学校代号 10530　　　　　　　　　　学　号 201431091158

分 类 号 O241.82　　　　　　　　　　密　级

湘潭大學

硕 士 学 位 论 文

一类非线性泛函积分微分方程数值方法的散逸性分析

学 位 申 请 人 廖　清

指 导 教 师 文立平 教授

学 院 名 称 数学与计算科学学院

学 科 专 业 数　学

研 究 方 向 刚性微分方程数值解

二零一七年五月二十四日

一类非线性泛函积分微分方程数值方法的散逸性分析

学 位 申 请 人　　　廖 清

导师姓名及职称　　　文 立 平　教授

学　院　名　称　　　数学与计算科学学院

学　科　专　业　　　数　学

研　究　方　向　　　刚性微分方程数值解

学 位 申 请 级 别　　　理 学 硕 士

学 位 授 予 单 位　　　湘 潭 大 学

论 文 提 交 日 期　　　2017-5-24

Dissipativity analysis of the numerical methods for a class of nonlinear functional-integro-differential equations

Candidate Qing Liao

Supervisor and Rank Professor Liping Wen

College School of Mathematics and Computational Science

Program Mathematics

Specialization Numerical Methods for Stiff Differential Equation

Degree Master of Science

University Xiangtan University

Date May 24th, 2017

湘潭大学
学位论文原创性声明

本人郑重声明: 所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果. 除了文中特别加以标注引用的内容外, 本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品. 对本文的研究做出重要贡献的个人和集体, 均已在文中以明确方式标明. 本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担.

作者签名: 日期: 年 月 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定, 同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版, 允许论文被查阅和借阅. 本人授权湘潭大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索, 可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文.

涉密论文按学校规定处理.

作者签名: 日期: 年 月 日

导师签名: 日期: 年 月 日

摘 要

设$\mathbb{C}^d$为d维的复欧几里得空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle$为其中的内积, $\|\cdot\|$ 是由该内积导出的范数. 考虑如下形式的非线性泛函积分微分方程(FIDEs) 初值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[x(t)-\int_{t-\tau}^{t} g(t,\xi,x(\xi))d\xi\right] = f(t,x(t),x(t-\tau)), & t \geq t_0, \\ x(t)=\varphi(t), & t_0-\tau \leq t \leq t_0, \end{cases}$$

这里$\tau>0$是实常数, $f:[t_0,+\infty)\times\mathbb{C}^d\times\mathbb{C}^d\rightarrow\mathbb{C}^d$, $g:\mathbb{D}\times\mathbb{C}^d\rightarrow\mathbb{C}^d$, $\varphi:[t_0-\tau,t_0]\rightarrow\mathbb{C}^d$ 是给定的连续映射, 且f 和g 满足条件

$$Re\langle f(t,u,v),u-w\rangle \leq \gamma+\alpha\parallel u\parallel^2+\beta\parallel v\parallel^2+\eta\parallel w\parallel^2,\ t\geq t_0,\ u,v,w\in\mathbb{C}^d,$$

和

$$\parallel g(t,\xi,u)\parallel\leq\lambda\parallel u\parallel,\ (t,\xi)\in\mathbb{D},\ u\in\mathbb{C}^d,$$

这里$\gamma,\alpha,\beta,\eta,\lambda$ 是实常数且$\gamma,-\alpha,\eta$ 非负, $\lambda>0$ 且$2\lambda^2\tau^2<1$,

$$\mathbb{D}=\{(t,\xi):t\in[t_0,+\infty),\xi\in[t-\tau,t]\}.$$

本文将满足上述条件的问题类记作$\mathbf{R}(\gamma,\alpha,\beta,\eta,\lambda)$, 并研究该类问题本身及求解该类问题的数值方法的散逸性, 获得了如下结果.

一、给出了该类问题本身散逸的充分条件.

二、得到了当$h(\alpha+\beta^{+}+\eta v^2\lambda^2)<p^{-}(1+v^2\lambda^2)$ 时, $G(c,p,0)$-代数稳定单支方法求解该类问题是散逸的, 以及当$\alpha+\beta+\eta v^2\lambda^2<0$ 时, Runge-Kutta 方法求解该类问题是散逸的.

三、以$G(c,p,0)$-代数稳定单支方法和Runge-Kutta 方法为例进行了数值试验, 数值计算结果与理论结果一致, 从而验证了理论结果的正确性.

关键词 泛函积分微分方程; 单支方法; Runge-Kutta 方法; 散逸性; 代数稳定; 动力系统

Abstract

Let $\mathbb{C}^d$ be a d dimensional complex Euclidian space with the inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ and the corresponding norm $\|\cdot\|$. Consider the nonlinear functional integro-differential equations (FIDEs)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[x(t)-\int_{t-\tau}^{t} g(t,\xi,x(\xi))d\xi\right] = f(t,x(t),x(t-\tau)), & t\geq t_0, \\ x(t)=\varphi(t), & t_0-\tau\leq t\leq t_0, \end{cases}$$

where $\tau>0$ is a given constant delay, the functions $f:[t_0,+\infty)\times\mathbb{C}^d\times\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^d$, $g:\mathbb{D}\times\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^d$, and $\varphi:[t_0-\tau,t_0]\to\mathbb{C}^d$ are assumed to be continuous and satisfies the conditions

$$Re\langle f(t,u,v),u-w\rangle\leq\gamma+\alpha\parallel u\parallel^2+\beta\parallel v\parallel^2+\eta\parallel w\parallel^2,\ t\geq t_0,\ u,v,w\in\mathbb{C}^d,$$

$$\parallel g(t,\xi,u)\parallel\leq\lambda\parallel u\parallel,\ (t,\xi)\in\mathbb{D},\ u\in\mathbb{C}^d,$$

where $\gamma,\alpha,\beta,\eta,\lambda$ are real constant and $\gamma,-\alpha,\eta$ are nonnegative constant, $\lambda>0$ with $2\lambda^2\tau^2<1$,

$$\mathbb{D}=\{(t,\xi):t\in[t_0,+\infty),\xi\in[t-\tau,t]\}.$$

In this paper, we denote this problem class which satisfies the conditions as $\mathbf{R}(\gamma,\alpha,\beta,\eta,\lambda)$ and study dissipativity of itself and numerical methods for solving nonlinear functional integro-differential equations.

First, the sufficient condition which ensures the system to be dissipative is given.

Second, the $G(c,p,0)$-algebraically stable one-leg method is dissipative when $h(\alpha+\beta^{+}+\eta v^2\lambda^2)<p^{-}(1+v^2\lambda^2)$ and Runge-Kutta method is is dissipative when $\alpha+\beta+\eta v^2\lambda^2<0$.

Finally, as an example, the numerical tests are given by used $G(c,p,0)$-algebraically stable one-leg method and Runge-Kutta method for the initial value problem equations and the numerical results verify correctness of the theoretical results.

Keywords functional integro-differential equations; one-leg method; Runge-Kutta method; dissipativity; Algebraic stability; dynamic system

目 录

第一章　绪　论

§1.1　研究现状和背景

物理学、工程学中许多系统具有散逸性, 即系统具有一有界吸引集, 从任意初始条件出发的解在经过有限的时间及之后所有的轨迹都进入该吸收集(参见 [1]). 过去几十年, 对各种动力系统的解析解和数值解的散逸性研究取得了颇多成果. 例如R. Temam, A. R. Humphries, A. M, Stuart, A. T. Hill, 黄乘明, 肖爱国, 甘四清, 田红炯，文立平, 王晚生等都做了这方面的研究, 并得到了许多结果.

1994年, Humphries 和Stuart [1] 研究了常微分方程(ODEs)初值问题

$$\frac{dy}{dt} = f(y),\ t \geq 0,\ y(0) = y_0 \tag{1.1}$$

本身和求解该类问题的Runge-Kutta方法的散逸性, 其中$y(t) \in \mathbb{R}^m, f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是局部Lipschitz连续, 且满足条件

$$\langle f(y), y\rangle \leq \alpha - \beta \parallel y \parallel^2, \tag{1.2}$$

这里$\alpha \geq 0, \beta > 0$, $\langle\cdot\rangle$ 和$\parallel \cdot \parallel$ 是$\mathbb{R}^m$上的内积及对应的范数. 系统(1.1-1.2)具有吸收集$B = (0, \sqrt{\alpha/\beta})$, 证明了系统本身及Runge-Kutta方法是散逸的.

1997年, Hill [2, 3] 研究了常微分方程

$$u_t = f(u),\ t \geq 0,\ u(0) = u_0, \tag{1.3}$$

这里H是复Hilbert空间, 取其上的内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$及范数$\parallel \cdot \parallel$, W是紧连续嵌入H的Hilbert子空间，$f : W \to H$, 且满足条件

$$Re\langle f(w), w\rangle \leq \alpha - \beta \mid w \mid^2,\ w \in W. \tag{1.4}$$

证明了求解系统(1.3)-(1.4)的Runge-Kutta方法是散逸的, 且具有吸收集$B = (0, \sqrt{\alpha/\beta} + 1)$. 文章还给出了强$A$-稳定是方法散逸的充分条件, 代数稳定且$R(\infty) < 1$ 是DJ- 不可约方法散逸的充分条件等. 此外, 还有很多学者对Runge-Kutta方法的散逸性条件做了许多工作，并得出了很多结论, 如 [21–25] 等.

2000年, 黄乘明 [4]研究了带常数延迟的延迟微分方程(DDEs)初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), y(t-\tau)),\ t \geq 0, \\ y(t) = \varphi(t),\ t \leq 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

这里$f : X \times X \to H$ 且

$$Re\langle u, f(u, v)\rangle \leq \gamma + \alpha \parallel u \parallel^2 + \beta \parallel v \parallel^2,\ u, v \in X, \tag{1.6}$$

其中H 是实(复)Hilbert 空间, 取其上的内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 及范数$\|\cdot\|$, X是紧连续嵌入H的Hilbert 子空间, τ 是常数延迟, $\varphi(t)$ 是连续函数, f 是局部Lipschitz 连续函数, α,β,γ是实常数. 指出系统(1.5)-(1.6) 具有吸收集$B=(0,\sqrt{-\gamma/(\alpha+\beta)+\varepsilon}), \varepsilon>0$, 证明了Runge-Kutta 方法求解问题(1.5)是散逸的, 并给出了一个充分条件. 黄乘明 [6] 还研究了单支方法关于问题(1.5)的散逸性, 并得出了单支方法散逸的结果.

2006年, 文立平, 余越昕, 李寿佛 [7,8]进一步研究了Volterra泛函微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t),y(\cdot)),\ t\geq 0, \\ y(t)=\varphi(t),\ -\tau\leq t\leq 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

这里τ是一个正常数, $\varphi\in C_X[-\tau,0]$ 是给定的初始函数, $f:[0,+\infty)\times X\times C_X[-\tau,+\infty)\to H$ 是给定的局部Lipschitz 连续函数且满足

$$\begin{aligned} &2Re\langle u,f(t,u,\psi(\cdot))\rangle\leq\gamma(t)+\alpha(t)\parallel u\parallel^2+\beta(t)\max_{t-\mu_2(t)\leq\xi\leq t-\mu_1(t)}\parallel\psi(t)\parallel^2, \\ &u\in X,\ \psi\in C_X[-\tau,+\infty), t\in[0,+\infty), \end{aligned} \tag{1.8}$$

这里$\alpha(t),\beta(t)$和$\gamma(t)$是区间$[0,+\infty)$上的有界连续函数, $\mu_1(t)$和$\mu_2(t)$满足

$$0<\inf_{0\leq\xi\leq+\infty}\mu_1(t)\leq\mu_1(t)\leq\mu_2(t)\leq t+\tau, \forall t\in[0,+\infty),$$

和

$$\lim_{t\to+\infty}(t-\mu_2(t))=+\infty.$$

证明了当$\alpha_0+\beta_0<0$且满足条件(1.8)时问题(1.7)是散逸的, 具有吸收集

$$B=(0,\sqrt{-\gamma_0/(\alpha_0+\beta_0)+\varepsilon}),$$

其中

$$\alpha_0=\sup_{0\leq t\leq+\infty}\alpha(t),\ \beta_0=\sup_{0\leq t\leq+\infty}\beta(t),\ \gamma_0=\sup_{0\leq t\leq+\infty}\gamma(t).$$

进一步将结果应用于延迟微分方程和积分微分方程, 证明了相应的散逸性.

