A 卷答案（B 卷可以参考答案的思路）

1. 解：

设随机变量 X 表示任一天下雨与否，Y 表示地面干湿与否。

记 $X=0$ 表示无雨，$X=1$ 表示下雨；$Y=0$ 表示地面干，$Y=1$ 表示地面湿。

（1）$P(X=0)=0.5, P(X=1)=0.5$

任一天下雨与否的平均信息量为 $H(X)=-\sum_{i=0}^{1}P(X=i)\log P(X=i)=1$

共需要的存储量：$100\times365\times H(X)/8=4563$ (字节)

（2）$P(Y=0)=\sum_{i=0}^{1}P(Y=0\,|\,X=i)=0.3; P(Y=1)=\sum_{i=0}^{1}P(Y=1\,|\,X=i)=0.7$

任一天地面干湿与否的平均信息量 $H(Y)=-\sum_{i=0}^{1}P(Y=i)\log P(Y=i)=0.8813$

共需要的存储量：$100\times365\times H(Y)/8=4021$(字节)

（3）记联合概率 $P(X=i,Y=j)=P(i,j)$，则 $P(i,j)=P(X=i)P(Y=j\,|\,X=i)$

由此得：$P(0,0)=0.25, P(0,1)=0.25, P(1,0)=0.05, P(1,1)=0.45$

平均联合信息量为 $H(XY)=-\sum_{j=0}^{1}\sum_{i=0}^{1}P(i,j)\log P(i,j)=1.7345$

共需要的存储量：$100\times365\times H(XY)/8=7914$(字节)

（4）每天中午下雨与否的不确定度由 $H(X)$ 衡量，而有地面干湿记录后每天中午下雨与否还剩下的不确定度由 $H(X\,|\,Y)$ 衡量，那么每天地面干湿记录提供的关于下雨与否的信息为：$I(X;Y)=H(X)-H(X\,|\,Y)=H(Y)-H(Y\,|\,X)$，

其中 $H(Y\,|\,X)=-\sum_{i=0}^{1}P(X=i)\sum_{j=0}^{1}P(Y=j\,|\,X=i)\log P(Y=j\,|\,X=i)=0.7345$

则 $I(X;Y)=0.8813-0.7345=0.1468$

一年能提供的信息为：$365\times I(X;Y)=53.5820$ （bit）

（5）令随机变量 X_i 表示第 i 天下雨与否，则所需存储量为

$$
\begin{aligned}
H(X_1X_2X_3\cdots)&=H(X_1)+H(X_2\,|\,X_1)+H(X_3\,|\,X_1X_2)+\cdots\\
&\le H(X_1)+H(X_2)+H(X_3)+\cdots,\text{等号当且仅当}X_1X_2X_3\cdots\text{相互独立时取得}
\end{aligned}
$$

若每天下雨不独立，则上述不等式只能取小于号，故存储量相比（1）的结果变小

2. 解：

AMI 码属于三电平，发送“0”时采用零电平传输，“1”时采用正电平和负电平交替传输。由于发送“0”或“1”独立等概，所以零电平出现的概率为 1/2，正电平出现的概率为 1/4，负电平出现的概率为 1/4。

3. 解：

（1）一般的升余弦滤波器的频响可以表示如下：

$$H(\omega)=\begin{cases}1 & 0\le|\omega|<\dfrac{(1-\alpha)\pi}{T_s}\\ \dfrac{1}{2}\left\{1+\cos\dfrac{T_s}{2\alpha}\left[|\omega|-(1-\alpha)\dfrac{\pi}{T_s}\right]\right\} & \dfrac{(1-\alpha)\pi}{T_s}\le|\omega|<\dfrac{(1+\alpha)\pi}{T_s}\\ 0 & |\omega|\ge\dfrac{(1+\alpha)\pi}{T_s}\end{cases}$$

根号升余弦频响的关键是求：

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1+\cos\frac{T_s}{2\alpha}\left[\omega-(1-\alpha)\frac{\pi}{T_s}\right]\right\}}=\sqrt{\frac{1}{2}\times2\cos^2\frac{T_s}{4\alpha}\left[\omega-(1-\alpha)\frac{\pi}{T_s}\right]}$$

