Sensibilità alle variazioni dei parametri

- Permette di valutare gli effetti delle variazioni dei parametri (valori dei componenti) sulla risposta nominale del circuito
  - Variazioni parametri:
    - Tolleranze di fabbricazione
    - Cause ambientali
      - Temperatura
      - Umidità
      - …..
- Costituisce un indice di qualità che permette di scegliere tra soluzioni diverse, con la stessa risposta nominale.
- Permette di calcolare il gradiente della risposta in applicazioni di ottimizzazione.

Sensibilità

Definizioni

Sensibilità normalizzata:

$$S_h^F = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln h} = \frac{h}{F}\frac{\partial F}{\partial h}$$

Nei casi in cui h o F assumono valore nullo, si usano le sensibilità seminormalizzate:

$$\mathrm{S}_h^F = \frac{\partial F}{\partial \ln h} = h\frac{\partial F}{\partial h} \qquad (per\ F = 0)$$

oppure:

$$\mathrm{S}_h^F = \frac{\partial \ln F}{\partial h} = \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial h} \qquad (per\ h = 0)$$

Sensibilità delle Funzioni di Rete

$$T = \frac{N}{D} \qquad \rightarrow \qquad S_h^T = S_h^N - S_h^D$$

$$T = \left|T\right| e^{j\phi} \qquad \rightarrow \qquad \ln T = \ln\left|T\right| + j\phi$$

$$S_h^{\left|T\right|} = \mathrm{Re}\left\{S_h^T\right\}$$

$$S_h^{\phi} = \frac{1}{\phi}\mathrm{Im}\left\{S_h^T\right\}$$

sono funzioni della frequenza

Sensibilità di poli e zeri

$$S_h^z = \frac{h}{z}\frac{dz}{dh}.$$

$$S_h^a = \frac{h}{a}\,\mathrm{Re}\,\frac{dz}{dh}$$

$$z = a + jb$$

$$S_h^b = \frac{h}{b}\,\mathrm{Im}\,\frac{dz}{dh}.$$

$$(s - z)(s - \bar{z}) = s^2 - (z + \bar{z})s + z\bar{z} = s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2.$$

$$Q = \frac{\omega_0}{-(z + \bar{z})} = \frac{-\omega_0}{2a}$$

$$\omega_0^2 = a^2 + b^2.$$

$$S_h^Q = S_h^{\omega_0} - S_h^a$$

$$S_h^{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0^2}(a^2 S_h^a + b^2 S_h^b).$$

Sensibilità Multiparametrica

$$F = F(h_1, h_2, \ldots, h_m) = F(\boldsymbol{h})$$

$$dF = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial h_i} dh_i$$

$$\frac{dF}{F} = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial h_i} \cdot \frac{h_i}{F} \right) \cdot \frac{dh_i}{h_i} = \sum S_{h_i}^F \frac{dh_i}{h_i}.$$

$$\frac{\Delta F}{F} \approx \sum S_{h_i}^F \frac{\Delta h_i}{h_i}.$$

$|\Delta h_i / h_i| \leqslant t_i$ tolleranza del componente i-esimo

WCMS – Worst Case Multiparametric Sensitivity

$$\Delta h_i / h_i = \text{sign}\,(S_{h_i}^F)\; t_i\,.$$

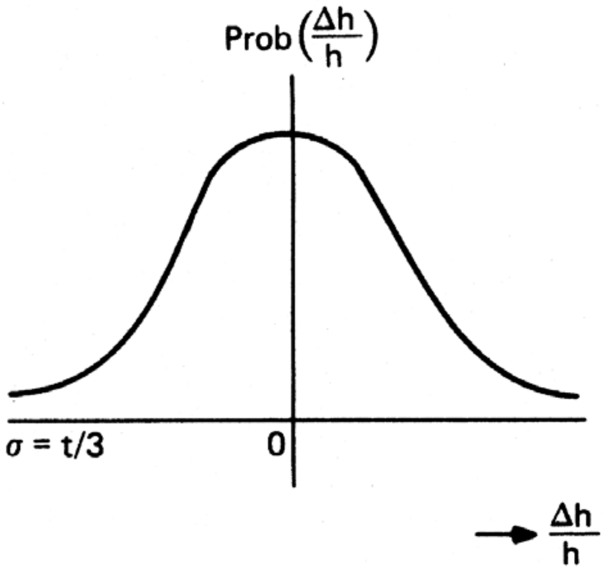
$$|\Delta F / F| \leqslant \sum |S_{h_i}^F| t_i\,.$$