2007年, 甘四清 [9]研究了非线性Volterra延迟积分微分方程

$$\begin{cases} y'(t)=f(y(t),y(t-\tau),\int_{t-\tau}^t g(t,s,y(s))ds),\ t\geq 0, \\ y(t)=\varphi(t),\ t\leq 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

本身和θ-方法的散逸性, 这里τ是一个正常数, φ 是连续函数, $f:X\times X\times X\to H$是给定的局部Lipschitz连续函数, $g:[0,+\infty]\times[-\tau,+\infty)\times X\to X$是连续函数且$f,g$满足

$$Re\langle u,f(u,v,w)\rangle\leq\gamma+\alpha\parallel u\parallel^2+\beta\parallel v\parallel^2+\omega\parallel w\parallel^2,\ u,v,w\in X, \tag{1.10a}$$

和

$$\parallel g(t,s,u)\parallel\leq c\parallel u\parallel, t\in[0,+\infty),\ s\in[-\tau,+\infty),\ u\in X, \tag{1.10b}$$

这里α,β,γ和c都是常数. 证明了当$\alpha+\beta+\omega\tau^2c^2<0$且满足条件(1.10)时问题(1.9)是散逸的, 有吸收集$B=(0,\sqrt{-\gamma/(\alpha+\beta+\omega\tau^2c^2)+\varepsilon})$. 并给出了单支$\theta$-方法和线性$\theta$-方法散逸的充分条件.

2012年, 张诚坚 [10] 进一步研究了多步Runge-Kutta方法关于问题(1.9) 的散逸性, 给出了(k,l)-代数稳定Runge-Kutta 方法在有限维及无限维情形下的散逸结果. 此外, 对θ-方法和Runge-Kutta 方法的散逸性条件的研究结果，参见 [26–30] 等.

2010年, 文立平 [11,12] 研究了中立型延迟积分微分方程

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}[y(t)-Ny(t-\tau)]=f(t,y(t),y(t-\tau),\int_{t-\tau}^{t}g(t,\xi,y(\xi))d\xi),\ t\geq 0,\\ y(t)=\varphi(t),\ -\tau\leq t\leq 0,\end{cases}\tag{1.11}$$

本身和单支方法的散逸性, 这里$\tau>0$是一个常数延迟, $N\in\mathbb{C}^{d\times d}$是一个常数矩阵且有$2\parallel N\parallel^2<1,\varphi:[-\tau,0]\rightarrow\mathbb{C}^d$ 是连续函数, $f:[0,+\infty)\times\mathbb{C}^d\times\mathbb{C}^d\times\mathbb{C}^d\rightarrow\mathbb{C}^d$ 是给定的局部Lipschitz 连续函数, $g:[0,+\infty]\times[-\tau,+\infty)\times\mathbb{C}^d\rightarrow\mathbb{C}^d$是连续函数且$f,g$满足

$$Re\langle u-Nv,f(t,u,v,w)\rangle\leq\gamma+\alpha\parallel u\parallel^2+\beta\parallel v\parallel^2+\omega\parallel w\parallel^2,\ t\in[0,+\infty),u,v,w\in\mathbb{C}^d,\tag{1.12a}$$

和

$$\parallel g(t,\theta,s)\parallel\leq\lambda\parallel s\parallel,t\geq 0,t-\tau\leq\theta,\ s\in\mathbb{C}^d,\tag{1.12b}$$

这里$\gamma\geq 0,\omega\geq 0,\lambda>0,\ \alpha,\beta$ 都是常数. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和$\parallel\cdot\parallel$是$\mathbb{C}^d$ 上的内积和诱导范数, 矩阵范数从属于向量范数. 为了研究(1.11) 的散逸性, 进一步假设f 满足：对任意常数$M>0$, 存在仅依赖于M 的数$L>0$, 当$t\geq 0,\parallel u\parallel\leq M,\parallel v\parallel\leq M,\parallel w\parallel\leq M$ 时有$\parallel f(t,u,v)\parallel\leq L$. 文章证明了若存在常数$0<\delta<1$使得

$$\delta\alpha+\frac{4}{1-2\parallel N\parallel^2}(\beta^+-\alpha\parallel N\parallel^2+\omega\lambda^2\tau^2)\leq 0,$$

则问题(1.11) 本身是散逸的, 有吸收集$B=B\left(0,\sqrt{\frac{4}{1-2\|N\|^2}\frac{-\gamma}{(1-\delta)\alpha}+\varepsilon}\right)$. 并证明了单支方法是散逸的. 文 [31]给出了求解问题(1.11)的代数稳定的Runge-Kutta方法的散逸性结果.

2015年, 王素霞、文立平 [32]研究了多步Runge-Kutta方法关于问题(1.11)的散逸性.

甘四清 [33]研究了初值问题

$$\begin{cases}y'(t)=f(t,y(t),y),\ t\geq a,\\ y(t)=\varphi(t),\ a-\tau\leq t\leq a,\end{cases}\tag{1.13}$$

这里a,τ是一个正常数, $0\leq\tau\leq+\infty,\varphi\in C_X[a-\tau,a]$ 是给定的初始函数, $f:[a,+\infty]\times X\times C_X[a-\tau,+\infty)\rightarrow X$ 是给定的连续函数且满足

$$\begin{aligned}&(1-\lambda\alpha(t))D_f(0,t,u,\psi)\\ &\quad\leq D_f(\lambda,t,u,\psi)+\lambda(\gamma(t)+\beta(t)\max_{t-\mu_2(t)\leq\xi\leq t-\mu_1(t)}\parallel\psi(t)\parallel^2),\\ &\quad\lambda\geq 0,\ \psi\in C_X[a-\tau,+\infty),t\in[a,+\infty),u\in X,\end{aligned}\tag{1.14}$$

这里

$$D_f(\lambda,t,u,\psi)=\| u-\lambda f(t,u,\psi)\|^2,$$

$\alpha(t),\beta(t)$和$\gamma(t)$是连续函数, $\mu_1(t)$和$\mu_2(t)$满足

$$0<\mu_1(t)\le \mu_2(t)\le t-a+\tau, \forall t\in[a,+\infty),$$

和

$$\lim_{t\to+\infty}(t-\mu_2(t))=+\infty.$$

证明了当$\alpha+\beta<0$时，问题(1.13)是散逸的且有吸收集

$$B=B(0,\sqrt{\frac{\gamma}{-(\alpha+\beta)}+\varepsilon}),$$

并进一步证明了向后欧拉方法关于问题(1.13)的散逸性.

§1.2 本文的主要工作

设$\mathbb{C}^d$为d维的复欧几里得空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle$为其中的内积, $\|\cdot\|$ 是由该内积导出的范数. 对任意给定的$k\times k$ 实对称矩阵$G=[g_{ij}]$, 定义在$\mathbb{C}^{dk}:=(\mathbb{C}^d)^k$ 上的范数$\|\cdot\|_G$ 表示为

$$\| U\|_G=(\sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}\langle u_i,u_j\rangle)^{\frac{1}{2}}, U=(u_1^T,u_2^T,\cdots,u_k^T)^T\in\mathbb{C}^{dk}.$$

本文考虑复空间$\mathbb{C}^d$中的如下非线性泛函积分微分方程(FIDEs) ([13, 14])

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left[x(t)-\int_{t-\tau}^{t} g(t,\xi,x(\xi))d\xi\right]=f(t,x(t),x(t-\tau)), & t\ge t_0,\\ x(t)=\varphi(t), & t_0-\tau\le t\le t_0,\end{cases}\tag{1.15}$$

这里$\tau>0$是实常数, $f:[t_0,+\infty)\times\mathbb{C}^d\times\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^d$, $g:\mathbb{D}\times\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^d$, $\varphi:[t_0-\tau,t_0]\to\mathbb{C}^d$ 是给定的连续映射, 且f 和g 满足条件

$$Re\langle f(t,u,v),u-w\rangle\le\gamma+\alpha\| u\|^2+\beta\| v\|^2+\eta\| w\|^2,\ t\ge t_0,\ u,v,w\in\mathbb{C}^d,\tag{1.16}$$

和

$$\| g(t,\xi,u)\|\le\lambda\| u\|,\ (t,\xi)\in\mathbb{D},\ u\in\mathbb{C}^d,\tag{1.17}$$

这里$\gamma,\alpha,\beta,\eta,\lambda$ 是实常数且$\gamma,-\alpha,\eta$ 非负, $\lambda>0$ 且$2\lambda^2\tau^2<1$,

$$\mathbb{D}=\{(t,\xi):t\in[t_0,T),\xi\in[t-\tau,t]\}.$$

为了研究问题(1.15) 的数值散逸性, 我们进一步假设f 满足对任意常数$M>0$, 存在仅依赖于M 的数$L>0$ 对任意$t\ge t_0$, 有$\| f(t,u,v)\|\le L$ 成立, 且$\| u\|\le M$, $\| v\|\le M$.

本文将满足上述条件的问题类(1.15) 记作$\mathbf{R}(\gamma,\alpha,\beta,\eta,\lambda)$, 并研究该类问题本身及求解该类问题的单支方法和Runge-Kutta方法的散逸性. 本文主要内容如下:

第二章研究了问题类$\mathbf{R}(\gamma,\alpha,\beta,\eta,\lambda)$ 本身的散逸性，给出了问题本身散逸的充分条件.

第三章研究了$G(c,p,0)$-代数稳定单支方法求解问题类$\mathbf{R}(\gamma,\alpha,\beta,\eta,\lambda)$ 的散逸性, 给出了$G(c,p,0)$-代数稳定的单支方法散逸的充分条件, 并进行试验验证了理论结果的正确性.

第四章研究了求解问题类$\mathbf{R}(\gamma,\alpha,\beta,\eta,\lambda)$ 的Runge-Kutta 方法的散逸性, 得到了Runge-Kutta方法散逸的充分条件, 并进行了数值试验, 数值计算结果与理论结果一致, 从而佐证了理论结果的正确性.

第二章　问题本身的散逸性

定 义 2.1 (参见 [11]) 称问题(1.15)于$\mathbb{C}^d$ 上是散逸的, 如果存在一个有界集$B \subset \mathbb{C}^d$, 使得对任意给定的有界集合$\Phi \subset \mathbb{C}^d$, 存在一个时刻$t^* = t^*(\Phi)$, 对任意给定的连续函数$\varphi : [t_0 - \tau, t_0] \to \mathbb{C}^d$, 且$\varphi(t)$ 包含于Φ ,都有当$t \geq t^*$ 时问题的解$x(t)$ 包含于集合B. 集合B 是问题的吸收集.

为了研究问题类$\mathbf{R}(\gamma, \alpha, \beta, \eta, \lambda)$ 的散逸性, 我们引入以下引理，更详细的论述参见文献 [12].

引 理 2.2 设$u(t), w(t)$ 为连续可微函数. 假设当$t \geq t_0 - \tau$ 时, 有$u(t) \geq 0$, $w(t) \geq 0$ 成立, 且存在常数$R \geq 0, A < 0, B \geq 0, G \geq 0$ 和$0 \leq H < 1$, 使得

$$\begin{cases} u^{'}(t) \leq R(t) + A(t)u(t) + B(t) \underset{t-\tau \leq \xi \leq t}{sup} w(\xi), \quad t \geq t_0, \\ w(t) \leq G(t)u(t) + H(t) \underset{t-\tau \leq \xi \leq t}{sup} w(\xi), \end{cases} \tag{2.1}$$

和

$$\underset{t_0-\tau \leq \xi \leq t_0}{sup} w(\xi) \leq \frac{G}{1-H} \underset{t_0-\tau \leq \xi \leq t_0}{sup} u(\xi), \tag{2.2}$$

成立, 这里常数$\tau \geq 0$. 且存在常数$0 < \theta < 1$使得

$$\frac{G}{1-H} \frac{B}{|A|} \leq \theta,$$

成立，则

$$\begin{cases} u(t) \leq \frac{-R}{(1-\theta)A} + \phi e^{-\mu^*(t-t_0)}, \\ w(t) \leq \frac{G}{1-H} \frac{-R}{(1-\theta)A} + \frac{G}{1-He^{\mu^*\tau}} \phi e^{-\mu^*(t-t_0)}, \end{cases} \quad t \geq t_0, \tag{2.3}$$

这里$\phi = \underset{t_0-\tau \leq \xi \leq t_0}{sup} u(\xi)$, $\mu^* > 0$且

$$\mu^* = \underset{t \geq t_0}{inf} \left\{ \mu(t) : \mu(t) + A(t) + B(t) \frac{G_0 e^{\mu(t)\tau}}{1 - H_0 e^{\mu(t)\tau}} = 0 \right\}.$$

应用引理2.2 可以得到如下定理.

定 理 2.3 假设问题(1.15)$\in \mathbf{R}(\gamma, \alpha, \beta, \eta, \lambda)$ 有解$x(t)$ 且$\alpha < 0$, 若存在常数$0 < \delta < 1$ 有

$$\frac{4}{1-2\lambda^2\tau^2} \frac{\beta^+ + (\eta - \alpha)\lambda^2\tau^2}{|\alpha|} \leq \delta, \tag{2.4}$$

成立, 那么

(1)对任意$t \geq t_0$ 有

$$\| x(t) \|^2 \leq \frac{4}{1-2\lambda^2\tau^2} \frac{-\gamma}{(1-\delta)\alpha} + \frac{1-2\lambda^2\tau^2}{1-2\lambda^2\tau^2 e^{\bar{\mu}\tau}} \phi e^{-\bar{\mu}(t-t_0)},$$

这里$\phi = \sup\limits_{t_0-\tau\le\xi\le t_0} \parallel \varphi(\xi) \parallel^2, \bar{\mu} > 0$由下式定义：

$$\bar{\mu} = \inf_{t\ge t_0}\left\{\mu(t) : \mu(t) + \alpha + (\beta^+ + (\eta-\alpha)\lambda^2\tau^2)\frac{4e^{\mu(t)\tau}}{1-2\lambda^2\tau^2 e^{\mu(t)\tau}} = 0\right\},$$

此处及后文中, $\beta^+ = \max\{\beta, 0\}$, 且$\gamma, \alpha, \beta, \eta, \lambda$ 为(1.16) 式和(1.17) 式中的符号.

