

## Содержание

<b>1</b>	<b>Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений. Теорема Фубини</b>	<b>3</b>
1.1	Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений . . . . .	3
1.2	Теорема Фубини . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Теорема о замене переменных в кратном интеграле</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Теорема о неявной функции для одного уравнения. Теорема Лагранжа о среднем для вектор-функции нескольких переменных. Принцип Банаха сжимающих отображений. Теорема о неявной функции для системы уравнений. Теорема об обратном отображении. Теорема о расщеплении отображений</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента с комплексным показателем. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей</b>	<b>3</b>
4.1	Модуль и аргумент, тригонометрическая форма . . . . .	4
4.2	Извлечение корня . . . . .	4
4.3	Экспонента с комплексным показателем . . . . .	4
4.4	Основная теорема алгебры . . . . .	4
4.5	Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители . . . . .	4
4.6	Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, замена переменных и интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Числовые ряды. Знакопостоянные ряды. Признаки сравнения сходимости числовых рядов. Интегральный признак сходимости числового ряда. Признаки Даламбера и Коши. Знакопеременные ряды (Критерий Коши сходимости ряда). Сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле, Лейбница и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда. Перемножение абсолютно сходящихся рядов</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Клеточные множества. Верхняя мера Лебега и ее счетная полуаддитивность. Мера Лебега и ее счетная аддитивность. Непрерывность меры Лебега. Теорема о том, что семейство измеримых подмножеств <math>\mathbb{R}^n</math> является <math>\sigma</math>-кольцом</b>	<b>5</b>
<b>8</b>	<b>Измеримые функции. Измеримость суммы и поточечного предела измеримых функций. Интеграл Лебега для счетно-ступенчатых и для измеримых функций, линейность интеграла Лебега. Теорема о существовании интеграла от неотрицательной измеримой функции. Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее положительной и отрицательной составляющих. Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее модуля. Интегральная теорема о среднем. Счетная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования</b>	<b>5</b>
<b>9</b>	<b>Непрерывность интеграла как функции верхнего предела. Существование первообразной для непрерывной на отрезке функции. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы замены переменных в интеграле и интегрирования по частям</b>	<b>5</b>
9.1	Непрерывность интеграла как функции верхнего предела . . . . .	5
9.2	Существование первообразной для непрерывной на отрезке функции . . . . .	6
9.3	Формула Ньютона-Лейбница . . . . .	6
9.4	Формулы замены переменных в интеграле и интегрирования по частям . . . . .	6
<b>10</b>	<b>Мера декартова произведения двух конечно измеримых множеств. Выражение меры множества под графиком интегрируемой функции через интеграл. Площадь круга. Выражение объема тела вращения и длины кривой через интегралы. Связь интегрируемости по Риману и интегрируемости по Лебегу. Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции</b>	<b>6</b>

<b>11 Теорема Б. Леви о монотонной сходимости. Теорема Лебега об ограниченной сходимости</b>	<b>6</b>
11.1 Теорема Б. Леви о монотонной сходимости . . . . .	7
11.2 Теорема Лебега об ограниченной сходимости . . . . .	7
<b>12 Несобственный интеграл. Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу. Критерий Коши. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов</b>	<b>7</b>
12.1 Несобственный интеграл . . . . .	7
12.2 Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу . . . . .	8
12.3 Критерий Коши . . . . .	8
12.4 Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов . . . . .	8
<b>13 Связь поточечной и равномерной сходимостей для функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Обобщенный признак сравнения для функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Признаки Дирихле и Лейбница равномерной сходимости функционального ряда. Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность равномерного предела, непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными слагаемыми. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Дифференцирование предельной функции и почленное дифференцирование функционального ряда</b>	<b>9</b>
<b>14 Степенные ряды. Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Теорема о круге сходимости степенного ряда. Первая теорема Абеля. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Сохранение радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Достаточное условие аналитичности функции. Пример бесконечно дифференцируемой, но неаналитической функции. Представление экспоненты комплексного аргумента степенным рядом. Формулы Эйлера. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Представление степенной и логарифмической функций степенными рядами</b>	<b>9</b>

# 1 Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений. Теорема Фубини

## 1.1 Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений

Л1

Пусть есть счётный набор конечно измеримых убывающих вложенных множеств  $X_i$ . Мера множества, являющегося счётным пересечением есть предел мер

Л2

Если интеграл неотрицательной функции по множеству равен нулю, то сама функция равна нулю почти на всём множестве

