Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 09 luglio 2007 – parte A

E1 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2) e stato iniziale $X_0 = 0$.

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilita' di X_1, X_2 e X_{500}.

(b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1, 2 verso lo stato 2.

(c) Si calcolino $P[X_1 = 1, X_3 = 1|X_2 = 1]$ e $P[X_2 = 1|X_1 = 1, X_3 = 1]$.

Soluzione:

(a) X_1: Prima riga di $P = (0.4, 0.4, 0.2)$; X_2: Prima riga di $P^2 = (0.44, 0.24, 0.32)$; X_{500}: $\simeq \pi = (1/2, 1/4, 1/4)$

(b) $E[\theta_{02}] = 3, E[\theta_{12}] = 2, E[\theta_{22}] = 1/\pi_2 = 4$

(c) $P[X_1 = 1, X_3 = 1|X_2 = 1] = 1/15$; $P[X_2 = 1|X_1 = 1, X_3 = 1] = 1/3$.

E2 Si consideri una fabbrica in cui vi sono due macchine uguali. Ogni macchina alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha = 27$ giorni (funzionamento) e $1/\beta = 1/(9\alpha)$ (guasto). Ogni macchina, il cui funzionamento e' indipendente dall'altra, e' in grado di produrre 12 pezzi all'ora quando e' funzionante.

(a) Si calcoli la frazione del tempo in cui la produzione e' ferma (cioe' entrambe le macchine sono guaste), e la durata media di un intervallo di tempo durante il quale la produzione e' ferma

(b) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora

(c) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora se il numero di pezzi prodotti all'ora e' 12 quando c'e' una sola macchina in funzione e 30 quando sono in funzione entrambe

Soluzione:

(a) $(0.1)^2 = 0.01$; $(2\beta)^{-1} = 1.5$ giorni

(b) $2 \times 12 \times 0.9 = 21.6$

(c) $30 \times (0.9)^2 + 12 \times 0.18 + 0 \times 0.01 = 26.46$

E3 Si consideri un nodo di rete con il seguente funzionamento. In assenza di traffico, il nodo alterna un periodo di sleep di durata esponenziale con media T e un periodo in cui e' sveglio ed e' in grado di ricevere, di durata fissa βT. In presenza di traffico in rete, se durante un periodo di sveglia viene trasmesso un pacchetto, il nodo lo riceve interamente (anche se questo richiede di restare sveglio per un tempo complessivamente superiore a βT), e subito dopo comincia un periodo di sleep. Se durante il periodo di sveglia non viene trasmesso nessun pacchetto, il nodo torna nello stato di sleep dopo il tempo βT. La probabilità che venga trasmesso un pacchetto mentre il nodo e' sveglio è α, l'istante di inizio della ricezione e' uniformemente distribuito in $[0, \beta T]$, e il tempo medio di trasmissione del pacchetto e' pari a γT. Si costruisca un modello semi-Markoviano per il funzionamento del nodo. In particolare:

(a) Si considerino i tre stati sleep (S), listening (L) e receiving (R), e si determini la matrice delle probabilita' di transizione della catena di Markov inclusa e se ne disegni il diagramma di transizione.

(b) Si determinino la matrice dei tempi medi associati ad ogni transizione, $\mathbf{T}$, e i tempi medi associati alla visita di ciascuno dei tre stati, μ_S, μ_L, μ_R.

(c) Si determini un'espressione per la frazione del tempo che il nodo passa in ognuno dei tre stati, e se ne calcoli il valore nel caso $\alpha = 0.5, \beta = 0.1, \gamma = 0.2$.

Soluzione:

(a) Il nodo resta nello stato S per un tempo medio T, dopodiche' con probabilita' 1 passa nello stato L. Da L, con probabilita' α il nodo passa nello stato R dopo un tempo medio $\beta T/2$, mentre con probabilita' $(1-\alpha)$ il nodo torna nello stato S dopo un tempo βT. Dallo stato R, il nodo passa nello stato S con probabilita' 1 dopo un tempo medio γT. La matrice di transizione della catena inclusa e' (gli stati sono ordinati come (S,L,R)):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Sulla base della descrizione precedente, la matrice dei tempi medi associati alle transizioni e':

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} - & T & - \\ \beta T & - & \beta T/2 \\ \gamma T & - & - \end{pmatrix}$$

e i tempi medi di permanenza negli stati si ottengono come $\mu_i = \sum_i P_{ij} T_{ij}$:

$$\mu_S = T, \qquad \mu_L = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \beta T, \qquad \mu_R = \gamma T$$

(c) la frazione del tempo che il nodo passa nei tre stati si calcola come $P_i = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_j \pi_j \mu_j}$, dove le probabilita' limite della catena inclusa si calcolano dal sistema di equazioni:

$$\pi_L = \pi_S, \qquad \pi_R = \pi_L, \qquad \pi_S + \pi_L + \pi_R = 1 \qquad \to \pi_S = \pi_L = \frac{1}{2+\alpha}, \quad \pi_R = \frac{\alpha}{2+\alpha}$$

e quindi

$$P_S = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta + \alpha\gamma} = \frac{1}{1.175} = 0.851 \qquad P_L = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta}{1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta + \alpha\gamma} = \frac{0.075}{1.175} = 0.064$$

$$P_R = \frac{\alpha\gamma}{1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta + \alpha\gamma} = \frac{0.1}{1.175} = 0.085$$

Sono rimasto stupito dal fatto che quasi nessuno abbia capito come si faceva questo esercizio. Come vedete dalla soluzione, non c'era niente di particolarmente difficile, bastava aver studiato e capito i processi semi-Markoviani...

E4 Si consideri un sistema a cui arrivano richieste di servizio secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 20$ richieste all'ora. Ogni richiesta rimane nel sistema per un tempo di servizio pari a 6 minuti, e non c'e' limite al numero di richieste contemporaneamente in servizio. Si supponga che il sistema inizi ad operare al tempo $t = 0$.

(a) Si calcoli la probabilita' che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti.

(b) Si calcoli la probabilita' che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti, condizionata al fatto che fra 0 e t si siano verificati 10 arrivi.

Soluzione:

(a) $e^{-2} = 0.135$

(b) $(0.8)^{10} = 0.107$