(2) 对任意给定$\varepsilon > 0$, 存在$t^* = t^*(\phi, \varepsilon)$ 使得

$$\parallel x(t) \parallel^2 \le \frac{4}{1-2\lambda^2\tau^2}\frac{-\gamma}{(1-\delta)\alpha} + \varepsilon, \ \ t \ge t^*.$$

因此问题类$\mathbf{R}(\gamma, \alpha, \beta, \eta, \lambda)$ 是散逸的, 有吸收集

$$B = B\left(0, \sqrt{\frac{4}{1-2\lambda^2\tau^2}\frac{-\gamma}{(1-\delta)\alpha} + \varepsilon}\right).$$

证 明 为了简便，本文引入如下记号:

$$z(t) = \int_{t-\tau}^{t} g(t, \xi, x(\xi))d\xi, \quad y(t) = x(t) - z(t), \tag{2.5}$$

和

$$\begin{cases} u(t) = \begin{cases} \parallel y(t) \parallel^2, & t \ge t_0, \\ \frac{1}{2}(1-2\lambda^2\tau^2) \parallel \varphi(t) \parallel^2, & t \in [t_0-\tau, t_0], \end{cases} \\ w(t) = \parallel x(t) \parallel^2, t \ge t_0 - \tau. \end{cases} \tag{2.6}$$

因此，当$t \ge t_0$时, 由方程(1.15) 和条件(1.16)有

$$\begin{aligned} u'(t) &= \tfrac{d}{dt}\langle y(t), y(t)\rangle = \langle y'(t), y(t)\rangle + \langle y(t), y'(t)\rangle \\ &= \langle y'(t), y(t)\rangle + \overline{\langle y'(t), y(t)\rangle} \\ &= 2Re\langle y'(t), y(t)\rangle \\ &= 2Re\langle f(t, x(t), x(t-\tau)), x(t) - z(t)\rangle \\ &\le 2[\gamma + \alpha \parallel x(t) \parallel^2 + \beta \parallel x(t-\tau) \parallel^2 + \eta \parallel z(t) \parallel^2], \end{aligned} \tag{2.7}$$

成立. 当$t \ge t_0$时, 由条件(1.17)有

$$\begin{aligned} \parallel z(t) \parallel &= \parallel \int_{t-\tau}^{t} g(t, \xi, x(\xi))d\xi \parallel \\ &\le \int_{t-\tau}^{t} \parallel g(t, \xi, x(\xi)) \parallel d\xi \\ &\le \lambda \int_{t-\tau}^{t} \parallel x(\xi) \parallel d\xi \\ &\le \lambda\tau \max_{t-\tau\le\xi\le t} \parallel x(\xi) \parallel . \end{aligned} \tag{2.8}$$

由(2.6) 式可将(2.8) 式化为

$$\| z(t) \|^2 \leq \lambda^2\tau^2 \max_{t-\tau\leq\xi\leq t} w(\xi),\ t \geq t_0. \tag{2.9}$$

将(2.9) 代入(2.7) 得

$$\begin{aligned} u^{'}(t) &\leq 2\gamma + 2\alpha w(t) + 2\beta w(t-\tau) + 2\eta\lambda^2\tau^2 \max_{t-\tau\leq\xi\leq t} w(\xi) \\ &\leq 2\gamma + 2\alpha w(t) + 2(\beta^+ + \eta\lambda^2\tau^2) \max_{t-\tau\leq\xi\leq t} w(\xi), \end{aligned} \tag{2.10}$$

另一方面，根据(2.6)式中函数$u(t)$ 的定义可知当$t \geq t_0$ 时有

$$\begin{aligned} u(t) = \| x(t) - z(t) \|^2 &\leq 2(\| x(t) \|^2 + \| z(t) \|^2) \\ &= 2(w(t) + \| z(t) \|^2), \end{aligned}$$

即

$$2w(t) \geq u(t) - 2 \| z(t) \|^2\ . \tag{2.11}$$

由(2.9), (2.11) 和$\alpha < 0$ 可以得到

$$2\alpha w(t) \leq \alpha\big(u(t) - 2\lambda^2\tau^2 \max_{t-\tau\leq\xi\leq t} w(\xi)\big).$$

将上述式子代入(2.10) 得

$$u^{'}(t) \leq 2\gamma + \alpha u(t) + 2(\beta^+ + (\eta-\alpha)\lambda^2\tau^2) \max_{t-\tau\leq\xi\leq t} w(\xi),\ t \geq t_0.$$

另外, 根据(2.5), (2.6)并注意到(2.9)可以得到

$$\begin{aligned} w(t) = \| x(t) \|^2 = \| y(t) + z(t) \|^2 & \\ &\leq 2(\| y(t) \|^2 + \| z(t) \|^2) \\ &\leq 2u(t) + 2\lambda^2\tau^2 \max_{t-\tau\leq\xi\leq t} w(\xi), t \geq t_0. \end{aligned}$$

因此基于上述分析得到如下的不等式

$$\begin{cases} u^{'}(t) \leq 2\gamma + \alpha u(t) + 2(\beta^+ + (\eta-\alpha)\lambda^2\tau^2) \max\limits_{t-\tau\leq\xi\leq t} w(\xi), \\ w(t) \leq 2u(t) + 2\lambda^2\tau^2 \max\limits_{t-\tau\leq\xi\leq t} w(\xi), \end{cases} \quad t \geq t_0.$$

令$G_0 = 2, H_0 = 2\lambda^2\tau^2$, 由(2.6) 式中$u(t)$ 的定义易证(2.2)成立. 因此从引理2.2 可以得到定理2.3 的结论. 定理证毕.

第三章　单支方法的散逸性

§3.1　方法的描述

众所周知, 求解刚性常微分方程(ODEs)初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

的单支方法([15])可以表示为

$$\rho(E)y_n = hf(\sigma(E)t_n, \sigma(E)y_n), \tag{3.1}$$

这里步长$h > 0$, y_n 是$y(t_n)$ 的逼近, $t_n = t_0 + nh$, E 是位移算子: $Ey_n = y_{n+1}$,

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j, \ \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \zeta^j,$$

是生成多项式, 其中实系数$\alpha_k \neq 0$, $\beta_k \neq 0$, $\alpha_0 + \beta_0 \neq 0$, $\rho(\xi)$与$\sigma(\xi)$没有公因子且:

$$\rho(1) = 0, \ \rho^{'}(1) = \sigma(1) = 1.$$

下面回顾一些非常有用的定义和引理.

定 义 3.1 (参见 [16]) 设c, p, q是实常数, $c > 0, pq < 1$.若存在一$k \times k$ 实对称正定矩阵$G = [g_{ij}]$，使得对于任意的实数列$a_0, a_1, \cdots, a_k$ 有

$$A_1^T G A_1 - c A_0^T G A_0 \leq 2\sigma(E)a_0\rho(E)a_0 - p(\sigma(E)a_0)^2 - q(\rho(E)a_0)^2,$$

这里$A_i = (a_i, a_{i+1}, \cdots, a_{i+k-1})^T, i = 0, 1$, 则称单支方法(3.1)是$G(c, p, q)$-代数稳定的. 特别, $G(1, 0, 0)$-代数稳定的方法简称G-稳定的.

引 理 3.2 [6] 设$\{\xi_i(x)\}_{i=1}^{q}$ 是多项式空间P^{q-1} 的一组基, 则方程

$$\xi_i(E)y_n = \Delta_i, \ \Delta_i \in \mathbb{C}^d, \ i = 1, \cdots, q,$$

总存在唯一解$y_n, \cdots, y_{n+q-1}$, 且存在不依赖于Δ_i 的常数ζ, 使得

$$\max_{0 \leq i \leq q-1} \parallel y_{n+i} \parallel \leq \varsigma \max_{1 \leq i \leq q} \parallel \Delta_i \parallel .$$

将方法(3.1)应用于方程(1.15)(参考 [14])得到

$$\rho(E)(x_n - z_n) = hf(\sigma(E)t_n, \sigma(E)x_n, \sigma(E)x_{n-m}), n \geq 0, \tag{3.2}$$

这里$t_n = nh$, 步长$h = \frac{\tau}{m}$, m 是正整数, x_n 是真解$x(t_n)$ 的逼近, z_n 逼近积分项

$$z(t_n) := \int_{t_{n-\tau}}^{t_n} g(t_n, \xi, x(\xi)) d\xi.$$

下面考虑这个积分项的逼近. 我们假设初值$z_0, z_1, \cdots, z_{k-1}$ 取如下求积公式逼近的值

$$z_i = h\sum_{j=0}^{m}\omega_j g(t_i, t_{i-j}, x_{i-j}),\ \ i = 0, 1, \cdots, k-1,$$

其中$x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$ 是方法(3.2) 中的起始值且

$$x_n = \varphi(t_n),\ \ -m \le n \le 0.$$

现在定义在$n \ge 0$ 时$z(t_{n+k})$ 的逼近值z_{k+1}为

$$\sigma(E)z_n = h\sum_{j=0}^{m} v_j g(\sigma(E)t_n, \sigma(E)t_{n-j}, \sigma(E)x_{n-j}). \tag{3.3}$$

根据条件(1.17) 和公式(3.3) 有

$$\begin{aligned} \|\ \sigma(E)z_n\ \| &= h\ \|\ \sum_{j=0}^{m} v_j g(\sigma(E)t_n, \sigma(E)t_{n-j}, \sigma(E)x_{n-j})\ \| \\ &\le h\lambda\sum_{j=0}^{m}|v_j|\ \|\ \sigma(E)x_{n-j}\ \|\ . \end{aligned} \tag{3.4}$$

并且, 假设复化求积公式(3.3) 满足

$$h\sqrt{(m+1)\sum_{j=0}^{m}|v_j|^2} < v, \tag{3.5}$$

其中常数$v > 0$ 且满足$4v^2\lambda^2 < 1$. 这里λ由式(1.17) 给出.

注 3.3 对于构造公式(3.3) 有两个动机.

第一, 由于对任意充分光滑的函数$y(t)$有

$$\sigma(E)y(t_n) = y(\sigma(E)t_n) + O(h^2),$$

因此, (3.3)式可以视为积分$z(\sigma(E)t_n)$ 的逼近.

第二, 公式(3.3) 式满足估计式(3.4) , 它在下文中起到了非常重要的作用.

§3.2 单支方法的散逸性分析

本节研究FIDEs 问题(1.15) 的$G(c, p, 0)$- 代数稳定的单支方法的散逸性.

定 义 3.4 称方法(3.2) 是散逸的, 若方法以步长$h > 0$求解满足条件(1.16) 和(1.17) 的动力系统(1.15)时, 存在一个常数r 使得对任意初值函数$\varphi(t)$, 总存在一个仅依赖于$\varphi(t)$ 和初始值$x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$ 的正整数n_0, 使得当$n \ge n_0$时有

$$\|\ x_n\ \| \le r,$$

成立.

对单支方法(3.2) 的散逸性有如下定理.

定 理 3.5 若单支方法(3.1) 是$G(c,p,0)$-代数稳定的, 其中$c\le 1$, 生成多项式$\sigma(\zeta)$ 的任意根的模严格小于1, 且问题(1.15) 满足条件(1.16) 和(1.17). 则当

$$h(\alpha+\beta^{+}+\eta v^{2}\lambda^{2})<p^{-}(1+v^{2}\lambda^{2}), \tag{3.6}$$

成立时, 求解泛函积分微分方程(1.15) 的方法(3.2) 是散逸的, 其中$p^{-}=min\{0,p\}$.

