

# Конспект билетов

## Аналитическая механика

### Содержание

<b>1 Кинематика точки. Траектория, скорость и ускорение точки. Скорость и ускорение точки в полярных координатах</b>	<b>5</b>
1.1 Кинематика точки . . . . .	5
1.2 Скорость и ускорение точки в полярных координатах . . . . .	5
<b>2 Кинематика точки. Естественный трёхгранник. Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное</b>	<b>5</b>
2.1 Кинематика точки. Естественный трёхгранник . . . . .	5
2.2 Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное . . . . .	5
<b>3 Криволинейные координаты точки. Коэффициенты Ламе. Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах. Скорость точки в цилиндрических и сферических координатах</b>	<b>5</b>
3.1 Криволинейные координаты точки . . . . .	5
3.2 Коэффициенты Ламе . . . . .	5
3.3 Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах . . . . .	5
3.4 Скорость точки в цилиндрических и сферических координатах . . . . .	6
<b>4 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела. Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса)</b>	<b>6</b>
4.1 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела . . . . .	6
4.2 Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса) . . . . .	6
<b>5 Плоское движение твёрдого тела. Мгновенный центр скоростей. Мгновенный центр ускорений</b>	<b>6</b>
5.1 Плоское движение твёрдого тела . . . . .	6
5.2 Мгновенный центр скоростей . . . . .	6
5.3 Мгновенный центр ускорений . . . . .	6
<b>6 Кинематические инварианты. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось</b>	<b>7</b>
6.1 Кинематические инварианты . . . . .	7
6.2 Кинематический винт . . . . .	7
6.3 Мгновенная винтовая ось . . . . .	7
<b>7 Алгебра кватернионов</b>	<b>7</b>
<b>8 Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела. Теорема Эйлера о конечном повороте</b>	<b>7</b>
8.1 Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела . . . . .	7
8.2 Теорема Эйлера о конечном повороте . . . . .	7
<b>9 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах. Параметры Родрига-Гамильтона. Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой</b>	<b>7</b>
9.1 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах . . . . .	7
9.2 Параметры Родрига-Гамильтона . . . . .	8
9.3 Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой . . . . .	8
<b>10 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона). Прецессионное движение твёрдого тела</b>	<b>8</b>
10.1 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона) . . . . .	8
10.2 Прецессионное движение твёрдого тела . . . . .	8

<b>11 Кинематика сложного движения точки. Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении</b>	<b>8</b>
11.1 Кинематика сложного движения точки . . . . .	8
11.2 Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении . . . . .	8
<b>12 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг пересекающихся осей. Кинематические уравнения Эйлера</b>	<b>8</b>
12.1 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела во- круг пересекающихся осей . . . . .	8
12.2 Кинематические уравнения Эйлера . . . . .	8
<b>13 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг параллельных осей. Пара вращений</b>	<b>9</b>
13.1 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела во- круг параллельных осей . . . . .	9
13.2 Пара вращений . . . . .	9
<b>14 Сложное движение твёрдого тела. Общий случай сложения движений</b>	<b>9</b>
14.1 Сложное движение твёрдого тела . . . . .	9
14.2 Общий случай сложения движений . . . . .	9
<b>15 Момент силы относительно точки и оси, главный вектор и главный момент сил си- стемы. Элементарная работа сил системы. Работа сил, приложенных к твёрдому телу. Силовое поле. Силовая функция. Потенциал</b>	<b>9</b>
15.1 Момент силы относительно точки и оси, главный вектор и главный момент сил системы . .	9
15.2 Элементарная работа сил системы . . . . .	9
15.3 Работа сил, приложенных к твёрдому телу . . . . .	9
15.4 Силовое поле . . . . .	10
15.5 Силовая функция . . . . .	10
15.6 Потенциал . . . . .	10
<b>16 Количество движения. Центр масс. Теорема об изменении количества движения си- стемы. Теорема о движении центра масс</b>	<b>10</b>
16.1 Количество движения . . . . .	10
16.2 Центр масс . . . . .	10
16.3 Теорема об изменении количества движения системы . . . . .	10
16.4 Теорема о движении центра масс . . . . .	10
<b>17 Главный момент количества движения (кинетический момент) системы относитель- но заданного центра. Кинетический момент системы для ее движения относительно центра масс. Теорема Кенига о вычислении кинетического момента</b>	<b>10</b>
17.1 Главный момент количества движения (кинетический момент) системы относительно за- данного центра . . . . .	10
17.2 Кинетический момент системы для ее движения относительно центра масс . . . . .	10
17.3 Теорема Кенига о вычислении кинетического момента . . . . .	11
<b>18 Теорема об изменении кинетического момента системы</b>	<b>11</b>
<b>19 Кинетическая энергия системы. Теорема Кенига о вычислении кинетической энергии. Теорема об изменении кинетической энергии системы. Закон сохранения полной ме- ханической энергии системы</b>	<b>11</b>
19.1 Кинетическая энергия системы . . . . .	11
19.2 Теорема Кенига о вычислении кинетической энергии . . . . .	11
19.3 Теорема об изменении кинетической энергии системы . . . . .	11
19.4 Закон сохранения полной механической энергии системы . . . . .	11
<b>20 Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчёта. Переносная и ко- риолисова силы инерции. Основные теоремы динамики для движения относительно центра масс</b>	<b>11</b>
20.1 Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчёта. Переносная и кориолисова силы инерции . . . . .	11
20.2 Основные теоремы динамики для движения относительно центра масс . . . . .	12

