高等数学-初高知识衔接

【全科专业适用】

目　录

数学基础运算

综述：

亲爱的同学们，从今天开始，我们将正式进入高数的世界，开始高数知识的学习。“与其临渊羡鱼，不如退而结网”因此在正式学习高数内容之前，我们先来回顾复习一下，我们在中学时代所学习的初等数学的知识，为后面更好学习高数，打下坚定基础。

第一讲　合并同类型、去（添）括号

一、同类项

引入：

观察下列各单项式，把你认为相同类型的式子归类，并说出分类依据：

$-7ab$， $2x$， 3， $4ab^2$ ，$6ab$ ，$0.6ab^2$， $-3x$， $-\frac{1}{2}$， $2xy$， $\frac{1}{2}a^2b$

分类依据：

1．同类项的概念

（1）定义：所含字母相同，并且相同字母的指数也相同，这样的项叫做**同类项**．同类项中所含字母可以看成是数字、单项式、多项式等．

（2）注意事项：

①一是所含字母相同，二是相同字母的指数也相同，两者**缺一不可**；

②同类项**与系数**的大小**无关**；【既$2x^2$与$\frac{1}{2}x^2$是同类项，与系数无关】

③同类项**与**它们所含的**字母顺序无关**；【既$2ab$与$2ba$是同类项，只要字母相同，指数相同即可】

④**所有常数项都是同类项**.

总结：同类项的特点—**两同两无关**

两同：① 同类项所含字母相同 ② 相同字母的指数相同

两无关：①与项的系数无关 ② 与字母的排列顺序无关

例 1、请判断下列各组是否为同类项，并解释原因.

（1）x与y　　（2）a^2b与ab^2　　（3）$-3pq$与$3qp$

（4）abc与ac　　（5）a^3与a^2　　（6）-0.3与2

2．合并同类项

（1）定义：**把**多项式中**同类项合成一项**，叫做合并同类项.

（2）合并同类项的法则：**把同类项的系数相加，所得结果作为系数，字母和字母的指数不变**.

（3）合并同类项时要注意以下三点：

①要掌握同类项的概念，会辨别同类项，并准确地掌握判断同类项的两条标准：带有相同系数的代数项；字母和字母指数；

②合并同类项的含义是把多项式中的同类项合并成一项，经过合并同类项，式的项数会减少，达到化简多项式的目的；

③**“合并”是指同类项的系数相加**，并把得到的结果作为新的系数，要**保持同类项的字母和字母的指数不变**.

例 2、合并同类项.

（1） $4ab^2-ab-6ab^2=$ ________ （2） $2x^2y-5x^2y+x^2y+3xy^2=$ ________

（3） $3a+2b-5a-b=$ ________ （4） $-4ab+8-2b^2-9ab-8=$ ________

3．单项式

（1）单项式的定义：

数或字母的积组成的式子叫做单项式，单独的一个数或字母也是单项式.

用字母表示的数，同一个字母在不同的式子中可以有不同的含义，相同的字母在同一个式子中表示相同的含义.

（2）单项式的系数、次数

单项式中的数字因数叫做单项式的系数，一个单项式中所有字母的指数和叫做单项式的次数.

在判别单项式的系数时，要注意包括数字前面的符号，而形如 a 或－a 这样的式子的系数是 1 或－1，不能误以为没有系数，一个单项式的次数是 n，通常称这个单项式为 n 次单项式.

4．多项式

（1）几个单项式的和叫做多项式，每个单项式叫做多项式的项，其中不含字母的项叫做常数项．多项式中次数最高的项的次数叫做多项式的次数.

（2）多项式的组成元素的单项式，即多项式的每一项都是一个单项式，单项式的个数就是多项式的项数，如果一个多项式含有 a 个单项式，次数是 b，那么这个多项式就叫 b 次 a 项式.

例 3、求代数式 $-3x^2+5x-0.5x+x-1$ 的值，其中 $x=2$.

例 4、当 k 取何值时，$3x^ky$ 与 $-x^2y$ 是同类项？

【考点：通过同类项判定系数，在极限无穷比阶问题中常见，要牢记！】

例 s、下列单项式能够与$\frac{5}{3}x^3y^2$合并成一个单项式的是（　　）

A.$\frac{5}{3}xy$　　B.$\frac{5}{3}x^2y^2$　　C.$\frac{3}{5}x^2y^3$　　D.$\frac{3}{5}x^3y^2$

【考点：所谓单项式，是要求合并同类项后只有一个含参数的式子，注意合并同类项的要求和方法！注意系数的变化，参数的变化，幂指数的变化等！】

二、去（添）括号

（1）去括号法则：

如果括号**外**的因数是**正数**，去括号后原括号内各项的符号与原来的**符号相同**；如果括号**外**的因数是**负数**，去括号后原括号内各项的符号与原来的**符号相反**.

（2）去括号规律：

①括号前是“+”号，去括号时连同它前面的“+”号一起去掉，括号内各项不变号；

②括号前是“－”号，去括号时连同它前面的“－”号一起去掉，括号内各项都要变号.

助记口诀：看符号，是“+”号，不变号，是“-”号，全变号。

说明：

①去括号法则是根据乘法分配律推出的；

②去括号时改变了式子的形式，但并没有改变式子的值.

（3）添括号法则：

添括号时，如果括号前面是正号，括到括号里的各项都不变号，如果括号前面是负号，括号括号里的各项都改变符号. **添括号与去括号可互相检验.**

例 6、对下列式子去括号并合并同类项.

（1） $4a+(2a-b)=$ ____________________.

（2） $2ab-(3ab-4a)=$ ____________________.

（3） $a-(-b+2c+3)=$ ____________________.

（4） $4x-(-2ax+y-1)=$ ____________________.

【例7】对下列式子去括号并合并同类项.

（1） $2x-3(-2x-y)=$ ____________________.

（2） $\frac{1}{2}(1-2x)+2ax(x-1)=$ ____________________.

（3） $\left[2\left(x^2y-2xy^2\right)-\frac{1}{2}(y-3x)\right]=$ ________.

