Содержание

1 Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений. Теорема Фубини

1.1 Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений

Л1

Пусть есть счётный набор конечно измеримых убывающих вложенных множеств X_i. Мера множества, являющегося счётным пересечением есть предел мер

Л2

Если интеграл неотрицательной функции по множеству равен нулю, то сама функция равна нулю почти на всём множестве

Th *О выражении меры множества через интеграл от меры сечений*

1. Для начала докажем для клетки. Её сечение будет принимать простой вид, в зависимости от принадлежности x, что даёт простое интегрирование и доказывает теорему
2. Теперь докажем для счётного набора (объединения) клеток. Задача сводится к предыдущей
3. Найдём меру множества, являющегося счётным пересечением объединения счётного числа клеток
4. Определим убывающую последовательность множеств
5. Далее считаем меры составляющих, по ходу дела используя теорему Лебега об ограниченной сходимости
6. Теперь рассмотрим случай множества нулевой меры и с помощью всяких сравнений и пределов докажем требуемое
7. В конце рассмотрим общий случай конечно измеримого множества
8. Используем все предыдущие леммы и случаи и получаем требуемое при почти всех x

1.2 Теорема Фубини

Th *О геометрическом смысле интеграла*
Th *Фубини*

2 Теорема о замене переменных в кратном интеграле

Опр *C^k-гладкий диффеоморфизм*
Опр *Носитель функции*
Th *О замене переменных в кратном интеграле*
Л2 Теорема справедлива, если функция f непрерывна на Y, а её носитель компактен и лежит в Y

1. Убрав условие 3, мы сделали теорему локальной (для каждой точки существует окрестность, где выполнено условие 3)
2. Воспользуемся теоремой о расщеплении отображений, о неявной функции, критерием компактности, теоремой о разбиении единицы
3. Это позволяет разбить функцию на сумму. Утверждение для фиксированного индекса (на его области значений) верно по предыдущей лемме

Л4 Теорема справедлива, если функция f непрерывна на Y

1. Рассмотрим неотрицательно значные функции и введём хитрые множества Y_k и функции f_k
2. Докажем, что $\subset f_k$ исходя из определения f_k. Получили ограниченность и замкнутость f_k
3. Из построения множеств следуют включения, а за ними и неравенства
4. Теперь покажем, что f_k стремятся к f через определения и построения условий
5. Запишем следствия из предела и перейдём и завершим доказательство с помощью теоремы Б. Леви
6. В общем случае разобьём f на f_+ и f_- и получим искомое равенство

3 Теорема о построении криволинейной системы координат исходя из её части

Опр *Криволинейная система координат на множестве A*
Опр *Координатный набор*
Th *О построении криволинейной системы координат исходя из ее части*

1. Рассмотрим отображение из известного набора функций и матрицу Якоби этого отображения
2. Рассмотрим координатные строки и матрицу в точке и применим теорему о ранге матрицы
3. Определим новые гладкие функции и всеобъемлющее отображение, рассмотрим новую матрицу Якоби
4. Применим теорему об обратном отображении и получим требуемое

4 Гладкие подмногообразия пространства R^N. Теорема о гладком подмногообразии пространства R^N, заданном системой уравнений

4.1 Гладкие подмногообразия пространства R^N

Опр *Гладкое n-мерное подмногообразием пространства $\mathbb{R}^N_p$ в точке $P \in M$*
Опр *Канонический и выпрямляющий диффеоморфизм*
Утв *Гладкое n-мерное подмногообразие пространства*

4.2 Теорема о гладком подмногообразии пространства R^N, заданном системой уравнений

Th *О гладком подмногообразии, заданном системой уравнений*

1. Сначала достроим отображения до гладкого диффеоморфизма по теореме о построении криволинейной системы координат, исходя из её части
2. Докажем, что выпрямляемость обратного диффеоморфизма. Это делается через анализ множеств и из их свойств

5 Геометрический касательный вектор к подмножеству пространства $\mathbb{R}^n$. Теоремы о структуре множества $T_P(M)$ геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию M пространства $\mathbb{R}^n$ в общем случае и в случае, когда M заданно системой уравнений

5.1 Геометрический касательный вектор к подмножеству пространства $\mathbb{R}^n$

Опр *Геометрический касательный вектор к множеству в точке*
Опр *Геометрическое касательное пространство*

5.2 Теоремы о структуре множества $T_P(M)$ геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию M пространства $\mathbb{R}^n$ в общем случае и в случае, когда M заданно системой уравнений

Th. 1 *О структуре множества геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию*

1. Воспользуемся определением канонического диффеоморфизма, леммой о $T_P(M)$ к линейному пространству и о локальности $T_P(M)$
2. Запишем вид $T_P(M)$ и перейдём к локальной параметризации (из-за правил умножения матриц)

3. Итого, касательные векторы есть л.к. столбцов матрицы Якоби, а само $T_P(M)$ является n-мерным линейным подпространством $\mathbb{R}^N$

Th. 2 *О структуре множества геометрических касательных векторов к подмногообразию, заданному системой уравнений*