<b>21 Движение материальной точки в центральном поле. Интеграл площадей; второй закон Кеплера. Уравнение Бине</b>	<b>12</b>
21.1 Движение материальной точки в центральном поле . . . . .	12
21.2 Интеграл площадей; второй закон Кеплера . . . . .	12
21.3 Уравнение Бине . . . . .	12
<b>22 Движение точки в поле всемирного тяготения: уравнение орбиты, законы Кеплера. Интеграл площадей, интеграл энергии, интеграл Лапласа. Задача двух тел</b>	<b>12</b>
22.1 Движение точки в поле всемирного тяготения: уравнение орбиты, законы Кеплера . . . . .	12
22.2 Интеграл площадей, интеграл энергии, интеграл Лапласа . . . . .	12
22.3 Задача двух тел . . . . .	12
<b>23 Момент инерции системы относительно оси. Матрица тензора инерции. Эллипсоид инерции. Главные оси и главные моменты инерции</b>	<b>13</b>
23.1 Момент инерции системы относительно оси . . . . .	13
23.2 Матрица тензора инерции . . . . .	13
23.3 Эллипсоид инерции . . . . .	13
23.4 Главные оси и главные моменты инерции . . . . .	13
<b>24 Моменты инерции относительно параллельных осей; теорема Гюйгенса – Штейнера. Преобразование матрицы тензора инерции при параллельном переносе осей. Свойства осевых моментов инерции</b>	<b>13</b>
24.1 Моменты инерции относительно параллельных осей; теорема Гюйгенса – Штейнера . . . . .	13
24.2 Преобразование матрицы тензора инерции при параллельном переносе осей . . . . .	13
24.3 Свойства осевых моментов инерции . . . . .	13
<b>25 Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки или вокруг неподвижной оси. Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела при его произвольном движении</b>	<b>13</b>
25.1 Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки или вокруг неподвижной оси . . . . .	13
25.2 Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела при его произвольном движении	14
<b>26 Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Дифференциальные уравнения движения свободного твёрдого тела. Уравнения плоского движения твёрдого тела</b>	<b>14</b>
26.1 Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси . . . . .	14
26.2 Дифференциальные уравнения движения свободного твёрдого тела . . . . .	14
26.3 Уравнения плоского движения твёрдого тела . . . . .	14
<b>27 Дифференциальные уравнения движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера. Случай Эйлера движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки: первые интегралы уравнений движения; стационарные вращения</b>	<b>14</b>
27.1 Дифференциальные уравнения движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера . . . . .	14
27.2 Случай Эйлера движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки: первые интегралы уравнений движения; стационарные вращения . . . . .	14
<b>28 Случай Эйлера движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки: регулярная прецессия в случае динамической симметрии тела; геометрическая интерпретация Пуансо</b>	<b>15</b>
<b>29 Вынужденная регулярная прецессия динамически симметричного твёрдого тела с неподвижной точкой. Основная формула гироскопии. О приближенной теории гироскопов</b>	<b>15</b>
29.1 Вынужденная регулярная прецессия динамически симметричного твёрдого тела с неподвижной точкой . . . . .	15
29.2 Основная формула гироскопии . . . . .	15
29.3 О приближенной теории гироскопов . . . . .	15
<b>30 Уравнения движения тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой. Первые интегралы. Случай Эйлера, Лагранжа, Ковалевской интегрируемости уравнений движения</b>	<b>15</b>
30.1 Уравнения движения тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой . . . . .	15
30.2 Первые интегралы . . . . .	15

