単純証明と様相論理の関係について

SLACS2020

2020.12.2

佐々木克巳(南山大学)

概要

推論規則としてカットのみをもつ体系は，「ならば」の導入規則や「または」の除去規則などの一時的な仮定をもつ推論を含まず，単純な証明を表すと捉えられる．この体系では，無矛盾である限り，それらの一時的な仮定をもつ推論を導出できないことがわかっている．本発表では，その体系と様相論理との関係を明らかにする．

背景

易しい:

$$\frac{P \quad Q}{P \land Q} \qquad \frac{P}{P \lor Q} \qquad \frac{P \quad P \to Q}{Q}$$

難しい(一時的な仮定をもつ):

$$\frac{P \lor Q \quad \begin{matrix}[P] \\ R\end{matrix} \quad \begin{matrix}[Q] \\ R\end{matrix}}{R} \qquad \frac{\begin{matrix}[P] \\ Q\end{matrix}}{P \to Q} \qquad \frac{\begin{matrix}[\neg P] \\ \bot\end{matrix}}{P}$$

背景

● 単純証明（一時的な仮定を持つ推論を用いない証明）を表すシークエント体系 $\vdash_S$ を導入した.

● $\vdash_S$ では, (→右),(∨左),(RAA)などの一時的な仮定をもつ推論は導出できない.

● $\vdash_S$ での意味論を導入し, 完全性定理を示した.

目標

$$\{\Gamma_1 \Rightarrow P_1, \ldots\} \vdash_S \ \Gamma \Rightarrow P$$

$$\Leftrightarrow \ \{\Box\Gamma_1 \Rightarrow \Box P_1, \ldots\} \vdash_{ML} \ \Box\Gamma \Rightarrow \Box P$$

を満たす様相論理の体系 $\vdash_{ML}$ を求める.

※P_i,P : □を持たない論理式
Γ_i, Γ: □を持たない論理式の有限集合

結果 : S5やKなどよく知られた複数のシークエント体系が上の同値性を満たす.

単純証明のシークエント体系 $\vdash_S$

命題変数　　$p,\ q,\ r,\ \cdots,\ p_1, p_2, \cdots$

矛盾　　　　$\perp$

論理記号　　$\wedge \quad \vee \quad \to$

省略形　　　$\neg P = P \to \perp$

論理式を表す記号

$P, Q, R, \cdots, P_1, P_2, \cdots$

単純証明のシークエント体系 $\vdash_S$

シークエント　$\{P_1,\cdots,P_n\}\Rightarrow P$

シークエントを表す記号

$X,Y,Z,\cdots,X_1,X_2,\cdots$

シークエントの集合を表す記号

$S,T,\cdots,S_1,S_2,\cdots$

単純証明のシークエント体系 $\vdash_S$

定義. TからXを導く導出関係

$$T \vdash_S X$$

を次のように定義する.

公理: Tの要素

古典論理(LJ+排中律)で証明可能なシークエント

推論規則:

(w左) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow Q}{P,\Gamma \Rightarrow Q}$ (cut) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow P \qquad \Sigma,P \Rightarrow Q}{\Gamma,\Sigma \Rightarrow Q}$

単純証明のシークエント体系 $\vdash_S$

性質.

(1) $\{p \Rightarrow q\} \not\vdash_S \Rightarrow p \to q,$

(2) $\{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r\} \not\vdash_S p \vee q \Rightarrow r,$

(3) $\{\neg p \Rightarrow \bot\} \not\vdash_S \Rightarrow p,$

単純証明のシークエント体系 $\vdash_S$

完全性

$T \vdash_S X$ ⇔任意の**v**に対して，**v**(T)=tならば**v**(X)=t

※**v**の定義は次のスライド

単純証明のシークエント体系 $\vdash_S$

定義．ふつうの付値関数　v : WFF→{t,f}を cl-valuationという．

定義．cl-valuationの集合**v**に対して，**v** : WFF→{t,f} を次のように定義する．

$$\mathbf{v}(P)=t \Leftrightarrow \text{任意の} v \in \mathbf{v} \text{に対して，} v(P)=t$$