(4) $2\left[-(x-2y+1)+\frac{1}{3}(2x+y-3)+1\right]=$ ______.

第二讲　约分通分、提公因式

一、提公因式法

1. 提公因式法：

如果一个多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提出来，从而将多项式化成两个因式乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法.

2. 具体方法：

（1）当各项系数都是整数时，公因式的系数应取各项系数的最大公约数；字母取各项的相同的字母，而且各字母的指数取次数最低的；取相同的多项式，多项式的次数取最低的.

（2）如果多项式的第一项是负的，一般要提出“－”号，使括号内的第一项的系数成为正数．提出“－”号时，多项式的各项都要变号.

3. 口诀：找准公因式，一次要提净；全家都搬走，留 1 把家守；提负要变号，变形看奇偶.

4. 提公因式法基本步骤：

（1）找出公因式；

（2）提公因式并确定另一个因式：

①第一步找公因式可按照确定公因式的方法先确定系数再确定字母；

②第二步提公因式并确定另一个因式，可用原多项式除以公因式，所得的商即是提公因式后剩下的一个因式，也可用公因式分别除去原多项式的每一项，求剩下的另一个因式；

③提完公因式后，另一因式的项数与原多项式的项数相同.

例 1、对下列式子提公因式：

（1）$6m^2n-15n^2m+30m^2n^2=$ ____________________.

（2）$-4x^3+16x^2-26x=$ ________________________.

（3）$x(x+y)+y(x+y)=$ ______________________.

（4）$3x(a-b)+2y(b-a)=$ ____________________.

（5）$x(m-x)(m-y)-m(x-m)(y-m)=$ __________.

（6）$-7ab-14a^2bx+49ab^2y=$ ___________________.

二、约分

（1）约分的定义：

约去分式中分子与分母的公因式，不改变分式的值，这样的分式变形叫做分式的约分.

（2）公因式要分为系数、字母、字母的指数来分别确定.

①分式约分的结果可能是最简分式，也可能是整式.

②当分子与分母含有负号时，一般把负号提到分式本身的前面.

③约分时，分子与分母都必须是乘积式，如果是多项式的，必须先分解因式.

（3）规律方法总结：

由约分的概念可知，首先将分子、分母转化为乘积的形式，再找出分子、分母的最大公因式并约去，注意不要忽视数字系数的约分.

例 2、对下列式子进行约分：

（1）$\frac{3ab^3c}{6b^2c^3}=$____________.　　（2）$\frac{2ax^2y}{3axy^2}=$____________.

（3）$\frac{-2a(a+b)}{3b(a+b)}=$____________.　　(4) $\frac{a^2-4a+4}{a^2-4}=$____________.

三、通分

（1）通分的定义：

把几个异分母分式分别化为与原来分式相等的同分母分式，这样的分式变形叫做分式的通分.

（2）通分的关键是确定最简公分母.

①最简公分母的系数取各分母系数的最小公倍数.

②最简公分母的字母因式取各分母所有字母的最高次幂的积.

（3）规律方法总结：

通分时若各分式的分母还能分解因式，一定要分解因式，然后再去找各分母的最简公分母，最简公分母的系数为各分母系数的最小公倍数，因式为各分母中相同因式的最高次幂，各分母中不相同的因式都要作为最简公分母中的因式，要防止遗漏.

例题精解

例 3、对下列式子进行通分：

（1）$\dfrac{y}{x(x-y)^2}+\dfrac{x}{(x-y)^2}=$ ________________.

（2）$\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{3}{(1-a)^2}=$ ________________.

（3）$\dfrac{1}{3x^2}+\dfrac{5}{12xy}=$ ________________.

(4) $\dfrac{c}{ab}+\dfrac{a}{bc}=$ ________________.

第三讲　公式法

一、重要公式

平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

完全平方公式：$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$；

立方和公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

立方差公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$．

二、同底数幂的乘法

（1）同底数幂的乘法法则：同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}（m，n 是正整数）$$

（2）推广：$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$（$m$，$n$，$p$ 都是正整数）

在应用同底数幂的乘法法则时，应注意：①底数必须相同，如 2^3 与 2^5，$(a^2b^2)^3$ 与 $(a^2b^2)^4$，$(x-y)^2$ 与 $(x-y)^3$ 等；②a 可以是单项式，也可以是多项式；③按照运算性质，只有相乘时才是底数不变，指数相加.

（3）概括整合：同底数幂的乘法，是学习整式乘除运算的基础，是学好整式运算的关键．在运用时要抓住“同底数”这一关键点，同时注意，有的底数可能并不相同，这时可以适当变形为同底数幂.

三、幂的乘方与积的乘方

（1）幂的乘方法则：底数不变，指数相乘.

$$(a^m)^n = a^{mn}（m，n 是正整数）$$

（2）积的乘方法则：把每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.

$$(ab)^n = a^n b^n（n 是正整数）$$

四、同底数幂的除法

同底数幂的除法法则：底数不变，指数相减.

$a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a \neq 0$，m，n 是正整数，$m > n$）

①底数 $a \neq 0$，因为 0 不能做除数；

②单独的一个字母，其指数是 1，而不是 0；

③应用同底数幂除法的法则时，底数 a 可以是单项式，也可以是多项式，但必须明确底数是什么，指数是什么.

例 1、计算下列结果：

（1）$a^7 \div a^3 =$ ______

（2）$a^6 \div a =$ ______

（3）$a^6 \div a \times (\quad) = a^2$

（4）$a^6 \div a \times (\quad) = a^4 \div a^2$

（5）$a^2 . a^4 . 2^2 =$ ______

（6）$a^2 . a^3 . a^4 =$ ______

（7）$a^3 . a^8 = (\quad) a^5$

（8）$\left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right) =$ ______

（9）$x^2 . x^{\frac{1}{2}} . x^0 =$ ______

五、完全平方公式

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

可巧记为：“首平方，末平方，首末两倍中间放”.

六、平方差公式

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

七、因式分解-运用公式法

1、如果把乘法公式反过来，就可以把某些多项式分解因式，这种方法叫公式法.

