Содержание

Векторные пространства

1 Векторное пространство. Подпространство. Линейная оболочка системы векторов. Линейно (не)зависимые системы векторов. Конечномерные линейные пространства

1.1 Векторное пространство

Опр *Унарная, бинараная операция на множестве над полем* Ставит в соответсвие элементу (элементам) из множества другой элемент из множества

Опр *Векторное пространство над полем* Помимо унарности и бинарности, по 4 аксиомы сложения и умножения

1.2 Подпространство

Опр *Подпространство* Требуются лишь унарность и бинарность

1.3 Линейная оболочка системы векторов

Опр *Линейная оболочка* Все векторы, которые линейно выражаются через минимальную систему, покрывающую пространство

1.4 Линейно (не)зависимые системы векторов

Опр *Линейная комбинация* Сумма векторов с коэффициентами из поля

Опр *Линейно (не)зависимая система векторов* Нетривиальная линейная комбинация (не) равна нулю

1.5 Конечномерные линейные пространства

Опр *Ранг (не)пустой системы векторов* Любой набор векторов, чьё число большее чем ранг, будет линейно зависим. Ранг пустой считаем нулевым

Опр *Размерность* Более употребительное название для ранга в случае работы с подпространсвом

Опр *(Бес)конечномерные линейные пространства* Если их размерность (бес)конечна

Л1 Любой вектор системы векторов ранга r раскладывается по r л.н.з векторам

1. Возьмём вектора из линейной оболочки и добавим к ним произвольный вектор системы a. Эта система будет л.з. из определения ранга
2. Тогда найдутся коэффициента для нетривиальной линейной комбинации, притом коэффициент перед $\lambda_a \neq 0$ (иначе линейная оболочка была бы зависима)
3. Из линейной комбинации выразим a, поделив все вектора на λ_a

Л2 Если вектор b принадлежит линейной оболочке $a_1, \dots, a_k$ других векторов, то он не влияет на её ранг

1. От противного: пусть $\exists$ л.н.з система из $r+1$ векторов (она будет содержать b, иначе w с определением ранга)
2. Итак, пусть система $b, a_1, \dots, a_r$ л.н.з. Тогда система $a_1, \dots, a_r$ тоже будет л.н.з. Так их r штук, то все вектора $a_1, \dots, a_k$ будут выражаться через $a_1, \dots, a_r$
3. Если мы заменим $a_1, \dots, a_k$ на их выражения через $a_1, \dots, a_r$, то получится, что b выражается по ним, что w л.н.з $b, a_1, \dots, a_r$

Th *Основная теорема о рангах* Ранг подсистемы и системы совпадает $\Leftrightarrow$ $\forall$ вектор системы раскладывается по линейной оболочке подсистемы

$\Rightarrow$: мгновенно следует из Л1 В моей формулировке

$\Leftarrow$:

1. От противного: пусть $\exists$ л.н.з система из $r+1$ векторов
2. Её ранг будет не меньше ранга её и любого количества л.н.з векторов из подсистемы

3. С другой стороны, многократно применяя Л2, получим что её ранг не превышает ранга подсистемы, w

Следствие 1 Для любой подсистемы векторного пространства ранг равен размерности линейной оболочки
Следствие 2 Если размерности вложенных подпространств совпадают, то они равны

2 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница). Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при замене базиса (матрица перехода)

2.1 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница)

Опр *Базис* Система л.н.з векторов, являющаяся линейной оболочкой
Лемма *Штайница* Пусть система векторов $a_1, \ldots, a_n$ порождает пространство V, а система векторов $b_1, \ldots, b_m$ л.н.з. Тогда $n \geq m$

1. Возьмём b_1. Он будет выражаться через $a_1, \ldots, a_n$ по определению линейной оболочки. БОО первый коэффициент в его разложении по $a_1, \ldots, a_n$ ненулевой (иначе мы их переупорядочим)
2. Выразим из этого разложения a_1. Тогда $V =< b_1, a_2, \ldots, a_n >$. Так, действуя по индукции, заменим все вектора a_i
3. В случае $n < m$ получим противоречие с л.н.з. $b_1, \ldots, b_m$ (потому что всего n векторов порождают пространство). Таким образом $n \geq m$, притом недостающие до линейно оболочки вектора можно взять из $a_1, \ldots, a_n$

2.2 Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса

Утв Систему л.н.з векторов можно дополнить до базиса

1. Ранг подсистемы меньше ранга системы, поэтому выполняется обратное к основной теореме о рангах утверждение ($\exists\ \overline{x}$), не лежащей в л.н.з подсистеме)
2. Если мы добавим $\overline{x}$ к подсистеме и она станет зависимой, то в нетривиальной линейной комбинации равен нулю либо новый коэффициент (w с л.н.з исходной подсистемы), либо какой-то из старых (тогда $\overline{x}$ выражается через векторы линейной оболочки и принадлежит ей)
3. Продолжая процесс и далее, дополним систему до базиса

2.3 Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты

Опр *Координаты вектора в базисе* Коэффициенты в разложении по базису
При сложении векторов и домножении на число, координаты изменяются покомпонентно

2.4 Изменение координат вектора при замене базиса (матрица перехода)

Опр *Матрица перехода* Матрица координатных столбцов новых базисных векторов относительного старых
Th S чья-то матрица перехода $\Leftrightarrow$ S невырождена
Это следует из того, что координатные столбцы X_k векторов a_k линейно независимы $\Leftrightarrow$ a_k л.н.з. ($\lambda^k a_k = 0 \Leftrightarrow \lambda^k X_k = 0$). Поэтому столбцы матрица невырождена (её столбцы л.н.з.) $\Leftrightarrow$ векторы л.н.з.
Th Если вектор имеет в базисах $e, e^{'}$ координатные столбцы $X, X^{'}$, то $X = SX^{'}$
Достаточно расписать один вектор в обоих базисах и сравнить записи
Утв Если $\exists\ e, e^{'}, e^{''}; e^{'} = eC, e^{''} = e^{'}D$, то $e^{''} = eCD$
Последовательно подставляем матрицы перехода

