DEUTSCHE internationale Zeitschrift
für zeitgenössische Wissenschaft

№29
2022

DIZZW 2020
DEUTSCHE internationale Zeitschrift
für zeitgenössische Wissenschaft

DIZZW 2020
DEUTSCHE internationale Zeitschrift
für zeitgenössische Wissenschaft

ISSN (Print) 2701-8369
ISSN (Online) 2701-8377

Deutsche internationale Zeitschrift für zeitgenössische Wissenschaft

№29 2022

German International Journal of Modern Science

№29 2022

Deutsche internationale Zeitschrift für zeitgenössische Wissenschaft ist eine internationale Fachzeitschrift in deutscher, englischer und russischer Sprache.

Periodizität: 24 Ausgaben pro Jahr
Format - A4
Alle Artikel werden überprüft.
Freier Zugang zur elektronischen Version des Journals

German International Journal of Modern Science is an international, German/English/Russian/Ukrainian language, peer-reviewed journal.

Periodicity: 24 issues per year
Format - A4
All articles are reviewed.
Free access to the electronic version of journal.

- Edmund Holst (Salzburg) AT
- Michaela Meissner (Köln) DE
- Klara Amsel (Liège) BE
- Briana French (Cambridge) GB
- Joleen Parsons (Manchester) GB
- Dragomir Koev (Sofia) BG
- Stanislav Štěpánek (Praha) CZ
- Valeriya Kornilova (Kyiv) UA
- Dmitriy Aksenov (Lviv) UA
- Valentin Bragin (Moscow) RU
- Mirosław Bednarski (Warsaw) PL
- Daniela Villa (Florence) IT
- Mattia Molteni (Rome) IT
- Sylwia Krzemińska (Ljubljana) SI
- Käte Kraus (Vienna) AT
- Eleonora Lehmann (Berlin) DE
- Alexander Dressler (Marseille) FR
- Zdzisław Małecki (Warsaw) PL
- Adrián Borbély (Budapest) HU

Artmedia24

Anschrift: Industriestraße 8,74589 Satteldorf Deutschland.

E-mail: info@dizzw.com
WWW: www.dizzw.com

Chefredakeur: Reinhardt Roth

Druck: Einzelfirma Artmedia24, Industriestraße 8,74589 Satteldorf Deutschland

Artmedia24

Address: Industriestrasse 8,74589 Satteldorf Germany.

E-mail: info@dizzw.com
WWW: www.dizzw.com

Editor in chief: Reinhardt Roth

Printing: Artmedia24, Industriestrasse 8,74589 Satteldorf Germany.

Edition: № 29/2022 (March) – 29th

Passed in press in March 2022

Printed in March, 2022

Printing: Artmedia 24, Industriestrasse 8,

74589 Satteldorf, Germany.

CONTENT

BIOLOGICAL SCIENCES

CHEMICAL SCIENCES

EARTH SCIENCES

ECONOMIC SCIENCES

MATHEMATICAL SCIENCES

MEDICAL SCIENCES

PEDAGOGICAL SCIENCES

PHILOLOGICAL SCIENCES

PHYSICAL SCIENCES

TECHNICAL SCIENCES

MATHEMATICAL SCIENCES

ON THE STABILITY OF THE DIFFERENCE ANALOGUE OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED TYPE EQUATION

Bakanov G.B.,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Khoja Ahmed Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan
Meldebekova S.K.
PhD student
Khoja Ahmed Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Баканов Г.Б.,
доктор физико-математических наук, профессор
Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, Туркестан, Казахстан
Мелдебекова С.К.
докторант
Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, Туркестан, Казахстан

Abstract

In this paper, we consider a difference problem for a mixed-type equation, which reduces the problem of integral geometry for a family of curves satisfying certain regularity conditions. The study of difference analogues of integral geometry problems has specific difficulties associated with the fact that for finite-difference analogues of partial derivatives, the basic relations are performed with a certain shift in the discrete variable. In this regard, many relations obtained in a continuous formulation, when transitioning to a discrete analog, have a more complex and cumbersome form, which requires additional studies of the resulting terms with a shift. Another important feature of the integral geometry problem is the absence of a theorem for the existence of a solution in the general case. In this regard, it is assumed that the solution of the problem of integral geometry and its differential-difference analogue exists, i.e. the problem is conditionally correct. The stability assessment obtained in the work is of great practical importance in solving problems that are important in applied terms.

