Содержание

Линейная алгебра

Первое задание

Плотность матричного множества

Для начала, давайте определим, что значит "множество диагонализируемых квадратных матриц плотно над полем комплексных чисел". Это означает, что любая квадратная матрица A размера $n \times n$ с элементами из поля комплексных чисел может быть приближена произвольно близко другой диагональной матрицей D размера $n \times n$ с элементами из того же поля, то есть существует последовательность диагонализируемых матриц A_k таких, что $\lim_{k\to\infty} A_k = D$.

Для доказательства этого факта можно воспользоваться теоремой о жордановой нормальной форме. Эта теорема утверждает, что любая квадратная матрица A размера $n\times n$ с элементами из поля комплексных чисел подобна матрице вида $J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, \ldots, J_k)$, где каждый блок J_i имеет вид

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix},$$

где λ_i – собственное значение матрицы A, а размерность блока J_i равна количеству жордановых клеток, соответствующих этому собственному значению.

Теперь, если мы хотим приблизить матрицу A диагональной матрицей D, мы можем заменить каждый блок J_i матрицы J на диагональную матрицу $\operatorname{diag}(\lambda_i, \lambda_i, \ldots, \lambda_i)$, что даст нам диагональную матрицу D'. Однако, если мы теперь рассмотрим матрицу A', которая получается из матрицы A заменой блоков J_i на соответствующие диагональные матрицы, то матрицы A' и D' не обязательно будут подобны, и мы не можем гарантировать, что последовательность A_k сходится к D.

Однако, мы можем заменить каждый блок J_i матрицы J на матрицу вида

$$J_i' = \begin{pmatrix} \lambda_i & \epsilon_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \epsilon_i & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix},$$

где ϵ_i – произвольно малое комплексное число, и затем рассмотреть матрицу A'', которая получается из матрицы A заменой блоков J_i на соответствующие матрицы J_i'. В этом случае матрицы A'' и D' будут подобны, и мы можем гарантировать, что последовательность A_k сходится к D при $\epsilon_i \to 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$.

Таким образом, мы доказали, что множество диагонализируемых квадратных матриц плотно над полем комплексных чисел

Многочлены

Докажите, что характеристический многочлен линейного преобразования делится на характеристический многочлен его ограничения на инвариантном подпространстве

Это утверждение называется "основной теоремой о блочном виде матрицы линейного оператора". Пусть V – векторное пространство над полем F, $L : V \to V$ – линейный оператор, U – инвариантное подпространство пространства V, т.е. $L(U) \subseteq U$. Обозначим через L_U ограничение оператора L на подпространство U.

Тогда существуют такие базисы $e_1, \ldots, e_k$ в U и $f_1, \ldots, f_m$ в V, что матрица оператора L в базисе $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_m$ имеет блочно-диагональную форму:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1 – матрица оператора L_U в базисе $e_1, \ldots, e_k$, а A_2 – матрица оператора $L_{U^\perp}$ в базисе $f_1, \ldots, f_m$.

Теперь заметим, что характеристический многочлен матрицы оператора L равен произведению характеристических многочленов матриц A_1 и A_2, т.е.

$$\chi_L(t) = \chi_{L_U}(t) \cdot \chi_{L_{U^\perp}}(t).$$

Это следует из того, что характеристический многочлен матрицы блочно-диагональной формы равен произведению характеристических многочленов диагональных блоков.

Таким образом, мы доказали, что характеристический многочлен линейного оператора L делится на характеристический многочлен его ограничения L_U на инвариантном подпространстве U.