ipotesi: tolleranze tutte uguali

$$\mathbf{WCMS} = \sum |S_{h_i}^F|$$

$$|\Delta F / F| \leqslant t \times \mathbf{WCMS}.$$

Sensibilità Statistica Multiparametrica (MSS)



$$\text{Prob}\left(\frac{\Delta h}{h}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\{(\Delta h/h)/\sigma)\}^2\right]$$

$$\sigma^2_{\Delta F/F} = \sum (S^F_{h_i})^2 \sigma^2_{\Delta h_i/h_i}$$

ipotesi: stessa distribuzione per tutti i parametri:

$$\sigma_{\Delta F/F} = \sigma_{\Delta h/h}\left[\sum (S^F_{h_i})^2\right]^{1/2}$$

$$\text{MSS} = \left[\sum (S^F_{h_i})^2\right]^{1/2}$$

Sensibilità rispetto alla temperatura

dipendenza del componente dalla temperatura τ : $E_m = E_{m0} f_m(\tau)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi}{\partial E_m} \frac{\partial E_m}{\partial \tau} \qquad \frac{\partial E_m}{\partial \tau} = E_{m0} \frac{d f_m(\tau)}{d\tau}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = E_{m0} \frac{\partial \phi}{\partial E_m} \cdot \frac{d f_m(\tau)}{d\tau}$$

Sensibilità rispetto a componenti parassiti

$$\frac{\Delta F}{F} \approx \underbrace{\sum \left(\frac{\partial F}{\partial h_i} \frac{h_i}{F} \right) \frac{\Delta h_i}{h_i}}_{\text{nonzero-valued elements}} + \underbrace{\sum \left(\frac{\partial F}{\partial v_i} \frac{1}{F} \right) \Delta v_i}_{\text{zero-valued elements}}$$

$$\frac{\Delta F}{F} \approx \sum S_{h_i}^F \frac{\Delta h_i}{h_i} + \sum \mathcal{S}_{v_i}^F \Delta v_i$$

$\Delta v_i \longrightarrow$ valore dei componenti parassiti

Algortitmi per il calcolo della Sensibilità

$$\mathbf{T}\mathbf{X} = \mathbf{W}$$

$$\mathbf{T}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial h} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h}\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial h}$$

$$\mathbf{T}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial h} = -\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h}\mathbf{X} - \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial h}\right).$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{LU} & \longrightarrow & \mathbf{X} & \longrightarrow & \dfrac{\partial \mathbf{T}}{\partial h}\mathbf{X} \\ \downarrow & & & & \\ \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial h} & & & & \end{array}$$

Sensibilità di tutti gli elementi di X rispetto al singolo parametro h_i.

Metodo del sistema aggiunto

$$\mathbf{T}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial h} = -\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h}\mathbf{X} - \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial h}\right) \longrightarrow \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial h} = -\mathbf{T}^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h}\mathbf{X} - \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial h}\right)$$

singola uscita, combinazione lineare degli elementi di **X**: $\phi = \mathbf{d}^t\mathbf{X}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial h} = \mathbf{d}^t\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial h}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial h} = -\mathbf{d}^t\mathbf{T}^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h}\mathbf{X} - \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial h}\right).$$

vettore aggiunto:

$$(\mathbf{X}^a)^t = -\mathbf{d}^t\mathbf{T}^{-1}$$

$$\mathbf{T}^t\mathbf{X}^a = -\mathbf{d} \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial h} = (\mathbf{X}^a)^t\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h}\mathbf{X} - (\mathbf{X}^a)^t\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial h}.$$

Metodo del sistema aggiunto

$$\frac{\partial \phi}{\partial h_i} = (\mathbf{X}^a)^t \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h_i} \mathbf{X} - (\mathbf{X}^a)^t \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial h_i}.$$

$\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}^a$ sono indipendenti dall'indice del parametro.

