Конспект билетов

Аналитическая механика

Содержание

1 Кинематика точки. Траектория, скорость и ускорение точки. Скорость и ускорение точки в полярных координатах

1.1 Кинематика точки

Опр *Кинематика точки. Траектория, скорость и ускорение точки*
Раздел механики, изучающий математическое описание (средствами геометрии, алгебры, математического анализа…) движения материальной точки без рассмотрения причин движения (массы, сил и т. д.)
Опр *Траектория*
Опр *Скорость*
Опр *Ускорение*

1.2 Скорость и ускорение точки в полярных координатах

Опр *Радиальная ось*
Опр *Трансверсальная ось*
Для того чтобы получить скорость и ускорение в полярных координатах, достаточно выразить x и y в терминах r, φ, продифференцировать нужное число раз и вычленить базисные векторы

2 Кинематика точки. Естественный трёхгранник. Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное

2.1 Кинематика точки. Естественный трёхгранник

Опр *Естественный способ задания движения*
Опр *Естественный трёхгранник*

2.2 Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное

Запишем две формулы из дифференциальной геометрии и продифференцируем r и v с их учётом. Получим две компоненты ускорения: тангенциальное и нормальное
Theorem *Гюйгенса о разложении ускорения*

3 Криволинейные координаты точки. Коэффициенты Ламе. Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах. Скорость точки в цилиндрических и сферических координатах

3.1 Криволинейные координаты точки

Опр *Криволинейные координаты*
Опр *Первая координатная линия*
Опр *Первая координатная ось*
Аналогично определяются и последующие координатные линии и оси

3.2 Коэффициенты Ламе

Опр *Единичный вектор координатной оси*
Опр *Коэффициент Ламе*
Опр *Ортогональные криволинейные координаты*

3.3 Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах

Скорость находится по определению. Ускорение смотреть в конспекте Холостовой с 8 страницы

3.4 Скорость точки в цилиндрических и сферических координатах

Опр *Цилиндрическая система координат*
Опр *Сферическая система координат*
Скорость точки в этих координатах находится с помощью коэффициентов Ламе

4 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела. Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса)

4.1 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела

Опр *Поступательно движущаяся и связанная системы координат*
Опр *Углы Эйлера*
Углы, описывающие поворот абсолютно твердого тела в трёхмерном евклидовом пространстве
Опр *Линия узлов*
Пересечение координатных плоскостей начальной и конечной СК
Опр *Угол прецессии, нутации, собтвенного вращения*
Переход от одной системы координат к другой посредством вращений на углы, можно задать с помощью матриц поворота
Матрица поворота (или матрица направляющих косинусов)
Опр *Ортогональная матрица, которая используется для выполнения собственного ортогонального преобразования в евклидовом пространстве. При умножении любого вектора на матрицу поворота длина вектора сохраняется. Определитель матрицы поворота равен единице*
Матрицы поворота вокруг различных осей выглядят по-разному
Опр *Угловая скорость*
Физическая величина, характеризующая быстроту и направление вращения материальной точки или абсолютно твёрдого тела относительно оси
Опр *Угловое ускорение*

4.2 Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса)

Theorem *Формула Эйлера*
Формула *Ривальса* Получается формальным дифференцированием формулы Эйлера

5 Плоское движение твёрдого тела. Мгновенный центр скоростей. Мгновенный центр ускорений

5.1 Плоское движение твёрдого тела

Опр *Плоское движение*

5.2 Мгновенный центр скоростей

Theorem *О мгновенном центре скоростей*
Опр *Мгновенный центр скоростей*

5.3 Мгновенный центр ускорений

Theorem *О мгновенном центре ускорений*
Опр *Мгновенный центр ускорений*
Мгновенный центр ускорений можно построить за два шага

6 Кинематические инварианты. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось

6.1 Кинематические инварианты

Опр *Инвариант*
Величина, остающаяся неизменной при преобразованиях
Опр *Первый кинематический инвариант*
Опр *Второй кинематический инвариант*
Отсюда следует, что величины проекции скоростей двух точек поступательного движущегося тела на прямую, их соединяющуюся, равны

6.2 Кинематический винт

Опр *Кинематический винт*
Опр *Параметр винта*

6.3 Мгновенная винтовая ось

Если расписать итоговую скорость точки по координатам, то можно получить
Опр *Мгновенная винтовая ось*
Опр *Правый и левый винт*

7 Алгебра кватернионов

Опр *Кватернион, кватернионные единицы*
Свойства *Кватернионного сложения*
Опр *Скалярная и векторные части кватерниона*
Свойства *Кватернионного умножения единиц*
Свойства *Кватернионного умножения*
Опр *Сопряжённый кватернион*
Опр *Норма кватерниона, нормированный кватернион*
Опр *Обратный кватернион*
Форма *Тригонометрическая записи кватерниона*
Результат умножения кватернионов в таком случае получается из свойств тригонометрии
Аналог *Формулы Муавра*

8 Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела. Теорема Эйлера о конечном повороте

8.1 Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела

Опр *Неподвижный и связанный базисы*
Theorem

8.2 Теорема Эйлера о конечном повороте

Theorem *Эйлера о конечном повороте*
Если воспользоваться предыдущей теоремой, то видно, что при повороте положение e сохраняется, а j поворачивается

9 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах. Параметры Родрига-Гамильтона. Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой

9.1 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах

Можно показать, что результирующий кватернион после N поворотов будет записан в обратном порядке в одном базисе

9.2 Параметры Родрига-Гамильтона

Опр *Параметры Родрига-Гамильтона*
Если записать преобразованные от смены базисные единицы и подставить в новый кватернион, то он будет выражен в исходном базисе через параметры Родрига-Гамильтона. Порядок записи кватернионов в результирующем повороте будет уже прямой

