

## Содержание

<b>1 Электрические заряды и электрическое поле. Закон сохранения заряда, элементарный заряд. Напряжённость электрического поля. Закон Кулона. Гауссова система единиц (СГС) и система СИ. Принцип суперпозиции. Электрическое поле диполя</b>	<b>6</b>
1.1 Электрические заряды и электрическое поле . . . . .	6
1.2 Закон сохранения заряда, элементарный заряд . . . . .	6
1.3 Закон Кулона . . . . .	6
1.4 Напряжённость электрического поля . . . . .	6
1.5 Гауссова система единиц (СГС) и система СИ . . . . .	6
1.6 Принцип суперпозиции . . . . .	6
1.7 Электрическое поле диполя . . . . .	6
<b>2 Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах. Её применение для нахождения электростатических полей</b>	<b>7</b>
2.1 Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах . . . . .	7
2.2 Её применение для нахождения электростатических полей . . . . .	7
<b>3 Потенциальный характер электростатического поля. Теорема о циркуляции электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь напряжённости поля с градиентом потенциала. Граничные условия для вектора <math>E</math></b>	<b>7</b>
3.1 Потенциальный характер электростатического поля . . . . .	7
3.2 Потенциал и разность потенциалов . . . . .	7
3.3 Связь напряжённости поля с градиентом потенциала . . . . .	7
3.4 Теорема о циркуляции электростатического поля . . . . .	8
3.5 Граничные условия для вектора $E$ . . . . .	8
<b>4 Уравнения Пуассона и Лапласа. Проводники в электрическом поле. Граничные условия на поверхности проводника. Единственность решения электростатической задачи. Метод изображений. Изображение точечного заряда в проводящих плоскости и сфере</b>	<b>8</b>
4.1 Уравнения Пуассона и Лапласа . . . . .	8
4.2 Проводники в электрическом поле . . . . .	8
4.3 Граничные условия на поверхности проводника . . . . .	8
4.4 Единственность решения электростатической задачи . . . . .	8
4.5 Метод изображений . . . . .	8
4.6 Изображение точечного заряда в проводящих плоскости и сфере . . . . .	9
<b>5 Электрическое поле в веществе. Поляризация диэлектриков. Свободные и связанные заряды. Вектор поляризации и вектор электрической индукции. Поляризуемость частиц среды. Диэлектрическая проницаемость среды. Теорема Гаусса в диэлектриках. Граничные условия на границе двух диэлектриков</b>	<b>9</b>
5.1 Электрическое поле в веществе . . . . .	9
5.2 Поляризация диэлектриков . . . . .	9
5.3 Свободные и связанные заряды . . . . .	9
5.4 Вектор поляризации и вектор электрической индукции . . . . .	9
5.5 Теорема Гаусса в диэлектриках . . . . .	9
5.6 Поляризуемость частиц среды . . . . .	10
5.7 Диэлектрическая проницаемость среды . . . . .	10
5.8 Граничные условия на границе двух диэлектриков . . . . .	10
<b>6 Электрическая ёмкость. Конденсаторы. Вычисление ёмкостей плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов. Энергия электрического поля и её локализация в пространстве. Объёмная плотность энергии. Взаимная энергия зарядов. Энергия в системе заряженных проводников</b>	<b>10</b>
6.1 Электрическая ёмкость . . . . .	10
6.2 Конденсаторы . . . . .	10
6.3 Вычисление ёмкостей плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов . . . . .	10
6.4 Энергия электрического поля и её локализация в пространстве . . . . .	10
6.5 Энергия в системе заряженных проводников . . . . .	11
6.6 Объёмная плотность энергии . . . . .	11
6.7 Взаимная энергия зарядов . . . . .	11

<b>7 Энергия электрического поля в веществе. Энергия диполя во внешнем поле (жёсткий и упругий диполи). Силы, действующие на диполь в неоднородном электрическом поле. Энергетический метод вычисления сил (МВП), вычисление сил при постоянных зарядах и при постоянных потенциалах</b>	<b>11</b>
7.1 Энергия электрического поля в веществе . . . . .	11
7.2 Энергия диполя во внешнем поле (жёсткий и упругий диполи) . . . . .	11
7.3 Силы, действующие на диполь в неоднородном электрическом поле . . . . .	11
7.4 Энергетический метод вычисления сил (МВП), вычисление сил при постоянных зарядах и при постоянных потенциалах . . . . .	11
<b>8 Постоянный ток. Сила тока, объёмная и поверхностная плотности тока. Закон Ома в интегральной и локальной формах. Уравнение непрерывности для плотности заряда. Закон Джоуля–Ленца в интегральной и локальной формах. Токи в неограниченных средах</b>	<b>12</b>
8.1 Постоянный ток . . . . .	12
8.2 Сила тока, объёмная и поверхностная плотности тока . . . . .	12
8.3 Уравнение непрерывности для плотности заряда . . . . .	12
8.4 Закон Ома в интегральной и локальной формах . . . . .	12
8.5 Закон Джоуля–Ленца в интегральной и локальной формах . . . . .	12
8.6 Токи в неограниченных средах . . . . .	12
<b>9 Постоянный ток в замкнутых электрических цепях. Электродвижущая сила. Закон Ома для участка цепи. Правила Кирхгофа. Работа и мощность постоянного тока</b>	<b>13</b>
9.1 Постоянный ток в замкнутых электрических цепях . . . . .	13
9.2 Электродвижущая сила . . . . .	13
9.3 Закон Ома для участка цепи . . . . .	13
9.4 Правила Кирхгофа . . . . .	13
9.5 Работа и мощность постоянного тока . . . . .	13
<b>10 Магнитное поле постоянного тока в вакууме. Вектор магнитной индукции. Сила Лоренца. Сила Ампера. Закон Био–Савара. Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме. Теорема Гаусса для магнитного поля. Магнитное поле прямого провода, соленоида, тороидальной катушки</b>	<b>13</b>
10.1 Магнитное поле постоянного тока в вакууме . . . . .	13
10.2 Вектор магнитной индукции . . . . .	13
10.3 Сила Лоренца . . . . .	13
10.4 Сила Ампера . . . . .	14
10.5 Закон Био–Савара . . . . .	14
10.6 Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме . . . . .	14
10.7 Теорема Гаусса для магнитного поля . . . . .	14
10.8 Магнитное поле прямого провода, соленоида, тороидальной катушки . . . . .	14
<b>11 Магнитный момент тока. Точечный магнитный диполь. Сила и момент сил, действующие на виток с током в магнитном поле. Эквивалентность витка с током и магнитного диполя</b>	<b>14</b>
11.1 Магнитный момент тока . . . . .	14
11.2 Точечный магнитный диполь . . . . .	14
11.3 Сила и момент сил, действующие на виток с током в магнитном поле . . . . .	14
11.4 Эквивалентность витка с током и магнитного диполя . . . . .	15
<b>12 Магнитное поле в веществе. Магнитная индукция и напряжённость поля. Вектор намагниченности. Токи проводимости и молекулярные токи. Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе. Граничные условия на границе двух магнетиков. Постоянные магниты</b>	<b>15</b>
12.1 Магнитное поле в веществе . . . . .	15
12.2 Токи проводимости и молекулярные токи . . . . .	15
12.3 Вектор намагниченности . . . . .	15
12.4 Магнитная индукция и напряжённость поля . . . . .	15
12.5 Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе . . . . .	15
12.6 Граничные условия на границе двух магнетиков . . . . .	16
12.7 Постоянные магниты . . . . .	16

