

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Refi - AA 2004/2005
 prova scritta - 22 settembre 2005 - parte B

- Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.
- Dimostrare che il periodo è una proprietà di classe.
- Si consideri una passeggiata casuale sugli interi non negativi con le seguenti probabilità di transizione: $P_{01} = 1$, $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = q$, $i \geq 0$, con $p + q = 1$. Se ne studi il comportamento, caratterizzandone in particolare la ricorrenza o transitività e ricavandone la distribuzione stazionaria.

W) Sia $\{x_i\}$ un proc. di rinv. comp. $E[X_i] < +\infty$. Allora $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$

DIM.

$$t < S_{N(t)+1} \Rightarrow t < \mu[M(t)_{t+1}] \Rightarrow \frac{1}{\mu} < \frac{M(t)}{t} + \frac{1}{\mu} \Rightarrow \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$$

- consideriamo il processo:

$$X_i^c = \begin{cases} X_i & \text{se } X_i < c \\ c & \text{se } X_i \geq c \end{cases}$$

$$S_{N(t)+1} \leq t+c \Rightarrow \mu^c[M^c(t)+1] \leq t+c \quad \text{essere } M^c(t) \geq M(t) \text{ av}$$

$$\text{avr: } t+c \geq \mu^c[M(t)+1] \Rightarrow \mu^c M(t) + \mu^c - c \leq t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu^c \frac{M(t)}{t} + \frac{1}{t} (\mu^c - c) \geq 0 \quad \text{quindi}$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{M(t)}{t} \right) \leq \frac{1}{\mu^c} \quad \text{essere } \mu_c = \int_0^c (1 - F(x)) dx \text{ al}$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{M(t)}{t} \right) \leq \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu^c} \quad \text{da cui la rel.}$$

T2) Se $i \leftrightarrow s$ allora $d(i) = d(s)$.

dim: Essendo concorde $\exists m, n: P_i^{(m)} > 0, P_s^{(n)} > 0$ in modo

$d(i) = s$ allr

$$P_{ss}^{(n+m)} \geq P_s^{(n)} P_i^{(m)} P_s^{(n)} > 0$$

$$P_{ss}^{(n+m)} \geq P_s^{(n)} P_i^{(m)} P_s^{(n)} > 0$$

questi $d(s)$ divide $m+n+s$ e $m+n+s$ dunque divide "s". \Rightarrow queste qualsiasi elenco di $d(i) = \{k: P_i^{(k)} > 0\}$ quindi $d(i) = d(s)$

Corso di Modelli e analisi delle prestazioni nelle reti – AA 2004/2005
 prova scritta – 17 giugno 2005 – parte B - tempo 60 minuti

~~X1~~ Dimostrare che $E[S_{N(t)+1}] = E[X_1](M(t) + 1)$. (Sugg.: usando il renewal argument scrivere un'equazione di rinnovamento per $A(t) = E[S_{N(t)+1}]$).

~~T2~~ Dimostrare che in una catena di Markov con un numero finito di stati

- (a) deve esserci almeno uno stato ricorrente
- (b) non possono esserci stati ricorrenti nulli

*~~X3~~ Dimostrare che il numero k di arrivi di Poisson nell'intervallo $(0, s)$ condizionato al numero n di arrivi nell'intervallo $(0, t)$ con $t > s$ è una variabile casuale binomiale e darne la distribuzione di probabilità

$T_2 \rightarrow$ a) SUPP. CHE TUTTI GLI STATI SIANO NICONN. NUCCI O TRANSITONI.

VALENDO:

$$\forall i, s \sum_{j=1}^N P_{ji}^{(u)} = 1 \quad \text{altrimenti}$$

$$1 = \lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N P_{si}^{(u)} = \sum_{i=1}^N \lim_{u \rightarrow \infty} P_{si}^{(u)} = 0 \quad \text{ASSUNTO}$$

b) SUPP. CHE TUTTI GLI STATI SIANO NICONN. NUCCI, ACCORDA BS. DXR
 UNA CASSE METTE QUOCHE TUTTI GLI STATI SOLO NICONN. NUCCI,
 quindi

$$1 = \lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N P_{si}^{(u)} = \sum_{i=1}^N \lim_{u \rightarrow \infty} P_{si}^{(u)} = 0 \quad \text{ASSUNTO.}$$

} CONTROLLARE

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008
 prova scritta – 17 giugno 2008 – parte B (60 minuti)

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a n passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_m P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \dots, n$$

$$P_{iS}^{(n)} = P[X_n = S | X_0 = i]$$

$$= \sum_m P[X_n = S, X_k = m | X_0 = i] \quad \text{con } 0 < k \leq n$$

$$= \sum_m P[X_n = S | X_k = m, X_0 = i] P[X_k = m | X_0 = i]$$

= APPLICO LA PROPRIETÀ DI MARKOV

$$= \sum_m P[X_n = S | X_k = m] P[X_k = m | X_0 = i]$$

$$= \sum_m P_{mS}^{(n-k)} P_{im}^{(k)}$$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti - AA 2004/2005
 prova scritta - 25 luglio 2005 - parte B

Si dimostri che il periodo degli stati di una catena di Markov è una proprietà di classe

Per un processo di Poisson di intensità λ , si dimostri che i tempi di interarrivo sono indipendenti e distribuiti esponenzialmente con parametro λ .

Usando il teorema del rinnovamento, dimostrare che la distribuzione asintotica della vita residua è

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[\gamma_t > z] = \frac{1}{\mu} \int_z^{\infty} [1 - F(y)] dy$$

in cui $F(y)$ è la distribuzione di probabilità del tempo X fra due eventi di rinnovamento successivi.
 (Suggerimento: la funzione $A_z(t) = P[\gamma_t > z]$ soddisfa un'equazione di rinnovamento che si trova condizionando rispetto a X_1 .)

$$A_z(t) = P[\gamma_t > z]$$

$$P[\gamma_t > z | X_1 = x] = \begin{cases} 1 & \text{se } x > z+t \\ 0 & \text{se } t \leq x \leq z+t \\ A_z(t-x), & x \leq t \end{cases}$$



Range

$$A_z(t) = \int_0^{z+t} P[\gamma_t > z] \, dF(x) = \boxed{A_z(t-x) \, dF(x) + \int_{z+t}^{+\infty} dF(x)} =$$

$$= 1 - F(z+t) + \int_0^{z+t} A_z(t-x) \, dF(x)$$

Si ottiene che

$$\int_0^{+\infty} 1 - F(z+t) \, dt = \int_z^{+\infty} 1 - F(x) \, dx \leq E[X] \quad \text{quando è integrabile.}$$

$z+t = y$

Allora:

$$A_z(t) = 1 - F(t+z) + \int_0^t (1 - F(t+z-x)) \, dF(x)$$

$\frac{1}{\mu} \text{ per } t \rightarrow \infty$

Per $t \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} 1 - F(x) \, dx$$

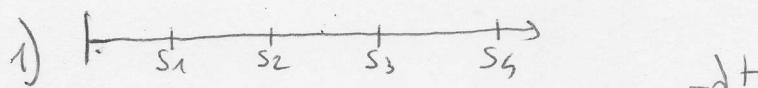
GABRI

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006
prova scritta – 14 luglio 2006 – parte B (60 minuti)

1) Per un processo di Poisson di intensità λ , si dimostri che i tempi di interarrivo sono indipendenti e distribuiti esponenzialmente con parametro λ .

2) Dimostrare che il periodo è una proprietà di classe.

3) Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.



$$P[S_1 > t] = P[N(0, t) = 0] = e^{-\lambda t}$$

$$P[S_2 > t | S_1 = m] = P[N(m, t+m) = 0] = e^{-\lambda t}$$

$$P[S_i > t | S_{i-1} = m, S_{i-2} = k, \dots] = P[N(m, t+m) = 0] = e^{-\lambda t}$$

3) $E[S_{N(t)+1}] = A(t)$

$$E[S_{N(t)+1} | X_1 = x] = \begin{cases} x & x > t \\ x + A(t-x) & \text{se } x < t \end{cases}$$

$$A(t) = \int_0^{+\infty} E[S_{N(t)+1} | X_1 = x] dF(x) = \int_t^{+\infty} x dF(x) + \int_0^t (x + A(t-x)) dF(x) =$$

$$E[X] + \int_0^t A(t-x) dF(x) \quad \text{sotto la cond. } E[X] < +\infty$$

$$A(t) = E[X] + \int_0^t E[X] M(x) = E[X] + E[X] M(t) = E[X] (M(t) + 1)$$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006
 prova scritta – 18 settembre 2006– parte B

- ~~X~~ Dimostrare che il numero k di arrivi di Poisson nell'intervallo $(0, s)$ condizionato al numero n di arrivi nell'intervallo $(0, t)$ con $t > s$ è una variabile casuale binomiale e darne la distribuzione di probabilità
- ~~X~~ Dare la definizione di stato ricorrente e dimostrare che uno stato i è ricorrente se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$$

- ~~X~~ Dimostrare che per un processo di rinnovamento $M(t) < \infty$ per ogni t finito. (Sugg.: si ricordi che $M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$.)

$$F_k(t) = \int_0^t F(t-x) dF_{k-1}(x) \leq F(t) F_{k-1}(t)$$

$$F_{k-1}(t) = \int_0^t F(t-x) dF_{k-2}(x) \leq F(t) F_{k-2}(t) \quad \text{iterando il procedimento}$$

arriviamo a:

$$F_k(t) \leq (F(t))^{k-1} F(t), \quad \text{essendo } F(t) \text{ con "t" finito non avrà:}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} F_k(t) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (F(t))^{k-1} F(t) \quad \text{che converge come una geometrica.}$$

2) Se un $f_{ii}(u) = P[X_u=i \text{ per la prima volta} | X_0=i]$ allora ha posto che viene a dire che la prob "i" è uguale a $\sum_{u=1}^{+\infty} f_{ii}(u) = 1 = f_{ii}$ per stato ricorrente.

Per la retta ricorre la media di volte nello stato i è $\sum_{k=1}^{+\infty} (f_{ii})^k = \infty$.

Calcoliamo ora

$$\varphi = E\left[\sum_{k=1}^{+\infty} 1\{X_k=i\} | X_0=i\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{ii}^{(k)} = \infty \quad \text{da cui le osservazioni}$$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2004/2005
prova scritta – 22 settembre 2005– parte A

E1 Si consideri la catena di Markov $X(t)$ con stati 1, 2, 3, $X(0) = 3$, e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Si calcolino le probabilità stazionarie e i tempi medi di ricorrenza di tutti gli stati.
- (b) Si calcolino media e varianza del tempo di primo passaggio dallo stato 3 allo stato 1.
- (c) Si calcolino media e varianza del tempo di primo passaggio dallo stato 1 allo stato 3.
- (d) Si calcolino $P[X(1) = 1, X(3) = 1 | X(2) = 2]$ e $P[X(2) = 2 | X(1) = 1, X(3) = 1]$.

E2 Si consideri una coda alla quale arrivano pacchetti secondo un processo di Poisson di intensità $\lambda = 1$ pacchetto al secondo. Tutti i pacchetti presenti nella coda vengono trasmessi quando si verifica uno dei seguenti due eventi: i) ci sono due pacchetti in coda, oppure ii) c'è un solo pacchetto e il suo tempo di attesa è pari a due secondi. La trasmissione è istantanea, cioè la coda si svuota ogni volta che arriva un pacchetto e ce n'è già uno in coda, o quando l'unico pacchetto in coda ha accumulato un ritardo sufficiente.

- (a) Si calcoli la percentuale di tempo durante la quale la coda è vuota.
- (b) Si calcoli la media del ritardo di un pacchetto (cioè il tempo medio speso in coda).

E3 Si consideri un sistema di trasmissione a divisione di frequenza in cui il numero di canali sia sufficientemente elevato da trascurare la probabilità che siano tutti occupati. A tale sistema arrivano richieste di connessione secondo un processo di Poisson con intensità $\lambda = 100$ chiamate all'ora, e la durata di ognuna di tali chiamate è esponenziale con media 6 minuti. Sia $X(t)$ il numero di canali occupati al tempo t

- (a) Si calcoli la media di $X(t)$ per $t = 6, 10$ minuti e per $t = \infty$.
- (b) Si calcoli $P[X(t) = 10]$ per $t = 6$ e per $t = \infty$
- (c) Si ripetano i calcoli delle due domande precedenti nel caso in cui la distribuzione della durata delle chiamate è uniforme nell'intervallo $[2, 10]$ (minuti)

E4 Si consideri il funzionamento del protocollo Go-Back-N su un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.99 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono. Il tempo di round-trip è pari a $m = 2$ slot (cioè un pacchetto errato trasmesso al tempo t verrà ritrasmesso al tempo $t + m$).

- (a) Si calcoli il throughput del protocollo nel caso di feedback perfetto (cioè senza errori)
- (b) Si calcoli il throughput del protocollo nel caso in cui il feedback sia soggetto a errori indipendenti con probabilità di errore 0.1.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2004/2005
prova scritta – 22 settembre 2005– parte B

- T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.
- T2 Dimostrare che il periodo e' una proprieta' di classe.
- T3 Si consideri una passeggiata casuale sugli interi non negativi con le seguenti probabilita' di transizione: $P_{01} = 1$, $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = q$, $i > 0$, con $p + q = 1$. Se ne studi il comportamento, caratterizzandone in particolare la ricorrenza o transitorietà e ricavandone la distribuzione stazionaria.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006
prova scritta – 14 luglio 2006– parte A (90 minuti)

E1 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2)

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- (a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilità di X_1, X_2 e X_{500} , dato che $X_0 = 0$.
- (b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dallo stato 0 agli stati 0, 1 e 2.
- (c) Sia $W_{ij}^{(n)} = E \left[\sum_{k=0}^{n-1} I\{X_k = j\} \mid X_0 = i \right]$ il numero medio di visite allo stato j a partire dallo stato i durante i primi n istanti dell'evoluzione della catena. Si calcolino $W_{0j}^{(3)}$ e $W_{0j}^{(5000)}$ per $j = 0, 1, 2$.

E2 Si consideri un link di capacità 1 Mbps, condiviso da un gran numero di utenti che collettivamente producono pacchetti secondo un processo di Poisson di intensità $\lambda = 500$ pacchetti al secondo. La lunghezza dei pacchetti è costante e pari a 1000 bit. Il protocollo di accesso è un CSMA ideale, secondo cui un pacchetto generato quando il canale è libero ottiene accesso immediato, mentre quando un pacchetto trova il canale occupato se ne prova la ritrasmissione dopo un tempo esponenziale di media $100/\lambda$. (Nel caso questo nuovo tentativo trovi nuovamente il canale occupato si continua a riprovare a tempi casuali finché non si trova il canale libero.) Si supponga che il traffico totale (nuovo più tentativi di ritrasmissione) si possa approssimare come Poissoniano di intensità λ .

- (a) Si calcoli il throughput (traffico medio smaltito) dal link.
- (b) Si calcoli il ritardo medio di accesso, da quando un pacchetto è generato a quando riesce ad accedere al canale.
- (c) Se una trasmissione sul canale corrisponde a un guadagno di 1 unità e ogni tentativo di accesso fallito (cioè pacchetto generato quando il canale è occupato) corrisponde a un costo di 0.2 unità, si calcoli il guadagno totale prodotto dal sistema (in unità al secondo).

E3 Si consideri una mostra a cui arrivano visitatori secondo un processo di Poisson con $\lambda = 10$ clienti all'ora. Ogni visitatore passa un tempo uniformemente distribuito fra 20 e 30 minuti e poi esce. La sala in cui la mostra è allestita è sufficiente grande da far sì che non sia mai necessario bloccare visitatori all'entrata a causa del numero eccessivo di persone. L'orario di apertura della mostra è dalle 8 alle 18.

- (a) Si calcoli la probabilità che durante la prima mezz'ora arrivino meno di tre visitatori.
- (b) Si calcoli la probabilità che alle 8:15 vi sia in sala un solo visitatore.
- (c) Si calcoli la probabilità che all'orario di chiusura la sala sia vuota.

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

- (a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.
- (b) Si consideri adesso un canale che alterna il comportamento precedente a uno con errori indipendenti con probabilità 0.01. In particolare, il canale si comporta secondo il modello markoviano precedente per un numero geometrico di slot di media 1000000 slot, poi passa al comportamento iid per un numero geometrico di slot di media 2000000 slot, e così via. Si calcoli il throughput del protocollo GBN in questa situazione.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006
prova scritta – 14 luglio 2006– parte B (60 minuti)

T1 Per un processo di Poisson di intensità λ , si dimostri che i tempi di interarrivo sono indipendenti e distribuiti esponenzialmente con parametro λ .

T2 Dimostrare che il periodo è una proprietà di classe.

T3 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006
prova scritta – 12 dicembre 2006– parte A (90 minuti)

E1 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 5)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.7 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

- (a) Si disegni il diagramma di transizione, se ne classifichino gli stati e si individuino le classi
- (b) Si calcoli $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$
- (c) Si calcoli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k$
- (d) Si calcoli $P[X_4 = 5, X_2 = 3 | X_3 = 1, X_1 = 3]$

E2 Si consideri un nodo di rete che in condizioni normali riesce a smaltire un traffico pari a 1 Gbps. Tale nodo funziona normalmente per un tempo esponenziale di media $99T$, dopodiché entra in uno stato di allarme, durante il quale la sua capacità si riduce a 250 Mbps. Dopo essere rimasto T secondi nello stato di allarme, il nodo viene instantaneamente riparato, e ricomincia a funzionare correttamente.

- (a) Si calcoli la frazione del tempo che il nodo passa nello stato di allarme, e il traffico medio smaltito (si supponga che le code siano sempre piene, cioè che ci siano sempre pacchetti da trasmettere)
- (b) Si supponga ora che una volta entrato nello stato di allarme il nodo smetta completamente di funzionare dopo un tempo esponenziale di media $2T$, a meno che non venga riparato prima (come nel caso precedente, la riparazione richiede esattamente T da quando il nodo entra nello stato di allarme). Se il nodo smette di funzionare, deve essere interamente sostituito, e questo richiede un tempo $20T$, durante il quale il nodo non può gestire nessun traffico (si noti che questa sostituzione è diversa dalla semplice riparazione del caso precedente). Si calcolino: (i) il tempo medio fra due sostituzioni successive, (ii) la percentuale del tempo in cui il nodo non funziona, e (iii) il throughput del sistema.

E3 Si considerino due processi di Poisson indipendenti, $X_1(t)$ e $X_2(t)$, in cui $X_i(t)$ è il numero di arrivi del processo i nell'intervallo $[0, t]$. Il numero medio di arrivi per unità di tempo dei due processi è $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.5$

- (a) Si calcolino $P[X_1(3) = 1 | X_1(3) + X_2(3) = 3]$ e $P[X_1(3) + X_2(3) = 3 | X_1(3) = 1]$
- (b) Si calcolino $P[X_1(2) = 1 | X_1(3) = 3]$ e $P[X_1(3) = 3 | X_1(2) = 1]$

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

- (a) Si calcoli il throughput (numero medio di successi per slot) di un protocollo che trasmette pacchetti direttamente sul canale, senza ritrasmissioni.
- (b) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.
- (c) Come al punto precedente, con la differenza che il canale di ritorno è soggetto a errori indipendenti con probabilità 0.1

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006
prova scritta – 12 dicembre 2006– parte B (60 minuti)

- T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.
- T2 Dimostrare che se i e j comunicano e i è ricorrente, allora anche j è ricorrente.
- T3 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 09 luglio 2007 – parte A

E1 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2) e stato iniziale $X_0 = 0$.

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilità di X_1, X_2 e X_{500} .
- (b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1, 2 verso lo stato 2.
- (c) Si calcolino $P[X_1 = 1, X_3 = 1 | X_2 = 1]$ e $P[X_2 = 1 | X_1 = 1, X_3 = 1]$.

Soluzione:

- (a) X_1 : Prima riga di $P = (0.4, 0.4, 0.2)$; X_2 : Prima riga di $P^2 = (0.44, 0.24, 0.32)$; $X_{500} \approx \pi = (1/2, 1/4, 1/4)$
- (b) $E[\theta_{02}] = 3, E[\theta_{12}] = 2, E[\theta_{22}] = 1/\pi_2 = 4$
- (c) $P[X_1 = 1, X_3 = 1 | X_2 = 1] = 1/15; P[X_2 = 1 | X_1 = 1, X_3 = 1] = 1/3$.

E2 Si consideri una fabbrica in cui vi sono due macchine uguali. Ogni macchina alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha = 27$ giorni (funzionamento) e $1/\beta = 1/(9\alpha)$ (guasto). Ogni macchina, il cui funzionamento è indipendente dall'altra, è in grado di produrre 12 pezzi all'ora quando è funzionante.

- (a) Si calcoli la frazione del tempo in cui la produzione è ferma (cioè entrambe le macchine sono guaste), e la durata media di un intervallo di tempo durante il quale la produzione è ferma
- (b) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora
- (c) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora se il numero di pezzi prodotti all'ora è 12 quando c'è una sola macchina in funzione e 30 quando sono in funzione entrambe

Soluzione:

- (a) $(0.1)^2 = 0.01; (2\beta)^{-1} = 1.5$ giorni
- (b) $2 \times 12 \times 0.9 = 21.6$
- (c) $30 \times (0.9)^2 + 12 \times 0.18 + 0 \times 0.01 = 26.46$

E3 Si consideri un nodo di rete con il seguente funzionamento. In assenza di traffico, il nodo alterna un periodo di sleep di durata esponenziale con media T e un periodo in cui è sveglio ed è in grado di ricevere, di durata fissa βT . In presenza di traffico in rete, se durante un periodo di sveglia viene trasmesso un pacchetto, il nodo lo riceve interamente (anche se questo richiede di restare sveglio per un tempo complessivamente superiore a βT), e subito dopo comincia un periodo di sleep. Se durante il periodo di sveglia non viene trasmesso nessun pacchetto, il nodo torna nello stato di sleep dopo il tempo βT . La probabilità che venga trasmesso un pacchetto mentre il nodo è sveglio è α , l'istante di inizio della ricezione è uniformemente distribuito in $[0, \beta T]$, e il tempo medio di trasmissione del pacchetto è pari a γT . Si costruisca un modello semi-Markoviano per il funzionamento del nodo. In particolare:

- (a) Si considerino i tre stati sleep (S), listening (L) e receiving (R), e si determini la matrice delle probabilità di transizione della catena di Markov inclusa e se ne disegni il diagramma di transizione.
- (b) Si determinino la matrice dei tempi medi associati ad ogni transizione, T , e i tempi medi associati alla visita di ciascuno dei tre stati, μ_S, μ_L, μ_R .

- (c) Si determini un'espressione per la frazione del tempo che il nodo passa in ognuno dei tre stati, e se ne calcoli il valore nel caso $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.2$.

Soluzione:

- (a) Il nodo resta nello stato S per un tempo medio T , dopodiché con probabilità 1 passa nello stato L. Da L, con probabilità α il nodo passa nello stato R dopo un tempo medio $\beta T/2$, mentre con probabilità $(1 - \alpha)$ il nodo torna nello stato S dopo un tempo βT . Dallo stato R, il nodo passa nello stato S con probabilità 1 dopo un tempo medio γT . La matrice di transizione della catena inclusa è (gli stati sono ordinati come (S,L,R)):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - \alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Sulla base della descrizione precedente, la matrice dei tempi medi associati alle transizioni è:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} - & T & - \\ \beta T & - & \beta T/2 \\ \gamma T & - & - \end{pmatrix}$$

e i tempi medi di permanenza negli stati si ottengono come $\mu_i = \sum_j P_{ij} T_{ij}$:

$$\mu_S = T, \quad \mu_L = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \beta T, \quad \mu_R = \gamma T$$

- (c) la frazione del tempo che il nodo passa nei tre stati si calcola come $P_i = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_j \pi_j \mu_j}$, dove le probabilità limite della catena inclusa si calcolano dal sistema di equazioni:

$$\pi_L = \pi_S, \quad \pi_R = \pi_L, \quad \pi_S + \pi_L + \pi_R = 1 \quad \rightarrow \pi_S = \pi_L = \frac{1}{2 + \alpha}, \quad \pi_R = \frac{\alpha}{2 + \alpha}$$

e quindi

$$P_S = \frac{1}{1 + (1 - \frac{\alpha}{2}) \beta + \alpha \gamma} = \frac{1}{1.175} = 0.851 \quad P_L = \frac{(1 - \frac{\alpha}{2}) \beta}{1 + (1 - \frac{\alpha}{2}) \beta + \alpha \gamma} = \frac{0.075}{1.175} = 0.064$$

$$P_R = \frac{\alpha \gamma}{1 + (1 - \frac{\alpha}{2}) \beta + \alpha \gamma} = \frac{0.1}{1.175} = 0.085$$

Sono rimasto stupito dal fatto che quasi nessuno abbia capito come si faceva questo esercizio. Come vedete dalla soluzione, non c'era niente di particolarmente difficile, bastava aver studiato e capito i processi semi-Markoviani...

- E4 Si consideri un sistema a cui arrivano richieste di servizio secondo un processo di Poisson di intensità $\lambda = 20$ richieste all'ora. Ogni richiesta rimane nel sistema per un tempo di servizio pari a 6 minuti, e non c'è limite al numero di richieste contemporaneamente in servizio. Si supponga che il sistema inizi ad operare al tempo $t = 0$.

