

反應譜

Reference : Anil K. Chopra, "Dynamics of structures theory and applications to earthquake engineering" PRENTICE HALL. p.211-p.231

反應譜為以一特別的方法描繪地表運動的特性，及其對結構物之影響。

在地震工程的領域中，反應譜提供了一個方便的方式，以概述所有可能的線性單自由度系統遭受地表運動時之最大反應。其圖形描繪出反應量的最大值為單自由度系統自然振動頻率的函數（或自然振動週期，一般常用週期作橫軸）。每一個單自由度反應譜的圖形對應於一「固定的」阻尼比。對於不同的阻尼比，可繪出數個如此的圖形。

根據反應量的不同，可繪出三種不同的反應譜：（下列方程式由上而下分別為：「最大」位移反應譜、「最大」速度反應譜、「最大」加速度反應譜）

$$u_0(T_n, \xi) \equiv \max_t |u(t, T_n, \xi)|$$

$$\dot{u}_0(T_n, \xi) \equiv \max_t |\dot{u}(t, T_n, \xi)|$$

$$\ddot{u}_0(T_n, \xi) \equiv \max_t |\ddot{u}(t, T_n, \xi)|$$

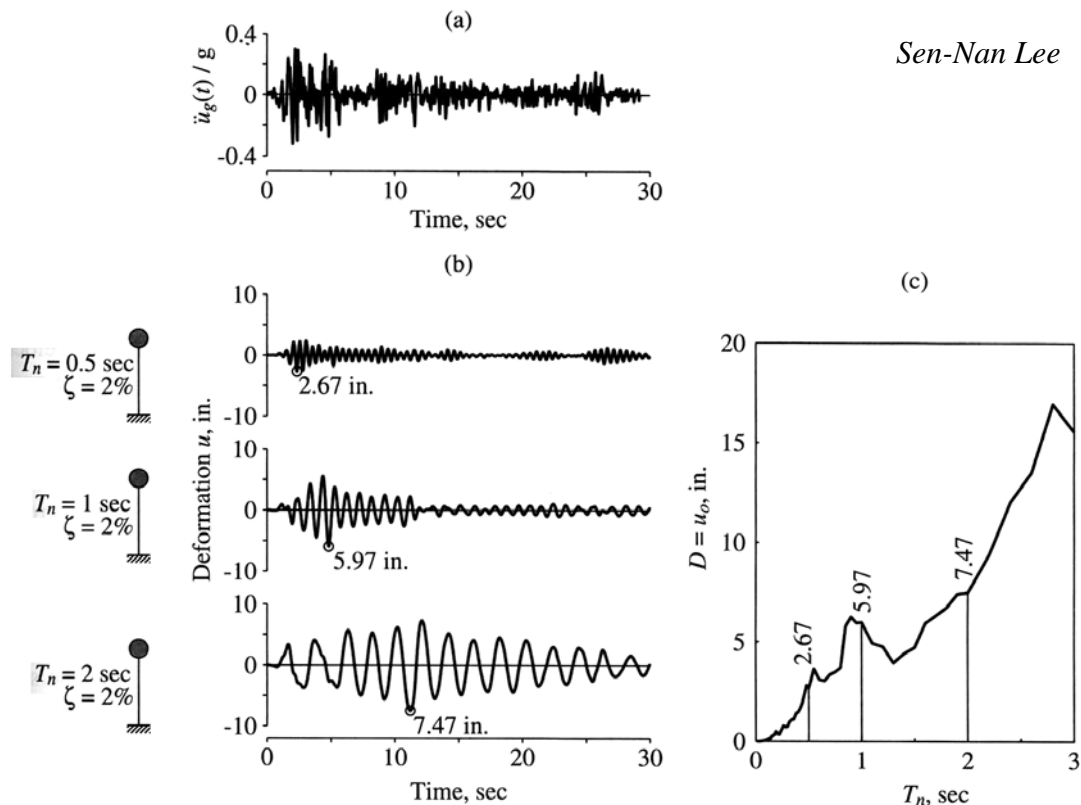


Figure 6.6.1 (a) Ground acceleration; (b) deformation response of three SDF systems with $\zeta = 2\%$ and $T_n = 0.5, 1$, and 2 sec; (c) deformation response spectrum for $\zeta = 2\%$.

圖一

上圖為決定位移反應譜的程序。(a) 小圖為 EL Centro 地震歷時之地表加速度輸入，無單位，為加速度係數。(b) 小圖為三種不同的單自由度結構系統 (有不同的週期)，在遭受此地震歷時之「位移」歷時反應。對每一個系統而言，於位移歷時反應中，找出最大的位移反應，即 $D \equiv u_0$ (大寫的 D 代表 deformation)。一般來說，最大位移反應通常發生在地表振動期間，但對於長週期之輕阻尼 (lightly damping) 系統，最大反應會發生在地表運動後之自由振動內。

上圖 (b) 中，三種不同的結構系統含有相同的阻尼比，皆為 0.02。當結

構之自然振動週期為 0.5 秒時，最大位移 $D=2.67\text{in}$ ；結構之自然振動週期為 1.0 秒時，最大位移 $D=5.97\text{in}$ ；結構之自然振動週期為 2.0 秒時，最大位移 $D=7.47\text{in}$ 。每一個結構系統對於位移反應譜提供了一個「D」值的對應點，如上圖 (c) 小圖中所示之三個點。對於其它不同的自然振動週期，保持相同的阻尼比 ($=0.02$)，不斷的重覆此類運算，則可繪出如 (c) 小圖所示之阻尼比為 0.02 之位移反應譜曲線。

考慮一單自由度系統，其自然振動頻率 ω_n ，由地表運動所產生之最大位移反應 $D \equiv u_0$ ，定義一個量 V ：

$$V = \omega_n D = \frac{2\pi}{T_n} D \quad (1)$$

V 的單位為「速度」，在地震歷時輸入期間，其所對應之結構系統的「最大」應變能 E_{so} 為：

$$E_{so} = \frac{mV^2}{2} \quad (2)$$

上式之關係可由應變能之定義得到：

$$E_{so} = \frac{ku_0^2}{2} = \frac{kD^2}{2} = \frac{k(V/\omega_n)^2}{2} = \frac{mV^2}{2} \quad (\text{動能})$$

(2) 式右側項為結構物質量為 m ，速度為 V 時之動能。 V 稱為最大相對擬速度 (peak relative pseudo-velocity)。用「擬」速度來形容 (pseudo)，是因

為 V 並不相等於最大速度 \dot{u}_0 。

擬速度反應譜： V 為自然振動週期之函數。相對應於圖一 (a) 中之地震歷時之系統擬速度 V ，可由 (1) 式得到，而式中所需之參數 D 可由圖一 (c) 得知。舉例來說，含有相同阻尼比之不同的結構系統，當結構系統之自然動週期為 0.5 秒時，最大位移反應 $D = 2.67\text{in}$ ，由 (1) 式， $V = (2\pi / 0.5)2.67 = 33.7\text{in./sec.}$ ；當結構系統之自然動週期為 1.0 秒時，最大位移反應 $D = 5.97\text{in}$ ，由 (1) 式， $V = (2\pi / 1.0)5.97 = 37.5\text{in./sec.}$ 。當結構系統之自然動週期為 2.0 秒時，最大位移反應 $D = 7.47\text{in}$ ，由 (1) 式， $V = (2\pi / 2.0)7.47 = 23.5\text{in./sec.}$ 。此三個最大擬速度值繪於下圖 (b) 中，對於其它不同的自然振動週期，保持相同的阻尼比 ($=0.02$)，不斷的重覆此類運算，則可繪出如圖二中 (b) 小圖所示之阻尼比為 0.02 之擬速度反應譜曲線。

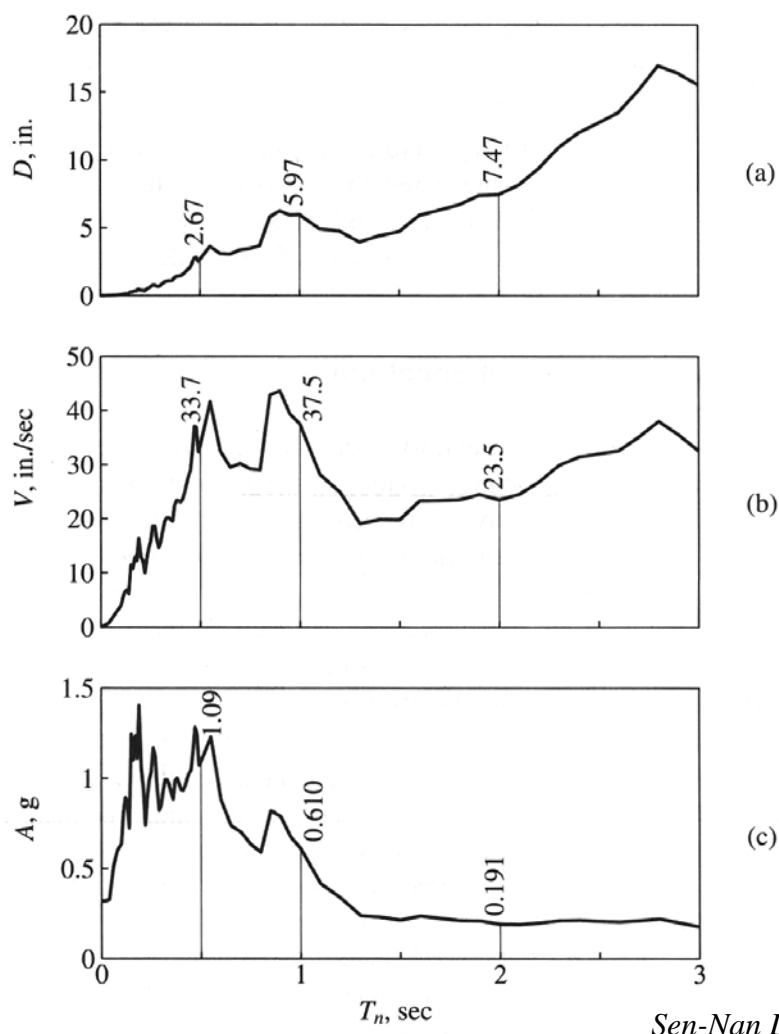


Figure 6.6.2 Response spectra ($\zeta = 0.02$) for El Centro ground motion: (a) deformation response spectrum; (b) pseudo-velocity response spectrum; (c) pseudo-acceleration response spectrum.

