“随机过程”期末考试题

2003 年 6 月 19 日

1　考虑如下的随机过程模型：
$$\begin{cases} X_{n+1} = \dfrac{1}{2} X_n + V_n \\ Y_n = X_n + W_n \end{cases}$$

其中，$\{V_n\}$ 是独立同分布的零均值方差为 1 的标准 Gaussian 随机变量，且独立于 X_0，$\{W_n\}$ 也是独立同分布的零均值方差为 1 的标准 Gaussian 随机变量，并且独立于 X_0 与 $\{V_n\}$。求解下列问题：

- 当 X_0 取何种初始分布时，可以保证所有的 $\{X_n\}$ 分布是完全相同的。
- 如果观测到了 Y_0, Y_1，求出基于该观测的对 X_1 的均方意义下的最优估计 $\hat{X}_1$，并求出残差 $\varepsilon_1 = X_1 - \hat{X}_1$ 的密度。
- 假如在时刻 n，你已经得到了基于观测 $Y_0, Y_1, \cdots, Y_{n-1}$ 的均方意义下的最优估计 $\hat{X}_{n-1}$，试用 $\hat{X}_{n-1}$ 和 Y_n 共同构成基于观测 $Y_0, Y_1, \cdots, Y_n$ 的 X_n 的均方意义下的最优估计 $\hat{X}_n$，并求出残差 $\varepsilon_n = X_n - \hat{X}_n$ 的密度。

2　考虑一个简化的社会模型，恰好有 N 个男人和 N 个女人，对于每个男人而言，恰好有一个女人和他情投意合，所以完美的结局就是社会中恰好产生 N 对夫妇，每对都是情投意合的天作之合。

考虑下列情形，初始状态所有人都未婚，然后在每一个单位时间内，从未婚男人中任取一个，从未婚女人中也任取一个，让他们开始恋爱，如果恰好他们情投意合，则会结婚，如不然，则各自回到未婚行列中。在下一个单位时间，上述过程会重复进行。请计算从开始到所有人都顺利成婚所需要的时间的平均值。

3　考虑 Poisson 过程 $N(t)$，参数是 λ，构造过程 $X(t)$ 如下：$X(0)$ 为二值随机变量，$P(X(0)=1)=p$，$P(X(0)=0)=1-p$，且当 $N(t)$ 事件发生时，$X(t)$ 的值发生变化，若为 1 则变成 0，若为 0 则变成 1。试判断 $X(t)$ 是否 Markov 过程，若是，则 $X(t)$ 定义中的 p 取什么值时该 Markov 链是齐次的。研究该链的常返性和极限特性。

4　令 $X(n)$ 是独立同分布的随机变量，满足 $P(X(n)=1)=P(X(n)=-1)=0.5$，定义 $Y(t)=X(\lfloor t \rfloor+\phi)$，其中 $\lfloor t \rfloor$ 为不超过 t 的最大整数，ϕ 为与 $X(n)$ 独立的 $[0,2\pi]$ 间的均匀分布。判断 $Y(t)$ 的宽平稳性和平稳性，并给出相应证明。