※$\emptyset(P)=t$,　　$\{v\}(P)=v(P)$,　$\{v_1,v_2\}(P)=t \Leftrightarrow v_1(P)=v_2(P)=t$

参考：真理値表

v(P)=t ⇔ 任意のv∈ **v**に対して，v(P)=t

v(P)	**v(Q)**	**v(P∧Q)**	**v(P∨Q)**	**v(P→Q)**
t	t	t	t	t
t	f	f	t	f
f	t	f	t	t
f	f	f		

単純証明のシークエント体系 $\vdash_S$

v(P,Q⇒R)=t ⇔ **v**(P)= **v**(Q)=t ならば **v**(R)=t

v(S)=t ⇔ 任意のX∈Sに対して**v**(X)=t

完全性

T $\vdash_S$ X⇔任意の**v**に対して，**v**(T)=tならば**v**(X)=t

体系 $\vdash_S$ の意味論とクリプキモデル

完全性

$T \vdash_S X \Leftrightarrow$ 任意の**v**に対して，**v**$(T)=t$ならば**v**$(X)=t$

より具体的な場合：

$\{Q_1 \Rightarrow P, Q_2 \Rightarrow P\} \nvdash_S \ \Rightarrow P$
$\Leftrightarrow$ ある**v**が存在して，
v$(Q_1 \Rightarrow P)=$**v**$(Q_2 \Rightarrow P)= t$かつ**v**$(\Rightarrow P)=f$

体系 $\vdash_S$ の意味論とクリプキモデル

$\{Q_1 \Rightarrow P, Q_2 \Rightarrow P\} \nvdash_S \ \Rightarrow P$

⇔ある**v**が存在して,

$\mathbf{v}(Q_1 \Rightarrow P) = \mathbf{v}(Q_2 \Rightarrow P) = t$ かつ $\mathbf{v}(\Rightarrow P) = f$

⇔ある**v**が存在して, $\mathbf{v}(Q_1) = \mathbf{v}(Q_2) = \mathbf{v}(P) = f$

⇔ある**v**とある $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{v}$ が存在して,

$v_1(Q_1) = v_2(Q_2) = v_3(P) = f$

$\{Q_1 \Rightarrow P, Q_2 \Rightarrow P\} \not\vdash_S \Rightarrow P$

$\Leftrightarrow$ ある**v**とある$v_1, v_2, v_3 \in$ **v**が存在して,

$v_1(Q_1) = v_2(Q_2) = v_3(P) = f$

$\{Q_1 \Rightarrow P, Q_2 \Rightarrow P\} \nvdash_S \Rightarrow P$

$\Leftrightarrow$ ある$\mathbf{v}$とある$v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{v}$が存在して,

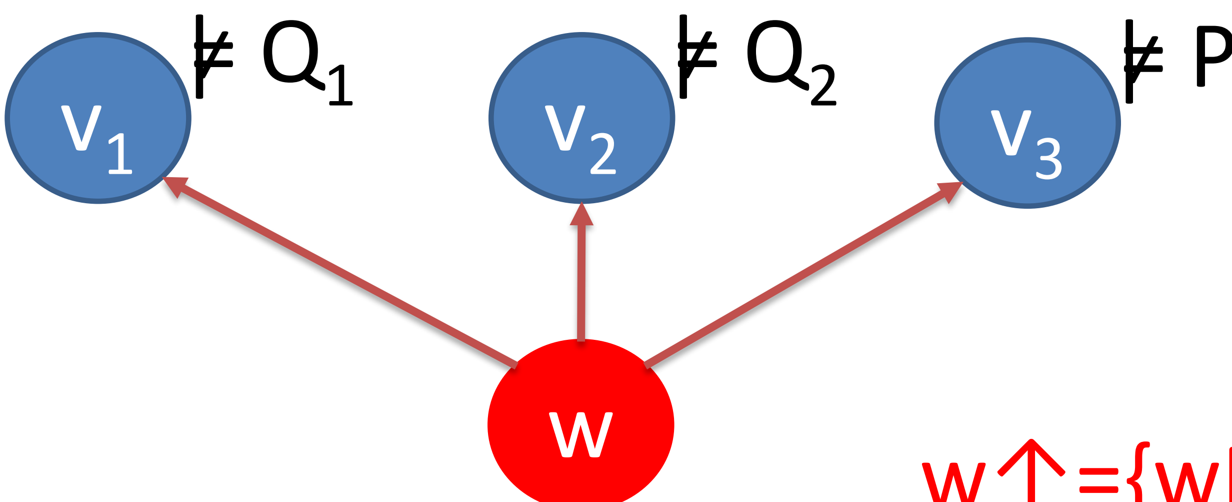
$v_1 \nvDash Q_1$, $v_2 \nvDash Q_2$, $v_3 \nvDash P$

