Bulletin of the Institute of Mathematics

Matematika Instituti Byulleteni

Bulletin of the Institute of Mathematics

Бюллетень Института Математики

2021
4(5)

ISSN 2181-9483

http://mib.mathinst.uz

Matematika Instituti Byulleteni
2021, Vol. 4, №5, 127-136 b.

Bulletin of the Institute of Mathematics
2021, Vol. 4, №5, pp.127-136

Бюллетень Института математики
2021, Vol. 4, №5, стр.127-136

Об одной задаче для нелокального уравнения смешанного типа дробного порядка с вырождением

Турметов Б. Х. [1] **Кадиркулов Б. Ж.** [2]

Buziladigan aralash turdagi kasr tartibli nolokal tenglama uchun masala

Ushbu maqolada to'rtburchakli sohada Kaputo operatori qatnashgan ikkinchi tartibli aralash tipdagi tenglama uchun nolokal qo'yilgan masala o'rganilgan. Masala yechimining mavjudligi va yagonaligi shartlari aniqlangan hamda topilgan yechimining berilganlarga uzluksiz bog'liqligi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: nolokal tenglama; aralash tipdagi tenglama; nolokal chegaraviy masala; kasr tartibli differensial operator; Kilbas-Saigo funksiyasi; Furye qatori.

On a Problem for a Nonlocal Equation of Mixed Type of Fractional Order with Degeneration

In this article non-local problem for a second-order mixed-type equation involved Caputo fractional differential operator was studied in the rectangular domain. The conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem are defined and the connection between given functions and continuous unique solution is shown.

Keywords: nonlocal equation; mixed type equation; degeneration equation; nonlocal boundary value problem; operator of fractional integro-differentiation; Kilbas-Saigo function; Fourier series.

MSC 2010: 34K37, 35M12

Ключевые слова: нелокальное уравнение; уравнение смешанного типа; уравнение с вырождением; нелокальная задача; оператор интегро-дифференцирования; функция Килбас-Сайго; ряд Фурье.

Введение и постановка задачи

К одним из первых исследований задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой- гиперболическое уравнение, можно отнести работу [1], где изучается задача, связанная с движением газа в канале, окруженным пористой средой, при этом в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его - уравнением диффузии. В работе [2] задача о распространении электрических колебаний в составных линиях сводится к решению уравнения смешанного парабологиперболического типа.

[1]Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан. E-mail:turmetovbh@mail.ru
[2]Ташкентский государственный институт востоковедения, Ташкент, Узбекистан. E-mail: kadirkulovbj@gmail.com

После этих работ были опубликованы много научных работ, посвященных изучению локальных и нелокальных задач для параболо-гиперболических уравнений второго порядка. Учитывая обширность баз таких работ, мы приводим только те, которые близки к нашей работе по тематике [3]-[6].

Одним из классов качественно новых задач для дифференциальных уравнений в частных производных являются нелокальные задачи. Решение многих практически важных задач, связанных с математической биологией, с динамикой почвенной влаги, описанием процесса диффузии частиц в турбулентной плазме, моделированием процесса излучения лазера и диффузии в трехкомпонентных системах приводит к исследованию нелокальных задач. Такие задачи также возникают, в частности при моделировании процесса размножения микробных популяций в биологическом реакторе. Более подробную информацию о нелокальных задачах можно найти в монографии [7]. К исследованию аналогичных задач для уравнений в частных производных с производными целого или дробного порядков, посвящены также работы [4, 6, 8, 9].

Нелокальные дифференциальные уравнения, в которых отклонение аргументов имеет инволютивный характер, исследовались в работах многочисленных авторов [10]-[13]. Отметим, что отображение I принято называть инволюцией, если $I^2 = E$, где E - тождественное отображение. Отметим работу Линькова А.В. [14], где для аналогов параболического, гиперболического и эллиптического уравнения с инволюцией исследованы краевые и начально-краевые задачи. В работе [15] исследуются краевые задачи для уравнения Гельмгольца дробного порядка со секвенциальным производными Капуто и с инволюцией, а в работе [16] изучаются обратные задачи для дробного параболического уравнения с инволюцией. Отметим также работу [17], где исследуются обратные задачи для вырожденного параболического уравнения дробного порядка с инволюцией.

В данной работе установлен критерий единственности решения одной задачи для нелокального аналога смешанного параболо-гиперболического уравнения дробного порядка с инволюцией относительно пространственной переменой и с вырождением. При этом, решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Также установлена устойчивость решения рассматриваемой задачи по нелокальному условию.

