Конспект билетов
Теория вероятностей

Содержание

1 Дискретное вероятностное пространство, классическая вероятность, геометрическая вероятность 4

2 Колмогоровское определение вероятностного пространства. Свойства вероятности 4
2.1 Колмогоровское определение вероятностного пространства . . . 4
2.2 Свойства вероятности . . . 4

3 Независимость событий, условная вероятность, формула полной вероятности, формула Байеса 4

4 Схема испытаний Бернулли: два определения и их эквивалентность 4

5 Распределения в $\mathbb{R}$, функция распределения и её свойства. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ по функции распределения 4
5.1 Распределения в $\mathbb{R}$, функция распределения и её свойства . . . 4
5.2 Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ по функции распределения . . . 4

6 Дискретные и абсолютно непрерывные распределения в $\mathbb{R}$. Плотность. Связь плотности и функции распределения. Примеры 5
6.1 Дискретные и абсолютно непрерывные распределения в $\mathbb{R}$ . . . 5
6.2 Плотность . . . 5
6.3 Связь плотности и функции распределения . . . 5
6.4 Примеры . . . 5

7 Распределения в $\mathbb{R}^n$, функция распределения и её свойства. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ по функции распределения (б/д) 5
7.1 Распределения в $\mathbb{R}^n$, функция распределения и её свойства . . . 5
7.2 Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ по функции распределения (б/д) . 5

8 Дискретные и абсолютно непрерывные распределения в $\mathbb{R}^n$. Плотность. Связь плотности и функции распределения. Примеры 5

9 Случайные величины и случайные векторы. Характеристики случайной величины (вектора): распределение вероятностей, функция распределения, плотность. Действия над случайными величинами (векторами) 5
9.1 Случайные величины и случайные векторы . . . 5
9.2 Характеристики случайной величины (вектора): распределение вероятностей, функция распределения, плотность . . . 5
9.3 Действия над случайными величинами (векторами) . . . 6

10 Теорема о плотности $\varphi(\xi)$. Маргинальные распределения. Вычисление маргинальной плотности 6
10.1 Теорема о плотности $\varphi(\xi)$ . . . 6
10.2 Маргинальные распределения . . . 6
10.3 Вычисление маргинальной плотности . . . 6

11 Край многообразия. Теорема о независимости краевой точки карты от карты 6
11.1 Край многообразия . . . 6
11.2 Теорема о независимости краевой точки карты от карты. . . . 6

12 Ориентация гладкого многообразия. Существование ровно двух ориентаций линейно-связного ориентируемого многообразия 7
12.1 Ориентация гладкого многообразия . . . 7
12.2 Существование ровно двух ориентаций линейно-связного ориентируемого многообразия. . . 7

13 Ориентация гладкого $(N-1)$-мерного подмногообразия пространства R^N. Теорема о непрерывной нормали 7
13.1 Ориентация гладкого $(N-1)$-мерного подмногообразия пространства R^N 7
13.2 Теорема о непрерывной нормали. 7

14 Теорема о построении ориентирующего атласа для края многообразия на основе ориентирующего атласа исходного многообразия. Согласование ориентации гладкого многообразия и ориентации его края 8
14.1 Теорема о построении ориентирующего атласа для края многообразия на основе ориентирующего атласа исходного многообразия 8
14.2 Согласование ориентации гладкого многообразия и ориентации его края 8

15 Тензорное поле на многообразии. Изменение компонент тензорного поля при замене локальной системы координат. Выражение тензорного поля через его компоненты с помощью операции тензорного произведения 8
15.1 Тензорное поле на многообразии 8
15.2 Изменение компонент тензорного поля при замене локальной системы координат. 8
15.3 Выражение тензорного поля через его компоненты с помощью операции тензорного произведения 9

16 Дифференциальные формы на гладком многообразии, их представление через внешнее произведение дифференциалов координатных функций. Внешний дифференциал дифференциальной формы, его независимость от локальной системы координат 9
16.1 Дифференциальные формы на гладком многообразии, их представление через внешнее произведение дифференциалов координатных функций 9
16.2 Внешний дифференциал дифференциальной формы, его независимость от локальной системы координат 9

17 Правило Лейбница для внешнего дифференциала внешнего произведения двух дифференциальных форм. 9

18 Перенос касательных векторов. Выражение для переноса базисного вектора касательного пространства через частные производные координатных функций отображения 10
18.1 Перенос касательных векторов 10
18.2 Выражение для переноса базисного вектора касательного пространства через частные производные координатных функций отображения. 10

