Simulazione nel dominio del tempo

- metodi di integrazione numerica di equazioni differenziali

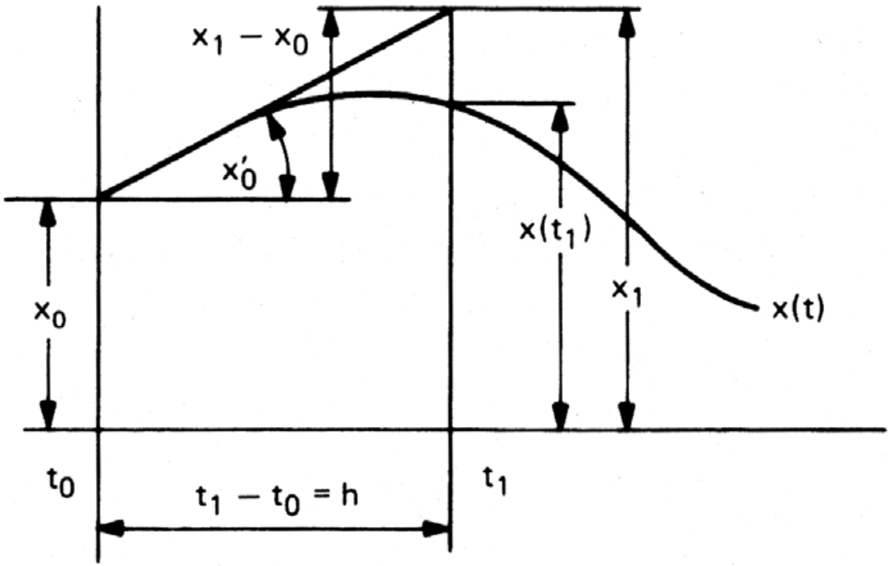
$$eq.differenziale \qquad x' = f(x,t)$$

$$noto \quad x_0 \quad si\,vuol\,determinare\ x_1$$

$$forward\ Euler\ formula:$$

$$x_1 = x_o + h\,x_o'$$

$$x_o' = \frac{x_1 - x_o}{h}$$



Simulazione nel dominio del tempo

$$\textbf{\textit{backward Euler formula}}:$$

$$x_1' = \frac{x_1 - x_o}{h} \qquad\qquad x_1 = x_o + h\, x_1'$$

$$\textit{è una formula implicita}:$$

$$\textit{non conosciamo } x_1 \textit{ e quindi non conosciamo } x_1'.$$

$$\textit{In generale: si usa un procedimento iterativo}$$

$$\textit{partendo da una stima iniziale}$$

$$(\textit{Corrector})$$

$$\textbf{\textit{Trapezoidal rule}}:$$

$$x_1 = x_o + \frac{h}{2}\left(x_1' - x_o'\right)$$

$$\textit{formula implicita}$$

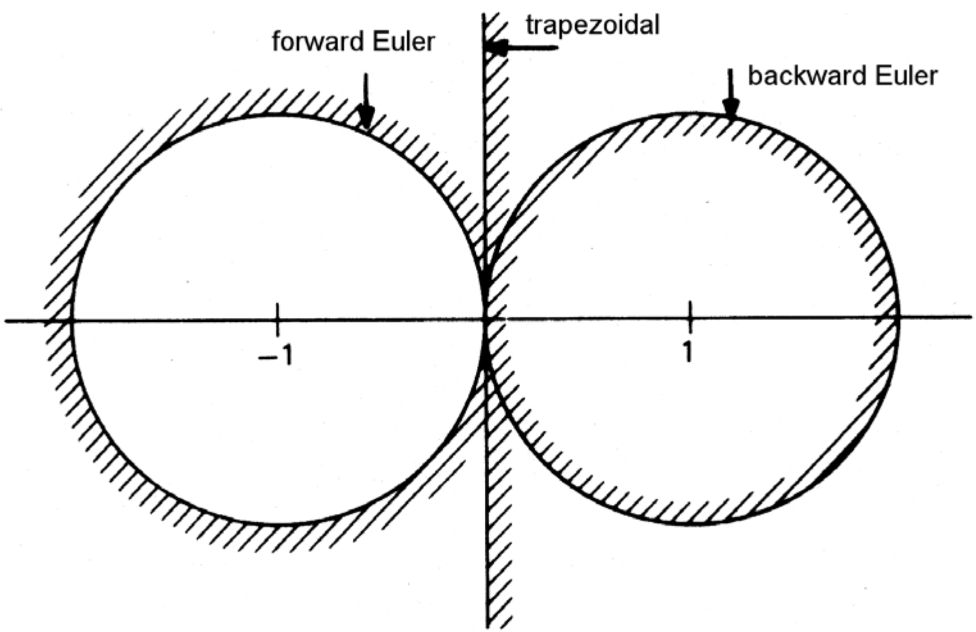
Stabilità dell'integrazione

si usa la funzione test:

$x' = \lambda x$ $\left(\text{soluzione: } x = x(0)e^{\lambda t}\right)$

e si studia la stabilità in funzione di λh

dove h è il passo di integrazione.



Reti lineari

formulazione a variabili di stato:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}$$

bakward Euler:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{x}'_{n+1}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h(\mathbf{A}\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{w}_{n+1}).$$

$$(\mathbf{1} - h\mathbf{A})\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{w}_{n+1}$$

scomposizione LU.
N.B. : per h costante
la scomposizione LU è valida per tutti i passi,