圖二

考慮一單自由度系統，其自然振動頻率 ω_n ，由地表運動所產生之最大位移反應 $D \equiv u_0$ ，定義一個量 A ：

$$A = \omega_n^2 D = \left(\frac{2\pi}{T_n} \right)^2 D \quad (3)$$

A 的單位為「加速度」，在地震歷時輸入期間，其所對應之結構系統的「最

大」基底剪力 V_{bo} 為 (或最大等值靜力 f_{so}):

$$V_{bo} = f_{so} = mA \quad (4)$$

上式中之 A 為最大反應歷時 $A(t)$ 之最大值。最大基底剪力可改寫為:

$$V_{bo} = \frac{A}{g} w \quad (5)$$

w 為結構「重量」, g 為重力加速度。以上式之形式來表示最大基底剪力時, A/g 可視為「基底剪力係數」(base shear coefficient), 或「側向力係數」(lateral force coefficient)。於建築設計上, 結構物重量乘上該係數即可得其基底剪力。

基底剪力相等於慣性力 (inertia force), 其為質量 m 乘上「擬加速度」 A 。

由 (3) 式之定義, 其與結構之最大真實加速度 \ddot{u}_0' 有所不同。

擬加速度反應譜: 為自然振動週期之函數。相對應於圖一 (a) 中之地震歷時之系統擬加速度 A , 可由 (3) 式得到, 而式所需之參數 D 可由圖一 (c) 得知。舉例來說, 含有相同阻尼比之不同的結構系統, 當結構系統之自然動週期為 0.5 秒時, 最大位移反應 $D = 2.67\text{in}$, 由 (3) 式, $A = (2\pi/0.5)^2 2.67 = 1.09g$, $g = 386\text{in./sec}^2$; 當結構系統之自然動週期為 1.0 秒時, 最大位移反應 $D = 5.97\text{in}$, 由 (3) 式, $A = (2\pi/1.0)^2 5.97 = 0.61g$ 。當結構系統之自然動週期為 2.0 秒時, 最大位移反應 $D = 7.47\text{in}$, 由 (3) 式,

$A = (2\pi / 2.0)^2 7.47 = 0.191g$ 。此三個最大擬加速度值繪於圖二 (c) 中，對於其它不同的自然振動週期，保持相同的阻尼比 ($=0.02$)，不斷的重覆此類運算，則可繪出如圖二中(c)小圖所示之阻尼比為 0.02 之擬加速度反應譜曲線。

對於一給定之地表運動，其位移反應譜、擬速度反應譜、擬加速度反應譜所提供的資訊是一致的，不會多也不會少，此三種不同的反應譜只是以不同的形式來表現相同的結構反應資訊，所以，只要知道其中一個反應譜，其餘的兩個反應譜即可由代數運算得到。

位移反應譜提供系統最大位移。擬速度反應譜提供在地震時系統最大儲存應變能，擬加速度反應譜提供最大等值靜力與基底剪力 (非最大真實加速度)。

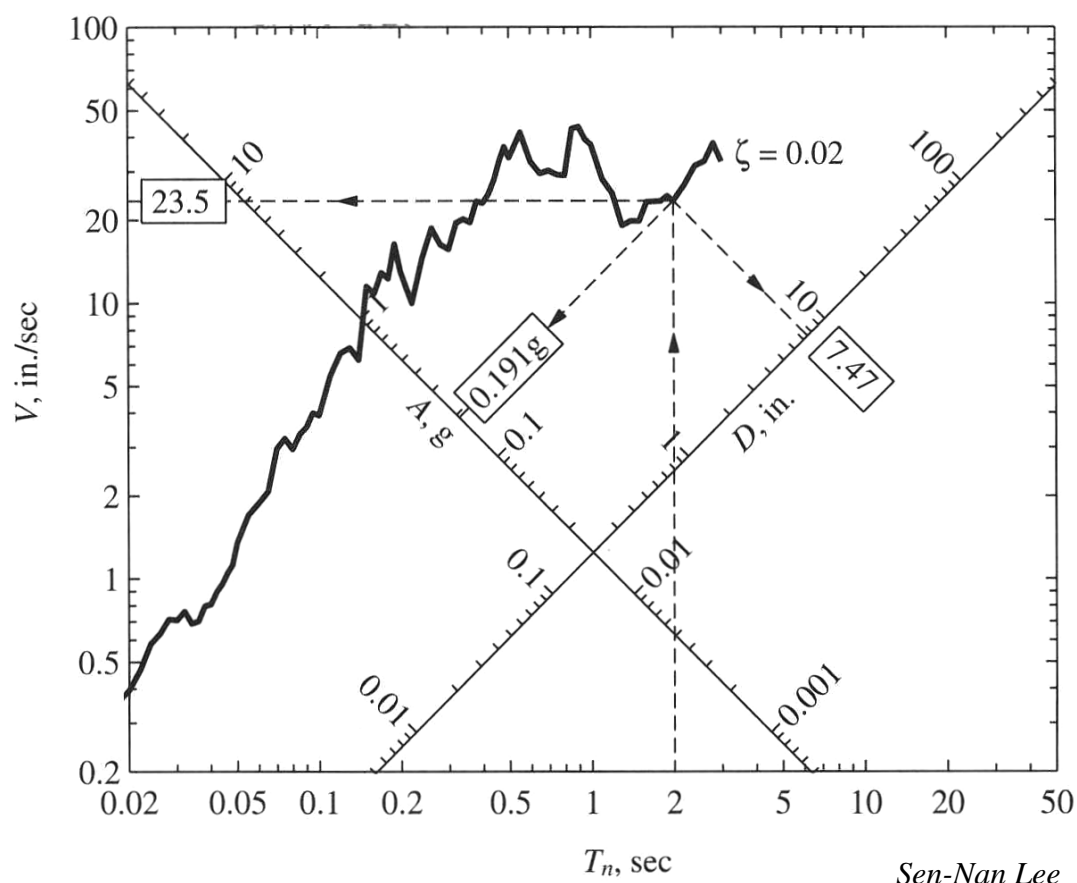


Figure 6.6.3 Combined D - V - A response spectrum for El Centro ground motion; $\zeta = 2\%$.

圖三

上圖為三種反應譜的結合，四個座標軸皆為 \log 座標 (four way logarithmic scales)，橫軸為自然振動頻率，其橫座標刻度比例與縱座標刻度比例不相同 (1~50 與 1~100)。兩兩關係可由 (1) 式及 (3) 式得到。

$$\frac{A}{\omega_n} = V = \omega_n D \text{ or } \frac{T_n}{2\pi} A = V = \frac{2\pi}{T_n} D \quad (6)$$

舉例來說，若 T_n 為 2 秒，由圖三可得 $D = 7.47\text{in}$ ， $A = 0.191g$ 。事實上，這些數據的查取無法精確的直接由圖中得到。

反應譜必需包含大範圍的自然振動週期與不同的阻尼比，才能提供所有可能的結構物之最大反應。圖三的週期範圍可以再加大，因一些結構物，如高層結構、長跨橋樑有較長的週期，且圖中只有一個阻尼比值。下圖為含不同阻尼比之反應譜。

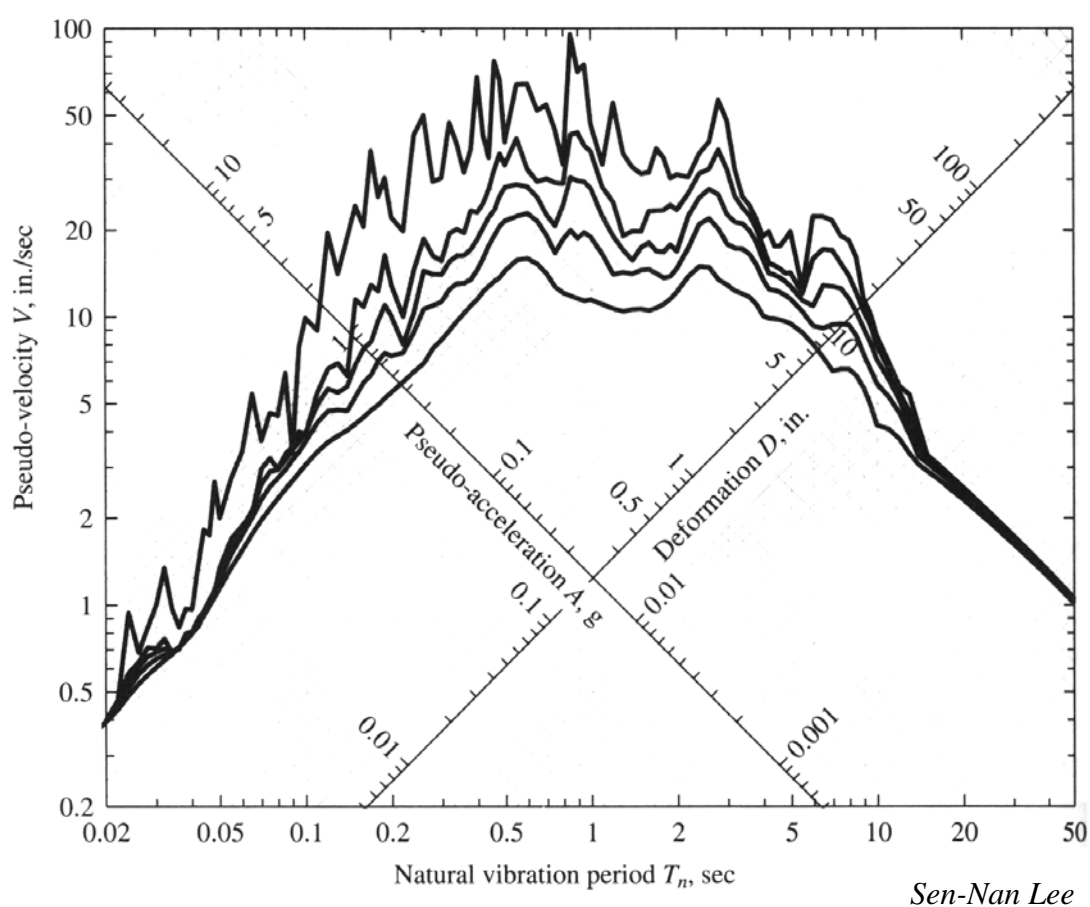


Figure 6.6.4 Combined D - V - A response spectrum for El Centro ground motion; $\zeta = 0, 2, 5, 10, \text{ and } 20\%$.

圖四

下圖為上圖中正規化擬加速度反應譜圖(A/g),兩座標軸皆為普通座標。

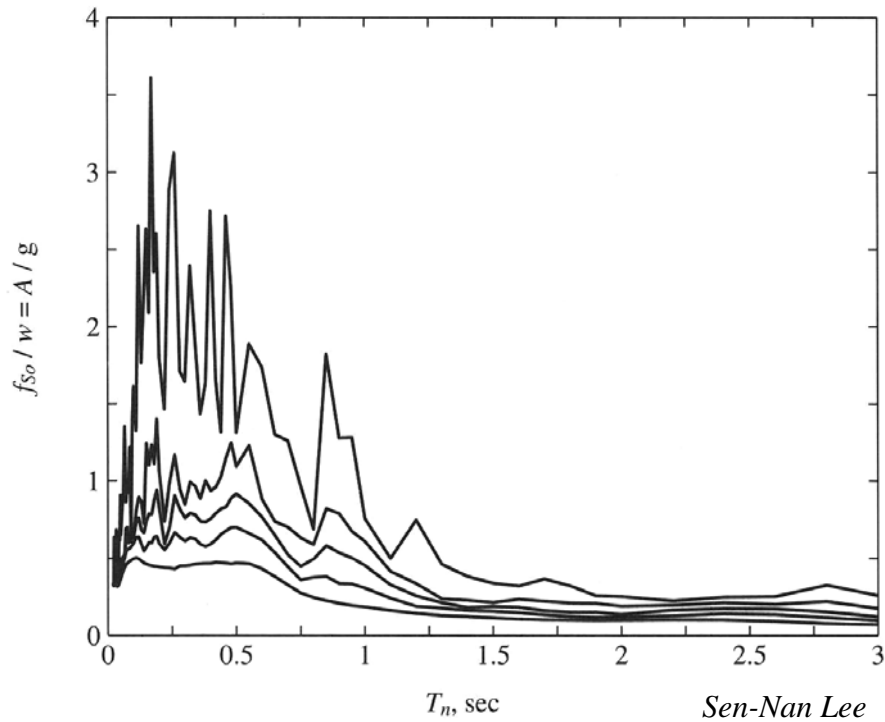


Figure 6.6.5 Normalized pseudo-acceleration, or base shear coefficient, response spectrum for El Centro ground motion; $\zeta = 0, 2, 5, 10$, and 20% .

