

## Содержание

<b>Векторные пространства</b>	<b>6</b>
<b>1 Векторное пространство. Подпространство. Линейная оболочка системы векторов. Линейно (не)зависимые системы векторов. Конечномерные линейные пространства</b>	<b>6</b>
1.1 Векторное пространство . . . . .	6
1.2 Подпространство . . . . .	6
1.3 Линейная оболочка системы векторов . . . . .	6
1.4 Линейно (не)зависимые системы векторов . . . . .	6
1.5 Конечномерные линейные пространства . . . . .	6
<b>2 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница). Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при замене базиса (матрица перехода)</b>	<b>7</b>
2.1 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница) . . . . .	7
2.2 Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса . . . . .	7
2.3 Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты . . . . .	8
2.4 Изменение координат вектора при замене базиса (матрица перехода) . . . . .	8
<b>3 Сумма и пересечение подпространств. Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств, её характеристики, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств (формула Грассмана). Понятие факторпространства, его базис и размерность</b>	<b>8</b>
3.1 Сумма и пересечение подпространств . . . . .	8
3.2 Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств, её характеристики, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения . . . . .	9
3.3 Связь размерностей суммы и пересечения подпространств . . . . .	9
3.4 Понятие факторпространства, его базис и размерность . . . . .	10
<b>4 Понятие аффинного пространства, связь между аффинным и векторным пространством</b>	<b>10</b>
<b>Линейные отображения</b>	<b>10</b>
<b>5 Линейные отображения и линейные преобразования векторных пространств (линейные операторы). Операции над линейными отображениями, линейное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов. Изоморфизмы</b>	<b>10</b>
5.1 Линейные отображения и линейные преобразования векторных пространств (линейные операторы) . . . . .	10
5.2 Операции над линейными отображениями, линейное пространство линейных отображений . . . . .	11
5.3 Алгебра линейных операторов . . . . .	11
5.4 Изоморфизмы . . . . .	12
<b>6 Матрица линейного отображения. Координатная запись линейного отображения. Связь операций над матрицами и над линейными отображениями. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базиса</b>	<b>13</b>
6.1 Матрица линейного отображения . . . . .	13

6.2	Координатная запись линейного отображения . . . . .	13
6.3	Связь операций над матрицами и над линейными отображениями . . . . .	13
6.4	Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базиса . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Ядро и образ, их описание в терминах матрицы линейного отображения. Критерий инъективности. Связь между размерностями ядра и образа</b>	<b>14</b>
7.1	Ядро и образ, их описание в терминах матрицы линейного отображения . . . . .	14
7.2	Критерий инъективности . . . . .	14
7.3	Связь между размерностями ядра и образа . . . . .	14
<b>8</b>	<b>Аффинные преобразования, их свойства. Аффинная группа</b>	<b>15</b>
8.1	Аффинные преобразования, их свойства . . . . .	15
8.2	Аффинная группа . . . . .	15
	<b>Структура линейного преобразования</b>	<b>16</b>
<b>9</b>	<b>Инвариантные подпространства. Ограничение оператора на инвариантное подпространство. Фактороператор</b>	<b>16</b>
9.1	Инвариантные подпространства . . . . .	16
9.2	Ограничение оператора на инвариантное подпространство . . . . .	16
9.3	Фактороператор . . . . .	16
<b>10</b>	<b>Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования</b>	<b>17</b>
10.1	Собственные векторы и собственные значения . . . . .	17
10.2	Собственные подпространства . . . . .	17
10.3	Характеристический многочлен и его инвариантность . . . . .	17
10.4	Определитель и след преобразования . . . . .	17
<b>11</b>	<b>Линейная независимость собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Критерий диагонализруемости преобразования</b>	<b>18</b>
11.1	Линейная независимость собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям . . . . .	18
11.2	Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения . . . . .	18
11.3	Критерий диагонализруемости преобразования . . . . .	18
<b>12</b>	<b>Инвариантные подпространства малой размерности в вещественном случае</b>	<b>19</b>
<b>13</b>	<b>Треугольный вид матрицы преобразования. Теорема Гамильтона-Кэли</b>	<b>19</b>
13.1	Треугольный вид матрицы преобразования . . . . .	19
13.2	Теорема Гамильтона-Кэли . . . . .	20
<b>14</b>	<b>Корневые подпространства, их размерность. Разложение пространства в прямую сумму корневых. Жорданова нормальная форма, её существование и единственность. Минимальный многочлен, критерий диагонализруемости оператора в терминах минимального многочлена</b>	<b>20</b>
14.1	Корневые подпространства, их размерность . . . . .	20
14.2	Разложение пространства в прямую сумму корневых . . . . .	20
14.3	Жорданова нормальная форма, её существование и единственность . . . . .	21
14.4	Минимальный многочлен, критерий диагонализруемости оператора в терминах минимального многочлена . . . . .	22

<b>Билинейные формы</b>	<b>23</b>
<b>15 Билинейные (полуторалинейные) формы (функции). Координатная запись билинейной формы. Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса</b>	<b>23</b>
15.1 Билинейные (полуторалинейные) формы (функции) . . . . .	23
15.2 Координатная запись билинейной формы . . . . .	23
15.3 Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса . . . . .	23
<b>16 Симметричные билинейные (полуторалинейные) формы. Взаимно-однозначное соответствие с квадратичными (эрмитовыми) формами</b>	<b>23</b>
16.1 Симметричные билинейные (полуторалинейные) формы . . . . .	23
16.2 Взаимно-однозначное соответствие с квадратичными (эрмитовыми) формами . . . . .	24
<b>17 Ядро билинейной функции. Ортогональное дополнение подпространства. Ограничение билинейной функции на подпространство. Критерий невырожденности подпространства. Существование нормального вида билинейной симметричной формы над полями <math>\mathbb{R}</math> и <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>24</b>
17.1 Ядро билинейной функции . . . . .	24
<b>18 Алгоритмы приведения квадратичной формы к нормальному виду (метод Лагранжа и двоекных элементарных преобразований матрицы)</b>	<b>24</b>
<b>19 Закон инерции квадратичной (эрмитовой) формы. Положительный и отрицательный индексы инерции, их геометрическая характеристика. Критерий Сильвестра</b>	<b>25</b>
19.1 Закон инерции квадратичной (эрмитовой) формы . . . . .	25
19.2 Критерий Сильвестра . . . . .	25
<b>20 Кососимметричные билинейные функции, приведение их к нормальному виду</b>	<b>25</b>
<b>Пространства со скалярным произведением</b>	<b>26</b>
<b>21 Евклидовы и унитарные пространства. Матрица Грама и её свойства. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца, неравенство треугольника. Метрика. Выражение скалярного произведения в координатах</b>	<b>26</b>
21.1 Евклидовы и унитарные пространства . . . . .	26
21.2 Матрица Грама и её свойства . . . . .	26
21.3 Неравенство Коши – Буняковского – Шварца, неравенство треугольника . . . . .	27
21.4 Метрика . . . . .	27
21.5 Выражение скалярного произведения в координатах . . . . .	27
<b>22 Ортогональные системы векторов и подпространств. Существование ортонормированных базисов (ОНБ). Изоморфизм евклидовых пространств. Ортогональные и унитарные матрицы. Переход от ОНБ к ОНБ</b>	<b>27</b>
22.1 Ортогональные системы векторов и подпространств . . . . .	27
22.2 Существование ортонормированных базисов (ОНБ) . . . . .	27
22.3 Изоморфизм евклидовых пространств . . . . .	28
22.4 Ортогональные и унитарные матрицы . . . . .	28
22.5 Переход от ОНБ к ОНБ . . . . .	28
<b>23 Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция. Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта</b>	<b>28</b>
23.1 Ортогональное дополнение подпространства . . . . .	28

23.2	Ортогональная проекция . . . . .	29
23.3	Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта . . . . .	29
24	Описание линейных функций на евклидовом (унитарном) пространстве	29
25	Преобразование, сопряжённое данному. Его линейность, существование и единственность, его матрица в ОНБ. Теорема Фредгольма	29
25.1	Преобразование, сопряжённое данному . . . . .	29
25.2	Его линейность, существование и единственность, его матрица в ОНБ . . . . .	30
25.3	Теорема Фредгольма . . . . .	30
26	Самосопряжённые линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов	30
26.1	Самосопряжённые линейные преобразования . . . . .	30
26.2	Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов .	30
27	Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного и ортогонального преобразования. Нормальные преобразования унитарных пространств	31
27.1	Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства . . . . .	31
27.2	Канонический вид унитарного и ортогонального преобразования . . . . .	31
28	Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве, его существование	31
29	Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах. Присоединенный оператор. Существование ОНБ, в котором квадратичная (эрмитова) форма имеет диагональный вид. Применение к классификации кривых второго порядка. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду	32
29.1	Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах . . . . .	32
29.2	Существование ОНБ, в котором квадратичная (эрмитова) форма имеет диагональный вид .	32
29.3	Применение к классификации кривых второго порядка . . . . .	33
29.4	Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду . . . . .	33
	Сопряжённое пространство	33
30	Линейные функции. Сопряжённое пространство, его размерность. Биортогональный базис. Замена биортогональных базисов. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряжённого к нему	33
30.1	Линейные функции . . . . .	33
30.2	Сопряжённое пространство, его размерность . . . . .	33
30.3	Биортогональный базис . . . . .	33
30.4	Замена биортогональных базисов . . . . .	34
30.5	Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряжённого к нему . . . . .	34
31	Аннулятор подпространства, соответствие между подпространствами $V$ и $V^*$ . Сопряжённое преобразование, его свойства	34
31.1	Аннулятор подпространства, соответствие между подпространствами $V$ и $V^*$ . . . . .	34
31.2	Сопряжённое преобразование, его свойства . . . . .	35
	Тензоры	35

<b>32 Полилинейные отображения. Определение тензора типа <math>(p, q)</math> на линейном пространстве <math>V</math>. Пространство <math>T_q^p(V)</math> тензоров типа <math>(p, q)</math>. Тензорный базис в <math>T_q^p(V)</math>. Изменение компонент тензора при замене базиса</b>	<b>35</b>
32.1 Полилинейные отображения . . . . .	35

# Векторные пространства

## 1 Векторное пространство. Подпространство. Линейная оболочка системы векторов. Линейно (не)зависимые системы векторов. Конечномерные линейные пространства

### 1.1 Векторное пространство

**Опр Унарная, бинарная операция на множестве над полем** Ставит в соответствие элементу (элементам) из множества другой элемент из множества

**Опр Векторное пространство над полем** Помимо унарности и бинарности, по 4 аксиомы сложения и умножения

### 1.2 Подпространство

**Опр Подпространство** Требуются лишь унарность и бинарность

### 1.3 Линейная оболочка системы векторов

**Опр Линейная оболочка** Все векторы, которые линейно выражаются через минимальную систему, покрывающую пространство

### 1.4 Линейно (не)зависимые системы векторов

**Опр Линейная комбинация** Сумма векторов с коэффициентами из поля

**Опр Линейно (не)зависимая система векторов** Нетривиальная линейная комбинация (не) равна нулю

### 1.5 Конечномерные линейные пространства

**Опр Ранг (не)пустой системы векторов** Любой набор векторов, чьё число больше чем ранг, будет линейно зависим. Ранг пустой считаем нулевым

