

Содержание

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений. Теорема Фубини | 3 |
| 1.1 | Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений | 3 |
| 1.2 | Теорема Фубини | 3 |
| 2 | Теорема о замене переменных в кратном интеграле | 3 |
| 3 | Теорема о построении криволинейной системы координат исходя из её части | 4 |
| 4 | Гладкие подмногообразия пространства R^N. Теорема о гладком подмногообразии пространства R^N, заданном системой уравнений | 4 |
| 4.1 | Гладкие подмногообразия пространства R^N | 4 |
| 4.2 | Теорема о гладком подмногообразии пространства R^N , заданном системой уравнений | 4 |
| 5 | Геометрический касательный вектор к подмножеству пространства \mathbb{R}^n. Теоремы о структуре множества $T_P(M)$ геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию M пространства \mathbb{R}^n в общем случае и в случае, когда M заданно системой уравнений | 4 |
| 5.1 | Геометрический касательный вектор к подмножеству пространства \mathbb{R}^n | 4 |
| 5.2 | Теоремы о структуре множества $T_P(M)$ геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию M пространства \mathbb{R}^n в общем случае и в случае, когда M заданно системой уравнений | 4 |
| 6 | Необходимые условия безусловного экстремума. Достаточные условия безусловного экстремума | 5 |
| 6.1 | Необходимые условия безусловного экстремума | 5 |
| 6.2 | Достаточные условия безусловного экстремума | 5 |
| 7 | Клеточные множества. Верхняя мера Лебега и ее счетная полуаддитивность. Мера Лебега и ее счетная аддитивность. Непрерывность меры Лебега. Теорема о том, что семейство измеримых подмножеств \mathbb{R}^n является σ-кольцом | 5 |
| 7.1 | Клеточные множества | 5 |
| 7.2 | Верхняя мера Лебега и ее счетная полуаддитивность | 6 |
| 7.3 | Мера Лебега и ее счетная аддитивность | 7 |
| 7.4 | Непрерывность меры Лебега | 7 |
| 7.5 | Теорема о том, что семейство измеримых подмножеств \mathbb{R}^n является σ -кольцом | 8 |
| 8 | Измеримые функции. Измеримость суммы и поточечного предела измеримых функций. Интеграл Лебега для счетно-ступенчатых и для измеримых функций, линейность интеграла Лебега. Теорема о существовании интеграла от неотрицательной измеримой функции. Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее положительной и отрицательной составляющих. Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее модуля. Интегральная теорема о среднем. Счетная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования | 8 |
| 8.1 | Измеримые функции | 8 |
| 8.2 | Измеримость суммы и поточечного предела измеримых функций | 9 |
| 8.3 | Интеграл Лебега для счетно-ступенчатых и для измеримых функций, линейность интеграла Лебега | 9 |
| 8.4 | Теорема о существовании интеграла от неотрицательной измеримой функции | 10 |
| 8.5 | Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее положительной и отрицательной составляющих | 11 |
| 8.6 | Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее модуля | 11 |
| 8.7 | Интегральная теорема о среднем | 11 |
| 8.8 | Счетная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования . | 12 |
| 9 | Непрерывность интеграла как функции верхнего предела. Существование первообразной для непрерывной на отрезке функции. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы замены переменных в интеграле и интегрирования по частям | 12 |
| 9.1 | Непрерывность интеграла как функции верхнего предела | 12 |
| 9.2 | Существование первообразной для непрерывной на отрезке функции | 13 |

| | | |
|------|--|-----------|
| 9.3 | Формула Ньютона-Лейбница | 13 |
| 9.4 | Формулы замены переменных в интеграле и интегрирования по частям | 13 |
| 10 | Мера декартова произведения двух конечно измеримых множеств. Выражение меры множества под графиком интегрируемой функции через интеграл. Площадь круга. Выражение объема тела вращения и длины кривой через интегралы. Связь интегрируемости по Риману и интегрируемости по Лебегу. Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции | 13 |
| 10.1 | Мера декартова произведения двух конечно измеримых множеств | 13 |
| 10.2 | Выражение меры множества под графиком интегрируемой функции через интеграл | 14 |
| 10.3 | Площадь круга | 15 |
| 10.4 | Выражение объема тела вращения и длины кривой через интегралы | 15 |
| 10.5 | Связь интегрируемости по Риману и интегрируемости по Лебегу | 15 |
| 10.6 | Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции | 16 |
| 11 | Теорема Б. Леви о монотонной сходимости. Теорема Лебега об ограниченной сходимости | 16 |
| 11.1 | Теорема Б. Леви о монотонной сходимости | 16 |
| 11.2 | Теорема Лебега об ограниченной сходимости | 17 |
| 12 | Несобственный интеграл. Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу. Критерий Коши. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов | 17 |
| 12.1 | Несобственный интеграл | 17 |
| 12.2 | Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу | 17 |
| 12.3 | Критерий Коши | 18 |
| 12.4 | Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов | 18 |
| 13 | Связь поточечной и равномерной сходимостей для функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Обобщенный признак сравнения для функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Признаки Дирихле и Лейбница равномерной сходимости функционального ряда. Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность равномерного предела, непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными слагаемыми. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Дифференцирование предельной функции и почленное дифференцирование функционального ряда | 18 |
| 13.1 | Связь поточечной и равномерной сходимостей для функциональной последовательности | 18 |
| 13.2 | Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности | 18 |
| 13.3 | Обобщенный признак сравнения для функциональных рядов | 19 |
| 13.4 | Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда | 19 |
| 13.5 | Признаки Дирихле и Лейбница равномерной сходимости функционального ряда | 19 |
| 13.6 | Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда | 19 |
| 13.7 | Непрерывность равномерного предела, непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными слагаемыми | 19 |
| 13.8 | Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов | 19 |
| 13.9 | Дифференцирование предельной функции и почленное дифференцирование функционального ряда | 20 |
| 14 | Степенные ряды. Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Теорема о круге сходимости степенного ряда. Первая теорема Абеля. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Сохранение радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Достаточное условие аналитичности функции. Пример бесконечно дифференцируемой, но неаналитической функции. Представление экспоненты комплексного аргумента степенным рядом. Формулы Эйлера. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Представление степенной и логарифмической функций степенными рядами | 20 |
| 14.1 | Степенные ряды | 20 |

| | | |
|-------|---|----|
| 14.2 | Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости | 21 |
| 14.3 | Теорема о круге сходимости степенного ряда | 21 |
| 14.4 | Первая теорема Абеля | 21 |
| 14.5 | Теорема о равномерной сходимости степенного ряда | 21 |
| 14.6 | Вторая теорема Абеля | 22 |
| 14.7 | Сохранение радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда | 22 |
| 14.8 | Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда | 22 |
| 14.9 | Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора | 22 |
| 14.10 | Достаточное условие аналитичности функции | 23 |
| 14.11 | Пример бесконечно дифференцируемой, но неаналитической функции | 23 |
| 14.12 | Представление экспоненты комплексного аргумента степенным рядом | 23 |
| 14.13 | Формулы Эйлера | 24 |
| 14.14 | Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме | 24 |
| 14.15 | Представление степенной и логарифмической функций степенными рядами | 24 |

1 Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений. Теорема Фубини

1.1 Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений

Л1

Пусть есть счётный набор конечно измеримых убывающих вложенных множеств X_i . Мера множества, являющегося счётным пересечением есть предел мер

Л2

Если интеграл неотрицательной функции по множеству равен нулю, то сама функция равна нулю почти на всём множестве

