

# Конспект билетов

## Аналитическая механика

### Содержание

<b>1 Кинематика точки. Траектория, скорость и ускорение точки. Скорость и ускорение точки в полярных координатах</b>	<b>5</b>
1.1 Кинематика точки . . . . .	5
1.2 Скорость и ускорение точки в полярных координатах . . . . .	5
<b>2 Кинематика точки. Естественный трёхгранник. Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное</b>	<b>5</b>
2.1 Кинематика точки. Естественный трёхгранник . . . . .	5
2.2 Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное . . . . .	5
<b>3 Криволинейные координаты точки. Коэффициенты Ламе. Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах. Скорость точки в цилиндрических и сферических координатах</b>	<b>5</b>
3.1 Криволинейные координаты точки . . . . .	5
3.2 Коэффициенты Ламе . . . . .	5
3.3 Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах . . . . .	5
3.4 Скорость точки в цилиндрических и сферических координатах . . . . .	6
<b>4 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела. Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса)</b>	<b>6</b>
4.1 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела . . . . .	6
4.2 Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса) . . . . .	6
<b>5 Плоское движение твёрдого тела. Мгновенный центр скоростей. Мгновенный центр ускорений</b>	<b>6</b>
5.1 Плоское движение твёрдого тела . . . . .	6
5.2 Мгновенный центр скоростей . . . . .	6
5.3 Мгновенный центр ускорений . . . . .	6
<b>6 Кинематические инварианты. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось</b>	<b>7</b>
6.1 Кинематические инварианты . . . . .	7
6.2 Кинематический винт . . . . .	7
6.3 Мгновенная винтовая ось . . . . .	7
<b>7 Алгебра кватернионов</b>	<b>7</b>
<b>8 Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела. Теорема Эйлера о конечном повороте</b>	<b>7</b>
8.1 Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела . . . . .	7
8.2 Теорема Эйлера о конечном повороте . . . . .	7
<b>9 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах. Параметры Родрига-Гамильтона. Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой</b>	<b>7</b>
9.1 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах . . . . .	7
9.2 Параметры Родрига-Гамильтона . . . . .	8
9.3 Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой . . . . .	8
<b>10 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона). Прецессионное движение твёрдого тела</b>	<b>8</b>
10.1 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона) . . . . .	8
10.2 Прецессионное движение твёрдого тела . . . . .	8

<b>11 Кинематика сложного движения точки. Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении</b>	<b>8</b>
11.1 Кинематика сложного движения точки . . . . .	8
11.2 Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении . . . . .	8
<b>12 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг пересекающихся осей. Кинематические уравнения Эйлера</b>	<b>8</b>
12.1 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела во- круг пересекающихся осей . . . . .	8
12.2 Кинематические уравнения Эйлера . . . . .	8
<b>13 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг параллельных осей. Пара вращений</b>	<b>9</b>
13.1 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела во- круг параллельных осей . . . . .	9
13.2 Пара вращений . . . . .	9
<b>14 Сложное движение твёрдого тела. Общий случай сложения движений</b>	<b>9</b>
14.1 Сложное движение твёрдого тела . . . . .	9
14.2 Общий случай сложения движений . . . . .	9
<b>15 Момент силы относительно точки и оси, главный вектор и главный момент сил си- стемы. Элементарная работа сил системы. Работа сил, приложенных к твёрдому телу. Силовое поле. Силовая функция. Потенциал</b>	<b>9</b>
15.1 Момент силы относительно точки и оси, главный вектор и главный момент сил системы . .	9
15.2 Элементарная работа сил системы . . . . .	9
15.3 Работа сил, приложенных к твёрдому телу . . . . .	9
15.4 Силовое поле . . . . .	10
15.5 Силовая функция . . . . .	10
15.6 Потенциал . . . . .	10
<b>16 Количество движения. Центр масс. Теорема об изменении количества движения си- стемы. Теорема о движении центра масс</b>	<b>10</b>
16.1 Количество движения . . . . .	10
16.2 Центр масс . . . . .	10
16.3 Теорема об изменении количества движения системы . . . . .	10
16.4 Теорема о движении центра масс . . . . .	10
<b>17 Главный момент количества движения (кинетический момент) системы относитель- но заданного центра. Кинетический момент системы для ее движения относительно центра масс. Теорема Кенига о вычислении кинетического момента</b>	<b>10</b>
17.1 Главный момент количества движения (кинетический момент) системы относительно за- данного центра . . . . .	10
17.2 Кинетический момент системы для ее движения относительно центра масс . . . . .	10
17.3 Теорема Кенига о вычислении кинетического момента . . . . .	11
<b>18 Теорема об изменении кинетического момента системы</b>	<b>11</b>
<b>19 Кинетическая энергия системы. Теорема Кенига о вычислении кинетической энергии. Теорема об изменении кинетической энергии системы. Закон сохранения полной ме- ханической энергии системы</b>	<b>11</b>
19.1 Кинетическая энергия системы . . . . .	11
19.2 Теорема Кенига о вычислении кинетической энергии . . . . .	11
19.3 Теорема об изменении кинетической энергии системы . . . . .	11
19.4 Закон сохранения полной механической энергии системы . . . . .	11
<b>20 Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчёта. Переносная и ко- риолисова силы инерции. Основные теоремы динамики для движения относительно центра масс</b>	<b>11</b>
20.1 Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчёта. Переносная и кориолисова силы инерции . . . . .	11
20.2 Основные теоремы динамики для движения относительно центра масс . . . . .	12

