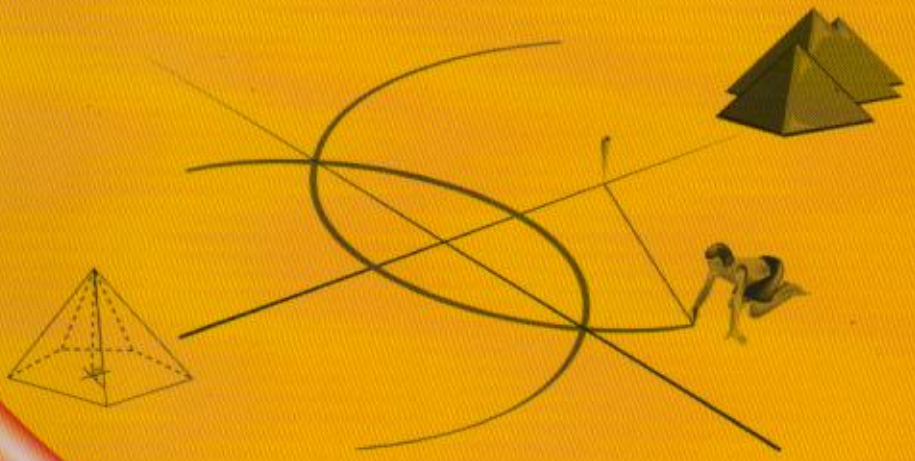
Compendio Académico de Matemática

GEOMETRÍA



LUMBRERAS
Editores

ÍNDICE

	Página
CAPÍTULO 1	
ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO Y SISTEMA DE MEDICIÓN ANGULAR	7
CAPÍTULO II	
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO	22
CAPÍTULO III	
ÁNGULOS VERTICALES	39
CAPÍTULO IV	
INTRODUCCIÓN A LAS DESIGUALDADES	46
CAPÍTULO V	
CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA	70
CAPÍTULO VI	
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS	94
CAPÍTULO VII	
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS	127
CAPÍTULO VIII	
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	139

Página

CAPÍTULO IX
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS 157

CAPÍTULO X
ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS 175

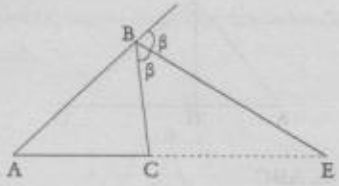
CAPÍTULO XI
LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS 186

CAPÍTULO XII
DERIVADAS 198

CAPÍTULO XIII
NÚMEROS COMPLEJOS APLICADOS A LA TRIGONOMETRÍA 215

CAPÍTULO XIV
TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES 231

Bisectriz exterior

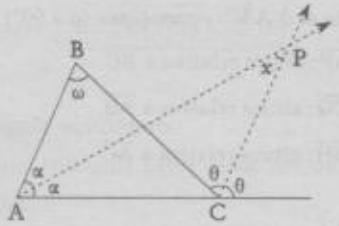


En el Δ ABC

$\overline{BE}$: bisectriz exterior relativa a $\overline{AC}$

PROPIEDAD DE ÁNGULOS DETERMINADOS POR BISECTRICES

Ángulo determinado por las bisectrices de un ángulo interior y un ángulo exterior



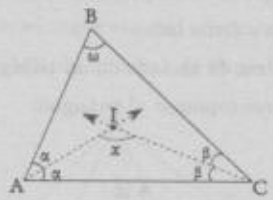
En el ΔABC:

$\overleftrightarrow{AP}$: bisectriz del ángulo interior.

$\overleftrightarrow{CP}$: bisectriz del ángulo exterior

Entonces: $\boxed{x = \frac{\omega}{2}}$

Ángulo determinado por las bisectrices de dos ángulos interiores

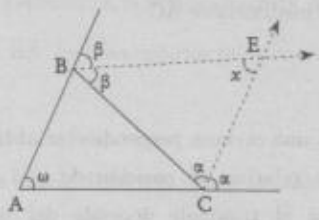


En el ΔABC

$\left.\begin{matrix}\overleftrightarrow{AI}\\ \overleftrightarrow{CI}\end{matrix}\right\}$ Bisectrices de los ángulos exteriores.

Entonces: $\boxed{x = 90° + \frac{\omega}{2}}$

Ángulo determinado por las bisectrices de dos ángulos exteriores



En el Δ ABC

$\left.\begin{matrix}\overleftrightarrow{BE}\\ \overleftrightarrow{CE}\end{matrix}\right\}$ Bisectrices de los ángulos externos

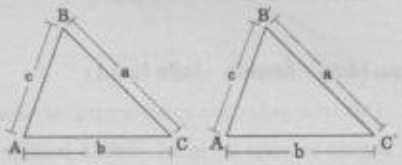
$\boxed{x = 90° - \frac{\omega}{2}}$

Nota

En todo triángulo isósceles la bisectriz del ángulo exterior cuyo vértice es opuesto a la base siempre es paralela a dicha base.

Caso: Lado – Lado – Lado (L.L.L)

Dos triángulos son congruentes, si sus lados son respectivamente de igual longitud.



Si: $AB = A'B'$

$BC = B'C'$

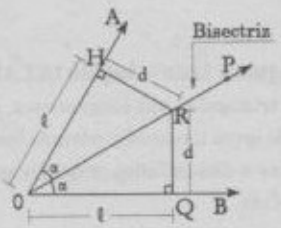
$AC = A'C'$

$\rightarrow$ $\boxed{\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'}$

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

Teorema de la bisectriz

Todo punto que pertenece a la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de dicho ángulo.



Sea: $\overleftrightarrow{OP}$ bisectriz del $\angle AOB$.

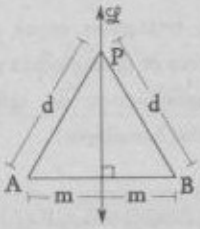
Si: $R \in \overleftrightarrow{OP}$, $\overline{RH} \perp \overleftrightarrow{OA}$ y $\overline{RQ} \perp \overleftrightarrow{OB}$

$\rightarrow$ $\boxed{RH = RQ}$

Además: $\boxed{OH = OQ}$

Teorema de la mediatriz

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.



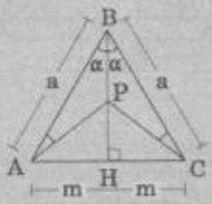
Sea: $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ mediatriz del segmento AB.

Si: $P \in \overleftrightarrow{\mathcal{L}}$

$\rightarrow$ $\boxed{PA = PB}$

Nota

En todo triángulo isósceles, la altura relativa a la base; es mediana, bisectriz relativa a la base y además es parte de la mediatriz de dicha base.



En la figura ΔABC: isósceles.

Si $\overline{BH}$: altura relativa a la base $\overline{AC}$.

Entonces: $\overline{BH}$: mediana

$\overline{BH}$: bisectriz

$\overleftrightarrow{BH}$: mediatriz

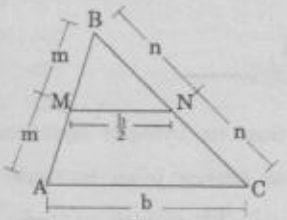
También: $\boxed{PA = PC \text{ y } m\angle BAP = m\angle BCP}$

Base media de un triángulo

Definición. Es el segmento que tiene por extremos, los puntos medios de dos lados de un triángulo; al tercer lado se le denomina base.

Teorema de la base media

En todo triángulo, una base media es paralela a la base y su longitud es la mitad de la longitud de dicha base.



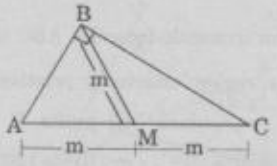
En la figura si: AM=MB y BN=NC

$\overline{MN}$: base media

Entonces: $\boxed{\overline{MN} \parallel \overline{AC}}$ y $\boxed{MN = \frac{AC}{2}}$

Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa

En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de dicha hipotenusa.



En la figura

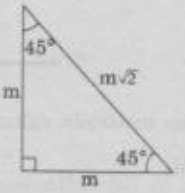
$\overline{BM}$: mediana relativa a la hipotenusa a $\overline{AC}$ del $\triangle ABC$.

Entonces: $\boxed{BM = \frac{AC}{2}}$

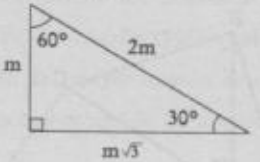
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

Se denominan así ciertos triángulos rectángulos en los cuales conociendo las medidas de sus ángulos internos (denominados ángulos notables) se tendrá presente una determinada relación entre las longitudes de sus lados y viceversa. Entre los mas importantes tenemos:

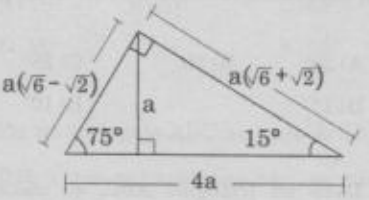
Notable de 45°



Notable de 30° y 60°

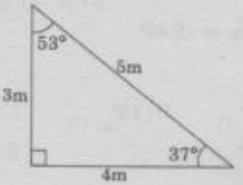


Notable de 15° y 75°



TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES APROXIMADOS

Notable de 37° y 53°



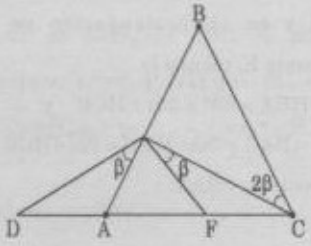
11. El lado de un hexágono regular convexo ABCDEF mide 2 u. Calcule todos los valores enteros que puede tomar $\overline{DF}$.

A) 1 u , 2 u y 3 u
B) 3 u, 4 u y 5 u
C) 5 u , 6 u y 7 u
D) 2 u , 3 u y 4 u
E) 4 u , 5 u y 6 u

12. En un triángulo ABC, se traza la altura BH en la cual se ubica el punto P, de modo que: AB = PC, m∢PAC = m∢BCA. Calcule m∢APH.

A) 37° B) 45° C) 60°
D) 22°30′ E) 30°

13. Según el gráfico AB=BC, DE=3 y EC=6, calcule el máximo valor entero de $\overline{FC}$.

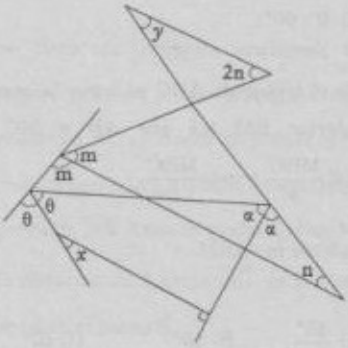


A) 3 B) 5 C) 3,5
D) 4 E) 3,8

14. En el triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{CM}$ (H en $\overline{AC}$ y M en $\overline{AB}$) si AB = 20 cm, calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{MC}$ y $\overline{HC}$.

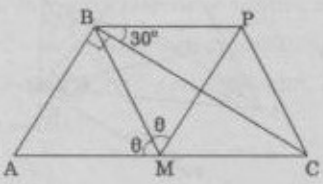
A) 7 cm B) 3 cm C) 10 cm
D) 4 cm E) 5 cm

15. Según el gráfico, calcule $\frac{x}{y}$



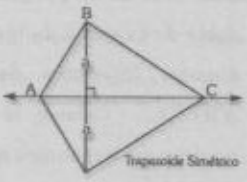
A) 1/2 B) 2/3 C) 1/5
D) 1/3 E) 1/4

16. En la figura, se cumple m∢BPM=2(m∢BCM), BP=PM y BM=4, calcule AC.



A) 5 B) 7 C) 6
D) 12 E) 8

Cuadrilátero



CAPÍTULO IV

Objetivos

Al finalizar el presente capítulo, el lector estará en la capacidad de:

- *Definir el cuadrilátero y clasificar a los cuadriláteros convexos.*
- *Conocer y aplicar las diversas propiedades de cada cuadrilátero.*

Introducción

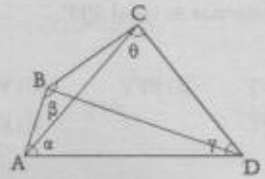
Desde la antigüedad el hombre hizo demarcaciones de terrenos, dándoles ciertas formas geométricas entre la que destaca la forma rectangular por la facilidad en la que consistía realizarlas y facilidad de distribución y medida. Además esta forma geométrica se usó en las construcciones con el objetivo de aprovechar la estabilidad que ofrecen. Por ejemplo "la fortaleza antisísmica de Ollantaytambo" cuyas paredes están hechas de piedra cuya forma es de trapecio isósceles.

Con este análisis histórico podemos percibir que el estudio de los cuadriláteros nos ayudarán a entender por qué muchos objetos que vemos en nuestro entorno (paredes, pizarra, cuadernos, etc.) son de forma cuadrangular.

Cuadrilátero

DEFINICIÓN

Es aquel polígono de cuatro lados. Puede ser convexo o no convexo.

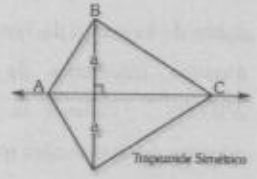


En la figura, ⏢ ABCD: convexo

- Lados opuestos: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$
- Ángulos opuestos: ∢BAD y ∢BCD, ∢ABC y ∢ADC.
- Diagonales: $\overline{AC}$ Y $\overline{BD}$
- Suma de medidas de ángulos interiores.

$$\boxed{\alpha + \beta + \theta + \gamma = 360^\circ}$$

Cuadrilátero



CAPÍTULO IV

Objetivos

Al finalizar el presente capítulo, el lector estará en la capacidad de:

- *Definir el cuadrilátero y clasificar a los cuadriláteros convexos.*
- *Conocer y aplicar las diversas propiedades de cada cuadrilátero.*

Introducción

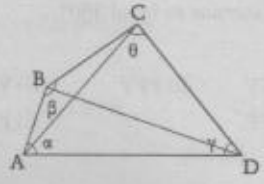
Desde la antigüedad el hombre hizo demarcaciones de terrenos, dándoles ciertas formas geométricas entre la que destaca la forma rectangular por la facilidad en la que consistía realizarlas y facilidad de distribución y medida. Además esta forma geométrica se usó en las construcciones con el objetivo de aprovechar la estabilidad que ofrecen. Por ejemplo "la fortaleza antisísmica de Ollantaytambo" cuyas paredes están hechas de piedra cuya forma es de trapecio isósceles.

Con este análisis histórico podemos percibir que el estudio de los cuadriláteros nos ayudarán a entender por qué muchos objetos que vemos en nuestro entorno (paredes, pizarra, cuadernos, etc.) son de forma cuadrangular.

Cuadrilátero

DEFINICIÓN

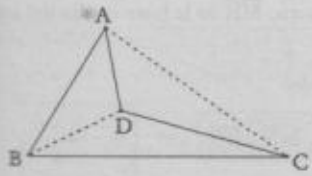
Es aquel polígono de cuatro lados. Puede ser convexo o no convexo.



En la figura, ⌓ ABCD: convexo

- Lados opuestos: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$
- Ángulos opuestos: ∢BAD y ∢BCD, ∢ABC y ∢ADC.
- Diagonales: $\overline{AC}$ Y $\overline{BD}$
- Suma de medidas de ángulos interiores.

$$\boxed{\alpha + \beta + \theta + \gamma = 360^\circ}$$



En la figura, ⧋ABCD: no convexo o cóncavo.

- Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

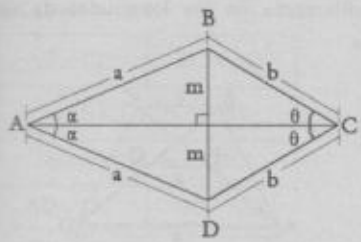
CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS CONVEXOS

Los cuadriláteros convexos se clasifican según el paralelismo de sus lados opuestos, en:

Trapezoide

Es aquel cuadrilátero convexo que no presenta lados opuestos paralelos.

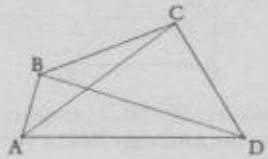
Un trapezoide puede ser simétrico (trapezoide donde una de las diagonales es parte de la mediatriz de la otra diagonal) o asimétrico (trapezoide que no cumple la condición del trapezoide simétrico).



En la figura, ⧋ABCD: trapezoide simétrico.

Entonces: $\overline{AC}$ es parte de la mediatriz de $\overline{BD}$.

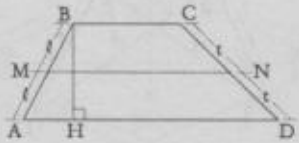
También, se cumple que $\overleftrightarrow{AC}$ es eje de simetría del trapezoide (recomendación, revisar tema de simetría).



En la figura, ⧋ABCD: trapezoide asimétrico.

Trapecio

Es aquel cuadrilátero convexo que sólo tiene un par de lados opuestos paralelos.



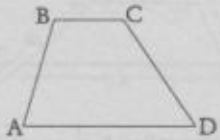
En la figura, si : $\overline{BC} // \overline{AD}$, $\overline{AB} // \overline{CD}$ entonces ⏢ ABCD es un trapecio.

- Bases: $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$.
- Laterales: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
- Altura : $\overline{BH}$.
- Base media : $\overline{MN}$.

Clasificación de trapecios

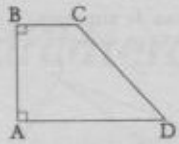
Los trapecios se clasifican de acuerdo a la longitud de sus lados laterales en:

Trapecio escaleno. Es aquel trapecio cuyos lados laterales tienen diferente longitud.



En la figura, si: $\overline{BC} // \overline{AD}$ y $AB \neq CD$

$\Rightarrow$ ⏢ABCD : trapecio escaleno

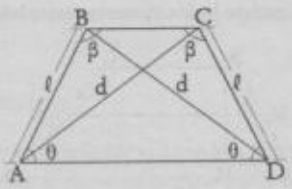


En la figura $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle BAD = 90°$

$\Rightarrow$ ⏢ABCD : trapecio rectángulo.

Recto en A y B. También es un trapecio escaleno.

Trapecio isósceles. Es aquel trapecio cuyos lados laterales son de igual longitud.



En la figura, si : $\overline{BC} // \overline{AD}$ y AB=CD

$\Rightarrow$ ⏢ABCD : trapecio isósceles

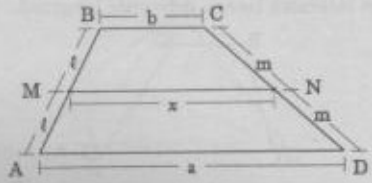
Propiedades

$\boxed{m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle CDA}$ y $\boxed{AC = BD}$

Propiedades en trapecios:

Teorema 1

En todo trapecio, la base media es paralela a sus bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de sus bases.

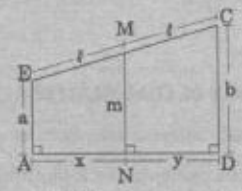


En la figura, $\overline{MN}$ es la base media del trapecio ABCD.

Se cumple:

$$\boxed{\overline{MN} // \overline{BC}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a+b}{2}}$$

Nota



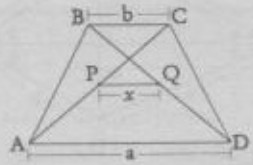
En la figura, ⏢ABCD: trapecio rectángulo.

