1、 如下系统是否最小相位系统？

$$H(z)=\frac{\left(1-4z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

如果不是最小相位系统，请将它等价为一个最小相位系统和一个全通系统的级联，分别写出最小相位和全通系统的系统函数。

2、 一个长度为 32 的实序列 $x(n)$，做 32 点 DFT，由于存储器发生故障，丢掉了如下 DFT 的值，$X(2),X(6),X(7),X(16),X(20),X(25)$，问其中那些丢掉的变换值可以由存在的变换值恢复，如何恢复？哪些不能恢复？

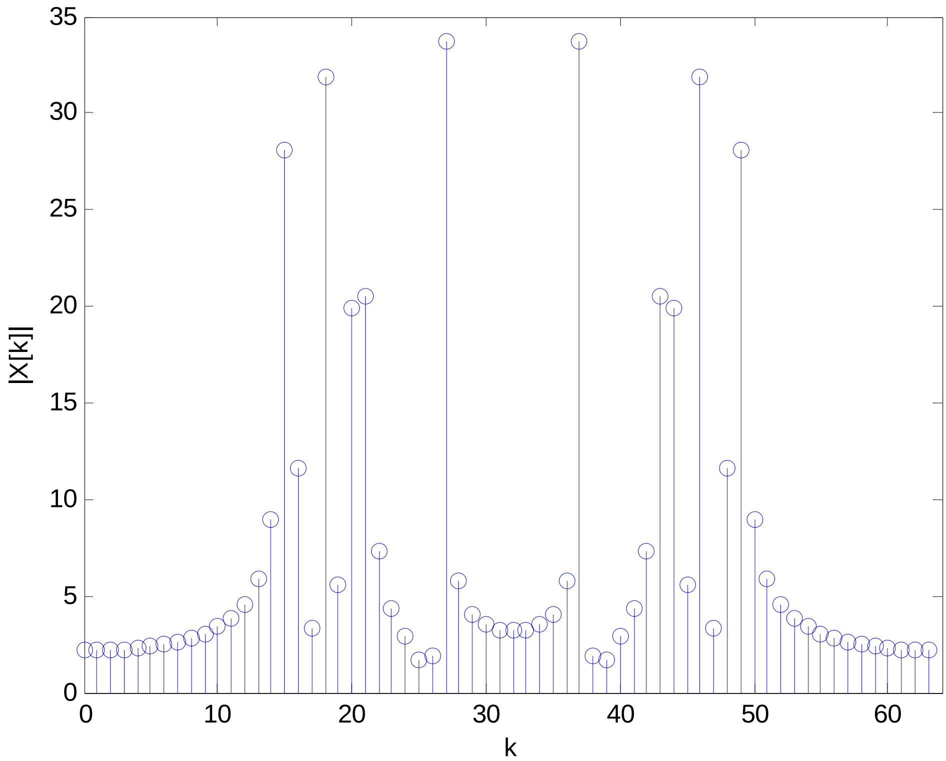
3、 一个梳状滤波器的冲击响应为：

$$h(n)=\begin{cases}1 & n=3m,m\text{是整数，且}0\le n<N\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求：（1）$H\left(e^{j\omega}\right)$的表达式；

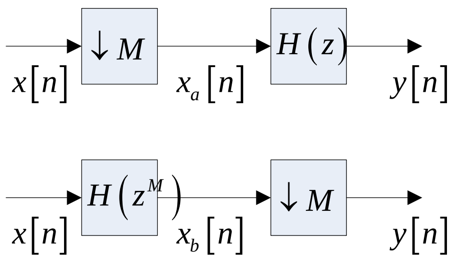
（2）若 N＝12，试粗略的画出$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$的示意图（只画出$[-\pi,\pi]$之间，标出关键点值，例如最大值对应横坐标）。

4、对模拟信号 $x(t)=\cos(240\pi t)+\cos(320\pi t)+\cos(420\pi t)+\cos(720\pi t)$ 以每秒 500 个采样点的速率进行采样，所得数字信号的 64 点 DFT 幅度如下图所示，对应原信号，解释频率图中每个峰值的意义（对应那个正弦分量）。



5、设计一个系统，由一个$\delta[n]$激励产生持续的余弦信号$(\cos\omega_0 n)u[n]$，ω_0是预先设定的，可以出现在系统的系数中，设计该系统的传输函数（IIR 结构），画出它的直接二型实现流图。

