Angles orientés

Chapitre 2

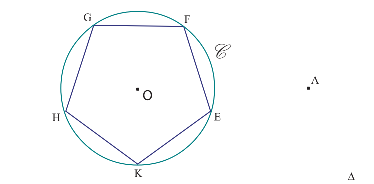
" En mathématique, il n'y a pas de vérité inaccessible. "

Hilbert

Pour commencer

Activité 1

Dans la figure ci-contre, EFGHK est un pentagone régulier inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1, A est un point et Δ est une droite.

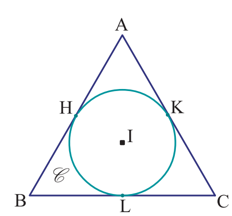


1. a. Calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{EG}$ qui contient le point F.
   En déduire la longueur de l'arc $\overset{\frown}{EG}$ qui ne contient pas F.
   b. Donner une mesure de chacun des angles géométriques $\widehat{HOG}$, $\widehat{EOG}$ et $\widehat{EOH}$.

2. Soit S_Δ la symétrie d'axe Δ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.
   On désigne par
   E', F',G', H'et K' les images respectives des points E, F, G, H et K par la symétrie S_Δ.
   M, N, P, Q et R les images respectives des points E, F, G, H et K par la translation t.
   a. Calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{E'G'}$ qui contient F', puis celle de l'arc $\overset{\frown}{MP}$ qui contient N.
   Comparer les valeurs obtenues à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{EG}$ qui contient le point F.
   b. Soit O' l'image de O par S_Δ. Donner une mesure de chacun des angles géométriques $\widehat{E'O'G'}$, $\widehat{MAP}$ et $\widehat{QAP}$.

Activité 2

On considère un triangle équilatéral ABC de côté 4 et on désigne par I le centre du cercle $\mathscr{C}$ inscrit dans le triangle. On note par H, L et K les points de contact.



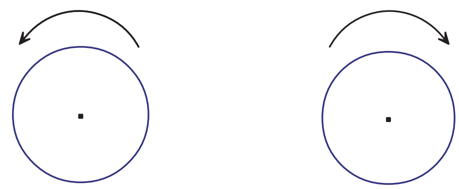
1. Calculer le rayon de $\mathscr{C}$.
2. a. Donner une mesure de l'arc $\overset{\frown}{HL}$ qui contient K.
   b. Donner une mesure de l'arc $\overset{\frown}{KL}$ qui ne contient pas H.
   c. Donner une mesure de l'arc $\overset{\frown}{KH}$ qui contient L.

Cours

1. Arcs orientés

1. 1 Orientation d'un cercle

On admet qu'il n'y a que deux orientations possibles sur un cercle donné.
Orienter un cercle, c'est choisir l'une des deux orientations.
Nous conviendrons qu'un cercle est orienté dans le sens direct s'il est orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et qu'il est orienté dans le sens indirect s'il est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre.

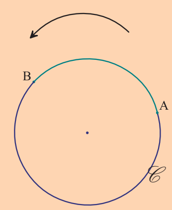


cercle orienté dans le sens direct   cercle orienté dans le sens indirect

Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, orienté dans le sens direct.

Définition

Soit (A, B) un couple de points distincts d'un cercle orienté $\mathscr{C}$.
Alors, il y a deux arcs de cercle d'origine A et d'extrémité B.
Un et un seul de ces arcs est orienté conformément à l'orientation du cercle.
On l'appelle arc orienté d'origine A et d'extrémité B et on le note $\overset{\curvearrowright}{AB}$.
On convient que le couple (A, A) détermine un arc orienté dont l'origine et l'extrémité sont confondues. On le note $\overset{\curvearrowright}{AA}$.



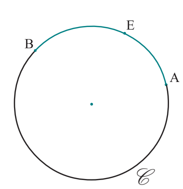
Vocabulaire

Tout arc orienté $\overset{\curvearrowright}{AB}$ détermine un unique arc géométrique appelé arc géométrique associé à $\overset{\curvearrowright}{AB}$.

1. 2 Mesures algébriques d'un arc orienté

Activité 1

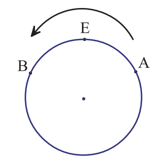
Soit A, B et E trois points distincts appartenant à un cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1.
On désigne par L la longueur de l'arc géométrique d'extrémités A et B qui contient E.
On considère un point mobile M qui se déplace sur le cercle $\mathscr{C}$ toujours dans le même sens.