<b>21 Движение материальной точки в центральном поле. Интеграл площадей; второй закон Кеплера. Уравнение Бине</b>	<b>12</b>
21.1 Движение материальной точки в центральном поле . . . . .	12
21.2 Интеграл площадей; второй закон Кеплера . . . . .	12
21.3 Уравнение Бине . . . . .	12
<b>22 Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция. Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта</b>	<b>12</b>
22.1 Ортогональное дополнение подпространства . . . . .	12
22.2 Ортогональная проекция . . . . .	12
22.3 Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта . . . . .	13
<b>23 Описание линейных функций на евклидовом (унитарном) пространстве</b>	<b>13</b>
<b>24 Преобразование, сопряжённое данному. Его линейность, существование и единственность, его матрица в ОНБ. Теорема Фредгольма</b>	<b>13</b>
24.1 Преобразование, сопряжённое данному . . . . .	13
24.2 Его линейность, существование и единственность, его матрица в ОНБ . . . . .	13
24.3 Теорема Фредгольма . . . . .	13
<b>25 Самосопряжённые линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов</b>	<b>13</b>
25.1 Самосопряжённые линейные преобразования . . . . .	13
25.2 Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов .	14
<b>26 Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного и ортогонального преобразования. Нормальные преобразования унитарных пространств</b>	<b>14</b>
26.1 Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства . . . . .	14
26.2 Канонический вид унитарного и ортогонального преобразования . . . . .	14
<b>27 Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве, его существование</b>	<b>15</b>
<b>28 Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах. Присоединенный оператор. Существование ОНБ, в котором квадратичная (эрмитова) форма имеет диагональный вид. Применение к классификации кривых второго порядка. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду</b>	<b>15</b>
28.1 Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах . . . . .	15
28.2 Существование ОНБ, в котором квадратичная (эрмитова) форма имеет диагональный вид .	15
28.3 Применение к классификации кривых второго порядка . . . . .	15
28.4 Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду . . . . .	16
<b>Сопряжённое пространство</b>	<b>16</b>
<b>29 Линейные функции. Сопряжённое пространство, его размерность. Биортогональный базис. Замена биортогональных базисов. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряжённого к нему</b>	<b>16</b>
29.1 Линейные функции . . . . .	16
29.2 Сопряжённое пространство, его размерность . . . . .	16
29.3 Биортогональный базис . . . . .	16
29.4 Замена биортогональных базисов . . . . .	16
29.5 Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряжённого к нему . . . . .	16
<b>30 Аннулятор подпространства, соответствие между подпространствами <math>V</math> и <math>V^*</math>. Сопряжённое преобразование, его свойства</b>	<b>17</b>
30.1 Аннулятор подпространства, соответствие между подпространствами $V$ и $V^*$ . . . . .	17
30.2 Сопряжённое преобразование, его свойства . . . . .	17
<b>Тензоры</b>	<b>17</b>

<b>31 Полилинейные отображения. Определение тензора типа <math>(p,q)</math> на линейном пространстве <math>V</math>. Пространство <math>T_q^p(V)</math> тензоров типа <math>(p,q)</math>. Тензорный базис в <math>T_q^p(V)</math>. Изменение компонент тензора при замене базиса</b>	<b>18</b>
31.1 Полилинейные отображения . . . . .	18

# 1 Кинематика точки. Траектория, скорость и ускорение точки. Скорость и ускорение точки в полярных координатах

## 1.1 Кинематика точки

**Опр** Кинематика точки. Траектория, скорость и ускорение точки

Раздел механики, изучающий математическое описание (средствами геометрии, алгебры, математического анализа...) движения материальной точки без рассмотрения причин движения (массы, сил и т. д.)