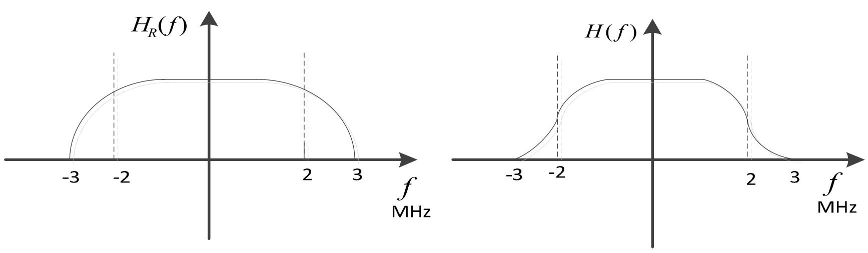
$$=\cos\frac{T_s}{4\alpha}\left[\omega-(1-\alpha)\frac{\pi}{T_s}\right],\quad \frac{(1-\alpha)\pi}{T_s}\le\omega<\frac{(1+\alpha)\pi}{T_s}$$

则根号升余弦滤波器的频响可以表示为：

$$H_{sq}(\omega)=\begin{cases}1 & 0\le|\omega|<\dfrac{(1-\alpha)\pi}{T_s}\\ \cos\dfrac{T_s}{4\alpha}\left[|\omega|-(1-\alpha)\dfrac{\pi}{T_s}\right] & \dfrac{(1-\alpha)\pi}{T_s}\le|\omega|<\dfrac{(1+\alpha)\pi}{T_s}\\ 0 & |\omega|\ge\dfrac{(1+\alpha)\pi}{T_s}\end{cases}$$

由题知：$\alpha=0.5,\ \dfrac{1}{2T_s}(1+\alpha)=3\,MHz$

不难画出接收滤波器和总滤波器频响如下：



（2）当采用匹配滤波接收时，采样点的信噪比取得最大值 $2E_s/N_0$，其中 E_s 表示每个符号周期接收波形的能量，N_0 表示接收机入口处的单边功率谱密度

本题中接收机入口处的信号功率为 $2/5000=4\times10^{-4}$ W（37dB 衰减对应衰减5000倍），

无码间串扰的符号率为$R_s=\frac{1}{T_s}=4\times10^6$ B（波特），每个符号周期接收波形的平均能量为

$E_s=\frac{4\times10^{-4}}{4\times10^{6}}=1\times10^{-10}$ ，则 $\frac{2E_s}{N_0}=\frac{2\times10^{-10}}{1\times10^{-10}}=2$,即为3 dB

（3）每个采样点最多可传的信息量为$C_{采样点}=\frac{1}{2}\log(1+SNR_{采样点})=\frac{1}{2}\log3=0.7925$

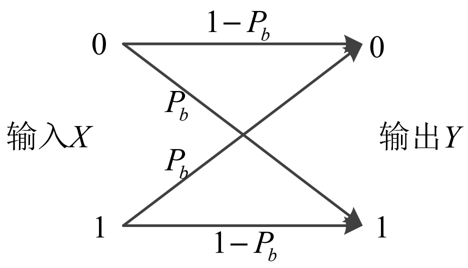
故该系统最高可实现的信息传输率为：$R_s\cdot C_{采样点}=3.1699$ Mbit/s

由 AWGN 信道下的信道容量的来历可知，要达到信道容量输入信号的电平应服从高斯分布，因为相同输入功率下该分布的微分熵最大，即能携带更多的信息。

（4）采用二进制双极性传输时，误比特率为:

$$P_b=Q(\sqrt{SNR_{采样点}})=Q(\sqrt{2})=0.0786$$

(5)若采用（4）中的码型，根据其误比特率可以画出如下的二进制对称信道：



对于二进制对称信道，当输入符号等概分布时，输入输出之间的互信息$I(X;Y)$最大，此即每传输最多可传的信息

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y\mid X)=1-0.3974=0.6026$$

则该二进制信道可实现的信息传输率为：$R_s\cdot I(X;Y)=2.4$ Mbit/s

4. 解：

（1）将两个接收信号看成一个整体，其带宽处于 10k—15kHz，根据带通采样定理不难得到最低采样率为：$f_s=2B(1+\frac{M}{N})=2\times5\times(1+0)=10\ KHz$

