二期加测 27 利用定积分求面积真题答案

姓名___________成绩_______________

定积分求面积：不需要分割

不需要分割——五年内数一考了 2 次（ 20 和 22 应用）、数二考了 3 次（ 20、21 选择、22 应用）

1. 【解析】（1）画图（2）解交点（3）积分变量为 x

（4）$S=\int_0^2\left[\left(-x^2+4\right)-\left(-2x+4\right)\right]dx=\int_0^2\left(-x^2+2x\right)dx=\frac{4}{3}$

2. 【答案】 $\underline{\ln 3}$

3. 【答案】$\frac{16}{3}$

4. 【解析】$y'(1)=-1$，法线方程为：$y-1=x+1$，即 $y=x+2$

由$\begin{cases}y=x+2\\ y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\end{cases}$得交点为$(-1,1),(3,5)$

所以面积为：$S=\int_{-1}^{3}(x+2-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2})dx=\frac{16}{3}$

5. 【解析】由$\begin{cases}y=\sqrt{x}\\ x+3y=4\end{cases}$的交点$(1,1)$

面积为$S=\int_1^4(\sqrt{x}+\frac{x}{3}-\frac{4}{3})dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{6}-\frac{4}{3}x)\Big|_1^4=\frac{19}{6}$

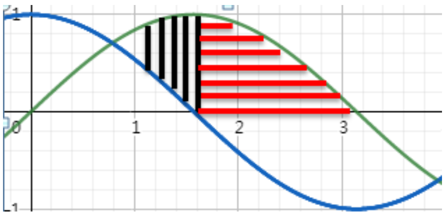
需要分割

1. 【解析】由$\begin{cases}y=\frac{1}{x}\\ y=x\end{cases}$ 得交点（1，1）

所以面积为$S=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(x-\frac{1}{4}\right)dx+\int_1^4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}x\right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{1}+\left(\ln|x|-\frac{1}{4}x\right)\Bigg|_1^4=\ln 4-\frac{15}{32}$

或者 $S=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(\frac{1}{y}-y\right)dy=\left(\ln|y|-\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{1}=\ln 4-\frac{15}{32}$

2. 【解析】 画出图形



由题意可得面积 $S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xdx=(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\sqrt{2}$

3. 【解析】由 $\begin{cases}y=2x\\ y=-x^2+2x+4\end{cases}$ 得交点 $(2,4)$

由 $\begin{cases}y=-x\\ y=-x^2+2x+4\end{cases}$ 得交点 $(-1,1)$

所以 $S=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x+4+x)\ dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x+4-2x)\ dx+$

$=(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x)\Big|_{-1}^{0}+(-\frac{1}{3}x^3+4x)\Big|_{0}^{2}=\frac{15}{2}$

4. 【解析】 联立 $\begin{cases}y=3x,x<0\\ y=-x^2+4\end{cases}$ 得交点 $(-4,-12)$；联立 $\begin{cases}y=x^2-2x,x\geq 0\\ y=-x^2+4\end{cases}$ 得交点 $(-2,0)$

所以图形的面积为

$S=\int_{-4}^{0}(-x^2+4-3x)dx+\int_{0}^{2}[(-x^2+4)-(x^2-2x)]dx$

$=(-\frac{1}{3}x^3+4x-\frac{3}{2}x^2)\Big|_{-4}^{0}+(-\frac{2}{3}x^3+4x+x^2)\Big|_{0}^{2}=\frac{76}{3}$

5. 【解析】面积为 $S=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(x+1+x)dx+\int_{0}^{1}(x+1-2\sqrt{x})dx$

$$=x^2\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}+x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}+x\Big|_{0}^{1}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1}=\frac{5}{12}$$

6. 【解析】面积为 $S=\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{1}{2}}(4x+x-2)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\frac{1}{x}+x-2)dx$

$$=\frac{5}{2}x^2\Big|_{\frac{2}{5}}^{\frac{1}{2}}-2x\Big|_{\frac{2}{5}}^{\frac{1}{2}}+\ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-2x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\ln 2-\frac{3}{5}$$

7．（2025 数三）求由曲线 $y=\begin{cases}(x-1)^2, x\le 1\\ 4x-4, x>1\end{cases}$ 与 $y=x^2$ 所围成的平面图形的面积 S．

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x^2-(x-1)^2)dx+\int_{1}^{2}(x^2-4x+4)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)dx+\int_{1}^{2}(x^2-4x+4)dx$$

$$=x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{2}-2x^2\Big|_{1}^{2}+4x\Big|_{1}^{2}=\frac{7}{12}$$