**Опр** Траектория

**Опр** Скорость

**Опр** Ускорение

## 1.2 Скорость и ускорение точки в полярных координатах

**Опр** Радиальная ось

**Опр** Трансверсальная ось

Для того чтобы получить скорость и ускорение в полярных координатах, достаточно выразить  $x$  и  $y$  в терминах  $r, \varphi$ , продифференцировать нужное число раз и вычленив базисные векторы

# 2 Кинематика точки. Естественный трёхгранник. Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное

## 2.1 Кинематика точки. Естественный трёхгранник

**Опр** Естественный способ задания движения

**Опр** Естественный трёхгранник

## 2.2 Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное

Запишем две формулы из дифференциальной геометрии и продифференцируем  $r$  и  $v$  с их учётом. Получим две компоненты ускорения: тангенциальное и нормальное

**Theorem** Гюйгенса о разложении ускорения

# 3 Криволинейные координаты точки. Коэффициенты Ламе. Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах. Скорость точки в цилиндрических и сферических координатах

## 3.1 Криволинейные координаты точки

**Опр** Криволинейные координаты

**Опр** Первая координатная линия

**Опр** Первая координатная ось

Аналогично определяются и последующие координатные линии и оси

## 3.2 Коэффициенты Ламе

**Опр** Единичный вектор координатной оси

**Опр** Коэффициент Ламе

**Опр** Ортогональные криволинейные координаты

## 3.3 Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах

Скорость находится по определению. Ускорение смотреть в конспекте Холостовой с 8 страницы

### 3.4 Скорость точки в цилиндрических и сферических координатах

**Опр** Цилиндрическая система координат

**Опр** Сферическая система координат

Скорость точки в этих координатах находится с помощью коэффициентов Ламе

## 4 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела. Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса)

### 4.1 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела

**Опр** Поступательно движущаяся и связанная системы координат

**Опр** Углы Эйлера

Углы, описывающие поворот абсолютно твердого тела в трёхмерном евклидовом пространстве

**Опр** Линия узлов

Пересечение координатных плоскостей начальной и конечной СК

**Опр** Угол прецессии, нутации, собственного вращения

Переход от одной системы координат к другой посредством вращений на углы, можно задать с помощью матриц поворота

Матрица поворота (или матрица направляющих косинусов)

**Опр** Ортогональная матрица, которая используется для выполнения собственного ортогонального преобразования в евклидовом пространстве. При умножении любого вектора на матрицу поворота длина вектора сохраняется. Определитель матрицы поворота равен единице

Матрицы поворота вокруг различных осей выглядят по-разному

**Опр** Угловая скорость

Физическая величина, характеризующая быстроту и направление вращения материальной точки или абсолютно твёрдого тела относительно оси

**Опр** Угловое ускорение

### 4.2 Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса)

**Theorem** Формула Эйлера

**Формула** Ривальса Получается формальным дифференцированием формулы Эйлера

## 5 Плоское движение твёрдого тела. Мгновенный центр скоростей. Мгновенный центр ускорений

### 5.1 Плоское движение твёрдого тела

**Опр** Плоское движение

### 5.2 Мгновенный центр скоростей

**Theorem** О мгновенном центре скоростей

**Опр** Мгновенный центр скоростей

### 5.3 Мгновенный центр ускорений

**Theorem** О мгновенном центре ускорений

**Опр** Мгновенный центр ускорений

Мгновенный центр ускорений можно построить за два шага

## 6 Кинематические инварианты. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось

### 6.1 Кинематические инварианты

Опр *Инвариант*

Величина, остающаяся неизменной при преобразованиях

Опр *Первый кинематический инвариант*

Опр *Второй кинематический инвариант*

Отсюда следует, что величины проекции скоростей двух точек поступательного движущегося тела на прямую, их соединяющуюся, равны

### 6.2 Кинематический винт

Опр *Кинематический винт*

Опр *Параметр винта*

### 6.3 Мгновенная винтовая ось

Если расписать итоговую скорость точки по координатам, то можно получить

Опр *Мгновенная винтовая ось*

Опр *Правый и левый винт*

## 7 Алгебра кватернионов

Опр *Кватернион, кватернионные единицы*

Свойства *Кватернионного сложения*

Опр *Скалярная и векторные части кватерниона*

Свойства *Кватернионного умножения единиц*

Свойства *Кватернионного умножения*

Опр *Сопряжённый кватернион*

Опр *Норма кватерниона, нормированный кватернион*

Опр *Обратный кватернион*

Форма *Тригонометрическая записи кватерниона*

Результат умножения кватернионов в таком случае получается из свойств тригонометрии

Аналог *Формулы Муавра*

## 8 Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела. Теорема Эйлера о конечном повороте

### 8.1 Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела

Опр *Неподвижный и связанный базисы*

Theorem

### 8.2 Теорема Эйлера о конечном повороте

Theorem *Эйлера о конечном повороте*

Если воспользоваться предыдущей теоремой, то видно, что при повороте положение  $e$  сохраняется, а  $j$  поворачивается

## 9 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах. Параметры Родрига-Гамильтона. Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой

### 9.1 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах

Можно показать, что результирующий кватернион после  $N$  поворотов будет записан в обратном порядке в одном базисе

