

Содержание

1	Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений. Теорема Фубини	3
1.1	Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений	3
1.2	Теорема Фубини	3
2	Теорема о замене переменных в кратном интеграле	3
3	Теорема о построении криволинейной системы координат исходя из её части	4
4	Гладкие подмногообразия пространства \mathbb{R}^N. Теорема о гладком подмногообразии пространства \mathbb{R}^N, заданном системой уравнений	4
4.1	Гладкие подмногообразия пространства \mathbb{R}^N	4
4.2	Теорема о гладком подмногообразии пространства \mathbb{R}^N , заданном системой уравнений	4
5	Геометрический касательный вектор к подмножеству пространства \mathbb{R}^n. Теоремы о структуре множества $T_P(M)$ геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию M пространства \mathbb{R}^n в общем случае и в случае, когда M заданно системой уравнений	4
5.1	Геометрический касательный вектор к подмножеству пространства \mathbb{R}^n	4
5.2	Теоремы о структуре множества $T_P(M)$ геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию M пространства \mathbb{R}^n в общем случае и в случае, когда M заданно системой уравнений	4
6	Необходимые условия безусловного экстремума. Достаточные условия безусловного экстремума	5
6.1	Необходимые условия безусловного экстремума	5
6.2	Достаточные условия безусловного экстремума	5
7	Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума. Необходимые условия условного экстремума. Достаточные условия условного экстремума	5
7.1	Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума	5
7.2	Необходимые условия условного экстремума	5
7.3	Достаточные условия условного экстремума	6
8	Топологическое пространство. Индуцированная топология. Карта и атлас на топологическом пространстве. Общие (абстрактные) определения многообразия и гладкого многообразия. Классы гладкости C^k отображений из одного гладкого многообразия в другое	6
8.1	Топологическое пространство	6
8.2	Индуцированная топология	6
8.3	Карта и атлас на топологическом пространстве	7
8.4	Общие (абстрактные) определения многообразия и гладкого многообразия	7
8.5	Классы гладкости C^k отображений из одного гладкого многообразия в другое	7
9	Теорема о гладком атласе на гладком подмногообразии пространства \mathbb{R}^N. Достаточное условие гладкости подмногообразия пространства \mathbb{R}^N в терминах карты	7
9.1	Теорема о гладком атласе на гладком подмногообразии пространства \mathbb{R}^N	7
9.2	Достаточное условие гладкости подмногообразия пространства \mathbb{R}^N в терминах карты	8
10	Касательный вектор к абстрактному гладкому многообразию как оператор дифференцирования. Теорема о структуре множества $T_P(M)$ касательных векторов. Изменение координат касательного вектора при замене локальной системы координат	8
10.1	Касательный вектор к абстрактному гладкому многообразию как оператор дифференцирования	8
10.2	Теорема о структуре множества $T_P(M)$ касательных векторов	8
10.3	Изменение координат касательного вектора при замене локальной системы координат	9
11	Край многообразия. Теорема о независимости краевой точки карты от карты	9
11.1	Край многообразия	9
11.2	Теорема о независимости краевой точки карты от карты	9

12 Ориентация гладкого многообразия. Существование ровно двух ориентаций линейно-связного ориентируемого многообразия	9
12.1 Ориентация гладкого многообразия	9
12.2 Существование ровно двух ориентаций линейно-связного ориентируемого многообразия . . .	9
13 Ориентация гладкого $(N - 1)$-мерного подмногообразия пространства \mathbb{R}^N. Теорема о непрерывной нормали	10
13.1 Ориентация гладкого $(N - 1)$ -мерного подмногообразия пространства \mathbb{R}^N	10
13.2 Теорема о непрерывной нормали	10
14 Теорема о построении ориентирующего атласа для края многообразия на основе ориентирующего атласа исходного многообразия. Согласование ориентации гладкого многообразия и ориентации его края	10
14.1 Теорема о построении ориентирующего атласа для края многообразия на основе ориентирующего атласа исходного многообразия	10
14.2 Согласование ориентации гладкого многообразия и ориентации его края	11
15 Тензорное поле на многообразии. Изменение компонент тензорного поля при замене локальной системы координат. Выражение тензорного поля через его компоненты с помощью операции тензорного произведения	11
15.1 Тензорное поле на многообразии	11
15.2 Изменение компонент тензорного поля при замене локальной системы координат	11
15.3 Выражение тензорного поля через его компоненты с помощью операции тензорного произведения	11

