清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2) ，homework1_intro_solution © 清华大学电子工程系

1. 袋中装有 m 只正品硬币，n 只次品硬币（次品硬币两面都有国徽）。在袋中任取一只，将它掷 r 次。已知每次都得到国徽，问取得的硬币是正品的概率。

   参考答案：

   设 $B_r=$“出现 r 次国徽面”，$A=$“任取一只是正品”。

   由全概率公式，有

$$P(B_r)=P(A)P(B_r\mid A)+P(\overline{A})P(B_r\mid\overline{A})=\frac{m}{m+n}\left(\frac{1}{2}\right)^r+\frac{n}{m+n}\times 1^r$$

$$P(A\mid B_r)=\frac{P(A)P(B_r\mid A)}{P(B_r)}=\frac{\frac{m}{m+n}\left(\frac{1}{2}\right)^r}{\frac{m}{m+n}\left(\frac{1}{2}\right)^r+\frac{n}{m+n}\times 1^r}=\frac{m}{m+n\cdot 2^r}$$

   Commets： 此题考察的是条件概率的定义以及乘法公式。

2. 考虑一个如下定义的离散时间随机过程 $X(n), n=1,2,\cdots$。无限次抛掷一枚硬币，对 $n=1,2,\cdots$，如果第 n 次抛掷结果为正面，则 $X(n)=(-1)^n$；如果第 n 次抛掷结果为反面，则 $X(n)=(-1)^{n+1}$。

   (1) 试画出随机过程 $\{X(n)\}$ 的典型样本轨道。

   (2) 求随机过程 $\{X(n)\}$ 的一维概率分布列。

   (3) 对两时刻 $n, n+k$，求 $X(n)$ 和 $X(n+k)$ 的两维联合分布列，$n=1,2,\cdots,k=1,2,\cdots$。

   概念复习：

   样本轨道，随机过程有限维分布列

   参考答案：

   (1) 随机过程 $\{X(n)\}$ 的一条典型轨道如图 1.1 所示：

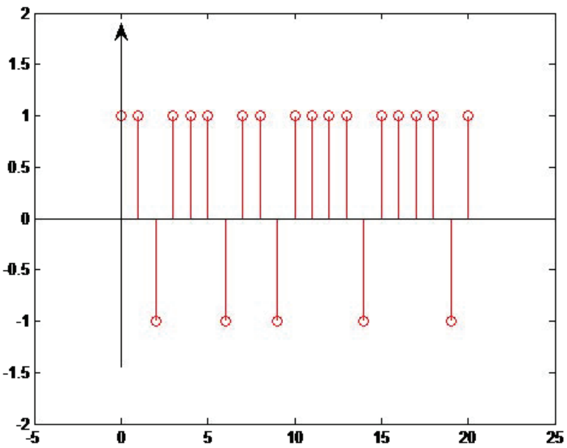


图 1.1

清华大学电子工程系版权所有

(2) n 为奇数时，$X(n)=\begin{cases}-1, & \text{硬币正面}\\ 1, & \text{硬币反面}\end{cases}$，即 $P\left(X(n)=1\right)=p\left(X(n)=-1\right)=\dfrac{1}{2}$，

同理，n 为偶数时，$X(n)=\begin{cases}1, & \text{硬币正面}\\ -1, & \text{硬币反面}\end{cases}$，即 $P\left(X(n)=1\right)=p\left(X(n)=-1\right)=\dfrac{1}{2}$，

综上，$P\left(X(n)=1\right)=p\left(X(n)=-1\right)=\dfrac{1}{2}$。

(3) 由于多次抛硬币的实验相互之间独立，则随机变量 $x(n),x(n+k)$ 也相互独立，则

$$
\begin{aligned}
&P\left(X(n)=1,X(n+k)=1\right)=P\left(X(n)=1\right)P\left(X(n+k)=1\right)=1/4;\\
&P\left(X(n)=1,X(n+k)=-1\right)=P\left(X(n)=1\right)P\left(X(n+k)=-1\right)=1/4;\\
&P\left(X(n)=-1,X(n+k)=1\right)=P\left(X(n)=-1\right)P\left(X(n+k)=1\right)=1/4;\\
&P\left(X(n)=-1,X(n+k)=-1\right)=P\left(X(n)=-1\right)P\left(X(n+k)=-1\right)=1/4;
\end{aligned}
$$

其中 $n=1,2\ldots,k=1,2\ldots$

3. 质点在直线上做随机运动，即在 $t=1,2,3,\cdots$ 时质点可以在 x 轴上往右或往左做一个单位距离的随机游动。若往右移动一个单位距离的概率为 p，往左移动一个单位距离的概率为 q，即 $P\{\xi(i)=+1\}=p$，$P\{\xi(i)=-1\}=q$，$p+q=1$，且各次游动是相互统计独立的。经过 n 次游走，质点所处的位置为 $\eta_n=\eta(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$。

(1) 求 $\{\eta(n)\}$ 的均值函数。

(2) 求 $\{\eta(n)\}$ 的自相关函数 $R_{\eta\eta}(n_1,n_2)$。

(3) 给定时刻 n_1，n_2，求随机过程 $\{\xi(n)\}$ 的二维概率密度函数及相关函数。

概念复习：

离散状态离散时间随机过程数字特征

参考答案：

(1) 解法一：设在 n 次游走中有 m 次质点正向移动，即有 m 次 $\xi_i=+1$，有 $n-m$ 次质点反向移动，即有 $n-m$ 次 $\xi_i=-1$。

则 $\eta_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i=m+(n-m)(-1)=2m-n=k$

又各次游走是相互统计独立的，则

$$
P\left(\eta_n=k\right)=\left(\begin{array}{c}n\\ m\end{array}\right)p^m q^{n-m}=\left(\begin{array}{c}n\\ \frac{n+k}{2}\end{array}\right)p^{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n-k}{2}}
$$

则 $E\left[\eta(n)=k\right]=\sum\limits_{m=0}^{n}(2m-n)\left(\begin{array}{c}n\\ m\end{array}\right)p^m q^{n-m}=pn-qn$。

解法二：因各次游走是相互统计独立的，则 $E\left[\eta(n)\right]=\sum\limits_{i=1}^{n}E[\xi_i]=(p-q)n$。

清华大学电子工程系版权所有

(2) 假设 $n_1 < n_2$,

$$\begin{aligned}
R_{\eta\eta}(n_1, n_2) &= E[\eta(n_1)\eta(n_2)] = E\{\eta(n_1)[\eta(n_1) + \eta(n_2) - \eta(n_1)]\} \\
&= E[\eta(n_1)]^2 + E[\eta(n_1)]E[\eta(n_2) - \eta(n_1)] \\
&= \{E[\eta(n_1)]\}^2 + Var[\eta(n_1)] + (p-q)^2 n_1(n_2 - n_1) \\
&= (p-q)^2 n_1^2 + n_1 Var[\xi_i] + (p-q)^2 n_1(n_2 - n_1) \\
&= (p-q)^2 n_1 n_2 + n_1[1 - (p-q)^2]
\end{aligned}$$

当 $n_1 > n_2$ 时可得到类似的结论。

(3) 二维概率分布列

$\xi(n_1)$ $\xi(n_2)$	1	-1
1	p^2	pq
-1	pq	q^2

$R_{\xi\xi}(n_1, n_2) = p^2 + q^2 - 2pq$

常见错误：

把随机过程 $\{\eta(n)\}$ 的自相关函数和 $\{\xi(n)\}$ 的搞混淆。认为 $\eta(n_1)$ 和 $\eta(n_2)$ 独立。

4. ([1] 第一章习题 7) 设有随机过程 $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$, $\xi(t) = \eta\cos(t)$，其中 η 为均匀分布于 $(0,1)$ 间的随机变量，求 $\{\xi(t)\}$ 的自相关函数 $R_\xi(t_1, t_2)$，自协方差函数 $C_\xi(t_1, t_2)$。

参考答案：

$$\begin{aligned}
R_\xi(t_1, t_2) &= E\{\eta\cos t_1 \eta\cos t_2\} \\
&= E\left\{\eta^2\right\}\cos t_1 \cos t_2 \\
&= \int_0^1 \eta^2 \mathrm{d}\eta \cos t_1 \cos t_2 \\
&= \frac{1}{3}\cos t_1 \cos t_2 \\
E\{\eta\} &= \int_0^1 \eta \mathrm{d}\eta = \frac{1}{2} \\
E\{\xi\} &= E\{\eta\cos t\} = \int_0^1 \eta\cos t \mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}\cos t \\
C_\xi(t_1, t_2) &= E\left\{\left(\eta\cos t_1 - \frac{1}{2}\cos t_1\right)\left(\eta\cos t_2 - \frac{1}{2}\cos t_2\right)\right\} \\
&= E\left\{\eta^2\right\} \cos t_1 \cos t_2 - E\{\eta\}\cos t_1 \cos t_2 + \frac{1}{4}\cos t_1 \cos t_2 \\
&= \frac{1}{3}\cos t_1 \cos t_2 - \frac{1}{2}\cos t_1 \cos t_2 + \frac{1}{4}\cos t_1 \cos t_2 \\
&= \frac{1}{12}\cos t_1 \cos t_2
\end{aligned}$$

Comments：此题考察的是自相关函数和自协方差函数的定义。

5. ([1] 第一章习题 3) 设有一随机过程 $\xi(t)$，它的样本函数为周期性的锯齿波。图 1.2 画出了两个样本函数图。各样本函数具有同一形式的波形，其区别仅在于锯齿波的起点位置

清华大学电子工程系版权所有

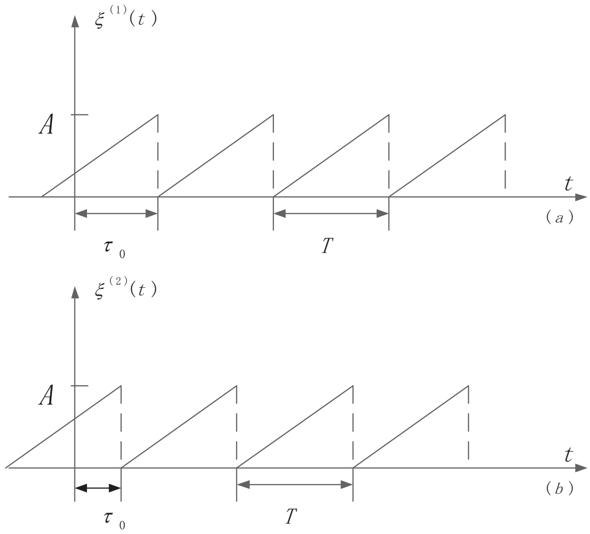


图 1.2

不同。设在 $t=0$ 后的第一个零值点位于 τ_0，τ_0 是一个随机变量，它在 $(0,T)$ 内均匀分布，即

$$f_{\tau_0}(t)=\begin{cases}1/T & (0\leqslant t\leqslant T)\\ 0 & (\text{其他值})\end{cases}$$

若锯齿波的幅度为 A，求随机过程 $\xi(t)$ 的一维概率密度。

参考答案：

考虑 t 时刻的随机变量 $\xi(t)$，设其所处的锯齿波的起始点时刻为 t_0，则随机变量 $t_0\sim U(t-T,t)$，注意到 $\xi(t)=\frac{t-t_0}{T}A$，$\xi(t)$ 是 t_0 的单调函数，取值范围为 $[0,A]$：

$$p_{\xi(t)}(x)=p(t_0)\frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}\right|}=\frac{1}{T}\frac{1}{\frac{A}{T}}=\frac{1}{A},x\in[0,A]$$

常见问题：

忘了写范围。

6. 设有随机过程 $\xi(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$，其中相位 Θ 是一个均匀分布于 $(-\pi,\pi)$ 间的随机变量，判断 $\xi(t)$ 是否为严平稳过程。

概念复习：宽平稳与严平稳概念

参考答案：

$$\begin{aligned}
&P\left(\xi(t_1)\leqslant x_1,\xi(t_2)\leqslant x_2,\cdots,\xi(t_n)\leqslant x_n\right)\\
&=P\left(A\cos\left(\omega t_1+\Theta\right)\leqslant x_1,A\cos\left(\omega t_2+\Theta\right)\leqslant x_2,\cdots,A\cos\left(\omega t_n+\Theta\right)\leqslant x_n\right)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p\left(A\cos\left(\omega t_1+\theta\right)\leqslant x_1,A\cos\left(\omega t_2+\theta\right)\leqslant x_2,\cdots,A\cos\left(\omega t_n+\theta\right)\leqslant x_n\right)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\theta\right)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

清华大学电子工程系版权所有

其中 $f(\theta) \triangleq p\left(A\cos(\omega t_1+\theta) \leqslant x_1, A\cos(\omega t_2+\theta) \leqslant x_2, \cdots, A\cos(\omega t_n+\theta) \leqslant x_n\right)$，是一个以 2π 为周期的函数。

$$\begin{aligned}\forall h,\ &P\left(\xi(t_1+h) \leqslant x_1, \xi(t_2+h) \leqslant x_2, \cdots, \xi(t_n+h) \leqslant x_n\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega h+\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

注意，周期函数 $f(\theta)$ 在任一个周期的积分都相等。所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega h+\theta)\mathrm{d}\theta$$

所以，对 $\forall n, \forall t_1, t_2, \cdots, t_n, \forall h$ 都有

$$\begin{aligned}&P\left(\xi(t_1) \leqslant x_1, \xi(t_2) \leqslant x_2, \cdots, \xi(t_n) \leqslant x_n\right)\\ &= P\left(\xi(t_1+h) \leqslant x_1, \xi(t_2+h) \leqslant x_2, \cdots, \xi(t_n+h) \leqslant x_n\right)\end{aligned}$$

即 $\{\xi(t)\}$ 为严平稳随机过程。

7. 定义随机过程 $x(t)=a-bt$，其中，$a\sim N(0,\sigma)$ 和 $b\sim N(0,\sigma)$ 为独立的高斯随机变量，证明其样本轨道与 t 轴的交点位于区间 $(0,T)$ 的概率为 $(\arctan T)/\pi$。

参考答案：

样本轨道与 t 轴的交点为 $\frac{a}{b}$，则所求概率为 $P\left\{0 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant T\right\}$。

利用二元随机变量函数的已有结论

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, f_{xy}(yz, y)dy$$

其中 $z = x/y$

以及 $f_{ab}(a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\frac{a^2+b^2}{2\sigma}}$ 经过运算可得 $F_C(c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(c)$

故 $P\left\{0 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant T\right\} = F_C(T) - F_C(0) = (\arctan T)/\pi$

8. ([2] 第一章习题 1) 设随机过程 $\xi(t) = V\sin\omega t$，其中 ω 为常数，V 为服从 $(0,a)$ 内均匀分布的随机变量。

(1) 画出 $\xi(t)$ 的某一条样本轨道。

(2) 求 $\xi(0)$，$\xi(\pi/4\omega)$，$\xi(\pi/2\omega)$，$\xi(5\pi/4\omega)$ 的概率密度。

概念复习：

连续状态连续时间随机变量的一维分布

参考答案：

(1) $V = \dfrac{a}{2}$ 时，一条样本轨道为典型的正弦曲线。

(2) $\xi(0) = 0$，$f_{\xi(0)}(x) = \delta(x)$；$\xi(\pi/2\omega) = V$，其概率密度同 V 一样。

$$\xi\left(\frac{\pi}{4\omega}\right) = \frac{V}{\sqrt{2}}, f_{\xi\left(\frac{\pi}{4\omega}\right)}(x) = \begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{a}, 0 < x < \frac{a}{\sqrt{2}}\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

$$\xi\left(\frac{5\pi}{4\omega}\right) = -\frac{V}{\sqrt{2}}, f_{\xi\left(\frac{5\pi}{4\omega}\right)}(x) = \begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{a}, -\frac{a}{\sqrt{2}} < x < 0\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

清华大学电子工程系版权所有

常见问题：没有弄清楚随机过程中样本空间和参数 t 的关系，一旦 t 固定，得到了是一个随机变量 X，其概率密度的写法为 $p(X=x)=f_X(x)$。

清华大学电子工程系版权所有

参考文献

[1] 陆大纟金. 随机过程及其应用. 清华大学出版社, 1986.

[2] 陆大纟金，张灏. 随机过程及其应用（第二版）. 清华大学出版社, 2012.

清华大学电子工程系版权所有

1. 若有随机变量序列 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 且 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 互为统计独立的随机变量，ξ_n 的概率密度为 $f_{\xi_n}(x_n)=f_n(x_n)$，$E\{\xi_n\}=0$，$n=1,2,\ldots$。

   定义 $\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，$n=1,2,\ldots$。试证明：

   (1) 序列 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots$ 具有马尔科夫性；

   (2) $E(\eta_n|\eta_1=y_1,\eta_2=y_2,\cdots,\eta_{n-1}=y_{n-1})=E(\eta_n|\eta_{n-1}=y_{n-1})=y_{n-1}$。

   参考答案：

   (1) 由随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 相互独立，可得：$\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$ 与 ξ_{n+1} 相互独立
   又有：$\eta_{n+1}=\eta_n+\xi_{n+1}$, 得到条件 pdf $f_{\eta_{n+1}|\eta_n}(x)$ 为：

   $$f_{\eta_{n+1}|\eta_n}(x)=f_{\xi_{n+1}}(x-\eta_n)=f_{n+1}(x-\eta_n)=f_{\xi_{n+1}|\eta_n,\eta_{n-1},\cdots,\eta_1}(x)$$

   即：$(\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})\perp\eta_{n+1}|\eta_n$
   因此随机变量序列 $\{\eta_n\}$ 具有 Markov 性。

   (2) $E(\eta_n|\eta_1=y_1,\eta_2=y_2,\cdots,\eta_{n-1}=y_{n-1})=E(\eta_{n-1}+\xi_n|\eta_1=y_1,\eta_2=y_2,\cdots,\eta_{n-1}=y_{n-1})=E(\eta_{n-1}|\eta_1=y_1,\eta_2=y_2,\cdots,\eta_{n-1}=y_{n-1})+E(\xi_n|\eta_1=y_1,\eta_2=y_2,\cdots,\eta_{n-1}=y_{n-1})=y_{n-1}+E(\xi_n)$
   根据 (1),$\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-1}\}$ 与 ξ_n 相互独立
   同样，可得 $E(\eta_n|\eta_{n-1}=y_{n-1})=y_{n-1}+E(\xi_n)$。据题意，$E(\xi_n)=0$
   因此：$E(\eta_n|\eta_1=y_1,\eta_2=y_2,\cdots,\eta_{n-1}=y_{n-1})=E(\eta_n|\eta_{n-1}=y_{n-1})=y_{n-1}$。

2. 设一个离散时间、离散状态的随机过程 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 满足

   $$X_1,\cdots,X_{n-1}\perp X_{n+1}|X_n,\ \forall n>1$$

   则成立

   $$X_1,\cdots,X_{n-1}\perp X_{n+1},\cdots,X_m|X_n,\ \forall m>n>1$$

   参考答案：

   下面为了记号简单，以 $f(X_i|X_j)$ 代表条件 pdf: $f_{X_i|X_j}(x_i|X_j=x_j)$

   $$f(X_{n+1},\cdots,X_{n+m}|X_1,X_2,\cdots,X_n)=\prod_{i=1}^{m}f(X_{n+i}|X_1,X_2,\cdots,X_{n+i-1})$$

   利用 $X_1,\cdots,X_{n-1}\perp X_{n+1},\cdots,X_m|X_n,\ \forall m>n>1$,可得:$f(X_{n+i}|X_1,X_2,\cdots,X_{n+i-1})=f(X_{n+i}|X_{n+i-1})$，$f(X_{n+i}|X_{n+i-1})=f(X_{n+i}|X_n,\cdots,X_{n+i-1})$，代入上式得：

   $$f(X_{n+1},\cdots,X_{n+m}|X_1,X_2,\cdots,X_n)=\prod_{i=1}^{m}f(X_{n+i}|X_{n+i-1})$$
   $$=\prod_{i=1}^{m}f(X_{n+i}|X_n,\cdots,X_{n+i-1})=f(X_{n+1},\cdots,X_{n+m}|X_n)$$

   此即：$X_1,\cdots,X_{n-1}\perp X_{n+1},\cdots,X_m|X_n,\ \forall m>n>1$

清华大学电子工程系版权所有

3. 有三个黑球和三个白球。把这六个球任意等分给甲乙两个袋中，并把甲袋中的白球数定义为该过程的状态，则有四种状态：0,1,2,3。现每次从甲乙两袋中各取一球，然后互相交换，即把从甲袋取出的球放入乙袋，把从乙袋取出的球放入甲袋，经过 n 次交换，过程状态为 $\xi(n)$，$n = 1, 2, 3, 4, \cdots$

(1) 试问该过程是否为马尔可夫链;

(2) 计算它的一步转移概率矩阵。

参考答案：

(1) 此过程是马尔可夫链，原因如下：

$\xi(n)$ 的状态集为 $\{0, 1, 2, 3\}$; 给定当前时刻状态后，下时刻状态的分布完全确定，与过去时刻的状态无关。

(2) 它的一步转移概率矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. 设有齐次马尔科夫链，其状态空间为 $I : 0, 1$, 它的一步转移概率矩阵为:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \quad (0 < a < 1, 0 < b < 1)$$

试求 $\mathbf{P}^{(n)}$(利用矩阵的特征值、特征矢量方法计算)

参考答案：由矩阵特征值理论可得：$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1}$, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{pmatrix}$

因此，$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^n \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b+a(1-a-b)^n}{a+b} & \frac{a-a(1-a-b)^n}{a+b} \\ \frac{b-b(1-a-b)^n}{a+b} & \frac{a+b(1-a-b)^n}{a+b} \end{pmatrix}$

5. 考虑一个 Markov 链 $X_1, X_2, \cdots$ 描述一个带有反射壁的对称随机游走过程，其状态转移图如下图所示。

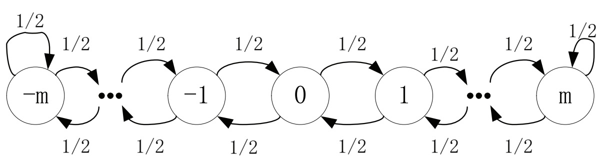


图 2.1 带反射壁的随机游走

(1) 解释为什么 $|X_1|, |X_2|, |X_3|, \ldots$ 满足 Markov 性，并画出相关的状态转移图。

(2) 假设跟踪记录最大偏移量,即定义 t 时刻的最大偏移量 $Y_t = \max\{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_t|\}$，解释为什么 $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ 不满足 Markov 性，试寻找一个满足 Markov 性且能够记录最大偏移量的随机变量序列，并画出其相关的状态转移图。

清华大学电子工程系版权所有

参考答案:

(1) $|X_1|, |X_2|, |X_3|, \ldots$ 满足 Markov 性,可以严格证明:$P(|X_{n+1}| = x_{n+1} || X_1| = x_1, ..., |X_n| = x_n) = P(|X_{n+1}| = x_{n+1} || X_n| = x_n)$。

当 $|X_n| = 0$ 时，必有：$|X_{n+1}| = 1$,$P(|X_{n+1}| = 1 || X_1| = x_1, ..., |X_n| = 0) = 1 = P(|X_{n+1}| = 1 || X_n| = 0)$

当 $|X_n| = x_n \neq 0 \vee m$ 时，则 $|X_{n+1}| = x_{n+1}$ 必须取值为 $|X_n| \pm 1$

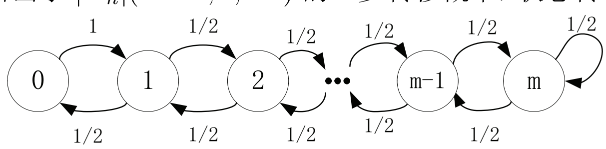
$$
\begin{aligned}
&P(|X_{n+1}| = x_{n+1} = x_n + 1 || X_1| = x_1, ..., |X_n| = x_n) = \\
&P(|X_{n+1}| = x_n + 1, X_n = x_n || X_1| = x_1, ..., |X_n| = x_n) \\
&+ P(|X_{n+1}| = x_n + 1, X_n = -x_n || X_1| = x_1, ..., |X_n| = x_n) \\
&= \frac{1}{2} P(X_n = x_n || X_1| = x_1, ..., |X_n| = x_n) \\
&+ \frac{1}{2} P(X_n = -x_n || X_1| = x_1, ..., |X_n| = x_n) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

同理：$P(|X_{n+1}| = x_{n+1} = x_n - 1 || X_1| = x_1, ..., |X_n| = x_n) = \frac{1}{2}$

类似,可以证明:$P(|X_{n+1}| = x_n + 1 || X_n| = x_n) = P(|X_{n+1}| = x_n - 1 || X_n| = x_n) = \frac{1}{2}$

当 $x_n = m$ 时，也可以证明：$P(|X_{n+1}| = m || X_n| = m) = P(|X_{n+1}| = m || X_1| = x_1, \cdots, |X_n| = m) = \frac{1}{2} = P(|X_{n+1}| = m - 1 || X_n| = m) = P(|X_{n+1}| = m - 1 || X_1| = x_1, \cdots, |X_n| = m)$

综上:$P(|X_{n+1}| = x_{n+1} || X_1| = x_1, ..., |X_n| = x_n) = P(|X_{n+1}| = x_{n+1} || X_n| = x_n)$,即 Markov 性成立。上述证明也给出了 $|X_n| (n = 1, 2, \cdots)$ 的一步转移概率,状态转移图见下图。



(2) 给定 $0 < d < m$，则有：

$P(Y_{t+1} = d + 1 | Y_t = d, Y_{t-1} = d - 1) = \frac{1}{2}$

(因为由 $Y_t = d, Y_{t-1} = d - 1$ 可得 $|X(t)| = d$)

$P(Y_{t+1} = d + 1 | Y_t = d, Y_{t-1} = d, Y_{t-2} = d - 1) = 0$

(因为由 $Y_{t-1} = d, Y_{t-2} = d - 1$ 可得:$|X(t-1)| = d$, 从而 $|X(t)| < d$)

定义随机序列 $Z_n = (|X_n|, Y_n), n = 1, 2, \cdots$ （由于 Z_n 最多 $(m+1)^2$ 种不同值，因此也可认为是离散随机变量序列）, 此随机序列是 Markov 序列，其一步转移概率为:

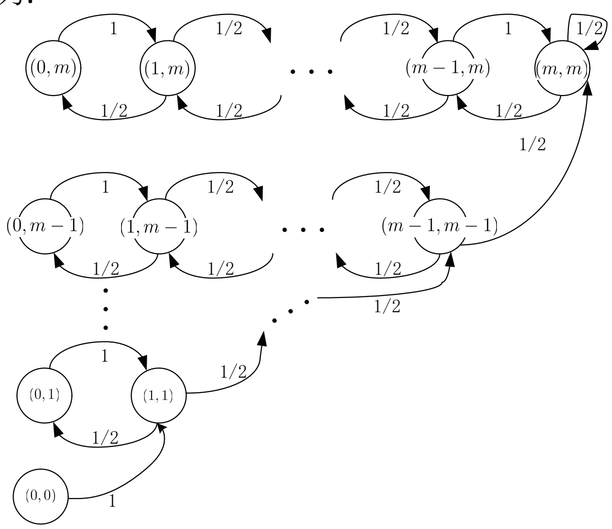
$$
P\{Z_{t+1} = (i_1+1, i_2+1) | Z_t = (i_1, i_2), Z_{t-1} = (x_{t-1}, y_{t-1}), \cdots, Z_1 = (x_1, y_1)\} = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < i_1 = i_2 < m \\ 1 & i_1 = i_2 = 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
$$

$$
P\{Z_{t+1} = (i_1-1, i_2) | Z_t = (i_1, i_2), Z_{t-1} = (x_{t-1}, y_{t-1}), \cdots, Z_1 = (x_1, y_1)\} = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < i_1 = i_2 < m \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
$$

$$
P\{Z_{t+1} = (i_1, i_2) | Z_t = (i_1, i_2), Z_{t-1} = (x_{t-1}, y_{t-1}), \cdots, Z_1 = (x_1, y_1)\} = \begin{cases} \frac{1}{2} & i_1 = i_2 = m \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
$$