Si: M es punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{MN} \perp \overline{AD}$.

Se cumple: $\boxed{x = y} \Rightarrow \boxed{m = \frac{a+b}{2}}$

Teorema 2

En todo trapecio el segmento que une los puntos medios de sus diagonales es paralelo a sus bases y su longitud es igual a la semidiferencia de las longitudes de dichas bases.



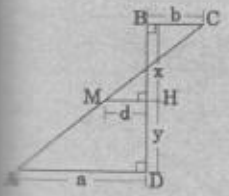
En la figura $\overline{BC} // \overline{AD}$, P y Q son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente.

Se cumple

$$\boxed{\overline{PQ} // \overline{BC}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a-b}{2}}$$

Nota

En la figura, M es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{MH} \perp \overline{BD}$

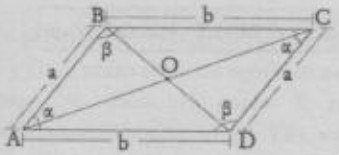


Se cumple:

$$\boxed{x = y} \Rightarrow \boxed{d = \frac{a-b}{2}}$$

Paralelogramo

Es aquel cuadrilátero convexo que tiene sus dos pares de lados opuestos paralelos.



En la figura, si: $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{BC} // \overline{AD}$

→ ▱ABCD : paralelogramo.

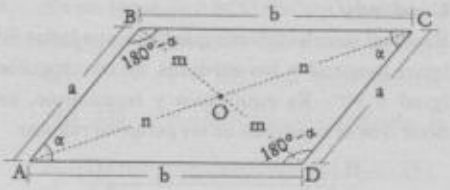
Propiedades:

AB = CD	BC = AD
m∢BAD = m∢BCD	
m∢ABC = m∢ADC	
AO = OC	BO = OD

Clasificación de paralelogramos

Romboide

Es aquel paralelogramo que tiene los lados consecutivos de diferente longitud y sus ángulos interiores tienen medidas distintas de 90°. No es equilátero ni equiángulo.

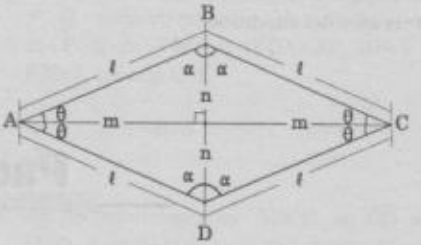


En la figura, ▱ABCD : romboide.

Rombo

Es aquel paralelogramo que tiene sus lados de igual longitud y sus ángulos interiores tienen medidas distintas de 90°.

Es equilátero y no equiángulo.

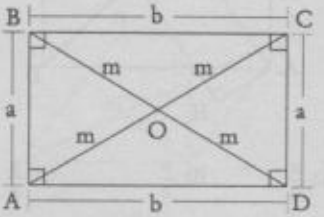


En la figura, ▱ABCD: rombo

Rectángulo

Es aquel paralelogramo que tiene sus lados consecutivos de diferente longitud y las medidas de sus ángulos son iguales a 90°.

Es equiángulo, pero no equilátero.

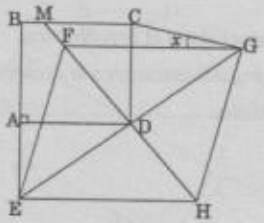


En la figura, ▭ABCD : rectángulo

20. En un trapecio rectángulo ABCD recto en A y B, AB es igual al doble de la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales; en $\overline{CD}$ se ubica el punto medio M tal que BM=AC.
Calcule la m∢ACD.

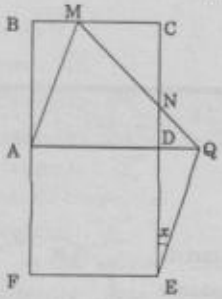
A) 150° B) 106° C) $\frac{127°}{2}$
D) 120° E) $\frac{143°}{2}$

21. Según el gráfico ABCD es un cuadrado y EFGH es un rombo, tal que $\overline{BC}//\overline{FG}$ y ED =4(MF), calcule x.



A) 12° B) 14° C) 6°
D) 16° E) 8°

22. Según el gráfico se tienen los cuadrados ABCD y ADEF, AM=MN=QE, calcule x.

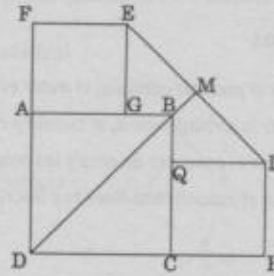


A) 18°30' B) 18° C) 15°
D) 10° E) 22°30'

23. En un trapecio ABCD ($\overline{BC}//\overline{AD}$), sea M el punto medio de $\overline{CD}$ en $\overline{AM}$ se ubica el punto N tal que ABCN es un trapezoide simétrico, si la m∢BAM=m∢ADC y CD=12, AD=18, calcule la base media del trapecio ABCD.

A) 12 B) 18 C) 16
D) 6 E) 10

24. Según el gráfico, se tienen los cuadrados ABCD, AGEF y CHIQ ; CH+AF = m y AD = n; calcule BM.

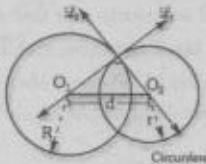


A) $(m-n)\sqrt{2}$
B) $(m+n)\frac{\sqrt{2}}{2}$
C) m − n
D) $\left(\frac{m-n}{2}\right)\sqrt{2}$
E) m + n

25. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se construyen exteriormente los cuadrados ABPQ; BCMN y ACDE, si AB+BC =a, calcule la distancia del centro del cuadrado ACDE a $\overline{QM}$.

A) $\frac{a}{2}$ B) $a\sqrt{2}$ C) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
D) a E) 2a

Circunferencia



CAPÍTULO V

Objetivos

Al finalizar el presente capítulo, el lector estará en la capacidad de:

- *Definir la circunferencia, el círculo y conocer las diversas líneas asociadas a la circunferencia.*
- *Conocer el concepto de arco y las propiedades de los arcos y los ángulos asociados a la circunferencia.*
- *Definir el cuadrilátero inscrito e inscriptible y conocer sus propiedades.*

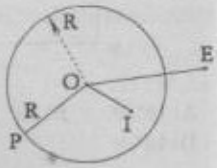
Introducción

El hombre en a su interacción con la naturaleza, descubrió la rueda; por ejemplo, los egipcios apoyados en que sus terrenos eran llanos, desplazaban las rocas para sus construcciones usando troncos de árboles mediante la rodadura. La rueda en la actualidad sabemos que es un objeto muy importante para el transporte terrestre. De ahí la importancia del estudio de la circunferencia cuyas propiedades también servirán para estudiar otras figuras, tales como los polígonos regulares.

Circunferencia

DEFINICIÓN

Es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto de dicho plano denominado centro. A la distancia constante de estos puntos al centro se denomina radio de la circunferencia.

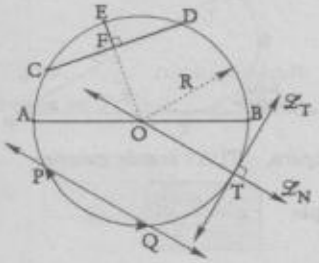


En la figura, se muestra una circunferencia de centro O y radio R.

Una circunferencia determina en su plano correspondiente dos conjuntos de puntos, denominados interior y exterior a la circunferencia.

- Si: IO < R ⇒ I es un punto interior a la circunferencia.
- Si: EO > R ⇒ E es un punto exterior a la circunferencia.
- Si: OP=R ⇒ P es un punto de la circunferencia.

LÍNEAS ASOCIADAS A LA CIRCUNFERENCIA



En la figura, se tiene la circunferencia de centro O y radio R.

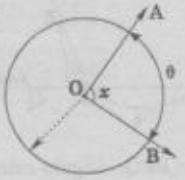
- Cuerda : $\overline{CD}$
- Diámetro : $\overline{AB}$
- Flecha o sagita : $\overline{EF}$
- Recta secante : $\overleftrightarrow{PQ}$
- Recta tangente : $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_T}$
  (T: punto de tangencia)
- Recta normal : $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_N}$
- Arco : es una porción cualquiera de la circunferencia determinada por dos puntos de la misma, denominados extremos del arco: en la figura, por ejemplo: el arco PQ : $\overset{\frown}{PQ}$

Nota

- El círculo, es la porción de plano que comprende la circunferencia y su interior.
  El perímetro del círculo es igual a la longitud de la circunferencia, entonces se cumple:
  $$\boxed{L_O = 2\pi R}$$
  LO: longitud de la circunferencia.
  R: radio de la circunferencia.
- La medida angular de una circunferencia es igual a 360°.

ÁNGULOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

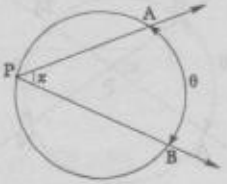
Ángulo central



En la figura, ∢AOB : ángulo central

se cumple: $\boxed{x = \theta}$

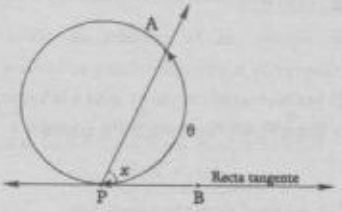
Ángulo inscrito



En la figura, ∢APB : ángulo inscrito

se cumple : $\boxed{x = \dfrac{\theta}{2}}$

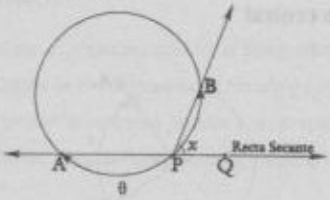
Ángulo semi inscrito



En la figura, ∢APB: ángulo semi inscrito

se cumple: $x = \frac{\theta}{2}$

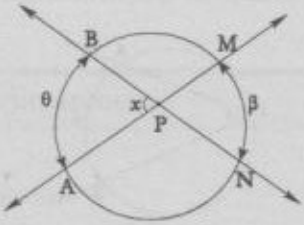
Ángulo exinscrito



En la figura, ∢BPQ: ángulo exinscrito

se cumple: $x = \frac{\theta}{2}$

Ángulo interior

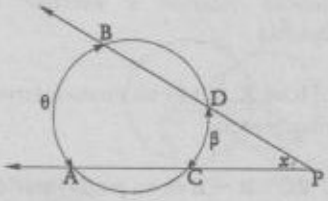


En la figura, ∢APB: ángulo interior

se cumple : $x = \frac{\theta + \beta}{2}$

Ángulo exterior

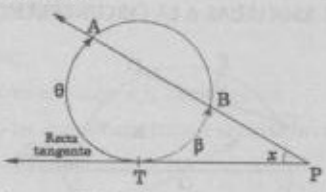
Primer caso



En la figura, ∢APB : ángulo exterior

se cumple : $x = \frac{\theta - \beta}{2}$

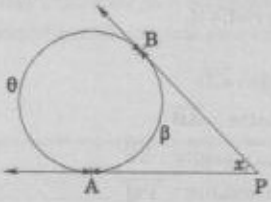
Segundo caso



En la figura, ∢TPA : ángulo exterior

se cumple : $x = \frac{\theta - \beta}{2}$

Tercer caso



En la figura, ∢APB : ángulo exterior

se cumple : $x = \frac{\theta - \beta}{2}$

además : $x + \beta = 180°$

(sólo en el tercer caso)

PROPIEDADES FUNDAMENTALES EN TODA CIRCUNFERENCIA

Teorema 1

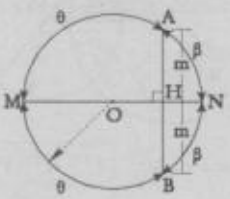
La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado en el punto de tangencia.

En la figura, $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_T}$: recta tangente a la circunferencia en T.

se cumple : $\boxed{\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}_T}}$

Teorema 2

Todo diámetro perpendicular a una cuerda biseca a dicha cuerda y a los arcos que subtiende.



En la figura, $\overline{MN}$: diámetro, si $\overline{MN} \perp \overline{AB}$

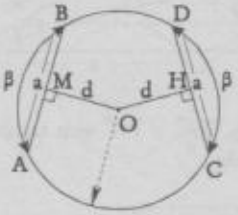
se cumple : $\boxed{AH = HB}$

además :

$$\boxed{m\,\widehat{AN} = m\,\widehat{NB} \text{ y } m\,\widehat{AM} = m\,\widehat{MB}}$$

Teorema 3

En una misma circunferencia o circunferencias congruentes; si dos arcos son de igual medida sus cuerdas correspondientes son de igual longitud; además dichas cuerdas equidistan del centro.



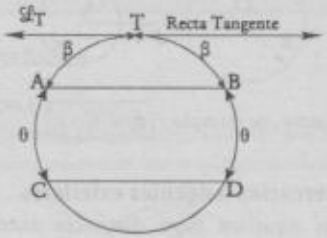
En la figura, si: $m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$

se cumple : $\boxed{AB = CD}$

además : $\boxed{OM = OH}$

Teorema 4

En una circunferencia los arcos comprendidos entre dos cuerdas paralelas son de igual medida.



En la figura, si : $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

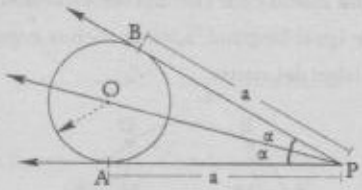
se cumple : $\boxed{m\widehat{AC} = m\widehat{BD}}$

También, si: $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_T} \,//\, \overline{AB}$

se cumple : $\boxed{m\widehat{AT} = m\widehat{TB}}$

Teorema 5

Los segmentos tangentes a una circunferencia trazados desde un punto exterior, son de igual longitud.



En la figura, $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ son tangentes a la circunferencia.

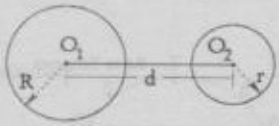
Se cumple: $\boxed{PA = PB}$

además : $\boxed{\overrightarrow{PO} \text{ bisectriz del } \sphericalangle APB}$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS COPLANARES

Circunferencias exteriores

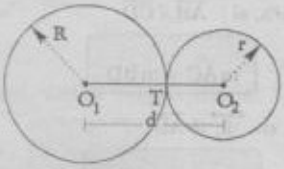
Son aquellas cuya distancia entre los centros es mayor que la suma de los radios.



En la figura, se cumple : $\boxed{d > R + r}$

Circunferencias tangentes exteriores

Son aquellas cuya distancia entre los centros es igual a la suma de los radios.

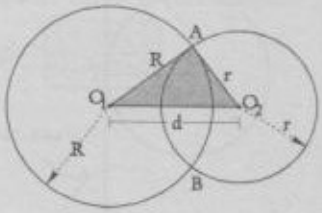


En la figura, se cumple: $\boxed{d = R + r}$

T: punto de tangencia entre las circunferencias.

Circunferencias secantes

Son aquellas cuya distancia entre los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.



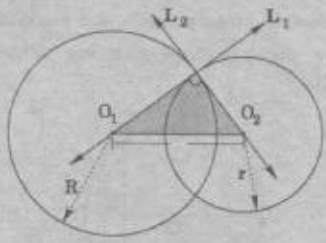
En la figura, se cumple :

$$\boxed{R - r < d < R + r}$$

$\overline{AB}$: cuerda común a las dos circunferencias.

Nota

Circunferencias ortogonales



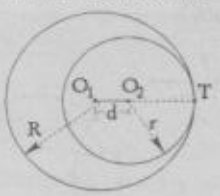
En la figura, se cumple : $\boxed{d^2 = R^2 + r^2}$

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$: recta tangente a la circunferencia de centro O_2

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$: recta tangente a la circunferencia de centro O_1

Circunferencias tangentes interiores

Son aquellas cuya distancia entre los centros es igual a la diferencia de los radios.

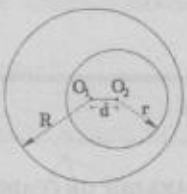


En la figura, se cumple : $\boxed{d = R - r}$

T: punto de tangencia entre las circunferencias.

Circunferencias interiores

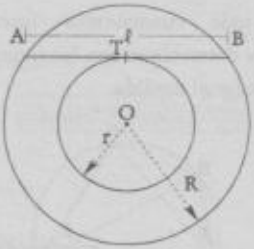
Son aquellas cuya distancia entre los centros es menor que la diferencia de los radios.



En la figura, se cumple : $\boxed{d < R - r}$

Circunferencias concéntricas

Son aquellas cuya distancia entre los centros es cero; es decir tienen el mismo centro.



En la figura, se cumple:

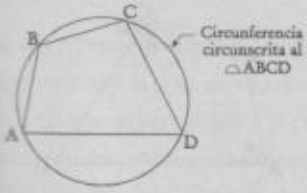
$$\boxed{\ell = 2\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$\overline{AB}$: cuerda de la circunferencia de radio R tangente a la circunferencia de radio r.

Cuadrilátero Inscrito en una Circunferencia

DEFINICIÓN

Es aquel cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a una misma circunferencia.



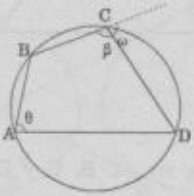
En la figura, A, B, C y D: son puntos de la circunferencia; entonces:

⌓ABCD: inscrito en la circunferencia

PROPIEDADES

Teorema 1

En todo cuadrilátero inscrito sus ángulos interiores opuestos son suplementarios.



En la figura, ⌓ABCD: inscrito

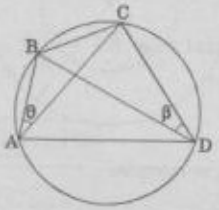
se cumple : $\boxed{\theta + \beta = 180°}$

Además en el gráfico, si: ω es la medida del ángulo exterior de vértice C.
se cumple :

$$\boxed{\theta = \omega}$$

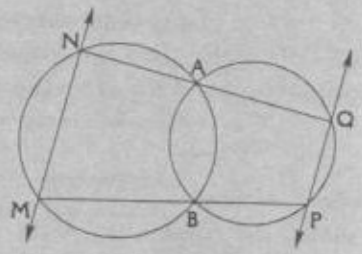
Teorema 2

En todo cuadrilátero inscrito; sus diagonales determinan con los lados opuestos ángulos de igual medida.



En la figura, ⌓ABCD: inscrito
se cumple : $\boxed{\theta = \beta}$

Nota



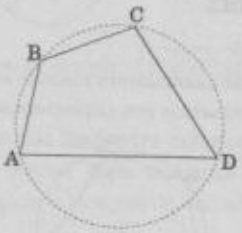
En la figura, se tienen dos circunferencias secantes en A y B.

Se cumple : $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$

Cuadrilátero Inscriptible en una Circunferencia

DEFINICIÓN

Es aquel cuadrilátero convexo que puede inscribirse en una circunferencia; es decir, que sus vértices pueden ser ubicados en una misma circunferencia.



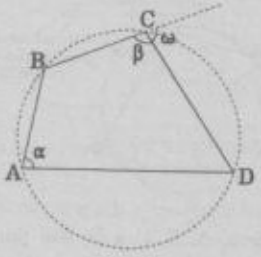
En la figura, si: A, B, C y D pueden ser ubicados en una circunferencia, entonces:

$$\boxed{\text{⌓ABCD: inscriptible}}$$

CONDICIÓN PARA QUE UN CUADRILÁTERO SEA INSCRIPTIBLE

Primer caso

Todo cuadrilátero convexo cuyos ángulos interiores opuestos son suplementarios, es inscriptible.