## 9.2 Параметры Родрига-Гамильтона

**Опр** *Параметры Родрига-Гамильтона*

Если записать преобразованные от смены базисные единицы и подставить в новый кватернион, то он будет выражен в исходном базисе через параметры Родрига-Гамильтона. Порядок записи кватернионов в результирующем повороте будет уже прямой

## 9.3 Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой

**Theorem** *Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой*

## 10 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона). Прецессионное движение твёрдого тела

### 10.1 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона)

**Опр** *Угловая скорость* Через предел

**Уравнение Пуассона**

Можно показать, что два определения угловой скорости эквивалентны. В конце мы придём к уравнению Эйлера (то есть верному утверждению), а значит мы были правы

### 10.2 Прецессионное движение твёрдого тела

Рассмотрим вращение оси тела вокруг неподвижной вращающейся оси и решим уравнение Пуассона для этого случая

## 11 Кинематика сложного движения точки. Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении

### 11.1 Кинематика сложного движения точки

**Опр** *Относительное, переносное и абсолютное движение*

Можно посчитать относительные и абсолютные производные радиус-вектора и получить их связь

### 11.2 Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении

**Опр** *Относительные, переносные и абсолютные скорость и ускорение*

**Theorem** *О сложении скоростей*

**Theorem** *О сложении ускорений или теорема Кориолиса*

**Опр** *Кориолисово ускорение*

## 12 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг пересекающихся осей. Кинематические уравнения Эйлера

### 12.1 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг пересекающихся осей

**Сложение** *Поступательных движений*

**Сложение** *Вращательных движений*

### 12.2 Кинематические уравнения Эйлера

Если тело участвует одновременно в трёх вращениях, то записав суммарное вращение в проекциях на связанные оси, имеем

**Уравнения Эйлера кинематические**



### 13 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг параллельных осей. Пара вращений

#### 13.1 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг параллельных осей

Сложение *Сонаправленных вращений*

Сложение *Разнонаправленных вращений*

#### 13.2 Пара вращений

Пара *Вращений*

Опр *Момент и плечо пары вращений*

Поступательное движение можно заменить на пару вращений бесчисленным множеством способов

### 14 Сложное движение твёрдого тела. Общий случай сложения движений

#### 14.1 Сложное движение твёрдого тела

Лемма

#### 14.2 Общий случай сложения движений

В общем случае движения приведём все поступательные и вращательные к единой точке приложения по алгоритму

Алгоритм *Приведения к простому движению*

### 15 Момент силы относительно точки и оси, главный вектор и главный момент сил системы. Элементарная работа сил системы. Работа сил, приложенных к твёрдому телу. Силовое поле. Силовая функция. Потенциал

#### 15.1 Момент силы относительно точки и оси, главный вектор и главный момент сил системы

Опр *Сила*

*Мера воздействия тел друг на друга, причина ускорения точки*

Аксиома *Инерции*

Опр *Инертность, масса*

Закон *Динамики основной*

Аксиома *Взаимодействия материальных точек*

Аксиома *Независимости действия сил (принцип суперпозиции)*

Опр *Главный вектор всех сил системы*

Опр *Момент силы относительно точки*

Опр *Момент силы относительно оси*

Можно показать корректность этого определения

Опр *Главный момент сил системы*

#### 15.2 Элементарная работа сил системы

Опр *Элементарная работа*

Можно получить выражение для полной работы

#### 15.3 Работа сил, приложенных к твёрдому телу

В общем случае работа внутренних сил ненулевая. Запишем суммарную работу всех сил системы

## 15.4 Силовое поле

Опр *Силовое поле*

Векторное поле в пространстве, в каждой точке которого на точку действует определённая по величине и направлению сила (вектор силы)

## 15.5 Силовая функция

Опр *Силовая функция*

Опр *Потенциальное поле*

Опр *Потенциальная сила*

Опр *(Не)стационарное поле*

## 15.6 Потенциал

Опр *Потенциал*

Скалярная величина, характеризующая силовое поле

Утв

Опр *Потенциальная энергия*

Скалярная физическая величина, представляющая собой часть полной механической энергии системы, находящейся в поле консервативных сил

## 16 Количество движения. Центр масс. Теорема об изменении количества движения системы. Теорема о движении центра масс

### 16.1 Количество движения

Опр *Количество движения (импульс)*

### 16.2 Центр масс

Опр *Центр масс системы*

### 16.3 Теорема об изменении количества движения системы

Theorem *Об изменении количества движения системы*

### 16.4 Теорема о движении центра масс

Theorem *О движении центра масс*

## 17 Главный момент количества движения (кинетический момент) системы относительно заданного центра. Кинетический момент системы для ее движения относительно центра масс. Теорема Кенига о вычислении кинетического момента

