

第一章函数、极限与连续真题

一、求定义域(五年内数一考了 2 次、数二考了 3 次、数三考了 4 次)

1. (2024 · 数二) 函数 $y = \sin \sqrt{3-x}$ 的定义域为 (D)

A. $(3, +\infty)$ B. $[3, +\infty)$ C. $(-\infty, 3)$ D. $(-\infty, 3]$

2. (2023 · 教一) 函数 $y = \ln(3x-1)$ 的定义域是 (A)

A. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ C. $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

3. (2023 数二) 函数 $y = \sqrt{4-2x}$ 的定义域是 $(-\infty, 2]$.

4. (2023 · 教三) 函数 $y = e^{\sqrt{x-2}}$ 的定义域是 (A)

A. $[2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, 2)$

5. (2022 教三) 函数 $\cos \sqrt{4-x^2}$ 的定义域是 (D)

A. $(-\infty, 2]$ B. $[2, +\infty)$ C. $(-2, 2)$ D. $[-2, 2]$

6. (2021 数三) 函数 $f(x) = \ln(2-x)$ 的定义域是 (D)

A. $[2, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(-\infty, 2)$

7. (2020 · 数一) 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}-1}$ 的定义域是 $[3, +\infty)$.

8. (2020-数二) 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ 的定义域为 $(3, +\infty)$.

9. (2020-数三) 函数 $y = \sqrt{x-3}$ 的定义域为 $[3, +\infty)$.

二、求函数值(五年高数一考过 1 次、数二考过 2 次、数三考过 3 次)

1. (2023. 数三) 已知 $f(x) = e^x, g(x) = x^2$, 则 $f[g(-1)] = \underline{e}$.

2. (2022. 数二) 已知 $f(x) = \begin{cases} |x-2|, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$, 则 $f[f(3)] = \underline{2}$.

3. (2022. 数三) 已知 $f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$, 则 $f[f(5)] = \underline{3}$.

4. (2021·数一) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & |x| > 1 \\ 0, & |x| \leq 1 \end{cases}$ 则 $f[f(2021)] = \underline{0}$.

5. (2021.数三) 已知函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $g(x) = e^x$, 则 $f[g(0)] = \underline{\frac{1}{2}}$.

6. (2020.数二) 已知函数 $f(x) = x^3 + 3x - 2$, $g(x) = \tan x$, 则 $f\left[g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \underline{2}$.

三、函数的四种特性

奇偶性(五年内数一考过 1 次、数二考过 1 次、数三考过 2 次)

1. (2024.数一) 1. 下列函数是偶函数的是 (B)

A. $y = \tan x$ B. $y = \cos x$ C. $y = x^3$ D. $y = 3^x$

2. (2024 数三) 下列函数是奇函数的是(B)

A. $\ln x$ B. x^3 C. $\cos x$ D. 2^x

3. (2023.数二) 以下函数是奇函数的是 (D)

A. e^x B. $x^2 + 1$ C. $\cos x$ D. $\sin x$

4. (2022·数三) 下列函数是偶函数的是 (B)

A. $\frac{1}{x}$ B. $-|x|$ C. $\ln x$ D. $\tan x$

简单的单调性(只有 20 年数三考过)

5. 以下区间是函数 $y = \sin x$ 的单调递增区间的是 (A)

A. $[0, \frac{\pi}{2}]$ B. $[0, \pi]$ C. $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ D. $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$

周期性(只有 24 年数三考过)

6. 下列函数是周期函数的是 (C)

A. x^2 B. e^x C. $\sin x$ D. $\arcsin x$

有界性(只有 23 年数三考过)

7. 下列函数在其定义域内有界的是 (D)

A. e^x B. $\ln x$ C. x^2 D. $\cos x$

四、无穷小的比较(五年内数一考过 2 次、数二考过 3 次、数三考过 5 次)

1. (2024 数二) $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数是无穷小量的是(C)

A. $\cos x$ B. e^x C. $\ln(1+x)$ D. $\arcsin(1+x)$

2. (2024.数三) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 x^2 为等价无穷小量的是(A)

A. $\sin^2 x$ B. $\sin 2x$ C. $\cos^2 x$ D. e^{2x-1}

3. (2023.数一) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下函数不是无穷小量的是(D)

A. $\tan x$ B. $\sin 2x$ C. $\ln(1+x)$ D. $e^x + 1$

4. (2023.数三) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下不是与 x 为等价无穷小量的是(C)

A. $\sin x$ B. $e^x - 1$ C. $1 - \cos x$ D. $\ln(1+x)$

5. (2022.数二) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下函数不是 x 的等价无穷小量的是(B)