<b>13 Электромагнитная индукция. Поток магнитного поля. ЭДС индукции в движущихся и неподвижных проводниках. Вихревое электрическое поле. Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах. Фарадеевская и максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции</b>	<b>16</b>
13.1 Поток магнитного поля . . . . .	16
13.2 Электромагнитная индукция . . . . .	16
13.3 ЭДС индукции в движущихся и неподвижных проводниках . . . . .	16
13.4 Правило Ленца . . . . .	16
13.5 Закон электромагнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах . . . . .	16
13.6 Вихревое электрическое поле . . . . .	17
13.7 Фарадеевская и максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции . . . . .	17
<b>14 Коэффициенты само- и взаимной индукции. Теорема взаимности. Взаимная индуктивность двух катушек на общем магнитопроводе. Взаимная энергия токов. Локализация магнитной энергии в пространстве, объёмная плотность магнитной энергии</b>	<b>17</b>
14.1 Коэффициенты само- и взаимной индукции . . . . .	17
14.2 Взаимная индуктивность двух катушек на общем магнитопроводе . . . . .	17
14.3 Теорема взаимности . . . . .	17
14.4 Взаимная энергия токов . . . . .	17
14.5 Локализация магнитной энергии в пространстве, объёмная плотность магнитной энергии . . . . .	17
<b>15 Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле. Вычисление сил при постоянном токе и потоке магнитного поля. Магнитные цепи. Подъёмная сила электромагнита</b>	<b>18</b>
15.1 Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле . . . . .	18
15.2 Вычисление сил при постоянном токе и потоке магнитного поля . . . . .	18
15.3 Магнитные цепи . . . . .	18
15.4 Подъёмная сила электромагнита . . . . .	18
<b>16 Магнитные свойства вещества. Качественные представления о механизме намагничивания пара- и диамагнетиков. Качественные представления о ферромагнетиках. Ферромагнитный гистерезис</b>	<b>18</b>
16.1 Магнитные свойства вещества . . . . .	18
16.2 Качественные представления о механизме намагничивания пара- и диамагнетиков . . . . .	18
16.3 Качественные представления о ферромагнетиках . . . . .	18
16.4 Ферромагнитный гистерезис . . . . .	18
<b>17 Магнитные свойства сверхпроводников I рода, эффект Мейсснера. Сверхпроводящий шар в магнитном поле. Метод изображений для сверхпроводников</b>	<b>19</b>
17.1 Магнитные свойства сверхпроводников I рода, эффект Мейсснера . . . . .	19
17.2 Сверхпроводящий шар в магнитном поле . . . . .	19
17.3 Метод изображений для сверхпроводников . . . . .	19
<b>18 Относительный характер электрического и магнитного полей. Сила Лоренца. Преобразование <math>E</math> и <math>B</math> при смене системы отсчёта (при <math>v \ll c</math>). Поле равномерно движущегося точечного заряда</b>	<b>19</b>
18.1 Относительный характер электрического и магнитного полей . . . . .	19
18.2 Сила Лоренца . . . . .	19
18.3 Поле равномерно движущегося точечного заряда . . . . .	19
18.4 Преобразование $E$ и $B$ при смене системы отсчёта (при $v \ll c$ ) . . . . .	19
<b>19 Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Циклотронная частота и ларморовский радиус. Дрейф в скрещенных однородных полях</b>	<b>19</b>
19.1 Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях . . . . .	19
19.2 Циклотронная частота и ларморовский радиус . . . . .	20
19.3 Дрейф в скрещенных однородных полях . . . . .	20
<b>20 Эффект Холла, влияние магнитного поля на проводящие свойства сред</b>	<b>20</b>
<b>21 Магнитное действие переменного электрического поля. Ток смещения</b>	<b>20</b>
21.1 Ток смещения . . . . .	20
21.2 Магнитное действие переменного электрического поля . . . . .	20

<b>22 Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме. Граничные условия. Материальные уравнения</b>	<b>21</b>
22.1 Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме . . . . .	21
22.2 Граничные условия . . . . .	21
22.3 Материальные уравнения . . . . .	21
<b>23 Энергия переменного электромагнитного поля. Поток электромагнитной энергии, теорема Пойнтинга. Примеры применения теоремы Пойнтинга</b>	<b>21</b>
23.1 Энергия переменного электромагнитного поля . . . . .	21
23.2 Поток электромагнитной энергии, теорема Пойнтинга . . . . .	21
23.3 Примеры применения теоремы Пойнтинга . . . . .	21
<b>24 Квазистационарные электрические цепи, условие квазистационарности. Зарядка и разрядка конденсатора. Установление тока в катушке индуктивности. Интегрирующие и дифференцирующие цепочки</b>	<b>21</b>
24.1 Квазистационарные электрические цепи, условие квазистационарности . . . . .	21
24.2 Зарядка и разрядка конденсатора . . . . .	22
24.3 Установление тока в катушке индуктивности . . . . .	22
24.4 Интегрирующие и дифференцирующие цепочки . . . . .	22
<b>25 Свободные колебания в линейных системах. Колебательный RLC-контур. Коэффициент затухания, логарифмический декремент и добротность. Энергетический смысл добротности</b>	<b>22</b>
25.1 Свободные колебания в линейных системах. Колебательный RLC-контур . . . . .	22
25.2 Коэффициент затухания, логарифмический декремент и добротность . . . . .	22
25.3 Энергетический смысл добротности . . . . .	22
<b>26 Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы. Амплитудная и фазовая характеристики. Резонанс. Ширина резонанса и ее связь с добротностью. Процесс установления вынужденных колебаний, биения</b>	<b>22</b>
26.1 Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы . . . . .	22
26.2 Амплитудная и фазовая характеристики . . . . .	23
26.3 Резонанс . . . . .	23
26.4 Ширина резонанса и ее связь с добротностью . . . . .	23
26.5 Процесс установления вынужденных колебаний, биения . . . . .	23
<b>27 Установившиеся колебания в цепи переменного тока. Комплексная форма представления колебаний. Векторные диаграммы. Комплексное сопротивление (импеданс). Правила Кирхгофа для переменных токов. Работа и мощность переменного тока</b>	<b>23</b>
27.1 Установившиеся колебания в цепи переменного тока . . . . .	23
27.2 Комплексная форма представления колебаний . . . . .	23
27.3 Векторные диаграммы . . . . .	24
27.4 Комплексное сопротивление (импеданс) . . . . .	24
27.5 Правила Кирхгофа для переменных токов . . . . .	24
27.6 Работа и мощность переменного тока . . . . .	24
<b>28 Спектральное разложение электрических сигналов. Спектр одиночного прямоугольного импульса и периодической последовательности импульсов. Вынужденные колебания под действием произвольной силы. Соотношение неопределённостей</b>	<b>24</b>
28.1 Спектральное разложение электрических сигналов . . . . .	24
28.2 Спектр одиночного прямоугольного импульса и периодической последовательности импульсов . . . . .	24
28.3 Вынужденные колебания под действием произвольной силы . . . . .	24
28.4 Соотношение неопределённостей . . . . .	25
<b>29 Связь вероятности флуктуации и энтропии системы. Флуктуации температуры в заданном объёме. Флуктуация объёма в изотермическом и адиабатическом процессах</b>	<b>25</b>
29.1 Флуктуация объёма в изотермическом и адиабатическом процессах . . . . .	25

<b>30 Столкновения. Эффективное газокинетическое сечение. Длина свободного пробега. Частота столкновений молекул между собой</b>	<b>25</b>
30.1 Столкновения. Эффективное газокинетическое сечение . . . . .	25
30.2 Длина свободного пробега . . . . .	25
30.3 Частота столкновений молекул между собой . . . . .	25
<b>31 Диффузия: закон Фика, коэффициент диффузии. Дифференциальное уравнение одномерной диффузии. Коэффициент диффузии в газах</b>	<b>26</b>
31.1 Диффузия: закон Фика, коэффициент диффузии. Дифференциальное уравнение одномерной диффузии . . . . .	26
31.2 Коэффициент диффузии в газах . . . . .	26
<b>32 Теплопроводность: закон Фурье, коэффициент теплопроводности. Дифференциальное уравнение одномерной теплопроводности. Коэффициент теплопроводности в газах</b>	<b>26</b>
32.1 Теплопроводность: закон Фурье, коэффициент теплопроводности . . . . .	26
32.2 Коэффициент теплопроводности в газах . . . . .	26
<b>33 Вязкость: закон Ньютона, коэффициенты динамической и кинематической вязкости. Коэффициент вязкости в газах</b>	<b>27</b>
33.1 Вязкость: закон Ньютона, коэффициенты динамической и кинематической вязкости . . . . .	27
33.2 Коэффициент вязкости в газах . . . . .	27
<b>34 Диффузия как процесс случайных блужданий. Закон смещения частицы при диффузии (закон Эйнштейна—Смолуховского). Скорость передачи тепла при теплопроводности</b>	<b>27</b>
34.1 Диффузия как процесс случайных блужданий. Закон смещения частицы при диффузии (закон Эйнштейна—Смолуховского) . . . . .	27
34.2 Скорость передачи тепла при теплопроводности . . . . .	27
<b>35 Подвижность макрочастицы. Броуновское движение. Связь подвижности частицы и коэффициента диффузии облака частиц (соотношение Эйнштейна). Закон Эйнштейна—Смолуховского для броуновской частицы</b>	<b>28</b>
35.1 Подвижность макрочастицы . . . . .	28
35.2 Броуновское движение . . . . .	28
35.3 Связь подвижности частицы и коэффициента диффузии облака частиц (соотношение Эйнштейна) . . . . .	28
35.4 Закон Эйнштейна—Смолуховского для броуновской частицы . . . . .	28
<b>36 Явления переноса в разреженных газах: эффузия (эффект Кнудсена), зависимость коэффициента теплопроводности газа от давления</b>	<b>28</b>
<b>37 Течение разреженного газа по прямолинейной трубе. Формула Кнудсена</b>	<b>29</b>
37.1 Течение разреженного газа по прямолинейной трубе . . . . .	29
37.2 Формула Кнудсена . . . . .	29

# 1 Электрические заряды и электрическое поле. Закон сохранения заряда, элементарный заряд. Напряжённость электрического поля. Закон Кулона. Гауссова система единиц (СГС) и система СИ. Принцип суперпозиции. Электрическое поле диполя

## 1.1 Электрические заряды и электрическое поле

**Опр Электромагнитное поле** Создаваемое электрическими телами и действующее на ...

**Опр Электрический заряд**

Существуют лишь положительные и отрицательные заряды

## 1.2 Закон сохранения заряда, элементарный заряд

**Закон Сохранения заряда**

**Опр Элементарный заряд** Заряд электрона с противоположным знаком

Любой заряд кратен элементарному заряду, равному  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} = 4,8 \cdot 10^{-10}$