Поворот на угол

Найти подпространства трёхмерного геометрического пространства, инвариантные относительно поворота на ненулевой угол α вокруг прямой $x = ta$

Пусть V – трёхмерное геометрическое пространство, L – прямая в V с направляющим вектором a. Тогда оператор поворота R_α вокруг прямой L на угол α можно выразить через матрицу поворота вокруг оси z в базисе, связанном с прямой L. Для этого нужно выбрать ортонормированный базис e_1, e_2, e_3, где $e_3 = a$, и заменить матрицу поворота в базисе e_1, e_2, e_3 на матрицу поворота в базисе e_1', e_2', e_3, где $e_1' = e_1$, $e_2' = e_2$, $e_3' = R_\alpha e_3$. Матрица перехода между этими базисами имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь пусть U – подпространство V, инвариантное относительно поворота R_α. Тогда любой вектор $v \in U$ может быть представлен в виде $v = x + ty$, где $x \in L$, $y \in L^\perp$, $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что $R_\alpha x = x$, так как x лежит в прямой L, инвариантной относительно поворота. Кроме того, $R_\alpha y \in L^\perp$, так как прямая $L^\perp$ ортогональна к направлению поворота. Следовательно, $R_\alpha v = R_\alpha(x + ty) = x + tR_\alpha y \in U$. Таким образом, U содержит все векторы вида $x + ty$, где $x \in L$ и $y \in L^\perp$, и является инвариантным относительно поворота R_α.

Таким образом, мы получили, что любое подпространство U в V, инвариантное относительно поворота на ненулевой угол α вокруг прямой L, является прямой L вместе с её ортогональным дополнением $L^\perp$.

Подпространства

Пусть дано линейное преобразование $T : V \to V$ над линейным пространством V размерности n с n попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Для любого собственного значения λ_i рассмотрим его собственное подпространство $V_i = \{v \in V : T(v) = \lambda_i v\}$. Так как собственные значения попарно различны, то собственные подпространства линейно независимы. Кроме того, сумма всех собственных подпространств равна всему пространству V, так как каждый вектор $v \in V$ может быть разложен в сумму векторов из собственных подпространств, соответствующих попарно различным собственным значениям. Следовательно, мы получили разложение пространства V в прямую сумму собственных подпространств:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n.$$

Каждое из подпространств V_i инвариантно относительно T, так как для любого вектора $v \in V_i$ выполнено $T(v) = \lambda_i v \in V_i$. Количество инвариантных подпространств, как мы видим, равно числу всех возможных комбинаций прямых сумм собственных подпространств, то есть $2^n - 1$, так как каждое из n собственных подпространств может входить или не входить в данную прямую сумму.

Инварианты

Найти все инвариантные подпространства оператора, матрица которого в некотором базисе равна жордановой клетке

Для того чтобы найти все инвариантные подпространства оператора, матрица которого в некотором базисе равна жордановой клетке, нужно сначала найти жорданов базис для этой матрицы.

Жорданов базис - это базис, в котором матрица оператора имеет жорданову форму. Жорданова форма матрицы является блочно-диагональной матрицей, где каждый блок - это жорданова клетка. Каждая жорданова клетка соответствует одному из собственных значений оператора и содержит на главной диагонали это собственное значение, а также единицы на диагонали над главной диагональю.

Как только вы найдете жорданов базис для матрицы оператора, вы можете определить все инвариантные подпространства, их размерности, а также базисы для каждого подпространства.

Для примера, давайте рассмотрим жорданову клетку размера 3×3 с собственным значением λ. Его жорданов базис состоит из трех векторов: v_1, v_2 и v_3. Жорданова клетка для этого собственного значения имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Для определения инвариантных подпространств можно рассмотреть подпространства, порожденные комбинациями этих векторов. Возможны следующие случаи:

1. Подпространство, порожденное одним вектором v_i (размерность 1). Это подпространство инвариантно относительно оператора, так как $Av_i = \lambda v_i + w$, где w - линейная комбинация v_1, v_2 и v_3 с коэффициентами, не равными нулю. Таким образом, Av_i принадлежит тому же подпространству, что и v_i.

2. Подпространство, порожденное двумя векторами v_i и v_j (размерность 2). Это подпространство инвариантно относительно оператора, если v_i и v_j являются собственными векторами для одного и того же собственного значения, то есть $\lambda_i = \lambda_j$. В этом случае $Av_i = \lambda_i v_i + w_1$ и $Av_j = \lambda_j v_j + w_2$, где w_1 и w_2 - линейные комбинации v_1, v_2 и v_3 с коэффициентами, не равными нулю. Тогда $A(v_i + v_j) = (\lambda_i + \lambda_j)(v_i + v_j) + (w_1 + w_2)$, что означает, что $v_i + v_j$ также является собственным вектором для собственного значения $\lambda_i + \lambda_j$.

