

## 第一章函数、极限与连续真题

一、求定义域(五年内数一考了2次、数二考了3次、数三考了4次)

1. (2024·数二) 函数  $y = \sin \sqrt{3-x}$  的定义域为 ( D )

- A.  $(3, +\infty)$     B.  $[3, +\infty)$     C.  $(-\infty, 3)$     D.  $(-\infty, 3]$

2. (2023·教一) 函数  $y = \ln(3x-1)$  的定义域是 ( A )

- A.  $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$     B.  $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$     C.  $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$     D.  $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

3. (2023数二) 函数  $y = \sqrt{4-2x}$  的定义域是  $(-\infty, 2]$ .

4. (2023·教三) 函数  $y = e^{\sqrt{x-2}}$  的定义域是 ( A )

- A.  $[2, +\infty)$     B.  $(-\infty, 2]$     C.  $(2, +\infty)$     D.  $(-\infty, 2)$

5. (2022教三) 函数  $\cos \sqrt{4-x^2}$  的定义域是 ( D )

- A.  $(-\infty, 2]$     B.  $[2, +\infty)$     C.  $(-2, 2)$     D.  $[-2, 2]$

6. (2021数三) 函数  $f(x) = \ln(2-x)$  的定义域是 ( D )

- A.  $[2, +\infty)$     B.  $(2, +\infty)$     C.  $(-\infty, 2]$     D.  $(-\infty, 2)$

7. (2020·数一) 函数  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}-1}$  的定义域是  $[3, +\infty)$ .

8. (2020·数二) 函数  $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$  的定义域为  $(3, +\infty)$ .

9. (2020·数三) 函数  $y = \sqrt{x-3}$  的定义域为  $[3, +\infty)$ .

二、求函数值(五年高数一考过1次、数二考过2次、数三考过3次)

1. (2023·数三) 已知  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = x^2$ , 则  $f[g(-1)] = \underline{e}$ .

2. (2022·数二) 已知  $f(x) = \begin{cases} |x-2|, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$ , 则  $f[f(3)] = \underline{2}$ .

3. (2022·数三) 已知  $f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$ , 则  $f[f(5)] = \underline{3}$

4. (2021·数一) 已知函数  $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & |x|>1 \\ 0, & |x|\leq 1 \end{cases}$  则  $f[f(2021)]=\underline{\underline{0}}$ .

5. (2021·数三) 已知函数  $f(x)=\frac{x}{1+x}$ ,  $g(x)=e^x$ , 则  $f[g(0)]=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ .

6. (2020·数二) 已知函数  $f(x)=x^3+3x-2$ ,  $g(x)=\tan x$ , 则  $f\left[g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\underline{\underline{2}}$

### 三、函数的四种特性

**奇偶性**(五年内数一考过1次、数二考过1次、数三考过2次)

1. (2024·数一) 1. 下列函数是偶函数的是 ( B )

- A.  $y = \tan x$       B.  $y = \cos x$       C.  $y = x^3$       D.  $y = 3^x$

2. (2024·数三) 下列函数是奇函数的是 ( B )

- A.  $\ln x$       B.  $x^3$       C.  $\cos x$       D.  $2^x$

3. (2023·数二) 以下函数是奇函数的是 ( D )

- A.  $e^x$       B.  $x^2 + 1$       C.  $\cos x$       D.  $\sin x$

4. (2022·数三) 下列函数是偶函数的是 ( B )

- A.  $\frac{1}{x}$       B.  $-|x|$       C.  $\ln x$       D.  $\tan x$

### 简单的单调性(只有20年数三考过)

5. 以下区间是函数  $y = \sin x$  的单调递增区间的是 ( A )

- A.  $[0, \frac{\pi}{2}]$       B.  $[0, \pi]$       C.  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$       D.  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$

### 周期性(只有24年数三考过)

6. 下列函数是周期函数的是 ( C )

- A.  $x^2$       B.  $e^x$       C.  $\sin x$       D.  $\arcsin x$

### 有界性(只有23年数三考过)

7. 下列函数在其定义域内有界的是 ( D )

- A.  $e^x$       B.  $\ln x$       C.  $x^2$       D.  $\cos x$

### 四、无穷小的比较(五年内数一考过2次、数二考过3次、数三考过5次)

1. (2024·数二)  $x \rightarrow 0$  时, 下列函数是无穷小量的是 ( C )

