

2007 年春季学期“随机过程”期末考试题

注意：本试卷共有8道题，每题10分，同学们可以任意选做，最终卷面成绩将由得分最高的5道题的分数相加产生，满分50分。

1. 设 Y_n 是掷均匀的色子 n 次后得到的点数之和，请计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \equiv 0 \pmod{13})$$

其中 $Y_n \equiv 0 \pmod{13}$ 表示 Y_n 可以被13整除。

2. 每天早上张三都要出门跑步，张三的家有前后两个门，门口都有一些鞋，两个门口鞋的数目之和为 N 。张三出门时，如果门口有鞋则穿上，如果没有，就只好光脚跑了；跑步回来进门时，如果穿着鞋，则将鞋脱下放在门口。假定张三出门时选择前后门的概率相同，回家时也同样，请计算充分长时间以后，张三出门时不幸要光脚跑步的概率。

3. 考虑随机过程

$$X(t) = Z^{N(t)}$$

其中 $N(t)$ 是标准 Poisson 过程，参数为 λ ， $P(Z=1)=p$ ， $P(Z=-1)=1-p$ ，

且假定 $N(t)$ 和 Z 统计独立，请计算 $X(t)$ 的自相关函数。

4. 设随机过程

$$Y(t) = X_{N(t)}$$

其中 $N(t)$ 是标准 Poisson 过程，参数为 λ ， $\{X_n\}$ 为独立同分布随机变量，均值为 m ，方差为 σ^2 ，请计算 $Y(t)$ 的功率谱密度。

5. 设 U 是 $[0, 2\pi]$ 均匀分布的随机变量，随机变量 X 独立于 U ，且密度为

$$f_X(x) = |x|^3 \exp\left(-\frac{x^4}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

设随机过程 $Y(t) = X^2 \cos(\omega t + U)$ ，计算 $Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_n)$ 的 n 维特征函数。

6. 设零均值宽平稳 Gaussian 过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}$$

请计算 $Y(t) = \exp(\alpha X(t))$ 的自相关函数。

7. 考虑零均值宽平稳 Gaussian 白噪声 $X(t)$ ，对于给定的 Δt ，请设计一款线性时不变滤波器（给出其传递函数），使得 $X(t)$ 通过该滤波器后得到的随机过程 $Y(t)$ 满足： $Y(t)$ 的采样过程 $\{Y_n = Y(n\Delta t), n \in N\}$ 仍然是 Gaussian 白噪声。

8. 考虑 Poisson 过程 $N(t)$ ，令 T_n 为第 n 次事件发生时刻，给定时刻 t ，设

$$A(t) = t - T_{N(t)}, \quad B(t) = T_{N(t)+1} - t$$

请计算 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的分布及其联合分布，判断这两者是否独立。然后请计算 $A(t) + B(t)$ 的均值。