# Содержание

# 1 Электрические заряды и электрическое поле. Закон сохранения заряда, элементарный заряд. Напряжённость электрического поля. Закон Кулона. Гауссова система единиц (СГС) и система СИ. Принцип суперпозиции. Электрическое поле диполя

## 1.1 Электрические заряды и электрическое поле

**Опр** *Электромагнитное поле* Создаваемое электрическими телами и действующее на ...
**Опр** *Электрический заряд*
Существуют лишь положительные и отрицательные заряды

## 1.2 Закон сохранения заряда, элементарный заряд

**Закон** *Сохранения заряда*
**Опр** *Элементарный заряд* Заряд электрона с противоположным знаком
Любой заряд кратен элементарному заряду, равному $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} Kl = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$

## 1.3 Закон Кулона

**Закон** *Кулона*

## 1.4 Напряжённость электрического поля

**Опр** *Напряжённость электрического поля в точке*
**Опр** *Силовая линия*

## 1.5 Гауссова система единиц (СГС) и система СИ

**Опр** *Гауссова система единиц (СГС)*
Система единиц измерения, в которой основными единицами являются единица длины сантиметр, единица массы грамм и единица времени секунда

Она широко использовалась до принятия Международной системы единиц (СИ). Другое название — абсолютная физическая система единиц
**Опр** *Система СИ*
Система единиц, основанная на Международной системе величин, вместе с наименованиями и обозначениями, а также набором приставок и их наименованиями и обозначениями вместе с правилами их применения, принятая Генеральной конференцией по мерам и весам (CGPM)

В качестве основных физических величин в ISQ используются длина $l$, масса $m$, время $t$, электрический ток $I$, термодинамическая температура $T$, сила света $J$, количество вещества $N$

## 1.6 Принцип суперпозиции

**Принцип** *Суперпозиции*

## 1.7 Электрическое поле диполя

**Опр** *Элементарный (примитивный) диполь*
**Опр** *Плечо диполя*
**Опр** *Дипольный момент диполя*
**Опр** *Точечный диполь*
Чтобы найти поле точечного диполя, надо

1. Рассмотреть частные случаи: поле на оси и на перпендикуляре к ней.
2. Рассмотреть случай произвольной точки с помощью принципа суперпозиции.
3. Ввести новые дипольные моменты и получить где надо скалярное произведение

# 2 Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах. Её применение для нахождения электростатических полей

## 2.1 Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах

**Опр** *Направленная площадь*
**Опр** *Поток вектора напряжённости через площадочку*
**Опр** *Поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность*
**Th** *Теорема Гаусса в интегральной форме*
**Опр** *Дивергенция векторного поля*
**Th** *Теорема Гаусса в дифференциальной форме*
И то, как это следует из интегральной формы.

1. Запишем определение телесного угла, перпендикулярной площадочки и создадим скалярное произведение.
2. Посчитаем $d\Phi$ от точечного заряда внутри, идя от скалярного произведения до телесного угла.
3. Посчитаем полный поток от точечного заряда в зависимости от того, внутри он или снаружи
4. В силу аддитивности потока получаем требуемое выражение

## 2.2 Её применение для нахождения электростатических полей

С помощью теорема Гаусса становится просто находить поля

- Равномерно заряженной плоскости
- Равномерно заряженной нити
- Равномерно заряженного шара
- Нейтральной сферической полости внутри шара (с помощью умного нуля)

Также можно доказать, что поле шара вне его будет совпадать с полем точечного диполя (рассмотреть маленький сдвиг, который и будет плечом такого диполя). Поверхностное распределение заряда найдём из теоремы косинусов для полярного угла

# 3 Потенциальный характер электростатического поля. Теорема о циркуляции электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь напряжённости поля с градиентом потенциала. Граничные условия для вектора $E$

## 3.1 Потенциальный характер электростатического поля

Если посчитать работу сил поля при перемещении заряда по определению, то получим условие потенциальности поля. Совокупность потенциальных полей образует суммарное потенциальное поле

## 3.2 Потенциал и разность потенциалов

**Опр** *Потенциал*
Физическая величина, служащая скалярной энергетической характеристикой электростатического поля и для конкретной рассматриваемой точки равная потенциальной энергии пробного заряда, помещённого в данную точку, отнесённой к величине этого заряда.
**Опр** *Разность потенциалов*

## 3.3 Связь напряжённости поля с градиентом потенциала

Получается, что электростатическое поле можно охарактеризовать потенциалом, поэтому оно и потенциально: $E = -grad\phi = \nabla\phi$

Расписав дифференциал потенциала, можно получить проекции поля на координаты

### 3.4 Теорема о циркуляции электростатического поля

**Th** *О циркуляции в интегральной форме*
Это напрямую следует из потенциальности поля
Если напишем физический смысл ротора и выразим оттуда $\int Edr$, то получим

**Th** *О циркуляции в дифференциальной форме*
По сути, означает равенство перекрёстных производных

### 3.5 Граничные условия для вектора $E$

Для скачка нормальной компоненты применим теорему Гаусса, а для равенства тангенциальных – теорему о циркуляции

## 4 Уравнения Пуассона и Лапласа. Проводники в электрическом поле. Граничные условия на поверхности проводника. Единственность решения электростатической задачи. Метод изображений. Изображение точечного заряда в проводящих плоскости и сфере

### 4.1 Уравнения Пуассона и Лапласа

Если взять суперпозицию двух уравнений с $E$, содержащих $\nabla \cdot \nabla$, то получим

**Утв** *Уравнение Пуассона*
Зная, что $\nabla \cdot \nabla =$, то можно записать уравнение в другой форме.
В частном случае области пространства, свободной от зарядов, имеем

**Утв** *Уравнение Лапласа*

### 4.2 Проводники в электрическом поле

**Опр** *Проводник*
В состоянии равновесия проводники обладают двумя свойствами (отсутствие токов и зарядов внутри (заряды только ...)

### 4.3 Граничные условия на поверхности проводника

Записав классические граничные условия, воспользуемся свойством поля внутри проводника и получим новые условия

### 4.4 Единственность решения электростатической задачи

**Опр** *Электростатическая задача*
Граничные условия этой задачи могут быть двух типов: Дирихле и Цеймана

**Th** *О единственности решения уравнения Лапласа*
Доказывается от противного простыми рассуждениями об исследовании потенциала в терминах производных

**Th** *О единственности решения уравнения Пуассона*
Доказывается от противного введением новой функции (разности кандидатов) и сведением задачи к предыдущей

### 4.5 Метод изображений

Можно показать, что поле внутри области не зависит от зарядов вне её (по теореме единственности). Поэтому в зависимости от ситуации можно менять проводящую поверхность на группу зарядов и наоборот
**Опр** *Изображения зарядов*

### 4.6 Изображение точечного заряда в проводящих плоскости и сфере

В случае проводящей плоскости имеем равноудалённый заряд другого знака

В случае заземлённой сферы говорим некоторые наводящие соображения о положении заряда-изображения, рассматриваем подобие треугольников и записываем равенство нулю потенциала на сфере