1 Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений. Теорема Фубини

1.1 Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений

Л1

Пусть есть счётный набор конечно измеримых убывающих вложенных множеств X_i . Мера множества, являющегося счётным пересечением есть предел мер

Л2

Если интеграл неотрицательной функции по множеству равен нулю, то сама функция равна нулю почти на всём множестве

Th О выражении меры множества через интеграл от меры сечений

1. Для начала докажем для клетки. Её сечение будет принимать простой вид, в зависимости от принадлежности x , что даёт простое интегрирование и доказывает теорему
2. Теперь докажем для счётного набора (объединения) клеток. Задача сводится к предыдущей.
3. Найдём меру множества, являющегося счётным пересечением объединения счётного числа клеток
4. Определим убывающую последовательность множеств
5. Далее считаем меры составляющих, по ходу дела используя теорему Лебега об ограниченной сходимости
6. Теперь рассмотрим случай множества нулевой меры и, с помощью всяких сравнений и пределов, докажем требуемое.
7. В конце рассмотрим общий случай конечно измеримого множества.
8. Используем все предыдущие леммы и случаи и получаем требуемое при почти всех x

1.2 Теорема Фубини

Th О геометрическом смысле интеграла

Th Фубини

2 Теорема о замене переменных в кратном интеграле

Опр C^k -гладкий диффеоморфизм

Опр Носитель функции

Th О замене переменных в кратном интеграле

Л2 Теорема справедлива, если функция f непрерывна на Y , а её носитель компактен и лежит в Y

1. Убрав условие 3, мы сделали теорему локальной (для каждой точки существует окрестность, где выполнено условие 3)
2. Воспользуемся теоремой о расщеплении отображений, о неявной функции, критерием компактности, теоремой о разбиении единицы
3. Это позволяет разбить функцию на сумму. Утверждение для фиксированного индекса (на его области значений) верно по предыдущей лемме

Л4 Теорема справедлива, если функция f непрерывна на Y

1. Рассмотрим неотрицательно значные функции и введём хитрые множества Y_k и функции f_k
2. Докажем, что $\subset f_k$ исходя из определения f_k . Получили ограниченность и замкнутость f_k
3. Из построения множеств следуют включения, а за ними и неравенства
4. Теперь покажем, что f_k стремятся к f через определения и построения условий.
5. Запишем следствия из предела и перейдём и завершим доказательство с помощью теоремы Б. Леви
6. В общем случае разобьём f на f_+ и f_- и получим искомое равенство

3 Теорема о построении криволинейной системы координат исходя из её части

Опр Криволинейная система координат на множестве A

Опр Координатный набор

Th О построении криволинейной системы координат исходя из её части.

1. Рассмотрим отображение из известного набора функций и матрицу Якоби этого отображения.
2. Рассмотрим координатные строки и матрицу в точке и применим теорему о ранге матрицы
3. Определим новые гладкие функции и всеобъемлющее отображение, рассмотрим новую матрицу Якоби
4. Применим теорему об обратном отображении и получим требуемое

4 Гладкие подмногообразия пространства \mathbb{R}^N . Теорема о гладком подмногообразии пространства \mathbb{R}^N , заданном системой уравнений

4.1 Гладкие подмногообразия пространства \mathbb{R}^N

Опр Гладкое n -мерное подмногообразие пространства \mathbb{R}_p^N в точке $P \in M$

Опр Канонический и выпрямляющий диффеоморфизм

Утв Гладкое n -мерное подмногообразие пространства

4.2 Теорема о гладком подмногообразии пространства \mathbb{R}^N , заданном системой уравнений

Th О гладком подмногообразии, заданном системой уравнений

1. Сначала построим отображения до гладкого диффеоморфизма по теореме о построении криволинейной системы координат, исходя из её части
2. Докажем, что выпрямляемость обратного диффеоморфизма. Это делается через анализ множеств и из их свойств