圖五

建立反應譜：

1. 數值上定義地表加速度 $\ddot{u}_g(t)$ ，一般典型的地表運動取樣週期為 0.02 秒
2. 選擇一單自由度系統之自然振動週期及一阻尼比
3. 利用數值方法計算此單自由度系統遭受地表運動 $\ddot{u}_g(t)$ 時之位移反應(假設每 0.02 秒間之地表運動為線性線段連續)
4. 決定 $u(t)$ 的最大值 u_0
5. 反應譜的縱座標： $D = u_0, V = (2\pi / T_n)D, A = (2\pi / T_n)^2 D$
6. 對所有可能的自然振動週期與阻尼比，重覆步驟 2 至步驟 5
7. 將步驟 2 至步驟 6 的計算結果以圖形來呈現

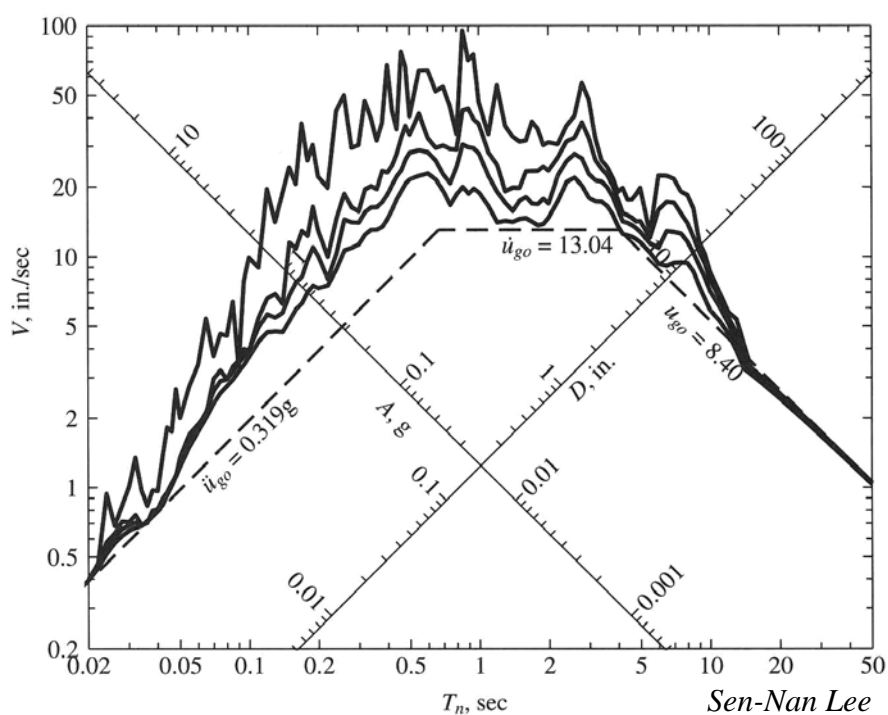


Figure 6.8.1 Response spectrum ($\zeta = 0, 2, 5$, and 10%) and peak values of ground acceleration, ground velocity, and ground displacement for El Centro ground motion.

圖六

上圖為 EL Centro 地震反應譜及最大地表真實位移 (u_{g0})、速度 (\dot{u}_{g0})、
 加速度 (\ddot{u}_{g0}) 下圖為圖六之正規化反應譜 (D/u_{g0} , V/\dot{u}_{g0} , A/\ddot{u}_{g0})

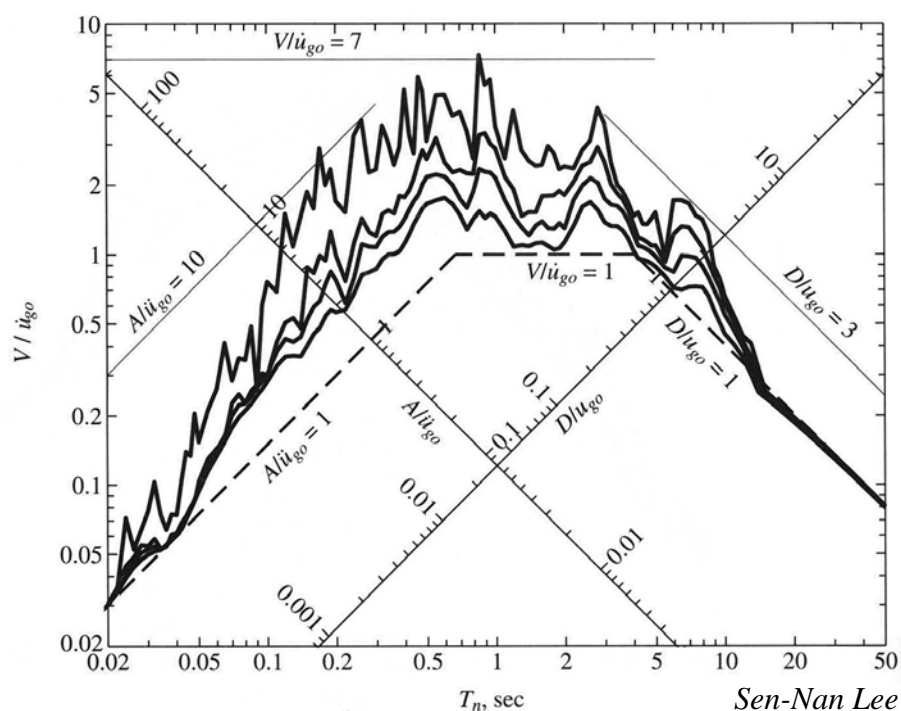


Figure 6.8.2 Response spectrum for El Centro ground motion plotted with normalized scales A/\ddot{u}_{g0} , V/\dot{u}_{g0} , and D/u_{g0} ; $\zeta = 0, 2, 5$, and 10% .

圖七

下圖為圖七中之阻尼比為 0.05 的反應譜曲線。圖中之虛線為理想化曲線，其自然振動週期範圍被圖上 a、b、c、d、e、f 六點所分開。

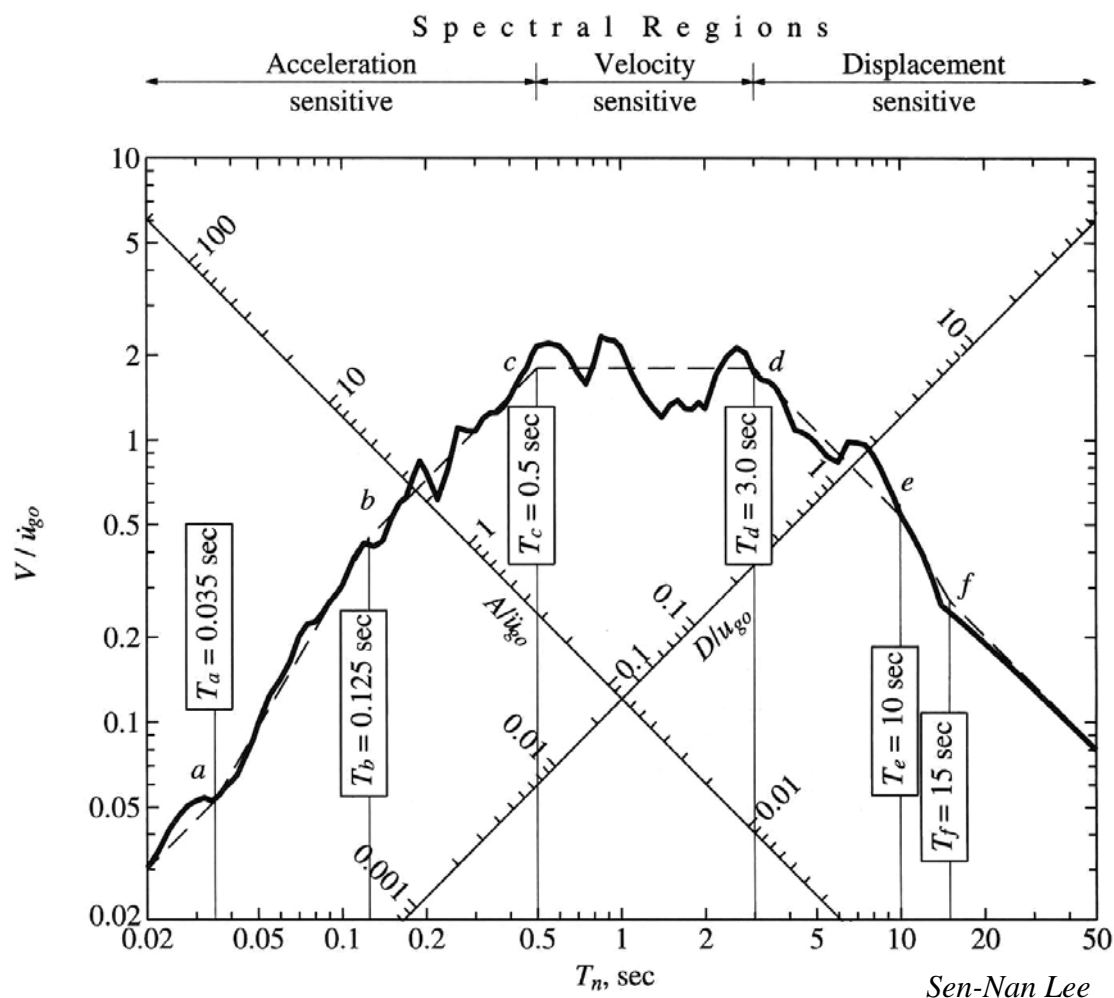


Figure 6.8.3 Response spectrum for El Centro ground motion shown by a solid line together with an idealized version shown by a dashed line; $\zeta = 5\%$.

圖八

若結構系統週期非常小 (短週期)，即 $T_n < T_a = 0.035 \text{ sec}$ ，最大擬加速度 A 接近 \ddot{u}_{g0} ，且 D 很小。由物理意義而言，對於一固定質量，週期很短的結構系統，其勁度非常大，性質接近剛體，其變形量會較小，且質塊會隨著地表運動作剛體運動，此時最大真實加速度會趨近 \ddot{u}_{g0} ，如下圖所示。(a) 小圖為地表加速度，(b) 小圖為單自由度結構系統，自然振動週期為 0.02 秒，阻尼比為 0.02 之真實加速度歷時 $\ddot{u}^t(t)$ (為時間函數)，(c) 小圖為擬加速度歷時

$A(t)$ (由公式所求得, 依其定義無法量測, 為時間函數) 由圖中可看出, $\ddot{u}^t(t)$ 與 $\ddot{u}_g(t)$ 幾乎相同, 且 $\ddot{u}_o^t \cong \ddot{u}_{g0}$ 。若對於輕阻尼系統, $\ddot{u}^t(t) \cong -A(t)$, $\ddot{u}_o \cong A$, 因此, $A \cong \ddot{u}_{g0}$ 。

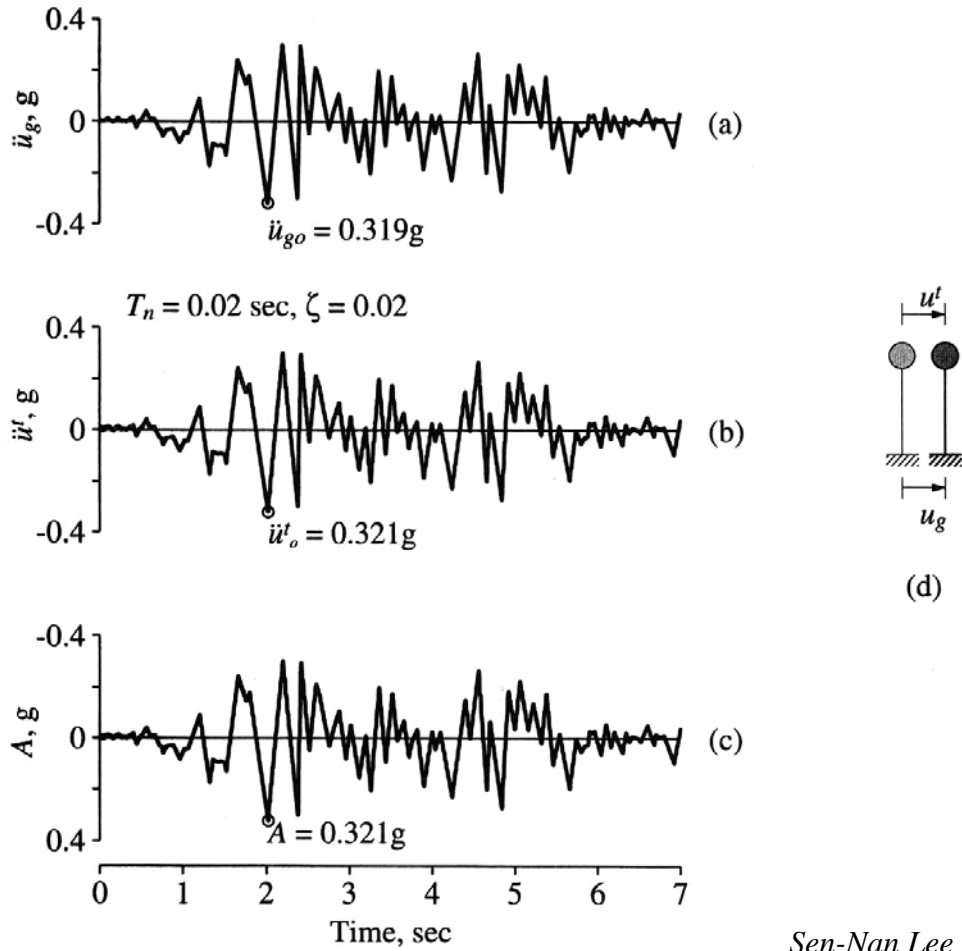


Figure 6.8.4 (a) El Centro ground acceleration; (b) total acceleration response of an SDF system with $T_n = 0.02$ sec and $\zeta = 2\%$; (c) pseudo-acceleration response of the same system; (d) rigid system.

