REPASO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Marcelo
David
Lucas
Adrian
Lenin

Contents

Chapter 1

1.1 Ecuación diferencial

Definition 1.1.1: Ecuación diferencial

Definimos una **Ecuación diferencial** como una ecuación que relaciona una función y su variable (o sus variables) con sus derivadas. Además se clasifica por tipo, orden y linealidad.
• La ecuación diferencial más simple es la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Question 1

¿Cuáles son los tipo, orden y linealidad que existen en una ecuación diferencial?

Solution: Existen ecuaciones diferenciales ordinarias, en derivadas parciales, de primer orden, de segundo orden, de tercer orden, de orden N, lineales y no lineales.

Note:-

El grado de una ecuación diferencial es el grado del polinomio más alto que aparece explícitamente se llama autónoma. en la ecuación diferencial. El orden de una ecuación diferencial es el número de derivadas más alto que aparecen en la ecuación diferencial.

Example 1.1.1

$$\frac{dy}{dx} = 0.2xy$$

función incógnita: y=y(x). Variable independiente:x

Example 1.1.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^{tsin(\pi x)}$$

función incógnita: u=u(x, t). Variables independientes:x, t

Example 1.1.3

$$y''' + y' - sin(t)y' - y = te^{-t}$$

función incógnita: y=y(t). Variable independiente: t

1.2 Problemas con valores iniciales

Definition 1.2.1: Problemas con valores iniciales

Los problemas con valores iniciales son aquellos que se pueden resolver mediante la aplicación de las condiciones iniciales reemplazando en la función de solución derivando si es de ser necesario.

Example 1.2.1

La solución $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ es una familia de soluciones de la EDO y" - y = 0. Encuentre el valor de c_1 y c_2 a partir de las condiciones iniciales y(0) = 1 y y'(0) = 2.

Derivar "y"

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} \Rightarrow y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$$

Evaluar y, y' utilizando las condiciones iniciales

$$y(0) = c_1e^0 + c_2e^{-0} = c_1 + c_2 = 1$$

$$y'(0) = c_1e^0 - c_2e^{-0} = c_1 - c_2 = 2$$

Determinar los valores de las constantes

$$c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2$$

$$1 - 2c_2 = 2$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} \quad c_1 = \frac{3}{2}$$

Question 2

La solución $y = C_1cos(t) + C_2sin(t)$ es una familia de la EDO de segundo orden $y'' + y = 0$. Encuentre el valor de C_1 y C_2 a partir de las condiciones iniciales $y(0) = -1, y'(0) = 8$.

Solution:

Derivar "y"

$$y = C_1cos(t) + C_2sin(t) \Rightarrow y' = -C_1sin(t) + C_2cos(t)$$

Evaluar y, y' utilizando las condiciones iniciales

$$y(0) = C_1cos(0) + C_2sin(0) = C_1 = -1$$

$$y'(0) = -C_1sin(0) + C_2cos(0) = C_2 = 8$$

Note:-

Hay que tener cuidado al reemplazar la variable en ecuaciones trignonométricas porque podemos tener problemas al operar

1.3 Ecuaciones Diferenciales como modelos matemáticos

Definition 1.3.1: Dinámica poblacional

La razón de cambio de un país en un momento dado es proporcional a la población total del país en ese momento. En términos matemáticos, si P(t) denota la población en el momento t, el modelo expresa que:

$$\frac{dP}{dt} = kP(t)$$

Este modelo no toma en cuenta muchos factores, sirve actualmente para modelar el crecimiento de poblaciones pequeñas.

Definition 1.3.2: Decaimiento radioactivo

En este modelo se supone que la velocidad $\frac{dA}{dt}$ a la que se desintegran los núcleos de una sustancia es proporcional (más exactamente, al número de núcleos) A(t) de la sustancia que queda en el tiempo t.

$$\frac{dA}{dt} = kA(t)$$

Definition 1.3.3: Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

Si T(t) representa la temperatura de un cuerpo en el instante t, T_m la temperatura del ambiente y $\frac{dT}{dt}$ la razón con la cuál la temperatura del cuerpo cambia, entonces

