

## Содержание

# 1 Электрические заряды и электрическое поле. Закон сохранения заряда, элементарный заряд. Напряжённость электрического поля. Закон Кулона. Гауссова система единиц (СГС) и система СИ. Принцип суперпозиции. Электрическое поле диполя

## 1.1 Электрические заряды и электрическое поле

**Опр Электромагнитное поле** Создаваемое электрическими телами и действующее на ...

**Опр Электрический заряд**

Существуют лишь положительные и отрицательные заряды

## 1.2 Закон сохранения заряда, элементарный заряд

**Закон Сохранения заряда**

**Опр Элементарный заряд** Заряд электрона с противоположным знаком

Любой заряд кратен элементарному заряду, равному  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} = 4,8 \cdot 10^{-10}$

## 1.3 Закон Кулона

**Закон Кулона**

## 1.4 Напряжённость электрического поля

**Опр Напряжённость электрического поля в точке**

**Опр Силовая линия**

## 1.5 Гауссова система единиц (СГС) и система СИ

**Опр Гауссова система единиц (СГС)**

Система единиц измерения, в которой основными единицами являются единица длины сантиметр, единица массы грамм и единица времени секунда

Она широко использовалась до принятия Международной системы единиц (СИ). Другое название — абсолютная физическая система единиц

**Опр Система СИ**

Система единиц, основанная на Международной системе величин, вместе с наименованиями и обозначениями, а также набором приставок и их наименованиями и обозначениями вместе с правилами их применения, принятая Генеральной конференцией по мерам и весам (CGPM)

В качестве основных физических величин в СИ используются длина  $l$ , масса  $m$ , время  $t$ , электрический ток  $I$ , термодинамическая температура  $T$ , сила света  $J$ , количество вещества  $N$

## 1.6 Принцип суперпозиции

**Принцип Суперпозиции**

## 1.7 Электрическое поле диполя

**Опр Элементарный (примитивный) диполь**

**Опр Плечо диполя**

**Опр Дипольный момент диполя**

**Опр Точечный диполь**

Чтобы найти поле точечного диполя, надо

1. Рассмотреть частные случаи: поле на оси и на перпендикуляре к ней.
2. Рассмотреть случай произвольной точки с помощью принципа суперпозиции.
3. Ввести новые дипольные моменты и получить где надо скалярное произведение

## 2 Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах. Её применение для нахождения электростатических полей

### 2.1 Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах

**Опр** Направленная площадь

**Опр** Поток вектора напряжённости через площадочку

**Опр** Поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность

**Th** Теорема Гаусса в интегральной форме

**Опр** Дивергенция векторного поля

**Th** Теорема Гаусса в дифференциальной форме

И то, как это следует из интегральной формы.

1. Запишем определение телесного угла, перпендикулярной площадочки и создадим скалярное произведение.
2. Посчитаем  $d\Phi$  от точечного заряда внутри, идя от скалярного произведения до телесного угла.
3. Посчитаем полный поток от точечного заряда в зависимости от того, внутри он или снаружи
4. В силу аддитивности потока получаем требуемое выражение

### 2.2 Её применение для нахождения электростатических полей

С помощью теорема Гаусса становится просто находить поля

- Равномерно заряженной плоскости
- Равномерно заряженной нити
- Равномерно заряженного шара
- Нейтральной сферической полости внутри шара (с помощью умного нуля)

Также можно доказать, что поле шара вне его будет совпадать с полем точечного диполя (рассмотреть маленький сдвиг, который и будет плечом такого диполя). Поверхностное распределение заряда найдём из теоремы косинусов для полярного угла

## 3 Потенциальный характер электростатического поля. Теорема о циркуляции электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь напряжённости поля с градиентом потенциала. Граничные условия для вектора $E$

### 3.1 Потенциальный характер электростатического поля

Если посчитать работу сил поля при перемещении заряда по определению, то получим условие потенциальности поля. Совокупность потенциальных полей образует суммарное потенциальное поле

### 3.2 Потенциал и разность потенциалов

**Опр** Потенциал

Физическая величина, служащая скалярной энергетической характеристикой электростатического поля и для конкретной рассматриваемой точки равная потенциальной энергии пробного заряда, помещённого в данную точку, отнесённой к величине этого заряда.

**Опр** Разность потенциалов

### 3.3 Связь напряжённости поля с градиентом потенциала

Получается, что электростатическое поле можно охарактеризовать потенциалом, поэтому оно и потенциально:  $E = -grad\phi = \nabla\phi$

Расписав дифференциал потенциала, можно получить проекции поля на координаты

### 3.4 Теорема о циркуляции электростатического поля

**Th** *О циркуляции в интегральной форме*

Это напрямую следует из потенциальности поля

Если напишем физический смысл ротора и выразим оттуда  $\int E dr$ , то получим

**Th** *О циркуляции в дифференциальной форме*

По сути, означает равенство перекрёстных производных

### 3.5 Граничные условия для вектора $E$

Для скачка нормальной компоненты применим теорему Гаусса, а для равенства тангенциальных – теорему о циркуляции

## 4 Уравнения Пуассона и Лапласа. Проводники в электрическом поле. Граничные условия на поверхности проводника. Единственность решения электростатической задачи. Метод изображений. Изображение точечного заряда в проводящих плоскости и сфере

### 4.1 Уравнения Пуассона и Лапласа

Если взять суперпозицию двух уравнений с  $E$ , содержащих  $\nabla \cdot \nabla$ , то получим

**Утв** *Уравнение Пуассона*

Зная, что  $\nabla \cdot \nabla =$ , то можно записать уравнение в другой форме.

В частном случае области пространства, свободной от зарядов, имеем

**Утв** *Уравнение Лапласа*

### 4.2 Проводники в электрическом поле

**Опр** *Проводник*

В состоянии равновесия проводники обладают двумя свойствами (отсутствие токов и зарядов внутри (заряды только ...))

### 4.3 Граничные условия на поверхности проводника

Записав классические граничные условия, воспользуемся свойством поля внутри проводника и получим новые условия

### 4.4 Единственность решения электростатической задачи

**Опр** *Электростатическая задача*

Граничные условия этой задачи могут быть двух типов: Дирихле и Цеймана

**Th** *О единственности решения уравнения Лапласа*

Доказывается от противного простыми рассуждениями об исследовании потенциала в терминах производных

**Th** *О единственности решения уравнения Пуассона*

Доказывается от противного введением новой функции (разности кандидатов) и сведением задачи к предыдущей

### 4.5 Метод изображений

Можно показать, что поле внутри области не зависит от зарядов вне её (по теореме единственности). Поэтому в зависимости от ситуации можно менять проводящую поверхность на группу зарядов и наоборот

**Опр** *Изображения зарядов*

## 4.6 Изображение точечного заряда в проводящих плоскости и сфере

В случае проводящей плоскости имеем равноудалённый заряд другого знака

В случае заземлённой сферы говорим некоторые наводящие соображения о положении заряда-изображения, рассматриваем подобие треугольников и записываем равенство нулю потенциала на сфере

В случае изолированной заряженной сферы мы к заряду из предыдущей задачи добавляем заряд в центр сферы так, чтобы их суммарный заряд стал исходному. Потенциал сферы в таком случае  $\varphi = \frac{q''}{R}$

## 5 Электрическое поле в веществе. Поляризация диэлектриков. Свободные и связанные заряды. Вектор поляризации и вектор электрической индукции. Поляризуемость частиц среды. Диэлектрическая проницаемость среды. Теорема Гаусса в диэлектриках. Граничные условия на границе двух диэлектриков

### 5.1 Электрическое поле в веществе

При помещении вещества в электрическое поле происходит пространственное перераспределение заряда

**Опр Диэлектрик**

### 5.2 Поляризация диэлектриков

**Опр Поляризация**

### 5.3 Свободные и связанные заряды

**Опр Свободные заряды**

Скорость звука можно запросто вывести из соответствующего уравнения механики

**Опр Связанные (поляризационные) заряды**

### 5.4 Вектор поляризации и вектор электрической индукции

**Опр Вектор поляризации**

С помощью этого вектора можно найти поверхностную плотность поляризационных зарядов.