清华大学电子工程系版权所有

状态转移图为：



6. 假设存在 N 个口袋，进行一系列独立的试验，每一次试验将一个新的小球等概率投放入其中一个口袋，每一个口袋能够盛放多个球。定义状态 e_k 表示当前时刻 k 个口袋中有球，$(k=0,1,...,N)$，设其初始状态为 e_0。

(1) 试问该过程是否为马尔可夫过程，如果是，求其一步转移概率矩阵。

(2) 求证:投放 n 个小球后,m 个口袋中有球的概率为 $\begin{pmatrix} N \\ N-m \end{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \left(\frac{k}{N}\right)^n \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$

(3) 令 $\lambda = Ne^{-n/N}$ 为常数，当 N 和 n 趋于无穷时，求证上一问的结果为 $\frac{\lambda^{N-m}}{(N-m)!}e^{-\lambda}$。
提示：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

(4) 以上面的规律求 4000 人当中，生日能够包含一年中每一天的概率。

参考答案:

(1) 令 s_k 表示第 k 次投放后的状态，则显然 $\{s_k\}$ 为马尔可夫过程。
设 $P_{ij} = P(s_{k+1} = e_j | s_k = e_i)$
则

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{N} \ , & j = i \\ \frac{N-i}{N} \ , & j = i+1 \\ 0 \ , & else \end{cases}$$

其一步转移概率矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \frac{1}{N} & \frac{N-1}{N} & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & & \frac{N-1}{N} & \frac{1}{N} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

清华大学电子工程系版权所有

(2) 采用古典概型来考虑，总共投放的情况数为 N^n 种，在 N 个口袋中选取 m 个口袋作为最终盛放小球的口袋，情况数为 C_N^m 种，设在选取的 m 个口袋中放置 n 个小球（最终 m 个口袋中均有球）的情况数为 $I(m,n)$，设在 m 个口袋中选取 k 个口袋中放置 n 个小球的情况数为 $P(k,n)$，由容斥原理可以得到：

$$I(m,n)=P(m,n)-P(m-1,n)+P(m-2,n)+\cdots+(-1)^{m-1}P(1,n)$$

且 $P(k,n)=C_m^k k^n$

故最终在 N 个口袋中选取 m 个口袋盛放小球的总情况数为 $C_N^m\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}k^nC_m^k$

则投放 n 个小球后，m 个口袋中有球的概率为 $C_N^m\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\left(\frac{k}{N}\right)^nC_m^k$

(3) 证明如下：

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} N \\ N-m \end{pmatrix}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\left(\tfrac{k}{N}\right)^n\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} N \\ s \end{pmatrix}\sum_{k=0}^{N-s}(-1)^{N-s-k}\left(\tfrac{k}{N}\right)^n\begin{pmatrix} N-s \\ k \end{pmatrix} \qquad (s=N-m)\\
&=\begin{pmatrix} N \\ s \end{pmatrix}\sum_{\nu=0}^{N-s}(-1)^{\nu}\left(1-\tfrac{s+\nu}{N}\right)^n\begin{pmatrix} N-s \\ \nu \end{pmatrix} \qquad (\nu=N-s-k)\\
&=\sum_{\nu=0}^{N-s}\tfrac{1}{s!}\tfrac{(-1)^\nu}{\nu!}\tfrac{N!}{(N-s-\nu)!}\left(1-\tfrac{s+\nu}{N}\right)^n\\
&\approx\sum_{\nu=0}^{N-s}\tfrac{1}{s!}\tfrac{(-1)^\nu}{\nu!}N^{s+\nu}e^{-\frac{s+\nu}{N}n}\\
&=\tfrac{\left(Ne^{-\frac{n}{N}}\right)^s}{s!}\sum_{\nu=0}^{N-s}\tfrac{\left(-Ne^{-\frac{n}{N}}\right)^\nu}{\nu!}\\
&\approx\tfrac{\lambda^s}{s!}e^{-\lambda}=\tfrac{\lambda^{(N-m)}}{(N-m)!}e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

(4) 将该问题转化为上面的模型，即：将 4000 个小球投放入 365 个口袋，最终 365 个口袋中均有球的概率。

$\lambda=365e^{-4000/365}=6.35\times10^{-3}$，则概率近似为 $e^{-\lambda}=99.37\%$

清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2) ，homework3_Markov Chain 2 © 清华大学电子工程系

1. ([?] 第 7 章习题 7) 设有 3 个状态 $\{0,1,2\}$ 的 Markov 链，一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ q_3 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

试求首达概率 $f_{00}^{(1)}, f_{00}^{(2)}, f_{00}^{(3)}, f_{01}^{(1)}, f_{01}^{(2)}, f_{01}^{(3)}$

参考解答：

根据首达概率的定义以及一步转移概率矩阵，易得：

$$f_{00}^{(1)}=p_1; f_{00}^{(2)}=0; f_{00}^{(3)}=q_1q_2q_3$$

$$f_{01}^{(1)}=q_1; f_{01}^{(2)}=p_1q_1; f_{01}^{(3)}=p_1^2q_1$$

2. 试证明常返性是类性质。即证明：如果 $i\leftrightarrow j$, i 为常返态，则 j 也为常返的。

证明： 由 $i\leftrightarrow j$ $\exists n,m>0, P_{ij}^{(k)}>0, P_{ji}^{(m)}>0.$

故 $\forall n\geqslant 0$, 由 C-K 不等式：

$$P_{jj}^{(k+m+n)}\geqslant P_{ji}^{(m)}P_{ii}^{(n)}P_{ij}^{(k)}$$

从而

$$\sum_{n=0}^{+\infty}P_{jj}^{(k+m+n)}\geqslant P_{ji}^{(m)}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}P_{ii}^{(n)}\right]P_{ij}^{(k)}=\infty$$

所以 j 也为常返的。

3. 设 Markov 链有四个状态组成，其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 5/8 & 0 & 3/8 \end{pmatrix}$$

试求其平稳分布和 $\lim\limits_{n\to\infty}P^{(n)}$ 。

参考解答：

由概率转移矩阵，此 MC 链可以分解为两个等价类 $\{0,2\}$ 和 $\{1,3\}$，由于状态数目有限，因此均为正常返态，又由于 $\forall i, p_{ii}>0$，因此所有状态均为非周期的，两个等价类均为遍历态等价类。因此可以分别在两个遍历类中讨论平稳分布和极限概率。遍历类的平稳分布唯一，极限概率 $P_{ij}^{(n)}=\pi(n)$。

若限制在状态 $\{1,3\}$ 上, 其转移概率矩阵为

$$P_a=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

清华大学电子工程系版权所有

设其平稳分布为 π_a，由 $\pi_a P_a = \pi_a$，得 $\pi_a = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$，$\lim_{n\to\infty} P_a^{(n)} = \begin{bmatrix} 1/3 & 3/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

同理，若限制在状态 $\{2,4\}$ 上，其转移概率矩阵为

$$P_a = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 5/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

设其平稳分布为 π_b，由 $\pi_b P_b = \pi_b$，得 $\pi_b = (\frac{15}{31}, \frac{16}{31})$, $\lim_{n\to\infty} P_b^{(n)} = \begin{bmatrix} 15/31 & 16/31 \\ 15/31 & 16/31 \end{bmatrix}$

综上该 Markov 链的平稳分布可以写为:$(\frac{1}{3}\alpha, \frac{15}{31}(1-\alpha), \frac{2}{3}\alpha, \frac{16}{31}(1-\alpha)), \forall 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{15}{31} & 0 & \frac{16}{31} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{15}{31} & 0 & \frac{16}{31} \end{pmatrix}$$

4. ([?] 第 7 章习题 11) 设 Markov 链的状态空间为 $\{0,1,2,3,4,5\}$，一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

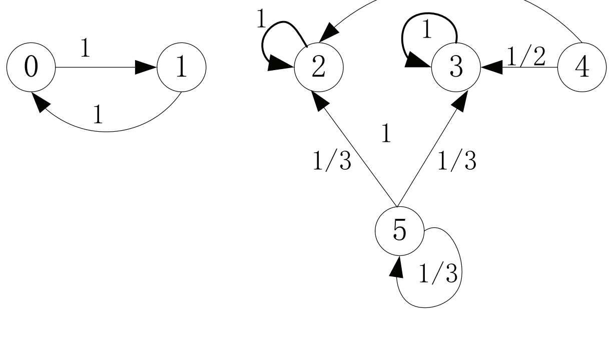
(1) 分析各个状态的性质。该链是否可约，是否存在闭集，是否存在周期状态？

(2) 求 $P_{i2}^{(n)}, i = 0, 1, \cdots, 5$。

(3) 计算 $\lim_{n\to\infty} P_{53}^{(n)}$，$\lim_{n\to\infty} P_{52}^{(n)}$

参考解答：

首先根据状态转移概率矩阵画出此 Markov 链的状态转移示意图：



(1) 根据状态转移示意图可看出，该 Markov 链是可约的。状态集合 $\{0,1\}$，$\{2\}$，和 $\{3\}$ 为 3 个真闭子集，所以状态 $\{0,1,2,3\}$ 均常返，状态 $\{4,5\}$ 为非常返。

清华大学电子工程系版权所有

(2) 根据状态转移图易得: $P_{02}^{(n)}=P_{12}^{(n)}=P_{32}^{(n)}=0$, $P_{22}^{(n)}=1$, $P_{42}^{(n)}=\frac{1}{2}(1-\delta[n])$,$P_{52}^{(n)}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})$

(3) 根据 (2), 由:$P_{52}^{(n)}=P_{53}^{(n)}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})$, $P_{55}^{(n)}=\frac{1}{3^n}$, 显然有:$\lim\limits_{n\to\infty}P_{52}^{(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}P_{53}^{(n)}=\dfrac{1}{2}$。

5. 一质点沿圆周游动。圆周按顺时针、等距排列五个点 (0, 1, 2, 3, 4) 把圆周分成五格。质点每次游动或顺时针或逆时针移动一格，顺时针前进一格的概率为 p，逆时针转一格的概率为 $1-p$。设 $\xi(n)$ 代表经过 n 次转移后质点所处的位置 (即状态)

(1) 试说明 $\xi(n)$ 是一个齐次马尔科夫链

(2) 求一步转移概率矩阵

参考解答:

(1) 由题意可知状态集为 $0,1,2,3,4$,容易说明 $P(\xi(n)=x_n|\xi(n-1)=x_{n-1})=P(\xi(n)=x_n|\xi(n-1)=x_{n-1},...,\xi(1)=x_1)$，可以证明其为 Markov 链。通过计算从 i 状态到 j 状态的一步转移概率 P_{ij} 可知其为齐次 Markov 链。

(2) 可以计算得到一步转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2)，homework4_Markov Chain 3 © 清华大学电子工程系

1. 设 $\{\xi(n), n=1,2,3\cdots\}$ 是伯努利过程。定义另一随机过程 $\{\eta(n), n=1,2,3\cdots\}$：

   * 如果 $\xi(n)=0$，$\eta(n)=0$；
   * 如果 $\xi(n)=\xi(n-1)=\cdots=\xi(n-k+1)=1, \xi(n-k)=0$，则 $\eta(n)=k \quad (k=1,2,\cdots n)$。

   即 $\eta(n)$ 代表在 n 时和 n 前连续出现 $\xi(m)=1$ 的次数。

   (a) 试证明 $\eta(n)$ 是一马尔可夫链，并求一步转移概率；

   (b) 从零状态出发，经 n 步转移，求首次返回零状态的概率 $f_{00}^{(n)}$ 和 n 步转移概率 $P_{00}^{(n)}$；

   (c) 该链是常返还是非常返的？

   (d) 设 T 代表连续两个 $\eta=0$ 间的时间，则 T 为一随机变量。求 T 的均值和方差。

   参考解答：

   (a) 题目所述过程可以表示为：$\eta(n+1)=\xi(n+1)(\eta(n)+1)$, 又 $\xi(n)$ 独立同分布，因此此过程是齐次 MC 过程。设 $P(\xi(n)=1)=p$，$P(\xi(n)=0)=1-p$，则其一步转移概率为：$\forall i,j\geqslant 0, p_{ij}=(1-p)\delta[j]+p\delta[j-i-1]$。

   (b) $\forall n>0, f_{00}^{(n)}=p^{(n-1)(1-p)}, P_{00}^{n}=\sum\limits_{i\in S}P_{00}^{(n-1)}p_{i0}=\sum\limits_{i\in S}P_{00}^{(n-1)}(1-p)=1-p$

   (c) 由 (2)，当 $p<1$ 时，此链是常返的；当 $p=1$ 时，此链是非常返的。

   (d) $P(T=n)=p^{n-1}(1-p), \forall n\geqslant 1$

   $$E(T)=\frac{1}{1-p}$$

   $$D(T)=\sum_{n=1}p^{n-1}(1-p)n^2-\frac{1}{(1-p)^2}=\frac{p}{(1-p)^2}$$

2. 设有马尔可夫链，它的状态空间为 $I:\{1,2,\cdots\}$，且设当 $|i-j|>1$ 时 $P_{ij}=0$, 在其它的 i,j 值时 P_{ij} 是任意的正数，对每个 $j>0$ 必须满足

   $$P_{j,j-1}+P_{jj}+P_{j,j+1}=1$$

   当 $j=0$ 时，$P_{00}+P_{01}=1$。这类过程可以称为离散时间的生灭过程。求该链为正常返的条件。

   参考答案： 显然, 此过程中所有状态都是相通的，所有状态都是非周期的。该链为正常返即该链是遍历的。

   设过程的平稳分布为 π，当此链为正常返时，$\pi(0)=\frac{1}{\mu_0}>0$; 当 $\pi(0)>0$ 时, 由：$\pi(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i\in I}\pi(i)P_{i0}^{n}$, 当 0 为零常返或者非常返时，$\lim\limits_{n\to\infty}P_{i0}^{(n)}=0$, 因此若 0 不是正常返时，$\pi(0)=0$，矛盾，因此必有 0 为正常返态。所以该链为正常返等价于存在平稳分布，且 $\pi(0)>0$。

   因此：

   $$q_1\pi(1)=p_0\pi(0) \tag{1}$$

清华大学电子工程系版权所有

$$p_{i-1}\pi(i-1)+q_{i+1}\pi(i+1)=(p_i+q_i)\pi(i),i\geqslant 1$$

上式可改为：

$$q_{i+1}\pi(i+1)-q_i\pi(i)=p_i\pi(i)-p_{i-1}\pi(i-1),i\geqslant 1$$

对等式两边同时对 i 求和得

$$\sum_{i=1}^{n-1}[q_{i+1}\pi(i+1)-q_i\pi(i)]=\sum_{i=1}^{n-1}[p_i\pi(i)-p_{i-1}\pi(i-1)]$$

化简后为

$$q_n\pi(n)-q_1\pi(1)=p_{n-1}\pi(n-1)-p_0\pi(0)$$

结合公式 (1) 可得

$$q_n\pi(n)=p_{n-1}\pi(n-1),n\geqslant 1$$

即

$$\pi(n)=\frac{p_{n-1}}{q_n}\pi(n-1),n\geqslant 1$$

从而有

$$\pi(n)=\prod_{r=1}^{n}\frac{p_{r-1}}{q_r}\pi(0),n\geqslant 1$$

因为极限分布的归一化，$\sum_{n=0}^{\infty}\pi(n)=1$, 所以

$$\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{r=1}^{n}\frac{p_{r-1}}{q_r}\right]\pi(0)=1$$

括号内式子收敛时，$\pi(0)$ 不为 0，是正常返；反之如它不收敛，$\pi(0)$ 为 0，是零常返。因此该链正常返的条件是 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{r=1}^{n}\frac{p_{r-1}}{q_r}$ 收敛。

3. 冬天是流感频发的季节，我们希望利用 Markov 链来对流感病毒的传播过程进行建模。假设一个人群中有 n 个个体，每一个个体要么是已被感染，要么是属于易感人群。假设任意两个人 $(i,j),i\neq j$ 在白天相遇的概率为 p，且相互独立。只要一个易感者与已感染者相遇，则该易感者就会被感染。另外，假设在晚上的时候，任何一个被感染时间至少为 24 小时的个体都将独立地以概率 q，$(0<q<1)$ 恢复健康，变成易感者（假设一个刚刚感染的病人至少将会与病毒抗争一个晚上）。

(1) 假设某一天黎明时分共有 m 个已感染者，求这一天结束的时候新被感染者的数目的分布。

(2) 当 $n=2$ 时，请画出一条 Markov 链对流感病毒的传播过程进行建模，要求使用尽可能少的状态数目。

(3) 请指出（2）中所绘制的 Markov 链的所有常返态。

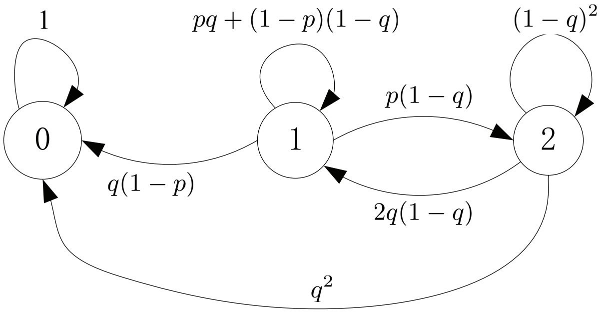
参考解答：

(1) 如果 n 个个体中有 m 个已感染者，则必有 $n-m$ 个易感者。每一个易感者在白天独立地被病毒感染的概率为 $\rho=1-(1-p)^m$。因此，新被感染者的数目 I 将服从二项分布 $\mathcal{B}(n-m\ \rho)$，即

$$p_I(k)=\begin{pmatrix} n-m \\ k \end{pmatrix}\rho^k(1-\rho)^{n-m-k},\ k=0,1,?,n-m$$

清华大学电子工程系版权所有

(2) 令状态表示所有人群中被感染者的数目。当 $n=2$ 时，相应的 Markov 链如下图所示:



(3) 常返态 $\{0\}$。

4. 设质点在 xy 平面内的 x 方向或 y 方向上作随机游动。在 xy 平面上安排整数点格，质点每次转移只能沿 x 方向往左或右移动一格，或沿 y 方向往上或往下移动一格，设这四种转移方式的概率均相等。若质点从 $(0,0)$ 出发游动，

(1) 求经过 2n 次转移质点回到 $(0,0)$ 点的概率

(2) 判断这种二维随机游动的常返性（正常返、零常返或非常返），并给出理由

参考解答：

(1) 假设在这一过程中质点在 2n 次游动中向上游动了 k 次，那么一定向下也游动了 k 次，向左向右分别游动了 n-k 次。因此可求出 $P_{00}^{(2n)}$ 为

$$
\begin{aligned}
P_{00}^{(2n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}(\frac{1}{4})^k\binom{2n-k}{k}(\frac{1}{4})^k\binom{2n-k}{n-k}(\frac{1}{4})^{n-k}\binom{n-k}{n-k}(\frac{1}{4})^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{2n!}{k!k!(n-k)!(n-k!)}(\frac{1}{4})^{2n}
\end{aligned}
$$

(2) 判断常返性只需判定 $(0,0)$ 点的常返性，即判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty}P_{00}^{(2n)}$ 是否收敛（由于当 n 为奇数时，$P_{00}^{(n)}=0$）

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}P_{00}^{(2n)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2n!}{k!k!(n-k)!(n-k!)}(\frac{1}{4})^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\right]\binom{2n}{n}(\frac{1}{4})^{2n}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

首先证明 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$。
考虑多项式 $(1+x)^{2n}$ 第 n 项的系数，一方面由二项式定理知该系数为 $\binom{2n}{n}$。另一方面，由于 $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$，第 n 项也可以写作

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\binom{n}{n-k}x^{n-k}
$$

清华大学电子工程系版权所有

因此 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$ 成立

那么有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\right]\binom{2n}{n}(\frac{1}{4})^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^2(\frac{1}{4})^{2n}$$

根据斯特林公式，当 n 趋于无穷时，$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$，那么上式的第 n 项在 n 趋于无穷时有

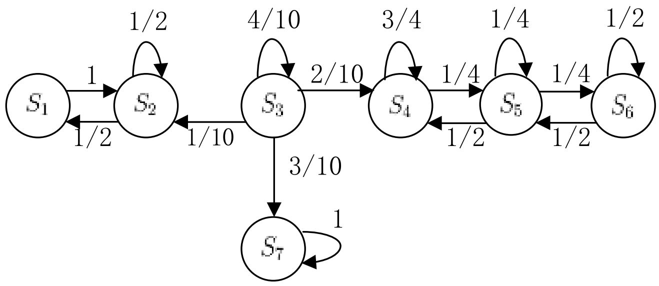
$$\binom{2n}{n}^2(\frac{1}{4})^{2n}\sim\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\right)^2(\frac{1}{4})^{2n}\sim\frac{1}{\pi n}$$

由于调和级数不收敛，$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^2(\frac{1}{4})^{2n}$ 也不收敛，因此 $(0,0)$ 是常返的，由于常返性是类性质，二维随机游动也是常返的。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{00}^{(n)}=0$，易知二维随机游动是零常返的。

清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2) ，homework5_Markov Chain 4 © 清华大学电子工程系

1. 考虑如下 Markov 链，假设初始状态为状态 S_3，即 Markov 链在第一次转移前处于状态 S_3。



(1) 定义随机变量 J 为最后一次离开状态 S_3 前的转移次数，求随机变量 J 的方差。

(2) 定义随机变量 K 为第一次进入状态 S_4 前的转移次数，求随机变量 K 的期望。

参考答案：

(1) 对于状态 S_3，一旦离开后，就永不返回。令 $p = \frac{4}{10}$, 则：$J \approx G(p)$, 即：$P(J = k) = p^{k-1}(1-p)$。J 的方差：$D(J) = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{10}{9}$

(2) 根据状态转移图，可得永远无法到达状态 4 的概率不为 0，即 $p\{K < \infty\} < 1$。因此，随机变量 K 的期望为 ∞。

2. 一质点沿圆周游动。圆周按顺时针、等距排列五个点（0,1,2,3,4）把圆周分为五格。质点每次游动或顺时针或逆时针移动一格，顺时针前进一格的概率为 p，逆时针转一格的概率为 $1-p$。设 $\xi(n)$ 代表经过 n 次转移后质点所处的位置（状态），$\xi(n)$ 是一个齐次马尔可夫链。试求：

(1) 一步转移概率矩阵

(2) 极限概率分布

参考解答：

(1) 设状态为 0,1,2,3,4（顺时针旋转），则一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

清华大学电子工程系版权所有

(2) 由于所有状态都是相通的，且状态数有限，因此所有状态都是正常返的。由于 $P_{00}^{(5)} \geqslant P_{04}^{(4)}P_{40} \geqslant p^4(1-p) > 0$, $P_{00}^{(2)} \geqslant P_{01}P_{10} = p(1-p) > 0$, 由于 $(2,5)=1$, 故马氏链是非周期的。即该马氏链是遍历的。由遍历核心定理：

存在唯一平稳分布，也是极限概率分布：$\pi = (\pi(0), \pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4))$，则有

$$\pi P = \pi$$

求解得到 $\pi = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$

3. 设顾客的购买是无记忆的，即已知顾客的现在购买情况，顾客将来购买的情况不受过去历史购买情况的影响，只与现在的购买情况有关。现在市场上供应 A、B、C 三个厂生产的味精。$X_n=1$,$X_n=2$,$X_n=3$ 分别代表顾客第 n 次购买 A、B、C 三个厂的味精。$\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是一个齐次马尔科夫链，其状态空间 $E=\{1,2,3\}$，如果已知初始的概率分布

$$\pi^{(0)} = \begin{pmatrix} \pi_1^{(0)} & \pi_2^{(0)} & \pi_3^{(0)} \end{pmatrix} = \{0.2, 0.4, 0.4\}$$

及一步概率转移矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

试预测经过长期多次购买后，各厂家味精的市场占有率。

参考解答： 根据状态转移概率矩阵，容易知道此 Markov 链是不可约遍历马氏链，由遍历核心定理：其唯一平稳分布就是极限分布。设极限分布为 π, 则有：$\pi = \pi P$, 结合 $\sum_{i\in S}^{\pi(i)} = 1$, 可以解得：

$$\pi = (\frac{5}{7}, \frac{11}{84}, \frac{13}{84})$$

此即三个厂的产品市场占有率最终分布。

4. 假设 A、B 两人进行赌博游戏，共有 N+1 枚硬币，其中每次游戏失败的一方给胜利的一方一枚硬币，但是当有人仅剩一枚硬币时，如果输则继续保留该硬币。假设每次游戏 A 获胜的概率为 p，失败的概率为 q，则试求 A 所得硬币数的极限分布。

参考解答设 A 留有 i 枚硬币的状态为 i，则其状态转移概率矩阵 $\mathbf{P} = \{P_{ij}\}$,$i,j = 1,2\ldots N$ 为：

$$\begin{pmatrix} q & p & & & & \\ q & 0 & p & & & \\ & q & 0 & p & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & q & 0 & p \\ & & & & q & p \end{pmatrix}$$

因此，该 Markov 链为遍历不可约马尔可夫链，其平稳分布为其极限分布。设其极限分

清华大学电子工程系版权所有

布为 $\mathbf{u}=\{u_k\}, k=1,2,\ldots,N$，则有 $\mathbf{u}=\mathbf{u}\mathbf{P}$。则

$$\begin{cases} u_k = u_k q + u_{k+1} q & k=1 \\ u_k = u_{k-1} p + u_{k+1} q & k=2,\ldots,N-1 \\ u_k = u_k p + u_{k-1} p & k=N \end{cases}$$

因此可以得到 $u_k = \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} u_1$。由 $\sum\limits_{k=1}^{N} u_k = 1$ 得：

$$u_k = \begin{cases} \frac{1-(p/q)}{1-(p/q)^N}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} & p \neq q \\ \frac{1}{N} & p = q \end{cases}$$

清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2) ，homework6_ wss1_solution © 清华大学电子工程系

1. (陆书第一版第 4 章习题 3) 设 ξ_1、ξ_2 为独立同分布随机变量，均匀分布于 $(0,1)$。设有随机过程

$$\eta(t) = \xi_1 \sin(\xi_2 t)\ , t \geqslant 0$$

求：$\{\eta(t), t \geqslant 0\}$ 的均值，相关函数。

相关知识点：

均值和相关函数的计算

参考答案：

$$E(\xi_1) = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$E(\xi_1^2) = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

$$E(\eta(t)) = E(\xi_1) E(\sin(\xi_2 t)\ ) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(\xi_2 t)\mathrm{d}\xi_2 = \frac{1}{2}\frac{1-\cos t}{t}$$

$$\begin{aligned} E(\eta(t_1)\eta(t_2)) &= E(\xi_1\xi_2) E(\sin(\xi_2 t_1)\ \sin(\xi_2 t_2)\ ) \\ &= \frac{1}{6}\int_0^1 [\cos[\xi_2(t_1-t_2)]\ -\cos[\xi_2(t_1+t_2)]\ ]\mathrm{d}\xi_2 \\ &= \frac{1}{6}[\frac{\sin(t_1-t_2)}{t_1-t_2} - \frac{\sin(t_1+t_2)}{t_1+t_2}] \end{aligned}$$

2. 设有两状态时间离散的马尔科夫链 $\xi(n), n = 0, 1, 2, ...\xi(n)$ 可取 0 或 1，它的一步转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

且

$$P\{\xi(0) = 1\} = \frac{p}{p+q}$$
$$P\{\xi(0) = 0\} = \frac{q}{p+q}$$

试证明该过程为严平稳过程。

概念复习：宽平稳与严平稳概念

参考答案：首先计算 $\xi(1)$ 的分布为

$$\pi(\xi(1)) = (\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q})\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = (\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q})$$

清华大学电子工程系版权所有

可见在任意时刻 n，$\xi(n)$ 的分布均与初始分布相同。考察分布 $P(\xi(t_1)=x_1,\xi(t_2)=x_2,...,\xi(t_n)=x_n)$，$x_n\in\{0,1\}$，$t_1<t_2<...<t_n$ 为任取的 n 个时刻，根据题目中 Markov 链的齐次性我们有

$$\begin{aligned}&P(\xi(t_1)=x_1,\xi(t_2)=x_2,...,\xi(t_n)=x_n)\\&=P(\xi(t_n)=x_n|\xi(t_{n-1})=x_{n-1})...P(\xi(t_2)=x_2|\xi(t_1)=x_1)P(\xi(t_1)=x_1)\\&=P(\xi(t_n)=x_n|\xi(t_{n-1})=x_{n-1})...P(\xi(t_2)=x_2|\xi(t_1)=x_1)P(\xi(0)=x_1)\end{aligned}$$