证 明 令

$$w_n=x_n-z_n,\ W_n=(w_n^T,w_{n+1}^T,\cdots,w_{n+k-1}^T)^T.$$

由单支方法的$G(c,p,q)$-代数稳定的定义(见 [15] [16])有

$$\begin{aligned}\|W_{n+1}\|_G^2-c\|W_n\|_G^2&\le 2Re\langle\sigma(E)w_n,\rho(E)w_n\rangle-p\|\sigma(E)w_n\|^2\\&\le 2hRe\langle\sigma(E)(x_n-z_n),f(\sigma(E)t_n,\sigma(E)x_n,\sigma(E)x_{n-m})\rangle-p\|\sigma(E)w_n\|^2,\end{aligned}$$

考虑(1.16) 式且$c\le 1$, 有

$$\begin{aligned}\|W_{n+1}\|_G^2\le&\|W_n\|_G^2-p\|\sigma(E)w_n\|^2\\&+2h\left(\gamma+\alpha\|\sigma(E)x_n\|^2+\beta\|\sigma(E)x_{n-m}\|^2+\eta\|\sigma(E)z_n\|^2\right)\\&\le\|W_0\|_G^2+2h(n+1)\gamma-p\sum_{j=0}^{n}\|\sigma(E)w_j\|^2\\&+2h\sum_{j=0}^{n}[\alpha\|\sigma(E)x_j\|^2+\beta\|\sigma(E)x_{j-m}\|^2+\eta\|\sigma(E)z_j\|^2].\end{aligned}\tag{3.7}$$

从(3.4) 式和(3.5) 式得

$$\|\sigma(E)z_n\|^2\le\frac{v^2\lambda^2}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\|\sigma(E)x_{n-i}\|^2. \tag{3.8}$$

注意到

$$h\sum_{j=0}^{n}\|\sigma(E)x_{j-m}\|^2\le h\sum_{j=0}^{n}\|\sigma(E)x_j\|^2+\tau\sum_{-m\le j\le -1}\|\sigma(E)x_j\|^2,$$

由此可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}\|\sigma(E)x_{j-i}\|^2\le(m+1)\sum_{j=0}^{n}\|\sigma(E)x_j\|^2\\+\frac{m(m+1)}{2}\sum_{-m\le j\le -1}\|\sigma(E)x_j\|^2.\end{aligned}\tag{3.9}$$

另一方面, 由w_n 的定义和(3.8) 式有

$$\begin{aligned}\|\sigma(E)w_j\|^2&\le 2(\|\sigma(E)x_j\|^2+\|\sigma(E)z_j\|^2)\\&\le 2\|\sigma(E)x_j\|^2+2\frac{v^2\lambda^2}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\|\sigma(E)x_{j-i}\|^2,\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\parallel\sigma(E)w_j\parallel^2 \leq & 2\sum_{j=0}^{n}\parallel\sigma(E)x_j\parallel^2+2\frac{v^2\lambda^2}{m+1}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}\parallel\sigma(E)x_{j-i}\parallel^2\\ \leq & 2(1+v^2\lambda^2)\sum_{j=0}^{n}\parallel\sigma(E)x_j\parallel^2\\ & +mv^2\lambda^2\sum_{-m\leq j\leq -1}\parallel\sigma(E)x_j\parallel^2 .\end{aligned}\tag{3.10}$$

将(3.8), (3.9)和(3.10) 代入(3.7) 式得

$$\begin{aligned}\parallel W_{n+1}\parallel_G^2 \leq & k\lambda_1\sum_{0\leq j\leq k-1}\parallel x_j-z_j\parallel^2+2h(n+1)\gamma\\ & +2[h(\alpha+\beta^++\eta v^2\lambda^2)-p^-(1+v^2\lambda^2)]\sum_{j=0}^{n}\parallel\sigma(E)x_j\parallel^2\\ & +(2\beta^+\tau+\tau\eta v^2\lambda^2-mp^-v^2\lambda^2)\sum_{-m\leq j\leq -1}\parallel\sigma(E)x_j\parallel^2,\end{aligned}$$

这里λ_1 是矩阵G 的最大特征值.

再令

$$\begin{cases}\mu=2[p^-(1+v^2\lambda^2)-h(\alpha+\beta^++\eta v^2\lambda^2)],\\ R_0=k\lambda_1+2\beta^+\tau+\tau\eta v^2\lambda^2-mp^-v^2,\\ R_1=max\Big\{\sum\limits_{0\leq j\leq k-1}\parallel x_j-z_j\parallel^2,\sum\limits_{-m\leq j\leq -1}\parallel\sigma(E)x_j\parallel^2\Big\}.\end{cases}$$

若$h(\alpha+\beta^++\eta v^2\lambda^2)<p^-(1+v^2\lambda^2)$, 那么有$\mu>0$. 因此

$$\parallel W_{n+1}\parallel_G^2+\mu\sum_{j=0}^{n}\parallel\sigma(E)x_j\parallel^2\leq R_0R_1+2h(n+1)\gamma.$$

不失一般性, 假设$\gamma>0$, 使用与文献 [6] 相同的方法可以得出下面的不等式:

$$\parallel W_n\parallel_G^2\leq 2R_0R_2+2(2m+k)h\gamma,\ n\geq\frac{R_0R_1}{2h\gamma}+2m+k,\tag{3.11}$$

这里

$$\begin{cases}R_2=max(d_1,d_2),\\ d_1=\frac{8(m+k)h\gamma}{\mu},\\ d_2=\zeta^2max(h^2L^2,(1+v\lambda)^2d_1),\\ L=\sup\limits_{\substack{\|u\|\leq\sqrt{d_1}\\ \|v\|\leq\sqrt{d_1}}}\parallel f(t,u,v)\parallel,\ t\in[0,+\infty),\ u,v\in\mathbb{C}^d.\end{cases}$$

其中ζ 是引理3.2中定义的一个常数. 其他记号的含义与上文相同.

由不等式(3.11) 可知存在常数R , 对任意初始函数$\varphi(t)$ 和任意起始值$x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$, 存在$n_0$, 使

$$\| x_n - z_n \| \leq R, \ n \geq n_0.$$

成立.

另一方面, 易知

$$\sigma(E)x_n = \sigma(E)(x_n - z_n) + \sigma(E)z_n.$$

从而有

$$\begin{aligned}
\| \sigma(E)x_n \|^2 &\leq 2 \| \sigma(E)(x_n - z_n) \|^2 + 2 \| \sigma(E)z_n \|^2 \\
&\leq 2R^2(\sum_{j=0}^{k} | \beta_j |)^2 + 2\frac{v^2\lambda^2}{m+1}\sum_{i=0}^{m} \| \sigma(E)x_{n-i} \|^2 \\
&\leq 2R^2(\sum_{j=0}^{k} | \beta_j |)^2 + 2v^2\lambda^2 \max_{0\leq i\leq m} \| \sigma(E)x_{n-i} \|^2,
\end{aligned}$$

因此

$$\| \sigma(E)x_n \|^2 \leq \frac{2R^2}{1-2v^2\lambda^2}(\sum_{j=0}^{k} | \beta_j |)^2 + \frac{2v^2\lambda^2}{1-2v^2\lambda^2}\max_{1\leq i\leq m} \| \sigma(E)x_{n-i} \|^2 . \tag{3.12}$$

记

$$X_n = \max_{0\leq i\leq n} \| \sigma(E)x_i \|^2 .$$

则(3.12)式可以写成

$$X_n \leq \frac{2R^2}{1-2v^2\lambda^2}(\sum_{j=0}^{k} | \beta_j |)^2 + \frac{2v^2\lambda^2}{1-2v^2\lambda^2}X_{n-1}. \tag{3.13}$$

因为$4v^2\lambda^2 < 1$, 从(3.13) 式知对任意$\varepsilon > 0$, 存在正整数N_0 使得

$$X_n \leq \frac{2R^2}{1-4v^2\lambda^2}(\sum_{j=0}^{k} | \beta_j |)^2 + \varepsilon, \ n > N_0,$$

即

$$\| \sigma(E)x_n \| \geq R_3, \ n > N_0, \tag{3.14}$$

这里

$$R_3 = \sqrt{\frac{2R^2}{1-4v^2\lambda^2}(\sum_{j=0}^{k} | \beta_j |)^2 + \varepsilon}.$$

另外，引用下列记号

$$U_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+k-1} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{\beta_0}{\beta_k} & -\frac{\beta_1}{\beta_k} & -\frac{\beta_2}{\beta_k} & \cdots & -\frac{\beta_{k-1}}{\beta_k} \end{bmatrix} \otimes I_d, B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{\beta_k}\sigma(E)x_n \end{bmatrix}.$$

其中$\otimes$ 是Kronecker 积, I_d 是$d\times d$ 的单位矩阵. 则等式

$$\sigma(E)x_n=\sum_{j=0}^{k}\beta_j x_{n+j},$$

可以写成

$$U_{n+1}=AU_n+B_n. \tag{3.15}$$

由于$\sigma(\zeta)$ 的任意根的模严格小于1, 所以矩阵A 的谱半径严格小于1. 因此存在C^{kd}中的范数$\|\cdot\|_*$ 使得对应算子的范数

$$\| A \|_*=\sup_{\|x\|_*=1}\| Ax \|_*<1.$$

由(3.14) 可知存在$R_4>0$, 当$n>N_0$时有$\| B_n \|_*<R_4$. 从(3.15)式可以得到, 对上述给定的$\varepsilon>0$, 存在$N_1>N_0$有

$$\| U_n \|_*\leq \frac{R_4}{1-\| A \|_*}+\varepsilon,\ n>N_1. \tag{3.16}$$

根据范数的等价性, 从(3.16) 知, 存在$r>0$ 有

$$\| x_n \|<r,\ n>N_1,$$

这样就完成了定理3.4的证明.□

推 论 3.6 假设单支方法(3.1) 是A-稳定的，$\sigma(\zeta)$ 的任意根的模严格小于1, 且问题(1.15) 满足条件(1.16) 和(1.17). 则当$\alpha+\beta^{+}+\eta\upsilon^2\lambda^2<0$成立时, 求解泛函积分微分方程(1.15) 的方法(3.2) 是散逸的.

注 3.7 ([15]) 向后微分公式(BDFs) 是单支方法, 其生产多项式$\sigma(\xi)=\xi^k$. 那么$\sigma(\zeta)$ 所有的根都为0. 因此定理3.4 和推论3.5 均可用于这个方法.

§3.3 数值算例

例: 考虑如下二维系统

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\big(x_1(t) & -\frac{1}{4\pi}\int_{t-\frac{\pi}{12}}^{t}e^{\xi-t}\big(7x_1(\xi)+3x_2(\xi)\big)d\xi\big)=-x_1(t)\\ & +\frac{1}{96}\big(\bar{x_1}(t-\frac{\pi}{12})+\sqrt{5}\bar{x_2}(t-\frac{\pi}{12})\big)+f_1(t),t\geq 0,\\ \frac{d}{dt}\big(x_2(t) & -\frac{1}{4\pi}\int_{t-\frac{\pi}{12}}^{t}e^{\xi-t}\big(3x_1(\xi)-x_2(\xi)\big)d\xi\big)=-x_2(t)\\ & +\frac{1}{96}\big(\sqrt{5}\bar{x_1}(t-\frac{\pi}{12})-3\bar{x_2}(t-\frac{\pi}{12})\big)+f_2(t),t\geq 0,\end{cases} \tag{3.17}$$

这里a,b是给定的常数, 且

$$f_1(t)=cos(at)-a\,sin(at),\ f_2(t)=sin(bt)+b\,cos(bt),$$

$$\bar{x}_1(t-\frac{\pi}{12})=\frac{x_1(t-\frac{\pi}{12})}{1+x_1^2(t-\frac{\pi}{12})},\ \bar{x}_2(t-\frac{\pi}{12})=\frac{x_2(t-\frac{\pi}{12})}{1+x_2^2(t-\frac{\pi}{12})}.$$

这个系统满足$2\tau^2\lambda^2=\frac{1}{18}<1$. 取

$$\alpha=-\frac{23}{48},\beta=\frac{1}{24},\eta=\frac{25}{48},\lambda=\frac{2}{\pi},p=\frac{16}{25},\gamma=2\sqrt{(1-a)^2+(1+b)^2},\tau=\frac{\pi}{12}.$$

则此系统满足定理2.3 的所有条件. 因此系统(3.17) 是散逸的且有吸收集

$$B=B(0,7\sqrt{(1-a)^2+(1+b)^2+\varepsilon}),(\varepsilon>0).$$

下面分别使用二阶向后微分方法(BDF)

$$x_{n+2}-\frac{4}{3}x_{n+1}+\frac{1}{3}x_n=\frac{2}{3}hf(t_{n+2},x_{n+2}), \tag{3.18}$$

和二阶单支方法

$$2x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n=hf(-\frac{1}{2}t_{n+1}+\frac{3}{2}t_{n+2},-\frac{1}{2}x_{n+1}+\frac{3}{2}x_{n+2}), \tag{3.19}$$

及复化梯形求积公式

$$\int_{t_1}^{t_2}\phi(x)dx\cong h\Big[\frac{1}{2}\phi(t_1)+\sum_{j=1}^{m-1}\phi(t_1+jh)+\frac{1}{2}\phi(t_2)\Big],$$

求解问题(3.17), 由于方法(3.18) 和(3.19) 均是A-稳定的, 即等价于方法均是G-稳定的([22]). 方法(3.18) 和(3.19) 的第二生成多项式分别为

$$\sigma(\zeta)=\zeta^2,\qquad \text{和} \qquad \sigma(\zeta)=\frac{3}{2}\zeta^2-\frac{1}{2}\zeta,$$

易知它们根的模严格小于1, 根据推论3.5 知数值解是散逸的.