19 Перенос дифференциальных форм при отображении многообразий. Выражение для переноса базисного вектора кокасательного пространства через частные производные координатных функций отображения 10
19.1 Перенос дифференциальных форм при отображении многообразий 10
19.2 Выражение для переноса базисного вектора кокасательного пространства через частные производные координатных функций отображения. 10

20 Обратный перенос дифференциальных форм при суперпозиции отображений многообразий. Коммутативность операций внешнего дифференцирования и обратного переноса дифференциальной формы 10
20.1 Обратный перенос дифференциальных форм при суперпозиции отображений многообразий 10
20.2 Коммутативность операций внешнего дифференцирования и обратного переноса дифференциальной формы. 10

21 Теорема о разбиении единицы на многообразии 11

22 Определение интеграла от дифференциальной формы и его корректность. Криволинейный и поверхностный интегралы второго рода 11
22.1 Определение интеграла от дифференциальной формы и его корректность 11
22.2 Криволинейный и поверхностный интегралы второго рода 12

23 Теорема Стокса. 12

24 Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Связь условий точности и замкнутости дифференциальных форм 12
24.1 Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования 12
24.2 Связь условий точности и замкнутости дифференциальных форм 12

25 Теорема о цепном равенстве. Лемма Пуанкаре 12
25.1 Теорема о цепном равенстве 12
25.2 Лемма Пуанкаре. 13

26 Риманова метрика. Выражение для индуцированной римановой метрики в полярной системе координат на плоскости и сферической системе координат в трехмерном пространстве 13
26.1 Риманова метрика 13
26.2 Выражение для индуцированной римановой метрики в полярной системе координат на плоскости и сферической системе координат в трехмерном пространстве 13

27 Определение формы Риманова объёма и ее связь с дифференциальной формой (тензором Леви-Чивиты). Определение интеграла первого рода скалярной функции по гладкому многообразию. Поток векторного поля через двумерное ориентируемое подмногообразие пространства R^3, выражение потока через интеграл от дифференциальной формы и интеграл первого рода 13
27.1 Определение формы Риманова объёма и ее связь с дифференциальной формой (тензором Леви-Чивиты) 13
27.2 Определение интеграла первого рода скалярной функции по гладкому многообразию. 14
27.3 Поток векторного поля через двумерное ориентируемое подмногообразие пространства R^3, выражение потока через интеграл от дифференциальной формы и интеграл первого рода . 14

28 Дивергенция и ротор векторного поля в области трехмерного евклидова пространства. Геометрический смысл дивергенции и ротора векторного поля. Условия существования скалярного и векторного потенциалов векторного поля в области трехмерного евклидова пространства 14
28.1 Дивергенция и ротор векторного поля в области трехмерного евклидова пространства . . . 14
28.2 Геометрический смысл дивергенции и ротора векторного поля. 14
28.3 Условия существования скалярного и векторного потенциалов векторного поля в области трехмерного евклидова пространства 15

29 Определение производной Ли тензорного поля через его обратный перенос фазовым потоком. Выражение компонент производной Ли тензорного поля по векторному полю через компоненты этих полей. Выражение производной Ли для тензорных полей типов (0,0), (1,0) и (0,1) 15
29.1 Определение производной Ли тензорного поля через его обратный перенос фазовым потоком 15
29.2 Выражение компонент производной Ли тензорного поля по векторному полю через компоненты этих полей 15
29.3 Выражение производной Ли для тензорных полей типов (0,0), (1,0) и (0,1) 15

30 Коммутативность производной Ли и внешнего дифференциала формы. 15

31 Правило Лейбница для внутреннего произведения векторного поля на внешнее произведение двух дифференциальных форм 15

32 Магическое тождество Картана. 16

1 Дискретное вероятностное пространство, классическая вероятность, геометрическая вероятность

Опр *Элементарные события (исходы) и и х пространство*
Опр *Дискретное вероятностное пространство*
Опр *Классическая вероятностная модель*
Опр *Модель геометрической вероятности*

2 Колмогоровское определение вероятностного пространства. Свойства вероятности

2.1 Колмогоровское определение вероятностного пространства

Опр *Событие и вероятностная мера (вероятность)*

2.2 Свойства вероятности

Вероятность обладает 7 свойствами; доказывать некоторые из них лучше, опираясь на рисунок
Опр *Вероятностное пространство*