$v_1 \nvDash Q_1$ $v_2 \nvDash Q_2$ $v_3 \nvDash P$

$\{Q_1 \Rightarrow P, Q_2 \Rightarrow P\} \nvdash_S \Rightarrow P$

$\Leftrightarrow$あるwとある$v_1, v_2, v_3 \in w\uparrow$ が存在して，

$v_1 \nvDash Q_1$, $v_2 \nvDash Q_2$,　$v_3 \nvDash P$

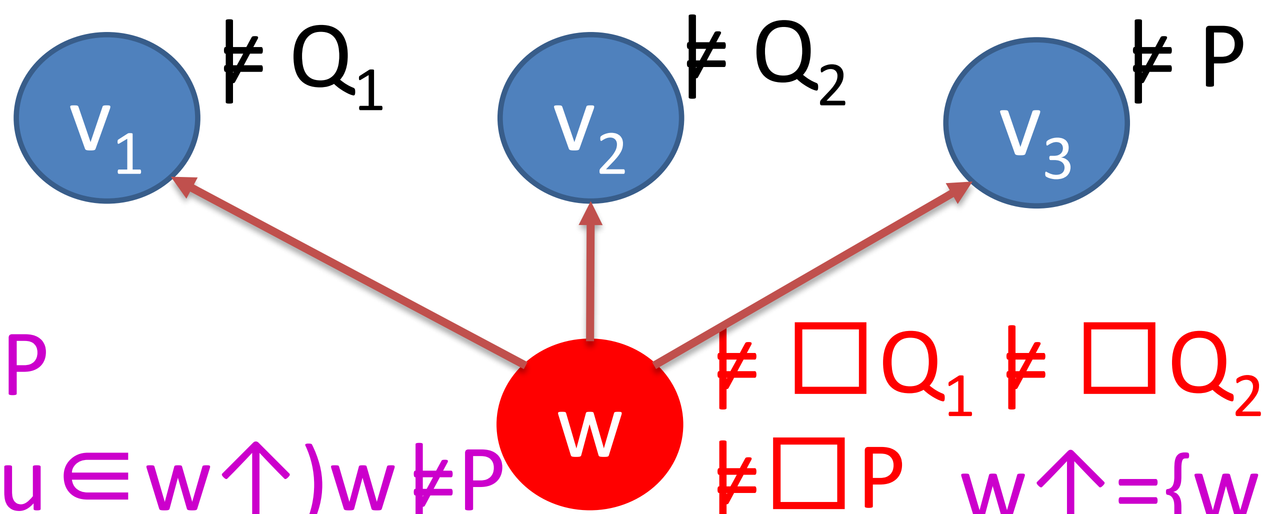


$w\uparrow = \{wRu \mid u \in W\}$

$\Leftrightarrow$あるwが存在して，$w \nvDash \Box Q_1$, $w \nvDash \Box Q_2$, $w \nvDash \Box P$

