二期加测 20 不定积分真题 1

一、不定积分的概念——五年内只有数三考过（20 、21 、22 选择）

1. （2020 数三）不定积分 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$（ C ）

A. $f(x)$ B. $f'(x)$ C. $f(x)+C$ D. $f'(x)+C$

2. （2021 数三）已知 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则 $\int f(3x+2)\mathrm{d}x=$（ D ）

A. $3F(x)+C$ B. $\frac{1}{3}F(x)+C$ C. $3F(3x+2)+C$ D. $\frac{1}{3}F(3x+2)+C$

3. （2022 数三）已知函数 $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\sin x+C$，则 $\int\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$（ D ）

A. $\mathrm{e}^x\sin x+C$ B. $2\mathrm{e}^x\sin x+C$ C. $\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}+C$ D. $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}+C$

二、原函数问题——五年内数三考了 3 次 22、23、24 选择）、数二考了 1 次 （24 选择）

1. （ 2022 数三）已知 e^{-2x} 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f'(x)=$（ A ）

A. $4\mathrm{e}^{-2x}$ B. $-2\mathrm{e}^{-2x}$ C. e^{-2x} D. $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$

2. （2023 数三）已知 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(2x)$ 的一个原函数是（ D ）

A. $2\sin 2x$ B. $\sin 2x$ C. $2\sin 2x+1$ D. $\frac{1}{2}\sin 2x+1$

3. （2024 数二）已知函数 $f(x)$ 的导数为 e^{2x}，则 $f(x)$ 的一个原函数为(A)

A. $\frac{1}{4}e^{2x}+x$ B. $\frac{1}{4}e^{2x}+x^2$ C. $4e^{2x}+x$ D. $4e^{2x}+x^2$

4. （2024 数三）已知 $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-3x}+C$，则 $xf(x)$ 的一个原函数为（ B ）

A. $\mathrm{e}^{-3x}\left(x-\frac{1}{3}\right)$ B. $\mathrm{e}^{-2x}\left(x+\frac{1}{3}\right)$ C. $\mathrm{e}^{-3x}(x-1)$ D. $\mathrm{e}^{-3x}(x+1)$

5. （2025 数三）已知 $5x+\cos 3x$ 为 $f(x)$ 的原函数，则 $f'(x)=\underline{-9\cos 3x}$

凑微分法——五年内数一考了 2 次（ 20 和 24 计算）、数二考了 2 次（ 20 和 21 计算）、数三考 2 次（20 和 21 计算）

1. 【解析】 $\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{\ln x}{x}dx$

$$=2\sqrt{x}+\int\ln xd\ln x=2\sqrt{x}+\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$$

2. 【解析】 $\int\frac{x+\ln x}{x}dx=\int\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)dx=x+\int\ln xd\ln x=x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$

3. 【解析】 $\int\frac{2x^2\cos 4x-3}{x^2}dx=2\int\cos 4xdx-3\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{2}{4}\sin 4x+\frac{3}{x}+c$

$$=\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{3}{x}+c$$

4. 【解析】 $\int\frac{\sin^2 x\cos x}{1+4\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2 x}{1+4\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x)=\int\frac{t^2}{1+4t^2}dt=\frac{1}{4}\int\frac{4t^2+1-1}{1+4t^2}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{1+4t^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+(2t)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\int\frac{1}{1+(2t)^2}\mathrm{d}(2t)$$

$$=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\arctan(2t)+C=\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{8}\arctan(2\sin x)+C$$

5. 【解析】 $\int\frac{x-3}{1+x^2}dx=\int\frac{x}{1+x^2}dx-3\int\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d\left(1+x^2\right)-3\int\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-3\arctan x+C$$

6. 【解析】 $\int\frac{x^2+5x+2}{x^2+4}dx=\int\frac{\left(x^2+4\right)+(5x-2)}{x^2+4}dx=x+5\int\frac{x}{x^2+4}dx-2\int\frac{1}{x^2+4}dx$

$$=x+\frac{5}{2}\int\frac{1}{x^2+4}d\left(x^2+4\right)-\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}d\frac{x}{2}=x+\frac{5}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\arctan\frac{x}{2}+C$$

7. 【解析】 $\int\frac{(3+2\ln x)^2}{x}dx=\frac{1}{2}\int(3+2\ln x)^2d(3+2\ln x)=\frac{1}{6}(3+2\ln x)^3+C$