再利用 Markov 链的齐次性，对任意的 τ，均有

$$\begin{aligned}&P(\xi(t_n+\tau)=x_n|\xi(t_{n-1}+\tau)=x_{n-1})...P(\xi(t_2+\tau)=x_2|\xi(t_1+\tau)=x_1)\\&=P(\xi(t_n)=x_n|\xi(t_{n-1})=x_{n-1})...P(\xi(t_2)=x_2|\xi(t_1)=x_1)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&P(\xi(t_n+\tau)=x_n|\xi(t_{n-1}+\tau)=x_{n-1})...P(\xi(t_2+\tau)=x_2|\xi(t_1+\tau)=x_1)P(\xi(t_1+\tau)=x_1)\\&=P(\xi(t_n)=x_n|\xi(t_{n-1})=x_{n-1})...P(\xi(t_2)=x_2|\xi(t_1)=x_1)P(\xi(t_1)=x_1)\end{aligned}$$

这说明

$$P(\xi(t_1+\tau)=x_1,\xi(t_2+\tau)=x_2,...,\xi(t_n+\tau)=x_n)=P(\xi(t_1)=x_1,\xi(t_2)=x_2,...,\xi(t_n)=x_n)$$

即证明了该过程的严平稳性

3. (陆书第二版第 2 章习题 4) 设有随机过程 $\xi(t)=Z\sin(t+\Theta)$，$-\infty<t<\infty$，设 Z 和 Θ 是相互独立的随机变量，Z 均匀分布于 $(-1,1)$ 之间，$P(\Theta=\frac{\pi}{4})=P(\Theta=-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，试证明 $\xi(t)$ 是宽平稳随机过程，但是不满足严平稳的条件（不满足一阶严平稳条件）。

相关知识点：

宽平稳定义、严平稳与宽平稳的区别；

参考答案：

(1) 考察随机过程 $\xi(t)$ ：

均值: $E\{\xi(t)\}=E\{Z\sin(t+\Theta)\}$。由于随机变量 Z 与 Θ 相互独立，则

$$E\{\xi(t)\}=E\{Z\sin(t+\Theta)\}=E\{Z\}\cdot E\{\sin(t+\Theta)\}$$

根据 Z 与 Θ 的分布得，$E\{Z\}=0$，$E\{\sin(t+\Theta)\}=\frac{1}{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$，则 $E\{\xi(t)\}=0=$ 常数。

自相关函数:

$$\begin{aligned}R_\xi(t_1,t_2)&=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=E\{Z\sin(t_1+\Theta)Z\sin(t_2+\Theta)\}\\&=E\left\{\frac{Z^2}{2}[\cos(t_1-t_2)+\cos(t_1+t_2+2\Theta)]\right\}\\&=E\left\{\frac{Z^2}{2}\right\}\cdot E\{\cos(t_1-t_2)+\cos(t_1+t_2+2\Theta)\}\end{aligned}$$

清华大学电子工程系版权所有

其中，$E\left\{\frac{Z^2}{2}\right\}$ 为常数

$$\begin{aligned}
&E\{\cos(t_1-t_2)+\cos(t_1+t_2+2\Theta)\}\\
&=E\{\cos(t_1-t_2)\}+E\{\cos(t_1+t_2+2\Theta)\}\\
&=\cos(t_1-t_2)+\frac{1}{2}\cos\left(t_1+t_2+2\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(t_1+t_2+2\frac{-\pi}{4}\right)\\
&=\cos(t_1-t_2)
\end{aligned}$$

所以，$R_\xi(t_1,t_2)=E\left\{\frac{Z^2}{2}\right\}\cos(t_1-t_2)=R_\xi(t_1-t_2)$ 仅与时间差 t_1-t_2 有关。
综上，随机过程 $\xi(t)$ 为宽平稳过程。

(2) 随机过程 $\xi(t)$ 不是严平稳过程，考察其一维概率分布函数分布。
特别地，取 $t_1=0$，$\xi(t_1)=Zsin(\Theta)$，取 $t_2=\frac{\pi}{4}$（或者取其它值都可以），$\xi(t_2)=Zsin\left(\frac{\pi}{4}+\Theta\right)$。由于 $Z\in(-1,1)$，$\Theta\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{-\pi}{4}\right\}$，显然，$\xi(t_1)$，$\xi(t_2)$ 的取值范围就不同，其对应的一维概率分布函数必然不同，这与严平稳的定义不符，故 $\xi(t)$ 不是严平稳过程。

4.（陆书第二版第 2 章习题 23) 设有宽平稳随机过程 $\xi(t)$，其相关函数为 $R_\xi(\tau)$，且 $R_\xi(\tau)=R_\xi(0)$，其中 T 为一个正常数。证明 $\xi(t+T)=\xi(t)$ 以概率 1 成立，且 $R_\xi(t+T)=R_\xi(t)$，即相关函数具有周期性，其周期为 T。

相关知识点：

概率 1 相等含义，切比雪夫不等式（Chebyshev'sInequality）。

参考答案：

(1) 令 $r(t)=\xi(t+T)-\xi(t)$，则

$$E(r(t)=E(\xi(t+T)-\xi(t))=E(\xi(t+T))-E(\xi(t))$$

因为 $\xi(t)$ 为一个宽平稳过程，则 $E(\xi(t+T))=E(\xi(t))$，故 $E(r(t))=0$。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(r(t))=E\left(|\xi(t+T)-\xi(t)|^2\right)\\
&=E\left(|\xi(t+T)|^2\right)-E\left(\xi(t+T)\overline{\xi(t)}\right)-E\left(\xi(t)\overline{\xi(t+T)}\right)+E\left(|\xi(t)|^2\right)\\
&=R_\xi(0)-R_\xi(T)-R_\xi(-T)+R_\xi(0)=2R_\xi(0)-R_\xi(T)-\overline{R_\xi(T)}
\end{aligned}$$

（根据自相关函数的性质）

由已知条件得，$R_\xi(T)=R_\xi(0)$，而 $R_\xi(0)$ 为实数，故 $R_\xi(T)$ 也为实数，即 $R_\xi(T)=\overline{R_\xi(T)}$
所以，$\mathrm{Var}(r(t))=2(R_\xi(0)-R_\xi(T))=0$
由切比雪夫不等式得，对 $\forall\epsilon>0$，有

$$P\{|r(t)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathrm{Var}(r(t))}{\varepsilon^2}=0$$

由概率定义的非负性可得，$P\{|r(t)|\geqslant\varepsilon\}=0$，$\forall\epsilon>0$，则 $P\{|r(t)|=0\}=1=P\{r(t)=0\}$，即 $P\{\xi(t+T)=\xi(t)\}=1$。

清华大学电子工程系版权所有

(2) $R_\xi(\tau) = E\left(\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\right)$

$R_\xi(\tau+T) = E\left(\xi(t+\tau+T)\overline{\xi(t)}\right)$

典型错误:

由 $P\{\xi(t+T)=\xi(t)\}=1$ 得，

$$R_\xi(\tau+T) = E\left(\xi(t+\tau+T)\overline{\xi(t)}\right) = E\left(\xi(t+\tau+T)\overline{\xi(t+T)}\right) = R_\xi(\tau)$$

即 $R_\xi(\tau+T)=R_\xi(\tau)$，自相关函数为周期函数，周期为 T。

对于两个随机变量来说，“以概率 1 相等”并不等价于“相等”！

正确解法:

设 C 为事件 $\{\omega|\xi(t+T)=\xi(t)\}$，P(C) = 1。有

$$\begin{aligned}
R_\xi(t+T) &= E\left\{\xi(t+T)\overline{\xi(0)}\right\} \\
&= E\left\{\xi(t+T)\overline{\xi(0)}|C\right\}P(C) + E\left\{\xi(t+T)\overline{\xi(0)}|\overline{C}\right\}P(\overline{C}) = E\left\{\xi(t+T)\overline{\xi(0)}|C\right\} \\
&= E\left\{\xi(t)\overline{\xi(0)}|C\right\} = E\left\{\xi(t)\overline{\xi(0)}|C\right\}P(C) + E\left\{\xi(t)\overline{\xi(0)}|\overline{C}\right\}P(\overline{C}) \\
&= R_\xi(t)
\end{aligned}$$

即 $R_\xi(\tau+T)=R_\xi(\tau)$，自相关函数为周期函数，周期为 T。

5. 设随机过程 $X(t)=a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$，其中，$\omega$ 为正常数，a,b 是独立同分布的随机变量，服从 $\mathcal{N}(0,1)$，记 $X(t)=\rho\cos(\omega t+\theta)$，

(1) 求 $X(t)$ 的均值和自相关函数，问此过程是否为宽平稳过程？

(2) 求随机变量 ρ，θ 的分布密度函数，问 ρ，θ 是否统计独立？

相关知识点：

宽平稳定义、联合概率密度函数求解，雅克比行列式，随机变量的独立性；

参考答案：

(a) 已知 $a,b\sim\mathcal{N}(0,1)$，且相互独立，则

均值：

$$E\{X(t)\} = E\{a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)\} = E\{a\}\cos(\omega t)+E\{b\}\sin(\omega t) = 0$$

自相关函数：

$$\begin{aligned}
E\{X(t_1)X(t_2)\} = \ & E\{[a\cos(\omega t_1)+b\sin(\omega t_1)][a\cos(\omega t_2)+b\sin(\omega t_2)]\} \\
= E\left\{a^2\right\}\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2) &+ E\{ab\}\sin(\omega t_1+\omega t_2) + E\left\{b^2\right\}\sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2)
\end{aligned}$$

由已知分布计算得 $E\{a^2\}=E\{b^2\}=1$，$E\{ab\}=E\{a\}E\{b\}=0$，所以

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = \cos(\omega t_1)\,cos(\omega t_2) + \sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2) = \cos(\omega(t_1-t_2))$$

由于 $X(t)$ 的均值为常数，自相关函数为时间差的函数，故随机过程 $X(t)$ 为宽平稳过程。

清华大学电子工程系版权所有

(b) 根据 $X(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \rho\cos(\omega t + \theta)$ 得

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = g_1(a, b)$$

$$\theta = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) = g_2(a, b)$$

则变换对应的雅克比行列式为

$$J(a, b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial a} & \frac{\partial g_1}{\partial b} \\ \frac{\partial g_2}{\partial a} & \frac{\partial g_2}{\partial a} \end{vmatrix} = \frac{\partial g_1}{\partial a}\frac{\partial g_2}{\partial b} - \frac{\partial g_1}{\partial b}\frac{\partial g_2}{\partial a}$$

经过简单微分运算得，$J(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\rho}$

由于 $a, b \sim \mathcal{N}(0, 1)$，且相互独立，故其联合概率密度为

$$f(a, b) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{a^2+b^2}{2}}$$

则 ρ, θ 的联合概率密度为

$$f(\rho, \theta) = f(a, b)\left|J(a, b)\right|^{-1} = \frac{\rho}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}, 0 < \rho < \infty, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

则随机变量 ρ, θ 的边缘概率密度为

$$f(\rho) = \int_0^{2\pi} f(\rho, \theta)\mathrm{d}\theta = \rho\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}},\ \rho > 0$$

$$f(\theta) = \int_0^{\infty} f(\rho, \theta)\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2\pi}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

显然，有 $f(\rho, \theta) = f(\rho) f(\theta)$，根据随机变量统计独立性的定义得，随机变量 ρ 与 θ 相互独立。

6. 设 $\{\xi_n, n \in Z\}$ 为白噪声，即 $E(\xi_n) = 0, E(\xi_n\xi_m) = \delta_{nm}\sigma^2$, 其中，$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$，定义 $X_n - aX_{n-1} = \xi_n$，$|a| < 1$，试讨论序列 $\{X_n\}$ 的宽平稳性（提示：可根据序列的初始状态分类讨论，例如，分两种情况 $X_0 = 0$ $X_{-\infty} = 0$）

相关知识点：

宽平稳定义，AR（1）自回归模型；

参考解答：

分两种情况讨论：

(1) 设初始条件为 $X_0 = 0$，利用迭代公式可得

$$X_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k\xi_{n-k} + a^n X_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a^k\xi_{n-k}$$

于是，对 $r \geqslant 0$，自相关函数

$$E(X_{n+r}X_n) = E\left\{\sum_{k=0}^{n+r-1} a^k\xi_{n+r-k}\sum_{p=0}^{n-1} a^p\xi_{n-p}\right\}$$

清华大学电子工程系版权所有

$$= E\left\{\sum_{k=0}^{n+r-1}\sum_{p=0}^{n-1} a^p a^k \xi_{n+r-k}\xi_{n-p}\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+r-1}\sum_{p=0}^{n-1} a^p a^k E\left(\xi_{n+r-k}\xi_{n-p}\right)$$

$$= \sigma^2 \sum_{p=0}^{n-1} a^p a^{p+r} = \sigma^2 a^r \frac{1-a^{2n}}{1-a^2}$$

显然，其自相关函数是参数 n 和 r 的函数，表明序列 $\{X_n\}$ 不是宽平稳过程；

(a) 设初始条件为 $X_{-\infty} = 0$，利用迭代公式可得

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \xi_{n-k}$$

于是，对 $r \geqslant 0$，自相关函数

$$E\left(X_{n+r}X_n\right) = E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} a^k \xi_{n+r-k} \sum_{p=0}^{\infty} a^p \xi_{n-p}\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a^p a^k \xi_{n+r-k}\xi_{n-p}\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a^p a^k E\left(\xi_{n+r-k}\xi_{n-p}\right)$$

$$= \sigma^2 \sum_{p=0}^{\infty} a^p a^{p+r} = \sigma^2 a^r \frac{1}{1-a^2}$$

而当 $r < 0$ 时，可得 $E\left(X_{n+r}X_n\right) = \sigma^2 a^{|r|} \frac{1}{1-a^2}$

其均值为 $E\left(X_n\right) = 0$

综上，其自相关函数仅与时间差有关，均值为常数，故此时为宽平稳过程。

7. 考虑一个随机三角脉冲串 $X(t), -\infty < t < +\infty$，其脉宽为 T_0，定义如下：

1) 在一个周期内，脉冲可为正三角脉冲，也可为负三角脉冲，两者等概出现。
2) 各周期内出现正三角脉冲或负三角脉冲是相互统计独立的。
3) 设原点后出现的第一个完整的三角脉冲的开始时间均匀分布于 $[0, T_0)$。

此过程的一个典型样本轨道如图 3.1。求：此随机过程的均值函数和自协方差函数，试问该过程是否宽平稳？

相关知识点：

随机过程相关函数定义，宽平稳概念，；

参考答案：

清华大学电子工程系版权所有

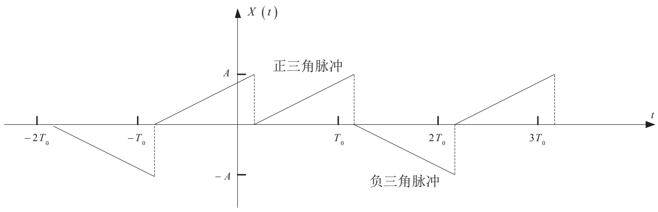


图 3.1

（一） 先求均值函数

设事件 B 表示 t 时刻所在脉冲为正脉冲，则 $P(B) = P(\overline{B}) = 0.5$。

利用全概公式，$X(t)$ 的概率密度 $p(x)$ 为

$$p(x) = p(x|B)\,P(B) + p\left(x|\overline{B}\right)P\left(\overline{B}\right)$$

设 t 时刻所处的脉冲的起始点的时刻为 t_0，则随机变量 $t_0 \sim \mathrm{U}(t - T_0, t)$。

给定事件 B 下，$X(t) = A\frac{t-t_0}{T_0}$，因此 $p(x|B) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & 0 \leqslant x \leqslant A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$，

类似可得，$p\left(x|\overline{B}\right) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & -A \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$，

故 $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A}, & -A \leqslant x \leqslant A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$，即服从均匀分布 $\mathrm{U}(-A, A)$。

故 $E[X(t)] = 0$。

当然，也可以直接运用重期望公式，

$$E[X(t)] = E[X(t)\,|B]\,P(B) + E\left[X(t)\,|\overline{B}\right]P\left(\overline{B}\right) = \frac{A}{2}\frac{1}{2} + \left(-\frac{A}{2}\right)\frac{1}{2} = 0$$

（二） 求自协方差函数

由于均值函数为 0，这时自协方差函数 $C_X(t_1, t_2)$ 等于自关函数 $R_X(t_1, t_2)$。不妨设 $t_1 \leqslant t_2$，下面分情况讨论。

(1) 考虑 $t_2 - t_1 \geqslant T_0$，此时 t_1 时刻和 t_2 时刻必位于不同的脉冲周期内。值得注意的是，$X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 并不独立。下求 $X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 的联合概率密度 $p(x_1, x_2) = p(x_1)\,p(x_2|x_1)$。

注意，给定 $X(t_1) = x_1$，$X(t_2)$ 的条件分布为（依据全概公式），

$$\begin{aligned} p(x_2|x_1) &= p(x_2|x_1, B)\,P(B|x_1) + p\left(x_2|x_1, \overline{B}\right)P\left(\overline{B}|x_1\right) \\ &= p(x_2|x_1, B)\,P(B) + p\left(x_2|x_1, \overline{B}\right)P\left(\overline{B}\right) \end{aligned}$$

利用了 B 与 $X(t_1)$ 独立，其中设事件 B 表示 t_2 时刻所在脉冲为正脉冲

在给定 $X(t_1) = x_1$ 及事件 B 条件下，$X(t_2)$ 的取值唯一确定，有

$$p(x_2|x_1, B) = \delta\left(x_2 - A\frac{(t_2 - t_1) - \left\lfloor\frac{t_2-t_1}{T_0}\right\rfloor T_0 - \frac{A-|x_1|}{A}T_0}{T_0}\right)$$

清华大学电子工程系版权所有

其中 $\left\lfloor \frac{t_2-t_1}{T_0} \right\rfloor$ 表示小于等于 $\frac{t_2-t_1}{T_0}$ 的最大整数。类似有

$$p\left(x_2|x_1,\overline{B}\right)=\delta\left(x_2+A\frac{(t_2-t_1)-\left\lfloor \frac{t_2-t_1}{T_0}\right\rfloor T_0-\frac{A-|x_1|}{A}T_0}{T_0}\right)$$

因此，

$$\begin{aligned}p\left(x_1,x_2\right)=\frac{1}{2A}\frac{1}{2}&\left\{\delta\left(x_2-A\frac{(t_2-t_1)-\left\lfloor \frac{t_2-t_1}{T_0}\right\rfloor T_0-\frac{A-|x_1|}{A}T_0}{T_0}\right)\right.\\&\left.+\delta\left(x_2+A\frac{(t_2-t_1)-\left\lfloor \frac{t_2-t_1}{T_0}\right\rfloor T_0-\frac{A-|x_1|}{A}T_0}{T_0}\right)\right\},-A\leqslant x_1\leqslant A\end{aligned}$$

显然，$X\left(t_1\right)$ 与 $X\left(t_2\right)$ 不独立。因此，

$$\begin{aligned}R_X\left(t_1,t_2\right)=&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2p\left(x_1,x_2\right)dx_2dx_1\\=&\frac{1}{4A}\int_{-A}^{+A}x_1\left\{A\frac{(t_2-t_1)-\left\lfloor \frac{t_2-t_1}{T_0}\right\rfloor T_0-\frac{A-|x_1|}{A}T_0}{T_0}\right.\\&\left.-A\frac{(t_2-t_1)-\left\lfloor \frac{t_2-t_1}{T_0}\right\rfloor T_0-\frac{A-|x_1|}{A}T_0}{T_0}\right\}\mathrm{d}x_1\\=&0\end{aligned}$$

故 $t_2-t_1\geqslant T_0$ 时，$R_X\left(t_1,t_2\right)=0$。

(2) 考虑 $t_2-t_1<T_0$，此时 t_1 时刻和 t_2 时刻可能位于同一周期，也可能位于不同的脉冲周期内。设事件 C 表示 t_1 时刻和 t_2 时刻位于同一周期，则

$$\begin{aligned}R_X\left(t_1,t_2\right)=&E\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)\right]\\=&P\left(C\right)E\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)|C\right]+P\left(\overline{C}\right)E\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)|\overline{C}\right]\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中，类似于 $t_2-t_1\geqslant T_0$ 时的计算，第二项 $E\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)|\overline{C}\right]=0$。值得注意的是，此时 $X\left(t_1\right)$ 与 $X\left(t_2\right)$ 并不独立。

对于第一项，设 t_1 时刻所处的脉冲的起始点的时刻为 t_0，给定 C 条件下，有 $t_2<t_0+T$，$t_1\geqslant t_0>t_2-T_0$。进一步有，给定 C 条件，t_0 的条件分布

$$p\left(t_0|C\right)\sim\mathrm{U}\left(t_2-T_0,t_1\right)\tag{3.2}$$

设事件 B 表示 t_1 时刻所在脉冲为正脉冲，则

$$\begin{aligned}E\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)|C\right]=&P\left(B|C\right)E\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)|C,B\right]\\&+P\left(\overline{B}|C\right)E\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)|C,\overline{B}\right]\\=&P\left(B\right)E\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)|C,B\right]\\&+P\left(\overline{B}\right)E\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)|C,\overline{B}\right]\end{aligned}\tag{3.3}$$

利用了 B 与 C 独立，给定 C,B 条件下，$X\left(t_1\right)$ 与 $X\left(t_2\right)$ 视为 t_0 的函数，

清华大学电子工程系版权所有

$X(t_1) = A\frac{t_1 - t_0}{T_0}$ $X(t_2) = A\frac{t_2 - t_0}{T_0}$，则

$$E\left[X(t_1)X(t_2)|C,B,t_0\right] = A\frac{t_1 - t_0}{T_0} \cdot A\frac{t_2 - t_0}{T_0}$$

$$\begin{aligned}
&E\left[X(t_1)X(t_2)|C,B\right] = E\left\{E\left[X(t_1)X(t_2)|C,B,t_0\right]|C,B\right\} \\
&= E\left\{A\frac{t_1 - t_0}{T_0} \cdot A\frac{t_2 - t_0}{T_0}|C,B\right\} \\
&= E\left\{A\frac{t_1 - t_0}{T_0} \cdot A\frac{t_2 - t_0}{T_0}|C\right\} \\
&\text{利用了给定 } C\text{，}B \text{ 与 } t_0 \text{ 条件独立}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

类似有，$E\left[X(t_1)X(t_2)|C,\overline{B}\right] = E\left\{A\frac{t_1 - t_0}{T_0} \cdot A\frac{t_2 - t_0}{T_0}|C\right\}$
结合(3.1),(3.2),(3.3),(3.4)式，可得

$$\begin{aligned}
R_X(t_1,t_2) =& P(C)\,E\left\{A\frac{t_1 - t_0}{T_0} \cdot A\frac{t_2 - t_0}{T_0}|C\right\} \\
=& \frac{T_0 - (t_2 - t_1)}{T_0} \cdot \int_{t_2 - T_0}^{t_1} p(t_0|C)\, A^2\frac{t_1 - t_0}{T_0}\frac{t_2 - t_0}{T_0}\mathrm{d}t_0 \\
=& \frac{A^2}{T_0} \cdot \int_{t_2 - T_0}^{t_1} \frac{t_1 - t_0}{T_0}\frac{t_2 - t_0}{T_0}\mathrm{d}t_0 \\
=& \frac{A^2}{T_0^3} \cdot \int_{t_2 - T_0}^{t_1} (t_1 - t_0)(t_2 - t_0)\,\mathrm{d}t_0 \\
=& \frac{A^2}{T_0^3} \cdot \int_0^{T_0 - (t_2 - t_1)} \theta(t_2 - t_1 + \theta)\,\mathrm{d}\theta\text{，积分换元 } \theta = t_1 - t_0 \\
=& \frac{A^2}{T_0^3} \cdot \frac{2T_0 + (t_2 - t_1)}{6}\left[T_0 - (t_2 - t_1)\right]^2
\end{aligned}$$

由此可见，自关函数 $R_X(t_1,t_2)$ 仅与时间差 $t_2 - t_1$ 有关。

（三） 综上所述，

$$E\left[X(t)\right] = 0$$

$$R_X(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{T_0^3} \cdot \frac{2T_0 + |\tau|}{6}\left[T_0 - |\tau|\right]^2, & |\tau| < T_0 \\ 0, & |\tau| \geqslant T_0 \end{cases}$$

由此可知，该过程是宽平稳。

清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2) ，homework7_ wss2 solution© 清华大学电子工程系

1. 设 $\{X_n, n \in N\}$ 是相互独立的随机变量序列，其分布律为

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}, P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, n = 1, 2, \cdots,$$

试问：序列 $\{X_n, n \in N\}$ 是否均方收敛。

参考解答：

由于

$$\begin{aligned}\|X_m - X_n\|^2 &= E\left(X_m^2 - 2X_mX_n + X_n^2\right) \\ &= 1 - 2\frac{1}{m}\frac{1}{n} + 1 = 2\left(1 - \frac{1}{mn}\right) \to 2,\ m, n \to \infty\end{aligned}$$

所以序列 $\{X_n, n \in N\}$ 不均方收敛。

2. 信息论将信源建模成随机过程。下面讨论信源编码。考虑独立随机序列 $\{X(n), n \in N\}$，各个离散时刻的 $X(n)$ 等概取值于符号集 $\{a, b, c\}$。考虑将 a, b, c 分别编码成 00,01,10。$\{X(n)\}$ 的编码结果为 0/1 随机序列 $\{B(n)\}$。

(a) 求 $\{B(n)\}$ 的均值函数和自相关函数。

(b) 试判断 $\{B(n)\}$ 是否为宽平稳？

概念复习：

均值和自相关函数计算，宽平稳和概念

参考答案：

(1) 由自然数定义，从 n=0 开始编码。

对 $n1 = 0$: 考虑 $R_B(0,0) = E[B(0)B(0)] = P(B(0) = 1) = \frac{1}{3}; R_B(0,1) = E[B(0)B(1)] = P(B(0) = 1, B(1) = 1) = 0; \forall i \geqslant 2,\ R_B(0,i) = E[B(0)B(i)] = P(B(0) = 1, B(i) = 1) = P(B(0) = 1) \cdot P(B(i) = 1) = \frac{1}{9}$。对其他 $n1$ 为偶数有类似情况。

对 $n1 = 1$: 考虑 $R_B(1,0) = E[B(1)B(1)] = P(B(0) = 1, B(1) = 1) = 0; R_B(1,1) = E[B(1)B(1)] = P(B(1) = 1) = \frac{1}{3}; \forall i \geqslant 2,\ R_B(1,i) = E[B(1)B(i)] = P(B(1) = 1, B(i) = 1) = P(B(1) = 1) \cdot P(B(i) = 1) = \frac{1}{9}$。对其他 $n1$ 为奇数有类似情况。

$$R_B(n1, n2) = \begin{cases} 0, & (n1 = 2j, n2 = 2j+1) \text{ or } (n1 = 2j+1, n2 = 2j) \\ \frac{1}{3}, & n1 = n2 \\ \frac{1}{9}, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 j 为整数，且 $j \geqslant 0$。

(2) 不是宽平稳：如 $R_B(1,2) = 0$，而 $R_B(2,3) = \frac{1}{9}$，尽管两者中的时间差相同。

3. 设有随机过程 $\zeta(t), -\infty < t < +\infty, \zeta(t) = \eta\cos t + \xi\sin t$，其中 $\xi\ \eta$ 为统计独立的随机变量，$\xi\ \eta$ 均可取-1 和 +2 两个值，取-1 的概率为 2/3，取 +2 的概率为 1/3。

清华大学电子工程系版权所有

(1) 试计算 $E(\zeta(t)), R_\zeta(t_1, t_2)$

(2) 试问：证明 $\zeta(t)$ 是否为宽平稳，是否为严平稳?