A. $\ln(1+x)$ B. $\cos x$ C. $\tan x$ D. $\arctan x$

6. (2022.数三) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下不是无穷小量的是(C)

A. $x - \sin x$ B. $x - \tan x$ C. $x - \cos x$ D. $1 - \cos x$

7. (2021.数三) 下列选项中为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小的是(B)

A. $1 - \sqrt[3]{x}$ B. $1 - e^x$ C. $1 - \tan x$ D. $1 - \sin x$

8. (2020.数一) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下函数是无穷小量的是(C)

A. e^x B. $\ln(x+2)$ C. $\sin x$ D. $\cos x$

9. (2020.数二) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下函数是无穷小量的是(C)

A. $x^2 + 1$ B. $\sqrt{x+1}$ C. $\sin x$ D. $\cos x$

10. (2020.数三) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下函数是无穷小量的是(C)

A. e^x B. $x+1$ C. $\sin x$ D. $\cos x$

五、间断点(五年数一2次, 数二2次, 数三五次)

1. (2024.数一) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 4x+5, & x < 1 \\ 2-x^2, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $x=1$ 是函数的(C)

A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点

2. (2024.数三) $x=1$ 是函数 $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$ 的(D)

A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 震荡间断点 D. 无穷间断点

3. (2023.数三) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$, 则 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的(B) 间断点

A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 无穷间断点 D. 连续点

4. (2023.数二) 已知函数 $f(x) = \frac{x+4}{x^2+4x}$, 则 $x=-4$ 是函数的(B)

A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点

5. (2022.数三) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$, 则 $x = 3$ 是函数 $f(x)$ 的 (A) 间断点

A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 无穷间断点 D. 连续点

6. (2021.数一) 已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$, 则 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的 (D)

A. 可去间断点 B. 连续点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点

7. (2021.数二) 已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$, 则 $x = 2$ 是函数 $f(x)$ 的 (D)

A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点

8. (2021.数三) 设函数 $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x}$, 则 $x = 0$ 是函数 $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x}$ 的 (C)

A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 无穷间断点 D. 连续点

9. (2020.数三) 点 $x = 1$ 是函数 $y = \frac{x-1}{x^2-1}$ 的 (B)

A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点

六、分段函数连续求参数 (五年数一 1 次, 数二 3 次, 数三 5 次)

1. (2024.数三) 已知 $f(x) = \begin{cases} 2a \cos x + b, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ a\sqrt{x+1} - b, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 连续, 求实数 a, b 的值.

解: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2a \cos x + b) = 2a + b$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a\sqrt{x+1} - b) = a - b$

因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 所以 $2a + b = a - b = 2$, 所以 $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{2}{3}$.

2. (2023.数三) 已知 $f(x) = \begin{cases} ae^{x-1}, & x > 1 \\ b, & x = 1 \\ x^2 + ax - b, & x < 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 连续, 求实数 a, b .

解: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax - b) = 1 + a - b$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ae^{x-1} = a$

因为 $f(x)$ 在 $x = 1$ 连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

所以 $1 + a - b = a = b$, 解得: $a = b = 1$

3. (2022. 数一) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ b - \cos x, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 连续, 则 a 和 b 的值为 (A)

- A. $a = 1, b = 2$ B. $a = 1, b = -2$ C. $a = -1, b = 2$ D. $a = -1, b = -2$

4. (2022. 数二) 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin^2 x}{x^2}, & x < 0 \\ 2x^2 + 3, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = \underline{3}$.

5. (2022. 数三) 已知 $f(x) = \begin{cases} e^x + b, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ a + \frac{b \sin x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 连续, 求 a, b 的值.

解: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + b) = 1 + b$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(a + \frac{b \sin x}{x} \right) = a + b$$

因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

所以 $1 + b = a + b = 0$, 所以 $a = 1, b = -1$

6. (2021. 数二) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{\sqrt{1+x}-1}, & x > 0 \\ 2b+1, & x = 0 \\ b+2\cos x, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 求实数 a, b .

解析: 左极限为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (b + 2\cos x) = b + 2$

$$\text{右极限为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax(\sqrt{1+x}+1)}{x} = 2a$$

函数值为 $f(0) = 2b + 1$, 因为函数在 $x = 0$ 处连续, 所以左极限 = 右极限 = 函数值,

即 $b + 2 = 2a = 2b + 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = 1$.

$$7. (2021. 数三) \text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} b + \ln(1+x^2), & x < 0 \\ 2b - e, & x = 0 \\ \frac{1}{(1+ax)^x}, & x > 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 连续, 求实数 } a, b \text{ 的值.}$$

解析: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (b + \ln(1+x^2)) = b$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{ax} \cdot a} = e^a$$