30.3	Случай Эйлера, Лагранжа, Ковалевской интегрируемости уравнений движения . . . . .	16
<b>31</b>	<b>Случай Лагранжа движения твёрдого тела с неподвижной точкой. Регулярная прецессия в случае Лагранжа. Общий случай исследования движения; геометрическая интерпретация</b>	<b>16</b>
31.1	Случай Лагранжа движения твёрдого тела с неподвижной точкой . . . . .	16
31.2	Регулярная прецессия в случае Лагранжа . . . . .	16
31.3	Общий случай исследования движения; геометрическая интерпретация . . . . .	16
<b>32</b>	<b>Несвободные системы. Связи и их классификация. Возможные, действительные и виртуальные перемещения точек системы. Число степеней свободы системы</b>	<b>16</b>
32.1	Несвободные системы . . . . .	16
32.2	Связи и их классификация . . . . .	16
32.3	Возможные, действительные и виртуальные перемещения точек системы . . . . .	16
32.4	Число степеней свободы системы . . . . .	17
<b>33</b>	<b>Идеальные связи. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера-Лагранжа)</b>	<b>17</b>
33.1	Идеальные связи . . . . .	17
33.2	Общее уравнение динамики (принцип Даламбера-Лагранжа) . . . . .	17
<b>34</b>	<b>Элементарная работа сил системы в обобщённых координатах. Обобщённые силы и их вычисление. Случай потенциального поля сил</b>	<b>17</b>
34.1	Элементарная работа сил системы в обобщённых координатах . . . . .	17
34.2	Обобщённые силы и их вычисление . . . . .	17
34.3	Случай потенциального поля сил . . . . .	17
<b>35</b>	<b>Общее уравнение динамики в обобщённых координатах. Уравнения Лагранжа второго рода</b>	<b>17</b>
35.1	Общее уравнение динамики в обобщённых координатах . . . . .	17
35.2	Уравнения Лагранжа второго рода . . . . .	17
<b>36</b>	<b>Уравнения Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа. Циклические координаты и первые интегралы. Об уравнениях Лагранжа второго рода в неинерциальных системах отсчёта</b>	<b>17</b>
36.1	Уравнения Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил . . . . .	17
36.2	Функция Лагранжа . . . . .	18
36.3	Циклические координаты и первые интегралы . . . . .	18
36.4	Об уравнениях Лагранжа второго рода в неинерциальных системах отсчёта . . . . .	18
<b>37</b>	<b>Анализ выражения кинетической энергии системы как функции обобщённых скоростей. Разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщённых ускорений</b>	<b>18</b>
37.1	Анализ выражения кинетической энергии системы как функции обобщённых скоростей . . .	18
37.2	Разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщённых ускорений . . . . .	18
<b>38</b>	<b>Теорема об изменении полной механической энергии голономной системы. Интеграл энергии, консервативные системы. Обобщённый интеграл энергии (интеграл Якоби-Пенлеве), обобщенно-консервативные системы</b>	<b>18</b>
38.1	Теорема об изменении полной механической энергии голономной системы . . . . .	18
38.2	Интеграл энергии, консервативные системы . . . . .	18
38.3	Обобщённый интеграл энергии (интеграл Якоби-Пенлеве), обобщенно-консервативные системы . . . . .	18

# 1 Кинематика точки. Траектория, скорость и ускорение точки. Скорость и ускорение точки в полярных координатах

## 1.1 Кинематика точки

**Опр** Кинематика точки. Траектория, скорость и ускорение точки

Раздел механики, изучающий математическое описание (средствами геометрии, алгебры, математического анализа...) движения материальной точки без рассмотрения причин движения (массы, сил и т. д.)

**Опр** Траектория

**Опр** Скорость

**Опр** Ускорение

## 1.2 Скорость и ускорение точки в полярных координатах

**Опр** Радиальная ось

**Опр** Трансверсальная ось

Для того чтобы получить скорость и ускорение в полярных координатах, достаточно выразить  $x$  и  $y$  в терминах  $r, \varphi$ , продифференцировать нужное число раз и вычленить базисные векторы

# 2 Кинематика точки. Естественный трёхгранник. Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное

## 2.1 Кинематика точки. Естественный трёхгранник

**Опр** Естественный способ задания движения

**Опр** Естественный трёхгранник

## 2.2 Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное

Запишем две формулы из дифференциальной геометрии и продифференцируем  $r$  и  $v$  с их учётом. Получим две компоненты ускорения: тангенциальное и нормальное

**Theorem** Гюйгенса о разложении ускорения

# 3 Криволинейные координаты точки. Коэффициенты Ламе. Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах. Скорость точки в цилиндрических и сферических координатах

## 3.1 Криволинейные координаты точки

**Опр** Криволинейные координаты

**Опр** Первая координатная линия

**Опр** Первая координатная ось

Аналогично определяются и последующие координатные линии и оси

## 3.2 Коэффициенты Ламе

**Опр** Единичный вектор координатной оси

**Опр** Коэффициент Ламе

**Опр** Ортогональные криволинейные координаты

## 3.3 Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах

Скорость находится по определению. Ускорение смотреть в конспекте Холостовой с 8 страницы

### 3.4 Скорость точки в цилиндрических и сферических координатах

**Опр** Цилиндрическая система координат

**Опр** Сферическая система координат

Скорость точки в этих координатах находится с помощью коэффициентов Ламе

## 4 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела. Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса)

### 4.1 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела

**Опр** Поступательно движущаяся и связанная системы координат

**Опр** Углы Эйлера

Углы, описывающие поворот абсолютно твердого тела в трёхмерном евклидовом пространстве

**Опр** Линия узлов

Пересечение координатных плоскостей начальной и конечной СК

**Опр** Угол прецессии, нутации, собственного вращения

Переход от одной системы координат к другой посредством вращений на углы, можно задать с помощью матриц поворота

