



**УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2021**

**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ
НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

г. Уфа, 6 – 9 октября 2021 г.

Том 1

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ УФИЦ РАН
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН

**УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2021**

**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ
НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

Том 1

г. Уфа, 6 – 9 октября 2021 г.

Уфа
Азтерна
2021

- Охунов Н.К., 205
 Олимп А.Г., 205
 Павленко В.А., 69
 Поляков Д.М., 71
 Рахимов М.А., 208
 Рахматов Дж.Ш., 189
 Раутиан Н.А., 74
 Раззаков Ж.Д., 224
 Родикова Е.Г., 158
 Руминцева С.В., 211
 Рябошлыкова Д.К., 197
 Садиков М.О., 177
 Садовнича Я.В., 78
 Сифонова Т.А., 64
 Салимова А.Е., 161
 Савчук А.М., 78
 Савин А.Ю., 76
 Семенова Е.Н., 76
 Собиров У.М., 116
 Солиев Ю.С., 217
 Сулганаев Я.Т., 22
 Султанов М.А., 219
 Шамсудинов Ф.М., 233
 Шерстюков В.Б., 120
 Шерстюкова О.В., 103
 Шишкин А.Б., 171
 Шодиев Д.С., 224
 Шумкин М.А., 34
 Тасевич А.Л., 221
 Туленов К.С., 163
 Туракулов Х.Ш., 186
 Турсунов Ф.Р., 224
 Валеев Н.Ф., 20, 22
 Выборный Е.В., 26, 211
 Власов В.В., 24
 Яндыбаева И.Г., 88
 Юлмухаметов Р.С., 174
 Юмагулов М.Г., 236
 Bolikulov F.M., 183
 Dosmagulova K., 36
 Ermamatova Z.E., 214
 Kakharman N., 192
 Niyozov I.E., 183
 Parmanova R.T., 83
 Raikhan Madi, 166
 Sattorov E.N., 214
 Shkalikov A.A., 87
 Tashpulatov S.M., 80, 83
 Turdebek N.B., 164, 166

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

© М.А. Султанов, В.Е. Мислов, Е. Нурланулы

murat.sultanov@yau.edu.kz, v.e.mislov@urfu.ru, erkebulan.nurlanuly@yau.edu.kz

УДК 519.63, 519.688

DOI: 10.33184/mknvornishit-2021-10-06.83

В работе рассмотрен алгоритм решения одномерного дифференциального уравнения аномальной диффузии с дробной по времени производной. После дискретизации и аппроксимации задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей большого размера. Для решения системы используется модифицированный итеративный метод верхней релаксации. На основе данного метода реализован параллельный алгоритм для многоядерных процессоров. Проведены численные эксперименты по оценке эффективности распараллеливания.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, дробная производная, метод верхней релаксации, параллельные алгоритмы.

Parallel algorithm for solving the time-fractional diffusion equation

The paper considers an algorithm for solving the one-dimensional differential equation of anomalous diffusion with a time-fractional derivative. After discretization and approximation, the problem is reduced to a system of linear algebraic equations with a large sparse matrix. The modified iterative over-relaxation method is used to solve this system. Based on this method, a parallel algorithm is implemented for multi-core processors. A numerical experiments were carried out to assess the efficiency of parallelization.

Keywords: differential equations, fractional derivative, over-relaxation method, parallel algorithms.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект №AP09258836).

Султанов Мурат Абдукадырович, к.ф.-м.н., МКТУ им. Х. А. Ясави (Туркестан, Казахстан); Murat A. Sultanov (Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan)

Мислов Владимир Евревич, к.ф.-м.н., ИММ имени Н.Н.Красовского УрО РАН, УрФУ (Екатеринбург, Россия); Vladimir E. Mislov (Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia)

Нурланулы Еркебулан, докторант, МКТУ им. Х. А. Ясави (Туркестан, Казахстан); Erkebulan Nurlanuly (Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan)

В работе рассматривается параболическое уравнение в частных производных с дробной производной по времени:

$$\frac{\partial^\alpha U(x, t)}{\partial t^\alpha} = a(x) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} + c(x) U(x, t),$$

где $U(x, t)$ — искомая функция, $a(x), b(x), c(x)$ — известные функции или константы, $0 < \alpha < 1$ — параметр дробной степени производной по времени.

Задача рассматривается на пространственном отрезке $0 \leq x \leq \gamma$, временном промежутке $t > 0$, начальные и граничные условия определяются в виде

$$U(0, t) = g_0(t), \quad U(\ell, t) = g_1(t), \quad U(x, 0) = f(x),$$

где $g_0(t), g_1(t), f(x)$ — известные функции.

Дробная производная Капуто в данном случае задается следующей формулой [1]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-1)} \int_0^\infty \frac{\partial u(x-s)}{\partial t} (t-s)^{-\alpha} ds.$$

После дискретизации пространства и времени на равномерной сетке и аппроксимации уравнения с использованием неявной конечно-разностной схемы (первого порядка точности по времени и второго — по пространству), задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей большого размера. Для ее решения в данной работе используется модифицированный метод ускоренной верхней релаксации [2,3].

Алгоритм реализован в виде параллельной программы для многоядерных процессоров. Проведены численные эксперименты по оценке эффективности распараллеливания.

Литература

1. Zhang Y. A Finite Difference Method For Fractional Partial Differential Equation // Applied Mathematics And Computation, 215 (2009), 524-529.
2. Hadjidimos A. Accelerated OverRelaxation Method // Mathematics of Computation 32 (1978), 149-157.
3. Sunarto A., Sulaiman J., Saudi A. Implicit finite difference solution for time-fractional diffusion equations using AOR method // Journal of Physics: Conference Series 495(2014), 012032.

Научное издание

**УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2021**

**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ
НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

Том 1

В авторской редакции

Подписано в печать 29.09.2021 г. Формат 60x84/16.

Печать: цифровая. Гарнитура: Times New Roman

Усл. печ. л. 13,95. Тираж 100. Заказ 1491.



АЭТЕРНА

НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»

450076, г. Уфа, ул. М. Гафури 27/2

<https://aeterna-ufa.ru>

info@aeterna-ufa.ru

+7 (347) 266 60 68