圖九

若結構系統週期較長, 即 $T_n > T_f = 15 \text{ sec}$, 對所有不同的阻尼比而言, D 趨近 u_{g0} , 且 A 非常小, 因此, 結構內部有關於 mA 的力量也會變得非常小。

由物理意義而言, 對於一固定質量, 週期很長的結構系統, 其柔度非常大 (很

軟)，當地表運動時，質塊仍維持相對靜止。因此， $\ddot{u}'(t) \cong 0$ ，即 $A(t) \cong 0$ ，且 $u(t) = -u_g(t)$ ， $D \cong u_{g0}$ （見下圖（c））。由圖中可看出， u_0 與 u_{g0} 非常接近，且 $u(t)$ 相似於 $-u_g(t)$ ，但基線有一旋轉。

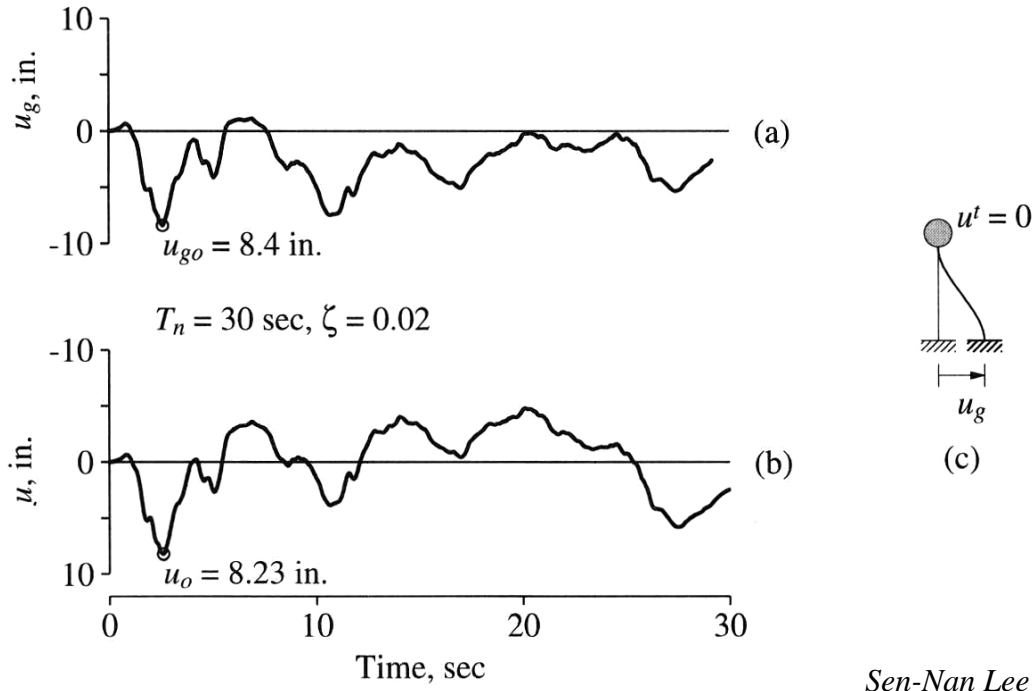


Figure 6.8.5 (a) El Centro ground displacement; (b) deformation response of SDF system with $T_n = 30$ sec and $\zeta = 2\%$; (c) very flexible system.

圖十

對於短週期系統， T_n 介於 $T_a = 0.035$ sec 與 $T_c = 0.5$ sec 之間，擬加速度會依據 T_n 與 ξ 作放大，其值超過 \ddot{u}_{g0} 。在此範圍的後段部分，在 $T_b = 0.125$ sec 與 $T_c = 0.5$ sec 之間，曲線可視為一直線，擬加速度為一常數，擬加速度只會依據 ξ 作放大而超過 \ddot{u}_{g0} 。

對於長週期系統， T_n 介於 $T_d = 3$ sec 與 $T_f = 15$ sec 之間，最大位移 D 會依據 T_n 與 ξ 作放大，其值超過 u_{g0} 。在此範圍的前段部分，在 $T_d = 3$ sec 與

$T_e = 10\text{sec}$ 之間，曲線可視為一直線，位移為一常數，位移只會依據 ξ 作放大而超過 u_{g0} 。

對於中等週期系統，介於 $T_c = 0.5\text{sec}$ 與 $T_d = 3\text{sec}$ 之間，最大擬速度 V 會依據 ξ 作放大，其值超過 \dot{u}_{g0} 。在此範圍內，曲線可視為一直線，擬速度為一常數，擬速度只會依據 ξ 作放大而超過 \dot{u}_{g0} 。

因此，反應譜可分成三部分。長週期範圍，即 d 點的右側， $T_n > T_d$ 處稱為「位移敏感區」(displacement-sensitive region)，因結構在此範圍內，其反應大多直接與地表位移有關。短週期範圍，即 c 點的左側處稱為「加速度敏感區」(acceleration-sensitive region)，因結構在此範圍內，其反應大多直接與地表加速度有關。中等週期範圍，即介於 c 點與 d 點間， $T_c < T_n < T_d$ 處稱為「速度敏感區」(velocity-sensitive region)，因結構在此範圍內，其反應大多直接與地表速度有關。對於某一特定地震，理想化反應譜內之 T_a, T_b, T_e, T_f 四點與阻尼比呈獨立關係，但 T_c, T_d 會隨阻尼比改變而改變。

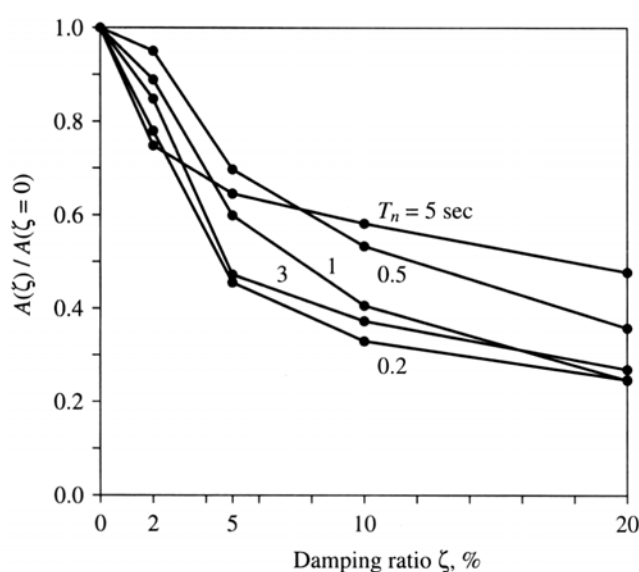
可利用正式的曲線適合法來求得理想化反應譜曲線，以替代真實反應譜。任何情況下，理想化反應譜與真實反應譜有一些差距。雖然由視覺上無法查覺此差異性的存在，但可由其座標為 \log 座標感覺出來。

$T_a, T_b, T_c, T_d, T_e, T_f$ 之值與線段 $b-c$ ， $c-d$ ， $d-e$ 的放大因子對於不同的地震

有不同的值。阻尼比對反應譜有很大的影響，由圖四與圖五可看出，無阻尼之曲線有許多突然的鋸齒，代表該反應對於自然振動頻率間之微小差異的感應很敏感。若含有阻尼，則反應對於週期變化的感應靈敏度會降低許多。

阻尼對於減低結構反應有預期性的幫助，在反應譜的三個範圍中，阻尼對於結構物的效果各有不同。當 $T_n \rightarrow 0$ 時，結構呈剛體運動，阻尼對於反應幾乎沒有影響。當 $T_n \rightarrow \infty$ 時，在地表運動期間，結構質塊維持相對靜止，阻尼對反應也幾乎沒有影響。阻尼對反應影響較大的區域是在反應譜內的「速度敏感區」。若地表運動趨近於諧合形式，且有較多循環時，阻尼對於「共振」結構有良好的效果。若地表運動延時較短，只有幾個少數的主要循環，則阻尼的效果有限，尤其是衝擊式的擾動。

下圖為正規化最大擬加速度歷時圖 $A(\xi)$ ，對 $A(\xi = 0)$ 作正規化。



Sen-Nan Lee

Figure 6.8.6 Variation of peak pseudo-acceleration with damping for systems with $T_n = 0.2, 0.5, 1, 3,$ and 5 sec; El Centro ground motion.

圖十一

上圖由圖四及圖五而來，以不同形式描繪。由圖中可看出，阻尼的效果對於低阻尼結構有良好的表現。當阻尼比由 0 增加至 0.02 時，其反應量的減少大於阻尼比由 0.1 增加至 0.12。

設計反應譜必需符合一些特別的需要，其被用來設計新結構物，或是估計現有結構物抗震能力，是否能抵禦未來地震擾動。因此過去特定的地震反應譜不符合此目的。如圖四的反應譜鋸齒曲線只是針對某一地震。若對於相同位址，但不同的地震，其曲線雖然也為鋸齒狀，但對於相同的自然振動週期，其峰值或波谷值卻不一定相同，也無法預測未來的地震反應。如下圖所示，圖中所示為相同位址，不同地震的反應譜。

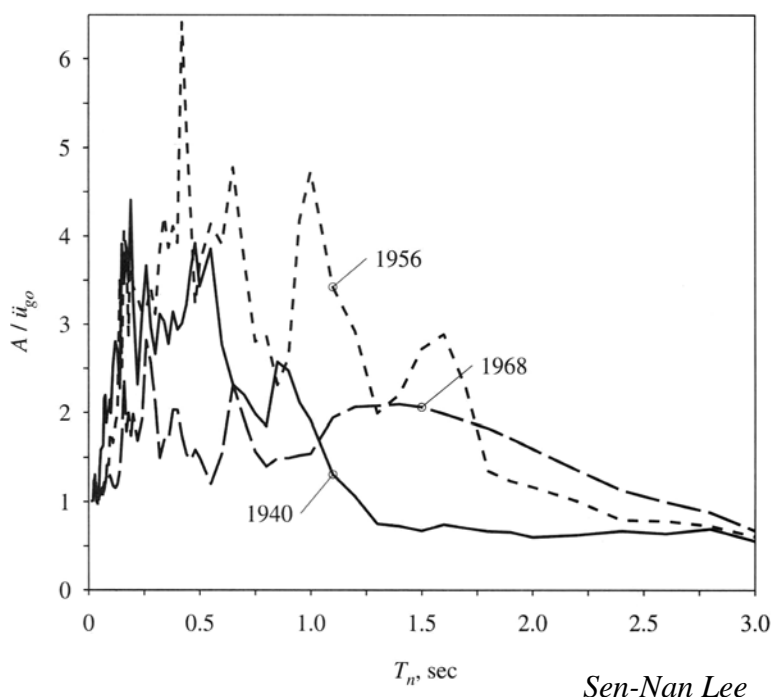


Figure 6.9.1 Response spectra for the north-south component of ground motions recorded at the Imperial Valley Irrigation District substation, El Centro, California, during earthquakes of May 18, 1940; February 9, 1956; and April 8, 1968. $\zeta = 2\%$.

