Решени задачи

В този файл предоставям решението на няколко типа задачи върху ирационалните уравнения. Графичното оформление и следването на стъпките от алгоритъма са ЗАДЪЛЖИТЕЛНИ.

Ирационални уравнения с един радикал

1. $\sqrt{3x+1}=4$

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са $3x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{3}$

б) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен:

$$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=4^2$$

в) Разкриваме скобите:

$$3x+1=16$$

г) Прехвърляме от всичко от едната страна и получаваме следното линейно уравнение:

$$3x-15=0$$

д) Коренът на това линейно уравнение е:

$$x=5$$

е) Проверяваме дали полученият корен е корен и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата:

Проверка за $x=5$:

$$\sqrt{3.5+1}\overset{?}{=}4$$
$$\sqrt{16}\overset{?}{=}4$$
$$4\equiv 4$$

Следователно правим извод, че $x=4$ е решение на задачата.

ж) Записваме отговор $x=4$ е решение на задачата.

2. $\sqrt{2x-1}+2=x$

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са $x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -6$

б) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна:

$$\sqrt{2x-1}=x-2$$

в) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен:

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=(x-2)^2$$

г) Разкриваме скобите:

$$2x-1=x^2-4x+4$$

д) Прехвърляме от всичко от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение:

$$x^2-6x+5=0$$

е) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение:

$$D=(-6)^2-4.5.1=36-20=16=4^2$$

ж) Намираме корените на квадратното уравнение:

$$x_1=\frac{6+4}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$x_2=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1$$

з) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата:

Проверка за $x=5$:

$$\sqrt{2.5-1}+2\overset{?}{=}5$$
$$\sqrt{9}+2\overset{?}{=}5$$
$$3+2\overset{?}{=}5$$
$$5\equiv 5$$

Следователно правим извод, че $x=5$ е едно решение на задачата.

Проверка за $x=1$:

$$\sqrt{2.1-1}+2\overset{?}{=}1$$
$$\sqrt{1}+2\overset{?}{=}1$$
$$3\neq 1$$

Следователно правим извод, че $x=1$ не е решение на задачата.

и) Записваме отговор $x=5$ е решение на задачата.

Ирационални уравнения с два радикала

3. $\sqrt{3x-3}-\sqrt{x}=1$.

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са

$$\begin{vmatrix}3x-3\geq 0\\ x\geq 0\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x\geq 1\\ x\geq 0\end{vmatrix}\Leftrightarrow x\in[1;+\infty)$$

б) Оставяме единия корен от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна:

$$\sqrt{3x-3}=1+\sqrt{x}$$

в) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен

$$\left(\sqrt{3x-3}\right)^2=\left(1+\sqrt{x}\right)^2$$

г) Разкриваме скобите:

$$3x-3=1+2\sqrt{x}+x$$

д) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна:

$$2x-4=2\sqrt{x} \quad /:2$$

$$x-2=\sqrt{x}$$

е) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен

$$(x-2)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2$$

ж) Разкриваме скобите:

$$x^2-4x+4=x$$

з) Прехвърляме всичко от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение:

$$x^2-5x+4=0$$

и) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение:

$$D=(-5)^2-4.4=25-16=9=3^2$$

й) Намираме корените на квадратното уравнение:

$$x_1=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$x_2=\frac{5+3}{2}=\frac{8}{2}=4$$

к) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата:

Проверка за $x=1$:

$$\sqrt{3.1-3}-\sqrt{1}\stackrel{?}{=}1$$

$$\sqrt{3-3}-1\stackrel{?}{=}1$$

$$0-1\stackrel{?}{=}1$$

$$-1\neq 1$$

Следователно правим извод, че $x=1$ не е решение на задачата. Проверка за $x=4$:

$$\sqrt{3.4-3}-\sqrt{4}\overset{?}{=}1$$

$$\sqrt{9}-2\overset{?}{=}1$$

$$3-2\overset{?}{=}1$$

$$1\equiv 1$$

Следователно правим извод, че $x=4$ е решение на задачата.

л) Записваме отговор $x=4$ е решение на задачата.

4. $\sqrt{x}-3=\sqrt{5-x}$

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са

$$\left|\begin{array}{l} x\ge 0 \\ 5-x\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[0;5]$$

б) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен

$$\left(\sqrt{x}-3\right)^2=\left(\sqrt{5-x}\right)^2$$

в) Разкриваме скобите:

$$x-6\sqrt{x}+9=5-x$$

г) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна:

$$2x+4=6\sqrt{x} \quad /:2$$

$$x+2=3\sqrt{x}$$

д) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен

$$(x+2)^2=\left(3\sqrt{x}\right)^2$$

е) Разкриваме скобите:

$$x^2+4x+4=9x$$

ж) Прехвърляме всичко от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение:

$$x^2-5x+4=0$$

з) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение:

$$D=(-5)^2-4.4.1=25-16=9=3^2$$

и) Намираме корените на квадратното уравнение:

$$x_1=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$x_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

й) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата:

Проверка за $x = 1$:

$$\sqrt{1} - 3 \stackrel{?}{=} \sqrt{5-1}$$

$$1 - 3 \stackrel{?}{=} 2$$

$$-2 \neq 2$$

Следователно правим извод, че $x = 1$ не е решение на задачата. Проверка за $x = 4$:

$$\sqrt{4} - 3 \stackrel{?}{=} \sqrt{5-4}$$

$$2 - 3 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 \neq 1$$

Следователно правим извод, че $x = 4$ не е решение на задачата.