- (a) Si calcoli la probabilità che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti.
 (b) Si calcoli la probabilità che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti, condizionata al fatto che fra 0 e t si siano verificati 10 arrivi.

Soluzione:

- (a) $e^{-2} = 0.135$
 (b) $(0.8)^{10} = 0.107$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 09 luglio 2007 – parte A

E1 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2) e stato iniziale $X_0 = 0$.

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilità di X_1, X_2 e X_{500} .
- (b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1, 2 verso lo stato 2.
- (c) Si calcolino $P[X_1 = 1, X_3 = 1 | X_2 = 1]$ e $P[X_2 = 1 | X_1 = 1, X_3 = 1]$.

Soluzione:

- (a) X_1 : Prima riga di $P = (0.4, 0.4, 0.2)$; X_2 : Prima riga di $P^2 = (0.44, 0.24, 0.32)$; $X_{500} \approx \pi = (1/2, 1/4, 1/4)$
- (b) $E[\theta_{02}] = 3, E[\theta_{12}] = 2, E[\theta_{22}] = 1/\pi_2 = 4$
- (c) $P[X_1 = 1, X_3 = 1 | X_2 = 1] = 1/15; P[X_2 = 1 | X_1 = 1, X_3 = 1] = 1/3$.

E2 Si consideri una fabbrica in cui vi sono due macchine uguali. Ogni macchina alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha = 27$ giorni (funzionamento) e $1/\beta = 1/(9\alpha)$ (guasto). Ogni macchina, il cui funzionamento è indipendente dall'altra, è in grado di produrre 12 pezzi all'ora quando è funzionante.

- (a) Si calcoli la frazione del tempo in cui la produzione è ferma (cioè entrambe le macchine sono guaste), e la durata media di un intervallo di tempo durante il quale la produzione è ferma
- (b) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora
- (c) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora se il numero di pezzi prodotti all'ora è 12 quando c'è una sola macchina in funzione e 30 quando sono in funzione entrambe

Soluzione:

- (a) $(0.1)^2 = 0.01; (2\beta)^{-1} = 1.5$ giorni
- (b) $2 \times 12 \times 0.9 = 21.6$
- (c) $30 \times (0.9)^2 + 12 \times 0.18 + 0 \times 0.01 = 26.46$

E3 Si consideri un nodo di rete con il seguente funzionamento. In assenza di traffico, il nodo alterna un periodo di sleep di durata esponenziale con media T e un periodo in cui è sveglio ed è in grado di ricevere, di durata fissa βT . In presenza di traffico in rete, se durante un periodo di sveglia viene trasmesso un pacchetto, il nodo lo riceve interamente (anche se questo richiede di restare sveglio per un tempo complessivamente superiore a βT), e subito dopo comincia un periodo di sleep. Se durante il periodo di sveglia non viene trasmesso nessun pacchetto, il nodo torna nello stato di sleep dopo il tempo βT . La probabilità che venga trasmesso un pacchetto mentre il nodo è sveglio è α , l'istante di inizio della ricezione è uniformemente distribuito in $[0, \beta T]$, e il tempo medio di trasmissione del pacchetto è pari a γT . Si costruisca un modello semi-Markoviano per il funzionamento del nodo. In particolare:

- (a) Si considerino i tre stati sleep (S), listening (L) e receiving (R), e si determini la matrice delle probabilità di transizione della catena di Markov inclusa e se ne disegni il diagramma di transizione.
- (b) Si determinino la matrice dei tempi medi associati ad ogni transizione, \mathbf{T} , e i tempi medi associati alla visita di ciascuno dei tre stati, μ_S, μ_L, μ_R .

- (c) Si determini un'espressione per la frazione del tempo che il nodo passa in ognuno dei tre stati, e se ne calcoli il valore nel caso $\alpha = 0.5, \beta = 0.1, \gamma = 0.2$.

Soluzione:

- (a) Il nodo resta nello stato S per un tempo medio T , dopodiché con probabilità 1 passa nello stato L. Da L, con probabilità α il nodo passa nello stato R dopo un tempo medio $\beta T/2$, mentre con probabilità $(1 - \alpha)$ il nodo torna nello stato S dopo un tempo βT . Dallo stato R, il nodo passa nello stato S con probabilità 1 dopo un tempo medio γT . La matrice di transizione della catena inclusa è (gli stati sono ordinati come (S,L,R)):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - \alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Sulla base della descrizione precedente, la matrice dei tempi medi associati alle transizioni è:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} - & T & - \\ \beta T & - & \beta T/2 \\ \gamma T & - & - \end{pmatrix}$$

e i tempi medi di permanenza negli stati si ottengono come $\mu_i = \sum_j P_{ij} T_{ij}$:

$$\mu_S = T, \quad \mu_L = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \beta T, \quad \mu_R = \gamma T$$

- (c) la frazione del tempo che il nodo passa nei tre stati si calcola come $P_i = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_j \pi_j \mu_j}$, dove le probabilità limite della catena inclusa si calcolano dal sistema di equazioni:

$$\pi_L = \pi_S, \quad \pi_R = \pi_L, \quad \pi_S + \pi_L + \pi_R = 1 \quad \rightarrow \pi_S = \pi_L = \frac{1}{2 + \alpha}, \quad \pi_R = \frac{\alpha}{2 + \alpha}$$

e quindi

$$P_S = \frac{1}{1 + (1 - \frac{\alpha}{2}) \beta + \alpha \gamma} = \frac{1}{1.175} = 0.851 \quad P_L = \frac{(1 - \frac{\alpha}{2}) \beta}{1 + (1 - \frac{\alpha}{2}) \beta + \alpha \gamma} = \frac{0.075}{1.175} = 0.064$$

$$P_R = \frac{\alpha \gamma}{1 + (1 - \frac{\alpha}{2}) \beta + \alpha \gamma} = \frac{0.1}{1.175} = 0.085$$

Sono rimasto stupito dal fatto che quasi nessuno abbia capito come si faceva questo esercizio. Come vedete dalla soluzione, non c'era niente di particolarmente difficile, bastava aver studiato e capito i processi semi-Markoviani...

E4 Si consideri un sistema a cui arrivano richieste di servizio secondo un processo di Poisson di intensità $\lambda = 20$ richieste all'ora. Ogni richiesta rimane nel sistema per un tempo di servizio pari a 6 minuti, e non c'è limite al numero di richieste contemporaneamente in servizio. Si supponga che il sistema inizi ad operare al tempo $t = 0$.

- (a) Si calcoli la probabilità che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti.
- (b) Si calcoli la probabilità che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti, condizionata al fatto che fra 0 e t si siano verificati 10 arrivi.

Soluzione:

- (a) $e^{-2} = 0.135$
- (b) $(0.8)^{10} = 0.107$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 05 settembre 2007 – parte A

E1 Si consideri un server web a cui arrivano richieste di download secondo un processo di Poisson di intensità $\lambda = 20$ richieste al secondo. Ognuna di esse, dopo un tempo di elaborazione fisso pari a 20 ms, da luogo al trasferimento di un file la cui dimensione è uniformemente distribuita fra 1 MByte e 2 MByte. Una richiesta si dice “attiva” da quando arriva fino a quando il trasferimento del file corrispondente è terminato. Si supponga che la capacità del server in termini di numero di richieste simultanee che può elaborare sia infinita, e che la velocità di trasferimento di ciascun file sia 100 Mbit/s, indipendentemente dal numero di file che vengono contemporaneamente trasferiti.

- (a) Supponendo che il server venga acceso al tempo $t = 0$, si dica dopo quanto tempo la statistica del numero di richieste attive arriva alla condizione stazionaria, e si dia l'espressione di $P[k \text{ richieste attive}]$ in tale condizione.
- (b) Sapendo che in un intervallo di durata T sono arrivate N richieste, si trovi la probabilità che alla fine di tale intervallo non ci sia nessuna richiesta attiva per (b1) $T = 0.1$ s e $N = 2$ e (b2) $T = 1$ s e $N = 20$.

E2 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

- (a) se ne classifichino gli stati e si individuino le classi
- (b) si calcolino le probabilità di assorbimento nelle varie classi ricorrenti a partire da tutti gli stati transitori
- (c) si calcolino $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k$
- (d) si calcoli il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati

E3 Una moneta è lanciata finché non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza.

- (a) Si calcoli la probabilità che il gioco termini con la sequenza CC.
- (b) Si calcoli la probabilità che il gioco termini con la sequenza CC dato che il risultato del primo lancio è T.
- (c) Si risponda alle due domande precedenti nel caso in cui la moneta sia truccata, con probabilità che a un lancio si verifichi testa pari a $p = 1/4$.

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

- (a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.
- (b) Si consideri adesso un canale che alterna il comportamento precedente a uno con errori indipendenti con probabilità 0.01. In particolare, il canale si comporta secondo il modello markoviano precedente per un numero geometrico di slot di media 1000000 slot, poi passa al comportamento iid per un numero geometrico di slot di media 2000000 slot, e così via. Si calcoli il throughput del protocollo GBN in questa situazione.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 05 settembre 2007 – parte B

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a n passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_m P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \dots, n$$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 24 settembre 2007– parte A (90 minuti)

E1 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2)

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- (a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilità di X_1, X_2 e X_{500} , dato che $X_0 = 0$.
 - (b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1 e 2 verso lo stato 2.
 - (c) Sia $W_{ij}^{(n)} = E \left[\sum_{k=0}^{n-1} I\{X_k = j\} \mid X_0 = i \right]$ il numero medio di visite allo stato j a partire dallo stato i durante i primi n istanti dell'evoluzione della catena. Si calcolino $W_{0j}^{(3)}$ e $W_{0j}^{(5000)}$ per $j = 0, 1, 2$.
- E2 Si consideri un nodo di rete con due link di uscita L_1 e L_2 . Entrambi i link hanno una capacità di 1 Mbps e hanno al loro ingresso due code distinte Q_1 e Q_2 che possono contenere un solo pacchetto ciascuna. Si supponga che al nodo arrivino due flussi di pacchetti, modellati come processi di Poisson indipendenti con intensità $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 500$ pkt/s, e che il flusso λ_i sia relativo al solo link L_i (e quindi alla coda Q_i), $i = 1, 2$. Due pacchetti vengono trasmessi contemporaneamente quando entrambe le code sono piene; in particolare, quando c'è un pacchetto in una coda e l'altra è vuota, si attende che arrivi un pacchetto anche alla seconda e solo allora si trasmettono entrambi, ognuno sul link corrispondente. (Si osservi che ad un intervallo di tempo in cui entrambe le code sono vuote ne segue un altro in cui una coda è vuota e l'altra piena, e poi un terzo in cui i pacchetti sono in trasmissione.) Si supponga inoltre che quando la coda Q_i è piena (cioè quando c'è un pacchetto in attesa o in trasmissione) gli arrivi del flusso λ_i vengano rifiutati. I pacchetti hanno tutti una lunghezza di 1000 bit.

- (a) Si calcoli il traffico utile smaltito dal nodo, in termini di bps totali trasmessi
- (b) Si calcoli la frazione del traffico totale che viene rifiutata
- (c) Si ripetano i due punti precedenti nel caso in cui i pacchetti, anziché avere lunghezza fissa 1000 bit, abbiano una lunghezza esponenziale di media 1000 bit. In questo caso, si supponga che le code si svuotino (e quindi il sistema ricomincia ad accettare pacchetti) solo quando *entrambi* i pacchetti sono stati completamente trasmessi. (Cioè la coda che aveva il pacchetto più corto ricomincia ad accettare gli arrivi solo quando anche il pacchetto dell'altra ha terminato la trasmissione.)

E3 Si consideri un nodo di rete con due link di ingresso, dai quali arrivano pacchetti secondo due processi di Poisson indipendenti di intensità $\lambda_1 = \lambda_2 = 500$ pacchetti al secondo.

- (a) Si calcoli la probabilità che in un intervallo di 3 ms arrivino due pacchetti dal primo link e uno dal secondo.
- (b) Si calcoli la probabilità che in un intervallo di 3 ms arrivino al nodo tre pacchetti (in totale)
- (c) Si calcoli la probabilità che in un intervallo di 3 ms arrivino al nodo due pacchetti dal primo link dato che ne arrivano tre in totale

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

- (a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.
- (b) Si consideri adesso un canale che alterna il comportamento precedente a uno con errori indipendenti con probabilità 0.01. In particolare, il canale si comporta secondo il modello markoviano precedente per un numero geometrico di slot di media 1000000 slot, poi passa al comportamento iid per un numero geometrico di slot di media 2000000 slot, e così via. Si calcoli il throughput del protocollo GBN in questa situazione.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 24 settembre 2007– parte B (60 minuti)

- T1 Dimostrare che se i e j comunicano e i è ricorrente, allora anche j è ricorrente.
- T2 Per un processo di Poisson di intensità λ , si dimostri che i tempi di interarrivo sono indipendenti e distribuiti esponenzialmente con parametro λ .
- T3 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008
prova scritta – 17 giugno 2008 – parte A (90 minuti)

E1 Si consideri un nodo di rete che in condizioni di funzionamento normale N smaltisce un traffico pari a 100 Mbps. Dopo un tempo di funzionamento casuale con distribuzione esponenziale di media T , il nodo entra in uno stato di malfunzionamento M in cui la sua capacità di smaltire traffico si riduce a 50 Mbps. Quando il nodo entra nello stato M, con probabilità β torna a funzionare normalmente dopo un tempo distribuito uniformemente in $[0, \alpha_1 T]$, mentre con probabilità $1 - \beta$ smette di funzionare dopo un tempo distribuito uniformemente in $[0, \alpha_2 T]$ e deve essere sostituito, operazione che richiede un tempo deterministico pari a δT .

- (a) Si costruisca un modello semi-Markoviano per il sistema. In particolare, indicando gli stati possibili con N, M e G (dove G è lo stato durante il quale il nodo non funziona), si scrivano la matrice di transizione della catena di Markov inclusa e la matrice dei tempi medi associati alle transizioni.
- (b) Usando il modello semi-Markoviano sviluppato al punto precedente, si calcoli in maniera parametrica la frazione del tempo che il nodo passa nei tre stati, e si calcoli il throughput medio smaltito dal nodo. Si calcolino inoltre i valori numerici di tali quantità per $\beta = 0.9$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$ e $\delta = 0.1$.
- (c) Si calcolino le quantità richieste al punto precedente usando la teoria dei processi di rinnovamento, individuando un ciclo di rinnovamento opportuno.

E2 Si consideri un nodo di rete con due link di ingresso, dai quali arrivano pacchetti secondo due processi di Poisson indipendenti $X_1(t)$ e $X_2(t)$ di intensità $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 500$ pacchetti al secondo, dove un pacchetto è composto da 1000 bit. Sia inoltre $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$.

- (a) Si calcolino $P[X_1(3) = 2|X(3) = 3]$ e $P[X_1(2) = 2|X(2) = 3]$.
- (b) Si calcolino $P[X_1(1) = 2|X(2) = 3]$ e $P[X(2) = 3|X_1(1) = 2]$.
- (c) Si supponga che il link di uscita dal nodo sia un sistema di trasmissione costituito da un gran numero di canali paralleli, ognuno caratterizzato da un valore di bit rate pari a 1 Mbps. Supponendo che il sistema sia vuoto al tempo $t = 0$ e di poter trascurare l'eventualità che un pacchetto che arriva non trovi un canale libero, determinare la probabilità che vi siano due pacchetti in trasmissione agli istanti $t_1 = 0.5$ ms e $t_2 = 3$ ms.

E3 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

- (a) si disegni il diagramma di transizione della catena, se ne classifichino gli stati e si individuino le classi
- (b) si calcolino $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k$
- (c) si calcoli la media del tempo di primo passaggio da tutti gli stati allo stato 4

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.99 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

- (a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.
- (b) Come al punto precedente se il canale di ritorno è affetto da errori indipendenti con probabilità 0.02.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008
prova scritta – 17 giugno 2008 – parte B (60 minuti)

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a n passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_m P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \dots, n$$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008
prova scritta – 14 luglio 2008 – parte A (90 minuti)

E1 Si consideri un server web a cui arrivano richieste di download secondo un processo di Poisson di intensità $\lambda = 5$ richieste al secondo. Ognuna di esse, dopo un tempo di elaborazione uniformemente distribuito fra 10 e 30 ms, da' luogo al trasferimento di un file la cui dimensione è esponenziale di media 1 MByte. Una richiesta si dice "attiva" da quando arriva fino a quando il trasferimento del file corrispondente è terminato. Si supponga che la capacità del server in termini di numero di richieste simultanee che può elaborare sia infinita, e che si voglia trasferire ciascun file a 100 Mbit/s, indipendentemente dal numero di file che vengono contemporaneamente trasferiti. Si supponga che il server venga acceso al tempo $t = 0$, e sia $X(t)$ il numero di richieste attive nel sistema al tempo t .

- (a) Si calcoli la probabilità che, dato che sono arrivate 5 richieste nell'intervallo da 0 a 1 s, almeno due di queste siano arrivate entro $t = 0.5$ s.
- (b) Si dimensioni la capacità del link di uscita dal server, in modo che la probabilità che il numero di file da trasferire ecceda tale capacità sia minore di 0.001

E2 Una moneta è lanciata finché non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza.

- (a) Si calcoli la probabilità che il gioco termini con la sequenza CC, e la durata media del gioco.
- (b) Come la domanda precedente, nel caso in cui il gioco finisce quando si verificano due lanci diversi in sequenza (cioè CT o TC).

E3 Si consideri uno switch in cui vi sono due processori uguali e indipendenti. Ogni processore alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha$ (funzionamento) e $1/\beta = 1/(19\alpha) = 1$ giorno (guasto). Il traffico totale smaltito dallo switch è pari a 2.5 Gbps se entrambi i processori sono attivi, 1 Gbps se ne funziona uno solo, e zero altrimenti.

- (a) Si calcoli la frazione del tempo in cui lo switch non smaltisce traffico
- (b) si calcoli la durata media di un intervallo di tempo durante il quale lo switch non smaltisce traffico
- (c) si calcoli la durata media di un intervallo di tempo in cui c'è un solo processore funzionante, e la probabilità che in questo caso esso si guasti prima che l'altro torni in funzione
- (d) si calcoli il traffico medio smaltito dallo switch

E4 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2)

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- (a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilità di X_1, X_2 e X_{500} , dato che $X_0 = 0$.
- (b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1 e 2 verso lo stato 2, e il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati.
- (c) Sia $W_{ij}^{(n)} = E \left[\sum_{k=0}^{n-1} I\{X_k = j\} \mid X_0 = i \right]$ il numero medio di visite allo stato j a partire dallo stato i durante i primi n istanti dell'evoluzione della catena. Si calcolino $W_{0j}^{(3)}$ e $W_{0j}^{(5000)}$ per $j = 0, 1, 2$.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008
prova scritta – 14 luglio 2008 – parte B (60 minuti)

- T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.
- T2 Si dimostri che in una catena di Markov il periodo e' una proprieta' di classe.
- T3 Si dimostri che per un processo di Poisson $X(t)$ la statistica di $X(s)$ condizionata a $X(t), s < t$, e' binomiale, e si fornisca l'espressione di $P[X(s) = k | X(t) = n]$.

Esercizi

X E1 - 25-07-2005

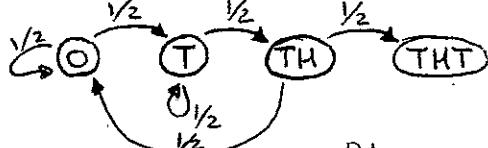
1) a) vengo lanciata una moneta ripetutamente finché non compare la sequenza THT;

b) # medio di lanci prima che il girone finisce (casiniera cdH);

c) lancio ripetuto; se ottengo THT perdo uno punto; se ottengo TH guadagno un punto;
(considerare le sovrapposizioni THT contiene THT e TH);

↳ sia $R(N)$ il punteggio dopo N lanci; $R(0)=0$; calcolare $\lim_{N \rightarrow \infty} R(N)$ e $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{R(N)}{N}$

a) THT stato assorbente:



⇒ il tempo medio per arrivare in THT è il tempo di 4° passaggio;

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0 = 1 + \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{2} V_T \\ V_T = 1 + \frac{1}{2} V_T + \frac{1}{2} V_{TH} \end{array} \right. \quad \text{(casiniera cdH)}$$

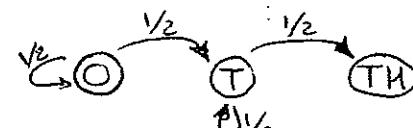
$$\left\{ \begin{array}{l} V_{TH} = 1 + \frac{1}{2} V_0 \\ \quad \text{(casiniera cdH)} \end{array} \right.$$

$$V_T = (\frac{1}{2} V_0 - 1) \cdot 2 = (V_0 - 2) ;$$

$$V_0 - 2 = 1 + \frac{1}{2} V_0 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} V_0 \Rightarrow V_0 (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = (2 + \frac{1}{2})$$

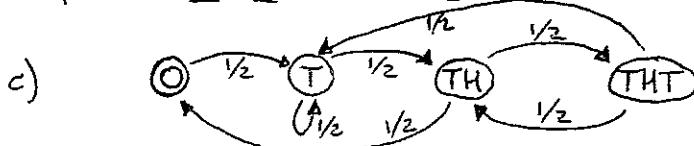
$$V_0 = 4 \cdot \frac{5}{2} = 10 \Rightarrow V_T = 8 \Rightarrow V_{TH} = 6 \#$$

b) TH stato assorbente:



$$\left\{ \begin{array}{l} V_0 = 1 + \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{2} V_T \\ V_T = 1 + \frac{1}{2} V_T \end{array} \right. \Rightarrow V_T = 2 \Rightarrow V_0 = 4 \#$$

(oppure dato che non torno indietro ma il tempo di una geometrica di parametro $p = \frac{1}{2} \Rightarrow E[T] = \frac{1}{p} = 2 = V_T \Rightarrow$ sono lanci indipendenti quindi $\underline{\text{da}} \quad \underline{T} \Rightarrow E[TH] = 2 \Rightarrow V_{TH} = 4$)



↳ dato che voglio il calcolo al limite devo usare le probabilità limite degli stati TH e THT $\Rightarrow R(N) \xrightarrow{\text{casiniera}} (\pi_{TH} - \pi_{THT}) \cdot N \rightarrow (\text{n° di visite})$

⇒ o risolvere la catena (sistema);

⇒ o cercare le probabilità che cominci una certa combinazione;

$\pi_{TH} = \frac{1}{2}, \pi_{THT} = \frac{1}{8} \Rightarrow$ dato che ho lanci indipendenti;

$$R(N) \rightarrow \frac{N}{8} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} R(N) = \infty ; \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{R(N)}{N} = \frac{1}{8}$$

② *mmmmvv* ES-22-09-2005

cdfH an $X(H)$ e istaki 1, 2, 3; $X(0) = 3$; $P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$a) \begin{cases} \pi_1 = 0,5 \pi_1 + 0,2 \pi_2 + \pi_3 \\ \pi_2 = 0,3 \pi_1 + 0,2 \pi_2 + / \Rightarrow \pi_2 = -0,3/0,8 \pi_1 = \left(\frac{3}{10}, \frac{10}{8}\right) \pi_1 \\ \pi_3 = 0,2 \pi_1 + 0,6 \pi_2 + / \downarrow \pi_3 = 0,2 \pi_1 + \frac{0,6 \cdot 0,3}{0,8} \cdot \pi_1 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \quad \begin{array}{l} \vdots \\ = \left(\frac{2}{10} + \frac{6 \cdot 18}{10 \cdot 8} \cdot \frac{10}{8} \right) \pi_1 \\ = \pi_1 \left(\frac{16+18}{80} \right) = \frac{34}{80} \pi_1 \end{array} \\ \pi_1 + \frac{3}{8} \pi_1 + \frac{34}{80} \pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{80}{144} = \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{tempo medio di ricorrenza: } M_t = \frac{1}{\pi_1} = \frac{144}{88}$$

$$M_2 = \frac{L}{\pi_2} = \frac{144}{30}; \quad M_3 = \frac{L}{\pi_3} = \frac{144}{34}$$

b) $\delta_{i,j}$ = tempo i° passaggio; $E[\delta_{i,j}]$ = tempo medio di i° passaggio

$$= 1 + \sum_{k \neq j} P_{ik} \cdot E[g_{kj}]$$

$$E\left[\frac{d_{32}}{d_{31}}\right] = 1 + \underbrace{P_{32} \cdot E[d_{21}]}_0 + \underbrace{P_{33} \cdot E\left[\frac{d_{22}}{d_{31}}\right]}_0 = 1$$

(infatti la probabilità di andare da 3 a 1 è 1)

(se non fossero state C le P- dovrebbero rischiare anche $E[\mathcal{S}_{24}] \dots$)

$$\Rightarrow E[\delta_{ij}^2] = 1 + 2 \cdot (E[\delta_{ij}] - 1) + \sum_{k \neq j} P_{ik} \cdot E[\delta_{kj}^2]$$