1. Пишем те же рассуждениями, что и в теореме о гладком подмногообразии, заданном системой уравнений

2. Введём новую переменную и воспользуемся предыдущей теоремой

6 Числовые ряды. Знакопостоянные ряды. Признаки сравнения сходимости числовых рядов. Интегральный признак сходимости числового ряда. Признаки Даламбера и Коши. Знакопеременные ряды (Критерий Коши сходимости ряда). Сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле, Лейбница и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда. Перемножение абсолютно сходящихся рядов

7 Клеточные множества. Верхняя мера Лебега и ее счетная полуаддитивность. Мера Лебега и ее счетная аддитивность. Непрерывность меры Лебега. Теорема о том, что семейство измеримых подмножеств $\mathbb{R}^n$ является σ-кольцом

8 Измеримые функции. Измеримость суммы и поточечного предела измеримых функций. Интеграл Лебега для счетно-ступенчатых и для измеримых функций, линейность интеграла Лебега. Теорема о существовании интеграла от неотрицательной измеримой функции. Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее положительной и отрицательной составляющих. Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее модуля. Интегральная теорема о среднем. Счетная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования

9 Непрерывность интеграла как функции верхнего предела. Существование первообразной для непрерывной на отрезке функции. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы замены переменных в интеграле и интегрирования по частям

9.1 Непрерывность интеграла как функции верхнего предела

Утв *Обозначения для интеграла Лебега* Множество интегрирования, связь с обратным и множество нулевой меры

Лемма Если f интегрируем на отрезке, содержащим три точки, то её интеграл можно разбить на два
Доказывается через интегрируемость функции на подмножестве и с помощью конечной аддитивности интеграла по множествам

Th *Непрерывность интеграла как функции верхнего предела* Если на числовом промежутке функция интегрируема, то её $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ непрерывна на (a, b)

1. Зафиксируем произвольную точку отрезка и строго возрастающую последовательность с пределом в нашей точке
2. Воспользуемся определением $F(x_0)$ и непрерывностью интеграла по множествам, а также тем, что предел слева совпадает с обычным на внутренностях
3. Аналогичные рассуждения с убывающей последовательностью доказывают требуемую непрерывность (потому как и справа, и слева)

9.2 Существование первообразной для непрерывной на отрезке функции

Th Если функция интегрируема на отрезке и непрерывна его точке, то для её $F(x) \frac{d}{dx} : F^{'}(x_0) = f(x_0)$, притом на концах отрезка речь идёт об односторонних производных

1. Зафиксируем произвольную точку отрезка справа В силу аддитивность интеграла имеем $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$
2. Применим интегральную теорему о среднем для $f(x), g(x) = 1 \geq 0$, получим отношение. Тогда устремив аргумент к нашей точке, получим определение производной справа
3. Аналогичные рассуждения дадут нам производную слева, аз значит, и доказываемую теорему

Из этой теоремы следует существование первообразной для непрерывной для отрезке функции, а также, совместно с теоремой о структуре первообразных, их отличие на константу

9.3 Формула Ньютона-Лейбница

Th *Формула Ньютона-Лейбница*
Для доказательства достаточно расписать первообразную на множестве нулевой меры, на втором конце и взять разность

9.4 Формулы замены переменных в интеграле и интегрирования по частям

Th.1 *Замена переменной в определённом интеграле*
Если функция $x = \varphi([a, b])$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$, а f непрерывна на $\varphi([a, b])$, то справедливо равенство ...

1. В силу непрерывности f на $\varphi([a, b])$, для неё существует первообразная. Воспользуемся для неё формулой Ньютона-Лейбница
2. Продифференцируем первообразную и определим, для какой функции она таковой является. Применим формулу Ньютона-Лейбница уже для неё (обратное равенство) и получим требуемое

Th.2 *Интегрирование по частям*
Если функции непрерывно дифференцируемы, то они могут быть проинтегрированы по частям

Для доказательства достаточно воспользоваться линейностью интеграла и формулой Ньютона–Лейбница

10 Мера декартова произведения двух конечно измеримых множеств. Выражение меры множества под графиком интегрируемой функции через интеграл. Площадь круга. Выражение объема тела вращения и длины кривой через интегралы. Связь интегрируемости по Риману и интегрируемости по Лебегу. Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции

11 Теорема Б. Леви о монотонной сходимости. Теорема Лебега об ограниченной сходимости

Отличие следующих теорем от непрерывности интеграла по множествам состоит в том, что теперь предельный переход выполняется для функций, а не множеств

11.1 Теорема Б. Леви о монотонной сходимости

Th Если последовательность измеримых функций $f_k \geq 0$ монотонна и сходится к f, то f измерима с интегралом, равным пределу интегралов f_k

