Конспект билетов
Теория вероятностей

Содержание

1 Дискретное вероятностное пространство, классическая вероятность, геометрическая вероятность

Опр *Элементарные события (исходы) и их пространство*
Опр *Дискретное вероятностное пространство*
Опр *Классическая вероятностная модель*
Опр *Модель геометрической вероятности*

2 Колмогоровское определение вероятностного пространства. Свойства вероятности

2.1 Колмогоровское определение вероятностного пространства

Опр *Событие и вероятностная мера (вероятность)*

2.2 Свойства вероятности

Вероятность обладает 7 свойствами; доказывать некоторые из них лучше, опираясь на рисунок
Опр *Вероятностное пространство*

3 Независимость событий, условная вероятность, формула полной вероятности, формула Байеса

Опр *Независимые события*
Опр *Условная вероятность*
Опр *Разбиение*
Theorem *Формула полной вероятности*
Theorem *Формула Байеса*

4 Схема испытаний Бернулли: два определения и их эквивалентность

Опр *Попарно независимые события*
Опр *Независимые в совокупности события*
Далее конспект составлен по билету №4 Победоса
Опр 1 *Схема испытаний Бернулли*
Опр 1 *Схема испытаний Бернулли*

5 Распределения в $\mathbb{R}$, функция распределения и её свойства. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ по функции распределения

5.1 Распределения в $\mathbb{R}$, функция распределения и её свойства

Опр *Борелевская сигма-алгебра* $\mathcal{B}(\mathbb{R}$
Опр *Распределение вероятностей*
Опр *Функция распределения*
Свойства *Функции распределения*
Первое свойство тривиально. Во втором надо понимать связь пределов и параметров. С третьим я не согласен

5.2 Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ по функции распределения

Theorem

6 Дискретные и абсолютно непрерывные распределения в $\mathbb{R}$. Плотность. Связь плотности и функции распределения. Примеры

6.1 Дискретные и абсолютно непрерывные распределения в $\mathbb{R}$

Опр *Дискретные распределения вероятности*

6.2 Плотность

Опр *Абсолютно непрерывное распределение, его плотность*

6.3 Связь плотности и функции распределения

Плотность и функция распределения связаны формулой Ньютона–Лейбница

6.4 Примеры

By the text

7 Распределения в $\mathbb{R}^n$, функция распределения и её свойства. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ по функции распределения (б/д)

7.1 Распределения в $\mathbb{R}^n$, функция распределения и её свойства

By the text
Многомерная функция распределения обладает 3 свойствами. Первое доказывается вводом функции одной переменной (как с частными производными), а затем совместно с остальным свойствами доказывается аналогично одномерному случаю

7.2 Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ по функции распределения (б/д)

By the text

8 Дискретные и абсолютно непрерывные распределения в $\mathbb{R}^n$. Плотность. Связь плотности и функции распределения. Примеры

By the text

9 Случайные величины и случайные векторы. Характеристики случайной величины (вектора): распределение вероятностей, функция распределения, плотность. Действия над случайными величинами (векторами)

9.1 Случайные величины и случайные векторы

By the text

9.2 Характеристики случайной величины (вектора): распределение вероятностей, функция распределения, плотность

By the text
Утв
Для доказательства необходимости поместим борелевское множество на i место и воспользуемся сохранением бореливости. Для достаточно распишем, что такое декартово произведение и воспользуемся свойством сигма-алгебры

9.3 Действия над случайными величинами (векторами)

Theorem
Доказывается по определению случайного вектора

10 Теорема о плотности $\varphi(\xi)$. Маргинальные распределения. Вычисление маргинальной плотности

10.1 Теорема о плотности $\varphi(\xi)$

Theorem

1. Перейдём к интегралу плотности вероятности и разделим M на два множества. Та часть, что не пересекается с областью значений, вклад в интеграл давать не будет.

2. Сделаем замену переменных в соответствии с теоремой и проследим, что множество интегрирования верно

10.2 Маргинальные распределения

By the text

10.3 Вычисление маргинальной плотности

Theorem *Вычисление маргинальной плотности*
Расписываем плотность по определению и находим общие части с переменными, которые могут именоваться по-другому

11 Случайные величины и случайные векторы. Независимость и критерий независимости. Независимость функций от векторов

11.1 Случайные величины и случайные векторы. Независимость и критерий независимости

By the text
Theorem *Критерий независимости*
Необходимость докажем, используя определение декартова произведения Для доказательства достаточности распишем вторую разность
By the text

11.2 Независимость функций от векторов

By the text

12 Независимость случайных величин. Формула свёртки и её обобщения для разности, произведения и частного

By the text

13 Математическое ожидание случайной величины: дискретные и абсолютно непрерывные величины. Примеры

By the text

14 Основные свойства математического ожидания. Математическое ожидание произведения независимых величин

By the text

В 7 свойстве расписываем заведомо неотрицательную величину и получаем условие на детерминант, откуда получаем требуемое. В 8 лучше сразу записать произведение дифференциалов

15 Теорема о замене переменных в интеграле Лебега (б/д). Подсчёт математического ожидания от функции от случайной величины. Примеры

By the text

16 Дисперсия, ковариация, корреляция и их свойства. Примеры

Опр *Дисперсия*

Свойства *Дисперсии*

Первое свойство доказывается в силу линейности матожидания (выносим, где надо, скаляры). Это и последнее свойство можно будет доказать с помощью ковариации

By the text

Утв

Лучше доказывать по Википедии

17 Неравенство Коши – Буняковского. Неравенство Маркова. Неравенство Чебышёва. Закон больших чисел в форме Чебышёва

By the text

18 Виды сходимостей и взаимосвязи между ними

By the text

Theorem *О связи видов сходимости*

1. С помощью трёх последовательностей
2. Аналогично.
3. Пользуемся ограниченностью случайной величины, определением непрерывности и в конце расписываем матожидание по линейности: X ограничен из ограниченности индикатора, Y — из определения непрерывности, Z — из ограниченности функции на том промежутке

19 Виды сходимостей. Критерий сходимости п.н. Теорема Рисса и её следствие. Наследование сходимости при арифметических операциях

19.1 Виды сходимостей. Критерий сходимости п.н.