(VEDI ANTEOVA VARIANZA)

$$c) \quad E[\beta_{13}] = 1 + P_{11} \cdot E[g_{13}] + P_{12} \cdot E[g_{23}] = \\ i=1; j=3 \quad = 1 + 0,5 \cdot E[g_{13}] + 0,2 \cdot E[g_{23}]$$

$$E[\mathcal{G}_{23}] = 1 + P_{24} \cdot E[\mathcal{G}_{13}] + P_{22} \cdot E[\mathcal{G}_{23}]$$

$$x=2, y=3$$

$$G^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} (I - Q)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow SISTEMA;
 \Rightarrow SOSTITUISCO:

$$E[\theta_{23}] = 1 + P_{11} \cdot \left(\frac{E[\theta_{23}] \cdot (1 - P_{22}) - 1}{P_{21}} \right)$$

$$E[\theta_{23}] \cdot \left(1 - \frac{P_{11} \cdot (1 - P_{22})}{P_{21}} \right) = 1 - \frac{P_{11}}{P_{21}}$$

$$\begin{aligned} E[\theta_{23}] &= \left(1 - \frac{0,5}{0,2} \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{0,5 \cdot (1 - 0,2)}{0,2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{400 \cdot 10}{1000}} \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$E[\theta_{13}] \cdot (1 - P_{11}) = 1 + P_{12} \cdot E[\theta_{23}]$$

$$E[\theta_{13}] = \frac{1 + P_{12} \cdot E[\theta_{23}]}{(1 - P_{11})} = \frac{1 + 0,2 \cdot \frac{3}{2}}{1 - 0,5} = \frac{25}{40} = \boxed{5}$$

\Rightarrow VARIANZA: $\boxed{\text{Var}(E[\theta_{ij}]) = E[\theta_{ij}^2] - \{E[\theta_{ij}]\}^2}}$

PUNTO b: $E[\theta_{31}^2] = 1 + 2 \cdot (E[\theta_{31}] - 1) + P_{32} \cdot E[\theta_{21}^2] + P_{33} \cdot E[\theta_{31}^2]$

$$E[\theta_{31}^2] = 1 + 2 \cdot (1 - 1) = 1$$

$$\text{Var}(E[\theta_{31}]) = 1 - (1)^2 = \boxed{0} \neq$$

PUNTO c:

$$\left\{ \begin{array}{l} E[\theta_{13}^2] = 1 + 2 \cdot (E[\theta_{13}] - 1) + P_{11} \cdot E[\theta_{13}^2] + P_{12} \cdot E[\theta_{23}^2] \\ E[\theta_{23}^2] = 1 + 2 \cdot (E[\theta_{23}] - 1) + P_{21} \cdot E[\theta_{13}^2] + P_{22} \cdot E[\theta_{23}^2] \end{array} \right.$$

$$E[\theta_{23}^2] \cdot (1 - P_{22}) = 1 + 2 \cdot (\frac{3}{2} - 1) + 0,2 \cdot E[\theta_{13}^2]$$

SOSTITUISCO:

$$E[\theta_{13}^2] = 1 + 2 \cdot (5 - 1) + 0,5 \cdot E[\theta_{13}^2] + 0,2 \cdot \frac{1 + 1 + 0,2 \cdot E[\theta_{13}^2]}{1 - 0,2}$$

$$E[\theta_{13}^2] \cdot \underbrace{\left(1 - 0,5 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{8}}{\frac{10}{10} + \frac{1}{2}} \right)}_{\frac{3}{10}} = 1 + 8 + \frac{2}{10} \cdot 2 \cdot \frac{10}{8} = 1 + 8 + \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$$

$$E[\theta_{13}^2] = \frac{19}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{190}{6}$$

$$\text{Var}(E[\theta_{13}]) = \frac{190}{6} - 25 = \frac{190 - 150}{6} = \frac{40}{6} = \boxed{\frac{20}{3}}$$

$$d) \Rightarrow P[X(1)=1; X(3)=1 | X(2)=2] = \frac{P[X(1)=1; X(3)=1; X(2)=2]}{P[X(2)=2]}$$

$$\Rightarrow P[X(0)=3] \Rightarrow \frac{P[X(1)=1; X(2)=2; X(3)=1 | X(0)=3]}{P[X(2)=2 | X(0)=3]}$$

$$= \cancel{P_{31} \cdot P_{12} \cdot P_{21}} / \cancel{P_{32}^{(2)}} = \cancel{P_{21} \cdot P_{12}} \text{ (slo questo)} = P_{21}$$

$$\Rightarrow P[X(2)=2 | X(1)=1; X(3)=1] = \frac{P[X(2)=2; X(1)=1; X(3)=1]}{P[X(1)=1; X(3)=1]}$$

$$\Rightarrow = \frac{P[X(1)=1; X(2)=2; X(3)=1 | X(0)=3]}{P[X(1)=1; X(3)=1 | X(0)=3]} =$$

$$P[X(1)=1; X(3)=1 | X(0)=3]$$

$$= \frac{P_{12} \cdot P_{21} \cdot P_{13}}{P_{12} \cdot P_{21} + P_{13}}$$

$$= \frac{P_{12} \cdot P_{21} \cdot P_{13}}{P_{12} \cdot P_{21} + P_{13}} = \frac{P_{12} \cdot P_{21} \cdot P_{13}}{P_{12} \cdot P_{21} + P_{13}} = \frac{P_{12} \cdot P_{21} \cdot P_{13}}{P_{12} \cdot P_{21} + P_{13}}$$

mmmm E2 - 22-09-2005 ?

* ③ coda con arrivati di Poisson di intensità $\lambda = 1 \text{ pac/sec}$.

↳ 1) 2 pac in coda
(torni i pac TRASHESI) 2) 1 pac con tempo di attesa = 2 sec.

\Rightarrow ARRIVA un pac \Rightarrow la coda si riempie se ce n'è già uno in coda o se il pac che è in coda ha troppo ritardo;

a) calcolare la percentuale di tempo durante la quale la coda è vuota;

b) media del ritardo di un pac (tempo medio in coda);

$$a) [\% \text{ VUOTA}] = \frac{E[\text{tempo VUOTA}]}{E[\text{tempo VUOTA}] + E[\text{tempo PIENA}]} = P[\text{coda VUOTA}]$$

\Rightarrow per un processo di arrivi di Poisson \Leftrightarrow il parametro $\lambda \Rightarrow$ i tempi di intervento sono $\sim \mathcal{E}(\lambda)$;

↳ i tempi medi di interruzione sono: $\boxed{1/\lambda} = 1 \text{ sec.}$; $Y = \text{tempo di interruzione}$

$$y(t) = e^{-\lambda t}$$

$$F_Y(t) = P[Y \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$$

\Rightarrow dove occorre integrare tra 0 e 2 che sono tutti valori di tempo per i quali la codice ~~è~~ può essere pieno: (PK in codice)

$$E[T_{\text{COVARIANCE}}] = \int_0^2 \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = -\frac{\lambda}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} \Big|_0^2 = -\frac{\lambda}{\lambda} (e^{-2\lambda} - 1)$$

$$\boxed{E(T) = \left(\text{tempo medio per avere il } 1^{\circ} \text{ arrivo} \right)} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-2\lambda} \right)$$

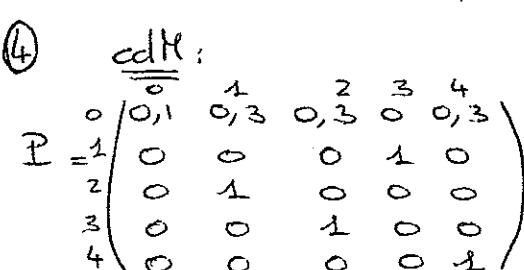
$$E[T_{\text{COSTA VOTTA}}] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \text{true in average, e' l'altra ho}$$

$$P[\text{CIMA VUOTA}] = \left\{ E[T_{VUOTA}] / E[T_{VUOTA}] + E[T_{PIENO}] \right\}^{\text{in media}} = \left(\frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1 - e^{-2\lambda}} \right)$$

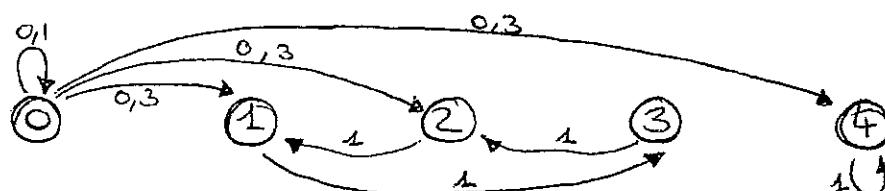
(se non è vuota \Rightarrow si sono inserite)

