Exercices + corrigés du Livre Scolaire Mathématiques

3 eme Sciences Experimentales

Analyse

Chapitres

- Généralités sur les fonctions
- Continuité
- Limites et continuité
- Limites et comportements asymptotiques
- Nombre dérivé
- Fonction dérivée
- Exemples d'étude de fonctions
- Fonctions trigonométriques
- Suites réelles
- Limites de suites réelles

LIEN

Oct 18, 2022

Chapitre

Page No.

QCM – VRAI – FAUX

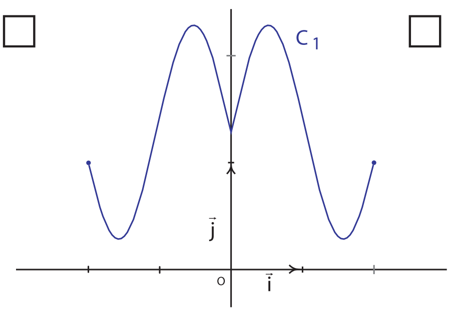
QCM

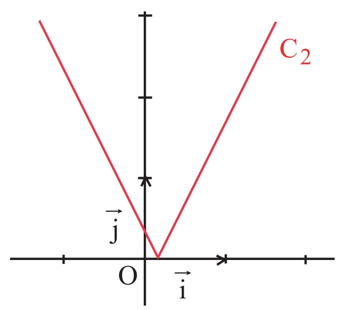
Cocher la réponse exacte.

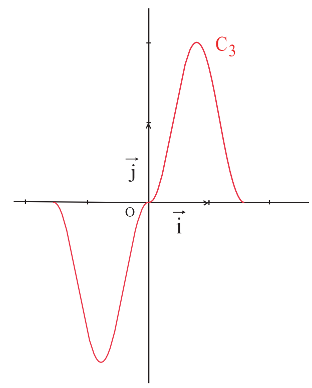
1. La fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x}{1+|x|}$

☐ est paire ☐ est impaire ☐ n'est ni paire, ni impaire.

2. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Une des courbes suivantes ne représente ni une fonction paire ni une fonction impaire. Laquelle ?

☐ 

☐ 

☐ 

3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^2+4}$.

☐ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$ ☐ n'est pas minorée sur $\mathbb{R}$ ☐ est bornée sur $\mathbb{R}$.

4. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{|4-2x|}$ est

☐ $]-\infty, 2]$ ☐ $[2, +\infty[$ ☐ $\mathbb{R}$.

5. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \dfrac{2x^3-1}{1-|x|}$ est

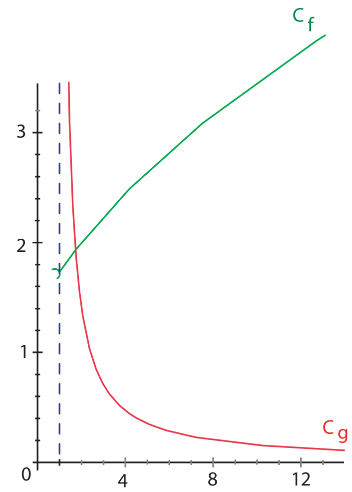
☐ $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ☐ $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ☐ $\mathbb{R}\setminus\{1, -1\}$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$, alors $f(0) = 0$.
2. Si f est bornée sur D, alors f admet un minimum sur D.
3. Si f admet un maximum sur D, alors f est bornée sur D.
4. Si f n'est pas bornée sur D, alors elle n'admet ni un minimum ni un maximum sur D.
5. Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$.
Si la restriction de f à $[1, 3]$ est bornée sur $[1, 3]$, alors f est bornée sur $[0, +\infty[$.

Mobiliser ses compétences



Situation

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté les fonctions f et g définies sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{x-1}$.

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
2. On se propose de déterminer par le calcul la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
   a. Vérifier que si α est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$, alors α est une solution de l'équation $(x - 1)^2 (x + 2) = 2$.
   b. Résoudre l'équation $(x - 1)^2 (x + 2) = 2$.
   c. En déduire la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre graphiquement les inéquations $f(x) > g(x)$ et $f(x) < g(x)$.
4. Représenter graphiquement la fonction h définie sur $]1, +\infty[$ par

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{x-1} & \text{si } x \in\ ]1, \alpha], \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

Exercices et problèmes

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition et étudier la parité de chacune des fonctions suivantes.

$f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$; $g : x \mapsto \sqrt{x}$;

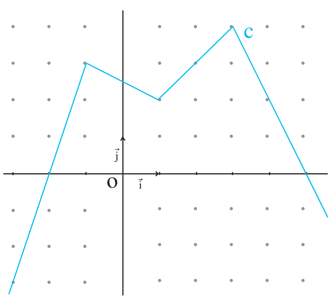
$h : x \mapsto \sqrt{|x|}$; $k : x \mapsto x^2 - x + 1$.

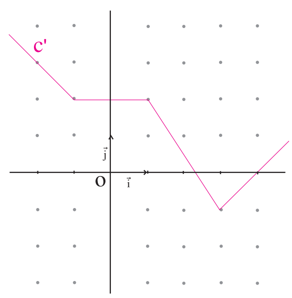
Exercice 2

Soit f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D, a et b deux réels.
1. Que peut-on dire des fonctions fg et af+bg lorsque les fonctions f et g sont paires ?
2. Que peut-on dire des fonctions fg et af+bg lorsque les fonctions f et g sont impaires ?

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a tracé ci-dessous les courbes représentatives respectives C et C' des fonctions f et g.





Dans chacun des cas suivants préciser si f et g admettent un maximum ou un minimum sur I. Dans l'affirmative préciser leurs valeurs et en quel(s) réel(s) ils sont atteints.
a. I = [–1, 1] ; b. I = [1, 3] ; c. I = [–2, 4].

Exercice 4

1. Déterminer le minimum sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous.

a. $f : x \mapsto 1 + |x| + 2x^2$.

b. $g : x \mapsto |x+1| - 4$.

2. Déterminer le maximum sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous.

a. $h : x \mapsto \dfrac{1}{|x|+3} + 1$.

b. $k : x \mapsto \dfrac{2}{1+x^2} - 3$.

Exercice 5

1. Donner les variations sur]0, 1[de la fonction

$f : x \mapsto \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$.

2. En déduire celles de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2}{x^2 - x}$ sur]0, 1[.

3. Quel est le maximum de g sur]0, 1[?

Exercice 6

1. Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

2. a. Montrer que pour tout réel x, $|2x| \le x^2 + 1$.

b. Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x}{x^2+1}$

Exercice 7

1. Majorer et minorer sur [0, +∞[la fonction

$x \mapsto \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} - 2$.

2. Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction

$x \mapsto \dfrac{1}{1+(2+x)^2} + 1$.

3. Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction

$x \mapsto \dfrac{2}{1 + \dfrac{1}{2+x^2}}$.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit P, Q et R les trinômes définis par
$P(x) = 2x^2 - 5x - 3$; $Q(x) = -x^2 + 2x - 1$;
$R(x) = -2x^2 + x - 5$.

1. Déterminer les zéros éventuels de P, Q et R.
2. En déduire, pour chaque trinôme, la position relative de sa courbe représentative et de l'axe des abscisses.
3. Résoudre alors les inéquations $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \ge 0$; $\dfrac{R(x)}{Q(x)} < 0$.

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Tracer la représentation graphique d'une fonction f qui a les caractéristiques suivantes
- la fonction f est définie sur [– 4, 4],
- la fonction f est paire,
- f(0) = 1,

- la fonction f est majorée par 5 sur [– 4, 4],
- la fonction f est croissante sur [0, 1] et décroissante sur [1 , 4],
- la restriction de f à [–4, 0] admet un minimum égal à –3.

A-t-on une unique fonction qui vérifie ces conditions ?

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1. Tracer les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = |2x-1| - 3x$ et $g(x) = 2 - 2|x|$.

2. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$, l'inéquation

$|2x-1| + 2|x| > 3x + 2$.

Exercice 11

Soit f le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x$.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1. Tracer C_f.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 - 4|x|$.
a. Etudier la parité de g.
b. Vérifier que les restrictions de f et g à $[0, +\infty[$ sont égales.
c. Tracer alors C_g la courbe représentative de g.

Exercice 12

En utilisant des considérations sur la somme de fonctions, donner le sens de variation des fonctions suivantes.

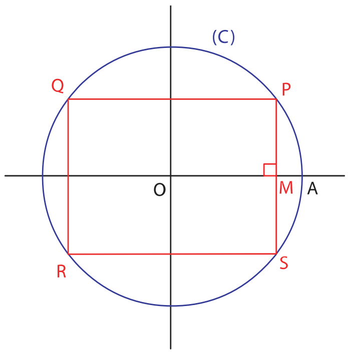
a. $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3 + \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

b. $g(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$.

c. $h(x) = 1 - x^2 - \sqrt{x+3}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 13

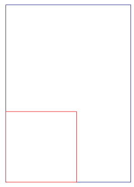
On considère la figure ci-dessous où (C) est un cercle de centre O et de rayon 1 et M est un point variable sur le segment [OA] distinct de O et de A. On note OM = x.



1. Exprimer l'aire S(x) du rectangle PQRS en fonction de x.
2. On désigne par S la fonction qui à x associe S(x).
a. Quel est l'ensemble de définition de S ?
b. Donner un majorant et un minorant de S.
3. a. Montrer que pour tout réel x, $4x^2 (1-x^2) \leq 1$.
b. En déduire que la fonction S est majorée par 2.
4. Pour quelle valeur de x, le quadrilatère PQRS est-il un carré ?
Montrer que la fonction S admet un maximum en cette valeur.

Exercice 14

Dans une feuille rectangulaire de dimension 21cm x 30cm on découpe un carré suivant le schéma ci-dessous.
Avec ce carré on réalise un cylindre de révolution.



1. Quelle est la longueur du côté du plus grand carré que l'on puisse obtenir ?
Calculer le volume du cylindre que ce carré permet de réaliser ?
2. On découpe un carré de côté x.
a. A quel intervalle appartient x ?
b. Exprimer le volume V(x) du cylindre obtenu en fonction de x.
c. Déterminer une valeur approchée de x à 1cm près pour laquelle on obtient un cylindre de volume 400 cm^3.

Exercice 15

1. Soit la fonction $f : t \mapsto -20t^2 + 880t + 100$.
a. Etudier le signe de f.
b. Etudier les variations de f.

Le comptable d'une entreprise, créée en janvier 1995, estime que les bénéfices annuels bruts de l'entreprise sont de $B(t) = \sqrt{-20t^2 + 880t + 100}$ en milliers de dinars, t années après sa création.
On note B la fonction qui modélise la situation.
2. Quel est l'ensemble de définition de B ?
3. Donner une estimation des bénéfices annuels bruts en janvier 2000 ?
4. a. A partir des variations de la fonction f, déterminer celles de la fonction B.
b. En quelle année A_m les bénéfices annuels bruts atteindront-ils leur valeur maximale ? Donner une estimation de ce maximum ?
c. Quelles prédictions peut-on faire pour l'entreprise après l'année A_m ?

Exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Tracer les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par
$f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ et $g(x) = 2x$.

2. Résoudre graphiquement sur $[0, +\infty[$, l'inéquation
$\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} \leq 2\sqrt{x}$.

Exercice 17

Soit f le trinôme défini par $f(x) = x^2 - 6x + 6$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Donner la forme canonique de f, c'est à dire trouver les réels a, b et c tels que pour tout réel x, $f(x) = a(x + b)^2 + c$.
2. Déterminer les variations de f.
3. Préciser par quelle transformation géométrique obtient-on la courbe C à partir de la parabole d'équation $y = x^2$.
4. Tracer la courbe C.
5. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, les inéquations $f(x) \leq 0$, $f(x) < 2$ et $f(x) \geq -4$.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par
$f(x) = \sqrt{x+2} - 3$.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Déterminer les variations de f.
2. Préciser par quelle transformation géométrique obtient-on la courbe C_f à partir de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$.
On considère la fonction h définie sur $[-2, +\infty[$ par $h(x) = -\sqrt{x+2} + 3$ et on désigne par C_h sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Préciser la position relative de C_f et C_h.
3. Tracer C_f et C_h.
4. Soit Q le demi-plan d'inéquation $y \geq 0$ et C la courbe $(C_f \cup C_h) \cap Q$.

a. Mettre en évidence C sur un second graphique.
b. De quelle fonction k, C est-elle la représentation graphique ?

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x différent de -3, $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$.
2. Déterminer les variations de f .
3. Tracer la courbe C.
4. Déterminer graphiquement le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\frac{x-1}{x+3} = x^2 - 4$.

Exercice 20

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Résoudre graphiquement le système

$$S : \begin{cases} y = \frac{3}{x}, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

Exercice 21

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Résoudre graphiquement l'inéquation
$\frac{x-1}{x-3} \leq 2$.

Exercice 22

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Résoudre graphiquement l'inéquation
$\sqrt{x-3} \leq x^2$.

CH1 : Généralités sur les fonctions

QCM :

1) c) f n'est ni paire, ni impaire

car : par exemple $3 \in D_f$ mais $(-3) \notin D_f$

2) b) (C_2) ne présente ni une fonction paire ni impaire car (C_2) est ni symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ni symétrique par rapport à O l'origine du repère.

3) c) f *est bornée sur* IR

car : * $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in IR$

$$* \ x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+4 \geq 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+4} \leq \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{x^2+4} \leq \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{2}$$

par suite : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in IR$

4) $f(x) = \sqrt{|4-2\,x|}$

c) $D_f = IR.$ car pour tout $x \in IR,$

on a $|4-2\,x| \geq 0$

5) c) $D_f = IR\backslash\{-1,1\}$

car : $1 - |x| = 0 \Leftrightarrow |x| = 1$

$$\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad ou \quad x = 1$$

Vrai - Faux :

1) Faux :

contre exemple : $f(x) = 1 + x^2$

2) Faux :

contre exemple : $f(x) = \frac{2}{x^2+4}, \in IR$,

$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ (voir QCM)

f est bornée sur IR mais f n'admet pas un minimum sur IR

3) Faux :

contre exemple : $f(x) = -x^2$, $D = IR$

on a , $f(x) \leq 0$ pour $tout\ x \in D$ et $f(0) = 0$

f admet un maximum en 0 mais f n'est pas minorée

4) Faux :

contre exemple : $f(x) = x^2$

f n'est pas bornée mais f est minorée par 0.

5) Faux :

contre exemple : $f(x) = \sqrt{x}$

$$1 \leq x \leq 3 \rightarrow 1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$$

f est bornée sur [1,3] mais f n'est pas majorée.

Mobiliser ses compétences :

$$f(x)=\sqrt{x+2} \qquad \text{pour } x \in]1,+\infty[$$
$$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{x-1}$$

1) Graphiquement $f(x) = g(x)$ pour

$x \approx 1{,}8$

2) a) si α est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ alors : $f(\alpha) = g(\alpha)$

$\Rightarrow \sqrt{\alpha+2} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha-1} \Rightarrow (\alpha-1)\sqrt{\alpha+2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow (\alpha-1)^2(\alpha+2) = 2$

d'où α est une solution de l'équation : $(x-1)^2(x+2) = 2$

b) $(x-1)^2(x+2) = 2$

équivaut à : $(x^2 - 2x + 1)(x+2) = 2$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = 2$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}$

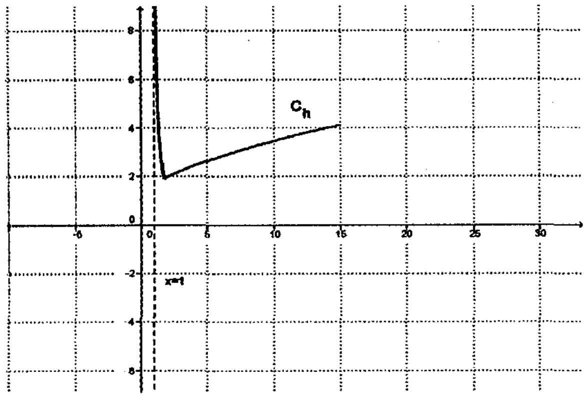
c) $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ x \in]1,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

3) ▪ $f(x) > g(x) \leftrightarrow x > \sqrt{3}$

▪ $f(x) < g(x) \leftrightarrow 1 < x < \sqrt{3}$

4)

$h(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x \in]1,\alpha] \\ f(x) & si\ x \in]1,+\infty[\end{cases}$



Exercices :

Ex ercice1 :

a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

• $D_f = IR$

• f est impaire car : pour tout x $D_f = IR$,

on a (-x) $\epsilon\, D_f$

et $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = \frac{-x}{1+x^2}$

$f(-x) = -f(x)$

b) $g(x) = \sqrt{x}$, $D_g = [0,+\infty[$

g n'est ni paire ni impaire

c) $h(x) = \sqrt{|x|}$

• $D_h = IR$

• h est paire car : pour tout $x \in D_h = IR$,

on a (-x) $\epsilon\, D_h$

et $h(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = h(x)$

d) $k(x) = x^2 - x + 1$

• $D_k = IR$

• k n'est ni paire ni impaire

par exemple k(1)=1 ; k(-1)=3

$k(-1) \neq -k(1)$

Exercice 2 :

1) *si f et g* sont des fonctions paires,

alors pour tout $x \in D$, on a $(-x)\epsilon\, D$

et *f(-x) = f(x) ; g(-x) = g(x)*

** (f . g) (-x) = f(-x).g(-x) = f(x).g(x) = (f.g)(x)*

f.g est paire

* $(a.f + b.g)(-x) = a.f(-x) + b.g(-x)$

$= a\,f(x) + b\,g(x) = (a\,f + b\,g)(x)$

$a\,f + b\,g$ est paire.

2) si f et g sont impaires

alors pour tout x D , on a (-x) $\epsilon\, D$

$et\ \ f(-x) = -f(x)\ ;\ g(-x) = -g(x)$

$$* \ (f\,.g)\,(-x) = f(-x).g(-x) \\ = (-f(x)).(-g(x)) \\ = f(x).g(x) = (f.g)(x)$$

$f.g$ est paire

$$* \ (a\,f + b\,g)(-x) = a\,f(-x) + b\,g(-x) \\ = -a\,f(x) - b\,g(x) \\ = -[a\,f(x) + b\,g(x)] \\ = -(a\,f + b\,g)(x)$$

$a\,f + b\,g$ est impaire.

Exercice 3 :

a) * pour $x \epsilon I = [-1,1]$ on a : $2 \leq f(x) \leq 3$

$f(1) \leq f(x) \leq f(-1)$

f admet 2 comme minimum en 1

f admet 3 comme maximum en (-1)

* $x \epsilon I = [-1,1]$, $g(x) = 2$

g admet un minimum et un maximum en tout réel x_0 de I

b) * pour tout $x \epsilon$ [1,3] ,on a : $2 \leq f(x) \leq 4$

$f(1) \leq f(x) \leq f(3)$

2 est un minimum de f *en* 1

4 est un maximum de f *en* 3.

* pour tout $x \epsilon$ [1,3] ,on a : $-1 \leq g(x) \leq 2$

$g(3) \leq g(x) \leq g(1)$

(-1) est un minimum de g en 3

2 est un maximum de g en 1

c) * pour $\epsilon\,[-2,4]$, on a : $0 \leq f(x) \leq 4$

$$f(-2) \leq f(x) \leq f(3)$$

0 est un minimum de f en (-2)

4 est un maximum de f en 3

* pour $\epsilon\,[-2,4]$, on a : $-1 \leq g(x) \leq 3$

$$g(3) \leq g(x) \leq g(-2)$$

g admet (-1) comme minimum en 3

g admet 3 comme maximum en (-2)

Exercice 4 :

1) a) $f(x) = 1 + |x| + 2x^2$

pour tout réel x, on a : $|x| + 2x^2 \geq 0$

$\Rightarrow 1 + |x| + 2x^2 \geq 1$

$\Rightarrow f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$

f admet 1 comme minimum en 0.

b) $g(x) = |x + 1| - 4$

pour tout réel x, on a : $|x + 1| \geq 0$

$\Rightarrow |x + 1| - 4 \geq -4 \Rightarrow g(x) \geq -4$

$\Rightarrow g(x) \geq g(-1)$

g admet -4 comme minimum en (-1).

2) a) $h(x) = \frac{1}{|x|+3} + 1$

pour tout réel x, on a : $|x| \geq 0$

$\Rightarrow |x| + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{|x|+3} \leq \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{|x|+3} + 1 \leq \frac{4}{3} \Rightarrow h(x) \leq \frac{4}{3}$

$\Rightarrow h(x) \leq h(0)$

f admet $\frac{4}{3}$ comme maximum en 0.

b) $k(x) = \frac{2}{1+x^2} - 3$

pour tout réel x, on a : $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{2}{1+x^2} \leq 2$

$\Rightarrow \frac{2}{1+x^2} - 3 \leq -1$

$\Rightarrow k(x) \leq -1 \Rightarrow k(x) \leq k(0)$

k admet (-1) comme maximum en 0.

Exercice 5 :

1) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

1) * soit : a et b deux réels de $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

$a \leq b \Rightarrow a - \frac{1}{2} \leq b - \frac{1}{2} \leq 0$

$\Rightarrow (a - \frac{1}{2})^2 \geq (b - \frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow (a - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq (b - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(a) \geq f(b)$

f est décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

* soit : a et b deux réels de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$

$a \leq b \Rightarrow 0 \leq a - \frac{1}{2} \leq b - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (a - \frac{1}{2})^2 \leq (b - \frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow (a - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \leq (b - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(a) \leq f(b)$

f est croissante sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

2) $g(x)=\dfrac{2}{f(x)}$

* soit : a et b deux réels de $\left]0,\frac{1}{2}\right]$

$a \leq b \Rightarrow 0 > f(a) \geq f(b)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(a)} \leq \dfrac{1}{f(b)} \Rightarrow \dfrac{2}{f(a)} \leq \dfrac{2}{f(b)}$

$\Rightarrow g(a) \leq g(b)$

g est croissante sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

* soit : a et b deux réels de $\left[\frac{1}{2},1\right[$

$a \leq b \Rightarrow 0 < f(a) \leq f(b)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(a)} \geq \dfrac{1}{f(b)} \Rightarrow \dfrac{2}{f(a)} \geq \dfrac{2}{f(b)}$

$\Rightarrow g(a) \geq g(b)$

g est décroissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$.

3) pour $\epsilon\,]0,1[$, on a:

$(x-\frac{1}{2})^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 0 > f(x) \geq -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} \leq -4 \Rightarrow \frac{2}{f(x)} \leq -8$

$\Rightarrow g(x) \leq -8$

$\Rightarrow g(x) \leq g\left(\frac{1}{2}\right)$

g admet -8 comme maximum en $\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 6 :

1) $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in IR$

* pour tout $\epsilon\, IR$, on a: $g(x) \geq 0$

* $x^2+1 \geq x^2 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} \leq 1$

$\Rightarrow g(x) \leq 1$

conclusion : $0 \leq g(x) \leq 1$ pour tout $x \in IR$

2) a) pour $x \in IR$,

$(x^2-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0$

$\Rightarrow x^4 + 2x^2 + 1 \geq 4x^2$

$\Rightarrow (x^2+1)^2 \geq (2x)^2$

$\Rightarrow \sqrt{(x^2+1)^2} \geq \sqrt{(2x)^2}$

$\Rightarrow |x^2+1| \geq |2x|$

d'ou $x^2+1 \geq 2|x|$ car $x^2+1 \geq 0$

b) * $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2+1}$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1}$$

on a : $|2x| \leq x^2+1 \Rightarrow -2x \leq x^2+1$

$\Rightarrow \frac{-2x}{1+x^2} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} \leq \frac{x^2}{x^2+1} + 1$

$\Rightarrow f(x) \leq g(x) + 1$ or $g(x) \leq 1$

pour $x \in IR$

donc : $\boxed{f(x) \leq 2}$ pour tout $x \in IR$

* $f(x) = g(x) - \frac{2x}{x^2+1}$

$g(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) - \frac{2x}{x^2+1} \geq -\frac{2x}{x^2+1}$

$\Rightarrow f(x) \geq -\frac{2x}{x^2+1}$

d'après a) pour tout $x \in IR$: $2x \le x^2+1$

$\Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} \le 1 \Rightarrow \frac{-2x}{x^2+1} \ge -1$

D'où $\boxed{f(x) \ge -1}$

Conclusion :

$-1 \le f(x) \le 2$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

Exercice7 :

1) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} - 2 \qquad x \in [0,+\infty[$

$*\ x \in [0,+\infty[$

$\sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow 1+\sqrt{x} \ge 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}} \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}} - 2 \le -1$$

D'où $\boxed{f(x) \le -1}$

On a : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} \ge 0$

D'où $\frac{1}{1+\sqrt{x}} - 2 \ge -2$

Par suite $f(x) \ge -2$

Conclusion : pour tout $x \in [0,+\infty[$

On a : $-2 \le f(x) \le -1$

2) $g(x) = \frac{1}{1+(2+x)^2} + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

$(2+x)^2 \ge 0 \Rightarrow 1+(2+x)^2 \ge 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+(2+x)^2} \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+(2+x)^2} + 1 \le 2$$

$\Rightarrow \boxed{g(x) \le 2}$

pour $x \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\frac{1}{1+(2+x)^2} \ge 0$$

d'où $\frac{1}{1+(2+x)^2} + 1 \ge 1$

par suite $g(x) \ge 1$

Conclusion :

$1 \le g(x) \le 2$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

3°) $h(x) = \dfrac{2}{1+\frac{1}{2+x^2}}$

pour tout réel x on a :

$$\frac{1}{2+x^2} \ge 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2+x^2} \ge 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{2+x^2}} \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1+\frac{1}{2+x^2}} \le 2$$

d'où $\boxed{h(x) \le 2}$

$$2+x^2 \ge 2 \Rightarrow \frac{1}{2+x^2} \le \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2+x^2} \le \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{2+x^2}} \ge \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1+\frac{1}{2+x^2}} \ge \frac{4}{3}$$

d'où $h(x) \ge \frac{4}{3}$

Conclusion :

$\frac{4}{3} \leq h(x) \leq 2$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$(2+x)^2 \geq 0 \Longrightarrow (2+x)^2 \geq 1$

Exercice8 :

1°) * $P(x) = 0 \iff 2x^2 - 5x - 3 = 0$

$\Delta = 49$

$$x' = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x'' = \frac{5+7}{4} = 3$$

* $Q(x) = 0 \leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0$

$\leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

$\leftrightarrow x - 1 = 0 \leftrightarrow x = 1$

* $R(x) = 0 \leftrightarrow -2x^2 + x - 5 = 0$

$\leftrightarrow 2x^2 - x + 5 = 0$

$\Delta = -39 < 0$

R n'admet pas de zéro.

2) a)

x	$-\infty$		$-1/2$		3		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

* *pour* $x \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right]$

(C_P)*est au dessous de l'axedes abscisses*

*pour $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]3, +\infty[$

(C_P)*est au dessus de* (ox)

b) $Q(x) = -(x-1)^2 \leq 0$, d'ou
(C_Q)*est au dessous de l'axedes abscisses*

c) $(x) = -2x^2 + x - 5$; $\Delta = -39 < 0$

donc $R(x) < 0$, pour tout $x \in IR$

(C_R)*est au dessous de l'axedes abscisses*

3) a) $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$

$$S_{IR} = \left[\frac{-1}{2}, 3\right] \setminus \{1\}$$

b) $\frac{R(x)}{Q(x)} < 0$

$S_{IR} = \emptyset$

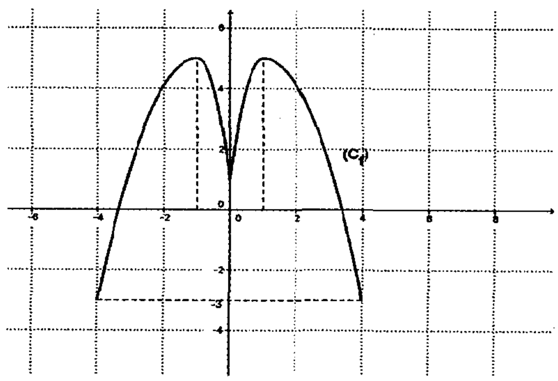
Exercice9 :

f décroissante sur $[1,4]$
f croissante sur $[0,1]$

(C_f) est symétrique par rapport à (Oy)

$f(0) = 1$; $f(x) \leq 5$ pour tout $x \in [-4,4]$
-3 est au minimum de f *sur* $[-4,0]$

par exemple:



* il ya plusieurs.

Exercice10 :

1) *a*) $f(x) = |2x - 1| - 3x$

$2x - 1 = 0 \; (=) \; x = \frac{1}{2}$

$pour\ tout\ x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

$f(x) = -(2x-1) - 3x = 1 - 5x$

$pour\ x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$f(x) = (2x-1) - 3x = -x - 1$

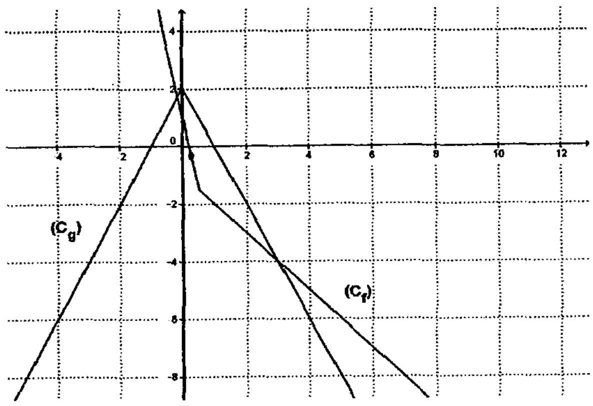
$$f(x) = \begin{cases} -5x + 1\ si\ x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \\ -x - 1\ si\ x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\end{cases}$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

b) $g(x) = 2 - 2|x|$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 2\ si\ x \leq 0 \\ -2x + 2\ si\ x \geq 0 \end{cases}$$

g est paire



2)

$|2x-1| + 2|x| > 3x + 2$

$\Leftrightarrow\ |2x-1| - 3x > 2 - 2|x|$

$\Leftrightarrow\ f(x) > g(x)$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty\ ;\ -0{,}2[\cup]3, +\infty[$

Exercice11 :

$f(x) = 2x^2 - 4x$

1) (C_f) est une parabole de sommet $S(1,-2)$ $d'axe\ \Delta: x = 1$

2°) $g(x) = 2x^2 - 4.|x|$

a) $pour\ x \in D_g = \mathbb{R}$
$on\ a : (-x) \in D_g$

et $g(-x) = 2(-x)^2 - 4|-x|$

$= 2x^2 - 4|x| = g(x)$

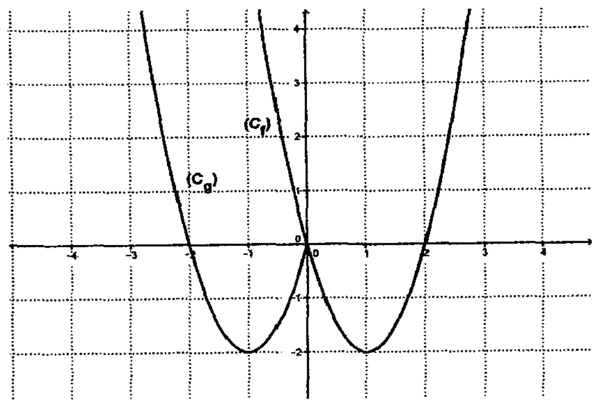
g *est une fonction paire*

b) $pour\ x \in [0, +\infty[$

$g(x) = 2x^2 - 4x = f(x)$

c) Voir figure

la droite des ordonnées est un axe de symétriepour (C_g)



Exercice12 :

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{1}{x}$

$I =]0, +\infty[$

$Soit\ f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

$f_2(x) = \frac{1}{x}$

$f = f_1 + f_2$

pour a et b $\in]0,+\infty[$

$a \leq b \Longrightarrow -\frac{1}{2}a \geq -\frac{1}{2}b$

$\Longrightarrow -\frac{1}{2}a + 3 \geq -\frac{1}{2}b + 3$

$\Longrightarrow f_1(a) \geq f_2(b)$

$0 < a \leq b \Longrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

$\Longrightarrow f_2(a) \geq f_2(b)$

par suite :

$f_1(a) + f_2(a) \geq \ f_1(b) + f_2(b)$

$\Longrightarrow f(a) \geq f(b)$

donc f est décroissante sur $]0,+\infty[$

b) $g = g_1 + g_2$

avec $g_1(x) = x^2 + 1$

$g_2(x) = \sqrt{x}$

Soient a et b $\in]0,+\infty[$

$0 < a \leq b \Longrightarrow a^2 \leq b^2$

$\Longrightarrow a^2 + 1 \leq b^2 + 1$

$\Longrightarrow g_1(a) \leq g_1(b)$

$0 < a \leq b \quad \Longrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

$\Longrightarrow g_2(a) \leq g_2(b)$

Par suite $g_1(a) + g_2(a) \leq g_1(b) + g_2(b)$

$\Longrightarrow g(a) \leq g(b)$

donc g est croissante sur $]0,+\infty[$

c) $h = h_1 + h_2$

avec $h_1(x) = 1 - x^2$

$h_2(x) = -\sqrt{x+3}$

Soient a et b $\in]0,+\infty[$

$0 < a \leq b \Longrightarrow a^2 \leq b^2$

$\Longrightarrow -b^2 \leq -a^2$

$\Longrightarrow 1 - b^2 \leq 1 - a^2$

$\Longrightarrow h_1(b) \leq h_1(a)$

$0 < a \leq b \Longrightarrow a + 3 \leq b + 3$

$\Longrightarrow \sqrt{a+3} \leq \sqrt{b+3}$

$\Longrightarrow -\sqrt{b+3} \leq -\sqrt{a^2+3}$

$\Longrightarrow h_2(b) \leq h_2(a)$

Par suite : $h_1(a) + h_2(a) \geq h_1(b) + h_2(b)$

$\Longrightarrow h(a) \geq h(b)$

donc h est décroissante sur $]0,+\infty[$

Exercice 13 :

1) $S(x) = PS \times PQ$

$\boxed{PQ = 2OM = 2x}$

Le triangle OMP est rectangle en M donc

$OM^2 + PM^2 = OP^2$

$\Longrightarrow x^2 + PM^2 = 1^2$

$\Longrightarrow PM = \sqrt{1 - x^2}$

$PS = 2PM$

$\boxed{PS = 2\sqrt{1 - x^2}}$

Par suite $S(x) = 4x.\sqrt{1 - x^2}$

2) $S(x) = 4x.\sqrt{1 - x^2}$

a) $D_S = [0,1]$ *car* $M \in [OA]$

b) $S(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [0,1]$

$S(x)$ *est inférieure à l'aire du disque de centre O*

de rayon 1 d'où : $S(x) \leq \pi \times 1^2$

$S(x) \leq \pi$

par suite : $0 \leq S(x) \leq \pi$

3) a) *soit* $x \in \mathbb{R}$, *on a* : $(2x^2-1)^2 \geq 0$

$\Rightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x^4 \leq 1$

$\Rightarrow 4x^2(1-x^2) \leq 1$

b) $S(x) = 4x\sqrt{1-x^2}$ *avec* $x \in [0,1]$

pour $x \in [0,1]$ *on a* : $0 \leq 4x^2(1-x^2) \leq 1$

d'où $0 \leq \sqrt{4x^2(1-x^2)} \leq \sqrt{1}$

$\Rightarrow 0 \leq 2|x|.\sqrt{1-x^2} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1$

$\Rightarrow 4x\sqrt{1-x^2} \leq 2$

$\Rightarrow \boxed{S(x) \leq 2}$

4) a) *PQRS est un carré lorsque* $PQ = PS$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{1-x^2}$ *et* $x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2$ *avec* $x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 1$ *et* $x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$ *et* $x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) *pour* $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$S(x) = 2$ *et comme* $S(x) \leq 2$

donc S admet 2 comme maximum en $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 14 :

1) La longueur du côté du plus grand carré est 21*cm*

Soit R: *le rayon d'un cercle de périmetre* 21*cm*

On a : $2\pi R = 21$ d'où $\boxed{R = \frac{21}{2\pi}}$

$V = \pi R^2 h$

$V = \pi(\left(\frac{21}{2\pi}\right)^2 \times 21$

$V = \frac{21^3}{4\pi} = \frac{9261}{4\pi}$

$\boxed{V = \frac{9261}{4\pi} cm^3}$

2) a) $x \in]0,21]$

b) $V = \frac{x^3}{4\pi} cm^3$

c) $V = 400 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^3}{4\pi} = 400$

$\Leftrightarrow \quad x^3 = 1600\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = 17,127$

$\boxed{x \approx 17cm}$

Exercice15 :

1) $f(t) = -20t^2 + 880t + 100$

a) $-20t^2 + 880t + 100 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -t^2 + 44t + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \quad t^2 - 44t - 5 = 0$

$\Delta' = 489$

$t' = 22 - \sqrt{489}$ et $t'' = 22 + \sqrt{489}$

t	$-\infty$		$22-\sqrt{489}$		$22+\sqrt{489}$		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $f(t) = -20.[t^2 - 44t - 5]$

$f(t) = -20[(t-22)^2 - 22^2 - 5]$

d'où $f(t) = -20.[(t-22)^2 - 489]$

Soient a et b $\in]-\infty, 22]$

$a \le b \le 22 \Longrightarrow a - 22 \le b - 22 \le 0$

$\Longrightarrow (a-22)^2 \ge (b-22)^2$

$\Longrightarrow (a-22)^2 - 489 \ge (b-22)^2 - 489$

$\Rightarrow -20[(a-22)^2 - 489] \le -20[(b-22)^2 - 489]$

$\Rightarrow f(a) \le f(b)$

donc f est croissante sur $]-\infty, 22]$

pour a et b $\in [22, +\infty[$

$22 \le a \le b \Longrightarrow 0 \le a - 22 \le b - 22$

$\Longrightarrow (a-22)^2 \le (b-22)^2$

$\Longrightarrow (a-22)^2 - 489 \le (b-22)^2 - 489$

$\Rightarrow -20[(a-22)^2 - 489] \ge -20[(b-22)^2 - 489]$

$\Rightarrow \quad f(a) \ge f(b)$

donc f est décroissante sur $[22, +\infty[$

2) $D_B = \left[0, 22 + \sqrt{489}\right]$ *d'après* 1)*a*)

3) $2000 \longrightarrow t = 5$

$B(5) = \sqrt{4000} = 63{,}24$ *milles dinars*

4) a) $B(t) = \sqrt{f(t)}$

f est croissante sur$[0, 22]$

donc B est croissante sur$[0, 22]$

f est décroissante sur$\left[22, 22 + \sqrt{489}\right]$

donc B est décroissante sur

$\left[22, 22 + \sqrt{489}\right]$

b) $B(t)$*est maximal pour* $t = 22 \longrightarrow$ année 2017

$Am = 2017$

$B(22) = \sqrt{9780}$

$B(22) = 98{,}89$ *milles dinars*

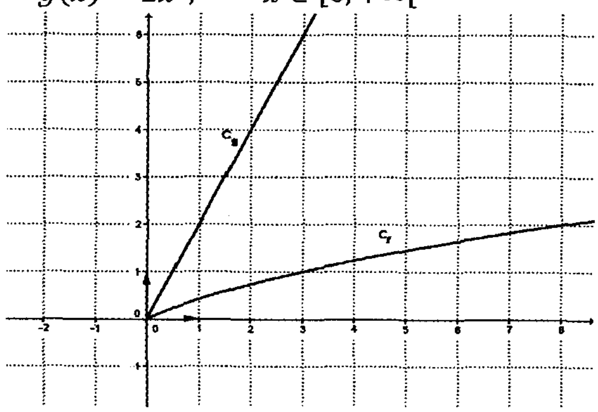
c) après l'année A_m les bénéfices annuels bruts de l'entreprise commencent à décroître .

On prévoit donc que l'entreprise commence à affronter des difficultés et finira par fermer ses portes.

Exercice 16 :

1) $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$

$g(x) = 2x \;, \qquad x \in [0, +\infty[$



2) $\begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} \le 2\sqrt{x} \\ x \in [0, +\infty[\end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{x+1} - 1 \le 2x \\ x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \le g(x) \\ x > 0 \end{cases}$

$S =]0, +\infty[$ *car* (C_f) *est au dessous de* (C_g)

Exercice 17 :

$f(x) = x^2 - 6x + 6$

1) $f(x) = (x-3)^2 - 9 + 6$

$f(x) = (x-3)^2 - 3$

2) *Soient a et b* $\in]-\infty, 3]$

$a \le b \le 3 \Rightarrow a - 3 \le b - 3 \le 0$

$\Rightarrow (a-3)^2 \ge (b-3)^2$

$\Rightarrow (a-3)^2 - 3 \ge (b-3)^2 - 3$

$\Rightarrow f(a) \ge f(b)$

f *est décroissante sur* $]-\infty, 3]$

pour a *et* $b \in [3, +\infty[$

$3 \leq a \leq b \Longrightarrow 0 \leq a - 3 \leq b - 3$

$\Longrightarrow (a-3)^2 \leq (b-3)^2$

$\Longrightarrow (a-3)^2 - 3 \leq (b-3)^2 - 3$

$\Longrightarrow f(a) \leq f(b)$

f *est croissante sur* $]3, +\infty]$

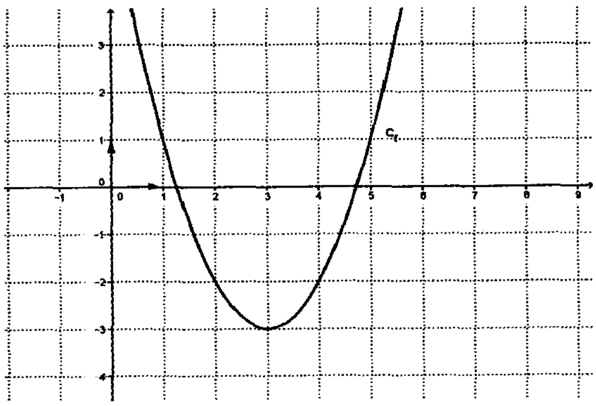
3) $(P): y = x^2$

(C) *est l'image de* (P) *par la translation*

de vecteur $\vec{u} = 3.\vec{\imath} - 3.\vec{\jmath}$

4) (C) *est la parabole de sommet* $S(3, -3)$

d'axe $\Delta: x = 3$



5) a) graphiquement $f(x) \leq 0$ *pour*

$x \in [\ 1{,}3\ ;\ 4{,}7\ ]$

Calculs :

$f(x) = 0 \iff x^2 - 6x + 6 = 0$

$\Delta = 36 - 24 = 12$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$

$x' = \frac{6-2\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3}$; $x'' = 3 + \sqrt{3}$

x	$-\infty$		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x) \leq 0 \iff x \in [3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$

b) Graphiquement :

On trace la droite d'équation $y = 2$

$f(x) < 2$ *pour* $x \in]0{,}8\ ; 5{,}2[$

Calculs :

$f(x) < 2 \iff (x-3)^2 - 3 < 2$

$\iff (x-3)^2 < 5$

$\iff |x - 3| < \sqrt{5}$

$\iff -\sqrt{5} < x - 3 < \sqrt{5}$

$\iff 3 - \sqrt{5} < x < 3 + \sqrt{5}$

$S_{\mathbb{R}} =]3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}[$

c) Graphiquement :

$f(x) \geq -4$

$S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ *car la droite d'équation* $y = -4$

est au dessous de (C)

Calculs :

$f(x) \geq -4 \iff x^2 - 6x + 6 \geq -4$

$\iff x^2 - 6x + 10 \geq 0$

$\Delta = -4 < 0$

Le signe de $(x^2 - 6x + 10)$ *est celui*

de $a = 1$

donc $x^2 - 6x + 10 > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

Exercice 18 :

$f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

$D_f = [-2, +\infty[$

1) Soient a et b $\in [-2, +\infty[$

$-2 \leq a \leq b \Longrightarrow 0 \leq a+2 \leq b+2$

$\Longrightarrow \sqrt{a+2} \leq \sqrt{b+2}$

$\Longrightarrow \sqrt{a+2} - 3 \leq \sqrt{b+2} - 3$

$\Longrightarrow f(a) \leq f(b)$

f est croissante sur $[-2, +\infty[$

2) $(H): y = \sqrt{x}$

$g(x) = \sqrt{x}$ *pour* $x \in [-2, +\infty[$

$f(x) = g(x+2) - 3$

donc $(\mathcal{C}_f)$ est l'image de (H) par la

translation de vecteur $\vec{u} = -2.\vec{\imath} - 3.\vec{\jmath}$

2') $h(x) = -\sqrt{x+2} + 3$

$h(x) = -f(x)$

$f(x) \geq h(x) \Leftrightarrow$

$\sqrt{x+2} - 3 \geq -\sqrt{x+2} + 3 \Leftrightarrow$

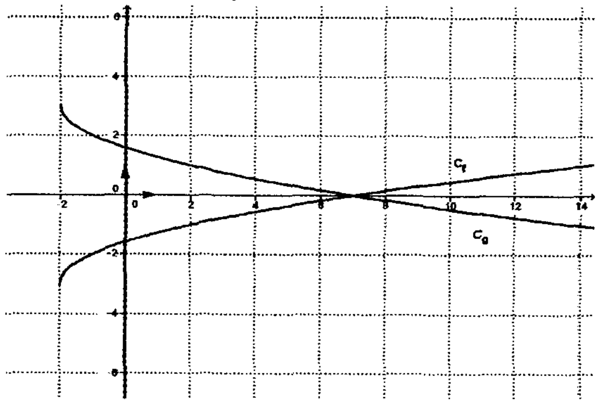
$2\sqrt{x+2} \geq 6 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \geq 3 \Leftrightarrow$

$x + 2 \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 7$

* C_f est au dessous de C_g pour $x \in [-2,7]$

*C_f est au dessus de C_g pour $x \in [7, +\infty[$

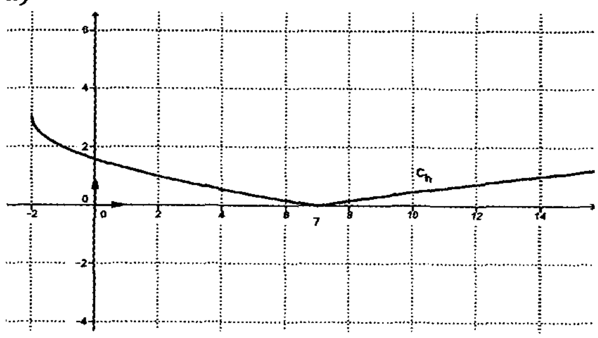
3) $(\mathcal{C}_h) = S_{(ox)}(\mathcal{C}_f)$



4) $(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_f \cup \mathcal{C}_h) \cap Q$

$Q: y \geq 0$

a)



b) $k(x) = |h(x)| = |f(x)|$

$k(x) = |\sqrt{x+2} - 3|$

Exercice 19 :

$f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

$D_f = \mathbb{R} \backslash \{-3\}$

1) $f(x) = \frac{(x+3)-4}{x+3}$

$f(x) = \frac{x+3}{x+3} - \frac{4}{x+3}$

$f(x) = 1 - \frac{4}{x+3}$

pour $x \neq -3$ $f(x) = \frac{-4}{x+3} + 1$

$(a = -4\ ;\ b = 3\ ;\ c = 1)$

2°) Soient a et b $\in]-\infty, -3[$

$a \leq b \Longrightarrow a + 3 \leq b + 3 \leq 0$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{a+3} \geq \dfrac{1}{b+3}$

$\Longrightarrow \dfrac{-4}{a+3} \leq \dfrac{-4}{b+3}$

$\Longrightarrow \dfrac{-4}{a+3} + 1 \leq \dfrac{-4}{b+3} + 1$

$\Longrightarrow f(a) \leq f(b)$

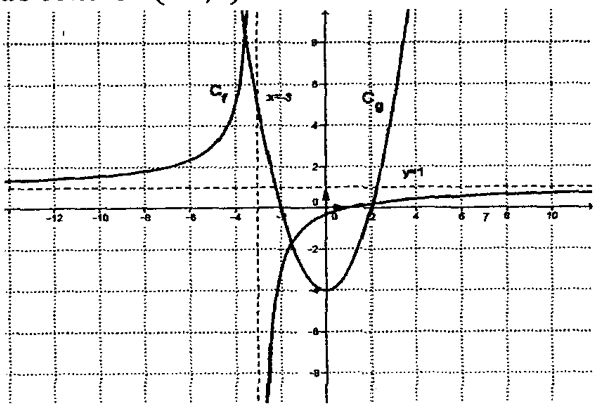
donc f est croissante sur $]-\infty, -3[$

de même f est croissante sur $]-3, +\infty[$

3)

(C) est une hyperbole d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = -3$ *et* $y = 1$

de centre $r(-3,1)$



4) $\frac{x-1}{x+3} = x^2 - 4 \Leftrightarrow$

$f(x) = g(x)$ avec $g(x) = x^2 - 4$

Soit $(\mathcal{C}_g)$ *la parbole d'équation* $y = x^2 - 4$

$(\mathcal{C}_g)$ *est de sommet* $S(0, -4)$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \approx -1{,}7$ *ou* $x \approx 2{,}1$

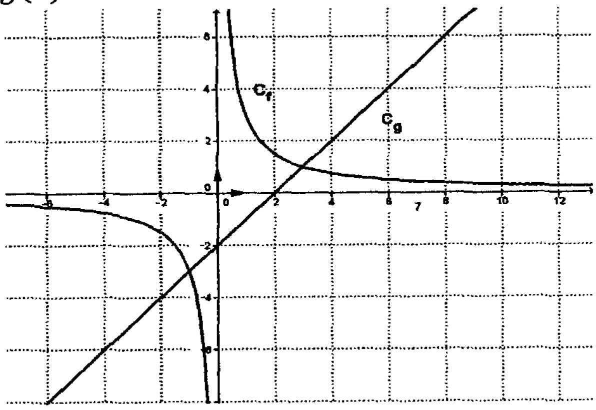
Exercice20 :

Soit (H) l'hyperbole d'éq : $y = {}^{3}/_{x}$

$f(x) = {}^{3}/_{x}$

Δ: *la droite d'éq :* $y = x - 2$

$g(x) = x - 2$



$(H) \cap \Delta = \{A(-1,-3)\ ; B(3,1)\}$

$S_{IR^2} = \{(-1,-3)\ ;\ (3,1)\}$

Exercice21 :

pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$, on pose

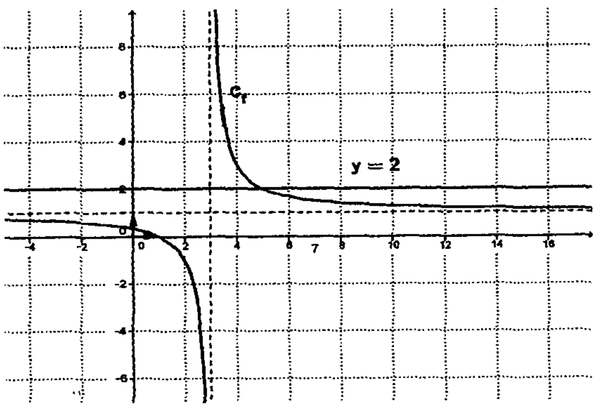
$$f(x) = \frac{x-1}{x-3}$$

$$f(x) = \frac{(x-3)+2}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{2}{x-3}$$

$$= 1 + \frac{2}{x-3}$$

$(\mathcal{C}_f)$ *est l'hyperbole centre* $\omega(3,1)$

d'asymptotes $x = 3$ *et* $y = 1$

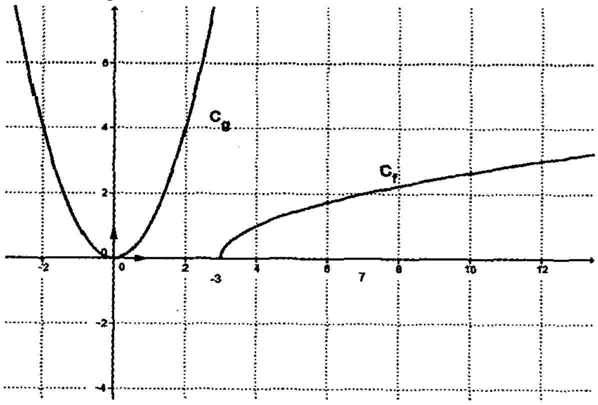


$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 3[\cup [5, +\infty[$

Exercice22 :

$f(x) = \sqrt{x-3}\ ;\ \ g(x) = x^2$

$f(x) \leq g(x)$



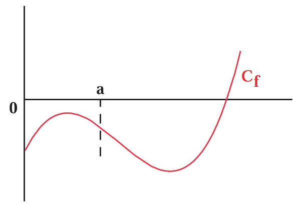
$(\mathcal{C}_f)$*est au dessous de* $(\mathcal{C}_g)\ ;\ \ S_{\mathbb{R}} = [3, +\infty[$

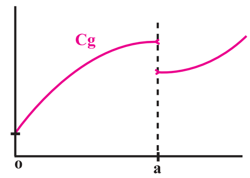
QCM – VRAI – FAUX

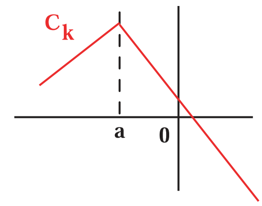
QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, C_f, C_g et C_k sont les courbes représentatives de trois fonctions f, g et k.





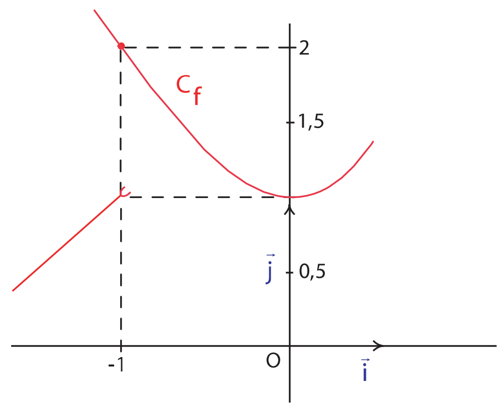


Une seulement parmi ces fonctions est discontinue en a, laquelle ?

☐ f ☐ g ☐ h.

2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ est continue en

☐ 0 ☐ -2 ☐ $-\dfrac{1}{2}$.



3. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, C_f est la courbe représentative de la fonction f. Alors f est continue

☐ en -1 ☐ à droite en -1 ☐ à gauche en -1.

4. L'équation $4\sqrt{x+1} - x^2 - 3 = 0$ possède une solution dans

☐ $[0, 1]$ ☐ $[-1, 0]$ ☐ $[2, 3]$.

5. La fonction $E : x \mapsto E(x)$ est continue sur

☐ $[1, 2[$ ☐ $[1, 2]$ ☐ $]1, 2]$.

VRAI – FAUX

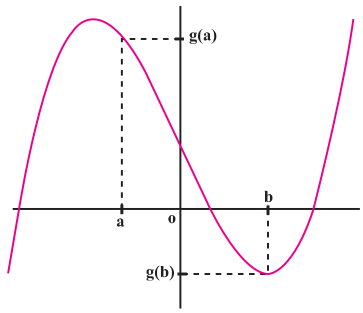
Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f est continue en a, alors f est continue à droite en a.
2. Si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas continue à droite en a.
3. Si f n'est pas continue à gauche en a, alors f n'est pas continue à droite en a.
4. f n'est pas continue en a, si et seulement si, f n'est pas continue à droite en a ou à gauche en a.
5. Si $|f|$ est continue en a alors f est continue en a.

Mobiliser ses compétences

Situation 1

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a représenté ci-contre la courbe représentative d'une fonction g définie sur un intervalle ouvert.



1. Soit un réel a tel que la fonction g est continue en a et $g(a) > 0$.
   a. Représenter l'ensemble des points $M(x, g(x))$ tels que $\frac{1}{2}g(a) < g(x) < \frac{3}{2}g(a)$.
   b. Montrer qu'il existe un intervalle $]a-h, a+h[$ tel que
   pour tout $x \in \,]a-h, a+h[$, on a $g(x) \in \left]\frac{1}{2}g(a), \frac{3}{2}g(a)\right[$.
   c. En déduire que la fonction g reste strictement positive sur cet intervalle.
2. Soit un réel b tel que la fonction g est continue en b et $g(b) < 0$.
   Montrer qu' il existe un intervalle $]b-h, b+h[$ sur lequel g reste strictement négative.

Situation 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - 10x^2 - 8x + 10$.

1. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans chacun des intervalles $[-2, -1]$, $[0, 1]$ et $[2, 3]$.
   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement trois solutions distinctes.
2. Soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
   On se propose de donner encadrement plus précis de α.
   a. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   b. Calculer $f\left(\frac{3}{4}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$.
   c. Calculer $f\left(\frac{7}{8}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$.
   d. Calculer $f\left(\frac{13}{16}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{3}{4}, \frac{13}{16}\right]$.
   e. Calculer $f\left(\frac{25}{32}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{25}{32}, \frac{13}{16}\right]$.
3. Soit β la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-2, -1]$.
   Déterminer un intervalle de longueur 0.04 contenant β.
4. Soit λ la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[2, 3]$.
   Déterminer un intervalle de longueur 0.04 contenant λ.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a.

$f(x)=\sqrt{3}x^8-\sqrt{2}x^3+3x+1$; $a=-\sqrt{3}$.

$f(x)=\dfrac{2x^5-2x+1}{x^3-x+1}$; $a=0.2$.

$f(x)=\sqrt{6}(2x-5)^3$; $a=-2.8$.

$f(x)=2x^4-3x(x+1)+5x^5-4$; $a=-\sqrt{3}$.

$f(x)=\dfrac{x}{10^2}-10x^4+\sqrt{3}x-1$; $a=-1000500$.

$f(x)=\dfrac{-10^{-3}x^4+2}{3x+10}$; $a=-\dfrac{1}{2}$.

$f(x)=\dfrac{x-5}{x^4+10x^2+3}$; $a=-0.000251$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a.

$f(x)=\dfrac{-|x|+5}{(x-10)^4}$; $a=201$.

$f(x)=\left|\dfrac{x^2-8}{2x+1}\right|$; $a=2$.

$f(x)=\dfrac{|x-1||x+2|}{x-2}$; $a=51$.

$f(x)=\dfrac{|x|}{4}-|x|^3-5|x^5|$; $a=11$.

$f(x)=\dfrac{|x|^3+2}{|x|-2}$; $a=-5$.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a.

$f(x)=\sqrt{3x+5}$; $a=\dfrac{2}{3}$.

$f(x)=\sqrt{-2x+3}$; $a=0.01$.

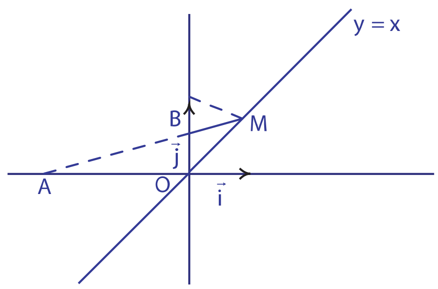
$f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$; $a=1.25$.

$f(x)=(x-4)\sqrt{2x^2+3x+5}$; $a=10$.

$f(x)=\sqrt{x^2+3}-5\dfrac{x^2+2x+2}{x^4+5x+3}$; $a=-1$.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans la figure ci-dessous, les points A(–2, 0) et B(0, 1) sont fixés et le point M d'abscisse x, varie sur la droite d'équation y = x.



Soit la fonction $f : x \mapsto AM+BM$.

1. Donner l'expression de f(x).
2. Justifier que f est continue en tout réel .
3. Déterminer x, pour que le trajet AM+BM soit minimal.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4} & \text{si } x\geq 2,\\ x & \text{si } x<2.\end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Justifier la continuité de la fonction f sur $[2, +\infty[$.
3. Justifier la continuité de la fonction f sur $]-\infty, 2[$.
4. Vérifier, à l'aide du graphique, que la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x>0,\\ -1 & \text{si } x\leq 0.\end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Justifier la continuité de la fonction f sur $]0, +\infty[$.
3. Justifier la continuité de la fonction f sur $]-\infty, 0[$.

4. Vérifier, à l'aide du graphique, que la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
5. Pour chacune des équations ci-dessous, déterminer, à l'aide du graphique, le nombre de solutions de l'équation.

$f(x)=1 \quad ; \quad f(x)=\frac{2}{5} \quad ; \quad f(x)=-\frac{1}{2} \quad ; \quad f(x)=0.$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que
- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$,
- f est impaire,
- $f(x) = -x^2 + 3$ si $x \geq 2$,
- la restriction de f à $]-2, 0[$ est une fonction affine.

1. Représenter la fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Donner l'expression de f(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{2x-|x+1|}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 9

Soit f le trinôme défini par $f(x)=\frac{1}{2}x^2+5$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Tracer la courbe C.
2. Quelles sont les images par f de 2 ; -2 ; 0 ;
$\sqrt{3}$ et $-\sqrt{2}$?
3. Quelles sont les images par f des intervalles
$I = [1, 3]$, $J =]-2, 2[$ et $K =]-\infty, 0]$?
4. Quels sont les antécédents éventuels par f de 0, 7 et 9 ?
5. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle [7, 13].

Exercice 10

Soit f le trinôme défini par $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Tracer la courbe C.
2. Quelles sont les images par f des intervalles
$I = [2, 3]$, $J = [0, 3]$ et $K = [0, +\infty[$?
3. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[-2, 6]$.

Exercice 11

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x+3}-2$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Tracer la courbe C.
3. Quelles sont les images par f des intervalles
$I = [2, 3]$, $J = [0, 5]$ et $K =]-1, +\infty[$.
4. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[-1, +\infty[$.

Exercice 12

Soit $f : x \mapsto -\dfrac{2}{x-1}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Tracer la courbe C.
3. Quelles sont les images par f des intervalles
$I = [2, 4]$, $J = [-1, 0]$ et $K =]-\infty, -3[$?
4. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $]-\infty, 0[$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Quelles sont les images par f des intervalles
$I = [1, 3]$, $J = [2, 5]$ et $K =]-6, -1]$?

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x$.
1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Quelles sont les images par f des intervalles
$I = [2, 3]$, $J = [-5, -3]$ et $K =]3, 4]$?

Exercice 15

Soit $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x+\sqrt{2x-1}$.
1.Déterminer l'ensemble de définition de f.
2.Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.
3.Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
4.Donner une valeur approchée par défaut à 0.1 près de α.

Exercice 16

Soit $f : x \mapsto x^3 + 4x + 1$.
1. Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[-1, 0]$.
3. Donner une valeur approchée par défaut à 0.1 près de α.

Exercice 17

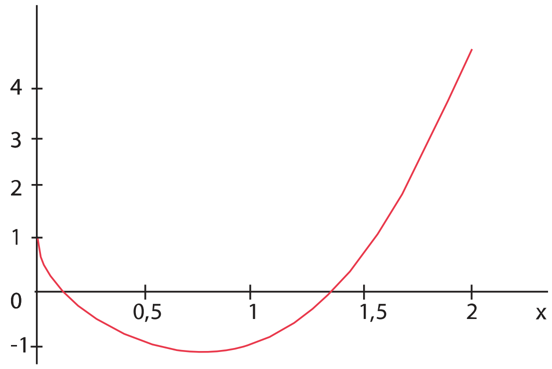
Soit $f : x \mapsto -2x^3 - 7x + 4$.
1. Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[0, 1]$.
3. Donner une valeur approchée par défaut à 0.1 près de α.

Exercice 18

Soit $f : x \mapsto -2x^3 + 2x + 10$.
1. Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[1, 2]$.
3. Donner une valeur approchée par défaut à 0.1 près de α.

Exercice 19

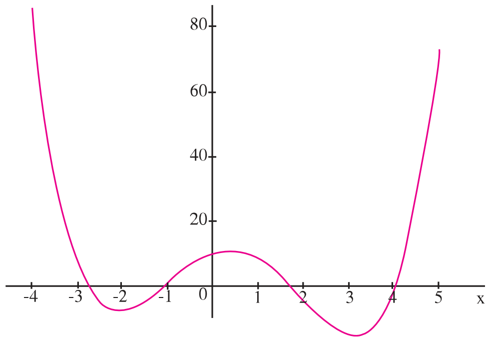
1. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + 1$.



1. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Déterminer graphiquement une valeur approchée à 0.5 près de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Donner une valeur approchée à 0.1 près par défaut de chacune de ces solutions.

Exercice 20

Dans le plan muni d'un repèr e $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x + 10$.



1. Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(-3)$ et $f(-2)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3, -2]$.
3. Calculer $f(-1.5)$ et $f(-1)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1.5, -1]$.
4. Calculer $f(1)$ et $f(2)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 2]$.
5. Calculer $f(4)$ et $f(4.5)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[4, 4.5]$.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement quatre solutions distinctes.
7. Donner une valeur rapprochée à 0.1 près par défaut de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

QCM:

1) g est discontinue en a $\longrightarrow$ **(b)**

2) f est continue en 0 $(D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty[) \longrightarrow$ **(a)**

3) f est continue à droite en $(-1) \longrightarrow$ **(b)**

4) $[-1, 0] \longrightarrow$ **(b)**

$$f(x) = 4\sqrt{x+1} - x^2 - 3$$

Car on a : f est continue sur $[-1, 0]$

et $f(0) \times f(-1) = -4 < 0$

5) $E(x) = 1 \;\; pour\; x \in [1,2[\longrightarrow$ **(a)**

Vrai-Faux :

1) **Vrai.**

Théorème du cours : f continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

2) **Faux.**

Contre exemple Voir (QCM question 3) $a = -1$

3) **Faux**

Même contre exemple que précédemment

4) **Vrai.**

Car si f est continue à droite et à gauche en a alors f sera continue en a.

5) **Faux**

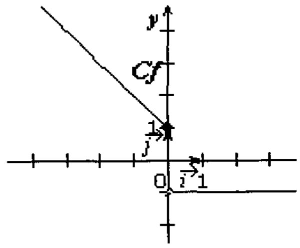
Contre exemple :

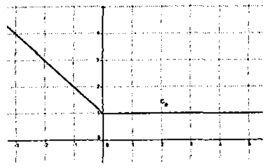
$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & si\ x \leq 0 \\ -1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

f n'est pas continue en 0 (voir figure)

On a : $|f(x)| = g(x) = \begin{cases} -x+1 & si\ x \leq 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases}$

$g\ est\ continue\ en\ 0$ (voir figure)

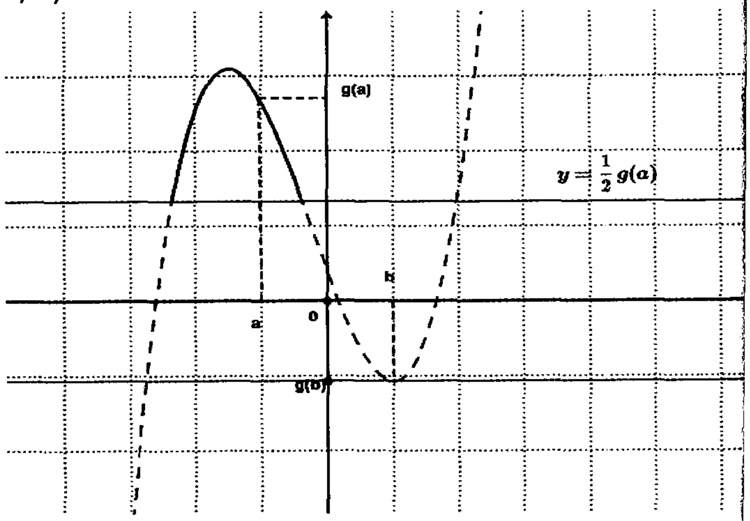




Mobiliser ses compétences :

Situation 1 :

1) a)



b) g est continue en a donc par définition on a :

Pour $\beta = \frac{1}{2}g(a) > 0$

il existe $h > 0$ tel que: pour $|x - a| < h$, on a:

$|g(x) - g(a)| < \frac{1}{2}g(a)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}g(a) < g(x) - g(a) < \frac{1}{2}g(a)$$

Par suite pour $x \epsilon\,]a-h, a+h[$ on a :

$\frac{1}{2}g(a) < g(x) < \frac{3}{2}g(a)$

c) pour $x \epsilon\,]a-h, a+h[: g(x) > 0$ car $g(a) > 0$

2) g est continue en b par définition on a :

Pour $\beta = -\frac{1}{2}g(b) > 0$ il existe $h > 0$ tel que :

Pour $|x-b| < h$, on a :

$|g(x) - g(b)| < -\frac{1}{2}g(b)$

Ce qui donne : pour $x \epsilon\,]b-h, b+h[$ on a :

$$\frac{3}{2}g(b) < g(x) < \frac{1}{2}g(b)$$

Donc : $g(x) < 0$ car $g(b) < 0$

Situation 2 :

$f(x) = 5x^3 - 10\,x^2 - 8x + 10$

1) a) * f est continue sur $[-2, -1]$

(Fonction polynôme)

et $f(-2) \times f(-1) = (-54) \times (3) < 0$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-2, -1]$

* f est continue sur $[0, 1]$

(Fonction polynôme)

et $f(0) \times f(1) = (10) \times (-3) < 0$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$

* f est continue sur $[2, 3]$

(Fonction polynôme)

et $f(2) \times f(3) < 0$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[2, 3]$

b) d'après a) l'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois solutions distinctes et comme l'équation $f(x) = 0$ est du troisième degré elle admet au plus trois solutions dans IR

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans IR

2) a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{33}{8}$, $f(1) = -3$

$f(\frac{1}{2}) \times f(1) < 0$ D'où $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

Par suite $\alpha \epsilon [\frac{1}{2}, 1]$

$b)$ $on\ a : \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$ et $f(\frac{3}{4}) > 0$ (à calculer)

Comme : $f(\frac{3}{4}) \times f(1) < 0$ on aura $\alpha \epsilon [\frac{3}{4}, 1]$

$c)$ $\frac{\frac{3}{4}+1}{2} = \frac{7}{8}$ $et\ f(\frac{7}{8}) < 0$ (à calculer)

Ainsi : $f(\frac{3}{4}) \times f(\frac{7}{8}) < 0$ $par\ suite$ $\alpha \epsilon [\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$

même travail en calculons à chaque fois et pour chaque intervalle $[a, b]$ le réel $f(\frac{a+b}{2})$ puis on applique le théorème des valeurs intermédiaires cette méthode s'appelle la <u>dichotomie</u>

1) même travail on commençons par l'intervalle $[-2, -1]$ jusqu'à obtenir un intervalle $[n, m]$ tel que : $m - n \cong 0.04$
2) même travail que précédemment

Exercices

Exercce1 :

1) $f(x) = \sqrt{3}\,x^8 - \sqrt{2}\,x^3 + 3x + 1$, $a = -\sqrt{3}$
f est une fonction polynôme elle est donc continue en tout réel, en particulier en $a = -\sqrt{3}$

2) $f(x) = \dfrac{2x^5 - 2x + 1}{x^3 - x + 1}$; $a = 0{,}2$
$(0{,}2)^3 - (0{,}2) + 1 \neq 0$ donc $0{,}2 \in D_f$
f est une fonction rationnelle et $0{,}2 \in D_f$
Donc f est continue en $a = 0{,}2$

3) $f(x) = \sqrt{6}\,(2x-5)^3$ $a = -2{,}8$
Comme étant fonction polynôme f est continue en $a = -2{,}8$

4) de même fonction polynôme

5) de même fonction polynôme

6) $f(x) = \dfrac{-10^{-3}.x^4 + 2}{3x+10}$, $a = -\dfrac{1}{2}$

$D_f = IR \backslash \left\{-\frac{10}{3}\right\}$

f est une fonction rationnelle et . $(-\dfrac{1}{2}) \in D_f$

Donc f est continue en $a = -\dfrac{1}{2}$

7) $f(x) = \dfrac{x-5}{x^4 + 10x^2 + 3}$, $a = -0.000251$
f est une fonction rationnelle et
$\underbrace{(-0.000251)^4 + 10(-0.000251)^2 + 3}_{\text{somme des trois réels strict positifs}} \neq 0$
$(a = -0.000251) \in D_f$

donc f est continue en a

Exercce2 :

1) $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$

Avec $f_1(x) = -|x| + 5$ et $f_2(x) = (x-10)^4$

* la fonction $x \to x$ est continue en $a = 201$

d'où f_1 est continue en $a = 201$

* f_2 est continue en $a = 201$ (fonction polynôme)

de plus $f_2(201) = 191^4 \neq 0$

Donc $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ est continue en $a = 201$

2) $f(x) = |g(x)|$ avec $g(x) = \dfrac{x^2 - 8}{2x+1}$

$D_g = IR \backslash \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

g est une fonction rationnelle et $2 \in D_g$

d'où g est continue en a=2

par suite $f = |g|$ est continue en $a = 2$

1) $f(x) = \dfrac{|x^2 + x - 2|}{x-2}$

Posons $f_1(x) = x^2 + x - 2$ et $f_2(x) = x - 2$

On a : $f = \dfrac{|f_1|}{f_2}$

* f_1 est continue en $a = 51$ (fonction polynôme)

Donc $|f_1|$ *est continue en* $a = 51$

* f_2 est continue en $a = 51$ (fonction polynôme)

de plus $f_2(51) = 49 \neq 0$

D'où $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ est continue en $a = 51$

4)$f(x) = \frac{1}{4}|x| - |x^3| - 5|x^5|$

* la fonction $x \to x$ est continue en $a = 11$

d'où $f_1 : x \to \dfrac{1}{4}|x|$ est continue en $a = 11$

* la fonction : $x \to x^3$ est continue en $a = 11$

d'où $f_2 : x \to |x^3|$ est continue en $a = 11$

* de même la fonction $f_3 : x \to |x^5|$ est continue en $a = 11$

donc f est continue en $a = 11$ (somme de fonctions continues)

5) $f = \frac{f_1}{f_2}$

avec : $f_1(x) = |x^3| + 2$ et $f_2(x) = |x| - 2$

f_1 et f_2 sont continues en $a = -5$

de plus $f_2(-5) = 3 \neq 0$ d'où $f = \frac{f_1}{f_2}$ est continue $en\ a = -5$

Exercce3 :

1) $f(x) = \sqrt{g(x)}$ avec $g(x) = 3x + 5$

$D_f = [-\frac{5}{3}, +\infty[$

g est définie et positive sur l'intervalle ouvert

$]-\frac{5}{3}, +\infty[$ et $\frac{2}{3} \in]-\frac{5}{3}, +\infty[$

Comme g est une fonction polynôme elle est continue en $\frac{2}{3}$

Alors $f = \sqrt{g}$ est continue en $a = \frac{2}{3}$

2) $f = \sqrt{g}$ $avec$ $g(x) = -2x + 3$

g est définie et positive sur $]-\infty, \frac{2}{3}[$

et $0{,}01 \in]-\infty, \frac{2}{3}[$

Comme g est fonction polynôme donc elle est continue en 0,01 alors $f = \sqrt{g}$ est continue en $a = 0{,}01$

3) $f = \sqrt{g}$ $avec$ $g(x) = 4x^2 + x + 1$ on a :
$\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$ donc le trinôme

$$4x^2 + x + 1 > 0$$

$$(signe\ de\ coefficient\ de\ \text{monôme}$$

$$de\ plus\ haut\ degré\ 4 > 0)$$

Donc g est définie et positive sur IR

de plus g est une fonction polynôme donc elle est continue en $a = 1{,}25$

D'où $f = \sqrt{g}$ est continue en $a = 1{,}25$

4) $f(x) = g(x).\sqrt{h(x)}$

$$avec\ : \begin{cases} g(x) = x - 4 \\ h(x) = 2x^2 + 3x + 5 \end{cases}$$

* g est continue en $a = 10$ (fonction polynôme)

* $2x^2 + 3x + 5 = 0$ avec $\Delta = -31 < 0$

Le signe de $2x^2 + 3x + 5$ *et celui de* $a = 2$

$donc\ h(x) > 0, pour\ tout\ x \in IR$

h est définie et positive sur IR et $10 \in IR$

h est continue en 10 donc $\sqrt{h}$ est continue en $a = 10$

par suite f est continue en $a = 10$ (produit de deux fonctions continues)

5) $f(x) = \sqrt{g(x)} + h(x)$, avec :

$g(x) = x^2 + 3$ et $h(x) = \frac{-5(x^2 + 2x + 2)}{x^4 + 5x + 3}$

* g (polynôme) est définie et positive sur IR de plus g et continue en $a = -1$ donc $\sqrt{g}$ est continue en $a = -1$

* $(-1)^4 + 5(-1) + 3 = -1 \neq 0$ h est une fonction rationnelle et $(-1) \in D_h$ d'où h est continue en (-1)

Par suite $f = \sqrt{g} + h$ est continue en $a = -1$.