В случае изолированной заряженной сферы мы к заряду из предыдущей задачи добавляем заряд в центр сферы так, чтобы их суммарный заряд стал исходному. Потенциал сферы в таком случае $\varphi = \frac{q''}{R}$

## 5 Электрическое поле в веществе. Поляризация диэлектриков. Свободные и связанные заряды. Вектор поляризации и вектор электрической индукции. Поляризуемость частиц среды. Диэлектрическая проницаемость среды. Теорема Гаусса в диэлектриках. Граничные условия на границе двух диэлектриков

### 5.1 Электрическое поле в веществе

При помещении вещества в электрическое поле происходит пространственное перераспределение заряда

**Опр** *Диэлектрик*

### 5.2 Поляризация диэлектриков

**Опр** *Поляризация*

### 5.3 Свободные и связанные заряды

**Опр** *Свободные заряды*

Скорость звука можно запросто вывести из соответствующего уравнения механики

**Опр** *Связанные (поляризационные) заряды*

### 5.4 Вектор поляризации и вектор электрической индукции

**Опр** *Вектор поляризации*

С помощью этого вектора можно найти поверхностную плотность поляризационных зарядов.

1. Запишем объём косого параллелепипеда через скалярное произведение $(S, l)$.
2. Найдём дипольный момент и вектор поляризации поверхностных зарядов с плотностью поверхностных $\sigma$.
3. Запишем проекцию последнего на нормаль и после преобразований получим $\sigma$

Также найдём объёмную плотность поляризационных зарядов.

1. Запишем вышедший через нормальную площадку и поверхность в целом из вещества заряд под действием внешнего поля
2. Тогда внутри остался суммарный поляризационный заряд, равный интегралу
3. Если воспользоваться теоремой Гаусса – Остроградского, то можно получить выражения для дивергенции вектора поляризации
4. Если поляризация однородная, то плотность поляризационных зарядов равна нулю

### 5.5 Теорема Гаусса в диэлектриках

Если учесть наличие поляризационных снарядов, то теорема Гаусса в диэлектриках примет немного иной вид в обеих формах. Удобнее всего будет её записать, используя новое обозначение

**Опр** *Вектор электрической индукции $D$*

### 5.6 Поляризуемость частиц среды

При слабых внешних полях смещение зарядов мало и пропорционально приложенному полю (как производная)

**Опр** *Поляризуемость среды*

### 5.7 Диэлектрическая проницаемость среды

Если подставить поляризуемость в выражение для $D$, то можно ввести новое обозначение

**Опр** *Диэлектрическая проницаемость среды*

Переписав теорему Гаусса для $E$ увидим, что в силу $\varepsilon > 1$ поляризационные заряды ослабляют поле

### 5.8 Граничные условия на границе двух диэлектриков

Для скачка нормальной компоненты запишем теорему Гаусса и получим $4\pi\sigma_{free}$

Для тангенциальной компоненты запишем теорему о циркуляции электрического поля и вновь получим то же самое

## 6 Электрическая ёмкость. Конденсаторы. Вычисление ёмкостей плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов. Энергия электрического поля и её локализация в пространстве. Объёмная плотность энергии. Взаимная энергия зарядов. Энергия в системе заряженных проводников

### 6.1 Электрическая ёмкость

Проведя мысленный эксперимент, поймём, что отношение $\frac{\varphi}{q}$ характеризует проводник

**Опр** *Электрическая ёмкость*

**Опр** *Ёмкость пары проводников (взаимная ёмкость)*

### 6.2 Конденсаторы

**Опр** *Конденсатор*

Поле внутри конденсатор однородное (две бесконечные плоскости), краевых эффектов почти нет

Из выражения для поля можно запросто найти разность потенциалов обкладок

### 6.3 Вычисление ёмкостей плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов

Ёмкость плоского конденсатора находим по принципу суперпозиции как ёмкость двух бесконечных плоскостей разных знаков

**Опр** *Сферический конденсатор*

Его поле можно найти по определению, предварительно посчитав разность потенциалов обкладок

**Опр** *Цилиндрический конденсатор*

Записав теорему Гаусса для $D$, получим поле между обкладками. Затем посчитав разность потенциалов по определению, находим ёмкость

### 6.4 Энергия электрического поля и её локализация в пространстве

**Опр** *Энергия пары зарядов*

Энергия, которую необходимо затратить, чтобы их сблизить (работа) в соотвествии с её определением через потенциал

**Утв** *Энергия электрического поля локализовано в пространстве*

Иными словами, оно зависит лишь от небольшой окрестности вокруг рассматриваемой точки. Ведь если речь идёт об удалённых объектах, меняющихся со временем, то значение энергии уже может быть некорректным

### 6.5 Энергия в системе заряженных проводников

**Утв** *Энергия всей системы зарядов*

В формуле могут быть изменения в случае непрерывного распределения заряда по объёму или площади поверхности

Например, можно найти поле плоского конденсатора

### 6.6 Объёмная плотность энергии

Преобразовав выражение для энергии конденсатора, можно выделить в ней

**Опр** *Объёмная плотность энергии*

В случае $D = \varepsilon E$ выражение можно соответствующе переписать

В случае сложной связи $D$ и $E$ можно используя $D = 4\pi\sigma$ и общего вида энергии $dU = \varphi\delta q$ получить выражение объёмной плотность энергии в случае

В общем случае

1. Рассмотрим вариацию энергии зарядов с $\delta\rho$.
2. Исключим $\delta\rho$, используя теорему Гаусса.
3. Воспользуемся следствием из правила дифференцирования сложной функции
4. Одно слагаемое через замкнутую бесконечно удалённую поверхность будет ноль, а второе и даст привычное нам искомое выражение

### 6.7 Взаимная энергия зарядов

**Опр** *Взаимная энергия*

Если записать выражение через объёмную плотность энергии, то получим величину всегда неотрицательную (в отличие от исходной). Это связано с тем, что последняя включает в себе две группы слагаемых — собственную и взаимную энергии

## 7 Энергия электрического поля в веществе. Энергия диполя во внешнем поле (жёсткий и упругий диполи). Силы, действующие на диполь в неоднородном электрическом поле. Энергетический метод вычисления сил (МВП), вычисление сил при постоянных зарядах и при постоянных потенциалах

### 7.1 Энергия электрического поля в веществе

$W = \delta w V$

### 7.2 Энергия диполя во внешнем поле (жёсткий и упругий диполи)

**Утв**

Найти энергию жёсткого диполя во внешнем поле можно по определению, вспомнив определение разности потенциалов и дипольного момента

В случае упругого диполя $p = \beta E$, поэтому взяв интеграл по $dE$ (оно меняется в силу переменной длины диполя) получим искомое

### 7.3 Силы, действующие на диполь в неоднородном электрическом поле

В неоднородном случае, чтобы получить силу надо взять градиент от энергии

### 7.4 Энергетический метод вычисления сил (МВП), вычисление сил при постоянных зарядах и при постоянных потенциалах

Используя определение элементарной работы, получим выражение для силы. В частном случае электростатической силы получим $\delta A = -dW$

