

Решени задачи

В този файл предоставям решението на няколко типа задачи върху ирационалните уравнения. Графичното оформление и следването на стъпките от алгоритъма са ЗАДЪЛЖИТЕЛНИ.

Ирационални уравнения с един радикал

1. $\sqrt{3x+1} = 4$

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са

$$3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

б) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен:

$$(\sqrt{3x+1})^2 = 4^2$$

в) Разкриваме скобите:

$$3x+1=16$$

г) Прехвърляме от всичко от едната страна и получаваме следното линейно уравнение:

$$3x-15=0$$

д) Коренът на това линейно уравнение е:

$$x=5$$

е) Проверяваме дали полученият корен е корен и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата:

Проверка за $x=5$:

$$\sqrt{3 \cdot 5 + 1} \stackrel{?}{=} 4$$

$$\sqrt{16} \stackrel{?}{=} 4$$

$$4 \equiv 4$$

Следователно правим извод, че $x=4$ е решение на задачата.

ж) Записваме отговор $x=4$ е решение на задачата.

2. $\sqrt{2x-1} + 2 = x$

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са

$$x+6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -6$$

б) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна:

$$\sqrt{2x-1} = x-2$$

в) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен:

$$(\sqrt{2x-1})^2 = (x-2)^2$$

г) Разкриваме скобите:

$$2x-1 = x^2 - 4x + 4$$

д) Прехвърляме от всичко от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

е) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение:

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 36 - 20 = 16 = 4^2$$

ж) Намираме корените на квадратното уравнение:

$$x_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

з) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата:

Проверка за $x = 5$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \cdot 5 - 1} + 2 &\stackrel{?}{=} 5 \\ \sqrt{9} + 2 &\stackrel{?}{=} 5 \\ 3 + 2 &\stackrel{?}{=} 5 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

Следователно правим извод, че $x = 5$ е едно решение на задачата.

Проверка за $x = 1$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \cdot 1 - 1} + 2 &\stackrel{?}{=} 1 \\ \sqrt{1} + 2 &\stackrel{?}{=} 1 \\ 3 &\neq 1 \end{aligned}$$

Следователно правим извод, че $x = 1$ не е решение на задачата.

и) Записваме отговор $x = 5$ е решение на задачата.

Ирационални уравнения с два радикала

3. $\sqrt{3x-3} - \sqrt{x} = 1.$

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са

$$\begin{cases} 3x-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; +\infty)$$

- б) Оставяме единия корен от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна:

$$\sqrt{3x-3} = 1 + \sqrt{x}$$

- в) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен

$$(\sqrt{3x-3})^2 = (1 + \sqrt{x})^2$$

- г) Разкриваме скобите:

$$3x - 3 = 1 + 2\sqrt{x} + x$$

- д) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна:

$$2x - 4 = 2\sqrt{x} \quad /:2$$

$$x - 2 = \sqrt{x}$$

- е) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен

$$(x - 2)^2 = (\sqrt{x})^2$$

- ж) Разкриваме скобите:

$$x^2 - 4x + 4 = x$$

- з) Прехвърляме всичко от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

- и) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

- й) Намираме корените на квадратното уравнение:

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

- к) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата:

Проверка за $x=1$:

$$\sqrt{3 \cdot 1 - 3} - \sqrt{1} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\sqrt{3 - 3} - 1 \stackrel{?}{=} 1$$

$$0 - 1 \stackrel{?}{=} 1$$

$$-1 \neq 1$$

Следователно правим извод, че $x=1$ не е решение на задачата.
Проверка за $x=4$:

$$\sqrt{3 \cdot 4 - 3} - \sqrt{4} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\sqrt{9} - 2 \stackrel{?}{=} 1$$

$$3 - 2 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 \equiv 1$$

Следователно правим извод, че $x=4$ е решение на задачата.

л) Записваме отговор $x=4$ е решение на задачата.

4. $\sqrt{x} - 3 = \sqrt{5-x}$

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 5]$$

б) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен

$$(\sqrt{x} - 3)^2 = (\sqrt{5-x})^2$$

в) Разкриваме скобите:

$$x - 6\sqrt{x} + 9 = 5 - x$$

г) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна:

$$2x + 4 = 6\sqrt{x} \quad / : 2$$

$$x + 2 = 3\sqrt{x}$$

д) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен

$$(x + 2)^2 = (3\sqrt{x})^2$$

е) Разкриваме скобите:

$$x^2 + 4x + 4 = 9x$$

ж) Прехвърляме всичко от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

з) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

и) Намираме корените на квадратното уравнение:

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

й) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата:

Проверка за $x=1$:

$$\sqrt{1-3} \stackrel{?}{=} \sqrt{5-1}$$

$$1-3 \stackrel{?}{=} 2$$

$$-2 \neq 2$$

Следователно правим извод, че $x=1$ не е решение на задачата.