Th О выражении меры множества через интеграл от меры сечений

1. Для начала докажем для клетки. Её сечение будет принимать простой вид, в зависимости от принадлежности x , что даёт простое интегрирование и доказывает теорему
2. Теперь докажем для счётного набора (объединения) клеток. Задача сводится к предыдущей
3. Найдём меру множества, являющегося счётным пересечением объединения счётного числа клеток
4. Определим убывающую последовательность множеств
5. Далее считаем меры составляющих, по ходу дела используя теорему Лебега об ограниченной сходимости
6. Теперь рассмотрим случай множества нулевой меры и с помощью всяких сравнений и пределов докажем требуемое
7. В конце рассмотрим общий случай конечно измеримого множества
8. Используем все предыдущие леммы и случаи и получаем требуемое при почти всех x

1.2 Теорема Фубини

Th О геометрическом смысле интеграла

Th Фубини

2 Теорема о замене переменных в кратном интеграле

Опр C^k -гладкий диффеоморфизм

Опр Носитель функции

Th О замене переменных в кратном интеграле

Л2 Теорема справедлива, если функция f непрерывна на Y , а её носитель компактен и лежит в Y

1. Убрав условие 3, мы сделали теорему локальной (для каждой точки существует окрестность, где выполнено условие 3)
2. Воспользуемся теоремой о расщеплении отображений, о неявной функции, критерием компактности, теоремой о разбиении единицы
3. Это позволяет разбить функцию на сумму. Утверждение для фиксированного индекса (на его области значений) верно по предыдущей лемме

Л4 Теорема справедлива, если функция f непрерывна на Y

1. Рассмотрим неотрицательно значные функции и введём хитрые множества Y_k и функции f_k
2. Докажем, что $\subset f_k$ исходя из определения f_k . Получили ограниченность и замкнутость f_k
3. Из построения множеств следуют включения, а за ними и неравенства
4. Теперь покажем, что f_k стремятся к f через определения и построения условий
5. Запишем следствия из предела и перейдём и завершим доказательство с помощью теоремы Б. Леви
6. В общем случае разобьём f на f_+ и f_- и получим искомое равенство

3 Теорема о построении криволинейной системы координат исходя из её части

Опр Криволинейная система координат на множестве A

Опр Координатный набор

Th О построении криволинейной системы координат исходя из её части

1. Рассмотрим отображение из известного набора функций и матрицу Якоби этого отображения
2. Рассмотрим координатные строки и матрицу в точке и применим теорему о ранге матрицы
3. Определим новые гладкие функции и всеобъемлющее отображение, рассмотрим новую матрицу Якоби
4. Применим теорему об обратном отображении и получим требуемое

4 Гладкие подмногообразия пространства \mathbb{R}^N . Теорема о гладком подмногообразии пространства \mathbb{R}^N , заданном системой уравнений

4.1 Гладкие подмногообразия пространства \mathbb{R}^N

Опр Гладкое n -мерное подмногообразие пространства \mathbb{R}_p^N в точке $P \in M$

Опр Канонический и выпрямляющий диффеоморфизм

Утв Гладкое n -мерное подмногообразие пространства

4.2 Теорема о гладком подмногообразии пространства \mathbb{R}^N , заданном системой уравнений

Th О гладком подмногообразии, заданном системой уравнений

1. Сначала построим отображения до гладкого диффеоморфизма по теореме о построении криволинейной системы координат, исходя из её части
2. Докажем, что выпрямляемость обратного диффеоморфизма. Это делается через анализ множеств и из их свойств

5 Геометрический касательный вектор к подмножеству пространства \mathbb{R}^n . Теоремы о структуре множества $T_P(M)$ геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию M пространства \mathbb{R}^n в общем случае и в случае, когда M заданно системой уравнений

5.1 Геометрический касательный вектор к подмножеству пространства \mathbb{R}^n

Опр Геометрический касательный вектор к множеству в точке

Опр Геометрическое касательное пространство

5.2 Теоремы о структуре множества $T_P(M)$ геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию M пространства \mathbb{R}^n в общем случае и в случае, когда M заданно системой уравнений

Th. 1 О структуре множества геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию

1. Воспользуемся определением канонического диффеоморфизма, леммой о $T_P(M)$ к линейному пространству и о локальности $T_P(M)$
2. Запишем вид $T_P(M)$ и перейдём к локальной параметризации (из-за правил умножения матриц)

3. Итого, касательные векторы есть л.к. столбцов матрицы Якоби, а само $T_P(M)$ является n -мерным линейным подпространством \mathbb{R}^N

Th. 2 О структуре множества геометрических касательных векторов к подмногообразию, заданному системой уравнений

1. Пишем те же рассуждениями, что и в теореме о гладком подмногообразии, заданном системой уравнений
2. Введём новую переменную и воспользуемся предыдущей теоремой

6 Необходимые условия безусловного экстремума. Достаточные условия безусловного экстремума

6.1 Необходимые условия безусловного экстремума

Опр Точка экстремума

Опр Точка (не)строгого локального минимума (максимума) функции на множестве

Опр Сумма ряда Предел частичных сумм

Опр (Рас)ходящийся ряд Предел частичных сумм (бес)коначен

Th Необходимое условие экстремума

Для доказательства воспользуемся определением градиента и рассмотрим функцию одной переменной, где применим теорему Ферма

6.2 Достаточные условия безусловного экстремума

Опр Стационарная точка

Th Достаточные условия экстремума

1. Разложим Δf по формуле Тейлора с использованием определения стационарной точки
2. Воспользуемся леммой и определением o -малого и предела
3. Теперь перепишем Δf и получим требуемое. В случае отрицательной определённости рассуждения аналогичны (f меняется на $-f$)
4. В знаконеопределённом случае рассмотрим выделенные направления и запишем Δf
5. Воспользуемся определением предела и выберем достаточно малые t_i для построения противоречия
6. В последнем случае приводятся два контрпримера $f = x^4$ и $f = x^3$

7 Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума. Необходимые условия условного экстремума. Достаточные условия условного экстремума

7.1 Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума

Опр Функция Лагранжа

Опр Множители Лагранжа

7.2 Необходимые условия условного экстремума

Th Необходимые условия экстремума

Сделаем общие построения для доказательства теорем

1. Воспользуемся теоремой о построении криволинейной системы координат, исходя из её части и введём новые обозначения для обратных функций
2. Тогда можно расписать обратную функцию Лагранжа и показать, что новая задача эквивалентна старой

Теперь докажем саму теорему

1. Воспользуемся теоремой о необходимом условии безусловного экстремума и выберем специальные множители Лагранжа
2. Вернёмся к исходным переменным, воспользовавшись теоремой о дифференцировании сложной функции и значениями $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}$
3. Вышеперечисленное показывает, что x_0 — стационарная точка функции Лагранжа, как и нашей исходной функции

7.3 Достаточные условия условного экстремума

Th Достаточные условия экстремума

1. Перейдём к обратной функции Лагранжа, для которой точка y_0 стационарна
2. Исходная точка будет стационарной, если в этой точке обратная функция совпадёт с обратной функцией Лагранжа, то есть k' для обратной функции Лагранжа будет отрицательная определена
3. Покажем, что это эквивалентно отрицательной определённости k . Для этого воспользуемся инвариантностью первого дифференциала, распишем второй и воспользуемся стационарностью точки
4. Согласно теореме о структуре множества геометрических касательных векторов к подмногообразию, заданному системой уравнений, получаем эквивалентность структур форм, что нам и требуется

8 Измеримые функции. Измеримость суммы и поточечного предела измеримых функций. Интеграл Лебега для счетно-ступенчатых и для измеримых функций, линейность интеграла Лебега. Теорема о существовании интеграла от неотрицательной измеримой функции. Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее положительной и отрицательной составляющих. Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее модуля. Интегральная теорема о среднем. Счетная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования

8.1 Измеримые функции

Опр Измеримая функция $\forall C \in \mathbb{R} L_{<C} = \{x \in X : f(x) < C\}$ измеримо

Л1 Об измеримых функциях

Если функция измерима, то $L_{\leq}, L_{\geq}, L_{>}$ измеримы

1. Фиксируем $\forall C \in \mathbb{R}$ и доказываем измеримость L_{\leq} , пользуясь определением σ -кольца
2. Остальные множества доказываются через измеримость разности

Л2 Открытые и замкнутые множества измеримы

1. Последовательно воспользуемся определением открытости и всюду плотностью \mathbb{Q} , чтобы покрыть нашу точку рациональной клеткой
2. Так как мы брали рациональные числа, то набор различных клеток будет не более, чем счётный. Таким образом, открытое множество является объединением счетного набора измеримых множеств, то есть измеримым множеством
3. Замкнутое множество является дополнением открытого множества, поэтому измеримо, так как \mathbb{R} есть σ -кольцо

Любая непрерывная функция измерима, потому что её $L_{<}$ открыто, а значит, измеримо по Лебегу

8.2 Измеримость суммы и поточечного предела измеримых функций

Л1 Сумма измеримых функций измерима

1. Расписываем элемент множества $L_<$ для суммы функций, пользуемся всюду плотностью \mathbb{Q} . Мы специально используем \mathbb{Q} для счётности
2. Затем переходим к пересечению множеств и объединению по \mathbb{Q} , что по определению σ -кольца означает измеримость $L_<$, а значит, и суммы функций

Любая линейная комбинация измеримых функций является измеримой функцией. Это следует из того, что операция сложения сохраняет измеримость функций, а операция умножения на число сохраняет измеримость согласно определению измеримой функции

Л2 Поточечный предел измеримых функций измерим

1. Меняем C на C' и объявляем $k \geq N, k \in \mathbb{N}$ в силу определения предела, строгого неравенства и всюду плотности \mathbb{Q} . То есть $x \in L_<$ теперь лежит в пересечении по всем $k \geq N$
2. Затем через операции объединения по C' и N приходим к измеримости нашего множества в силу того, что \mathbb{R} есть σ -кольцо

8.3 Интеграл Лебега для счетно-ступенчатых и для измеримых функций, линейность интеграла Лебега

Опр *Счётно- и конечно-ступенчатая функция* Множество её значений счётно или конечно

Опр *Счётное и конечное разбиение множества* Дизъюнктное покрытие исходного множества

Опр *Измеримое разбиение* Все множества разбиения измеримы по Лебегу

Функция называется счётно-ступенчатой, если существует счётное разбиение области определения и соответствующий набор значений функций, одинаковых на конкретном множестве из разбиения

Если все множества набора измеримы, то функция тоже будет измерима (из определения измеримости функции)

Опр *Интеграл Лебега для счётно-ступенчатой функции*

Сумма произведений мер X_i на значениях функции f_i на этом X_i

Даже если $f_i =, X_i = +\infty$, то их произведение всё равно 0. А если в сумме содержатся разные по бесконечности слагаемые или не существует конечной / бесконечной суммы, то интеграл Лебега для этой функции не существует

Опр *Интегрируемая по Лебегу функция*

Если ряд Лебега для неё сходится абсолютно

Нам существенна абсолютная сходимость, потому как иначе интегрируемость зависела бы от способа разбиения области определения. Это доказывает следующая лемма

Л1 Интеграл Лебега не зависит от измеримого разбиения

1. Пусть есть два различных разбиения. Тогда рассмотрим клетки $X_{ij} = X_i \cap X_j$, среди которых могут быть и пустые клетки
2. Просуммируем по всем таким множествам, пользуясь счётной аддитивностью меры Лебега. Мера X_{ij} не зависит от порядка суммирования (к тому же, ряд сходится абсолютно), поэтому и домножение на f_i и f_j (равные на пересечении), тоже не повлияет на сумму ряда
3. Поэтому можно запросто совершить переход (под знаком равенства) от одной суммы к другой

Утв *Геометрический смысл интеграла Лебега* Декартово произведение (x, y) в \mathbb{R}^{n+1}

Л2 *Линейность интеграла Лебега для счетно-ступенчатых функций*

Доказывается той же идеей, что и предыдущая лемма, используя по ходу дела соответствующие свойства для абсолютно сходящихся рядов

Опр *Почти всюду, почти для всех* За исключением множества нулевой меры

Опр *Верхний и нижний интегралы Лебега* Инфимум (супремум) интеграла по счётно-ступенчатым больше (меньше) нашей

Опр *Интеграл Лебега* Равное значение верхнего и нижнего интегралов Лебега

Опр *Интегрируемая по Лебегу функция* Измеримая с конечным интегралом Лебега

Для счётно-ступенчатой функции её интеграл Лебега и общий интеграл Лебега для неё эквивалентны

Л1 *Если значения двух функций совпадают для почти всех аргументов, то их интегралы Лебега существуют или не существуют одновременно, а если существуют, то совпадают*

Это следует из определений верхнего и нижнего интегралов

Л2 *Если функция интегрируема, то для почти всех аргументов её значение на них конечно*

Это следует из определений верхнего и нижнего интегралов

8.4 Теорема о существовании интеграла от неотрицательной измеримой функции

Лемма $\forall \varepsilon > 0 \exists$ измеримая и отдельно интегрируемая СС функции такие, что первая не больше нашей, а их сумма не меньше нашей, притом вторая бесконечно мала

Заметим, что от нашей функции, как и от миноранты, мы не требуем быть интегрируемой. Ведь даже $f(x) = x, x \in [0, +\infty]$ не имеет интегрируемой функции, удовлетворяющей условиям теоремы

1. Рассмотрим случай конечной меры области определения X нашей функции. Тогда выберем $N \in \mathbb{N} : \frac{\mu(X)}{N} < \varepsilon, \varphi(x) = \frac{1}{N} = const$, а $g(x)$ зададим как стандартную СС, что доказывает теорему
2. В общем случае представим X в виде дизъюнктного объединения счетного набора конечно измеримых множеств, для каждого из которых применим предыдущий пункт
3. В силу бесконечной малости $\varphi_k(x)$, сделаем её меньше $\frac{\varepsilon}{2^k}$ (чтобы при интегрировании по всем функциям получить необходимую малость), а затем соберём обе функции в СС-ые, доказав общий случай
4. Так как все члены $\varphi_k(x)\mu(X_k)$ неотрицательны, то ряд сходится абсолютно и, следовательно, функция $\varphi_k(x)$ интегрируема по определению

Th О существовании интеграла от неотрицательной измеримой функции Неотрицательная измеримая функция имеет (бес)конечный интеграл Лебега

1. В тривиальном случае бесконечного нижнего интеграла получаем бесконечные верхний и интеграл Лебега
2. В общем случае зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$ и применим результат предыдущей леммы, притом так как g измерима и СС, то будем считать, что область его определения X можно представить в виде счетного дизъюнктного объединения конечно-измеримых множеств, то будем считать, что множества X_k конечно-измеримы
3. Покажем, что g интегрируема от противного. Если у нас это удастся сделать, то мы мгновенно докажем теорему в силу равенства крайних интегралов Лебега. Предположим, что для $g \exists \int = +\infty$
4. Если каждый член суммы конечен, то для любой константы найдётся частичная сумма, большая её. Тогда мы можем построить СС (даже конечно-ступенчатую) функцию $g' < g$ на X , которая будет интегрируема
5. В случае наличия бесконечного члена, определим функцию $g' < g$ на X как либо этот конечный член, либо 0
6. В любом случае построена $g' < g$, чей бесконечный интеграл по X не меньше нижнего нашей функции, что отрицает её интегрируемость по определению
7. Итого, g интегрируема, $g + \varphi$ тоже, а их разность может быть сколь угодно малой (в силу малости $\int \varphi dx$), что из неравенств, не меньше разности крайних интегралов
8. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ интегралы совпадают, поэтому наша функция интегрируема

