填空选择题每小题 3 分，大题每题 6 分，共 60 分

一、导数的定义

1. (2025 数二)若 $f'(5)=2$ ，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(5+k\Delta x)-f(5+\Delta x)}{\Delta x}=3, k=$（ D ）

A. 2　　B. 3　　C. $-\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{5}{2}$

2. (2025 数三)已知函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+4h)-f(2+h)}{h}=6$ ，则

$f'(2)=$（ C ）

A. 6　　B. -6　　C. 2　　D. -2

二、求导的四则运算法则

1. (2020 数三) $\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)'=$（ D ）

A. $\sin x$　　B. $-\sin x$　　C. $\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}$　　D. $\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$

2. (2021 数三) 已知函数 $f(x)=2^x+x+3$，则 $f''(x)=2^x(\ln 2)^2$.

【解析】本题考查和差的二阶导数.

因为 $f'(x)=2^x\ln 2+1$ ，所以 $f''(x)=2^x\ln 2\cdot\ln 2=2^x(\ln 2)^2$

3. (2022 数三) 已知函数 $y=2x+\dfrac{1}{x+1}$，则 $y''=$__________________.

【答案】 $\dfrac{2}{(x+1)^3}$

【解析】本题考查二阶导数. $y'=2-\dfrac{1}{(x+1)^2}, \therefore\ y''=-\dfrac{-2(x+1)}{(x+1)^4}=\dfrac{2}{(x+1)^3}$

三、复合函数

1.【答案】 $4e^{2x}$

【解析】本题考察复合函教二阶导. 因为 $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}$，所以 $f'\,'(x)=4\mathrm{e}^{2x}$

2. (2023 数三)函数 $y=\ln(2x+5)$，则 $y''=$（ A ）

A. $-\dfrac{4}{(2x+5)^2}$　　B. $\dfrac{4}{(2x+5)^2}$　　C. $-\dfrac{2}{(2x+5)^2}$　　D. $\dfrac{2}{(2x+5)^2}$

3. (2024 数二) 已知函数 $f(x)=\arctan x+(x-2)^3$，则 $f''(1)=$____________

【答案】 -7
【解析】本题考查复合函数二阶导

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+3(x-2)^2, f''(x)=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}+6\left(x-2\right)$

所以 $f''(1)=-\dfrac{1}{2}-6=-\dfrac{13}{2}$

4. (2022 数三) 若函数 $y=f(u)$ 可导, $u=x^3$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ (D)

A. $f'\left(3x^2\right)$ B. $f'\left(x^3\right)$ C. $3x^2 f'\left(3x^2\right)$ D. $3x^2 f'(x^3)$

四、隐函数求导

1. 【答案】C
【解析】本题考查隐函数求导.
$\mathrm{e}^y\cdot y'=1-y'$，解得 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^y}=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^y}$

2. 【答案】 $\dfrac{1-2xy\mathrm{e}^{x^2y}}{x^2\mathrm{e}^{x^2y}+1}$

【解析】本题考查隐函数求导.

方程 $\mathrm{e}^{x^2y}=x-y$ 两边分别对 x 求导得：$\mathrm{e}^{x^2y}(x^2y)'=1-y'$

即 $\mathrm{e}^{x^2y}(2xy+x^2y')=1-y'$，解得 $y'=\dfrac{1-2xy\mathrm{e}^{x^2y}}{x^2\mathrm{e}^{x^2y}+1}$

3. 【答案】 $-\dfrac{1}{2}$

【解析】本题考查隐函数求导.

方程 $y+\ln(x+y-1)=1$ 两边分别对 x 求导得：$y'+\dfrac{1+y'}{x+y-1}=0$

五、幂指函数求导

1. 【答案】A
【解析】本题考查幂指函数求导。

因为 $y=\left(2+x^2\right)^x=\mathrm{e}^{x\ln\left(2+x^2\right)}$

所以 $y'=\mathrm{e}^{x\ln\left(2+x^2\right)}\left[\ln\left(2+x^2\right)+x\cdot\dfrac{2x}{2+x^2}\right]=\left(2+x^2\right)^x\left[\ln\left(2+x^2\right)+\dfrac{2x^2}{2+x^2}\right]$

或者两边分别取自然对数：$\ln y=x\ln\left(2+x^2\right)$

两边分别对 x 求导得：$\dfrac{y'}{y}=\ln\left(2+x^2\right)+\dfrac{2x^2}{2+x^2}$，

所以 $y' = y\left[\ln\left(2+x^2\right)+\dfrac{2x^2}{2+x^2}\right]=\left(2+x^2\right)^x\left[\ln\left(2+x^2\right)+\dfrac{2x^2}{2+x^2}\right]$

2. 【答案】C

【解析】本题考查幂指函数求导。

因为 $y=(3+2\cos x)^x = \mathrm{e}^{x\ln(3+2\cos x)}$

所以 $y' = \mathrm{e}^{x\ln(3+2\cos x)}\left[\ln(3+2\cos x)+x\cdot\dfrac{-2\sin x}{3+2\cos x}\right]$

$$=(3+2\cos x)^x\left[\ln(3+2\cos x)-\frac{2x\sin x}{3+2\cos x}\right]$$

六、参数方程确定的函数求导

1. 【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【解析】因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t/\mathrm{d}t}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{3t^2+2}=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}\left(3t^2+2\right)}$ ，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{2}$

2. （2025 数一）曲线方程 $\begin{cases}x=t+\sin t\\ y=t^3+e^t\end{cases}$ ，则曲线在 $t=0$ 处的切线斜率为（　D　）

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. 2　　C. −2　　D. $\dfrac{1}{2}$

3. （2025 数二）曲线 $\begin{cases}x=t+\cos t\\ y=t^3+2t\end{cases}$ 在 $t=0$ 对应点处的切线斜率为 $\underline{2}$

4. （2025 数三）求曲线 $\begin{cases}x=3+\arctan t\\ y=t+e^t\end{cases}$ 在 $t=0$ 对应点处的切线方程. $y=2x-5$