UAA 4

Fonctions exponentielles et logarithmes

Compétence à développer

- Modéliser une situation par une fonction exponentielle ou logarithme
- Résoudre des problèmes à l'aide de fonctions exponentielles ou logarithmes

On poursuit l'étude des modes de croissance avec deux nouvelles familles de fonctions : les exponentielles et logarithmes Celles-ci jouent un grand rôle dans l'étude de problèmes scientifiques (radioactivité, PH, acoustique, médecine, biologie,..) et économiques.

Contenu :

1. **Fonctions exponentielles**
2. **Fonctions logarithmes et relation de réciprocité avec la fonction exponentielle.**
3. **Dérivée des fonctions exponentielles et logarithmes**
4. **Règle de l'Hospital et limites.**
5. **Modélisation d'un nuage de points par une fonction exponentielle**

Processus

CONNAITRE

- Représenter graphiquement les fonctions exponentielles et logarithmes et en connaitre les propriétés.
- Démontrer les propriétés des fonctions logarithmes.
- Comparer les croissances des fonctions exponentielles, logarithmes et puissances

APPLIQUER

- Extraire des informations graphiques d'un graphique en coordonnées semi logarithmique ou logarithmique.
- Résoudre des équations exponentielles et logarithmes simples.
- Calculer des limites, des dérivées et des primitives de fonctions exponentielles et logarithmes

TRANSFÉRER

- Résoudre un problème qui requiert l'utilisation d'une fonction exponentielle ou logarithme
- Modéliser un nuage de points par une fonction exponentielle

1. Fonctions exponentielles

1) Exemples introductifs

A) Evolution d'une population de bactéries

Placée dans des conditions favorables, une population de bactéries quadruple toutes les heures. L'observation débute lorsque la population est composée de 1000 individus.

a) Combien d'individus la population comportera-t-elle une heure après le début de l'observation ?

4000 individus

b) Complète le tableau suivant :

+1 +1 +1 +1 +1 SA

Temps (heure)	0	1	2	3	4	5
Nbre de bactéries	1000	4000	16000	64000	256 000	1 024 000

·4 ·4 ·4 ·4 ·4 SG

c) Définis une fonction N(t) qui exprime l'évolution de la population de bactéries en fonction du nombre d'heures qui s'est écoulé depuis le début de l'observation. Cette fonction qui évolue d'une manière multiplicative stable est dite **exponentielle.**

$N(t) = 1000 \cdot 4^t$

↳ cette fonction est définie à p. de la fonction exponentielle de base 4. La fn est dite expon. car c'est l'exposant qui varie.

↳ $f(x) = 6^x$

$N(0) = 1000 \cdot 4^0 = 1000$

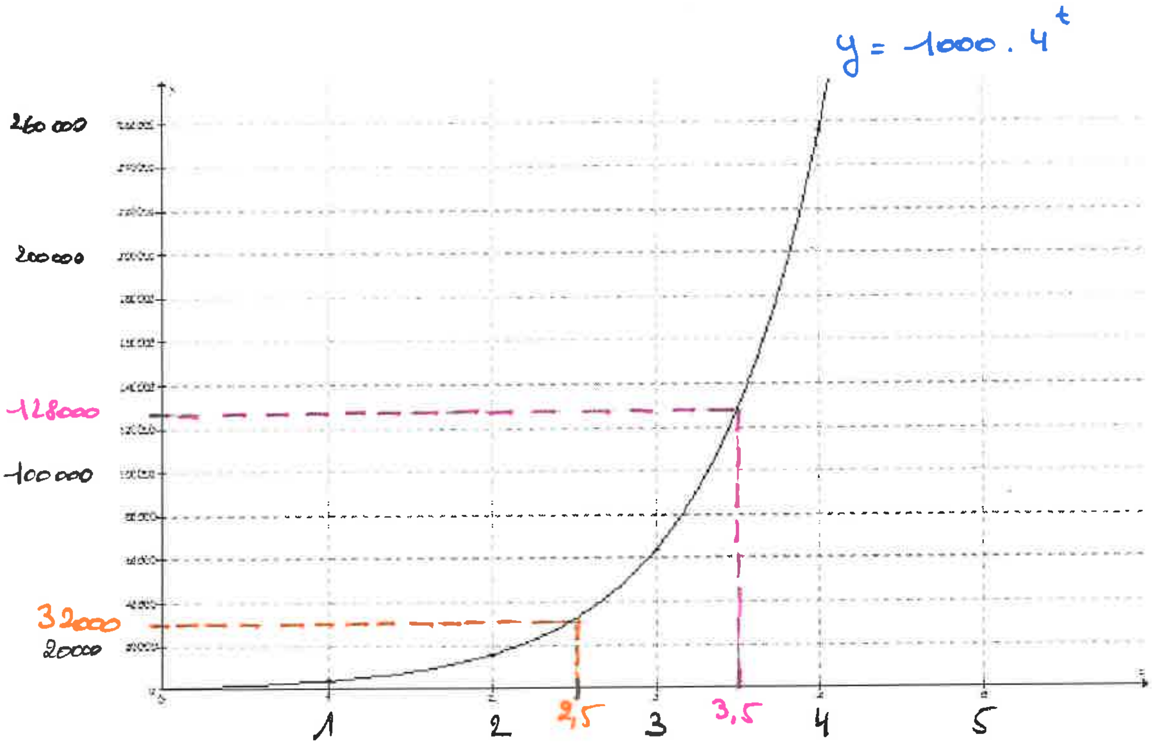
$N(1) = 1000 \cdot 4^1 = \boxed{4000}$

$N(2) = 4000 \cdot 4 = 1000 \cdot 4 \cdot 4 = 1000 \cdot 4^2 = \boxed{16000}$

$N(3) = 16000 \cdot 4 = 1000 \cdot 4^2 \cdot 4 = 1000 \cdot 4^3 = 64000$

$N(4) = 1000 \cdot 4^4 = 256\,000$

d) Représentons le graphe de la fonction depuis le début jusqu'à la $4^{\text{ème}}$ heure.



La fonction croit de + en + vite.

e) Si le chercheur observe sa culture toutes les demi-heures, que trouverait-il comme résultat après deux heures et demi, trois heures et demi ? Compare la réponse obtenue par calcul et celle lue sur le graphique).

- Après 2h 30 : $N(2,5) = 1000 \cdot 4^{2,5} = 32\,000$ individus
  ↳ graphiquement
- Après 3h 30 : $N(3,5) = 1000 \cdot 4^{3,5} = 128\,000$ individus
  ↳ graphiquement

B) Dépréciation de la valeur d'une voiture

Certaines compagnies d'assurances considèrent qu'un véhicule automobile perd chaque année 20 % de sa valeur. $\Leftrightarrow$ garde 80 %

Soit un véhicule dont le prix d'achat s'élève à 30 000 €.

a) Complète le tableau : +1 +1 +1 +1 +1 SA

Temps (années)	0	1	2	3	4	5
Valeur de la voiture	30 000	24 000	19 200	15 360	12 288	9830,4

·0,8 ·0,8 ·0,8 ·0,8 ·0,8 SG

b) Etablis une fonction V(t) qui exprime la valeur du véhicule, t années après son achat.

$V(0) = 30000 \cdot 0,8^0$

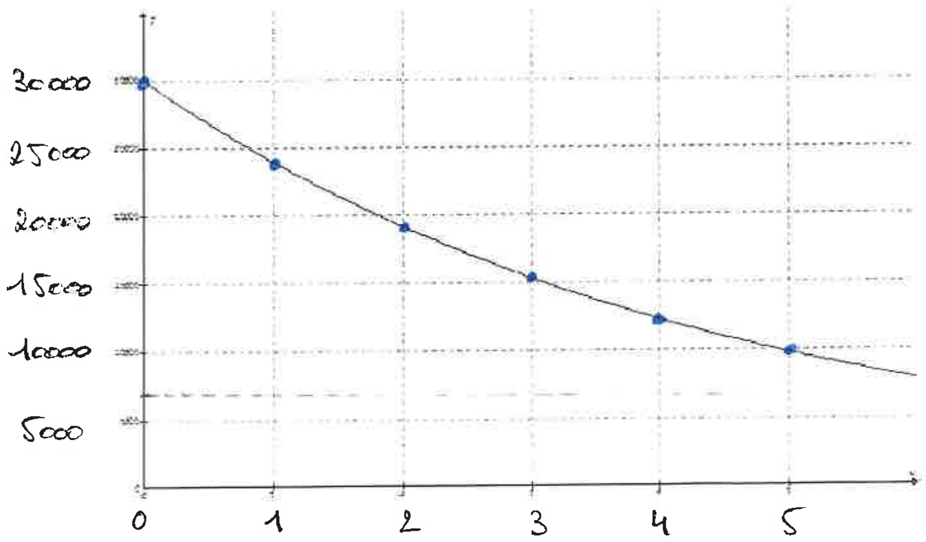
$V(1) = 30000 \cdot 0,8^1$

$V(2) = 30000 \cdot 0,8^2$

$V(3) = 30000 \cdot 0,8^3$

$\Rightarrow V(t) = 30000 \cdot 0,8^t$ $\rightarrow$ fct° définie à partir de la fct° expon. de base 0,8

c) Représentons le graphe de V(t) sur un intervalle de temps allant de 0 à 5 ans.



