山东省 2026 年普通高等教育专升本统一考试

高等数学答案（二期第二次月考）（考试时间 120 分钟）

姓名____________________成绩____________________

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. A 2. C 3. C 4. D 5. A

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

6. $\underline{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}$ 或者 $\underline{\frac{\sqrt{3}}{6}}$.（高数一） $\underline{0}$.（高数二，三） 7. $\underline{y=\frac{1}{3}}$. 8. $\underline{x=0}$. 9. $\underline{2}$.

10. $\underline{2x\ln(1+x^2)}$.

三、计算题（每小题 7 分，共 56 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\cos x-x}{x\ln(1+2x)}$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x-x}{x\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x-x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin x-1}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\cos x}{4}=\frac{1}{2}$$

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x \sin t^2dt}{x^2\sin x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \sin t^2dt}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \sin t^2dt}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

13. 求曲线 $y=x^2(2\ln x-5)$ 的凸凹区间和拐点

解：曲线的定义域为 $(0,+\infty)$， $y'=4x\ln x-8x, y''=4\ln x-4$，令 $y''=0$ 得 $x=e$

在 $(0,e], y''\le0$，在 $[e,+\infty), y''\ge0$

所以曲线的凸区间为 $(0,e]$，凹区间为 $[e,+\infty)$，拐点为 $(e,-3e^2)$

14. 求函数 $f(x)=(2x-3)e^x-x^2+x$ 的极值，并判断是极大值还是极小值

解：令 $f'(x)=(2x-1)(e^x-1)=0$，得驻点 $x=0$ 和 $x=\frac{1}{2}$

$f''(x)=(2x+1)e^x-2$， $f''(0)=-1<0$， $f''(\frac{1}{2})=2e^{\frac{1}{2}}-2=2\sqrt{e}-2>0$

所以极大值为 $f(0)=-3$，极小值为 $f(\frac{1}{2})=-2e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}=-2\sqrt{e}+\frac{1}{4}$

15. 计算不定积分 $\int\frac{2x^3\cos x-3+5x}{x^2}\mathrm{d}x$

$$\int\frac{2x^3\cos x-3+5x}{x^2}\mathrm{d}x=\int(2x\cos x-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x})dx=\int 2x\cos xdx+\frac{3}{x}+5\ln|x|$$

$$=\int 2xd\sin x+\frac{3}{x}+5\ln|x|=2x\sin x-2\int\sin xdx+\frac{3}{x}+5\ln|x|$$

$$=2x\sin x+2\cos x+\frac{3}{x}+5\ln|x|$$

16. 计算不定积分 $\int\frac{x^2+5x+2}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$$\int\frac{x^2+5x+2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1+5x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int(1+\frac{5x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1})\mathrm{d}x$$

$$=x+\int\frac{5x}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=x+\frac{5}{2}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)+\arctan x$$

$$=x+\frac{5}{2}\ln|x^2+1|+\arctan x+C$$

17. 计算定积分 $\int_1^5(\sqrt{2x-1}-e^{3x})\mathrm{d}x$

$$\int_1^5(\sqrt{2x-1}-e^{3x})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^5\sqrt{2x-1}d(2x-1)-\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_1^5=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5-\frac{1}{3}(e^{15}-e^3)$$

$$=\frac{26}{3}-\frac{1}{3}(e^{15}-e^3)$$

18. 计算定积分 $\int_1^5 2\arctan\sqrt{2x-1}dx$

令 $\sqrt{2x-1}=t,x=\frac{1}{2}(1+t^2),dx=tdt$

$$\int_1^5\arctan\sqrt{2x-1}dx=\int_1^3 2t\arctan tdt=\int_1^3\arctan tdt^2=t^2\arctan t\Big|_1^3-\int_1^3 t^2d\arctan t$$

$$=9\arctan 3-\frac{\pi}{4}-\int_1^3\frac{t^2}{1+t^2}dt=9\arctan 3-\frac{\pi}{4}-\int_1^3\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt$$

$=9\arctan 3-\frac{\pi}{4}-2+\arctan 3-\arctan 1=10\arctan 3-\frac{\pi}{2}-2$

四、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

19. 证明：当 $x>1$ 时， $x+\ln x>4\sqrt{x}-3$

证明：令 $f(x)=x+\ln x-4\sqrt{x}+3$

$\therefore f'(x)=1+\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$， $\therefore x>1$ 时 $f'(x)>0$

$\therefore f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单增， $\therefore x>1$ 时 $f(x)>f(1)$

又 $\because f(1)=0$ $\therefore x>1$ 时 $f(x)>0$， $\therefore x>1$ 时 $x+\ln x>4\sqrt{x}-3$

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0,\ f(1)=1$． 证明：

（1） 存在 $\xi_1\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi_1)=2\xi_1$ ；

（2） 存在 $\xi_2\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\xi_3\in\left(\frac{1}{2},1\right)$， 使得 $f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=2(\xi_3+\xi_3)$

(1)令 $F(x)=f(x)-x^2$，因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导;

因为 $f(0)=0,\ f(1)=1$，所以 $F(0)=F(1)=0$;

所以由罗尔定理可知：至少存在一点 $\xi_1\in(0,1)$，使得 $F'(\xi_1)=0$， 即 $f'(\xi_1)=2\xi_1$

（2）构造辅助函数 $F(x)=f(x)-x^2$，因为 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 连续，在 $(0,\frac{1}{2})$ 可导，所以 $F(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 连续，在 $(0,\frac{1}{2})$ 可导，所以由拉格朗日中值定理得：至少存在一点 $\xi_2\in(0,\frac{1}{2})$，使得：

$$F'(\xi_2)=\frac{F(\frac{1}{2})-F(0)}{\frac{1}{2}-0}，\text{ 即 } f'(\xi_2)-2\xi_2=2F(\frac{1}{2}) \qquad ①$$

因为 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 连续，在 $(\frac{1}{2},1)$ 可导，所以 $F(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 连续，在 $(\frac{1}{2},1)$ 可导，所以由拉

格朗日中值定理得：至少存在一点$\xi_3 \in (\frac{1}{2},1)$，使得：

$F'(\xi_3) = \dfrac{F(1) - F(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}}$，即 $f'(\xi_3) - 2\xi_3 = -2F(\frac{1}{2})$ ②

①+②得 $f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 2(\xi_2 + \xi_3)$