平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

完全平方公式：$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$;

2、概括整合：

①能够运用平方差公式分解因式的多项式必须是二项式，两项都能写成平方的形式，且符号相反.

②能运用完全平方公式分解因式的多项式必须是三项式，其中有两项能写成两个数（或式）的平方和的形式，另一项是这两个数（或式）的积的 2 倍.

3、要注意公式的综合应用，**分解到每一个因式都不能再分解为止.**

例题精解

例 1、计算$(+1)2-$______________________________.

例 2、计算$(2-3z)2(ar+1)-$______________________.

例 3、计算$(2x+1)^3$.

例 4、计算$(z\quad 3)3x-$______________________________.

例 5、计算$(2z+3)(3-2a)-$______________________.

第四讲　十字相乘法

一、因式分解-十字相乘法等

借助画十字交叉线分解系数，从而帮助我们把二次三项式分解因式的方法，通常叫做十字相乘法.

①$x^2+(p+q)x+pq$ 型的式子的因式分解．这类二次三项式的特点是：二次项的系数是 1；常数项是两个数的积；可以直接将某些二次项的系数是 1 的二次三项式因式分解：

$$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q).$$

②ax^2+bx+c（$a\neq0$）型的式子的因式分解这种方法的关键是把二次项系数 a 分解成两个因数 a_1，a_2 的积 $a_1 \cdot a_2$，把常数项 c 分解成两个因数 c_1，c_2 的积 $c_1 \cdot c_2$，并使 $a_1c_2+a_2c_1$ 正好是一次项 b，那么可以直接写成结果：$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$.

例 1、用十字相乘法对y－z2－6r＋8 进行因式分解。

例 2、用十字相乘法对y－3x2－10z＋3 进行因式分解。

例 3、用十字相乘法对y－5x2－17r－12 进行因式分解。

例 4、用十字相乘法对y — 7z2 — 13r + 6进行因式分解。

例 5、用十字相乘法对y — z2 + 14r + 45 进行因式分解。

例 6、用十字相乘法对y — z2 — 7　　60 进行因式分解。

例 7、用十字相乘法对y — x 2 + 14r — 72 进行因式分解。

例 8、用十字相乘法对y — x 2 + 6zr — 7 进行因式分解。

例 9、用十字相乘法对y — z2 — 8ar + 15 进行因式分解。

例 10、用十字相乘法对y — z2 + 3r — 10 进行因式分解。

第五讲　一元一次函数及方程

一、解一元一次方程

（1）解一元一次方程的一般方法：

①去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1，这仅是解一元一次方程的一般步骤，针对方程的特点，灵活应用，各种步骤都是为使方程逐渐向 $x=a$ 形式转化.

②解一元一次方程时先观察方程的形式和特点，若有分母一般先去分母；若既有分母又有括号，且括号外的项在乘括号内各项后能消去分母，就先去括号.

二、一次函数的图象

（1）一次函数的图象的画法：经过两点（0，b）、（$-\frac{b}{k}$，0）或（1，$k+b$）作直线$y=kx+b$.

注意：

①使用两点法画一次函数的图象，不一定就选择上面的两点，而要根据具体情况，所选取的点的横、纵坐标尽量取整数，以便于描点准确.

②一次函数的图象是与坐标轴不平行的一条直线（正比例函数是过原点的直线），但直线不一定是一次函数的图象．如 $x=a$，$y=b$ 分别是与y 轴，x 轴平行的直线.

（2）一次函数图象之间的位置关系：直线$y=kx+b$，可以看做由直线$y=kx$ 平移$|b|$个单位而得到．当 $b>0$ 时，向上平移；$b<0$ 时，向下平移.

注意：

①如果两条直线平行，则其比例系数相等；反之亦然；

②将直线平移，其规律是：上加下减，左加右减；

③两条直线相交，其交点都满足这两条直线.

三、一次函数的性质

一次函数的性质：

当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，函数从左到右上升；当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，函数从左到右下降.

由于$y=kx+b$ 与y 轴交于（0，b），当 $b>0$ 时，（0，b）在y 轴的正半轴上，直线与y 轴交于正半轴；当 $b<0$ 时，（0，b）在y 轴的负半轴，直线与y 轴交于负半轴.

四、一次函数图象与系数的关系

①$k>0$，$b>0\Leftrightarrow y=kx+b$ 的图象在一、二、三象限；

②$k>0$，$b<0\Leftrightarrow y=kx+b$ 的图象在一、三、四象限；

③$k<0$，$b>0\Leftrightarrow y=kx+b$ 的图象在一、二、四象限；

④$k<0$，$b<0\Leftrightarrow y=kx+b$ 的图象在二、三、四象限.

五、一次函数图象上点的坐标特征

一次函数$y=kx+b$，（$k\neq0$，且 k，b 为常数）的图象是一条直线．它与 x 轴的交点坐标是（$-\frac{b}{k}$，0）；与y 轴的交点坐标是（0，b）.

直线上任意一点的坐标都满足函数关系式$y=kx+b$.

六、一次函数图象与几何变换

直线$y=kx+b$，（$k\neq0$，且 k，b 为常数）

①关于 x 轴对称，就是 x 不变，y 变成 $-y$：$-y=kx+b$，即$y=-kx-b$；
（关于 x 轴对称，横坐标不变，纵坐标是原来的相反数）

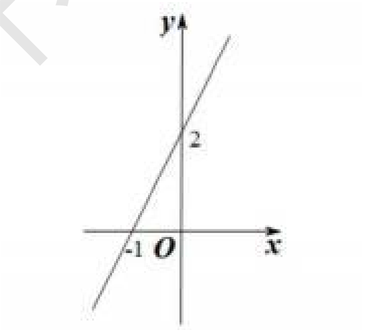
②关于y 轴对称，就是y 不变，x 变成 $-x$：$y=k(-x)+b$，即$y=-kx+b$；
（关于y 轴对称，纵坐标不变，横坐标是原来的相反数）

