

加测 23 答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. D 2. D 3. C 4. B 5. C

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

6. $x = -\ln 2$ 7. $\frac{1}{3}$ 8. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ 9. $\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + C$ 10. $\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x| + C$

三、计算题（本大题共 3 小题，第 11 小题 13 分，第 12 小题 13 分，第 13 小题 14 分，共 40 分）

$$\begin{aligned} 11. \text{ 解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{\tan^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x + \sin x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x + \cos x}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. \text{ 解: } \frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} + \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} + \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{1+x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2+x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

13. 解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x(x-1)}{1+x^2}, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = 0, x_2 = 1$$

列表：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-		+
$f(x)$	单增	极大值	单减	极小值	单增

由上表可得，函数的单调减区间为 $[0, 1]$ ，单调增区间为 $(-\infty, 0], [1, +\infty)$

函数的极大值为 $f(0) = 0$ ，极小值为 $f(1) = 1 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$ 。