Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 09 luglio 2007 – parte A

E1 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2) e stato iniziale $X_0 = 0$.

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilita' di X_1, X_2 e X_{500}.

(b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1, 2 verso lo stato 2.

(c) Si calcolino $P[X_1 = 1, X_3 = 1 | X_2 = 1]$ e $P[X_2 = 1 | X_1 = 1, X_3 = 1]$.

E2 Si consideri una fabbrica in cui vi sono due macchine uguali. Ogni macchina alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha = 27$ giorni (funzionamento) e $1/\beta = 1/(9\alpha)$ (guasto). Ogni macchina, il cui funzionamento e' indipendente dall'altra, e' in grado di produrre 12 pezzi all'ora quando e' funzionante.

(a) Si calcoli la frazione del tempo in cui la produzione e' ferma (cioe' entrambe le macchine sono guaste), e la durata media di un intervallo di tempo durante il quale la produzione e' ferma

(b) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora

(c) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora se il numero di pezzi prodotti all'ora e' 12 quando c'e' una sola macchina in funzione e 30 quando sono in funzione entrambe

E3 Si consideri un nodo di rete con il seguente funzionamento. In assenza di traffico, il nodo alterna un periodo di sleep di durata esponenziale con media T e un periodo in cui e' sveglio ed e' in grado di ricevere, di durata fissa βT. In presenza di traffico in rete, se durante un periodo di sveglia viene trasmesso un pacchetto, il nodo lo riceve interamente (anche se questo richiede di restare sveglio per un tempo complessivamente superiore a βT), e subito dopo comincia un periodo di sleep. Se durante il periodo di sveglia non viene trasmesso nessun pacchetto, il nodo torna nello stato di sleep dopo il tempo βT. La probabilità che venga trasmesso un pacchetto mentre il nodo e' sveglio è α, l'istante di inizio della ricezione e' uniformemente distribuito in $[0, \beta T]$, e il tempo medio di trasmissione del pacchetto e' pari a γT. Si costruisca un modello semi-Markoviano per il funzionamento del nodo. In particolare:

(a) Si considerino i tre stati sleep (S), listening (L) e receiving (R), e si determini la matrice delle probabilita' di transizione della catena di Markov inclusa e se ne disegni il diagramma di transizione.

(b) Si determinino la matrice dei tempi medi associati ad ogni transizione, $\mathbf{T}$, e i tempi medi associati alla visita di ciascuno dei tre stati, μ_S, μ_L, μ_R.

(c) Si determini un'espressione per la frazione del tempo che il nodo passa in ognuno dei tre stati, e se ne calcoli il valore nel caso $\alpha = 0.5, \beta = 0.1, \gamma = 0.2$.

E4 Si consideri un sistema a cui arrivano richieste di servizio secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 20$ richieste all'ora. Ogni richiesta rimane nel sistema per un tempo di servizio pari a 6 minuti, e non c'e' limite al numero di richieste contemporaneamente in servizio. Si supponga che il sistema inizi ad operare al tempo $t = 0$.

(a) Si calcoli la probabilita' che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti.

(b) Si calcoli la probabilita' che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti, condizionata al fatto che fra 0 e t si siano verificati 10 arrivi.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 09 luglio 2007 – parte B

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Si dimostri che in una catena di Markov il periodo e' una proprieta' di classe.

T3 Si dimostri che per un processo di Poisson $X(t)$ la statistica di $X(s)$ condizionata a $X(t)$, $s < t$, e' binomiale, e si fornisca l'espressione di $P[X(s) = k | X(t) = n]$.

Compito 09 luglio 2007

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow P^2 = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.24 & 0.32 \\ & 0.12 & \end{pmatrix} \qquad x_0 = 0$$

) $x_1 = [0.4\ 0.4\ 0.2]$ $\quad x_2 = [0.44\ 0.24\ 0.32]$ $\quad \pi = [.05\ \ 0.25\ \ 0.25]$

)
$$\begin{cases} E[\theta_{02}] = 1 + P_{00} E[\theta_{02}] + P_{01} E[\theta_{12}] \\ E[\theta_{12}] = 1 + P_{10} E[\theta_{02}] + P_{11} E[\theta_{12}] \end{cases} \qquad E[\theta_{02}] = 3 \quad E[\theta_{12}] = 2$$

$$E[\theta_{22}] = \frac{1}{\pi_2} = 4$$

) $P[X_1 = 1\ \ X_3 = 1 \mid X_2 = 1] = P_{11} \cdot \dfrac{P[X_2 = 1 \mid X_1 = 1] P[X_1 = 1]}{P[X_2 = 1]} = \dfrac{P_{11} \cdot P_{11} \cdot P_{01}}{P_{01}^{(2)}} = 0.1333$

$P[X_2 = 1 \mid X_1 = 1\ \ X_3 = 1] = \dfrac{P[X_1 = 1\ \ X_3 = 1 \mid X_2 = 1]\ P[X_2 = 1]}{P[X_3 = 1 \mid X_1 = 1]\ P_{01}} = \dfrac{P_{11}^2 P_{01}}{P_{01}^{(2)}} \cdot \dfrac{P_{01}^{(2)}}{P_{01} \cdot P_{11}^{(2)}} = 0.333$

: 2

Due macchine indipendenti $\to F \sim \mathcal{E}(\frac{1}{27})$ $\quad \to G \sim \mathcal{E}(\frac{1}{3})$ $\quad \to 12\,pz/h$

) $P[1\text{ macchina guasta}] = \dfrac{E[G]}{E[F] + E[G]} = 0.1$ $\qquad P[2\text{ guaste}] = (P[1\text{ guasta}])^2 = 0.01$

$$E[f_{\dots}] = E[\min\{\mathcal{E}(\tfrac{1}{3}), \mathcal{E}(\tfrac{1}{3})\}] = E[\mathcal{E}(\tfrac{2}{3})] = 1.5\,s$$

) $E[\text{pezzi}] = [12 \cdot (1 - P[\text{guasta}])] \cdot 2 = 21.6\ pz$

c) 30 FF $\quad$ 12 GF FG $\quad$ 0 GG

$$E[\text{pezzi}] = 30 \cdot (1 - P[\text{guasta}])^2 + 2 \cdot 12 \cdot (1 - P_{\text{guasta}}) P_{\text{guasta}} = 26.46\ pz$$

E3

SLEEP $\sim \mathcal{E}(\frac{1}{T})$

ACTIVE $\simeq \beta T$

$P[t_x \mid \text{ACTIVE}] = \alpha$

Inizio $t_x \sim \mathcal{U}[0, \beta T]$

$T_{Tx} = \gamma T$

a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} \times & T & \times \\ \beta T & \times & \frac{\beta T}{2} \\ \gamma T & \times & \times \end{pmatrix}$$

b)

$\mu_S = T$

$\mu_L = (1-\alpha)\beta T + \alpha \dfrac{\beta T}{2}$

$\mu_R = \gamma T$

c) $\alpha = 0.5$ $\quad \beta = 0.1$ $\quad \gamma = 0.2$

$\pi_S = \dfrac{1}{2+\alpha}$ $\qquad \pi_L = \dfrac{1}{2+\alpha}$ $\qquad \pi_R = \dfrac{\alpha}{2+\alpha}$

$P_S = \dfrac{\pi_S \mu_S}{\pi_S \mu_S + \pi_L \mu_L + \pi_R \mu_R} = 0.8511$ $\quad P_L = 0.06383$ $\quad P_R = 0.0851$

E4

$\lambda = 20/60 = 1/3$ call/h $\qquad T_{\text{servizio}} = 6$ min

a) $P[X(30) = 0] = P[N(26, 30) = 0] = e^{-6\lambda} = 0.1353$

b) $P[X(30) = 0 \mid N(0, 30) = 10] = \dbinom{10}{0} \left(\dfrac{6}{30}\right)^0 \left(1 - \dfrac{6}{30}\right)^{10} = 0.1074$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2004/2005
prova scritta – 22 settembre 2005– parte A

E1 Si consideri la catena di Markov $X(t)$ con stati 1, 2, 3, $X(0) = 3$, e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino le probabilita' stazionarie e i tempi medi di ricorrenza di tutti gli stati.