Exercce4 :

1) $M(x,x)$

$\overrightarrow{AM}\binom{x+2}{x}$; $\overrightarrow{BM}\binom{x}{x-1}$

$f(x) = AM + BM$

$$f(x) = \sqrt{(x+2)^2 + x^2} + \sqrt{x^2 + (x-1)^2}$$

2) * la fonction $f_1 : x \to (x+2)^2 + x^2$ est positive sur IR et continue en tout réel a (fonction polynôme) d'où $\sqrt{f_1}$ est continue en a.

* la fonction $f_2 : x \to x^2 + (x-1)^2$ est positive sur IR et continue en tout réel a (fonction polynôme) d'où $\sqrt{f_2}$ est continue en a.

par suite $f = \sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}$ est continue en a.

3) soit $le\ point\ \ C(1,0)$

la droite d'équation : $y = x$ est la médiatrice du segment $[BC]$, d'où $BM = CM$

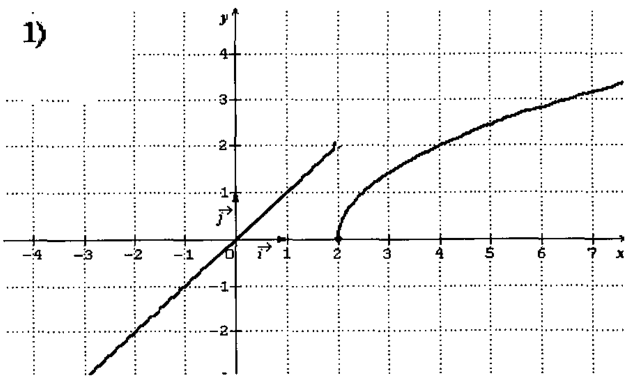
$AM + BM = AM + CM$ est minimale pour $M = O$

c'est 0 dire $x = 0$.

Exercce5 :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-4} & si\ x \geq 2 \\ x & si\ x < 2 \end{cases}$$

1)



2) La fonction $x \to 2x - 4$ est continue et positive sur $[2,+\infty[$ donc f est continue sur $[2,+\infty[$

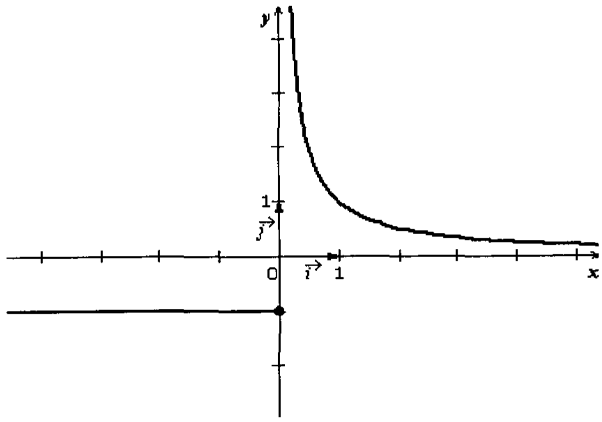
3) La fonction $x \to x$ est continue sur $]-\infty,2[$ donc f est continue sur $]-\infty,2[$

4) La courbe (C_f) présente un saut (rupture) au point $A(2,f(2))$ donc f n'est pas continue en 2.

Exercce6 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ \ x > 0 \\ -1 & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$$

1)



2) La fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

(Fonction rationnelle) en particulier sur $]0,+\infty[$ donc f est continue sur $]0,+\infty[$

3) la restriction de f sur $]-\infty,0[$ est constante donc f est continue sur $]-\infty,0[$

4) graphiquement.(Cf) possède un saut au point $O(0,0)$ donc f n'est pas continue en 0.

5) a) l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans IR car la droite d'équation : $y = 1$ coupe (Cf) en un seul point.

b) de même l'équation $f(x) = \frac{2}{5}$ admet une unique solution dans IR .

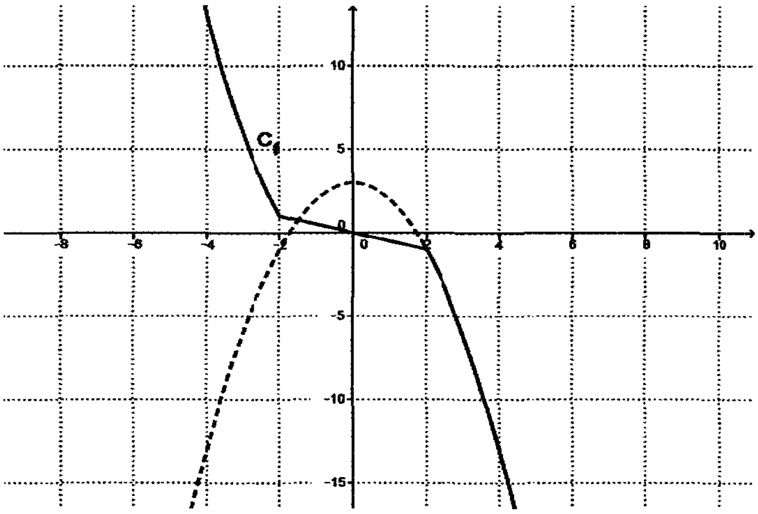
c) la courbe (Cf) et la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ n'ont pas des points d'intersection donc l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solution

d) de même l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans IR

Exercce7 :

1) (P) : La parabole d'équation : $y = -x^2 + 3$

Elle a pour sommet $S(0,3)$ $d'axe\ x = 0$



$* \, (P) \; passe \; par \; A(2,-1)$

$* \, A' = S_O(A)$: symétrique de A par rapport au point O $\Rightarrow A'(-2,1)$

$* \, O$: $centre\ de\ symétrie\ pour\ (C_f)$

$* \, f(0) = 0$

$* \, f(-2) = -f(2) = 1$ $(f\ impaire)$

$* \, (C_1)$:la courbe de la restriction de f sur $[2,+\infty[$

$On\ a :$ $(C'_1) = S_0(C_1)$

On a ainsi :	$(C_f) = (C_1) \cup [AA'] \cup (C'_1)$

2) pour $x \in]-2,0[$, $f(x) = ax + b$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc $f(x) = -\frac{1}{2}x = -\frac{x}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & si\ x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x & si\ -2 < x < 2 \\ -x^2 + 3 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Exercce8 :

$$f(x) = \frac{x}{2x - |x+1|}$$

1) pour $x \in D_f$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x + (x+1)} & si\ x \leq -1 \\ \dfrac{x}{2x - (x+1)} & si\ x > -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3x+1} & si\ x \leq -1 \\ \frac{x}{x-1} & si\ x > -1 \end{cases} \quad \text{et } x \in D_f$$

On a : $3x + 1 \neq 0$ pour tout $x \leq -1$

Donc $D_f = IR \backslash \{1\}$

2) * la fonction $f_1 : x \to x$ est continue sur IR en particulier sur $IR \backslash \{1\}$

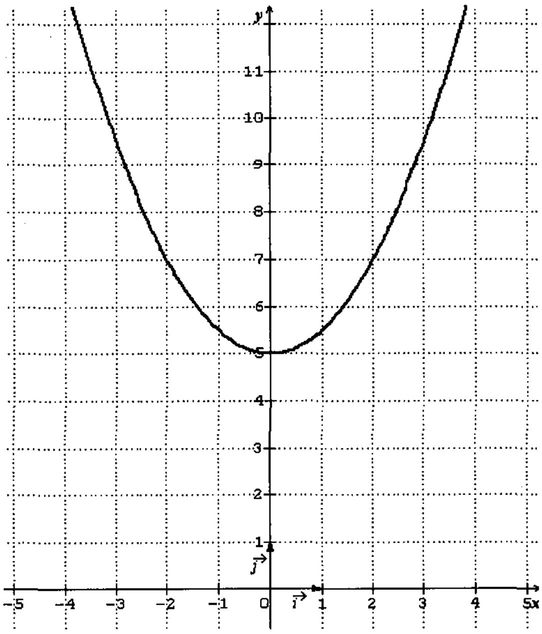
* la fonction $f_2 : x \to 2x - |x+1|$ est continue sur $IR \backslash \{1\}$ et ne s'annule pas donc $f = \frac{f_1}{f_2}$ est continue sur $IR \backslash \{1\}$

Exercce9 :

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$

1) (C_f) est une parabole de sommet $S(0,5)$

et d'axe ladroite des abscisses : $(x = 0)$



2) $f(2) = 7$; $f(-2) = 7$; $f(0) = 5$; $f(\sqrt{3}) = \frac{13}{2}$

et $f(-\sqrt{2}) = 6$

3) $*$ $f(I = [1,3]) = [f(1), f(3)] = \left[\frac{11}{2}, \frac{19}{2}\right]$

$*$ $f(]-2,2[) = = [5,7[$

$*$ $f(K =]-\infty, 0]) = [5, +\infty[$

4)

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -10 < 0$

donc 0 n'a pas d'antécèdent par f

• $f(x) = 7 \Leftrightarrow x = 2$ *où* $x = -2$

donc (-2) et 2 sont les antécèdents de 7 par f

• $f(x) = 9 \Leftrightarrow x^2 = 8$

$\Leftrightarrow x_1 = 2\sqrt{2}$ *où* $x_2 = -2\sqrt{2}$

les antécèdents par f de 9 sont x_1 et x_2

5)

$7 \leq f(x) \leq 13 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{1}{2}x^2 \leq 8$

$\Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 16 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x^2} \leq 4$

$\Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 4$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$ *où* $2 \leq -x \leq 4$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$ *où* $-2 \geq x \geq -4$

donc de réels de l'intevalle $[3,7]$ sont les réels $x \in [-4,-2] \cup [2,4]$

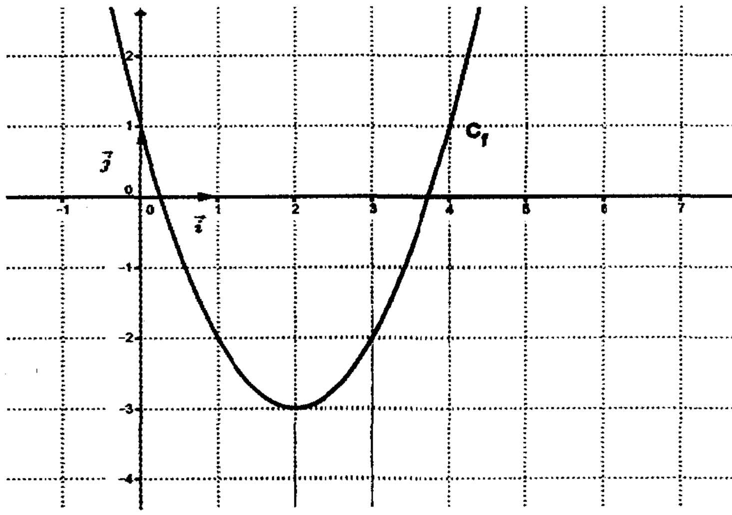
Exercice10 :

$f(x) = x^2 - 4x + 1$

1) $f(x) = (x-2)^2 - 3$

(C_f) est une parabole de sommet $S(2,-3)$

et d'axe $x = 2$



2) $*\ f([2,3]) = [-3,-2]$

$*\ f([0,3]) = [-3,1]$

$*\ f([0,+\infty[) = [-3,+\infty[$

3) $-2 \leq f(x) \leq 6 \Leftrightarrow -2 \leq (x-2)^2 - 3 \leq 6$

$\Leftrightarrow\ 1 \leq (x-2)^2 \leq 9 \Leftrightarrow\ 1 \leq |x-2| \leq 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x-2 \leq 3 \\ ou \\ 1 \leq -(x-2) \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ ou \\ -1 \leq -x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ ou \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$ Donc $E = [-1,1]\ U\ [3,5]$

Exercice11 :

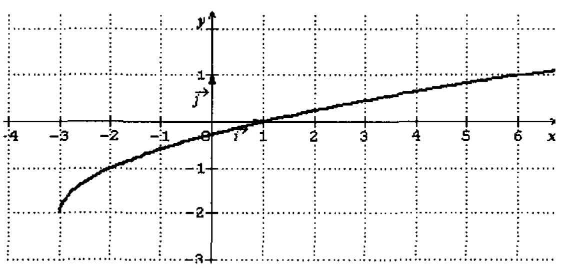
$f(x) = \sqrt{x+3} - 2$

1) $D_f = [-3,+\infty[$

2) $(H): y = \sqrt{x}$

(C_f) est l'image de (H) par la translation de

Vecteur $\vec{u}\binom{-3}{-2}$



3) $*\ \ f([2,3]) = [f(2), f(3)]$

((car f est croissante sur [2,3]))

$d'où\ \ f([2,3]) = [\sqrt{5} - 2, \sqrt{6} - 2]$

$*\ f([0,5]) = [f(0), f(5)] = [\sqrt{3} - 2, \sqrt{8} - 2]$

$*\ f\ (]-1,+\infty[) =]\sqrt{2} - 2, +\infty[$

4) $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} - 2 \geq -1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} \geq 1 \Leftrightarrow x+3 \geq 1$ et $x \geq -2$

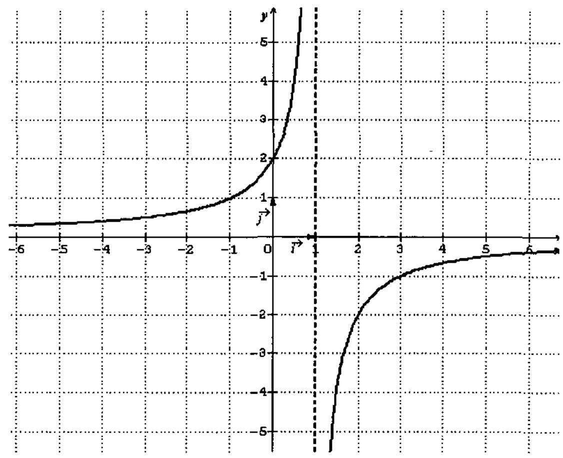
Par suite $E = [-2,+\infty[$

Exercice12 :

$$f(x) = \frac{-2}{x-1}$$

1) $D_f = IR\{1\}$

2) (C_f) est une hyperbole de centre $W(1,0)$ d'asymptotes $x = 1\ et\ y = 0$



3) $*\ f([2,4]) = [f(2), f(4)] = \left[-2, -\frac{2}{3}\right]$

Puisque on a : f est croissante sur [2,4]

$*\ f([-1,0]) = [1,2]$ (f est croissante sur $[-1,0]$)

$*\ f(]-\infty,-3]) =]0, \frac{1}{2}]$ (f est croissante)

4) graphiquement on a : (C_f) est au dessous de l'axe des abscisses ($f(x) < 0$) si et seulement si $x > 1$

Donc $E =]1,+\infty[$

Exercice13 :

$f(x) = x^3$

1) pour tout réels $a\ et\ b$:

$$a \leq b \quad \Rightarrow a^3 \leq b^3 \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

Donc f est croissante sur IR

2)* $f([1,3]) = [f(1), f(3)] = [1,\ 27]$

* $f([2,5]) = [8, 125]$

* $f(]-6,-1]) =]-216,-1]$

Car f est croissante sur chacun de ces intervalles.

Exercice14 :

$f(x) = -x^3 - 3x$

1) soit a et b deux réels

$a \leq b \Rightarrow a^3 \leq b^3 \Rightarrow -b^3 \leq -a^3 \quad (1)$

$a \leq b \Rightarrow -3b \leq -3a \quad (2)$

On additionne (1) et (2) membre à membre on aura

$-b^3 - 3b \leq -a^3 - 3a \Rightarrow f(b) \leq f(a)$

Par suite f est décroissante sur IR.

2) $f([2,3]) = [f(3), f(2)] = [-36,-14]$

Car f est décroissante sur [2,3]

de même :

* $f([-5,-3]) = [f(-3), f(-5)] = [36,140]$

* $f(]3,4]) = [-76,-36[$

Exercice15 :

$f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2x-1}$

1) $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Ce qui donne : $D_f = [\frac{1}{2}, +\infty[$

2) * la fonction $f_1 : x \to -\frac{1}{2}x$ est continue sur IR en particulier sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

* la fonction $f_2 : x \to 2x - 1$ est continue et positive sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ donc $\sqrt{f_2}$ est continue sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

Par suite $f = f_1 + \sqrt{f_2}$ est continue sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

3) f est continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$

$f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[\frac{1}{2}, 1]$

4) $f(0{,}5) = -0{,}25 < 0$ et $f(0{,}6) = 0{,}14$

$donc\ f(0{,}5) \times f(0{,}6) < 0$ d'où $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

Exercice16 :

$f(x) = x^3 + 4x + 1$

1) Comme étant fonction polynôme, f est continue sur IR

2) f est continue sur $[-1,0]$

$f(-1) \times f(0) = -4 < 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[-1,0]$

3) (avec la calculatrice)

$* f(-1) = -4 < 0 \quad , f(0) = 1 > 0$

$et\ \ f(-0{,}5) = -1{,}12 < 0$

Ainsi : $f(-0{,}5) \times f(0) < 0\ donc : \ -0{,}5 < \alpha < 0$

$* f(-0{,}3) = -0{,}22\ et \quad f(-0{,}2) = 0{,}19$

$donne\ : \ f(-0,3) \times f(-0,2) < 0$

$d'où \quad -0,3 < \alpha < -0,2$

Exercice17 :

$f(x) = -2x^3 - 7x + 4$

1) Comme étant une fonction polynôme, f est continue sur IR

2) f est continue sur $[0,1]$

Et : $f(0) \times f(1) = 4 \times (-5) < 0$

D'où l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution

α dans $[0,1]$

3) (on utilisera une calculatrice)

$f(0,5) = 0,25 \quad et \quad f(0,6) = -0,63$

$f(0,5) \times f(0,6) < 0 \quad d'où\ 0,5 < \alpha < 0,6$

Exercice18 :

$f(x) = -2x^3 + 2x + 10$

1) Comme étant une fonction polynôme, f est continue sur IR

2) f est continue sur $[1,2]$

Et : $f(1) \times f(2) = 10 \times (-2) < 0$

D'où l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution

α dans $[1,2]$

3) (on utilisera une calculatrice)

$f(2) = -2 \quad et \quad f(1.9) = 0,0082$

$f(2) \times f(1.9) < 0 \quad d'où\ 1.9 < \alpha < 2$

Exercice19 :

$f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + 1$

1) Le nombre de solution de l'équation : $f(x) = 0$ est égal à deux. Car l'axe des abscisses coupe (C_f) en deux points distincts.

2) $\alpha \sim 0 \quad et \quad \beta \sim 1,5$

3) $\alpha \sim 0,2 \quad et \quad \beta \sim 1,4$

Exercice20 :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x + 10$$

1) Comme étant fonction polynôme f est continue sur IR

2) $f(-3) = 8,5$ et $f(-2) = -8$

$f\ est\ continue\ sur\ [-3,-2]$

et $f(-3) \times f(-2) < 0$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α_1

$dans\ [-3,-2]$

3) $f(-1,5] = -5,09$ et $f(-1) = 0,5$

$f\ continue\ sur\ [-1,5\ ,-1]$

et $f(-1,5) \times f(-1) < 0$

Donc l'équation $f(x) = O$ admet une solution α_2

dans $[-1,5\ ;\ -1]$

4) $f\ est\ continue\ sur\ [1,2]$

$f(1) \times f(2) = -34 < 0$

Donc l'équation $f(x) = O$ admet une solution α_3

dans $[1\ ,2]$

5) f *est continue sur* $[4\,,4{,}5]$

$f(4) \times f(4{,}5) = -50 < 0$

Donc l'équation $f(x) = O$ admet une solution α_4

dans $[4\,,4{,}5]$

6) l'équation $f(x) = 0$ est du $4^{\text{éme}}$ degré donc elle

admet au plus quatre solutions

Comme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 et\ \alpha_4$ sont des solutions distinctes de *l'équation* $f(x) = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet exactement quatre solutions.

7) ■ $f(-2{,}8) \times f(-2{,}7) < 0$

$$\Longrightarrow\ -2{,}8 < \alpha_1 < -2{,}7$$

■ $f(-1{,}1) \times f(-1) = (-0{,}69).(0{,}5) < 0$

$$\Longrightarrow\ -1{,}1 < \alpha_2 < -1$$

■ $f(1{,}7) \times f(1{,}8) = (0{,}42).(-1{,}02) < 0$

$$\Longrightarrow\ 1{,}7 < \alpha_3 < 1{,}8$$

■ $f(4) \times f(4{,}1) = (-2).(2{,}007) < 0$

$$\Longrightarrow\ 4 < \alpha_4 < 4{,}1$$

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et $f(2) = g(2) = -2$, alors $\lim_{x\to 2} (fg)(x) =$

☐ 4 ☐ -2 ☐ 0.

2. Si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et $f(2) = g(2) = -1$ alors $\lim_{x\to 2} \frac{f}{g}(x) =$

☐ 1 ☐ -1 ☐ -2.

3. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(2) = 0$, alors $\lim_{x\to 2} f(x)(x^{100} + 4) =$

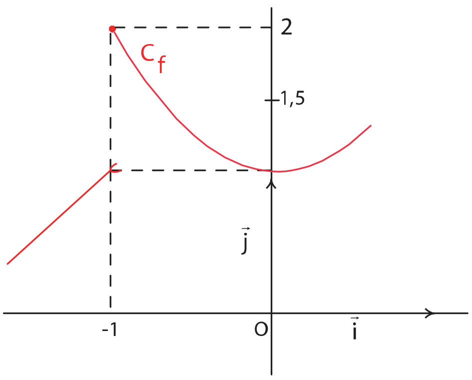
☐ 4 ☐ $2^{100} + 4$ ☐ 0.

4. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^{2006}+1}{(x+1)^{2005}}\right) =$

☐ 0 ☐ 2006 ☐ 1.

5. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
C_f est la courbe représentative de la fonction f.
Graphiquement on a $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

☐ 1 ☐ 2 ☐ 1.5.



VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f n'est pas définie en a alors f n'admet pas de limite en a.
2. Si f n'admet pas de limite en a alors f n'est pas continue en a.
3. f admet une limite en a, si et seulement si, f admet une limite à droite en a ou à gauche en a.
4. Si $|f|$ admet une limite en a alors f admet une limite en a.
5. Si $|f|$ admet une limite égale à 0 en a alors f admet une limite égale à 0 en a.

Mobiliser ses compétences

Situation 1

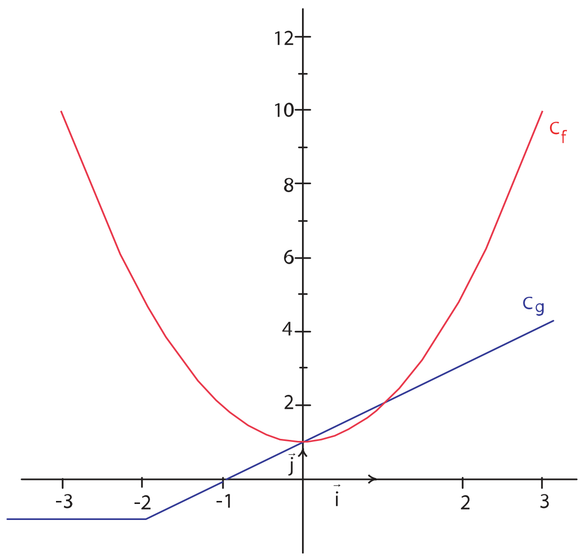
Soit a un réel.

On considère la fonction f définie sur [–2, +∞[par $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} & \text{si } x \neq -1, \\ a & \text{si } x = -1. \end{cases}$

Pour quelle valeur de a, la fonction f est-elle continue sur [–2, +∞[?

Situation 2

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté graphiquement les fonctions $f : x \mapsto x^2+1$ et $g : x \mapsto \begin{cases} -1 \text{ si } x \leq -2 \\ x+1 \text{ si } x > -2 \end{cases}$.



1. On considère la fonction $h : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \geq 0, \\ g(x) \text{ si } x < 0. \end{cases}$

   a. Donner l'expression de h(x) sur $\mathbb{R}$.
   b. Etudier la continuité de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction $t : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \geq 0, \\ |g(x)| \text{ si } x<0. \end{cases}$

   a. Représenter graphiquement la fonction t.
   b. Etudier la continuité de la fonction t sur $\mathbb{R}$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a.

$f(x)=x^8-x^3+x+1 \quad ; \quad a=-1.$

$f(x)=\dfrac{6x^4+x+1}{x^2-x+1} \quad ; \quad a=0.1.$

$f(x)=-x^5-2x(x-1)+5x^3-4 \quad ; \quad a=-1.$

$f(x)=\dfrac{x}{10^{10}}-10x^{21}+\dfrac{\sqrt{3}}{25}x-3 \quad ; \quad a=0.$

$f(x)=-3(-2x+1)^5 \quad ; \quad a=1.$

$f(x)=\dfrac{-10x^2}{x+2} \quad ; \quad a=-3.$

$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3} \quad ; \quad a=0.1.$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a.

$f(x)=\left|\dfrac{x^2-\sqrt{2}}{2x+1}\right| \quad ; \quad a=0.$

$f(x)=\dfrac{-|x|+50}{(x-10)^2} \quad ; \quad a=20.$

$f(x)=\dfrac{3|x|+|x-\sqrt{2}|}{|x|^3+\pi} \quad ; \quad a=0.$

$f(x)=\dfrac{|-2x|}{3}-5|x|^3 \quad ; \quad a=-2.$

$f(x)=\dfrac{|x|^5+3}{|x|+1} \quad ; \quad a=-1.$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a.

$f(x)=\sqrt{3x-5} \quad ; \quad a=8.$

$f(x)=\sqrt{-2x+1} \quad ; \quad a=0.02.$

$f(x)=\sqrt{2x^2-3x+4} \quad ; \quad a=-1.23.$

$f(x)=(-x+5)^2+\sqrt{2x^2+3x+5} \quad ; \quad a=0.$

$f(x)=\sqrt{3x^2+2}-3\dfrac{x^2-3x+2}{x^4-8x+1} \quad ; \quad a=-1.$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a.

$f(x)=\dfrac{x(x^2-2)}{x-\sqrt{2}} \quad ; \quad a=\sqrt{2}.$

$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} \quad ; \quad a=1.$

$f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6} \quad ; \quad a=2.$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x+2} \quad ; \quad a=-2.$

$f(x)=\left|\dfrac{x^3+27}{x+3}\right| \quad ; \quad a=-3.$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{\sqrt{x}} \quad ; \quad a=0.$

$f(x)=\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{x} \quad ; \quad a=0.$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \quad ; \quad a=0.$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]-2, 1[$ par

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x\in\mathbb{Z}, \\ x \text{ si } x\notin\mathbb{Z}. \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-2,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,1[$.
2. Déterminer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x).$

3. En déduire que f est continue sur $]-1, 1[$ et que f n'est pas continue sur $]-2, 0[$.

Exercice 6

Soit f, g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<1, \\ x^2+1 \text{ si } x\geq 1 \end{cases} \quad ; \quad g(x)=x-1$$

et $h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

1. Déterminer les fonctions f + g ; fg ; fh.

2. Etudier la continuité de chacune des fonctions f ; $f+g$; fg ; fh sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
3. Etudier la continuité en 1 de chacune des fonctions f ; $f+g$; fg et fh.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)^2}{|x-3|} \text{ si } x \neq 3, \\ 0 \text{ si } x = 3. \end{cases}$$

1. Représenter f dans le plan muni d'un repère.
2. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 3.
3. La fonction f est-elle continue en 3 ?
4. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8

Soit la fonction f définie $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 \text{ si } x \geq 2, \\ \sqrt{x+2} \text{ si } x < 2. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 2.
2. La fonction f est-elle continue en 2 ?

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \\ -1-\sqrt{-x} \text{ si } x < 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.
2. La fonction f est-elle continue en 0 ?

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}\sqrt{x} \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \quad \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.
2. La fonction f est-elle continue en 0 ?
3. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur

$\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{(3x+1)^2}}{3x+1}$.

1. Déterminer la limite de f à droite en $-\dfrac{1}{3}$.
2. Déterminer la limite de f à gauche en $-\dfrac{1}{3}$.
3. La fonction f admet-elle une limite en $-\dfrac{1}{3}$?

Exercice 12

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$.

Calculer les limites de f en -2 et en 2.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} \text{ si } x < 2, \\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} \text{ si } x > 2. \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de f à droite en 2.
2. Déterminer la limite de f à gauche en 2.
3. La fonction f admet-elle une limite en 2 ?
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[\setminus\{0\}$ par

$f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2-x}$.

1. Calculer la limite de f en 0.
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui définir ce prolongement.

Exercice 15

Etudier la continuité sur $[-1, 2]$ de la fonction $x \mapsto (x-1)E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} \text{ si } x\neq 0,\\ 0.5 \text{ si } x=0.\end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $[-1, +\infty[$.

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 \text{ si } x\geq 1,\\ x-1 \text{ si } 0\leq x\leq 1,\\ \dfrac{x+1}{x-1} \text{ si } x<0.\end{cases}$$

1. Représenter f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que

- $f(-4)=4$ et $f(-3)=3$,
- $f(x)=\sqrt{x+2}$, si $x>-2$,
- la restriction de f à $]-\infty, -2[$ est une fonction affine,
- f est continue à gauche en -2.

1. Représenter f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Donner l'expression de f(x) pour tout réel x.
3. Etudier la continuité de f en -2.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} \text{ si } x\neq 2,\\ a \text{ si } x=2.\end{cases}$$

Pour quelle valeur de a, la fonction f est-elle continue en 2 ?

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^3-2x^2-3x+2}{x^2-1} \text{ si } x\neq -1 \text{ et } 1,\\ a \text{ si } x=1,\\ b \text{ si } x=-1.\end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 1.
2. Déterminer la valeur de b pour que f soit continue en -1.

Exercice 21

Soit P un polynôme défini par

$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P(x)-P(0)}{x}$.
2. Appliquer le résultat précédent pour déterminer chacune des limites suivantes

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(x+1)^2-3}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^3+2)(x-1)+2}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^3-1}{x}$.

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x)=\dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x^2}-1)$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

QCM:

1) $\lim_{x\to 2}(f.g)(x) = 4$ **(a)**

2) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ **(a)**

3) c) $\lim_{x\to 2} f(x).(x^{100}+4) = 0$ **(c)**

4) c) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^{2006}+1}{(x+1)^{2005}}\right] = 1$ **(c)**

5) b) $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = 2$ **(b)**

Vrai- Faux :

1) **Faux** : contre exemple :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad , D_f = IR\backslash\{1\}$$

Pour $x \neq 1$ $on\ a$: $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$

On pose $g(x) = x+1 \,, x \in IR$

Ainsi on a pour $x \neq 1$, $f(x) = g(x)$

g est continue en 1 donc :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = g(1) = 2$$

2) **Vrai** : théorème du cours : f continue en a si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

3) **Faux** :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

4) Faux : contre exemple :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \leq 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

$|f(x)| = 1\ pour\ tout\ x \in IR$

$$\lim_{x\to 0}|f(x)| = 1$$

mais f n'admet pas de limite en 0.

car $\left(\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1\right) \neq \left(\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1\right)$

5) **Vrai** voir définition.

Mobiliser ses compétences :

Situation 1 :

pour $x \in [-2,+\infty[\ \backslash\{-1\}$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+2}}$$

pour $x \in [-2,+\infty[\ , on\ pose$:

$$g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+2}}$$

g est continue en (-1) et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [-2,+\infty[\ \backslash\{-1\}$

donc : $\lim_{x\to(-1)} f(x) = g(-1) = \frac{1}{2}$

f *est continue en* (-1) si et seulement si :

$$\lim_{x\to(-1)} f(x) = f(-1) = a = \frac{1}{2}$$

et comme f est continue sur $[-2,+\infty[\ \backslash\{-1\}$

alors f est continue sur $x \in [-2,+\infty[$

$$si\ et\ seulement\ si\ :\ a = \frac{1}{2}$$

Situation 2 :

1) a)

$$h(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \leq -2 \\ x+1 & si -2 < x < 0 \\ x^2+1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

b) * h est continue sur chacun des intervalles

$]-\infty,-2\,[\,,]-2{,}0\,[\ et\ ]0,+\infty[$

* $Continuité\ en\ (-2)$

- pour $x \in]-\infty,-2[$: $h(x) = f_1(x) = -1$

$f_1$est continue à gauche en (-2)

donc : $\lim\limits_{x\to(-2)^-} h(x) = f_1(-2) = -1 = h(-2)$

- pour $x \in]-2,0[$: $h(x) = f_2(x) = x+1$

f_2 est continue à droite en (-2)

donc : $\lim\limits_{x\to(-2)^+} h(x) = f_2(-2) = -1 = h(-2)$

h est continue à droite et à gauche en (-2)

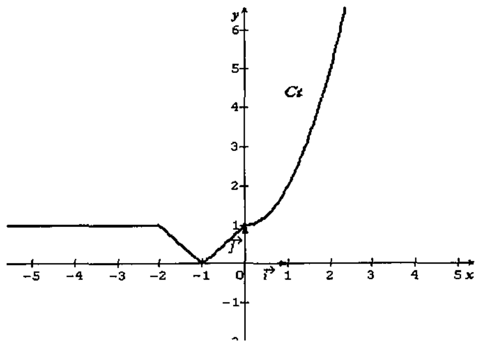
$d'où\ h\ est\ continue\ en\ (-2)$

* de même h est continue en 0.

conclusion : $h\ est\ continue\ sur\ IR$

2) $t(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \geq 0 \\ |g(x)| & si\ x < 0 \end{cases}$

a)



b) graphiquement : t est continue sur IR

car (C_t) ne représente ni un saut ni un trou .

Exercices :

Exercice 1:

1) f est une fonction polynôme elle est donc continue en (-1) donc :

$\lim_{x\to(-1)} f(x) = f(-1) = 2$

2) $f(x) = \dfrac{6x^4+x+1}{x^2-x+1}$

On a : $x^2 - x + 1 = 0$ avec $\Delta = -3 < 0$

Donc $x^2 - x + 1 > 0$ par suite : $D_f = IR$

f est une fonction rationnelle $(0,1) \epsilon D_f$ donc f est continue en $(0,1)$

$\lim_{x\to(0,1)} f(x) = f(0,1) = \dfrac{110,06}{91}$

3) $\lim_{x\to(-1)} f(x) = f(-1) = -12$

car f est une fonction polynôme

4) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = -3$ (fonction polynôme)

5) $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3$ (fonction polynôme)

6) $\lim_{x\to(-3)} f(x) = f(-3) = 90$

f fonction rationnelle et $(-3)\epsilon D_f = IR \setminus \{-2\}$

7) $\lim_{x\to(0,1)} f(x) = f(0,1) = -\dfrac{900}{301}$

f fonction rationnelle et $(0,1) \epsilon D_f = IR$

Exercice 2:

1) $f(x) = \left|\dfrac{x^2-\sqrt{2}}{2x+1}\right|$

$f = |g|$ avec $g(x) = \dfrac{x^2-\sqrt{2}}{2x+1}$;

$D_g = IR \setminus \{-1/2\}$

g est une fonction rationnelle et $0 \epsilon D_g$ donc g est continue en 0, par suite f est continue en 0.

d'où : $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \sqrt{2}$

2) $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ avec $f_1(x) = -|x| + 50$; $f_2(x) = (x-10)^2$

f_1 et f_2 sont continues en 20 et $f_2(20) = 10 \neq 0$ d'où

$\lim_{x\to 20} f(x) = f(20) = \dfrac{3}{10}$

3) f est continue sur IR (quotient de deux fonctions continues sur IR et $|x|^3 + \pi \neq 0$) comme $0 \in IR$

on aura $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$

4) de même : $\lim_{x\to(-2)} f(x) = f(-2) = \dfrac{-116}{3}$

5) $\lim_{x\to(-1)} f(x) = f(-1) = 2$ (pour la même raison)

Exercice 3:

1) $f(x) = \sqrt{3x-5}$

$f = \sqrt{g}$ $avec$ $g = 3x - 5$

La fonction g est définie et positive sur $\left]\dfrac{5}{3}, +\infty\right[$

et on a : $8 \epsilon \left]\dfrac{5}{3}, +\infty\right[$

Comme g est continue en 8 (fonction polynôme) alors $f = \sqrt{g}$ est continue en 8.

par suite : $\lim_{x\to 8} f(x) = f(8) = \sqrt{19}$

2) $f(x) = \sqrt{-2x+1}$

f est continue en 0,002 **(même raison que 1))**

d'où: $\lim_{x\to 0,02} f(x) = f(0,02) = 0,96$

3) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$

$g(x) = 2x^2 - 3x + 4 = 0$ avec $\Delta = -21 < 0$ donc

le trinôme g est strictement positif sur IR

$f = \sqrt{g}$ (g est définie et positive sur tout IR)

g *est continue en* $(-1,23)$ (polynôme)

Alors $f = \sqrt{g}$ est continue en $(-1,23)$

Donc : $\lim_{x \to (-1,23)} f(x) = f(-1,23) = \sqrt{3,3358} \simeq 1,84$

4) $f(x) = (-x+5)^2 + \sqrt{2x^2 + 3x + 5}$

$2x^2 - 3x + 4 > 0$ car $\Delta < 0$ *et* $a = 2 > 0$

*$x \to \sqrt{2x^2 + 3x + 5}$ continue sur IR

*$x \to (-x+5)^2$ polynôme donc continue sur IR

donc f *est continue en* $0 \in IR$, par suite :

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 25 + \sqrt{5}$

5) * $x \to \sqrt{3x^2 + 2}$ continue sur IR car $3x^2 + 2 \geq 0$

* $(-1)^4 - 8(-1) + 1 = 10 \neq 0$ donc

$x \to \left(-3 \times \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 8x + 1}\right)$ est continue en (-1)

finalement f est la somme de deux fonctions continues en (-1) donc elle est continue en (-1)

d'où $\lim_{x \to (-1)} f(x) = f(-1) = \sqrt{5} - \dfrac{9}{5}$

Exercice 4:

1) $f(x) = \dfrac{x(x^2 - 2)}{x - \sqrt{2}}$

po�r $x \neq \sqrt{2}$; $f(x) = \dfrac{x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = x(x + \sqrt{2})$

On pose $g(x) = x.(x + \sqrt{2})$

pour $x \neq \sqrt{2}$, on a : $f(x) = g(x)$

de plus g est continue en $\sqrt{2}$

d'où : $\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x) = g(\sqrt{2}) = 4$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

on rappelle que :
$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$
or dans l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$

$a + b + c = 0 \Rightarrow x' = 1$ *et* $x'' = \dfrac{c}{a} = 2$

d'où : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

pour $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x - 2$

on pose $g(x) = x - 2$

pour $x \neq 1$ *, on a :* $f(x) = g(x)$

On sait que g est continue en 1

d'où $\lim_{x \to 1} f(x) = g(1) = -1$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$

dans l'équation : $x^2 - 5x + 6 = 0$
$\Delta = 1 \Rightarrow x' = 2$ *et* $x'' = 3$
d'où : $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$:

$f(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x}{x-3}$

On pose $g(x) = \dfrac{x}{x-3}$

g est continue en 2

(fonction rationnelle **et 2** $\in D_g = IR \setminus \{3\}$)

et pour $x \neq 2$, $f(x) = g(x)$

d'où $\lim_{x\to 2} f(x) = g(2) = -2$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$; $D_f = [-3, +\infty[\setminus \{-2\}$

pour $x \neq -2$: $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 1}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}+1}$$

on pose : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+1}$

pour $x \neq -2$, $f(x) = g(x)$

de plus g est continue en (-2)

d'où : $\lim_{x\to(-2)} f(x) = g(-2) = \frac{1}{2}$

5) $f(x) = |\dfrac{x^3+27}{x+3}|$

On sait que : $(a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Donc pour $x \neq 3$ on a :

$$f(x) = |\frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x+3)}|$$

$f(x) = |x^2 - 3x + 9|$

On pose $g(x) = x^2 - 3x + 9$

pour $x \neq 3$ *on a* $f(x) = |g(x)|$

g est continue en (-3) , par suite :

$\lim_{x\to(-3)} f(x) = |g(-3)| = 27$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{\sqrt{x}}$; $D_f =]0, +\infty[$

pour $x > 0$, on a

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{6})(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}{\sqrt{x}(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}$$

on pose : $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}$

g est continue à droite en 0.
et $f(x) = g(x)$ *pour* $x > 0$

Donc : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = g(0) = 0$

7) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x} - 1}{x}$

pour $x \in D_f = IR^* \setminus \{-1\}$

$$f(x) = \frac{1-(1+x)}{x(1+x)} = -\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)} = -\frac{1}{x+1}$$

pour $x \neq 0$, *on a* : $f(x) = g(x)$

de plus g est continue en 0 d'où :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = g(0) = -1$$

8) pour $x \in D_f = [-1, +\infty[\setminus \{0\}$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$
$$=\frac{(\sqrt{1+x})^2-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$f(x)=\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+1)}$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$
$$f(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

g *est continue en* 0 *d'où* $\lim_{x\to 0} f(x)=g(0)=\frac{1}{2}$

Exercice 5 :

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & si\ x=-1\ ou\ x=0\\ x & si\ x\in\,]-2,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1[\end{cases}$$

1) pour $x\in\,]-2,-1[$

$f(x)=x$

on sait que la fonction : $x\to x$ est continue sur IR en particulier sur $]-2,-1[$ par suite f est continue sur $]-2,-1[$ de même : f est continue sur chacun des intervalles $]-1,0[$ *et* $]0,1[$.

2) * pour $x\in\,]-2,-1[$; $f(x)=g(x)=x$

g est continue à droite en (-1) d'où

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=g(-1)=-1$$

de même on a :

* $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=g(-1)=-1$

* $\lim_{x\to 0^-} f(x)=g(0)=0$

*. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=g(0)=0$

3) * f est continue sur chacun des intervalles $]-1,0[$ et $]0,1[$.

* *continuité en* 0

* $\lim_{0^+} f=\lim_{0^-} f=0\Leftrightarrow\lim_{x\to 0} f(x)=0$

$\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ donc :

f est continue en 0 par suite f est continue sur $]-1,1[$

* *continuité en* (-1)

on a : $f(-1)=(-1)^2=1$

$\lim_{(-1)^+} f=\lim_{(-1)^-} f=-1$

d'où $\lim_{x\to(-1)} f(x)=-1\neq f(-1)$

Donc f $n'est\ pas\ continue\ en$ (-1) $par\ suite\ f\ n'est\ pas\ continue\ sur$ $]-2,0[$.

Exercice 6 :

1)

* $(f+g)(x)=\begin{cases}x-1 & si\ x<1\\ x^2+x & si\ x\geq 1\end{cases}$

* $(f.g)(x)=\begin{cases}0 & si\ x<1\\ (x-1)(x^2+1) & si\ x\geq 1\end{cases}$

* $(f.h)(x)=\begin{cases}0 & si\ x<1\\ 1 & si\ x\geq 1\end{cases}$

2) •soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur IR par:

$f_1(x)=0$ *et* $f_2(x)=x^2+1$

* f_1 est continue sur tout IR en particulier sur $]-\infty,1[$ par suite f est continue sur $]-\infty,1[$

* f_2 est continue sur tout IR en particulier *sur* $]1,+\infty[$ par suite f est continue *sur* $]1,+\infty[$

• soit f_3 et f_4 les fonctions définies sur IR par:

$f_3(x) = x - 1 \quad et \quad f_4(x) = x^2 + x$

* $f_3$est continue sur tout IR en particulier sur $]-\infty, 1[$ par suite $f + g$ est continue sur $]-\infty, 1[$

* $f_4$est continue sur tout IR en particulier $sur\ ]1, +\infty[$ par suite $f + g$ est continue $sur\ ]1, +\infty[$

* de même les fonctions, $f.g \ et \ f.h$ sont continues sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[\ et\ ]1, +\infty[$

3) a) continuité de $f\ en\ 1$

on a : $f(1) = 2$

* pour $x < 1 \ on\ a: \quad f(x) = f_1(x) = 0$

$f_1$est continue en 1 (fonction constante)

d'où : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f_1(1) = 0 \neq f(1)$

f n'est pas continue à gauche en 1 donc f n'est pas continue en 1

b) continuité de $(f + g)\ en\ 1$

on a : $(f + g)(1) = 2$

Pour $x < 1 : (f + g)(x) = g(x) = x - 1$

g est continue en 1 d'où :

$$\lim_{x\to 1^-} (f + g)(x) = g(1) = 0 \neq (f + g)(1)$$

la fonction $(f + g)$ n'est pas continue en 1.

c) continuité de $(f.g)$ en 1

on a : $(f.g)(1) = 0$

pour $x < 1 : (f.g)(x) = f_1(x) = 0$

f_1 est continue en 1 d'où :

$\lim\limits_{x\to 1^-} (f.g)(x) = f_1(1) = 0 = (f.g)(1)$

$(f.g)$ *est continue à gauche en* 1

pour $x \geq 1$:

$$(f.g)(x) = f_3(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$$

f_3 est continue en 1 , d'où :

$$\lim_{x\to 1^+} (f.g)(x) = f_3(1) = 0 = (f.g)(1)$$

$(f.g)$ est continue en 1 par suite $(f.g)$ est continue en 1.

d) continuité de $(f.h)$ en 1

on a : $(f.h)(1) = 1$

pour $x < 1 : (f.h)(x) = f_1(x) = 0$

f_1 est continue en 1 d'où :

$$\lim_{x\to 1^-} (f.h)(x) = f_1(1) = 0 \neq (f.h)(1)$$

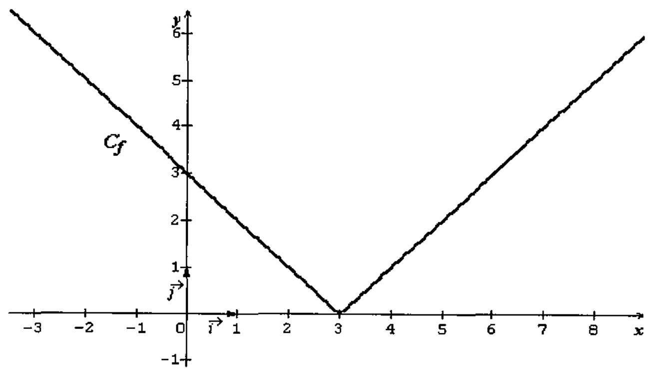
$(f.h)$ n' est pas continue en 1.

Exercice7 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)^2}{|x-3|} & si\ x \neq 3 \\ 0 & si\ x = 3 \end{cases}$$

1) pour $x \neq 3$

$f(x) = \dfrac{|x-3|^2}{|x-3|} = |x - 3|$ et $f(3) = 0$



2) pour x > 3 : $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)} = x - 3 = g(x)$

g est continue a droite en 3 (fonction polynôme) d'où : $\lim_{x \to 3^+} f(x) = g(3) = 0 = f(3)$

f est continue a droite en 3 , de même, f est continue à gauche en 3.

3) f est continue a droite et a gauche en 3 , d'ou f est continue en 3.

4) $f(x) = |x-3|$ pour tout $x \in IR$
(voir question (1))

$x \to (x-3)$ est continue sur IR

d'ou f est continue sur tout IR.

Exercice8 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & si\ x \leq 2 \\ \sqrt{x+2} & si\ x > 2 \end{cases}$$

1) $f(2) = 2^3 - 2 = 6$

* pour $x \in]-\infty; 2[$; $f(x) = x^3 - 2 = g(x)$

la fonction g est une fonction polynôme, elle est donc continue a gauche en 2.
donc : $\lim_{x \to 2^-} f(x) = g(2) = 6 = f(2)$

f est continue a gauche en 2.

- pour x $\in]2; +\infty[$ $f(x) = \sqrt{x+2} = h(x)$

h est continue a droite en 2.

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = h(2) = \sqrt{4} = 2 \neq f(2)$

f n'est pas continue a droite en 2.

2) f n'est pas continue à droite en 2 donc f n'est pas continue en 2.

Exercice9 :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x} & si\ x > 0 \\ -1 - \sqrt{-x} & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1) $f(0) = 0$

* pour $x \in]0, +\infty[$

$f(x) = 1 + \sqrt{x} = g(x)$

g est continue à droite en 0 d'où :

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = g(0) = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$

f n'est pas continue à droite en 0.

* de même f n'est pas continue à gauche en 0 car :

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq f(0)$

2) f n'est pas continue en 0

Exercice10 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} . \sqrt{|x|} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1) * pour $x \in]0, +\infty[$

$f(x) = \frac{x}{x} . \sqrt{x} = \sqrt{x} = g(x)$

g est continue à droite en 0 d'où :

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = g(0) = 0 = f(0)$

Donc f est continue à droite en 0

* pour $x \in]-\infty, 0]$

$f(x) = \frac{-x}{x} \sqrt{-x} = -\sqrt{-x} = h(x)$

h est continue à gauche en 0 d'où

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = h(0) = 0 = f(0)$

Par suite f est continue à gauche en 0.

2) f est continue à droite et à gauche en 0 il résulte que f est continue en 0.

3)

- Pour x $\in\ ]-\infty, 0[$ on a : $f(x) = -\sqrt{-x}$

  f est continue sur $]-\infty, 0[$.

- Pour x $\in\ ]0, +\infty[$ on a : $f(x) = \sqrt{x}$

  f est continue sur $]0, +\infty[$.

de plus f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur IR.

Exercice11 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{(3x+1)^2}}{3x+1} \quad , \quad Df = IR \setminus \{-\frac{1}{3}\}$$

1) Pour x $\neq -\frac{1}{3}$

$$(3x+1)^2 = |3x+1|^2 \Rightarrow f(x) = \frac{|3x+1|}{3x+1}$$

Tableau de signe de $(3x+1)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x+1$	$-$	0	$+$

- Pour x $\in\ ]-\frac{1}{3}, +\infty[$: $f(x) = \frac{3x+1}{3x+1} = 1 = g(x)$

g est continue à droite en $(-\frac{1}{3})$ (fonction constante)

d'où : $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{3})^+} f(x) = g(-\frac{1}{3}) = 1.$

2) pour x $\in\ ]-\infty, -\frac{1}{3}[$

$$f(x) = \frac{-(3x+1)}{3x+1} = -1 = h(x)$$

h est continue à gauche en $(-\frac{1}{3})$

d'où : $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{3})^-} f(x) = h(-\frac{1}{3}) = -1$

3) $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{3})^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to (-\frac{1}{3})^+} f(x)$

f n'admet pas de limite en $(-\frac{1}{3})$.

Exercice12 :

$$f(x) = \frac{x^2-4}{|x-2|}$$

- f est continue en (-2)

  Donc : $\lim\limits_{x \to (-2)} f(x) = f(-2) = \frac{0}{4} = 0$

  Tableau de Signe de$(x-2)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

- Pour x $\in\ ]-\infty, 2[$

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)} = -(x+2) = g(x)$$

g est continue à gauche en 2 (fonction polynôme)

d'où : $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = g(2) = -4$

- Pour $x \in]\,2\,,+\infty\,[$

$$f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=x+2=h(x)$$

h est continue à droite en 2 (polynôme)

d'où : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=h(2)=4$

Ainsi on trouve : $\lim\limits_{2^-} f \neq \lim\limits_{2^+} f$

Ce qui prouve que f n'admet pas de limite en 2.

Exercice13 :

$$x \to \begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2} & si\ x<2 \\ f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & si\ x>2 \end{cases}$$

1) pour $x \in]\,2\,,+\infty\,[$

$$f(x)=\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{\sqrt{x+2}^2-2^2}$$
$$=\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4}$$
$$=\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)}=\sqrt{x+2}+2=g(x)$$

g est continue à droite en 2

d'où : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=g(2)=4$

2) pour $x \in]-\infty, 2[$

$$f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2=h(x)$$

h est continue à gauche en 2

d'où $\lim\limits_{x\to(2)^-} f(x)=h(2)=4$

3) $\lim\limits_{x\to(2)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(2)^+} f(x)=4$

Par suite : $\lim\limits_{x\to2} f(x)=4$

4) *On a*: $\lim\limits_{x\to2} f(x)=4$ (nombre fini)

Donc f est prolongeable par continuité en 2

son prolongement par continuité est la fonction F

défini par $F(x)=\begin{cases} f(x) si\ x\neq 2 \\ 4\ \ si\ x=2\end{cases}$

Exercice14 :

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2-x}$$

1) Pour $x\neq 0$

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2-x}=\frac{x(x+2)}{x(x-1)}=\frac{x+2}{x-1}=g(x)$$

g est une fonction rationnelle et $0 \in Dg$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=g(0)=-2$

2) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-2$ (nombre fini)

Donc f est prolongeable par continuité en 0

Son prolongement est définie par

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & si\ x\neq 0 \\ -2 & si\ x=0\end{cases}$$

Exercice15 :

pour $x \in [-1,2]$, $f(x)=(x-1).E(x)$

Si $x\in[-1,0[$ *alors* $E(x)=-1$

Si $x \in [0,1[$ $alors$ $E(x) = 0$

Si $x \in [1,2[$ $alors$ $E(x) = 1$

d'où :

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1) & si\ \ x \in [-1,0[\\ 0 & si\ \ x \in [0,1[\\ x-1 & si\ \ x \in [1,2[\\ 2 & si\ \ x = 2 \end{cases}$$

*<u>Continuité de f en 0 :</u>

pour $x \in [-1,0[$, $f(x) = -x + 1 = g(x)$

g est continue à gauche en 0 d'où :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = g(0) = 1 \quad or \quad f(0) = 0$$

donc : $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq f(0)$

$$f\ n'est\ pas\ continue\ en\ 0$$

* <u>*Continuité de f en* 1</u>

$f(1) = 0$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f = \lim_{x\to 1^+} \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0 = f(1)$$

Par suite f est continue en 1.

* pour $x \in [1,2[$, $f(x) = x - 1 = h(x)$

h est continue à gauche en 2 d'où :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = h(2) = 1 \neq f(2)$$

$$f\ n'est\ pas\ continue\ à\ gauche\ en\ 2.$$

<u>Conclusion</u> : f est continue sur chacun des intervalles $[-1,0]$ et $[0,2[$

<u>Exercice16 :</u>

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & si\ x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$$

pour $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x} = \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = g(x)$$

g est continue en 0 *d'où* :

D'où $\lim_{x\to 0} f(x) = g(0) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$$

donc f est continue en 0

et comme f est continue sur $[-1,+\infty[\setminus\{0\}$

Alors : f est continue sur $[-1,+\infty[$

<u>Exercice17 :</u>

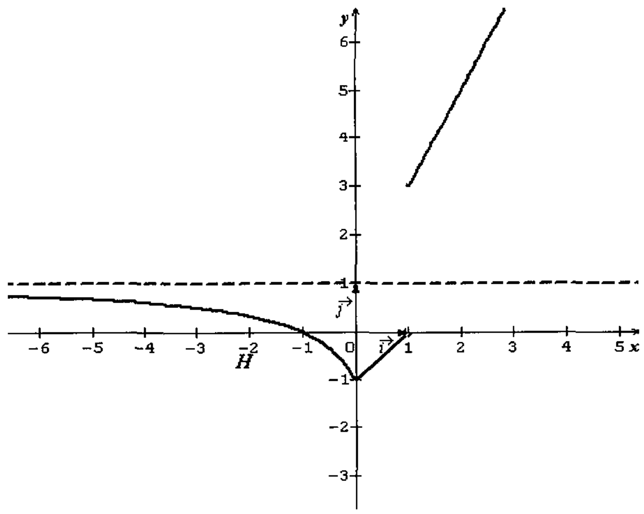
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x \geq 1 \\ x-1 & si\ \ 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & si\ \ x < 0 \end{cases}$$

1) pour $x < 0$ $f(x) = \dfrac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

$(H) : y = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

(H) : hyperbole de centre $w(1,1)$ d'asymptote

$x = 1$ et $y = 1$



2) f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $[0,1[$ et $[1,+\infty[$

$*$ *Continuité à gauche en* 0 :

pour $x \in]-\infty,0[$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} = g(x)$

g *est continue en* 0 *d'où* :

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = g(0) = -1 = f(0)$

f est continue à gauche en 0.

* Continuité en 1 à gauche :

pour $x \in [0,1[$ $\quad f(x) = x - 1 = h(x)$

h est continue en 1 d'où :

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = h(1) = 0$ et $f(1) = 3$

$\lim\limits_{x\to1^-} f = 0 \neq f(1)$

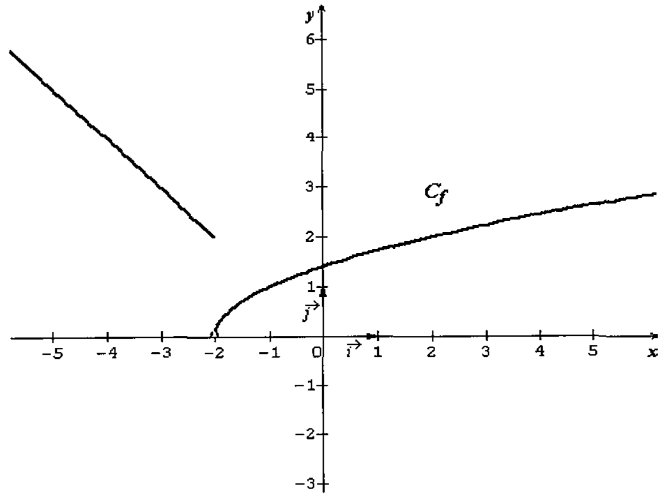
d'où f n'est pas continue à gauche en 1.

conclusion : f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $[1,+\infty[$

(f est continue sur $IR\backslash\{1\}$)

Exercice18 :

1)



2) pour $x \in]-\infty,-2]$ $\quad f(x) = ax + b$

$$a = \frac{f(-4)-f(-3)}{-4-(-3)} = \frac{4-3}{-4+3} \Rightarrow a = -1$$

$f(-3) = 3 \Rightarrow -3a + b = 3$

$\Rightarrow 3 + b = 3 \Rightarrow b = 0$

Ce qui donne : $f(x) = -x$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -x & si\ x \leq -2 \\ \sqrt{x+2} & si\ x > -2 \end{cases}}$$

3) $f(-2) = 2$

pour $x \in]-2,+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x+2} = g(x)$

g est continue à droite en (-2) d'où :

$\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = g(-2) = 0$

$\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = 0 \neq f(-2)$

f *n'est pas continue à droite en* (-2)

par suite f *n'est pas continue en* (-2)

Exercice19 :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & si\ x\neq 2\\ a & si\ x=2\end{cases}$$

Pour $x \in [1,+\infty[\setminus \{2\}$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

pour $x \neq 2$: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}=g(x)$

g *est continue en* 2 *d'où*

$$\lim_{x\to 2} f(x)=g(2)=\frac{1}{2}$$

f *est continue en* 2 *si et seulement si* $a=\dfrac{1}{2}$

Exercice20 :

Soit $P(x)=3x^3-2x^2-3x+2$

On a : $P(x)=(3x^3-3x)-(2x^2-2)$

$$P(x)=3x(x^2-1)-2(x^2-1)$$

$$P(x)=(x^2-1)(3x-2)$$

D'où $P(x)=(x-1)(x+1)(3x-2)$

* pour $x\neq -1$ *et* $x\neq 1$

On a : $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)(3x-2)}{(x-1)(x+1)}$

$$f(x)=3x-2=g(x)$$

g est continue en (-1) *et en* (1)

d'où : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=g(1)=1$

et $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x)=g(-1)=-5$

1) f *est continue en* 1 *pour* $a=1$

2) f *est continue en* (-1) *pour* $b=-5$

Exercice21 :

$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \dots+\ a_1 x+a_0$

1) $P(0)=a_0$

$$\frac{P(x)-P(0)}{x}=a_n x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\ \dots+\ a_2 x+a_1$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-P(0)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(a_n x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\dots+a_2 x+a_1)=a_1$$

2) a) $P(x)=3(x+1)^2=3(x^2+2x+1)$

$P(x)=3x^2+6x+3$

On a : $P(0)=3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3(x+1)^2-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-P(0)}{x}=a_1=6$$

b) $P(x)=(x^3+2)(x-1)$

$$P(x)=x^4-x^3+2x-2$$

On a : $P(0)=-2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^3+2)(x-1)+2}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-P(0)}{x}=a_1=2$$

c) $P(x)=(x+1)^3$

$$P(x)=x^3+3x^2+3x+1$$

On a : $P(0)=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-P(0)}{x}=a_1=3$$

Exercice22 :

1) pour $x \in IR^*$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(1+x^2)-1^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

pour $x \neq 0$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=g(x)$$

g est continue en 0 d'où :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=g(0)=0$$

2) pour $x \neq 0$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=h(x)$$

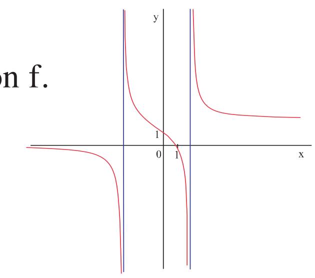
h *est continue en* 0

d'où $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=h(0)=\frac{1}{2}$

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.



1. Dans la figure ci-contre on a représentée graphiquement une fonction f.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x) =$

☐ 0 ☐ $+\infty$ ☐ -3.

2. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{7}{(x-2)^2} =$

☐ $-\infty$ ☐ 0 ☐ $+\infty$.

3. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -5$ alors

☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x)+5\big) = 0$ ☐ $x = -5$ est une asymptote à C_f ☐ $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x)+5\big) = 0$.

4. Sachant que pour tout réel x, on a $f(x) \geq x^3 - x$, on peut conclure que

☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ ☐ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x^2} =$

☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ 5.

VRAI – FAUX

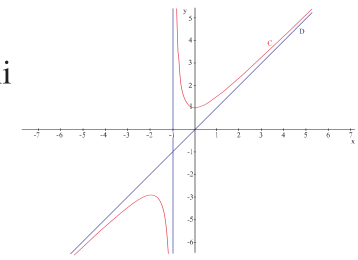
1. Si f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 1 alors f tend vers l'infini au voisinage de l'infini.
2. Si f est une fonction strictement positive sur $[1, +\infty[$, alors f tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.
3. Si f est une fonction qui tend vers $-\infty$, au voisinage de $+\infty$ alors f est strictement négative pour les grandes valeurs de x.
4. Si f est une fonction qui tend vers a en $+\infty$ alors f tend vers a en $-\infty$.
5. Si f est une fonction qui tend vers a en $+\infty$ alors $|f|$ tend vers a en $+\infty$.

Mobiliser ses compétences

Situation 1 Asymptote oblique

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

1. a. Déterminer son ensemble de définition D.
   b. Calculer les limites de f aux bornes de D.
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, on a $f(x) = ax + b + \dfrac{1}{x+1}$.

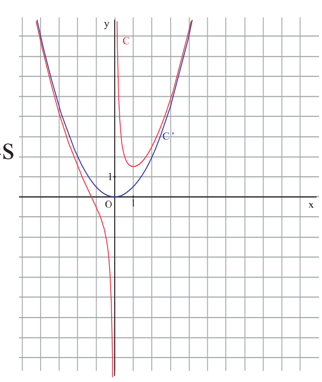


3. On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
   a. Expliquer pourquoi la droite Δ d'équation y = x est asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
   Etudier la position de C par rapport à Δ.
   b. Soit x un réel différent de -1 ; on désigne par M et P les points respectifs de C et Δ d'abscisse x.
   Si l'on veut que la distance MP soit inférieure 0.001, suffit-il de prendre $|x| > 11$? $|x| > 101$? $|x| > 1001$? Justifier votre réponse.
   c. Déterminer, sans faire de calcul, une approximation de f(3000) et un majorant de l'erreur ainsi commise.

Situation 2 courbe asymptote

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition D.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D.
3. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$.
   Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - g(x)\right)$.



Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note C et C' les courbes représentatives respectives de f et g.
Soit x un réel non nul ; on désigne par M et N les points respectifs de C et C' d'abscisse x.

4. a. Calculer MN en fonction de x.
   b. Vérifier que cette distance a tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.
   On dit que C' est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.
   On dit aussi que la fonction g est une approximation de f au voisinage de $+\infty$.
   c. Etudier la position de C par rapport à C' sur $]0, +\infty[$.
   d. Expliquer pourquoi C' est asymptote à C au voisinage de $-\infty$.
   e. Etudier la position de C par rapport à C' sur $]-\infty, 0[$.
5. Déterminer, sans faire de calcul, l'erreur commise en remplaçant $f(5.10^{99})$ par $\dfrac{(5.10^{99})^2}{2}$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Calculer dans chacun des cas ci-dessous la limite de la fonction f en $+\infty$.

$f(x) = \dfrac{-5}{(x-1000)^3}$; $f(x) = -2(x+100)^{100}$;

$f(x) = \sqrt{x-2006}$; $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{x-2006}}$.

Exercice 2

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$f(x) = x^2+|x|$; $f(x) = x^2+x|x|+2$;

$f(x) = -2(x+100)^{100} - 3x^5$; $f(x) = (-2x+1)^3+8x^3$;

$f(x) = (-2x+1)^{10} + |x^{11}|$.

Exercice 3

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$f(x) = \dfrac{-5x+1}{(x-1000)^3}$; $f(x) = \dfrac{x^4+3x^2-1}{(2x-5)^{17}}$; $f(x) = \left|\dfrac{2x^2-3x}{x-2}\right|$;

$f(x) = \dfrac{|x|(1-x)}{1+x^2}$; $f(x) = x^3 - \dfrac{x^2}{x+1}$; $f(x) = \dfrac{x^2+|x|+1}{|x|-2}$.

Exercice 4

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions f, g, f+g, f–g, fg et $\dfrac{f}{g}$.

a- $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; $g(x) = 3x^3+2x-1$.

b- $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$; $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^3-1}$.

c- $f(x) = \dfrac{-3x^3+2}{x^2+x^3}$; $g(x) = \dfrac{x^4-6x^3}{1-x^5}$.

Exercice 5

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{3^-} \dfrac{3x}{(x-3)(2x+5)}$; $\lim\limits_{3^+} \dfrac{3x}{(x-3)(2x+5)}$;

$\lim\limits_{-2^-} \dfrac{-3x^2+1}{2x+4}$; $\lim\limits_{-2^+} \dfrac{-3x^2+1}{2x+4}$.

Exercice 6

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{3^-} \dfrac{-3x+9}{x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{-1} \dfrac{x-1}{x^3+1}$;

$\lim\limits_{1^+} (x-1)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; $\lim\limits_{2^+} \dfrac{(x+3)(x-2)}{|x-2|}$.

Exercice 7

Calculer dans chacun des cas ci-dessous, la limite éventuelle de f à gauche respectivement à droite en a.

$f(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^3}$; a = 2.

$f(x) = \dfrac{2}{(3-x)^4} + 2\sqrt{x}$; a = 3.

$f(x) = \dfrac{2x-x^3}{\sqrt{x^2+2x}}$; a = –2.

Exercice 8

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

$f(x) = \dfrac{-x-5}{x}$; $f(x) = \dfrac{3x-1}{2-5x}$;

$f(x) = \dfrac{1-x^3}{2x+3}$; $f(x) = \dfrac{-3x^2+x}{-5x+10}$.

Exercice 9

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

$f(x) = \dfrac{-2x+3}{x^2-5}$; $f(x) = \dfrac{-x^4+2x}{x^2+2}$;

$f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2+3x}$; $f(x) = \dfrac{-3x^3+x+1}{x^2+x-2}$.

Exercice 10

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

$f(x) = \left|\dfrac{x^3-3}{x+2}\right|$; $f(x) = \left|\dfrac{x+2}{x^2-5}\right|$;

$f(x) = \dfrac{|x|(2-x)}{1-|x|}$; $f(x) = \dfrac{x^2-|x|-1}{|-2x|-3}$.

Exercice 11

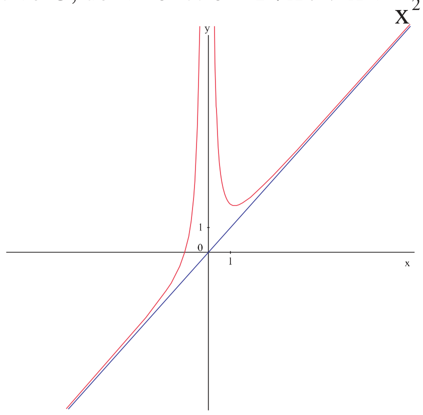
Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$f(x)=\sqrt{x^2+|x|-1} \quad ; \quad f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad ;$$

$$f(x)=-\frac{1}{x-4}+\sqrt{\frac{3x}{(x-1)^3}} \quad ; \quad f(x)=x-\frac{1}{\sqrt{(-x+2)^6}}.$$

Exercice 12

Dans le plan muni d'un repère, on a tracé la courbe représentative C, de la fonction $f : x \mapsto x+\frac{1}{x^2}$.



1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que C admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a-Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

b-En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 14

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2-4x+6}{x^2-3x+2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Factoriser le trinôme x^2-3x+2.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, en précisant les asymptotes à C.
4. Déterminer le signe de $f(x)-2$.

En déduire la position de C par rapport à son asymptote en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\frac{x^2+x-10}{(x-2)^2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Vérifier que pour tout $x \neq 2$, $f(x)=1+\frac{5x-14}{(x-2)^2}$.
3. En déduire les asymptotes à C.
4. Préciser la position de C par rapport à son asymptote en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exercice 16

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Etudier la parité de f.

