdot [D \sin (\theta / 2) - x \tan \alpha \sin (\theta / 2)] \cdot \left[ \frac{1}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha \right)} + \frac{1}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha \right)} \right] - x}{\cos \alpha \sin (\theta / 2) D \cdot \left[ \frac{1}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha \right)} + \frac{1}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha \right)} \right] - x \cdot \frac{\cos \alpha \tan \alpha \sin (\theta / 2)}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha \right)}}$$

## 5.2 问题二的模型

### 5.2.1 模型的建立

问题二在问题一的基础上增加了测线方向夹角的变量，本文建立三维立体几何模型，通过几何关系和三角换算解决问题。三维空间构造如下：



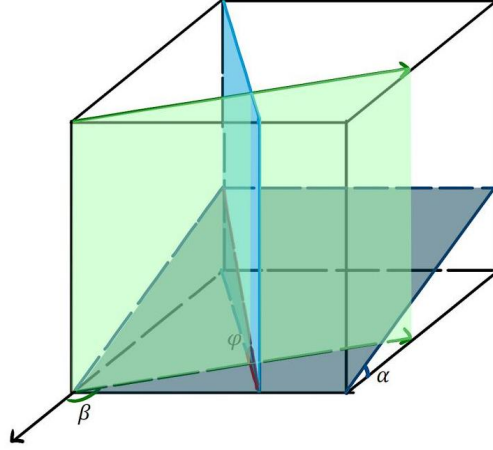


图 5.1 问题二模型（1）

图 5.1 中，绿色箭头为船行方向，深蓝色线体构成的平面为海底坡面，浅蓝色线条构成平面为声波所在平面。本模型构建目的是根据 $\alpha$ 和 $\beta$ 角度关系求得声波所在平面与坡面的交线与水平面之间的夹角 $\varphi$ 。

由几何关系可得：

$$\tan \varphi = \frac{\tan \alpha}{\cos (\pi - \beta) \tan \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right) + \sin (\pi - \beta)}$$

化简得：

$$\varphi = \tan^{-1} (\tan \alpha \sin \beta)$$

据此可以得到声波所在平面与坡面交线与水平面的夹角。联立第一问得到的式子，可以得出在夹角 $\theta$ 的情况下，初始的覆盖宽度：

$$W_0 = \frac{D_0 \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \varphi \right)} + \frac{D_0 \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \varphi \right)}$$

其中  $D_0$  是海域中心点海水深度， $\theta$  是换能器开角。

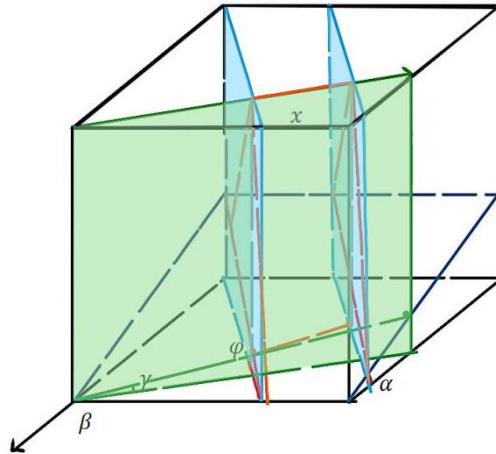


图 5.2 问题二模型（1）



图 5.2 中，绿色箭头为船行方向，绿色线构成的平面为行船航线垂直于水平面构成的平面。 $\gamma$ 为行船航线所在平面与坡面交线与水平面的夹角。

由几何关系可得：

$$\tan \gamma = \frac{\tan \alpha}{\frac{1}{\cos (\pi - \beta)}}$$

化简得：

$$\gamma = \tan^{-1}(\tan \alpha \cos (\pi - \beta))$$

由相似三角形边角关系可得：

$$\frac{W'}{W} = \frac{D'}{D}$$

由三角关系可知：

$$D' = D - x \tan \gamma$$

其中  $x$  是测量船距海域中心点处的距离，单位是海里。

联立可以得到：

$$W = \frac{D_0 - x \tan \gamma}{D_0} \cdot \left( \frac{D_0 \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \varphi \right)} + \frac{D_0 \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \varphi \right)} \right)$$

其中  $D_0$  是海域中心点海水深度， $x$  是测量船距海域中心点处的距离。

### 5.2.2 模型的求解

本文使用 Python 程序，将求得数学模型输入并且获得以下结果：

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线方向夹角/°	0	415.692	466.091	516.490	566.889	617.288	667.686	718.085	768.484
	45	416.120	451.794	487.468	523.142	558.816	594.491	630.165	665.839
	90	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549
	135	416.120	380.446	344.772	309.098	273.424	237.750	202.076	166.402
	180	415.692	365.293	314.894	264.496	214.097	163.698	113.299	62.900
	225	416.120	380.446	344.772	309.098	273.424	237.750	202.076	166.402
	270	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549
	315	416.120	451.794	487.468	523.142	558.816	594.491	630.165	665.839

