Ecuación Auxiliar

Lucas Carranza

Chapter 1

1.1 Ecuación Auxiliar

Definition 1.1.1

DEFINICIÓN: Se llama ecuación auxiliar a la ecuación característica que se obtiene al reemplazar la función desconocida (y) por una función exponencial (e^{rx}). Esta se puede resolver para hallar las raíces que permiten hallar las soluciones particulares.

Note:-

Raíces diferentes
Si las raíces de la ecuación auxiliar son diferentes $r_1 \neq r_2 \neq r_3$, entonces la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 x}$$

Example 1.1.1 (Resolver la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = 0$)

Reemplazamos y por e^{rx}:

$$(e^{rx})'' - 3(e^{rx})' + 2(e^{rx}) = 0$$

$$e^{rx} \cdot (r^2 - 3r + 2) = 0$$

Simplificamos para quedarnos con la ecuación auxiliar:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

Obtenemos las raíces:

$$r_1 = 1 \qquad r_2 = 2$$

Finalmente, las soluciones de la ecuación diferencial son:

$$y_1 = e^x \qquad y_2 = e^{2x}$$

Solución general:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Note:-

Raíces iguales:
Si las raíces de la ecuación auxiliar son iguales $r_1 = r_2 = r_3 = r$,
entonces la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots)e^{rx}$$

Example 1.1.2 (Resolver la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 4y = 0$)

Obtenemos la ecuación auxiliar:

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

Obtenemos las raíces:

$$r_1 = r_2 = 2$$

Como son iguales, las soluciones de la ecuación diferencial son:

$$y_1 = e^{2x} \qquad y_2 = xe^{2x}$$

Solución general:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

Note:-

Raíces complejas:
Si las raíces de la ecuación auxiliar son complejas $r_1 = a + bi$, $r_2 = a - bi$,
entonces la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$$

Example 1.1.3 (Resolver la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 5y = 0$)

Obtenemos la ecuación auxiliar:

$$r^2 + 4r + 5 = 0$$

Obtenemos las raíces:

$$r_1 = -2 + i \qquad r_2 = -2 - i$$

Como son complejas, las soluciones de la ecuación diferencial son:

$$y_1 = e^{-2x} \cos x \qquad y_2 = e^{-2x} \sin x$$

Solución general:

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$