Pequeños comentarios al apunte "Elementos de Cálculo Numérico" de R. Durán, S. Lasalle y J. Rossi

5 de junio de 2024

- (página 25) En la demostración de $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$ para una matriz A arbitraria, se utiliza que $A^T A$ es positiva semidefinida (y por lo tanto, todos los autovalores son no-negativos) para probar la igualdad tomando $\mu_j = \mu_{\text{máx}}$. Esto se puede demostrar fácilmente por la igualdad $z^T A^T A z = (Az)^T Az = \|Az\|_2^2 \geq 0$.

- (página 40, punto 1.) Tanto el algoritmo de Cholesky como el de Gauss tienen complejidad $O(N^3)$, pero la cantidad de productos de los algoritmos comúnmente utilizados es $N^3/6$ para Cholesky y $N^3/3$ para Gauss.

- (página 44, demostración del Teorema 3.4). En la demostración de la desigualdad $\rho(A) \leq \|A\|$, la afirmación $\|A\|$ en $\mathbb{R}$ es igual a $\|A\|$ en $\mathbb{C}$ vale para las normas comunes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$, usando las extensiones usuales a $\mathbb{C}$, pero una norma inducida en $\mathbb{R}$ puede no estar definida para elementos en $\mathbb{C}$, y se necesita una demostración más general.

  A continuación se da la demostración de esa desigualdad tomada de "Matrices: Theory and Applications", de Denis Serre (Proposición 4.1.6, página 66):

  Proposición 1. *Para cualquier norma inducida $\| \ \|$ en $\mathbb{R}^{n\times n}$, se cumple $\rho(A) \leq \|A\|$.*

  Demostración. El caso $K = \mathbb{C}$ es simple, utilizando el argumento en el apunte.

  Para el caso $K = \mathbb{R}$, fijamos una norma inducida $N_{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{C}^{n\times n}$ y sea $N_{\mathbb{R}}$ la restricción a $\mathbb{R}^{n\times n}$. Es fácil ver que $N_{\mathbb{R}}$ es una norma en $\mathbb{R}^{n\times n}$ (verifica los axiomas de norma), aunque no necesariamente es una norma inducida.

  Dada ahora una norma inducida $\| \ \|$ en $\mathbb{R}^{n\times n}$, tenemos por la equivalencia de normas en cualquier espacio vectorial de dimensión finita que

  $$\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq N_{\mathbb{C}}(A^k) = N_{\mathbb{R}}(A^k) \leq C\|A^k\| \leq C\|A\|^k,$$

  para alguna constante $C > 0$. Por lo tanto,

  $$\rho(A) \leq C^{1/k}\|A\|$$

  y tomando límite $k \to \infty$ de ambos lados, obtenemos $\rho(A) \leq \|A\|$.

  $\square$

- (página 47, demostración del Corolario 3.7) Es sencillo pero no es inmediato ver que si $\|B^k\|^{1/k} \to \rho(B)$ vale para una norma particular, vale para cualquier norma por equivalencia de normas.

  Dada una norma $\|\|$, existen C_1 y C_2 tales que

  $$C_1\|B^k\|_\infty \leq \|B^k\| \leq C_2\|B^k\|_\infty$$

y por lo tanto

$$C_1^{1/k} \|B^k\|_\infty^{1/k} \leq \|B^k\|^{1/k} \leq C_2^{1/k} \|B^k\|_\infty^{1/k}.$$

Tomando límites,

$$\lim_{k\to\infty} C_1^{1/k} \|B^k\|_\infty^{1/k} \leq \lim_{k\to\infty} \|B^k\|^{1/k} \leq \lim_{k\to\infty} C_2^{1/k} \|B^k\|_\infty^{1/k},$$

y como $C_1^{1/k} \to 1$ y $C_2^{1/k} \to 1$ se obtiene

$$\rho(B) \leq \lim_{k\to\infty} \|B^k\|^{1/k} \leq \rho(B)$$

y por lo tanto $\lim_{k\to\infty} \|B^k\|^{1/k} = \rho(B)$.

- (página 72, segundo párrafo) Se está utilizando el desarrollo de Taylor de orden 1 (con término de error) centrado en x_n.