Проверка за $x=4$:

$$\sqrt{4-3} \stackrel{?}{=} \sqrt{5-4}$$

$$2-3 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 \neq 1$$

Следователно правим извод, че $x=4$ не е решение на задачата.

к) Записваме отговор задачата няма решение.

Ирационални уравнения, които се решават чрез полагане

5. $\sqrt{2-(x^2+3x)} = 4+3x+x^2$

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са
 $x^2+8 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; +\infty)$

б) Полагаме $t = x^2 + 3x$.

в) Получаваме следното квадратно уравнение:

$$\sqrt{2-t} = 4+t$$

г) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен:

$$(\sqrt{2-t})^2 = (4+t)^2$$

д) Разкриваме скобите и получаваме:

$$2-t = 16+8t+t^2$$

е) Прехвърляме всички събираеми от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение:

$$t^2+9t+14=0$$

ж) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение:

$$D = 9^2 - 4 \cdot 14 = 81 - 56 = 25 = 5^2$$

з) Намираме корените на уравненията, а те са:

$$t_1 = \frac{-9+5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$t_2 = \frac{-9-5}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

и) Връщаме се в полагането и за $t_1 = -2$ получаваме:

$$x^2 + 3x = -2$$

й) Прехвърляме всички събираеми от едната страна и получаваме:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

к) Намираме дискриминантата на уравнението:

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1$$

л) Намираме корените на квадратното уравнение:

$$x_1 = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

м) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата:

Проверка за $x = -1$:

$$\sqrt{2 - ((-1)^2 + 3(-1))} \stackrel{?}{=} (-1)^2 + 3(-1) + 4$$

$$\sqrt{2 - (1 - 3)} \stackrel{?}{=} 1 - 3 + 4$$

$$\sqrt{2 - 1 + 3} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$$

$$2 \equiv 2$$

Следователно правим извод, че $x = -2$ е решение на задачата.

Проверка за $x = 4$:

$$\sqrt{2 - ((-2)^2 + 3(-2))} \stackrel{?}{=} (-2)^2 + 3(-2) + 4$$

$$\sqrt{2 - (4 - 6)} \stackrel{?}{=} 4 - 6 + 4$$

$$\sqrt{2 - 4 + 6} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$$

$$2 \equiv 2$$

Следователно правим извод, че $x = -2$ също е решение на задачата.

л) Връщаме се в полагането и за $t_2 = -7$ получаваме:

$$x^2 + 3x = -7$$

м) Прехвърляме всички събираеми от едната страна и получаваме:

$$x^2 + 3x + 7 = 0$$

н) Намираме дискриминантата на уравнението:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 7 = 9 - 28 < 0$$

о) Дискримантата е отрицателно число, следователно уравнението няма корени.

п) Записваме отговор $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$ са решение на задачата.

6. $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 1$

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \\ x \in (-\infty; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$$

б) Полагаме $t = x^2 - x$.

в) Получаваме следното квадратно уравнение:

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+1} = 1$$

г) Оставяме корена от едната страна и пращаме всичко друго от другата страна:

$$\sqrt{t+1} = 1 - \sqrt{t}$$

д) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен:

$$(\sqrt{t+1})^2 = (1 - \sqrt{t})^2$$

е) Разкриваме скобите и получаваме:

$$t + 1 = 1 - 2\sqrt{t} + t$$

ж) Прехвърляме всички събираеми от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение:

$$-2\sqrt{t} = 0 \quad / : (-2)$$

$$\sqrt{t} = 0$$

з) Коренът на това уравнение е $t = 0$:

и) Връщаме се в полагането и за $t = 0$ получаваме:

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

н) Корените на уравнението са:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

о) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата:

Проверка за $x = 0$:

$$\begin{aligned}\sqrt{0^2 - 0} + \sqrt{0^2 - 0 + 1} & \stackrel{?}{=} 1 \\ 0 + 1 & \stackrel{?}{=} 1 \\ 1 & \equiv 1\end{aligned}$$

Следователно правим извод, че $x = 0$ е решение на задачата.
Проверка за $x = 1$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1^2 - 1} + \sqrt{1^2 - 1 + 1} & \stackrel{?}{=} 1 \\ 0 + 1 & \stackrel{?}{=} 1 \\ 1 & \equiv 1\end{aligned}$$

Следователно правим извод, че $x = 1$ също е решение на задачата.

п) Записваме отговор $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ са решение на задачата.

