加测 16　极限提高题答案

（1） 解：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+2\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{n}}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{n}}}}=\frac{3}{2}.$$

（2）解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x\cos x}{x^3-x\sin x+1}=x^3\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\cos x}{1-\frac{1}{x^2}\sin x+\frac{1}{x^3}}\ \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cos x}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\sin x+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(a+x)}(\cos x-b)=4$，

解：因为$\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x\cdot(\cos x-b)=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\ln(a+x)=0$，所以$a=1$.

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(a+x)}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+x)}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}(\cos x-b)=2(1-b)=4$

所以$b=-1$.

（4） $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x+\sqrt{ax^2-bx-1})=1$， $a>0$，求a,b

解： $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x+\sqrt{ax^2-bx-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(16-a)x^2+bx+1}{4x-\sqrt{16x^2-bx-1}}=1$，所以$a=16$.

所以$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x+\sqrt{ax^2-bx-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{bx+1}{4x-\sqrt{16x^2-bx-1}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{b+\frac{1}{x}}{4+\sqrt{16-\frac{b}{x}-\frac{1}{x^2}}}=\frac{b}{8}$$，解得$b=1$.

（5） $x\to 0$时， $e^{x\cos x}-e^x$与x^n是同阶无穷小，求n

解：由$\mathrm{e}^{x\cos x^2}-\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{x\cos x^2-x}-1\right)\sim x\cos x^2-x=x(\cos x^2-1)\sim-\dfrac{1}{2}x^5$ ，

即$\mathrm{e}^{x\cos x^2}-\mathrm{e}^x$与$x^5$是同阶无穷小，则$n=5$

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-\tan x)(e-e^{\cos x})}{(2x+3)\sin^5 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)\tan x(e-e^{\cos x})}{(2x+3)x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{x^2}{2}\cdot x(e-e^{\cos x})}{(2x+3)x^5}$

$$=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{x^2}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}\cdot\sin x}{2x}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}}{2}=-\frac{1}{12}$$

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{4}$$

（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin x+3x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+3x)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin x+3x^2\cos\frac{1}{x}}{3x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{4\sin x}{3x}+x\cos\dfrac{1}{x})$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(\frac{4}{3}+0)=\frac{2}{3}.$$