**Утв** *Сила при постоянном заряде и сила при постоянных потенциалах равны*

1. В случае $q = const$ запишем $W(x)$ и продифференцируем для поиска силы при $q = const$
2. В случае $\Delta\varphi = const$ следует дополнительно учитывать работу батареи
3. Продифференцировав выражение для $\delta A_{mech}$ получим искомую силу
4. Видно, что силы равны и они диэлектрики втягиваются в область сильного поля (знак +)

# 8 Постоянный ток. Сила тока, объёмная и поверхностная плотности тока. Закон Ома в интегральной и локальной формах. Уравнение непрерывности для плотности заряда. Закон Джоуля–Ленца в интегральной и локальной формах. Токи в неограниченных средах

## 8.1 Постоянный ток

**Опр** *Электрический ток* Упорядоченное движение заряженных частиц (электронов и ионов)
**Опр** *Постоянный ток*

## 8.2 Сила тока, объёмная и поверхностная плотности тока

**Опр** *Сила тока*
**Опр** *Плотность тока*
Известно как получить формулу для этой величины
**Опр** *Линейная плотность тока*
Аналогично вводятся поверхностная и объёмная плотности тока

## 8.3 Уравнение непрерывности для плотности заряда

Запишем закон сохранения заряда для произвольной области пространства. Воспользовавшись определением дивергенции, получим
**Утв** *Уравнение непрерывности для плотности заряда*
По-другому это уравнение называют ЗСЗ в дифференциальной форме
В стационарном случае в область втекает столько же заряда, сколько и вытекает

## 8.4 Закон Ома в интегральной и локальной формах

**Закон** *Ома*
**Закон** *Ома в дифференциальной форме*

## 8.5 Закон Джоуля–Ленца в интегральной и локальной формах

**Закон** *Джоуля–Ленца в локальной форме*

1. Запишем скорость зарядов в среде. Среднее её значение будет иметь простой вид из-за свойств флуктуаций.
2. Запишем объёмную плотность энергии (через работу) и, воспользовавшись выражениями для $j$, получим искомое

При наличии объёмных токов подставим интегральные величины и получим
**Закон** *Джоуля–Ленца в интегральной форме*

## 8.6 Токи в неограниченных средах

Пользуясь теоремой Гаусса можно получить сопротивление неограниченной среды, по которой течёт ток между двумя электродами. Если расстояние между ними $\gg$ их размеров, то сопротивление превращается в сумму $\frac{\varepsilon_i}{4\pi\lambda_i C_i}$, то есть сопротивление зависит от геометрии каждого электрода, а не от их взаимного расположения

# 9 Постоянный ток в замкнутых электрических цепях. Электродвижущая сила. Закон Ома для участка цепи. Правила Кирхгофа. Работа и мощность постоянного тока

## 9.1 Постоянный ток в замкнутых электрических цепях

В случае замкнутой цепи закон Ома выглядит привычно
**Закон** *Ома в интегральной форме*

## 9.2 Электродвижущая сила

**Опр** *Электродвижущая сила*
Формальное обозначение интгерала

## 9.3 Закон Ома для участка цепи

Полагая ток во всей участках цепи одинаковым, из дифференциального закона Ома получим
**Закон** *Ома для участка цепи*

1. Выразим из дифференциальной формы циркуляцию вектора $E$.
2. Введём полное сопротивление участка и ЭДС (может быть как положительным, так и отрицательным)
3. Подставив всё в одно уравнение, получи требуемое

## 9.4 Правила Кирхгофа

**Утв** *Правила Кирхгофа*
Они доказываются с помощью ЗСЗ и закона Ома для участка цепи

## 9.5 Работа и мощность постоянного тока

В прошлом билете было получено выражение для мощности тока в локальной и интегральной формах. Если учесть наличие ЭДС, можно получить ещё две формулы мощности. Домножив каждую на время, получим работу

# 10 Магнитное поле постоянного тока в вакууме. Вектор магнитной индукции. Сила Лоренца. Сила Ампера. Закон Био–Савара. Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме. Теорема Гаусса для магнитного поля. Магнитное поле прямого провода, соленоида, тороидальной катушки

## 10.1 Магнитное поле постоянного тока в вакууме

**Опр** *Магнитное поле*

## 10.2 Вектор магнитной индукции

**Опр** *Вектор магнитной индукции*
Вектор, определяющий силу, действующую на движущйися заряд и харкатеризующйи магнитное поле

## 10.3 Сила Лоренца

**Опр** *Сила Лоренца*

### 10.4 Сила Ампера

**Опр** *Сила Ампера*
**Закон** *Ампера*
Нетрудно показать эквивалентность разных выражений для сил в законе Ампера, а также, связь сил Лоренца и Ампера

### 10.5 Закон Био–Савара

**Закон** *Био–Савара*
Он экспериментальный и тоже формулируется для линейного и объёмного элемента тока

### 10.6 Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме

Если взять закон Био–Савара и произвести с ним преобразования по законам векторного анализа, то можно получить векторный потенциал и показать, что он бездивергентен
По аналогии с $\varphi$, можно получить
**Th** *О циркуляции магнитного поля в вакууме в дифференциальной форме*
Воспользовавшись формулой Стокса и перейдя к интегралу по контуру, получим
**Th** *О циркуляции магнитного поля в вакууме в интегральной форме*

### 10.7 Теорема Гаусса для магнитного поля

**Th** *Гаусса для магнитного поля в дифференциальной форме*
**Th** *Гаусса для магнитного поля в интегральной форме*

### 10.8 Магнитное поле прямого провода, соленоида, тороидальной катушки

Найти поле прямого провода можно с помощью закона Био-Савара.

1. Запишем этот закон и перейдём к скалярному выражению, раскрыв векторное произведение
2. Выразив $dx$ через выражение для $\operatorname{tg}\alpha$ подставим его в выражение
3. Сделав замену и после интегрирования получим требуемое полке

Поле соленоида и тороидальной катушки можно найти с помощью теоремы о циркуляции, использовав, если необходимо, плотность намотки и линейную плотность тока

## 11 Магнитный момент тока. Точечный магнитный диполь. Сила и момент сил, действующие на виток с током в магнитном поле. Эквивалентность витка с током и магнитного диполя

### 11.1 Магнитный момент тока

**Опр** *Магнитный момент*
Он направлен по нормали к плоскости витка

### 11.2 Точечный магнитный диполь

**Опр** *Точечный магнитный диполь*
То же, что и плоская замкнутая проводящая рамка площади $S$ по которой течёт ток $I$

### 11.3 Сила и момент сил, действующие на виток с током в магнитном поле

В однородном магнитном поле на виток с током суммарная действующая сила равна нулю. В неоднородном поле силу легче все найти через потенциальную энергию.

1. Посчитаем работу поля по повороту витка
2. Увидим: она зависит лишь от начальных и конечных состояний, то есть можно ввести потенциальную энергию.