取步长$h=0.004\pi/12$, 分别考虑$t\in[-\frac{\pi}{12},0]$ 时如下几种不同的初始函数进行计算.

$$(I)\ x_1(t)=2\,sin(t)e^t,\ x_2(t)=(t+1)^2-1;$$

$$(II)\ x_1(t)=sin(2t),\ x_2(t)=2\,cos(3t);$$

$$(III)\ x_1(t)=1.5\,cos(5t),\ x_2(t)=sin(4t).$$

图3.1-3.6 分别给出了上述不同初始函数下的数值结果. 这些数值例子显示数值方法继承了问题(3.17) 散逸性, 因此这些数值例子进一步佐证了单支方法散逸性理论结果的正确性.

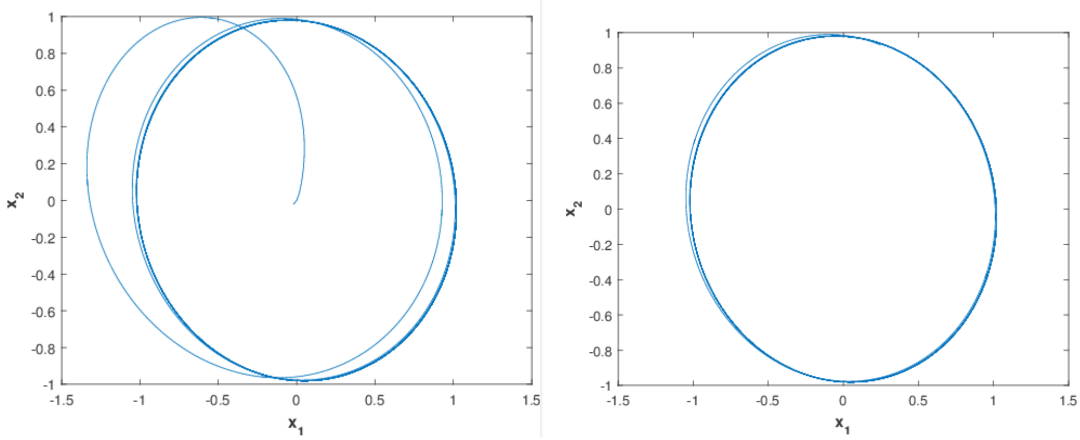

图 3.1　初始值为(I), $a = 3,\ b = 3$, 应用方法(3.18) 求解问题(3.17) 分别在$t \in [0, 10\pi]$ (左)和$t \in [\frac{5\pi}{6}, 10\pi]$ (右)的数值解图形.

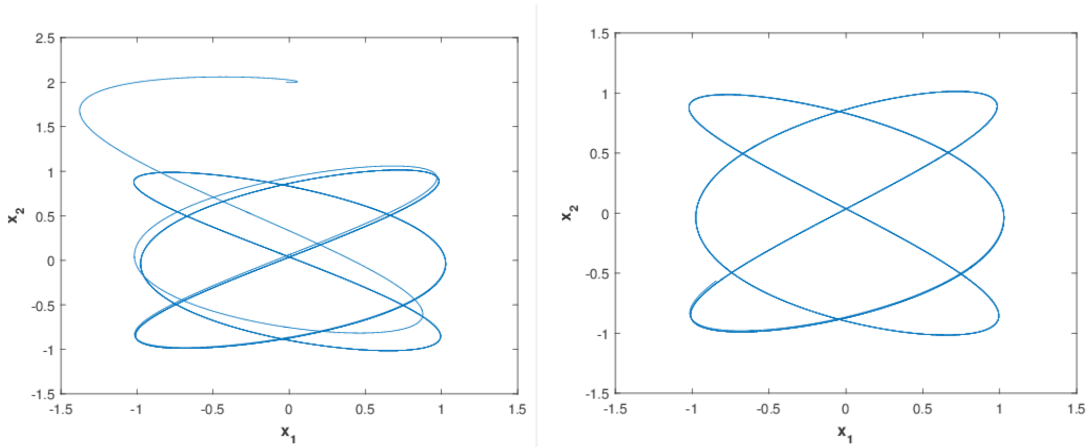

图 3.2　初始值为(II), $a = 3,\ b = 2$, 应用方法(3.18) 求解问题(3.17) 分别在$t \in [0, 10\pi]$ (左)和$t \in [\frac{5\pi}{3}, 10\pi]$ (右)的数值解图形.

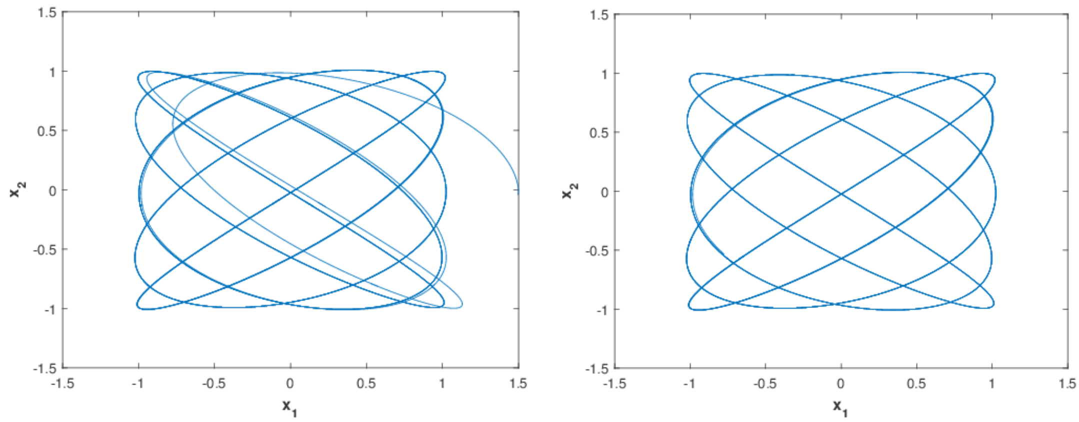

图 3.3　初始值为(III), $a = 5,\ b = 4$, 应用方法(3.18) 求解问题(3.17) 分别在$t \in [0, 10\pi]$ (左)和$t \in [\pi, 10\pi]$ (右)的数值解图形.

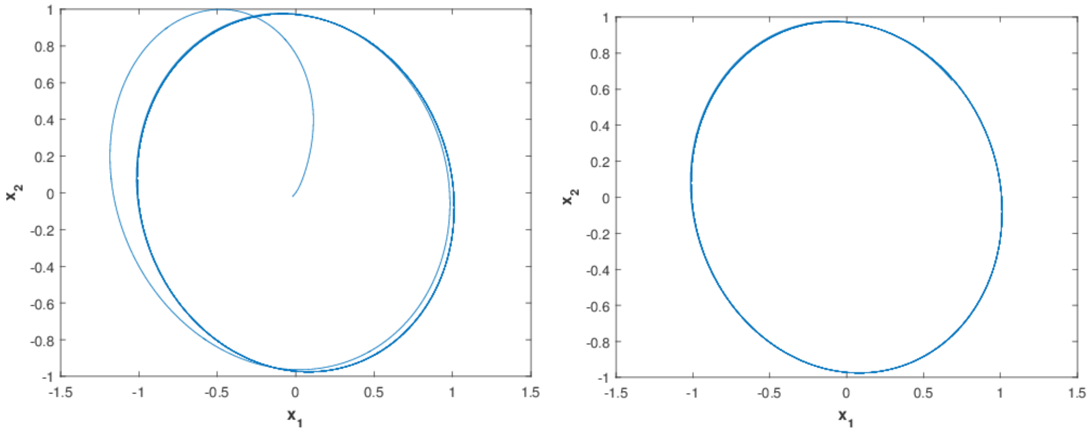

图 3.4　初始值为(I), $a = 2,\ b = 2$, 应用方法(3.19) 求解问题(3.17) 时分别在$t \in [0, 10\pi]$ (左) 和$t \in [\frac{7\pi}{6}, 10\pi]$ (右)的数值解图形.

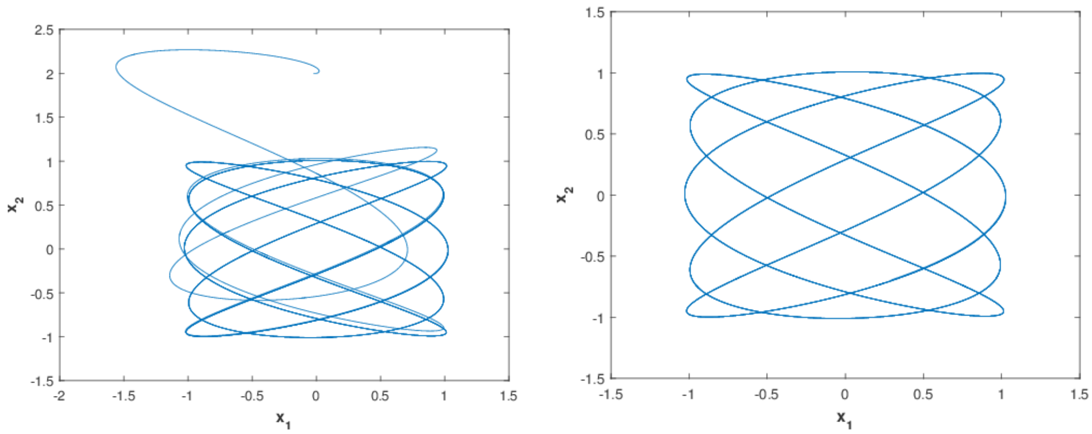

图 3.5　初始值为(II), $a = 5,\ b = 3$, 应用方法(3.19) 求解问题(3.17) 分别在$t \in [0, 10\pi]$ (左) 和$t \in [2\pi, 10\pi]$ (右)的数值解图形.

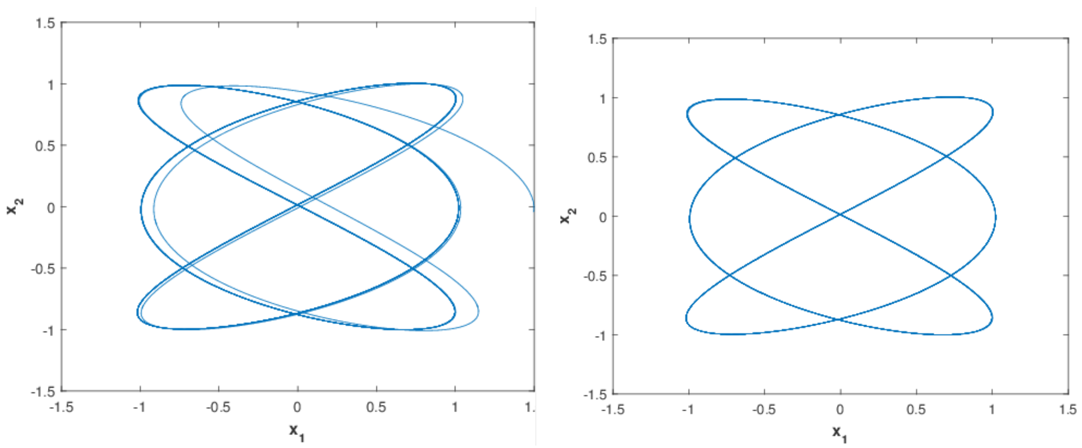

图 3.6　初始值为(III), $a = 6,\ b = 4$, 应用方法(3.19) 求解问题(3.17) 分别在$t \in [0, 10\pi]$ (左) 和$t \in [\frac{7\pi}{6}, 10\pi]$ (右)的数值解图形.

第四章　Runge-Kutta方法的散逸性

本章将研究应用Runge-Kutta方法求解问题(1.15) 时方法是否继承原问题的散逸性.

§4.1　方法的描述

求解常微分方程(ODEs)的s-级Runge-Kutta方法可以表述为

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}, \tag{4.1}$$

这里$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{s\times s}, b = (b_1, b_2, \cdots, b_s)^T \in \mathbb{R}^s$, $c = (c_1, c_2, \cdots, c_s)^T \in \mathbb{R}^s$(其中$0 \le c_i \le 1, (i = 1, 2, \cdots, s)$) 且$\sum\limits_{j=1}^{s} b_j = 1$.

以下代数稳定的概念是研究Runge-Kutta方法散逸性的基础.

定 义 4.1 ([3,4]) 称Runge-Kutta方法(4.1)是代数稳定的, 若矩阵

$$B = diag(b_1, b_2, \cdots, b_s)\ ,\ M = BA + A^TB - bb^T,$$

是非负定的.

