

## Содержание

<b>Векторные пространства</b>	<b>3</b>
<b>1 Векторное пространство. Подпространство. Линейная оболочка системы векторов. Линейно (не)зависимые системы векторов. Конечномерные линейные пространства</b>	<b>3</b>
1.1 Векторное пространство . . . . .	3
1.2 Подпространство . . . . .	3
1.3 Линейная оболочка системы векторов . . . . .	3
1.4 Линейно (не)зависимые системы векторов . . . . .	3
1.5 Конечномерные линейные пространства . . . . .	3
<b>2 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница). Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при замене базиса (матрица перехода)</b>	<b>4</b>
2.1 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница) . . . . .	4
2.2 Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса . . . . .	4
2.3 Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты . . . . .	4
2.4 Изменение координат вектора при замене базиса (матрица перехода) . . . . .	4
<b>3 Сумма и пересечение подпространств. Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств, её характеристики, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств (формула Грассмана). Понятие факторпространства, его базис и размерность</b>	<b>5</b>
3.1 Сумма и пересечение подпространств . . . . .	5
3.2 Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств, её характеристики, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения . . . . .	5
3.3 Связь размерностей суммы и пересечения подпространств . . . . .	6
3.4 Понятие факторпространства, его базис и размерность . . . . .	6
<b>4 Понятие аффинного пространства, связь между аффинным и векторным пространством</b>	<b>6</b>
<b>Линейные отображения</b>	<b>6</b>
<b>5 Линейные отображения и линейные преобразования векторных пространств (линейные операторы). Операции над линейными отображениями, линейное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов. Изоморфизмы</b>	<b>7</b>
5.1 Линейные отображения и линейные преобразования векторных пространств (линейные операторы) . . . . .	7
5.2 Операции над линейными отображениями, линейное пространство линейных отображений . . . . .	7
5.3 Алгебра линейных операторов . . . . .	8
5.4 Изоморфизмы . . . . .	8
<b>6 Матрица линейного отображения. Координатная запись линейного отображения. Связь операций над матрицами и над линейными отображениями. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базиса</b>	<b>9</b>
6.1 Матрица линейного отображения . . . . .	9
6.2 Координатная запись линейного отображения . . . . .	9
6.3 Связь операций над матрицами и над линейными отображениями . . . . .	9
6.4 Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базиса . . . . .	9
<b>7 Ядро и образ, их описание в терминах матрицы линейного отображения. Критерий инъективности. Связь между размерностями ядра и образа</b>	<b>10</b>
7.1 Ядро и образ, их описание в терминах матрицы линейного отображения . . . . .	10
7.2 Критерий инъективности . . . . .	10
7.3 Связь между размерностями ядра и образа . . . . .	10

<b>8 Аффинные преобразования, их свойства. Аффинная группа</b>	<b>10</b>
8.1 Аффинные преобразования, их свойства . . . . .	10
8.2 Аффинная группа . . . . .	10
<b>Структура линейного преобразования</b>	<b>11</b>
<b>9 Инвариантные подпространства. Ограничение оператора на инвариантное подпространство. Фактороператор</b>	<b>11</b>
9.1 Инвариантные подпространства . . . . .	11
9.2 Ограничение оператора на инвариантное подпространство . . . . .	11
9.3 Фактороператор . . . . .	12
<b>10 Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования</b>	<b>12</b>
10.1 Собственные векторы и собственные значения . . . . .	12
10.2 Собственные подпространства . . . . .	12
10.3 Характеристический многочлен и его инвариантность . . . . .	12
10.4 Определитель и след преобразования . . . . .	13
<b>11 Линейная независимость собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Критерий диагонализруемости преобразования</b>	<b>13</b>
11.1 Линейная независимость собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям . . . . .	13
11.2 Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения . . . . .	13
11.3 Критерий диагонализруемости преобразования . . . . .	14

# Векторные пространства

## 1 Векторное пространство. Подпространство. Линейная оболочка системы векторов. Линейно (не)зависимые системы векторов. Конечномерные линейные пространства

### 1.1 Векторное пространство

**Опр Унарная, бинарная операция на множестве над полем** Ставит в соответствие элементу (элементам) из множества другой элемент из множества

**Опр Векторное пространство над полем** Помимо унарности и бинарности, по 4 аксиомы сложения и умножения

### 1.2 Подпространство

**Опр Подпространство** Требуются лишь унарность и бинарность

### 1.3 Линейная оболочка системы векторов

**Опр Линейная оболочка** Все векторы, которые линейно выражаются через минимальную систему, покрывающую пространство

### 1.4 Линейно (не)зависимые системы векторов

**Опр Линейная комбинация** Сумма векторов с коэффициентами из поля

**Опр Линейно (не)зависимая система векторов** Нетривиальная линейная комбинация (не) равна нулю

### 1.5 Конечномерные линейные пространства

**Опр Ранг (не)пустой системы векторов** Любой набор векторов, чьё число больше чем ранг, будет линейно зависим. Ранг пустой считаем нулевым