圖十二

一般來說，設計反應譜應包含該位址過去的地震記錄。若該位址無任何地震記錄，則其設計反應譜應根據其它位址，但有相同地震情況（site condition）的位址作依據。考量的情況有：地震規模、位址與地震斷層之距離、斷層機制，地震波於地層中傳遞路徑之幾何情況、土壤狀況等。

設計反應譜是依據統計分析所有的地表運動之反應譜。假計每一個地震的反應譜皆由前述的方法求得，且以正規化形式作圖。對於某一自然振動週期（固定一自然振動週期值），第 i 個地震的縱座標寫為 D^i / u_{g0}^i ， V^i / \dot{u}_{g0}^i ， A^i / \ddot{u}_{g0}^i ，其中 D^i ， V^i ， A^i 分別為位移、擬速度、擬加速度反應譜之縱座標，且 u_{g0}^i ， \dot{u}_{g0}^i ， \ddot{u}_{g0}^i 分別為地表運動之真實位移、速度、加速度。因此，對於

每一個自然振動週期，皆有 I 個反應譜值，可寫成 $A^i / \ddot{u}_{g0}^i, i=1,2,3\cdots I$ 。下圖為十個地震資料的記錄。對這些資料作統計分析，可得任一自然振動週期之相對應於縱座標之機率分佈、平均值、標準差。如圖中三條機率密度曲線。將所有平均值連接，則可得正規化形式之「平均反應譜」(mean response spectrum)。將所有平均值加一個標準差之值連接，則可得「平均加一個標準差反應譜」(mean-plus-one-standard-deviation response spectrum)。此兩種反應譜皆較任何一個地震反應譜來得平滑。且可將其如圖八理想化。

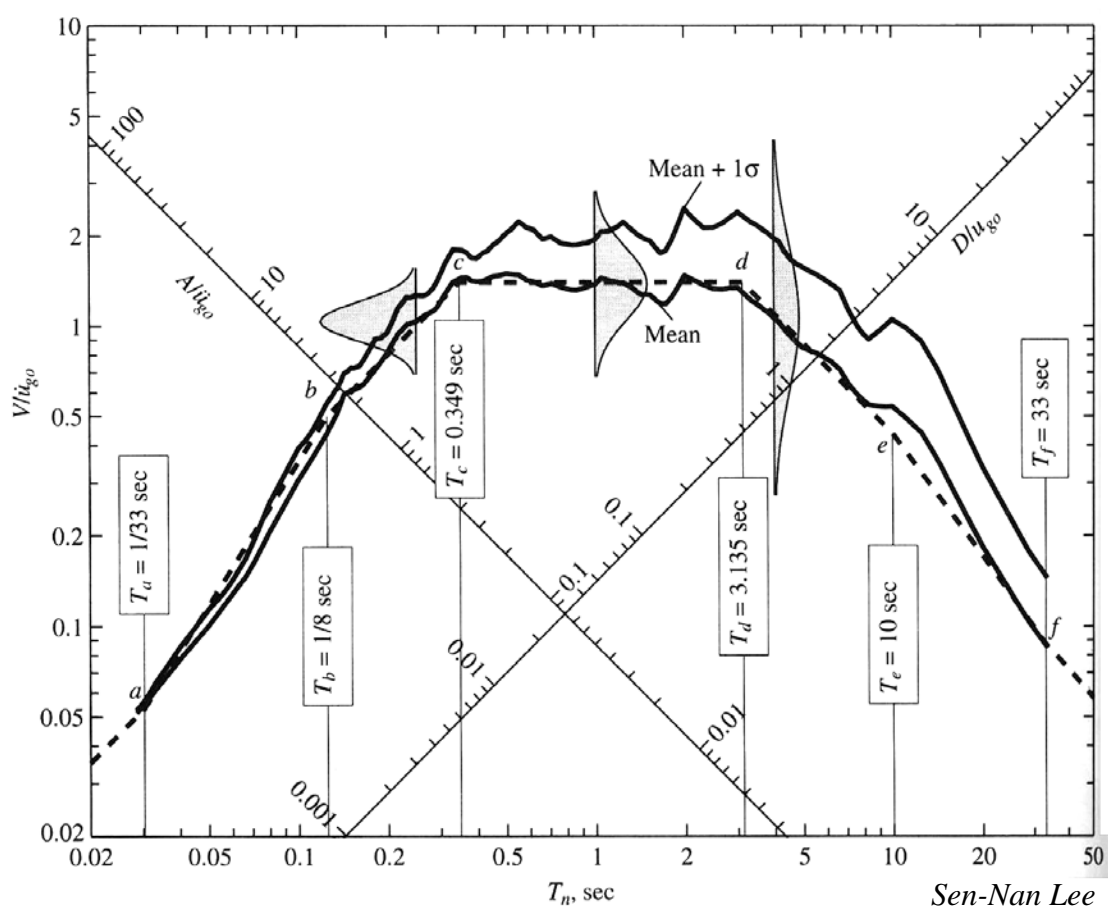


Figure 6.9.2 Mean and mean + 1σ spectra with probability distributions for V at $T_n = 0.25, 1$, and 4 sec; $\zeta = 5\%$. Dashed lines show an idealized design spectrum. (Based on numerical data from R. Riddell and N. M. Newmark, 1979.)

圖十三

設計反應譜設計程序：

下圖中， T_a, T_b, T_e, T_f 與反應譜中的三個範圍之放大因子的決定是依據堅硬地盤之地震記錄作分析而得。

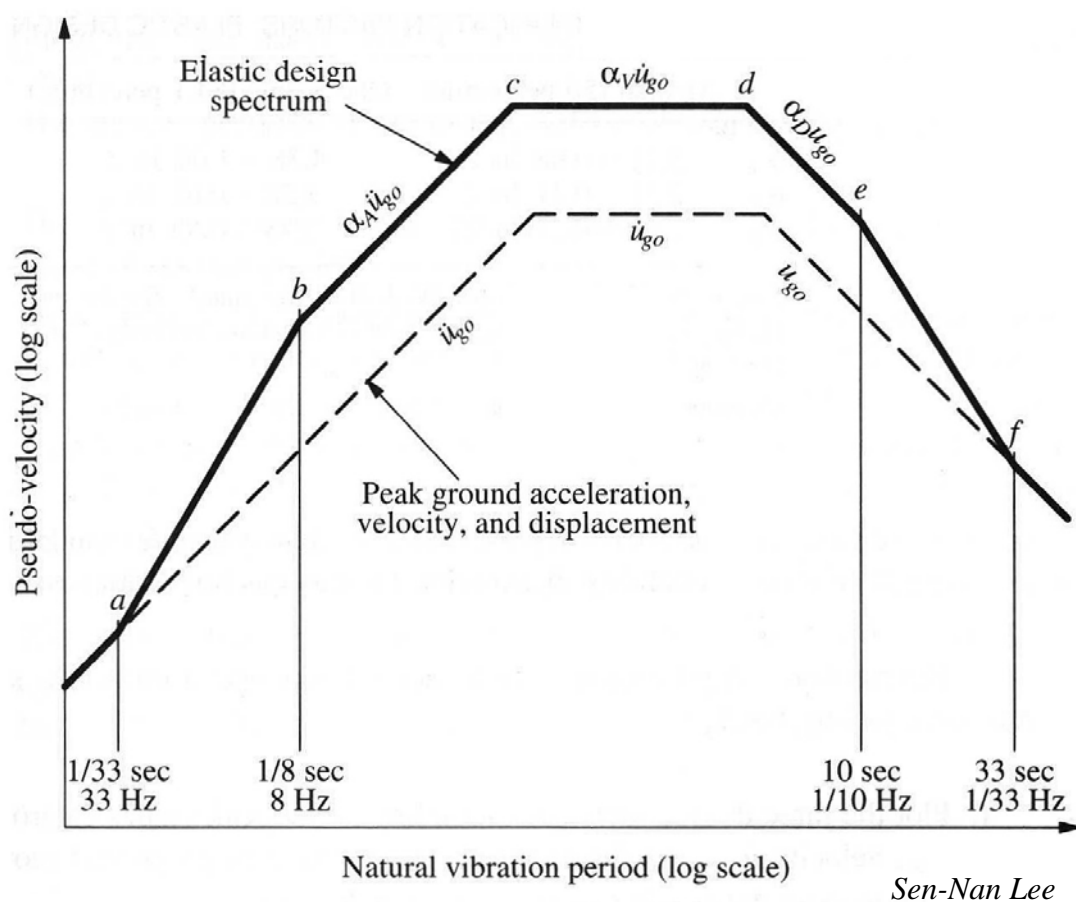


Figure 6.9.3 Construction of elastic design spectrum.

圖十四

下表為「不超越」機率為 50% 與 84.1% 之放大因子：

TABLE 6.9.1 AMPLIFICATION FACTORS: ELASTIC DESIGN SPECTRA

| Damping, ζ (%) | Median (50 percentile) | | | One Sigma (84.1 percentile) | | |
|-------------------------|------------------------|------------|------------|-----------------------------|------------|------------|
| | α_A | α_V | α_D | α_A | α_V | α_D |
| 1 | 3.21 | 2.31 | 1.82 | 4.38 | 3.38 | 2.73 |
| 2 | 2.74 | 2.03 | 1.63 | 3.66 | 2.92 | 2.42 |
| 5 | 2.12 | 1.65 | 1.59 | 2.71 | 2.30 | 2.01 |
| 10 | 1.64 | 1.37 | 1.20 | 1.99 | 1.84 | 1.69 |
| 20 | 1.17 | 1.08 | 1.01 | 1.26 | 1.37 | 1.38 |

Source: N. M. Newmark and W. J. Hall, *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, Calif., 1982, pp. 35 and 36.

對於不同的阻尼比，放大因子為：(為阻尼比之函數)

TABLE 6.9.2 AMPLIFICATION FACTORS: ELASTIC DESIGN SPECTRA^a

| | Median (50 percentile) | One Sigma (84.1 percentile) |
|------------|-------------------------|-----------------------------|
| α_A | $3.21 - 0.68 \ln \zeta$ | $4.38 - 1.04 \ln \zeta$ |
| α_V | $2.31 - 0.41 \ln \zeta$ | $3.38 - 0.67 \ln \zeta$ |
| α_D | $1.82 - 0.27 \ln \zeta$ | $2.73 - 0.45 \ln \zeta$ |

Source: N. M. Newmark and W. J. Hall, *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, Calif., 1982, pp. 35 and 36.

^aDamping ratio in percent.