表 3 result2

### 5.3 问题三的模型与求解

在问题的分析中发现，矩形海域内的斜向平行测线的覆盖宽度总是无法完全覆盖整个海域平面，接下来依据先前的分析可以分类讨论以下情况：

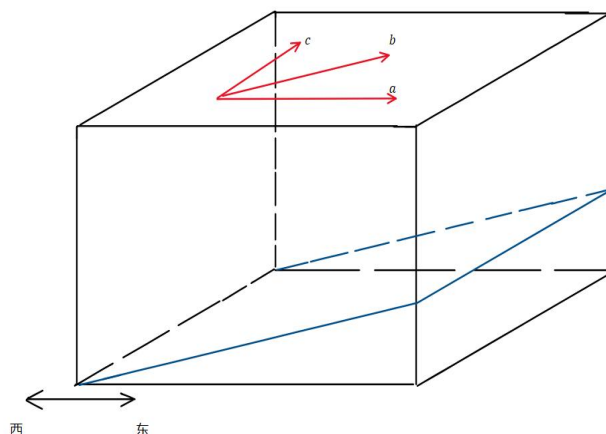


图 6 测线方向示意图

① 若测线方向夹角为  $90^\circ$ ，如图 6 中 c 航线所示。若要取得最短航线，且满足重叠率在 10%-20%之间。即保证由浅到深相邻航线之间的重合率均为 10%，那么由浅到深会得到由密到疏的测线间距。如图 7 所示， $a > b > c > d > e$ 。

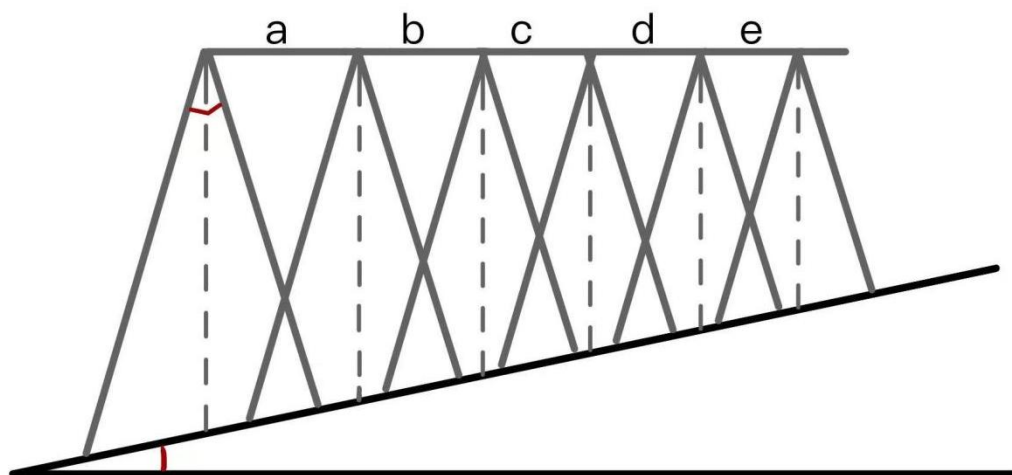


图 7  $\beta=90^\circ$ 时测线间距示意图

在此基础上结合第一题建立模型使用 MATLAB 程序求解。测线总长度结果计算为 122232m。平行测线绘图可由如图 8 所示：

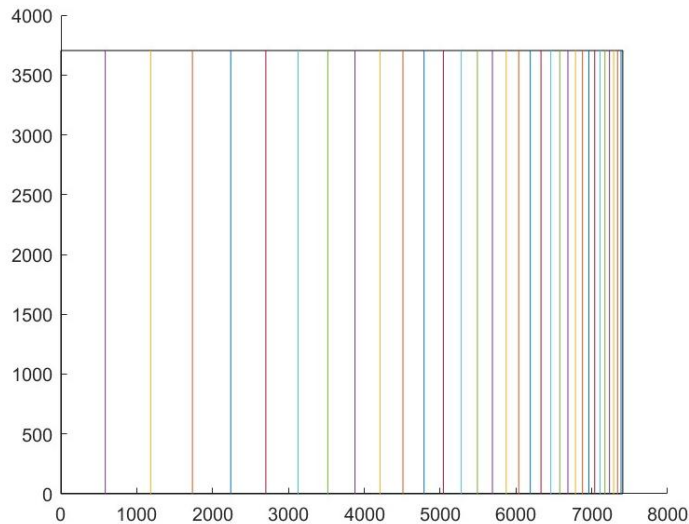


图 8 问题三测线分布图

② 若测线方向夹角为  $180^\circ$ ，如图 6 中 a 航线所示。若要取得最短航线，且满足重叠率在 10%-20%之间。则需要保证在矩形海域内，最浅的海域处测线重叠率均大于 10%，最深的海域处测线重叠率均小于 20%，两个条件需要同时满足。

通过代码计算可知，在深水区测线覆盖宽度为 375.68m，在浅水区测线覆盖宽度为 21.56m，由重叠率的计算公式可知，相邻测线间距至少为 300.547m，至多为 19.403m，故该测线间距不存在，情况②不成立。

③ 若测线方向夹角为  $90^\circ$ - $180^\circ$ ，如图 6 中 b 航线所示。若各条测线相互平行，且相邻测线之间的重叠率要在 10%-20%。

从图中我们可以看到，当测线方向夹角为  $90^\circ$  - $180^\circ$  时，若要满足完全覆盖整个待测海域，测线必须在其起始位置或终止位置与相邻测线重叠，从而导致测线无法满足相邻测线之间的重叠率在 10%-20%的条件。若要满足重叠率的限制条件，则需要忽略未被完全覆盖的面积因素。因此，我们对该情况不做过多讨论。仅对与  $90^\circ$  附近范围的夹角进行系统分析。

当测线方向夹角在  $90^\circ \pm 0.5^\circ$  范围内时，三角函数取值范围变化不大：

$$\sin 90^\circ = 1, \sin 90.5^\circ = 0.99996, \cos 90^\circ = 0, \cos 90.5^\circ = -0.0087$$

因此，我们可以在这种情况下将未被完全覆盖的面积作为次要因素忽略。我们发现由于角度发生了变化，每条测线的长度变长，且其间距变小，使得总长度更大，所以该种情况相比情况①，不是更优解。

