

### 加测 18 前三章测试答案

姓名\_\_\_\_\_成绩\_\_\_\_\_

#### 一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{e^x} = (\text{A})$ 
  - A. 0
  - B. 1
  - C. 2
  - D.  $+\infty$
2. 已知函数  $f(x)$  在  $x=4$  处可导，且  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+6h)-f(4+2h)}{h} = 12$ ，则  $f'(4) = (\text{B})$ 
  - A. -3
  - B. 3
  - C. -12
  - D. 12
3. 若函数  $y=f(x)$  在点  $x=x_0$  处取得极小值，则 (D)
  - A.  $f'(x_0)=0$
  - B.  $f'(x_0)>0$
  - C.  $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$
  - D.  $f'(x_0)=0$  或  $f'(x_0)$  不存在
4. 函数  $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$  的单调递增区间是 (A)
  - A.  $[1, +\infty)$
  - B.  $(0, 1)$
  - C.  $(-\infty, 0)$
  - D.  $(-\infty, 1]$
5. 曲线  $y=(x-1)e^x$  的拐点是 (B)
  - A.  $(-2, -\frac{3}{e^2})$
  - B.  $(-1, -\frac{2}{e})$
  - C.  $(0, -1)$
  - D.  $(1, 0)$

#### 二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

6. 已知函数  $y=y(x)$  由方程  $2y+\ln(2x+y-2)=2$  确定，则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
7. 已知函数  $y=\arcsin(3x+1)$ ，则微分  $dy = \underline{\hspace{2cm}}$
8. 曲线  $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$  的水平和垂直渐近线共有 3 条.
9. 函数  $f(x)=4e^x+e^{-x}$  的极小值点为  $x=-\ln 2$ .

10. 设点  $(1, a)$  是曲线  $y=ax^3-x^2-2x+3$  的拐点，则  $a=\frac{1}{3}$ .

#### 三、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

11. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{\tan^2 x}$ .

解：  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x + \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x + \cos x}{2} = 1.$

12. 已知  $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\begin{aligned}
\text{解: } \frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2+x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

13. 求函数  $f(x) = x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \arctan x$  的单调区间和极值.

函数  $f(x)$  的定义域  $(-\infty, +\infty)$ ,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x(x-1)}{1+x^2}, \text{ 令 } f'(x) = 0, x_1 = 0, x_2 = 1$$

列表:

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单增	极大值	单减	极小值	单增

由上表可得, 函数的单调减区间为  $[0, 1]$ , 单调增区间为  $(-\infty, 0], [1, +\infty)$ . 函数的极大值为  $f(0) = 0$ , 极小值为

$$f(1) = 1 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}.$$

14. 求函数  $f(x) = (2x^2 - 8x) \ln x - 3x^2 + 16x$  的极值, 并判断是极大值还是极小值.

解: 函数的定义域为  $(0, +\infty)$ .

$$f'(x) = (4x-8) \ln x + \frac{2x^2-8x}{x} - 6x + 16 = (4x-8)(\ln x - 1), \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得驻点 } x_1 = 2, x_2 = e.$$

$$f''(x) = 4(\ln x - 1) + (4x-8) \cdot \frac{1}{x} = 4 \ln x - \frac{8}{x}.$$

$$f''(2) = 4 \ln 2 - 4 = 4(\ln 2 - 1) < 0, \text{ 故极大值为 } f(2) = 20 - 8 \ln 2.$$

$$f''(e) = 4 - \frac{8}{e} = 4 \left(1 - \frac{2}{e}\right) > 0, \text{ 故极小值为 } f(e) = 8e - e^2.$$

#### 四、证明题 (共 8 分)

证明: 令  $F(x) = x^2 f(x) - x$ , 显然  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导. 又  $F(0) = 0, F(1) = f(1) - 1 = 0$ ,

即  $F(0) = F(1)$ . 由罗尔定理, 至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即  $2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 1$ .