Аннотация

В данной работе рассмотрена разностная задача для уравнения смешанного типа, к которой сводится задача интегральной геометрии для семейства кривых, удовлетворяющих некоторым условиям регулярности. Исследование разностных аналогов задач интегральной геометрии имеет специфические трудности, связанные с тем обстоятельством, что для конечно-разностных аналогов частных производных основные соотношения выполняются с некоторым сдвигом по дискретной переменной. В связи с этим многие соотношения, получаемые в непрерывной постановке, при переходе к дискретному аналогу имеет более сложную и громоздкую форму, что требует дополнительных исследований возникающих слагаемых со сдвигом. Еще одной важной особенностью задачи интегральной геометрии является отсутствие теоремы существования решения в общем случае. В связи с этим предпологается, что решение задачи интегральной геометрии и ее дифференциально-разностного аналога существует, т.е. задача является условно корректной. Полученная в работе оценка устойчивости имеет большое практическое значение при решении важных в прикладном отношении задачах.

Keywords: ill-posed problem, boundary value problem, mixed-type equation, stability estimation, differential-difference problem, quadratic form.

Ключевые слова: некорректная задача, краевая задача, уравнение смешанного типа, оценка устойчивости, дифференциально-разностная задача, квадратичная форма.

Введение

Задачи интегральной геометрии состоят в нахождении функции или более сложной величины (дифференциальной формы, тензорного поля и т. п.), определенной на некотором многообразии, через ее интегралы по некоторому семейству подмногообразий, через ее интегралы по некоторому семейству подмногообразий меньшей размерности.

Некоторые обратные задачи для кинетичеких уравнений, широко используемых в физике и астрофизике, тесно связаны с задачами интегральной геометрии. Задачи интегральной геометрии относятся к некорректным задачам математической физики, основы которой были заложены в работах [1]-[3] и эти задачи связаны с многочисленными приложениями (задача компьютерной томографии, обратные задачи акустики и сейсморазведки).

Отметим, что необходимость исследования дифференциально-разностных и конечно-разностных аналогов задач интегральной геометрии впервые было высказано академиком М.М. Лаврентьевым и сформулировано им как новое перспективное направление. Поэтому, исследование дифференциально-разностных и конечно-разностных аналогов задач интегральной геометрии является актуальной проблемой.

Впервые М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым в работе [4] было показано, что ряд обратных задач для гиперболических уравнений сводятся к задачам интегральной геометрии. В дальнейшем В. Г. Романовым были получены теоремы единственности и оценки условной устойчивости решения задач интегральной геометрии для довольно общего семейства кривых на плоскости, инвариантного относительно группы вращения [5], а также для семейств кривых и гиперповерхностей в n-мерном пространстве, инвариантных относительно параллельных переносов этих объектов вдоль некоторой плоскости [6].

Весьма общий результат по единственности и оценкам устойчивости для специального семейства кривых был получен Р.Г. Мухометовым. Эти оценки устойчивости основаны на сведении задачи интегральной геометрии к эквивалентной ей краевой задаче для уравнения в частных производных смешанного типа [7].

Постановка задачи

Пусть D- плоская, ограниченная, односвязная область, имеющая гладкую границу Г:

$$x=\xi(z),\ \ y=\eta(z),\ \ z\in[0,l],\quad \xi(0)=\xi(l),\eta(0)=\eta(l) \tag{1}$$

где z – длина кривой Г. В $\overline{D}$ заданы гладкие кривые уравнениями

$$x=\varphi(x_0,y_0,\theta,s),\quad y=\psi(x_0,y_0,\theta,s) \tag{2}$$

где (x_0,y_0) – точка, из которой выходит кривая под углом θ, переменный параметр s есть длина дуги. Множество определения функций φ и ψ есть множество

$$T=\left\{(x_0,y_0,\theta,s)/(x_0,y_0)\in\overline{D},\ \ \theta\in[0,2\pi],\ \ s\in[0,\tilde{l}\,(x_0,y_0,\theta)]\right\},$$

где $\tilde{l}\,(x_0,y_0,\theta)$ – длина части кривой, выходящей из точки (x_0,y_0) под углом θ и лежащей между (x_0,y_0) и точкой пересечения кривой с границей.

