

Coeficientes indeterminados - Método de superposición

Lucas Carranza

Chapter 1

1.1 Coeficientes indeterminados - Método de superposición

Definition 1.1.1

DEFINICIÓN: Método para resolver ecuaciones diferenciales lineales no-homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes. Se identifica la forma de la solución particular correspondiente a la parte no-homogénea, y se reemplaza por la función desconocida (y) en la parte homogénea para obtener las constantes.

1.1.1 Pasos

1. Identificar la forma de la solución particular correspondiente a la parte no-homogénea $f(x)$.
2. Reemplazar la solución particular en la parte homogénea para obtener las constantes $y = f(x)$.
3. Sumar la solución particular (con constantes halladas) con la solución homogénea [FIN].

Note:-

No hace falta que la ecuación esté en la forma estándar.

1.1.2 Tabla de soluciones particulares

TABLA Soluciones particulares de prueba

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (cualquier constante)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. $\sin 4x$	$A \cos 4x + B \sin 4x$
6. $\cos 4x$	$A \cos 4x + B \sin 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x} \sin 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \sin 4x$
11. $5x^2 \sin 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \sin 4x$
12. $xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \sin 4x$

1.1.3 Ejemplo combinado

Example 1.1.1 (Resuelva la ecuación diferencial: $y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5 \sin 2x + 7xe^{6x}$)

Identificamos la forma de la solución particular correspondiente a la parte no-homogénea:

$$(Ax^2 + Bx + C) + (D \cos 2x + E \sin 2x) + (Fx + G)e^{6x}$$

Reemplazamos la solución particular en la parte homogénea para obtener las constantes:

$$y = Ax^2 + Bx + C + D \cos 2x + E \sin 2x + Fxe^{6x} + Ge^{6x}$$

$$y' = 2Ax + B - 2D \sin 2x + 2E \cos 2x + 6Fxe^{6x} + 6Ge^{6x}$$

$$y'' = 2A - 4D \cos 2x - 4E \sin 2x + 36Fxe^{6x} + 36Ge^{6x}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} & (2A - 4D \cos 2x - 4E \sin 2x + 36Fxe^{6x} + 36Ge^{6x}) \\ & - 9(2Ax + B - 2D \sin 2x + 2E \cos 2x + 6Fxe^{6x} + 6Ge^{6x}) \\ & + 14(Ax^2 + Bx + C + D \cos 2x + E \sin 2x + Fxe^{6x} + Ge^{6x}) \\ & = 3x^2 - 5 \sin 2x + 7xe^{6x} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & (2A - 4D \cos 2x - 4E \sin 2x + 36Fxe^{6x} + 36Ge^{6x}) \\ & + (-18Ax - 9B + 18D \sin 2x - 18E \cos 2x - 54Fxe^{6x} - 54Ge^{6x}) \\ & + (14Ax^2 + 14Bx + 14C + 14D \cos 2x + 14E \sin 2x + 14Fxe^{6x} + 14Ge^{6x}) \\ & = 3x^2 - 5 \sin 2x + 7xe^{6x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & (14A)x^2 + (-18A + 14B)x + (2A - 9B + 14C) \\ & + (10D - 18E) \cos 2x + (10E - 18D) \sin 2x \\ & + (-4F)xe^{6x} + (-4G)xe^{6x} \\ & = 3x^2 - 5 \sin 2x + 7xe^{6x} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} 14A &= 3 \implies A = \frac{3}{14} \\ -18A + 14B &= 0 \implies B = \frac{27}{98} \\ 2A - 9B + 14C &= 0 \implies C = \frac{24}{98} \\ 10D - 18E &= 0 \implies D = \frac{9}{5}E \\ 10E - 18D &= -5 \implies E = \frac{25}{112} \wedge D = \frac{45}{112} \\ -4F &= 7 \implies F = -\frac{7}{4} \\ -4G &= 0 \implies G = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Finalmente, la solución particular es:

$$y_P = \frac{3}{14}x^2 + \frac{27}{98}x + \frac{24}{98} + \frac{45}{112} \cos 2x + \frac{25}{112}E \sin 2x - \frac{7}{4}xe^{6x}$$

Note:-

Términos duplicados: Si la parte no-homogénea tiene términos duplicados, se debe multiplicar la solución particular por x hasta que no haya duplicados.

Example 1.1.2 (Resuelva: $y'' - 2y' + y = e^x$)

En este caso no se puede usar Ae^x como solución particular, ya que c_1e^x es parte de la solución homogénea. Por lo tanto, multiplicamos por x .

Observamos que tampoco se puede usar Axe^x , ya que c_2xe^x es parte de la solución homogénea. Por lo tanto, multiplicamos otra vez por x .

Finalmente, la solución particular es de forma Ax^2e^x , y no hay duplicados en la parte homogénea.

Reemplazamos la solución particular en la parte homogénea para obtener las constantes:

$$\begin{aligned}y &= Ax^2e^x \\y' &= 2Axe^x + Ax^2e^x \\y'' &= 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}& 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x \\& - 2(2Axe^x + Ax^2e^x) \\& + (Ax^2e^x) \\& = e^x\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}2Ae^x &= e^x \\A &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Finalmente, la solución particular es:

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$$