Содержание

Векторные пространства

1 Векторное пространство. Подпространство. Линейная оболочка системы векторов. Линейно (не)зависимые системы векторов. Конечномерные линейные пространства

1.1 Векторное пространство

Опр *Унарная, бинараная операция на множестве над полем* Ставит в соответсвие элементу (элементам) из множества другой элемент из множества

Опр *Векторное пространство над полем* Помимо унарности и бинарности, по 4 аксиомы сложения и умножения

1.2 Подпространство

Опр *Подпространство* Требуются лишь унарность и бинарность

1.3 Линейная оболочка системы векторов

Опр *Линейная оболочка* Все векторы, которые линейно выражаются через минимальную систему, покрывающую пространство

1.4 Линейно (не)зависимые системы векторов

Опр *Линейная комбинация* Сумма векторов с коэффициентами из поля

Опр *Линейно (не)зависимая система векторов* Нетривиальная линейная комбинация (не) равна нулю

1.5 Конечномерные линейные пространства

Опр *Ранг (не)пустой системы векторов* Любой набор векторов, чьё число большее чем ранг, будет линейно зависим. Ранг пустой считаем нулевым

Опр *Размерность* Более употребительное название для ранга в случае работы с подпространсвом

Опр *(Бес)конечномерные линейные пространства* Если их размерность (бес)конечна

Л1 Любой вектор системы векторов ранга r раскладывается по r л.н.з векторам

1. Возьмём вектора из линейной оболочки и добавим к ним произвольный вектор системы a. Эта система будет л.з. из определения ранга
2. Тогда найдутся коэффициента для нетривиальной линейной комбинации, притом коэффициент перед $\lambda_a \neq 0$ (иначе линейная оболочка была бы зависима)
3. Из линейной комбинации выразим a, поделив все вектора на λ_a

Л2 Если вектор b принадлежит линейной оболочке $a_1, \ldots, a_k$ других векторов, то он не влияет на её ранг

1. От противного: пусть $\exists$ л.н.з система из $r+1$ векторов (она будет содержать b, иначе w с определеним ранга)
2. Итак, пусть система $b, a_1, \ldots, a_r$ л.н.з. Тогда система $a_1, \ldots, a_r$ тоже будет л.н.з. Так их r штук, то все вектора $a_1, \ldots, a_k$ будут выражаться через $a_1, \ldots, a_r$
3. Если мы заменим $a_1, \ldots, a_k$ на их выражения через $a_1, \ldots, a_r$, то получится, что b выражается по ним, что w л.н.з $b, a_1, \ldots, a_r$

Th *Основная теорема о рангах* Ранг подсистемы и системы совпадает $\Leftrightarrow$ $\forall$ вектор системы раскладывается по линейной оболочке подсистемы

$\Rightarrow$: мгновенно следует из Л1 В моей формулировке

$\Leftarrow$:

1. От противного: пусть $\exists$ л.н.з система из $r+1$ векторов
2. Её ранг будет не меньше ранга её и любого количества л.н.з векторов из подсистемы

3. С другой стороны, многократно применяя Л2, получим что её ранг не превышает ранга подсистемы, w

Следствие 1 Для любой подсистемы векторного пространства ранг равен размерности линейной оболочки

Следствие 2 Если размерности вложенных подпространств совпадают, то они равны

2 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница). Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при замене базиса. Матрица перехода

2.1 Базис и размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения (лемма Штайница)

Опр *Базис* Система л.н.з векторов, являющаяся линейной оболочкой

Л *Штайница* Пусть система векторов $a_1, \dots, a_n$ порождает пространство V, а система векторов $b_1, \dots, b_m$ л.н.з. Тогда $n \geq m$

1. Возьмём b_1. Он будет выражаться через $a_1, \dots, a_n$ по определению линейной оболочки. БОО первый кожффициент в его разложении по $a_1, \dots, a_n$ ненулевой (иначе мы их переупорядочим)

2. Выразим из этого разложения a_1. Тогда $V =< b_1, a_2, \dots, a_n >$. Так, действуя по индукции, заменим все вектора a_i

