Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"

Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.:

Year:
Volume:
Issue:
Page:
Find

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"

Address: 454080, Chelyabinsk, prospekt Lenina, 76
Phone: +7 (351) 267 91 48
Fax: +7 (351) 265 59 50
E-mail: mmph@susu.ru
Website: http://vestnik.susu.ru/mmph/index
ISSN: 2075-809X (print), 2409-6547 (online)
Founders: South Ural State University
Publishers: South Ural State University

zbMATH: http://zbmath.org/serials/?q=se:00008798
Web of Science: Indexed in RUSSIAN SCIENCE CITATION INDEX
eLibrary.Ru: http://elibrary.ru/title_about.asp?id=28649

Editor in Chief

Zagrebina, Sophiya Alexandrovna

Editorial Board

Golubev, Evgenii Valer'evich, Executive Secretary
Beskachko, Valery Petrovich
Kovalev, Yurii Mikhailovich

УДК 517.956.223 DOI: 10.14529/mmph220205

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Б.Х. Турметов[1], В.В. Карачик[2]
[1] *Международный казахско-турецкий университет имени А. Ясави, г. Туркестан, Республика Казахстан*
E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
[2] *Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
E-mail: karachik@susu.ru

Аннотация. Исследуются условия разрешимости одного класса краевых задач для нелокального бигармонического уравнения в единичном шаре с условиями Неймана на границе. Нелокальность уравнения порождается некоторой ортогональной матрицей. Исследованы существование и единственность решения поставленной задачи Неймана и получено интегральное представление решения через функцию Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре.

Сначала устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения: приводится функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре, выписывается представление решения задачи Дирихле через эту функцию Грина, находятся значения интегралов от функций, возмущенных ортогональной матрицей. Затем доказывается теорема о представлении решения вспомогательной задачи Дирихле для нелокального бигармонического уравнения в единичном шаре. Решение этой задачи выписывается с использованием функции Грина задачи Дирихле для обычного бигармонического уравнения. Приводится пример решения простой задачи для нелокального бигармонического уравнения. Далее сформулирована теорема о необходимых и достаточных условиях разрешимости задачи Неймана для нелокального бигармонического уравнения. Доказательство основной теоремы опирается на две леммы, с помощью которых удается преобразовать условия разрешимости задачи Неймана к более простому виду. Решение задачи Неймана представляется через решение вспомогательной задачи Дирихле.

Ключевые слова: нелокальный оператор; задача Неймана; бигармоническое уравнение; условия разрешимости; функция Грина.

Введение. Краевые и начально-краевые задачи для нелокальных аналогов классических уравнений исследовались в работах [1–6]. Многочисленные приложения нелокальных уравнений и нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений к задачам физики, техники и других отраслей науки описаны в [7, 8]. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго и четвертого порядка с инволюцией как частные случаи нелокальных задач рассматриваются в [9–13]. В работе [14] исследовалась задача Дирихле для полигармонического уравнения. Данная работа продолжает эти исследования.

Пусть $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, а $\partial\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$ – единичная сфера и S – действительная ортогональная матрица $SS^T=E$, для которой существует натуральное число $l\in\mathbb{N}$ такое, что $S^l=E$.

Пример 1. Пусть каждому $x\in\Omega$ соответствует точка $Sx=-x$. В этом случае $S=-E$. Ясно, что $S\cdot S^T=-E\left(-E\right)=E$ и $S^2=E$. Значит, $l=2$.

Рассмотрим нелокальный бигармонический дифференциальный оператор

$$Lu(x)\equiv\sum_{k=1}^{l}a_k\Delta^2u\left(S^{k-1}x\right),$$

где $a_1,a_1,...,a_l$ – некоторые действительные числа и $l\in\mathbb{N}$. Исследуем в Ω следующую задачу.

