Примерни решения и критерии за оценяване на домашната работа върху ирационални уравнения с един радикал

Предоставям примерни решения на задачите от ВАРИАНТ Ξ, както и критериите за оценка. Другият вариант е аналогичен на този, както стъпки на решение, така и на брой отговори. Следователно и оценяването се прави по същите критерии.

1. $\sqrt{x-3} = -x^2 + 2x - 5$ **(2 т.)**

   Дискриминантата на $-x^2 + 2x - 5$ е $D = 2^2 - 4(-1)(-5) = 4 - 20 = -16$. Тя е отрицателна за всяко реално число. Освен това, коефициентът пред втората степен на квадратния тричлен е отрицателен, от където може да направим извод, че за всяко реално число $-x^2 + 2x - 5$ приема отрицателна стойност. Следователно даденото уравнение няма решение, защото резултатът от действието коренуване винаги е положително число. **(2 т.)**

2. $\sqrt{x^2} = x$ **(5 т.)**

   а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са $x^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty;\infty)$ **(1 т.)**

   б) Знаем, че за всяко реално число е изпълнено следното: **(1 т.)**

   $$\sqrt{x^2} = |x|$$

   в) Освобождаваме се от модул и разглеждаме два случая: **(1 т.)**

   $$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

   $$x = x \text{ или } -x = x$$

   г) Решението на първото уравнение е всяко $x \geq 0$, а решението на второто уравнение е $x = 0$. И двете решения принадлежат на ДС, откъдето правим извод, че са решение на задачата. **(1 т.)**

   д) Записваме отговор $x \geq 0$. **(1 т.)**

3. $\sqrt{x+6} + 3 = 2x$ **(13 т.)**

   а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са $x + 6 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq -6$ **(1 т.)**

   б) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна: **(1 т.)**

   $$\sqrt{x+6} = 2x - 3$$

   в) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен: **(1 т.)**

   $$\left(\sqrt{x+6}\right)^2 = (2x-3)^2$$

   г) Разкриваме скобите: **(1 т.)**

$$x+6=4x^2-12x+9$$

д) Прехвърляме от всичко от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение: **(1 т.)**

$$4x^2-13x+3=0$$

е) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение: **(1 т.)**

$$D=\left(-13\right)^2-4.4.3=169-48=121=11^2$$

ж) Намираме корените на квадратното уравнение: **(2 т.)**

$$x_1=\frac{13+11}{8}=\frac{24}{8}=3$$ **(1 т.)**

$$x_2=\frac{13-11}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$ **(1 т.)**

з) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата: **(3 т.)**

Проверка за $x=3$: **(1 т.)**

$$\sqrt{3+6}+3\overset{?}{=}2.3$$
$$\sqrt{9}+3\overset{?}{=}6$$
$$3+3\overset{?}{=}6$$
$$6\equiv 6$$

Следователно правим извод, че $x=3$ е едно решение на задачата. **(0,5 т.)**

Проверка за $x=\frac{1}{4}$: **(1 т.)**

$$\sqrt{\frac{1}{4}+6}+3\overset{?}{=}2.\frac{1}{4}$$
$$\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{24}{4}}+3\overset{?}{=}\frac{1}{2}$$
$$\sqrt{\frac{25}{4}}+3\neq\frac{1}{2}$$

Следователно правим извод, че $x=\frac{1}{4}$ не е решение на задачата. **(0,5 т.)**

и) Записваме отговор $x=3$ е решение на задачата. **(1 т.)**

4. $x^2+7+\sqrt{x^2+7}=20$ **(12 т.)**

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са $x^2+7\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;+\infty\right)$ **(1 т.)**

б) Полагаме $t = \sqrt{x^2 + 5}$. **(1 т.)**

в) Получаваме следното квадратно уравнение: **(1 т.)**

$$t^2 + t - 20 = 0$$

г) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение: **(1 т.)**

$$D = 1^2 - 4.(-20) = 1 + 80 = 81 = 9^2$$

д) Намираме корените на уравненията, а те са: **(2 т.)**

$$t_1 = \frac{-1+9}{2} = \frac{8}{2} = 4 \ \textbf{(1 т.)}$$

$$t_2 = \frac{-1-9}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \ \textbf{(1 т.)}$$

е) Връщаме се в полагането и за $t_1 = 4$ получаваме:

$$\sqrt{x^2 + 7} = 4$$

ж) Повдигаме двете страни на това уравнение на втора степен: **(1 т.)**

$$\left(\sqrt{x^2 + 7}\right)^2 = 4^2$$

з) Разкриваме скобите и след опростяване получаваме следното непълно квадратно уравнение: **(1 т.)**

$$x^2 = 9$$

и) Корените на това уравнение са: **(2 т.)**

$$x_1 = 3 \text{ и } x_2 = -3$$

й) Връщаме се в полагането и за $t_2 = -5$ получаваме:

$$\sqrt{x^2 + 7} = -5$$

к) Това уравнение няма реални корени. **(1 т.)**

л) Проверяваме дали получените корени принадлежат на допустимите стойности. След това съставяме извод за всеки един от тях (*Проверката може да се извърши и в началното условие на задачата!):* **(1 т.)**

$x_1 = 3 \in DC$ **(0,25 т.)** => $x_1 = 3$ е едно решение на задачата; **(0,25 т.)**

$x_2 = -3 \in DC$ **(0,25 т.)** => $x_3 = 2$ е едно решение на задачата. **(0,25 т.)**

м) Записваме отговор $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$ са решение на задачата. **(1 т.)**

Общият брой на точките от контролната работа е 32. Оценката се изчислява по формулата 2 + 0,125 * n, където n е броят получени точни.