Пусть $\Omega = \{(x,t) : -1 < x < 1,\ -a < t < b\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$, где a, b -положительные действительные числа. В области Ω рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача А. Требуется найти функцию $u(x,t)$, из класса

$$t^{-\beta}{}_C D_{0+}^{\alpha} u, u_x \in C(\bar{\Omega}_1), u_{xx} \in C(\Omega_1), u \in C^1(\bar{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{2,2}(\Omega_2), \tag{1}$$

удовлетворяющее в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ уравнению

$$0 = \begin{cases} t^{-\beta}{}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) - u_{xx}(x,t) + \varepsilon u_{xx}(-x,t), t > 0, \\ u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \varepsilon u_{xx}(-x,t), t < 0, \end{cases} \tag{2}$$

условиям

$$u(-1,t) = 0, u(1,t) = 0, -a \le t \le b, \tag{3}$$

$$u_t(x,-a) = t^{-\beta}{}_C D_{0+}^{\alpha} u(x,b) + \varphi(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

а также условию склеивания

$$\lim_{t \to +0} t^{-\beta}{}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \lim_{t \to -0} u_t(x,t). \tag{5}$$

Здесь $\varphi(x)$- заданная функция, $\beta > 0, \varepsilon$ - заданные действительные числа, ${}_C D_{0t}^{\alpha} = J_{0+}^{1-\alpha} \frac{d}{dt}, 0 < \alpha \le 1$-интегро-дифференциальный оператор Капуто, а J_{0+}^{α}-интегральный оператор Римана-Лиувилля, которая определяется по формуле

$$J_{0+}^{\alpha} \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}},\ \alpha > 0.$$

Более подробную информацию о интегро-дифференциальных операторах дробного порядка можно найти в монографии [18].

Существование и единственность решение задачи А.

Для решения задачи применим спектральный метод. Решения задачи ищем в виде $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Подставляя это выражение в уравнение (2) и краевые условия (3), получим следующую спектральную задачу с инволюцией:

$$X''(x) - \varepsilon X''(-x) + \lambda X(x) = 0. \tag{6}$$

$$X(-1) = 0, X(1) = 0. \tag{7}$$

Пусть $X(x)$-решение задач (6), (7). В уравнении (6) заменяя точку x точкой $-x$ получаем

$$X''(-x) - \varepsilon X''(x) + \lambda X(-x) = 0. \tag{8}$$

Тогда из равенств (6) и (8) имеем

$$(1+\varepsilon)\left[X''(x) + X''(-x)\right] + \lambda\left[X(x) + X(-x)\right] = 0,$$

$$(1-\varepsilon)\left[X''(x) - X''(-x)\right] + \lambda\left[X(x) - X(-x)\right] = 0.$$

Пусть

$$Y^{\pm}(x) = X(x) \pm X(-x). \tag{9}$$

Тогда для нахождения функций $Y^{\pm}(x)$ получаем следующую спектральную задачу

$$Y''(x) + \mu v(x) = 0,\, Y(-1) = Y(1) = 0, \tag{10}$$

где $\mu = \mu^{\pm} = \frac{\lambda}{1\pm\varepsilon}, \varepsilon \neq \pm 1$.

Таким образом, имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Пусть функция $X(x)$ решение задачи (6), (7). Тогда функция $Y^{\pm}(x)$, определяемая по формуле (9) является решениям задачи (10) соответствующей $\mu^{\pm}$.

Справедливо следующее утверждение

Лемма 2. Имеет место:

1) Пусть $|\varepsilon| < 1$, $Y_k(x)$ - собственные функции, а μ_k соответствующие собственные значения задачи (10). Тогда система функций

$$X_{k,1}(x) = Y_k(x) + Y_k(-x), X_{k,2}(x) = Y_k(x) - Y_k(-x), k = 1, 2, ... \tag{11}$$

являются собственными функциями задачи (6), (7) соответствующие собственным значениям $\lambda_{k,1} = (1+\varepsilon)\,\mu_k, \lambda_{k,2} = (1-\varepsilon)\,\mu_k$.

2) Пусть $|\varepsilon| < 1$, $Y_k(x)$,$k = 1, 2, ...$-полная система собственных функций, а μ_k, $k = 1, 2, ...$ соответствующие собственные значения задачи Дирихле (10). Тогда система функций (11) является полной в $L_2(\Omega_x)$.