5 Геометрический касательный вектор к подмножеству пространства \mathbb{R}^n . Теоремы о структуре множества $T_P(M)$ геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию M пространства \mathbb{R}^n в общем случае и в случае, когда M заданно системой уравнений

5.1 Геометрический касательный вектор к подмножеству пространства \mathbb{R}^n

Опр Геометрический касательный вектор к множеству в точке

Опр Геометрическое касательное пространство

5.2 Теоремы о структуре множества $T_P(M)$ геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию M пространства \mathbb{R}^n в общем случае и в случае, когда M заданно системой уравнений

Th.1 О структуре множества геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию.

1. Воспользуемся определением канонического диффеоморфизма, леммой о $T_P(M)$ к линейному пространству и о локальности $T_P(M)$.
2. Запишем вид $T_P(M)$ и перейдём к локальной параметризации (из-за правил умножения матриц)

3. Итого, касательные векторы есть л.к. столбцов матрицы Якоби, а само $T_P(M)$ является n -мерным линейным подпространством \mathbb{R}^N

Th. 2 *О структуре множества геометрических касательных векторов к подмногообразию, заданному системой уравнений.*

1. Пишем те же рассуждениями, что и в теореме о гладком подмногообразии, заданном системой уравнений.
2. Введём новую переменную и воспользуемся предыдущей теоремой

6 Необходимые условия безусловного экстремума. Достаточные условия безусловного экстремума

6.1 Необходимые условия безусловного экстремума

Опр *Точка экстремума*

Опр *Точка (не)строгого локального минимума (максимума) функции на множестве*

Th *Необходимое условие экстремума*

Для доказательства воспользуемся определением градиента и рассмотрим функцию одной переменной, где применим теорему Ферма

6.2 Достаточные условия безусловного экстремума

Опр *Стационарная точка*

Th *Достаточные условия экстремума.*

1. Разложим Δf по формуле Тейлора с использованием определения стационарной точки.
2. Воспользуемся леммой и определением o -малого и предела
3. Теперь перепишем Δf и получим требуемое. В случае отрицательной определённости рассуждения аналогичны (f меняется на $-f$)
4. В знаконеопределённом случае рассмотрим выделенные направления и запишем Δf .
5. Воспользуемся определением предела и выберем достаточно малые t_i для построения противоречия
6. В последнем случае приводятся два контрпримера $f = x^4$ и $f = x^3$

7 Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума. Необходимые условия условного экстремума. Достаточные условия условного экстремума

7.1 Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума

Опр *Функция Лагранжа*

Опр *Множители Лагранжа*

7.2 Необходимые условия условного экстремума

Th *Необходимые условия экстремума*

Сделаем общие построения для доказательства теорем.

1. Воспользуемся теоремой о построении криволинейной системы координат, исходя из её части и введём новые обозначения для обратных функций
2. Тогда можно расписать обратную функцию Лагранжа и показать, что новая задача эквивалентна старой

Теперь докажем саму теорему.

1. Воспользуемся теоремой о необходимом условии безусловного экстремума и выберем специальные множители Лагранжа.
2. Вернёмся к исходным переменным, воспользовавшись теоремой о дифференцировании сложной функции и значениями $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}$
3. Вышеперечисленное показывает, что x_0 – стационарная точка функции Лагранжа, как и нашей исходной функции

7.3 Достаточные условия условного экстремума

Th Достаточные условия экстремума.

