

## Содержание

<b>1 Термодинамическая система. Микроскопические и макроскопические параметры. Уравнение состояния (термическое и калорическое). Равновесные и неравновесные состояния и процессы</b>	<b>4</b>
1.1 Термодинамическая система . . . . .	4
1.2 Микроскопические и макроскопические параметры . . . . .	4
1.3 Уравнение состояния (термическое и калорическое) . . . . .	4
1.4 Равновесные и неравновесные состояния и процессы . . . . .	4
<b>2 Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа. Идеально-газовое определение температуры. Связь давления и температуры идеального газа с кинетической энергией его молекул</b>	<b>4</b>
2.1 Идеальный газ . . . . .	4
2.2 Уравнение состояния идеального газа . . . . .	4
2.3 Идеально-газовое определение температуры . . . . .	4
2.4 Связь давления и температуры идеального газа с кинетической энергией его молекул . . . . .	4
<b>3 Работа, внутренняя энергия, теплота. Первое начало термодинамики. Внутренняя энергия идеального газа</b>	<b>5</b>
3.1 Работа, внутренняя энергия, теплота . . . . .	5
3.2 Первое начало термодинамики . . . . .	5
3.3 Внутренняя энергия идеального газа . . . . .	5
<b>4 Теплоёмкость. Теплоёмкости при постоянном объёме и давлении. Связь между <math>c_V</math> и <math>c_P</math> для идеального газа (соотношение Майера)</b>	<b>5</b>
4.1 Теплоёмкость . . . . .	5
4.2 Теплоёмкости при постоянном объёме и давлении . . . . .	5
4.3 Связь между $c_V$ и $c_P$ для идеального газа (соотношение Майера) . . . . .	5
<b>5 Политропический и адиабатический процессы. Уравнение адиабаты и политропы идеального газа. Скорость звука в газах</b>	<b>5</b>
5.1 Политропический и адиабатический процессы . . . . .	5
5.2 Уравнение адиабаты и политропы идеального газа . . . . .	6
5.3 Скорость звука в газах . . . . .	6
<b>6 Тепловые машины. Цикл Карно. КПД машины Карно. Теоремы Карно. Холодильная машина и тепловой насос. Коэффициенты эффективности идеальной холодильной машины и идеального теплового насоса</b>	<b>6</b>
6.1 Тепловые машины . . . . .	6
6.2 Цикл Карно . . . . .	6
6.3 КПД машины Карно . . . . .	6
6.4 Теоремы Карно . . . . .	6
6.5 Холодильная машина и тепловой насос . . . . .	7
6.6 Коэффициенты эффективности идеальной холодильной машины и идеального теплового насоса . . . . .	7
<b>7 Второе начало термодинамики. Энтропия (термодинамическое определение). Неравенство Клаузиуса. Энтропия идеального газа</b>	<b>7</b>
7.1 Второе начало термодинамики . . . . .	7
7.2 Энтропия (термодинамическое определение) . . . . .	7
7.3 Неравенство Клаузиуса . . . . .	7
7.4 Энтропия идеального газа . . . . .	7
<b>8 Обратимые и необратимые процессы. Закон возрастания энтропии. Неравновесное расширение газа в пустоту</b>	<b>7</b>
8.1 Обратимые и необратимые процессы . . . . .	7
8.2 Закон возрастания энтропии . . . . .	8
8.3 Неравновесное расширение газа в пустоту . . . . .	8

<b>9 Термодинамические потенциалы: внутренняя энергия, энтальпия, свободная энергия, термодинамический потенциал Гиббса. Метод получения соотношений Максвелла (соотношений взаимности)</b>	<b>8</b>
9.1 Термодинамические потенциалы: внутренняя энергия, энтальпия, свободная энергия, термодинамический потенциал Гиббса . . . . .	8
9.2 Метод получения соотношений Максвелла (соотношений взаимности) . . . . .	8
<b>10 Фазовые переходы первого рода. Уравнение Клапейрона—Клаузиуса. Фазовое равновесие «жидкость—пар», зависимость давления насыщенного пара от температуры</b>	<b>8</b>
10.1 Фазовые переходы первого рода . . . . .	8
10.2 Уравнение Клапейрона—Клаузиуса . . . . .	9
10.3 Фазовое равновесие «жидкость – пар», зависимость давления насыщенного пара от температуры . . . . .	9
<b>11 Фазовые диаграммы «твёрдое тело—жидкость—пар». Тройная точка, критическая точка</b>	<b>9</b>
11.1 Фазовые диаграммы «твёрдое тело—жидкость—пар» . . . . .	9
11.2 Тройная точка, критическая точка . . . . .	9
11.3 Теорема Лебега об ограниченной сходимости . . . . .	10
<b>12 Несобственный интеграл. Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу. Критерий Коши. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов</b>	<b>10</b>
12.1 Несобственный интеграл . . . . .	10
12.2 Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу . . . . .	10
12.3 Критерий Коши . . . . .	11
12.4 Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов . . . . .	11
<b>13 Связь поточечной и равномерной сходимостей для функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Обобщенный признак сравнения для функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Признаки Дирихле и Лейбница равномерной сходимости функционального ряда. Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность равномерного предела, непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными слагаемыми. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Дифференцирование предельной функции и почленное дифференцирование функционального ряда</b>	<b>11</b>
13.1 Связь поточечной и равномерной сходимостей для функциональной последовательности . . . . .	11
13.2 Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности . . . . .	11
13.3 Обобщенный признак сравнения для функциональных рядов . . . . .	12
13.4 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда . . . . .	12
13.5 Признаки Дирихле и Лейбница равномерной сходимости функционального ряда . . . . .	12
13.6 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда . . . . .	12
13.7 Непрерывность равномерного предела, непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными слагаемыми . . . . .	12
13.8 Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов . . . . .	12
13.9 Дифференцирование предельной функции и почленное дифференцирование функционального ряда . . . . .	13
<b>14 Степенные ряды. Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Теорема о круге сходимости степенного ряда. Первая теорема Абеля. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Сохранение радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Достаточное условие аналитичности функции. Пример бесконечно дифференцируемой, но неаналитической функции. Представление экспоненты комплексного аргумента степенным рядом. Формулы Эйлера. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Представление степенной и логарифмической функций степенными рядами</b>	<b>13</b>
14.1 Степенные ряды . . . . .	13