3. Продифференцируем энергию и получим силу
4. При условии отсутствия токов проводимости в среде после преобразований векторного анализа можно дать её более простой вид

С помощью магнитного момента можно найти момент сил, действующие на магнитный диполь

### 11.4 Эквивалентность витка с током и магнитного диполя

Возьмём векторный потенциал зарядов, движущихся в ограниченной области как сумму и преобразуем его. Затем, переходя к магнитному полю, увидим эквивалентность магнитного <диполя> и витка с током

## 12 Магнитное поле в веществе. Магнитная индукция и напряжённость поля. Вектор намагниченности. Токи проводимости и молекулярные токи. Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе. Граничные условия на границе двух магнетиков. Постоянные магниты

### 12.1 Магнитное поле в веществе

Магнитное поле в веществе создаётся внешним полем и циркулирующими внутри микротоками
**Опр** *Микрополе*

### 12.2 Токи проводимости и молекулярные токи

**Опр** *Токи проводимости*
**Опр** *Молекулярные токи*

### 12.3 Вектор намагниченности

**Опр** *Вектор намагничивания (намагниченность)*
Она может быть как однородной, так и неоднородной
**Опр** *Поверхностные токи*
Свяжем молекулярные токи с вектором намагничивания.

1. Запишем магнитный момент вещества двумя способами
2. Преобразуем, введём линейную плотность тока.
3. Выберем в веществе произвольный замкнутый контур и возьмём тор вокруг него
4. После преобразований и взятия интеграла получим, что

**Утв** *Молекулярный ток и вектор намагничивания связаны в интегральной форме*
Применив теорему Стокса, получим, что
**Утв** *Молекулярный ток и вектор намагничивания связаны в дифференциальной форме*

### 12.4 Магнитная индукция и напряжённость поля

**Опр** *Напряжённость поля*

### 12.5 Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе

Используя связь молекулярного тока и вектор намагничивания в интегральной форме запишем теорему о циркуляции для магнитного поля и получим
**Th** *О циркуляции магнитного поля в веществе в интегральной форме*
Используя дифференциальные формы справа и слева, можно получить
**Th** *О циркуляции магнитного поля в веществе в дифференциальной форме*

### 12.6 Граничные условия на границе двух магнетиков

Для $B_n$ воспользуемся теоремой Гаусса для магнитного поля. Для $H_\tau$ воспользуемся теоремой о циркуляции Для $H_n$ представим $\tau$ через векторное произведение и с помощью преобразований получим требуемое

### 12.7 Постоянные магниты

**Опр** *Постоянный магнит*
Изделие из материала с высокой остаточной магнитной индукцией, сохраняющее состояние намагниченности в течение длительного времени
Можно посчитать поле на оси постоянного магнита

1. Разобъём магнит на колечки с молекулярными токами и по сути получим соленоид.
2. Запишем $dB_x$ колечка через линейную плотность тока, а затем перейдя к параметризации по углу.
3. Выразим $dx$ через тангенс угла и подставив в формулу получим приятное выражение для $dB_x$
4. Взяв интеграл, окончательно найдём поле на оси постоянного магнита
5. При желании можно вернуться к параметризации по координате

Также при желании можно нарисовать график зависимости векторов $B$ и $H$ от $x$. Не лишним будет и показать картину силовых линий векторов внутри и вне магнита

## 13 Электромагнитная индукция. Поток магнитного поля. ЭДС индукции в движущихся и неподвижных проводниках. Вихревое электрическое поле. Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах. Фарадеевская и максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции

### 13.1 Поток магнитного поля

**Опр** *Поток магнитного поля*
Это определение было известно нам и ранее

### 13.2 Электромагнитная индукция

Рассмотрим проводящую рамку, по которой течёт электрический ток. После детального анализа поймём, что там возникает ЭДС индукции, которая создаёт ток в отрицательном направлении обхода контура.
**Опр** *Электромагнитная индукция*
Явление возникновения электрического тока, электрического поля или электрической поляризации при изменении магнитного поля во времени или при движении материальной среды в магнитном поле

### 13.3 ЭДС индукции в движущихся и неподвижных проводниках

Если такие неровности достаточно большие, то начнётся кипение
Фазовый переход «жидкость – пар», происходящий с образованием ...

### 13.4 Правило Ленца

**Правило** *Ленца*

### 13.5 Закон электромагнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах

**Закон** *Электромагнитной индукции в интегральной форме*
$\varepsilon_i = \int E_{out} dl$
Если преобразовать это выражение, то можно получить более частую формулировку этого закона
**Закон** *Электромагнитной индукции в дифференциальной форме*

### 13.6 Вихревое электрическое поле

Как видно из прошлого закона, $E \neq 0$, поэтому индуцируемое электрическое поле является вихревым

### 13.7 Фарадеевская и максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции

**Трактовка** *Фарадея*
**Трактовка** *Максвелла*

## 14 Коэффициенты само- и взаимоиндукции. Теорема взаимности. Взаимная индуктивность двух катушек на общем магнитопроводе. Взаимная энергия токов. Локализация магнитной энергии в пространстве, объёмная плотность магнитной энергии

### 14.1 Коэффициенты само- и взаимоиндукции

**Опр** *Коэффициент самоиндукции (индуктивность)*
**Опр** *Коэффициент взаимоиндукции*

### 14.2 Взаимная индуктивность двух катушек на общем магнитопроводе

Для примера найдём индуктивность идеального соленоида
А также взаимную индуктивность двух катушек на общем магнитопроводе
Рассмотрев произвольный контур, можно найти формулу для
**Утв** *Магнитная энергия тока*

### 14.3 Теорема взаимности

**Th** *Взаимности*
Коэффициенты взаимоиндукции для фиксированной пары витков с током совпадают

1. Посчитаем поток создаваемый на $i$-й виток всеми остальными при фиксированном геометрии системы.

2. Посчитаем его дифференциал и подставим в дифференциал энергии системы токов.

3. Возьмём две частные производные второго порядка в разных последовательностях и по теорему Шварца получим требуемое

### 14.4 Взаимная энергия токов

**Опр** *Взаимная энергия токов*
Энергия, с которой витки действуют друг на друга (включает коэффициент взаимондукции)
Если посчитать энергию системы токов, то две группы слагаемых её составляющих сольются в одну красивую сумму

### 14.5 Локализация магнитной энергии в пространстве, объёмная плотность магнитной энергии

1. Рассмотрим соленоид и посчитаем его энергию, используя выражения для $H, d\Phi, B$.

2. Получим выражение, из которого легко отделяется объём, что говорит о локализации магнитной энергии.