La fonction décroît de moins en moins vite.

d) Après combien d'années, la voiture ne vaudra-t-elle plus que le cinquième de son prix d'achat ? ↳ t ?

$V(t) = \frac{30000}{5}$

$V(t) = 6000$

il faut donc résoudre $30000 \cdot 0{,}8^t = 6000$

$0{,}8^t = 0{,}2$

L'inconnue est au niveau de l'exposant or on ne dispose pas de l'outil mathématique qui permet d'isoler t => travailler par essais.

t	5	6	7	8
$0{,}8^t$	0,328	0,262	0,21	0,168

2) Comment reconnaître une croissance ou décroissance de type exponentielle ?

En observant les tableaux de valeurs des exemples précédents, on constate que :

Lorsque la variable x augmente de façon linéaire et constante (accroissement en x constant), les valeurs de la variable y évoluent de façon constante par un coefficient multiplicateur constant, appelé taux de variation (à ne pas confondre avec taux d'accroissement)

SA

SG

Exemple d'une population P_0 qui double toutes les quarts d'heures :

x(h)	population
0	P_0
0,25	$2P_0$
0,5	$4P_0$
0,75	$8P_0$
1	$16P_0$
1,25	$32P_0$

+0,25 ; ×2

SA SG

x(h)	population
0	P_0
0,5	$4P_0$
1	$16P_0$
1,5	$64 P_0$
2	$256 P_0$

+0,5 ; ×4

SA SG

x(h)	population
0	P_0
1	$16P_0$
2	$256 P_0$
3	$4096 P_0$

+1 ; ×16

SA SG

Cette situation peut être modélisée par la fonction exponentielle $f(x) = P_0 . 16^x$

3) Définition de la fonction exponentielle

On appelle **fonction exponentielle réelle de base a** toute fonction du type :

f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \to a^x$ où $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ est la base { strict. > 0 et ≠ 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$

$x \in \mathbb{R}$ est la variable = l'exposant

$x \to y = a^x$

Elle est notée exp_a

$\Rightarrow f(x) = exp_a(x) = a^x$ est l'exponentielle de base a du réel x

dom $f = \mathbb{R}$

im $f = \mathbb{R}_0^+$

$f(x) = 4^x = exp_4\, x$

$f(x) = exp_3\, x = 3^x$

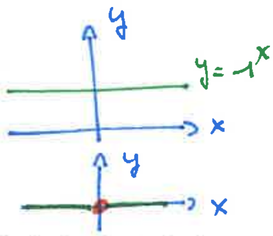
Ne pas confondre :

$f(x) = x^a$:		$f(x) = a^x$:
fonction puissance	et	**fonction exponentielle**
x est la base variable		a est la base constante
a l'exposant constant.		x l'exposant variable

ex : x^2 ; x^3 ; x^6

ex : 4^x ; 3^x ; $0{,}5^x$

Remarque *: Pourquoi ces conditions sur la base a ?*



Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x) = a^x$

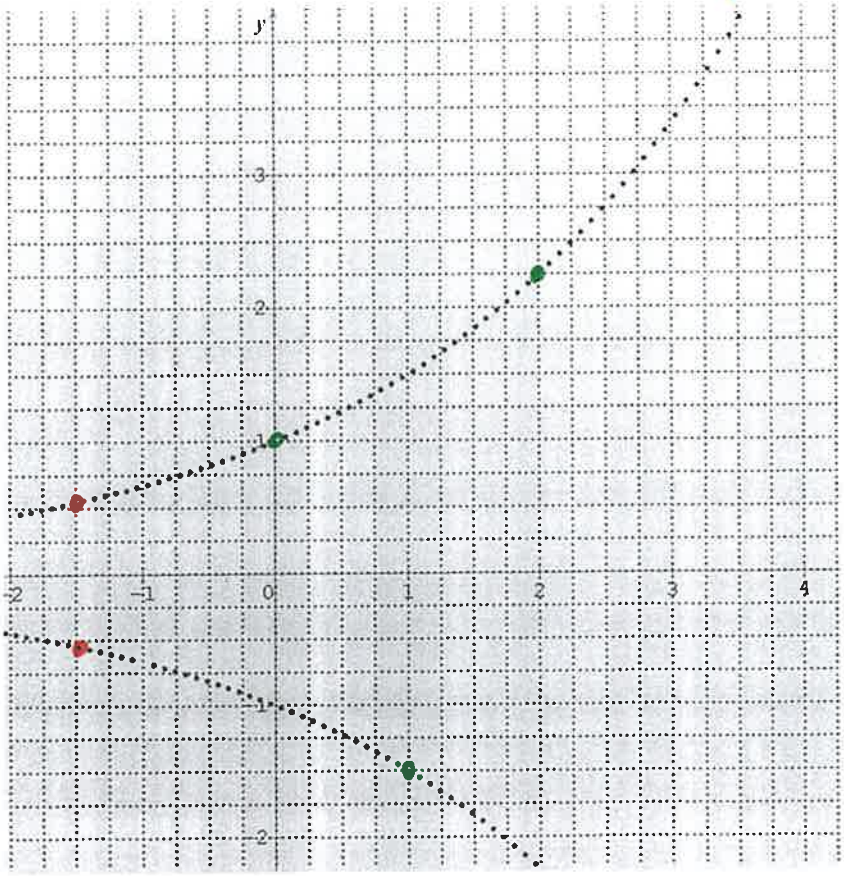
$\boldsymbol{Si\ a = 1}$; $f(x) = 1^x = 1$ *pour tout* x *et donc c'est une fonction constante*

$\boldsymbol{Si\ a = 0}$; $f(x) = 0^x = 0$ *pour tout* $x \neq 0$ *et donc c'est une fonction constante*

$\boldsymbol{Si\ a - 1,5}$; $f(x) = (-1,5)^x$

Observons le graphique

obtenu par un logiciel



$f(0) = (-1,5)^0 = 1$

$f(2) = (-1,5)^2 > 0$

$f(1) = (-1,5)^1 < 0$

$f(1/2) = \sqrt{-1,5}$ ∄

$= (-1,5)^{1/2}$

Point Vide

! Ca

⇒ On a donc une fonction présentant un nombre infini de points de discontinuité.

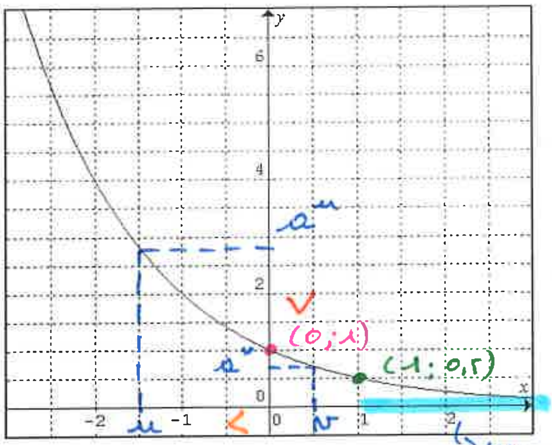
Donc pour que la fonction exponentielle $f(x) = b.a^x$ soit continue et qu'elle représente un phénomène de croissance ou décroissance exponentielle, on impose que la base a doit être strictement positive et distincte de 1

https://www.youtube.com/watch?v=11hwArOkK4E (0-15min)

4) Propriétés de la fonction exponentielle

A) Propriétés graphiques

si $0 < a < 1$: ex : $f(x) = 0{,}5^x$



$AH_d \equiv y = 0$

f continue et strictement décroissante

$\Rightarrow$ si $x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$

Si $u < v \Leftrightarrow a^u > a^v$

Changer le sens

dom f : $\mathbb{R} \Rightarrow$ pas d'asymptote verticale

im f : $\mathbb{R}_0^+ \Rightarrow$ fonction positive et n'admettant pas de racine