因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

即: $e^a = b = 2b - e$, 求得 $a = 1, b = e$.

$$8. (2020. 数二) \text{ 已知函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{\sqrt{1+x}-1}, & x > 0 \\ 2b+1, & x = 0 \\ b+2\cos x, & x < 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 求实数 } a, b.$$

解析: 左极限为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (b + 2\cos x) = b + 2$

$$\text{右极限为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax(\sqrt{1+x}+1)}{x} = 2a$$

函数值为 $f(0) = 2b + 1$, 因为函数在 $x=0$ 处连续, 所以左极限=右极限=函数值,

$$\text{即 } b + 2 = 2a = 2b + 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = 1.$$

$$9. (2020. 数三) \text{ 已知函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin x}{x} + b, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ \frac{x}{2} - a, & x < 0 \end{cases} \text{ 在点 } x=0 \text{ 连续, 求实数 } a, b.$$

解析: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{2} - a \right) = -a$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a \sin x}{x} + b \right) = a + b$

因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续, 所以 $-a = a + b = 2$, 所以 $a = -2, b = 4$

七、求极限

$\frac{0}{0}$ 型 (五年最高频率)

1. (2024. 数二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x}}{x}$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x})(\sqrt{4+3x} + \sqrt{4-3x})}{x(\sqrt{4+3x} + \sqrt{4-3x})}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x(\sqrt{4+3x} + \sqrt{4-3x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{\sqrt{4+3x} + \sqrt{4-3x}} = \frac{3}{2}$

2. (2024. 数二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{1 - x + \ln x}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -1.$

3. (2024. 数一) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} + x - 2}{1 - x - \ln x}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} + x - 2}{1 - x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} + 1}{-1 - \frac{1}{x}} = \frac{1+1}{-1-1} = -1$

4. (2023. 数一) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - \cos x}{x^2}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} \sin x + \sin x}{2x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} + 1}{2x} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} + 1}{2x} \sin x = 1$

5. (2023. 数二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\cos x - 1} - 1)e}{x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{e}{2}$

6. (2023. 数三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)\sin x} = 1$

7. (2022 数一) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}{2x-4} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x-3}+1) = 1.$

8. (2022 数一) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{3x^2} = \frac{3}{2}.$

9. (2022 数二) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 3x} = (\quad C \quad)$

A. $-\frac{1}{3}$ B. 0 C. $\frac{1}{3}$ D. ∞

10. (2022 数二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3}+2) = 4$

11. (2022 数三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\arctan x}{e^x - 1}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\arctan x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2.$

12. (2021 数二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \tan x}$.

解析: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{-\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{-x^2} = -3$ (先用洛必达法则、恒等变形, 再用无穷小替换).

13. (2021 数三) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{2x} = 1$, 则 $a = (\quad C \quad)$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

14. (2021 数三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^4}{x - \sin x}$

解析: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^4}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 4x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 4x^3}{\frac{x^2}{2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} (3 + 4x) = 6$

15. (2020 数三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$.

解析: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2x-3} = 1$

16. (2020 数三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x - 1}{2x}$.

解析: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{2} = 1$

$\infty - \infty$ 型 (五年高频率)

17. (2020. 高数二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x-2} \right)$.

解析: $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{x-2} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-1)(x-2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x-1} = -$

18 (2020. 高数一) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + x + 2} - x \right)$.

解析: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + x + 2} = 2$

19. (2021. 高数三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x} - \frac{1}{x} \right)$

解析: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 - (x+2)}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+2} = -\frac{1}{2}$

20. (2021. 高数二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x-1} - x \right)$.

解析: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+2) - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$ (先通分再利用重要结论).

21. (2023. 高数三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+x} - 2x)$.

解: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+x} - 2x)(\sqrt{4x^2+x} + 2x)}{\sqrt{4x^2+x} + 2x}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+x} + 2x} = \frac{1}{4}$

22. (2023. 高数二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2+3x} \right)$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2+3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3-3}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}$

23. (2023. 高数一) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x)$.

解: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x} - x)(\sqrt{x^2+3x} + x)}{\sqrt{x^2+3x} + x}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{2}$

24. (2024. 高数一) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{x-3} - \frac{9}{x^2-3x} \right)$.

解: $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{x-3} - \frac{9}{x^2-3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = 2$

25. (2024. 高数三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-x} - \frac{2}{x^2-1} \right)$.

解: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-x} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2x}{x(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x(x+1)} = -\frac{1}{2}$

1^∞ 型 (第二个重要极限) (五年高频率)

26. (2021. 高数一) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+3}{x+1})^x$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+3}{x+1})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{3}{x})^x}{(1+\frac{1}{x})^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{3}{x})^{\frac{x}{3} \cdot 3}}{(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{e^3}{e} = e^2$

27. (2021. 高数二) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x} \right)^x = 2$, 则 $a = \underline{-\ln 2}$.