③关于原点对称，就是 x 和y 都变成相反数：$-y=k(-x)+b$，即$y=kx-b$.
（关于原点轴对称，横、纵坐标都变为原来的相反数）

七、一次函数的形式

1. 斜截式：$y = kx + b$（k，b **为任意常数）**

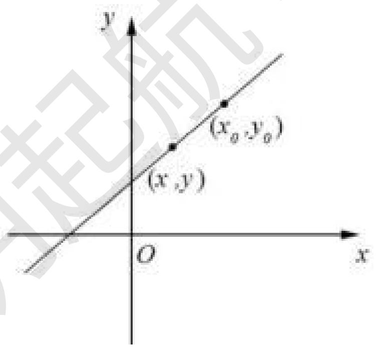
其中：k 为斜率，$k > 0$ 时，图像斜向右上，$k < 0$ 时，图像斜向右下；与 y 轴相交于 $(0,b)$ 点．如下图，$f(x) = 2x + 2$ 的图像．



$f(x) = 2x + 2$ 图像

2. 点斜式：$y - y_0 = k(x - x_0)$（k **为任意常数）**

图像过已知点 (x_0, y_0)，k 为斜率．



$y - y_0 = k(x - x_0)$ 图像

3. **一般式：**$ax + by + c = 0$（$b \neq 0$，a，c **为任意常数）**

将斜截式或点斜式右端全部化为 0，即得到一般式．

例题精解

例 1、画出下列一次函数图像.

（1） $y=x+3$；　　　　（2） $y=\frac{1}{2}x-1$.

例 2、说明下列一次函数的形式，并将下列一次函数化为一般式.

（1）$y=3x+1$；　　　　（2）$y-1=2(x-1)$；

（3） $y=5x+2$；　　　　（4） $y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x+1)$.

第六讲　一元二次函数及方程

一、一元二次函数的概念

一般地，自变量x和因变量y之间存在如下关系：y — a$_x{}^2$ + bur + C(a,b, C为常数, a ≠ 0)

则称y — f()为的二次函数。

二次函数有如下三种表达式：

①一般式：y — a$_x{}^2$ + b$_x$ + C(a,b, C为常数, a ≠ 0)

②顶点式（设抛物线的顶点为p(h, k)）：y — a(z — h) 2 + K

③交点式（设抛物线与z 轴有交点A(z1 , 0) , B(z2 , 0)）：y — a(r — a1) (z — $_x$2)

二、一元二次函数性质

①一元二次函数（抛物线）是轴对称图形，对称轴为直线x — $-\dfrac{b}{2a}$。

②一元二次函数（抛物线）顶点坐标为$P\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$。

③二次项系数a 决定函数的开口方向和大小，若a>0 则函数开 口 向上，若a<0 ，则函数开 口向下，且 lal 越大，函数开口越大。

④抛物线与x 轴交点个数

Δ — b2 — 4ac > 0 时，抛物线与z 轴有两个交点。

Δ — b2 — 4ac — 0 时，抛物线与z 轴有 1 个交点。

Δ — b2 — 4ac < 0 时，抛物线与z 轴没有交点。

⑤一元二次函数与x 轴交点坐标公式为：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

例题精解

例 1、已知一元二次函数$y-2z2+5x-3$，求抛物线的顶点坐标及对称轴。

例 2、已知一元二次函数$y=x2=4x+1$，则该曲线与x 轴有几个交点？求出交点坐标。

例 3、已知一元二次函数$y=x2\quad 4$，求曲线与x 轴交点坐标，并求出顶点坐标。

例 4、求一元二次函数$y-4-3x^{2}$的开口方向和与x 轴的交点坐标。

第七讲　集合

一、集合概念

指具有某种特定性质的具体对象汇总而成的集体。例如：班级中的男生、班级中的女生、班级中身高超过 1.75 米的同学、大于 1 小于 10 的整数等，均可构成集合。注意构成集合的条件：元素个数是有限的、元素均具有某种特定性质、具体的、不重复的。

例 1、请写出大于 1 小于 6 的整数。

二、集合的运算

例 2、观察下列两个集合是什么关系

$A=\{1,3,4,5\}$　$B=\{2,3,4,6\}$　$C=\{1,2,3,4,5,6\}$

例 3、集合$A=\{1,2,4,6\}$ $B=\{2,6\}$ 则$A-B=$____________。

通过上述两个例子，我们可以清晰的看到，集合与集合间是可以进行基本运算的，除了我们常见的加减运算，还有几种特殊的运算法则，下面介绍如下：

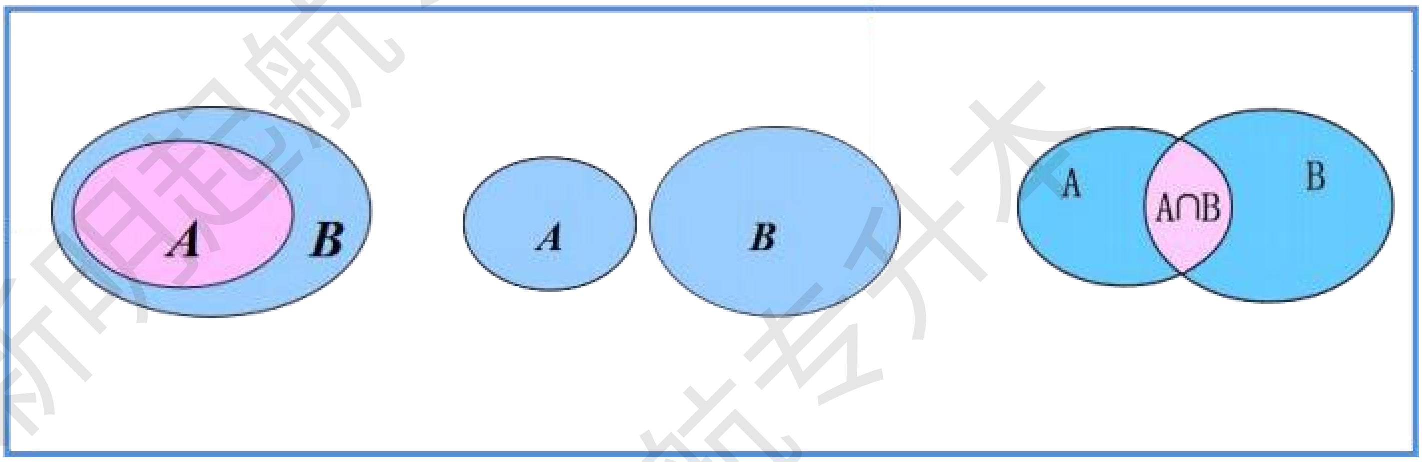
（1）交集

一般地，由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集.

