

加测 4 答案

(考试时间 60 钟, 满分 100 分)

姓名_____成绩_____

一、选择题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1. 下列函数是偶函数的是 (D)

A. $y = e^x$ B. $y = x^3 \cos x$ C. $y = \tan x$ D. $y = 1 + \sin x^2$

2. $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数是无穷小量的是 (B)

A. e^x B. $1 - \cos x$ C. $\sin x + 1$ D. $\frac{x^2 + 1}{x - 3}$

3. 已知 $f'(0) = 2$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-2\Delta x) - f(0)}{4\Delta x} =$ (B)

A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

4. 函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{2}{x}, & x > 0 \\ 2x + 3, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的 (D)

A. 连续点 B. 可去间断点 C. 无穷间断点 D. 跳跃间断点

5. $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1 - 3x^2)$ 与 $\sin ax^2$ 是等价无穷小, 则 $a =$ (D)

A. 1 B. 2 C. 3 D. -3

6. 函数 $f(x) = \begin{cases} x + a, & x \geq 0 \\ (1 - 2x)^{\frac{3}{x}}, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 连续, 则 $a =$ (B)

A. e^{-1} B. e^{-2} C. A. 1 D. e^{-6}

二、填空题 (每空 4 分, 共 16 分)

1. $x = 0$ 是函数 $f(x) = x \sin \frac{3}{x}$ 的 可去 间断点.

2. 曲线 $y = \ln x$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

3. 已知 $y = \arctan(2x + 1)$, 则 $y' = \frac{1}{2x^2 + 2x + 1}$.

4. 函数 $f(x) = \ln \frac{x}{1+x} + \sqrt{2x-1}$ 的定义域为 $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

三、计算题（每小题 8 分，共 64 分）

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x) \tan x}{\sqrt{1+2x^3}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} \cdot x}{\frac{2x^3}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2x+8}{x^3-8} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x+4-2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{1}{3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x}}{\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x}} \cdot 1 = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}} = e^3$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})}{3x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{3x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{3(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = -\frac{1}{3}$$

5. 求曲线 $y = e^{x-1} + \ln x$ 在 $x=1$ 处的切线和法线方程.

$$\text{解: } x=1 \text{ 时 } y=1, \quad y'(1) = \left(e^{x-1} + \frac{1}{x} \right) \Big|_{x=1} = 2$$

所以切线为: $y-1=2(x-1)$, 即 $y=2x-1$

法线为: $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$, 即 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

6. 求下列函数的导数

$$(1) \quad y = \cos \frac{1}{x} - \sqrt{2x-3} \quad (2) \quad y = \log_3(2x+3) \quad (3) \quad y = \ln(\sin 3x)$$

$$(1) \quad y' = -\sin \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{2\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

$$(2) \quad y' = \frac{1}{(2x+3)\ln 3} \cdot (2x+3)' = \frac{2}{(2x+3)\ln 3}$$

$$(3) \quad y' = \frac{1}{\sin 3x} \cdot (\sin 3x)' = \frac{3\cos 3x}{\sin 3x} = 3\cot 3x$$