Конспект билетов

Аналитическая механика

Содержание

1 Кинематика точки. Траектория, скорость и ускорение точки. Скорость и ускорение точки в полярных координатах

1.1 Кинематика точки

Опр *Кинематика точки. Траектория, скорость и ускорение точки*

Раздел механики, изучающий математическое описание (средствами геометрии, алгебры, математического анализа...) движения материальной точки без рассмотрения причин движения (массы, сил и т. д.)

Опр *Траектория*

Опр *Скорость*

Опр *Ускорение*

1.2 Скорость и ускорение точки в полярных координатах

Опр *Радиальная ось*

Опр *Трансверсальная ось*

Для того чтобы получить скорость и ускорение в полярных координатах, достаточно выразить x и y в терминах r, φ, продифференцировать нужное число раз и вычленить базисные векторы

2 Кинематика точки. Естественный трёхгранник. Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное

2.1 Кинематика точки. Естественный трёхгранник

Опр *Естественный способ задания движения*

Опр *Естественный трёхгранник*

2.2 Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное

Запишем две формулы из дифференциальной геометрии и продифференцируем r и v с их учётом. Получим две компоненты ускорения: тангенциальное и нормальное

Theorem *Гюйгенса о разложении ускорения*

3 Криволинейные координаты точки. Коэффициенты Ламе. Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах. Скорость точки в цилиндрических и сферических координатах

3.1 Криволинейные координаты точки

Опр *Криволинейные координаты*

Опр *Первая координатная линия*

Опр *Первая координатная ось*

Аналогично определяются и последующие координатные линии и оси

3.2 Коэффициенты Ламе

Опр *Единичный вектор координатной оси*

Опр *Коэффициент Ламе*

Опр *Ортогональные криволинейные координаты*

3.3 Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах

Скорость находится по определению. Ускорение смотреть в конспекте Холостовой с 8 страницы

3.4 Скорость точки в цилиндрических и сферических координатах

Опр *Цилиндрическая система координат*
Опр *Сферическая система координат*
Скорость точки в этих координатах находится с помощью коэффициентов Ламе

4 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела. Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса)

4.1 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела

Опр *Поступательно движущаяся и связанная системы координат*
Опр *Углы Эйлера*
Углы, описывающие поворот абсолютно твердого тела в трёхмерном евклидовом пространстве
Опр *Линия узлов*
Пересечение координатных плоскостей начальной и конечной СК
Опр *Угол прецессии, нутации, собтвенного вращения*
Переход от одной системы координат к другой посредством вращений на углы, можно задать с помощью матриц поворота
Матрица поворота (или матрица направляющих косинусов)
Опр *Ортогональная матрица, которая используется для выполнения собственного ортогонального преобразования в евклидовом пространстве. При умножении любого вектора на матрицу поворота длина вектора сохраняется. Определитель матрицы поворота равен единице*
Матрицы поворота вокруг различных осей выглядят по-разному
Опр *Угловая скорость*
Физическая величина, характеризующая быстроту и направление вращения материальной точки или абсолютно твёрдого тела относительно оси
Опр *Угловое ускорение*

4.2 Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса)

Theorem *Формула Эйлера*
Формула *Ривальса* Получается формальным дифференцированием формулы Эйлера

5 Плоское движение твёрдого тела. Мгновенный центр скоростей. Мгновенный центр ускорений

5.1 Плоское движение твёрдого тела

Опр *Плоское движение*

5.2 Мгновенный центр скоростей

Theorem *О мгновенном центре скоростей*
Опр *Мгновенный центр скоростей*

5.3 Мгновенный центр ускорений

Theorem *О мгновенном центре ускорений*
Опр *Мгновенный центр ускорений*
Мгновенный центр ускорений можно построить за два шага

6 Кинематические инварианты. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось

6.1 Кинематические инварианты

Опр *Инвариант*
Величина, остающаяся неизменной при преобразованиях
Опр *Первый кинематический инвариант*
Опр *Второй кинематический инвариант*
Отсюда следует, что величины проекции скоростей двух точек поступательного движущегося тела на прямую, их соединяющуюся, равны