## 1.3 Закон Кулона

**Закон Кулона**

## 1.4 Напряжённость электрического поля

**Опр Напряжённость электрического поля в точке**

**Опр Силовая линия**

## 1.5 Гауссова система единиц (СГС) и система СИ

**Опр Гауссова система единиц (СГС)**

Система единиц измерения, в которой основными единицами являются единица длины сантиметр, единица массы грамм и единица времени секунда

Она широко использовалась до принятия Международной системы единиц (СИ). Другое название — абсолютная физическая система единиц

**Опр Система СИ**

Система единиц, основанная на Международной системе величин, вместе с наименованиями и обозначениями, а также набором приставок и их наименованиями и обозначениями вместе с правилами их применения, принятая Генеральной конференцией по мерам и весам (CGPM)

В качестве основных физических величин в СИ используются длина  $l$ , масса  $m$ , время  $t$ , электрический ток  $I$ , термодинамическая температура  $T$ , сила света  $J$ , количество вещества  $N$

## 1.6 Принцип суперпозиции

**Принцип Суперпозиции**

## 1.7 Электрическое поле диполя

**Опр Элементарный (примитивный) диполь**

**Опр Плечо диполя**

**Опр Дипольный момент диполя**

**Опр Точечный диполь**

Чтобы найти поле точечного диполя, надо

1. Рассмотреть частные случаи: поле на оси и на перпендикуляре к ней.
2. Рассмотреть случай произвольной точки с помощью принципа суперпозиции.
3. Ввести новые дипольные моменты и получить где надо скалярное произведение

## 2 Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах. Её применение для нахождения электростатических полей

### 2.1 Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах

**Опр** Направленная площадь

**Опр** Поток вектора напряжённости через площадочку

**Опр** Поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность

**Th** Теорема Гаусса в интегральной форме

**Опр** Дивергенция векторного поля

**Th** Теорема Гаусса в дифференциальной форме

И то, как это следует из интегральной формы.

1. Запишем определение телесного угла, перпендикулярной площадочки и создадим скалярное произведение.
2. Посчитаем  $d\Phi$  от точечного заряда внутри, идя от скалярного произведения до телесного угла.
3. Посчитаем полный поток от точечного заряда в зависимости от того, внутри он или снаружи
4. В силу аддитивности потока получаем требуемое выражение

### 2.2 Её применение для нахождения электростатических полей

С помощью теорема Гаусса становится просто находить поля

- Равномерно заряженной плоскости
- Равномерно заряженной нити
- Равномерно заряженного шара
- Нейтральной сферической полости внутри шара (с помощью умного нуля)

Также можно доказать, что поле шара вне его будет совпадать с полем точечного диполя (рассмотреть маленький сдвиг, который и будет плечом такого диполя). Поверхностное распределение заряда найдём из теоремы косинусов для полярного угла

## 3 Потенциальный характер электростатического поля. Теорема о циркуляции электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь напряжённости поля с градиентом потенциала. Граничные условия для вектора $E$

### 3.1 Потенциальный характер электростатического поля

Если посчитать работу сил поля при перемещении заряда по определению, то получим условие потенциальности поля. Совокупность потенциальных полей образует суммарное потенциальное поле

### 3.2 Потенциал и разность потенциалов

**Опр** Потенциал

Физическая величина, служащая скалярной энергетической характеристикой электростатического поля и для конкретной рассматриваемой точки равная потенциальной энергии пробного заряда, помещённого в данную точку, отнесённой к величине этого заряда.

**Опр** Разность потенциалов

### 3.3 Связь напряжённости поля с градиентом потенциала

Получается, что электростатическое поле можно охарактеризовать потенциалом, поэтому оно и потенциально:  $E = -\text{grad}\phi = \nabla\phi$

Расписав дифференциал потенциала, можно получить проекции поля на координаты

### 3.4 Теорема о циркуляции электростатического поля

**Th** *О циркуляции в интегральной форме*

Это напрямую следует из потенциальности поля

Если напишем физический смысл ротора и выразим оттуда  $\int E dr$ , то получим

**Th** *О циркуляции в дифференциальной форме*

По сути, означает равенство перекрёстных производных

### 3.5 Граничные условия для вектора $E$

Для скачка нормальной компоненты применим теорему Гаусса, а для равенства тангенциальных – теорему о циркуляции

## 4 Уравнения Пуассона и Лапласа. Проводники в электрическом поле. Граничные условия на поверхности проводника. Единственность решения электростатической задачи. Метод изображений. Изображение точечного заряда в проводящих плоскости и сфере

### 4.1 Уравнения Пуассона и Лапласа

Если взять суперпозицию двух уравнений с  $E$ , содержащих  $\nabla \cdot \nabla$ , то получим

**Утв** *Уравнение Пуассона*

Зная, что  $\nabla \cdot \nabla =$ , то можно записать уравнение в другой форме.

В частном случае области пространства, свободной от зарядов, имеем

**Утв** *Уравнение Лапласа*

### 4.2 Проводники в электрическом поле

**Опр** *Проводник*

В состоянии равновесия проводники обладают двумя свойствами (отсутствие токов и зарядов внутри (заряды только ...))

### 4.3 Граничные условия на поверхности проводника

Записав классические граничные условия, воспользуемся свойством поля внутри проводника и получим новые условия

### 4.4 Единственность решения электростатической задачи

**Опр** *Электростатическая задача*

Граничные условия этой задачи могут быть двух типов: Дирихле и Цеймана

**Th** *О единственности решения уравнения Лапласа*

Доказывается от противного простыми рассуждениями об исследовании потенциала в терминах производных

**Th** *О единственности решения уравнения Пуассона*

Доказывается от противного введением новой функции (разности кандидатов) и сведением задачи к предыдущей

### 4.5 Метод изображений

Можно показать, что поле внутри области не зависит от зарядов вне её (по теореме единственности). Поэтому в зависимости от ситуации можно менять проводящую поверхность на группу зарядов и наоборот

**Опр** *Изображения зарядов*



## 4.6 Изображение точечного заряда в проводящих плоскости и сфере

В случае проводящей плоскости имеем равноудалённый заряд другого знака

В случае заземлённой сферы говорим некоторые наводящие соображения о положении заряда-изображения, рассматриваем подобие треугольников и записываем равенство нулю потенциала на сфере

В случае изолированной заряженной сферы мы к заряду из предыдущей задачи добавляем заряд в центр сферы так, чтобы их суммарный заряд стал исходному. Потенциал сферы в таком случае  $\varphi = \frac{q''}{R}$

## 5 Электрическое поле в веществе. Поляризация диэлектриков. Свободные и связанные заряды. Вектор поляризации и вектор электрической индукции. Поляризуемость частиц среды. Диэлектрическая проницаемость среды. Теорема Гаусса в диэлектриках. Граничные условия на границе двух диэлектриков

### 5.1 Электрическое поле в веществе

При помещении вещества в электрическое поле происходит пространственное перераспределение заряда

**Опр Диэлектрик**

### 5.2 Поляризация диэлектриков

**Опр Поляризация**

### 5.3 Свободные и связанные заряды

**Опр Свободные заряды**

Скорость звука можно запросто вывести из соответствующего уравнения механики

**Опр Связанные (поляризационные) заряды**

### 5.4 Вектор поляризации и вектор электрической индукции

**Опр Вектор поляризации**

С помощью этого вектора можно найти поверхностную плотность поляризационных зарядов.

1. Запишем объём косоугольного параллелепипеда через скалярное произведение  $(S, l)$ .
2. Найдём дипольный момент и вектор поляризации поверхностных зарядов с плотностью поверхностных  $\sigma$ .
3. Запишем проекцию последнего на нормаль и после преобразований получим  $\sigma$

Также найдём объёмную плотность поляризационных зарядов.

1. Запишем вышедший через нормальную площадку и поверхность в целом из вещества заряд под действием внешнего поля
2. Тогда внутри остался суммарный поляризационный заряд, равный интегралу
3. Если воспользоваться теоремой Гаусса – Остроградского, то можно получить выражения для дивергенции вектора поляризации
4. Если поляризация однородная, то плотность поляризационных зарядов равна нулю

### 5.5 Теорема Гаусса в диэлектриках

Если учесть наличие поляризационных зарядов, то теорема Гаусса в диэлектриках примет немного иной вид в обеих формах. Удобнее всего будет её записать, используя новое обозначение

**Опр Вектор электрической индукции  $D$**

## 5.6 Поляризуемость частиц среды

При слабых внешних полях смещение зарядов мало и пропорционально приложенному полю (как производная)

**Опр** Поляризуемость среды

## 5.7 Диэлектрическая проницаемость среды

Если подставить поляризуемость в выражение для  $D$ , то можно ввести новое обозначение

**Опр** Диэлектрическая проницаемость среды

Переписав теорему Гаусса для  $E$  увидим, что в силу  $\epsilon > 1$  поляризационные заряды ослабляют поле

## 5.8 Граничные условия на границе двух диэлектриков

Для скачка нормальной компоненты запишем теорему Гаусса и получим  $4\pi\sigma_{free}$

Для тангенциальной компоненты запишем теорему о циркуляции электрического поля и вновь получим то же самое

## 6 Электрическая ёмкость. Конденсаторы. Вычисление ёмкостей плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов. Энергия электрического поля и её локализация в пространстве. Объёмная плотность энергии. Взаимная энергия зарядов. Энергия в системе заряженных проводников