2. a. Montrer que pour tout réel x non nul, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

b. En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0.

3. a. Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}-\frac{1}{x}$.

b. En déduire que f admet une asymptote D d'équation $y=1$ en $+\infty$.

c. Etudier la position de C par rapport à D.

4. Etudier la limite de f en $-\infty$ en précisant l'asymptote à C en $-\infty$.

Etudier la position de C par rapport à cette asymptote.

Exercice 17

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier la parité de f.

2. Vérifier que pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^6}}$.

En déduire $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}$, puis $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}$.

3. Déterminer les asymptotes à C.

4. Préciser la position de C par rapport à son asymptote en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2-2x+2}{2x}.$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Montrer que la droite D d'équation $y = \dfrac{x}{2} - 1$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

b. Etudier la position de C par rapport à D.

Exercice 19

On considère la fonction $f : x \mapsto -x+1+\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Soit Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C et Δ.

b. Etudier la position de C par rapport à Δ.

4. Soit x un réel différent de 2. On désigne par M et N les points respectifs de C et Δ d'abscisse x.

a. Calculer en fonction de x, la distance MN.

b. Calculer la limite de $f(x) - (-x + 1)$ quand x tend vers l'infini.

c. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 20

Soit la fonction $f : x \mapsto ax + b + \dfrac{1}{3-x}$, où a et b sont deux réels.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Sachant que $f(2) = 1$ et $f(4) = -3$, déterminer a et b.

3. a. Montrer que C admet une asymptote verticale D, dont on donnera une équation.

b. Soit D' la droite d'équation $y = -x + 2$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et D'.

On note I ce point.

4. On se propose de montrer que I est un centre de symétrie de la courbe C.

Pour tout point $M(x, y)$, on note $N = S_I(M)$.

a. Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M.

b. Soit $M(x, f(x))$ où $x \neq 3$. Vérifier que N est un point de C, si et seulement si, $6 - x \neq 3$ et $f(6 - x) = -2 - f(x)$.

c. Conclure.

Exercice 21

On considère la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c - \dfrac{1}{x+1}$, où a, b et c sont trois réels.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On suppose que $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(2) = \dfrac{8}{3}$.

1. Déterminer les réels a, b et c.

2. On désigne par P la parabole d'équation $y = x^2 - x + 1$.

a. Etudier la position de la parabole P par rapport à la courbe C.

b. Soit x un réel différent de -1, M un point de C et N un point de la parabole P, de même abscisse x.

Calculer en fonction de x, la distance MN.

c. Calculer la limite de $f(x) - (x^2 - x + 1)$ quand x tend vers l'infini.

d. A quelle condition la distance MN est-elle inférieure ou égale à 0.01 ?

QCM :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = +\infty \longrightarrow$ (b)

2) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{7}{(x-2)^2} = +\infty \longrightarrow$ (c)

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + 5] = 0 \longrightarrow$ (a)

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \longrightarrow$ (a)

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5}{x^2}\right) = 0 \longrightarrow$ (b)

Vrai – Faux

1) Vrai (cours)

2) Faux

Contre exemple :

$f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x \in [1, +\infty[$

3) Vrai (voir définition)

4) Faux

Contre exemple :

$Soit\ f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$

$\lim\limits_{+\infty} f = 0$ mais $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$

5) Faux

Contre exemple :

$Soit : f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$

$\lim\limits_{+\infty} f = -1$ mais $\lim\limits_{+\infty} |f| = 1$

Mobiliser ses Compétences :

Situation 1

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

1) a) $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) $Df =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \underbrace{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}}_{fonction\ rationnelle} =$

$$= \underbrace{\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x}}_{\text{limite de monome de plus haut degré}} = \lim_{x \to -\infty} (x) = -\infty$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$

- On a : $\lim\limits_{x \to (-1)^-} (x^2 + x + 1) = 1$

  et $\lim\limits_{x \to (-1)^-} (x + 1) = 0^-$ donc

  $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ car

$\lim\limits_{x \to (-1)^+} (x + 1) = 0^+$

2)

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{x^2 + x}{x + 1} + \frac{1}{x + 1}$$

$$= \frac{x(x+1)}{x + 1} + \frac{1}{x + 1} = x + \frac{1}{x + 1}$$

donc $a = 1$ et $b = 0$

Deuxième méthode :

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}=ax+b+\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{ax(x+1)+b(x+1)+1}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+b+1}{x+1}$$

par identification on aura : $\begin{cases} a=1 \\ a+b=1 \\ b+1=1 \to b=0 \end{cases}$

3) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$

De même $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$

Conclusion :

La droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

b) $MP=|f(x)-x|=\left|\frac{1}{x+1}\right|=\frac{1}{|x+1|}$

$MP<0.001 \Leftrightarrow=\frac{1}{|x+1|}<\frac{1}{1000}\Leftrightarrow |x+1|>1000$

$\Leftrightarrow x+1<-1000$ ou bien $x+1>1000$

$\Leftrightarrow x<-1001$ ou bien $x>999$

Lorsque $|x|>1001$ alors $|x+1|>1000$

d'ou $MP<0.001$

c)

Comme : $x=3000>1001$ donc d'aprés b)

$MP=|f(3000)-3000|<0.001$

donc : $-0.001<f(3000)-3000<0.001$

par suite : $2999.999<f(3000)<3000.001$

il resulte : $f(3000)\simeq 3000$ à une erreur de 0.001

Situation 2

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$$

1) $Df=\mathbb{R}^*$

2) $Df=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

• $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2}{2}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

donc $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2}{2}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

3)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{x^2}{2}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cancel{x^2}}{2}+\frac{1}{x}-\frac{\cancel{x^2}}{2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

4) a) $MN=|f(x)-g(x)|=\frac{1}{|x|}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|=+\infty$

c)Pour $x\in]0,+\infty[$ on a $|x|=x$

donc $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}>0$

D'où la courbe ($\mathcal{C}$) de la fonction f est au dessus de ($\mathcal{C}''$) celle de g sur l'intervalle]0,+∞[

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} MN = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|} = 0$

Donc ($\mathcal{C}''$) est asymptote à ($\mathcal{C}$) au voisinage de (− ∞)

e)Pour

$x\in\ ]-\infty,0[$ on a : $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}<0$

D'où la courbe ($\mathcal{C}$) de la fonction f est au dessous de ($\mathcal{C}''$) celle de g sur l'intervalle] − ∞,0 [

5)

$g(5\times10^{99})=\frac{(5\times10^{99})^2}{2}$

Donc lorsque on prend $f(5\times10^{99})=\frac{(5\times10^{99})^2}{2}$

l'erreur commise est $\frac{1}{5\times10^{99}}=2\times10^{-100}$

Exercices

Exercice 1 :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1000)^3=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5}{(x-1000)^3}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+100)^{100}=+\infty$ et $(-2)<0$

Donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-2(x+100)^{100}\right]=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2006)=+\infty$

Donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2006}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2006)=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{\sqrt{x-2006}}=0$

Exercice 2 :

a) $f(x)=x^2+|x|$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

b) $f(x)=x^2+x|x|+2$

*Pour $x\geq0$ on a $|x|=x$ par suite $f(x)=2x^2+2$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

*Pour $x\leq0$ on a $|x|=-x$ par suite $f(x)=2$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$

c) $f(x)=-2(x+100)^{100}-3x^5$

f est une fonction polynôme, son terme de plus haut degré est : $(-2\cdot x^{100})$

D'où

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2\cdot x^{100})=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2\cdot x^{100})=-\infty$

d) $f(x)=(-2x+1)^3+8x^3$

Or : $(-2x+1)^3=-8x^3+12x^2-6x+1$

Donc : $f(x)=12x^2-6x+1$

f est une fonction polynôme, son terme de plus haut degré est : $(12\cdot x^2)$

D'où

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}(12\cdot x^2)=+\infty$

Remarque: $|x| \to +\infty$ signifie $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

e) $f(x) = (-2x+1)^{10} + |x|^{11}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{|x|\to+\infty} (-2x+1)^{10} = +\infty \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|^{11} = +\infty \end{cases} \quad donc \ \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Exercice 3 :

a)

$$f(x) = \frac{-5x+1}{(x-1000)^3} = \frac{-5x+1}{x^3 - 3000x^2 + 3\times10^6 x + 10^9}$$

(f est une fonction rationnelle)

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{-5x}{x^3}\right) = \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{-5}{x^2}\right) = 0$$

b)

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 1}{(2x-5)^{17}} \quad \text{(fonction rationnelle)}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^4}{(2x)^{17}} = \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{1}{2^{17}\times x^{13}}\right) = 0$$

c) $f(x) = \left|\dfrac{2x^2 - 3x}{x-2}\right|$

$$* \ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} (2x) = +\infty$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$* \ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3x}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} (2x) = -\infty$$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

d) $f(x) = \dfrac{|x|(1-x)}{x^2+1}$

* Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x - x^2}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-x^2}{x^2}\right) = -1$$

* Pour $x < 0$, $f(x) = \dfrac{-x + x^2}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$$

e) $f(x) = x^3 - \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x^4 + x^3 - x^2}{x+1}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4 + x^3 - x^2}{x+1}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4 + x^3 - x^2}{x+1}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 + |x| + 1}{|x| - 2}$

* Pour $x > 0$ on a : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x-2}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} (x) = +\infty$$

* Pour $x < 0$ on a : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{-x-2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{-x}\right) = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$$

Exercice 4 :

a)

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty}(\frac{-1}{x^2}) = 0$

•* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(3x^3) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3) = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)] = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+g(x)] = -\infty$

•$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = \dfrac{-3x^3-2x+1}{x^2}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -3x = +\infty$

• $(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{-1}{x^2(3x^3+2x-1)} = \dfrac{-1}{3x^5+2x^3-x^2}$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{|x|\to+\infty}(\dfrac{-1}{3x^5}) = 0$

b)

•* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x^2}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{x^2}{x}) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x) = -\infty$

•* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2x}{x^3}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2}{x^2}) = 0$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{2}{x^2}) = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)] = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+g(x)] = -\infty$

•$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = \dfrac{x^2(2x-1)}{(x+1)(x^3-1)} = \dfrac{2x^3-x^2}{x^4+x^3-x-1}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x} = 0$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x} = 0$

• $(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2(x^3-1)}{(x+1)(2x-1)} = \dfrac{x^5-x^2}{2x^2+x-1}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x^5}{2x^2}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x^3}{2}) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{x^5}{2x^2}) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{x^3}{2}) = -\infty$

c)

•* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{-3x^3}{x^2}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-3x) = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{-3x^3}{x^2}) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-3x) = +\infty$

•* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x^4}{-x^5}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-\dfrac{1}{x}) = 0$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{x^4}{-x^5}) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-\dfrac{1}{x}) = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)] = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+g(x)] = +\infty$

•$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = \dfrac{(-3x^3+2)(x^4-6x^3)}{(x^2+x^3)(1-x^5)}$

$= \dfrac{-3x^7+18x^6+2x^4-12x^3}{-x^8-x^7+x^3+x^2}$

* $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-3x^7}{-x^8} = \lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{3}{x} = 0$

• $(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(-3x^3+2)(1-x^5)}{(x^2+x^3)(x^4-6x^3)}$

$= \dfrac{3x^8-2x^5-3x^3+2}{x^7-5x^6-6x^5}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{3x^8}{x^7}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(3x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{3x^8}{x^7}) = \lim\limits_{x\to-\infty}(3x) = -\infty$

Exercice 5 :

- On a : $\lim\limits_{x\to 3^-}(3x)=9$ et $\lim\limits_{x\to 3^-}(x-3)(2x+5)=0^-$

d'où $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3x}{(x-3)(2x+5)}=-\infty$

- On a : $\lim\limits_{x\to 3^+}(3x)=9$ et $\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)(2x+5)=0^+$

d'où $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{3x}{(x-3)(2x+5)}=+\infty$

- On a : $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(-3x^2+1)=-11$

aussi on a :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Signe de $(2x+4)$	$-$	0	$+$

ce qui donne : $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(2x+4)=0^-$

et $\lim\limits_{x\to(-2)^+}(2x+4)=0^+$

d'où $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{-3x^2+1}{2x+4}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{-3x^2+1}{2x+4}=-\infty$

Exercice 6 :

a) Soit $f(x)=\dfrac{-3x+9}{x^2-2x-3}$

Posons $A(x)=x^2-2x-3=0$

On a : $a-b+c=0$ donc $x'=-1$ et $x''=3$

par suite : $A(x)=(x+1)(x-3)$

Pour $x\neq -1$ et $x\neq 3$ on aura :

$$f(x)=\frac{-3\cancel{(x-3)}}{(x+1)\cancel{(x-3)}}=\frac{-3}{x+1}=g(x)$$

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=g(3)=\frac{-3}{4}$$

car g est continue en 3.

b) Soit $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3+1}$

On sait que : $x^3+1=(x+1)(\underbrace{x^2-x+1}_{positif})$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de (x^3+1)	$-$	0	$+$

il resulte

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x-1}{x^3+1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty \text{ et } \lim_{x\to(-1)^+}\frac{x-1}{x^3+1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

Conclusion : f n'admet pas de limite en (-1)

c) Soit $f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

pour $x>1$: $f(x)=(\sqrt{x-1})^2\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

$=\sqrt{x-1}\times\sqrt{x}=g(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=g(1)=0$ (g est continue à droite en 1)

donc $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$

d) Soit $f(x)=\dfrac{(x+3)(x-2)}{|x-2|}$

Pour $x>2$, on a : $f(x)=\dfrac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}=(x+3)$

soit $g(x)=(x+3)$ continue sur $\mathbb{R}$ donc

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=g(2)=5$

Exercice 7 :

a) • $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-4}{(x-2)^3}=+\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)^3=0^-$

• $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-4}{(x-2)^3}=-\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^3=0^+$

b) Soit $f(x)=\frac{2}{(3-x)^4}+2\sqrt{x}$

• *Comme* $\lim\limits_{x\to3}(3-x)^4=0^+$ *alors* $\lim\limits_{x\to3}\frac{2}{(3-x)^4}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to3}\left(2\sqrt{x}\right)=2\sqrt{3}$

d'où $\lim\limits_{x\to3}f(x)=+\infty$ par suite $\lim\limits_{3^+}f=\lim\limits_{3^-}f=+\infty$

c) Soit $f(x)=\frac{2x-x^3}{\sqrt{x^2+2x}}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de (x^2+2x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

$Df=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

Comme $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(2x-x^3)=4$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\sqrt{2x+x^2}=0^+$

d'où $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=+\infty$

Exercice 8 :

a)

Soit $f(x)=\frac{-x-5}{x}$; $Df=\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{-x}{x}=-1$

• $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-x-5}{x}=\frac{-5}{0^+}=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-x-5}{x}=\frac{-5}{0^-}=+\infty$

b) Soit $f(x)=\frac{3x-1}{2-5x}$; $Df=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{5}\right\}$

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{3\cancel{x}}{-5\cancel{x}}=-\frac{3}{5}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
Signe de $(2-5x)$		$+$	0	$-$	

• $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^+}(3x-1)=\frac{1}{5}$ *et* $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^+}(2-5x)=0^-$

donc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^+}f(x)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^-}(2-5x)=0^+$ *donc* $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^-}f(x)=+\infty$

c) Soit $f(x)=\frac{1-x^3}{2x+3}$; $Df=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{-\cancel{x}^3}{2\cancel{x}}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{-x^2}{2}=-\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $(2x+3)$		$-$	0	$+$	

• $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}(1-x^3)=\frac{35}{8}$ *et* $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}(2x+3)=0^+$

donc $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}f(x)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}(2x+3)=0^-$ *donc* $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}f(x)=-\infty$

d) Soit $f(x)=\frac{-3x^2+x}{-5x+10}$; $Df=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3\cancel{x}^2}{-5\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{5}=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3\cancel{x}^2}{-5\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{5}=-\infty$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $(-5x+10)$		$+$	0	$-$	

- $\lim\limits_{x\to 2^+}(-3x^2+x)=-10$ *et* $\lim\limits_{x\to 2^+}(-5x+10)=0^-$

  $donc\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{-10}{0^-}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 2^-}(-5x+10)=0^+$ $donc\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{-10}{0^+}=-\infty$

Exercice 9 :

a) Soit $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x^2-5}$

$x^2-5=0 \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}\ \ ou\ \ x=-\sqrt{5}$

$Df=\left\{x\in\mathbb{R}\text{ telque }x^2-5\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$

- $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}^2}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-2}{x}=0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
Signe de (x^2-5)		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})^-}(-2x+3)=2\sqrt{5}+3>0$ *et* $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})^-}(x^2-5)=0^+$

  $donc\ \lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})^-} f(x)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})^+}(-2x+3)=2\sqrt{5}+3>0$ *et* $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})^+}(x^2-5)=0^-$

  $donc\ \lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})^-} f(x)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to(\sqrt{5})^-}(-2x+3)=-2\sqrt{5}+3<0$ *et* $\lim\limits_{x\to(\sqrt{5})^-}(x^2-5)=0^-$

  $donc\ \lim\limits_{x\to(\sqrt{5})^-} f(x)=\dfrac{constante\ negative}{0^-}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to(\sqrt{5})^+}(-2x+3)=-2\sqrt{5}+3<0$ *et* $\lim\limits_{x\to(\sqrt{5})^+}(x^2-5)=0^+$

  $donc\ \lim\limits_{x\to(\sqrt{5})^+} f(x)=\dfrac{constante\ negative}{0^+}=-\infty$

b)

Soit $f(x)=\dfrac{-x^4+2x}{x^2+2}$; $x^2+2>0$ $donc\ Df=\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-x^4}{x^2}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}(-x^2)=-\infty$

c) Soit $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2+3x}$

$x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0\ \ ou\ \ x=-3$

$Df=\left\{x\in\mathbb{R}\text{ telque }x^2+3x\neq 0\right\}=\mathbb{R}^*\setminus\left\{-3\right\}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}^3}{\cancel{x}^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}^3}{\cancel{x}^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=-\infty$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
Signe de (x^2+3x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $\lim\limits_{x\to(-3)^-}(x^3-2x^2+1)=-44<0$ *et* $\lim\limits_{x\to(-3)^-}(x^2+3x)=0^+$

  $donc\ \lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x)=-\infty\left(\text{de la forme }\dfrac{-44}{0^+}\right)$

• $\lim\limits_{x\to(-3)^+}(x^3-2x^2+1)=-44<0$ *et* $\lim\limits_{x\to(-3)^+}(x^2+3x)=0^-$

$$donc \ \lim_{x\to(-3)^+} f(x)=+\infty \left(\text{de la forme } \frac{-44}{0^-}\right)$$

• $\lim\limits_{x\to0^-}(x^3-2x^2+1)=1>0$ *et* $\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+3x)=0^-$

$$donc \ \lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty \left(\text{de la forme } \frac{1}{0^-}\right)$$

• $\lim\limits_{x\to0^+}(x^3-2x^2+1)=1>0$ *et* $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+3x)=0^+$

$$donc \ \lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty \left(\text{de la forme } \frac{1}{0^+}\right)$$

d) Soit $f(x)=\dfrac{-3x^3+x+1}{x^2+x-2}$

$x^2+x-2=0$ *et* $a+b+c=0$

$\Leftrightarrow x'=1$ *ou* $x''=-2$

$Df=\{x\in\mathbb{R} \text{ telque } x^2+x-2\neq0\}=\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3\cancel{x}^3}{\cancel{x}^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3\cancel{x}^3}{\cancel{x}^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x)=+\infty$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de (x^2+x-2)		$+$	0	$-$	0	$+$	

• $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(-3x^3+x+1)=23>0$ *et* $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(x^2+x-2)=0^+$

$$donc \ \lim_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty \left(\text{de la forme } \frac{23}{0^+}\right)$$

• $\lim\limits_{x\to(-2)^+}(-3x^3+x+1)=23>0$ *et* $\lim\limits_{x\to(-2)^+}(x^2+x-2)=0^-$

$$donc \ \lim_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty \left(\text{de la forme } \frac{23}{0^-}\right)$$

• $\lim\limits_{x\to1^-}(-3x^3+x+1)=-1<0$ *et* $\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+x-2)=0^-$

$$donc \ \lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty \left(\text{de la forme } \frac{-1}{0^-}\right)$$

• $\lim\limits_{x\to1^+}(x^3-2x^2+1)=-1<0$ *et* $\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+x-2)=0^+$

$$donc \ \lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty \left(\text{de la forme } \frac{-1}{0^+}\right)$$

Exercice 10 :

a) Soit $f(x)=\left|\dfrac{x^3-3}{x+2}\right|$

$Df=\{x\in\mathbb{R} \text{ telque } x+2\neq0\}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$f(x)=|g(x)|$ *avec* $g(x)=\dfrac{x^3-3}{x+2}$

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}^3}{\cancel{x}}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}(x^2)=+\infty$

d'où $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=+\infty$

• on a : $f(x)=\left|\dfrac{x^3-3}{x+2}\right|=\dfrac{|x^3-3|}{|x+2|}$

* $\lim\limits_{x\to(-2)}|x^3-3|=5$ *et* $\lim\limits_{x\to(-2)}|x+2|=0^+$

d'où $\lim\limits_{x\to(-2)} f(x)=\dfrac{5}{0^+}=+\infty$

par suite $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$

b) Soit $f(x) = \left|\dfrac{x+2}{x^2-5}\right|$

$x^2-5=0 \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}$ *ou* $x=-\sqrt{5}$

$Df = \{x \in \mathbb{R} \text{ telque } x^2-5 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{x+2}{x^2-5} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}^2} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

d'ou $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$

• on a : $f(x) = \left|\dfrac{x+2}{x^2-5}\right| = \dfrac{|x+2|}{|x^2-5|}$

* $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}} |x^2-5| = 0^+$ *et* $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}} |x+2| = \sqrt{5}+2(\textit{positif})$

d'où $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}} f(x) = \dfrac{\sqrt{5}+2}{0^+} = +\infty$

par suite $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{5}^-} f(x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})} |x^2-5| = 0^+$ *et* $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})} |x+2| = \sqrt{5}-2(\textit{positif})$

d'où $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})} f(x) = \dfrac{\sqrt{5}-2}{0^+} = +\infty$

par suite $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5}^+)} f(x) = \lim\limits_{x\to(-\sqrt{5}^-)} f(x) = +\infty$

c)

Soit $f(x) = \dfrac{|x|\cdot(2-x)}{1-|x|}$

$1-|x| = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ *ou* $x = -1$

$Df = \{x \in \mathbb{R} \text{ telque } 1-|x| \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

•*Pour* $x > 1 : f(x) = \dfrac{x(2-x)}{1-x} = \dfrac{2x-x^2}{1-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\cancel{x}^2}{-\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$

• *Pour* $x < -1 : f(x) = \dfrac{-x(2-x)}{1+x} = \dfrac{-2x+x^2}{1+x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} (x) = -\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $(1-\lvert x\rvert)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• $\lim\limits_{x\to(-1)^-} |x|\cdot(2-x) = 3$ *et* $\lim\limits_{x\to(-1)^-} (1-|x|) = 0^-$

donc $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty \left(\text{de la forme } \dfrac{3}{0^-}\right)$

• $\lim\limits_{x\to(-1)^+} |x|\cdot(2-x) = 3$ *et* $\lim\limits_{x\to(-1)^+} (1-|x|) = 0^+$

donc $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty \left(\text{de la forme } \dfrac{3}{0^+}\right)$

• $\lim\limits_{x\to1^-} |x|\cdot(2-x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to1^-} (1-|x|) = 0^+$

donc $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty \left(\text{de la forme } \dfrac{1}{0^+}\right)$

• $\lim\limits_{x\to1^+} |x|\cdot(2-x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to1^+} (1-|x|) = 0^-$

donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty \left(\text{de la forme } \dfrac{1}{0^-}\right)$

d)

$f(x) = \dfrac{x^2-|x|-1}{|2x|-3}$

$|2x|-3 = 0 \Leftrightarrow |2x| = 3 \Leftrightarrow 2x = 3$ *ou* $2x = -3$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ *ou* $x = -\dfrac{3}{2}$

$Df = \{x \in \mathbb{R} \text{ telque } |2x|-3 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right\}$

•*Pour* $x>\frac{3}{2}: f(x)=\frac{x^2-x-1}{2x-3}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}^2}{2\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x}{2})=+\infty$$

• *Pour* $x<-\frac{3}{2}$:

$$f(x)=\frac{x^2+x-1}{-2x-3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}^2}{-2\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{x}{2})=+\infty$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $(\lvert 2x\rvert-3)$		+	0	−	0	+	

• $\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} x^2-|x|-1=-\frac{1}{4}$ *et* $\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}(|2x|-3)=0^+$

donc $\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} f(x)=-\infty\left(\text{de la forme }\frac{-0.25}{0^+}\right)$

• $\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} x^2-|x|-1=-\frac{1}{4}$ *et* $\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}(|2x|-3)=0^-$

donc $\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} f(x)=+\infty\left(\text{de la forme }\frac{-0.25}{0^-}\right)$

• $\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} x^2-|x|-1=-\frac{1}{4}$ *et* $\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-}(|2x|-3)=0^-$

donc $\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} f(x)=+\infty\left(\text{de la forme }\frac{-0.25}{0^-}\right)$

• $\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} x^2-|x|-1=-\frac{1}{4}$ *et* $\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+}(|2x|-3)=0^+$

donc $\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x)=-\infty\left(\text{de la forme }\frac{-0.25}{0^+}\right)$

Exercice 11 :

a) $f(x)=\sqrt{x^2+|x|-1}$

$\lim_{x\to+\infty} x^2+|x|-1=+\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} x^2+|x|-1=+\infty$

d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

b) $f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

• $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt{1}=1$

d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}_{1}=+\infty$

• $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt{1}=1$

d'où $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{x}_{-\infty}\underbrace{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}_{1}=-\infty$

c) $f(x)=\frac{-1}{x-4}+\sqrt{\frac{3x}{(x-1)^3}}$

•* $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{(x-1)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^3-3x^2+3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^3}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x}{(x-1)^3}}=\sqrt{0}=0$

* $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x-4}=\frac{-1}{+\infty}=0$

d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0+0=0$

$\bullet * \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x}{(x-1)^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^3-3x^2+3x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{3x}{(x-1)^3}} = \sqrt{0} = 0$

$* \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{x-4} = \frac{-1}{-\infty} = 0$

$d'où \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0+0 = 0$

d) $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{(-x+2)^6}}$

$\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} (-x+2)^6 = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{(-x+2)^6} = +\infty$ *par suite* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{(-x+2)^6}} = 0$

il resulte : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\underbrace{x}_{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(-x+2)^6}}}_{\searrow 0} \right) = +\infty$

$\bullet \lim\limits_{x\to-\infty} (-x+2)^6 = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{(-x+2)^6} = +\infty$ *par suite* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{(-x+2)^6}} = 0$

il resulte : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\underbrace{x}_{-\infty} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(-x+2)^6}}}_{\searrow 0} \right) = -\infty$

Exercice 12 :

$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

1) $Df = \{x \in \mathbb{R} , x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

2) Graphiquement on a :

$\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \otimes \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\otimes \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \quad \otimes \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

d'où la droite d'équation x = 0 **(la droite des ordonnées)** est une asymptote verticale pour C

Exercice 13 :

1) $* \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1) = +\infty \ donc \ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

$* \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$

$d'où \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + (-x) = +\infty$

2) a) pour tout réel x on a :

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Donc $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} ; x \in \mathbb{R}$

b)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+1\right) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

$d'où \ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + \underbrace{x}_{+\infty} \right) = +\infty$

$ce \ qui \ donne : \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Ainsi la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à C au voisinage de plus l'infini

Exercice 14 :

$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 6}{x^2 - 3x + 2}$

1)

$Df = \{x \in \mathbb{R} , x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$

Or on a :

$x^2-3x+2=0$

$a+b+c=0$ donne $x'=1$ *et* $x''=2$

Par suite $Df=\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$

2) Rappelons que : $ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$

Donc $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

3)

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2} = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2} = 2$

Ce qui prouve que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe C de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

*

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de (x^2-3x+2)		+	0	−	0	+	

*• $\lim\limits_{x\to1^-}\left(x^2-3x+2\right)=0^+$ *et* $\lim\limits_{x\to1^-}(2x^2-4x+6)=4$

donc $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2-3x+2\right)=0^-$ *et* $\lim\limits_{x\to1^+}(2x^2-4x+6)=4$

donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\frac{4}{0^-}=-\infty$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe C de f

*• $\lim\limits_{x\to2^-}\left(x^2-3x+2\right)=0^-$ *et* $\lim\limits_{x\to2^-}(2x^2-4x+6)=6$

donc $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\frac{6}{0^-}=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to2^+}\left(x^2-3x+2\right)=0^+$ *et* $\lim\limits_{x\to2^+}(2x^2-4x+6)=6$

donc $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$

Donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe C de f

4) Pour tout $x\in Df$ on a :

$$f(x)-2=\frac{2x^2-4x+6}{x^2-3x+2}-2$$

$$=\frac{(2x^2-4x+6)-2(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2}$$

$$=\frac{2x^2-4x+6-2x^2+6x-4}{x^2-3x+2}$$

$$=\frac{2x+2}{x^2-3x+2}$$

Δ D'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe C de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

On va tout d'abord étudier le signe de $f(x)-2$:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
Signe de (x^2-3x+2)		+		+	0	−	0	+	
Singe de $(2x+2)$		−	0	+		+		+	
Signe de $\left(\frac{2x+2}{x^2-3x+2}\right)$		−		+		−		+	

D'où :

x	$-\infty$ -1	1	2	$+\infty$
Signe de ($f(x)-2$)	$-$	$+$	$-$	$+$
Position relative	Δ aux dessus de C	Δ aux dessous de C	Δ aux dessus de C	Δ aux dessous de C

$A(-1,2)$: point d'intersection de C avec Δ

Exercice 15 :

1) $$f(x) = \frac{x^2+x-10}{(x-2)^2}$$

$$* \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2} = 1$$

$$*\bullet \lim_{x\to2}\left(x^2+x-10\right) = -4 \ et \ \lim_{x\to2}(x-2)^2 = 0^+$$

$$donc \ \lim_{x\to2} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

2) pour x$\neq$ 2

$$1+\frac{5x-14}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2+(5x-14)}{(x-2)^2} = \frac{x^2+x-10}{(x-2)^2} = f(x)$$

3) On a

$$\lim_{x\to2} f(x) = -\infty$$

Donc la droite d'équation : $x = 2$ est une asymptote verticale à C.

On a $* \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

Donc la droite D d'équation : $y = 1$ est une asymptote horizontale à C.

4) $$\text{f(x)-1} = \frac{5x-14}{(x-2)^2} \quad ; \quad \Delta: y = 1$$

le signe de $(f(x)-1)$ *est celui de* $(5x-14)$

x	$-\infty$	$14/5$	$+\infty$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$
Position rel ative	Δ/C		C/Δ

Exercice 16 :

1) $$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

a) $Df = \{x\in\mathbb{R} \text{ telque } x\neq0\} = \mathbb{R}^*$

b) $\bullet$Pour $x\in Df = \mathbb{R}^*$, *on a* : $(-x)\in Df$

$$\bullet f(-x) = \frac{\sqrt{1+(-x)^2}-1}{(-x)} = -\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$$

donc : $f(-x) = -f(x)$

Conclusion : f est une fonction impaire

2) a) $\bullet$Pour $x\in\mathbb{R}^*$

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\times\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{(1+x^2)-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

b)

Pour $x\neq0$ on a : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = g(x)$

g est continue en 0 d'où $\lim_{x\to0} f(x) = g(0) = 0$

$\lim_{x\to0} f(x) = 0$: nombre fini donc f admet un prolongement par continuité en 0

3) a) Pour $x>0$ *on a* : $\sqrt{x^2}=x$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{x}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}-\frac{1}{x}\ ;\ x>0$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\ d'où\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}=1$$

$$et\ comme\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\ on\ aura:\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

Donc la droite D d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe C de f au voisinage de $+\infty$

c)

• Pour $x\in\,]0,+\infty[$ *on a* : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$

**comme*: $\sqrt{1+x^2}+1>\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}=x>0$

alors $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}<1$ d'où $f(x)<1$

par suite la courbe C est dessous de l'asymptote D: $y=1$ *sur* $]0,+\infty[$

• Pour $x\in\,]-\infty,0[$ *on a* : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}<0<1$

d'où $f(x)<1$ *ce qui prouve que* la courbe C est dessous de l'asymptote D: $y=1$ sur $]-\infty,0[$

4) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ et comme f est impaire

alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$

Donc la droite D' d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à la courbe C de f au voisinage de $-\infty$

b) $D'=S_O(D)$ et la courbe C est symétrique

par rapport à O. Comme C est au dessous de D alors C est au dessus de son asymptote D'

Remarque : on pourra montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ que $f(x)\succ-1$

(On distinguera le cas $x>0$ *et* $x<0$)

Exercice 17 :

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}$

• $Df=\{x\in\mathbb{R}$ telque $x^2-1>0$ et $x^3\neq0\}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de (x^2-1)		$+$	0	$-$	0	$+$	

$Df=\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

•Pour $x\in Df\Rightarrow x\le-1$ *ou* $x\ge1$

$\Rightarrow -x\ge1$ *ou* $-x\le-1$, d*onc* $(-x)\in Df$

$$\bullet f(-x)=\frac{\sqrt{(-x)^2-1}}{(-x)^3}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{-x^3}=-\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}\right)$$

donc : $f(-x)=-f(x)$

Conclusion : f est une fonction impaire

2) •Pour $x \geq 1$ on a : $x^3 = \sqrt{x^6}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} = f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^6}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^6}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0$$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et comme f est impaire alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Donc la droite D d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe C de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$

4) l'asymptote D d'équation $y = 0$

• pour $x > 1$ on a : $f(x) > 0$

ce qui prouve que la courbe C est dessus de l'asymptote D sur $[1, +\infty[$

Le point d'abscisse 1 est commun à C et D

• pour $x < -1$ on a : $f(x) < 0$

ce qui prouve que la courbe C est dessous de l'asymptote D sur $]-\infty, -1]$

Le point d'abscisse -1 est commun à C et D

Exercice 18 :

$$f(x) = \frac{x^2-2x+2}{2x}$$

1) $D_f = IR^*$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}^2}{2\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{x}{2}) = +\infty$

• $\lim_{x\to0^+} (x^2-2x+2) = 2$ *et* $\lim_{x\to0^+} (2x) = 0^+$

donc $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ (*de la forme* $\frac{2}{0^+}$)

2) a)

$$f(x) - (\frac{x}{2} - 1) = (\frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{x}) - \frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{x}$$

$$\oplus \quad \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - (\frac{x}{2} - 1) \right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

Donc la droite D d'équation : $y = \frac{x}{2} - 1$ est une asymptote oblique à la courbe C de f au voisinage de $+\infty$

b) $\oplus$ $f(x) - (\frac{x}{2} - 1) = \frac{1}{x} > 0$ *sur* $]0; +\infty[$

Donc C est au dessus de D

Exercice 19 :

$$f(x) = -x + 1 + \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

1) $Df = \{x \in \mathbb{R} \text{ telque } (x-2) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2) • $\lim_{x\to+\infty} (-x+1) = -\infty$

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{(x-2)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

• $\lim_{x\to-\infty} (-x+1) = +\infty$

et $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{(x-2)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

d'où $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\right)=+\infty$ (*de la forme* $\dfrac{1}{0^+}$) *et* $\lim\limits_{x\to 2}(-x+1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty+(-1)=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$

3) Δ d'équation : $y=-x+1$

a) $M(x,y)\in C\cap\Delta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=-x+1 \end{cases}$$

$$f(x)=-x+1 \Leftrightarrow -x+1+\frac{x-1}{(x-2)^2}=-x+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Or pour $x=1$ on a : $y=0$

Conclusion : $C\cap\Delta=\{A\ (1,0)\}$

b) ⊕ $f(x)-(-x+1)\ =\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$

x	$-\infty$ 1	2	$+\infty$	
Signe de $f(x)-(-x+1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
Position relative de C par rapport à Δ	C est au Dessous de Δ	C au dessu de Δ	C est au dessus de Δ	C est au dessus de Δ

c) la droite Δ d'équation : $y=-x+1$ est une asymptote oblique à la courbe C de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

4) a) $MN=\left|f(x)-(-x+1)\right|$

$$MN=\left|\frac{x-1}{(x-2)^2}\right|=\frac{|x-1|}{(x-2)^2}$$

b)

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x-1}{(x-2)^2}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Exercice 20 :

$$f(x)\ =ax+b+\frac{1}{3-x}$$

1) $Df=\{x\in\mathbb{R}$ telque $(3-x)\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

2) $\begin{cases} f(2)=1 \\ f(4)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+1=1 \\ 4a+b-1=-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ 4a-2a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$

donc $f(x)=-x+2+\dfrac{1}{3-x}$

3) a)

• $\lim\limits_{x\to 3^+}(-x+2)=-1$ *et* $\lim\limits_{x\to 3^+}(\dfrac{1}{\underbrace{3-x}_{\searrow 0^-}})=-\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to 3^-}(-x+2)=-1$ *et* $\lim\limits_{x\to 3^-}(\dfrac{1}{\underbrace{3-x}_{\searrow 0^+}})=+\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$

d'où la droite D d'équation : $x=3$ est une asymptote verticale à la courbe C de f

b) D' : $y=-x+2$

$$M(x,y)\in D\cap D' \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-x+2=-3+2=-1 \end{cases}$$

Conclusion : $D\cap D'=\{I\ (3,-1)\}$

4) $M(x,y)$ et $N=S_I(M)$

a) I milieu de segment $[MN]$ d'où

$$\begin{cases} \dfrac{x_M+x_N}{2}=x_I \\ \dfrac{y_M+y_N}{2}=y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N=2x_I-x_M \\ y_N=2y_I-y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N=6-x \\ y_N=-2-y \end{cases}$$

Donc $N(6-x,-2-y)$

b)

$N\,(6-x,-2-f(x))$

$N\in C$ si et seulement si

$6-x\neq 3$ et $f(6-x)=-2-f(x)$

c) pour $x\neq 3$ on a : $6-x\neq 3$

$$\begin{aligned} f(6-x) &= -(6-x)+2+\frac{1}{3-(6-x)} \\ &= -6+x+2+\frac{1}{x-3} \\ &= -4+x-\frac{1}{x-3} \\ &= -2-2+x-\frac{1}{x-3} \\ &= -2-\left(2-x+\frac{1}{3-x}\right) \\ &= -2-f(x) \quad d'où \quad N\in C \end{aligned}$$

<u>CONCLUSION</u> :

$(6-x)\in D_f$ et $f(2\times \underset{x_I}{\underbrace{3}}-x)=2\times\underset{y_I}{\underbrace{(-1)}}-f(x)$

D'où le point $I\,(3,-1)$ est un centre de symétrie pour la courbe C

<u>Exercice 21 :</u>

$$f(x)=ax^2+bx+c-\frac{1}{x+1} \quad ; \quad x\neq -1$$

1) $$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=\dfrac{1}{2} \\ f(2)=\dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c-1=0 \\ a+b+c-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ 4a+2b+c-\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b=0 \\ 4a+2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-a \\ 4a-2a=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases} \qquad d'où\ f(x)=x^2-x+1-\frac{1}{x+1}$$

2) $(P): y=x^2-x+1$

a) $\oplus\ f(x)-(x^2-x+1)=\dfrac{-1}{x+1}$

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$	
Signe de $f(x)-(x^2-x+1)$	$+$	$-$
Position relative de C par rapport à P	C est au dessus de P	C est au dessous de P

b)

$$x\neq -1\ ;\ MN=\left|f(x)-(x^2-x+1)\right|=\frac{|-1|}{|x+1|}=\frac{1}{|x+1|}$$

c)

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x^2-x+1)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=0$$

d) $MN\leq 0.01 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x+1|}\leq\dfrac{1}{100} \Leftrightarrow |x+1|\geq 100$

$\Leftrightarrow x+1\leq -100 \ \ ou\ \ x+1\geq 100$

$\Leftrightarrow x\leq -101 \ \ ou\ \ x\geq 99$

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C, la courbe représentative d'une fonction f dérivable en 1 et telle qu'une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = \frac{1}{2}x + 3$. Alors $f'(1) =$

☐ $\frac{7}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 3.

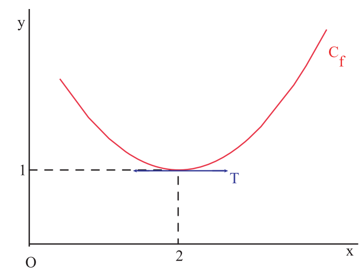
2. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Alors la tangente à C au point d'abscisse –1 a pour équation

☐ $y = -3x - 1$ ☐ $y = 3(x+1) - 1$ ☐ $y = (x+1) - 1$.

3. Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative C de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x$ admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur

☐ 3 ☐ –1 ☐ 0.

4. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, C_f est la courbe représentative d'une fonction f et T est la tangente à C_f au point d'abscisse 2. Graphiquement on a $f'(2) =$



☐ 0 ☐ 2 ☐ 1.

5. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors il existe une tangente à C parallèle à

☐ l'axe$(O, \vec{i})$ ☐ la droite $y = 2x + 3$ ☐ la droite $y = -2x + 3$.

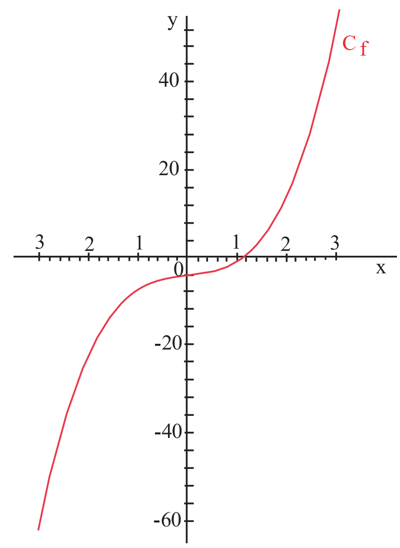
VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f est une fonction dérivable à droite et à gauche en a, alors f est dérivable en a.
2. La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en 0.
3. La fonction $x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est dérivable à droite en $-\frac{3}{2}$.
4. Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
5. Si f est une fonction impaire dérivable en 0 alors $f'(0) = 0$.

Mobiliser ses compétences

Situation 1



Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + x - 4$.

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
2. On désigne par α la solution de l'équation $f(x) = 0$.
   Montrer que $\alpha \in [1, 2]$.
3. On se propose de déterminer des valeurs approchées de α par excès en appliquant la méthode de Newton.
   a. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
   Vérifier que $\alpha \in [1, x_1]$.
   b. Déterminer l'abscisse x_2 du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_1.
   Vérifier que $\alpha \in [1, x_2]$.
   c. Réitérer le procédé en considérant la tangente au point d'abscisse x_2.
   En déduire un encadrement plus précis de α

Situation 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x différent de 1 par $f(x) = \dfrac{1-x^{10}}{1-x}$.

1. Montrer que pour tout réel x différent de 1, $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^9$.
2. Soit a un réel différent de 1, calculer de deux manières différentes le réel $f'(a)$.
3. En déduire la somme $1 + 2a + 3a^2 + \ldots + 9a^8$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Calculer le nombre dérivé de la fonction f en a.

$f(x) = x^4 - 3x^3 + 5$; $a = 1$.

$f(x) = \dfrac{4}{2x+3}$; $a = -1$.

$f(x) = \dfrac{3x+5}{-2x+3}$; $a = \dfrac{1}{3}$.

$f(x) = \dfrac{-3}{x^2+3}$; $a = 2$.

$f(x) = (2x+3)^3$; $a = \dfrac{1}{2}$.

$f(x) = \sqrt{4x+5}$; $a = 0$.

$f(x) = x\sqrt{4x}$; $a = 1$.

$f(x) = \sqrt{-x^2+5x-4}$; $a = 3$.

Exercice 2

Pour chacune des fonctions ci-dessous, étudier la continuité, la dérivabilité à droite, la dérivabilité à gauche et la dérivabilité en a.

$f : x \mapsto |x|\sqrt{x}$; $a = 0$.

$g : x \mapsto |x-1|$; $a = 1$.

Exercice 3

Calculer, dans chaque cas, la limite de f en a, en utilisant le nombre dérivé en a d'une fonction que l'on déterminera.

$f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$, $a = -4$.

$f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x+5} - 1}{x+4}$, $a = -4$.

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $a = 1$.

$f(x) = \dfrac{(x+1)^{2006}-1}{x}$, $a = 0$.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 4x - 7$.

1. Déterminer le nombre dérivé de f en 1.
2. On désigne par C la courbe représentative de f et par T la tangente à C au point d'abscisse 1.

a. Déterminer une équation de T.

b. Tracer T et C.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit la fonction f définie sur $[-4, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+4}$.

1. Déterminer le nombre dérivé de f en 0.
2. On désigne par C la courbe représentative de f et par T la tangente à C au point d'abscisse 0.

a. Déterminer une équation de T.

b. Tracer T et C.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$.

1. Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) = 3 + \dfrac{4}{x-1}$.
2. Déterminer le nombre dérivé de f en 3.
3. On désigne par C la courbe représentative de f et par T la tangente à C au point d'abscisse 3.

a. Déterminer une équation de T.

b. Tracer T et C.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et telle que

- la courbe représentative de f passe par le point $A(-1, -8)$,
- la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 3$.

1. Déterminer les réels a, b et c.
2. Représenter la fonction f ainsi que la tangente T.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par P et P' les paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + 1$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P et de P', on notera A le point d'abscisse négative et B le point d'abscisse positive.

2. Soient T et T' les tangentes respectives à P et P' au point A.
a. Déterminer une équation de chacune des droites T et T'.
b. En déduire que les droites T et T' sont perpendiculaires.
3. Soient D et D' les tangentes respectives à P et P' au point B.
a. Déterminer une équation de chacune des droites D et D'.
b. En déduire que les droites D et D' sont perpendiculaires.
4. Tracer P, P', T, T', D et D'.

Exercice 9

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on désigne par C et C', les courbes représentatives respectives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ et $g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.
1. Vérifier que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer le nombre dérivé de f respectivement de g en tout réel a.
3. Soit a un réel. Montrer que les tangentes respectives à C et à C' au point d'abscisse a sont parallèles.

Exercice 10

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on désigne par C, la courbe représentative de la fonction f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5}{2x^2 + 3}$.
1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer le nombre dérivé de f en tout réel a.
3. En déduire, lorsqu'elles existent
a. les tangentes à C qui sont parallèles à l'axe $(O, \vec{i})$,
b. les tangentes à C qui sont parallèles à l'axe $(O, \vec{j})$.
c. les tangentes à C qui sont parallèles à la première bissectrice d'équation $x = y$.
d. les tangentes à C qui sont parallèles à la deuxième bissectrice d'équation $x = -y$.

Exercice 11

Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C, la courbe représentative de la fontion f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
1. Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer le nombre dérivé de f en tout réel a.
3. Soit A et B les points de C d'abscisses respectives -1 et 2.
a. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
b. Déterminer les points de C en lesquels la tangente à C est parallèle à la droite (AB).

Exercice 12

Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 3x^3$.
1. Montrer que f est impaire.
2. a. Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
b. Calculer le nombre dérivé de f en tout réel a.
3. Soit a un réel. Montrer que les tangentes à C respectivement aux points d'abscisses a et $-$ a sont parallèles.

Exercice 13

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C et C', les courbes représentatives respectives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = -x^2 - 6x - 9$.
1. Montrer que C et C' se coupent en un seul point que l'on notera A.
2. Montrer que les courbes C et C' admettent au point A la même tangente T dont on déterminera une équation.
3. Montrer que C est au-dessus de T et que C' est en dessous de T.
4. Tracer C, C' et T.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^4 + 4x - 5$.
1. Déterminer le nombre dérivé de f en 1.
2. Estimer f(1,0001) et f(0.999999).
3. Comparer les résultats obtenus avec ceux affichés par la calculatrice.

Exercice 15

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x+5}$.
1. Déterminer le nombre dérivé de f en 10.
2. Estimer $\sqrt{25.0002}$, $\sqrt{25.000002}$.
3. Comparer les résultats obtenus avec ceux affichés par la calculatrice.

Exercice 16

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} & \text{si} \quad x \leq 0 , \\ x^3 & \text{si} \quad x < 0 . \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 17

Le plan est muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = |x^2 - 4|$.

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. a. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en –2.
b. La fonction f est-elle dérivable en –2 ?
c. Déterminer des équations des demi-tangentes à C en –2.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 2.
b. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?
c. Déterminer des équations des demi-tangentes à C en 2.
4. Tracer C, ainsi que les demi-tangentes à C respectives au points d'abscisse 2 et –2.

Exercice 18

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-6} & \text{si} \quad x \geq 3 \\ x^2 - 3x & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 3 ?
2. a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 3.
b. Déterminer une équation de la demi-tangente à C en 3.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 3.
b. En déduire que C admet une demi-tangente verticale à droite en 3.
c. La fonction f est-elle dérivable en 3 ?
4. Tracer C, ainsi que les demi-tangentes à C au point d'abscisse 3.

Exercice 19

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Tracer la représentation graphique d'une fonction f qui a les caractéristiques suivantes

- f est définie et continue sur [–2, 4].
- la courbe de f admet en 1 une tangente d'équation $y = 3$.
- la courbe de f admet en 4 une demi-tangente d'équation $y = -2$.
- la courbe de f admet en -2 une demi-tangente verticale,
- l'équation f(x) = 0 admet –2 et 3 pour solutions.
- f est décroissante sur [1, 4].
- f est positive sur [–2, 3].

Exercice 20

Le plan est muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer la représentation graphique d'une fonction f qui a les caractéristiques suivantes

- f est définie et continue sur [–1, 1],
- f est paire,
- f est croissante sur [0, 1],
- f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

A-t-on une unique fonction qui vérifie ces conditions ?

2. Vérifier, à l'aide du graphique, que la fonction f est dérivable à gauche en 0. Que vaut $f'_g(0)$?
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur [–1, 1] par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

1. Montrer que f est paire.
2. Déterminer les équations des demi-tangentes aux points d'abscisses –1 et 1.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3. On se propose de montrer que C_f est le demi-cercle C de centre O et de rayon 1 situé au dessus de l'axe des abscisses.
a. Soit M un point de C_f d'abscisse x.
Déterminer OM et en déduire que M appartient au demi-cercle C.
b. Soit N un point de C d'abscisse x.
Déterminer l'ordonnée de N en fonction de x et en déduire que N appartient à C_f.
c. Conclure.
4. Tracer C_f ainsi que les demi-tangentes aux points d'abscisses –1 et 1.
5. Soit A le point de C_f d'abscisse $\frac{3}{5}$.
a. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point A.
b. La droite T coupe l'axe des abscisses en P.
Déterminer les coordonnées de P puis calculer OP et PA.
c. En déduire que la droite T est perpendiculaire à la droite (OA).

QCM :

1) $f'(1) = \frac{1}{2} \longrightarrow$ (b)

2) $y = 3(x+1) - 1 \longrightarrow$ (b)

3) $f'(o) = -1 \longrightarrow$ (b)

4) $f'(2) = 0 \longrightarrow$ (a)

5) $y = -2x + 3 \longrightarrow$ (c)

Vrai – Faux

1) Faux le cas où $f_g'(a) \neq f_d'(a)$ (voir l'exemple de la question suivante $f(x) = |x|$ et $a = 0$)

2) Faux En effet :

•pour $x > 0$, $f(x) = x$ on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \text{ d'où } f_d'(0) = 1$$

•pour $x < 0$ $f(x) = -x$ on a :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \text{ d'où } f_g'(0) = -1$$

on aura : $f_g'(0) \neq f_d'(0)$

Donc f n'est pas dérivable en 0

3) Faux En effet :

$$\lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+} \frac{f(x) - f(-\frac{3}{2})}{x - (-\frac{3}{2})} = \lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+} \frac{\sqrt{2x+3}}{x + \frac{3}{2}}$$

$$= \lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+} 2\left(\frac{\sqrt{2x+3}}{2x+3}\right) = \lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+} \left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}}\right) = +\infty$$

$$\text{car} \quad \lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+} \left(\sqrt{2x+3}\right) = 0^+$$

4) Faux

Contre exemple : *Soit* $f(x) = |x|$ et $a = 0$

5) Faux

Contre exemple : *Soit* $f(x) = x$

f est impaire mais $f'(0) = 1$

Mobiliser ses Compétences :

Situation 1

1) $f(x) = 0$ *pour* $x \simeq 1.2$

2) f est continue sur $[1, 2]$

et $f(1) \times f(2) = -14 < 0$ *d'où* $\alpha \in [1, 2]$

3)a) (T) : la tangente à (C*f*) au point d'abscisse 1

$f(x) = 2x^3 + x - 4$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$: $f'(a) = 6a^2 + 1$

d'où $f'(1) = 7$

•$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1) = 7(x-1) - 1$

$(T) : y = 7x - 8$

- Intersection de (T) est la droite *(Ox)*

$$M(x, y) \in (T) \cap (Ox) : \begin{cases} y = 0 \\ y = 7x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{8}{7} \end{cases}$$

donc $\boxed{x_1 = \frac{8}{7}}$

• f *est continue sur* $\left[1, \frac{8}{7}\right]$

$f(1) = -1$ *et* $f(\frac{8}{7}) = \frac{44}{343}$

$f(1) \times f(\frac{8}{7}) < 0$ *d'où* $\alpha \in \left[1, \frac{8}{7}\right]$

b) (T_1) : la tangente à (C*f*) au point d'abscisse $\frac{8}{7}$

$f'(\frac{8}{7})=\frac{433}{49}$ et $f(\frac{8}{7})=\frac{44}{343}$

$\bullet(T_1): y=\frac{433}{49}(x-\frac{7}{8})+\frac{44}{343}$

- Intersection de (T_1) est la droite *(Ox)*

$$M(x,y)\in(T_1)\cap(Ox):\begin{cases} y=0 \\ y=\frac{433}{49}(x-\frac{7}{8})+\frac{44}{343}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y=0 \\ x=\frac{3420}{3031}\end{cases} \quad donc \quad \boxed{x_2=\frac{3420}{3031}}$$

$\bullet f$ *est continue sur* $[1,x_2]$

vérifier(à l'aide d'une calculatrice que :

$f(1)\times f(\frac{3420}{3031})<0$ *d'où* $\alpha\in[1,x_2]$

c) (T_2) : la tangente à (C*f*) au point d'abscisse x_2

coupe (Ox) au point d'abscisse x_3

de même procédure on détermine x_3

d'où $\alpha\in[1,x_3]$

Situation 2

$f(x)=\frac{1-x^{10}}{1-x}; x\neq 1$

1) $u_n=x^n, n\in\mathbb{N}$

(u_n) est une suite géométrique de raison $q=x\neq 1$

alors : $u_0+u_1+....+u_n=u_0(\frac{1-q^{n+1}}{1-q})$

ce qui donne : $1+x+x^8+...+x^9=\frac{1-x^{10}}{1-x}$

Ou bien développer et vérifier que :

$(1-x)(1+x+x^8+...+x^9)=1-x^{10}$

2)

$f(x)=1+x+x^2+...+x^9$

$\bullet f'(a)=1+2a+3a^2+4a^3...+9a^8$

D'autre part :

$f=\frac{g}{h}$ *avec* $g(x)=1-x^{10}$ *et* $h(x)=1-x$

$$\bullet f'(a)=\frac{g'(a).h(a)-h'(a).g(a)}{[h(a)]^2}$$
$$=\frac{-10a^9(1-a)+(1-a^{10})}{(1-a)^2}$$
$$=\frac{1+9a^{10}-10a^9}{(1-a)^2}$$

3) on aura donc :

$$1+2a+3a^2+4a^3...+9a^8=\frac{1+9a^{10}-10a^9}{(1-a)^2}; a\neq 1$$

Exercices

Exercice 1 :

1) $f(x)=x^4-3x^2+5$

Pour tout réel *a* on a :

$f'(a)=4a^3-6a$ *d'où* $f'(1)=-2$

2) $f(x)=\frac{4}{2x+3}=4\times\left(\frac{1}{2x+3}\right)$

Pour tout réel $a\neq-\frac{3}{2}$ on a :

$f'(a)=4\times\left(\frac{-2}{(2x+3)^2}\right)=\frac{-8}{(2x+3)^2}$

d'où $f'(-1)=\frac{-8}{1}=-8$

3) $f(x)=\frac{3x+5}{-2x+3}$

Pour tout réel $a \neq \dfrac{3}{2}$ on a :

$$f'(a)=\frac{3\times 3-(-2)\times 5}{(-2a+3)^2}=\frac{19}{(-2a+3)^2}$$

$$d'où\ \ f'(\frac{1}{3})=\frac{1539}{49}$$

4) $f(x)=\dfrac{-3}{x^2+3}=-3\left(\dfrac{1}{x^2+3}\right)$

Pour tout réel a on a :

$$f'(a)=-3\left(\frac{-2a}{(a^2+3)^2}\right)=\frac{6a}{(a^2+3)^2}$$

$$d'où\ \ f'(2)=\frac{12}{49}$$

5) $f(x)=(2x+3)^3$

Pour tout réel a on a :

$$f'(a)=3\times 2\times(2a+3)^2=6(2a+3)^2$$

$$d'où\ \ f'(\frac{1}{2})=96$$

6) $f(x)=\sqrt{4x+5}$

Pour tout réel $a\in\left]-\dfrac{5}{4},+\infty\right[$ on a :

$$f'(a)=\frac{4}{2\sqrt{4a+5}}=\frac{2}{\sqrt{4a+5}}$$

$$d'où\ \ f'(0)=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

7) $f(x)=2x\sqrt{x}$

pour $\in\ ]0,+\infty[$, $f'(a)=2\left(\sqrt{a}+x\,\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)=3\sqrt{a}$

d'où $f'(1)=3$

8) $f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4}$

Or on a : $-x^2+5x-4=0$

$a+b+c=0$ donne $x'=1$ *et* $x''=4$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Signe de $(-x^2+5x-4x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour tout réel $a\in\ ]1,4[$ on a :

$$f'(a)=\frac{-2a+5}{2\sqrt{-a^2+5a-4}}$$

$$d'où\ \ f'(3)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 2 :

1) $f(x)=|x|\sqrt{x}$ et $Df=[0,+\infty[$

donc $f(x)=x\sqrt{x}$

a) *f* est continue à droite en 0 comme étant produit de deux fonctions continues

b)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$$

d'où f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=0$

2) $g(x)=|x-1|$

a) la fonction $h(x)=x-1$ est continue en 1 d'où

$g=|h|$ est continue en 1

b) • *pour* $x>1$ on a : $g(x)=x-1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{x-1}\right)=1$$

d'où g *est dérivable à droite en* 1 et $g_d'(1)=1$

• *pour* $x<1$ on a : $g(x)=-(x-1)$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-(x-1)}{x-1}\right)=-1$$

d'où g *est dérivable à* gauche *en* 1 et $g_g'(1)=-1$

on aura : $g_g'(0)\neq g_d'(0)$

Conclusion *g* n'est pas dérivable en 1

Exercice 3 :

a) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$. On pose $g(x)=x^2$

g est dérivable en tout réel a et $g'(a) = 2a$

$ainsi : f(x)=\dfrac{g(x)-g(-4)}{x-(-4)}$

d'où $\lim\limits_{x\to(-4)} f(x)=g'(-4)=-8$

b) $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x+5}-1}{x+4}$. On pose $g(x)=\dfrac{1}{x+5}$

g est dèrivable en tout réel $a\neq-5$

$et\ g'(a)=\dfrac{-1}{(a+5)^2}$

donc g est dérivable en (-4) et $g'(-4) = -1$

$ainsi : f(x)=\dfrac{g(x)-g(-4)}{x-(-4)}$

d'où $\lim\limits_{x\to(-4)} f(x)=g'(-4)=-1$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. On pose $g(x)=\sqrt{x}$

g est dèrivable en tout réel $a\in\left]0,+\infty\right[$

$et\ g'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\Rightarrow g'(1)=\dfrac{1}{2}$

$ainsi : f(x)=\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

d'où $\lim\limits_{x\to1} f(x)=g'(1)=\dfrac{1}{2}$

d) $f(x)=\dfrac{(x+1)^{2006}-1}{x}$. On pose $g(x)=(x+1)^{2006}$

g est dèrivable en tout réel a

$et\ g'(a)=2006\times(a+1)^{2005}\Rightarrow g'(0)=2006$

$ainsi : f(x)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

d'où $\lim\limits_{x\to0} f(x)=g'(0)=2006$

Exercice 4 :

$f(x)=x^2+4x-7$

1) f est dèrivable en tout réel a

$et\ f'(a)=2a+4\Rightarrow f'(1)=6$

2) a)

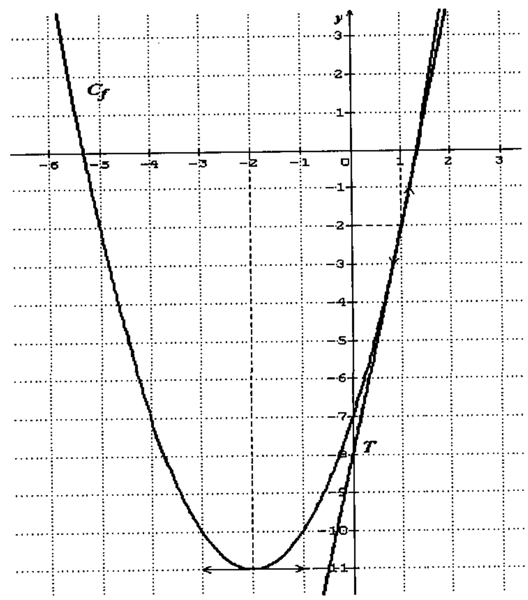
$\bullet(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)=6(x-1)-2$

$(T): y=6x-8$

b) (Cf) est une parabole de sommet $S(-2,-11)$ et d'axe symétrie la droite d'équation $x = -2$

Utiliser un tableau des valeurs pour tracer (Cf)

(cours 2eme années)



Exercice 5 : $f(x) = \sqrt{x+4}$

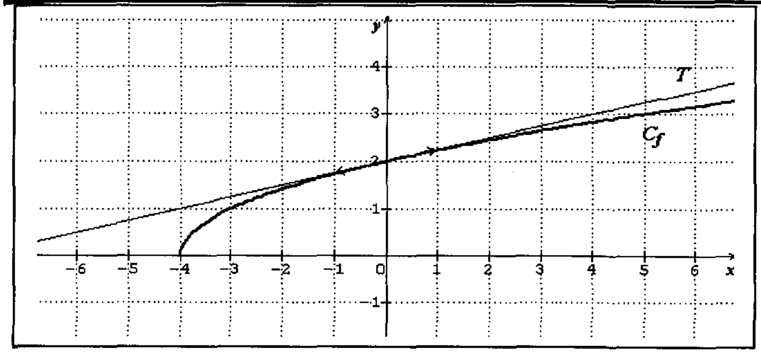
1) Pour tout réel $a\in\left]-4,+\infty\right[$ on a :

$f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a+4}}$ $d'où$ $f'(0)=\dfrac{1}{4}$

2) a) $T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$T: y=\dfrac{1}{4}x+2$

b) traçage de la courbe de f et tangénte T :



Exercice 6 : $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$; $x\in\,]1,+\infty[$

1) $3+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{3x+1}{x-1}=f(x)$

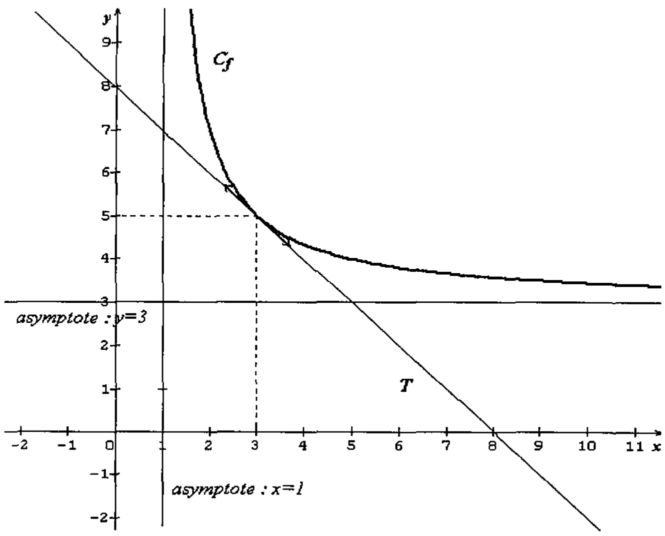
2) f est dèrivable en tout réel $a\in\,]1,+\infty[$

$$et\ f'(a)=4.\left(\frac{-1}{(a-1)^2}\right)=\frac{-4}{(a-1)^2}\Rightarrow f'(3)=-1$$

3) a) $T: y=f'(3)(x-3)+f(3)$

$T: y=-x+8$

b) traçage de la courbe de f et tangente T :



Exercice 7

1)

• $A(-1,-8)\in(Cf)\Rightarrow f(-1)=-8$

$\Rightarrow a-b+c=-8$ (1)

• $f'(1)$: le coefficient directeur de la tangente T d'où $f'(1)=1$

Or pour tout $x_0\in\mathbb{R}$ on a : $f'(x_0)=2ax_0+b$

$\Rightarrow f'(1)=2a+b=1$ (2)

• T passe par le point $B(1,f(1))$

et T à pour équation : $y=x-3$

$\Rightarrow f(1)=-2$ $(pour\ x=1\ on\ a\ y=-2)$

$\Rightarrow a+b+c=-2$ (3)

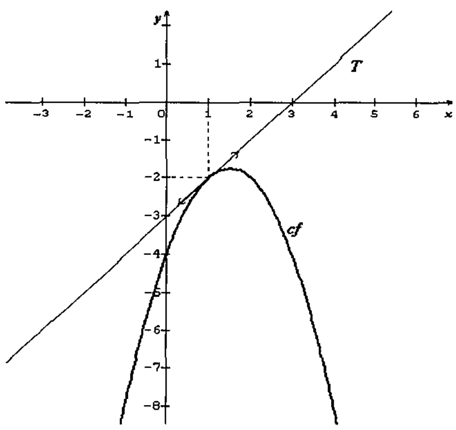
On aura donc le système suivant :

$$\begin{cases}a-b+c=-8\\2a+b=1\\a+b+c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-(1-2a)+c=-8\\b=1-2a\\a+(1-2a)+c=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=1-2a\\3a+c=-7\\-a+c=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=3\\c=-4\end{cases}$$

d'où $\boxed{f(x)=-x^2+3x-4}$

2) (Cf) est une parabole de sommet $S(\frac{3}{2},-\frac{7}{4})$ et d'axe la droite d'équation $x=\dfrac{3}{2}$



Exercice 8

$P : y = x^2$

$P' : y = -\frac{1}{3}x^2 + 1$

1) $M(x,y) \in P \cap P' \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = -\frac{1}{3}x^2 + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = -\frac{1}{3}x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$

par suite $P \cap P' = \left\{ A(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4})\ ;\ B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}) \right\}$

2) a) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(a) = 2a\ ;\ a \in \mathbb{R}$

$g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1 \Rightarrow g'(a) = -\frac{2}{3}a\ ;\ a \in \mathbb{R}$

alors on a : $f'(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$

$g'(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

•$T : y = f'(-\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{\sqrt{3}}{2}) + f(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$y = -\sqrt{3}(x + \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{3}{4} = -\sqrt{3}x - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}$

$T : y = -\sqrt{3}x - \frac{3}{4}$

•$T' : y = g'(-\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{\sqrt{3}}{2}) + g(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{3}{4}$

$T' : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{4}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ *vecteur directeur de T*

$\vec{u}'\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$ *vecteur directeur de T'*

on a : $\vec{u}\,\vec{u}' = 1 \times 1 + (-\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 - 1 = 0$

d'où $\vec{u} \perp \vec{u}'$ par suite $T \perp T'$

3) a)

•$D : y = f'(\frac{\sqrt{3}}{2})(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{3}{4} \Rightarrow D : y = \sqrt{3}x - \frac{3}{4}$

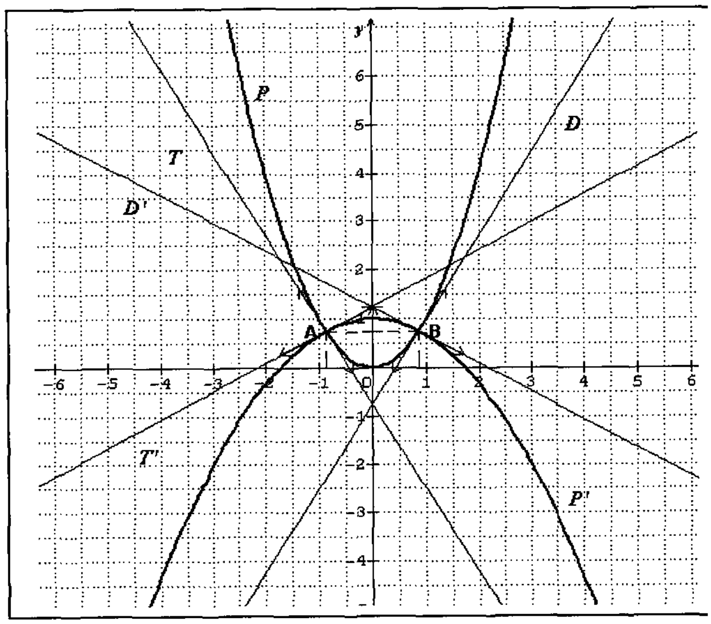
$D' : y = g'(\frac{\sqrt{3}}{2})(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{3}{4} \Rightarrow D' : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{4}$

b) $m = \sqrt{3}$ *: coefficient directeur de* D

$m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ *: coefficient directeur de* D'

On a : $m \times m' = \sqrt{3} \times (-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -1$ d'où $D \perp D'$

4) graphe :



Exercice 9

1) $f(x)=x^3+3x^2-2$; $g(x)=x^3+3x^2+1$

f et g sont deux fonctions polynômes donc elles sont dérivables en tout réel a

2) $f'(a)=g'(a)=3a^2+6a$

3) les tangentes respectives à C et C' au point d'abscisse

a ont le même coefficient directeur puisque *f'(a)*= g'(*a*)

pour tout réel *a* donc elles sont parallèles.

Exercice 10

$$f(x)=\frac{5}{2x^2+3}$$

1) $2x^2+3\neq 0$; pour tout réel x, f est une fonction rationnelle définie sur tout IR donc elle est dérivable en tout réel a

2) f est dèrivable en tout réel a

$$et\ f'(a)=5.\left(\frac{-4a}{(2a^2+3)^2}\right)=\frac{-20a}{(2a^2+3)^2}$$

3) a) $f'(a)=0\Leftrightarrow a=0$

la tangente à C au point d'abscisse 0 est paralléle

à l'axe $(O,\vec{i})$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où C n'admet pas de tangente paralléle à l'axe $(O,\vec{j})$

c) la droite D d'équation $y=x$ à pour coefficient directeur $m=1$. la tangente à C est paralléle à D si et seulement si :

$$f'(a)=1\Leftrightarrow\frac{-20a}{(2a^2+3)^2}=1\Leftrightarrow(2a^2+3)^2=-20a$$

$\Leftrightarrow 4a^4+12a^2+20a+9=0$

On considére le polynôme : $P(x)=12x^2+20x+9$

$a=12;\ b=20;\ c=9$

$\Delta=b^2-4ac=20^2-36\times12=-32<0$ *et* $a=12>0$

d'où $P(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$

par suite : $4a^4+12a^2+20a+9>0$

ce qui prouve que : $4a^4+\underbrace{12a^2+20a+9}_{>0}=0$

$n'a$ pas des solutions dans $\mathbb{R}$

Conclusion : *C* n'admet pas des tangentes parallèles à la droite $D : y = x$

c) la droite D d'équation $y=-x$ à pour coefficient directeur $m=-1$. la tangente à C est paralléle à D si et seulement si :

$$f'(a)=-1\Leftrightarrow\frac{-20a}{(2a^2+3)^2}=-1\Leftrightarrow(2a^2+3)^2=20a$$

$\Leftrightarrow 4a^4+12a^2-20a+9=0$

On considére le polynôme : $P(x)=12x^2-20x+9$

$a=12;\ b=-20;\ c=9$

$\Delta=b^2-4ac=20^2-36\times12=-32<0$ *et* $a=12>0$

d'où $P(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$

par suite : $4a^4+12a^2-20a+9>0$

ce qui prouve que : $4a^4+\underbrace{12a^2-20a+9}_{>0}=0$

$n'a$ pas des solutions dans $\mathbb{R}$

Conclusion : *C* n'admet pas des tangentes parallèles à la droite $D : y = -x$

Exercice 11 :

$f(x) = x^3$

1) f est une fonction polynôme donc elle est dérivable

en tout réel a c'est-à-dire sur tout $\mathbb{R}$

2) $f'(a) = 3a^2$; $a \in \mathbb{R}$

3)

- $A(-1, f(-1)) \in (Cf) \Rightarrow A(-1,-1)$
- $B(2, f(2)) \in (Cf) \Rightarrow B(2,8)$

a) la droite *(AB)* à pour coefficient directeur

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-(-1)}{2-(-1)} = 3$$

b) $f'(a) = 3 \Leftrightarrow 3a^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = 1$

$\Leftrightarrow a = 1$ ou $a = -1$

Les tangentes à la courbe C respectivement aux points

d'abscisses (– 1) et 1 sont parallèles à la droite *(AB)*

(en particulier la tangente en a est la droite *(AB)*)

Exercice 12 :

$f(x) = x^5 - 3x^3$

1) $Df = \mathbb{R}$

- pour $x \in Df = \mathbb{R}$ on a : $(-x) \in Df$
- $f(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 = -x^5 + 3x^3$

$= -(x^5 - 3x^3) = -f(x)$

Donc f est impaire

2) a) f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$

b) $f'(a) = 5a^4 - 9a^2$; $a \in \mathbb{R}$

3)

- le coefficient directeur de La tangente à la courbe C au point d'abscisse a est $f'(a) = 5a^4 - 9a^2$
- $f'(-a) = 5(-a)^4 - 9(-a)^2 = 5a^4 - 9a^2 = f'(a)$ Donc La tangente à la courbe C au point d'abscisse

$(-a)$ est parallèle à celle au point d'abscisse a car elles ont le même coefficient directeur.