$$\text{b) RITARDO MEDIO} = E[T_{TOT.}] \cdot P[\text{CODA VUOTA}] + 0 \cdot P[\text{CODA NON VUOTA}] \\ = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1 - e^{-2\lambda}}{\lambda} \right) \cdot \frac{1}{2 - e^{-2\lambda}} = \frac{1 - e^{-2}}{2 - e^{-2}}$$

~~~~~ E1 - 02-09-2005



a) disegnare il diagramma di trans. ; class. gli stati ed indic. le classi;



STATI SORBOANTI  $\{1; 2; 3\}$  : clusse ;  $d(1) = d(2) = d(3) = 3$  ; RICORRENTI ; PERIODICI ;  
 (positivo)  
 (positivo)

### O : STATO TRANSITORIO :

b) prob. di assorb. nelle varie classi ricorrenti a partire da tutti gli stati transitori;

~~ASSORBERE E ASSORBERE~~

A : 0

B : 1, 2, 3

C : 4

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| A   | B   | C   |
| 0,1 | 0,6 | 0,3 |
| 0   | 1   | 0   |
| 0   | 0   | 1   |

(0,3 + 0,3)

ASSORBERE

~~ASSORBERE~~

$$\text{VERSO B: } M_A = 0,1 M_A + 0,6 M_B + 0,3 M_C$$

$M_B = 1 \quad M_C = 0$

$$\text{VERSO C: } M_A = 0,1 M_A + 0,6 M_B + 0,3 M_C$$

$M_B = 0 \quad M_C = 1$

$$1: M_A = 0,1 M_A + 0,6$$

$$M_A = \frac{0,6}{(1,2,3)} = \frac{2}{3}$$

$$2: M_A = \frac{0,3}{(4)} = \frac{1}{3}$$

|   | 0 | 1 | 2 | 3                    | 4     |
|---|---|---|---|----------------------|-------|
| 0 | X | X | X | $M_{A(i)} \cdot M_4$ |       |
| 1 |   | X | X | X                    | 0     |
| 2 | 0 | X | X | X                    | 0     |
| 3 | 0 | X | X | X                    | 0     |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0                    | $M_4$ |

c) calcolare:  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = 1$

$$\begin{aligned} T_{11} &= 0 \\ T_{12} &= 0 \\ T_{13} &= 0 \\ T_{14} &= M_A + M_B + M_C = 1 \\ T_{21} &= 0 \\ T_{22} &= 0 \\ T_{23} &= 0 \\ T_{24} &= M_4 \\ T_{31} &= 0 \\ T_{32} &= 0 \\ T_{33} &= 0 \\ T_{34} &= M_4 \\ T_{41} &= 0 \\ T_{42} &= 0 \\ T_{43} &= 0 \\ T_{44} &= M_4 \end{aligned}$$

|   | 0                          | 1                          | 2                      | 3                      | 4     |
|---|----------------------------|----------------------------|------------------------|------------------------|-------|
| 0 | $M_A \cdot M_1$<br>(1,2,3) | $M_A \cdot M_2$<br>(1,2,3) | $M_A \cdot M_3$<br>(4) | $M_A \cdot M_4$<br>(4) |       |
| 1 | 0                          | $1/3$                      | $1/3$                  | $1/3$                  | 0     |
| 2 | 0                          | $1/3$                      | $1/3$                  | $1/3$                  | 0     |
| 3 | 0                          | $1/3$                      | $1/3$                  | $1/3$                  | 0     |
| 4 | 0                          | 0                          | 0                      | 0                      | $M_4$ |

(stati transitori verso classe periodica)

al posto delle X c'è  
(1/periodo)

classe periodica  
(stati verso la stessa classe)

(SISTEMA per le  $T_{ij}$ )

$$\begin{aligned} T_{11} &= 0 \\ T_{12} &= M_A + M_B + M_C = 1 \\ T_{13} &= 0 \\ T_{14} &= M_4 \\ T_{21} &= 0 \\ T_{22} &= M_4 \\ T_{23} &= 0 \\ T_{24} &= M_4 \\ T_{31} &= 0 \\ T_{32} &= 0 \\ T_{33} &= M_4 \\ T_{34} &= M_4 \\ T_{41} &= 0 \\ T_{42} &= 0 \\ T_{43} &= 0 \\ T_{44} &= M_4 \end{aligned}$$

$$T_{14} = (M_A + M_B + M_C) M_4 + 0 + 0 + 0 +$$

$\Rightarrow$  per i sistemi delle Th considero solo le sottosezioni degli stati della classe; con la cond. di NORMALIZZAZIONE;

$$1: \begin{cases} \overline{H}_4 = \cancel{\text{something}} + \overline{H}_4 \\ \overline{H}_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \overline{H}_4 = 1$$

$$2: \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\cdot\pi_2 + \frac{1}{3}\cdot\pi_3 \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\cdot\pi_2 + \frac{1}{3}\cdot\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{3}\cdot\pi_1 + \frac{1}{3}\cdot\pi_2 + \frac{1}{3}\cdot\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$  per i tempi medi di RICORRENZA:  $M_i = \frac{1}{\lambda_i}$

$$M_1 = M_2 = M_3 = 3 \quad M_4 = 1$$

 E4 - 02-09-2005

5 PROTOCOLLO Go-BACK-N su un canale Markoviano a 2 stati con prob. di transizione 0,99 (dallo stato buono al se stessi) e 0,1 (dallo stato cattivo allo stato buono);

↳ la prob. che un pok sia errato è = 1 nello stato cattivo;

Ls il tempo di ROUND-TRIP-TIME è  $m = 2$  slot  
 (pck eravata verrà ritrasmesso al tempo  $t + m$ )

a) calcolare il throughput nel caso di feedback perfetto (sever err).

b)  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  sono dati soggetti ad errori indipendenti con prob. 0,1;

a)

The diagram shows a genetic circuit with two genes, **G** and **B**, represented by circles. Gene **G** has a self-loop arrow labeled **P<sub>G</sub>** with a superscript **(m)**. Gene **B** has a self-loop arrow labeled **P<sub>B</sub>** with a superscript **(m)**. There is a horizontal arrow from gene **G** to gene **B**. Above this arrow is a label **0,01**. Above gene **G** is a label **999**.

$$P[\text{pck errors} \mid A] = 0; \quad P[\text{pck errors} \mid B] = 1$$

$\Rightarrow$  ogni volta che c'è un tick errato c'è un salto di  $m-1$  slot

Ls il processo è semi-Markoviano  $\Rightarrow$  certe transizioni avvengono in un passo mentre altre in  $M$ ;

metrude:  $\begin{cases} m^v \text{ successi} \\ 1; \text{ in } G \\ 0; \text{ in } B \end{cases}$   $\begin{cases} \text{tempo} \\ 1; \text{ in } G \\ m; \text{ in } B \end{cases}$

$$\Rightarrow \left[ n^5 \text{ success per slot} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\sum_i (\pi_i \cdot R_i)}{\sum_i (\pi_i \cdot T_i)}$$

$$\Pi_0 = \frac{P_{00}^{(m)}}{P_{00}^{(m)} + P_{01}} ; \quad \Pi_1 = \frac{P_{01}}{P_{00}^{(m)} + P_{01}}$$

$$\Rightarrow [m^{\text{succ. far}}] = \frac{\Pi_0 \cdot 1 + \Pi_1 \cdot 0}{\Pi_0 \cdot 1 + \Pi_1 \cdot m} = \left( \frac{\Pi_0}{\Pi_0 + m \cdot \Pi_1} \right) = \frac{P_{00}^{(m)}}{P_{00}^{(m)} + m \cdot P_{01}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_0 = P_{00} \cdot \Pi_0 + P_{00}^{(m)} \cdot \Pi_1 \\ \Pi_1 = P_{01} \cdot \Pi_0 + P_{01}^{(m)} \cdot \Pi_1 \end{array} \right.$$

$$\Pi_0 + \Pi_1 = 1$$

↓  
il feedback è perfetto  
ma in ANDATA le varie  
sono MARCOVIANI)

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{00}^{(m)} & P_{01}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \quad \underline{m=2}$$

$$P^M = \begin{pmatrix} P_{00}^{(m)} & P_{01}^{(m)} \\ P_{00}^{(m)} & P_{11}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,99 \cdot 0,99 + 0,01 \cdot 0,1 & 0,99 \cdot 0,01 + 0,01 \cdot 0,9 \\ 0,9 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,99 & 0,9 \cdot 0,99 + 0,1 \cdot 0,01 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{la matrice che mi interessa: } P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,99 & 0,01 \\ 1 & 0,9999 \\ 0,9999 & 0,0801 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ 0,0999 & 0,082 \end{pmatrix}$$

$$\text{THR} = \frac{[0,0999 / 0,0999 + 2 \cdot 0,01]}{=} 0,833$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se gli errori sono i.i.d.: } E = \text{prob. di errore} \\ \text{rel. canale} \\ C = \begin{pmatrix} 1-E & E \\ 1-E & E \end{pmatrix} = C^m \\ \downarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{1-E}{1-E+m \cdot E} = \text{THR} \quad (\text{con errori indipendenti} \\ \text{rel. canale di} \\ \text{andata}) \\ \rightarrow \text{ERRORI i.i.d. sul CANALE DI ANDATA (feedback perfetto)} \end{array} \right.$$

→ ERRORI MARCOVIANI in ANDATA e RITORNO

$$C_f = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{00}^{(m)} & P_{01}^{(m)} \end{pmatrix}$$

mettiamo:  $\begin{cases} R=1 & \text{per } \infty \\ R=0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\begin{matrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 00 & P_{00}P_{00} & P_{00}P_{01} & P_{01}P_{00} & P_{01}P_{01} \end{matrix}$$

$\begin{cases} T=1 & \text{per } \infty \\ T=m & \text{altrimenti} \end{cases}$

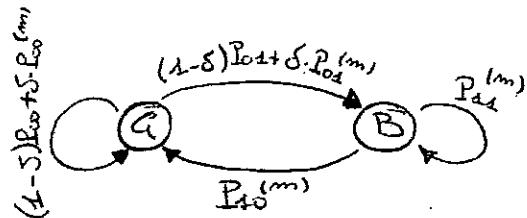
$$01 \quad P_{00}^{(m)}P_{01}^{(m)} \quad P_{00}^{(m)}P_{11}^{(m)}$$

$$THR(\text{MARK andata e ritorno}) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \frac{\pi_{00}}{\pi_{00} \cdot 1 + m \cdot (1 - \pi_{00})}$$

→ ~~ERRORE~~ MARKOVIANI in ANDATA e i.i.d. in RITORNO

nuo  $S = \text{prob. di errore}$

$$\begin{array}{c|cc|cc} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ \hline 00 & P_{00}(1-\delta) & P_{00} \cdot \delta & P_{01} \cdot (1-\delta) & P_{01} \cdot \delta \\ \hline 01 & P_{01}^{(m)}(1-\delta) & P_{01}^{(m)} \cdot \delta & P_{10}^{(m)}(1-\delta) & P_{10}^{(m)} \cdot \delta \\ \hline 10 & P_{10}^{(m)}(1-\delta) & P_{10}^{(m)} \cdot \delta & P_{11}^{(m)}(1-\delta) & P_{11}^{(m)} \cdot \delta \\ \hline 11 & P_{11}^{(m)}(1-\delta) & \alpha & \alpha & \alpha \end{array}$$



⇒ nuo in G: con prob.  $(1-\delta)$ ; guad. = 1; tempo = 1

con prob.  $\delta$ ; guad. = 0; tempo =  $m$

$$R_G = (1-\delta); T_G = (1-\delta + m \cdot \delta)$$

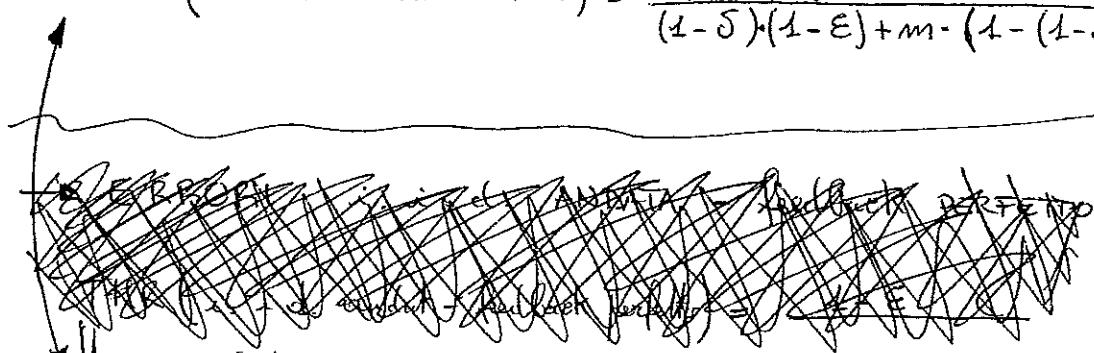
⇒ nuo in B: guadagno = 0; tempo =  $m$

$$R_B = 0; T_B = m$$

$$\begin{aligned} THR(\text{MARK. andata - i.i.d. RITORNO}) &= \frac{\sum \pi_i R_i}{\sum \pi_i T_i} = \frac{\pi_G (1-\delta)}{\pi_G (1-\delta + m \cdot \delta) + \pi_B \cdot m} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} P_{00}^{(m)} \cdot (1-\delta) / \\ P_{00}^{(m)} \cdot (1-\delta + m \cdot \delta) + \\ + m [(1-\delta)P_{01} + \delta P_{01}^{(m)}] \end{array} \right\} \end{aligned}$$

→ ERRORE i.i.d. ANDATA e RITORNO

$$THR(\text{i.i.d. andata - ritorno}) = \frac{(1-\varepsilon) \cdot (1-\delta)}{(1-\delta) \cdot (1-\varepsilon) + m \cdot (1 - (1-\delta)(1-\varepsilon))}$$



equivalente ad un canale con errori i.i.d. in andata con:

$$\varepsilon' = 1 - (1 - \varepsilon) \cdot (1 - \delta); \text{ e feedback perfetto}$$

b) in questo caso: MARK. andata - i.i.d. ritorno

$$THR = \frac{0,099 \cdot (1-0,2)}{0,099(1-0,1+0,2)+2 \cdot ((1-0,1) \cdot 0,01 + 0,1 \cdot 0,108)}$$

$S = \text{fatt. di errore} = 0,1$

$$= 0,6$$

E2 - 02-09-2005

⑥ FABBRICA con 2 MACCHINE UGUALI;



↳ si alternano periodi di funz. e guasto con durata esponenziale  
con media:  $\frac{1}{\alpha} = 8$  GIORNI (FONZIONAMENTO)  
 $\frac{1}{\beta} = 1/4 \alpha$  (ROTTURA)

↳ MACCHINE indipendenti; PRODUZIONE  $\Rightarrow 12$  ferri/ora  
(se funzionano)

- a) - frat. di tempo in cui la prod. è ferma;  
- durata media di un intervallo di tempo durante il quale la produzione è ferma;

$$\begin{aligned} \text{TEMPO} & \left\{ P[1 \text{ macch. è ferma}] = \frac{1/\beta}{1/\beta + 1/\alpha} = \frac{2}{10} = \frac{2}{10} \right. \\ & \left. P[2 \text{ macch. ferme}] = P[\text{PROD. FERMA}] \Rightarrow \text{sono indipendenti} \right. \\ & \rightarrow = P[G_1] \cdot P[G_2] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

→  $T_g$  = tempo in cui entrambe le macchine sono ferme

↳ i tempi di rottura sono esponenziali e uguali per entrambe le macchine;  $\Rightarrow$  esponenziale CON PARAMETRO DOPPIO; (o in genere la somma dei due)

$$E[T_g] = \cancel{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$= \frac{1}{\beta+\beta} = \frac{1}{2\beta} = \cancel{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot \alpha} \right)$$

$\Rightarrow T_s$  = tempo in cui funz. una sola macchina

$$E[T_s] = \frac{1}{\alpha+\beta} = \frac{1}{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{5} \quad \alpha = \frac{1}{8}; \beta = \frac{1}{2}$$

N.B.

→ tempo di attesa per la funzione =  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$  minuti

$$\lambda = \frac{1}{2} \text{ macchi. funz.} + 2 \cdot \lambda_1 \cdot \frac{1}{2} \text{ macchi. guasta}$$

$$\Rightarrow P[1 \text{ MACCH. FUNZ.}] = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha + \beta} = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{4 + 1 + \frac{8}{5}} = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\frac{33}{5}} = \frac{8}{33}$$

$$\Rightarrow P[2 \text{ MACCH. FUNZ.}] = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha + \beta} = \frac{4}{4 + 1 + \frac{8}{5}} = \frac{4}{\frac{33}{5}} = \frac{20}{33}$$

b)  $\left[ \begin{array}{l} \text{M}^0 \text{ MEDIO PERRI IN} \\ \text{1 ora} \end{array} \right] = 12 \cdot \frac{8}{33} + 24 \cdot \frac{20}{33} = \frac{96}{33} + \frac{480}{33} = 17,45 \left[ \frac{\text{perrini}}{\text{ora}} \right]$

$$\lambda = \text{uguali} = 12 \text{ perrini/ora}$$

c)  $\left[ \begin{array}{l} \text{M}^0 \text{ MEDIO PERRI} \\ \text{in 1 ora} \end{array} \right] = 12 \cdot \frac{8}{33} + 30 \cdot \frac{20}{33} = \frac{96}{33} + \frac{600}{33} = 21,09 \left[ \frac{\text{perrini}}{\text{ora}} \right]$

$$\lambda_1 = 12 \frac{\text{perrini}}{\text{ora}} ; \lambda_2 = 30 \frac{\text{perrini}}{\text{ora}}$$

ALTRÉ DOMANDE: dato un T fissato

$$\rightarrow P[T_g > T] = 1 - (1 - e^{-2\beta T}) = e^{-2\beta T}$$

$$\rightarrow P[T_1 > T] = e^{-(\alpha+\beta)T}$$

→ dato che una macchina è rotta e l'altra funziona si vuole calcolare la prob. che quella rotta funz. prima che l'altra venga agg.

T<sub>a</sub> = tempo agg. T<sub>r</sub> = tempo rottura di quella funz.

$$P[T_r < T_a] = \int_0^{\infty} P[T_a > T_r | T_r = t] \cdot P[T_r = t] dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} P[T_a > t] dt}_{\text{cioè il tempo da lì macch. sta guasta } < t} F_{T_r}(t) = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cdot d \cdot e^{-\alpha t} dt = \int_0^{\infty} \alpha \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} dt =$$

→ cioè la dist. di prob. del tempo di funz. della macch. funz.

$$= \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} (\alpha + \beta) \cdot e^{-(\alpha + \beta)t} dt}_{1} = \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)$$

E2 - 19-06-2006

## 7 NODO di RETE

1 Gbps  $\rightarrow$  condiz. normali ;  $[\text{tempo funz. normale}] \sim \mathcal{E}(\mu)$ ;  $\frac{1}{\mu} = 99T$

250 Mbps  $\rightarrow$  stato di allarme  $\Rightarrow [\text{tempo stato di allarme}] = T \text{ (media)}$

$\rightarrow$  dopo  $T$  in allarme  $\Rightarrow$  riparazione istantanea;  $\Rightarrow$  funz. normale

a)  $[\text{fraz. del tempo che il nodo passa in stato di allarme}] = \frac{T}{99T+T} = \frac{1}{100} = P[\text{stato di allarme}]$

$\hookrightarrow [\text{traffico medio risultato}] = 1 \text{ Gbps} \cdot \frac{99}{100} + 250 \text{ Mbps} \cdot \frac{1}{100}$   
 $P(\text{code sempre piena} \Rightarrow \text{sempre poca da TX}) = 992500 \text{ bps} = 992,5 \text{ Mbps}$

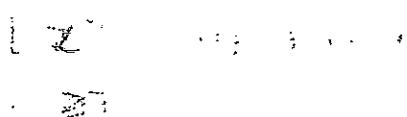
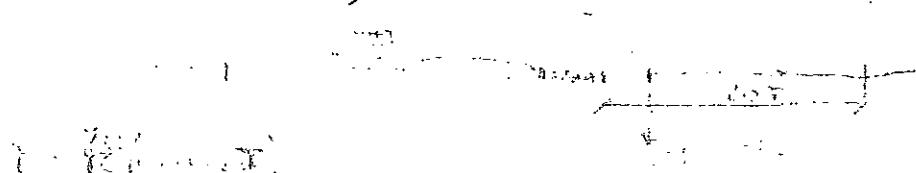
b)  $\hookrightarrow$  una volta in allarme il nodo smette di funz.  
 dopo un tempo esp. in media  $2T \Rightarrow$  a meno che non venga riparato  $\Rightarrow$  in un tempo  $T$  (medio);

$\hookrightarrow$  se smette di funz. deve essere sost. e questo richiede  $20T$  (medio)  $\Rightarrow$  NO TRAFFICO

$\rightarrow$  tempo medio fra 2 sost. successive;

$\rightarrow$  prob. di tempo durante il quale il nodo NON funziona;

$\rightarrow$  THR del sistema;

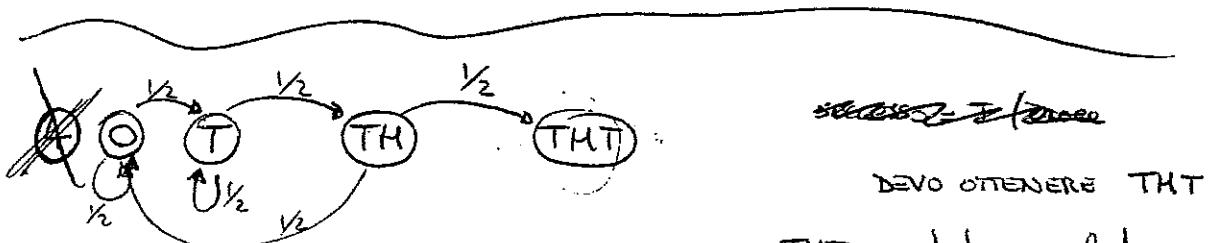


c)

$\Rightarrow T_a =$  tempo aggiustato della mediana notta;

$T_a =$  " rotture " " " " funziona

$$\begin{aligned} P[T_n < T_a] &= \int_0^{+\infty} P[T_a > T_n | T_n = t] \cdot P[T_n = t] dt = \\ &= \int_0^{+\infty} P[T_a > t] dF_n = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot d \cdot e^{-dt} dt = \\ &= d \cdot e^{-(d+p)t} dt = \left( \frac{d}{d+p} \right) \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} (d+p) \cdot e^{-(d+p)t} dt}_{1} = \left( \frac{d}{d+p} \right) = \frac{1}{d+p} \end{aligned}$$



a)

$\Rightarrow$  tempo medio per arrivare a THT  $\Rightarrow$  tempo minimo per raggiungere THT

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0 = 1 + \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{2} V_T \\ V_T = 1 + \frac{1}{2} V_T + \frac{1}{2} V_{TH} \\ V_{TH} = 1 + \frac{1}{2} V_0 \end{array} \right. \quad \text{RISOLVO} \quad \boxed{V_0 = 10} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ V_{TH} = 6 \\ \downarrow \\ V_T = 8 \end{array}$$

b)

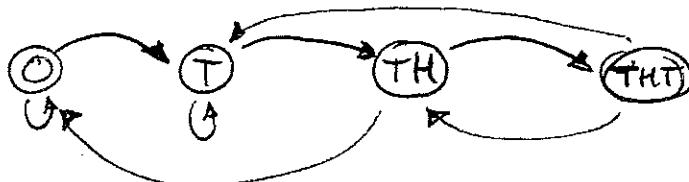


$$\left\{ \begin{array}{l} V_0 = 1 + \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{2} V_T \\ V_T = 1 + \frac{1}{2} V_T \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow V_T = 2; V_0 = 4$$

(oppure dato che non ha i due livelli bassi  
che da O a T e da T a TH  $\Rightarrow$  sommo)

c)



LANCIO  
REPETORARIO

$$\text{NODI VI LANCI} \Rightarrow R(N) \rightarrow (\Pi_{TH} - \Pi_{THT}) \cdot N$$

↓  
VISITE

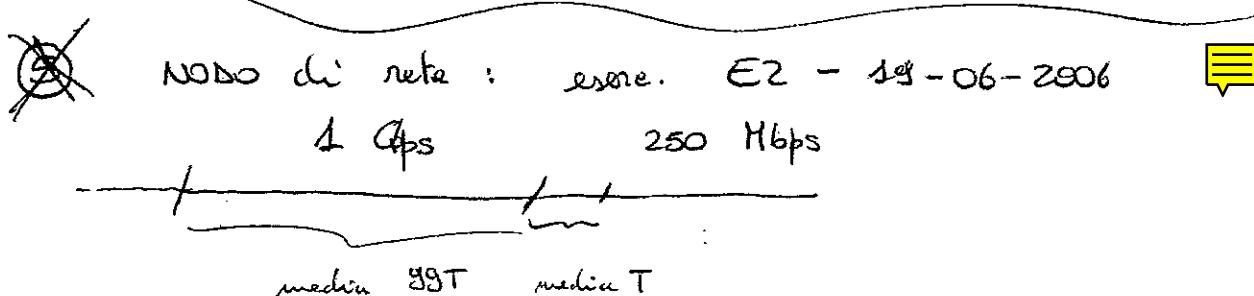
→ σ: RISOLVO le catene

→ σ: cercare la prob. che COMINCIA una certa COMBINAZIONE:

$$\Rightarrow \text{lavori indipendenti: } \Pi_{THT} = \frac{1}{8} \quad ; \quad \Pi_{TH} = \frac{1}{4}$$

↳  $R(N) \rightarrow \frac{N}{8} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} R(N) = \infty$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{R(N)}{N} = \frac{1}{8}$$



a) ~~keep~~ prob. del traffico che si puo' nella stato di allarme:

$$\frac{F}{(ggT+1)^F} = \frac{1}{400}$$

↳ Traffico Medio multipli:  $0,99 \cdot 1 + 0,01 \cdot 0,25 = 0,9925 \text{ Gbps}$



$$T \sim \mathcal{E}(\text{media } ggt)$$

→ tempo d'attesa il quale non  
FONZ. PIÙ

⇒ se  $T < T$  il nodo ~~si ferma~~ a fissa.

⇒ se  $T \geq T$  il nodo ripete a fissa. al tempo  $T \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[\tau < T] = 1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}$$

$$\Rightarrow (1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}) \cdot \left( 99T + \frac{\int_0^T e^{-\frac{\tau}{2\tau}} d\tau}{1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}} + 20T \right) + \left( e^{-\frac{T}{2\tau}} \cdot 100T \right)$$

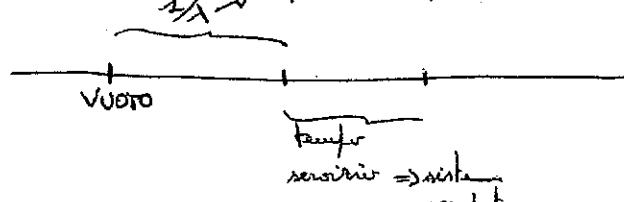
$$\left( E[\tau] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}[\tau > a] da = \int_0^T e^{-\frac{a}{2\tau}} da \right)$$

~~1 Mbps~~;  $\lambda = 500 \text{ pac/sec}$ .  $L = 1000 \text{ bit}$

Ese - 14 luglio 2006

$\frac{1}{\lambda} \rightarrow$  tempo medio per avere il 1° accesso

a) throughput:



$$E[T_{vuoto}] = \frac{1}{500} = 2 \text{ ms}$$

$$E[T_{acc.}] = 1 \text{ ms} \cdot \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{tempo medio di occup. determin.}} \frac{1 \text{ ms}}{(1+2)\text{ms}} = \frac{T_{acc.}}{T_{tot.}}$$

$$\hookrightarrow \text{THR} = \frac{1}{3} \cdot 1 \text{ Mbps} = 333,33 \text{ kbps}$$

b) tempo di accesso:

$$\mathbb{P}[\text{accesso immediato}] = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}[\text{accesso al } K\text{-esimo tentativo}] = \left(\frac{2}{3}\right)^{K-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right), K \geq 1$$

$$E[n^{\circ} \text{ medie di tentativi}] = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{tempo} \underline{\text{medio}} \text{ di accesso} &= \left[ \begin{array}{l} \text{tempo medio del} \\ \text{tent.} \\ \text{ed un altro} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{l} n^{\circ} \text{ edis di tentativi} \\ = 1 \end{array} \right] \\ &= \frac{100}{\lambda} \cdot \left( \frac{3}{2} - 1 \right) = \frac{50}{\lambda} = 0,1 \text{ sec.} \end{aligned}$$

c) GUADAGNO:

$$TX = +1 \text{ UNITÀ DI GUADAGNO}$$

$$\text{FALLIMENTO} = -0,2 \text{ UNITÀ DI GUADAGNO}$$

sull'accesso

$$\left. \begin{array}{l} P[\text{accettato}] = \frac{2}{3} \\ P[\text{rifiutato}] = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{vedi sistema} \\ \text{VUOTO - OCCUPATO} \end{array}$$

$$(GUAD. TOT. DEL \text{ sistema}) = \lambda \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0,2 \right) = 300 \text{ (unità di guad.) sec.}$$

~~E3~~ E3: 14 luglio/06   
⇒ CODA M/G/∞

a) (<sup>n°</sup><sub>alla chiusura</sub> = sala)  $\approx \sim P(\lambda)$

CALCOLATO CON LE FORMULE

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{10 (\text{dati})}{1} \cdot 25 \text{ - int.} \\ = 25/6$$

$$\mu = \frac{t_f}{t_i} \text{ di permanenza}$$

$$P[\text{sala vuota alla chiusura}] = e^{-25/6} = 0,0155$$

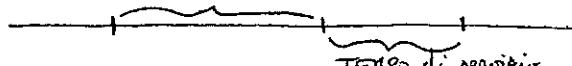
↳ ~~È~~ È LA STESSA dopo un  
certo tempo ASINTOTICA

E2 - 14-07-2006

⑧ Es. 2 LINK : 1 Mbps ; esistono un clienti che producono traffico COLLETTIVAMENTE in un processo di Poisson di  $\lambda = 500 \frac{\text{pk}}{\text{sec}}$   
 $L = 1000$  bit (costante) ; PROTOCOLLO CSMA ideale  
⇒ cioè : - pk generato in canale libero ha accesso immediato.  
- pk che trova il canale occupato se ne provoca la TX defro  
un tempo  $\sim \mathcal{E}(\cdot)$  in media  $100/\lambda$   
↳ se ancora occupato si rientra a tempi casuali finché non si trova il canale libero;

⇒ TRAFFICO TOTALE (nuovi + rithmissimi)  $\sim P(\lambda)$

a) THR :



$$E[T_{vuoto}] = 1/\lambda = 2 \text{ ms}$$

$$E[T_{occup.}] = \frac{L}{C} = 1 \text{ ms} \Rightarrow \text{THR} = \frac{1}{3} \cdot 1 \text{ Mbps} = 333,3 \text{ Kbps}$$

$$\Rightarrow \left[ \% \text{ tempo del sistema resto occupato} \right] = \frac{E[T_{occup.}]}{E[T_{occup.}] + E[T_{vuoto}]} = \frac{1}{3} = P[\text{rist. occup.}]$$

- b) ritardo medio di accesso da quando un pck è generato a quando riesce ad accedere al canale;

$$\left[ \% \text{ tempo sistema vuoto} \right] = \frac{E[T_{vuoto}]}{E[T_{vuoto}] + E[T_{occ.}]} = \frac{2}{3} = P[\text{accesso immediato}] = P[\text{sistema vuoto}]$$

$$P[\text{accesso al } K\text{-esimo tentativo}] = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{K-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right); K \geq 1; p = \frac{2}{3}$$

↓ dalla teoria sulla V.A.  $\Rightarrow \left[ n^{\circ} \text{ medio di tentativi} \right] = \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \left[ \text{tempo medio di accesso} \right] = \left[ \text{tempo medio tra un tent. ed un altro} \right] \cdot \underbrace{\left[ n^{\circ} \text{ medio di tent. - 1} \right]}_{\substack{\text{all'ultimo ho} \\ \text{necessario TX}}} = \frac{100}{\lambda} \cdot \left( \frac{3}{2} - 1 \right) = \frac{50}{\lambda}$$

( SE L'ARRESTO DI UN TENTATIVO È FATO A T.D.; ALLORA E

H.P.G.ATO  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{tempo medio di accesso} &= \left[ \text{tempo medio per tent. accettato} \right] + \left[ \text{tempo medio per tent. rifiutato} \right] \\ &\quad + \left[ \text{tempo medio per tent. accettato} \right] \cdot \left[ \text{tempo medio per tent. rifiutato} \right] \end{aligned}$$

- c) se TX ha guadagno 1 e ogni tent. fallito (pck generato su canale occupato) costa 0,2

↳ guad. totale del sistema (in unità di secondo);

$$P[\text{accettato}] = P[\text{sist. vuoto}] = 2/3$$

$$P[\text{rifiutato}] = P[\text{sist. occup.}] = 1/3$$