### 6.1 Электрическая ёмкость

Проведя мысленный эксперимент, поймём, что отношение  $\frac{Q}{q}$  характеризует проводник

**Опр** Электрическая ёмкость

**Опр** Ёмкость пары проводников (взаимная ёмкость)

### 6.2 Конденсаторы

**Опр** Конденсатор

Поле внутри конденсатор однородное (две бесконечные плоскости), краевых эффектов почти нет

Из выражения для поля можно запросто найти разность потенциалов обкладок

### 6.3 Вычисление ёмкостей плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов

Ёмкость плоского конденсатора находим по принципу суперпозиции как ёмкость двух бесконечных плоскостей разных знаков

**Опр** Сферический конденсатор

Его поле можно найти по определению, предварительно посчитав разность потенциалов обкладок

**Опр** Цилиндрический конденсатор

Записав теорему Гаусса для  $D$ , получим поле между обкладками. Затем посчитав разность потенциалов по определению, находим ёмкость

### 6.4 Энергия электрического поля и её локализация в пространстве

**Опр** Энергия пары зарядов

Энергия, которую необходимо затратить, чтобы их сблизить (работа) в соответствии с её определением через потенциал

**Утв** Энергия электрического поля локализовано в пространстве

Иными словами, оно зависит лишь от небольшой окрестности вокруг рассматриваемой точки. Ведь если речь идёт об удалённых объектах, меняющихся со временем, то значение энергии уже может быть некорректным

## 6.5 Энергия в системе заряженных проводников

**Утв** Энергия всей системы зарядов

В формуле могут быть изменения в случае непрерывного распределения заряда по объёму или площади поверхности

Например, можно найти поле плоского конденсатора

## 6.6 Объёмная плотность энергии

Преобразовав выражение для энергии конденсатора, можно выделить в ней

**Опр** Объёмная плотность энергии

В случае  $D = \epsilon E$  выражение можно соответственно переписать

В случае сложной связи  $D$  и  $E$  можно используя  $D = 4\pi\sigma$  и общего вида энергии  $dU = \varphi\delta q$  получить выражение объёмной плотности энергии в случае

В общем случае

1. Рассмотрим вариацию энергии зарядов с  $\delta\rho$ .
2. Исключим  $\delta\rho$ , используя теорему Гаусса.
3. Воспользуемся следствием из правила дифференцирования сложной функции
4. Одно слагаемое через замкнутую бесконечно удалённую поверхность будет ноль, а второе и даст привычное нам искомое выражение

## 6.7 Взаимная энергия зарядов

**Опр** Взаимная энергия

Если записать выражение через объёмную плотность энергии, то получим величину всегда неотрицательную (в отличие от исходной). Это связано с тем, что последняя включает в себе две группы слагаемых — собственную и взаимную энергии

## 7 Энергия электрического поля в веществе. Энергия диполя во внешнем поле (жёсткий и упругий диполи). Силы, действующие на диполь в неоднородном электрическом поле. Энергетический метод вычисления сил (МВП), вычисление сил при постоянных зарядах и при постоянных потенциалах

### 7.1 Энергия электрического поля в веществе

$$W = \delta w V$$

### 7.2 Энергия диполя во внешнем поле (жёсткий и упругий диполи)

**Утв**

Найти энергию жёсткого диполя во внешнем поле можно по определению, вспомнив определение разности потенциалов и дипольного момента

В случае упругого диполя  $p = \beta E$ , поэтому взяв интеграл по  $dE$  (оно меняется в силу переменной длины диполя) получим искомое

### 7.3 Силы, действующие на диполь в неоднородном электрическом поле

В неоднородном случае, чтобы получить силу надо взять градиент от энергии

### 7.4 Энергетический метод вычисления сил (МВП), вычисление сил при постоянных зарядах и при постоянных потенциалах

Используя определение элементарной работы, получим выражение для силы. В частном случае электростатической силы получим  $\delta A = -dW$

**Утв** Сила при постоянном заряде и сила при постоянных потенциалах равны

1. В случае  $q = \text{const}$  запишем  $W(x)$  и продифференцируем для поиска силы при  $q = \text{const}$
2. В случае  $\Delta\varphi = \text{const}$  следует дополнительно учитывать работу батареи
3. Продифференцировав выражение для  $\delta A_{\text{mech}}$  получим искомую силу
4. Видно, что силы равны и они диэлектрики втягиваются в область сильного поля (знак +)

## 8 Постоянный ток. Сила тока, объёмная и поверхностная плотности тока. Закон Ома в интегральной и локальной формах. Уравнение непрерывности для плотности заряда. Закон Джоуля–Ленца в интегральной и локальной формах. Токи в неограниченных средах

### 8.1 Постоянный ток

**Опр Электрический ток** Упорядоченное движение заряженных частиц (электронов и ионов)

**Опр Постоянный ток**

### 8.2 Сила тока, объёмная и поверхностная плотности тока

**Опр Сила тока**

**Опр Плотность тока**

Известно как получить формулу для этой величины

**Опр Линейная плотность тока**

Аналогично вводятся поверхностная и объёмная плотности тока

### 8.3 Уравнение непрерывности для плотности заряда

Запишем закон сохранения заряда для произвольной области пространства. Воспользовавшись определением дивергенции, получим

**Утв Уравнение непрерывности для плотности заряда**

По-другому это уравнение называют ЗСЗ в дифференциальной форме

В стационарном случае в область втекает столько же заряда, сколько и вытекает

### 8.4 Закон Ома в интегральной и локальной формах

**Закон Ома**

**Закон Ома в дифференциальной форме**

### 8.5 Закон Джоуля–Ленца в интегральной и локальной формах

**Закон Джоуля–Ленца в локальной форме**

1. Запишем скорость зарядов в среде. Среднее её значение будет иметь простой вид из-за свойств флуктуаций.
2. Запишем объёмную плотность энергии (через работу) и, воспользовавшись выражениями для  $j$ , получим искомое

При наличии объёмных токов подставим интегральные величины и получим

**Закон Джоуля–Ленца в интегральной форме**

### 8.6 Токи в неограниченных средах

Пользуясь теоремой Гаусса можно получить сопротивление неограниченной среды, по которой течёт ток между двумя электродами. Если расстояние между ними  $\gg$  их размеров, то сопротивление превращается в сумму  $\frac{\epsilon_i}{4\pi\lambda_i C_i}$ , то есть сопротивление зависит от геометрии каждого электрода, а не от их взаимного расположения

## 9 Постоянный ток в замкнутых электрических цепях. Электродвижущая сила. Закон Ома для участка цепи. Правила Кирхгофа. Работа и мощность постоянного тока

### 9.1 Постоянный ток в замкнутых электрических цепях

В случае замкнутой цепи закон Ома выглядит привычно

*Закон Ома в интегральной форме*

### 9.2 Электродвижущая сила

*Опр Электродвижущая сила*

*Формальное обозначение интеграла*

### 9.3 Закон Ома для участка цепи

Полагая ток во всей участках цепи одинаковым, из дифференциального закона Ома получим

*Закон Ома для участка цепи*

1. Выразим из дифференциальной формы циркуляцию вектора  $E$ .
2. Введём полное сопротивление участка и ЭДС (может быть как положительным, так и отрицательным)
3. Подставив всё в одно уравнение, получи требуемое

### 9.4 Правила Кирхгофа

*Утв Правила Кирхгофа*

Они доказываются с помощью ЗСЗ и закона Ома для участка цепи

### 9.5 Работа и мощность постоянного тока

В прошлом билете было получено выражение для мощности тока в локальной и интегральной формах. Если учесть наличие ЭДС, можно получить ещё две формулы мощности. Домножив каждую на время, получим работу

## 10 Магнитное поле постоянного тока в вакууме. Вектор магнитной индукции. Сила Лоренца. Сила Ампера. Закон Био–Савара. Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме. Теорема Гаусса для магнитного поля. Магнитное поле прямого провода, соленоида, тороидальной катушки

### 10.1 Магнитное поле постоянного тока в вакууме

*Опр Магнитное поле*

### 10.2 Вектор магнитной индукции

*Опр Вектор магнитной индукции*

*Вектор, определяющий силу, действующую на движущийся заряд и характеризующий магнитное поле*

### 10.3 Сила Лоренца

*Опр Сила Лоренца*

## 10.4 Сила Ампера

**Опр** *Сила Ампера*

**Закон** *Ампера*

Нетрудно показать эквивалентность разных выражений для сил в законе Ампера, а также, связь сил Лоренца и Ампера

## 10.5 Закон Био–Савара

**Закон** *Био–Савара*

Он экспериментальный и тоже формулируется для линейного и объёмного элемента тока

## 10.6 Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме

Если взять закон Био–Савара и произвести с ним преобразования по законам векторного анализа, то можно получить векторный потенциал и показать, что он биздивергентен

По аналогии с  $\varphi$ , можно получить

**Th** *О циркуляции магнитного поля в вакууме в дифференциальной форме*

Воспользовавшись формулой Стокса и перейдя к интегралу по контуру, получим

**Th** *О циркуляции магнитного поля в вакууме в интегральной форме*

## 10.7 Теорема Гаусса для магнитного поля

**Th** *Гаусса для магнитного поля в дифференциальной форме*

**Th** *Гаусса для магнитного поля в интегральной форме*

## 10.8 Магнитное поле прямого провода, соленоида, тороидальной катушки

Найти поле прямого провода можно с помощью закона Био-Савара.