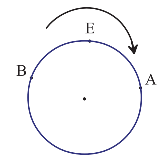
On se propose de mesurer le trajet parcouru par le mobile M, lorsqu'il part de A pour s'arrêter en B.
On convient que la mesure algébrique x du trajet parcouru est égale à :

- La longueur du trajet parcouru, si M se déplace dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- L'opposé de la longueur du trajet parcouru, si M se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre.

1. On suppose que M se déplace dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
   Déterminer x dans chacun des cas ci-dessous.
   Le mobile M s'arrête en B dès son premier passage par B.
   Le mobile M s'arrête en B, à son deuxième passage par B.
   Le mobile M s'arrête en B, à son nième passage par B ($n \geq 1$).



2. On suppose que M se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre.
   Déterminer x dans chacun des cas ci-dessous.



Le mobile M s'arrête en B dès son premier passage par B.
Le mobile M s'arrête en B, à son deuxième passage par B.
Le mobile M s'arrête en B, à son nième passage par B.

L'activité précédente nous a permis de constater que pour partir de A et s'arrêter en B, le mobile M peut faire n tours complets sur le cercle avant de s'arrêter en B. Il est donc légitime de donner la définition ci-dessous.

Définition

Soit $\mathscr{C}$ un cercle orienté de rayon 1, (A,B) un couple de points distincts de $\mathscr{C}$ et L la longueur de l'arc géométrique associé à $\overset{\frown}{AB}$.
On appelle mesure algébrique de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ et on note mes $\overset{\frown}{AB}$ tout réel de la forme $L + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
On convient que mes $\overset{\frown}{AA} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les propriétés ci-dessous découlent aisément de la définition précédente.

Conséquences

Soit $\mathscr{C}$ un cercle orienté de rayon 1 et A et B deux points de $\mathscr{C}$.

- Si x et y sont deux mesures de $\overset{\frown}{AB}$, alors $x - y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- L'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ possède une unique mesure dans $[0, 2\pi[$, qui est la longueur de l'arc géométrique associé.
- Pour tout point M de $\mathscr{C}$ et tout réel x, il existe un unique point N de $\mathscr{C}$ tel que mes $\overset{\frown}{MN} = x$.

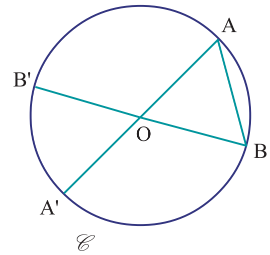
Notation

L'égalité $x - y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, est notée $x \equiv y\ [2\pi]$.
On lit "x est congru à y modulo 2π".

Activité 2

Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ est un cercle trigonométrique de centre O, OAB est un triangle équilatéral.

Les points A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport à O.



1. Pour chacun des arcs orientés $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AA'}$, $\overset{\frown}{AB'}$, déterminer la mesure qui appartient à $[0, 2\pi[$.
2. Soit K le point de $\mathscr{C}$ tel que mes $\overset{\frown}{AK} \equiv \frac{37\pi}{4}[2\pi]$.

   Ecrire la division euclidienne de 37 par 4. Donner la mesure de $\overset{\frown}{AK}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$ et placer le point K.
3. Placer le point N de $\mathscr{C}$ tel que mes $\overset{\frown}{BN} \equiv \frac{19\pi}{3}[2\pi]$.

1. 3 Propriétés des arcs orientés

Activité 1

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique et (A, B) un couple de points de $\mathscr{C}$ tels que mes $\overset{\frown}{AB} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1. Faire une figure.
2. Placer sur $\mathscr{C}$ le point D tel que mes $\overset{\frown}{BD} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et le point D' tel que mes $\overset{\frown}{AD'} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
3. En désigne par $L_1, L_2, L_3,$ L_4 et L_5 les mesures repectives qui appartiennent à $[0, 2\pi[$ des arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{BD'}$ et $\overset{\frown}{AD'}$.

   a. Comparer $L_1 + L_2$ et L_3.

   b. Comparer $L_1 + L_4$ et L_5.

Propriétés (admises)

Pour tous points A, B et C d'un cercle orienté $\mathscr{C}$ de rayon 1, on a

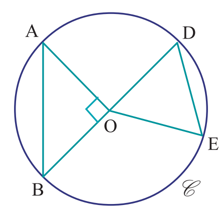
mes $\overset{\frown}{AB}$ + mes $\overset{\frown}{BC} \equiv$ mes $\overset{\frown}{AC}$ $[2\pi]$ (Relation de Chasles).

mes $\overset{\frown}{AB} \equiv -$mes $\overset{\frown}{BA}$ $[2\pi]$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O. Les points B, D sont diamétralement opposés, le triangle AOB est rectangle en O et le triangle ODE est équilatéral.