En la figura, si: $\alpha + \beta = 180°$

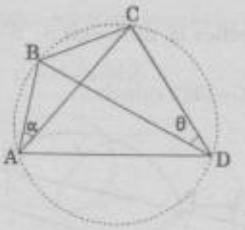
Entonces : $\boxed{\text{ABCD: inscriptible}}$

también, si : $\alpha = \omega$

entonces : $\boxed{\text{ABCD: inscriptible}}$

Segundo caso

Todo cuadrilátero convexo cuyas diagonales determinan con dos lados opuestos ángulos de igual medida, es inscriptible.

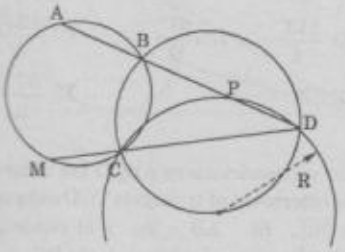


En la figura, si: $\alpha = \theta$

se cumple : $\boxed{\text{ABCD: inscriptible}}$

PROBLEMAS

1. Según la figura $m\widehat{CBD}=200°$ y CP=R, calcule $m\widehat{MAB}$.



A) 216° B) 215° C) 220°
D) 210° E) 210°

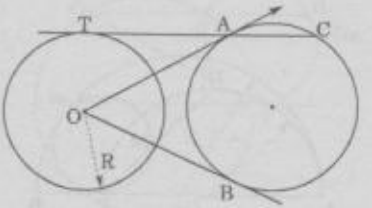
2. En una circunferencia de diámetro AB se ubica el punto E y luego se traza $\overline{EH} \perp \overline{AB}$, tal que AH=2 y HB = 8 ; luego se ubica en dicha semicircunferencia el punto F, tal que EF= 5. Calcule la medida del arco FB.

A) 67° B) 68° C) 72°
D) 70° E) 69°

3. En el lado AD de un cuadrilátero ABCD se ubican los puntos M, N y T ($M \in \overline{AN}$ y $T \in \overline{ND}$), tal que $\overline{BM}$ y $\overline{CT}$ son perpendiculares a $\overline{AD}$.
Si $m\sphericalangle NBC = m\sphericalangle NDC$, $m\sphericalangle NCB = m\sphericalangle BAD$ y AD = 8 cm, calcule TM.

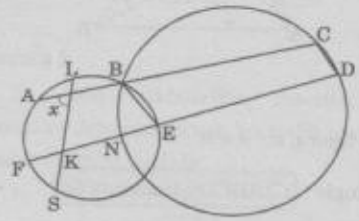
A) 5 cm B) 3,5 cm C) 4,5 cm
D) 3 cm E) 4 cm

4. En el gráfico AC=R, calcule la $m\widehat{AB}$ siendo A, T y B puntos de tangencia.



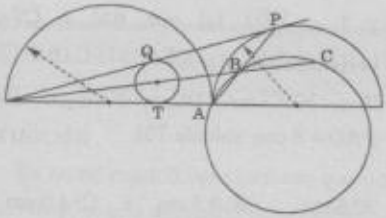
A)135° B) 132° C) 143°
D) 127° E) 130°

5. Del gráfico la $m\widehat{AL}=m\widehat{FS}$, $\overline{BE}//\overline{CD}$ y la $m\widehat{NBC}=138°$, calcule x.



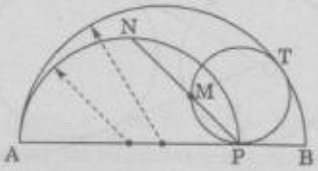
A) 69° B) 42° C) 38°
D) 52° E) 50°

6. En la figura, P, Q, T y A son puntos de tangencia, calcule $m\widehat{ABC}$.



A) 85° B) 75° C) 90°
D) 80° E) 60°

7. Según el gráfico, NM=MP, $m\widehat{AN}=m\widehat{NP}$, T y P son puntos de tangencia, calcule la $m\widehat{TB}$.

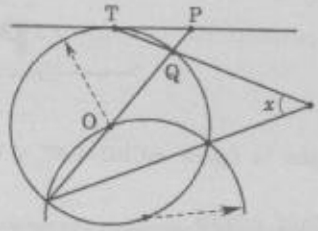


A) 30° B) 36° C) 23°
D) 15° E) 37°

8. Se tienen dos circunferencias congruentes y secantes en B y M; por B se traza la recta secante a las circunferencias en los puntos A y C, luego en la circunferencia que contiene el punto A se traza la cuerda BQ que interseca a la otra circunferencia en P; si AQ = 7 cm, calcule PC.

A) 5,5 cm B) 7 cm C) 6 cm
D) 5 cm E) 6,5 cm

9. Según el gráfico 2(OQ)=3(PQ) y T es punto de tangencia. Calcule x



A) $\frac{113°}{4}$ B) $\frac{67°}{2}$ C) $\frac{123°}{2}$
D) 37° E) $\frac{57°}{2}$

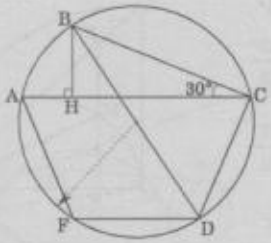
10. En un cuadrilátero ABCD las diagonales se intersecta al triángulo TCD es tangente a $\overline{BC}$. Si AB = 9μ y el cuadrilátero ABCD es inscriptible, calcule BC.

A) 6 μ B) 6,5 μ C) 7,5 μ
D) 9 μ E) 8 μ

11. Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las rectas tangentes PA y PB (A y B puntos de tangencia) tal que m∢APB = 40°; en el mayor arco AB se ubica un punto R, sienddo M y N los puntos medios de los menores arcos AR y RB respectivamente. Calcule la medida del ángulo determinado por los segmentos AM y BN

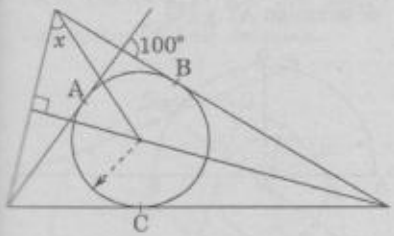
A) 16° B) 20° C) 15°
D) 18° E) 19°

En la figura mostrada $\overline{AC}//\overline{FD}$ y AH=2, calcule la la distancia del punto D a la recta AC.



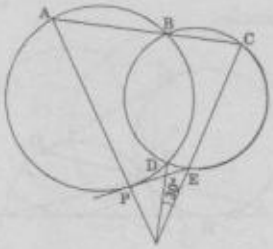
A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $\sqrt{6}$

Según el gráfico , calcule x si A, B y C son puntos de tangencia.



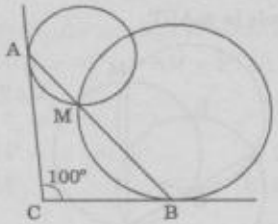
A) 60° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 40°

Según el gráfico, $m\widehat{AP}=140°$ y P es punto de tangencia, calcule $m\widehat{DEC}$.



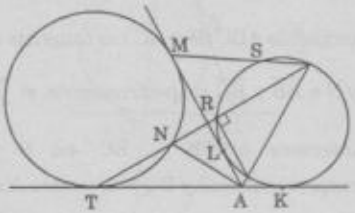
A) 155° B) 160° C) 150°
D) 170° E) 165°

15. Del gráfico A y B son puntos de tangencia, calcule $m\widehat{AM}+m\widehat{MB}$.



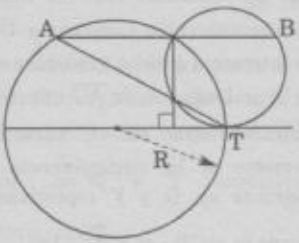
A) 100° B) 250° C) 170°
D) 160° E) 150°

16. Del gráfico, $m\widehat{RS}=80°$, M, K, L y T son puntos de tangencia, calcule m∢MAN.



A) 45° B) 40° C) 37°
D) 53° E) 50°

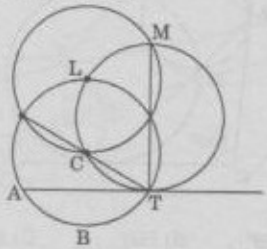
17. Según el gráfico T es punto de tangencia, si R=2, calcule AB.



A) 4 B) 5 C) 3
D) 2 E) 6

18. En el gráfico T es punto de tangencia y $m\widehat{CLM} = 2(m\widehat{CT}) = 120°$.

Calcule la $m\widehat{ABT}$.



A) 180° B) 150° C) 160°
D) 120° E) 135°

19. En una semicircunferencia de diámetro AC, la circunferencia inscrita en el triángulo ABC ($B \in \widehat{AC}$) es tangente en M y N a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, si $\overleftrightarrow{MN}$ interseca a $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$ en P y Q respectivamente y BQ = 6, cuánto dista Q de $\overleftrightarrow{PB}$.

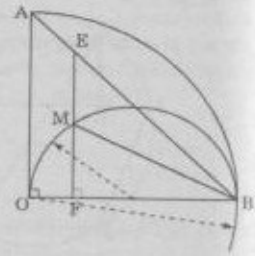
A) $3\sqrt{2}$ B) 3 C) 5
D) 4 E) $4\sqrt{2}$

20. Dado un cuadrante AOB de centro O y una circunferencia tangente a $\overline{OB}$ en B que intersecta a dicho cuadrante en C, tal que la prolongación de $\overline{AC}$ intersecta a la circunferencia en E. Además $\overline{OE}$ intersecta a la circunferencia y al cuadrante en G y F repectivamente. Calcule la $m\widehat{GB}$, si $m\widehat{BF} = 18°$.

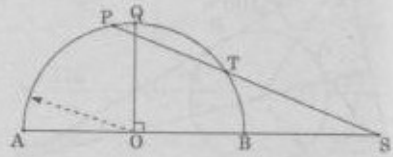
A) 53° B) 54° C) 60°
D) 65° E) 75°

21. Del gráfico, si EM=MF, calcule m∢EBM.

A) 15°
B) $\frac{53°}{2}$
C) $\frac{37°}{2}$
D) 30°
E) 16°

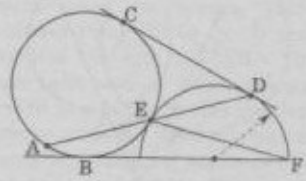


22. Siendo $m\widehat{PQ} = 2\alpha$ y $m\sphericalangle PSB = 45° - 3\alpha$. Calcule la medida del ángulo que determinan $\overline{AT}$ y $\overline{PO}$



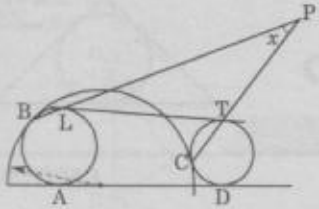
A) 80° B) 90° C) 74°
D) 75° E) 60°

23. Según la figura, $m\widehat{AB} = 2m\sphericalangle EFB$, calcule $m\sphericalangle EFB$ (B, C, D y E son puntos de tangencia).



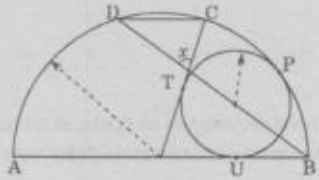
A) 20° B) 24° C) 14°
D) 15° E) 16°

24. Del gráfico A, B, C, D, T y L son puntos de tangencia, si $m\widehat{AB} - m\widehat{CD} = 110°$, calcule x.



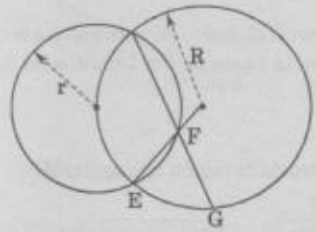
A) 55° B) 45° C) 37°
D) 30° E) 40°

25. En el gráfico, P, T y U son puntos de tangencia y $\overline{DC} // \overline{AB}$, calcule x.



A) 60° B) 75° C) 69°
D) 45° E) 53°

26. En el gráfico mostrado $\sqrt{5}r=2R$, calcule $m\widehat{EG}$.

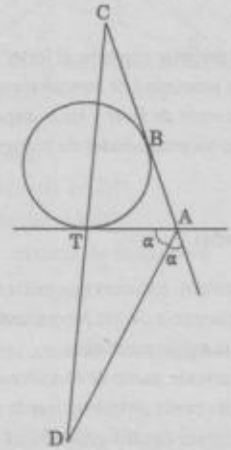


A) 60° B) 65° C) 45°
D) 53° E) 56°

27. En una semicircunferencia de diámetro AB, se ubican los puntos P y Q tal que $m\widehat{AP} = 90°$ y $\overline{AQ}$ intersecta a $\overline{PB}$ en M; luego en $\overline{AB}$ se ubica el punto L, tal que $m\sphericalangle AQL = 45°$ y $AM = 2(LB)$. Calcule $m\sphericalangle PAM$.

A) 14° B) 16° C) 19°
D) 15° E) 18°

28. Según el gráfico, T y B son puntos de tangencia AT=BC, calcule $\frac{CT}{TD}$.

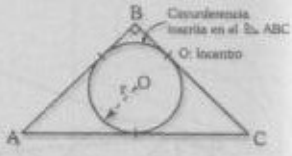


A) 3/4 B) 2/5 C) 4/5
D) 1 E) 1/2

29. En el lado BC de un cuadrado se ubica el punto M; luego con centro en B, se traza una circunferencia tangente a $\overline{AM}$ y a $\overleftrightarrow{DM}$ en Q y T respectivamente. Calcule $m\widehat{QT}$.

A) 74° B) 92° C) 45°
D) 53° E) 75°

Puntos Notables Asociados al Triángulo



CAPÍTULO VI

Objetivos

Al finalizar el presente capítulo, el lector estará en la capacidad de:

- *Conocer la propiedad de concurrencia de las líneas notables de una misma especie en los triángulos.*
- *Conocer la recta de Euler y los triángulos especiales.*
- *Aplicar ciertas propiedades de triángulos y cuadriláteros con las circunferencias que le asocian.*

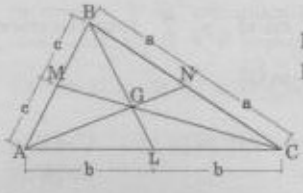
Introducción

En la naturaleza, notamos que existe la concurrencia de algunos ríos pequeños en un punto, de un río mayor a otro; la concurrencia de tres fuerzas que actúan sobre un cuerpo en reposo, la concurrencia de los rayos solares reflejados en un espejo parabólico.

Geométricamente, punto de concurrencia es el punto común que contienen tres o más rectas o líneas en general y notamos en los casos anteriores que la concurrencia permite encontrar ciertas propiedades en dicho punto, es así como en ciertas figuras geométricas como el triángulo y el cuadrilátero la concurrencia de ciertas líneas notables de una misma especie o una misma característica, permite conocer más propiedades en dichas figuras.

BARICENTRO

Es el punto de concurrencia de las medianas respecto a un triángulo. El baricentro o centro de gravedad de una región triangular divide a una mediana en la razón de 2 a 1 (midiendo desde el vértice).



En la figura, G: baricentro de la región triangular ABC.

Propiedad del baricentro

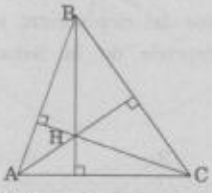
$\boxed{AG = 2(GN)}$ $\boxed{BG = 2(GL)}$

$\boxed{CG = 2(GM)}$

RTOCENTRO

Es el punto de concurrencia de las turas o sus prolongaciones, en un ángulo.

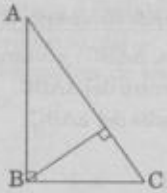
La posición del ortocentro respecto al ángulo depende de la naturaleza del ángulo.



En lafigura

ΔABC : acutángulo

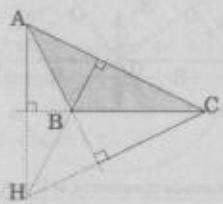
H : ortocentro del ΔABC



En la figura

ΔABC: rectángulo, recto en B

B : ortocentro del ◺ABC



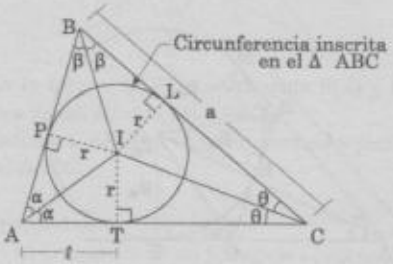
En la figura

ΔABC : obtusángulo, obtuso en B

H : ortocentro del ΔABC

INCENTRO

Es el punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo. El incentro del triángulo, equidista de sus lados, por lo tanto es el centro de la circunferencia inscrita en dicho triángulo a cuyo radio se le denomina inradio del triángulo.



En la figura

I : incentro del ΔABC

r : inradio del ΔABC

P, L y T : puntos de tangencia

Propiedades

Del gráfico anterior, se cumplen :

$$\boxed{m\sphericalangle AIC = 90° + \frac{m\sphericalangle ABC}{2}}$$

$$\boxed{\ell = p - a}$$

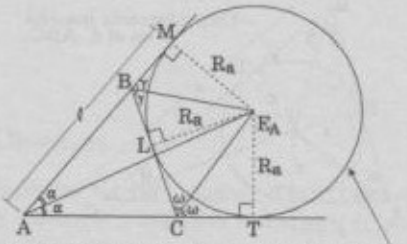
p: semiperímetro de la región triangular ABC.

EXCENTRO

Es el punto de concurrencia de las bisectrices de dos ángulos exteriores y la bisectriz de un ángulo interior en un triángulo.

El excentro del triángulo, equidista de sus lados, por lo tanto es el centro de la circunferencia exinscrita a dicho triángulo, a cuyo radio se le denomina exradio del triángulo.

Todo triángulo tiene tres excentros, tres circunferencias exinscritas y tres exradios; cada uno relativo a un lado del triángulo.



Circunferencia exinscrita al Δ ABC relativo a $\overline{BC}$

En la figura

E_A : ex-centro del ΔABC, relativo a $\overline{BC}$

Ra : exradio del ΔABC, relativo a $\overline{BC}$

M, L y T : puntos de tangencia.

Propiedades:

Del gráfico anterior, se cumplen:

$$m\measuredangle AE_AC = \frac{m\measuredangle ABC}{2}$$

$$m\measuredangle BE_AC = 90° - \frac{m\measuredangle BAC}{2}$$

$$\ell = p$$

p: semiperímetro de la región triangular ABC.

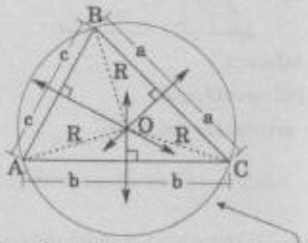
CIRCUNCENTRO

Es el punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

El circuncentro del triángulo, equidista de los vértices, por lo tanto es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, a cuyo radio se le denomina circunradio del triángulo.

La posición del circuncentro respecto al triángulo, depende de la naturaleza del triángulo.

•



Circunferencia circunscrita al Δ ABC

En la figura, ΔABC : acutángulo.