14.2	Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости . . . . .	14
14.3	Теорема о круге сходимости степенного ряда . . . . .	14
14.4	Первая теорема Абеля . . . . .	14
14.5	Теорема о равномерной сходимости степенного ряда . . . . .	14
14.6	Вторая теорема Абеля . . . . .	15
14.7	Сохранение радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда . . . . .	15
14.8	Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда . . . . .	15
14.9	Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора . . . . .	15
14.10	Достаточное условие аналитичности функции . . . . .	16
14.11	Пример бесконечно дифференцируемой, но неаналитической функции . . . . .	16
14.12	Представление экспоненты комплексного аргумента степенным рядом . . . . .	16
14.13	Формулы Эйлера . . . . .	17
14.14	Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме . . . . .	17
14.15	Представление степенной и логарифмической функций степенными рядами . . . . .	17

# 1 Термодинамическая система. Микроскопические и макроскопические параметры. Уравнение состояния (термическое и калорическое). Равновесные и неравновесные состояния и процессы

## 1.1 Термодинамическая система

**Опр Система, термодинамическая система** Совокупность рассматриваемых тел ...

**Опр Изолированная, закрытая и открытая термодинамическая система** Обмен ...

## 1.2 Микроскопические и макроскопические параметры

**Утв Существуют микроскопические и макроскопические состояния** + их другие имена

**Опр Микроскопическое и макроскопическое состояния** Состояние системы,

**Опр Микроскопические параметры** Величины, характеризующий макросостояние

## 1.3 Уравнение состояния (термическое и калорическое)

**Опр Уравнение состояния** Состояние, отражающее для конкретного класса величин ...

**Опр Термодинамическое, калорическое уравнение состояния**  $f(P, V, T) = 0, j(\dots)$

## 1.4 Равновесные и неравновесные состояния и процессы

**Опр Термодинамическое равновесие** Все макроскопические процессы прекращаются, ...

**Опр Основное (общее) начало термодинамики** Предоставленная самой себе ...

**Опр -I начало ТД** Три условия на любую изолированную систему

**Опр Неравновесное состояние** Предоставленная самой себе ...

**Опр Релаксация, время релаксации** Переход из состояния, в котором система ...

**Опр Траектория процесса** Состояния системы и переходы между ними

**Опр Равновесный (квазистатический) процесс** По ходу процесса система ...

**Опр Неравновесное состояние** На траектории процесса встречаются ...

# 2 Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа. Идеально-газовое определение температуры. Связь давления и температуры идеального газа с кинетической энергией его молекул

## 2.1 Идеальный газ

**Опр Идеальный газ** Газ, у которого взаимодействием молекул между собой можно ...

## 2.2 Уравнение состояния идеального газа

**Закон Бойля – Мариотта**

$PV = \text{const}, \text{const}$  однозначно определяется количеством газа и степенью его "нагретости"

**Опр Газовая постоянная** Определяется из тройной точки воды. Измеряется в ...

**Опр Постоянная Больцмана**  $k_{\frac{R}{N_A}} = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{moles}}$

**Закон Уравнение состояния идеального газа Менделеева – Клапейрона**

$PV = \mu RT = NkT = \frac{m}{\mu} RT$

## 2.3 Идеально-газовое определение температуры

Отсюда можно определить температуру по идеально-газовой шкале  $T = \frac{PV}{\mu R}$

## 2.4 Связь давления и температуры идеального газа с кинетической энергией его молекул

В результате перехода от микрорассмотрения к макро, получим  $P = \frac{1}{3}nvp = \dots \Rightarrow U = N\frac{3}{2}kT$

Из полной кинетической энергии газа в воздухе  $E = N\bar{\epsilon}$  можно получить  $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2}kT \Rightarrow P = nkT$

### 3 Работа, внутренняя энергия, теплота. Первое начало термодинамики. Внутренняя энергия идеального газа

#### 3.1 Работа, внутренняя энергия, теплота

**Опр** *Функция состояния* Величина, принимающая определённое значение в каждом ...

**Опр** *Работа, совершённая системой и над ней*  $PdV, P \in \{P_{in}, P_{out}\}$

Для квазистатического процесса  $\delta A_{in} = -\delta A_{out}$ .