Пусть множество кривых (2) будет таково, что его можно рассматривать как двупараметрическое семейство кривых $K(\gamma,z)$, удовлетворяющее следующим условиям[7]:

а) через любые две различные точки из $\overline{D}$ проходит единственная кривая $K(\gamma,z)$; каждая кривая семейства $K(\gamma,z)$ пересекает Г в точках $(\xi(z),\eta(z))$ и $(\xi(\gamma),\eta(\gamma))$, другие точки не лежат на Г; длины всех кривых равномерно ограничены;

б) $\varphi\in C^3(T),\ \psi\in C^3(T)$, причем все производные этих функций равномерно ограничены в Т;

в) $\dfrac{1}{s}\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(\theta,s)}\ge c_1>0$, где c_1 – постоянная,

г) $\varphi(x,y,0,s)=\varphi(x,y,2\pi,s),\quad \psi(x,y,0,s)=\psi(x,y,2\pi,s),$

аналогичные равенства справедливы также для производных от этих функций до третьего порядка включительно.

Пусть $U(x,y)\in C^2(\overline{D})$ и

$$V(\gamma,z)=\int\limits_{K(\gamma,z)}U(x,y)\rho(x,y,z)ds;\quad \gamma\in[0,l],\quad z\in[0,l] \tag{3}$$

Задача интегральной геометрии (3) заключается в отыскании функции $U(x,y)$ в области $\overline{D}$ по данным кривым $K(\gamma,z)$ и функции $V(\gamma,z)$.

Если семейство $K(\gamma,z)$ удовлетворяет условиям а)-г), то задача (3) эквивалентна следующей граничной задаче

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\cos\theta}{\rho}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\sin\theta}{\rho}\right)=0,\qquad (x,y,z)\in\Omega_1 \tag{4}$$

$$W(\xi(\gamma),\eta(\gamma),z)=V(\gamma,z), \qquad V(z,z)=0 \qquad \gamma,z\in[0,l] \tag{5}$$

где $\rho(x,y,z)$ - некоторая известная функция, $\Omega_1=\Omega\setminus\{(\xi(z),\eta(z),z):z\in[0,l]\}$, $\Omega=\overline{D}\times[0,l]$,

$K(x,y,z)$ - часть кривой из семейства $K(\gamma,z)$, соединяющая точки $(x,y)\in\overline{D}$ и $(\xi(z),\eta(z))$,

$$W(x,y,z)=\int\limits_{K(x,y,z)}U(x,y,z)\rho(x,y,z)ds$$

$\theta(x,y,z)$ - угол между касательной к $K(x,y,z)$ в точке (x,y) и осью x, переменный параметр s - длина кривой.

Функции $W(x,y,z)$ и $\theta(x,y,z)$ обладают следующими дифференциальными свойствами [7]:

Лемма 1. Функция $W(x,y,z)\in C(\Omega)$ и имеет непрерывные производные до второго порядка включительно на множестве Ω_1.

Лемма 2. Производные W_x, W_y, W_z ограничены в Ω_1, а W_{xz}, W_{yz}, W_{xy} в окрестности любой точки вида $(\xi(z),\eta(z),z)$ могут иметь особенность типа $\left[(x-\xi(z))^2+(y-\eta(z))^2\right]^{-\frac{1}{2}}$.

Лемма 3. Функция $\theta(x,y,z)$ дифференцируема на множестве Ω_1 и производная θ_z в окрестности любой точки вида $(\xi(z),\eta(z),z)$ имеет особенность типа $\left[(x-\xi(z))^2+(y-\eta(z))^2\right]^{-\frac{1}{2}}$.