**Опр Размерность** Более употребительное название для ранга в случае работы с подпространством

**Опр (Бес)конечномерные линейные пространства** Если их размерность (бес)конечна

**Л1 Любой вектор системы векторов ранга  $r$  раскладывается по  $r$  л.н.з векторам**

1. Возьмём вектора из линейной оболочки и добавим к ним произвольный вектор системы  $a$ . Эта система будет л.з. из определения ранга
2. Тогда найдутся коэффициента для нетривиальной линейной комбинации, притом коэффициент перед  $\lambda_a \neq 0$  (иначе линейная оболочка была бы зависима)
3. Из линейной комбинации выразим  $a$ , поделив все вектора на  $\lambda_a$

**Л2 Если вектор  $b$  принадлежит линейной оболочке  $a_1, \dots, a_k$  других векторов, то он не влияет на её ранг**

1. От противного: пусть  $\exists$  л.н.з система из  $r+1$  векторов (она будет содержать  $b$ , иначе  $w$  с определением ранга)
2. Итак, пусть система  $b, a_1, \dots, a_r$  л.н.з. Тогда система  $a_1, \dots, a_r$  тоже будет л.н.з. Так их  $r$  штук, то все вектора  $a_1, \dots, a_k$  будут выражаться через  $a_1, \dots, a_r$
3. Если мы заменим  $a_1, \dots, a_k$  на их выражения через  $a_1, \dots, a_r$ , то получится, что  $b$  выражается по ним, что  $w$  л.н.з  $b, a_1, \dots, a_r$

**Th Основная теорема о рангах** Ранг подсистемы и системы совпадает  $\Leftrightarrow \forall$  вектор системы раскладывается по линейной оболочке подсистемы

$\Rightarrow$ : мгновенно следует из Л1 В моей формулировке

$\Leftarrow$ :

1. От противного: пусть  $\exists$  л.н.з система из  $r+1$  векторов
2. Её ранг будет не меньше ранга её и любого количества л.н.з векторов из подсистемы

3. С другой стороны, многократно применяя Л2, получим что её ранг не превышает ранга подсистемы,  $w$

**Следствие 1** Для любой подсистемы векторного пространства ранг равен размерности линейной оболочки

**Следствие 2** Если размерности вложенных подпространств совпадают, то они равны

## 2 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница). Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при замене базиса (матрица перехода)

### 2.1 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница)

**Опр Базис** Система л.н.з векторов, являющаяся линейной оболочкой

**Лемма Штайница** Пусть система векторов  $a_1, \dots, a_n$  порождает пространство  $V$ , а система векторов  $b_1, \dots, b_m$  л.н.з. Тогда  $n \geq m$

1. Возьмём  $b_1$ . Он будет выражаться через  $a_1, \dots, a_n$  по определению линейной оболочки. БОО первый коэффициент в его разложении по  $a_1, \dots, a_n$  ненулевой (иначе мы их переупорядочим)
2. Выразим из этого разложения  $a_1$ . Тогда  $V = \langle b_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ . Так, действуя по индукции, заменим все вектора  $a_i$
3. В случае  $n < m$  получим противоречие с л.н.з.  $b_1, \dots, b_m$  (потому что всего  $n$  векторов порождают пространство). Таким образом  $n \geq m$ , притом недостающие до линейно оболочки вектора можно взять из  $a_1, \dots, a_n$

### 2.2 Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса

**Утв** Систему л.н.з векторов можно дополнить до базиса

1. Ранг подсистемы меньше ранга системы, поэтому выполняется обратное к основной теореме о рангах утверждение ( $\exists \bar{x}$ , не лежащей в л.н.з подсистеме)
2. Если мы добавим  $\bar{x}$  к подсистеме и она станет зависимой, то в нетривиальной линейной комбинации равен нулю либо новый коэффициент ( $w$  с л.н.з исходной подсистемы), либо какой-то из старых (тогда  $\bar{x}$  выражается через векторы линейной оболочки и принадлежит ей)
3. Продолжая процесс и далее, дополним систему до базиса

### 2.3 Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты

**Опр Координаты вектора в базисе** Коэффициенты в разложении по базису

При сложении векторов и домножении на число, координаты изменяются покомпонентно

### 2.4 Изменение координат вектора при замене базиса (матрица перехода)

**Опр Матрица перехода** Матрица координатных столбцов новых базисных векторов относительно старых

**Th**  $S$  чья-то матрица перехода  $\Leftrightarrow S$  невырождена

Это следует из того, что координатные столбцы  $X_k$  векторов  $a_k$  линейно независимы  $\Leftrightarrow a_k$  л.н.з. ( $\lambda^k a_k = 0 \Leftrightarrow \lambda^k X_k = 0$ ). Поэтому столбцы матрица невырождена (её столбцы л.н.з.)  $\Leftrightarrow$  векторы л.н.з.