- A.  $\cos x$       B.  $e^x$       C.  $\ln(1+x)$       D.  $\arcsin(1+x)$

2. (2024·数三) 当  $x \rightarrow 0$  时, 与  $x^2$  为等价无穷小量的是 ( A )

A.  $\sin^2 x$       B.  $\sin 2x$       C.  $\cos^2 x$       D.  $e^{2x-1}$

3. (2023.数一) 当  $x \rightarrow 0$  时, 以下函数不是无穷小量的是( D )

A.  $\tan x$       B.  $\sin 2x$       C.  $\ln(1+x)$       D.  $e^x + 1$

4. (2023.数三) 当  $x \rightarrow 0$  时, 以下不是与  $x$  为等价无穷小量的是( C )

A.  $\sin x$       B.  $e^x - 1$       C.  $1 - \cos x$       D.  $\ln(1+x)$

5. (2022.数二) 当  $x \rightarrow 0$  时, 以下函数不是  $x$  的等价无穷小量的是 ( B )

A.  $\ln(1+x)$       B.  $\cos x$       C.  $\tan x$       D.  $\arctan x$

6. (2022.数三) 当  $x \rightarrow 0$  时, 以下不是无穷小量的是( C )

A.  $x - \sin x$       B.  $x - \tan x$       C.  $x - \cos x$       D.  $1 - \cos x$

7. (2021.数三) 下列选项中为  $x \rightarrow 0$  时的无穷小的是 ( B )

A.  $1 - \sqrt[3]{x}$       B.  $1 - e^x$       C.  $1 - \tan x$       D.  $1 - \sin x$

8. (2020.数一) 当  $x \rightarrow 0$  时, 以下函数是无穷小量的是 ( C )

A.  $e^x$       B.  $\ln(x+2)$       C.  $\sin x$       D.  $\cos x$

9. (2020.数二) 当  $x \rightarrow 0$  时, 以下函数是无穷小量的是 ( C )

A.  $x^2 + 1$       B.  $\sqrt{x+1}$       C.  $\sin x$       D.  $\cos x$

10. (2020.数三) 当  $x \rightarrow 0$  时, 以下函数是无穷小量的是 ( C )

A.  $e^x$       B.  $x + 1$       C.  $\sin x$       D.  $\cos x$

## 五、间断点 (五年数一 2 次, 数二 2 次, 数三 5 次)

1. (2024.数一) 设函数  $f(x) = \begin{cases} 4x + 5, & x < 1 \\ 2 - x^2, & x \geq 1 \end{cases}$ , 则  $x = 1$  是函数的 ( C )

A. 连续点      B. 可去间断点      C. 跳跃间断点      D. 无穷间断点

2. (2024.数三)  $x = 1$  是函数  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$  的 ( D )

A. 可去间断点      B. 跳跃间断点      C. 震荡间断点      D. 无穷间断点

3. (2023.数三) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$ , 则  $x = 1$  是函数  $f(x)$  的 ( B ) 间断点

A. 可去间断点      B. 跳跃间断点      C. 无穷间断点      D. 连续点

4. (2023.数二) 已知函数  $f(x) = \frac{x+4}{x^2 + 4x}$ , 则  $x = -4$  是函数的 ( B )

A. 连续点      B. 可去间断点      C. 跳跃间断点      D. 无穷间断点

5. (2022.数三) 已知函数  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ , 则  $x = 3$  是函数  $f(x)$  的 ( A ) 间断点

- A. 可去间断点      B. 跳跃间断点      C. 无穷间断点      D. 连续点

6. (2021.数一) 已知函数  $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 4}$ , 则  $x = 2$  是  $f(x)$  的 ( D )

- A. 可去间断点      B. 连续点      C. 跳跃间断点      D. 无穷间断点

7. (2021.数二) 已知函数  $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 4}$ , 则  $x = 2$  是函数  $f(x)$  的 ( D )

- A. 连续点      B. 可去间断点      C. 跳跃间断点      D. 无穷间断点

8. (2021.数三) 设函数  $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x}$ , 则  $x = 0$  是函数  $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x}$  的 ( C )

- A. 可去间断点      B. 跳跃间断点      C. 无穷间断点      D. 连续点

9. (2020.数三) 点  $x = 1$  是函数  $y = \frac{x-1}{x^2 - 1}$  的 ( B )

- A. 连续点      B. 可去间断点      C. 跳跃间断点      D. 无穷间断点

## 六、分段函数连续求参数 (五年数一 1 次, 数二 3 次, 数三 5 次)

1. (2024.数三) 已知  $f(x) = \begin{cases} 2a \cos x + b, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ a\sqrt{x+1} - b, & x > 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  连续, 求实数  $a, b$  的值.

