

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Казахстанский филиал

Библиотека Первого Президента Республики Казахстан – Елбасы



ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

*Материалы
юбилейных конференций*

<i>Кожанов А.И., Абылкаиров У.У., Ашурова Г.Р.</i> Обратная задача для вырождающего параболического уравнения	171
<i>Кожанов А.И., Айтжанов С.Е., Жалгасова К.А.</i> Разрешимость обратных задач восстановления коэффициента правой части для уравнения переноса	173
<i>Ломов И.С.</i> Применение рядов Пуассона для построения решения вырождающегося эллиптического дифференциального уравнения	176
<i>Назарова К.Ж., Шадибеков К.М., Усманов К.И.</i> Однозначная разрешимость многоточечной краевой задачи для интегродифференциальных уравнений с инволюцией	177
<i>Оспанов К.Н., Есбаев А.Н.</i> Об условиях разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений с неограниченными коэффициентами	181
<i>Раджабов Н.Р., Убаева Ж.К., Исенова А.А.</i> Исследование перепределенной линейной системы трех уравнений с постоянными коэффициентами, содержащей гиперболическое уравнение второго порядка с сверхсингулярными линиями	183
<i>Рамазанов М.И., Джсналиев М.Т., Танин А.О.</i> Двумерная граничная задача теплопроводности в конусе со специальными граничными условиями	186
<i>Салиханова И.Г., Турметов Б.Х.</i> О разрешимости задачи Дирихле для нелокального аналога бигармонического уравнения	189
<i>Сарсенби А.М.</i> Разрешимость смешанной задачи для уравнения теплопроводности с инволютивным возмущением	194
<i>Сартабанов Ж.А.</i> Приводимость линейных квазипериодических систем	196
<i>Серовайский С.Я.</i> Структура множества решений нелинейного эллиптического уравнения	199
<i>Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К.</i> Построение решений вырожденного неоднородного уравнения и обобщенных вырожденных гипергеометрических систем Клаузена	204
<i>Тихомиров В.В., Ильясов А.М.</i> Оптимизация решений уравнений Лоренца	207
<i>Токмагамбетов Н.С., Шаймардан С.</i> Задачи типа Коши для q -дифференциальных уравнений с q -дробными производными Римана-Луивилля	211
<i>Токмагамбетова Т.Д., Орумбаева Н.Т.</i> О разрешимости линейной полупериодической краевой задачи для дифференциального псевдогиперболического уравнения третьего порядка	214

О разрешимости задачи Дирихле для нелокального аналога бигармонического уравнения

И.Г. Салиханова¹, Б.Х. Турметов²

¹Международный казахско-турецкий университет имени Х.А. Ясауи
г. Туркестан, Казахстан
indi.salikhanova@mail.ru

²Международный казахско-турецкий университет имени Х.А. Ясауи
г. Туркестан, Казахстан
turmetovbh@mail.ru

В данной работе для нелокального аналога бигармонического уравнения исследуется задача Дирихле. Нелокальный аналог бигармонического уравнения вводится с помощью линейных преобразований пространства R^2 в R^2 . Доказывается теорема о существовании и единственности решения исследуемой задачи. Кроме того, получено интегральное представление решения рассматриваемой задачи и построен явный вид функции Грина. При построении явного вида функции Грина существенно используются функция Грина задачи Дирихле для классического бигармонического уравнения.

В работе [4] был введен нелокальный аналог оператора Лапласа и для соответствующего нелокального уравнения Пуассона были исследованы вопросы разрешимости основных краевых задач.

Настоящая работа является продолжением этих исследований для нелокального аналога эллиптических уравнений четвертого порядка.

Переходим к постановке задачи. Пусть Ω – единичный круг, а $\partial\Omega$ – единичная окружность. В пространстве R^2 введем следующие отображения

$$S_1x = (-x_1, x_2), S_2x = (x_1, -x_2), S_3x = (-x_1, -x_2).$$

Заметим, что если $x \in \Omega$, или $x \in \partial\Omega$, то имеют место включения $S_kx \in \Omega$, или $S_kx \in \partial\Omega$, $k = 1, 2, 3$.

Пусть $a_j, j = \overline{0, 3}$ – действительные числа. Рассмотрим в области Ω следующую задачу:

$$a_0\Delta^2u(x) + a_1\Delta^2u(S_1x) + a_2\Delta^2u(S_2x) + a_3\Delta^2u(S_3x) = f(x), x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = g_0(x), \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = g_1(x), x \in \Omega, \quad (2)$$

где ν – вектор нормали к границе области Ω .