1. Перейдём к обратной функции Лагранжа, для которой точка y_0 стационарна
2. Исходная точка будет стационарной, если в этой точке обратная функция совпадёт с обратной функцией Лагранжа, то есть k' для обратной функции Лагранжа будет отрицательная определена
3. Покажем, что это эквивалентно отрицательной определённости k . Для этого воспользуемся инвариантностью первого дифференциала, распишем второй и воспользуемся стационарностью точки
4. Согласно теореме о структуре множества геометрических касательных векторов к подмногообразию, заданному системой уравнений, получаем эквивалентность структур форм, что нам и требуется

8 Топологическое пространство. Индуцированная топология. Карта и атлас на топологическом пространстве. Общие (абстрактные) определения многообразия и гладкого многообразия. Классы гладкости C^k отображений из одного гладкого многообразия в другое

8.1 Топологическое пространство

Опр Топологическое пространство

Опр Топология

Опр Открытое в топологическом пространстве множество

Опр Семейство всех открытых подмножеств метрического пространства с метрикой

Опр Окрестность точки

Опр Внутренность множества

Опр Замыкание множества

8.2 Индуцированная топология

Опр Индуцированная топология

Л1

Доказывается по определению, с привлечением старых множеств, породивших новую топологию

Опр Хаусдорфово топологическое пространство

Опр Предел по топологическому пространству

Заметим, что у хаусдорфова пространства не может быть двух различных пределов; иначе может

Л2

Доказывается выбором специальных окрестностей, которые не пересекаются

Опр База топологического пространства

Л3

Возьмём пересечения открытых шаров с рациональными радиусами и координатами

Опр Непрерывное отображение

Опр Секвенциально непрерывное в точке отображение

Опр (Секвенциально) непрерывное в точке отображение

Опр Гомеоморфизм

Л4

Докажем от частного к общему с помощью непрерывности и открытости объединения открытых

Опр Компактное топологическое пространство

Опр Секвенциально компактное топологическое пространство

Опр *Секвенциально компактное множество*

Л5

Возьмём открытое покрытие множества, перейдём к прообразам, выберем там открытое покрытие и конечное подпокрытие

Опр *Гомеоморфные множества*

Опр *Топологический инвариант*

Опр *Линейно-связное топологическое пространство*

Компактность и линейная связность являются топологическими инвариантами, поскольку они сохраняются при любом непрерывном отображении

8.3 Карта и атлас на топологическом пространстве

Опр *n -мерная карта на топологическом пространстве*

Опр *Гомеоморфизм карты*

Опр *Район действия карты*

Опр *Область параметров карты*

Опр *Атлас на топологическом пространстве*

8.4 Общие (абстрактные) определения многообразия и гладкого многообразия

Опр *n -мерное абстрактное многообразие*

Опр *Замена координат, отображение перехода, отображение склейки*

8.5 Классы гладкости C^k отображений из одного гладкого многообразия в другое

Опр *Гладкий диффеоморфизм*

Опр *Гладкий атлас*

Атлас на многообразии, состоящий из одной карты, считается гладким

Опр *Эквивалентные гладкие атласы*

Опр *Гладкая структура, определяемая атласом*

Опр *Гладкое n -мерное многообразие*

Опр *Карта на гладком многообразии*

Опр *Локальная система координат карты*

Опр *Класс C^k -гладких отображений*

Опр *Координатное представление отображения*

Опр *Диффеоморфные гладкие многообразия*

9 Теорема о гладком атласе на гладком подмногообразии пространства \mathbb{R}^N . Достаточное условие гладкости подмногообразия пространства \mathbb{R}^N в терминах карты

9.1 Теорема о гладком атласе на гладком подмногообразии пространства \mathbb{R}^N

Th *О гладком атласе на гладком подмногообразии*

1. По лемме, $\forall P$ найдётся карта на топологическом пространстве M , порождённая каноническим диффеоморфизмом, район действия которой содержит точку P . Семейство всех таких карт составляет атлас; покажем, что он гладкий
2. Фиксируем $\forall P$, вводим новые обозначения и рассматриваем отображения замены координат
3. Они будут состоять из суперпозиции гладких диффеоморфизмов, что докажет и диффеоморфность замены координат

9.2 Достаточное условие гладкости подмногообразия пространства \mathbb{R}^N в терминах карты

Опр Порождённая каноническим диффеоморфизмом карта

Опр Порождённая каноническим диффеоморфизмом в некоторой окрестности точки карта

Th.1 Достаточное условие гладкости подмногообразия в терминах карты.