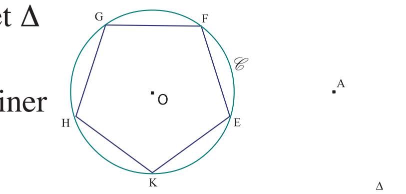
Pour chacun des arcs orientés ci-dessous, donner la mesure qui appartient à $[0, 2\pi[$.



$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BA}$, $\overset{\frown}{BE}$, $\overset{\frown}{EB}$, $\overset{\frown}{AE}$, $\overset{\frown}{AD}$.

Activité 3

Dans la figure ci-contre, EFGHK est un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O, A est un point et Δ est une droite.



1. Pour chacun des arcs orientés $\overset{\curvearrowright}{EF}$, $\overset{\curvearrowright}{FK}$, $\overset{\curvearrowright}{FE}$, $\overset{\curvearrowright}{EK}$, déterminer la mesure qui appartient à $[0, 2\pi[$.
2. Soit S_Δ la symétrie d'axe Δ.
   On désigne par $\mathscr{C}'$ l'image du cercle $\mathscr{C}$ par S_Δ et par E', F', G', H' et K' les images respectives des points E, F, G, H et K par S_Δ.
   a. Donner la mesure de $\overset{\curvearrowright}{E'F'}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$ et la comparer à la mesure de $\overset{\curvearrowright}{EF}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$.
   b. Reprendre la question pour chacun des arcs orientés $\overset{\curvearrowright}{F'K'}$, $\overset{\curvearrowright}{F'E'}$ et $\overset{\curvearrowright}{E'K'}$.
3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, MNPQR l'image du pentagone EFGHK par cette translation.
   a. Donner la mesure de $\overset{\curvearrowright}{MN}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$ et la comparer à la mesure de $\overset{\curvearrowright}{EF}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$.
   b. Reprendre la question pour chacun des arcs orientés $\overset{\curvearrowright}{NR}$, $\overset{\curvearrowright}{NM}$ et $\overset{\curvearrowright}{PR}$.
   Que remarque-t-on ?

Théorème (admis)

Toute symétrie axiale transforme les mesures des arcs orientés en leurs opposés.
Toute translation conserve les mesures des arcs orientés.

2. Angles orientés

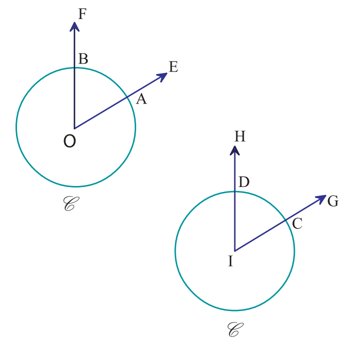
2. 1 Définition d'un angle orienté

On dit que le plan est orienté si tous les cercles du plan sont orientés dans le même sens.

On convient que le plan est orienté dans le sens direct si tous les cercles du plan sont orientés dans le sens direct.
On convient que le plan est orienté dans le sens indirect si tous les cercles du plan sont orientés dans le sens indirect.

Activité 1

Dans le plan orienté dans le sens direct, O et I sont deux points distincts. On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on désigne par E et F les points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{IG}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{IH}$.



Le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O coupe les demi-droites [OE) et [OF) respectivement en A et B.

Le cercle trigonométrique $\mathscr{C}'$ de centre I coupe les demi-droites [IG) et [IH) respectivement en C et D.

Montrer que les arcs orientés $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ ont le même ensemble de mesures.

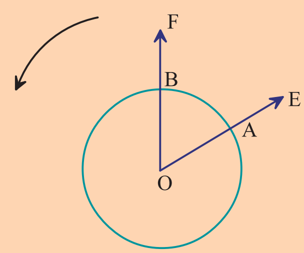
Définition

Soit O un point du plan orienté dans le sens direct et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs non nuls.

On désigne par E et F les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OE}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OF}$ et par A et B les points d'intersection respectifs du cercle $\mathscr{C}$ et des demi-droites[OE) et [OF).

On appelle mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ toute mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$.



