一.（15 分）回答如下问题

1． 用 FFT 方法测量信号频率（有按时间抽取的基 2FFT 处理器模块），设采集到 150 个数据，希望频率测量精度达到至少千分之一，如何做？

2． 用 FFT 对连续信号做谱分析，要求频率分辨率 △F≤5Hz，如果采用的采样间隔 T_s=1ms

试确定：① 最小信号采集持续时间；② 允许处理信号的最高频率；

③ 在一个记录中的最少点数。

解答：

1. 将序列补到：1024 点

或补 1024－150＝874 个点

2．① 最小信号采集持续时间：$t_p=\dfrac{1}{\Delta F}=\dfrac{1}{5}=200\text{ms}$；

② 允许处理信号的最高频率：$f_h=\dfrac{1}{2T_s}$=500Hz ；

③ 在一个记录中的最少点数：$N=\dfrac{f_s}{\Delta F}=\dfrac{1000}{5}=200$

温馨提示：这个题目考察的是利用 DFT 进行频谱分析，这是考察的一个重点。除了要掌握采样率（频谱混叠）问题外，还需要掌握频谱泄漏和栅栏现象。

二. (15 分)已知 x(n)是 N（N=偶数）点的有限长序列，它的 DFT 是 X(k),

1． 如果由 X(k)中所有奇次谐波组合成新的 $\dfrac{N}{2}$ 点频谱 $X_1(r)$(即 $X_1(r)=X(2r+1)$，$0\leq r\leq \dfrac{N}{2}-1$)，试推导：

$x_1(n)=\text{IDFT}[X_1(r)]$ （$0\leq n\leq \dfrac{N}{2}-1$）与原序列 x(n)的关系？

2． 根据以上的推导，问对 x(n)经过怎样的预处理，就可以用 $\dfrac{N}{2}$ 点的复数 FFT 模块得到 X(k)中全部的奇次谐波频谱，画出处理的流程框图（以 N=8 为例画图）。

解答：

1、

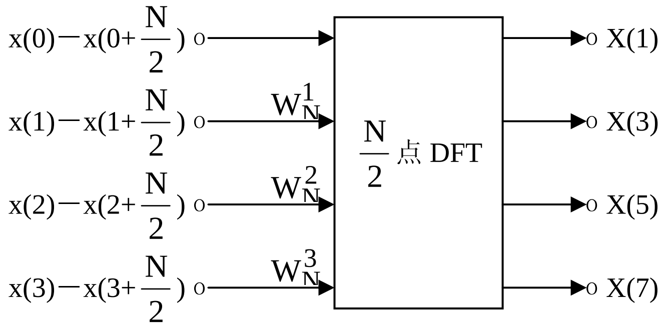
$$x_1(n)=\frac{2}{N}\sum_{r=0}^{N/2-1}X(2r+1)W_{N/2}^{-nr}\overset{令\,m=2r+1}{=}\frac{2}{N}\sum_{m=odd}X(m)W_N^{-2(\frac{m-1}{2})n}$$

$$=\frac{2}{N}\sum_{m=odd}X(m)W_N^{-nm}W_N^{n}=W_N^{n}\left(\frac{2}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{2}(1-(-1)^m)X(m)W_N^{-nm}\right)$$

$$=W_N^{n}\left(\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}(X(m)-W_N^{(N/2)m}X(m))W_N^{-nm}\right)$$

$$=(x(n)-x(n+\frac{N}{2}))W_N^{n}$$

2、



温馨提示：这个题目看似考察 DFT 的基本推导，实则考察基 2 频率抽选 FFT 的基本推导。当年不少同学在这个题目上出错，主要还是对 DFT 的推导、基 2FFT 的基本推导掌握的不扎实！希望同学们能形成习惯，每当看到序列在时间（或频率）上按照奇偶（或前后）组合出新的序列，就要首先考虑利用基 2FFT 的相关知识！

三.（15 分） 一个长度为 9 的序列，按 3*3 的时间抽取进行 FFT，推导它的按时间抽取方式分解的原理表达式，画出完整的蝶形图，分析其乘法运算量（其中，乘以 $\pm 1,\pm j$ 不计作一次乘法），比较它与直接补零用 16 点分裂基的运算量（使用分裂基算法时，不考虑一些输入信号是否是由补零产生）。

解答：

（略）

温馨提示：蝶形图是每年必考的题目，该类题目没有太多的解题技巧，踏踏实实的掌握课后作业是关键！

四.（15 分）证明题

1. 对巴特沃思滤波器，试证明：在滤波器的阻带内（$\Omega >> \Omega_c$）幅频特性的下降速度近似是 －20N（dB/十倍频程），其中 N 是滤波器的阶数；

2．对线性相位 FIR 滤波器，试证明：若 h(n)满足奇对称条件(即 h(n)=－h(N-1-n))，且 N=奇数，则 H(z)在 z=±1 处必为零点。

解答：

1、

$$20\lg\left|H(j\Omega)\right| = -20\lg\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \overset{\Omega>>\Omega_c}{\approx} 20\lg\sqrt{\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} = -20\lg\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{N}$$

$$= -20N\lg\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)$$

由上式可以看出：Ω 每增加 10 倍，幅频特性将衰减 20N。

温馨提示：要掌握基本的滤波器设计知识：基本公式、基本应用对象和范围。

2、

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)z^{-n}+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)}+\sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)z^{-n}+\sum_{m=0}^{\frac{N-3}{2}}h(N-1-m)z^{-(N-1-m)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)(z^{-n}-z^{-(N-1-n)})$$