$\Leftrightarrow$あるwとある$v_1, v_2, v_3 \in w\uparrow$が存在して，

$v_1 \nvDash Q_1$, $v_2 \nvDash Q_2$, $v_3 \nvDash P$



$w \nvDash \Box P$

$\Leftrightarrow (\exists u \in w\uparrow) w \nvDash P$

$w\uparrow = \{wRu \mid u \in W\}$

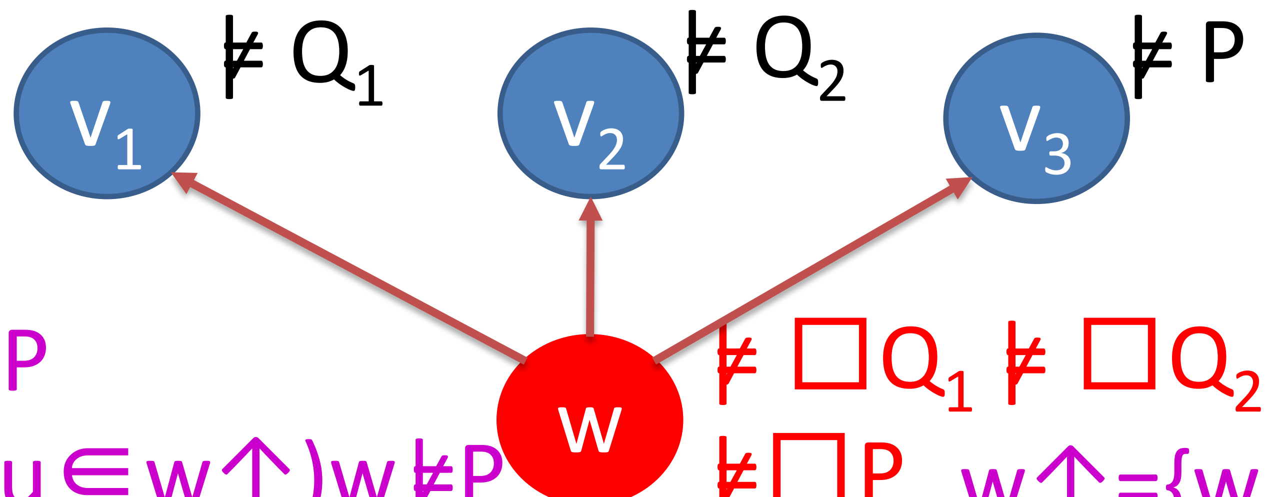
$\Leftrightarrow$あるwが存在して，

$$w \models \Box Q_1 \Rightarrow \Box P,\ w \models \Box Q_2 \Rightarrow \Box P,\ w \not\models \Rightarrow \Box P$$

$\Leftrightarrow$あるwが存在して，$w \not\models \Box Q_1$, $w \not\models \Box Q_2$, $w \not\models \Box P$

$\Leftrightarrow$あるwとある$v_1, v_2, v_3 \in w\uparrow$が存在して，

$$v_1 \not\models Q_1,\ v_2 \not\models Q_2,\ \ v_3 \not\models P$$



$w \not\models \Box P$

$\Leftrightarrow (\exists u \in w\uparrow) w \not\models P$

$\not\models \Box Q_1$ $\not\models \Box Q_2$

$\not\models \Box P$

$w\uparrow = \{wRu \mid u \in W\}$

$\{\Box Q_1 \Rightarrow \Box P, \Box Q_2 \Rightarrow \Box P\} \nvdash_{ML} \Rightarrow \Box P$

