Примерни решения и критерии за оценяване на контролната работа върху ирационални уравнения (ПП)

Предоставям примерни решения на задачите от ВАРИАНТ Θ, както и критериите за оценка. Другите варианти са аналогични на този, както стъпки на решение, така и на брой отговори. Следователно и оценяването се прави по същите критерии.

1. $x+\sqrt{x+3}=3$ **(12 т.)**

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$ **(1 т.)**

б) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна: **(1 т.)**

$$\sqrt{x+3}=3-x$$

в) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен: **(1 т.)**

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=\left(3-x\right)^2$$

г) Разкриваме скобите: **(1 т.)**

$$x+3=9-6x+x^2$$

д) Прехвърляме от всичко от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение: **(1 т.)**

$$x^2-7x+6=0$$

е) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение: **(1 т.)**

$$D=\left(-7\right)^2-4.6=49-24=25=5^2$$

ж) Намираме корените на квадратното уравнение: **(2 т.)**

$$x_1=\frac{7+5}{2}=\frac{12}{2}=6 \text{ \textbf{(1 т.)}}$$

$$x_2=\frac{7-5}{2}=\frac{2}{2}=1 \text{ \textbf{(1 т.)}}$$

з) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата: **(3 т.)**

Проверка за $x=6$: **(1 т.)**

$$6+\sqrt{6+3}\stackrel{?}{=}3$$

$$6+\sqrt{9}\stackrel{?}{=}3$$

$$6+3\stackrel{?}{=}3$$

$$6\neq 3$$

Следователно правим извод, че $x = 6$ не е решение на задачата. **(0,5 т.)**

Проверка за $x = 1$: **(1 т.)**

$$1 + \sqrt{1+3} \stackrel{?}{=} 3$$

$$1 + \sqrt{4} \stackrel{?}{=} 3$$

$$1 + 2 \stackrel{?}{=} 3$$

$$3 \equiv 3$$

Следователно правим извод, че $x = 1$ е решение на задачата.**(0,5 т.)**

и) Записваме отговор $x = 1$ е решение на задачата. **(1 т.)**

2. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 5$ **(11,5 т.)**

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са $\left| \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \geq -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [-4; +\infty)$ **(2 т.)**

б) Оставяме единия корен от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна: **(1 т.)**

$$\sqrt{x-1} = 5 - \sqrt{x+4}$$

в) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен: **(1 т.)**

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{x+4}\right)^2$$

г) Разкриваме скобите: **(1 т.)**

$$x - 1 = 25 - 10\sqrt{x+4} + x + 4$$

д) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна: **(1 т.)**

$$-30 = -10\sqrt{x+4} \quad /:(-10)$$

$$3 = \sqrt{x+4}$$

е) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен: **(1 т.)**

$$(3)^2 = \left(\sqrt{x+4}\right)^2$$

ж) Разкриваме скобите: **(1 т.)**

$$9 = x + 4$$

з) Намираме корена на линейното уравнение: **(1 т.)**

$$x = 5$$

и) Проверяваме дали полученият корен е решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата: **(1,5 т.)**

Проверка за $x=5$: **(1 т.)**

$$\sqrt{5-1}+\sqrt{5+4}\stackrel{?}{=}5$$

$$\sqrt{4}+\sqrt{9}\stackrel{?}{=}5$$

$$2+3\stackrel{?}{=}5$$

$$5\equiv 5$$

Следователно правим извод, че $x=5$ е решение на задачата. **(0,5 т.)**

й) Записваме отговор $x=5$ е решение на задачата. **(1 т.)**

3. $\sqrt{x+2+\sqrt{2x-1}}=2$. **(15 т.)**

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са

$$\left|\begin{array}{l}2x-1\geq 0\\ x+2+\sqrt{2x-1}\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x\geq \dfrac{1}{2}\\ \sqrt{2x-1}\geq -x-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x\geq \dfrac{1}{2}\\ x\geq \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{2};\infty\right)$$ **(2 т.)**

б) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен: **(1 т.)**

$$\left(\sqrt{x+2+\sqrt{2x-1}}\right)^2=2^2$$

в) Разкриваме скобите и получаваме: **(1 т.)**

$$x+2+\sqrt{2x-1}=4$$

г) Оставяме радикала от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата: **(1 т.)**

$$\sqrt{2x-1}=2-x$$

д) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен: **(1 т.)**

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=\left(2-x\right)^2$$

е) Разкриваме скобите и получаваме: **(1 т.)**

$$2x-1=4-4x+x^2$$

ж) Прехвърляме всичко от едната стана и получаваме следното квадратно уравнение: **(1 т.)**