**Опр Размерность** Более употребительное название для ранга в случае работы с подпространством

**Опр (Бес)конечномерные линейные пространства** Если их размерность (бес)конечна

**Л1** Любой вектор системы векторов ранга  $r$  раскладывается по  $r$  л.н.з векторам

1. Возьмём вектора из линейной оболочки и добавим к ним произвольный вектор системы  $a$ . Эта система будет л.з. из определения ранга
2. Тогда найдутся коэффициента для нетривиальной линейной комбинации, притом коэффициент перед  $\lambda_a \neq 0$  (иначе линейная оболочка была бы зависима)
3. Из линейной комбинации выразим  $a$ , поделив все вектора на  $\lambda_a$

**Л2** Если вектор  $b$  принадлежит линейной оболочке  $a_1, \dots, a_k$  других векторов, то он не влияет на её ранг

1. От противного: пусть  $\exists$  л.н.з система из  $r+1$  вектора (она будет содержать  $b$ , иначе  $w$  с определением ранга)
2. Итак, пусть система  $b, a_1, \dots, a_r$  л.н.з. Тогда система  $a_1, \dots, a_r$  тоже будет л.н.з. Так их  $r$  штук, то все вектора  $a_1, \dots, a_k$  будут выражаться через  $a_1, \dots, a_r$

3. Если мы заменим  $a_1, \dots, a_k$  на их выражения через  $a_1, \dots, a_r$ , то получится, что  $b$  выражается по ним, что  $w$  л.н.з  $b, a_1, \dots, a_r$

**Th Основная теорема о рангах** Ранг подсистемы и системы совпадает  $\Leftrightarrow \forall$  вектор системы раскладывается по линейной оболочке подсистемы

$\Rightarrow$ : мгновенно следует из Л1 В моей формулировке

$\Leftarrow$ :

1. От противного: пусть  $\exists$  л.н.з система из  $r + 1$  векторов
2. Её ранг будет не меньше ранга её и любого количества л.н.з векторов из подсистемы
3. С другой стороны, многократно применяя Л2, получим что её ранг не превышает ранга подсистемы,  $w$

**Следствие 1** Для любой подсистемы векторного пространства ранг равен размерности линейной оболочки

**Следствие 2** Если размерности вложенных подпространств совпадают, то они равны

## 2 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница). Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при замене базиса (матрица перехода)

### 2.1 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница)

**Опр Базис** Система л.н.з векторов, являющаяся линейной оболочкой

**Лемма Штайница** Пусть система векторов  $a_1, \dots, a_n$  порождает пространство  $V$ , а система векторов  $b_1, \dots, b_m$  л.н.з. Тогда  $n \geq m$

1. Возьмём  $b_1$ . Он будет выражаться через  $a_1, \dots, a_n$  по определению линейной оболочки. БОО первый коэффициент в его разложении по  $a_1, \dots, a_n$  ненулевой (иначе мы их переупорядочим)
2. Выразим из этого разложения  $a_1$ . Тогда  $V = \langle b_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ . Так, действуя по индукции, заменим все вектора  $a_i$
3. В случае  $n < m$  получим противоречие с л.н.з.  $b_1, \dots, b_m$  (потому что тогда  $b_{n+1}, \dots, b_m$  выражаются через первые  $n$ , что  $w$  л.н.з.). Таким образом  $n \geq m$ , притом недостающие до линейно оболочки вектора можно взять из  $a_1, \dots, a_n$

### 2.2 Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса

**Утв** Систему л.н.з векторов можно дополнить до базиса

1. Ранг подсистемы меньше ранга системы, поэтому  $\exists \bar{x}$ , не лежащей в л.н.з. подсистеме
2. Если мы добавим  $\bar{x}$  к подсистеме и она станет л.з., то в нетривиальной л.к. равен нулю либо новый коэффициент ( $w$  с л.н.з исходной подсистемы), либо какой-то из старых (тогда  $\bar{x}$  выражается через векторы линейной оболочки и принадлежит ей). В любом случае  $w$  и добавление  $\bar{x}$  сохраняет л.з.
3. Продолжая процесс и далее, дополним систему до базиса

## 2.3 Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты

**Опр Координаты вектора в базисе** Коэффициенты в разложении по базису

При сложении векторов и домножении на число, координаты изменяются покомпонентно

## 2.4 Изменение координат вектора при замене базиса (матрица перехода)

**Опр Матрица перехода** Матрица координатных столбцов новых базисных векторов ...

**Th**  $S$  чья-то матрица перехода  $\Leftrightarrow S$  невырождена

Это следует из того, что координатные столбцы  $X_k$  векторов  $a_k$  линейно независимы  $\Leftrightarrow a_k$  л.н.з. ( $\lambda^k a_k = 0 \Leftrightarrow \lambda^k X_k = 0$ ), то есть из определения матрицы перехода Поэтому матрица невырождена (её столбцы л.н.з.)  $\Leftrightarrow$  векторы л.н.з.

**Th** Если вектор имеет в базисах  $e, e'$  координатные столбцы  $X, X'$ , то  $X = SX'$

Достаточно расписать один вектор в обоих базисах и сравнить записи

**Утв** Если  $\exists e, e', e''; e' = eC, e'' = e'D$ , то  $e'' = eCD$

Последовательно подставляем матрицы перехода

## 3 Сумма и пересечение подпространств. Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств, её характеристики, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств (формула Грассмана). Понятие факторпространства, его базис и размерность

### 3.1 Сумма и пересечение подпространств

**Опр Пересечение подпространств** Множество элементов, которые являются их обычным теоретико-множественным пересечением как подмножеств

**Опр Сумма подмножеств по Минковскому** Множество-сумма векторов всех векторов  $a_i$  из каждого  $A_i \subset V$ , то есть каждый вектор из суммы раскладывается по векторам из всех пространств

Для суммы Минковского выполняется коммутативность и ассоциативность

**Утв** Сумма линейных оболочек есть линейная оболочка объединения

Каждый элемент суммы есть линейная оболочка какого-то подпространства, поэтому если мы сложим все линейные оболочки по Минковскому, то получим линейную оболочку объединения (совокупности)

**Следствие** Сумма конечного числа подпространств есть подпространство

Потому как сумма есть минимальное по включению подпространство, содержащее в себе каждое из пространств

**Утв** Размерность суммы не превосходит суммы размерностей

Размерность равна рангу, а для рангов ранг объединения не превосходит суммы рангов (доказывается от противного)



### 3.2 Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств, её характеристики, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения

**Опр** Прямая (внешняя) сумма Декартово произведение  $(a_1, \dots, a_n)$

Сложение и умножение на скаляр определены для внешней суммы покомпонентно

**Опр** Прямая (внутренняя) сумма Сумма, вектора  $a_i$  в разложении которой из каждого  $A_i \subset V$  определены однозначно

Например, всё пространство разлагается в прямую сумму своих базисных векторов

Через  $\overline{U_i}$  обозначим сумму всех рассматриваемых пространств, за исключением  $U_i : U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_n$

**Th.1** Первый критерий прямой суммы

Сумма подпространств прямая  $\Leftrightarrow U_i \cap \overline{U_i} = \{0\}$

- $\Rightarrow$ : от противного. Пусть БОО условие не выполнено для  $U_1$ . Тогда там есть ненулевой вектор, который принадлежит  $U_1$  и раскладывается по остальным пространствам. Тогда у нас существует два представления нулевого вектора (одно тривиальное, другое новое),  $w$  с прямостью суммы
- $\Leftarrow$ : от противного. Пусть существует два различных разложения  $v$  по  $a_i$  и  $b_i$ . БОО хотя бы  $a_1 \neq b_1$ , поэтому если возьмём их разность, то с одной стороны она  $\in U_1$ , а с другой —  $\in \overline{U_1}$ , то есть пересечение не тривиально,  $w$

**Th.2** Второй критерий прямой суммы

Для конечномерных подпространств следующие условия эквивалентны:

1. Сумма  $U = \oplus U_i$  прямая
2. Система из  $\sum_i \dim U_i$  векторов из объединения базисов есть базис в  $U$
3.  $\dim U = \sum_i \dim U_i$

- $2 \Leftrightarrow 3$ : по следствию основной теоремы о рангах  $\dim U = rge = rg \cup_i e^i$ , поэтому  $\dim U = \sum_i \dim U_i \Leftrightarrow rge = \sum_i \dim U_i \Leftrightarrow e$  л.н.з система
- $1 \Rightarrow 2$ : от противного. Пусть  $e$  л.з. система. Запишем нетривиальную л.к. всей суммы. Так как хотя бы одна компонента нетривиальная, то БОО  $l_1 \neq 0$ . Тогда эта комбинация одновременно принадлежит  $U_1$ , и  $\overline{U_1}$ , по той же идее, что и в Th.1, это  $w$
- $2 \Rightarrow 1$ : от противного. Воспользуемся Th.1 получим ненулевое пересечение, распишем вектор оттуда (нетривиальная л.к.) и получим  $w$  с л.н.з.  $e$

**Опр** Прямое дополнение подпространства Недостоящий член в прямой сумме до всего пространства В случае двух подпространств, они входят в определение симметрично

**Утв** Сумма размерностей подпространства и любого его прямого дополнения равна размерности всего пространства  $V$

**Утв** У любого подпространства конечномерного пространства  $V$  существует прямое дополнение

Для нахождения дополнения достаточно выбрать базис в подпространстве и дополнить его до базиса в пространстве. Тогда по Th.2 эта система и будет прямым дополнением

Если  $a = a_1 + a_2$ , то  $a_1$  называется проекцией  $a$  на  $U_1$  вдоль (параллельно)  $U_2$

### 3.3 Связь размерностей суммы и пересечения подпространств

Смотреть в рукописном конспекте

### 3.4 Понятие факторпространства, его базис и размерность

**Опр Факторпространство** Фактор-множество (множество всех классов эквивалентности для заданного отношения эквивалентности)  $a \sim b \Leftrightarrow b - a \in U$

Элементы факторпространства есть смежные классы вида  $a + U$

$$(a + U) + (b + U) = (a + b) + U$$

$$\lambda(a + U) = \lambda a + U$$

Если  $W$  - прямое дополнение  $U$ , то существует естественный изоморфизм  $W \rightarrow V/U (a \mapsto a + U)$ . Он является ограничением на  $W$  линейного отображения  $\pi : V \rightarrow V/U, \pi(v) = v + U$  и называется канонической проекцией. Действительно, из определения прямого дополнения следует единственность  $u \in U : v = u + w$ . Применим  $\pi$  и получим  $v + U = w + U$ , что влечёт биективность  $\pi$