9.3 Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой

Theorem *Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой*

10 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона). Прецессионное движение твёрдого тела

10.1 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона)

Опр *Угловая скорость* Через предел
Уравнение *Пуассона*
Можно показать, что два определения угловой скорости эквивалентны. В конце мы придём к уравнению Эйлера (то есть верному утверждению), а значит мы были правы

10.2 Прецессионное движение твёрдого тела

Рассмотрим вращение оси тела вокруг неподвижной вращающейся оси и решим уравнение Пуассона для этого случая

11 Кинематика сложного движения точки. Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении

11.1 Кинематика сложного движения точки

Опр *Относительное, переносное и абсолютное движение*
Можно посчитать относительные и абсолютные производные радиус-вектора и получить их связь

11.2 Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении

Опр *Относительные, переносные и абсолютные скорость и ускорение*
Theorem *О сложении скоростей*
Theorem *О сложении ускорений или теорема Кориолиса*
Опр *Кориолисово ускорение*

12 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг пересекающихся осей. Кинематические уравнения Эйлера

12.1 Кинематика сложного движения тела

Сложение *Поступательных движений*

12.2 Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг пересекающихся осей

Сложение *Вращательных движений*

12.3 Кинематические уравнения Эйлера

Если тело участвует одновременно в трёх вращениях, то записав суммарное вращение в проекциях на связанные оси, имеем

Уравнения *Эйлера кинематические*

13 Треугольный вид матрицы преобразования. Теорема Гамильтона-Кэли

Лемма $\exists$ $(n-1)$-мерное инвариантное подпространтво

1. Возьмём произвольное λ_0 и сделаем выводы по размерности ядра и образа для $\varphi - \lambda_0$
2. Выясним существования $U : \dim U = n-1$ – не более чем надмножество $\operatorname{Im} \varphi - \lambda_0$. Для его построения возьмём базис в образе и дополним его до базиса во всём V
3. В конце возьмём базис для U (первые $n-1$ вектор), задаваемый требуемое подпространство

Лемма *О треугольном виде*
$\exists$ базис, в котором матрица $\varphi \in L(V, V)$ верхнетреугольна с заданным порядком расстановки характеристических числе по диагонали

1. Возьмём произвольные λ_0 и инвариантное $n-1$ подпространство
2. Далее получим вид для $\varphi : \varphi = \lambda_0 e_n + \sum_1^{n-1} \mu_i f_i$
3. Сделаем вывод о матрице оператора, характеристическом многочлене сужения
4. Затем применяем спуск индукции, чтобы поместить на главную диагональ нужные базисные векторы

13.1 Теорема Гамильтона-Кэли

Th *Гамильтона-Кэли*
Характеристический многочлен является аннулирующим для матрицы оператора
Это следует из того, что $s_i \geq m_i$, то есть характеристический многочлен содержит в себе минимальный (то есть аннулирующий)

14 Корневые подпространства, их размерность. Разложение пространства в прямую сумму корневых. Жорданова нормальная форма, её существование и единственность. Минимальный многочлен, критерий диагонализируемости оператора в терминах минимального многочлена

14.1 Корневые подпространства, их размерность

Опр *Корневое подпространство* Первое стабильное ядро
Притом корневое пространство равно и все стабильным ядрам большей размерности
Лемма $\dim \ker(\varphi - \lambda_i)^{s_i} \geq s_i$

1. Запишем матрицу в верхнетреугольном виде, притом расположим λ_i в первых s_i диагональных клетках
2. Применим к матрице преобразование $\varphi - \lambda_i$. Получим нильпотентный левый верхний блок
3. Возведём матрицу в нужную степень с учётом перемножения блочных матриц и получим левый верхний блок нулей
4. Тогда получим, что первые s_i векторов принадлежат соответствующему ядру. А так как такими же могут быть и последующие векторы, то возможно строгое неравенство

Следствие $\dim V^{\lambda_i} \geq s_i$

14.2 Разложение пространства в прямую сумму корневых

Лемма Сумма любых степеней ядер $\varphi - \lambda_i$ прямая

1. От противного: пусть $\exists a_1 = V^{\lambda_1} \cap \sum_2^k V^{\lambda_i}$
2. Тогда этот вектор можно разложить по этим подпространствам
3. Применим к обеим частям равенства $\psi = \prod_2^k (\varphi - \lambda_i)$
4. Тогда справа получим ноль, а слева – нет, w

В частности, сумма корневых пространств прямая
Th

1. $V = \oplus_i V^{\lambda_i}$
2. $\dim V_i^\lambda = s_i$
3. $m_i \leq s_i$, то есть стабилизация ядер наступает не позже s_i шага

1. В силу $\dim V_i^\lambda \geq s_i$ сложим неравенства по всем i. Тогда $\sum_i s_i \geq n$, однако у нас $\dim V = n$, поэтому $V = \oplus_i V^{\lambda_1}$
2. Предыдущий пункт возможен лишь когда во всех неравенствах выполнено равенство
3. $\dim \ker(\varphi - \lambda_i)^{s_i} \geq s_i = \dim V_i^\lambda$, однако $\ker(\varphi - \lambda_i) \subset V_i^\lambda$. В противном случае не выполнена формула суммы размерностей ядра и образа

14.3 Жорданова нормальная форма, её существование и единственность

Опр *Жорданова клетка* Верхнетреугольная матрица, в которой на главной диагонали ...
Опр *Жорданова матрица, ЖНФ* Блочно-диагональная матрица, каждый блок которой ...
Опр *Жорданов базис* Базис, в котором оператор имеет ЖНФ
Опр *Жорданова цепочка, присоединённый вектор*