(b) Si calcolino media e varianza del tempo di primo passaggio dallo stato 3 allo stato 1.

(c) Si calcolino media e varianza del tempo di primo passaggio dallo stato 1 allo stato 3.

(d) Si calcolino $P[X(1) = 1, X(3) = 1 | X(2) = 2]$ e $P[X(2) = 2 | X(1) = 1, X(3) = 1]$.

E2 Si consideri una coda alla quale arrivano pacchetti secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 1$ pacchetto al secondo. Tutti i pacchetti presenti nella coda vengono trasmessi quando si verifica uno dei seguenti due eventi: i) ci sono due pacchetti in coda, oppure ii) c'e' un solo pacchetto e il suo tempo di attesa e' pari a due secondi. La trasmissione e' istantanea, cioe' la coda si svuota ogni volta che arriva un pacchetto e ce n'e' gia' uno in coda, o quando l'unico pacchetto in coda ha accumulato un ritardo sufficiente.

(a) Si calcoli la percentuale di tempo durante la quale la coda e' vuota.

(b) Si calcoli la media del ritardo di un pacchetto (cioe' il tempo medio speso in coda).

E3 Si consideri un sistema di trasmissione a divisione di frequenza in cui il numero di canali sia sufficientemente elevato da trascurare la probabilita' che siano tutti occupati. A tale sistema arrivano richieste di connessione secondo un processo di Poisson con intensita' $\lambda = 100$ chiamate all'ora, e la durata di ognuna di tali chiamate e' esponenziale con media 6 minuti. Sia $X(t)$ il numero di canali occupati al tempo t

(a) Si calcoli la media di $X(t)$ per $t = 6, 10$ minuti e per $t = \infty$.

(b) Si calcoli $P[X(t) = 10]$ per $t = 6$ e per $t = \infty$

(c) Si ripetano i calcoli delle due domande precedenti nel caso in cui la distribuzione della durata delle chiamate e' uniforme nell'intervallo [2, 10] (minuti)

E4 Si consideri il funzionamento del protocollo Go-Back-N su un canale Markoviano a due stati con probabilita' di transizione 0.99 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilita' che un pacchetto sia errato e' 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono. Il tempo di round-trip e' pari a $m = 2$ slot (cioe' un pacchetto errato trasmesso al tempo t verra' ritrasmesso al tempo $t + m$).

(a) Si calcoli il throughput del protocollo nel caso di feedback perfetto (cioe' senza errori)

(b) Si calcoli il throughput del protocollo nel caso in cui il feedback sia soggetto a errori indipendenti con probabilita' di errore 0.1.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2004/2005
prova scritta – 22 settembre 2005– parte B

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Dimostrare che il periodo e' una proprieta' di classe.

T3 Si consideri una passeggiata casuale sugli interi non negativi con le seguenti probabilita' di transizione: $P_{01} = 1$, $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = q, i > 0$, con $p + q = 1$. Se ne studi il comportamento, caratterizzandone in particolare la ricorrenza o transitorieta' e ricavandone la distribuzione stazionaria.

Compito 22 sett 2005

1

$x(0)=3 \qquad P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $0.3\pi_0 + 0.2\pi_1 = \pi_1$ $\longrightarrow$ $\pi_0 = 0.5556$ $\quad m_0 = 1.8$

$0.2\pi_0 + 0.6\pi_1 = \pi_2$ $\quad \pi_1 = 0.2083$ $\quad m_1 = 4.8$

$\pi_2 = 0.2361$ $\quad m_2 = 4.235$

b) $E[\theta_{ij}] = 1 + \sum_{k\neq j} P_{ik} E[\theta_{kj}] \qquad E[\theta_{ij}^2] = 2E[\theta_{ij}] - 1 + \sum_{k\neq j} P_{ik} E[\theta_{kj}^2]$

$$\begin{cases} E[\theta_{31}] = 1 + P_{32} E[\theta_{21}] + P_{33} E[\theta_{31}] \\ E[\theta_{21}] = 1 + P_{22} E[\theta_{21}] + P_{23} E[\theta_{31}] \end{cases} \qquad E[\theta_{31}] = 1$$

$\longrightarrow Var[\theta_{31}] = 0$

$E[\theta_{31}^2] = 2E[\theta_{31}] - 1 + P_{32} E[\theta_{21}^2] + P_{33} E[\theta_{31}^2] \qquad E[\theta_{31}^2] = 1$

c)

$$\begin{cases} E[\theta_{13}] = 1 + P_{12} E[\theta_{23}] + P_{11} E[\theta_{13}] \\ E[\theta_{23}] = 1 + P_{22} E[\theta_{23}] + P_{21} E[\theta_{13}] \end{cases} \qquad E[\theta_{13}] = 3.235 \quad E[\theta_{23}] = 2.055$$

$Var[\theta_{33}] = 3.135$

$$\begin{cases} E[\theta_{13}^2] = 2E[\theta_{13}] - 1 + P_{12} E[\theta_{23}^2] + P_{11} E[\theta_{13}^2] \\ E[\theta_{23}^2] = 2E[\theta_{23}] - 1 + P_{22} E[\theta_{23}^2] + P_{21} E[\theta_{13}^2] \end{cases} \qquad E[\theta_{33}^2] = 13.62$$

d)

$P[x(1)=1\ x(3)=1 \mid x(2)=2] = P[x(1)=1 \mid x(2)=2]\ P_{21} = \dfrac{P[x(2)=2 \mid x(1)=1]\ P[x(1)=1]\ P_{21}}{P[x(2)=2]}$

$= \dfrac{P_{12} P_{21} \cdot 1}{P_{12}} = 0.2$

$P[x(2)=2 \mid x(1)=1\ x(3)=1] = \dfrac{P[x(1)=1\ x(3)=1 \mid x(2)=2]\ P[x(2)=2]}{P[x(3)=1 \mid x(1)=1]\ P[x(1)=1]} = \dfrac{P_{21}\ P_{12}}{P_{11}^{(2)} \cdot 1} =$

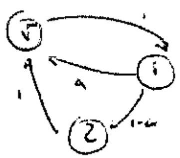
$= 0.476$

2

$\lambda = 1\ s^{-1}$

$T_x = \begin{cases} > 2s \\ 2^- \text{ pick} \end{cases}$

a)



$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha = P[\text{Consumi in } 2s] = e^{-2\lambda}$

$T=\begin{pmatrix} x & 1/\lambda & x \\ 2s & x & \beta \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \qquad \beta = E[\underset{2}{3}_{\text{condiz.}}] = \int_0^2 \dfrac{x\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-2\lambda}}\,dx = \dfrac{1-3e^{-2\lambda}}{1-e^{-2\lambda}}$

Distr. staz.