Exercice 13 :

$f(x) = x^2 + 2x - 1$

$g(x) = -x^2 - 6x - 9$

1) $M(x,y) \in C \cap C' \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

$$\begin{aligned} &f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = -x^2 - 6x - 9 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \\ &et \text{ on a } : f(-2) = g(-2) = -1 \end{aligned}$$

Conclusion : $C \cap C' = \{A(-2,-1)\}$

2) *pour tout réel a*

$f'(a) = 2a + 2$ et $g'(a) = -2a - 6$

$ainsi : \begin{cases} f'(-2) = g'(-2) = -2 \\ f(-2) = g(-2) = -1 \end{cases}$

Donc C et C' ont la même tangente *(T)* en *A* ;

$$\begin{aligned} T : y &= f'(-2)(x-(-2)+f(-2) \\ &= -2(x+2)-1 \end{aligned}$$

donc $\boxed{T : y = -2x - 5}$

3) a) $f(x) - (-2x-5) = x^2 + 2x - 1 + 2x + 5$

$= x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$

d'où $f(x) - (-2x-5) \geq 0$

ainsi la courbe C de f est au dessus de la tangente T

b) $g(x)-(-2x-5)=-x^2-6x-9+2x+5$

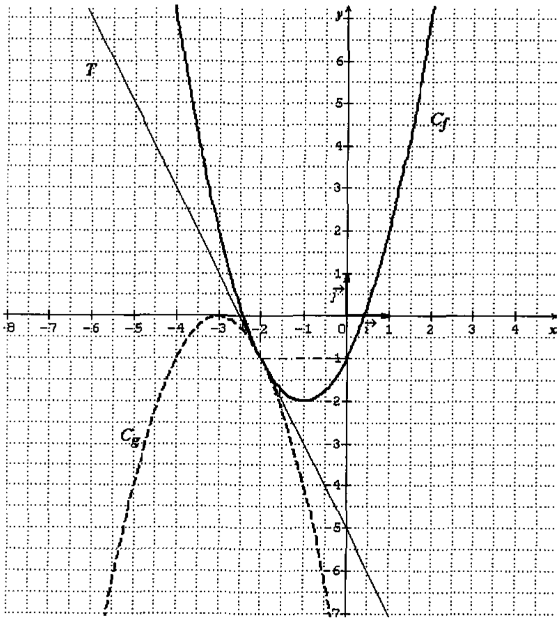
$$=-x^2-4x-4=-(x^2+4x+4)$$

$$=-(x+2)^2\leq 0$$

$d'où$ $g(x)-(-2x-5)\leq 0$

ainsi la courbe C' de g est au dessous de la tangente T

4) graphe



Exercice 14 :

$f(x)=-x^4+4x-5$

1) f est une fonction polynôme donc elle est dérivable

en tout réel a et $f'(a)=-4a^3+4 \Rightarrow f'(1)=0$

2)

- $h_1=0.0001$ et assez petit

$f(1,0001)=f(1+0,0001)$

$$\approx f(1)+0,0001\times f'(1)=-2$$

- $h_2=0,000001$ et assez petit

$f(0,999999)=f(1-0,000001)$

$$\approx f(1)-0,000001\times f'(1)=-2$$

3) la calculatrice affiche :

$f(1.0001)=-2.00000006$

$f(0.999999)=-2$

Exercice 15 :

$f(x)=\sqrt{2x+5}$; $Df=\left[-\frac{5}{2},+\infty\right[$

1) Pour tout réel $a\in\left]-\frac{5}{2},+\infty\right[$ on a :

$f'(a)=\dfrac{2}{2\sqrt{2a+5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2a+5}}$ $d'où$ $f'(10)=\dfrac{1}{5}$

2)

$\oplus\sqrt{25,0002}=f(10,0001)=f(10+0.0001)$

$$\approx f(10)+(0,0001)\times f'(10)$$

$=f(10)+\dfrac{0,0001}{5}=5+\dfrac{0,0001}{5}=5+0,00002$

d'où $\sqrt{25,0002}\approx 5,00002$

$\oplus\sqrt{25,000002}=f(10,000001)=f(10+0.000001)$

$$\approx f(10)+(0,000001)\times f'(10)$$

$=f(10)+\dfrac{0,000001}{5}=5+\dfrac{0,000001}{5}=5+0,0000002$

d'où $\sqrt{25,000002}\approx 5,0000002$

3) la calculatrice affiche :

$\sqrt{25,0002}=5,00002$

$\sqrt{25,000002}=5,0000002$

Exercice 16 :

$$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x} & \text{si } x\geq 0 \\ x^3 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

1) $f(0)=0\sqrt{0}=0$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{x}\right)=0 \\ \bullet \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^3\right)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f=\lim\limits_{x\to 0^-} f=0$$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$

Ce qui prouve que f est continue en 0

2)

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0 = f_g'(0)$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\sqrt{x}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f_d'(0)$

Donc f est dérivable à droite et à gauche en 0

3) $f_g'(0) = f_d'(0) = 0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en 0

et $f'(0) = 0$

Exercice 17 :

$f(x) = |x^2-4|$; $Df = \mathbb{R}$

$f(x) = |g(x)|$ *avec* $g(x) = x^2 - 4$

Comme étant une fonction polynôme g est continue sur $\mathbb{R}$ par suite $f = |g|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a)

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de (x^2-4)		+	0	−	0	+	

- *Pour* $x \in]-\infty, -2[$ on a : $f(x) = x^2 - 4$

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to(-2)^-} \left(\dfrac{x^2-4}{x+2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to(-2)^-} \left[\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}\right] = \lim\limits_{x\to(-2)^-} (x-2) = -4$

d'où f est dérivable à gauche de (-2) et $\boxed{f_g'(-2) = -4}$

- *Pour* $x \in]-2, 2[$ on a : $f(x) = -(x^2-4)$

$\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to(-2)^+} \left(\dfrac{-(x-2)(x+2)}{x+2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to(-2)^+} [-(x-2)] = 4$

d'où f est dérivable à droite de (-2) et $\boxed{f_d'(-2) = 4}$

b) $f_g'(-2) \neq f_d'(-2)$ d'ou f n'est pas dérivable en (

c) • (T_1) : la demi - tangente à (Cf) à gauche au point d'abscisse (-2)

$(T_1): \begin{cases} y = f_g'(-2)(x+2) + f(-2) \\ x \le -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x-8 \\ x \le -2 \end{cases}$

•(T_2) : la demi - tangente à (Cf) à droite au point d'abscisse (-2)

$(T_2): \begin{cases} y = f_d'(-2)(x+2) + f(-2) \\ x \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x+8 \\ x \ge -2 \end{cases}$

3) a)

- *Pour* $x \in]2, +\infty[$ on a : $f(x) = x^2 - 4$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \left[\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} (x+2) = 4$

d'où f est dérivable à droite de 2 et $\boxed{f_d'(2) = 4}$

- *Pour* $x \in]-2, -1[$ on a : $f(x) = -(x^2-4)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{-(x-2)(x+2)}{(x-2)}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} [-(x+2)] = -4$

d'où f est dérivable à gauche de 2 et $\boxed{f_g'(2) = -4}$

b) $f_g'(2) \neq f_d'(2) \Leftrightarrow f$ n'est pas dérivable en 2

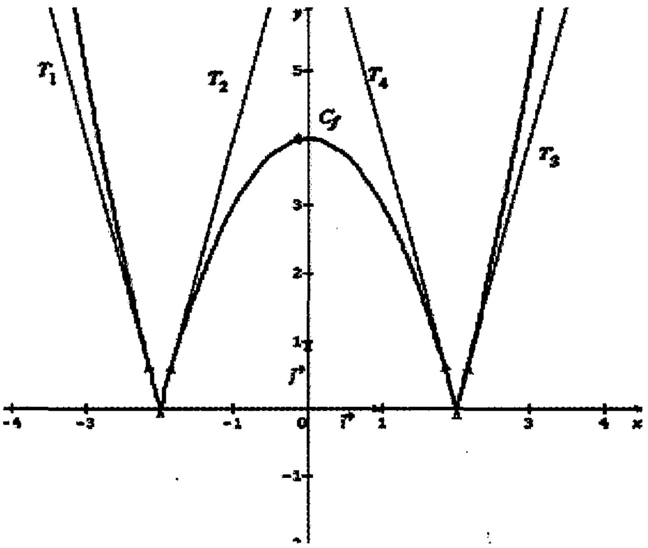
c) • (T_3) : la demi - tangente à (Cf) à droite au point d'abscisse 2

$(T_3): \begin{cases} y = f_d'(2)(x-2) + f(2) \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x-8 \\ x \ge 2 \end{cases}$

• (T_4) : la demi - tangente à (Cf) à gauche au point d'abscisse 2

$(T_4): \begin{cases} y = f_g'(2)(x-2) + f(2) \\ x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x+8 \\ x \le 2 \end{cases}$

4) graphe :



Exercice 18 :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-6} & \text{si } x\geq 3\\ x^2-3x & \text{si } x<3\end{cases}$$

1) $f(3)=\sqrt{2\times 3-6}=\sqrt{0}=0$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\sqrt{2x-6}\right)=0\\ \bullet \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x^2-3x\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} f=\lim_{x\to 3^-} f=0$$

D'où $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0=f(3)$

D'où f est continue en 3

2) a)

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-3x}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{x(x-3)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3^-}(x)=3$$

Donc f est dérivable à gauche en 3 et $f_g'(3)=3$

b)

$$(T_1):\begin{cases}y=f_g'(3)(x-3)+f(3)\\ x\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow (T_1):\begin{cases}y=3x-9\\ x\leq 3\end{cases}$$

3) a)

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{2x-6}}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\left(\sqrt{2x-6}\right)^2}{(x-3)\times\sqrt{2x-6}}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2x-6}{(x-3)\times\sqrt{2x-6}}$$
$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{2(x-3)}{(x-3)\times\sqrt{2x-6}}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2}{\sqrt{2x-6}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

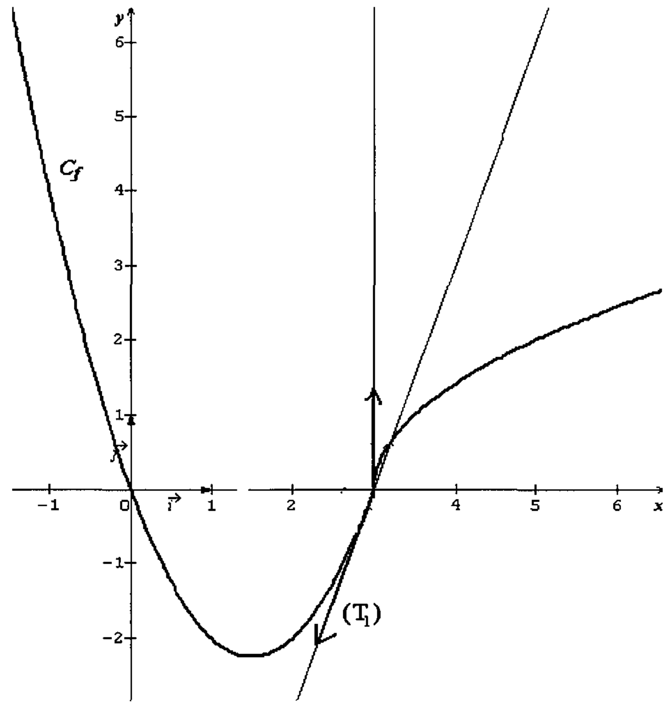
Donc f n'est pas dérivable à droite en 3

b) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

D'où la courbe (Cf) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 3

c) f n'est pas dérivable à droite en 3 donc f n'est pas dérivable en 3

4) graphe



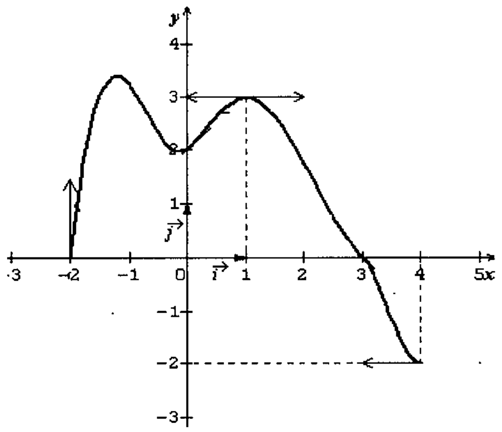
Exercice 19 :

$\bullet Df=[-2,4]$ $\bullet\begin{cases} f(1)=3 \\ f'(1)=0 \end{cases}$

$\bullet\begin{cases} f(4)=-2 \\ f_g'(4)=0 \end{cases}$ $\bullet\, f$ non dérivable en (-2)

$\bullet\begin{cases} f(-2)=0 \\ f(3)=0 \end{cases}$ $\bullet\, f(x)\geq 0$ pour $x\in[-2,3]$

$\bullet f$ est dècroissante sur $[1,4]$



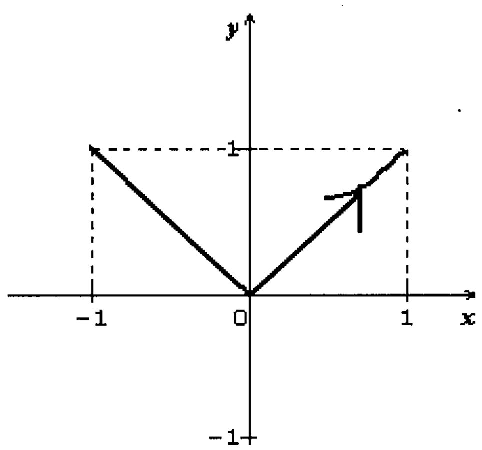
!

$\bullet f$ est paire : (Cf) est symétrique pa rapport à la droite $(O,\vec{j})$

$\bullet f$ est croissante sur $[0,1]$

$\bullet f_d'(0)=1$

1) Exemple : $f(x)=|x|$, $x\in[-1,1]$



On peut trouver plusieurs fonctions qui vérifie ces conditions

2) $f(x)=|x|\Leftrightarrow f_g'(0)=-1$(*pente* de la demi-tangent

3)f non dérivable en 0 car on a : $f_g'(0)\neq f_d'(0)$

Exercice 21 : $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; $Df=[-1,1]$

1)

- pour $x\in Df=[-1,1]$ on a : $-1\leq x\leq 1\Rightarrow 1\geq -x\geq -1\Rightarrow (-x)\in Df$
- $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=f(x)$

Donc f est une fonction paire

2)

$$*\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}{(x-1)\times\left(\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{(x-1)\times\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(\cancel{x-1})(x+1)}{(\cancel{x-1})\times\left(\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2}{0^+}=-$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 1

(*Cf*) admet une demi- tangente verticale au point d'abscisse 1, d'équation : $\begin{cases} x=1 \\ y\geq 0 \end{cases}$

$$*\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1-x^2}{(x+1)\times\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-(\cancel{x+1})(x-1)}{(\cancel{x+1})\times\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-(x-1)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en (-1)

(*Cf*) admet une demi- tangente verticale au point d'abscisse (-1), , d'équation : $\begin{cases} x=-1 \\ y\geq 0 \end{cases}$

3)a)

$M(x,y)$ avec $y = f(x) = \sqrt{1-x^2} \geq 0$

$OM = \sqrt{x^2 + f^2(x)} = \sqrt{x^2 + 1 - x^2} = \sqrt{1} = 1$

$OM = 1$ et $y \geq 0$ d'où $M \in (C)$(demi *cercle*)

$b)$ $(C): x^2 + y^2 = 1$ avec $y \geq 0$

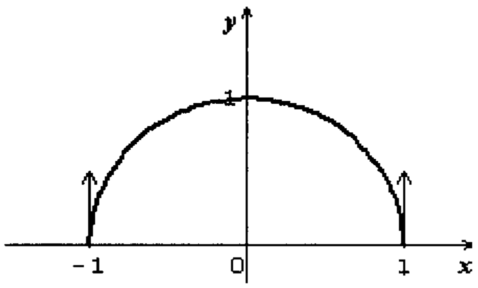
Soit $N(x,y)$ *avec* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow c \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} = f(x)$ d'où $N \in (Cf)$

c) $(C) = (Cf)$

4)



5) $f(\frac{3}{5}) = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow A(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

a) Pour tout réel $a \in]-1,1[$ on a :

$f'(a) = \frac{-2a}{2\sqrt{1-a^2}} = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$

$d'où$ $f'(\frac{3}{5}) = \frac{-\frac{3}{5}}{\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

$T: y = f'(\frac{3}{5})(x - \frac{3}{5}) + f(\frac{3}{5}) = -\frac{3}{4}(x - \frac{3}{5}) + \frac{4}{5}$

$T: y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{20} + \frac{4}{5} = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{20}$

$\boxed{T: y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}}$

b)

$P(x_p, y_p) \in T \cap (O, \vec{i}) \Rightarrow \begin{cases} y_P = -\frac{3}{4}x_P + \frac{5}{4} \\ y_P = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 0 = -\frac{3}{4}x_P + \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{3}{4}x_P = \frac{5}{4} \Rightarrow x_P = \frac{5}{3}$

$d'où$ P à pour coordonnées $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

$\bullet OP = \left|\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$

$\bullet PA = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(\frac{3}{5} - \frac{5}{3})^2 + (\frac{4}{5})^2}$

$= \sqrt{(-\frac{16}{15})^2 + (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{256}{225} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{400}{225}} = \frac{4}{3}$

c) On a : $T = (AP)$

$OA^2 + AP^2 = 1^2 + (\frac{4}{3})^3 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$

$OP^2 = (\frac{5}{3})^2 = \frac{25}{9}$

donc : $OA^2 + AP^2 = OP^2$

d'aprés la réciproque du théoréme de Pythagore le triangle OAP est rectangle en A
par suite on aura : $(AP) \perp (OA)$
or on sait que $T = (AP)$
Conclusion : T est perpendculaire à (OA)

QCM – VRAI – FAUX

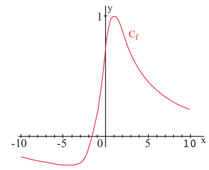
QCM

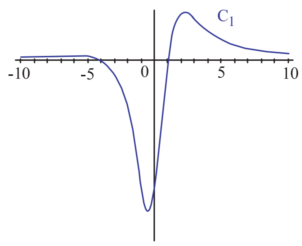
Cocher la réponse exacte.

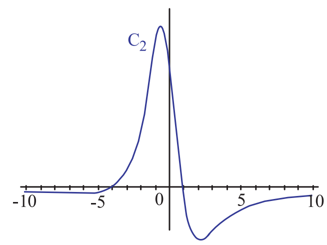
1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^4 - 3x + 1$ a pour dérivée la fonction f' définie par

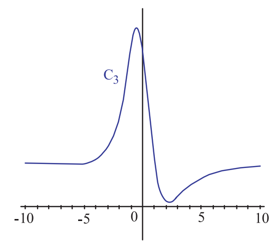
☐ $f'(x) = 5x^4 - 2$ ☐ $f'(x) = 20x^3 - 3$ ☐ $f'(x) = 20x^3$.

2. On a représenté dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
L'une des courbes ci-dessous laquelle est la représentation graphique de la fonction dérivée de f. Laquelle ?

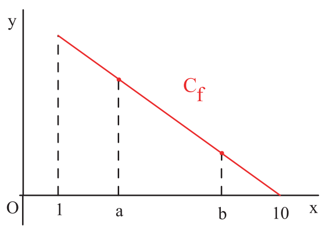


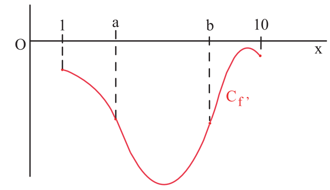
☐


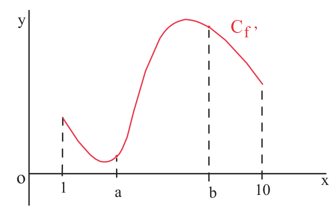
☐


☐


3. On a représenté dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la fonction dérivée f' d'une fonction dérivable f sur]1, 10[. Dans quel cas a-t-on f(a) > f(b) ?

☐


☐


☐


4. La fonction $x \mapsto x^4 + 3x^2 + 1$, admet pour minimum

☐ 0 ☐ 1 ☐ –1.

5. La fonction $x \mapsto \dfrac{-1}{x+1}$ est

☐ décroissante sur $]-\infty, -1[$ ☐ décroissante sur $]-1, +\infty[$ ☐ croissante sur $]-\infty, -1[$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \mapsto \sqrt{-2x+1}$ est dérivable sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$.
3. Si $f'(a) = 0$ alors f admet un minimum en a.
4. Si les fonctions dérivées de deux fonctions f et g sont égales sur un intervalle ouvert I alors f = g sur I.
5. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et a et b deux réels strictement positifs. Si f' est positive sur [a, b] et f(b) = 0 alors f est négative sur [a, b].

Mobiliser ses compétences

Situation 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit le point M(1, 1) et α un réel différent de 0 et de 1.
On désigne par D_α la droite passant par M et de coefficient directeur α.

1. Vérifier que D_α a pour équation $y = \alpha x + (1 - \alpha)$.
2. On désigne par A et B, les points d'intersection de D_α respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   a. Déterminer les coordonnées des points A et B en fonction de α.
   b. Exprimer AB^2 en fonction de α.
   c. Déterminer α pour que la distance AB soit minimale.

Situation 2

1. Soit a un réel, on considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x - a}$.
   a. Vérifier que f est dérivable en tout réel x différent de a.
   b. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x différent de a.
   c. On note f'' la dérivée de f' ; on note $f^{(3)}$ la dérivée de f'' et pour tout entier $k \geq 2$, $f^{(k)}$ la dérivée de $f^{(k-1)}$.
   Calculer $f^{(k)}(x)$, $k \geq 2$.
2. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

a. Vérifier que $g(x) = -1 + \dfrac{2}{1 - x}$.
b. Montrer que g est dérivable en tout réel x différent de 1 et calculer sa dérivée.
c. Calculer $g^{(k)}(x)$, $k \geq 2$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition, étudier la dérivabilité puis calculer la dérivée de chacune des fonctions f, f^3, $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f^2}$ et $\sqrt{f}$.

a. $f(x) = x^2 + 2$.

b. $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$.

c. $f(x) = 1 - x^2$.

d. $f(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 2

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition, étudier la dérivabilité puis calculer la dérivée de chacune des fonctions f, g, f + g, fg et $\frac{f}{g}$.

a. $f(x) = x^3 - 2$ et $g(x) = \frac{1}{x^2+2}$.

b. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{1-2x}{(x-1)^2}$.

c. $f(x) = \sqrt{x} + 1$ et $g(x) = x\sqrt{x}$.

Exercice 3

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur]0, +∞[.

$f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 1$.

$f(x) = -x^6 + x^4 + \sqrt{2}x$.

$f(x) = (-3x^2 + 1)^3$.

$f(x) = 2x^2(-x^3 + 1)^3$.

$f(x) = \frac{x^3 + x}{x+1}$.

$f(x) = \frac{-5}{(2x+2)^5}$.

$f(x) = \frac{1}{x+3} - (3x+2)^3$.

Exercice 4

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur]0, +∞[.

$f(x) = \sqrt{2x+3}$.

$f(x) = \sqrt{2x^2+3}$.

$f(x) = 3x\sqrt{2x+1}$.

$f(x) = \frac{-4}{\left(\sqrt{3x}\right)^3}$.

Exercice 5

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer son ensemble de définition, étudier ses limites aux bornes de son ensemble de définition, calculer sa dérivée, puis dresser son tableau de variation et déterminer ses extrema éventuels.

1. $f(x) = 4x - 3 + \frac{1}{x-5}$.

2. $g(x) = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$.

3. $h(x) = 2x^4 - x^2 + 5$.

4. $s(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = ax^3 + 3x$ où a est un réel.
On suppose que la fonction f admet deux extrema locaux en 1 et –1.
1. Calculer la valeur de a.
2. Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature de chacun des extrema de f .

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \frac{a - x}{x^2 - a}$ où a est un réel.
On suppose que la fonction f admet un extremum local en 1.
1. Calculer la valeur de a.
2. Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature de chacun des extrema de f .

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - ax}{x^2 + 1} & \text{si } x > 1, \\[2ex] \dfrac{1 - ax^2}{x - 2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

où a est un réel.

On suppose que f est continue en 1.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1.
3. Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature de chacun des extrema de f.

Exercice 9

On se propose de comparer les réels

$A = \dfrac{(5.012013014015016)^2 + 3}{3.012013014015016}$ et

$B = \dfrac{(5.012013014015017)^2 + 3}{3.012013014015017}$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 2}$.

1. Quelles sont les images par f des réels 5.012013014015016 et 5.012013014015017 ?
2. Calculer la dérivée de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Conclure.

Exercice 10

Dans une usine, une étude statistique a montré qu'un ouvrier produit, au cours d'une matinée, $q(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$ unités, où t désigne le nombre d'heures de travail.

Le rendement moyen entre les instants t_0 et t_0+h est le rapport $\dfrac{q(t_0 + h) - q(t_0)}{h}$.

Le rendement instantané à l'instant t_0 est la limite lorsque h tend vers zéro du rendement moyen entre les instants t_0 et t_0+h.

1. On désigne par r la fonction définie sur [0, 4], qui à t associe le rendement instantané r(t) d'un ouvrier. Donner l'expression de r(t).
2. a. A quel instant le rendement instantané s'annule-t-il ?
b. Etudier le signe de la fonction r.
En déduire les variations de la quantité produite.

Exercice 11

Démontrer l'inégalité suivante

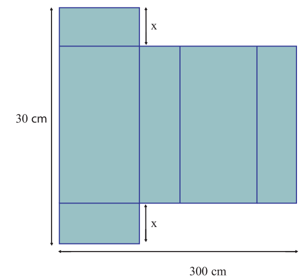
$\sqrt{1 + x^3} \leq 1 + \dfrac{1}{2} x^3$, pour tout $x \geq 0$.

Exercice 12

Montrer que de tous les triangles rectangles d'hypoténuse 4 cm, le triangle isocèle est celui qui a le plus grand périmètre.

Exercice 13

Un fabricant envisage la production de boîtes de lait en carton obtenues selon le patron ci-dessous.

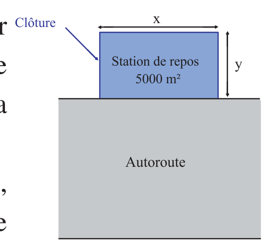


1. Calculer les dimensions de la boîte et son volume lorsque x = 10 cm.
On suppose que $0 < x < 15$ et on désigne par V(x) le volume de la boîte correspondante.
2. Exprimer V(x) en fonction de x.
3. Etudier les variations de la fonction V qui à x associe V(x) sur]0, 15[.
4. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume d'une boîte est maximal. Quel est ce volume ?

Exercice 14

On projette d'aménager une station de repos en bordure d'une autoroute. Le terrain devra être rectangulaire, d'aire 5000 m² et clôturé sur trois de ses côtés comme l'indique le schéma ci-dessous.

On se propose de déterminer les dimensions du terrain de sorte que la longueur de la clôture soit minimale.



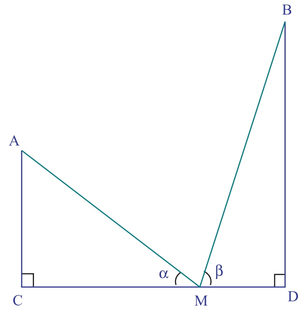
1. Exprimer y en fonction de x, puis en déduire l'expression de la longueur L(x) de la clôture en fonction de x.
2. Etudier les variations de la fonction L qui à x associe L(x) sur l'intervalle]0 , +∞[.
3. En déduire les dimensions du terrain de sorte que la longueur de la clôture soit minimale. Préciser cette longueur.

Exercice 15

Un fabricant de bicyclettes doit acheter 5000 pneus par année d'un distributeur sachant que toutes les commandes contiennent le même nombre de pneus. Il veut déterminer la taille de chaque commande de sorte que le coût total soit minimal.
Il estime que pour une commande de n pneus, le coût total c(n) (en dinars) est donné par $c(n) = 0.48n + \frac{124000}{n} + 1200$.
On désigne par $c : x \mapsto 0.48x + \frac{124000}{x} + 1200$
la fonction qui modélise la situation.
1. Etudier les variations de la fonction c sur l'intervalle [1, 5000].
2. En déduire pour quelle valeur x_0 de l'intervalle [1, 5000], la fonction c atteint-elle son minimum local. Que vaut $c(x_0)$?
3. Donner un encadrement de x_0 entre deux entiers successifs m et m + 1.
Puis comparer f(m), f(m + 1) et $f(x_0)$.
4. Conclure.

Exercice 16

On considère la figure ci-dessous où CD = 5, AC = 3, BD = 4 et M est un point variable sur le segment [CD].



On se propose de montrer que si la somme des distances AM et BM est minimale alors les angles α et β sont égaux.
On pose x = CM et f(x) = AM + BM.
1. Exprimer f(x) en fonction de x.
2. a. Montrer que la fonction f admet un minimum que l'on déterminera.
b. Montrer que dans ce cas $\tan \alpha = \tan \beta$.
c. Conclure.

Exercice 17

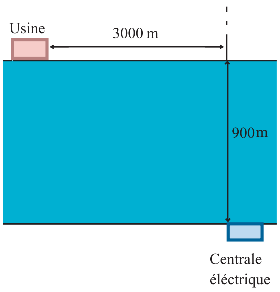
1. Le mouvement d'une particule qui se déplace sur un axe (xx') muni d'un repère $(O, \vec{i})$ est décrit par la loi horaire du mouvement $x(t) = t^3 - 12t + 17,\ t \geq 0$.
a. Déterminer la vitesse instantanée de la particule.
b. Dresser le tableau de variation de la fonction qui à t associe x(t).
c. Répondre aux questions ci-dessous.
• A quel instant la particule s'arrête-t-elle ?
• Sur quel intervalle de temps, la particule s'approche-t-elle de l'origine ?
• Sur quel intervalle de temps, la particule s'éloigne t-elle de l'origine ?
• A quel instant la particule se trouve-t-elle à une distance minimale de l'origine ? Quelle est cette distance ?
2. Le mouvement d'une particule qui se déplace sur un axe (xx') muni d'un repère $(O, \vec{i})$ est décrit par la loi horaire du mouvement $x(t) = t^3 - 8,\ t \geq 0$.
a. Déterminer la vitesse instantanée de la particule.
b. Dresser le tableau de variation de la fonction qui à t associe x(t).
c. Répondre aux questions ci-dessous.
• A quel instant la particule s'arrête-t-elle ?
• Décrire la position de la particule par rapport à l'origine.

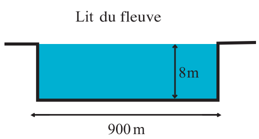
Exercice 18

Les compagnies d'électricité doivent-être en mesure de prévoir de façon assez précise la demande puisqu'elles n'ont aucun moyen de stocker l'énergie qu'elles produisent.
Une certaine compagnie utilise la relation suivante pour prévoir la demande d'électricité entre 12:00 et 18:00 pendant une journée d'hiver :
$d(t) = -27t^4 + 252t^3 + 540t^2 + 9400$ mégawatts
où $0 \leq t \leq 6$.
1. Dresser le tableau de variation de la fonction $d : t \mapsto d(t)$.
2. A quel moment la demande d'électricité devrait-elle atteindre son minimum ?
3. A quel moment la demande d'électricité devrait-elle atteindre son maximum ?

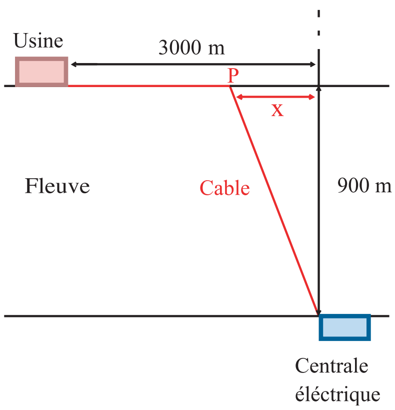
Exercice 19

On veut relier une usine en bordure d'un fleuve, de profondeur 8 m et de 900 m de largeur, à une centrale électrique située sur la rive opposée comme l'indique le schéma ci-dessous.





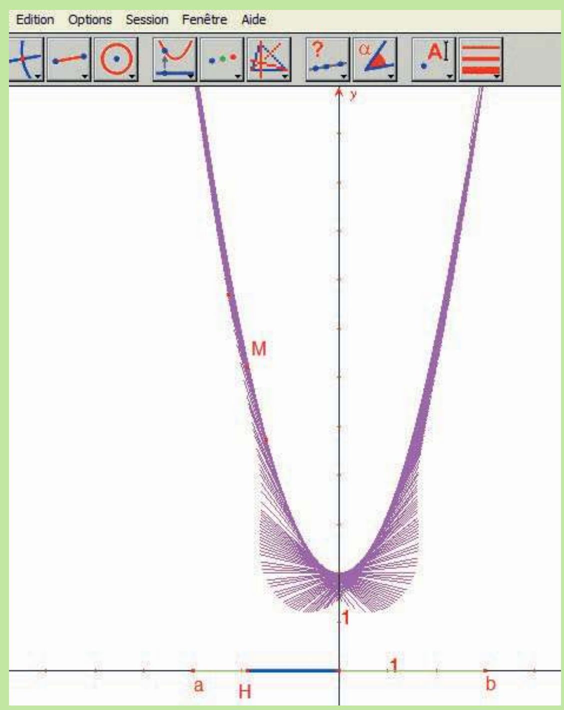
Il en coûte 5^D/m pour installer le câble sous l'eau, et 4^D/m pour l'installer au dessus de l'eau.
On se propose de déterminer le parcours que doit suivre le câble pour que le coût d'installation soit minimal.
On modélise la situation par le schéma ci-dessous.



On désigne par C(x) (en dinars) le coût d'installation du câble en fonction de x.
1. Vérifier que $C(x) = 80 + 5\sqrt{900^2+x^2} + 4(3000 - x)$.
2. Etudier les variations de la fonction C qui à x associe C(x) sur l'intervalle [0, 3000].
3. En déduire à quelle distance doit-on placer le piquet P, pour que le coût d'installation du câble soit minimal. Quel est ce coût ?

Avec l'ordinateur

Soit f la fonction définie sur un intervalle [a, b] par $f(x) = x^2 + 2$.
On se propose d'illustrer à l'aide du logiciel CABRI, que lorsque x varie dans l'intervalle [a, b], les droites de coefficients directeurs 2x et passant par M(x, f(x)) enveloppe la parabole C courbe de f .
• Dans une nouvelle figure CABRI, après avoir montré les axes, on trace un segment [a, b], en choisissant deux points a et b sur l'axe des abscisses, puis un point H (point sur objet) de [a, b].
• A l'aide de la calculatrice, on calcule l'image de l'abscisse x du point H, que l'on rapporte (Report de mesure) sur l'axe des ordonnées pour obtenir le point M(x, f(x)).
• A l'aide de la calculatrice, on calcule 2*x et on rapporte le résultat sur l'axe des ordonnées et on place le point N(x, 2x). Le segment [TT'] de milieu M et parallèle à (ON) est tangent à C en M.
• On fait varier le point H pour faire apparaître la courbe décrite par M.
• Avec le mode trace, on illustre comment [TT'] enveloppe C.



Math – culture

Bulles d'air

La bulle de savon est une fine pellicule d'eau et de savon, qui renferme un certain volume d'air. A l'équilibre, le savon doit minimiser sa surface, sous la contrainte de volume fixé. C'est pour ça que la bulle prend une forme sphérique.

Forme	Nombre de faces	Volume	Surface
tétraèdre	4	16 cm^3	46 cm^2
cube	6	16 cm^3	39 cm^2
octaèdre	8	16 cm^3	37 cm^2
dodécaèdre	12	16 cm^3	34 cm^2
sphère	infini	16 cm^3	31 cm^2

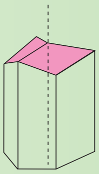
Elyssa et la fondation de Carthage

Lorsque Elyssa arriva en Afrique, elle demande à Iarbas, roi de Numidie une concession de terrain ne couvrant que la peau d'un bœuf, ce qui est royalement accordé. Elle fait alors découper la peau en très fines lanières et le fait mettre bout à bout, délimitant ainsi un territoire assez vaste pour y établir une cité sur une colline, Byrsa (" Peau de bœuf " en grec).

Les alvéoles d'abeilles

Ce qui est vraiment surprenant, c'est la forme plus que singulière de ces alvéoles. Contrairement à ce qu'on pourrait supposer, l'autre extrémité de ces cellules n'est pas un hexagone régulier, mais un emboîtement de trois losanges identiques, appelés rhombes.

Pour un même volume, le raccordement par ces trois losanges minimise la surface de raccordement des prismes.



Math – culture

Chapitre 7

Exemples d'étude de fonctions

" La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information. "

Einstein

Chapitre 7

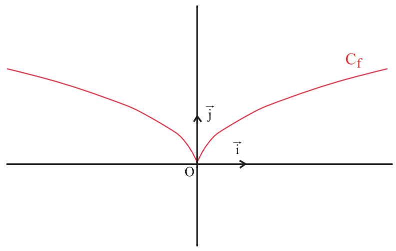
Exemples d’étude de fonctions

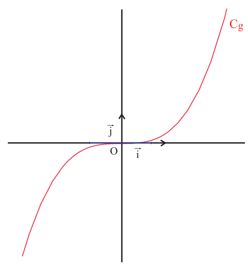
Pour commencer

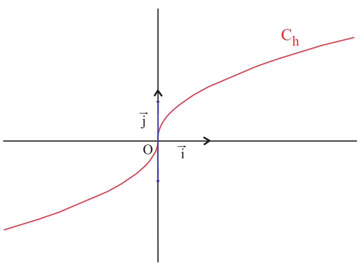
Activité 1

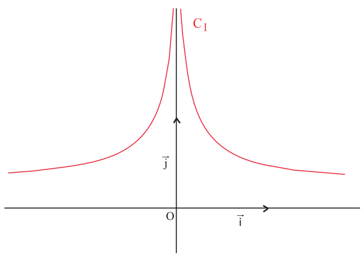
Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On a représenté graphiquement trois fonctions f, g et h ainsi que leurs fonctions dérivées f', g' et h'.

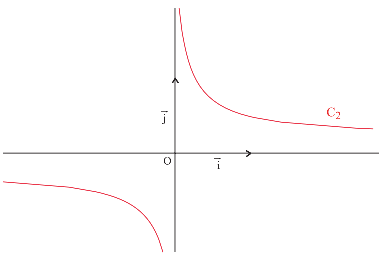
Associer à chaque courbe celle de sa fonction dérivée.

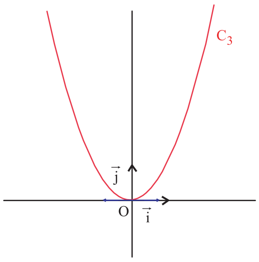












Activité 2

Le plan est muni d’un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

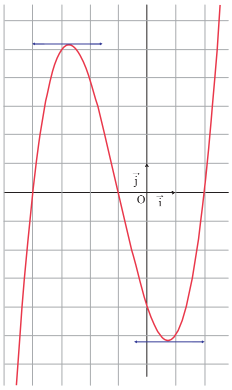
Soit f une fonction dérivable sur [–5, 3].

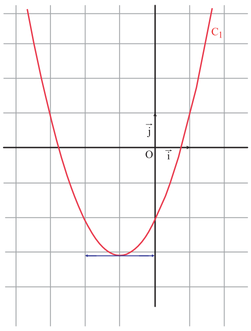
On a tracé ci-contre la courbe représentative de sa fonction dérivée f '.

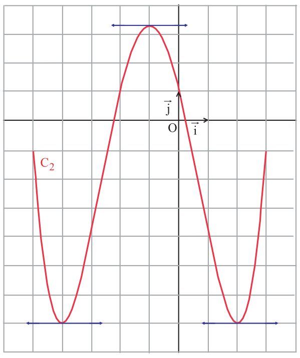
1. a. Déterminer graphiquement f'(0), f'(–4) et f'(–1).

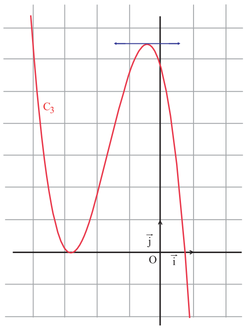
   b. Interpréter graphiquement ces nombres.

2. Une parmi les courbes ci-dessous, est la représentation graphique de f, laquelle ?









Q C M

1) $f'(x) = 20x^3 - 3 \longrightarrow$ b

2) (C_2) est la courbe représentative de $f' \longrightarrow$ b

Tableau de variation de f :

x	-10		-4		1		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Comparer la position de C_2 par rapport à la droite des abscisses et le signe de f'

3) $f'(x) < 0 \ pour \quad x \in [\, a , b\,]$

f est décroissante sur $[\, a , b\,]$ donc on a : $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b) \longrightarrow$ b

4) $f'(x) = 2x.(2x^2 + 3)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $on\ a : f(x) \geq f(0) = 1 \longrightarrow$ b

5) $f\,'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} \geq 0 \longrightarrow$ c

VRAI -FAUX

1) Faux

* Pour $x > 0$, $f(x) = x$ d'ou $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 = f_d'(0)$

* Pour $x < 0$, $f(x) = -x$ d'ou $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1 = f_g'(0)$

$f_d'(0) \neq f_g'(0)$ D'où f n'est pas dérivable en 0.

2) Faux

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{\sqrt{-2x+1}}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{-2(x - \frac{1}{2})}{(x - \frac{1}{2})\sqrt{-2x+1}} = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{-2}{\sqrt{-2x+1}} = -\infty$$

D'où f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{1}{2}$.

3) Faux

Contre exemple : $f(x) = x^3 \quad et \quad a = 0$

4) Faux

Contre exemple : $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 2014 \quad et \quad I = IR.$

5) Vrai

En effet : si $f'(x) \geq 0 \; pour \; tout \; x \in [\, a\, ,b\,] \quad d'où \; f$ est croissante sur $[\, a\, ,b\,]$

Ainsi : $a \leq x \leq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)\,.\, et \quad f(b) = 0$ alors on aura $f(x) \leq 0$

Mobiliser ses compétences :

*** Situation1** :

1) D_α a pour coefficient directeur α d'où $D_\alpha : y = \alpha.x + b$

$M(1{,}1) \in D_\alpha \quad donne \quad \alpha + b = 1 \;\; d'ou \;\; b = 1 - \alpha$

Par suite D_α a pour équation $y = \alpha.x + (1 - \alpha)$

2) a) * $A(x,y) \in D_\alpha \cap (O,\vec{\imath}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \alpha.x + (1-\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} = 1 - \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$ d'où $A\left(1 - \dfrac{1}{\alpha}, 0\right)$

* $B(x,y) \in D_\alpha \cap (O,\vec{\jmath}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha.x + (1-\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \alpha \end{cases}$ d'où $B(0\,, 1 - \alpha)$

b) $AB^2 = \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 + (1-\alpha)^2 = 2 + \alpha^2 - 2\alpha - \dfrac{2}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2}$

c) On pose : $h(x) = 2 + x^2 - 2x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} \quad ; \quad x \in IR^*\backslash\{1\}$

$$h'(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} = 2(x-1) + \frac{2}{x^3}(x-1)$$

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

$$h'(x) = \frac{2(x-1)}{x^3}\left(x^3 + 1\right) = \frac{2(x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^3}$$

Pour tout $x \in IR^*\backslash\{1\}$ on a : $x^2 - x + 1 > 0 \quad car \quad \Delta = -3 < 0$

Le signe de $h'(x)$ est celui de $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0 ‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion : Comme $\alpha \neq 1$, la distance AB n'a pas une valeur minimale

(Sur $]-\infty, 0[$ la distance est minimale pour $\alpha = -1$)

<u>* Situation2 :</u>

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$

a) f est dérivable sur $D_f = IR\backslash\{a\}$, comme étant fonction rationnelle.

b) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-a)^2}$

c) $f''(x) = \dfrac{2}{(x-a)^3}$; $f^{(3)}(x) = \dfrac{-6}{(x-a)^4}$; $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(x-a)^5}$; . . .

Montrons par récurrence <u>(voir chapitre 9)</u> que pour tout entier $k \geq 2$, on a : $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k .k\,!}{(x-a)^{k+1}}$

* vérifions pour $k = 2$. $f^{(2)}(x) = f''(x) = \dfrac{2}{(x-a)^3} = \dfrac{(-1)^2 .2!}{(x-a)^{2+1}}$ (vrai)

* soit $k \geq 2$

Supposons que $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k .k\,!}{(x-a)^{k+1}}$ et montrons que $f^{(k+1)}(x) = \dfrac{(-1)^{k+1} .(k+1)!}{(x-a)^{k+2}}$

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = \frac{-(-1)^k .k\,!(k+1)(x-a)^k}{(x-a)^{2k+2}} = \frac{(-1)^{k+1} .(k+1)!}{(x-a)^{k+2}}$$

Conclusion : $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^k .k\,!}{(x-a)^{k+1}}$; pour tout entier $k \geq 2$.

2) $g(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$; $D_g = IR\backslash\{1\}$

a) pour $x \neq 1$, on a : $-1+\dfrac{2}{1-x}=\dfrac{-(1-x)+2}{1-x}=\dfrac{-1+x+2}{1-x}=\dfrac{1+x}{1-x}$ donc $g(x)=-1+\dfrac{2}{1-x}$

b) g est une fonction rationnelle définie sur $IR\backslash\{1\}$, donc elle est dérivable sur $IR\backslash\{1\}$.

et $g'(x)=\dfrac{(1+x)'.(1-x)-(1-x)'.(1+x)}{(1-x)^2}=\dfrac{1.(1-x)-(-1).(1+x)}{(1-x)^2}=\dfrac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{(1-x)^2}$

c) $g(x)=-1+\dfrac{2}{x-1}=-1-\dfrac{2}{x-1}=-1-2\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

D'après 1) c) et prend $a=1$ on aura : $g'(x)=-2\left(\dfrac{(-1)^k .k\,!}{(x-1)^{k+1}}\right)=\dfrac{2(-1)^{k+1}.k\,!}{(x-1)^{k+1}}$

Exercices

Exercice1 :

a) $f(x)=x^2+2$

f est définie et dérivable sur tout IR. (fonction polynôme)

. $f'(x)=2x$

. f^3 *est dérivable sur* IR *et* $(f^3)'(x)= 3.f'(x).(f(x))^2 = 6x(x^2+2)^2$

. f est dérivable et ne s'annule pas sur IR donc $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{f^2}$ sont dérivables sur IR et :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}=\frac{-2x}{(x^2+2)^2} \quad ; \quad \left(\frac{1}{f^2}\right)'(x)=\frac{-2f'(x).f(x)}{f^4(x)}=\frac{-2f'(x)}{f^3(x)}=\frac{-4x}{(x^2+2)^3}$$

. f est dérivable et strictement positive sur IR donc $\sqrt{f}$ est dérivable sur IR et :

$$\left(\sqrt{f}\right)'(x)=\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$

* comme étant fonctions rationnelles f *et* f^3 sont définies et dérivables sur $IR\backslash\{3\}$ et :

$f'(x) = \dfrac{1\times(-3)-1\times1}{(x-3)^2} = \dfrac{-4}{(x-3)^2}$; $\left(f^3\right)'(x) = 3f'(x).f^2(x) = \dfrac{-12}{(x-3)^2}.\dfrac{(x+1)^2}{(x-3)^2} = \dfrac{-12(x+1)^2}{(x-3)^4}$

* $pour\ x \neq 3$ on a : $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3} = 0 \Rightarrow x = -1$ d'où $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{f^2}$ sont définies et dérivables sur $IR\backslash\{-1\ ,3\}$ et :

$\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)} = \dfrac{\dfrac{4}{(x-3)^2}}{\dfrac{(x+1)^2}{(x-3)^2}} = \dfrac{4}{(x+1)^2}$; $\left(\dfrac{1}{f^2}\right)'(x) = \dfrac{-2f'(x).f(x)}{f^4(x)} = \dfrac{-2f'(x)}{f^3(x)} = \dfrac{8(x-3)}{(x+1)^3}$

* $\sqrt{f}$ est définie sur $]-\infty\ ,-1] \cup]3\ ,+\infty[$ $\longleftrightarrow$ *signe de* $f(x)$:

et Dérivable sur $]-\infty\ ,-1[\cup]3\ ,+\infty[$ et

$\left(\sqrt{f}\right)'(x) = \sqrt{f(x)}\,' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \dfrac{-2}{(x-3)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}}$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	||	$+$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(-1)}}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{\dfrac{x+1}{x-3}}{(x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{1}{(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}} = -\infty$

Par suite : $\sqrt{f}$ n'est pas dérivable à gauche en -1

c) $f(x) = 1 - x^2$

* f est une fonction polynôme d'où f *et* f^3 sont définies et dérivables sur IR.

$f'(x) = -2x$ et $\left(f^3\right)'(x) = 3f'(x).f^2(x) = -6x(1-x^2)^2$.

* $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$ *ou* $x = 1$

$\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{f^2}$ sont définies et dérivables sur $IR\backslash\{-1\ ,1\}$

$\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)} = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$ et $\left(\dfrac{1}{f^2}\right)'(x) = \dfrac{-2f'(x).\mathrm{f}(x)}{f^4(x)} = \dfrac{-2f'(x)}{f^3(x)} = \dfrac{4x}{(1-x^2)^3}$

* $\sqrt{f}$ est définie sur $[-1\ ,1\ ]$

f est dérivable et strictement positive sur$]-1,1[$ d'ou $\sqrt{f}$ est dérivable sur $]-1\ ,1\ [$et $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(-1)}}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{(1-x^2)}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$

donc $\sqrt{f}$ n'est pas dérivable à droite en -1.

de même $\sqrt{f}$ n'est pas dérivable à gauche en 1.

d) $f(x)=\sqrt{x}$

* f est définie sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f^3(x)-f^3(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$

f^3 est dérivable à droite en 0 par suite f^3 est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\left(f^3\right)'(x)=3f'(x).f^2(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

* $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{f^2}$ sont définies et dérivables sur $]0,+\infty[$.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}=\frac{-1}{2x\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{f^2}\right)'(x)=\frac{-2f'(x).f(x)}{f^4(x)}=\frac{-2f'(x)}{f^3(x)}=\frac{-1}{x^2}$$

* f est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$ d'où $\sqrt{f}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sqrt{x}}}=\frac{1}{4\sqrt{x\sqrt{x}}}.$$

Exercice2 :

a) $f(x)=x^3-2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$

* comme étant fonction polynôme, f est définie et dérivable sur IR *et* $f'(x)=3x^2$

*g est définie et dérivable sur $D_g=IR$, (fonction rationnelle et $x^2+2\neq 0$) et $g'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+2)^2}$

* $f+g$ est définie et dérivable sur IR (somme de deux fonctions dérivables) et :

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)=3x^2-\frac{2x}{(x^2+2)^2}$$

* f *et* g sont deux fonctions dérivables sur R, donc $(f.g)$ est dérivable sur IR et :

$$(f.g)'(x)=f'(x).g(x)+g'(x)f(x)=\frac{3x^2}{x^2+2}+(x^3-2)\left[-\frac{2x}{(x^2+2)^2}\right]$$

$$\Rightarrow (f.g)'(x)=\frac{x^4+6x^2+4x}{(x^2+2)^2}$$

* f *et* g sont deux fonctions dérivables sur IR ,de plus $g(x)\neq 0$ *pour tout* $x\in IR$ donc $\frac{f}{g}$ est dérivable sur IR et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x).g(x)-g'(x).f(x)}{g^2(x)}=....$$

Ou bien : $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=(x^3-2).(x^2+2)=x^5+2x^3-2x^2-4$ donne $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=5x^4+6x^2-4x$

b) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ et $g(x)=\frac{1-2x}{(x-1)^2}$

*f est définie et dérivable sur $IR\backslash\{1\}$, (fonction rationnelle) et $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$

*g est définie et dérivable sur $IR\backslash\{1\}$, (fonction rationnelle) et $g'(x)=\frac{-2(x-1)^2-2(x-1)(1-2x)}{(x-1)^4}=\frac{2x}{(x-1)^3}$

* $f+g$ est définie et dérivable sur $IR\backslash\{1\}$ (somme de deux fonctions dérivables) et :

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)=\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

* f *et* g sont deux fonctions dérivables sur $IR\backslash\{1\}$, donc $f.g$ est dérivable sur $IR\backslash\{1\}$ et :

$$(f.g)'(x)=f'(x).g(x)+g'(x).f(x)=...$$

Ou bien : $(f.g)(x)=\frac{1-2x}{(x-1)^3}$ donc $(f.g)'(x)=\frac{-2(x-1)^3-3(x-1)^2(1-2x)}{(x-1)^6}=\frac{4x-1}{(x-1)^4}$

* $g(x)=0$ *pour* $x=\frac{1}{2}$

$\frac{f}{g}$ est dérivable sur $IR\backslash\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$ et : $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x).g(x)-g'(x).f(x)}{g^2(x)}=\cdots=\frac{-1}{(1-2x)^2}$

Ou bien $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x-1}{1-2x}$ donne $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{(1-2x)+2(x-1)}{(1-2x)^2}=\frac{-1}{(1-2x)^2}$

c) $f(x)=\sqrt{x}+1$ et $g(x)=x\sqrt{x}$

* f est définie sur $[0,+\infty[$, *dérivable sur* $]0,+\infty[$ et $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

* g est définie sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$. g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=0$

$g'(x)=1.\sqrt{x}+x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ (g *est dérivable sur* $[0,+\infty[$.)

* $f+g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{3\sqrt{x}}{2}=\dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}$

* $(f.g)(x)=x^2+x\sqrt{x}$

$f.g$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $(f.g)'(x)=2x+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

* $\dfrac{f}{g}$ est définie , dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\Rightarrow\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3}=\frac{-1}{x^2}-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}\ ;\ x\in\,]0,+\infty[$$

Exercice3 :

a) $f(x)=x^5-3x^3+2x-1$; $f'(x)=5x^4-9x^2+2$

b) $f(x)=-x^6+x^4+\sqrt{2}.x$; $f'(x)=-6x^5+4x^3+\sqrt{2}$

c) $f(x)=(-3x^2+1)^3$; $f'(x)=3.(-6x)(-3x^2+1)^2=-18x(-3x^2+1)^2$

d) $f(x)=2x^2(-x^3+1)^3$; $f'(x)=4x(-x^3+1)^3+2x^2.(3).(-3x^2)(-x^3+1)^2$

$f'(x)=4x(-x^3+1)^3-18x^4(-x^3+1)^2=(-x^3+1)^2.(4x-22x^4)$

e) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x+1}$; $f'(x)=\dfrac{(3x^2+1)(x+1)-(x^3+x)}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^3+3x^2+1}{(x+1)^2}$

f) $f(x)=\dfrac{-5}{(2x+2)^5}$; $f'(x)=-5\left(\dfrac{-5.(2).(2x+2)^4}{(2x+2)^{10}}\right)=\dfrac{50}{(2x+2)^6}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}-(3x+2)^3$; $f'(x)=\dfrac{-1}{(x+3)^2}-9(3x+2)^2$

Exercice4 : $x \in \left]0,+\infty\right[$

a) $f(x)=\sqrt{2x+3}$; $f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$

b) $f(x)=\sqrt{2x^2+3}$; $f'(x)=\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+3}}=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$

c) $f(x)=3x.\sqrt{2x+1}$; $f'(x)=3\sqrt{2x+1}+3x\left(\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right)=\dfrac{3(3x+1)}{\sqrt{2x+1}}$

d) $f(x)=\dfrac{-4}{\left(\sqrt{3x}\right)^3}=\dfrac{-4}{3\sqrt{3}.x\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{-4}{3\sqrt{3}}\left[\frac{-\left(x\sqrt{x}\right)'}{\left(x\sqrt{x}\right)^2}\right]=\frac{4}{3\sqrt{3}}.\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3}x^3}=\frac{2}{x^2.\sqrt{3x}}$$

Exercice5 :

1) $f(x)=4x-3+\dfrac{1}{x-5}$; $D_f=D_{f'}=IR\backslash\{5\}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x-3)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-5}\right)=0$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-3)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-5}\right)=0$

* $\lim\limits_{x\to5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to5^-}\left(4x-3+\dfrac{1}{x-5}\right)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to5^-}(4x-3)=17$ et $\lim\limits_{x\to5^-}\left(\dfrac{1}{x-5}\right)=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to5^+}\left(4x-3+\dfrac{1}{x-5}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to5^+}(4x-3)=17$ et $\lim\limits_{x\to5^+}\left(\dfrac{1}{x-5}\right)=+\infty$

*$f'(x)=4-\dfrac{1}{(x-5)^2}=\dfrac{4(x-5)^2-1}{(x-5)^2}$

$=\dfrac{[2(x-5)-1][2(x-5)+1]}{(x-5)^2}=\dfrac{(2x-11)(2x-9)}{(x-5)^2}$

x	$-\infty$		$\frac{9}{2}$		5		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	13	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	21	↗	$+\infty$

* f admet 13 comme maximum local en $\dfrac{9}{2}$

* f admet 21 comme minimum local en $\dfrac{11}{2}$

2) $g(x)=\dfrac{x^2-1}{4-x^2}$ $\quad * \ D_g = D_{g'} = IR\backslash\{-2\,,2\}$ $\quad * \ \lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{x^2}{-x^2} = -1$

$* \ \lim\limits_{x\to(-2)^-} g(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{x^2-1}{4-x^2} = -\infty \ car \ \lim\limits_{x\to(-2)^-} (4-x^2) = 0^- \ et \ \lim\limits_{x\to(-2)^-} (x^2-1) = 3$

$* \ \lim\limits_{x\to(-2)^+} g(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{x^2-1}{4-x^2} = +\infty$ car

$\lim\limits_{x\to(-2)^+} (x^2-1) = 3$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^+} (4-x^2) = 0^+$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$* \ \lim\limits_{x\to2^-} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to2^-} (x^2-1) = 3$ et $\lim\limits_{x\to2^-} (4-x^2) = 0^+$

$* \ \lim\limits_{x\to2^+} g(x) = -\infty$ $\quad \left(de\ la\ forme\ \frac{3}{0^-} \right)$

$* \ g'(x) = \dfrac{2x(4-x^2)+2x(x^2-1)}{(4-x^2)^2} = \dfrac{6x}{(4-x^2)^2}$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
$g(x)$	-1 ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{-1}{4}$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1

g admet $\left(\dfrac{-1}{4}\right)$ comme minimum local en 0.

3) $h(x) = 2x^4 - x^2 + 5$

$* \ D_h = D_{h'} = IR$

$* \ \lim\limits_{|x|\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} (2x^4) = +\infty$

$* \ h'(x) = 8x^3 - 2x = 2x.(4x^2-1)$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{39}{8}$	↗	5	↘	$\frac{39}{8}$	↗	$+\infty$

$*$ h admet $\dfrac{39}{8}$ comme minimum local respectivement en $\dfrac{-1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

$*$ h admet 5 comme maximum local en 0.

4) $S(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$; $D_S = D_{S'} = IR \setminus \left\{\frac{-3}{2}\right\}$

* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} S(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{4x}{2x} = 2$

* $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-3}{2}\right)^-} S(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{-3}{2}\right)^-} \dfrac{4x-1}{2x+3} = +\infty$ (de la forme $-7/0^-$)

* $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-3}{2}\right)^+} S(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{-3}{2}\right)^+} \dfrac{4x-1}{2x+3} = -\infty$ (de la forme $-7/0^+$)

* $S'(x) = \dfrac{14}{(2x+3)^2} > 0$ *pour tout* $x \in IR \setminus \left\{\frac{-3}{2}\right\}$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$S'(x)$		+	‖	+	
$S(x)$	2 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

h n'admet pas d'extrémums.

Exercice6 :

$f(x) = ax^3 + 3x$

1) $f'(x) = 3ax^2 + 3$

$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ *d'ou* $f(x) = -x^3 + 3x$

2) f est dérivable sur IR *et* $f'x) = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1) = -3(x-1)(x+1)$

. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$

. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3)\ -\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

* f admet -2 comme minimum local en -1.

* f admet 2 comme maximum local en 1.

Exercice7 :

1) $f(x)=\dfrac{a-x}{x^2-a}$;

$f'(x)=\dfrac{-(x^2-a)-2x(a-x)}{(x^2-a)^2}=\dfrac{x^2-2ax+a}{(x^2-a)^2}$

$f'(1)=0 \Rightarrow 1^2-2\times1\times a+a=0 \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow a=1$

Donc $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2-1}=\dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{-1}{x+1}$ ce qui donne :

$f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$

Contradiction avec l'hypothèse : " f admet un extremum en 1 "

REMARQUE :

Pour : $f(x)=\dfrac{a-x}{x^2+a}$ on aura $f'(x)=\dfrac{-(x^2+a)-2x(a-x)}{(x^2+a)^2}=\dfrac{x^2-2a-a}{(x^2-a)^2}$

$f'(1)=0 \Rightarrow 1^2-2\times1\times a-a=0 \Rightarrow 1-3a=0 \Rightarrow a=\dfrac{1}{3}$ ce qui donne : $f(x)=\dfrac{1-3x}{3x^2+1}$

et $f'(x)=\dfrac{-3(3x^2+1)-6x(1-3x)}{(3x^2+1)^2}=\dfrac{(x-1)(9x+3)}{(3x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	0

Dans ce cas : f admet un minimum global en 1

de plus elle admet un maximum global en -1/3.

Exercice8 :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-ax}{x^2+1} & si \quad x>1\\ \dfrac{1-ax^2}{x-2} & si \quad x\le 1\end{cases}$$ avec f continue en 1.

1) $f(1)=\dfrac{1-a}{1-2}=a-1$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-ax}{x^2+1}=\dfrac{1-a}{2}$

Or on a : f est continue en 1 d'où $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1) \Rightarrow \dfrac{1-a}{2}=a-1 \Rightarrow a=1$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2+1} & si \quad x > 1 \\ \dfrac{1-x^2}{x-2} & si \quad x \leq 1 \end{cases}$; $f(1) = 0$

* $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1-x^2}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-(x+1)}{x-2} = 2$

d'où f est dérivable à gauche en 1 $et \quad f'_g(1) = 2$

* $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$

Par suite f est dérivable à droite en 1 $et \quad f'_d(1) = 1/2$

Conclusion : $f_d^{'}(1) \neq f_g^{'}(1)$ d'où f n'est pas dérivable en 1.

3) a) Soit : $f_1(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2+1}$ et $f_2(x) = \dfrac{1-x^2}{x-2}$

$f'_1(x) = \dfrac{(2x-1)(x^2+1) - 2x(x^2-x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$ et $f'_2(x) = \dfrac{-2x(x-2)-(1-x^2)}{(x-2)^2} = \dfrac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2}$

$Donc: \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} & si \quad x > 1 \\ \dfrac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2} & si \quad x < 1 \end{cases}$

b) * pour l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$ on a : $\Delta = 8$; $x' = -1 - \sqrt{2}$ et $x" = -1 + \sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2 + 2x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi

x	1	$+\infty$
$f'_1(x)$	$+$	
$f_1(x)$	0 ↗	1

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

**aussi pour l'équation: $-x^2 + 4x - 1 = 0$ on a : $\Delta = 12$; $x' = 2 - \sqrt{3}$ et $x" = 2 + \sqrt{3}$
d'où le tableau de signe de trinôme $(-x^2 + 4x - 1)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d'où sur l'intervalle $]-\infty, 1]$ *on a* :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		1
$f'_2(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{3}-4$	$\nearrow$	0

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$$

*d'où tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{3}-4$	$\nearrow$		$\nearrow$	1

f admet $\left(2\sqrt{3}-4\right)$ comme minimum absolu en $2-\sqrt{3}$

Exercice9 :

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-2} \quad ; \quad D_f = IR\backslash\{2\}$$

1) $A = f(5{,}012013014015016)$ et $B = f(5{,}012013014015017)$

2) $f'(x) = \dfrac{2x(x-2)-(x^2+3)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$

3) * $x^2-4x-3=0$

$\Delta = 28$; $x' = 2-\sqrt{7}$ et $x'' = 2+\sqrt{7}$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		2		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$4-2\sqrt{7}$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$4+2\sqrt{7}$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

- $\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x^2+3}{x-2} = +\infty$

$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x^2+3}{x-2} = -\infty$

4) $2+\sqrt{7} \approx 4{,}6457 \ldots\ldots$

$a = 5{,}012013014015016$ *et* $b = 5{,}0120130140150$

a et b appartiennent à $[2+\sqrt{7}, +\infty[$; f est strictement croissante sur $[2+\sqrt{7}, +\infty[$

Comme $a < b$ alors $f(a) < f(b)$ Par suite $A < B$.

Exercice10 :

$q(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$

1) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{q(t_0+h)-q(t_0)}{h} = q'(t_0) = -3t_0^{\,2} + 6t_0 + 9$

$r(t) = q'(t) = -3t^2 + 6t + 9$

2) a) $r(t) = 0 \;\; et \;\; t \in [0,4]$

$-3t^2 + 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \;\; or\; on\; a: \; a - b + c = 0 \;\; d'ou \;\; t' = -1 \;\; et \;\; t'' = 3$

Par suite $r(t) = 0 \quad pour \quad t = 3$

b) $r(t) = -3t^2 + 6t + 9$

t	0		3		4
$r(t)$		+	0	−	

* tableau de variation de q:

t	0		3		4
$q'(t)$		+	0	−	
$q(t)$	0	↗	27	↘	20

Exercice11 :

Pour tout $x \geq 0$, on pose : $f(x) = 1 + \dfrac{x^3}{2} - \sqrt{1+x^3}$

* f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} = \dfrac{3x^2.\left[\sqrt{1+x^3}-1\right]}{2\sqrt{1+x^3}}$

$$f'(x) = \frac{3x^2.\left[(1+x^3)-1\right]}{2\sqrt{1+x^3}.\left(\sqrt{1+x^3}+1\right)} = \frac{3x^5}{2\sqrt{1+x^3}.\left(\sqrt{1+x^3}+1\right)} \geq 0, \; pour\; tout\; x \in [0,+\infty[$$

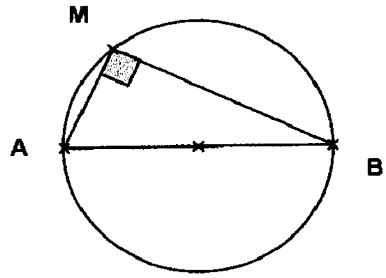
* f est croissante sur $[0,+\infty[$

$x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(0) \quad \Rightarrow \quad 1 + \dfrac{x^3}{2} - \sqrt{1+x^3} \geq 0$

Ce qui donne $1 + \dfrac{x^3}{2} \geq \sqrt{1+x^3}$, $\quad pour\; tout\; x \in [0,+\infty[$

Exercice12 :

*Soit ABM un triangle rectangle en M avec $AB = 4$



On pose $AM = x$ et $BM = y$; $x \in]0\,,4[\,, y \in]0\,,4[$

$AM^2 + BM^2 = AB^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$

On note $p(x)$ le périmètre du triangle ABM

$$p(x) = AB + AM + BM = 4 + x + \sqrt{16 - x^2}$$

* la fonction p est dérivable sur $]0\,,4[$ et

$$p'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{\sqrt{16-x^2}-x}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}.\left(\sqrt{16-x^2}+x\right)}$$

$16 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8$ D'où $x = 2\sqrt{2}$ car $x \in]0\,,4[$

x	0		$2\sqrt{2}$		4
$p'(x)$		$+$	0	$-$	
$p(x)$		$\nearrow$	$4(1+\sqrt{2})$	$\searrow$	

$p(x)$ est maximal pour $x = 2\sqrt{2}$ et dans ce cas $y = 2\sqrt{2}$ alors $AM = BM = 2\sqrt{2}$ ce prouve que le triangle ABM est rectangle et isocèle en M

Exercice13 :

1) pour $x = 10\ cm$, les dimensions de la boite, en $centimètres$, sont :

$$x = 10\,, y = 30 - 2x = 10 \quad \text{et} \quad z = \frac{300-2x}{2} = 140$$

2) $V(x) = x.y.z = x.(30-2x).\left(\frac{300-2x}{2}\right)$; $\boxed{V(x) = 2x.(15-x).(150-x)}$ cm^3

3) $V(x) = 2x^3 - 330x^2 + 4500x$

$V'(x) = 6x^2 - 660x + 4500 = 6(x^2 - 110x + 750)$

$x^2 - 110x + 750 = 0$; $\Delta = 9100$, $\sqrt{\Delta} = 10\sqrt{91}$

$x' = 5\left(11 - \sqrt{91}\right)$ et $x'' = 5\left(11 + \sqrt{91}\right)$

tableau de variation de *V* :

x	0		$5(11-\sqrt{91})$		15
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$V(x')$	$\searrow$	0

4) le volume V est maximal pour $x = 5(11 - \sqrt{91})$

Dans ce cas $V = V[5(11 - \sqrt{91})] = 500 \times [191\sqrt{91} - 836]$

Exercice14 :

1) $S = 5000 \quad m^2$; $\quad xy = 5000 \quad d'ou \quad y = \dfrac{5000}{x}$

$L(x) = x + 2y = x + \dfrac{10000}{x}$

2) $L'(x) = 1 - \dfrac{10000}{x^2} = \dfrac{x^2 - 10000}{x^2}$

3) $L(x)$ est minimale pour $x = 100$

Dans ce cas $L = 200\,m$

x	0		100		$+\infty$
$L'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$L(x)$	‖ $+\infty$	↘	200	↗	$+\infty$

Exercice15 :

$$C(x) = 0,48x + \frac{124000}{x} + 1200$$

1) $C'(x) = 0,48 - \dfrac{124000}{x^2}$

$C'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{124000}{0,48} \Leftrightarrow x = 508{,}265$, on pose $x_0 = 508{,}265$

x	1		x_0		5000
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$	$C(1)$	↘	$C(x_0)$	↗	$C(5000)$

2) C admet un minimum en $x_0 = 508{,}265$ atteint $C(x_0) = 1687{,}9340$

3) $x_0 = 508{,}265$ d'où $508 \leq x_0 \leq 509$

* $508 \leq x_0 \Rightarrow C(508) \geq C(x_0)$ car C est décroissante sur $[1\,, x_0]$

* $509 \geq x_0 \Rightarrow C(509) \geq C(x_0)$ car C est croissante sur $[x_0\,, 5000]$

* $C(508) \approx 1687{,}9349$ $\quad et \quad$ $C(509) \approx 1687{,}9344$

d'ou $\quad C(x_0) \leq C(508) \leq C(509)$

4) le cout total est minimal lorsque chaque commande contient 508 pneus.