Предположим, что требования к семейству кривых $K(\gamma,z)$ и плоскости D, необходимые для приведения задачи (3) к задаче (4), (5) выполнены. Предположим также, что любая прямая, параллельная оси абсцисс или ординат, может пересекать границу области D не более чем в двух точках.

Пусть

$$a_1=\inf_{(x,y)\in D}\{x\},\ \ b_1=\sup_{(x,y)\in D}\{x\},$$

$$a_2=\inf_{(x,y)\in D}\{y\},\ b_2=\sup_{(x,y)\in D}\{y\},$$

$$h_j=(b_j-a_j)/N_j,\ j=1,2;\mathrm{h}_3=l/N_3$$

где $N_j,\ j=1,2,3$ - натуральные числа.

Пусть ε удовлетворяет условию

$$0<\varepsilon<\min\{(b_1-a_1)/3,(b_2-a_2)/3\},$$

$$D^\varepsilon=\left\{(x,y)\in D:\min_{(\alpha,\beta)\in\tilde{A}}\rho((x,y),(\alpha,\beta))>\varepsilon\right\}$$

$$R_h=\{(x_i,y_j),\ x_i=a_1+ih_1,y_j=a_2+jh_2,\ i=0,1,\dots,N_1;\ j=0,1,\dots,N_2\}.$$

Окрестностью $Ш(ih_1,jh_2)$ точки (a_1+ih_1,a_2+jh_2) будем называть множество, состоящее из самой точки (a_1+ih_1,a_2+jh_2) и четырех точек вида $(a_1+(i\pm1)h_1,a_2+(j\pm1)h_2)$.

D_h^ε – множество всех точек (a_1+ih_1,a_2+jh_2) лежащих в $D^\varepsilon\cap R_h$ вместе со своей окрестностью $Ш(ih_1,jh_2)$.

Γ_h^ε – множество всех точек $(a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in D_h^\varepsilon$, таких, что пересечение $Ш(ih_1,jh_2)$ с множеством $(D^\varepsilon\cap R_h)/D_h^\varepsilon$ непусто. Тогда,

$$\Delta_h^\varepsilon=\bigcup_{\Gamma_h^\varepsilon}Ш(ih_1,ih_2), \qquad D_h=R_h\cap D.$$

В дальнейшем предполагаем, что коэффициенты и решение задачи (4)-(5) обладают следующими свойствами:

$$W(x,y,z)\in C^3(\Omega^\varepsilon),\ \theta(x,y,z)\in C^2(\Omega^\varepsilon), \quad \Omega^\varepsilon=\overline{D}^\varepsilon\times[0,l],$$

$$\rho(x,y,z)\in C^2(\Omega),\rho(x,y,z)>C^*>0,\frac{\partial\theta}{\partial z}>\left|\frac{\partial\rho}{\partial z}\cdot\frac{1}{\rho}\right|.$$

Поставим следующую разностную задачу (зависящую от параметра z): найти функции $\Phi_{i,j}(z),\ U_{i,j}$, которые удовлетворяют уравнению

$$\Phi_{\overset{0}{x}}\frac{A}{C}+\Phi_{\overset{0}{y}}\frac{B}{C}=U_{i,j},\quad (a_1+ih_1,a_2+ih_2)\in D_h, z\in[0,l] \tag{6}$$

и граничному условию

$$\varPhi_{i,j}(z)=F_{i,j}(z),\ (a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in\Delta_h^{\varepsilon},\ z\in[0,l] \tag{7}$$

здесь

$$\varPhi_{i,j}(z)=\varPhi(x_i,y_j,z)=\varPhi(a_1+ih_1,a_2+jh_2,z),$$

$$U_{i,j}=U(x_i,y_j)=U(a_1+ih_1,a_2+jh_2), i=\overline{0,N_1},\ j=\overline{0,N_2};$$

$$\varPhi_{\overset{0}{x}}=(\varPhi_{i+1,j}-\varPhi_{i-1,j})/2h_1,\ \varPhi_{\overset{0}{y}}=(\varPhi_{i,j+1}-\varPhi_{i,j-1})/2h_2,$$

$$A=\cos\theta_{i,j}(z),\quad B=\sin\theta_{i,j}(z),\quad \theta_{i,j}(z)=\theta(a_1+ih_1,a_2+jh_2,z),\quad C=\rho(a_1+ih_1,a_2+jh_2,z).$$

Отметим, что в этой постановке информация о решении задается не только на границе Г, но и в некоторой ее ε - окрестности, что связано с наличием особенностей типа $\left[(x-\xi(z))^2+(y-\eta(z))^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ у производных $\theta_z, W_{xz}, W_{yz}, W_{xy}$ в окрестности любой точки вида $(\xi(z),\eta(z),z)$ [7].