参考解答：

(1)

$$
\begin{aligned}
E(\xi) = E(\eta) &= -1 * \frac{2}{3} + 2 * \frac{1}{3} = 0 \\
E(\xi\eta) &= E(\xi) E(\eta) = 0 \\
E(\xi^2) &= E(\eta^2) = 2 \\
E(\zeta(t)) &= E(\eta \cos t + \xi \sin t) = 0 \\
R_\zeta(t_1 - t_2) &= E((\eta \cos t_1 + \xi \sin t_1)(\eta \cos t_2 + \xi \sin t_2)) \\
&= E(\eta^2) \cos t_1 \cos t_2 + E(\xi^2) \sin t_1 \sin t_2 = 2\cos(t_1 - t_2)
\end{aligned}
$$

显然它是宽平稳的

(2) $t = 0$ 时，$\zeta(t) = \eta, \zeta(t)$ 的取值为 -1 和 2
$t = \pi/4$ 时，$\zeta(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\eta + \xi), \zeta(t)$ 的取值有三种
$\zeta(t)$ 的一维分布与 t 有关，故它不是严平稳的。

4.（[1] 第四章习题 13）设平稳随机过程 $\xi(t)$ 的相关函数为 $R_\xi(\tau)$, 且 $R_\xi(T) = R_\xi(0)$，T 为一常数，$T > 0$，试证：

(a) 有 $\xi(t+T) = \xi(t)$ 以概率 1 相等。

(b) $R_\xi(t+T) = R_\xi(t)$，即相关函数具有周期性，其周期为 T。

（具有周期性相关函数的平稳随机过程称为周期性随机过程）

参考解答

证明：

（1）首先证 $E\left\{|\xi(t+T) - \xi(t)|^2\right\} = E\left\{|\xi(T) - \xi(0)|^2\right\}$。

由宽平稳性质

左边 $= E\left\{|\xi(t+T)|^2\right\} + E\left\{|\xi(t)|^2\right\} - E\left\{\xi(t+T)\overline{\xi(t)}\right\} - E\left\{\xi(t)\overline{\xi(t+T)}\right\}$

$= E\left\{|\xi(T)|^2\right\} + E\left\{|\xi(0)|^2\right\} - R_\xi(T) - R_\xi(-T) =$ 右边

从而有 $E\left\{|\xi(t+T) - \xi(t)|^2\right\} = 0$

又设 C 为事件 $\{\omega | \xi(t+T) = \xi(t)\}$，则由全概率公式

$$E\left\{|\xi(t+T) - \xi(t)|^2\right\}$$

$$= E\left\{|\xi(t+T) - \xi(t)|^2 | C\right\} P(C) + E\left\{|\xi(t+T) - \xi(t)|^2 | \overline{C}\right\} P(\overline{C}) = 0$$

从而有 $P(\overline{C}) = 0$。证毕

清华大学电子工程系版权所有

（2）承上问，C 为事件 $\{\omega|\xi(t+T)=\xi(t)\}$，其概率为 1。有

$$\begin{aligned}
R_\xi(t+T) &= E\left\{\xi(t+T)\overline{\xi(0)}\right\} \\
&= E\left\{\xi(t+T)\overline{\xi(0)}|C\right\}P(C)+E\left\{\xi(t+T)\overline{\xi(0)}|\overline{C}\right\}P(\overline{C}) = E\left\{\xi(t+T)\overline{\xi(0)}|C\right\} \\
&= E\left\{\xi(t)\overline{\xi(0)}|C\right\} = E\left\{\xi(t)\overline{\xi(0)}|C\right\}P(C)+E\left\{\xi(t)\overline{\xi(0)}|\overline{C}\right\}P(\overline{C}) \\
&= R_\xi(t)
\end{aligned}$$

证毕。

5.（[1] 第四章习题 26）设有平稳随机过程 $\xi(t)$，其相关函数为

$$R_\xi(\tau)=\sigma^2\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$$

若有随机过程 $\eta(t)$，$\eta(t)=\xi(t)+\xi''(t)$，求 $\eta(t)$ 的相关函数。

参考解答

利用平稳过程高阶导数的性质

$$\begin{aligned}
E\left[\eta(t+\tau)\overline{\eta(t)}\right] &= E\left[\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\right]+E\left[\xi(t+\tau)\overline{\xi^{(2)}(\tau)}\right] \\
&+E\left[\xi^{(2)}(t+\tau)\overline{\xi(t)}\right]+E\left[\xi^{(2)}(t+\tau)\overline{\xi^{(2)}(t)}\right] \\
&= R_\xi(\tau)+2R_\xi^{(2)}(\tau)+R_\xi^{(4)}(\tau)
\end{aligned}$$

代入得到，

$$\begin{aligned}
R_\eta(\tau) &= \sigma^2e^{-a|\tau|}\left(1+a|\tau|+\frac{1}{3}a^2\tau^2\right)+\frac{2}{3}a^2\sigma^2e^{-a|\tau|}\left(-1-a|\tau|+a^2\tau^2\right) \\
&+\frac{1}{3}a^4\sigma^2e^{-a|\tau|}\left(3-5a|\tau|+a^2\tau^2\right) \\
&= \sigma^2e^{-a|\tau|}[\left(1-\frac{2}{3}a^2+a^4\right)+a|\tau|\left(1-\frac{2}{3}a^2-\frac{5}{3}a^4\right) \\
&+\frac{1}{3}a^2\tau^2\left(1+2a^2+a^4\right)]
\end{aligned}$$

6. 考虑随机过程 $\{X(t)\}$，及与之独立的随机变量 Θ，Θ 均匀分布于 $[0,T]$。考虑 $Y(t)=X(t+\Theta)$。试证：

(1) 如果 $\{X(t)\}$ 是周期平稳随机过程，周期为 T，则 $Y(t)$ 为严平稳过程。

(2) 如果 $\{X(t)\}$ 是宽周期平稳随机过程，周期为 T，则 $Y(t)$ 为宽平稳过程。

相关知识点

周期平稳和宽周期平稳

参考解答

清华大学电子工程系版权所有

(1) 由周期平稳（Cyclostationary）定义，考虑 $\forall\tau_0,\forall n,\tau_0$ 一定可表示为 $\tau_0=KT+\tau$，$0\leqslant\tau<T$ 其中 K 为整数，则对 n 维分布函数

$$
\begin{aligned}
&F\left\{x\left(t_1+\Theta+\tau_0\right),\ldots,x\left(t_n+\Theta+\tau_0\right)\right\}=F\left\{x\left(t_1+\Theta+\tau\right),\ldots,x\left(t_n+\Theta+\tau\right)\right\}\\
&=\int_0^T\frac{1}{T}F\left\{x\left(t_1+\theta+\tau\right),\ldots,x\left(t_n+\theta+\tau\right)\right\}d\theta\\
&=\int_\tau^{T+\tau}\frac{1}{T}F\left\{x\left(t_1+\mu\right),\ldots,x\left(t_n+\mu\right)\right\}d\mu\\
&=(\int_\tau^T+\int_T^{T+\tau})\frac{1}{T}F\left\{x\left(t_1+\mu\right),\ldots,x\left(t_n+\mu\right)\right\}d\mu\\
&=(\int_\tau^T+\int_0^{\tau})\frac{1}{T}F\left\{x\left(t_1+\mu\right),\ldots,x\left(t_n+\mu\right)\right\}d\mu\\
&=F\left\{x\left(t_1+\Theta\right),\ldots,x\left(t_n+\Theta\right)\right\}
\end{aligned}
$$

证毕。

(2)

$$
\begin{aligned}
E\left[Y\left(t\right)\right]=E\left[X\left(t+\Theta\right)\right]&=\int_0^T\frac{1}{T}E\left[X\left(t+\theta\right)\right]d\theta\\
&=\int_t^{T+t}\frac{1}{T}E\left[X\left(\mu\right)\right]d\mu=(\int_t^T+\int_T^{T+t})\frac{1}{T}E\left[X\left(\mu\right)\right]d\mu\\
&=\int_0^T\frac{1}{T}E\left[X\left(\mu\right)\right]d\mu
\end{aligned}
$$

与 t 无关。

考虑 $\forall\tau_0,\tau_0$ 一定可表示为 $\tau_0=KT+\tau$，$0\leqslant\tau<T$ 其中 K 为整数，则有

$$
\begin{aligned}
&E\left[Y\left(t_1+\tau_0\right)\overline{Y(t_2+\tau_0)}\right]=E\left[Y\left(t_1+\tau\right)\overline{Y(t_2+\tau)}\right]\\
&=E\left[X(t_1+\quad+\tau)\overline{X(t_2+\quad+\tau)}\right]\\
&=\int_0^T\frac{1}{T}E[X(t_1+\theta+\tau)\overline{X(t_2+\theta+\tau)}]d\theta\\
&=(\int_\tau^T+\int_T^{T+\tau})\frac{1}{T}E[X(t_1+\mu)\overline{X(t_2+\mu)}]d\mu\\
&=(\int_\tau^T+\int_0^\tau)\frac{1}{T}E\left[X\left(t_1+\mu\right)\overline{X\left(t_2+\mu\right)}\right]d\mu\\
&=E\left[Y\left(t_1\right)\overline{Y(t_2)}\right]
\end{aligned}
$$

证毕。

7. 随机过程 $X\left(t\right)$ 如果满足 $E\{|X\left(t+T\right)-X\left(t\right)|^2\}=0$，则称此过程是均方周期的，且周期为 T。证明：当且仅当 $X\left(t\right)$ 的自相关函数是双周期的，即对任意整数 m、n, 有 $R\left(t_1+mT,t_2+nT\right)=R\left(t_1,t_2\right)$ 时，$X\left(t\right)$ 是以 T 为周期的均方周期过程。

参考答案

证：假设 $X(t)$ 是均方周期的，由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$
\left|E\left\{X\left(t_1\right)\overline{\left[X\left(t_2+T\right)-X\left(t_2\right)\right]}\right\}\right|^2\leqslant E\left\{\left|X\left(t_1\right)\right|^2\right\}E\left\{\left|X\left(t_2+T\right)-X\left(t_2\right)\right|^2\right\}
$$

清华大学电子工程系版权所有

以及均方周期的定义

$$E\left\{\left|X\left(t_2+T\right)-X\left(t_2\right)\right|^2\right\}$$

得到

$$E\left\{X\left(t_1\right)\overline{\left[X\left(t_2+T\right)-X\left(t_2\right)\right]}\right\}=0$$

因此

$$R\left(t_1,t_2+T\right)-R\left(t_1,t_2\right)=0$$

同样可以由

$$\left|E\left\{\left[X\left(t_1+T\right)-X\left(t_1\right)\right]\overline{X\left(t_2\right)}\right\}\right|^2\leqslant E\left\{\left|X\left(t_1+T\right)-X\left(t_1\right)\right|^2\right\}E\left\{\left|X\left(t_2\right)\right|^2\right\}$$

得到

$$R\left(t_1+T,t_2\right)-R\left(t_1,t_2\right)=0$$

故有

$$R\left(t_1+mT,t_2+nT\right)=R\left(t_1,t_2\right)$$

反之，假设 $R\left(t_1+mT,t_2+nT\right)=R\left(t_1,t_2\right)$ 则有

$$\begin{aligned}E\left\{\left|X\left(t_1+T\right)-X\left(t_1\right)\right|^2\right\}&=E\left\{\left[X\left(t_1+T\right)-X\left(t_1\right)\right]\overline{\left[X\left(t_1+T\right)-X\left(t_1\right)\right]}\right\}\\&=R\left(t_1+T,t_1+T\right)+R\left(t_1,t_2\right)-R\left(t_1,t_2+T\right)-R\left(t_1+T,t_2\right)\\&=0\end{aligned}$$

得证

8. 设 $\{X(t)\}$ 为平稳随机过程，试证：$E\left[X(t)X'(t)\right]=0$。

参考答案

证：

$$\begin{aligned}E\left[X(t)X'(t)\right]&=E\left[X(t)\ \ l.i.m._{h\to 0}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\right]\\&=\lim_{h\to 0}E\left[X(t)\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\right]\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[R_x(h)-R_x(0)\right]=0\end{aligned}$$

注：其中极限换序和 $R_x(\tau)$ 连续均由 $X'(t)$ 存在导出。

极限换序参考陆书 P256 定理一。

清华大学电子工程系版权所有

清华大学电子工程系版权所有

参考文献

[1] 陆大纟 金. 随机过程及其应用. 清华大学出版社, 1986.

清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2) homework8_wss3_solution 清华大学电子工程系

1. 设有宽平稳随机过程 $\xi(t)$，其相关函数为

$$R_\xi(\tau) = A\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)$$

其中 A,α 为常数，$\alpha>0$，求 $\eta(t)=\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}$ 的相关函数。

参考解答：

根据题目给定的条件，有：

$$R_\xi(\tau) = \begin{cases} Ae^{-\alpha\tau}(1+\alpha\tau) & \tau \geqslant 0 \\ Ae^{\alpha\tau}(1-\alpha\tau) & \tau < 0 \end{cases}$$

$$R'_\xi(\tau) = \begin{cases} -A\alpha^2\tau e^{-\alpha\tau} & \tau \geqslant 0 \\ -A\alpha^2\tau e^{\alpha\tau} & \tau < 0 \end{cases}$$

$$R''_\xi(\tau) = \begin{cases} -A\alpha^2\tau e^{-\alpha\tau} + A\alpha^3\tau e^{-\alpha\tau} & \tau \geqslant 0 \\ -A\alpha^2\tau e^{\alpha\tau} - A\alpha^3\tau e^{\alpha\tau} & \tau < 0 \end{cases}$$

因为 $R_\eta(\tau) = -R''_\xi(\tau)$，因此有：

$$R_\eta(\tau) = -R''_\xi(\tau) = A\alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}(1-\alpha|\tau|)$$

2. 设 $X(t)=A\cos(\alpha t)+B\sin(\alpha t), t\geqslant 0, \alpha$ 为常数，A,B 相互独立同服从于 $N(0,\sigma^2)$ 分布，判断积分

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

是否存在？若可积，求 $\{Y(t), t\geqslant 0\}$ 的均值函数、协方差函数和方差函数。

参考解答：

$$\begin{aligned}
m_X(t) &= 0 \\
R_X(s,t) &= E\left[X(t)\overline{X(s)}\right] \\
&= \sigma^2\cos\alpha(t-s) \\
\int_0^\tau\int_0^\tau R_X(s,t)\,dtds &= \int_0^\tau\int_0^\tau \sigma^2\cos\alpha(t-s)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\tau \mathrm{d}s\int_0^\tau \sigma^2\cos\alpha\sigma^2(t-s)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\int_0^\tau (\sin\alpha(\tau-s)+\sin\alpha s\ )\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sigma^2}{\alpha^2}(2-2\cos\alpha\tau)
\end{aligned}$$

上述积分存在，所以 $Y(t)=\int_0^t X(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 均方可积。

均值函数：

$$m_Y(t) = E(Y(t)) = 0$$

清华大学电子工程系版权所有

协方差函数：

$$
\begin{aligned}
C_Y(s,t) &= \int_0^s \int_0^t \sigma^2 \cos\alpha(u-v)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\left[1-\cos\alpha t-\cos\alpha s+\cos\alpha(t-s)\right]
\end{aligned}
$$

方差函数：

$$
D_Y(t) = \frac{2\sigma^2}{\alpha^2}(1-\cos\alpha t)
$$

3. 设有随机过程 $\xi(t)$，它的相关函数为 $R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$；若另有随机过程 $\eta(t)$、$\zeta(t)$ 定义如下：

$$
\eta(t) = a\xi(t) + b\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}
$$

$$
\zeta(t) = c\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} + f\frac{\mathrm{d}^2\xi(t)}{\mathrm{d}t^2}
$$

其中 a,b,c,f 为常数，试求 $\eta(t)$ 和 $\zeta(t)$ 的互关函数 $R_{\eta\zeta}(t_1,t_2)$。

概念复习：

宽平稳随机过程的导数的互相关函数

参考答案：

$$
\begin{aligned}
R_{\eta\zeta}(t_1,t_2) &= E\left[\eta(t_1)\overline{\zeta(t_2)}\right] \\
&= acE\left[\xi(t_1)\overline{\xi^{(1)}(t_2)}\right] + afE\left[\xi(t_1)\overline{\xi^{(2)}(t_2)}\right] + bcE\left[\xi^{(1)}(t_1)\overline{\xi^{(1)}(t_2)}\right] \\
&\quad + bfE\left[\xi^{(1)}(t_1)\overline{\xi^{(2)}(t_2)}\right] \\
&= ac\frac{\partial}{\partial t_2}R_{\xi\xi}(t_1,t_2) + af\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}R_{\xi\xi}(t_1,t_2) + bc\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}R_{\xi\xi}(t_1,t_2) \\
&\quad + bf\frac{\partial^3}{\partial t_1\partial t_2^2}R_{\xi\xi}(t_1,t_2)
\end{aligned}
$$

4.（[1] 第四章习题 28）设有平稳随机过程 $\xi(t)$，它的均值为 0，相关函数为 $R_\xi(\tau)$；若 $\eta(t)=\int_0^t \xi(u)\mathrm{d}u$，求 $\eta(t)$ 的方差和自协方差函数。

清华大学电子工程系版权所有

参考解答：

$$
\begin{aligned}
E\left(\eta\left(t\right)\right) &= E\left\{\int_0^t \xi\left(u\right)du\right\} = \int_0^t E\left\{\xi\left(u\right)\right\}du = 0\\
E\left(\left|\eta(t)\right|^2\right) &= E\left\{\int_0^t \xi\left(u\right)du\int_0^t \xi\left(v\right)dv\right\} = E\left\{\int_0^t\int_0^t \xi\left(u\right)\xi\left(v\right)dudv\right\}\\
&= \int_0^t\int_0^t R_\xi(u-v)dudv \quad (\ x=u-v; y=v)\\
&= \int_0^t\left[\int_0^{t-x} R_N(x)dy\right]dx + \int_{-t}^0\left[\int_{-x}^t R_N(x)dy\right]dx\\
&= \int_{-t}^t (t-|x|)R_N(x)dx\\
\text{从而}Var\left\{\eta\left(t\right)\right\} &= \int_{-t}^t (t-|x|)R_N(x)dx\\
C_\eta\left(t_1,t_2\right) &= E\left\{\left[\int_0^{t_1}\xi\left(u\right)du-0\right]\left[\int_0^{t_2}\xi\left(v\right)dv-0\right]\right\}\\
&= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_\xi(u-v)dudv\\
&= \int_{-t_2}^{t_1}\left(t_2-|x|\right)R_\xi(x)dx
\end{aligned}
$$

注：其中用到均方可积性质三，以交换积分号和期望。

5. （[1] 第四章习题 30）设有实随机过程 $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$ 加入到一短时间的时间平均器上作为它的输入, 如图 3.1所示，它的输出为 $\eta(t)$，

$$\eta(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^t \xi(u)\mathrm{d}u$$

式子中 t 为输出信号的观测时刻，T 为平均器采用的积分时间间隔。若 $\xi(t) = \zeta\cos t$，

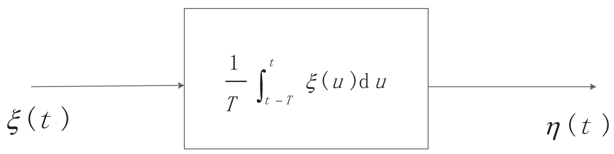


图 3.1

其中 ζ 为 $(0,1)$ 内均匀分布的随机变量，

(a) 求输入过程的均值和相关函数，问输入过程是否平稳？

(b) 证明输出过程 $\eta(t)$ 的表达式为

$$\eta(t) = \zeta\left(\frac{\sin T/2}{T/2}\right)\cos(t-T/2)$$

(c) 证明输出的均值为

$$E[\eta(t)] = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin T/2}{T/2}\right)\cos(t-T/2)$$

清华大学电子工程系版权所有

输出相关函数为

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sin T/2}{T/2}\right)^2\cos(t_1-T/2)\cos(t_2-T/2)$$

问输出是否为平稳过程?

参考解答:

(a)

$$E\{\xi(t)\}=E[\zeta]\cos t=\frac{1}{2}\cos t$$

$$R_\xi(t_1,t_2)=E\left[\zeta^2\right]\cos t_1\cos t_2\ =\frac{1}{3}\cos t_1\cos t_2$$

非平稳过程

(b) 对任意一个 ζ（即考察随机过程的每一个样本），有

$$\begin{aligned}\eta(t)&=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\zeta\cos u\ du=\frac{1}{T}\zeta\left[\sin t-\sin(t-T)\ \right]\\&=\frac{1}{T}\zeta\left[\sin\left(t-\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right)-\sin\left(t-\frac{T}{2}-\frac{T}{2}\right)\ \right]\\&=\zeta\frac{2}{T}\sin\ \frac{T}{2}\cos(t-\frac{T}{2})\end{aligned}$$

由均方积分的样本函数定义（p276），对每一个样本函数上式成立，故得证。

(c) $E[\eta(t)]=E\left\{\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\xi(u)\,du\right\}=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}E[\xi(u)]\,du$，代入 $E[\xi(u)]$ 得到结论

$$\begin{aligned}E[\eta(t_1)\eta(t_2)]&=E\left\{[\frac{1}{T}\int_{t_1-T}^{t_1}\xi(u)\,du\ ][\frac{1}{T}\int_{t_2-T}^{t_2}\xi(v)\,dv]\right\}\\&=\frac{1}{T^2}\int_{t_1-T}^{t_1}\int_{t_2-T}^{t_2}R_\xi(u,v)\,dvdu\end{aligned}$$

代入 $R_\xi(t_1,t_2)$ 得到结论。

其中输出非平稳过程。

6.（[1] 第四章习题 31）如果短时间平均器的输入信号为

$$\xi(t)=\sin(\omega t+\theta)\ \ (-\infty<t<\infty)$$

其中 ω 为常数，$\omega>0$，θ 为随机相角，它是 $(0,2\pi)$ 内均匀分布的随机变量，试证明:

(a) $R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=C_{\xi\xi}(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\cos\omega(t_1-t_2)$

(b) 它的输出信号表达式为

$$\eta(t)=\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\sin\left(\omega t-\frac{\omega T}{2}+\theta\right)$$

(c) 输出信号 $\eta(t)$ 的均值 $E[\eta(t)]=0$，输出信号相关函数为

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2\cos\omega(t_1-t_2)$$

问 $\eta(t)$ 是否平稳?

清华大学电子工程系版权所有

参考解答：

(1)

$$\begin{aligned}E\{\xi(t)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\omega t+\theta)\ d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\omega t)cos(\theta)\ +\sin(\theta)\cos(\omega t)\ d\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}C_{\xi\xi}(t_1,t_2) = R_{\xi\xi}(t_1,t_2) &= E[\xi(t_1)\xi(t_2)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\omega t_1+\theta)\sin(\omega t_2+\theta)\ \ d\theta \\ &= \frac{1}{2}\cos\omega(t_1-t_2)\end{aligned}$$

(2) $\eta(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\sin(\omega u+\theta)\ du$
对每一个 θ，积分得 $\eta(t) =$ 欲证结论。由均方积分的样本函数定义，得证。

(3) 注意 θ 为均匀分布，仿照（1）中的方法，易得到 $E\{\eta(t)\}, R_{\eta\eta}(t_1,t_2)$ 得证。输出宽平稳。

7. 本题研究非平稳信号输入 LTI 系统的性质。假设输入信号为 $X(t)$，LTI 系统的冲激响应为 $h(t)$，输出信号为 $Y(t)$。

(a) 证明：

$$R_{XY}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1,t_2-\partial)\,h(\partial)\,d\partial$$

$$R_{YY}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t_1-\partial,t_2)\,h(\partial)\,d\partial$$

(b) 自相关函数为 $R_{vv}(\tau) = q\delta(\tau)$ 的平稳过程 $v(t)$，在 $t = 0$ 时输入冲激响应为 $h(t) = e^{-ct}U(t)$ 的 LTI 系统。证明输出 $Y(t)$ 的自相关函数为 $R_{YY}(t_1,t_2) = \frac{q}{2c}\left[e^{-c|t_1-t_2|} - e^{-c(t_1+t_2)}\right]$, 其中 $t_1 > 0, t_2 > 0$。

参考解答：

(1) 证明：将系统用线性算子 L_t 表示，角标 t 表示作用在变量 t 上，则有

$$Y(t) = L_t[X(t)]$$

取共轭后（$h(t)$ 为实数）得到

$$\overline{Y(t)} = L_t\left[\overline{X(t)}\right]$$

对于任意 $X(t_1)$，利用 L_t 的线性性得到

$$X(t_1)\overline{Y(t)} = L_t\left[X(t_1)\overline{X(t)}\right]$$

清华大学电子工程系版权所有

进而，利用期望与积分交换顺序得到：

$$E\left\{X\left(t_1\right)\overline{Y\left(t\right)}\right\} = L_t\left[E\left\{X\left(t_1\right)\overline{X\left(t\right)}\right\}\right]$$

因此，取 $t = t_2$ 得到

$$R_{XY}\left(t_1, t_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}\left(t_1, t_2 - \partial\right) h\left(\partial\right) d\partial$$

利用相同的方法可以由

$$Y\left(t\right)\overline{Y\left(t_1\right)} = L_t\left[X\left(t\right)\overline{Y\left(t_1\right)}\right]$$

得到

$$R_{YY}\left(t_1, t_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}\left(t_1 - \partial, t_2\right) h\left(\partial\right) d\partial$$

(2) 设输入过程为

$$X\left(t\right) = v\left(t\right) U\left(t\right)$$

因此

$$R_{XX}\left(t_1, t_2\right) = q\delta\left(t_1 - t_2\right) U\left(t_1\right) U\left(t_2\right)$$

由第一问结果得到：

$$\begin{aligned} R_{XY}\left(t_1, t_2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} q\delta\left(t_1 - t_2 + \partial\right) U\left(t_1\right) U\left(t_2 - \partial\right) h\left(\partial\right) d\partial \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} q\delta\left(t_1 - t_2 + \partial\right) U\left(t_1\right) U\left(t_2 - \partial\right) e^{-c\partial} U\left(\partial\right) d\partial \\ &= q e^{-c\left(t_2 - t_1\right)} U\left(t_2 - t_1\right) U\left(t_1\right) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} R_{YY}\left(t_1, t_2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}\left(t_1 - \partial, t_2\right) h\left(\partial\right) d\partial \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} q e^{-c\left(t_2 - t_1 + \partial\right)} U\left(t_2 - t_1 + \partial\right) U\left(t_1 - \partial\right) e^{-c\partial} U\left(\partial\right) d\partial \\ &= \frac{q}{2c}\left[e^{-c\left|t_1 - t_2\right|} - e^{-c\left(t_1 + t_2\right)}\right] \end{aligned}$$

8.（[1] 第四章习题 35）设有随机过程 $\xi(t)$ 和 $N(t)$，且 $\xi(t) = b + N(t)$，其中 b 为常数，$E[N(t)] = 0$，$N(t)$ 的相关函数为 $R_N(\tau)$，即 $N(t)$ 为平稳随机过程。如果

$$\hat{b} = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(u)\mathrm{d}u$$

证

$$E[\hat{b}] = b, D[\hat{b}] = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R_N(\tau)\mathrm{d}\tau$$

参考解答：

清华大学电子工程系版权所有

证：

$$
\begin{aligned}
E\left[\hat{b}\right] &= \frac{1}{T}\int_0^T E\left\{\xi\left(u\right)\right\} du = \frac{1}{T}\int_0^T E\left\{\xi\left(u\right)\right\} du \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \left(b + E\left[N\left(u\right)\right]\right) du = b \\
D\left[\hat{b}\right] &= E\left[\left|\left(\hat{b}-b\right)\right|^2\right] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{T}\int_0^T N(u)du\right)\overline{\left(\frac{1}{T}\int_0^T N(v)dv\right)}\right] \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_N(v-u)dvdu\ (\ x = v-u; y = u) \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T \left[\int_0^{T-x} R_N(x)dy\right]dx + \frac{1}{T^2}\int_{-T}^0 \left[\int_{-x}^T R_N(x)dy\right]dx \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T}^T \left(1-\frac{|x|}{T}\right)R_N(x)dx
\end{aligned}
$$

证毕。

9. （[1] 第四章习题 36）设 $\xi(t)$ 为一随机起始时间的周期过程，它的样本函数见图 3.2。图中 A 为幅度，T 为周期，A, T 均为常数，t_0 为起始时间，它是 $(0,T)$ 上均匀分布的随机变量。求：

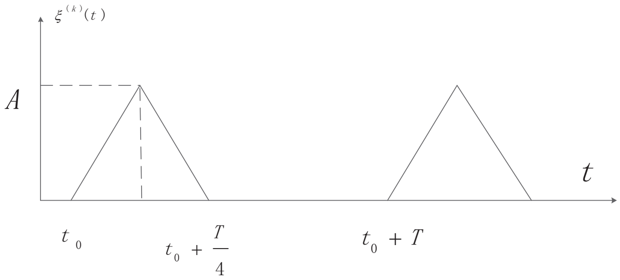


图 3.2

(a) $\xi(t)$ 的均值 $E[\xi(t)]$，均方值 $E[\xi^2(t)]$ 和方差 $D[\xi(t)]$；

(b) $\xi(t)$ 的时间平均值 $<\xi(t)>$ 和 $<\xi^2(t)>$，问 $\xi(t)$ 是否具有各态历经性？

参考解答：

(a) $E\left[\xi\left(t\right)\right] = E\left\{E\left[\xi\left(t\right)|t_0\right]\right\} = \frac{1}{T}\int_{t-T}^t E\left[\xi\left(t\right)|t_0\right]dt_0 = \frac{A}{8}$

$$E[\xi^2\left(t\right)] = \frac{1}{T}\int_{t-T}^t E\left[\xi^2\left(t\right)|t_0\right]dt_0 = \frac{A^2}{12}; D\left\{\xi\left(t\right)\right\} = E[\xi^2\left(t\right)] - \left(E\left[\xi\left(t\right)\right]\right)^2 = \frac{13}{192}A^2$$

(b)

$$<\xi\left(t\right)> = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M}\int_{-M}^M \xi\left(t\right)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\xi\left(t\right)dt = \frac{A}{8}$$

清华大学电子工程系版权所有

$$< \xi^2(t) > = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M}\int_{-M}^{M} \xi^2(t)dt \ = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \xi^2(t)dt = \frac{A^2}{12};$$

从而 $< \xi(t) >= \ E[\xi(t)]$，且通过类似算法有

$< \xi(t+\tau)\xi(t) > = E[\xi(t+\tau)\xi(t)]$ 且值仅与 τ 相关。

故 $\xi(t)$ 具有各态历经性。

清华大学电子工程系版权所有

参考文献

[1] 陆大纟 金. 随机过程及其应用. 清华大学出版社, 1986.