## 5.3 问题四的模型

### 5.3.1 基于地形数据的分析

问题四给出了矩形海域的单波束测深数据，南北、东西向分别每隔 0.02 海里作为一个单波束测量点。由已知的数据输入 MATLAB 绘图工具，本文可以得到以下曲线拟合图：

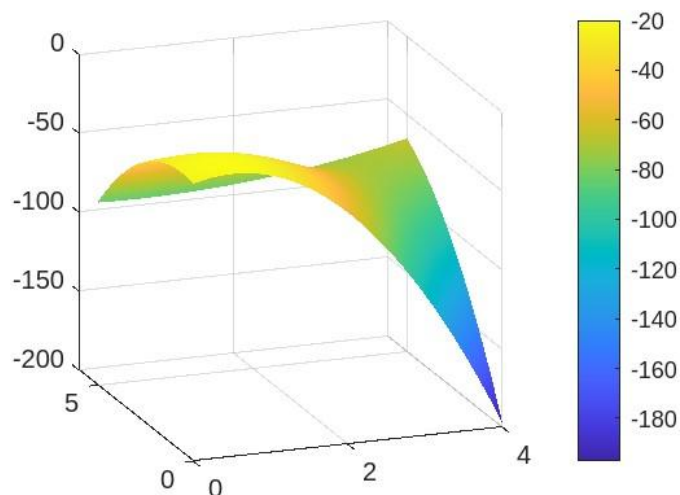


图 9 海底地形图

由数据分析可知，单波束数据的最深深度为 197.2 米，最浅深度为 20 米，极差为 177.2 米，平均深度为 63.5387 米。在 excel 表格软件里面利用统计分析可知，各点深度的方差为 888.6286。

### 5.3.2 模型的求解

由地形数据分析可以发现，海底地形总体呈现西南浅东南深，其中最深点出现在东南角。现定义南北方向轴线为  $y$  轴，正北方向为正方向，东西方向轴线为  $x$  轴，正东方向为正方向。联系问题四分析可知，需要根据地形数据将该地形进行切分。为了简化计算并获取最优航线，本文将把已知矩形海域切分成更小的矩形海域来计算，现在需要找到较优的地形划分方案。

运用 excel 分析可以得到地形数据中每行每列的方差值（详情结果见附录表 1）。由方差数据可知，东西方向  $x=2.48$ ，南北方向  $y=4.48$ ，行列方差最小，其方差分别是 35.70 与 5.20。本文以此作为依据，将待测海域划分为四个矩形，直观如图所示：

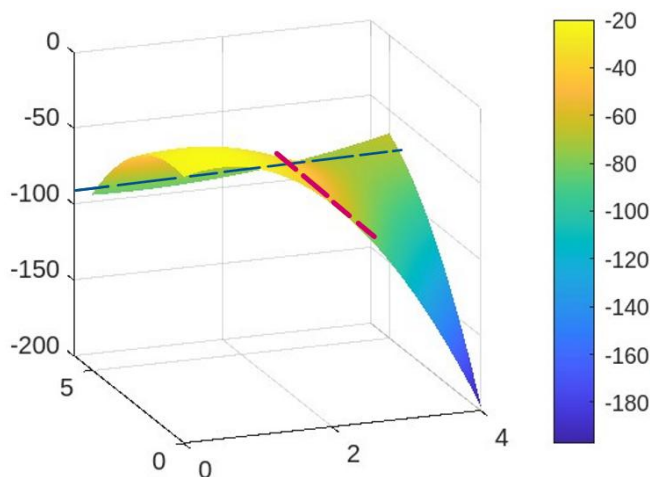


图 10 海底地形图

在此划分的基础上，需要分为四块矩形区域讨论最终用于计算的拟合坡度。首先将每一块矩形区域各行各列的深度平均值进行计算，并利用最小二乘法拟合出该矩形区域南北、东西方向上的最优回归曲线。根据此回归方程，可以得到最佳拟合坡度。将坡度数据代入问题三得到的最优测线方案，即可以获得每块矩形区域的最优航线。