由于 N=奇数，（N-1）为偶数，$\therefore z=\pm1$ 时，H(z)=0。

温馨提示：线性相位 FIR 滤波器是考察的重点！请务必掌握第 4、5 章中的相关推导！

五．（20 分）如果一个滤波器的冲激响应是 $h(n)=\begin{cases}1 & ,0\le n\le 15\\ 0 & ,others\end{cases}$，

1．求它的频率响应 $H(e^{j\omega})$，大致画出频率响应的草图，如果定义频率响应的峰

值到第一个零值点的距离为带宽，该滤波器的带宽为多大？

2．要求以 $H(e^{j\omega})$ 为基础，设计多通带滤波器，在 $[0,2\pi]$ 范围内，各通带中心为 $\omega_i=\dfrac{\pi}{3}k \quad k=0,1,\cdots,6$，每个通带形状与 $H(e^{j\omega})$ 一致，但带宽是 $H(e^{j\omega})$ 的约六分之一，求该滤波器的冲激响应 $h_1(n)$。

3．在 2 中滤波器的基础上，求一个新的滤波器，频率中心比 2 中滤波器向右平移 $\pi/12$，求该滤波器的冲激响应 $h_2(n)$。

（2、3 的滤波器称为梳状滤波器）

解答：

1、

$$H(e^{j\omega})=e^{j\frac{15}{2}\omega}\frac{\sin 8\omega}{\sin\dfrac{\omega}{2}}$$

带宽 $\pi/8$

2、

$$h_1(n)=\begin{cases}h(n/6), n=6K, 0\le K\le 15\\ 0 \quad 其他\end{cases}$$

3、

$$h_2(n)=\begin{cases}h(n/6)e^{j\frac{\pi}{12}n}, n=6K, 0\le K\le 15\\ 0 \quad 其他\end{cases}=h_1(n)e^{j\frac{\pi}{12}n}$$

温馨提示：看似考察滤波器的设计，其实又是在考察采样率变换相关知识！当年不少同学没有理解题目。要熟练掌握采样率变换的相关知识：时域推导、频谱间的关系！要形成习惯，凡是题目透露出“频谱形状一致，但宽度为 N 被或 N 分之一”信息时，首先想到能否用采样率变换的知识解答！

六．(20 分) 已知一数字系统用差分方程：y(n)=x(n)－x(n-1)+0.64y(n-2)描述

1. 画出系统的零、极点分布，粗略画出系统的幅频特性；说明它具有什么滤波特性？
2. 画出系统直接形式Ⅱ型结构流图，回答下列各问：

   (1) 如果系统用定点补码表数、舍入处理，字长取（B+1）位（包括 1

位符号位），求系统输出的运算量化噪声；

(2) 如果系统输入信号为：$x(n)=2\cos\frac{\pi}{6}n$，求系统输出端的信号功率与量化噪声功率之比（即 $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}$）；

解答：

1、

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-0.64z^{-2}}=\frac{1}{1-(0.8z)^{-2}}-z^{-1}\frac{1}{1-(0.8z)^{-2}}$$

$$h(n)=\begin{cases}(0.8)^{n} & n=2m\\ -(0.8)^{n-1} & n=2m+1\end{cases}$$

$$\sum_{n}h^{2}(n)=2(1+(0.8)^{2}+(0.8)^{4}+\cdots)=2\frac{1}{1-0.64}=5.56$$

$$\sigma_{f}^{2}=5.56\sigma_{e}^{2}$$

2、

$$\sigma_{y}^{2}=\left|H(e^{j\frac{\pi}{6}})\right|^{2}\frac{A^{2}}{2}=2\left|\frac{1-e^{-j\frac{\pi}{6}}}{1-0.64e^{-j\frac{\pi}{3}}}\right|^{2}=$$

$$2\left|\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6}}{1-0.64\cos\frac{\pi}{3}+j0.64\sin\frac{\pi}{3}}\right|^{2}=2\frac{2-2\cos\frac{\pi}{6}}{1.4096-1.28\cos\frac{\pi}{3}}=$$

$$=2\frac{2-\sqrt{3}}{1.4096-0.64}=0.7$$

$$\frac{S}{N}=\frac{0.7}{5.56\sigma_{e}^{2}}=0.12\frac{1}{\sigma_{e}^{2}}=0.01\cdot 2^{2B}$$

温馨提示：当年很多同学第二问没有做出来，因为大家不知道一个频率信号经过线性系统后如何求其功率。这是对最最基本概念的考察：频率信号经过线性系统后还是频率信号，只是幅度和相位发生了变化！

此外，有限字长效应是每年必考的题目，和蝶形图一样，很多同学考试时做不出来。希望大家扎扎实实的掌握好课后作业，不要偷懒，认真推导。其实，这一部分的分数是最好拿到手的啊！

遇到有限字长的题目，就是再不会也要多多的往上罗列公式☺，千万别空白!!!!!