1. Рассмотрим жорданову клетку запишем её действие в строчном виде
2. Рассмотрим новый оператор $\psi = \varphi - \lambda_0$. Под его действием векторы сваливаются в ядра меньшего по степени оператора
3. Полученная последовательность называется жордановой цепочкой
4. Вектор над данным называется присоединённым. Ясно, что он может быть и не единственен

Th *Существование ЖНФ*
Существует базис, в котором матрица оператора жорданова

1. Требуется доказать, что существует базис, являющийся объединением жордановых цепочек, то есть так надо сделать в каждом корневом подпространстве
2. Рассмотрим нильпотентный оператор $\psi : V_i^\lambda \to V_i^\lambda$, являющийся ограничением оператора $\varphi - \lambda_i$ на V_i^λ
3. Заметим, что если $a \in \ker \psi^t$, то $a \in \ker \psi^{t-1}$ (непосредственно проверяется)
4. Теперь рассмотрим вложенную цепочку ядер и определим к последнему, V_i^λ прямое (нулевое дополнение) W_{m_i+1} до следующего ядра (которое будет являться самим V_i^λ)
5. Рассмотрим ядро $\psi(W_{t+1})$, для которого выполнено три условия
6. Из них мы можем определить W_t как прямое дополнение $\ker \psi^{t-1}$ до $\ker \psi^t$ (дополним до базиса)
7. Таким образом, применяя оператор $\psi(W_{t+1})$ мы спускаемся вниз по цепочке и, дополнив до базиса, продолжаем спуск
8. Жорданов базис есть объединение базисов W_i каждое из которых лежит в $\ker \psi^i$, то есть базисных разных W_i пересекаются тривиально (к том же мы пользовались л.н.з. дополнением)

Th *Единственность ЖНФ*
Для данного базиса ЖНФ единственна с точностью до перестановки жордановых клеток

1. Требуется доказать, что $\forall\lambda_i$ количество жордановых цепочек данной длины в жордановом базисе определено однозначно
2. Рассмотрим все цепочки, соответствующие фиксированному λ_i. Их линейная оболочка находится $\in V_i^\lambda$, $\dim < B_{\lambda i} > \leq s_i$
3. Так как всего в (жордановом) базисе у нас n векторов, а $< B_{\lambda i} >$ и составляют этот базис, то в неравенствах выше достигается равенство
4. Рассмотрим нильпотентный оператор $\psi : V_i^\lambda \to V_i^\lambda$, являющийся ограничением оператора $\varphi - \lambda_i$ на V_i^λ
5. Его образ состоит из всех не верхних векторов в цепочках, образ его образа состоит из всех векторов, кроме ...
6. Введём обозначения для количества жордановых цепочек длины d, отвечающих λ_i за c_i^d
7. Составим уравнения на их суммы, чья система легко решается и однозначно выражается через характеристики оператора φ, то есть инвариантно

Из указанного рассмотрения нетрудно заметить, что степень $\lambda - \lambda_i$ характеристического многочлена s_i равна длине всех цепочек, отвечающих $\forall\lambda_i$, а степень m_i минимального многочлена равна длине максимальной (иначе оператор обнулится не полностью, не по всем цепочкам-базисным векторам)

14.4 Минимальный многочлен, критерий диагонализируемости оператора в терминах минимального многочлена

Опр *Минимальный многочлен* Многочлен, обгуляющий оператор, минимальной степени
Утв Минимальный многочлен является аннулирующим

1. Хотя бы один аннулирующий многочлен существует, ведь если взять степени оператора, которые будет больше размерности пространства, то эта система будет л.з., а значит, у соответствующего многочлена будут ненулевые коэффициенты
2. Теперь возьмём произвольный вектор $a \in V = \oplus_i V^{\lambda_i}$
3. Так как ядра каждого одночлена содержатся в ядре минимального, то каждый член разложения из ядра минимального многочлена. Тогда и a тоже
4. Итого, в силу произвольности a, минимальный многочлен аннулирующий

Утв Минимальный многочлен есть $\prod_i (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$

1. От противного: пусть хотя бы одна степень тут меньше, то есть БОО $m_1^{'} < m_1$
2. Тогда $\dim\ker(\varphi - \lambda_1)^{m_1^{'}} < s_1$ по лемме
3. Если мы сложим все ядра такого вида то получи строгое неравенство. То есть существуют вектор пространства $a : \mu_\varphi(\varphi(a)) \neq 0$, то есть новый многочлен не минимальный

Th *Второй критерий диагонализируемости*
Если $\varphi \in L(V, V)$ имеет попарно различные собтсвенные значения λ_i кратнойстей s_i, то следующие условия эквивалентны:

1. φ диагонализируем
2. $V_{\lambda_i} = V^{\lambda_i}$
3. μ_φ раскладывается на различные линейные множители

- $1 \Leftrightarrow 2 :$ в силу того, что $V_{\lambda i} \subseteq V_i^\lambda$ и $V = \oplus_i V_{\lambda_i}$, достигается равенство множеств
- $2 \Rightarrow 3 :$ из 2 следует, что $m_i = 1 \forall i$, поэтому все n множителей различны

Билинейные формы

15 Билинейные (полуторалинейные) формы (функции). Координатная запись билинейной формы. Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса

15.1 Билинейные (полуторалинейные) формы (функции)

Опр *Биленейная форма, полуторалинейное отображение* Не забыть сопрячь на втором аргументе
Опр *Матрица билинейной формы* Её элемент есть результат применения формы на пару базисных векторов

15.2 Координатная запись билинейной формы

Th *Координатная запись*
$\beta(x, y) = x^T B\overline{y}$
Достаточно представить векторы в координатной записи и раскрыть по билинейности
Утв Если произвольно отображения удовлетворяет равенству $\beta(x, y) = x^T B\overline{y}$, то это билинейная форма
Так как запись верна для всех векторов, то она верна и для базисных, к чему мы её и применим. Далее проверим аксиомы и убедимся, что перед нами билинейная форма