Отсюда следует, что дополнение произвольного базиса в  $U$  до базиса в  $V$  после применения к ней  $\pi$  будет базисом в  $V/U$ , притом  $\dim V/U = \dim V - \dim U$ , что следует из теоремы о сумме размерностей ядра и образа

## 4 Понятие аффинного пространства, связь между аффинным и векторным пространством

**Опр Аффинное пространство** Отображение из точек-векторов в точки (откладывание от точки ...)

Аффинное пространство удовлетворяет трём аксиомам (ассоциативность, существование нуля и единственность "дополнения"). Также справедливо "правило треугольника"

**Th О замене координат**

Если существует две ДСК и  $S$  – матрица перехода от старой к новой,  $\gamma$  – координатный столбец начала координат новой системы в старой, то справедливо  $X = SX' + \gamma$

Достаточно рассмотреть произвольный вектор как сумму сдвигов в ноль и в точку, перейти к базису и координатным столбцам, вспомнить определение матрицы перехода и сократить базис

## Линейные отображения

### 5 Линейные отображения и линейные преобразования векторных пространств (линейные операторы). Операции над линейными отображениями, линейное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов. Изоморфизмы

#### 5.1 Линейные отображения и линейные преобразования векторных пространств (линейные операторы)

**Опр Линейное отображение** Отображение, удовлетворяющее двум аксиомам

Отсюда следуют конечная линейность, отображение нулевого и противоположного вектора

Множество всех линейных отображений обозначается как  $L(V, W)$ . В случае  $W = V$  линейное отображение называют линейным преобразованием (оператором)

**Опр Линейная функция (функционал)** Случай  $\dim W = 1 (W = \mathbb{K})$

**Утв** Под действием линейного отображения л.з. система остаётся л.з.

Достаточно записать нетривиальную линейную комбинацию и взять её образ, используя уже известные аксиомы

**Утв Ранг системы под действием линейного отображения не возрастает**

Это следует из определения ранга и противного к предыдущему утверждению. В силу равенства ранга и размерности в конечномерном случае, получаем аналогичное неравенство для размерностей

**Утв Образ подпространства**

**Образ линейной оболочки есть линейная оболочка образов**

Действительно, если записать определение линейной оболочки (множество всех линейных комбинаций) и подействовать отображением, то получится требуемое. В частном случае, если взять базис (его линейная оболочка есть всё пространство), то образ пространства есть линейная оболочка образов базисных векторов

**Опр Линейное вложение** Инъективное линейное отображение

**Утв В случае линейного вложения л.н.з. система остаётся л.н.з.**

Действительно, если записать л.к. образов и "вынести  $\varphi$  за скобки", то в силу инъективности получим, л.к. исходных векторов. В силу её линейной независимости, эта л.к. тривиальна, как и л.к. образов. В частном случае, если взять базис, то получим равенства рангов  $U$  и  $\varphi(U)$ , как и размерностей

**Th Если взять базис  $e_i$  в  $V$  и произвольные векторы  $c_i$  в  $W$ , то  $\exists! \varphi : \varphi(e_i) = c_i$ . Дополнительно,  $\varphi$  инъективно  $\Leftrightarrow c_i$  л.н.з.**

1. Для начала докажем единственность. Зафиксируем произвольный вектор  $a$  пространства, разложим его по базису и рассмотрим  $\varphi(a)$ , имеющего единственные коэффициенты. В силу произвольности  $a$  теорема справедлива
2. Для доказательства существования, достаточно взять два произвольных вектора из пространства, подействовать на них отображением (с учётом  $\varphi(e_i) = c_i$ ), затем проверить аксиомы линейного отображения
3.  $\Rightarrow$ : следует из предыдущего утверждения
4.  $\Leftarrow$ : от противного, с использованием определения инъективности, разложения  $a - b$  по базису и  $\varphi(e_i) = c_i$

## 5.2 Операции над линейными отображениями, линейное пространство линейных отображений

**Опр Сумма отображений** Такое отображение, что ...

**Опр Произведение отображения на скаляр** Такое отображение, что ...

В комплексном случае скаляр заменяется на комплексно-сопряжённый.

Нетрудно проверить, что оба нововведённых отображения линейны. Также проверкой доказывается ассоциативность, дистрибутивность и линейность в случае композиции отображений

## 5.3 Алгебра линейных операторов

На множестве  $L(V, V)$  определены операции сложения, умножения на скаляр и умножения, поэтому  $L(V, V)$  имеет структуру ассоциативной алгебры (непустое множество (носитель) с заданным на нём набором операций и отношений-сигнатурой). Ассоциативная потому как заданы операции ассоциативного умножения, то есть  $\forall k, l \in \mathbb{F}$  и  $\forall a, b, c \in A$  справедливо

1.  $a(b + c) = ab + ac$
2.  $(a + b)c = ac + bc$
3.  $(k + l)a = ka + la$

4.  $k(a + b) = ka + kb$
5.  $k(la) = (kl)a$
6.  $k(ab) = (ka)b = a(kb)$
7.  $1a = a$ , где  $1$  – единица кольца  $\mathbb{K}$

**Опр** *Аннулирующий многочлен для оператора*  $P(\varphi) = 0$

**Опр** *Минимальный многочлен* Аннулирующий многочлен с минимальной степенью

**Утв** Пусть  $\mu$  – минимальный многочлен оператора  $\varphi$ , а  $P \in \mathbb{F}$  – произвольный. Тогда  $P$  аннулирует  $\varphi \Leftrightarrow P: \mu$  в кольце многочленов над  $\mathbb{F}$

1. Разделим  $P$  на  $\mu$  с остатком и подставим в полученное равенство  $\varphi$
2. Воспользуемся условием и получим  $P(\varphi) = 0 \Leftrightarrow r(\varphi) = 0$
3. В таком случае остаток должен быть аннулирующим для  $\varphi$ , то есть его степень меньше степени минимального многочлена, поэтому  $w$  не возникает только в случае  $r \equiv 0$
4. Таким образом, эквивалентность доказана

Отсюда следует, что минимальный многочлен единственен с точностью до умножения на константу

## 5.4 Изоморфизмы

**Опр** *Изоморфизм* Линейное биективное отображение

**Опр** *Изоморфные векторные пространства* Между ними существует изоморфизм

**Утв** *Обратный к изоморфизму изоморфизм*

1. Биективность следует из тождеств для обратных функций
2. Далее берутся векторы из образа и на них проверяются аксиомы линейного отображения
3. Итого, обратный к изоморфизму изоморфизм по определению

**Th** *Классификация конечномерных векторных пространств*

*Пространства изоморфны  $\Leftrightarrow$  их размерности совпадают*

1.  $\Rightarrow$ : из изоморфности следует инъективность, а для инъективных отображений равенство доказано ранее
2.  $\Leftarrow$ : построим изоморфизм между элементами каждого пространства и их координатными столбцами в них по фиксированному базису. Ранее было доказано, что такое разложение единственно. Достаточно обратить какое-то из отображений (по предыдущему утверждению оно тоже будет изоморфизмом). Итого, мы получили композицию изоморфизмов, то есть изоморфизм

**Th** Если конечномерные пространства  $U, V : \dim U = \dim V$ ;  $e_i$  – базис в  $U$ ,  $\varphi \in L(U, V)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\varphi$  – изоморфизм
2.  $\varphi$  инъективен
3.  $\varphi$  сюръективен
4.  $\varphi(e_i)$  есть базис в  $V$

- $1 \Rightarrow 2$  : по определению
- $2 \Rightarrow 3$  : из инъективности следует л.н.з. образа, поэтому  $\dim(\varphi(U)) = \dim U \Rightarrow \varphi(U) \cong V \Rightarrow \varphi$  сюръективно
- $3 \Rightarrow 4$  : это следует из свойства линейной оболочки образов базисных векторов, связи размерности и ранга, определения ранга и базиса
- $4 \Rightarrow 1$  : по критерию инъективности, в силу л.н.з.  $\varphi(e_i)$ ,  $\varphi$  будет инъективно, а из свойства линейной оболочки следует сюръективность  $\varphi$

## 6 Матрица линейного отображения. Координатная запись линейного отображения. Связь операций над матрицами и над линейными отображениями. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базиса

### 6.1 Матрица линейного отображения

**Опр** Матрица линейного отображения Как и у матрицы перехода: склейка столбцов векторов  $\varphi(e_i)$

Таким образом, существует биекция между  $L(V, W)$  и  $Mat(m, n)$ , как и изоморфизм (проверяется). Отсюда следует, что размерность линейных операторов есть  $mn$

### 6.2 Координатная запись линейного отображения

**Th** Если  $\varphi \leftrightarrow A; a = eX, \varphi(a) = fY$ , то  $y = Ax$

Для доказательства достаточно записать определение координатного столбца, применить к ней  $\varphi$  и в силу коммутативности, поменять местами строки и столбцы, чтобы увидеть запись матричного умножения, что доказывает равенство

**Следствие** Если дано неизвестное в плане линейности отображение  $\varphi$ , такое, что под его действием  $y = Ax$ , то оно линейное

В силу наличия биекции между матрицами и линейными отображениями, найдём такое  $\phi$ . В таком случае по Th., они будут иметь одинаковую координатную запись  $y = Ax$ , то есть равны и  $\varphi$  линейно

**Th** Если линейное преобразование  $\varphi$  таково, что  $\varphi(e_i) = e'_i$ , то  $A : A \leftrightarrow \varphi$  есть матрица перехода между базисами

Следует из определений (матрица линейного преобразования будет удовлетворять определению матрицы перехода)

### 6.3 Связь операций над матрицами и над линейными отображениями

**Утв** Композиции линейных отображений соответствует произведение соответствующих матриц

Доказывается по определению (подстановкой)

**Следствие** Обратному отображению соответствует обратная матрица

Следует из предыдущего утверждения и того, что тождественному отображению соответствует единичная матрица

**Следствие**  $P(\varphi) \leftrightarrow P(A)$

**Следствие**  $\varphi \leftrightarrow A$  задаёт изоморфизм алгебр линейных преобразований и квадратных матриц

То есть изоморфизм группы биективных линейных преобразований и группы невырожденных матриц

## 6.4 Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базиса

**Th** Если  $L(V, W); S : e' = eS; y = Ax, y' = Ax'; f' = fR$ , то  $A' = R^{-1}AS$  (матрица линейного отображения в другом базисе)

Доказывается путём подстановок и комбинаций равенств

В частном случае  $L(V, V)A' = S^{-1}AS$

**Следствие** Ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора базисов в пространствах

Потому что мы домножаем слева и справа на невырожденные матрицы

## 7 Ядро и образ, их описание в терминах матрицы линейного отображения. Критерий инъективности. Связь между размерностями ядра и образа

### 7.1 Ядро и образ, их описание в терминах матрицы линейного отображения

**Опр** Образ линейного отображения Множество всех векторов  $V$  под действием  $\varphi \in L(V, W)$

**Th** Координатное описание образа

Если  $\varphi \in L(V, W)$ , а  $b \in W : b = fY$ , то  $b \in \text{Im } \varphi \Leftrightarrow Y \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