Exercice16 :

1) $f(x) = AM + BM$; $x = CM$

$CM + DM = CD \Rightarrow x + DM = 5 \Rightarrow DM = 5 - x$

D'où $AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{9 + x^2}$ et $BM = \sqrt{BD^2 + DM^2} = \sqrt{16 + (5-x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 41}$

Par suite $f(x) = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2 - 10x + 41}$

2) a) f est dérivable sur $[0\,,5]$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} + \dfrac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+41}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+41}}$

$$f'(x) = \frac{x\sqrt{x^2-10x+41} + (x-5)\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}.\sqrt{x^2-10x+41}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(\sqrt{x^2-10x+41})^2 + (x-5)^2(\sqrt{x^2+9})^2}{\sqrt{x^2+9}.\sqrt{x^2-10x+41}.\left[x\sqrt{x^2-10x+41} - (x-5)\sqrt{x^2+9}\right]}$$

$$f'(x) = \frac{7x^2+90x-225}{\sqrt{x^2+9}.\sqrt{x^2-10x+41}.\left[x\sqrt{x^2-10x+41} - (x-5)\sqrt{x^2+9}\right]}$$

Pour $x \in [0\,,5]$ on a : $(x-5) \leq 0$ et $x \geq 0$ donc : $(x-5)\sqrt{x^2+9} \neq x\sqrt{x^2-10x+41}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + 90x - 225 = 0$

$\Delta = 14400$; $\sqrt{\Delta} = 120$; $x' = \dfrac{-105}{7}$ et $x'' = \dfrac{15}{7} \in [0,5]$

$f\left(\dfrac{15}{7}\right) = \dfrac{1}{7}\left(\sqrt{666} + \sqrt{1184}\right)$

f admet $f\left(\dfrac{15}{7}\right)$ comme minimum en $\dfrac{15}{7}$

x	0		$\frac{15}{7}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$3+\sqrt{41}$	$\searrow$	$f(\frac{15}{7})$	$\nearrow$	$4+\sqrt{34}$

b) pour $x = \dfrac{15}{7}$, $CM = \dfrac{15}{7}$ et $DM = \dfrac{20}{7}$

* le triangle AMC est rectangle en C donc $tan(\widehat{AMC}) = \dfrac{AC}{AM} \Rightarrow \tan(\alpha) = \dfrac{3}{\frac{15}{7}} = \dfrac{7}{5}$

* le triangle BMD est rectangle en D donc $tan(\widehat{BMD}) = \dfrac{BD}{DM} \Rightarrow \tan(\beta) = \dfrac{4}{\frac{20}{7}} = \dfrac{7}{5}$

Par suite $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$

c) $\tan(\alpha) = \tan(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \quad et \ \alpha \in \left]0 \ , \ \frac{\pi}{2}\right[\ et \ \beta \in \left]0 \ , \ \frac{\pi}{2}\right[$ d'où $\alpha = \beta$

Conclusion : la distance $(AM + BM)$ est minimale lorsque $\alpha = \beta$

Exercice17 :

$X(t) = t^3 - 12t + 17 \quad ; \quad t \geq 0$

1) a) la vitesse instantanée est : $X'(t) = 3t^2 - 12$

b) $X'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 4$ et $t \geq 0 \Leftrightarrow t = 2$

$\lim\limits_{t \to +\infty} X(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} t^3 = +\infty$

t	0		2		$+\infty$
$X'(t)$		$-$	0	$+$	
$X(t)$	17	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

c) * la particule s'arrête lorsque la vitesse s'annule c'est-à-dire $X't) = 0$ donc à l'instant $t_0 = 2$

* la particule se rapproche de l'origine lorsque X(t) diminue jusqu'à elle atteint son minimum donc sur l'intervalle [0,2]

* la particule s'éloigne de l'origine lorsque X(t) augmente à de son valeur minimal donc sur l'intervalle $[2, +\infty[$

2) $X(t) = t^3 - 8 \quad ; \quad t \geq 0$

a) $X'(t) = 3t^2$

b)

t	0		2		$+\infty$
$X'(t)$			$+$		
$X(t)$	-8	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{t \to +\infty} X(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} t^2 = +\infty$

c) * la particule s'arrête lorsque la vitesse s'annule c'est-à-dire $X'(t) = 0$ donc à l'instant $t_0 = 2$

* la particule se rapproche de l'origine sur l'intervalle [0,2] et s'éloigne de l'origine lorsque X(t) augmente à partir de son point de départ sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

Exercice18 : (énoncée à changer $(-)$ *au lieu de* $(+)$car t doit être positif)

$d(t) = -27t^4 + 252t^3 - 540t^2 + 9400 \qquad ; \ t \in [0\,,6]$

1) $d'(t) = -108t^3 + 756t^2 - 1080t = -108t.(t^2 - 7t + 10)$

$t^2 - 7t + 10 = 0$

$\Delta = 9 \ ; \ t' = 2 \ \ et \ \ t'' = 5$

t	0		2		5		6
$d'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$d(t)$	9400	$\searrow$	8824	$\nearrow$	10525	$\searrow$	9400

2) d atteint son minimum à l'instant $t = 2$ (après 2 heures donc à 14 h)

3) d atteint son maximum à l'instant $t = 5$ $(appr\acute{e}s\ 5\ heures\ donc à\ \ 17\ h)$

Exercice19 :

1) $C(x) = 5 \times 8 + 5 \times \sqrt{900^2 + x^2} + 5 \times 8 + 4 \times (3000 - x)$

D'où $C(x) = 80 + 5\sqrt{900^2 + x^2} + 4(3000 - x)$

2) $C'(x) = 5.\left(\dfrac{2x}{2\sqrt{900^2+x^2}}\right) - 4 = \dfrac{5x - 4\sqrt{900^2+x^2}}{\sqrt{900^2+x^2}}$

$$C'(x) = \frac{25x^2 - 16(900^2+x^2)}{\sqrt{900^2+x^2}\left[5x + 4\sqrt{900^2+x^2}\right]}$$

$$C'(x) = \frac{(3x - 3600)(3x + 3600)}{\sqrt{900^2+x^2}\left[5x + 4\sqrt{900^2+x^2}\right]}$$

$C'(x) = 0$ et $x \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 1200$

$C(1200) = 14780$

$C(3000) = 80 + 1500\sqrt{109}$

x	0		1 200		3000
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$	16580	$\searrow$	$C(1200)$	$\nearrow$	$C(3000)$

3) pour $x = 1200\ m$, le cout d'installation du câble est minimal.

Dans ce cas : $C = 14780\ \ dinars$

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

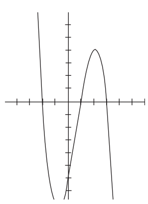
1. Le plan est muni d'un repère. La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$ admet pour centre de symétrie le point

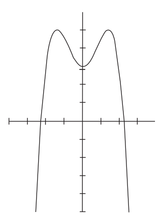
☐ O(0 , 0) ☐ A(–2 , 0) ☐ B(2 , 0).

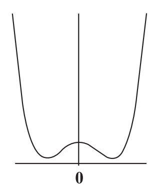
2. Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2(1-x)^2$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation

☐ $x = 0$ ☐ $x = \dfrac{1}{2}$ ☐ $x = 1$.

3. Le plan est muni d'un repère. La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 15$ est

☐ 

☐ 

☐ 

4. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-5x+3}{x-1}$ et les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$, $x \neq 1$.

☐ $a = 3$ ☐ $c = -1$ ☐ $a = 0$.

5. Le plan est muni d'un repère. Soit f la fonction définie sur $[0 , +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ et D la droite d'équation $y = x$. La courbe représentative de la fonction f

☐ est au dessus de D ☐ est en dessous de D ☐ coupe D.

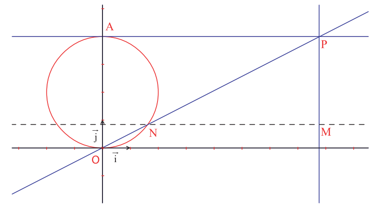
VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
1. Si $f(2a - x) = f(x)$ alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de C.
2. Si f est une fonction impaire alors la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(1 + x)$ admet un centre de symétrie.
3. Si f est une fonction paire alors la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(1 + x)$ admet un axe de symétrie.
4. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ s'obtient par une translation de C.
5. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(|x|)$ s'obtient par une translation de C.

Mobiliser ses compétences

Situation 1 La cubique d'Agnesi



Soit deux points O et A tels que OA=4 et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [OA]. Soit N un point de $\mathcal{C}$ distinct de O.
La tangente à $\mathcal{C}$ en A, coupe la droite (ON) en un point P.
La parallèle à la droite (AP) passant par N et la perpendiculaire à la droite (AP) passant par P se coupent en M.
On se propose de construire $\mathcal{C}'$ l'ensemble des points M lorsque N varie sur le cercle $\mathcal{C}$.
On considère un repère orthonormé tel que $\overrightarrow{OA} = 4\,\vec{j}$.

1. a. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.
   b. On désigne par t l'abscisse de N et par (x, y) les coordonnées de M.
   Montrer que $4t = xy$.
   c. En déduire que $y = \dfrac{64}{x^2 + 16}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{64}{x^2 + 16}$.
   a. Etudier f.
   b. Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ et le cercle $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}'$ est appelée, la cubique d'Agnesi, au nom d'une mathématicienne italienne (1718-1799).

Situation 2 courbe asymptote

On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3}$, $g : x \mapsto \dfrac{4x + 2}{6x - 3}$ et on désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b. Vérifier que la fonction f est paire.
   c. Etudier f sur $[0\,, +\infty[$.
   d. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ et en déduire que C_f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ que l'on précisera.
2. a. Déterminer l'ensemble de définition de g.
   b. On se propose de déterminer les réels a et b tels que $g(x) = a + \dfrac{b}{6x - 3}$.
   Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (6x - 3)g(x)$ et en déduire la valeur de b.
   Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et en déduire la valeur de a.
   c. Etudier g.
3. Tracer C_f et C_g.
4. a. Vérifier graphiquement que l'équation f(x) = g(x) admet une seule solution que l'on note α.
   b. Donner une valeur approchée de α à 0.1 près.
5. Représenter dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
   la fonction h définie sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $h(x) = \begin{cases} \dfrac{4x + 2}{6x - 3} & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{2}, \alpha\right], \\ \sqrt{x^2 + 3} & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$

Exercices et problèmes

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies par
$f(x) = x^2 + x + 1$ et $g(x) = -x^2 - 2x + 3$.
On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit m un réel, la droite D_m d'équation $x = m$, coupe C_f et C_g respectivement en M et N.
1. Etudier la position relative de C_f et C_g.
2. Déterminer C l'ensemble des milieux I des segments [MN], lorsque m varie dans $\mathbb{R}$?
3. Tracer C_f , C_g et C.

Exercice 2

Soit la fonction $f : x \mapsto |x^2 - 4| - |x - 2|$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Etudier f.
2. Etudier la dérivabilité de f en -2 et en 2.
3. Tracer C.
4. Discuter graphiquement suivant le réel m, les solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 3

1. Tracer dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x^2 - 1$, $g : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $h : x \mapsto 2x + 1$.
Soit un réel $x > 1$.
2. Montrer qu'on peut construire un triangle ABC tel que $AB= h(x)$, $AC = g(x)$ et $BC = f(x)$.
3. En utilisant la formule d'El Kashi :
$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA . BC . \cos \widehat{ABC}$,
montrer que l'angle $\widehat{ABC}$ est indépendant du réel x.
4. Le triangle ABC peut-il être isocèle ?

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x +1$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Etudier f et tracer C.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions.
b. Donner une valeur approchée à 0.1 près de chacune de ces solutions.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Etudier f.
2. a. Montrer que le point I(1 , 1) est un centre de symétrie de C.
b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point I.
c. Etudier la position de C par rapport à T.
3. Tracer C et T.
4. Tracer les représentations graphiques des fonctions $g : x \mapsto f(x) + 1$ et $h : x \mapsto f(x + 1)$.

Exercice 6

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^3 - 4x^2 - 2x + 15$ et $g : x \mapsto - x^2 + 2x + 3$. On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Etudier f.
2. a.Vérifier que $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - 6)$.
b. Etudier la position relative de C_f et C_g.
3. Tracer C_f et C_g.

Exercice 7

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^4 + 2x^2 - 3$ et $g : x \mapsto x^3 - x$. On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Etudier f.
2. Etudier g.
3. a.Vérifier que pour tout réel x
$x^4 - x^3 + 2x^2 + x -3 = (x^2 - 1)(x^2 - x + 3)$.
b. Etudier la position relative de C_f et C_g.
4. Tracer C_f et C_g.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction définie sur [0, 4] par
- $f(x + 2) = f(x)$ pour tout $x \in [0, 2]$,
- $f(x) = x^4 + ax^2$ pour tout $x \in [0, 2[$,
- f est continue à gauche en 2.

1. a. Déterminer f(2).
 b. Déterminer la valeur de a.
2. On désigne par f_1 la restriction de f à l'intervalle [0, 2]. Etudier f_1 et tracer sa courbe représentative C_1.
3. On désigne par f_2 la restriction de f à l'intervalle [2, 4] et par C_2 sa courbe représentative.
a. Montrer que C_2 est l'image de C_1 par une translation que l'on précisera.
b. Tracer alors la courbe représentative de f.

Exercice 9

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \dfrac{-2x+5}{x+3}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On se propose de déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x+3}$, $x \neq -3$.

a. Calculer $\lim\limits_{x \to -3} (x+3)f(x)$ et déduire la valeur de b.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a.

2. Etudier f et tracer C.

3. En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(-x)$.

4. Dresser le tableau de variation de $k : x \mapsto f(|x|)$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x + 2}{x-1}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On se propose de déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$, $x \neq 1$.

a. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a.

b. Déterminer la valeur de c.

c. Calculer f(0) et en déduire la valeur de b.

2. Etudier f.

3. a. Montrer que C admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) d'équation $y = -2x - 1$.

b. Etudier la position relative de C et de D.

4. Tracer C et D.

5. a. Représenter la fonction $|f|$.

b. Dresser son tableau de variation.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{x+2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On se propose de déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$, $x \neq -2$.

a. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a.

b. Déterminer la valeur de c.

c. Calculer f(0) et en déduire la valeur de b.

2. Etudier f.

3. a. Montrer que C admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) d'équation $y = x - 4$.

b. Etudier la position relative de C et de D.

4. Vérifier que la courbe C admet une asymptote verticale D' dont on déterminera une équation.

5. Montrer que le point d'intersection des droites D et D' est un centre de symétrie de la courbe C.

6. Tracer C, D et D'.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On se propose de déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x+4}$, pour tout x différent de 0 et de -4.

a.Calculer $\lim\limits_{x \to -4} (x+4)f(x)$ et en déduire la valeur de c.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} xf(x)$ et en déduire la valeur de b.

c. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a.

2. Etudier f.

3. Tracer C.

4. Soit m un réel. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de C avec la droite d'équation $y = m$.

5. a. Représenter la fonction $g : x \mapsto f(-|x|)$

b. En déduire son tableau de variation.

Exercice 13

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-2x+1}{x^2 - x + 1}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Etudier f.

3. Soit I le point de C d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

a. Montrer que I est un centre de symétrie de C.

b. Déterminer une équation de la tangente T à C en I.

c. Etudier la position relative de T et de C.

4. Tracer C et T.

5. Représenter la fonction $g : x \mapsto f(x+1) - 3$.

Exercice 14

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x-3)^2}{x-2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier f et tracer C.

Soit m un réel et D_m la droite d'équation $y = mx$.

2. a. Etudier l'existence et le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$.

b. Vérifier graphiquement ces résultats.

On désigne par M et N, lorsqu'ils existent les points d'intersection de C et de D_m puis par K le milieu du segment [MN].

3. a. Déterminer en fonction de m les coordonnées du point K.

b. Montrer que les coordonnées du point K vérifient une équation indépendante de m.

c. Que décrit alors le point K lorsque m varie ?

Exercice 15

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-x+3}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 3.

b. En déduire que C admet une demi-tangente verticale T au point d'abscisse 3.

4. Tracer C et T.
5. a. En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(|x|)$.

b. Dresser son tableau de variation.

Exercice 16

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-x^2+5x-4}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en 4.

b. En déduire que C admet deux demi-tangentes verticales que l'on précisera.

4. Soit Δ la droite d'équation $x = \dfrac{5}{2}$.

Montrer que Δ est un axe de symétrie de C.

5. Tracer C.

Exercice 17

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4+x^2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. a. Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + x\right)$.

b. En déduire que la courbe C admet une asymptote D au voisinage de $+\infty$ et une autre D' au voisinage de $-\infty$.

c. Vérifier que D et D' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4. Tracer C, D et D'.
5. En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+8}$.

Exercice 18

On considère les fonctions f, g et h définies sur [0, 2] par $f(x) = \sqrt{-x^2+4x+4}$, $g(x) = 2 + x - \dfrac{1}{2}x^2$ et $h(x) = 2 + x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}x^3$.

On désigne par C_f, C_g et C_h leurs courbes représentatives dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier chacune des fonctions f, g et h.
2. Montrer que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $x \in [0, 2]$.
3. Tracer C_f, C_g et C_h.
4. Déterminer une valeur approchée à 10^{-12} près de $\sqrt{4.00039999}$.

Exercice 19

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - \sqrt{x^2+x}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en -1.

b. En déduire que C admet deux demi-tangentes verticales que l'on précisera.

4. Soit Δ la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

Montrer que Δ est un axe de symétrie de C.

5. Montrer que la droite D d'équation $y = -x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$.
6. Tracer C, Δ et D.

Exercice 20

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ et soit $g = -f$.

On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier f.

2. a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et à droite en 4.

b. En déduire que C admet deux demi-tangentes verticales que l'on précisera.

3. a. Déterminer la forme canonique de $x^2 - 3x - 4$.

b. Déterminer alors

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - x + \frac{3}{2} \right) \text{ et } \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) + x - \frac{3}{2} \right).$$

c. En déduire que la courbe C admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et une autre au voisinage de $-\infty$.

4. a. Tracer C_f et C_g.

b. Vérifier que $C_f \cup C_g$ a pour équation $x^2 - y^2 - 3x - 4 = 0$

5. On considère les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ et le point $O'\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

On se propose de déterminer une équation de $C_f \cup C_g$ dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

Soit M un point du plan, on désigne par (x, y) ses coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et par (X, Y) celles dans $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

a. Exprimer x et y en fonction de X et Y.

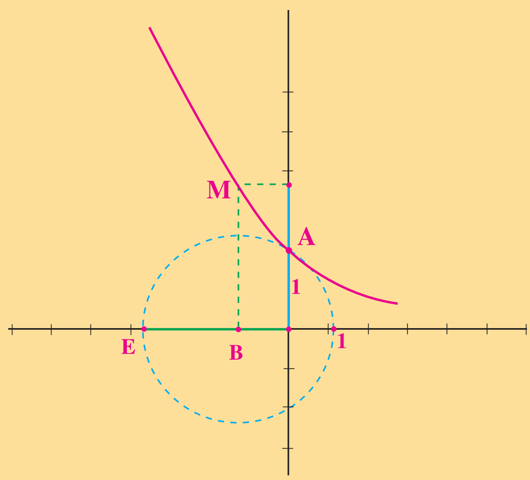
b. En déduire que M appartient à $C_f \cup C_g$, si et seulement si, $Y = \frac{25}{16X}$.

c. Conclure.

Avec l'ordinateur

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point A(0, 2).
A tout réel x, on désigne par B le point de $(O, \vec{i})$ d'abscisse x.
Le cercle de centre B et passant par A, coupe l'axe des abscisses en deux points. On désigne par E le point ayant une abscisse inférieure à celle de B.
On se propose d'étudier à l'aide de CABRI, la fonction f qui à tout réel x, associe la distance OE.

1. Après avoir montré les axes, on crée le point A, puis le point B comme " point sur objet ".
2. On crée le cercle C de centre B et passant par A.
3. A l'aide de l'outil " points sur deux objets " on crée le point E, puis le segment [OE].
4. On mesure OE par l'outil " Distance ou longueur"
5. On reporte cette distance sur l'axe des ordonnées en utilisant l'outil " Report de mesure ".
6. On crée le point M de coordonnées (x, OE).
7. Déplacer le point B sur l'axe des abscisses et conjecturer les positions de M.
8. Créer le lieu des points M lorsque B varie sur $(O, \vec{i})$.



Q C M

1) **(a)** $O(0\,,0)$ est un centre de symétrie pour C_f. (f est impaire)

2) **(b)** la droite d'équation $x = f(x) = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour C_f .

3) **(c)** C_3 est la courbe représentative de f. ($\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)

4) **(a)** $a = 3$ ($f(x) = 3x - 2 + \frac{1}{x-1}$)

5) **(a)** C_f est au dessus de D. ($4 + x^2 > x^2 \rightarrow \sqrt{4 + x^2} > |x| \geq x \rightarrow f(x) \geq x$)

VRAI - Faux

1) **Faux**

Aussi, il faux que : si $x \in D$ *alors* $(2a - x) \in D$

Contre exemple : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, $D = [2\,,+\infty[$

$f(2 \times 1 - x) = f(x)$, mais la droite d'équation $x = 1$ n'est pas un axe de symétrie pour C_f .

2) **Vrai**

En effet : soit $g(x) = f(1 + x)$; $C_g = t_{-\vec{\imath}}(C_f)$

Comme $O(0\,,0)$ est un centre de symétrie pour C_f alors $I(-1{,}0) = t_{-\vec{\imath}}(O)$ est un centre de symétrie pour C_g .

3) **Vrai**

En effet : soit $h(x) = f(1 + x)$; $C_h = t_{-\vec{\imath}}(C_f)$

Comme $\Delta : x = 0$ est un axe de symétrie pour C_f alors $t_{-\vec{\imath}}(\Delta) = \Delta' : x = -1$ est un axe de symétrie pour C_g .

4) **Faux**

Par exemple si f est positive alors $C_{|f|} = C_f$

5) **Faux**

En effet : $soit\ \ g(x) = f(|x|)$

$D_f = D_1 \cup D_2 \quad avec \quad \boldsymbol{D}_1$ Ì ¡ $_+$

Pour $x \in D_1$, $\quad g(x) = f(x)$

Remarque : si $D_1 = \emptyset\ \ alors\ \ \ g\ n'est\ pas\ définie$

Contre exemple f(x)= x

Mobiliser ses compétences :

Situation1 :

1) a) (C) est de centre $I(0,2)$ de rayon $R = 2$ d'où $(C): x^2 + (y-2)^2 = 4$

b) $x_N = t \quad et \quad M(x,y) \qquad d'ou \quad N(t,y)\ \ et\ P(x,4)\ ce\ qui\ donne \quad \overrightarrow{ON}\binom{t}{y}\ \ et\ \ \overrightarrow{OP}\binom{x}{4}$

$O\ ,N\ \ et\ \ P$ sont alignés donc $\begin{vmatrix} t & x \\ y & 4 \end{vmatrix} = 4t - xy = 0$

Par suite $xy = 4t$

c) $\quad N\left(\frac{xy}{4}, y\right) \in (C)\backslash\{O\} \Rightarrow \left(\frac{xy}{4}\right)^2 + (y-2)^2 = 4$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2y^2}{16} + y^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow \quad y\left[\frac{x^2}{16}y + y - 4\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{16}y + y - 4 \qquad car \quad y \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{x^2}{16}\right)y = 4$$

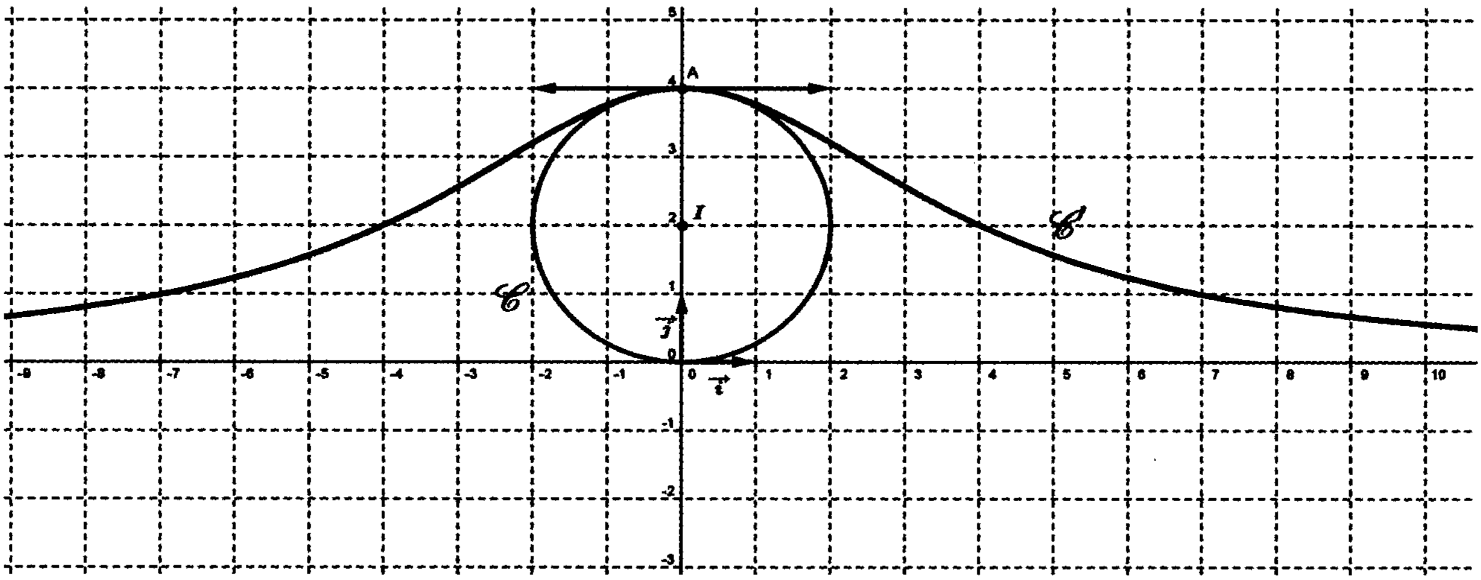
D'où $\qquad y = \dfrac{64}{x^2+16}$

2) $\quad f(x) = \dfrac{64}{x^2+16}\ ;\ D_f = IR \qquad\qquad$ (f est paire)

a) f est dérivable sur IR et $f'(x) = \dfrac{-128x}{(x^2+16)^2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b)



Situation2 :

$f(x) = \sqrt{x^2+3}$; $g(x) = \dfrac{4x+2}{6x-3}$

1) a) $D_f = \mathbb{R}$ car $x^2 + 3 > 0$ por tout $x \in \mathbb{R}$

b) pour tout $x \in D_f = \mathbb{R}$ on a $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 3} = \sqrt{x^2 + 3} = f(x)$

D'où f est une fonction paire.

c) f est dérivable sur $[0\,, +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} \geq 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+3) = +\infty$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+3)-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$

d'où la droite d'équation $y=x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$

2) a) $D_g=IR\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

b) * $g(x)=a+\dfrac{b}{6x-3} \Rightarrow (6x-3).g(x)=a.(6x-3)+b$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(6x-3).g(x)=b$ or $(6x-3).g(x)=4x+2$

D'ou $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(6x-3).g(x)=4\times\dfrac{1}{2}+2=4$ par suite $\boxed{b=4}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a+\dfrac{b}{6x-3}\right)=a$ d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+2}{6x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{6x}=\dfrac{2}{3}$

Par suite $\boxed{a=\dfrac{2}{3}}$

c) $g(x)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{6x-3}$

g est dérivable sur $IR\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ et :

$$g'(x)=\frac{-24}{(6x-3)^2}<0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+2}{6x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{6x}=\dfrac{2}{3}$

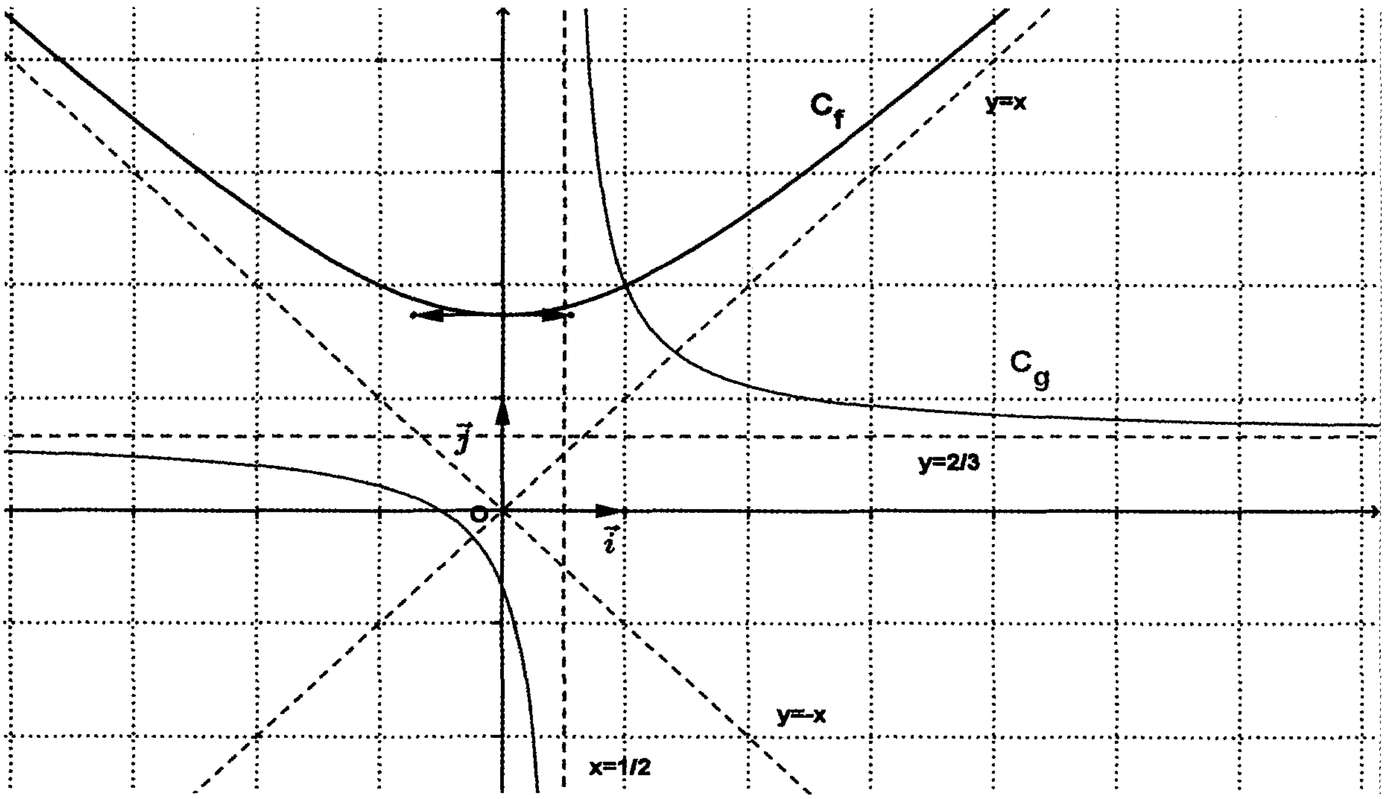
$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+2}{6x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{6x}=\dfrac{2}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	
$g(x)$	$\frac{2}{3}$ ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$\frac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}g(x)=\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}g(x)=-\infty$

* les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{2}{3}$ sont des asymptotes è (C_g).

3)

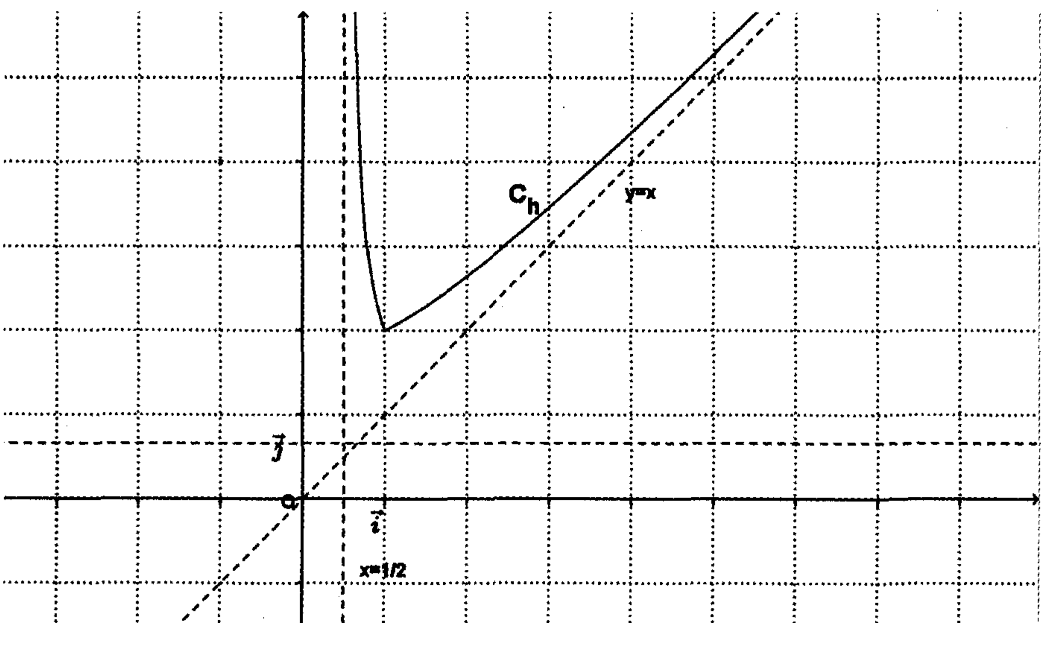


4) a) (C_f) et (C_g) se coupe en un unique point , d'où l'équation : $f(x) = g(x)$

admet une unique solution α

b) graphiquement : $\alpha \cong 1$ (on pourra aussi vérifier que $f(1) = g(1) = 2$ donc $\alpha = 1$)

c) $h(x) = \begin{cases} g(x) & si\ \ x \in \left]\frac{1}{2},\ \alpha\right] \\ f(x) & si\ \ x \in \left]\alpha\ , +\infty\right[\end{cases}$



Exercices

Exercice1 :

$f(x) - g(x) = 2x^2 + 3x - 2$

$\Delta = 25 \quad ; \ x' = -2 \ \ et \ \ x'' = \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Position relative	C_f est au dessus de C_g		C_f est au dessous de C_g		C_f est au dessus de C_g

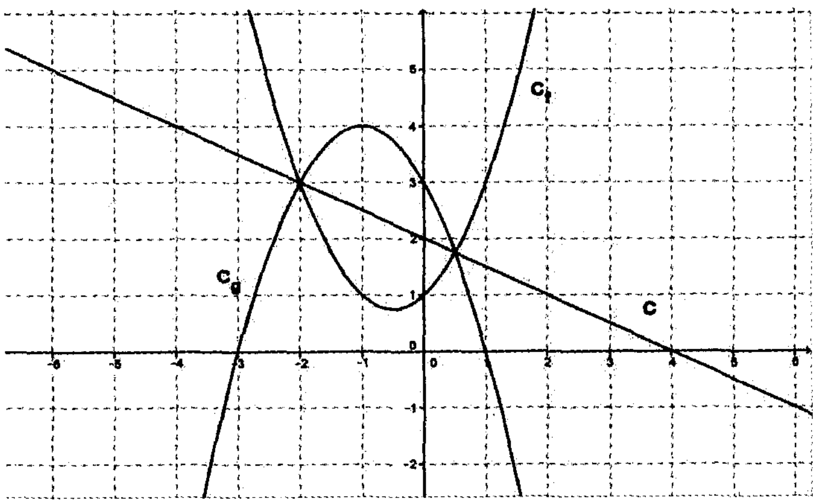
2) $M(m, f(m))$ $\quad et \quad$ $N(m, g(m))$

I le milieu de $[MN]$ d'où $I\left(m, \dfrac{f(m)+g(m)}{2}\right)$ c'est-à-dire $I\left(m, -\dfrac{1}{2}m+2\right)$

Posons $I(x,y)$ avec $\begin{cases} x = m \\ y = -\dfrac{1}{2}m + 2 \end{cases}$ $\quad m \in IR$

Ce qui donne $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ d'où (C) est la droite d'équation : $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$

3)



Exercice 2 :

1) $f(x) = |x^2 - 4| - |x - 2|$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x^2 - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	

* f est définie et continue sur IR

▶ pour $x \in]-\infty\,, -2]$

$f(x) = (x^2 - 4) + (x - 2) = x^2 + x - 6$

▶ pour $x \in]-2\,, 2]$, $f(x) = -(x^2 - 4) + (x - 2) = -x^2 + x + 2$

▶ pour $x \in]2\,, +\infty]$, $f(x) = (x^2 - 4) - (x - 2) = x^2 - x - 2$

Par suite : $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & si\ x \le -2 \\ -x^2 + x + 2 & si\ -2 < x \le 2 \\ x^2 - x - 2 & si\ x > 2 \end{cases}$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + x - 6\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + x - 6\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

2) ▶ dérivabilité en (-2)

• $$\lim_{x \to (-2)^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{(x^2 + x - 6) - (-4)}{x + 2} = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$$
$$= \lim_{x \to (-2)^-} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x + 2} = \lim_{x \to (-2)^-} (x - 1) = -3$$

Ainsi : f est dérivable à gauche en (-2) et $f'_g(-2) = -3$

• $$\lim_{x \to (-2)^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \to (-2)^+} \frac{(-x^2 + x + 2) - (-4)}{x + 2} = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{-x^2 + x + 6}{x + 2}$$
$$= \lim_{x \to (-2)^-} \frac{-(x + 2)(x - 3)}{x + 2} = \lim_{x \to (-2)^-} (-x + 3) = 5$$

Ainsi : f est dérivable à droite en (-2) et $f'_d(-2) = 5$

Conclusion $f'_d(-2) \neq f'_g(-2)$ $\boxed{\text{d'où } f \text{ n'est pas dérivable en } (-2)}$

▶ dérivabilité en 2 :

- $$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(-x^2+x+2)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+x+2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(-x-1)=-3$$

f est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2)=-3$

- $$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x^2-x-2)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-x-2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(x+1)=3$$

D'où f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2)=3$

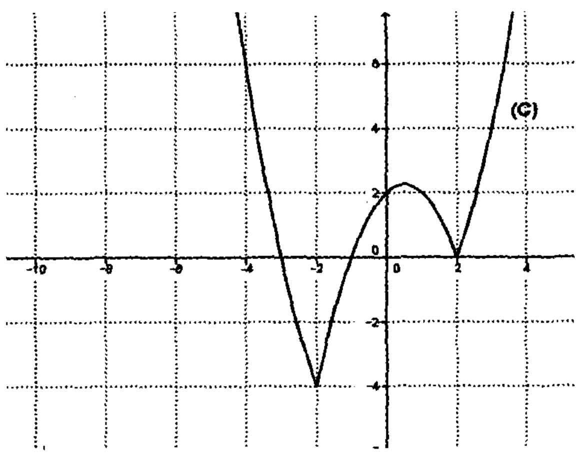
<u>Conclusion</u> $f'_d(2)\neq f'_g(2)$ d'où f n'est pas dérivable en 2.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\,,2\}$ et $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & si\ x<-2\\ -2x+1 & si\ -2<x<2\\ 2x-1 & si\ x>2\end{cases}$

x	$-\infty$		-2		$1/2$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	$9/4$	↘	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-6}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=+\infty$$



(C) admet deux branches paraboliques de direction $(O\,,\vec{j})$ aux voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

4) * si $m \in]-\infty, -4[$, $l'équation\ f(x) = m$ n'admet pas de solutions.

* si $m = -4$, $l'équation\ f(x) = m$ admet unique solution.

* si $m \in]-4, 0[\cup]\frac{9}{4}, +\infty[$, $l'équation\ f(x) = m$ admet deux solutions .

* si $m = 0\ ou\ m = 9/4$, $l'équation\ f(x) = m$ admet trois solutions.

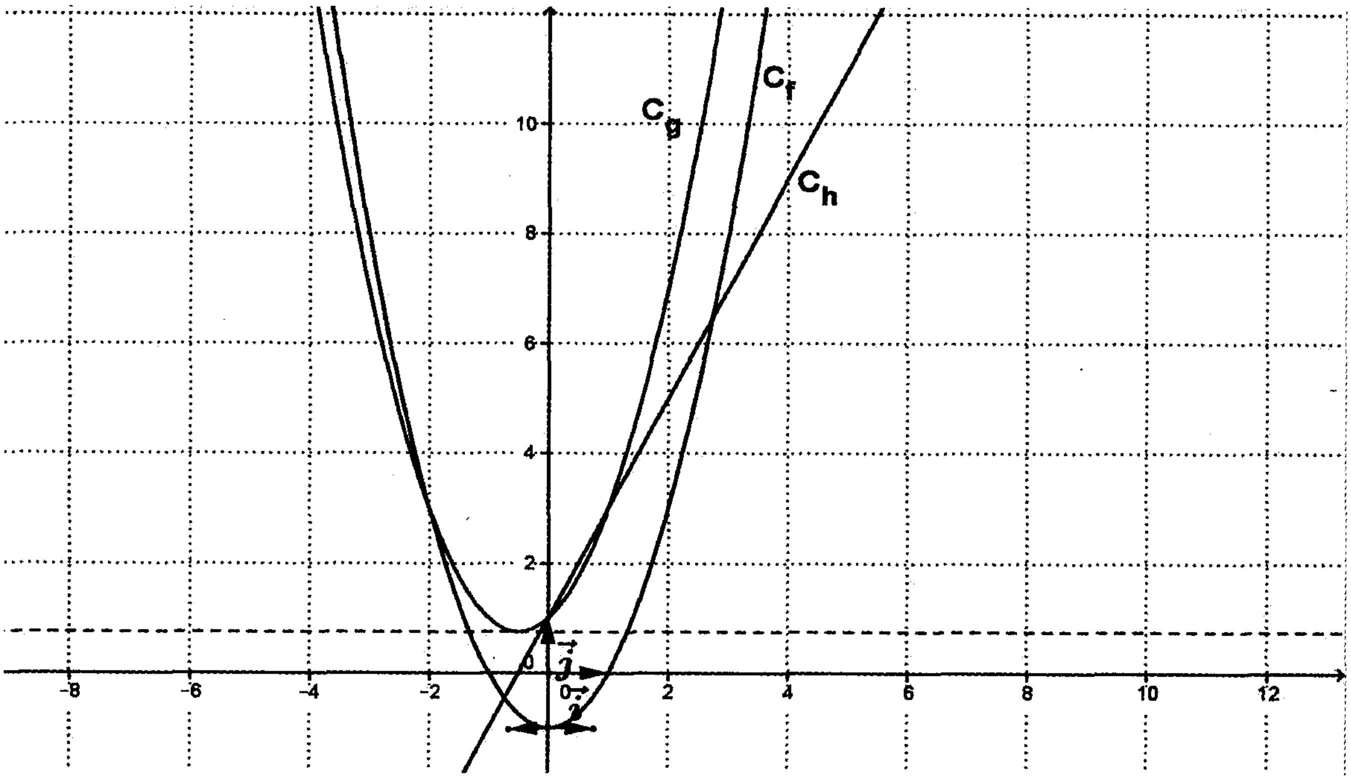
* si $m \in]0, 9/4[$, $l'équation\ f(x) = m$ admet quatre solutions .

Exercice 3 :

1) $-$ (C_f) est une parabole de sommet $S(0, -1)$ d'axe la droite d'équation : $x = 0$

$-$ (C_g) est une parabole de sommet $S(-1/2, 3/4)$ d'axe la droite d'équation : $x = -1/2$

$-$ (C_h) est une droite.



2) * $f(x) + g(x) = 2x^2 + x = x(2x + 1)$

Comme $x > 1\ alors$ $x(2x + 1) > 2x + 1$ d'où $\boxed{f(x) + g(x) > h(x)}$

* $f(x) + h(x) = x^2 + 2x$

$x > 1 \Rightarrow x^2 + 2x > x^2 + x + 1$

d'où $\boxed{f(x) + h(x) > g(x)}$

* pour $x > 1$, $on\ a :\ x^2 + 3x + 2 > x^2 - 1$

d'où $\boxed{g(x) + h(x) > f(x)}$

* de plus $f(x) > 0,\ g(x) > 0\ et\ h(x) > 0\ pour\ x > 1$

ABC est un triangle $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} AB < AC + BC \\ AC < AB + BC \\ BC < AB + AC \end{cases}$

Donc on peut construire un triangle ABC tels que : $BC = f(x),\ AC = g(x)\ et\ AB = h(x)$

3) $AC^2 = [g(x)]^2 = (x^2 + x + 1)^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$BA^2 + BC^2 = [h(x)]^2 + [f(x)]^2 = (2x + 1)^2 + (x^2 - 1)^2$

Ce qui donne $BA^2 + BC^2 = x^4 + 2x^2 + 4x + 2$

On a d'après la formule d'El –Kashi : $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2.BA \times BC \times cos(\widehat{ABC})$

$\Rightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = x^4 + 2x^2 + 4x + 2 - 2.(2x + 1)(x^2 - 1).cos(\widehat{ABC})$

$\Rightarrow 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = -2(2x + 1)(x^2 - 1).cos(\widehat{ABC})$

$\Rightarrow (2x + 1)(x^2 - 1) = -2(2x + 1)(x^2 - 1).cos(\widehat{ABC})$

$\Rightarrow cos(\widehat{ABC}) = -\frac{1}{2}$ d'où $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$ (angle constant indépendant de x)

4) ABC est isocèle pour $BA = BC$

$BA = BC \Leftrightarrow f(x) = h(x)$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 3$

$\Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt{3}\ ou\ x - 1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3}\ ou\ x = 1 + \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}\ car\ x > 1$

Finalement $ABC\ est\ isocèle\ pour\ x = 1 + \sqrt{3}$

Exercice 4 :

1) $f(x) = -x^3 + 3x + 1$

* f est définie et continue sur tout $\mathbb{R}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x^3\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$$

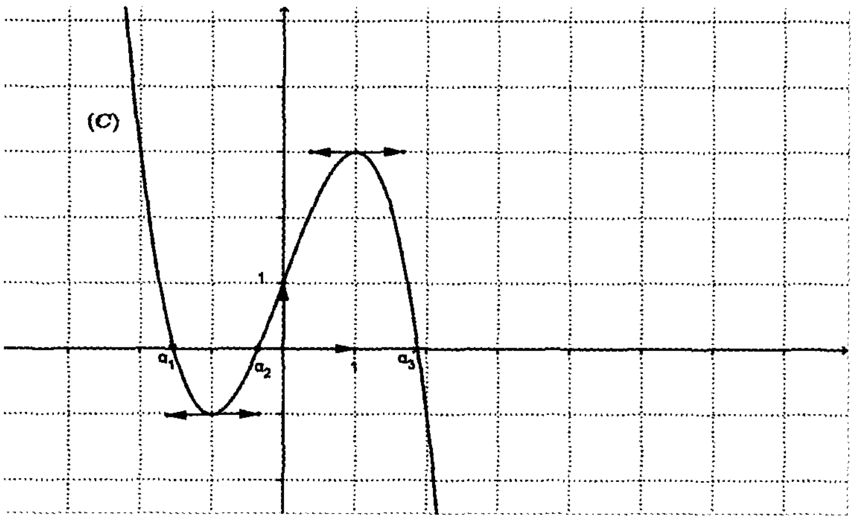
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$$

d' ou (C) admet deux branches paraboliques de direction $(O, \vec{j})$ aux voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.



2) a) l'axe des abscisses coupe (C) en trois points distincts d'où l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

b) * f est continue sur $[-2, -1]$ et $f(-2) \times f(-1) = -3 < 0$

d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha_1 \in [-2, -1]$

Avec la calculatrice → $f(-1{,}6) \times f(-1{,}5) \cong (0{,}296) \times (-0{,}125) < 0$

$d'ou$ $\boxed{-1{,}6 \leq \alpha_1 \leq -1{,}5}$

* f est continue sur $[-0{,}4 \; ; \; -0{,}3]$ et $f(-0{,}4) \times f(-0{,}3) = (-0{,}136)(0{,}127) < 0$

d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha_2 \in [-0{,}4 \; ; \; -0{,}3]$ d'où $\boxed{-0{,}4 \leq \alpha_2 \leq -0{,}3}$

* f est continue sur $[1{,}8 \; ; \; 1{,}9]$ et $f(1{,}8) \times f(1{,}9) = (0{,}568)(-0{,}159) < 0$

d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha_3 \in [1{,}8 \; ; \; 1{,}9]$ d'où $\boxed{1{,}8 \leq \alpha_3 \leq 1{,}9}$

Exercice5 :

1) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}$

* f est définie et continue sur tout $\mathbb{R}$.

* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -x^2 + 2x = -x(x-2)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}x^3\right) = -\infty$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$5/3$	$\searrow$	$-\infty$

* $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{3x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2}{3}\right) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{3x} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{3}\right) = -\infty$

d' ou (C) admet deux branches paraboliques de direction $(O, \vec{j})$ aux voisinage de $+\infty$ *et* $-\infty$.

2) a) ► pour tout $x \in D_f = \mathbb{R}$, *on a* $(2-x) \in D_f$

► $f(2-x) + f(x) = -\frac{1}{3}(2-x)^3 + (2-x)^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}$

$= -\frac{1}{3}(8 - 12x + 6x^2 - x^3) + (4 - 4x + x^2) - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{2}{3}$

$= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{2}{3} = 2$

D'où $f(2-x) = 2 - f(x)$

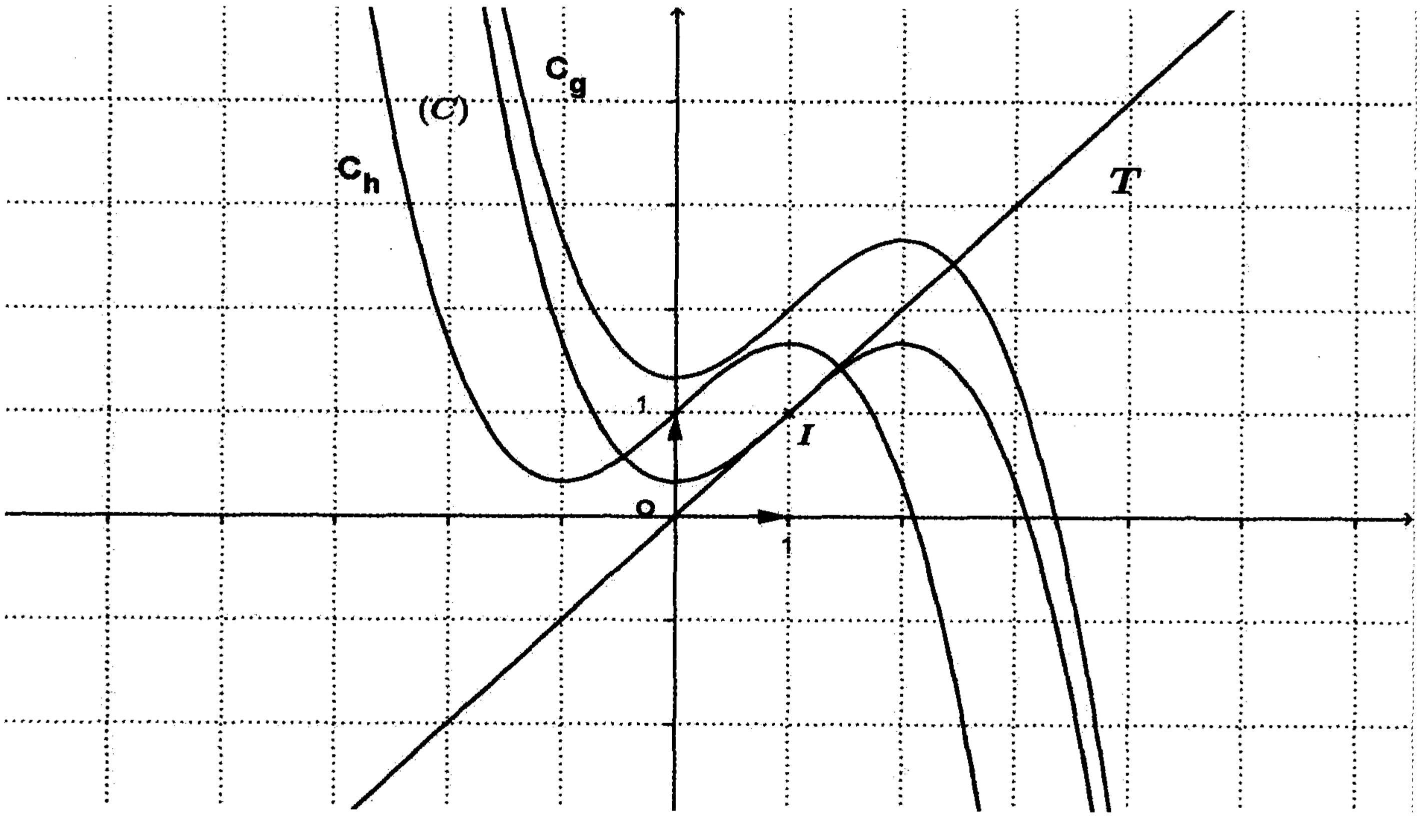
Conclusion : $I(1,1)$ est un centre de symétrie pour (C).

b) T: $y = f'(1).(x-1) + f(1)$, Par suite T: $y = x$

c) $f(x) - x = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -\frac{1}{3}(x-1)^3$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$
Position relative	(C) au dessus de T	$(1,1)$	T au dessus de (C)

3)



4) • $g(x) = f(x) + 1$

(C_g) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $\vec{j}$.

• $h(x) = f(x+1)$

(C_h) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $-\vec{i}$.

Exercice 6 :

1) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 15$

* f est définie et continue sur tout $\mathbb{R}$.

* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 8x - 2$

$\Delta = 88 = 4 \times 22$; $x' = \dfrac{4-\sqrt{22}}{3}$ et $x'' = \dfrac{4+\sqrt{22}}{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3\right) = +\infty$

x	$-\infty$		$\frac{4-\sqrt{22}}{3}$		$\frac{4+\sqrt{22}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(x')$	↘	$f(x'')$	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{3}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3}\right)=+\infty$$

d' ou (C_f) admet deux branches paraboliques de direction $(O\,,\vec{j})$ aux voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

2) a) $(x-2)(x^2-x-6) = x^3-x^2-6x-2x^2+2x+12 = x^3-3x^2-4x+12$

b) $f(x)-g(x) = \quad x^3-3x^2-4x+12 = (x-2)(x^2-x-6)$

$x^2-x-6=0$

$\Delta = 25$; $x' = -2$ et $x'' = 3$

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-x-6		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
P		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite:

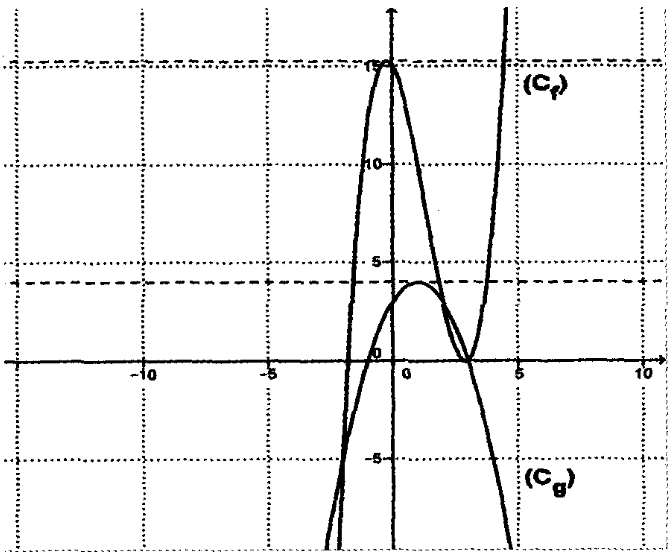
x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$P.R$		C_g/C_f		C_f/C_g		C_g/C_f		C_f/C_g	

3) (C_g) est une parabole de sommet

$S(1\,,4)$ $d'axe$ $: x=1$

$x' \cong -0{,}23$; $x'' \cong 2{,}9$

$f(x') \cong 15{,}23$; $f(x'') \cong -0{,}05$



Exercice7 :

1) $f(x) = x^4+2x^2-3$

- f est définie et continue sur tout $\mathbb{R}$.
- il est clair que f est une fonction paire, il suffit donc de l'étudier sur $D_E = [0\,,+\infty[$
- f est dérivable sur $[0\,,+\infty[$ et $f'(x) = 4x^3+4x = 4x(x^2+1) \geq 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^4\right) = +\infty$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

* $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3\right) = +\infty$$

d'ou (C_f) admet une branche parabolique de direction $(O\ ,\vec{j})$ aux voisinage de $+\infty$.

2) * $g(x) = x^3 - x$

- g est définie et continue sur tout $\mathbb{R}$.
- il est clair que g est une fonction impaire, il suffit donc de l'étudier sur $D_E = [0\ ,+\infty[$
- g est dérivable sur $[0\ ,+\infty[$ $\ et\ \ g'(x) = 3x^2 - 1$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3\right) = +\infty$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

* $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\right) = +\infty$$

d'ou (C_g) admet une branche parabolique de direction $(O\ ,\vec{j})$ aux voisinage de $+\infty$.

3) a) $(x^2 - 1)(x^2 - x + 3) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$

b) $f(x) - g(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3 = (x^2 - 1)(x^2 - x + 3)$

* $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow x = 1\ \ ou\ \ x = -1$

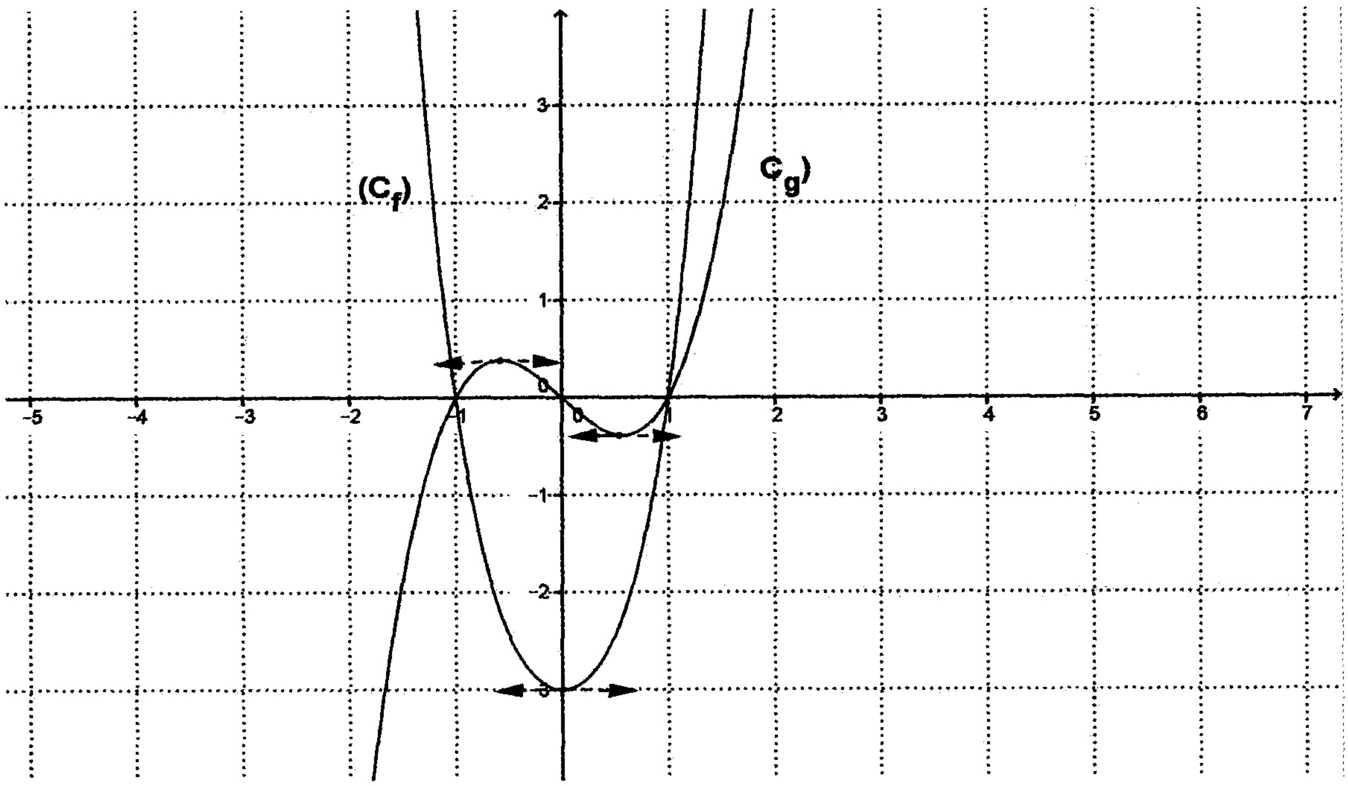
* $x^2 - x + 3 = 0\ ,\quad \Delta = -11 < 0\ \ (a = 1 > 0)\quad d'ou\ \ x^2 - x + 3 > 0\ \ pour\ tout\ x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2 - x + 3$		$+$		$+$		$+$	
$(x^2 - 1)(x^2 - x + 3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite:

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
P . Relative	$(C_f)/C_g$		$(C_g)/C_f$		$(C_f)/C_g$	

4)



Exercice 8 :

1) a) $f(0) = 0^4 + a \times 0 = 0$

On a : $f(x+2) = f(x)$, $x \in [0,2[$

pour $x = 0$, *on aura* $f(2) = f(0) = 0$

b) f est continue à gauche en 2 d'où $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} (x^4 + ax^2) = 0$

$\Rightarrow 16 + 4a = 0 \quad \Rightarrow a = -4$

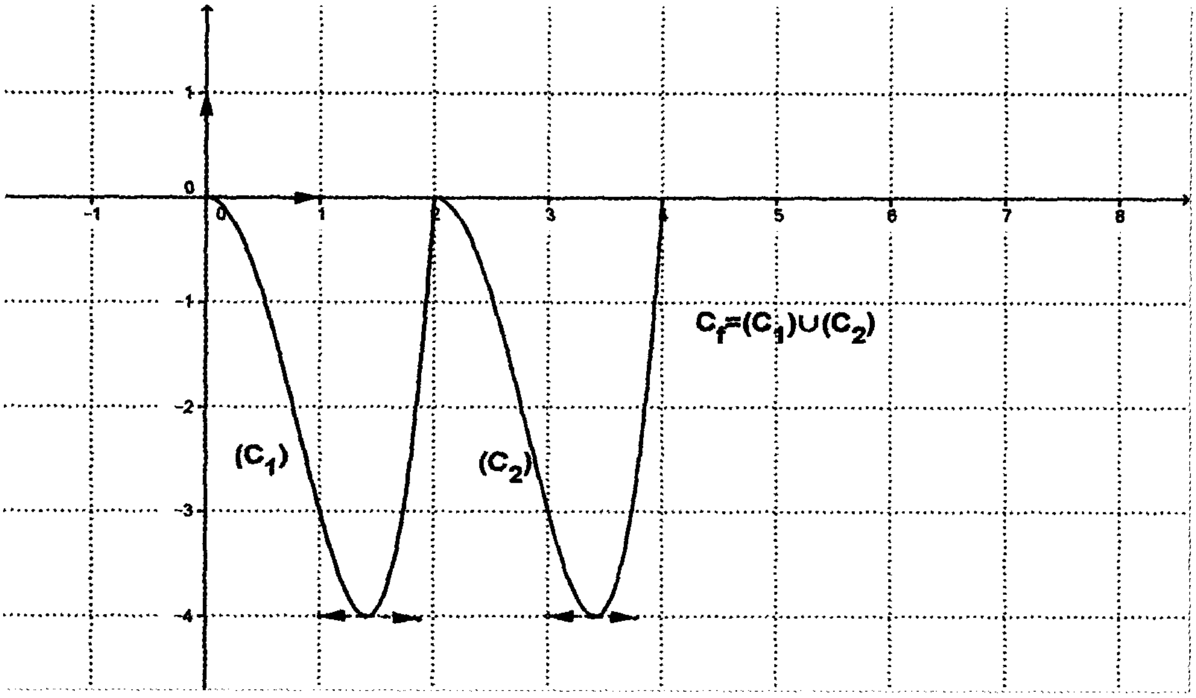
Par suite pour $x \in [0,2]$, $f(x) = x^4 - 4x^2$

2) $f_1(x) = x^4 - 4x^2$, $x \in [0,2]$

f_1 est dérivable sur $[0,2]$ et $f'_1(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2) = 4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

x	0		$\sqrt{2}$		2
$f'_1(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

(C_2) est l'image de (C_1) par la translation de vecteur $2\vec{\imath}$.



3) a) soit $M(X\,,Y)$ un point de (C_2)

$$M(X\,,Y)\ avec\ \begin{cases} Y = f(X) \\ X \in [2\,,4] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = f(X-2) \\ (X-2) \in [0\,,2] \end{cases} \Rightarrow N(X-2\,,Y) \in (C_2)$$

$\overrightarrow{MN}\binom{2}{0} = 2\vec{\imath}$ d'où $(C_2) = t_{2\vec{\imath}}(C_1)$

b) voir figure.

Exercice9 :

1) $f(x) = \dfrac{-2x+5}{x+3}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$

a) $f(x) = a + \dfrac{b}{x+3}$

D'une part : $(x+3)f(x) = -2x+5$, d'autre part : $(x+3)f(x) = a.(x+3) + b$

$$\lim_{x\to(-3)}(x+3)f(x)=\lim_{x\to(-3)}(-2x+5)=11 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to(-3)}(x+3)f(x)=\lim_{x\to(-3)}\left[a(x+3)+b\right]=b$$

D'où $\boxed{b=11}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x+5}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x}{x}\right)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a+\dfrac{b}{x+3}\right)=a$

d'où $\boxed{a=-2}$

<u>conclusion :</u> $f(x)=-2+\dfrac{11}{x+3}$

2) * f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ et $f'(x)=-\dfrac{11}{(x+3)^2}<0$

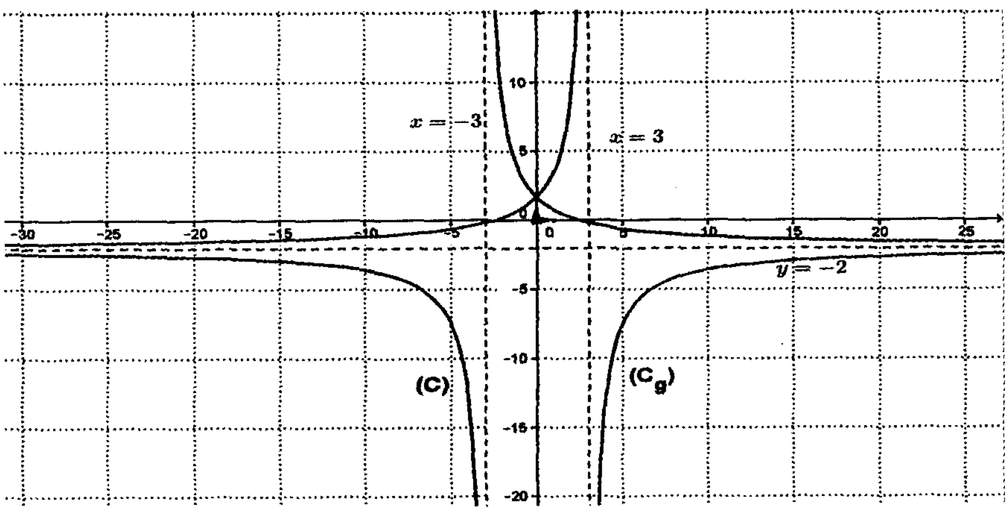
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=-2$$

$$\lim_{x\to(-3)^-}f(x)=\lim_{x\to(-3)^-}\left(-2+\frac{11}{x+3}\right)=-\infty$$

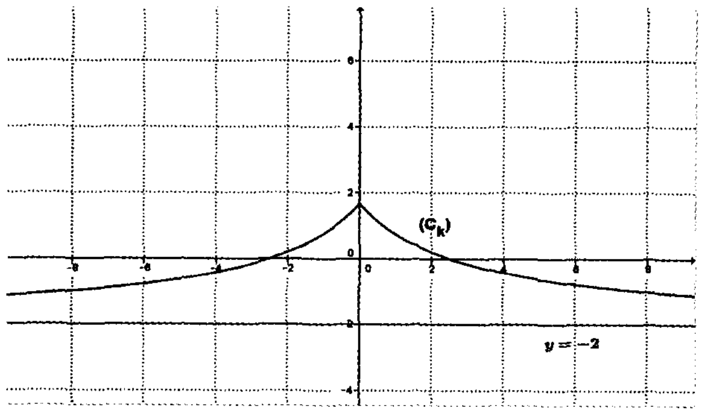
$$\lim_{x\to(-3)^+}f(x)=\lim_{x\to(-3)^+}\left(-2+\frac{11}{x+3}\right)=+\infty$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$-2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -2$

* les droites d'équations respectives $x=-3$ *et* $y=-2$ sont des asymptotes à (C)



3)



$g(x) = f(-x)$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{3\}$

$\begin{cases} x \in D_g \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-x) \in D_f \\ y = f(-x) \end{cases}$

ce qui donne : $M(x,y) \in (C_g) \Leftrightarrow$

$M'(-x,y) \in (C_f)$ Donc (C_g) se déduit de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{j})$

4) $k(x) = f(|x|)$; $D_k = \mathbb{R}$

Il est clair que k est une fonction paire de plus $k(x) = f(x)\ pour\ x \in [0, +\infty[$

$$k(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \geq 0 \\ g(x) & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k(x)$	-2 ↗	$5/3$	↘ -2

Exercice 10 :

1) $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x + 2}{x - 1} = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$; $x \neq 1$

a) d'une part : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2 + x + 2}{x^2 - x} = -2$ d'autre part : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x(x-1)}\right) = a$

d'où $\boxed{a = -2}$

b) d'une part : $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(-2x^2 + x + 2\right) = 1$

d'autre part : $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [(x-1)(ax + b) + c] = c$

d'où $\boxed{c = 1}$

c) $f(0) = -2 \Rightarrow b - c = -2 \Rightarrow b = c - 2 \Rightarrow \boxed{b = -1}$

par suite $f(x) = -2x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$

2) * f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $f'(x) = -2 - \dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-2x - 1 + \frac{1}{x-1}\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-2x - 1 + \frac{1}{x-1}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(-2x - 1 + \frac{1}{x-1}\right) = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\left(-2x - 1 + \dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty$ Donc la droite d'équation : $x = 1$ est une asymptote à (C)

.