### 17.1 Главный момент количества движения (кинетический момент) системы относительно заданного центра

Опр *Момент импульса (кинетический момент) точки*

### 17.2 Кинетический момент системы для ее движения относительно центра масс

Опр *Кинетический момент (главный момент количества движения) системы*

Опр *Кинетический момент системы относительно точки*

Можно показать корректность этого определения

Покажем связь главных моментов двух точек в общем и частном случаях

### 17.3 Теорема Кенига о вычислении кинетического момента

**Опр** Кёнигова система координат

Найдём выражения для скорости и кинетического момента точки и системы

Если под движением системы относительно центра масс понимать движение в Кёниговой системе координат, то верна

**Theorem** Кёнига о кинетическом моменте

## 18 Теорема об изменении кинетического момента системы

Посчитаем производную кинетического момента относительно точки

**Theorem** Об изменении кинетического момента системы

Также рассмотрим частные случаи теоремы

## 19 Кинетическая энергия системы. Теорема Кенига о вычислении кинетической энергии. Теорема об изменении кинетической энергии системы. Закон сохранения полной механической энергии системы

### 19.1 Кинетическая энергия системы

**Опр** Кинетическая энергия системы

Запишем, как она преобразуется при смене системы координат

### 19.2 Теорема Кенига о вычислении кинетической энергии

В частном случае прошлых выкладок получаем

**Theorem** Кенига о вычислении кинетической энергии

### 19.3 Теорема об изменении кинетической энергии системы

**Theorem** Об изменении кинетической энергии системы

### 19.4 Закон сохранения полной механической энергии системы

**Закон** Сохранения полной механической энергии системы

## 20 Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчёта. Переносная и кориолисова силы инерции. Основные теоремы динамики для движения относительно центра масс

### 20.1 Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчёта. Переносная и кориолисова силы инерции

Выразим относительное ускорение в неИСО

**Опр** Переносная и кориолисова силы инерции

**Закон** Основной динамики в неИСО

**Theorem** Об изменении количества движения

**Опр** Главный вектор внешних сил и сил инерции

**Theorem** О движении центра масс

Для неподвижной точки в неИСО справедлива

**Theorem** Об изменении кинетического момента

**Theorem** Об изменении кинетической энергии

## 20.2 Основные теоремы динамики для движения относительно центра масс

Все теоремы далее записаны в Кёниговой системе координат

**Theorem** *Об изменении количества движения*

**Theorem** *Об изменении кинетического момента*

**Theorem** *Об изменении кинетической энергии*

## 21 Движение материальной точки в центральном поле. Интеграл площадей; второй закон Кеплера. Уравнение Бине

### 21.1 Движение материальной точки в центральном поле

**Опр** *Центральное поле* Сила должна удовлетворять условию

### 21.2 Интеграл площадей; второй закон Кеплера

**Опр** *Интеграл площадей*

**Опр** *Радиальная и трансверсальная скорости*

**Форма** *Полярная интеграла площадей*

**Опр** *Секториальная скорость точки*

**Закон Кеплера II**

### 21.3 Уравнение Бине

Если переписать основной закон динамики в центральном поле, то получим

**Уравнение Бине**

## 22 Движение точки в поле всемирного тяготения: уравнение орбиты, законы Кеплера. Интеграл площадей, интеграл энергии, интеграл Лапласа. Задача двух тел

### 22.1 Движение точки в поле всемирного тяготения: уравнение орбиты, законы Кеплера

**Опр** *Поле всемирного тяготения*

Если записать уравнение Бине для силы всемирного тяготения, то в конечном итоге получим

**Уравнение Орбиты**

**Опр** *Параметр и эксцентриситет орбиты*

В зависимости от эксцентриситета, орбита будет являться той или иной конической поверхностью

**Закон Кеплера I**

**Закон Кеплера III**

### 22.2 Интеграл площадей, интеграл энергии, интеграл Лапласа

Интеграл площадей был рассмотрен в предыдущем билете

**Интеграл Энергии**

**Интеграл Лапласа**

**Опр** *Вектор Лапласа, истинная аномалия*

### 22.3 Задача двух тел

Рассмотрев движение двух тел в центральном поле друг друга, получим

**Уравнение Относительного движения точек**

Эта система замкнута и её центр масс движется равномерно, поэтому можно найти закон изменения его радиус-вектора

## 23 Описание линейных функций на евклидовом (унитарном) пространстве

## 24 Преобразование, сопряжённое данному. Его линейность, существование и единственность, его матрица в ОНБ. Теорема Фредгольма

### 24.1 Преобразование, сопряжённое данному

**Опр** Сопряжённое преобразование  $\varphi^* : (\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))$

### 24.2 Его линейность, существование и единственность, его матрица в ОНБ

**Утв**  $\psi = \varphi^* \Leftrightarrow B = A^*$

Достаточно расписать результат формы на паре векторов, определение сопряжённого преобразования и взглянуть на матрицы