以下是分别对四块矩形海域的坡度以及测线长度求解：

① 区域一：  $0 \leq x \leq 2.48$ ,  $0 \leq y \leq 4.48$

对于区域一的东南西北方向上各行各列的深度取平均值，运用 excel 计算绘图可以得到如图 11.1、图 11.2 的曲线以及拟合斜坡：

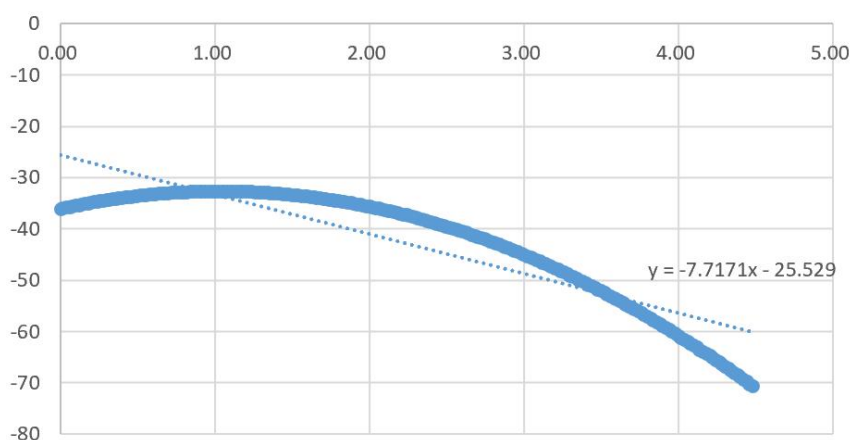


图 11.1 区域一的南北坡度拟合

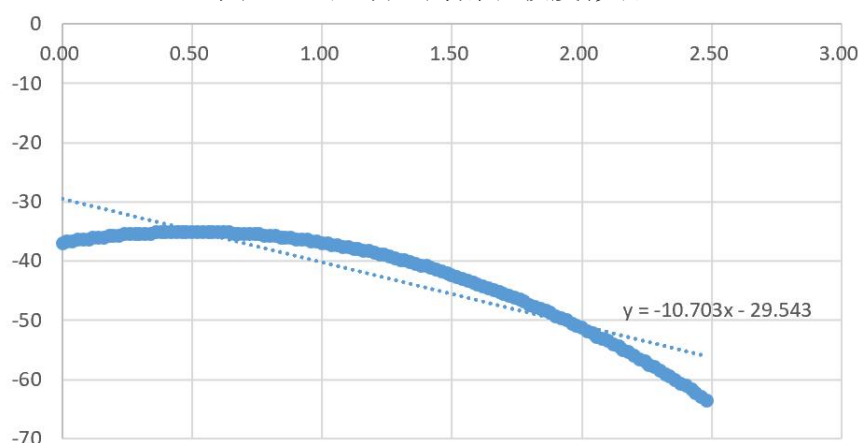


图 11.2 区域一的東西坡度拟合

由以上数据可以得到，南北拟合坡度 $\alpha=0.238744^\circ$ ，东西拟合坡度 $\alpha=0.331118^\circ$ 。将两个坡度值分别代入问题三所得模型中，利用 MATLAB 软件进行求解。可以得到，若航船沿着东西向航行，区域一测线长度为 303135.3600m；若航船沿着南北向航行，区域一测线长度为 298690.5600m。则在区域一内，取东西向坡面，测量船向南北方向航行，测线总长为 298690.5600m。

② 区域二：  $0 \leq x \leq 2.48$ ,  $4.48 \leq y \leq 5$

对于区域二的东南西北方向上各行各列的深度取平均值，运用 excel 计算绘图可以得到如图 11.3、11.4 图的曲线以及拟合斜坡：

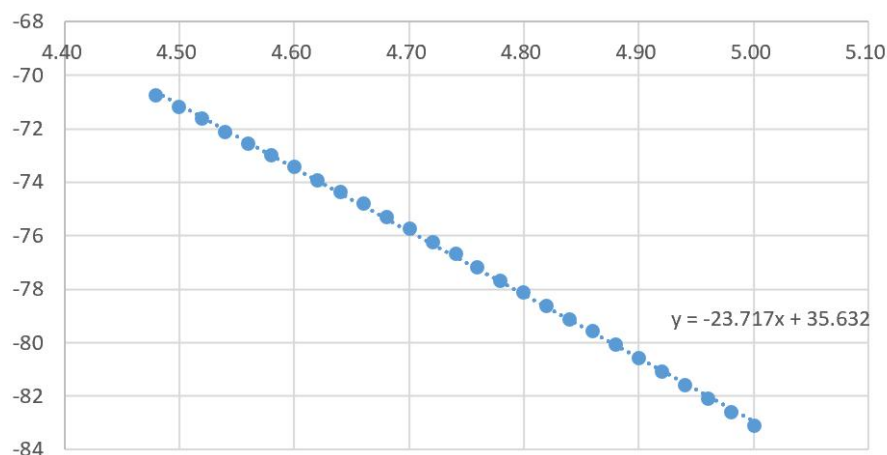


图 11.3 区域二的南北坡度拟合

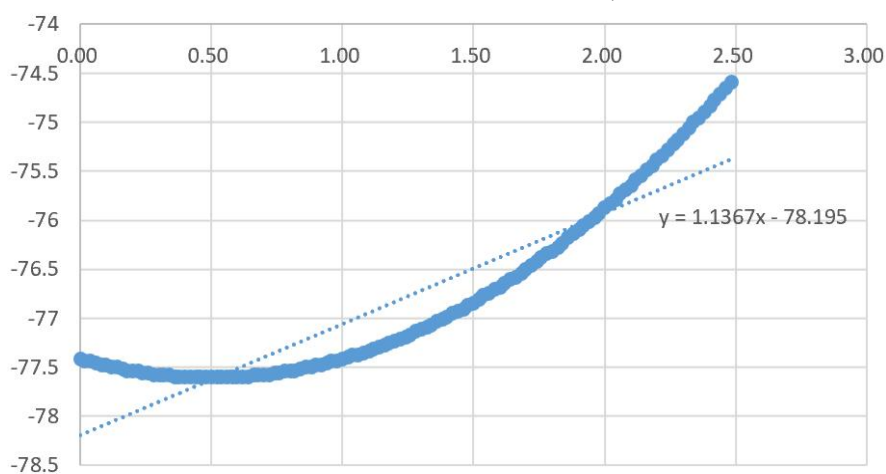


图 11.4 区域二的东西坡度拟合

由以上数据可以得到，南北拟合坡度 $\alpha=0.035166^\circ$ ，东西拟合坡度 $\alpha=0.733699^\circ$ 。将两个坡度值分别代入问题三所得模型中，利用 MATLAB 软件进行求解。可以得到，若航船沿着东西向航行，区域二测线长度为 18371.8400m；若航船沿着南北向航行，区域二测线长度为 19260.8000m。则在区域二内，取南北向坡面，测量船向东西方向航行，测线总长为 18371.8400m。

