

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008
prova scritta – 14 luglio 2008 – parte A (90 minuti)

- E1 Si consideri un server web a cui arrivano richieste di download secondo un processo di Poisson di intensità $\lambda = 5$ richieste al secondo. Ognuna di esse, dopo un tempo di elaborazione uniformemente distribuito fra 10 e 30 ms, dà luogo al trasferimento di un file la cui dimensione è esponenziale di media 1 MByte. Una richiesta si dice “attiva” da quando arriva fino a quando il trasferimento del file corrispondente è terminato. Si supponga che la capacità del server in termini di numero di richieste simultanee che può elaborare sia infinita, e che si voglia trasferire ciascun file a 100 Mbit/s, indipendentemente dal numero di file che vengono contemporaneamente trasferiti. Si supponga che il server venga acceso al tempo $t = 0$, e sia $X(t)$ il numero di richieste attive nel sistema al tempo t .
- (a) Si calcoli la probabilità che, dato che sono arrivate 5 richieste nell'intervallo da 0 a 1 s, almeno due di queste siano arrivate entro $t = 0.5$ s.
 - (b) Si dimensiona la capacità del link di uscita dal server, in modo che la probabilità che il numero di file da trasferire ecceda tale capacità sia minore di 0.001
- E2 Una moneta è lanciata finché non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza.
- (a) Si calcoli la probabilità che il gioco termini con la sequenza CC, e la durata media del gioco.
 - (b) Come la domanda precedente, nel caso in cui il gioco finisca quando si verificano due lanci *diversi* in sequenza (cioè CT o TC).
- E3 Si consideri uno switch in cui vi sono due processori uguali e indipendenti. Ogni processore alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha$ (funzionamento) e $1/\beta = 1/(19\alpha) = 1$ giorno (guasto). Il traffico totale smaltito dallo switch è pari a 2.5 Gbps se entrambi i processori sono attivi, 1 Gbps se ne funziona uno solo, e zero altrimenti.
- (a) Si calcoli la frazione del tempo in cui lo switch non smaltisce traffico
 - (b) si calcoli la durata media di un intervallo di tempo durante il quale lo switch non smaltisce traffico
 - (c) si calcoli la durata media di un intervallo di tempo in cui c'è un solo processore funzionante, e la probabilità che in questo caso esso si guasti prima che l'altro torni in funzione
 - (d) si calcoli il traffico medio smaltito dallo switch
- E4 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2)

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- (a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilità di X_1 , X_2 e X_{500} , dato che $X_0 = 0$.
- (b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1 e 2 verso lo stato 2, e il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati.
- (c) Sia $W_{ij}^{(n)} = E \left[\sum_{k=0}^{n-1} I\{X_k = j\} \mid X_0 = i \right]$ il numero medio di visite allo stato j a partire dallo stato i durante i primi n istanti dell'evoluzione della catena. Si calcolino $W_{0j}^{(3)}$ e $W_{0j}^{(5000)}$ per $j = 0, 1, 2$.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008
prova scritta – 14 luglio 2008 – parte B (60 minuti)

- T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.
- T2 Si dimostri che in una catena di Markov il periodo e' una proprieta' di classe.
- T3 Si dimostri che per un processo di Poisson $X(t)$ la statistica di $X(s)$ condizionata a $X(t)$, $s < t$, e' binomiale, e si fornisca l'espressione di $P[X(s) = k | X(t) = n]$.