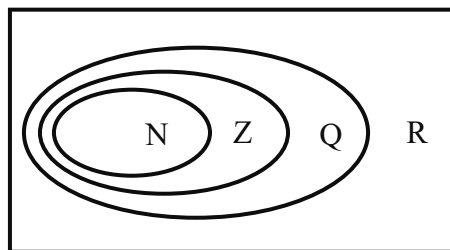


## Необходими знания, които трябва да знаем преди и след ириационалните уравнения

*Как достигнах до ириационалните уравнения?*

### 1. Числата и математическите действия

Знаем, че в математиката работим основно с числа и математическите действия, свързани с тях. Естествените числа най-просто казано са тези, с които броим. Тяхното множество бележим с  $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  (4 клас). Често това множество се разширява и с неутралния елемент 0. Сборът и произведението на естествени числа отново е естествено число, но разликата и частното на две естествени числа не са естествени числа. Така разширяваме знанията си за числата с още две множества. Множеството на целите числа се дефинира по следния начин: естествените числа, техните противоположни числа и 0. Тяхното множество бележим с  $Z = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  (6 клас). Множеството на рационалните числа е това множество от числа, които могат да се запишат във вида  $\frac{p}{q}$ . Тяхното множество бележим с  $Q = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{81}{7}, \dots\right\}$  (5 клас). Обаче не всички числа могат да се запишат във вида  $\frac{p}{q}$ . Тези числа се наричат ириационални и имат 2 формата на записване. Един път може да ги запишем като безкрайни непериодични десетични дроби като  $\pi = 3,1415926535\dots$ . Друг начин да запишем ириационалните числа е като използваме „корен n-ти“ като например  $\sqrt{2} = 1,41422135\dots$  (8 клас). Ириационалните числа допълват рационалните до реални числа. Множеството на реалните числа записваме с  $R$ . За по-добра нагледност погледнете диаграмата на Вен за числата – *Диаграма 1*.



Диаграма 1

### 2. Действието коренуване

Ириационалните числа, както споменахме, са тези, които не могат да се представят във вида  $\frac{p}{q}$ . Това са числа, които са безкрайни непериодични

десетични дробни. Те се получават в резултат на действието коренуване (търсене на квадратен корен от неотрицателно число). А квадратен корен от неотрицателно число  $a \geq 0$  се нарича единственото неотрицателно число, втората степен на което е числото  $a$ . Казано с други думи ако  $x^2 = a$ ,  $x \geq 0$ , то  $x = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$  (8 клас).  $\sqrt[2]{a}$  или само  $\sqrt{a}$  четем „квадратен корен от  $a$ “ или „втори корен от  $a$ “. Знакът  $\sqrt{\phantom{x}}$  се нарича „корен“ или „радикал“. Числото 2 се нарича „подкоренен показател“, а числото  $a$  - „подкоренна величина“. Знанията за корен втори се разширяват до корен  $n$ -ти в 10 клас.

### 3. Действия с ирационални числа

а) **Квадратен корен от произведение** – Дефинира се по следния начин:  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  за всяко  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ .

б) **Квадратен корен от частно** – Дефинира се по следния начин:  
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$
 за всяко  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ .

в) **Изнасяне на множител пред квадратен корен:** – Дефинира се по следния начин: За всяко  $b \geq 0$ ,  $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = |a| \sqrt{b} =$   
$$= \begin{cases} a\sqrt{b} & \text{при } a \geq 0 \\ -a\sqrt{b} & \text{при } a \leq 0 \end{cases}.$$

г) **Внасяне на множител пред квадратен корен:** – Дефинира се по следния начин: За всяко  $b \geq 0$ ,  $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b} & \text{при } a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2 b} & \text{при } a \leq 0 \end{cases}.$

д) **Сравняване на ирационални числа** – Ако  $a > b$ , то  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ .

### 4. Ирационални изрази

До сега разглеждахме действието коренуване само с конкретни стойности (числа). Най-логичното нещо е вместо конкретни стойности да сложим променлива под корен. Така получаваме алгебричен израз, който съдържа променлива под корен. Тези изрази се наричат *ирационални изрази* (9 клас).