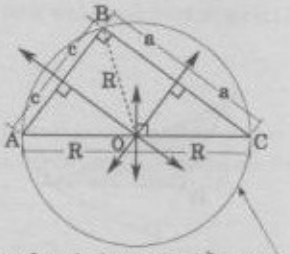
O : circuncentro del ΔABC.

R : circunradio del ΔABC

Propiedad

$$m\measuredangle AOC = 2(m\measuredangle ABC)$$

•



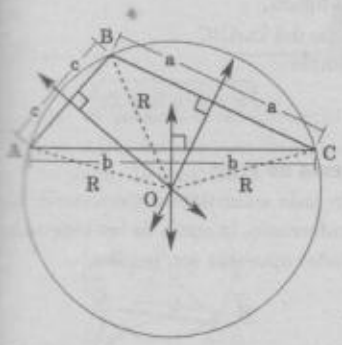
Circunferencia circunscrita al ◺ ABC

En la figura,

ΔABC : rectángulo, recto en B.

O : circuncentro del ◺ ABC.

R : circunradio del ◺ ABC.

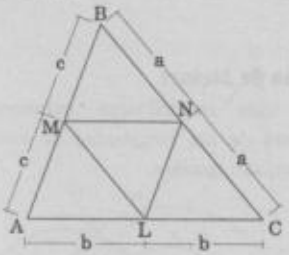


En la figura
ΔABC : obtusángulo, obtuso en B.
O : circuncentro del ΔABC
R : circunradio del ΔABC

TRIÁNGULOS ESPECIALES

Triángulo mediano o complementario

Es aquel triángulo que se determina al unir los puntos medios de los lados de un triángulo dado.



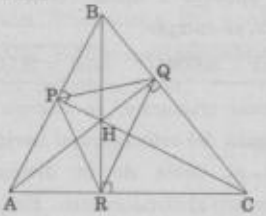
En la figura
M, N y L: puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.
ΔMNL : triángulo mediano o complementario del ΔABC

Propiedades

- El baricentro de un triángulo es el baricentro de su triángulo mediano.
- El circuncentro de un triángulo, es el ortocentro de su triángulo mediano.

Triángulo órtico o pedal

Es aquel triángulo que se determina al unir los pies de las alturas de un triángulo. Sólo tienen triángulo órtico los triángulos oblicuángulos.



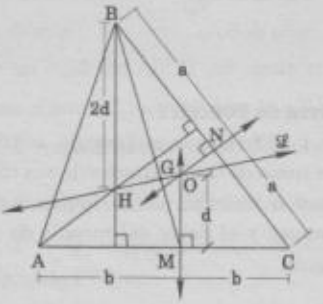
En la figura, ΔABC: acutángulo P, Q y R: pies de las alturas del ΔABC.
Entonces, ΔPQR : triángulo ortico o pedal del ΔABC.

Propiedades

- El ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo ortico.
- Los vértices de un triángulo acutángulo son los excentros de su triángulo ortico.

Recta de Euler

En todo triángulo no equilátero, el ortocentro, baricentro y circuncentro; son colineales y la recta que los contiene es denominada "recta de Euler"



En la figura H, G y O son el ortocentro, baricentro y circuncentro del ΔABC respectivamente.
Entonces:

$\overleftrightarrow{\mathcal{E}}$: recta de Euler del ΔABC

Propiedades:

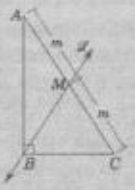
1. En todo triángulo, se cumple que la distancia de un vértice al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a dicho vértice. En la figura, se cumple:

$$\boxed{BH = 2(OM)} \qquad \boxed{AH = 2(ON)}$$

2. En todo triángulo, se cumple que la distancia del ortocentro al baricentro es igual al doble de la distancia del baricentro al circuncentro. En la figura, se cumple:

$$\boxed{HG = 2(GO)}$$

Nota

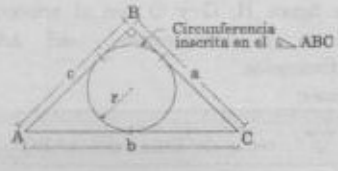


En ◺ABC,
$\overline{BM}$: mediana relativa a la hipotenusa.
$\overleftrightarrow{\mathcal{G}}$: recta de Euler

ΔABC (isósceles)
$\overline{BM}$: altura relativa a la base $\overline{AC}$.
$\overleftrightarrow{\mathcal{G}}$: recta de Euler

Teorema de Poncelet

En todo triángulo rectángulo, se cumple que la suma de las longitudes de sus catetos es igual a la suma de la longitud de su hipotenusa y el doble del inradio de dicho triángulo.

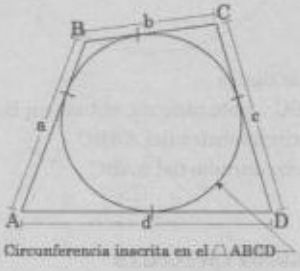


En la figura,
r : radio del ◺ABC
se cumple :

$$\boxed{a + c = b + 2r}$$

Teorema de Pitot

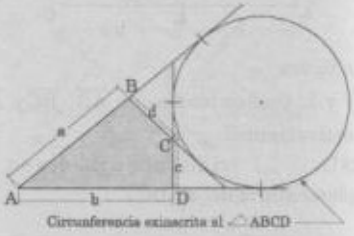
En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de las longitudes de sus lados opuestos son iguales.



En la figura, ⌓ABCD : circunscrito a la circunferencia.
Se cumple : $\boxed{a + c = b + d}$

Teorema de Steiner

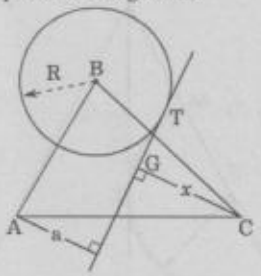
En todo cuadrilátero exinscrito, la diferencia de las longitudes de sus lados opuestos, son iguales.



En la figura, ⌓ABCD : exinscrito a la circunferencia.
Se cumple : $\boxed{a - c = b - d}$

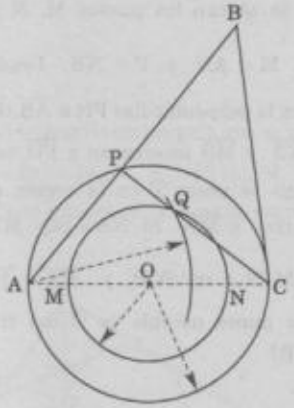
PROBLEMAS

1. Según el gráfico, G es baricentro de la región ABC; calcule x en función de a y R (T es punto de tangencia).



A) 3R–2a B) 2R–a C) R+a
D) R+2a E) $\frac{R+a}{2}$

2. En la figura mostrada MN=AQ y AC=BC, ¿qué punto notable es Q del triángulo ACB?



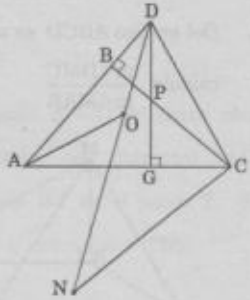
A) circuncentro
B) ortocentro
C) cevacentro
D) baricentro
E) incentro

3. En un triángulo acutángulo ABC la recta del Euler intersecta a $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ en los puntos M y N respectivamente tal que BM=BN, calcule m∢ABC.

A) 72° B) 53° C) 45°
D) 60° E) 75°

4. Según la figura O y G son el incentro y baricentro de las regiones triangulares ABC y DNC respectivamente siendo DP = PC, calcule $\frac{DO}{NG}$.

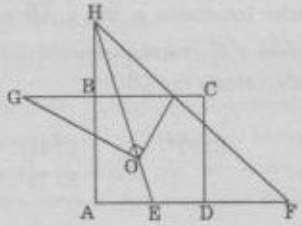
A) $\sqrt{2}/2$
B) 1/2
C) 2
D) 2/3
E) 3/2



5. En un cuadrado ABCD con centro en B se traza el arco AC, luego se ubica M y N en $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ respectivamente siendo $\overline{MN}$ tangente a $\overset{\frown}{AC}$ en T, si $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$ intersecan a $\overline{AC}$ en P y Q respectivamente, entonces el triángulo PTQ es:

A) equilátero
B) isósceles
C) obtusángulo
D) acutángulo
E) rectángulo

6. En el gráfico O es el centro del cuadrado ABCD e incentro del triángulo FAH y (EF)(FA)=8. Calcule OG

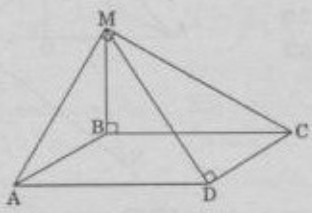


A) $\sqrt{2}$ B) 4 C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

7. Del gráfico ABCD es un rombo

calcule $\frac{m\measuredangle DMC}{m\measuredangle MAB}$



A) 1/4 B) 1/3 C) 1

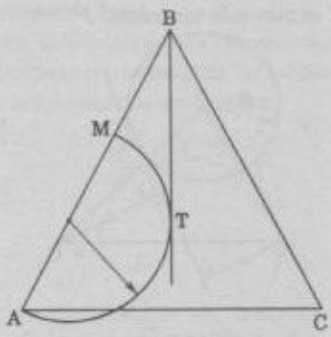
D) 1/2 E) 2

8. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos N y T respectivamente tal que $m\measuredangle NTC=90°$, NT=TC y NB es igual al inradio del triángulo ATN. Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 45° B) 30° C) 60°

D) 53° E) 37°

9. En el gráfico T es punto de tangencia y ortocentro del triángulo ABC; $m\widehat{MT}=60°$. calcule $\frac{MB}{AC}$.



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

10. En una semicircunferencia de diámetro AB se ubican los puntos M, N y P tal que $M \in \widehat{AN}$ y $P \in \widehat{NB}$. Desde P se traza la perpendicular PH a $\overline{AB}$ ($H \in AB$) si $\overline{NB}$ y $\overline{MB}$ intersecan a $\overline{PH}$ en S y Q. Luego se ubica T en la región exterior relativa a $\overline{MN}$. Si NS = SQ; MT = TN; $m\measuredangle MTN = m\measuredangle SQB$ y $\overleftrightarrow{MS} \cap \overleftrightarrow{NT} = \{O\}$ ¿qué punto notable es O del triángulo MNB?

A) ortocentro
B) excentro
C) baricentro
D) circuncentro
E) incentro

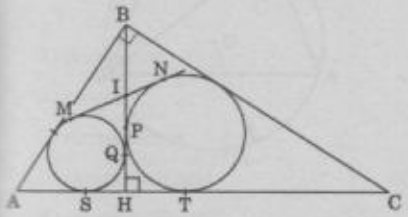
En un triángulo rectángulo ABC recto en B, sea E_c y E_a, excentros relativos a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Calcule $\frac{E_cE_a}{AC}$.

A) $\sqrt{3}$ B) 1,5 C) $\sqrt{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

En un triángulo ABC de ortocentro H, la medida del ángulo ABC es θ, en la región exterior relativo a $\overline{BC}$ se ubica el punto E tal que m∢HAC = m∢HEC, calcule la m∢BEH.

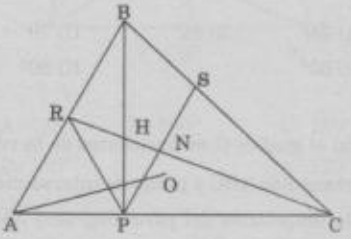
A) 90°–2θ B) 2θ C) 90°–θ
D) θ E) $\frac{\theta}{2}$

En el triángulo rectángulo que se muestra AB + BC = 14 cm, AC=10 cm, M, N, P, Q, S, T son puntos de tangencia, calcule BI.



A) 2 cm B) 4 cm C) 2,5 cm
D) 1 cm E) 1,5 cm

14. En el gráfico mostrado H y O son ortocentro y circuncentro del triángulo ABC, m∢PSC + m∢OAC = 90° y BC = 3(RP), calcule $\frac{PC}{NP}$.



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 3
D) $\frac{2}{2}$ E) 2

15. En un rectángulo ABCD se traza una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ tangente al lado $\overline{BC}$ en el punto T. Si $\overline{TD} \cap \overline{AC}$ = { P }; calcule m∢ TBP.

A) 16° B) 15° C) 14°
D) 45° E) 18°

16. En un triángulo ABC, con diámetro AC se traza una semicircunferencia que contiene al baricentro G de la región ABC.

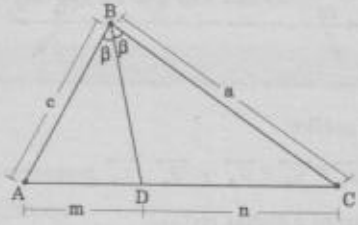
Si AG = $2\sqrt{5}$ y m$\widehat{AG}$ = 53°

Calcule BC.

A) $4\sqrt{34}$ B) $2\sqrt{34}$ C) $\sqrt{85}$
D) $5\sqrt{17}$ E) $2\sqrt{85}$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR

En todo triángulo; una bisectriz interior, divide internamente al lado al cual es relativo en segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicha bisectriz.

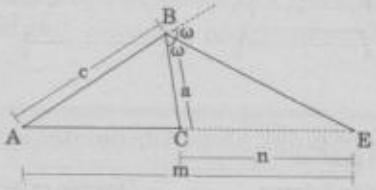


En el gráfico, la bisectriz interior BD del ΔABC, divide internamente a $\overline{AC}$.

Se cumple: $\boxed{\dfrac{c}{a}=\dfrac{m}{n}}$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

En todo triángulo; una bisectriz exterior (tal que los lados adyacentes a dicha bisectriz son de longitudes diferentes) divide externamente al lado al cual es relativa en segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicha bisectriz.

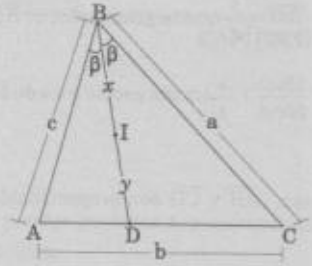


En el gráfico, la bisectriz exterior BE del ΔABC (c>a), divide externamente a $\overline{AC}$.

Se cumple: $\boxed{\dfrac{c}{a}=\dfrac{m}{n}}$

TEOREMA DEL INCENTRO

En todo triángulo, el incentro divide internamente a una bisectriz interior en segmentos proporcionales a la suma de longitudes de los lados adyacentes a la bisectriz y la longitud del lado al cual es relativa dicha bisectriz.

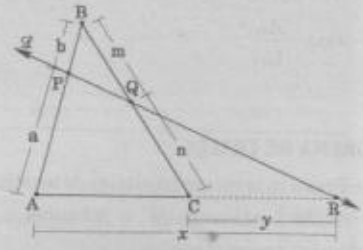


En el gráfico, I (incentro del ΔABC), divide internamente a la bisectriz interior BD.

Se cumple: $\boxed{\dfrac{x}{y}=\dfrac{c+a}{b}}$

TEOREMA DE MENELAO

Toda recta secante a un triángulo que divide internamente a dos lados y externamente al tercero, determina en dichos lados segmentos, cumpliéndose que el producto de las longitudes de tres de ellos sin extremo común es igual al producto de las longitudes de los otros tres.

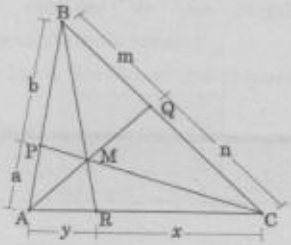


En el gráfico, la recta $\mathcal{L}$ secante al triángulo ABC, divide internamente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y externamente a $\overline{AC}$.

Se cumple: $\boxed{amy = bnx}$

TEOREMA DE CEVA

En todo triángulo, tres cevianas interiores concurrentes dividen internamente a cada lado en segmentos; cumpliéndose que el producto de las longitudes de tres de ellos, sin extremo común es igual al producto de las longitudes de los otros tres.

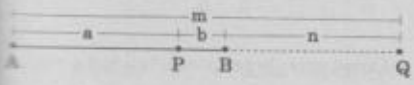


En el gráfico, las cevianas interiores AQ, BR y CP concurrentes en M, dividen internamente a los lados del ΔABC.

Se cumple: $\boxed{amx = bny}$

DIVISIÓN ARMÓNICA DE UN SEGMENTO

Dos puntos dividen armónicamente a un segmento, si lo dividen internamente y externamente en la misma razón.



En el gráfico, P divide internamente a $\overline{AB}$ y Q divide externamente a $\overline{AB}$, si P y Q dividen armónicamente al segmento AB.

Se cumple, por definición:

$$\boxed{\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ}}$$

es decir (reemplazando longitudes)

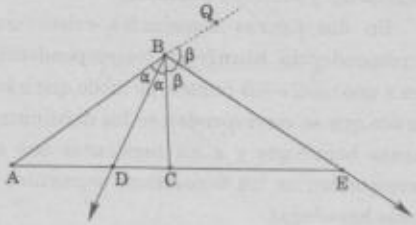
$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n}} \Rightarrow \boxed{an = bm}$$

De lo anterior a los puntos P y Q se les denomina conjugados armónicos respecto a A y B.

Además; A, P, B y Q forman una cuaterna armónica.

Teorema

En un triángulo, las bisectrices de un ángulo interior y de su correspondiente (o adyacente) ángulo exterior; dividen armónicamente al lado opuesto a dicho ángulo.



En el gráfico:

$\overleftrightarrow{BD}$: bisectriz del ángulo interior ABC.

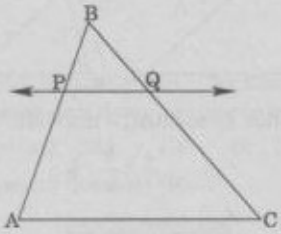
$\overleftrightarrow{BE}$: bisectriz del ángulo exterior CBQ.

Se cumple:

D y E: dividen armónicamente al lado AC.

Propiedades

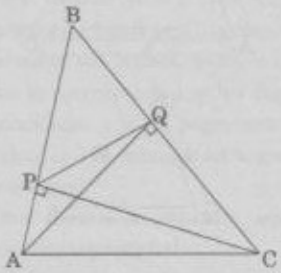
1. Una recta secante a un triángulo paralela a uno de sus lados, determina un triángulo parcial semejante al triángulo dado.



En el gráfico, si: $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{AC}$

Se cumple: $\boxed{\Delta PBQ \sim \Delta ABC}$

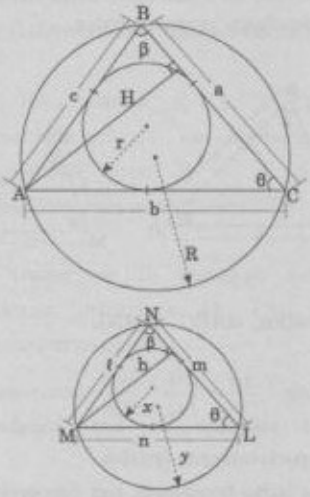
2. En todo triángulo acutángulo, el segmento que une los pies de dos alturas determina un triángulo parcial semejante al triángulo dado.