Sen-Nan Lee

50%的非超越機率代表反應譜縱座標「中位數」(median) 值，84.1%表

「中位數加一個標準差」值。假設反應譜中的縱座標為 lognormal 之機率分佈。

1. 畫出符合設計地震 (design ground motion) 之最大地表真實加速度 \ddot{u}_{g0} 、

速度 \dot{u}_{g0} 與位移 u_{g0} 之三條虛線，如圖十四所示。

2. 對於選定之阻尼比，由上述兩個表中求出放大因子 $\alpha_A, \alpha_V, \alpha_D$ 。

3. 將 \ddot{u}_{g0} 乘上放大因子 α_A , 得到直線 b-c , 代表擬加速度為一常數值 A 。
4. 將 \dot{u}_{g0} 乘上放大因子 α_V , 得到直線 c-d , 代表擬速度為一常數值。
5. 將 u_{g0} 乘上放大因子 α_D , 得到直線 d-e , 代表擬位移為一常數值 D 。
6. 在週期小於 T_a 處 , 畫 $A = \ddot{u}_{g0}$ 之直線。在週期大於 T_f 處 , 畫 $D = u_{g0}$ 之直線。
7. 將 a-b 與 e-f 線段連接 , 即完成設計反應譜。

圖十四為堅硬地盤反應譜 , a、b、e、f 四點皆為固定。C 點與 d 點落於固定 A , 固定 V 與固定 D 之間。這些交點的位置隨著阻尼比不同而改變 , 因放大因子 α_A 、 α_V 、 α_D 皆為阻尼比之函數。

設計反應譜設計例題 :

-中位數加一個標準差 , 系統阻尼比為 0.05

為了方便 , 選擇最大地表加速度 $1g$ ($\ddot{u}_{g0} = 1g$) , 最後的設計反應譜可藉由一放大係數 η 得到 , 即 $\ddot{u}_{g0} = \eta g$ 。 假設最大速度設無特殊估計值 , 且位移 u_{g0} 為已知。因此典型的值 : $\dot{u}_{go} / \ddot{u}_{g0} = 48in./sec/g$, $\ddot{u}_{g0} \times u_{go} / \dot{u}_{go}^2 = 6$, 考慮堅硬地盤。對於 $\ddot{u}_g = 1g$, 由上述之比例 , 得 $\dot{u}_{g0} = 48in./sec$, $u_{g0} = 36in.$ 。 下圖為此設計反應譜。

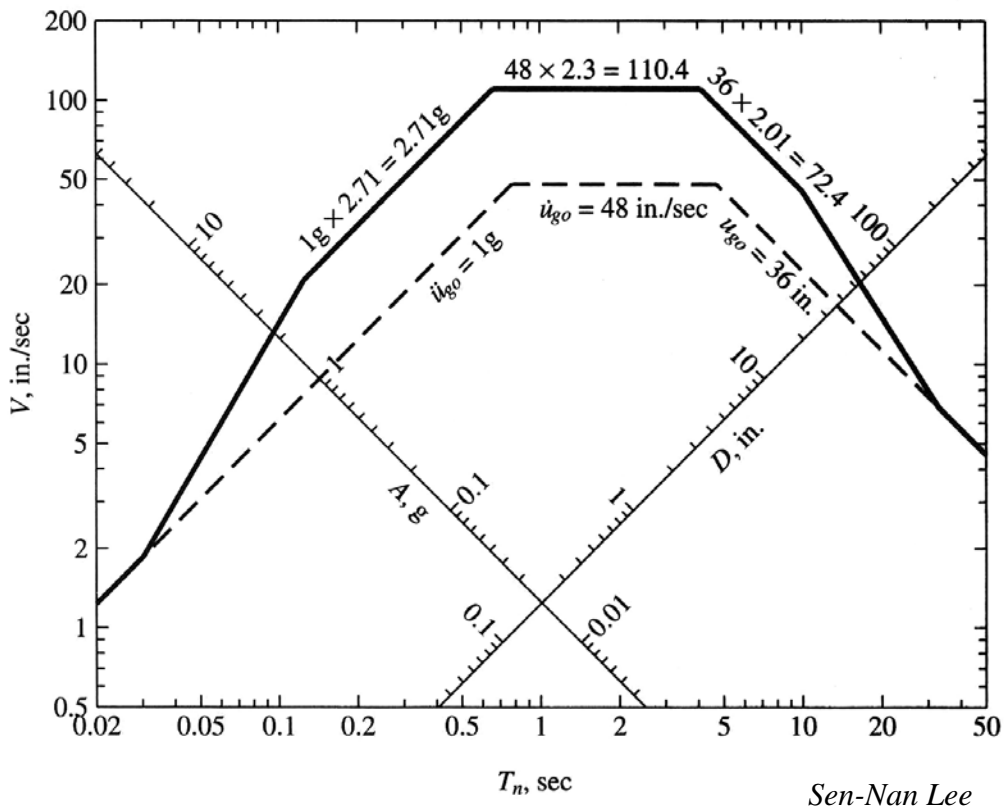


Figure 6.9.4 Construction of elastic design spectrum for ground motions with $\ddot{u}_{g0} = 1g$, $\dot{u}_{g0} = 48 \text{ in./sec}$, and $u_{g0} = 36 \text{ in.}$; $\zeta = 5\%$.

圖十五

1. 最大地表運動參數： $\ddot{u}_{g0} = 1g$ ， $\dot{u}_{g0} = 48 \text{ in./sec}$ ， $u_{g0} = 36 \text{ in.}$ 皆繪於圖上。
2. 由上述兩表，阻尼比為 0.05，中位數加一個標準差反應譜之放大係數：
 $\alpha_A = 2.71, \alpha_V = 2.30, \alpha_D = 2.01$
3. 常數 A 之縱座標： $A = 1g \times 2.71 = 2.71g$ ，常數 V 之縱座標：
 $V = 48 \times 2.30 = 110.4$ ，常數 D 之縱座標： $D = 36 \times 2.01 = 72.4$ 。此三直線
 也繪於上圖，其交點在 $T_c = 0.66 \text{ sec}$, $T_d = 4.12 \text{ sec}$ 。
4. 直線 $A = 1g$ 繪於 $T_n < \frac{1}{33} \text{ sec}$ ，直線 $D = 36 \text{ in.}$ 繪於 $T_n > 33 \text{ sec}$
5. 轉換曲線 b-a 連接點 $T_n = \frac{1}{8} \text{ sec}$ ， $A = 2.71g$ 與點 $T_n = \frac{1}{33} \text{ sec}$ ， $\ddot{u}_{g0} = 1g$ 。

轉換曲線 e-f 連接點 $T_n = 10 \text{ sec}$, $D = 72.4 \text{ in.}$ 與點 $T_n = 33 \text{ sec}$, $D = 36 \text{ in.}$

下圖之擬加速度設計反應譜為上例設計反應譜之重繪。

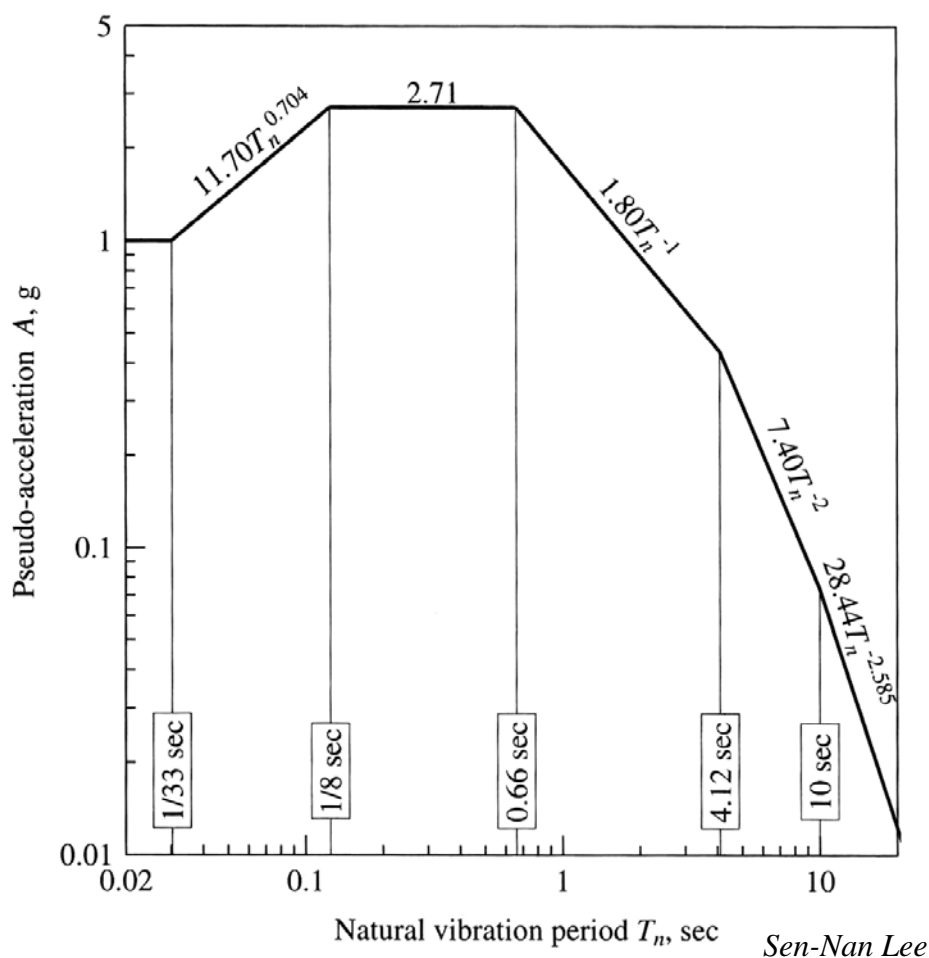


Figure 6.9.5 Elastic pseudo-acceleration design spectrum for ground motions with $\ddot{u}_{go} = 1g$, $\dot{u}_{go} = 48 \text{ in./sec}$, and $u_{go} = 36 \text{ in.}$; $\zeta = 5\%$.

圖十六

彈性設計反應譜提供了單自由度系統一個基本的設計力與變形的計算，並使系統維持在彈性範圍內。因此，設計反應譜的目的與反應譜相同，其皆是用以計算系統最大反應。且由反應譜中四個 \log 座標軸所得之縱座標值之誤差也可藉由使用設計反應譜加以避免（設計反應譜皆為直線段）。

建立彈性設計反應譜所需參數之選擇必需考慮影響地表運動的因子。地表運動參數 $\ddot{u}_{g0}, \dot{u}_{g0}, u_{g0}$ 的選擇應依據地震規模、與地震斷層之距離、斷層之機制、地震波傳遞路徑之幾何性質、土壤情況等。

圖十五的設計反應譜是針對地表運動 $\ddot{u}_{g0} = 1g$, $\dot{u}_{g0} = 48in./sec$, $u_{g0} = 36in.$, 且 $\dot{u}_{g0} / \ddot{u}_{g0} = 48in./sec/g$, $\ddot{u}_{g0} \times u_{g0} / \dot{u}_{g0}^2 = 6$ 。考量這些比率是因其為堅硬地盤。若某地最大擬加速度為 $0.4g$, 則圖十五的設計反應譜乘上 0.4 即可得到該位址之設計反應譜。

比較堅硬地盤之「標準」設計反應譜與相似土壤情況之實際反應譜。下圖為一標準設計反應譜，其最大地表加速度 $\ddot{u}_{g0} = 0.319g$ (EL Centro) , $\dot{u}_{g0} = 15.3in./sec$, $u_{g0} = 11.5in.$ 。下圖中亦有 EL Centro 之真實地震反應譜。該記錄之最大值為： $\dot{u}_{g0} = 13.04in./sec$ 與 $u_{g0} = 8.40in.$ 。由圖中可知，設計反應譜與真實反應譜在加速度敏感區符合情況良好，其原因在於此兩者之最大加速度值差異不大。然而，在速度敏感區則有顯著的差異，兩者最大地表速度分別為 $15.3in./sec$ 與 $13.04in./sec$ 。位移敏感區也是有差異存在，最大地表位移分別為 $11.5in.$ 與 $8.4in.$ 。

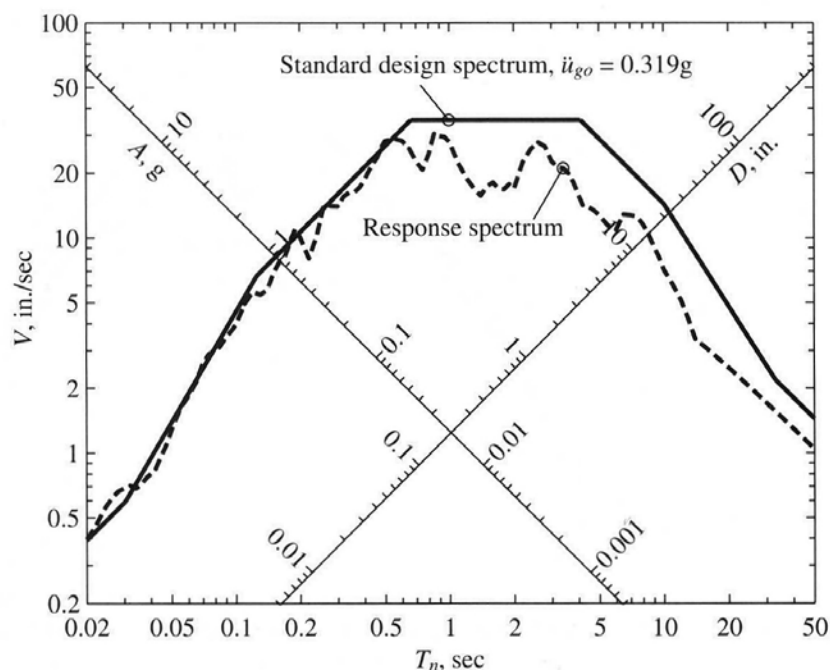


Figure 6.10.1 Comparison of standard design spectrum ($\ddot{u}_{go} = 0.319g$) with elastic response spectrum for El Centro ground motion; $\zeta = 5\%$.