1. Запишем этот закон и перейдём к скалярному выражению, раскрыв векторное произведение
2. Выразив  $dx$  через выражение для  $\tan \alpha$  подставим его в выражение
3. Сделав замену и после интегрирования получим требуемое полке

Поле соленоида и тороидальной катушки можно найти с помощью теоремы о циркуляции, используя, если необходимо, плотность намотки и линейную плотность тока

## 11 Магнитный момент тока. Точечный магнитный диполь. Сила и момент сил, действующие на виток с током в магнитном поле. Эквивалентность витка с током и магнитного диполя

### 11.1 Магнитный момент тока

**Опр** *Магнитный момент*

Он направлен по нормали к плоскости витка

### 11.2 Точечный магнитный диполь

**Опр** *Точечный магнитный диполь*

То же, что и плоская замкнутая проводящая рамка площади  $S$  по которой течёт ток  $I$

### 11.3 Сила и момент сил, действующие на виток с током в магнитном поле

В однородном магнитном поле на виток с током суммарная действующая сила равна нулю. В неоднородном поле силу легче все найти через потенциальную энергию.

1. Посчитаем работу поля по повороту витка
2. Увидим: она зависит лишь от начальных и конечных состояний, то есть можно ввести потенциальную энергию.

3. Продифференцируем энергию и получим силу
4. При условии отсутствия токов проводимости в среде после преобразований векторного анализа можно дать её более простой вид

С помощью магнитного момента можно найти момент сил, действующие на магнитный диполь

#### 11.4 Эквивалентность витка с током и магнитного диполя

Возьмём векторный потенциал зарядов, движущихся в ограниченной области как сумму и преобразуем его. Затем, переходя к магнитному полю, увидим эквивалентность магнитного <диполя> и витка с током

### 12 Магнитное поле в веществе. Магнитная индукция и напряжённость поля. Вектор намагниченности. Токи проводимости и молекулярные токи. Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе. Граничные условия на границе двух магнетиков. Постоянные магниты

#### 12.1 Магнитное поле в веществе

Магнитное поле в веществе создаётся внешним полем и циркулирующими внутри микротоками

**Опр** *Микрополе*

#### 12.2 Токи проводимости и молекулярные токи

**Опр** *Токи проводимости*

**Опр** *Молекулярные токи*

#### 12.3 Вектор намагниченности

**Опр** *Вектор намагничивания (намагниченность)*

Она может быть как однородной, так и неоднородной

**Опр** *Поверхностные токи*

Свяжем молекулярные токи с вектором намагничивания.

1. Запишем магнитный момент вещества двумя способами
2. Преобразуем, введём линейную плотность тока.
3. Выберем в веществе произвольный замкнутый контур и возьмём тор вокруг него
4. После преобразований и взятия интеграла получим, что

**Утв** *Молекулярный ток и вектор намагничивания связаны в интегральной форме*

Применив теорему Стокса, получим, что

**Утв** *Молекулярный ток и вектор намагничивания связаны в дифференциальной форме*

#### 12.4 Магнитная индукция и напряжённость поля

**Опр** *Напряжённость поля*

#### 12.5 Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе

Используя связь молекулярного тока и вектор намагничивания в интегральной форме запишем теорему о циркуляции для магнитного поля и получим

**Th** *О циркуляции магнитного поля в веществе в интегральной форме*

Используя дифференциальные формы справа и слева, можно получить

**Th** *О циркуляции магнитного поля в веществе в дифференциальной форме*

## 12.6 Граничные условия на границе двух магнетиков

Для  $B_n$  воспользуемся теоремой Гаусса для магнитного поля. Для  $H_\tau$  воспользуемся теоремой о циркуляции. Для  $H_n$  представим  $\tau$  через векторное произведение и с помощью преобразований получим требуемое

## 12.7 Постоянные магниты

**Опр** *Постоянный магнит*

Изделие из материала с высокой остаточной магнитной индукцией, сохраняющее состояние намагниченности в течение длительного времени

Можно посчитать поле на оси постоянного магнита

1. Разобьём магнит на колечки с молекулярными токами и по сути получим соленоид.
2. Запишем  $dB_x$  колечка через линейную плотность тока, а затем перейдя к параметризации по углу.
3. Выразим  $dx$  через тангенс угла и подставив в формулу получим приятное выражение для  $dB_x$
4. Взяв интеграл, окончательно найдём поле на оси постоянного магнита
5. При желании можно вернуться к параметризации по координате

Также при желании можно нарисовать график зависимости векторов  $B$  и  $H$  от  $x$ . Не лишним будет и показать картину силовых линий векторов внутри и вне магнита

## 13 Электромагнитная индукция. Поток магнитного поля. ЭДС индукции в движущихся и неподвижных проводниках. Вихревое электрическое поле. Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах. Фарадеевская и максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции

### 13.1 Поток магнитного поля

**Опр** *Поток магнитного поля*

Это определение было известно нам и ранее

### 13.2 Электромагнитная индукция

Рассмотрим проводящую рамку, по которой течёт электрический ток. После детального анализа поймём, что там возникает ЭДС индукции, которая создаёт ток в отрицательном направлении обхода контура.

**Опр** *Электромагнитная индукция*

Явление возникновения электрического тока, электрического поля или электрической поляризации при изменении магнитного поля во времени или при движении материальной среды в магнитном поле

### 13.3 ЭДС индукции в движущихся и неподвижных проводниках

Если такие неровности достаточно большие, то начнётся кипение

Фазовый переход «жидкость – пар», происходящий с образованием ...

### 13.4 Правило Ленца

*Правило Ленца*

### 13.5 Закон электромагнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах

*Закон Электромагнитной индукции в интегральной форме*

$$\varepsilon_i = \int E_{out} dl$$

Если преобразовать это выражение, то можно получить более частую формулировку этого закона

*Закон Электромагнитной индукции в дифференциальной форме*



### 13.6 Вихревое электрическое поле

Как видно из прошлого закона,  $E \neq 0$ , поэтому индуцируемое электрическое поле является вихревым

### 13.7 Фарадеевская и максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции

Трактовка Фарадея

Трактовка Максвелла

## 14 Коэффициенты само- и взаимной индукции. Теорема взаимности. Взаимная индуктивность двух катушек на общем магнитопроводе. Взаимная энергия токов. Локализация магнитной энергии в пространстве, объёмная плотность магнитной энергии

### 14.1 Коэффициенты само- и взаимной индукции

Опр Коэффициент самоиндукции (индуктивность)

Опр Коэффициент взаимной индукции

### 14.2 Взаимная индуктивность двух катушек на общем магнитопроводе

Для примера найдём индуктивность идеального соленоида

А также взаимную индуктивность двух катушек на общем магнитопроводе

Рассмотрев произвольный контур, можно найти формулу для

Утв Магнитная энергия тока

### 14.3 Теорема взаимности

Th Взаимности

Коэффициенты взаимной индукции для фиксированной пары витков с током совпадают

1. Посчитаем поток создаваемый на  $i$ -й виток всеми остальными при фиксированном геометрии системы.
2. Посчитаем его дифференциал и подставим в дифференциал энергии системы токов.
3. Возьмём две частные производные второго порядка в разных последовательностях и по теореме Шварца получим требуемое

### 14.4 Взаимная энергия токов

Опр Взаимная энергия токов

Энергия, с которой витки действуют друг на друга (включает коэффициент взаимной индукции)

Если посчитать энергию системы токов, то две группы слагаемых её составляющих сольются в одну красивую сумму

### 14.5 Локализация магнитной энергии в пространстве, объёмная плотность магнитной энергии

1. Рассмотрим соленоид и посчитаем его энергию, используя выражения для  $H$ ,  $d\Phi$ ,  $B$ .
2. Получим выражение, из которого легко отделяется объём, что говорит о локализации магнитной энергии.
3. Также это позволяет ввести понятие объёмной плотности магнитной энергии и три формулы для неё
4. В более общем случае можно воспользоваться векторным анализом для вывода объёмной плотности энергии

## 15 Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле. Вычисление сил при постоянном токе и потоке магнитного поля. Магнитные цепи. Подъёмная сила электромагнита

### 15.1 Энергетический метод вычисления сил в магнитном поле

Известно: сила есть частная производная энергии по обобщённой координате

$$\delta A_{out} = dW + \delta A_{mech}$$

### 15.2 Вычисление сил при постоянном токе и потоке магнитного поля

Для вычисления достаточно выразить  $dW$  из выражения выше и продифференцировать

### 15.3 Магнитные цепи

Опр *Магнитная цепь*

### 15.4 Подъёмная сила электромагнита

Если рассмотреть простую магнитную цепь, найти поле в её зазоре, а по нему  $dW$  и силу, то можно явно показать наличие подъёмной силы у электромагнита

## 16 Магнитные свойства вещества. Качественные представления о механизме намагничивания пара- и диамагнетиков. Качественные представления о ферромагнетиках. Ферромагнитный гистерезис