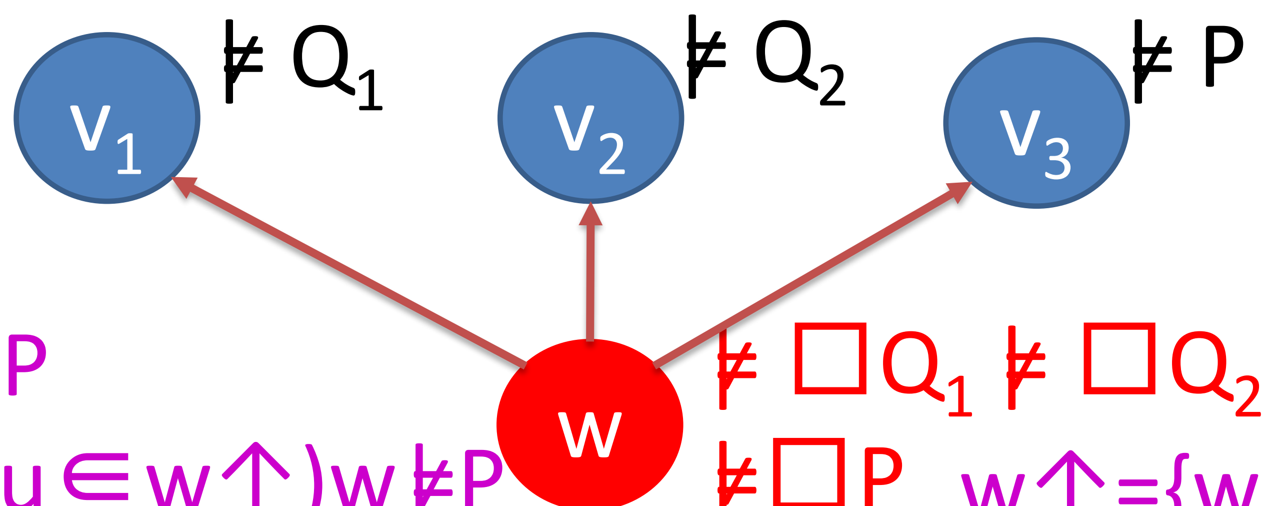
$\Leftarrow$ あるw が存在して，

$w \models \Box Q_1 \Rightarrow \Box P$, $w \models \Box Q_2 \Rightarrow \Box P$, $w \nvDash \Rightarrow \Box P$

$\Leftrightarrow$ あるw が存在して，$w \nvDash \Box Q_1$, $w \nvDash \Box Q_2$, $w \nvDash \Box P$

$\Leftrightarrow$ あるwとある$v_1, v_2, v_3 \in w\uparrow$ が存在して，

$v_1 \nvDash Q_1$, $v_2 \nvDash Q_2$, $v_3 \nvDash P$



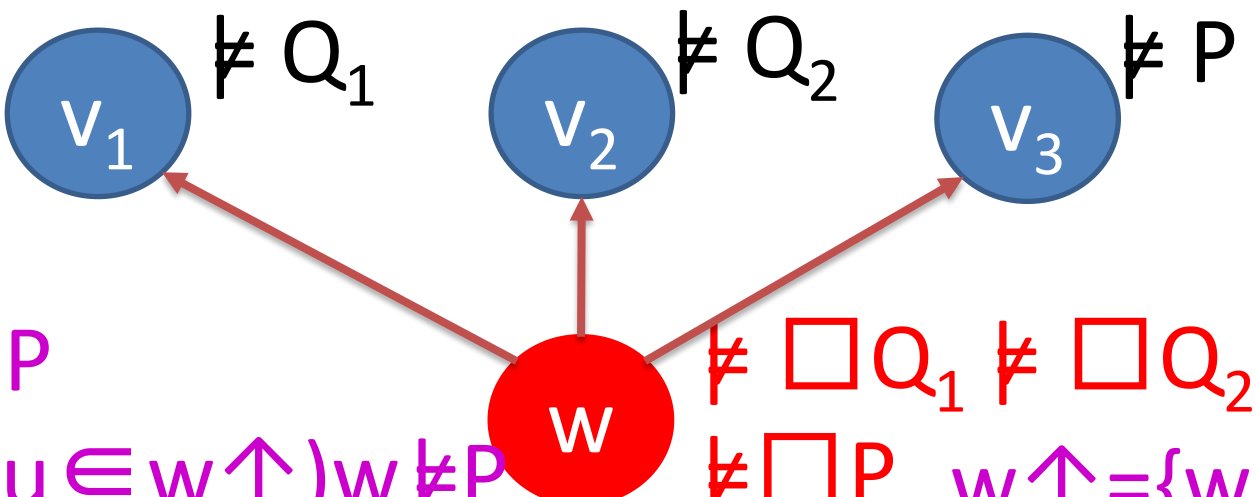
$w \nvDash \Box P$

$\Leftrightarrow (\exists u \in w\uparrow) w \nvDash P$

$w\uparrow = \{wRu \mid u \in W\}$

$$\{Q_1 \Rightarrow P, Q_2 \Rightarrow P\} \nvdash_S \Rightarrow P$$

$$\{\Box Q_1 \Rightarrow \Box P, \Box Q_2 \Rightarrow \Box P\} \nvdash_{ML} \Rightarrow \Box P$$



$w \nvDash \Box P$

$\Leftrightarrow (\exists u \in w\uparrow) w \nvDash P$

$w\uparrow = \{wRu \mid u \in W\}$

様相論理とクリプキモデル

様相記号　$\Box$

論理式　　$\Box$も使って定義

$\Box\Gamma = \{\Box P \mid P \in \Gamma\}$

$\Box(\Gamma \Rightarrow P) = \Box\Gamma \Rightarrow \Box P$

$\Box T = \{\Box X \mid X \in T\}$

様相論理とクリプキモデル

定義. TからXを導く導出関係

$$T \vdash_{ML} X$$

を次のように定義する.