$\pi_v = \pi_1 = \dfrac{1}{3-\alpha} \qquad \pi_2 = \dfrac{1-\alpha}{3-\alpha}$

Medie temporali

$\mu_1 = \alpha \cdot 2 + (1-\alpha)\dfrac{(1-3e^{-2\lambda})}{1-e^{-2\lambda}} = 2e^{-2\lambda} + 1 - 3e^{-2\lambda} = 1 - e^{-2\lambda}$ $\longleftarrow E[\,\xi_{\text{TROM.}}\,]$

$\mu_v = 1/\lambda$

$\mu_2 = 0$

$P_v = \dfrac{\pi_v \mu_v}{\pi_v\mu_v + \pi_1\mu_1 + \pi_2\mu_2} = 0.5363$

b) Tempo medio in coda

$E[\text{coda}] = P_v \cdot \mu_1 + P_1 \cdot 0 = 0.4637$ $\longleftarrow$ Il primo pick attende μ_1, il secondo attende 0

E3

$\lambda = \frac{5}{3}$ pck/min   Tempo di servizio $\mathcal{E}(1/6)$ $\boxed{M/G/\infty}$

a) $x(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_p t)$ $\lambda_p t = \lambda \int_0^t (1-G(z))\,dz = \frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]$

$$E[x(t)] = \lambda_p t = \begin{cases} 6.321 & t=6 \\ 8.111 & t=10 \\ 10 & t=+\infty \end{cases}$$

b) $$P[x(t)=10] = \frac{(\lambda_p t)^{10}}{10!} e^{-\lambda_p t} = \begin{cases} 0.05046 \\ \\ 0.1251 \end{cases}$$

c) Tempo di servizio $\sim \mathcal{U}[2,10]$

$$\lambda_p t = \begin{cases} \lambda t & t\le 2 \\ \lambda \cdot 2 + \frac{5}{4}(t-2) - \frac{1}{16}\left[t^2-4\right] & 2<t<10 \\ \lambda \cdot 6 & t>10 \end{cases}$$

$$E[x(t)] = \begin{cases} 8.33 & t=6 \\ 10 & t=10 \\ 10 & t=+\infty \end{cases}$$ Stazionario

$$P[x(t)=10] = \begin{cases} 0.107 \\ \\ 0.125 \end{cases}$$

E4

$n=2$ $P = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \longrightarrow P^2 = \begin{pmatrix} 0.9811 & 0.0189 \\ 0.189 & 0.811 \end{pmatrix}$

a) $$\text{Throughput} = \frac{p_{10}^{(n)}}{p_{10}^{(n)} + p_{01}\, m} = 0.506$$

b) $\delta = 0.1$

$$\text{Throughput} = \frac{(1-\delta)\,p_{10}^{(n)}}{(1-\delta)\left[p_{10}^{(n)} + m\, p_{01}\right] + m\delta\left[p_{10}^{(n)} + p_{01}^{(n)}\right]} = 0.7406$$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006
prova scritta – 12 dicembre 2006– parte A (90 minuti)

E1 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 5)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.7 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) Si calcoli $\lim_{n\to\infty} P^n$

(c) Si calcoli $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k$

(d) Si calcoli $P[X_4 = 5, X_2 = 3 | X_3 = 1, X_1 = 3]$

E2 Si consideri un nodo di rete che in condizioni normali riesce a smaltire un traffico pari a 1 Gbps. Tale nodo funziona normalmente per un tempo esponenziale di media $99T$, dopodiché entra in uno stato di allarme, durante il quale la sua capacità si riduce a 250 Mbps. Dopo essere rimasto T secondi nello stato di allarme, il nodo viene istantaneamente riparato, e ricomincia a funzionare correttamente.

(a) Si calcoli la frazione del tempo che il nodo passa nello stato di allarme, e il traffico medio smaltito (si supponga che le code siano sempre piene, cioè che ci siano sempre pacchetti da trasmettere)

(b) Si supponga ora che una volta entrato nello stato di allarme il nodo smetta completamente di funzionare dopo un tempo esponenziale di media $2T$, a meno che non venga riparato prima (come nel caso precedente, la riparazione richiede esattamente T da quando il nodo entra nello stato di allarme). Se il nodo smette di funzionare, deve essere interamente sostituito, e questo richiede un tempo $20T$, durante il quale il nodo non può gestire nessun traffico (si noti che questa sostituzione è diversa dalla semplice riparazione del caso precedente). Si calcolino: (i) il tempo medio fra due sostituzioni successive. (ii) la percentuale del tempo in cui il nodo non funziona, e (iii) il throughput del sistema.

E3 Si considerino due processi di Poisson indipendenti, $X_1(t)$ e $X_2(t)$, in cui $X_i(t)$ è il numero di arrivi del processo i nell'intervallo $[0, t]$. Il numero medio di arrivi per unità di tempo dei due processi è $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.5$

(a) Si calcolino $P[X_1(3) = 1 | X_1(3) + X_2(3) = 3]$ e $P[X_1(3) + X_2(3) = 3 | X_1(3) = 1]$

(b) Si calcolino $P[X_1(2) = 1 | X_1(3) = 3]$ e $P[X_1(3) = 3 | X_1(2) = 1]$

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput (numero medio di successi per slot) di un protocollo che trasmette pacchetti direttamente sul canale, senza ritrasmissioni.

(b) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(c) Come al punto precedente, con la differenza che il canale di ritorno è soggetto a errori indipendenti con probabilità 0.1

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006
prova scritta – 12 dicembre 2006– parte B (60 minuti)

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Dimostrare che se i e j comunicano e i è ricorrente, allora anche j è ricorrente.

T3 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

Compito 12 dicembre 2006

E1

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.7 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

a) $\{0, 4\}$ ricorr. per.

$\{2\}$ trans.

$\{1, 3, 5\}$ ricorr. aper.

b)

$$P^n = \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ \times & 0.2 & 0 & 0.2 & \times & 0.2 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ \times & 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$\pi_1 = \pi_3 = \pi_5 = 1/3 \qquad \pi_0 = \pi_4 = 1/2$

$\alpha_4 = 0.2 + 0.5\alpha_4 = 0.4$

$\alpha_1 = 0.3 + 0.5\alpha_4 = 0.6$

c)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$P[X_4 = 5,\ X_2 = 3 \mid X_3 = 1,\ X_1 = 3] = \frac{P_{15} \cdot P[X_2 = 3,\ X_3 = 1 \mid X_1 = 3]}{P[X_3 = 1 \mid X_1 = 3]} = \frac{P_{15}\ P_{31} \cdot P_{33}}{P_{31}^{(2)}} = 0.1217$$

E2

$N \rightarrow \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{55T}\right) \qquad 1\ \text{Gbps}$

$A \rightarrow \quad T \qquad 250\ \text{Mbps}$

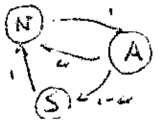
a)

$$P_{A} = \frac{E[A]}{E[N] + E[A]} = 0.55 \qquad P_N = 0.01$$

$$E[\text{traffico}] = R_N P_N + R_A P_A = 0.5525\ \text{Gbps}$$

b) $A \longrightarrow T \longrightarrow N$

$\longrightarrow \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2T}\right) \rightarrow S \longrightarrow 20T \longrightarrow N$



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} \times & 55T & \times \\ T & \times & \beta \\ 20T & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$\alpha = P\left[\mathcal{E}\left(\tfrac{1}{2T}\right) < T\right] = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\beta = E\left[\mathcal{E}_{\text{cond}}\left(\tfrac{1}{2T}\right)\right] = \frac{1}{1-e^{-1/2}} \int_0^T t\, e^{-\frac{t}{2T}} \ldots\, dt = \frac{T}{1-e^{-1/2}}\left[2 - 3 \ldots\right.$$

$\pi_N = \dfrac{1}{3 - e^{-1/2}}$

$\pi_A = \dfrac{1}{3 - e^{-1/2}}$

$\pi_S = \dfrac{1 - e^{-1/2}}{3 - e^{-1/2}}$

$\mu_N = 55T$

$\mu_S = 20T$

$\mu_A = (1 - e^{-1/2})\dfrac{T}{1-e^{-1/2}}\left[2 - 3e^{-1/2}\right] + T\left(e^{-1/2}\right)$

