

基础练习题

1. 化简表达式 $\frac{x^2-9}{x^3+27} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)} = \frac{x-3}{x^2-3x+9}$

2. 将表达式 $(1-x)^3$ 展开. $(1-x)^3 = 1-3x+3x^2-x^3$, 公式 $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

3. 求 $x^2+2x-3=0$ 的根

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-2)=0 \Rightarrow x_1=-3, x_2=2.$$

4. 将下列代数式因式分解:

(1) $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ (2) $2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)$

(3) $2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3)$

5. 对 $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ 进行分母有理化. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)} = \sqrt{x^2+1}+x$

6. 将 $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$ 通分. $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2-(x+1)}{x^2-1} = \frac{1-x}{x^2-1}$

7. 化简表达式 $\frac{(x^2y^{-1})^3 \cdot y^2}{x\sqrt{y}} = \frac{x^6 \cdot y^{-3} \cdot y^2}{x \cdot y^{\frac{1}{2}}} = x^5 y^{-\frac{3}{2}}$

8. 解不等式 $|x-3| \leq 1$.

$$-1 \leq x-3 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4$$

9. 解一元二次不等式 $-x^2+x+6 \geq 0$. $-2 \leq x \leq 3$

10. 将圆 $x^2+y^2=2y$ 化为标准形式. $x^2+(y-1)^2=1$

11. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{x-2} + \arcsin \frac{x-1}{2}$; $2 \leq x \leq 3$

(2) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 求函数 $f(3x-1)$ 的定义域. $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$

12. 求下列函数的值

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x-3, & x \geq 0 \\ 2x-1, & x < 0 \end{cases}$, 求 $f(f(1)) = f(-4) = -9$

(2) $f(x) = e^{2x} - 1, g(x) = |\sin x - 1|$, 求 $f\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = e - 1$

13. 判断下列每组函数是否为同一个函数

(1) $f(x) = \frac{x}{x}, g(x) = 1$; 否 (2) $f(x) = \sqrt[3]{x^3}, g(x) = \sqrt[2]{x^2}$ 否

14. 讨论 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1), (1,2), (2,+\infty), (0,+\infty)$ 上的有界性

无界, 有界, 有界, 无界

15. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x^2 \sin x$; 奇函数 (2) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$: 偶函数

16. 求下列函数的周期 (10 分):

(1) $f(x) = \sin 3x$; $\frac{2\pi}{3}$ (2) $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}$, 12π

17. 求下列函数的反函数:

(1) $y = 3x - 1$; $y = \frac{x+1}{3}$ (2) $y = 3^x + 2$, $y = \log_3(x-2)$

18. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, 求 (1) $f(2x)$: (2) $f(f(x))$

$$f(2x) = \frac{1}{2x+1}, \quad f(f(x)) = \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{\frac{1}{x+1}+1} = \frac{x+1}{1+x+1} = \frac{x+1}{x+2}$$

19. 已知 $f(\ln x) = 2x - 1$, 求 $f(x)$. $f(x) = 2e^x - 1$