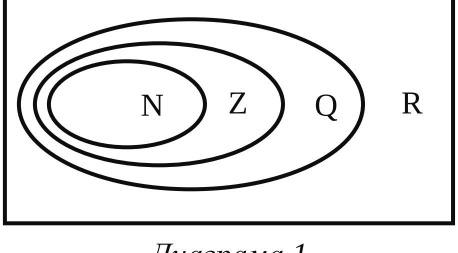
Необходими знания, които трябва да знаем преди и след ирационалните уравнения

Как достигнах до ирационалните уравнения?

1. Числата и математическите действия

Знаем, че в математиката работим основно с числа и математическите действия, свързани с тях. Естествените числа най-просто казано са тези, с които броим. Тяхното множество бележим с $N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\ \}$ (4 клас). Често това множество се разширява и с неутралния елемент 0. Сборът и произведението на естествени числа отново е естествено число, но разликата и частното на две естествени числа не са естествени числа. Така разширяваме знанията си за числата с още две множества. Множеството на целите числа се дефинира по следния начин: естествените числа, техните противоположни числа и 0. Тяхното множество бележим с $Z=\{\ \dots\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ \}$ (6 клас). Множеството на рационалните числа е това множество от числа, които могат да се запишат във вида $\frac{p}{q}$. Тяхното множество бележим с $Q=\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{3}{10},\ \frac{81}{7},\ \dots\ \right\}$ (5 клас). Обаче не всички числа могат да се запишат във вида $\frac{p}{q}$. Тези числа се наричат ирационални и имат 2 формата на записване. Един път може да ги запишем като безкрайни непериодични десетични дроби като $\pi=3{,}1415926535\dots$. Друг начин да запишем ирационалните числа е като използваме „корен n-ти“ като например $\sqrt{2}=1{,}41422135\dots$ (8 клас). Ирационалните числа допълват рационалните до реални числа. Множеството на реалните числа записваме с R. За по-добра нагледност погледнете диаграмата на Вен за числата – *Диаграма 1*.



Диаграма 1

2. Действието коренуване

Ирационалните числа, както споменахме, са тези, които не могат да се представят във вида $\frac{p}{q}$. Това са числа, които са безкрайни непериодични десетични дроби. Те се получават в резултат на действието коренуване (търсене на квадратен корен от неотрицателно число). А квадратен корен от неотрицателно число $a \geq 0$ се нарича единственото неотрицателно число, втората степен на което е числото a. Казано с други думи ако $x^2 = a$, $x \geq 0$, то $x = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ (8 клас). $\sqrt[2]{a}$ или само $\sqrt{a}$ четем „*квадратен корен от* a“ или „*втори корен от* a“. Знакът $\sqrt{\ }$ се нарича „*корен*“ или „*радикал*“. Числото *2* се нарича „*подкоренен показател*“, а числото a - „*подкоренна величина*“. Знанията за корен втори се разширяват до корен n-ти в 10 клас.

3. **Действия с ирационални числа**

   а) **Квадратен корен от произведение** – Дефинира се по следния начин: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ за всяко $a \geq 0$, $b \geq 0$.

   б) **Квадратен корен от частно** – Дефинира се по следния начин: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ за всяко $a \geq 0$, $b > 0$.

   в) **Изнасяне на множител пред квадратен корен:** – Дефинира се по следния начин: За всяко $b \geq 0$, $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2}.\sqrt{b} = |a|\sqrt{b} =$
   $= \begin{cases} a\sqrt{b} & \text{при} \quad a \geq 0 \\ -a\sqrt{b} & \text{при} \quad a \leq 0 \end{cases}$.

   г) **Внасяне на множител пред квадратен корен:** – Дефинира се по следния начин: За всяко $b \geq 0$, $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b} & \text{при} \quad a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2 b} & \text{при} \quad a \leq 0 \end{cases}$.

   д) **Сравняване на ирационални числа** – Ако $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

4. **Ирационални изрази**

   До сега разглеждахме действието коренуване само с конкретни стойности (числа). Най-логичното нещо е вместо конкретни стойности да сложим променлива под корен. Така получаваме алгебричен израз, който съдържа променлива под корен. Тези изрази се наричат *ирационални изрази* (9 клас).