3. Подпространство, порожденное всеми тремя векторами v_1, v_2 и v_3 (размерность 3). Это подпространство инвариантно относительно оператора, так как $A(v_1 + v_2 + v_3) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + w$, где w – линейная комбинация v_1, v_2 и v_3 с коэффициентами, не равными нулю. Таким образом, $v_1 + v_2 + v_3$ также является собственным вектором для собственного значения $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

Таким образом, мы нашли все три инвариантных подпространства для данной жордановой клетки. Аналогично можно определить инвариантные подпространства для матрицы оператора, которая имеет жорданову форму в некотором базисе.

Перестановки

Для того, чтобы доказать, что два перестановочных линейных преобразования комплексного пространства имеют общий собственный вектор, мы можем воспользоваться следующим фактом:

Если два линейных преобразования перестановочные, то они коммутируют с любым многочленом от них. В частности, они коммутируют с минимальным многочленом каждого из них.

Допустим, что у нас есть два перестановочных линейных преобразования A и B комплексного пространства V. Пусть - собственное значение A, и v - соответствующий ему собственный вектор, то есть Av = v. Тогда, поскольку A и B перестановочные, мы можем записать:

ABv = BA v = B(v) = Bv

Таким образом, Bv также является собственным вектором A, соответствующим собственному значению . Если не является собственным значением B, то мы можем повторить этот процесс, используя минимальный многочлен B вместо A. Таким образом, мы получим общий собственный вектор для A и B.

Таким образом, мы доказали, что два перестановочных линейных преобразования комплексного пространства имеют общий собственный вектор.

Теорема Гамильтона Кэли

Теорема Гамильтона-Кэли утверждает, что любая матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению:

$$\det(\lambda I - A) = 0,$$

где I - единичная матрица, а λ - собственное значение матрицы A.

Для доказательства этой теоремы воспользуемся фактом, что множество диагонализируемых матриц плотно над полем комплексных чисел. Это означает, что любая матрица A может быть приближена диагональной матрицей D с любой точностью. То есть существует последовательность диагонализируемых матриц A_n, которые сходятся к матрице A при $n \to \infty$. При этом, каждая матрица A_n имеет собственные значения $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \dots, \lambda_{m,n}$ и соответствующие им собственные векторы $v_{1,n}, v_{2,n}, \dots, v_{m,n}$.

Рассмотрим характеристическое уравнение для матрицы A_n:

$$\det(\lambda I - A_n) = (\lambda - \lambda_{1,n})(\lambda - \lambda_{2,n}) \dots (\lambda - \lambda_{m,n}).$$

Так как матрица A_n диагонализируема, то существует невырожденная матрица P_n, такая что:

$$A_n = P_n D_n P_n^{-1},$$

где D_n – диагональная матрица, элементы на диагонали которой равны собственным значениям матрицы A_n. Подставим это выражение в характеристическое уравнение:

$$\det(\lambda I - A_n) = \det\left(\lambda I - P_n D_n P_n^{-1}\right) = \det\left(P_n(\lambda I - D_n)P_n^{-1}\right) = \det(\lambda I - D_n).$$

Таким образом, характеристическое уравнение для матрицы A_n сводится к уравнению для диагональной матрицы D_n. Поскольку последовательность матриц A_n сходится к матрице A, то последовательность диагональных матриц D_n также сходится к диагональной матрице D, элементы на диагонали которой равны собственным значениям матрицы A. Таким образом, характеристическое уравнение для матрицы A равно:

$$\det(\lambda I - A) = \lim_{n\to\infty} \det(\lambda I - A_n) = \lim_{n\to\infty} (\lambda - \lambda_{1,n})(\lambda - \lambda_{2,n}) \dots (\lambda - \lambda_{m,n}).$$

Так как каждая матрица A_n имеет собственные значения, то и матрица A также имеет собственные значения. Следовательно, характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_m),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – собственные значения матрицы A. Следовательно, теорема Гамильтона-Кэли доказана.