8.5 Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее положительной и отрицательной составляющих

Опр Положительная и отрицательная составляющие функции Соответствующие максимумы
Притом сама функция равна сумме этих составляющих

Лемма Функция измерима \Leftrightarrow обе её составляющие интегрируемы

1. Из интегрируемости f_+, f_- мгновенно следует интегрируемость функции в силу линейности интеграла Лебега
2. В другую сторону рассмотрим f_+ , чьё $L_<$ совпадает с $L_<$ функции (в случае $C \geq 0$ очевидно, а в случае $C < 0$ $L_<$ пусто, но всё равно измеримо по определению)
3. Из интегрируемости f следует, что $\exists h : f \leq h$ почти всюду на X , притом h интегрируема. Аналогичное равенство справедливо и для положительных составляющих
4. Так как h интегрируема, то её положительная составляющая тоже по признаку сравнения для абсолютно сходящегося ряда

5. По теореме предыдущей темы f_+ интегрируема, притом в силу теоремы об интегрировании неравенств (доказывается через крайние интегралы), интеграл конечен
6. Произведя аналогичные рассуждения для f_- , получим доказательство в другую сторону, то есть полное доказательство

8.6 Связь интегрируемости функции и интегрируемости её модуля

Th.1 Признак сравнения

Если измеримая функция по модулю не превосходит интегрируемой по Лебегу функции для почти всех аргументов, то она интегрируема

1. Из измеримости f следует измеримость f_+, f_-
2. Затем достаточно воспользоваться теоремой об интегрировании неравенств дважды и доказать интегрируемость f_+, f_-
3. Из предыдущей леммы следует интегрируемость f

Th.2 Связь интегрируемости функции и её модуля

f интегрируема по Лебегу $\Leftrightarrow f$ измерима и её модуль интегрируем по Лебегу

Из интегрируемости f следует интегрируемость f_+, f_- , то есть и их суммы, которая и есть модуль. Для доказательства в обратную сторону достаточно воспользоваться Th.1

8.7 Интегральная теорема о среднем

Th Интегральная теорема о среднем Если X – линейно связный компакт в \mathbb{R}^n ; $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, притом f измерима, а g интегрируема с сохранением знака, то существует точка из X ...

1. БОО будем полагать $g \geq 0$
2. В силу теоремы Вейерштрасса, f достигает экстремумов (потому как на компакте), то есть произведение функций полуограниченно
3. В силу признака сравнения, произведение функций интегрируемо, а также, в силу интегрирования неравенств и свойства линейности интеграла имеем оценку и для интеграла произведения функций
4. Если интеграл равен нулю, то теорема справедлива для любого аргумента. В противном случае возьмём отношение и посмотрим на неравенство для C
5. По теореме о промежуточном значении, найдётся $\xi \in X : f(\xi) = C$

8.8 Счетная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования

Л1 Об интегрируемости на подмножестве Интегрируемая функция интегрируема на измеримом подмножестве

1. Из интегрируемости функции следует интегрируемость её модуля, то есть его верхний интеграл Лебега конечен
2. Тогда существует интегрируемая СС, которая не меньше модуля для почти всех аргументов. Она будет интегрируема на подмножестве по определению интеграла от СС функции
3. В силу признака сравнения и наша функция интегрируема на подмножестве

Л2 Конечная аддитивность интеграла Лебега по множествам На непересекающихся измеримых множествах, интегрируемая на них функция интегрируема на их объединении, притом её интеграл есть сумма интегралов на множествах

1. Распишем определение верхнего интеграла Лебега и построим новую верхнюю СС для объединения
2. Осталось применить аддитивность интеграла для СС и получить нижний интеграл для объединения множеств

3. Аналогично для верхнего интеграла Лебега. В итоге в силу конечности суммы конечных слагаемых и определения интеграла Лебега, получаем доказываемое утверждение

Th.1 Непрерывность интеграла по множествам Для счётного набора измеримых по Лебегу вложенных множеств и интегрируемой по Лебегу функции интеграл по счётному объединению равен пределу интегралов по множествам

1. Рассмотрим случай СС функции и измеримое разбиение области определения. Из этого набора составим последовательность концентрических вложенных, но дизъюнктивных множеств с помощью операций разности
2. Распишем интеграл функции на множестве, используя счётную аддитивность интеграла от СС функции и конечную аддитивность интеграла Лебега
3. В общем случае интегрируемой по Лебегу функции воспользуемся конечной аддитивностью интеграла Лебега и разобьём множество на подмножество и его дополнение. Требуется доказать, что интеграл на дополнении есть ноль
4. Для этого воспользуемся определением интеграла Лебега, теоремой об интегрировании неравенств, результатами для СС функций и теоремой о трёх последовательностях

Th.2 Счетная аддитивность интеграла Лебега На измеримом разбиении множества интегрируемая на них функция имеет интеграл, равный счётной сумме по множествам

1. Определим новый набор множеств как частичное объединение старых
2. Далее используем непрерывность и конечную аддитивность интеграла по множествам

9 Непрерывность интеграла как функции верхнего предела. Существование первообразной для непрерывной на отрезке функции. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы замены переменных в интеграле и интегрирования по частям

9.1 Непрерывность интеграла как функции верхнего предела

Утв Обозначения для интеграла Лебега Множество интегрирования, связь с обратным и множество нулевой меры

Лемма Если f интегрируем на отрезке, содержащем три точки, то её интеграл можно разбить на два

Доказывается через интегрируемость функции на подмножестве и с помощью конечной аддитивности интеграла по множествам

Th Непрерывность интеграла как функции верхнего предела Если на числовом промежутке функция интегрируема, то её $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ непрерывна на (a, b)

1. Зафиксируем произвольную точку отрезка и строго возрастающую последовательность с пределом в нашей точке
2. Воспользуемся определением $F(x_0)$ и непрерывностью интеграла по множествам, а также тем, что предел слева совпадает с обычным на внутренностях
3. Аналогичные рассуждения с убывающей последовательностью доказывают требуемую непрерывность (потому как и справа, и слева)

9.2 Существование первообразной для непрерывной на отрезке функции

Th Если функция интегрируема на отрезке и непрерывна его точке, то для её $F(x) \frac{d}{dx} : F'(x_0) = f(x_0)$, притом на концах отрезка речь идёт об односторонних производных

1. Зафиксируем произвольную точку отрезка справа В силу аддитивности интеграла имеем $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt$
2. Применим интегральную теорему о среднем для $f(x), g(x) = 1 \geq 0$, получим отношение. Тогда устремив аргумент к нашей точке, получим определение производной справа
3. Аналогичные рассуждения дадут нам производную слева, а значит, и доказываемую теорему

Из этой теоремы следует существование первообразной для непрерывной на отрезке функции, а также, совместно с теоремой о структуре первообразных, их отличие на константу

9.3 Формула Ньютона-Лейбница

Th Формула Ньютона-Лейбница

Для доказательства достаточно расписать первообразную на множестве нулевой меры, на втором конце и взять разность

9.4 Формулы замены переменных в интеграле и интегрирования по частям

Th.1 Замена переменной в определённом интеграле

Если функция $x = \varphi([a, b])$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$, а f непрерывна на $\varphi([a, b])$, то справедливо равенство ...