Rac $f = \emptyset$

$\boxed{(0;1)}$ et $\boxed{(1;a)}$ $\in$ graphique de la fonction

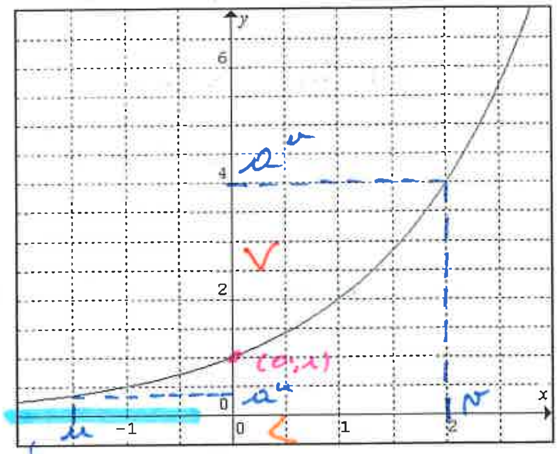
$(0;1) \in G_f$ car $a^0 = 1$ et $(1;a) \in G_f$ car $a^1 = a$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ asymptote horizontale

$AH_d \equiv y = 0$

si $a > 1$: ex : $f(x) = 2^x$



$AH_g \equiv y = 0$

f strictement croissante et continue

$\Rightarrow$ si $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$

Si $u < v \Leftrightarrow a^u < a^v$

garder le sens

dom f : $\mathbb{R} \Rightarrow$ pas d'asymptote verticale

im f : $\mathbb{R}_0^+ \Rightarrow$ fonction positive et n'admettant pas de racine

(0;1) et (1;a) $\in$ graphique de la fonction

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ asymptote horizontale

$AH_g \equiv y = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ → pas d'AHd

En résumé : une vidéo (0 à 3 min) qui reprend ces caractéristiques

https://www.youtube.com/watch?v=zD6WffCLRJg&list=RDCMUCHQs8vQ-vWhErDmB7zoLjtA&index=3

B) Propriétés algébriques

Les fonctions exponentielles de base a ont les mêmes propriétés que les puissances.

$\forall a, b \in R_0^+\backslash\{1\}, \forall u, v \in R$: m̂ propriétés que les puissances

1) $a^u . a^v = a^{u+v}$ $x^n . x^m = x^{n+m}$

2) $(a^u)^v = a^{u.v}$ $(x^n)^m = x^{n.m}$

3) $\dfrac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$

4) $(a.b)^u = a^u . b^u$ $(x.y)^u = x^u . y^u$

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^u = \dfrac{a^u}{b^u}$

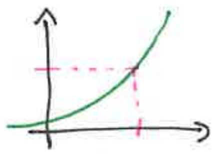
6) $a^{-u} = \dfrac{1}{a^u}$

C) Propriétés diverses

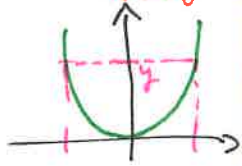
1) Les fonctions exponentielles de base a sont des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_0^+$.

$$\forall a, b \in R_0^+\backslash\{1\}, \forall u, v \in R : \quad a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$$

bijectif



PAS bijectif



Ceci permettra de résoudre des équations exponentielles, c'est-à-dire des équations dans lesquelles l'inconnue figure en exposant.

https://www.youtube.com/watch?v=wpqjQJBvCpE&list=RDCMUCHQs8vQ-vWhErDmB7zoLjtA&index=6

Exemples : *résous les équations suivantes :*

⚠ il faut se ramener à la m̂ base

1) $2^{3x-1} = 16$

$2^{3x-1} = 2^4$

$\Leftrightarrow \quad 3x - 1 = 4$

$\Leftrightarrow \quad 3x = 5$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{5}{3}$

$S = \left\{ \dfrac{5}{3} \right\}$

2) $3^x.9^{2x-1} = \frac{1}{27}$

transformer en base 3 !

$(a^u)^v = a^{u.v}$

$\frac{1}{a^u} = a^{-u}$

$a^u . a^v = a^{u+v}$

$3^x.(3^2)^{2x-1} = \frac{1}{3^3}$

$\boxed{3^x . 3^{4x-2}} = 3^{-3}$

$3^{5x-2} = 3^{-3}$

$\Leftrightarrow \quad 5x-2 = -3$

$\Leftrightarrow \quad 5x = -1$

$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{5}$

$S = \left\{ -\frac{1}{5} \right\}$

2) Les fonctions exponentielles de base a sont des bijections strictement monotones (croissantes ou décroissantes) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_0^+$.

$$\forall a > 1, \quad \forall u,v \in R : \; a^u < a^v \Leftrightarrow u < v \quad ou \quad a^u > a^v \Leftrightarrow u > v$$

↳ fct ↗ => garder le sens

$$\forall a \in]0;1[, \quad \forall u,v \in R : \; a^u < a^v \Leftrightarrow u > v \quad ou \quad a^u > a^v \Leftrightarrow u < v$$

↳ fct ↘ => changer le sens

Ceci permettra de résoudre des inéquations exponentielles, c'est-à-dire des inéquations dans lesquelles l'inconnue figure en exposant.

https://www.youtube.com/watch?v=c1JR7J6fW5Q

0-5 min : résolution d'équations

5-15 min : résolution d'inéquations

Exemples : *Résous les inéquations suivantes :*

1) $(25)^{2x+3} \leq 5^x$ CE : /

$(5^2)^{2x+3} \leq 5^x$

$5^{4x+6} \leq 5^x$

$4x+6 \leq x$

$3x \leq -6$

$x \leq -2$

$\boxed{S = \,]\leftarrow ; -2]}$

$(a^u)^v = a^{u.v}$

$a^u \leq a^v \Leftrightarrow u \leq v$

$a > 1$ fct° ↗ garder le m̂ sens

2) $(0{,}3)^{5+4x} < (0{,}3)^{x^2}$

$\boxed{5+4x > x^2}$

inéquation du 2nd degré

$0 < a < 1 \Rightarrow$ fct° ↘

$a^u < a^v \Rightarrow$ changer de sens

$\Leftrightarrow u > v$

$\Rightarrow \quad -x^2+4x+5 > 0 \quad \Rightarrow$ T.S.

$\Delta = 16 - 4(-1).5 = 36$

$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \frac{-4 \pm 6}{-2}$ $\boxed{x_1 = -1}$ $\boxed{x_2 = 5}$

T.S

x		-1		5	
$-x^2+4x+5$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\boxed{S = \,]-1 ; 5[}$

La résolution des inéquations n'est pas au programme du cours math 4h

5) Résolution d'équations faisant intervenir des fonctions exponentielles

Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $(0{,}3)^{x-3} = (0{,}3)^{7x+9}$ CE : /

$x-3 = 7x+9$

$-6x = -12$

$\boxed{x = -2}$ $S = \{-2\}$

2) $2^x = 32$

$2^x = 2^5$

$\boxed{x = 5}$ $S = \{5\}$

3) $3^{2x} - 3^{x-2} = 0$

$3^{2x} = 3^{x-2}$

$2x = x-2$

$\boxed{x = -2}$ $S = \{-2\}$

4) $(0{,}5)^{3x-1} = 1$

$(0{,}5)^{3x-1} = (0{,}5)^0$

$3x-1 = 0$

$3x = 1$

$\boxed{x = \frac{1}{3}}$ $S = \{\frac{1}{3}\}$

5) $9^{x+1} = 3^{1-2x}$

$(3^2)^{x+1} = (3)^{1-2x}$

$3^{2x+2} = 3^{1-2x}$ $S = \{-\frac{1}{4}\}$

$2x+2 = 1-2x$

$4x = -1$

$\boxed{x = -\frac{1}{4}}$

6) Utilité des fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles sont particulièrement intéressantes pour la modélisation mathématique de phénomènes dans des domaines très diversifiés comme l'économie (placement à intérêts composés), les sciences humaines (étude de la démographie), la médecine, ...

https://www.youtube.com/watch?v=maK64g-y3gA

Problèmes faisant appel aux fonctions exponentielles :

A) **Un capital de 1 000 € est placé au taux d'intérêt de 5 % et est capitalisé annuellement.**

a) Exprime analytiquement la fonction qui décrit ce phénomène. Nomme-la et caractérise sa variation.

b) Calcule le capital après 5 ans, 10 ans, 15 ans, 20 ans, 25 ans et 30 ans.

c) Après combien d'années le capital sera-t-il doublé ?

d) Après combien d'années le capital sera-t-il devenu 10 000 € ?

B) **La population d'une ville double tous les 10 ans. En 1990, elle était de 50 000 habitants.**

a) Quel est le taux annuel de croissance ?

b) Quel sera la population en 2015 ?

c) Quel était le nombre d'habitants en 1985 ?

d) Puisque la population double après 10 ans, aura-t-elle quadruplé après 20 ans ? Pourquoi ?

Ex A) P. 14.