3 Независимость событий, условная вероятность, формула полной вероятности, формула Байеса

Опр *Независимые события*
Опр *Условная вероятность*
Опр *Разбиение*
Theorem *Формула полной вероятности*
Theorem *Формула Байеса*

4 Схема испытаний Бернулли: два определения и их эквивалентность

Опр *Попарно независимые события*
Опр *Независимые в совокупности события*
Опр *Схема испытаний Бернулли*

5 Распределения в $\mathbb{R}$, функция распределения и её свойства. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ по функции распределения

5.1 Распределения в $\mathbb{R}$, функция распределения и её свойства

Опр *Борелевская сигма-алгебра* $\mathcal{B}(\mathbb{R}$
Опр *Распределение вероятностей*
Опр *Функция распределения*
Свойства *Функции распределения*
Первое свойство тривиально. Во втором надо понимать связь пределов и параметров. С третьим я не согласен

5.2 Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ по функции распределения

Theorem

6 Дискретные и абсолютно непрерывные распределения в $\mathbb{R}$. Плотность. Связь плотности и функции распределения. Примеры

6.1 Дискретные и абсолютно непрерывные распределения в $\mathbb{R}$

Опр *Дискретные распределения вероятности*

6.2 Плотность

Опр *Абсолютно непрерывное распределение, его плотность*

6.3 Связь плотности и функции распределения

Плотность и функция распределения связаны формулой Ньютона–Лейбница

6.4 Примеры

By the text

7 Распределения в $\mathbb{R}^n$, функция распределения и её свойства. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ по функции распределения (б/д)

7.1 Распределения в $\mathbb{R}^n$, функция распределения и её свойства

By the text
Многомерная функция распределения обладает 3 свойствами. Первое доказывается вводом функции одной переменной (как с частными производными), а затем совместно с остальным свойствами доказывается аналогично одномерному случаю

7.2 Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ по функции распределения (б/д)

By the text

8 Дискретные и абсолютно непрерывные распределения в $\mathbb{R}^n$. Плотность. Связь плотности и функции распределения. Примеры

By the text

9 Случайные величины и случайные векторы. Характеристики случайной величины (вектора): распределение вероятностей, функция распределения, плотность. Действия над случайными величинами (векторами)

9.1 Случайные величины и случайные векторы

By the text

9.2 Характеристики случайной величины (вектора): распределение вероятностей, функция распределения, плотность

By the text
Утв
Для доказательства необходимости поместим борелевское множество на i место и воспользуемся сохранением бореливости. Для достаточно распишем, что такое декартово произведение и воспользуемся свойством сигма-алгебры

9.3 Действия над случайными величинами (векторами)

Theorem
Доказывается по определению случайного вектора

10 Теорема о плотности $\varphi(\xi)$. Маргинальные распределения. Вычисление маргинальной плотности

10.1 Теорема о плотности $\varphi(\xi)$

Theorem

1. Перейдём к интегралу плотности вероятности и разделим M на два множества
2. Та часть, что не пересекается с областью значений, вклад в интеграл давать не будет.
3. Сделаем замену переменных в соответствии с теоремой и проследим, что множество интегрирования верно

10.2 Маргинальные распределения

By the text

10.3 Вычисление маргинальной плотности

Theorem *Вычисление маргинальной плотности*
Расписываем плотность по определению и находим общие части с переменными, которые могут именоваться по-другому

11 Случайные величины и случайные векторы. Независимость и критерий независимости. Независимость функций от векторов

11.1 Случайные величины и случайные векторы. Независимость и критерий независимости

By the text
Theorem *Критерий независимости*
Необходимость докажем, используя определение декартова произведения Для доказательства достаточности распишем вторую разность
By the text

11.2 Независимость функций от векторов

By the text

12 Независимость случайных величин. Формула свёртки и её обобщения для разности, произведения и частного

By the text

13 Математическое ожидание случайной величины: дискретные и абсолютно непрерывные величины. Примеры

By the text

14 Основные свойства математического ожидания. Математическое ожидание произведения независимых величин

By the text

В 7 свойстве расписываем заведомо неотрицательную величину и получаем условие на детерминант, откуда получаем требуемое. В 8 лучше сразу записать произведение детерминантов

15 Теорема о замене переменных в интеграле Лебега (б/д). Подсчёт математического ожидания от функции от случайной величины. Примеры