Это следует из записи образа через линейную оболочку действия  $\varphi$  на базисные векторы, определения матрицы линейного отображения и того факта, что  $b = fY$  есть л.к. столбцов  $Y$

Отсюда также следует, что размерность образа равна рангу матрицы линейного отображения

**Утв** В случае  $\varphi \in L(V, W)$  прообразы образов в подмножестве  $W$  являются подмножеством  $V$

**Опр** Ядро линейного отображения Множество всех векторов  $V$ , которые зануляются под действием  $\varphi \in L(V, W)$

То есть ядро есть подмножество  $V$ . Также ядро можно охарактеризовать как полный прообраз нулевого пространства

Если ядро пусто, то оператор невырожден

**Th** Координатное описание ядра

Если  $\varphi \in L(V, W)$ , а  $a \in V : a = eX$ , то  $a \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow AX = 0$

В обе стороны по определению ядра

Другими словами, в терминах координатных столбцов ядро задается как общее решение однородной СЛУ  $Ax = 0$

**Следствие**  $\dim \text{Ker } \varphi = n - \text{rg } A$

### 7.2 Критерий инъективности

**Th** Критерий инъективности

Если  $\varphi \in L(V, W)$ , инъективно  $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi = 0$

$\Rightarrow$ : пользуемся  $\varphi(0) = 0$

$\Leftarrow$ : от противного с использованием определения инъективности

### 7.3 Связь между размерностями ядра и образа

**Th** В конечномерных пространствах  $\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = n$

Следует из  $\dim \text{Im } \varphi = \text{rg } A$  и  $\dim \text{Ker } \varphi = n - \text{rg } A$

## 8 Аффинные преобразования, их свойства. Аффинная группа

### 8.1 Аффинные преобразования, их свойства

**Опр** Аффинно-линейное преобразование

**Опр** Дифференциал отображения Обозначение элемента  $\varphi \in L(V, V)$

**Опр** Аффинное преобразование Биективное преобразование

**Утв** Преобразование аффинно  $\Leftrightarrow$  его дифференциал биективен

Для доказательства достаточно воспользоваться определением при одной фиксированной точке в нём

**Утв** Композиция линейных и аффинных преобразований линейна и аффинна соответственно, а их дифференциал есть произведение дифференциалов

Следует из определения и того, что композиция биективных отображений биективна

**Утв** Обратное к аффинному отображению отображение аффинно

Следует из определения

### 8.2 Аффинная группа

Аффинные преобразования образуют группу относительно композиции

**Утв**  $Y = AX + C$

Достаточно взять в определении аффинно-линейного преобразования точку  $M = 0$

Отсюда следует, что любое аффинное преобразование задаётся параллельным переносом и поворотом вокруг неподвижной точки, то есть линейное преобразование однозначно задаётся нулевой точкой и базисом

**Th** Линейное преобразование  $f$  аффинно  $\Leftrightarrow$  переводит неколлинеарные точки в неколлинеарные

Построим ДСК на наших трёх точках, подействуем на них преобразованием и получим новую ДСК.  $f$  однозначно задано этой ДСК. Поэтому  $f$  аффинно  $\Leftrightarrow f$  биективно  $\Leftrightarrow$  неколлинеарная система (л.н.з) переходит в неколлинеарную (в частности, система три точки)

**Th** Связь аффинного преобразования с заменой координат

При аффинном преобразовании координатный столбец вектора не меняется

Достаточно воспользоваться координатной записью вектора, а потом к конечным точкам применить аффинное преобразование

**Th** При аффинном преобразовании

1. прямая переходит в прямую
  2. параллельные прямые переходят в параллельные
  3. отношения длин отрезков сохраняются
  4. центральная симметрия сохраняется
- 
1. достаточно параметризовать прямую и применить определение к конечным точкам
  2. аналогичным образом в силу линейности (из определения) сохраняются отношения длин отрезков (в случае с отрезками между прямыми они не схлопываются в точку)
  3. аналогично
  4. при центральной симметрии для любых двух симметричных точек центр есть середина соответствующего отрезка, а так как отношения сохраняются, то получаем сохранение определения

**Th** Изменение площадей

При аффинном преобразовании, чей дифференциал имеет матрицу  $A$ , площадь фигуры умножается на  $|\det A|$

Покажем на примере параллелограмма. Достаточно расписать определение ориентированной площади, применить преобразование и взять модуль (настоящая площадь неотрицательна)

**Th** При аффинном преобразовании порядок алгебраической кривой не меняется

При аффинном преобразовании координаты не меняются, то не поменяется и многочлен, задающий кривую (скалярное произведение коэффициентов на переменные), как и его порядок

## Структура линейного преобразования

### 9 Инвариантные подпространства. Ограничение оператора на инвариантное подпространство. Фактороператор

#### 9.1 Инвариантные подпространства

**Опр** Инвариантное подпространство Образ лежит в нём же

**Утв** Сумма и пересечение инвариантных подпространств инвариантно

Доказывается поэлементной проверкой определения

**Утв** В случае коммутирующих преобразований ядро и образ одного инвариантно относительно другого Доказывается по определению

**Следствие** Ядро и образ многочлена  $f(\varphi)$  инвариантны относительно  $\varphi \in L(V, V)$

**Утв**  $U$  инвариантно относительно  $\varphi \Leftrightarrow U$  инвариантно относительно  $\varphi - \lambda, \lambda \in \mathbb{F}$

Доказывается проверкой в одну сторону и путём взятия другой  $\lambda$  в обратную

Таким образом, в случае  $\text{Im}(\varphi - \lambda) \subset U \Rightarrow U$  инвариантно  $\varphi$

#### 9.2 Ограничение оператора на инвариантное подпространство

**Утв** Если  $U$  инвариантно относительно  $\varphi$  – изоморфизма, то  $U$  инвариантно относительно  $\varphi^{-1}$

Достаточно рассмотреть сужение  $\varphi$  на  $U$ . В силу инъективности это будет изоморфизм. Тогда обращаем его и получаем требуемое

**Утв** Если  $U_k$  инвариантно относительно линейное оболочки первых  $k$  векторов  $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, i \in \overline{k+1, n}, j \in \overline{1, k}$ , то есть матрица имеет блочно-диагональный вид, где второй квадрант есть сужение  $\varphi$  на  $U_k$

Достаточно воспользоваться определением матрицы линейного преобразования и вспомнить, что у нас базис не меняется

**Утв** Если  $\varphi \in L(V, V)$ , а  $P(\varphi), \deg P = k$  вырожден, то существует не более чем  $k$ -мерное инвариантное подпространство  $V$  относительно  $\varphi$

1. Возьмём произвольный элемент ядра  $a$  и покажем, что  $U = \langle a, \varphi(a), \dots, \varphi^{k-1}(a) \rangle$  инвариантно относительно  $\varphi$
2. В силу индуктивности  $\varphi^j$ , достаточно доказать лишь что  $\varphi^k(a) \in U$
3. Подставляем  $\varphi(a)$  в многочлен и получаем, что  $\varphi^k(a)$  линейно выражается через остальные члены, что доказывает инвариантность и утверждение

#### 9.3 Фактороператор

**Опр** Фактороператор Линейный оператор, определённый формулой  $(v + U) = \varphi(v) + U, \forall v \in V$



## 10 Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования

### 10.1 Собственные векторы и собственные значения

**Опр** *Собственное значение* Существует  $a \in V$  :

**Опр** *Собственный вектор* Ненулевой вектор  $a$  преобразования ...

**Утв** Ненулевой вектор  $a$  собственный для  $\varphi \Leftrightarrow \langle a \rangle$  инвариантна относительно  $\varphi$

В силу эквивалентности инвариантности наличию собственного значения

**Утв** Ненулевой вектор  $a$  собственный для  $\varphi$  с собственным значением  $\lambda \Leftrightarrow a \in \ker(\varphi - \lambda)$

Достаточно вспомнить определение ядра

### 10.2 Собственные подпространства

**Опр** *Собственное подпространство* Ядро  $\ker(\varphi - \lambda)$ , содержащее ...

**Утв** Сумма подпространств  $V_{\lambda_i}$  прямая

1. От противного: возьмём  $a_1 \in V_{\lambda_1} \cap \sum_2^n V_{\lambda_i}$ , то есть  $a_1 = \sum_2^n a_i$
2. Применим к этому равенству преобразование  $\Pi_2^k(\varphi - \lambda_k)$
3. Справа у нас получится ноль, а слева – нет,  $w$

### 10.3 Характеристический многочлен и его инвариантность

**Опр** *Характеристический многочлен* Функция от константы. Не забыть про обозначение

**Опр** *Характеристическое уравнение* Равенства многочлена нулю

**Опр** *Характеристические числа* Корни характеристического многочлена

Характеристический многочлен можно записать и с учётом алгебраической кратности его корней

**Утв** Характеристический многочлен имеет вид  $(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr} A + \dots + |A|$

Достаточно знать, что определитель есть функция от всех элементов матрицы, затем просто расписать коэффициенты перед требуемыми степенями

Отсюда, в соответствии с теоремой Виета, сумма всех характеристических чисел равна следу, а произведение есть  $\det A$

Стоит учесть, что данное утверждения верно лишь в  $\mathbb{C}$ . В  $\mathbb{R}$  собственные значения есть только вещественные характеристические числа

### 10.4 Определитель и след преобразования

**Утв** Если матрица оператора верхнетреугольна, то характеристические числа совпадают с диагональными элементами

Верно в силу того, что определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

**Th** *Инвариантность характеристического многочлена*

Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса

Достаточно записать характеристическое уравнение в двух базисах, перейти от одного к другому с помощью матрицы перехода и преобразовать выражение

**Следствие** Определитель, след, набор характеристических чисел матрицы оператора не зависят от выбора базиса

Все вышеперечисленные термины выражаются через коэффициенты характеристического многочлена

## 11 Линейная независимость собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Критерий диагонализированности преобразования

### 11.1 Линейная независимость собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям

**Th**  $\lambda$  – собственное значение  $\Leftrightarrow \lambda$  характеристическое число

1.  $\lambda$  – собственное значение  $\Leftrightarrow \ker(\varphi - \lambda) \neq O$
2.  $\Leftrightarrow$  соответствующая СЛУ имеет нетривиальное решение
3.  $\Leftrightarrow$  соответствующая квадратная матрица вырождена
4.  $\Leftrightarrow$  соответствующий определитель равен нулю
5.  $\Leftrightarrow \lambda$  характеристическое число

**Th** Собственные векторы различных собственных значений л.н.з.

1. Доказывается по индукции. База очевидна
2. Докажем переход. Для этого рассмотрим  $k + 1$  собственный вектор, из которых  $k$  заведомо л.н.з
3. Применим к их л.к.  $\varphi$ . Из неё вычтем правильную л.к. первых  $k$  векторов (чтобы обнулить  $\alpha_{k+1}$ )
4. Итого,  $k$  коэффициентов нули, а значит, и  $k + 1$  тоже, то есть система осталась л.н.з.