3 Сумма и пересечение подпространств. Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств, её характеризации, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств (формула Грассмана). Понятие факторпространства, его базис и размерность

3.1 Сумма и пересечение подпространств

Опр *Пересечение подпространств* Множество элементов, которые являются их обычным теоретико-множественным пересечением как подмножеств

Опр *Сумма подмножеств по Минковскому* Множество-сумма векторов всех векторов a_i из каждого $A_i \subset V$, то есть каждый вектор из суммы раскладывается по векторам из всех пространств

Для суммы Минковского выполняется коммутативность и ассоциативность

Утв Сумма линейных оболочек есть линейная оболочка объединения

Каждый элемент суммы есть линейная оболочка какого-то подпространства, поэтому если мы сложим все линейные оболочки по Минковскому, то получим линейную оболочку объединения (совокупности)

Следствие Сумма конечного числа подпространств есть подпространство

Потому как сумма есть минимальное по включению подпространство, содержащее в себе каждое из пространств

Утв Размерность суммы не превосходит суммы размерностей

Это следует из того, что размерность равна рангу, а для рангов ранг объединения не превосходит суммы рангов (доказывается от противного)

3.2 Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств, её характеризации, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения

Опр *Прямая (внешняя) сумма* Декартово произвздение $(a_1, \dots, a_n)$

Сложение и умножение на скаляр определены для внешней суммы покомпонентно

Опр *Прямая (внутренняя) сумма* Сумма, вектора a_i в разложении которой из каждого $A_i \subset V$ определены однозначно

Например, всё пространство разлагается в прямую сумму своих базисных векторов

Через $\overline{U_i}$ обозначим сумму всех рассматриваемых пространств, за исключением $U_i : U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + U_n$

Th.1 *Первый критерий прямой суммы*
Сумма подпространств прямая $\Leftrightarrow U_i \cap \overline{U_i}$

- $\Rightarrow$: от противного. Пусть БОО условие не выполнено для U_1. Тогда там есть нулевой вектор, который принадлежит U_i и раскладывается по остальным пространствам. Тогда у нас существует два представления нулевого вектора (одного тривиальное, другое новое), w с прямостью суммы

- $\Rightarrow$: от противного. Пусть существует два различных разложения v по a_i и b_i. БОО хотя бы $a_1 \neq b_1$, поэтому если возьмём их разность, то с одной стороны она $\in U_1$, а с другой —

- $\in \overline{U_i}$, то есть пересечение не тривиально, w

Th.2 *Второй критерий прямой суммы*
Для конечномерных подпространств следующие условия эквивалентны:

1. Сумма $U = \oplus U_i$ прямая
2. Система из $\sum_i \dim U_i$ векторов из объединения базисов есть базис в U
3. $\dim U = \sum_i n_i$

- $2 \Leftrightarrow 3$: по следствию основной теоремы о рангах $\dim U = rge = rg \cup_i e^i$, поэтому

$$\dim U = \sum_i \dim U_i \Leftrightarrow rge = \sum_i \dim U_i \Leftrightarrow e$$

л.н.з система

- $1 \Rightarrow 2$: от противного. Пусть e л.н.з система. Запишем нетривиальную линейную комбинацию всей суммы. Так как хотя бы одна компонента нетривиальная, то БОО $l_1 \neq 0$. Тогда эта комбинация одновременно принадлежит и U_1, и $\overline{U_1}$, по той же идее, что и в Th.1, это w

- $2 \Rightarrow 1$: от противного. По обратной идее предыдущего пункта воспользуемся Th.1, получим ненулевое пересечение, распишем вектор оттуда (нетривиальная л.к.) и получим w с л.н.з e

Опр *Прямое дополнение подпространства* Недостающий член в прямой сумме до всего пространства V

В случае двух подпространств, они входят в определение симметрично

Утв Сумма размерностей подпространства и любоего его прямого дополнения равна размерности всего пространства V

Утв У любого подпространства конечномерного простраснтва V существует прямое дополнение

Для нахождения дополнения достаточно выбрать базис в подпространстве и дополнить его до базиса в пространстве. Тогда по Th.2 эта система и будет прямым дополнением

Если $a = a_1 + a_2$, то a_1 называется проекцией a на U_1 вдоль (параллельно) U_2

3.3 Связь размерностей суммы и пересечения подпространств

Смотреть в рукописном конспекте

3.4 Понятие факторпространства, его базис и размерность

Опр *Факторпространство* Фактор-множество (множество всех классов эквивалентности для заданного отношения эквивалентности) $a \sim b \Leftrightarrow b - a \in U$

Элементы факторпространства есть смежные классы вида $a + U$

$$(a + U) + (b + U) = (a + b) + U$$
$$\lambda(a + U) = \lambda a + U$$

Если W - прямое дополнение U, то существует естественный изоморфизм $W \to V/U(a \mapsto a + U)$. Он является ограничением на W линейного отображения $\pi : V \to V/U, \pi(v) = v+U$ и называется канонической проекцией. Действительно, из определения прямого дополнения следует единственность $u \in U : v = u+w$. Применим π и получим $v + U = w + U$, что влечёт биективность π

Отсюда следует, что дополнение произвольного базиса в U до базиса в V после применения к ней π будет базисом в V/U, притом $\dim V/U = \dim V - \dim U$, что следует из теоремы о сумме размерностей ядра и образа

4 Понятие аффинного пространства, связь между аффинным и векторным пространством

Опр *Афинное пространство* Отображение из точек-векторов в точки (откладывание от точки векторы)

Афинное пространство удовлетворяет трём аксиомам (ассоциативность, существование нуля и единственность " дополнения"). Также справедливо "правило треугольника"