清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2)，homework9_spectrum1 © 清华大学电子工程系

1. 设有滑动平均过程 $X_n=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k Y_{n-k}$，其中，$\{Y_n;n=0,1,2,\cdots\}$ 为独立同分布的随机序列，均值为 0，α 为常数，且 $|\alpha|<1$.

   求：X_n 的均值，自相关函数。序列 $\{X_n\}$ 是否满足宽平稳条件？序列 $\{X_n\}$ 是否具有均值各态历经性？

   参考解答： 均值：$E\left(X_n\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k E\left(Y_{n-k}\right)=0$

   自相关函数：设 Y_n 的方差为 σ^2，由于 $\{Y_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 为独立同分布的随机序列，故 $E\left(Y_nY_m\right)=\delta_{nm}\sigma^2$, 其中，$\delta_{nm}=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$

$$
\begin{aligned}
E\left(X_{n+r}X_n\right)&=E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^kY_{n+r-k}\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^pY_{n-p}\right\}\\
&=E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^p\alpha^kY_{n+r-k}Y_{n-p}\right\}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^p\alpha^kE\left(Y_{n+r-k}Y_{n-p}\right)\\
&=\sigma^2\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^p\alpha^{p+r}=\sigma^2\alpha^r\frac{1}{1-\alpha^2}
\end{aligned}
$$

   而当 $r<0$ 时，可得 $E\left(X_{n+r}X_n\right)=\sigma^2a^{|r|}\frac{1}{1-\alpha^2}$

   综上，自相关函数 $E\left(X_{n+r}X_n\right)=R_X\left(r\right)=\sigma^2\alpha^{|r|}\frac{1}{1-\alpha^2}$

   均值遍历性：

   由于 $E\left(X_n\right)=0$，故 $\{X_n\}$ 的协方差函数为 $C_X\left(r\right)=R_X\left(r\right)=\sigma^2\alpha^{|r|}\frac{1}{1-\alpha^2}$。

   已证得 $\{X_n\}$ 为宽平稳过程，$C_X\left(0\right)=\sigma^2\frac{1}{1-\alpha^2}<\infty$，且当 $r\to\infty$ 时，由于 $|\alpha|<1, C_X\left(r\right)\to 0$，易得 $\sum_{-2N}^{2N}C_X(r)<\infty$，容易验证均值各态历经充分条件成立，所以序列 $\{X_n\}$ 具有均值各态历经性。

2. (陆书第二版第 5 章习题 2) 设宽平稳随机过程的功率谱密度 $S(w)$ 分别为：

$$
S(w)=\frac{w^2+1}{w^4+5w^2+6}
$$
$$
S(w)=\frac{1}{w^4+1}
$$

   求相应的自相关函数。

   参考解答： 根据维纳辛钦定理得，自相关函数为功率谱密度函数的逆傅里叶变换。(1) $S\left(\omega\right)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}=\frac{\omega^2+1}{(\omega^2+2)(\omega^2+3)}$

   利用部分分式展开得

$$
S\left(\omega\right)=\frac{A}{\omega^2+2}+\frac{B}{\omega^2+3}
$$

清华大学电子工程系版权所有

其中，$A=-1, B=2$, 即

$$S(\omega)=\frac{-1}{\omega^2+2}+\frac{2}{\omega^2+3}$$

已知基本变换 $e^{-a|\tau|} \leftrightarrow \frac{2a}{\omega^2+a^2}$ 则

$\frac{-1}{\omega^2+2}=\frac{-1}{2\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{2}}{\omega^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} \leftrightarrow \frac{-1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$;

$$\frac{2}{\omega^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{2\sqrt{3}}{\omega^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|\tau|}$$

所以，$S(\omega)$ 对应的自相关函数为 $R_X(\tau)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|\tau|}$

(2) 类似于 (1) 中，这里需要用到如下结论：

$$\mathbf{FT}\{e^{-z|t|}\}=\frac{2z}{z^2+w^2}, \quad \mathbf{Re}\{z\}>0$$

又：$S(w)=\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{4}\frac{2e^{j\frac{\pi}{4}}}{w^2+(e^{j\frac{\pi}{4}})^2}+\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{4}\frac{2e^{-j\frac{\pi}{4}}}{w^2+(e^{-j\frac{\pi}{4}})^2}$

从而有：$R_X(\tau)=\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{4}e^{-e^{j\frac{\pi}{4}}|\tau|}+\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{4}e^{-e^{-j\frac{\pi}{4}}|\tau|}=\frac{1}{2}e^{-\frac{|\tau|}{\sqrt{2}}}\cos(\frac{|\tau|}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4})$

3. (陆书第二版第 5 章习题 3) 设实平稳随机过程为 $\xi(t)$，则相关函数为 $R_\xi(\tau)$, 试证明：

$$R_\xi(0)-R_\xi(\tau)\geqslant\frac{1}{4^n}(R_\xi(0)-R_\xi(2^n\tau))$$

参考解答： 由过程为实平稳过程，可得

$$\mathbb{E}|\xi(t)-2\xi(t+\tau)+\xi(t+2\tau)|^2=6R_\xi(0)-8R_\xi(\tau)+2R_\xi(2\tau)\geqslant 0$$

因此：$R_\xi(0)-R_\xi(\tau)\geqslant\frac{1}{4}[R_\xi(0)-R_\xi(2\tau)]$, 利用此式进行递推，即可获得：

$$R_\xi(0)-R_\xi(\tau)\geqslant\frac{1}{4^n}(R_\xi(0)-R_\xi(2^n\tau))$$

4. ([?] 第 5 章习题 8) 设有 $X[n]=Y[n]+V[n]$，其中 $Y[n]$ 为宽平稳随机序列，$R_Y[m]=2^{-|m|}$,m 为整数。$V[n]$ 为白噪声序列，其均值为零，$R_V[n]=\delta[n]$, $Y[n]$ 和 $V[n]$ 相互统计独立，求 $S_X(w)$。

参考解答： 首先求解随机序列 $X[n]$ 的自相关函数。利用 $Y[n]$ 与 $V[n]$ 相互独立，$V[n]$ 均值为零，可得：

$$\begin{aligned}R_X[n]&=\mathbb{E}\{(Y[n+m]+\ V[n+m])\overline{Y[m]+V[m]}\}\\&=\mathbb{E}\{Y[n+m]\overline{Y[m]}\}+\mathbb{E}\{V[n+m]\overline{V[m]}\}\\&=R_Y[n]+R_V[n]=2^{-|n|}+\delta[n]\end{aligned}$$

由维纳辛钦公式得 $S_X(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_X[n]e^{-jwn}=\frac{8-4\cos w}{5-4\cos w}$

5. (陆书第二版第 5 章习题 9) 设有离散宽平稳随机序列 $X[n]$，其相关函数的 z 变换为：$\eta_X(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_X[m]z^{-m}=\frac{5-2(z+z^{-1})}{10-3(z+z^{-1})}$。求 $R_X[n]$。

清华大学电子工程系版权所有

参考解答： 求解自相关函数即求出 $\eta_X(z)$ 的逆 z 变换即可。利用基本 z 变换公式求解。

$$\eta_X(z)=\frac{5-2\left(z+z^{-1}\right)}{10-3\left(z+z^{-1}\right)}=\frac{(1-2z)\left(1-2z^{-1}\right)}{(1-3z)\left(1-3z^{-1}\right)}=\frac{\left(2-z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}{3\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-3z^{-1}\right)}$$

由于 $\eta_X(z)$ 为一个双边 z 变换，则由上式的 $\eta_X(z)$ 的定义域为: $\frac{1}{3}<|z|<3$.

利用部分分式展开，得

$$\eta_X(z)=A+\frac{B}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}+\frac{C}{\left(1-3z^{-1}\right)}$$

其中，$A=\frac{2}{3}$, $B=\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\eta_X(z)|_{z=\frac{1}{3}}=-\frac{5}{24}$, $C=\left(1-3z^{-1}\right)\eta_X(z)|_{z=3}=\frac{5}{24}$,

所以，$\eta_X(z)=\frac{2}{3}+\frac{-\frac{5}{24}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}+\frac{\frac{5}{24}}{\left(1-3z^{-1}\right)}, \frac{1}{3}<|z|<3$

根据基本 z 变换得，其逆变换为

$$R_X[n]=\frac{2}{3}\delta[n]-\frac{5}{24}\times\frac{1}{3^n}u[n]-\frac{5}{24}\times 3^n u[-n-1]=\frac{2}{3}\delta[n]-\frac{5}{24}\times 3^{-|n|}$$

6. 设某个平稳随机过程的相关函数为 $R_\xi(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}cos(\beta\tau)$，求其功率谱密度。

参考解答：

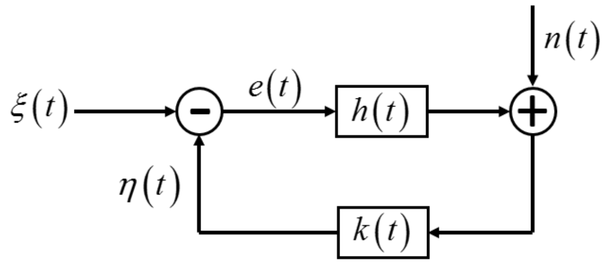
首先可以计算得到 $e^{-\alpha\tau^2}$ 的傅里叶变换为 $F(w)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{w^2}{4\alpha}}$，而 $cos(\beta\tau)=\frac{e^{j\beta\tau}+e^{-j\beta\tau}}{2}$，因此原函数的功率谱密度为

$$S(w)=\frac{\sigma^2}{2}(F(w+\beta)+F(w-\beta))=\frac{\sigma^2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}(e^{-\frac{(w+\beta)^2}{4\alpha}}+e^{-\frac{(w-\beta)^2}{4\alpha}})$$

清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2) ，homework10_spectrum2 © 清华大学电子工程系

1. ([1] 第 5 章习题 15) 设有如下图所示的线性反馈系统，其中 $h(t), k(t)$ 分别为两个方块的冲激响应，$H(jf), K(jf)$ 为其相应的系统转移函数，$e(t)$ 代表误差信号，即输入信号与反馈信号之差。如果在输入端送入的信号是一个平稳随机过程 $\xi(t)$，在系统中又进入一个平稳随机过程 (即噪声)$n(t)$，若 $\xi(t)$ 与 $n(t)$ 间是相关的，又是联合平稳的，求：



(1) 输出端 $\eta(t)$ 的功率谱密度 $S_\eta(f)$;

(2) 在相减器输出端获得的误差信号 $e(t)$ 的功率谱密度 $S_e(f)$。

参考答案： 根据框图写出信号关系：$e(t) = \xi(t) - \eta(t), \eta(t) = [e(t) * h(t) + n(t)] * k(t)$

转换到频域：$F_e(f) = F_\xi(f) - F_\eta(f), F_\eta(f) = [F_e(f)H(f) + F_n(f)]K(f)$，

整理得到输入输出信号在频域的关系：$F_\eta(f) = F_\xi(f)H_1(f) + F_n(f)H_2(f)$，

其中：$H_1(f) = \frac{H(f)K(f)}{1+H(f)K(f)}$，$H_2(f) = \frac{K(f)}{1+H(f)K(f)}$

则：$$\begin{aligned} S_{\eta\eta}(f) &= S_{\xi\xi}(f)H_1(f)\overline{H_1(f)} + S_{n\xi}(f)H_2(f)\overline{H_1(f)} \\ &+ S_{\xi n}(f)H_1(f)\overline{H_2(f)} + S_{nn}(f)H_2(f)\overline{H_2(f)} \end{aligned}$$

同理可得：$$\begin{aligned} S_{ee}(f) &= S_{\xi\xi}(f)H_3(f)\overline{H_3(f)} + S_{n\xi}(f)H_4(f)\overline{H_3(f)} \\ &+ S_{\xi n}(f)H_3(f)\overline{H_4(f)} + S_{nn}(f)H_4(f)\overline{H_4(f)} \end{aligned},$$

其中：$H_3(f) = \frac{1}{1+H(f)K(f)}, H_4(f) = \frac{-K(f)}{1+H(f)K(f)}$

2. ([1] 第 5 章习题 16) 设有一乘法器系统 $\zeta(t) = \xi(t) \times \eta(t)$，它的两个输入为 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$，$\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 为相互统计独立的平稳随机过程，$\zeta(t)$ 为其输出。给定 $\xi(t)$ 的相关函数为 $R_\xi(\tau)$，其功率谱密度为 $S_\xi(f)$，η(t) 的相关函数为 $R_\eta(\tau)$，相应的功率谱密度为 $S_\eta(f)$。求 $\zeta(t)$ 的相关函数和它的功率谱密度。

参考答案： 因 $\zeta(t) = \xi(t)\eta(t)$。则：

$$R_\zeta(t_1, t_2) = E(\xi(t_1)\eta(t_1)\overline{\xi(t_2)\eta(t_2)}) = E[\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}]E[\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}] = R_\xi(t_1-t_2)R_\eta(t_1-t_2) = R_\zeta(\tau)$$

输出的功率谱密度是：$S_\zeta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\zeta(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{\nu=-\infty}^{\infty} S_\xi(\nu)S_\eta(f-\nu)d\nu$

3. ([1] 第 5 章习题 19) 设有微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\dfrac{dy(t)}{dt} + 4y(t) + z(t) = \xi_1(t) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} + 9z(t) = \xi_2(t) \end{cases}$$

清华大学电子工程系版权所有

$\xi_1(t), \xi_2(t)$ 均为平稳随机过程，而且是联合平稳的，已知

$$S_{\xi_1}(f) = \frac{2\sigma_1^2}{(2\pi f)^2+1} \qquad S_{\xi_2}(f) = \frac{4\sigma_2^2}{(2\pi f)^2+4}$$
$$S_{\xi_1\xi_2}(f) = \frac{2\pi a}{[(2\pi f)^2-2]^2+j2\pi f}$$

球 $y(t), z(t)$ 的功率谱密度 $S_y(f), S_z(f)$, 及其互谱密度 $S_{yz}(f)$。

参考答案： 由题得 $H_2(jf) = \frac{1}{j2\pi f+9}$，由此得 $S_z(f) = |H_2(jf)|^2 S_{\xi_2}(f) = \frac{1}{(2\pi f)^2+81} \times \frac{4\sigma_2^2}{(2\pi f)^2+4}$

由题得 $H_1(jf) = \frac{1}{(j2\pi f)^2+2j2\pi f+4}$，由此的 $S_y(f) = |H_1(jf)|^2 S_{\xi_1-z}(f)$

因 $R_{\xi_1-z}(t_1,t_2) = E\left\{[\xi_1(t_1)-z(t_1)][\overline{\xi_1(t_2)-z(t_2)}]\right\} = R_{\xi_1\xi_1}(\tau) - R_{\xi_1 z}(\tau) - R_{z\xi_1}(\tau) + R_{zz}(\tau)$，故 $S_{\xi_1-z}(f) = S_{\xi_1}(f) - \overline{H_2(jf)} S_{\xi_1\xi_2}(f) - H_2(jf)\overline{S_{\xi_1\xi_2}(f)} + S_z(f)$ 代入得：

$$\begin{aligned}S_y(f) =& \frac{1}{(4\pi f)^2+[4-(2\pi f)^2]}\left[\frac{2\sigma_1^2}{(2\pi f)^2+1} + \frac{1}{(2\pi f)^2+81}\times\frac{4\sigma_2^2}{(2\pi f)^2+4}\right] \\ &- \frac{1}{(4\pi f)^2+[4-(2\pi f)^2]}\left[\frac{1}{-j2\pi f+9}\frac{2\pi a}{[(2\pi f)^2-2]^2+j2\pi f} + \frac{1}{j2\pi f+9}\frac{2\pi a}{[(2\pi f)^2-2]^2-j2\pi f}\right]\end{aligned}$$

联合功率谱密度 $S_{yz}(f) = H_1(jf)\overline{H_2(jf)} S_{(\xi_1-z)\xi_2}(f)$

因 $R_{(\xi_1-z)\xi_2}(t_1,t_2) = E\left\{[\xi_1(t_1)-z(t_1)]\overline{\xi_2(t_2)}\right\} = R_{\xi_1\xi_2}(\tau) - R_{z\xi_2}(\tau)$，

故 $S_{(\xi_1-z)\xi_2}(f) = S_{\xi_1\xi_2}(f) - H_2(jf) S_{\xi_2}(f)$

代入得

$$S_{yz}(f) = \frac{1}{(j2\pi f)^2+2j2\pi f+4}\frac{1}{9-j2\pi f}\left[\frac{2\pi a}{\left[(2\pi f)^2-2\right]^2+j2\pi f} - \frac{1}{j2\pi f+9}\frac{4\sigma_2^2}{(2\pi f)^2+4}\right]$$

4. ([1] 第 5 章习题 21) 设某个线性系统可以描述为 $z(t) = \int_{-\infty}^{t} y(u)du, y(t) = x(t) - x(t-T)$，其中 $x(t)$ 为输入信号，$z(t)$ 为输出信号。

(1) 求系统的转移函数 $H(jf)$；

(2) 如果输入端的输入信号是白噪声，其相关函数为 $S_0\delta(\tau)$，求输出随机过程的均方值。(利用关系式 $\int_0^\infty \frac{sin^2(\alpha x)}{x^2}dx = |\alpha|\frac{\pi}{2}$)

参考答案：$z(t) = \int_{-\infty}^{t} y(u)du = \int_{t-T}^{t} x(u)du$,则等效系统的冲激响应为:$h(t) = \begin{cases} 1, 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0, \text{其他} \end{cases}$，

则 $H(f) = T\text{sinc}(fT)e^{-j\pi fT}$。$|H(f)|^2 = T^2\frac{sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}$。

输入过程的功率谱密度为 $S_{xx}(f) = S_0$，则输出随机过程的均方值为:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} S_{zz}(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)|H(f)|^2 df = S_0 T$$

5. 给定一个非周期的宽平稳过程 $x(t)$，功率谱密度为 $S(\omega)$, 令

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}dt$$
$$\widehat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

证明：

清华大学电子工程系版权所有

(a) 对于 $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$，$E\left\{\left|\widehat{x}(t) - x(t)\right|^2\right\} = 0$。

(b) $\lim\limits_{T\to\infty} E\{c_n c_m^*\} = S\left(\frac{(n+m)\pi}{T}\right)\delta(n-m)/T$

参考答案：

(a) 构造以 T 为周期的周期过程 $\widetilde{x}(t)$，满足当 $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$，$\widetilde{x}(t) = x(t)$。则对 $\forall t$ 有 $E\left\{\left|\widehat{x}(t) - \widetilde{x}(t)\right|^2\right\} = 0$。

则当 $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$，$E\left\{\left|\widehat{x}(t) - \widetilde{x}(t)\right|^2\right\} = E\left\{\left|\widehat{x}(t) - x(t)\right|^2\right\} = 0$。

(b)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} E\{c_n c_m^*\} \\
&= \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{1}{T^2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t_1)\, x(t_2)^* e^{-jn\omega_0 t_1} e^{jm\omega_0 t_2} dt_1 dt_2\right\} \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right) \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R(t_1 - t_2)\, e^{-jn\omega_0 t_1} e^{jm\omega_0 t_2} dt_1 dt_2 \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T^2}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-T+|u|}^{T-|u|} R(\tau)\, e^{-j\frac{n+m}{2}\omega_0\tau} d\tau\right) e^{-j\frac{n-m}{2}\omega_0 u} du \qquad (\tau = t_1 - t_2, u = t_1 + t_2) \\
&= \frac{1}{2T^2} S\left(\frac{n+m}{2}\omega_0\right)\int_{-T}^{T} e^{-j\frac{n-m}{2}\omega_0 u} du \\
&= \frac{1}{2T^2} S\left(\frac{n+m}{2}\omega_0\right) 2T\delta(n-m) \\
&= \frac{1}{T} S\left(\frac{n+m}{2}\omega_0\right)\delta(n-m) \\
&= \frac{1}{T} S\left(\frac{n+m}{T}\pi\right)\delta(n-m)
\end{aligned}
$$

得证

清华大学电子工程系版权所有

清华大学电子工程系版权所有

参考文献

[1] 陆大纟金. 随机过程及其应用. 清华大学出版社, 1986.

清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2) ，homework12_spectrum3 © 清华大学电子工程系

1. ([?] 第 5 章习题 17) 设有一调制器，其输入为 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$，输出为 $\zeta(t) = \xi(t)\eta(t)$。设 $\xi(t)$ 为零均值平稳随机过程，其功率谱密度为 $S_\xi(f)$, 当 $|f| > |f_c|$ 时 $S_\xi(f) = 0$。$\eta(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$, 其中 f_0 为常数，$\theta \sim \mathbf{U}[0, 2\pi]$。$\xi(t)$ 与 θ 是相互统计独立的。试证明：

   (1) 输出过程为平稳随机过程，其相关函数 $R_\zeta(\tau) = \frac{1}{2}R_\xi(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$。

   (2) 输出功率谱密度为：$S_\zeta(f) = \frac{1}{4}[S_\xi(f - f_0) + S_\xi(f + f_0)]$。

   参考答案：

   (1) 输出的均值：$E\left[\zeta\left(t\right)\right] = E\left[\xi\left(t\right)cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)\right] = E\left[\xi\left(t\right)\right]E\left[cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)\right] = 0$

   输出的相关函数：

$$
\begin{aligned}
E\left[\zeta\left(t_1\right)\zeta\left(t_2\right)\right] &= E\left[\xi\left(t_1\right)\cos\left(2\pi f_0 t_1 + \theta\right)\xi\left(t_2\right)\cos\left(2\pi f_0 t_2 + \theta\right)\right] \\
&= E\left[\xi\left(t_1\right)\xi\left(t_2\right)\right]E\left[\cos\left(2\pi f_0 t_1 + \theta\right)\cos\left(2\pi f_0 t_2 + \theta\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}R_\xi\left(\tau\right)\cos\left(2\pi f_0\tau\right) = R_\zeta\left(\tau\right)
\end{aligned}
$$

   因此，输出过程为平稳随机过程，其相关函数为 $R_\zeta\left(\tau\right) = \frac{1}{2}R_\xi\left(\tau\right)\cos\left(2\pi f_0\tau\right)$

   (2) 由于输出的相关函数为 $\frac{1}{2}R_\xi\left(\tau\right)\cos\left(2\pi f_0\tau\right)$，所以，根据维纳辛钦定理，得输出的功率谱密度为：

$$
S_\zeta\left(f\right) = \mathbf{FT}\left(\frac{1}{2}R_\xi\left(\tau\right)cos\left(2\pi f_0\tau\right)\right) = \frac{1}{4}\left[S_\xi\left(f - f_0\right) + S_\xi\left(f + f_0\right)\right]
$$

2. ([?] 第 5 章习题 12) 设 $\xi\left(t\right) = A\cos\left(\lambda t + \Theta\right)$，其中相角 Θ 为 $(-\pi, \pi)$ 内均匀分布的随机变量，λ 为与 Θ 相互独立的随机变量，概率密度为 $f_\lambda\left(x\right)$。A 为确定性的常数。证明，$\xi\left(t\right)$ 的功率谱密度为

$$
S_\xi\left(\omega\right) = \frac{A^2\pi}{2}\left[f_\lambda\left(\omega\right) + f_\lambda\left(-\omega\right)\right]
$$

   参考答案： 证明：首先求解自相关函数：

$$
\begin{aligned}
E\left[\xi\left(t_1\right)\xi\left(t_2\right)\right] &= E\left[Acos\left(\lambda t_1 + \Theta\right)Acos\left(\lambda t_2 + \Theta\right)\right] \\
&= \frac{A^2}{2}E\left[cos\left(\lambda t_1 + \lambda t_2 + \Theta\right) + cos\left(\lambda\left(t_2 - t_1\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}R_\xi\left(\tau\right)cos\left(2\pi f_0\tau\right)
\end{aligned}
$$

   由于 λ 为与 Θ 相互独立的随机变量，则其联合概率密度函数为 $f_\lambda\left(x\right)f_\Theta\left(\theta\right) = \frac{1}{2\pi}f_\lambda\left(x\right)$，则

$$
\begin{aligned}
E(\cos(\lambda t_1 + \lambda t_2 + \Theta)) &= \int\int f_\lambda(x)f_\Theta(\theta)\cos(xt_1 + xt_2 + \theta)dxd\theta \\
&= \int f_\lambda(x)(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(xt_1 + xt_2 + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta)dx = 0
\end{aligned}
$$

   所以 $E\left[\xi\left(t_1\right)\xi\left(t_2\right)\right] = \frac{A^2}{2}E\left(cos\left(\lambda\left(t_2 - t_1\right)\right)\right) = \frac{A^2}{2}E\left(cos\left(\lambda\tau\right)\right) = R_\xi\left(\tau\right)$

清华大学电子工程系版权所有

其功率谱密度为

$$
\begin{aligned}
S_\xi(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau)e^{-jw\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2}E(\cos(\lambda\tau))e^{-jw\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x\tau)f_\lambda(x)dx\Big)e^{-jw\tau}d\tau = \frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x\tau)e^{-jw\tau}d\tau\Big)dx \\
&= \frac{A^2\pi}{2}\int f_\lambda(x)(\delta(w-x)+\delta(w+x))dx \\
&= \frac{A^2\pi}{2}[f_\lambda(w)-f_\lambda(-w)]
\end{aligned}
$$

证毕。

3. ([?] 第 5 章习题 16) 设有基带随机过程 $X(t)$，其信号的功率谱密度为 $S_X(\omega)$，满足 $|\omega|>\omega_c$ 时 $S_X(\omega)=0$。 $X(t)$ 通过两个传递函数分别为 $H_1(\omega)$ 和 $H_2(\omega)$ 的线性系统，得到输出分别为 $Y_1(t)$ 和 $Y_2(t)$。如果 $H_1(\omega)=H_2(\omega), |\omega|<\omega_c$。试证明在均方意义下有 $Y_1(t)=Y_2(t)$。

   参考解答：

   证明： 设 $h_1(t)=\mathcal{F}^{-1}(H_1(\omega))$，$h_2(t)=\mathcal{F}^{-1}(H_2(\omega))$ 分别代表线性系统的冲击响应函数。则 $Y_1(t)=X(t)*h_1(t), Y_2(t)=X(t)*h_2(t)$，欲证在均方意义下 $Y_1(t)=Y_2(t)$，只需证明 $E|Y_1(t)-Y_2(t)|^2=0$。

   令 $Z(t)=Y_1(t)-Y_2(t)=X(t)*[h_1(t)-h_2(t)]$, 则 $Z(t)$ 可视为输入为 $X(t)$，线性系统冲击响应为 $h(t)=h_1(t)-h_2(t)$ 时的输出，根据线性系统输出和输入之间功率谱密度的关系，得

   $$S_Z(\omega)=S_X(\omega)|H(\omega)|^2$$

   其中，$H(\omega)=\mathcal{F}(h(t))=H_1(\omega)-H_2(\omega)$.