Из лемм (1) и (2) следует, что задача (6), (7) имеет счетное число собственных значений вида

$$\lambda_{1k} = (1+\varepsilon)k^2\pi^2,\, \lambda_{2k} = (1-\varepsilon)(k-0,5)^2\pi^2, |\varepsilon| < 1, k = 1, 2, ...,$$

а соответствующими собственными функциями являются функции

$$X_{1k}(x) = \sin k\pi x, X_{2k}(x) = \cos(k-0,5)\pi x, k = 1, 2, ..., \tag{12}$$

причем они образуют полную ортонормированную систему в $L_2(-1, 1)$.

Единственность решения задачи А.

Пусть $u\,(x,t)$ решение задачи А. Рассмотрим следующие функции

$$u_{1k}(t) = \int\limits_{-1}^{1} u(x,t)\sin k\pi x dx, u_{2k}(t) = \int\limits_{-1}^{1} u(x,t)\cos(k-0,5)\pi x dx, k = 1, 2, ... \tag{13}$$

Применяя оператор $t^{-\beta}{}_{C}D_{0t}^{\alpha}$ к обеим частям равенства (13) по t при $t \in (0,b)$, а также дифференцируя два раза при $t \in (-a,0)$ по t, учитывая уравнение (2) относительно функций $u_{1k}(t)$ и $u_{2k}(t)$ получим дифференциальные уравнения

$$t^{-\beta}{}_{C}D_{0t}^{\alpha}u_{ik}(t) + \lambda_{ik}u_{ik}(t) = 0, t > 0, i = 1,2, \tag{14}$$

$$u''{}_{ik}(t) + \lambda_{ik}u_{ik}(t) = 0, t < 0, i = 1,2. \tag{15}$$

Общее решение уравнений (14) и (15) имеют вид

$$u_{ik}\left(t\right) = \begin{cases} A_{ik}E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{ik}t^{\alpha+\beta}), t > 0, \\ B_{ik}\sin\sqrt{\lambda_{ik}}t + L_{ik}\cos\sqrt{\lambda_{ik}}t, t < 0, \end{cases} \tag{16}$$

где $A_{ik}, B_{ik}, L_{ik}, i = 1,2, k = 1,2,...$- произвольные постоянные, а $E_{\alpha,m,l}(z)$-известная функция Килбаса-Сайго, которая имеет вид

$$E_{\alpha,m,l}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\, c_0 = 1,\, c_k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma[\alpha(jm+l)+1]}{\Gamma[\alpha(jm+l+1)+1]}, k = 1,2,.... \tag{17}$$

Более подробную информацию, касающегося уравнений вида (14) и функциям Килбаса-Сайго (17) можно найти в работах [19, 20].

Из (14), (15), учитывая условия (1), (4) и (5) получим, что функции $u_{1k}(t)$ и $u_{2k}(t)$ должны удовлетворят следующим условиям

$$\lim_{t\to+0} u_{ik}(t) = \lim_{t\to-0} u_{ik}(t),\ \lim_{t\to+0}\ t^{-\beta}{}_{C}D_{0+}^{\alpha}u_{ik}(t) = \lim_{t\to-0} u'{}_{ik}(t), \tag{18}$$

$$u'{}_{ik}(-a) =\ t^{-\beta}{}_{C}D_{0t}^{\alpha}u_{ik}(b) + \varphi_{ik}, i = 1,2,\, k = 1,2,..., \tag{19}$$

где

$$\varphi_{ik} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x)X_{ik}(x)dx, i = 1,2, k = 1,2,....$$

Далее, удовлетворяя функции (16) условиям (18), (19) для нахождения постоянных $A_{ik}, B_{ik}, L_{ik}, i = 1,2$ получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} A_{ik} = L_{ik}, -\lambda_{ik}A_{ik} = \sqrt{\lambda_{ik}}B_{ik}, \\ B_{ik}\sqrt{\lambda_{ik}}\sin\sqrt{\lambda_{ik}}a - L_{ik}\sqrt{\lambda_{ik}}\cos\sqrt{\lambda_{ik}}a + A_{ik}\lambda_{ik}E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{ik}b^{\alpha+\beta}) = \varphi_{ik}. \end{cases} \tag{20}$$

Данная система имеет единственное решение

$$L_{ik} = A_{ik}, B_{ik} = -\sqrt{\lambda_{ik}}A_{ki},\, A_{ik} = \frac{\varphi_{ik}}{\sqrt{\lambda_{ik}}\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)},$$