Th *О замене координат*

Если существует две ДСК и S – матрица перехода от старой к новой, γ – координатный столбец начала координат новой системы в старой, то справедливо $X = SX^{'} + \gamma$

Достаточно рассмотреть произвольный вектор как сумму сдвигов в ноль и в точку, перейти к базису и координатным столбцам, вспомнить определение матрицы перехода и сократить базис

Линейные отображения

5 Линейные отображения и линейные преобразования векторных пространств (линейные операторы). Операции над линейными отображениями, линейное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов. Изоморфизмы

5.1 Линейные отображения и линейные преобразования векторных пространств (линейные операторы)

Опр *Линейное отображение* Отображение, удовлетворяющее двум аксиомам

Отсюда следуют конечная линейность, отображение нулевого и противоположного вектора

Множество всех линейных отображений обозначается как $L(V, W)$. В случае $W = V$ линейное отображение называют линейным преобразованием (оператором)

Опр *Линейная функция (функционал)* Случай $\dim W = 1 (W = \mathbb{K})$

Утв Под действием линйного отображения л.з система остаётся л.з

Достаточно записать нетривиальную линейную комбинацию и взять её образ, используя уже известные аксиомы

Утв Ранг системы под действием линейного отображения не возрастает

Это следует из определения ранга и противного к предыдущему утверждению. В силу равенства ранга и размерности в конечномерном случае, получаем аналогичное неравенство для размерностей

Утв *Образ подпространства*

Образ линейной оболочки есть линеная оболочка образов

Действительно, если записать определение линейной оболочки (множество всех линейных комбинаций) и подействовать отображением, то получится требуемое. В частном случае, если взять базис (его линейная оболочка есть всё пространство), то образ пространства есть линейная оболочка линейная оболочка образов базисных векторов

Опр *Линейное вложение* Инъективное линейное отображение

Утв В случае линейного вложения л.н.з. система остаётся л.н.з.

Действительно, если записать л.к. образов и "вынести φ за скобки", то в силу инъективности получим, л.к. исходных векторов. В силу её линейной независимости, эта л.к. тривиальна, как и л.к. образов В частном случае, если взять базис, то получим равенства рангов U и $\varphi(U)$, как и размерностей

Th Если взять базис e_i в V и произвольные векторы c_i в W, то $\exists! \varphi : \varphi(e_i) = c_i$. Дополнительно, φ инъективно c_i л.н.з.

1. Для начала докажем единственность. Зафиксируем произвольный вектор a пространства, разложим его по базису и рассмотрим $\varphi(a)$, имеющего единственные коэффициенты. В силу произвольности a теорема справедлива

2. Для доказательства существования, достаточно взять два произвольных вектора из пространства, подействовать на них отображением (с учётом $\varphi(e_i) = c_i$), затем проверить аксиомы линейного отображения

3. $\Rightarrow$: следует из предыдущего утверждения

4. $\Leftarrow$: от противного, с использованием определения инъективности, разложения $a - b$ по базису и $\varphi(e_i) = c_i$

5.2 Операции над линейными отображениями, линейное пространство линейных отображений

Опр *Сумма отображений* Такое отображение, что ...

Опр *Произведение отображения на скаляр* Такое отображение, что ...

В комплексном случае скаляр заменяется на комплексно-сопряжённый.

Нетрудно проверить, что оба нововведённых отображения линейны. Также проверкой доказывается ассоциативность, дистрибутивность и линейность в случае композиции отображений

5.3 Алгебра линейных операторов

Так как на множестве $L(V,V)$ определены операции сложения, умножения на скаляр и умножения, то $L(V,V)$ имеет структуру ассоциативной алгебры (непустое множество (носитель) с заданным на нём набором операций и отношений (сигнатурой)). Ассоциативная потому как заданы операции ассоциативного умножения, то есть $\forall k,l \in \mathbb{F}$ и $\forall a,b,c \in A$ справедливо

1. $a(b+c) = ab + ac$
2. $(a+b)c = ac + bc$
3. $(k+l)a = ka + la$
4. $k(a+b) = ka + kb$
5. $k(la) = (kl)a$
6. $k(ab) = (ka)b = a(kb)$
7. $1a = a$, где 1 – единица кольца $\mathbb{K}$

Опр *Аннулирующий многочлен для оператора* $P(\varphi) = 0$
Опр *Минимальный многочлен* Аннулирующий многочлен с минимальной степенью
Утв Пусть μ – минимальный многочлен оператора φ,а $P \in \mathbb{F}$ – произвольный. Тогда P аннулирует $\varphi \Leftrightarrow f \vdots \mu$ в кольце многочленов над $\mathbb{F}$

1. Разделим P на μ с остатком и подставим в полученное равенство φ
2. Воспользуемся условием и получим $P(\varphi) = 0 \Leftrightarrow r(\varphi) = 0$
3. В таком случае остаток должен быть аннулирующим для φ, то есть его степень меньше степени минимального многочлена, поэтому w не возникает только в случае $r \equiv 0$
4. Таким образом, эквивалентность доказана

Отсюда следует, что минимальный многочлен единственен с точностью до умножения на константу

5.4 Изоморфизмы

Опр *Изоморфизм* Линейное биективное отображение
Опр *Изоморфные векторные пространства* Между ними существует изоморфизм
Утв Обратный к изоморфизму изоморфизм

1. Биективность следует из тождеств для обратных функций
2. Далее берутся векторы из образа и на них проверяются аксиомы линейного отображения
3. Итого, обратный к изоморфизму изоморфизм по определению

Th *Классификация конечномерных векторных пространств*
Пространства изоморфны $\Rightarrow$ их размерности совпадают

