清华大学 01 级 ⟨⟨ 复变函数 ⟩⟩2003 年春季期终试题

I.(20 分) 判断题：下列叙述哪些不正确？请在答题纸上写出错误叙述的序号.

1.$\bar{z}$ 在复平面上处处不解析，而 $\overline{\sin \bar{z}}$ 是平面上的解析函数；

2. 解析函数的实部和虚部都是调和函数；

3. 解析函数的实部和虚部可以不同时为常数；

4. 函数 $f(z)$ 在上半平面解析，则当 z 位于下半平面时 $\overline{f(\bar{z})}$ 解析；

5. 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $f(z)$ 的实部和虚部在 D 内任意次可微；

6. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 在其收敛圆盘的边界点上可能收敛，也可能发散；

7. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 在其收敛圆盘内可以看成一个解析函数的泰勒级数；

8. 若函数 $f(z)$ 在整个复平面上解析， ∞ 是 $f(z)$ 的极点，则 $f(z)$ 是一多项式；

9. 不恒为零的解析函数的零点极限点不是解析点，极点极限点不是孤立奇点；

10.$\sqrt{z}$ 和 $\sqrt{(z-1)(z-2)}$ 在 ∞ 的空心邻域内都不能展开成洛朗级数；

II. 计算积分： (10 分)

1.

$$\int_0^i (z-i)e^z dz$$

2.

$$\oint_{|z|=1} \frac{\bar{z}}{z} dz;$$

III.(10 分) 求下边幂级数的收敛半径，并说明当 $z=2$ 时它是否收敛.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{ni}}{\ln n}(z-1)^n.$$

IV.(10 分) 将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)}$ 分别在下列两个不同的圆环域上展开成洛朗级数：

1. $1<|z|<3$; 2. $|z|>3$.

IV.(10 分) 已知任意二元可微函数 $\phi(x,y)$ 的梯度定义为 $\nabla\phi=(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y})$. 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是复平面上的解析函数，证明：

$$2|\nabla|f(z)||^2=|\nabla u|^2+|\nabla v|^2;$$

V.(10 分) 设函数 $f(z)$ 在 $|z|\leq 1$ 上解析；常数 a 满足 $0<|a|<1$, 求证：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(\bar{z})dz}{1-az}=\frac{f(a)-f(0)}{a}.$$

VI.(20 分) 用留数理论计算积分：

1.

$$\oint_{|z-3i|=5}\frac{(z^{15}+11z^2+17z)dz}{(z+2)^3(z^2-1)^4(z+i)^7(z-7i)};$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx;$$

3.

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{x^2+2x\cos\lambda+1}dx,$$

其中 $-\pi<\lambda<\pi,-1<p<2$.

VII.(10 分) 设区域 $D=\{z|\mathrm{Im}z>0,|z-1|>1,|z+1|>1\}$, 求一保形映射，将 D 映射为上半平面.

清华大学数学系 01 级 $\langle\langle$ 复变函数 $\rangle\rangle$ 试题答案及评分标准

I. 1,2,4,5,6,7,8,9 小题正确， 3,10 小题错误．每小题 2 分．

II.1. $(z-i)e^z$ 的原函数为 $F(z)=(z-i-1)e^z$,

..................(3 分)

$\int_0^i (z-i)e^z dz = F(i)-F(0) = i+1-e^i$.

..................(2 分)

(也可用分部积分解).

2.$\oint_{|z|=1} \frac{\bar{z}}{z} dz = 0$;

用 $\bar{z}=\frac{1}{z}$; 或用极坐标求解或其它方法.

(答案正确就得分.)

III. 收敛半径为 $R=1$;

..................(6 分)

$z=2$ 时也收敛 (但不绝对收敛.)