取步长$h = \frac{\tau}{m}$(其中m 为正整数), $t_n = t_0 + nh$. 应用方法(4.1) 求解问题(1.15) 时得到差分方程：

$$\begin{cases} X_i^{(n)} - Z_i^{(n)} = x_n - z_n + h\sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_n + c_jh, X_j^{(n)}, X_j^{(n-m)}),\ i = 1, 2, \cdots, s, \\ x_{n+1} - z_{n+1} = x_n - z_n + h\sum\limits_{j=1}^{s} b_j f(t_n + c_jh, X_j^{(n)}, X_j^{(n-m)}), \end{cases} \tag{4.2}$$

这里$x_n, X_i^{(n)}$ 分别是$x(t_n), x(t_n + c_ih)$ 的逼近, z_n 和$Z_i^{(n)}$ 分别是$z(t_n)$ 和$z(t_n + c_ih)$ 的逼近, 其中

$$z(t) = \int_{t-\tau}^{t} g(t, \xi, x(\xi))d\xi. \tag{4.3}$$

另外,

$$\begin{cases} x_n = \varphi(t_n), & n \le 0, \\ X_i^{(n)} = \varphi(t_n + c_ih), & t_n + c_ih \le t_0. \end{cases} \tag{4.4}$$

为了计算延迟项$X_i^{(n-m)}$和积分项$z_n, Z_i^{(n)}$, 有以下两种选择.

第一, 方法的阶超过2时, 使用高阶方法解(1.15), 为了避免发生降阶的情况, 取约束步长h 使其满足$mh=\tau(m\in N^+)$, $X_i^{(n-m)}$是$x(t_n+c_ih-i)$的逼近,并使用求积公式

$$z_n = h\sum_{i=0}^{m} v_i g(t_n, t_{n-i}, X_{n-i}), \tag{4.5}$$

$$Z_j^{(n)} = h\sum_{i=0}^{m} v_i g(t_n+c_jh, t_{n-i}+c_jh, X_j^{(n-i)}),\ j=1,2,\cdots,s. \tag{4.6}$$

求积公式(4.5) 和(4.6) 可以采用从一般的复化求积公式(参考 [12–14]). 对数值散逸性分析我们假设(4.5) 或(4.6) 满足如下条件:

$$h\sqrt{(m+1)\sum_{i=0}^{m}|v_i|^2} < v\ ,(mh=\tau, v\in N^+), \tag{4.7}$$

第二: 方法的阶不超过2时, $X_i^{(n-m)}$使用线性插值

$$X_i^{(n-m)} = \delta X_i^{(n-m+1)} + (1-\delta)X_i^{(n-m)}, i=1,2,\cdots,s, \tag{4.8}$$

这里$\tau=h(m-\delta)$ $(m\geq 1)$ 且$\delta\in[0,1)$, $z_n, Z_i^{(n)}$ 分别由下列复化梯形公式([14])逼近:

$$\begin{aligned} z_n =& \frac{h(1-\delta)^2}{2}g(t_n, t_{n-m}, X_{n-m}) + \frac{h(2-\delta^2)}{2}g(t_n, t_{n-m+1}, X_{n-m+1}) \\ &+ h\sum_{k=1}^{m-2} g(t_n, t_{n-k}, X_{n-k}) + \frac{h}{2}g(t_n, t_n, X_n), i=1,2,\cdots,s, \end{aligned} \tag{4.9}$$

和

$$\begin{aligned} Z_i^{(n)} =& \frac{h(1-\delta)^2}{2}g(t_n+c_ih, t_{n-m}+c_ih, X_i^{(n-m)}) \\ &+ \frac{h(2-\delta^2)}{2}g(t_n+c_ih, t_{n-m+1}+c_ih, X_i^{(n-m+1)}) \\ &+ h\sum_{k=1}^{m-2} g(t_n+c_ih, t_{n-k}+c_ih, X_i^{(n-k)}) \\ &+ \frac{h}{2}g(t_n+c_ih, t_n+c_ih, X_i^{(n)}), i=1,2,\cdots,s. \end{aligned} \tag{4.10}$$

对任意非负对角矩阵$B=diag(b_1,b_2,\cdots,b_s)$, 定义空间$\mathbb{C}^{ds}:=(\mathbb{C}^d)^s$上的伪内积为

$$\langle Y,Z\rangle_B = \sum_{j=1}^{s} b_j\langle Y_j, Z_j\rangle,\ Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_s)\in\mathbb{C}^{ds},\ Z=(Z_1,Z_2,\cdots,Z_s)\in\mathbb{C}^{ds}, \tag{4.11}$$

对应的伪范数为

$$\| Y \|_B = \langle Y,Y\rangle_B^{1/2}. \tag{4.12}$$

很明显当B是正定矩阵时, (4.11)和(4.12)分别是空间$\mathbb{C}^{ds}$上的内积和范数.

§4.2 Runge-Kutta方法的散逸性分析

本节将研究应用代数稳定的Runge-Kutta 方法求解问题类$\mathbf{R}(\gamma,\alpha,\beta,\eta,\lambda)$的散逸性.

定 义 4.2 称方法(4.2) 是散逸的, 若方法以步长h求解满足条件(1.16) 和(1.17) 的动力系统(1.15), 存在一个常数r, 使得对任意初值函数$\varphi(t)$, 总存在一个仅依赖于$\varphi(t)$ 的n_0, 使得当$n\geq n_0$ 时，有

$$\| x_n \|\leq r,$$

成立.

定 理 4.3 若求解常微分方程的Runge-Kutta方法(4.1) 是代数稳定的, 且$b_j>0$,$(j=1,2,\cdots,s)$, 问题类$\mathbf{R}(\gamma,\alpha,\beta,\eta,\lambda)$ 满足$\alpha+\beta+\eta v^2\lambda^2<0$. 则方法(4.2), (4.5), (4.6) 是散逸的.

证 明 为了简便, 我们令

$$t_i^{(n)}=t_n+c_ih, Q_i=hf(t_i^{(n)},X_i^{(n)},X_i^{(n-m)}), i=1,2,\cdots,s.$$

易知(参见 [1])有

$$\begin{aligned}\| x_{n+1}-z_{n+1} \|^2-\| x_n-z_n \|^2 \quad & -2\sum_{i=1}^{s} b_iRe\langle X_i^{(n)}-Z_i^{(n)},Q_i\rangle \\ & =-\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} m_{ij}\langle Q_i,Q_j\rangle,\end{aligned} \tag{4.13}$$

这里$m_{ij}=b_ia_{ij}+b_ja_{ji}-b_ib_j$.

由方法的代数稳定性, 由(4.13)得

$$\| x_{n+1}-z_{n+1} \|^2\leq\| x_n-z_n \|^2+2\sum_{i=1}^{s} b_iRe\langle X_i^{(n)}-Z_i^{(n)},Q_i\rangle. \tag{4.14}$$

应用条件(1.16) 和(1.17) , 那么(4.14) 可写成

$$\| x_{n+1}-z_{n+1} \|^2\leq\| x_n-z_n \|^2+2h\sum_{i=1}^{s} b_i[\gamma+\alpha \| X_i^{(n)} \|^2+\beta \| X_i^{(n-m)} \|^2+\eta \| Z_i^{(n)} \|^2]. \tag{4.15}$$

令

$$X^{(n)}=(X_1^{(n)},X_2^{(n)},\cdots,X_s^{(n)}),\ \ Z^{(n)}=(Z_1^{(n)},Z_2^{(n)},\cdots,Z_s^{(n)}),n=0,1,\cdots.$$

由(4.15) 通过递推可以得到

$$\begin{aligned}\| x_n-z_n \|^2 \quad & \leq\| x_{n-1}-z_{n-1} \|^2+2h\gamma \\ & +2h\alpha \| X^{(n-1)} \|_B^2+2h\beta \| X^{(n-m-1)} \|_B^2+2h\eta \| Z^{(n-1)} \|_B^2 \\ & \leq\| x_0-z_0 \|^2+2hn\gamma+2h\alpha\sum_{j=0}^{n-1} \| X^{(j)} \|_B^2 \\ & +2h\beta\sum_{j=0}^{n-1} \| X^{(j-m)} \|_B^2+2h\eta\sum_{j=0}^{n-1} \| Z^{(j)} \|_B^2,\end{aligned} \tag{4.16}$$

这里使用了条件$\sum\limits_{j=0}^{s} b_j = 1$.

下面估计求积项$\| z_n \|$ 和$\| Z^{(n)} \|_B$ 的值. 从(4.5) 和条件(1.17) 可以得到

$$\| z_n \| \leq h\lambda \sum_{k=0}^{m} |v_k| \, \| x_{n-k} \| . \tag{4.17}$$

将上述式子两端同时平方并运用Cauchy-Schwarz 不等式和(4.7) 有

$$\| z_n \|^2 \leq \frac{v^2\lambda^2}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \| x_{n-k} \|^2 . \tag{4.18}$$

类似的, 从(4.6), (1.17) 和(4.7) 可以得到

$$\| Z_i^{(n)} \| \leq h\lambda \sum_{k=0}^{m} |v_k| \, \| X_i^{(n-k)} \|, \tag{4.19}$$

和

$$\| Z_i^{(n)} \|^2 \leq \frac{v^2\lambda^2}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \| X_i^{(n-k)} \|^2, \ i = 1, 2, \cdots, s,$$

即

$$\| Z^{(n)} \|_B^2 \leq \frac{v^2\lambda^2}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \| X^{(n-k)} \|_B^2 . \tag{4.20}$$

通过递推有

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \| Z^{(j)} \|_B^2 &\leq \tfrac{v^2\lambda^2}{m+1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \| X^{(j-k)} \|_B^2 \\ &\leq v^2\lambda^2 \big(\sum_{j=0}^{n-1} \| X^{(j)} \|_B^2 + \tfrac{m}{2} \min_{-m \leq j \leq -1} \| X^{(j)} \|_B^2 \big). \end{aligned} \tag{4.21}$$

因此, 将(4.21) 代入(4.16) 得

$$\begin{aligned} \| x_n - z_n \|^2 \leq & 2hn\gamma + 2h(\alpha + \beta + \eta v^2\lambda^2) \sum_{j=0}^{n-1} \| X^{(j)} \|_B^2 \\ & + [(1+\tau\lambda)^2 + \tau(2\beta + \eta v^2\lambda^2)] \max_{-\tau \leq \xi \leq 0} \| \varphi(\xi) \|^2 . \end{aligned} \tag{4.22}$$

当$\gamma = 0$ 时, 由(4.22) 和条件$\alpha + \beta + \eta v^2\lambda^2 < 0$ 知

$$\lim_{n \to \infty} \| X^{(n)} \|_B = 0,$$

即对任意$\varepsilon > 0$, 存在$n_1 = n_1(\bar{\varphi}, \varepsilon) > 0$ 有

$$\| X_j^{(n)} \| < \varepsilon, \ \| X_j^{(n-m)} \| < \varepsilon, \ \ j = 1, \cdots, s, \ n \geq n_1. \tag{4.23}$$

和

$$\| Z_j^{(n)} \| < v\lambda\varepsilon, \ j = 1, \cdots, s, \ n \geq n_1. \tag{4.24}$$

另一方面, 由式(4.2) 有

$$\| x_n - z_n \| =\| X_i^{(n)} - Z_i^{(n)} - h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_j^{(n)}, X_j^{(n)}, X_j^{(n-m)}) \|$$
$$\leq \| X_i^{(n)} \| + \| Z_i^{(n)} \| + h\sum_{j=1}^{s} |a_{ij}| \| f(t_j^{(n)}, X_j^{(n)}, X_j^{(n-m)}) \|,\ i = 1, 2, \cdots, s, \tag{4.25}$$

因此,

$$\| x_n - z_n \| \leq hL\sum_{j=1}^{s} |a_{ij}| + (1 + v\lambda)\varepsilon,\ n \geq n_1, \tag{4.26}$$

其中

$$L = \sup_{\substack{\|u\|\leq\varepsilon \\ \|v\|\leq\varepsilon}} \| f(t, u, v) \|,\ t \in [0, +\infty),\ u, v \in \mathbb{C}^d.$$

当$\gamma > 0$时, 应用类似([4]) 中的技巧, 可知存在$r_2 > 0$ 和正整数$n_2(\bar{\varphi}, h)$ 有

$$\| x_n - z_n \| \leq r_2\ (\ n \geq n_2), \tag{4.27}$$

这里

$$r_2 = \sqrt{2[1 + \tau(2\beta + \eta v^2\lambda^2)]R_0 + 4(m + 1)h\gamma},$$
$$n_2 = \frac{[(1 + \tau\lambda)^2 + \tau(2\beta + \eta v^2\lambda^2)]\bar{\varphi}^2}{2h\gamma} + 2(m + 1),$$

其中

$$\begin{cases} R_0 = \frac{4(m+1)h\gamma}{\sigma} + h|C|, \\ \sigma = -(\alpha + \beta + \eta v^2\lambda^2), \\ \bar{\varphi} = \sup\limits_{t_0-\tau\leq t\leq t_0} \| \varphi(t) \|, \end{cases}$$

$$C = \sup_{\substack{\|u\|_B^2\leq 4(m+1)h\gamma/\sigma \\ \|v\|_B^2\leq 4(m+1)h\gamma/\sigma \\ \|w\|_B^2\leq 4v^2\lambda^2(m+1)h\gamma/\sigma}} \sum_{i=1}^{s} b_i \Big[\sum_{j=1}^{s} (b_j - a_{ij}) Re\langle u_i - w_i, hf(u_j, v_j)\rangle + h \| \sum_{j=1}^{s} (b_j - a_{ij}) f(u_j, v_j) \|^2 \Big].$$

$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_s) \in \mathbb{C}^{ds}, v = (v_1, v_2, \cdots, v_s) \in \mathbb{C}^{ds}, w = (w_1, w_2, \cdots, w_s) \in \mathbb{C}^{ds}.$$

联立(4.26) 和(4.27) 可知存在常数R_1 和$n_0(\bar{\varphi}, h)$ 使得

$$\| x_n - z_n \| \leq R_1,\ n \geq n_0, \tag{4.28}$$

成立.