6.2 Кинематический винт

Опр *Кинематический винт*
Опр *Параметр винта*

6.3 Мгновенная винтовая ось

Если расписать итоговую скорость точки по координатам, то можно получить
Опр *Мгновенная винтовая ось*
Опр *Правый и левый винт*

7 Алгебра кватернионов

Опр *Кватернион, кватернионные единицы*
Свойства *Кватернионного сложения*
Опр *Скалярная и векторные части кватерниона*
Свойства *Кватернионного умножения единиц*
Свойства *Кватернионного умножения*
Опр *Сопряжённый кватернион*
Опр *Норма кватерниона, нормированный кватернион*
Опр *Обратный кватернион*
Форма *Тригонометрическая записи кватерниона*
Результат умножения кватернионов в таком случае получается из свойств тригонометрии
Аналог *Формулы Муавра*

8 Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела. Теорема Эйлера о конечном повороте

8.1 Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела

Опр *Неподвижный и связанный базисы*
Theorem

8.2 Теорема Эйлера о конечном повороте

Theorem *Эйлера о конечном повороте*
Если воспользоваться предыдущей теоремой, то видно, что при повороте положение e сохраняется, а j поворачивается

9 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах. Параметры Родрига-Гамильтона. Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой

9.1 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах

Можно показать, что результирующий кватернион после N поворотов будет записан в обратном порядке в одном базисе

9.2 Параметры Родрига-Гамильтона

Опр *Параметры Родрига-Гамильтона*
Если записать преобразованные от смены базисные единицы и подставить в новый кватернион, то он будет выражен в исходном базисе через параметры Родрига-Гамильтона. Порядок записи кватернионов в результирующем повороте будет уже прямой

9.3 Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой

Theorem *Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой*

10 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона). Прецессионное движение твёрдого тела

10.1 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона)

Опр *Угловая скорость* Через предел
Уравнение *Пуассона*
Можно показать, что два определения угловой скорости эквивалентны. В конце мы придём к уравнению Эйлера (то есть верному утверждению), а значит мы были правы

10.2 Прецессионное движение твёрдого тела

Рассмотрим вращение оси тела вокруг неподвижной вращающейся оси и решим уравнение Пуассона для этого случая

11 Кинематика сложного движения точки. Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении

11.1 Кинематика сложного движения точки

Опр *Относительное, переносное и абсолютное движение*
Можно посчитать относительные и абсолютные производные радиус-вектора и получить их связь

11.2 Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении

Опр *Относительные, переносные и абсолютные скорость и ускорение*
Theorem *О сложении скоростей*
Theorem *О сложении ускорений или теорема Кориолиса*
Опр *Кориолисово ускорение*

12 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг пересекающихся осей. Кинематические уравнения Эйлера

12.1 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг пересекающихся осей

Сложение *Поступательных движений*
Сложение *Вращательных движений*

12.2 Кинематические уравнения Эйлера

Если тело участвует одновременно в трёх вращениях, то записав суммарное вращение в проекциях на связанные оси, имеем
Уравнения *Эйлера кинематические*

13 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг параллельных осей. Пара вращений

13.1 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг параллельных осей

Сложение *Сонаправленных вращений*
Сложение *Разнонаправленных вращений*

13.2 Пара вращений

Пара *Вращений*
Опр *Момент и плечо пары вращений*
Поступательное движение можно заменить на пару вращений бесчисленным множеством способов

14 Сложное движение твёрдого тела. Общий случай сложения движений

14.1 Сложное движение твёрдого тела

Лемма

14.2 Общий случай сложения движений

В общем случае движения приведём все поступательные и вращательные к единой точке приложения по алгоритму
Алгоритм *Приведения к простому движению*

15 Момент силы относительно точки и оси, главный вектор и главный момент сил системы. Элементарная работа сил системы. Работа сил, приложенных к твёрдому телу. Силовое поле. Силовая функция. Потенциал

15.1 Момент силы относительно точки и оси, главный вектор и главный момент сил системы

Опр *Сила*
Мера воздействия тел друг на друга, причина ускорения точки
Аксиома *Инерции*
Опр *Инертность, масса*
Закон *Динамики основной*
Аксиома *Взаимодействия материальных точек*
Аксиома *Независимости действия сил (принцип суперпозиции)*
Опр *Главный вектор всех сил системы*
Опр *Момент силы относительно точки*
Опр *Момент силы относительно оси*
Можно показать корректность этого определения
Опр *Главный момент сил системы*