Матрица поворота (или матрица направляющих косинусов)

**Опр** Ортогональная матрица, которая используется для выполнения собственного ортогонального преобразования в евклидовом пространстве. При умножении любого вектора на матрицу поворота длина вектора сохраняется. Определитель матрицы поворота равен единице

Матрицы поворота вокруг различных осей выглядят по-разному

**Опр** Угловая скорость

Физическая величина, характеризующая быстроту и направление вращения материальной точки или абсолютно твёрдого тела относительно оси

**Опр** Угловое ускорение

### 4.2 Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса)

**Theorem** Формула Эйлера

**Формула** Ривальса Получается формальным дифференцированием формулы Эйлера

## 5 Плоское движение твёрдого тела. Мгновенный центр скоростей. Мгновенный центр ускорений

### 5.1 Плоское движение твёрдого тела

**Опр** Плоское движение

### 5.2 Мгновенный центр скоростей

**Theorem** О мгновенном центре скоростей

**Опр** Мгновенный центр скоростей

### 5.3 Мгновенный центр ускорений

**Theorem** О мгновенном центре ускорений

**Опр** Мгновенный центр ускорений

Мгновенный центр ускорений можно построить за два шага

## 6 Кинематические инварианты. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось

### 6.1 Кинематические инварианты

Опр *Инвариант*

Величина, остающаяся неизменной при преобразованиях

Опр *Первый кинематический инвариант*

Опр *Второй кинематический инвариант*

Отсюда следует, что величины проекции скоростей двух точек поступательного движущегося тела на прямую, их соединяющуюся, равны

### 6.2 Кинематический винт

Опр *Кинематический винт*

Опр *Параметр винта*

### 6.3 Мгновенная винтовая ось

Если расписать итоговую скорость точки по координатам, то можно получить

Опр *Мгновенная винтовая ось*

Опр *Правый и левый винт*

## 7 Алгебра кватернионов

Опр *Кватернион, кватернионные единицы*

Свойства *Кватернионного сложения*

Опр *Скалярная и векторные части кватерниона*

Свойства *Кватернионного умножения единиц*

Свойства *Кватернионного умножения*

Опр *Сопряжённый кватернион*

Опр *Норма кватерниона, нормированный кватернион*

Опр *Обратный кватернион*

Форма *Тригонометрическая записи кватерниона*

Результат умножения кватернионов в таком случае получается из свойств тригонометрии

Аналог *Формулы Муавра*

## 8 Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела. Теорема Эйлера о конечном повороте

### 8.1 Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела

Опр *Неподвижный и связанный базисы*

Theorem

### 8.2 Теорема Эйлера о конечном повороте

Theorem *Эйлера о конечном повороте*

Если воспользоваться предыдущей теоремой, то видно, что при повороте положение  $e$  сохраняется, а  $j$  поворачивается

## 9 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах. Параметры Родрига-Гамильтона. Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой

### 9.1 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах

Можно показать, что результирующий кватернион после  $N$  поворотов будет записан в обратном порядке в одном базисе

## 9.2 Параметры Родрига-Гамильтона

**Опр** *Параметры Родрига-Гамильтона*

Если записать преобразованные от смены базисные единицы и подставить в новый кватернион, то он будет выражен в исходном базисе через параметры Родрига-Гамильтона. Порядок записи кватернионов в результирующем повороте будет уже прямой

## 9.3 Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой

**Theorem** *Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой*

## 10 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона). Прецессионное движение твёрдого тела

### 10.1 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона)

**Опр** *Угловая скорость* Через предел

**Уравнение Пуассона**

Можно показать, что два определения угловой скорости эквивалентны. В конце мы придём к уравнению Эйлера (то есть верному утверждению), а значит мы были правы

### 10.2 Прецессионное движение твёрдого тела

Рассмотрим вращение оси тела вокруг неподвижной вращающейся оси и решим уравнение Пуассона для этого случая

## 11 Кинематика сложного движения точки. Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении

### 11.1 Кинематика сложного движения точки

**Опр** *Относительное, переносное и абсолютное движение*

Можно посчитать относительные и абсолютные производные радиус-вектора и получить их связь

### 11.2 Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении

**Опр** *Относительные, переносные и абсолютные скорость и ускорение*

**Theorem** *О сложении скоростей*

**Theorem** *О сложении ускорений или теорема Кориолиса*

**Опр** *Кориолисово ускорение*

## 12 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг пересекающихся осей. Кинематические уравнения Эйлера

### 12.1 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг пересекающихся осей

**Сложение** *Поступательных движений*

**Сложение** *Вращательных движений*

### 12.2 Кинематические уравнения Эйлера

Если тело участвует одновременно в трёх вращениях, то записав суммарное вращение в проекциях на связанные оси, имеем