$C_0 = 1000$ € → capital initial.

taux $i = 5\ \% = \frac{5}{100} = 0{,}05$

- Après 1 an : $\underline{1000} + \underbrace{\frac{5}{100}}_{0{,}05} \cdot \underline{1000} = \boxed{1050\ €}$

mise en évidence

$= 1000\ (1 + 0{,}05)$

$= \boxed{1000 \cdot (1{,}05)}$

- Après 2 ans : $\underline{1050} + \frac{5}{100} \cdot \underline{1050} = \boxed{1102{,}5\ €}$

$= 1050\ (1 + 0{,}05)$

$= \boxed{1050}\ (1{,}05)$

$= 1000 \cdot (1{,}05) \cdot (1{,}05) = \boxed{1000 \cdot (1{,}05)^2}$

- Après 3 ans : $\underline{1102{,}5} + \frac{5}{100} \cdot \underline{1102{,}5} = 1157{,}63$

$= 1102{,}5 \cdot (1 + 0{,}05)$

$= \boxed{1102{,}5}\ (1{,}05)$

$= 1000 \cdot (1{,}05)^2 \cdot 1{,}05$

$= \boxed{1000 \cdot (1{,}05)^3}$

- Après 4 ans : $1000 \cdot (1{,}05)^4$
- Après 5 ans : $1000 \cdot (1{,}05)^5$
- Après n années $C(n) = 1000 \cdot (1{,}05)^n$

fct° définie à partir de la fonction exponentielle de base $(1{,}05)$ ⟹ fct° strict. croissante car base > 1

Formule générale

- Capital après n années

$$C(n) = C_0 \cdot (1 + \text{taux en centièmes})^n$$

- Si valeur après n années avec taux de dépréciation (perte de la valeur)

$$V(n) = V_0 \cdot (1 - \text{taux en centièmes})^n$$

CASIO

b) TABLE : Y_1 : 1000 $\boxed{\times}$ 1,05 $\boxed{\wedge}$ $\boxed{X,T}$

. Après 5 ans ; la valeur acquise est 1276,28 €
. Après 10 ans ; " " " " 1628,89 €
. Après 15 ans ; " " " " 2078,93 €
. Après 20 ans ; " " " " 2653,3 €
. Après 25 ans ; " " " " 3386,35 €
. Après 30 ans ; " " " " 4321,94 €

c) Après combien d'années, le capital a-t-il doublé ?

n ? $C(n) = 2000$

$$1000 \cdot 1,05^n = 2000$$

Inconnue à l'exposant ⇒ Pas l'outil mathématique
⇒ Essais.

n	10	12	14	15
$C(n)$	1628,89	1795,86	1979,93	2078,93

2000 €

Au cours de la 15e année, le capital aura doublé.

d) Après combien d'années, le capital devient 10000 €

n ? $C(n) = 10000$

$1000 \cdot (1,05)^n = 10000 \longrightarrow$ Essais

n	30	40	45	47	48	50
$C(n)$	4321,94	7039,99	8985	9905,9	10401,3	11467,4

Au cours de la 48e année, le capital sera devenu 10000 €

B) a) Population qui augmente $\Rightarrow P(n) = P_0 \cdot (1 + \text{taux en centième})^n$

$P_0 = 50000$ = Population en 1990

$P(n)$ = Population n années après 1990

- En 2000, la pop. = 100 000 hab.

$$\Rightarrow P(10) = 100000$$

$$P_0 \cdot (1 + \text{taux})^{10} = 100000$$

$$50000\,(1 + \text{taux})^{10} = 100000$$

$$(1 + \text{taux})^{10} = 2$$

$$1 + \text{taux} = \sqrt[10]{2} = 1,072$$

$$\text{taux} = 1,072 - 1$$

$$\text{taux} = 0,072$$

$$= \boxed{7,2\,\%}$$

le taux d'accroiss. est : 7,2 %

b) $P(n) = 50000 \cdot (1,072)^n \Rightarrow P(25) = 50000 \cdot (1,072)^{25} = 284\,431$

↳ 25 années après 1990 = 2015

$\Rightarrow$ En 2015, il y avait 284 431 hab.

c) En 1985 ? $n = -5 \Rightarrow P(-5) = 50000 \cdot (1,072)^{-5} = 35\,318$

$\Rightarrow$ En 1985, il y avait 35 318 hab.

d) $P_0 \xrightarrow{\times 2} P(10) \xrightarrow{\times 2} P(20)$

$P_0 \xrightarrow{\times 4} P(20)$

SYNTHESE

$V(n)$ est la valeur après n années

V_0 est la valeur initiale

Le taux sera toujours exprimé en nombre décimal. Taux $= 20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$

- **Comment calculer une valeur après n années ?**

Si la valeur augmente : $V(n) = V_0.(1 + taux)^n$

Si la valeur diminue : $V(n) = V_0.(1 - taux)^n$

- **Comment calculer la valeur initiale ?**

On isole V_0 dans la formule précédente

$$V_0 = \frac{V(n)}{(1 \pm taux)^n}$$

- **Comment déterminer le taux ?**

Isolons le taux dans la première formule :

$$\frac{V(n)}{V_0} = (1 \pm taux)^n$$

$$\leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{V(n)}{V_0}} = (1 \pm taux)$$

$$\leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{V(n)}{V_0}} - 1 = \pm taux$$

- **Comment calculer le nombre d'années n ?**

Dans la formule, $\boldsymbol{V(n) = V_0.(1 \pm taux)^n}$, on doit isoler l'exposant .

Pour déterminer cette inconnue, nous allons dans un premier temps procéder par essais.

L'outil mathématique permettant de résoudre ce type d'équations sera étudié plus loin dans le cours.

Remarques :

- Si une valeur double tous les ans, cela correspond à un taux de croissance de $100\% = 1$ et la formule devient $V(n) = V_0.(1+1)^n = V_0.2^n$
- Si une valeur triple tous les ans, cela correspond à un taux de croissance de $200\% = 2$ et la formule devient $V(n) = V_0.(1+2)^n = V_0.3^n$

Exercices

1. a) Que devient un capital de 18000 euros placés à 4,5 % pendant 5 ans ?
   b) Quel aurait dû être le taux pour qu'il augmente de 50 % durant la même période ?

2. a) Quel est le taux annuel d'accroissement d'une population qui a doublé en 25 ans ?
   b) A ce même taux, combien de temps faudra-t-il pour qu'elle triple ?
   (procède par essais)

3. La population d'une ville varie de façon exponentielle. En 1998, elle était de 135 426 habitants et en 2002 de 137 229. Calcule la population prévue en 2009.

Ex 1 (Page 16)

a) Données :

$V_0 = 18000$

taux = 4,5 % = 0,045

$n = 5$

Inc :

$V(5)$

Formule

$V(n) = V_0 (1 + taux)^n$

Résolution :

$V(5) = 18000 \cdot (1{,}045)^5$

$V(5) = 22431{,}27$

Après 5 ans, on dispose de 22431,27 €

b)

Données :

$V_0 = 18000$

$n = 5$

$V(5) = 18000 + 50\%$ de 18000

$= 27000$

Inc :

taux

Résolution :

$V(5) = V_0 \cdot (1 + taux)^5$

$27000 = 18000 (1 + taux)^5$

$(1 + taux)^5 = \dfrac{27000}{18000}$

$1 + taux = \sqrt[5]{1{,}5}$

$taux = 1{,}084 - 1 \Rightarrow taux = 0{,}084$

$= 8{,}4\%$

Le taux doit être de 8,4 %

Ex 2 (Page 16)

a) $P(n) = P_0 \cdot (1 + \text{taux})^n$

Données : Inc :

$n = 25$ taux

P_0

$P(25) = 2 P_0$

Résolution :

$$P(25) = P_0 \cdot (1 + \text{taux})^{25}$$

$$2 \cdot P_0 = P_0 \cdot (1 + \text{taux})^{25}$$

$: P_0$ $: P_0$

$$2 = (1 + \text{taux})^{25}$$

$$\sqrt[25]{2} = 1 + \text{taux}$$

$1,028 = 1 + \text{taux} \Rightarrow \text{taux} = 0,028$ ou $\boxed{2,8\ \%}$

Le taux d'accroissement vaut 2,8 %

b) Cb de temps pour qu'elle triple au taux de 2,8 %

$P(n) = P_0 (1 + \text{taux})^n$

Données : $\text{taux} = 0,028$ Inc : n

$P(n) = 3 P_0$

Résolution :

$$3 P_0 = P_0 (1 + \text{taux})^n$$

$: P_0$ $: P_0$

$$3 = (1 + 0,028)^n$$

↳ inconnue à l'exp. => Essais

n	25	30	40	39
$1,028^n$	1,99	2,29	$\boxed{3,018}$	2,94

↳ il faut 40 ans pour que la population triple.