1. Считаем V открытым подмножеством согласно лемме и воспользуемся теоремой о ранге матрицы
2. От исходного отображения перейдём к $f(x)$ с новыми обозначениями и запишем Матрицу Якоби отображения
3. Увидим, что в x_0 матрица невырождена, что позволяет использовать теорему об обратном отображении
4. M будет задано простой системой уравнений, то есть имеет вид подпространства или полуподпространства
5. Теперь докажем, что M подмногообразие. В случае внутренней точки рассматриваем сужения и пересечения, вводя новые обозначения.
6. Осталось показать, что параметры находились в линейной части пространства. В случае внутренней точки доказываем сначала прямое, а потом и обратное включения с помощью шманства
7. Случай граничной точки следует заменой подпространства на полуподпространство
8. Согласно определению отображения f , справедливо равенство, которое и завершает доказательство

10 Касательный вектор к абстрактному гладкому многообразию как оператор дифференцирования. Теорема о структуре множества $T_P(M)$ касательных векторов. Изменение координат касательного вектора при замене локальной системы координат

10.1 Касательный вектор к абстрактному гладкому многообразию как оператор дифференцирования

Опр Производная функции по вектору в точке

Опр Касательный вектор

Оператор обладает свойством локальности

Обозначение Множество всех касательных векторов

Опр Соответствующие абстрактный и обычный касательный векторы

Опр Координаты касательного вектора

Касательный вектор является линейным оператором. Это следует из свойства линейности и правила Лейбница для производной функции одной переменной

10.2 Теорема о структуре множества $T_P(M)$ касательных векторов

Th О структуре множества касательных векторов.

1. Фиксируем произвольную ЛСК в окрестности точки и введём новые обозначения.
2. Перейдём к равенствам для любой функции f . В итоге получим линейное пространство.
3. Покажем, что коэффициенты разложения вектора по системе векторов определены однозначно. Это следует из существования соответствующего геометрического касательного вектора
4. Итого операторный набор составляет базис в $T_P(M)$

Опр Производная функции по геометрическому касательному вектору

Опр Изоморфизм линейных пространств

Опр Изоморфные линейные пространства

10.3 Изменение координат касательного вектора при замене локальной системы координат

Лемма

Доказывается записью вектора в двух базисах и с помощью теоремы о дифференцировании сложной функции

11 Край многообразия. Теорема о независимости краевой точки карты от карты

11.1 Край многообразия

Опр Краем допустимой области параметров

Край, вообще говоря, не совпадает с границей множества, потому как граничные точки могут не принадлежать множеству

Опр Краевая точка карты

11.2 Теорема о независимости краевой точки карты от карты

Th О независимости краевой точки от карты.

1. Докажем от противного: пусть краевая для одной карты и нет для другой
2. \exists две окрестности, операции с которым показывают, что x_2 внутренняя точка множества V_2 .
3. Сделаем замену координат, а потом и тождественное изображение. Получим невырожденность замены координат.
4. Воспользуемся теоремой о неявной функции и получим окрестность точки x_1 в V_1 первой карты. Также X_k будут монотонны по включению
5. Таким образом, точка x_1 не лежит на границе области, а значит, P не краевая точка карты, противоречие

Опр Край гладкого многообразия

12 Ориентация гладкого многообразия. Существование ровно двух ориентаций линейно-связного ориентируемого многообразия

12.1 Ориентация гладкого многообразия

Опр Согласованные (по ориентации) карты

Опр Ориентирующий атлас

Опр (Не)ориентируемое многообразие

Опр Согласованные атласы

Опр Ориентация многообразия

Опр Ориентированное многообразие

Опр Карты, соответствующие ориентации или согласованные с ориентацией гладкого многообразия

12.2 Существование ровно двух ориентаций линейно-связного ориентируемого многообразия

Th О двух ориентациях многообразия.

1. Возьмём ориентирующий атлас и сделаем из него атлас с противоположной ориентацией. Заметим, что допустимая область параметров таковой остаётся
2. Таким образом, существуют по крайней мере две различные ориентации многообразия – это класс всех атласов, согласованных с первым
3. Покажем, что третьей ориентации многообразия не существует. Фиксируем ориентирующий атлас.