En el gráfico, ΔABC: acutángulo se cumple:

$$\boxed{\Delta QBP \sim \Delta ABC}$$

3. En dos triángulos semejantes sus líneas homólogas son proporcionales.

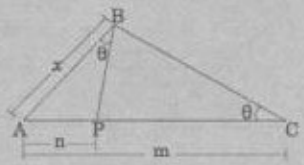


En el gráfico, ΔABC~ΔMNL, se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{\ell}=\frac{H}{h}=\frac{r}{x}=\frac{R}{y}=\frac{2p_{\Delta ABC}}{2p_{\Delta MNL}}=k}$$

2p: perímetro.

Nota



En el ΔABC, $\overline{BP}$: ceviana interior

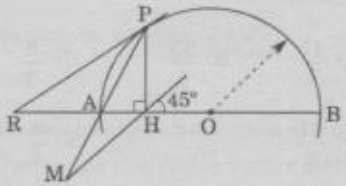
Si: m∢ABP=m∢ACB.

Se cumple: $\boxed{x^2 = mn}$

4. En un triángulo ABC la ceviana interior $\overline{CD}$ interseca a la bisectriz interior del ángulo de vértice A en el punto T tal que $m\measuredangle DTA=40°$, luego en el exterior y relativo al lado AB del triángulo ABC se ubican los puntos E y F respectivamente tal que A, E y F son colineales y $\overline{ED}//\overline{FB}$. Si (BC) (AE) = (AC) (EF) , calcule la $m\measuredangle TBC$.

A) 50° B) 45° C) 40°
D) 25° E) 30°

5. Según el gráfico PR=3(RA), si AM=3, calcule PA siendo P punto de tangencia.

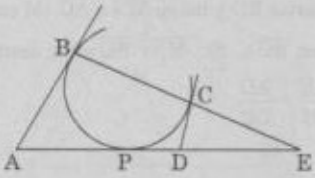


A) 6 B) 9 C) 4
D) 2 E) 5

6. Se tiene 2 circunferencias C_1 y C_2 secantes en los puntos B y Q, tal que la tangente en B a C_1 interseca a C_2 en C, luego en la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto D tal que $\overline{DQ}$ interseca a C_2 en R. En C_1 se traza la cuerda $\overline{QA}$ que interseca a C_2 en P, tal que $m\widehat{PQ}=m\widehat{CR}$, si $\frac{(BC)(PQ)}{CD}=\sqrt{2}$, calcule AP.

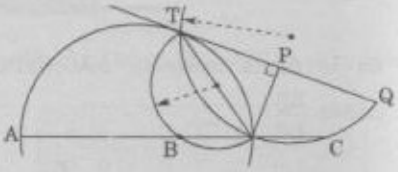
A) 4 B) 2 C) 1
D) 5 E) $\sqrt{2}$

7. En la figura mostrada B, C y P son puntos de tangencia, si AP=5, PD=3, calcule DE.



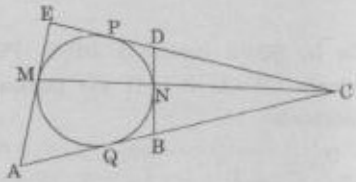
A) 10 B) 9 C) 6
D) 8 E) 12

8. En el gráfico T es punto de tangencia, calcule PQ si (PT)(BC)=8(AB)



A) 12 B) 3 C) 8
D) 4 E) 6

9. En la figura mostrada M, P, N y Q son puntos de tangencia AQ = 3(QB) = 3, calcule $\frac{1}{PD}-\frac{1}{EP}$.

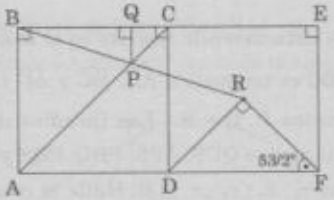


A) 1/6 B) 3/16 C) 4/19
D) 3/14 E) 2/11

17. En un triángulo ABC se traza la bisectriz exterior BP (P en la prolongación de $\overline{AC}$). Si las alturas relativas a los lados $\overline{AB}$ y BC miden 4 y 8 respectivamente y BP=10, calcule la m∢PBC.

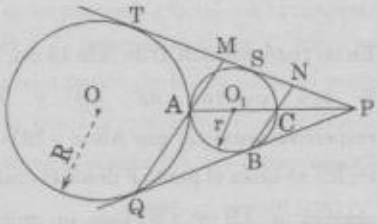
A) 75° B) 45° C) 53°
D) 37° E) 60°

18. Según el gráfico AB=AD=DF, calcule QE/BQ.



A) 2/3 B) 4 C) 2
D) 3/2 E) 4/5

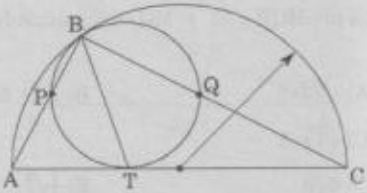
19. En el gráfico 4(MP)=5(MN), r=6 (T, S, A, C, Q y B son puntos de tangencia). Calcule R.



A) $\frac{46}{5}$ B) $\frac{48}{5}$ C) 50

D) 30 E) 42

20. En el gráfico T y B son puntos de tangencia, calcule TB si (AB)(PB)(BC)(BQ) = k.



A) $\sqrt[4]{k}$ B) $\sqrt[4]{\frac{k}{2}}$ C) $\sqrt[4]{2k}$

D) $\sqrt{k}$ E) $\sqrt{\frac{k}{2}}$

21. En un triángulo ABC se ubica su circuncentro (O) y su ortocentro (L) tal que las prolongaciones de $\overline{BO}$ y $\overline{CL}$ intersecan a $\overline{AL}$ y $\overline{BO}$ en E y D respectivamente. Si 3(AB)=4(BC) y la distancia de O a $\overline{AC}$ es 6, calcule ED.

A) 7 B) 8 C) 6
D) 9 E) 7,5

22. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B se traza la bisectriz interior ED y la ceviana interiór AE tal que $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ se interseca en O. Si 6(AB)=5(BC) y 4(BE)=5(EC), calcule m∢DOC.

A) 75° B) 82° C) 63°30'
D) 67°30' E) 71°30'

Rayos Isogonales

Son dos rayos coplanares a un ángulo que tienen como origen el vértice del ángulo y que son simétricos respecto a la bisectriz de dicho ángulo; es decir, forman con los lados del ángulo dado, ángulos de igual medida.

En el gráfico, $\overrightarrow{OP}$: bisectriz del ∢AOB.

$\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$: rayos isogonales respecto del ∢AOB.

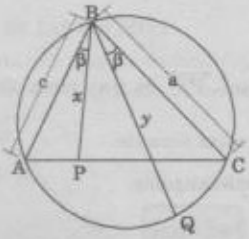
Se cumple por definición:

$$\boxed{m\sphericalangle AOM = m\sphericalangle BON}$$

- La bisectriz de un ángulo es considerado una autoisogonal.

TEOREMA DE LAS ISOGONALES

En todo triángulo, el producto de las longitudes de dos lados, es igual al producto de las longitudes de los segmentos isogonales respecto al ángulo determinado por estos lados, de modo que uno de dichos segmentos isogonales se determinó con el tercer lado y el otro con la circunferencia circunscrita al triángulo.

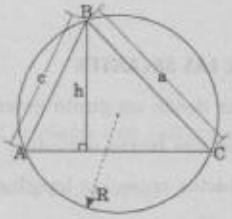


En el gráfico, $\overline{BP}$ y $\overline{PQ}$: segmentos isogonales respecto al ∢ABC.

Se cumple: $\boxed{ca = xy}$

TEOREMA DEL PRODUCTO DE DOS LADOS

En todo triángulo, el producto de las longitudes de los lados es igual al producto de las longitudes de la altura relativa al tercer lado con el diámetro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.



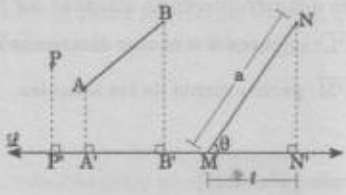
En el gráfico, R: circunradio del ΔABC.

Se cumple: $\boxed{ac = h(2R)}$

PROYECCIÓN ORTOGONAL

La proyección ortogonal de un punto sobre una recta, es el pie de la perpendicular trazada por dicho punto a la recta. Esta perpendicular se denomina **proyectante** y la recta **eje de proyección**.

La **proyección ortogonal** de un segmento sobre una recta o eje de proyección es la parte del eje de proyección comprendida entre las proyecciones de los extremos de dicho segmento.



Teorema 3

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de su altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre dicha hipotenusa.

Del gráfico, se cumple:

$$\boxed{h^2 = mn}$$

Teorema 4

En todo triángulo rectángulo, el producto de las longitudes de sus catetos es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la altura relativa a dicha hipotenusa.

Del gráfico, se cumple:

$$\boxed{ca = bh}$$

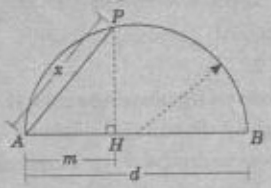
Teorema 5

En todo triángulo rectángulo, la inversa del cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la suma de las inversas de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

Del gráfico, se cumple:

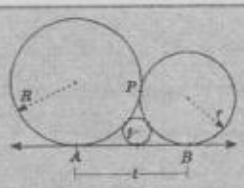
$$\boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}}$$

Nota



En el gráfico, $\overline{AH}$: proyección de la cuerda AP sobre el diámetro AB.

$$\boxed{x^2 = dm}$$



En el gráfico, $\overline{AB}$: segmento tangente común exterior a las circunferencias tangentes exteriores.

Se cumple:

$$\boxed{\ell = 2\sqrt{Rr}}$$

Además, si x es el radio de la circunferencia tangente a las dos circunferencias y a la recta AB.

Se cumple:

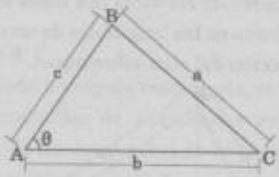
$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}}$$

Preguntas de Investigación

1. Demuestre que en dos triángulos rectángulos semejantes, la suma de los productos de sus catetos homólogos es igual al producto de sus hipotenusas (teorema de Dostor)
2. Se tiene un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio R, demostrar que al ubicar un punto en dicha circunferencia la suma de los cuadrados de las distancias de dicho punto a los vértices del hexágeno es igual a $12R^2$
3. En una semicircunferencia de diámetro AB se ubica el punto P y se traza $\overline{PH} \perp \overline{AB}$ (H en $\overline{AB}$), luego se traza una circunferencia tangente a $\overline{AH}$ en M y además tangente a $\overline{PH}$ y al arco AP, también se traza una circunferencia tangente a $\overline{HB}$ en N y además tangente a $\overline{PH}$ y al arco PB. Demostrar que MN es igual al doble del inradio del triángulo APB.

LEY DE COSENOS

En todo triángulo el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de las longitudes de dichos lados por el coseno de la medida del ángulo determinado por ellos.



En la figura, $0° < \theta < 180°$

Se cumple:

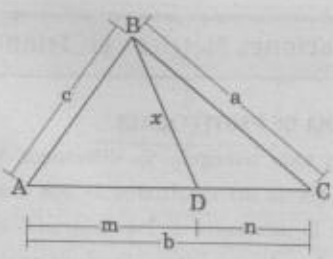
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\theta$$

Nota

Si el cuadrado de la longitud del mayor lado de un triángulo es menor, igual o mayor a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, entonces dicho triángulo será acutángulo, rectángulo u obtusángulo respectivamente.

TEOREMA DE STEWARD

En todo triángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a una ceviana interior multiplicados con las longitudes de los segmentos opuestos a dichos lados determinados por la ceviana en el lado al cual es relativa es igual al producto del cuadrado de la longitud de dicha ceviana con la longitud del lado al cual es relativa más el producto de las longitudes dicho lado con los segmentos determinados por la ceviana en este.



En la figura, $\overline{BD}$: ceviana interior del ΔABC relativa al lado $\overline{AC}$.

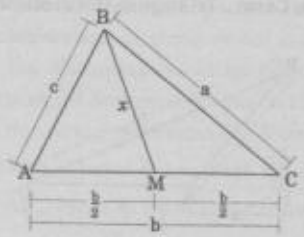
$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: lados adyacentes a la ceviana interior BD.

$\overline{AD}$ y $\overline{DC}$: segmentos determinados por la ceviana en $\overline{AC}$.

Se cumple: $c^2n + a^2m = x^2b + bmn$

TEOREMA DE LA MEDIANA

En todo triángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados es igual al doble del cuadrado de la longitud de la mediana relativa al tercer lado más la mitad del cuadrado de la longitud de dicho tercer lado.



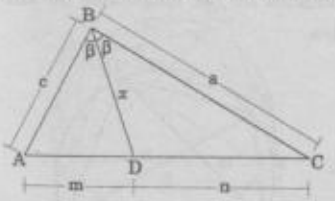
En la figura, $\overline{BM}$: mediana relativa a $\overline{AC}$

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: lados adyacentes a la mediana BM.

Se cumple: $c^2 + a^2 = 2x^2 + \frac{b^2}{2}$

TEOREMA DEL CÁLCULO DE LA BISECTRIZ INTERIOR

En todo triángulo el cuadrado de la longitud de una bisectriz interior es igual a la diferencia de productos de las longitudes de los lados adyacentes y los segmentos determinados por dicha bisectriz en el lado al cual es relativo.

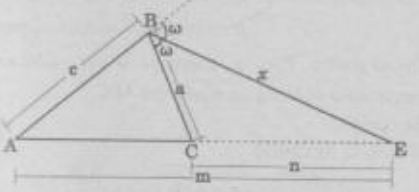


En la figura, $\overline{BD}$: bisectriz interior del ΔABC relativa al lado AC.

Se cumple: $\boxed{x^2 = ca - mn}$

TEOREMA DEL CÁLCULO DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de una bisectriz exterior (cuyos lados adyacentes a la bisectriz sean diferentes en longitud) es igual a la diferencia de productos de las longitudes de los segmentos determinados por la bisectriz en el lado al cual es relativa y los lados adyacentes a dicha bisectriz.

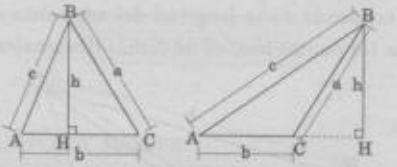


En la figura, $\overline{BE}$: bisectriz exterior del ΔABC relativa al lado $\overline{AC}$ (c>a).

Se cumple: $\boxed{x^2 = mn - ca}$

TEOREMA DE HERÓN

En todo triángulo, la longitud de una altura es igual al doble de la inversa de la longitud del lado al cual es relativa multiplicado con la raíz cuadrada del producto del semiperímetro de la región limitada por dicho triángulo con la diferencia de dicho semiperímetro y la longitud de cada uno de sus lados.



En la figura, $\overline{BH}$: altura relativa al lado $\overline{AC}$ del triángulo ABC (acutángulo u obtusángulo).

Se cumple: $\boxed{h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

p: semiperímetro de la región triangular ABC.

$$\boxed{p = \frac{a+b+c}{2}}$$

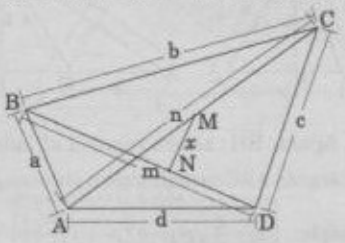
Preguntas de Investigación

1. Demostrar, que la diferencia de los cuadrados de las longitudes de dos lados de un triángulo es igual al doble producto de las longitudes del tercer lado con la proyección de la mediana relativa dicho tercer lado sobre aquel.
2. Demostrar que la suma de los cuadrados de las longitudes de las tres medianas de un triángulo es igual a tres cuartos de la suma de los cuadrados de las longitudes de los tres lados (Teorema de Both).
3. Demostrar: que la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados de un romboide es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus diagonales.

Relaciones Métricas en Cuadriláteros

TEOREMA DE EULER

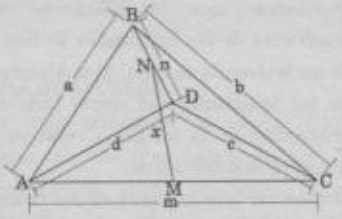
En todo cuadrilátero, la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus diagonales más cuatro veces el cuadrado de la longitud del segmento que une los puntos medios de dichas diagonales.



En el gráfico, ▱ABCD: convexo. Si M y N son los puntos medios de las diagonales AC y BD respectivamente.

Se cumple:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2+4x^2$$



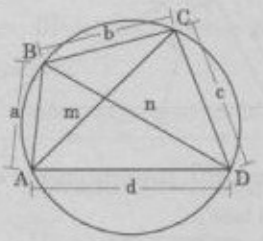
En el gráfico, ⌔ABCD: cóncavo en D. Si: M y N son los puntos medios de las diagonales AC y BD respectivamente.

Se cumple:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2+4x^2$$

TEOREMA DE PTOLOMEO

En un cuadrilátero inscrito o inscriptible en una circunferencia, el producto de las longitudes de sus diagonales es igual a la suma de productos de las longitudes de sus lados opuestos.

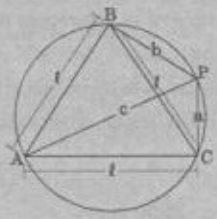


En el gráfico, ▱ABCD: inscrito en la circunferencia AC=m y BD=n.

Se cumple:

$$mn=ac+bd$$

Nota



En el gráfico, P es un punto de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero ABC.

Se cumple:

Teorema de Chadú

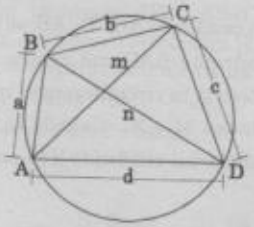
$$c=a+b$$

Además:

$$t^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

TEOREMA DE VIETTE

En un cuadrilátero inscrito o inscriptible, la razón de las longitudes de sus diagonales es igual a la razón de la suma de productos de las longitudes de los lados que concurren a los extremos de cada diagonal respectivamente.



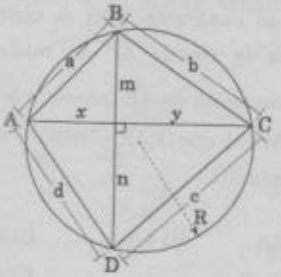
En el gráfico, ⌓ABCD: inscrito en la circunferencia AC=m y BD=n.

Se cumple:

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

TEOREMA DE ARQUÍMEDES–FAURE

En un cuadrilátero de diagonales perpendiculares inscrito en una circunferencia, la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados opuestos son iguales al cuadrado del diámetro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero.



En el gráfico, R: radio de la circunferencia circunscrita al ⌓ABCD.

Si: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, se cumple:

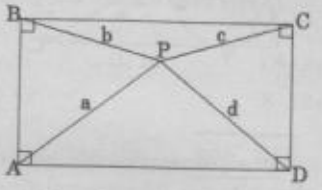
$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 4R^2$$

Además, se cumple:

$$x^2 + m^2 + y^2 + n^2 = 4R^2$$

TEOREMA DE MARLEN

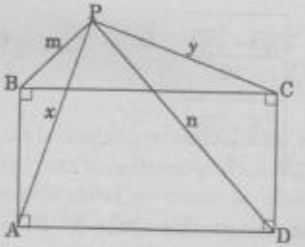
En un rectángulo, la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera a sus vértices opuestos son iguales.



En el gráfico, P es un punto interior al rectángulo ABCD.