1. Запишем объём косого параллелепипеда через скалярное произведение  $(S, l)$ .
2. Найдём дипольный момент и вектор поляризации поверхностных зарядов с плотностью поверхностных  $\sigma$ .
3. Запишем проекцию последнего на нормаль и после преобразований получим  $\sigma$

Также найдём объёмную плотность поляризационных зарядов.

1. Запишем вышедший через нормальную площадку и поверхность в целом из вещества заряд под действием внешнего поля
2. Тогда внутри остался суммарный поляризационный заряд, равный интегралу
3. Если воспользоваться теоремой Гаусса – Остроградского, то можно получить выражения для дивергенции вектора поляризации
4. Если поляризация однородная, то плотность поляризационных зарядов равна нулю

### 5.5 Теорема Гаусса в диэлектриках

Если учесть наличие поляризационных зарядов, то теорема Гаусса в диэлектриках примет немного иной вид в обеих формах. Удобнее всего будет её записать, используя новое обозначение

**Опр Вектор электрической индукции  $D$**

## 5.6 Поляризуемость частиц среды

При слабых внешних полях смещение зарядов мало и пропорционально приложенному полю (как производная)

**Опр** Поляризуемость среды

## 5.7 Диэлектрическая проницаемость среды

Если подставить поляризуемость в выражение для  $D$ , то можно ввести новое обозначение

**Опр** Диэлектрическая проницаемость среды

Переписав теорему Гаусса для  $E$  увидим, что в силу  $\epsilon > 1$  поляризационные заряды ослабляют поле

## 5.8 Граничные условия на границе двух диэлектриков

Для скачка нормальной компоненты запишем теорему Гаусса и получим  $4\pi\sigma_{free}$

Для тангенциальной компоненты запишем теорему о циркуляции электрического поля и вновь получим то же самое

## 6 Электрическая ёмкость. Конденсаторы. Вычисление ёмкостей плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов. Энергия электрического поля и её локализация в пространстве. Объёмная плотность энергии. Взаимная энергия зарядов. Энергия в системе заряженных проводников

### 6.1 Электрическая ёмкость

Проведя мысленный эксперимент, поймём, что отношение  $\frac{Q}{q}$  характеризует проводник

**Опр** Электрическая ёмкость

**Опр** Ёмкость пары проводников (взаимная ёмкость)

### 6.2 Конденсаторы

**Опр** Конденсатор

Поле внутри конденсатор однородное (две бесконечные плоскости), краевых эффектов почти нет

Из выражения для поля можно запросто найти разность потенциалов обкладок

### 6.3 Вычисление ёмкостей плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов

Ёмкость плоского конденсатора находим по принципу суперпозиции как ёмкость двух бесконечных плоскостей разных знаков

**Опр** Сферический конденсатор

Его поле можно найти по определению, предварительно посчитав разность потенциалов обкладок

**Опр** Цилиндрический конденсатор

Записав теорему Гаусса для  $D$ , получим поле между обкладками. Затем посчитав разность потенциалов по определению, находим ёмкость

### 6.4 Энергия электрического поля и её локализация в пространстве

**Опр** Энергия пары зарядов

Энергия, которую необходимо затратить, чтобы их сблизить (работа) в соответствии с её определением через потенциал

**Утв** Энергия электрического поля локализовано в пространстве

Иными словами, оно зависит лишь от небольшой окрестности вокруг рассматриваемой точки. Ведь если речь идёт об удалённых объектах, меняющихся со временем, то значение энергии уже может быть некорректным

## 6.5 Энергия в системе заряженных проводников

**Утв** Энергия всей системы зарядов

В формуле могут быть изменения в случае непрерывного распределения заряда по объёму или площади поверхности

Например, можно найти поле плоского конденсатора

## 6.6 Объёмная плотность энергии

Преобразовав выражение для энергии конденсатора, можно выделить в ней

**Опр** Объёмная плотность энергии

В случае  $D = \epsilon E$  выражение можно соответственно переписать

В случае сложной связи  $D$  и  $E$  можно используя  $D = 4\pi\sigma$  и общего вида энергии  $dU = \varphi\delta q$  получить выражение объёмной плотности энергии в случае

В общем случае

1. Рассмотрим вариацию энергии зарядов с  $\delta\rho$ .
2. Исключим  $\delta\rho$ , используя теорему Гаусса.
3. Воспользуемся следствием из правила дифференцирования сложной функции
4. Одно слагаемое через замкнутую бесконечно удалённую поверхность будет ноль, а второе и даст привычное нам искомое выражение

## 6.7 Взаимная энергия зарядов

**Опр** Взаимная энергия

Если записать выражение через объёмную плотность энергии, то получим величину всегда неотрицательную (в отличие от исходной). Это связано с тем, что последняя включает в себе две группы слагаемых — собственную и взаимную энергии

## 7 Энергия электрического поля в веществе. Энергия диполя во внешнем поле (жёсткий и упругий диполи). Силы, действующие на диполь в неоднородном электрическом поле. Энергетический метод вычисления сил (МВП), вычисление сил при постоянных зарядах и при постоянных потенциалах

### 7.1 Энергия электрического поля в веществе

$$W = \delta w V$$

### 7.2 Энергия диполя во внешнем поле (жёсткий и упругий диполи)

**Утв**

Найти энергию жёсткого диполя во внешнем поле можно по определению, вспомнив определение разности потенциалов и дипольного момента

В случае упругого диполя  $p = \beta E$ , поэтому взяв интеграл по  $dE$  (оно меняется в силу переменной длины диполя) получим искомое

### 7.3 Силы, действующие на диполь в неоднородном электрическом поле

В неоднородном случае, чтобы получить силу надо взять градиент от энергии

### 7.4 Энергетический метод вычисления сил (МВП), вычисление сил при постоянных зарядах и при постоянных потенциалах

Используя определение элементарной работы, получим выражение для силы. В частном случае электростатической силы получим  $\delta A = -dW$

**Утв** Сила при постоянном заряде и сила при постоянных потенциалах равны

1. В случае  $q = \text{const}$  запишем  $W(x)$  и продифференцируем для поиска силы при  $q = \text{const}$
2. В случае  $\Delta\varphi = \text{const}$  следует дополнительно учитывать работу батареи
3. Продифференцировав выражение для  $\delta A_{\text{mech}}$  получим искомую силу
4. Видно, что силы равны и они диэлектрики втягиваются в область сильного поля (знак +)