Ex 3 (page 16)

1998 → 2009 = 11 ans ($P(11)$)

Pop ↗

$$\Rightarrow P(n) = P_0 \, (1 + \text{taux})^n$$

$P_0 = 135\,426$ → Pop en 1998

$P(n)$ = Pop. × n années après 1998

- En 2002 : $P(4) = 137\,229$

Il faut déterminer le taux inc.

Données	Inc
$P_0 = 135\,426$	taux
$P(4) = 137\,229$	
$n = 4$	

Résolution :

$P(4) = P_0 \cdot (1 + \text{taux})^4$

$137\,229 = 135\,426 \, (1 + \text{taux})^4$

$(1 + \text{taux})^4 = 1{,}0133$

$1 + \text{taux} = \sqrt[4]{1{,}0133}$

$\text{taux} = 0{,}003$ ou $\boxed{0{,}3\ \%}$

- Pop. en 2009

$P(11) = P_0 \, (1 + \text{taux})^{11}$

$P(11) = 135\,426 \, (1 + 0{,}003)^{11}$

$\Rightarrow P(11) = 139\,963$

En 2009, il y avait 139 963 hab.

Ex 4 (Page 17)

a)

Données	Inc	Formule
$P_0 = 200$	n	$P(n) = P_0(1 + \text{taux})^n$
taux = 8,3% = 0,083		
$P(n) = 500$		

Résolution

$500 = 200 . (1,083)^n$

n	5	10	15	12	11
$200 \cdot 1,083^n$	298	444	661	520	481

Au cours de la 12e année, il y aura 500 cervidés !

b)

Données :	Inc :	Formule :
$n = 15$	taux	$P(15) = P_0(1 + \text{taux})^{15}$
$P_0 = 200$		
$P(15) = 400$		

Résolution :

$P(15) = P_0(1 + \text{taux})^{15}$

$400 = 200(1 + \text{taux})^{15}$

$1 + \text{taux} = \sqrt[15]{2}$

$\text{taux} = 1,047 - 1$

$\text{taux} = 0,047$ ou $4,7\%$ => Le taux de croissance doit être de 4,7 %

4. Dans un parc naturel, on estime à 200 le nombre de cervidés. Pour permettre au cheptel de se renouveler, on a interdit la chasse. On a alors constaté un taux annuel de croissance de 8,3 %.

a) Combien de temps faudra-t-il pour atteindre 500 cervidés ? (Par essais).

b) Si le troupeau double en 15 ans, quel est alors le taux annuel de croissance ?

6) Une fonction exponentielle particulière : celle de base e

A) Approche du nombre e par une application économique

Regardons ensemble cette vidéo

https://www.youtube.com/watch?v=BUm7eYZgNBw

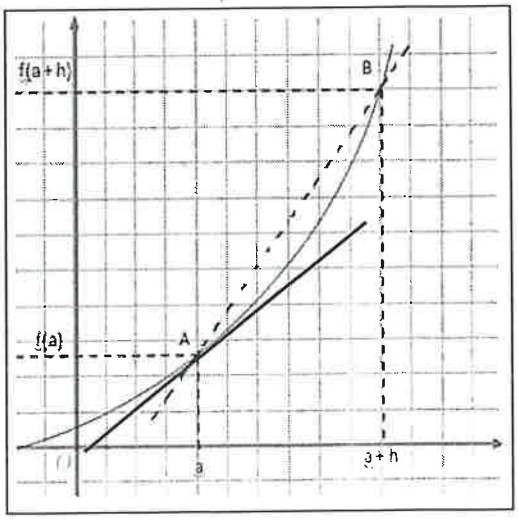
De la première partie de cette vidéo, on retiendra que :

$$e = \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828182459 \ldots\ldots$$

B) Approche du nombre e par la dérivée de la fonction exponentielle de base a.

La seconde partie de la vidéo nous parle de la tangente à une courbe et du nombre dérivé. **Pour rappel : la définition du nombre dérivé :**

Mathématiquement : **TVI** = $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$



→ Cette limite (si elle existe) sera appelée le **nombre dérivé** de la fonction f en a et sera noté $f'(a)$

→ Graphiquement, il s'agit de la **pente de la tangente** au graphique de f(x) en son point d'abscisse x = a.

Dérivée de la fonction exponentielle.

Par définition du nombre dérivé, on a que : $f'(u) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(u+h)-f(u)}{h}$

Pour la fonction exponentielle $f(x) = a^x$, cette formule devient :

$$f'(u) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{u+h}-a^u}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^u.a^h-a^u}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^u.(a^h-1)}{h} = a^u.\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{(a^h-1)}{h}}_{\textit{Un certain réel } L}$$

On a donc $(a^x)' = a^x.L$ (1) avec $L = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(a^h-1)}{h}$ *une valeur indépendante de x*

Cette limite L existe et est finie.

Les tableaux ci-dessous permettent d'en donner une évaluation.

a = 0,5	
h	$\frac{0{,}5^h - 1}{h}$
10^{-1}	-0,6696...
10^{-2}	-0,6907...
10^{-3}	-0,6929...
10^{-4}	-0,6931...
10^{-5}	-0,6931...

a = 1,5	
h	$\frac{1{,}5^h - 1}{h}$
10^{-1}	0,4137...
10^{-2}	0,4062...
10^{-3}	0,4055...
10^{-4}	0,4054...
10^{-5}	0,4054...

a = 2	
H	$\frac{2^h - 1}{h}$
10^{-1}	0,7177...
10^{-2}	0,6955...
10^{-3}	0,6933...
10^{-4}	0,6931...
10^{-5}	0,6931...

a = 2,5	
h	$\frac{2{,}5^h - 1}{h}$
10^{-1}	0,9595...
10^{-2}	0,9205...
10^{-3}	0,9167...
10^{-4}	0,9163...
10^{-5}	0,9163...

a = 3	
h	$\frac{3^h - 1}{h}$
10^{-1}	1,1612...
10^{-2}	1,1046...
10^{-3}	1,0992...
10^{-4}	1,0986...
10^{-5}	1,0986...

Les résultats obtenus laissent supposer qu'il existe une base a comprise entre 2,5 et 3 tel que cette limite soit égale à 1.

Pour cette base a, on aurait donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(a^h-1)}{h} = 1 \Leftrightarrow \frac{\lim_{h\to 0}(a^h-1)}{\lim_{h\to 0} h} = 1 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}(a^h - 1) = \lim_{h\to 0} h$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}(a^h) - 1 = \lim_{h\to 0} h$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}(a^h) = \lim_{h\to 0} h + 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} a = \left(\lim_{h\to 0} h + 1\right)^{1/h}$$

$$\Leftrightarrow a = \lim_{h\to 0} (h+1)^{1/h}$$

Le tableau ci-après permet d'évaluer cette base a qui vaut $\lim_{h\to 0} (h+1)^{1/h}$

h	$(h + 1)^{\frac{1}{h}}$
0,1	2,593742…
0,01	2,7048138…
0,001	2,7169239…
0,0001	2,7181459…
0,00001	2,718268…
0,000001	2,7182804…
0,0000001	2,7182816…
0,00000001	2,7182818…
0,000000001	2,7182818…

La base vaut donc 2,718281… .

C'est le nombre e, baptisé ainsi en l'honneur du mathématicien Leonhard Euler.

Reprenons la limite $\lim_{h\to 0} (h+1)^{1/h}$

Et posons $n = \frac{1}{h}$: $si\ h \to 0 \iff n \to \infty \quad \Rightarrow \quad a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Le nombre d'Euler ou nombre e est défini comme suit :

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828182459 \ldots\ldots$$

Ce nombre est irrationnel (décimal illimité non périodique).

Définition :

La fonction exponentielle de base e est nommée ***fonction exponentielle népérienne***, du nom de son inventeur *Neper*.