③ 区域三  $2.48 \leq x \leq 4$ ,  $4.48 \leq y \leq 5$

对于区域三的东西南北方向上各行各列的深度取平均值，运用 excel 计算绘图可以得到如图 11.5、11.6 图的曲线以及拟合斜坡：

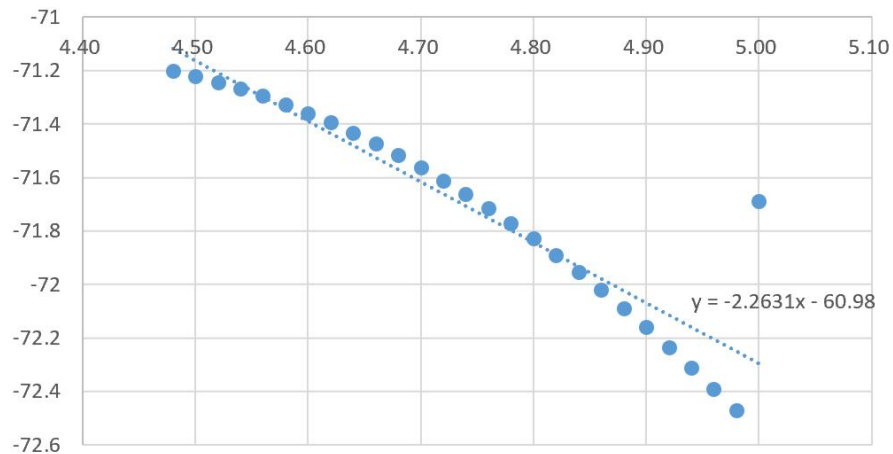


图 11.5 区域三的南北坡度拟合

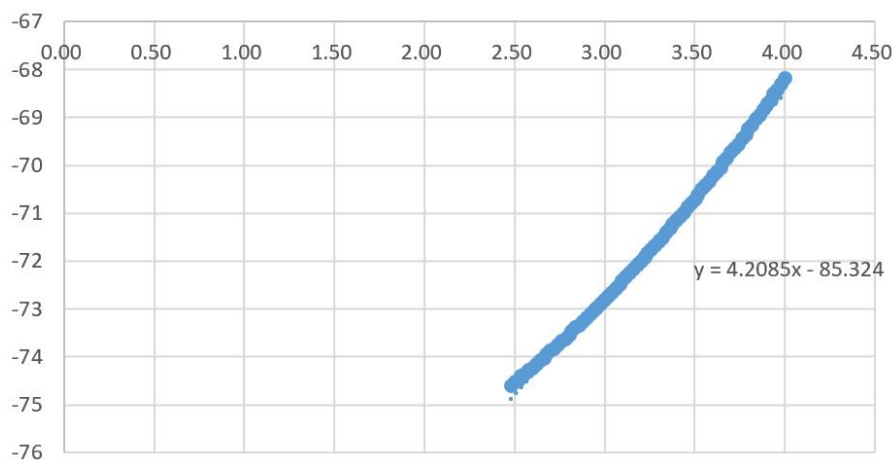


图 11.6 区域三的东西坡度拟合

由以上数据可以得到，南北拟合坡度 $\alpha=0.070014^\circ$ ，东西拟合坡度 $\alpha=0.130199^\circ$ 。将两个坡度值分别代入问题三所得模型中，利用 MATLAB 软件进行求解。可以得到，若航船沿着东西向航行，区域三测线长度为 12519.5200m；若航船沿着南北向航行，区域三测线长度为 18371.8400m。则在区域三内，取东西向坡面，测量船向南北方向航行，测线总长为 12519.5200m。