Решением задачи (1)-(2) назовём функцию $u(x) \in C^4(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую условиям (1) и (2) в классическом смысле.

Пусть $u(x)$ является решением задачи (1)-(2). Обозначим

$$w(x) = a_0u(x) + a_1u(S_1x) + a_2u(S_2x) + a_3u(S_3x).$$

Легко показать, что функция $w(x)$ удовлетворяет условиям следующей задачи Дирихле

$$\Delta^2 w(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u(x) = l_a[g_0](x), \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = l_a[g_1](x), x \in \Omega, \quad (4)$$

где

$$l_a[g_j] = a_0g_j(x) + a_1g_j(S_1x) + a_2g_j(S_2x) + a_3g_j(S_3x), j = 0, 1.$$

Пусть $f(x) \in C^\lambda(\overline{\Omega})$, $0 < \lambda < 1$. Если $g_0(x) \in C^{\lambda+4}(\partial\Omega)$, $g_1(x) \in C^{\lambda+3}(\partial\Omega)$, то очевидно, что $l_a[g_0](x) \in C^{\lambda+4}(\partial\Omega)$, $l_a[g_1](x) \in C^{\lambda+3}(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи (3)-(4) существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda+4}(\overline{\Omega})$ (см., например, [1]).

Далее, из равенства $w(x) = l_a[u](x)$ следует

$$\begin{aligned} w(x) &= a_0u(x) + a_1u(S_1x) + a_2u(S_2x) + a_3u(S_3x), \\ w(S_1x) &= a_1u(x) + a_0u(S_1x) + a_3u(S_2x) + a_2u(S_3x), \\ w(S_2x) &= a_2u(x) + a_3u(S_1x) + a_0u(S_2x) + a_1u(S_3x), \\ w(S_3x) &= a_3u(x) + a_2u(S_1x) + a_1u(S_2x) + a_0u(S_3x). \end{aligned}$$

Полученную систему алгебраических уравнений перепишем в матричной форме

$$W = AU, \quad (4)$$

где

$$W = \begin{pmatrix} w(x) \\ w(S_1x) \\ w(S_2x) \\ w(S_3x) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u(x) \\ u(S_1x) \\ u(S_2x) \\ u(S_3x) \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что собственными значениями матрицы A являются числа

$$\varepsilon_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \varepsilon_2 = a_0 + a_1 - a_2 - a_3, \varepsilon_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3, \varepsilon_4 = a_0 - a_1 - a_2 + a_3.$$

Далее, если выполняются условия $\varepsilon_j \neq 0, j = \overline{1, 4}$, то $\det A = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 \neq 0$, и тогда естественно существует обратный к A матрица $B = A^{-1}$. Можно показать, что матрица B имеет такую же структуру как матрица A , т.е.

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & b_2 \\ b_2 & b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Причем собственными значениями этой матрицы являются числа $\mu_j = 1/\varepsilon_j, j = \overline{1, 4}$. Далее, так как $\det A \neq 0$, то решение уравнение (4) однозначно определяется в виде $U = BW$. Покажем, что если функция $w(x)$ является решением задачи (3)-(4), то функция

$$u(x) = b_0 w(x) + b_1 w(S_1 x) + b_2 w(S_2 x) + b_3 w(S_3 x) \quad (5)$$

будет решением задачи (1)-(2). Действительно, если $f(x) \in C^\lambda(\overline{\Omega}), 0 < \lambda < 1, g_0(x) \in C^{\lambda+4}(\partial\Omega), g_1(x) \in C^{\lambda+3}(\partial\Omega)$, то функция $w(x)$ как решение задачи (3)-(4) принадлежит классу $C^\lambda(\overline{\Omega})$, и поэтому функция $u(x)$ из равенства (5) также принадлежит классу $C^\lambda(\overline{\Omega})$. Тогда, для $x \in \Omega$, имеем

$$\Delta^2 U = B \Delta^2 W \equiv BF, \quad (6)$$

где $F = (f(x), f(S_1 x), f(S_2 x), f(S_3 x))^T$.