下面估计$\| x_n \|$ 的值. 事实上

$$\| x_n \| \leq \| x_n - z_n \| + \| z_n \|,$$

因此, 对$n \geq n_0$, 由(4.17), (4.7) 和(4.28) 有

$$\begin{aligned}\| x_n \| &\leq R_1 + h\lambda \sum_{k=0}^{m} |v_k| \| x_{n-k} \| \\ &\leq R_1 + v\lambda \max_{0\leq k\leq m} \| x_{n-k} \| \\ &\leq R_1 + v\lambda \max_{1\leq k\leq m} \| x_{n-k} \| + v\lambda \| x_n \| .\end{aligned} \tag{4.29}$$

因为$2\lambda v < 1$, 那么$1 - \lambda v > 0$ 则(4.29) 可写成

$$\| x_n \| \leq \tfrac{R_1}{1-v\lambda} + \tfrac{v\lambda}{1-v\lambda} \max_{1\leq k\leq m} \| x_{n-k} \|, \;\; n \geq n_0. \tag{4.30}$$

令

$$\theta = \frac{v\lambda}{1-v\lambda}, \;\; \mu = \frac{R_1}{1-v\lambda}, \;\; \varphi_0 = \max_{n_0-m\leq k\leq n_0-1} \| x_k \| .$$

则$0 < \theta < 1$, (4.30) 可以化成如下形式:

$$\| x_n \| \leq \mu + \theta \max_{1\leq k\leq m} \| x_{n-k} \|, \;\; n \geq n_0. \tag{4.31}$$

当$n = n_0$ 有

$$\| x_{n_0} \| \leq \mu + \theta\varphi_0. \tag{4.32}$$

下面考虑两种情形. 首先, 当$\mu + \theta\varphi_0 \geq \varphi_0$ 时, 通过递推可以得到

$$\| x_{n_0+j} \| \leq \mu \sum_{k=0}^{j} \theta^k + \theta^{j+1}\varphi_0, \;\; j = 0, 1, 2, \cdots . \tag{4.33}$$

事实上, 当$j = 0$ 时表明(4.33) 满足(4.32). 另一方面, 易知

$$\begin{aligned}\mu \sum_{k=0}^{j} \theta^k + \theta^{j+1}\varphi_0 &= \mu \sum_{k=0}^{j-1} \theta^k + \theta^j(\mu + \theta\varphi_0) \\ &\geq \mu \sum_{k=0}^{j-1} \theta^k + \theta^j\varphi_0,\end{aligned} \qquad j \geq 1. \tag{4.34}$$

若(4.33) 对$j < l$ 恒成立, 其中l 为正整数, 那么从(4.31) 和(4.34) 知

$$\begin{aligned}\| x_{n_0+l} \| &\leq \mu + \theta(\mu \sum_{k=0}^{l-1} \theta^k + \theta^l\varphi_0) \\ &= \mu \sum_{k=0}^{l} \theta^k + \theta^{l+1}\varphi_0,\end{aligned}$$

上式表明(4.33) 对任意$j \geq 0$ 恒成立.

其次, 当$\mu + \theta\varphi_0 < \varphi_0$ 时, 对$l = 0, 1, \cdots$, 通过递推可得

$$\| x_{n_0+ml+j} \| \leq \mu \sum_{k=0}^{l} \theta^k + \theta^{l+1}\varphi_0, \quad j \in \{0, 1, \cdots, m-1\}. \tag{4.35}$$

为了证明这个结论, 我们首先考虑$l = 0$ 的情形.

事实上, 当$l=0$时, (4.32) 意味着(4.35) 对$j=0$恒成立. 若(4.35) 对$j<q<m-1$恒成立, 那么从(4.31) 有

$$\| x_{n_0+q} \| \leq \mu + \theta \max\{\mu + \theta\varphi_0, \varphi_0\} \leq \mu + \theta\varphi_0,$$

即(4.35) 对$l=0$恒成立.

假设(4.35) 对$l<p$恒成立, 这里p是一个给定的正整数. 当$j=0$时(4.31) 可写成

$$\begin{aligned}\| x_{n_0+pm} \| &\leq \mu + \theta \max_{1\leq k\leq m} \| x_{n_0+pm-k} \| \\ &\leq \mu + \theta(\mu \sum_{k=0}^{p-1} \theta^k + \theta^p \varphi_0) \\ &= \mu \sum_{k=0}^{p} \theta^k + \theta^{p+1}\varphi_0.\end{aligned}$$

若上式对$j<q<m-1$成立则

$$\| x_{n_0+mp+j} \| \leq \mu \sum_{k=0}^{p} \theta^k + \theta^{p+1}\varphi_0,$$

那么

$$\begin{aligned}\| x_{n_0+mp+q} \| &\leq \mu + \theta \max\{\mu \sum_{k=0}^{p-1} \theta^k + \theta^p\varphi_0, \mu \sum_{k=0}^{p} \theta^k + \theta^{p+1}\varphi_0\} \\ &\leq \mu \sum_{k=0}^{p} \theta^k + \theta^{p+1}\varphi_0,\end{aligned}$$

这里我们用到了

$$\mu \sum_{k=0}^{p-1} \theta^k + \theta^p\varphi_0 > \mu \sum_{k=0}^{p} \theta^k + \theta^{p+1}\varphi_0.$$

这表明(4.35) 对任意整数$l \geq 0$恒成立.

注意到$0<\theta<1$, 联立(4.33) 和(4.35) 得到: 对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$n_3>n_0$使得

$$\| x_n \| \leq \tfrac{R_1}{1-2\lambda v} + \varepsilon, \;\; n \geq n_3,$$

成立.

这样就完成了定理4.3 的证明.

注4.4 众所周知的s级Gauss方法, Radau IA, Radau IIA 和Lobatto IIIC Runge-Kutta 方法都是代数稳定的([20]), 那么由定理4.3 知, 应用这些方法求解FIDEs (1.15) 时, 它们均继承问题本身的散逸性.

定 理 4.5 若解常微分方程的Runge-Kutta方法(4.1) 是代数稳定的, 其中$b_j>0$,($j=1,2,\cdots,s$), 且问题类$\mathbf{R}(\gamma,\alpha,\beta,\eta,\lambda)$ 满足$\alpha+\beta+\eta v^2\lambda^2<0$. 那么方法(4.2), (4.8), (4.9) , (4.10) 是散逸的.

证 明 类似定理4.3 的证明, 从(4.8)和(4.10)有

$$\| X^{(j-m)} \|_B^2 \leq \delta \| X^{(j-m+1)} \|_B^2 + (1-\delta) \| X^{(j-m)} \|_B^2, \tag{4.36}$$

和

$$\| Z_i^{(j)} \|^2 \le v\lambda^2 \Big(\frac{h(1-\delta)^2}{2} \| X_i^{(j-m)} \|^2 + \frac{h(2-\delta^2)}{2} \| X_i^{(j-m+1)} \|^2 + h\sum_{j=1}^{m-2} \| X_i^{(j-k)} \|^2 + \frac{h}{2} \| X_i^{(j)} \|^2 \Big). \tag{4.37}$$

利用Cauchy-Schwarz 不等式和以下等式

$$\frac{h(1-\delta)^2}{2} + \frac{h(2-\delta^2)}{2} + (m-2)h + \frac{h}{2} = \tau, \tag{4.38}$$

可得

$$\| Z_i^{(j)} \|_B^2 \le v\lambda^2 \Big(\frac{h(1-\delta)^2}{2} \| X_i^{(j-m)} \|_B^2 + \frac{h(2-\delta^2)}{2} \| X_i^{(j-m+1)} \|_B^2 + h\sum_{j=1}^{m-2} \| X_i^{(j-k)} \|_B^2 + \frac{h}{2} \| X_i^{(j)} \|_B^2 \Big). \tag{4.39}$$

将(4.36) 和(4.39) 代入(4.16) 得到(4.22).

同定理4.3 的证明, 可以得到同样的结论.

因此满足条件(4.8)-(4.10)的方法(4.2) 关于FIDEs(1.15)是散逸的. 定理4.5证毕.

§4.3 数值算例

为了求解问题(3.17), 我们使用三阶Radau IIA 方法, 其中

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \tag{4.40}$$

方法(4.40) 是3 阶代数稳定的. 令$\tau = mh$, 这里m 是正整数, 并用复化辛普森公式逼近积分项

$$z_n = \int_{t_n-\tau}^{t_n} g(t_n, \xi, x(\xi))d\xi \quad 和 \quad Z_i^{(n)} = \int_{t_n+c_ih-\tau}^{t_n+c_ih} g(t_n + c_ih, \xi, x(\xi))d\xi.$$

这里我们可以令(4.5) 中$v = \frac{4}{3}$ 且有$\alpha + \beta + \eta v^2\lambda^2 < 0$. 根据定理4.3 知数值解是散逸的.

取步长$h = 0.004\pi/12$, 分别考虑$t \in [-\frac{\pi}{12}, 0]$ 时如下不同的初始函数

$$(I)\ x_1(t) = sin(t)e^t,\ x_2(t) = 2t^2;$$

$$(II)\ x_1(t) = cos(2t),\ x_2(t) = 3sin(2t);$$

$$(III)\ x_1(t) = 3\,sin(4t),\ x_2(t) = cos(3t).$$

图4.1-4.3 分别给出了上述不同初始函数下的数值结果. 这些数值例子证明了问题(3.17)是散逸的, 因此, 这个数值例子论证了理论结果的正确性.

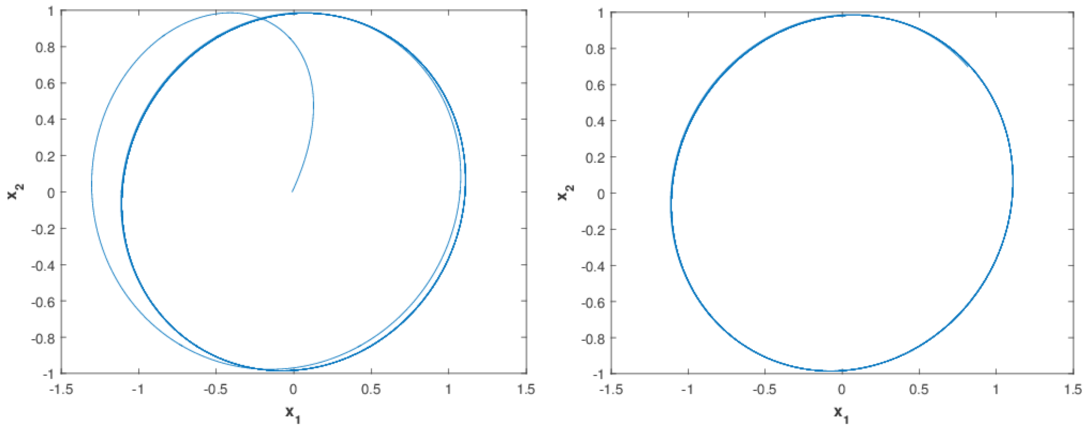

图 4.1　初始值为(I), $a = 2,\ b = 2$, 应用方法(4.40) 求解问题(3.17) 分别在$t \in [0, 10\pi]$ (左)和$t \in [\frac{7\pi}{6}, 10\pi]$ (右)的数值解图形.

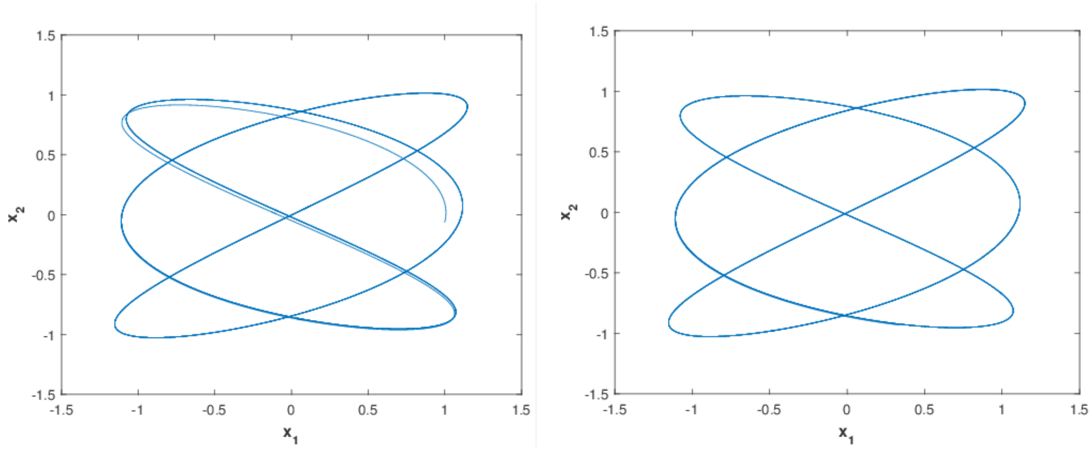

图 4.2　初始值为(II), $a = 3,\ b = 2$, 应用方法(4.40) 求解问题(3.17) 分别在$t \in [0, 10\pi]$ (左)和$t \in [\frac{5\pi}{6}, 10\pi]$ (右)的数值解图形.