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2a \cos x + b) = 2a + b, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a\sqrt{x+1} - b) = a - b$$

因为  $f(x)$  在  $x = 0$  连续, 所以  $2a + b = a - b = 2$ , 所以  $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{2}{3}$ .

2. (2023.数三) 已知  $f(x) = \begin{cases} ae^{x-1}, & x > 1 \\ b, & x = 1 \\ x^2 + ax - b, & x < 1 \end{cases}$  在  $x = 1$  连续, 求实数  $a, b$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax - b) = 1 + a - b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ae^{x-1} = a$$

因为  $f(x)$  在  $x = 1$  连续, 所以  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

所以  $1 + a - b = a = b$ , 解得:  $a = b = 1$

3. (2022. 数一) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ b - \cos x, & x > 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  连续, 则  $a$  和  $b$  的值为 ( A )

- A.  $a = 1, b = 2$       B.  $a = 1, b = -2$       C.  $a = -1, b = 2$       D.  $a = -1, b = -2$

4. (2022. 数二) 已知  $f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin^2 x}{x^2}, & x < 0 \\ 2x^2 + 3, & x \geq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a = \underline{3}$ .

5. (2022. 数三) 已知  $f(x) = \begin{cases} e^x + b, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ a + \frac{b \sin x}{x}, & x > 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  连续, 求  $a, b$  的值.

**解:**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + b) = 1 + b$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( a + \frac{b \sin x}{x} \right) = a + b$$

因为  $f(x)$  在  $x = 0$  连续, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

所以  $1 + b = a + b = 0$ , 所以  $a = 1, b = -1$

6. (2021. 数二) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{\sqrt{1+x}-1}, & x > 0 \\ 2b+1, & x = 0 \\ b+2 \cos x, & x < 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 求实数  $a, b$ .

**解析:** 左极限为  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (b + 2 \cos x) = b + 2$

$$\text{右极限为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax(\sqrt{1+x}+1)}{x} = 2a$$

函数值为  $f(0) = 2b + 1$ , 因为函数在  $x = 0$  处连续, 所以左极限=右极限=函数值,

即  $b + 2 = 2a = 2b + 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = 1$ .

7. (2021. 数三) 设函数  $f(x) = \begin{cases} b + \ln(1 + x^2), & x < 0 \\ 2b - e, & x = 0 \\ \frac{1}{(1 + ax)^x}, & x > 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  连续, 求实数  $a, b$  的值.

**解析:**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (b + \ln(1 + x^2)) = b$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{ax} \cdot a} = e^a$$

因为函数  $f(x)$  在  $x = 0$  连续, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

即:  $e^a = b = 2b - e$ , 求得  $a = 1, b = e$ .

8. (2020. 数二) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{\sqrt{1+x}-1}, & x > 0 \\ 2b+1, & x = 0 \\ b+2\cos x, & x < 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 求实数  $a, b$ .

**解析:** 左极限为  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (b + 2\cos x) = b + 2$

右极限为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax(\sqrt{1+x}+1)}{x} = 2a$

函数值为  $f(0) = 2b + 1$ , 因为函数在  $x = 0$  处连续, 所以左极限=右极限=函数值,

即  $b + 2 = 2a = 2b + 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = 1$ .

9. (2020. 数三) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin x}{x} + b, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ \frac{x}{2} - a, & x < 0 \end{cases}$  在点  $x = 0$  连续, 求实数  $a, b$ .

**解析:**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{x}{2} - a \right) = -a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{a \sin x}{x} + b \right) = a + b$

