三期加测 2 数列的极限

（考试时间 45 钟，满分 100 分）

姓名____________________成绩____________________

一、填空题（每空 2 分，共 12 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n=\underline{0}$； $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\underline{\infty}$； $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=\underline{0}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-2}{2n^2-n+1}=\underline{\frac{3}{2}}$； $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-2}{2n^3-n+1}=\underline{0}$； $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+n-2}{2n^2-n+1}=\underline{\infty}$

二、计算题（每小题 11 分，共 88 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{2022})=\lim\limits_{n\to\infty}(1^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+\cdots+2022^{\frac{1}{n}})=1+1+\cdots+1=2022$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot 5^n+3^n}{5^n+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3^n}{5^n}}{1+\frac{2^n}{5^n}}=2$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^{10}(3n+4)^{20}}{(5n+1)^{30}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^{10}}{(5n+1)^{10}}\cdot\frac{(3n+4)^{20}}{(5n+1)^{20}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2n-1}{5n+1})^{10}\cdot(\frac{3n+4}{5n+1})^{20}$

$=(\frac{2}{5})^{10}(\frac{3}{5})^{20}=\frac{2^{10}\cdot 3^{20}}{5^{30}}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2(n^2+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+2}=\frac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln e\cdot e^2\cdot e^3\cdots\cdot e^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln e^{1+2+3+\cdots+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2n^2}=\frac{1}{2}$$