记作：An B （读作：“A 交B ”）即：An B — {a | xEA且.CEB}

说明：两个集合求交集，结果是一个集合，是由集合A 与B 的公共元素组成的集合。

Venn 图表示An B 为：



例 4、已知集合A — {1 , 2 , 3 , 4 , 5} B — {1 , 4 , 6} 则A n B — ________________。

例 5、已知集合A — {ar — l1 < z < 3 , aez}, B — {z0 < z < 5 , aez} 则A n B — ______。

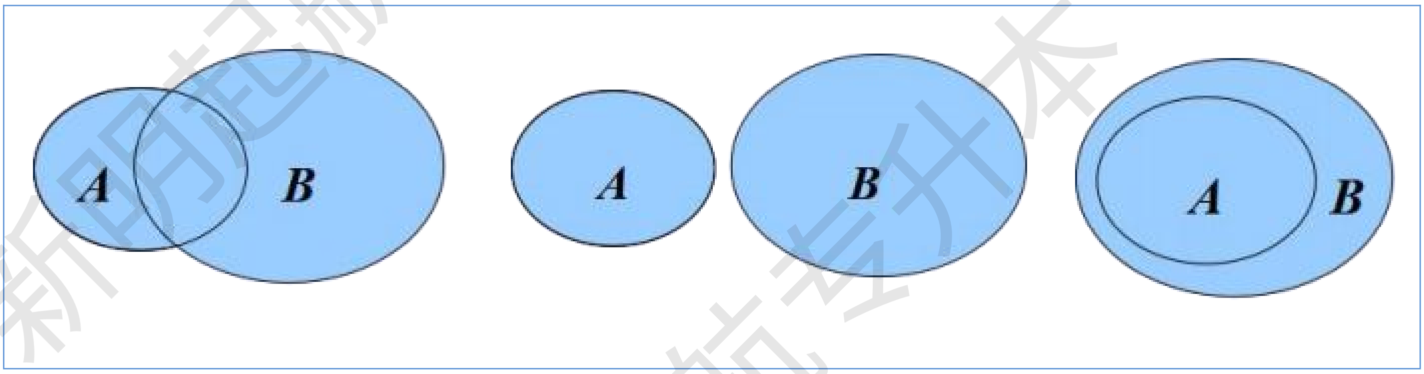
（2）并集

一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集。

记作：$A\cup B$（读作：“A并B”）即：$A\cup B=\{x|x\in A 或 x\in B\}$

说明：两个集合求并集，结果还是一个集合，是由集合 A 与 B 的所有元素组成的集合（重复元素只看成一个元素）.

Venn 图表示$A\cup B$为：



例 6、已知集合

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{4,5,6,7,8,9\}$，则$A\cup B=$________。

例 7、已知集合

$A=\{x|-2<x<0, x\in Z\}$，$B=\{x|0\le x<3, x\in Z\}$，则$A\cup B=$________。

例题精解

例 1、若集合A — {2 , 4 , 6 , 8}, B — (1 , 3 , 6 , 9}, 求A n B,A UB。

例 2、若集合A — {zl2 < z < 6}, B — {zr — l2 < z < 4}, 求A UB, A n B。

例 3、若集合A — {2 , 4 , 6 , 8 , 10}, B — 1,3 , 5 , 7 , 9}, 求A n B,A UB。

例 4、若集合A — 1,2 , 3 , 4}, B — {1 , 2 , 3 , 4}, 求A n B,A UB。

第八讲　一次不等式

一、定义

含有（>，<，≥，≤，≠）某一种或几种的式子叫做不等式.

二、性质

（1）加减：不等号两边同时加减一个数不变号；

（2）乘除：不等号两边同时乘一个正数不变号，乘一个负数变号；

（3）倒数：若$a > b > 0$，则$0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

三、解不等式

不等式的解是指在含有未知数的不等式中，能够使不等式成立的未知数的值.

例 1、判断下列不等式.

（1）已知$a > b$，则$a-2$________$b-2$；

（2）已知$a > b$，则$3a$________$3b$；

（3）已知$a > b$，则$-3a$________$-3b$；

（4）已知$a > b > 0$，则$\frac{1}{a}$________$\frac{1}{b}$.

四、在数轴上表示不等式的解集

用数轴表示不等式的解集时，要注意**“两定”**：

一是定界点，一般在数轴上只标出原点和界点即可．定边界点时要注意，点是**实心还是空心**，若边界点含于解集为实心点，不含于解集为空心点；

二是定方向，定方向的原则是：“小于向左，大于向右”．

【规律方法】不等式解集的验证方法：

某不等式求得的解集为$x>a$，其验证方法可以先将 a 代入原不等式，则两边相等，其次在 $x>a$ 的范围内取一个数代入原不等式，则原不等式成立．

五、解一元一次不等式

基本操作方法与解一元一次方程基本相同，都有如下步骤：

①去分母；②去括号；③移项；④合并同类项；⑤化系数为 1．

以上步骤中，只有①去分母和⑤化系数为 1 可能用到性质 3，即可能变不等号方向，其他都不会改变不等号方向．

注意：

符号“≥”和“≤”分别比“＞”和“＜”各多了一层相等的含义，它们是不等号与等号合写形式．

六、解一元一次不等式组

（1）一元一次不等式组的解集：几个一元一次不等式的解集的公共部分，叫做由它们所组成的不等式组的解集．

（2）一元一次不等式组的解法：解一元一次不等式组时，一般先求出其中各不等式的解集，再求出这些解集的公共部分，利用数轴可以直观地表示不等式组的解集．

方法与步骤：

①求不等式组中每个不等式的解集；

②利用数轴求公共部分.