1. Измеримость функции следует из леммы о поточечной сходимости, а интегрируемость в силу существования интеграла от неотрицательной измеримой функции (интеграл может быть бесконечным)
2. Рассмотрим случай конечного интеграла, предварительно выкинув множества нулевой меры, на котором он бесконечен
3. Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$ и рассмотрим множества X_k с $(1 - \varepsilon)$ внутри
4. В силу монотонности функции, X_k будут монотонны по включению и покрывать всю область определения
5. Вспомним про непрерывность интеграл по множествам и определение предела
6. Затем распишем неравенства, устремим $\varepsilon \to 0$ и получим доказываемое соотношение
7. В случае бесконечного интеграла фиксируем $\forall C > 0$ и миноранту, чей интеграл на том же множестве будет $> C$ (она существует из определения нижнего интеграла) и выкинем множества нулевой меры, на которых миноранта больше f
8. Рассмотри измеримые функции $g_k = \min(f_k, g)$, которые в пределе равны миноранте (показывается через определения предела для f и минимума)
9. Как показано в конечном случае, предел для миноранты будет больше $> C$, а в силу неравенства, для f тоже. В силу произвольности C получаем необходимое равенство

11.2 Теорема Лебега об ограниченной сходимости

Th Если последовательность интегрируемых функций f_k, каждый член которой ограничен по модулю интегрируемой функцией φ почти всюду на X и поточечно сходится к f, то f интегрируема с интегралом, равным пределу интегралов f_k

1. Измеримость f следует из леммы о поточечной сходимости, а интегрируемость в силу предельного перехода и признака сравнения
2. Выкинем множества нулевой меры, на которых условие теоремы не выполняется
3. Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$ и рассмотрим множества X_k с $\varepsilon\varphi(x)$ внутри
4. X_k будут покрывать X (включение в одну сторону очевидно, а в другое надо рассмотреть два случая для $\varphi(x)$, расписать определение предела). Также X_k будут монотонны по включению
5. Распишем предел для $\int_{X_k} \varphi$ с помощью непрерывности и аддитивности интеграла по множествам
6. Теперь распишем неравенство для разности интегралов f и f_k, воспользовавшись неравенством треугольника, определением X_k и конечностью интеграла для φ
7. В итоге, устремив $\varepsilon \to 0$, завершим доказательство теоремы

12 Несобственный интеграл. Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу. Критерий Коши. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов

12.1 Несобственный интеграл

Опр *Несобственный интеграл, особенность* Односторонний предел интегрального конца
Опр *(Рас)ходящийся несобственный интеграл* Если (не)существует конечный предел
Опр *Собственный интеграл* Интеграл Лебега, который был до этого
Опр *Абсолютно сходящийся несобственный интеграл* Аналогично рядам
Опр *(Сходящийся) несобственный интеграл с двумя особенностями* Разбить на два интеграла с одной особеностью (и утверждать сходимость только в случае сходимости обоих интегралов)

12.2 Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу

Th.1 Если f интегрируема по Лебегу, на любом открытом промежутке, она интегрируема на всём промежутке $\Leftrightarrow$ соответсвующих несобственный интеграл сходится абсолютно

1. $\Rightarrow$: согласно лемме об интегрируемости на подмножестве f интегрируема на любом открытом промежутке, как и её модуль (по эквивалентности)
2. Из аддитивности интеграла по множествам следует нестрогое возрастание функции $F(b^{'}) = \int_a^{b^{'}} |f(x)|dx$
3. По теореме существует предел слева, поэтому несобственный интеграл сходится абсолютно
4. $\Leftarrow$: зафиксируем возрастающую последовательность $\{b_k\} \to b$
5. Определим индикаторную последовательность функций $f_k(x)$. Она сходится к f, что докажет измеримость f на всём интервале
6. Затем введём новую функциональную последовательность $g(x) = |f_k(x)|$. Она будет возрастать и в пределе равна $|f(x)|$, поэтому применима теорема о монотонной сходимости
7. Из неё следует интегрируемость $|f(x)|$ на интервале, то есть и f

Th.2 Если f интегрируема в собственном смысле, то несобственный интеграл сходится и его значение равна интегралу Лебега на том же интервале

Доказательство состоит в применении теоремы о непрерывности интеграла как функции верхнего предела

12.3 Критерий Коши

Th *Критерий Коши*

Если на числовом промежутке f интегрируема по Лебегу на любом открытом промежутке, то несобственный интеграл этой функции сходится $\Leftrightarrow$ выполняется условие Коши

1. Определим $F(t) = \int_a^t f(x)dx$. Несобственный интеграл с особенностью в верхнем конце будет сходиться, если у этой функции существует конечный предел при $t \to b - 0$
2. Далее сведём задачу к КК существования предела функции и воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница

12.4 Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов

Смотреть в рукописном конспекте

13 Связь поточечной и равномерной сходимостей для функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Обобщенный признак сравнения для функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Признаки Дирихле и Лейбница равномерной сходимости функционального ряда. Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность равномерного предела, непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными слагаемыми. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Дифференцирование предельной функции и почленное дифференцирование функционального ряда

14 Степенные ряды. Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Теорема о круге сходимости степенного ряда. Первая теорема Абеля. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Сохранение радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Достаточное условие аналитичности функции. Пример бесконечно дифференцируемой, но неаналитической функции. Представление экспоненты комплексного аргумента степенным рядом. Формулы Эйлера. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Представление степенной и логарифмической функций степенными рядами