$$\begin{aligned} [\text{GUAD. TOTALE}] &= \lambda \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0,2 \right) = \underbrace{300}_{\text{sec}} \left[ \frac{\text{unità}}{\text{sec}} \right] \\ &= \lambda \cdot \left( P[\text{accett.}] \cdot C + P[\text{rifiut.}] \cdot C \right) = \end{aligned}$$

(9) F3<sup>3</sup>

- NEGOZIO: aperture e chiusure si alternano con durata esponenziale e media  $d = 12 \text{ ore}$ ;  
 Lo tempo di ap. e chius. indipendenti e non dip. dal giorno  
 e dall'ora;  
 Lo aperto da molti anni;

a) prob. che un cliente al tempo  $t$  trovi chiuso;

$$\begin{aligned} P[\text{aperto}] &= \frac{1/d}{1/d + 1/d} = \frac{1}{2} = P[\text{chiuso}] \\ [\% \text{ tempo aperto}] &= \frac{1}{2} = [\% \text{ tempo chiuso}] \end{aligned}$$

b) clienti arrivano con un processo di Poisson con  $\lambda = 10 \text{ clienti/ora}$  dalle 8 alle 20 e  $\lambda' = 2 \text{ clienti/ora}$  dalle 20 alle 8;

$\Rightarrow [n^{\circ} \text{ medio di clienti che trovano}]$ ; ricci  $X(t)$  V.A. di Poiss - che conta il  $n^{\circ}$  di arrivi/clienti;

$N_1 = n^{\circ} \text{ clienti che trovano chiuso dalle 8 alle 2000};$

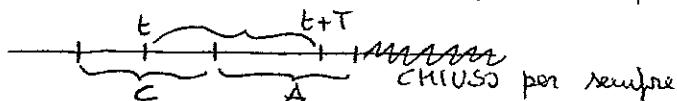
$$H(t) = E[N_1] = \sum_{k=0}^{+\infty} E[N_1 | X(t)=k] \cdot P[X(t)=k] =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{+\infty} E[1 \{ \text{intende in hora chiuso} \}] \cdot P[X(t)=k] = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2} \cdot P[X(t)=k] = \frac{1}{2} \cdot [n^{\circ} \text{ Medio di arrivi nell'intervallo}] \\ &\quad = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60 \text{ [clienti]} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [n^{\circ} \text{ di clienti che trovano}] = (60 + 12) \text{ [clienti]} = 72 \text{ [clienti]} \quad \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 = 12 \text{ [clienti]} \right)$$

(INTERVALLI indip. - arrivi indip.  $\Rightarrow$  ARRIVI  $\cdot P[\text{aperto o chiuso}]$ )

c) al tempo  $t$  un cliente trova chiuso; la prossima apertura è l'ultima; se il cliente viene dopo  $T$ , prob. che trovi aperto;



$P[\text{al tempo } (t+T) \text{ sia aperto}] \Rightarrow$  considero le aperture e le chiusure come un processo di arrivi di eventi con: i tempi di interarrivo  $\sim \mathcal{E}(-)$  e media  $d = 12 \text{ ore} \Rightarrow$  è un processo di Poisson con  $\lambda = \frac{1}{12} \text{ [eventi/ora]}$

PARAMETRO  $= \mu = \frac{1}{12}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[\text{aperto a } (t+T) \mid \text{chiuso a } t] = \mathbb{P}[\text{1 evento A-C in un tempo } T] =$$

$$= (\lambda T)^k \cdot \frac{e^{-\lambda T}}{k!}; \text{ con } k=1$$

$$= (\lambda T \cdot e^{-\lambda T})$$

d) a) le cond. del punto precedente; il cliente ha una sola possibilità di tornare; calcolare la scelta migliore di  $T$  cioè quella da massimizzare la prob. di trovare aperto;

$$\frac{d}{dT} (\lambda T \cdot e^{-\lambda T}) = \cancel{\lambda T \cdot e^{-\lambda T}} + \cancel{\lambda T(-\lambda)} \cdot e^{-\lambda T} = 0$$

~~$\lambda T \cdot e^{-\lambda T}$~~

$$\Rightarrow \lambda T = 1 \Rightarrow \mathbb{E} T = 1/\lambda = \alpha = 12 \text{ [su]}$$

 E2 - 17-06-2005

1c) SUPERMERCATO: arrivo clienti con un processo di Poisson con  $\lambda = 10$  [clienti/ora]

↳ orario: 8 → 20



a) prob. che dalle 8 alle 9 arrivino un solo cliente;  
medio totale di clienti arrivati fra le 8 e le 9,

$$\rightarrow \mathbb{P}[\text{1 solo cliente dalle 8 alle 9}] = \mathbb{P}[\text{1 arrivo in 1 ora}] =$$

$$= (\lambda \cdot \Delta t) \cdot \frac{e^{-\lambda \cdot \Delta t}}{\Delta t!} = (\lambda \cdot e^{-\lambda}), \Delta t = 1 \text{ [ora]}, k=1 \text{ [cliente]}$$

$$\rightarrow [\text{medio di clienti in 1 ora}] = \lambda \cdot \Delta t = \lambda \cdot 1 = 10 \text{ [clienti]}$$

se so che  
b) dalle 8 alle 12 arrivano 50 clienti; calcolare

la prob. che dalle 8 alle 9 ne siano arrivati 10, e  
che dalle 8 alle 14 ne siano arrivati 60;

$$\rightarrow \mathbb{P}[8-9 \text{ 10 clienti} \mid 8-12 \text{ 50 clienti}] = \binom{50}{10} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{(50-10)}$$

$$p = \left[ \text{prob. intervallo} \right]_{8-9} = \frac{1}{12}$$

→ gli arrivi sono indipendenti:

$$P[8-14 \text{ clienti} | 8-12 \text{ clienti}] = P[12-14 \text{ clienti}] = \\ = (\lambda \Delta t)^k \cdot \frac{e^{-\lambda \Delta t}}{k!} \Rightarrow \text{con } k=10 \text{ [clienti]} \\ \Delta t = 2 \text{ [ore]} \\ = (2\lambda)^{10} \cdot \frac{e^{-2\lambda}}{10!}$$

⇒ se l'intervallo scelto è "DENTRO" quello della condizione  
si fa così una:  $\binom{m}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{m-k}$ ;  $m$  = arrivi attesi.  
K = arrivi interv. scelto  
 $p = \text{prob. interv. scelto} = \frac{\text{DH (interv.)}}{\text{DH totale}}$

• se l'intervallo scelto "COPRENDE" quello della condizione si sottra la probabilità;

ALTRÉ DOMANDE:  $[ \text{il tempo spento nel rifornimento} ] \sim \mathcal{E}(\mu); \text{media} = \mathbb{E}[\text{min}]$

$n^{\circ}$  cassa infinito  
↓  
NO coda

$[ \text{tempo passato alla cassa} ] \sim M[0,5; 2,5]$

→ calcolare il  $\bar{x}$ :  $[ \text{m° medio di clienti usciti dal negozio tra le 8 e le 12} ]$

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{1}{12} \cdot 5 \text{ [minuti]}$

$$[ \text{min} ] 4,5 = \mathbb{E}[ \text{tempo spento nel rifornimento} ] = \int_0^\infty x \cdot f(x) dx$$

zzzzzzzz E3 - 14-07-2006



- X  
 11) HOSTRA:  
 - arrivo di Poisson con  $\lambda = 10$  [denti/ora]  
 - tempo  $t_p$  percorso da ogni visitatore  $\Rightarrow \sim U(20; 30)$   
 - sala infinitesima grande  $\Rightarrow$  no cosa;  
 - durata di apertura  $8 - 18$ ;

a)  $P[\text{PRIMA MET'ORA arrivano meno di } 3 \text{ visitatori}] =$

$$P[0, 1, 2 \text{ arrivi}] = \binom{\text{sono}}{\text{indip.}} = \left[ \frac{(\lambda \cdot \Delta t)^0 \cdot e^{-\lambda \Delta t}}{0!} + \frac{(\lambda \cdot \Delta t)^1 \cdot e^{-\lambda \Delta t}}{1!} + \right. \\ \left. + \frac{(\lambda \cdot \Delta t)^2 \cdot e^{-\lambda \Delta t}}{2!} \right]$$

$\Delta t = 30 \text{ min}$   
 $= 0,5 \text{ ora}$  N.B. unità di MISURA  
 COMPATIBILI con  $\lambda$ .

b) ~~Probabilità che nel primo 15 minuti venga curato un solo visitatore~~

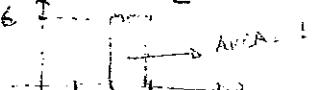
↳ il tempo di servizio è uniforme tra 20 e 30 minuti;  $\Rightarrow$  nei primi 15 minuti non può uscire nessuno

↳  $P[\text{di avere curato un solo curante in 15 min.}] = \frac{(\lambda \Delta t')^1 \cdot e^{-\lambda \Delta t'}}{1!}$

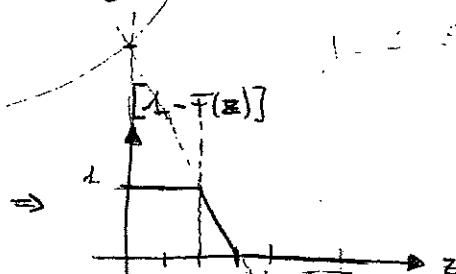
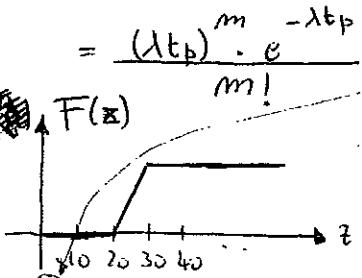
$$\Delta t' = 15 \text{ min.} = 0,25 \text{ [ora]}$$

c)  $P[\text{all'orario di chiusura la sala sia vuota}] \Rightarrow$  rice  $\chi(t) = m^{\circ}$  di persone all'istante  $t$

$$= P[\chi(t) = m] \Rightarrow P[\chi(18-8) = 0] = P[\chi(10) = 0] =$$



↳ cur:



$$\hookrightarrow (\lambda t_p) = \lambda \int_{10}^{40} [1 - G(z)] dz = \lambda \int_{10}^{40} [1 - (1 - \frac{z-10}{20})] dz$$

$$= \lambda \int_0^{1/3} 1 dz + \lambda \int_{1/3}^{1/2} (3 - 6z) dz$$

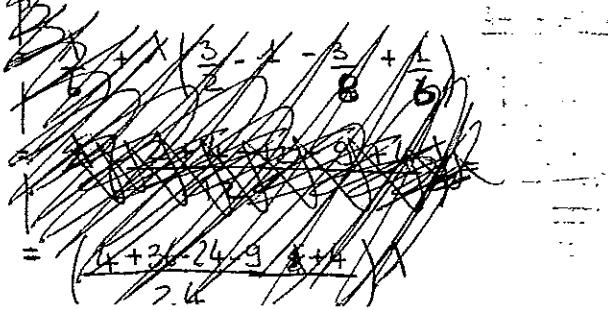
tempo considerato

$$= \lambda z \Big|_0^{1/3} + \lambda \cdot \left( \frac{3}{2} - 3z^2 \right) \Big|_{1/3}^{1/2}$$

= (PIÙ SEMPLICE con AREA GEOMETRICA)

$$= \lambda \cdot \left( 1 \cdot \left( \frac{1}{3} \right) + 1 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right)$$

$$= \lambda \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) = \boxed{\frac{5 \cdot \lambda}{12}}$$



12 MACHINA: 3 COMPONENTI UGUALI



Dati

3 componenti uguali

↳ componenti in funz.  $\sim \mathcal{E}(\lambda)$ ; dopo si guasta;

↳ la macchina funz. finché c'è almeno un comp. FUNZ.;

↳ si ferma quando l'ultimo funz. si guasta;

↳ tempo di riparazione della macchina  $\sim \mathcal{E}(\beta = 6d)$   $\Rightarrow$  tutti DOPU  
 $\hookrightarrow$  (solo se tutti sono POM)

TUTTI i componenti sono nuovi

a) frut. di tempo in cui la macchina funz. con UNO, DUE o TRE componenti; e di quando la macchina è ferma;

~~tempo~~ ~~della~~  $T_{F_i}$  = tempo di FUNZ. di un comp.

$$E[T_{F_i}] = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad T_{R_H} = \text{tempo medio di riparazione della macchina} \\ = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{6d}$$

$$\left[ \text{tempo } \sqrt{1} \text{ comp.} \right] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\left[ \text{tempo } \sqrt{2} \text{ comp.} \right] = \frac{1}{2\lambda}$$

$$\left[ \text{tempo } \sqrt{3} \text{ comp.} \right] = \frac{1}{3\lambda}$$

$$\left[ \text{tempo ferma} \right] = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{6d}$$

$$\left[ \% \text{ tempo ferma} \right] = \frac{1}{12}$$

$$P[0 \text{ comp.}] = P[\text{PROD. FERMA}]$$

$$\Rightarrow \left[ \% \text{ tempo 1 comp.} \right] = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{3\lambda}} = \frac{1}{1/1 + 1/2 + 1/3} = \frac{1}{1/6} = \frac{1}{6}$$

$$\left[ \% \text{ tempo 2 comp.} \right] = \frac{\frac{1}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{3\lambda}} = \frac{1}{1/1 + 1/2} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$\left[ \% \text{ tempo 3 comp.} \right] = \frac{\frac{1}{3\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{3\lambda}} = \frac{1}{1/1 + 1/2 + 1/3} = \frac{1}{1/6} = \frac{1}{6}$$

b) prod. media di persi all'ora  $\pi$ :  $\begin{cases} \lambda_{1c} = 5 \\ \lambda_{2c} = 12 \\ \lambda_{3c} = 20 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tempo} \\ \text{ora} \end{array} \right\}$

$$\left[ \text{m° medio di persi (all'ora)} \right] = \lambda_{1c} \cdot P[1 \text{ comp.}] + \lambda_{2c} \cdot P[2 \text{ comp.}] + \lambda_{3c} \cdot P[3 \text{ comp.}]$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{1}{4} + 20 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2} + 3 + \frac{10}{3} \\ = \frac{15 + 18 + 20}{6} = \frac{53}{6}$$

c) ripetere a e b con tempo di rip. uniforme  $\sim U[0; 3/B]$ ;

$$T_{RH} = \text{tempo di rip. media} ; E[T_{RH}] = \frac{\lambda}{2B} = \frac{1}{B} = \frac{1}{6d}$$

$\Rightarrow$  STESSI VALORI;

E3 - 18-09-2006

(13) 50 SENSORI: DISTRIBUITI su un'area A secondo un processo di Poisson in 2 dimensioni con tasso  $\lambda$  [sensori/unità di area];

$\hookrightarrow$  sensori attivi per un tempo fissato e spenti per un tempo fissato;  
 $\hookrightarrow$  poi si riaccende  $\Rightarrow$  ALTERNANZA ON-OFF

$$\hookrightarrow [\% \text{ tempo attivo}] = \frac{\text{DUTY CYCLE}}{20\%} \Rightarrow P[\text{attivo}] = 0,2$$

$\Rightarrow$  n° modi attivi CASUALE  $\Rightarrow$  NODI INDIPENDENTI;

$\hookrightarrow$  interrogazione periodica dei sensori;

a) 50 sensori su un'area A  $\Rightarrow \lambda = \frac{50}{A}$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{n° medio di} \\ \text{sensori che} \\ \text{rispondono} \end{array} \right] = m \cdot P[\text{attivo}] = 50 \cdot 0,2 = 10 \text{ [sensori]}$$

( tipo una binomiale:  $m = \text{n° sensi} ; p = \text{prob. sensore attivo}$

$$\Rightarrow P[X=k] = P[\text{n° sensi che rispondono} = k] = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

$\hookrightarrow$  in MEDIA:  $\boxed{m_x = m \cdot p} ; \quad \sigma_x^2 = m \cdot p \cdot (1-p) \quad \#$

b) la staz. può interr. solo un'area pari ad  $\alpha = A/2$

$$P[\text{n° medi di sensori che rispondono}] ; P[\text{non risponde nessuno}]$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{n° medi sensori} \\ \text{in } \alpha = A/2 \end{array} \right] = \lambda \cdot \text{area} = \frac{50}{A} \cdot \frac{A}{2} = 25 \text{ sensori}$$

$\downarrow$   
 $\text{n° medi di sensori}$   
 $\text{per unità di area}$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{n° medi di sensori} \\ \text{che rispondono} \end{array} \right] = 25 \cdot 0,2 = 5 \text{ sensori}$$

$$\rightarrow \text{BINOMIALE con } K=0 ; P[\text{attivo e nell'area giusta}] = 0,2 \cdot \frac{1}{2} = 0,1$$

$$P[\text{nessuno risponde}] = \binom{25}{0} \cdot 0,2^0 \cdot (0,8)^{25}$$

SONO INDEPENDENTI

$$= \frac{25!}{25! 0!} \cdot 0,2^0 \cdot (0,8)^{25}$$

$$= (0,8^{25}) \neq$$

~~prob. di uno RISP./NON RISP. per tutti i sensori~~

E2 - 18-09-2006

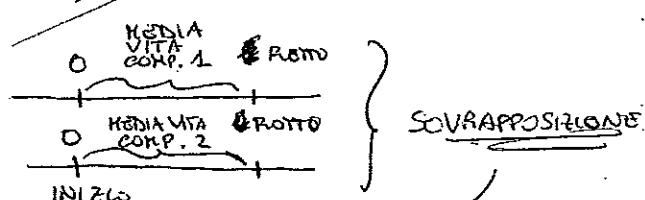
#### (14) COMPONENTE ELETTRONICO

per un sistema viene ridandato installando 2 copie in ogni sistema e facendole funz. in parallelo;

$\hookrightarrow$  VITA COMP.  $\sim \mathcal{E}(d)$ ; media  $= \frac{1}{d} = 66$  giorni

$\hookrightarrow$  2 rotto  $\Rightarrow$  sost. tutto il sistema;  $\frac{1}{d} = 66$  giorni  
 $\hookrightarrow$  1 rotto  $\Rightarrow$  un succ. nulla;

$\Rightarrow$  SOST. sistema = 1 GIORNO;



a) [tempo medio da quando inizia a funz. a quando muore dei due si guarda]

$$= \frac{1}{\frac{1}{d} + \frac{1}{2d}} = \frac{1}{\frac{1}{66} + \frac{1}{132}} = \frac{1}{\frac{3}{132}} = 44 \text{ giorni}$$

$\hookrightarrow$  [tempo medio in cui il sist. funz. in un solo componente] =  $\frac{1}{\frac{1}{d}} = 66$  giorni

b) da un istante t a curv.; calcolare la media del tempo di funz. INTERROTTO del sistema;

$$[\% \text{ tempo 1 COMP. FUNZ.}] = \frac{\frac{1}{d}}{\frac{1}{d} + \frac{1}{2d} + 1} = \frac{1/66}{1/66 + 1/132 + 1} = \frac{1/66}{3/132} = \frac{1}{3} = 33\%$$

$$P[1 \text{ COMP. FUNZ.}] = \frac{\frac{1}{d}}{\frac{1}{d} + \frac{1}{2d} + \frac{1}{66d}} = \frac{1/66}{1/66 + 1/132 + 1/66} = \frac{1}{3} = \frac{1}{66+33+1} = \frac{1}{100}$$

$$[\% \text{ tempo 2 COMP. FUNZ.}] = \frac{\frac{1}{2d}}{\frac{1}{d} + \frac{1}{2d} + \frac{1}{66d}} = \frac{1/132}{1/66 + 1/132 + 1/66} = \frac{1}{3} = \frac{33}{100} = P[2 \text{ COMP. FUNZ.}]$$

$$\Rightarrow \left[ \text{tempo medio di} \right]_{\text{FUNZ. ININT.}} = \left[ \text{tempo medie} \right]_{1 \text{ COMP.}} \cdot P[1 \text{ COMP.}] + \\ + \left[ \text{tempo medie} \right]_{2 \text{ COMP.}} \cdot P[2 \text{ COMP.}] =$$

$$= 66 \cdot \frac{66}{100} + \cancel{33} \cdot \frac{\cancel{33}}{100} \cdot (66+33) \Leftarrow \begin{array}{c} \xrightarrow{1/2x} \xrightarrow{1/2x} \xrightarrow{1/2x} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ P[\text{comp.}] \quad P[\text{scatt.}] \end{array}$$

$\hookrightarrow$  se cade nell'intervallo di 2 comp. devo considerare di "usare" anche quello di 1 in seguito;

$$= \cancel{3366} \frac{3960+360+36}{100} + \frac{2700+270+\cancel{270+6}}{100} = \\ = \frac{4356+3264}{100} = \frac{7623}{100} = 76,23 \text{ [giorni]}$$

c) domanda a un vita dei sottosistemi: sono V.A. indipendenti  $M[\dots]$ ;  $\text{media} = 1/d$

$\Rightarrow$  LA MEDIA È LA STESSA MA (non ce il caso precedente dei tempi di riparazione) SI TRATTA DEI TEMPI DI VITA DEI COMPONENTI  $\Rightarrow$  CAMBIANO LE PROBABILITÀ, (aumenta il numeratore del calcolo delle %)

$\Rightarrow$  ESEMPIO 2 LAMPADINE: % tempo illuminato di 1 lampadina

$\hookrightarrow$  VITA  $\sim \mathcal{E}(2)$ ; media  $1/2$

$$\left[ \% \text{ tempo 1 lampadina} \right] = \frac{E[1 \text{ lamp.}]}{E[1 \text{ lamp.}] + E[2 \text{ lamp.}]} = \frac{1/2}{1/2 + 1/2} = \frac{2}{3}$$

$\hookrightarrow$  VITA  $\sim M[0,1]$   $\Rightarrow$  calcolo  $E[\max(\sim)]$  ed  $E[\min(\sim)]$

$$\text{escluse } \min(\alpha_1, \alpha_2) \quad // \quad \% = \left[ \frac{1/3}{2/3} \right] = \boxed{\frac{1}{2}}$$

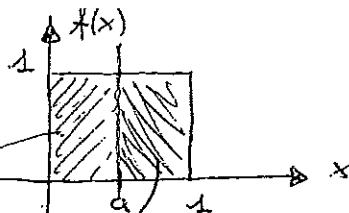
$$P[\min(\alpha_1, \alpha_2) > x] = \overset{(1)}{=} \overset{\max(\alpha_1, \alpha_2)}{P[\alpha_1 > x]} \cdot P[\alpha_2 > x] = (1-x)^2 ; x \in (0,1)$$

$$E[\min(\alpha_1, \alpha_2)] = \int_0^1 (1-x^2) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{FUNZ. 2 LAMP.}$$

$$P[\max(\alpha_1, \alpha_2) < x] = P[\alpha_1 \leq x] \cdot P[\alpha_2 \leq x] = x^2 ; x \in (0,1)$$

$$E[\max(\alpha_1, \alpha_2)] = \int_0^1 (1-x^2) dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{TEMPO TOTALE} \Leftrightarrow \boxed{\equiv}$$

$\Rightarrow$  per una uniforme:



$\Rightarrow$  con le aree:

$$\begin{aligned} P[a < x_1 < b] &= (b-a) \cdot 1 = (b-a) = \text{area rettangolo} \\ P[a \leq x_1] &= (a-0) \cdot 1 = a \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  c) le due uniformi di media  $\frac{b+a}{2}$ ,

per una uniforme:  $\text{MEDIA} = \frac{b-a}{2}$ ; si tratta di  
rite di componenti  $\Rightarrow$  l'estremo inferiore sarà  $= 0$

$$\Rightarrow b = 2 \cdot \text{MEDIA} + a = \frac{2}{\alpha} + 0 = \frac{2}{\alpha}$$

$\hookrightarrow$  le due uniformi saranno:  $M[0; \frac{2}{\alpha}]$

E3 - 19-06-2006

#### 15 DUE PROCESSI di Poisson indipendenti

$X_1(t), X_2(t)$ ; con  $X_i(t) = \text{n. avvini del processo } i \text{ nell'intervallo } [0, t]$ ,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,5 \quad \left[ \frac{\text{avvini}}{\text{unità di tempo}} \right]$$

$$a) \rightarrow P[\cancel{X_1(3)} X_1(3) = 1 \mid X_1(3) + X_2(3) = 3] =$$

$$\frac{P[X_1(3) = 1; X_1(3) + X_2(3) = 3]}{P[X_1(3) + X_2(3) = 3]} = \frac{P[X_2(3) = 2] \cdot P[X_1(3) = 1]}{P[X_1(3) + X_2(3) = 3]}$$

$$P[X_1(3) + X_2(3) = 3] \Rightarrow \text{SOMMA PROCESSI di Poisson}$$

$$P[X_1(3) + X_2(3) = 3]$$

$$= \frac{(3 \cdot \lambda)^2 \cdot e^{-3\lambda}}{2!} \cdot \frac{(3\lambda)^1 \cdot e^{-3\lambda}}{1!} =$$

PROC. DI POISSON  
con:  $\lambda = \sum_i \lambda_i$

$$[3(\lambda_1 + \lambda_2)]^3 \cdot e^{-3(\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot \frac{1}{3!}$$

$$= \frac{(3\lambda)^4 \cdot e^{-6\lambda} \cdot 3!}{[3(\lambda_1 + \lambda_2)]^3 \cdot e^{-3(\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot 2!} = \frac{(4,5)^4 \cdot e^{-8} \cdot 3 \cdot 2}{(9)^3 \cdot e^{-8} \cdot 2} = \frac{(4,5)^4 \cdot 3}{(9)^3} = \frac{4^3}{9^3}$$

$$\rightarrow P[X_1(3) + X_2(3) = 3 \mid X_1(3) = 1] = P[X_2(3) = 2]$$

$$= \frac{(3\lambda)^2 \cdot e^{-3\lambda}}{2!} = \frac{(4,5)^2 \cdot e^{-4,5}}{2}$$

$$b) \rightarrow P[X_1(2) = 1 \mid X_1(3) = 3] = \frac{P[X_1(3) = 3 \mid X_1(2) = 1] \cdot P[X_1(2) = 1]}{P[X_1(3) = 3]}$$

$$= P[X_1(\text{in } 2 \text{ int. di tempo}) = 2] \cdot \frac{(2\lambda)^1 \cdot e^{-2\lambda}}{1!}$$

$$= \frac{(3\lambda)^3 \cdot e^{-3\lambda}}{3!}$$

$$= \frac{(\lambda)^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!} \cdot \frac{(2\lambda)^1 \cdot e^{-2\lambda}}{1!} \cdot \frac{3!}{(3\lambda)^3 \cdot e^{-3\lambda}}$$

$$= \frac{2\lambda^2 \cdot e^{-3\lambda} \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot e^{-2\lambda} \cdot \cancel{3\lambda^3}} = \boxed{\left(\frac{1}{3\lambda}\right)} = \boxed{\left(\frac{1}{4,5}\right)} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

$$\rightarrow P[X_1(3) = 3 \mid X_1(2) = 1] = P[2 \text{ arrivi in 2 unità di tempo}]$$

$$= \left( \frac{(2\lambda)^2 \cdot e^{-2\lambda}}{2!} \right) = \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2} = \boxed{\frac{9 \cdot e^{-3}}{2}}$$

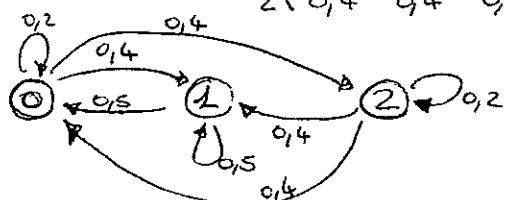
min

(16)

c.d.R.  $X_m$ :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

a)



$$\rightarrow P[X_1 = m | X_0 = 0] = \begin{cases} m=0; & 0,2 \\ m=1; & 0,4 \\ m=2; & 0,4 \end{cases}$$

(1 PASSO)

$$\rightarrow P[X_2 = m | X_0 = 0] = \begin{cases} m=0; & 0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,4 \\ m=1; & 0,2 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,4 \\ m=2; & 0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0,2 \end{cases}$$

(2 PASSI)

=> FACCO i vari casi del  
disegno

$$\Rightarrow \text{se ho TANTI STATI uso } P^{(n)} = P^n \Rightarrow P[X_m = m | X_0 = i] =$$

$$= (\text{RIGA dello STATO } i) \cdot (\text{COLONNA STATO } m)$$

$$\rightarrow P[X_{500} = m | X_0 = 0] = \begin{cases} m=0; \\ m=1; \\ m=2; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_0 = 0,2 \pi_0 + 0,5 \cdot \pi_1 + 0,4 \pi_2 \\ \pi_1 = 0,4 \pi_0 + 0,5 \cdot \pi_1 + 0,4 \pi_2 \\ \pi_2 = 0,4 \cdot \pi_0 + / + 0,2 \cdot \pi_2 \Rightarrow 0,8 \pi_2 = 0,4 \pi_0 \Rightarrow \pi_0 = 2 \cdot \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \\ \pi_2 = 0,5 \cdot \pi_0 \end{array} \right.$$

$$\pi_1 = 0,4 \pi_0 + 0,5 \pi_1 + 0,4 \cdot 2 \pi_0$$

$$0,5 \pi_1 = 0,6 \pi_0 \Rightarrow \pi_1 = \frac{6}{5} \pi_0$$

~~PIZZA~~

$$\Rightarrow \pi_0 + \frac{6}{5} \pi_0 + \frac{5}{10} \pi_0 = 1 \Rightarrow \frac{10+12+5}{10} \pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{10}{27}$$

$$\hookrightarrow \pi_1 = \frac{6}{27} \cdot \frac{10^2}{27} = \frac{12}{27}; \quad \pi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^5}{27} = \frac{5}{27}$$

b)  $m_1 = \frac{1}{\pi_0}; \quad m_2 = \frac{1}{\pi_1}; \quad m_3 = \frac{1}{\pi_2}$

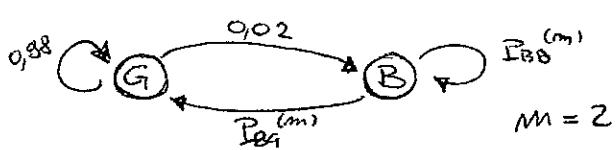
$$= \frac{27}{10} \quad = \frac{27}{12} \quad = \frac{27}{5}$$

c)  $W_{ij}^{(m)} = m^{\circ}$  medio di visite allo stato  $j$  (da Cadm)  $| X_0 = i$   
 $= E \left[ \sum_{l=0}^m \mathbb{1}_{\{X_l=j\}} | X_0 = i \right] = \sum_{l=0}^m E \left[ \mathbb{1}_{\{X_l=j\}} | X_0 = i \right]$   
 $= \sum_{l=0}^m P[X_l=j | X_0 = i] = \sum_{l=0}^m P_{ij}^{(l)}$

$\Rightarrow$  FORMULA STAZIONARITÀ:  $W = [I - Q]^{-1}$   $I =$  matrice identità

E4 - 14-07-2006

### 17 CANALE MARKOVIANO:



$$P[\text{errore} | G] = 0$$

$$P[\text{errore} | B] = 1$$

$\hookrightarrow$  ogni volta che c'è un errore si è un "salto" di  $(M-1)$  slots,  
 $\hookrightarrow$  PROCESSO SEMI-MARKOVIANO;

a) feedback perfetto: in andata ho comunque errori Markoviani;

$$THR = \left[ \begin{array}{c} m^{\circ} \text{ succ. per slot} \\ \hline \end{array} \right] = \frac{P_{BG}^{(m)}}{P_{BG}^{(m)} + m \cdot P_{BB}}$$

$$\Rightarrow \text{dati: } P = \begin{pmatrix} G & B \\ G & 0,98 & 0,02 \\ B & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$P^{(m)} = P \left( \begin{array}{cc} \cancel{\downarrow} & \cancel{\uparrow} \\ \cancel{0,098+0,05} & \cancel{0,1 \cdot 0,02 + 0,9 \cdot 0,9} \\ & 0,81 \end{array} \right) \#$$

$$\Rightarrow P_{GG}^{(2)} = 0,0196 \quad \boxed{}$$

$$P_{GB}^{(2)} = \cancel{0,81} + 0,002 = \cancel{0,812} 0,812 \quad \boxed{}$$

$$\text{THR} = \frac{0,0196}{0,0196 + 2 \cdot 0,02} = \frac{0,0196}{0,0196 + 0,04} = 0,3288$$

- b)
- 1) errori markoviani  $\Rightarrow$  ANDATA
  - 2) errori indip. con  $P_e = 0,04 \Rightarrow$  errori n.i.d. andata

$$\underbrace{L_{\text{media}}}_{\substack{= 1000000 \text{ (MARK)} \\ = 2000000 \text{ (i.i.d.)}}} \quad \left[ \frac{\% \text{ tempo}}{\text{slot 1000000}} \right] = \frac{1 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^6} = \frac{1}{3} = P[\text{slot 1000000}]$$

$$\left[ \frac{\% \text{ tempo}}{\text{slot 2000000}} \right] = \frac{2}{3} = P[\text{slot 2000000}]$$

$$\text{THR}_{\text{TOT.}} = \text{THR}_{\text{MARK.}} \cdot P[\text{slot 1000000}] + \text{THR}_{\text{i.i.d.}} \cdot P[\text{slot 2000000}]$$

$$\text{THR}_{\text{i.i.d.}} = \frac{1 - P_e}{1 - P_e + M \cdot P_e} = \frac{0,99}{0,99 + 2 \cdot 0,04} = \frac{0,99}{1,01} = 0,9801$$

$$\text{THR}_{\text{TOT.}} = 0,4096 + 0,6534 = 0,763 \#$$

(N.B.: le lunghez. degli slot sono ~~verso~~<sup>V.A.</sup> ~~verso~~  $\Rightarrow$  si deve prendere la media)

