1. 设$N(t)$为Poisson过程，参数为λ。已知在$[0,t]$内发生了n次事件，事件发生的时刻为$T_1 < T_2 < \cdots < T_n$，

(1)求已知$[0,t]$内发生了n次事件的条件下，T_1和T_n的联合概率密度。(10分)

(2)在已知$[0,t]$内发生了n次事件的条件下，计算$E(T_1T_n)$。(10分)

2. 设$X(t)$为零均值宽平稳Gaussian过程，自相关函数为$R_X(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$。试计算

(1) $Y(t) = \sin(X(t))$的自相关函数。(10分)

(2) $Y(t) = X^2(t)$的功率谱密度。(10分)

如果T为确定性常数，且有

$$\frac{d}{dt}Y(t) + Y(t) = X(t), \qquad Z(t) = \frac{1}{T}\int_t^{T+t} Y(s)ds;$$

试计算

(3) $\mathbb{E}(X(T)|Z(0))$；(10分)

3. 考虑所谓实“周期平稳”信号$X(t)$，周期为T，满足

$$m_X(t) = \mathbb{E}(X(t)) = m_X(t+T);$$
$$R_X(t,s) = \mathbb{E}(X(t)X(s)) = R_X(t+T, s+T);$$

令Θ为$[0,T]$内均匀分布的随机变量，且有

$$Y(t) = X(t+\Theta);$$

试计算

(1)$Y(t)$的均值和相关函数（用$X(t)$的均值和相关函数表示）。(10分)

(2)利用上一小题的结果，判断$Y(t)$是否宽平稳（需充分说明理由）。(10分)

更进一步，设$\{W_n : -\infty < n < \infty\}$为零均值宽平稳随机序列，考虑PAM信号

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n h(t - nT);$$

已知$\{W_n\}$的功率谱密度为$S_W(\omega)$。$h(t)$的Fourier变换为$H(w)$，$Y(t)$如上定义，试计算

(3)$Y(t)$的功率谱密度（用$S_W(\omega)$和$H(w)$来表示）。(10分)

4. 考虑在正整数格点集$\{(x,y)|x \geq 1, 1 \leq y \leq n\}$上做随机游动的粒子，$p > 0$，$q > 0$，且$r > 0$ 是常数，且满足$p + q + r = 1$。其移动规律如下:

假设当前位置是(x,y)，且$x > 1, 1 < y < n$，那么粒子以概率p移动到$(x,y+1)$，以概率q移动到$(x,y-1)$，以概率r移动到$(x-1,y)$。

假设当前位置是$(x,1)$，那且$x > 1$，那么粒子以概率$1-r$移动到$(x,2)$，以概率r移动到$(x-1,1)$; 假设当前位置是(x,n)，那且$x > 1$，那么粒子以概率$1-r$移动到$(x,n-1)$，以概率r移动到$(x-1,n)$;

假设当前位置处于集合$\{(1,y)|n > y > 1\}$中，那么粒子以概率$p + r/2$移动到$(1,y+1)$，以概率$q + r/2$移动到$(1,y-1)$。

假设当前位置是$(1,1)$，那么粒子以概率1移动到$(1,2)$；假设当前位置是$(1,n)$，那么粒子以概率1移动到$(1,n-1)$

设粒子每一步移动是相互独立的。很显然，如果把粒子的位置看作时间的函数，那么该粒子的运动轨迹是Markov链。请完成如下问题：

(1)找出所有的正常返态、零常返态以及非常返态，并说明理由。(10分)

(2)计算该链各个状态的平均返回时间。(10分)