Sen-Nan Lee

圖十七

一個別地表運動的反應譜與設計反應譜是不同的，即使兩者的 $\ddot{u}_{g0}, \dot{u}_{g0}, u_{g0}$ 皆符合，也是會有差異。下圖為 EL Centro 的反應譜與設計反應譜的比較。設計反應譜的地表運動參數為： $\ddot{u}_{g0} = 0.319g$ ， $\dot{u}_{g0} = 13.04 \text{ in./sec}$ ， $u_{g0} = 8.04 \text{ in.}$ ，和 EL Centro 的地表運動相同。圖中有兩個設計反應譜，分別為中位數反應譜與中位數加一個標準差反應譜。因參數相同，所以設計反應譜與真實反應譜相符的情況較之前良好。然而其仍有顯著的差異存在。在加速度敏感區，真實反應譜趨近於中位數加一個標準差反應譜，在速度敏感區與位移敏感區，真實反應譜在某些週期範圍內介於兩設計反應譜之間，而對於某週期範圍，真實反應譜低於中位數反應譜。

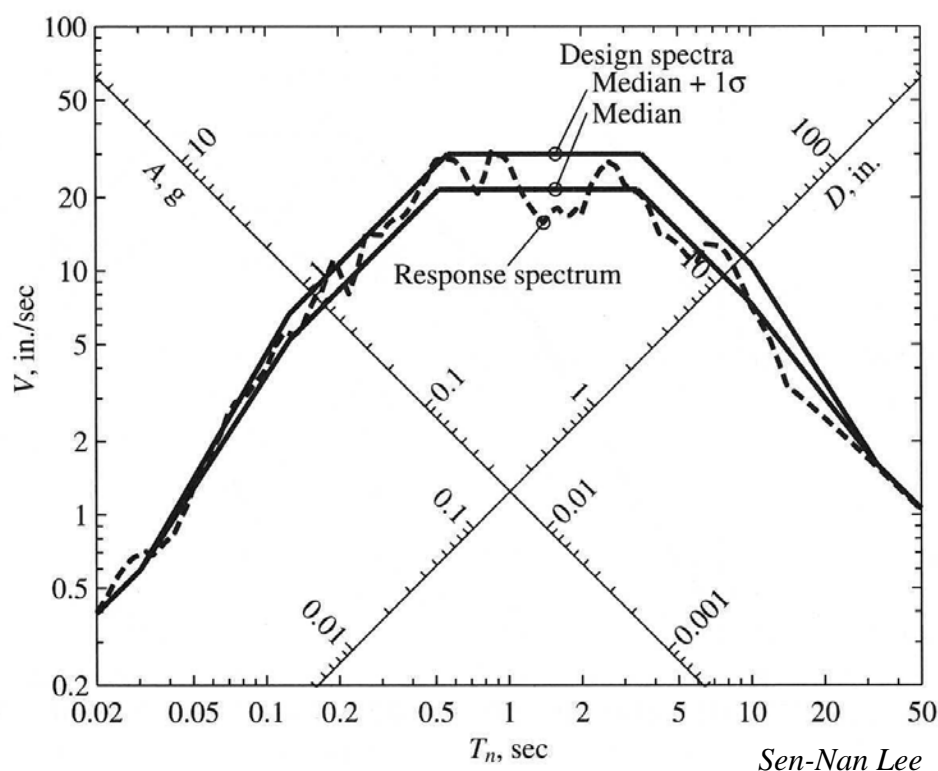


Figure 6.10.2 Comparison of design spectra ($\ddot{u}_{go} = 0.319g$, $\dot{u}_{go} = 13.04$ in./sec, $u_{go} = 8.40$ in.) with elastic response spectrum for El Centro ground motion; $\zeta = 5\%$.

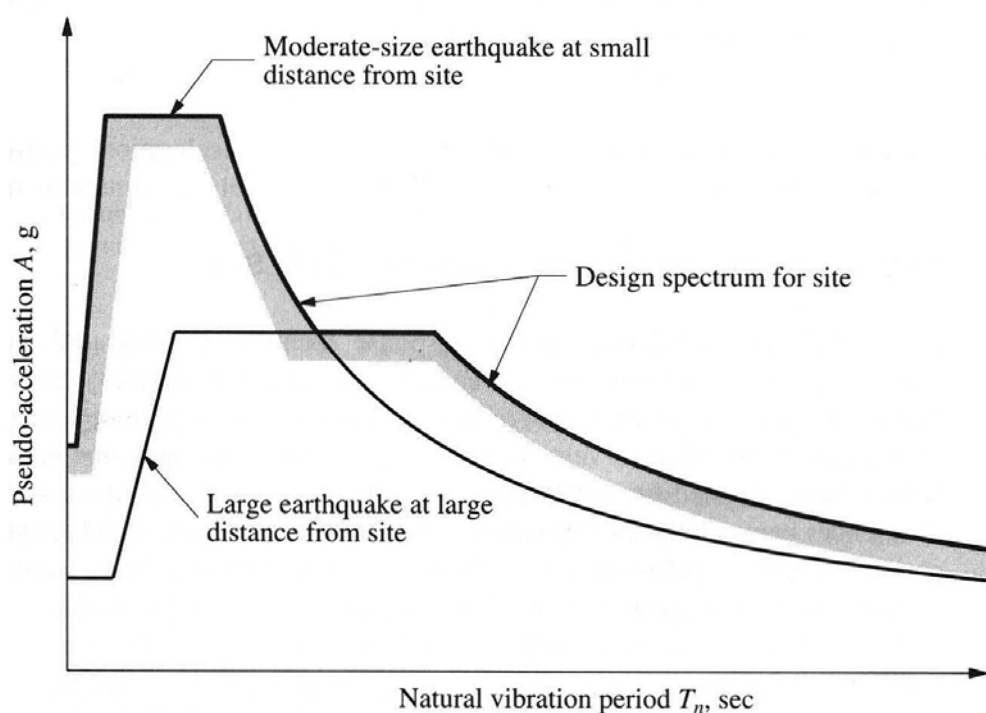
圖十八

此差異的存在是可預期的，設計反應譜並不是符合某些特定的地震，而是代表許多地表運動特性的平均。

設計反應譜與真實反應譜主要有兩方面的不同。

1. 真實反應譜為鋸齒狀，其為針對某一特殊地震，所有可能的單自由度系統的最大反應。設計反應譜為平滑狀，為設計地震力、位移之設計參照表，且其為自然振動週期與阻尼比之函數。雖然在某些情況下，兩者的形狀會相似，但兩者仍是不同。

2. 對於一些位址 (site), 設計反應譜為兩不同之設計彈性反應譜的包絡線。考慮一位址被兩個不同型式的地震所影響, 一為規模 6.5 之近斷層地震, 另一為規模 8.5 之遠距離地震。對此兩地震可分別作出其設計反應譜, 但此兩設計反應譜之形狀與縱座標皆不相同, 如下圖所示。其原因在於不同的地震規模與震央距離。週期範圍較短的反应譜為近斷層地震。



Sen-Nan Lee

Figure 6.11.1 Design spectrum defined as the envelope of design spectra for earthquakes originating on two different faults.

圖十九

線性單自由度系統在初始狀況為零的情況下, 遭遇任意的地表運動之位移反應為 (由 Duhamel's 積分, $p(t)$ 代換成 $p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$):

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad (7)$$

將上式微分，得：

$$\dot{u}(t) = -\zeta\omega_n u(t) - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \cos[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad (8)$$

質塊的加速度可藉由微分上式 ($\dot{u}(t)$) 並加入地表加速度 (\ddot{u}_{g0}) 而得。

然而，系統的運動方程式提供了一個更為方便的方法：

$$\ddot{u}^t(t) = -\omega_n^2 u(t) - 2\zeta\omega_n \dot{u}(t) \quad (9)$$

相對速度反應譜與加速度反應譜為 $\dot{u}(t)$ 與 $\ddot{u}^t(t)$ 之最大值 \dot{u}_0 及 \ddot{u}_0 對於 T_n 的函數圖。

下圖為真實相對速度反應譜與擬速度反應譜之比較。兩者皆為 EL Centro 地震，且系統阻尼比皆為 0.1。擬速度反應譜和圖六相同，只是以不同的形式表現。相對速度反應譜中的每一個點代表單自由度系統的最大速度，其由數值方法分析 $\dot{u}(t)$ 而得。兩反應譜的差異是依據系統的自然振動週期。對於長週期系統， V 小於 \dot{u}_0 ，且兩者差異頗大。由物理觀點而言，週期很長的系統，系統質塊在底部地表運動時仍維持靜止。因此， $T_n \rightarrow \infty, D \rightarrow u_{g0}, V \rightarrow \dot{u}_{g0}$ ， $D \rightarrow u_{g0}$ 暗示 $V \rightarrow 0$ 。此結果可由圖中看出。對於短週期系統， V 超過 \dot{u}_0 。對於中等週期系統， V 與 \dot{u}_0 的差異較小。

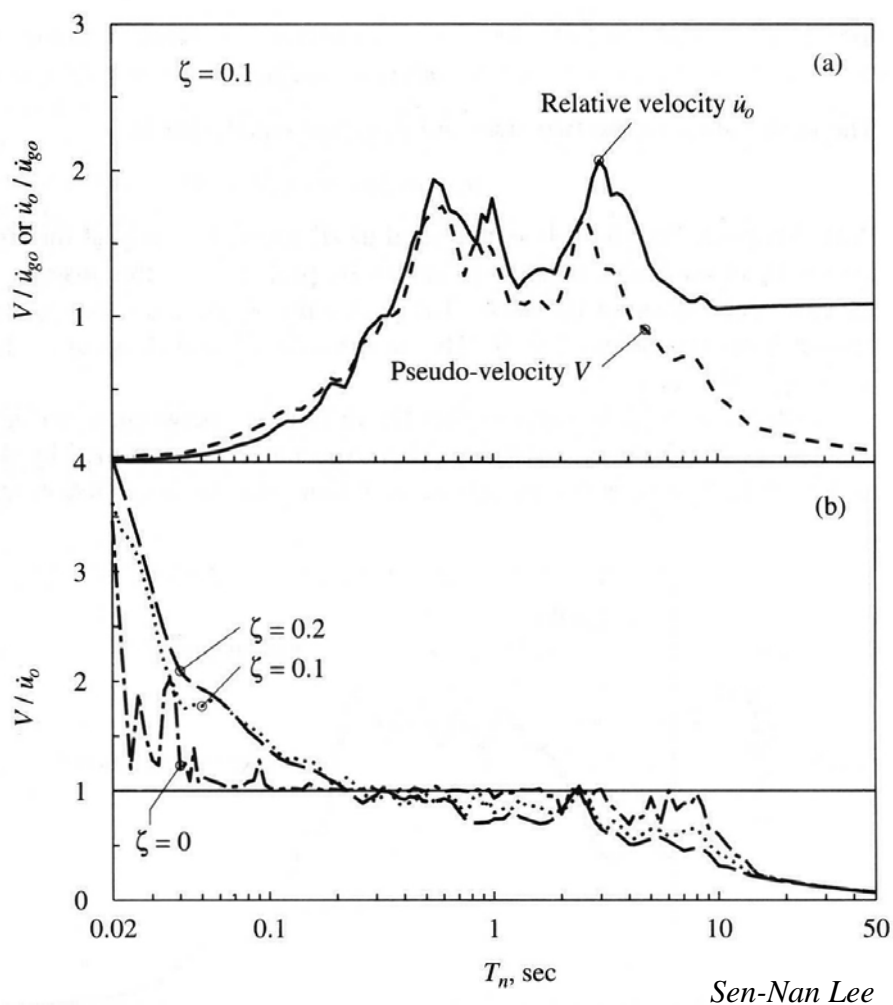


Figure 6.12.1 (a) Comparison between pseudo-velocity and relative-velocity response spectra; $\zeta = 10\%$; (b) ratio V / \ddot{u}_0 for $\zeta = 0, 10$, and 20% .

