加测 6 答案

一、选择题（共 5 题，每题 3 分，共 15 分）

1. A.　2. B.　3. D.　4. B.　5. C.

二、填空题（共 5 题，每题 3 分，共 15 分）

6. $(-1,1)$　7. x^2+4　8. $\dfrac{2}{3}$　9. $\dfrac{1}{2}$　10. 3

三、计算题（共 5 题，每题 8 分，共 40 分）

11. 解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n^2+1}+\dfrac{2}{2n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{2n^2+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)n}{2(2n^2+1)}=\dfrac{1}{4}$

12. 解：$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-3}-1}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}{(\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x-3}+1)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}{x-4}$

$$=\lim_{x\to4}(\sqrt{x-3}+1)=2.$$

13、解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos2x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{-\frac{1}{2}(2x)^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{-2x^2}=-\dfrac{1}{2}$　.

14. 解：$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(2-x)^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^-}[1+(1-x)]^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)=a$, 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 上连续，所以 $a=e^{-1}$

15. **解**：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}bx=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+\ln(1+x))=a$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，所以 $a=0$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{bx}{x}=b$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

因为因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，所以 $f_-'(0)=f_+'(0)$，所以 $b=1$.

所以 $a=0$，$b=1$

四、证明题（共 3 题，每题 10 分，共 30 分）

16. 证明：函数 $f(x)=x^7+4x-3$ 在 $[0,1]$ 上连续

$f(0)=-3<0,\ f(1)=2>0,\ f(0)\cdot f(1)<0$

由零点定理得，至少存在一点 $x\in(0,1)$，使得 $f(x)=0$

即方程 $x^7+4x=3$ 至少有一个根介于 0 和 1 之间.

17.证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由最值定理得，$f(x)$ 在 $\left[x_1,x_2\right]$ 上有最大值 M，最小值 m

即 $m \le f\left(x_1\right) \le M, m \le f\left(x_2\right) \le M$

$$5m \le 2f\left(x_1\right)+3f\left(x_2\right) \le 5M, m \le \frac{2f\left(x_1\right)+3f\left(x_2\right)}{5} \le M$$

由介值定理得，在 $\left[x_1,x_2\right]$ 上必有 η，使得 $f(\eta)=\dfrac{2f\left(x_1\right)+3f\left(x_2\right)}{5}$.

18.证明：函数 $F(x)=f(x)-1-2x$ 在 $[0,1]$ 上连续

$F(0)=-1<0, F(1)=1>0, F(0)\cdot F(1)<0$

由零点定理得，至少存在一点 $x_0 \in (0,1)$，使得 $F\left(x_0\right)=0$，即 $f\left(x_0\right)-1-2x_0=0$，故

$f\left(x_0\right)=1+2x_0$

综上所述，命题得证。