加测 25 定积分的计算答案

抽象函数的定积分——五年内数三考了 2 次（ 23 和 24 选择）

1.【答案】C

【解析】$\int_0^4 xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^4 x\mathrm{d}f(x)=xf(x)\Big|_0^4-\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$

$$=4f(4)-0-\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=4-\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=3$$

所以$\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=1$

2. 【答案】C

【解析】令$\frac{1}{x}=t,\therefore x=\frac{1}{t},dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\int_1^2\frac{1}{x}f(\frac{1}{x})dx=-\int_1^{\frac{1}{2}}tf(t)\frac{1}{t^2}dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\frac{1}{t}dt=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f(x)}{x}dx$$

3. （2025 数一） 已知 $f(x)$ 在 R 上连续且$\int_1^2 f(2x)\mathrm{d}x=1$ ，则$\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=\underline{2}$.

4. （2025 数二）已知函数 $f(x)$ 在 R 上连续，且$\int_0^3 f(x)=1$，则$\int_0^1 f(3x)=\underline{\frac{1}{3}}$

5. （2025 数三）已知 $f(x)$ 在 R 上连续且$\int_0^1 xf\left(x^2\right)dx=3$，则$\int_0^1 f(x)dx=$（ D ）

A. $\frac{3}{2}$　　　B. $\frac{1}{2}$　　　C. 3　　　D. 6

6. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上连续，且$\int_0^1 f(2x)dx=1$ ，则$\int_0^1[f(x)+f(x+1)]dx=\underline{2}$

凑微分法——五年内数三考了 2 次（ 22 和 23 计算）

1. 【解析】$\int_{-1}^3\left(\sqrt{x+1}-x\right)dx=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^3-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^3=\frac{4}{3}$

2. 【解析】$\int_0^1\left(x^3-x\right)\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2-1\right)\sqrt{1-x^2}dx^2$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}d(1-x^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=-\frac{1}{5}$$

分部积分法——五年内数一考了 1 次（ 24 计算）、数二考了 2 次（ 20 和 23 计算）、数三考了 2 次（ 20 和 24 计算）

1. 【解析】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)d\sin x=(x-1)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xd(x-1)$

$$=\frac{\pi}{2}-1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{\pi}{2}-1+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1+(0-1)=\frac{\pi}{2}-2$$

2. 【解析】$\int_1^4\frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_1^4(1+\ln x)\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\left[\sqrt{x}(1+\ln x)\Big|_1^4-\int_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}(\ln x+1)\right]$

$$=2\left[2(1+\ln 4)-1-\int_1^4\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right]=4(1+2\ln 2)-2-\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=8\ln 2+2-2\sqrt{x}\Big|_1^4$$

$$=8\ln 2+2-2(2-1)=8\ln 2-2$$

3. 【解析】

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\sin 2xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\sin x\cos xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\sin xd\sin x=2\int_0^1e^ttdt$$

$$=2\int_0^1tde^t=2te^t\Big|_0^1-2\int_0^1e^tdt=2e-2(e-1)=2$$

4. 【解析】

$$\int_0^1xe^{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1e^{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)=-\frac{1}{2}\int_1^0e^{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^1e^{\sqrt{t}}dt\underline{\underline{\sqrt{t}=u}}\frac{1}{2}\int_0^12ue^udu$$

$$=\int_0^1ude^u=ue^u\Big|_0^1-e^u\Big|_0^1=1$$

5. 【解析】 $\int_0^1x^2\ln(x^2+1)dx=\int_0^1\ln(x^2+1)d\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{3}\ln(x^2+1)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1x^3d\ln(1+x^2)$

$$=\frac{1}{3}\ln 2\text{-}\frac{2}{3}\int_0^1\frac{x^4}{1+x^2}dx=\frac{\ln 2}{3}-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx=\frac{\ln 2}{3}-\frac{2}{3}\int_0^1(x^2-1+\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{\ln 2}{3}-\frac{2}{3}(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-x\Big|_0^1+\arctan x\Big|_0^1)=\frac{\ln 2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{\pi}{6}$$

6. (2025 数一)求定积分 $\int_0^4\ln(2+\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

解析：令 $\sqrt{x}=t$

$$\int_0^4\ln(2+\sqrt{x})\mathrm{d}x=\int_0^2\ln(2+t)dt^2=t^2\ln(2+t)\Big|_0^2-\int_0^2t^2d\ln(2+t)$$

$$=4\ln 4-\int_0^2\frac{t^2}{2+t}dt=4\ln 4-\int_0^2\frac{t^2-4+4}{2+t}dt=4\ln 4-\int_0^2(t-2+\frac{4}{2+t})dt$$

$=4\ln 4-\frac{t^2}{2}\Big|_0^2+2t\Big|_0^2-4\ln|2+t|\Big|_0^2=4\ln 2+2$

7. (2025 数三)已知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续且 $\int_0^2[f(x)+xf'(x)]dx=1$，则 $f(2)=$（ B ）

A. 1　　　　B. $\frac{1}{2}$　　　　C. 2　　　　D. 4

根式代换---五年内数二考了 2 次（ 21 和 22 计算）、数三考了 1 次（ 21 计算）

1. 【解析】设 $\sqrt{2x-1}=t\Rightarrow x=\frac{t^2+1}{2}\Rightarrow dx=tdt$，当 $x=1,t=1$ ；当 $x=5,t=3$ ；

原式 $=\int_1^3 e^t tdt=\int_1^3 tde^t=te^t\Big|_1^3-\int_1^3 e^t dt=3e^3-e-e^t\Big|_1^3=2e^3$.

2. 【解析】令 $\sqrt{x-1}=t\Rightarrow x=t^2+1\Rightarrow dx=2tdt$，当 $x=1$ 时 $t=0$，当 $x=2$ 时 $t=1$

所以 $\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}}dx=\int_0^1 e^t\cdot 2tdt=2\int_0^1 tde^t=2te^t\Big|_0^1-2\int_0^1 e^t dt=2e-2(e-1)=2$.

3. 【解析】令 $\sqrt{x+1}=t,x=t^2-1$，$dx=2tdt$，$x=0,t=1;x=3,t=2$

$$\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2\frac{t^2-1}{t}\cdot 2tdt=2\int_1^2(t^2-1)dt=(\frac{2t^3}{3}-2t)\Big|_1^2=\frac{8}{3}$$

4. (2025 数二)求定积分 $\int_0^1 x\arctan\sqrt{x}dx$

解析：令 $\sqrt{x}=t$

$\int_0^1 x\arctan\sqrt{x}dx=\int_0^1 t^2\arctan tdt^2=2\int_0^1 t^3\arctan tdt=\frac{1}{2}\int_0^1 arc\tan tdt^4$

$=\frac{1}{2}t^4\arctan t\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^4}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^4-1+1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1(t^2-1+\frac{1}{1+t^2})dt$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{t^3}{6}\Big|_0^1+\frac{1}{2}t\Big|_0^1-\frac{1}{2}\arctan t\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

5. (2025 数三)求定积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}dx$

解析：令 $1+\sqrt{x}=t$，所以

$\int_0^1\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}dx=\int_1^2\frac{\ln t}{t}\cdot 2(t-1)dt=2\int_1^2(\ln t-\frac{\ln t}{t})dt=2\int_1^2\ln tdt-(\ln t)^2\Big|_1^2$

$$= 2t\ln t\Big|_1^2 - 2\int_1^2 td\ln t - (\ln 2)^2 = 4\ln 2 - 2 - (\ln 2)^2$$