### 16.1 Магнитные свойства вещества

Опр *Магнитная восприимчивость*

### 16.2 Качественные представления о механизме намагничивания пара- и диамагнетиков

Опр *Парамагнетик*

Представление *Механизм намагничивания парамагнетика*

Опр *Намагниченность насыщения*

Закон *Кюри*

Опр *Постоянная Кюри*

Опр *Диамагнетик*

Представление *Механизм намагничивания диамагнетика*

Опр *Ларморовская частота*

### 16.3 Качественные представления о ферромагнетиках

Опр *Ферромагнетик*

### 16.4 Ферромагнитный гистерезис

Опр *Гистерезис*

Опр *Остаточная намагниченность*

Опр *Поле насыщения*

Опр *Коэрцитивная сила*

Опр *Точка Кюри*

Опр *Домен*

## 17 Магнитные свойства сверхпроводников I рода, эффект Мейснера. Сверхпроводящий шар в магнитном поле. Метод изображений для сверхпроводников

### 17.1 Магнитные свойства сверхпроводников I рода, эффект Мейснера

**Опр** *Сверхпроводимость*

**Опр** *Критическая температура*

В отличие от сверхпроводников I рода, у сверхпроводников II рода существует смешанное состояние, при котором поле частично проникает в объём

Таким образом, сверхпроводники можно назвать идеальными ( $B = 0$ ) диамагнетиками

**Эффект Мейснера**

### 17.2 Сверхпроводящий шар в магнитном поле

1. Пользуясь тем, что поле внутри шара есть ноль, можно записать выражение для  $B_n$  на внешней поверхности, откуда выразить магнитный момент
2. Он совпадёт со случаем электростатики
3. Аналогичный результат можно получить и для  $B_\tau$
4. При желании можно получить граничные условия для сверхпроводника и величину молекулярных токов  $i$

### 17.3 Метод изображений для сверхпроводников

Поле от экранированных сверхпроводящих токов вне сверхпроводника всё равно что поле отражённого диполя (с тем же  $\mathcal{M}$ )

## 18 Относительный характер электрического и магнитного полей. Сила Лоренца. Преобразование $E$ и $B$ при смене системы отсчёта (при $v \ll c$ ). Поле равномерно движущегося точечного заряда

### 18.1 Относительный характер электрического и магнитного полей

При переходе из одной СО в другую, сила на частицу не меняется, поэтому происходит преобразование полей. Это свидетельствует об их относительности

### 18.2 Сила Лоренца

Таким образом сила Лоренца является инвариантом при переходе между СО

### 18.3 Поле равномерно движущегося точечного заряда

Используя БСЛ и выражение для  $E$  можно получить поле равномерно движущегося точечного заряда

### 18.4 Преобразование $E$ и $B$ при смене системы отсчёта (при $v \ll c$ )

Из равенства сил можно найти закон преобразования для  $E$ . Используя поле равномерно движущегося точечного заряда, можно найти  $B$  в неподвижной СО, как и закон преобразования

## 19 Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Циклотронная частота и ларморовский радиус. Дрейф в скрещенных однородных полях

### 19.1 Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях

Рассмотрим разные случаи. В однородном  $E$  движение будет равноускоренным

## 19.2 Циклотронная частота и ларморовский радиус

В однородном  $B$  разложим скорость по двум направлениям и получим равномерную циклоиду

**Опр** Циклотронная частота

**Опр** Ларморовский радиус

В случае  $E \parallel B$  имеем равноускоренную циклоиду

## 19.3 Дрейф в скрещенных однородных полях

В случае скрещенных полей перейдем в удобную СО (где  $E = 0$ ) и найдем скорость этой СО

**Опр** Дрейфовая скорость

Средняя скорость движения частиц, приобретаемая в результате воздействия электрического поля

Получим значения  $E$  и  $B$  в новой СО и проанализируем движение. Получается суперпозиция трёх движений: равномерной циклоиды (2) и дрейфа (+1)

## 20 Эффект Холла, влияние магнитного поля на проводящие свойства сред

Рассмотрим движение носителей заряда в  $B_{out}$ .

**Эффект Холла**

Выясним связь между электрическим полем  $E$  и плотностью тока  $j$  в условиях эффекта Холла

**Опр** Тензор проводимости

Определим его компоненты. Рассмотрим простейший случай: система содержит носители только одного типа (например электроны), ток течет вдоль  $Ox$ , а магнитное поле направлено вдоль оси  $Oz$ . Магнитное поле действует на движущиеся заряды с силой  $F_y = -qu_x B_z$  по оси  $Oy$ . Ток сможет течь строго вдоль  $Ox$ , если заряды в среде перераспределятся таким образом, чтобы компенсировать магнитную силу

**Опр** Холловское электрическое поле

$$E_y = u_x B_z = \frac{j_x}{nq} B_z$$

**Опр** Подвижность носителей тока

Коэффициент пропорциональности между дрейфовой скоростью носителей заряда и приложенным внешним электрическим полем

**Опр** Обобщенный закон Ома

Второе слагаемое в этой формуле как раз отвечает эффекту Холла - возникновению поперечного направления тока  $E$ . Записывая закон покомпонентно, получим

**Опр** Тензор удельного сопротивления

**Опр** Тензор проводимости в условиях эффекта Холла

## 21 Магнитное действие переменного электрического поля. Ток смещения

### 21.1 Ток смещения

Запишем теорему о циркуляции для магнитного поля и убедимся, что она работает не всегда

**Опр** Ток смещения

Теперь запишем теоремы о циркуляции и Гаусса в новом виде

**Опр** Теорема о циркуляции магнитного поля

### 21.2 Магнитное действие переменного электрического поля

Таким образом, переменное электрическое поле приводит к возникновению токов смещения, которые в свою очередь участвуют в создании магнитного поля

## 22 Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме. Граничные условия. Материальные уравнения

### 22.1 Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме

**Утв** Уравнения Максвелла состоят из ранее известных нам теорем

**Опр** Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

**Опр** Система уравнений Максвелла в интегральной форме

**Утв** У уравнений Максвелла есть словесные интерпретации

### 22.2 Граничные условия

**Утв** У уравнений Максвелла есть всего 4 граничных условия (все они нам уже знакомы)

### 22.3 Материальные уравнения

**Утв** Система уравнений Максвелла не полна. Но её можно дополнить материальными уравнениями

**Утв** Материальные уравнения

## 23 Энергия переменного электромагнитного поля. Поток электромагнитной энергии, теорема Пойнтинга. Примеры применения теоремы Пойнтинга

### 23.1 Энергия переменного электромагнитного поля

Получим ЗСЭ в пространстве с переменными полями

**Утв** Энергия переменного электромагнитного поля есть сумма двух энергий (магнитного и электрического полей)

### 23.2 Поток электромагнитной энергии, теорема Пойнтинга

По ходу преобразований получили выражение, которое удобно обозначить одним символом. Оно равно потоку электромагнитной энергии (энергия в единицу площади в единицу времени)

**Опр** Вектор Пойнтинга

**Th** Пойнтинга в дифференциальной форме

Используя определение объёмной плотности энергии и теорему Остроградского – Гаусса, получим

**Th** Пойнтинга в интегральной форме

### 23.3 Примеры применения теоремы Пойнтинга

**Утв** Теорему Пойнтинга можно применить для поиска поля внутри конденсатора

**Утв** Теорему Пойнтинга можно применить для поиска потока энергии втекающего в длинный провод (равнозначно, поиска джоулевых потерь)

## 24 Квазистационарные электрические цепи, условие квазистационарности. Зарядка и разрядка конденсатора. Установление тока в катушке индуктивности. Интегрирующие и дифференцирующие цепочки

### 24.1 Квазистационарные электрические цепи, условие квазистационарности

**Опр** Квазистационарная электрическая цепь

По цепи ЭМ сигнал распространяется со скоростью  $c \dots$

**Утв** Условие квазистационарности цепи

## 24.2 Зарядка и разрядка конденсатора

**Опр** Зарядка конденсатора

**Опр** Разрядка конденсатора

## 24.3 Установление тока в катушке индуктивности

Запишем  $\int E_L dl$  для неветвлённой цепи со всеми основными элементами. После рассмотрения каждого интеграла получим дополненное правило Кирхгофа (нам удалось подвязать к исходному катушку индуктивности)

Используя полученное правило, рассмотрим процесс установления тока в катушке и найдём зависимость  $I(t)$

## 24.4 Интегрирующие и дифференцирующие цепочки

**Опр** Интегрирующая цепочка

Рассмотрим две интегрирующие цепочки и обоснуем их название

**Опр** Дифференцирующая цепочка

Рассмотрим две дифференцирующие цепочки и обоснуем их название

## 25 Свободные колебания в линейных системах. Колебательный RLC-контур. Коэффициент затухания, логарифмический декремент и добротность. Энергетический смысл добротности

### 25.1 Свободные колебания в линейных системах. Колебательный RLC-контур

1. Рассмотрим колебательный RLC-контур и запишем для него второе правило Кирхгофа+
2. Пользуясь теорией о решении дифференциальных уравнений, запишем общее решение.
3. Теперь рассмотрим три частных случая

**Случай** Слабого затухания

**Случай** Сильного затухания в аperiodическом режиме

**Случай** Критический режим колебаний

### 25.2 Коэффициент затухания, логарифмический декремент и добротность

Рассмотрим затухание тока в цепи с течением времени

**Опр** Коэффициент затухания

**Опр** Логарифмический декремент затухания

**Опр** Характерное время затухания

**Опр** Добротность

В RLC-контуре со слабым затуханием добротность имеет простую формулу В общем же случае можно показать, что в электрических цепях энергия со временем убывает по закону Джоуля-Ленца

### 25.3 Энергетический смысл добротности

Исходя из определения добротности, можно показать, что она показывает убыль энергии в системе за период колебаний

## 26 Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы. Амплитудная и фазовая характеристики. Резонанс. Ширина резонанса и ее связь с добротностью. Процесс установления вынужденных колебаний, биения

### 26.1 Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы

Рассмотрим вынужденные колебания в RLC-контуре под действием синусоидального ЭДС генератора

...