Задача Неймана. Найти функцию $u(x)\in C^4(\Omega)\cap C^2(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$Lu(x)=f(x),\ x\in\Omega\ , \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=g_0(x),\ \left.\frac{\partial^2 u(x)}{\partial\nu^2}\right|_{\partial\Omega}=g_1(x), \tag{2}$$

где ν – внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$.

Вспомогательные утверждения. Для исследования поставленной выше задачи нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим также вспомогательную задачу (1), (3)

$$u(x)\big|_{\partial\Omega}=g_0(x),\ \left.\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=g_1(x), \tag{3}$$

Пусть $\lambda_1=e^{i\frac{2\pi}{l}}$ – примитивный корень l-й степени из единицы и $\lambda_k=e^{i\frac{2\pi k}{l}}=\lambda_1^k$. Обозначим

$$\mu_k=a_1\lambda_0^k+\ldots+a_l\lambda_{l-1}^k=\sum_{q=1}^{l}a_q\lambda_{q-1}^k=\sum_{q=1}^{l}a_q\lambda_k^{q-1}.$$

Пусть

$$c_j=\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{\lambda_k^{j-1}\mu_k} \tag{4}$$

при $j=1,2,\ldots,l$. Введем операторы

$$I_L v(x)=\sum_{k=1}^{l}a_k I_{S^{k-1}}v(x)=\sum_{k=1}^{l}a_k v(S^{k-1}x),\quad J_L v(x)=\sum_{k=1}^{l}c_k v(S^{k-1}x). \tag{5}$$

В работе [15] было определено элементарное решение бигармонического уравнения

$$E_4(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(n-2)(n-4)}|x-\xi|^{4-n}, & n>4, n=3\\ -\dfrac{1}{4}\ln|x-\xi|, & n=4\\ \dfrac{|x-\xi|^2}{4}\big(\ln|x-\xi|-1\big), & n=2\end{cases}, \tag{6}$$

и доказано, что при $n\ge 3$ функция вида

$$G_4(x,\xi)=E_4(x,\xi)-E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)-\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big), \tag{7}$$

где $E(x,\xi)=|x-\xi|^{2-n}/(n-2)$, является функцией Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре. Затем в работах [16, 17] установлено следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\varphi_0\in C^{2+\varepsilon}(\partial S)$, $\varphi_1\in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ и $f\in C^1(\bar S)$, тогда решение задачи Дирихле для бигармонического уравнения при $n>4$ или $n=3$ можно представить в виде

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}g_0(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi-\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}g_1(\xi)\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi+\frac{1}{\omega_n}\int_{\Omega}G_4(x,\xi)f(\xi)\,d\xi,$$

где ω_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Далее нам понадобится еще следующее утверждение.

Лемма 1 [5]. Пусть функция $g(x)$ непрерывна на $\partial\Omega$ или Ω. Тогда для любого $k\in\mathbb{N}$

$$\int_{\partial\Omega}g(S^k y)\,ds_y=\int_{\partial\Omega}g(y)\,ds_y,\quad \int_{\Omega}g(S^k y)\,dy=\int_{\Omega}g(y)\,dy.$$

Докажем вспомогательную теорему существования для решения задачи (1), (2).

Теорема 2. Пусть коэффициенты $\{a_k : k=1,\ldots,l\}$ оператора L такие, что $\mu_k\neq 0$ при $k=1,\ldots,l$ и $g_0\in C^{2+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $g_1\in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega)$ и $f\in C^1(\bar\Omega)$. Тогда решение задачи Дирихле (1), (3) существует и единственно и может быть представлено в виде

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}g_0(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi-$$

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}g_1(\xi)\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi+\frac{1}{\omega_n}\int_\Omega G_4(x,\xi)J_L f(\xi)\,d\xi\,, \tag{8}$$

где оператор J_L определен в (5).