$= 2T\left(1 - e^{-1/2}\right) \longleftarrow$ troncata

$\left(f_A(t) = \frac{1}{2T}e^{-\frac{t}{2T}} + \delta(t - T)\right)$

$$P_A = \frac{\pi_A \mu_A}{\pi_N\mu_N + \pi_S\mu_S + \pi_A\mu_A} = \frac{20T\left(1-e^{-1/2}\right)}{22T\left(1-e^{-1/2}\right) + 55T}$$

$$\mu_{AA} = \frac{\mu_A}{P_A} = \frac{22T\left(1-e^{-1/2}\right) + 55T}{1 - e^{-1/2}} = 173.6\ T$$

$$\text{Throughput} = 250 \cdot P_A + 1000\, P_N = 521.4\ \text{Mbps}$$

CASO GEOMETRICA

$\#$ transizioni $N \to A \in \mathcal{G}_{\text{mod}}\left(1 - e^{-1/2}\right) \Rightarrow E[\#\ \text{trans}] = \left(1 - e^{-1/2}\right)^{-1}$

$$E[\text{ciclo}] = \frac{1}{1-e^{-1/2}}\, 55T + \underbrace{\left(\frac{1}{1-e^{-1/2}} - 1\right)}_{\text{altre } A \to A} T + \frac{T}{1-e^{-1/2}}\left(2 - 3e^{-1/2}\right) + 20T \Rightarrow P_A = \frac{E[A]}{E[\text{ciclo}]}$$

$$\Rightarrow Th = \frac{E[N]R_N + E[A]R_A}{E[\text{ciclo}]}$$

E3

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.5$

a) $P[X_1(3) = 1 \mid X(3) = 3] = \binom{3}{1}\left[\frac{\lambda 3}{2\lambda 3}\right]\left[1 - \frac{\lambda 3}{3 \cdot 2\lambda}\right]^2 = 0.375$

$P[X(3) = 3 \mid X_1(3) = 1] = P[X_2(3) = 2] = 0.125$

b) $P[X_1(2) = 1 \mid X_1(3) = 3] = \binom{3}{1}\left(\frac{2\lambda}{3\lambda}\right)\left(1 - \frac{2\lambda}{3\lambda}\right)^2 = 0.2222$

$P[X_1(3) = 3 \mid X_1(2) = 1] = P[X_1(1) = 2] = 0.2510$

E4

$$P = \begin{pmatrix} 0.58 & 0.42 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \longrightarrow P^4 = \begin{pmatrix} 0.3624 & 0.6376 \\ 0.155 & 0.8120 \end{pmatrix}$$

b) $S = 0.8246$

a) $\Rightarrow \pi_0 = 0.3333$

c) $S = 0.6760$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008

prova scritta – 17 giugno 2008 – parte A (90 minuti)

E1 Si consideri un nodo di rete che in condizioni di funzionamento normale N smaltisce un traffico pari a 100 Mbps. Dopo un tempo di funzionamento casuale con distribuzione esponenziale di media T, il nodo entra in uno stato di malfunzionamento M in cui la sua capacita' di smaltire traffico si riduce a 50 Mbps. Quando il nodo entra nello stato M, con probabilita' β torna a funzionare normalmente dopo un tempo distribuito uniformemente in $[0, \alpha_1 T]$, mentre con probabilita' $1-\beta$ smette di funzionare dopo un tempo distribuito uniformemente in $[0, \alpha_2 T]$ e deve essere sostituito, operazione che richiede un tempo deterministico pari a δT.

(a) Si costruisca un modello semi-Markoviano per il sistema. In particolare, indicando gli stati possibili con N, M e G (dove G e' lo stato durante il quale il nodo non funziona), si scrivano la matrice di transizione della catena di Markov inclusa e la matrice dei tempi medi associati alle transizioni.

(b) Usando il modello semi-Markoviano sviluppato al punto precedente, si calcoli in maniera parametrica la frazione del tempo che il nodo passa nei tre stati, e si calcoli il throughput medio smaltito dal nodo. Si calcolino inoltre i valori numerici di tali quantita' per $\beta = 0.9, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2$ e $\delta = 0.1$.

(c) Si calcolino le quantita' richieste al punto precedente usando la teoria dei processi di rinnovamento, individuando un ciclo di rinnovamento opportuno.

E2 Si consideri un nodo di rete con due link di ingresso, dai quali arrivano pacchetti secondo due processi di Poisson indipendenti $X_1(t)$ e $X_2(t)$ di intensita' $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 500$ pacchetti al secondo, dove un pacchetto e' composto da 1000 bit. Sia inoltre $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$.

(a) Si calcolino $P[X_1(3) = 2|X(3) = 3]$ e $P[X_1(2) = 2|X(2) = 3]$.

(b) Si calcolino $P[X_1(1) = 2|X(2) = 3]$ e $P[X(2) = 3|X_1(1) = 2]$.

(c) Si supponga che il link di uscita dal nodo sia un sistema di trasmissione costituito da un gran numero di canali paralleli, ognuno caratterizzato da un valore di bit rate pari a 1 Mbps. Supponendo che il sistema sia vuoto al tempo $t = 0$ e di poter trascurare l'eventualita' che un pacchetto che arriva non trovi un canale libero, determinare la probabilita' che vi siano due pacchetti in trasmissione agli istanti $t_1 = 0.5$ ms e $t_2 = 3$ ms.

E3 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

(a) si disegni il diagramma di transizione della catena, se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) si calcolino $\lim_{n\to\infty} P^n$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k$

(c) si calcoli la media del tempo di primo passaggio da tutti gli stati allo stato 4

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.99 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t+2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(b) Come al punto precedente se il canale di ritorno e' affetto da errori indipendenti con probabilita' 0.02.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008

prova scritta – 17 giugno 2008 – parte B (60 minuti)

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t)+1)$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a n passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_m P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \ldots, n$$

APPELLO 17 GIUGNO 2008

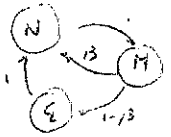
1

$N \rightarrow 100\ Mbps \quad T_N \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{T}\right)$

$M \rightarrow 50\ Mbps \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\beta} T_M \sim \mathcal{U}(0, a_1 T) \rightarrow N \\ \xrightarrow{1-\beta} T_M \sim \mathcal{U}(0, a_2 T) \rightarrow L \end{array}$

$L \rightarrow 0 \qquad T_L = \delta T$

a)



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1-\beta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} \times & T & \times \\ \frac{a_1 T}{2} & \times & \frac{a_2 T}{2} \\ \delta T & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$\mu_N = T \qquad \mu_M = \beta \frac{a_1 T}{2} + (1-\beta)\frac{a_2 T}{2} \qquad \mu_L = \delta T$$

b)

$$\pi_N = \pi_M = \frac{1}{3-\beta} \qquad \pi_L = \frac{1-\beta}{3-\beta}$$

$$P_N = \frac{\pi_N \mu_N}{\pi_N\mu_N + \pi_M\mu_M + \pi_L\mu_L} = 0.535 \qquad P_M = \frac{\pi_M \mu_M}{\pi_N\mu_N + \pi_M\mu_M + \pi_L\mu_L} = 0.0514 \qquad P_L = \frac{\pi_L \mu_L}{\pi_N\mu_N + \pi_M\mu_M + \pi_L\mu_L} = 0.00555$$

Throughput $= R_N P_N + R_M P_M = 56.65\ Mbps$

c)

successi $\in \mathcal{G}_{mod}(1-\beta) \qquad E[\#\text{ successi}] = \frac{1}{1-\beta}$

$$E[\text{ciclo}] = \left(\mu_N + \beta\frac{a_1 T}{2}\right) E[\#\text{ succ.}] + \frac{a_2 T}{2} + \delta T$$

$$P_N = \frac{\mu_N\ E[\#\text{ succ}]}{E[\text{ciclo}]} = 0.547 \qquad P_M = \frac{\left(\beta\frac{a_1}{2}T + (1-\beta)\frac{a_2}{2}T\right) E[\#\text{ succ}]}{E[\text{ciclo}]} = 0.04356$$

$P_L = 0.00547$

$$E[Th] = \frac{E[\#\text{ succ}]\left(100\,T + 50\,\beta\frac{a_1}{2}T\right) + 50\ \frac{a_2 T}{2}}{E[\text{ciclo}]}$$

E2

$\lambda_1 = \lambda_2 = 500$

a) $P[X_1(3) = 2 \mid X(3) = 3] = \binom{3}{2}\left(\frac{3\lambda}{3\cdot 2\cdot\lambda}\right)^2\left(1 - \frac{3\lambda}{3\cdot 2\cdot \lambda}\right) = 0.375$

