

Примерни решения и критерии за оценяване на домашната работа върху ирационални уравнения с един радикал

Предоставям примерни решения на задачите от ВАРИАНТ Е, както и критериите за оценка. Другият вариант е аналогичен на този, както стъпки на решение, така и на брой отговори. Следователно и оценяването се прави по същите критерии.

1. $\sqrt{x-3} = -x^2 + 2x - 5$ (2 т.)

Дискриминантата на $-x^2 + 2x - 5$ е $D = 2^2 - 4(-1)(-5) = 4 - 20 = -16$. Тя е отрицателна за всяко реално число. Освен това, коефициентът пред втората степен на квадратния тричлен е отрицателен, от където може да направим извод, че за всяко реално число $-x^2 + 2x - 5$ приема отрицателна стойност. Следователно даденото уравнение няма решение, защото резултатът от действието коренуване винаги е положително число. (2 т.)

2. $\sqrt{x^2} = x$ (5 т.)

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; \infty)$ (1 т.)

б) Знаем, че за всяко реално число е изпълнено следното: (1 т.)

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

в) Освобождаваме се от модул и разглеждаме два случая: (1 т.)

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$x = x \text{ ИЛИ } -x = x$$

г) Решението на първото уравнение е всяко $x \geq 0$, а решението на второто уравнение е $x = 0$. И двете решения принадлежат на ДС, откъдето правим извод, че са решение на задачата. (1 т.)

д) Записваме отговор $x \geq 0$. (1 т.)

3. $\sqrt{x+6} + 3 = 2x$ (13 т.)

а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са $x+6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -6$ (1 т.)

б) Оставяме корена от едната страна и прехвърляме всичко друго – от другата страна: (1 т.)

$$\sqrt{x+6} = 2x - 3$$

в) Повдигаме двете страни на уравнението на втора степен: (1 т.)

$$(\sqrt{x+6})^2 = (2x-3)^2$$

г) Разкриваме скобите: (1 т.)

$$x + 6 = 4x^2 - 12x + 9$$

- д) Прехвърляме от всичко от едната страна и получаваме следното квадратно уравнение: **(1 т.)**

$$4x^2 - 13x + 3 = 0$$

- е) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение: **(1 т.)**

$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169 - 48 = 121 = 11^2$$

- ж) Намираме корените на квадратното уравнение: **(2 т.)**

$$x_1 = \frac{13 + 11}{8} = \frac{24}{8} = 3 \quad \textbf{(1 т.)}$$

$$x_2 = \frac{13 - 11}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \textbf{(1 т.)}$$

- з) Проверяваме дали получените решения са решение и на дадената задача, като проверката правим в началното условие на задачата: **(3 т.)**

Проверка за $x = 3$: **(1 т.)**

$$\sqrt{3+6} + 3 \stackrel{?}{=} 2.3$$

$$\sqrt{9} + 3 \stackrel{?}{=} 6$$

$$3 + 3 \stackrel{?}{=} 6$$

$$6 \equiv 6$$

Следователно правим извод, че $x = 3$ е едно решение на задачата. **(0,5 т.)**

Проверка за $x = \frac{1}{4}$: **(1 т.)**

$$\sqrt{\frac{1}{4} + 6} + 3 \stackrel{?}{=} 2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} + 3 \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{25}{4}} + 3 \neq \frac{1}{2}$$

Следователно правим извод, че $x = \frac{1}{4}$ не е решение на задачата. **(0,5 т.)**

- и) Записваме отговор $x = 3$ е решение на задачата. **(1 т.)**

4. $x^2 + 7 + \sqrt{x^2 + 7} = 20$ **(12 т.)**

- а) Задачата започва с определяне на допустими стойности, които са $x^2 + 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; +\infty)$ **(1 т.)**

б) Полагаме $t = \sqrt{x^2 + 5}$. (1 т.)

в) Получаваме следното квадратно уравнение: (1 т.)

$$t^2 + t - 20 = 0$$

г) Намираме дискриминантата на квадратното уравнение: (1 т.)

$$D = 1^2 - 4 \cdot (-20) = 1 + 80 = 81 = 9^2$$

д) Намираме корените на уравненията, а те са: (2 т.)

$$t_1 = \frac{-1+9}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (1 т.)}$$

$$t_2 = \frac{-1-9}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \text{ (1 т.)}$$

е) Връщаме се в полагането и за $t_1 = 4$ получаваме:

$$\sqrt{x^2 + 7} = 4$$

ж) Повдигаме двете страни на това уравнение на втора степен: (1 т.)

$$\left(\sqrt{x^2 + 7}\right)^2 = 4^2$$

з) Разкриваме скобите и след опростяване получаваме следното непълно квадратно уравнение: (1 т.)

$$x^2 = 9$$

и) Корените на това уравнение са: (2 т.)

$$x_1 = 3 \text{ и } x_2 = -3$$

й) Връщаме се в полагането и за $t_2 = -5$ получаваме:

$$\sqrt{x^2 + 7} = -5$$

к) Това уравнение няма реални корени. (1 т.)

л) Проверяваме дали получените корени принадлежат на допустимите стойности. След това съставяме извод за всеки един от тях (Проверката може да се извърши и в началното условие на задачата!): (1 т.)

$x_1 = 3 \in DC$ (0,25 т.) $\Rightarrow x_1 = 3$ е едно решение на задачата; (0,25 т.)

$x_2 = -3 \in DC$ (0,25 т.) $\Rightarrow x_2 = -3$ е едно решение на задачата. (0,25 т.)

м) Записваме отговор $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$ са решение на задачата. (1 т.)

Общият брой на точките от контролната работа е 32. Оценката се изчислява по формулата $2 + 0,125 \cdot n$, където n е броят получени точни.