Theorem *Критерий сходимости п.н.*

Рассмотрим определение несходимости и введём обозначение для кванторной записи. Смотрим объединение, затем переходим к всеобъемлющему обозначению и к пределу в силу свойства меры

19.2 Теорема Рисса и её следствие

Theorem *Рисса.*

1. Записываем определения сходимости по вероятности и предела.
2. Переходим к объединению по k без ε, затем череда сравнений и неравенств предельный переход
3. В конце пользуемся критерием сходимости п.н.

By the text
В доказательстве наследования для сходимости по распределению везде пользуемся следствием теоремы Рисса

20 Критерий слабой сходимости в терминах функции распределения (б/д). Центральная предельная теорема (б/д). Переформулировка в интегральном виде. Теорема Муавра-Лапласа: локальная и интегральная

By the text

20.1 Теорема Муавра-Лапласа: локальная и интегральная

Лучше всего доказывать по лекции 9 (49:15)
Theorem *Муавра-Лапласа локальная*

1. Воспользуемся формулой Стирлинга для всех факториалов
2. Неравенство с φ сведём к равномерной сходимости.
3. Распишем вероятность суммы и перейдём к задаче сведения степеней к экспоненте. Для этого прологарифмируем, введём функцию, посчитаем её производные в разных точках.
4. Воспользуемся остаточным членом в форме Лагранжа.
5. Перейдём к равномерной сходимости и получим требуемое

Theorem *Муавра-Лапласа интегральная*
Интегральная теорема следует из локальной. Надо лишь расписать сумму, вычленить мелкость разбиения и перейти к пределу, то есть интегралу

21 Закон больших чисел и усиленный закон больших чисел (б/д)

By the text

22 Предельная теорема Пуассона.

Theorem *Предельная Пуассона*
Рекомендуется доказывать по билету №22 Победоса Рекомендуется доказывать по билету №22 Победоса

23 Гауссовские векторы. Эквивалентность определений (доказательство в одну сторону). Теорема о том, что распределение гауссовского вектора однозначно задаётся ковариационной матрицей, вектором средних. Плотность гауссовского вектора. Независимость компонент

23.1 Гауссовские векторы. Эквивалентность определений (доказательство в одну сторону).

Theorem *О равносильных определениях гауссовского вектора*

1. $1 \Rightarrow 2$: записываем производящую функцию сдвига вектора.
2. Перейдём к диагональной матрице, но не с помощью одного поворота, а двух, где второй хитро задан.
3. Посчитаем характеристическую функцию нового вектора и получим состав этого нового вектора.
4. Вернёмся к исходному вектору и получим требуемое.

23.2 Плотность гауссовского вектора.

Theorem *О плотности*

1. Рассмотрим несодержательный вырожденный случай и перейдём к невырожденному.
2. Введём матрицу A и рассмотрим диффеоморфизм с ней связанный.
3. Перейдём к обратному диффеоморфизму и вычислим плотность уже требуемого вектора

23.3 Теорема о том, что распределение гауссовского вектора однозначно задаётся ковариационной матрицей, вектором средних

23.4 Независимость компонент

Следствие
Действительно, сведём к характеристической функции и зафиксируем отсутствие недиагональных компонент

24 Случайные процессы. Дискретное и непрерывное время. Траектории случайного процесса. Примеры

By the text

25 Симметричное случайное блуждание на прямой. Траектории. Распределение: $P(S_n = k)$. Принцип отражения и вероятность возвращения в нуль

By the text

25.1 Принцип отражения и вероятность возвращения в нуль.

1. Сведём задачу к точке (1,1) и посчитаем для конкретного n.
2. Просуммируем для всех n. Сумму можно посчитать явно и после разных подстановок получить требуемое

26 Распределение максимума случайного блуждания. Закон повторного логарифма (б/д)

By the text
В следствии из распределения модуля используем факт: $P(S_n) = 1 - F_{S_n}(x-1), P(M_n) = 1 - F_{M_n}(x-1)$
By the text

27 Ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона. Производящая функция и её свойства (б/д). Вероятность вырождения и технология ее вычисления

By the text

Утв

Если процесс выродился на n шаге, то он выродился и на последующих. Отсюда возрастание и значение искомого предела получается q

By the text

28 Производящая функция числа частиц в момент времени n, общего числа частиц к моменту n и общего числа частиц за все время. Технология вычисления вероятности того, что всего в процессе было k частиц

By the text

В процессе доказательств утверждений не обращать внимание на комментарии в квадратных скобках

29 Ковариацонная функция случайного процесса и её свойства. Гауссовские процессы. Критерий существования (б/д)

By the text

30 Эквивалентные определения винеровского процесса

By the text

31 Винеровский процесс. Существование. Свойства траекторий: непрерывность и недифференцируемость траекторий, закон повторного логарифма (б/д)

By the text

32 Марковское свойство и свойство отражения винеровского процесса. Марковский момент и момент остановки. Строго марковское свойство и усиленное свойство отражения (б/д)

By the text

Принцип отражения следует из марковского свойства

By the text

33 Марковский момент и момент остановки. Примеры. Теорема Башелье. Распределение первого момента пересечения уровня x и его среднее

By the text

Для доказательства утверждения специально берём рациональные параметры, чтобы получить счётное объединение

By the text