**Уравнения Эйлера кинематические**



### 13 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг параллельных осей. Пара вращений

#### 13.1 Кинематика сложного движения тела. Сложение мгновенных вращений твёрдого тела вокруг параллельных осей

Сложение *Сонаправленных вращений*

Сложение *Разнонаправленных вращений*

#### 13.2 Пара вращений

Пара *Вращений*

Опр *Момент и плечо пары вращений*

Поступательное движение можно заменить на пару вращений бесчисленным множеством способов

### 14 Сложное движение твёрдого тела. Общий случай сложения движений

#### 14.1 Сложное движение твёрдого тела

Лемма

#### 14.2 Общий случай сложения движений

В общем случае движения приведём все поступательные и вращательные к единой точке приложения по алгоритму

Алгоритм *Приведения к простому движению*

### 15 Момент силы относительно точки и оси, главный вектор и главный момент сил системы. Элементарная работа сил системы. Работа сил, приложенных к твёрдому телу. Силовое поле. Силовая функция. Потенциал

#### 15.1 Момент силы относительно точки и оси, главный вектор и главный момент сил системы

Опр *Сила*

*Мера воздействия тел друг на друга, причина ускорения точки*

Аксиома *Инерции*

Опр *Инертность, масса*

Закон *Динамики основной*

Аксиома *Взаимодействия материальных точек*

Аксиома *Независимости действия сил (принцип суперпозиции)*

Опр *Главный вектор всех сил системы*

Опр *Момент силы относительно точки*

Опр *Момент силы относительно оси*

Можно показать корректность этого определения

Опр *Главный момент сил системы*

#### 15.2 Элементарная работа сил системы

Опр *Элементарная работа*

Можно получить выражение для полной работы

#### 15.3 Работа сил, приложенных к твёрдому телу

В общем случае работа внутренних сил ненулевая. Запишем суммарную работу всех сил системы

## 15.4 Силовое поле

Опр *Силовое поле*

Векторное поле в пространстве, в каждой точке которого на точку действует определённая по величине и направлению сила (вектор силы)

## 15.5 Силовая функция

Опр *Силовая функция*

Опр *Потенциальное поле*

Опр *Потенциальная сила*

Опр *(Не)стационарное поле*

## 15.6 Потенциал

Опр *Потенциал*

Скалярная величина, характеризующая силовое поле

Утв

Опр *Потенциальная энергия*

Скалярная физическая величина, представляющая собой часть полной механической энергии системы, находящейся в поле консервативных сил

## 16 Количество движения. Центр масс. Теорема об изменении количества движения системы. Теорема о движении центра масс

### 16.1 Количество движения

Опр *Количество движения (импульс)*

### 16.2 Центр масс

Опр *Центр масс системы*

### 16.3 Теорема об изменении количества движения системы

Theorem *Об изменении количества движения системы*

### 16.4 Теорема о движении центра масс

Theorem *О движении центра масс*

## 17 Главный момент количества движения (кинетический момент) системы относительно заданного центра. Кинетический момент системы для ее движения относительно центра масс. Теорема Кенига о вычислении кинетического момента

### 17.1 Главный момент количества движения (кинетический момент) системы относительно заданного центра

Опр *Момент импульса (кинетический момент) точки*

### 17.2 Кинетический момент системы для ее движения относительно центра масс

Опр *Кинетический момент (главный момент количества движения) системы*

Опр *Кинетический момент системы относительно точки*

Можно показать корректность этого определения

Покажем связь главных моментов двух точек в общем и частном случаях

### 17.3 Теорема Кенига о вычислении кинетического момента

**Опр** Кёнигова система координат

Найдём выражения для скорости и кинетического момента точки и системы

Если под движением системы относительно центра масс понимать движение в Кёниговой системе координат, то верна

**Theorem** Кёнига о кинетическом моменте

## 18 Теорема об изменении кинетического момента системы

Посчитаем производную кинетического момента относительно точки

**Theorem** Об изменении кинетического момента системы

Также рассмотрим частные случаи теоремы

## 19 Кинетическая энергия системы. Теорема Кенига о вычислении кинетической энергии. Теорема об изменении кинетической энергии системы. Закон сохранения полной механической энергии системы

### 19.1 Кинетическая энергия системы

**Опр** Кинетическая энергия системы

Запишем, как она преобразуется при смене системы координат

### 19.2 Теорема Кенига о вычислении кинетической энергии

В частном случае прошлых выкладок получаем

**Theorem** Кенига о вычислении кинетической энергии

### 19.3 Теорема об изменении кинетической энергии системы

**Theorem** Об изменении кинетической энергии системы

### 19.4 Закон сохранения полной механической энергии системы

**Закон** Сохранения полной механической энергии системы

## 20 Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчёта. Переносная и кориолисова силы инерции. Основные теоремы динамики для движения относительно центра масс