6、证明如下两个系统是等价的：



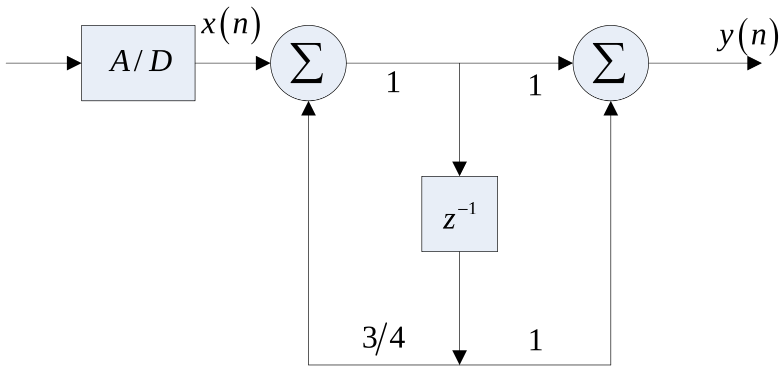
7、一个对称偶长线性相位滤波器频率响应写成$H(e^{j\omega}) = H_r(e^{j\omega})e^{-j\omega(N-1)/2}$，要求设计一个长度 N=4 的滤波器，且已知：$H_r(e^{j0}) = 1$，$H_r(e^{j\pi/2}) = 1/2$，求冲击响应$h(0) \sim h(3)$。

8、已设计一个截止频率为$\pi/2$的低通数字滤波器，希望通过一个简单的变换公式将它变成一个截至频率为$\pi/2$的高通滤波器，求这个变换。

9、根据课本关于分裂基 FFT 的思路，导出按频率抽取的分裂基算法的基本公式（与 P146 3.7.10 对应的按频率抽取公式），以 N=8 进行讨论，画出 N=8 的按频率抽取的分裂基 FFT

流图，统计其乘法运算量（其中 ± 1，$\pm j$ 不计作一次复乘）

10、如图所示的系统，采用定点运算，舍入处理。AD 变换是 12 位的，1 位符合位，输出分别是 $AD_{11} \sim AD_0$，数字系统的运算和存储精度均为 16 位，保证网络中各相加节点不溢出，求滤波器输入端的一次性压缩比例因子（采用 l_1 准则），根据该压缩比例因子，确定 AD 变换器输出与滤波器输入 $D_{15} \sim D_0$ 之间的最佳连接方式。



1.

由系统 z 变换 $H(z) = \dfrac{\left(1-4z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$ 可知，

存在零点：$z_1 = 4, z_2 = -\dfrac{1}{2}$，极点 $z_1 = \dfrac{1}{3}, z_2 = -\dfrac{1}{3}$（极点都在单位圆内，为稳定系统）

有一个零点位于单位圆外：$z = 4$，不是最小相位系统。

根据最小相位系统的性质可知，存在一个全通系统和最小相位系统级联后的响应等于该系统。

$$H(z)=\frac{\left(1-4z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{\left(1-4z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}\left(\frac{z^{-1}-4}{z^{-1}-4}\right)$$

$$=\frac{\left(z^{-1}-4\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}\left(\frac{1-4z^{-1}}{z^{-1}-4}\right)$$

$$=H_{min}(z)H_{ap}(z)$$

其中：$H_{min}(z)=\frac{\left(z^{-1}-4\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$，$H_{ap}(z)=\left(\frac{1-4z^{-1}}{z^{-1}-4}\right)$

注意：该题目不能直接把$\left(1-4z^{-1}\right)$变换成$\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)$，这样不能保证变换后剩下的系统为全通系统（$\left|H(z)\right|\neq 1$）。如果某个零点$c_r$位于单位圆外，且为复数零点，变到最小相位系统的方法是乘以：$\left(\frac{z^{-1}-c_r^*}{z^{-1}-c_r^*}\right)$，得到的全通系统为：$\left(\frac{1-c_r z^{-1}}{z^{-1}-c_r^*}\right)$。

2.

利用实序列 DFT 的性质，$X(k)=X^*(N-k)$。所以能恢复的值为：$X(2),X(6),X(7),X(20)$。

3.

（1）

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}=\sum_{\substack{n=0\\n=3m}}^{N-1}e^{-j\omega n}=\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{N}{3}\right\rfloor-1}e^{-j\omega 3n}=\frac{1-e^{-j3\left\lfloor\frac{N}{3}\right\rfloor\omega}}{1-e^{-j3\omega}}$$

（2）

当$N=12$，

这个题目虽然提到了“梳状滤波器”，但实际上考察的是采样率变换的问题。当年不少学生都理解错了题目。采样率变换一直是本课程考察的重点！请同学们务必扎实掌握：时域关系推导、频谱关系推导！

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-e^{-j12\omega}}{1-e^{-j3\omega}}=e^{-j\frac{9}{2}\omega}\frac{\sin\left(4\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|\frac{\sin\left(4\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}\right|。$$

$\omega=0$ 取最大值，$\omega=\pm\frac{\pi}{6},\pm\frac{\pi}{3},\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{2\pi}{3},\pm\frac{5\pi}{6}$ 为 0。

4.