при условии, что при всех $k = 1,2...$ имеет место

$$\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon) = \sin\sqrt{\lambda_{ik}}a - \sqrt{\lambda_{ik}}\cos\sqrt{\lambda_{ik}}a + \sqrt{\lambda_{ik}}E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{ik}b^{\alpha+\beta}) \neq 0, i = 1,2. \tag{21}$$

Подставляя найденные решения в (16), окончательно имеем

$$u_{ik}\left(t\right) = \begin{cases} \frac{\varphi_{ik}}{\sqrt{\lambda_{ik}}\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)}E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{ik}t^{\alpha+\beta})\ t > 0, \\ \frac{\varphi_{ik}}{\sqrt{\lambda_{ik}}\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)}\left(\cos\sqrt{\lambda_{ik}}t - \sqrt{\lambda_{ik}}\sin\sqrt{\lambda_{ik}}t\right), t \leq 0. \end{cases} \tag{22}$$

С помощью (22) при выполнении условия (21) легко доказать единственность решение рассматриваемой задачи. Действительно, пусть задача А имеет два разных решений $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и пусть

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Тогда нетрудно проверить, что $u(x,t)$ является решением однородной задачи А ($\varphi(x) = 0$). Поэтому достаточно доказать, что однородная задача А имеет только тривиальное решение.

Пусть $u(x,t)$ есть решение однородной задачи A в области Ω и выполняется условие (21). Так как $\varphi(x)=0$, тогда $\varphi_{ik}=0,\ i=1,2$ и из формул (13) и (22) следует, что

$$\int_{-1}^{1} u(x,t)X_{ik}(x)dx=0, t\in[-a,b],\ i=1,2,\ k=1,2,....$$

Далее, учитывая полноту системы (12) в пространства $L_2(-1,1)$ заключаем, что $u(x,t)=0$ почти всюду на $[-1,1]$ при любом $t\in[-a,b]$. Поскольку $u(x,t)\in C(\bar{\Omega})$, то $u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$, то есть задача A в рассматриваемом классе имеет единственное решение.

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Если существует решение задачи A, то оно единственно только и только тогда, когда выполнены условия (21) при всех $k=1,2,....$

Теперь рассмотрим случай, когда нарушается условие (21), то есть $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=0$ при некоторых $a,\ b,\varepsilon, i=i_0$ и $k=m$. Тогда однородная задача A (где $\varphi(x)\equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$V_{i_0m}(x,t)=v_{i_0m}(t)X_{i_0m}(x) \tag{23}$$

где

$$v_{i_0m}(t)=\begin{cases} E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{i_0m}t^{\alpha+\beta}), t>0,\\ \cos\sqrt{\lambda_{i_0m}}t-\sqrt{\lambda_{i_0m}}\sin\sqrt{\lambda_{i_0m}}t, t<0.\end{cases}$$

Теперь, выражение $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ представим в виде:

$$\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=\sqrt{1+\lambda_{ik}}\sin\left(\sqrt{\lambda_{ik}}a-\rho_{ik}\right)+\sqrt{\lambda_{ik}}E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{ik}b^{\alpha+\beta}), \tag{24}$$

где $\rho_{ik}=\arcsin\left(\sqrt{\lambda_{ik}}/\sqrt{1+\lambda_{ik}}\right)$ и $\rho_{ik}\to\frac{\pi}{2}$ при $k\to+\infty$. Отсюда видно, что выражение $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ обращается в ноль только в том случае, когда

$$\lambda_{ik}a=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{ik}b^{\alpha+\beta})}{\sqrt{1+\lambda_{ik}}}+\pi n+\rho_{ik}, n=1,2,....$$

Поскольку $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ является знаменателем дроби, то при достаточно больших k выражение $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ может стать достаточно малым, т. е. возникает проблема "малых знаменателей". Поэтому для обоснования существования решения данной задачи необходимо показать существование чисел a, b и ε таких, что при достаточно больших k выражение $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ отделено от нуля.