### 20.1 Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчёта. Переносная и кориолисова силы инерции

Выразим относительное ускорение в неИСО

**Опр** Переносная и кориолисова силы инерции

**Закон** Основной динамики в неИСО

**Theorem** Об изменении количества движения

**Опр** Главный вектор внешних сил и сил инерции

**Theorem** О движении центра масс

Для неподвижной точки в неИСО справедлива

**Theorem** Об изменении кинетического момента

**Theorem** Об изменении кинетической энергии

## 20.2 Основные теоремы динамики для движения относительно центра масс

Все теоремы далее записаны в Кёниговой системе координат

**Theorem** *Об изменении количества движения*

**Theorem** *Об изменении кинетического момента*

**Theorem** *Об изменении кинетической энергии*

## 21 Движение материальной точки в центральном поле. Интеграл площадей; второй закон Кеплера. Уравнение Бине

### 21.1 Движение материальной точки в центральном поле

**Опр** *Центральное поле* Сила должна удовлетворять условию

### 21.2 Интеграл площадей; второй закон Кеплера

**Опр** *Интеграл площадей*

**Опр** *Радиальная и трансверсальная скорости*

**Форма** *Полярная интеграла площадей*

**Опр** *Секториальная скорость точки*

**Закон Кеплера II**

### 21.3 Уравнение Бине

Если переписать основной закон динамики в центральном поле, то получим

**Уравнение Бине**

## 22 Движение точки в поле всемирного тяготения: уравнение орбиты, законы Кеплера. Интеграл площадей, интеграл энергии, интеграл Лапласа. Задача двух тел

### 22.1 Движение точки в поле всемирного тяготения: уравнение орбиты, законы Кеплера

**Опр** *Поле всемирного тяготения*

Если записать уравнение Бине для силы всемирного тяготения, то в конечном итоге получим

**Уравнение Орбиты**

**Опр** *Параметр и эксцентриситет орбиты*

В зависимости от эксцентриситета, орбита будет являться той или иной конической поверхностью

**Закон Кеплера I**

**Закон Кеплера III**

### 22.2 Интеграл площадей, интеграл энергии, интеграл Лапласа

Интеграл площадей был рассмотрен в предыдущем билете

**Интеграл Энергии**

**Интеграл Лапласа**

**Опр** *Вектор Лапласа, истинная аномалия*

### 22.3 Задача двух тел

Рассмотрев движение двух тел в центральном поле друг друга, получим

**Уравнение Относительного движения точек**

Эта система замкнута и её центр масс движется равномерно, поэтому можно найти закон изменения его радиус-вектора

## 23 Момент инерции системы относительно оси. Матрица тензора инерции. Эллипсоид инерции. Главные оси и главные моменты инерции

### 23.1 Момент инерции системы относительно оси

*Опр Момент инерции системы относительно оси*

*Опр Осевые и центробежные моменты инерции*

### 23.2 Матрица тензора инерции

*Опр Тензор инерции системы для точки*

### 23.3 Эллипсоид инерции

*Найдём момент инерции тела относительно оси, заданной направляющими косинусами*

*Уравнение Эллипсоида инерции системы*

### 23.4 Главные оси и главные моменты инерции

*Опр 1 Главные оси инерции*

*Опр Главные моменты инерции*

*Уравнение Эллипсоида инерции в главных осях*

*Опр 2 Главные оси инерции*

*Можно показать эквивалентность двух определений*

*Утв Угол поворота осей для перехода к главным*

## 24 Моменты инерции относительно параллельных осей; теорема Гюйгенса – Штейнера. Преобразование матрицы тензора инерции при параллельном переносе осей. Свойства осевых моментов инерции

### 24.1 Моменты инерции относительно параллельных осей; теорема Гюйгенса – Штейнера

*Theorem Гюйгенса – Штейнера*

### 24.2 Преобразование матрицы тензора инерции при параллельном переносе осей

*Theorem Гюйгенса – Штейнера для тензора инерции*

### 24.3 Свойства осевых моментов инерции

*Theorem Неравенства треугольников для осевых моментов инерции*

*Равенство достигается только в случае плоского распределения масс*

## 25 Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки или вокруг неподвижной оси. Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела при его произвольном движении

### 25.1 Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки или вокруг неподвижной оси

*Утв Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной точки*

*Можно рассмотреть два частных случая и получить*

**Утв** Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

**Утв** Кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

Можно рассмотреть два частных случая и получить

**Утв** Кинетическая энергия тела с неподвижной осью

## 25.2 Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела при его произвольном движении

**Утв** Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела при его произвольном движении

## 26 Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Дифференциальные уравнения движения свободного твёрдого тела. Уравнения плоского движения твёрдого тела

### 26.1 Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Если запишем производную кинетического момента, то получим

**Уравнение** Дифференциальное вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси

### 26.2 Дифференциальные уравнения движения свободного твёрдого тела

**Уравнение** Эйлера динамические

Для свободного тела можно найти два интеграла движения

### 26.3 Уравнения плоского движения твёрдого тела

В случае плоского движения направим  $Oz$  по вектору вращения и получим

**Уравнение** Плоского движения твёрдого тела

## 27 Дифференциальные уравнения движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера. Случай Эйлера движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки: первые интегралы уравнений движения; стационарные вращения