### 11.2 Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения

**Опр** Геометрическая кратность Размерность собственного подпространства

**Th** Геометрическая кратность не превосходит алгебраическую

1. Рассмотрим собственное пространство размерности  $s$  и произвольный базис в нём. Дополним его до базиса во всём пространстве
2. Запишем матрицу линейного оператора. Она будет иметь блочно-диагональный вид
3. Вычислим характеристический многочлен матрицы и непосредственно убедимся в доказываемом (потому как в оставшемся многочлене собственное значение может быть корнем; в противном случае достигается равенство)

### 11.3 Критерий диагонализированности преобразования

**Опр** Диагонализированное преобразование Существует базис, в котором достигается диагональный вид

**Th** Первый критерий диагонализированности

Если  $\varphi \in L(V, V)$  имеет попарно различные собственные значения  $\lambda_i$  кратностей  $s_i$ , то следующие условия эквивалентны:

1.  $\varphi$  диагонализирован
2. В пространстве существует базис из собственных векторов
3.  $\dim V_{\lambda_i} = s_i$

4.  $V = \oplus_i V_{\lambda_i}$ 

- $1 \Leftrightarrow 2$  : в силу того, что матрица  $A$  есть склейка применения  $\varphi$  на базисные векторы
- $2 \Rightarrow 3$  : суммируем  $t_i \leq \dim V_{\lambda_i} \leq s_i$  по  $i$
- $3 \Rightarrow 4$  : так как собственные пространства разных собственных значений не пересекаются, то они разлагаются в прямую сумму. Сумма их размерностей будет  $\sum_i s_i = n$ , то есть всего пространства
- $4 \Rightarrow 2$  : достаточно выбрать базис в каждом подпространстве и объединить. Ранее доказывалось, что он будет базисом во всём пространстве (второй критерий прямой суммы)

**Следствие** *Достаточное условие диагонализируемости*

Если характеристический многочлен имеет  $n$  различных корней из поля, то  $\varphi$  диагонализируем

Действительно, в таком случае у каждого собственного подпространства размерность единица и они располагаются на главной диагонали

## 12 Инвариантные подпространства малой размерности в вещественном случае

Th

1. В  $\mathbb{C}$  у  $\varphi \exists$  одномерное инвариантное подпространство
2. В  $\mathbb{R}$  у  $\varphi \exists$  одномерное инвариантное подпространство в случае нечётного  $n$
3. У  $\varphi \exists$  ненулевое инвариантное подпространство размерности не выше 2

1. По основной теореме алгебры у любого многочлена есть по крайней мере один комплексный корень
2. Из анализа известно, что в таком случае у многочлена есть по крайней мере один вещественный корень
3. Если у многочлена есть вещественный корень, то у него есть и одномерное инвариантное подпространство. Иначе рассмотрим комплексный корень. Из анализа известно, что его сопряжённый тоже будет корнем характеристического многочлена. Тогда многочлен  $P$  с этими коэффициентами будет вещественен, а  $\det P(A) = 0$  в силу наличия соответствующих собственных значений, то есть наш многочлен вырожден. В таком случае ранее было доказано, что у  $\varphi \exists$  двумерное (на самом деле,  $\leq 2$ ) инвариантное подпространство

## 13 Треугольный вид матрицы преобразования. Теорема Гамильтона-Кэли

### 13.1 Треугольный вид матрицы преобразования

**Лемма**  $\exists (n-1)$ -мерное инвариантное подпространство

1. Возьмём произвольное  $\lambda_0$  и сделаем выводы по размерности ядра и образа для  $\varphi - \lambda_0$
2. Выясним существования  $U : \dim U = n-1$  — не более чем надмножество  $\text{Im } \varphi - \lambda_0$ . Для его построения возьмём базис в образе и дополним его до базиса во всём  $V$
3. В конце возьмём базис для  $U$  (первые  $n-1$  вектор), задаваемый требуемое подпространство

**Лемма** *О треугольном виде*

$\exists$  базис, в котором матрица  $\varphi \in L(V, V)$  верхнетреугольна с заданным порядком расстановки характеристических чисел по диагонали

1. Возьмём произвольные  $\lambda_0$  и инвариантное  $n - 1$  подпространство
2. Далее получим вид для  $\varphi : \varphi = \lambda_0 e_n + \sum_1^{n-1} \mu_i f_i$
3. Сделаем вывод о матрице оператора, характеристическом многочлене сужения
4. Затем применяем спуск индукции, чтобы поместить на главную диагональ нужные базисные векторы

### 13.2 Теорема Гамильтона-Кэли

**Th** *Гамильтона-Кэли*

Характеристический многочлен является аннулирующим для матрицы оператора

Это следует из того, что  $s_i \geq m_i$ , то есть характеристический многочлен содержит в себе минимальный (то есть аннулирующий)

## 14 Корневые подпространства, их размерность. Разложение пространства в прямую сумму корневых. Жорданова нормальная форма, её существование и единственность. Минимальный многочлен, критерий диагонализированности оператора в терминах минимального многочлена

### 14.1 Корневые подпространства, их размерность

**Опр** *Корневое подпространство* Первое стабильное ядро

Притом корневое пространство равно и все стабильным ядрам большей размерности

**Лемма**  $\dim \ker(\varphi - \lambda_i)^{s_i} \geq s_i$

1. Запишем матрицу в верхнетреугольном виде, притом расположим  $\lambda_i$  в первых  $s_i$  диагональных клетках
2. Применим к матрице преобразование  $\varphi - \lambda_i$ . Получим нильпотентный левый верхний блок
3. Возведём матрицу в нужную степень с учётом перемножения блочных матриц и получим левый верхний блок нулей
4. Тогда получим, что первые  $s_i$  векторов принадлежат соответствующему ядру. А так как такими же могут быть и последующие векторы, то возможно строгое неравенство

**Следствие**  $\dim V^{\lambda_i} \geq s_i$

### 14.2 Разложение пространства в прямую сумму корневых

**Лемма** Сумма любых степеней ядер  $\varphi - \lambda_i$  прямая

1. От противного: пусть  $\exists a_1 = V^{\lambda_1} \cap \sum_2^k V^{\lambda_i}$
2. Тогда этот вектор можно разложить по этим подпространствам

3. Применим к обеим частям равенства  $\psi = \prod_2^k (\varphi - \lambda_i)$

4. Тогда справа получим ноль, а слева – нет,  $w$

В частности, сумма корневых пространств прямая

**Th**

1.  $V = \bigoplus_i V^{\lambda_i}$

2.  $\dim V_i^\lambda = s_i$

3.  $m_i \leq s_i$ , то есть стабилизация ядер наступает не позже  $s_i$  шага

1. В силу  $\dim V_i^\lambda \geq s_i$  сложим неравенства по всем  $i$ . Тогда  $\sum_i s_i \geq n$ , однако у нас  $\dim V = n$ , поэтому  $V = \bigoplus_i V^{\lambda_i}$

2. Предыдущий пункт возможен лишь когда во всех неравенствах выполнено равенство

3.  $\dim \ker(\varphi - \lambda_i)^{s_i} \geq s_i = \dim V_i^\lambda$ , однако  $\ker(\varphi - \lambda_i) \subset V_i^\lambda$ . В противном случае не выполнена формула суммы размерностей ядра и образа

### 14.3 Жорданова нормальная форма, её существование и единственность

**Опр Жорданова клетка** Верхнетреугольная матрица, в которой на главной диагонали ...

**Опр Жорданова матрица, ЖНФ** Блочно-диагональная матрица, каждый блок которой ...

**Опр Жорданов базис** Базис, в котором оператор имеет ЖНФ

**Опр Жорданова цепочка, присоединённый вектор**

1. Рассмотрим жорданову клетку запишем её действие в строчном виде

2. Рассмотрим новый оператор  $\psi = \varphi - \lambda_0$ . Под его действием векторы сваливаются в ядра меньшего по степени оператора

3. Полученная последовательность называется жордановой цепочкой

4. Вектор над данным называется присоединённым. Ясно, что он может быть и не единственен

**Th Существование ЖНФ**

Существует базис, в котором матрица оператора жорданова

1. Требуется доказать, что существует базис, являющийся объединением жордановых цепочек, то есть так надо сделать в каждом корневом подпространстве

2. Рассмотрим нильпотентный оператор  $\psi : V_i^\lambda \rightarrow V_i^\lambda$ , являющийся ограничением оператора  $\varphi - \lambda_i$  на  $V_i^\lambda$

3. Заметим, что если  $a \in \ker \psi^t$ , то  $a \in \ker \psi^{t-1}$  (непосредственно проверяется)

4. Теперь рассмотрим вложенную цепочку ядер и определим к последнему,  $V_i^\lambda$  прямое (нулевое дополнение)  $W_{m_i+1}$  до следующего ядра (которое будет являться самим  $V_i^\lambda$ )

5. Рассмотрим ядро  $\psi(W_{t+1})$ , для которого выполнено три условия

6. Из них мы можем определить  $W_t$  как прямое дополнение  $\ker \psi^{t-1}$  до  $\ker \psi^t$  (дополним до базиса)

7. Таким образом, применяя оператор  $\psi(W_{t+1})$  мы спускаемся вниз по цепочке и, дополнив до базиса, продолжаем спуск

8. Жорданов базис есть объединение базисов  $W_i$  каждое из которых лежит в  $\ker \psi^i$ , то есть базисных разных  $W_i$  пересекаются тривиально (к том же мы пользовались л.н.з. дополнением)

**Th Единственность ЖНФ**

Для данного базиса ЖНФ единственна с точностью до перестановки жордановых клеток

1. Требуется доказать, что  $\forall \lambda_i$  количество жордановых цепочек данной длины в жордановом базисе определено однозначно
2. Рассмотрим все цепочки, соответствующие фиксированному  $\lambda_i$ . Их линейная оболочка находится  $\in V_i^\lambda$ ,  $\dim < B_{\lambda_i} > \leq s_i$
3. Так как всего в (жордановом) базисе у нас  $n$  векторов, а  $< B_{\lambda_i} >$  и составляют этот базис, то в неравенствах выше достигается равенство
4. Рассмотрим нильпотентный оператор  $\psi : V_i^\lambda \rightarrow V_i^\lambda$ , являющийся ограничением оператора  $\varphi - \lambda_i$  на  $V_i^\lambda$
5. Его образ состоит из всех не верхних векторов в цепочках, образ его образа состоит из всех векторов, кроме ...
6. Введём обозначения для количества жордановых цепочек длины  $d$ , отвечающих  $\lambda_i$  за  $c_i^d$
7. Составим уравнения на их суммы, чья система легко решается и однозначно выражается через характеристики оператора  $\varphi$ , то есть инвариантно

Из указанного рассмотрения нетрудно заметить, что степень  $\lambda - \lambda_i$  характеристического многочлена  $s_i$  равна длине всех цепочек, отвечающих  $\forall \lambda_i$ , а степень  $m_i$  минимального многочлена равна длине максимальной (иначе оператор обнулится не полностью, не по всем цепочкам-базисным векторам)