Заметим, что работа не является функцией состояния

**Опр** *Адиабатическая оболочка* При любых изменениях температуры окружающих ...

Если система заключена в адиабатическую оболочку, то работа внешних сил не зависит от траектории процесса, а определяется только начальным и конечным состояниями системы:  $A_{12} = U_2 - U_1, U$  — внутренняя энергия, функция состояния

**Опр** *Количество теплоты* Если система заключена в жёсткую ...

$$Q_{in} = U_2 - U_1 = -Q_{out}$$

Первое начало термодинамики

#### 3.2 Первое начало термодинамики

**Закон** *Первое начало термодинамики*

ЗСЭ, записываемый как  $\delta Q_{in} = dU + A_{in} \Rightarrow dU = \delta Q - PdV$

#### 3.3 Внутренняя энергия идеального газа

**Опр** *Внутренняя энергия ИГ* Функция только температуры, так как определяется ...

$$dU = c_V dT, U = \int c_V dT = \nu N_A \bar{\epsilon} = \frac{i}{2} \nu RT$$

### 4 Теплоёмкость. Теплоёмкости при постоянном объёме и давлении. Связь между $c_V$ и $c_P$ для идеального газа (соотношение Майера)

#### 4.1 Теплоёмкость

**Опр** *Теплоёмкость*  $c = \frac{\delta Q_{in}}{dT}$

#### 4.2 Теплоёмкости при постоянном объёме и давлении

Для получения указанных формул, достаточно записать I начало ТД и после преобразований записать определение теплоёмкости, не забыв, что  $H = U + PV$  есть энтальпия

#### 4.3 Связь между $c_V$ и $c_P$ для идеального газа (соотношение Майера)

$$c_P dT = dU = d(U + PV) = (c_V + \nu R) dT \Rightarrow c_P = c_V + \nu R$$

### 5 Политропический и адиабатический процессы. Уравнение адибаты и политропы идеального газа. Скорость звука в газах

#### 5.1 Политропический и адиабатический процессы

**Опр** *Политропический процесс* Процесс, в котором теплоёмкость остаётся ...

**Опр** *Адиабатический процесс* Процесс, происходящий в теплоизолированной ...

## 5.2 Уравнение адиабаты и политропы идеального газа

**Опр Показатель адиабаты, политропы**  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ ,  $n = \dots$

Из уравнения состояния ИГ можно вывести уравнение адиабатического и политропического процессов

Существует четыре основных политропических процесса: адиабата, изохора, -бара, -терма. У каждого из них свои теплоёмкости, показатели политропы  $n$  и уравнения

## 5.3 Скорость звука в газах

**Опр Скорость звука** Фазовая скорость продольных волн в бесконечной ...

Скорость звука можно запросто вывести из соответствующего уравнения механики

**Опр Адиабатическая скорость звука** За время прохождения звука на ...

Адиабатическую скорость звука выражается через ту же конечную формулу, с использованием уравнения адиабаты и  $\rho = \frac{P\mu}{RT}$

## 6 Тепловые машины. Цикл Карно. КПД машины Карно. Теоремы Карно. Холодильная машина и тепловой насос. Коэффициенты эффективности идеальной холодильной машины и идеального теплового насоса

### 6.1 Тепловые машины

**Опр Тепловая машина** Устройство, которое преобразует теплоту в работу или ...

### 6.2 Цикл Карно

**Опр Машина Карно** Тепловая машина, работающая по циклу Карно

**Опр Цикл Карно** Обратимый цикл из двух изотерм и адиабат

### 6.3 КПД машины Карно

**Опр КПД тепловой машины** Отношение работы, произведённой машиной за один цикл ...

### 6.4 Теоремы Карно

**Th Первая теорема Карно**

КПД любой тепловой машины, работающей между двумя заданными термостатами, не может превышать КПД машины Карно, работающей между теми же резервуарами

1. от противного: пусть у необратимой машины КПД больше. Рассмотрим работу этих двух машин в разных направлениях на одних и тех же резервуарах
2. Подберём  $Q_{+1}, Q_{+2} : Q_{+1} = Q_{+2}$ . Тогда рассмотрим суммарные теплоты и работы за цикл (ведь две тепловые машины всё равно что одна многофункциональная)
3. Итого, получилось что единственным результатом цикла большой машины есть производство работы за счёт охлаждения холодильника,  $w$  со II началом ТД

**Th Вторая теорема Карно**

КПД любых идеальных машин, работающих по циклу Карно между двумя заданными термостатами, равны и не зависят от устройства машин и рабочего тела

Это следствие первой теоремы: надо применить её к двум конкретным машинам Карно и поменять их местами. Система двух неравенств эквивалентна равенству. Независимость от параметров достигнута за счёт рассмотрения общего случая

Чтобы найти точное значение КПД машины Карно, работающей с телами с температурами  $T_1, T_2$ , надо рассмотреть идеальный газ как рабочее тело, вспомнить определение цикла Карно, модифицированное уравнение адиабаты и работу на изотерме

## 6.5 Холодильная машина и тепловой насос

**Опр Холодильный цикл** Имеет в результате потребление работы через отбирание ...

**Опр Холодильная машина** Машина, работающая по холодильному циклу

**Опр Тепловой насос** Машина для передачи тепла к более нагретому телу от ...

## 6.6 Коэффициенты эффективности идеальной холодильной машины и идеального теплового насоса

**Опр Эффективность холодильной машины** Отношение тепла холодильника к работе ...

Чтобы найти эффективность идеальной холодильной машины, надо воспользоваться теоремами Карно. Аналогично для идеального теплового насоса

## 7 Второе начало термодинамики. Энтропия (термодинамическое определение). Неравенство Клаузиуса. Энтропия идеального газа

### 7.1 Второе начало термодинамики

**Опр Машина Клаузиуса** Машина, работающая по круговому циклу, в результате ...

**Закон Второе начало термодинамики в формулировке Клаузиуса**

**Машина Клаузиуса невозможна**

**Опр Машина Томсона** Машина, работающая по круговому циклу, в результате ...

**Закон Второе начало термодинамики в формулировке Томсона (лорда Кельвина)**

**Машина Томсона невозможна**

**Th Формулировки Клаузиуса и Томсона эквивалентны**

⇐: производимую мТ работу можно целиком передать нагревателю, создав мК

⇒: рассмотрим две машины между заданными термостатами: обыкновенную и мК. Результат одновременной работы этих двух машин есть мТ

### 7.2 Энтропия (термодинамическое определение)

**Опр Термодинамическая энтропия**

Рассматривается произвольный обратимый круговой процесс, проходящий через фиксированные точки, рассматривается интеграл по циклу  $\oint \frac{\delta Q}{T}$  и путём преобразований (и, возможно, неравенства Клаузиуса) доказывается, что его величина не зависит от пути между точками

Тогда перед нами функция состояния по определению. Назовём её энтропией и будем обозначать как ...