$P[X_1(2) = 2 \mid X(2) = 3] = 0.375$

b) $P[X_1(1) = 2 \mid X(2) = 3] = \binom{3}{2}\left(\frac{\lambda}{4\lambda}\right)^2\left(1 - \frac{\lambda}{4\lambda}\right) = 0.1406$

$P[X(2) = 3 \mid X_1(1) = 2] = P[X_1(1) + X_2(2) = 3] = (\lambda 3)\, e^{-3\lambda} = 0.3347$

c) Tempo servizio = 1 ms

$P[2 \text{ pck in } t_1 = 0.5] = P[N(0, t_1) = 2] = \frac{(2\lambda t_1)^2}{2} e^{-2\lambda t_1} = 0.7582$

$P[2 \text{ pck in } t_1 = 3] = \pi_2 = \frac{(\lambda\cdot 2\cdot 1)^2 e^{-2\lambda\cdot 1}}{2} = 0.1535 \longleftarrow$ condizione stazionaria

E3

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

a) {0, 2} ricorr. per.
{3} trans.
{1, 4} ricorr. aper.

b) $\pi_0 = \pi_2 = \pi_1 = \pi_4 = 0.5 \qquad a_0 = 0.4 + 0.2 a_0 \rightarrow a_0 = a_1 = 0.5$

$$P^n = \begin{pmatrix} \times & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ \times & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0.5 & \times & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^{(k)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

c) $E[\theta_{14}]$

$E[\theta_{04}] = E[\theta_{24}] = E[\theta_{34}] = +\infty$

$E[\theta_{14}] = 1 + 0.3\,E[\theta_{14}] = \qquad E[\theta_{14}] = 1.428$

$E[\theta_{44}] = \pi_4^{-1} = 2$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 05 settembre 2007 – parte A

E1 Si consideri un server web a cui arrivano richieste di download secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 20$ richieste al secondo. Ognuna di esse, dopo un tempo di elaborazione fisso pari a 20 ms, da' luogo al trasferimento di un file la cui dimensione e' uniformemente distribuita fra 1 MByte e 2 MByte. Una richiesta si dice "attiva" da quando arriva fino a quando il trasferimento del file corrispondente e' terminato. Si supponga che la capacita' del server in termini di numero di richieste simultanee che puo' elaborare sia infinita, e che la velocita' di trasferimento di ciascun file sia 100 Mbit/s, indipendentemente dal numero di file che vengono contemporaneamente trasferiti.

(a) Supponendo che il server venga acceso al tempo $t = 0$, si dica dopo quanto tempo la statistica del numero di richieste attive arriva alla condizione stazionaria, e si dia l'espressione di $P[k$ richieste attive$]$ in tale condizione.

(b) Sapendo che in un intervallo di durata T sono arrivate N richieste, si trovi la probabilita' che alla fine di tale intervallo non ci sia nessuna richiesta attiva per (b1) $T = 0.1$ s e $N = 2$ e (b2) $T = 1$ s e $N = 20$.

✓ E2 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

(a) se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) si calcolino le probabilita' di assorbimento nelle varie classi ricorrenti a partire da tutti gli stati transitori

(c) si calcolino $\lim_{n\to\infty} P^n$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k$

(d) si calcoli il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati

E3 Una moneta e' lanciata finche' non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza.

(a) Si calcoli la probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC.

(b) Si calcoli la probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC dato che il risultato del primo lancio e' T.

(c) Si risponda alle due domande precedenti nel caso in cui la moneta sia truccata, con probabilita' che a un lancio si verifichi testa pari a $p = 1/4$.

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t+2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(b) Si consideri adesso un canale che alterna il comportamento precedente a uno con errori indipendenti con probabilita' 0.01. In particolare, il canale si comporta secondo il modello markoviano precedente per un numero geometrico di slot di media 1000000 slot, poi passa al comportamento iid per un numero geometrico di slot di media 2000000 slot, e cosi' via. Si calcoli il throughput del protocollo GBN in questa situazione.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 05 settembre 2007 – parte B

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t)+1)$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a n passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{m} P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \ldots, n$$

Compito 05 settembre 200[illegible]

1

$\lambda = 20$ [illegible]/s   Tempo servizio $\in \mathcal{U}[100, 150]$ ms

a) La statistica diventa stazionaria dopo 150 ms $\rightarrow \lambda_p t = \lambda E[Y]$ $\forall\, t \geq 150$ ms

$$x_k \in \mathcal{P}(\lambda_p t) \rightarrow \pi_k = \frac{(\lambda E[Y])^k}{k!} e^{-\lambda E[Y]} = \frac{(2.5)^k}{k!} e^{-2.5}$$

b)

$$P[X(T)=0 \mid N(0,T)=N] = \frac{P[N(0,T-E[Y])=N \quad N(T-E[Y],T)=0]}{P[N(0,T)=N]}$$

$$= \begin{cases} 0 & T=0.1,\ N=2 \rightarrow E[Y]>T \rightarrow \text{Non posso avere 2 pacchetti entro 100 ms essendo } \lambda(0)=0 \\ \binom{N}{0}\left(\frac{\lambda E[Y]}{\lambda}\right)^0\left(1-\frac{\lambda E[Y]}{\lambda}\right)^N = 0.04557 & N=20,\ T=1 \end{cases}$$

2

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

a) $C_0 = \{0,1\}$ ricorrente periodica
$C_1 = \{2,4\}$ ricorrente aperiodica
$\{3\}$ transitorio

b)
$u_0 = 0.5 + 0.2 u_0 \rightarrow u_0 = 0.625$
$u_4 = 0.3 + 0.2 u_4 \quad u_4 = 0.375$

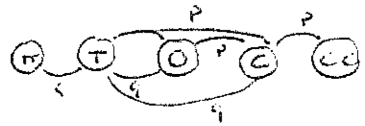
c)

$$P^k = \begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ x & x & 0.3125 & 0 & 0.3125 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \sum_{k=1}^{n} P^k = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.1875 & 0.1875 & & & \\ \hline \end{pmatrix}$$

d) Tempo ricorrenza

$m_0 = m_1 = 2 = m_2 = m_4 \qquad m_3 = +\infty$

E3



a)

$P[X_f = cc \mid X_0 = c] = p u_c + q u_T$

$u_c = p + q u_T$

$u_T = p u_c$

$$\boxed{u_c = \frac{p}{1-qp}} \quad \boxed{u_T = \frac{p^2}{1-qp}} \quad \boxed{u_O = \frac{p^2}{1-qp} + \frac{qp^2}{1-qp}}$$

$p = q = 1/2 \rightarrow u_c = 0.5$

b)
$P[X_f = cc \mid X_0 = T] = u_T = 1/3$

c) $q = 0.25 \rightarrow u_c = 0.2656$
$u_T = 0.1923$

E4

$$P = \begin{pmatrix} 0.98 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \longrightarrow P^2 = \begin{pmatrix} 0.5644 & 0.0176 \\ 0.153 & 0.0120 \end{pmatrix} \quad n=2$$

a) $Th_1 = 0.5646$

b) $C = 001$
$Th_2 = 0.5084$

$E[Th] = Th_1 \cdot \frac{1}{3} + Th_2 \cdot \frac{2}{3} = 0.5.35$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008
prova scritta – 14 luglio 2008 – parte A (90 minuti)

E1 Si consideri un server web a cui arrivano richieste di download secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 5$ richieste al secondo. Ognuna di esse, dopo un tempo di elaborazione uniformemente distribuito fra 10 e 30 ms, da' luogo al trasferimento di un file la cui dimensione e' esponenziale di media 1 MByte. Una richiesta si dice "attiva" da quando arriva fino a quando il trasferimento del file corrispondente e' terminato. Si supponga che la capacita' del server in termini di numero di richieste simultanee che puo' elaborare sia infinita, e che si voglia trasferire ciascun file a 100 Mbit/s, indipendentemente dal numero di file che vengono contemporaneamente trasferiti. Si supponga che il server venga acceso al tempo $t = 0$, e sia $X(t)$ il numero di richieste attive nel sistema al tempo t.

