Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006
prova scritta – 12 dicembre 2006– parte A (90 minuti)

E1 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 5)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.7 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) Si calcoli $\lim_{n\to\infty} P^n$

(c) Si calcoli $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k$

(d) Si calcoli $P[X_4 = 5, X_2 = 3 | X_3 = 1, X_1 = 3]$

E2 Si consideri un nodo di rete che in condizioni normali riesce a smaltire un traffico pari a 1 Gbps. Tale nodo funziona normalmente per un tempo esponenziale di media $99T$, dopodiché entra in uno stato di allarme, durante il quale la sua capacità si riduce a 250 Mbps. Dopo essere rimasto T secondi nello stato di allarme, il nodo viene istantaneamente riparato, e ricomincia a funzionare correttamente.

(a) Si calcoli la frazione del tempo che il nodo passa nello stato di allarme, e il traffico medio smaltito (si supponga che le code siano sempre piene, cioè che ci siano sempre pacchetti da trasmettere)

(b) Si supponga ora che una volta entrato nello stato di allarme il nodo smetta completamente di funzionare dopo un tempo esponenziale di media $2T$, a meno che non venga riparato prima (come nel caso precedente, la riparazione richiede esattamente T da quando il nodo entra nello stato di allarme). Se il nodo smette di funzionare, deve essere interamente sostituito, e questo richiede un tempo $20T$, durante il quale il nodo non può gestire nessun traffico (si noti che questa sostituzione è diversa dalla semplice riparazione del caso precedente). Si calcolino: (i) il tempo medio fra due sostituzioni successive, (ii) la percentuale del tempo in cui il nodo non funziona, e (iii) il throughput del sistema.

E3 Si considerino due processi di Poisson indipendenti, $X_1(t)$ e $X_2(t)$, in cui $X_i(t)$ è il numero di arrivi del processo i nell'intervallo $[0, t]$. Il numero medio di arrivi per unità di tempo dei due processi è $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.5$

(a) Si calcolino $P[X_1(3) = 1 | X_1(3) + X_2(3) = 3]$ e $P[X_1(3) + X_2(3) = 3 | X_1(3) = 1]$

(b) Si calcolino $P[X_1(2) = 1 | X_1(3) = 3]$ e $P[X_1(3) = 3 | X_1(2) = 1]$

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput (numero medio di successi per slot) di un protocollo che trasmette pacchetti direttamente sul canale, senza ritrasmissioni.

(b) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(c) Come al punto precedente, con la differenza che il canale di ritorno è soggetto a errori indipendenti con probabilità 0.1

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006
prova scritta – 12 dicembre 2006– parte B (60 minuti)

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Dimostrare che se i e j comunicano e i è ricorrente, allora anche j è ricorrente.

T3 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.