serve solo forward e back substitution

Reti lineari

regola trapezoidale:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{w}_{n+1} + \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n).$$

$$\left(\mathbf{1} - \frac{h}{2}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_{n+1} = \left(1 + \frac{h}{2}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{w}_{n+1} + \mathbf{w}_n)$$

vale quanto detto per la bacward.

Formulazione Tableau o MNA

dominio di Laplace:

$$(\mathbf{G} + s\mathbf{C})\mathbf{X} = \mathbf{W}$$

dominio del tempo:

$$\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{x}' = \mathbf{w} \longrightarrow \mathbf{C}\mathbf{x}' = \mathbf{w} - \mathbf{G}\mathbf{x}$$

backward Euler:

$$\mathbf{C}\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}_n + h\mathbf{C}\mathbf{x}'_{n+1}.$$

$$\mathbf{C}\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}_n + h(\mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{G}\mathbf{x}_{n+1})$$

$$\left(\mathbf{G} + \frac{1}{h}\mathbf{C}\right)\mathbf{x}_{n+1} = \frac{1}{h}\mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{w}_{n+1}.$$

matrice MNA con 1/h al posto di s

Formulazione Tableau o MNA

regola trapezoidale:

$$\mathbf{C}\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}_n + \frac{h}{2}\mathbf{C}\mathbf{x}'_{n+1} + \frac{h}{2}\mathbf{C}\mathbf{x}'_n.$$

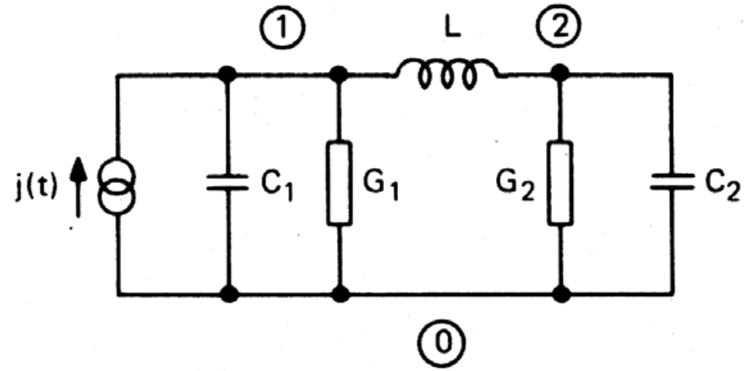
$$\mathbf{C}\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{G}\mathbf{x}_{n+1}) + \frac{h}{2}(\mathbf{w}_n - \mathbf{G}\mathbf{x}_n).$$

