

加测 14 极大值极小值 1、2 答案

1. (2021 数一) 设 $k > 0$, 求函数 $f(x) = \ln(1+x) + kx^2 - x$ 的极值点, 并判断是极大值点还是极小值点。

解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + 2kx - 1 = \frac{x(2kx+2k-1)}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} + 2k$$

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = 0$ 和 $x = \frac{1-2k}{2k} = \frac{1}{2k} - 1$

①当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 有唯一的驻点 $x = 0$, 并且 $f'(x) = \frac{1}{1+x} + 1 > 0$ 函数没有极值点

②当 $0 < k < \frac{1}{2}$ 时, $f''(0) = 2k - 1 < 0$, $f''(\frac{1}{2k} - 1) = 2k(1-2k) > 0$ 所以 $x = 0$ 为极大值

点, $x = \frac{1}{2k} - 1$ 为极小值点。

③当 $k > \frac{1}{2}$ 时, $f''(0) = 2k - 1 > 0$, $f''(\frac{1}{2k} - 1) = 2k(1-2k) < 0$ 所以 $x = 0$ 为极小值点,

$x = \frac{1}{2k} - 1$ 为极大值点。

2. (2021 数三) 设 $k > 0$, 求函数 $f(x) = 2\ln(1+x) + kx^2 - 2x$ 的极值点, 并判断是极大值点还是极小值点。

解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $x > -1$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x} + 2kx - 2 = \frac{2 + 2kx + 2kx^2 - 2 - 2x}{1+x} = \frac{2x(kx+k-1)}{1+x}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(1+x)^2} + 2k$$

令 $f'(x) = 0$ 解得: $x = 0$ 或者 $x = \frac{1-k}{k} = \frac{1}{k} - 1$

$$f''(0) = -2 + 2k, \quad f''(\frac{1}{k} - 1) = -2k^2 + 2k = 2k(1-k)$$

①当 $k = 1$ 时, 函数有唯一的 $x = 0$, 并且 $f'(x) = \frac{2}{1+x} + 2x - 2 = \frac{2x^2}{1+x} \geq 0$, 所以函数单调, 函数没有极值点;

②当 $0 < k < 1$ 时 $f''(0) < 0$, $f''(\frac{1}{k}-1) > 0$, 所以 $x=0$ 为极大值点, $x=\frac{1}{k}-1$ 为极小值点;

③当 $k > 1$ 时 $f''(0) > 0$, $f''(\frac{1}{k}-1) < 0$, 所以 $x=0$ 为极小值点, $x=\frac{1}{k}-1$ 为极大值点。

3. 函数 $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$ 的极小值点是 (B)

$$A. \quad x = -1 \quad B. \quad x = 0 \quad C. \quad x = 1 \quad D. \quad x = 2$$

4. (2022 数三) 已知 $f'(x) = (x-1)(e^x - 1)$, 则 (B)

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| A. $x=0$ 为极小值点, $x=1$ 为极大值点 | B. $x=0$ 为极大值点, $x=1$ 为极小值点 |
| C. $x=0$ 为极值点, $x=1$ 不是极值点 | D. $x=0$ 不是极值点, $x=1$ 为极值点 |

5. (2020 数三) 求函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值.

解: $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1) = 0, \text{ 得 } x = -1 \text{ 或 } x = 2$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$\because f''(-1) = -18 < 0, \therefore x = -1$ 为极大值点, 极大值为 $f(-1) = 12$

$f''(2) = 18 > 0, \therefore x = 2$ 为极小值点, 极小值为 $f(2) = -15$.

6. (2022 数一) 求函数 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 12x - \frac{1}{3}$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值

解: $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ (利用第二充分条件)

$$f'(x) = 2x^2 - 10x + 12 = 2(x-2)(x-3), \text{ 令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x_1 = 2, x_2 = 3$$

$$f''(x) = 4x - 10, \quad f''(2) = -2 < 0, \quad f''(3) = 2 > 0$$

所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 取得极大值 $f(2) = 9$, $f(x)$ 在 $x=3$ 取得极小值 $f(3) = \frac{26}{3}$

7. (2023 数一) 求函数 $f(x) = (2x-3)e^x - x^2 + x$ 的极值, 并判断是极大值还是极小值

解: 令 $f'(x) = (2x-1)(e^x - 1) = 0$, 得驻点 $x=0$ 和 $x=\frac{1}{2}$

$$f''(x) = (2x+1)e^x - 2$$

$$f''(0) = -1 < 0, \quad f''(\frac{1}{2}) = 2e^{\frac{1}{2}} - 2 = 2\sqrt{e} - 2 > 0$$

所以极大值为 $f(0) = -3$ ，极小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} = -2\sqrt{e} + \frac{1}{4}$

8. (2023 数二) 函数 $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ 的极小值是 -1

9. (2023 数三) 已知实数 $a \neq 0$ ，求函数 $f(x) = a^2 x^3 - 6ax^2 + 9x$ 的极值，判断是极大值还是极小值。

解： $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$$f'(x) = 3a^2 x^2 - 12ax + 9 = 3(a^2 x^2 - 4ax + 3) = 3(ax - 1)(ax - 3)$$

$$f''(x) = 6a^2 x - 12a$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{a}$ 或 $x = \frac{3}{a}$

(1) 如果 $a > 0$ ，则 $f''\left(\frac{1}{a}\right) = -6a < 0$ ， $f''\left(\frac{3}{a}\right) = 6a > 0$

所以 $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{4}{a}$ 为极大值， $f\left(\frac{3}{a}\right) = 0$ 为极小值

(2) 如果 $a < 0$ ，则 $f''\left(\frac{1}{a}\right) = -6a > 0$ ， $f''\left(\frac{3}{a}\right) = 6a < 0$

所以 $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{4}{a}$ 为极小值， $f\left(\frac{3}{a}\right) = 0$ 为极大值