**Следствие 1**  $\varphi^*$  единственно

Потому как у каждой матрицы есть единственная сопряжённо-транспонированная

**Следствие 1** Для сопряжённых преобразований справедливо 4 свойства

Первые три следуют из аналогичных свойств для матриц, а последнее из свойств комплексного сопряжения

**Th**  $U$  инвариантно относительно  $\varphi \Leftrightarrow U^\perp$  инвариантно относительно  $\varphi^*$

Достаточно вспомнить определения инвариантности, ортогонального дополнения и сопряжённого преобразования

### 24.3 Теорема Фредгольма

**Th** Фредгольма

$\ker \varphi^* = (\operatorname{Im} \varphi)^\perp$

1. Докажем вложенность ядра в чужой образ и равенство размерностей. Это будет означать равенство
2. Равенство размерностей доказывается по прошлым утверждениям
3. Чтобы доказать вложенность рассмотрим произвольный вектор ядра, воспользуемся определениями ортогонального дополнения, образа и сопряжённого преобразования

## 25 Самосопряжённые линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов

### 25.1 Самосопряжённые линейные преобразования

**Опр** Сопряжённое линейное преобразование  $\varphi^* = \varphi$

В таком случае  $(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))$

### 25.2 Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов

**Th**  $\varphi$  самосопряжено  $\Leftrightarrow A = A^*$

Аналогично доказательству для сопряжённых преобразований

**Th** У самосопряжённого преобразования все характеристические числа действительны

В  $\mathbb{C}$  достаточно расписать определение самосопряжённого преобразования, собственного числа и прийти к равенству  $\lambda = \bar{\lambda}$ , что означает действительность

Так как в  $\mathbb{C}$  доказано, что характеристическое уравнение имеет лишь действительные корни. А симметрические вещественные матрицы являются частным случаем эрмитовых, поэтому теорема доказана и в  $\mathbb{R}$

**Утв** У самосопряжённого преобразования различные корневые подпространства перпендикулярны

Достаточно рассмотреть два вектора из разных корневых подпространств, расписать определение самосопряжённого преобразования, собственного числа и прийти к единственному случаю  $(a_i, a_j) = 0$

**Th** Основная теорема о самосопряжённых преобразованиях

Для самосопряжённого преобразования существует ОНБ из собственных векторов

1. Пусть  $\dim E = n$ . В случае  $n = 1$  очевидно
2. Ортогональное дополнение первого вектора ОНБ инвариантно относительно  $\varphi^*$ , как и относительно  $\varphi$  в силу самосопряжённости
3. Поэтому мы получили ортонормированный базис на сужении размерности  $n - 1$  и их объединение будет ОНБ на подпространстве соответствующей размерности

## 26 Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного и ортогонального преобразования. Нормальные преобразования унитарных пространств

### 26.1 Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства

**Опр** Ортогональное (унитарное) преобразование  $(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$

**Утв**  $\varphi$  ортогонально (матрица перехода между ОНБ)  $\Leftrightarrow \varphi$  изоморфизм евклидовых (унитарных) пространств

$\Rightarrow$ : в силу биективности (ОНБ переходит в ортонормированную систему из  $n$  векторов, то есть в ОНБ, потому что скалярное произведение сохранено)  $\Leftarrow$ : достаточно расписать скалярное произведение двух произвольных векторов и воспользоваться изоморфностью (идея как при изоморфизме линейных пространств). Получим сохранение скалярного произведения и ортогональность  $\varphi$  по определению

**Следствие 1** Ортогональное преобразование переводит ОНБ в ОНБ

**Следствие 2** Преобразование ортогонально  $\Leftrightarrow$  его матрица ортогональна

Потому как ортогональная матрица – матрица перехода между ОНБ

**Следствие 3** Преобразование ортогонально  $\Leftrightarrow \varphi$  обратимо и матрица  $\varphi^{-1} = \varphi^*$

Достаточно расписать определение унитарного преобразования

**Утв** Групповые свойства

Для ортогональных преобразований их композиция и обратное тоже ортогональное

Достаточно привести к определению

**Утв** Характеристические числа ортогональных преобразований по модулю равны единице

Достаточно расписать определение и вспомнить про комплексное сопряжение

### 26.2 Канонический вид унитарного и ортогонального преобразования

**Th** Канонический вид унитарного преобразования

Для унитарного преобразования существует ОНБ из собственных векторов

1. Пусть  $\dim E = n$ . В случае  $n = 1$  очевидно
2. Ортогональное дополнение первого вектора ОНБ инвариантно относительно  $\varphi^*$ , как и относительно  $\varphi^{-1}$  в силу ортогональности. При изучении инвариантных подпространств мы выяснили, что это эквивалентно инвариантности и относительно  $\varphi$
3. Поэтому мы получили ортонормированный базис на сужении размерности  $n - 1$  и их объединение будет ОНБ на подпространстве соответствующей размерности