$$\left(\mathbf{C} + \frac{h}{2}\mathbf{G}\right)\mathbf{x}_{n+1} = \left(\mathbf{C} - \frac{h}{2}\mathbf{G}\right)\mathbf{x}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{w}_{n+1} + \mathbf{w}_n).$$

$$\left(\mathbf{G} + \frac{2}{h}\mathbf{C}\right)\mathbf{x}_{n+1} = -\left(\mathbf{G} - \frac{2}{h}\mathbf{C}\right)\mathbf{x}_n + \mathbf{w}_{n+1} + \mathbf{w}_n$$

matrice MNA con 2/h al posto di s

Esempio



$$MNA:$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + sC_1 & 0 & 1 \\ 0 & G_2 + sC_2 & -1 \\ 1 & -1 & -sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$bakward\ \ Euler: \left(\mathbf{G} + \frac{1}{h}\mathbf{C}\right)\mathbf{x}_{n+1} = \frac{1}{h}\mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{w}_{n+1}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + \dfrac{C_1}{h} & 0 & 1 \\ 0 & G_2 + \dfrac{C_2}{h} & -1 \\ 1 & -1 & -\dfrac{L}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,n+1} \\ v_{2,n+1} \\ i_{L,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{C_1}{h} v_{1,n} \\ \dfrac{C_2}{h} v_{2,n} \\ -\dfrac{L}{h} i_{L,n} \end{bmatrix}$$

