二期加测 28　利用定积分求旋转体的体积 真题答案

姓名____________成绩________________

九、最值问题——五年内只有 22 数三考过

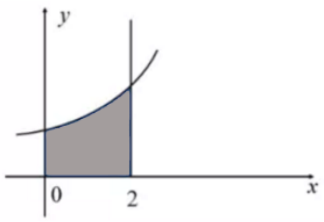
1. 【解析】（1）由$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{k} \\ y=x \end{cases}$的交点$(0,0);(k,k)$

所以$S=\int_0^k (x-\dfrac{x^2}{k})dx+\int_k^2(\dfrac{x^2}{k}-x)dx=(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{3k}x^3)\Big|_0^k+(\dfrac{1}{3k}x^3-\dfrac{x^2}{2})\Big|_k^2=\dfrac{8}{3k}+\dfrac{k^2}{3}-2$

（2）$S'=\dfrac{2k}{3}-\dfrac{8}{3k^2}$，令$S'=\dfrac{2k}{3}-\dfrac{8}{3k^2}=0$得$k=\sqrt[3]{4}$，唯一的驻点，没有不可导点，所以$k=\sqrt[3]{4}$时，面积最小，最小面积为$S(\sqrt[3]{4})=2\sqrt[3]{2}-2$

十、定积分求体积——五年内数一考了 2 次（ 21 和 23 应用）、数二考了 1 次（ 23 应用）（ 23 新增）

1. 【解析】画出图形



体积$V=\pi\int_0^2 e^{2x}dx=\dfrac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^2=\dfrac{\pi}{2}(e^4-1)$

2. 【解析】由$\begin{cases} x+y=2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$得交点$(1,1)$

所以旋转体的体积为：$V_x=\pi\int_0^1[(2-x)^2-x]dx$

$=\pi\int_0^1[(2-x)^2-x]dx=\pi\int_0^1[4-5x+x^2]dx=\pi（4x-\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{x^3}{3})\Big|_0^1=\dfrac{11\pi}{6}$

3. 【解析】由$\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x \\ y=\sqrt{4-x^2} \end{cases}$得交点$(\sqrt{3},1)$

所以旋转体的体积为：$V_x=\pi\int_0^{\sqrt{3}}(4-x^2-\dfrac{1}{3}x^2）dx=\pi\int_0^{\sqrt{3}}(4-\dfrac{4}{3}x^2）dx$

$$=\pi(4x-\frac{4}{9}x^3)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{8}{3}\sqrt{3}\pi$$

所以旋转体的体积为$\frac{8}{3}\sqrt{3}\pi$

4. (2025 数一)设平面图形D是由曲线 $y=e^x, y=\sqrt{2x-x^2}$ 和直线$x=0, x=1$所围成的封闭区域，求D绕x轴旋转一周得到的旋转体体积.

解析： $V=\pi\int_0^1[e^{2x}-\left(2x-x^2\right)]dx=\pi(\frac{1}{2}e^{2x}-x^2+\frac{x^3}{3})\Big|_0^1=\pi\left(\frac{e^2}{2}-\frac{7}{6}\right)$

5. (2025 数二)求由曲线$y=x^2+1, y=\sqrt{x}$ 与直成 $x=0, x=2$ 所用成的图形绕x轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

解析：

$$V_x=\pi\int_0^2[(x^2+1)^2-x]dx=\pi\int_0^2(x^4+2x^2-x+1)dx=\pi(\frac{x^5}{5}\Big|_0^2+\frac{2}{3}x^3\Big|_0^2-\frac{x^2}{2}\Big|_0^2+x\Big|_0^2)=\frac{176\pi}{15}$$