因为  $f(x)$  在点  $x = 0$  连续, 所以  $-a = a + b = 2$ , 所以  $a = -2, b = 4$

## 七、求极限

$\frac{0}{0}$  型 (五年最高频率)

$$1. \text{ (2024. 数二) 求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x}}{x}$$

$$\begin{aligned}\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x})(\sqrt{4+3x} + \sqrt{4-3x})}{x(\sqrt{4+3x} + \sqrt{4-3x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x(\sqrt{4+3x} + \sqrt{4-3x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{\sqrt{4+3x} + \sqrt{4-3x}} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$2. \text{ (2024. 数二) 求极限 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{1 - x + \ln x}.$$

$$\begin{aligned}\text{解: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{1 - x + \ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -1.\end{aligned}$$

$$3. \text{ (2024. 数一) 求极限 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} + x - 2}{1 - x - \ln x}.$$

$$\begin{aligned}\text{解: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} + x - 2}{1 - x - \ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} + 1}{-1 - \frac{1}{x}} = \frac{1+1}{-1-1} = -1\end{aligned}$$

$$4. \text{ (2023. 数一) 求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - \cos x}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} \sin x + \sin x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} + 1}{2x} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} + 1}{2x} \sin x = 1\end{aligned}$$

$$5. \text{ (2023. 数二) 求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\cos x-1}-1)e}{x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{e}{2}\end{aligned}$$

$$6. \text{ (2023. 数三) 求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x}.$$

**解:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)\sin x} = 1$

7. (2022 数一) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}$ .

**解:**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}{2x-4} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x-3}+1) = 1$ .

8. (2022 数一) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2}$ .

**解:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9x^2}{2}}{3x^2} = \frac{3}{2}$ .

9. (2022 数二) 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 3x} = (\text{ C } \quad)$

- A.  $-\frac{1}{3}$       B. 0      C.  $\frac{1}{3}$       D.  $\infty$

10. (2022 数二) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ .

**解:**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3}+2) = 4$

11. (2022 数三) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x}{e^x - 1}$ .

**解:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$ .

12. (2021 数二) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \tan x}$ .

**解析:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{-\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{-x^2} = -3$  (先用洛必达法则、恒等变形, 再用无穷小替换).

13. (2021 数三) 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{2x} = 1$ , 则  $a = (\text{ C })$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

14. (2021 数三) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^4}{x - \sin x}$

**解析:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^4}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 4x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 4x^3}{\frac{x^2}{2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} (3 + 4x) = 6$

15. (2020 数三) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2}$ .

**解析:**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2x-3} = 1$

16. (2020 数三) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x - 1}{2x}$ .

**解析:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{2} = 1$

$\infty - \infty$  型 (五年高频率)

17. (2020. 高数二) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x-2} \right)$ .

**解析:**  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{x-2} \right)$   
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-1)(x-2)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x-1} = -1$

18 (2020. 高数一) 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + x + 2} - x \right)$ .

**解析:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + x + 2} = 2$

19. (2021. 高数三) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x} - \frac{1}{x} \right)$

**解析:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 - (x+2)}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+2} = -\frac{1}{2}$

20. (2021. 高数二) 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x - 1} - x \right).$

**解析:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 2) - x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x - 1} = 1$  (先通分再利用重要结论).

21. (2023. 高数三) 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x).$

**解:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + x} - 2x)(\sqrt{4x^2 + x} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} = \frac{1}{4}$

22. (2023. 高数二) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 + 3x} \right).$

**解:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 + 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3 - 3}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{3}$

23. (2023. 高数一) 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x).$

**解:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{2}$

24. (2024. 高数一) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x}{x - 3} - \frac{9}{x^2 - 3x} \right).$

**解:**  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x}{x - 3} - \frac{9}{x^2 - 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{x} = 2$

25. (2024. 高数三) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x^2 - x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right).$

**解:**  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x^2 - x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1 - 2x}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x(x + 1)} = -\frac{1}{2}$

1<sup>∞</sup>型 (第二个重要极限) (五年高频率)

26. (2021. 高数一) 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x$ .

**【解析】**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3} \cdot 3}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^3}{e} = e^2$

27. (2021. 高数二) 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x}\right)^x = 2$ , 则  $a = \underline{\ln 2}$ .

28. (2022. 高数一) 设极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{kx} = e^2$ , 则  $k = \underline{6}$ .

29. (2022. 高数二) 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{-3x}$ .

**解:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{-3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot (-6)} = e^{-6}$ .

30. (2022. 高数三) 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{2x}$ .

**解:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x \cdot \frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

31. (2023. 高数一) 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{5}{x}} = \underline{e^5}$ .

32. (2023. 高数三) 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{3x}\right)^x = \underline{e^{-\frac{4}{3}}}$ .

34. (2024. 高数一) 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \underline{e^{\frac{1}{2}}}$ .

35. (2024. 高数二) 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{\sin x}} = \underline{e^2}$ .