Если $A_1 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, то умножая равенство (6) на вектор A_1 получаем

$$\begin{aligned} A_1 \Delta^2 U &= a_0 \Delta^2 u(x) + a_1 \Delta^2 u(S_1 x) + a_2 \Delta^2 u(S_2 x) + a_3 \Delta^2 u(S_3 x) = \\ &= A_1 B F = (a_0, a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & b_2 \\ b_2 & b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ f(S_1 x) \\ f(S_2 x) \\ f(S_3 x) \end{pmatrix} = f(x), \end{aligned}$$

т.е. функция $u(x)$ из равенства (5) удовлетворяет уравнению (1). Проверим выполнение граничных условий (2). Для любых $x \in \partial\Omega$ имеем

$$\begin{aligned} u(x)|_{\partial\Omega} &= b_0 w(x) + b_1 w(S_1 x) + b_2 w(S_2 x) + b_3 w(S_3 x)|_{\partial\Omega} = \\ &= b_0 l_a[g_0](x) + b_1 l_a[g_0](S_1 x) + b_2 l_a[g_0](S_2 x) + b_3 l_a[g_0](S_3 x)|_{\partial\Omega} = \\ &= (b_0, b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(x) \\ g_0(S_1 x) \\ g_0(S_2 x) \\ g_0(S_3 x) \end{pmatrix} = g(x). \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется первое граничное условие $u(x)|_{\partial\Omega} = g_0(x)$. Второе условие проверяется аналогичным образом.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполняются условия $\varepsilon_j \neq 0, j = \overline{1, 4}, f(x) \in C^\lambda(\overline{\Omega}), g_0(x) \in C^{\lambda+4}(\partial\Omega), g_1(x) \in C^{\lambda+3}(\partial\Omega), 0 < \lambda < 1$. Тогда решение задачи (1)-(2) существует, единственно, принадлежит классу $C^{\lambda+4}(\overline{\Omega})$ и представляется в виде (5), где функция $w(x)$ является решением задачи Дирихле (3)-(4).

Далее, построим интегральное представление решения задачи (1)-(2) для случая когда $g_0(x) = g_1(x) = 0$ и приведем явный вид функции Грина задачи (1)-(2). Пусть $G_D(x, y)$ функция Грина задачи Дирихле для классического бигармонического уравнения. Явный вид функции $G_D(x, y)$ построены различными авторами [2, 3]. В частности, в работе [2] показано, что имеет следующий вид

$$G_D(x, y) = \frac{1}{8}|x - y|^2 \int_1^{h(x, y)} (t^2 - 1)t^{-1} dt,$$

где

$$h(x, y) = \frac{1}{|x - y|} |x|y| - y/|y||.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполняются условия $\varepsilon_j \neq 0, j = \overline{1, 4}, f(x) \in C^\lambda(\overline{\Omega}), 0 < \lambda < 1, g_0(x) = 0, g_1(x) = 0$. Тогда, решение задачи (1)-(2) представляется в виде

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy \quad (7)$$

где функция Грина задачи (1)-(2) представляется в виде

$$G(x, y) = b_0 G_D(x, y) + b_1 G_D(S_1 x, y) + b_2 G_D(S_2 x, y) + b_3 G_D(S_3 x, y).$$

Доказательство. Используя алгоритм построения решения задачи (1)-(2) приведенный в теореме 1 рассмотрим функцию

$$w(x) = a_0 u(x) + a_1 u(S_1 x) + a_2 u(S_2 x) + a_3 u(S_3 x).$$

Для этой функции получаем задачу Дирихле (3)-(4) с однородными краевыми условиями. В этом случае решение задачи (3)-(4) представляется в виде

$$w(x) = \int_{\Omega} G_D(x, y) f(y) dy. \quad (8)$$

Далее, как и в случае теоремы 1 функция $u(x)$ построенная по функции $w(x)$ формулой (5) будет решением задачи (1)-(2). Подставляя функции $w(x)$ из представления (8) в формулу (5) для функции $u(x)$ получаем представление (7). Теорема доказана. \square

Данная работа была выполнена при поддержке гранта МОН РК № AP09259074.

Список литературы

- [1] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., *Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы* // Москва: ИЛ. – 1962. – 206 с.
- [2] Gazzola F., Grunau H.-Ch., Sweers G., *Polyharmonic boundary value problems* // Berlin: Springer. – 1991. – 423 p.
- [3] Kal'menov T. Sh., Suragan D., *On a new method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation* // Differential Equations. – 2012. – V. 48, №3. – P. 441-445.
- [4] Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B.Kh, *On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation* // Turkish journal of mathematics. – 2019. – V. 43, №3. – P. 1604-1625.