~~~~~

\Rightarrow ALTRE DOMANDE :

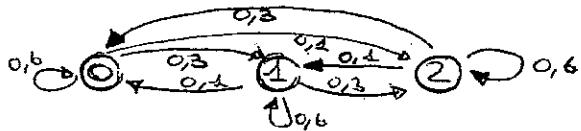
↳ SE TRASMETTE DIRETTAMENTE nel CANALE $\Rightarrow M=1$

$$\text{THR} = \Pi_a = \frac{P_{so}}{P_{so} + P_{sf}} \quad (\text{para un sistema})$$

E3 - 17-06-2005

18) 4 CDH con stati: $\{0; 1; 2\}$; stato iniziale $X_0 = 0$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$



a) prob. che la catena si trovi in $X(2) = 2$, e $X(1000) = 2$

$$\rightarrow P[X(2) = 2 | X(0) = 0] = 0,3 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,6 = \frac{9}{100} + \frac{6}{100} + \frac{6}{100} = \frac{21}{100}$$

OPPURE: $\underbrace{1^{\text{a}} \text{ RIGA}}_{\text{STATO } 0} \cdot \underbrace{3^{\text{a}} \text{ COLONNA}}_{\text{STATO } 2} = (0,6 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,6) \neq$

$$\rightarrow P[X(1000) = 2 | X(0) = 0] \Rightarrow \text{si puo' considerare distib. stat.}$$

\hookrightarrow DATA da MATRICE POSSO dire che: $\pi_3 = (\pi_2 = \pi_1) = \frac{1}{3}$

\hookrightarrow CONTROLLO:

$$\begin{cases} \pi_0 = 0,6 \pi_0 + 0,1 \pi_1 + 0,3 \pi_2 \\ \pi_1 = 0,3 \pi_0 + 0,6 \pi_1 + 0,1 \pi_2 \\ \pi_2 = 0,1 \pi_0 + 0,3 \pi_1 + 0,6 \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

b) $\rightarrow P[X_1=1; X_3=2 | X_2=0] = \frac{P[X_1=1; X_3=2; X_2=0]}{P[X_2=0]}$

\Rightarrow A NUMERATORE TUTTO IL PERCORSO \Rightarrow se dalla conseguenza che $X_0 = 0 \Rightarrow$

$$= \left[(P_{01}) \cdot (P_{10}) \cdot (P_{02}) / \left(P_{00} \cdot P_{00} + P_{01} \cdot P_{10} + P_{02} \cdot P_{20} \right) \right] \neq$$

devo fare tutte le possibilita'

= (calcoli)

$$\rightarrow P[X_2=0 | X_1=1; X_3=2] = \frac{P[X_2=0; X_1=1; X_3=2]}{P[X_1=1; X_3=2]}$$

$$= \left[(P_{11}) \cdot P_{40} \cdot P_{02} / \left(P_{11} \cdot (P_{12} \cdot P_{22} + P_{40} \cdot P_{02} + P_{01} \cdot P_{12}) \right) \right] \neq$$

= (calcoli)



(19) PASSEGGIATA CASUALE: sugli interi non negativi;

$$P_{00} = 1; P_{i,i+1} = p; P_{i,i-1} = q; i > 0; p+q = 1$$

$$p = 0,4$$

$$\Rightarrow q = 0,6$$



a) calc. le prob. stat. che la pass. casuale si trovi in 5 quando parte da 0 e da 5;

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{le DISTR. STAT. : } \left\{ \begin{array}{l} \pi_i = \sum_{k=0}^N (\pi_k \cdot P_{ki}) \Rightarrow \pi_5 = \frac{(\pi_{i-1} \cdot p_{i-1,i} + \pi_{i+1} \cdot q_{i+1,i})}{\pi_i} \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{si ha che: } \pi_0 = \pi_1 \cdot q$$

$$\hookrightarrow \text{si pu\`o dimostrare che: } \pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{p_k}{q_{k+1}} \right)}$$

$$\Rightarrow \text{se: } p_k = p; q_k = q = (1-p);$$

se $p < q$ (le serie convergono)

$$\pi_0 = (\pi_0) = \frac{1}{2} \cdot (1 - p/q) \quad \text{VEDI TEORIA}$$

$$\pi_k = \frac{1}{p} \left(\frac{p}{q} \right)^k \cdot \frac{\pi_0}{(\pi_0)} = \left(\frac{1}{2p} \right) \cdot \left(1 - \frac{p}{q} \right) \cdot \left(\frac{p}{q} \right)^k; k > 0$$

$\Rightarrow \pi_5$ = \`e indipendente dagli stati di partenza \Rightarrow DISTR. STAT.

$$= \left(\frac{1}{2 \cdot 0,4} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \right) \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^5 = \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{32}{243} \right)$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Pos}^{(n)} \Rightarrow$ la cdM è APERIODICA \Rightarrow il limite NON ESISTE

c) prob. stat. de la pun. casuale in havi in 5 partendo da 0; con $p = 0,5$;

$$\overline{M}_5 = \left(\frac{1}{2,05} \right) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{0,5}{0,5} \right)}_{=0} \cdot \left(\frac{0,5}{0,5} \right)^5 = 0$$

↳ infatti $\hat{p} < q$ (MINORE STRETTO) altrimenti le serie geom. V
 NON convergono

d) se parto da 1; tempo medio per correre (per la 1^a volta) in 3;

$V_i = \text{tempo medio per arrivare a } j \text{ da } i$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0 = 1 + V_1 \\ V_1 = 1 + V_0 \\ V_2 = 1 + V_1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ATTENZIONE}} \Rightarrow V_1 = 12,5$$

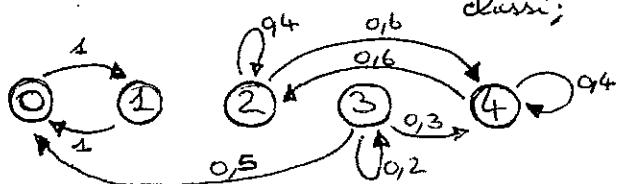
\Rightarrow IN QUESTO CASO si considera ¹ ASSORBENTE;

\Rightarrow ALTRIMENTI: zero calore: $E[S_{13}]$; (vedi esercizio ②)

x (20) CDM : an slakti {0;1;2;3;4}

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 94 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

a) CLASSIFICARE gli stati ed individuare le classi;



$\{0; 1\}$: PERIODO 2; RICORRENTE; POSITIVA

{3} : TRANSITORIO; (lascia 3 e non torno più);

$\{2, 4\}$: RICORRENTE; APERIODICA;
POSITIVA

b) prob. di assorb. nelle classi ricorrenti da tutti gli stessi transitori;



$$\Rightarrow \text{CHIARO} . \quad A = \{3\}; \quad B = \{0, 1\}; \quad C = \{2, 4\}$$

$$A \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VERSO

$$\begin{aligned} B &\Rightarrow M_A = 0,2 M_A + 0,5 M_B + 0,3 M_C \\ M_C = 0 & \\ M_B = 1 & \end{aligned}$$

$$M_A = \frac{0,5}{0,8} = \frac{5}{8}$$

VERSO C

$$\begin{aligned} M_B = 0 &\Rightarrow M_A = 0,2 M_A + 0,5 M_B + 0,3 M_C \\ M_C = 1 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{!}{=} 0,2 M_A + 0,3 \Rightarrow M_A = \frac{0,3}{0,8} = \frac{3}{8} \quad \downarrow \end{aligned}$$

$$\text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & X & X & M_1 & 0 & M_2 \\ 2 & X & X & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \pi_2 & 0 & \pi_4 \\ 4 & X & X & M_2 \pi_2 & [0] & M_3 \pi_4 \\ 0 & 0 & \pi_2 & 0 & \pi_4 \end{bmatrix}$$

X = da stato transitario
a classe periodica

X = da stati: classe
periodica verso se
stessi

N.B.: CON UN SOLO
STATO TRANSITORIO
da $\mu = \frac{P[\text{classe null}]}{\sum P[\text{classe}]}$

(NON SI CONTA
LA PROB. VERSO SE
STESSO)

$$M_{A,i} \cdot \pi_i = \text{dalla stato} \quad ; \quad O = \text{su } 0 \text{ e su gli altri} \\ \text{transitori verso se stessi} \rightarrow \text{stato della classe periodica} \quad ; \quad O = \text{su } 0 \text{ e su gli altri} \\ \text{transitori verso se stessi} \quad ; \quad O = \text{su } 0 \text{ e su gli altri} \\ \text{transitori verso se stessi}$$

d) tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati;

$$m_{i,i} = 1/\pi_i$$

↳ dalla matrice $P \Rightarrow$

$$\begin{cases} \pi_0 = \\ \pi_1 = \\ \pi_2 = \\ \pi_3 = 0,5 \pi_0 + \\ \pi_4 = \end{cases} \begin{aligned} & \pi_0 + \pi_4 \\ & \pi_0 + \pi_4 \\ & \pi_0 + \pi_4 \\ & 0,5 \pi_0 + \pi_2 + \pi_4 \\ & \pi_1 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{aligned}$$

COLONNE

\Rightarrow ALTRA DOMANDA: (vedi esercizio 3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n P^k = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \pi_2 & 0 & \pi_4 \\ 3 & \left(M_2 \pi_0 + M_3 \pi_1 \right) M_1 \pi_2 & 0 & M_2 \pi_4 & 0 & M_3 \pi_4 \\ 4 & 0 & 0 & \pi_2 & 0 & \pi_4 \end{bmatrix}$$

TRANSITORIO
VERSO CLASSE
PERIODICA

STATI DELLA CLASSE
PERIODICA VERSO
SE STESSI

inizio E3 - 02-09-2005

(21) NODO di RETE : 2 link di ingresso

↳ arrivi di Poisson indipendenti ; $\lambda_1 = \lambda_2 = 500$ [pk/s sec]

a) prob. che in un interv. di 3 ms arrivino 2 pcks al link 1 ed 1 pck al link 2;

$$P\left[\begin{array}{l} \text{2 pcks al link 1} \\ \text{1 pck al link 2} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{sono INDIPENDENTI}} P[2 \text{ pcks; link 1 in } 3 \text{ ms}] \cdot P[1 \text{ pck; link 2 in } 3 \text{ ms}]$$

$$\Rightarrow P[2 \text{ pcks; link 1 in } 3 \text{ ms}] \cdot P[1 \text{ pck; link 2 in } 3 \text{ ms}] =$$

$$= \left[(\lambda \cdot 3 \text{ ms})^2 \cdot \frac{e^{-\lambda \cdot 3 \text{ ms}}}{2!} \right] \cdot \left[(\lambda \cdot 3 \text{ ms})^1 \cdot \frac{e^{-\lambda \cdot 3 \text{ ms}}}{1!} \right] =$$

= (calcoli) -

b) prob. che al nodo arrivino 3 pcks in totale in 3 ms;

\Rightarrow SOMMA di Proc. di Poisson indipendenti \Rightarrow Proc. di Poisson con $\lambda_{\text{tot.}} = \lambda_1 + \lambda_2$

$$P[3 \text{ pcks; in } 3 \text{ ms; in totale}] = \left[(\lambda_{\text{tot.}} \cdot 3 \text{ ms}) \cdot \frac{e^{-\lambda_{\text{tot.}} \cdot 3 \text{ ms}}}{3!} \right] =$$

= (calcoli)

--- E3-22-09-2005

(22)

~~E3~~ - 34-08-2006

23) CATENA PRODUTTIVA: N-sistemi INDEPENDENTI
in parallelo

\Rightarrow Ogni sistema Patterna operativo - gesto con $\frac{\text{DORATA}}{\text{VITALE}}$ $\mathcal{E}(x_i)$ e $\mathcal{E}(p_i)$

$$i = 1; 2; \dots; N$$

↳ catene furci servizio se tutti N i sistemi sono guasti;

- a) → trovare la statistica $\overline{(\text{PDF})}$ del tempo di fuori servizio;
 (dai tutti N rotti a s viene riparato);
 → tempo medio di fuori servizio;

b) $N = 2$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{\text{gr}}; \beta_1 = \beta_2 = 50 \alpha$

La se dei prod. è di 25 pezzi in tutti e due i sistemi funzionanti; 50 pezzi con uno solo sistema funzionante; 0 altrimenti;

→ n° medio di pezzi prodotti ~~per~~ $\sqrt{24}$ gg;

a) $\left[\begin{array}{l} \% \text{ tempo di comp} \\ \text{a causa} \end{array} \right] = \left(\frac{1/d_i}{1/d_i + 1/\bar{d}_i} \right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} \% \text{ tempo di comp} \\ \text{a causa} \end{array} \right]$

$\left[\begin{array}{l} \% \text{ tempo di comp} \\ \text{a causa} \end{array} \right] = (\text{DNA INDEPENDENT}) = \prod_{i=1}^n \left[\begin{array}{l} \% \text{ tempo di comp} \\ \text{a causa} \end{array} \right]$

→ $E[Y] = E[X] = \text{ESISTENZA UNITA DI PRODUZIONE CON } k \rightarrow$

$\binom{n}{k} \cdot (p_a)^k \cdot \left(1 - p_a\right)^{n-k}; \quad n = \text{n° max. di segnalazioni},$
 $k = \text{n° min. di segnalazioni}$

1.2. se $n = 1000$, $p_a = 0.001$ → $\binom{1000}{100} \cdot (0.001)^{100} \cdot (1 - 0.001)^{900}$

≈ $10^{100} \cdot 10^{-300} \cdot (1 - 0.001)^{900}$

under T_{eq} , the two end species are both in their equilibrium states.

$$\Rightarrow E[T_{\text{GTR}}] = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}} = 1,5$$

X
E2 - 34-08-2006

(24) SISTEMA SMISTAMENTO PCK-1

\Rightarrow infiniti servizi; ARRIVI ~ $O(1)$; TEMPI SERVIZIO ~ $E(\mu)$

$$\Rightarrow \text{CODA } H/H/\infty; \quad \lambda = 2 \text{ ps}/\text{sec} \quad \text{MEDIA} = \frac{1}{\mu} = 1 \text{ sec}$$

↳ sistema inicialmente vazio

La funzione attivante $W(t)$ nell'intervallo $[0; 5]$ sec.

$$a) P[\text{in } [0; 5] \text{ Vierseitige Pakete}] = \frac{(\lambda \cdot 5)^0 \cdot e^{-5\lambda}}{0!} = e^{-5\lambda} = e^{-40}$$

$$b) P[\text{all'istante } t = 5 \text{ sec. il sistema sia ruoto}] =$$

$$\beta \left[\alpha \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] = \beta \left[\alpha \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] = \beta \left[\alpha \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] = \beta \left[\alpha \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \right]$$

c) P [in $t = 5$ sec. il sistema è rotto | in $[0, 4]$ ha avuto 8 arrivati]

- E1 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2) e stato iniziale $X_0 = 0$.

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilità di X_1, X_2 e X_{500} . ✓
 (b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1, 2 verso lo stato 2.
 (c) Si calcolino $P[X_1 = 1, X_3 = 1 | X_2 = 1]$ e $P[X_2 = 1 | X_1 = 1, X_3 = 1]$.

- E2 Si consideri una fabbrica in cui vi sono due macchine uguali. Ogni macchina alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha = 37$ giorni (funzionamento) e $1/\beta = 1/(9\alpha)$ (guasto). Ogni macchina, il cui funzionamento è indipendente dall'altra, è in grado di produrre 12 pezzi all'ora quando è funzionante.

- (a) Si calcoli la frazione del tempo in cui la produzione è ferma (cioè entrambe le macchine sono guaste), e la durata media di un intervallo di tempo durante il quale la produzione è ferma
 (b) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora
 (c) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora se il numero di pezzi prodotti all'ora è 12 quando c'è una sola macchina in funzione e 30 quando sono in funzione entrambe

- E3 Si consideri un nodo di rete con il seguente funzionamento. In assenza di traffico, il nodo alterna un periodo di sleep di durata esponenziale con media T e un periodo in cui è sveglio ed è in grado di ricevere, di durata fissa βT . In presenza di traffico in rete, se durante un periodo di sveglia viene trasmesso un pacchetto, il nodo lo riceve interamente (anche se questo richiede di restare sveglio per un tempo complessivamente superiore a βT), e subito dopo comincia un periodo di sleep. Se durante il periodo di sveglia non viene trasmesso nessun pacchetto, il nodo torna nello stato di sleep dopo il tempo βT . La probabilità che venga trasmesso un pacchetto mentre il nodo è sveglio è α , l'istante di inizio della ricezione è uniformemente distribuito in $[0, \beta T]$, e il tempo medio di trasmissione del pacchetto è pari a γT . Si costruisca un modello semi-Markoviano per il funzionamento del nodo. In particolare:

- (a) Si considerino i tre stati sleep (S), listening (L) e receiving (R), e si determini la matrice delle probabilità di transizione della catena di Markov inclusa e se ne disegni il diagramma di transizione.
 (b) Si determinino la matrice dei tempi medi associati ad ogni transizione, T , e i tempi medi associati alla visita di ciascuno dei tre stati, μ_S, μ_L, μ_R .
 (c) Si determini un'espressione per la frazione del tempo che il nodo passa in ognuno dei tre stati, e se ne calcoli il valore nel caso $\alpha = 0.5, \beta = 0.1, \gamma = 0.2$.

- E4 Si consideri un sistema a cui arrivano richieste di servizio secondo un processo di Poisson di intensità $\lambda = 20$ richieste all'ora. Ogni richiesta rimane nel sistema per un tempo di servizio pari a 6 minuti, e non c'è limite al numero di richieste contemporaneamente in servizio. Si supponga che il sistema inizi ad operare al tempo $t = 0$.

- (a) Si calcoli la probabilità che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti.
 (b) Si calcoli la probabilità che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti, condizionata al fatto che fra 0 e t si siano verificati 10 arrivi.

- T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

- T2 Si dimostri che in una catena di Markov il periodo è una proprietà di classe.

- T3 Si dimostri che per un processo di Poisson $X(t)$ la statistica di $X(s)$ condizionata a $X(t), s < t$, è binomiale, e si fornisca l'espressione di $P[X(s) = k | X(t) = n]$.

122

Capítulo 09 - Exercícios

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow P^t = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.24 & 0.32 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_1 = 0$$

$$\rightarrow X_1 = [0.4 \ 0.2 \ 0.2] \quad X_2 = [0.24 \ 0.24 \ 0.32] \quad \pi = [0.95 \ 0.25 \ 0.25]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E[\theta_{11}] = 1 - P_{11} \in [\theta_{11}] + P_{11} E[\theta_{11}] \\ E[\theta_{12}] = 1 - P_{12} \in [\theta_{12}] + P_{12} E[\theta_{12}] \\ E[\theta_{21}] = 2 \end{array} \right.$$

$$E[\theta_{12}] = \frac{1}{n_2} = 4$$

$$P[X_1=1 | X_2=1 | X_3=1] = P_{11} \cdot \frac{P[X_2=1 | X_1=1] P[X_1=1]}{P[X_2=1]} = \frac{P_{11} \cdot P_{11} \cdot P_{01}}{P_{01}^{(2)}} = 0.1333$$

$$P[X_2=1 | X_1=1 | X_3=1] = \frac{P[X_1=1 | X_2=1 | X_3=1] P[X_3=1]}{P[X_3=1 | X_1=1] P_{01}} = \frac{P_{11} \cdot P_{01}}{P_{01}^{(2)}} \cdot \frac{P_{01}^{(2)}}{P_{01} \cdot P_{11}} = 0.5555$$

2) Variáveis independentes: $\rightarrow F \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$
 $\rightarrow G \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow 12p+1/6$

$$P[1 \text{ e } 2 \text{ gastos}] = \frac{E[4]}{E[F] \cdot E[G]} = 0, \quad P[2 \text{ gastos}] = (P[1 \text{ gasto}])^2 = 0.01$$

$$E[F_{1-2}] = E[\min\{\mathcal{E}\left(\frac{1}{3}\right), \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)\}] = E[\mathcal{E}\left(\frac{2}{3}\right)] = 1.5,$$

$$E[P_{\text{pessoas}}] = [12 \cdot (1 - P[\text{gasto} \geq 1/2])] = 2 = 21.6 \text{ pessoas}$$

$$c) 30 \quad FF \quad 12 \quad GF \quad FG \quad 0 \quad GG$$

$$E[P_{\text{pessoas}}] = 30 \cdot (1 - P[\text{gasto} \geq 1/2])^2 + 2 \cdot 12 \cdot (1 - P[\text{gasto} \geq 1/2]) P[\text{gasto} \geq 1/2] = 26.46 \text{ pessoas}$$

Exercícios

SLEEPER $\sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{T}\right)$

ACTIVE $\approx \gamma BT$

$P[t_n | \text{ACTIVE}] = \alpha$

Início $t_0 \sim U[0, BT]$

$T_{\text{Tx}} = \gamma T$

a)



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 1-\alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \gamma T & \gamma T & \gamma T \\ \gamma T & \gamma T & \gamma T \\ \gamma T & \gamma T & \gamma T \end{pmatrix}$$

b)

$$\mu_S = T$$

$$T = (\alpha + \alpha)/BT + \alpha \frac{BT}{2}$$

$$\mu_R = \gamma T$$

$$c) \quad \alpha = 0.5 \quad \beta = 0.1 \quad \gamma = 0.2$$

$$\overline{T}_S = \frac{1}{2+\alpha} \quad \overline{\pi}_S = \frac{1}{2+\alpha} \quad \overline{\pi}_R = \frac{\alpha}{2+\alpha}$$

$$P_S = \frac{\overline{\pi}_S \mu_S}{\overline{\pi}_S \mu_S + \overline{\pi}_L \mu_L + \overline{\pi}_R \mu_R} = 0.8511, \quad P_L = 0.06383, \quad P_R = 0.08511$$

d)

$$\lambda = 20/60 = 1/3 \text{ cell/h} \quad T_{\text{service}} = 6 \text{ min}$$

e)

$$P[X(30)=0] = P[N(0, 30)=0] = e^{-0} = 0.1353$$

f)

$$P[X(30)=0 | N(0, 30)=10] = \binom{10}{0} \left(\frac{6}{30}\right)^0 \left(1 - \frac{6}{30}\right)^{10} = 0.1674$$

E1 Si consideri la catena di Markov $X(t)$ con stati 1, 2, 3, $X(0) = 3$, e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Si calcolino le probabilità stazionarie e i tempi medi di ricorrenza di tutti gli stati.
- (b) Si calcolino media e varianza del tempo di primo passaggio dallo stato 3 allo stato 1.
- (c) Si calcolino media e varianza del tempo di primo passaggio dallo stato 1 allo stato 3.
- (d) Si calcolino $P[X(1) = 1, X(3) = 1 | X(2) = 2]$ e $P[X(2) = 2 | X(1) = 1, X(3) = 1]$.

E2 Si consideri una coda alla quale arrivano pacchetti secondo un processo di Poisson di intensità $\lambda = 1$ pacchetto al secondo. Tutti i pacchetti presenti nella coda vengono trasmessi quando si verifica uno dei seguenti due eventi: i) ci sono due pacchetti in coda, oppure ii) c'è un solo pacchetto e il suo tempo di attesa è pari a due secondi. La trasmissione è istantanea, cioè la coda si svuota ogni volta che arriva un pacchetto e ce n'è già uno in coda, e quando l'unico pacchetto in coda ha accumulato un ritardo sufficiente.

- (a) Si calcoli la percentuale di tempo durante la quale la coda è vuota.
- (b) Si calcoli la media del ritardo di un pacchetto (cioè il tempo medio speso in coda).

E3 Si consideri un sistema di trasmissione a divisione di frequenza in cui il numero di canali sia sufficientemente elevato da trascurare la probabilità che siano tutti occupati. A tale sistema arrivano richieste di connessione secondo un processo di Poisson con intensità $\lambda = 100$ chiamate all'ora, e la durata di ognuna di tali chiamate è esponenziale con media 6 minuti. Sia $X(t)$ il numero di canali occupati al tempo t

- (a) Si calcoli la media di $X(t)$ per $t = 6, 10$ minuti e per $t = \infty$.
- (b) Si calcoli $P[X(t) = 10]$ per $t = 6$ e per $t = \infty$.
- (c) Si ripetano i calcoli delle due domande precedenti nel caso in cui la distribuzione della durata delle chiamate è uniforme nell'intervallo $[2, 10]$ (minuti)

E4 Si consideri il funzionamento del protocollo Go-Back-N su un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.99 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono. Il tempo di round-trip è pari a $m = 2$ slot (cioè un pacchetto errato trasmesso al tempo t verrà ritrasmesso al tempo $t + m$).

- (a) Si calcoli il throughput del protocollo nel caso di feedback perfetto (cioè senza errori).
- (b) Si calcoli il throughput del protocollo nel caso in cui il feedback sia soggetto a errori indipendenti con probabilità di errore 0.1.

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Dimostrare che il periodo è una proprietà di classe.