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_m)$$

En cualquier caso de este modelo $k < 0$

Definition 1.3.4: Propagación de una enfermedad

Sea x(t) el número de personas contagiadas e y(t) el número de personas aún no contagiadas en el instante t, entonces la ecuación de este fenómeno es:

$$\frac{dx}{dt} = kx(t)y(t)$$

Acá tenemos dos variables lo cuál nos complicará la vida. Sin embargo, si n es el número total de personas $x + y = n$ entonces podemos reescribir la ecuación como:

$$\frac{dx}{dt} = kx(t)(n - x(t))$$

Definition 1.3.5: Mezclas

La mezcla de dos soluciones de distinta concentración da lugar a una ecuación diferencial de primer orden para la cantidad de soluto contenida en la mezcla. Supongamos que inicialmente se tiene un recipiento con V litros de agua y m_0 kilos de sal diluida totalmente. Además, convengamos que ingresa q_{in} litros por minutos de otra solución salina de S_{in} kilos por litro y que de la solución resultante, totalmente diluida, sale q_{out} litros por minuto. Si A(t) denota la cantidad de sal contenida en el recipiente en el instante "t", la ecuación que rige dicha cantidad está dada por:

$$\frac{dA}{dt} = R_{in} - R_{out}$$

R_{in} y R_{out} son la razón de entrada y salida de sal, respectivamente. Esta razón se pueden expresar como:

$$Rx = (q_x \frac{litros}{minuto})(s_x \frac{kilos}{litros})$$

1.4 Ecuaciones autónomas

Definition 1.4.1: EDO autónoma

Una ecuación diferencial ordinaria en la que la variable independiente no aparece explícitamente se llama autónoma. Por ejemplo, la ecuación $y'' + y = 0$ es autónoma, ya que la variable independiente t no aparece explícitamente. En cambio, la ecuación $y'' + y = t$ no es autónoma, ya que la variable independiente t aparece explícitamente.

Chapter 2

2.1 EDO de variables separadas

Definition 2.1.1: Ecuaciones de variables separadas

Una EDO de primer orden es de **variables separadas** si puede ser transformada de manera equivalente a la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

donde f y g son funciones reales de una variable.

Example 2.1.1

$$\frac{dx}{dy} = y^2 sin(x)e^{2x+5y} \Rightarrow \text{Es de variables separadas}$$

$$\frac{dy}{dx} = sin(xy^2) \Rightarrow \text{No es de variables separadas}$$

Note:-

Otras ecuaciones deben ser manipuladas ligeramente antes de que estén en la forma de variables separadas. Por ejemplo, necesitamos factorizar el lado derecho de $\frac{dy}{dx} = xy - 7x$ para llevarla a la forma deseada:

$$\frac{dy}{dx} = (y - 7)x$$

Procedimiento de solución:

1. **Separar** Las variables
2. **Aplicar** Integrales en ambas partes de la ecuación anterior
3. **Integrar**, la solución general está dada por las antiderivadas, es decir,

$$G(y) = F(x) + C$$

Example 2.1.2

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x) \Rightarrow \frac{1}{f(y)} = g(x)dx$$
$$\int \frac{1}{f(y)} = \int g(x)dx$$

Note:-

Redactar más ejercicios resueltos aquí :D

2.2 EDO lineal

Definition 2.2.1: EDO lineal

Sea la la ecuación
$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$
Cuando g(x)=0 se dice que la ecuación diferencial es homogénea; de lo contrario es no homogénea
Dividiendo la ecuación entre a_1 resulta:
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$
Para resolver este tipo de ecuaciones utilizaremos el método de factor integrante

Procedimiento de solución:

1. **Identificar** el factor integrante
$$u_x = e^{\int P(x)dx} \quad \text{se observa que} \quad u' = u(x)P(x)$$
2. **Multiplicar** la ecuacipon por el factor integrante y resolver
3. **Podemos** llegar directamente a la solución conociendo solo el factor integrante
$$y = \frac{1}{u(x)}\int u(x)Q(x)dx$$