Доказательство. Обозначим $v(x)=I_L u(x)$. В [14] показано, что $u(x)=J_L v(x)$. В силу леммы 4 из [14] о коммутативности операторов I_S и Δ, I_S и Λ, учитывая равенство $\frac{\partial}{\partial\nu}u\,|_{\partial\Omega}=\Lambda u\,|_{\partial\Omega}$ задачу (1), (3) можно переписать в виде

$$\Delta^2 v(x)=f(x), x\in\Omega;\quad v\big|_{\partial\Omega}=I_L g_0(s), \Lambda u\big|_{\partial\Omega}=I_L g_1(s), s\in\partial\Omega.. \tag{9}$$

Ясно, что $g_0\in C^{2+\varepsilon}(\partial\Omega)\Rightarrow I_L g_0\in C^{2+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $g_1\in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega)\Rightarrow I_L g_1\in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega)$, и значит, решение задачи Дирихле (9) существует и единственно. В силу теоремы 1 это решение можно представить в виде

$$v(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}I_L g_0(\xi)\Lambda\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi-\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}I_L g_1(\xi)\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi+\frac{1}{\omega_n}\int_\Omega G_4(x,\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Применяя оператор J_L к обеим частям равенства и учитывая при этом $u(x)=J_L v(x)$, получим

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}J_L\int_{\partial\Omega}I_L g_0(\xi)\Lambda\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi-$$

$$-\frac{1}{\omega_n}J_L\int_{\partial\Omega}I_L g_1(\xi)\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi+\frac{1}{\omega_n}J_L\int_\Omega G_4(x,\xi)f(\xi)\,d\xi. \tag{10}$$

В полученном выражении преобразуем сначала последний интеграл. Нетрудно видеть, что $|S^k x-S^k\xi|=|S^k(x-\xi)|=|x-\xi|$, а значит, в соответствии с $E_4(S^k x,S^k\xi)=E_4(x,\xi)$ и, следовательно, учитывая (7), найдем $G_4(S^k x,S^k\xi)=G_4(x,\xi)$. Далее в силу леммы 1

$$I_{S^k}\int_\Omega G_4(x,\xi)f(\xi)\,d\xi=\int_\Omega G_4(S^k x,S^k\xi)f(S^k\xi)\,d\xi=\int_\Omega G_4(x,\xi)I_{S^k}f(\xi)\,d\xi.$$

Поэтому согласно формуле (5)

$$J_L\int_\Omega G_4(x,\xi)f(\xi)\,d\xi=\sum_{k=1}^{l}c_k I_{S^{k-1}}\int_\Omega G_4(x,\xi)f(\xi)\,d\xi=\int_\Omega G_4(x,\xi)J_L f(\xi)\,d\xi.$$

Аналогично по лемме 1 получим

$$J_L\int_{\partial\Omega}\hat g_0(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi=\int_{\partial\Omega}J_L\hat g_0(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi$$

$$J_L\int_{\partial\Omega}\hat g_1(\xi)\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi=\int_{\partial\Omega}J_L\hat g_1(\xi)\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi.$$

Таким образом, решение $u(x)$ из (10) можно переписать в виде

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}J_L I_L g_0(\xi)\Lambda\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi-$$

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}J_L I_L g_1(\xi)\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi+\frac{1}{\omega_n}\int_\Omega G_4(x,\xi)J_L f(\xi)\,d\xi. \tag{11}$$

В силу формул (5) и $u(x)=J_L v(x)$ верны равенства $\hat g_i(\xi)=I_L g_i(\xi)$, $g_i(\xi)=J_L\hat g_i(\xi)$, из которых следует, что $J_L I_L g_i(\xi)=g_i(\xi)$ при $i=1,2$ для произвольной функции $g_i(\xi)$ на $\partial\Omega$. Поэтому (11) преобразовывается к (8). Теорема доказана.