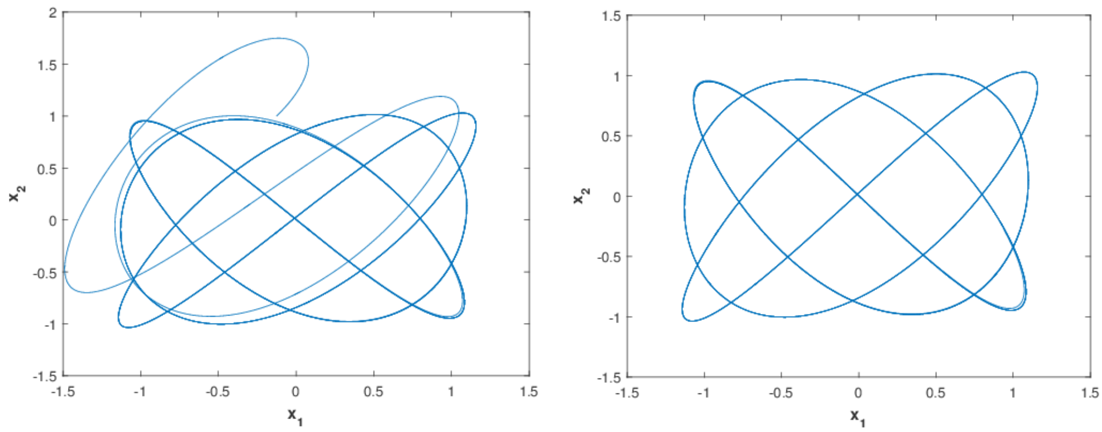

图 4.3　初始值为(III), $a = 3,\ b = 4$, 应用方法(4.40) 求解问题(3.17) 分别在$t \in [0, 10\pi]$ (左)和$t \in [\frac{4\pi}{3}, 10\pi]$ (右)的数值解图形.

结论与展望

非线性泛函积分微分方程被广泛应用于生物学、经济学、物理学等科学与工程领域. 但是由于方程本身的复杂性, 极难获得其真解的关系表达式, 所以, 研究数值方法求解非线性泛函积分微分方程的散逸性有着十分重要的理论和实际意义.

本文首先研究了问题本身的散逸性, 其次研究了单支方法和Runge-Kutta方法求解一类非线性泛函积分微分方程, 证明了单支方法和Runge-Kutta方法求解该类问题的散逸性, 给出了方法散逸的充分条件. 最后, 通过一些数值试验验证了本文理论结果.

近几十年来, 虽然已有一些非线性泛函积分微分方程的成果出现, 但是对于非线性泛函积分微分方程的研究还远远不够, 仍然还有许多的问题待解决, 基于本文的研究成果,今后, 我们可以从以下几个方面进一步探讨:

(1)研究非线性泛函积分微分方程其他数值方法的散逸性.

(2)研究其他形式的非线性泛函积分微分方程数值方法的散逸性.

(3)研究变延迟、多延迟等非线性延迟积分微分方程数值方法的散逸性.

参考文献

[1] A.R. Humphries, A.M. Stuart, Runge-Kutta methods for dissipative and gradient dynamical systems[J], SIAM J. Numer. Anal. 31 (1994) 1452-1485.

[2] A.T. Hill, Global dissipativity for a-stable methods[J], SIAM J. Numer. Anal. 34 (1997) 119-142.

[3] A.T. Hill, Dissipativity of Runge-Kutta methods in Hilbert spaces[J], BIT, 37 (1997) 37-42.

[4] C.M. Huang, Dissipativity of Runge-Kutta methods for dynamical systems with delays[J], IMA J. Numer. Anal. 20 (2000) 153-166.

[5] A.G. Xiao, Dissipativity of general linear methos for dissipative dynamical systems in Hilbert space[J], Math. Numer. Sin. 22 (4) (2000) 429-436(in Chinese).

[6] C.M. Huang, Dissipativity of one-leg methods for dynamical systems with delays[J], Appl. Numer. Math. 35 (2000) 11-22.

[7] L.P. Wen, Y.X. Yu, S.F. Li, Dissipativity of linear multistep methods for nonlinear differential equations with piecewise delay[J], Math. Numer. Sin. 28 (1) (2006) 67-74 (in Chinese).

[8] L.P. Wen, S.F. Li, Dissipativity of Volterra functional differential equations[J], J. Math. Anal. Appl. 324 (1) (2006) 696-706.

[9] S.Q. Gan, Dissipativity of θ-methods for nonlinear Volterra delay-integro-differential equations[J], J. Comput. Appl. Math. 206 (2) (2007) 898-907.

[10] R. Qi, C. Zhang, Y. Zhang, Dissipativity of Multistep Runge-Kutta Methods for Nonlinear Volterra Delay-integro-differential Equations[J], Acta Math. Appl. Sinica(English Series). 28 (2012) 225-236.

[11] X.Y. Liu, L.P. Wen, Dissipativity of one-leg methods for neutral delay integro-differential equations[J], J. Comput. Appl. Math. 235 (2010) 165-173.

[12] L.P. Wen, W.S. Wang, Y.X. Yu, Dissipativity and asymptotic stability of nonlinear neutral delay integro-differential equations[J], Nonlinear Anal.: TMA 72 (3 – 4) (2010) 1746 – 1754.

[13] C. Zhang, T. Qin, The mixed Runge – Kutta methods for a class of nonlinear functional-integro-differential equations[J], Appl. Math. Comput. 237 (2014) 396 – 404.

[14] T. Qin, C. Zhang, Stable solutions of one-leg methods for a class of nonlinear functional-integro-differential equations[J], Appl. Math. Comput. 250 (2015) 47 – 57.

[15] G. Dahlquist, Error analysis for a class of stiff nonlinear initial value problems[J], Lecture Notes in Math. vol. 506, Springer-Verlag, Berlin, 1976: 60-72.

[16] 李寿佛. 刚性常微分方程及刚性泛函微分方程数值分析[M], 湘潭：湘潭大学出版社, 2010.

[17] C.M. Huang, Q.S. Chang, Dissipativity of multistep Runge-Kutta methods for dynamical systems with delays[J], Math. Comput. Model. 40 (11-12) (2004)1285-1296.

[18] C.J. Zhang, S. Vandewalle, Stability criteria for exact and discrete solutions of neutral multidelay-integro-differential equations[J], Adv. in Comput. Math. 28 (4) (2008) 383-399.

[19] H. Chen, C.J. Zhang, Convergence and stability of extended block boundary value methods for Volterra delay integro-differential equations[J], Appl. Numer. Math. 62 (2) (2012) 141-154.

[20] R. Frank, J. Schneid, C.W. Ueberhuber, Stability properties of implicit Runge-Kutta methods[J], SIAM J. Numer. Anal. 22 (3) (1985) 497-534.

[21] J. C. Butcher, A stability property of implicit Runge-Kutta methods[J], BIT, 15 (1975) 358-361.

[22] G. Dahlquist, G-stability is equivalent to A-stability[J], BIT, 18 (1978) 384-401.

[23] B. L. Ehle, On Padd approximations to the exponential function and A-stable methods for the numerical solution of initial value problems[J], Research report CSRR, Dept. AACS, Univ. of Waterloo, Ontario, Canada, 2010.

[24] E. Hairer and G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations II[M], Springer, Berlin, 1991.

[25] R. Temam, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[M], Springer, Berlin, 1988.

[26] S.Q. Gan, Dissipativity of θ-methods for nonlinear delay differential equations of neutral type[J], Appl. Numer. Math. 59 (2009) 1354 – 1365.

[27] H.J. Tian, Numerical and analytic dissipativity of the θ-methods for delay differential equations with a bounded lag[J], Int. J. Bifur. Chaos. 14 (2004) 1839 – 1845.

[28] H.J. Tian, J. Guo, A.L. Shen, Dissipativity of delay functional equations with bounded lag[J], J. Math. Anal. Appl. 355 (2009) 778 – 782.

[29] W.S. Wang, S.F. Li, Dissipativity of Runge-Kutta methods for neutral delay differential equations with piecewise constant delay[J], Appl. Math. Lett. 21 (2008) 983 – 991.

[30] L.P. Wen, W.S. Wang, Y.X. Yu, Dissipativity of θ-methods for a class of nonlinear neutral delay differential equations[J], J. Math. Anal. Appl. 347 (2008) 780 – 786.

[31] L.P. Wen, S.X. Wang, Y.X. Yu, Dissipativity of Runge – Kutta methods for neutral delay integro-differential equations[J], Appl. Math. Comput. 215 (2009) 583 – 590.

[32] S.X. Wang, L.P. Wen, Numerical dissipativity of neutral integro-differential equations with delay[J], Int. J. Comput. Math. 94 (2017) 536-553.

[33] S.Q. Gan, Dissipativity of the backward Euler method for nonlinear Volterra functional differential equations in Banach space[J], Advances in Difference Equations (2015) 2015:128, DOI 10.1186/s13662-015-0469-8.

[34] S.F. Li, Classical theory of Runge – Kutta methods for Volterra functional differential equations[J], Appl. Math. Comput. 230 (2014) 78 – 95.

攻读硕士学位期间论文发表情况

[1] L.P. Wen, Q. Liao, Dissipativity of one-leg methods for a class of nonlinear functional-integro-differential equations[J], J. Comput. Appl. Math. 318 (2017) 26-37.

[2] Q. Liao, L.P. Wen, Dissipativity of Runge-Kutta methods for a class of nonlinear functional-integro-differential equations[J], Advances in Difference Equations (2017) 2017:142, DOI 10.1186/s 13662-017-1196-0.

致　谢

时间如掌间流水, 一晃便是三年, 很高兴能在湘潭大学这样的高等学府进行专业的学习. 三年以来，我不仅收获了知识, 更收获了友情, 在此我要对在这三年期间帮助过我鼓励过我支持过我的人表示感谢!

首先, 由衷地感谢我的导师文立平教授. 自研一开始, 文老师就谆谆教诲我要学好专业知识, 为后面的学习打下坚实的基础, 并时常询问学习情况, 有问题及时给予指导, 让我在专业的学习中少了不少困惑, 也让我对专业的学习更加有兴趣和信心. 研二期间在文老师的指导下开始搜索专业学术论文, 寻找毕业论文题材, 期间遇到了很多不懂的问题文老师都一一予以细致的解答, 并提示论文的选题来源, 这让我对专业知识有了进一步的加深, 也为我的毕业论文设计打下基础. 本文就是在文老师的严格要求下完成, 从选题、文献的收集、素材的学习、文章结构安排及后期修改润色都是在文老师精心的指导下完成. 文老师在学术上知识渊博, 严谨求真, 在工作上兢兢业业, 严于律己, 在生活上更是关心学生的身心发展, 这些优秀的品质时刻激励着我. 一日为师, 终生为师, 日后我会以文老师为榜样, 谨记文老师的教诲, 勤奋学习, 严于律己, 努力做最好的自己回报恩师的辛勤付出!

其次, 衷心感谢湘潭大学提供的学习机会和学习条件. 感谢数学院的领导和所有老师们的指导与帮助, 特别感谢刘琼老师和班主任张娟老师. 感谢三年来给我们授课的老师们, 特别感谢李寿佛教授、肖爱国教授、曹学年教授、余越昕教授、王文强教授.

再次, 衷心感谢我的师兄李雪阳博士、刑智勇博士, 师姐彭玉清、周艳, 师兄田志利, 同门杨春花, 师弟王志强, 师妹胡永霞、何子怡、韩竹影、刘倩. 感谢你们在学习和生活上给予我的支持和帮助, 虽然相处的日子只有两三年, 但我们的情谊永远都在.

最后, 衷心感谢我的朋友、同学和其他所有支持我、关心我、帮助过我的人, 特别感谢我的家人, 因为有你们的支持和鼓励, 我才选择读研, 如今才能顺利完成学业.

学习是一种态度, 虽然我即将离开校园走上工作岗位, 但在以后的工作中我将不忘学习, 铭记恩师的教诲, 踏实做事、诚实做人, 发扬湘大传统, 以优秀的工作成绩来回报社会.