Оценка устойчивости решения дифференциально-разностной задачи

Теорема. *Предположим, что решение задачи (6)-(7) существует. Пусть при всех* $(x_i,y_j)\in D_h$ *функция*

$$\Phi_{i,j}(z)\in C^1[0,l],\quad \Phi_{i,j}(0)=\Phi_{i,j}(l),$$

$$F_{i,j}(z)\in C^1[0,l],\quad F_{i,j}(0)=F_{i,j}(l),$$

а функции $C=\rho(a_1+ih_1,a_2+jh_2,z).\ \theta_{i,j}(z)$ *удовлетворяют условиям*

$$\theta_{i,j}(0)=\theta_{i,j}(l),\ \frac{\partial\theta}{\partial z}>\left|\frac{\partial\rho}{\partial z}\cdot\frac{1}{\rho}\right|.$$

Тогда при всех N_j>9, j = 1,2 имеет место оценка

$$\sum_{D_h^{\varepsilon}}U_{i,j}^2h_1h_2\le c_3\int_0^l\sum_{\Delta_h^{\varepsilon}}\left[F_{\overset{0}{x}}^2h_1+F_{\overset{0}{y}}^2h_2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2(h_1+h_2)\right]dz, \tag{8}$$

где c_3 – некоторая положительная постоянная, зависящая от функции $\rho(x,y,z)$ *и семейства кривых* $K(\gamma,z)$.

В оценке предполагается, что при уменьшении h_1и h_2 параметр ε также может уменьшаться, поскольку c_3 не зависит от ε (параметр ε выбрали исключительно для устранения особенностей, присутствующей в исходной непрерывной задаче). Поэтому, чем мельче будет сетка, тем уже может быть область, в которой сосредоточена особенность.

Доказательство. Пользуясь методикой, предложенной в работе [8] умножим обе части (6) на $2C(-B\Phi_{\overset{0}{x}}+A\Phi_{\overset{0}{y}})\frac{\partial}{\partial z}$, запишем получившееся равенство в виде

$$J_1+J_2=0. \tag{9}$$

Здесь

$$J_1=J_2=C(-B\Phi_{\overset{0}{x}}+A\Phi_{\overset{0}{y}})\frac{\partial}{\partial z}(\Phi_{\overset{0}{x}}\frac{A}{C}+\Phi_{\overset{0}{y}}\frac{B}{C}).$$

Используя формулу дифференцирования произведения функций преобразуем J_1:

$$
\begin{aligned}
J_1 = {} & \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(-B\Phi_{\overset{0}{x}} + A\Phi_{\overset{0}{y}}\right)\left(A\Phi_{\overset{0}{x}} + B\Phi_{\overset{0}{y}}\right)\right] + \\
& + AB\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}\Phi_{\overset{0}{x}}^{\,2} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}A^2\Phi_{\overset{0}{x}}\Phi_{\overset{0}{y}} + \\
& + \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}B^2\Phi_{\overset{0}{x}}\Phi_{\overset{0}{y}} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}AB\Phi_{\overset{0}{y}}^{\,2} + \frac{\partial \theta}{\partial z}A^2\Phi_{\overset{0}{x}}^{\,2} + \\
& + AB\Phi_{\overset{0}{x}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{x}}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial z}AB\Phi_{\overset{0}{x}}\Phi_{\overset{0}{y}} - A^2\Phi_{\overset{0}{x}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{y}}\right) + \\
& + \frac{\partial \theta}{\partial z}AB\Phi_{\overset{0}{x}}\Phi_{\overset{0}{y}} + B^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{x}}\right)\Phi_{\overset{0}{y}} + \\
& + \frac{\partial \theta}{\partial z}B^2\Phi_{\overset{0}{y}}^{\,2} - AB\Phi_{\overset{0}{y}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{y}}\right)
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