3. В случае $n < m$ получим противоречие с л.н.з. $b_1, \dots, b_m$ (потому что всего n векторов порождают пространство). Таким образом $n \geq m$, притом недостающие до линейно оболочки вектора можно взять из $a_1, \dots, a_n$

2.2 Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса

Утв Систему л.н.з векторов можно дополнить до базиса

1. Ранг подсистемы меньше ранга системы, поэтому выполняется обратное к основной теореме о рангах утверждение ($\exists \overline{x}$), не лежащей в л.н.з подсистеме)

2. Если мы добавим $\overline{x}$ к подсистеме и она станет зависимой, то в нетривиальной линейной комбинации равен нулю либо новый коэффициент (w с л.н.з исходной подсистемы), либо какой-то из старых (тогда $\overline{x}$ выражается через вектора линейной оболочки и принадлежит ей)

3. Продолжая процесс и далее, дополним систему до базиса

2.3 Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты

Опр *Координаты вектора в базисе* Коэффициенты в разложении по базису

При сложении векторов и домножении на число, координаты изменяются покомпонентно

1. Ранг подсистемы меньше ранга системы, поэтому выполняется обратное к основной теореме о рангах утверждение ($\exists \overline{x}$), не лежащей в л.н.з подсистеме)

2. Если мы добавим $\overline{x}$ к подсистеме и она станет зависимой, то в нетривиальной линейной комбинации равен нулю либо новый коэффициент (w с л.н.з исходной подсистемы), либо какой-то из старых (тогда $\overline{x}$ выражается через вектора линейной оболочки и принадлежит ей)

3. Продолжая процесс и далее, дополним систему до базиса

3 Теорема о неявной функции для одного уравнения. Теорема Лагранжа о среднем для вектор-функции нескольких переменных. Принцип Банаха сжимающих отображений. Теорема о неявной функции для системы уравнений. Теорема об обратном отображении. Теорема о расщеплении отображений

3.1 Теорема о неявной функции для одного уравнения

Опр *Неявная скалярная функция* $F(x,y)=0$, но $y=y(x)$ неизвестен
Th *О неявной скалярной функции* Если выполнены 4 условия ($F(x_0,y_0)=0$ и непрерывна в окрестности, $F_y^{'}(x,y)$ $\exists$, непрерывная и ненулевая), то $\exists$ $\varphi(x) : F(x^*,y)=0$ имеет решение в виде $y^*=\varphi(x^*)$

1. Будем полагать $F_y^{'}(x,y)>0$. Тогда $\exists\varepsilon_1 : F_y^{'}(x,y)>0 \forall(x,y)\in U_{\varepsilon_1}(x_0,y_0)$
2. Перейдём от круглой окрестности к квадратной путём взятия $\delta=\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2}}$ или меньшего числа
3. В силу $\varepsilon_1 : F_y^{'}(x,y)>0, F$ будет строго возрастать по y на $[y_0-\delta, y_0+\delta]$. Тогда $F(x_0,y-\delta)<0, F(x_0,y+\delta)>0$
4. В силу непрерывности F в $U_{\varepsilon_1}(x_0,y_0) \exists\gamma\in[0,\delta) : \forall x\in U_\gamma(x_0) F(x,y_0-\delta)<0, F(x,y_0+\delta)>0$
5. Применяем теорему о промежуточном значении $\forall x\in U_\gamma(x_0)$ и получаем единственность решения в силу непрерывности F
6. Вспоминая про п.3, вдобавок получаем непрерывность полученной функции в x_0

3.2 Теорема Лагранжа о среднем для вектор-функции нескольких переменных

Опр *Операторная норма матрицы* Максимальная длина вектора, полученная умножением матрицы на единичный вектор

Максимум существует в силу непрерывности $f(x)=Ax$ и компактности множества векторов единичной длины

Введённая норма удовлетворяет всем 4-м аксиомам нормы (неотрицательности, существование нуля, линейность и неравенство треугольника). Первые три очевидны, а последнее доказывается через неравенство треугольника для чисел (длин векторов) Ax

Л1 *Об операторной норме* $|Ax|\le\|A\||x|$ и $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$ для совместных матриц