### 7.3 Неравенство Клаузиуса

**Утв Неравенство Клаузиуса**

$$\oint \frac{\delta Q_i}{T_i} \leq 0$$

Иногда данное неравенство записывают в дискретной форме.

По второму началу термодинамики получим, что данный интеграл в обратимых процессах эквивалентен  $-\delta S = 0$  в силу того, что обратимыми являются лишь машины, работающие по циклу Карно, а для них данное равенство выполнено из выражения для КПД цикла Карно.

В случае неравновесного процесса, запишем его КПД и сравним с КПД цикла Карно. Тогда получим, что интеграл Клаузиуса процесса будет меньше, чем интеграл Клаузиуса цикла Карно, то есть  $\leq 0$

### 7.4 Энтропия идеального газа

Из I начала ТД и определения энтропии, получаем её выражение для ИГ

## 8 Обратимые и необратимые процессы. Закон возрастания энтропии. Неравновесное расширение газа в пустоту

### 8.1 Обратимые и необратимые процессы

**Опр (Не)обратимые процессы** Процесс (не)мб проведён в обратном направлении ...

## 8.2 Закон возрастания энтропии

### *Закон Неубывания энтропии*

Для его доказательство достаточно рассмотреть круговой процесс с обратимой и нет частью, воспользоваться определением энтропии и неравенством Клаузиуса

### *Утв Постулат Гиббса*

*Энтропия максимальна в состоянии равновесия*

## 8.3 Неравновесное расширение газа в пустоту

В теплоизолированной системе при расширении газа в вакуум по I началу ТД  $\Delta Q = 0$ , а в силу теплоизолированности  $A = 0$ , потому что не над чем совершать работу, поэтому и  $\Delta T = 0$ . Из выражения энтропии для ИГ  $\Delta S = \nu R \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) > 0$ . По-другому, возрастание энтропии можно объяснить необратимостью процесса в замкнутой системе

## 9 Термодинамические потенциалы: внутренняя энергия, энтальпия, свободная энергия, термодинамический потенциал Гиббса. Метод получения соотношений Максвелла (соотношений взаимности)

### 9.1 Термодинамические потенциалы: внутренняя энергия, энтальпия, свободная энергия, термодинамический потенциал Гиббса

*Опр Термодинамические потенциалы* Функции определённых наборов ТД параметров, ...

Всего есть четыре основных ТД потенциала: внутренняя энергия, энтальпия ( $+PV$ ), свободная энергия ( $-TS$ ) и потенциал Гиббса (совокупность двух предыдущих). У каждого есть свой набор параметров, полный дифференциал, а также, конкретные частные производные. При желании, для их вычисления в случае ИГ можно указать явные формулы через его энтропию

### 9.2 Метод получения соотношений Максвелла (соотношений взаимности)

В силу того, что все ТД функции непрерывны, верна теорема Шварца о равенстве смешанных частных производных. Это позволяет получить четыре новых равенства, называемых соотношениями взаимности Максвелла

## 10 Фазовые переходы первого рода. Уравнение Клапейрона—Клаузиуса. Фазовое равновесие «жидкость—пар», зависимость давления насыщенного пара от температуры

### 10.1 Фазовые переходы первого рода

*Опр Фаза* Физически однородная часть системы, отличающаяся своими физическими ...

*Опр Химический потенциал* Величина, определяющая изменение энергии системы ...

Химический потенциал можно приписать каждому из известных до этого ТД потенциалов

*Опр Экстенсивные и интенсивные параметры* Величины, пропорциональные и не- ...

*Утв Условия равновесия фаз*

*В состоянии равновесия во всём веществе выполнены условия*

- Механического равновесия ( $P = const$ )
- Теплового равновесия ( $T = const$ )
- Равновесия по отношению перехода частиц между различными фазами ( $\mu = const$ )

Притом можно показать, что из выполнения первых двух условий следует третье

В случае отсутствия равновесия частицы переходят в фазу с меньшим химическим потенциалом



## 10.2 Уравнение Клапейрона—Клаузиуса

Фазы могут существовать, если только давление и температура лежат на кривой фазового равновесия

**Опр** *Фазовая диаграмма* Координаты  $(P, T)$ , на которой нанесены различные ...

Из равенства химических потенциалов следует равенство их дифференциалов из потенциала Гиббса. Преобразуя равенство и введя теплоту фазового перехода в расчёте на одну частицу (энергозатраты на осуществление перехода), получим уравнение Клапейрона – Клаузиуса

Также можно показать, что введённая теплота смены фазы есть разница энтальпий

## 10.3 Фазовое равновесие «жидкость – пар», зависимость давления насыщенного пара от температуры

Уравнение кривой равновесия «жидкость – пар» может быть получено с помощью уравнения ИГ, факта, что  $v_2 \gg v_1$  и в предположении  $q = const$ . В таком случае зависимость выражается в экспоненциальной форме в двух случаях задания  $q$  (удельно или молярно)

**Опр** *Насыщенный пар* Пар, находящийся в равновесии с собственной жидкостью

## 11 Фазовые диаграммы «твёрдое тело—жидкость—пар». Тройная точка, критическая точка

### 11.1 Фазовые диаграммы «твёрдое тело—жидкость—пар»

Запишем уравнения кривых плавления, испарения и возгонки (сублимации). Данные уравнения есть равенства соответствующих химических потенциалов, притом только два уравнения независимых. То есть точка пересечения двух кривых принадлежит третьей.