Note:-

Anotar Ejercicios resueltos aquí ;D

Chapter 3

3.1 EDO exactas y no exactas

Definition 3.1.1: EDO exacta

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es exacta si

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

y la solución esta dada por $f(x,y) = C$

Example 3.1.1

Resuelva:

$$2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$$

1. **Identificamos** M(x,y) y N(x,y)

$$M(x,y) = 2xy \quad N(x,y) = x^2 - 1$$

2. **Verificamos** si es exacta

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x$$

3. **Debido a que** es exacta, existe una función $f(x,y)$ tal que

$$f_x(x,y) = M(x,y) \quad f_y(x,y) = N(x,y)$$

4. **Integramos** la ecuación M(x,y) respecto a x

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx = \int 2xydx = x^2y + g(y)$$

5. **Derivamos** la ecuación anterior respecto a y

$$f_y(x,y) = x^2 + g'(y) = N(x,y) = x^2 - 1$$

6. **Obtenemos** la solución general

$$g'(y) = -1 \Rightarrow g(y) = -y$$

7. **Reemplazando** en la ecuación anterior

$$f(x, y) = x^2y - y = C$$

Finalmente, la solución del problema es

$$x^2y - y = C$$

En este caso se puede despejar y,

$$y = \frac{C}{x^2 - 1}$$

Definition 3.1.2: EDO no exacta

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es no exacta si

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

En estos casos, el objetivo es buscar un factor integrante $u(x, y)$ tal que al multiplicar por la ecuación inicial se obtenga

$$u(x, y)M(x, y)dx + u(x, y)N(x, y)dy = 0$$

$$M'(x, y)dx + N'(x, y)dy = 0$$

de tal forma que

$$\frac{\partial M'}{\partial y} = \frac{\partial N'}{\partial x}$$

Note:-

Hay casos en los que u(x,y) depende de ambas variables; sin embargo, los casos donde sólo depende de una variable son los más prácticos.

1. **Primer caso:** Solo depende de x
   Si la expresión

$$g = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x, y)}$$

   depende solo de x, entonces el factor integrante es

$$u(x) = e^{\int g(x)dx}$$

2. **Segundo caso:** Solo depende de y
   Si la expresión

$$g = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{M(x, y)}$$

   depende solo de y, entonces el factor integrante es

$$u(y) = e^{\int g(y)dy}$$

Note:-

Al tener el factor integrante tenemos M'(x,y) y N'(x,y) por lo tanto para resolver la ecuación se resuelve siguiendo los pasos que ya conocemos.

3.2 Modelado y resolución problemas de mezclas

Definition 3.2.1

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{\text{Razón de}}{\text{entrada}}\right) - \left(\frac{\text{Razón de}}{\text{salida}}\right)$$

Razón de entrada

$$R_{in} = \text{Concentración de entrada} \times \text{Caudal de entrada}$$

Razón de salida

$$R_{out} = \text{Concentración de salida} \times \text{Caudal de salida}$$

La concentración es masa/volumen y el caudal es volumen/tiempo
Si el volumen es constante se resuelve por variables separadas y sino se resuelve por factor integrante.

Note:-

En este tipo de problemas se tiene un tanque con una solución inicial y se le agrega una solución con una concentración diferente. El objetivo es encontrar la función de cantidad de soluto de la solución final.

Chapter 4

4.1 RCL

En el curso se trabajara con circuitos electriocos RCL en serie. El objetivo de estos problemas que calcular la corriente I que circula por todo el circuito. Teniendo en cuenta que $I = \frac{dQ}{dt}$, donde Q es la carga.

Definition 4.1.1: La ecuacion de un circuito RCL

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t)$$

Donde:

- L es la inductancia, se mide en Henrys (H)
- R es la resistencia, se mide en Ohms (Ω)
- C es la capacitancia, se mide en Farads (F)
- V(t) es la fuente de voltaje, se mide en Volts (V)
- Q(t) es la carga, se mide en Coulombs (C)
- I(t) es la corriente, se mide en Amperes (A)

Los problemas pueden ser resueltos por diversos metodos dependiendo de la configuración de componentes, desde metodo de factor integrante hasta MVP.

4.1.1 Ejercicios

Question 3

En un circuito RC en serie se tiene una fuente constante de 50 V , además R = 100Ω y C = 5 x 10^{-3} F . Si inicialmente el condensador está descargado ¿Cuánto tiempo tarda aproximadamente en cargarse?