1. В силу непрерывности f на $\varphi([a, b])$, для неё существует первообразная. Воспользуемся для неё формулой Ньютона-Лейбница
2. Продифференцируем первообразную и определим, для какой функции она таковой является. Применим формулу Ньютона-Лейбница уже для неё (обратное равенство) и получим требуемое

Th.2 Интегрирование по частям

Если функции непрерывно дифференцируемы, то они могут быть проинтегрированы по частям

Для доказательства достаточно воспользоваться линейностью интеграла и формулой Ньютона-Лейбница

10 Мера декартова произведения двух конечно измеримых множеств. Выражение меры множества под графиком интегрируемой функции через интеграл. Площадь круга. Выражение объема тела вращения и длины кривой через интегралы. Связь интегрируемости по Риману и интегрируемости по Лебегу. Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции

10.1 Мера декартова произведения двух конечно измеримых множеств

Th Если два множества конечно измеримы в своих надмножествах, то их декартово произведение конечно измеримо в соответствующем надмножестве с мерой, равной произведению мер

1. В тривиальном случае клеток равенство следует из определения
2. В случае, если конечно измеримые множества представимы в виде счетного дизъюнктного объединения клеток, разобьём их на эти клетки, а потом, в силу теоремы о перемножении абсолютно сходящихся рядов, получим требуемое
3. Покажем, что для любых конечно измеримых множеств мера их декартового произведения не превосходит произведения мер. Для этого зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$ и счётные покрытия наших множеств клетками (они найдутся по определению верхней меры), притом разность мер покрытия и наших множеств не будет превосходить ε . Тогда распишем неравенство для верхней меры декартова произведения и, устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, получим требуемое неравенство
4. Теперь покажем, что если существуют множества, сходящиеся по мере к нашим (с конечной верхней мерой), то их декартово произведение также будет сходиться к декартову произведению наших. Действительно, для этого надо расписать неравенство для верхней меры симметрической разности, используя предыдущий пункт и понять, что она стремится к нулю
5. В общем случае по определению конечно измеримого множества найдутся последовательности клеточных множеств, сходящиеся по мере к нашим. Тогда надо последовательно воспользоваться п.4 и п.1, а затем перейти к пределу

Из теоремы следует, что декартово произведение множества нулевой меры и произвольного имеет нулевую меру

10.2 Выражение меры множества под графиком интегрируемой функции через интеграл

Лемма Теорема о трёх последовательностях для конечно измеримых множеств

Если задано наше множество и существуют конечно измеримые последовательности минорант для него, которые в пределе имеют одинаковую меру, то наше множество измеримо и имеет ту же меру

Для доказательства нам потребуется перейти от верхней меры (заданной для всех, в том числе для неизвестного нашего множества) к клеточным множествам, для которых уже есть понятие предела по мере. Иначе наши рассуждения могли бы быть неприменимы

1. Рассмотрим верхнюю меру симметрической разности нашего и последовательности минорант. Из неравенств будет следовать, что она стремится к нулю
2. Теперь рассмотрим симметрическую разность клеточных множеств A_{ik} , покрывающих A_k , и саму A_k . Применяя неравенство треугольника, получим, что клеточные множества A_{ik} сходятся по мере к нашему
3. Аналогичные рассуждения для мажорант доказывают теорему

Th О геометрическом смысле интеграла

Если область определения интегрируемой функции X измерима, то площадь под графиком функции в соответствующем надмножестве конечно измерим с мерой равной интегралу Лебега этой функции по X

1. В тривиальном случае СС функции можно разбить график на дизъюнктное объединение множеств и в силу счётной аддитивности интеграла Лебега получить требуемое утверждение
2. В общем случае обозначим интеграл как J и зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$
3. Воспользуемся определением верхних интегралов и запишем две серии неравенств (для СС-функций и их интегралов)
4. При необходимости заменим значения минорант-СС-функций на множестве нулевой меры (чтобы доказываемое утверждение было справедливо для всего X)
5. На предыдущем шаге записываем меру площадей графиков функции под минорантами и приходим к очевидному двойному вложению
6. Так как в силу произвольности $\varepsilon > 0$ их площади стремятся к J , то в силу леммы, площадь под графиком измерима с мерой J

10.3 Площадь круга

Лемма Круг измерим с площадью πr^2

1. Напишем множество верхнего полукруга и после преобразований выразим y : $0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$
2. По предыдущей теореме верхний полукруг измерим с интегралом в половину искомого (интеграл считается через замену). Аналогично для нижнего полукруга
3. Так как две части круга имеют нулевую меру пересечения, то по формуле включений-исключений, мера круга равна πr^2

10.4 Выражение объема тела вращения и длины кривой через интегралы

Опр Тело вращения вокруг оси Если на отрезке задана неотрицательная функция, то множество ...

Th.1 Если неотрицательная функция измерима и ограничена, то тело вращения измеримо...

1. Зафиксируем супремум ограниченной функции, число $N \in \mathbb{N}$, на которое мы разобьём наш отрезок множествами X_k и измеримые конечно-ступенчатые функции-миноранты
2. Распишем объём тел вращения для минорант в терминах декартова произведения площади круга на меру X_k с помощью определения интеграла для СС-функций
3. Запишем неравенства для полученных объёмов и устремим $N \rightarrow +\infty$
4. Аналогично распишем для мажорант

5. В силу вложенности и стремления по мере в пределе получим объём тела вращения для нашей функции

Th.2 Вычисление длины кривой

Если кривая параметризована непрерывно дифференцируемой вектор-функцией, то её длина выражается формулой ...

Для доказательства достаточно рассмотреть переменную длину дуги, вспомнить теорему о производной переменной длины дуги и применить формулу Ньютона-Лейбница

10.5 Связь интегрируемости по Риману и интегрируемости по Лебегу

Опр Разбиение отрезка, отрезки разбиения Конечный набор точек

Опр Выборка Набор точек из отрезков разбиения

Опр Интегральная сумма Римана Сумма конечного числа слагаемых, зависит от функции, разбиения и выборки

Опр Мелкость разбиения Максимальный отрезок разбиения

Опр Интеграл Римана Предел интегральных сумм Римана

Заметим, что этот интеграл всегда конечен в силу работы на компакте (отрезке)

Опр Интегрируемая по Риману функция \exists интеграл Римана для этой функции на этом отрезке

Th.1 Достаточное условие интегрируемости

Если функция непрерывна на компакте, то она интегрируема на нём

1. Так как для любого $C \in \mathbb{R}$ L_{\leq} замкнуто (а значит, измеримо), то функция измерима на компакте
2. В силу теоремы Вейерштрасса функция ограничена на компакте некоторой константой
3. Так как константа интегрируема на компакте, то по признаку сравнения функция тоже интегрируема

Th.2 Если функция интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу и интегралы совпадают

1. Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$ и достаточно мелкое разбиение отрезка
2. Перепишем предельное неравенство в терминах инфимума и введём новые обозначения, чтобы ввести конечно-ступенчатую функцию
3. Тогда интеграл для минорант будет интегралом Римана функции (записанным в терминах инфимума). Поэтому нижний интеграл будет не меньше Риманова
4. Аналогично верхний интеграл не больше Риманова
5. Объединив все полученные неравенства в одну строку, получим равенство крайних интегралов и интеграл Лебега по определению

10.6 Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции

Th Для непрерывной на отрезке функции f интеграл Римана существует и совпадает с интегралом Лебега