**Th** Если вектор имеет в базисах  $e, e'$  координатные столбцы  $X, X'$ , то  $X = SX'$

Достаточно расписать один вектор в обоих базисах и сравнить записи

**Утв** Если  $\exists e, e', e''; e' = eC, e'' = e'D$ , то  $e'' = eCD$

Последовательно подставляем матрицы перехода

### 3 Сумма и пересечение подпространств. Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств, её характеристики, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств (формула Грассмана). Понятие факторпространства, его базис и размерность

#### 3.1 Сумма и пересечение подпространств

**Опр Пересечение подпространств** Множество элементов, которые являются их обычным теоретико-множественным пересечением как подмножеств

**Опр Сумма подмножеств по Минковскому** Множество-сумма векторов всех векторов  $a_i$  из каждого  $A_i \subset V$ , то есть каждый вектор из суммы раскладывается по векторам из всех пространств

Для суммы Минковского выполняется коммутативность и ассоциативность

**Утв Сумма линейных оболочек есть линейная оболочка объединения**

Каждый элемент суммы есть линейная оболочка какого-то подпространства, поэтому если мы сложим все линейные оболочки по Минковскому, то получим линейную оболочку объединения (совокупности)

**Следствие Сумма конечного числа подпространств есть подпространство**

Потому как сумма есть минимальное по включению подпространство, содержащее в себе каждое из пространств

**Утв Размерность суммы не превосходит суммы размерностей**

Это следует из того, что размерность равна рангу, а для рангов ранг объединения не превосходит суммы рангов (доказывается от противного)

#### 3.2 Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств, её характеристики, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения

**Опр Прямая (внешняя) сумма** Декартово произведение  $(a_1, \dots, a_n)$

Сложение и умножение на скаляр определены для внешней суммы покомпонентно

**Опр Прямая (внутренняя) сумма** Сумма, вектора  $a_i$  в разложении которой из каждого  $A_i \subset V$  определены однозначно

Например, всё пространство разлагается в прямую сумму своих базисных векторов

Через  $\overline{U_i}$  обозначим сумму всех рассматриваемых пространств, за исключением  $U_i : U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + U_n$

**Th.1 Первый критерий прямой суммы**

Сумма подпространств прямая  $\Leftrightarrow U_i \cap \overline{U_i} = \{0\}$

- $\Rightarrow$ : от противного. Пусть БОО условие не выполнено для  $U_1$ . Тогда там есть нулевой вектор, который принадлежит  $U_i$  и раскладывается по остальным пространствам. Тогда у нас существует два представления нулевого вектора (одно тривиальное, другое новое),  $w$  с прямостью суммы
- $\Rightarrow$ : от противного. Пусть существует два различных разложения  $v$  по  $a_i$  и  $b_i$ . БОО хотя бы  $a_1 \neq b_1$ , поэтому если возьмём их разность, то с одной стороны она  $\in U_1$ , а с другой —
- $\in \overline{U_i}$ , то есть пересечение не тривиально,  $w$

**Th.2 Второй критерий прямой суммы**

Для конечномерных подпространств следующие условия эквивалентны:

1. Сумма  $U = \oplus U_i$  прямая
2. Система из  $\sum_i \dim U_i$  векторов из объединения базисов есть базис в  $U$
3.  $\dim U = \sum_i n_i$

- $2 \Leftrightarrow 3$ : по следствию основной теоремы о рангах  $\dim U = \text{рге} = \text{рг} \cup_i e^i$ , поэтому

$$\dim U = \sum_i \dim U_i \Leftrightarrow \text{рге} = \sum_i \dim U_i \Leftrightarrow e$$

- $1 \Rightarrow 2$  : от противного. Пусть  $e$  л.н.з система. Запишем нетривиальную линейную комбинацию всей суммы. Так как хотя бы одна компонента нетривиальная, то БОО  $l_1 \neq 0$ . Тогда эта комбинация одновременно принадлежит и  $U_1$ , и  $\overline{U_1}$ , по той же идее, что и в Th.1, это  $w$
- $2 \Rightarrow 1$  : от противного. По обратной идее предыдущего пункта воспользуемся Th.1, получим ненулевое пересечение, распишем вектор оттуда ( нетривиальная л.к.) и получим  $w$  с л.н.з  $e$

**Опр** *Прямое дополнение подпространства* Недостающий член в прямой сумме до всего пространства  $V$

В случае двух подпространств, они входят в определение симметрично

**Утв** Сумма размерностей подпространства и любого его прямого дополнения равна размерности всего пространства  $V$

**Утв** У любого подпространства конечномерного пространства  $V$  существует прямое дополнение

Для нахождения дополнения достаточно выбрать базис в подпространстве и дополнить его до базиса в пространстве. Тогда по Th.2 эта система и будет прямым дополнением

Если  $a = a_1 + a_2$ , то  $a_1$  называется проекцией  $a$  на  $U_1$  вдоль (параллельно)  $U_2$

### 3.3 Связь размерностей суммы и пересечения подпространств

Смотреть в рукописном конспекте

### 3.4 Понятие факторпространства, его базис и размерность

**Опр** *Факторпространство* Фактор-множество (множество всех классов эквивалентности для заданного отношения эквивалентности)  $a \sim b \Leftrightarrow b - a \in U$

Элементы факторпространства есть смежные классы вида  $a + U$

$$(a + U) + (b + U) = (a + b) + U$$

$$\lambda(a + U) = \lambda a + U$$

Если  $W$  - прямое дополнение  $U$ , то существует естественный изоморфизм  $W \rightarrow V/U (a \mapsto a + U)$ . Он является ограничением на  $W$  линейного отображения  $\pi : V \rightarrow V/U, \pi(v) = v + U$  и называется канонической проекцией. Действительно, из определения прямого дополнения следует единственность  $u \in U : v = u + w$ . Применим  $\pi$  и получим  $v + U = w + U$ , что влечёт биективность  $\pi$

