

三期周测三答案

一、单项选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1. B 2. C 3. A 4. C 5. B 6. D 7. C 8. B

二、填空题（每空 5 分，共 20 分）

1. $-\frac{3}{4}$ 2. $1-t \tan t$ 3. $(1, -2), (-1, 2)$ 4. $y = 2x$

三、计算题：求下列极限（每题 8 分，共 40 分）

1. $dy = [e^{\sin x} \cos x + \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - f'(\arctan x^2) \cdot \frac{2x}{1+x^4}] dx$

2. $x=0$ 时， $y=1$

方程 $2^{xy} = x+y$ 两边分别对 x 求导得：

$$2^{xy} \ln 2(y+xy') = 1+y'$$

将 $x=0$, $y=1$ 带入上式得： $y'|_{x=0} = \ln 2 - 1$, 即 $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = \ln 2 - 1$

3. $y=(x^2+1)^{2x}$ 两边分别取自然对数得：

$$\ln y = \ln(x^2+1)^{2x} = 2x \ln(x^2+1)$$

所以 $\frac{y'}{y} = 2 \ln(x^2+1) + \frac{2x \cdot 2x}{x^2+1}$

所以 $y' = (x^2+1)^{2x} [2 \ln(x^2+1) + \frac{4x^2}{x^2+1}]$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \arctan \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}, \quad \because \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}$ 不存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.

5. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ae^x + 1) = a+1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+b) = b$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, $\therefore a+1=b$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ae^x + 1 - (a+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ae^x - a}{x} = a$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+b-(a+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+b-b}{x} = 1$$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 所以 $f'_-(0) = f'_+(0)$, $\therefore a=1$, $\therefore b=2$