Se cumple:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$



En el gráfico, P es un punto exterior al rectángulo ABCD.

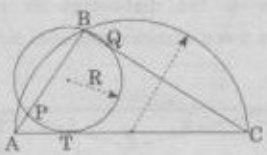
Se cumple: $x^2 + y^2 = m^2 + n^2$

PROBLEMAS

1. En un triángulo rectángulo ABC recto en A, los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 dividen a la hipotenusa en cinco partes de igual longitud. Si $(AP_1)^2=265$ y $(AP_4)^2=160$. Calcule BC.

A) 36 B) 49 C) 16
D) 64 E) 25

2. Según el gráfico $\overline{BT}$ es diámetro, AP=1 y QC=4, calcule R (T es punto de tangencia)



A) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{64}}{2}}$

B) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{7}}{2}}$

C) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{7}}{4}}$

D) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{64}}{16}}$

E) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{64}}{4}}$

3. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero ABCD se intersecan en el punto E, si AE=EC=2, DE=1, EB=4 y $AB+BC=6\sqrt{2}$, calcule la suma de las longitudes de los dos lados de menor longitud.

A) $4\sqrt{2}$ B) 8 C) $5\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) 3

4. En un cuadrado ABCD (AB =6), se traza el cuadrante BAD con centro en A que interseca a la circunferencia inscrita en los puntos M y N. Calcule la distancia del centro del cuadrado a la cuerda MN.

A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ C) $\dfrac{3\sqrt{3}}{7}$

D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ E) $\dfrac{2\sqrt{2}}{7}$

5. Se tiene el triángulo ABC, luego se trazan las circunferencias C_1 y C_2 secantes en los puntos B y P tal que $P \in \overline{AC}$, $A \in C_1$ y $C \in C_2$. $\overline{AB}$ interseca a C_2 en Q y $\overline{BC}$ interseca a C_1 en R, luego en QR se ubica el punto H tal que $\overline{HP} \perp \overline{AC}$.
Si (AP)(PC)−(QH)(HR)=36, calcule HP.

A) 4,5 B) 3 C) 12
D) 9 E) 6

6. En un cuadrante AOB de centro O, se traza la cuerda AP de modo que la prolongación de AP interseca a la $\overleftrightarrow{OB}$ en M tal que 3(AP)=2(PM) y $BM=3\sqrt{5}$, calcule AO.

A) 2,5 B) 4,5 C) 3,75
D) 2 E) $3\sqrt{5}$

7. En un triángulo ABC, se traza la altura AH, luego en $\overline{AH}$ se ubica el punto P y en $\overline{BC}$ el punto Q tal que BQ=QC y m∢CPQ=90°. Si $(AB)^2-(AC)^2=36$, calcule PQ.

A) 9 B) 3 C) 6
D) 7,5 E) 12

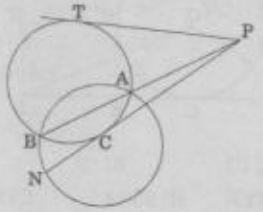
8. En un triángulo ABC, AB=C, BC=a y AC=b, se ubica su ortocentro H, h_a, h_b y h_c son las longitudes de las alturas relativas a los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Calcule:
$(HA)h_a+(HB)h_b+(HC)h_c$, si $a^2+b^2+c^2=100$.

A) 50 B) $10\sqrt{2}$ C) $25\sqrt{2}$
D) 100 E) 40

9. Desde un punto exterior P a una circunferencia se trazan las tangentes PA y PB (A y B son puntos de tangencia), tomando como diámetro a $\overline{PB}$ se traza una semicircunferencia que interseca a $\overline{PA}$ y $\overline{AB}$ en Q y R respectivamente de modo que $3(AR)^2+2(PQ)^2-(PB)^2=64$, calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{PR}$ y $\overline{QB}$.

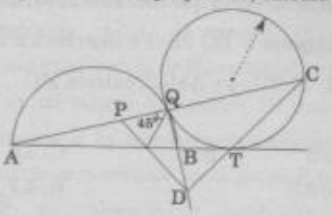
A) 4 B) 6 C) 16
D) 8 E) 2

10. Según el gráfico T y C son puntos de tangencia. Si (AB)(BC)(AC)=30, $(BC)^2-(AC)^2=5$ y CM=MP, calcule CN.



A) 7 B) 12 C) 3
D) 9 E) 6

11. Según el gráfico T y Q son puntos de tangencia. Si (PQ)(QC)=20, calcule QD.



A) 4 B) $4\sqrt{5}$ C) 5
D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{3}$

12. Se tiene el triángulo ABC, luego se traza una circunferencia tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos T y P y secante a $\overline{AC}$ en los puntos Q y R tal que Q ∈ $\overline{RC}$. Si AQ=QC=3, calcule $(AT)^2+(PC)^2$.

A) 27 B) 18 C) $18\sqrt{2}$
D) 36 E) $12\sqrt{3}$

13. En una circunferencia de centro O se trazan la cuerda AB, que es el diámetro de una semicircunferencia que contiene a O y la cuerda PQ que interseca a la semicircunferencia en los puntos M y N (P, M, N y Q en ese orden). Calcule AB si (NP).(NQ)=18 y la distancia de N a $\overline{AB}$ es 2.

A) 9 B) 12 C) 6
D) 3 E) $3\sqrt{2}$

14. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior AQ y en el triángulo ABQ se traza la altura BH, luego en $\overline{AC}$ se ubica el punto P tal que el cuadrilátero ABHP es un trapecio isósceles. Si AH=9, HQ=4, calcule PC.

A) 13,5 B) 10 C) 12
D) 9,5 E) 11

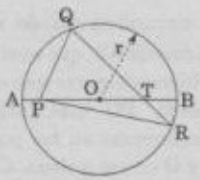
15. En un triángulo ABC de baricentro G, la circunferencia que contiene al vértice A es tangente a $\overline{BG}$ en G e interseca a $\overline{AC}$ en M. Si BG=4 y AM=3, calcule MC.

A) 5 B) 6 C) 3,5
D) 6,3 E) 4,2

16. En el interior de un paralelogramo ABCD se ubica el punto P tal que $(PB)^2 + (PD)^2 = 38$ y $(PA)^2 + (PC)^2 = 56$. Si m∢ABD=90°, calcule AB.

A) 3 B) 6 C) 5
D) 1 E) 9

17. Según el gráfico, r=3 y AP=TB=1, calcule $(PQ)^2+(PR)^2+(QR)^2$.



A) 31 B) 68 C) 34
D) 62 E) 50

18. En un cuadrilátero ABCD, AB=14, BC=30, CD=40 y A D=48. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales además m∢ABC+m∢ADC=180°.

A) 15 B) 20 C) 5
D) 25 E) 10

19. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BD, en $\overline{BC}$ se ubica el punto E tal que m∢BAC=m∢BDE y en $\overline{AB}$ se ubica el punto F tal que $\overline{EF} // \overline{AC}$.
Si DE=3 y (BE)(BF) = 16 - Calcule BD.

A) 5 B) 7 C) 6
D) 3 E) 4

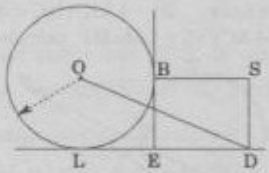
20. En un triángulo acutángulo ABC de incentro I y circuncentro O, sea m∢AIO=90°. Calcule $\frac{AB+BC}{AC}$

A) 1,8 B) 2,1 C) 2
D) 2,2 E) 1,9

21. En un cuadrado ABCD, con centro en A se traza el cuadrante BAD en el cual se ubica el punto P tal que BP =2 y PD = $\sqrt{2}$, calcule PC.

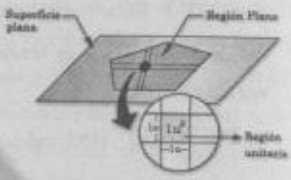
A) 1 B) 1,8 C) 1,6
D) 2 E) 1,5

22. Según el gráfico L y B son puntos de tangencia, si BS=7 y DS=5, calcule la longitud de la proyección de $\overline{EO}$ sobre $\overline{DO}$.



A) 58/13 B) 85/14 C) 58/11
D) 86/11 E) 85/13

Área de Regiones Planas



CAPÍTULO X

Objetivos

Al finalizar el presente capítulo, el lector estará en la capacidad de:

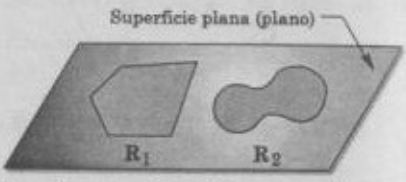
- *Conocer las principales regiones planas.*
- *Calcular sus áreas en función a ciertas dimensiones de las figuras.*
- *Comparar las áreas de la regiones que presentan ciertas características.*

Introducción

El problema de la determinación de áreas de regiones se remonta a la antigüedad y surgió como producto de la actividad práctica del hombre; por ejemplo, ante la necesidad de medir terrenos de cultivos, terrenos para viviendas, etc. los cuales estaban limitados por ciertas figuras (líneas cerradas). Pero en este desarrollo surgen muchas interrogantes, como por ejemplo, ¿cómo medir la porción de plano que encierra una línea?, ¿cómo podemos comparar la parte de plano encerrada por una línea con la parte de plano que encierra otra? ¿cómo podríamos describir la porción de plano que encierra una línea cualquiera y de qué manera podríamos medirla? Todas estas y otras interrogantes admiten respuesta concretas que se van a dar en el presente capítulo, las cuales nos darán más claridad en el manejo del área en nuestro propio entorno.

REGIÓN PLANA

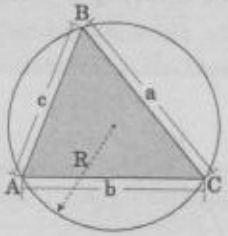
Es una porción de plano limitada por una línea cerrada, también llamada frontera de la región. Las regiones principales a tratarse en este capítulo son las regiones poligonales (triangular , cuadrangular) y la región curvilínea (círculo) y algunas regiones mixtilíneas.



R_1: Región poligonal (pentagonal)
R_2: Región curvilínea

FÓRMULA EN FUNCIÓN DEL CIRCUNRADIO

El área de una región triangular es igual al cociente del producto de las longitudes de sus tres lados con el cuádruplo de su circunradio.



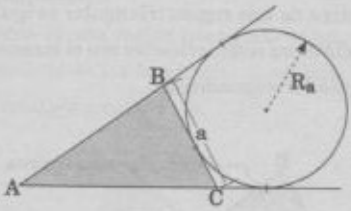
En la figura,

R : circunradio del ΔABC

$$A_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$$

FÓRMULA EN FUNCIÓN AL EXRADIO

El área de una región triangular es igual al producto de la diferencia de su semiperímetro y la longitud de un lado con el exradio relativo a dicho lado.



En la figura,

R_a : Exradio del ΔABC, relativo a $\overline{BC}$

p : semiperímetro de la región triangular ABC

$$A_{\Delta ABC} = (p - a)\,R_a$$

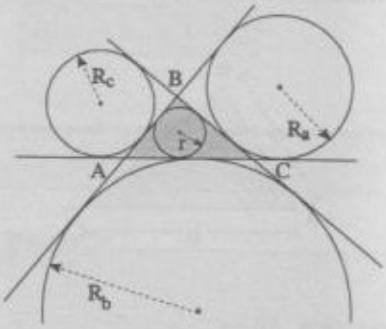
análogamente, con los otros exradios Rb y Rc.

$$A_{\Delta ABC} = (p - b)\,R_b$$

$$A_{\Delta ABC} = (p - c)\,R_c$$

FÓRMULA EN FUNCIÓN DE LOS EXRADIOS Y EL INRADIO

El área de una región triangular es igual a la raíz cuadrada del producto de los exradios y el inradio.



En el gráfico, Ra, Rb y Rc son exradios del ΔABC, relativos a sus lados

r : inradio

$$A_{\Delta ABC} = \sqrt{r\,R_a\,R_b\,R_c}$$

FÓRMULAS ADICIONALES PARA REGIONES TRIANGULARES RECTANGULARES

1. El área de una región triangular rectangular es igual al producto de los exradios relativos a los catetos.

   En la figura:

   Rb y Rc : exradios relativos a los catetos del ◺ ABC.

   $$A_{◺ ABC} = R_b\,R_c$$

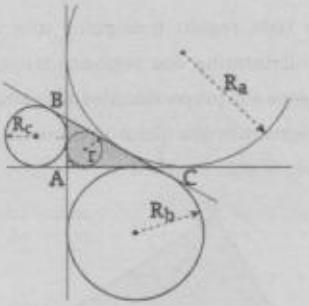
2. El área de una región triangular rectangular es igual al producto del inradio con el exradio relativo a la hipotenusa.

En la figura:*

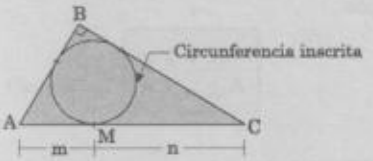
r : inradio del ◺ ABC.

Ra: exradio del ◺ ABC, relativo a la hipotenusa.

$$A_{◺ ABC} = r\,R_a$$



3. El área de una región triangular rectangular es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados en la hipotenusa por la circunferencia inscrita.

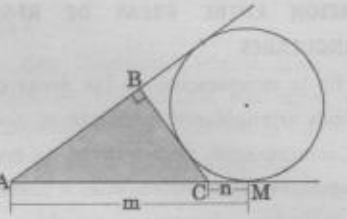


En la figura:

$\overline{AM}$ y $\overline{MC}$: segmentos determinados en $\overline{AC}$ por la circunferencia inscrita.

$$A_{◺ ABC} = mn$$

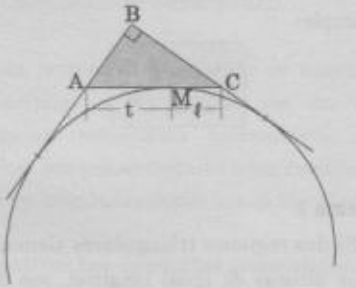
4. El área de una región triangular rectangular es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados en la hipotenusa por la circunferencia exinscrita relativo a un cateto.



En la figura: $\overline{AM}$ y $\overline{MC}$ son segmentos determinados en $\overline{AC}$ por la circunferencia exinscrita relativa al cateto BC.

$$A_{◺ ABC} = mn$$

5. El área de una región triangular rectangular es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados en la hipotenusa por la circunferencia exinscrita relativa a dicha hipotenusa.



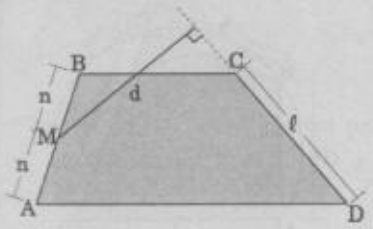
En la figura:

$\overline{AM}$ y $\overline{MC}$ son segmentos determinados en $\overline{AC}$ por la circunferencia exinscrita relativa a dicha hipotenusa AC.

$$A_{◺ ABC} = t.\ell$$

Teorema

El área de una región trapecial, es igual al producto de la longitud de un lado lateral y la distancia del punto medio del otro lado lateral hacia él.



En el gráfico, ⏢ABCD : trapecio

ℓ : longitud del lado lateral CD

d : distancia del punto medio de $\overline{AB}$ hacia $\overline{CD}$

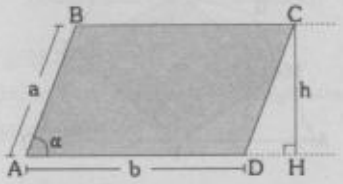
Se cumple:

$$A_{⏢ABCD} = \ell \cdot d$$

ÁREA DE UNA REGIÓN PARALELOGRÁMICA

Región Romboidal

El área de una región romboidal es igual al producto de las longitudes de un lado y la altura relativa a dicho lado.



En la figura, ▱ABCD : romboide

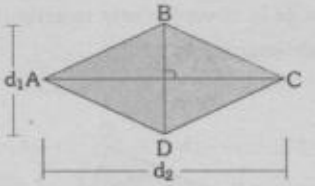
h : longitud de la altura relativa al lado AD

Entonces $A_{▱ABCD} = bh$

Además: $A_{▱ABCD} = ab\,\text{sen}\alpha$

Región Rombal

El área de una región rombal es igual al semiproducto de las longitudes de sus diagonales.



En el gráfico, ▱ABCD: rombo

d_1 y d_2 : longitudes de sus diagonales

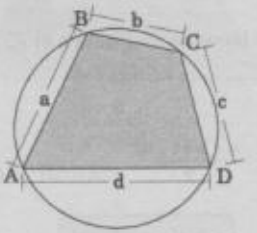
$$A_{▱ABCD} = \frac{d_1 d_2}{2}$$

- Las otras regiones paralelográmicas ya han sido analizadas anteriormente.

CASOS ADICIONALES

Teorema 1 (Fórmula de Bramaghupta)

El área de una región cuadrangular inscrita o inscriptible en una circunferencia, es igual a la raíz cuadrada del producto de las diferencias del semiperímetro de dicha región cuadrangular con la longitud de cada uno de sus lados.



En el gráfico, ⏢ABCD : inscrito

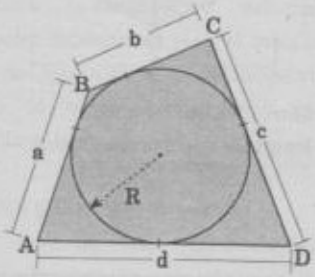
p : semiperímetro de la región ABCD

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$$A_{⏢ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Teorema 2

El área de una región cuadrangular circunscrita a una circunferencia es igual al producto del semiperímetro de dicha región con el radio de la circunferencia inscrita (inradio del cuadrilátero).



En el gráfico,

⏢ABCD: circunscrito a la circunferencia

R : inradio del cuadrilátero

p : semiperímetro de la región ABCD

$$\boxed{A_{⏢ABCD} = p \cdot R}$$

Aplicando teorema de Pitot en el ⏢ABCD :

$$a + c = b + d$$

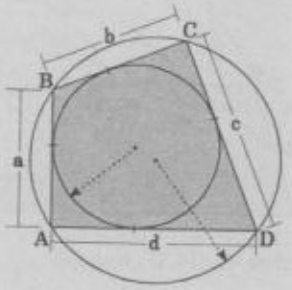
pero : $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

Entonces: $\boxed{p = a + c = b + d}$

Teorema 5

El área de una región cuadrangular limitada por un cuadrilátero bicéntrico es igual a la raíz cuadrada del producto de las longitudes de sus lados.

- **Cuadrilátero bicéntrico**; es aquel cuadrilátero inscrito y circunscrito a dos circunferencias cuyos centros no coinciden.