$\vec{u} = \overrightarrow{OE} = a\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OF} = b\overrightarrow{OB}$

Les propriétés ci-dessous découlent de la définition précédente.

Propriétés

Le plan est orienté dans le sens direct.

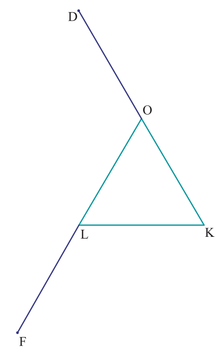
Soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- Pour tous réels strictement positifs a et b, les angles orientés $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(a\vec{u}, b\vec{v})$ ont les mêmes mesures.
- Si α est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ alors toute mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ est de la forme $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Toute mesure de $(\vec{u}, \vec{u})$ est de la forme $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Toute mesure de $(\vec{u}, -\vec{u})$ est de la forme $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est notée $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

On note $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \alpha[2\pi]$ et on lit $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est congru à α modulo 2π.

Activité 2



Le plan étant orienté dans le sens direct, on considère un triangle équilatéral OLK de côté 1. On désigne par D le symétrique de K par rapport à O et par F le symétrique de O par rapport à L.
Pour chacun des angles orientés ci-dessous, déterminer la mesure qui appartient à $[0, 2\pi[$,

$(\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OK})$, $(2\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OD})$, $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OF})$, $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OL})$, $(\overrightarrow{LO}, \overrightarrow{LF})$, $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{KL})$, $(\overrightarrow{LF}, \overrightarrow{KO})$.

Activité 3

Soit A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct.
Dans cette activité, on se propose de déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre A et B' le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la demi-droite [AB).

1. a. Construire le point D tel que AD = 1 et $\widehat{(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

   b. Soit M un point de la demi-droite [AD) privée de A. Déterminer $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})}$.

2. Soit M un point du plan tel que $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On note M' le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la demi-droite [AM).

   Montrer que M' et D sont confondus.

3. En déduire que M appartient à [AD).

4. Soit N un point du plan tel que $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN})}[2\pi]$.

   Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$?

Propriétés (admises)

- Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et α un réel.
  Il existe un unique vecteur unitaire $\vec{v}$ tel que $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \alpha[2\pi]$.
- Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ trois vecteurs non nuls. Alors
  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{v'})}[2\pi]$, si et seulement si, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont colinéaires et de même sens.

2. 2 Vecteurs colinéaires – Vecteurs orthogonaux

Activité 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

1. Montrer que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv 0\,[2\pi]$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

2. Montrer que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \pi[2\pi]$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposés.

Propriétés

Le plan est orienté dans le sens direct.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv 0\,[2\pi]$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \pi[2\pi]$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposés.

Activité 2

Soit A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct.
1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv 0[2\pi]$.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \pi[2\pi]$.

Activité 3

Soit O un point du plan orienté dans le sens direct, $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et A un point du plan distinct de O. On désigne par C et D les points de $\mathscr{C}$ tels que
$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}}) \equiv \frac{3\pi}{2}\,[2\pi]$.
Soit M un point du plan distinct de O.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux, si et seulement si,
$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ ou $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{3\pi}{2}\,[2\pi]$.

Propriété

Le plan est orienté dans le sens direct.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ ou $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \frac{3\pi}{2}\,[2\pi]$.

Activité 4

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan orienté dans le sens direct.
1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, si et seulement si,
$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires, si et seulement si,
$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. 3 Mesure principale d'un angle orienté

Activité 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{v}}) \equiv \frac{128\pi}{3}\left[2\pi\right]$.

   Ecrire la division euclidienne de 128 par 3. En déduire que $\frac{2\pi}{3}$ est une mesure de $(\vec{u}\,,\vec{v})$ qui appartient à $]-\pi, \pi]$.

2. Utiliser un procédé analogue pour déterminer dans chacun des cas ci-dessous une mesure de $(\vec{u}\,,\vec{v})$ qui appartient à $]-\pi, \pi]$.

   a. $(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{v}}) \equiv \frac{245\pi}{4}\left[2\pi\right]$; b. $(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{v}}) \equiv -\frac{137\pi}{3}\left[2\pi\right]$.

Activité 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On se propose de montrer que $(\vec{u}\,,\vec{v})$ admet une unique mesure dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

1. Montrer que si y et z sont deux mesures de $(\vec{u}\,,\vec{v})$ qui appartiennent à $]-\pi, \pi]$ alors $y = z$.
2. On désigne par x la mesure de $(\vec{u}\,,\vec{v})$ qui appartient $[0, 2\pi[$.

