Примерни решения и критерии за оценяване на домашната работа върху ирационални уравнения с два радикала

Предоставям примерни решения на задачите от ВАРИАНТ Θ, както и критериите за оценка. Другият вариант е аналогичен на този, както стъпки на решение, така и на брой отговори. Следователно и оценяването се прави по същите критерии.

1. Без да решавате уравнението $\sqrt{x-9}-\sqrt{4-x}=10$ докажете, че няма решение. **(2 т.)**

Ако трябва да определим допустимите стойности, то те са:

$$\left| \begin{array}{l} x-9\ge 0 \\ 4-x\ge 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x\ge 9 \\ x\le 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$ **(1 т.)**

Откриваме, че няма стойност, за която задачата да има смисъл т.е. задачата няма решение. **(1 т.)**

2. Решете уравнението $\sqrt{x}+\sqrt{5-x}=3$. **(16 т.)**

   а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са $\left| \begin{array}{l} x\ge 0 \\ 5-x\ge 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow x\in[0;5]$ **(2 т.)**

   б) Оставяме единия корен от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна: **(1 т.)**

   $$\sqrt{5-x}=3-\sqrt{x}$$

   в) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен: **(1 т.)**

   $$\left(\sqrt{5-x}\right)^2=\left(3-\sqrt{x}\right)^2$$

   г) Разкриваме скобите: **(1 т.)**

   $$5-x=9-6\sqrt{x}+x$$

   д) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна: **(1 т.)**

   $$-4-2x=-6\sqrt{x}\quad /:(-2)$$

   $$x+2=3\sqrt{x}$$

   е) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен: **(1 т.)**

   $$(x+2)^2=\left(3\sqrt{x}\right)^2$$

   ж) Разкриваме скобите: **(1 т.)**

   $$x^2+4x+4=9x$$

   з) Прехвърляме всичко от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение: **(1 т.)**

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

и) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение: **(1 т.)**

$$D = (-5)^2 - 4.4 = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

й) Намираме корените на квадратното уравнение: **(2 т.)**

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ } \mathbf{(1\ т.)}$$

$$x_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ } \mathbf{(1\ т.)}$$

к) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата: **(3 т.)**

Проверка за $x = 1$: **(1 т.)**

$$\sqrt{1} + \sqrt{5-1} \stackrel{?}{=} 3$$

$$1 + \sqrt{4} \stackrel{?}{=} 3$$

$$1 + 2 \stackrel{?}{=} 3$$

$$3 \equiv 3$$

Следователно правим извод, че $x = 1$ е едно решение на задачата. **(0,5 т.)**

Проверка за $x = 4$: **(1 т.)**

$$\sqrt{4} + \sqrt{5-4} \stackrel{?}{=} 3$$

$$2 + \sqrt{1} \stackrel{?}{=} 3$$

$$2 + 1 \stackrel{?}{=} 3$$

$$3 \equiv 3$$

Следователно правим извод, че $x = 4$ е друго решение на задачата. **(0,5 т.)**

л) Записваме отговор $x = 1$ и $x = 4$ са решение на задачата. **(1 т.)**

3. Решете уравнението $\sqrt{x^2 + 3 + \sqrt{x+2}} = x + 1$. **(14 т.)**

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са

$$\left| \begin{array}{l} x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 3 + \sqrt{x+2} \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \geq -2 \\ \sqrt{x+2} \geq -x^2 - 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \geq -2 \\ x \geq -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [-2; \infty) \text{ } \mathbf{(2\ т.)}$$

б) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен: **(1 т.)**

$$\left(\sqrt{x^2 + 3 + \sqrt{x+2}} \right)^2 = (x+1)^2$$

в) Разкриваме скобите и получаваме: **(1 т.)**

$$\cancel{x^2}+3+\sqrt{x+2}=\cancel{x^2}+2x+1$$

г) Оставяме радикала от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата:

$$\sqrt{x+2}=2x-2$$

д) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен: **(1 т.)**

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=(2x-2)^2$$

е) Разкриваме скобите и получаваме: **(1 т.)**

$$x+2=4x^2-8x+4$$

ж) Прехвърляме всичко от едната стана и получаваме следното квадратно уравнение: **(1 т.)**

$$4x^2-9x+2=0$$

з) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение: **(1 т.)**

$$D=(-9)^2-4.4.2=81-32=49=7^2$$

и) Намираме корените на квадратното уравнение: **(2 т.)**

$$x_1=\frac{9+7}{8}=\frac{16}{8}=2 \ \textbf{(1 т.)}$$

$$x_2=\frac{9-7}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \ \textbf{(1 т.)}$$

й) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата: **(3 т.)**

Проверка за $x=2$: **(1 т.)**

$$\sqrt{2^2+3+\sqrt{2+2}}\overset{?}{=}2+1$$

$$\sqrt{4+3+\sqrt{4}}\overset{?}{=}3$$

$$\sqrt{4+3+2}\overset{?}{=}3$$

$$\sqrt{9}\overset{?}{=}3$$

$$3\equiv 3$$

Следователно правим извод, че $x=1$ е едно решение на задачата. **(0,5 т.)**

Проверка за $x=\frac{1}{4}$: **(1 т.)**

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+3+\sqrt{\frac{1}{4}+2}}\stackrel{?}{=}\frac{1}{4}+1$$

$$\sqrt{\frac{1}{16}+3+\sqrt{\frac{9}{4}}}\stackrel{?}{=}\frac{5}{4}$$

$$\sqrt{\frac{49}{16}+\frac{6}{2}}\neq\frac{5}{4}$$

Следователно правим извод, че $x=\frac{1}{4}$ не е решение на задачата. **(0,5 т.)**

к) Записваме отговор $x=2$ е решение на задачата. **(1 т.)**

Общият брой на точките от контролната работа е 32. Оценката се изчислява по формулата 2 + 0,125 * n, където n е броят получени точни.