## 8 Постоянный ток. Сила тока, объёмная и поверхностная плотности тока. Закон Ома в интегральной и локальной формах. Уравнение непрерывности для плотности заряда. Закон Джоуля–Ленца в интегральной и локальной формах. Токи в неограниченных средах

### 8.1 Постоянный ток

**Опр Электрический ток** Упорядоченное движение заряженных частиц (электронов и ионов)

**Опр Постоянный ток**

### 8.2 Сила тока, объёмная и поверхностная плотности тока

**Опр Сила тока**

**Опр Плотность тока**

Известно как получить формулу для этой величины

**Опр Линейная плотность тока**

Аналогично вводятся поверхностная и объёмная плотности тока

### 8.3 Уравнение непрерывности для плотности заряда

Запишем закон сохранения заряда для произвольной области пространства. Воспользовавшись определением дивергенции, получим

**Утв Уравнение непрерывности для плотности заряда**

По-другому это уравнение называют ЗСЗ в дифференциальной форме

В стационарном случае в область втекает столько же заряда, сколько и вытекает

### 8.4 Закон Ома в интегральной и локальной формах

**Закон Ома**

**Закон Ома в дифференциальной форме**

### 8.5 Закон Джоуля–Ленца в интегральной и локальной формах

**Закон Джоуля–Ленца в локальной форме**

1. Запишем скорость зарядов в среде. Среднее её значение будет иметь простой вид из-за свойств флуктуаций.
2. Запишем объёмную плотность энергии (через работу) и, воспользовавшись выражениями для  $j$ , получим искомое

При наличии объёмных токов подставим интегральные величины и получим

**Закон Джоуля–Ленца в интегральной форме**

### 8.6 Токи в неограниченных средах

Пользуясь теоремой Гаусса можно получить сопротивление неограниченной среды, по которой течёт ток между двумя электродами. Если расстояние между ними  $\gg$  их размеров, то сопротивление превращается в сумму  $\frac{\varepsilon_i}{4\pi\lambda_i C_i}$ , то есть сопротивление зависит от геометрии каждого электрода, а не от их взаимного расположения



## 9 Постоянный ток в замкнутых электрических цепях. Электродвижущая сила. Закон Ома для участка цепи. Правила Кирхгофа. Работа и мощность постоянного тока

### 9.1 Постоянный ток в замкнутых электрических цепях

В случае замкнутой цепи закон Ома выглядит привычно

*Закон Ома в интегральной форме*

### 9.2 Электродвижущая сила

*Опр Электродвижущая сила*

*Формальное обозначение интеграла*

### 9.3 Закон Ома для участка цепи

Полагая ток во всей участках цепи одинаковым, из дифференциального закона Ома получим

*Закон Ома для участка цепи*

1. Выразим из дифференциальной формы циркуляцию вектора  $E$ .
2. Введём полное сопротивление участка и ЭДС (может быть как положительным, так и отрицательным)
3. Подставив всё в одно уравнение, получи требуемое

### 9.4 Правила Кирхгофа

*Утв Правила Кирхгофа*

Они доказываются с помощью ЗСЗ и закона Ома для участка цепи

### 9.5 Работа и мощность постоянного тока

В прошлом билете было получено выражение для мощности тока в локальной и интегральной формах. Если учесть наличие ЭДС, можно получить ещё две формулы мощности. Домножив каждую на время, получим работу

## 10 Магнитное поле постоянного тока в вакууме. Вектор магнитной индукции. Сила Лоренца. Сила Ампера. Закон Био–Савара. Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме. Теорема Гаусса для магнитного поля. Магнитное поле прямого провода, соленоида, тороидальной катушки

### 10.1 Магнитное поле постоянного тока в вакууме

*Опр Магнитное поле*

### 10.2 Вектор магнитной индукции

*Опр Вектор магнитной индукции*

*Вектор, определяющий силу, действующую на движущийся заряд и характеризующий магнитное поле*

### 10.3 Сила Лоренца

*Опр Сила Лоренца*

## 10.4 Сила Ампера

**Опр** *Сила Ампера*

**Закон** *Ампера*

Нетрудно показать эквивалентность разных выражений для сил в законе Ампера, а также, связь сил Лоренца и Ампера

## 10.5 Закон Био–Савара

**Закон** *Био–Савара*

Он экспериментальный и тоже формулируется для линейного и объёмного элемента тока

## 10.6 Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме

Если взять закон Био–Савара и произвести с ним преобразования по законам векторного анализа, то можно получить векторный потенциал и показать, что он биздевергентен

По аналогии с  $\varphi$ , можно получить

**Th** *О циркуляции магнитного поля в вакууме в дифференциальной форме*

Воспользовавшись формулой Стокса и перейдя к интегралу по контуру, получим

**Th** *О циркуляции магнитного поля в вакууме в интегральной форме*

## 10.7 Теорема Гаусса для магнитного поля

**Th** *Гаусса для магнитного поля в дифференциальной форме*

**Th** *Гаусса для магнитного поля в интегральной форме*

## 10.8 Магнитное поле прямого провода, соленоида, тороидальной катушки

Найти поле прямого провода можно с помощью закона Био-Савара.

1. Запишем этот закон и перейдём к скалярному выражению, раскрыв векторное произведение
2. Выразив  $dx$  через выражение для  $\tan \alpha$  подставим его в выражение
3. Сделав замену и после интегрирования получим требуемое поле

Поле соленоида и тороидальной катушки можно найти с помощью теоремы о циркуляции, используя, если необходимо, плотность намотки и линейную плотность тока

## 11 Магнитный момент тока. Точечный магнитный диполь. Сила и момент сил, действующие на виток с током в магнитном поле. Эквивалентность витка с током и магнитного диполя

### 11.1 Магнитный момент тока

**Опр** *Магнитный момент*

Он направлен по нормали к плоскости витка

### 11.2 Точечный магнитный диполь

**Опр** *Точечный магнитный диполь*

То же, что и плоская замкнутая проводящая рамка площади  $S$  по которой течёт ток  $I$

### 11.3 Сила и момент сил, действующие на виток с током в магнитном поле

В однородном магнитном поле на виток с током суммарная действующая сила равна нулю. В неоднородном поле силу легче все найти через потенциальную энергию.

1. Посчитаем работу поля по повороту витка
2. Увидим: она зависит лишь от начальных и конечных состояний, то есть можно ввести потенциальную энергию.

3. Продифференцируем энергию и получим силу
  4. При условии отсутствия токов проводимости в среде после преобразований векторного анализа можно дать её более простой вид
- С помощью магнитного момента можно найти момент сил, действующие на магнитный диполь

#### 11.4 Эквивалентность витка с током и магнитного диполя

Возьмём векторный потенциал зарядов, движущихся в ограниченной области как сумму и преобразуем его. Затем, переходя к магнитному полю, увидим эквивалентность магнитного <диполя> и витка с током

### 12 Магнитное поле в веществе. Магнитная индукция и напряжённость поля. Вектор намагниченности. Токи проводимости и молекулярные токи. Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе. Граничные условия на границе двух магнетиков. Постоянные магниты

#### 12.1 Магнитное поле в веществе

Магнитное поле в веществе создаётся внешним полем и циркулирующими внутри микротоками  
**Опр** *Микрополе*

#### 12.2 Токи проводимости и молекулярные токи

**Опр** *Токи проводимости*  
**Опр** *Молекулярные токи*

#### 12.3 Вектор намагниченности

**Опр** *Вектор намагничивания (намагниченность)*  
Она может быть как однородной, так и неоднородной  
**Опр** *Поверхностные токи*  
Свяжем молекулярные токи с вектором намагничивания.