Отсюда следует, что дополнение произвольного базиса в  $U$  до базиса в  $V$  после применения к ней  $\pi$  будет базисом в  $V/U$ , притом  $\dim V/U = \dim V - \dim U$ , что следует из теоремы о сумме размерностей ядра и образа

## 4 Понятие аффинного пространства, связь между аффинным и векторным пространством

**Опр** *Аффинное пространство* Отображение из точек-векторов в точки (откладывание от точки векторы)

Аффинное пространство удовлетворяет трём аксиомам (ассоциативность, существование нуля и единственность " дополнения"). Также справедливо "правило треугольника"

**Th** *О замене координат*

Если существует две ДСК и  $S$  – матрица перехода от старой к новой,  $\gamma$  – координатный столбец начала координат новой системы в старой, то справедливо  $X = SX' + \gamma$

Достаточно рассмотреть произвольный вектор как сумму сдвигов в ноль и в точку, перейти к базису и координатным столбцам, вспомнить определение матрицы перехода и сократить базис

# Линейные отображения

## 5 Линейные отображения и линейные преобразования векторных пространств (линейные операторы). Операции над линейными отображениями, линейное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов. Изоморфизмы

### 5.1 Линейные отображения и линейные преобразования векторных пространств (линейные операторы)

**Опр Линейное отображение** Отображение, удовлетворяющее двум аксиомам

Отсюда следуют конечная линейность, отображение нулевого и противоположного вектора

Множество всех линейных отображений обозначается как  $L(V, W)$ . В случае  $W = V$  линейное отображение называют линейным преобразованием (оператором)

**Опр Линейная функция (функционал)** Случай  $\dim W = 1 (W = \mathbb{K})$

**Утв Под действием линейного отображения л.з система остаётся л.з**

Достаточно записать нетривиальную линейную комбинацию и взять её образ, используя уже известные аксиомы

**Утв Ранг системы под действием линейного отображения не возрастает**

Это следует из определения ранга и противного к предыдущему утверждению. В силу равенства ранга и размерности в конечномерном случае, получаем аналогичное неравенство для размерностей

**Утв Образ подпространства**

**Образ линейной оболочки есть линейная оболочка образов**

Действительно, если записать определение линейной оболочки (множество всех линейных комбинаций) и подействовать отображением, то получится требуемое. В частном случае, если взять базис (его линейная оболочка есть всё пространство), то образ пространства есть линейная оболочка образов базисных векторов

**Опр Линейное вложение** Инъективное линейное отображение

**Утв В случае линейного вложения л.н.з. система остаётся л.н.з.**

Действительно, если записать л.к. образов и "вынести  $\varphi$  за скобки", то в силу инъективности получим, л.к. исходных векторов. В силу её линейной независимости, эта л.к. тривиальна, как и л.к. образов. В частном случае, если взять базис, то получим равенства рангов  $U$  и  $\varphi(U)$ , как и размерностей

**Th Если взять базис  $e_i$  в  $V$  и произвольные векторы  $c_i$  в  $W$ , то  $\exists! \varphi : \varphi(e_i) = c_i$ . Дополнительно,  $\varphi$  инъективно  $c_i$  л.н.з.**

1. Для начала докажем единственность. Зафиксируем произвольный вектор  $a$  пространства, разложим его по базису и рассмотрим  $\varphi(a)$ , имеющего единственные коэффициенты. В силу произвольности  $a$  теорема справедлива
2. Для доказательства существования, достаточно взять два произвольных вектора из пространства, подействовать на них отображением (с учётом  $\varphi(e_i) = c_i$ ), затем проверить аксиомы линейного отображения
3.  $\Rightarrow$ : следует из предыдущего утверждения
4.  $\Leftarrow$ : от противного, с использованием определения инъективности, разложения  $a - b$  по базису и  $\varphi(e_i) = c_i$

### 5.2 Операции над линейными отображениями, линейное пространство линейных отображений

**Опр Сумма отображений** Такое отображение, что ...

**Опр Произведение отображения на скаляр** Такое отображение, что ...

В комплексном случае скаляр заменяется на комплексно-сопряжённый.