### 11.2 Тройная точка, критическая точка

**Опр** *Тройная точка* (Изолированная) точка пересечения трёх кривых, в которой ...

**Опр** *Критическая точка*

Кривая фазового равновесия может оборваться при высоких температурах, где исчезает различие между фазами. Точка данного события и есть критическая, притом она обязательно существует на кривой «жидкость – пар»

Для воды  $T_{cr} = 647,3K, T_3 = 273,16K$

Каждая кривая равновесия характеризуется своим значением теплоты фазового перехода. Если рассмотреть бесконечно малый цикл вблизи тройной точки, то из равенства Клаузиуса получим  $q_{sb} = q_m + q_v$

## 12 Несобственный интеграл. Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу. Критерий Коши. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов

### 12.1 Несобственный интеграл

**Опр** *Несобственный интеграл, особенность* Односторонний предел интегрального конца

**Опр** *(Рас)ходящийся несобственный интеграл* Если (не)существует конечный предел

**Опр** *Собственный интеграл* Интеграл Лебега, который был до этого

**Опр** *Абсолютно сходящийся несобственный интеграл* Аналогично рядам

**Опр** *(Сходящийся) несобственный интеграл с двумя особенностями* Разбить на два интеграла с одной особенностью (и утверждать сходимость только в случае сходимости обоих интегралов)

### 12.2 Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу

**Th.1** Если  $f$  интегрируема по Лебегу, на любом открытом промежутке, она интегрируема на всём промежутке  $\Leftrightarrow$  соответствующих несобственный интеграл сходится абсолютно

1.  $\Rightarrow$ : согласно лемме об интегрируемости на подмножестве  $f$  интегрируема на любом открытом промежутке, как и её модуль (по эквивалентности)

2. Из аддитивности интеграла по множествам следует нестрогое возрастание функции  $F(b') = \int_a^{b'} |f(x)| dx$
3. По теореме существует предел слева, поэтому несобственный интеграл сходится абсолютно
4.  $\Leftarrow$ : зафиксируем возрастающую последовательность  $\{b_k\} \rightarrow b$
5. Определим индикаторную последовательность функций  $f_k(x)$ . Она сходится к  $f$ , что докажет измеримость  $f$  на всём интервале
6. Затем введём новую функциональную последовательность  $g(x) = |f_k(x)|$ . Она будет возрастать и в пределе равна  $|f(x)|$ , поэтому применима теорема о монотонной сходимости
7. Из неё следует интегрируемость  $|f(x)|$  на интервале, то есть и  $f$

**Th.2** Если  $f$  интегрируема в собственном смысле, то несобственный интеграл сходится и его значение равно интегралу Лебега на том же интервале

Доказательство состоит в применении теоремы о непрерывности интеграла как функции верхнего предела

### 12.3 Критерий Коши

*Th Критерий Коши*

Если на числовом промежутке  $f$  интегрируема по Лебегу на любом открытом промежутке, то несобственный интеграл этой функции сходится  $\Leftrightarrow$  выполняется условие Коши

1. Определим  $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ . Несобственный интеграл с особенностью в верхнем конце будет сходиться, если у этой функции существует конечный предел при  $t \rightarrow b - 0$
2. Далее сведём задачу к КК существования предела функции и воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница

### 12.4 Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов

Смотреть в рукописном конспекте

**13 Связь поточечной и равномерной сходимостей для функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Обобщенный признак сравнения для функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Признаки Дирихле и Лейбница равномерной сходимости функционального ряда. Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность равномерного предела, непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными слагаемыми. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Дифференцирование предельной функции и почленное дифференцирование функционального ряда**

#### 13.1 Связь поточечной и равномерной сходимостей для функциональной последовательности

**Опр Поточечный предел функциональной последовательности** Предел в привычном понимании

**Опр Равномерный предел функциональной последовательности**  $N \in \mathbb{N}$  не зависит от аргумента

Из равномерной сходимости следует поточечная, но не наоборот

**Опр Равномерно ограниченная функциональная последовательность**  $N \in \mathbb{N}$  не зависит от аргумента

### 13.2 Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности

**Th** Критерий Коши

Последовательность сходится равномерно  $\Leftrightarrow$  выполняется условие Коши

1.  $\Rightarrow$ : дважды применить определение равномерной сходимости и воспользоваться неравенством треугольника
2.  $\Leftarrow$ : требуется доказать равномерную сходимость из выполнения условия Коши числовой последовательности для любого фиксированного  $x \in X$ . В силу КК для числовой последовательности  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$
3. Далее надо в силу  $\forall p \in \mathbb{N}$  устремить его к  $+\infty$  и по теореме о предельном переходе в неравенствах получить определение равномерной сходимости

### 13.3 Обобщенный признак сравнения для функциональных рядов

**Опр** Поточечный предел функционального ряда Сходимость ряда в привычном понимании

**Опр** Равномерный предел функционального ряда Если последовательность его частичных сумм сходится равномерно на том же множестве

**Опр** Остаток поточечно сходящегося функционального ряда Разность суммы и частичной суммы ряда

**Th** Обобщенный признак сравнения

Если каждый член нашего ряда по модулю не превосходит члена равномерно сходящегося на том же множестве ряда, то и наш ряд сходится равномерно

Доказательство состоит в двукратном применении КК

Из признака следует, что из равномерной абсолютной сходимости ряда следует равномерная сводимость ряда на том же множестве