Elle est notée exp ou e^x. Elle est définie par :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \to e^x \quad \Rightarrow \exp(x) = e^x$ **est l'exponentielle de base e du réel x**

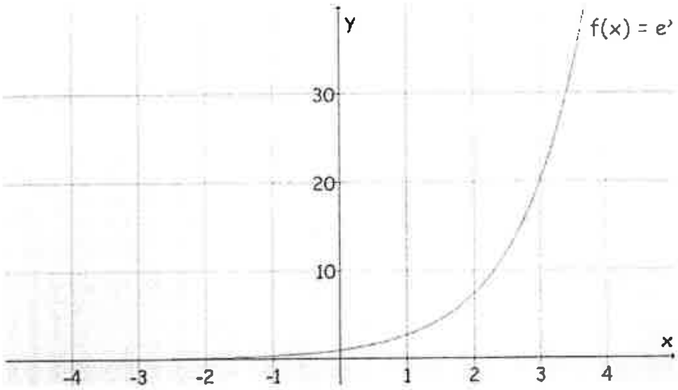
. Si le nombre e est choisi comme base d'une fonction exponentielle, la relation (1) de dérivation devient :

$(e^x)' = e^x.L$ avec $L = \lim_{h\to 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{(e^x)' = e^x \quad \forall x \in R}$

C) Propriétés de la fonction exponentielle de base e

• **Propriétés graphiques** Soit $f(x) = e^x$

x	$f(x)$
-3	0,0498
-2	0,1353
-1	1/e = 0,3679
0	1
1	e = 2,7183
2	7,3891
5	148,4132



a) dom f = $\mathbb{R} \Rightarrow$ pas d'asymptote verticale

b) im f = $\mathbb{R}_0^+$ $\Rightarrow$ fonction n'admettant pas de racines

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow$ pas d'asymptote horizontale à droite

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \Rightarrow$ asymptote horizontale à gauche d'équation $AH_g \equiv y = 0$

e) $(0; 1) \in$ graphique de la fonction (ordonnée à l'origine) ainsi que $(1\,; e)$

f) $f(x) = e^x$ strictement croissante et continue $\Rightarrow$ $si\, x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$

• **Propriétés algébriques**

Les propriétés algébriques vues pour les fonctions exponentielles de base a (supérieure à 1) sont applicables à la fonction exponentielle népérienne.

D) Exercices.

1) Equations faisant intervenir des fonctions exponentielles de base e. Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $e^{3x+6} = \frac{1}{e^2}$

2) $e^{2x-1}.e^{3x} = 1$

3) $e^x - 1 = 0$

4) $(e^x)^2 - e = 0$

2) Calculer les dérivées des fonctions suivantes après en avoir déterminé le domaine de définition. (voir formulaire page suivante)

1) $f(x) = e^x$
2) $f(x) = e^x + x^2$
3) $f(x) = 3x^2 - 2e^x$
4) $f(x) = (x^2 + 3x + 1).e^x$
5) $f(x) = \frac{e^x}{x}$
6) $f(x) = \frac{x}{e^x}$
7) $f(x) = (e^x + 3x)^4$
8) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x}$

	Fonction	Dérivée
Fonction constante	$f(x) = k, k \in R$	$f'(x) = k' = 0$
Fonction identité	$f(x) = x$	$f'(x) = x' = 1$
Fonction carré	$f(x) = x^2$	$f'(x) = (x^2)' = 2x$
Fonction puissance de x	$f(x) = x^n$	$f'(x) = (x^n)' = n.x^{n-1}$
	On descend l'exposant en coefficient multiplicateur et on retire 1 unité à l'exposant	
Fonction racine carrée	$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$	$f'(x) = \frac{1}{2}.x^{-1/2} = \frac{1}{2.x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
	Lorsqu'il y a des racines, on se ramènera à un exposant fractionnaire grâce à la formule $\sqrt[n]{x^p} = x^{p/n}$ On se rappellera aussi que $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	
Somme (différence) de fonctions	$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
	La dérivée d'une somme (différence) vaut la somme (différence) des dérivées	
Produit de fonctions	$f(x) = g(x).h(x)$	$f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$
	La dérivée du premier facteur FOIS le second facteur PLUS premier facteur FOIS la dérivée du second facteur **Avant de dériver un produit, on le distribue, si c'est possible !**	
Produit d'une fonction par un coefficient réel	$f(x) = k.g(x) \quad k \in R$	$f'(x) = k.g'(x)$
	On peut « sortir » un coefficient multiplicateur de la dérivée	
Quotient de fonctions	$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$	$f'(x) = \frac{N'(x).D(x) - N(x).g'(x)}{D^2(x)}$
	Dérivée du Numérateur FOIS le Dénominateur MOINS le Numérateur Fois la dérivée du Dénominateur, LE TOUT SUR le carré du Dénominateur	
Puissance d'une fonction	$f(x) = [g(x)]^n$	$f'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$
	On descend l'exposant en coefficient multiplicateur et on retire une unité à l'exposant ET on multiplie le tout par la dérivée de la fonction $g(x)$ sur laquelle l'exposant agit dans l'énoncé.	

E) Dérivées des fonctions exponentielles composées

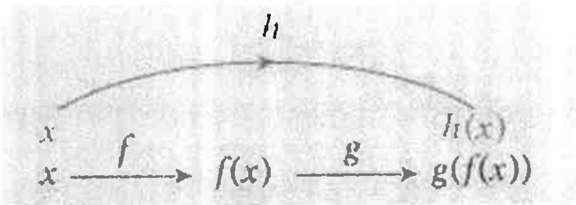
Comment dériver e^{3x} ? Il s'agit d'une fonction composée !

Rappelle-toi ce qu'est une fonction composée (vu en 5ème année)

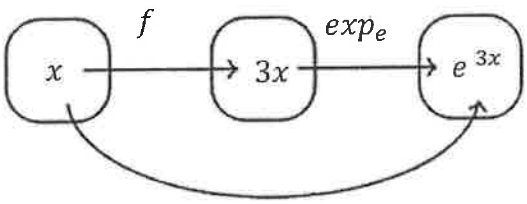
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to g(x)$

La fonction composée $(g \circ f)$ et lue « *g après f* » est la fonction dans $\mathbb{R}$ telle que : $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

La fonction g s'applique sur $f(x)$
$f(x)$ se nomme **argument** de la fonction g



Pour la fonction $h(x) = e^{3x}$:



La fonction exp_e s'applique sur $f(x) = 3x$
$3x$ est l'**argument** de la fonction exp_e

Comment dériver une fonction composée ?

Nous admettrons la formule suivante :

$$\boxed{(g\ o\ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)\,.\,f'(x)}$$

La dérivée g' s'applique sur l'argument $f(x)$

Et on multiplie par $f'(x)$ qui est la dérivée de l'argument

<u>Dans le cas d'une fonction exponentielle de base e et composée</u>, on a :

$$(exp_e \; o \; f)'(x) = exp_e'(f(x)).f'(x)$$

Ou encore

$$\boxed{\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}.f'(x)}$$

la dérivée de l'exponentielle en base e reste égale à elle-même !

la dérivée de l'argument (de l'exposant)

<u>En français :</u>

Pour dériver une fonction exponentielle de base e et composée (c'est-à-dire dont l'exposant n'est plus « x seul », mais une fonction de x) on recopie la fonction exponentielle et on la multiplie par la dérivée de son exposant.

<u>Exemples :</u>

1) $(e^{3x})' = (3x)'.e^{3x} = 3.e^{3x}$

2) $\left(e^{x^2+5x}\right)' = (x^2+5x)'.e^{x^2+5x} = (2x+5).e^{x^2+5x}$

<u>Un exemple en vidéo :</u>

https://www.youtube.com/watch?v=lwcFgnbsOEw

Exercices : Dériver les fonctions suivantes, après en avoir déterminé le domaine.

1) $f(x) = e^{-2x}$

2) $f(x) = e^{4x-1}$

3) $f(x) = e^{x^2}$

4) $f(x) = e^{x^2-5x}$

5) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

6) $f(x) = e^{5x} + 2$

7) $f(x) = 10.e^{-0,5x}$

8) $f(x) = 4x.e^{-x}$

9) $f(x) = (2x-3).e^{-0,1x}$

10) $f(x) = 3.e^{1-x^2}$

F) Rôle de la dérivée

Reprenons ici 2 applications importantes de la dérivée d'une fonction :

1) Ecrire l'équation d'une tangente en un point du graphe

Nous retiendrons la méthode suivante :

a) La pente de la tangente vaut $m = f'(a)$ (calculer $f'(x)$ et l'évaluer en $x = a$)

b) Le point de contact est $(a; f(a))$

c) L'équation de la tangente est donc :

$y = f'(a).x + p$ ou $y - f(a) = f'(a).(x - a)$

pour calculer p,

on injecte le point de contact

2) Etudier la variation de la fonction (croissance, décroissance) et rechercher ses extrémums (minimums, maximums)

Nous retiendrons :

1) Une fonction dérivable sur $]a, b[$ est :

croissante ($\nearrow$) sur $]a, b[$ ssi $f'(x) \geq 0$ (positive) $\forall x \in]a, b[$

décroissante ($\searrow$) sur $]a, b[$ ssi $f'(x) \leq 0$ (négative) $\forall x \in]a, b[$

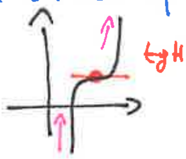
2) Soit $f(x)$, une fonction dérivable sur $]a, b[$ et $r \in]a, b[$

> f admet un extremum (min ou max) en $x = r$ (avec une tg horizontale)
>
> ssi $f'(x)$ s'annule en $x = r$ ($f'(r) = 0$) **en changeant de signe**

x		r	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max local tg H	$\searrow$

x		r	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min local tg H	$\nearrow$

⚠ Si la dérivée s'annule sans changer de signe en un point alors ce point est un point pallier (P.P)



EXERCICES

1) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;5]$ par :

$$f(x) = (3 - x^2).e^x$$

On note C_f la courbe représentative de f.

a) Montrer que $f'(x) = e^x.(-x^2 - 2x + 3)$

b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[-5\,;5]$, puis le tableau de variations de f.

c) La courbe admet-elle des tangentes horizontales ? Justifie

d) La fonction admet-elle un minimum ou un maximum sur cet intervalle ?