Нетрудно проверить, что оба нововведённых отображения линейны. Также проверкой доказывается ассоциативность, дистрибутивность и линейность в случае композиции отображений

### 5.3 Алгебра линейных операторов

Так как на множестве  $L(V, V)$  определены операции сложения, умножения на скаляр и умножения, то  $L(V, V)$  имеет структуру ассоциативной алгебры (непустое множество (носитель) с заданным на нём набором операций и отношений (сигнатурой)). Ассоциативная потому как заданы операции ассоциативного умножения, то есть  $\forall k, l \in \mathbb{F}$  и  $\forall a, b, c \in A$  справедливо

1.  $a(b + c) = ab + ac$
2.  $(a + b)c = ac + bc$
3.  $(k + l)a = ka + la$
4.  $k(a + b) = ka + kb$
5.  $k(la) = (kl)a$
6.  $k(ab) = (ka)b = a(kb)$
7.  $1a = a$ , где  $1$  – единица кольца  $\mathbb{K}$

**Опр** *Аннулирующий многочлен для оператора*  $P(\varphi) = 0$

**Опр** *Минимальный многочлен* Аннулирующий многочлен с минимальной степенью

**Утв** Пусть  $\mu$  – минимальный многочлен оператора  $\varphi$ , а  $P \in \mathbb{F}$  – произвольный. Тогда  $P$  аннулирует  $\varphi \Leftrightarrow f: \mu$  в кольце многочленов над  $\mathbb{F}$

1. Разделим  $P$  на  $\mu$  с остатком и подставим в полученное равенство  $\varphi$
2. Воспользуемся условием и получим  $P(\varphi) = 0 \Leftrightarrow r(\varphi) = 0$
3. В таком случае остаток должен быть аннулирующим для  $\varphi$ , то есть его степень меньше степени минимального многочлена, поэтому  $w$  не возникает только в случае  $r \equiv 0$
4. Таким образом, эквивалентность доказана

Отсюда следует, что минимальный многочлен единственен с точностью до умножения на константу

### 5.4 Изоморфизмы

**Опр** *Изоморфизм* Линейное биективное отображение

**Опр** *Изоморфные векторные пространства* Между ними существует изоморфизм

**Утв** *Обратный к изоморфизму изоморфизм*

1. Биективность следует из тождеств для обратных функций
2. Далее берутся векторы из образа и на них проверяются аксиомы линейного отображения
3. Итого, обратный к изоморфизму изоморфизм по определению

**Th** *Классификация конечномерных векторных пространств*

*Пространства изоморфны  $\Rightarrow$  их размерности совпадают*

1.  $\Rightarrow$ : из изоморфности следует инъективность, а для инъективных отображений равенство доказано ранее
2.  $\Leftarrow$ : построим изоморфизм между элементами каждого пространства и их координатными столбцами в них по фиксированному базису. Ранее было доказано, что такое разложение единственно. Достаточно обратить какое-то из отображений (по предыдущему утверждению оно тоже будет изоморфизмом). Итого, мы получили композицию изоморфизмов, то есть изоморфизм

**Th** Если конечномерные пространства  $U, V : \dim U = \dim V; e_i$  – базис в  $U$ ,  $\varphi \in L(U, V)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\varphi$  – изоморфизм
2.  $\varphi$  инъективен
3.  $\varphi$  сюръективен



4.  $\varphi(e_i)$  есть базис в  $V$ 

- $1 \Rightarrow 2$  : по определению
- $2 \Rightarrow 3$  : из инъективности следует  $\dim(\varphi(U)) = \dim U \rightarrow \varphi(V) \cong U \rightarrow \varphi$  сюръективно
- $3 \Rightarrow 4$  : это следует из свойства линейной оболочки образов базисных векторов, связи размерности и ранга, определения ранга и базиса
- $4 \Rightarrow 1$  : по критерию инъективности, в силу л.н.з.  $\varphi(e_i)$ ,  $\varphi$  будет инъективно, а из свойства линейной оболочки следует сюръективность  $\varphi$

## 6 Матрица линейного отображения. Координатная запись линейного отображения. Связь операций над матрицами и над линейными отображениями. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базиса

### 6.1 Матрица линейного отображения

**Опр** Матрица линейного отображения Как и в обычном случае, координатные столбцы векторов  $\varphi(e_i)$

Таким образом, существует биекция между  $L(V, W)$  и  $Mat(m, n)$ , как и изоморфизм (проверяется). Отсюда следует, что размерность линейных операторов есть  $mn$

### 6.2 Координатная запись линейного отображения

**Th** Если  $\varphi \leftrightarrow A; a = eX, \varphi(a) = fY$ , то  $y = Ax$

Для доказательства достаточно записать определение координатного столбца, применить к ней  $\varphi$  и в силу коммутативности, поменять местами строки и столбцы, чтобы увидеть запись матричного умножения, что доказывает равенство

**Следствие** Если дано неизвестно в плане линейности отображение  $\varphi$ , такое, что под его действием  $y = Ax$ , то оно линейное

В силу наличия биекции между матрица и линейными отображениями, найдём такое  $\phi$ . В таком случае по Th., они будут иметь одинаковую координатную запись  $y = Ax$ , то есть равны и  $\varphi$  линейно

**Th** Если линейное преобразование  $\varphi$  таково, что  $\varphi(e_i) = e'_i$ , то  $A : A \leftrightarrow \varphi$  есть матрица перехода между базисами

Следует из определений (матрица линейного преобразования будет удовлетворять определению матрицы перехода)

### 6.3 Связь операций над матрицами и над линейными отображениями

**Утв** Композиции линейных отображений соответствует произведение соответствующих матриц

Доказывается по определению (подстановкой)

**Следствие** Обратному отображению соответствует обратная матрица

Следует из предыдущего утверждения и того, что тождественному отображению соответствует единичная матрица

