加测 24 定积分的性质真题答案

线性性质——五年内数一考了 1 次（ 20 填空）、数二考了 3 次（ 20 选择、 23 和 24 填空）、数三考了 3 次（ 20、23、24 填空）

1. 【答案】2

【解析】（线性性质）$\int_a^b[2f(x)+3g(x)]dx=2\int_a^b f(x)dx+3\int_a^b g(x)dx=2+3\int_a^b g(x)dx=8$

所以$\int_a^b g(x)dx=2$

2.【答案】D

【解析】$\int_a^b[3f(x)-2g(x)]dx=3\int_a^b f(x)dx-2\int_a^b g(x)dx=6-2=4$

3.【答案】4

【解析】$\int_0^1[3f(x)-2]dx=3\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 2dx=6-2=4$

4.【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解析】$\int_a^b[2f(x)-3g(x)]dx=2\int_a^b f(x)dx-3\int_a^b g(x)dx=6-3\int_a^b g(x)dx=5$

所以$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$

5.【答案】6

$\int_a^b[3f(x)+4g(x)]dx=3\int_a^b f(x)dx+4\int_a^b g(x)dx=-6+12=6$

6.【答案】4

【解析】令$\int_a^b f(x)dx=A$，$\int_a^b g(x)dx=B$

则$\begin{cases}A+3B=8\\2A-B=2\end{cases}$，解得$A=2,B=2$，所以$\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=4$

7.【答案】$\dfrac{7}{5}$

【解析】令$\int_1^2 f(x)dx=A$，$\int_1^2 f(x)dx=B$

则$\begin{cases}A+2B=2\\2A-B=1\end{cases}$，解得$A=\dfrac{4}{5},B=\dfrac{3}{5}$，所以$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=\dfrac{7}{5}$

可加性---五年内数三考了 3 次

1.【答案】D

【解析】令$2x=t,x=\dfrac{t}{2},dx=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$，当$x=0$时，$t=0$，当$x=1$时，$t=2$，

所以 $\int_0^1 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=1,\therefore\int_0^2 f(t)dt=2$，即 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$

所以$\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2+2=4$

2.【答案】-3

【解析】$\int_4^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_4^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-5+2=-3$

3.【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】因为$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$，所以

$\int_0^1 f(x)dx+4\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+1$

所以$3\int_1^2 f(x)dx=1,\therefore\int_1^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$

保号（序）性——五年内数二考了 1 次（ 22 选择)、数三考了 3 次 21.22.24 选择)

1. 【答案】C
2. 【答案】A

【解析】因为当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\tan x>x>\sin x$，当$0<x<1<\frac{\pi}{2}$时，$x>x^2,\sin x>\sin^2 x$，

所以当$0<x<1$ 时，$\tan x>x>x^2>\sin^2 x>0$，所以 $\int_0^1\sin^2 xdx$ 最小

3. 【答案】B
4. 【答案】D

【解析】$I_1=\int_{-1}^1\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x,I_2=\int_{-1}^1\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0,\int_{-1}^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

又因为 $0<\cos x<1$，所以 $\frac{\cos x}{1+x^2}<\frac{1}{1+x^2}$ ，所以 $0<\int_0^1\frac{\cos x}{1+x^2}dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

所以$I_2\le I_1\le I_3$

5. D
6. C

偶倍奇零——五年内数一考了 1 次（21 计算)、数二考了 1 次（ 24 计算）

1.【答案】2

【解析】因为 $f(|x|)$ 为偶函数，所以，所以$\int_{-1}^1 f(|x|)=2\int_0^1 f(|x|)x=2\int_0^1 f(x)x=2$

2.【解析】

$$\int_{-1}^{1}\frac{|x|-x-2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x-4\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}\left(1+x^2\right)-4\arctan x\Big|_0^1=\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1-4\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\ln 2-\pi$$

方程问题（定积分是一个常数）——五年内数二考了 1 次（ 23 填空）、数三考了 1 次（ 23 填空）

1.【答案】$-\dfrac{5}{2}$

【解析】令 $\dfrac{x}{2}=t$, 则 $x=2t,\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$ ，当 $x=0$ 时， $t=0$, 当 $x=4$ 时, $t=2$

所以 $\int_0^4 f\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ ，所以 $f(x)=3x+2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

令 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=A$，则 $f(x)=3x+2A$

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(3x+2A)\mathrm{d}x=\left(\frac{3}{2}x^2+2Ax\right)\Big|_0^2=6+4$$

所以 $A=6+4A,3A=-6,A=-2$ ，故 $f(x)=3x-4$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(3x-4)\mathrm{d}x=\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}-4=-\frac{5}{2}$$

2. 【答案】-14

【解析】令 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=A,\therefore f(x)=3x^2-2x+A$，所以

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3(3x^2-2x+A)dx$$

所以 $A=\left(x^3-x^2+Ax\right)\Big|_0^3=27-9+3A=18+3A$，所以 $2A=-18,A=-9$

所以 $f(x)=3x^2-2x-9$ ，所以

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(3x^2-2x-9\right)\mathrm{d}x=\left(x^3-x^2-9x\right)\Big|_0^2=8-4-18=-14$$