

加测 18 前三章测试答案

姓名_____成绩_____

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{e^x} =$ (A)

- A. 0 B. 1 C. 2 D. $+\infty$

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=4$ 处可导，且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+6h) - f(4+2h)}{h} = 12$ ，则 $f'(4) =$ (B)

- A. -3 B. 3 C. -12 D. 12

3. 若函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处取得极小值，则 (D)

- A. $f'(x_0) = 0$ B. $f'(x_0) > 0$ C. $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ D. $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

4. 函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$ 的单调递增区间是 (A)

- A. $[1, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, 1]$

5. 曲线 $y = (x-1)e^x$ 的拐点是 (B)

- A. $\left(-2, -\frac{3}{e^2}\right)$ B. $\left(-1, -\frac{2}{e}\right)$ C. $(0, -1)$ D. $(1, 0)$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

6. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $2y + \ln(2x + y - 2) = 2$ 确定，则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1)} =$ _____.

7. 已知函数 $y = \arcsin(3x+1)$ ，则微分 $dy =$ _____

8. 曲线 $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ 的水平和垂直渐近线共有 3 条.

9. 函数 $f(x) = 4e^x + e^{-x}$ 的极小值点为 $x = -\ln 2$.

10. 设点 $(1, a)$ 是曲线 $y = ax^3 - x^2 - 2x + 3$ 的拐点，则 $a = \frac{1}{3}$.

三、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{\tan^2 x}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x + \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x + \cos x}{2} = 1.$

12. 已知 $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ，求 $\frac{dy}{dx}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
 &= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2+x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}
 \end{aligned}$$

13. 求函数 $f(x) = x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \arctan x$ 的单调区间和极值.

函数 $f(x)$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x(x-1)}{1+x^2}, \text{ 令 } f'(x) = 0, x_1 = 0, x_2 = 1$$

列表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单增	极大值	单减	极小值	单增

由上表可得, 函数的单调减区间为 $[0, 1]$, 单调增区间为 $(-\infty, 0], [1, +\infty)$ 函数的极大值为 $f(0) = 0$, 极小值为

$$f(1) = 1 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}.$$

14. 求函数 $f(x) = (2x^2 - 8x) \ln x - 3x^2 + 16x$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值.

解: 函数的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = (4x - 8) \ln x + \frac{2x^2 - 8x}{x} - 6x + 16 = (4x - 8)(\ln x - 1), \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得驻点 } x_1 = 2, x_2 = e.$$

$$f''(x) = 4(\ln x - 1) + (4x - 8) \cdot \frac{1}{x} = 4 \ln x - \frac{8}{x}.$$

$$f''(2) = 4 \ln 2 - 4 = 4(\ln 2 - 1) < 0, \text{ 故极大值为 } f(2) = 20 - 8 \ln 2.$$

$$f''(e) = 4 - \frac{8}{e} = 4 \left(1 - \frac{2}{e}\right) > 0, \text{ 故极小值为 } f(e) = 8e - e^2.$$

四、证明题 (共 8 分)

证明: 令 $F(x) = x^2 f(x) - x$, 显然 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导. 又 $F(0) = 0, F(1) = f(1) - 1 = 0$,

即 $F(0) = F(1)$. 由罗尔定理, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 1$.