Оператор трёхкратного дифференцирования

Для нахождения жордановой нормальной формы (ЖНФ) оператора трехкратного дифференцирования в пространстве вещественных многочленов степени не выше 9, нужно выполнить следующие шаги:

1. Найти все собственные значения оператора. Для этого решим характеристическое уравнение:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^9.$$

   Отсюда видно, что у оператора есть только одно собственное значение - ноль.

2. Найти размерности жордановых клеток для каждого собственного значения. Так как у нас только одно собственное значение, то достаточно найти размерность жордановых клеток для нулевого собственного значения. Для этого нужно найти ядро оператора $(A - \lambda I)^k$, где $\lambda = 0$ и k - порядок клетки. Начнем с $k = 1$:

$$(A - \lambda I)^1 = A - \mathbf{0} = A.$$

   Чтобы найти ядро оператора A, нужно решить систему уравнений:

$$Ax = \mathbf{0}.$$

   Пусть $x = a_9x^9 + a_8x^8 + \cdots + a_1x + a_0$, тогда

$$Ax = a_9\frac{d^3}{dx^3}x^9 + a_8\frac{d^3}{dx^3}x^8 + \cdots + a_1\frac{d^3}{dx^3}x + a_0\frac{d^3}{dx^3}(1) = a_9 \cdot 84 \cdot 70 \cdot 56 \cdot x^6 + \cdots + a_1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot x = \mathbf{0}.$$

   Отсюда следует, что $a_9 = a_8 = \cdots = a_1 = a_0 = 0$, так как каждый множитель в выражении для Ax содержит производную третьего порядка, а значит не может быть равен нулю для всех x. Следовательно, размерность жордановой клетки для собственного значения ноль равна единице

3. Найти жорданов базис. Жорданов базис строится на основе жордановых клеток. Для каждой жордановой клетки размерности m строится матрица J_m, которая имеет вид:

$$J_m = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix},$$

   где λ - собственное значение. Жорданов базис составляется из жордановых клеток путем объединения столбцов матрицы J_m. В нашем случае жорданов базис будет состоять из единственного многочлена x^8.

4. Найти минимальный многочлен оператора. Минимальный многочлен оператора - это многочлен наименьшей степени, который обнуляет оператор. Так как у нашего оператора только одно собственное значение - ноль, то минимальный многочлен должен быть делителем многочлена λ^9. Также известно, что минимальный многочлен должен иметь такие же неприводимые множители, как и характеристический многочлен. Следовательно, минимальный многочлен оператора равен λ^k, где k – порядок наибольшей жордановой клетки. В нашем случае $k = 1$, поэтому минимальный многочлен равен λ.

Второе задание

Положительная билинейная форма

Для начала, давайте вспомним определение положительно определенной квадратичной формы. Квадратичная форма Q над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ называется положительно определенной, если для любого ненулевого вектора x из $\mathbb{R}^n$ значение $Q(x)$ положительно, то есть $Q(x) > 0$.

Теперь рассмотрим матрицу A, соответствующую данной квадратичной форме. Пусть a_{ij} – элементы этой матрицы. Тогда квадратичная форма $Q(x)$ может быть записана в виде $Q(x) = x^T Ax$. Заметим, что матрица A симметрична, так как $a_{ij} = a_{ji}$.

Предположим, что максимальный по модулю элемент матрицы A отрицательный, то есть $|a_{ij}| > |a_{kl}|$ для всех i, j,k,l. Тогда рассмотрим вектор x, у которого все компоненты равны нулю, кроме i-ой и j-ой, которые равны соответственно 1 и -1. Тогда $x^T Ax = a_{ij} - a_{ji} < 0$, так как a_{ij} отрицательный. Но это противоречит тому, что квадратичная форма $Q(x)$ положительно определена, так как мы нашли вектор x, для которого $Q(x) < 0$.

Следовательно, максимальный по модулю элемент матрицы A положителен

След квадрата матрицы

Для начала, давайте запишем квадратичную форму, соответствующую следу квадрата матрицы порядка n. Пусть A - матрица порядка n, тогда $Q(A) = \mathrm{tr}(A^2)$.