4) a)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (-2x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (-2x-1)] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1} = 0$$

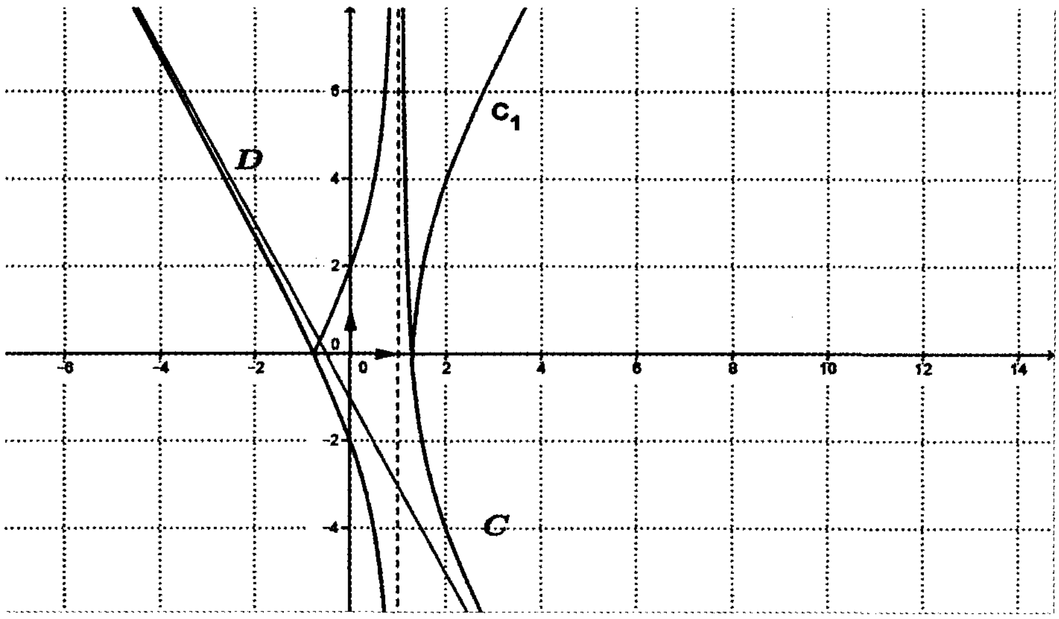
La droite Δ d'équation : $y = -2x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

b) $f(x) - (-2x-1) = \dfrac{1}{x-1}$

Signe de $f(x) - (-2x - 1)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - (-2x-1)$	$-$	||	$+$
Position relative	D/C	||	C/D

4)



5) a) (C_1) est la courbe représentative de $|f|$.

b)

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{17}}{4}$		1		$\frac{1+\sqrt{17}}{4}$		$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2 + x + 2 = 0$

$\Delta = 17 \quad ; \quad x' = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{-4} = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $x' = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{-4} = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$

Exercice11 :

1) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-2}{x+2} = ax + b + \dfrac{c}{x+2} \quad ; \quad x \neq 1$

a) d'une part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x-2}{x^2+2x} = 1$ d'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x(x+2)}\right) = a$

d'où $\boxed{a = 1}$

b) d'une part : $\lim\limits_{x\to(-2)}(x+2)f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)}\left(x^2-2x-2\right)=6$

D'autre part : $\lim\limits_{x\to(-2)}(x+2)f(x)=\lim\limits_{x\to1}[(x+2)(ax+b)+c]=c$

d'où $\boxed{c=6}$

c) $f(0)=-1 \;\Rightarrow\; b-\dfrac{c}{2}=-1 \;\Rightarrow\; b=-1-\dfrac{c}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{b=-4}$

par suite $f(x)=x-4+\dfrac{6}{x+2}$

2) * f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ et $f'(x)=1-\dfrac{6}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+2)^2-6}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+2-\sqrt{6})(x+2+\sqrt{6})}{(x+2)^2}$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{6}$		-2		$-2+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-6-2\sqrt{6}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-6+2\sqrt{6}$	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-4+\frac{6}{x+2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-4+\frac{6}{x+2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}\left(x-4+\frac{6}{x+2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\left(x-4+\frac{6}{x+2}\right)=+\infty$$

3) a)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-4)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x+2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-4)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x+2}=0$$

La droite D d'équation : $y=x-4$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

b) $f(x)-(x-4)=\dfrac{6}{x+2}$

x	$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ $+\infty$	
$f(x)-(x-4)$	$-$	$+$
Position relative	D/C	C/D

4) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty$

La droite d'équation : $x=-2$ est une asymptote à (C)

5) $\begin{cases} x=-2 \\ y=x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases}$ d'où $D\cap D'=\{I(-2,-6)\}$

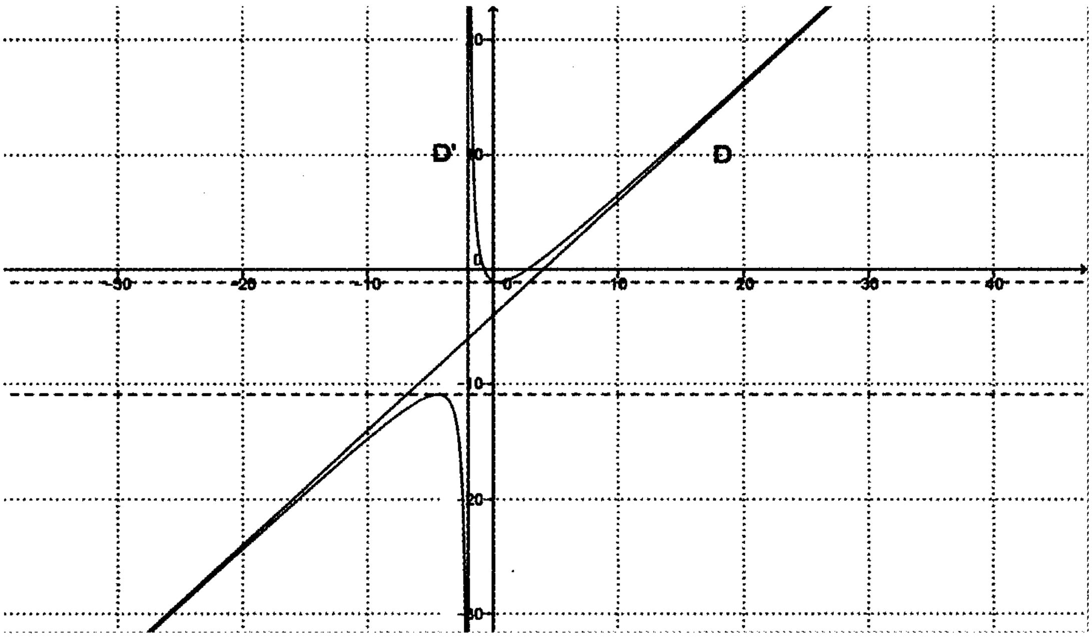
* $x\in D_f \Rightarrow x\neq -2 \Rightarrow -x\neq 2 \Rightarrow -4-x\neq -2 \Rightarrow (-4-x)\in D_f$

* $f(-4-x)+f(x)=[(-4-x)-4+\dfrac{6}{-4-x+2}]+x-4+\dfrac{6}{x+2} \quad =-x-8-\dfrac{6}{x+2}-4+\dfrac{6}{x+2}=-12$

d'où $f(-4-x)=-12-f(x)$

par suite le point $I(-2,-6)$ est un centre de symétrie pour (C).

6)



<u>Exercice12</u> :

1) $f(x)=\dfrac{-x^2-3x+2}{x^2+4x}$; $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-4,0\}$

$$f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+4}$$

a) $\lim\limits_{x \to (-4)} (x+4)f(x) = \lim\limits_{x \to (-4)} \left(\frac{-x^2 - 3x + 2}{x} \right) = \frac{1}{2}$,

d'autre part : $\lim\limits_{x \to (-4)} (x+4)f(x) = \lim\limits_{x \to (-4)} \left\lfloor (a + \frac{b}{x})(x+4) + c \right\rfloor = c$

ce qui donne $c = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} [xf(x)] = \lim\limits_{x \to (-4)} \left(\frac{-x^2 - 3x + 2}{x+4} \right) = \frac{1}{2}$, d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0} xf(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left\lfloor b + (a + \frac{c}{x+4})x + c \right\rfloor = b$

ce qui donne $b = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x^2}{x^2} \right) = -1$ d'autre part : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+4} \right) = a$

ce qui donne $a = -1$

Par suite $f(x) = -1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)}$

2) * f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$ et $f'(x) = \frac{-1}{2x^2} - \frac{1}{2(x+4)^2} < 0$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)} \right) = -1$$

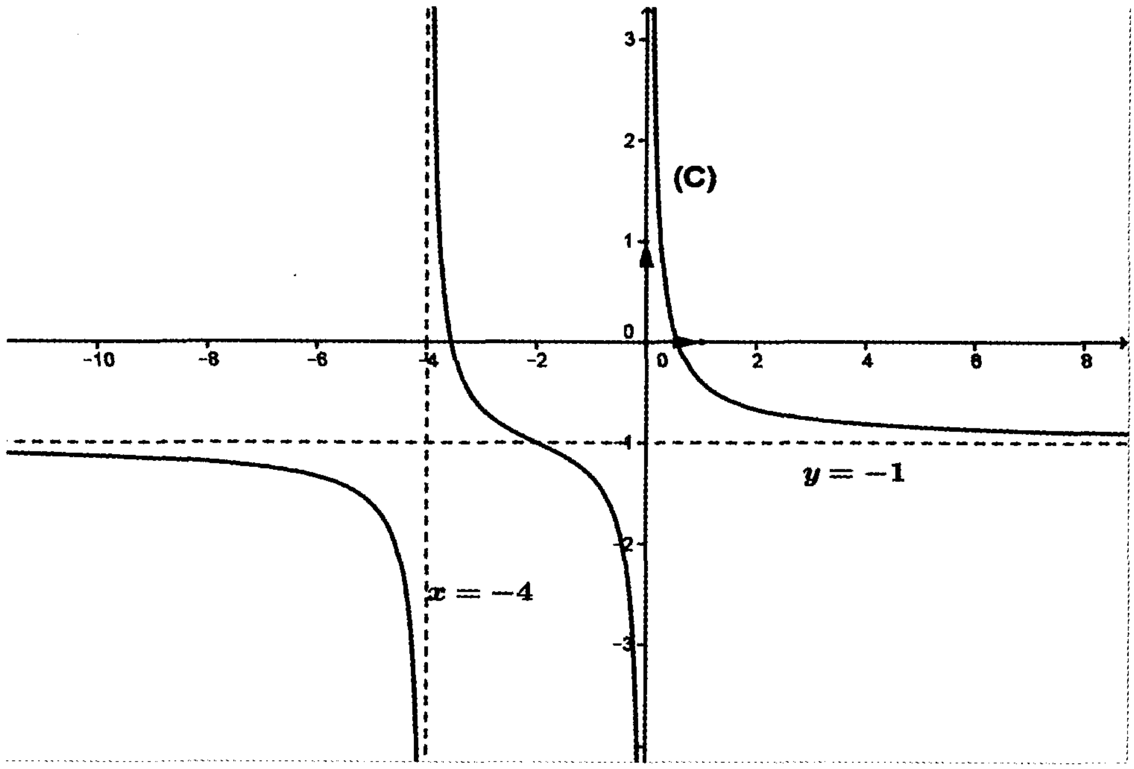
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)} \right) = -1$$

$\lim\limits_{x \to (-4)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-4)^-} \left(-1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)} \right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to (-4)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-4)^+} \left(-1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)} \right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(-1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)} \right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)} \right) = +\infty$

3) Les droites d'équations respectives : $x = -4$,

$x = 0$ *et* $y = -1$ sont des asymptotes à (C) .



4) * $m = -1$ $\longrightarrow$ un seul point d'intersection

* $m \neq -1$ $\longrightarrow$ deux points d'intersection

5) a) $g(x) = f(-|x|)$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-4\,,0\,,4\}$

* pour $x \in \left]-\infty\ ,\ 0\right[\backslash\{-4\}$, $g(x) = f(x)$

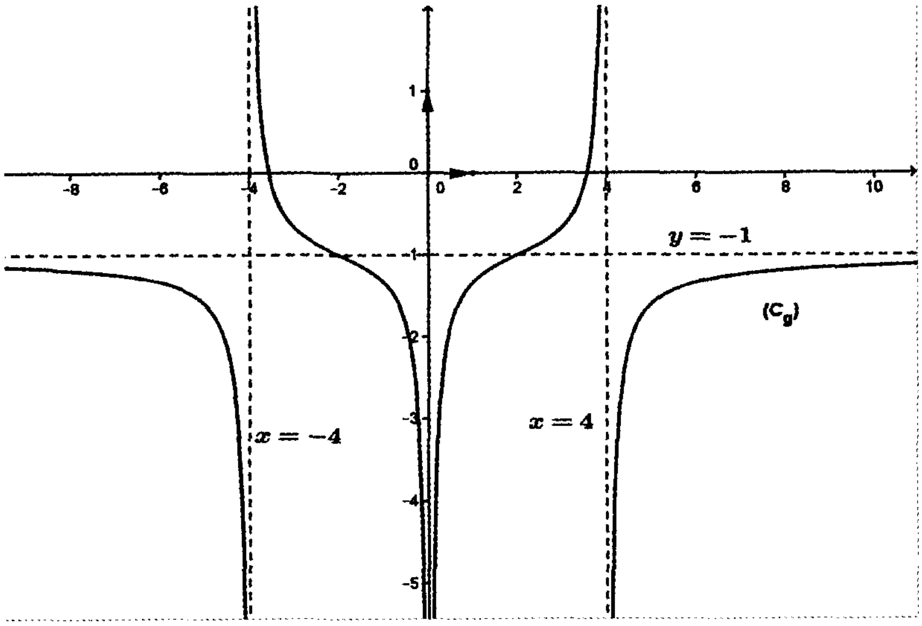
* pour $x \in \left]0\ ,+\infty\right[\backslash\{4\}$, $g(x) = f(-x)$

* g est une fonction paire

C_1 : la courbe de la restriction de f *sur* $\left]-\infty\ ,\ 0\right[\backslash\{-4\}$

$C_g = C_1 \cup C_2$

C_2 : le symétrique de C_1 par rapport à l'axe des ordonnées



b) tableau de variations de g:

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$g(x)$	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1

<u>**Exercice 13**</u> :

1) $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x^2-x+1}$; $\Delta = -3 < 0$ $d'ou$ $D_f = \mathbb{R}$.

2) * f est continue sur $\mathbb{R}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f\,'(x) = \dfrac{-2(x^2-x+1)-(2x-1)(-2x+1)}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{2x^2-2x-1}{(x^2-x+1)^2}$

$2x^2 - 2x - 1 = 0$; $\Delta = 12$;

$x' = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $x' = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2/\sqrt{3}$	↘	$-2/\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-2x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x} = 0$

3) $f(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2},0\right)$

a) * pour $x \in D_f = \mathbb{R}$, $on\ a$ $(1-x) \in D_f$

* $f(1-x) = \dfrac{-2(1-x)+1}{(1-x)^2-(1-x)+1} = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ donc $f(1-x) = -f(x)$

Par suite le point $I\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ est un centre de symétrie pour (C).

b) $T : y = f'(\frac{1}{2}).(x-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})$ d'où $T : y = \dfrac{-8}{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

c)

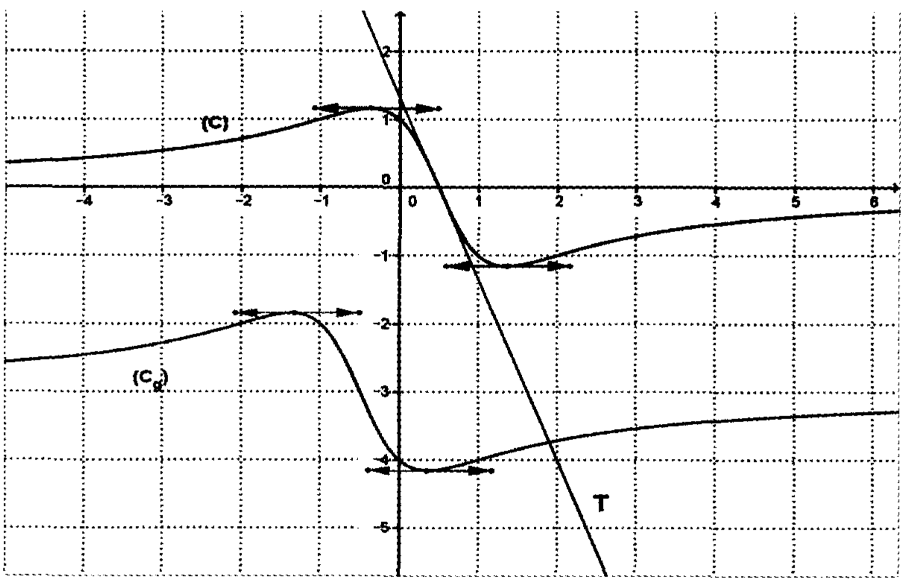
$$f(x)+\frac{8}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) = f(x)+\frac{4}{3}(2x-1) = \frac{-2x+1}{x^2-x+1}+\frac{4}{3}(2x-1)$$
$$=(2x-1)\left[\frac{-1}{x^2-x+1}+\frac{4}{3}\right] = \frac{(2x-1)(4x^2-4x+1)}{3(x^2-x+1)}$$

$$f(x)+\frac{8}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{(2x-1)^3}{3(x^2-x+1)}$$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f(x)+8/3(2x-1)$	$-$	0	$+$
P. relative	$T\,/(C)$		$(C)/T$

Le signe de $f(x)+\dfrac{8}{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ est celui de $(2x-1)$

4) La droite d'équation : $y = 0$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.



5)

$g(x) = f(x+1) - 3$

$(C_g) = t_{\vec{u}}(C_f)$ avec $\vec{u}\binom{-1}{-3}$ <u>voir figure</u>

<u>Exercice 14</u> :

1) $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x-2}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

* f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $f'(x) = \dfrac{2(x-3)(x-2)-(x-3)^2}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-3)(x-1)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{(x-3)^2}{x-2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{(x-3)^2}{x-2} = +\infty$$

* la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote à (C).

*

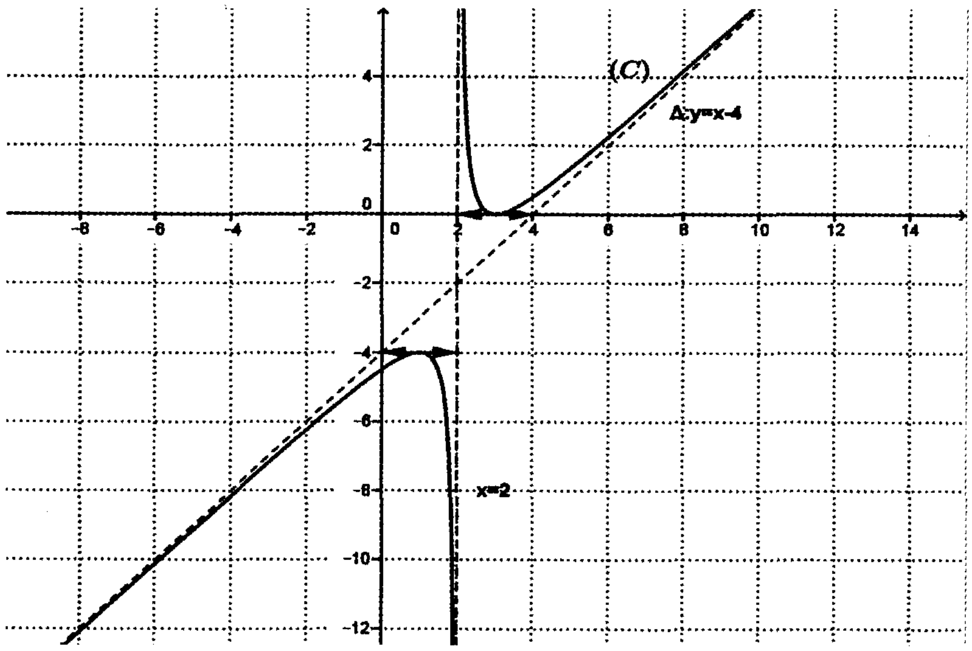
$$f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x-2} = \frac{(x^2-6x+8)+1}{x-2} = \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} + \frac{1}{x-2}$$

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(x-4)] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x)-(x-4)] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$$

La droite Δ d'équation : $y = x - 4$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.



2) $D_m: y = m.x$

a) dans $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, $f(x) = m.x \Leftrightarrow \dfrac{x^2-6x+9}{x-2} = m\,x \Leftrightarrow m\,x(x-2) = x^2-6x+9$

$$\Leftrightarrow (m-1)x^2 - 2(m-3)x - 9 = 0$$

* $\boldsymbol{m = 1}$, l'équation : $f(x) = m.x$ admet une unique solution

* ***pour*** $\boldsymbol{m \neq 1}$

$\Delta = 4[(m-3)^2 + 9(m-1)] = 4m(m+3)$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$m(m+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

<u>1^er cas</u> : $m \in]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[\backslash\{1\}$

l'équation : $f(x) = m.x$ admet deux solutions.

<u>2^er cas</u> : $m = -3$ *ou* $m = 0$

l'équation : $f(x) = m.x$ admet une unique solution.

<u>3^er cas</u> : $m \in]-3, 0[$

l'équation : $f(x) = m.x$ n' admet pas de solutions.

b) $D_m: y = m.x$; $\vec{u}_m\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ *est vecteur directeur de* D_m

* pour $m \in]-3, 0[$; $(C) \cap D_m = \emptyset$

* pour $m \in \{-3\ ,\ 0\ ,\ 1\}$; $(C) \cap D_m$ est un point.

* pour $m \in\ ]-\infty, -3[\cup]0\ , +\infty[\backslash\{1\}$; $(C) \cap D_m$: deux points.

3) a) x_M *et* x_N sont solutions de l'équation : $(m-1)x^2 - 2(m-3)x - 9 = 0$,

$m \in]-\infty,-3[\cup]0,+\infty[\setminus\{1\}$, d'où $x_M + x_N = \frac{-b}{a} = \frac{2(m-3)}{m-1}$

$K = M * N \Rightarrow X_K = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{m-3}{m-1}$

b) $K \in D_m$ *donc* $y_K = m.x_K$ ce qui donne $y_K = \frac{m(m-3)}{m-1}$

$$K\left(\frac{m-3}{m-1}\ ,\ \frac{m(m-3)}{m-1}\right)$$

$$x_K = \frac{m-3}{m-1} = 1 - \frac{2}{m-1} \Rightarrow \frac{2}{m-1} = 1 - x_K \quad \text{d'où} \quad m-1 = \frac{2}{1-x_K} \Rightarrow m = 1 + \frac{2}{1-x_K}$$

$$y_K = \frac{m^2-3m}{m-1} = \frac{(m-2)(m-1)-2}{m-1} = m-2-\frac{2}{m-1}$$

par suite : $y_K = \frac{2}{1-x_K} - 1 - (1-x_K)$

Ce qui donne : $y_K = x_K - 2 + \frac{2}{1-x_K}$

c) on pose $g(x) = x - 2 + \frac{2}{1-x}$; ainsi le point K *décrit* C_g lorsque m *varie*.

Exercice15 :

1) $f(x) = \sqrt{-x+3}$

$(-x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$; $D_f =]-\infty\ ,3]$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-x+3$	$+$	0	$-$

2) f est continue sur $]-\infty\ ,3]$, dérivable sur $]-\infty\ ,3[$ et $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x+3}} < 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+3) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x+3} = +\infty$

x	$-\infty$	3
$f'(x)$	$-$	|
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0

2) a) $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^-}\frac{\sqrt{-x+3}}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^-}\frac{-1}{\sqrt{-x+3}} = -\infty$

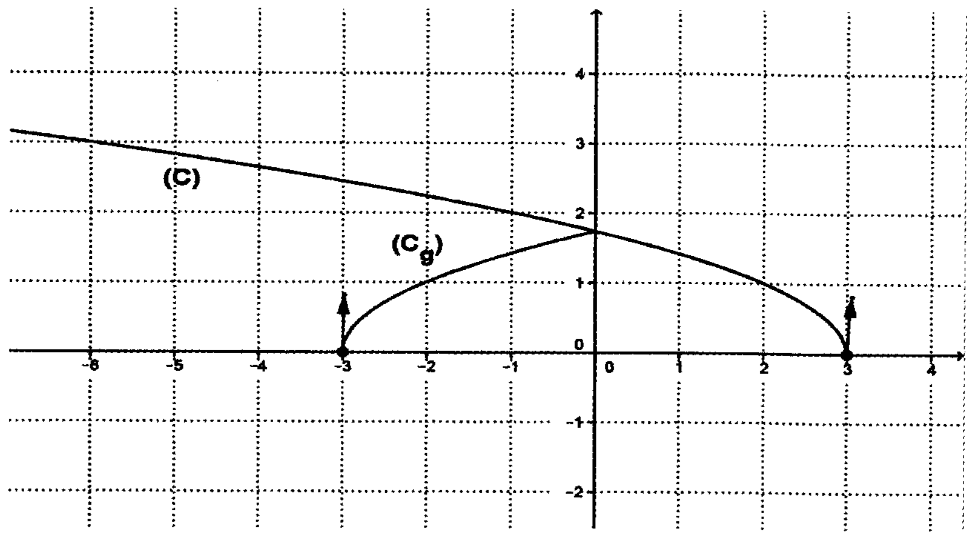
f n'est pas dérivable àgauche en 3.

b) $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = -\infty$

d'où (C) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 3.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{-x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+3}{x\sqrt{-x+3}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1+3/x}{\sqrt{-x+3}}=0$

(C) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$ $au\ voisinage\ de -\infty$.



5) a) $g(x)=f(|x|)$

$|x|\leq 3 \Leftrightarrow -3\leq x\leq 3$; $D_g=[-3,3]$

g est une fonction paire ; pour $x\in[0,3]$, $g(x)=f(x)$

de plus (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b)

x	-3		0		3
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0

Exercice16 :

1) $f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4}$

$-x^2+5x-4=0$; $a+b+c=0$, $x'=1$ et $x''=4$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$-x^2+5x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_f=[1,4]$

2) f est continue sur $[1,4]$, dérivable sur $]1,4[$ et $f'(x)=\dfrac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}$

$f(1) = f(4) = 0$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$

x	1		$5/2$		4
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	0

3) a)

* $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{-x^2+5x-4}}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-x^2+5x-4}{(x-1)\sqrt{-x^2+5x-4}}$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{-(x-1)(x-4)}{(x-1)\sqrt{-x^2+5x-4}} = \lim_{x\to1^+}\frac{-(x-4)}{\sqrt{-x^2+5x-4}} = +\infty$$

f n'est pas dérivable à droite en 1.

* $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-(x-1)}{\sqrt{-x^2+5x-4}} = -\infty$

f n'est pas dérivable à gauche en 4.

b) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\infty$ d'où (C) admet deux demi tangentes verticales l'une au point d'abscisse 1 et l'autre au point d'abscisse 4.

4) * $x \in D_f = [1,4] \Rightarrow 1 \le x \le 4 \Rightarrow -4 \le -x \le -1$

$$\Rightarrow 1 \le 5-x \le 4 \Rightarrow (5-x) \in D_f$$

** $f\left(2\times\frac{5}{2}-x\right) = f(5-x) = \sqrt{-(5-x)^2+5(5-x)-4}$

$$= \sqrt{-(25-10x+x^2)+25-5x-4} = \sqrt{-x^2+5x-4} = f(x)$$

<u>Conclusion</u> : la droite $\Delta: x = 5/2$ est axe de symétrie de (C).

5)

Exercice 17 :

1) $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$

pour tout réel x on a $4 + x^2 \geq 0$ $d'ou$ $D_f = IR$

2) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

(f est paire)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4 + x^2} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt{4+x^2} + x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4 + x^2} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt{4+x^2} - x} = 0$

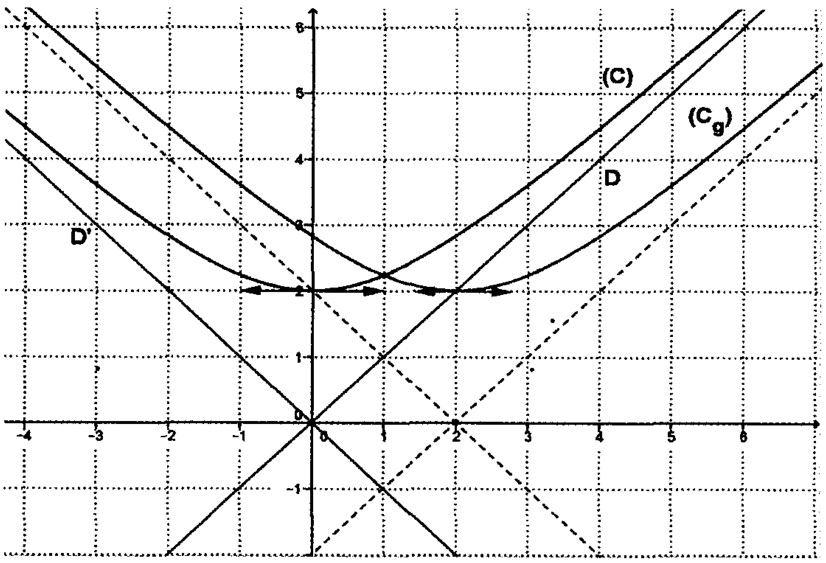
b) la droite $D: y = x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

la droite $D': y = -x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

c) comme f est paire alors D et D' sont symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(ou bien : $M(x\,,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x \in IR \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \in IR \\ y = -(-x) \end{cases} \Leftrightarrow M'(-x\,,y) \in D'$)

4)



5) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8} = \sqrt{4 + (x-2)^2}$

Donc $g(x) = f(x-2)$

(C_g) est l'image de (C) par la translation de vecteur $2.\vec{i}$

Exercice 18 : :

1) a) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 4}$

$-x^2 + 4x + 4 = 0$; $\Delta = 32$, $x' = 2 - 2\sqrt{2}$ *et* $x'' = 2 + 2\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+4x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

la fonction : $x \to -x^2 + 4x + 4$ est dérivable et strictement positive sur $[\,0\,,2\,]$ d'où f est dérivable sur $[\,0\,,2\,]$

et $f\,'(x) = \dfrac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x+4}} = \dfrac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+4}} \geq 0$; pour $x \in [0\,,2]$

x	0		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$

b) $g(x) = 2 + x - \dfrac{1}{2}x^2$

g est continue et dérivable sur $[\,0\,,2\,]$

$g'(x) = 1 - x$

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$\dfrac{5}{2}$	$\searrow$	2

c) $h(x) = 2 + x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}x^3$

h est continue et dérivable sur $[\,0\,,2\,]$

$h'(x) = 1 - x + \dfrac{3}{4}x^2$

($h'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}x^2 - x + 1 = 0$; $\Delta = -2 < 0$)

x	0		2
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	2	$\nearrow$	4

2) * $f(x)-g(x)=\sqrt{-x^2+4x+4}-(2+x-\frac{1}{2}x^2)=\dfrac{(-x^2+4x+4)-\left(2+x-\frac{1}{2}x^2\right)^2}{f(x)+g(x)}$

$$f(x)-g(x)=\frac{x^3-\frac{1}{4}x^4}{f(x)+g(x)}=\frac{x^3(4-x)}{4(f(x)+g(x))}\geq 0 \quad ; \textit{pour } x\in[0,2]$$

car pour $x\in[0,2]$, $f(x)>0$ *et* $g(x)>0$ *et* $h(x)>0$ d'après 1)

par suite $\boxed{f(x)\geq g(x)}$, *pour* $x\in[0,2]$

* $$h(x)-f(x)=\frac{[h(x)]^2-[f(x)]^2}{h(x)+f(x)}=\frac{\left(2+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\right)^2-(-x^2+4x+4)}{f(x)+g(x)}$$

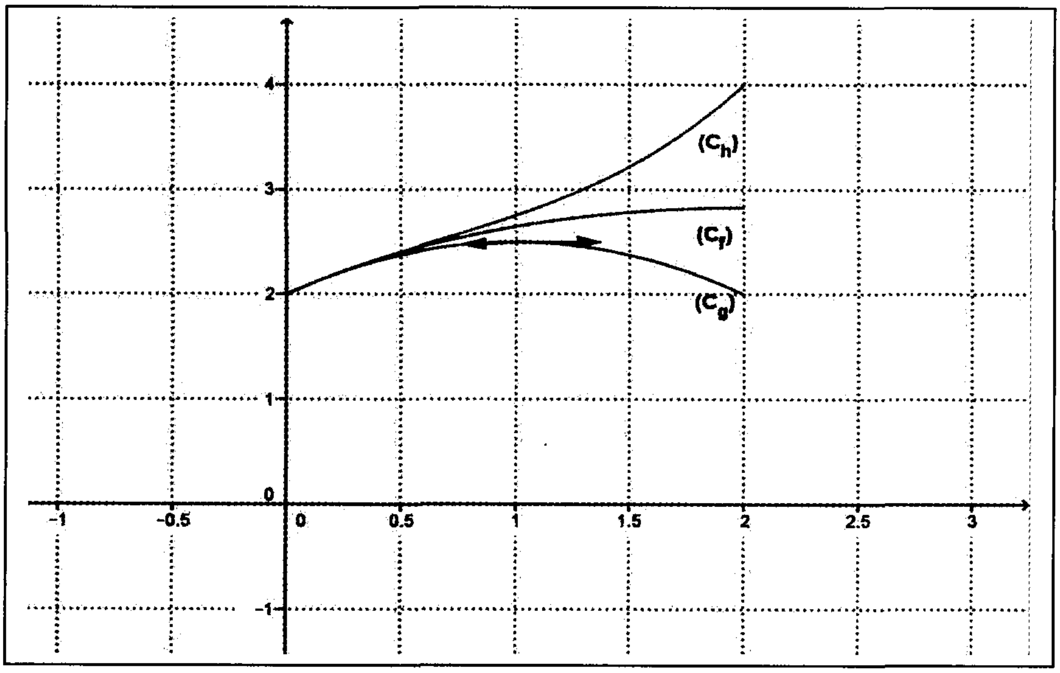
$$h(x)-f(x)=\frac{x^4(x^2-4x+12)}{16(h(x)+f(x))}\geq 0 \quad \textit{pour } x\in[0,2]$$

Car : $x^2-4x+12>0$ *puisque* $\Delta=-32<0$

par suite $\boxed{h(x)\geq f(x)}$, *pour* $x\in[0,2]$

<u>Conclusion</u> : $h(x)\geq f(x)\geq g(x)$, *pour* $x\in[0,2]$

3)



4) $f(0{,}0001)=\sqrt{4{,}00039999}$

$g(0{,}0001)\leq f(0{,}0001)\leq h(0{,}0001)$

$\Rightarrow \quad 2{,}000099995 \leq \sqrt{4{,}00039999} \leq 2{,}00009999500025$

$$\sqrt{4,00039999} \approx \mathbf{2,000099995000}$$

Exercice19 :

1) $f(x) = 1 - \sqrt{x^2 + x}$

$x^2 + x = x(x+1)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2+x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f = \,]-\infty\,, -1] \cup [\,0\;, +\infty[$

2) f est continue sur $D_f = \,]-\infty\,,-1] \cup [\,0\;,+\infty[$, dérivable sur $]-\infty\;,-1\,[\,\cup\,]\,0\;,+\infty[$

et $f\,'(x) = -\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{-(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||		||	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1		1	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x) = +\infty$

d'ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

3) a) * $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\cancel{x}(x+1)}{x\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-(x+1)}{\sqrt{x^2+x}} = -\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0.

* $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{-\sqrt{x^2+x}}{x+1} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{-x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+x}} = +\infty$

f n'est pas dérivable à gauche en (-1).

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = +\infty$

d'où (C) admet deux demi tangentes verticales aux points d'abscisses respectives -1 *et* 0.

4) * $x \in D_f \quad \Rightarrow \quad x \leq -1 \;\; ou \;\; x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -x \geq 1 \;\; ou - x \leq 0$

$\Rightarrow \; -1 - x \geq 0 \;\; ou \; -1 - x \leq -1 \quad \Rightarrow \; (-1-x) \in D_f$

* $f(-1-x) = 1 - \sqrt{(-1-x)^2 + (-1-x)} = \sqrt{1 + 2x + x^2 - 1 - x} = 1 - \sqrt{x^2 + x} = f(x)$

Conclusion : la droite $\Delta : x = -\dfrac{1}{2}$ est axe de symétrie de (C).

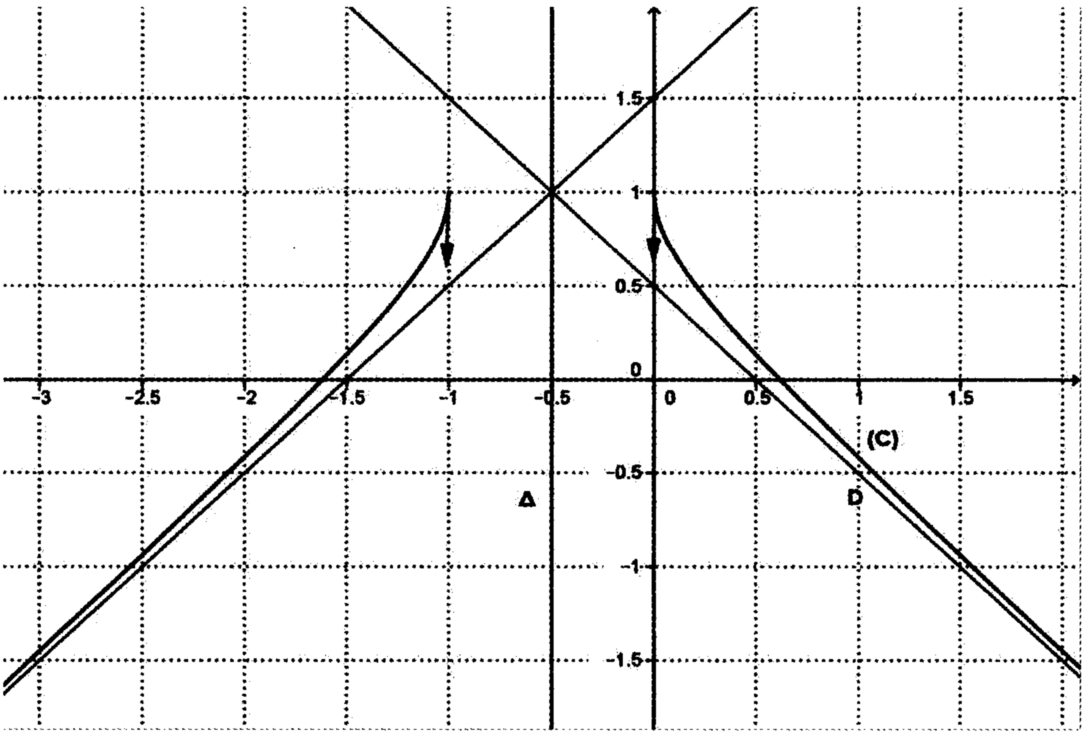
5)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(-x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{x^2+x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(x^2+x\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/4}{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2+x}}=0$$

la droite D: $y=-x+\dfrac{1}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

6)

x	$-\infty$ -1	-1 4	4 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ ‖	//////	‖ $+$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$	//////	$0 \nearrow +\infty$



Exercice20 :

1) $f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}$

$x^2-3x-4=0$; $a-b+c=0$, $x'=-1$ *et* $x''=4$

$D_f=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[4,+\infty\right[$

x	$-\infty$	-1		4		$+\infty$
x^2-3x-4	$+$	0	$-$	0	$+$	

* f est continue sur $D_f = \left]-\infty,-1\right] \cup \left[4,+\infty\right[$, dérivable sur $\left]-\infty,-1\right[\cup \left]4,+\infty\right[$ *et*

$$f'(x) = -\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-4}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x-4) = \lim_{x\to+\infty}(x^2) = +\infty$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2) a)

$$* \lim_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^-}\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)\sqrt{x^2-3x-4}} = \lim_{x\to(-1)^-}\frac{x-4}{\sqrt{x^2-3x-4}} = -\infty$$

f n'est pas dérivable à gauche en (-1).

$$* \lim_{x\to4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to4^+}\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x-4} = \lim_{x\to4^+}\frac{(x+1)(x-4)}{(x-4)\sqrt{x^2-3x-4}} = \lim_{x\to4^+}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x-4}} = +\infty$$

f n'est pas dérivable à droite en 4.

b) $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$

d'où (C) admet deux demi tangentes verticales aux points d'abscisses respectives -1 *et* 4.

3) a) forme canonique : $x^2-3x-4 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

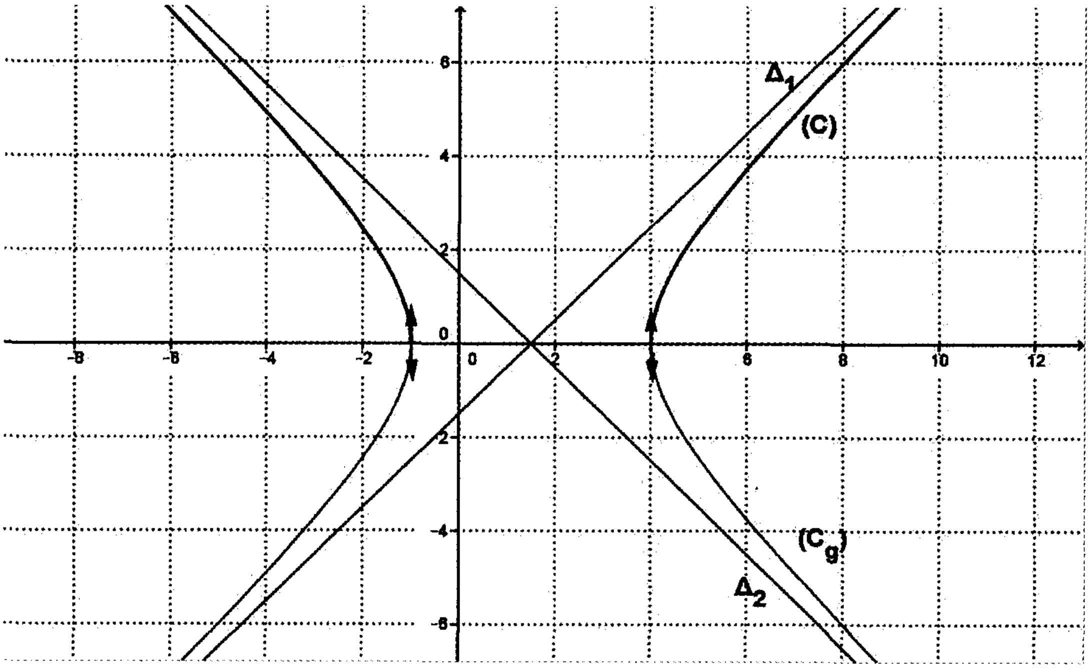
b) * $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x+\frac{3}{2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}} - \left(x-\frac{3}{2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-25/4}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}+\left(x-\frac{3}{2}\right)} = 0$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-\frac{3}{2}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}} + \left(x-\frac{3}{2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-25/4}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}-\left(x-\frac{3}{2}\right)} = 0$

c) la droite Δ_1: $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

la droite Δ_2: $y = -x + \frac{3}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

4) a) $g = -f$, d'ou $(C_g) = S_{(ox)}(C)$



b)

$$M\left(x\,,y \in (C_f) \cup (C_g)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ \quad ou \\ y = -f(x) \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = [f(x)]^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x^2 - 3x - 4 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 3x - 4 = 0$$

5) a) $$\boldsymbol{M}\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_{(O,\vec{i},\vec{j})} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$

$$\boldsymbol{M}\,(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{(O',\vec{u},\vec{v})} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M} = X.\vec{u} + Y.\vec{v}$$

D'une part: $\overrightarrow{O'M} = X.(\vec{i} - \vec{j}) + Y.(\vec{i} + \vec{j}) = (X + Y).\vec{i} + (Y - X).\vec{j}$

D'autre part: $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = x.\vec{i} + y.\vec{j} - \frac{3}{2}\vec{i} = \left(x - \frac{3}{2}\right).\vec{i} + y.\vec{j}$

Donc $\begin{cases} x - \frac{3}{2} = X + Y \\ y = -X + Y \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x = X + Y + \frac{3}{2} \\ y = -X + Y \end{cases}$

b) $M\left(x\,,y \in (C_f) \cup (C_g)\right) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 - 3x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(X + Y + \frac{3}{2}\right)^2 - (Y - X)^2 - 3\left(X + Y + \frac{3}{2}\right) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X + Y)^2 + \frac{9}{4} + 3(X + Y) - (Y - X)^2 - 3\left(X + Y + \frac{3}{2}\right) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ 4.XY + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Y} = \frac{25}{16\boldsymbol{X}}$$

c) soit $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}) = \dfrac{25}{16\boldsymbol{X}}$

$(C_f) \cup (C_g) = \ (C_h)$ <u>l'hyperbole</u> tracée dans le repère $(O', \vec{u}\,, \vec{v})$.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ dans un repère orthonormé admet au point d'abscisse $-\frac{\pi}{6}$ une tangente

☐ horizontale ☐ verticale ☐ d'équation $y = x + \frac{\pi}{6}$.

2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} =$

☐ 0 ☐ 1 ☐ $\frac{\pi}{4}$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}x - 3\right)$.

Alors f est périodique, de période

☐ $\frac{\pi}{3}$ ☐ -3 ☐ 6 .

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

On note C et C' les courbes représentatives respectives des restrictions de f aux intervalles $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

C' est obtenue à partir de C par une translation de vecteur

☐ $-\pi\vec{i}$ ☐ $\pi\vec{i}$ ☐ $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

5. On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ par $f(x) = \tan x$.

Alors sa courbe représentative, dans un repère orthonormé, coupe l'axe des abscisses en

☐ deux points ☐ trois points ☐ un point.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

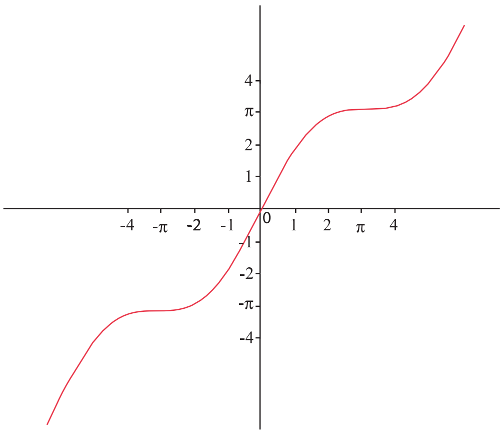
1. La fonction $x \mapsto \sin(x - 3\pi)$ est impaire.
2. La fonction $x \mapsto \cos(x - 3\pi)$ est paire.
3. Si une fonction est périodique, alors elle est soit paire, soit impaire.
4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période π.
$f(x - \pi) > 0$, si et seulement si, $f(x + \pi) > 0$.
5. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période 2π.
f admet un minimum en x_0, si et seulement si, f admet un minimum en $x_0 + 2\pi$.

Mobiliser ses compétences

Situation 1

1. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto \cos x - \frac{2}{\pi}$, sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en déduire son signe.
2. Montrer que $\sin x \geq \frac{2}{\pi}$, pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Situation 2



Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a représenté la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sin x + x$.

1. a. Vérifier que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi$.
   b. Achever la représentation graphique de la restriction de f à chacun des intervalles $[\pi, 3\pi]$ et $[-3\pi, -\pi]$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.
   $\sin x \leq -x$ et $\sin x \geq -x$.
3. a. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.
   b. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x - 1$.

Situation 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit E l'ensemble des points M de coordonnées $(2\cos t, \sin 2t)$ où $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   a. Déterminer et construire les points de E correspondant aux valeurs suivantes :
   $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{4}$ et $t_2 = \frac{\pi}{8}$.
   b. Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $M(2\cos t, \sin 2t)$.
   Déterminer un procédé de construction du point M.
2. On considère la fonction f définie sur $[-2, 2]$ par $f(x) = x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.
   Soit $x \in [-2, 2]$ et $M(x, f(x))$.
   On se propose de donner un procédé de construction de M.
   a. Vérifier que si $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\sin 2t = 2\cos t\sqrt{1 - \cos^2 t}$.
   b. Montrer que $M(x, y) \in E$, si et seulement si, $y = f(x)$.
   c. Conclure.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 5\sin x$.
2. $f(x) = \sin x - \cos x$.
3. $f(x) = \cos x \sin x - 1$.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C_1 et C_2 les courbes représentatives respectives des fonctions f et g définies sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = -3\cos x + 2$ et $g(x) = \cos x$.

1. Tracer les courbes C_1 et C_2.
2. Soit la fonction h définie sur $[-\pi, \pi]$ par $h(x) = |\cos x - 1| + |2\cos x - 1|$ et C sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Déterminer l'expression de h(x).

b. En déduire la courbe C à partir des courbes C_1 et C_2.

c. Résoudre graphiquement, $h(x) = \frac{1}{2}$ et $h(x) \geq 7$.

Exercice 3

Déterminer chacune des limites ci-dessous.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \; ; \; \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin x} \; ; \; \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)}{\sin x} \; ;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin^3 x} \; ; \; \lim_{x \to 0} \frac{\sin(-5x)}{x} \; ; \; \lim_{x \to 0} \frac{tg(3x)}{x} \; ;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(-4x)} \; ; \; \lim_{x \to 0} \frac{tg(-3x)}{\sin(2x)} \, .$$

Exercice 4

Calculer la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous

$f(x) = 2\sin x$; $g(x) = \frac{3\cos x + 5}{2}$;

$h(x) = \sin x + \cos x$; $s(x) = \frac{1}{\cos x + 2}$;

$v(x) = x\cos x$; $t(x) = \sin x \cos x$;

$w(x) = \sin^2 x$; $r(x) = -3\sin\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

$j(x) = \cos\left(-3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 5

On considère la fonction $f : \mapsto \cos^3 x - \sin^3 x$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée.
3. Donner une approximation affine de $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 6

On considère la fonction $f : \mapsto \cos x - \frac{1}{x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée.
3. Donner une approximation affine de f(1.00001).

Exercice 7

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin^2 x + 1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée.
3. Donner une approximation affine de $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $f(10^{-4})$.

Exercice 8

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\tan x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée.
3. Donner une approximation affine de $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 9

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \sin x$.

Soit a un réel.

1. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse a.
2. Etudier suivant les valeurs du réel a, la position de C et T.

Exercice 10

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C et C' les courbes représentatives respectives des fonctions sin et – sin.

1. Déterminer l'ensemble E des points d'intersections des courbes C et C'.
2. On désigne par M un point de E d'abscisse x. Montrer que les tangentes en M à chacune des courbes C et C' sont perpendiculaires.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = -3\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f.
2. Calculer $f'(x)$ et résoudre dans l' intervalle $[0, \pi]$ l'équation $f'(x) = 0$.
3. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Représenter dans un repère orthonormé la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, 2\pi]$.
5. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel k, le nombre de solutions sur $[-\pi, 2\pi]$ de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 12

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction $f : x \mapsto \cos^2 x - 1$.

1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f.
2. Etudier et représenter f sur un intervalle période.

Exercice 13

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction $f : x \mapsto -\frac{3}{2}\sin 2x$.

1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f.
2. Etudier et représenter f sur un intervalle période.

Exercice 14

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction $f : x \mapsto 2\cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f.
2. Etudier et représenter f sur un intervalle période.

Exercice 15

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction $f\ x \mapsto \tan x + \sin 4x$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f.
2. Etudier et représenter f sur un intervalle période.

Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x$.

1. Représenter f et $-f$.
2. On considère la fonction g définie sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $g(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ et on désigne par C' sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

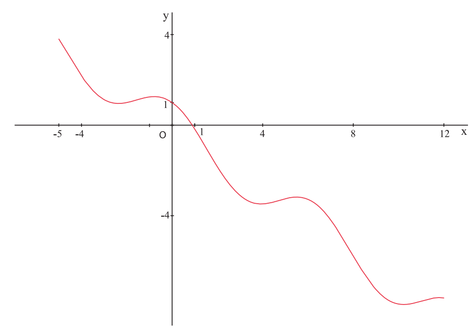
a. Vérifier que $g(x) = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

b. Tracer alors la courbe C'.

c. En déduire le tableau de variation de g.

Exercice 17

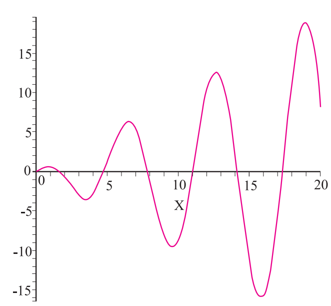
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative de la fonction définie sur $[-5, 12]$ et par $f(x) = \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.



Déterminer les extréma de f.

Exercice 18

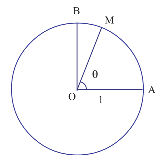
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x\cos x$.



Déterminer par le calcul, le plus petit extremum local de la courbe C à 10^{-1} près.

Exercice 19

Le plan est muni d'un repère ortonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit A et B deux points du cercle trigonométrique de centre O tels que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.



Soit θ un réel un réel de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,
on désigne par M le point du cercle
tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \theta[2\pi]$.

1. a. Montrer que $AM = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$.

b. Montrer que $BM = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right)$.

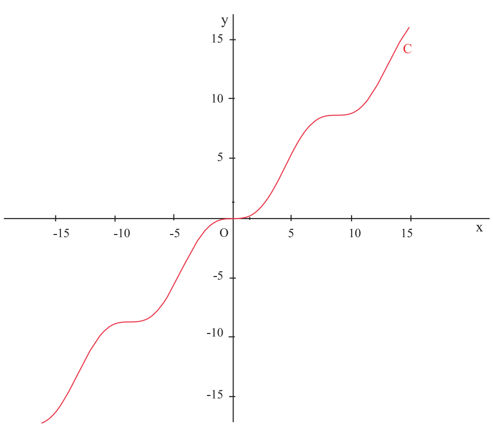
2. Dresser le tableau de variation de la fonction

$f : x \mapsto 2\sin x + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$ sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

3. En déduire la valeur de θ pour laquelle la somme AM + BM est maximale.

Exercice 20

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a tracé ci-dessous la courbe C représentative de la fonction`
$f : x \mapsto x - \sin x$.



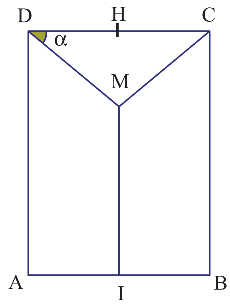
1. Montrer que pour tout réel x, $x-1 \le f(x) \le x+1$.

2. a. Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec la droite D : $y = x-1$.

b. Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec la droite D' : $y = x+1$.

3. Montrer que les droites D et D' sont tangentes à C en ces points d'intersection.

Exercice 21



On veut placer un tuyau en forme de Y contre un mur rectangulaire afin d'évacuer les eaux de pluies recueillies sur le toit. On modélise la situation par la figure ci-contre.
On désigne par I et H les milieux respectifs de [AB] et [DC].
On désigne par M un point du segment [IH] distinct de I et H et on note $\widehat{CDM} = \alpha$ (en radians).
On se propose de trouver la valeur de α pour laquelle la longueur du tuyau est minimale.
On note f(α) la longueur du tuyau.

1. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{AB}{\cos\alpha} - \dfrac{AB}{2}\tan\alpha + AD$.

2. a. Etudier sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ les variations de la fonction $f : \alpha \mapsto f(\alpha)$.

b. Conclure.

Exercice 22

On considère un triangle ABC isocèle de sommet principal A, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. On désigne par H le pied de la hauteur issue de A.
On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{HOC}$
et on suppose que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

1. a. Calculer BC et AH en fonction de α.

b. En déduire l'aire du triangle ABC en fonction de α.

2. On considère la fonction f définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
par $f(\alpha) = \sin\alpha(1 + \cos\alpha)$.

a. Montrer que $f'(\alpha) = (2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1)$.

b. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. Déterminer la valeur de α pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale.
Préciser ce maximum et la nature du triangle ABC.

QCM :

1) $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{3}) \Longrightarrow f'(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

D'où : $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \longrightarrow$ **(a)**

2) soit $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow f'(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 0 = 1$$

$\rightarrow$ **(b)**

3) la période est T= $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}$ =6 $\longrightarrow$ **(c)**

4) La fonction $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ est périodique de période : T=$\frac{2\pi}{2} = \pi$

$\rightarrow$ **(b)**

5) $tanx = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

Donc la courbe de f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses respectives 0 et π

$\longrightarrow$ **(a)**

Vrai – Faux

1) **Vrai**

On a : $x \in \mathbb{R}\ ; (-x) \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = sin(-x - 3\pi) = \sin(-x - 3\pi + 6\pi) = \sin(-x + 3\pi)$$

$$= sin[-(x - 3\pi)] = -\sin(x - 3\pi) = -f(x)$$

$sin(-a) = -sina$
$sin(a + 2k\pi) = sina$
$cos(-a) = cosa$
$cos(a + 2k\pi) = cosa$

2) **Vrai**

On a : $x \in \mathbb{R}\ ; (-x) \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = cos(-x - 3\pi) = \cos(-x - 3\pi + 6\pi) = \cos(-x + 3\pi)$$

$$= cos[-(x - 3\pi)] = \cos(x - 3\pi) = f(x)$$

3) **Faux**

Contre exemple : $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ est périodique de période 2π et elle n'est ni paire ni impaire

4) **Vrai**

f est π -périodique donc $f(X + k\pi) = f(X)$; $X \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$f(x - \pi) = f[(x - \pi) + 2\pi] = f(x + \pi)$ il résulte : $f(x - \pi) > 0 \Leftrightarrow f(x + \pi) > 0$

5) **Vrai**

f est 2π -périodique donc $f(x_0 + 2\pi) = f(x_0)$; $x_0 \in \mathbb{R}$

f admet un minimum en x_0 si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0 + 2\pi)$

Par suite f admet un minimum en $(x_0 + 2\pi)$

Mobiliser ses compétences

Situation 1

1) La fonction : $x \longrightarrow f(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$ est dérivable sur $\left[0, \frac{2}{\pi}\right] \subset \mathbb{R}$

$f'(x) = -sinx \leq 0$; $x \in \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$

x	0	x_0	$\frac{2}{\pi}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$1-\frac{2}{\pi}$	0	$f(\frac{2}{\pi})$

Soit x_0 tel que $f(x_0) = 0$ on a : $\begin{cases} f(x) \geq 0 & si \quad x \in [0, x_0] \\ f(x) \leq 0 & si \; x \in \left[x_0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

$\frac{\pi}{4} < x_0 < \frac{\pi}{2}$

2) $\sin 0 = 0 < \frac{2}{\pi}$

Situation 2

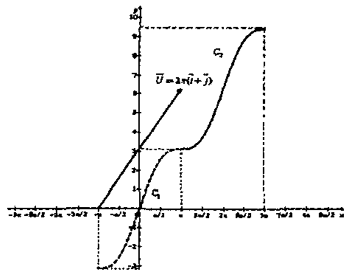
1) a) $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + x + 2\pi = sinx + x + 2\pi = f(x) + 2\pi$

b) On a : $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi$

Soit C_1 la représentation graphique de la restriction de f sur $[-\pi, \pi]$

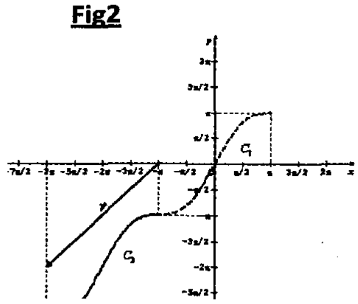
- la C_2courbe de la restriction de f sur $[\pi, 3\pi]$ est limage de C_1 par la translation de vecteur : $\vec{u} = 2\pi(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$(voir fig1)

Fig1



- la C_3courbe de la restriction de f sur $[-3\pi, -\pi]$ est limage de C_1 par la translation de vecteur : $\vec{v} = 2\pi(-\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ (voir fig2)

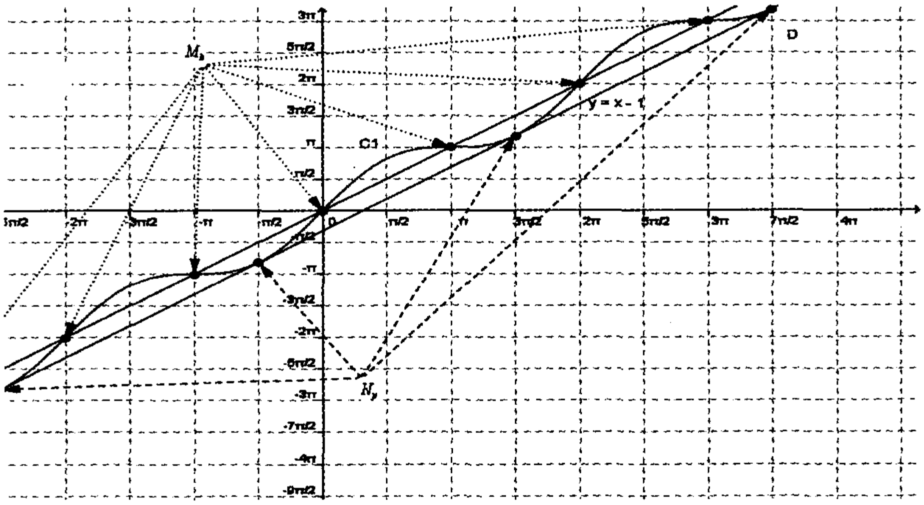
Fig2



2) • $sinx \leq -x \Leftrightarrow sinx + x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ donc
la Ccourbe de f est au dessous de l'axe
des abscisses donc : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 0]$
• $sinx \geq -x \Leftrightarrow sinx + x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ donc la Ccourbe de f est au dessus de l'axe
des abscisses donc : $S_{\mathbb{R}} = [0, +\infty[$

3) a) on note $M_0 , M_1 , M_2 .... et\ M_k ; k \in \mathbb{Z}$; les points d'intersection de la Ccourbe de f avec $D : y = x$
graphiquement on a : $M_0 = O\ et \quad M_k(k\pi, k\pi); k \in \mathbb{Z}^*$
b) on note $N_0 , N_1 , N_2 .... et\ N_p ; p \in \mathbb{Z}$; les points d'intersection de la Ccourbe de f avec $D : y = x - 1$
graphiquement on a : $M_0\ et \quad M_p\left((2p+1)\frac{\pi}{2}, (2p+1)\frac{\pi}{2} - 1\right)\ avec\ p \in \{2n + 1; n \in \mathbb{Z}^*\}$

voir fig3



Situation 3

1) $M(2cost, sin2t) \quad , \ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

a) $t_0 = 0 \Longrightarrow E(2\cos(0), \sin(2 \times 0)) \Longrightarrow E_{t_0}(2,0)$

$t_1 = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow E(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)) \Longrightarrow E_{t_1}(\sqrt{2}, 1)$

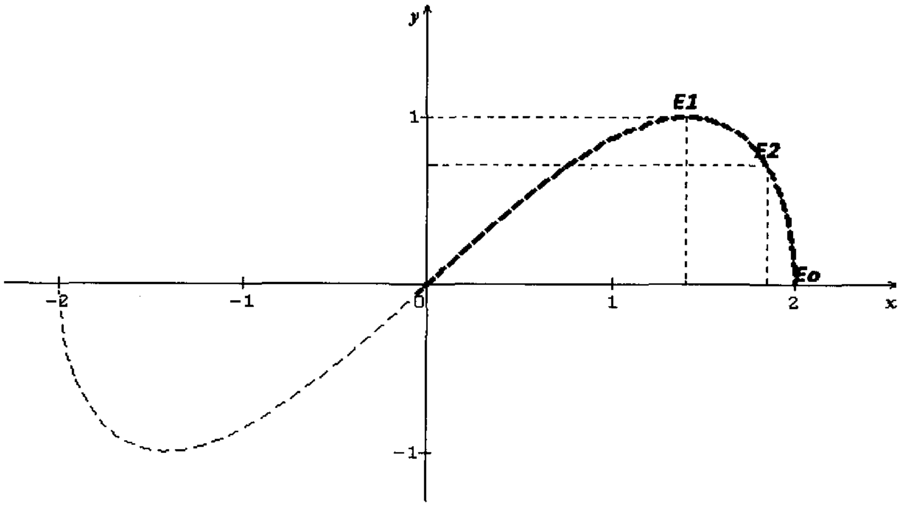
$t_2 = \frac{\pi}{8} \Longrightarrow E(2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)) \Longrightarrow E_{t_2}(2 \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, sin\frac{\pi}{4})$

$\Longrightarrow E_{t_2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$avec : \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2cos^2(\frac{\pi}{8}) - 1 \Longrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2cos^2(\frac{\pi}{8})$$

$$\Longrightarrow cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{4} \quad et\ cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$$

$$\Longrightarrow cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$$



b) $M(2cost, sin2t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$sin2t = 2sint \times cost = (2cost)\times\sqrt{1-cos^2t} = (2cost)\times\sqrt{1-\frac{1}{4}(2\cos\ t)^2}$$

D'où $\begin{cases} M(x_M, \frac{x_M}{2}\times\sqrt{4-(x_M)^2} \\ 0 \le x_M \le 2 \\ 0 \le y_M \le 1 \end{cases}$

Par suite M est un point de la courbe de la fonction: $x \longrightarrow \frac{x}{2}\times\sqrt{4-x^2}$
est définie sur [0,2]

2) a) $sin2t = 2sint \times cost = (2cost)\times\sqrt{1-cos^2t}$; $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $(2cost, sin2t) \in E$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $on\ pose\ \ y = sin2t\ \ et\ \ x = 2cost \Longrightarrow cost = \frac{x}{2}$

or $sin2t = (2cost)\times\sqrt{1-cos^2t} = x\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2} = x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = f(x) = y$

c) le point M décrit la courbe d'équation : $y = x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, $x \in [0,2]$ (voir figure avec la question1)

EXERCICES

Exercie1

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $-1 \leq sinx \leq 1$ donc $-5 \leq 5sinx \leq 5$ par suite :
$$\boxed{-5 \leq f(x) \leq 5}$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\begin{cases} -1 \leq sinx \leq 1 \\ -1 \leq -cosx \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq sinx - cosx \leq 2$ par suite :
$\boxed{-2 \leq f(x) \leq 2}$

3) On a : $cosx\ sinx = \frac{1}{2}\ sin2x\ ; x \in \mathbb{R}$ d'où $f(x) = \frac{1}{2}\ sin2x - 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $-1 \leq sin2x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\ sin2x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$
$-\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}\ sin2x - 1 \leq -\frac{1}{2}$ par suite : $\boxed{-\frac{3}{2} \leq f(x) \leq -\frac{1}{2}}$

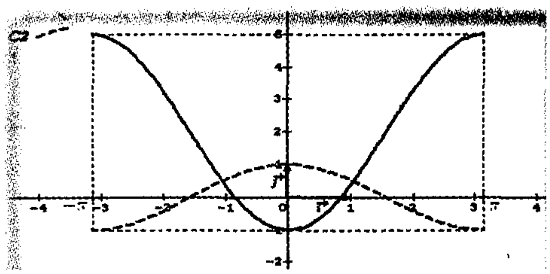
Exercie2

1) $*x \in [-\pi, \pi]$, $-x \in [-\pi, \pi]$ et $f(-x) = -3\cos(-x) + 2 = -3cosx + 2 = f(x)$
donc f est paire , la courbe C_1 est symétrique par rapport à $(O, \vec{j})$
alors on étudie f sur l'intervalle $[0, \pi]$
f est dérivable sur $[0, \pi]$ et $f'(x) = 3sinx \geq 0$

x	0		π
$f(x)$	0	+	0
$f'(x)$	-1	$\nearrow$	5

$* \; x \in [-\pi, \pi]$, $-x \in [-\pi, \pi]$
et $g(-x) = \cos(-x) = cosx = g(x)$
donc g est paire , la courbe C_2 est symétrique par rapport à $(O, \vec{j})$
alors on étudie g sur l'intervalle $[0, \pi]$
$g'(x) = -sinx \leq 0$

x	0		π
$g(x)$	0	—	0
$g'(x)$	1	$\searrow$	-1



2) a) * Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ on a : $cosx \leq 1$ donc : $|cosx - 1| = 1 - cosx$

* aussi on a : $2cosx - 1 = 0 \Leftrightarrow cosx = \frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

Or $x \in [-\pi, \pi]$ d'où :

$$\begin{cases} -\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{1}{3} \Rightarrow k = 0 \text{ donc } x = \frac{\pi}{3} \\ -\pi \leq +2k\pi \leq \pi \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3} \Rightarrow k = 0 \text{ donc } x = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Par suite :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
Signe de $(2cosx - 1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\lvert 2cosx - 1\rvert$		$1 - 2cosx$	0	$2cosx - 1$	0	$1 - 2cosx$	
$\lvert cosx - 1\rvert$				$1 - cosx$			

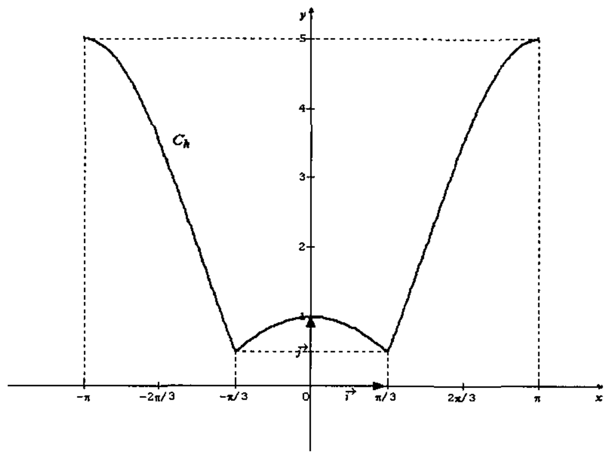
Finalement : $h(x) = \begin{cases} -3cosx + 2 = f(x) & si\ \ x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right] \\ cosx = g(x) & si\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \end{cases}$

b) • $si\ \ x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

$alors\ C\ se$ coïncide $avec\ C_1$

• $si\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

$alors\ C\ se$ coïncide $avec\ C_2$



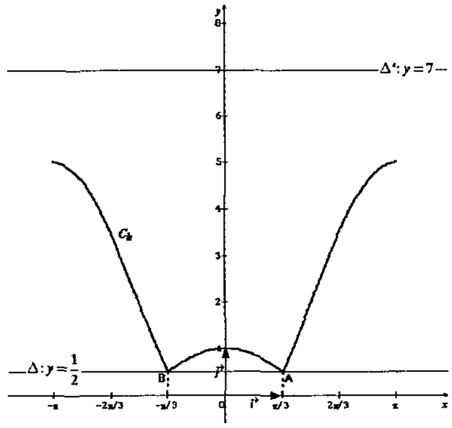
c) * Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

C coupe Δ aux points A et B d'abscisses respectifs

$x_A = \frac{\pi}{3}$ et $x_B = -\frac{\pi}{3}$

donc $S_{[-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$

* Soit Δ' la droite d'équation $x = 7$



C est au dessous de Δ' et C et Δ' ne se coupent pas. Donc $S_{[-\pi,\pi]} = \emptyset$ (ensemble vide)

Exercie3

$\oplus\quad \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)=\dfrac{1}{\cos 0}=\dfrac{1}{1}=1$

$\oplus\quad \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$\oplus\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos(x+\frac{3\pi}{4})}{\sin x}=\dfrac{\cos\frac{3\pi}{4}}{0^-}=\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{0^-}=+\infty$

$\oplus\quad \lim\limits_{x\to 0}x^3=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sin^3 x=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin^3 x}\,(FI\tfrac{0}{0})$

pour $x\neq 0$, $\dfrac{x^3}{\sin^3 x}=\dfrac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{\sin^3 x}{x^3}}=\dfrac{1}{(\frac{\sin x}{x})^3}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin^3 x}=1$

$\oplus\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-5x)}{x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(h)}{(\frac{h}{-5})}=\lim\limits_{X\to 0}(-5)\underbrace{(\dfrac{\sin h}{h})}_{\searrow 1}=-5$; on pose : $\begin{cases} h=-5x\to x=\dfrac{h}{-5} \\ h \text{ tend vers } 0\end{cases}$

$\oplus\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(3x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}3\times\dfrac{\tan(3x)}{(3x)}\underset{h=3x}{=}\lim\limits_{h\to 0}3\times\dfrac{\tan h}{h}=3$

$\oplus\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{\sin(-4x)}=(FI\tfrac{0}{0})$

$*$ ***pour*** $x\neq 0$; $\sin(5x)=(5x)\times\dfrac{\sin(5x)}{5x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{5x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1$(***on pose*** $h=5x$)

$*\sin(-4x)=(-4x)\times\dfrac{\sin(-4x)}{-4x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-4x)}{(-4x)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1$(***on pose*** $h=-4x$)

finalement: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{\sin(-4x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5\cancel{x}}{-4\cancel{x}}\right)\times\left(\dfrac{\frac{\sin(5x)}{5x}}{\frac{\sin(-4x)}{-4x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{-4}\right)\times\left(\dfrac{\frac{\sin(5x)}{5x}}{\frac{\sin(-4x)}{-4x}}\right)=-\dfrac{5}{4}$

$$\oplus \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(-3x)}{\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-3}{2}\right)\times\left(\frac{\overbrace{\frac{\tan(-3x)}{-3x}}^{\to 1}}{\underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\searrow 1}}\right)=-\frac{3}{2}$$

Exercie4

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=(2\sin x)'=2(\sin x)'=2\cos x$
- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=\dfrac{(3\cos x+5)'}{2}=\dfrac{3(\cos x)'}{2}=-\dfrac{3}{2}\sin x$
- h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x)=(\sin x)'+(\cos x)'=\cos x-\sin x$
- s est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $s'(x)=\left(\dfrac{1}{\cos x+2}\right)'=-\dfrac{(\cos x+2)'}{(\cos x+2)^2}=-\dfrac{(-\sin x)}{(\cos x+2)^2}\Rightarrow s'(x)=\dfrac{\sin x}{(\cos x+2)^2}$
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x)=(x\cos x)'=(x)'\cos x+x(\cos x)'=\cos x-x\sin x$
- t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $t'(x)=(\sin x\cos x)'=(\sin x)'.\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$
- w est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $w'(x)=(\sin^2 x)'=2(\sin x)'.\sin x=2\cos x\sin x=\sin 2x$
- r est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $r'(x)=\left(-3\sin(-2x+\dfrac{\pi}{4})\right)'=-3\times(-2)\times\left(\sin(-2x+\dfrac{\pi}{4})\right)'=6\cos(-2x+\dfrac{\pi}{4})$
- j est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $j'(x)=\left(\cos(-3x-\dfrac{\pi}{3})\right)'=3\sin(-3x-\dfrac{\pi}{3})=-3\sin(3x+\dfrac{\pi}{3})$

Exercice 5

$f(x)=cos^3x-sin^3x$

1) $Df=\mathbb{R}$

2) f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} f'(x)&=(\cos^3 x)'-(\sin^3 x)'=3(\cos x)'.\cos^2 x-3(\sin x)'.\sin^2 x\\ &=3(-\sin x).\cos^2 x-3\cos x\sin^2 x=-3\cos x\sin x(\cos x+\sin x)\end{aligned}$$

3) on a : $\frac{\pi}{3} \simeq 1,05$

L'approximation de f en a est :

$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$

Ainsi on a : $f(1{,}05) = f(1+0.05) \approx f(1) + 0{,}05 \times f'(1) \approx -0{,}54$

D'où $f(\frac{\pi}{3}) \simeq -0,54$ (approximation affine de $\frac{\pi}{3}$)

Exercice 6

$f(x) = cosx - \frac{1}{x}$

1) $Df = \mathbb{R}^*$

2) f est la somme de deux fonctions dérivables ($cosx +$ fonction rationnelle) sur $\mathbb{R}^*$

Donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $f'(x) = (\cos x)' - (\frac{1}{x})' = -\sin x + \frac{1}{x^2}$

3) (approximation affine de1,00001)

On a : $f(1{,}00001) = f(1 + 0{,}00001) \approx f(1) + (0{,}00001) \times f'(1) \approx -0{,}46$

Exercice 7

$f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 1}$

1) $Df = \mathbb{R}$ car : $\sin^2 x + 1$, est toujours positif

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout réel x on a : $\sin^2 x + 1 > 0$

Et $f'(x) = \frac{(\sin^2 x)'}{2\sqrt{\sin^2 x+1}} = \frac{2\cos x \sin x}{2\sqrt{\sin^2 x+1}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x+1}}$

3) on a : $\frac{\pi}{6} \simeq 0,5235$

Ainsi on a : $f(0{,}5235) = f(1 - 0.4764) \approx f(1) - 0{,}4764 \times f'(1) \approx 1.3$

D'où $f(\frac{\pi}{6}) \simeq 1,3$ (approximation affine de $\frac{\pi}{6}$)

* $f(10^{-4}) = f(0{,}0001) \approx f(0) + 0{,}0001 \times f'(0) \approx 1$

Exercice 8

$$f(x) = \frac{1}{\tan x}$$

1) $Df = J = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) f est dérivable sur J et on a : $f'(x) = -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}$

Exercice 9

1) $f(x) = sinx \;\; et \;\; f'(x) = cosx \;\; , x \in [0,2\pi]$

Equation de la tangent T à C au point d'abscisse $\boldsymbol{a} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2\pi}]$

$$T : y = f'(a)(x-a) + f(a) \Rightarrow T: \; y = (x-a).cosa + sina$$

$\Rightarrow T$: $\boxed{y = x.cosa + sina - acosa}$

2) On a f(2π −x) = -f(x) donc le point I(π ;0) est un centre de symétrie il suffit donc d'étudier sur $[0;\pi]$

On a f(2.$\frac{\pi}{2}$ − x)= sin(π-x) =f(x) donc la droite d'éq : x=$\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie il suffit donc d'étudier sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

On va étudier le signe $g(x) = f(x) - y$

$g(x) = sinx - x.cosa - sina + acosa$

$$g'(x) = cosx - cosa = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \text{ et } \boldsymbol{a} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2\pi}]$$

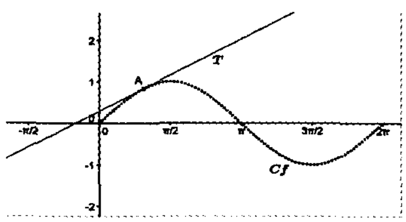
►Signe de $g(x)$ $pour$ $\boldsymbol{a} \in \left[\boldsymbol{0}, \frac{\pi}{2}\right]$

x	0		a		$2\pi - a$		2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-sina + acosa$	↗	0	↘	négatif $-2sina + 2(a-\pi)cosa$	↗	négatif $-sina + (a - 2\pi)cosa$

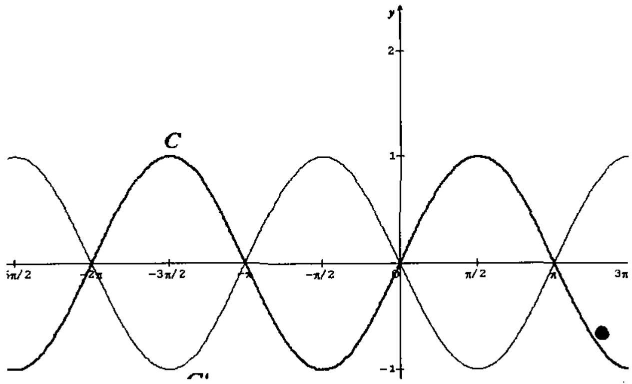
On a pour tout $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{0}, 2\pi]$, $g(x) \leq 0$

d'où la courbe de f est au dessous de

sa tangente au point d'abscisse a



Exercice 10



1) Posons $f(x) = sinx$ et $g(x) = -sinx$

$E = \{M(x, y)\ , tel\ que\ \ y = f(x) = g(x)\}$

On a : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow sinx = -sinx \Leftrightarrow 2sinx = 0 \Leftrightarrow sinx = 0 \Leftrightarrow x = k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $E = \{M_k(k\pi, 0)\ \ , k \in \mathbb{Z}\}$

$\Delta : y = ax + b$
$\Delta' : y = a'x + b'$
$\Delta \perp \Delta' \Leftrightarrow aa' = -1$

2) $M(x, y) \in E \Leftrightarrow y = 0\ \ et\ x = k\pi\ \ , k \in \mathbb{Z}$

* d'une part on a : $f'(x) = cosx$ et $g'(x) = -cosx$

* d'autre part on a : $\begin{cases} cosk\pi = 1 & si\ k\ est\ pair \\ cok\pi = -1 & si\ k\ est\ impair \end{cases}$ donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $cos(k\pi) = (-1)^k$

Par suite on aura : $f'(k\,\pi) = (-1)^k$ et $g'(k\,\pi) = -(-1)^k$

Ainsi : $g'(k\,\pi) \times f'(k\,\pi) - (-1)^k \times (-1)^k = -(-1)^{2k} = -1$

ce qui prouve que les tangentes en M respectivement à $C\ \ et\ C'$

Exercice 11

$f(x) = -3\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

1) on sait que la fonction: $x \longrightarrow \sin(ax + b)\ \ , a \neq 0$, est périodique de période $= \dfrac{2\pi}{|a|}$. Donc f est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

2) * f est dérivable sur $\mathbb{R}$ est $f'(x) = -3\left[\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)\right]' = -6\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

$$* \begin{cases} f'(x)=0 \\ x\in[0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2x+\frac{2\pi}{3})=0 \\ x\in[0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in Z \\ x\in[0,\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2};\ k\in Z \\ 0\le -\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\le\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2};\ k\in Z \\ 0\le -\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\le\pi \Rightarrow \frac{1}{6}\le k\le\frac{13}{6} \Rightarrow\ k=1\ ou\ k=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}\ \text{ou}\ \ x=\frac{11\pi}{12} \qquad \text{d'où : } S_{[0,\pi]}=\left\{\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right\}$$

3) Etude de signe de *f'(x)*

$$\text{On a : } x\in[0,\pi] \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}\le(2x+\frac{2\pi}{3})\le\frac{8\pi}{3}$$

$$f'(x)\ge0 \Leftrightarrow -3\cos(2x+\frac{2\pi}{3})\ge0 \Leftrightarrow \cos(2x+\frac{2\pi}{3})\le0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}\le(2x+\frac{2\pi}{3})\le\frac{3\pi}{2}\ \ \text{ou}\ \ \frac{5\pi}{2}\le(2x+\frac{2\pi}{3})\le\frac{8\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0\le x\le\frac{5\pi}{12}\ \ \text{ou}\ \ \frac{11\pi}{12}\le 2x+\frac{2\pi}{3}\le\pi$$

$$\text{de même : } f'(x)\le0 \Leftrightarrow \frac{5\pi}{12}\le x\le\frac{11\pi}{12}$$

Tableau de variation de *f* :

$$f(\frac{5\pi}{12})=-3\sin(\frac{3\pi}{2})=3$$

$$f(\frac{11\pi}{12})=-3\sin(\frac{\pi}{2})=-3$$

$$f(0)=-3\sin(\frac{2\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$f(\pi)=-3\sin(\frac{2\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

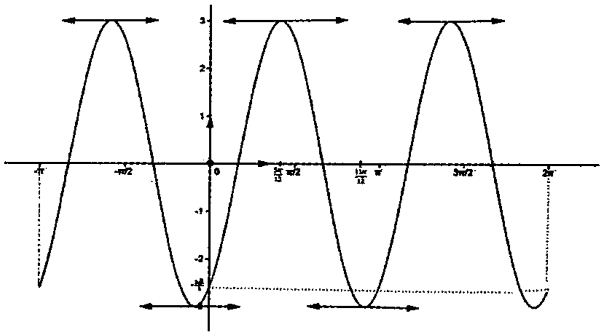
x	0		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

4) f est de période π : tracer C_0 la courbe de la restriction de f sur $[0,\pi]$

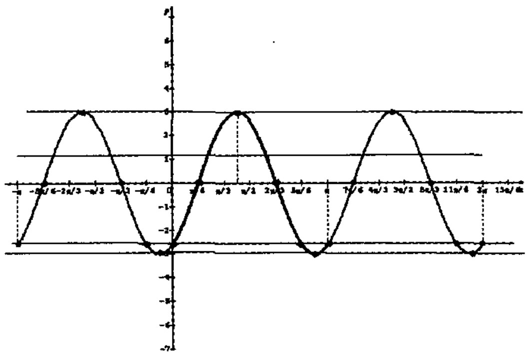
construire C_1 et C_2 les images de C_0 respectivement par les translations

de vecteur $(-\pi\vec{i})$ et $(\pi\vec{i})$

Ainsi : $C=C_0\cup C_1\cup C_2$



5)



- $\bullet$ *si* $k > 3$ ou $k < -3$ $\longrightarrow$ ***pas des solutions***
- $\bullet$ *si* $k = 3$ ou $k = -3$ $\longrightarrow 3$ ***solutions***
- $\bullet$ *si* $k \in]-3,3[\setminus\left\{\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right\}$ $\longrightarrow 6$ ***solutions***
- $\bullet$ *si* $k = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$ $\longrightarrow 7$ ***solutions***

Exercice 12

$f(x) = cos^2x - 1$

1) si $x \in \mathbb{R}$ alors $(x+\pi) \in \mathbb{R}$ et

$f(x+\pi) = [\cos(x+\pi)]^2 - 1 = (-cosx)^2 - 1 = cso^2x - 1$

D'où $f(x+\pi) = f(x)$ ce qui prouve que f est périodique de période : $T = \pi$

2) * si $x \in \mathbb{R}$ alors $(-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = [\cos(-x)]^2 - 1 = cso^2x - 1 = f(x)$.