15.2 Элементарная работа сил системы

Опр *Элементарная работа*
Можно получить выражение для полной работы

15.3 Работа сил, приложенных к твёрдому телу

В общем случае работа внутренних сил ненулевая. Запишем суммарную работу всех сил системы

15.4 Силовое поле

Опр *Силовое поле*
Векторное поле в пространстве, в каждой точке которого на точку действует определённая по величине и направлению сила (вектор силы)

15.5 Силовая функция

Опр *Силовая функция*
Опр *Потенциальное поле*
Опр *Потенциальная сила*
Опр *(Не)стационарное поле*

15.6 Потенциал

Опр *Потенциал*
Скалярная величина, характеризующая силовое поле
Утв
Опр *Потенциальная энергия*
Скалярная физическая величина, представляющая собой часть полной механической энергии системы, находящейся в поле консервативных сил

16 Количество движения. Центр масс. Теорема об изменении количества движения системы. Теорема о движении центра масс

16.1 Количество движения

Опр *Количество движения (импульс)*

16.2 Центр масс

Опр *Центр масс системы*

16.3 Теорема об изменении количества движения системы

Theorem *Об изменении количества движения системы*

16.4 Теорема о движении центра масс

Theorem *О движении центра масс*

17 Главный момент количества движения (кинетический момент) системы относительно заданного центра. Кинетический момент системы для ее движения относительно центра масс. Теорема Кенига о вычислении кинетического момента

17.1 Главный момент количества движения (кинетический момент) системы относительно заданного центра

Опр *Момент импульса (кинетический момент) точки*

17.2 Кинетический момент системы для ее движения относительно центра масс

Опр *Кинетический момент (главный момент количества движения) системы*
Опр *Кинетический момент системы относительно точки*
Можно показать корректность этого определения
Покажем связь главных моментов двух точек в общем и частном случаях

17.3 Теорема Кенига о вычислении кинетического момента

Опр *Кёнигова система координат*
Найдём выражения для скорости и кинетического момента точки и системы
Если под движением системы относительно центра масс понимать движение в Кёниговой системе координат, то верна
Theorem *Кёнига о кинетическом моменте*

18 Теорема об изменении кинетического момента системы

Посчитаем производную кинетического момент относительно точки
Theorem *Об изменении кинетического момента системы*
Также рассмотрим частные случаи теоремы

19 Кинетическая энергия системы. Теорема Кенига о вычислении кинетической энергии. Теорема об изменении кинетической энергии системы. Закон сохранения полной механической энергии системы

19.1 Кинетическая энергия системы

Опр *Кинетическая энергия системы*
Запишем, как она преобразуется при смене системы координат

19.2 Теорема Кенига о вычислении кинетической энергии

В частном случае прошлых выкладок получаем
Theorem *Кенига о вычислении кинетической энергии*

19.3 Теорема об изменении кинетической энергии системы

Theorem *Об изменении кинетической энергии системы*

19.4 Закон сохранения полной механической энергии системы

Закон *Сохранения полной механической энергии системы*

20 Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчёта. Переносная и кориолисова силы инерции. Основные теоремы динамики для движения относительно центра масс

20.1 Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчёта. Переносная и кориолисова силы инерции

Выразим относительное ускорение в неИСО
Опр *Переносная и кориолисова силы инерции*
Закон *Основной динамики в неИСО*
Theorem *Об изменении количества движения*
Опр *Главный вектор внешних сил и сил инерции*
Theorem *О движении центра масс*
Для неподвижной точки в неИСО справедлива
Theorem *Об изменении кинетического момента*
Theorem *Об изменении кинетической энергии*

20.2 Основные теоремы динамики для движения относительно центра масс

Все теоремы далее записаны в Кёниговой системе координат
Theorem *Об изменении количества движения*
Theorem *Об изменении кинетического момента*
Theorem *Об изменении кинетической энергии*

21 Движение материальной точки в центральном поле. Интеграл площадей; второй закон Кеплера. Уравнение Бине