仔细分析可知当采样率低于 10 kHz 时，频谱将会发生混叠。

（2）不过载噪声功率$\sigma_q^2=\frac{\Delta^2}{12}$，其中$\Delta$表示量化间隔

由于信号大小服从零均值的均匀分布（这里由于其中一路信号功率相对小很多，其影响可以忽略，所以近似认为合成信号还是服从均匀分布），设信号取值范围为$[-V,V]$,

根据均匀分布的功率计算，可得该信号功率为 $P_s=\frac{1}{3}V^2$

那么量化后信号的信噪比为：$SNR=\frac{P_s}{\sigma_q^2}=\left(\frac{2V}{\Delta}\right)^2=L^2$，这里 L 为量化电平数，根据题中要求即 $L^2\geq 1000$，则 $L\geq 31.6$，故至少需要 5 位量化

（3）参考网络学堂的思路提示和对量化噪声的功率谱密度的证明，可知采样后量化噪声的功率谱密度为 $\sigma_q^2 f_s$，经过增益为 $1/f_s$ 的重构滤波器后，量化噪声的双边功率谱密度为 σ_q^2/f_s，那么量化不过载情况下恢复出的信号的信噪比分别为：

$$SNR_1=\frac{P_{s1}}{2B_{s1}\sigma_q^2/f_s}=\frac{12P_{s1}f_s}{2B_{s1}\Delta^2}=\frac{12\times 1\times 10\times 10^3}{2\times 1\times 10^3\cdot\Delta^2}=\frac{60}{\Delta^2},$$

$$SNR_2=\frac{12P_{s2}f_s}{2B_{s2}\Delta^2}=\frac{12\times 1\times 10^{-6}\times 10\times 10^3}{2\times 3\times 10^3\cdot\Delta^2}=\frac{2\times 10^{-5}}{\Delta^2}\geq 1000\Rightarrow\Delta\leq\sqrt{2}\times 10^{-4}$$

其中大信号的幅度由 $P_s=\frac{1}{3}V^2=1\mathrm{W}$ 得 $V=\sqrt{3}$

那么为保证量化不过载且达到题中信噪比要求，至少需要的量化电平数为

$$L=\frac{2V}{\Delta}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times 10^{-4}}=2.4495\times 10^4\in(2^{14},2^{15})$$

则需要 15 位量化

5. 解：

(1)此题可参考教材 212 页的式（9-24），即

$$P(f)=\frac{1}{T_s^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|PG_1(\frac{n}{T_s})+(1-P)G_2(\frac{n}{T_s})\right|^2\delta(f-\frac{n}{T_s})+\frac{1}{T_s}P(1-P)\left|G_1(f)-G_2(f)\right|^2$$

其中 T_s 为码元周期，$G_1(f)$、$G_2(f)$ 分别为 $g_1(t)$、$g_2(t)$ 的傅里叶变换，$g_1(t)$、$g_2(t)$ 为消息“0”和“1”对应的波形，P、$(1-P)$ 分别为“0”和“1”出现的概率

也可仿照 2FSK 的功率谱密度由 2 个不同载频的 2ASK 叠加而来这种方法，分别求出 2 种码元波形代替 2ASK 波形时的功率谱。假设 $g_1(t)=0$，由上式不难得到 $g_2(t)$ 代替 2ASK 波形的功率谱密度为：

$$P_{s2}(f)=\frac{1}{T_s^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|(1-P)G_2(\frac{n}{T_s})\right|^2\delta(f-\frac{n}{T_s})+\frac{1}{T_s}P(1-P)\left|G_2(f)\right|^2$$