*Ирационалните изрази* се характеризират с *допустими стойности*, защото знаем, че подкоренната величина не може да бъде отрицателно число. Така например ирационалният израз  $\sqrt{x}$  е дефиниран за  $x \geq 0$ .

Друго важно нещо за един радикал е неговият *коэффициент* – това е множителят пред радикала.

Казваме, че един радикал е в *нормален вид*, ако подкоренната му величина не съдържа знаменател и множители, които могат да се изнесат пред радикала.

Радикали, които в нормалния си вид имат еднакви подкоренни величини, се наричат *подобни радикали*.

## 5. Действия с ирационални изрази

- а) **Събиране и изваждане на подобни радикали** – Събират или се изваждат само коефициентите на радикалите, а общата подкоренна величина се преписва.
- б) **Умножение и деление на радикали** – Тези действия са описани в точка 3 а) и б) от настоящия документ.
- в) **Рационализиране на ирационален израз** – Когато освобождаваме една дроб от радикали в знаменателя ѝ, казваме, че я *рационализираме*.
- г) **Опростяване на ирационален израз** – Преобразуване на израза до тогава до когато могат да се извършат някакви математически действия.

## 6. Ирационални уравнения

Ирационалните уравнения са тези, в които участват ирационални изрази (9 клас). В обучението по математика най-общо се разделят на две групи – ирационални уравнения с един радикал и ирационални уравнения с два радикала. В профилирана подготовка се изучават и уравнения с повече от два радикала. Алгоритъмът за решение на тези уравнения е един и същи и е описан по-надолу в курсовата разработка.

В алгоритъма за решение на ирационални уравнения проличава, че се опитваме да решим ирационалните уравнения чрез рационални. Това става чрез стъпката, в която повдигаме двете страни на уравнението на втора степен. Знаем, че това преобразуване не е еквивалентно. Затова интерес представлява решаването на ирационални уравнения с теоремата за еквивалентност.

Теоремата гласи следното: Дадено е уравнението  $\sqrt{f(x)} = g(x)$ . Нека  $D^1$  е множеството от числата, за които  $g(x) \geq 0$ . Тогава уравненията  $\sqrt{f(x)} = g(x)$  и  $f(x) = g^2(x)$  са еквивалентни.

*Забележка: Ако използваме теоремата, то решаването на уравнението се свежда до решаване система:*

<sup>1</sup>  $D$  още се нарича област на еквивалентните преобразувания.

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Ако се вгледаме внимателно, забелязваме, че условието  $f(x) \geq 0$  се покрива от  $f(x) = g^2(x)$ , така че може да редуцираме горната системата до следната такава:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Решенията на даденото уравнение са еквиваленти на решенията на системата, защото тези преобразувания не променят стойностите на променливата, т.е. преобразованията се извършват в дефиниционната област.

## 7. Ирационални неравенства

Ирационалните изрази може да участват и в неравенствата. Тези неравенства се наричат *ирационални неравенства*. Съществуват два основни вида ирационални неравенства:

а)  $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Решаването на това неравенство става чрез решаването на следната система неравенства:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

б)  $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Решаването на това неравенство става чрез решаването на следните две система неравенства:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

Решението на неравенството е обединението на решенията на двете системи неравенства.

Забележка: Относно граничните точки дали да се включват в отговора на задачата е най-добре да проверите верността на неравенството чрез директна проверка!

## 8. Ирационални функции

Ирационалните изрази могат да намерят и място и зависимостта между две променливи т.е. могат да участват и във функции. Тези функции се наричат ирационални функции и могат да се изследват. В програмата за профилирана подготовка за 12 клас тези функции попадат в графа „други функции“!

Изследването на една функция преминава през следните етапи:

- а) Определяне на дефиниционното множество на функцията;
- б) Изследване за четност и периодичност на функцията;
- в) Намиране на границата на функцията;
- г) Изследване за диференцируемост на функцията;
- д) Определяне на интервали на растене и намаляване и локални екстремуми на функцията;
- е) Определяне на хоризонтални или вертикални асимптоти за функцията;
- ж) Определяне на рогови точки за функцията.