④ 区域四： $2.48 \leq x \leq 4$ ， $0 \leq y \leq 4.48$

对于区域四的东西南北方向上各行各列的深度取平均值，运用 excel 计算绘图可以得到如图 11.7、11.8 图的曲线以及拟合斜坡：



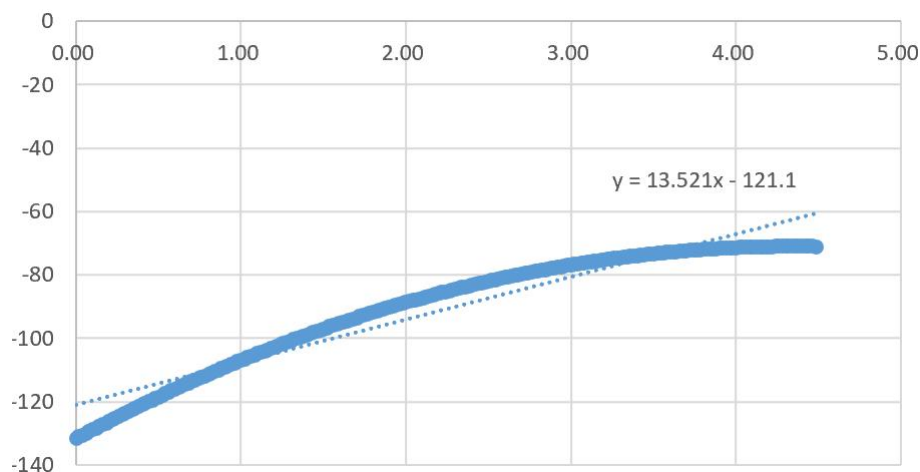


图 11.7 区域四的南北坡度拟合

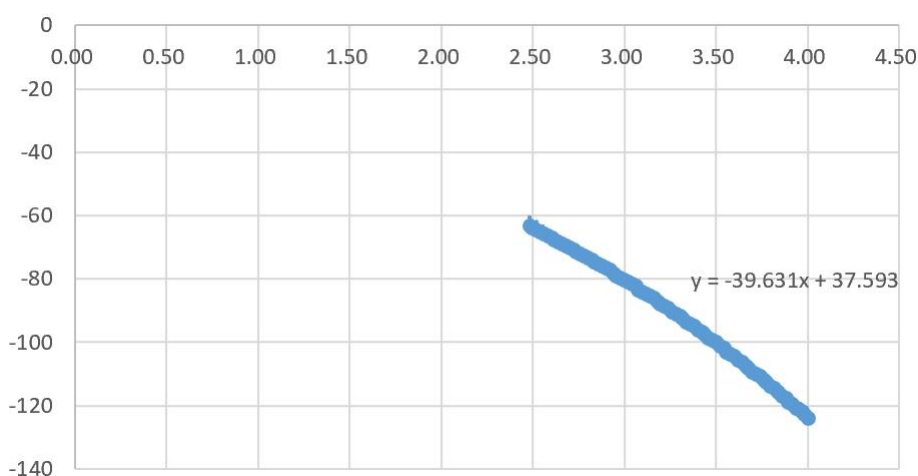


图 11.8 区域四的东西坡度拟合

由以上数据可以得到，南北拟合坡度 $\alpha=0.418295^\circ$ ，东西拟合坡度 $\alpha=1.225887^\circ$ 。将两个坡度值分别代入问题三所得模型中，利用 MATLAB 软件进行求解。可以得到，若航船沿着东西向航行，区域四测线长度为 87266.2400m；若航船沿着南北向航行，区域四测线长度为 82969.6000m。则在区域四内，取东西向坡面，测量船向南北方向航行，测线总长为 82969.6000m。

由四块区域的测线长度相加，可以得到最终的测线长度为 412551.5200m。

由于我们使用的是矩形区域上，测线方向为 $\beta=90^\circ$ 的最优测线。因此不需要考虑漏测区域与重叠率的问题。

## 六、模型评价与推广

### 6.1 模型的优点

1. 建立了海底多波束测深的基本模型，针对不同的海底坡度地形进行了相关要素的分析计算。
2. 在考虑现实因素和客观条件的前提下，提出了在矩形区域内的海底平坦坡度地形上的最佳多波束测深航线，模型阐述通俗易懂。
3. 问题一中关于重叠率公式的误差进行了进一步分析。得到在较小坡度下，重叠率仍

然可以使用题目中所提供的 $\eta=1-d/w$ 。

4. 问题三中，本文在实际分析之下，给出了六种建模方案，并根据题目要求选择了其中较优方案进行代码实现和阐释。
5. 借助模板的几何直观特征，仅使用初等运算即可得出相应的数学模型，直观快速。

## 6.2 模型的缺点

1. 在第一问模型建立的过程中，覆盖率计算使用了误差近似，会给模型的准确性造成一定影响。
2. 模型假设声波在海水中以恒定速度传播，不考虑声波在水中的折射。实际上声波的折射是多波束测深的误差所在。
3. 第四问中，本文简单将矩形海域切分，并在东西南北方向上进行测线布置。实际上此举的误差较大，需要更进一步将矩形海域微分并找到最短航线。

## 6.3 模型的推广

本模型展示了从二维到三维空间拓展的发展思想，从理想化的海底平面向真实的海底地形拓展，这对于地球陆地地形测绘和地外星球地表探测的发展具有所帮助。本模型还运用切割和近似逼近思想，可运用于工程优化，计算机图形学和机器学习等其它领域。

## 七、参考文献

- [1]刘保华,丁继胜,裴彦良等.海洋地球物理探测技术及其在近海工程中的应用[J].海洋科学进展,2005(03):374-384.
- [2]张伟.多波束测深系统在水下地形测量中的应用研究[D]
- [3]刘经南,赵建虎.多波束测深系统的现状和发展趋势[J].海洋测绘,2002(05):3-6.
- [4]JT/T 790-2010,多波束测深系统测量技术要求[S].

## 七、附录

### 附录 1

文件夹名	文件名	含义
数据	result1.xlsx	问题一结果
	result2.xlsx	问题二结果
	question1.py	求解问题一结果的程序
	question2.py	求解问题二结果的程序
代码	question3_1.m	求解问题三中 $\beta$ 角为 $90^\circ$ 时的结果
	question3_2.m	证明 $\beta$ 角为 $180^\circ$ 时无法找到最优解
	question4.m	根据由 excel 分析出的数据求解问题四
		对问题四进行了统计学分析,并为 question4.m 的代码运行提供了基本的数据基础。表格内容有多页,表格内容与各页标题内容相合。
其他支撑文件	问题四数据分析汇总.xlsx	

### 附录 2

#### Python 语言编写, 求解问题一结果

##### 问题一程序 question1.py

```
#调用 numpy 包
import numpy as np
#question1
#题目给出的基本参数
angleA = 2 * np.pi / 3
angleB = np.pi / 120
d1 = 200
angleC = ( np.pi - angleA ) / 2 - angleB
angleD = np.pi - angleA - angleC
#初始化表格最开始的数据
D1 = 70 - 800*np.tan(angleB)
#建立保存数据的空 list
DList1= []
WList1= []
etaList1= []
#计算 W 大小的函数定义
def width(D , angle01 , angle02 , angle1 , angle2):
    result = D * np.cos(angle02) * np.sin(angle01 / 2) * (np.sin(angle1) + np.sin(angle2)) /
    (np.sin(angle1) * np.sin(angle2));
    return result
#循环求解题目中给出的不同数值下的结果
for i in range(0,9):
    DList1.append(D1)
    W1 = width(D1, angleA, angleB, angleC, angleD)
    WList1.append(W1)
```

```

        D1 = D1 + d1*np.tan(angleB)
        eta = 1 - d1/WList1[i]
        etaList1.append(eta)
#打印结果
print(DList1)
print(WList1)
print(etaList1)

