Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Казахстанский филиал

Библиотека Первого Президента Республики Казахстан – Елбасы

30 ЛЕТ НЕЗАВИСИМОСТИ КАЗАХСТАН

20 ЛЕТ КАЗАХСТАНСКИЙ ФИЛИАЛ МГУ

Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики

Материалы юбилейных конференций

О разрешимости задачи Дирихле для нелокального аналога бигармонического уравнения

И.Г. Салиханова [1], Б.Х. Турметов [2]

[1] *Международный казахско-турецкий университет имени Х.А. Ясави г. Туркестан, Казахстан*
indi.salikhanova@mail.ru

[2] *Международный казахско-турецкий университет имени Х.А. Ясави г. Туркестан, Казахстан*
turmetovbh@mail.ru

В данной работе для нелокального аналога бигармонического уравнения исследуется задача Дирихле. Нелокальный аналог бигармонического уравнения вводится с помощью линейных преобразований пространства R^2 в R^2. Доказывается теорема о существовании и единственности решения исследуемой задачи. Кроме того, получено интегральное представление решения рассматриваемой задачи и построен явный вид функции Грина. При построении явного вида функции Грина существенно используются функция Грина задачи Дирихле для классического бигармонического уравнения.

В работе [4] был введен нелокальный аналог оператора Лапласа и для соответствующего нелокального уравнения Пуассона были исследованы вопросы разрешимости основных краевых задач.

Настоящая работа является продолжением этих исследований для нелокального аналога эллиптических уравнений четвертого порядка.

Переходим к постановке задачи. Пусть Ω – единичный круг, а $\partial\Omega$ – единичная окружность. В пространстве R^2 введем следующие отображения

$$S_1x = (-x_1, x_2), S_2x = (x_1, -x_2), S_3x = (-x_1, -x_2).$$

Заметим, что если $x \in \Omega$, или $x \in \partial\Omega$, то имеют место включения $S_kx \in \Omega$, или $S_kx \in \partial\Omega, k = 1, 2, 3$.

Пусть $a_j, j = \overline{0, 3}$ – действительные числа. Рассмотрим в области Ω следующую задачу:

$$a_0\Delta^2u(x) + a_1\Delta^2u(S_1x) + a_2\Delta^2u(S_2x) + a_3\Delta^2u(S_3x) = f(x), x \in \Omega, \qquad (1)$$

$$u(x) = g_0(x), \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = g_1(x), x \in \Omega, \qquad (2)$$

где ν – вектор нормали к границе области Ω.

Решением задачи (1)-(2) назовём функцию $u(x) \in C^4(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую условиям (1) и (2) в классическом смысле.

Пусть $u(x)$ является решением задачи (1)-(2). Обозначим

$$w(x) = a_0u(x) + a_1u(S_1x) + a_2u(S_2x) + a_3u(S_3x).$$

Легко показать, что функция $w(x)$ удовлетворяет условиям следующей задачи Дирихле

$$\Delta^2 w(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(x) = l_a[g_0](x), \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = l_a[g_1](x), x \in \Omega, \tag{4}$$

где

$$l_a[g_j] = a_0g_j(x) + a_1g_j(S_1x) + a_2g_j(S_2x) + a_3g_j(S_3x), j = 0, 1.$$

Пусть $f(x) \in C^{\lambda}(\overline{\Omega}), 0 < \lambda < 1$. Если $g_0(x) \in C^{\lambda+4}(\partial\Omega), g_1(x) \in C^{\lambda+3}(\partial\Omega)$, то очевидно, что $l_a[g_0](x) \in C^{\lambda+4}(\partial\Omega)$, $l_a[g_1](x) \in C^{\lambda+3}(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи (3)-(4) существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda+4}(\overline{\Omega})$ (см., например, [1]).

Далее, из равенства $w(x) = l_a[u](x)$ следует

$$w(x) = a_0u(x) + a_1u(S_1x) + a_2u(S_2x) + a_3u(S_3x),$$

$$w(S_1x) = a_1u(x) + a_0u(S_1x) + a_3u(S_2x) + a_2u(S_3x),$$

$$w(S_2x) = a_2u(x) + a_3u(S_1x) + a_0u(S_2x) + a_1u(S_3x),$$

$$w(S_3x) = a_3u(x) + a_2u(S_1x) + a_1u(S_2x) + a_0u(S_3x).$$

Полученную систему алгебраических уравнений перепишем в матричной форме

$$W = AU, \tag{4}$$

где

$$W = \begin{pmatrix} w(x) \\ w(S_1x) \\ w(S_2x) \\ w(S_3x) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u(x) \\ u(S_1x) \\ u(S_2x) \\ u(S_3x) \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что собственными значениями матрицы A являются числа

$$\varepsilon_1 = a_0+a_1+a_2+a_3, \varepsilon_2 = a_0+a_1-a_2-a_3, \varepsilon_3 = a_0-a_1+a_2-a_3, \varepsilon_4 = a_0-a_1-a_2+a_3.$$

Далее, если выполняются условия $\varepsilon_j \neq 0, j = \overline{1,4}$, то $detA = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 \neq 0$, и тогда естественно существует обратный к A матрица $B = A^{-1}$. Можно показать, что матрица B имеет такую же структуру как матрица A, т.е.