Решение  $q(t)$  дифференциального уравнения легче все найти, предварительно перейдя в комплексную плоскость

## 26.2 Амплитудная и фазовая характеристики

**Опр** Амплитудная характеристика контура

**Опр** Фазовая характеристика контура

## 26.3 Резонанс

**Опр** Резонанс

Резкое увеличение амплитуды колебаний при совпадении частоты внешнего воздействия с определённым значениям частоты

## 26.4 Ширина резонанса и ее связь с добротностью

1. Резонанс хорошо виден на графике зависимости  $q(\omega)$
2. Заметим, что  $\frac{q_m}{q_0} = Q$
3. Найдём разность частот (ширину колокола) на высоте  $\frac{q_m}{\sqrt{2}}$ . Для этого надо приравнять  $(\Delta\omega)$  к  $4\omega_i\gamma^2$  (тогда из-под знаменателя и вылезет  $\sqrt{2}$ )
4. Получим, что  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

## 26.5 Процесс установления вынужденных колебаний, биения

Сразу скажем, что в установившемся режиме колебания будут происходить на частоте вынуждающей силы (как в механике)

1. Рассмотрим решение  $q(t)$  при разных значениях параметров
2. В случае  $\omega \neq \omega_0$   $\gamma = 0$  имеем произведение синусов
3. Если строить график решения, то медленный синус будет огибающим, а быстрый будет <биться> между ним
4. В случае малого  $\gamma$  зазор каждый период будет только нарастать
5. В случае большого  $\gamma$  практически сразу наступит установившийся режим
6. При  $\omega = \omega_0$  рассмотрим соответствующий предел и получим актуальное решение  $q(t)$
7. Если бы  $\gamma = 0$ , то амплитуда была бы бесконечной, но в реальности колебания будут ограничены огибающей

## 27 Установившиеся колебания в цепи переменного тока. Комплексная форма представления колебаний. Векторные диаграммы. Комплексное сопротивление (импеданс). Правила Кирхгофа для переменных токов. Работа и мощность переменного тока

### 27.1 Установившиеся колебания в цепи переменного тока

В установившемся режиме колебания становятся вынужденными и происходят на частоте внешнего воздействия (возможно с некоторым сдвигом фаз)

### 27.2 Комплексная форма представления колебаний

**Метод** Комплексных амплитуд

**Опр** Комплексная амплитуда

### 27.3 Векторные диаграммы

Метод комплексных амплитуд имеет геометрическую интерпретацию, которую проще всего показать с помощью векторных диаграмм

### 27.4 Комплексное сопротивление (импеданс)

**Опр** Импеданс

**Опр** Активное сопротивление

**Опр** Реактивное сопротивление

Найдём импеданс каждого элемента в RLC-контуре

### 27.5 Правила Кирхгофа для переменных токов

Запишем известную нам форму правил Кирхгофа. Подставим в него импедансы и сократим на экспоненту: получили новую форму записи

**Правило Кирхгофа I**

**Правило Кирхгофа II**

### 27.6 Работа и мощность переменного тока

1. Запишем мгновенное значение мощности на резисторе.
2. Посчитаем среднюю за период мощность (через интеграл)
3. Другой способ получить то же самое – через метод комплексных амплитуд (не забыв про сдвиг фаз между током и напряжением)

## 28 Спектральное разложение электрических сигналов. Спектр одиночного прямоугольного импульса и периодической последовательности импульсов. Вынужденные колебания под действием произвольной силы. Соотношение неопределённостей

### 28.1 Спектральное разложение электрических сигналов

**Опр** Комплексная форма ряда Фурье периодической функции

**Опр** Коэффициент Фурье

Ряд Фурье можно обобщить и на случай непериодической функции, определённой на бесконечном временном интервале

**Опр** Фурье-спектр

### 28.2 Спектр одиночного прямоугольного импульса и периодической последовательности импульсов

1. Посчитаем периодической последовательности импульсов. Для этого найдём  $c_k$  коэффициент в разложении
2. Поймём, какие же границы будут у интеграла от экспоненты и вычислим его
3. Немного преобразований и коэффициент получен
4. В случае спектра одиночного прямоугольного импульса ситуация проще: сначала считаем Фурье-спектр, а потом и сам интеграл

### 28.3 Вынужденные колебания под действием произвольной силы

Запишем второе правило Кирхгофа и введём линейный оператор ...

**Утв** Принцип суперпозиции откликов

Отклик на суммарное воздействие равен сумме откликов на элементарные

Таким образом, любую функцию можно представить в виде суперпозиции гармонических, равно как и вычислить суммарное воздействие



## 28.4 Соотношение неопределённостей

1. Рассмотрим одиночный прямоугольный спектр
2. График его Фурье-спектра имеет вид колокола
3. Если мы <сожмём> функцию спектра по  $x$  в  $A$  раз, то есть перейдём к функции  $f_A(x) = f(Ax)$ , то её спектр растянется во столько же раз:  $F_A(k) = \text{const} \cdot F\left(\frac{k}{A}\right)$ , поскольку частота каждой спектральной гармоники  $e^{ikx}$  этого разложения должны будут, очевидно, умножиться на  $A$
4. Эта иллюстрация, строго говоря, хоть и носит довольно частный характер, однако она обнажает физический смысл иллюстрируемого свойства: когда мы сжимаем сигнал, его частоты во столько же раз увеличиваются. Другими словами, невозможно произвольно сконцентрировать как функцию, так и её преобразование Фурье

## 29 Связь вероятности флуктуации и энтропии системы. Флуктуации температуры в заданном объёме. Флуктуация объёма в изотермическом и адиабатическом процессах

1. Пусть система отделена от внешней среды жёсткой ( $V = \text{const}$ ) теплопроводящей оболочкой. Запишем среднеквадратичное отклонение энергии системы (результат выводится через статсуммы)
2. Пусть в результате флуктуаций в подсистему поступило количество теплоты  $\delta Q$ . Тогда  $\delta T = \frac{\delta Q}{c_V}$ , откуда, с учётом определения  $c_V$ , найдём и среднеквадратичное отклонение температуры

### 29.1 Флуктуация объёма в изотермическом и адиабатическом процессах

1. Введём силу, действующую на газ под поршнем в изотермическом процессе с одной стороны как  $S\Delta P$  (с использованием частной производной), а с другой подобно пружинке, чью жёсткость выразим через равенство потенциальной и температурной энергий
2. Выразим среднеквадратичное отклонение объёма как  $S^2 x^2$
3. Воспользуемся постоянством температуры, выразим нужную частную производную
4. Подставляем и находим нужную среднеквадратичную флуктуацию
5. В адиабатическом процессе отличие будет лишь в виде частной производной (вместо  $PV = \text{const}$  теперь  $PV^\gamma = \text{const}$ )

## 30 Столкновения. Эффективное газокинетическое сечение. Длина свободного пробега. Частота столкновений молекул между собой

### 30.1 Столкновения. Эффективное газокинетическое сечение

**Опр** Эффективное газокинетическое сечение молекулы Площадь поперечного ...

Молекулы взаимодействуют, если центр какой-либо молекулы попадёт в этот цилиндр. Формулы немного отличаются для случая, когда молекула движется в среде из молекул другого размера

### 30.2 Длина свободного пробега

В цилиндре, закреплённом за каждой молекулой, находится по  $\sigma \lambda n$  частиц. Хотя бы одно столкновение произойдёт, если эта величина станет равна единице. При желании можно найти время свободного пробега (поделить длину на скорость) и относительно уточнить данную формулу

### 30.3 Частота столкновений молекул между собой

Найдём частоту столкновений  $f_i$  одной молекулы с другими. Если в единице объёма находится  $n$  молекул, то всего будет произведено  $\frac{1}{2} n \frac{1}{\tau}$  столкновений. Данное число можно выразить как через микро-, так и через макропараметры

## 31 Диффузия: закон Фика, коэффициент диффузии. Дифференциальное уравнение одномерной диффузии. Коэффициент диффузии в газах