Раскрывая скобки в J_2 имеем

$$
\begin{aligned}
J_2 = {} & -AB\Phi_{\overset{0}{x}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{x}}\right) - \frac{\partial \theta}{\partial z}AB\Phi_{\overset{0}{x}}\Phi_{\overset{0}{y}} + \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}B^2\Phi_{\overset{0}{x}}\Phi_{\overset{0}{y}} - \\
& - B^2\Phi_{\overset{0}{x}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{y}}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial z}B^2\Phi_{\overset{0}{x}} + \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}AB\Phi_{\overset{0}{x}}^{\,2} + \\
& + A^2\Phi_{\overset{0}{y}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{x}}\right) - \frac{\partial \theta}{\partial z}AB\Phi_{\overset{0}{x}}\Phi_{\overset{0}{y}} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}A^2\Phi_{\overset{0}{x}}\Phi_{\overset{0}{y}} + \\
& + AB\Phi_{\overset{0}{y}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{y}}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial z}A^2\Phi_{\overset{0}{y}}^{\,2} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}AB\Phi_{\overset{0}{y}}^{\,2}
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

Подставляя эти выражения J_1, J_2 в (9) и обозначая $D = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2AB$, $E = \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = A^2 - B^2$, из (10), (11) получаем

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}D\right)\Phi_{\overset{0}{x}}^{\,2} - 2\Phi_{\overset{0}{x}}\Phi_{\overset{0}{y}}\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}E + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}D\right)\Phi_{\overset{0}{y}}^{\,2} + \\
& + \Phi_{\overset{0}{y}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{x}}\right) - \Phi_{\overset{0}{x}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{y}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(-B\Phi_{\overset{0}{x}} + A\Phi_{\overset{0}{y}}\right)\left(A\Phi_{\overset{0}{x}} + B\Phi_{\overset{0}{y}}\right)\right] = 0
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

Нетрудно заметить, что

$$
\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{x}}\right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{\overset{0}{x}}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{y}}\right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{\overset{0}{y}},
$$

$$
(uv)_{\overset{0}{x}} = u_{\overset{0}{x}}v + uv_{\overset{0}{x}} + \frac{h_1^2}{2}\left[u_x v_x\right]_{\bar{x}},
$$

где

$$
f_x = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_1}, \quad f_{\bar{x}} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_1}.
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
& \Phi_{\overset{0}{y}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{\overset{0}{x}} - \Phi_{\overset{0}{x}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{\overset{0}{y}} = \left[\Phi_{\overset{0}{y}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right]_{\overset{0}{x}} - \left[\Phi_{\overset{0}{x}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right]_{\overset{0}{y}} - \\
& - \frac{h_1^2}{2}\left[\Phi_{\overset{0}{yx}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_x\right]_{\bar{x}} + \frac{h_1^2}{2}\left[\Phi_{\overset{0}{xy}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_y\right]_{\bar{y}},
\end{aligned}
$$

из (12) получаем

$$J_3+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(-B\Phi_{\underset{x}{0}}+A\Phi_{\underset{y}{0}}\right)\left(A\Phi_{\underset{x}{0}}+B\Phi_{\underset{y}{0}}\right)\right]+\left[\Phi_{\underset{y}{0}}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]_{\underset{x}{0}}-\left[\Phi_{\underset{x}{0}}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]_{\underset{y}{0}}-$$

$$-\frac{h_1^2}{2}\left[\Phi_{\underset{yx}{0}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_x\right]_{\bar{x}}+\frac{h_2^2}{2}\left[\Phi_{\underset{xy}{0}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_y\right]_{\bar{y}}=0 \tag{13}$$

в котором

$$J_3=\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}D\right)\Phi_{\underset{x}{0}}^{\;2}-2\Phi_{\underset{x}{0}}\Phi_{\underset{y}{0}}\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}E+\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}D\right)\Phi_{\underset{y}{0}}^{\;2}$$

Рассматривая выражение J_3 как квадратичную форму относительно $\Phi_{\underset{x}{0}}$ и $\Phi_{\underset{y}{0}}$, нетрудно убедится в том, что определитель этой квадратичной формы равен

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}\right)^2$$

Тогда из условия

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}>\left|\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}\right|$$

вытекает положительная определенность квадратичной формы J_3.