(a) Si calcoli la probabilita' che, dato che sono arrivate 5 richieste nell'intervallo da 0 a 1 s, almeno due di queste siano arrivate entro $t = 0.5$ s.

(b) Si dimensioni la capacita' del link di uscita dal server, in modo che la probabilita' che il numero di file da trasferire ecceda tale capacita' sia minore di 0.001

E2 Una moneta e' lanciata finche' non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza.

(a) Si calcoli la probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC, e la durata media del gioco.

(b) Come la domanda precedente, nel caso in cui il gioco finisca quando si verificano due lanci *diversi* in sequenza (cioe' CT o TC).

E3 Si consideri uno switch in cui vi sono due processori uguali e indipendenti. Ogni processore alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha$ (funzionamento) e $1/\beta = 1/(19\alpha) = 1$ giorno (guasto). Il traffico totale smaltito dallo switch e' pari a 2.5 Gbps se entrambi i processori sono attivi, 1 Gbps se ne funziona uno solo, e zero altrimenti.

(a) Si calcoli la frazione del tempo in cui lo switch non smaltisce traffico

(b) si calcoli la durata media di un intervallo di tempo durante il quale lo switch non smaltisce traffico

(c) si calcoli la durata media di un intervallo di tempo in cui c'e' un solo processore funzionante, e la probabilita' che in questo caso esso si guasti prima che l'altro torni in funzione

(d) si calcoli il traffico medio smaltito dallo switch

E4 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2)

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilita' di X_1, X_2 e X_{500}, dato che $X_0 = 0$.

(b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1 e 2 verso lo stato 2, e il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati.

(c) Sia $W_{ij}^{(n)} = E\left[\sum_{k=0}^{n-1} I\{X_k = j\} \middle| X_0 = i\right]$ il numero medio di visite allo stato j a partire dallo stato i durante i primi n istanti dell'evoluzione della catena. Si calcolino $W_{0j}^{(3)}$ e $W_{0j}^{(5000)}$ per $j = 0, 1, 2$.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008
prova scritta – 14 luglio 2008 – parte B (60 minuti)

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Si dimostri che in una catena di Markov il periodo e' una proprieta' di classe.

T3 Si dimostri che per un processo di Poisson $X(t)$ la statistica di $X(s)$ condizionata a $X(t)$, $s < t$, e' binomiale, e si fornisca l'espressione di $P[X(s) = k | X(t) = n]$.

Compito in classe 2008

1.

$\lambda = 5$ richieste/s $\quad T_c \sim \mathcal{U}[10, 50]$ ms $\quad T_{tx} \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{10MB/s}\right) \cdot \frac{1}{1000kbps}$

)

$P[N(0, 0.5) \geq 2 \mid N(0,1) = 5] = 1 - \binom{5}{1}\left(\frac{0.5\lambda}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{0.5\lambda}{\lambda}\right)^4 - \binom{5}{0}\left(1 - \frac{0.5\lambda}{\lambda}\right)^5 = 0.8125$

)

$\sum_{i=2}^{\infty} P[i \text{ richieste in } (100)\text{ms}] \leq 0.001 \qquad$ dove $100ms = E[\mathcal{U}] + E[\mathcal{E}]/_{1000kbps}$

Per via esaustiva

$e^{-\lambda 100ms} + (\lambda 100ms)\, e^{-\lambda 100ms} + \frac{(\lambda 100ms)^2}{2} e^{-\lambda 100ms} + \ldots \xrightarrow{\geq 0.999} n = 4 \to 0.9998$

Capacità minima $= n \cdot C = 4000$ kbps

2

)

$\mu_O = \frac{1}{2}\mu_C + \frac{1}{2}\mu_T$

$\mu_C = 2/3 \qquad \mu_O = 0.5$

$\mu_T = 1/3$

$v_O = 1 + \frac{1}{2}v_C + \frac{1}{2}v_T \qquad v_O = 3$

$v_C = 1 + \frac{1}{2}v_T \qquad v_C = 2$

$v_T = 1 + \frac{1}{2}v_C \qquad v_T = 2$

) I risultati risultano identici essendo $p = q$

E3

Processi ind. $\quad F \to T_F \sim \mathcal{E}(\alpha) \quad \alpha = 19 \qquad R_{FF} = 2.5$ Gbps $\quad R_{F4} = R_{4F} = 1$ Gbps

$4 \to T_4 \sim \mathcal{E}(\beta) \quad \beta = 1 \qquad R_{44} = 0$

a) Dall'indipendenza

$P_4 = \frac{E[T_4]}{E[T_4] + E[T_F]} = 0.05 \quad \longrightarrow \quad P_{44} = (P_4)^2 = 0.0025$

b)

$E[\text{non saltisce}] = E[\min\{\mathcal{E}(\beta), \mathcal{E}(\beta)\}] = \frac{1}{2\beta} = 0.5$

c)

$E[1 \text{ solo pc funzione}] = E[\min\{\mathcal{E}(\alpha), \mathcal{E}(\beta)\}] = \frac{1}{\alpha+\beta} = 0.05$

$P[2_{guasti} \mid 1_{guasto}] = P[\mathcal{E}(\alpha) < \mathcal{E}(\beta)] = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\alpha x})\beta e^{-\beta x}\,dx = 1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 0.95$

d)

$\text{Traffico} = R_{FF}(P_F)^2 + 2P_F P_4 R_{F4} = 2.351$ Gbps

E4

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \longrightarrow P^2 = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.32 & 0.32 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

a) $X_1 = [0.2 \;\; 0.4 \;\; 0.4] \quad X_2 = [0.36 \;\; 0.32 \;\; 0.32] \quad \pi = [1/3 \;\; 1/3 \;\; 1/3]$

b) $m_0 = m_1 = m_2 = 3 = E[\theta_{22}]$

$E[\theta_{i2}] \to \begin{cases} E[\theta_{02}] = 1 + P_{00}E[\theta_{02}] + P_{01}E[\theta_{12}] \\ E[\theta_{12}] = 1 + P_{10}E[\theta_{02}] + P_{11}E[\theta_{12}] \end{cases} \qquad E[\theta_{02}] = 2.5 \qquad E[\theta_{12}] = 2.5$

c) $W_{0j}^{(3)} = P_{0j}^{(0)} + P_{0j}^{(1)} + P_{0j}^{(2)} = \begin{cases} 1.56 & j=0 \\ 0.72 & j=1 \\ 0.72 & j=2 \end{cases}$

$W_{0j}^{(5000)} = 5000\,\pi_j = \begin{cases} 1667 & j=0 \\ 1667 & j=1 \\ \ldots & j=2 \end{cases}$

Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005
prova scritta – 2 settembre 2005– parte A

E1 Si consideri un centralino telefonico con una sola linea e la possibilita' di mettere in attesa una sola chiamata (ulteriori chiamate che arrivano quando ce n'e' gia' una in attesa sono perse). Le chiamate arrivano secondo un processo di Poisson di parametro cinque chiamate all'ora, e la durata di ognuna e' distribuita esponenzialmente con media sei minuti. Si calcolino

(a) la percentuale di chiamate perse

(b) la statistica del tempo di attesa di una chiamata

(c) il tempo medio totale speso nel sistema da una chiamata (attesa piu' servizio)

E2 Si consideri un sistema di tipo Slotted ALOHA che usi un canale condiviso a 10 Mbps, e in cui la durata di uno slot corrisponda a un pacchetto di 1000 bit. Nel sistema vi sono 100 utenti e la probabilita' di ritrasmissione e' $q_r = 0.005$.

