二期加测 26 积分上限函数真题答案

姓名____________成绩________________

变限积分求导

直接求导型——五年内数二考了 1 次（ 21 选择)、数三考了 1 次 (20 选择)

1.【答案】D

2.【答案】D

拆分求导型——五年内数二考了 1 次（ 23 选择)、数三考了 1 次 23 选择)

1. 【答案】A

2. 【答案】D

换元求导型——五年内数二考了 1 次（ 24 选择)、数三考了 1 次（ 21 填空）

1. 【答案】 $f(x)$

【解析】$\int_0^x f(x-t)dt=-\int_0^x f(x-t)d(x-t)=-\int_x^0 f(u)du=\int_0^x f(u)du$

所以$\dfrac{d\int_0^x f(x-t)dt}{dx}=\left(\int_0^x f(u)du\right)'=f(x)$

2. 【答案】B

3. (2025 数三)已知$F(x)=\int_0^x \cos(x+t)^2\,dt$ 则$F'(x)=$（ A ）

A. $2\cos 4x^2-\cos x^2$　　B. $\cos x^2-2\cos 4x^2$

C. $\cos 4x^2-\cos x^2$　　D. $\cos x^2-\cos 4x^2$

八、含变限积分的综合问题——五年内数一考了 3 次（ 22 、23、24 填空）、数三考了 2 次（ 22 计算、 24 填空)

1. 【答案】 $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$

【解析】$[\int_0^{1-2x} f(t)\mathrm{d}t]'=\left(x^2\right)'$，所以$-2f(1-2x)=2x$，所以 $f(1-2x)=-x$，换元法或者配方法求得 $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$

2. 【解析】$\int_0^{2x} f(t)dt=\sin x$两边分别求导得：$2f(2x)=\cos x$，所以 $f(2x)=\dfrac{1}{2}\cos x$

令$2x=t$，得$x=\dfrac{t}{2}$，所以 $f(t)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

3. 【答案】8

【解析】 $[\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t]'=\left(x^3+x^2\right)'$,所以$2f(2x)=3x^2+2x,\therefore f(2x)=\dfrac{3x^2}{2}+x$，令$x=2$

得 $f(4)=8$.

4. 【答案】-2

【解析】令 $x-t=u$，$t=x-u$，所以

$$\int_0^1 t f(x-t)\mathrm{d}t=\int_x^{x-1}(x-u)f(u)d(-u)=x\int_{x-1}^{x}f(u)du-\int_{x-1}^{x}uf(u)du$$

所以 $x\int_{x-1}^{x}f(u)du-\int_{x-1}^{x}uf(u)du=2x+1$

上是两边分别对 x 求导得：$\int_{x-1}^{x}f(u)du+x[f(x)-f(x-1)]-[xf(x)-(x-1)f(x-1)]=2$

即 $\int_{x-1}^{x}f(u)du-f(x-1)=2$

令 $x=1$ 得 $\int_0^1 f(u)du-f(0)=2,\therefore\int_0^1 f(u)du=\int_0^1 f(x)dx=f(0)+2$

所以 $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xdf(x)=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)dx=f(1)-[f(0)+2]=-2$

5. 【答案】6

【解析】令 $x+t=u$，$t=u-x$，所以

$$\int_0^2 t f(x+t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+2}(u-x)f(u)du=\int_x^{x+2}uf(u)du-x\int_x^{x+2}f(u)du$$

所以 $\int_x^{x+2}uf(u)du-x\int_x^{x+2}f(u)du=x^2+1$，上式两边分别对 x 求导得：

$$(x+2)f(x+2)-xf(x)-[\int_x^{x+2}f(u)du+x(f(x+2)-f(x))]=2x$$

即 $2f(x+2)-\int_x^{x+2}f(u)du=2x$

令 $x=0$ 得 $2f(2)-\int_0^2 f(u)du=0$，即 $\int_0^2 f(x)dx=2f(2)=6$

求极限五年内数一考了 2 次（ 20 和 21 计算）、数二考了 1 次（ 20 计算）

1. 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin^2 dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

2. 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin^2 dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

3. 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{\sin x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{3x^2\cos x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$