加测 19 几个重要的证明题答案

1．证明：$f(x)$ 在$[1,2]$和$[2,4]$都满足拉格朗日中值定理，所以存在$\xi_1 \in (1,2), \xi_2 \in (2,4)$，

使得 $f'(\xi_1) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2)-f(1)$；

$$f'(\xi_2) = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{3f(2)-2f(1)-f(2)}{2} = f(2)-f(1)$$

所以 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$

所以 $f'(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$满足罗尔定理，所以存在一点$\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (1,4)$使得 $f''(\xi)=0$

2. 证明： 设 $f(x)=\ln^2 x$ ， $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$ 则 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，

由拉格朗日中值定理可知，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ ，使得$\ln^2 b - \ln^2 a = \dfrac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)$

设$\varphi(t) = \dfrac{2\ln t}{t}$ ，则$\varphi'(t) = \dfrac{2(1-\ln t)}{t^2}$ ，当$t>e$时，$\varphi'(t)<0$ ，所以$\varphi(t)$在$(e,+\infty)$内

单独减少，而 $e<a<\xi<b<e^3$, ，从而$\varphi(\xi) > \varphi\left(e^3\right)$ ，即$\dfrac{2\ln\xi}{\xi} > \dfrac{2\ln e^3}{e^3} = \dfrac{6}{e^3}$.

故 $\ln^2 b - \ln^2 a > \dfrac{6}{e^3}(b-a)$.

3. 证明： $f(x)$ 在$[1,3]$上连续，且 $f(1)f(2)<0, f(2)f(3)<0$，由零点定理知存在 $c_1 \in (1,2), c_2 \in (2,3)$，使得 $f(c_1)=f(c_2)=0$.

令$F(x)=e^{-x}f(x)$，所以$F'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]$

所以$F(x)$在$[c_1,c_2]$连续，在(c_1,c_2)可导，且$F(c_1)=F(c_2)$，所以由罗尔定理知至少存在一点$\xi \in (c_1,c_2) \subset (1,3)$使得$F'(\xi)=0$，即$e^{-\xi}[f'(\xi)-f(\xi)]=0$，因为$e^{-\xi} \neq 0$，所以 $f'(\xi)-f(\xi)=0$.