### 13.4 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

**Th** Признак Вейерштрасса

Если каждый член нашего ряда по модулю не превосходит члена сходящегося ряда, то наш ряд сходится равномерно на том же множестве

Доказательство состоит в применении обобщенного признака сравнения. Заметьте, что мы не требуем равномерной сходимости от ряда-мажоранты

### 13.5 Признаки Дирихле и Лейбница равномерной сходимости функционального ряда

Смотреть в рукописном конспекте

### 13.6 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

Смотреть в рукописном конспекте

### 13.7 Непрерывность равномерного предела, непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными слагаемыми

**Th.1** О непрерывности предельной функции

Если последовательность  $f_k$  непрерывных на множестве  $X$  функций сходится равномерно на множестве  $X$ , то  $f$  непрерывна на  $X$

1. Зафиксируем  $\forall \varepsilon > 0$  и  $x_0 \in X$
2. Далее для доказательства достаточно дважды записать определения равномерной сходимости и один раз непрерывности функции  $f_N(x)$  для нужных долей  $\varepsilon$  и воспользоваться неравенством треугольника

**Th.2** О непрерывности суммы ряда

Если функциональный ряд  $u_k$  непрерывных на множестве  $X$  функций сходится равномерно на множестве  $X$ , то сумма ряда непрерывна на  $X$

Доказательство состоит в применении Th.1 последовательности частичных сумм ряда

### 13.8 Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов

#### Th.1 Об интегрировании предельной функции

Если последовательность  $f_k$  интегрируемых на конечно измеримом множестве  $X$  функций сходится равномерно на множестве  $X$  к интегрируемой функции  $f$ , то интеграл этой функции есть предел интегралов

1. Воспользуемся sup-критерием для  $\varepsilon = 1$ . Тогда из неравенства следует интегрируемость  $f$  по признаку сравнения
2. Расписав супремум для разности интегралов в пределе получим 0, что завершает доказательство

**Следствие** Если последовательность непрерывных на компакте  $X$  функций  $f_k$  сходится равномерно к функции  $f$ , то интеграл этой функции есть предел интегралов

Непрерывность  $f$  следует из теоремы предыдущей темы, а интегрируемость из достаточного условия интегрируемости, что позволяет применить предыдущую теорему и доказать утверждение

#### Th.2 Об почленном интегрировании ряда

Если функциональный ряд  $u_k$  непрерывных на компакте  $X$  функций сходится равномерно, то сумма интеграла есть интеграл суммы

Доказательство состоит в применении следствия из предыдущей теоремы к последовательности частичных сумм ряда с использованием линейности интеграла

### 13.9 Дифференцирование предельной функции и почленное дифференцирование функционального ряда

#### Th.1 О дифференцировании предельной функции

Если последовательность  $f_k$  непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[a, b]$  функций сходится хотя бы в одной точке  $x_0$ , а последовательность производных  $f'_k$  сходится равномерно на  $[a, b]$ , то последовательность  $f_k$  сходится равномерно на  $[a, b]$  к некоторой непрерывно дифференцируемой функции  $f$ , притом производная предела есть предел производных

1. Обозначим предельную функцию для  $f'_k$  за  $\varphi(x)$ , непрерывную по теореме, и предел  $f_k(x_0)$  за  $A$
2. Далее определим  $f(x) = A + \int_{x_0}^x \varphi(t)dt$  и  $f_k(x) = f_k(x_0) + \int_{x_0}^x f'_k(t)dt$
3. Затем пара хитрых замечаний, работа с супремумом, использование sup-критерия
4. В итоге получаем равномерную сходимость  $f_k$  и требуемое равенство с учётом построения  $f(x)$

#### Th.2 О почленном дифференцировании ряда

Если функциональный ряд  $u_k$  непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[a, b]$  функций сходится хотя бы в одной точке  $x_0$ , а ряд производных  $u'_k$  сходится равномерно на  $[a, b]$ , то справедлива формула почленного дифференцирования ряда, то есть производная суммы ряда есть сумма производных

Доказательство состоит в применении Th.1 к последовательности частичных сумм ряда

**14 Степенные ряды. Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Теорема о круге сходимости степенного ряда. Первая теорема Абеля. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Сохранение радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Достаточное условие аналитичности функции. Пример бесконечно дифференцируемой, но неаналитической функции. Представление экспоненты комплексного аргумента степенным рядом. Формулы Эйлера. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Представление степенной и логарифмической функций степенными рядами**

### 14.1 Степенные ряды

**Опр** *Предел последовательности комплексных чисел* Предел модуля разности равен нулю

Заметим, что комплексный предел эквивалентен двум вещественным (для действительной и мнимой части)

**Опр** *Сходящийся комплексный ряд* Существует конечный предел последовательности частичных сумм этого ряда

**Опр** *Абсолютно сходящийся комплексный ряд* Сходится вещественный ряд модулей членов ряда

И вновь сходимость комплексного ряда эквивалентна сходимости двух вещественных рядов

**Опр** *Равномерно сходящийся комплекснозначная функциональная последовательность* Вещественнозначная последовательность модулей разности предельной функции и элементов последовательности равномерно сходится к нулю на том же множестве

**Опр** *Равномерно сходящийся комплексный функциональный ряд* Последовательность частичных сумм этого ряда равномерно сходится к сумме этого ряда на том же множестве

**Опр** *Степенной ряд* Если задана последовательность комплексных чисел и комплексное число, то ...

Однако удобнее (и мы в дальнейшем будем так делать) работать с рядом без степенной разности, сделав замену комплексной переменной