```

### 附录 3

#### Python 语言编写，求解问题二结果 问题二程序 question2.py

```

#调用 numpy 包
import numpy as np
#题目给出的基本参数
angleA = 2 * np.pi / 3
angleB = np.pi / 120
D2=120
d2=0.3*1852
beta=0
#建立保存数据的空 list
WList2=[]
#计算 W 大小的函数定义
def width(D , angle01 , angle02 , angle1 , angle2):
    result = D * np.cos(angle02) * np.sin(angle01 / 2) * (np.sin(angle1) + np.sin(angle2)) /
    (np.sin(angle1) * np.sin(angle2));
    return result
#循环求解题目中给出的不同数值下的结果
for j in range(0,8):
    D2=120
    D02=D2
    WList02=[]
    angleE=np.arctan(np.tan(angleB)*np.sin(beta))
    angleC = (np.pi - angleA) / 2 - angleE
    angleD = np.pi - angleA - angleC
    for i in range(0, 8):
        W2=width(D02, angleA, angleE, angleC, angleD)
        WList02.append(W2)
        D02=D2+d2*np.tan(angleB)*np.cos(beta)*(i+1)
    WList2.append(WList02)
    beta=(j+1)/4*np.pi
print(WList2)

```

### 附录 4

#### Matlab 语言编写，求解 $\beta$ 角为 $90^\circ$ 时的结果

### 问题三程序 question3\_1.m

%情况 1 的最短测线总长度的计算

%初始定义参数

```
angleA = 2 * pi / 3;
angleB = pi / 120;
D0 = 110 - 2 * 1852 * tan(angleB);
X = 2 * 1852;
Y = 4 * 1852;
angleC = (pi - angleA) / 2 - angleB;
angleD = pi - angleA - angleC;
x_solution = 0;
w2_solution = 0;
```

% 初始化变量

```
x0 = [0]; % 初始猜测值, 根据需要修改
options = optimset('Display', 'iter'); % 可选的显示设置
x_solution = fsolve(@(x) equation(x, D0, angleB, angleA, angleC, angleD),
x_solution, options); % 初始 x 解
D0=D0 + x_solution * tan(angleB);
s = x_solution; % 初始 s 值
k = 1;
%绘制海面俯视图
hold on;
rectangle('Position',[0 0 Y X]);
```

% 循环迭代, 由浅到深, 更新求解

```
while s + w2_solution < Y
k = k+1;
% 使用 fsolve 函数求解方程
x2_solution = fsolve(@(x) equation2(x, D0, angleB, angleA, angleC, angleD),
x_solution, options);
% 计算 w1、w2 和 wsum
w1_solution = (D0 + x2_solution * tan(angleB)) * cos(angleB) * sin(angleA / 2) /
sin(angleC);
w2_solution = (D0 + x2_solution * tan(angleB)) * cos(angleB) * sin(angleA / 2) /
sin(angleD);
D0=D0 + x2_solution * tan(angleB);
wsum_solution = w1_solution + w2_solution;
%在海面俯视图上绘制测线位置
plot([Y-s,Y-s],[0,X])
% 更新 s
s = s + x2_solution;
% 打印结果
L = k*2*1852
fprintf('x1 的解: %.6f\n', x_solution);
fprintf('x 的解: %.6f\n', x2_solution);
fprintf('w1 的解: %.6f\n', w1_solution);
fprintf('w2 的解: %.6f\n', w2_solution);
fprintf('wsum 的解: %.6f\n', wsum_solution);
fprintf('s 的值: %.6f\n', s);
fprintf('k 的值: %.6f\n', k);
fprintf('L 的值: %.6f\n', L);
end
hold off
% 定义方程, 计算测线开始位置
```

```

function result = equation(x, D0, angleB, angleA, angleC, angleD)
w1 = (D0 + x * tan(angleB)) * cos(angleB) * sin(angleA / 2) / sin(angleC);
w2 = (D0 + x * tan(angleB)) * cos(angleB) * sin(angleA / 2) / sin(angleD);
wsum = w1 + w2;
result = w2 - x;
end
%定义方程，计算下一条测线位置
function result = equation2(x, D0, angleB, angleA, angleC, angleD)
w1 = (D0 + x * tan(angleB)) * cos(angleB) * sin(angleA / 2) / sin(angleC);
w2 = (D0 + x * tan(angleB)) * cos(angleB) * sin(angleA / 2) / sin(angleD);
wsum = w1 + w2;
result = 0.9*wsum - x;
end

```

## 附录 5

**Matlab 语言编写，证明  $\beta$  角为  $180^\circ$  时无法找到最优解**

**问题三程序 question3\_2.m**

```

%初始定义参数
angleA = 2 * pi / 3;
angleB = pi / 120;
D0 = 110;
D1 = 110 + 2 * 1852 * tan(angleB);
D2 = 110 - 2 * 1852 * tan(angleB);
X = 2 * 1852;
Y = 4 * 1852;
angleC = (pi - angleA) / 2 - angleB;
angleD = pi - angleA - angleC;
angleE = 0
x_solution = 0

% 初始化变量
x0 = [0]; % 初始猜测值，根据需要修改
options = optimset('Display', 'iter'); % 可选的显示设置
x_solution = fsolve(@(x) equation1(x, D1, angleE, angleA, angleC, angleD),
x_solution, options); % 初始 x 解
x1=x_solution;
%计算覆盖宽度的最大值和最小值
w1_solution = (D1 - x_solution * tan(angleE)) * cos(angleE) * sin(angleA / 2) /
sin(angleC);
x_solution = fsolve(@(x) equation2(x, D2, angleE, angleA, angleC, angleD),
x_solution, options);
w2_solution = (D2 - x_solution * tan(angleE)) * cos(angleE) * sin(angleA / 2) /
sin(angleD);
x2=x_solution;
%计算测线间距的最大值和最小值
dmin = 0.8 * w1_solution
dmax = 0.9 * w2_solution
fprintf('wmax 的解: %.6f\n', w1_solution);
fprintf('wmin 的解: %.6f\n', w2_solution);
fprintf('dmin 的解: %.6f\n', dmin);