   Montrer que si x appartient $]\pi, 2\pi]$, alors $x - 2\pi$ est une mesure de $(\vec{u}\,,\vec{v})$ qui appartient à $]-\pi, \pi]$.
3. Conclure.

Définition

Le plan est orienté dans le sens direct.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors l'angle orienté $(\vec{u}\,,\vec{v})$ admet une unique mesure dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, appelée mesure principale de $(\vec{u}\,,\vec{v})$.

Activité 3

Soit I un point du plan orienté dans le sens direct. Placer sur le cercle trigonométrique de centre I, les points F, G et H tels que $(\widehat{\overrightarrow{IF}\,,\,\overrightarrow{IG}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{IF}\,,\,\overrightarrow{IH}}) \equiv \frac{5\pi}{3}\,[2\pi]$.

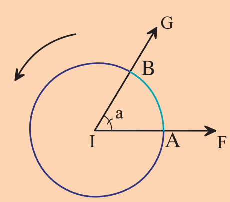
1.Donner les mesures principales de $(\overrightarrow{IF}\,,\overrightarrow{IG})$ et $(\overrightarrow{IF}\,,\overrightarrow{IH})$.

2. Donner les mesures des angles géométriques $\widehat{FIG}$ et $\widehat{FIH}$. Que remarque-t-on ?

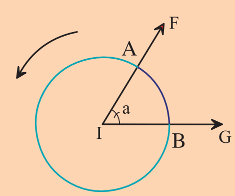
Propriétés

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère trois points non alignés I, F et G tels que $\widehat{FIG} = a$.
Si L est la mesure de $\overset{\frown}{AB}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$ et α est la mesure principale de $(\overrightarrow{IF}\,,\overrightarrow{IG})$, alors

$$\alpha = \begin{cases} a & \text{si } 0 \le L \le \pi \\ -a & \text{si } \pi < L < 2\pi \end{cases}.$$



la mesure principale de $(\overrightarrow{IF}\,,\overrightarrow{IG})$ est égale à a.



la mesure principale de $(\overrightarrow{IF}\,,\overrightarrow{IG})$ est égale à –a.

2. 4 Propriétés des angles orientés

La propriété ci-dessous découle de la relation de Chasles sur les mesures des arcs orientés.

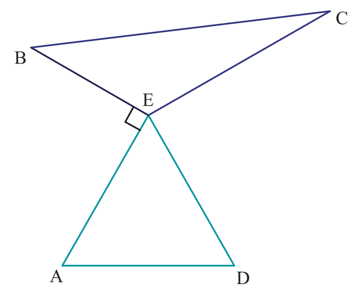
Propriété

Le plan est orienté dans le sens direct.

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,

$(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) \left[2\pi\right]$ (Relation de Chasles).

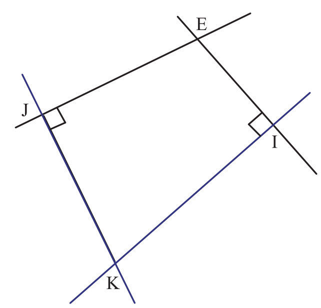
Activité 1



Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle équilatéral AED. On suppose de plus que (EA) est perpendiculaire à (EB) et $(\widehat{\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}}) \equiv -\frac{2\pi}{3}\left[2\pi\right]$.

Donner la mesure principale de chacun des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EC}})$.

Activité 2 (Angles à côtés perpendiculaires)



Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère quatre points E, I, J et K tels que les droites (KI) et (KJ) sont respectivement perpendiculaires aux droites (EI) et (EJ).

Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{EI}, \overrightarrow{EJ}}) = (\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ}}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Activité 3

Utiliser la relation de Chasles pour montrer la propriété ci-dessous.

Propriété

Le plan est orienté dans le sens direct.

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$,

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{u}', \vec{v}'}) \left[2\pi\right]$, si et seulement si, $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) \equiv (\widehat{\vec{v}, \vec{v}'}) \left[2\pi\right]$.

Activité 4

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère trois points A, B et C tels que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3} \left[2\pi\right]$. Soit D un point distinct de A tels que les droites (AD) et (AB) sont perpendiculaires et E un point tel que $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}) \equiv \frac{\pi}{3} \left[2\pi\right]$.

Montrer que les droites (AE) et (AC) sont perpendiculaires.