第一章 函数 极限 连续小测（一）

一、选择题 (共5题，每题3分，共15分)

1、函数 $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}+\ln\dfrac{3-x}{x-1}$ 的定义域为（ ）.

$A.$ $(0,2]$　　$B.$ $(1,2]$　　$C.$ $[1,2]$　　$D.$ $[-1,2]$

2、下列函数中为偶函数的是（ ）

$A.$ $\sin x^3$　　$B.$ e^x-e^{-x}　　$C.$ $\ln(x^2+2)$　　$D.$ $2^{\sin x}$

3、当 $x\to 0^+$ 时，下列选项中为无穷小量是（ ）

$A.$ $\cos\dfrac{x}{2}-2$　　$B.$ $\dfrac{x^2+2x}{x-1}\sin\dfrac{1}{x^2}$　　$C.$ $\ln x^2$　　$D.$ $\sin x^2+1$

4、$x=1$ 是函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x-1}$ 的（ ）

$A.$ 跳跃间断点　$B.$ 可去间断点　$C.$ 无穷间断点　$D.$ 振荡间断点

5、若函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{x-1}}, & x>1 \\ 2x+a, & x\le 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则 $a=$（ ）

$A.$ $e-2$　　$B.$ 2　　$C.$ 1　　$D.$ e

二、填空题 (共5题，每题3分，共15分)

6、若函数 $f(x-1)$ 的定义域为 $(1,2)$，则函数 $e^{f(x^2)}$ 的定义域为______.

7、若函数 $f(x-\dfrac{1}{x})=x^3-\dfrac{1}{x^3}+2$，则 $f(x)=$______.

8、极限 $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{\sin 2x}{3x})=$______.

9、当 $x\to 0$ 时，若函数 $\sqrt{1+\sin^2 x}-1$ 与 $\ln(1+2ax^2)$ 为等价无穷小，则 $a=$______.

10、函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{2x-1}+\dfrac{3}{x-1}$ 在区间 $(-1,2)$ 内的间断点个数为______.

三、计算题（共5题，每题8分，共40分）

11、求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+2}\right)^{3x}$.

12、求极限 $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

13、求极限 $\lim_{x\to0}\frac{2(\sqrt[3]{1-2x^2}-1)}{\cos 2x-1}$.

14、判断函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{2}{x^2}}, & x>0\\ e^{x-1}+2\sin x, & x\le 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的极限是否存在.

15、若函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}+a, & x<0\\ b, & x=0\\ \dfrac{2\ln(1+2x)}{x}, & x>0\end{cases}$在点$x=0$处连续，求参数$a$和$b$的值.

四、证明题（共2题，每题15分，共30分）

16、证明：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$a<x_1<x_2<b$，则在$[x_1,x_2]$上必有ξ，使得$f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+3f(x_2)}{4}$.

17、若函数$f(x)$在闭区间$[1,2]$上连续，且$f(1)=1$，$f(2)=0$.

证明：至少存在一点$\xi\in(1,2)$，使得$f(\xi)=\ln\xi$成立.

答案

一、选择题（共5题，每题3分，共15分）

1、解：因为$\begin{cases}2+x-x^2\ge 0\\ \dfrac{3-x}{x-1}>0\end{cases}$，解得$1<x\le 2$，即定义域为$(1,2]$，故选$B$.

2、解：选项A和B为奇函数，选项C为偶函数，选项D为非奇非偶函数，故选C.

3、解：因为$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\dfrac{x}{2}-2)=-1$；$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+2x}{x-1}\sin\dfrac{1}{x^2}=0$；$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x^2=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x^2+1)=1$，故选$B$.

4、解：$x=1$是函数$f(x)=\sin\dfrac{1}{x-1}$的振荡间断点，故选D.

5、解：$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}=e$；$f(1)=2+a$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+a)=2+a$，因为$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$

所以$2+a=e$，即$a=e-2$，故选A.

二、填空题（共5题，每题3分，共15分）

6、解：因为$1<x<2$，所以$0<x-1<1$，$0<x^2<1$，

则$-1<x<0$或$0<x<1$；即定义域为$(-1,0)\cup(0,1)$.

7、解：$f(x-\dfrac{1}{x})=x^3-\dfrac{1}{x^3}+2=(x-\dfrac{1}{x})(x^2+\dfrac{1}{x^2}+1)+2$

$$=(x-\frac{1}{x})[(x-\frac{1}{x})^2+3]+2$$

即$f(x)=x(x^2+3)+2=x^3+3x+2$.

8、解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}=0+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

9、解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{\ln(1+2ax^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}-1}{2ax^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{2ax^2}=\dfrac{1}{4a}=1$

即$a=\dfrac{1}{4}$.

10、解：间断点有$x=\dfrac{1}{2}$，$x=1$和$x=\dfrac{\pi}{2}$，即函数$f(x)$在$(-1,2)$内的间断点个数为3个.

三、计算题（共5题，每题8分，共40分）

11、解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x+2-3}{2x+2})^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{3}{2x+2})^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-\frac{9x}{2x+2}}=e^{-\frac{9}{2}}$.

12、解：原式$=\lim\limits_{x\to 1}[\dfrac{1+x+x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}-\dfrac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}]$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2-2}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$$

13、解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}-1]}{\cos 2x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\cdot\frac{2}{3}x^2}{-\frac{1}{2}(2x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{4}{3}x^2}{-2x^2}=\dfrac{2}{3}$.

14、解：

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}[1+(\cos x-1)]^{\frac{2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{2(\cos x-1)}{x^2}}=e^{-1}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{x-1}+2\sin x)=e^{-1}$，因为$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

即函数$f(x)$在点$x=0$处的极限存在.

15、解：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\dfrac{1-\cos x}{2x^2}+a)=\dfrac{1}{4}+a$，$f(0)=b$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\ln(1+2x)}{x}=4$，因为$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

所以$\frac{1}{4}+a=4=b$，即$a=\frac{15}{4}$，$b=4$.

四、证明题（共2题，每题15分，共30分）

16、证明：由最值定理得，$f(x)$在$[x_1,x_2]$上有最大值M，最小值m

即$m\le f(x_1)\le M$，$m\le f(x_2)\le M$，所以$4m\le f(x_1)+3f(x_2)\le 4M$

即$m\le \frac{f(x_1)+3f(x_2)}{4}\le M$

由介值定理得，在$[x_1,x_2]$上必有ξ，使得$f(\xi)=\frac{f(x_1)+3f(x_2)}{4}$.

17、证明：令$F(x)=f(x)-\ln x$在$[1,2]$上连续

且$F(1)=1>0$，$F(2)=-\ln 2<0$，即$F(1)\cdot F(2)<0$

由零点定理得，至少存在一点$\xi\in(1,2)$，使得$F(\xi)=0$，

即至少存在一点$\xi\in(1,2)$，使得$f(\xi)=\ln\xi$成立.