   如果 $H_1(\omega)=H_1(\omega), |\omega|<\omega_c$，则 $H(\omega)=0, |\omega|<\omega_c$。又由于 $S_X(\omega)=0, |\omega|>\omega_c$，则

   $$S_Z(\omega)=0$$

   故 $E|Y_1(t)-Y_2(t)|^2=R_Z(0)=\int S_Z(\omega)d\omega=0$。证毕。

4. 设 $f(t)$ 为实基带信号，即其频谱满足 $F(\omega)=0, |\omega|\geqslant\omega_c$。设 $x(t)$ 为实信号，其希尔伯特变换为 $\mathcal{H}[x(t)]$。试证

   $$\mathcal{H}[f(t)\cos(\omega_c t)]=f(t)\sin(\omega_c t)$$

   $$\mathcal{H}[f(t)\sin(\omega_c t)]=-f(t)\cos(\omega_c t)$$

   参考答案： 由 $F(\omega)=0, |\omega|\geqslant\omega_c$ 得，$F(\omega+\omega_c)=0\ (\omega>0)$ 且 $F(\omega-\omega_c)=0\ (\omega<0)$。

   则 $\mathcal{F}(H[f(t)\cos(\omega_c t)])=\frac{1}{2}[jF(\omega+\omega_c)-jF(\omega-\omega_c)]=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*\pi[j\delta(\omega+\omega_c)-j\delta(\omega-\omega_c)]=\mathcal{F}(f(t)\sin(\omega_c t))$

   所以 $\mathcal{H}[f(t)\cos(\omega_c t)]=f(t)\sin(\omega_c t)$

   同理可证，$\mathcal{H}[f(t)\sin(\omega_c t)]=-f(t)\cos(\omega_c t)$

   证毕。

清华大学电子工程系版权所有

5. 试在频域上分析带通确定性信号的采样，以此理解带通随机信号的采样。

设 $x(t)$ 为带通确定性实信号，中心频率为 ω_c，单边带宽为 $W<\omega_c$，$x(t)$ 的频谱满足 $X(\omega)=0\ \ ||\omega|-\omega_c|\geqslant W$ 。$x(t)$ 的 Hilbert 变换为 $\hat{x}(t)$。取采样周期 $T_s=\frac{\pi}{W}$，试从频域上分析证明下式的正确性：

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x(nT_s)\cos(\omega_c(t-nT_s))-\hat{x}(nT_s)\sin(\omega_c(t-nT_s))\right]\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{T_s}(t-nT_s)\right)$$

参考答案： 右边 $=[x(t)\delta_{T_s}(t)]*[\cos(\omega_c t)\operatorname{sinc}(\frac{t}{T_s})]-[\hat{x}(t)\delta_{T_s}(t)]*[\sin(\omega_c t)\operatorname{sinc}(\frac{t}{T_s})]$

其中 $\delta_{T_s}(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$ 为周期单位冲激序列，其傅里叶变换为

$\mathcal{F}[\delta_{T_s}(t)]=\frac{2\pi}{T_s}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\frac{2\pi}{T_s})$, 从而对右侧作傅里叶，得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}[\text{右式}]=\\
&\left\{\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\mathcal{F}[\delta_{T_s}(t)]\right\}\cdot\left\{\frac{\pi T_s}{2\pi}\ [\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]*[u(\omega+W)-u(\omega-W)]\right\}\\
&-\left\{\frac{-j}{2\pi}sgn(\omega)X(\omega)*\mathcal{F}[\delta_{T_s}(t)]\right\}\cdot\left\{\frac{\pi T_s}{2\pi}\ [j\delta(\omega+\omega_c)-j\delta(\omega-\omega_c)]*[u(\omega+W)-u(\omega-W)]\right\}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(\omega-n\frac{2\pi}{T_s}\right)\left[1+sgn\left(\omega-n\frac{2\pi}{T_s}\right)\right]\cdot[u(\omega-\omega_c+W)-u(\omega-\omega_c-W)]\\
&+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(\omega-n\frac{2\pi}{T_s}\right)\left[1-sgn\left(\omega-n\frac{2\pi}{T_s}\right)\right]\cdot[u(\omega+\omega_c+W)-u(\omega+\omega_c-W)]
\end{aligned}$$

上式第一部分为 $\begin{cases}X(\omega) & \omega>0\\ 0 & \omega<0\end{cases}$，第二部分为 $\begin{cases}0 & \omega<0\\ X(\omega) & \omega>0\end{cases}$

从而得到右侧的傅里叶变换即为 $X(\omega)$，证毕。

6. 设 $X(t)$ 为实带限过程，设 $S(\omega)=0$，当 $|\omega|>\sigma$ 时。证明 $E\left\{[X(t+\tau)-X(t)]^2\right\}\leqslant\sigma^2\tau^2R(0)$

参考解答： 由于 $X(t)$ 为实信号，则 $R(\tau)$ 为实偶函数，$S(\omega)$ 也为实偶函数，则

$$E\left\{|X(t+\tau)-X(t)|^2\right\}=2[R(0)-R(\tau)]$$

由 $X(t)$ 的带限性得

$$\begin{aligned}R(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{j\omega\tau}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}S(\omega)e^{j\omega\tau}d\tau\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}R(0)-R(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}S(\omega)(1-cos(\omega\tau))d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}S(\omega)\left(2sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right)d\omega\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}S(\omega)\left(\frac{\omega^2\tau^2}{2}\right)d\omega\qquad\left(sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\leqslant\frac{\omega\tau}{2}\right)\\&\leqslant\frac{\sigma^2\tau^2}{4\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}S(\omega)d\omega\\&=\frac{\sigma^2\tau^2}{2}R(0)\end{aligned}$$

故 $E\left\{|X(t+\tau)-X(t)|^2\right\}\leqslant\sigma^2\tau^2R(0)$，得证。从这道题我们也能看出：**带限过程随时间变化缓慢**

清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2) homework12_gauss1_solution 清华大学电子工程系

1. 设 n 维随机矢量 X 服从参数为 μ 和 Σ 的多元高斯分布 $N(\mu,\Sigma)$，试证明

(1) $E[X]=\mu$

(2) $\mathrm{Cov}[X]\triangleq E\left[(X-\mu)(X-\mu)'\right]=\Sigma$

参考解答

证：由 Σ 为正定矩阵，存在非奇异矩阵 L 使 $\Sigma=L^TL$

令 $y=L^{-1}(x-\mu)$，则 $x=Ly+\mu$

(1) $E[X]=\int_{x\in R^n}x\cdot\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)\mathrm{d}x$

$$=\int_{y\in R^n}\frac{Ly+\mu}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}y^TL^T\Sigma^{-1}Ly\right)|L|\,dy$$

$$=\int_{y\in R^n}\frac{Ly+\mu}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}y^Ty\right)\mathrm{d}y$$

由 $\frac{L\ y}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}y^Ty\right)$ 为 y 中各项的奇函数，其积分为 0，故

$$E[X]=\mu\cdot\prod_{i=1}^{n}\left[\int_{y_i\in R}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}y_i^2\right)\mathrm{d}y_i^2\right]=\mu$$

(2) 同理，

$$E\left[(X-\mu)(X-\mu)'\right]=L\left[\int_{y\in R^n}\frac{yy^T}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}exp\left(-\frac{1}{2}y^Ty\right)dy\right]L^T$$

中间是一个 NxN 的矩阵，其第 i,j 项为

$$\int_{y\in R^n}\frac{y_iy_j}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}y^Ty\right)\mathrm{d}y$$

当 $i\neq j$ 时，积分部分对 y_i，y_j 均为奇函数，在积分时会消掉，其值为 0；当 $i=j$ 时，可求得其值为 1

$=LIL^T=LL^T=\Sigma$ 证毕

2.（[2] 第 3 章习题 2）请完成如下问题：

(1) 设 X 和 Y 是相互统计独立的 Gauss 随机变量，均服从 $N(0,\sigma^2)$，设 $Z=|X-Y|$，求 $E(Z)$ 和 $E(Z^2)$。

(2) 设 $\{X_k,k=1,\cdots,2n\}$ 为独立同分布的 Gauss 随机变量，均服从 $N(0,\sigma^2)$，设

$$Z=\frac{\sqrt{\pi}}{2n}\sum_{k=1}^{n}|X_{2k}-X_{2k-1}|$$

求 $E(Z)$ 和 $E(Z^2)$。

清华大学电子工程系版权所有

概念复习

高斯随机变量组合数字特征的求解

参考答案

(1) $E(Z) = E(X-Y)P(X \geqslant Y) + E(Y-X)P(X<Y) = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$

$E(Z^2) = E\left[(X-Y)^2\right] = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(X)E(Y) = 2\sigma^2$

(2) 类似于（1），$E(|X_{2k} - X_{2k-1}|) = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$，

则 $E(Z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2n}\sum_{k=1}^{n} E(|X_{2k} - X_{2k-1}|) = \sigma$

$$\begin{aligned}
E\left(Z^2\right) =& \frac{\pi}{4n^2} E\left(\left(\sum_{k=1}^{n} |X_{2k} - X_{2k-1}|\right)^2\right) \\
=& \frac{\pi}{4n^2}\sum_{k=1}^{n} E\left(|X_{2k} - X_{2k-1}|^2\right) + \frac{\pi}{4n^2} \\
& \cdot 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, i\neq j}^{n} E(|X_{2i} - X_{2i-1}| \cdot |X_{2j} - X_{2j-1}|) \\
=& \frac{\pi}{2n}\sigma^2 + \frac{n-1}{n}\sigma^2
\end{aligned}$$

3.（[2] 第 3 章习题 3）设零均值 Gauss 分布随机向量 $X = (X_1, X_2, X_3)^T$，协方差阵为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

求 $E(X_1X_2X_3)$，$E(X_1^2X_2^2X_3^2)$ 和 $E((X_1^2-\sigma^2)(X_2^2-\sigma^2)(X_3^2-\sigma^2))$。

概念复习

高斯随机过程高阶统计量求解

参考答案

随机向量 $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ 的特征函数为 $\phi_X(\omega) = \exp\{-\frac{1}{2}\omega^T\Sigma\omega\}$

(1) $E(X_1X_2X_3) = j^{-3}\frac{\partial^3}{\partial\omega_1\partial\omega_2\partial\omega_3}\phi_X(\omega)|_{\omega=0} = 0$

(2) $E(X_1^2X_2^2X_3^2) = j^{-6}\frac{\partial^6}{\partial\omega_1^2\partial\omega_2^2\partial\omega_3^2}\phi_X(\omega)|_{\omega=0} = \sigma^6 + 2\sigma^2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) + 8\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}$

(3) $E((X_1^2-\sigma^2)(X_2^2-\sigma^2)(X_3^2-\sigma^2)) = E\{X_1^2X_2^2X_3^2 - \sigma^6 - X_1^2X_2^2\sigma^2$

$-X_2^2X_3^2\sigma^2 - X_1^2X_3^2\sigma^2 + X_1^2\sigma^4 + X_2^2\sigma^4 + X_3^2\sigma^4\} = 8\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}$

4.（[2] 第 3 章习题 4）设 (X_1, X_2) 是统计独立的 Gauss 随机变量，均服从 $N(0,1)$，令

$$(Y_1, Y_2) = \begin{cases} (X_1, |X_2|), & X_1 \geqslant 0 \\ (X_1, -|X_2|), & X_1 < 0 \end{cases}$$

证明 Y_1, Y_2 都服从一维 Gauss 分布，但是 (Y_1, Y_2) 不服从二元联合 Gauss 分布。

概念复习

高斯随机变量的判断

清华大学电子工程系版权所有

参考答案

证明：因为 $Y_1 = X_1$，所以 Y_1 服从 $N(0,1)$。

又 $P(Y_2 \leqslant y_2) = \frac{1}{2}\left(P(|X_2| \leqslant y_2) + P(-|X_2| \leqslant y_2)\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}P(-|X_2| \leqslant y_2), y_2 < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(|X_2| \leqslant y_2), y_2 \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} - P(0 \leqslant X_2 \leqslant -y_2), y_2 < 0 \\ \frac{1}{2} + P(0 \leqslant X_2 \leqslant y_2), y_2 \geqslant 0 \end{cases}$

因此 $f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}}$，故随机变量 Y_2 服从 $N(0,1)$。

因为二元随机变量 (Y_1, Y_2) 的定义域为第一三象限，而二元联合 Gauss 分布的定义域为 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$，故二元随机变量 (Y_1, Y_2) 不服从二元联合 Gauss 分布。

5.（[1] 第 6 章习题 7）设三维正态分布随机矢量 $\xi^T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 的概率密度为

$$f_\xi(x_1, x_2, x_3) = C \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 4x_3^2\right)\right\}$$

(1) 证明经过线性变换

$$\eta = A\xi = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

得随机矢量 $\eta^T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$，则 η_1, η_2, η_3 是相互统计独立的随机变量。

(2) 求 C 值。

概念复习

高斯随机过程的线性变换

参考答案

由 pdf 表达式可知三维高斯分布随机矢量 $\xi^T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 为零均值，且协方差矩阵的逆为 $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$，则 $B = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 7/6 & 1/12 \\ 1/6 & 1/12 & 7/24 \end{bmatrix}$，则变换后的三维随机矢量 $\eta^T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ 的协方差矩阵为：$B' = ABA^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 8/7 & 0 \\ 0 & 0 & 7/24 \end{bmatrix}$，因为线性变换的 jaccobi 行列式为 1，因此 $C = \sqrt{\frac{3}{4\pi^3}}$。

清华大学电子工程系版权所有

清华大学电子工程系版权所有

参考文献

[1] 陆大纟金. 随机过程及其应用. 清华大学出版社, 1986.

[2] 陆大纟金，张灏. 随机过程及其应用（第二版）. 清华大学出版社, 2012.

概率论与随机过程 (2) homework13_gauss2_solution 清华大学电子工程系

1. 设 n 维随机矢量 $X_{1:n}$ 的两个子矢量为 X_A 和 X_B，试证：X_A 和 X_B 相互独立的充要条件是，X_A 和 X_B 的联合特征函数 $\phi_{X_A,X_B}(t_A,t_B)$ 具有如下分解性

$$\phi_{X_A,X_B}(t_A,t_B)=\phi_{X_A}(t_A)\,\phi_{X_B}(t_B)$$

参考解答

必要性。若两个随机矢量 X_A,X_B 独立，则 $f_{X_A,X_B}=f_{X_A}(X_A)f_{X_B}(X_B)$，设 X_A 为 $M\times 1$ 维，X_B 为 $N\times 1$ 维，再设定与之对应的两个矢量 $t_A(M\times 1),t_B(N\times 1)$，并令 $X=[X_A,X_B]$，$t=[t_A,t_B]$，由特征函数的定义有如下结论：

$$\phi_{X_A,X_B}(t)=E(\mathrm{e}^{jX^Tt})=E(\mathrm{e}^{j(X_A^Tt_A+X_B^Tt_B)})=E(\mathrm{e}^{jX_A^Tt_A})E(\mathrm{e}^{X_B^Tt_B})=\phi_{X_A}(t_A)\phi_{X_B}(t_B)$$

充分性。因为 $\phi_{X_A,X_B}(t)=\phi_{X_A}(t_A)\phi_{X_B}(t_B)$，则有：

$$\begin{aligned}f_{X_A,X_B}(X_A,X_B)&=\frac{1}{(2\pi)^{M+N}}\int\int \mathrm{e}^{j(X_A^Tt_A+X_B^Tt_B)}\phi_{X_A,X_B}(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{(2\pi)^M}\int \mathrm{e}^{jX_A^Tt_A}\phi_{X_A}(t_A)\mathrm{d}t_A\frac{1}{(2\pi)^N}\int \mathrm{e}^{jX_B^Tt_B}\phi_{X_B}(t)\mathrm{d}t_B\\&=f_{X_A}(X_A)f_{X_B}(X_B)\end{aligned}$$

2. （[1] 第 6 章习题 3）设有二维随机矢量 $\xi^T=(\xi_1,\xi_2)$，其概率密度为

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=$$
$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

在椭圆

$$\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}=\lambda^2(\lambda\text{ 为常数})$$

上，其概率密度为常数，因此，该椭圆称之为等概率椭圆。

求：

(1) 随机变量 (ξ_1,ξ_2) 落在等概率椭圆内的概率；

(2) 试证明：等概率椭圆的长轴方向是该二维高斯变量的第一主方向（即协方差矩阵的最大特征值对应的特征矢量），短轴方向是该二维高斯变量的第二主方向（即协方差矩阵的次大特征值对应的特征矢量）。

参考解答

(1) 考虑随机变量 ξ_1,ξ_2 落在等概率圆内的概率，$\iint_R f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$，相应的积分区间是 $R=\left\{(x_1,x_2)\,|\,\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\leqslant\lambda^2\right\}$.

考虑椭圆 $\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}=\lambda^2$，做以下变换

$$y_1=\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}-r\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2};y_1=\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)$$

对应的 Jacobi 行列式为

$$|J|=\left|\frac{\partial\left(x_1,x_2\right)}{\partial\left(y_1,y_2\right)}\right|=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{1-r^2}}$$

变换后的椭圆方程变为 $y_1^2+y_2^2=\lambda^2$，则上述积分相应变为

$$\iint_{y_1^2+y_2^2\leqslant\lambda^2}\frac{1}{2\pi\left(1-r^2\right)}exp\left\{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2\left(1-r^2\right)}\right\}dx_1dx_2$$

通过极坐标变换计算，可得，其概率为

$$1-e^{-\frac{\lambda^2}{2\left(1-r^2\right)}}$$

(2) 对于中心位于原点的椭圆 $Ax^2+Bxy+Cy^2=1$，则其长短轴所在直线的斜率分别为 $\frac{(C-A)-\sqrt{(C-A)^2+B^2}}{B}$ 和 $\frac{(C-A)+\sqrt{(C-A)^2+B^2}}{B}$ 。对应于等概率圆，长短轴的斜率分别为

$$\frac{\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)-\sqrt{\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)^2+4r^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}{-2r\sigma_1\sigma_2}\text{ 和 }\frac{\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)+\sqrt{\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)^2+4r^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}{-2r\sigma_1\sigma_2}$$

再由随机变量 ξ_1,ξ_2 的概率密度函数可知对应的协方差矩阵为 $C=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$，不失一般性，设矢量 $v=[1,k]^T$ 为 C 的特征矢量，则联立方程组 $Cv=\lambda v$，可得 $k=\frac{\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)\pm\sqrt{\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)^2+4r^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}{-2r\sigma_1\sigma_2}$，且对应的特征值为 $\lambda=\frac{\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)\mp\sqrt{\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)^2+4r^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}{2}$，即特征矢量的方向与长短轴所在直线方向吻合，且长轴方向和大特征值对应的特征矢量的方向一致。

3.（[2] 第 3 章习题 9）设 Σ_1 和 Σ_2 均为正定协方差矩阵，定义 $\Sigma=a_1\Sigma_1+a_2\Sigma_2$，其中，$a_1,a_1$ 为常数。设 A 为变换矩阵，使得

$$A^T\Sigma A=I$$

$$A^T\Sigma_1A=\Gamma^{(1)}=diag\left(\lambda_1^{(1)},\cdots,\lambda_n^{(1)}\right)$$

证明：A 矩阵同样可使得 Σ_2 对角化，且对角化矩阵为 $\Gamma^{(2)}=diag\left(\lambda_1^{(2)},\cdots,\lambda_n^{(2)}\right)$，满足 $\lambda_i^{(2)}=\frac{1}{a_2}\left(1-a_1\lambda_i^{(1)}\right)$

即 Σ_1 和 Σ_2 具有同样的特征向量，且特征值具有相反的序。

参考解答

证明：$A^T\Sigma A=A^T\left(a_1\Sigma_1+a_2\Sigma_2\right)A=a_1A^T\Sigma_1A+a_2A^T\Sigma_2A$

又已知 $A^T\Sigma_1A=\Gamma^{(1)}=diag\left(\lambda_1^{(1)},\cdots,\lambda_n^{(1)}\right)$，所以，

$$a_2A^T\Sigma_2A=I-a_1diag\left(\lambda_1^{(1)},\cdots,\lambda_n^{(1)}\right)$$

如果 $a_2\neq 0$，则 $A^T\Sigma_2A=\frac{1}{a_2}\left[I-a_1diag\left(\lambda_1^{(1)},\cdots,\lambda_n^{(1)}\right)\right]=diag\left(\lambda_1^{(2)},\cdots,\lambda_n^{(2)}\right)$

其中，$\lambda_i^{(2)}=\frac{1}{a_2}\left(1-a_1\lambda_i^{(1)}\right)$。即 Σ_1 和 Σ_2 具有同样的特征向量，且特征值具有相反的序。

4. 考虑零均值，协方差矩阵为 K 的 n 维随机矢量 X。设其第一主方向为 e_1，特征值为 λ_1，X 在第一主方向的投影为 $\xi_1 \triangleq e_1' X$，试求：一阶残差 $X-\xi_1 e_1$ 的协方差矩阵？

参考解答

n 维零均值随机矢量 X 的协方差矩阵为 K，最大的特征值为 λ_1，对应的特征矢量为 e_1，则

$$E(XX^T)=K, Ke_1=\lambda_1 e_1, E(XX^T e_1)=\lambda_1 e_1, E(X\xi_1)=\lambda_1 e_1, E(\xi^2)=\lambda_1 e_1^T e_1$$

所以

$$\begin{aligned} E\left[(X-\xi_1 e_1)(X-\xi_1 e_2)^T\right] &= K+E[\xi^2]e_1 e_1^T - E(X\xi_1)e_1^T - e_1 E(\xi_1 X^T) \\ &= K+\lambda_1 e_1^T e_1 e_1 e_1^T - 2\lambda_1 e_1 e_1^T \\ &= K-\lambda_1 e_1 e_1^T \end{aligned}$$

5. 设高斯随机矢量 X 的两个子矢量为 X_A 和 X_B，$X=(X_A,X_B)'$， X 的均值为 $\mu=(\mu_A,\mu_B)'$，协方差阵为 $\Sigma=\begin{pmatrix} \Sigma_{AA} & \Sigma_{AB} \\ \Sigma_{BA} & \Sigma_{BB} \end{pmatrix}$，试求

(1) $E\left\{\left[X_B-E\left(X_B|X_A=x_A\right)\right]\left[X_B-E\left(X_B|X_A=x_A\right)\right]'\middle| X_A=x_A\right\}=?$

(2) $E\left\{\left[X_B-E\left(X_B\right)\right]\left[X_B-E\left(X_B\right)\right]'\middle| X_A=x_A\right\}=?$

参考解答

(1) $E\left\{\left[X_B-E\left(X_B|X_A\right)\right]\left[X_B-E\left(X_B|X_A\right)\right]'\middle| X_A\right\}$ 即为高斯变量 X_B 相对于高斯变量 X_A 的条件方差，下面求解条件概率密度函数 $f\left(x_B|x_A\right)$。

设随机矢量 X_A 维度为 n_A，X_B 维度为 n_A，$n=n_A+n_B$，高斯随机矢量 X 的联合概率密度为：

$$\begin{aligned} f(X) &= f(x_A,x_B) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{det(\Sigma)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_A-\mu_A,x_B-\mu_B)^T\Sigma^{-1}(x_A-\mu_A,x_B-\mu_B)\right\} \end{aligned}$$

利用去相关方法，得

$$\begin{aligned} \Sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} \Sigma_{AA} & \Sigma_{AB} \\ \Sigma_{BA} & \Sigma_{BB} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\left(\Sigma_{AB}\Sigma_{BB}^{-1}\right)' & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\Sigma_{BB}-\Sigma_{BA}\Sigma_{AA}^{-1}\Sigma_{AB}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{BB}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\Sigma_{AB}\Sigma_{BB}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

令 $\Sigma_{B|A}=\Sigma_{BB}-\Sigma_{BA}\Sigma_{AA}^{-1}\Sigma_{AB}$，$\mu_{B|A}=\mu_B+\Sigma_{AB}\Sigma_{BB}^{-1}(x_A-\mu_A)$

则

$$\begin{aligned} & f(X)=f(x_A,x_B) \\ =&\frac{1}{(2\pi)^{n_A/2}\sqrt{det(\Sigma_{AA})}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_A-\mu_A)^T\Sigma_{AA}^{-1}(x_A-\mu_A)\right\} \\ &\cdot\frac{1}{(2\pi)^{n_B/2}\sqrt{det\left(\Sigma_{B|A}\right)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_B-\mu_{B|A}\right)^T\Sigma_{B|A}^{-1}\left(x_B-\mu_{B|A}\right)\right\} \end{aligned}$$

X_A 的概率密度函数为

$$f(X_A)=\frac{1}{(2\pi)^{n_A/2}\sqrt{det\left(\Sigma_{AA}\right)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_A-\mu_A)^T\Sigma_{AA}^{-1}\left(x_A-\mu_A\right)\right\}$$

则条件概率密度

$$\begin{aligned}f(x_B|x_A)&=\frac{f(x_A\ x_B)}{f(x_A)}\\&=\frac{1}{(2\pi)^{n_B/2}\sqrt{det\left(\Sigma_{B|A}\right)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_B-\mu_{B|A}\right)^T\Sigma_{B|A}^{-1}\left(x_B-\mu_{B|A}\right)\right\}\end{aligned}$$

即高斯变量 X_B 相对于高斯变量 X_A 的条件均值和条件方差分别为：

为：

$$\mu_{B|A}=\mu_B+\Sigma_{AB}\Sigma_{BB}^{-1}\left(x_A-\mu_A\right)$$

$$\Sigma_{B|A}=\Sigma_{BB}-\Sigma_{BA}\Sigma_{AA}^{-1}\Sigma_{AB}$$

所以 $E\left\{\left[X_B-E\left(X_B|X_A\right)\right]\left[X_B-E\left(X_B|X_A\right)\right]^T\middle|X_A\right\}\Sigma_{B|A}=\Sigma_{BB}-\Sigma_{BA}\Sigma_{AA}^{-1}\Sigma_{AB}$

(2) 注意与（1）中的区别，展开得

$$\begin{aligned}&E\left\{\left[X_B-E\left(X_B\right)\right]\left[X_B-E\left(X_B\right)\right]^T\middle|X_A=x_A\right\}=E\left\{X_BX_B^T\middle|X_A=x_A\right\}\\&-E\left\{X_B\left(E\left(X_B\right)\right)^T\middle|X_A=x_A\right\}-E\left\{E\left(X_B\right)X_B^T\middle|X_A=x_A\right\}\\&+E\left\{E\left(X_B\right)\left(E\left(X_B\right)\right)^T\middle|X_A=x_A\right\}\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}E\left\{X_BX_B^T\middle|X_A=x_A\right\}&=\Sigma_{B|A}+\mu_{B|A}\mu_{B|A}^T\\E\left\{X_B\left(E\left(X_B\right)\right)^T\middle|X_A=x_A\right\}&=\mu_{B|A}\mu_B^T\\E\left\{E\left(X_B\right)X_B^T\middle|X_A=x_A\right\}&=\mu_B\mu_{B|A}^T\\E\left\{E\left(X_B\right)\left(E\left(X_B\right)\right)^T\middle|X_A=x_A\right\}&=\mu_B\mu_B^T\end{aligned}$$

所以,$E\left\{\left[X_B-E\left(X_B\right)\right]\left[X_B-E\left(X_B\right)\right]^T\middle|X_A=x_A\right\}=\Sigma_{B|A}+\mu_{B|A}\mu_{B|A}^T-\mu_{B|A}\mu_B^T-\mu_B\mu_{B|A}^T+\mu_B\mu_B^T$。

6. 设 X,Y 相互独立，均服从标准正态分布，求

(1) $E\left[(X-3Y)^3|\left(2X+Y=3\right)\right]$ =?