Modelli tempo-discreti dei componenti con memoria

$$Condensatore:$$

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{i}{C}$$

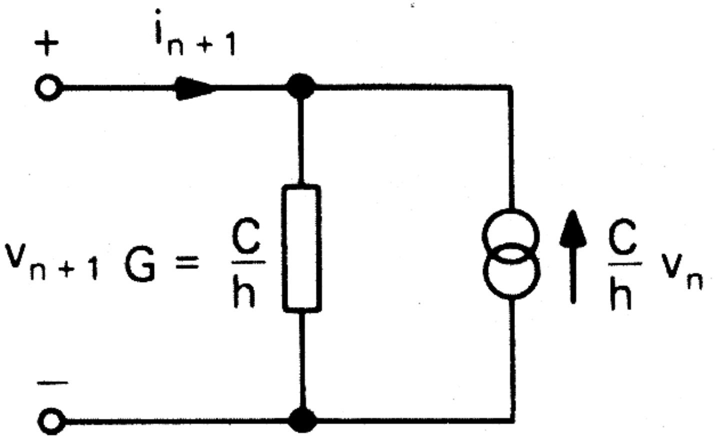
$$backward:$$

$$x_{n+1} = x_n + h\ x'_{n+1}$$

$$v_{n+1} = v_n + i_{n+1}\frac{h}{C}$$

$$cioè:$$

$$i_{n+1} = \frac{C}{h}v_{n+1} - \frac{C}{h}v_n$$



Modelli tempo-discreti dei componenti con memoria

$$Induttore:$$

$$v = L\frac{di}{dt} \qquad \frac{di}{dt} = \frac{v}{L}$$

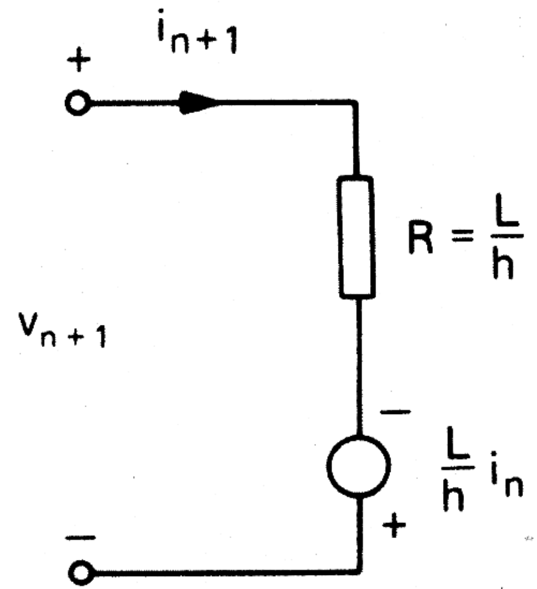
$$backward:$$

$$x_{n+1} = x_n + h\ x'_{n+1}$$

$$i_{n+1} = i_n + v_{n+1}\frac{h}{L}$$

$$cioè:$$

$$v_{n+1} = \frac{L}{h}i_{n+1} - \frac{L}{h}i_n$$



Modelli tempo-discreti dei componenti con memoria

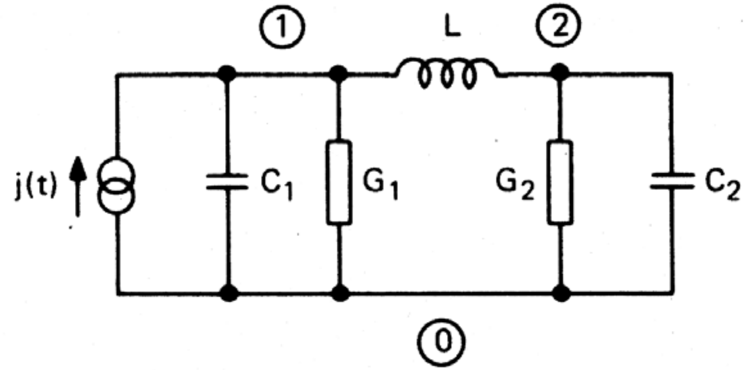
La rete diventa una rete resistiva con resistori L/h al posto degli induttori e conduttanze C/h al posto dei condensatori.

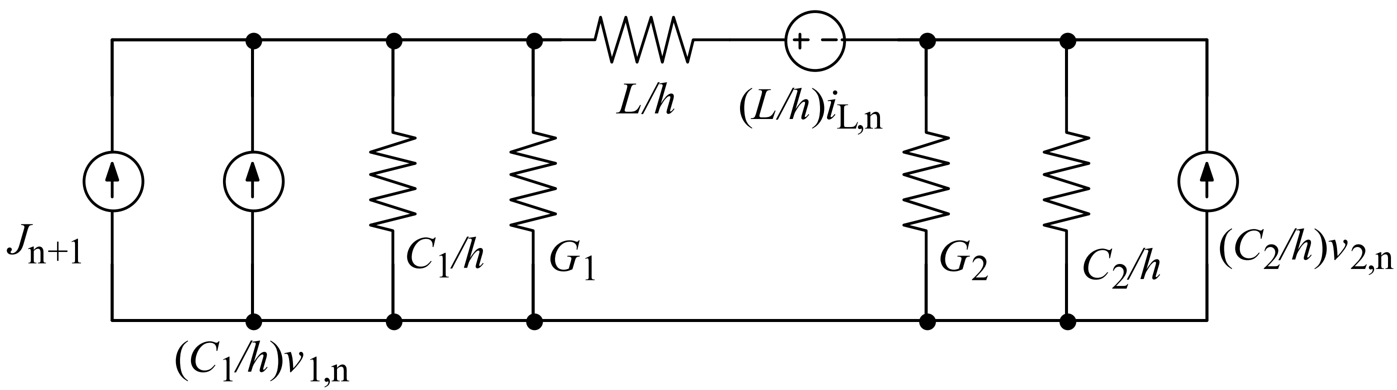
In parallelo a C/h ed in serie con L/h vengono posti generatori che tengono conto della soluzione al passo precedente.

Modelli analoghi possono essere ricavati per la regola trapezoidale o anche per formule di ordine superiore.

Metodo applicabile anche a reti non lineari, si otterrà una rete resistiva non lineare.

Esempio





Tecniche LMS (Linear MultiStep) di ordine superiore

- Uso di relazioni di ordine superiore
  - Stima di x basandosi sulla conoscenza di n valori precedenti sia di x che della sua derivata.
- Uso di formule di tipo *predictor* per la stima iniziale di x e poi uso iterativo di formule di tipo *corrector.*
  - Stima dell'errore
  - Modifica del passo di integrazione (e dell'ordine).