(a) Si calcoli il massimo traffico smaltibile dal sistema, indicando sotto quali ipotesi tale valore puo' essere effettivamente raggiunto

(b) se il traffico complessivo generato nel sistema e' pari a $\lambda = 2000$ pacchetti/s, si calcoli il valore del drift quando il numero di utenti in backlog e' pari a $n = 5$ e $n = 20$. (Si supponga di poter usare l'approssimazione di Poisson per il traffico offerto totale.)

E3 Si consideri la rete con cinque nodi numerati da 1 a 5 e la seguente matrice di connettivita' in cui l'elemento d_{ij} e' la lunghezza del collegamento dal nodo i al nodo j (infinita se il collegamento diretto non e' presente):

$$D = \begin{pmatrix} - & 1 & \infty & 6 & \infty \\ 1 & - & 1 & 4 & \infty \\ \infty & 1 & - & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & - & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & - \end{pmatrix}$$

(a) si disegni la topologia della rete indicando i vari link e le distanze relative

(b) si applichi l'algoritmo di Bellman-Ford per la ricerca dei cammini minimi verso il nodo 1, elencando per ogni passo le distanze minime stimate

E4 Si consideri una passeggiata casuale sugli interi non negativi con le seguenti probabilita' di transizione: $P_{01} = 1$, $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = q$, $i > 0$, con $p + q = 1$. Sia $p = 0.4$.

(a) Si calcolino le probabilita' stazionarie che la passeggiata casuale si trovi nello stato 5 quando parte dallo stato 0 e quando parte dallo stato 5.

(b) Si calcoli $\lim_{n\to\infty} P_{05}^{(n)}$.

(c) Si calcoli la probabilita' stazionaria che la passeggiata casuale si trovi nello stato 5 quando parte dallo stato 0, nel caso in cui $p = 0.5$

(d) Se la catena parte dallo stato 1, si calcoli il tempo medio necessario per arrivare (per la prima volta) nello stato 3.

Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005
prova scritta – 2 settembre 2005– parte B

T1 Dimostrare che il numero k di arrivi di Poisson nell'intervallo $(0, s)$ condizionato al numero n di arrivi nell'intervallo $(0, t)$ con $t > s$ è una variabile casuale binomiale e darne la distribuzione di probabilita'

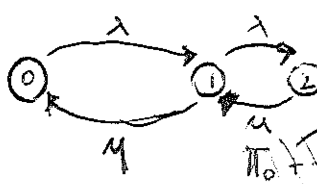
T2 Si analizzino le prestazioni del protocollo slotted ALOHA usando l'analisi dei drift, e se ne discuta la stabilita'.

T3 Si descriva il modello OSI, dando per ogni livello un elenco delle funzionalita' principali. Per i livelli piu' importanti, dare qualche esempio di possibile protocollo.

Ex 1 • arrivi con pdf P $\lambda = 5/\text{ora} = 0.5/6'$

• Tempo servizio è $\mathcal{E}(\mu)$ con $\frac{1}{\mu} = 6$ minuti

M|M|1



$\cancel{\pi_0 \lambda = \pi_1 \mu}$

$\cancel{\pi_0 + \pi_1 = 1}$

$\Rightarrow \cancel{\pi_0 + \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} = 1} \quad \cancel{\pi_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{5}{10}} = \frac{2}{3}} =$

$\pi_1 = \frac{1}{3}$ Frazione di chiamate perse

• $\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0$ $\qquad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$

$\pi_2 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0 \Rightarrow \pi_0 + \frac{\lambda}{\mu} \pi_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0 = 1$

$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{1}{1 + 0.5 + 0.25} = \frac{1}{1.75} = 0.57$

ma $\frac{\lambda}{\mu} = 0.5$

π_2 = probabilità chiamata persa $= \pi_0 (0.25) = 0.142$

<u>TEMPO ATTESA</u> - $T \in \mathcal{E}_1(\mu) + \mathcal{E}_2(\mu) \rightarrow$ tempo di attesa chiamata nuova

<u>CHIAMATA</u>

tempo di
di servizio chiamata precedente

TEMPO ATTESA IN CODA :

Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005
prova scritta – 16 dicembre 2005– parte A

E1 Si consideri la catena di Markov $X(t)$ con stati 1, 2, 3, $X(0) = 3$, e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino le probabilita' stazionarie e i tempi medi di ricorrenza di tutti gli stati.

(b) Si calcoli la media del tempo di primo passaggio dallo stato 1 allo stato 3.

(c) Si calcolino $P[X(1) = 1, X(3) = 1|X(2) = 2]$ e $P[X(2) = 2|X(1) = 1, X(3) = 1]$.

E2 Si consideri un sistema di trasmissione a divisione di frequenza in cui il numero di canali sia sufficientemente elevato da trascurare la probabilita' che siano tutti occupati. A tale sistema arrivano richieste di connessione (ogni connessione occupa un canale) secondo un processo di Poisson con intensita' $\lambda = 100$ chiamate all'ora, e la durata di ognuna di tali chiamate e' esponenziale con media 6 minuti. Sia $X(t)$ il numero di canali occupati al tempo t

(a) Si calcoli la media di $X(t)$ per $t = 6, 10$ minuti e per $t = \infty$.

(b) Si calcoli $P[X(t) = 10]$ per $t = 6$ e per $t = \infty$

(c) Si ripetano i calcoli delle due domande precedenti nel caso in cui la distribuzione della durata delle chiamate e' uniforme nell'intervallo [2, 10] (minuti)

E3 Una moneta e' lanciata finche' non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza. La moneta e' truccata. In particolare, la probabilita' che il risultato di un lancio sia testa (T) e' $p = 2/3$, mentre la probabilita' che si verifichi croce (C) e' $1 - p$. Calcolare:

(a) La probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC.

(b) La probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC dato che il risultato del primo lancio e' T.

E4 Si consideri un nodo a cui arrivano pacchetti di lunghezza costante pari a 1000 bit, e in cui l'unico link di uscita ha una velocita' di 1 Mbps. La statistica degli arrivi segue un processo di Poisson con intensita' $\lambda = 750$ pacchetti al secondo. Ogni pacchetto che arriva ha priorita' 1 (alta) con probabilita' 1/4 e priorita' 2 (bassa) con probabilita' 3/4. La priorita' di ogni pacchetto e' assegnata indipendentemente dagli altri. Il nodo implementa una politica di servizio che tiene conto delle priorita' dei pacchetti in maniera non-preemptive.

(a) si calcoli il tempo medio di attesa in coda e il tempo medio totale speso nel sistema dai pacchetti delle due classi

(b) si calcoli il tempo medio totale speso nel sistema da un pacchetto generico, e il numero medio totale di pacchetti nel nodo (compreso quello in trasmissione)

(c) si dica come cambiano le risposte al punto (a) nel caso in cui $\lambda = 1500$

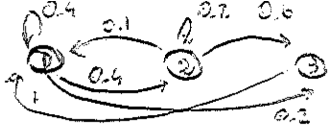
Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005
prova scritta – 16 dicembre 2005– parte B

T1 Dimostrare che il numero k di arrivi di Poisson nell'intervallo $(0, s)$ condizionato al numero n di arrivi nell'intervallo $(0, t)$ con $t > s$ è una variabile casuale binomiale e darne la distribuzione di probabilita'

T2 A partire dalle probabilita' degli eventi in intervalli infinitesimi, si derivi la distribuzione stazionaria del numero di pacchetti in una coda M/M/1. (Si diano tutti i dettagli della dimostrazione.)

T3 Si descrivano i protocolli ARQ Selective Repeat e Go-Back-N discutendone i rispettivi vantaggi e svantaggi.