(2) $E\left[(X-3Y)^4|\left(2X+Y=3\right)\right]$ =?

参考解答

设 $\begin{cases}U=2X+Y\\V=X-3Y\end{cases}$ 则有 $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$

利用线性变换以及条件分布易得 $p(V|U=3)=\mathcal{N}(-\frac{3}{5},\frac{49}{5})$，故

$$E\left[(X-3Y)^3|\left(2X+Y=3\right)\right]=E\left[V^3|U=3\right]=-\frac{2232}{125}$$

$$E\left[(X-3Y)^4|\left(2X+Y=3\right)\right]=E\left[V^4|U=3\right]=\frac{193386}{625}$$

参考文献

[1] 陆大乡 金. 随机过程及其应用. 清华大学出版社, 1986.

[2] 陆大乡 金，张灏. 随机过程及其应用（第二版）. 清华大学出版社, 2012.

清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2) homework14_gauss3_solution 清华大学电子工程系

1. 随机过程 $X(t)$ 是高斯的，具有自相关函数 $R_X(\tau)$。试证遍历性：

   若 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T R_X^2(\tau)d\tau=0$，则有 $E\left\{X^2(t)\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^T X^2(t)dt$

   概念复习：

   随机过程遍历性定理

   参考答案：

   设 $Y(t)=X^2(t)$，则有

$$R_Y(\tau)=2R_X^2(\tau)+R_X^2(0)\text{（由陆书第二版定理 3.2 可得）}$$

$$m_Y^2=R_X^2(0)$$

   另外，由均值各态历经性知，若 $Y(t)$ 满足

$$E\left\{Y(t)\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}Y(t)\,dt$$

   则必须有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[R_Y(\tau)-m_Y^2\right]d\tau\ =0$$

   即

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[2R_X^2(\tau)+R_X^2(0)-R_X^2(0)\right]d\tau$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[2R_X^2(\tau)\right]d\tau\ =0$$

   又由题目中的条件知

$$0\leqslant\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)R_X^2(\tau)d\tau\ \leqslant 2\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^{2T}R_X^2(\tau)d\tau\ =0$$

   从而得证。

2. [2] 第三章习题 14

   设 $X(t)$ 为零均值宽平稳均方可导高斯过程，$Y(t)=X^2(t)$，证明 $Y(t)$ 均方可导，且其导数为 $2X(t)X'(t)$。

   概念复习：

   随机过程可导性

   参考答案：

   由均方可导定义知

$$\lim_{h\to0}E\left\{\left|\frac{X^2(t+h)-X^2(t)}{h}-2X(t)X'(t)\right|^2\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}E\left\{\left|\left[X(t+h)+X(t)\right]\frac{\left[X(t+h)-X(t)\right]}{h}-2X(t)X'(t)\right|^2\right\}$$
$$=E\left\{l.i.m._{h\to0}\left|\left[X(t+h)+X(t)\right]\frac{\left[X(t+h)-X(t)\right]}{h}-2X(t)X'(t)\right|^2\right\}=0$$

   注：利用了 $X(t)$ 均方可导并均方连续的定义。

清华大学电子工程系版权所有

3. [1] 第 6 章习题 12

   设有如图 4.1所示的接收机。

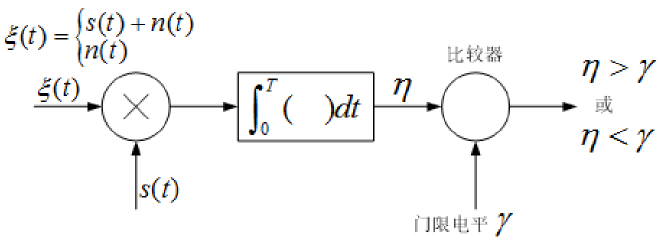


图 4.1

   接收机的输入有两种可能：

   （1）存在信号和噪声，$\xi(t)=s(t)+n(t)$

   （2）仅有噪声存在（信号不存在），$\xi(t)=n(t)$

   $s(t)$ 代表信号，它是一确定性信号，在 $(0,T)$ 内它具有能量 $E_s=\int_0^T s^2(t)\,dt$。$n(t)$ 代表噪声，它是零均值白高斯随机过程，$E\{n(t)n(u)\}=\frac{N_0}{2}\delta(t-u)$。

   接收机的输出为 η，把 η 和门限 γ 相比较，试求

   （1）$P\{\eta>\gamma|$信号存在时$\}$，这就是发现概率。

   （2）$P\{\eta>\gamma|$信号不存在时$\}$，这就是虚警概率。

   概念复习：

   高斯随机过程通过线性系统

   参考答案：

   $\eta=\int_0^T(s(t)+n(t))s(t)dt=E_s+\int_0^T n(t)s(t)dt$，$\int_0^T n(t)s(t)dt$ 为零均值高斯随机变量，方差为：$E[(\int_0^T n(t)s(t)dt)^2]=E[(\int_0^T n(t_1)s(t_1)dt_1)\int_0^T n(t_2)s(t_2)dt_2)]=\frac{N_0E_s}{2}$，所以虚警概率和检测概率分别为：$P_f=\int_\gamma^\infty\frac{1}{\sqrt{\pi N_0E_s}}e^{-\frac{x^2}{N_0E_s}}dx, P_d=\int_{\gamma-E_s}^\infty\frac{1}{\sqrt{\pi N_0E_s}}e^{-\frac{x^2}{N_0E_s}}dx$。

4. 设 $Z(t)=X(t)+jY(t)$ 为一复随机过程，其中 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为实的零均值随机过程，彼此独立，且构成联合宽平稳高斯随机过程。假设 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 均为带限过程，满足

$$S_X(f)=S_Y(f)=\begin{cases}N_0 & |f|\leqslant W\\0 & else\end{cases}$$

   （1）求 $E[Z(t)]$ 以及 $R_Z(t+\tau,t)$，证明 $Z(t)$ 是宽平稳的

   （2）求 $Z(t)$ 的功率谱密度

   （3）假设带限于 $[-W,W]$ 的确定性信号 $\phi_1(t)$,$\phi_2(t)$,...,$\phi_n(t)$ 满足正交归一性，即 $\int_{-\infty}^\infty\phi_j(t)\phi_k^*(t)\,dt=\delta_{jk}$，将 $Z(t)$ 向 $\{\phi_j(t)\}$ 上投影，得到

$$Z_j=\int_{-\infty}^\infty Z(t)\phi_j^*(t)\,dt\quad j=1,2,...,n$$

   令 $Z_j=Z_{jr}+jZ_{ji}$，求随机矢量 $(Z_{1r},Z_{1i},Z_{2r},Z_{2i},...,Z_{nr},Z_{ni})$ 的概率密度分布

清华大学电子工程系版权所有

参考答案：

（1）

$$\begin{aligned}E\left\{Z\left(t\right)\right\}&=E\left\{X\left(t\right)\right\}+jE\left\{Y\left(t\right)\right\}=0\\R_Z\left(t+\tau,t\right)&=E\left\{Z\left(t+\tau\right)Z^*\left(t\right)\right\}\\&=E\left\{\left[X(t+\tau)+jY(t+\tau)\right]\left[X(t)-jY(t)\right]\right\}\\&=R_X(\tau)+R_Y(\tau)\end{aligned}$$

$R_Z(t+\tau,t)$ 与 t 无关，因此为宽平稳

（2）$S_Z\left(f\right)=S_X\left(f\right)+S_Y\left(f\right)$，则

$$S_Z\left(f\right)=\begin{cases}2N_0 & |f|\leqslant W\\0 & else\end{cases}$$

（3）由高斯随机变量的线性变换性质可知随机矢量 $\mathbf{z}=\left(Z_{1r},Z_{1i},Z_{2r},Z_{2i},...,Z_{nr},Z_{ni}\right)^{\mathrm{T}}$ 是高斯分布

$$\begin{aligned}E\left\{Z_j\right\}&=E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[X\left(t\right)+jY\left(t\right)\right]\phi_j^*\left(t\right)dt\right\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{E\left\{X\left(t\right)\right\}\phi_j^*\left(t\right)+jE\left\{Y\left(t\right)\right\}\phi_j^*\left(t\right)\right\}dt=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\left\{Z_kZ_j^*\right\}&=E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}Z(t)\phi_k^*(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}Z^*(s)\phi_j(s)ds\right\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_Z(t-s)\phi_k^*(t)\phi_j(s)dtds\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}R_Z(t-s)\phi_k^*(t)dt\right]\phi_j(s)ds\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}S_Z(f)e^{-j2\pi fs}\Phi_k^*(f)df\right]\phi_j(s)ds\qquad(\textbf{Parseval})\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}2N_0e^{-j2\pi fs}\Phi_k^*(f)df\right]\phi_j(s)ds\qquad(\phi_k(t)\ Z(t)\text{均带限})\\&=2N_0\int_{-\infty}^{\infty}\phi_k^*(s)\phi_j(s)ds\\&=2N_0\delta_{kj}\end{aligned}$$

由此可知 $\{Z_k\}$ 是独立同分布的复高斯随机变量，由于 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 独立，因此

$$\begin{pmatrix}Z_k^{(r)}\\Z_k^{(i)}\end{pmatrix}\sim N\left(\mathbf{0},N_0\mathbf{I}\right)$$

由

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(E\left\{Z_kZ_j^*\right\}\right)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_Z(t-s)\mathrm{Im}\left(\phi_k^*(t)\phi_j(s)\right)dtds\\&=2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_X(t-s)\left[\phi_k^{(r)}(t)\phi_j^{(i)}(s)-\phi_k^{(i)}(t)\phi_j^{(r)}(s)\right]dtds\\&=0\end{aligned}$$

清华大学电子工程系版权所有

得到

$$
\begin{aligned}
E\left\{Z_k^{(r)}Z_j^{(i)}\right\} &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[X(t)\phi_k^{(r)}(t)+Y(t)\phi_k^{(i)}(t)\right]dt\int_{-\infty}^{\infty}\left[-X(s)\phi_j^{(i)}(s)+Y(s)\phi_j^{(r)}(s)\right]ds\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_X(t-s)\left(\phi_k^{(i)}(t)\phi_j^{(r)}(s)-\phi_k^{(r)}(t)\phi_j^{(i)}(s)\right)dtds \\
&= 0
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
E\left\{Z_k^{(i)}Z_j^{(i)}\right\} &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[-X(t)\phi_k^{(i)}(t)+Y(t)\phi_k^{(r)}(t)\right]dt\int_{-\infty}^{\infty}\left[-X(s)\phi_j^{(i)}(s)+Y(s)\phi_j^{(r)}(s)\right]ds\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_X(t-s)\left(\phi_k^{(i)}(t)\phi_j^{(i)}(s)+\phi_k^{(r)}(t)\phi_j^{(r)}(s)\right)dtds
\end{aligned}
$$

同理可计算得到 $E\left\{Z_k^{(i)}Z_j^{(i)}\right\}=E\left\{Z_k^{(r)}Z_j^{(r)}\right\}$

又因为 $\mathrm{Re}\left(E\left\{Z_kZ_j^*\right\}\right)=E\left\{Z_k^{(r)}Z_j^{(r)}+Z_k^{(i)}Z_j^{(i)}\right\}=2N_0\delta_{kj}$

所以 $E\left\{Z_k^{(i)}Z_j^{(i)}\right\}=E\left\{Z_k^{(r)}Z_j^{(r)}\right\}=N_0\delta_{kj}$

综上

$$\mathbf{z}\sim N\left(\mathbf{0},N_0\mathbf{I}_{2n}\right)$$

5. [1] 第 6 章习题 17。

设有一非线性器件，它的输出、输入关系为

$$y\left(t\right)=a_1x\left(t\right)+a_3x^3\left(t\right)$$

又设随机输入 $\xi(t)$ 为一零均值平稳实高斯过程，它的相关函数为 $R_\xi(\tau)$，试求 $E\left\{\eta(t)\right\}$ 和 $R_\eta(\tau)$，即求输出过程的均值和相关函数。

概念复习：

高斯随机过程通过非线性系统

参考答案：

解：（1）$E\left[\eta\left(t\right)\right]=a_1E\left[\xi\left(t\right)\right]+a_3E\left[\xi^3\left(t\right)\right]=0$（两个奇函数）

（2）

$R_\eta\left(t_1,t_2\right)=a_1^2E\left[\xi\left(t_1\right)\xi\left(t_2\right)\right]+a_1a_3E\left[\xi^3\left(t_1\right)\xi\left(t_2\right)+\xi\left(t_1\right)\xi^3\left(t_2\right)\right]+a_3^2E\left[\xi^3\left(t_1\right)\xi^3\left(t_2\right)\right]$

由于 $\xi\left(t\right)$ 为高斯平稳过程，对任意 t_1,t_2，$\left(\xi\left(t_1\right),\xi\left(t_2\right)\right)$ 为二维高斯分布，且特称函数 $\phi\left(t_1,t_2\right)=exp(-\frac{1}{2}[R_\xi\left(0\right)\left(t_1^2+t_2^2\right)+2t_1t_2R_\xi(t_1-t_2)])$。故有

$$
\begin{aligned}
E\left[\xi\left(t_1\right)\xi\left(t_2\right)\right]&=R_\xi\left(t_1-t_2\right); \\
E\left[\xi^3\left(t_1\right)\xi\left(t_2\right)\right]&=j^{-4}\frac{\partial^4\phi\left(t_1,t_2\right)}{\partial t_1^3\partial t_2}|_{t_1=t_2=0}=3R_\xi\left(0\right)R_\xi\left(t_1-t_2\right); \\
E\left[\xi\left(t_1\right)\xi^3\left(t_2\right)\right]&=j^{-4}\frac{\partial^4\phi\left(t_1,t_2\right)}{\partial t_1\partial t_2^3}|_{t_1=t_2=0}=3R_\xi\left(0\right)R_\xi\left(t_1-t_2\right); \\
E\left[\xi^3\left(t_1\right)\xi^3\left(t_2\right)\right]&=j^{-6}\frac{\partial^6\phi\left(t_1,t_2\right)}{\partial t_1^3\partial t_2^3}|_{t_1=t_2=0}=9R_\xi^2\left(0\right)R_\xi\left(t_1-t_2\right)+6R_\xi^3\left(t_1-t_2\right)
\end{aligned}
$$

故，$R_\eta\left(\tau\right)=a_1^2R_\xi\left(\tau\right)+6a_1a_3R_\xi\left(0\right)R_\xi\left(\tau\right)+a_3^2[9R_\xi^2\left(0\right)R_\xi\left(\tau\right)+6R_\xi^3\left(\tau\right)]$

清华大学电子工程系版权所有

6. 设 $\{X(t)\}$ 为零均值、宽平稳、带通、实高斯过程，其同相分量记为 $\{X_c(t)\}$，正交分量记为 $\{X_s(t)\}$，包络过程 $R(t)=\sqrt{X_c(t)^2+X_s(t)^2}$，相位过程 $\Theta(t)=arctan\frac{X_c(t)}{X_s(t)}$，

 (a) 试证：$\left\{\begin{pmatrix}X_c(t)\\X_s(t)\end{pmatrix}\right\}$ 是高斯过程。

 (b) 试问：$\{R(t)\}$ 是否宽平稳，是否严平稳？

 (c) 试问：$\{\Theta(t)\}$ 是否宽平稳，是否严平稳？

 (d) 试问：$\left\{\begin{pmatrix}R(t)\\\Theta(t)\end{pmatrix}\right\}$ 是否宽平稳，是否严平稳？

概念复习：

窄带高斯随机过程性质

参考答案：

（1）证：欲得结论，只需证对任意函数 $g_1(t),g_2(t)$，$\zeta=\int_{-\infty}^{\infty}(g_1(t),g_2(t))\begin{pmatrix}X_c(t)\\X_s(t)\end{pmatrix}dt$ 高斯分布随机变量。

设 $x(t)$ 中心频率为 f_0,其希尔伯特变换为 $\hat{x}(t)$ 则有 $\hat{x}(t)=x_c(t)\sin 2\pi f_0t-x_s(t)\cos 2\pi f_0t$（可通过频域变换导出），故

$$x_c(t)=x(t)\cos 2\pi f_0t\ +\hat{x}(t)\sin 2\pi f_0t$$

$$x_s(t)=x(t)\sin 2\pi f_0t\ -\hat{x}(t)\cos 2\pi f_0t$$

$$\zeta=\int_{-\infty}^{\infty}(g_1(t)\cos 2\pi f_0t+g_2(t)\sin 2\pi f_0t,\quad g_1(t)\sin 2\pi f_0t-g_2(t)\cos 2\pi f_0t)\cdot\begin{pmatrix}x(t)\\\hat{x}(t)\end{pmatrix}dt$$

又平稳实高斯通过线性系统，其输入输出为联合正态分布随机过程，故 $\begin{pmatrix}x(t)\\\hat{x}(t)\end{pmatrix}$ 为联合正态分布随机过程，从而对任意函数 $g_1(t),g_2(t)$，ζ 为高斯分布随机过程，证毕。

（2,3,4）答：以上三问皆既为宽平稳也为严平稳，以下仿照证明 $\left\{\begin{pmatrix}R(t)\\\Theta(t)\end{pmatrix}\right\}$ 为严平稳，则其他自然成立。为与相关函数区分，将 $R(t)$ 写作 $V(t)$。

对任意时刻,$t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\leqslant\ldots\leqslant t_n$，类似（1）可知 $X_c(t1),X_s(t1),\ldots,X_c(tn),X_s(tn)$ 为 2n 元正态分布，又分布均值为 0 向量，由多元正态分布性质，仅需求出协方差矩阵 B 即可得到联合概率密度函数

$f_{X_c(t1),X_s(t1),?,X_c(tn),X_s(tn)}(x_1,x_2,?,x_{2n-1},x_{2n})=\frac{1}{(2\pi)^n|B|^{\frac{1}{2}}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}X^TB^{-1}X\right)$

考虑协方差矩阵 B，其中各项可能为以下几种情况。设 $1\leqslant i\leqslant n,k\geqslant 1$

$$E[X_c(t_i)X_c(t_i)]=E[X_s(t_i)X_s(t_i)]=R_X(0);$$

$$E[X_c(t_i)X_s(t_i)]=0;$$

$$E[X_c(t_i)X_c(t_{i+k})]=E[X_s(t_i)X_s(t_{i+k})]=R_{X_c}(t_{i+k}-t_i);$$

$$E[X_c(t_i)X_s(t_{i+k})]=R_{X_sX_c}(t_{i+k}-t_i)=-R_{X_cX_s}(t_{i+k}-t_i);$$

$$E[X_c(t_{i+k})X_s(t_i)]=R_{X_cX_s}(t_{i+k}-t_i);$$

其中各项均只与各时间差相关，从而 $X_c(t_1),X_s(t_1),\ldots,X_c(t_n),X_s(t_n)$ 为严平稳。

清华大学电子工程系版权所有

又由 $X_c(t_i)=V(t_i)\cos(\Theta(t_i))$； $X_s(t_i)=-V(t_i)\sin(\Theta(t_i))$，有 $v_i\geqslant 0$ 且 $\theta_i\in[0,2\pi]$ 时，

$$f_{V(t1),\Theta(t_1),\ldots,V(t_n),\Theta(t_n)}(v_1,\theta_1,\ldots,v_n,\theta_n)$$

$$=f_{X_c(t_1),X_s(t_1),\ldots,X_c(t_n),X_s(t_n)}(v_1\cos\theta_1\ ,-v_1\sin\theta_1\ ,\ldots,v_n\cos\theta_n\ ,-v_n\sin\theta_n\ )\cdot|J|$$

其中 $|J|=\left|\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_{2n-1},x_{2n})}{\partial(v_1,\theta_1,\ldots,v_n,\theta_n)}\right|=v_1v_2\cdots v_n$

综上，$f_{V(t_1),\Theta(t_1),\ldots,V(t_n),\Theta(t_n)}(v_1,\theta_1,\ldots,v_n,\theta_n)$ 分布仅与时间差相关，从而

$$f_{V(t1),\Theta(t1),\ldots,V(tn),\Theta(t_n)}(v_1,\theta_1,\ldots,v_n,\theta_n)$$

$$=f_{V(t_1+h),\Theta(t_1+h),\ldots,V(t_n+h),\Theta(t_n+h)}(v_1,\theta_1,\ldots,v_n,\theta_n)$$

故有 $\binom{V(t)}{\Theta(t)}$ 为严平稳随过程。

7. 若零均值平稳窄带高斯随机信号 $\{X(t)\}$ 的功率谱密度如图 4.2

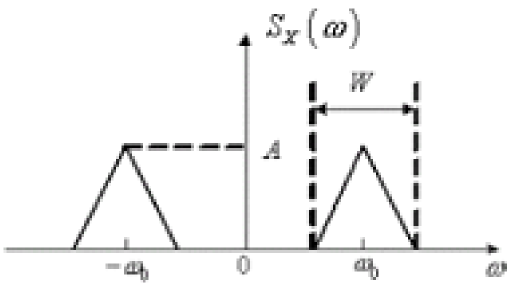


图 4.2

（1）试写出此随机信号的一维概率密度函数；

（2）写出 $X(t)$ 的两个正交分量 $X_s(t),X_s(\tau)$ 的联合概率密度函数。

参考解答：

（1）零均值平稳窄带高斯随机信号 $X(t)$ 的正交表达式为

$$x(t)=i(t)\cos\omega_0 t-q(t)\sin\omega_0 t$$

基于功率谱计算功率得

$$P=R_X(0)=\sigma_X^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{AW}{2\pi}$$

$X(t)\sim\mathcal{N}(0,\sigma_X^2)$，故一维概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{(AW)^{1/2}}\exp(-\frac{\pi x^2}{AW})$$

（2）因为 $X(t)$ 的功率谱关于中心频率 ω_0 偶对称，所以

$$S_{qi(\omega)}=0$$

清华大学电子工程系版权所有

即 $R_{qi}(\tau)=E[i(t_1)q(t_2)]=0$ 所以 $i(t),q(t)$ 彼此正交，作为零均值的高斯信号也彼此独立且

$$E[X(t)]=E[i(t)]=E[q(t)]=0,\sigma_X^2=\sigma_i^2=\sigma_q^2=\frac{AW}{2\pi}$$

$$f_{i,q}(i,q;t_1,t_2)=f_i(i,t_1)f_q(q,t_2)=\frac{1}{AW}\exp(-\frac{\pi(I^2+q^2)}{AW})$$

8. 设有零均值平稳实高斯随机过程 $\xi(t)$，其功率谱密度为

$$S_\xi(f)=\begin{cases} S_0=\frac{P}{2(\Delta f)} & (|f|<\Delta f) \\ 0 & (other) \end{cases}$$

如果对该过程每隔 $\frac{1}{2\Delta f}$ 秒做一次抽样，得到样本值 $\xi(0),\xi\left(\frac{1}{2f}\right),\xi(\frac{2}{2f})\cdots$

(a) 写出前面 n 个样本点 $\xi(t)$ 所取值的 n 维联合概率密度。

(b) 定义随机变量 $\eta_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi(\frac{k}{2\Delta f})$，求概率 $P\{|\eta_n|>\sqrt{\alpha P}\}$ 的表示式，α 为常数，$\alpha>0$。

参考解答：

（1）根据维纳-辛钦定理，有

$$R_\xi(\tau)=\int_\infty^\infty S_\xi(f)\mathrm{e}^{2\pi jf\tau}\mathrm{d}f=\int_{\Delta f}^{\Delta f}\frac{P}{2\Delta f}\mathrm{e}^{2\pi jf\tau}\mathrm{d}f=\frac{P\sin 2\pi\Delta f\tau}{2\pi\Delta f\tau}$$

则有

$$R_\xi(\frac{k}{2\Delta f})=\frac{P\sin k\pi}{k\pi}=0$$

故 $\xi(0),\xi(\frac{1}{2\Delta f},\xi(\frac{2}{2\Delta f}),...$ 两两相关，由于 $\xi(t)$ 是高斯过程，因此它们是独立的。

令 $\xi_k=\xi(\frac{k}{2\Delta f}),k=1,2,...,n-1$，则有 $E[\xi_K]=0,D[\xi^2]=E[\xi_K^2]=R_\xi(0)=P$。因此

$$f_{\xi_0,\xi_1,...,\xi_{n-1}}(x_0,x_1,..,x_{n-1})=\frac{1}{(2\pi P)^{\frac{n}{2}}}\exp(-\frac{1}{2P}\sum_{k=0}^{n-1}x_k^2)$$

（2）由于

$$\eta_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi(\frac{k}{2\Delta f})=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\sim\mathcal{N}(0,P/n)$$

故有

$$P\{|\eta_n|>\sqrt{\alpha P}=1-P\{|\eta_n|\leqslant\sqrt{\alpha P}\}=1-P\left\{-\sqrt{\alpha n}\leqslant\frac{\eta_n}{\sqrt{\frac{P}{n}}}\leqslant\sqrt{\alpha n}\right\}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{\alpha n}}^{\sqrt{\alpha n}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

9. 设功率谱密度 $N_0/2$ 的白噪声通过一个物理带宽为 $\Delta w/2$ 的理想低通滤波器，在低通滤波器后接一个传输特性为 $y=x^2$ 的平方律检波器，求检波器输出随机信号的自相关函数和功率谱密度。

参考答案：

清华大学电子工程系版权所有

理想低通滤波器输出信号的功率谱密度函数为

$$G_X(w)=\begin{cases}\frac{N_0}{2} & |w|<\Delta w/2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

根据相关函数与功率谱密度之间傅立叶变换关系，得到理想低通滤波器输出信号的自相关函数为

$$R_X(\tau)=F^{-1}[G_X(w)]=\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta w/2}^{\Delta w/2}\frac{N_0}{2}\mathrm{e}^{jw\tau}\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta w/2}^{\Delta w/2}\frac{N_0}{2}\cos(w\tau)\mathrm{d}w$$

$$=\frac{N_0}{2\pi\tau}\sin(\frac{\Delta\tau}{2})=\frac{\frac{N_0\Delta w}{4\pi}\sin(\frac{\Delta w\tau}{2})}{\frac{\Delta w\tau}{2}}$$

$\sigma^2=R_X(0)=\frac{N_0\Delta w}{4\pi}$ 根据平方律检波器的输入输出过程相关函数的关系 (证明过程省略) 得到：

$$R_Y(\tau)=\sigma^4+2R_X^2(\tau)=[\frac{N_0\Delta w}{4\pi}]^2+2[\frac{N_0\Delta w}{4\pi}][\frac{\sin(\Delta w\tau/2)}{\Delta w\tau/2}]^2$$

根据傅立叶变换性质，有：

$$G_Y(w)=2\pi\sigma^4\delta(w)+2G_X(w)*G_X(w)=\frac{N_0^2(\Delta w)^2}{8\pi}\delta(w)+2G_X(w)*G_X(w)$$

根据卷积原理，宽度为 Δw、高度为 1 的矩形函数的卷积为宽度为 $2\Delta w$、高度为 Δw 的三角函数，则宽度为 Δw、高度为 $N_0/2$ 的矩形函数的卷积为宽度为 $2\Delta w$、高度为 $\frac{N_0^2\Delta w}{4}$ 的三角函数，则

$$G_Y(w)=\frac{N_0^2(\Delta w)^2}{8\pi}\delta(w)+\frac{N_0^2\Delta w}{2}[1-\frac{|w|}{\Delta w}]$$

10. 若 $N(t)$ 是零均值，方差为 σ^2 的窄带高斯随机信号，可以表示为 $N(t)=X(t)\cos(\omega_0 t)-Y(t)\sin(\omega_0 t)$，求证：$t$ 时刻 $N(t)$ 的包络随机变量 $V_t=\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)}$ 的均值和方差分别为 $m_{V_t}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma,\sigma_{V_t^2}=(2-\frac{\pi}{2})\sigma^2$。

参考答案：

证明：$N(t)$ 是均值为 0，方差为 σ^2 的窄带高斯随机信号，因此它的包络随机变量 $V_t=\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)}$ 服从瑞利分布，即

$$f_{V_t}(v)=\begin{cases}\frac{v}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{v}{2\sigma^2}} & v\geqslant 0\\ 0 & v<0\end{cases}$$

$$m_{V_t}=\int_{-\infty}^{\infty}vf_{V_t}(v)\mathrm{d}v=\int_0^{+\infty}\frac{v^2}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v$$

$$=-\int_0^{+\infty}v\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\right)=-\left(v\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v\right)$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v\rightarrow^{v=\sqrt{2}\sigma t}\sqrt{2}\sigma\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

$$m_{V_t^2}=\int_{-\infty}^{\infty}v^2f_{V_t}(v)\mathrm{d}v=\int_0^{+\infty}\frac{v^3}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v=2\sigma^2$$

$$\sigma_{V_t^2}=m_{V_t^2}-(m_{V_t})^2=(2-\frac{\pi}{2})\sigma^2$$

清华大学电子工程系版权所有

参考文献

[1] 陆大纟 金. 随机过程及其应用. 清华大学出版社, 1986.