4. Выберем $\forall P$ и проанализируем знак якобиана замены координат
5. Знак якобиана непрерывно зависит от точки, притом не может обращаться в ноль как якобиан диффеоморфизма
6. Итак, в зависимости от знака якобиана, кандидат согласован либо с первым, либо со вторым атласом

13 Ориентация гладкого $(N - 1)$ -мерного подмногообразия пространства \mathbb{R}^N . Теорема о непрерывной нормали

13.1 Ориентация гладкого $(N - 1)$ -мерного подмногообразия пространства \mathbb{R}^N

Опр Единичный вектор нормали к многообразию

Опр Согласованный единичный вектор нормали и карта

Опр Согласованный с ориентацией многообразия вектор нормали

13.2 Теорема о непрерывной нормали

Th О непрерывной нормали

Последовательность сходится равномерно \Leftrightarrow выполняется условие Коши

1. \Rightarrow : покажем непрерывность функции. Зафиксируем $\forall P_0$ и покажем, что частичный предел последовательности стремящихся точек единственен.
2. Зафиксируем карту с P_0 и перейдём к пределу в скалярных произведениях и по модулю
3. Условие согласованности нормали и карты $\Leftrightarrow \det > 0$. Перейдя к пределу, получим равенство пределов нормалей, притом функция нормали непрерывна в любой точке M
4. \Leftarrow : перейдём к карте и возьмём правый базис (или изменим до правого)
5. Пользуемся непрерывностью и линейной связностью для получения правого базиса в каждой точке
6. Полученный атлас будет ориентирующим, так как все карты имеют правые тройки, поэтому они согласованы

14 Теорема о построении ориентирующего атласа для края многообразия на основе ориентирующего атласа исходного многообразия. Согласование ориентации гладкого многообразия и ориентации его края

14.1 Теорема о построении ориентирующего атласа для края многообразия на основе ориентирующего атласа исходного многообразия

Л2

1. Зафиксируем гладкий атлас и перейдём от обычной окрестности к открытому шару или полушару
2. Из предыдущей леммы $\Rightarrow \exists$ диффеоморфизм между областью параметров и (полу)пространством
3. Введём новые обозначения, получим гладкий атлас, а затем и гладкий атлас из (полу)пространства

Л3

1. Пользуясь предыдущей леммой, получим гладкий атлас с нужной областью параметров
2. У всех карт, ориентации которых не совпадают с ориентацией M , поменяем вторую координату (область параметров, заметим, не изменится)

Th О построении ориентирующего атласа для края многообразия

1. Сначала получим гладкий атлас на крае, а затем покажем, что \forall две карты атласа согласованы

2. От открытого образа перейдём к открытому прообразу и рассмотрим отображение замены координат. Покажем, что якобиан сужения на крае положителен (то есть атлас ориентирующий)
3. Зафиксируем краевую точку и посчитаем частные производные по координатам.
4. Перейдём к якобианам и получим, что атлас на краю действительно ориентирующий (исходный таковой по условию)

14.2 Согласование ориентации гладкого многообразия и ориентации его края

Опр *Согласованная ориентация края и многообразия*

Опр *Перенос ориентации между многообразиями*

15 Тензорное поле на многообразии. Изменение компонент тензорного поля при замене локальной системы координат. Выражение тензорного поля через его компоненты с помощью операции тензорного произведения

15.1 Тензорное поле на многообразии

Опр *Тензор на пространстве*

Опр *Компоненты (координаты) тензора*

Опр *Тензорное произведение тензора*

Оно не коммутативно

Опр *Векторное поле*

Опр *Ковекторное поле*

Опр *Скалярное поле*

Опр *Тензорное поле*

Опр *Компоненты тензорного поля*

15.2 Изменение компонент тензорного поля при замене локальной системы координат

Th *О законе изменения компонент тензорного поля при замене ЛСК*

Перейдём к другим координатам по формуле, подставим это в старый тензор, вынесем константы и получим новую формулу

15.3 Выражение тензорного поля через его компоненты с помощью операции тензорного произведения

Опр *Сумма двух тензорных полей (одинакового типа)*

Опр *Произведение тензорного и скалярного полей*

Опр *Тензорное произведение тензорных полей*

Th