Заметим, что матрица A^2 является симметрической, так как $(A^2)^T = A^T A^T = AA = A^2$. Следовательно, квадратичная форма $Q(A)$ является квадратичной формой на симметрических матрицах порядка n.

Теперь давайте найдем ранг этой квадратичной формы. Для этого нам нужно найти количество независимых переменных, от которых зависит квадратичная форма. Поскольку квадратичная форма зависит только от матрицы A, у которой n^2 элементов, то ранг квадратичной формы равен n^2.

Чтобы найти сигнатуру квадратичной формы, нужно найти количество положительных, отрицательных и нулевых собственных значений матрицы A^2. Заметим, что собственные значения матрицы A^2 всегда неотрицательны, так как $\mathrm{tr}(A^2)$ является суммой квадратов собственных значений матрицы A. Следовательно, у нас нет отрицательных собственных значений, и сигнатура квадратичной формы равна $(n^2, 0)$.

Угловые миноры

Для данной квадратичной формы на трехмерном вещественном пространстве, у которой угловые миноры равны 0, 0 и $\alpha > 0$, положительный индекс инерции может быть равен 1, а отрицательный индекс инерции равен 0.

Индексы инерции квадратичной формы определяются количеством положительных и отрицательных собственных значений матрицы квадратичной формы. Так как у данной квадратичной формы имеется только одно ненулевое собственное значение, а его знак положителен, то положительный индекс инерции равен 1, а отрицательный индекс инерции равен 0.

Таким образом, индексы инерции для данной квадратичной формы имеют вид (1,0).

Положительная определённость

Рассмотрим пример, который покажет, что из положительной определенности двух ограничений пространства, являющейся прямой сумма двух своих подпространств, не следует положительная определённость квадратичной формы.

Пусть $V = \mathbb{R}^2$ и $V_1 = \mathrm{span}\{(1,0)\}$, $V_2 = \mathrm{span}\{(0,1)\}$ - подпространства в V. Рассмотрим два ограничения пространства V:

$$f_1(x,y) = x, \quad f_2(x,y) = y$$

Проверим, что оба ограничения положительно определены:

$$a(x,y) = x > 0, \quad \forall(x,y) \in V_1, \quad (x,y) \neq (0,0)$$
$$f_2(x,y) = y > 0, \quad \forall(x,y) \in V_2, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Теперь рассмотрим квадратичную форму $Q(x,y) = x^2 + y^2$ на V. Можно заметить, что $Q(x,y)$ не является положительно определенной, так как она принимает отрицательные значения на векторах (x,y), не лежащих в V_1 или V_2. Например, на векторе (1,1):

$$Q(1,1) = 1^2 + 1^2 = 2 > 0$$

Таким образом, мы показали, что из положительной определенности двух ограничений пространства, являющейся прямой сумма двух своих подпространств, не следует положительная определённость квадратичной формы.

Кососимметричный определитель

Для того, чтобы доказать, что определитель целочисленной кососимметрической матрицы является квадратом целого числа, мы можем использовать следующий факт:

Если A – кососимметрическая матрица, то $\det(A)$ является квадратом определителя матрицы B, где $B = iA$ и i – мнимая единица.

Итак, пусть A – целочисленная кососимметрическая матрица. Тогда $B = iA$ также является кососимметрической матрицей. Кроме того, элементы B являются комплексными числами с мнимой частью, равной целому числу.

Таким образом, определитель B является квадратом модуля его определителя. Модуль комплексного числа с мнимой частью, равной целому числу, всегда является целым числом.

Следовательно, $\det(B)$ является квадратом целого числа. Но $\det(B) = \det(iA) = i^n \det(A)$, где n - порядок матрицы A.

Так как A - кососимметрическая матрица, то $\det(A)$ является мнимым числом. Поэтому $i^n \det(A)$ является квадратом целого числа.

Таким образом, мы доказали, что определитель целочисленной кососимметрической матрицы является квадратом целого числа

Идемпотенция

Самосопряженное преобразование – это линейное преобразование, которое равно своему сопряженному. Идемпотентное преобразование – это линейное преобразование, которое при повторном применении к вектору даёт тот же самый вектор.