D'où f est paire

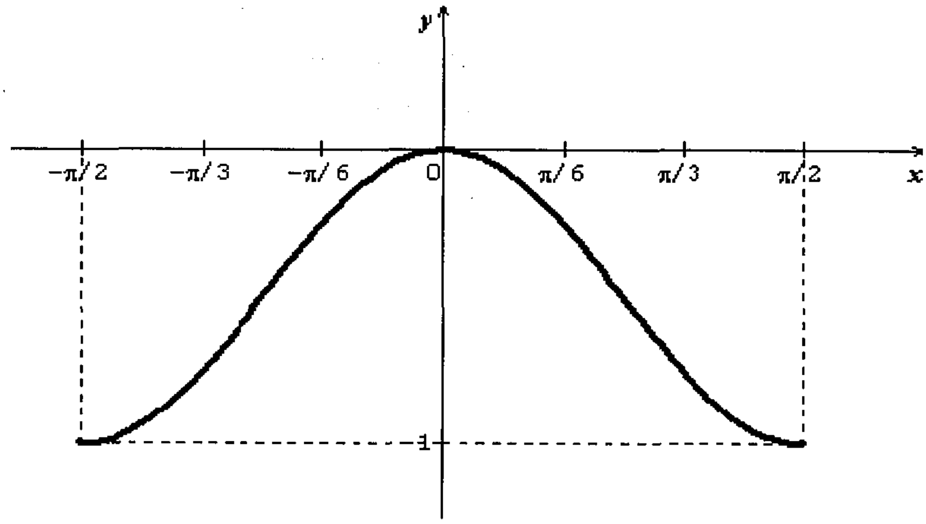
*f est π périodique donc il suffit d'étudier f sur I_0 intervalle d'amplitude π et comme de plus f est paire alors on choisit $I_0 = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et le domaine d'étude se réduit à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

* f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \subset \mathbb{R}$ et $f'(x) = 2.(cosx)'.cosx = -2sinx.cosx \leq 0$

D'où le tableau de variation de f

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	-1

* tracer C_0 la courbe de la restriction de f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ puis construire C_1 le symétrique de C_0 par rapport à la droite des ordonnées, qui est un axe de symétrie pour la courbe de f (fonction paire)



Exercice 13 $f(x) = -\dfrac{3}{2}sin2x$

1) $x \longrightarrow \sin\,(ax + b)$ est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$ $,a \neq 0$

Donc f est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

2) * si $x \in \mathbb{R}$ alors $(-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -\dfrac{3}{2}\sin(-2x) = \dfrac{3}{2}sin2x = -f(x)$.

D'où f est impaire

* f est périodique de période π donc on peut restreindre son étude à un intervalle de longueur π comme

[0 ; π] ou $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, de plus f est une fonction impaire donc on peut l'étudier

sur [0 ; +∞ [, sa courbe admet pour centre de symétrie, l'origine O du repère.

Finalement on peut étudier f sur I = $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

* f est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \subset \mathbb{R}$ et $f'(x) = -\dfrac{3}{2} \times 2cos2x. = -3cos2x$

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3cos2x = 0 \Leftrightarrow cos2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -3\cos 2x \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$$

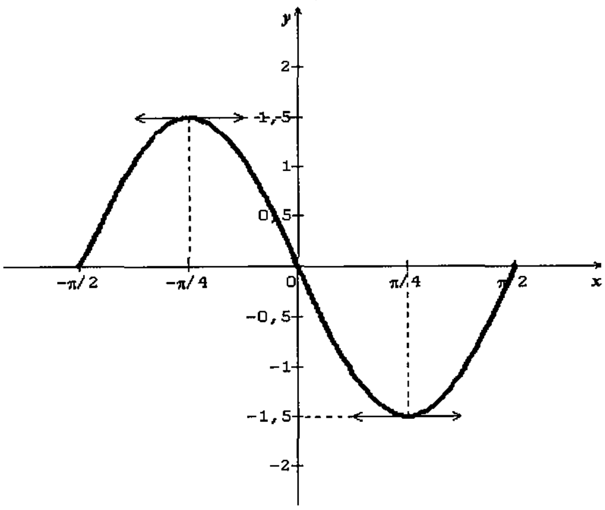
$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \pi \Leftrightarrow \cos(2x) \leq 0 \Leftrightarrow -3\cos 2x = f'(x) \geq 0$$

D'où le tableau de variation de f

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	0

* tracer C_0 la courbe de la restriction de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis construire C_1 le symétrique de C_0 par rapport à O , qui est un centre de symétrie pour la courbe de f

(fonction impaire)



Exercice 14

$$f(x) = 2\cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

1) la fonction : $x \longrightarrow \cos(ax + b)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$, $a \neq 0$

Donc f est périodique de période $T = \frac{2\pi}{3}$

2) $*f$ est . $\frac{2\pi}{3}$ périodique donc il suffit d'étudier f sur I_0 intervalle d'amplitude . $\frac{2\pi}{3}$

On choisit $I_0 = \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

* f est dérivable sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

et $f'(x) = 2 \times (-3)(-\sin\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right)) = 6\sin\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right)$

Remarquons que : $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -2\pi \leq -3x \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{-\frac{3\pi}{2} \leq (-3x + \frac{\pi}{2}) \leq \frac{\pi}{2}}$

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow -3x + \frac{\pi}{2} = 0 \quad ou \quad -3x + \frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad ou \quad x = \frac{\pi}{2} \quad . \; Ainsi\ on\ aura :$$

- $f'(x) = 6\sin(-3x + \frac{\pi}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow (-3x + \frac{\pi}{2}) \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

car :

$\oplus -\frac{3\pi}{2} \leq -3x + \frac{\pi}{2} \leq -\pi \Leftrightarrow -2\pi \leq -3x \leq -\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$

$\oplus 0 \leq -3x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq -3x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

- $f'(x) = 6\sin(-3x + \frac{\pi}{2}) \leq 0 \Leftrightarrow (-3x + \frac{\pi}{2}) \in [-\pi, 0] \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

car :

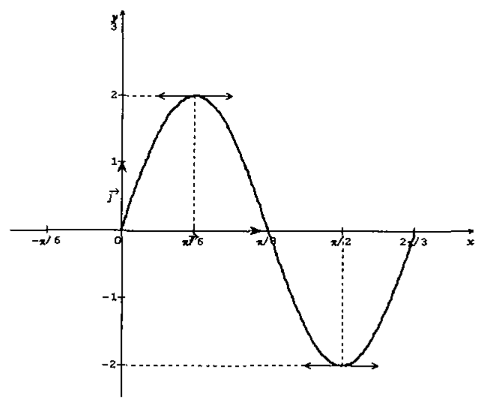
$\oplus -\pi \leq -3x + \frac{\pi}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq -3x \leq -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$f(0) = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $f(\frac{\pi}{6}) = 2\cos 0 = 2$, $f(\frac{\pi}{2}) = 2\cos(-\pi) = -2$ et $f(\frac{2\pi}{3}) = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$

<u>D'où le tableau de variation de f</u>

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
$f'(x)$		+	0	−			
$f(x)$	0	↗	2	↘	−2	↗	0

Courbe de f



Exercice 15

$f(x) = tanx + sin4x$

1) $Df = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \boldsymbol{k}\pi \ , \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z} \right\}$

2) si $x \in Df$ alors $(x + \pi) \in Df$

et $f(x + \pi) = \tan(x + \pi) + \sin 4(x + \pi) = tanx + \sin(4x + 4\pi)$
$= tanx + sin4x = f(x)$

D'où $f(x + \pi) = f(x)$ ce qui prouve que f est périodique de période : $T = \pi$

3) * si $x \in Df$ alors $(-x) \in Df$ et $f(-x) = -f(x)$. D'où f est impaire

*f est π périodique donc il suffit d'étudier f sur I_0 intervalle d'amplitude π or comme de plus f est impaire alors on choisit $I_0 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et le domaine d'étude se réduit à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

* f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) = 1 + tan^2x + 4\cos(4x)$

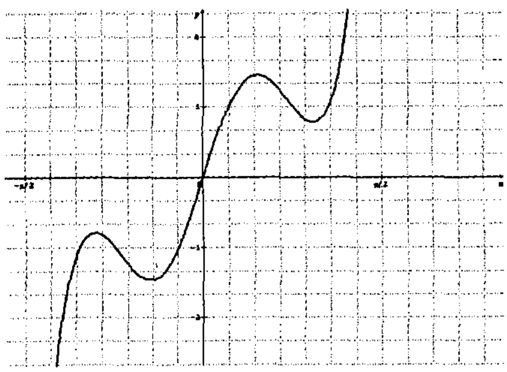
$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} (\underbrace{\tan x}_{+\infty} + \underbrace{\sin 4x}_{0}) = +\infty$ d'où $D: x = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote à C

Par raison de symétrie $D': x = -\frac{\pi}{2}$ est aussi une asymptote à C

Remarque : les zéros de $f'(x)$ ne sont pas remarquables

à l'aide de logiciel Géogebra on tracé l'allure de la courbe de f qui conforme notre conclusion .

Courbe de f



Exercice 16

$f(x) = tanx$

1) f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) = 1 + tan^2x > 0$

$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$ de la forme $\frac{1}{0^+}$ d'où $D: x = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote à Cf

<u>le tableau de variation de f</u>

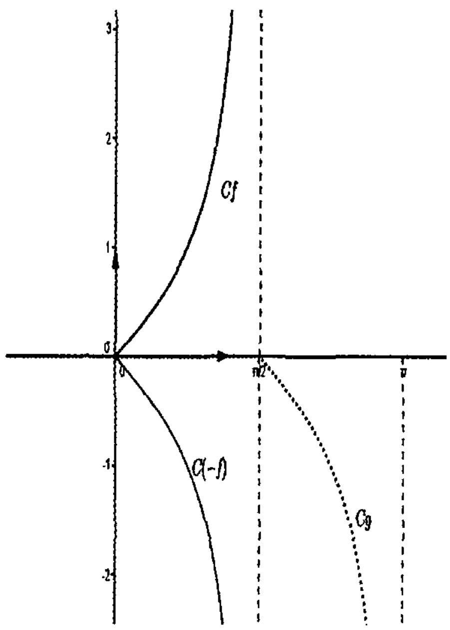
x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

la courbe de f et celle de $(-f)$ sont symétriques par rapport à la droite des abscisses.

2) a) $g(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$; $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$$\tan(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(x-\frac{\pi}{2})}{\cos(x-\frac{\pi}{2})} = \frac{-\cos x}{\sin x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin x} = -g(x) \quad ; \quad x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$



b) C' la courbe de g est l'image de la courbe

de $(-f)$ par la translation de vecteur $\vec{u} = \frac{\pi}{2}\vec{i}$

c) tableau de variation de g :

x	$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 17

$$f(x) = cosx - \frac{\sqrt{3}}{2}x \ , \ f'(x) = -\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in [-5,12] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x \in [-5,12] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3} \right\}$$

tableau de variations :

x	-5		$\frac{-2\pi}{3}$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{10\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{3}$		12
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	f(-5)	↘	$f(\frac{-2\pi}{3})$	↗	$f(\frac{-\pi}{3})$	↘	$f(\frac{4\pi}{3})$	↗	$f(\frac{5\pi}{3})$	↘	$f(\frac{10\pi}{3})$	↗	$f(\frac{11\pi}{3})$	↘	$f(12)$

* f admet un maximum local respectivement en : $\frac{-\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ et $\frac{11\pi}{3}$

* f admet un minimum local respectivement en : $\frac{-2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{10\pi}{3}$

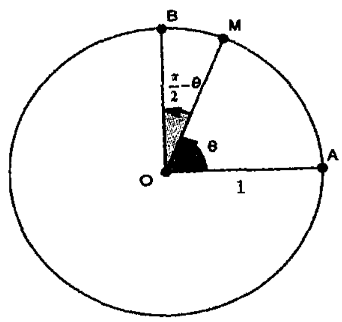
Exercice 18

$f(x) = x.cosx$, $x \in [0,+\infty[$

pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $f(2k\pi) = 2k\pi$ et $f((2k+1)\pi) = -(2k+1)\pi$

ce qui prouve que f est ni majorée ni minorée par suite f n'admet pas un plus petit extremum local sur $x \in [0,+\infty[$

Exercice 19



1) a) dans le triangle OAM on a : (Formule d'el-Kashi)

$$AM^2 = OA^2 + OM^2 - 2(OA \times OM)cos\theta$$

$$= 2 - 2cos\theta = 2(1 - cos\theta)$$

$$= 2\left[1 - (1 - 2sin^2\frac{\theta}{2})\right] = 4sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$$

$AM^2 = 4sin^2\frac{\theta}{2}$ et $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \boxed{AM = 2sin\frac{\theta}{2}}$

b) dans le triangle OBM on a :

$$BM^2 = OB^2 + OM^2 - 2(OB \times OM)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

$$= 2\left[1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2}\right)\right)\right] = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$BM^2 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\Longrightarrow \boxed{BM = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

2) $f(x) = 2\sin x + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

a) f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $f'(x) = 2\cos x - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

* On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\left[\cos x - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

Et puisque $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ on aura : $x = \frac{\pi}{8}$

* $0 \le x \le \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{8} \le -x \le 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} \le \frac{\pi}{4} - x \le \frac{\pi}{4}$

donc pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ on a : $x \le \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow \cos x \ge \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ (car la fonction cosinus est décrissante sur $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$)

Par suite f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ et de même décroissante sur $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$

* $f(0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

* $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4\sin\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4\sin\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

D'où le tableau de variation de f :

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$g'(x)$	$+$	$-$	
$g(x)$	$\sqrt{2}$ ↗	$2\sqrt{2-\sqrt{2}}$	↘ $\sqrt{2}$

3) $AM + BM = 2\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$ $, posons\ x = \frac{\theta}{2}$

La fonction g est maximal pour $x = \frac{\pi}{8}$ donc $AM + BM$ est maximal pour : $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{8}$

C'est-à-dire $\boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$

Exercice 20

$f(x) = x - sinx\ ,\ x \in \mathbb{R}$

1) pour tout $x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq x - \sin x \leq x+1$

par suite : $x-1 \leq f(x) \leq x+1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

2) a) point d'intersection de C et $D : y = x - 1$

$f(x) = x-1 \Leftrightarrow x - \sin x = x-1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

Donc : $C \cap D = \left\{ M_k(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) point d'intersection de C et $D : y = x + 1$

$f(x) = x+1 \Leftrightarrow x - \sin x = x+1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

Donc : $C \cap D = \left\{ N_k(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1 - \frac{\pi}{2} + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

3) On a : * $f'(x) = 1 + \cos x$

$f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + 1 = 1$ et $f'(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \cos(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + 1 = 1$

$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - 1$

$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi + 1$

* T est Tangente à C aux points M_k d'abscisse $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$$T : y = f'(\frac{\pi}{2}+2k\pi)(x-\frac{\pi}{2}-2k\pi)+ f(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$$

$$y = 1\times(x-\frac{\pi}{2}-2k\pi)+\frac{\pi}{2}+2k\pi-1 \Rightarrow y = x-1 \Rightarrow T = D$$

* T' est Tangente à C aux points N_k d'abscisse $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$

$$T' : y = f'(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)(x+\frac{\pi}{2}-2k\pi)+ f(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)$$

$$y = 1\times(x+\frac{\pi}{2}-2k\pi)-\frac{\pi}{2}+2k\pi+1 \Rightarrow y = x+1 \Rightarrow T = D$$

Conclusion : les droites D et D' sont tangents à C respectivement aux points M_k et N_k

Exercice 21

1) La longueur de tuyau est : $IM + MD + MC = AD - MH + 2MD$ $(MD = MC)$

- le triangle MDH est rectangle en H d'où :

$$\frac{MH}{MD} = \sin\alpha \Rightarrow MH = (\sin\alpha)MD \text{ et } \frac{DH}{MD} = \cos\alpha \Rightarrow MD = \frac{DH}{\cos\alpha}$$

Ainsi on aura : $f(\alpha) = AD - MH + 2MD = AD - (sin\alpha)MD + 2MD$

$$= AD - (sin\alpha)\frac{DH}{\cos\alpha} + 2\frac{DH}{\cos\alpha}$$

- or : H est le milieu $[DC]$ et $DC = AB$ donc $DH = \frac{AB}{2}$

D'où $f(\alpha) = AD - (sin\alpha)\frac{AB}{2\cos\alpha} + 2(\frac{AB}{2\cos\alpha})$

Finalement : $\boxed{f(\alpha) = \frac{AB}{\cos\alpha} - \frac{AB}{2}\tan\alpha + AD}$

2) a) $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(\alpha) = -AB(\frac{-\sin\alpha}{\cos^2\alpha}) - \frac{AB}{2}(\frac{1}{\cos^2\alpha}) = \frac{AB}{\cos^2\alpha}(\sin\alpha - \frac{1}{2})$

$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ car $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$f(\alpha) = AB - 0 + AD = AB + AD$

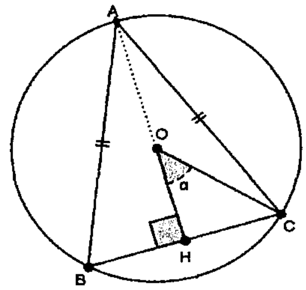
α	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$-$		$+$	
$f(\alpha)$	$(AB + AD)$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}AB + AD$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{2AB}{\sqrt{3}} - \frac{AB}{2\sqrt{3}} + AD = \frac{\sqrt{3}}{2}AB + AD$$

$$\lim_{\alpha \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{AB}{\cos\alpha} - \frac{AB}{2}\tan\alpha + AD = \lim_{\alpha \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{AB}{\cos\alpha}(1 - \frac{1}{2}\sin\alpha) + AD$$
$$= +\infty$$

b) la longueur L de tuyau est minimal pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$, et dans ce cas : $L = \frac{\sqrt{3}}{2}AB + AD$

<u>Exercice 22</u>



$OA = OB = OC = 1\ ,\ AB = AC$

$H\hat{O}C = \alpha\ ,\ HB = HC = \frac{BC}{2}$

1) a) Dans le triangle OHC (rectangle en H) on a :

$$* \ sin\alpha = \frac{HC}{OC} = HC \Longrightarrow sin\alpha = \frac{BC}{2} \quad \text{Donc } \boxed{BC = 2sin\alpha}$$

$$* \ cos\alpha = \frac{OH}{OC} = OH \ \text{ ainsi } OH = cos\alpha \text{ et puisque} : AH = OA + OH = 1 + OH$$

On aura : $\boxed{AH = 1 + cos\alpha}$

b) Soit a l'aire de triangle , on a : $a = \frac{1}{2}(\text{base} \times \text{hauteur}) = \frac{1}{2}\text{BC} \times \text{AH}$

$$\Longrightarrow a = \frac{1}{2}(2\sin\alpha)(1 + \cos\alpha) \Longrightarrow \boxed{a = \sin\alpha(1 + \cos\alpha)}$$

2) $f(\alpha) = \sin\alpha(1 + \cos\alpha)$; $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

a) f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (produit de deux fonctions dérivables) et on a :

$$f'(\alpha) = (\sin\alpha)'(1 + \cos\alpha) + \sin\alpha(1 + \cos\alpha)' = \cos\alpha(1 + \cos\alpha) + \sin\alpha(-sin\alpha)$$
$$= \cos\alpha(1 + \cos\alpha) - \sin^2\alpha = cos\alpha(1 + cos\alpha) + cos^2\alpha - 1$$
$$= \cos\alpha(1 + \cos\alpha) + (1 + \cos\alpha)(cos\alpha - 1) = (1 + \cos\alpha)(2\cos\alpha - 1)$$

Donc : $f'(\alpha) = (1 + cos\alpha)(2cos\alpha - 1)$; $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $* \ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $f'(\alpha) = (1 + \cos\alpha)(2\cos\alpha - 1) = 0 \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{3}$

- $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$
- $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$

D'où le tableau de variation de f :

α	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1

3) f admet un maximum en $\frac{\pi}{3}$ atteint la valeur $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

* Donc l'aire a de triangle ABC est maximal pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et dans ce cas on a : $a = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

* les deux triangles OBH et OBC sont isométriques d'où $B\hat{O}H = C\hat{O}H$ ainsi $B\hat{O}C = \frac{2\pi}{3}$

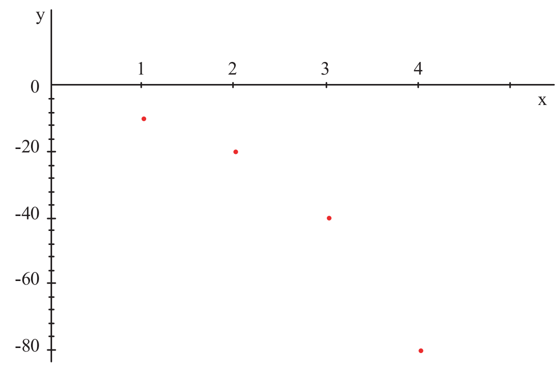
Or $A\hat{B}C = \frac{1}{2} B\hat{O}C$ $(angle\ au\ centre\ et\ angle\ inscrit\ associé\,)$ $\Longrightarrow A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$

<u>Conclusion</u> : $\begin{cases} AB = AC \\ \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$ ABC est un triangle équilatéral .

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.
1. Sur le graphique ci-contre, on a représenté les points $A_n(n , u_n)$, $1 \leq n \leq 4$, où (u_n) est une suite géométrique de raison q.
Graphiquement on a



☐ $q < 0$ ☐ $q > 1$ ☐ $q < -1$.

2. La suite (u_n) définie par $u_n = \sin n$, $n \geq 0$,

☐ est majorée ☐ n'est pas bornée ☐ est positive.

3. La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{-2}{n^2+1}$, $n \geq 0$,

☐ n'est pas majorée ☐ n'est pas minorée ☐ est bornée.

4. La suite (u_n) définie par $u_n = -2\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$, $n \geq 0$,

☐ est croissante ☐ est décroissante ☐ n'est ni croissante ni décroissante.

5. La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n > 0$,

☐ croissante ☐ décroissante ☐ n'est ni croissante ni décroissante.

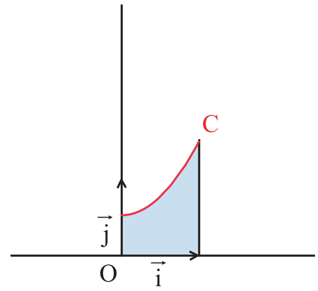
VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.
1. Si une suite n'est pas bornée alors elle n'est pas majorée.
2. Si une suite n'est pas minorée, alors elle n'est pas bornée.
3. Si une suite n'est pas croissante, alors elle est décroissante.
4. Si une suite est arithmétique, alors elle est monotone.
5. Si une suite est géométrique, alors elle est monotone.

Mobiliser ses compétences

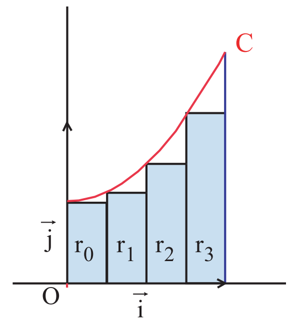
Situation 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f la fonction définie sur [0, 1] par $f(x) = x^2 + 0.5$.
On a tracé ci-contre sa courbe C.
On se propose de donner un encadrement de l'aire A délimitée par les axes du repère, la courbe C et la droite d'équation $x = 1$.

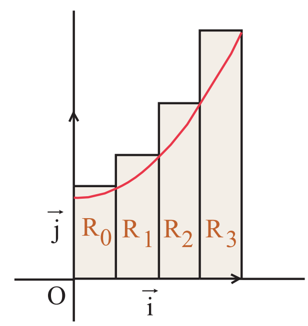


1. On partage l'intervalle [0, 1] en quatre intervalles de longueur $\frac{1}{4}$.

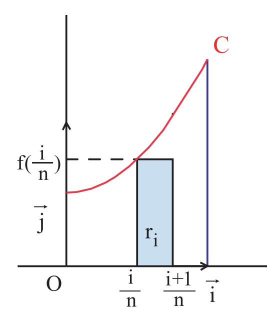
   a. On trace les rectangles r_i, $0 \leq i \leq 3$, comme l'indique la figure ci-contre et on désigne par s_4 la somme des aires des rectangles r_i, $0 \leq i \leq 3$.
   Calculer s_4.

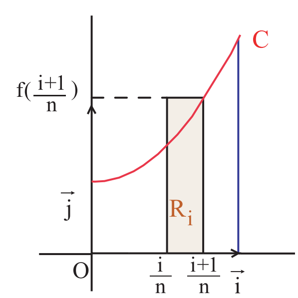


   b. On trace les rectangles R_i, $0 \leq i \leq 3$, comme l'indique la figure ci-contre et on désigne par S_4 la somme des aires des rectangles R_i, $0 \leq i \leq 3$.
   Calculer S_4.



   c. En déduire un encadrement de A.
   Plus généralement, soit un entier $n \geq 1$, on partage l'intervalle [0, 1] en n intervalles, de longueur $\frac{1}{n}$.
   On trace les rectangles r_i et les rectangles R_i, $0 \leq i \leq n - 1$, comme l'indique la figure ci-contre.
   On désigne par s_n respectivement S_n la somme des aires des rectangles r_i, respectivement R_i, $0 \leq i \leq n-1$.



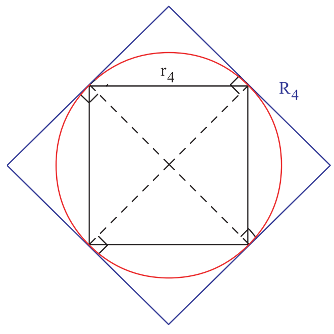


2. a. Faire une figure dans le cas où $n = 10$.
   b. Déduire un nouvel encadrement de A.
3. a. Exprimer s_n et S_n en fonction de n.
   b. En utilisant l'égalité $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \geq 1$,
   montrer que $s_n = \frac{5}{6} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ et que $S_n = \frac{5}{6} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$.
   c. Déduire un encadrement de A à 10^{-20} près.

Situation 2

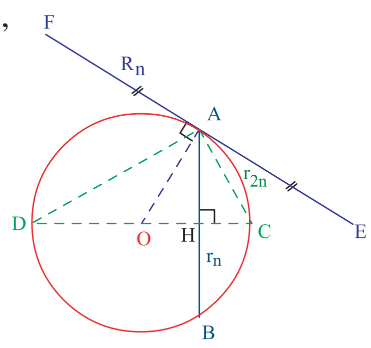
On se propose de donner des encadrements de π en encadrant le périmètre d'un cercle de diamètre 1.

I. Dans la figure ci-contre on considère un carré r_4 inscrit dans le cercle. Le carré R_4 circonscrit est obtenu en traçant les tangentes au cercle en les sommets du carré r_4.



1. a. Calculer les périmètres p_4 et P_4respectifs des carrées r_4 et R_4.
   b. En déduire un encadrement de π.
2. Soit [AB] un côté de r_4. La médiatrice de [AB] coupe le cercle en un point C.
   a. Vérifier que A, C et B sont trois sommets consécutifs d'un octogone régulier r_8 inscrit dans le cercle.
   b. Construire r_8.
   On désigne par p_8 le périmètre de r_8.
   c. Comparer graphiquement p_4 et p_8 .
3. a. Tracer à partir de r_8 un octogone régulier R_8 circonscrit au cercle.
   On désigne par P_8 le périmètre de R_8.
   b. Comparer graphiquement R_4 et P_4 .
4. En déduire un nouvel encadrement de π.

II. Plus généralement, soit un entier $n \geq 3$. On considère un polygone régulier r_n à n côtés, inscrit dans un cercle de diamètre 1.
En appliquant le même procédé décrit en I, au polygone régulier r_n, il vient que si [AB] désigne un côté du polygone régulier r_n, (voir figure ci-contre), alors [AC] désigne un côté d'un polygone régulier r_{2n} à 2n côtés inscrit dans le cercle et [EF] désigne un côté d'un polygone régulier R_n à n côtés circonscrit au cercle.



Si on note pour tout $n \geq 3$, p_n et P_n les périmètres respectifs des polygones r_n et R_n on obtient
$p_n < p_{2n} < p_{4n} < \ldots < \pi < \ldots < P_{4n} < P_{2n} < P_n$.
Dans ce qui suit on se propose de déterminer p_{2n} et P_n en fonction de p_n.

1. a. En remarquant que $AC^2 = DC.HC$, montrer que $AC^2 = \left(\dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{AB^2}{4}}\right)$.
   b. En déduire que $p_{2n} = \sqrt{2n}\sqrt{n - \sqrt{n^2 - p_n^2}}$.
2. a. En remarquant que OA.AH = AE.OH, montrer que $EF = \dfrac{AB}{\sqrt{1 - AB^2}}$.

b. En déduire que $P_n = \dfrac{np_n}{\sqrt{n^2 - p_n^2}}$.

3. Compléter le tableau ci-dessous.

n	Valeur approchée de p_n à 10^{-8} près	Valeur approchée de P_n à 10^{-8} près	Encadrement de π
$2^2 = 4$			
$2^3 = 8$			
$2^4 = 16$			
$2^5 = 32$			
$2^6 = 64$			
$2^7 = 128$			
$2^8 = 256$			
$2^9 = 512$			
$2^{10} = 1024$			

Exercices et problèmes

Exercice 1

Pour chacun des cas ci-dessous, préciser à partir de quel rang la suite est définie, puis calculer les quatre premiers termes de la suite.

$$u_n = \frac{5n-1}{n^2-5} \quad ; \quad v_n = \sqrt{n^2+n-12} \quad ; \quad w_n = \frac{-1}{3^n-3} \quad ;$$

$$a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n-9}} \quad ; \quad b_n = \cos\left(\frac{1}{n-3}\right) \quad ; \quad t_n = \sqrt{2^n-12}.$$

Exercice 2

On considère la suite u définie par $u_n = \left(\frac{1}{4}n(n+1)\right)^2$, $n \geq 1$.

1. Représenter les points $A_n\ (n, u_n)$, $1 \leq n \leq 3$.
2. Exprimer u_{2n}, u_{2n+1}, u_{n^2}, en fonction de n.

Exercice 3

Pour chacune des suites définies ci-dessous, calculer les cinq premiers termes puis représenter dans un repère les points correspondants et calculer en fonction de n les termes d'indices n+1, n+2 et 2n.

$u_n = 3n-1, n \geq 0$; $\qquad u_n = 3n-1, n \geq 0$;

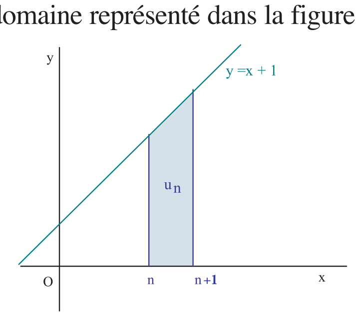
$w_n = \sqrt{2n+4}$, $n \geq 0$; $\qquad k_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, \text{ si n est pair} \\ \frac{n+1}{2}, \text{ si n est impair} \end{cases}$;

$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_{n+1} = 2s_n,\ n \geq 0 \end{cases}$; $\qquad t_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right), n \geq 0.$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Expliciter le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ où u_n est l'aire du domaine représenté dans la figure ci-dessous.



2. En déduire l'aire du domaine D des points M de coordonnées (x , y) tels que $0 \leq x \leq 10$ et $0 \leq y \leq x + 1$.

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_{n+1} = 2^{4n+2}$.

1. Déterminer u_n en fonction de n.
2. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

Exercice 6

On admet, en première approximation, que la pression atmosphérique diminue de 1% de sa valeur initiale chaque fois que l'altitude de l'observateur augmente de 100 mètres.

On désigne par P(0) la valeur de la pression atmosphérique en un lieu donné et P(n) celle en un lieu situé n centaines de mètres plus haut.

1. Etablir une relation entre P(n+1) et P(n).
2. Exprimer P(n) en fonction de n et de P(0).
3. Un promeneur part de son domicile situé au bord de la mer (altitude 0). La pression indiquée par son baromètre de poche est de 1000 millibars. Il arrive à un village à une altitude de 400 mètres. Quelle est la valeur indiquée par le baromètre ?
4. Lorsqu'il atteint le sommet, son baromètre indique 894 millibars. Calculer à 100 mètres près l'altitude de ce sommet.

Exercice 7

Etudier les variations de chacune des suites définies ci-dessous.

$$u_n = \frac{2n}{n^2+3}, \ n \geq 0.$$

$$v_n = \frac{2n}{\sqrt{n+1}}, \ n \geq 0.$$

$$w_n = \frac{2^n\sqrt{n}}{3^n}, \ n \geq 0.$$

Exercice 8

Montrer que chacune des suites définies ci-dessous est bornée.

$$u_n = 3 + \frac{2n}{n^2+1}, \ n \geq 0.$$

$$v_n = 3 - 2\cos(4n-1), \ n \geq 0.$$

$$w_n = 1 + \frac{(-5)^n}{6^n\sqrt{n}}, \ n \geq 0.$$

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1,\ n \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) est positive.
2. Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice 10

Pour chacune des suites définies ci-dessous étudier ses variations, indiquer, lorsque c'est possible, si elle est majorée, minorée ou bornée.

1. $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$, $n \geq 0$.

2. $u_n = \dfrac{-3n+1}{2n-4}$, $n \geq 3$.

3. $u_n = -3n + 1$, $n \geq 0$.

4. $u_n = \sqrt{3n+2}$, $n \geq 0$.

5. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n,\ n \geq 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n,\ n \geq 0. \end{cases}$

Exercice 11

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3n + \cos n$, $n \geq 0$.
Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice 12

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Exercice 13

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$, $n \geq 1$.

Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$, $n \geq 0$.
1. Déterminer les variations de (u_n).
2. Montrer que (u_n) est majorée par 3.
3. Déterminer un entier k tel que pour tout $n > k$, $2.9999 < u_n$.

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie par
$u_n = 3n^2 - 6n - 10$, $n \geq 1$.
1. Déterminer les variations de (u_n).
2. Déterminer un entier k tel que pour tout $n > k$, $u_n > 10^4$.
3. La suite (u_n) est- elle minorée ? majorée ?

Exercice 16

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout entier $k > 1$, $k! \geq 2^{k-1}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée par 3.

Exercice 17

Soit un réel a et la suite (u_n) définie par
$u_n = \dfrac{n + a}{a - n - 1}$, $n > a$.

On considère la suite (v_n) telle que
$v_n = \dfrac{1}{u_n - u_{n-1}} - \dfrac{1}{u_{n-1} - u_{n-2}}$, $n \geq 2$.

1. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.
2. Pour quelles valeurs de a la suite (v_n) est-elle croissante ? décroissante ?

Exercice 18

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer l'hyperbole H d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ et placer le point $A_0(1,1)$.

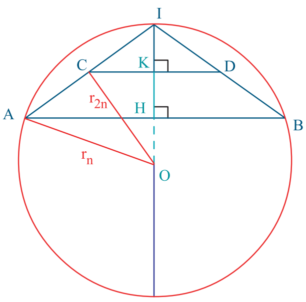
On considère les points de H, A_n et B_n, tels que pour tout $n \geq 0$, le segment $[A_n B_n]$ a pour coefficient directeur 2 et le segment $[A_{n+1} B_n]$ a pour coefficient directeur $\dfrac{3}{4}$.

2. Placer les points B_0 et A_1 puis déterminer leurs coordonnées.

Pour tout $n \geq 0$, on désigne par a_n l'abscisse du point A_n et par b_n l'abscisse du point B_n.

3. Déterminer une relation entre a_n et b_n puis une relation entre a_{n+1} et b_n.
4. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont géométriques.
5. En déduire les coordonnées des points A_n et B_n en fonction de n.

Exercice 19



Dans la figure ci-contre [AB] désigne un côté d'un polygone régulier à n côtés, de périmètre 2 et inscrit dans un cercle de rayon r_n , (r_n = OA).

Soit r'_n le rayon du cercle inscrit dans le polygone (r'_n = OH).

Soit C et D les milieux de [AI] et [BI] , alors [CD] est l'un des côtés d'un polygone régulier à 2n côtés, de même périmètre que le précédent, inscrit dans un cercle de rayon r'_{2n} (r'_{2n} = OC) et circonscrit à un cercle de rayon r'_{2n} (r'_{2n} = OK).

On obtient alors $\dfrac{1}{r_n} < \dfrac{1}{r_{2n}} < \ldots < \pi < \ldots < \dfrac{1}{r'_{2n}} < \dfrac{1}{r'_n}$.

1. Calculer r_4 et r'_4 puis donner un encadrement de π.

2. Remarquer que OK = $\dfrac{OI + OH}{2}$ et en déduire que $r'_{2n} = \dfrac{r'_n + r_n}{2}$.

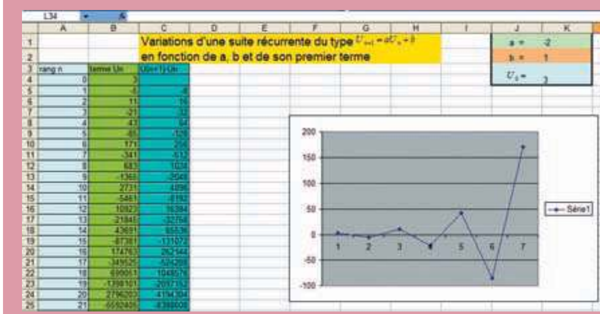
3. Remarquer que $OC^2 = OI \cdot OK$ et en déduire que

$r'_{2n} = \sqrt{r_n r'_{2n}}$.

4. Calculer des valeurs approchées à 10^{-9} près de $\dfrac{1}{r_{64}}$ et $\dfrac{1}{r'_{64}}$ puis donner un nouvel encadrement de π.

Avec l'ordinateur

On se propose d'étudier à l'aide d'un tableur, les variations d'une suite récurrente du type $U_{n+1} = aU_n + b$



Comme indiqué dans la figure ci-dessus,

• on inscrit dans la cellule K1 une valeur de a, dans K2 une valeur pour b et dans K3 on choisira une valeur de U_0.

• Dans la cellule A4 on écrit 0 et dans A5 on écrit la formule =A4+1.

On sélectionne A5 et avec la poignée de recopie, on copie par exemple jusqu'à A100.

• Dans la cellule B4 on écrit la formule =K3 et dans B5 on écrit la formule =$K$1*B4+$K$2

La cellule B5 étant sélectionnée, on la copie à l'aide de la poignée de recopie jusqu'à B100.

• Dans la cellule C5 on écrit la formule =B5-B4 et on la copie jusqu'à C100.

• On pourra représenter les termes de cette suite à l'aide d'un graphique du type courbe en choisissant par exemple la plage B4 : B10 comme plage de données.

Séquence 2

On considère la suite (U_n) définie par la donnée de son premier terme $U_0 \in [-6, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}$

A l'aide du logiciel CABRI,

1. Ecrire à l'aide de l'outil " expression " l'expression (x+6)^0.5 puis utiliser l'outil " appliquer une expression " pour représenter cette fonction.
2. Faire de même pour la droite d'équation y = x.
3. Créer un point sur l'axe des abscisses à l'aide de " point sur objet " et le nommer A. On désignera par l'abscisse de A.
4. Construire les termes U_1, U_2, U_3,U_4 et U_5 de la suite (U_n).
5. Comment semblent les variations de (U_n).
6. Déplacer le point A sur l'axe des abscisses. Conjecturer les variations de la suite (U_n) en fonction de la valeur de U_0.
7. Démontrer cette conjecture.

QCM

1) **(b)** $q > 1$

On a : $u_1 < 0$ *et* $u_2 = qu_1 < 0$ ainsi la raison est positive

2) **(a)** (u_n) est majorée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sin(n) \leq 1$

3) **(c)** (u_n) est bornée

$n^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{n^2+1} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{-2}{n^2+1} \geq -2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $-2 \leq u_n \leq 0$

4) **(b)** (u_n) est décroissante

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -2\left(\dfrac{5}{3}\right)^{n+1} + 2\left(\dfrac{5}{3}\right)^n = -2\left(\dfrac{5}{3}\right)^n\left[\dfrac{5}{3} - 1\right] = -\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{5}{3}\right)^n < 0$

5) **(b)** (u_n) est décroissante.

VRAI-FAUX

1) Faux

Contre exemple : $u_n = -n + 1$; $n \geq 0$

La suite (u_n) n'est pas bornée mais elle est majorée par 1. ($u_n \leq 1$, *pour tout* $n \in IN$)

2) Vrai

Une suite est bornée lorsque elle est majorée et minorée à la fois.

3) Faux

Par exemple la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$, est ni croissante ni décroissante

4) Vrai

en effet : $u_{n+1} - u_n = r$ la raison de cette suite

* si $r \geq 0$ alors (u_n) est croissante

* si $r \leq 0$ alors (u_n) est décroissante

5) Faux

En effet : lorsque sa raison $q < 0$, la suite (u_n) est ni croissante ni décroissante.

Mobiliser ses compétences :

Situation1 :

1) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$

a) $s_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{4}\times f(0) + \frac{1}{4}\times f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{4}\times f(\frac{2}{4}) + \frac{1}{4}\times f(\frac{3}{4})$

$$s_4 = \frac{1}{4}\times\left[f(0) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{4}) + f(\frac{3}{4})\right] = \frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{2} + (\frac{1}{16}+\frac{1}{2}) + (\frac{4}{16}+\frac{1}{2}) + (\frac{9}{16}+\frac{1}{2})\right]$$

$$s_4 = \frac{1}{4}\times\left[\frac{8}{16}+\frac{9}{16}+\frac{12}{16}+\frac{17}{16}\right] = \frac{46}{64} = \frac{23}{32}$$

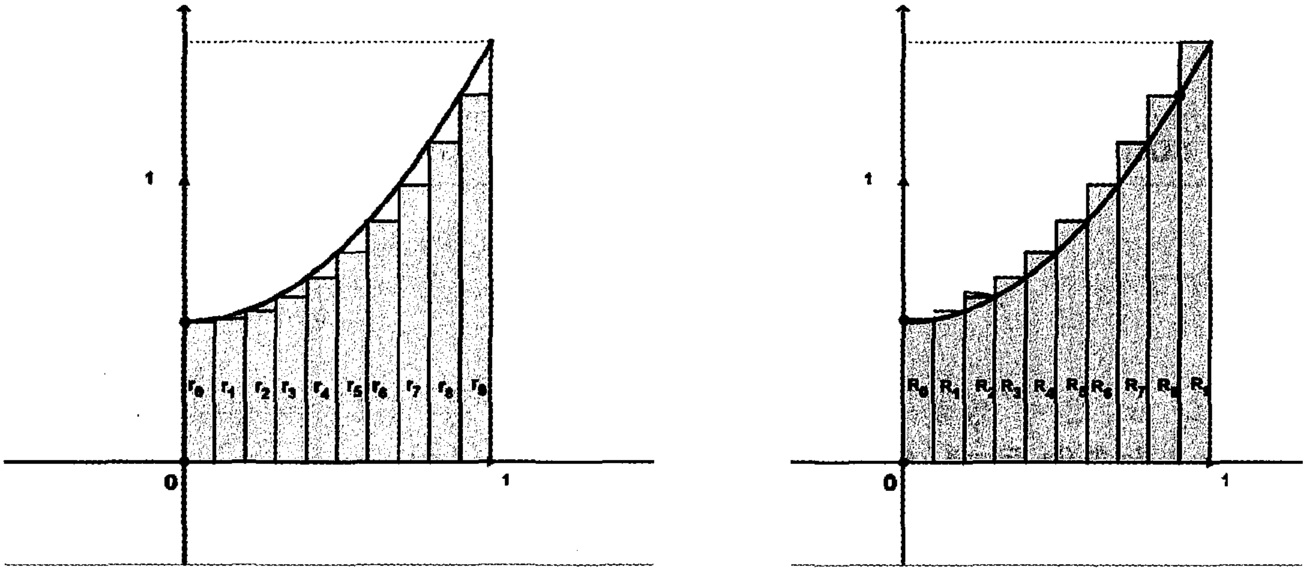
b) $S_4 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{4}\times f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{4}\times f(\frac{2}{4}) + \frac{1}{4}\times f(\frac{3}{4}) + \frac{1}{4}\times f(1)$

$$S_4 = \frac{1}{4}\times\left[f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{4}) + f(\frac{3}{4}) + f(1)\right] = \frac{1}{4}\times\left[(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}) + (\frac{4}{16}+\frac{1}{2}) + (\frac{9}{16}+\frac{1}{2}) + \frac{3}{2}\right]$$

$$S_4 = \frac{1}{4}\times\left[\frac{9}{16}+\frac{12}{16}+\frac{17}{16}+\frac{24}{16}\right] = \frac{62}{64} = \frac{31}{32}$$

c) $s_4 \leq A \leq S_4$ d'où $\frac{23}{32} \leq A \leq \frac{31}{32}$

2) a)



b) * $s_{10} = \frac{1}{10} \times \left[f\,(0) + f\,(\frac{1}{10}) + f\,(\frac{2}{10}) + f\,(\frac{3}{10}) + \;....\; + f\,(\frac{9}{10}) \right]$

$s_{10} = \frac{1}{10} \times \left[\frac{50}{100} + \frac{51}{100} + \frac{54}{100} + \frac{59}{100} + \frac{66}{100} + \frac{75}{100} + \frac{86}{100} + \frac{99}{100} + \frac{114}{100} + \frac{131}{100} \right]$

D'ou $s_{10} = \frac{785}{1000}$

* $S_{10} = \frac{1}{10} \times \left[f\,(\frac{1}{10}) + f\,(\frac{2}{10}) + f\,(\frac{3}{10}) + \;....\; + f\,(\frac{9}{10}) + \mathrm{f}(1) \right]$

$S_{10} = \frac{1}{10} \times \left[\frac{51}{100} + \frac{54}{100} + \frac{59}{100} + \frac{66}{100} + \frac{75}{100} + \frac{86}{100} + \frac{99}{100} + \frac{114}{100} + \frac{131}{100} + \frac{150}{100} \right]$

D'où $S_{10} = \frac{885}{1000}$

Par suite : $\frac{785}{1000} \leq A \leq \frac{885}{1000}$

3) a) * $s_n = \frac{1}{n}\times\left[f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\ ....\ +f(\frac{n-1}{n})\right]$

$$s_n = \frac{1}{n}\times\left[\frac{1}{2}+(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2})+(\frac{2^2}{n^2}+\frac{1}{2})+(\frac{3^2}{n^2}+\frac{1}{2})+\ ....\ +(\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{1}{2})\right]$$

$$s_n = \frac{1}{n}\times\left[\frac{n}{2}+\frac{1^2+2^2+3^2+\ ...\ +(n-1)^2}{n^2}\right]$$

* $S_n = \frac{1}{n}\times\left[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\ ....\ +f(\frac{n-1}{n})+f(1)\right]$

$$S_n = \frac{1}{n}\times\left[(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2})+(\frac{2^2}{n^2}+\frac{1}{2})+(\frac{3^2}{n^2}+\frac{1}{2})+\ ....\ +(\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{1}{2})+(\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{2})\right]$$

$$S_n = \frac{1}{n}\times\left[\frac{n}{2}+\frac{1^2+2^2+3^2+\ ...\ +n^2}{n^2}\right]$$

b) * on sait que : $1^2+2^2+3^2+\ ...\ +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D'où $1^2+2^2+3^2+\ ...\ +(n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

$$s_n = \frac{1}{n}\times\left[\frac{n}{2}+\frac{1^2+2^2+3^2+\ ...\ +(n-1)^2}{n^2}\right] = \frac{1}{n}\times\left[\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right]$$

$$s_n = \frac{1}{2}+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{2}+\frac{2n^2-3n+1}{6n^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

Par suite : $s_n = \frac{5}{6}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$

* $S_n = \frac{1}{n}\times\left[\frac{n}{2}+\frac{1^2+2^2+3^2+\ ...\ +n^2}{n^2}\right] = \frac{1}{n}\times\left[\frac{n}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]$

$$S_n = \frac{1}{2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{2}+\frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

Par suite : $S_n = \frac{5}{6}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$

c) Calculatrice 0,8333333333333333333 $\le A \le$ 0,8333333333333333334 pour $n =$

Situation2 :

I) 1) a)* r_4 est de diagonale 1. Soit a sa coté

D'après Pythagore $a^2 + a^2 = 1^2$ d'où $a^2 = \frac{1}{2}$ ce qui donne $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Par suite : $p_4 = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

* R_4 est de coté 1 donc $P_4 = 4 \times 1 = 4$

b) le périmètre du cercle est égal à $1 \times \pi = \pi$

il est clair que le périmètre du cercle est compris entre p_4 *et* P_4.

D'où $p_4 \leq \pi \leq P_4 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2} \leq \pi \leq 4$

2) on note A , B , A' *et* B' les sommets du carré r_4

et I son centre.

a) la médiatrice de $[AB]$ coupe le cercle $(\mathcal{C})$

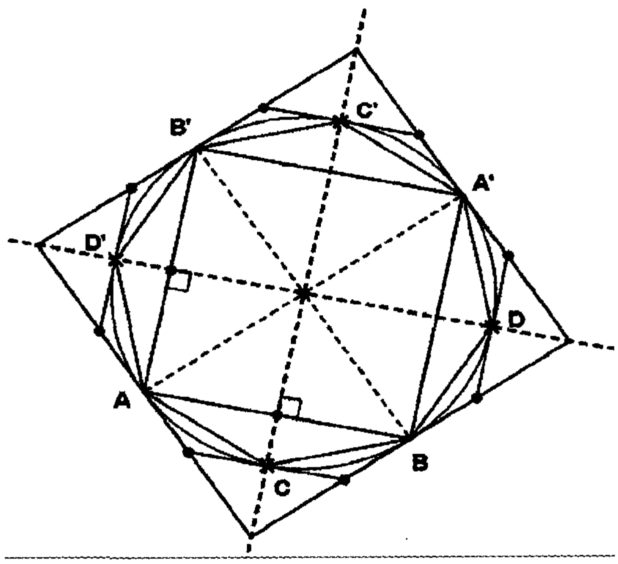
en C *et* C'

de même la médiatrice de $[AB']$ coupe le cercle $(\mathcal{C})$

en D *et* D' **(voir figure)**

$ACBDA'C'B'D'$ est un octogone régulier.

car : tous ses sommets appartiennent à $(\mathcal{C})$ *et*



$\widehat{AIC} = \widehat{CIB} = \widehat{BID} = \widehat{DIA'} = \widehat{A'IC'} = \widehat{C'IB'} = \widehat{B'ID'} = \widehat{D'IA} = \frac{\pi}{4}$ Avec I le centre de $(\mathcal{C})$.

b) voir figure

c) $p_4 < p_8$

3) a) voir figure

b) $P_8 < P_4$

4) $p_8 \leq \pi \leq P_8$

II) 1) a) On a : $AC^2 = DC.HC$ et $DC = 1$ d'ou $AC^2 = HC$

* le triangle ACD est rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur $[CD]$

Donc $AH^2 = HC.HD$ (relation métrique dans un triangle rectangle)

$AH^2 = HC.HD \Rightarrow \mathrm{HC}.(1-HC) = AH^2$

$$\Rightarrow HC - HC^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \qquad \Rightarrow HC^2 - HC = -\frac{AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(HC - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{AB^2}{4} \Rightarrow \left(HC - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left|HC - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{AB^2}{4}} \Rightarrow HC - \frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{AB^2}{4}} \qquad \text{Car } HC < \frac{1}{2}$$

Par suite : $\boxed{AC^2 = \mathrm{HC} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{AB^2}{4}}}$

b) $p_n = n.AB \Rightarrow AB = \frac{p_n}{n}$. et $p_{2n} = 2n.AC$

$$p_{2n} = 2n.AC = 2n.\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{AB^2}{4}}} = 2n.\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - AB^2}}$$

$$p_{2n} = 2n.\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}} \qquad car \ \ AB = \frac{p_n}{n}$$

$$p_{2n} = 2n.\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{p_n^2}{n^2}}} = 2n.\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\sqrt{n^2 - p_n^2}}$$

$$p_{2n} = 2n.\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\sqrt{n^2 - p_n^2}} = 2\mathrm{n}.\sqrt{\frac{1}{2n}\left(n - \sqrt{n^2 - p_n^2}\right)}$$

Par suite : $\boxed{p_{2n} = \sqrt{2n}.\sqrt{n - \sqrt{n^2 - \mathrm{p}_n^2}}}$

2) a) $OA = \frac{1}{2}$; $AH = \frac{AB}{2}$ et $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - AB^2}$

$$AE.OH = OA.AH \quad \Rightarrow \quad AE = \frac{\text{OA.AH}}{\text{OH}} = \frac{\frac{AB}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{1-AB^2}} = \frac{AB}{2\sqrt{1-AB^2}}$$

D'où $$EF = 2.AE = \frac{AB}{\sqrt{1-AB^2}}$$

b) $$P_n = n.EF = \frac{n.AB}{\sqrt{1-AB^2}} = \frac{p_n}{\sqrt{1-\frac{p_n^2}{n^2}}} \quad \text{car } p_n = n.AB$$

Ce qui donne : $$P_n = \frac{n.p_n}{\sqrt{n^2 - p_n^2}}$$

3) $p_n = n.AB =$ et $P_n = \dfrac{n.p_n}{\sqrt{n^2 - p_n^2}}$

n	Valeur approchée de p_n à 10^{-8} prés	Valeur approchée de P_n à 10^{-8} prés	Encadrement de π
$2^2 = 4$	2,82842713	4.00000002	
$2^3 = 8$			
$2^4 = 16$			
$2^5 = 32$			
$2^6 = 64$			
$2^7 = 128$			
$2^8 = 256$			
$2^9 = 512$			
$2^{10} = 1024$			

Exercices :

Exercice1 :

1. *pour n=1 $1^2+2^2+...+n^2=1^2=1$ et $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=1$ donc la propriété est vraie à l'ordre initial

* Soit $n\geq 1$ Supposons que $1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

et Montrons que $1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6)$

On a $1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \Rightarrow 1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$

$$=(n+1)\left[\frac{1}{6}n(2n+1)+(n+1)\right]$$

$$=(n+1)\frac{1}{6}[n(2n+1)+6(n+1)]$$

C q f d On a donc : pour $n\geq 1$ $1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

2.

Exercice 2 :

a) $u_n=\dfrac{5n-1}{n^2-5}$

Dans $\mathbb{R}$, $x^2-5=0 \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=-\sqrt{5}$ *ou* $x=\sqrt{5}$

la suite (u_n) est définie à partir du rang $n_0=3$ $(entier\ naturel>\sqrt{5})$

$u_3=\dfrac{7}{2}$, $u_4=\dfrac{19}{11}$, $u_5=\dfrac{6}{5}$ et $u_6=\dfrac{29}{31}$

b) $v_n=\sqrt{n^2+n-12}$

pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $p(x)=x^2+x-12$

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
x^2+x-12		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Delta=49$; $x'=-4$ *et* $x''=3$

D'où la suite (v_n) est définie à partir du rang $n_0=3$

$v_3=0$, $v_4=2\sqrt{2}$, $v_5=3\sqrt{2}$ et $v_6=\sqrt{30}$

c) $w_n=\dfrac{-1}{3^n-3}$

$3^n - 3 = 0 \iff n = 1$

D'où la suite (w_n) est définie à partir du rang $n_0 = 2$

$$w_2 = \frac{-1}{6} \;,\quad w_3 = \frac{-1}{24} \;,\quad w_4 = \frac{-1}{78} \text{ et } w_5 = \frac{-1}{240}$$

d) $a_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n-9}}$

$n - 9 > 0 \iff n > 9$

D'où la suite (a_n) est définie à partir du rang $n_0 = 10$

$$a_{10} = 11 \;,\quad a_{11} = 6\sqrt{2} \;,\quad a_{12} = \frac{13\sqrt{3}}{3} \text{ et } a_{13} = 7$$

e) $b_n = \cos(\dfrac{1}{n-3})$

la suite (b_n) est définie à partir du rang $n_0 = 4$

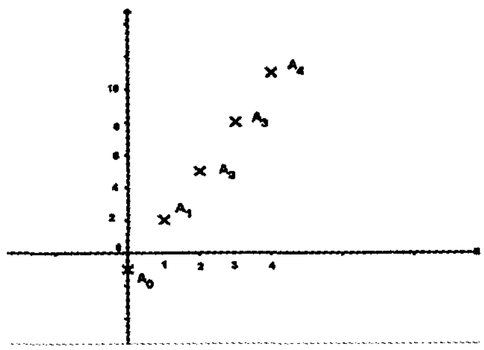
$$b_4 = \cos(1) \;,\quad b_5 = \cos(\frac{1}{2}) \;,\quad b_6 = \cos(\frac{1}{3}) \text{ et } b_7 = \cos(\frac{1}{4})$$

f) $t_n = \sqrt{2^n - 12}$

$2^n \geq 12$ pour $n \geq 4$

la suite (t_n) est définie à partir du rang $n_0 = 4$

$$t_4 = 2 \;,\quad t_5 = 2\sqrt{5} \;,\quad t_6 = 2\sqrt{13} \text{ et } t_7 = 2\sqrt{29}$$



Exercice3 :

1) $u_n = 3n - 1$, $n \geq 0$

a) $u_0 = -1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 5$, $u_3 = 8$ et $u_4 = 11$

$A_0(0,-1)$, $A_1(1,2)$, $A_2(2,5)$, $A_3(3,8)$ et $A_4(4,11)$

b) $u_{n+1} = 3(n+1) - 1 = 3n + 2$; $u_{n+2} = 3(n+2) - 1 = 3n + 5$

et $u_{2n} = 3(2n) - 1 = 6n - 1$

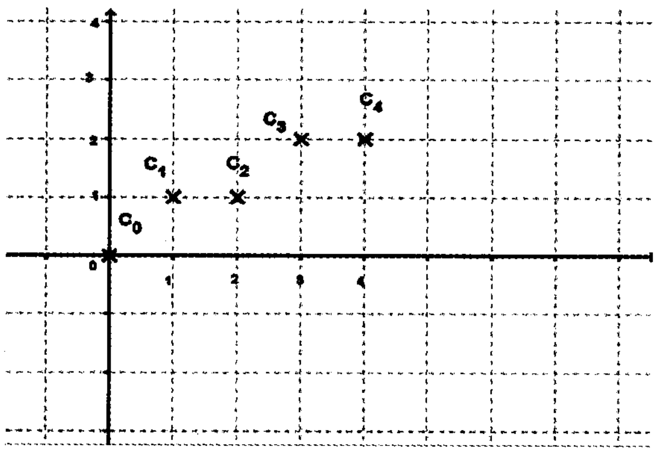
2) $w_n = \sqrt{2n+4}$, $n \geq 0$

a) $w_0 = 2$, $w_1 = \sqrt{6}$, $w_2 = 2\sqrt{2}$, $w_3 = \sqrt{10}$ et $w_4 = 2\sqrt{3}$

$B_0(0,2)$, $B_1(1,\sqrt{6})$, $B_2(2,2\sqrt{2})$, $B_3(3,\sqrt{10})$ et $B_4(4,2\sqrt{3})$

b) $w_{n+1} = \sqrt{2(n+1)+4} = \sqrt{2n+6}$, $w_{n+2} = \sqrt{2(n+2)+4} = \sqrt{2n+8}$ et $w_{2n} = \sqrt{2(2n)+4} = 2\sqrt{n+1}$

3) $k_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \ , & \text{si n est pair} \\ \dfrac{n+1}{2} \ , & \text{si n est impair} \end{cases}$



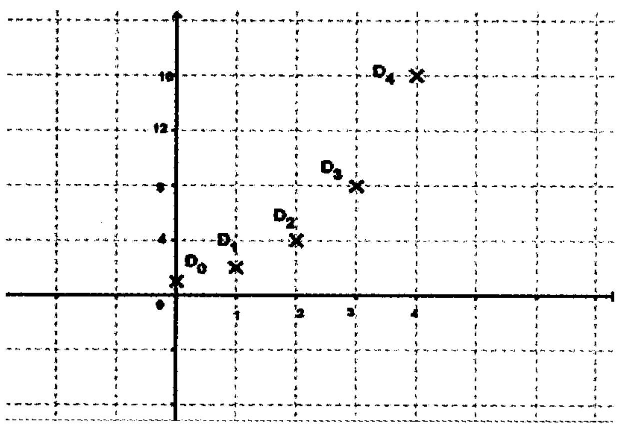
a) $k_0 = \dfrac{0}{2} = 0$, $k_2 = \dfrac{2}{2} = 1$, $k_4 = \dfrac{4}{2} = 2$

$k_1 = \dfrac{1+1}{2} = 1$, $k_3 = \dfrac{3+1}{2} = 2$

$C_0(0,0)$, $C_1(1,1)$, $C_2(2,1)$, $C_3(3,2)$ et $C_4(4,2)$

b) $k_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} \ , & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{n+2}{2} \ , & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$; $k_{n+2} = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2} \ , & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n+3}{2} \ , & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ et $k_{2n} = \dfrac{2n}{2} = n$, $n \geq 0$

4) $\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_{n+1} = 2s_n \end{cases}$, $n \geq 0$



a) $s_0 = 1$, $s_1 = 2s_0 = 2$, $s_2 = 2s_1 = 4$

$s_3 = 2s_2 = 8$ et $s_4 = 2s_3 = 16$

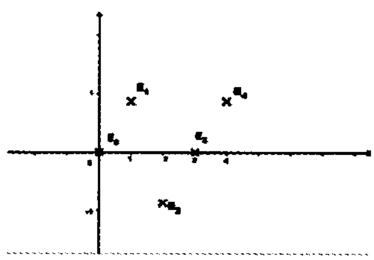
$D_0(0,1)$, $D_1(1,2)$, $D_2(2,4)$, $D_3(3,8)$ et $D_4(4,16)$

b) (S_n) est une suite géométrique

de premier terme $s_0 = 1$ et de raison $q = 2$

d'où $s_n = s_0 q^n = 2^n$ par suite : $s_{n+1} = 2^{n+1}$, $s_{n+2} = 2^{n+2}$ et $s_{2n} = 2^{2n}$

5) $t_n = \sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$, $n \geq 0$



a) $t_n = \sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$, $n \geq 0$

$t_0 = \sin 0 = 0$, $t_1 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $t_2 = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t_3 = \sin 2\pi = 0$ et $t_4 = \sin\frac{8\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $t_{n+1} = \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)$, $t_{n+1} = \sin\left(\frac{2(n+2)\pi}{3}\right)$, $t_{2n} = \sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right)$

Exercice4 :

1) $u_n = \frac{\left[(n+1)+(n+2)\right]\times 1}{2} = \text{n} + \frac{3}{2}$, $\text{n} \geq 0$

2) $aire(D) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_9$

$\text{u}_{n+1} - u_n = \left(n+1+\frac{3}{2}\right) - \left(n+\frac{3}{2}\right) = 1$ d'ou (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$

par suite : $aire(D) = \frac{10\times(u_0+u_9)}{2} = 5\times\left(\frac{3}{2}+\frac{21}{2}\right) = 60$ (unité d'aire)

Exercice5 :

$\text{u}_{n+1} = 2^{4n+2}$, $n \geq 0$

1) $\text{u}_{(n+1)} = 2^{4(n+1)-2}$ d'ou $\text{u}_n = 2^{4n-2}$

2) $u_{n+1} = 2^{4n+2} = 2^{(4n-2)+4} = 2^4 \times 2^{4n-2} = 16u_n$

Ou bien : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{4n+2}}{2^{4n-2}} = 2^{(4n+2)-(4n-2)} = 2^4 = 16.$

D'où (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 16$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{4}$

Exercice6 :

1) $P(n+1) = \left(1-\frac{1}{100}\right).p(n) = 0{,}99.P(n)$

2) P est une suite géométrique de raison $q = 0{,}99$ et de premier terme $P(0)$.