3. Также это позволяет ввести понятие объёмной плотности магнитной энергии и три формулы для неё

4. В более общем случае можно воспользоваться векторным анализом для вывода объёмной плотности энергии

# 15 Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле. Вычисление сил при постоянном токе и потоке магнитного поля. Магнитные цепи. Подъёмная сила электромагнита

## 15.1 Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле

Известно: сила есть частная производная энергии по обобщённой координате
$\delta A_{out} = dW + \delta A_{mech}$

## 15.2 Вычисление сил при постоянном токе и потоке магнитного поля

Для вычисления достаточно выразить $dW$ из выражения выше и продифференцировать

## 15.3 Магнитные цепи

**Опр** *Магнитная цепь*

## 15.4 Подъёмная сила электромагнита

Если рассмотреть простую магнитную цепь, найти поле в её зазоре, а по нему $dW$ и силу, то можно явно показать наличие подъёмной силы у электромагнита

# 16 Магнитные свойства вещества. Качественные представления о механизме намагничивания пара- и диамагнетиков. Качественные представления о ферромагнетиках. Ферромагнитный гистерезис

## 16.1 Магнитные свойства вещества

**Опр** *Магнитная восприимчивость*

## 16.2 Качественные представления о механизме намагничивания пара- и диамагнетиков

**Опр** *Парамагнетик*
**Представление** *Механизм намагничивания парамагнетика*
**Опр** *Намагниченность насыщения*
**Закон** *Кюри*
**Опр** *Постоянная Кюри*

**Опр** *Диамагнетик*
**Представление** *Механизм намагничивания диамагнетика*
**Опр** *Ларморовская частота*

## 16.3 Качественные представления о ферромагнетиках

**Опр** *Ферромагнетик*

## 16.4 Ферромагнитный гистерезис

**Опр** *Гистерезис*
**Опр** *Остаточная намагниченность*
**Опр** *Поле насыщения*
**Опр** *Коэрцитивная сила*
**Опр** *Точка Кюри*
**Опр** *Домен*

# 17 Магнитные свойства сверхпроводников I рода, эффект Мейсснера. Сверхпроводящий шар в магнитном поле. Метод изображений для сверхпроводников

## 17.1 Магнитные свойства сверхпроводников I рода, эффект Мейсснера

**Опр** *Сверхпроводимость*

**Опр** *Критическая температура*

В отличие от сверхпроводников I рода, у сверхпроводников II рода существует смешанное состояние, при котором поле частично проникает в объём

Таким образом, сверхпроводники можно назвать идеальными ($B = 0$) диамагнетиками

**Эффект** *Мейсснера*

## 17.2 Сверхпроводящий шар в магнитном поле

1. Пользуясь тем, что поле внутри шара есть ноль, можно записать выражение для $B_n$ на внешней поверхности, откуда выразить магнитный момент
2. Он совпадёт со случаем электростатики
3. Аналогичный результат можно получить и для $B_\tau$
4. При желании можно получить граничные условия для сверхпроводника и величину молекулярных токов $i$

## 17.3 Метод изображений для сверхпроводников

Поле от экранированных сверхпроводящих токов вне сверхпроводника всё равно что поле отражённого диполя (с тем же $\mathfrak{M}$)

# 18 Относительный характер электрического и магнитного полей. Сила Лоренца. Преобразование $E$ и $B$ при смене системы отсчёта (при $v \ll c$). Поле равномерно движущегося точечного заряда

## 18.1 Относительный характер электрического и магнитного полей

При переходе из одной СО в другую, сила на частицу не меняется, поэтому происходит преобразование полей. Это свидетельствует об их относительности

## 18.2 Сила Лоренца

Таким образом сила Лоренца является инвариантом при переходе между СО

## 18.3 Поле равномерно движущегося точечного заряда

Используя БСЛ и выражение для $E$ можно получить поле равномерно движущегося точечного заряда

## 18.4 Преобразование $E$ и $B$ при смене системы отсчёта (при $v \ll c$)

Из равенства сил можно найти закон преобразования для $E$. Используя поле равномерно движущегося точечного заряда, можно найти $B$ в неподвижной СО, как и закон преобразования

# 19 Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Циклотронная частота и ларморовский радиус. Дрейф в скрещенных однородных полях

## 19.1 Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях

Рассмотрим разные случаи. В однородном $E$ движение будет равноускоренным

### 19.2 Циклотронная частота и ларморовский радиус

В однородном $B$ разложим скорость по двум направлениям и получим равномерную циклоиду
**Опр** *Циклотронная частота*
**Опр** *Ларморовский радиус*
В случае $E \| B$ имеем равноускоренную циклоиду

### 19.3 Дрейф в скрещенных однородных полях

В случае скрещенных полей перейдём в удобную СО (где $E = 0$) и найдём скорость этой СО
**Опр** *Дрейфовая скорость*
Средняя скорость движения частиц, приобретаемая в результате воздействия электрического поля
Получим значения $E$ и $B$ в новой СО и проанализируем движение. Получается суперпозиция трёх движений: равномерной циклоиды (2) и дрейфа (+1)

## 20 Эффект Холла, влияние магнитного поля на проводящие свойства сред

Рассмотрим движение носителей заряда в $B_{out}$.
**Эффект** *Холла*
Выясним связь между электрическим полем $E$ и плотностью тока $j$ в условиях эффекта Холла
**Опр** *Тензор проводимости*
Определим его компоненты. Рассмотрим простейший случай: система содержит носители только одного типа(например электроны), ток течет вдоль $Ox$, а магнитное поле направлено вдоль оси $Oz$. Магнитное поле действует на движущиеся заряды с силой $F_y = -qu_x B_z$ по оси $Oy$. Ток сможет течь строго вдоль $Ox$, если заряды в среде перераспределятся таким образом, чтобы компенсировать магнитную силу
**Опр** *Холловское электрическое поле*

$$E_y = u_x B_z = \frac{j_x}{nq} B_z$$

**Опр** *Подвижность носителей тока*
Коэффициент пропорциональности между дрейфовой скоростью носителей заряда и приложенным внешним электрическим полем
**Опр** *Обобщённый закон Ома*
Второе слагаемое в этой формуле как раз отвечает эффекту Холла - возникновению поперечного направлению тока $E$. Записывая закон покомпонентно, получим
**Опр** *Тензор удельного сопротивления*
**Опр** *Тензор проводимости в условиях эффекта Холла*

## 21 Магнитное действие переменного электрического поля. Ток смещения

### 21.1 Ток смещения

Запишем теорему о циркуляции для магнитного поля и убедимся, что она работает не всегда
**Опр** *Ток смещения*
Теперь запишем теоремы о циркуляции и Гаусса в новом виде
**Опр** *Теорема о циркуляции магнитного поля*

### 21.2 Магнитное действие переменного электрического поля

Таким образом, переменное электрическое поле приводит к возникновению токов смещения, которые в свою очередь участвуют в создании магнитного поля

# 22 Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме. Граничные условия. Материальные уравнения

## 22.1 Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме

**Утв** Уравнения Максвелла состоят из ранее известных нам теорем
**Опр** *Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме*
**Опр** *Система уравнений Максвелла в интегральной форме*
**Утв** У уравнений Максвелла есть словесные интерпретации

## 22.2 Граничные условия

**Утв** У уравнений Максвелла есть всего 4 граничных условия (все они нам уже знакомы)

## 22.3 Материальные уравнения

**Утв** Система уравнений Максвелла не полна. Но её можно дополнить материальными уравнениями
**Утв** Материальные уравнения

# 23 Энергия переменного электромагнитного поля. Поток электромагнитной энергии, теорема Пойнтинга. Примеры применения теоремы Пойнтинга

