随机过程练习题

马尔科夫过程

By Waiter 2014/1/4

题型 1 计算平稳分布

【2007-2】进出问题之穿鞋

每天早上张三都要出门跑步，张三的家有前后两个门，门口都有一些鞋，两个门口鞋的数目之和为 N。张三出门时，如果门口有鞋则穿上，如果没有，就只好光脚跑了；跑步回来进门时，如果穿着鞋，则将鞋脱下放在门口。假定张三出门时选择前后门的概率相同，回家时也同样，请计算充分长时间以后，张三出门时不幸要光脚跑步的概率。

【2014-7】进出问题之打伞（请和上题比较）

小李有 3 把雨伞，上午上班时有雨就带一把到办公室，下午下班时有雨就带一把回家（中午不回家），其他情况不带雨伞。假设上下班时是否有雨是相互独立的，有雨的概率为p。

（1） 试定义一个马氏链来计算充分长时间后，小李会被雨淋的概率有多大？

（2） 求出该马氏链的一步概率转移矩阵，判断各状态是否常返，并说明理由。

【习题集 4-26】进出问题之打伞（供做上题参考）

26. 设某人有 r 把伞，分别放在家里和办公室里，如果出门遇下雨（概率为 p，$0<p<1$），手边也有伞，他就带一把用；如果天晴他就不带伞. 试证：经过相当长的一段时间后，这个人遇下雨但手边无伞可用的概率不超过$\frac{1}{4r}$.

【2010-4】比赛问题之无吸收壁

三名网球选手A,B,C进行比赛，每一轮都是两人比赛，一人轮空，本轮比赛的胜者下一轮与本轮轮空的选手进行比赛。设三名选手的实力分别为S_A，S_B和S_C，每次两人比赛时，选手X击败选手Y的概率为$S_X/(S_X+S_Y)$，其中$X,Y\in\{A,B,C\}$。试计算时间充分长后，各名选手实际参加比赛数目占总比赛数目的比例。

【习题集 4-20】比赛问题之有吸收壁（请和上题比较）

20. 甲、乙两人进行比赛，设每局比赛甲胜的概率为 p，乙胜的概率为 q，和局的概率为 r，$p+q+r=1$. 设每局比赛后胜者获 1 分，负者获 -1 分，和局获 0 分. 当两人中有一个获得 2 分时，结束比赛. 以 $X(n)$ 表示比赛至第 n 局时，甲获得的分数. $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个齐次 Markov 链.

(1) 写出此 Markov 链的状态空间；

(2) 写出状态转移矩阵；

(3) 计算二步转移概率矩阵；

(4) 问在甲获得 1 分的情况下，再赛 2 局就结束比赛的概率为多少？

【2010-6】图上的随机游动

有限简单非定向图由一些顶点和连接顶点的边构成，每条边连接两个不同顶点，每两个顶点间至多有一条边相连，没有孤立顶点，考察有限简单非定向图上的随机游动，当第n时刻处在顶点i上时，第$n+1$时刻将跳转到与顶点i有边直接相连的某个顶点j上，转移概率为$\mathbb{P}(i,j)=1/d(i)$，其中$d(i)$为与i有边直接相连的顶点数目。试计算该随机游动的平稳分布。

【教材】一维随机游动 P179 例 7.1-7.5 P193 例 7.15 P210 例 7.24

【教材】二维随机游动 P193 例 7.16

【2009-5】自适应

教师不断进行考试以督促学生学习，设考试有三种难度，易、中、难，学生在三种难度考核下答出好成绩的概率分别为0.9,α和0.1。如果学生答出好成绩，教师在下次考试中就会提高难度，反之，会降低难度。如难度无法提高（降低）即保持不变。试计算，充分长时间后，如果教师希望学生们所经历的考试中，中等难度所占的比例不小于70%，那么应该怎样设置其难度，即怎样设置α？

【2007-1】循环

设Y_n是掷均匀的色子 n 次后得到的点数之和，请计算

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \equiv 0 \mod 13)$$

其中$Y_n \equiv 0 \mod 13$表示Y_n可以被 13 整除。

【2008-8】

设$\{X_n, n=0.1,2,\cdots\}$为 Markov 链，一步转移概率矩阵为 P，令$Y_n=(X_n,X_{n+1})$，很明显这也是 Markov 链。如果设$\{X_n\}$的不变分布为$\pi=(\pi_0,\pi_1,\cdots)$，试求$\{Y_n\}$的不变分布。

【教材】Ehrenfest 球模型 P180 例 7.6 P208 例 7.23

【习题集 4-10】坛子模型

➢ 题型 2 判断常返性

【2014-9】掷骰子

同时掷 5 个色子，将结果中出现次数最多的数字所对应的色子固定住（例如，出现 23345，则将对应 33 的二号和三号色子固定住。如果出现两个以上数字，出现次数并列最多，则任取其中一个，并固定住其对应色子）；继续掷没有固定住的色子，并将出现次数最多的数字所对应的色子固定住（注意，允许数字有变化，例如上例中一、三、四号色子继续掷，如果出现 43344，那么就固定住一、三和四号色子）。

考虑 Markov 链$\{X_k\}$，状态空间为$\{0,1,2,3,4,5\}$。事件$\{X_k=n\}$表示第 k 次抛掷后，出现次数最多的数字所出现的次数为 n。考察该链各状态的常返性。

➢ 题型 3 计算分布$\overrightarrow{V_n}$

【2008-7】抛硬币

设两枚不均匀硬币分别编号为 1 和 2。抛掷硬币 1，正面向上的概率为 p；抛掷硬币 2，正面向上的概率也为 p。现开始如下抛掷过程：反复抛掷一枚硬币，直至出现反面向上，然后换为反复抛掷另一枚硬币，出现反面再换回来，如此循环往复。

- 请计算：时间充分长之后，抛掷硬币 1 的概率。
- 如果初始时刻抛掷的是硬币 1，请计算第 5，6，7 次以及第 10，11，12 次抛掷均抛掷硬币 2 的概率。

【习题集 4-35】数字传输系统

35. 在传送数字 0 和 1 的通信系统中，传送每个数字必须经过若干级，而每一级中数字正确传送的概率为 p. 设 $X(0)$ 表示进入系统的数字，$X(n)$ 表示离开系统第 n 级的数字. $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是齐次 Markov 链.

(1) 写出状态转移概率矩阵；

(2) 求出 n 步转移概率矩阵；

(3) 求平稳分布.

【教材/习题集 4-11】天气预报问题（两个状态的 Markov 链） P184 例 7.10

➢ 题型 4 计算吸收概率

【习题集 4-34】赌徒输光问题

34. 赌徒甲有 a 元，赌徒乙有 b 元，两人进行赌博. 每赌一局负者给胜者 1 元，没有和局，直到两人中有一个输光为止. 设在每一局中甲胜的概率为 $\frac{1}{2}$，$X(n)$ 表示第 n 局时甲的赌金. $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 为齐次 Markov 链.

(1) 写出状态空间和状态转移概率矩阵；

(2) 求出甲输光的概率.