Следствие. Пусть $v_0(x)$ и $v_1(x)$ – гармонические в Ω функции такие, что $v_0(x)|_{\partial\Omega}=g_0$ и $v_1(x)|_{\partial\Omega}=g_1$, тогда решение задачи Дирихле (1), (3) можно записать в виде

$$u(x)=v_0(x)+\frac{1-|x|^2}{2}\Lambda v_0(x)-\frac{1-|x|^2}{2}v_1(x)+\frac{1}{\omega_n}\int_\Omega G_4(x,\xi)J_L f(\xi)\,d\xi\,.$$

Полученная формула следует из теоремы 2 и из представления решения задачи Дирихле для однородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u_0(x)=0,\, x\in\Omega;\quad u_0\big|_{\partial\Omega}=g_0(s),\ \frac{\partial u_0}{\partial\nu}\big|_{\partial\Omega}=g_1(s),\ s\in\partial\Omega$$

в форме

$$u_0(x)=v_0(x)+\frac{1-|x|^2}{2}\Lambda v_0(x)-\frac{1-|x|^2}{2}v_1(x)\,,$$

полученной в [18].

Пример 2. Пусть S – симметричная матрица такая, что $S^2=E$ и, значит, $l=2$. Задача (1), (2) примет вид

$$a_1\Delta^2 u(x)+a_2\Delta^2 u(Sx)=f(x),x\in\Omega;\quad u\big|_{\partial\Omega}=g_0(s),\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\big|_{\partial\Omega}=g_1(s),\, s\in\partial\Omega\,. \tag{12}$$

В этом случае $l=2$, $\lambda_1=e^{i\pi}=-1$, $\lambda_2=e^{2i\pi}=1$, $\mu_1=a_1-a_2$, $\mu_2=a_1+a_2$ и

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ a_2 & a_1\end{pmatrix},\quad \det A=\mu_1{\cdot}\mu_2=a_1^2-a_2^2.$$

Пусть $a_1^2-a_2^2\neq 0\Leftrightarrow a_1\neq\pm a_2$. По формуле (4) найдем

$$c_1=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\lambda_k^0\mu_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2+a_1}\right)=\frac{a_1}{a_1^2-a_2^2},$$

$$c_2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\lambda_k^1\mu_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2+a_1}\right)=\frac{-a_2}{a_1^2-a_2^2}$$

и, значит,

$$J_L f=c_1 f(x)+c_2 f(Sx)=\frac{a_1 f(x)-a_2 f(Sx)}{a_1^2-a_2^2}.$$

В соответствии со следствием решение задачи (12) может быть записано в виде

$$u(x)=v_0(x)+\frac{1-|x|^2}{2}\Lambda v_0(x)-\frac{1-|x|^2}{2}v_1(x)+\frac{1}{\omega_n}\int_\Omega G_4(x,\xi)\frac{a_1 f(\xi)-a_2 f(S\xi)}{a_1^2-a_2^2}d\xi\,.$$

Существование решения задачи Неймана. В этом разделе исследуем существование решения задачи Неймана (1), (2). Пусть $G_4(x,y)$ – функция Грина (7) классической задачи Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре. Заметим, что явный вид функции Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа в единичном шаре в случае $n=2$ и $n=3$ приводится в учебниках по уравнениям в частных производных, а в случае размерности $n\geq 4$ она построена в работах [19, 20].

Теорема 3. Пусть коэффициенты $\{a_k : k=1,\ldots,l\}$ оператора L такие, что $\mu_k=a_1\lambda_0^k+\ldots+a_l\lambda_{l-1}^k\neq 0$, при $k=1,\ldots,l$ и $f\in C^2(\bar\Omega)$, $g_0(x)\in C^{3+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $g_1(x)\in C^{2+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $\varepsilon>0$. Для разрешимости задачи (1), (3) необходимо и достаточно следующее условие

$$\int_{\partial\Omega}(g_0(x)-g_1(x))\,ds_x+\frac{1}{\mu_l}\int_\Omega\frac{|x|^2-1}{2}f(x)\,dx=0. \tag{13}$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянных и может быть представлено в виде

$$u(x)=\int_0^1 w(tx)\frac{dt}{t}, \tag{14}$$

где

$$w(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega} g_0(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi -$$

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}(g_0(\xi)+g_1(\xi))\Delta_\xi G_4(x,\xi)\,ds_\xi+\frac{1}{\omega_n}\int_\Omega G_4(x,\xi)J_L(\Lambda+4)f(\xi)\,d\xi, \qquad (15)$$

и оператор J_L определен в (5), а функция $G_4(x,\xi)$ в (7).

