# Содержание

# Векторные пространства

## 1 Векторное пространство. Подпространство. Линейная оболочка системы векторов. Линейно (не)зависимые системы векторов. Конечномерные линейные пространства

### 1.1 Векторное пространство

**Опр** *Унарная, бинараная операция на множестве над полем* Ставит в соответсвие элементу (элементам) из множества другой элемент из множества

**Опр** *Векторное пространство над полем* Помимо унарности и бинарности, по 4 аксиомы сложения и умножения

### 1.2 Подпространство

**Опр** *Подпространство* Требуются лишь унарность и бинарность

### 1.3 Линейная оболочка системы векторов

**Опр** *Линейная оболочка* Все векторы, которые линейно выражаются через минимальную систему, покрывающую пространство

### 1.4 Линейно (не)зависимые системы векторов

**Опр** *Линейная комбинация* Сумма векторов с коэффициентами из поля

**Опр** *Линейно (не)зависимая система векторов* Нетривиальная линейная комбинация (не) равна нулю

### 1.5 Конечномерные линейные пространства

**Опр** *Ранг (не)пустой системы векторов* Любой набор векторов, чьё число большее чем ранг, будет линейно зависим. Ранг пустой считаем нулевым

**Опр** *Размерность* Более употребительное название для ранга в случае работы с подпространсвом

**Опр** *(Бес)конечномерные линейные пространства* Если их размерность (бес)конечна

**Л1** Любой вектор системы векторов ранга $r$ раскладывается по $r$ л.н.з векторам

1. Возьмём вектора из линейной оболочки и добавим к ним произвольный вектор системы $a$. Эта система будет л.з. из определения ранга

2. Тогда найдутся коэффициента для нетривиальной линейной комбинации, притом коэффициент перед $\lambda_a \neq 0$ (иначе линейная оболочка была бы зависима)

3. Из линейной комбинации выразим $a$, поделив все вектора на $\lambda_a$

**Л2** Если вектор $b$ принадлежит линейной оболочке $a_1, \dots, a_k$ других векторов, то он не влияет на её ранг

1. От противного: пусть $\exists$ л.н.з система из $r+1$ векторов (она будет содержать $b$, иначе $w$ с определением ранга)

2. Итак, пусть система $b, a_1, \dots, a_r$ л.н.з. Тогда система $a_1, \dots, a_r$ тоже будет л.н.з. Так их $r$ штук, то все вектора $a_1, \dots, a_k$ будут выражаться через $a_1, \dots, a_r$

3. Если мы заменим $a_1, \dots, a_k$ на их выражения через $a_1, \dots, a_r$, то получится, что $b$ выражается по ним, что $w$ л.н.з $b, a_1, \dots, a_r$

**Th** *Основная теорема о рангах* Ранг подсистемы и системы совпадает $\Leftrightarrow$ $\forall$ вектор системы раскладывается по линейной оболочке подсистемы

$\Rightarrow$: мгновенно следует из Л1 В моей формулировке

$\Leftarrow$:

1. От противного: пусть $\exists$ л.н.з система из $r+1$ векторов

2. Её ранг будет не меньше ранга её и любого количества л.н.з векторов из подсистемы

3. С другой стороны, многократно применяя Л2, получим что её ранг не превышает ранга подсистемы, $w$

**Следствие 1** Для любой подсистемы векторного пространства ранг равен размерности линейной оболочки
**Следствие 2** Если размерности вложенных подпространств совпадают, то они равны

# 2 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница). Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при замене базиса (матрица перехода)

## 2.1 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница)

**Опр** *Базис* Система л.н.з векторов, являющаяся линейной оболочкой
**Лемма** *Штайница* Пусть система векторов $a_1, \ldots, a_n$ порождает пространство $V$, а система векторов $b_1, \ldots, b_m$ л.н.з. Тогда $n \geq m$

