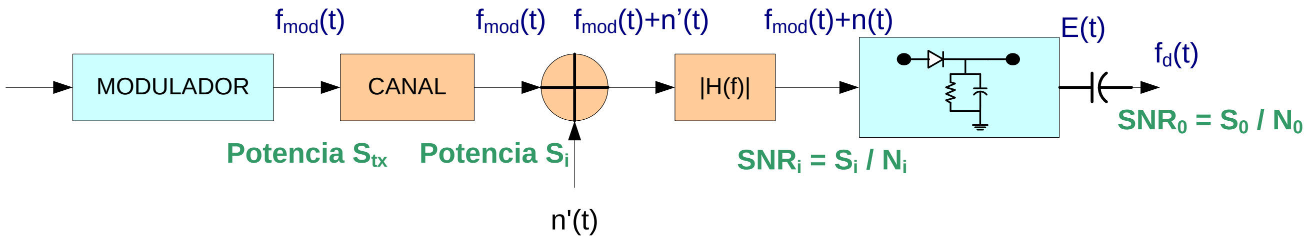
RUIDO EN AM-DSB-LC

1.1.1 DSB-LC.

En los sistemas DSB-LC plantearemos el siguiente esquema de comunicación:



En primer lugar la señal modulada tendrá la forma:

$$f_{DSB-LC}(t) = [A + f(t)]\cos(2\pi f_c t)$$

Con este valor de señal modulada le agregamos el ruido y la pasamos por el demodulador:

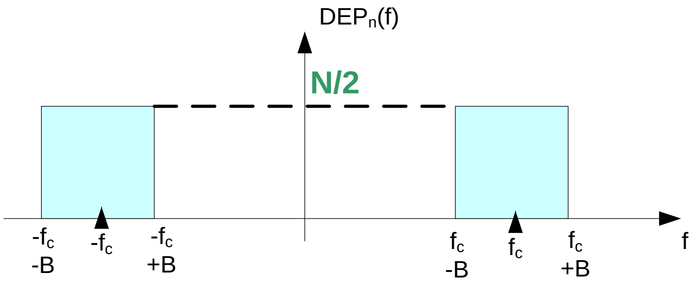
- A la entrada del demodulador:

Para hallar Si

Para hallar Ni

$$\begin{aligned} f_{DSB-LC}(t) + n(t) &= [A + f(t)]\cos(2\pi f_c t) + n(t) \\ &= [A + f(t)]\cos(2\pi f_c t) + n_c(t)\cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

Aquí la DEP del ruido se calcula de la misma forma puesto que el ruido continúa ocupando el mismo espacio en frecuencia.



Con lo cual calculamos las potencias a la entrada del demodulador así como la relación señal a ruido correspondiente:

$$Si = \overline{[A + f(t)]\cos(2\pi f_c t)}^2 = \frac{\overline{[A + f(t)]^2}}{2} = \frac{A^2 + \overline{f(t)}^2}{2}$$

$$Ni = 2\int_0^{+\infty} \frac{N}{2} df = 2\int_{f_c-B}^{f_c+B} \frac{N}{2} df = 2NB$$

Para el cálculo de la relación señal a ruido tendríamos:

$$\Rightarrow SNRi = \frac{Si}{Ni} = \frac{A^2 + \overline{f(t)}^2}{4NB}$$

- Cálculo de la envolvente $E(t)$ de la señal:

$$f_{DSB-LC}(t) + n(t) = \left[A + f(t)\right]\cos(2\pi f_c t) + n_c(t)\cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\sin(2\pi f_c t) \quad \textbf{(*)}$$

Este cálculo implica determinar la envolvente de una función de la forma:

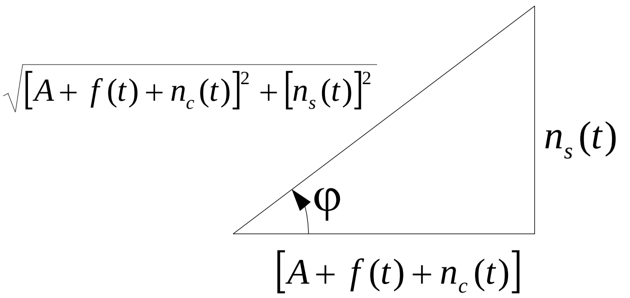
$$E(t)\cos\left[2\pi f_c t + \varphi(t)\right] \quad \textbf{(**)}$$

Envolvente

Para esto vamos a utilizar un artificio matemático que le dará forma a la expresión de la señal modulada más ruido **(*)**, con la finalidad de convertirla en una expresión de la forma **(**).** La forma más sencilla es tomar la función y convertirla en el coseno de una suma como esta descrita en **(**).**

$$\begin{aligned} f_{DSB-LC}(t) + n(t) &= \left[A + f(t)\right]\cos(2\pi f_c t) + n_c(t)\cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\sin(2\pi f_c t) \\ &= \underbrace{\left[A + f(t) + n_c(t)\right]}_{\text{Sería el cos}} \cdot \cos(2\pi f_c t) + \underbrace{n_s(t)}_{\text{Sería el sin}}\sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

Utilizando un triángulo rectángulo hallaremos las características de φ:



Sabemos ahora que para obtener la expresión que queremos debemos multiplicar y dividir por la hipotenusa del triángulo:

$$= \frac{\sqrt{\left[A + f(t) + n_c(t)\right]^2 + \left[n_s(t)\right]^2}}{\sqrt{\left[A + f(t) + n_c(t)\right]^2 + \left[n_s(t)\right]^2}} \times \left\{\left[A + f(t) + n_c(t)\right] \cdot \cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\sin(2\pi f_c t)\right\}$$

$$= \sqrt{\left[A + f(t) + n_c(t)\right]^2 + \left[n_s(t)\right]^2} \times \left\{ \underbrace{\frac{\left[A + f(t) + n_c(t)\right]}{\sqrt{\left[A + f(t) + n_c(t)\right]^2 + \left[n_s(t)\right]^2}}}_{\cos(\varphi)} \cdot \cos(2\pi f_c t) + \underbrace{\frac{n_s(t)}{\sqrt{\left[A + f(t) + n_c(t)\right]^2 + \left[n_s(t)\right]^2}}}_{\sin(\varphi)} \sin(2\pi f_c t) \right\}$$

Pero como lo que nos interesa es la envolvente entonces:

$$E(t) = \sqrt{\left[A + f(t) + n_c(t)\right]^2 + \left[n_s(t)\right]^2}$$

Esta expresión es algo difícil de analizar pero podemos determinar 2 casos para trabajar:

a) Ruido Pequeño: $A + f(t) >> n(t)$

En este caso la envolvente se puede transformar al descartar el valor de $\left[n_s(t)\right]^2$ pues el otro término será mucho mayor:

$$\begin{aligned} E(t) &= \sqrt{\left[A + f(t) + n_c(t)\right]^2 + \left[n_s(t)\right]^2} \\ &= \sqrt{\left[A + f(t) + n_c(t)\right]^2} \\ &= A + f(t) + n_c(t) \end{aligned}$$

Y luego del condensador:

Para hallar So

Para hallar No

$$f_d(t) = f(t) + n_c(t)$$

Obtenemos a partir de aquí:

$$So = \overline{f(t)^2}$$

$$No = \overline{n_c(t)^2} = \overline{n(t)^2} = 2NB$$

(recordemos la relación de potencias en el ruido pasa banda – banda estrecha)

Para el cálculo de la relación señal a ruido tendríamos:

$$\Rightarrow SNRo = \frac{So}{No} = \frac{\overline{f(t)^2}}{2NB}$$

Ahora para comparar calculemos la relación entre SNRo y γ:

$$\gamma = \frac{Si}{NB} = \frac{\dfrac{A^2 + \overline{f(t)^2}}{2}}{NB} = \frac{A^2 + \overline{f(t)^2}}{2NB}$$

$$\Rightarrow SNRo = \frac{So}{No} = \frac{\overline{f(t)^2}}{2NB} = \gamma\left[\frac{\overline{f(t)^2}}{A^2 + \overline{f(t)^2}}\right]$$

b) Ruido grande: $n(t) >> A + f(t)$

En este caso al ser el ruido mayor que la señal el efecto se hace multiplicativo. Esto lo verificaremos utilizando una modificación del modelo de ruido es decir lo analizaremos en términos de su magnitud y fase. Veamos:

$$\begin{aligned} n(t) &= n_c(t)\cdot\cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\cdot\sin(2\pi f_c t) \\ &= r(t)\cdot\cos[2\pi f_c t + \theta(t)] \end{aligned}$$

Donde:

$$r(t) = \sqrt{(n_c(t))^2 + (n_s(t))^2} \quad \text{y} \quad \theta(t) = -tg^{-1}\left(\frac{n_s(t)}{n_c(t)}\right)$$

Reemplazando esta expresión:

$$f_{DSB-LC}(t) + n(t) = [A + f(t)]\cos(2\pi f_c t) + r(t)\cos(2\pi f_c t + \theta(t))$$

Y realizando unos ajustes antes de hallar la envolvente:

$$\begin{aligned} &= [A + f(t)]\cos(2\pi f_c t + \theta(t) - \theta(t)) + r(t)\cos(2\pi f_c t + \theta(t)) \\ &= [A + f(t)]\cos(2\pi f_c t + \theta(t))\cos(\theta(t)) - [A + f(t)]\sin(2\pi f_c t + \theta(t))\sin(\theta(t)) + r(t)\cos(2\pi f_c t + \theta(t)) \\ &= \underbrace{\{[A + f(t)]\cos(\theta(t)) + r(t)\}}_{\text{Sería un cos }(\varphi)}\cos(2\pi f_c t + \theta(t) - \underbrace{[A + f(t)]\sin(\theta(t))}_{\text{Sería un sin}}\sin(2\pi f_c t + \theta(t)) \end{aligned}$$

Entonces la envolvente sería:

$$E(t) = \sqrt{\{[A + f(t)]\cos(\theta(t)) + r(t)\}^2 + \{[A + f(t)]\sin(\theta(t))\}^2}$$

Trabajando con la condición de ruido grande el segundo término será mucho menor que el primero que contiene a la magnitud de r(t), con lo que obtendríamos:

$$\begin{aligned} E(t) &= \sqrt{\{[A + f(t)]\cos(\theta(t)) + r(t)\}^2} \\ &= [A + f(t)]\cos(\theta(t)) + r(t) \end{aligned}$$

Pero en esta ocasión en término de la señal está multiplicado por un término de ruido con lo cual no podríamos recuperar la información. El momento en el cual el ruido deja de tener un efecto aditivo a la salida del demodulador y pasa a tener un efecto multiplicativo es denominado **efecto umbral**

TAREA 3.2: Comparar la SNRi con la SNRo y con el valor de γ; ¿La relación señal a ruido mejora? ¿Cuánto mejora o no mejora? ¿Qué ocurre con la modulación de un tono y el índice de modulación?¿Hay valores de SNR o γ para los cuales aparece el efecto umbral?