Доказательство. Сначала доказывается, что решение задачи (1), (3) представляется в виде (14), (15) при условии, что $w(0)=0$. Затем, на основании работы [20], устанавливается, что

$$w(x)=w_0(x)+\frac{1}{\omega_n}\int_\Omega G_4(x,\xi)(\Lambda_\xi+4)J_L f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$w_0(x)=v_0(x)+\frac{1-|x|^2}{2}\Lambda v_0(x)-\frac{1-|x|^2}{2}v_1(x),$$

а $v_0(x)$ и $v_1(x)$ – гармонические в Ω функции такие, что $v_0(x)|_{\partial\Omega}=g_0$ и $v_1(x)|_{\partial\Omega}=g_0+g_1$.

Лемма 2. Общее решение уравнения $(\Lambda+4)v(x)=0$ имеет вид

$$v(x)=C\big(\ln(x_2/x_1),\ldots,\ln(x_n/x_1)\big)x_1^{-4},$$

где $C(\tau_2,\ldots,\tau_n)$ – произвольная дифференцируемая функция.

На основании леммы 2 доказывается, что условие разрешимости $w(0)=0$ является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Неймана (1), (2).

Лемма 3. При $n\ge 3$ справедливо равенство

$$\int_\Omega G_4(0,\xi)(\Lambda+4)\hat f(\xi)\,d\xi=\int_\Omega\frac{1-|\xi|^2}{4}\hat f(\xi)\,d\xi,$$

где $G_4(x,\xi)$ – функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре (7).

С помощью леммы 3 условие разрешимости задачи Неймана $w(0)=0$ приводится к виду (13). Теорема доказана.

Исследование выполнено при поддержке грантового финансирования Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан в рамках научного проекта № AP08855810 и финансовой поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

Литература

1. Нахушев, А.М. Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

2. Андреев, А.А. Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом / А.А. Андреев // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1126–1128.

3. Ashyralyev, A. Well-posedness of a parabolic equation with involution / A. Ashyralyev, A.M. Sarsenbi // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2017. – Vol. 38, no. 10. – P. 1295–1304.

4. Ashyralyev, A. Well-posedness of an elliptic equation with involution / A. Ashyralyev, A.M. Sarsenbi // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – № 284. – С. 1–8.

5. Karachik, V.V. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation / V.V. Karachik, A.M. Sarsenbi, B.Kh. Turmetov // Turkish Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 43, no. 3. – P. 1604–1625.

6. Kirane, M. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation / M. Kirane, N. Al-Salti // Journal of Nonlinear Sciences and Applications. – 2016. – Vol. 9, Iss. 3. – P. 1243–1251.

7. Skubachevskii, A.L. Nonclassical boundary value problems. I / A.L. Skubachevskii // Journal of Mathematical Sciences. – 2008. – Vol. 155, Iss. 2. – P. 199–334.

8. Skubachevskii, A.L. Nonclassical boundary-value problems. II / A.L. Skubachevskii // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 166, Iss. 4. – P. 377–561.

9. Przeworska-Rolewicz, D. Some boundary value problems with transformed argument / D. Przeworska-Rolewicz // Commentationes Mathematicae. – 1974. – Vol. 17, no. 2. – P. 451–457.

10. Карачик В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения / В.В. Карачик // Математические труды. – 2016. – Т. 19, № 2. – С. 86–108.