к) Записваме отговор задачата няма решение.

Ирационални уравнения, които се решават чрез полагане

5. $\sqrt{2 - \left(x^2 + 3x\right)} = 4 + 3x + x^2$

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са $x^2 + 8 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty; +\infty)$

б) Полагаме $t = x^2 + 3x$.

в) Получаваме следното квадратно уравнение:

$$\sqrt{2-t} = 4 + t$$

г) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен:

$$\left(\sqrt{2-t}\right)^2 = (4+t)^2$$

д) Разкриваме скобите и получаваме:

$$2 - t = 16 + 8t + t^2$$

е) Прехвърляме всички събираеми от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение:

$$t^2 + 9t + 14 = 0$$

ж) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение:

$$D = 9^2 - 4.14 = 81 - 56 = 25 = 5^2$$

з) Намираме корените на уравненията, а те са:

$$t_1 = \frac{-9+5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$t_2 = \frac{-9-5}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

и) Връщаме се в полагането и за $t_1 = -2$ получаваме:

$$x^2 + 3x = -2$$

й) Прехвърляме всички събираеми от едната страна и получаваме:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

к) Намираме дискриминатната на уравнението:

$$D = 3^2 - 4.2 = 1$$

л) Намираме корените на квадратното уравнение:

$$x_1 = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

м) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата:

Проверка за $x = -1$:

$$\sqrt{2-\left((-1)^2+3(-1)\right)} \stackrel{?}{=} (-1)^2 + 3(-1) + 4$$

$$\sqrt{2-(1-3)} \stackrel{?}{=} 1-3+4$$

$$\sqrt{2-1+3} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$$

$$2 \equiv 2$$

Следователно правим извод, че $x = -2$ е решение на задачата. Проверка за $x = 4$:

$$\sqrt{2-\left((-2)^2+3(-2)\right)} \stackrel{?}{=} (-2)^2 + 3(-2) + 4$$

$$\sqrt{2-(4-6)} \stackrel{?}{=} 4-6+4$$

$$\sqrt{2-4+6} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$$

$$2 \equiv 2$$

Следователно правим извод, че $x = -2$ също е решение на задачата.

л) Връщаме се в полагането и за $t_2 = -7$ получаваме:

$$x^2 + 3x = -7$$

м) Прехвърляме всички събираеми от едната страна и получаваме:

$$x^2 + 3x + 7 = 0$$

н) Намираме дискриминатната на уравнението:

$$D = (-3)^2 - 4.7 = 9 - 28 < 0$$

о) Дискримантата е отрицателно число, следователно уравнението няма корени.

п) Записваме отговор $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$ са решение на задачата.

6. $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 1$

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \in (-\infty; 0] \cup \\ x \in (-\infty; +\infty) \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup$$

б) Полагаме $t = x^2 - x$.

в) Получаваме следното квадратно уравнение:

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+1} = 1$$

г) Оставяме корена от едната страна и пращаме всичко друго от другата страна:

$$\sqrt{t+1} = 1 - \sqrt{t}$$

д) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен:

$$\left(\sqrt{t+1}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{t}\right)^2$$

е) Разкриваме скобите и получаваме:

$$\cancel{t} + \cancel{1} = \cancel{1} - 2\sqrt{t} + \cancel{t}$$

ж) Прехвърляме всички събираеми от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение:

$$-2\sqrt{t} = 0 \quad / : (-2)$$

$$\sqrt{t} = 0$$

з) Коренът на това уравнение е $t = 0$:

и) Връщаме се в полагането и за $t = 0$ получаваме:

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

н) Корените на уравнението са:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

о) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата:

Проверка за $x = 0$:

$$\sqrt{0^2 - 0} + \sqrt{0^2 - 0 + 1} \stackrel{?}{=} 1$$

$$0 + 1 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 \equiv 1$$

Следователно правим извод, че $x = 0$ е решение на задачата. Проверка за $x = 1$:

$$\sqrt{1^2 - 1} + \sqrt{1^2 - 1 + 1} \stackrel{?}{=} 1$$

$$0 + 1 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 \equiv 1$$

Следователно правим извод, че $x = 1$ също е решение на задачата.

п) Записваме отговор $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ са решение на задачата.