1. Запишем магнитный момент вещества двумя способами
2. Преобразуем, введём линейную плотность тока.
3. Выберем в веществе произвольный замкнутый контур и возьмём тор вокруг него
4. После преобразований и взятия интеграла получим, что

**Утв** *Молекулярный ток и вектор намагничивания связаны в интегральной форме*  
Применив теорему Стокса, получим, что  
**Утв** *Молекулярный ток и вектор намагничивания связаны в дифференциальной форме*

#### 12.4 Магнитная индукция и напряжённость поля

**Опр** *Напряжённость поля*

#### 12.5 Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе

Используя связь молекулярного тока и вектор намагничивания в интегральной форме запишем теорему о циркуляции для магнитного поля и получим

**Th** *О циркуляции магнитного поля в веществе в интегральной форме*  
Используя дифференциальные формы справа и слева, можно получить  
**Th** *О циркуляции магнитного поля в веществе в дифференциальной форме*

## 12.6 Граничные условия на границе двух магнетиков

Для  $B_n$  воспользуемся теоремой Гаусса для магнитного поля. Для  $H_\tau$  воспользуемся теоремой о циркуляции. Для  $H_n$  представим  $\tau$  через векторное произведение и с помощью преобразований получим требуемое

## 12.7 Постоянные магниты

**Опр** *Постоянный магнит*

Изделие из материала с высокой остаточной магнитной индукцией, сохраняющее состояние намагниченности в течение длительного времени

Можно посчитать поле на оси постоянного магнита

1. Разобьём магнит на колечки с молекулярными токами и по сути получим соленоид.
2. Запишем  $dB_x$  колечка через линейную плотность тока, а затем перейдя к параметризации по углу.
3. Выразим  $dx$  через тангенс угла и подставив в формулу получим приятное выражение для  $dB_x$
4. Взяв интеграл, окончательно найдём поле на оси постоянного магнита
5. При желании можно вернуться к параметризации по координате

Также при желании можно нарисовать график зависимости векторов  $B$  и  $H$  от  $x$ . Не лишним будет и показать картину силовых линий векторов внутри и вне магнита

## 13 Электромагнитная индукция. Поток магнитного поля. ЭДС индукции в движущихся и неподвижных проводниках. Вихревое электрическое поле. Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах. Фарадеевская и максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции

### 13.1 Поток магнитного поля

**Опр** *Поток магнитного поля*

Это определение было известно нам и ранее

### 13.2 Электромагнитная индукция

Рассмотрим проводящую рамку, по которой течёт электрический ток. После детального анализа поймём, что там возникает ЭДС индукции, которая создаёт ток в отрицательном направлении обхода контура.

**Опр** *Электромагнитная индукция*

Явление возникновения электрического тока, электрического поля или электрической поляризации при изменении магнитного поля во времени или при движении материальной среды в магнитном поле

### 13.3 ЭДС индукции в движущихся и неподвижных проводниках

Если такие неровности достаточно большие, то начнётся кипение

Фазовый переход «жидкость – пар», происходящий с образованием ...

### 13.4 Правило Ленца

*Правило Ленца*

### 13.5 Закон электромагнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах

*Закон Электромагнитной индукции в интегральной форме*

$$\varepsilon_i = \int E_{out} dl$$

Если преобразовать это выражение, то можно получить более частую формулировку этого закона

*Закон Электромагнитной индукции в дифференциальной форме*

### 13.6 Вихревое электрическое поле

Как видно из прошлого закона,  $E \neq 0$ , поэтому индуцируемое электрическое поле является вихревым

### 13.7 Фарадеевская и максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции

Трактовка Фарадея

Трактовка Максвелла

### 14 Коэффициенты само- и взаимоиндукции. Теорема взаимности. Взаимная индуктивность двух катушек на общем магнитопроводе. Взаимная энергия токов. Локализация магнитной энергии в пространстве, объёмная плотность магнитной энергии

#### 14.1 Коэффициенты само- и взаимоиндукции

Опр Коэффициент самоиндукции (индуктивность)

Опр Коэффициент взаимоиндукции

#### 14.2 Взаимная индуктивность двух катушек на общем магнитопроводе

Для примера найдём индуктивность идеального соленоида

А также взаимную индуктивность двух катушек на общем магнитопроводе

Рассмотрев произвольный контур, можно найти формулу для

Утв Магнитная энергия тока

#### 14.3 Теорема взаимности

Th Взаимности

Коэффициенты взаимоиндукции для фиксированной пары витков с током совпадают

1. Посчитаем поток создаваемый на  $i$ -й виток всеми остальными при фиксированном геометрии системы.
2. Посчитаем его дифференциал и подставим в дифференциал энергии системы токов.
3. Возьмём две частные производные второго порядка в разных последовательностях и по теореме Шварца получим требуемое

#### 14.4 Взаимная энергия токов

Опр Взаимная энергия токов

Энергия, с которой витки действуют друг на друга (включает коэффициент взаимоиндукции)

Если посчитать энергию системы токов, то две группы слагаемых её составляющих сольются в одну красивую сумму

#### 14.5 Локализация магнитной энергии в пространстве, объёмная плотность магнитной энергии

1. Рассмотрим соленоид и посчитаем его энергию, используя выражения для  $H$ ,  $d\Phi$ ,  $B$ .
2. Получим выражение, из которого легко отделяется объём, что говорит о локализации магнитной энергии
3. Также это позволяет ввести понятие объёмной плотности магнитной энергии и три формулы для неё
4. В более общем случае можно воспользоваться векторным анализом для вывода объёмной плотности энергии

## 15 Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле. Вычисление сил при постоянном токе и потоке магнитного поля. Магнитные цепи. Подъёмная сила электромагнита

### 15.1 Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле

Известно: сила есть частная производная энергии по обобщённой координате

$$\delta A_{out} = dW + \delta A_{mech}$$

### 15.2 Вычисление сил при постоянном токе и потоке магнитного поля

Для вычисления достаточно выразить  $dW$  из выражения выше и продифференцировать

### 15.3 Магнитные цепи

Опр *Магнитная цепь*

### 15.4 Подъёмная сила электромагнита

Если рассмотреть простую магнитную цепь, найти поле в её зазоре, а по нему  $dW$  и силу, то можно явно показать наличие подъёмной силы у электромагнита

## 16 Внутренняя энергия и энтропия газа Ван-дер-Ваальса. Равновесное и неравновесное расширение газа Ван-дер-Ваальса в теплоизолированном сосуде

### 16.1 Внутренняя энергия и энтропия газа Ван-дер-Ваальса

1. Для начала рассмотрим внутреннюю энергию как  $U(T, V)$ . Запишем её полный дифференциал и воспользуемся соотношением Максвелла
2. В итоге получим термическое уравнение состояния
3. Теперь получим выражение для внутренней энергии газа ВдВ как  $U(T, V)$  через её полный дифференциал
4. Воспользуемся определениями  $c_V$ , только термическим уравнением состояния, выражением для  $(\frac{\partial P}{\partial T})_V$ , уравнением ВдВ
5. Подставляя все выкладки, получим требуемое выражение. Заметим, что внутренняя энергия газа ВдВ определена с точностью до константы
6. Найдём энтропию газа ВдВ как  $S(T, V)$  вновь через её полный дифференциал
7. Распишем каждый частичный дифференциал (частную производную), используя выкладки для внутренней энергии и I начало ТД
8. Вновь получим функцию, определённую с точностью до константы

### 16.2 Равновесное и неравновесное расширение газа Ван-дер-Ваальса в теплоизолированном сосуде

1. Рассмотрим свободное расширение газа в вакуум в неравновесном процессе и найдём изменение температуры такого газа.
2.  $\Delta Q = 0$  в силу теплоизолированности, а  $A = 0$ , потому что не над чем совершать работу, поэтому и  $\Delta U = 0$  по I началу ТД
3.  $\Rightarrow U_i = c_V T_i - \frac{a}{V_i}$ . Выразим из  $U_1 = U_2$  разность температур и получим её отрицательность, то есть газ охладился.