15.3 Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса

Th *Изменение матрицы при замене базиса*
$\beta^{'} = S^T B\overline{S}$
Достаточно вставить матрицу перехода на нужные места

16 Симметричные билинейные (полуторалинейные) формы. Взаимно-однозначное соответствие с квадратичными (эрмитовыми) формами

16.1 Симметричные билинейные (полуторалинейные) формы

Опр *(Эрмитова) симметричная форма* $\beta(x, y) = \overline{\beta(y, x)}$
Th Билинейная форма симметрична $\Leftrightarrow B = B^*, B^* = \overline{B^T}$
$\Rightarrow$: по определению билинейной формы $\Leftarrow$: надо воспользоваться тем, что результат билинейной формы есть число (матрица 1 на 1), а затем подогнать под определение, используя транспонирования и сопряжение

16.2 Взаимно-однозначное соответствие с квадратичными (эрмитовыми) формами

Опр *Квадратичная (эрмитова) форма* $q(x) = \beta(x, x)$, порождённая билинейной
Учтём, что теперь $\beta(a, a) = \overline{\beta(a, a)}, q(a) = x^T B\overline{x}$
Th (Эрмитова) квадратичная форма порождается ровно одной билинейной $\Leftrightarrow B = B^*, B^* = \overline{B^T}$

1. Требуется доказать, что значение билинейной формы однозначно восстанавливается по квадратичной
2. В $\mathbb{R}$ достаточно рассмотреть $q(x + y)$
3. В $\mathbb{C}$ достаточно рассмотреть $q(x + y)$ и $iq(x + iy)$, не забыв, где надо, про комплексное сопряжение и что $i^2 = -1$

17 Ядро билинейной функции. Ортогональное дополнение подпространства. Ограничение билинейной функции на подпространство. Критерий невырожденности подпространства. Существование нормального вида билинейной симметричной формы над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$

17.1 Ядро билинейной функции

18 Алгоритмы приведения квадратичной формы к нормальному виду (метод Лагранжа и сдвоенных элементарных преобразований матрицы)

Опр *Диагональный вид формы* Матрица формы в данном базисе диагональна
Опр *Канонический диагональный вид формы* Каждый элемент диагонали $\in \{-1; 0; 1\}$
Заметим, от диагонального вида легко перейти к каноническому (путём линейной замены)
Th Существует базис, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид

- Допустим $b_{11} \neq 0, b_{m1} \neq 0$. Тогда применим сдвоенное элементарное преобразование: вычтем из m-й строки и столбца 1-ю строку и столбец, домноженные на соответствующий коэффициент ($b_{1m} \neq \overline{b_{m1}}$). Далее продолжим с матрицей меньшей размерности
- Если хотя бы один диагональный элемент не ноль, то поменяем местами базисные векторы и продолжим как в простом случае
- Если все диагональные элементы ноль, то прибавим к нему столбец и строку с ненулевым элементом λ той же линии (получится в результате сдвоенности 2λ). Затем продолжим как в простом случае

19 Закон инерции квадратичной (эрмитовой) формы. Положительный и отрицательный индексы инерции, их геометрическая характеризация. Критерий Сильвестра

19.1 Закон инерции квадратичной (эрмитовой) формы

Опр *Положительно (полу)определённая форма* Положительна (неотрицательна) на ...
Опр *Отрицательно (полу)определённая форма* Аналогично
Th Квадратичная форма определена положительно $\Leftrightarrow d_i > 0 \forall i$
$\Rightarrow$: $d_i = q(e_i)$ по определению положительной определённости $\Leftarrow$: в силу $q(a) = \sum_i d_i |x_i|^2$
Отсюда следует, что определитель матрицы положительно определённой формы положителен
Аналогичные критерии есть и у отрицательно- и полуопределённых форм
Опр *Положительный индекс инерции* Наибольшее число, для которого $\exists U$ ...
Th *Об индексах инерции*
Индексы инерции p, q равны количеству соответствующих по знаку чисел среди d_i

1. Докажем для положительного индекса инерции
2. БОО положительные можно считать p' – количество положительных d_i – элементов первыми. Тогда ограничение на этом подпространстве и будет отвечать определению положительного индекса инерции
3. Пусть $p > p'$. Тогда рассмотрим подпространство соответствующей размерности
4. По формуле включений-исключений придём к тому, что пересечение пространства и отрицательно полуопределённого подпространства ненулевое. Тогда существует ненулевой вектор, на котором форма не определена однозначно, w

Следствие Ранг квадратичной формы равен $p + q$
Опр *Сигнатура квадратичной формы* $(p, q, n - p - q)$

19.2 Критерий Сильвестра

Th *Критерий Сильвестра*
Квадратичная форма определена положительна $\Leftrightarrow M_i > 0 \forall i$

1. $\Rightarrow$: достаточно рассмотреть сужение на каждое подпространство и вспомнить про следствие из закона инерции

2. $\Leftrightarrow$: от противного. Положим m – минимальное число первых базисных векторов элементов, на которых форма определена не положительно и рассмотрим сужение на них

3. Тогда из $p \geq m-1$ (в силу сужения на $m-1$ подпространстве) и $p < m$, иначе m определено неверно. Получаем равенство $p = m-1$

4. Перейдём к диагональному виду и рассмотрим определитель сужения на m-ное пространство. Он будет неположителен, w

20 Кососимметричные билинейные функции, приведение их к нормальному виду

Опр *Кососимметрическая билинейная функция* $\beta(x,y) = -\overline{\beta(y,x)}$
Из определения видно, что $\beta(x,x) = 0$
Th Билинейная форма кососимметрическая $\Leftrightarrow \overline{B^T} = -B$
$\Rightarrow$: по определению кососимметрической формы $\Leftarrow$: надо воспользоваться тем, что результат билинейной формы есть число (матрица 1 на 1), а затем подогнать под определение, используя транспонирования и сопряжение
Следствие Билинейная форма в нечётномерное векторном пространстве вырождена Потому как тождественна O
Th *Канонический вид*
Существует базис, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид

- Допустим $b_{11} = 0$ и соответствующие строка и столбец нулевые, то спускаем по размерности вниз

- Если хотя бы один не первый элемент строки не ноль, то поменяем местами вторую и эту строки. Затем путём элементарных преобразований сделаем $+1$ (на столбце получим схожую картину) и спустимся вниз

- Если и после первого есть ненулевой элемент, то его можно сдвоенными ЭПС сделать нулевым

Пространства со скалярным произведением

21 Евклидовы и унитарные пространства. Матрица Грама и её свойства. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца, неравенство треугольника. Метрика. Выражение скалярного произведения в координатах

21.1 Евклидовы и унитарные пространства

Опр *Евклидово (унитарное) пространство* Пространство над полем с фиксированным скалярным произведением
Опр *Норма (длина) вектора* $|x| = \beta(x,x)$
Норма неотрицательна и нулевая в случае нулевого вектора
Опр *Ортогональные векторы* $\beta(x,y) = 0$

21.2 Матрица Грама и её свойства

Опр *Матрица Грама* Матрица система векторов: $g_{ij} = (a_i, a_j)$
Утв Определитель матрицы Грама положителен при л.н.з системе и ноль иначе

1. На л.н.з. векторах матрица Грама есть матрица п.о. билинейной симметрической формы, поэтому её детерминант положителен.
2. В случае л.з. системы составим её нетривиальную л.к., домножим на векторы a_j и повторим так $\forall j \in \overline{1, n}$
3. Тогда если составить из строчек матричное уравнение, то получим $\Gamma x = 0$, что в силу $x \neq 0$ означает вырожденность Γ

21.3 Неравенство Коши – Буняковского – Шварца, неравенство треугольника

Следствие *Неравенство Коши – Буняковского – Шварца*
$\forall a, b \in E |a||b| \geq |(a, b)|$
Достаточно воспользоваться предыдущей теоремой и раскрыть определитель, сняв в конце квадраты
Следствие *Неравенство треугольника*
$\forall a, b \in E |a||b| \geq |a + b|$
Достаточно расписать $|a + b|^2$ и воспользоваться предыдущим неравенством

21.4 Метрика

На E введём метрику как $\rho(a, b) = |b - a|$. Заметим, что в таком случае выполняются все 4 аксиомы метрики (неотрицательность, ноль при нуле, симметричность и неравенство треугольника)

21.5 Выражение скалярного произведения в координатах

Опр *Скалярное произведение* Билинейная (эрмитова) симметричная положительно ...
Th *Скалярное произведение*
$(a, b) = x^T \Gamma \overline{y}$
Это верно, потому как в случае базисных векторов матрица Грамма совпадает с матрицей билинейной формы скалярного произведения

22 Ортогональные системы векторов и подпространств. Существование ортонормированных базисов (ОНБ). Изоморфизм евклидовых пространств. Ортогональные и унитарные матрицы. Переход от ОНБ к ОНБ

22.1 Ортогональные системы векторов и подпространств

Опр *Ортогональная, ортонормированная система* Векторы системе попарно ...
Утв *Теорема Пифагора*
$|a_1 + ... + a_n|^2 = |a_1|^2 + \ldots |a_n|^2$
Раскрываем по линейности и ортогональности
Утв Система ортогональная $\Leftrightarrow$ матрица Грама ортогональная
Следует из определения матрицы Грама. Аналогично в ортонормированном случае матрица Грама единичная
Следствие 1 Ортогональная система ненулевых векторов л.н.з.
Потому как соответсвующая матрица Грама невырождена
Следствие 2 При ортогональном базисе матрица формы скалярного произведения имеет диагональный вид, а при ОНБ – канонический

22.2 Существование ортонормированных базисов (ОНБ)

Следствие 3 В конечномерном евклидовом пространстве существует ОНБ
Потому как существуют ортогональные системы. Если мы их запишем в виде матрицы формы, то, так как мы их умеем приводить к каноническому виду, мы получим ОНБ

22.3 Изоморфизм евклидовых пространств

Опр *Изоморфизм евклидовых пространств* Изоморфизм линейных пространств и ...
Утв Отображение изоморфно $\Leftrightarrow$ оно переводит ОНБ в ОНБ
$\Rightarrow$: в силу сохранения скалярного произведения и соразмерности пространств (следствие изоморфности) $\Leftarrow$: отображение переводит базис в базис, поэтому перед нами обычный изоморфизм линейных пространств. Применим отображение на двух произвольных векторах пространства. И получим, что сохраняется скалярное произведение, то есть перед нами изоморфизм линейных пространств по определению
Th Два конечномерных евклидова пространства изоморфны $\Leftrightarrow$ они соразмерны
$\Rightarrow$: в силу свойств изоморфизма линейных пространств $\Leftrightarrow$: приведём базисных обеих пространств к ОНБ и построим отображение, переводящее базис в базис. По предыдущему утверждению, перед нами изоморфизм

22.4 Ортогональные и унитарные матрицы

Опр *Ортогональная, унитарная матрицы* Над разными полями, множества пересекаются
Утв Матрицы Q, R унитарны $\Rightarrow$ матрицы $Q^T, \overline{Q}, Q^*, QR, Q^{-1}$ унитарны
Непосредственно проверяется определение
Утв Детерминант унитарной матрицы единичен
Для доказательства достаточно расписать определитель в определении и воспользоваться свойствами определителя
Утв Для комплекснозначных матриц Q следующие условия эквивалентны