By the text

16 Дисперсия, ковариация, корреляция и их свойства. Примеры

Опр *Дисперсия*

Свойства *Дисперсии*

Первое свойство доказывается в силу линейности матожидания (выносим, где надо, скаляры). Это и последнее свойство можно будет доказать с помощью ковариации

By the text

Утв

Лучше доказывать по Википедии

17 Неравенство Коши – Буняковского. Неравенство Маркова. Неравенство Чебышёва. Закон больших чисел в форме Чебышёва

By the text

18 Виды сходимостей и взаимосвязи между ними

By the text

Theorem *О связи видов сходимости*

1. С помощью трёх последовательностей
2. Аналогично.
3. Пользуемся ограниченностью случайной величины, определением непрерывности и в конце расписываем матожидание по линейности: X ограничен из ограниченности индикатора, Y — из определения непрерывности, Z — из ограниченности функции на том промежутке

19 Перенос дифференциальных форм при отображении многообразий. Выражение для переноса базисного вектора кокасательного пространства через частные производные координатных функций отображения

19.1 Перенос дифференциальных форм при отображении многообразий

Опр *Дифференциал отображения, касательное отображение*

Опр *Обратный перенос*

19.2 Выражение для переноса базисного вектора кокасательного пространства через частные производные координатных функций отображения.

Theorem *Выражение для обратного переноса базисного вектора кокасательного пространства через частные производные координатных функций отображения*

20 Обратный перенос дифференциальных форм при суперпозиции отображений многообразий. Коммутативность операций внешнего дифференцирования и обратного переноса дифференциальной формы

20.1 Обратный перенос дифференциальных форм при суперпозиции отображений многообразий

Лемма 2
Первый пункт доказывается по конспекту, а второй лучше всего по лекции 9 (1:25:00)

20.2 Коммутативность операций внешнего дифференцирования и обратного переноса дифференциальной формы.

Theorem *О коммутативности внешнего дифференцирования и отображения обратного переноса.*

1. Рекомендуется доказывать по лекции 9 (1:50:00)
2. Сначала рассмотрим случай скалярной функции и воспользуемся определением дифференциала отображения и Л2
3. В общем случае рассмотрим лишь моном (из-за линейности). Запишем обратный перенос формы, возьмём дифференциал и применим правило Лейбница (для последнего и остальных слагаемого)
4. Второе слагаемое в этой формуле будет ноль, поэтому слагаемые будут "выноситься".
5. После вынесения всего воспользуемся случаем скалярной функции и получим требуемое.

Опр *Гладкое подмногообразие, каноническая ЛСК*

21 Теорема о разбиении единицы на многообразии

Опр *Компактное многообразие*
Лемма 1

1. Введём обозначение допустимой области параметров и x_0.
2. Возьмём окрестность поменьше и воспользуемся леммой о функции шапочки. Соорудим новую функцию и обозначение и получим требуемое

Theorem *О разбиении единицы на многообразии*

1. Для любой точки выберем индекс окрестности, которой она принадлежит
2. В силу леммы найдутся окрестность поменьше и гладкая функция.
3. Выделим из компакта конечное подпокрытие и напишем пару следствий из леммы.
4. Введём гладкие функции γ, используя лишь оставшуюся нам часть от единицы. Посчитаем, как выглядит разность этих функций и единицы.
5. В силу второго следствия сумма $\gamma_i = 1$, но пока это разбиение не подчинено покрытию.
6. Введём новые множества S_i, затем определим ρ_i. Сумма таковых по всем картам и будет равна единице

22 Определение интеграла от дифференциальной формы и его корректность. Криволинейный и поверхностный интегралы второго рода

22.1 Определение интеграла от дифференциальной формы и его корректность

Опр *Носитель дифференциальной формы*
Опр *Финитная дифференциальная форма*
Опр *Интеграл от дифференциальной формы по допустимой области параметров*
Опр *Интеграл от дифференциальной формы с носителем в районе действия одной карты*
Лемма
Благодаря лемме, можно сделать вывод, что оба определения интеграла совпадают (достаточно взять стандартную ЛСК)
Опр *Интеграл от дифференциальной формы по гладкому многообразию.*
Theorem *Корректность определения интеграла*

1. Существование интеграла следует из разбиения единицы, поэтому осталось доказать независимость от атласа.