由题可知，采样频率为 $f_s=\frac{1}{T}=500$，故：

$$x(n)=\cos\left(\frac{240}{500}\pi n\right)+\cos\left(\frac{320}{500}\pi n\right)+\cos\left(\frac{420}{500}\pi n\right)+\cos\left(\frac{720}{500}\pi n\right)。$$

$$f_1=\frac{12}{25},f_2=\frac{16}{25},f_3=\frac{21}{25},f_4=\frac{36}{25}$$

对 $\cos(\omega_0 n)$ 做 DFT：

$$DFT\left[\cos(\omega_0 n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\left(\omega_0-\frac{2\pi}{N}k\right)n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\left(\omega_0+\frac{2\pi}{N}k\right)n}$$

$$=\frac{1}{2}e^{j\left(\omega_0-\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N-1}{2}}\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\left(\omega_0-\frac{2\pi}{N}k\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\omega_0-\frac{2\pi}{N}k\right)\right)}+\frac{1}{2}e^{j\left(\omega_0+\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N-1}{2}}\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\left(\omega_0+\frac{2\pi}{N}k\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\omega_0+\frac{2\pi}{N}k\right)\right)}$$

可知，$\omega_0=\frac{2\pi}{N}k,\frac{2\pi}{N}(N-k)$ 取得最大值。

有限长的数据做 DTFT 会有频谱泄漏现象，又 DFT 做频谱分析相当是与对 DTFT 的频域采样，并不一定会在频谱最大值处采样。

故 DFT 结果的峰值中，若 $\frac{k}{N}$ 的值接近 $f_i,i=1,2,3,4$，则认为是由该频率所引起的峰值。

峰值所在的位置为：$k=15,18,20,21,27,37,43,44,46,49$

计算可知，峰值对应关系如下：

$$f_1 \leftrightarrow k = 15,49$$
$$f_2 \leftrightarrow k = 20,21,43,44$$
$$f_3 \leftrightarrow k = 27,37$$
$$f_4 \leftrightarrow k = 18,46$$

5.

$$Z\left[\cos(\omega_0 n)u(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\cos(\omega_0 n)z^{-n}$$
$$= \frac{1-\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$$
$$Z\left[\delta(n)\right] = 1$$

故滤波器的 z 变换为：$H(z) = \dfrac{1-\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$

注意：用 DTFT 的方法求解会比较麻烦，对系统的分析一般采用 z 变换。

6.

$$X_a(z) = X\left(z^{\frac{1}{M}}\right),\quad Y(z) = H(z)X_a(z) = H(z)X\left(z^{\frac{1}{M}}\right)$$

$$X_b(z) = H\left(z^M\right)X(z),\quad Y(z) = H(z)X\left(z^{\frac{1}{M}}\right)$$

故两者等价，具体推导过程见复习课的讲义。

7.

偶长，偶对称序列：

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N}{2}-n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$H_r\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N}{2}-n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

线性相位FIR滤波器一直是本课程考察的重点和热点！请同学们务必掌握第5章中的相关推导！！

$N = 4$ 时，再根据题目条件得：

$$\begin{cases} H_r\left(e^{j0}\right) = 2h(0)+2h(1) \\ H_r\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right) = 2h(0)\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+2h(1)\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) \end{cases}$$

解得：$h(0) = h(3) = \dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{8}, h(1) = h(2) = \dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{8}$。

8.

$\theta_p=\frac{\pi}{2},\omega_p=\frac{\pi}{2}$,带入 p213 公式可知， $z^{-1}=-Z^{-1}$

9.

居然是一道课后的原题！！

DIF—分裂基理论推导如下：

$$X(2l)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{n2l}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(n)W_{\frac{N}{2}}^{nl}+\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1}x(n)W_{\frac{N}{2}}^{nl}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_{\frac{N}{2}}^{nl}\quad 0\le l\le\frac{N}{2}-1$$

$$X(4l+1)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{n(4l+1)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}x(n)W_N^nW_{\frac{N}{4}}^{nl}+\sum_{n=\frac{N}{4}}^{\frac{N}{2}-1}x(n)W_N^nW_{\frac{N}{4}}^{nl}+\sum_{n=\frac{N}{2}}^{\frac{3N}{4}-1}x(n)W_N^nW_{\frac{N}{4}}^{nl}+\sum_{n=\frac{3N}{4}}^{N-1}x(n)W_N^nW_{\frac{N}{4}}^{nl}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}\left[x(n)-jx\left(n+\frac{N}{4}\right)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)+jx\left(n+\frac{3N}{4}\right)\right]W_N^nW_{\frac{N}{4}}^{nl}\quad 0\le l\le\frac{N}{4}-1$$