$$x^2-6x+5=0$$

з) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение: **(1 т.)**

$$D=\left(-6\right)^2-4.5.1=36-20=16=4^2$$

и) Намираме корените на квадратното уравнение: **(2 т.)**

$$x_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ } \mathbf{(1\ т.)}$$

$$x_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ } \mathbf{(1\ т.)}$$

й) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата: **(3 т.)**

Проверка за $x=5$: **(1 т.)**

$$\sqrt{5+2+\sqrt{2.5-1}} \overset{?}{=} 2$$

$$\sqrt{7+\sqrt{9}} \overset{?}{=} 2$$

$$\sqrt{7+3} \overset{?}{=} 2$$

$$\sqrt{10} \neq 2$$

Следователно правим извод, че $x=5$ не е решение на задачата. **(0,5 т.)**

Проверка за $x=1$: **(1 т.)**

$$\sqrt{1+2+\sqrt{2.1-1}} \overset{?}{=} 2$$

$$\sqrt{3+\sqrt{1}} \overset{?}{=} 2$$

$$\sqrt{3+1} \overset{?}{=} 2$$

$$\sqrt{4} \overset{?}{=} 2$$

$$2 \equiv 2$$

Следователно правим извод, че $x=1$ е решение на задачата. **(0,5 т.)**

к) Записваме отговор $x=2$ е решение на задачата. **(1 т.)**

4. $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+2} = \sqrt{x-1}$ **(16 т.)**

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са

$$\left| \begin{array}{l} 2x+5 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \geq -2,5 \\ x \geq -2 \\ x \geq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [1; +\infty) \text{ } \mathbf{(3\ т.)}$$

б) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен: **(1 т.)**

$$\left(\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+2}\right)^2 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$$

в) Разкриваме скобите: **(1 т.)**

$$2x+5-2\sqrt{(2x+5)(x+2)}+\cancel{x}+2=\cancel{x}-1$$

г) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна: **(1 т.)**

$$-2\sqrt{2x^2+9x+10}=-2x-8 \quad /:(-2)$$

$$\sqrt{2x^2+9x+10}=x+4$$

д) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен: **(1 т.)**

$$\left(\sqrt{2x^2+9x+10}\right)^2=(x+4)^2$$

е) Разкриваме скобите: **(1 т.)**

$$2x^2+9x+10=x^2+8x+16$$

ж) Прехвърляме всичко от едната стана и получаваме следното квадратно уравнение: **(1 т.)**

$$x^2+x-6=0$$

з) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение: **(1 т.)**

$$D=1^2-4.(-6).1=1+24=25=5^2$$

и) Намираме корените на квадратното уравнение: **(2 т.)**

$$x_1=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2 \ \textbf{(1 т.)}$$

$$x_2=\frac{-1-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \ \textbf{(1 т.)}$$

й) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата: **(3 т.)**

Проверка за $x=2$: **(1 т.)**

$$\sqrt{2.2+5}-\sqrt{2+2}\stackrel{?}{=}\sqrt{2-1}$$

$$\sqrt{9}-\sqrt{4}\stackrel{?}{=}\sqrt{1}$$

$$3-2\stackrel{?}{=}1$$

$$1\equiv 1$$

Следователно правим извод, че $x=5$ е едно решение на задачата. **(0,5 т.)**

Проверка за -3: **(1 т.)**

$$\sqrt{2.(-3)+5}-\sqrt{-3+2}\stackrel{?}{=}\sqrt{-3-1}$$

Нито един от корените няма смисъл, защото подкоренната величина е отрицателно число. Следователно правим извод, че $x=1$ не е решение на задачата. **(0,5 т.)**

к) Записваме отговор $x=2$ е решение на задачата. **(1 т.)**

5. $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x+1}=1$ **(13,5 т.)**

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са $x^2+3x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$ **(1 т.)**

б) Полагаме $t=x^2+3$. **(1 т.)**

в) Получаваме следното ирационално уравнение: **(1 т.)**

$$t+\sqrt{t+1}=1$$

г) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко останало от другата: **(1 т.)**

$$\sqrt{t+1}=1-t$$

д) Повдигаме двете страни на това равенство на втора степен: **(1 т.)**

$$\left(\sqrt{t+1}\right)^2=(1-t)^2$$

е) Разкриваме скобите и получаваме: **(1 т.)**

$$t+\cancel{1}=\cancel{1}-2t+t^2$$

ж) Прехвърляме всичко от едната стана и получаваме следното квадратно уравнение: **(1 т.)**

$$t^2-3t=0$$

$$t(t-3)=0$$

з) Намираме корените на уравненията, а те са: **(2 т.)**

$t_1=0$ **(1 т.)**

$t_2=3$ **(1 т.)**

и) Връщаме се в полагането и за $t_1=0$ получаваме:

$$x^2+3=0$$

й) Това уравнение няма реални корени. **(1 т.)**

к) Връщаме се в полагането и за $t_2=3$ получаваме:

$$x^2+\cancel{3}=\cancel{3}$$

$$x^2=0$$

л) Това уравнение има единствен корен $x=0$. **(1 т.)**

м) След директна проверка в началното условие откриваме, че $x = 0$ е решение на задачата. **(1,5 т.)**

н) Записваме отговор $x = 0$ решение на задачата. **(1 т.)**

Общият брой на точките от контролната работа е 68.
Оценяването се извършва според Таблица 1.

Таблица 1

Точки	**Оценка**
24 – 32	Слаб 2
33 – 41	Среден 3
42 – 50	Добър 4
51 – 59	Много добър 5
60 – 68	Отличен 6