LMS

- Conoscenza di n valori precedenti di x e della sua derivata:

$$x_n, \quad x_{n+1}, \; \dots \; , x_{n+k-1}$$

$$x'_n, \; x'_{n+1}, \dots \; , x'_{n+k-1}$$

- Se si considerano x_{n+k} x'_{n+k} come incognite si ha una formula *predictor.*
- Se x_{n+k} è supposto noto e si considera come incognita solo x'_{n+k} si ha una formula *corrector.*

LMS

si usa una tecnica di interpolazione polinomiale
per il polinomio di ordine m:

$$x_m(t) = \sum_{i=0}^{m} d_i \left(\frac{t_{n+k} - t}{h}\right)^i = \sum_{i=0}^{m} d_i \tau^i$$

$$x'_m(t) = -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^{m} i d_i \left(\frac{t_{n+k} - t}{h}\right)^{i-1} = -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^{m} i d_i \tau^{i-1}$$

forma generale delle formule "*predictor*":

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} a_j^P x_{n+k-j} - h \sum_{j=1}^{k} b_j^P x'_{n+k-j}$$

forma generale delle formule "*corrector*":

$$x'_{n+k} = -\frac{1}{h} \left\{ \sum_{j=0}^{k} a_j^C x_{n+k-j} - h \sum_{j=1}^{k} b_j^C x'_{n+k-j} \right\}$$

LMS

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_{n+k-i} - h \sum_{i=0}^{k} \beta_i x'_{n+k-i} = 0$$

1) si ha una formula "predictor" se $\alpha_o = 0$ oppure $\beta_o = 0$

2) si ha una formula "corrector" se $\alpha_o \neq 0$ e $\beta_o \neq 0$

3) formule "Bakward differentiation" (BDF) se:

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0$$

LMS

Adams–Bashforth Predictors and Adams–Moulton Correctors.

$$x_{n+k} = x_{n+k-1} + h \sum_{j=1}^{k} \gamma_j x'_{n+k-j+1}$$

	k	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	Truncation Error
predictor	1	0	1	—	—	$\frac{1}{2} h^2 x^{(2)}$
corrector		1	—	—	—	$-\frac{1}{2} h^2 x^{(2)}$
predictor	2	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	—	$\frac{5}{12} h^3 x^{(3)}$
corrector		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—	—	$-\frac{1}{12} h^3 x^{(3)}$
predictor	3	0	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{24} h^4 x^{(4)}$
corrector		$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$	—	$-\frac{1}{24} h^4 x^{(4)}$

LMS – BDF

BDF Predictors

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^{k+1} a_j^P x_{n+k-j}$$

Order k	a_1^P	a_2^P	a_3^P	a_4^P	a_5^P	a_6^P	a_7^P
1	2	−1	—	—	—	—	—
2	3	−3	1	—	—	—	—
3	4	−6	4	−1	—	—	—
4	5	−10	10	−5	1	—	—
5	6	−15	20	−15	6	1	—
6	7	−21	35	−35	21	−7	1

BDF Correctors

$$x'_{n+k} = -\frac{1}{h} \sum_{j=0}^{k} a_j^C x_{n+k-j}$$

Order k	a_0^C	a_1^C	a_2^C	a_3^C	a_4^C	a_5^C	a_6^C
1	-1	1	—	—	—	—	—
2	$-\frac{3}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	—	—	—	—
3	$-\frac{11}{6}$	3	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	—	—	—
4	$-\frac{25}{12}$	4	-3	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{4}$	—	—
5	$-\frac{137}{60}$	5	-5	$\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5}$	—
6	$-\frac{147}{60}$	6	$-\frac{15}{2}$	$\frac{20}{3}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{6}$

LMS – BDF Stima dell'errore

- Formula di Brayton:

$$E = \frac{h(x^C_{n+k} - x^P_{n+k})}{a^C_0(t_{n+k} - t_n)} = \frac{hD}{a^C_0 T}$$

Può essere usata per modificare il passo di integrazione ed eventualmente anche l'ordine delle BDF.