1. 假定银行有 N 个服务台，各个服务台为一个顾客服务所需要的时间是独立同指数分布的随机变量，参数为λ。有 N+1 个顾客同时到达了银行，其中一个顾客为了攒“人品”，主动发扬风格，让其他 N 个人先接受服务，自己等待；当先接受服务的人中有人服务结束离开后，该好心人开始接受服务。试计算，该好心人成为 N+1 个人中最后一个完成服务离开的人的概率。

2. 考虑 Poisson 过程$\mathbf{N(t)}$，强度为λ。设事件间隔为$\mathbf{T_1, T_2}, \cdots$，令

$$\mathbf{M} = \mathbf{min}\{\mathbf{n} \mid \mathbf{T_n} = \mathbf{max}(\mathbf{T_1}, \cdots, \mathbf{T_n})\}$$

试计算$\mathbf{E}(\mathbf{T_1} + \cdots + \mathbf{T_M})$。

3. 令$\mathbf{X, Y}$为独立的 Gaussian 分布随机变量，均值分别为$\mathbf{m_1, m_2}$，方差均为 1，试求$\sqrt{\mathbf{X^2} + \mathbf{Y^2}}$的概率密度。

4. 考虑零均值宽平稳 Gaussian 过程$\mathbf{X(t)}$，相关函数为$\mathbf{exp}(-\alpha \mid \tau \mid)$，设 T 为确定的时间常数，试求$\mathbf{E}(\mathbf{X^4}(\mathbf{T}) \mid \mathbf{X(0)})$。

5. 设$\mathbf{X(t)}$为宽平稳随机过程，θ为与$\mathbf{X(t)}$独立的随机变量，服从[1，2]区间上的均匀分布。定义

$$\mathrm{Y(t)} = \int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{t}+\theta} \mathrm{X(s)ds}$$

试判定其是否宽平稳。如答案是肯定的，计算其功率谱密度。

6. 考虑随机过程$X(\mathrm{t}) = \cos(2\pi t + \theta)$，其中$\theta$为服从$[0,2\pi]$区间上均匀分布的随机变量。试计算下述均方意义下的极限

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t) dt$$

（注意：如果没有考虑“均方意义”，直接当作普通极限做，不得分。）

7. 设两枚不均匀硬币分别编号为 1 和 2。抛掷硬币 1，正面向上的概率为 p；抛掷硬币 2，正面向上的概率也为 p。现开始如下抛掷过程：反复抛掷一枚硬币，直至出现反面向上，然后换为反复抛掷另一枚硬币，出现反面再换回来，如此循环往复。

- 请计算：时间充分长之后，抛掷硬币 1 的概率。
- 如果初始时刻抛掷的是硬币 1，请计算第 5，6，7 次以及第 10，11，12 次抛掷均抛掷硬币 2 的概率。

8. 设$\{X_n, n = 0.1,2,\cdots\}$为 Markov 链，一步转移概率矩阵为 P，令$Y_n = (X_n, X_{n+1})$，很明显这也是 Markov 链。如果设$\{X_n\}$的不变分布为$\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots)$，试求$\{Y_n\}$的不变分布。