1. Q унитарна
2. $\exists Q^{-1}, Q^{-1} = Q^*$
3. Столбцы Q образуют ОНБ в унитарном пространстве столбцов

- $1 \Leftrightarrow 2$: по определению
- $1 \Leftrightarrow 3$: в силу определения унитарной матрицы возьмём скалярное произведение и получим, что каждый элемент результата есть δ_{ij}, то есть перед нами ОНБ
- Столбцы Q образуют ОНБ в унитарном пространстве столбцов

22.5 Переход от ОНБ к ОНБ

Следствие *Переход от ОНБ к ОНБ*
Базисы ОНБ $\Leftrightarrow$ матрица перехода между ними ортогональная (унитарная)
$\Rightarrow$: потому что произведение матриц единично $\Leftrightarrow$ матрицы единичны $\Leftarrow$: по определению матрицы перехода

23 Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция. Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта

23.1 Ортогональное дополнение подпространства

Опр *Ортогональное дополнение* Множество всех векторов, ортогональных ...
Пространство образует со своим ортогональным дополнением прямую сумму
Th Сумма подпространства и его ортогонального дополнения есть всё евклидово пространство

1. Достаточно научиться представлять любой вектор пространства в виде суммы U и U^T
2. Выберем ортогональный базис в U и запишем его линейную комбинацию + вектор $c \in U^T$
3. Теперь надо подобрать такие коэффициенты, чтобы $c \perp U$
4. Заменим условие на эквивалентные, вспомним про ортонормированность базиса и выразим коэффициенты

Следствие 1 $\dim U = k, \dim E = n \to \dim U^T = n - k$
Следствие 2 $(U^T)^T = U$
Потому как одно пространство вложено в другое и у них, по предыдущему следствию, равны размерности
Следствие 2 В конечномерном случае данную ортогональную систему из ненулевых векторов можно дополнить до ОНБ
Достаточно дополнить векторами из ортогонального дополнения

23.2 Ортогональная проекция

Опр *Ортогональная проекция* Проекция на подпространство вдоль (параллельно) U^T
Утв *Формула проекции*
$pr_U\overline{a} = \sum_i \frac{(a_i,b_i)}{(b_i,b_i)} b_i$
Следствие последней теоремы
Утв *Ортогональное дополнение в координатах*
Ортогональное дополнение есть пространство решений уравнения $(A_1, \dots, A_n)^* x = 0$
$x \in A^T \Leftrightarrow x \perp A \Leftrightarrow A_i \perp x \Leftrightarrow A_i^* x = 0$ и перейдём к матричной записи. Решение полученного уравнения и есть ортогональное дополнение

23.3 Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта

Утв Существует метод найти ортогональный базис в заданном подпространстве

- Рассмотрим линейную оболочку подпространства. Если $a_1 = 0$, то выкинем его из линейной оболочки
- Если $a_1 \neq 0$, то оставим его таким, какой он есть: $b_1 = a_1$
- Если все a_k до текущего уже ортогонализованы, то $b_{k+1} = a_{k+1} - pr_{<b_1,\dots,b_k>} a_{k+1}$

При необходимости, полученную систему можно нормировать для получения ОНБ

24 Описание линейных функций на евклидовом (унитарном) пространстве

25 Преобразование, сопряжённое данному. Его линейность, существование и единственность, его матрица в ОНБ. Теорема Фредгольма

25.1 Преобразование, сопряжённое данному

Опр *Сопряжённое преобразование* $\varphi^* : (\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))$

25.2 Его линейность, существование и единственность, его матрица в ОНБ

Утв $\psi = \varphi^* \Leftrightarrow B = A^*$
Достаточно расписать результат формы на паре векторов, определение сопряжённого преобразование и взглянуть на матрицы
Следствие 1 φ^* единственно
Потому как у каждой матрицы есть единственная сопряжённо-транспонированная
Следствие 1 Для сопряжённых преобразований справедливо 4 свойства
Первые три следуют из аналогичных свойств для матриц, а последнее из свойств комплексного сопряжения
Th U инвариантно относительно $\varphi \Leftrightarrow U^\perp$ инвариантно относительно φ^*
Достаточно вспомнить определения инвариантности, ортогонального дополнения и сопряжённого образования

25.3 Теорема Фредгольма

Th *Фредгольма*
$\ker \varphi^* = (\operatorname{Im} \varphi)^{\perp}$

1. Докажем вложенность ядра в чужой образ и равенство размерностей. Это будет означать равенство
2. Равенство размерностей доказывается по прошлым утверждениям
3. Чтобы доказать вложенность рассмотрим произвольный вектор ядра, воспользуемся определениями ортогонального дополнения, образа и сопряжённого преобразования

26 Самосопряжённые линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов

26.1 Самосопряжённые линейные преобразования

Опр *Сопряжённое линейное преобразование* $\varphi^* = \varphi$
В таком случае $(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))$

26.2 Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов

Th φ самосопряжено $\Leftrightarrow A = A^*$
Аналогично доказательству для сопряжённых преобразований
Th У самосопряжённого преобразования все характеристические числа действительны
В $\mathbb{C}$ достаточно расписать определение самосопряжённого преобразования, собственного числа и прийти к равенству $\lambda = \overline{\lambda}$, что означает действительность
Так как в $\mathbb{C}$ доказано, что характеристическое уравнение имеет лишь действительные корни. А симметрические вещественные матрицы являются частным случаем эрмитовых, поэтому теорема доказана и в $\mathbb{R}$
Утв У самосопряжённого преобразования различные корневые подпространства перпендикулярны
Достаточно рассмотреть два вектора из разных корневых подпространств, расписать определение самосопряжённого преобразования, собственного числа и прийти к единственному случаю $(a_i, a_j) = 0$
Th *Основная теорема о самосопряжённых преобразованиях*
Для самосопряжённого преобразования сущетсвует ОНБ из собственных векторов