**Следствие**  $P(\varphi) \leftrightarrow P(A)$

**Следствие**  $\varphi \leftrightarrow A$  задаёт изоморфизм алгебр линейных преобразований и квадратных матриц

То есть изоморфизм группы биективных линейных преобразований и группы невырожденных матриц

### 6.4 Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базиса

**Th** Если  $L(V, W); S : e' = eS; y = Ax, y' = Ax'; f' = fR$ , то  $A' = R^{-1}AS$  (матрица линейного отображения в другом базисе)

Доказывается путём подстановок и комбинаций равенств

В частном случае  $L(V, V)A' = S^{-1}AS$

**Следствие** Ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора базисов в пространствах

Потому что мы домножаем слева и справа на невырожденные матрицы

## 7 Ядро и образ, их описание в терминах матрицы линейного отображения. Критерий инъективности. Связь между размерностями ядра и образа

### 7.1 Ядро и образ, их описание в терминах матрицы линейного отображения

**Опр** Образ линейного отображения Множество всех векторов  $V$  под действием  $\varphi \in L(V, W)$

**Th** Координатное описание образа

Если  $\varphi \in L(V, W)$ , а  $b = fY$ , то  $b \in \text{Im } \varphi \Leftrightarrow Y \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

Это следует из записи образа через линейную оболочку действия  $\varphi$  на базисные векторы, определения матрицы линейного отображения и того факта, что  $b = fY$  есть л.к. столбцов  $Y$

Отсюда также следует, что размерность образа равна рангу матрицы линейного отображения

**Утв** В случае  $\varphi \in L(V, W)$  прообразы образов в подмножестве  $W$  являются подмножеством  $V$

**Опр** Ядро линейного отображения Множество всех векторов  $V$ , которые зануляются под действием  $\varphi \in L(V, W)$

То есть ядро есть подмножества  $V$ . Также ядро можно охарактеризовать как полный прообраз нулевого пространства, поэтому если ядро пусто, то оператор невырожден

**Th** Координатное описание ядра

Если  $\varphi \in L(V, W)$ , а  $a \in V : a = eX$ , то  $a \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow AX = 0$

В обе стороны по определению ядра

Другими словами, в терминах координатных столбцов ядро задается как общее решение однородной СЛУ  $Ax = 0$

**Следствие**  $\dim \text{Ker } \varphi = n - \text{rg } A$

### 7.2 Критерий инъективности

**Th** Критерий инъективности

Если  $\varphi \in L(V, W)$ , инъективно  $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi = 0$

$\rightarrow$ : пользуемся  $\varphi(0) = 0 \leftarrow$ : от противного с использованием определения инъективности

### 7.3 Связь между размерностями ядра и образа

**Th** В конечномерных пространствах  $\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = n$

Следует из  $\dim \text{Im } \varphi = \text{rg } A$  и  $\dim \text{Ker } \varphi = n - \text{rg } A$

## 8 Аффинные преобразования, их свойства. Аффинная группа

### 8.1 Аффинные преобразования, их свойства

**Опр** Аффинно-линейное преобразование

**Опр** Дифференциал отображения Обозначение элемента  $\varphi \in L(V, V)$

**Опр** Аффинное преобразование Биективное преобразование

**Утв** Преобразование аффинно  $\Leftrightarrow$  его дифференциал биективен

Для доказательства достаточно воспользоваться определением при одной фиксированной точке в нём

**Утв** Композиция линейных и аффинных преобразований линейна и аффинна соответственно, а их дифференциал есть произведение дифференциалов

Следует из определения и того, что композиция биективных отображений биективна

**Утв** Обратное к аффинному отображению отображение аффинно

Следует из определения

### 8.2 Аффинная группа

Аффинные преобразования образуют группу относительно композиции

**Утв**  $Y = AX + C$

Для доказательства достаточно взять в определении аффинно-линейного преобразования точку  $M = 0$

Отсюда следует, что любое аффинное преобразование задаётся параллельным переносом и поворотом вокруг неподвижной точки, то есть линейное преобразование однозначно задаётся точкой и двумя векторами

**Th** Линейное преобразование  $f$  аффинно  $\Leftrightarrow$  переводит неколлинеарные точки в неколлинеарные

Построим ДСК на наших трёх точках, подействуем на них преобразование и получим новую ДСК.  $f$  однозначно задано этой ДСК. Поэтому  $f$  аффинно  $\Leftrightarrow f$  биективно  $\Leftrightarrow$  неколлинеарная система (л.н.з) переходит в неколлинеарную (в частности, система три точки)

**Th** Связь аффинного преобразования с заменой координат

При аффинном преобразовании координатный столбец вектора не меняется

Достаточно воспользоваться координатной записью вектора, а потом к концевым точкам применить аффинное преобразование

**Th** При аффинном преобразовании

1. прямая переходит в прямую
  2. параллельные прямые переходят в параллельные
  3. отношения длин отрезков сохраняются
  4. центральная симметрия сохраняется
1. достаточно параметризовать прямую и применить определение к концевым точкам
  2. аналогичным образом в силу линейности (из определения) сохраняются отношения (длин отрезков и расстояния между прямыми)
  3. отношения длин отрезков сохраняются
  4. при центральной симметрии для любых двух симметричных точек центр есть середина соответствующего отрезка, а так как отношения сохраняются, то получаем сохранение определения