2. Введём новую функцию ρ_{ij} и требуемые суммы просуммируем в нужном порядке Используя линейности и выражение для суммы ρ_{ij}, получим равенство

Благодаря лемме, можно сделать вывод, что определения 2 и 3 интеграла совпадают (достаточно взять одну карту)

22.2 Криволинейный и поверхностный интегралы второго рода

Опр *Криволинейный интеграл второго рода*
Для него можно получить формулу через интеграл для отрезка. Для этого достаточно ввести гладкую параметризацию и перейти к другим координатам
Опр *Поверхность, поверхностный интеграл второго рода*
Для него можно получить формулу через кратный интеграл по "допустимой области". Аналогично криволинейному случаю меняем переменные, применяем теорему о координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы и соединяем всё в один интеграл

23 Теорема Стокса.

Theorem *Стокса.*

24 Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Связь условий точности и замкнутости дифференциальных форм

24.1 Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Опр *Точная форма, обобщённый потенциал*
Опр *Потенциальное ковекторное поле, скалярный потенциал.*
Theorem *Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования*

1. $3 \Rightarrow 2$: используя представление через компоненты, сведём к производной по времени и после интегрирования получим зависимость от концов, которые совпадают в случае замкнутости.

2. $2 \Rightarrow 1$: тривиально следует после смены ориентации второй кривой.

3. $1 \Rightarrow 3$: фиксируем точку и вводим скалярный потенциал.

4. Введём новые кривые и сведём интеграл по кривой к разности этого потенциала.

5. Теперь рассмотрим малое приращение δ вдоль одной координаты i. Интеграл всей формы обнулится, за исключением компоненты с i.

6. Воспользуемся малостью δ, потом вычислим производную и получим требуемое после цепочки равенств

24.2 Связь условий точности и замкнутости дифференциальных форм

Опр *Замкнутая форма*
Лемма
Необходимость очевидна. Недостаточность докажем от противного, рассмотрев форму дифференциала частного и её интеграл по тригонометру

25 Теорема о цепном равенстве. Лемма Пуанкаре

25.1 Теорема о цепном равенстве

Лемма *О цепном равенстве.*

1. Рекомендуется доказывать по лекции 11 (2:30:00)

2. Введём ЛСК, запишем два возможных вида дифференциальной формы β и определим действие на них. В результате получим линейное отображение.

3. Рассмотрим действие на формах с dt и докажем для них цепное равенство. Аналогично для форм без dt

4. Любая форма может быть представлена как сумма конечного числа слагаемых с и без dt, поэтому доказано

Опр *Стягиваемое в точку многообразие*
Опр *Выпуклое множество*

25.2 Лемма Пуанкаре.

Theorem *Лемма Пуанкаре*

1. Из точности замкнутость следует всегда, поэтому доказываем лишь в обратную сторону.

2. Воспользуемся определением стягиваемости и рассмотрим дифференциальную форму β

3. Применим лемму о цепном равенстве, преобразуем и получим требуемое равенство, из которой следует точность

26 Риманова метрика. Выражение для индуцированной римановой метрики в полярной системе координат на плоскости и сферической системе координат в трехмерном пространстве

26.1 Риманова метрика

Опр *Риманова метрика или (ковариантный) метрический тензор*
Опр *Риманово многообразие*
Опр *Скалярное произведение*
Опр *Длина, угол*
Опр *Матрица Грама на Риманово многообразие*
Опр *Индуцированная метрика*

26.2 Выражение для индуцированной римановой метрики в полярной системе координат на плоскости и сферической системе координат в трехмерном пространстве

Найдём компоненты метрического тензора индуцированной метрики. В итоге, матрица Грама индуцированной метрики определяется через матрицу Якоби гомеоморфизма карты

Теперь можно вычислить матрицы Грама некоторых часто используемых метрик

Опр *Первая квадратичная форма (гипер) поверхности*

Первая квадратичная форма является значением тензора, то она не зависит от ЛСК на поверхности

27 Определение формы Риманова объёма и ее связь с дифференциальной формой (тензором Леви-Чивиты). Определение интеграла первого рода скалярной функции по гладкому многообразию. Поток векторного поля через двумерное ориентируемое подмногообразие пространства R^3, выражение потока через интеграл от дифференциальной формы и интеграл первого рода

27.1 Определение формы Риманова объёма и ее связь с дифференциальной формой (тензором Леви-Чивиты)

Опр *n-мерный параллелепипед в пространстве R^N, n-мерный объём*

Опр *Форма Риманова объема*

Опр *Тензор Леви-Чивиты*

Theorem *О тензоре Леви-Чивиты*

Достаточно показать, что при замене ЛСК значение формы не меняется

Опр *Символ Леви-Чивиты*

27.2 Определение интеграла первого рода скалярной функции по гладкому многообразию.