Пусть A – матрица линейного преобразования. Тогда самосопряжённость означает, что $A = A^*$, где A^* – сопряженная матрица. Идемпотентность означает, что $A^2 = A$.

Рассмотрим матрицу A размера $n \times n$. Тогда A самосопряжена, если $A = A^*$, то есть $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ для всех i, j. Идемпотентность означает, что $A^2 = A$, то есть A является проектором на некоторое подпространство $V \subseteq \mathbb{C}^n$.

Пусть A – самосопряженный идемпотентный оператор. Тогда $A^2 = A$ и $A = A^*$. Рассмотрим собственные значения λ матрицы A. Так как A идемпотентна, то $\lambda^2 = \lambda$, то есть $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$. Также, так как A самосопряжена, то существует ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A. Пусть V - подпространство, порожденное собственными векторами, соответствующими собственному значению 1. Тогда A является проектором на V.

Таким образом, все самосопряженные идемпотентные операторы являются проекторами на некоторое подпространство $V \subseteq \mathbb{C}^n$. Обратно, любой проектор на подпространство V является самосопряженным идемпотентным оператором.

Общий ОНБ

Пусть A и B – два самосопряженных оператора в евклидовом пространстве V. Предположим, что у них есть общий ортонормированный базис из собственных векторов. Тогда для любого вектора v из этого базиса выполняется:

$$A = \lambda_v v,$$
$$Bv = \mu_v v,$$

где λ_v и μ_v – собственные значения операторов A и B соответственно. Таким образом, операторы A и B диагонализуемы и коммутируют в этом базисе:

$$ABv = BAv = A(\mu_v v) = \mu_v Av = \mu_v \lambda_v v = \lambda_v Bv.$$

Обратно, предположим, что операторы A и B коммутируют. Тогда они диагонализуемы в одном и том же ортонормированном базисе из собственных векторов. Действительно, если $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора A, то каждый вектор v_i является также собственным вектором оператора B, так как

$$ABv_i = BAv_i = A(\mu_i v_i) = \mu_i Av_i = \mu_i \lambda_i v_i = \lambda_i Bv_i.$$

Таким образом, операторы A и B имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов.

Преобразование линейно

Пусть $f : V \to V$ – отображение, сохраняющее скалярное произведение. Тогда для любых векторов $u,v \in V$ выполняется
$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u,v\rangle.$$
Заметим, что это равенство можно переписать в виде
$$\langle f(u+v), f(u+v)\rangle = \langle u+v,u+v\rangle.$$
Раскрывая скобки, получаем
$$\langle f(u),f(u)\rangle + 2\langle f(u),f(v)\rangle + \langle f(v),f(v)\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle.$$
Так как f сохраняет скалярное произведение, то $\langle f(u),f(u)\rangle = \langle u,u\rangle$ и $\langle f(v),f(v)\rangle = \langle v,v\rangle$. Поэтому
$$2\langle f(u),f(v)\rangle = 2\langle u,v\rangle.$$
Таким образом, для любых векторов $u,v \in V$ выполнено $\langle f(u),f(v)\rangle = \langle u,v\rangle$, что означает, что f сохраняет углы и длины векторов. Поэтому f является изометрией евклидова пространства V.

Для доказательства линейности отображения f достаточно заметить, что из сохранения скалярного произведения следует линейность векторного отображения f. Действительно, для любых векторов $u,v \in V$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем
$$\langle f(\alpha u + \beta v),f(\alpha u + \beta v)\rangle = \langle \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v\rangle.$$
Раскрывая скобки, получаем
$$\alpha^2\langle f(u),f(u)\rangle + 2\alpha\beta\langle f(u),f(v)\rangle + \beta^2\langle f(v),f(v)\rangle = \alpha^2\langle u,u\rangle + 2\alpha\beta\langle u,v\rangle + \beta^2\langle v,v\rangle.$$
Так как f сохраняет скалярное произведение, то $\langle f(u),f(u)\rangle = \langle u,u\rangle$ и $\langle f(v),f(v)\rangle = \langle v,v\rangle$. Поэтому
$$2\alpha\beta\langle f(u),f(v)\rangle = 2\alpha\beta\langle u,v\rangle.$$
Таким образом, для любых векторов $u,v \in V$ выполнено $\langle f(\alpha u+\beta v),f(\alpha u+\beta v)\rangle = \langle \alpha u+\beta v, \alpha u+\beta v\rangle$, что означает, что f сохраняет углы и длины векторов. Поэтому f является изометрией евклидова пространства V, а изометрия линейна.