## 23.1 Энергия переменного электромагнитного поля

Получим ЗСЭ в пространстве с переменными полями
**Утв** Энергия переменного электромагнитного поля есть сумма двух энергий (магнитного и электрического полей)

## 23.2 Поток электромагнитной энергии, теорема Пойнтинга

По ходу преобразований получили выражение, которое удобно обозначить одним символом. Оно равно потоку электромагнитной энергии (энергия в единицу площади в единицу времени)
**Опр** *Вектор Пойнтинга*
**Th** *Пойнтинга в дифференциальной форме*
Используя определение объёмной плотности энергии и теорему Остроградского – Гаусса, получим
**Th** *Пойнтинга в интегральной форме*

## 23.3 Примеры применения теоремы Пойнтинга

**Утв** Теорему Пойнтинга можно применить для поиска поля внутри конденсатора
**Утв** Теорему Пойнтинга можно применить для поиска потока энергии втекающего в длинный провод (равнозначно, поиска джоулевых потерь)

# 24 Квазистационарные электрические цепи, условие квазистационарности. Зарядка и разрядка конденсатора. Установление тока в катушке индуктивности. Интегрирующие и дифференцирующие цепочки

## 24.1 Квазистационарные электрические цепи, условие квазистационарности

**Опр** *Квазистационарная электрическая цепь*
По цепи ЭМ сигнал распространяется со скоростью $c\ldots$
**Утв** Условие квазистационарности цепи

### 24.2 Зарядка и разрядка конденсатора

**Опр** *Зарядка конденсатора*
**Опр** *Разрядка конденсатора*

### 24.3 Установление тока в катушке индуктивности

Запишем $\int E_L dl$ для неветвлёной цепи со всеми основными элементами. После рассмотрения каждого интеграла получим дополненное правило Кирхгофа (нам удалось подвязать к исходному катушку индуктивности)

Используя полученное правило, рассмотрим процесс установления тока в катушке и найдём зависимость $I(t)$

### 24.4 Интегрирующие и дифференцирующие цепочки

**Опр** *Интегрирующая цепочка*
Рассмотрим две интегрирующие цепочки и обоснуем их название
**Опр** *Дифференцирующая цепочка*
Рассмотрим две дифференцирующие цепочки и обоснуем их название

## 25 Свободные колебания в линейных системах. Колебательный RLC-контур. Коэффициент затухания, логарифмический декремент и добротность. Энергетический смысл добротности

### 25.1 Свободные колебания в линейных системах. Колебательный RLC-контур

1. Рассмотрим колебательный RLC-контур и запишем для него второе правило Кирхгофа+
2. Пользуясь теорией о решении дифференциальных уравнений, запишем общее решение.
3. Теперь рассмотрим три частных случая

**Случай** *Слабого затухания*
**Случай** *Сильного затухания в апериодическом режиме*
**Случай** *Критический режим колебаний*

### 25.2 Коэффициент затухания, логарифмический декремент и добротность

Рассмотрим затухание тока в цепи с течением времени
**Опр** *Коэффициент затухания*
**Опр** *Логарифмический декремент затухания*
**Опр** *Характерное время затухания*
**Опр** *Добротность*
В RLC-контуре со слабым затуханием добротность имеет простую формулу В общем же случае можно показать, что в электрических цепях энергия со временем убывает по закону Джоуля-Ленца

### 25.3 Энергетический смысл добротности

Исходя из определения добротности, можно показать, что она показывает убыль энергии в системе за период колебаний

## 26 Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы. Амплитудная и фазовая характеристики. Резонанс. Ширина резонанса и ее связь с добротностью. Процесс установления вынужденных колебаний, биения

### 26.1 Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы

Рассмотрим вынужденные колебания в RLC-контуре под действием синусоидального ЭДС генератора ...

Решение $q(t)$ дифференциального уравнения легче все найти, предварительно перейдя в комплексную плоскость

### 26.2 Амплитудная и фазовая характеристики

**Опр** *Амплитудная характеристика контура*
**Опр** *Фазовая характеристика контура*

### 26.3 Резонанс

**Опр** *Резонанс*
Резкое увеличении амплитуды колебаний при совпадении частоты внешнего воздействия с определённым значениям частоты

### 26.4 Ширина резонанса и ее связь с добротностью

1. Резонанс хорошо виден на графике зависимости $q(\omega)$
2. Заметим, что $\frac{q_m}{q_0} = Q$
3. Найдём разность частот (ширину колокола) на высоте $\frac{q_m}{\sqrt{2}}$. Для этого надо приравнять $(\Delta\omega)$ к $4\omega_i\gamma^2$ (тогда из-под знаменателя и вылезет $\sqrt{2}$)
4. Получим, что $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

### 26.5 Процесс установления вынужденных колебаний, биения

Сразу скажем, что в установившемся режиме колебания будут происходить на частоте вынуждающей силы (как в механике)

1. Рассмотрим решение $q(t)$ при разных значениях параметров
2. В случае $\omega \neq \omega_0$ $\gamma = 0$ имеем произведение синусов
3. Если строить график решения, то медленный синус будет огибающим, а быстрый будет $<$биться$>$ между ним
4. В случае малого $\gamma$ зазор каждый период будет только нарастать
5. В случае большого $\gamma$ практически сразу наступит установившийся режим
6. При $\omega = \omega_0$ рассмотрим соответсвующий предел и получим актуальное решение $q(t)$
7. Если бы $\gamma = 0$, то амплитуда была бы бесконечной, но в реальности колебания будут ограничены огибающей

## 27 Установившиеся колебания в цепи переменного тока. Комплексная форма представления колебаний. Векторные диаграммы. Комплексное сопротивление (импеданс). Правила Кирхгофа для переменных токов. Работа и мощность переменного тока

### 27.1 Установившиеся колебания в цепи переменного тока

В установившемся режиме колебания становятся вынужденными и происходят на частоте внешнего воздействия (возможно с некоторым сдвигом фаз)

### 27.2 Комплексная форма представления колебаний

**Метод** *Комплексных амплитуд*
**Опр** *Комплексная амплитуда*

### 27.3 Векторные диаграммы

Метод комплексных амплитуд имеет геометрическую интерпретацию, которую проще всего показать с помощью векторных диаграмм

### 27.4 Комплексное сопротивление (импеданс)

**Опр** *Импеданс*
**Опр** *Активное сопротивление*
**Опр** *Реактивное сопротивление*
Найдём импеданс каждого элемента в RLC-контуре

### 27.5 Правила Кирхгофа для переменных токов

Запишем известную нам форму правил Кирхгофа. Подставим в него импедансы и сократим на экспоненту: получили новую форму записи
**Правило** *Кирхгофа I*
**Правило** *Кирхгофа II*

### 27.6 Работа и мощность переменного тока

1. Запишем мгновенное значение мощности на резисторе.
2. Посчитаем среднюю за период мощность (через интеграл)
3. Другой способ получить то же самое – через метод комплексных амплитуд (не забыв про сдвиг фаз между током и напряжением)