1. Пусть $\dim E = n$. В случае $n = 1$ очевидно
2. Ортогональное дополнение первого вектора ОНБ инвариантно относительно $\varphi*$, как и относительно φ в силу самосопряжённости
3. Поэтому мы получили ортонормированный базис на сужении размерности $n - 1$ и их объединение будет ОНБ на подпространстве соответствующей размерности

27 Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного и ортогонального преобразования. Нормальные преобразования унитарных пространств

27.1 Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства

Опр *Ортогональное (униатрное) преобразование* $(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$
Утв φ ортогонально (матрица перехода между ОНБ) $\Leftrightarrow$ φ изоморфизм евклидовых (унитарных) пространств
$\Rightarrow$: в силу биективности (ОНБ переходит в ортонормированную систему из n векторов, то есть в ОНБ, потому что скалярное произведение сохранено) $\Leftarrow$: достаточно расписать скалярное произведение двух произвольных векторов и воспользоваться изоморфностью (идея как при изоморфизме линейных пространств). Получим сохранение скалярного произведения и ортогональность φ по определению
Следствие 1 Ортогональное преобразование переводит ОНБ в ОНБ

Следствие 2 Преобразование ортогонально $\Leftrightarrow$ его матрица ортогональна
Потому как ортогональная матрица – матрица перехода между ОНБ
Следствие 3 Преобразование ортогонально $\Leftrightarrow \varphi$ обратимо и матрица $\varphi^{-1} = \varphi^*$
Достаточно расписать определение унитарного преобразования
Утв *Групповые свойства*
Для ортогональных преобразований их композиция и обратное тоже ортогональное
Достаточно привести к определению
Утв Характеристические числа ортогональных преобразований по модулю равны единице
Достаточно расписать определение и вспомнить про комплексное сопряжение

27.2 Канонический вид унитарного и ортогонального преобразования

Th *Канонический вид унитарного преобразования*
Для унитарного преобразования сущетсвует ОНБ из собственных векторов

1. Пусть $\dim E = n$. В случае $n = 1$ очевидно
2. Ортогональное дополнение первого вектора ОНБ инвариантно относительно φ^*, как и относительно φ^{-1} в силу ортогональности. При изучении инвариантных подпространств мы выяснили, что это эквивалентно инвариантности и относительно φ
3. Поэтому мы получили ортонормированный базис на сужении размерности $n-1$ и их объединение будет ОНБ на подпространстве соответствующей размерности

28 Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве, его существование

Лемма *О главных направлениях*
Для линейного преобразования φ существует ОНБ $e_1, \dots, e_n : \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ образуют ортогональную систему
Рассмотрим оператор $\varphi^*\varphi$ (проверяется, что он СС) и ОНБ из его собственных векторов (по теореме). Далее, пользуясь СС-ю получаем, что $(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = \dots = \lambda_i \delta_{ij}$
Th Для линейного преобразования $\varphi \exists$ самосопряжённое преобразвоание ψ и ортогональное (унитарное) θ

1. Рассмотрим ортогональную систему из леммы, притом $|\varphi(e_i)| = \sqrt{\lambda_i}$. При необходимости, переупорядочим её
2. Отнормируем систему и дополним её до ОНБ, убрав, при необходимости, нулевые векторы. Получим ОНБ $f_1, \dots, f_n$
3. Теперь определим $\psi = \varphi\theta^{-1}$ и убедимся, что $\psi(f_i) = \dots = \sqrt{\lambda_i} f_i$
4. Итого, нежные отображения подобраны

Совсем необязательно, что данные преобразования коммутируют (перестановочны). Однако можно применить теорему к φ^* и взять сопряжение с обеих сторон. Тогда мы как раз получим другой порядок

29 Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах. Присоединенный оператор. Существование ОНБ, в котором квадратичная (эрмитова) форма имеет диагональный вид. Применение к классификации кривых второго порядка. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду

29.1 Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах

Опр *Квадратичная форма в евклидовом пространстве* $\beta_\varphi(a, b) = (a, \varphi(b))$

Утв В случае ОНБ $B = \overline{A}$
Пользуемся результатом действия билинейной формы на паре векторов и сравниваем записи.
В случае произвольного базиса $B = \Gamma\overline{A}$
Следствие 1 Задана биекция между линейными преобразованиями и билинейными формами
Следствие 2 Задана биекция между множество самосопряжённых операторов и квадратичных форм
Потому как и тем, и другим соответствует симметричная матрица
Итого, изучения биленейных форм можно свести к изучению операторов (и наоборот), а изучение квадратичных – к самосопряжённым операторам

29.2 Существование ОНБ, в котором квадратичная (эрмитова) форма имеет диагональный вид

Th *Приведение к главным осям*
Существует ОНБ, в котором матрица квадратичной формы над ЕП имеет диагональный вид
Следует из того, что для самосопряжённого оператора существует ОНБ, в котором его матрица диагональна. Она отличается от требуемой не более, чем сопряжением

29.3 Применение к классификации кривых второго порядка

Лемма $\exists$ ПДСК, в которой кривая второго порядка задаётся уравнением без перекрёстных членов. Аналогично для поверхностей
Для предъявления такой ПДСК достаточно привести квадратичную форму к главным осям

29.4 Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду

Th *О паре форм*
Если в векторном пространстве (без евклидовой / унитарной структуры) заданы две симметрические квадратичные формы, причём первая п.о. то существует базис, в котором первая имеет канониыеский вид, а вторая – диагональный
Достаточно объявить п.о. форму скалярным произведением. Тогда будет существовать базис, в котором вторая форма диагональна

Сопряжённое пространство

30 Линейные функции. Сопряжённое пространство, его размерность. Биортогональный базис. Замена биортогональных базисов. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряжённого к нему