Опр *Интеграл первого рода*

Опр *Риманов объём, площадь поверхности*

Пример *Длина кривой*

Пример *Площадь поверхности*

27.3 Поток векторного поля через двумерное ориентируемое подмногообразие пространства R^3, выражение потока через интеграл от дифференциальной формы и интеграл первого рода

Опр *Поток векторного поля через поверхность.*

Theorem *О выражении потока векторного поля через интеграл от дифференциальной формы*

28 Дивергенция и ротор векторного поля в области трехмерного евклидова пространства. Геометрический смысл дивергенции и ротора векторного поля. Условия существования скалярного и векторного потенциалов векторного поля в области трехмерного евклидова пространства

28.1 Дивергенция и ротор векторного поля в области трехмерного евклидова пространства

Опр *Свёртка тензора*

Опр *Свёртка тензорного поля*

Опр *Свёртка тензоров (или тензорных полей)*

Опр *Операция опускания индекса*
Опр *Контравариантный метрический тензор*
Опр *Ковариантные компоненты векторного поля*
Опр *Криволинейным интегралом второго рода*
Опр *Смешанное и векторное произведение векторных полей*
Данные определения соответствуют стандартным определениям этих понятий
Опр *Градиент*
Опр *Дивергенция*
Опр *Ротор (вихрь)*
Лемма 1
Используем правило Лейбница; в последнем пункте следует перейти к рассмотрению отдельной компоненты
Лемма 2

1. В первом пункте перейдём к рассмотрению отдельной компоненты и получим смешанную частную производную.
2. Изменим порядок дифференцирования и изменится знак. Получили, что компонента равна минус себе, что возможно лишь в нулевом случае
3. Во втором пункте действуем в лоб и сводим к первому пункту
4. В третьем в лоб

Опр *Оператор Гамильтона*

28.2 Геометрический смысл дивергенции и ротора векторного поля.

Theorem *Геометрическое определение дивергенции.*
Theorem *Геометрическое определение ротора*

28.3 Условия существования скалярного и векторного потенциалов векторного поля в области трехмерного евклидова пространства

Опр *Скалярный потенциал*
Опр *Бизвихревое поле.*
Theorem *О существовании скалярного потенциала*
Опр *Векторный потенциал*
Опр *Бездивергентное поле.*
Theorem *О существовании векторного потенциала*

29 Определение производной Ли тензорного поля через его обратный перенос фазовым потоком. Выражение компонент производной Ли тензорного поля по векторному полю через компоненты этих полей. Выражение производной Ли для тензорных полей типов (0,0), (1,0) и (0,1)

29.1 Определение производной Ли тензорного поля через его обратный перенос фазовым потоком

Опр *Производная семейства тензорных полей в точке*
Опр *Фазовый поток*
Опр *Производная Ли*

29.2 Выражение компонент производной Ли тензорного поля по векторному полю через компоненты этих полей

Лемма

1. Рекомендуется доказывать по лекции 14 (2:35:00)

2. Выразим $y(x)$ через координатное представление потока и запишем обратный перенос тензорного поля фазового потока.

3. Возьмём $\frac{dy_t(x_0)}{dt}$ и разложим $y_t(x_0)$ по формуле Тейлора полностью и по координатам.

4. Выразим отсюда компоненты обратного переноса явно и с помощью обратных матриц и разложения по Тейлору.

5. Подставим всё в обратный перенос и перемножим скобки с точностью до $o(t)$. Используем свойство символа Кронекера и получаем итоговую формулу

29.3 Выражение производной Ли для тензорных полей типов (0,0), (1,0) и (0,1)

Пример *Производная Ли скалярного поля*
Опр *Первый интеграл*
Пример *Производная Ли векторного поля*
Пример *Производная Ли ковекторного поля*

30 Коммутативность производной Ли и внешнего дифференциала формы.

Theorem *О коммутативности производной Ли и внешнего дифференцирования*

31 Правило Лейбница для внутреннего произведения векторного поля на внешнее произведение двух дифференциальных форм

Опр *Внутреннее произведение.*
Theorem *Правило Лейбница для внутреннего умножения*

32 Магическое тождество Картана.

Theorem *Тождество Картана (формула гомотопии)*
Доказывается аналогично правилу Лейбница для внутреннего умножения