1. $\Rightarrow$: из изоморфности следует инъективность, а для инъективных отображений равенство доказано ранее
2. $\leftarrow$: построим изоморфизм между элементами каждого пространствами и их координатными столбцами в них по фиксированному базису. Ранее было доказано, что такое разложение единственно. Достаточно обратить какое-то из отображений (по предыдущему утверждению оно тоже будет изоморфизмом). Итого, мы получили композицию изоморфизмов, то есть изоморфизм

Th Если конечномерные пространства $U, V : \dim U = \dim V; e_i$ – базис в U, $\varphi \in L(U,V)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. φ – изоморфизм
2. φ инъективен
3. φ сюръективен

4. $\varphi(e_i)$ есть базис в V

- $1 \Rightarrow 2$: по определению
- $2 \Rightarrow 3$: из инъективности следует $\dim(\varphi(U)) = \dim U \to \varphi(V) \cong U \to \varphi$ сюръективно
- $3 \Rightarrow 4$: это следует из свойства линейной оболочки образов базисных векторов, связи размерности и ранга, определения ранга и базиса
- $4 \Rightarrow 1$: по критерию инъективности, в силу л.н.з. $\varphi(e_i), \varphi$ будет инъективно, а из свойства линейной оболочки следует сюръективность φ

6 Матрица линейного отображения. Координатная запись линейного отображения. Связь операций над матрицами и над линейными отображениями. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базиса

6.1 Матрица линейного отображения

Опр *Матрица линейного отображения* Как и в обычном случае, координатные столбцы векторов $\varphi(e_i)$

Таким образом, существует биекция между $L(V, W)$ и $Mat(m, n)$, как и изоморфизм (проверяется). Отсюда следует, что размерность линейных операторов есть mn

6.2 Координатная запись линейного отображения

Th Если $\varphi \leftrightarrow A; a = eX, \varphi(a) = fY$, то $y = Ax$

Для доказательства достаточно записать определение координатного столбца, применить к ней φ и в силу коммутируемости, поменять местами строки и столбцы, чтобы увидеть запись матричного умножения, что доказывает равенство

Следствие Если дано неизвестно в плане линейности отображение φ, такое, что под его действием $y = Ax$, то оно линейное

В силу наличия биекции между матрица и линейными отображениями, найдём такое ϕ. В таком случае по Th., они будут иметь одинаковую координатную запись $y = Ax$, то есть равны и φ линейно

Th Если линейное преобразование φ таково, что $\varphi(e_i) = e_i^{'}$, то $A : A \leftrightarrow \varphi$ есть матрица перехода между базисами

Следует из определений (матрица линейного преобразования будет удовлетворять определению матрицы перехода)

6.3 Связь операций над матрицами и над линейными отображениями

Утв Композиции линейных отображений соответствует произведение соответствующих матриц

Доказывается по определению (подстановкой)

Следствие Обратному отображению соотвествует обратная матрица

Следует из предыдущего утверждения и того, что тождественному отображению соответствует единичная матрица

Следствие $P(\varphi) \leftrightarrow P(A)$

Следствие $\varphi \leftrightarrow A$ задаёт изоморфизм алгебр линейных преобразований и квадратных матриц

То есть изоморфизм группы биективных линейных преобразований и группы невырожденных матриц

6.4 Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базиса

Th Если $L(V, W); S : e^{'} = eS; y = Ax, y^{'} = Ax^{'}; f^{'} = fR$, то $A^{'} = R^{-1}AS$ (матрица линейного отображения в другом базисе)

Доказывается путём подстановок и комбинаций равенств

В частном случае $L(V, V)A^{'} = S^{-1}AS$

Следствие Ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора базисов в пространствах

Потому что мы домножаем слева и справа на невырожденные матрицы

7 Ядро и образ, их описание в терминах матрицы линейного отображения. Критерий инъективности. Связь между размерностями ядра и образа

7.1 Ядро и образ, их описание в терминах матрицы линейного отображения

Опр *Образ линейного отображения* Множество всех векторов V под действием $\varphi \in L(V, W)$
Th *Координатное описание образа*
Если $\varphi \in L(V, W)$, а $b \in W : b = fY$, то $b \in \operatorname{Im}\varphi \Leftrightarrow Y \in < a_{.1}, \dots, a_{.n} >$
Это следует из записи образа через линейную оболочку действия φ на базисные векторы, определения матрицы линейного отображения и того факта, что $b = fY$ есть л.к. столбцов Y
Отсюда также следует, что размерность образа равна рангу матрицы линейного отображения
Утв В случае $\varphi \in L(V, W)$ прообразы образов в подмножестве W являются подмножеством V
Опр *Ядро линейного отображения* Множество всех векторов V, которые зануляются под действием $\varphi \in L(V, W)$
То есть ядро есть подмножества V. Также ядро можно охарактеризовать как полный прообраз нулевого пространства
Если ядро пусто, то оператор невырожден
Th *Координатное описание ядра*
Если $\varphi \in L(V, W)$, а $a \in V : a = eX$, то $a \in Ker\varphi \Leftrightarrow AX = 0$
В обе стороны по определению ядра
Другими словами, в терминах координатных столбцов ядро задается как общее решение однородной СЛУ $Ax = 0$
Следствие $\dim Ker\varphi = n - rgA$

7.2 Критерий инъективности

Th *Критерий инъективности*
Если $\varphi \in L(V, W)$, инъективно $\Leftrightarrow Ker\varphi = 0$
$\Rightarrow$: пользуемся $\varphi(0) = 0$ $\Leftarrow$: от противного с использованием определения инъективности

7.3 Связь между размерностями ядра и образа

Th В конечномерных пространствах $\dim Ker\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = n$
Следует из $\dim \operatorname{Im}\varphi = rgA$ и $\dim Ker\varphi = n - rgA$