Ирационални уравнения, решени с теоремата за еквивалентност

7. $\sqrt{x+1} = x-1$

а) За решаването на тази задача ще използваме теоремата за еквивалентност. Тогава дадената задача се преобразува във следната еквивалентна система:

$$\left| \begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ (\sqrt{x+1})^2 = (x-1)^2 \end{array} \right.$$

б) Ще решим уравнението и ще проверим дали получените стойности удовлетворяват двете неравенства.

$$\begin{aligned}x + 1 &= x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0\end{aligned}$$

в) Получаваме като корени $x_1 = 0$ или $x_2 = 3$. Сега проверяваме за всеки един от тях дали удовлетворяват неравенствата в системата

Проверка за $x_1 = 0$:

$$\begin{cases} 0+1 \stackrel{?}{\geq} 0 \\ 0-1 \stackrel{?}{\geq} 0 \rightarrow \text{не} \end{cases}$$

Следователно $x_1 = 0$ не е решение на задачата.

Проверка за $x_1 = 3$:

$$\begin{cases} 3+1 \stackrel{?}{\geq} 0 \\ 3-1 \stackrel{?}{\geq} 0 \end{cases} \rightarrow \text{да}$$

Следователно $x_1 = 3$ е решение на задачата.

г) Записваме отговор $x_1 = 3$ е решение на задачата.

8. $\sqrt{x} + \sqrt{5-x} = 3$

а) Записваме уравнението във вида:

$$\sqrt{5-x} = 3 - \sqrt{x}$$

б) За решаването на тази задача ще използваме теоремата за еквивалентност. Тогава дадената задача се преобразува във следната еквивалентна система:

$$\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 3-\sqrt{x} \geq 0 \\ (\sqrt{5-x})^2 = (3-\sqrt{x})^2 \end{cases} \quad (1)$$

в) Ще решим уравнението и ще проверим дали получените стойности удовлетворяват трите неравенства от система (1).

$$5-x = 9-6\sqrt{x}+x$$

$$6\sqrt{x} = 2x+4 \quad / : 2$$

$$3\sqrt{x} = x+2$$

г) Достигнахме до ирационално уравнение с един корен. Отново прилагаме теоремата за еквивалентност и така уравнението се преобразува във еквивалентната система:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ (3\sqrt{x})^2 = (x+2)^2 \end{cases} \quad (2)$$

- д) Ще решим уравнението и ще проверим дали получените стойности удовлетворяват двете неравенства от система (2).

$$9x = x^2 + 4x + 4$$

- е) Прехвърляме всичко от едната страна на равенството и получаваме следното квадратно уравнение:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

- ж) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

- з) Намираме корените на квадратното уравнение:

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

- и) Сега проверяваме за всеки един от тях дали удовлетворяват неравенствата в системата (2).

Проверка за $x_1 = 1$:

$$\left| \begin{array}{l} 1 \geq 0 \\ 1 + 2 \geq 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{да}}$$

Следователно продължаваме с проверката за $x_1 = 1$ в системата неравенства (1).

Проверка за $x_2 = 4$:

$$\left| \begin{array}{l} 4 \geq 0 \\ 4 + 2 \geq 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{да}}$$

Следователно продължаваме с проверката за $x_2 = 4$ в системата неравенства (1).

- й) Сега проверяваме за всеки един от получените корени дали удовлетворяват системата неравенства (1).

Проверка за $x_1 = 1$:

$$\left| \begin{array}{l} 5 - 1 \geq 0 \\ 1 \geq 0 \\ 3 - \sqrt{1} \geq 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{да}}$$

Следователно $x_1 = 1$ е решение на задачата.

Проверка за $x_2 = 4$:

$$\left| \begin{array}{l} 5 - 4 \stackrel{?}{\geq} 0 \\ 4 \stackrel{?}{\geq} 0 \\ 3 - \sqrt{4} \stackrel{?}{\geq} 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{да}$$

Следователно $x_2 = 4$ е решение на задачата.

к) Записваме отговор $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$ да решение на задачата.

Ирационални уравнения, които се решават без преобразования

9. $\sqrt{x^2 - 7} = -2$

Уравнението няма корен, защото за всяко x , за което $\sqrt{x^2 - 7}$ има смисъл, $\sqrt{x^2 - 7} \geq 0$.

10. $\sqrt{x^2 - 5} = -x^2 + x - 1$

Уравнението няма корен, защото за всяко x $-x^2 + x - 1 \leq 0$ т.е. дясната страна на уравнението е отрицателно число.

11. $2\sqrt{x-5} - \sqrt{3-x} = 1$

Изразът $\sqrt{x-5}$ има смисъл за $x \geq 5$, а изразът $\sqrt{3-x}$ има смисъл за $x \leq 3$. Няма стойности на x , при която и двата израза да са определени. Следователно уравнението няма решение.