1. Возьмём $b_1$. Он будет выражаться через $a_1, \ldots, a_n$ по определению линейной оболочки. БОО первый коэффициент в его разложении по $a_1, \ldots, a_n$ ненулевой (иначе мы их переупорядочим)
2. Выразим из этого разложения $a_1$. Тогда $V =< b_1, a_2, \ldots, a_n >$. Так, действуя по индукции, заменим все вектора $a_i$
3. В случае $n < m$ получим противоречие с л.н.з. $b_1, \ldots, b_m$ (потому что всего $n$ векторов порождают пространство). Таким образом $n \geq m$, притом недостающие до линейно оболочки вектора можно взять из $a_1, \ldots, a_n$

## 2.2 Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса

**Утв** Систему л.н.з векторов можно дополнить до базиса

1. Ранг подсистемы меньше ранга системы, поэтому выполняется обратное к основной теореме о рангах утверждение ($\exists\ \overline{x}$), не лежащей в л.н.з подсистеме)
2. Если мы добавим $\overline{x}$ к подсистеме и она станет зависимой, то в нетривиальной линейной комбинации равен нулю либо новый коэффициент ($w$ с л.н.з исходной подсистемы), либо какой-то из старых (тогда $\overline{x}$ выражается через векторы линейной оболочки и принадлежит ей)
3. Продолжая процесс и далее, дополним систему до базиса

## 2.3 Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты

**Опр** *Координаты вектора в базисе* Коэффициенты в разложении по базису
При сложении векторов и домножении на число, координаты изменяются покомпонентно

## 2.4 Изменение координат вектора при замене базиса (матрица перехода)

**Опр** *Матрица перехода* Матрица координатных столбцов новых базисных векторов относительного старых
**Th** $S$ чья-то матрица перехода $\Leftrightarrow$ $S$ невырождена
Это следует из того, что координатные столбцы $X_k$ векторов $a_k$ линейно независимы $\Leftrightarrow$ $a_k$ л.н .з ($\lambda^k a_k = 0 \Leftrightarrow \lambda^k X_k = 0$). Поэтому столбцы матрица невырождена (её столбцы л.н .з) $\Leftrightarrow$ векторы л.н.з
**Th** Если вектор имеет в базисах $e, e^{'}$ координатные столбцы $X, X^{'}$, то $X = SX^{'}$
Достаточно расписать один вектор в обоих базисах и сравнить записи
**Утв** Если $\exists e, e^{'}, e^{''}; e^{'} = eC, e^{''} = e^{'}D$, то $e^{''} = eCD$
Последовательно подставляем матрицы перехода

# 3 Сумма и пересечение подпространств. Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств, её характеризации, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств (формула Грассмана). Понятие факторпространства, его базис и размерность

## 3.1 Сумма и пересечение подпространств

**Опр** *Пересечение подпространств* Множество элементов, которые являются их обычным теоретико-множественным пересечением как подмножеств

**Опр** *Сумма подмножеств по Минковскому* Множество-сумма векторов всех векторов $a_i$ из каждого $A_i \subset V$, то есть каждый вектор из суммы раскладывается по векторам из всех пространств

Для суммы Минковского выполняется коммутативность и ассоциативность

**Утв** Сумма линейных оболочек есть линейная оболочка объединения

Каждый элемент суммы есть линейная оболочка какого-то подпространства, поэтому если мы сложим все линейные оболочки по Минковскому, то получим линейную оболочку объединения (совокупности)

**Следствие** Сумма конечного числа подпространств есть подпространство

Потому как сумма есть минимальное по включению подпространство, содержащее в себе каждое из пространств

**Утв** Размерность суммы не превосходит суммы размерностей

Это следует из того, что размерность равна рангу, а для рангов ранг объединения не превосходит суммы рангов ( доказывается от противного)

## 3.2 Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств, её характеризации, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения

**Опр** *Прямая (внешняя) сумма* Декартово произвдение $(a_1, \dots, a_n)$

Сложение и умножение на скаляр определены для внешней суммы покомпонентно

**Опр** *Прямая (внутренняя) сумма* Сумма, вектора $a_i$ в разложении которой из каждого $A_i \subset V$ определены однозначно