D'où $P(n) = (0{,}99)^n \times P(0)$

3) $P(0) = 1000\ millibards$

$P(4) = (0,99)^4 \times P(0) = (0,99)^4 \times 1000 = 960,596$ millibards

4) $\text{P(n)} = 894 \iff (0{,}99)^n \times 1000 = 894$

$\iff (0{,}99)^n = 0,894$

$\iff (0{,}99)^n = 0,894$

La calculatrice affiche : $(0{,}99)^{10} = 0,904$ $\boxed{(0{,}99)^{11} = 0,895}$ et $(0{,}99)^{12} = 0,886$

Pour $n = 11$ l'altitude est 1100 $mètres$

Exercice7 :

a) $u_n = \dfrac{2n}{n^2+3}$, $\text{n} \geq 0$

$u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$

f est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$ et $f'(x) = \dfrac{2(x^2+3)-2x.(2x)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{2(3-x^2)}{(x^2+3)^2}$

$u_0 = 0$, $u_1 = 0{,}5$

$u_2 = \dfrac{4}{7}$ et $u_3 = 0,5$

$u_1 < u_2$ et $u_2 > u_3$

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}/3$	$\searrow$	0

Conclusion : la suite (u_n) est ni croissante ni décroissante.

b) $v_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n+1}}$, $\text{n} \geq 0$

$v_n = g(n)$ avec $\text{g(x)} = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$

g est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$ et $g'(x) = \dfrac{2\sqrt{x+1} - 2x.(\frac{1}{2\sqrt{x+1}})}{x+1} = \dfrac{x+2}{(x+1)\sqrt{x+1}} \geq 0$ $pour\ x \geq 0$

La fonction g est croissante sur $[\,0\,,+\infty\,[$ donc $\text{g}(n) \leq \text{g}(n+1)$ $pour$ $n \geq 0$

$\Rightarrow$ $u_n \leq \text{u}_{n+1}$ Ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante.

c) $w_n = \dfrac{2^n\sqrt{n}}{3^n}$, $n \geq 0$

$w_0 = 0$, $w_1 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9}$ et $w_2 = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

On a : $w_0 < w_1$ et $w_1 > w_2$

D'où la suite (u_n) est ni croissante ni décroissante.

Exercice8 :

a) $u_n = 3 + \dfrac{2n}{n^2+1}$, $n \geq 0$

* il est clair que $u_n \geq 3$ pour tout entier n, car $\dfrac{2n}{n^2+1} \geq 0$

* soit $n \in \mathbb{N}$

$$(n-1)^2 \geq 0 \Rightarrow n^2+1-2n \geq 0 \Rightarrow 2n \leq n^2+1$$
$$\Rightarrow \frac{2n}{n^2+1} \leq 1 \Rightarrow 3+\frac{2n}{n^2+1} \leq 4 \Rightarrow u_n \leq 4$$

Par suite : $3 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $v_n = 3 - \cos(4n-1)$, $n \geq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(4n-1) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos(4n-1) \leq 1$

$$\Rightarrow 2 \leq 3-\cos(4n-1) \leq 4 \Rightarrow 2 \leq u_n \leq 4$$

c) $w_n = 1 + \dfrac{(-5)^n}{6^n\sqrt{n}}$, $n \geq 1$

$$|w_n| \leq 1 + \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\left(-\frac{5}{6}\right)^n\right| \Rightarrow |w_n| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$|x+y| \leq |x|+|y|$

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \leq 1$ alors $|w_n| \leq 2$

Par suite $-2 \leq w_n \leq 2$

Exercice 9 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2.u_n + 1 \quad , \quad n \geq 0 \end{cases}$$

1) démonstration par récurrence :

* vérification pour $n = 0$.

$u_0 = 0$, on a $u_0 \geq 0$ (vrai)

* soit $n \in IN$.

Supposons que $u_n \geq 0$, montrons que $u_{n+1} \geq 0$

$u_n \geq 0 \Rightarrow 2u_n \geq 0 \Rightarrow 2u_n + 1 \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} \geq 0$

Conclusion : $u_n \geq 0$, *pour tout* $n \in IN$.

2) $u_{n+1} - u_n = u_n + 1 \geq 0$ car $u_n \geq 0$, *pour tout* $n \in IN$.

Donc $u_{n+1} \geq u_n$

Conclusion : la suite (u_n) est croissante.

Exercice10 :

1) $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$, $n \geq 0$

a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+1}{n+4} - \dfrac{2n-1}{n+3} = \dfrac{(2n+1)(n+3)-(n+4)(2n-1)}{(n+3)(n+4)}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{7}{(n+4)(n+3)} \geq 0$ Donc $u_{n+1} \geq u_n$

La suite (u_n) est croissante

autre méthode : $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$

f est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$ et $f'(x) = \dfrac{7}{(x+3)^2} \geq 0$

La fonction f est croissante sur $[\,0\,,+\infty\,[$ donc $f(n) \leq f(n+1)$ *pour* $n \geq 0$

$\Rightarrow$ $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante

b) * la suite (u_n) est croissante donc $u_n \geq u_0$, *pour tout* $n \in IN$

ce qui donne : $\boxed{u_n \geq \frac{-1}{3}}$, *pour tout* $n \in IN$

* $u_n = \dfrac{2(n+3)-7}{n+3} = 2 - \dfrac{7}{n+3}$

$-\dfrac{7}{n+3} \leq 0 \Rightarrow 2 - \dfrac{7}{n+3} \leq 2$ ce qui donne : $\boxed{u_n \leq 2}$, *pour tout* $n \in IN$

* $\boxed{\forall\ n \in IN : -\frac{1}{3} \leq u_n \leq 2}$ la suite (u_n) est bornée.

2) $u_n = \dfrac{-3n+1}{2n-4}$, $n \geq 3$

a) $u_n = g(n)$ avec $g(x) = \dfrac{-3x+1}{2x-4}$

g est dérivable sur $[\,3, +\infty\,[$ et $g'(x) = \dfrac{10}{(2x-4)^2} \geq 0$

La fonction g est croissante sur $[\,3, +\infty\,[$ donc $g(n) \leq g(n+1)$ *pour* $n \geq 3$

$\Rightarrow$ $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante

b) * la suite (u_n) est croissante donc $u_n \geq u_3$, *pour tout* $n \geq 3$

Ce qui donne : $\boxed{u_n \geq -4}$, *pour tout* $n \geq 3$

* $u_n = \dfrac{-3n+1}{2n-4} = \dfrac{-3(n-2)-5}{2(n-2)} = \dfrac{-3}{2} - \dfrac{5}{2(n-2)}$

$-\dfrac{5}{2(n-2)} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{-3}{2} - \dfrac{5}{2(n-2)} \leq \dfrac{-3}{2}$ .Ce qui donne $\boxed{u_n \leq \frac{-3}{2}}$

* la suite (u_n) est bornée.

3) $u_n = -3n+1$, $n \geq 0$

a) $u_{n+1} - u_n = [-3(n+1)+1] - [-3n+1] = -3 \leq 0$

$\Rightarrow$ $u_n \geq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est décroissante.

b) * la suite (u_n) est décroissante donc $u_n \leq u_0$, *pour tout* $n \geq 0$

ce qui donne : $u_n \leq 1$ *pour tout* $n \geq 0$. la suite (u_n) est majorée par 1 .

* la suite (u_n) n'est pas minorée.

4) $u_n = \sqrt{3n+2}$, $n \geq 0$

a) $n \leq n+1 \Rightarrow 3n \leq 3(n+1) \Rightarrow 3n+2 \leq 3(n+1)+2 \Rightarrow \sqrt{3n+2} \leq \sqrt{3(n+1)+2}$

$\Rightarrow$ $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante.

<u>Ou bien</u> : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3n+5} - \sqrt{3n+2} = \dfrac{\sqrt{3n+5}^2 - \sqrt{3n+2}^2}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+2}} \geq 0$, $n \in IN$

$\Rightarrow$ $u_{n+1} \geq u_n$ La suite (u_n) est croissante.

b) *On peut remarquer que la suite (u_n) est minorée par 0.

* la suite (u_n) n'est pas majorée.

5) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3} u_n \ , \quad n \geq 0 \end{cases}$

a) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$

D'où pour $n \geq 0$ on a : $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et $u_{n+1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0$$

$\Rightarrow$ $u_n \geq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est décroissante.

b) $0 \leq \dfrac{2}{3} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u_n \leq 1$ ((u_n) est bornée)

6) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{2}{3} u_n \ , \quad n \geq 0 \end{cases}$

a) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$

D'où pour $n \geq 0$ on a : $u_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

(u_n) n'est pas monotone. ($u_0 = 1$, $u_1 = \frac{-2}{3}$, $u_2 = \frac{4}{9}$)

b) d'après 5) on a : $0 \leq |u_n| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq u_n \leq 1$ ((u_n) est bornée).

Exercice11 :

$u_n = 3n + \cos n$, $n \geq 0$

$u_n = f(n)$ *avec* $f(x) = 3x + \cos x$

f est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$ et $f'(x) = 3 - \sin x \geq 0$ car $-1 \leq \sin x \leq 1$

f est croissante sur $[\,0\,,+\infty\,[$ donc $f(n) \leq f(n+1)$

$\Rightarrow$ $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante.

Exercice12 :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{{}^2} + \ . \ . \ . + \frac{1}{n^2} \quad ; \qquad n \geq 1$$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{{}^2} + \ . \ . \ . + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0 \quad \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$$

ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante.

Exercice13 :

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad \mathrm{n} \geq 1$$

Soit $n \in IN^*$

$$\mathrm{n} \leq \mathrm{n}+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{n} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

Car : $\frac{\pi}{n}$ et $\frac{\pi}{n+1}$ appartiennent à $[\,0\,,\pi\,]$ et la fonction : $x \rightarrow cosx$ est décroissante sur $[\,0\,,\pi\,]$

Ce qui donne $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

Exercice14 :

$u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$, $n \geq 0$

1) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$

f est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$ et $f\,'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \geq 0$

la fonction f est croissante sur $[\,0\,,+\infty\,[$ donc $f(n) \leq f(n+1)$ *pour* $n \geq 0$

$\Rightarrow$ $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante

2) $u_n - 3 = \dfrac{3n+1}{n+2} - 3 = \dfrac{3n+1-3(n+2}{n+2} = \dfrac{)-5}{n+2} \leq 0$, *pour tout* $n \geq 0$

ce qui donne $u_n \leq 3$, *pour tout* $n \geq 0$

3) $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2} = 3 - \dfrac{5}{n+2}$

$2{,}9999 < u_n \Leftrightarrow 2{,}9999 < 3 - \dfrac{5}{n+2} \Leftrightarrow \dfrac{5}{n+2} < 0{,}0001$

$\Leftrightarrow \dfrac{n+2}{5} > 10000 \Leftrightarrow n+2 > 50000 \Leftrightarrow n > 49998$

il suffit donc de prendre $k = 49998$.

Exercice15 :

$u_n = 3n^2 - 6n - 10$, $n \geq 1$

1) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 3x^2 - 6x - 10$

f est dérivable sur $[\,1\,,+\infty\,[$ et $f\,'(x) = 6(x-1) \geq 0$, pour tout $x \in [1\,,+\infty[$

la fonction f est croissante sur $[\,0\,,+\infty\,[$ donc $f(n) \leq f(n+1)$ *pour* $n \geq 1$

$\Rightarrow$ $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante

2) $u_n = 3(n^2 - 2n + 1) - 13 = 3(n-1)^2 - 13$

$u_n > 10^4 \Leftrightarrow 3(n-1)^2 - 13 > 10^4 \Leftrightarrow 3(n-1)^2 > 10013$

$\Leftrightarrow (n-1)^2 > \dfrac{10013}{3} \Leftrightarrow |n-1| > \sqrt{\dfrac{10013}{3}}$

$u_n > 10^4$ Lorsque $n > 1 + \sqrt{\frac{10013}{3}}$ car $n \geq 1$

$1 + \sqrt{\frac{10013}{3}} \cong 3338{,}666..$ il suffit donc de prendre $k = 33338$

3) * $u_n = 3(n-1)^2 - 13 \geq -13$ $\longrightarrow$ ((u_n) *est minorée par* -13)

* (u_n) n'est pas majorée.

<u>Exercice16 :</u>

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ . \ . \ . + \frac{1}{n!}, \qquad n \geq 0$$

1) $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ . \ . \ . + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0 \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante.

2) montrons par récurrence que : $k! \geq 2^{k-1}$ *pour tout* $k \geq 2$.

* vérification pour $k = 2$

$2! = 2 \times 1 = 2$ *et* $2^{2-1} = 2^1 = 2$ on a $2! \geq 2^{2-1}$ (vrai)

* soit un entier $k \geq 2$

Supposons que $k! \geq 2^{k-1}$ montrons que $(k+1)! \geq 2^k$

On a : $k! \geq 2^{k-1}$ et $k+1 \geq 2$ d'où $(k+1) \times k! \geq 2 \times 2^{k-1}$

Ce qui donne $(k+1)! \geq 2^k$

<u>Conclusion</u> : $k! \geq 2^{k-1}$, *pour tout* $k \geq 2$

3) *pour* $k \geq 2$ on a : $k! \geq 2^{k-1} \Rightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}}$

- $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ . \ . \ . + \frac{1}{n!} = (\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}) + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ . \ . \ . + \frac{1}{n!} - (\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!})$
  $= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1 - \frac{1}{1!} = u_n - 1 - \frac{1}{1!} = u_n - 2$

* $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\right]$ *somme de (n-1) termes consécutifs d'une suite géométrique*

D'où $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .On aura donc : $u_n - 2 \leq 1\text{-}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ce qui donne : $u_n \leq 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ par suite $u_n \leq 3$, pour tout $n \geq 0$.

Exercice 17 :

$u_n = \frac{n+a}{a-n-1}$, $n > a$.

$v_n = \frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n-1} - u_{n-2}}$, $n \geq 2$ $\longleftarrow$ $(n > a+2 \, ou \, (a+1))$

1) $u_{n-1} = \frac{(n-1)+a}{a-(n-1)-1} = \frac{n-1+a}{a-n}$

$u_n - u_{n-1} = \frac{n+a}{a-n-1} - \frac{n-1+a}{a-n} = \frac{(n+a)(a-n)-(a-n-1)(n-1+a)}{(a-n)(a-n-1)}$

$u_n - u_{n-1} = \frac{2a-1}{(a-n)(a-n-1)}$ et $u_{n-1} - u_{n-2} = \frac{2a-1}{(a-n+1)(a-n)}$

donc

$v_n = \frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n-1} - u_{n-2}} = \frac{(a-n)(a-n-1)}{2a-1} - \frac{(a-n)(a-n+1)}{2a-1} = \frac{2(n-a)}{2a-1}$

$v_{n+1} = \frac{2(n+1-a)}{2a-1}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{2(n+1-a)}{2a-1} - \frac{2(n-a)}{2a-1} = \frac{2}{2a-1}$

D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{2}{2a-1}$

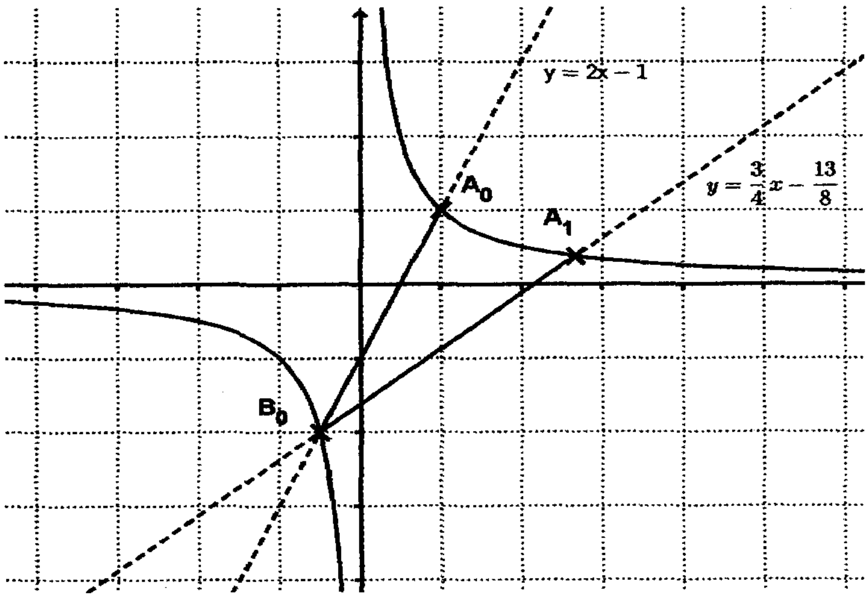
2) $\frac{2}{2a-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2a\text{-}1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2}$

* la suite (v_n) est croissante pour $a \geq \frac{1}{2}$

* * la suite (v_n) est décroissante pour $a \leq \frac{1}{2}$

*** pour $a = \frac{1}{2}$, la suite (v_n) est constante.

Exercice18 :



1) $(H): y = \frac{1}{x}$

(H) est une hyperbole de

centre O d'axes : $x = 0$ et $y = 0$

2) * $A_0(1, 1)$

A_0 et B_0 appartiennent à (H)

et à la droite Δ passant par $A_0(1, 1)$

et coefficient directeur 2.

$\Delta: y = 2x + m \ , \ m \in IR$

$A_0(1, 1) \in \Delta \Rightarrow 1 = 2 + m$

$\Rightarrow m = -1$ ainsi $\Delta : y = 2x - 1$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ 2x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$(H) \cap \Delta = \left\{ A_0(1, 1) \ , \ B_0\left(-\frac{1}{2}, -2\right) \right\}$

De même $A_1\left(\frac{8}{3}, \frac{3}{8}\right)$

3) * $A_n\left(a_n, \frac{1}{a_n}\right)$ et $B_n\left(b_n, \frac{1}{b_n}\right)$

la droite (A_nB_n) a pour coefficient directeur 2 d'où $\dfrac{y_{B_n}-y_{A_n}}{x_{B_n}-x_{A_n}}=2 \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{b_n}-\frac{1}{a_n}}{b_n-a_n}=2$

Ce qui donne : $\boxed{a_n.b_n=-\dfrac{1}{2}}$

** $A_{n+1}\left(a_{n+1},\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$ et $B_n\left(b_n,\dfrac{1}{b_n}\right)$

la droite $(A_{n+1}B_n)$ a pour coefficient directeur $\dfrac{3}{4}$ d'où $\dfrac{y_{B_n}-y_{A_{n+1}}}{x_{B_n}-x_{A_{n+1}}}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{b_n}-\frac{1}{a_{n+1}}}{b_n-a_{n+1}}=\dfrac{3}{4}$

Ce qui donne : $\boxed{a_{n+1}.b_n=-\dfrac{4}{3}}$

4) * $a_n.b_n=-\dfrac{1}{2}$ et $a_{n+1}.b_n=-\dfrac{4}{3}$

Prouve que : $b_n=-\dfrac{1}{2a_n}$ puis $-\dfrac{a_{n+1}}{2a_n}=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{8}{3}a_n$

donc (a_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{8}{3}$.

** $a_{n+1}.b_{n+1}=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{8}{3}a_n.b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}$ or $a_n=-\dfrac{1}{2b_n}$

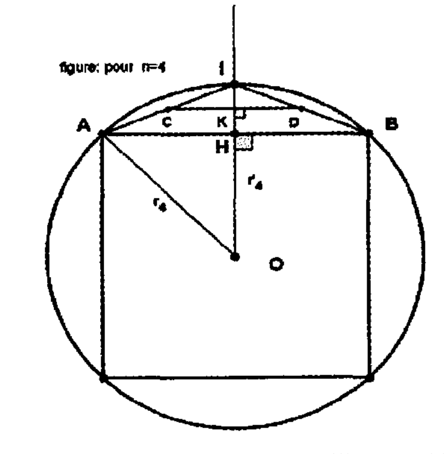
Ce qui donne : $\dfrac{8}{3}.\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=1 \Rightarrow b_{n+1}=\dfrac{3}{8}b_n$

Donc (b_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{3}{8}$

5)* $a_n=a_0.\left(\dfrac{8}{3}\right)^n \Rightarrow a_n=\left(\dfrac{8}{3}\right)^n$ d'où $A_n\left(\left(\dfrac{8}{3}\right)^n,\left(\dfrac{3}{8}\right)^n\right)$

** $b_n=b_0.\left(\dfrac{3}{8}\right)^n \Rightarrow b_n=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{8}\right)^n$ d'où $B_n\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{8}\right)^n,-2\left(\dfrac{8}{3}\right)^n\right)$

Exercice19 :



1) le triangle OHA est rectangle et isocèle en H,

le carré tracé est de périmètre 2 donc :

$$r'_4 = OH = AH = \frac{1}{4}$$

$$r_4 = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{1}{r_4} < \pi < \frac{1}{r'_4} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2} < \pi < 4$$

2)

$$OK = \frac{OI + OH}{2} \quad \Rightarrow \quad OK = \frac{OA + OH}{2} \quad \Rightarrow \quad r'_{2n} = \frac{r_n + r'_n}{2}$$

3) $OC^2 = OI.\mathrm{OK} \quad \Rightarrow \quad OC^2 = OA.\mathrm{OK} \quad \Rightarrow \quad r^2_{2n} = r_n . r'_{2n}$

D'où $r_{2n} = \sqrt{r_n . r'_{2n}}$

4) On a : $\begin{cases} r'_{2n} = \dfrac{r_n + r'_n}{2} \\ r_{2n} = \sqrt{r_n . r'_{2n}} \end{cases}$

$$* \quad \begin{cases} r'_4 = \dfrac{1}{4} \\ r_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r'_8 = \dfrac{r_4 + r'_4}{2} \\ r_8 = \sqrt{r_4 . r'_8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r'_8 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{8} \\ r_8 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{8}\right)} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{32}} \end{cases}$$

$$* \quad \begin{cases} r'_{16} = \dfrac{r_8 + r'_8}{2} \\ r_{16} = \sqrt{r_8 . r'_{16}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r'_{16} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{16} + \dfrac{1}{8}\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}} \\ r_{16} = \sqrt{\dfrac{1}{32}\left[\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}} . \left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right]} \end{cases}$$

Remarque :

- En Chine, au V[e] siècle, $\frac{355}{113}$ est utilisé comme valeur approchée de π .

- Viète, au XVI[e] siècle, a trouvé que $\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times ..$
- Wallis, au XVII[e] siècle a trouvé

$$\pi = 4 \times \left(2 \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \dots \right)$$

- Leibniz, fin du XVII[e] siècle,

$$\pi = 4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \dots \right)$$

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Si (v_n) est la suite définie par $v_n = \left(-\frac{3}{\sqrt{600000}}\right)^n$, $n \geq 0$ alors (v_n)

☐ est convergente ☐ tend vers $-\infty$ ☐ n'a pas de limite.

2. Si (v_n) est une suite arithmétique de raison positive, alors (v_n)

☐ est convergente ☐ tend vers $+\infty$ ☐ n'a pas de limite.

3. Si (v_n) est la suite définie par $v_n = \frac{n^n}{2n}$, $n \geq 1$ alors (v_n)

☐ tend vers 0.5 ☐ tend vers 0 ☐ tend vers $+\infty$.

4. Si (v_n) est la suite définie par $v_n = \cos(n^2\pi)$, $n \geq 1$ alors (v_n)

☐ est convergente ☐ est bornée ☐ tend vers $+\infty$.

5. Si (v_n) est la suite définie par $v_n = \frac{\tan(n^2\pi)}{2n}$, $n \geq 1$ alors (v_n)

☐ est constante ☐ tend vers $+\infty$ ☐ tend vers 0.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

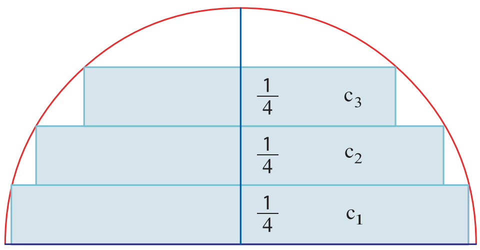
1. Si une suite est bornée alors elle est convergente.
2. Si une suite n'est pas convergente, alors elle tend vers l'infini.
3. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est positive à partir d'un certain rang.
4. Si une suite est strictement positive et convergente, alors sa limite est non nulle.
5. Si une suite est convergente, alors son inverse est convergente.

Mobiliser ses compétences

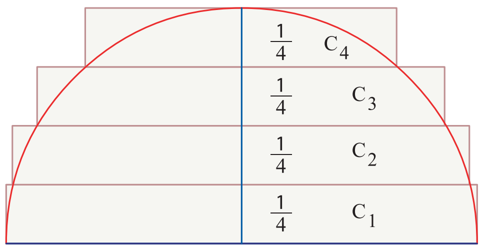
Situation 1

On se propose de donner un encadrement du volume d'une boule de rayon 1. Pour cela on va encadrer le volume de la demi-boule par les volumes respectifs de deux empilements de cylindres de même hauteur.

1. Dans cette question on suppose que tous les cylindres ont la même hauteur $\frac{1}{4}$.



Empilement de cylindres contenu dans la demi-boule



Empilement de cylindres contenant la demi-boule

   a. Déterminer les rayons des cylindres C_1, C_2, C_3, C_4 et c_1, c_2, c_3.
   b. Déterminer le volume de chacun de ces cylindres.
   c. Calculer les volumes des empilements S_4 et s_4.
   d. En déduire un encadrement du volume de la boule.

2. Soit un entier $n \geq 5$. On généralise le procédé en considérant des empilements S_n et s_n par des cylindres de même hauteur $\frac{1}{n}$ tels que S_n contient la demi-boule et s_n est contenu dans la demi-boule.
   a. Déterminer les rayons des cylindres C_1, C_2, ... , C_n de S_n.
      En déduire le volume V_n de S_n en fonction de n.
   b. Déterminer les rayons des cylindres c_1, c_2, ... , c_{n-1} de s_n.
      En déduire le volume v_n de s_n en fonction de n.
   c. En déduire un encadrement du volume de la boule.

3. a. Etablir que $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   b. En déduire que $V_n = \frac{\pi n(n-1)(4n+1)}{6n^3}$ et que $v_n = \frac{\pi n(n+1)(4n-1)}{6n^3}$.

   c. Calculer les limites des suites (V_n) et (v_n).
      Que remarque-t-on ? Que peut-on conjecturer sur le volume de la boule ?

Exercices et problèmes

Exercice 1

Déteminer dans chacun des cas suivants $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1. $u_n = -\pi n + 1, n \geq 0.$
2. $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}, n \geq 0.$
3. $u_n = \dfrac{-3n+1}{2n-4}, n \geq 3.$
4. $u_n = -3n^2 + 5n, n \geq 0.$
5. $u_n = -2 + \sqrt{3n}, n \geq 0.$
6. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = -\dfrac{2}{\pi} u_n, \ n \geq 0. \end{cases}$
7. $u_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n + 3^n, n \geq 0.$
8. $u_n = \dfrac{n^3}{(-0.3)^n}, n \geq 0.$

Exercice 2

Déteminer dans chacun des cas suivants $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1. $u_n = \dfrac{1}{n+3}\cos(n), n \geq 0.$
2. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n^4+1}}, n \geq 0.$
3. $u_n = \sqrt{4n^2+1} - n, n \geq 0.$
4. $u_n = \dfrac{19^n + 2}{5^n - 17}, n \geq 0.$

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+2}.$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.
2. On pose pour tout $n \geq 1$, $a_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
a. Exprimer a_n en fonction de n.
b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 4

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2^n - n, n \geq 0$.
a. Montrer que (u_n) est croissante.
b. En déduire que $2^n \geq n + 1, n \geq 0$.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2^n - \dfrac{1}{2}n, n \geq 0.$
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = \left(\dfrac{n}{10} - 1\right)^n, n \geq 0.$

1. Calculer les onze premiers termes de la suite (u_n). Quelle conjecture peut-on formuler quant à la convergence (u_n) ?
2. Montrer que pour tout $n > 100$, $u_n > 9^n$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = \dfrac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n}, n \geq 1.$

1. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 1.
2. Montrer que la limite de (u_n) est égale à 1.
3. Déterminer un entier k tel que pour tout $n > k$, $u_n < 1.0001$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par

$\begin{cases} u_0 = -1, \\ u_{n+1} = 5u_n + 3, \ n \geq 0. \end{cases}$

1. Déterminer le réel α tel que $\alpha = 5\alpha + 3$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$, $n \geq 0$.
a. Montrer que (v_n) est géométrique.
b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par

$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = -0.2u_n + 1, \ n \geq 0. \end{cases}$

1. Déterminer le réel α tel que $\alpha = -0.2\alpha + 1$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$, $n \geq 0$.
a. Montrer que (v_n) est géométrique.
b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 9

On considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ positive et la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que $0 \leq v_n \leq 1$, pour tout $n \geq 0$.
2. Montrer que (u_n) est croissante, si et seulement si, (v_n) est croissante.
3. Montrer que si (u_n) est convergente alors (v_n) est convergente.
4. Si (v_n) est convergente a-t-on que (u_n) est convergente ?

Exercice 10

On considère deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par $u_n = n^2(0.8)^n$ et $v_n = (0.9)^n$.

On pose $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

1. Calculer $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ et montrer que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, $n \geq 17$.
2. En déduire qu'il existe un réel c tel que pour tout $n \geq 17$, $0 \leq u_n \leq c(0.9)^n$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 11

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier naturel n , on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
2. On considère la suite (a_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

En utilisant la question 1, montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geq 2$.

3. En déduire que (a_n) est décroissante.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} \leq a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
5. En déduire la limite de (a_n).

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n^2+4n} - n - 2$, $n \geq 0$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = \dfrac{4}{\sqrt{n^2+4n}+n+2}$.
2. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 13

1. Montrer que pour tout entier non nul n, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. On considère la suite (S_n) définie par

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}, \ n \geq 1.$$

a. Déterminer une valeur approchée à 0.001 près des cinq premiers termes de (S_n).

b. Utiliser la question 1, pour montrer que $S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$, $n \geq 1$.

c. En déduire la limite de (S_n).

Exercice 14

Pour étudier un marché on le divise en périodes.
La demande, l'offre et le prix d'un certain produit sont mesurés par les indices respectifs D, O et P (d_n, o_n et p_n sont les valeurs respectives de ces indices durant la $n^{\text{ème}}$ période).
Les trois indices D, O et P sont définis par les relations

$$\begin{cases} o_n = 0.5\, p_n + 50, \\ d_n = -\, 0.3\, p_n + 162, \\ p_n = 1.05 p_{n-1} + 0.5(d_n - o_n). \end{cases}$$

On suppose que $p_0 = 100$.

1. Calculer o_0 et d_0 puis o_1 ,d_1 ,p_1 ,o_2 ,d_2 et p_2.
2. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $p_n = \dfrac{3}{4} p_{n-1} + 40$.
3. Calculer p_3 ,p_4 , ..., p_{10} puis représenter dans un repère les points $A_i(i, p_i)$, $0 \leq i \leq 10$.

Quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de (u_n) ?

4. a. Déterminer le réel α tel que $\alpha = \dfrac{3}{4}\alpha + 40$.

On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = p_n - \alpha$, $n \geq 0$.

b. Montrer que (u_n) est géométrique.

c. Exprimer u_n puis p_n en fonction de n.

d. En déduire que la suite (p_n) converge vers α.

La valeur limite α est appelée prix d'équilibre de la denrée étudiée.

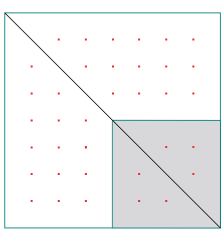
e. Calculer les valeur des indices O et D correspondant à ce prix d'équilibre.

Exercice 15

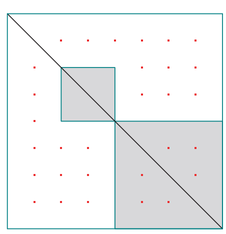
Soit une droite D munie d'un repère $(O, \vec{i})$.
On donne les points A_0 et A_1 d'abscisses respectives 0 et 1 et pour tout $n \geq 0$, on note A_{n+2} le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$.
On désigne par a_n l'abscisse du point A_n.
Le but de cet exercice est de voir, si les points A_n se rapprochent d'un même point, lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes.
1. Placer les points A_n, pour tout $n \leq 5$, puis déterminer leurs abscisses.
On pose pour tout $n \geq 1$, $x_n = a_n - a_{n-1}$.
2. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $x_1 + x_2 + ... + x_n = a_n$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est géométrique.
4. En déduire a_n en fonction de n.
5. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.
6. Conclure.

Exercice 16

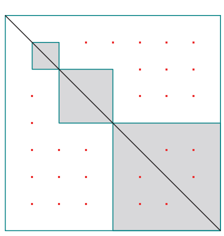
A l'intérieur d'un carré de côté 1, on effectue le coloriage schématisé ci-dessous.



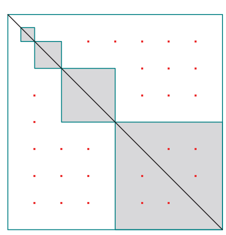
Etape 1



Etape 2



Etape 3

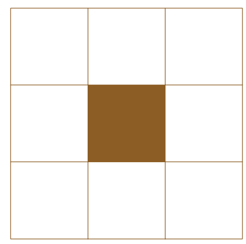


Etape 4

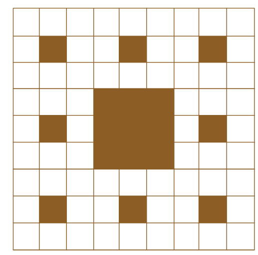
On désigne par u_n l'aire du domaine colorié après le coloriage du $n^{\text{ème}}$ carré.
1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 17 (Le tamis de Sierpinski)

A l'intérieur d'un carré de côté 1, on effectue le coloriage suivant :
On divise un carré de côté 1 en neuf carrés égaux et on colorie le carré central, puis on divise chacun des huit carrés non coloriés en neuf carrés égaux et on colorie les carrés centraux et ainsi de suite.
(Voir le schéma ci-dessous).



Etape 1

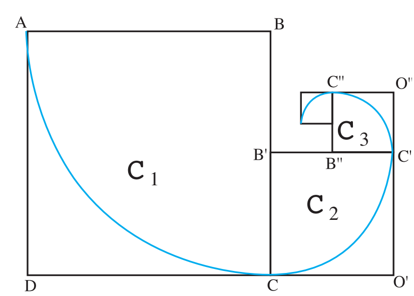


Etape 2

On désigne par u_n l'aire du domaine colorié après la $n^{\text{ème}}$ étape.
1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. Montrer que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{9}(1 - u_n)$.
3. On pose pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_n - 1$.
a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
c. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

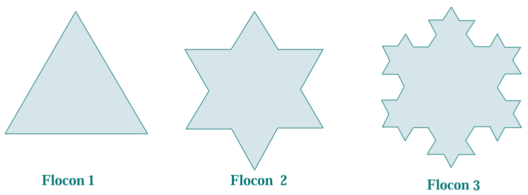
Exercice 18

On considère un carré ABCD de côté 1et le quart de cercle C_1 de centre B et d'extrémités A et C.
On désigne par B' le milieu de [BC] et on construit le carré B'CO'C' et le quart de cercle C_2 de centre B' et d'extrémités C et C', comme l'indique la figure ci-dessous.

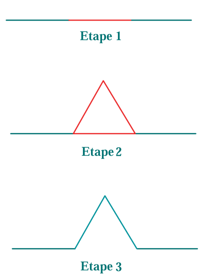


On réitère le procédé de façon à obtenir une spirale par réunion de quarts de cercles successifs.
Pour tout $n \geq 1$, on désigne par :
u_n la longueur du $n^{\text{ème}}$ quart de cercle $\mathcal{C}_n$ construit,
v_n la longueur de la spirale après la construction de $\mathcal{C}_n$,
a_n la somme des aires des n premiers carrés.
1. a. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
b. Exprimer u_n en fonction de n.
c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. a. Exprimer v_n en fonction de n.
b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
3. a. Exprimer a_n en fonction de n.
b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 19 (Les flocons de Von Koch)



Dans la figure ci-dessus on a représenté les trois premiers flocons de Von Koch.
Les flocons de Von Koch s'obtiennent selon le procédé suivant :
Le flocon 1 est un triangle équilatéral de côté 1.
Pour passer d'un flocon n au flocon (n+1),
on partage chaque côté du flocon n en 3 segments isométriques et on substitue au segment central deux segments qui forment avec le segment supprimé un triangle équilatéral (voir schéma ci-dessous).



On note respectivement c_n, x_n, p_n et a_n, le nombre de côtés, la longueur d'un côté, le périmètre et l'aire du flocon n.
1. a. Montrer que la suite (c_n) est définie par $\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_{n+1} = 4c_n. \end{cases}$
b. En déduire c_n en fonction de n.
2. Exprimer x_n en fonction de n.
3. a. Montrer que la suite (p_n) est une suite géométrique.
b. Déterminer les variations de la suite (p_n).
c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
4. a. Calculer a_1 et a_2.
b. En remarquant que l'on construit le flocon (n+1) en ajoutant sur chaque côté du flocon n un triangle équilatéral de côté x_{n+1}, établir que $a_{n+1} = a_n + \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.
5. a. En déduire que pour tout $n \geq 1$,
$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(1 + \frac{4}{9} + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right).$$
b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 20

Soit n un entier naturel.
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.
1. Montrer que $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$, $x \neq 1$.
2. a. Vérifier que f est dérivable pour tout réel x différent de 1.
b. Calculer de deux façons différentes $f'(x)$, $x \neq 1$.
3. En déduire le calcul de la somme
$$S_n = 1 + 2.\frac{1}{2} + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$
4. On se propose de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
On considère la suite (u_n) définie par
$u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, $n \geq 0$.
a. Montrer que $u_{n+1} \leq \dfrac{3}{4} u_n$, $n \geq 2$.
b. En déduire que $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1} u_2$, $n \geq 2$.
c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

QCM

1) **(a)** (v_n) est convergente.

2) **(b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

3) **(c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

4) **(b)** (v_n) est bornée

5) **(a)** (v_n) est constante

VRAI - FAUX

1) **Faux**

contre exemple : soit (u_n) la suite définie sur IN par $u_n = (-1)^n$

on a : $-1 \le u_n \le 1$ pour tout ∈ IN , mais la suite (u_n) est divergente.

2) **Faux**

même contre exemple . (u_n) n'admet pas de limite.

3) **Vrai**

voir définition , pour A=100 (par exemple), il existe un entier N tel que :

$n \geq N \quad \Rightarrow \quad u_n > 100$

4) **Faux**

contre exemple : $u_n = \frac{1}{n}$, $n \ge 1$

$u_n > 0 \quad pour \quad n \geq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

4) **Faux**

Voir contre exemple précédent

Mobiliser ses compétences :

1) a) * C_1 est de rayon $R_1 = 1$

*soit R_2 le rayon C_2

on a : $(R_2)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow R_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

* soit R_3 le rayon C_3

on a : $(R_3)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow R_3 = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* soit R_4 le rayon C_4

on a : $(R_4)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow R_4 = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

** c_1 est de rayon $r_1 = R_2 = \frac{\sqrt{15}}{4}$

** c_2 est de rayon $r_2 = R_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

** c_3 est de rayon $r_3 = R_4 = \frac{\sqrt{7}}{4}$

b) $V_1 = \pi.R_1^2.h = \pi.(1)^2.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$; $V_2 = \pi.R_2^2.h = \pi\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15\pi}{64}$

$V_3 = \pi.R_3^2.h = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{16}$; $V_4 = \pi.R_4^2.h = \pi\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7\pi}{64}$

* $v_1 = V_2 = \frac{15\pi}{64}$; $v_2 = V_3 = \frac{3\pi}{16}$ et $v_3 = V_4 = \frac{7\pi}{64}$

c) $V_{S_4} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{15\pi}{64} + \frac{3\pi}{16} + \frac{7\pi}{64} = \frac{25\pi}{32}$

et $v_{s_4} = V_2 + V_3 + V_4 = \frac{15\pi}{64} + \frac{3\pi}{16} + \frac{7\pi}{64} = \frac{17\pi}{32}$

d) $2v_{s_4} \leq V_{boule} \leq 2V_{S_4} \quad \Rightarrow \quad \frac{17\pi}{16} \leq V_{boule} \leq \frac{25\pi}{16}$

2) a) * C_1 est de rayon $R_1 = 1$

*soit R_2 le rayon C_2

on a : $(R_2)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad R_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$

* soit R_3 le rayon C_3

On a : $(R_3)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad R_3 = \sqrt{1 - \frac{2^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$R_n = \sqrt{1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}}$$

b) $V_{S_n} = \frac{\pi}{n} R_1^2 + \frac{\pi}{n} R_2^2 + \frac{\pi}{n} R_3^2 + \ldots\ldots + \frac{\pi}{n} R_n^2$

$$V_{S_n} = \frac{\pi}{n}\left[1^2 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\right]$$

$$V_{S_n} = \frac{\pi}{n}\left[n - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2}{n^2}\right] = \pi\left[1 - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2}{n^3}\right]$$

c) $r_1 = R_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \quad ; \quad r_2 = R_3 = \sqrt{1 - \frac{2^2}{n^2}} \quad ; \quad r_{n-1} = R_n = \sqrt{1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}}$

$$v_{s_n} = \frac{\pi}{n} r_1^2 + \frac{\pi}{n} r_2^2 + \frac{\pi}{n} r_3^2 + \ldots\ldots + \frac{\pi}{n} r_{n-1}^2$$

$$v_{s_n} = \frac{\pi}{n}\left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\right]$$

$$v_{s_n} = \frac{\pi}{n}\left[n - 1 - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2}{n^2}\right] = \pi\left[1 - \frac{1}{n} - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2}{n^3}\right]$$

$$\boxed{v_{s_n} = V_{S_n} - \frac{\pi}{n}}$$

3) a) démonstration par récurrence :

* vérification pour $n=1$

$$\frac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6}=\frac{2\times3}{6}=\frac{6}{6}=1^2$$ (vrai)

* soit $n\geq 1$

Supposons que $1^2+2^2+3^2+......+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Montrons que $1^2+2^2+3^2+......+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$1^2+2^2+3^2+......+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6}$$

$$=\frac{(n+1)\left[2n^2+n+6n+6\right]}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Conclusion : $1^2+2^2+3^2+......+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout entier $n\geq 1$

b) $1^2+2^2+3^2+......+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ d'après le résultat précédent.

* $$V_{S_n}=\pi\left[1-\frac{1^2+2^2+.......+(n-1)^2}{n^3}\right]=\pi\left[1-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\right]$$

$$V_{S_n}=\pi\left[\frac{6n^3-n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\right]=\frac{n.\pi}{6n^3}\left[6n^2-(2n^2-3n+1)\right]$$

$$V_{S_n}=\frac{n.\pi}{6n^3}\left[4n^2+3n-1\right]=\frac{\pi.n.(n+1).(4n-1)}{6n^3}$$

* $$v_{s_n}=V_{S_n}-\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}-\frac{\pi.n.(n+1)(4n-1)}{6n^3}$$

$$v_{s_n}=\frac{\pi.n.(n-1)(4n+1)}{6n^3}$$ (Calculs à faire)

c) $V_n = V_{S_n} = \dfrac{\pi.n.(n+1).(4\text{n}-1)}{6n^3} = \dfrac{\pi.(n+1).(4\text{n}-1)}{6n^2}$

$$V_n = \frac{\pi}{6}\left[\frac{4n^2+3n-1}{n^2}\right] = \frac{\pi}{6}\left[4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{6}\left[4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right] = \frac{2\pi}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(V_n - \frac{\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

c) $V_{boule} = 2\times \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 2\times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{4\pi}{3}$

Exercices :

Exercice1 :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\pi.n+1\right) = -\infty$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-1}{n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{3}{n}} = 2$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3n+1}{2n-4} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3+\dfrac{1}{n}}{2-\dfrac{4}{n}} = -\dfrac{3}{2}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3n^2+5n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(-3+\dfrac{5}{n}\right) = -\infty$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2+\sqrt{3n}\right) = +\infty$

6) $u_0 = 1$, $\text{u}_{n+1} = -\dfrac{2}{\pi}u_n$, $\text{n} \geq 0$

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{2}{\pi}$

Comme $-1 < -\dfrac{2}{\pi} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

7) $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3^n$, $n \geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

8) $u_n = \frac{n^3}{(-0,3)^n}$, $n \geq 0$

$$u_{2n} = \frac{(2n)^3}{(-0,3)^{2n}} = \frac{8n^3}{(0,3)^{2n}} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \frac{(2n+1)^3}{(-0,3)^{2n+1}} = -\frac{(2n+1)^3}{(0,3)^{2n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -\infty$$

d'où (u_n) n'admet pas de limite.

Exercice2 :

1) $u_n = \frac{1}{n+3}\cos n$, $n \geq 0$

$$|\cos n| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{n+3}|\cos n| \leq \frac{1}{n+3} \Rightarrow |u_n| \leq \frac{1}{n+3}$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}\sin(n^2)$, $n \geq 0$

$$|\sin(n^2)| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}|\sin(n^2)| \leq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \Rightarrow |u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

3) $u_n = \sqrt{4n^2+1} - n$, $n \geq 0$

Pour $n > 0$, $u_n = \sqrt{n^2(4+\frac{1}{n^2})} - n = n.\sqrt{4+\frac{1}{n^2}} - n = n\left[\sqrt{4+\frac{1}{n^2}} - 1\right]$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-1=1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$$

4) $u_n=\dfrac{19^n+2}{5^n-17}$, $\quad n\geq 0$

$$u_n=\frac{19^n+2}{5^n-17}=\frac{\left(\frac{19}{5}\right)^n+\frac{2}{5^n}}{1-\frac{17}{5^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{19}{5}\right)^n=+\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0 \text{ d'ou } \lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$$

Exercice3 :

1) $\left|\dfrac{2}{3}\right|<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

d'où (u_n) converge vers 0.

2) $a_n=u_0+u_1+u_2+.......+u_n$, $\quad n\geq 1$

a) $u_{n+1}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+3}=\left(\dfrac{2}{3}\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+2}=\dfrac{2}{3}u_n$

(u_n) est une suit géométrique de raison $q=\dfrac{2}{3}$ de premier terme $u_0=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

d'où $a_n=u_0\cdot\left[\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right]$ (somme de (n+1) termes consécutifs d'une suite géométrique)

$$a_n=\frac{4}{9}\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right]=\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{4}{3}$

Exercice 4 :

1) $u_n = 2^n - n$, $n \geq 0$

a) $u_{n+1} = 2^{n+1} - (n+1)$

$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - (n+1) - 2^n + n = 2^{n+1} - 2^n - 1 = 2^n - 1 \geq 0$

$\Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante.

b) (u_n) est croissante $\Rightarrow u_n \geq u_0$ pour tout $n \geq 0$

$\Rightarrow 2^n - n \geq 1$ par suite $2^n \geq n+1$, pour tout $n \geq 0$

2) $v_n = 2^n - \frac{1}{2}n$, $n \geq 0$

$2^n \geq n+1 \Rightarrow 2^n - \frac{1}{2}n \geq \frac{1}{2}n + 1 \Rightarrow v_n \geq \frac{1}{2}n + 1$

On a : $v_n \geq \frac{1}{2}n + 1$ pour $n \geq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}n + 1 \right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Exercice5 :

$$u_n = \left(\frac{n}{10} - 1 \right)^n , \quad n \geq 0$$

1) $u_0 = 1$; $u_1 = -\frac{9}{10}$; $u_2 = \frac{8^2}{10^2}$; $u_3 = -\frac{7^3}{10^3}$; $u_4 = \frac{6^4}{10^4}$; $u_5 = -\frac{5^5}{10^5}$; $u_6 = \frac{4^6}{10^6}$

$u_7 = -\frac{3^7}{10^7}$; $u_8 = \frac{2^8}{10^8}$; $u_9 = -\frac{1}{10^9}$ et $u_{10} = 0$

(pour $0 < n \leq 10$ on a u_n se rapproche de zéro)

2) $n > 100 \Rightarrow \frac{n}{10} > 10 \Rightarrow \frac{n}{10} - 1 > 9 \Rightarrow \left(\frac{n}{10} - 1 \right)^n > 9^n \Rightarrow u_n > 9^n$

3) on a : $u_n \geq 9^n$ pour $n \geq 100$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (9^n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice6 :

$$u_n = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n}\ , \qquad n \geq 1$$

1) * $u_{n+1} = \dfrac{5^{n+1} + 2^{n+1}}{5^{n+1} - 2^{n+1}}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\left(5^{n+1} + 2^{n+1}\right)\left(5^n - 2^n\right) - \left(5^n + 2^n\right)\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right)}{\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right)\left(5^n - 2^n\right)} = \frac{2\times 5^n \times 2^{n+1} - 2\times 5^{n+1} \times 2^n}{\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right)\left(5^n - 2^n\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4\times 5^n \times 2^n - 10\times 5^n \times 2^n}{\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right)\left(5^n - 2^n\right)} = \frac{-6\times 5^n \times 2^n}{\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right)\left(5^n - 2^n\right)} \leq 0$$

$\Rightarrow u_n \geq u_{n+1}$ donc (u_n) est décroissante .

* $5^n + 2^n \geq 5^n - 2^n \succ 0 \Rightarrow \dfrac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n} \geq 1 \Rightarrow u_n \geq 1$ pour tout $n \geq 0$

2) $$u_n = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n} = \frac{5^n\left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)} = \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

3) $$u_n < 1{,}0001 \Leftrightarrow \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} < 1{,}0001 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n < (1{,}0001)\times\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n < 1{,}0001 - (1{,}0001)\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow (2{,}0001)\times\left(\frac{2}{5}\right)^n < 0{,}0001$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^n < \frac{0{,}0001}{2{,}0001} \qquad \text{avec } \frac{0{,}0001}{2{,}0001} \cong 0{,}000049997$$

Pour que $u_n < 1{,}0001$ il suffit que par exemple : $\left(\frac{2}{5}\right)^n < 0{,}000049$

La calculatrice affiche : $\left(\frac{2}{5}\right)^{11} \cong 0,000041943$ et *et* $\left(\frac{2}{5}\right)^{10} \cong 0,000104857$

De plus la suite $w_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ est décroissante

Conclusion : *pour* $n > k = 10$ on a : $u_n < 1,0001$

Exercice 7 :

$u_0 = -1$, $u_{n+1} = 5u_n + 3$, $n \geq 0$

1) $\alpha = 5\alpha + 3 \Leftrightarrow 4\alpha = -3 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\frac{3}{4}}$

2) $v_n = u_n + \frac{3}{4}$, $n \geq 0$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{3}{4} = 5u_n + 3 + \frac{3}{4} = 5u_n + \frac{15}{4} = 5.\left(u_n + \frac{3}{4}\right)$

Ce qui donne $v_{n+1} = 5v_n$

Par suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 5$

b) $v_n = v_0 \times 5^n$ avec $v_0 = u_0 + \frac{3}{4} = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

Donc $v_n = -\frac{5^n}{4}$ et $u_n = v_n - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}\left(5^n + 3\right)$

c) $u_n = -\frac{1}{4}\left(5^n + 3\right)$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exercice 8 :

$u_0 = 2$, $u_{n+1} = (-0,2)u_n + 1$, $n \geq 0$

1) $\alpha = -(0,2)\alpha + 1 \Leftrightarrow (1,2)\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{1,2} = \frac{5}{6}$

2) $v_n = u_n - \frac{5}{6}$, $n \geq 0$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{6} = (-0,2)u_n + 1 - \frac{5}{6} = -\frac{1}{5}u_n + \frac{1}{6} = -\frac{1}{5}\left(u_n - \frac{5}{6}\right)$

Ce qui donne $\quad v_{n+1} = -\frac{1}{5}v_n$

Par suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{5}$

b) $v_n = v_0 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n$ avec $v_0 = u_0 - \frac{5}{6} = 2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$

Donc $v_n = \frac{7}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$ et $u_n = v_n + \frac{5}{6} = v_n = \frac{7}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{5}{6} = \frac{1}{6}\left[7.\left(-\frac{1}{5}\right)^n + 5\right]$

c) $u_n = \frac{1}{6}\left[7.\left(-\frac{1}{5}\right)^n + 5\right]$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n = 0$ d'ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{5}{6}$

Exercice 9 :

$u_n \geq 0$ et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$, $n \geq 0$

1) $u_n \geq 0 \Rightarrow v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \geq 0$

$v_n - 1 = \frac{u_n}{1+u_n} - 1 = \frac{-1}{1+u_n} \leq 0 \Rightarrow v_n \leq 1$ Par suite $0 \leq v_n \leq 1$ pour $n \geq 0$.

2) $v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}}{1+u_{n+1}} - \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{(1+u_{n+1})(1+u_n)}$

Comme $(1+u_{n+1})(1+u_n) \geq 0$ alors $(v_{n+1} - v_n)$ et $(u_{n+1} - u_n)$ sont de même signe

Conclusion : (u_n) est croissante si et seulement si (v_n) est croissante.

3) lorsque la suite (u_n) est convergente alors elle converge vers un réel $\ell \geq 0$ car $u_n \geq 0$

$\Rightarrow (v_n)$ converge vers $\frac{\ell}{1+\ell}$

4) en général, la réciproque est fausse.

Par exemple : $u_n = 2^n$ et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$, $n \geq 0$

$v_n = \dfrac{2^n}{1+2^n} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ mais la suite (u_n) est divergente ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$)

Exercice 10 :

Soit $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}$

1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}}{\frac{u_n}{v_n}} = \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \cdot \dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2.(0,8)^{n+1}.(0,9)^n}{n^2.(0,8)^n.(0,9)^{n+1}} = \dfrac{(0,8).(n+1)^2}{(0,9).n^2}$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{8}{9}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{8}{9}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

* $n \geq 17 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{17} \Rightarrow 0 \leq 1+\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{18}{17} \Rightarrow \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \leq \left(\dfrac{18}{17}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{8}{9}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{8}{9}\left(\frac{18}{17}\right)^2 \Rightarrow \frac{8}{9}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{2592}{2601} \leq 1$$

Par suite : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, pour $n \geq 17$

2) On a : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, pour $n \geq 17$ donc $a_{n+1} \leq a_n$, pour $n \geq 17$ (car $a_n > 0$)

Ce qui donne : $0 \leq a_n \leq a_{17}$, pour $n \geq 17$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq a_{17} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq u_n \leq a_{17}.(0,9)^n$$

<u>Conclusion</u> : il existe un réel c tel que $0 \leq u_n \leq c.(0,9)^n$, pour $n \geq 17$

3) $0 \leq u_n \leq c.(0,9)^n$, pour $n \geq 17$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c.(0,9)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 11 :

1) $(1+x)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p x^p = 1 + C_n^1 x^1 + \left[C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \ldots\ldots + C_n^n x^n\right]$

$(1+x)^n \geq 1+x$ car $C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \ldots\ldots + C_n^n x^n \geq 0$

Formule de binôme de Newton :

$(a+b)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p =$

$C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots . + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n b^n$

2) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $n \geq 1$. $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n! \times (n+1)(n+1)^n}{(n+1)! \times n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ D'après **(1)** (pour $x = \dfrac{1}{n}$)

Ce qui donne $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geq 2$ pour $n \geq 1$.

3) $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geq 2 \geq 1$ et $a_n > 0$ donc $a_n \geq a_{n+1}$

Par suite (a_n) est décroissante.

4) montrons par récurrence que $a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$

* Vérifions pour $n = 1$

$a_1 = \dfrac{1!}{1^1} = 1 \leq \dfrac{1}{2^{1-1}} = 1$ (Vrai)

* soit $n \in IN^*$

Supposons que $a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et montrons que $a_{n+1} \leq \dfrac{1}{2^n}$

D'après **(2)** on a : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow a_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} a_n$ et comme $a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ alors $a_{n+1} \leq \dfrac{1}{2^n}$

<u>Conclusion</u> : $a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$, pour tout $n \geq 1$

De plus $a_n \geq a_{n+1}$, pour tout $n \geq 1$ donc $a_{n+1} \leq a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$, pour tout $n \geq 1$

5) $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$, pour tout $n \geq 1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Exercice 12 :

$u_n = \sqrt{n^2+4n} - n - 2$, $n \geq 0$

1)

$$u_n = \sqrt{n^2+4n} - (n+2) = \frac{\left[\sqrt{n^2+4n} - (n+2)\right]\left[\sqrt{n^2+4n} + (n+2)\right]}{\sqrt{n^2+4n} + (n+2)} = \frac{(n^2+4n) - (n+2)^2}{\sqrt{n^2+4n} + (n+2)} = \frac{-4}{\sqrt{n^2+4n} + (n+2)}$$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\sqrt{n^2+4n} + (n+2)\right] = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 13:

1) pour $n \geq 1$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$$\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 2\sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

ce qui donne $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, pour $n \geq 1$

2) $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$

a) $S_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$; $S_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 1,707$; $S_3 = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 2,284$

$S_4 = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} \approx 2,784$ et $S_5 = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \approx 3,231$

b) d'après 1)

$\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \geq \sqrt{3} - \sqrt{2}$,...... et $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Additionnons membre à membre en obtient :

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) + ... + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
+ \quad & \frac{1}{2\sqrt{1}} \geq \sqrt{\cancel{2}} - \sqrt{1} \\
+ \quad & \frac{1}{2\sqrt{2}} \geq \sqrt{3} - \sqrt{\cancel{2}} \\
\vdots \quad & \qquad \vdots \\
+ \quad & \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{\cancel{n}} \qquad ; \\
& \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{\cancel{n}} \\
\hline
= \quad & \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{1}
\end{aligned}
$$

Ce qui donne : $\frac{1}{2}S_n \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{1}$ par suite $S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$

c) $S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$, pour $n \geq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Exercice 14 :

1) $o_0 = 0{,}5p_0 + 50 = 0{,}5 \times 100 + 50 = 100$

$d_0 = -0{,}3p_0 + 162 = -0{,}3 \times 100 + 162 = 132$

$p_n = 10{,}5p_{n-1} + 0{,}5(d_n - o_n) = 10{,}5p_{n-1} + 0{,}5.[-0{,}8p_n + 112] = 1{,}05p_{n-1} - 0{,}4p_n + 56$

Donc $1{,}4p_n = 1{,}05p_{n-1} + 56$ ce qui donne : $\boxed{p_n = 0{,}75p_{n-1} + 40}$

* $p_1 = 0{,}75p_0 + 40 = 0{,}75 \times 100 + 40 = 115$

* $o_1 = 0{,}5p_1 + 50 = 0{,}5 \times 115 + 50 = 107{,}5$

* $d_1 = -0{,}3p_1 + 162 = -0{,}3 \times 115 + 162 = 127{,}5$

* $p_2 = 0{,}75p_1 + 40 = 0{,}75 \times 115 + 40 = 126{,}25$

* $o_2 = 0{,}5p_2 + 50 = 0{,}5 \times 126{,}25 + 50 = 113{,}125$

* $d_2 = -0{,}3p_2 + 162 = -0{,}3 \times 126{,}25 + 162 = 124{,}125$

2) $p_n = 10{,}5p_{n-1} + 0{,}5(d_n - o_n) = 10{,}5p_{n-1} + 0{,}5.[-0{,}8p_n + 112] = 1{,}05p_{n-1} - 0{,}4p_n + 56$

Donc $1{,}4p_n = 1{,}05p_{n-1} + 56$ ce qui donne : $p_n = \frac{3}{4}p_{n-1} + 40$

3)* $p_3 = \frac{3}{4}p_2 + 40 = 0{,}75 \times 126{,}25 + 40 = 134{,}6875$

* $p_4 = \frac{3}{4}p_3 + 40 = 0{,}75 \times 134{,}6875 + 40 = 141{,}0156$

* $p_5 = \frac{3}{4}p_4 + 40 = 0{,}75 \times 141{,}0156 + 40 = 145{,}7617$

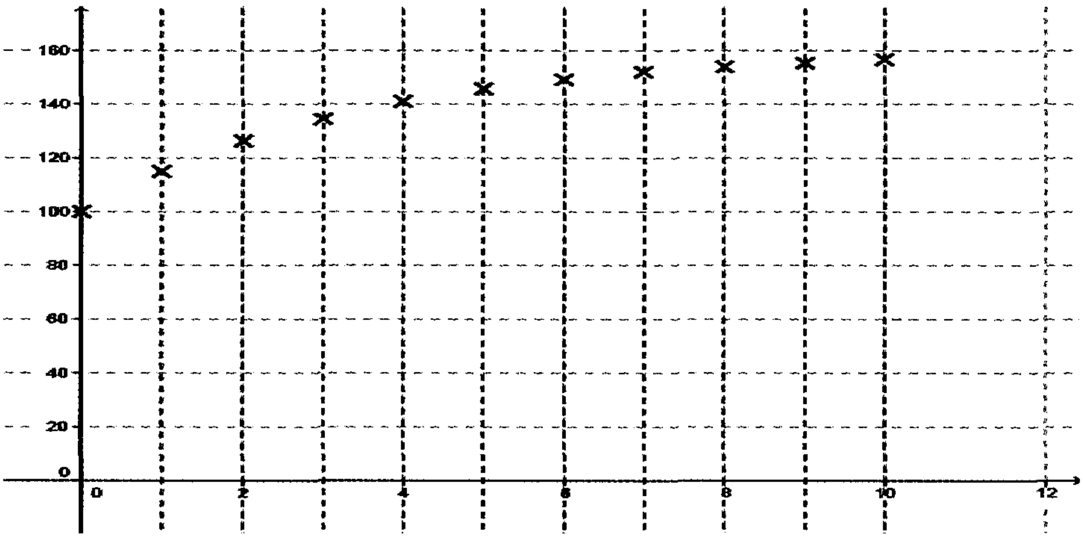
* $p_6 = \frac{3}{4}p_5 + 40 = 0{,}75 \times 145{,}7617 + 40 = 149{,}3212$

* $p_7 = \frac{3}{4}p_6 + 40 = 0{,}75 \times 149{,}3212 + 40 = 151{,}9909$

* $p_8 = \frac{3}{4}p_7 + 40 = 0{,}75 \times 151{,}9909 + 40 = 153{,}9931$

* $p_9 = \frac{3}{4}p_8 + 40 = 0{,}75 \times 153{,}9931 + 40 = 155{,}4948$

* $p_{10} = \frac{3}{4}p_9 + 40 = 0{,}75 \times 155{,}4948 + 40 = 156{,}6211$



4) a) $\alpha = \frac{3}{4}\alpha + 40 \Leftrightarrow 4\alpha = 3\alpha + 160 \Leftrightarrow \alpha = 160$

b) $u_n = p_n - 160$, $n \geq 0$

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 160 = \frac{3}{4}p_n + 40 - 160 = \frac{3}{4}p_n - 120 = \frac{3}{4}(p_n - 160) = \frac{3}{4}u_n$$

$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n$ Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

c) $u_n = u_0.q^n = -60\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$ car $u_0 = p_0 - 160 = 100 - 160 = -60$

$p_n = u_n + 160 = 160 - 60\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[160 - 60\times\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 160$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

e) $o_n = 0{,}5p_n + 50$ et $d_n = -0{,}3p_n + 162$

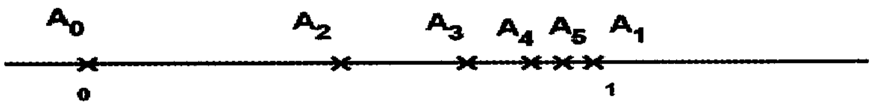
$\lim\limits_{n\to+\infty} o_n = \lim\limits_{n\to+\infty}[0{,}5p_n + 50] = 0{,}5\times160 + 50 = 130$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty}[-0{,}3p_n + 162] = -0{,}3\times160 + 162 = 114$

Les valeurs d'équilibre des indices O et D sont respectivement 130 et 114.

Exercice 15:

1)



$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{5}{8}$ et $a_5 = \frac{a_3 + a_4}{2} = \frac{11}{16}$

2) $x_n = a_n - a_{n-1}$, $n \geq 1$

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$

En simplifiant, on aura :

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + ... + (\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}}) + (a_n - \cancel{a_{n-1}})$

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = a_n - a_0 = a_n$

3) $x_{n+1}=a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_n}{2}-a_n=\dfrac{a_{n-1}-a_n}{2}=\dfrac{-(a_n-a_{n-1})}{2}$

$x_{n+1}=\dfrac{-(a_n-a_{n-1})}{2}=-\dfrac{1}{2}x_n$ donc (x_n) est une suite géométrique de raison $q=-\dfrac{1}{2}$.

4) $x_n=x_1.q^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ car $x_1=a_1\text{-a}_0=1$

$a_n=x_1+x_2+....+x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=x_1\left(\dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)$ par suite $a_n=\dfrac{2}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]=\dfrac{2}{3}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=0$

6) lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, les points A_n se rapprochent du point A d'abscisse $\dfrac{2}{3}$.

Exercice16:

1)

$u_1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4},\ u_2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{5}{16},\ u_3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{1}{8}\right)^2=\dfrac{2}{64}$

$u_4=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{1}{8}\right)^2+\left(\dfrac{1}{16}\right)^2=\dfrac{85}{256}$

2) En général :

$u_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+....+\left(\dfrac{1}{2^n}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left[1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+....+\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^2\right]=\dfrac{1}{4}a_n$

Avec: $a_n=1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+....+\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^2=1^2+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4}+\ ....\ +\dfrac{1}{2^{2n-2}}$

Poisons $b_n=\dfrac{1}{2^{2n-2}}$, $n\geq 1$. On a: $b_{n+1}=\dfrac{1}{2^{2n}}=\dfrac{1}{2^2}\times\dfrac{1}{2^{2n-2}}=\dfrac{1}{4}b_n$

(b_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{4}$

$$a_n = 1^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ \dots\ + \frac{1}{2^{2n-2}} = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

D'où $a_n = b_1\left[\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right] = \dfrac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ car $b_1 = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{4}{3} \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4} a_n = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

Exercice 17:

1) $u_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, $u_2 = u_1 + 8\times\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{17}{81}$ et $u_3 = u_2 + 64\times\left(\frac{1}{27}\right)^2 = \frac{17}{81} + \frac{64}{729} = \frac{217}{729}$

2) à chaque étape on colorie encore le $\frac{1}{9}$ de la partie non colorée.

* l'aire de la partie non colorée est la différence entre l'aire du grand carré ,qui est égale à 1, et l'aire de la partie colorée ,qui est égale à u_n.

Conclusion : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{9}(1 - u_n)$

3) $u_{n+1} = \frac{8}{9}u_n + \frac{1}{9}$ et $v_n = u_n - 1$, $n \geq 1$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{8}{9}u_n + \frac{1}{9} - 1 = \frac{8}{9}u_n - \frac{8}{9} = \frac{8}{9}(u_n - 1)$

$v_{n+1} = \frac{8}{9}v_n$ d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{8}{9}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ car $-1 < q < 1$

c) $u_n = 1 + v_n$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(1 + v_n) = 1$

Exercice 18:

1) a) $u_1 = \frac{2\pi \times 1}{4} = \frac{\pi}{2}$, $u_2 = \frac{2\pi \times \frac{1}{2}}{4} = \frac{\pi}{4}$, $u_3 = \frac{2\pi \times \frac{1}{4}}{4} = \frac{\pi}{8}$ et $u_4 = \frac{2\pi \times \frac{1}{8}}{4} = \frac{\pi}{16}$

b) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ donc $u_n = u_1.q^{n-1} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \pi.\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\pi}{2^n}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\pi}{2^n} = 0$

2) a) $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right]$

D'où $v_n = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right] = \pi.\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \pi\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \pi.\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \pi$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

3) a) $a_1 = 1^2$, $a_2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$, $a_3 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$, $a_4 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2$

en général : $a_n = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$

b) $a_n = 1^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \; .... \; + \frac{1}{2^{2n-2}}$

On pose $b_n = \frac{1}{2^{2n-2}}$, $n \geq 1$. on a : $b_{n+1} = \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^{2n-2}} = \frac{1}{4} b_n$

(b_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

$$a_n = 1^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \; .... \; + \frac{1}{2^{2n-2}} = b_1 + b_2 + ... + b_n$$

D'où $a_n = b_1\left[\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right] = \dfrac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ car $b_1 = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{4}{3} \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

Exercice19:

1) a) pour passer d'un flacon n au flacon $(n+1)$

chaque coté est remplacé par quatre (voir schéma) donc $c_{n+1} = 4c_n$

et $c_1 = 3$ car le flacon 1 a trois cotés.

Donc $\begin{cases} \boxed{c_1 = 3} \\ c_{n+1} = 4c_n \end{cases}$ erreur à corriger

b) (c_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$ d'où $c_n = c_1.q^{n-1} = 3\times 4^{n-1}$

2) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n \end{cases}$

(x_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ d'où $x_n = x_1.q^{n-1} = 1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

3) a) $p_n = c_n \times x_n = 3\times 4^{n-1}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 3\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$

$$p_{n+1} = 3\times\left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{4}{3}\times\left[3\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\right] = \frac{4}{3}p_n$$

D'où (p_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{4}{3}$

b) $p_{n+1} = \dfrac{4}{3}p_n$ et $p_n \geq 0$ d'ou $p_{n+1} \geq p_n$

(p_n) est une suite croissante.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = +\infty$ car $\frac{4}{3} > 1$.

l'aire d'un triangle équilatéral de coté a est égal à :

$$\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$$

4) a) $a_1 = \dfrac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et $a_2 = a_1 + 3\times\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\right] = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $a_{n+1} = a_n + c_n\dfrac{x_{n+1}^2.\sqrt{3}}{4} = a_n + 3\times4^{n-1}\times\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\times\sqrt{3}}{4} = a_n + \dfrac{3\sqrt{3}\times4^n\times\left(\frac{1}{9}\right)^n}{16}$

ce qui donne : $a_{n+1} = a_n + \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$

5) a) démonstration par récurrence :

* vérifions pour $n = 1$

$$\frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}[1] = \frac{4\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{4} = a_1 \qquad \text{(Vrai)}$$

* supposons que $a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{16} + \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left[1 + \dfrac{4}{9} + \ldots\ldots + \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$

Montrons que $a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{16} + \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left[1 + \dfrac{4}{9} + \ldots\ldots + \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n}\right]$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left[1 + \frac{4}{9} + \ldots\ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left[1 + \frac{4}{9} + \ldots\ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

<u>Conclusion</u> : $a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{16} + \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left[1 + \dfrac{4}{9} + \ldots\ldots + \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$ pour tout $n \geq 1$.

b) $1 + \dfrac{4}{9} + \ldots\ldots + \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1} = 1\times\left[\dfrac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right] = \dfrac{9}{5}\times\left[1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right]$

D'où $a_n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left[\frac{9}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right]$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\times\frac{9}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ car $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$

Exercice 20:

$$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

1) $1+x+x^2+.....+x^n = 1\times\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = f(x)$ comme étant somme de $(n+1)$ termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$

2) a) f est une fonction rationnelle elle est donc dérivable sur son ensemble de définition

b) d'une part : $f(x) = 1+x+x^2+x^3+.......+x^n$ donc $f'(x) = 1+2x+3x^2+.......+nx^{n-1}$

D'autre part : $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc $f'(x) = \frac{-(n+1).x^n.(1-x)+\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

3) $s_n = 1+2.\left(\frac{1}{2}\right)+3.\left(\frac{1}{2}\right)^2+4.\left(\frac{1}{2}\right)^3+.....+n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$s_n = f'\left(\frac{1}{2}\right) = = \frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4\left[1+\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^n}\right]$$

4) $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $n \geq 0$

a) pour $n \geq 2$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^n}\times\frac{2^{n-1}}{n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$

$n \geq 2 \Rightarrow 2n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$

ce qui donne : $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$ car $u_n > 0$ *pour* $n \geq 2$

b) démonstration par récurrence :

* vérifions pour $n = 2$, $u_3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1}.u_2$ d'après **(4/a)**

* soit $n \geq 2$

Supposons que : $u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.u_2$ montrons que : $u_{n+2} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n}.u_2$

On a $u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.u_2$ et $u_{n+2} \leq \frac{3}{4}u_{n+1}$ (d'après **(4/a)**)

Donc $u_{n+2} \leq \frac{3}{4}u_{n+1} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.u_2$ ce qui donne $u_{n+2} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n}.u_2$

<u>Conclusion</u> : $u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.u_2$ pour $n \geq 2$

c) * $0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}.u_2$ pour $n \geq 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

* $$s_n = 4\left[1+\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^n}\right] = 4\times\left[1+\frac{1}{4}\times\frac{n}{2^{n-1}}-\frac{n+1}{2^n}\right] = 4\times\left[1+\frac{1}{4}u_n - u_{n+1}\right]$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4\left[1+\frac{u_n}{4}-u_{n+1}\right] = 4$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$