Th О выражении меры множества через интеграл от меры сечений

1. Для начала докажем для клетки. Её сечение будет принимать простой вид, в зависимости от принадлежности  $x$ , что даёт простое интегрирование и доказывает теорему
2. Теперь докажем для счётного набора (объединения) клеток. Задача сводится к предыдущей
3. Найдём меру множества, являющегося счётным пересечением объединения счётного числа клеток
4. Определим убывающую последовательность множеств
5. Далее считаем меры составляющих, по ходу дела используя теорему Лебега об ограниченной сходимости
6. Теперь рассмотрим случай множества нулевой меры и с помощью всяких сравнений и пределов докажем требуемое
7. В конце рассмотрим общий случай конечно измеримого множества
8. Используем все предыдущие леммы и случаи и получаем требуемое при почти всех  $x$

## 1.2 Теорема Фубини

Th О геометрическом смысле интеграла

Th Фубини

# 2 Теорема о замене переменных в кратном интеграле

## 3 Теорема о неявной функции для одного уравнения. Теорема Лагранжа о среднем для вектор-функции нескольких переменных. Принцип Банаха сжимающих отображений. Теорема о неявной функции для системы уравнений. Теорема об обратном отображении. Теорема о расщеплении отображений

## 4 Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента с комплексным показателем. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей

Опр  $\mathbb{C}$

Опр  $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$

Утв Равенство, сложение и вычитание, умножение комплексных чисел

Утв Свойство операций с комплексными числами Справедливы переместительный, сочетательный и распределительные законы

Утв Геометрическая интерпретация комплексных чисел Точка на декартовой плоскости-квадрате вещественных чисел

## 4.1 Модуль и аргумент, тригонометрическая форма

**Опр** *Модуль и аргумент комплексного числа* Надо вспомнить их геометрический смысл и не забыть указать их обозначения

Любое комплексное число имеет модуль и аргумент. Для доказательства требуется рассмотреть тривиальный нулевой случай или поделить на корень из сумм квадратов координат, чтобы воспользоваться определением

**Утв** *Тригонометрическая форма комплексного числа* Модуль определён однозначно, аргумент – нет

## 4.2 Извлечение корня

**Опр**  *$n$ -ая степень комплексного числа* Всё как с вещественными числами, но отсюда следует формула Муавра

Таким образом можно запросто решать комплексные уравнения, которые будут иметь  $n$  корней. Для этого достаточно представить числа в экспоненциальной форме, а потом приравнять модули и аргументы

## 4.3 Экспонента с комплексным показателем

**Опр** *Экспонента комплексного числа* Не забыть про домножение на  $e^x$

**Опр** *Формула Эйлера*

Таким образом, любое комплексное число может быть представлено в экспоненциальной форме

**Лемма** *Свойство экспоненты* При перемножении показатели складываются

1. Вспомним про стандартную запись комплексного числа, а затем про её экспоненту
2. Перемножим синусы и косинусы и сгруппируем их, воспользовавшись формулами суммы синусов и косинусов

**Следствие 1** *Модуль и аргумент произведения есть произведение модулей и сумма аргументов* Достаточно перемножить экспоненциальные формы и выделить из результата требуемое

**Опр** *Частное комплексного числа* Такое комплексное число, что ...

**Следствие 2** *Частное существует и единственно, притом модуль и аргумент частного есть частное модулей и разность аргументов* Достаточно воспользоваться определением частного и равенства комплексных чисел

## 4.4 Основная теорема алгебры

Смотреть в рукописном конспекте

## 4.5 Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители

Смотреть в рукописном конспекте

## 4.6 Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей

Смотреть в рукописном конспекте

- 5 Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, замена переменных и интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций
- 6 Числовые ряды. Знакопостоянные ряды. Признаки сравнения сходимости числовых рядов. Интегральный признак сходимости числового ряда. Признаки Даламбера и Коши. Знакопеременные ряды (Критерий Коши сходимости ряда). Сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле, Лейбница и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда. Перемножение абсолютно сходящихся рядов
- 7 Клеточные множества. Верхняя мера Лебега и ее счетная полуаддитивность. Мера Лебега и ее счетная аддитивность. Непрерывность меры Лебега. Теорема о том, что семейство измеримых подмножеств  $\mathbb{R}^n$  является  $\sigma$ -кольцом
- 8 Измеримые функции. Измеримость суммы и поточечного предела измеримых функций. Интеграл Лебега для счетно-ступенчатых и для измеримых функций, линейность интеграла Лебега. Теорема о существовании интеграла от неотрицательной измеримой функции. Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее положительной и отрицательной составляющих. Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее модуля. Интегральная теорема о среднем. Счетная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования
- 9 Непрерывность интеграла как функции верхнего предела. Существование первообразной для непрерывной на отрезке функции. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы замены переменных в интеграле и интегрирования по частям