8 Аффинные преобразования, их свойства. Аффинная группа

8.1 Аффинные преобразования, их свойства

Опр *Аффинно-линейное преобразование*
Опр *Дифференциал отображения* Обозначение элемента $\varphi \in L(V, V)$
Опр *Аффинное преобразование* Биективное преобразование
Утв Преобразование аффинно $\Leftrightarrow$ его дифференциал биективен
Для доказательства достаточно воспользоваться определением при одной фиксированной точке в нём
Утв Композиция линейный и аффинных преобразований линейна и аффинна соответственно, а их дифференциал есть произведение дифференциалов
Следует из определения и того, что композиция биективных отображений биективна
Утв Обратное к аффинному отображению отображение аффинно
Следует из определения

8.2 Аффинная группа

Аффинные преобразования образуют группу относительно композиции
Утв $Y = AX + C$
Для доказательства достаточное взять в определении аффинно-линейного преобразования точку $M = 0$
Отсюда следует, что любое аффинное преобразование задаётся параллельным переносом и поворотом вокруг неподвижной точки, то есть линейное преобразование однозначно задаётся точкой и двумя векторами

Th Линейное преобразование f аффинно $\Leftrightarrow$ переводит неколлинеарные точки в неколлинеарные

Построим ДСК на наших трёх точках, подействуем на них преобразование и получим новую ДСК. f однозначно задано этой ДСК. Поэтому f аффинно $\Leftrightarrow$ f биективно $\Leftrightarrow$ неколлинеарная система (л.н.з) переходит в неколлинеарную (в частности, система три точки)

Th *Связь аффинного преобразования с заменой координат*

При аффинном преобразовании координатный столбец вектора не меняется

Достаточно воспользоваться координатной запись вектора, а потом к концевым точкам применить аффинное преобразование

Th При аффинном преобразовании

1. прямая переходит в прямую
2. параллельные прямые переходят в параллельные
3. отношения длин отрезков сохраняются
4. центральная симметрия сохраняется

1. достаточно параметризовать прямую и применить определение к концевым точкам
2. аналогичным образом в силу линейности (из определения) сохраняются отношения (длин отрезков и расстояния между прямыми)
3. отношения длин отрезков сохраняются
4. при центральной симметрии для любых двух симметричных точек центр есть середина соответствующего отрезка, а так как отношения сохраняются, то получаем сохранение определения

Th *Изменение площадей*

При аффинном преобразовании, чей дифференциал имеет матрицу A, площадь фигуры умножается на $|\det A|$

Покажем на примере параллелограмма. Достаточно расписать определение ориентированной площади, применить преобразование и взять модуль (настоящая площадь неотрицательна)

Th При аффинном преобразовании порядок алгебраической кривой не меняется

Так как при аффинном преобразовании координаты не меняются, то не поменяется и многочлен, задающий кривую (скалярное произведение коэффициентов на переменные), как и его порядок

Структура линейного преобразования

9 Инвариантные подпространства. Ограничение оператора на инвариантное подпространство. Фактороператор

9.1 Инвариантные подпространства

Опр *Инвариантное подпространство* Образ лежит в нём же

Утв Сумма и пересечение инвариантных подпространств инвариантно

Доказывается поэлементной проверкой определения

Утв В случае коммутирующих преобразований ядро и образ одного инвариантно относительно другого

Доказывается по определению

Следствие Ядро и образ многочлена $f(\varphi)$ инвариантны относительно $\varphi \in L(V,V)$

Утв U инвариантнно относительно $\varphi \Leftrightarrow U$ инвариантнно относительно $\varphi - \lambda, \lambda \in \mathbb{F}$

Доказывается проверкой в одну сторону и путём взятия другой λ в обратную

Таким образом, в случае $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda) \subset U \to U$ инвариантно φ

9.2 Ограничение оператора на инвариантное подпространство

Утв Если U инвариантно относительно φ – изоморфизма, то U инвариантно относительно φ^{-1}

Достаточно рассмотреть сужение φ на U. В силу инъективности это будет изоморфизм. Тогда обращаем его и получаем требуемое

Утв Если U_k инвариантно относительно линейное оболочки первых k векторов $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, i \in \overline{k+1,n}, j \in \overline{1,k}$, то есть матрица имеет блочно-диагональный вид, где второй квадрант есть сужение φ на U_k

Достаточно воспользоваться определением матрицы линейного преобразования и вспомнить, что у нас базис не меняется

Утв Если $\varphi \in L(V,V)$, а $P(\varphi)$, $\deg P = k$ вырожден, то существует не более чем k-мерное инвариантное подпространство V относительно φ

1. Возьмём произвольный элемент ядра a и покажем, что $U =< a, \varphi(a), \dots, \varphi^{k-1}(a) >$ инвариантно относительно φ
2. В силу индуктивности φ^j, достаточно доказать лишь что $\varphi^k(a) \in U$
3. Подставляем $\varphi(a)$ в многочлен и получаем, что $\varphi^k(a)$ линейно выражается через остальные члены, что доказывает инвариантность и утверждение

9.3 Фактороператор

Опр *Фактороператор* Линейный оператор, определённый формулой $(v+U) = \varphi(v) + U, \forall v \in V$

10 Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования

10.1 Собственные векторы и собственные значения

Опр *Собственное значение* Существует $a \in V$:
Опр *Собственный значение* Ненулевой вектор a преобразования ...
Утв Ненулевой вектор a собственный для $\varphi \Leftrightarrow < a >$ инвариантна относительно φ
В силу эквивалентности инвариантности наличию собственного значения
Утв Ненулевой вектор a собственный для φ с собственным значением $\lambda \Leftrightarrow a \in \ker(\varphi - \lambda)$
Достаточно вспомнить определение ядра

10.2 Собственные подпространства

Опр *Собственное подпространство* Ядро $\ker(\varphi - \lambda)$, содержащее ...
Утв Сумма подпространств V_{λ_i} прямая

1. От противного: возьмём $a_1 \in V_{\lambda_1} \cap \sum_i V_{\lambda_i}$, то есть $a_1 = \sum_i a_i$
2. Применим к этому равенству преобразование $\sqcap_2^k(\varphi - \lambda_k)$
3. Справа у нас получится ноль, а слева – нет, w