解集的规律：同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到.

例题精解

例 1、解不等式 $x+1>0$.

例 2、解不等式 $3x-2>4$.

第九讲　解二次不等式

一、一元二次不等式及其应用

1. 概念

含有一个未知数且未知数的最高次数为 2 的不等式叫做一元二次不等式．它的一般形式是 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$（a 不等于 0）其中 ax^2+bx+c 是实数域内的二次三项式.

2. 特征

当$\triangle=b^2-4ac>0$ 时，

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实根，那么 ax^2+bx+c 可写成 $a(x-x_1)(x-x_2)$；

当$\triangle=b^2-4ac=0$ 时，

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 仅有一个实根，那么 ax^2+bx+c 可写成 $a(x-x_1)^2$；

当$\triangle=b^2-4ac<0$ 时.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实根，那么 ax^2+bx+c 与 x 轴没有交点.

例 1、求一元二次不等式 $x^2<x+6$ 的解集.

二、一元二次不等式的常见应用类型

①一元二次不等式恒成立问题：

一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\boldsymbol{R}$ 的等价条件是：$a>0$ 且 $\triangle<0$；一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $\boldsymbol{R}$ 的等价条件是：$a<0$ 且 $\triangle<0$.

②分式不等式问题：

（1） 已知 $\frac{a}{b}>0$，判断 a,b 符号，并等价转化为整式表达；

（2） 已知 $\frac{a}{b}<0$，判断 a,b 符号，并等价转化为整式表达；

（3）已知 $\frac{a}{b}\leq 0$，判断 a,b 符号，并等价转化为整式表达.

例题精解

例 1、解不等式 $x^2 - 1 > 0$.

例 2、解不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$.

例 3、解不等式 $\frac{x+1}{x-1} > 0$.

例 4、解不等式 $\frac{x-1}{2x+1} \leq 0$.

第十讲　根式及根式有理化

一、二次根式的性质与化简

（1）二次根式的基本性质：

①$\sqrt{a}\geq0$；$a\geq0$（双重非负性）.

②$(\sqrt{a})^2=a$；（$a\geq0$）（任何一个非负数都可以写成一个数的平方的形式）.

③$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, a>0\\0, a=0\\-a, a<0\end{cases}$（算术平方根的意义）

（2）二次根式的乘除法：

①积的算术平方根性质：$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$（$a\geq0$，$b\geq0$）

②二次根式的乘法法则：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$（$a\geq0$，$b\geq0$）

③商的算术平方根的性质：$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$（$a\geq0$，$b>0$）

④二次根式的除法法则：$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$（$a\geq0$，$b>0$）

规律方法总结：

在使用性质$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$（$a\geq0$，$b\geq0$）时一定要注意 $a\geq0$，$b\geq0$ 的条件限制，如果 $a<0$，$b<0$，使用该性质会使二次根式无意义，如$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}\neq\sqrt{-4\cdot -9}$；同样的在使用二次根式的乘法法则，商的算术平方根和二次根式的除法运算也是如此.

（3）二次根式的化简：

①利用二次根式的基本性质进行化简；

②利用积的算术平方根的性质和商的算术平方根的性质进行化简.

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ （a\geq0，b\geq0）；\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ （a\geq0，b>0）$$

二、最简二次根式

最简二次根式的概念：

（1）被开方数不含分母；

（2）被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

三、分母有理化

（1）分母有理化是指把分母中的根号化去.

分母有理化常常是乘二次根式本身（分母只有一项）或与原分母组成平方差公式.

例如：①$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$；②$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$.

例题精解

例 1、对下列函数进行分子有理化.

（1）$y=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$；　　（2）$y=\sqrt{x}+1$；

（3）$y=\sqrt{1+x^2}-x$；　　（4）$y=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$.

例 2、对下列函数进行分母有理化.

（1）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$；　　（2）$y=\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$；

（3）$y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$；　　（4）$y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$.

第十一讲　函数特性

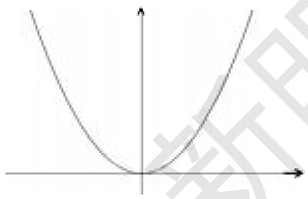
一、函数的特性

（1）单调性

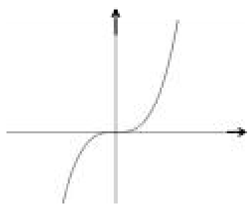
如果函数$f(x)$在区间I内随x的增大而增大，即对于I内的任意两点$x_1,x_2\in I$，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$则称函数$f(x)$在区间I上是单调递增.

反之，如果函数$f(x)$在区间I内随x的增大而减小，即对I内任意两点x_1,x_2，$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间I上是单调递减.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数. 如下图所示函数$f(x)=x^2$图像，函数在区间$(-\infty,0]$上是单调递减的；在区间$[0,+\infty)$上是单调递增的；但在区间$(-\infty,+\infty)$内函数$f(x)=x^2$不是单调的，又如图，函数$f(x)=x^3$在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调递增的.



$f(x)=x^2$ 图像



$f(x)=x^3$ 图像

（2）有界性

对于函数$f(x)$，定义域为D，在区间$I\subset D$内对任意$x\in I$，存在正常数M，对应的函数值均有$|f(x)|\leqslant M$（可以没有等号），则称$f(x)$在区间I内有界；如果不存在这样的正常数M，则称函数$f(x)$在区间I内无界. 在定义域D上有界的函数称为有界函数.