Justifie

e) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f

au point d'abscisse $x = 0$.

f) Tracer C_f et la tangente.

Ex. P28

① $f(x) = (3-x^2) \cdot e^x$ sur $[-5;5]$

a) $f'(x) = ((3-x^2) \cdot e^x)'$ $\quad (f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$

$= (3-x^2)' \cdot e^x + (3-x^2) \cdot (e^x)'$

$= -2x \cdot e^x + 3e^x - e^x \cdot x^2$

$= e^x(-x^2 - 2x + 3)$ $\quad$ cqfd

b) T.S. de f'

racines de $f'(x)$: $e^x = 0$ impossible $e^x > 0$ ou $-x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = 4 - 4(-1)(3) = 16$

$x_1, x_2 = \dfrac{2 \pm 4}{-2}$ $\quad x_1 = -3$ $\quad x_2 = 1$

	x		-3		1	
	e^x	+	+	+	+	+
	$-x^2-2x+3$	−	0	+	0	−
TS	$f'(x)$	−	0	+	0	−
TV	$f(x)$	↘	Tg H min	↗	Tg H MAX	↘

c) 2 tg horizontales car la dérivée s'annule en $x=-3$ et en $x=1$

d) min / max.

min en (−3) $\quad f(-3) = (3-(-3)^2) \cdot e^{-3} = \dfrac{-6}{e^3} = -0,3$ $\quad (-3; -0,3)$

Max en $x=1$ $\quad f(1) = (3-1^2) \cdot e^1 = 2 \cdot e = 5,4$ $\quad (1; 5,4)$

e)

tg en x = 0

$t_0 \equiv y = mx + p$

↳ pente = $f'(0)$

• $f'(x) = e^x \cdot (-x^2 - 2x + 3)$

• pente $= f'(0)$

$= e^0 \cdot (-0 - 2 \cdot 0 + 3) = \boxed{3}$

$\Rightarrow t_0 \equiv y = \boxed{3}x + \boxed{p}$ injecter un point

. Point de contact : $(a ; f(a)) \to (0 ; f(0))$

$f(0) = (3 - 0^2) \cdot e^0 = 3$

$\Rightarrow (3 ; 0) \in t_0$

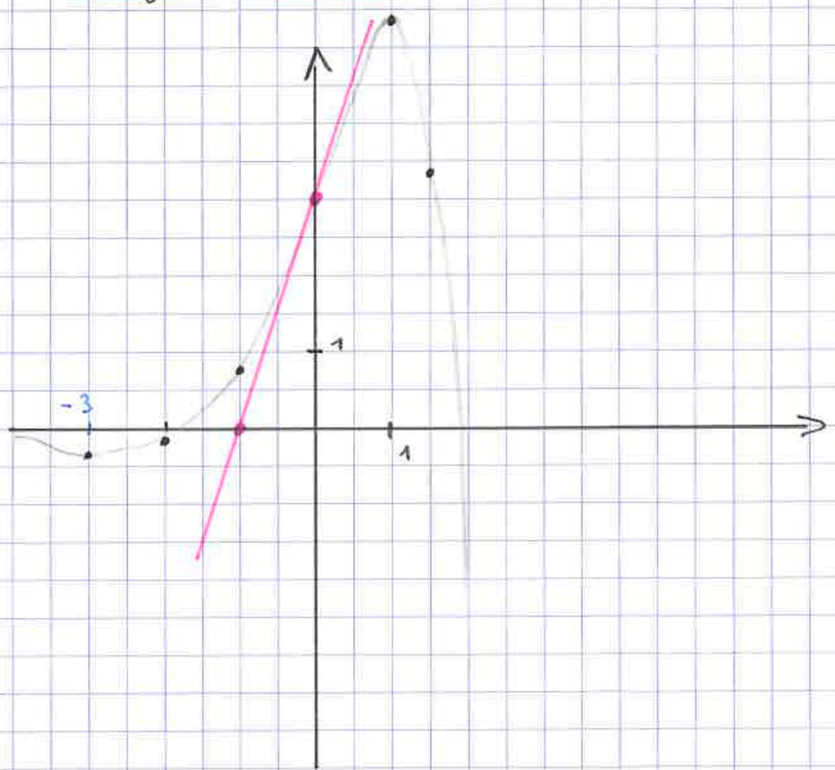
. injecter le point

$(\underset{x}{0} ; \underset{y}{3}) \in t_0$ ssi il vérifie son équation

ssi $3 = 3 \cdot 0 + p$

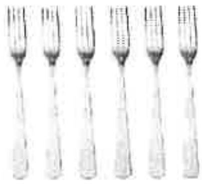
ssi $p = 3$

$\Rightarrow \boxed{t_0 \equiv y = 3x + 3}$



	x	f(x)
	-5	-0,148
	-4	-0,238
m	-3	-0,3
	-2	-0,135
	-1	0,735
	0	3
M	1	5,4
	2	-7,4
	3	-120,5
	⋮	⋮

2) Prix d'équilibre



Une entreprise fabrique et vend des fourchettes, dont le prix unitaire est compris entre $1\ et\ 4€$. On estime que pour un prix unitaire de x euros :

- L'offre $f(x)$, en dizaines de milliers de fourchettes, est : $f(x) = 0{,}05.\,e^x$
- La demande $g(x)$, en dizaines de milliers de fourchettes, est : $g(x) = \frac{5}{e^x}$

a) Déterminer la dérivée des 2 fonctions, dresser le tableau de signes de ces dérivées, en déduire le tableau de variation des fonctions. Interpréter

b) Déterminer le prix d'équilibre, c'est-à-dire le prix pour lequel l'offre correspond à la demande.

c) En déduire le chiffre d'affaires engendré par la vente des fourchettes au prix d'équilibre.

3

a)

$f'(x) = (0{,}05 \cdot e^x)'$

$= 0{,}05\,(e^x)'$

$\boxed{f'(x) = 0{,}05 \cdot e^x}$

• racines de f'

$e^x = 0$ impossible

x	→ Prix €
$0{,}05$	+
e^x	+
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗ → offre

qd le prix unitaire ↗, l'offre ↗

$g'(x) = \left(\dfrac{5}{e^x}\right)' = (5 \cdot e^{-x})'$

$= 5 \cdot (e^{-x})'$

$= 5 \cdot e^{-x} \cdot (-x)'$

$\boxed{g'(x) = \dfrac{-5}{e^x}}$

ou

$g'(x) = \dfrac{(+5)' \cdot e^x - (+5)(e^x)'}{(e^x)^2}$

$= \dfrac{-5\cancel{e^x}}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \boxed{\dfrac{-5}{e^x}}$

=

x	→ Prix
-5	−
e^x	+
$f'(x)$	−
$f(x)$	↘ → demande

Qd le prix ↗, la demande ↘

b) Prix d'équilibre

offre = demande

$f(x) = g(x)$

$0{,}05\,e^x = \dfrac{5}{e^x}$

$0{,}05 \cdot (e^x)^2 = 5$

$(e^x)^2 = \dfrac{5}{0{,}05}$

$(e^x)^2 = 100$

$e^x = \pm\sqrt{100}$

inconnue ds l'exp

$e^x = 10$ | $\underbrace{e^x}_{>0} = -10$ impossible

x	e^x
1	2,71
2	7,38
3	20,08
2,5	12,18
2,4	11,02
2,3	9,97

Le prix d'équilibre est 2,31€

1

c) Prix d'équilibre $x = 2,31$

$f(2,31) = 0,05 \cdot e^{2,31}$

$= 0,5037 \times 1000$ => 5037 fourchettes

Chiffre d'affaires : $2,31 \times 5037 = 11635,4$

Le CA au prix d'équilibre est 11635,47 €

② $f(x) = (x-1) \cdot e^x + 2$

a) $f'(x) = [(x-1) \cdot e^x + 2]'$

$= ((x-1) \cdot e^x)' + \underbrace{(2)'}_{=0}$

$= (x-1)' \cdot e^x + (x-1) \cdot (e^x)'$

$= e^x + (x-1) \cdot e^x$

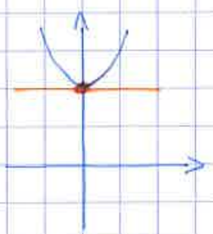
$= e^x (\cancel{1} + x \cancel{-1})$

$= e^x \cdot x$

• T.S. de f'

racines de f' : $e^x = 0$ impossible ou $\boxed{x = 0}$

x		0	
e^x	+	+	+
x	−	0	+
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	ty H min	↗



ty en $x = 0$ est horiz.

