山东省 2026 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学答案（三期月考）（考试时间 120 分钟）

姓名____________________成绩____________________

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 函数 $f(x)=x^2\arcsin x$ 的图形关于（ C ）对称

A. ox 轴　　B. 直线 $y=x$　　C. 坐标原点　　D. y 轴

2. $x\to 0$ 时，下列函数是无穷小量的是（ B ）

A. $\cos x$　　B. e^x-1　　C. $y=\ln(1+x)-1$　　D. $y=\dfrac{x-2}{x+1}$

3. 设 $\lim\limits_{x\to 0}(1-mx)^{\frac{1}{x}}=e^2$，则 $m=$（ C ）

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. 2　　C. -2　　D. $\dfrac{1}{2}$

4. 函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{2}{x}, x>0 \\ 2x+3, x\le 0 \end{cases}$，则 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的（ D ）

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 无穷间断点　　D. 跳跃间断点

5. 已知 $f'(3)=2$，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+ah)-f(3-h)}{h}=4$，则 $a=$（ A ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. −3

6. 曲线 $y=e^{2x}$ 上切线与直线 $y=2x-1$ 平行的切点坐标为（ B ）

A. $(0,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,e)$　　D. $(0,e)$

7. 若函数 $y=f(x^3)$ 可导，则 $\dfrac{dy}{dx}=$（ C ）

A. $f'(3x^2)$　　B. $f'(x^3)$　　C. $3x^2f'(3x^2)$　　D. $3x^2f'(x^3)$

8. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+\ln x$，则下列是 $f(x)$ 的一个原函数的是（ D ）

A． $e^{2x}+x\ln x$ B． $\frac{1}{2}e^{2x}+x\ln x$ C． $e^{2x}+x\ln x-x$ D． $\frac{1}{2}e^{2x}+x\ln x-x$

9. 若 $\int f(x)dx=x^2e^{2x}+C$，则 $f(x)=$（ D ）

A. $2xe^{2x}$ B. $2x^2e^{2x}$ C. xe^{2x} D. $2xe^{2x}(1+x)$

10. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int e^{-x}f(e^{-x})dx=$（ B ）

A. $F(e^{-x})+C$ B. $-F(e^{-x})+C$ C. $F(e^{x})+C$ D. $-F(e^{x})+C$

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

11．函数 $y=\arcsin\frac{2x-1}{3}$ 的定义域为 $\underline{[-1,2]}$.

12． $y=x^x$ 通过 $(1,1)$ 点的切线方程为 $\underline{y=x}$.

13． 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^4+bx^3+2}{x^3+x+1}=-2$，则 $a=\underline{-1}$，$b=\underline{-2}$.

14. 已知 $y=\cos(3x^2+1)$ ，则 $dy=\underline{-6x\sin(3x^2+1)dx}$.

三、计算题（每小题 6 分，共 48 分）

15. $\lim\limits_{x\to3}(\frac{x}{x-3}-\frac{9}{x^2-3x})=\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x+3}{x}=2$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+1})^{\frac{x}{2}+4}=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+1})^{\frac{x}{2}}\cdot(\frac{x-1}{x+1})^4=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}})^{\frac{x}{2}}\cdot1^4=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{x})^{\frac{x}{2}}}{(1+\frac{1}{x})^{\frac{x}{2}}}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{-1}$

17. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4+2x}-\sqrt{4-2x}}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{4+2x}-\sqrt{4-2x})(\sqrt{4+2x}+\sqrt{4-2x})}{3x(\sqrt{4+2x}+\sqrt{4-2x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{4x}{3x(\sqrt{4+2x}+\sqrt{4-2x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4}{3(\sqrt{4+2x}+\sqrt{4-2x})}=\frac{1}{3}$

18. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\tan x}{\sqrt{1+2x^3}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}\cdot x}{\frac{1}{2}\cdot2x^3}=\frac{1}{2}$

19. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, x<0\\ b-1, \quad x=0\\ \dfrac{\ln(1+ax)}{x}, x>0\end{cases}$，求 a,b 的值，使得函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

解： $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=a$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$ 所以 $2=a=b-1$，所以

$a=2,b=3$

20. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x^2y}=x-y$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

方程 $\mathrm{e}^{x^2y}=x-y$ 两边分别对 x 求导得：$\mathrm{e}^{x^2y}(x^2y)'=1-y'$

即 $\mathrm{e}^{x^2y}(2xy+x^2y')=1-y'$，解得 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-2xy\mathrm{e}^{x^2y}}{x^2\mathrm{e}^{x^2y}+1}$

21. 计算不定积分 $\int\dfrac{2x^3\cos x-3+5x}{x^2}\mathrm{d}x$

$$\int\frac{2x^3\cos x-3+5x}{x^2}\mathrm{d}x=\int(2x\cos x-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x})dx=\int 2x\cos xdx+\frac{3}{x}+5\ln|x|$$

$$=\int 2xd\sin x+\frac{3}{x}+5\ln|x|=2x\sin x-2\int\sin xdx+\frac{3}{x}+5\ln|x|$$

$$=2x\sin x+2\cos x+\frac{3}{x}+5\ln|x|$$

22. 计算不定积分 $\int\dfrac{dx}{x\left(2+3\ln x\right)}$

$$\int\frac{dx}{x\left(2+3\ln x\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{1}{2+3\ln x}d(2+3\ln x)=\frac{1}{3}\ln|2+3\ln x|+C$$

四、证明题（共 7 分）

23. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)<0, f(1)>\dfrac{1}{2}$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$2f(\xi)=\xi$

证明：令 $F(x)=2f(\xi)-\xi$,所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又因为 $F(0)=2f(0)<0$ ，$F(1)=2f(1)-1>0$,即 $F(0)F(1)<0$ ，所以由零点定理可知存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F(\xi)=0$ ，即 $2f(\xi)-\xi=0$ ，即 $2f(\xi)=\xi$.