Лемма 3. Пусть b - любое положительное действительное число, а числа a и ε такие, что $\sqrt{1\pm\varepsilon}\cdot a$ - рациональное число. Тогда, при больших значениях kсуществует положительная постоянная $M_i, i=1,2$ такая, что справедлива оценка

$$|\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)|\geq M_ik>0. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть $i=1$ и $\sqrt{1+\varepsilon}\cdot a=p\in N$. Тогда из (21) при всех k и $b>0$ имеем

$$|\Delta_{1k}(a,b,\varepsilon)|\geq\sqrt{\lambda_{1k}}\left|\pm1-E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{1k}b^{\alpha+\beta})\right|\geq$$

$$\geq\sqrt{\lambda_{1k}}\left|1-E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{1k}b^{\alpha+\beta}\right|\geq\sqrt{\lambda_{1k}}\left(1-E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{1k}b^{\alpha+\beta})\right).$$

Из свойства вполне монотонности функции Килбаса-Сайго [20] следует, что существует натуральное число $k_0\in N$ такое, что при всех $k>k_0$ имеет место

$$1-E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}\left(-\lambda_{1k}b^{\alpha+\beta}\right)\geq K_1>0, \tag{26}$$

и значить $\Delta_{1k}(a,b,\varepsilon)\geq\sqrt{1+\varepsilon}\pi K_1k>0$.

Пусть теперь, $\sqrt{1+\varepsilon}\cdot a=\frac{p}{q}\in Q$, где $p,q\in N$, $(p,q)=1$. Разделим kp на q с остатком:

$$kp=sq+r,\ s,r\in N_0,\ 0\leq r\leq q-1.$$

Тогда из (24) получим

$$|\Delta_{1k}(a,b,\varepsilon)|=\left|\sqrt{1+\lambda_{1k}}(-1)^{s+1}\cos\left(\frac{\pi r}{q}+\varepsilon_{1k}\right)+\sqrt{\lambda_{1k}}E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{1k}b^{\alpha+\beta})\right|$$

где $\varepsilon_{1k} = \arcsin\left(1/\sqrt{1+\lambda_{1k}}\right) > 0$ и $\varepsilon_{1k} \to 0$ при $k \to +\infty$.

Если $r = 0$, то этот случай сводится к уже рассмотренному выше случаю $\sqrt{1+\varepsilon} \cdot a = p \in N$.

Пусть $r > 0$. Тогда $1 \le r \le q-1,\ q \ge 2$ и при больших k

$$0 < \frac{\pi}{q} + \varepsilon_{1k} \le \frac{\pi r}{q} + \varepsilon_{1k} \le \pi - \frac{\pi}{q} + \varepsilon_{1k} < \pi.$$

Отсюда следует, что если $q = 2l,\ l \in N$, то при $r = l$ получим, что $\frac{\pi r}{q} + \varepsilon_{1k} \to \frac{\pi}{2}$, при $k \to +\infty$, а если $q = 2l+1$, то $\frac{\pi r}{q} \ne \frac{\pi}{2}$ при любом r из $[1, q-1]$. Так как $\varepsilon_{1k} \to 0$ и $E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{1k} b^{\alpha+\beta}) \to 0$ при $k \to +\infty$, то существует постоянная $k_1 > 0$ такая, что при всех

$$\left|\cos\left(\frac{\pi r}{q} + \varepsilon_{1k}\right)\right| - E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{1k} b^{\alpha+\beta}) \ge \frac{1}{2}\left|\cos\frac{\pi r}{q}\right| - E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{1k} b^{\alpha+\beta}) \ge K_2,$$

где $0 < K_2 < \frac{1}{2}\left|\cos\frac{\pi r}{q}\right|$. Тогда с учетом этих оценок из (26) при $k > k_1$ получим

$$|\Delta_{1k}(a,b,\varepsilon)| \ge \sqrt{\lambda_{1k}}\left(\cos\left(\frac{\pi r}{q} + \varepsilon_{1k}\right) - E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{1k} b^{\alpha+\beta})\right) \ge$$

$$\ge \sqrt{\lambda_{1k}}\left(\frac{1}{2}\left|\cos\frac{\pi r}{q}\right| - E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{1k} b^{\alpha+\beta})\right) \ge \sqrt{1+\varepsilon}\pi K_2 k.$$

и при любом $b > 0$. Случай $i = 2$ доказывается аналогично. Лемма доказана. □

Замечание 1. Множество пар (a, ε) чисел a и ε удовлетворяющее одновременно условиям (25) не пусто. Например, если выбрать числа a и ε в виде $a = \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} \cdot r_3$ и $\varepsilon = \frac{r_1^2-r_2^2}{r_1^2+r_2^2}$, где $r_i \in Q, i = 1,2,3, r_1 \ne r_2$, то пара (a, ε) удовлетворяет условию (25) одновременно.