## 28 Спектральное разложение электрических сигналов. Спектр одиночного прямоугольного импульса и периодической последовательности импульсов. Вынужденные колебания под действием произвольной силы. Соотношение неопределённостей

### 28.1 Спектральное разложение электрических сигналов

**Опр** *Комплексная форма ряда Фурье периодической функции*
**Опр** *Коэффициент Фурье*
Ряд Фурье можно обобщить и на случай непериодической функции, определённой на бесконечном временном интервале
**Опр** *Фурье-спектр*

### 28.2 Спектр одиночного прямоугольного импульса и периодической последовательности импульсов

1. Посчитаем периодической последовательности импульсов. Для этого найдём $c_k$ коэффициент в разложении
2. Поймём, какие же границы будут у интеграла от экспоненты и вычислим его
3. Немного преобразований и коэффициент получен
4. В случае спектра одиночного прямоугольного импульса ситуация проще: сначал считаем Фурье-спектр, а потом и сам интеграл

### 28.3 Вынужденные колебания под действием произвольной силы

Запишем второе правило Кирхгофа и введём линейный оператор ...
**Утв** *Принцип суперпозиции откликов*
Отклик на суммарное воздействие равен сумме откликов на элементарные
Таким образом, любую функцию можно представить в виде суперпозиции гармонических, равно как и вычислить суммарное воздействие

### 28.4 Соотношение неопределённостей

1. Рассмотрим одиночный прямоугольный спектр
2. График его Фурье-спектра имеет вид колокла
3. Если мы <сожмём> функцию спектра по $x$ в $A$ раз, то есть перейдём к функции $f_A(x) = f(Ax)$, то её спектр растянется во столько же раз: $F_A(k) = const \cdot F\left(\frac{k}{A}\right)$, поскольку частота каждой спектральной гармоники $e^{ikx}$ этого разложения должны будут, очевидно, умножиться на A
4. Эта иллюстрация, строго говоря, хоть и носит довольно частный характер, однако она обнажает физический смысл иллюстрируемого свойства: когда мы сжимаем сигнал, его частоты во столько же раз увеличиваются. Другими словами, невозможно произвольно сконцентрировать как функцию, так и её преобразование Фурье

## 29 Спектральный анализ линейных систем. Частотная характеристика и импульсный отклик системы. Колебательный контур как спектральный прибор. Интегрирующая и дифференцирующая цепочки как высокочастотный и низкочастотный фильтры

### 29.1 Спектральный анализ линейных систем. Колебательный контур как спектральный прибор

Рассмотрим RLC-контур и запишем для него II правило Кирхгофа и теорему Фурье. Если вынуждающая сила $\sim e^{i\omega t}$, то и отклик тоже; подставим в уравнение
**Опр** *Функция отклика*
Благодаря ей получим
**Утв** *Связь между компонентами отклика и сигнала*
**Опр** *Импульсная (дельта) функция*

### 29.2 Частотная характеристика и импульсный отклик системы

Если источник был импульсным, то отклик тоже будет импульсным
**Опр** *Импульсный отклик системы*
**Опр** *Частотная характеристика контура*

### 29.3 Интегрирующая и дифференцирующая цепочки как высокочастотный и низкочастотный фильтры

Можно показать, что интегрирующая цепочка может служить фильтром высоких, а дифференцирующая – низких частот

## 30 Модуляция и детектирование сигналов. Амплитудная и фазовая модуляции. Спектры гармонически модулированных по фазе и амплитуде сигналов. Квадратичное детектирование сигналов

### 30.1 Модуляция и детектирование сигналов

**Опр** *Модулированные колебания*
Существует три типа модуляции

### 30.2 Амплитудная и фазовая модуляции

**Опр** *Амплитудно-модулированный сигнал*
**Опр** *Фазово-модулированный сигнал*

### 30.3 Спектры гармонически модулированных по фазе и амплитуде сигналов

Если найти спектр амплитудно-модулированного сигнала, то он будет состоять из трёх гармоник
Спектр фазово-модулированного сигнала тоже будет состоять из трёх гармоник, но немного других

### 30.4 Квадратичное детектирование сигналов

**Опр** *Детектирование*
Например, квадратичные детекторы усредняют квадрат функции по времени
Применить детектирование можно как к АМ, так и к ФМ сигналу, как по определению, так и с помощью метода комплексных амплитуд

## 31 Диффузия: закон Фика, коэффициент диффузии. Дифференциальное уравнение одномерной диффузии. Коэффициент диффузии в газах

### 31.1 Диффузия: закон Фика, коэффициент диффузии. Дифференциальное уравнение одномерной диффузии

**Опр** *Средняя скорость течения газа* $\overline{u} = \frac{1}{N}\sum_i v_i$
Суммирование производится по всем молекулам в единице объёма
**Опр** *Плотность потока* $\overline{j} = n\overline{u}$
**Опр** *Диффузия* Неравновесный процесс пространственного перераспределения ...
**Опр** *Относительная концентрация компонентов* $c_i = \frac{n_i}{n}, n = \sum_i n_i$
**Закон** *Фика*
В обычном случае применяется коэффициент диффузии, но если $n = const$, то имеем взаимную диффузию и соответствующий коэффициент. Также существуют поправки в случае ненулевой скорости течения газов: $j_1 + j_2 = n\overline{u}$. В трёхмерном случае вводится градиент концентрации
Вышесказанное позволяет записать дифференциальное уравнение (одномерной диффузии)
**Опр** *Самодиффузия* Диффузия частиц в среде из частиц того же сорта ...
Этот процесс можно изучать только если часть частиц как-то помечена

### 31.2 Коэффициент диффузии в газах

Найдём значение коэффициента диффузии через рассмотрение переноса молекул вдоль оси. Сравнивая полученное выражение с законом Фика, получим $D = \frac{1}{3}\overline{v}\lambda$; при желании, его можно расписать по-подробнее

## 32 Теплопроводность: закон Фурье, коэффициент теплопроводности. Дифференциальное уравнение одномерной теплопроводности. Коэффициент теплопроводности в газах

### 32.1 Теплопроводность: закон Фурье, коэффициент теплопроводности

**Опр** *Теплопроводность* Неравновесный процесс, вид передачи тепла от более ...
**Опр** *Плотность потока тепла $q$* Количество тепловой энергии, пересекающей ...
Поток тепла направлен в сторону убывания температуры (это обуславливает знак минус)
**Закон** *Фурье*
В нём используется коэффициент теплопроводности. В трёхмерном случае вводится градиент температуры
Вышесказанное позволяет записать дифференциальное уравнение (одномерной теплопроводности)
Иногда используют коэффициент температуропроводности $a = \frac{\varkappa}{c_V}$, где $c_V$ – теплоёмкость вещества на единицу объёма

### 32.2 Коэффициент теплопроводности в газах

1. Найдём значение коэффициента теплопроводности через рассмотрение переноса тепла вдоль оси в условии перемещения газа как целого ($N_{up} = N_{down}$)

2. Для этого надо записать энергию одной молекулы в фиксированной точке (используя $c_V^1$)