T3 Si consideri una passeggiata casuale sugli interi non negativi con le seguenti probabilità di transizione: $P_{01} = 1$, $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = q$, $i > 0$, con $p + q = 1$. Se ne studi il comportamento, caratterizzandone in particolare la ricorrenza o transitività e ricavandone la distribuzione stazionaria.

$$x(0)=3 \quad P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0.3\pi_0 + 0.2\pi_1 &= \pi_0 \quad \rightarrow \pi_0 = 0.35536 \\ 0.2\pi_0 + 0.6\pi_1 &= \pi_1 \quad \rightarrow \pi_1 = 0.20933 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1 \quad \rightarrow \pi_2 = 0.23441 \\ \pi_0 &= 0.35536 \quad \omega_0 = 1.8 \\ \pi_1 &= 0.20933 \quad \omega_1 = 4.8 \\ \pi_2 &= 0.23441 \quad \omega_2 = 6.235 \end{aligned}$$

$$E[\theta_{ij}] = 1 + \sum_{k \neq j} P_{ik} E[\theta_{kj}] \quad E[\theta_{ij}^2] = 2E[\theta_{ij}] - 1 + \sum_{k \neq j} P_{ik} E[\theta_{kj}^2]$$

$$\begin{cases} E[\theta_{11}] = 1 + P_{12} E[\theta_{21}] + P_{13} E[\theta_{31}] \\ E[\theta_{21}] = 1 + P_{21} E[\theta_{11}] + P_{23} E[\theta_{31}] \\ E[\theta_{31}] = 1 + P_{31} E[\theta_{11}] + P_{32} E[\theta_{21}] \end{cases} \quad E[\theta_{21}] = 0$$

$$\begin{cases} E[\theta_{11}^2] = 2E[\theta_{11}] - 1 + P_{12} E[\theta_{21}^2] + P_{13} E[\theta_{31}^2] \\ E[\theta_{21}^2] = 2E[\theta_{21}] - 1 + P_{21} E[\theta_{11}^2] + P_{23} E[\theta_{31}^2] \\ E[\theta_{31}^2] = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[\theta_{11}] = 1 + P_{12} E[\theta_{21}] + P_{13} E[\theta_{31}] \\ E[\theta_{21}] = 3.235 \\ E[\theta_{31}] = 2.055 \end{cases} \quad E[\theta_{11}^2] = 3.235$$

$$\begin{cases} E[\theta_{11}^2] = 2E[\theta_{11}] - 1 + P_{12} E[\theta_{21}^2] + P_{13} E[\theta_{31}^2] \\ E[\theta_{21}^2] = 2E[\theta_{21}] - 1 + P_{21} E[\theta_{11}^2] + P_{23} E[\theta_{31}^2] \end{cases} \quad E[\theta_{21}^2] = 15.62$$

$$P[x(1)=1 | x(3)=1, x(2)=2] = P[x(1)=1 | x(2)=2] \quad P_{11} = \frac{P[x(2)=2 | x(1)=1] P[x(1)=1]}{P[x(2)=2]}$$

$$\frac{P_{12} P_{21} \cdot 1}{P_{12}} = 0.2$$

$$P[x(2)=2 | x(1)=1, x(3)=1] = \frac{P[x(1)=1 | x(3)=1, x(2)=2] P[x(2)=2]}{P[x(3)=1 | x(1)=1] P[x(1)=1]} = \frac{P_{11} P_{12}}{P_{11}^{(2)} - 1} = 0.076$$

$$\lambda = 1 \text{ s}^{-1}$$

$$T_x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \geq 2s \\ x \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$



Durchschnittszeit:

$$\pi_{av} = \pi_1 \cdot \frac{1}{3} + \pi_2 \cdot \frac{1-2\lambda}{2\lambda} + \pi_3 \cdot \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

Mittelwertszeit:

$$\mu_1 = \omega \cdot 2 + (1-\omega) \frac{(1-3 \cdot 2\lambda)}{1-2\lambda}, \quad 2 \cdot \frac{2\lambda}{1-2\lambda} + 1-3 \cdot \frac{2\lambda}{1-2\lambda} = 1-2\lambda \leftarrow E[\bar{\tau}_{\text{trans}}]$$

$$\mu_2 = \gamma_1$$

$$\mu_3 = 0$$

$$P_{12} = \frac{\pi_1 / \mu_{12}}{\pi_1 / \mu_{12} + \pi_2 / \mu_2} = 0.5363$$

1) T-zeit: durchschnittszeit:

$$E[\bar{\tau}_{\text{trans}}] = P_{12} \cdot \mu_1 + P_1 \cdot 0 = 0.4037$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \Pi_{j=1}^n \rho_j \cdot k_j \cdot H_{j+1} \cdot \mu_j \\ &\Pi_{j=1}^n \rho_j \cdot H_{j+1} \cdot 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \text{ per K} / \text{min} \quad \text{Temp. di servizio } \in [10\%]$$

$$x(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_p t) \quad \lambda_p t = \lambda \int_0^t (1 - e^{-z}) dz = \frac{\lambda}{\mu} [1 - e^{-\mu t}]$$

$$E[x(t)] = \lambda_p t = \begin{cases} 6.321 & t=6 \\ 8.01 & t=10 \\ 10 & t=\infty \end{cases}$$

$$b) P[x(t)=10] = \frac{(\lambda_p t)^{10}}{10!} e^{-\lambda_p t} = \begin{cases} 0.03046 & t=6 \\ 0.1251 & t=\infty \end{cases}$$

$$c) \text{Temp. di servizio} \sim U[2, 10]$$

$$\lambda_p t = \begin{cases} \lambda t & t < 2 \\ \lambda \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}(t-2) - \frac{1}{2}[t^2 - 4] & 2 \leq t < 10 \\ \lambda \cdot 6 & t \geq 10 \end{cases}$$

$$E[x(t)] = \begin{cases} 8.33 & t=6 \\ 10 & t=10 \\ 10 & t=\infty \end{cases} \xrightarrow{\text{Stazionario}} \quad P[x(t)=10] = \begin{cases} 0.108 \\ 0.125 \end{cases}$$

EQ

$$\rightsquigarrow P = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.67 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \rightarrow P^2 = \begin{pmatrix} 0.3811 & 0.6189 \\ 0.189 & 0.811 \end{pmatrix}$$

$$a) \text{Throughput} = \frac{P_{10}^{(w)}}{P_{10}^{(w)} + P_{20}^{(m)}} = 0.306$$

$$b) \overset{S=0}{=} \text{Throughput} = \frac{(1-\delta)P_{10}^{(w)}}{(1-\delta)[P_{10}^{(w)} + mP_{20}^{(m)}] + mE[P_{10}^{(w)} + P_{20}^{(m)}]} = 0.7406$$

i.1 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 5)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.7 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

- (a) Si disegni il diagramma di transizione, se ne classifichino gli stati e si individuino le classi
 - (b) Si calcoli $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$
 - (c) Si calcoli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k$
 - (d) Si calcoli $P[X_4 = 5, X_2 = 3 | X_3 = 1, X_1 = 3]$
- i.2 Si consideri un nodo di rete che in condizioni normali riesce a smaltire un traffico pari a 1 Gbps. Tale nodo funziona normalmente per un tempo esponenziale di media $99T$, dopodiché entra in uno stato di allarme, durante il quale la sua capacità si riduce a 250 Mbps. Dopo essere rimasto T secondi nello stato di allarme, il nodo viene istantaneamente riparato, e ricomincia a funzionare correttamente.
- (a) Si calcoli la frazione del tempo che il nodo passa nello stato di allarme, e il traffico medio smaltito (si supponga che le code siano sempre piene, cioè che ci siano sempre pacchetti da trasmettere)
 - (b) Si supponga ora che una volta entrato nello stato di allarme il nodo smetta completamente di funzionare dopo un tempo esponenziale di media $2T$, a meno che non venga riparato prima (come nel caso precedente, la riparazione richiede esattamente T da quando il nodo entra nello stato di allarme). Se il nodo smette di funzionare, deve essere interamente sostituito, e questo richiede un tempo $20T$, durante il quale il nodo non può gestire nessun traffico (si noti che questa sostituzione è diversa dalla semplice riparazione del caso precedente). Si calcolino: (i) il tempo medio fra due sostituzioni successive, (ii) la percentuale del tempo in cui il nodo non funziona, e (iii) il throughput del sistema.
- i.3 Si considerino due processi di Poisson indipendenti, $X_1(t)$ e $X_2(t)$, in cui $X_i(t)$ è il numero di arrivi del processo i nell'intervallo $[0, t]$. Il numero medio di arrivi per unità di tempo dei due processi è $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.5$
- (a) Si calcolino $P[X_1(3) = 1 | X_1(3) + X_2(3) = 3]$ e $P[X_1(3) + X_2(3) = 3 | X_1(3) = 1]$
 - (b) Si calcolino $P[X_1(2) = 1 | X_1(3) = 3]$ e $P[X_1(3) = 3 | X_1(2) = 1]$
- i.4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.
- (a) Si calcoli il throughput (numero medio di successi per slot) di un protocollo che trasmette pacchetti direttamente sul canale, senza ritrasmissioni.
 - (b) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t+2$), e il canale di ritorno è senza errori.
 - (c) Come al punto precedente, con la differenza che il canale di ritorno è soggetto a errori indipendenti con probabilità 0.1

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Dimostrare che se i e j comunicano e i è ricorrente, allora anche j è ricorrente.

T3 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

5)

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.7 & 0.02 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.6 & 0.0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0.07 \end{pmatrix}$$

a) $\{0, 1\}$ vero o falso

$\frac{1}{2} T$ falso

$\{1, 2, 5\}$ vero o falso

b)

$$P_2 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ x & 0 & 2 & 0 & x & 0.2 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ x & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_3 + \bar{\pi}_5 = \nu_3 \quad \bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_4 = \nu_2$$

$$x_4 = 0.2 + 0.5 \nu_4 = 0.4$$

$$\nu_1 = 0.5 + 0.5 \nu_4 = 0.6$$

c)

$$\sum_{k=1}^n P_k = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$P[x_1=5 | x_2=3 | x_3=1 | x_4=3] = \frac{P_{13} \cdot P[x_2=3 | x_3=1 | x_4=3]}{P[x_3=1 | x_4=3]} = \frac{P_{13} \cdot P_{31} \cdot P_{33}}{P_{31}} = 0.167$$

e)

$$N \rightarrow \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{55T}\right) \quad 1 \text{ kbps}$$

$$A \rightarrow T \quad 250 \text{ kbps}$$

f)

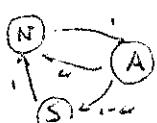
$$P_{AE} = \frac{E[N]}{E[N] + E[A]} = 0.55 \quad P_A = 0.01$$

$$E[\text{latency}] = R_A P_A + R_N P_N = 0.3525 \text{ kbps}$$

g)

$$A \rightarrow T \rightarrow N$$

$$\rightarrow \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2T}\right) \rightarrow S \rightarrow 20T \rightarrow N$$



$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} X & 20T & \lambda \\ T & X & \beta \\ 20T & X & X \end{pmatrix}$$

$$\alpha = P[\mathcal{E}\left(\frac{1}{2T}\right) < T] = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\beta = E\left[\mathcal{E}_{\text{exponential}}\left(\frac{1}{2T}\right)\right] = \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{2}}} \int_0^{1-e^{-\frac{1}{2}}} (1-x)^{-1/2} dx = \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{2}}} \left[2 - 2e^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$\bar{\pi}_N = \frac{1}{3 - e^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\bar{\pi}_A = \frac{1}{3 - e^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\bar{\pi}_S = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{3 - e^{-\frac{1}{2}}}$$

$$P_A = 55T$$

$$P_S = 20T$$

$$P_N = (1 - e^{-\frac{1}{2}}) \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{2}}} [2 - 2e^{-\frac{1}{2}}], T\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$+ 2T\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \rightarrow \text{non esiste}$$

$$(t_a(b), \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} + \delta(\omega))$$

$$P_3 = \frac{\pi_2 P_2}{\pi_2 P_2 + \pi_A P_A + \pi_N P_N} = \frac{20T(1 - e^{-\frac{1}{2}})}{22T(1 - e^{-\frac{1}{2}}) + 55T} = 0.444$$

$$\mu_{44} = \frac{P_4}{P_3} = \frac{22T(1 - e^{-\frac{1}{2}}) + 55T}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} = 143.6T$$

$$Th_{\text{latency}} = 250 \cdot P_A + 1000 \cdot P_N + 521.4 \text{ kbps}$$

Caso geometrico

$$\neq \text{transizioni } N \rightarrow 2 \in \mathcal{L}_{\text{trans}}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \rightarrow E[\# \text{ transizioni}] = (1 - e^{-\frac{1}{2}})^n$$

$$E[\text{ciclo}] = \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} 25T + \left(\frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-1} T = \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} [2 - 2e^{-\frac{1}{2}}] \cdot 20T \Rightarrow P_n = \frac{E[\text{ciclo}]}{E[\text{ciclo}]} = 0.444$$

es

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.5$$

$$\rightarrow P[x_1(3)=1 | x_1(3)=3] = \binom{3}{1} \left[\frac{\lambda_3}{2\lambda_2} \right]^1 \left[1 - \frac{\lambda_3}{3\lambda_2} \right]^2 = 0.375$$

$$P[x_1(3)=3 | x_1(3)=1] = P[x_2(3)=2] = 0.125$$

$$\rightarrow P[x_1(3)=1 | x_1(2)=3] = \binom{3}{1} \left(\frac{2\lambda_2}{3\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{2\lambda_2}{3\lambda_1} \right)^2 = 0.2222$$

$$P[x_1(3)=3 | x_1(2)=1] = P[x_1(2)=2] = 0.2510$$

es

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.44 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 0.2625 & 0.7375 \\ 0.1555 & 0.8444 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad S = 0.8246$$

$$a) \Rightarrow \pi_0 = 0.3555$$

$$c) \quad S = 0.0760$$

E1 Si consideri un nodo di rete che in condizioni di funzionamento normale N smaltisce un traffico pari a 100 Mbps. Dopo un tempo di funzionamento casuale con distribuzione esponenziale di media T , il nodo entra in uno stato di malfunzionamento M in cui la sua capacità di smaltire traffico si riduce a 50 Mbps. Quando il nodo entra nello stato M, con probabilità β torna a funzionare normalmente dopo un tempo distribuito uniformemente in $[0, \alpha_1 T]$, mentre con probabilità $1 - \beta$ smette di funzionare dopo un tempo distribuito uniformemente in $[0, \alpha_2 T]$ e deve essere sostituito, operazione che richiede un tempo deterministico pari a ST .

- (a) Si costruisca un modello semi-Markoviano per il sistema. In particolare, indicando gli stati possibili con N, M e G (dove G è lo stato durante il quale il nodo non funziona), si scrivano la matrice di transizione della catena di Markov inclusa e la matrice dei tempi medi associati alle transizioni.
- (b) Usando il modello semi-Markoviano sviluppato al punto precedente, si calcoli in maniera parametrica la frazione del tempo che il nodo passa nei tre stati, e si calcoli il throughput medio smaltito dal nodo. Si calcolino inoltre i valori numerici di tali quantità per $\beta = 0.9$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$ e $T = 0.1$.
- (c) Si calcolino le quantità richieste al punto precedente usando la teoria dei processi di rinnovamento, individuando un ciclo di rinnovamento opportuno.

E2 Si consideri un nodo di rete con due link di ingresso, dai quali arrivano pacchetti secondo due processi di Poisson indipendenti $X_1(t)$ e $X_2(t)$ di intensità $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 500$ pacchetti al secondo, dove un pacchetto è composto da 1000 bit. Sia inoltre $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$.

- (a) Si calcolino $P[X_1(3) = 2 | X(3) = 8]$ e $P[X_1(2) = 2 | X(2) = 3]$.
- (b) Si calcolino $P[X_1(1) = 2 | X(2) = 3]$ e $P[X(2) = 3 | X_1(1) = 2]$.
- (c) Si supponga che il link di uscita dal nodo sia un sistema di trasmissione costituito da un gran numero di canali paralleli, ognuno caratterizzato da un valore di bit rate pari a 1 Mbps. Supponendo che il sistema sia vuoto al tempo $t = 0$ e di poter trascurare l'eventualità che un pacchetto che arriva non trovi un canale libero, determinare la probabilità che vi siano due pacchetti in trasmissione agli istanti $t_1 = 0.5$ ms e $t_2 = 3$ ms.

E3 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

- (a) si disegni il diagramma di transizione della catena, se ne classifichino gli stati e si individuino le classi
 - (b) si calcolino $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k$
 - (c) si calcolli la media del tempo di primo passaggio da tutti gli stati allo stato 4
- E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.99 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.
- (a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t+2$), e il canale di ritorno è senza errori.
 - (b) Come al punto precedente se il canale di ritorno è affetto da errori indipendenti con probabilità 0.02.

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

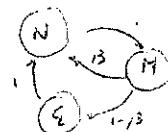
T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X(M(t) + 1)]$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a n passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_m P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \dots, n$$

36

$$\begin{aligned} N &\rightarrow 600 \text{ Hb/s} & T_N &\sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\tau}\right) \\ H &\rightarrow 30 \text{ Hb/s} & \xrightarrow{\beta} & T_H \sim \mathcal{U}(0, a_1 \tau) \rightarrow n \\ && \xrightarrow{1-\beta} & T_n \sim \mathcal{U}(0, a_2 \tau) \rightarrow s \\ s &\rightarrow 0 & T_s &\sim \delta \tau \end{aligned}$$



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1-\beta \\ 1-\beta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} \lambda & T & s \\ \frac{\lambda}{2} & \lambda & \frac{a_2 \tau}{2} \\ \frac{a_1 \tau}{2} & \frac{a_2 \tau}{2} & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\mu_N = \tau \quad \mu_H = \beta \frac{a_1 \tau}{2} = (1-\beta) \frac{a_2 \tau}{2} \quad \mu_s = \delta \tau$$

$$\pi_N = \pi_H = \frac{1}{3-\beta} \quad \pi_s = \frac{1-\beta}{3-\beta}$$

$$P_N = \frac{\pi_N / \lambda}{\pi_N / \lambda + \pi_H / \lambda + \pi_s / \lambda} = 0.333$$

$$P_H = \frac{\pi_H / \lambda}{\pi_N / \lambda + \pi_H / \lambda + \pi_s / \lambda} = 0.0555 \quad P_s = \frac{\pi_s / \lambda}{\pi_N / \lambda + \pi_H / \lambda + \pi_s / \lambda} = 0.6055 \quad E3$$

$$\text{Thus, } R_N P_N + R_H P_H = 54.65 \text{ Hb/s}$$

$$\Rightarrow \text{success} = 0.7_{\text{Hb/s}}(1-\beta) \quad E[\# \text{ success}] = \frac{1}{1-\beta}$$

$$E[\text{cycle}] = \left(\mu_N + \beta \frac{a_1 \tau}{2}\right) E[\# \text{succ}] + \frac{a_2 \tau}{2} = \delta \tau$$

$$P_N = \frac{P_N E[\# \text{succ}]}{E[\text{cycle}]} = 0.337 \quad P_H = \frac{(\beta \frac{a_1 \tau}{2} + \beta \frac{a_2 \tau}{2}) E[\# \text{succ}]}{E[\text{cycle}]} = 0.004356$$

$$P_s = 0.6055$$

$$E[T_h] = \frac{E[\# \text{succ}] (100 \tau + 50 \cdot \beta \frac{a_1 \tau}{2}) + 50 \cdot \frac{a_2 \tau}{2}}{E[\text{cycle}]}$$

$$\lambda = \lambda_1 = 300$$

$$\begin{aligned} a) \quad P[X_1(3)=2 | X(3)=3] &= \binom{3}{2} \left(\frac{3\lambda}{3+2\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{3\lambda}{3+2\lambda}\right) = 0.375 \\ P[X_1(2)=2 | X(2)=3] &= 0.375 \end{aligned}$$

$$b) \quad P[X_1(1)=2 | X(2)=3] = \binom{3}{2} \left(\frac{\lambda}{4\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{\lambda}{4\lambda}\right) = 0.1406$$

$$P[X(2)=3 | X_1(1)=2] = P[X_1(1)+X_2(2)=3] = (\lambda 3) e^{-3\lambda} = 0.3347$$

$$c) \quad T_{1-p_0} \text{ survival} = 1 \Rightarrow$$

$$P[2 \text{ pick } \rightarrow h=0.5] = P[N(0, \lambda) \geq 2] = \frac{(2\lambda)^2 e^{-2\lambda}}{2} = 0.7582$$

$$P[2 \text{ pick } \rightarrow h=3] = \pi_2 = \frac{(\lambda \cdot 2 \cdot 1)^2 e^{-2\lambda \cdot 1}}{2} = 0.835 \quad \text{c. d. i. r. - s. t. r. i. n. g.}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.00 \\ 0.0 & 0.0007 \\ 1.0 & 0.0007 \\ 0.000 & 0.0204 \\ 0.0 & 0.0003 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c) \quad & \{0, 0\} \text{ r. r. r. r. p. r.} \\ & \{3, 1\} \text{ h. r. r. r.} \\ & \{1, 4\} \text{ r. r. r. r. s. p. r.} \end{aligned}$$

$$d) \quad \pi_0 + \pi_2 = \pi_1 = \pi_3 = 0.5 \quad \pi_2 = 0.4 + 0.240 \rightarrow \pi_2 = \alpha_1 = 0.5$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.00 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0007 & 0.0007 \\ 1.0 & 0.0007 & 0.0 \end{pmatrix} \quad \sum_{k=1}^n P^{(k)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$e) \quad E[\theta_{1,1}]$$

$$E[\theta_{1,1}] = E[\theta_{1,1}] + E[\theta_{3,4}] = +$$

$$E[\theta_{1,1}] = 1 + 0.3 E[\theta_{1,1}] \Rightarrow E[\theta_{1,1}] = 1.429$$

$$E[\theta_{1,1}] = \pi_2 = 2$$

E1 Si consideri un server web a cui arrivano richieste di download secondo un processo di Poisson di intensità $\lambda = 20$ richieste al secondo. Ognuna di esse, dopo un tempo di elaborazione fisso pari a 20 ms, da luogo al trasferimento di un file la cui dimensione è uniformemente distribuita fra 1 MByte e 2 MByte. Una richiesta si dice "attiva" da quando arriva fino a quando il trasferimento del file corrispondente è terminato. Si supponga che la capacità del server in termini di numero di richieste simultanee che può elaborare sia infinita, e che la velocità di trasferimento di ciascun file sia 100 Mbit/s, indipendentemente dal numero di file che vengono contemporaneamente trasferiti.

(a) Supponendo che il server venga acceso al tempo $t = 0$, si dica dopo quanto tempo la statistica del numero di richieste attive arriva alla condizione stazionaria, e si dia l'espressione di $P[k]$ richieste attive] in tale condizione.

(b) Supponendo che in un intervallo di durata T sono arrivate N richieste, si trovi la probabilità che alla fine di tale intervallo non ci sia nessuna richiesta attiva per (b1) $T = 0.1$ s e $N = 2$ e (b2) $T = 1$ s e $N = 20$.

✓ E2 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

- (a) se ne classifichino gli stati e si individuino le classi
- (b) si calcolino le probabilità di assorbimento nelle varie classi ricorrenti a partire da tutti gli stati transitori
- (c) si calcolino $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k$
- (d) si calcoli il tempo medio di riconvenzione di tutti gli stati

E3 Una moneta è lanciata finché non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza.

- (a) Si calcoli la probabilità che il gioco termini con la sequenza CC. →
- (b) Si calcoli la probabilità che il gioco termini con la sequenza CC dato che il risultato del primo lancio è T.
- (c) Si risponda alle due domande precedenti nel caso in cui la moneta sia truccata, con probabilità che a un lancio si verifichi testa pari a $p = 1/4$.

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

- (a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t+2$), e il canale di ritorno è senza errori.
- (b) Si consideri adesso un canale che alterna il comportamento precedente a uno con errori indipendenti con probabilità 0.01. In particolare, il canale si comporta secondo il modello markoviano precedente per un numero geometrico di slot di media 1000000 slot, poi passa al comportamento iid per un numero geometrico di slot di media 2000000 slot, e così via. Si calcoli il throughput del protocollo GBN in questa situazione.

