注意：开卷考试！每题分值为10分，同学可以任意做题，卷面分数为得分最高的5道题分数之和。

1 设零均值宽平稳随机过程$X(t)$和$Y(t)$有相同的功率谱密度$S(\omega)$，且两者间联合平稳，互谱密度为$\rho(\omega)$，θ是$[0,2\pi]$上的均匀分布随机变量，且与$X(t)$，$Y(t)$独立，ω_c为常数，试计算

$$Z(t) = X(t)\cos(\omega_c t + \theta) + Y(t)\sin(\omega_c t + \theta)$$

的功率谱密度。

2 设$\Phi(t)$为零均值宽平稳Gauss过程，相关函数为$R(\tau)$。θ是$[0,2\pi]$上的均匀分布随机变量，且与$X(t)$独立，ω_c为常数，试计算

$$Y(t) = \cos(\omega_c t + \theta + X(t))$$

的相关函数。

3 假定学校早上7点开门，男生按照强度为λ的Poisson流到达学校，女生按照强度为μ的Poisson流到达学校，男女生的到达行为相互独立。试计算从7点开始算起，到达学校的头两个学生性别不同的概率。

4 三名网球选手A,B,C进行比赛，每一轮都是两人比赛，一人轮空，本轮比赛的胜者下一轮与本轮轮空的选手进行比赛。设三名选手的实力分别为S_A，S_B和S_C，每次两人比赛时，选手X击败选手Y的概率为$S_X/(S_X+S_Y)$，其中$X,Y \in \{A,B,C\}$。试计算时间充分长后，各名选手实际参加比赛数目占总比赛数目的比例。

5 假定某银行有两个服务台，张先生到达银行的时候，两个服务台都被顾客占用，且没有顾客在等待。设两个服务台的服务时间分别服从参数为λ_1和λ_2的指数分布，且不同顾客间的服务时间相互独立，试计算张先生成为三个人当中离开银行最晚的人的概率。

6 有限简单非定向图由一些顶点和连接顶点的边构成，每条边连接两个不同顶点，每两个顶点间至多有一条边相连，没有孤立顶点，考察有限简单非定向

图上的随机游动，当第n时刻处在顶点i上时，第$n+1$时刻将跳转到与顶点i有边直接相连的某个顶点j上，转移概率为$\mathbb{P}(i,j)=1/d(i)$，其中$d(i)$为与i有边直接相连的顶点数目。试计算该随机游动的平稳分布。

7 设X和Y为服从联合高斯分布的一维随机变量，方差分别为σ_X^2和σ_Y^2，相关系数为ρ，设$U=Y^3$，$V=Y^2$，试计算条件概率密度$f_{X|U}(x|u)$和$f_{X|V}(x|v)$。

8 设X和Y为服从联合高斯分布的n维随机变量，协方差阵分别为Σ_X和Σ_Y，互协方差阵为Σ_{XY}和Σ_{YX}，试构造矩阵G和n维随机变量V，使得$X=GY+V$，且满足V与Y独立。（请给出V的密度的解析表达式和G的具体形式）。