10.3 Характеристический многочлен и его инвариантность

Опр *Характеристический многочлен* Функция от константы. Не забыть про обозначение
Опр *Характеристическое уравнение* Равенства многочлена нулю
Опр *Характеристические числа* Корни арактерестического многочлена
Характеристический многочлен можно записать и с учётом алгебраической кратности его корней
Утв Характерестический многочлен имеет вид $(-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}trA + \dots + |A|$
Достаточно знать, что определитель есть функция от всех элементов матрицы, затем просто расписать коэффициенты перед требуемыми степенями

Отсюда, в соответствии с теоремой Виета, сумма всех характеристических чисел равна следу, а произведение есть $\det A$

Стоит учесть, что данное утверждения верно лишь в $\mathbb{C}$. В $\mathbb{R}$ собственные значения есть только вещественные характеристические числа

10.4 Определитель и след преобразования

Утв Если матрица оператора верхнетреугольна, то характеристические числа характеристического многочлена совпадают с диагональными элементами

Верно в силу того, что определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

Th *Инвариантность характеристического многочлена*

Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса

Достаточно записать характеристическое уравнение в двух базисах, перейти от одного к другому с помощью матрицы перехода и преобразовать выражение

Следствие Определитель, след, набор характеристических чисел матрицы оператора не зависят от выбора базиса

Все вышеперечисленные термины выражаются через коэффициенты характеристического многочлена

11 Линейная независимость собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Критерий диагонализируемости преобразования

11.1 Линейная независимость собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям

Th λ – собственное значение $\Leftrightarrow$ λ характеристическое число

1. λ – собственное значение $\Leftrightarrow \ker(\varphi - \lambda) \neq O$
2. $\Leftrightarrow$ соответствующая СЛУ имеет нетривиальное решение
3. $\Leftrightarrow$ соответствующая квадратная матрица вырождена
4. $\Leftrightarrow$ соответствующий определитель равен нулю
5. $\Leftrightarrow$ λ характеристическое число

Th Собственные векторы различных собственных значений л.н.з.

1. Доказывается по индукции. База очевидна
2. Докажем переход. Для этого рассмотрим $k+1$ собственный вектор, из которых k заведомо л.н.з
3. Применим к их л.к. φ. Из неё вычтем правильную л.к. первых k векторов (чтобы обнулить α_{k+1})
4. Итого, k коэффициентов нули, а значит, и $k+1$-й тоже, то есть система осталась л.н.з.

11.2 Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения

Опр *Геометрическая кратность* Размерность собственного подпространства

Th Геометрическая кратность не превосходит алгебраическую

1. Рассмотрим собственное пространство размерности s и произвольный базис в нём. Дополним его до базиса во всём пространстве
2. Запишем матрицу линейного оператора. Она будет иметь блочно-диагональный вид
3. Вычислим характеристический многочлен этой матрицы и непосредственно убедимся в доказанном утверждении (потому как в оставшемся многочлене собственное значение может быть корнем; в противном случае достигается равенство)

11.3 Критерий диагонализируемости преобразования

Опр *Диагонализируемое преобразование* Существует базис, в котором матрица имеет диагональный вид

Th *Первый критерий диагонализируемости*
Если $\varphi \in L(V, V)$ имеет попарно различные собтсвенные значения λ_i кратнойстей s_i, то следующие условия эквивалентны:

1. φ диагонализируем
2. В пространстве существует базис из собственных векторов
3. $\dim V_{\lambda_i} = s_i$
4. $V = \oplus_i V_{\lambda_i}$

- $1 \Leftrightarrow 2$: в силу того, что матрица A есть склейка применения φ на базисные векторы
- $2 \Rightarrow 3$: пользуемся необходимыми условиями и суммируем $t_i \le \dim V_{\lambda_i} \le s_i$ по i
- $3 \Rightarrow 4$: так как собственные пространства разных собственных значений не пересекаются, то они разлагаются в прямую сумму. Сумма их размерностей будет $\sum_i s_i = n$, то есть всего пространства
- $4 \Rightarrow 2$: достаточно выбрать базис в каждом подпространстве и объединить. Ранее доказывалось, что он будет базисом во всём пространстве (второй критерий прямой суммы)

Следствие *Достаточно условие диагонализируемости*
Если характеристический многочлен имеет n различных корней из поля, то φ диагонализируем
Действительно, в таком случае у каждого собственного подпространство размерность единица и они располагаются на главной диагонали

12 Инвариантные подпространства малой размерности в вещественном случае

Th

1. В $\mathbb{C}$ у φ $\exists$ одномерное инвариантное подпространство
2. В $\mathbb{R}$ у φ $\exists$ одномерное инвариантное подпространство в случае нечётного n
3. У φ $\exists$ ненулевое инвариантное подпространство размерности не выше 2

1. По основной теореме алгебры у любого многочлена есть по крайней мере один комплексный корень
2. Из анализа известно, что в таком случае у многочлена есть по крайней мере один вещественный корень
3. Если у многочлена есть вещественный корень, то у него есть и одномерное инвариантное подпространство. Иначе рассмотрим комплексный корень. Из анализа известно, что его сопряжённый тоже будет корнем характеристического многочлена. Тогда многочлен P с этими коэффициентами будет вещественен, а $\det P(A) = 0$ в силу наличия соответствующих собственных значений. В таком случае ранее было доказано, что у φ $\exists$ двумерное инвариантное подпространство

13 Треугольный вид матрицы преобразования. Теорема Гамильтона-Кэли

13.1 Треугольный вид матрицы преобразования

Лемма $\exists$ $(n-1)$-мерное инвариантное подпространтво

1. Возьмём произвольное $_0$ и сделаем выводы по размерности ядра и образа для $\varphi - {}_0$
2. Выясним существования $U : \dim U = n - 1$ – не более чем надмножество $\operatorname{Im} \varphi - {}_0$. Для его построения возьмём базис в образе и дополним его до базиса во всём V

