Coeficientes indeterminados - Método de superposición

Lucas Carranza

Chapter 1

1.1 Coeficientes indeterminados - Método de superposición

Definition 1.1.1

DEFINICIÓN: Método para resolver ecuaciones diferenciales lineales no-homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes. Se identifica la forma de la solución particular correspondiente a la parte no-homogénea, y se reemplaza por la función desconocida (y) en la parte homogénea para obtener las constantes.

1.1.1 Pasos

1. Identificar la forma de la solución particular correspondiente a la parte no-homogénea $f(x)$.
2. Reemplazar la solución particular en la parte homogénea para obtener las constantes $y = f(x)$.
3. Sumar la solución particular (con constantes halladas) con la solución homogénea [FIN].

Note:-

No hace falta que la ecuación esté en la forma estándar.

1.1.2 Tabla de soluciones particulares

TABLA Soluciones particulares de prueba

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (cualquier constante)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. $\operatorname{sen} 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
6. $\cos 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x} \operatorname{sen} 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \operatorname{sen} 4x$
11. $5x^2 \operatorname{sen} 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \operatorname{sen} 4x$
12. $xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \operatorname{sen} 4x$

1.1.3 Ejemplo combinado

Example 1.1.1 (Resuelva la ecuación diferencia: $y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5\sin 2x + 7xe^{6x}$)
Identificamos la forma de la solución particular correspondiente a la parte no-homogénea:

$$(Ax^2 + Bx + C) + (D\cos 2x + E\sin 2x) + (Fx + G)e^{6x}$$

Reemplazamos la solución particular en la parte homogénea para obtener las constantes:

$$\begin{aligned} y &= Ax^2 + Bx + C + D\cos 2x + E\sin 2x + Fxe^{6x} + Ge^{6x} \\ y' &= 2Ax + B - 2D\sin 2x + 2E\cos 2x + 6Fxe^{6x} + 6Ge^{6x} \\ y'' &= 2A - 4D\cos 2x - 4E\sin 2x + 36Fxe^{6x} + 36Ge^{6x} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} &(2A - 4D\cos 2x - 4E\sin 2x + 36Fxe^{6x} + 36Ge^{6x}) \\ &- 9(2Ax + B - 2D\sin 2x + 2E\cos 2x + 6Fxe^{6x} + 6Ge^{6x}) \\ &+ 14(Ax^2 + Bx + C + D\cos 2x + E\sin 2x + Fxe^{6x} + Ge^{6x}) \\ &= 3x^2 - 5\sin 2x + 7xe^{6x} \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &(2A - 4D\cos 2x - 4E\sin 2x + 36Fxe^{6x} + 36Ge^{6x}) \\ &+ (-18Ax - 9B + 18D\sin 2x - 18E\cos 2x - 54Fxe^{6x} - 54Ge^{6x}) \\ &+ (14Ax^2 + 14Bx + 14C + 14D\cos 2x + 14E\sin 2x + 14Fxe^{6x} + 14Ge^{6x}) \\ &= 3x^2 - 5\sin 2x + 7xe^{6x} \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &(14A)x^2 + (-18A + 14B)x + (2A - 9B + 14C) \\ &+ (10D - 18E)\cos 2x + (10E - 18D)\sin 2x \\ &+ (-4F)xe^{6x} + (-4G)xe^{6x} \\ &= 3x^2 - 5\sin 2x + 7xe^{6x} \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} &14A = 3 \implies A = \frac{3}{14} \\ &-18A + 14B = 0 \implies B = \frac{27}{98} \\ &2A - 9B + 14C = 0 \implies C = \frac{24}{98} \\ &10D - 18E = 0 \implies D = \frac{9}{5}E \\ &10E - 18D = -5 \implies E = \frac{25}{112} \wedge D = \frac{45}{112} \\ &-4F = 7 \implies F = -\frac{7}{4} \\ &-4G = 0 \implies G = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Finalmente, la solución particular es:

$$y_P = \frac{3}{14}x^2 + \frac{27}{98}x + \frac{24}{98} + \frac{45}{112}\cos 2x + \frac{25}{112}E\sin 2x - \frac{7}{4}xe^{6x}$$

Note:-

Términos duplicados: Si la parte no-homogénea tiene términos duplicados, se debe multiplicar la solución particular por x hasta que no haya duplicados.

Example 1.1.2 (Resuleva: $y'' - 2y' + y = e^x$)

En este caso no se puede usar Ae^x como solución particular, ya que c_1e^x es parte de la solución homogénea. Por lo tanto, multiplicamos por x.
Observamos que tampoco se puede usar Axe^x, ya que c_2xe^x es parte de la solución homogénea. Por lo tanto, multiplicamos otra vez por x.
Finalmente, la solución particular es de forma Ax^2e^x, y no hay duplicados en la parte homogénea.
Reemplazamos la solución particular en la parte homogénea para obtener las constantes:

$$\begin{aligned} y &= Ax^2e^x \\ y' &= 2Axe^x + Ax^2e^x \\ y'' &= 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} &2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x \\ &- 2(2Axe^x + Ax^2e^x) \\ &+ (Ax^2e^x) \\ &= e^x \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} 2Ae^x &= e^x \\ A &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, la solución particular es:

$$y_P = \frac{1}{2}x^2e^x$$