Отметим, что идея доказательство леммы 1 заимствована из работы [4].

2.2. Существование решение задачи А.

Переходим к доказательству существования решение задачи А. Из (22) и из свойства функции Килбас-Сайго [20] легко следует доказательство следующей леммы:

Лемма 4. Пусть выполнены условия (21) и (25). Тогда имеет место

$$|u_{1k}(t)| \le \frac{C_1}{k}|\varphi_{1k}|, |u_{2k}(t)| \le \frac{C_2}{k-0,5}|\varphi_{2k}|, t \in [-a, b],$$

$$\left|t^{-\beta}{}_C D_{0t}^\alpha u_{1k}(t)\right| \le D_1|\varphi_{1k}|, \left|t^{-\beta}{}_C D_{0t}^\alpha u_{2k}(t)\right| \le D_2|\varphi_{2k}|, t \in [0, b],$$

$$\left|\frac{d^s u_{1k}(t)}{dt^s}\right| \le L_s k^{s-1}|\varphi_{1k}|, \left|\frac{d^s u_{2k}(t)}{dt^s}\right| \le P_s (k-0,5)^{s-1}|\varphi_{2k}|, t \in [-a, 0]$$

где $C_s, D_s, L_s, P_s, s = 1,2$- положительные постоянные.

Так как система (12) полна и образует базис в $L_2(-1,1)$, то решение задачи А в Ω ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{1k}(t)\sin(k\pi x) + u_{2k}(t)\cos(k-0,5)\pi x)\right) \tag{27}$$

где $u_{1k}(t)$ и $u_{2k}(t)$ - неизвестные функции.

Подставляя функцию (27) в (2) и удовлетворяя условиям (3)-(5) относительно искомых функций получим задачу (14), (15), (18) и (19), решения которого имеет вид (22).

Таким образом, решения задачи можно представить в виде (27), где функции $u_{ik}(t)$,$i = 1,2$ определяются по формулам (22). Теперь, остатчся доказать правомерность всех этих действий. Для этого, формально из (27), заменяя x на $-x$, а также почленным дифференцированием составим ряды

$$u(-x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(u_{1k}(t)X_{1k}(-x) + u_{2k}(t)X_{2k}(-x)), \tag{28}$$

$$t^{-\beta}{}_C D_{0t}^\alpha u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-\beta}{}_C D_{0t}^\alpha u_{1k}^+(t)X_{1k}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} t^{-\beta}{}_C D_{0t}^\alpha u_{2k}^+(t)X_{2k}(x),\ t > 0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^n u(\pm x,t)}{\partial x^n}=\sum_{k=1}^{\infty}u_{1k}^{+}(t)\frac{d^n X_{1k}\left(\pm x\right)}{dx^n}+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k}^{+}(t)\frac{d^n X_{2k}\left(\pm x\right)}{dx^n},\ n=\overline{1,2},\ t>0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^2u_{1k}^{-}(t)}{dt^2}X_{1k}\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^2u_{2k}^{-}(t)}{dt^2}X_{2k}\left(x\right),\ t<0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial^n u(\pm x,t)}{\partial x^n}=\sum_{k=1}^{\infty}u_{1k}^{-}(t)\frac{d^n X_{1k}\left(\pm x\right)}{dx^n}+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k}^{-}(t)\frac{d^n X_{2k}\left(\pm x\right)}{dx^n},\ \ n=\overline{1,2},\ t<0. \tag{32}$$

Учитывая утверждения лемм 3 и 4 нетрудно видеть, что ряды (27)-(32) мажорируется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|\varphi_{1k}|+|\varphi_{2k}|), \tag{33}$$

и поэтому исследуем сходимость этого ряда. Для этого предполагаем, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(x)\in C^1[-1,1],\varphi(-1)=0,\varphi(1)=0. \tag{34}$$

Тогда ряд (33) оценивается сходящимся рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}|{\varphi'}_{1k}|+\frac{1}{k-0,5}|{\varphi'}_{2k}|\right)$$

где

$$\varphi_{1k}=\frac{1}{\pi k}{\varphi'}_{1k},{\varphi'}_{1k}=\int\limits_{-1}^{1}\varphi'(x)cosk\pi xdx,$$

$$\varphi_{2k}=\frac{1}{\pi(k-0,5)}{\varphi'}_{2k},{\varphi'}_{2k}=\int\limits_{-1}^{1}\varphi'(x)sin(k-0,5)\pi xdx.$$

Отсюда, в силу признака Вейерштрасса, получим абсолютную и равномерную сходимость рядов (27)-(28) в замкнутой области $\bar{\Omega}$, а рядов (29)-(32) соответственно в областях $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$.