11. Sadybekov, M.A. On boundary value problems of the Samarskii–Ionkin type for the Laplace operator in a ball / M.A. Sadybekov, A.A. Dukenbayeva // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2020. – P. 1–15.

12. Karachik, V.V. On solvability of some nonlocal boundary value problems for biharmonic equation / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov // Mathematica Slovaca. – 2020. – Vol. 70, Iss. 2. – P. 329–342.

13. Karachik, V.V. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov // Novi Sad Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 50, no. 1. – P. 67–88.

14. Турметов Б.Х., Карачик В.В. О задаче Дирихле для нелокального полигармонического уравнения / Б.Х. Турметов, В.В. Карачик // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2021. – Т. 13, № 2. – С. 37–45.

15. Karachik, V.V. Greens function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball / V.V. Karachik // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2019. – Vol. 64, no. 9. – P. 1500–1521.

16. Карачик, В.В. Функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2021. – Т. 57, no. 5. – P. 673–686.

17. Karachik V. Green's functions of some boundary value problems for the biharmonic equation. Complex Variables and Elliptic Equations. – 2021. (Online).

18. Karachik, V. Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball / V. Karachik // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, no. 16. – Article no. 1907.

19. Karachik, V.V. On the Green's function for the third boundary value problem / V.V. Karachik, B.K. Turmetov // Siberian Advances in Mathematics. – 2019. – T. 29, no. 1. – P. 32–43.

20. Sadybekov, M.A. Representation of Green’s function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball / M.A. Sadybekov, B.T. Torebek, B.K. Turmetov // Complex Variables and Elliptic Equations. –2016. – Vol. 61, no. 1. – P. 104 –123.

Поступила в редакцию 9 февраля 2022 г.

Сведения об авторах

Турметов Батирхан Худайбергенович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математики, Международный казахско-турецкий университет имени А. Ясави, г. Туркестан, Республика Казахстан, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Математический анализ и методика преподавания математики», старший научный сотрудник, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: karachikvv@susu.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2022, vol. 14, no. 2, pp. 51–58

DOI: 10.14529/mmph220205

NEUMANN BOUNDARY CONDITION FOR A NONLOCAL BIHARMONIC EQUATION

B.Kh. Turmetov[1], V.V. Karachik[2]
[1] Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan
E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
[2] South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: karachik@susu.ru

The solvability conditions for a class of boundary value problems for a nonlocal biharmonic equation in the unit ball with the Neumann conditions on the boundary are studied. The nonlocality of the equation is generated by some orthogonal matrix. The presence and uniqueness of a solution to the proposed Neumann boundary condition is examined, and an integral representation of the solution to the Dirichlet problem in terms of the Green's function for the biharmonic equation in the unit ball is obtained.

First, some auxiliary statements are established: the Green's function of the Dirichlet problem for the biharmonic equation in the unit ball is given, the representation of the solution to the Dirichlet problem in terms of this Green's function is written, and the values of the integrals of the functions perturbed by the orthogonal matrix are found. Then a theorem for the solution to the auxiliary Dirichlet problem for a nonlocal biharmonic equation in the unit ball is proved. The solution to this problem is written using the Green's function of the Dirichlet problem for the regular biharmonic equation. An example of solving a simple problem for a nonlocal biharmonic equation is given. Next, we formulate a theorem on necessary and sufficient conditions for the solvability of the Neumann boundary condition for a nonlocal biharmonic equation. The main theorem is proved based on two lemmas, with the help of which it is possible to transform the solvability conditions of the Neumann boundary condition to a simpler form. The solution to the Neumann boundary condition is presented through the solution to the auxiliary Dirichlet problem.

Keywords: nonlocal operator; the Neumann boundary condition; biharmonic equation; solvability conditions; Green's function.

References

1. Nakhushev, A.M. *Uravneniya matematicheskoy biologii* (Equations of Mathematical Biology). Moscow, Vyssh. shk., 1995, 301 p. (in Russ.).