Tutte le sensibilità sono calcolate risolvendo due sistemi:

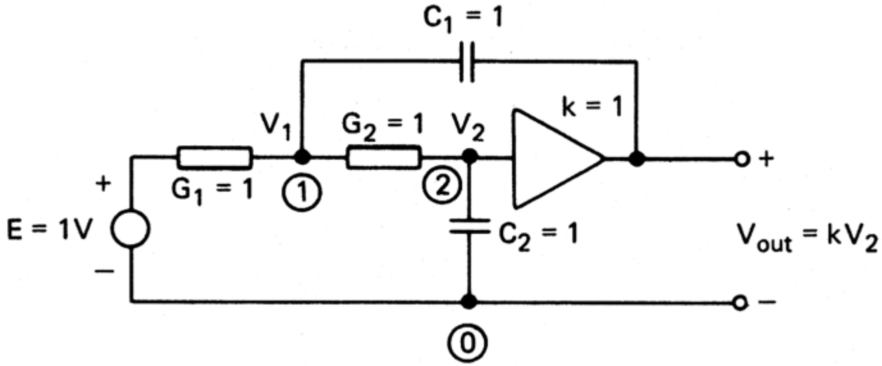
$$\mathbf{T}\mathbf{X} = \mathbf{W} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{X}$$

$$\mathbf{T}^t\mathbf{X}^a = -\mathbf{d} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{X}^a$$

questi due sistemi possono essere risolti usando la stessa scomposizione LU (con una semplice modifica della forward e back substitution).

In genere h è il valore di un componente e, quindi, $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial h_i} = 0$

Esempio



determinare: $\dfrac{\partial V_2}{\partial G_1}$

per: $s = 2$

$$\mathbf{TX} = \mathbf{W} \longrightarrow \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + sC_1 & -sC_1K - G_2 \\ -G_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1E \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = [0 \quad 1]^t$$

$$\mathbf{T}^t\mathbf{X}^a = -\mathbf{d} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^a \\ V_2^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{X}^a \equiv \begin{bmatrix} V_1^a \\ V_2^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial G_1} = [-\tfrac{1}{9} \quad -\tfrac{4}{9}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix} - [-\tfrac{1}{9} \quad -\tfrac{4}{9}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{27}$$

Sistema Aggiunto $\longleftrightarrow$ Rete Aggiunta

Definizione di rete aggiunta:
(per reti RLC+gm+nullori)

considerare un nuovo circuito (*la rete aggiunta*), ottenuto da quello assegnato alimentando l'uscita con un generatore di corrente da 1A, cortocircuitando l'ingresso, sostituendo ad ogni generatore controllato un altro generatore controllato dello stesso tipo e di uguale parametro di controllo, ma avente scambiati i rami di controllo e controllato ed infine, sostituendo ad ogni nullore un altro nullore avente scambiati i rami relativi al nullatore ed al noratore;

Teorema di Tellegen

$$\frac{\partial v_u}{\partial Z_k} = -i_{zk} I_{zk}$$

$$\frac{\partial v_u}{\partial Y_k} = v_{zk} V_{zk}$$

$(I_{zk}\ e\ V_{zk}\ sulla\ rete\ aggiunta)$

Sistema Aggiunto $\longleftrightarrow$ Rete Aggiunta

$$\phi = \mathbf{d}^t \mathbf{X}$$

$$se \quad \phi = v_k \quad \mathbf{d}^t = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{X} = \mathbf{w}$$

$\mathbf{T}^t \mathbf{X}^a = -\mathbf{d} \quad \leftarrow$ l'uscita in tensione diviene ingresso in corrente di valore 1 A

$\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}^t \quad \leftarrow$ per i componenti bipolari non cambia niente

per i componenti transconduttanza il ramo di controllo diventa il ramo controllato e viceversa

Sistema Aggiunto $\longleftrightarrow$ Rete Aggiunta

Nella formulazione MNA, ciascun componente genera al più quattro elementi di **T,** che possono essere scritti come:

$$s^{\nu}(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_l)^t h$$

dove ν è 1 per componenti reattivi, 0 altrimenti

$\mathbf{e}_i$ sono vettori unitari elementari , e *h* è il valore del componente.

si ha, quindi:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h} = s^{\nu}(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_l)^t$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial h} = (\mathbf{X}^a)^t \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h} \mathbf{X} \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial h} = s^{\nu}(\mathbf{X}^a)^t(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_l)^t \mathbf{X}$$

$$= s^{\nu}\{(\mathbf{X}^a)^t(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)\}\{(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_l)^t \mathbf{X}\}$$

$$= s^{\nu}(x_i^a - x_j^a)(x_k - x_l)$$

nel caso di una semplice conduttanza:

$$\frac{\partial \phi}{\partial h} = V_{ij} v_{ij}$$

Sensibilità in continua

punto di lavoro $\mathbf{x}^0$

equazioni in continua $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0, \mathbf{h}, \mathbf{w}) = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial h_i} + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}^0} \frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial h_i} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}\,\frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial h_i} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial h_i}$$

si trovano tutte le sensibilità rispetto al singolo parametro h_i

Sensibilità in continua

singola uscita: $\psi = \phi(\mathbf{x}^0, \mathbf{h})$

$$\frac{\partial \psi}{\partial h_i} = \frac{\partial \phi}{\partial h_i} + \left.\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}^0} \frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial h_i}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial h_i} = -\mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial h_i}$$