..................(4 分)

IV.1.

$$f(z) = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z}{3})^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

..................(5 分)

2.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-3^n)\frac{1}{z^{n+1}}.$$

..................(5 分)

V. 证明：

$$\nabla|f(z)| = (\frac{uu_x+vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{uu_y+vv_y}{\sqrt{u^2+v^2}})$$

...................(3 分)

$$\begin{aligned}|\nabla|f(z)||^2 &= \tfrac{(uu_x+vv_x)^2+(uu_y+vv_y)^2}{u^2+v^2}\\ &= \tfrac{u^2(u_x^2+u_y^2)+v^2(v_x^2+v_y^2)}{u^2+v^2};\end{aligned}$$

...................(7 分)

注意到 $u_x^2+u_y^2=v_x^2+v_y^2$;

于是

$$2|\nabla|f(z)||^2=\frac{(u^2+v^2)(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)}{u^2+v^2}=|\nabla u|^2+|\nabla v|^2.$$

.....................(3 分)

VI. 证明：由 $z\bar{z}=1$, 有 $\bar{z}dz+zd\bar{z}=0$, 从而

$$dz=-\frac{1}{\bar{z}^2}d\bar{z}.$$

.....................(3 分)

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\tfrac{f(\bar{z})dz}{1-az} &= \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\tfrac{f(\bar{z})d\bar{z}}{-\bar{z}^2(1-\frac{a}{\bar{z}})}\\ &= -\tfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\tfrac{-f(\xi)d\xi}{\xi(\xi-a)};\\ &= \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\tfrac{f(\xi)d\xi}{\xi(\xi-a)};\end{aligned}$$

...................(4 分)

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\tfrac{f(\xi)d\xi}{\xi(\xi-a)} &= \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\tfrac{f(\xi)}{a}[\tfrac{1}{(\xi-a)}-\tfrac{1}{\xi}]d\xi\\ =\tfrac{f(a)-f(0)}{a}\end{aligned}$$

........................(3 分)

VI.1. 注意到所有有限极点位于圆盘 $\{z||z-3i|<5\}$ 内,

并且

$$\mathrm{Res}[f,\infty]=0.$$

.................(4 分)

由留数定理,

$$\operatorname{Res}[f,\infty]+\sum_{|z_i|<+\infty}\operatorname{Res}[f,z_i]=0,$$

故

$$\oint_{|z-3i|=5}\tfrac{(z^{15}+11z^2+17z)dz}{(z+2)^3(z^2-1)^4(z+i)^7(z-7i)}$$
$$=\textstyle\sum_{|z_i|<+\infty}\operatorname{Res}[f,z_i]$$
$$=\operatorname{Res}[f,\infty]=0.$$

................(4 分)

2. 令 $f(z)=\frac{e^{iz}}{1+z^2}$,

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),i]=\frac{\pi}{e}.$$

...................(8 分)

3. 解:

$$\frac{(1+z)^{1-p}(1-z)^p}{z^2+2z\cos\lambda+1}=e^{p\pi i}\frac{(z+1)^{1-p}(z-1)^p}{z^2+2z\cos\lambda+1};$$

令

$$f(z)=\frac{(z+1)^{1-p}(z-1)^p}{z^2+2z\cos\lambda+1}$$

取连接 -1 与 $+1$ 的割线，在该割线的上沿 $f(z)$ 取实值，在割线外用留数定理,

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{x^2+2x\cos\lambda+1}dx=\frac{2\pi ie^{p\pi i}}{1-e^{2\pi(1-p)i}}\{\operatorname{Res}[f(z),-e^{i\lambda}]+\operatorname{Res}[f(z),-e^{-i\lambda}]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]\},$$

注意到

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-1;$$

$$\mathrm{Res}[f(z), -e^{i\lambda}] + \mathrm{Res}[f(z), -e^{-i\lambda}] = \frac{\cos(\frac{\lambda-p\pi}{2})}{\cos\frac{\lambda}{2}}(\frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}})^p;$$

于是

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{x^2+2x\cos\lambda+1}dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}[\frac{\cos(\frac{\lambda-p\pi}{2})}{\cos\frac{\lambda}{2}}(\frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}})^p - 1].$$

...................(4 分)

清华大学 01 级 $\langle\langle$ 复变函数 $\rangle\rangle$2003 年春季期终试题 (B 卷)

I.(10 分) 判断题：下列叙述哪些不正确？请在答题纸上写出错误叙述的序号.