Ирационални уравнения, решени с теоремата за еквивалентност

---

7. $\sqrt{x+1} = x - 1$

а) За решаването на тази задача ще използваме теоремата за еквивалентност. Тогава дадената задача се преобразува във следната еквивалентна система:

$$\left|\begin{array}{l} x+1 \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \\ \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (x-1)^2 \end{array}\right.$$

б) Ще решим уравнението и ще проверим дали получените стойности удовлетворяват двете неравенства.

$$x + \cancel{1} = x^2 - 2x + \cancel{1}$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

в) Получаваме като корени $x_1 = 0$ или $x_2 = 3$. Сега проверяваме за всеки един от тях дали удовлетворяват неравенствата в системата

Проверка за $x_1 = 0$:

$$\left| \begin{array}{l} 0+1 \overset{?}{\geq} 0 \\ 0-1 \overset{?}{\geq} 0 \rightarrow не \end{array} \right.$$

Следователно $x_1 = 0$ не е решение на задачата.

Проверка за $x_1 = 3$:

$$\left| \begin{array}{l} 3+1 \overset{?}{\geq} 0 \\ 3-1 \overset{?}{\geq} 0 \end{array} \right. \rightarrow да$$

Следователно $x_1 = 3$ е решение на задачата.

г) Записваме отговор $x_1 = 3$ е решение на задачата.

8. $\sqrt{x} + \sqrt{5-x} = 3$

а) Записваме уравнението във вида:

$$\sqrt{5-x} = 3 - \sqrt{x}$$

б) За решаването на тази задача ще използваме теоремата за еквивалентност. Тогава дадената задача се преобразува във следната еквивалентна система:

$$\left| \begin{array}{l} 5-x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 3-\sqrt{x} \geq 0 \\ \left(\sqrt{5-x}\right)^2 = \left(3-\sqrt{x}\right)^2 \end{array} \right. \qquad (1)$$

в) Ще решим уравнението и ще проверим дали получените стойности удовлетворяват трите неравенства от система (1).

$$5 - x = 9 - 6\sqrt{x} + x$$

$$6\sqrt{x} = 2x + 4 \quad / : 2$$

$$3\sqrt{x} = x + 2$$

г) Достигнахме до ирационално уравнение с един корен. Отново прилагаме теоремата за еквивалентност и така уравнението се преобразува във еквивалентната система:

$$\left| \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ \left(3\sqrt{x}\right)^2 = \left(x+2\right)^2 \end{array} \right. \qquad (2)$$

д) Ще решим уравнението и ще проверим дали получените стойности удовлетворяват двете неравенства от система (2).

$$9x = x^2 + 4x + 4$$

е) Прехвърляме всичко от едната стана на равенството и получаваме следното квадратно уравнение:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

ж) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение:

$$D = (-5)^2 - 4.4.1 = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

з) Намираме корените на квадратното уравнение:

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

и) Сега проверяваме за всеки един от тях дали удовлетворяват неравенствата в системата (2).

Проверка за $x_1 = 1$:

$$\left| \begin{array}{l} 1 \overset{?}{\geq} 0 \\ 1 + 2 \overset{?}{\geq} 0 \end{array} \right. \rightarrow \textit{да}$$

Следователно продължаваме с проверката за $x_1 = 1$ в системата неравентства (1).

Проверка за $x_2 = 4$:

$$\left| \begin{array}{l} 4 \overset{?}{\geq} 0 \\ 4 + 2 \overset{?}{\geq} 0 \end{array} \right. \rightarrow \textit{да}$$

Следователно продължаваме с проверката за $x_2 = 4$ в системата неравентства (1).

й) Сега проверяваме за всеки един от получените корени дали удовлетворяват системата неравенства (1).

Проверка за $x_1 = 1$:

$$\left| \begin{array}{l} 5 - 1 \overset{?}{\geq} 0 \\ 1 \overset{?}{\geq} 0 \\ 3 - \sqrt{1} \overset{?}{\geq} 0 \end{array} \right. \rightarrow \textit{да}$$

Следователно $x_1 = 1$ е решение на задачата.

Проверка за $x_2 = 4$:

$$\left| \begin{array}{l} 5-4 \overset{?}{\geq} 0 \\ 4 \overset{?}{\geq} 0 \qquad \rightarrow \text{да} \\ 3-\sqrt{4} \overset{?}{\geq} 0 \end{array} \right.$$

Следователно $x_2 = 4$ е решение на задачата.

к) Записваме отговор $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$ да решение на задачата.

Ирационални уравнения, които се решават без преобразования

9. $\sqrt{x^2-7} = -2$

Уравнението няма корен, защото за всяко x, за което $\sqrt{x^2-7}$ има смисъл, $\sqrt{x^2-7} \geq 0$.

10. $\sqrt{x^2-5} = -x^2 + x - 1$

Уравнението няма корен, защото за всяко x $-x^2 + x - 1 \leq 0$ т.е. дясната страна на уравнението е отрицателно число.

11. $2\sqrt{x-5} - \sqrt{3-x} = 1$

Изразът $\sqrt{x-5}$ има смисъл за $x \geq 5$, а изразът $\sqrt{3-x}$ има смисъл за $x \leq 3$. Няма стойности на x, при която и двата израза да са определени. Следователно уравнението няма решение.