UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Física de Plasmas: Atmósferas Estelares

Examen Final

Problema 1
Suponiendo que el campo de radiación de una atmósfera no gris se descompone en dos corrientes, una saliente $I_\nu^+(\tau_\nu)$ para $\mu > 0$ y una entrante $I_\nu^-(\tau_\nu)$ para $\mu < 0$.

$$\pm\mu\frac{dI_\nu^\pm(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = I_\nu^\pm(\tau_\nu) - S_\nu$$

Obtener la ecuación diferencial de segundo orden que permita calcular la Intensidad media en función de la opacidad y la función fuente.

Solución
Escribimos las ecuación de transporte para cada una de las componnetes de $I_\nu(\tau_\nu)$

$$\mu\frac{dI_\nu^+(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = I_\nu^+(\tau_\nu) - S_\nu$$
$$-\mu\frac{dI_\nu^-(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = I_\nu^-(\tau_\nu) - S_\nu$$

Sumando y restando ambas ecuaciones obtenemos

$$\mu\frac{d}{d\tau_\nu}\left[\frac{I_\nu^+(\tau_\nu) - I_\nu^-(\tau_\nu)}{2}\right] = \left[\frac{I_\nu^+(\tau_\nu) + I_\nu^-(\tau_\nu)}{2}\right] - S_\nu$$
$$\mu\frac{d}{d\tau_\nu}\left[\frac{I_\nu^+(\tau_\nu) + I_\nu^-(\tau_\nu)}{2}\right] = \left[\frac{I_\nu^+(\tau_\nu) - I_\nu^-(\tau_\nu)}{2}\right]$$

Haciendo

$$\alpha_\nu(\tau) = \frac{I_\nu^+(\tau_\nu) + I_\nu^-(\tau_\nu)}{2}$$
$$\beta_\nu(\tau) = \frac{I_\nu^+(\tau_\nu) - I_\nu^-(\tau_\nu)}{2}$$

las ecuaciones obtenidas anteriormente se reducen a

$$\mu\frac{d\beta_\nu(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = \alpha_\nu(\tau_\nu) - S_\nu$$
$$\mu\frac{d\alpha_\nu(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = \beta_\nu(\tau_\nu)$$

Reemplazando el valor de β_ν obtenemos:

$$\mu^2\frac{d^2\alpha_\nu(\tau_\nu)}{d\tau_\nu^2} = \alpha_\nu(\tau_\nu) - S_\nu$$

Si reemplazamos I_ν^+ y I_ν^- en la definición de J_ν

$$\begin{aligned}
J_\nu(\tau) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Omega I_\nu d\Omega \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu(\tau_\nu)\,d\mu \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} I_\nu^-(\tau_\nu)\,d\mu + \int_0^1 I_\nu^+(\tau_\nu)\,d\mu\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[I_\nu^-(\tau_\nu)\int_{-1}^{0} d\mu + I_\nu^+(\tau_\nu)\int_0^1 d\mu\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[I_\nu^-(\tau_\nu)\int_{0}^{1} d\mu + I_\nu^+(\tau_\nu)\int_0^1 d\mu\right] \\
&= \left[\frac{I_\nu^-(\tau_\nu) + I_\nu^+(\tau_\nu)}{2}\right]\int_0^1 d\mu \\
&= \alpha_\nu(\tau_\nu)
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación para α_ν obtenemos

$$\mu^2\frac{d^2 J_\nu(\tau)}{d\tau_\nu^2} = J_\nu(\tau) - S_\nu$$

Problema 2
Si la intensidad específica de radiación saliente de una atmósfera se expresa de la siguiente manera

$$I(0,\mu) = A + B\mu + C\mu^2.$$

Determine la forma de la funcion fuente $S = S(\tau)$ empleando la relación de Eddingtong-Barbier.

Solución
Del caso general, si

$$S_\nu(\tau_\nu) = \sum_i a_{\lambda,i}\tau_\lambda^i$$

entonces

$$I_\nu(0,\mu) = \sum_i A_i \mu^i \qquad \text{con} \qquad A_i = a_{\lambda,i} \cdot i!$$

De la expresión dada en el problema se tiene que

$$S_\nu\left(\tau_\nu\right) = A + B\tau + \frac{C}{2}\tau^2.$$

Problema 3
En una atmósfera gris y en equilibrio radiativo, en la que se suponela función fuente está dada por la función de Planck $S_\nu = B_\nu\left(T\right)$. Si la intensidad media del campo de radiación se expresa como

$$J_\nu\left(\tau\right) = \left[1 - \frac{1}{2}E_2\left(\tau\right)\right] B_\nu\left(\tau = \tfrac{2}{3}\right)$$

a) Determine la temperatura $T(0)$ en función de la temperatura $T(\tau = \frac{2}{3})$.
b) ¿A qué corresponde la temperatura $T = T(\tau = \frac{2}{3})$?
c) Empleando la relación de Barbier, determine el flujo astrfísico integrado en todas las longitudes de onda.