Теперь рассмотрим равновесное адиабатическое расширение газа ВдВ, записав изменение его энтропии. Получим псевдо ЭДТ

## 17 Течение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли сжимаемой и несжимаемой жидкости. Изоэнтропическое истечение газа из отверстия

### 17.1 Течение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли сжимаемой и несжимаемой жидкости

Идеальная жидкость течёт без трения и теплопередач

1. Для каждого сечения  $\rho vS = \text{const}$  в силу ЗСМ
2. Записав работу по смещению как разность энергий, получим константную сумму (энтальпия)
3. Перейдя к удельным величинам и раскрыв состав удельной энергии (кинетическая + потенциальная), получим уравнение Бернулли:

$$\frac{P}{\rho} + gh + \frac{v^2}{2} + u = \text{const}$$

4. Уравнение для несжимаемой жидкости не будет иметь слагаемого с плотностью (она не изменяется)

### 17.2 Изоэнтропическое истечение газа из отверстия

1. Найдём скорость истечения газа из отверстия в условиях малого перепада высот  $\iota_i + \frac{v^2}{2} = \text{const}$
2. Считая скорость внутри сосуда пренебрежимой, получим выражение через удельную энтальпию
3. Вспомнив определение энтальпии и формулу Майера, получим более конкретную формулу; при желании из-под корня можно вынести скорость звука
4. При адиабатическом истечении ИГ можно переписать отношение температур как отношение давлений и получить немного другую запись. Из неё видно, что скорость газа максимальна при расширении в вакуум  $P_2 = 0$ , притом  $v > c_{\text{sound}}$

## 18 Эффект Джоуля—Томсона. Дифференциальный эффект Джоуля—Томсона для газа Ван-дер-Ваальса, температура инверсии

### 18.1 Эффект Джоуля—Томсона

**Опр Дроссель** Местное препятствие газовому потоку

**Опр Дросселирование** Медленное протекание газа под действием постоянного ...

**Опр ЭДТ** Изменение температуры газа при адиабатическом дросселировании

Существует положительный и отрицательный ЭДТ (напомним, разность давлений всегда отрицательна). Данный процесс называют изоэнтальпическим (его можно описать с помощью уравнения Бернулли) из-за его медленности. Для ИГ он не наблюдается, потому как из постоянства энтальпии следует постоянство температуры. Таким образом, ЭДТ позволяет определить степень неидеальности газа

### 18.2 Дифференциальный эффект Джоуля—Томсона для газа Ван-дер-Ваальса, температура инверсии

**Опр Дифференциальный ЭДТ** ЭДТ при малых перепадах давления (т.е. ещё и изобарный)

1. Представим энтальпию как  $I(T, P)$  и выразим  $(\frac{\partial T}{\partial P})_I$  через условие  $dI = 0$
2. Числитель выразим через стандартное определение энтальпии и с помощью соотношений Максвелла, а знаменатель – по определению
3. Далее выразим  $(\frac{\partial V}{\partial T})_P$  через формулу  $\beta = -1$  и получим общий вид ЭДТ
4. В случае газа ВдВ, подставим значения соответствующих частных производных
5. Найдём температуру инверсии, приравняв  $(\frac{\partial T}{\partial P})_I$  к нулю. При меньших температурах имеем охлаждение, а при больших – нагрев газа при дросселировании

## 19 Распределение частиц идеального газа по проекциям и модулю скорости (распределение Максвелла). Наиболее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорости. Распределение Максвелла по энергиям

### 19.1 Распределение частиц идеального газа по проекциям и модулю скорости (распределение Максвелла)

Число молекул в ИГ со средней плотностью  $n$ , обладающими скоростями в интервале  $[v, v + dv]$ , определяется распределением Максвелла

Интегрированием по направлениям скорости сводится к замене третьего дифференциала, что приводит к распределению по абсолютной величине скорости

### 19.2 Наиболее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорости

Найдём максимум формулы распределения путём дифференцирования и приравнивания к нулю. Получим наиболее вероятную скорость частицы

Вопрос о среднем значении случайной знаковой величины бессмысленен — это ноль. Если рассматривать лишь положительные значения, то благодаря специальной формуле, получим среднюю скорость. Аналогичным образом получается среднеквадратичная скорость

### 19.3 Распределение Максвелла по энергиям

Для получения распределения по энергиям, достаточно заменить переменную в распределении Максвелла по скоростям

## 20 Среднее число молекул, сталкивающихся в единицу времени с единичной площадкой. Средняя энергия молекул, вылетающих в вакуум через малое отверстие

### 20.1 Среднее число молекул, сталкивающихся в единицу времени с единичной площадкой

1. Рассмотрим столкновения газа с неподвижной стенкой и выделим группу молекул со скоростью  $v$  плотностью  $dn(v)$
2. В соответствующий телесный угол летит лишь доля молекул  $\frac{d\Omega}{4\pi}$ , а за время  $dt$  до поверхности долетят лишь молекулы в объёме  $v_x S dt = v \cos \theta S dt$
3. Последовательно суммируем по всем углам и по все скоростям, деля промежуточный результат на  $S dt$ , чтобы получить поток частиц (число в единицу времени и единицу площади)

### 20.2 Средняя энергия молекул, вылетающих в вакуум через малое отверстие

Чтобы найти эту величину, надо посчитать полную уносимую энергию и разделить её на полный поток (отношение интегралов)

## 21 Распределение Больцмана в поле внешних сил. Барометрическая формула

### 21.1 Распределение Больцмана в поле внешних сил

Поместим газ в потенциальное поле сил  $n = n(z)$ . Если мы захотим посчитать среднее число частиц  $dN$  в объёме  $dV$  со скоростями в  $d^3v$ , то получим распределение Максвелла – Больцмана, где нормировочная константа определяется из условия  $\int dN = N$ , с  $n_0 = n(v = 0)$



## 21.2 Барометрическая формула

1. Рассмотрим цилиндр газа в поле тяжести и запишем для него второй закон Ньютона
2. Вспомним основную формулу МКТ, разделим переменные и проинтегрируем
3. В конце перейдём от  $n$  к  $P$  и получим барометрическую формулу в произвольном потенциальном поле

## 22 Статистика классических идеальных систем. Микро- и макросостояния. Статистический вес. Распределение Гиббса для идеального газа (без вывода)