## 27 Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве, его существование

**Лемма** О главных направлениях

Для линейного преобразования  $\varphi$  существует ОНБ  $e_1, \dots, e_n : \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  образуют ортогональную систему

Рассмотрим оператор  $\varphi^* \varphi$  (проверяется, что он СС) и ОНБ из его собственных векторов (по теореме). Далее, пользуясь СС-ю получаем, что  $(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = \dots = \lambda_i \delta_{ij}$

**Th** Для линейного преобразования  $\varphi \exists$  самосопряжённое преобразование  $\psi$  и ортогональное (унитарное)  $\theta$

1. Рассмотрим ортогональную систему из леммы, притом  $|\varphi(e_i)| = \sqrt{\lambda_i}$ . При необходимости, переупорядочим её
2. Отнормируем систему и дополним её до ОНБ, убрав, при необходимости, нулевые векторы. Получим ОНБ  $f_1, \dots, f_n$
3. Теперь определим  $\psi = \varphi\theta^{-1}$  и убедимся, что  $\psi(f_i) = \dots = \sqrt{\lambda_i}f_i$
4. Итого, нежные отображения подобраны

Совсем необязательно, что данные преобразования коммутируют (перестановочны). Однако можно применить теорему к  $\varphi^*$  и взять сопряжение с обеих сторон. Тогда мы как раз получим другой порядок

## 28 Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах. Присоединенный оператор. Существование ОНБ, в котором квадратичная (эрмитова) форма имеет диагональный вид. Применение к классификации кривых второго порядка. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду

### 28.1 Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах

**Опр** Квадратичная форма в евклидовом пространстве  $\beta_\varphi(a, b) = (a, \varphi(b))$

**Утв** В случае ОНБ  $B = \bar{A}$

Пользуемся результатом действия билинейной формы на паре векторов и сравниваем записи.

В случае произвольного базиса  $B = \Gamma \bar{A}$

**Следствие 1** Задана биекция между линейными преобразованиями и билинейными формами

**Следствие 2** Задана биекция между множеством самосопряжённых операторов и квадратичных форм

Потому как и тем, и другим соответствует симметричная матрица

Итого, изучения билинейных форм можно свести к изучению операторов (и наоборот), а изучение квадратичных – к самосопряжённым операторам

### 28.2 Существование ОНБ, в котором квадратичная (эрмитова) форма имеет диагональный вид

**Th** Приведение к главным осям

Существует ОНБ, в котором матрица квадратичной формы над ЕП имеет диагональный вид

Следует из того, что для самосопряжённого оператора существует ОНБ, в котором его матрица диагональна. Она отличается от требуемой не более, чем сопряжением

### 28.3 Применение к классификации кривых второго порядка

**Лемма**  $\exists$  ПДСК, в которой кривая второго порядка задаётся уравнением без перекрёстных членов. Аналогично для поверхностей

Для предъявления такой ПДСК достаточно привести квадратичную форму к главным осям

### 28.4 Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду

**Th** О паре форм

Если в векторном пространстве (без евклидовой / унитарной структуры) заданы две симметрические квадратичные формы, причём первая п.о. то существует базис, в котором первая имеет канонический вид, а вторая – диагональный

Достаточно объявить п.о. форму скалярным произведением. Тогда будет существовать базис, в котором вторая форма диагональна

# Сопряжённое пространство

## 29 Линейные функции. Сопряжённое пространство, его размерность. Биортогональный базис. Замена биортогональных базисов. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряжённого к нему

### 29.1 Линейные функции

**Опр** *Линейная функция* Отображение, удовлетворяющая двум аксиомам

### 29.2 Сопряжённое пространство, его размерность

**Опр** *Сопряжённое (двойственное) пространство* Пространство ...

Элементы сопряжённого пространства – линейные функционалы (функции), поэтому такие пространства также называют пространством линейных функций. Обозначаются как  $V^*$

**Утв**  $\dim V^* = \dim V$

Следует из  $\dim \mathbb{R} = \dim \mathbb{C} = 1$  и отождествления с матрицами размерности  $nm$

Применению линейной функции к вектору, удовлетворяющему четырём аксиомам, соответствует билинейная (полуторалинейная) форма

### 29.3 Биортогональный базис

**Опр** *Взаимный / биортогональный / двойственный базис*  $\langle e_i, e^j \rangle = \delta_i^j$

**Утв** *К данному базису существует и единственен взаимный*

Любому элементу взаимного базиса соответствует строчная единица. Строчные единицы образуют базис в  $V$ , поэтому и элементы взаимного базиса образуют базис в  $V^*$ . Базис единственен по построению (в силу инъективности линейных функций)

**Утв** *Двойственный базис является базисом в  $V^*$*

В силу равенства размерностей пространств достаточно доказать л.н.з.  $f_1, \dots, f_n$ . Это делается от противного с применением  $e_j \forall j$  на линейной комбинации