21.1 Движение материальной точки в центральном поле

Опр *Центральное поле* Сила должна удовлетворять условию

21.2 Интеграл площадей; второй закон Кеплера

Опр *Интеграл площадей*
Опр *Радиальная и трансверсальная скорости*
Форма *Полярная интеграла площадей*
Опр *Секториальная скорость точки*
Закон *Кеплера II*

21.3 Уравнение Бине

Если переписать основной закон динамики в центральном поле, то получим
Уравнение *Бине*

22 Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция. Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта

22.1 Ортогональное дополнение подпространства

Опр *Ортогональное дополнение* Множество всех векторов, ортогональных ...
Пространство образует со своим ортогональным дополнением прямую сумму
Th Сумма подпространства и его ортогонального дополнения есть всё евклидово пространство

1. Достаточно научиться представлять любой вектор пространства в виде суммы U и U^T
2. Выберем ортогональный базис в U и запишем его линейную комбинацию + вектор $c \in U^T$
3. Теперь надо подобрать такие коэффициенты, чтобы $c \perp U$
4. Заменим условие на эквивалентные, вспомним про ортонормированность базиса и выразим коэффициенты

Следствие 1 $\dim U = k, \dim E = n \to \dim U^T = n - k$
Следствие 2 $(U^T)^T = U$
Потому как одно пространство вложено в другое и у них, по предыдущему следствию, равны размерности
Следствие 2 В конечномерном случае данную ортогональную систему из ненулевых векторов можно дополнить до ОНБ
Достаточно дополнить векторами из ортогонального дополнения

22.2 Ортогональная проекция

Опр *Ортогональная проекция* Проекция на подпространство вдоль (параллельно) U^T
Утв *Формула проекции*
$pr_U \overline{a} = \sum_i \frac{(a_i, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i$
Следствие последней теоремы
Утв *Ортогональное дополнение в координатах*
Ортогональное дополнение есть пространство решений уравнения $(A_1, \ldots, A_n)^* x = 0$
$x \in A^T \Leftrightarrow x \perp A \Leftrightarrow A_i \perp x \Leftrightarrow A_i^* x = 0$ и перейдём к матричной записи. Решение полученного уравнения и есть ортогональное дополнение

22.3 Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта

Утв Существует метод найти ортогональный базис в заданном подпространстве

- Рассмотрим линейную оболочку подпространства. Если $a_1 = 0$, то выкинем его из линейной оболочки
- Если $a_1 \neq 0$, то оставим его таким, какой он есть: $b_1 = a_1$
- Если все a_k до текущего уже ортогонализованы, то $b_{k+1} = a_{k+1} - pr_{<b_1,\ldots,b_k>} a_{k+1}$

При необходимости, полученную систему можно нормировать для получения ОНБ

23 Описание линейных функций на евклидовом (унитарном) пространстве

24 Преобразование, сопряжённое данному. Его линейность, существование и единственность, его матрица в ОНБ. Теорема Фредгольма

24.1 Преобразование, сопряжённое данному

Опр *Сопряжённое преобразование* $\varphi^* : (\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))$

24.2 Его линейность, существование и единственность, его матрица в ОНБ

Утв $\psi = \varphi^* \Leftrightarrow B = A^*$
Достаточно расписать результат формы на паре векторов, определение сопряжённого преобразование и взглянуть на матрицы
Следствие 1 φ^* единственно
Потому как у каждой матрицы есть единственная сопряжённо-транспонированная
Следствие 1 Для сопряжённых преобразований справедливо 4 свойства
Первые три следуют из аналогичных свойств для матриц, а последнее из свойств комплексного сопряжения
Th U инвариантно относительно $\varphi \Leftrightarrow U^\perp$ инвариантно относительно φ^*
Достаточно вспомнить определения инвариантности, ортогонального дополнения и сопряжённого образования

24.3 Теорема Фредгольма

Th *Фредгольма*
$\ker \varphi^* = (\operatorname{Im} \varphi)^\perp$

1. Докажем вложенность ядра в чужой образ и равенство размерностей. Это будет означать равенство
2. Равенство размерностей доказывается по прошлым утверждениям
3. Чтобы доказать вложенность рассмотрим произвольный вектор ядра, воспользуемся определениями ортогонального дополнения, образа и сопряжённого преобразования