#### 14.4 Минимальный многочлен, критерий диагонализруемости оператора в терминах минимального многочлена

**Опр Минимальный многочлен** Многочлен, обнуляющий оператор, минимальной степени

**Утв Минимальный многочлен является аннулирующим**

1. Хотя бы один аннулирующий многочлен существует, ведь если взять степени оператора, которые будут больше размерности пространства, то эта система будет л.з., а значит, у соответствующего многочлена будут ненулевые коэффициенты
2. Теперь возьмём произвольный вектор  $a \in V = \bigoplus_i V^{\lambda_i}$
3. Так как ядра каждого одночлена содержатся в ядре минимального, то каждый член разложения из ядра минимального многочлена. Тогда и  $a$  тоже
4. Итого, в силу произвольности  $a$ , минимальный многочлен аннулирующий

**Утв Минимальный многочлен есть  $\prod_i (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$**

1. От противного: пусть хотя бы одна степень тут меньше, то есть БОО  $m'_1 < m_1$
2. Тогда  $\dim \ker(\varphi - \lambda_1)^{m'_1} < s_1$  по лемме
3. Если мы сложим все ядра такого вида то получим строгое неравенство. То есть существуют вектор пространства  $a : \mu_\varphi(\varphi(a)) \neq 0$ , то есть новый многочлен не минимальный

**Th** Второй критерий диагонализируемости

Если  $\varphi \in L(V, V)$  имеет попарно различные собственные значения  $\lambda_i$  кратностей  $s_i$ , то следующие условия эквивалентны:

1.  $\varphi$  диагонализируем
  2.  $V_{\lambda_i} = V^{\lambda_i}$
  3.  $\mu_\varphi$  раскладывается на различные линейные множители
- $1 \Leftrightarrow 2$  : в силу того, что  $V_{\lambda_i} \subseteq V_i^\lambda$  и  $V = \bigoplus_i V_{\lambda_i}$ , достигается равенство множеств
  - $2 \Rightarrow 3$  : из 2 следует, что  $m_i = 1 \forall i$ , поэтому все  $n$  множителей различны

## Билинейные формы

### 15 Билинейные (полуторалинейные) формы (функции). Координатная запись билинейной формы. Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса

#### 15.1 Билинейные (полуторалинейные) формы (функции)

**Опр** Билинейная форма, полуторалинейное отображение Не забыть сопрячь на втором аргументе

**Опр** Матрица билинейной формы Её элемент есть результат применения формы на пару базисных векторов

#### 15.2 Координатная запись билинейной формы

**Th** Координатная запись

$$\beta(x, y) = x^T B \bar{y}$$

Достаточно представить векторы в координатной записи и раскрыть по билинейности

**Утв** Если произвольно отображения удовлетворяет равенству  $\beta(x, y) = x^T B \bar{y}$ , то это билинейная форма

Так как запись верна для всех векторов, то она верна и для базисных, к чему мы её и применим. Далее проверим аксиомы и убедимся, что перед нами билинейная форма

#### 15.3 Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса

**Th** Изменение матрицы при замене базиса

$$\beta' = S^T B \bar{S}$$

Достаточно вставить матрицу перехода на нужные места

### 16 Симметричные билинейные (полуторалинейные) формы. Взаимно-однозначное соответствие с квадратичными (эрмитовыми) формами

#### 16.1 Симметричные билинейные (полуторалинейные) формы

**Опр** (Эрмитова) симметричная форма  $\beta(x, y) = \overline{\beta(y, x)}$

**Th** Билинейная форма симметрична  $\Leftrightarrow B = B^*, B^* = \overline{B^T}$

$\Rightarrow$ : по определению билинейной формы  $\Leftarrow$ : надо воспользоваться тем, что результат билинейной формы есть число (матрица 1 на 1), а затем подогнать под определение, используя транспонирования и сопряжение

## 16.2 Взаимно-однозначное соответствие с квадратичными (эрмитовыми) формами

**Опр** Квадратичная (эрмитова) форма  $q(x) = \beta(x, x)$ , порождённая билинейной

Учтём, что теперь  $\beta(a, a) = \overline{\beta(a, a)}, q(a) = x^T B \bar{x}$

**Th** (Эрмитова) квадратичная форма порождается ровно одной билинейной  $\Leftrightarrow B = B^*, B^* = \overline{B^T}$

1. Требуется доказать, что значение билинейной формы однозначно восстанавливается по квадратичной
2. В  $\mathbb{R}$  достаточно рассмотреть  $q(x + y)$
3. В  $\mathbb{C}$  достаточно рассмотреть  $q(x + y)$  и  $iq(x + iy)$ , не забыв, где надо, про комплексное сопряжение и что  $i^2 = -1$

## 17 Ядро билинейной функции. Ортогональное дополнение подпространства. Ограничение билинейной функции на подпространство. Критерий невырожденности подпространства. Существование нормального вида билинейной симметричной формы над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$

### 17.1 Ядро билинейной функции

## 18 Алгоритмы приведения квадратичной формы к нормальному виду (метод Лагранжа и сдвоенных элементарных преобразований матрицы)

**Опр** Диагональный вид формы Матрица формы в данном базисе диагональна

**Опр** Канонический диагональный вид формы Каждый элемент диагонали  $\in \{-1; 0; 1\}$

Заметим, от диагонального вида легко перейти к каноническому (путём линейной замены)

**Th** Существует базис, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид

- Допустим  $b_{11} \neq 0, b_{m1} \neq 0$ . Тогда применим сдвоенное элементарное преобразование: вычтем из  $m$ -й строки и столбца 1-ю строку и столбец, домноженные на соответствующий коэффициент ( $b_{1m} \neq \overline{b_{m1}}$ ). Далее продолжим с матрицей меньшей размерности
- Если хотя бы один диагональный элемент не ноль, то поменяем местами базисные векторы и продолжим как в простом случае
- Если все диагональные элементы ноль, то прибавим к нему столбец и строку с ненулевым элементом  $\lambda$  той же линии (получится в результате сдвоенности  $2\lambda$ ). Затем продолжим как в простом случае



## 19 Закон инерции квадратичной (эрмитовой) формы. Положительный и отрицательный индексы инерции, их геометрическая характеристика. Критерий Сильвестра

### 19.1 Закон инерции квадратичной (эрмитовой) формы

**Опр** Положительно (полу)определённая форма Положительна (неотрицательна) на ...

**Опр** Отрицательно (полу)определённая форма Аналогично

**Th** Квадратичная форма определена положительно  $\Leftrightarrow d_i > 0 \forall i$

$\Rightarrow: d_i = q(e_i)$  по определению положительной определённости  $\Leftarrow$ : в силу  $q(a) = \sum_i d_i |x_i|^2$

Отсюда следует, что определитель матрицы положительно определённой формы положителен

Аналогичные критерии есть и у отрицательно- и полуопределённых форм

**Опр** Положительный индекс инерции Наибольшее число, для которого  $\exists U \dots$

**Th** Об индексах инерции

Индексы инерции  $p, q$  равны количеству соответствующих по знаку чисел среди  $d_i$

1. Докажем для положительного индекса инерции
2. БОО положительные можно считать  $p'$  – количество положительных  $d_i$  – элементов первыми. Тогда ограничение на этом подпространстве и будет отвечать определению положительного индекса инерции
3. Пусть  $p > p'$ . Тогда рассмотрим подпространство соответствующей размерности
4. По формуле включений-исключений придём к тому, что пересечение пространства и отрицательно полуопределённого подпространства ненулевое. Тогда существует ненулевой вектор, на котором форма не определена однозначно,  $w$

**Следствие** Ранг квадратичной формы равен  $p + q$

**Опр** Сигнатура квадратичной формы  $(p, q, n - p - q)$

### 19.2 Критерий Сильвестра

**Th** Критерий Сильвестра

Квадратичная форма определена положительно  $\Leftrightarrow M_i > 0 \forall i$

1.  $\Rightarrow$ : достаточно рассмотреть сужение на каждое подпространство и вспомнить про следствие из закона инерции
2.  $\Leftarrow$ : от противного. Положим  $m$  – минимальное число первых базисных векторов элементов, на которых форма определена не положительно и рассмотрим сужение на них
3. Тогда из  $p \geq m - 1$  (в силу сужения на  $m - 1$  подпространстве) и  $p < m$ , иначе  $m$  определено неверно. Получаем равенство  $p = m - 1$
4. Перейдём к диагональному виду и рассмотрим определитель сужения на  $m$ -ное пространство. Он будет неположителен,  $w$

## 20 Кососимметричные билинейные функции, приведение их к нормальному виду

**Опр** Кососимметрическая билинейная функция  $\beta(x, y) = -\overline{\beta(y, x)}$

Из определения видно, что  $\beta(x, x) = 0$

**Th** Билинейная форма кососимметрическая  $\Leftrightarrow \overline{B^T} = -B$

$\Rightarrow$ : по определению кососимметрической формы  $\Leftarrow$ : надо воспользоваться тем, что результат билинейной формы есть число (матрица 1 на 1), а затем подогнать под определение, используя транспонирования и сопряжение

**Следствие** Билинейная форма в нечётномерном векторном пространстве вырождена Потому как тождественна  $O$

**Th** Канонический вид

Существует базис, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид

- Допустим  $b_{11} = 0$  и соответствующие строка и столбец нулевые, то спускаем по размерности вниз
- Если хотя бы один не первый элемент строки не ноль, то поменяем местами вторую и эту строки. Затем путём элементарных преобразований сделаем  $+1$  (на столбце получим схожую картину) и спустимся вниз
- Если и после первого есть ненулевой элемент, то его можно двойными ЭПС сделать нулевым

## Пространства со скалярным произведением

### 21 Евклидовы и унитарные пространства. Матрица Грама и её свойства. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца, неравенство треугольника. Метрика. Выражение скалярного произведения в координатах

#### 21.1 Евклидовы и унитарные пространства

**Опр** Евклидово (унитарное) пространство Пространство над полем с фиксированным скалярным произведением

**Опр** Норма (длина) вектора  $|x| = \beta(x, x)$

Норма неотрицательна и нулевая в случае нулевого вектора

**Опр** Ортогональные векторы  $\beta(x, y) = 0$

#### 21.2 Матрица Грама и её свойства

**Опр** Матрица Грама Матрица система векторов:  $g_{ij} = (a_i, a_j)$

**Утв** Определитель матрицы Грама положителен при л.н.з системе и ноль иначе

1. На л.н.з. векторах матрица Грама есть матрица п.о. билинейной симметрической формы, поэтому её детерминант положителен.
2. В случае л.з. системы составим её нетривиальную л.к., домножим на векторы  $a_j$  и повторим так  $\forall j \in \overline{1, n}$
3. Тогда если составить из строчек матричное уравнение, то получим  $Gx = 0$ , что в силу  $x \neq 0$  означает вырожденность  $G$

### 21.3 Неравенство Коши – Буняковского – Шварца, неравенство треугольника

**Следствие** *Неравенство Коши – Буняковского – Шварца*

$$\forall a, b \in E |a||b| \geq |(a, b)|$$

Достаточно воспользоваться предыдущей теоремой и раскрыть определитель, сняв в конце квадраты

