

加测 5 答案

成绩_____ 姓名_____

一、选择题 (本小题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

1. 函数 $y = \arcsin \frac{x-2}{2} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ 定义域为 (D)

- A. $(-\infty, 3)$ B. $(0, 4)$ C. $[0, 4]$ D. $[0, 3)$

2. 以下函数在定义域上是奇函数的是 (D)

- A. $y = x \sin x$ B. $y = f(x^3)$ C. $y = f(|x|)$ D. $y = x \cos x$

3. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 下列不是无穷小量的是 (C)

- A. $\frac{\cos x}{x}$ B. $\frac{1}{2^x + 1}$ C. $\frac{1}{x^2} + \sin x$ D. $\frac{2x+1}{x^3 - 1}$

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x^2)$ 是 $1 - \cos x$ 的 (C)

- A. 低阶无穷小 B. 高阶无穷小 C. 同阶但不等价无穷小 D. 等价无穷小

5. 函数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ 有 (B)

- A. 一个可去间断点, 一个跳跃间断点
B. 一个可去间断点, 一个无穷间断点
C. 两个可去间断点
D. 一个无穷间断点, 一个跳跃间断点

二、填空题 (本题共 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1. 若图数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \geq 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| < 1 \end{cases}$, 则 $f[f(e^{-1})] = \underline{e^2}$.

2. 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{3x+2}{x}\right)^2$, 则 $f(x) = \underline{(3+2x)^2}$.

3. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n^2 - b_n) = \underline{7}$.

4. 已知 $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$, 则它的反函数 $f^{-1}(x) = \underline{\frac{x}{3x-2}}$.

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{3}{x} = \underline{0}$.

6. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}} = \underline{2}$.

三、解答题 (本题 6 个小题, 每小题 8 分, 共 48 分)

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = 4.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{3})(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+2} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - (x+1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x^2 - 1} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(e^{x^2} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x(e^{x^2} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x \cdot x^2} = \frac{1}{2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}} = \frac{e^6}{e^2} = e^4 = e^{2k}, \text{ 所以 } 2k = 4, \text{ 所以 } k = 2$$

$$6. \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 2b, & x = 0 \\ e^x + a, & x < 0 \end{cases} \quad \text{在 } x=0 \text{ 连续, 求常数 } a, b.$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + a) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1}{x} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{因为 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 连续, 所以 } a = \frac{1}{2}$$

四、应用题 (8 分) 求曲线 $f(x) = \ln(3x^2 - 2)$ 在 $(1, 0)$ 处的切线和法线方程.

$$\text{解: } f'(1) = \frac{6x}{3x^2 - 2} \Big|_{x=1} = 6$$

所以切线方程为: $y - 0 = 6(x - 1)$, 即 $y = 6x - 6$

$$\text{法线方程为: } y - 0 = -\frac{1}{6}(x - 1), \text{ 即 } y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$$