Чётный ранг

Пусть V – евклидово пространство, на котором задан оператор линейного преобразования φ, такой что $\varphi(v) \perp v$ для любого вектора $v \in V$. Нам нужно доказать, что ранг φ является четным числом.

Заметим, что $\varphi(v) \perp v$ означает, что $\varphi(v)$ лежит в ортогональном дополнении к пространству, порожденному вектором v. Таким образом, $\varphi(v)$ ортогонально любому вектору, лежащему в этом пространстве.

Рассмотрим произвольный вектор $v \in V$ и его ортогональное дополнение $W = \{w \in V \mid w \perp v\}$. Так как $\varphi(v) \in W$ для любого $v \in V$, то $\varphi(W) \subseteq W$. Более того, $\varphi(W)$ также ортогонально любому вектору из W, так как $\varphi(w) \perp w$ для любого $w \in W$.

Рассмотрим теперь ограничение φ на W. Так как $\varphi(W) \subseteq W$, то ограничение $\varphi|_W$ является линейным оператором на W. Кроме того, $\varphi(w) \perp w$ для любого $w \in W$, поэтому $\varphi|_W$ является самосопряженным оператором на W.

Так как $\varphi|_W$ самосопряжен, то существует ортонормированный базис $e_1, \dots, e_k$ в W, состоящий из собственных векторов $\varphi|_W$, где k – ранг $\varphi|_W$. Так как $\varphi(W) \subseteq W$, то любой собственный вектор $\varphi|_W$ также является собственным вектором φ.

Расширим базис $e_1, \dots, e_k$ до ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_n$ в V. Тогда матрица оператора φ в этом базисе имеет вид:
$$[\varphi] = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – собственные значения $\varphi|_W$, I_k – единичная матрица размера $k \times k$, а 0 – нулевая матрица размера $(n-k) \times k$ и 0 размера $(n-k) \times (n-k)$.

Таким образом, ранг матрицы $[\varphi]$ равен k, что является четным числом. Следовательно, ранг оператора φ также является четным числом.

Математический анализ

Первое задание

Перестановочный ряд

В общем случае нельзя считать ряд, полученный перестановкой условно сходящегося ряда, сходящимся.

Пусть дан условно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, который сходится к A. Тогда существует перестановка σ натуральных чисел, такая что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится.

Действительно, по определению условной сходимости, существует такое число B, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, где $b_n = |a_n|$ для $a_n \geq 0$ и $b_n = -|a_n|$ для $a_n < 0$. Рассмотрим частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}$. Они могут принимать значения от $-B$ до B (по теореме Римана об упорядочивании условно сходящегося ряда), но так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то существует такое число C, что любая частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}$ не превосходит C. Однако, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то существует такое число D, что сумма модулей любых D членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ больше B. Тогда найдется такое натуральное число N, что $\sum_{n=1}^{N} |a_n| > B$. Поскольку $|a_n| \leq b_n$ для всех n, то также выполнено $\sum_{n=1}^{N} b_n > B$.

Теперь рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Его частичная сумма $\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)}$ равна сумме N членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с разными знаками и в произвольном порядке. Можно выбрать такое N, что $\sum_{n=1}^{N} b_n > B$. Тогда найдутся такие индексы i и j ($i < j$), что $\sum_{n=i}^{j} b_n > B$, а следовательно, сумма $j - i + 1$ членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ также превосходит B. Это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится, и мы получили противоречие.

Таким образом, в общем случае нельзя считать ряд, полученный перестановкой условно сходящегося ряда, сходящимся. Однако, в некоторых случаях, например, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то любая перестановка его членов также будет сходиться к тому же пределу