若假设 $g_2(t)=0$，则得到 $g_1(t)$ 代替 2ASK 波形的功率谱密度为：

$$P_{s1}(f)=\frac{1}{T_s^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|PG_1(\frac{n}{T_s})\right|^2\delta(f-\frac{n}{T_s})+\frac{1}{T_s}P(1-P)\left|G_1(f)\right|^2$$

两者相加即可得到整个随机信号的功率谱

本题中 $g_1(t)$=$A\sin(\frac{5\pi}{T_s}t),(0\le t\le T_s);\ g_2(t)$=$A,\ (0\le t\le T_s)$

不难得到

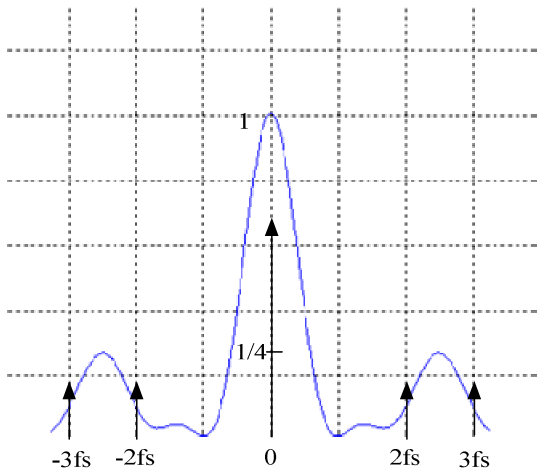
$$G_1(f)=\left[AT_s\frac{\sin(\pi T_s f)}{\pi T_s f}e^{-j\pi T_s f}\right]*\frac{j}{2}\left[\delta(f+\frac{2.5}{T_s})-\delta(f-\frac{2.5}{T_s})\right];$$

$$G_2(f)=AT_s\frac{\sin(\pi T_s f)}{\pi T_s f}e^{-j\pi T_s f}$$

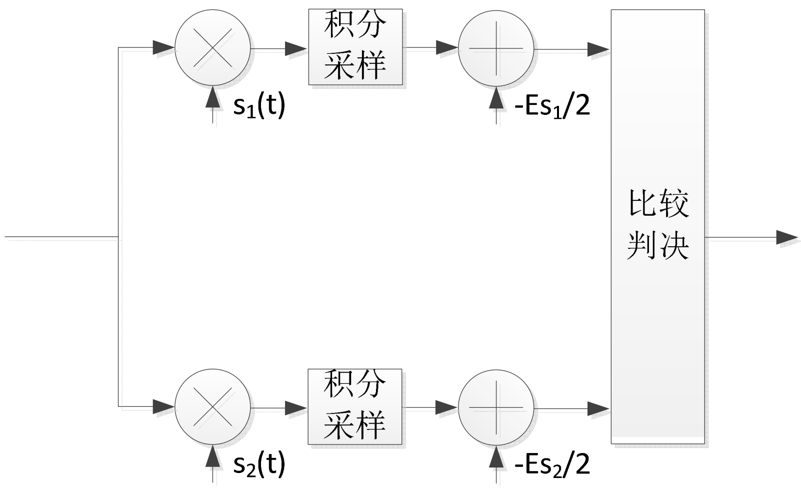
代入上述公式即可画出功率谱图。

本题特别要注意离散线谱的位置，2.5fs 处是没有离散谱的，离散谱只存在于符号率的整数倍处。另外很多同学把逻辑“0”对应的波形看成方波被正弦波调制，简单地把方波的功率谱做频谱搬移，这是不对的。因为本题中一个码元周期内的正弦波周期数不是整数，如果是调制的话，那么逻辑“0”将映射为不止一种波形。

大致的功率谱如下图所示，注意存在线谱，在 0 频处和 $\pm 2f_s$、$\pm 3f_s$ 附近的幅度较为明显，其他 f_s 的整数倍处也存在较弱的功率谱，图中未给出。这里横坐标每一格对应 $f_s=\frac{1}{T_s}$.