1. Сначала надо воспользоваться теоремой Кантора, определением равномерной непрерывности
2. Затем зафиксировать разбиение и выборку, определить конечно-ступенчатую функцию
3. Вспомнить определение интеграла для СС функции и модуля непрерывности
4. По Th.1 f интегрируема по Лебегу, как и разность f и СС функции в силу линейности интеграла
5. Переходя к пределу при мелкости разбиения, получаем что интеграл Римана существует по определению, притом из рассуждений следует, что он совпадает с интегралом Лебега

11 Теорема Б. Леви о монотонной сходимости. Теорема Лебега об ограниченной сходимости

Отличие следующих теорем от непрерывности интеграла по множествам состоит в том, что теперь предельный переход выполняется для функций, а не множеств

11.1 Теорема Б. Леви о монотонной сходимости

Th Если последовательность измеримых функций $f_k \geq 0$ монотонна и сходится к f , то f измерима с интегралом, равным пределу интегралов f_k

1. Измеримость функции следует из леммы о поточечной сходимости, а интегрируемость в силу существования интеграла от неотрицательной измеримой функции (интеграл может быть бесконечным)
2. Рассмотрим случай конечного интеграла, предварительно выкинув множества нулевой меры, на котором он бесконечен
3. Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$ и рассмотрим множества X_k с $(1 - \varepsilon)$ внутри
4. В силу монотонности функции, X_k будут монотонны по включению и покрывать всю область определения
5. Вспомним про непрерывность интеграл по множествам и определение предела
6. Затем распишем неравенства, устремим $\varepsilon \rightarrow 0$ и получим доказываемое соотношение
7. В случае бесконечного интеграла фиксируем $\forall C > 0$ и миноранту, чей интеграл на том же множестве будет $> C$ (она существует из определения нижнего интеграла) и выкинем множества нулевой меры, на которых миноранта больше f
8. Рассмотрим измеримые функции $g_k = \min(f_k, g)$, которые в пределе равны миноранте (показывается через определения предела для f и минимума)
9. Как показано в конечном случае, предел для миноранты будет больше $> C$, а в силу неравенства, для f тоже. В силу произвольности C получаем необходимое равенство

11.2 Теорема Лебега об ограниченной сходимости

Th Если последовательность интегрируемых функций f_k , каждый член которой ограничен по модулю интегрируемой функцией φ почти всюду на X и поточечно сходится к f , то f интегрируема с интегралом, равным пределу интегралов f_k

1. Измеримость f следует из леммы о поточечной сходимости, а интегрируемость в силу предельного перехода и признака сравнения
2. Выкинем множества нулевой меры, на которых условие теоремы не выполняется
3. Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$ и рассмотрим множества X_k с $\varepsilon \varphi(x)$ внутри
4. X_k будут покрывать X (включение в одну сторону очевидно, а в другое надо рассмотреть два случая для $\varphi(x)$, расписать определение предела). Также X_k будут монотонны по включению
5. Распишем предел для $\int_{X_k} \varphi$ с помощью непрерывности и аддитивности интеграла по множествам
6. Теперь распишем неравенство для разности интегралов f и f_k , воспользовавшись неравенством треугольника, определением X_k и конечностью интеграла для φ
7. В итоге, устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, завершим доказательство теоремы

12 Несобственный интеграл. Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу. Критерий Коши. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов

12.1 Несобственный интеграл

Опр Несобственный интеграл, особенность Односторонний предел интегрального конца

Опр (Рас)ходящийся несобственный интеграл Если (не)существует конечный предел

Опр Собственный интеграл Интеграл Лебега, который был до этого

Опр Абсолютно сходящийся несобственный интеграл Аналогично рядам

Опр (Сходящийся) несобственный интеграл с двумя особенностями Разбить на два интеграла с одной особенностью (и утверждать сходимость только в случае сходимости обоих интегралов)

12.2 Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу

Th.1 Если f интегрируема по Лебегу, на любом открытом промежутке, она интегрируема на всём промежутке \Leftrightarrow соответствующих несобственный интеграл сходится абсолютно

1. \Rightarrow : согласно лемме об интегрируемости на подмножестве f интегрируема на любом открытом промежутке, как и её модуль (по эквивалентности)
2. Из аддитивности интеграла по множествам следует нестрогое возрастание функции $F(b') = \int_a^{b'} |f(x)|dx$
3. По теореме существует предел слева, поэтому несобственный интеграл сходится абсолютно
4. \Leftarrow : зафиксируем возрастающую последовательность $\{b_k\} \rightarrow b$
5. Определим индикаторную последовательность функций $f_k(x)$. Она сходится к f , что докажет интегрируемость f на всём интервале
6. Затем введём новую функциональную последовательность $g(x) = |f_k(x)|$. Она будет возрастать и в пределе равна $|f(x)|$, поэтому применима теорема о монотонной сходимости
7. Из неё следует интегрируемость $|f(x)|$ на интервале, то есть и f

Th.2 Если f интегрируема в собственном смысле, то несобственный интеграл сходится и его значение равно интегралу Лебега на том же интервале

Доказательство состоит в применении теоремы о непрерывности интеграла как функции верхнего предела

12.3 Критерий Коши

Th Критерий Коши

Если на числовом промежутке f интегрируема по Лебегу на любом открытом промежутке, то несобственный интеграл этой функции сходится \Leftrightarrow выполняется условие Коши

1. Определим $F(t) = \int_a^t f(x)dx$. Несобственный интеграл с особенностью в верхнем конце будет сходиться, если у этой функции существует конечный предел при $t \rightarrow b - 0$
2. Далее сведём задачу к КК существования предела функции и воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница

12.4 Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов

Смотреть в рукописном конспекте

13 Связь поточечной и равномерной сходимостей для функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Обобщенный признак сравнения для функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Признаки Дирихле и Лейбница равномерной сходимости функционального ряда. Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность равномерного предела, непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными слагаемыми. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Дифференцирование предельной функции и почленное дифференцирование функционального ряда

13.1 Связь поточечной и равномерной сходимостей для функциональной последовательности

Опр Поточечный предел функциональной последовательности Предел в привычном понимании

Опр Равномерный предел функциональной последовательности $N \in \mathbb{N}$ не зависит от аргумента

Из равномерной сходимости следует поточечная, но не наоборот

Опр Равномерно ограниченная функциональная последовательность $N \in \mathbb{N}$ не зависит от аргумента

13.2 Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности

Th Критерий Коши

Последовательность сходится равномерно \Leftrightarrow выполняется условие Коши

1. \Rightarrow : дважды применить определение равномерной сходимости и воспользоваться неравенством треугольника
2. \Leftarrow : требуется доказать равномерную сходимость из выполнения условия Коши числовой последовательности для любого фиксированного $x \in X$. В силу КК для числовой последовательности $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$
3. Далее надо в силу $\forall p \in \mathbb{N}$ устремить его к $+\infty$ и по теореме о предельном переходе в неравенствах получить определение равномерной сходимости

13.3 Обобщенный признак сравнения для функциональных рядов

Опр Поточечный предел функционального ряда Сходимость ряда в привычном понимании

Опр Равномерный предел функционального ряда Если последовательность его частичных сумм сходится равномерно на том же множестве

Опр Остаток поточечно сходящегося функционального ряда Разность суммы и частичной суммы ряда

Th Обобщенный признак сравнения

Если каждый член нашего ряда по модулю не превосходит члена равномерно сходящегося на том же множестве ряда, то и наш ряд сходится равномерно

Доказательство состоит в двукратном применении КК

Из признака следует, что из равномерной абсолютной сходимости ряда следует равномерная сводимость ряда на том же множестве

13.4 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Th Признак Вейерштрасса

Если каждый член нашего ряда по модулю не превосходит члена сходящегося ряда, то наш ряд сходится равномерно на том же множестве

Доказательство состоит в применении обобщенного признака сравнения. Заметьте, что мы не требуем равномерной сходимости от ряда-мажоранты