Поэтому функция $u(x,t)$, определенная рядом (27), принадлежит классу (1), а также удовлетворяет условиям (3)-(5). Непосредственным вычислением показывается, что функция $u(x,t)$, определенная рядом (27) удовлетворяет и уравнению (2).

Пусть теперь $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=0$ при некоторых $a,\varepsilon,i=i_0$ и $k=k_1,...,k_s,\ 1\le k_1<k_1<...<k_s,s\in N$. Тогда для разрешимости системы (20) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\varphi_{i_0k}=\int\limits_{-1}^{1}\varphi(x)X_{i_0k}dx=0,k=k_1,...k_s. \tag{35}$$

В этом случае решение задачи определяется в виде суммы рядов

$$\begin{gathered}u(x,t)=\left[\sum_{k=1}^{k_1-1}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}+...+\sum_{k=k_s+1}^{\infty}+\right]\sum_{i=1}^{2}u_{ik}X_{ik}(x)+\\+\sum_{m}\sum_{i\neq i_0}u_{im}X_{im}(x)+\sum_{m}\sum_{i=i_0}C_{i_0m}V_{i_0m}\left(x,t\right)\end{gathered} \tag{36}$$

где $m=k_1,...k_s$, C_{i_0m}- произвольные постоянные, функции $V_{i_0m}\left(x,t\right)$ определяются из формулы (23).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение

Теорема 2. Пусть функция $\varphi(x)$удовлетворяет условиям(34). Тогда

1) задача A в области Ω однозначно разрешима только тогда, когда выполняются условия (21) и (25) и решение определяется рядом (27).

2) если для некоторых a,b,ε, $i=i_0$ и $k=k_1,...,k_s$ выполняется условие $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=0$, то задача A разрешимо только тогда, когда выполняются условия ортогональности (35). При этом решение определяется рядом (36).

Замечание 2. В случае $\beta=0,\alpha=1$ и $\varepsilon=0$ первая часть утверждения данной теоремы совпадают с утверждением теоремы 2 работы [4].

Устойчивость решение задачи А.

Теперь установим устойчивость решения задачи А по ее нелокальному условию (4). Пусть

$$||u(x,t)||_{C(\overline{\Omega})} = \max_{\overline{\Omega}} |u(x,t)|,$$

$$|u(x,t)||_{L_2(-1,1)} = \left(\int_{-1}^{1} |u(x,t)|^2 dx \right)^{1/2}, ||\varphi(x)||_{L_2(-1,1)} = \left(\int_{-1}^{1} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения задачи А имеют места оценки

$$||u(x,t)||_{C(\overline{\Omega})} \le C_4 ||\varphi'(x)||_{C[-1,1]}, \tag{37}$$

$$||u(x,t)||_{L_2(-1,1)} \le C_5 ||\varphi(x)||_{L_2(-1,1)}, \tag{38}$$

где C_4, C_5 - постоянная, не зависящая от $\varphi(x)$.

Доказательство. Пусть (x,t) произвольная точка из области $\bar{\Omega}$. Тогда из (26), учитывая представления

$$\varphi_{k1} = \int_{-1}^{1} \varphi(x) \sin k\pi x dx, \varphi_{k2} = \int_{-1}^{1} \varphi(x) \cos(k-0,5)\pi x dx,$$

на основании леммы 2 получим

$$|u(x,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} (|u_{1k}| + |u_{2k}|) \le C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} |\varphi_{1k}| + \frac{1}{k-0,5} |\varphi_{2k}| \right) \le$$
$$\le C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} |\varphi_{1k}^{(1)}| + \frac{1}{(k-0,5)^2} |\varphi_{2k}^{(1)}| \right),$$

где $_3 = \pi^{-2} \max\{C_1, C_2\}$. Далее, применяя неравенство Коши-Шварца и Бесселя, будем иметь

$$|u(x,t)| \le {}_3 \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{1k}^{(1)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-0,5)^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k}^{(1)}|^2 \right)^{1/2} \right) \le$$

$$\le {}_3 \|\varphi'(x)\|_{L(-1,1)} \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-0,5)^2} \right)^{1/2} \right) = {}_4 \|\varphi'(x)\|_{L(-1,1)},$$

которая и доказывает оценку (37).