3. Получим непонятное выражение для потока и перейдём к градиенту температур

4. Сравнивая полученное выражение с законом Фурье, получим $\varkappa = \frac{1}{3}n\bar{v}\lambda c_V = nc_V^m D$; при желании, его можно расписать по-подробнее

# 33 Вязкость: закон Ньютона, коэффициенты динамической и кинематической вязкости. Коэффициент вязкости в газах

## 33.1 Вязкость: закон Ньютона, коэффициенты динамической и кинематической вязкости

**Опр** *Вязкость* Перенос тангенциальной компоненты импульса в направлении ...
**Закон** *вязкого трения Ньютона*
В нём используется коэффициент вязкости или динамическая вязкость. В трёхмерном случае вводится градиент скорости

Иногда используют кинематическую вязкость $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, где $c_V$ – теплоёмкость вещества на единицу объёма

## 33.2 Коэффициент вязкости в газах

1. Зафиксируем среднюю скорость упорядоченного движения молекул в условии равенства потоков молекул

2. Запишем результирующий импульс, приобретаемый верхним слоем за время $\tau$

3. Делим этот импульс на $\tau$ и сравниваем полученное выражение с законом вязкого трения Ньютона, получим $\eta = \frac{1}{3}mn\bar{v}\lambda c_V = \rho D \Rightarrow \nu = \frac{\eta}{\rho} = D$

# 34 Диффузия как процесс случайных блужданий. Закон смещения частицы при диффузии (закон Эйнштейна—Смолуховского). Скорость передачи тепла при теплопроводности

## 34.1 Диффузия как процесс случайных блужданий. Закон смещения частицы при диффузии (закон Эйнштейна—Смолуховского)

**Опр** *Подвижность* $B = \frac{\bar{v}}{F_{fr}}$
**Опр** *Формула Стокса* $B = \frac{1}{6\pi R\eta}$
**Закон** *Эйнштейна—Смолуховского*
Маленькая частица, движущаяся в среде, испытывает действие двух типов сил: силы торможения за счёт вязкого трения и флуктуационной силы со стороны молекул среды, чьё среднее действие есть ноль

1. Посчитаем полное смещение частицы после $N$ шажков. Наивный подход даст нулевой результат

2. Однако если посмотреть квадрат смещения, то сумма шажков разобьётся на сумму квадратичных и перекрёстных слагаемых, притом сумма последних равна нулю в силу их независимости

3. Получили среднеквадратичное отклонение. Заменим число частиц на $\frac{t}{\tau}$ и пристальным взглядом увидим удвоенный коэффициент диффузии (удвоенность следует из интегрирования ослабляющегося потока частиц)

4. Полученная формула и есть ЗЭС, обобщаемый на случай больших размерностей

Данный закон показывает, что броуновское движение частиц аналогично процессу диффузии

### 34.2 Скорость передачи тепла при теплопроводности

1. Рассмотрим процесс передачи тепла в одномерном случае и запишем соответствующие уравнения
2. После пары преобразований, получим дифференциальное уравнение теплопроводности, в котором можно использовать коэффициент температуропроводности
3. Запишем скорость передачи тепла через производную и элементарные приращения
4. Получим, что $l \sim \chi t$, то есть оценку на скорость теплопередачи

## 35 Подвижность макрочастицы. Броуновское движение. Связь подвижности частицы и коэффициента диффузии облака частиц (соотношение Эйнштейна). Закон Эйнштейна—Смолуховского для броуновской частицы

### 35.1 Подвижность макрочастицы

**Опр** *Подвижность* $B = \frac{\overline{v}}{F_{fr}}$
Видно, что подвижность макрочастицы такая же, как и у макрочастицы

### 35.2 Броуновское движение

**Опр** *Броуновская частица* Макроскопическая частица размера $\sim 10^{-6} m$
**Опр** *Броуновское движение* Беспорядочное движение броуновских частиц в жидкосте ...

1. Рассмотрим движение частицы в среде с помощью 2ЗН, используя запись силы через подвижность
2. В случае нулевой внешней силы (частица предоставлена сама себе) получим уравнение, проинтегрировав которое можно получить формулу скорости такой частицы. Такова роль трения в движении частицы
3. Роль диффузионной силы обуславливает среднеквадратичную скорость, которую можно запросто найти из условия равновесия частицы со средой

### 35.3 Связь подвижности частицы и коэффициента диффузии облака частиц (соотношение Эйнштейна)

Теперь опишем движение частицы в координатном пространстве. Для этого мы уже не можем пользоваться результатами для микрочастиц. Хорошей оценкой является $D \sim \frac{l^2}{\tau} \sim u^2\tau \sim \dots \sim kTB$, однако она неточна

Для получения численного коэффициента воспользуемся методом, предложенным Эйнштейном

1. Запишем равенство потоков частиц в поле силы тяжести, обусловленных диффузией и наличие гравитационной силы
2. По ходу дела нам предстоит воспользоваться распределением Больцмана и определение подвижности
3. Приравниваем потоки и получаем точное значение коэффициента диффузии

### 35.4 Закон Эйнштейна—Смолуховского для броуновской частицы

Для броуновской частицы данный закон будет иметь аналогичный вид, что и для макрочастицы (с учётом размерности пространства)

# 36 Явления переноса в разреженных газах: эффузия (эффект Кнудсена), зависимость коэффициента теплопроводности газа от давления

**Опр** *Эффузия* Медленное течение газа через малые отверстия
**Опр** *Число Кнудсена* $Kn = \frac{\lambda}{L}$, $L$ – характерный размер сосуда
В случае $Kn \gg 1$ имеем свободное молекулярное течение
Если аз находится в сосуде, в стенке которого есть малое отверстие площадью $S$, то в состоянии равновесия молекулярные потоки с обоих сторон равны $(\frac{1}{4}n_i\overline{v_i})$. Тогда можно записать равенство, именуемое эффектом Кнудсена, в чьём общем случае учитываются разные молекулы газа с обеих сторон

Так как $\varkappa \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$, то в силу только что полученного соотношения при течении разреженных газов имеем $\varkappa \sim \frac{P}{\sqrt{m}}$

# 37 Течение разреженного газа по прямолинейной трубе. Формула Кнудсена

## 37.1 Течение разреженного газа по прямолинейной трубе

Когда разреженный газ течёт по прямолинейной трубе, то его $\lambda \sim L$, а так как у стенок трубки находятся тоже молекулы, то для описания течения больше подходит процесс диффузии: $N^* = Nf\left(\frac{a}{L}\right) \sim NC\frac{a}{L}$, притом указанное линейное приближение даёт небольшую погрешность

В случае если имеется поток с обоих сторон, то можно записать полное число частиц в трубе, и использовав ранее известные формулы, преобразовать её. Полученное выражение будет сильно отличаться от формулы Пузейля гидродинамического течения. При желании можно найти константу $A$ для трубы

## 37.2 Формула Кнудсена

В случае течения разреженного газа по трубе, по-новому приблизим $D$ и запишем приращения $\frac{dn}{dx}$ вместо дифференциалов. В итоге получим формулу Кнудсена