（3）奇偶性

	奇函数	偶函数
定义	$f(-x)=-f(x)$	$f(-x)=f(x)$
对称性	关于原点对称	关于y 轴对称
特殊点	$(0,0)$	无
推论	$f(-x)+f(x)=0$	$f(-x)-f(x)=0$
共性	奇函数、偶函数的定义域均关于原点对称	
规律	1.有限个奇函数的代数和仍为奇函数，有限个偶函数的和仍为偶函数； 2.奇数个奇函数的乘积是奇函数，偶数个奇函数的乘积是偶函数； 3.偶函数与偶函数的乘积为偶函数，奇函数与偶函数的乘积为奇函数； 4.奇函数与奇函数的复合函数为奇函数； 5.奇函数与偶函数的复合是偶函数，偶函数与偶函数复合是偶函数； 6.可导的奇函数的导数为偶函数，可导的偶函数的导数是奇函数.	

（4）周期性

对于函数$f(x)$，如果存在一个常数$T \neq 0$，对任意$x \in D$，有$x + T \in D$，且$f(x + T) = f(x)$则称函数$f(x)$为周期函数，T为函数的周期. 从图像上看，在周期函数的定义域内，每个长度为T的区间上，函数的图形完全一样.

在考试中，三角函数周期性考察较多，$y = \sin x$与$y = \cos x$的最小正周期为2π（如下图），而$y = \tan x$与$y = \cot x$的最小正周期为π.

关于函数周期性， 有以下结论：

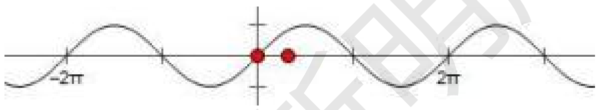
（1）$y = A\sin(\text{①}x + \varphi)$或$y = A\cos(\text{①}x + \varphi) \to$ 周期为$T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$；

$y = A\tan(\text{①}x + \varphi)$或$y = A\cot(\text{①}x + \varphi) \to$ 周期为$T = \dfrac{\pi}{|\omega|}$；

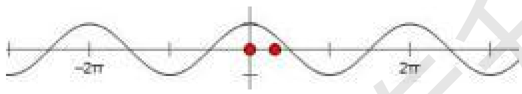
（2）若$f(x)$的周期为T，则函数$f(ax + b)$的周期为$\dfrac{T}{|a|}$；

（3）若求几个函数的代数和形成函数的周期，需先分别求出每个函数的周期，再取它们的最小公倍数，就得到了和函数的周期；

（4）周期函数求导后，周期不变.



$y = \sin x$ 图像



$y = \cos x$ 图像

例 1、判断下列函数的奇偶性.

（1）$y=x^2(1-x^2)$；　　（2）$y=3x^2-x^3$；

（3）$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　（4）$y=x(x-1)(x+1)$.

例 2、判断各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

⑴ $y=\cos(x-2)$；　　（2）$y=\cos 4x$；　　（3）$y=1+\sin \pi x$；

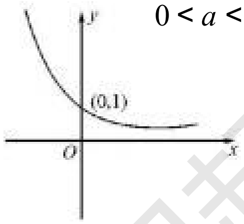
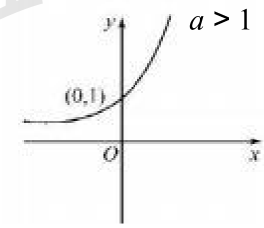
⑷ $y=x\cos x$；　　（5）$y=\sin^2 x$；　　（6）$y=\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{3}$.W

第十二讲　基本初等函数-指数函数

一、基本初等函数

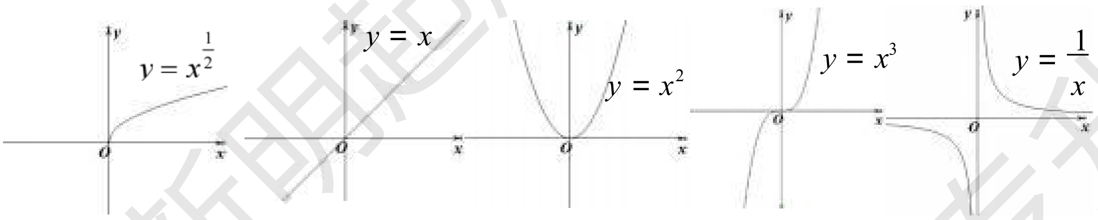
基本初等函数包括指数函数、幂函数、对数函数、三角函数、反函数.

（1）指数函数

<table>
<tr><td>函数形式</td><td colspan="4">$y=a^x(a>0,a\neq 1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">要素</td><td>定义域</td><td colspan="2">值域</td><td>过定点</td></tr>
<tr><td>R</td><td colspan="2">$(0,+\infty)$</td><td>$(0,1)$</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td colspan="2">当$0<a<1$时，在R上单调减</td><td colspan="2">当$a>1$时，在R上单调增</td></tr>
<tr><td>函数图像</td><td colspan="2">$0<a<1$

</td><td colspan="2">$a>1$

</td></tr>
<tr><td>重要公式补充</td><td colspan="4">（1）$a^M.a^N=a^{M+N}$；　（2）$\frac{a^M}{a^N}=a^{M-N}$；　（3）$\left(a^M\right)^N=a^{MN}$；
（4）$a^{-b}=\frac{1}{a^b}$；　（5）$a^{\frac{b}{c}}=\sqrt[c]{a^b}$.</td></tr>
</table>

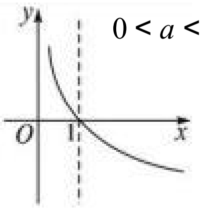
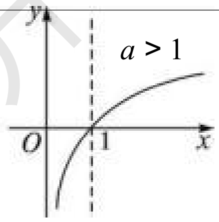
第十三讲　基本初等函数-幂函数

（2）幂函数

函数形式	$y=x^a(a\in R,a\neq 0)$				
x	$x^{\frac{1}{2}}$	x	x^2	x^3	x^{-1}
定义域	$[0,+\infty)$	R	R	R	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	$[0,+\infty)$	R	$[0,+\infty)$	R	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
奇偶性	非奇非偶	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
单调性	$[0,+\infty)$ 单增	R 上单增	$(-\infty,0]$ 单减 $[0,+\infty)$ 单增	R 上单增	$(-\infty,0)$ 单减 $(0,+\infty)$ 单减
过定点	$(1,1)$				
函数图像					