#### 9.1 Непрерывность интеграла как функции верхнего предела

**Утв** Обозначения для интеграла Лебега Множество интегрирования, связь с обратным и множество нулевой меры

**Лемма** Если  $f$  интегрируем на отрезке, содержащим три точки, то её интеграл можно разбить на два Доказывается через интегрируемость функции на подмножестве и с помощью конечной аддитивности интеграла по множествам

**Th** Непрерывность интеграла как функции верхнего предела Если на числовом промежутке функция интегрируема, то её  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  непрерывна на  $(a, b)$

1. Зафиксируем произвольную точку отрезка и строго возрастающую последовательность с пределом в нашей точке

2. Воспользуемся определением  $F(x_0)$  и непрерывностью интеграла по множествам, а также тем, что предел слева совпадает с обычным на внутренностях
3. Аналогичные рассуждения с убывающей последовательностью доказывают требуемую непрерывность (потому как и справа, и слева)

## 9.2 Существование первообразной для непрерывной на отрезке функции

**Th** Если функция интегрируема на отрезке и непрерывна в его точке, то для её  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt : F'(x_0) = f(x_0)$ , притом на концах отрезка речь идёт об односторонних производных

1. Зафиксируем произвольную точку отрезка справа. В силу аддитивности интеграла имеем  $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt$
2. Применим интегральную теорему о среднем для  $f(x), g(x) = 1 \geq 0$ , получим отношение. Тогда устремив аргумент к нашей точке, получим определение производной справа
3. Аналогичные рассуждения дадут нам производную слева, а значит, и доказываемую теорему

Из этой теоремы следует существование первообразной для непрерывной на отрезке функции, а также, совместно с теоремой о структуре первообразных, их отличие на константу

## 9.3 Формула Ньютона-Лейбница

**Th** Формула Ньютона-Лейбница

Для доказательства достаточно расписать первообразную на множестве нулевой меры, на втором конце и взять разность

## 9.4 Формулы замены переменных в интеграле и интегрирования по частям

**Th.1** Замена переменной в определённом интеграле

Если функция  $x = \varphi([a, b])$  имеет непрерывную производную на отрезке  $[a, b]$ , а  $f$  непрерывна на  $\varphi([a, b])$ , то справедливо равенство ...

1. В силу непрерывности  $f$  на  $\varphi([a, b])$ , для неё существует первообразная. Воспользуемся для неё формулой Ньютона-Лейбница
2. Продифференцируем первообразную и определим, для какой функции она таковой является. Применим формулу Ньютона-Лейбница уже для неё (обратное равенство) и получим требуемое

**Th.2** Интегрирование по частям

Если функции непрерывно дифференцируемы, то они могут быть проинтегрированы по частям

Для доказательства достаточно воспользоваться линейностью интеграла и формулой Ньютона-Лейбница

## 10 Мера декартова произведения двух конечно измеримых множеств. Выражение меры множества под графиком интегрируемой функции через интеграл. Площадь круга. Выражение объема тела вращения и длины кривой через интегралы. Связь интегрируемости по Риману и интегрируемости по Лебегу. Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции

## 11 Теорема Б. Леви о монотонной сходимости. Теорема Лебега об ограниченной сходимости

Отличие следующих теорем от непрерывности интеграла по множествам состоит в том, что теперь предельный переход выполняется для функций, а не множеств

### 11.1 Теорема Б. Леви о монотонной сходимости

**Th** Если последовательность измеримых функций  $f_k \geq 0$  монотонна и сходится к  $f$ , то  $f$  измерима с интегралом, равным пределу интегралов  $f_k$

1. Измеримость функции следует из леммы о поточечной сходимости, а интегрируемость в силу существования интеграла от неотрицательной измеримой функции (интеграл может быть бесконечным)
2. Рассмотрим случай конечного интеграла, предварительно выкинув множества нулевой меры, на котором он бесконечен
3. Зафиксируем  $\forall \varepsilon > 0$  и рассмотрим множества  $X_k$  с  $(1 - \varepsilon)$  внутри
4. В силу монотонности функции,  $X_k$  будут монотонны по включению и покрывать всю область определения
5. Вспомним про непрерывность интеграл по множествам и определение предела
6. Затем распишем неравенства, устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$  и получим доказываемое соотношение
7. В случае бесконечного интеграла фиксируем  $\forall C > 0$  и миноранту, чей интеграл на том же множестве будет  $> C$  (она существует из определения нижнего интеграла) и выкинем множества нулевой меры, на которых миноранта больше  $f$
8. Рассмотрим измеримые функции  $g_k = \min(f_k, g)$ , которые в пределе равны миноранте (показывается через определения предела для  $f$  и минимума)
9. Как показано в конечном случае, предел для миноранты будет больше  $> C$ , а в силу неравенства, для  $f$  тоже. В силу произвольности  $C$  получаем необходимое равенство