Теперь получим оценку (38). Поскольку система (12) ортонормирована в $L_2(-1,1)$, то из (25) в силу леммы 2 имеем

$$\|u(x,t)\|^2_{L(-1,1)} \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_1^2 k^{-2} |\varphi_{1k}|^2 + C_2^2 (k-0,5)^{-2} |\varphi_{2k}|^2 \right).$$

Далее, получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L(-1,1)} \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_1^2 |\varphi_{1k}|^2 + C_2^2 |\varphi_{2k}|^2 \right) \le C_5^2 \, \|\varphi(x)\|^2_{L(-1,1)},$$

где $C_5^2 = \max\{C_1^2, C_2^2\}$. Отсюда вытекает справедливость второй оценки. Теорема доказана. □

Литература

1. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений, *УМН XIV* (3), 1959, 3–19.

2. Уфлянд Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях, *Инж.-физ. журн.* 7 (1), 1964. pp. 89–92

3. Sabitov K.B. "Initial boundary value problem for hyperbolic-parabolic equation,"*Russ. Math. (Izv. VUZ).* 59(6), 2015, 23–33.

4. Юнусова Г.Р. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. *Вестник СамГУ (Естественнонаучная серия).* 8(89), 2011, pp. 108-117.

5. Abdullaev O.Kh. Gellerstedt type problem with integral gluing condition for a mixed type equation with non-linear loaded term. *Lobachevskii Journal of Mathematics* 42, 2021, pp. 479–489.

6. Yuldashev T.K., Karimov E.T. Inverse Problem for a Mixed Type Integro-Differential Equation with Fractional Order Caputo Operators and Spectral Parameters. *Axioms*, 9, 2020, 121; doi:10.3390/axioms9040121

7. Nakhushev A. M. Problems with displacement for partial differential equations. Moscow: Nauka, 2006. 287 p.

8. Yuldashev T.K., Kadirkulov B.J. Boundary Value Problem for Weak Nonlinear Partial Differential Equations of Mixed Type with Fractional Hilfer Operator. *Axioms*, 9, 68; 2020, pp. 1-19.

9. Кадиркулов Б. Ж., Жалилов М. А. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка с оператором Капуто. Научний вестник ФерГУ. 1 2021, 19-24.

10. Al-Salti N., Kerbal S., Kirane M. Initial - boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena.* 14(3), 2019. pp. 1 –15

11. Turmetov B.Kh., Kadirkulov B.J. An inverse problem for a parabolic equation with involution. *AIP Conference Proceedings,* 2365, 070011, 2021; pp. 1-8.

12. Turmetov B.Kh., KadirkulovB.J. On a problem for nonlocal mixed-type fractional order equation with degeneration. *Chaos, Solitons and Fractals,* 146, 2021, pp. 1-5.

13. Turmetov B.Kh., Torebek B. T. On a class of fractional elliptic problems with an involution perturbation. *AIP Conference Proceedings.* 2016. –V. 1759, 020070-1-020070-6 ; doi: 10.1063/1.4959684.

14. Линьков А.В. Обоснование метода Фурье для краевых задач с инволютивным отклонением. *Вестник СамГУ.* 2(12), 1999. С. 60–66.

15. Kirane M., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. A nonlocal fractional Helmholtz equation. *Fractional Differential Calculus.* 7(2), 2017, 225–234. doi:10.7153/fdc-2017-07-08.

16. Torebek B.T., Tapdigoglu R. Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 40, 2017, pp. 6468–6479.

17. Kirane M., Sadybekov M. A., Sarsenbi A. A. On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data, *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* 42:6 2019, 2043–2052.

18. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. *North-Holland Mathematics Studies*, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam. 2006, 523 p.

19. Gorenflo, R., Kilbas, A.A., Mainardi, F., Rogosin, S.V. Mittag-Leffler Functions, *Related Topics and Applications.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2014.

20. Boudabsa L., Simon T., Vallois P. Fractional extreme distributions. Published 2019. *Mathematics, arXiv: Probability.*

Получено: 24/09/2021

Принято: 25/11/2021

Cite this article

Turmetov B. Kh., Kadirkulov B. J. On a Problem for a Nonlocal Equation of Mixed Type of Fractional Order with Degeneration. *Bull. Inst. Math.*, 2021, Vol.4, №5, pp. 127-136. [In Russian]