Теоретическое домашнее задание № 5

Решения

А. Безрукова

Здесь могла бы быть ваша реклама,
но нормальную так и не подвезли

Неизвестный маркетолог

Задача 1: Рассмотрим двойственное представление задачи гребневой регрессии:

$$Q(a) = \frac{1}{2}\|Ka - y\|^2 + \frac{\lambda}{2}a^T Ka \to \min_a .$$

Покажите, что решение этой задачи записывается как

$$a = (K + \lambda I)^{-1}y.$$

Решение: Найдем проиизводную $\frac{dQ}{da}$ (вспоминаем курс по ОМВ):

$$\frac{dQ}{da} = d_a\left(\frac{1}{2}\|Ka - y\|^2 + \frac{\lambda}{2}a^T Ka\right) = d_a\left(\frac{1}{2}\|Ka - y\|^2\right) + d_a\left(\frac{\lambda}{2}a^T Ka\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot K^T\left(Ka - y\right)\right) + \left(\frac{\lambda}{2}\cdot 2\cdot K^T a\right) = K^T\left(Ka - y\right) + \lambda K^T a =$$

$$= K^T Ka - K^T y + \lambda K^T a$$

Тогда:

$$\frac{dQ}{da} = 0 \Longleftrightarrow K^T Ka + \lambda K^T a = K^T y$$

$$K^T Ka + \lambda K^T a = K^T y \Longleftrightarrow K^T\left(Ka + \lambda Ia\right) = K^T y \Longleftrightarrow \left(K + \lambda I\right)a = y$$

Следовательно $a = \left(K + \lambda I\right)^{-1} y$

Задача 2: Покажите, что функция

$$K(x, z) = \cos(x - z)$$

для $x, z \in$ является ядром.

Решение: Покажем, что наша функция является суммой двух ядер, а потому и сама является ядром

По теореме Эйлера $K(x, z) = \cos(x-z) = \frac{1}{2}e^{i(x-z)}+\frac{1}{2}e^{-i(x-z)} = K_1(x, z)+ K_2(x, z)$

Однако, так как $e^{-i(x-z)} = e^{i(z-x)}$, достаточно показать, что K_1 - ядро. По теореме Мерсера, функция $K(x, z)$ является ядром тогда и только тогда, когда она симметрична и неотрицательно определена. Проверим эти условия для K_1 с тем уточнением, что наша функция - комплексная, а потому придется смотреть не на симметричность, а на сопряженную симметричность

1. симметрия: $\overline{K(z, x)} = \overline{\cos(z - x) + i \sin(z - x)} = \cos(x - z) + i \sin(x - z) = K(x, z)$
2. неотрицательность: $K = (K(x_i, x_j))_{n=1}^{l} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_i c_j e^{i(x_i - x_j)} = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{ix_i} \cdot \sum_{j=1}^{N} c_j e^{ix_j} = |\sum_{i=1}^{N} c_i e^{ix_i}|^2 \geq 0$

Таким образом $K_1(x, z)$ - ядро. Следовательно и $K(x, z)$ - ядро.

Задача 3: Рассмотрим функцию, равную косинусу угла между двумя векторами $x, z \in^d$:

$$K(x, z) = \cos(\widehat{x, z}).$$

Покажите, что она является ядром.

Решение:

Для начала следует отметить, что $K(x, z) = \cos(\widehat{x, z}) = \frac{<x,z>}{||x|| \cdot ||z||}$

Мы знаем, как менять ядро так, чтобы оно соответствовало скалярному произведению нормированных векторов - нужно просто заменить $\varphi(x)$ на $\widetilde{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x)}{||\varphi(x)||}$

В таком случае $\widetilde{K}(x, z)$ - ядро, где

$$\widetilde{K}(x, z) = \langle \widetilde{\varphi}(x), \widetilde{\varphi}(z) \rangle = \left\langle \frac{\varphi(x)}{||\varphi(x)||}, \frac{\varphi(z)}{||\varphi(z)||} \right\rangle = \frac{\langle \varphi(x), \varphi(z) \rangle}{||\varphi(x)|| ||\varphi(z)||}$$

Подставив $\varphi(x) = x$ в $\widetilde{K}(x, z)$, получим желаемое.

Задача 4: Рассмотрим ядра $K_1(x,z) = (xz+1)^2$ и $K_2(x,z) = (xz-1)^2$, заданные для $x, z \in \mathbb{R}$. Найдите спрямляющие пространства для K_1, K_2 и $K_1 + K_2$.

Решение:

1. найдем спрямляющее пространство для $K_1(x,z) = (xz+1)^2$
   $K_1(x,z) = (xz+1)^2 = (xz)^2 + 2xz + 1.$
   Тогда возьмем $\varphi(x) = (x^2, x\sqrt{2}, 1) : \langle \varphi(x), \varphi(z) \rangle = x^2z^2 + 2xz + 1$

2. найдем спрямляющее пространство для $K_2(x,z) = (xz-1)^2$
   $K_2(x,z) = (xz-1)^2 = (xz)^2 - 2xz + 1.$
   Тогда возьмем $\varphi(x) = (x^2, ix\sqrt{2}, 1) : \langle \varphi(x), \varphi(z) \rangle = x^2z^2 - 2xz + 1$

3. найдем спрямляющее пространство для $K_1(x,z) + K_2(x,z)$
   $K_1(x,z) + K_2(x,z) = 2(xz)^2 + 2$
   Тогда возьмем $\varphi(x) = (x^2\sqrt{2}, \sqrt{2}) : \langle \varphi(x), \varphi(z) \rangle = 2x^2z^2 + 2$

Задача 5: Рассмотрим следующую функцию на пространстве вещественных чисел:

$$K(x,z) = \frac{1}{1+e^{-xz}}.$$

Покажите, что она не является ядром.

Решение: Покажем, что для этой функции не выполняются условия теоремы Мерсера

1. симметричность:

   $K(x,z) = \frac{1}{1+e^{-xz}} = \frac{1}{1+e^{-zx}} = K(z,x)$ - выполнена

2. неотрицательная определенность:

   Возьмем $\{x_i\}_{i=1}^{2} = \left\{\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right\}$ и построим матрицу K

   $\mathrm{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+e^{-\frac{4}{3}}} & \frac{1}{1+e^{-2}} \\ \frac{1}{1+e^{-2}} & \frac{1}{1+e^{-3}} \end{bmatrix}$

   Первый минор равен $\frac{1}{1+e^{-\frac{4}{3}}} > 0$

   Второй минор равен $\frac{1}{1+e^{-\frac{4}{3}}+e^{-3}+e^{-\frac{13}{3}}} - \frac{1}{1+2e^{-2}+e^{-4}} < 0$ (несложно проверить, что $1+e^{-\frac{4}{3}}+e^{-3}+e^{-\frac{13}{3}} > 1+2e^{-2}+e^{-4}$) - не выполнена

Следовательно, функция $K(x,z)$ не является ядром