13.5 Признаки Дирихле и Лейбница равномерной сходимости функционального ряда

Смотреть в рукописном конспекте

13.6 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

Смотреть в рукописном конспекте

13.7 Непрерывность равномерного предела, непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными слагаемыми

Th.1 *О непрерывности предельной функции*

Если последовательность f_k непрерывных на множестве X функций сходится равномерно на множестве X , то f непрерывна на X

1. Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$ и $x_0 \in X$
2. Далее для доказательства достаточно дважды записать определения равномерной сходимости и один раз непрерывности функции $f_N(x)$ для нужных долей ε и воспользоваться неравенством треугольника

Th.2 *О непрерывности суммы ряда*

Если функциональный ряд u_k непрерывных на множестве X функций сходится равномерно на множестве X , то сумма ряда непрерывна на X

Доказательство состоит в применении Th.1 последовательности частичных сумм ряда

13.8 Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов

Th.1 *Об интегрировании предельной функции*

Если последовательность f_k интегрируемых на конечно измеримом множестве X функций сходится равномерно на множестве X к интегрируемой функции f , то интеграл этой функции есть предел интегралов

1. Воспользуемся sup-критерием для $\varepsilon = 1$. Тогда из неравенства следует интегрируемость f по признаку сравнения
2. Расписав супремум для разности интегралов в пределе получим 0, что завершает доказательство

Следствие Если последовательность непрерывных на компакте X функций f_k сходится равномерно к функции f , то интеграл этой функции есть предел интегралов

Непрерывность f следует из теоремы предыдущей темы, а интегрируемость из достаточного условия интегрируемости, что позволяет применить предыдущую теорему и доказать утверждение

Th.2 *Об почленном интегрировании ряда*

Если функциональный ряд u_k непрерывных на компакте X функций сходится равномерно, то сумма интеграла есть интеграл суммы

Доказательство состоит в применении следствия из предыдущей теоремы к последовательности частичных сумм ряда с использованием линейности интеграла

13.9 Дифференцирование предельной функции и почленное дифференцирование функционального ряда

Th.1 О дифференцировании предельной функции

Если последовательность f_k непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций сходится хотя бы в одной точке x_0 , а последовательность производных f'_k сходится равномерно на $[a, b]$, то последовательность f_k сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой непрерывно дифференцируемой функции f , притом производная предела есть предел производных

1. Обозначим предельную функцию для f'_k за $\varphi(x)$, непрерывную по теореме, и предел $f_k(x_0)$ за A
2. Далее определим $f(x) = A + \int_{x_0}^x \varphi(t)dt$ и $f_k(x) = f_k(x_0) + \int_{x_0}^x f'_k(t)dt$
3. Затем пара хитрых замечаний, работа с супремумом, использование sup-критерия
4. В итоге получаем равномерную сходимость f_k и требуемое равенство с учётом построения $f(x)$

Th.2 О почленном дифференцировании ряда

Если функциональный ряд u_k непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций сходится хотя бы в одной точке x_0 , а ряд производных u'_k сходится равномерно на $[a, b]$, то справедлива формула почленного дифференцирования ряда, то есть производная суммы ряда есть сумма производных

Доказательство состоит в применении Th.1 к последовательности частичных сумм ряда

14 Степенные ряды. Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Теорема о круге сходимости степенного ряда. Первая теорема Абеля. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Сохранение радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Достаточное условие аналитичности функции. Пример бесконечно дифференцируемой, но неаналитической функции. Представление экспоненты комплексного аргумента степенным рядом. Формулы Эйлера. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Представление степенной и логарифмической функций степенными рядами

14.1 Степенные ряды

Опр *Предел последовательности комплексных чисел* Предел модуля разности равен нулю

Заметим, что комплексный предел эквивалентен двум вещественным (для действительной и мнимой части)

Опр *Сходящийся комплексный ряд* Существует конечный предел последовательности частичных сумм этого ряда

Опр *Абсолютно сходящийся комплексный ряд* Сходится вещественный ряд модулей членов ряда

И вновь сходимость комплексного ряда эквивалентна сходимости двух вещественных рядов

Опр *Равномерно сходящийся комплекснозначная функциональная последовательность* Вещественнозначная последовательность модулей разности предельной функции и элементов последовательности равномерно сходится к нулю на том же множестве

Опр *Равномерно сходящийся комплексный функциональный ряд* Последовательность частичных сумм этого ряда равномерно сходится к сумме этого ряда на том же множестве

Опр *Степенной ряд* Если задана последовательность комплексных чисел и комплексное число, то ...

Однако удобнее (и мы в дальнейшем будем так делать) работать с рядом без степенной разности, сделав замену комплексной переменной

14.2 Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости

Опр Радиус сходимости степенного ряда Неотрицательное число (или бесконечность), определяемое формулой Коши-Адамара

Притом для этой формулы мы расширили операцию деления

14.3 Теорема о круге сходимости степенного ряда

Опр Круг сходимости степенного ряда Круг на комплексной плоскости с центром в $w_0(0)$ и радиусом равным радиусу сходимости

Если радиус сходимости бесконечен, то кругом сходимости считается вся комплексная плоскость

Th О круге сходимости

Степенной ряд абсолютно сходится внутри круга сходимости и расходится вне его

1. Зафиксируем произвольное комплексное число $z_0 \neq 0$, обозначим $q = \frac{z_0}{R}$ и исследуем сходимость с помощью обобщённого признака Коши
2. В тривиальном случае $z_0 = 0$ ряд сходится абсолютно
3. В случае $0 < |z_0| < R$ в силу обобщённого признака Коши ряд сходится абсолютно
4. В случае $|z_0| > R$ в силу обобщённого признака Коши члены абсолютного ряда не стремятся к нулю, как и исходного ряда, а значит, он расходится по отрицанию необходимого условия

14.4 Первая теорема Абеля

Th Первая теорема Абеля

Если степенной ряд сходится в точке z_0 , то он сходится абсолютно в любой точке по модулю меньшей

Доказательство следует от противного в силу п.4 теоремы о круге сходимости

14.5 Теорема о равномерной сходимости степенного ряда

Th О равномерной сходимости степенного ряда

$\forall r \in (0, R)$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится равномерно в круге радиуса r

Доказывается через неравенство, применением теоремы о круге сходимости и по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости комплексного ряда

1. Зафиксируем произвольное комплексное число $z_0 \neq 0$, обозначим $q = \frac{z_0}{R}$ и исследуем сходимость с помощью обобщённого признака Коши
2. В тривиальном случае $z_0 = 0$ ряд сходится абсолютно
3. В случае $0 < |z_0| < R$ в силу обобщённого признака Коши ряд сходится абсолютно
4. В случае $|z_0| > R$ в силу обобщённого признака Коши члены абсолютного ряда не стремятся к нулю, как и исходного ряда, а значит, он расходится по отрицанию необходимого условия

14.6 Вторая теорема Абеля

Th Вторая теорема Абеля

Если степенной ряд сходится в точке z_0 , то он сходится равномерно на отрезке $[0, z_0]$

1. Разобьём члены ряда на произведение членов произведения с помощью параметра $t \in [0, 1]$
2. Первый ряд сходится по условию (а значит, по предыдущей теореме, ещё и равномерно)
3. Второй ряд равномерно ограничен на отрезке и монотонен по индексу
4. Поэтому два вещественных ряда сходятся равномерно на $[0, 1]$, как и исходный ряд на $[0, z_0]$

14.7 Сохранение радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда

Th Радиусы сходимости степенных рядов, полученные формальным дифференцированием и интегрированием исходного, совпадают с его радиусом сходимости