25 Самосопряжённые линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов

25.1 Самосопряжённые линейные преобразования

Опр *Сопряжённое линейное преобразование* $\varphi^* = \varphi$
В таком случае $(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))$

25.2 Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов

Th φ самосопряжено $\Leftrightarrow A = A^*$

Аналогично доказательству для сопряжённых преобразований

Th У самосопряжённого преобразования все характеристические числа действительны

В $\mathbb{C}$ достаточно расписать определение самосопряжённого преобразования, собственного числа и прийти к равенству $\lambda = \overline{\lambda}$, что означает действительность

Так как в $\mathbb{C}$ доказано, что характеристическое уравнение имеет лишь действительные корни. А симметрические вещественные матрицы являются частным случаем эрмитовых, поэтому теорема доказана и в $\mathbb{R}$

Утв У самосопряжённого преобразования различные корневые подпространства перпендикулярны

Достаточно рассмотреть два вектора из разных корневых подпространств, расписать определение самосопряжённого преобразования, собственного числа и прийти к единственному случаю $(a_i, a_j) = 0$

Th *Основная теорема о самосопряжённых преобразованиях*

Для самосопряжённого преобразования сущетсвует ОНБ из собственных векторов

1. Пусть $\dim E = n$. В случае $n = 1$ очевидно
2. Ортогональное дополнение первого вектора ОНБ инвариантно относительно $\varphi*$, как и относительно φ в силу самосопряжённости
3. Поэтому мы получили ортонормированный базис на сужении размерности $n - 1$ и их объединение будет ОНБ на подпространстве соответствующей размерности

26 Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного и ортогонального преобразования. Нормальные преобразования унитарных пространств

26.1 Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства

Опр *Ортогональное (униатрное) преобразование* $(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$

Утв φ ортогонально (матрица перехода между ОНБ) $\Leftrightarrow$ φ изоморфизм евклидовых (унитарных) пространств

$\Rightarrow$: в силу биективности (ОНБ переходит в ортонормированную систему из n векторов, то есть в ОНБ, потому что скалярное произведение сохранено) $\Leftarrow$: достаточно расписать скалярное произведение двух произвольных векторов и воспользоваться изоморфностью (идея как при изоморфизме линейных пространств). Получим сохранение скалярного произведения и ортогональность φ по определению

Следствие 1 Ортогональное преобразование переводит ОНБ в ОНБ

Следствие 2 Преобразование ортогонально $\Leftrightarrow$ его матрица ортогональна

Потому как ортогональная матрица – матрица перехода между ОНБ

Следствие 3 Преобразование ортогонально $\Leftrightarrow$ φ обратимо и матрица $\varphi^{-1} = \varphi^*$

Достаточно расписать определение унитарного преобразования

Утв *Групповые свойства*

Для ортогональных преобразований их композиция и обратное тоже ортогональное

Достаточно привести к определению

Утв Характеристические числа ортогональных преобразований по модулю равны единице

Достаточно расписать определение и вспомнить про комплексное сопряжение

26.2 Канонический вид унитарного и ортогонального преобразования

Th *Канонический вид унитарного преобразования*

Для унитарного преобразования сущетсвует ОНБ из собственных векторов

1. Пусть $\dim E = n$. В случае $n = 1$ очевидно
2. Ортогональное дополнение первого вектора ОНБ инвариантно относительно φ^*, как и относительно φ^{-1} в силу ортогональности. При изучении инвариантных подпространств мы выяснили, что это эквивалентно инвариантности и относительно φ
3. Поэтому мы получили ортонормированный базис на сужении размерности $n - 1$ и их объединение будет ОНБ на подпространстве соответствующей размерности

27 Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве, его существование

Лемма *О главных направлениях*
Для линейного преобразования φ существует ОНБ $e_1, \ldots, e_n : \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ образуют ортогональную систему

Рассмотрим оператор $\varphi^*\varphi$ (проверяется, что он СС) и ОНБ из его собственных векторов (по теореме). Далее, пользуясь СС-ю получаем, что $(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = \cdots = \lambda_i \delta_{ij}$

Th Для линейного преобразования $\varphi \exists$ самосопряжённое преобразвоание ψ и ортогональное (унитарное) θ