1. 解析函数的实部和虚部都是调和函数；

2. 函数 $\overline{z}\sqrt[3]{1-z^3}$ 在复平面上处处不解析；

3. 不恒为零的解析函数的零点极限点不是解析点，极点极限点不是孤立奇点；

4. 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $f(z)$ 的实部和虚部在 D 内任意次可微；

5.$\sqrt{z}$ 和 $\sqrt{(z-1)(z-2)}$ 在 ∞ 的空心邻域内都不能展开成洛朗级数；

II. 计算积分： (10 分)

1.

$$\oint_{|z|=1} \frac{\bar{z}}{z} dz;$$

2.

$$\int_0^i (z-i)e^z dz$$

III.(10 分) 求下边幂级数的收敛区域，并说明当 $z=2$ 时它是否收敛.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{ni}}{\ln n}(z-1)^n.$$

IV.(10 分) 将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)}$ 圆环域 $1<|z|<3$ 上展开成洛朗级数.

V.(10 分) 已知任意二元可微函数 $\phi(x,y)$ 的梯度定义为 $\nabla\phi=(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y})$. 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是复平面上的解析函数，证明：

$$2|\nabla|f(z)||^2=|\nabla u|^2+|\nabla v|^2;$$

VI.(15 分) 设函数 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上解析；常数 a 满足 $0<|a|<1$, 求证：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(\bar{z})dz}{1-az}=\frac{f(a)-f(0)}{a}.$$

VII.(15 分) 设区域 $M=\{z||z|<2,|z-1|>1\}$. 求一保形映射 $w=w(z)$, 将 M 映射为单位圆盘 $D=\{w||w|<1\}$, 且满足

$$w(-\frac{2}{3})=0, w(-2)=i.$$

VIII.(20 分) 1. 用留数理论计算积分：

(i).

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx;$$

(ii).

$$\oint_{|z-3i|=5}\frac{(z^{15}+11z^2+17z)dz}{(z^2-1)^8(z+i)^7(z-7i)};$$

2. 设实数 λ, p 满足 $0<\lambda<\pi, 0<p<1$. 求证

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{x^2+2x\cos\lambda+1}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}[\frac{\cos(\frac{\lambda-p\pi}{2})}{\cos\frac{\lambda}{2}}(\frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}})^p-1].$$

清华大学数学系 01 级 $\langle\langle$ 复变函数 $\rangle\rangle$ 试题答案及评分标准

I. 1,2,3,4, 小题正确， 5 小题错误．每小题 2 分．

II.1. $(z-i)e^z$ 的原函数为 $F(z)=(z-i-1)e^z$,

...................(3 分)

$\int_0^i (z-i)e^z dz = F(i)-F(0) = i+1-e^i$.

...................(2 分)

(也可用分部积分解).

2.$\oint_{|z|=1} \frac{\bar{z}}{z} dz = 0$;

用 $\bar{z}=\frac{1}{z}$; 或用极坐标求解或其它方法.

(答案正确就得分.)

III. 收敛区域为 $|z-1|<1$;

...................(6 分)

$z=2$ 时也收敛 (但不绝对收敛.)

...................(4 分)

IV.

$$f(z) = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z}{3})^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

...................(10 分)

V. 证明：

$$\nabla|f(z)| = (\frac{uu_x+vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{uu_y+vv_y}{\sqrt{u^2+v^2}})$$

...................(3 分)

$$\begin{aligned} |\nabla|f(z)||^2 &= \tfrac{(uu_x+vv_x)^2+(uu_y+vv_y)^2}{u^2+v^2} \\ &= \tfrac{u^2(u_x^2+u_y^2)+v^2(v_x^2+v_y^2)}{u^2+v^2}; \end{aligned}$$

...................(4 分)

注意到 $u_x^2+u_y^2=v_x^2+v_y^2$;

