

加测 14 极值 3 答案

10. (2024 数三) 求函数 $f(x) = (2x^2 - 8x)\ln x - 3x^2 + 16x$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值

解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

$$f'(x) = (4x - 8)\ln x + (2x^2 - 8x)\frac{1}{x} - 6x + 16 = (4x - 8)(\ln x - 1)$$

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x_1 = 2, x_2 = e$

$f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单增, 在 $(2, e)$ 单减, 在 $(e, +\infty)$ 单增

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(2) = 20 - 8\ln 2$, 极小值为 $f(e) = 8e - e^2$

11. (2025 数一) 求函数 $f(x) = x - \ln(1 + x^2) - 4\arctan x$ 的极值. 并判断是极大值还是极小值.

解析: 由题知 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{1+x^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{2x^2 + 8x - 2}{(1+x^2)^2}$$

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = -1, x = 3$ 无不可导点

$$f''(-1) = -2 < 0, f''(3) = \frac{2}{5} > 0$$

所以函数的极大值为 $f(-1) = \pi + 1 - \ln 2$, 极小值为 $f(3) = 3 - \ln 10 - 4\arctan 3$

12. (2025 数二) 求函数 $f(x) = (x^2 - 4x - 12)\ln(2+x) - \frac{x^2}{2} + 6x$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值.

$$\text{解析: } f'(x) = (2x - 4)\ln(2+x) + \frac{x^2 - 4x - 12}{2+x} - x + 6 = (2x - 4)\ln(2+x)$$

$$f''(x) = 2\ln(2+x) + \frac{2x-4}{x+2}$$

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = -1, 2$

所以 $f''(-1) = -6 < 0, f''(2) = 2\ln 4 > 0$

所以极大值为 $f(-1) = -\frac{13}{2}$, 极小值为 $f(2) = 10 - 16\ln 4$

13. (2025 数三) 求函数 $f(x) = (2x-3)e^{2x} - 2x^2 + 4x$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值

解析: $f'(x) = 4xe^{2x} - 4e^{2x} - 4x + 4 = 4e^{2x}(x-1) - 4(x-1) = 4(x-1)(e^{2x}-1)$

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = 0, 1$

$$f''(x) = 8xe^{2x} - 4e^{2x} - 4$$

所以 $f''(0) = -8 < 0, f''(1) = 4e^2 - 4 > 0$

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(0) = -3$, 极小值为 $f(1) = 2 - e^2$