### 22.1 Статистика классических идеальных систем

Существует два постулата статистического описания больших систем:

1. Все разрешённые микросостояния равновероятны
2. Термодинамически равновесным является то микросостояние, которое реализуется наибольшим числом микросостояний, то есть является наиболее вероятным состоянием

### 22.2 Микро- и макросостояния

**Опр Микросостояние** Состояние системы, определяемое одновременным заданием ...

**Опр Макросостояние** Состояние системы, характеризуемое небольшим числом ...

Одно макросостояние мб реализовано большим числом микросостояний за счёт перестановки частиц не меняющей наблюдаемого состояния

### 22.3 Статистический вес

**Опр Фазовое пространство** Пространство частиц, координат и импульсов системы

Если разбить всё фазовое пространство на ячейки такого объёма, что на каждую будет приходиться лишь одно микросостояние, то число состояний в объёме окажется равным  $dG = \frac{d\Gamma}{\Gamma_0}$ . Различные ячейки отвечают разным микросостояниям, но могут отвечать одному макросостоянию

**Опр Статистический вес** Число микросостояний, реализующих данное макросостояние

$$G = \frac{N!}{N_1! \dots N_m!}$$

### 22.4 Распределение Гиббса для идеального газа (без вывода)

Чтобы найти термодинамическое равновесное состояние, нужно найти условия максимума  $G$ . В этом нам поможет распределение Гиббса

**Опр Явление вырождения** Случай обладания системой одной и той же энергией в ...

**Опр Кратность вырождения** Число состояний, обладающих одним и тем же ...

Выше предполагалось, что энергия частицы (подсистемы) пробегает дискретный набор значений, но результат можно обобщить и на непрерывный ряд значений. Для этого достаточно приписать частице значение энергии ячейке в фазовом пространстве с объёмом  $d\Gamma = drdp$ . В этих условиях распределение Гиббса немного изменится

## 23 Статистические определения энтропии и температуры. Аддитивность энтропии. Закон возрастания энтропии. Третье начало термодинамики

### 23.1 Статистические определения энтропии и температуры

**Утв Энтропия определяется формулой Больцмана**  $S = k \ln G$

Пусть подсистема с энергией  $E$  находится в состоянии, близком к равновесному (энтропия максимальна со значением  $S$ ). Имеет место связь  $S = S(E)$  (если энергия меняется, то меняется и энтропия)

**Опр Статистическая температура**  $\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}$  в предположении ...

Отсюда можно выразить энтропию через сумму, а также, дифференциал энтропии

### 23.2 Аддитивность энтропии

1. Разобьём систему на две подсистемы. Новые микросостояния будут меняться независимо
2. Статвес системы равен произведению чисел способов, которым могут быть осуществлены состояния каждой новой подсистемы:  $G = G_1 G_2$
3. По свойствам логарифма, отсюда следует аддитивность энтропии, то есть энтропия системы есть сумма энтропий её подсистем

### 23.3 Закон возрастания энтропии

**Th** Закон возрастания энтропии

Среди всех направлений эволюции системы предпочтительным является то, при котором вероятность конечного состояния оказывается наибольшей

**Следствие 1** С наибольшей вероятностью энтропия замкнутой системы растёт (не убывает)

**Следствие 2** В состоянии термодинамического равновесия энтропия максимальна

### 23.4 Третье начало термодинамики

**Закон III начало ТД**

1. При приближении к абсолютному нулю, энтропия стремится к конечному значению  $S_0$
2. Все процессы при абсолютном нуле, переводящие систему из одного равновесного состояния в другое, происходят без изменения энтропии

Энтропию в нуле можно положить нулевой и использовать как предел. Третье начало (по-другому – теорема Нернста) есть экспериментальный факт, верный для всех чистых кристаллических веществ, квантовых жидкостей и газов

## 24 Изменение энтропии при смешении газов, парадокс Гиббса

1. Рассмотрим два разных смешения ИГ, для чего можно использовать привычную формулу для энтропии
2. Запишем изменение энтропии в случае разных молекул (необратимый процесс смешения). Можно даже явно посчитать энтропию и показать её положительность
3. В случае одинаковых газов ничего как будто и не произошло:  $\Delta S = 0$
4. А если газы будут совсем немного отличаться, то энтропия смешения будет ноль или не ноль? Парадокс

Парадокс разрешим. В реальности данный предельный переход не выполним: либо газы различны, либо нет, поэтому и энтропия либо  $> 0$ , либо равна 0

## 25 Классическая теория теплоёмкостей. Закон равномерного распределения энергии теплового движения по степеням свободы. Теплоёмкость кристаллов (закон Дюлонга—Пти)

### 25.1 Классическая теория теплоёмкостей

1. Как было выяснено с помощью распределения Максвелла, средняя энергия поступательного движения молекул есть  $\frac{3}{2}kT$
2. В таком случае в силу наличия трёх поступательных СС получим энергию в  $\frac{kT}{2}$  и теплоёмкость  $\frac{k}{2}$  на одну СС. Молярная теплоёмкость будет равна  $\frac{3}{2}R$
3. Теперь рассмотрим молекулу как ТТ с тремя главными моментами инерции и запишем её полную энергию вращательного движения
4. Из распределения Гиббса следует, что  $\overline{w_i^2} = \frac{kT}{I_i}$ , откуда полная вращательная энергия есть  $\frac{3}{2}kT$

5. В случае линейной молекулы ( $I_3 = 0$ ) получим полную энергию  $kT$
6. Для колебательной СС из механики мы знаем, что средняя кинетическая энергия при колебаниях равна средней потенциальной, поэтому на каждую такую СС приходится энергия  $\frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} = kT$
7. Итого, молекула из  $N$  атомов имеет  $3N$  СС, из которых по три поступательные и вращательные и  $3N - 6$  колебательных (в случае линейной молекулы  $3N - 5$  из-за уменьшения количества колебательных СС)

## 25.2 Закон равномерного распределения энергии теплового движения по степеням свободы

### Закон РРЭСС

Если макроскопическая система подчиняется законам классической механики, то на каждое слагаемое в энергии, квадратично зависящее от координат / скоростей молекул, приходится энергия  $\frac{kT}{2}$  и теплоёмкость  $\frac{k}{2}$

## 25.3 Теплоёмкость кристаллов (закон Дюлонга — Пти)

### Закон Дюлонга — Пти

ТТ (кристалл) представляет собой совокупность атомов, находящихся в окрестности своего п.р. В нём эти атомы могут совершать колебания в трёх направлениях, так что каждый обладает средней энергией в  $3kT$ . Отсюда молярная теплоёмкость кристаллов  $c_V = 3R$

## 26 Зависимость теплоёмкости $c_V$ газов от температуры. Возбуждение и замораживание степеней свободы, характеристические температуры

### 26.1 Зависимость теплоёмкости $c_V$ газов от температуры

График зависимости выглядит плавно-ступенчато, с разрывами ближе к нулю и последней ступенькой в точке ( $10^3 K; \frac{7}{2}R$ )

### 26.2 Возбуждение и замораживание степеней свободы, характеристические температуры

Поступательные СС появляются  $T = 0K$  (при всех положительных температурах). Вращательные СС появляются при  $T \sim 100K$ . Колебательные СС появляются при  $T \sim 1000K$

Характеристические температуры берутся из квантовой механики и связаны с энергией молекулы, жёсткостью связи и приведённой массой