Solution:
Como no hay inductancia, la ecuación queda:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t)$$

Reemplazando valores:

$$100\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{5x10^{-3}}Q = 50$$

$$100\frac{dQ}{dt} + 200Q = 50$$

$$\frac{dQ}{dt} + 2Q = \frac{1}{2}$$

Con la ecuacion diferencial obtenida es posible empezar a resolverla usando el metodo de factor integrante:

$$\mu = e^{\int 2dt} = e^{2t}$$

Aplicar la forma del factor integrante ($y = \frac{1}{\mu}\int(\mu)(Q(x))dx$)

$$\frac{1}{e^{2t}}\int(e^{2t})(50)dt = Q$$

$$\frac{50}{e^{2t}}\int(e^{2t})dt = Q$$

$$\frac{50}{e^{2t}}(\frac{e^{2t}}{200} + C) = Q$$

$$\frac{1}{4} + Ce^{-2t} = Q$$

Como el condesador esta descargado, no hay carga presente eal inicio, es por ello que se puede obtener la constante C en t_0:

Si $Q(0) = 0$, entonces :

$$\frac{1}{4} + Ce^{-2(0)} = 0$$

$$\frac{1}{4} + C = 0$$

$$C = -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto la ecuacion queda:

$$Q = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

Con la funcion obtenida podemos calcular el tiempo que tarda en cargarse el condensador. Pero como la funcion posee una asintota vertical para $Q = \frac{1}{4}$, se puede decir que el condensador nunca se cargara completamente, pero se puede asumir que una carga completa es aproximadamente el 99.9% de la carga maxima.

$$Q(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} = \frac{1}{4} * 99.9\%$$

$$\frac{1}{4}e^{-2t} = \frac{1}{4} * 0.001$$

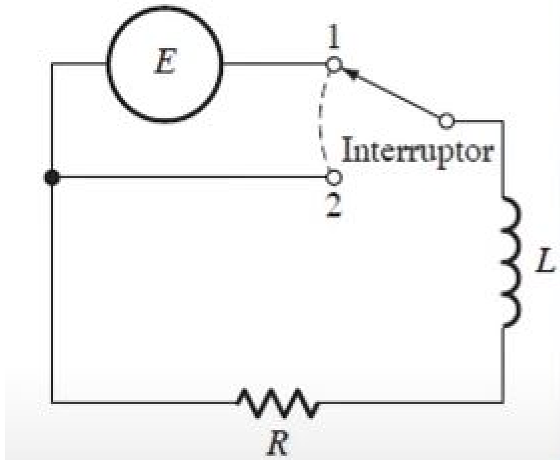
$$e^{-2t} = 0.001$$

$$-2t = ln(0.001)$$

$$t = 3.4538$$

Question 4

En el circuito de la figura suponga que L = 5H, R = 25 Ω, y la fuente E es una batería que suministra un voltaje constante de 100V.El interruptor se encuentra en la posición 1 por un largo tiuempo de tal manera que fluye una corriente estacionaria de 4A. En el tiempo t = 0s el interruptor se mueve a la posición 2. Determine la corriente



Solution:
Tenemos los siguientes datos:

- L = 5H
- R = 25 Ω
- $V(t)$ = 0V
- $I(0)$ = 4A

Como el tiempo empieza recien cuando se pone el interrumptor en la posición 2, el votaje es 0V, por lo tanto la ecuacion quedaria de la siguiente manera:

$$5\frac{d^2Q}{dt^2} + 25\frac{dQ}{dt} = 0$$

Para hallar la funcion de la corriente, se puede reemplazar $I = \frac{dQ}{dt}$, por lo tanto la ecuacion queda:

$$5\frac{dI}{dt} + 25I = 0$$

Se puede resolver por el metodo de separación de variables:

$$\frac{dI}{dt} + 5I = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = -5I$$

$$\frac{1}{I}dI = -5dt$$

Integrando:

$$\int \frac{1}{I}dI = \int -5dt$$

$$ln(|I|) = -5t + C$$

$$|I| = e^{-5t+C}$$

La solucion planteada es:

$$I = e^{-5t}e^{C}$$

$$I = Ce^{-5t}$$

Reemplazando en

$$t = 0$$

:

$$4 = Ce^{-5(0)}$$

$$4 = C$$

La funcion final es:

$$I = 4e^{-5t}$$

Chapter 5

5.1 Ecuaciones No lineales y valores en la frontera

5.2 EDO no lineales

Definition 5.2.1: Ecuaciones no lineales

Son ecuaciones diferenciales donde :

- Al menos una de las derivadas de la variable dependiende o la misma tiene potencia mayor a 1.
- Los coeficientes de las derivadas y la funcion no son constantes o dependen de mas de una variable independiente.