**Следствие** *Неравенство треугольника*

$$\forall a, b \in E |a||b| \geq |a + b|$$

Достаточно расписать  $|a + b|^2$  и воспользоваться предыдущим неравенством

### 21.4 Метрика

На  $E$  введём метрику как  $\rho(a, b) = |b - a|$ . Заметим, что в таком случае выполняются все 4 аксиомы метрики (неотрицательность, ноль при нуле, симметричность и неравенство треугольника)

### 21.5 Выражение скалярного произведения в координатах

**Опр** *Скалярное произведение* Билинейная (эрмитова) симметричная положительно ...

**Th** *Скалярное произведение*

$$(a, b) = x^T \Gamma \bar{y}$$

Это верно, потому как в случае базисных векторов матрица Грама совпадает с матрицей билинейной формы скалярного произведения

## 22 Ортогональные системы векторов и подпространств. Существование ортонормированных базисов (ОНБ). Изоморфизм евклидовых пространств. Ортогональные и унитарные матрицы. Переход от ОНБ к ОНБ

### 22.1 Ортогональные системы векторов и подпространств

**Опр** *Ортогональная, ортонормированная система* Векторы системе попарно ...

**Утв** *Теорема Пифагора*

$$|a_1 + \dots + a_n|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2$$

Раскрываем по линейности и ортогональности

**Утв** *Система ортогональная  $\Leftrightarrow$  матрица Грама ортогональная*

Следует из определения матрицы Грама. Аналогично в ортонормированном случае матрица Грама единичная

**Следствие 1** *Ортогональная система ненулевых векторов л.н.з.*

Потому как соответствующая матрица Грама невырождена

**Следствие 2** *При ортогональном базисе матрица формы скалярного произведения имеет диагональный вид, а при ОНБ – канонический*

### 22.2 Существование ортонормированных базисов (ОНБ)

**Следствие 3** *В конечномерном евклидовом пространстве существует ОНБ*

Потому как существуют ортогональные системы. Если мы их запишем в виде матрицы формы, то, так как мы их умеем приводить к каноническому виду, мы получим ОНБ

## 22.3 Изоморфизм евклидовых пространств

**Опр** *Изоморфизм евклидовых пространств* Изоморфизм линейных пространств и ...

**Утв** *Отображение изоморфно*  $\Leftrightarrow$  оно переводит ОНБ в ОНБ

$\Rightarrow$ : в силу сохранения скалярного произведения и соразмерности пространств (следствие изоморфности)  $\Leftarrow$ : отображение переводит базис в базис, поэтому перед нами обычный изоморфизм линейных пространств. Применим отображение на двух произвольных векторах пространства. И получим, что сохраняется скалярное произведение, то есть перед нами изоморфизм линейных пространств по определению

**Th** *Два конечномерных евклидова пространства изоморфны*  $\Leftrightarrow$  они соразмерны

$\Rightarrow$ : в силу свойств изоморфизма линейных пространств  $\Leftrightarrow$ : приведём базисных обеих пространств к ОНБ и построим отображение, переводящее базис в базис. По предыдущему утверждению, перед нами изоморфизм

## 22.4 Ортогональные и унитарные матрицы

**Опр** *Ортогональная, унитарная матрицы* Над разными полями, множества пересекаются

**Утв** *Матрицы  $Q, R$  унитарны*  $\Rightarrow$  матрицы  $Q^T, \bar{Q}, Q^*, QR, Q^{-1}$  унитарны

Непосредственно проверяется определение

**Утв** *Детерминант унитарной матрицы единичен*

Для доказательства достаточно расписать определитель в определении и воспользоваться свойствами определителя

**Утв** *Для комплекснозначных матриц  $Q$  следующие условия эквивалентны*

1.  $Q$  унитарна
2.  $\exists Q^{-1}, Q^{-1} = Q^*$
3. Столбцы  $Q$  образуют ОНБ в унитарном пространстве столбцов

- $1 \Leftrightarrow 2$  : по определению
- $1 \Leftrightarrow 3$  : в силу определения унитарной матрицы возьмём скалярное произведение и получим, что каждый элемент результата есть  $\delta_{ij}$ , то есть перед нами ОНБ
- Столбцы  $Q$  образуют ОНБ в унитарном пространстве столбцов

## 22.5 Переход от ОНБ к ОНБ

**Следствие** *Переход от ОНБ к ОНБ*

*Базисы ОНБ  $\Leftrightarrow$  матрица перехода между ними ортогональная (унитарная)*

$\Rightarrow$ : потому что произведение матриц единично  $\Leftrightarrow$  матрицы единичны  $\Leftarrow$ : по определению матрицы перехода

## 23 Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция. Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта

### 23.1 Ортогональное дополнение подпространства

**Опр** *Ортогональное дополнение* Множество всех векторов, ортогональных ...

Пространство образует со своим ортогональным дополнением прямую сумму

**Th** *Сумма подпространства и его ортогонального дополнения есть всё евклидово пространство*

1. Достаточно научиться представлять любой вектор пространства в виде суммы  $U$  и  $U^T$
2. Выберем ортогональный базис в  $U$  и запишем его линейную комбинацию + вектор  $c \in U^T$
3. Теперь надо подобрать такие коэффициенты, чтобы  $c \perp U$
4. Заменяем условие на эквивалентные, вспомним про ортонормированность базиса и выразим коэффициенты

**Следствие 1**  $\dim U = k, \dim E = n \rightarrow \dim U^T = n - k$

**Следствие 2**  $(U^T)^T = U$

Потому как одно пространство вложено в другое и у них, по предыдущему следствию, равны размерности

**Следствие 2** В конечномерном случае данную ортогональную систему из ненулевых векторов можно дополнить до ОНБ

Достаточно дополнить векторами из ортогонального дополнения

## 23.2 Ортогональная проекция

**Опр** Ортогональная проекция Проекция на подпространство вдоль (параллельно)  $U^T$

**Утв** Формула проекции

$$pr_U \bar{a} = \sum_i \frac{(a_i, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i$$

Следствие последней теоремы

**Утв** Ортогональное дополнение в координатах

Ортогональное дополнение есть пространство решений уравнения  $(A_1, \dots, A_n)^* x = 0$

$x \in A^T \Leftrightarrow x \perp A \Leftrightarrow A_i \perp x \Leftrightarrow A_i^* x = 0$  и перейдём к матричной записи. Решение полученного уравнения и есть ортогональное дополнение

## 23.3 Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта

**Утв** Существует метод найти ортогональный базис в заданном подпространстве

- Рассмотрим линейную оболочку подпространства. Если  $a_1 = 0$ , то выкинем его из линейной оболочки
- Если  $a_1 \neq 0$ , то оставим его таким, какой он есть:  $b_1 = a_1$
- Если все  $a_k$  до текущего уже ортогонализированы, то  $b_{k+1} = a_{k+1} - pr_{\langle b_1, \dots, b_k \rangle} a_{k+1}$

При необходимости, полученную систему можно нормировать для получения ОНБ

## 24 Описание линейных функций на евклидовом (унитарном) пространстве

## 25 Преобразование, сопряжённое данному. Его линейность, существование и единственность, его матрица в ОНБ. Теорема Фредгольма

### 25.1 Преобразование, сопряжённое данному

**Опр** Сопряжённое преобразование  $\varphi^* : (\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))$

## 25.2 Его линейность, существование и единственность, его матрица в ОНБ

$$\text{Утв } \psi = \varphi^* \Leftrightarrow B = A^*$$

Достаточно расписать результат формы на паре векторов, определение сопряжённого преобразование и взглянуть на матрицы

**Следствие 1**  $\varphi^*$  единственно

Потому как у каждой матрицы есть единственная сопряжённо-транспонированная

**Следствие 1** Для сопряжённых преобразований справедливо 4 свойства

Первые три следуют из аналогичных свойств для матриц, а последнее из свойств комплексного сопряжения

$$\text{Th } U \text{ инвариантно относительно } \varphi \Leftrightarrow U^\perp \text{ инвариантно относительно } \varphi^*$$

Достаточно вспомнить определения инвариантности, ортогонального дополнения и сопряжённого преобразования

## 25.3 Теорема Фредгольма

**Th Фредгольма**

$$\ker \varphi^* = (\text{Im } \varphi)^\perp$$

1. Докажем вложенность ядра в чужой образ и равенство размерностей. Это будет означать равенство
2. Равенство размерностей доказывается по прошлым утверждениям
3. Чтобы доказать вложенность рассмотрим произвольный вектор ядра, воспользуемся определениями ортогонального дополнения, образа и сопряжённого преобразования

## 26 Самосопряжённые линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов

### 26.1 Самосопряжённые линейные преобразования

**Опр** Сопряжённое линейное преобразование  $\varphi^* = \varphi$

В таком случае  $(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))$

### 26.2 Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов

$$\text{Th } \varphi \text{ самосопряжено} \Leftrightarrow A = A^*$$

Аналогично доказательству для сопряжённых преобразований

**Th** У самосопряжённого преобразования все характеристические числа действительны

В  $\mathbb{C}$  достаточно расписать определение самосопряжённого преобразования, собственного числа и прийти к равенству  $\lambda = \bar{\lambda}$ , что означает действительность

Так как в  $\mathbb{C}$  доказано, что характеристическое уравнение имеет лишь действительные корни. А симметрические вещественные матрицы являются частным случаем эрмитовых, поэтому теорема доказана и в  $\mathbb{R}$

**Утв** У самосопряжённого преобразования различные корневые подпространства перпендикулярны

Достаточно рассмотреть два вектора из разных корневых подпространств, расписать определение самосопряжённого преобразования, собственного числа и прийти к единственному случаю  $(a_i, a_j) = 0$

**Th** Основная теорема о самосопряжённых преобразованиях

Для самосопряжённого преобразования существует ОНБ из собственных векторов

1. Пусть  $\dim E = n$ . В случае  $n = 1$  очевидно
2. Ортогональное дополнение первого вектора ОНБ инвариантно относительно  $\varphi^*$ , как и относительно  $\varphi$  в силу самосопряжённости
3. Поэтому мы получили ортонормированный базис на сужении размерности  $n - 1$  и их объединение будет ОНБ на подпространстве соответствующей размерности

## 27 Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного и ортогонального преобразования. Нормальные преобразования унитарных пространств

### 27.1 Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства

**Опр** Ортогональное (унитарное) преобразование  $(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$

**Утв**  $\varphi$  ортогонально (матрица перехода между ОНБ)  $\Leftrightarrow \varphi$  изоморфизм евклидовых (унитарных) пространств

$\Rightarrow$ : в силу биективности (ОНБ переходит в ортонормированную систему из  $n$  векторов, то есть в ОНБ, потому что скалярное произведение сохранено)  $\Leftarrow$ : достаточно расписать скалярное произведение двух произвольных векторов и воспользоваться изоморфностью (идея как при изоморфизме линейных пространств). Получим сохранение скалярного произведения и ортогональность  $\varphi$  по определению