### 27.1 Дифференциальные уравнения движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера

Эти уравнения были подробно получены в прошлом билете

### 27.2 Случай Эйлера движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки: первые интегралы уравнений движения; стационарные вращения

**Опр** Первый интеграл

Первый два интеграла были также получены в прошлом билете

**Опр** Стационарное вращение

**Случай** Эйлера

**Ось** вращения неподвижная в теле и пространственный модуль  $\omega$  постоянен

**Случай** Асимметрии

**Случай** Динамической симметрии

**Случай** Сферической симметрии

Итак, в случае Эйлера вращение может происходить только вокруг главных осей инерции

## 28 Случай Эйлера движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки: регулярная прецессия в случае динамической симметрии тела; геометрическая интерпретация Пуансо

Найдём пару интегральчиков движения, из которых получим

**Утв** Угловая скорость прецессии

**Утв** Угловая скорость собственного вращения

Таким образом, динамически симметричное тело в случае Эйлера совершает регулярную прецессию (вращение вокруг вращающейся оси). Найдём у этого явления геометрическую интерпретацию (Пуансо)

**Опр** Плоскость Пуансо

Получим четыре новых факта

1. Пропорциональность скорости вращения и радиус-вектора постоянна
2. Вектор кинетического момента перпендикулярен плоскости Пуансо
3. Плоскость Пуансо неподвижна в абсолютном пространстве
4. Скорость точки касания отсутствует (то есть качение без проскальзывания)

## 29 Вынужденная регулярная прецессия динамически симметричного твёрдого тела с неподвижной точкой. Основная формула гироскопии. О приближенной теории гироскопов

### 29.1 Вынужденная регулярная прецессия динамически симметричного твёрдого тела с неподвижной точкой

**Опр** Гироскоп

Мы уже рассмотрели в предыдущем билете случай нулевого внешнего момента. Теперь рассмотрим случай ненулевого

### 29.2 Основная формула гироскопии

**Формула** Основная гироскопии

Внешний момент направлен по линии узлов и сохраняет своё абсолютное значение

### 29.3 О приближенной теории гироскопов

В случае, когда тело вращается сильно быстрее, чем поворачивается, верна

**Формула** Приближенная гироскопии

## 30 Уравнения движения тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой. Первые интегралы. Случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской интегрируемости уравнений движения

### 30.1 Уравнения движения тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой

Рассмотрим движение твёрдого тела в неподвижной и связанной системах координат и получим

**Уравнения** Пуассона

Если дополнительно запишем динамические уравнения Эйлера, то вместе с Пуассоновыми, получим

**Уравнения** Эйлера–Пуассона

### 30.2 Первые интегралы

**Опр** Геометрический (тривиальный) интеграл

Помимо него, всегда существуют ещё два: проекция кинетического момента на  $Oz$  и механическая энергия

### 30.3 Случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской интегрируемости уравнений движения

Из теории дифференциальных уравнений известно, что для того, чтобы наша система из шести уравнений была решена хотя бы в квадратурах, необходимо, чтобы существовал дополнительный, независимый от них первый интеграл. Случаев такой интегрируемости не так много

1. Случай Эйлера
2. Случай Лагранжа
3. Случай Ковалевской
4. Некоторые частные решения с определённым классом начальных условий

### 31 Случай Лагранжа движения твёрдого тела с неподвижной точкой. Регулярная прецессия в случае Лагранжа. Общий случай исследования движения; геометрическая интерпретация

#### 31.1 Случай Лагранжа движения твёрдого тела с неподвижной точкой

Сам случай Лагранжа упоминался в прошлом билете

#### 31.2 Регулярная прецессия в случае Лагранжа

Если запишем момент внешних сил в случае точной гироскопии, получим разное количество прецессий

#### 31.3 Общий случай исследования движения; геометрическая интерпретация

В общем случае запишем первые интегралы, рассмотрим область возможных движений и получим 1 или 2 корня на  $[-1; 1]$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию с помощью единичной сферы

**Опр** *Алекс*

### 32 Несвободные системы. Связи и их классификация. Возможные, действительные и виртуальные перемещения точек системы. Число степеней свободы системы

#### 32.1 Несвободные системы

**Опр** *(Не)свободные системы*

#### 32.2 Связи и их классификация

**Опр** *Связь*

**Опр** *Удерживающая (двусторонняя неосвобождающая) связь*

**Опр** *Неудерживающая (односторонняя освобождающая) связь*

**Опр** *Геометрическая (конечная голономная) связь*

**Опр** *Дифференциальная ((не)интегрируемая или (неголономная) геометрическая) связь*

У последних связей есть чёткое аналитическое представление, а в случае примера — конька на льду — можно показать её неинтегрируемость, используя понятие л.н.з,

