

## 随机过程练习题

## 高斯过程 (1)

By Waiter 2014/12/1

## ➤ 题型 1 计算相关函数和功率谱密度

【2010-2】

设  $\Phi(t)$  为零均值宽平稳 Gauss 过程，相关函数为  $R(\tau)$ 。 $\theta$  是  $[0, 2\pi]$  上的均匀分布随机变量，且与  $X(t)$  独立， $\omega_c$  为常数，试计算

$$Y(t) = \cos(\omega_c t + \theta + X(t))$$

的相关函数。

【2009-7】

设  $\omega$  服从  $N(\mu, \sigma^2)$ ， $\theta$  服从  $[0, 2\pi]$  的均匀分布，两者相互独立。试计算随机过程  $X(t) = \cos(\omega t + \theta)$  的相关函数和功率谱。

【2007-6】

设零均值宽平稳 Gaussian 过程  $X(t)$  的功率谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}$$

请计算  $Y(t) = \exp(\alpha X(t))$  的自相关函数。

【2014-5】

设 $X(s)$ 为零均值高斯白噪声,  $E(X^2(t)) = \sigma^2$ , 考虑

$$Y(t) = \int_0^t X(s)ds, \quad Z(t) = \sin^3(Y(t))$$

试计算 $Z(t)$ 的相关函数。

【2014-3】

设 $X, Y$ 是两个独立的实随机变量,  $X$ 服从标准正态分布,  $Y$ 服从参数为 $\lambda = 1$ 的指数分布。设

$$Z(t) = Xe^{jYt}, -\infty < t < \infty$$

试问 $\{Z(t)\}$ 是否宽平稳? 若是, 求其自相关函数 $R_Z(\tau)$ , 功率谱密度 $S_Z(\omega)$ 。

## ➤ 题型 2 计算条件分布

【2010-7】

设 $X$ 和 $Y$ 为服从联合高斯分布的一维随机变量, 方差分别为 $\sigma_X^2$ 和 $\sigma_Y^2$ , 相关系数为 $\rho$ , 设 $U = Y^3$ ,  $V = Y^2$ , 试计算条件概率密度 $f_{X|U}(x|u)$ 和 $f_{X|V}(x|v)$ 。

【2008-4】

考虑零均值宽平稳 Gaussian 过程 $\mathbf{X}(t)$ , 相关函数为 $\exp(-\alpha|\tau|)$ , 设 $T$ 为确定的时间常数, 试求 $E(\mathbf{X}^4(T) | \mathbf{X}(0))$ 。

【2014-4】

设 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 是零均值高斯过程, 自相关函数为 $R_X(\tau) = 5\cos\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)3^{-|\tau|}$ , 试求

$$(1) \quad E\left[(X(3))^2 | (X(2) + X(4))\right] = ?$$

$$(2) \quad E[(X(2) + X(3)) | (X(2) + X(4))] = ?$$