### 31.1 Диффузия: закон Фика, коэффициент диффузии. Дифференциальное уравнение одномерной диффузии

**Опр Средняя скорость течения газа**  $\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_i v_i$

Суммирование производится по всем молекулам в единице объёма

**Опр Плотность потока**  $\vec{j} = n\bar{u}$

**Опр Диффузия** Неравновесный процесс пространственного перераспределения ...

**Опр Относительная концентрация компонентов**  $c_i = \frac{n_i}{n}, n = \sum_i n_i$

**Закон Фика**

В обычном случае применяется коэффициент диффузии, но если  $n = const$ , то имеем взаимную диффузию и соответствующий коэффициент. Также существуют поправки в случае ненулевой скорости течения газов:  $j_1 + j_2 = n\bar{u}$ . В трёхмерном случае вводится градиент концентрации

Вышесказанное позволяет записать дифференциальное уравнение (одномерной диффузии)

**Опр Самодиффузия** Диффузия частиц в среде из частиц того же сорта ...

Этот процесс можно изучать только если часть частиц как-то помечена

### 31.2 Коэффициент диффузии в газах

Найдём значение коэффициента диффузии через рассмотрение переноса молекул вдоль оси. Сравнивая полученное выражение с законом Фика, получим  $D = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda$ ; при желании, его можно расписать по-подробнее

## 32 Теплопроводность: закон Фурье, коэффициент теплопроводности. Дифференциальное уравнение одномерной теплопроводности. Коэффициент теплопроводности в газах

### 32.1 Теплопроводность: закон Фурье, коэффициент теплопроводности

**Опр Теплопроводность** Неравновесный процесс, вид передачи тепла от более ...

**Опр Плотность потока тепла**  $q$  Количество тепловой энергии, пересекающей ...

Поток тепла направлен в сторону убывания температуры (это обуславливает знак минус)

**Закон Фурье**

В нём используется коэффициент теплопроводности. В трёхмерном случае вводится градиент температуры

Вышесказанное позволяет записать дифференциальное уравнение (одномерной теплопроводности)

Иногда используют коэффициент температуропроводности  $a = \frac{\kappa}{c_V}$ , где  $c_V$  – теплоёмкость вещества на единицу объёма

### 32.2 Коэффициент теплопроводности в газах

1. Найдём значение коэффициента теплопроводности через рассмотрение переноса тепла вдоль оси в условии перемещения газа как целого ( $N_{up} = N_{down}$ )
2. Для этого надо записать энергию одной молекулы в фиксированной точке (используя  $c_V^1$ )
3. Получим непонятное выражение для потока и перейдём к градиенту температур
4. Сравнивая полученное выражение с законом Фурье, получим  $\kappa = \frac{1}{3}n\bar{v}\lambda c_V = nc_V^m D$ ; при желании, его можно расписать по-подробнее

### 33 Вязкость: закон Ньютона, коэффициенты динамической и кинематической вязкости. Коэффициент вязкости в газах

#### 33.1 Вязкость: закон Ньютона, коэффициенты динамической и кинематической вязкости

**Опр Вязкость** Перенос тангенциальной компоненты импульса в направлении ...

**Закон вязкого трения Ньютона**

В нём используется коэффициент вязкости или динамическая вязкость. В трёхмерном случае вводится градиент скорости

Иногда используют кинематическую вязкость  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ , где  $c_V$  – теплоёмкость вещества на единицу объёма

#### 33.2 Коэффициент вязкости в газах

1. Зафиксируем среднюю скорость упорядоченного движения молекул в условии равенства потоков молекул
2. Запишем результирующий импульс, приобретаемый верхним слоем за время  $\tau$
3. Делим этот импульс на  $\tau$  и сравниваем полученное выражение с законом вязкого трения Ньютона, получим  $\eta = \frac{1}{3} m n \bar{v} \lambda c_V = \rho D \Rightarrow \nu = \frac{\eta}{\rho} = D$

### 34 Диффузия как процесс случайных блужданий. Закон смещения частицы при диффузии (закон Эйнштейна—Смолуховского). Скорость передачи тепла при теплопроводности

#### 34.1 Диффузия как процесс случайных блужданий. Закон смещения частицы при диффузии (закон Эйнштейна—Смолуховского)

**Опр Подвижность**  $B = \frac{\bar{v}}{F_{fr}}$

**Опр Формула Стокса**  $B = \frac{1}{6\pi R\eta}$

**Закон Эйнштейна—Смолуховского**

Маленькая частица, движущаяся в среде, испытывает действие двух типов сил: силы торможения за счёт вязкого трения и флуктуационной силы со стороны молекул среды, чьё среднее действие есть ноль

1. Посчитаем полное смещение частицы после  $N$  шажков. Наивный подход даст нулевой результат
2. Однако если посмотреть квадрат смещения, то сумма шажков разобьётся на сумму квадратичных и перекрёстных слагаемых, притом сумма последних равна нулю в силу их независимости
3. Получили среднеквадратичное отклонение. Заменяем число частиц на  $\frac{t}{\tau}$  и пристальным взглядом увидим удвоенный коэффициент диффузии (удвоенность следует из интегрирования ослабляющегося потока частиц)
4. Полученная формула и есть ЗЭС, обобщаемый на случай больших размерностей

Данный закон показывает, что броуновское движение частиц аналогично процессу диффузии

#### 34.2 Скорость передачи тепла при теплопроводности

1. Рассмотрим процесс передачи тепла в одномерном случае и запишем соответствующие уравнения
2. После пары преобразований, получим дифференциальное уравнение теплопроводности, в котором можно использовать коэффициент температуропроводности
3. Запишем скорость передачи тепла через производную и элементарные приращения
4. Получим, что  $l \sim \chi t$ , то есть оценку на скорость теплопередачи

### 35 Подвижность макрочастицы. Броуновское движение. Связь подвижности частицы и коэффициента диффузии облака частиц (соотношение Эйнштейна). Закон Эйнштейна—Смолуховского для броуновской частицы

#### 35.1 Подвижность макрочастицы

**Опр** Подвижность  $B = \frac{\bar{v}}{F_{fr}}$

Видно, что подвижность макрочастицы такая же, как и у макрочастицы

#### 35.2 Броуновское движение

**Опр** Броуновская частица Макроскопическая частица размера  $\sim 10^{-6}m$

**Опр** Броуновское движение Беспорядочное движение броуновских частиц в жидкости ...

1. Рассмотрим движение частицы в среде с помощью 23Н, используя запись силы через подвижность
2. В случае нулевой внешней силы (частица предоставлена сама себе) получим уравнение, проинтегрировав которое можно получить формулу скорости такой частицы. Такова роль трения в движении частицы
3. Роль диффузионной силы обуславливает среднеквадратичную скорость, которую можно запросто найти из условия равновесия частицы со средой

#### 35.3 Связь подвижности частицы и коэффициента диффузии облака частиц (соотношение Эйнштейна)

Теперь опишем движение частицы в координатном пространстве. Для этого мы уже не можем пользоваться результатами для микрочастиц. Хорошей оценкой является  $D \sim \frac{l^2}{\tau} \sim u^2 \tau \sim \dots \sim kTB$ , однако она неточна

Для получения численного коэффициента воспользуемся методом, предложенным Эйнштейном

1. Запишем равенство потоков частиц в поле силы тяжести, обусловленных диффузией и наличие гравитационной силы
2. По ходу дела нам предстоит воспользоваться распределением Больцмана и определение подвижности
3. Приравниваем потоки и получаем точное значение коэффициента диффузии

#### 35.4 Закон Эйнштейна—Смолуховского для броуновской частицы

Для броуновской частицы данный закон будет иметь аналогичный вид, что и для макрочастицы (с учётом размерности пространства)

### 36 Явления переноса в разреженных газах: эффузия (эффект Кнудсена), зависимость коэффициента теплопроводности газа от давления

**Опр** Эффузия Медленное течение газа через малые отверстия

**Опр** Число Кнудсена  $Kn = \frac{\lambda}{L}$ ,  $L$  — характерный размер сосуда

В случае  $Kn \gg 1$  имеем свободное молекулярное течение

Если аз находится в сосуде, в стенке которого есть малое отверстие площадью  $S$ , то в состоянии равновесия молекулярные потоки с обеих сторон равны ( $\frac{1}{4}n_i\bar{v}_i$ ). Тогда можно записать равенство, именуемое эффектом Кнудсена, в чём общем случае учитываются разные молекулы газа с обеих сторон

Так как  $\kappa \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$ , то в силу только что полученного соотношения при течении разреженных газов имеем  $\kappa \sim \frac{P}{\sqrt{m}}$

## 37 Течение разреженного газа по прямолинейной трубе. Формула Кнудсена

### 37.1 Течение разреженного газа по прямолинейной трубе

Когда разреженный газ течёт по прямолинейной трубе, то его  $\lambda \sim L$ , а так как у стенок трубки находятся тоже молекулы, то для описания течения больше подходит процесс диффузии:  $N^* = Nf\left(\frac{a}{L}\right) \sim NC'_L \frac{a}{L}$ , притом указанное линейное приближение даёт небольшую погрешность

В случае если имеется поток с обеих сторон, то можно записать полное число частиц в трубе, и используя ранее известные формулы, преобразовать её. Полученное выражение будет сильно отличаться от формулы Пузейля гидродинамического течения. При желании можно найти константу  $A$  для трубы

### 37.2 Формула Кнудсена

В случае течения разреженного газа по трубе, по-новому приблизим  $D$  и запишем приращения  $\frac{dn}{dx}$  вместо дифференциалов. В итоге получим формулу Кнудсена