28. (2022. 高数一) 设极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{3x})^{kx} = e^2$, 则 $k = \underline{6}$.

29. (2022. 高数二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+2}{x})^{-3x}$.

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+2}{x})^{-3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{2}{x})^{-3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2} \cdot (-6)} = e^{-6}$.

30. (2022. 高数三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{4x})^{2x}$.

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{4x})^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{4x})^{4x \cdot \frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

31. (2023. 高数一) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{5}{x}} = \underline{e^5}$.

32. (2023. 高数三) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1-\frac{4}{3x})^x = \underline{e^{-\frac{4}{3}}}$.

34. (2024. 高数一) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin \frac{x}{2})^{\frac{1}{x}} = \underline{e^{\frac{1}{2}}}$.

35. (2024. 高数二) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+\frac{x}{2})^{\frac{4}{\sin x}} = \underline{e^2}$.

36. (2024. 高数三) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{a}{x}} = e$, 则 $a = \underline{\frac{1}{3}}$.

八、极限的四则运算

1. (2024. 数三) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -3$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(b_n + 1) = \underline{-4}$.
2. (2022. 数三) 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) \cdot g(x)] = \underline{4}$.
3. (2021. 数二) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + 2b_n) = \underline{5}$.
4. (2021. 数三) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 2b_n) = \underline{12}$.

九、利用零点定理的证明题

1. (2021. 高数一) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0) \neq 0, 0 < f(1) < 1$, 证明: 存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f^2(x_0) = x_0$

【解析】 证明: 构造辅助函数 $F(x) = f^2(x) - x$, 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续;

因为 $f(0) \neq 0, 0 < f(x) < 1$, 所以 $F(0) = f^2(0) > 0, F(1) = f^2(1) - 1 < 0$, 即 $F(0) \cdot F(1) < 0$;

所以由零点定理可知, 至少存在一点 $x_0 \in (0,1)$ 使得 $F(x_0) = 0$, 即 $f^2(x_0) = x_0$

2. (2020. 高数一) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(1) = 1$, 证明对于任意的 $\lambda \in (0,1)$, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = \frac{\lambda}{\xi^2}$.

解析: 构造辅助函数 $F(x) = x^2 \cdot f(x) - \lambda$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

$$F(1) = -\lambda < 0; F(2) = f(1) - \lambda = 1 - \lambda > 0 \Rightarrow F(0) \cdot F(1) < 0,$$

由零点定理, 则至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $F(\xi) = 0$ 成立

$$\text{即 } F(\xi) = \xi^2 \cdot f(\xi) - \lambda = 0, \text{ 因为 } \xi^2 \neq 0, \text{ 所以 } f(\xi) = \frac{\lambda}{\xi^2}.$$

3. (2022. 高数一的第一问) 设函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 连续, 在 $(1,3)$ 可导, 且

$$f(1) = f(2) = 1, f(3) = 0, \text{ 证明: (1) 存在 } \xi \in (2,3), \text{ 使得 } f(\xi) = \frac{1}{\xi} \text{ 成立.}$$

证明: 设 $F(x) = f(x) - \frac{1}{x}$

(1) 因为 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 连续, 所以 $F(x)$ 在 $[2,3]$ 连续, 因为 $F(2) = f(2) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$

$F(3) = f(3) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} < 0$, 所以由零点定理知存在 $\xi \in (2,3)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即

$$f(\xi) - \frac{1}{\xi} = 0.$$

4. (2023. 高数二的第一问) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 可导, 且 $f(0) > 0, f(1) < 1$,

证明: (1) 存在 $x_0 \in (0,1)$ 使得 $f(x_0) = x_0$;

证明: (1) 令 $F(x) = f(x) - x$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 因为 $f(0) > 0, f(1) < 1$, 所以 $F(0) > 0, F(1) = f(1) - 1 < 0$

所以由零点定理知存在 $x_0 \in (0,1)$ 使得 $F(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = x_0$.

5. (2023. 高数一的第一问) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 1$,

证明: (1) 对于任意整数 $n \geq 2$, 存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $\int_0^{x_0} f(x)dx = \frac{1}{n}$.

证明: (1) 令 $F(x) = \int_0^x f(x)dx - \frac{1}{n}$, 所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $F(0) = -\frac{1}{n} < 0$,

$$F(1) = 1 - \frac{1}{n} > 0$$

所以由零点定理知对于任意整数 $n \geq 2$, 存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $F(x_0) = 0$, 即

$$\int_0^{x_0} f(x)dx = \frac{1}{n}$$