Используя неравенство

$$ax^2+2bxy+cy^2\geq\frac{2\left(ac-b^2\right)}{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}(x^2+y^2),$$

которое справедливо для положительно-определенной квадратичной формы $ax^2+2bxy+cy^2$, имеем

$$J_3\geq\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}-\left|\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}\right|\right)\left(\Phi_{\underset{x}{0}}^{\;2}+\Phi_{\underset{y}{0}}^{\;2}\right) \tag{14}$$

Учитывая (6) и $A=\cos\theta,\ \ B=\sin\theta$ находим

$$\Phi_{\underset{x}{0}}^{\;2}+\Phi_{\underset{y}{0}}^{\;2}=U_{i,j}^2C^2+\left(B\Phi_{\underset{x}{0}}-A\Phi_{\underset{y}{0}}\right)^2 \tag{15}$$

Учитывая, что

$$C=\rho(x,y,z),\qquad \rho(x,y,z)>C^*>0,\qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}-\left|\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}\right|\right)>0, \tag{16}$$

нетрудно убедится, что существует такое $c_2>0$ и имеет место неравенство

$$\int_0^l\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}-\left|\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}\right|\right)C^2dz\geq\frac{1}{c_2^2}>0 \tag{17}$$

Далее, суммируя по i, j с использованием условия (7) и интегрируя по z с учетом формул (14), (15), (16), а также периодичности функций $\Phi_{i,\,j}(z),\theta_{i,j}(z)$ по z и неравенства $|\,ab\,|\leq(a^2+b^2)/2$, из равенства (13) после несложных преобразований получаем оценку

$$\sum_{D_h^\varepsilon}U_{i,j}^2h_1h_2\leq c_3\int_0^l\sum_{\Delta_h^\varepsilon}\left[F_{\underset{x}{0}}^2h_1+F_{\underset{y}{0}}^2h_2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2(h_1+h_2)\right]dz,$$

в которой c_3 зависит от функций $\rho(x,y,z)$ и семейства кривых $K(\gamma,z)$. Итак, теорема доказана.

На основе полученной оценки устойчивости разностного аналога граничной задачи для уравнения смешанного типа оказывается возможным осуществить ее численное решение с помощью разностных методов. Соотсветствующая оценка имеет большое практическое значение при решении важных в прикладном отношении задачах.

References

1. Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Y. Solutions of ill-posed problems. VH Winston & Sons. 1977.
2. Ivanov, V. K., Vasin, V. V., & Tanana, V. P. Theory of linear ill-posed problems and its applications. De Gruyter, 2013.

3. Lavrent_ev, M. M., Romanov, V. G., & Shishatski_, S. P. Ill-posed problems of mathematical physics and analysis (Vol. 64). American Mathematical Soc. 1986.

4. Lavrent'ev M. M. and Romanov V. G., "On three linearized inverse problems for hyperbolic equations", Dokl. AS USSR, 1966. -T. 171. - 6. - C. 1279-1281.

5. Romanov V. G. On some classes of singularity of solutions of problems of integral geometry //Mathematical notes. - 1974. - T. 16. - №. 4. - C. 657-668.

6. Romanov V. G. On recovery of a function through integrals over a family of curves / / Siberian Mathematical Journal. - 1967. - T. 8. - №. 5. - C. 1206-1208.

7. Mukhometov R. G. About problem of integral geometry // Mathematical problems of geophysics. G. About a problem of integral geometry //Mathematical Problems of Geophysics. Novosibirsk. - 1975. - VOL. 6, PP. 212-252.

8. Kabanikhin S. И. , Bakanov G. B.. On the stability of the finite-difference analog of the two-dimensional integral geometry problem," Dokl. AS USSR, 1987, vol. -T. 292. - 1. - C. 25-29.