1. Рассмотрим ортогональную систему из леммы, притом $|\varphi(e_i)| = \sqrt{\lambda_i}$. При необходимости, переупорядочим её
2. Отнормируем систему и дополним её до ОНБ, убрав, при необходимости, нулевые векторы. Получим ОНБ $f_1, \ldots, f_n$
3. Теперь определим $\psi = \varphi\theta^{-1}$ и убедимся, что $\psi(f_i) = \cdots = \sqrt{\lambda_i} f_i$
4. Итого, нежные отображения подобраны

Совсем необязательно, что данные преобразования коммутируют (перестановочны). Однако можно применить теорему к φ^* и взять сопряжение с обеих сторон. Тогда мы как раз получим другой порядок

28 Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах. Присоединенный оператор. Существование ОНБ, в котором квадратичная (эрмитова) форма имеет диагональный вид. Применение к классификации кривых второго порядка. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду

28.1 Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах

Опр *Квадратичная форма в евклидовом пространстве* $\beta_\varphi(a, b) = (a, \varphi(b))$
Утв В случае ОНБ $B = \overline{A}$
Пользуемся результатом действия билинейной формы на паре векторов и сравниваем записи.
В случае произвольного базиса $B = \Gamma\overline{A}$
Следствие 1 Задана биекция между линейными преобразованиями и билинейными формами
Следствие 2 Задана биекция между множество самосопряжённых операторов и квадратичных форм
Потому как и тем, и другим соответствует симметричная матрица
Итого, изучения биленейных форм можно свести к изучению операторов (и наоборот), а изучение квадратичных – к самосопряжённым операторам

28.2 Существование ОНБ, в котором квадратичная (эрмитова) форма имеет диагональный вид

Th *Приведение к главным осям*
Существует ОНБ, в котором матрица квадратичной формы над ЕП имеет диагональный вид
Следует из того, что для самосопряжённого оператора существует ОНБ, в котором его матрица диагональна. Она отличается от требуемой не более, чем сопряжением

28.3 Применение к классификации кривых второго порядка

Лемма $\exists$ ПДСК, в которой кривая второго порядка задаётся уравнением без перекрёстных членов. Аналогично для поверхностей
Для предъявления такой ПДСК достаточно привести квадратичную форму к главным осям

28.4 Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду

Th *О паре форм*
Если в векторном пространстве (без евклидовой / унитарной структуры) заданы две симметрические квадратичные формы, причём первая п.о. то существует базис, в котором первая имеет канониыеский вид, а вторая – диагональный
Достаточно объявить п.о. форму скалярным произведением. Тогда будет существовать базис, в котором вторая форма диагональна

Сопряжённое пространство

29 Линейные функции. Сопряжённое пространство, его размерность. Биортогональный базис. Замена биортогональных базисов. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряжённого к нему

29.1 Линейные функции

Опр *Линейная функция* Отображение, удовлетворяющая двум аксиомам

29.2 Сопряжённое пространство, его размерность

Опр *Сопряжённое (двойственное) пространство* Пространство ...
Элементы сопряжённого пространства – линейные функционалы (функции), поэтому такие пространства также называют пространством линейных функций. Обозначаются как V^*
Утв $\dim V^* = \dim V$
Следует из $\dim \mathbb{R} = \dim \mathbb{C} = 1$ и отождествления с матрицами размерности nm
Применению линейной функции к вектору, удовлетворяющему четырём аксиомам, соответствует билинейная (полуторалинейная) форма

29.3 Биортогональный базис

Опр *Взаимный / биортогональный / двойственный базис* $< e_i, e^j >= \delta_i^j$
Утв К данном базису существует и единственен взаимный
Любому элементу взаимного базиса соответствует строчная единица. Строчные единицы образуют базис в V, поэтому и элементы взаимного базиса образуют базис в V^*. Базис единственен по построению (в силу инъективности линейных функций)
Утв Двойственный базис является базисом в V^*
В силу равенства размерностей пространств достаточно доказать л.н.з. $f_1, \ldots, f_n$. Это делается от противного с применением $e_j \forall j$ на линейной комбинации
Утв Если при фиксированном $a \in V < a, l >= 0 \forall l \in V^*$, то $a = 0$
От противного включим a в какой-то базис
Утв $< a, l >= x^i \overline{y_i}$
Следует из подстановки разложений по базисам и определения δ_i^j
Следствие $< a, e^i >= x^i$

