Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 05 settembre 2007 – parte A

E1 Si consideri un server web a cui arrivano richieste di download secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 20$ richieste al secondo. Ognuna di esse, dopo un tempo di elaborazione fisso pari a 20 ms, da' luogo al trasferimento di un file la cui dimensione e' uniformemente distribuita fra 1 MByte e 2 MByte. Una richiesta si dice "attiva" da quando arriva fino a quando il trasferimento del file corrispondente e' terminato. Si supponga che la capacita' del server in termini di numero di richieste simultanee che puo' elaborare sia infinita, e che la velocita' di trasferimento di ciascun file sia 100 Mbit/s, indipendentemente dal numero di file che vengono contemporaneamente trasferiti.

(a) Supponendo che il server venga acceso al tempo $t = 0$, si dica dopo quanto tempo la statistica del numero di richieste attive arriva alla condizione stazionaria, e si dia l'espressione di $P[k$ richieste attive$]$ in tale condizione.

(b) Sapendo che in un intervallo di durata T sono arrivate N richieste, si trovi la probabilita' che alla fine di tale intervallo non ci sia nessuna richiesta attiva per (b1) $T = 0.1$ s e $N = 2$ e (b2) $T = 1$ s e $N = 20$.

E2 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

(a) se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) si calcolino le probabilita' di assorbimento nelle varie classi ricorrenti a partire da tutti gli stati transitori

(c) si calcolino $\lim_{n\to\infty} P^n$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k$

(d) si calcoli il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati

E3 Una moneta e' lanciata finche' non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza.

(a) Si calcoli la probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC.

(b) Si calcoli la probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC dato che il risultato del primo lancio e' T.

(c) Si risponda alle due domande precedenti nel caso in cui la moneta sia truccata, con probabilita' che a un lancio si verifichi testa pari a $p = 1/4$.

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(b) Si consideri adesso un canale che alterna il comportamento precedente a uno con errori indipendenti con probabilita' 0.01. In particolare, il canale si comporta secondo il modello markoviano precedente per un numero geometrico di slot di media 1000000 slot, poi passa al comportamento iid per un numero geometrico di slot di media 2000000 slot, e cosi' via. Si calcoli il throughput del protocollo GBN in questa situazione.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 05 settembre 2007 – parte B

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t)+1)$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a n passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_m P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \ldots, n$$