E1: $P = \begin{array}{c} 0\\ 1\\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\pi_0 = \pi_0 \cdot 0.4 + \pi_1 0.2 + \pi_2 \qquad \pi_1(1-0.2) = \pi_0 0.4 \Rightarrow \pi_1 = \frac{0.4}{0.8}\pi_0$

$\pi_1 = \pi_0 \cdot 0.4 + \pi_1 0.2 + \qquad \Rightarrow \qquad \pi_0(1-0.4) = \pi_0 \frac{0.4}{0.8} \cdot 0.2 + \pi_2$

$\pi_2 = 0.2\pi_0 + 0.6\pi_1 \qquad \Rightarrow \pi_0 \cdot 0.5 = \pi_2 \Rightarrow \pi_0 + \pi_0 0.5 + \pi_0 0.5 = 1$

$\Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{2} \qquad \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow m_0 = 2 \qquad m_1 = m_2 = 4$

$E[\varphi_{13}] = 0.4\, E[\varphi_{23}] + 0.4\, E[\varphi_{13}] + 1 \qquad E[\varphi_{13}](1-0.4) = 0.4\, E[\varphi_{23}] + 1$

$E[\varphi_{23}] = 0.1\, E[\varphi_{13}] + 0.2\, E[\varphi_{23}] + 1 \Rightarrow E[\varphi_{23}](1-0.2) = 0.1\, E[\varphi_{13}] + 1$

$\Rightarrow E[\varphi_{13}] = \frac{0.4\, E[\varphi_{23}] + 1}{0.6} = \frac{2}{3} E[\varphi_{23}] + \frac{5}{3}$

E

Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005
prova scritta – 2 settembre 2005– parte A

E1 Si consideri la catena di Markov $X(t)$ con stati 1, 2, 3, $X(0) = 3$, e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino le probabilita' stazionarie e i tempi medi di ricorrenza di tutti gli stati.

(b) Si calcolino media e varianza del tempo di primo passaggio dallo stato 1 allo stato 3.

(c) Si calcolino $P[X(1) = 1, X(3) = 1|X(2) = 2]$ e $P[X(2) = 2|X(1) = 1, X(3) = 1]$.

E2 Si consideri un sistema di trasmissione a divisione di frequenza in cui il numero di canali sia sufficientemente elevato da trascurare la probabilita' che siano tutti occupati. A tale sistema arrivano richieste di connessione secondo un processo di Poisson con intensita' $\lambda = 100$ chiamate all'ora, e la durata di ognuna di tali chiamate e' esponenziale con media 6 minuti. Sia $X(t)$ il numero di canali occupati al tempo t

(a) Si calcoli la media di $X(t)$ per $t = 6, 10$ minuti e per $t = \infty$.

(b) Si calcoli $P[X(t) = 10]$ per $t = 6$ e per $t = \infty$

(c) Si ripetano i calcoli delle due domande precedenti nel caso in cui la distribuzione della durata delle chiamate e' uniforme nell'intervallo [2, 10] (minuti)

E3 Si consideri un sistema di trasmissione che usa il protocollo Selective Repeat per scambiare dati lungo un collegamento caratterizzato da una probabilita' di errore sul bit pari a $\varepsilon = 0.00001$, da un canale di ritorno perfettamente affidabile, e da un tempo di round-trip pari a $n = 7$ slot (dove uno slot e' pari al tempo di trasmissione di un blocco di 2000 bit). Si noti che in questo caso se un blocco trasmesso nello slot t e' errato, verra' ritrasmesso nello slot $t + n$.

(a) Si calcoli il massimo throughput del sistema in blocchi per slot.

(b) Sia $L' = 48$ bit l'overhead totale per blocco dovute al protocollo. Si determini la lunghezza ottima del pacchetto che massimizza il throughput in saturazione.

E4 Si consideri un nodo a cui arrivano pacchetti di lunghezza costante pari a 1000 bit, e in cui l'unico link di uscita ha una velocita' di 1 Mbps. La statistica degli arrivi segue un processo di Poisson con intensita' $\lambda = 750$ pacchetti al secondo. Ogni pacchetto che arriva ha priorita' 1 (alta) con probabilita' 1/3 e priorita' 2 (bassa) con probabilita' 2/3. La priorita' di ogni pacchetto e' assegnata indipendentemente dagli altri. Il nodo implementa una politica di servizio che tiene conto delle priorita' dei pacchetti in maniera non-preemptive.

(a) si calcoli il tempo medio di attesa in coda e il tempo medio totale speso nel sistema dai pacchetti delle due classi

(b) si calcoli il tempo medio totale speso nel sistema da un pacchetto generico, e il numero medio totale di pacchetti nel nodo (compreso quello in trasmissione)

(c) si dica come cambiano le risposte al punto (a) nel caso in cui $\lambda = 1500$

Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005
prova scritta – 2 settembre 2005– parte B

T1 Dimostrare che il numero k di arrivi di Poisson nell'intervallo $(0, s)$ condizionato al numero n di arrivi nell'intervallo $(0, t)$ con $t > s$ è una variabile casuale binomiale e darne la distribuzione di probabilita'

T2 A partire dalle probabilita' degli eventi in intervalli infinitesimi, si derivi la distribuzione stazionaria del numero di pacchetti in una coda M/M/1.

T3 Si descrivano i protocolli ARQ Selective Repeat e Go-Back-N discutendone i rispettivi vantaggi e svantaggi.

Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005
prova scritta – 25 luglio 2005– parte A

E1 Si consideri un gioco in cui una moneta viene lanciata ripetutamente finché non compare la sequenza THT.

(a) Si calcoli il numero medio di lanci prima che il gioco finisca (sugg.: si costruisca una catena di Markov opportuna)

(b) Si ripeta il punto precedente se la sequenza per la quale il gioco finisce è TH

(c) Si supponga ora che, invece che finire il gioco secondo le regole descritte in precedenza, si lanci ripetutamente la moneta. Ogni volta che si verifica la combinazione THT si perde un punto, mentre ogni volta che si verifica la combinazione TH se ne guadagna uno (si considerino anche eventuali sovrapposizioni, per esempio la sequenza THT contiene sia THT sia TH). Sia $R(N)$ il punteggio dopo N lanci, con $R(0) = 0$. Si calcolino $\lim_{N\to\infty} R(N)$ e $\lim_{N\to\infty} R(N)/N$

E2 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

(a) se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) si calcolino le probabilita' di assorbimento nelle varie classi ricorrenti a partire da tutti gli stati transitori

(c) si calcoli $\lim_{n\to\infty} P^n$

(d) si calcoli il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati

E3 Si consideri un sistema di trasmissione che usa il protocollo Go-Back-N per scambiare dati lungo un collegamento caratterizzato da una probabilita' di errore sul bit pari a $\varepsilon = 0.00001$, da un canale di ritorno perfettamente affidabile, e da un tempo di round-trip pari a $n = 7$ slot (dove uno slot e' pari al tempo di trasmissione di un blocco di 2000 bit, dei quali 16 costituiscono il CRC e 48 l'header). Si noti che in questo caso se un blocco trasmesso nello slot t e' errato, verra' ritrasmesso nello slot $t + n$. La velocita' trasmissiva del link e' 1 Mbps.

(a) Si calcoli la probabilita' di errore (cioe' che un blocco sia errato) e si dia una stima della probabilita' di errore non rivelato (cioe' che un blocco errato venga accettato come corretto).

(b) Si calcoli il massimo throughput del sistema in blocchi per slot e in bit al secondo.

E4 Si consideri una stazione di servizio con due serventi e con un ulteriore posto in coda, in modo che nel sistema non ci possano essere piu' di tre utenti. Se gli utenti arrivano secondo un processo di Poisson con intensita' uno ogni dieci minuti e il tempo di servizio e' esponenziale con media 15 minuti, si calcolino

(a) la probabilita' che un utente venga rifiutato perche' il sistema e' pieno

(b) il tempo medio speso nel sistema da un utente

Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005
prova scritta – 25 luglio 2005– parte B

T1 Dimostrare che se i e j comunicano e i è ricorrente, allora anche j è ricorrente.

T2 Si analizzino le prestazioni del protocollo slotted CSMA, e se ne discuta la stabilita'.

T3 Si confrontino i protocolli ARQ Go-Back-N e Selective Repeat, dandone una breve descrizione ed evidenziando i rispettivi vantaggi e svantaggi.