加测 17　导数提高题答案

（1）解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3)-f(3-3x^2)}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3)-f(3-3x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3-3x^2)-f(3)}{-x^2}$

$=3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3-3x^2)-f(3)}{-3x^2}=3f'(3)=3$，所以 $f'(3)=1$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x^2)-xf(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{f(2x^2)}{x^2}-\dfrac{f(x)}{x})$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(0+2x^2)-f(0)}{x^2}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=2f'(0)-f'(0)=f'(0)=1$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(3+x)-f(3)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\dfrac{f(3+x)-f(3)}{x}}=\dfrac{1}{f'(3)}=-2$ 所以 $f'(3)=\dfrac{1}{-2}$

因为 $f(x)$ 是可导的偶函数，所以 $f'(x)$ 是奇函数，所以 $f'(-3)=-f'(3)=\dfrac{1}{2}$

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=-3$ 处的切线斜率为 $f'(-3)=\dfrac{1}{2}$.

（4）解：当 $x<0$ 时，$f'(x)=\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)'=-\dfrac{1}{(2x-1)^2}$ ；

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\left(e^x\sin x\right)'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$ ；

当 $x=0$ 时，$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\dfrac{x}{2x-1}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{2x-1}=-1$.

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x\sin x-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^x=1$,

显然 $f_-'(0)\neq f_+'(0)$ ，从而 $f'(0)$ 不存在.

综上可得 $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(2x-1)^2}, & x<0\\ e^x(\sin x+\cos x), & x>0\end{cases}$

（5）求曲线 $y^2+2e^{xy}=3y$ 在 $x=0$ 对应点处的切线方程

解：将 $x=0$ 带入方程得 $y^2+2=3y$，解得 $y_1=1, y_2=2$.

在方程 $y^2+2e^{xy}=3y$ 两边对 x 求导，得 $2yy'+2e^{xy}\left(y+xy'\right)=3y'$，

解得 $y'=\dfrac{2y\mathrm{e}^{xy}}{3-2x\mathrm{e}^{xy}-2y}$ ，于是 $y'\big|_{\substack{x=0\\y=1}}=2, y'\big|_{\substack{x=0\\y=2}}=-4$.

所以曲线在 $(0,1)$ 的切线方程为 $y-1=2(x-0)$ ，即 $2x-y+1=0$ ；

曲线在 $(0,2)$ 的切线方程为 $y-2=-4(x-0)$ ，即 $4x+y-2=0$.

（6）求 $\begin{cases} x=e^t\sin 2t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线和法线

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\left(\mathrm{e}^t\cos t\right)'}{\left(\mathrm{e}^t\sin 2t\right)'}=\dfrac{\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t}{\mathrm{e}^t\sin 2t+2\mathrm{e}^t\cos 2t}=\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t}$,

当 $x=0, y=1$ 时

于是切线斜率为 $k_1=\dfrac{1}{2}$，切线方程为 $y-1=\dfrac{1}{2}(x-0)$，即 $x-2y+2=0$.

法线斜率 $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-2$，法线方程为 $y-1=-2(x-0)$，即 $2x+y-1=0$.