**Опр** *Стационарная геометрическая или дифференциальная связь*

**Опр** *(Не)голономная система*

**Опр** *Склерономная и реономная система*

#### 32.3 Возможные, действительные и виртуальные перемещения точек системы

**Опр** *Возможное перемещение*

**Опр** *Действительное перемещение*

**Опр** *Виртуальное перемещение*



### 32.4 Число степеней свободы системы

**Опр** Число степеней свободы системы

**Опр** Число независимых обобщённых координат

У этих координат есть три свойства и их число совпадает со степенями свободы для голономных систем

## 33 Идеальные связи. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера-Лагранжа)

### 33.1 Идеальные связи

**Опр** Идеальные связи

Рассмотрим четыре системы и найдём работы

### 33.2 Общее уравнение динамики (принцип Даламбера-Лагранжа)

**Уравнения** Общее динамики (принцип Даламбера-Лагранжа)

**Опр** Принцип

**Опр** Вариационный принцип (дифференциальный или интегральный)

Принцип Даламбера – Лагранжа является дифференциальным и обладает двумя свойствами

## 34 Элементарная работа сил системы в обобщённых координатах. Обобщённые силы и их вычисление. Случай потенциального поля сил

### 34.1 Элементарная работа сил системы в обобщённых координатах

**Опр** Обобщённые скорости

### 34.2 Обобщённые силы и их вычисление

**Опр** Обобщённая сила

В общем случае силы вычисляются как частные производные

### 34.3 Случай потенциального поля сил

В случае потенциального поля используется потенциальная энергия (полностью или частично)

## 35 Общее уравнение динамики в обобщённых координатах. Уравнения Лагранжа второго рода

### 35.1 Общее уравнение динамики в обобщённых координатах

**Уравнения** Общее динамики в обобщённых координатах

### 35.2 Уравнения Лагранжа второго рода

**Уравнения** Лагранжа второго рода

Они обладают свойством ковариантности

## 36 Уравнения Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа. Циклические координаты и первые интегралы. Об уравнениях Лагранжа второго рода в неинерциальных системах отсчёта

### 36.1 Уравнения Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил

В случае потенциальных сил уравнения Лагранжа принимают более простой вид

## 36.2 Функция Лагранжа

Опр *Функция Лагранжа (Лагранжиан)*

## 36.3 Циклические координаты и первые интегралы

Опр *Циклические (безразличная) координата*

Опр *Первый интеграл, соответствующий циклической координате*

Опр *Позиционная координата*

## 36.4 Об уравнениях Лагранжа второго рода в неинерциальных системах отсчёта

В неинерциальных системах отсчёта уравнения Лагранжа можно записать двумя способами. Если использовать одни и те же обобщённые координаты, то в итоге получим одни и те же уравнения движения

## 37 Анализ выражения кинетической энергии системы как функции обобщённых скоростей. Разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщённых ускорений

### 37.1 Анализ выражения кинетической энергии системы как функции обобщённых скоростей

Проанализируем кинетическую энергию (результат не будет зависеть от голономности системы)

Утв *Получили квадратичную функцию с тремя слагаемыми*

В случае склерономной системы результат будет проще

Утв *В склерономной системе кинетическая энергия – положительно определённая квадратичная форма*

Следствие *Часть кинетической энергии – невырожденная квадратичная форма*

### 37.2 Разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщённых ускорений

Утв *Система уравнений Лагранжа относительно обобщённых ускорений разрешима единственным образом*

А при некоторых ограничениях решение единственно даже при произвольных начальных данных

## 38 Теорема об изменении полной механической энергии голономной системы. Интеграл энергии, консервативные системы. Обобщённый интеграл энергии (интеграл Якоби-Пенлеве), обобщенно-консервативные системы

### 38.1 Теорема об изменении полной механической энергии голономной системы

Theorem *Об изменении полной механической энергии голономной системы*

У теоремы есть два частных случая

### 38.2 Интеграл энергии, консервативные системы

Опр *Консервативная система*

Опр *Интеграл энергии*

### 38.3 Обобщённый интеграл энергии (интеграл Якоби-Пенлеве), обобщенно-консервативные системы

Опр *Обобщенно-консервативная система*

Опр *Обобщённый интеграл энергии (интеграл Якоби-Пенлеве)*

### 39 Гироскопические силы. Диссипативные силы, функция Релея. Обобщённый потенциал. Натуральные и ненатуральные системы

#### 39.1 Гироскопические силы

Опр *Гироскопическая сила*

Критерий *Гироскопичности*

Условие *Гироскопичности*

#### 39.2 Диссипативные силы, функция Релея

Опр *Непотенциальная диссипативная сила*

Опр *(Не)полная диссипация*

Опр *Диссипативная система*

Опр *Диссипативная функция Релея*

#### 39.3 Обобщённый потенциал

Опр *Обобщённый потенциал*

Распишем его поподробнее и получим первый интегральчик

#### 39.4 Натуральные и ненатуральные системы

Опр *(Не)натуральные системы*