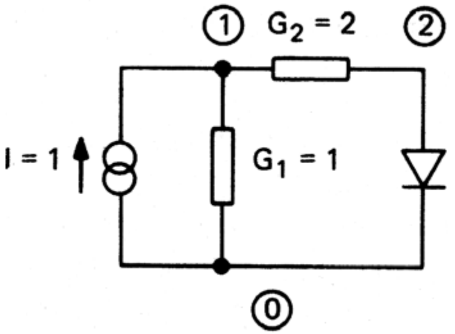
$$\frac{\partial \psi}{\partial h_i} = \frac{\partial \phi}{\partial h_i} - \left.\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}^0} \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial h_i}$$

definiamo:

$$-\left.\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}^0} \mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{x}^a)^t \qquad\qquad \mathbf{M}^t \mathbf{x}^a = -\left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}^0}\right)^t$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial h_i} = \frac{\partial \phi}{\partial h_i} + (\mathbf{x}^a)^t \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial h_i}$$

Esempio



$i_D = e^{40v_D} - 1$

determinare la sensibilità delle tensioni di nodo rispetto a G_2

equazioni in dc:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{w}) \equiv \begin{bmatrix} (G_1 + G_2)v_1 - G_2 v_2 - 1 \\ -G_2 v_1 + G_2 v_2 + e^{40v_2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jacobiano:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + 40e^{40v_2} \end{bmatrix}$$

punto di lavoro:

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.34176258 \\ 0.01264388 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 68.32949392 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial G_2} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ -v_1 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3291187 \\ -0.3291187 \end{bmatrix}$$

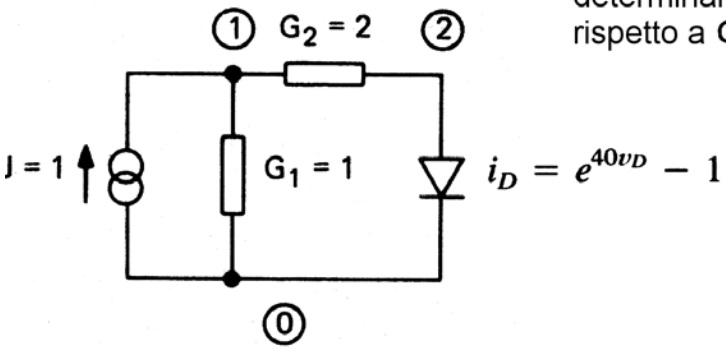
$$\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial h_i} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial h_i} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 68.32949392 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial v_1/\partial G_2 \\ \partial v_2/\partial G_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0.3291187 \\ -0.3291187 \end{bmatrix}$$

soluzione:

$$\begin{bmatrix} \partial v_1/\partial G_2 \\ \partial v_2/\partial G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1086146 \\ 0.0016375 \end{bmatrix}$$

Esempio

determinare la sensibilità della corrente su G_2 rispetto a G_2



$$i_{G_2} = \psi = \phi(\mathbf{x}^0, h) = G_2(v_1 - v_2).$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}^0} = [G_2 \quad -G_2] = [2 \quad -2]$$

$$\mathbf{M}^t \mathbf{x}^a = -\left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}^0}\right)^t \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 68.32949392 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^a \\ v_2^a \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

soluzione: $$\begin{bmatrix} v_1^a \\ v_2^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.66003279 \\ 0.0099508 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial h_i} = \frac{\partial \phi}{\partial h_i} + (\mathbf{x}^a)^t \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial h_i} \longleftarrow \frac{\partial \phi}{\partial G_2} = v_1 - v_2 = 0.3291187$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial i_{G2}}{\partial G_2} = v_1 - v_2 + [v_1^a \quad v_2^a] \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ -v_1 + v_2 \end{bmatrix}$$

$$= (v_1 - v_2)(1 + v_1^a - v_2^a) = 0.10861457.$$