1. Радиусы сходимости исходного и продифференцированного рядов совпадают в силу формулы Коши-Адамара
2. Также они сходятся или расходятся одновременно, потому как при $z = 0$ это очевидно, а в противном случае они отличаются на ненулевую константу (как и их пределы)
3. Так как исходный ряд получается почленным дифференцированием интегрального, то и их радиусы сходимости совпадают

14.8 Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда

Th Об интегрировании и дифференцировании степенного ряда

Если вещественный степенной ряд имеет ненулевой радиус сходимости, то внутри интервала сходимости

- справедливы формулы почленного интегрирования
- функция ряда имеет производные любого порядка, получаемые почленным дифференцированием ряда
- коэффициенты степенного ряда однозначно определяются по обрывку формулы Тейлора

1. Для почленного интегрирования достаточно ввести новую переменную и воспользоваться теоремами о равномерной сходимости степенного ряда и о почленном интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда
2. Для производных достаточно ввести новую переменную и воспользоваться теоремами о сохранении радиуса сходимости, о равномерной сходимости степенного ряда и о почленном дифференцировании функционального ряда
3. Проводя те же рассуждения по индукции, доказываем второе утверждение теоремы
4. Доказывается аналогично лемме первого семестра перед формулой Тейлора

14.9 Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора

Опр Бесконечно дифференцируемая функция в точке В этой точке существуют производные функции любого порядка

Опр Ряд Тейлора Ряд бесконечно дифференцируемой функции в точке с членами ...

Опр Регулярная функция в точке z_0 Ряд Тейлора функции в точке z_0 сходится к функции в некоторой окрестности z_0

Из теоремы об интегрировании и дифференцировании степенного ряда следует, что если функция может быть представлена как сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ с ненулевым радиусом сходимости, то этот ряд является рядом Тейлора функции в точке z_0 . В этом случае функция является регулярной в точке z_0

Опр Остаточный член формулы Тейлора Разность n раз дифференцируемой функции и формулы Тейлора

Непосредственно из определений следует, что функция является регулярной в точке $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$. Притом для доказательства регулярности недостаточно показать ненулевой радиус сходимости функции, надо ещё проверить её остаток

14.10 Достаточное условие аналитичности функции

Th Достаточное условие регулярности

Если $\exists U_\delta(x_0)$, где функция бесконечно дифференцируема и последовательность её производных равномерно ограничена константой $C > 0$, то функция регулярна в точке и $\forall x \in U_\delta(x_0)$ раскладывается в ряд Тейлора

1. Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Тогда остаточный член формулы Тейлора $\leq M \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}$
2. Так как факториал растёт быстрее показательной (доказывается через принцип Архимеда, определение факториала, цепочку неравенств и предельный переход), то остаточный член стремится к нулю
3. Поэтому функция регулярна, потому как раскладывается в ряд Тейлора в x_0

14.11 Пример бесконечно дифференцируемой, но неаналитической функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ряд Тейлора этой бесконечно дифференцируемой в точке $x_0 = 0$ сходится не к функции $f(x)$, а к некоторой другой функции, не совпадающей с $f(x)$ в сколь угодно малой окрестности точки

$$\forall k \in \mathbb{N} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{k}{2}} e^{-t} = 0$$

По индукции легко показать, что если $P_{3n}(t)$ – многочлен степени $3n$ от t , то

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{3n}(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Следовательно, все коэффициенты ряда Тейлора функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$ равны нулю. Поэтому сумма ряда Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 равна нулю и не совпадает с функцией $f(x)$ в сколь угодно малой окрестности точки x_0 . Таким образом, хотя функция и бесконечно дифференцируема, она не является регулярной в нуле

14.12 Представление экспоненты комплексного аргумента степенным рядом

Опр Ряд Маклорена Ряд Тейлора функции в нуле

Th.1 Ряды маклорена функций $e^x, \sin(x), \cos(x), \operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x)$ сходятся к этим функциям на всей числовой прямой

1. $\forall \delta > 0 \forall x \in U_\delta(0) e^x < e^\delta$, поэтому выполнено достаточное условие регулярности
2. Аналогично, используя ограниченность последовательности всех производных оставшихся функций доказываем их разложения

Th.2 Для комплексной экспоненты её ряд Тейлора не отличается от вещественного

1. В силу предыдущей теоремы радиус сходимости степенного ряда-претендента сходится на всём \mathbb{C} , поэтому по теореме о круге сходимости он сходится абсолютно для любого $z \in \mathbb{C}$
2. Зафиксируем произвольное комплексное число в алгебраической форме и воспользуемся определением экспоненты комплексного числа, чтобы зафиксировать доказываемое равенство
3. Покажем, что функция-ряд-претендент обладает свойством экспоненты. Для этого воспользуемся теоремой о перемножении абсолютно сходящихся рядов, которая для комплексных рядов доказывается точно так же, как и для вещественных (только здесь надо использовать метод "диагоналей")
4. В результате преобразований получим сумму сумм, которую распределим по этим суммам, и применим формулу бинома Ньютона, завершив доказательство свойства
5. Далее рассмотрим функцию кандидат на чисто мнимом аргументе и путём разложения на чётную и нечётную суммы получим выражение для чисто мнимой экспоненты
6. В итоге, применив свойство экспоненты и убедившись, что функция работает на вещественных аргументах, получим разложение комплексной экспоненты в ряд Тейлора в силу единственности

14.13 Формулы Эйлера

Лемма Для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливы формулы Эйлера. Они используют новопостроенные комплексные функции и подравнивают комплексную тригонометрию к вещественной гиперболической.

1. Для доказательства формулы гиперкомплексной экспоненты достаточно разделить сумму на чётную и нечётную, а затем воспользоваться $i^2 = -1$
2. Остальные формулы следуют из первой

14.14 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Th Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Если функция в $U_\delta(x_0)$ имеет непрерывные производные по $n+1$ порядок, то для остаточного члена формулы Тейлора справедливо представление в интегральной форме: $r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \forall x \in U_\delta(x_0)$

1. При $n=0$ теорема справедлива в силу формулы Ньютона – Лейбница
2. Пусть теорема справедлива для $n = s-1$. Тогда проинтегрируем r_{s-1} по частям
3. Затем, расписав r_s по определению, подставим проинтегрированное выражение и получим требуемое равенство
4. Таким образом, теорема доказана по индукции

14.15 Представление степенной и логарифмической функций степенными рядами

Th Ряд Маклорена степенной функции сходится к этой функции на интервале единичного радиуса

1. Зафиксируем $x \in (-1; 1)$ и учитывая выражение для f^n распишем остаточный член в интегральной форме, походу дела вынося константы, вводя новые обозначения и переменные интегрирования
2. Затем воспользуемся ограниченностью x для оценки. Осталось показать, что $\lambda_n \rightarrow 0$
3. В тривиальных случаях $x=0$ и $\alpha = m \in \mathbb{N}_0, m < n$ утверждение очевидно
4. В общем случае найдём предел отношения и воспользуемся схожими рассуждениями с доказательством признака Даламбера (сравнение с геометрической прогрессией)

Заметим, что при $m \geq n$ ряд Маклорена совпадает с конечной суммой

Из доказанного и теоремы о почленном интегрировании степенного ряда при $|x| < 1$ (не забывая про замену индекса суммирования) получаем ряд Маклорена для логарифма. Данное разложение справедливо и при $x=1$. Действительно, данный ряд будет сходиться по признаку Лейбница. Следовательно, в силу второй теоремы Абеля этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0; 1]$. Согласно теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда частичные суммы этого ряда будут непрерывны на отрезке $[0; 1]$. Поэтому существует требуемый предел