

随机过程练习题

高斯过程 (2)

By Waiter 2015/1/5

➤ 题型 3 线性滤波器设计

【2007-7】

考虑零均值宽平稳 Gaussian 白噪声 $X(t)$ ，对于给定的 Δt ，请设计一款线性时不变滤波器（给出其传递函数），使得 $X(t)$ 通过该滤波器后得到的随机过程 $Y(t)$ 满足： $Y(t)$ 的采样过程 $\{Y_n = Y(n\Delta t), n \in N\}$ 仍然是 Gaussian 白噪声。

【2009-8】

设 $X(t)$ 是零均值高斯白噪声，功率谱密度为 $N_0/2$ 。试设计一款线性滤波器，使得 $X(t)$ 通过该滤波器后的输出 $Y(t)$ 满足

$$\mathbb{E}(Y(1)Y(3)|Y(2)) = CY^2(2),$$

其中 C 是确定性常数。

➤ 题型 4 坐标变换 $X, Y \rightarrow R, \theta$

【2009-2】

设 (X_1, X_2) 为服从联合高斯分布的随机变量，均值均为 0，方差均为 1，相关系数为 ρ 。如果将 X_1 和 X_2 用极坐标进行表示

$$X_1 = R \cos(\phi), \quad X_2 = R \sin(\phi),$$

试计算 ϕ 的密度函数。并利用该密度，计算 $\mathbb{P}(X_1 X_2 > 0)$ 。

【2008-3】

令 \mathbf{X}, \mathbf{Y} 为独立的 Gaussian 分布随机变量, 均值分别为 $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$, 方差均为 1,

试求 $\sqrt{\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2}$ 的概率密度。

➤ 其它

【2010-8】去相关

设 X 和 Y 为服从联合高斯分布的 n 维随机变量, 协方差阵分别为 Σ_X 和 Σ_Y , 互协方差阵为 Σ_{XY} 和 Σ_{YX} , 试构造矩阵 G 和 n 维随机变量 V , 使得 $X = GY + V$, 且满足 V 与 Y 独立。(请给出 V 的密度的解析表达式和 G 的具体形式)。

【2009-1】计算均值和相关

设 (X_1, X_2) 为服从联合高斯分布的随机变量, 均值均为 0, 方差均为 1, 相关系数为 ρ 。如果

$$\max_{c_1^2 + c_2^2 = 1} \mathbb{E}(c_1 X_1 + c_2 X_2)^2 = 1,$$

其中 c_1 和 c_2 为实数, 试计算 ρ 以及 $\mathbb{E}(X_1^2 X_2^2)$ 。

【2007-5】计算特征函数

设 U 是 $[0, 2\pi]$ 均匀分布的随机变量, 随机变量 X 独立于 U , 且密度为

$$f_X(x) = |x|^3 \exp\left(-\frac{x^4}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

设随机过程 $Y(t) = X^2 \cos(\omega t + U)$, 计算 $Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_n)$ 的 n 维特征函数。