2. Andreev A.A. Analogs of Classical Boundary Value Problems for a Second-Order Differential Equation with Deviating Argument. *Differential Equations*, 2004, Vol. 40, no. 8, pp. 1192–1194. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000049836.04104.6f

3. Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2017, Vol. 38, no. 10, pp. 1295–1304. DOI: 10.1080/01630563.2017.1316997

4. Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-Posedness of an elliptic Equation with Involution. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, no. 284, pp. 1–8.

5. Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.Kh. On the Solvability of the Main Boundary Value Problems for a Nonlocal Poisson Equation. *Turkish Journal of Mathematics*, 2019, Vol. 43, no. 3, pp. 1604–1625. DOI: 10.3906/mat-1901-71

6. Kirane M, Al-Salti N. Inverse Problems for a Nonlocal Wave Equation with an Involution Perturbation. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 2016; Vol. 9, Iss. 3, pp. 1243–1251. DOI: 10.22436/jnsa.009.03.49

7. Skubachevskii A.L. Nonclassical Boundary Value Problems. I. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, Vol. 155, Iss. 2, pp. 199–334. DOI: 10.1007/s10958-008-9218-9

8. Skubachevskii A.L. Nonclassical Boundary-Value Problems. II. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, Vol. 166, Iss. 4, pp. 377–561. DOI: 10.1007/s10958-010-9873-5

9. Przeworska-Rolewicz D. Some Boundary Value Problems with Transformed Argument. *Commentationes Mathematicae*, 1974, Vol. 17, no. 2, pp. 451–457.

10. Karachik, V.V. A Neumann-type problem for the biharmonic equation. *Siberian Advances in Mathematics*, 2017, Vol. 27, no. 2, pp. 103–118. DOI: 10.3103/S105513441702002X

11. Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. On Boundary Value Problems of the Samarskii–Ionkin Type for the Laplace Operator in a Ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2020, pp. 1–15. DOI: 10.1080/17476933.2020.1828377

12. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On Solvability of Some Nonlocal Boundary Value Problems for Biharmonic Equation. *Mathematica Slovaca*, 2020, Vol. 70, Iss. 2, pp. 329–342. DOI: 10.1515/ms-2017-0355

13. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one Nonlocal Dirichlet Problem for the Poisson Equation. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 2020, Vol. 50, no. 1, pp. 67–88. DOI: 10.30755/NSJOM.08942

14. Turmetov B.Kh., Karachik V.V. On a Dirichlet problem for a nonlocal polyharmonic equation. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2021, vol. 13, no. 2, pp. 37–45. DOI: 10.14529/mmph210206

15. Karachik V.V. Greens function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019, Vol. 64, no. 9, pp. 1500–1521. DOI: 10.1080/17476933.2018.1536702

16. Karachik V.V. Green's Functions of the Navier and Riquier–Neumann Problems for the Biharmonic Equation in the Ball. *Differential Equations*, 2021, Vol. 57, no. 5, pp. 654–668. DOI: 10.1134/S0012266121050098

17. Karachik V. Green's functions of some boundary value problems for the biharmonic equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2021. DOI: 10.1080/17476933.2021.1897793

18. Karachik, V. Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, no. 16, Article no. 1907. DOI: 10.3390/math9161907

19. Karachik V.V., Turmetov B.K. On the Green's function for the third boundary value problem. *Siberian Advances in Mathematics*, 2019, Vol. 29, no. 1, pp. 32–43. DOI: 10.3103/S1055134419010036

20. Sadybekov M.A, Torebek B.T, Turmetov B.K. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2016, Vol. 61, no. 1, pp. 104–123. DOI: 10.1080/17476933.2015.1064402

Received February 9, 2022

Information about the authors

Turmetov Batirkhan Khudaybergenovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematics Department, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, Senior Staff Scientist, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: karachikvv@susu.ru