圖二十

(b) 小圖中， V / \ddot{u}_0 的比率對於三種不同的阻尼比分別作圖。兩反應譜的差異，以 1 作分界，對於無阻尼系統，其差異較小，隨著阻尼增加，差異也隨之增加。由 (7) 式與 (8) 式，對於阻尼比為 0， $\dot{u}(t)$ 與 $\omega_n u(t)$ 相同，除了積分項中 \sin 與 \cos 不同之外。若含有阻尼，(8) 式第一項對 $\dot{u}(t)$ 有項獻，因此與 $\omega_n u(t)$ 有所不同。

擬加速度與真實加速度反應譜對無阻尼系統而言完全相同。由 (9) 式可看出此結果：

$$\ddot{u}'(t) = -\omega_n^2 u(t) \quad (10)$$

左右兩側的最大值會相等：

$$\ddot{u}'_0 = \omega_n^2 u_0 = \omega_n^2 D = A \quad (11)$$

若系統含有阻尼，(10) 式無法對於所有時間皆成立，只有在 $\dot{u}_0 = 0$ 之瞬時才成立，特別是 $u(t)$ 達到其最大值 u_0 。在此瞬時， $-\omega_n^2 u(t)$ 代表質塊之真實加速度。最大值 \ddot{u}'_0 與 $\ddot{u}'(t)$ 不會同時發生，除非阻尼比為零。且 \ddot{u}'_0 與 A 也只有當阻尼比為零時，才會同時發生。

(9) 式顯示，當阻尼比增加時， \ddot{u}'_0 與 A 的差異也隨之增加。如下圖所示。對於短週期系統，此兩者差異較小。對於長週期系統，且阻尼比較大時，兩者差異也較大。因此，在大多數情況下，擬加速度可視為真實加速度。

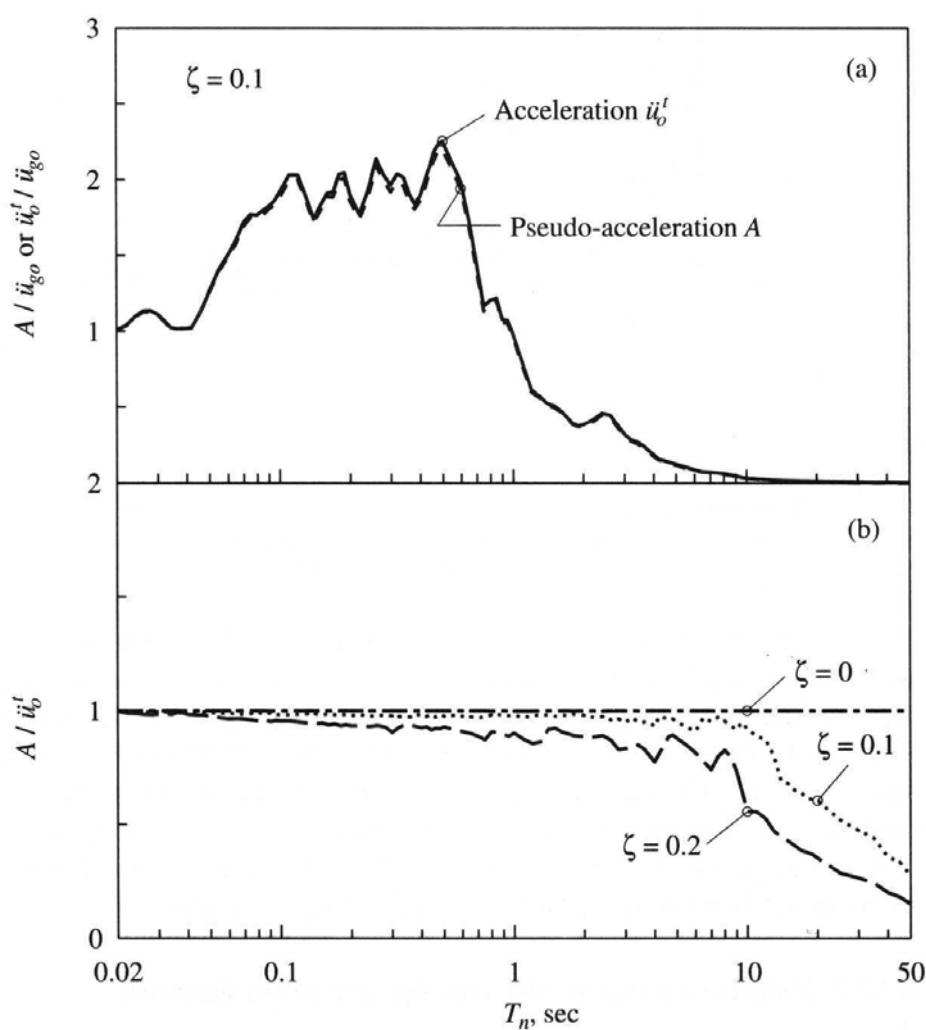


Figure 6.12.2 (a) Comparison between pseudo-acceleration and acceleration response spectra; $\zeta = 10\%$; (b) ratio A/\ddot{u}_0^t for $\zeta = 0, 10$, and 20% .

圖二十一

當系統自然振動週期趨近無限大時，系統質塊在底部地表運動時仍維持靜止，因此， $T_n \rightarrow \infty, \ddot{u}_0^t \rightarrow 0, D \rightarrow u_{g0}$ ，其暗示 $A \rightarrow 0$ 。由物理意義而言， mA 代表彈性恢復力之最大值， $m\ddot{u}_0^t$ 代表彈性恢復力與阻尼力之最大值。因此由 (b) 小圖中可看出，擬加速度略小於真實加速度。

非彈性設計反應譜 (inelastic design response spectrum)：

「大震不倒、中震可修、小震不壞」為耐震設計基本原則，於強烈地震來臨時須考慮結構是否能夠抵抗超出彈性界線後的變形，因此必須考慮非彈性設計反應譜。相同地，為了設計之合理性，須考量各種不同地震記錄之平均影響及仍然適用於結構體在非彈性範圍內的設計。為了簡化起見，非彈性模型通常使用完全彈塑性模型，而基本上彈塑性系統的反應譜在外形上與彈性系統的反應譜相同，只是在彈塑性系統的反應譜中所得到的曲線與彈性系統之間有一段與韌性比 μ 有關的偏移量。下圖所示，即為目前在考慮非彈性行為反應下建立設計反應譜的方法，其作法是以彈性設計反應譜 $D-V-A-A_0$ 的部份作基礎加以修正，得到可以反應出非彈性行為之二條折線，其中 $D'-V'-A'-A_0$ 的部份為考慮非彈性行為下之加速度反應譜，可以用來求系統之最大加速度，而 $D-V-A''-A_0''$ 的部份為考慮非彈性行為下之位移反應譜，可以用來求系統之最大位移加速度。

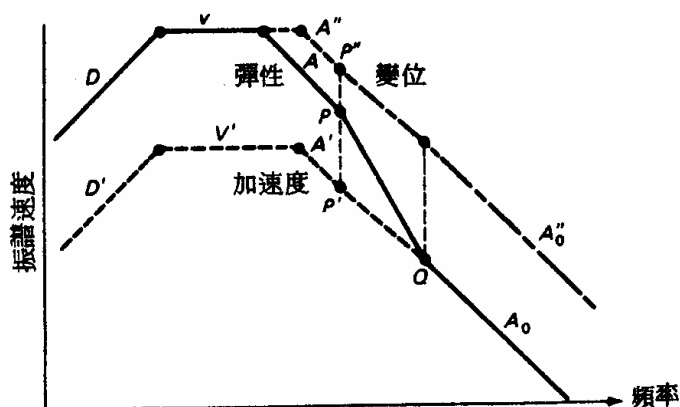


圖 8.14 適用於塑性系統的典型設計振譜（摘錄自 N. M. Newmark 以及 W. J. Hall 之“Procedures and criteria for earthquake resistant design,”發表於 *Building Practices for Disaster Mitigation*, Dept. of Commerce, Feb. 1973).

同彈性反應譜，非彈性反應譜之特性如下圖所示，最大反應譜變位 (maximum spectral displacement) 在極低頻(或週期相當長)下的值非常接近最大地表變位(maximum ground displacement)，也就是說，柔度極高之結構物在低頻附近的譜變位幾乎都收斂於反應譜的同一端；反之，最大反應譜加速度 (maximum spectral acceleration) 在極高頻(或週期非常短)下的值非常接近最大地表加速度(maximum ground acceleration)，也就是說，剛性極高之結構物在受到地震之擾動時，地表加速度直接就由基礎傳至結構體，頂多只受到些微的修正，因此這段區域的震譜加速度也是收斂於反應譜加速度的一端。

在低頻區域為震譜變位收斂至最大地表變位，同時結構體的加速度反應會因降伏之產生而減少(因此時彈塑性結構體的力量並不會增加)，此區域加速度則減少成 $1/\mu$ 倍，其中 μ 為韌性比。而在震譜加速度的另一端，由於譜加速

度趨於收斂，也就是系統的最大加速度和最大地表加速度相同，但是變位反應值卻比彈性變位來得大，系統的能量在這些極值間則必須守恆，由能量守恆之觀點可以推得將彈性反應譜值除以 $\sqrt{2\mu-1}$ 則可以得到非彈性反應譜值。

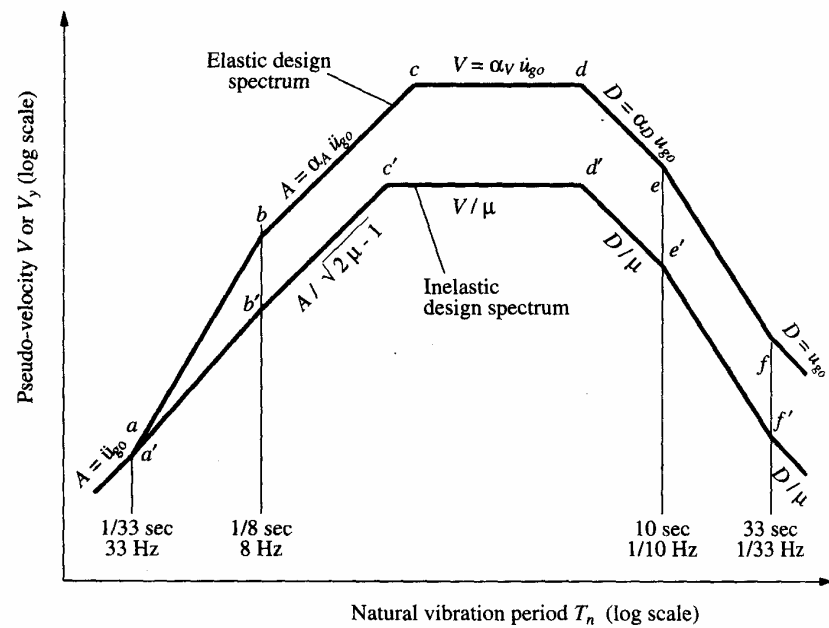


Figure 7.10.2 Construction of inelastic design spectrum.