Solución
a) De la aproximación a primer orden de $J_\nu\left(\tau\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned} J_\nu\left(\tau\right) &= \Lambda_\nu\left[S_\nu\right] \\ &= a_0\Lambda_\nu\left[1\right] + a_0\Lambda_\nu\left[t\right] + \ldots \\ &\approx a_0\Lambda_\nu\left[1\right] \\ &\approx a_0\left[1 - \frac{1}{2}E_2\left(\tau\right)\right] \end{aligned}$$

De donde se obtiene $a_0 = B_\nu\left(\tau = \frac{2}{3}\right)$.

Problema 4
Derive la ecuación

$$J\left(\tau\right) = \frac{3}{4}F\left(\tau + Q + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha \mathrm{e}^{-k_\alpha \tau}\right)$$

Solución
De la aproximación a grandes profundidades ($\tau \gg 1$) se tiene que $J_\nu\left(\tau_\nu\right) \approx S_\nu\left(\tau_\nu\right)$. Reemplazado esta relación en la ecuación de transferencia radiativa y expresando $J_\nu\left(\tau_\nu\right)$ en función de I tenemos

$$\mu\frac{dI_\nu\left(\tau_\nu,\mu\right)}{d\tau_\nu} = I_\nu\left(\tau_\nu,\mu\right) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} I_\nu\left(\tau_\nu,\mu\right) d\mu.$$

Discretizando la integral del segundo término la ecuación anterior se convierte en

$$\mu \frac{dI_\nu\left(\tau_\nu,\mu\right)}{d\tau_\nu} = I_\nu\left(\tau_\nu,\mu\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_\nu\left(\tau_\nu,\mu_j\right) a_j.$$

Donde a_j son los pesos de los valores de la función $I_\nu\left(\tau_\nu,\mu\right)$ en μ_j. Si la ecuación obtenida la evaluamos únicamente en los valores μ_j empleados en la cuadratura de la integral obtenemos un sistema de n ecuaciones homogeneas.

$$\mu \frac{dI_\nu\left(\tau_\nu,\mu_i\right)}{d\tau_\nu} = I_\nu\left(\tau_\nu,\mu_i\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_\nu\left(\tau_\nu,\mu_j\right) a_j.$$

Modelando una solución de la forma

$$I_\nu\left(\tau_\nu,\mu_j\right) = g_i e^{-k\tau}$$

Tenemos que esta solo cumplirá con el sistema solo cuando

$$\frac{S_\nu(\tau_\nu)}{I_\nu(0,1)} \approx \frac{B_\nu[T(\tau_\nu)]}{I_\nu(0,1)} = \sum_{i=0}^{n}\beta_i\tau^i = \sum_{i=0}^{n}\beta_i\left(\frac{\tau}{\mu}\right)^i\mu^i$$

Con k satisfaciendo la ecuación

$$1 = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \frac{a_j}{1-\mu k^2} \qquad ; \qquad \mu_j > 0$$

Estas dos últimas ecuaciones proveen $n-2$ constantes de integración L_α para cada valor de k distitno de 0 y denotado pr k_α.
Para el caso $k=0$, podemos modelar una solución, similar a la aproximación de Eddington, de la forma

$$I_\nu\left(\tau_\nu,\mu_j\right) = b(\tau + q_i)$$

Esta expresion de I_ν satisface la ecuación cuando

$$q_i = \mu_i + Q$$

Donde Q es una contante. Los productos $b\tau$ y bQ son las constantes restantes para resolver el sistema en el caso $k=0$, de modo que

$$I_\nu\left(\tau_\nu,\mu_i\right) = b\left[\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{L_\alpha e^{-k_\alpha\tau}}{1+\mu_i k_\alpha} + \mu_i + \tau + Q\right]$$

Calculando el valor de J obtenemos que

$$\begin{aligned} J_\nu\left(\tau_\nu\right) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_\nu\left(\tau_\nu,\mu_i\right) a_i \\ &= b\left[\tau + Q + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha e^{-k_\alpha\tau}\right] \end{aligned}$$

De igual forma, el valor de F Viene dado por

$$F_\nu\left(\tau_\nu\right) = \frac{4b}{3}$$

De donde despejamos b y obtenemos J como

$$J_\nu\left(\tau_\nu, \mu_j\right) = \frac{3}{4}F\left[\tau + Q + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha e^{-k_\alpha \tau}\right]$$