于是

$$2|\nabla|f(z)||^2 = \frac{(u^2+v^2)(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)}{u^2+v^2} = |\nabla u|^2+|\nabla v|^2.$$

.....................(3 分)

VI. 证明：由 $z\bar{z}=1$, 有 $\bar{z}dz+zd\bar{z}=0$, 从而

$$dz = -\frac{1}{\bar{z}^2}d\bar{z}.$$

.....................(4 分)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\tfrac{f(\bar{z})dz}{1-az} &= \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\tfrac{f(\bar{z})d\bar{z}}{-\bar{z}^2(1-\frac{a}{\bar{z}})} \\ &= -\tfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\tfrac{-f(\xi)d\xi}{\xi(\xi-a)}; \\ &= \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\tfrac{f(\xi)d\xi}{\xi(\xi-a)}; \end{aligned}$$

...................(6 分)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\tfrac{f(\xi)d\xi}{\xi(\xi-a)} &= \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\tfrac{f(\xi)}{a}[\tfrac{1}{(\xi-a)}-\tfrac{1}{\xi}]d\xi \\ = \tfrac{f(a)-f(0)}{a} & \end{aligned}$$

.........................(5 分)

VII. 解： (i)$\xi(z)=\frac{z}{z-2}$ 把 M 映射成带形 $0<\mathrm{Re}z<\frac{1}{2}$;

.........................(4 分)

(ii)$\eta(\xi)=e^{2\pi i\xi}$ 把带形 $0<\mathrm{Re}z<\frac{1}{2}$ 映射成上半平面;

.........................(3 分)

(iii)$w(\eta)=e^{i\phi}\frac{\eta-k}{\eta-k}$ 将上半平面映射成单位圆盘 D.

..........................(4 分)

(iv) 据条件 $w(-\frac{2}{3})=0, w(-2)=i$ 求出 $\phi=0, k=i$. 从而

$$w(z)=\frac{e^{\frac{2\pi zi}{z-2}}-i}{e^{\frac{2\pi zi}{z-2}}+i}.$$

...........................(4 分)

VIII.1.(i). 注意到所有有限极点位于圆盘 $\{z||z-3i|<5\}$ 内,

并且

$$\mathrm{Res}[f,\infty]=0.$$

.................(2 分)

由留数定理,

$$\mathrm{Res}[f,\infty]+\sum_{|z_i|<+\infty}\mathrm{Res}[f,z_i]=0,$$

...................(2 分)

故

$$\begin{aligned}&\oint_{|z-3i|=5}\tfrac{(z^{15}+11z^2+17z)dz}{(z^2-1)^8(z+i)^7(z-7i)}\\&=\textstyle\sum_{|z_i|<+\infty}\mathrm{Res}[f,z_i]\\&=-\mathrm{Res}[f,\infty]=0.\end{aligned}$$

................(3 分)

(ii). 令 $f(z)=\frac{e^{iz}}{1+z^2}$,

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx=2\pi i\mathrm{Res}[f(z),i]=\frac{\pi}{e}.$$

...................(7 分)

2. 证：令

$$f(z)=\frac{(z+1)^{1-p}(z-1)^p}{z^2+2z\cos\lambda+1}$$

取连接 -1 与 $+1$ 的割线，在该割线的上沿 $f(z)$ 取实值，在割线外用留数定理，

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{x^2+2x\cos\lambda+1}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}\{\mathrm{Res}[f(z),-e^{i\lambda}]+\mathrm{Res}[f(z),-e^{-i\lambda}]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\},$$

注意到

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-1;$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-e^{i\lambda}]+\mathrm{Res}[f(z),-e^{-i\lambda}]=\frac{\cos(\frac{\lambda-p\pi}{2})}{\cos\frac{\lambda}{2}}(\frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}})^p;$$

于是

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{x^2+2x\cos\lambda+1}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}[\frac{\cos(\frac{\lambda-p\pi}{2})}{\cos\frac{\lambda}{2}}(\frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}})^p-1].$$

...................(6 分)