Note:-

Ejemplos de ecuaciones no lineales:

- $5x\frac{dy}{dx} + y^2 = g(x)$
- $\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^2 + sen(y) = 10y$
- $\frac{dy}{dx} + \frac{5}{y} = (cos(x))$

5.3 Resolucion por frontera

Definition 5.3.1: Valores en la frontera

Si se tiene la ecuacion de la forma:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Es un problema de valores iniciales cuando esta sujeto a:

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1$$

Por otro lado tambien se puede estar sujeto a :

$$y(a) = \gamma_1, \; y(b) = \gamma_2$$

En este caso se dice que es un problema de valores en la frontera,(porque se evaluan diferntes valores que simulan una **frontera**).

5.4 Ejemplos

Example 5.4.1 (Ejemplo 1)

$$y'' + 16y = 0$$
$$y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{8}) = 0$$

Si la solucion es de la forma $y = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)$, entonces:

$$y(0) \rightarrow C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \rightarrow C_1 + C2(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$
$$y(\frac{\pi}{8}) \rightarrow C_1 \cos(\frac{\pi}{2}) + C_2 \sin(\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow C_2 \sin(\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

Por lo tanto, solo existe una unica solución para este problema de valores en la frontera, y es $y = 0$.

Ahora veamos un ejemplo con valores de frontera diferentes:

Example 5.4.2 (Ejemplo 2)

$$y'' + 16y = 0$$
$$y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Si la solucion es de la forma $y = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)$, entonces:

$$y(0) \rightarrow C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \rightarrow C_1 + C2(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$
$$y(\frac{\pi}{2}) \rightarrow C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi) = C_1 \rightarrow 0$$

De acuerdo a este resultado notamos que no eixste ninguna restricción para C_2.Por lo tanto, este PVF tiene infinitas soluciones, y son de la forma $y = C_2 \sin(4x)$.

Chapter 6

6.1 Ecuaciones homogeneas

Definition 6.1.1: Ecuacion homogenea

Una EDO lineal de n-esimo orden es homogenea si tiene la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

es homogenea cuando $G(x) = 0$. Es decir, cuando sea si y solo si es igual a 0.

Note:-

A su vez estas ecuaciones se separan en dos grupos: **ecuaciones con coeficientes constantes** y **ecuaciones con coeficientes variables**

Chapter 7

7.1 Dependencia e independencia lineal

Definition 7.1.1: Funciones linealmente independientes

Un conjunto de funciones es linealmente independiente (LI) si cuando:

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \cdots + C_n f_n(x) = 0$$

entonces que c1 = c2 = · · · = cn = 0.

Note:-

Si el conjunto no es linelamente independiente, entonces es linealmente **dependiente**

Example 7.1.1

Las funciones:

$$f_1 = x^{\frac{1}{2}} + 5$$

$$f_2 = x^{\frac{1}{2}} + 5x$$

$$f_3 = x - 1$$

$$f_4 = x^2$$

son linealmente independientes en el intervalo $[0, \infty)$. En efecto:

$$1f_1 - 1f_2 + 5f_3 + 0f_4 = 0$$

7.2 Wronskiano

Definition 7.2.1

El Wronskiano es la determinante de una matriz cuadrada la cual contiene las funciones y sus derivadas.

$$W(f_1, f_2, \cdots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)'} & f_2^{(n-1)'} & \cdots & f_n^{(n-1)'} \end{vmatrix}$$

Si y solo si el resultado **NO** es igual a 0, entonces las funciones son linealmente independientes.

Definition 7.2.2: Conjunto fundamental de soluciones

Todo conjunto $y1(x), y2(x), ..., yn(x)$ de n soluciones linealmente independientes de una EDO homogénea de n-ésimo orden se llama conjunto fundamental de soluciones.