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a n passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_m P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \dots, n$$

$$\lambda = 20 \rightarrow b/2 \quad T_{\text{periodo}} \in \mathcal{U}[0, 100] \rightarrow$$

La probabilità di una strada libera è $\lambda t \rightarrow \lambda E[Y] \approx 100$

$$x_n \in \mathbb{P}(\lambda t) \rightarrow \kappa_n = \frac{(\lambda E[Y])^n}{n!} e^{-\lambda E[Y]} = \frac{(2.8)^n}{n!} e^{-2.8}$$

)

$$P[X_T=c | N(0, T) = N] = P[N(0, T - E[Y]) = 0 | N(T - E[Y], T) = c]$$

$$\left| \begin{array}{c} P[N(0, T) = N] \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad T = 2 \rightarrow E[Y] > T \rightarrow \text{Nessuna strada libera} \\ \dots \\ \binom{n}{c} \left(\frac{\lambda E[Y]}{\lambda} \right)^c \left(1 - \frac{\lambda E[Y]}{\lambda} \right)^{N-c} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

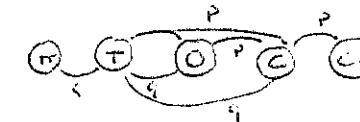
$$\begin{aligned} C_0 &= \{0, 1\} \text{ min. sp.} \\ C_1 &= \{2, 3\} \text{ min. sp.} \\ &\vdots \\ C_4 &= \{5\} \text{ max.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &= 0.5 + 0.6 \cdot 0 \rightarrow u_0 = 0.6 \cdot 0 \\ u_1 &= 0.3 + 0.6 \cdot 1 \rightarrow u_1 = 0.3 + 0.6 \end{aligned}$$

$$P^n = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \sum_{n=0}^{\infty} P^n = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

d) T_{periodo} minima

$$m_0 = m_1 = 2 = m_2 = m_4 = 0 \quad m_3 = 1$$



e)

$$P[X_T=c | X_0=0] = p_{0,c} + q_{0,c}$$

$$u_c = p_{0,c}$$

$$u_T = p_{0,T}$$

$$\left| \begin{array}{c} u_c = \frac{p}{1-q} \\ u_T = \frac{p}{1-q} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} u_0 = \frac{p^2}{1-q} + \frac{q p^2}{1-q} \\ u_T = \frac{p^2}{1-q} + \frac{q p^2}{1-q} \end{array} \right|$$

$$p+q=1/2 \rightarrow u_0 = 0.5$$

b)

$$P[X_T=c | X_0=T] = u_T = \nu_3$$

c)

$$\begin{aligned} q &= 0.25 \rightarrow u_0 = 0.2656 \\ u_T &= 0.2923 \end{aligned}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \quad \rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 0.5625 & 0.1875 \\ 0.1875 & 0.8125 \end{pmatrix} \quad n=2$$

$$d) \quad Th_1 = 0.8646$$

$$e) \quad \mathcal{E} = 0.0,$$

$$Th_2 = 0.8084$$

$$E[Th] = Th_1 \cdot \frac{1}{3} + Th_2 \cdot \frac{2}{3} = 0.8338$$

E1 Si consideri un server web a cui arrivano richieste di download secondo un processo di Poisson di intensità $\lambda = 5$ richieste al secondo. Ognuna di esse, dopo un tempo di elaborazione uniformemente distribuito fra 10 e 30 ms, dà luogo al trasferimento di un file la cui dimensione è esponenziale di media 1 MByte. Una richiesta si dice "attiva" da quando arriva fino a quando il trasferimento del file corrispondente è terminato. Si supponga che la capacità del server in termini di numero di richieste simultanee che può elaborare sia infinita, e che si voglia trasferire ciascun file a 100 Mbit/s, indipendentemente dal numero di file che vengono contemporaneamente trasferiti. Si supponga che il server venga acceso al tempo $t = 0$, e sia $X(t)$ il numero di richieste attive nel sistema al tempo t .

- (a) Si calcoli la probabilità che, dato che sono arrivate 5 richieste nell'intervallo da 0 a 1 s, almeno due di queste siano arrivate entro $t = 0.5$ s.
- (b) Si dimensioni la capacità del link di uscita dal server, in modo che la probabilità che il numero di file da trasferire ecceda tale capacità sia minore di 0.001.

E2 Una moneta è lanciata finché non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza.

- (a) Si calcoli la probabilità che il gioco termini con la sequenza CC, e la durata media del gioco.
- (b) Come la domanda precedente, nel caso in cui il gioco finisce quando si verificano due lanci diversi in sequenza (cioè CT o TC).

E3 Si consideri uno switch in cui vi sono due processori uguali e indipendenti. Ogni processore alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha$ (funzionamento) e $1/\beta = 1/(19\alpha) = 1$ giorno (guasto). Il traffico totale smaltito dallo switch è pari a 2.5 Gbps se entrambi i processori sono attivi, 1 Gbps se ne funziona uno solo, e zero altrimenti.

- (a) Si calcoli la frazione del tempo in cui lo switch non smaltisce traffico
- (b) si calcoli la durata media di un intervallo di tempo durante il quale lo switch non smaltisce traffico
- (c) si calcoli la durata media di un intervallo di tempo in cui c'è un solo processore funzionante, e la probabilità che in questo caso esso si guasti prima che l'altro torni in funzione
- (d) si calcoli il traffico medio smaltito dallo switch

E4 Si consideri una catena di Markov X_n con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2)

$$P := \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- (a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilità di X_1, X_2 e X_{500} , dato che $X_0 = 0$.
- (b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1 e 2 verso lo stato 2, e il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati.
- (c) Sia $W_{ij}^{(n)} = E \left[\sum_{k=0}^{n-1} I\{X_k = j\} \mid X_0 = i \right]$ il numero medio di visite allo stato j a partire dallo stato i durante i primi n istanti dell'evoluzione della catena. Si calcolino $W_{0j}^{(3)}$ e $W_{0j}^{(5000)}$ per $j = 0, 1, 2$.

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Si dimostri che in una catena di Markov il periodo è una proprietà di classe.

T3 Si dimostri che per un processo di Poisson $X(t)$ la statistica di $X(s)$ condizionata a $X(t), s < t$, è binomiale, e si fornisca l'espressione di $P[X(s) = k \mid X(t) = n]$.

Capacity in wireless case

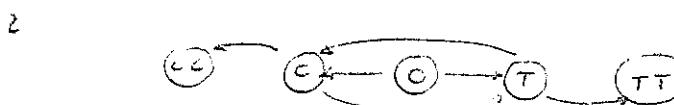
$$\lambda = 5 \text{ arrivals/s} \quad T_c \sim U[0, 10] \text{ s} \quad T_w \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\ln B_p}\right) \cdot \frac{1}{\text{Mbps}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P[\text{at least } n \text{ arrivals}] \leq 0.001$$

Probability

$$e^{-\lambda_{100\text{s}}} + (\lambda_{100\text{s}})^1 \cdot \frac{e^{-\lambda_{100\text{s}}}}{1!} + (\lambda_{100\text{s}})^2 \cdot \frac{e^{-\lambda_{100\text{s}}}}{2!} + \dots \xrightarrow{n=4} e^{-0.55} \approx 0.6958$$

Capacity usage = $n' C = 400 \text{ Mbps}$



$$w_0 = \frac{1}{2} w_C + \frac{1}{2} w_T$$

$$w_C = \frac{2}{3}$$

$$w_C = 0.5$$

$$w_T = \frac{1}{3}$$

$$v_C = 1 + \frac{1}{2} v_C + \frac{1}{2} v_T$$

$$v_C = 3$$

$$v_C = 1 + \frac{1}{2} v_T \quad v_C = 2$$

$$v_T = 1 + \frac{1}{2} v_C \quad v_T = 2$$

| result: simultaneous channel access probability

?

ED

$$\begin{aligned} \text{Processor 1} & \rightarrow T_p \sim \mathcal{E}(\alpha) \quad \alpha = 1 \\ \text{Processor 2} & \rightarrow T_q \sim \mathcal{E}(\beta) \quad \beta = 1 \end{aligned} \quad R_{FF} = 2.54 \text{ Gbps} \quad R_{pq} = R_{qp} = 1 \text{ Gbps} \quad R_{qq} = 0$$

a) D. H. channel probabilities

$$P_d = \frac{E[T_p]}{E[T_p] + E[T_q]} = 0.05 \quad \rightarrow \quad P_{dd} = (P_d)^2 = 0.0025$$

b)

$$E[\min\{T_p, T_q\}] = E[\min\{\mathcal{E}(\alpha), \mathcal{E}(\beta)\}] = \frac{1}{2\beta} = 0.5$$

c)

$$E[1 \text{ solo func.}] = E[\min\{\mathcal{E}(\alpha), \mathcal{E}(\beta)\}] = \frac{1}{\alpha + \beta} = 0.55$$

$$P[\text{2 faults}] = P[\mathcal{E}(\alpha) < \mathcal{E}(\beta)] = \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha x}) \beta e^{-\beta x} dx = 1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta} = 0.45$$

d)

$$\text{Traffic} = R_{FF} (P_d)^2 + 2 P_p P_q R_{pq} = 2.351 \text{ Gbps}$$

ED

$$P_s = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad P^c = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.32 & 0.32 \end{pmatrix}$$

$$\circ) \quad X_1 = [0.2 \ 0.2 \ 0.6] \quad X_2 = [0.36 \ 0.32 \ 0.32] \quad \pi = [\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}]$$

$$\circ) \quad m_0 = m_1 = m_2 = 3 = E[\theta_{12}]$$

$$\begin{cases} E[\theta_{12}] = 1 + P_{11} E[\theta_{11}] + P_{12} E[\theta_{12}] & E[\theta_{11}] = 2.5 \\ E[\theta_{12}] = 1 + P_{21} E[\theta_{21}] + P_{22} E[\theta_{22}] & E[\theta_{21}] = 2.5 \end{cases}$$

$$W_{ij}^{(3)} = P_{ij}^{(1)} + P_{ij}^{(2)} + P_{ij}^{(3)} = \begin{cases} 1.36 & i=0 \\ 0.72 & i=1 \\ 0.22 & i=2 \end{cases}$$

$$W_{ij}^{(4000)} = 5000 \pi j = \begin{cases} 1.667 & i=0 \\ 1.667 & i=1 \\ \dots & i=2 \end{cases}$$

E1 Si consideri un centralino telefonico con una sola linea e la possibilità di mettere in attesa una sola chiamata (ulteriori chiamate che arrivano quando ce n'e' già una in attesa sono perse). Le chiamate arrivano secondo un processo di Poisson di parametro cinque chiamate all'ora, e la durata di ognuna è distribuita esponenzialmente con media sei minuti. Si calcolino

- (a) la percentuale di chiamate perse
- (b) la statistica del tempo di attesa di una chiamata
- (c) il tempo medio totale speso nel sistema da una chiamata (attesa più servizio)

E2 Si consideri un sistema di tipo Slotted ALOHA che usa un canale condiviso a 10 Mbps, e in cui la durata di uno slot corrisponda a un pacchetto di 1000 bit. Nel sistema vi sono 100 utenti e la probabilità di riusmissione è $q_r = 0.005$.

- (a) Si calcoli il massimo traffico smaltibile dal sistema, indicando sotto quali ipotesi tale valore può essere effettivamente raggiunto
- (b) se il traffico complessivo generato nel sistema è pari a $\lambda = 2000$ pacchetti/s, si calcoli il valore del drift quando il numero di utenti in backlog è pari a $n = 5$ e $n = 20$. (Si supponga di poter usare l'approssimazione di Poisson per il traffico offerto totale.)

E3 Si consideri la rete con cinque nodi numerati da 1 a 5 e la seguente matrice di connettività in cui l'elemento d_{ij} è la lunghezza del collegamento dal nodo i al nodo j (infinita se il collegamento diretto non è presente):

$$D = \begin{pmatrix} - & 1 & \infty & 6 & \infty \\ 1 & - & 1 & 4 & \infty \\ \infty & 1 & - & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & - & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & - \end{pmatrix}$$

- (a) si disegni la topologia della rete indicando i vari link e le distanze relative
- (b) si applichi l'algoritmo di Bellman-Ford per la ricerca dei cammini minimi verso il nodo 1, elencando per ogni passo le distanze minime stimate

E4 Si consideri una passeggiata casuale sugli interi non negativi con le seguenti probabilità di transizione: $P_{01} = 1$, $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = q$, $i > 0$, con $p + q = 1$. Sia $p = 0.4$.

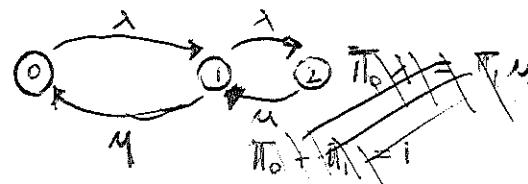
- (a) Si calcolino le probabilità stazionarie che la passeggiata casuale si trovi nello stato 5 quando parte dallo stato 0 e quando parte dallo stato 5.
- (b) Si calcoli $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{05}^{(n)}$.
- (c) Si calcoli la probabilità stazionaria che la passeggiata casuale si trovi nello stato 5 quando parte dallo stato 0, nel caso in cui $p = 0.5$.
- (d) Se la catena parte dallo stato 1, si calcoli il tempo medio necessario per arrivare (per la prima volta) nello stato 3.

T1 Dimostrare che il numero k di arrivi di Poisson nell'intervallo $(0, s)$ condizionato al numero n di arrivi nell'intervallo $(0, t)$ con $t > s$ è una variabile casuale binomiale e darne la distribuzione di probabilità

- T2 Si analizzino le prestazioni del protocollo slotted ALOHA usando l'analisi dei drift, e se ne discuta la stabilità.
- T3 Si descriva il modello OSI, dando per ogni livello un elenco delle funzionalità principali. Per i livelli più importanti, dare qualche esempio di possibile protocollo.

- E1
- arrivi con pd P $\lambda = 5/\text{min} = 0.5/\text{min}$
 - tempo servizio è $\mathcal{E}(u)$ con $\frac{1}{u} = 6 \text{ minuti}$

M/M/2



$$\Rightarrow \frac{\pi_0}{\pi_0 + \pi_1} = i \quad \pi_0 = \frac{i}{(1 + \frac{i}{\lambda})} = \frac{i}{1 + \frac{5}{0.5}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$\pi_1 = \frac{1}{2}$ probabilità di chiamata persa

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\lambda}{\lambda + u} \pi_0 & \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1 \\ \pi_2 &= \frac{\lambda}{u} \pi_1 = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^2 \pi_0 & \pi_0 + \frac{\lambda}{u} \pi_0 + \left(\frac{\lambda}{u}\right)^2 \pi_0 &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{ma } \frac{\lambda}{u} = 0.5 \quad \pi_0 = \frac{i}{1 + \frac{\lambda}{u} + \left(\frac{\lambda}{u}\right)^2} = \frac{i}{1 + 0.5 + 0.25} = \frac{1}{1.75} = 0.57$$

$$\pi_2 = \text{probabilità chiamata persa} = \pi_0 (0.25) = 0.142$$

TEMPO ATTESA - $T \in \mathcal{E}_1(u) + \mathcal{E}_2(u) \rightarrow$ tempo di attesa chiamata nuova
CHIAMATA $\xrightarrow{\text{tempo attesa}}$ di nuova chiamata persa

TEMPO ATTESA IN CUST:

E1 Si consideri la catena di Markov $X(t)$ con stati 1, 2, 3, $X(0) = 3$, e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Si calcolino le probabilità stazionarie e i tempi medi di ricorrenza di tutti gli stati.
- (b) Si calcoli la media del tempo di primo passaggio dallo stato 1 allo stato 3.
- (c) Si calcolino $P[X(1) = 1, X(3) = 1 | X(2) = 2]$ e $P[X(2) = 2 | X(1) = 1, X(3) = 1]$.

E2 Si consideri un sistema di trasmissione a divisione di frequenza in cui il numero di canali sia sufficientemente elevato da trascurare la probabilità che siano tutti occupati. A tale sistema arrivano richieste di connessione (ogni connessione occupa un canale) secondo un processo di Poisson con intensità $\lambda = 100$ chiamate all'ora, e la durata di ognuna di tali chiamate è esponenziale con media 6 minuti. Sia $X(t)$ il numero di canali occupati al tempo t .

- (a) Si calcoli la media di $X(t)$ per $t = 6, 10$ minuti e per $t = \infty$.
- (b) Si calcoli $P[X(t) = 10]$ per $t = 6$ e per $t = \infty$.
- (c) Si ripetano i calcoli delle due domande precedenti nel caso in cui la distribuzione della durata delle chiamate è uniforme nell'intervallo $[2, 10]$ (minuti).

E3 Una moneta è lanciata finché non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza. La moneta è truccata. In particolare, la probabilità che il risultato di un lancio sia testa (T) è $p = 2/3$, mentre la probabilità che si verifichi croce (C) è $1 - p$. Calcolare:

- (a) La probabilità che il gioco termini con la sequenza CC.
- (b) La probabilità che il gioco termini con la sequenza CC dato che il risultato del primo lancio è T.

E4 Si consideri un nodo a cui arrivano pacchetti di lunghezza costante pari a 1000 bit, e in cui l'unico link di uscita ha una velocità di 1 Mbps. La statistica degli arrivi segue un processo di Poisson con intensità $\lambda = 750$ pacchetti al secondo. Ogni pacchetto che arriva ha priorità 1 (alta) con probabilità 1/4 e priorità 2 (bassa) con probabilità 3/4. La priorità di ogni pacchetto è assegnata indipendentemente dagli altri. Il nodo implementa una politica di servizio che tiene conto delle priorità dei pacchetti in maniera non-preemptive.

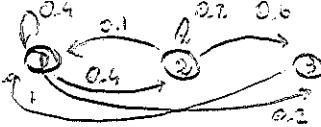
- (a) si calcoli il tempo medio di attesa in coda e il tempo medio totale speso nel sistema dai pacchetti delle due classi
- (b) si calcoli il tempo medio totale speso nel sistema da un pacchetto generico, e il numero medio totale di pacchetti nel nodo (compreso quello in trasmissione)
- (c) si dica come cambiano le risposte al punto (a) nel caso in cui $\lambda = 1500$

T1 Dimostrare che il numero k di arrivi di Poisson nell'intervallo $(0, s)$ condizionato al numero n di arrivi nell'intervallo $(0, t)$ con $t > s$ è una variabile casuale binomiale e darne la distribuzione di probabilità.

T2 A partire dalle probabilità degli eventi in intervalli infinitesimi, si derivi la distribuzione stazionaria del numero di pacchetti in una coda M/M/1. (Si diano tutti i dettagli della dimostrazione.)

T3 Si descrivano i protocolli ARQ Selective Repeat e Go-Back-N discutendone i rispettivi vantaggi e svantaggi.

$$E: \quad P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\pi_0 = \pi_0 \cdot 0.4 + \pi_1 \cdot 0.2 + \pi_2 \quad \pi_0(1-0.2) = \pi_0 \cdot 0.4 \Rightarrow \pi_1 = \frac{0.4}{0.8} \pi_0$$

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot 0.4 + \pi_1 \cdot 0.2 + \quad \Rightarrow \quad \pi_0(1-0.4) = \pi_0 \frac{0.4}{0.8} \cdot 0.2 + \pi_2$$

$$\pi_2 = 0.2 \pi_0 + 0.6 \pi_1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 \cdot 0.2 = \pi_2 \Rightarrow \pi_0 + \pi_0 \cdot 0.5 + \pi_0 \cdot 0.5 = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{2} \quad \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad m_0 = 2 \quad m_1 = m_2 = 4$$

$$E[\varphi_{13}] = 0.4 E[\varphi_{23}] + 0.4 E[\varphi_{13}] + 1 \quad E[\varphi_{13}](1-0.4) = 0.4 E[\varphi_{23}] + 1$$

$$E[\varphi_{23}] = 0.1 E[\varphi_{13}] + 0.2 E[\varphi_{23}] + 1 \quad E[\varphi_{23}](1-0.2) = 0.1 E[\varphi_{13}] + 1$$

$$\Rightarrow E[\varphi_{13}] = \frac{0.4 E[\varphi_{23}] + 1}{0.6} = \frac{2}{3} E[\varphi_{23}] + \frac{5}{3}$$

E

E1 Si consideri la catena di Markov $X(t)$ con stati 1, 2, 3, $X(0) = 3$, e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Si calcolino le probabilità stazionarie e i tempi medi di ricorrenza di tutti gli stati.
- (b) Si calcolino media e varianza del tempo di primo passaggio dallo stato 1 allo stato 3.
- (c) Si calcolino $P[X(1) = 1, X(3) = 1 | X(2) = 2]$ e $P[X(2) = 2 | X(1) = 1, X(3) = 1]$.

E2 Si consideri un sistema di trasmissione a divisione di frequenza in cui il numero di canali sia sufficientemente elevato da trascurare la probabilità che siano tutti occupati. A tale sistema arrivano richieste di connessione secondo un processo di Poisson con intensità $\lambda = 100$ chiamate all'ora, e la durata di ognuna di tali chiamate è esponenziale con media 6 minuti. Sia $X(t)$ il numero di canali occupati al tempo t

- (a) Si calcoli la media di $X(t)$ per $t = 6, 10$ minuti e per $t = \infty$.
- (b) Si calcoli $P[X(t) = 10]$ per $t = 6$ e per $t = \infty$.
- (c) Si ripetano i calcoli delle due domande precedenti nel caso in cui la distribuzione della durata delle chiamate è uniforme nell'intervallo $[2, 10]$ (minuti).

E3 Si consideri un sistema di trasmissione che usa il protocollo Selective Repeat per scambiare dati lungo un collegamento caratterizzato da una probabilità di errore sul bit pari a $\epsilon = 0.00001$, da un canale di ritorno perfettamente affidabile, e da un tempo di round-trip pari a $n = 7$ slot (dove uno slot è pari al tempo di trasmissione di un blocco di 2000 bit). Si noti che in questo caso se un blocco trasmesso nello slot t è errato, verrà ritrasmesso nello slot $t + n$.

- (a) Si calcoli il massimo throughput del sistema in blocchi per slot.
- (b) Sia $L' = 48$ bit l'overhead totale per blocco dovuto al protocollo. Si determini la lunghezza ottima del pacchetto che massimizza il throughput in saturazione.

E4 Si consideri un nodo a cui arrivano pacchetti di lunghezza costante pari a 1000 bit, e in cui l'unico link di uscita ha una velocità di 1 Mbps. La statistica degli arrivi segue un processo di Poisson con intensità $\lambda = 750$ pacchetti al secondo. Ogni pacchetto che arriva ha priorità 1 (alta) con probabilità 1/3 e priorità 2 (bassa) con probabilità 2/3. La priorità di ogni pacchetto è assegnata indipendentemente dagli altri. Il nodo implementa una politica di servizio che tiene conto delle priorità dei pacchetti in maniera non-preemptive.

- (a) si calcoli il tempo medio di attesa in coda e il tempo medio totale speso nel sistema dai pacchetti delle due classi
- (b) si calcoli il tempo medio totale speso nel sistema da un pacchetto generico, e il numero medio totale di pacchetti nel nodo (compreso quello in trasmissione)
- (c) si dica come cambiano le risposte al punto (a) nel caso in cui $\lambda = 1500$

T1 Dimostrare che il numero k di arrivi di Poisson nell'intervallo $(0, s)$ condizionato al numero n di arrivi nell'intervallo $(0, t)$ con $t > s$ è una variabile casuale binomiale e darne la distribuzione di probabilità

- T2 A partire dalle probabilità degli eventi in intervalli infinitesimi, si derivi la distribuzione stazionaria del numero di pacchetti in una coda M/M/1.
- T3 Si descrivano i protocolli ARQ Selective Repeat e Go-Back-N discutendone i rispettivi vantaggi e svantaggi.

I.1 Si consideri un gioco in cui una moneta viene lanciata ripetutamente finché non compare la sequenza THT.

- (a) Si calcoli il numero medio di lanci prima che il gioco finisce (sugg.: si costruisca una catena di Markov opportuna)
- (b) Si ripeta il punto precedente se la sequenza per la quale il gioco finisce è TH
- (c) Si supponga ora che, invece che finire il gioco secondo le regole descritte in precedenza, si lancia ripetutamente la moneta. Ogni volta che si verifica la combinazione THT si perde un punto, mentre ogni volta che si verifica la combinazione TH se ne guadagna uno (si considerino anche eventuali sovrapposizioni, per esempio la sequenza THHT contiene sia THT sia TH). Sia $R(N)$ il punteggio dopo N lanci, con $R(0) = 0$. Si calcolino $\lim_{N \rightarrow \infty} R(N)$ e $\lim_{N \rightarrow \infty} R(N)/N$

I.2 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

- (a) se ne classifichino gli stati e si individuino le classi
- (b) si calcolino le probabilità di assorbimento nelle varie classi ricorrenti a partire da tutti gli stati transitori
- (c) si calcoli $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$
- (d) si calcoli il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati

I.3 Si consideri un sistema di trasmissione che usa il protocollo Go-Back-N per scambiare dati lungo un collegamento caratterizzato da una probabilità di errore sul bit pari a $\varepsilon = 0.00001$, da un canale di ritorno perfettamente affidabile, e da un tempo di round-trip pari a $n = 7$ slot (dove uno slot è pari al tempo di trasmissione di un blocco di 2000 bit, dei quali 16 costituiscono il CRC e 48 l'header). Si noti che in questo caso se un blocco trasmesso nello slot t è errato, verrà ritrasmesso nello slot $t + n$. La velocità trasmissiva del link è 1 Mbps.

- (a) Si calcoli la probabilità di errore (cioè che un blocco sia errato) e si dia una stima della probabilità di errore non rivelato (cioè che un blocco errato venga accettato come corretto).
- (b) Si calcoli il massimo throughput del sistema in blocchi per slot e in bit al secondo.

I.4 Si consideri una stazione di servizio con due serventi e con un ulteriore posto in coda, in modo che nel sistema non ci possano essere più di tre utenti. Se gli utenti arrivano secondo un processo di Poisson con intensità uno ogni dieci minuti e il tempo di servizio è esponenziale con media 15 minuti, si calcolino

- (a) la probabilità che un utente venga rifiutato perché il sistema è pieno
- (b) il tempo medio speso nel sistema da un utente

I.1 Dimostrare che se i e j comunicano e i è ricorrente, allora anche j è ricorrente.

I.2 Si analizzino le prestazioni del protocollo slotted CSMA, e se ne discuta la stabilità.

I.3 Si confrontino i protocolli ARQ Go-Back-N e Selective Repeat, dandone una breve descrizione ed evidenziando i rispettivi vantaggi e svantaggi.