### 11.2 Теорема Лебега об ограниченной сходимости

**Th** Если последовательность интегрируемых функций  $f_k$ , каждый член которой ограничен по модулю интегрируемой функцией  $\varphi$  почти всюду на  $X$  и поточечно сходится к  $f$ , то  $f$  интегрируема с интегралом, равным пределу интегралов  $f_k$

1. Измеримость  $f$  следует из леммы о поточечной сходимости, а интегрируемость в силу предельного перехода и признака сравнения
2. Выкинем множества нулевой меры, на которых условие теоремы не выполняется
3. Зафиксируем  $\forall \varepsilon > 0$  и рассмотрим множества  $X_k$  с  $\varepsilon \varphi(x)$  внутри
4.  $X_k$  будут покрывать  $X$  (включение в одну сторону очевидно, а в другое надо рассмотреть два случая для  $\varphi(x)$ , расписать определение предела). Также  $X_k$  будут монотонны по включению
5. Распишем предел для  $\int_{X_k} \varphi$  с помощью непрерывности и аддитивности интеграла по множествам
6. Теперь распишем неравенство для разности интегралов  $f$  и  $f_k$ , воспользовавшись неравенством треугольника, определением  $X_k$  и конечностью интеграла для  $\varphi$
7. В итоге, устремив  $\varepsilon \rightarrow 0$ , завершим доказательство теоремы

## 12 Несобственный интеграл. Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу. Критерий Коши. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов

### 12.1 Несобственный интеграл

**Опр** Несобственный интеграл, особенность Односторонний предел интегрального конца

**Опр** (Рас)ходящийся несобственный интеграл Если (не)существует конечный предел

**Опр** Собственный интеграл Интеграл Лебега, который был до этого

**Опр** Абсолютно сходящийся несобственный интеграл Аналогично рядам

**Опр** (Сходящийся) несобственный интеграл с двумя особенностями Разбить на два интеграла с одной особенностью (и утверждать сходимость только в случае сходимости обоих интегралов)

## 12.2 Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу

**Th.1** Если  $f$  интегрируема по Лебегу, на любом открытом промежутке, она интегрируема на всём промежутке  $\Leftrightarrow$  соответствующих несобственный интеграл сходится абсолютно

1.  $\Rightarrow$ : согласно лемме об интегрируемости на подмножестве  $f$  интегрируема на любом открытом промежутке, как и её модуль (по эквивалентности)
2. Из аддитивности интеграла по множествам следует нестрогое возрастание функции  $F(b') = \int_a^{b'} |f(x)|dx$
3. По теореме существует предел слева, поэтому несобственный интеграл сходится абсолютно
4.  $\Leftarrow$ : зафиксируем возрастающую последовательность  $\{b_k\} \rightarrow b$
5. Определим индикаторную последовательность функций  $f_k(x)$ . Она сходится к  $f$ , что докажет интегрируемость  $f$  на всём интервале
6. Затем введём новую функциональную последовательность  $g(x) = |f_k(x)|$ . Она будет возрастать и в пределе равна  $|f(x)|$ , поэтому применима теорема о монотонной сходимости
7. Из неё следует интегрируемость  $|f(x)|$  на интервале, то есть и  $f$

**Th.2** Если  $f$  интегрируема в собственном смысле, то несобственный интеграл сходится и его значение равно интегралу Лебега на том же интервале

Доказательство состоит в применении теоремы о непрерывности интеграла как функции верхнего предела

## 12.3 Критерий Коши

**Th Критерий Коши**

Если на числовом промежутке  $f$  интегрируема по Лебегу на любом открытом промежутке, то несобственный интеграл этой функции сходится  $\Leftrightarrow$  выполняется условие Коши

1. Определим  $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ . Несобственный интеграл с особенностью в верхнем конце будет сходиться, если у этой функции существует конечный предел при  $t \rightarrow b - 0$
2. Далее сведём задачу к КК существования предела функции и воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница

## 12.4 Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов

Смотреть в рукописном конспекте



- 13 Связь поточечной и равномерной сходимостей для функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Обобщенный признак сравнения для функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Признаки Дирихле и Лейбница равномерной сходимости функционального ряда. Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность равномерного предела, непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными слагаемыми. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Дифференцирование предельной функции и почленное дифференцирование функционального ряда
- 14 Степенные ряды. Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Теорема о круге сходимости степенного ряда. Первая теорема Абеля. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Сохранение радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Достаточное условие аналитичности функции. Пример бесконечно дифференцируемой, но неаналитической функции. Представление экспоненты комплексного аргумента степенным рядом. Формулы Эйлера. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Представление степенной и логарифмической функций степенными рядами