加测 13 证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上连续，在 $\left(0,\pi\right)$ 上可导，证明：至少存在一点 $\xi\in\left(0,\pi\right)$，使得 $f'(\xi)\cdot\sin\xi+f(\xi)\cdot\cos\xi=0$.

证明：令 $F(x)=f(x)\sin x$，所以 $F'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$，因为 $f(x)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上连续，在 $\left(0,\pi\right)$ 上可导，所以函数 $F(x)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上连续，在 $\left(0,\pi\right)$ 上可导.

又因为 $F(0)=f(0)\sin 0=0$，$F(\pi)=f(\pi)\sin\pi=0$，即 $F(0)=F(\pi)$，所以由罗尔定理可知至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $F'(\xi)$=0，即 $f'(\xi)\cdot\sin\xi+f(\xi)\cdot\cos\xi=0$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续，在 $(2,3)$ 内可导，且 $f(3)=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(2,3)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{2-\xi}$.

证明：令 $F(x)=f(x)(x-2)$，所以 $F'(x)=f'(x)(x-2)+f(x)$，所以 $F(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续，在 $(2,3)$ 内可导，$F(2)=f(2)(2-2)=0$，$F(3)=f(3)(3-2)=0$，所以 $F(2)=F(3)$，所以由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(2,3)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)(\xi-2)+f(\xi)=0$，因为 $\xi-2\neq 0$，所以 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{2-\xi}$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 连续，在 $(1,3)$ 可导，且 $f(1)=f(2)=1, f(3)=0$，证明：（1）存在 $\xi\in(2,3)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{\xi}$ 成立.（2）存在 $\eta\in(1,3)$，使得 $\eta^2 f'(\eta)+1=0$.

证明：设 $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{x}$

（1）因为 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 连续，所以 $F(x)$ 在 $[2,3]$ 连续，因为 $F(2)=f(2)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$

$F(3)=f(3)-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}<0$，所以由零点定理知存在 $\xi\in(2,3)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)-\dfrac{1}{\xi}=0$.

（2）因为 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 连续，在 $(1,3)$ 可导，所以 $F(x)$ 在 $[1,3]$ 连续，在 $(1,3)$ 可导，因为 $F(1)=f(1)-1=0$，$F(\xi)=f(\xi)-\frac{1}{\xi}=0$，所以 $F(1)=F(\xi)$，所以由罗尔定理知存在 $\eta\in(1,\xi)\subset(1,3)$，使得 $F'(\eta)=0$，即 $f'(\eta)+\frac{1}{\eta^2}=0$，即 $\eta^2 f'(\eta)+1=0$.

4. 设 $0<a<b$，求证：$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

证明：令 $f(x)=\ln x$，易知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，所以至少存在一点 $a<\xi<b$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，即 $\frac{1}{\xi}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$，即 $\frac{1}{\xi}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}$

即：$\ln\frac{b}{a}=\frac{b-a}{\xi}$，因为 $a<\xi<b$，所以 $\frac{b-a}{b}<\frac{b-a}{\xi}<\frac{b-a}{a}$，即 $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$

5.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$，证明：存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$，$\eta\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

证明：令 $F(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}$，因为 $F(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2},1]$ 都满足拉格朗日中值定理，所以至少存在一点 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$，$\eta\in(\frac{1}{2},1)$ 使得：

$$F'(\xi)=\frac{F(\frac{1}{2})-F(0)}{\frac{1}{2}-0}，即\ f'(\xi)-\xi^2=2F(\frac{1}{2}) \qquad ①$$

$$F'(\eta)=\frac{F(1)-F(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}，即\ f'(\eta)-\eta^2=-2F(\frac{1}{2}) \qquad ②$$

①+②得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$ 得证。

6. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$.

证明：（1）存在$\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；（2）存在两个不同的点ξ_1，$\xi_2 \in (0,1)$，使得 $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

证明：（1）令$F(x)=f(x)-1+x$，所以$F(x)$在$[0,1]$连续

$F(0)=f(0)-1+0=-1<0$，$F(1)=f(1)-1+1=1>0$，所以$F(0)F(1)<0$，所以由零点定理知存在$\xi \in (0,1)$，使得$F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$

（2）因为 $f(\xi)$ 在 $(0,\xi)$ 和 $(\xi,1)$ 都满足拉格朗日中值定理，所以存在$\xi_1 \in (0,\xi),\xi_2 \in (\xi,1)$，

使得 $f(\xi_1)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\dfrac{f(\xi)}{\xi}=\dfrac{1-\xi}{\xi}$， $f(\xi_2)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{1-(1-\xi)}{1-\xi}=\dfrac{\xi}{1-\xi}$

所以 $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.即存在两个不同的点ξ_1，$\xi_2 \in (0,1)$，使得 $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.