

Определение. Примери. Алгоритъм за решаване.

1. Определение

Ирационално уравнение е това, което съдържа в себе си ирационален израз.

2. Примери

2.1. $\sqrt{x+1} = 5$

2.2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 6$

2.3. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x-2}$

3. Алгоритъм за решаване на ирационални уравнения

3.1. Определяме допустими стойности

Извършването на тази стъпка е много важна и съществена част от задачата, защото допустимите стойности са тези, за които задачата има смисъл. Ако задачата няма стойности, за които има смисъл т.е. ДС са $x \in \emptyset$, защо трябва да решаваме задачата?

3.2. Оставяме от едната страна единия радикал и прехвърляме всичко останало от другата страна

Тази стъпка идва естествено от алгоритъма за решаване на ирационално уравнение с един радикал. Чрез нея се показва на учениците последователността в материала, който трябва да се усвои, както и каква е връзката му с предходния материал, който са взели.

3.3. Повдигаме на n -та степен (в нашия случай втора степен) двете страни на равенството.

Тази стъпка се прави с цел освобождаване от единия корен. В следствие на нея получаваме ирационално уравнение с един радикал по-малко (в нашия случай – точно един). Учениците се очаква да го разпознаят и да знаят неговия алгоритъм за решаване.

3.4. Повтаряме 2 и 3 стъпка докато се освободим от корен n -ти.

Тази стъпка се прави толкова пъти, колкото е необходимо, докато се освободим от всички корени.

3.5. Проверяваме дали решенията, които сме получили след тези преобразования, са решения и на даденото уравнение, като проверката се прави в началното условие на задачата.

Тъй като не всички преобразования, които правим по време на решаването на задачата, са еквивалентни, трябва да проверим дали

решенията, които сме получили от уравнението, получено след многократното повдигане на n -та степен, са решения и на даденото уравнение.

3.6. Записваме отговор

Съществена част от решението на задачата е записването на нейния отговор. Това се прави с цел обобщение на получените резултати и направените изводи.

Забележка: Припомнянето на алгоритъма на този тип задачи става най-успешно чрез прилагането му с конкретен пример, който се решава от учителя. Той е длъжен да наблегне на моментите, които са съществени за задачата, но учениците най-често или пропускат, или ги разбират грешно. Това ще бъде разяснено в точка 2.6 от настоящия документ.

4. Прилагане на алгоритъма в конкретен пример

Решете уравнението $\sqrt{3x-3}-\sqrt{x}=1$.

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са

$$\begin{cases} 3x-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; +\infty)$$

б) Оставяме единия корен от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна:

$$\sqrt{3x-3} = 1 + \sqrt{x}$$

в) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен

$$(\sqrt{3x-3})^2 = (1 + \sqrt{x})^2$$

г) Разкриваме скобите:

$$3x-3 = 1 + 2\sqrt{x} + x$$

д) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна:

$$\begin{aligned} 2x-4 &= 2\sqrt{x} \quad /:2 \\ x-2 &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

е) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен

$$(x-2)^2 = (\sqrt{x})^2$$

ж) Разкриваме скобите:

$$x^2 - 4x + 4 = x$$

- з) Прехвърляме всичко от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

- и) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

- й) Намираме корените на квадратното уравнение:

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

- к) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата:

Проверка за $x=1$:

$$\sqrt{3 \cdot 1 - 3} - \sqrt{1} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\sqrt{3 - 3} - 1 \stackrel{?}{=} 1$$

$$0 - 1 \stackrel{?}{=} 1$$

$$-1 \neq 1$$

Следователно правим извод, че $x=1$ не е решение на задачата.

Проверка за $x=4$:

$$\sqrt{3 \cdot 4 - 3} - \sqrt{4} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\sqrt{9} - 2 \stackrel{?}{=} 1$$

$$3 - 2 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 \equiv 1$$

Следователно правим извод, че $x=4$ е решение на задачата.

- л) Записваме отговор $x=4$ е решение на задачата.