3. В конце возьмём базис для U, задаваемый требуемое подпространство

Лемма *О треугольном виде*
$\exists$ базис, в котором матрица $\varphi \in L(V, V)$ верхнетреугольна с заданным порядком расстоновки характеристических числе по диагонали

1. Возьмём произвольные $_0$ и инвариантное $n-1$ подпространство
2. Далее получим вид для $\varphi : \varphi = \lambda_0 e_n + \sum_1^{n-1} \mu_i f_i$
3. Сделаем вывод о матрице оператора, характеристическом многочлене сужения
4. Затем применяем спуск индукции, чтобы поместить на главную диагональ нужные базисные векторы

13.2 Теорема Гамильтона-Кэли

Th *Гамильтона-Кэли*
Характеристический многочлен является аннулирующим для матрицы оператора
Это следует из того, что $s_i \geq m_i$, то есть характеристический многочлен содержит в себе минимальный (то есть аннулирующий)

14 Корневые подпространства, их размерность. Разложение пространства в прямую сумму корневых. Жорданова нормальная форма, её существование и единственность. Минимальный многочлен, критерий диагонализируемости оператора в терминах минимального многочлена

14.1 Корневые подпространства, их размерность

Опр *Корневое подпространство* Первое стабильное ядро
Притом корневое пространство равно и все стабильным ядрам большей размерности
Л2 $\dim \ker(\varphi - \lambda_i)^{s_i} \geq s_i$

1. Запишем матрицу в верхнетреугольном виде, притом расположим λ_i в первых s_i диагональных клетках
2. Применим к матрице преобразование $\varphi - \lambda_i$. Получим нильпотентный левый верхний блок
3. Возведём матрицу в нужную степень с учётом перемножения блочных матриц и получим левый верхний блок нулей
4. Тогда получим, что первые s_i векторов принадлежат соответствующему ядру. А так как такими же могут быть и последующие, то возможно строгое неравенство

Следствие $\dim V_i^\lambda \geq s_i$
В силу суммы размерностей ядра и образа

14.2 Разложение пространства в прямую сумму корневых

Л1 Сумма любых степений ядер $\varphi - \lambda_i$ прямая

1. От противного: пусть $\exists a_1 = V^{\lambda_1} \cap \sum_2^k V^{\lambda_i}$
2. Тогда этот вектор можно разложить по этим подпространствам
3. Применим к обеим частям равенства $\psi = \prod_2^k \varphi - \lambda_i$
4. Тогда справа получим стороны получим ноль, а слева – нет, w

В частности, сумма корневых пространств прямая
Th

1. $V = \oplus_i V^{\lambda_i}$

2. $\dim V_i^\lambda = s_i$

3. $m_i \le s_i$, то есть стабилизация ядер наступает не позже s_i шага

1. В силу $\dim V_i^\lambda \ge s_i$ сложим неравенства по всем i. Тогда $\sum_i s_i \ge n$, однако у нас $\dim V = n$, поэтому $V = \oplus_i V^{\lambda_1}$

2. Предыдущий пункт возможен лишь когда во всех неравенствах выполнено равенство

3. $\dim\ker(\varphi - \lambda_i)^{s_i} \ge s_i = \dim V_i^\lambda$, однако $\ker(\varphi - \lambda_i) \subset V_i^\lambda$. В противном случае не выполнена формула суммы размерностей ядра и образа

14.3 Жорданова нормальная форма, её существование и единственность

Опр *Жорданова клетка* Верхнетреугольная матрица, в которой на главной диагонали ...
Опр *Жорданова матрица, ЖНФ* Блочно-диагональная матрица, каждый блок которой ...
Опр *Жорданов базис* Базис, в котором оператор имеет ЖНФ
Опр *Жорданова цепочка, присоединённый вектор*

1. Рассмотрим жорданову клетку запишем её действие в строчном виде

2. Рассмотрим новый оператор $\psi = \varphi - \lambda_0$. Под его действием векторы сваливаются в ядра меньшего по степени оператора

3. Полученная последовательность называется жордановой цепочкой

4. Вектор над данным называется присоединённым. Ясно, что он может быть и не единственен

Th *Существование ЖНФ*
Существует базис, в котором матрица оператора жорданова

1. Требуется доказать, что существует базис, являющийся объединением жордановых цепочек, то есть так надо сделать в каждом корневом подпространстве

2. Рассмотрим нильпотентный оператор $\psi : V_i^\lambda \to V_i^\lambda$, являющийся ограничением оператора $\varphi - \lambda_i$ на V_i^λ

3. Заметим, что если $a \in \ker\psi^t$, то $a \in \ker\psi^{t-1}$ (непосредственно проверяется)

4. Теперь рассмотрим вложенную цепочку ядер и определим к последнему, V_i^λ прямое (нулевое дополнение) W_{m_i+1} до следующего ядра (которое будет являться самим V_i^λ)

5. Рассмотрим ядро $\psi(W_{t+1})$, для которого выполнено три условия

6. Из них мы можем определить W_t как прямое дополнение $\ker\psi^{t-1}$ до $\ker\psi^t$ (дополним до базиса)

7. Таким образом, применяя оператор $\psi(W_{t+1})$ мы спускаемся вниз по цепочке и, дополнив до базиса, продолжаем спуск

8. Жорданов базис есть объединение базисов W_i каждое из которых лежит в $\ker\psi^i$, то есть базисных разных W_i пересекаются тривиально (к том же мы пользовались л.н.з. дополнением)

Th *Единственность ЖНФ*
Для данного базиса ЖНФ единственна с точностью до перестановки жордановых клеток

1. Требуется доказать, что $\forall\lambda_i$ количество жордановых цепочек данной длины в жордановом базисе определено однозначно

2. Рассмотрим все цепочки, соответствующие фиксированному λ_i. Их линейная оболочка находится $\in V_i^\lambda$, $\dim < B_{\lambda i} > \le s_i$

3. Так как всего в (жордановом) базисе у нас n векторов, а $< B_{\lambda i} >$ и составляют этот базис, то в неравенствах выше достигается равенство

4. Рассмотрим нильпотентный оператор $\psi : V_i^\lambda \to V_i^\lambda$, являющийся ограничением оператора $\varphi - \lambda_i$ на V_i^λ

5. Его образ состоит из всех не верхних векторов в цепочках, образ его образа состоит из всех векторов, кроме ...