### 14.2 Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости

**Опр** *Радиус сходимости степенного ряда* Неотрицательное число (или бесконечность), определяемое формулой Коши-Адамара

Притом для этой формулы мы расширили операцию деления

### 14.3 Теорема о круге сходимости степенного ряда

**Опр** *Круг сходимости степенного ряда* Круг на комплексной плоскости с центром в  $w_0(0)$  и радиусом равным радиусу сходимости

Если радиус сходимости бесконечен, то кругом сходимости считается вся комплексная плоскость

**Th** *О круге сходимости*

Степенной ряд абсолютно сходится внутри круга сходимости и расходится вне его

1. Зафиксируем произвольное комплексное число  $z_0 \neq 0$ , обозначим  $q = \frac{z_0}{R}$  и исследуем сходимость с помощью обобщённого признака Коши
2. В тривиальном случае  $z_0 = 0$  ряд сходится абсолютно
3. В случае  $0 < |z_0| < R$  в силу обобщённого признака Коши ряд сходится абсолютно
4. В случае  $|z_0| > R$  в силу обобщённого признака Коши члены абсолютного ряда не стремятся к нулю, как и исходного ряда, а значит, он расходится по отрицанию необходимого условия

## 14.4 Первая теорема Абеля

**Th** Первая теорема Абеля

Если степенной ряд сходится в точке  $z_0$ , то он сходится абсолютно в любой точке по модулю меньшей. Доказательство следует от противного в силу п.4 теоремы о круге сходимости

## 14.5 Теорема о равномерной сходимости степенного ряда

**Th** О равномерной сходимости степенного ряда

$\forall r \in (0, R)$  ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  сходится равномерно в круге радиуса  $r$

Доказывается через неравенство, применением теоремы о круге сходимости и по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости комплексного ряда

1. Зафиксируем произвольное комплексное число  $z_0 \neq 0$ , обозначим  $q = \frac{z_0}{R}$  и исследуем сходимость с помощью обобщённого признака Коши
2. В тривиальном случае  $z_0 = 0$  ряд сходится абсолютно
3. В случае  $0 < |z_0| < R$  в силу обобщённого признака Коши ряд сходится абсолютно
4. В случае  $|z_0| > R$  в силу обобщённого признака Коши члены абсолютного ряда не стремятся к нулю, как и исходного ряда, а значит, он расходится по отрицанию необходимого условия

## 14.6 Вторая теорема Абеля

**Th** Вторая теорема Абеля

Если степенной ряд сходится в точке  $z_0$ , то он сходится равномерно на отрезке  $[0, z_0]$

1. Разобьём члены ряда на произведение членов произведения с помощью параметра  $t \in [0, 1]$
2. Первый ряд сходится по условию (а значит, по предыдущей теореме, ещё и равномерно)
3. Второй ряд равномерно ограничен на отрезке и монотонен по индексу
4. Поэтому два вещественных ряда сходятся равномерно на  $[0, 1]$ , как и исходный ряд на  $[0, z_0]$

## 14.7 Сохранение радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда

**Th** Радиусы сходимости степенных рядов, полученные формальным дифференцированием и интегрированием исходного, совпадают с его радиусом сходимости

1. Радиусы сходимости исходного и продифференцированного рядов совпадают в силу формулы Коши-Адамара
2. Также они сходятся или расходятся одновременно, потому как при  $z = 0$  это очевидно, а в противном случае они отличаются на ненулевую константу (как и их пределы)
3. Так как исходный ряд получается почленным дифференцированием интегрального, то и их радиусы сходимости совпадают

## 14.8 Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда

**Th** Об интегрировании и дифференцировании степенного ряда

Если вещественный степенной ряд имеет ненулевой радиус сходимости, то внутри интервала сходимости

- справедливы формулы почленного интегрирования
- функция ряда имеет производные любого порядка, получаемые почленным дифференцированием ряда
- коэффициенты степенного ряда однозначно определяются по обрывку формулы Тейлора

1. Для почленного интегрирования достаточно ввести новую переменную и воспользоваться теоремами о равномерной сходимости степенного ряда и о почленном интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда
2. Для производных достаточно ввести новую переменную и воспользоваться теоремами о сохранении радиуса сходимости, о равномерной сходимости степенного ряда и о почленном дифференцировании функционального ряда
3. Проводя те же рассуждения по индукции, доказываем второе утверждение теоремы
4. Доказывается аналогично лемме первого семестра перед формулой Тейлора

## 14.9 Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора

**Опр** Бесконечно дифференцируемая функция в точке В этой точке существуют производные функции любого порядка

**Опр** Ряд Тейлора Ряд бесконечно дифференцируемой функции в точке с членами ...

**Опр** Регулярная функция в точке  $z_0$  Ряд Тейлора функции в точке  $z_0$  сходится к функции в некоторой окрестности  $z_0$

Из теоремы об интегрировании и дифференцировании степенного ряда следует, что если функция может быть представлена как сумма степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  с ненулевым радиусом сходимости, то этот ряд является рядом Тейлора функции в точке  $z_0$ . В этом случае функция является регулярной в точке  $z_0$

**Опр** Остаточный член формулы Тейлора Разность  $n$  раз дифференцируемой функции и формулы Тейлора

Непосредственно из определений следует, что функция является регулярной в точке  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ . Притом для доказательства регулярности недостаточно показать ненулевой радиус сходимости функции, надо ещё проверить её остаток

## 14.10 Достаточное условие аналитичности функции

**Th** Достаточное условие регулярности

Если  $\exists U_\delta(x_0)$ , где функция бесконечно дифференцируема и последовательность её производных равномерно ограничена константой  $C > 0$ , то функция регулярна в точке и  $\forall x \in U_\delta(x_0)$  раскладывается в ряд Тейлора

1. Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Тогда остаточный член формулы Тейлора  $\leq M \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}$
2. Так как факториал растёт быстрее показательной (доказывается через принцип Архимеда, определение факториала, цепочку неравенств и предельный переход), то остаточный член стремится к нулю
3. Поэтому функция регулярна, потому как раскладывается в ряд Тейлора в  $x_0$

## 14.11 Пример бесконечно дифференцируемой, но неаналитической функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ряд Тейлора этой бесконечно дифференцируемой в точке  $x_0 = 0$  сходится не к функции  $f(x)$ , а к некоторой другой функции, не совпадающей с  $f(x)$  в сколь угодно малой окрестности точки

$$\forall k \in \mathbb{N} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{k}{2}} e^{-t} = 0$$

По индукции легко показать, что если  $P_{3n}(t)$  – многочлен степени  $3n$  от  $t$ , то

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{3n}(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Следовательно, все коэффициенты ряда Тейлора функции  $f(x)$  в точке  $x_0 = 0$  равны нулю. Поэтому сумма ряда Тейлора функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  равна нулю и не совпадает с функцией  $f(x)$  в сколь угодно малой окрестности точки  $x_0$ . Таким образом, хотя функция и бесконечно дифференцируема, она не является регулярной в нуле

### 14.12 Представление экспоненты комплексного аргумента степенным рядом

**Опр** Ряд Маклорена Ряд Тейлора функции в нуле

**Th.1** Ряды маклорена функций  $e^x, \sin(x), \cos(x), \operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x)$  сходятся к этим функциям на всей числовой прямой

1.  $\forall \delta > 0 \forall x \in U_\delta(0) e^x < e^\delta$ , поэтому выполнено достаточное условие регулярности
2. Аналогично, используя ограниченность последовательности всех производных оставшихся функций доказываем их разложения

**Th.2** Для комплексной экспоненты её ряд Тейлора не отличается от вещественного

1. В силу предыдущей теоремы радиус сходимости степенного ряда-претендента сходится на всём  $\mathbb{C}$ , поэтому по теореме о круге сходимости он сходится абсолютно для любого  $z \in \mathbb{C}$
2. Зафиксируем произвольное комплексное число в алгебраической форме и воспользуемся определением экспоненты комплексного числа, чтобы зафиксировать доказываемое равенство
3. Покажем, что функция-ряд-претендент обладает свойством экспоненты. Для этого воспользуемся теоремой о перемножении абсолютно сходящихся рядов, которая для комплексных рядов доказывается точно так же, как и для вещественных (только здесь надо использовать метод "диагоналей")
4. В результате преобразований получим сумму сумм, которую распределим по этим суммам, и применим формулу бинома Ньютона, завершив доказательство свойства
5. Далее рассмотрим функцию кандидат на чисто мнимом аргументе и путём разложения на чётную и нечётную суммы получим выражение для чисто мнимой экспоненты
6. В итоге, применив свойство экспоненты и убедившись, что функция работает на вещественных аргументах, получим разложение комплексной экспоненты в ряд Тейлора в силу единственности

### 14.13 Формулы Эйлера

**Лемма** Для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедливы формулы Эйлера Они используют новопостроенные комплексные функции и подравнивают комплексную тригонометрию к вещественной гиперболической

1. Для доказательства формулы гиперкомплексной экспоненты достаточно разделить сумм на чётную и нечётную, а затем воспользоваться  $i^2 = -1$
2. Остальные формулы следуют из первой

### 14.14 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

**Th** Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Если функция в  $U_\delta(x_0)$  имеет непрерывные производные по  $n + 1$  порядок, то для остаточного члена формулы Тейлора справедливо представление в интегральной форме:  $r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{n+1}(t) dt \forall x \in U_\delta(x_0)$

1. При  $n = 0$  теорема справедлива в силу формулы Ньютона – Лейбница
2. Пусть теорема справедлива для  $n = s - 1$ . Тогда проинтегрируем  $r_{s-1}$  по частям
3. Затем, расписав  $r_s$  по определению, подставим проинтегрированное выражение и получим требуемое равенство
4. Таким образом, теорема доказана по индукции

### 14.15 Представление степенной и логарифмической функций степенными рядами

**Th** Ряд Маклорена степенной функции сходится к этой функции на интервале единичного радиуса

1. Зафиксируем  $x \in (-1; 1)$  и учитывая выражение для  $f^n$  распишем остаточный член в интегральной форме, походу дела вынося константы, вводя новые обозначения и переменные интегрирования
2. Затем воспользуемся ограниченностью  $x$  для оценки. Осталось показать, что  $\lambda_n \rightarrow 0$



3. В тривиальных случаях  $x = 0$  и  $\alpha = m \in \mathbb{N}_0, m < n$  утверждение очевидно
4. В общем случае найдём предел отношения и воспользуемся схожими рассуждениями с доказательством признака Даламбера (сравнение с геометрической прогрессией)

Заметим, что при  $m \geq n$  ряд Маклорена совпадает с конечной суммой

Из доказанного и теоремы о почленном интегрировании степенного ряда при  $|x| < 1$  (не забывая про замену индекса суммирования) получаем ряд Маклорена для логарифма. Данное разложение справедливо и при  $x = 1$ . Действительно, данный ряд будет сходиться по признаку Лейбница. Следовательно, в силу второй теоремы Абеля этот ряд сходится равномерно на отрезке  $[0; 1]$ . Согласно теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда частичные суммы этого ряда будут непрерывны на отрезке  $[0; 1]$ . Поэтому существует требуемый предел