**Th** Изменение площадей

При аффинном преобразовании, чей дифференциал имеет матрицу  $A$ , площадь фигуры умножается на  $|\det A|$

Покажем на примере параллелограмма. Достаточно расписать определение ориентированной площади, применить преобразование и взять модуль (настоящая площадь неотрицательна)

**Th** При аффинном преобразовании порядок алгебраической кривой не меняется

Так как при аффинном преобразовании координаты не меняются, то не поменяется и многочлен, задающий кривую ( скалярное произведение коэффициентов на переменные), как и его порядок

## Структура линейного преобразования

### 9 Инвариантные подпространства. Ограничение оператора на инвариантное подпространство. Фактороператор

#### 9.1 Инвариантные подпространства

**Опр** Инвариантное подпространство Образ лежит в нём же

**Утв** Сумма и пересечение инвариантных подпространств инвариантно

Доказывается поэлементной проверкой определения

**Утв** В случае коммутирующих преобразований ядро и образ одного инвариантно относительно другого Доказывается по определению

**Следствие** Ядро и образ многочлена  $f(\varphi)$  инвариантны относительно  $\varphi \in L(V, V)$

**Утв**  $U$  инвариантно относительно  $\varphi \Leftrightarrow U$  инвариантно относительно  $\varphi - \lambda, \lambda \in \mathbb{F}$

Доказывается проверкой в одну сторону и путём взятия другой  $\lambda$  в обратную

Таким образом, в случае  $\text{Im}(\varphi - \lambda) \subset U \rightarrow U$  инвариантно  $\varphi$

#### 9.2 Ограничение оператора на инвариантное подпространство

**Утв** Если  $U$  инвариантно относительно  $\varphi$  – изоморфизма, то  $U$  инвариантно относительно  $\varphi^{-1}$

Достаточно рассмотреть сужение  $\varphi$  на  $U$ . В силу инъективности это будет изоморфизм. Тогда обратим его и получаем требуемое

**Утв** Если  $U_k$  инвариантно относительно линейной оболочки первых  $k$  векторов  $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, i \in \overline{k+1, n}, j \in \overline{1, k}$ , то есть матрица имеет блочно-диагональный вид, где второй квадрант есть сужение  $\varphi$  на  $U_k$

Достаточно воспользоваться определением матрицы линейного преобразования и вспомнить, что у нас базис не меняется

**Утв** Если  $\varphi \in L(V, V)$ , а  $P(\varphi)$ ,  $\deg P = k$  вырожден, то существует не более чем  $k$ -мерное инвариантное подпространство  $V$  относительно  $\varphi$

1. Возьмём произвольный элемент ядра  $a$  и покажем, что  $U = \langle a, \varphi(a), \dots, \varphi^{k-1}(a) \rangle$  инвариантно относительно  $\varphi$
2. В силу индуктивности  $\varphi^j$ , достаточно доказать лишь что  $\varphi^k(a) \in U$
3. Подставляем  $\varphi(a)$  в многочлен и получаем, что  $\varphi^k(a)$  линейно выражается через остальные члены, что доказывает инвариантность и утверждение

### 9.3 Фактороператор

**Опр Фактороператор** Линейный оператор, определённый формулой  $(v + U) = \varphi(v) + U, \forall v \in V$

## 10 Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования

### 10.1 Собственные векторы и собственные значения

**Опр Собственное значение** Существует  $a \in V$  :

**Опр Собственный значение** Ненулевой вектор  $a$  преобразования ...

**Утв** Ненулевой вектор  $a$  собственный для  $\varphi \Leftrightarrow \langle a \rangle$  инвариантна относительно  $\varphi$

В силу эквивалентности инвариантности наличию собственного значения

**Утв** Ненулевой вектор  $a$  собственный для  $\varphi$  с собственным значением  $\lambda \Leftrightarrow a \in \ker(\varphi - \lambda)$

Достаточно вспомнить определение ядра

### 10.2 Собственные подпространства

**Опр Собственное подпространство** Ядро  $\ker(\varphi - \lambda)$ , содержащее ...

**Утв** Сумма подпространств  $V_{\lambda_i}$  прямая

1. От противного: возьмём  $a_1 \in V_{\lambda_1} \cap \sum_i V_{\lambda_i}$ , то есть  $a_1 = \sum_i a_i$
2. Применим к этому равенству преобразование  $\Pi_2^k(\varphi - \lambda_k)$
3. Справа у нас получится ноль, а слева – нет,  $w$

### 10.3 Характеристический многочлен и его инвариантность

**Опр Характеристический многочлен** Функция от константы. Не забыть про обозначение

**Опр Характеристическое уравнение** Равенства многочлена нулю

**Опр Характеристические числа** Корни характеристического многочлена

Характеристический многочлен можно записать и с учётом алгебраической кратности его корней

**Утв** Характеристический многочлен имеет вид  $(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr} A + \dots + |A|$

Достаточно знать, что определитель есть функция от всех элементов матрицы, затем просто расписать коэффициенты перед требуемыми степенями