36. (2024. 高数三) 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{a}{x}} = e$ , 则  $a = \underline{\frac{1}{3}}$ .

## 八、极限的四则运算

1. (2024. 数三) 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -3$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(b_n + 1) = \underline{4}$ .
2. (2022. 数三) 已知  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) \cdot g(x)] = \underline{4}$ .
3. (2021. 数二) 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + 2b_n) = \underline{5}$ .
4. (2021. 数三) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 2b_n) = \underline{12}$ .

## 九、利用零点定理的证明题

1. (2021. 高数一) 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 且  $f(0) \neq 0$ ,  $0 < f(1) < 1$ , 证明: 存在

$x_0 \in (0,1)$ , 使得  $f^2(x_0) = x_0$

**【解析】** 证明: 构造辅助函数  $F(x) = f^2(x) - x$ , 因为  $f(x)$  在  $[0,1]$  连续, 所以  $F(x)$  在  $[0,1]$  连续;

因为  $f(0) \neq 0, 0 < f(1) < 1$ , 所以  $F(0) = f^2(0) > 0, F(1) = f^2(1) - 1 < 0$ , 即  $F(0) \cdot F(1) < 0$ ;

所以由零点定理可知, 至少存在一点  $x_0 \in (0,1)$  使得  $F(x_0) = 0$ , 即  $f^2(x_0) = x_0$

2. (2020. 高数一) 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 且  $f(1) = 1$ , 证明对于任意的  $\lambda \in (0,1)$ ,

存在  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $f(\xi) = \frac{\lambda}{\xi^2}$ .

**解析:** 构造辅助函数  $F(x) = x^2 \cdot f(x) - \lambda$ ,  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续,

$$F(1) = -\lambda < 0; F(2) = f(1) - \lambda = 1 - \lambda > 0 \Rightarrow F(0) \cdot F(1) < 0,$$

由零点定理, 则至少存在一点  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $F(\xi) = 0$  成立

即  $F(\xi) = \xi^2 \cdot f(\xi) - \lambda = 0$ , 因为  $\xi^2 \neq 0$ , 所以  $f(\xi) = \frac{\lambda}{\xi^2}$ .

3. (2022. 高数一的第一问) 设函数  $f(x)$  在  $[1,3]$  连续, 在  $(1,3)$  可导, 且

$f(1) = f(2) = 1, f(3) = 0$ , 证明: (1) 存在  $\xi \in (2,3)$ , 使得  $f(\xi) = \frac{1}{\xi}$  成立.

证明: 设  $F(x) = f(x) - \frac{1}{x}$

(1) 因为  $f(x)$  在  $[1,3]$  连续, 所以  $F(x)$  在  $[2,3]$  连续, 因为  $F(2)=f(2)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$

$F(3)=f(3)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}<0$ , 所以由零点定理知存在  $\xi \in (2,3)$ , 使得  $F(\xi)=0$ , 即

$$f(\xi)-\frac{1}{\xi}=0.$$

4. (2023. 高数二的第一问) 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  连续, 在  $(0,1)$  可导, 且  $f(0)>0, f(1)<1$ ,

证明: (1) 存在  $x_0 \in (0,1)$  使得  $f(x_0)=x_0$ ;

**证明:** (1) 令  $F(x)=f(x)-x$

则  $F(x)$  在  $[0,1]$  连续, 因为  $f(0)>0, f(1)<1$ , 所以  $F(0)>0, F(1)=f(1)-1<0$

所以由零点定理知存在  $x_0 \in (0,1)$  使得  $F(x_0)=0$ , 即  $f(x_0)=x_0$ .

5. (2023. 高数一的第一问) 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  连续, 且  $\int_0^1 f(x)dx=1$ ,

证明: (1) 对于任意整数  $n \geq 2$ , 存在  $x_0 \in (0,1)$ , 使得  $\int_0^{x_0} f(x)dx=\frac{1}{n}$ .

**证明:** (1) 令  $F(x)=\int_0^x f(x)dx-\frac{1}{n}$ , 所以  $F(x)$  在  $[0,1]$  连续,  $F(0)=-\frac{1}{n}<0$ ,

$$F(1)=1-\frac{1}{n}>0$$

所以由零点定理知对于任意整数  $n \geq 2$ , 存在  $x_0 \in (0,1)$ , 使得  $F(x_0)=0$ , 即

$$\int_0^{x_0} f(x)dx=\frac{1}{n}$$