1. Рассмотрим тривиальный случай $x=0$ и нормировку в общем случае
2. Два раза используем уже доказанную часть леммы для любого вектора, доказывая нужное утверждение

Th *Лагранжа о среднем для вектор-функции* По аналогии с обычной теоремой, но здесь имеем неравенство и матрицу Якоби

1. Рассмотрим функцию $f(t)=g(y+t(y^{'}-y))$ и продифференцируем её как <u>сложную</u> функцию
2. Запишем $\left|g(y^{'})-g(y)\right|$ в терминах функции $f(t)$ и применим обычную теорему Лагранжа о среднем
3. Воспользуемся леммой об операторной норме матрицы и получим требуемое выражение

3.3 Принцип Банаха сжимающих отображений

Опр *Сжимающее отображение* Расстояние между значениями фукнции меньше расстояния между аргументами
Th *Принцип Банаха сжимающий отображений* Уравнение $y=g(y)$ имеет решение в виде предела последовательности, заданной формулой $y_{k+1}=g(y)$

1. Применим определение сжимающего отображения для $\varrho(y_{k+1},y_k) k$ раз (получи неравенство)
2. Далее преобразуем неравенство, последовательно используя неравенство треугольника, определение сжимающего отображения, сумму геометрической прогрессии и отбрасывание вычитаемого

3. $\exists N$: полученное выражение $< \varepsilon$, что означает фундаментальность ($\Rightarrow$ сходимость) последовательности
4. В силу непрерывности в пределе получим требуемое равенство
5. Единственность доказывается от противного, используя определение сжимающего отображения

3.4 Теорема о неявной функции для системы уравнений

Смотреть в рукописном конспекте

3.5 Теорема об обратном отображении

Л1 *Прообраз открытого образа непрерывной функции открыт*

1. Выберем произвольную точку из прообраза и запишем для неё определение открытости образа
2. Применим определение непрерывности функции для основного множества, получим $\delta-$окрестность, которая под действием функции будет полностью переходить в $\varepsilon-$окрестность
3. В силу произвольности точки утверждение доказана для всего множества значений

Опр *Класс k раз непрерывно дифференцируемых отображений*
Опр *Класс бесконечно дифференцируемых отображений* Пересечение по натуральным числам
Опр *Гладкие и C^k гладкие отображения* Элементы соответсвующих классов
Опр *Гладкие и C^k гладкие диффеоморфизмы* ВОО, причём оно и его обратное есть C^k гладкие отображения
Л2 *C^1 гладкий диффеоморфизм имеет одинаковую размерность прообраза и образа, а также его матрица Якоби не выроždена*
Дифференцируем оба тождества в определении обратной функции, и пользуемся

1. тем, что ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого сомножителя
2. значением ранга единичной матрицы
3. критерием обратимости

Опр *Якобиан* Определитель матрицы Якоби функции с совпадающими размерностями векторов прообраза и образа
Матрица Якоби обратного отображения равна обратной матрице к матрице Якоби исходного отображения, а значит, якобиан обратного отображения равен обратной величине к якобиану исходного отображения
Опр *Сужение (ограничение) отображения* Отображение на подмножестве
Опр *Окрестность точки в метрическом пространстве* Произвольное открытое множество, содержащее точку
Th.1 *Об обратном отображении* C^1 гладкое отображение с неравным нулю Якобианом локально обратимо (то есть её сужение является C^1 гладким диффеоморфизмом)

1. Обозначим $x_0 = g(y_0)$ и применим теорему о неявной функции к $F(x, y) = g(y) - x$ (можно показать, что все условия теоремы выполнены)
2. Рассмотрим сужение на $U(y_0)$, полученном из теоремы о неявной функции, которое будет ВОО. Полученный $y = \varphi(x)$ является единственным решением уравнения $F(x, y) = \overline{0}$ относительно y, то есть мы получили обратное отображение
3. В конце пользуемся Л1 и тем, что по теореме о неявной функции обратная функция будет непрерывно дифференцируема

Заметим, что наше отображение может и не быть глобально обратимым (в примеры годится вектор-функция с периодическими функциями)
Th.2 *Об обратном отображении* C^k гладкое отображение с неравным нулю Якобианом является C^k гладким диффеоморфизмом