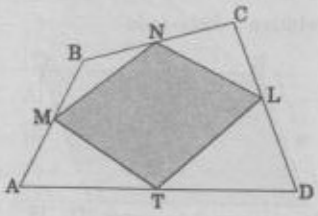
En el gráfico,

⏢ABCD : bicéntrico

$$\boxed{A_{⏢ABCD} = \sqrt{abcd}}$$

RELACIÓN DE ÁREAS EN REGIONES CUADRANGULARES

Cuadrilátero Convexo

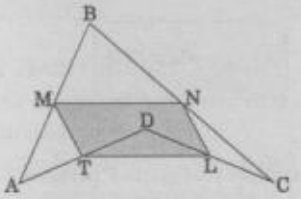


En el gráfico, M, N, L y T son puntos medios de los lados AB, BC, CD y AD respectivamente. Se cumple:

$$\boxed{A_{▱MNLT} = \frac{A_{▱ABCD}}{2}}$$

además, ▱MNLT : paralelogramo

Cuadrilátero No Convexo

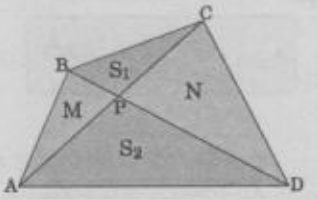


En el gráfico, M, N, L y T son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y AD respectivamente.

Se cumple:

$$A_{\square MNLT} = \frac{A_{AABCD}}{2}$$

Cuadrilátero Convexo



En el gráfico,

⌓ABCD: convexo, las diagonales se intersecan en P

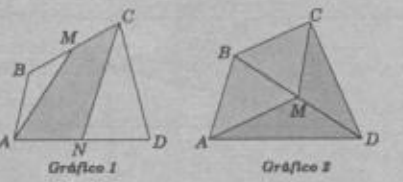
se cumple:

$$(A_{\Delta ABP})(A_{\Delta CDP}) = (A_{\Delta BPC})(A_{\Delta ADP})$$

es decir:

$$M \cdot N = S_1 \cdot S_2$$

Nota



En el gráfico (1), ⌓ABCD : convexo, BM=MC y AN=ND.

Se cumple:

$$A_{\square AMCN} = \frac{A_{\square ABCD}}{2}$$

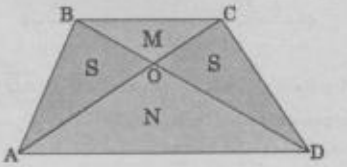
En el gráfico (2), ⌓ABCD : convexo, BM=MD

Se cumple:

$$A_{\square ABCM} = A_{\triangle CDAM}$$

En Regiones Trapeciales

1.



En el gráfico, $\overline{BC} // \overline{AD}$

Se cumple:

$$A_{\Delta AOB} = A_{\Delta COB}$$

además:

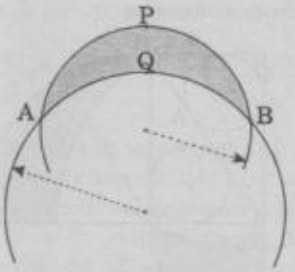
$$S^2 = M \cdot N$$

En el gráfico, R_1, R_2 y R_3 son regiones semejantes de áreas A_1, A_2 y A_3 respectivamente en las cuales $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son sus correspondientes líneas homólogas. Se cumple:

$$\boxed{A_3 = A_1 + A_2}$$

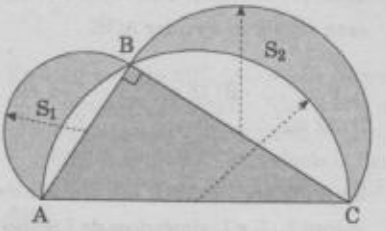
LÚNULA

Es una región plana no convexa limitada por dos arcos de circunferencias secantes.



En el gráfico la región sombreada es una lúnula, limitada por los arcos APB y AQB.

Lúnulas de Hipócrates

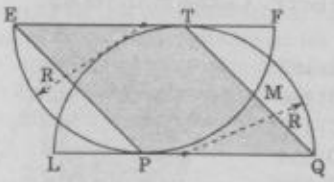


En el gráfico; se muestran dos lúnulas de áreas S_1 y S_2 determinadas por las semicircunferencias de diámetros AB, BC y AC; se cumple:

$$\boxed{A_{\triangle ABC} = S_1 + S_2}$$

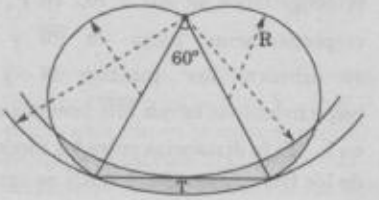
PROBLEMAS

1. Según el gráfico, calcule el área de la región paralelográmica sombreada. Si TM=MQ y $R=\sqrt{\sqrt{3}-1}$ (P y T son puntos de tangencia).



A) 2 B) 1,5 C) 3
D) $\sqrt{3}$ E) 1

2. Según el gráfico, T es punto de tangencia. Calcule el área de la región sombreada.



A) $\frac{\pi R^2}{3}$ B) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ C) $R^2\sqrt{2}$
D) R^2 E) $\frac{R^2\sqrt{2}}{2}$

3. En un sector circular AOB, de centro O, se inscribe un cuadrado MNPQ (M y Q en $\widehat{AB}$) que limita una región cuya área es $36(2-\sqrt{3})$ u². Si m∢QPB=30°, calcule el área del sector circular AOB.

A) $6\pi u^2$ B) $18\pi u^2$ C) $9\pi u^2$
D) $12\pi u^2$ E) $4\pi u^2$

4. En un triángulo ABC, I es el incentro, se ubican I_1, I_2 e I_3 simétricos de I respecto a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Calcule la razón entre el producto y la suma de las áreas de las regiones triangulares AI_1B, BI_2C, CI_3A en función del inradio r y el circuncentro R del triángulo ABC.

A) $(R^2-r^2)^3$ B) $(R^2+r^2)^3$ C) $\frac{R^3r}{2}$

D) $\frac{R^2r^2}{2}$ E) $\frac{Rr^3}{2}$

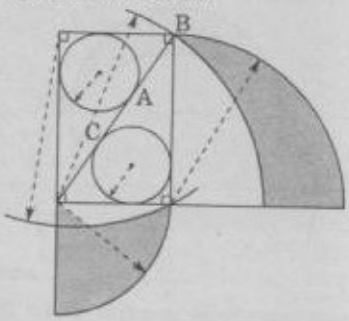
5. Dado un triángulo ABC, en el cual, la m∢BCA = 37° y la circunferencia exinscrita al triángulo relativa a $\overline{BC}$ cuyo radio es igual 6 cm, es tangente a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en P y Q respectivamente; luego en $\overline{PB}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos M y N respectivamente, tal que $\overline{MN}$ interseca a $\overline{BC}$ en L. Si la distancias entre los incentros de los triángulos ABC y AMN es igual a $\sqrt{10}$ cm. Calcule la diferencia de las áreas de las regiones NLC y MBL.

A) 9 cm² B) 16 cm² C) 10 cm²
D) 18 cm E) 12 cm²

6. En un romboide ABCD, en la prolongación de $\overline{DC}$ se ubica el punto E, M es el punto medio de $\overline{BE}$ y $\overline{MD}\cap\overline{BC}=\{F\}$. Calcule la razón entre las áreas de las regiones triangulares AMF y MEC.

A) 0,5 B) 2 C) 1
D) 0,75 E) 1,5

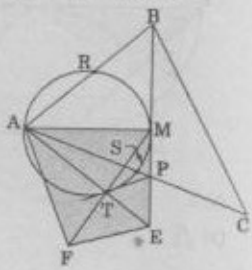
7. En el gráfico se muestran dos circunferencias inscritos. Si AB=a y AC=b, calcule la suma de las áreas de las regiones sombreadas.



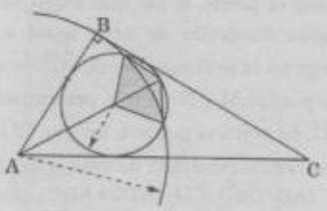
A) $\frac{a^2+b^2}{2}$ B) $\frac{a^2-b^2}{2}$ C) 2a(a+b)
D) 2b(a+b) E) π ab

8. Según el gráfico T y M son puntos de tangencia, M es incentro del triángulo ABC, el área de la región cuadrangular AMEF es 2 u², ME(AM+AF) = $\sqrt{17}$ u² y $\overline{FE}//\overline{TP}$. Calcule m$\widehat{AR}$ + m$\widehat{MS}$.

A) 152°
B) 106°
C) 170°
D) 154°
E) 136°



9. En el gráfico se muestra la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, si AB=7 cm y BC=24 cm, calcule el área de la región sombreada.



A) $3\sqrt{3}$ cm² B) $9\sqrt{3}$ cm² C) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm²

D) $\frac{27}{2}\sqrt{3}$ cm² E) $\frac{9}{4}\sqrt{3}$ cm²

10. En un triángulo acutángulo ABC se traza la bisectriz interior AL y su recta de Euler, ésta última es secante a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N respectivamente tal que BM=BN. En $\overline{AC}$ se ubica el punto E y con diámetro EC se traza una semicircunferencia que contiene al incentro del triángulo ABC y a L.
Si EC=6, calcule el área de la región limitada por $\overline{IL}$, $\overline{IC}$ y $\overline{LC}$.

A) $\frac{5\pi}{2}$ B) 3π C) 2π

D) 6π E) $\frac{3\pi}{2}$

11. Calcule el área de la región trapecial inscrita en una circunferencia de radio R sabiendo que las longitudes de las bases son iguales a las longitudes de los lados de un exágono regular y un cuadrado (ambos inscritos en la circunferencia).

A) $\frac{R^2}{4}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-1)$

B) $\frac{R^2}{4}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

C) $\frac{R^2}{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

D) $\frac{R^2}{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

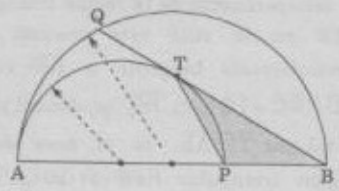
E) $\frac{R^2}{4}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

12. En un triángulo ABC (AC > AB), se traza la bisectriz interior AE en cuya prolongación se ubica el punto F tal que EC=FC. Si AB=c y AC=b, calcule la razón entre las áreas de las regiones ECF y ABE.

A) $\frac{b+c}{b-c}$ B) $\frac{b}{c}$ C) $\frac{bc}{b^2+c^2}$

D) $\frac{b(b-c)}{c^2}$ E) $\frac{c(b-c)}{b^2}$

13. Según el gráfico TP = PB, QT=6 y T punto de tangencia, calcule el área de la región sombreada.



A) $18\sqrt{3}$ B) 24 C) 6

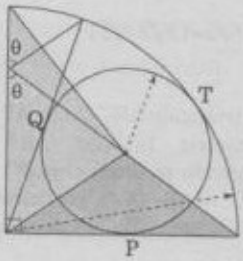
D) 18 E) $12\sqrt{3}$

14. En un polígono regular de n lados, la longitud del apotema es k. Sea P un punto ubicado en la región interior del polígono, calcule la suma de las distancias de P a los lados del polígono.

A) nk B) $\frac{nk}{2}$ C) $\frac{k^2}{n}$

D) $\frac{k(n+1)}{2}$ E) $\frac{k^2}{n+k}$

15. Según el gráfico P, Q y T son puntos de tangencia. Calcule la razón entre las áreas de las regiones sombreadas.



A) 5/3 B) 2 C) 5/4
D) 3/2 E) 4/3

16. Dado un rectángulo ABCD, en AD se ubica el punto E, en $\overline{BC}$ los puntos F y H ($F \in \overline{BH}$), tal que FE = ED, $m\measuredangle FEC = 90° - \frac{1}{2}(m\measuredangle BEF)$, y BH es igual al semiperímetro de la región triangular BFE en la cual está inscrita una circunferencia tangente a $\overline{BE}$ en T; $\overline{FD} \cap \overline{EC} = \{Q\}$, en $\overline{BQ}$ se ubica el punto L tal que $\overline{TL} // \overline{AB}$. Si el área de la región triangular BFE es 20 cm², calcule el área de la región ALHT.

A) 16 cm² B) 24 cm² C) 10 cm²
D) 40 cm² E) 15 cm²

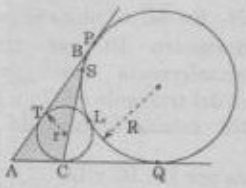
17. Dado un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan exteriormente los cuadrados ABDE y BFGC que limitan regiones cuyas áreas suman 100 m². Si M es el punto medio de $\overline{AC}$, calcule el área de la región MDBF.

A) 25 m² B) 30 m² C) 40 m²
D) 15 m² E) 20 m²

18. Dado un romboide ABCD, en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubican los puntos P y Q y en la prolongación de $\overline{DC}$ se ubica el punto R tal que PQRC es una región cuadrada de área igual a 36μ², luego en la prolongación de $\overline{AD}$ se ubican los puntos M y N y en la prolongación de $\overline{BC}$, se ubica el punto L tal que CLNM es una región cuadrada de área igual a 25μ². Si (AB)(BC)(CD)(AD) = 81μ⁴, calcule el área de la región ABCD.

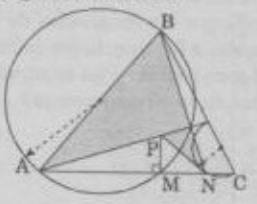
A) $12\sqrt{3}\mu^2$ B) $24\sqrt{2}\mu^2$ C) $2\sqrt{5}\mu^2$
D) $3\sqrt{30}\mu^2$ E) $6\sqrt{15}\mu^2$

19. Según el gráfico P, S, L, C, Q y T son puntos de tangencia, además $R=3r=3\sqrt{3}$. Calcule el área de la región triangular ABC.



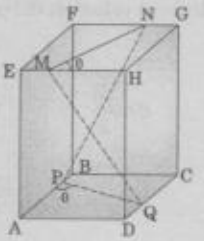
A) $6\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{3}$
D) $9\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

20. Según el gráfico, MN=2(NC) y el área de la región ABC es 30 cm². Calcule el área de la región sombreada.



A) 18 cm² B) 20 cm² C) 22 cm²
D) 25 cm² E) 24 cm²

6. En el prisma regular ABCD–EFGH, MN=a, MQ=b, NP=c, la altura del prisma es numéricamente igual al coseno del ángulo entre $\overline{NP}$ y $\overline{MQ}$.
Calcule el volumen del prisma.



A) $a^2\dfrac{(b^2+c^2-2a^2)}{bc}\operatorname{sen}^2\theta$

B) $a^2\dfrac{(b^2+c^2-2a^2)}{2bc}\operatorname{sen}\theta$

C) $a^2\dfrac{(b^2+c^2-2a^2)}{2bc}\operatorname{sen}^2\theta$

D) $a^2\dfrac{(2b^2+c^2-2a^2)}{2bc}\operatorname{sen}^2\theta$

E) $a^2\dfrac{(b^2+2c^2-2a^2)}{2bc}\operatorname{sen}^2\theta$

7. Se tiene un exaedro regular ABCD–EFGH se ubican M y N puntos medios de $\overline{EH}$ y $\overline{HG}$ respectivamente si AB =a, calcule el área de la sección plana determinado en el exaedro por el plano que pasa por M, N y el centro de la cara BCGF.

A) $\frac{7}{3}a^2$ B) $\frac{7}{3}\sqrt{2}\,a^2$ C) $\frac{3}{8}\sqrt{2}\,a^2$

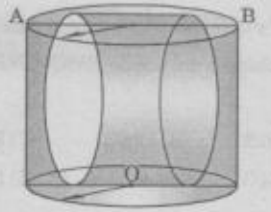
D) $\frac{7}{8}\sqrt{2}\,a^2$ D) $\frac{7}{8}a^2$

8. Se tiene un tronco de cilindro oblicuo cuyas bases son congruentes y determinan un diedro de medida 60°, sus generatrices son de longitud 3 y 9 y su sección recta es un círculo, calcule el área de la superficie total del octaedro regular que está inscrito en dicho tronco.

A) $36\sqrt{3}$ B) $45\sqrt{3}$ C) $18\sqrt{3}$

D) $10\sqrt{3}$ E) $27\sqrt{3}$

9. Del gráfico, los cilindros son de revolución y el pequeño es un cilindro equilátero, sus bases se encuentran fijas a la superficie lateral si la razón de sus volúmenes es de 1 a $\sqrt{2}$, calcule m∢AOB.



A) 90° B) 60° C) 120°

D) 53° E) 127°

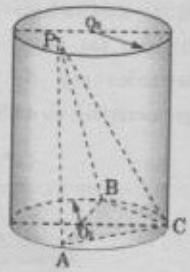
10. Se tiene un paralelepípedo rectangular ABCD–EFGH, la sección plana determinada por $\overline{EH}$ y el centro de la cara BCGF tiene de área 40, si el diedro entre el plano secante y EFGH mide 37°, CG=6 y GH=4, calcule la razón de volúmenes de los sólidos determinados.

A) 2/5 B) 3/4 C) 1/3

D) 1/6 E) 2/3

PROBLEMAS

1. Del gráfico AC = BC, P pertenece a la base superior de centro O_2 y la medida del ángulo determinado por $\overline{O_2C}$ y la base de centro O_1 es 60° Calcule el volumen de P–ABC si la generatriz del cilindro mide 6.



A) 6
B) 24
C) 18
D) 9
E) 12

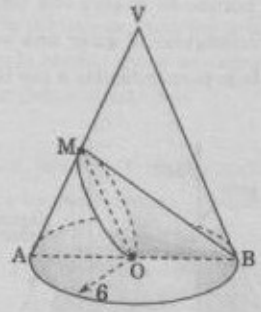
2. Calcule el volumen de un cono de revolución de altura 3, sabiendo que el plano secante que contiene al vértice determina en el sólido una región triangular rectangular y en la base una cuerda que subtiende un arco cuya medida es 120°.

A) 6π B) 18π C) 12π
D) 20π E) 10π

3. Se tiene una pirámide triangular regular V–ABC, donde VA = AB. Sea O centro de la esfera inscrita en la pirámide y M punto medio de la altura VH de la pirámide. Calcule la razón de volumenes de las pirámides O – VBC y M – ABC.

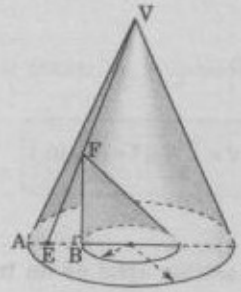
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{6}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

4. Del gráfico, el cono mayor es equilátero si AM=MV, calcule el volumen del cono de vértice B.



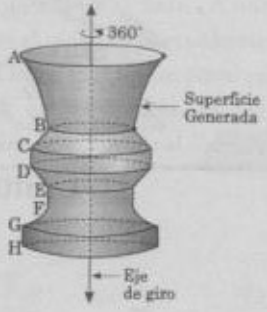
A) $6\pi\sqrt{3}$ B) $9\pi\sqrt{3}$ C) $8\pi\sqrt{3}$
D) $10\pi\sqrt{3}$ E) $7\pi\sqrt{3}$

5. Del gráfico, los volúmenes del cono de vértice F y del cono de revolución de vértice V están en la razón de 1 a 27, si $\frac{EF}{FV}=\frac{1}{2}$. Calcule $\frac{AE}{EB}$



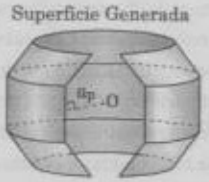
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{3}$ E) 1

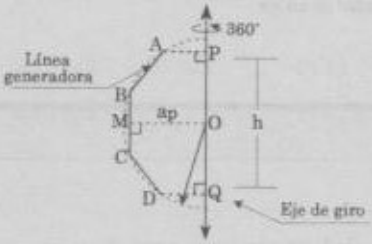
En el gráfico se muestra una superficie de revolución, generada por la línea ABCDEFGH al girar 360° en torno al eje.