30.1 Линейные функции

Опр *Линейная функция* Отображение, удовлетворяющая двум аксиомам

30.2 Сопряжённое пространство, его размерность

Опр *Сопряжённое (двойственное) пространство* Пространство ...
Элементы сопряжённого пространства – линейные функционалы (функции), поэтому такие пространства также называют пространством линейных функций. Обозначаются как V^*
Утв $\dim V^* = \dim V$
Следует из $\dim \mathbb{R} = \dim \mathbb{C} = 1$ и отождествления с матрицами размерности nm
Применению линейной функции к вектору, удовлетворяющему четырём аксиомам, соответствует билинейная (полуторалинейная) форма

30.3 Биортогональный базис

Опр *Взаимный / биортогональный / двойственный базис* $< e_i, e^j >= \delta_i^j$
Утв К данном базису существует и единственен взаимный
Любому элементу взаимного базиса соответствует строчная единица. Строчные единицы образуют базис в V, поэтому и элементы взаимного базиса образуют базис в V^*. Базис единственен по построению (в силу инъективности линейных функций)
Утв Двойственный базис является базисом в V^*
В силу равенства размерностей пространств достаточно доказать л.н.з. $f_1, \dots, f_n$. Это делается от противного с применением $e_j \forall j$ на линейной комбинации
Утв Если при фиксированном $a \in V < a, l >= 0 \forall l \in V^*$, то $a = 0$
От противного включим a в какой-то базис
Утв $< a, l >= x^i \overline{y_i}$
Следует из подстановки разложений по базисам и определения δ_i^j
Следствие $< a, e^i >= x^i$

30.4 Замена биортогональных базисов

Утв Если $e^{'} = eS, e^{'*} = e^* C$, то $C = (S^{-1})^*$
Тензорно запишем $e^{'}$ как строки матрицы на векторы-столбцы и введём $R = C^T$, чтобы аналогично сделать с $e^{'*}$. Затем раскроем по условию биортогональности и вернёмся к матричной записи

30.5 Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряжённого к нему

Опр *Канонический изоморфизм* Не меняется при замене базиса
Опр *Дважды сопряжённое пространство* Отображение, сопостовляющее вектору $a \in V$ отображение $\overleftarrow{a} : V^* \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ по правилу $< l, \overleftarrow{a} >= \overline{< a, l >}$ есть инъевтиный гомоморфизм (вложение) $V \to V^{**}$
Th *Канонический изоморфизм между V и V^{**}*
Между линейным пространством и дважды сопряжённым к нему сущесвтует канонический изоморфизм
Для доказательства достаточно проверить линейность по обеим аргументам и тривиальность ядра (всё по определению). По критерию изоморфности в силу инъективности (тривиальность ядра) имеем изоморфизм

31 Аннулятор подпространства, соответствие между подпространствами V и V*. Сопряжённое преобразование, его свойства

31.1 Аннулятор подпространства, соответствие между подпространствами V и V^*

Опр *Биортогональные множества* $\forall a \in U \forall l \in W < a, l >= 0$
Утв *Признак биортогональности*
$U \perp W \Leftrightarrow a_i \perp l_j$
$\Rightarrow$: очевидно в силу вложенности $\Leftarrow$: из разложения по базису и линейности
Опр *Аннулятор / биортогональное дополнение* Множество W линейных функций
Обозначается как $U^\perp$
Опр *Нуль-пространство* Обратное к аннулятору: множество U векторов
Th $(U^\perp)^\perp = U$ и $\dim U + \dim U^\perp = n$

1. Выберем базис $e_1, \dots, e_k$ в U и дополним его до базиса во всём пространстве векторами $e_{k+1}, \dots, e_n$
2. Далее рассмотрим линейную функцию, записанную в своём базисе и перейдём к системе, задающей $\perp$
3. Получим, что тогда каждый коэффициент $\lambda_i = 0, i \in \overline{1, k}$, что говорит о структуре $U^\perp$
4. Аналогичную операцию произведём в V^* и докажем первый факт
5. Собрав информацию о размерностях, получим второй факт

31.2 Сопряжённое преобразование, его свойства

Опр *Сопряжённое преобразование* Отображение уже из пространства функций
Утв Сопряжённое преобразование лежит в пространстве функций
Проверяется линейность (4 аксиомы) с использованием определения
Утв Сопряжённое преобразование соотвествует матрица A^*
Надо разложить в матричный вид равенства из определения сопряжённого пространства и сравнить их. Получив искомую структуру матрицы
Следствие 1 Верны 4 равенства
Введём взаимные базисы и перейдём к матрицам. Доказательства очевидны случаю евклидова пространства
Th U инвариантно относительно $\varphi \Leftrightarrow U^\perp$ инвариантно относительно φ^*
$\Rightarrow$: возьмём $f \in U^\perp$ и распишем его применение по определению $\Leftarrow$: следует из $\Rightarrow$, $(U^\perp)^\perp = U$ и $(\varphi^*)^* = \varphi$
Th *Фредгольма*
$\ker \varphi^* = (\operatorname{Im} \varphi)^\perp$

1. Аналогично случаю в ЕП: докажем вложенность ядра в чужой образ и равенство размерностей. Это будет означать требуемое равенство

2. Равенство размерностей доказывается по прошлым утверждениям

3. Чтобы доказать вложенность рассмотрим произвольный вектор ядра, воспользуемся определениями ортогонального дополнения, образа и сопряжённого преобразования

Тензоры

32 Полилинейные отображения. Определение тензора типа (p,q) на линейном пространстве V. Пространство $T^p_q(V)$ тензоров типа (p,q). Тензорный базис в $T^p_q(V)$. Изменение компонент тензора при замене базиса

32.1 Полилинейные отображения