1. Тривиальный случай доказан в предыдущей теореме. Иначе рассмотрим матрицу Якоби обратной функции поэлементно, ведь каждый её элемент будет выражаться как многочлен относительно элементов исходной матрицы, делённый на определитель этой матрицы

2. Используя невырожденность матрицы, получаем, что все элементы обратной являются C^{k-1} гладкими функциями от x

3. В таком случае сама обратная функция является C^k гладкой

Аналогичный результат можно получить и для C^∞ гладких функций

3.6 Теорема о расщеплении отображений

Опр *Отображения, меняющие и не меняющие i–ю координату*
Th *О расщеплении отображений*
C^k гладкое отображение с неравным нулю Якобианом представимо в виде суперпозиции C^k гладких диффеоморфизмов, каждый из которых меняет только одну координату, и линейного диффеоморфизма меняющего только порядок координат

1. В силу невырожденности матрицы в первом столбце найдётся отличный от нуля элемент

2. Рассмотрим отображение, которое меняет только первую координату, и его матрицу Якоби. Она невырождена, поэтому в силу теоремы об обратном отображении в некоторой окрестности точки x_0 отображение g_1 является диффеоморфизмом, а согласно следующей теореме, является C^k гладким диффеоморфизмом

3. Тогда исходное отображение является суперпозицией отображения, которое меняет местами первую и k–ю компоненты (или является тождественным отображением в случае $k = 1$) и отображения, переводящего "иксы" в "игреки"

4. Таким образом, наше отображение представимо в виде трёх C^k гладких диффеоморфизмов, меняющий порядок координат, меняющий только первую и не меняющий первую координату

5. Применяя аналогичные рассуждения к последнему диффеоморфизму, получим требуемое утверждение

Результат этой теоремы будет использован далее при доказательстве теоремы о замене переменных в кратном интеграле

4 Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента с комплексным показателем. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей

4.1 Комплексные числа

Опр $\mathbb{C}$
Опр $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$
Утв *Равенство, сложение и вычитание, умножение комплексных чисел*
Утв *Свойство операций с комплексными числами* Справедливы переместительный, сочетательный и распределительные законы
Утв *Геометрическая интерпретация комплексных чисел* Точка на декартовой плоскоти-квадрате вещественных чисел

4.2 Модуль и аргумент, тригонометрическая форма

Опр *Модуль и аргумент комплексного числа* Надо вспонмнить их геометрический смысл и не забыть указать их обозначения
Любое комплексное число имеет модуль и аргумент. Для доказательство требуется рассмотреть тривиальный нрулевой случай или поделить на корень из сумм квадратов координат, чтобы воспользоваться определением
Утв *Тригонометрическая форма комплексного числа* Модуль определён однозначно, аргумент – нет

4.3 Извлечение корня

Опр *$n-$ая степень комплексного числа* Всё как с вещественными числами, но отсюда следует формула Муавра

Таким образом можно запросто решать комплексные уравнения, которые будут иметь n корней. Для этого достаточно предствить числа в экспоненицальной форме, а потом приравнять модули и аргументы

4.4 Экспонента с комплексным показателем

Опр *Экспонента комплексного числа* Не забыть про домножение на e^x
Опр *Формула Эйлера*
Таким образом, любое комплексное число может быть представлено в экспоненциальной форме
Л1 *Свойство экспоненты* При перемножении показатели складываются

1. Вспомним про стандартную запись комплексного числа, а затем про её экспоненту

2. Перемножим синусы и косинусы и сгруппируем их, воспользовавашись формулами суммы синусов и косинусов

Следствие 1 Модуль и аргумент поизведения есть произведение модулей и сумма аргументов Достаточное перемножить экспоненциальные формы и выделить из результата требуемое

Опр *Частное комплексного числа* Такое комплексное число, что ...

Следствие 2 Частное существует и единственно, притом модуль и аргумент частного есть частное модулей и разность аргументов Достаточно воспользоваться определением частного и равенства комплексных чисел

4.5 Основная теорема алгебры

Смотреть в рукописном конспекте

4.6 Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители

Смотреть в рукописном конспекте