```



```

fprintf('dmax 的解: %.6f\n', dmax);
% 定义方程
function result = equation1(x, D1 , angleE, angleA, angleC, angleD)
w1 = (D1 - x * tan(angleE)) * cos(angleE) * sin(angleA / 2) / sin(angleC);
w2 = (D1 - x * tan(angleE)) * cos(angleE) * sin(angleA / 2) / sin(angleD);
wsum = w1 + w2;
result = wsum - x;
end
function result = equation2(x, D2 , angleE, angleA, angleC, angleD)
w1 = (D2 - x * tan(angleE)) * cos(angleE) * sin(angleA / 2) / sin(angleC);
w2 = (D2 - x * tan(angleE)) * cos(angleE) * sin(angleA / 2) / sin(angleD);
wsum = w1 + w2;
result = wsum - x;
end

```

## 附录 6

### Matlab 语言编写，求解问题四的最优解

#### 问题四程序 question4.m

%数据输入和变量的初始化

```

dataB= [10.703,7.7171,1.1367,23.717,4.2085,2.2631,39.631,13.521];
dataD0=[29.543,25.529,78.195-1.1367*2.48,23.717*4.48-35.632,85.324-4.48*4.2085,60.
98+2.2631*4.48,39.631*2.48-37.593,121.1-13.521*4.48];
dataY = [2.48,4.48,2.48,5-4.48,4-2.48,5-4.48,4-2.48,4.48];
dataX = [4.48,2.48,5-4.48,2.48,5-4.48,4-2.48,4.48,4-2.48];
dataangle = [0,0,0,0,0,0,0,0]
dataL = [0,0,0,0,0,0,0,0]
dataLf = [0,0,0,0]
n = 0;

```

%每一坡面的测线总长度的计算，代码与 question3\_1 基本相同，添加了一些记录数据的代码

```

while n<8
n=n+1;
angleA = 2 * pi / 3;
angleB = atan(dataB(n)/1852);
dataangle(n) = rad2deg(angleB)
D0 =dataD0(n) ;
Y = dataY(n)* 1852;
X = dataX(n)*1852;
angleC = (pi - angleA) / 2 - angleB;
angleD = pi - angleA - angleC;
x_solution = 0;
x0 = [0];
options = optimset('Display', 'iter');
x_solution = fsolve(@(x) equation(x, D0, angleB, angleA, angleC, angleD), x_solution,
options); % 初始 x 解
D0=D0 + x_solution * tan(angleB);
s = x_solution; % 初始 s 值
k = 1;
w2_solution = 0;

while s + w2_solution < Y
k = k+1;

```

```

x2_solution = fsolve(@(x) equation2(x, D0, angleB, angleA, angleC, angleD), x_solution,
options);
% 计算 w1、w2 和 wsum
w1_solution = (D0 + x2_solution * tan(angleB)) * cos(angleB) * sin(angleA / 2) /
sin(angleC);
w2_solution = (D0 + x2_solution * tan(angleB)) * cos(angleB) * sin(angleA / 2) /
sin(angleD);
D0=D0 + x2_solution * tan(angleB);
wsum_solution = w1_solution + w2_solution;
% 更新 s
s = s + x2_solution;
% 打印结果
L = k * X
fprintf('x1 的解: %.6f\n', x_solution);
fprintf('x 的解: %.6f\n', x2_solution);
fprintf('w1 的解: %.6f\n', w1_solution);
fprintf('w2 的解: %.6f\n', w2_solution);
fprintf('wsum 的解: %.6f\n', wsum_solution);
fprintf('s 的值: %.6f\n', s);
fprintf('k 的值: %.6f\n', k);
fprintf('L 的值: %.6f\n', L);
end
dataL(n)=L
end
n = 1;
%计算总长度
while n < 5
if dataL(2*n-1) < dataL(2*n)
dataLf(n) = dataL(2*n-1);
else
dataLf(n) = dataL(2*n);
end
n = n + 1;
end
total = sum(dataLf)
fprintf('%.4f\n',dataL)
fprintf('总长度: %.4f\n', total);
fprintf('角度: %.6f\n', dataangle);
% 定义方程
function result = equation(x, D0, angleB, angleA, angleC, angleD)
w1 = (D0 + x * tan(angleB)) * cos(angleB) * sin(angleA / 2) / sin(angleC);
w2 = (D0 + x * tan(angleB)) * cos(angleB) * sin(angleA / 2) / sin(angleD);
wsum = w1 + w2;
result = w2 - x;
end
function result = equation2(x, D0, angleB, angleA, angleC, angleD)
w1 = (D0 + x * tan(angleB)) * cos(angleB) * sin(angleA / 2) / sin(angleC);
w2 = (D0 + x * tan(angleB)) * cos(angleB) * sin(angleA / 2) / sin(angleD);
wsum = w1 + w2;
result = 0.9*wsum - x;
end

```