**Следствие 1** Ортогональное преобразование переводит ОНБ в ОНБ

**Следствие 2** Преобразование ортогонально  $\Leftrightarrow$  его матрица ортогональна

Потому как ортогональная матрица – матрица перехода между ОНБ

**Следствие 3** Преобразование ортогонально  $\Leftrightarrow \varphi$  обратимо и матрица  $\varphi^{-1} = \varphi^*$

Достаточно расписать определение унитарного преобразования

**Утв** Групповые свойства

Для ортогональных преобразований их композиция и обратное тоже ортогональное

Достаточно привести к определению

**Утв** Характеристические числа ортогональных преобразований по модулю равны единице

Достаточно расписать определение и вспомнить про комплексное сопряжение

### 27.2 Канонический вид унитарного и ортогонального преобразования

**Th** Канонический вид унитарного преобразования

Для унитарного преобразования существует ОНБ из собственных векторов

1. Пусть  $\dim E = n$ . В случае  $n = 1$  очевидно
2. Ортогональное дополнение первого вектора ОНБ инвариантно относительно  $\varphi^*$ , как и относительно  $\varphi^{-1}$  в силу ортогональности. При изучении инвариантных подпространств мы выяснили, что это эквивалентно инвариантности и относительно  $\varphi$
3. Поэтому мы получили ортонормированный базис на сужении размерности  $n - 1$  и их объединение будет ОНБ на подпространстве соответствующей размерности

## 28 Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве, его существование

**Лемма** О главных направлениях

Для линейного преобразования  $\varphi$  существует ОНБ  $e_1, \dots, e_n : \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  образуют ортогональную систему

Рассмотрим оператор  $\varphi^* \varphi$  (проверяется, что он СС) и ОНБ из его собственных векторов (по теореме). Далее, пользуясь СС-ю получаем, что  $(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = \dots = \lambda_i \delta_{ij}$

**Th** Для линейного преобразования  $\varphi \exists$  самосопряжённое преобразование  $\psi$  и ортогональное (унитарное)  $\theta$

1. Рассмотрим ортогональную систему из леммы, притом  $|\varphi(e_i)| = \sqrt{\lambda_i}$ . При необходимости, переупорядочим её
2. Отнормируем систему и дополним её до ОНБ, убрав, при необходимости, нулевые векторы. Получим ОНБ  $f_1, \dots, f_n$
3. Теперь определим  $\psi = \varphi \theta^{-1}$  и убедимся, что  $\psi(f_i) = \dots = \sqrt{\lambda_i} f_i$
4. Итого, нежные отображения подобраны

Совсем необязательно, что данные преобразования коммутируют (перестановочны). Однако можно применить теорему к  $\varphi^*$  и взять сопряжение с обеих сторон. Тогда мы как раз получим другой порядок

## 29 Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах. Присоединенный оператор. Существование ОНБ, в котором квадратичная (эрмитова) форма имеет диагональный вид. Применение к классификации кривых второго порядка. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду

### 29.1 Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах

**Опр** Квадратичная форма в евклидовом пространстве  $\beta_\varphi(a, b) = (a, \varphi(b))$

**Утв** В случае ОНБ  $B = \overline{A}$

Пользуемся результатом действия билинейной формы на паре векторов и сравниваем записи.

В случае произвольного базиса  $B = \Gamma \overline{A}$

**Следствие 1** Задана биекция между линейными преобразованиями и билинейными формами

**Следствие 2** Задана биекция между множеством самосопряжённых операторов и квадратичных форм

Потому как и тем, и другим соответствует симметричная матрица

Итого, изучения билинейных форм можно свести к изучению операторов (и наоборот), а изучение квадратичных – к самосопряжённым операторам

### 29.2 Существование ОНБ, в котором квадратичная (эрмитова) форма имеет диагональный вид

**Th** Приведение к главным осям

Существует ОНБ, в котором матрица квадратичной формы над ЕП имеет диагональный вид

Следует из того, что для самосопряжённого оператора существует ОНБ, в котором его матрица диагональна. Она отличается от требуемой не более, чем сопряжением



### 29.3 Применение к классификации кривых второго порядка

**Лемма**  $\exists$  ПДСК, в которой кривая второго порядка задаётся уравнением без перекрёстных членов. Аналогично для поверхностей

Для предъявления такой ПДСК достаточно привести квадратичную форму к главным осям

### 29.4 Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду

**Th** О паре форм

Если в векторном пространстве (без евклидовой / унитарной структуры) заданы две симметрические квадратичные формы, причём первая п.о. то существует базис, в котором первая имеет канонический вид, а вторая – диагональный

Достаточно объявить п.о. форму скалярным произведением. Тогда будет существовать базис, в котором вторая форма диагональна

## Сопряжённое пространство

### 30 Линейные функции. Сопряжённое пространство, его размерность. Биортогональный базис. Замена биортогональных базисов. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряжённого к нему

#### 30.1 Линейные функции

**Опр** *Линейная функция* Отображение, удовлетворяющая двум аксиомам

#### 30.2 Сопряжённое пространство, его размерность

**Опр** *Сопряжённое (двойственное) пространство* Пространство ...

Элементы сопряжённого пространства – линейные функционалы (функции), поэтому такие пространства также называют пространством линейных функций. Обозначаются как  $V^*$

**Утв**  $\dim V^* = \dim V$

Следует из  $\dim \mathbb{R} = \dim \mathbb{C} = 1$  и отождествления с матрицами размерности  $nm$

Применению линейной функции к вектору, удовлетворяющему четырём аксиомам, соответствует билинейная ( полуторалинейная) форма

#### 30.3 Биортогональный базис

**Опр** *Взаимный / биортогональный / двойственный базис*  $\langle e_i, e^j \rangle = \delta_i^j$

**Утв** К данному базису существует и единственен взаимный

Любому элементу взаимного базиса соответствует строчная единица. Строчные единицы образуют базис в  $V$ , поэтому и элементы взаимного базиса образуют базис в  $V^*$ . Базис единственен по построению (в силу инъективности линейных функций)

**Утв** Двойственный базис является базисом в  $V^*$

В силу равенства размерностей пространств достаточно доказать л.н.з.  $f_1, \dots, f_n$ . Это делается от противного с применением  $e_j \forall j$  на линейной комбинации

**Утв** Если при фиксированном  $a \in V \langle a, l \rangle = 0 \forall l \in V^*$ , то  $a = 0$

От противного включим  $a$  в какой-то базис

**Утв**  $\langle a, l \rangle = x^i \overline{y_i}$

Следует из подстановки разложений по базисам и определения  $\delta_i^j$

**Следствие**  $\langle a, e^i \rangle = x^i$

### 30.4 Замена биортогональных базисов

**Утв** Если  $e' = eS, e'^* = e^*C$ , то  $C = (S^{-1})^*$

Тензорно запишем  $e'$  как строки матрицы на векторы-столбцы и введём  $R = C^T$ , чтобы аналогично сделать с  $e'^*$ . Затем раскроем по условию биортогональности и вернёмся к матричной записи

### 30.5 Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряжённого к нему

**Опр** Канонический изоморфизм Не меняется при замене базиса

**Опр** Дважды сопряжённое пространство Отображение, сопоставляющее вектору  $a \in V$  отображение  $\overleftarrow{a} : V^* \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  по правилу  $\langle l, \overleftarrow{a} \rangle = \overline{\langle a, l \rangle}$  есть инъективный гомоморфизм (вложение)  $V \rightarrow V^{**}$

**Th** Канонический изоморфизм между  $V$  и  $V^{**}$

Между линейным пространством и дважды сопряжённым к нему существует канонический изоморфизм

Для доказательства достаточно проверить линейность по обоим аргументам и тривиальность ядра (всё по определению). По критерию изоморфности в силу инъективности (тривиальность ядра) имеем изоморфизм

## 31 Аннулятор подпространства, соответствие между подпространствами $V$ и $V^*$ . Сопряжённое преобразование, его свойства

### 31.1 Аннулятор подпространства, соответствие между подпространствами $V$ и $V^*$

**Опр** Биортогональные множества  $\forall a \in U \forall l \in W \langle a, l \rangle = 0$

**Утв** Признак биортогональности

$$U \perp W \Leftrightarrow a_i \perp l_j$$

$\Rightarrow$ : очевидно в силу вложенности  $\Leftarrow$ : из разложения по базису и линейности

**Опр** Аннулятор / биортогональное дополнение Множество  $W$  линейных функций

Обозначается как  $U^\perp$

**Опр** Нуль-пространство Обратное к аннулятору: множество  $U$  векторов

**Th**  $(U^\perp)^\perp = U$  и  $\dim U + \dim U^\perp = n$

1. Выберем базис  $e_1, \dots, e_k$  в  $U$  и дополним его до базиса во всём пространстве векторами  $e_{k+1}, \dots, e_n$
2. Далее рассмотрим линейную функцию, записанную в своём базисе и перейдём к системе, задающей  $\perp$
3. Получим, что тогда каждый коэффициент  $\lambda_i = 0, i \in \overline{1, k}$ , что говорит о структуре  $U^\perp$
4. Аналогичную операцию произведём в  $V^*$  и докажем первый факт
5. Собрав информацию о размерностях, получим второй факт

## 31.2 Сопряжённое преобразование, его свойства

**Опр** *Сопряжённое преобразование* Отображение уже из пространства функций

**Утв** *Сопряжённое преобразование лежит в пространстве функций*

Проверяется линейность (4 аксиомы) с использованием определения

**Утв** *Сопряжённое преобразование соответствует матрица  $A^*$*

Надо разложить в матричный вид равенства из определения сопряжённого пространства и сравнить их. Получив искомую структуру матрицы

**Следствие 1** *Верны 4 равенства*

Введём взаимные базисы и перейдём к матрицам. Доказательства очевидны случаю евклидова пространства

**Th**  $U$  инвариантно относительно  $\varphi \Leftrightarrow U^\perp$  инвариантно относительно  $\varphi^*$

$\Rightarrow$ : возьмём  $f \in U^\perp$  и распишем его применение по определению  $\Leftarrow$ : следует из  $\Rightarrow$ ,  $(U^\perp)^\perp = U$  и  $(\varphi^*)^* = \varphi$

**Th** *Фредгольма*

$$\ker \varphi^* = (\operatorname{Im} \varphi)^\perp$$

1. Аналогично случаю в ЕП: докажем вложенность ядра в чужой образ и равенство размерностей. Это будет означать требуемое равенство
2. Равенство размерностей доказывается по прошлым утверждениям
3. Чтобы доказать вложенность рассмотрим произвольный вектор ядра, воспользуемся определениями ортогонального дополнения, образа и сопряжённого преобразования

## Тензоры

**32 Полилинейные отображения. Определение тензора типа  $(p, q)$  на линейном пространстве  $V$ . Пространство  $T_q^p(V)$  тензоров типа  $(p, q)$ . Тензорный базис в  $T_q^p(V)$ . Изменение компонент тензора при замене базиса**

### 32.1 Полилинейные отображения