Отсюда, в соответствии с теоремой Виета, сумма всех характеристических чисел равна следу, а произведение есть  $\det A$

Стоит учесть, что данное утверждения верно лишь в  $\mathbb{C}$ . В  $\mathbb{R}$  собственные значения есть только вещественные характеристические числа

**Th**

1. В  $\mathbb{C}$  у  $\varphi \exists$  одномерное инвариантное подпространство
2. В  $\mathbb{R}$  у  $\varphi \exists$  одномерное инвариантное подпространство в случае нечётного  $n$
3. У  $\varphi \exists$  ненулевое инвариантное подпространство размерности не выше 2

1. По основной теореме алгебры у любого многочлена есть по крайней мере один комплексный корень
2. Из анализа известно, что в таком случае у многочлена есть по крайней мере один вещественный корень
3. Если у многочлена есть вещественный корень, то у него есть и одномерное инвариантное подпространство. Иначе рассмотрим комплексный корень. Из анализа известно, что его сопряжённый тоже будет корнем характеристического многочлена. Тогда многочлен  $P$  с этими коэффициентами будет вещественен, а  $\det P(A) = 0$  в силу наличия соответствующих собственных значений. В таком случае ранее было доказано, что у  $\varphi \exists$  двумерное инвариантное подпространство

## 10.4 Определитель и след преобразования

**Утв** Если матрица оператора верхнетреугольна, то характеристические числа характеристического многочлена совпадают с диагональными элементами

Верно в силу того, что определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

**Th** Инвариантность характеристического многочлена

Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса

Достаточно записать характеристическое уравнение в двух базисах, перейти от одного к другому с помощью матрицы перехода и преобразовать выражение

**Следствие** Определитель, след, набор характеристических чисел матрицы оператора не зависят от выбора базиса

Все вышеперечисленные термины выражаются через коэффициенты характеристического многочлена

## 11 Линейная независимость собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Критерий диагонализированности преобразования

### 11.1 Линейная независимость собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям

**Th**  $\lambda$  – собственное значение  $\Leftrightarrow \lambda$  характеристическое число

1.  $\lambda$  – собственное значение  $\Leftrightarrow \ker(\varphi - \lambda) \neq O$
2.  $\Leftrightarrow$  соответствующая СЛУ имеет нетривиальное решение
3.  $\Leftrightarrow$  соответствующая квадратная матрица вырождена
4.  $\Leftrightarrow$  соответствующий определитель равен нулю
5.  $\Leftrightarrow \lambda$  характеристическое число

**Th** Собственные векторы различных собственных значений л.н.з.

1. Доказывается по индукции. База очевидна
2. Докажем переход. Для этого рассмотрим  $k + 1$  собственный вектор, из которых  $k$  заведомо л.н.з
3. Применим к их л.к.  $\varphi$ . Из неё вычтем правильную л.к. первых  $k$  векторов (чтобы обнулить  $\alpha_{k+1}$ )
4. Итого,  $k$  коэффициентов нули, а значит, и  $k + 1$ -й тоже, то есть система осталась л.н.з.

### 11.2 Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения

**Опр** Геометрическая кратность Размерность собственного подпространства

**Th** Геометрическая кратность не превосходит алгебраическую

1. Рассмотрим собственное пространство размерности  $s$  и произвольный базис в нём. Дополним его до базиса во всём пространстве
2. Запишем матрицу линейного оператора. Она будет иметь блочно-диагональный вид

3. Вычислим характеристический многочлен этой матрицы и непосредственно убедимся в доказанном утверждении (потому как в оставшемся многочлене собственное значение может быть корнем; в противном случае достигается равенство)

### 11.3 Критерий диагонализуемости преобразования

**Опр** *Диагонализуемое преобразование* Существует базис, в котором матрица имеет диагональный вид

**Th** *Первый критерий диагонализуемости*

Если  $\varphi \in L(V, V)$  имеет попарно различные собственные значения  $\lambda_i$  кратностей  $s_i$ , то следующие условия эквивалентны:

1.  $\varphi$  диагонализуем
  2. В пространстве существует базис из собственных векторов
  3.  $\dim V_{\lambda_i} = s_i$
  4.  $V = \oplus_i V_{\lambda_i}$
- $1 \Leftrightarrow 2$  : в силу того, что матрица  $A$  есть склейка применения  $\varphi$  на базисные векторы
  - $2 \Rightarrow 3$  : пользуемся необходимыми условиями и суммируем  $t_i \leq \dim V_{\lambda_i} \leq s_i$  по  $i$
  - $3 \Rightarrow 4$  : так как собственные пространства разных собственных значений не пересекаются, то они разлагаются в прямую сумму. Сумма их размерностей будет  $\sum_i s_i = n$ , то есть всего пространства
  - $4 \Rightarrow 2$  : достаточно выбрать базис в каждом подпространстве и объединить. Ранее доказывалось, что он будет базисом во всём пространстве (второй критерий прямой суммы)

**Следствие** *Достаточно условие диагонализуемости*

Если характеристический многочлен имеет  $n$  различных корней из поля, то  $\varphi$  диагонализуем

Действительно, в таком случае у каждого собственного подпространства размерность единица и они располагаются на главной диагонали