## 27 Флуктуации в термодинамических системах. Влияние флуктуаций на чувствительность измерительных приборов (на примере пружинных весов)

### 27.1 Флуктуации в термодинамических системах

**Опр Флуктуация** Случайное отклонение физической величины от её среднего значения

**Опр Среднеквадратичная флуктуация** Среднее квадрата флуктуации

**Опр Дисперсия** Корень среднеквадратичного отклонения

**Опр Относительная среднеквадратичная флуктуация** Отношение дисперсии к среднему

Во многих случаях флуктуации физической величины имеют гауссово распределение

### 27.2 Влияние флуктуаций на чувствительность измерительных приборов (на примере пружинных весов)

Рассмотрим потенциальную энергию пружинных весов. С одной стороны, она обусловлена энергией пружинки, с другой — ТРРЭСС, что позволяет нам оценить флуктуацию их показаний и минимальную массу для измерения

## 28 Зависимость флуктуаций от числа частиц, составляющих систему. Флуктуация числа частиц в выделенном объёме

### 28.1 Зависимость флуктуаций от числа частиц, составляющих систему

1. Рассмотрим (экстенсивную) термодинамическую величину. Чтобы найти её флуктуацию, распишем среднее квадрата её флуктуации для каждой подсистемы, используя статистическую независимость
2. Получим знакомый результат: квадрат среднего минус среднее в квадрате, то есть среднеквадратичное отклонение
3. Умножим в конце на число элементарных подсистем  $N$  и получим искомую флуктуацию
4. В случае интенсивной величины рассуждения будут похожи, однако среднее (равно как и переход от частей к целому) будет считаться по другому. Также нам предстоит сразу считать среднеквадратичное отклонение

### 28.2 Флуктуация числа частиц в выделенном объёме

1. Рассмотрим участок сосуда малого объёма  $\nu$ , содержащего  $n$  частиц и посчитаем энтропию такой системы
2. Запишем условие равновесия такой системы (концентрация внутри участка и вне его одинакова)
3. Тогда можно приближённо вычислить изменение энтропии, разложив её по формуле Тейлора
4. Отсюда следует, что искомая флуктуация числа частиц есть  $\sqrt{n}$

## 29 Связь вероятности флуктуации и энтропии системы. Флуктуации температуры в заданном объёме. Флуктуация объёма в изотермическом и адиабатическом процессах

### 29.1 Связь вероятности флуктуации и энтропии системы

Вероятность пропорциональна  $\exp\left(\frac{\Delta P \Delta V - \Delta T \Delta S}{2kT}\right)$

### 29.2 Флуктуации температуры в заданном объёме

1. Пусть система отделена от внешней среды жёсткой ( $V = \text{const}$ ) теплопроводящей оболочкой. Запишем среднеквадратичное отклонение энергии системы (результат выводится через статсуммы)
2. Пусть в результате флуктуаций в подсистему поступило количество теплоты  $\delta Q$ . Тогда  $\delta T = \frac{\delta Q}{c_V}$ , откуда, с учётом определения  $c_V$ , найдём и среднеквадратичное отклонение температуры

### 29.3 Флуктуация объёма в изотермическом и адиабатическом процессах

1. Введём силу, действующую на газ под поршнем в изотермическом процессе с одной стороны как  $S \Delta P$  (с использованием частной производной), а с другой подобно пружинке, чью жёсткость выразим через равенство потенциальной и температурной энергий
2. Выразим среднеквадратичное отклонение объёма как  $S^2 x^2$
3. Воспользуемся постоянством температуры, выразим нужную частную производную
4. Подставляем и находим нужную среднеквадратичную флуктуацию
5. В адиабатическом процессе отличие будет лишь в виде частной производной (вместо  $PV = \text{const}$  теперь  $PV^\gamma = \text{const}$ )

## 30 Столкновения. Эффективное газокинетическое сечение. Длина свободного пробега. Частота столкновений молекул между собой

### 30.1 Столкновения. Эффективное газокинетическое сечение

**Опр** Эффективное газокинетическое сечение молекулы Площадь поперечного ...

Молекулы провазимодействуют, если центр какой-либо молекулы попадёт в этот цилиндр. Формулы немного отличается для случая, когда молекула движется в среде из молекулы другого размера

### 30.2 Длина свободного пробега

В цилиндре, закреплённом за каждой молекулой, находится по  $\sigma \lambda n$  частиц. Хотя бы одно столкновение произойдёт, если эта величина станет равна единице. При желании можно найти время свободного пробега (поделить длину на скорость) и относительно уточнить данную формулу

### 30.3 Частота столкновений молекул между собой

Найдём частоту столкновений  $f_i$  одной молекулы с другими. Если в единице объёма находится  $n$  молекул, то всего будет произведено  $\frac{1}{2}n\frac{1}{\tau}$  столкновений. Данное число можно выразить как через микро-, так и через макропараметры

## 31 Диффузия: закон Фика, коэффициент диффузии. Дифференциальное уравнение одномерной диффузии. Коэффициент диффузии в газах

### 31.1 Диффузия: закон Фика, коэффициент диффузии. Дифференциальное уравнение одномерной диффузии

**Опр** Средняя скорость течения газа  $\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_i v_i$

Суммирование производится по всем молекулам в единице объёма

**Опр** Плотность потока  $\vec{j} = n\bar{u}$

**Опр** Диффузия Неравновесный процесс пространственного перераспределения ...

**Опр** Относительная концентрация компонентов  $c_i = \frac{n_i}{n}, n = \sum_i n_i$

**Закон Фика**

В обычном случае применяется коэффициент диффузии, но если  $n = const$ , то имеем взаимную диффузию и соответствующий коэффициент. Также существуют поправки в случае ненулевой скорости течения газов:  $j_1 + j_2 = n\bar{u}$ . В трёхмерном случае вводится градиент концентрации

Вышесказанное позволяет записать дифференциальное уравнение (одномерной диффузии)

**Опр** Самодиффузия Диффузия частиц в среде из частиц того же сорта ...

Этот процесс можно изучать только если часть частиц как-то помечена

### 31.2 Коэффициент диффузии в газах

Найдём значение коэффициента диффузии через рассмотрение переноса молекул вдоль оси. Сравнивая полученное выражение с законом Фика, получим  $D = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda$ ; при желании, его можно расписать по-подробнее

## 32 Теплопроводность: закон Фурье, коэффициент теплопроводности. Дифференциальное уравнение одномерной теплопроводности. Коэффициент теплопроводности в газах

### 32.1 Теплопроводность: закон Фурье, коэффициент теплопроводности

**Опр** Теплопроводность Неравновесный процесс, вид передачи тепла от более ...

**Опр** Плотность потока тепла  $q$  Количество тепловой энергии, пересекающей ...

Поток тепла направлен в сторону убывания температуры (это обуславливает знак минус)

**Закон Фурье**

В нём используется коэффициент теплопроводности. В трёхмерном случае вводится градиент температуры

Вышесказанное позволяет записать дифференциальное уравнение (одномерной теплопроводности)

Иногда используют коэффициент температуропроводности  $a = \frac{\kappa}{c_V}$ , где  $c_V$  — теплоёмкость вещества на единицу объёма