第十四讲　基本初等函数-对数函数

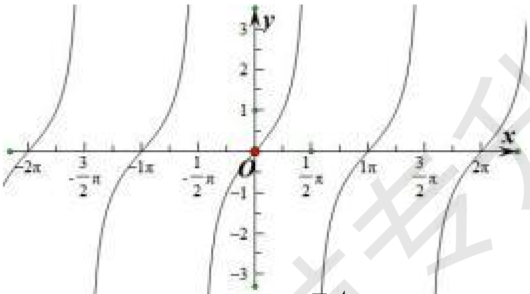
（3）对数函数

<table>
<tr><td>函数形式</td><td colspan="4">$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">要素</td><td>定义域</td><td colspan="2">值域</td><td>过定点</td></tr>
<tr><td>$(0,+\infty)$</td><td colspan="2">R</td><td>$(1,0)$</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td colspan="2">当 $0<a<1$时，在$(0,+\infty)$ 单调递减</td><td colspan="2">当 $a>1$时，在 $(0,+\infty)$ 单调递增</td></tr>
<tr><td>函数图像</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>重要
公式
补充</td><td colspan="4">(1) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；(2) $\log_a M.N=\log_a M+\log_a N$；
(3) $\log_a M^N=N\log_a M$；(4) $\log_a \sqrt[N]{M}=\frac{1}{N}\log_a M$；(5) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$.</td></tr>
</table>

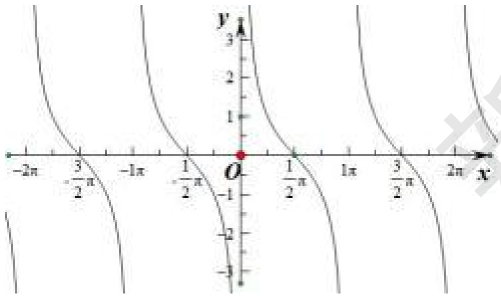
第十五讲　基本初等函数-三角函数

（4）三角函数

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$
定义域	R	R	$\left\{x\middle\|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$	$\{x\ x\neq k\pi\}$	$\left\{x\middle\|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$	$\{x\ x\neq k\pi\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数	偶函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$	$T=2\pi$	$T=2\pi$
函数图像	见下方图 2-1-5 、图 2-1-6 常见三角函数图像					
重要公式补充	（1）平方关系： $\sin^2 x+\cos^2 x=1$； $1+\tan^2 x=\sec^2 x$； $1+\cot^2 x=\csc^2 x$. （2）倍角关系： $\sin 2x=2\sin x\cos x$； $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$. （3）降幂公式： $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$； $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$. （4）和差公式： $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$. （5）倒数关系： $\cot x=\frac{1}{\tan x}$； $\sec x=\frac{1}{\cos x}$； $\csc x=\frac{1}{\sin x}$.					

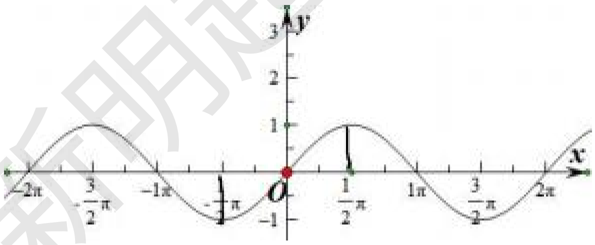


$y = \tan x$

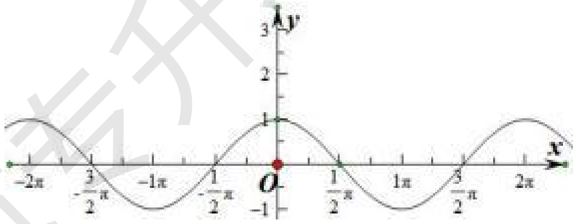


$y = \cot x$

图 2-1-5　常见三角函数图像（一）



$y = \sin x$

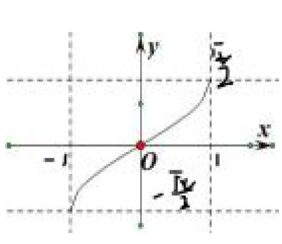
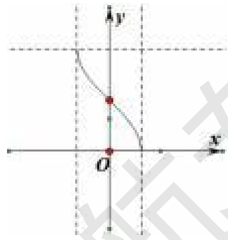
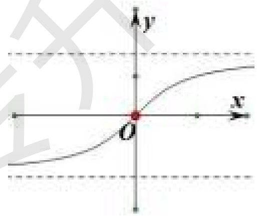
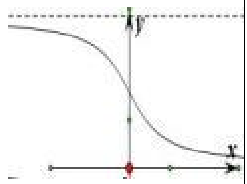


$y = \cos x$

图 2-1-6　常见三角函数图像（二）

第十六讲　基本初等函数-反三角函数

（5）反三角函数

x	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	$\mathrm{arc}\cot x$
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
奇偶性	奇函数	非奇非偶	奇函数	非奇非偶
函数图像				

例 1、求下列函数的定义域.

（1）$y=\sin\sqrt{x}$；（2）$y=\tan(x+1)$；（3）$y=\arcsin(x-3)$；（4）$y=\ln(x+1)$.

例 2、判断下列各题中，函数$f(x)$ 与$g(x)$ 是否相同？为什么？

（1）$f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$；

（2）$f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

第十七讲　基本初等函数–知识总结

函数形式	$y=x^{a}(a\epsilon R,a\neq 0)$				
x	$x^{\frac{1}{2}}$	x	x^{2}	x^{3}	x^{-1}
定义域					
值域					
奇偶性					
单调性					
过定点					
函数图像					

函数形式	$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$		
性质	定义域	值域	过定点
单调性			
函数图像			
重要公式补充			

函数形式	$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$		
性质	定义域	值域	过定点
单调性			
函数图像			
重要公式补充			

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$
定义域						
值域						
单调性						
奇偶性						
周期性						
函数图像						
重要公式补充						