6. Введём обозначения для количества жордановых цепочек длины d, отвечающих λ_i за c_i^d

7. Составим уравнения на их суммы, чья система легко решается и однозначно выражается через характеристики оператора φ, то есть инвариантно

Из указанного рассмотрения нетрудно заметить, что степень $\lambda - \lambda_i$ характеристического многочлена s_i равна длине всех цепочек, отвечающих $\forall \lambda_i$, а степень m_i минимального многочлена равна длине максимальной (иначе оператор обнулится не полностью, не по всем цепочкам-базисным векторам)

14.4 Минимальный многочлен, критерий диагонализируемости оператора в терминах минимального многочлена

Опр *Минимальный многочлен* Многочлен, обгуляющий оператор, минимальной степени
Утв Минимальный многочлен является аннулирующим

1. Хотя бы один аннулирующий многочлен существует, ведь если взять степени оператора, которые будет больше размерности пространства, то эта система будет л.з., а значит, у соответствующего многочлена будут ненулевые коэффициенты

2. Теперь возьмём произвольный вектор $a \in V = \oplus_i V^{\lambda_i}$

3. Так как ядра каждого одночлена содержатся в ядре минимального, то каждый член разложения из ядра минимального многочлена. Тогда и a тоже

4. Итого, в силу произвольности a, минимальный многочлен аннулирующий

Утв Минимальный многочлен есть $\prod_i (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$

1. От противного: пусть хотя бы одна степень тут меньше, то есть БОО $m_1^{'} < m_1$

2. Тогда $\dim \ker(\varphi - \lambda_1)^{m_1^{'}} < s_1$ по лемме

3. Если мы сложим все ядра такого вида то получи строгое неравенство. То есть существуют вектор пространства $a : \mu_\varphi(\varphi(a)) \neq 0$, то есть новый многочлен не минимальный

Th *Второй критерий диагонализируемости*
Если $\varphi \in L(V, V)$ имеет попарно различные собтсвенные значения λ_i кратнойстей s_i, то следующие условия эквивалентны:

1. φ диагонализируем

2. $V_{\lambda_i} = V^{\lambda_i}$

3. μ_φ раскладывается на различные линейные множители

- $1 \Leftrightarrow 2 :$ в силу того, что $V_{\lambda i} \subseteq V_i^\lambda$ и $V = \oplus_i V_{\lambda_i}$, достигается равенство множеств
- $2 \Rightarrow 3 :$ из 2 следует, что $m_i = 1 \forall i$, поэтому все n множителей различны

Билинейные формы

15 Билинейные (полуторалинейные) формы (функции). Координатная запись билинейной формы. Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса

15.1 Билинейные (полуторалинейные) формы (функции)

Опр *Биленейная форма, полуторалинейное отображение* Не забыть сопрячь на втором аргументе
Опр *Матрица билинейной формы* Её элемент есть результат применения формы на пару базисных векторов

15.2 Координатная запись билинейной формы

Th *Координатная запись*
$\beta(x,y) = x^t B\overline{y}$
Достаточно представить векторы в координатной записи и раскрыть по билинейности
Утв Если произвольно отображения удовлетворяет равенству $\beta(x,y) = x^t B\overline{y}$, то это билинейная форма
Так как запись верна для всех векторов, то она верна и для базисных, к чему мы её и применим. Далее проверим аксиомы и убедимся, что перед нами билинейная форма

15.3 Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса

Th *Изменение матрицы при замене базиса*
$\beta' = S^t B\overline{S}$
Достаточно вставить матрицу перехода на нужные места

16 Симметричные билинейные (полуторалинейные) формы. Взаимнооднозначное соответствие с квадратичными (эрмитовыми) формами

16.1 Симметричные билинейные (полуторалинейные) формы

Опр *(Эрмитова) симметричная форма* $\beta(x,y) = \overline{\beta(y,x)}$
Th Билинейная форма симметрична $\Leftrightarrow B = B^*, B^* = \overline{B^t}$
$\Rightarrow$: по определению билинейной формы $\Leftrightarrow$: надо воспользоваться тем, что результат билинейной формы есть число (матрица 1 на 1), а затем подогнать под определение, используя транспонирования и сопряжение

16.2 Взаимно-однозначное соответствие с квадратичными (эрмитовыми) формами

Опр *Квадратичная (эрмитова) форма* $q(x) = \beta(x,x)$, порождённая билинейной
Учтём, что теперь $\beta(a,a) = \overline{\beta(a,a)}, q(a) = x^t B\overline{x}$
Th (Эрмитова) квадратичная форма порождается ровно одной билинейной $\Leftrightarrow B = B^*, B^* = \overline{B^t}$

1. Требуется доказать, что значение билинейной формы однозначно восстанавливается по квадратичной
2. В $\mathbb{R}$ достаточно рассмотреть $q(x+y)$
3. В $\mathbb{C}$ достаточно рассмотреть $q(x+y)$ и $iq(x+iy)$, не забыв, где надо, про комплексное сопряжение и что $i^2 = -1$
4. Сделаем вывод о матрице оператора, характеристическом многочлене сужения
5. Затем применяем спуск индукции, чтобы поместить на главную диагональ нужные базисные векторы