   Ирационалните изрази се характеризират с *допустими стойности,* защото знаем, че подкоренната величина не може да бъде отрицателно число. Така например ирационалният израз $\sqrt{x}$ е дефиниран за $x \geq 0$.

   Друго важно нещо за един радикал е неговият *коефициент* – това е множителят пред радикала.

Казваме, че един радикал е в *нормален вид*, ако подкоренната му величина не съдържа знаменател и множители, които могат да се изнесат пред радикала.

Радикали, които в нормалния си вид имат еднакви подкоренни величини, се наричат *подобни радикали*.

5. **Действия с ирационални изрази**

   а) **Събиране и изваждане на подобни радикали** – Събират или се изваждат само коефициентите на радикалите, а общата подкоренна величина се преписва.

   б) **Умножение и деление на радикали** – Тези действия са описани в точка 3 а) и б) от настоящия документ.

   в) **Рационализиране на ирационален израз** – Когато освобождаваме една дроб от радикали в знаменателя й, казваме, че я *рационализираме*.

   г) **Опростяване на ирационален израз** – Преобразуване на израза до тогава до когато могат да се извършат някакви математически действия.

6. **Ирационални уравнения**

Ирационалните уравнения са тези, в които участват ирационални изрази (9 клас). В обучението по математика най-общо се разделят на две групи – ирационални уравнения с един радикал и ирационални уравнения с два радикала. В профилирана подготовка се изучават и уравнения с повече от два радикала. Алгоритъма за решение на тези уравнения е един и същи и е описан по-надолу в курсовата разработка.

В алгоритъма за решение на ирационални уравнения проличава, че се опитваме да решим ирационалните уравнения чрез рационални. Това става чрез стъпката, в която повдигаме двете страни на уравнението на втора степен. Знам, че това преобразуване не е еквивалентно. Затова интерес представлява решаването на ирационални уравнения с теоремата за еквивалентност.

Теоремата гласи следното: Дадено е уравнението $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Нека D[1] е множеството от числата, за които $g(x) \geq 0$. Тогава уравненията $\sqrt{f(x)} = g(x)$ и $f(x) = g^2(x)$ са еквивалентни.

Забележка: Ако използваме теоремата, то решаването на уравнението се свежда до решаване система:

---

[1] *D още се нарича област на еквивалентните преобразувания.*

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Ако се вгледаме внимателно, забелязваме, че условието $f(x) \geq 0$ *се покрива от* $f(x) = g^2(x)$, *така че може да редуцираме горната системата до следната такава:*

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Решенията на даденото уравнението са еквиваленти на решенията на системата, защото тези преобразуванията не променят стойностите на променливата, т.е. преобразованията се извършват в дефиниционната област.

7. Ирационални неравенства

Ирационалните изрази може да участват и в неравенствата. Тези неравенства се наричат *ирационални неравенства*. Съществуват два основни вида ирационални неравенства:

а) $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Решаването на това неравенство става чрез решаването на следната система неравенства:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

б) $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Решаването на това неравенство става чрез решаването на следните две система неравенства:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

Решението на неравенството е обединението на решенията на двете системи неравенства.

Забележка: *Относно граничните точки дали да се включват в отговора на задачата е най-добре да проверите верността на неравенството чрез директна проверка!*

8. Ирационални функции

Ирационалните изрази могат да намерят и място и зависимостта между две променливи т.е. могат да участват и във функции. Тези функции се наричат ирационални функции и могат да се изследват. В програмата за профилирана подготовка за 12 клас тези функции попадат в графа „други функции“!

Изследването на една функция преминава през следните етапи:

а) Определяне на дефиниционното множество на функцията;

б) Изследване за четност и периодичност на функцията;

в) Намиране на границата на функцията;

г) Изследване за диференцируемост на функцията;

д) Определяне на интервали на растене и намаляване и локални екстремуми на функцията;

е) Определяне на хоризонтални или вертикални асимптоти за функцията;

ж) Определяне на рогови точки за функцията.