TEOREMA DE ARQUÍMEDES

El área de la superficie generada por una poligonal regular al girar 360° entorno a un eje que contiene al centro de la poligonal regular, la cual está en un mismo semiplano respecto al eje, es igual al producto de la longitud de la circunferencia cuyo radio es igual a la longitud del apotema de la poligonal regular con la longitud de la proyección ortogonal de la poligonal sobre el eje.





$$A_{SG} = (2\pi a_p)\,h$$

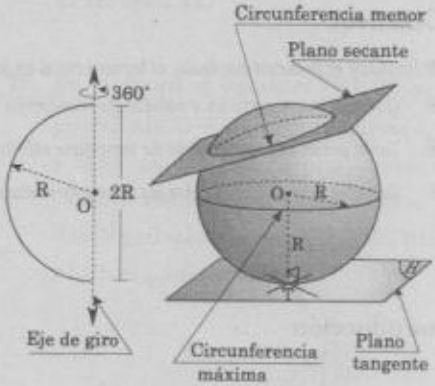
ABCD : Poligonal regular de centro O y apotema OM.

$\overline{PQ}$: Proyección ortogonal de ABCD sobre el eje.

A_{SG} : Área de la Superficie Generada.

SUPERFICIE ESFÉRICA

Es aquella superficie generada por una semicircunferencia al girar 360° en torno a su diámetro.



$$A_{SE} = 4\pi R^2$$

A_{SE}: Área de la Superficie Esférica.

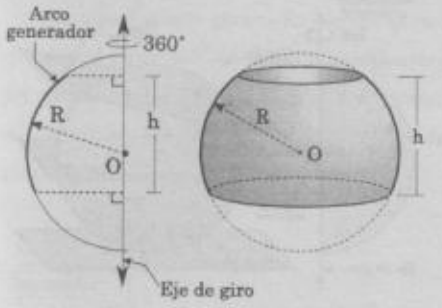
Nota

Si el plano H es tangente a la superficie esférica en T

$$\overline{OT} \perp \square H$$

ZONA ESFÉRICA

Es la porción de superficie esférica comprendida entre dos circunferencias determinadas por dos planos paralelos y secantes a la superficie esférica.

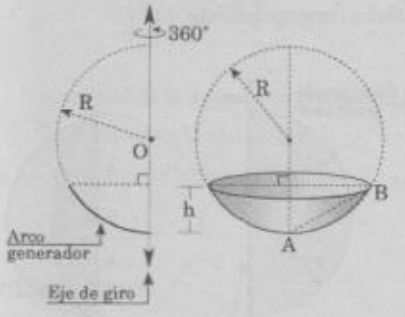


$$A_{ZE} = 2\pi Rh$$

A_{ZE}: Área de la Zona Esférica.

CASQUETE ESFÉRICO

Es la porción de superficie esférica que se determina por un plano secante a ella.



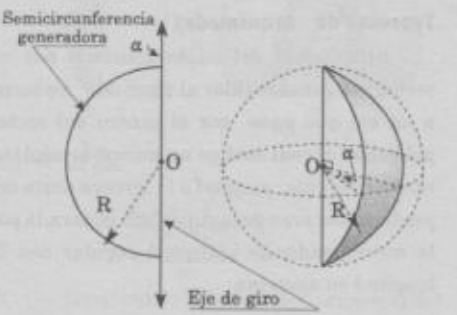
$$A_{CE} = 2\pi Rh$$

$$A_{CE} = \pi (AB)^2$$

A_{CE} : Área del Casquete Esférico.

HUSO ESFÉRICO

Es la porción de superficie esférica comprendida entre dos semicircunferencias máximas del mismo diámetro.



$$A_{HE} = \frac{\pi R^2 \alpha}{90°}$$

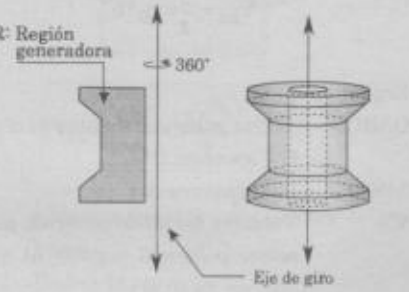
A_{HE} : Área del Huso Esférico.

α : Medida del ángulo del huso o ángulo de giro.

SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Es aquel sólido que se genera por la rotación de una región plana al girar en torno a un eje.

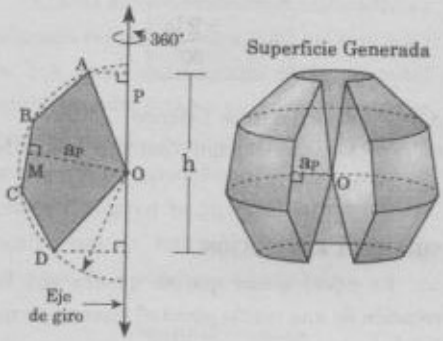
Estudiaremos a continuación sólidos de revolución generados por regiones planas contenidas en un mismo semiplano respecto al eje de giro.



En el gráfico se muestra el sólido de revolución generado por la región plana R al girar en torno al eje.

Teorema de Arquímedes

El volumen del sólido generado por un sector poligonal regular al girar 360° en torno a un eje que pasa por el centro del sector poligonal, el cual está en un mismo semiplano respecto del eje, es igual a la tercera parte del producto del área de la superficie generada por la correspondiente poligonal regular con la longitud su apotema.



$$V = \frac{(2\pi ap h)(ap)}{3}$$

$$V_{SG} = \frac{2}{3}\pi ap^2 h$$

Región

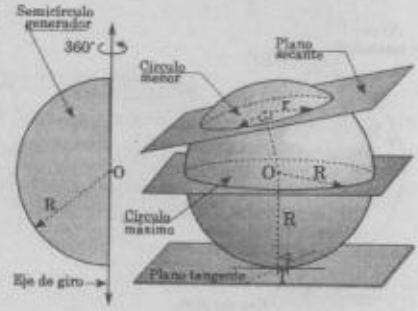
OABCD: Sector poligonal regular de centro O y apotema OM.

ABCD : Poligonal regular

V_{SG} : Volumen del sólido generado por el sector poligonal regular al girar 360° en torno al eje.

ESFERA

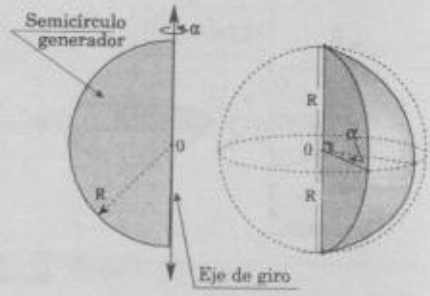
Es aquel sólido generado por un semicírculo al girar 360°, en torno a su diámetro.



$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3$$

CUÑA ESFÉRICA

Es aquella porción de esfera que está limitada por dos semicírculos máximos que tienen el diámetro en común y por el huso esférico correspondiente.



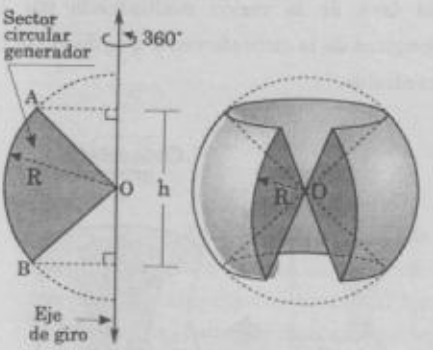
$$V_{CE} = \frac{\pi R^3}{270°}.\alpha$$

V_{CE} : Volumen de la cuña esférica.

α : Medida del ángulo de la cuña o ángulo de giro.

SECTOR ESFÉRICO

Es aquel sólido generado por un sector circular al girar 360° en torno a un diámetro del círculo correspondiente, estando el sector en un mismo semiplano respecto del eje de giro.



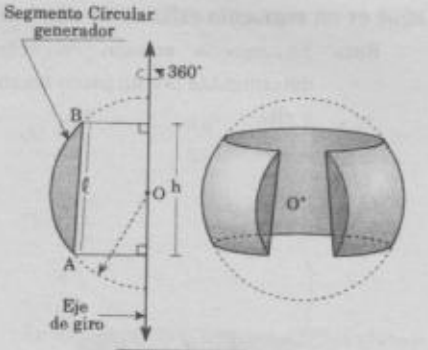
$$V_{SE} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

h : Longitud de la proyección ortogonal del arco AB sobre el eje de giro.

V_{SE} : Volumen del sector esférico.

ANILLO ESFÉRICO

Es el sólido generado por un segmento circular al girar 360° en torno a un diámetro del círculo correspondiente, estando el segmento circular en un mismo semiplano respecto del eje de giro.



$$V_{AE} = \frac{1}{6}\pi \ell^2 h$$

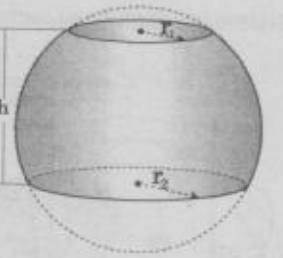
h : Longitud de la proyección ortogonal del arco AB sobre el eje de giro.

ℓ : Longitud de la cuerda AB.

V_{AE} : Volumen del anillo esférico.

SEGMENTO ESFÉRICO DE DOS BASES

Es la porción de esfera comprendida entre dos planos paralelos entre sí y secantes a la esfera.



$$V_{SE} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r_1^2 h}{2} + \frac{\pi r_2^2 h}{2}$$

$_{SE}$: Volumen del segmento esférico de dos bases.

h : Distancia entre los planos paralelos.

Según la definición:

F es un Punto Fijo (Foco), $\mathcal{L}$ es la recta directriz y P(x;y) es un punto cualquiera de coordenadas genéricas x e y de la parábola, luego:

$$\boxed{d(P, F) = d(P, \overleftrightarrow{\mathcal{L}})}$$

Por definición de cónica:

$$\boxed{\frac{d(P, F)}{d(P, \overleftrightarrow{\mathcal{L}})} = e}$$

Luego: $\boxed{e = 1}$, donde e es la excentricidad de la parábola.

ELEMENTOS ASOCIADOS A LA PARÁBOLA

Foco	: F
Directriz	: $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$
Eje Focal	: $\mathcal{L}_1$
Vértice	: V(h; k)
Lado recto	: $\overline{MM'}$ (MM' =4p)
Parámetro	: p(VF=VQ = p)
Cuerda Focal	: $\overline{AB}$
Cuerda	: $\overline{TS}$

FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

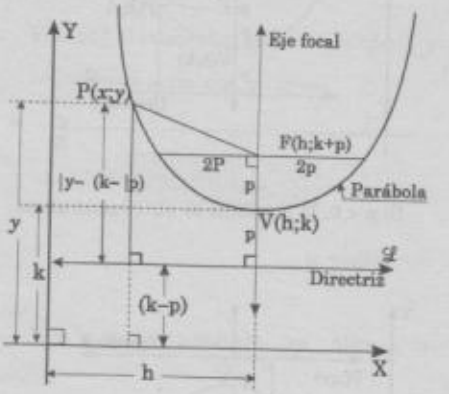
Las diversas formas de la ecuación cartesiana de una parábola, depende de la ubicación del eje focal, con respecto a los ejes coordenados.

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CON EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y

La ecuación cartesiana de la parábola cuyo vértice es V(h; k) y su eje focal es paralelo al eje Y está dado por:

$$\mathcal{P}: \boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$$

Siendo (x;y) coordenadas genéricas de un punto de la parábola, p es su parámetro.



Demostración

Sea P(x; y) un punto de la parábola de variables genéricas x e y, luego por definición, se tiene:

$$d(P,F) = d(P, \overleftrightarrow{\mathcal{L}}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

- Por distancia entre dos puntos:

$$d(P, F) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

- Distancia del punto P a la directriz

$$d(P, \overleftrightarrow{\mathcal{L}}) = |y-(k-p)| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1)

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} = |y-(k-p)|$$

ordenando y reduciendo se tiene:

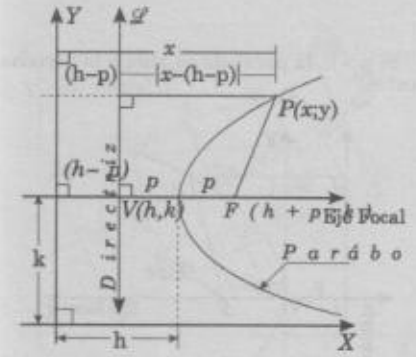
$$\boxed{\mathcal{P}: (x-h)^2 = 4p(y-k)}$$

Si p > 0, la parábola se abre hacia arriba.

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CON EJE FOCAL PARALELO AL EJE X

La ecuación cartesiana de la parábola cuyo vértice es V(h; k) y su eje focal es paralelo al eje *X*, está dado por:

$$\mathcal{P}: \boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$$



p: parámetro

Demostración

Sea P(*x* ; *y*) un punto cualquiera de la parábola, luego por la definición, se tiene:

$$d(P, F) = d(P, \overleftrightarrow{\mathcal{L}}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

- Por distancia entre dos puntos:

$$d(P, F) = \sqrt{(x-(h+p))^2 + (y-k)^2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

- Distancia del punto P a la directriz.

$$d(P, \overleftrightarrow{\mathcal{L}}) = |x-(h-p)| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1)

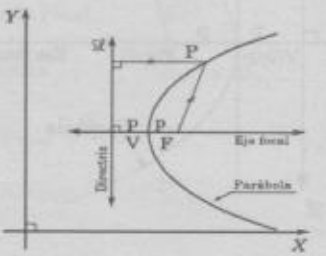
$$\sqrt{(x-(h+p))^2 + (y-k)^2} = |x-(h-p)|$$

Elevado al cuadrado, ambos miembros y reduciendo términos, se tiene:

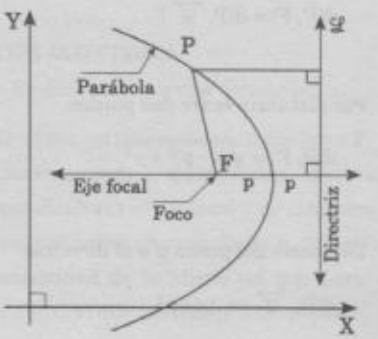
$$\mathcal{P}: \boxed{(y-x)^2 = 4p(x-h)}$$

p: parámetro

Si p > 0, la parábola se abre a la derecha:

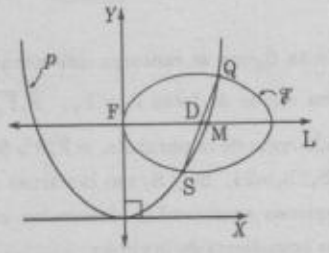


Si p < 0; la parábola se abre a la izquierda.



PROBLEMAS

1. Según la figura L es eje focal de la elipse $\mathscr{E}$ de centro D, DM = 1. El eje Y es el eje focal de la parábola A de foco F, cuya ecuación es de $8y = x^2$, los puntos S y Q tienen ordenadas x_1 y x_2, calcule $x_1.x_2$.



A) $\frac{1}{16}$ B) 2 C) 14

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

2. En la siguientes proposiciones, indique la veracidad o falsedad según corresponda.

I. Si dos parábolas tienen el mismo eje focal y contienen al mismo vértice, entonces tiene una misma directriz.

II. La ecuación $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ representa la ecuación de una elipse, si A y B tienen el mismo signo.

III. Si en una hipérbola sus asíntotas son perpendiculares entonces la hipérbola es equilátera.

A) FVV B) FFV C) FFF

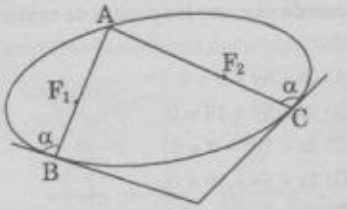
D) VVF E) VVV

3. Por el punto P de una parábola de foco F y de ecuación $x^2 = 12y$, se traza la cuerda focal $\overline{PQ}$ tal que PF= 3(FQ). Calcule el área de la región cuadrangular que tiene por vértices a P, Q, el vértice de la parábola y el punto de intersección de la directriz y el eje focal.

A) $12\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{2}$

D) $6\sqrt{2}$ E) $7\sqrt{3}$

4. Según la figura F_1 y F_2 son los focos de la elipse, si $(AB)(AF_1)=8$ y B, C son puntos de tangencia, calcule $(AC)(AF_2)$.



A) $4\sqrt{2}$ B) $8\sqrt{2}$ C) 8

D) 16 E) 4

5. El foco de una parábola está ubicado en el punto (0; 1/4), la directriz es paralela al eje de las abscisas e interseca al eje de ordenadas, un segmento cuya longitud es 0,25, determine la ecuación de la parábola.

A) $x^2 = -y$ B) $x^2 = 1$ C) $x^2 = y+1$

D) $x^2 = y$ E) $y^2 = x$

6. Se tiene una parábola de foco F y de ecuación $y^2-4y-8x+20=0$, en el cual se dirige un rayo de luz hacia el foco, determinando con el eje focal un ángulo cuya medida es 45° y al llegar a la parábola se refleja, determine la ecuación del rayo reflejado.

A) $y+2\sqrt{6}-6=0$

B) $y-2\sqrt{6}+6=0$

C) $y-\sqrt{6}+2=0$

D) $y-2\sqrt{2}-6=0$

E) $y+4\sqrt{2}-6=0$

7. Desde el punto C(1; −10) se han trazado rectas tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$, determine la ecuación de la cuerda que une los puntos de contacto.

A) $2x-5y+9=0$

B) $2x-3y+16=0$

C) $2x-10y-3=0$

D) $2x+5y-16=0$

E) $2x-5y-8=0$

8. Por un punto P de una parábola de foco F y ecuación $(y-2)^2=8(x+1)$, se traza $\overline{FP}$. Si la medida del ángulo que determinan $\overline{FP}$ y el eje x es 53°. Determine las coordenadas de P.

A) $\left(\frac{3}{2};4\right)$ B) (7; 10) C) $\left(\frac{5}{2};7\right)$

D) $\left(\frac{5}{2};1\right)$ E) $\left(\frac{5}{2};2\right)$

9. Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (−2; 3) sea igual a la distancia de la recta $x+6=0$

A) $(x+2)=y^2$

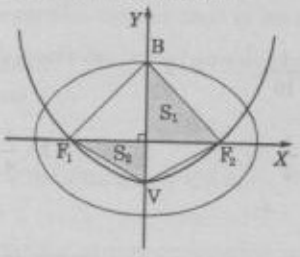
B) $(x+4)^2=y^2$

C) $(x+4)=(y-2)^2$

D) $(x-4)=(y-2)^2$

E) $8(x+4)=(y-3)^2$

10. En la figura se muestra una parábola y una elipse de focos F_1 y F_2; $\overline{F_1F_2}$ es el lado recto de la parábola, si $F_1B=5$ y $(S_1)(S_2)=24$, S_1 y S_2 son las áreas de las regiones sombreadas, determine una de las ecuaciones de la elipse.



A) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

B) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

C) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

D) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

E) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$