### 32.2 Коэффициент теплопроводности в газах

1. Найдём значение коэффициента теплопроводности через рассмотрение переноса тепла вдоль оси в условии перемещения газа как целого ( $N_{up} = N_{down}$ )
2. Для этого надо записать энергию одной молекулы в фиксированной точке (используя  $c_V^1$ )
3. Получим непонятное выражение для потока и перейдём к градиенту температур
4. Сравнивая полученное выражение с законом Фурье, получим  $\kappa = \frac{1}{3}n\bar{v}\lambda c_V = nc_V^m D$ ; при желании, его можно расписать по-подробнее

## 33 Вязкость: закон Ньютона, коэффициенты динамической и кинематической вязкости. Коэффициент вязкости в газах

### 33.1 Вязкость: закон Ньютона, коэффициенты динамической и кинематической вязкости

**Опр Вязкость** Перенос тангенциальной компоненты импульса в направлении ...

**Закон вязкого трения Ньютона**

В нём используется коэффициент вязкости или динамическая вязкость. В трёхмерном случае вводится градиент скорости

Иногда используют кинематическую вязкость  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ , где  $c_V$  — теплоёмкость вещества на единицу объёма

### 33.2 Коэффициент вязкости в газах

1. Зафиксируем среднюю скорость упорядоченного движения молекул в условии равенства потоков молекул
2. Запишем результирующий импульс, приобретаемый верхним слоем за время  $\tau$
3. Делим этот импульс на  $\tau$  и сравниваем полученное выражение с законом вязкого трения Ньютона, получим  $\eta = \frac{1}{3}mn\bar{v}\lambda c_V = \rho D \Rightarrow \nu = \frac{\eta}{\rho} = D$

## 34 Диффузия как процесс случайных блужданий. Закон смещения частицы при диффузии (закон Эйнштейна—Смолуховского). Скорость передачи тепла при теплопроводности

### 34.1 Диффузия как процесс случайных блужданий. Закон смещения частицы при диффузии (закон Эйнштейна—Смолуховского)

**Опр Подвижность**  $B = \frac{\bar{v}}{F_{fr}}$

**Опр Формула Стокса**  $B = \frac{1}{6\pi R\eta}$

**Закон Эйнштейна—Смолуховского**

Маленькая частица, движущаяся в среде, испытывает действие двух типов сил: силы торможения за счёт вязкого трения и флуктуационной силы со стороны молекул среды, чьё среднее действие есть ноль

1. Посчитаем полное смещение частицы после  $N$  шажков. Наивный подход даст нулевой результат
2. Однако если посмотреть квадрат смещения, то сумма шажков разобьётся на сумму квадратичных и перекрёстных слагаемых, притом сумма последних равна нулю в силу их независимости
3. Получили среднеквадратичное отклонение. Заменим число частиц на  $\frac{t}{\tau}$  и пристальным взглядом увидим удвоенный коэффициент диффузии (удвоенность следует из интегрирования ослабляющегося потока частиц)

- Полученная формула и есть ЗЭС, обобщаемый на случай больших размерностей

Данный закон показывает, что броуновское движение частиц аналогично процессу диффузии

### 34.2 Скорость передачи тепла при теплопроводности

- Рассмотрим процесс передачи тепла в одномерном случае и запишем соответствующие уравнения
- После пары преобразований, получим дифференциальное уравнение теплопроводности, в котором можно использовать коэффициент температуропроводности
- Запишем скорость передачи тепла через производную и элементарные приращения
- Получим, что  $l \sim \chi t$ , то есть оценку на скорость теплопередачи

## 35 Подвижность макрочастицы. Броуновское движение. Связь подвижности частицы и коэффициента диффузии облака частиц (соотношение Эйнштейна). Закон Эйнштейна—Смолуховского для броуновской частицы

### 35.1 Подвижность макрочастицы

**Опр** Подвижность  $B = \frac{\bar{v}}{F_{fr}}$

Видно, что подвижность макрочастицы такая же, как и у макрочастицы

### 35.2 Броуновское движение

**Опр** Броуновская частица Макроскопическая частица размера  $\sim 10^{-6}m$

**Опр** Броуновское движение Беспорядочное движение броуновских частиц в жидкости ...

- Рассмотрим движение частицы в среде с помощью ЗН, используя запись силы через подвижность
- В случае нулевой внешней силы (частица предоставлена сама себе) получим уравнение, проинтегрировав которое можно получить формулу скорости такой частицы. Такова роль трения в движении частицы
- Роль диффузионной силы обуславливает среднеквадратичную скорость, которую можно запросто найти из условия равновесия частицы со средой

### 35.3 Связь подвижности частицы и коэффициента диффузии облака частиц (соотношение Эйнштейна)

Теперь опишем движение частицы в координатном пространстве. Для этого мы уже не можем пользоваться результатами для микрочастиц. Хорошей оценкой является  $D \sim \frac{l^2}{\tau} \sim u^2 \tau \sim \dots \sim kTB$ , однако она неточна

Для получения численного коэффициента воспользуемся методом, предложенным Эйнштейном

- Запишем равенство потоков частиц в поле силы тяжести, обусловленных диффузией и наличие гравитационной силы
- По ходу дела нам предстоит воспользоваться распределением Больцмана и определение подвижности
- Приравниваем потоки и получаем точное значение коэффициента диффузии

### 35.4 Закон Эйнштейна—Смолуховского для броуновской частицы

Для броуновской частицы данный закон будет иметь аналогичный вид, что и для макрочастицы (с учётом размерности пространства)

### 36 Явления переноса в разреженных газах: эффузия (эффект Кнудсена), зависимость коэффициента теплопроводности газа от давления

**Опр Эффузия** Медленное течение газа через малые отверстия

**Опр Число Кнудсена**  $Kn = \frac{\lambda}{L}$ ,  $L$  – характерный размер сосуда

В случае  $Kn \gg 1$  имеем свободное молекулярное течение

Если аз находится в сосуде, в стенке которого есть малое отверстие площадью  $S$ , то в состоянии равновесия молекулярные потоки с обеих сторон равны ( $\frac{1}{4}n_i\bar{v}_i$ ). Тогда можно записать равенство, именуемое эффектом Кнудсена, в чьём общем случае учитываются разные молекулы газа с обеих сторон

Так как  $\kappa \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$ , то в силу только что полученного соотношения при течении разреженных газов имеем  $\kappa \sim \frac{P}{\sqrt{m}}$

### 37 Течение разреженного газа по прямолинейной трубе. Формула Кнудсена

#### 37.1 Течение разреженного газа по прямолинейной трубе

Когда разреженный газ течёт по прямолинейной трубе, то его  $\lambda \sim L$ , а так как у стенок трубки находятся тоже молекулы, то для описания течения больше подходит процесс диффузии:  $N^* = Nf\left(\frac{a}{L}\right) \sim NC\frac{a}{L}$ , притом указанное линейное приближение даёт небольшую погрешность

В случае если имеется поток с обеих сторон, то можно записать полное число частиц в трубе, и используя ранее известные формулы, преобразовать её. Полученное выражение будет сильно отличаться от формулы Пузейля гидродинамического течения. При желании можно найти константу  $A$  для трубы

#### 37.2 Формула Кнудсена

В случае течения разреженного газа по трубе, по-новому приблизим  $D$  и запишем приращения  $\frac{dn}{dx}$  вместо дифференциалов. В итоге получим формулу Кнудсена