Например, всё пространство разлагается в прямую сумму своих базисных векторов

Через $\overline{U_i}$ обозначим сумму всех рассматриваемых пространств, за исключением $U_i : U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + U_n$

**Th.1** *Первый критерий прямой суммы*
Сумма подпространств прямая $\Leftrightarrow U_i \cup \overline{U_i}$

- $\Rightarrow$: от противного. Пусть БОО условие не выполнено для $U_1$. Тогда там есть нулевой вектор, который принадлежит $U_i$ и раскладывается по остальным пространствам. Тогда у нас существует два представления нулевого вектора (одного тривиальное, другое новое), $w$ с прямостью суммы

- $\Rightarrow$: от противного. Пусть существует два различных разложения $v$ по $a_i$ и $b_i$. БОО хотя бы $a_1 \neq b_1$, поэтому если возьмём их разность, то с одной стороны она $\in U_1$, а с другой —

- $\in \overline{U}_i$, то есть пересечение не тривиально, $w$

**Th.2** *Второй критерий прямой суммы*
Для конечномерных подпространств следующие условия эквивалентны:

1. Сумма $U = \oplus U_i$ прямая

2. Система из $\sum_i \dim U_i$ векторов из объединения базисов есть базис в $U$

3. $\dim U = \sum_i n_i$

- $2 \Leftrightarrow 3$ : по следствию основной теоремы о рангах $\dim U = rge = rg \cup_i e^i$, поэтому

$$\dim U = \sum_i \dim U_i \Leftrightarrow rge = \sum_i \dim U_i \Leftrightarrow e$$

л.н.з система

- $1 \Rightarrow 2$ : от противного. Пусть $e$ л.н.з система. Запишем нетривиальную линейную комбинацию всей суммы. Так как хотя бы одна компонента нетривиальная, то БОО $l_1 \neq 0$. Тогда эта комбинация одновременно принадлежит и $U_1$, и $\overline{U_1}$, по той же идее, что и в Th.1, это $w$
- $2 \Rightarrow 1$ : от противного. По обратной идее предыдущего пункта воспользуемся Th.1, получим ненулевое пересечение, распишем вектор оттуда ( нетривиальная л.к.) и получим $w$ с л.н.з $e$

**Опр** *Прямое дополнение подпространства* Недостающий член в прямой сумме до всего пространства $V$

В случае двух подпространств, они входят в определение симметрично

**Утв** Сумма размерностей подпространства и любоего его прямого дополнения равна размерности всего пространства $V$

**Утв** У любого подпространства конечномерного прострасньтва $V$ существует прямое дополнение

Для нахождения дополнения достаточно выбрать базис в подпространстве и дополнить его до базиса в пространстве. Тогда по Th.2 эта система и будет прямым дополнением

Если $a = a_1 + a_2$, то $a_1$ называется проекцией $a$ на $U_1$ вдоль (параллельно) $U_2$

## 3.3 Связь размерностей суммы и пересечения подпространств

Смотреть в рукописном конспекте

## 3.4 Понятие факторпространства, его базис и размерность

**Опр** *Факторпространство* Фактор-множество (множество всех классов эквивалентности для заданного отношения эквивалентности) $a \sim b \Leftrightarrow b - a \in U$

Элементы факторпространства есть смежные классы вида $a + U$

$$(a + U) + (b + U) = (a + b) + U$$
$$\lambda(a + U) = \lambda a + U$$

Если $W$ - прямое дополнение $U$, то существует естественный изоморфизм $W \to V/U(a \mapsto a + U)$. Он является ограничением на $W$ линейного отображения $\pi : V \to V/U, \pi(v) = v + U$ и называется канонической проекцией. Действительно, из определения прямого дополнения следует единственность $u \in U : v = u + w$. Применим $\pi$ и получим $v + U = w + U$, что влечёт биективность $\pi$

Отсюда следует, что дополнение произвольного базиса в $U$ до базиса в $V$ после применения к ней $\pi$ будет базисом в $V/U$, притом $\dim V/U = \dim V - \dim U$, что следует из теоремы о сумме размерностей ядра и образа