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & b_2 \\ b_2 & b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Причем собственными значениями это матрицы являются числа $\mu_j = 1/\varepsilon_j, j = \overline{1,4}$. Далее, так как $detA \neq 0$, то решение уравнение (4) однозначно определяется в виде $U = BW$. Покажем, что если функция $w(x)$ является решением задачи (3)-(4), то функция

$$u(x) = b_0 w(x) + b_1 w(S_1 x) + b_2 w(S_2 x) + b_3 w(S_3 x) \tag{5}$$

будет решением задачи (1)-(2). Действительно, если $f(x) \in C^{\lambda}(\overline{\Omega}), 0 < \lambda < 1$, $g_0(x) \in C^{\lambda+4}(\partial\Omega), g_1(x) \in C^{\lambda+3}(\partial\Omega)$, то функция $w(x)$ как решение задачи (3)-(4) принадлежит классу $C^{\lambda}(\overline{\Omega})$, и поэтому функция $u(x)$ из равенства (5) также принадлежит классу $C^{\lambda}(\overline{\Omega})$. Тогда, для $x \in \Omega$, имеем

$$\Delta^2 U = B\Delta^2 W \equiv BF, \tag{6}$$

где $F = (f(x), f(S_1x), f(S_2x), f(S_3x))^T$.

Если $A_1 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, то умножая равенство (6) на вектор A_1 получаем

$$A_1\Delta^2 U = a_0\Delta^2 u(x) + a_1\Delta^2 u(S_1x) + a_2\Delta^2 u(S_2x) + a_3\Delta^2 u(S_3x) =$$

$$= A_1BF = (a_0, a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & b_2 \\ b_2 & b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ f(S_1x) \\ f(S_2x) \\ f(S_3x) \end{pmatrix} = f(x),$$

т.е. функция $u(x)$ из равенства (5) удовлетворяет уравнению (1). Проверим выполнение граничных условий (2). Для любых $x \in \partial\Omega$ имеем

$$u(x)|_{\partial\Omega} = b_0 w(x) + b_1 w(S_1x) + b_2 w(S_2x) + b_3 w(S_3x)|_{\partial\Omega} =$$

$$= b_0 l_a[g_0](x) + b_1 l_a[g_0](S_1x) + b_2 l_a[g_0](S_2x) + b_3 l_a[g_0](S_3x)|_{\partial\Omega} =$$

$$= (b_0, b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(x) \\ g_0(S_1x) \\ g_0(S_2x) \\ g_0(S_3x) \end{pmatrix} = g(x).$$

Следовательно, выполняется первое граничное условие $u(x)|_{\partial\Omega} = g_0(x)$. Второе условие проверяется аналогичным образом.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $\varepsilon_j \neq 0, j = \overline{1,4}$, $f(x) \in C^{\lambda}(\overline{\Omega})$, $g_0(x) \in C^{\lambda+4}(\partial\Omega), g_1(x) \in C^{\lambda+3}(\partial\Omega), 0 < \lambda < 1$. *Тогда решение задачи (1)-(2) существует, единственно, принадлежит классу* $C^{\lambda+4}(\overline{\Omega})$ *и представляется в виде (5), где функция* $w(x)$ *является решением задачи Дирихле (3)-(4).*

Далее, построим интегральное представления решения задачи (1)-(2) для случая когда $g_0(x) = g_1(x) = 0$ и приведем явный вид функции Грина задачи (1)-(2). Пусть $G_D(x, y)$ функция Грина задачи Дирихле для классического бигармонического уравнения. Явный вид функции $G_D(x, y)$ построены различными авторами [2, 3]. В частности, в работе [2] показано, что имеет следующий вид

$$G_D(x, y) = \frac{1}{8}|x-y|^2 \int_1^{h(x,y} (t^2-1)t^{-1}dt,$$

где

$$h(x, y) = \frac{1}{|x-y|} \left| x|y| - y/|y| \right|.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* $\varepsilon_j \neq 0, j = \overline{1,4}$, $f(x) \in C^{\lambda}(\overline{\Omega}), 0 < \lambda < 1$, $g_0(x) = 0, g_1(x) = 0$. *Тогда, решение задачи (1)-(2) представляется в виде*

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy \tag{7}$$

где функция Грина задачи (1)-(2) представляется в виде

$$G(x, y) = b_0 G_D(x, y) + b_1 G_D(S_1 x, y) + b_2 G_D(S_2 x, y) + b_3 G_D(S_3 x, y).$$

Доказательство. Используя алгоритм построения решения задачи (1)-(2) приведенный в теоремы 1 рассмотрим функцию

$$w(x) = a_0 u(x) + a_1 u(S_1 x) + a_2 u(S_2 x) + a_3 u(S_3 x).$$

Для этой функции получаем задачу Дирихле (3)-(4) с однородными краевыми условиями. В этом случае решение задачи (3)-(4) представляется в виде

$$w(x) = \int_{\Omega} G_D(x, y) f(y) dy. \tag{8}$$

Далее, как и в случае теоремы 1 функция $u(x)$ построенная по функции $w(x)$ формулой (5) будет решением задачи (1)-(2). Подставляя функции $w(x)$ из представления (8) в формулу (5) для функции $u(x)$ получаем представление (7). Теорема доказана. □

Данная работа была выполнена при поддержке гранта МОН РК № AP09259074.

Список литературы

[1] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., *Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы* // Москва: ИЛ. – 1962. – 206 с.

[2] Gazzola F., Grunau H.-Ch., Sweers G., *Polyharmonic boundary value problems* // Berlin: Springer. – 1991. – 423 p.

[3] Kal'menov T. Sh., Suragan D., *On a new method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation* // Differential Equations. – 2012. – V. 48, №3. – P. 441-445.

[4] Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B.Kh, *On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation* // Turkish journal of mathematics. – 2019. – V. 43, №3. – P. 1604-1625.