[2] 陆大纟 金，张灏. 随机过程及其应用（第二版）. 清华大学出版社, 2012.

清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2) ，homework19_poisson1 © 清华大学电子工程系

1. 设 $\{N_1(t), t \geqslant 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geqslant 0\}$ 是相互独立的泊松过程，其参数分别是 λ_1 和 λ_2, 若 $N_0(t) = N_1(t) - N_2(t)$, 问 $\{N_0(t), t \geqslant 0\}$ 是否为泊松过程。

   参考解答：泊松过程的状态空间是自然数集合，过程 $N_1(t)$ 和过程 $N_2(t)$ 的状态空间均为自然数集合，且相互独立，因此 $N_1(t) - N_2(t)$ 的状态空间为整数集合，因此 $N_0(t)$ 必定不是泊松过程。

2. 设有一个泊松过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$, 若有两个时刻 $t > s > 0$，试证明：

$$P\{N(s) = k|N(t) = n\} = \binom{n}{k}(\frac{s}{t})^k(1 - \frac{s}{t})^{n-k}, k = 0, 1, \cdots, n$$

   参考解答：

$$\begin{aligned}
P\{N(s) = k|N(t) = n\} &= \frac{P\{N(s) = k, N(t) = n\}}{P\{N(t) = n\}} = \frac{P\{N(s) = k\}P\{N(t) - N(s) = n - k\}}{P\{N(t) = n\}} \\
&= \frac{\frac{(\lambda s)^k \exp(-\lambda s)}{k!} \frac{[\lambda(t-s)]^{n-k} \exp[-\lambda(t-s)]}{(n-k)!}}{\frac{(\lambda t)^n \exp(-\lambda t)}{n!}} \\
&= \binom{n}{k}(\frac{s}{t})^k(1 - \frac{s}{t})^{n-k}
\end{aligned}$$

3. 设有两个相互独立的泊松过程 $X(t), Y(t)$, 参数分别为 λ_X, λ_Y,设 T_k^X, T_K^Y 分别为 $X(t), Y(t)$ 中第 k 次事件出现的时间，计算 $P(T_1^X < T_1^Y)$。

   参考答案：可以考虑和过程 $Z(t) = X(t) + Y(t)$，则 $Z(t) \sim \mathrm{PP}(\lambda_1 + \lambda_2)$, 然后将和过程按照二值随机变量 $Ber(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})$ 进行分流，这样就得到了 $X(t)$ 与 $Y(t)$。所以事件 $\{T_1^X < T_1^Y\}$, 就等价于过程 $Z(t)$ 中事件第一次发生时，将其分流到 $X(t)$ 中的概率，因此 $P(T_1^X < T_1^Y) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$。

4. 设有一个泊松过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$，问 $N(t)$ 是否可能为宽平稳过程？是否可能为严平稳过程？是否可能为高斯过程？是否可能具有马尔可夫性？试分析并给出理由。

   参考答案：本题为课上知识点的总结。首先泊松过程不可能为宽平稳、严平稳以及高斯过程，因为 $\mathbf{E}(N(t)) = \lambda t$ 与时间 t 有关。而从泊松过程的定义可以看出，泊松过程实质上是一种状态离散、时间连续的马尔可夫过程。

清华大学电子工程系版权所有

1. 给定一个 Poisson 过程，其参数为 λ。令 N 表示在 $(0,t]$ 内的到达数，M 表示 $(0,t+s]$ 内的到达数，其中，$t,s \geqslant 0$。求：

   (a) 已知 N 时 M 的条件概率分布，即 $p_{M|N}(m|n), m \geqslant n$

   (b) N 和 M 的联合概率分布，即 $p_{N,M}(n,m)$。

   (c) 求解已知 M 时 N 的条件概率分布，即 $P_{N|M}(n|m), n \leqslant m$

   (d) 期望值 $\mathbb{E}(NM)$

   参考解答： 记此 Poission 过程为 $\{N(t), t \geqslant 0\}$，则 $N(t) = N, N(t+s) = M$。

   (a) $P\{N(t+s) = m|N(t) = n\} = P\{N(t+s) - N(t) = m-n|N(t) = n\}$，因此：

   $$p_{M|N}(m|n) = P\{N(t+s) - N(t) = m-n\} = \frac{(\lambda s)^{m-n}e^{-\lambda s}}{(m-n)!}, m \geqslant n$$

   (b) $P\{N(t) = n, N(t+s) = m\} = P\{N(t) = n, N(t+s) - N(t) = m-n\}$。因此：

   $$p_{N,M}(n,m) = \frac{(\lambda t)^n(\lambda s)^{m-n}e^{-\lambda(t+s)}}{n!(m-n)!} = \frac{\lambda^m t^n s^{m-n}e^{-\lambda(t+s)}}{n!(m-n)!}, n \leqslant m$$

   (c) 利用 Bayes 公式求解：

   $$p_{N|M}(n|m) = \frac{p_{N,M}(n,m)}{p_M(m)} = \frac{\frac{(\lambda t)^n(\lambda s)^{m-n}e^{-\lambda(t+s)}}{n!(m-n)!}}{\frac{[\lambda(t+s)]^m e^{-\lambda(t+s)}}{m!}} = \binom{m}{n}\left(\frac{t}{t+s}\right)^n\left(\frac{s}{t+s}\right)^{m-n}, n \leqslant m$$

   (d) 利用 Poisson 分布的性质：

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(NM) &= \mathbb{E}\{N(t)N(t+s)\} = \mathbb{E}\{N(t)^2\} + \mathbb{E}\{N(t)(N(t+s) - N(t))\} \\ &= \lambda t + (\lambda t)^2 + \lambda^2 ts\end{aligned}$$

2. 设 T_1 和 T_2 为两个服从参数为 λ 的指数分布的随机变量，S 为参数为 μ 的指数分布的随机变量，三个变量间相互独立。试求随机变量 $\min(T_1+T_2, S)$ 的均值。

   参考解答： 首先容易给出 $T = T_1 + T_2$ 的 pdf, 且 T 与 S 相互独立。

   $$f_T(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau}\lambda e^{-\lambda(t-\tau)}d\tau = \lambda^2 te^{-\lambda t}$$

   接着给出 $M = \min(T_1+T_2, S) = \min(T,S)$ 的 pdf:

   $$f_M(t) = f_T(t)\int_t^\infty f_S(\tau)d\tau + f_S(t)\int_t^\infty f_T(\tau)d\tau = (\lambda^2 t + \mu\lambda t + \mu)e^{-(\mu+\lambda)t}, t \geqslant 0$$

   可以求得均值为：$\mathbb{E}\{\min(T_1+T_2,S)\} = \int_0^\infty tf_M(t)dt = \frac{2\lambda+\mu}{(\lambda+\mu)^2}$

3. 设 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程，用 S_n 表示第 n 个事件发生的时刻，$n \geqslant 1$，请用微元法求 $S_1, \cdots, S_n$ 的联合概率密度函数。

   参考答案： 令 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 取充分小的 $h > 0$, 使得：

   $$0 \leqslant t_1 - \frac{h}{2} < t_1 < t_1 + \frac{h}{2} < t_2 - \frac{h}{2} < t_2 < t_2 + \frac{h}{2} < \cdots < t_{n-1} + \frac{h}{2} < t_n < t_n + \frac{h}{2}$$

清华大学电子工程系版权所有

由：

$$
\begin{aligned}
&\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\leqslant t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<S_2\leqslant t_2+\frac{h}{2},\cdots,t_n-\frac{h}{2}<S_n\leqslant t_n+\frac{h}{2}\}\\
&=\Big[N(t_1-\frac{h}{2})=0,N(t_1+\frac{h}{2})-N(t_1-\frac{h}{2})=1,N(t_2-\frac{h}{2})-N(t_1+\frac{h}{2})=0,\cdots,\\
&N(t_n+\frac{h}{2})-N(t_n-\frac{h}{2})=1\Big]\cup\Big[N(t_1-\frac{h}{2})=0,N(t_1+\frac{h}{2})-N(t_1-\frac{h}{2})=1,\cdots,\\
&N(t_n+\frac{h}{2})-N(t_n-\frac{h}{2})\geqslant 2\Big]
\end{aligned}
$$

于是有：

$$
\begin{aligned}
&P\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\leqslant t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<\ S_2\leqslant t_2+\frac{h}{2},\cdots,t_n-\frac{h}{2}<S_n\leqslant t_n+\frac{h}{2}\}=\\
&=\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda(t_i-t_{i-1}-h)}\lambda he^{-\lambda h}+o(h^n)\\
&=(\lambda h)^n e^{-\lambda(t_n+\frac{h}{2})}+o(h^n)=\lambda^n e^{-\lambda t_n}h^n+o(h^n)
\end{aligned}
$$

上式中 $t_0=-\frac{h}{2}$。因此，$(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 的联合概率密度为：

$$
\begin{aligned}
&g(t_1,t_2,\cdots,t_n)\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{P\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\leqslant t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<\ S_2\leqslant t_2+\frac{h}{2},\cdots,t_n-\frac{h}{2}<S_n\leqslant t_n+\frac{h}{2}\}}{h^n}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda^n e^{-\lambda t_n}h^n+o(h^n)}{h^n}=\lambda^n e^{-\lambda t_n},0<t_1<t_2<\cdots<t_n
\end{aligned}
$$

即：

$$
g(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda t_n} & 0<t_1<t_2<\cdots<t_n\\ 0 & \text{其他}\end{cases}
$$

4. 病人随机地来到诊所就诊，病人的到达服从参数为 λ 的泊松过程。若病人就诊的持续时间为 a, 在下列两种假定下计算：第一个病人到达后，第二个病人不需要等待直接就诊的概率，以及第二个病人等待时间的均值。

   (a) a 为确定性常数

   (b) a 为参数为 μ 的指数分布。

   参考解答：

   (a) 设第二个病人到达时刻与第一个病人的到达时刻的时间间隔为 X, 则 $X\sim \text{EXP}(\lambda)$，设第二个病人的等候时间为 $T=\max(0,a-X)$。

$$P\{\text{第二个病人直接就诊}\}=P\{X\geqslant a\}=e^{-\lambda a}$$

$$\mathbb{E}\{T\}=\int_0^a(a-x)\lambda e^{-\lambda x}dx=a+\frac{e^{-\lambda a}-1}{\lambda}$$

   (b) 作业 Poisson1 中第 4 题类似，容易得到：

$$P\{\text{第二个病人直接就诊}\}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

清华大学电子工程系版权所有

另一方面，可以用条件期望求 $\mathbb{E}\{T\}$, 即：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{T\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{T|\mathbf{sgn}(X-a)\}\} \\
&= \mathbb{E}\{T|X \leqslant a\}P(X \leqslant a) + \mathbb{E}\{T|X > a\}P(X > a) \\
&= \mathbb{E}\{a-X|a \geqslant X\}P\{a \geqslant X\} = \mathbb{E}\{a-X|a \geqslant X\}\frac{\lambda}{\mu+\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{(\mu+\lambda)\mu}
\end{aligned}$$

上式中最后一步应用了指数分布的无后效性。

清华大学电子工程系版权所有

概率论与随机过程 (2) homework17_poisson3_solution 清华大学电子工程系

1. 考察一个 Poisson 过程，达到速率为 λ，令 $N(G_i)$ 代表时间间隔 $G_i = (t_i\ ,t_i + c_i]$ 内的到达数。假设现有 n 个这样的时间间隔，$i = 1, 2, \cdots, n$，并且相互之间没有任何交叠。定义 $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ 为 n 个时间间隔的并集，其总的时间长度为 $c = \sum_{i=1}^{n} c_i$。

   设 $k_i \geqslant 0$，$k = \sum_{i=1}^{n} k_i$，试求解

   $$P\left\{N\left(G_1\right)=k_1, N\left(G_2\right)=k_2, ..., N\left(G_n\right)=k_n \mid N\left(G\right)=k\right\}$$

   并试着对结果给出一个直观的解释。

   参考解答：

   为方便，令 $N_i = N(G_i), i = 1, 2, \cdots, n.N_G = N(G)$，则

   $$\begin{aligned}
   &P\left\{N_1=k_1, N_2=k_2, ..., N_n=k_n \mid N_G=k\right\}\\
   &=\frac{P\left\{N_1=k_1, N_2=k_2, ..., N_n=k_n, N_G=k\right\}}{P\left\{N_G=k\right\}}\\
   &=\frac{P\left\{N_1=k_1\right\}...P\left\{N_n=k_n\right\}}{P\left\{N_G=k\right\}}\\
   &=\frac{\left(\frac{(c_1\lambda)^{k_1}e^{-c_1\lambda}}{k_1!}\right)...\left(\frac{(c_n\lambda)^{k_n}e^{-c_n\lambda}}{k_n!}\right)}{\frac{(c\lambda)^{k}e^{-c\lambda}}{k!}}\\
   &=\frac{k!}{k_1!...k_n!}\left(\frac{c_1}{c}\right)^{k_1}...\left(\frac{c_n}{c}\right)^{k_n}
   \end{aligned}$$

   这个结果可以理解为一个多项式分布。假设我们抛掷一个 n 边形的骰子 k 次，其中第 i 边朝上的概率为 $p_i = \frac{c_i}{c}$。则对应的第 i $i = 1, 2, \cdots, n$ 边朝上次数分别为 k_i $i = 1, 2, \cdots, n$ 次的概率即可用 (1) 式表达。将该多项式分布与此 Poisson 过程相联系，我们可以将每一段采样间隔 c_i 对应于骰子的第 i 边，在该段时间间隔内发生一次事件的概率与其时间间隔成正比，即为 $\frac{c_i}{c}$，对应于骰子第 i 边朝上的概率，因此，所求的即为一个多项式分布，与计算结果相符。

2. 根据你对于 Poisson 过程的理解，确定下面表达式中参数 a, b 的值，并给出理由。

   $$\int_t^{\infty} \frac{\lambda^5\tau^4e^{-\lambda\tau}}{4!}d\tau = \sum_{k=a}^{b} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

   参考解答：

   $$a = 0\ b = 4.$$

   理由：

   等式左边表示的是事件发生次数为 5 次所需时间间隔大于 t 的概率，其等价描述为，在时间间隔 t 内事件发生次数小于 5 次的概率。

   等式右边表示的是在时间间隔 t 内事件发生次数为 a 次到 b 次的时间。

   两者相等，则易知，$a = 0\ b = 4$

   （注：从纯数学等式的角度分析，利用分步积分，也可以得到结果，但不如物理含义直观）

清华大学电子工程系版权所有

3. 邮件过滤：设你的电子邮箱接收两种邮件，有效邮件（valid email）与垃圾邮件（spam email）。假设两种邮件的到达过程均为 Poisson 过程，且相互独立，其中有效邮件的到达率为 $\lambda_1 = 2$（封/小时），垃圾邮件的到达率为 $\lambda_1 = 0.2$（封/小时）。试求解：

   (1) 邮件总的达到率；

   (2) 收到一封邮件，该邮件为垃圾邮件的概率；

   (3) 假设你安装了一个垃圾邮件过滤软件，该软件可以过滤掉 80% 的垃圾邮件，但同时也会将 5% 的有效邮件错误地识别为垃圾邮件。垃圾邮件统一丢弃在 Spam Folder 中，有效邮件则存放在 Inbox 中。如图 5.1所示

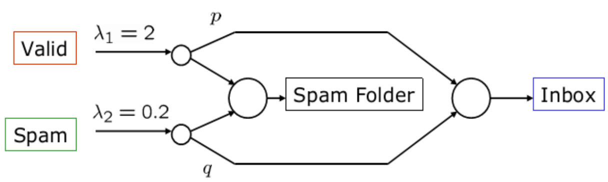


图 5.1　邮件过滤示意图

请问，

i. Inbox 中的一封邮件其实是垃圾邮件的概率

ii. Spam Folder 中的一封邮件其实是有效邮件的概率

iii. 平均每隔多长时间你需要查看一下垃圾邮件箱 Spam Folder，以找回一封有效邮件？

参考解答：

（1）根据独立 Poisson 过程的性质，总的邮件达到率为 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 2.2$（封/小时）

（2）收到一封邮件，该邮件为垃圾邮件的概率为 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{1}{11}$；

（3）根据邮件过滤系统原理，如图所示，$p = 0.95, q = 0.2$。

则 Inbox 中的邮件达到速率为 $\lambda_{inbox} = p\lambda_1 + q\lambda_2 = 1.94$。

Spam Folder 中的邮件达到速率为 $\lambda_{spamfolder} = \lambda - \lambda_{inbox} = 0.26$。

(a) Inbox 中的一封邮件其实是垃圾邮件的概率为

$$\frac{q\lambda_2}{\lambda_{inbox}} = \frac{0.2 \cdot 0.2}{1.94} \approx 0.02$$

(b) Spam Folder 中的一封邮件其实是有效邮件的概率为

$$\frac{(1-p)\,\lambda_1}{\lambda_{spamfolder}} = \frac{0.05 \cdot 0.2}{0.26} \approx 0.38$$

(c) 设平均每隔时间间隔 τ 查看一下 Spam Folder，以找回一封有效邮件，即
$E(N) = (1-p)\,\lambda_1\tau = 1$，
所以，

$$\tau = \frac{1}{(1-p)\,\lambda_1} = \frac{1}{0.05 \cdot 2} = 10\text{小时}$$

清华大学电子工程系版权所有

4.（[2] 第四章习题 20) 设 $N(t)$ 为非齐次 Poisson 过程，强度为 $\lambda(t)$，证明其相关函数为

$$R_N(t_1,t_2)=\left[\int_0^{min(t_1,t_2)}\lambda(t)\,dt\right]\left[1+\int_0^{max(t_1,t_2)}\lambda(t)\,dt\right]$$

参考解答：

不妨假设 $t_1<t_2$，则

$$\begin{aligned}R_N(t_1,t_2)=E(N(t_1)N(t_2))=&\ E[N(t_1)(N(t_1)+N(t_2)-N(t_1))]\\=&\ E\left(N^2(t_1)\right)+E(N(t_1))E(N(t_2)-N(t_1))\end{aligned}$$

由于 $N(t)$ 是强度为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程，因此，

$$E(N(t_1))=\int_0^{t_1}\lambda(t)\,dt$$

$$E(N(t_2)-N(t_1))=\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)\,dt$$

$$Var(N(t_1))=\int_0^{t_1}\lambda(t)\,dt$$

$$E\left(N^2(t_1)\right)=Var(N(t_1))+[E(N(t_1))]^2$$

因此，

$$\begin{aligned}R_N(t_1,t_2)&=\int_0^{t_1}\lambda(t)\,dt+\left(\int_0^{t_1}\lambda(t)\,dt\right)^2+\int_0^{t_1}\lambda(t)\,dt\cdot\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)\,dt\\&=\int_0^{t_1}\lambda(t)\,dt\cdot\left[1+\int_0^{t_1}\lambda(t)\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)\,dt\right]\\&=\int_0^{t_1}\lambda(t)\,dt\cdot\left[1+\int_0^{t_2}\lambda(t)\,dt\right]\end{aligned}$$

同理，当 $t_1>t_2$ 时，可得

$$R_N(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}\lambda(t)\,dt\cdot\left[1+\int_0^{t_1}\lambda(t)\,dt\right]$$

综上，可得 $R_N(t_1,t_2)=\left[\int_0^{min(t_1,t_2)}\lambda(t)\,dt\right]\left[1+\int_0^{max(t_1,t_2)}\lambda(t)\,dt\right]$

证毕。

5. ([1] 第二章习题 9）在某交通道上设置了一个车辆记录器，记录南行、北行车辆的总数。设 $X(t)$ 代表在 $[0,t]$ 内南行的车辆数，$Y(t)$ 代表在 $[0,t]$ 内北行的车辆数，$X(t)$、$Y(t)$ 均服从泊松分布，且相互统计独立；设 λ 和 η 分别代表在单位时间内通过的南行、北行车辆平均数。如果在 t 时车辆记录器记录的车辆数为 n，问其中 k 辆属于南行车的概率。

参考解答：

方法 1：

清华大学电子工程系版权所有

由题意，所求概率为

$$\begin{aligned}
&p\left(X\left(t\right)=k|X\left(t\right)+Y\left(t\right)=n\right)\\
&=\frac{p\left\{X\left(t\right)=k,\ X\left(t\right)+Y\left(t\right)=n\right\}}{p\left(X\left(t\right)+Y\left(t\right)=n\right)}\\
&=\frac{p\left\{X\left(t\right)=k,\ Y\left(t\right)=n-k\right\}}{p\left(X\left(t\right)+Y\left(t\right)=n\right)}\\
&=\frac{\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\cdot\frac{(\eta t)^{n-k}e^{-\eta t}}{(n-k)!}}{\frac{[(\lambda+\eta)t]^n e^{-(\lambda+\eta)t}}{n!}}\\
&=\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\eta}\right)^k\left(\frac{\eta}{\lambda+\eta}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

方法 2：

我们需要求解 $p\left(X\left(t\right)=k|X\left(t\right)+Y\left(t\right)=n\right)$。每一次车辆穿过，其中属于南行车辆的概率为 $\frac{\lambda}{\lambda+\eta}$，因此，已知 $X\left(t\right)+Y\left(t\right)=n$ 时，$X\left(t\right)$ 服从二项分布 $\left(n\ \frac{\lambda}{\lambda+\eta}\right)$，所以，

$$\begin{aligned}
p\left(X\left(t\right)=k|X\left(t\right)+Y\left(t\right)=n\right)&=\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\eta}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\eta}\right)^{n-k}\\
&=\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\eta}\right)^k\left(\frac{\eta}{\lambda+\eta}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

6. 设顾客按泊松分布抵达银行，其到达速率为 λ。若已知在第一个小时内有两个顾客抵达银行，问：

（1）此顾客均在最初的 20 分钟抵达银行的概率如何？

（2）至少有一个顾客在最初的 20 分钟抵达银行的概率如何？

参考解答：（1）

$$\begin{aligned}
P\left\{N(s)=k|N(t)=n\right\}&=P\left\{N(20)=2|N(60)=2\right\}\\
&=\binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}\\
&=1/9
\end{aligned}$$

(2)

$$P=1-P\left\{N(20)=0|N(60)=2\right\}=5/9$$

7. 汽车抵达某个监测点的时间间隔 T 为一个独立随机变量，其 PDF 为

$$f_T\left(t\right)=\begin{cases}2e^{-2t},\ for\ t>0\\ 0,\qquad otherwise.\end{cases}$$

其中，相邻两车的抵达时间间隔 T 的计量单位为分钟。连续的抵达时间间隔观测值将被记录在很小的计算机卡片上，记录时间可以忽略。假设每一张计算机卡片上面最多可记录 3 次抵达数据，一旦用完，立即换下一张卡片。试求解：

清华大学电子工程系版权所有

(1) 时间间隔 T 的均值和三阶矩；

(2) 假设在开始的 4 分钟内没有汽车抵达，设接下来的 6 分钟内抵达的汽车数目为 K，求解随机变量 K 的概率分布函数 PMF。

(3) 设一打（12 张）计算机卡片被用光的时间为 D，求解 D 的概率密度函数 PDF 与均值。

(4) 分别考虑以下两种情况：

i. 从已经记录完成的若干张卡片中随机抽取一张，该卡片的服务时间（即其使用时间）记为 Y，计算 $E[Y]$ 和 $var[Y]$。

ii. 某个监管人随机地到达该监测点，监管人到达时计算机所使用的卡片对应的服务时间（即从其开始服务到结束服务的时间）记为 W，计算 $E[W]$ 和 $var[W]$。

参考解答

(1) 根据题意，随机变量 T 服从指数分布，参数 $\lambda = 2$。则

$$E(T) = 1/\lambda = 0.5, E(T^3) = \int_0^\infty t^3 2e^{-2t} dt = 3/4$$

利用 ErlangPDF 或分布积分

(2) 由于 Poisson 为独立增量过程，无记忆性，因此，在前 4 分钟内有没有汽车经过对未来不产生任何影响，因此，K 的条件分布等价于在 $\tau = 6$ 分钟内到达数量的无条件分布，服从泊松分布，即

$$p(k) = \frac{12^k}{k!} e^{-12}, k = 0, 1, 2, ...$$

(3) 由题意得，一张计算机卡片记录 3 次到达，因此一打计算机卡片将记录 36 次到达。$D = T_1 + T_2 + ... + T_{36}$，其中 T_i 代表第 i 次到达与第 i–1 次到达的时间间隔，服从参数 $\lambda = 2$ 的指数分布。因此，D 服从 36 阶的 Erlang 分布

$$f_D(d) = \frac{2^{36} d^{35} e^{-2d}}{35!}, d \geqslant 0$$

均值为 18。

(4) 在两种情况中，由于每一张卡片在完成记录三次汽车到达后便结束服务，因此我们需要考虑的是三辆汽车经过监测点的时间总和，即三段时间间隔之和。

在第 1 种情况中,Y 即为 3 次等待时间之和，$Y = T_1 + T_2 + T_3$，其中 T_i 代表第 i 次到达与第 i–1 次到达的时间间隔，服从参数 $\lambda = 2$ 的指数分布。因此，Y 服从 2 阶的 Erlang 分布。

在第 2 种情况中，由于监管人随机地到达监测点，到达时刻一定处在三段时间间隔中的某一段，记该段时间间隔为 L，其余两段时间间隔记为 T_1, T_2。监管员到达时刻对应的那一段时间间隔 L 可以分为两段：上一次汽车到达时间与监管员到达之间的间隔 L_1，与监管员到达时刻与下一次汽车到达时间之间的间隔 L_2。

运用课堂上所讲的“灯泡的已服役时间和剩余寿命”的知识，可知：在监测点运行充分长时间之后，L_1 服从参数为 $\lambda = 2$ 的指数分布；L_2 服从参数为 $\lambda = 2$ 的指数分布。因此 L 服从 2 阶的 Erlang 分布，此时，总的服务时间 $W = T_1 + T_2 + L$ 服从 4 阶的 Erlang 分布。所以，对于此两种情况有：

清华大学电子工程系版权所有

i. 从已经记录完成的若干张卡片中随机抽取一张，该卡片的服务时间（即其使用时间）记为 Y，

$$E[Y] = \frac{3}{\lambda} = \frac{3}{2}$$

$$var[Y] = \frac{3}{\lambda^2} = \frac{3}{4}$$

ii. 某个监管人随机地到达该监测点，监管人到达时计算机所使用的卡片对应的服务时间（即从其开始服务到结束服务的时间）记为 W，

$$E[Y] = \frac{4}{\lambda} = 2$$

$$var[Y] = \frac{4}{\lambda^2} = 1$$

清华大学电子工程系版权所有

参考文献

[1] 陆大纟 金. 随机过程及其应用. 清华大学出版社, 1986.

[2] 陆大纟 金，张灏. 随机过程及其应用（第二版）. 清华大学出版社, 2012.