公理: Tの要素, $P \Rightarrow P$, $\bot \Rightarrow P$, $\Rightarrow P \vee \neg P$, MLの公理

推論規則: LJの推論規則, MLの推論規則

定義. $\vdash_{ML}$ が正規$\Leftrightarrow$($\Box$) $\{\Gamma \Rightarrow P\} \vdash_{ML} \Box\Gamma \Rightarrow \Box P$

様相論理とクリプキモデル

定義.

<W,R>がクリプキフレーム

⇔W:空でない集合

R:W上の2項関係

<W,R,V>がクリプキモデル

⇔<W,R>: クリプキフレーム

V:命題変数の集合から2^Wへの関数

様相論理とクリプキモデル

定義．$M=\langle W,R,V\rangle$

$M,w \models p \;\Leftrightarrow\; w \in V(p)$

$M,w \models P \wedge Q \;\Leftrightarrow\; M,w \models P$　かつ　$M,w \models Q$

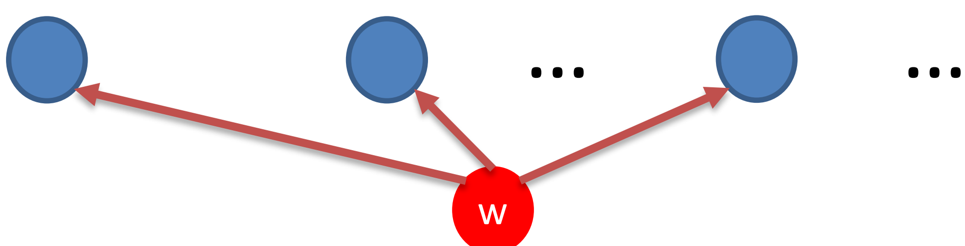
…

$M,w \models \Box P \;\Leftrightarrow\;$ すべての $u \in W$ で，

　　wRu ならば $M,u \models P$

定義．クリプケフレーム $\langle W,R\rangle$ が無限分岐を持つ

⇔ある $w \in W$ が存在して，$\{u \in W \mid wRu\}$ が無限集合，



主定理

定理. $\vdash_{ML}$ が次の2条件を満たすとする.

(1)正規である.

(2) 無限分岐をもつあるクリプケフレームFで,

$$\vdash_{ML} P \text{ ならば } F \models P$$

このとき

$$T \vdash_{S} X \quad \text{iff} \quad \Box T \vdash_{ML} \Box X$$

※ただし, T,Xに□は現れない.

主定理

補助定理1. $\vdash_{ML}$ が次の条件を満たすとする.

(1) 正規である.

このとき

$$T \vdash_{S} X \quad \text{only if} \quad \Box T \vdash_{ML} \Box X$$

※ただし, T,Xに□は現れない.

主定理

補助定理2.　$\vdash_{ML}$ が次の条件を満たすとする.

(2) 無限分岐をもつあるクリプケフレームFで,

$\vdash_{ML} P$ ならば　$F \models P$

このとき

$$T \vdash_{S} X \quad \text{if} \quad \Box T \vdash_{ML} \Box X$$

※ただし，T,Xに□は現れない.

具体例

追加される公理と推論規則

$\vdash_K$ ： 公理 ---

推論規則 (□) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow P}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box P}$

$\vdash_{S5}$: 公理 T: $\Box P \Rightarrow P$ と 5 : $\Rightarrow \Box P \vee \Box \neg \Box P$

推論規則（□）

補助定理

$T \vdash_K X \rightarrow T \vdash_{ML} X \rightarrow T \vdash_{S5} X$

を満たす $\vdash_{ML}$ は，主定理の2条件を満たす．