$$X(4l+3)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{n(4l+3)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}x(n)W_N^{3n}W_{\frac{N}{4}}^{nl}+\sum_{n=\frac{N}{4}}^{\frac{N}{2}-1}x(n)W_N^{3n}W_{\frac{N}{4}}^{nl}+\sum_{n=\frac{N}{2}}^{\frac{3N}{4}-1}x(n)W_N^{3n}W_{\frac{N}{4}}^{nl}+\sum_{n=\frac{3N}{4}}^{N-1}x(n)W_N^{3n}W_{\frac{N}{4}}^{nl}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}\left[x(n)+jx\left(n+\frac{N}{4}\right)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)-jx\left(n+\frac{3N}{4}\right)\right]W_N^{3n}W_{\frac{N}{4}}^{nl}\quad 0\le l\le\frac{N}{4}-1$$

记：

$$a(n)=x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)\quad 0\le n\le\frac{N}{2}-1$$

$$b(n)=x(n)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)\quad 0\le n\le\frac{N}{4}-1$$

$$c(n)=x\left(n+\frac{N}{4}\right)-x\left(n+\frac{3N}{4}\right)\quad 0\le n\le\frac{N}{4}-1$$

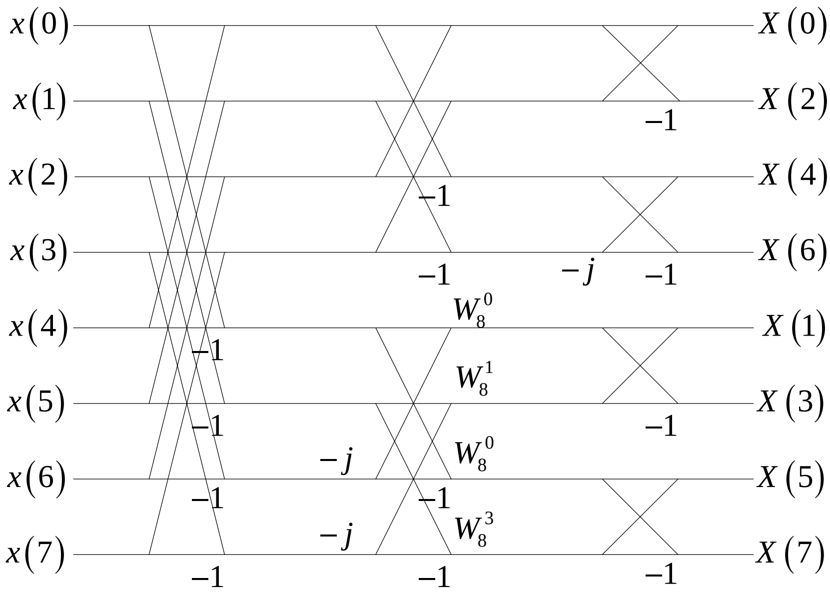
进一步得到：

$$X(2l)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}a(n)W_{\frac{N}{2}}^{nl}\quad 0\le l\le\frac{N}{2}-1$$

$$X(4l+1)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}\left[b(n)-jc(n)\right]W_N^nW_{\frac{N}{4}}^{nl}\quad 0\le l\le\frac{N}{4}-1$$

$$X(4l+3)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}\left[b(n)+jc(n)\right]W_N^{3n}W_{\frac{N}{4}}^{nl}\quad 0\le l\le\frac{N}{4}-1$$

再进一步对 $a(n)$，$d(n)=\left[b(n)-jc(n)\right]W_N^{n}$ 和 $e(n)=\left[b(n)+jc(n)\right]W_N^{3n}$ 做 DIF 分裂基处理，直到每个序列只有 2 个点为止。



10.

设第一个加法器的输出为 $w(n)$，则：

这个解答似乎有些问题，请同学们原谅:)
我的原始版本找不到了，所以没有进行修改

$$\begin{cases} w(n)=x(n)+\dfrac{3}{4}w(n-1) \\ y(n)=w(n)+w(n-1) \end{cases}$$

得到 $x(n)$ 到 $w(n)$ 的传输函数为：

$$F(z)=\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}},\quad f(n)=\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

在 l_1 准则下：$\beta=\sum_{n=0}^{\infty}\left|f(n)\right|=4$

AD 和滤波器的输入的连接关系如下：

$D_{15},D_{14},D_{13}\leftrightarrow AD_{11}$

$D_{12\sim2}\leftrightarrow AD_{10\sim0}$

$D_{1\sim0}\leftrightarrow 0$