(2)



(3)由于信源独立等概，因此误码率P_b与成对差错概率$P(s_1 \to s_2)$相等。$P(s_1 \to s_2)$的计算

可参照第七讲课件公式$P\left(s_1 \to s_2\right) = Q\left(\sqrt{\dfrac{E_{s_1} + E_{s_2} - 2\rho_{s_1 s_2}\sqrt{E_{s_1}E_{s_2}}}{2N_0}}\right)$，其中

$$E_{s_1} = \frac{A^2 T_s}{2}, E_{s_2} = A^2 T_s, E_s = \frac{E_{s_1} + E_{s_2}}{2} = \frac{3A^2 T_s}{4}$$

$$\rho_{s_1 s_2} = \frac{\left\langle s_1(t), s_2(t)\right\rangle}{\sqrt{\left\langle s_1(t), s_1(t)\right\rangle}\sqrt{\left\langle s_2(t), s_2(t)\right\rangle}} = \frac{\int_0^{T_s} s_1(t) s_2(t)\, dt}{\sqrt{E_{s_1}E_{s_2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{5\pi}$$

代入有

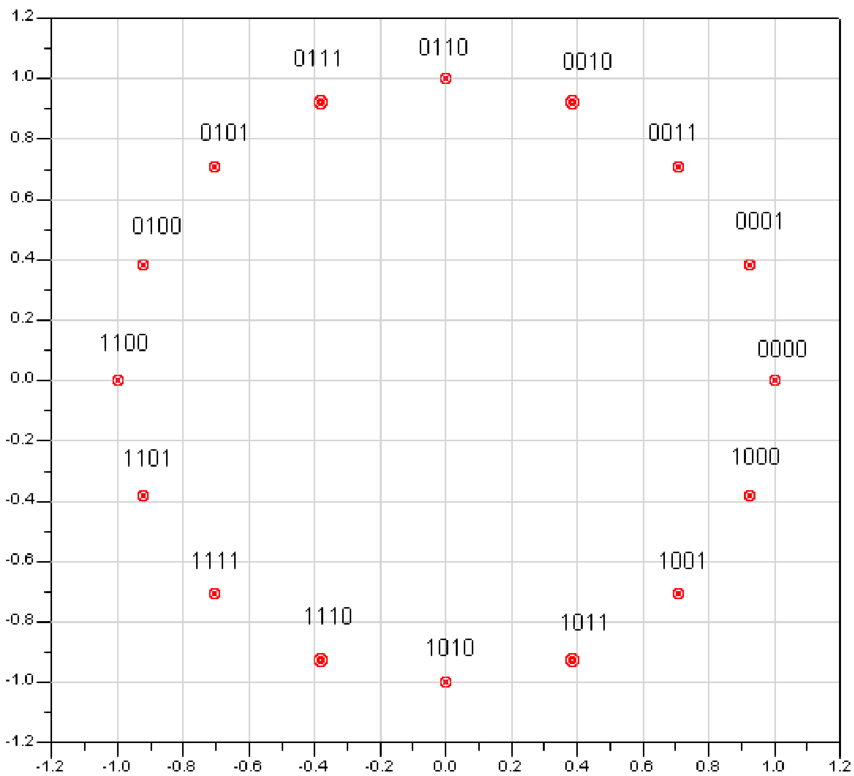
$$P_b = Q\left(\sqrt{\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5\pi}\right)\frac{A^2 T_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\left(1 - \frac{8}{15\pi}\right)\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{0.83\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(0.91\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

(4)逻辑 1 波形变负时，两种符号波形的相关系数由正数变负数，由

$P\left(s_1 \to s_2\right) = Q\left(\sqrt{\dfrac{E_{s_1} + E_{s_2} - 2\rho_{s_1 s_2}\sqrt{E_{s_1}E_{s_2}}}{2N_0}}\right)$可知，成对错误概率下降，因而误码率下降。

6. 解：

一种映射方式如下图所示



0111
0110
0010
0101
0011
0100
0001
1100
0000
1101
1000
1111
1001
1110
1011
1010
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
-1.2
-1.2
-1.0
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2