$\boxed{t_0 \equiv y = 1}$

b) min ou max ? min en $x = 0$

$f(0) = (0-1) \cdot e^0 + 2$

$f(0) = 1 \Rightarrow$ min $(0; 1)$

c) ty en $x = 1$ $\quad t_1 \equiv y = mx + p$ ↳ $f'(1)$

• $f'(x) = e^x \cdot x$

• $f'(1) = e^1 \cdot 1 = e = 2,72 \Rightarrow t_1 \equiv y = e \cdot x + \boxed{p}$

• Point de contact $(1; f(1)) \Rightarrow f(1) = (1-1) \cdot e^1 + 2 = 2 \Rightarrow (1; 2)$

• injecter $(1; 2) \Rightarrow (1; 2) \in t_1$ ssi il vérifie son équation

ssi $2 = e \cdot 1 + p$

ssi $2 - e = p \Rightarrow p = -0,71$

$\Rightarrow \boxed{t_1 \equiv y = ex - 0,71}$

3) Etude d'un bénéfice

Une entreprise produit sur commande entre 50 et 800 bicyclettes par mois pour des communes. On estime que si, un mois donné, on produit x centaines de bicyclettes, alors $f(x) = 20.(x-1).e^{-0,5x}$ modélise le bénéfice, exprimé en millier d'euros, réalisé par l'entreprise ce même mois.

Partie A : Etude de la fonction f

a) Montrer que $f'(x) = 10.(-x+3).e^{-0,5x}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0,5\,;\,8]$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B : Application économique

c) Vérifier que si l'entreprise produit 220 bicyclettes un mois donné, alors elle réalise un bénéfice de $7\,989$€

d) Déterminer le bénéfice réalisé par une production de 480 bicyclettes un mois donné.

e) Pour un mois donné, combien l'entreprise doit-elle produire au minimum de bicyclettes pour ne pas travailler à perte ?

f) Pour un mois donné, combien l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice maximum ? Préciser ce bénéfice à l'euro près.

g)

P30.

3) Etude d'un bénéfice

a) $f(x) = 20.(x-1).e^{-0,5x}$

$f'(x) = (20.(x-1).e^{-0,5x})'$

$= 20.(\underbrace{(x-1)}_{f}.\underbrace{e^{-0,5x}}_{g})'$ $\quad (f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$

$= 20.[(x-1)'.e^{-0,5x} + (x-1).(e^{-0,5x})']$

$= 20[e^{-0,5x} + (x-1).(e^{-0,5x}.(-0,5))]$

$= 20[e^{-0,5x} + (-0,5x+0,5).e^{-0,5x}]$

$= 20.e^{-0,5x}.(1+(-0,5x+0,5))$

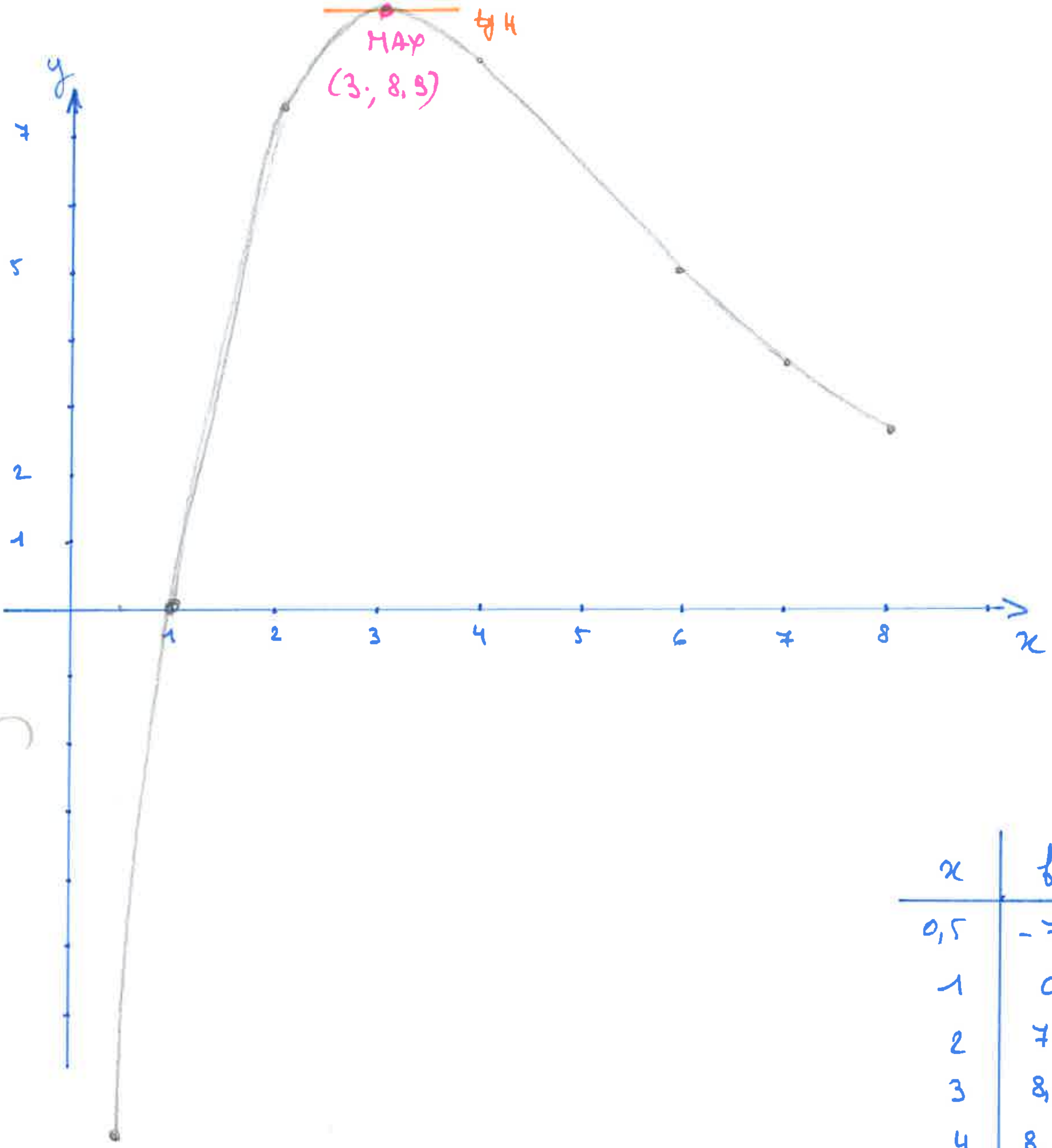
$= \underbrace{20}_{10.2}.e^{-0,5x}(1,5-0,5x)$

$= \boxed{10.e^{-0,5x}.(3-x)}$ cqfd

b) $f'(x) = 10.(3-x).e^{-0,5x}$

TS de f' : rac. des facteurs : $(3-x)=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$

x	0,5		3		8
10		+	+	+	
$3-x$		+	0	−	
$e^{-0,5x}$		+	+	+	
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	MAX 44	↘	



x	$f(x)$
0,5	-7,8
1	0
2	7,4
3	8,9
4	8,1
5	6,6
6	5
7	3,6

c) 220 bicyclettes $\Rightarrow x = 2,2$

- $f(2,2) = 7,989$ milliers d'euro $\Rightarrow \times 1000$

$\Rightarrow$ 7989 €

d) 480 bicyclettes $\Rightarrow x = 4,8$

- $f(4,8) = 6,895$ milliers d'€

Une production de 480 vélos permet de réaliser un bénéfice de 6895 €

e)

$f(x) = 0$

$20 . (x-1) . e^{-0,5x} = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$ Centaine

L'entreprise doit produire minimum 100 vélos pour ne pas travailler à perte.

f) Voir question b

max en $\underline{X = 3}$ qui vaut $f(3) = 8,925$ milliers d'€
Centaines

L'entreprise réalise un bénéfice max. de 8925 € lorsqu'elle produit 300 vélos

g) Combien de vélos pour réaliser un bénéfice supérieur à 8000 €.

$f(x) \geq 8$

↳ chercher "x" pour que $f(x) = 8$ $\Rightarrow$ $20(x-1) . e^{-0,5x} = 8$ → essais

x	$f(x)$
2,2	7,98
$\boxed{2,21}$	$\boxed{8,01}$
4,1	7,98
4,09	7,99
$\boxed{4,08}$	$\boxed{8,00}$

Pour que le bénéfice soit supérieur à 8000 €, l'entreprise doit produire (entre) 220 et 408 vélos.