29.4 Замена биортогональных базисов

Утв Если $e^{'} = eS, e^{'*} = e^*C$, то $C = (S^{-1})^*$
Тензорно запишем $e^{'}$ как строки матрицы на векторы-столбцы и введём $R = C^T$, чтобы аналогично сделать с $e^{'*}$. Затем раскроем по условию биортогональности и вернёмся к матричной записи

29.5 Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряжённого к нему

Опр *Канонический изоморфизм* Не меняется при замене базиса
Опр *Дважды сопряжённое пространство* Отображение, сопостовляющее вектору $a \in V$ отображение $\overleftarrow{a} : V^* \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ по правилу $< l, \overleftarrow{a} >= \overline{< a, l >}$ есть инъевтиный гомоморфизм (вложение) $V \to V^{**}$

Th *Канонический изоморфизм между V и V^{**}*
Между линейным пространством и дважды сопряжённым к нему сущесвтует канонический изоморфизм
Для доказательства достаточно проверить линейность по обеим аргументам и тривиальность ядра (всё по определению). По критерию изоморфности в силу инъективности (тривиальность ядра) имеем изоморфизм

30 Аннулятор подпространства, соответствие между подпространствами V и V*. Сопряжённое преобразование, его свойства

30.1 Аннулятор подпространства, соответствие между подпространствами V и V^*

Опр *Биортогональные множества* $\forall a \in U \forall l \in W < a, l >= 0$
Утв *Признак биортогональности*
$U \perp W \Leftrightarrow a_i \perp l_j$
$\Rightarrow$: очевидно в силу вложенности $\Leftarrow$: из разложения по базису и линейности
Опр *Аннулятор / биортогональное дополнение* Множество W линейных функций
Обозначается как $U^\perp$
Опр *Нуль-пространство* Обратное к аннулятору: множество U векторов
Th $(U^\perp)^\perp = U$ и $\dim U + \dim U^\perp = n$

1. Выберем базис $e_1, \ldots, e_k$ в U и дополним его до базиса во всём пространстве векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$
2. Далее рассмотрим линейную функцию, записанную в своём базисе и перейдём к системе, задающей $\perp$
3. Получим, что тогда каждый коэффициент $\lambda_i = 0, i \in \overline{1, k}$, что говорит о структуре $U^\perp$
4. Аналогичную операцию произведём в V^* и докажем первый факт
5. Собрав информацию о размерностях, получим второй факт

30.2 Сопряжённое преобразование, его свойства

Опр *Сопряжённое преобразование* Отображение уже из пространства функций
Утв Сопряжённое преобразование лежит в пространстве функций
Проверяется линейность (4 аксиомы) с использованием определения
Утв Сопряжённое преобразование соотвествует матрица A^*
Надо разложить в матричный вид равенства из определения сопряжённого пространства и сравнить их. Получив искомую структуру матрицы
Следствие 1 Верны 4 равенства
Введём взаимные базисы и перейдём к матрицам. Доказательства очевидны случаю евклидова пространства
Th U инвариантно относительно $\varphi \Leftrightarrow U^\perp$ инвариантно относительно φ^*
$\Rightarrow$: возьмём $f \in U^\perp$ и распишем его применение по определению $\Leftarrow$: следует из $\Rightarrow$, $(U^\perp)^\perp = U$ и $(\varphi^*)^* = \varphi$
Th *Фредгольма*
$\ker \varphi^* = (\operatorname{Im} \varphi)^\perp$

1. Аналогично случаю в ЕП: докажем вложенность ядра в чужой образ и равенство размерностей. Это будет означать требуемое равенство
2. Равенство размерностей доказывается по прошлым утверждениям
3. Чтобы доказать вложенность рассмотрим произвольный вектор ядра, воспользуемся определениями ортогонального дополнения, образа и сопряжённого преобразования

Тензоры

31 Полилинейные отображения. Определение тензора типа (p,q) на линейном пространстве V. Пространство $T_q^p(V)$ тензоров типа (p,q). Тензорный базис в $T_q^p(V)$. Изменение компонент тензора при замене базиса

31.1 Полилинейные отображения