**Утв** *Если при фиксированном  $a \in V$   $\langle a, l \rangle = 0 \forall l \in V^*$ , то  $a = 0$*

От противного включим  $a$  в какой-то базис

**Утв**  $\langle a, l \rangle = x^i \bar{y}_i$

Следует из подстановки разложений по базисам и определения  $\delta_i^j$

**Следствие**  $\langle a, e^i \rangle = x^i$

### 29.4 Замена биортогональных базисов

**Утв** *Если  $e' = eS, e'^* = e^*C$ , то  $C = (S^{-1})^*$*

Тензорно запишем  $e'$  как строки матрицы на векторы-столбцы и введём  $R = C^T$ , чтобы аналогично сделать с  $e'^*$ . Затем раскроем по условию биортогональности и вернёмся к матричной записи

### 29.5 Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряжённого к нему

**Опр** *Канонический изоморфизм* Не меняется при замене базиса

**Опр** *Дважды сопряжённое пространство* Отображение, сопоставляющее вектору  $a \in V$  отображение  $\bar{a} : V^* \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  по правилу  $\langle l, \bar{a} \rangle = \langle a, l \rangle$  есть инъективный гомоморфизм (вложение)  $V \rightarrow V^{**}$

**Th** *Канонический изоморфизм между  $V$  и  $V^{**}$*

Между линейным пространством и дважды сопряжённым к нему существует канонический изоморфизм

Для доказательства достаточно проверить линейность по обоим аргументам и тривиальность ядра (всё по определению). По критерию изоморфности в силу инъективности (тривиальность ядра) имеем изоморфизм



### 30 Аннулятор подпространства, соответствие между подпространствами $V$ и $V^*$ . Сопряжённое преобразование, его свойства

#### 30.1 Аннулятор подпространства, соответствие между подпространствами $V$ и $V^*$

**Опр** Биортогональные множества  $\forall a \in U \forall l \in W \langle a, l \rangle = 0$

**Утв** Признак биортогональности

$$U \perp W \Leftrightarrow a_i \perp l_j$$

$\Rightarrow$ : очевидно в силу вложенности  $\Leftarrow$ : из разложения по базису и линейности

**Опр** Аннулятор / биортогональное дополнение Множество  $W$  линейных функций

Обозначается как  $U^\perp$

**Опр** Нуль-пространство Обратное к аннулятору: множество  $U$  векторов

**Th**  $(U^\perp)^\perp = U$  и  $\dim U + \dim U^\perp = n$

1. Выберем базис  $e_1, \dots, e_k$  в  $U$  и дополним его до базиса во всём пространстве векторами  $e_{k+1}, \dots, e_n$
2. Далее рассмотрим линейную функцию, записанную в своём базисе и перейдём к системе, задающей  $\perp$
3. Получим, что тогда каждый коэффициент  $\lambda_i = 0, i \in \overline{1, k}$ , что говорит о структуре  $U^\perp$
4. Аналогичную операцию произведём в  $V^*$  и докажем первый факт
5. Собрав информацию о размерностях, получим второй факт

#### 30.2 Сопряжённое преобразование, его свойства

**Опр** Сопряжённое преобразование Отображение уже из пространства функций

**Утв** Сопряжённое преобразование лежит в пространстве функций

Проверяется линейность (4 аксиомы) с использованием определения

**Утв** Сопряжённое преобразование соответствует матрица  $A^*$

Надо разложить в матричный вид равенства из определения сопряжённого пространства и сравнить

их. Получив искомую структуру матрицы

**Следствие 1** Верны 4 равенства

Введём взаимные базисы и перейдём к матрицам. Доказательства очевидны случаю евклидова пространства

**Th**  $U$  инвариантно относительно  $\varphi \Leftrightarrow U^\perp$  инвариантно относительно  $\varphi^*$

$\Rightarrow$ : возьмём  $f \in U^\perp$  и распишем его применение по определению  $\Leftarrow$ : следует из  $\Rightarrow$ ,  $(U^\perp)^\perp = U$  и  $(\varphi^*)^* = \varphi$

**Th** Фредгольма

$$\ker \varphi^* = (\operatorname{Im} \varphi)^\perp$$

1. Аналогично случаю в ЕП: докажем вложенность ядра в чужой образ и равенство размерностей. Это будет означать требуемое равенство
2. Равенство размерностей доказывается по прошлым утверждениям
3. Чтобы доказать вложенность рассмотрим произвольный вектор ядра, воспользуемся определениями ортогонального дополнения, образа и сопряжённого преобразования

## Тензоры

### 31 Полилинейные отображения. Определение тензора типа $(p, q)$ на линейном пространстве $V$ . Пространство $T_q^p(V)$ тензоров типа $(p, q)$ . Тензорный базис в $T_q^p(V)$ . Изменение компонент тензора при замене базиса

#### 31.1 Полилинейные отображения