

山东省 2026 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学答案（二期第二次月考）（考试时间 120 分钟）

姓名_____成绩_____

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. A 2. C 3. C 4. D 5. A

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

6. $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 或者 $\frac{\sqrt{3}}{6}$. (高数一) 0. (高数二, 三) 7. $y=3$. 8. $x=0$. 9. -2 .

10. $2x \ln(1+x^2)$.

三、计算题（每小题 7 分，共 56 分）

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x \ln(1+2x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x \ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x}{4} = \frac{1}{2}$$

12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^2 \sin x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

13. 求曲线 $y = x^2(2 \ln x - 5)$ 的凸凹区间和拐点

解：曲线的定义域为 $(0, +\infty)$, $y' = 4x \ln x - 8x$, $y'' = 4 \ln x - 4$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = e$

在 $(0, e]$, $y'' \leq 0$, 在 $[e, +\infty)$, $y'' \geq 0$

所以曲线的凸区间为 $(0, e]$, 凹区间为 $[e, +\infty)$, 拐点为 $(e, -3e^2)$

14. 求函数 $f(x) = (2x-3)e^x - x^2 + x$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值

解：令 $f'(x) = (2x-1)(e^x - 1) = 0$, 得驻点 $x = 0$ 和 $x = \frac{1}{2}$

$$f''(x) = (2x+1)e^x - 2, \quad f''(0) = -1 < 0, \quad f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{1}{2}} - 2 = 2\sqrt{e} - 2 > 0$$

所以极大值为 $f(0) = -3$ ，极小值为 $f(\frac{1}{2}) = -2e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} = -2\sqrt{e} + \frac{1}{4}$

15. 计算不定积分 $\int \frac{2x^3 \cos x - 3 + 5x}{x^2} dx$

$$\int \frac{2x^3 \cos x - 3 + 5x}{x^2} dx = \int (2x \cos x - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x}) dx = \int 2x \cos x dx + \frac{3}{x} + 5 \ln |x|$$

$$= \int 2x d \sin x + \frac{3}{x} + 5 \ln |x| = 2x \sin x - 2 \int \sin x dx + \frac{3}{x} + 5 \ln |x|$$

$$= 2x \sin x + 2 \cos x + \frac{3}{x} + 5 \ln |x|$$

16. 计算不定积分 $\int \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} dx$

$$\int \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1 + 5x + 1}{x^2 + 1} dx = \int (1 + \frac{5x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}) dx$$

$$= x + \int \frac{5x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = x + \frac{5}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) + \arctan x$$

$$= x + \frac{5}{2} \ln |x^2 + 1| + \arctan x + C$$

17. 计算定积分 $\int_1^5 (\sqrt{2x-1} - e^{3x}) dx$

$$\int_1^5 (\sqrt{2x-1} - e^{3x}) dx = \frac{1}{2} \int_1^5 \sqrt{2x-1} d(2x-1) - \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_1^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^5 - \frac{1}{3} (e^{15} - e^3)$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} (e^{15} - e^3)$$

18. 计算定积分 $\int_1^5 2 \arctan \sqrt{2x-1} dx$

$$\text{令 } \sqrt{2x-1} = t, x = \frac{1}{2}(1+t^2), dx = t dt$$

$$\int_1^5 \arctan \sqrt{2x-1} dx = \int_1^3 2t \arctan t dt = \int_1^3 \arctan t dt^2 = t^2 \arctan t \Big|_1^3 - \int_1^3 t^2 d \arctan t$$

$$= 9 \arctan 3 - \frac{\pi}{4} - \int_1^3 \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

四、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

19. 证明：当 $x > 1$ 时， $x + \ln x > 4\sqrt{x} - 3$

证明：令 $f(x) = x + \ln x - 4\sqrt{x} + 3$

$$\therefore f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x}, \therefore x > 1 \text{ 时 } f'(x) > 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单增， $\therefore x > 1$ 时 $f(x) > f(1)$

又 $\because f(1) = 0 \therefore x > 1$ 时 $f(x) > 0$ ， $\therefore x > 1$ 时 $x + \ln x > 4\sqrt{x} - 3$

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0) = 0, f(1) = 1$ ．证明：

(1) 存在 $\xi_1 \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi_1) = 2\xi_1$ ；

(2) 存在 $\xi_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \xi_3 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ，使得 $f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 2(\xi_2 + \xi_3)$

(1) 令 $F(x) = f(x) - x^2$ ，因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续，在 $(0, 1)$ 可导，所以 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续，在 $(0, 1)$ 可导；

因为 $f(0) = 0, f(1) = 1$ ，所以 $F(0) = F(1) = 0$ ；

所以由罗尔定理可知：至少存在一点 $\xi_1 \in (0, 1)$ ，使得 $F'(\xi_1) = 0$ ，即 $f'(\xi_1) = 2\xi_1$

(2) 构造辅助函数 $F(x) = f(x) - x^2$ ，因为 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 连续，在 $(0, \frac{1}{2})$ 可导，所以 $F(x)$

在 $[0, \frac{1}{2}]$ 连续，在 $(0, \frac{1}{2})$ 可导，所以由拉格朗日中值定理得：至少存在一点 $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$ ，使得：

$$F'(\xi_2) = \frac{F(\frac{1}{2}) - F(0)}{\frac{1}{2} - 0}, \text{ 即 } f'(\xi_2) - 2\xi_2 = 2F(\frac{1}{2}) \quad \text{①}$$

因为 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 连续，在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 可导，所以 $F(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 连续，在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 可导，所以由拉

格朗日中值定理得：至少存在一点 $\xi_3 \in (\frac{1}{2}, 1)$ ，使得：

$$F'(\xi_3) = \frac{F(1) - F(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}}, \text{ 即 } f'(\xi_3) - 2\xi_3 = -2F(\frac{1}{2}) \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得 } f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 2(\xi_2 + \xi_3)$$