PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
SECCIÓN DE ELECTRICIDAD Y ELECTRÓNICA

TEORÍA DE CONTROL 2

Laboratorio N°2

Introducción al diseño de sistemas de control continuo con variables de estado

Salvador Yábar

20200408

H0821

2024-1

1. Objetivos

- Determinar la estabilidad y controlabilidad de un sistema
- Diseñar un controlador a partir del método de polos dominantes
- Utilizar Ackermann para comprobar la solución
- Simular el sistema con controlador e identificar las variaciones ante cambios de condiciones iniciales y de perturbación

2. Desarrollo

2.1 Cálculo a mano alzada y calculadora

a) En base al modelo en Espacio de Estados, determinar si la planta (barco) es estable y controlable

Del laboratorio pasado, se tiene el modelo en Espacio de Estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -0.4 & 0.8 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.45 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]\, u$$

Para hallar los polos del sistema, se encuentra los valores propios de la matriz A:

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -0.4 & 0.8 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda+0.4 & -0.8 \\ 0 & 0 & \lambda+4 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 + 4.4\lambda^2 + 5.6\lambda + 16 = 0$$

De la ecuación, se hallan los polos:

$$\lambda_1 = -4 \;,\quad \lambda_2 = -0.2 + 1.99i \;,\quad \lambda_3 = -0.2 - 1.99i$$

Se observa que los 3 polos de la planta son negativos. Por lo tanto, por el criterio de estabilidad, se concluye que el sistema es estable.

Para determinar si el sistema es controlable, se halla la matriz de controlabilidad a partir de A y B.

Matriz de controlabilidad:

$$\mathcal{C} = [\,B \;\; AB \;\; A^2B\,] \Rightarrow \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.45 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -0.4 & 0.8 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.45 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.45 \times 0.8 \\ 1.45 \times -4 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} \times 1.45 \\ a_{23} \times 1.45 \\ a_{33} \times 1.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.16 \\ -5.104 \\ 23.2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -0.4 & 0.8 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -0.4 & 0.8 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0.8 \\ a_{21} & a_{22} & -3.52 \\ a_{31} & a_{32} & 16 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.16 \\ 0 & 1.16 & -5.104 \\ 1.45 & -5.8 & 23.2 \end{bmatrix}$$

Se halla el determinante de la matriz de controlabilidad:

$$\det(\mathcal{C}) = -1.9511 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(\mathcal{C}) = 3 = n$$

Como el determinante es distinto de 0, se determina que el rango de la matriz de controlabilidad es de 3. Como el sistema es de orden 3, y el rango es igual a este orden, se concluye que el sistema es controlable.

b) Diseñar el controlador a mano alzada, comparando el polinomio característico deseado y el polinomio característico de lazo cerrado. Verificar solución con Ackermann.

Los requisitos de diseño del sistema son:

$$Mp \;\leq 15\%$$

$$T_{es} \approx 4\; segundos$$

Se elige un máximo sobreimpulso de 12% para dejar un margen, el T_{es} se establece en 4 segundos.

A partir de esto, se tiene:

$$\sigma_d \approx \frac{4}{T_s} = 1$$

$$W_d = \frac{-\pi}{\ln(0.12)} = 1.4817$$

$$S_{1,2} = -\sigma_d \pm W_d j$$

Se determinan los polos 1 y 2:

$$S_1 = -1 + 1.4817j$$
$$S_2 = -1 - 1.4817j$$

Se define un tercer polo alejado de los otros dos para que sea no dominante, s_3 = -10.

Con esto, se halla la ecuación característica:

$$\alpha_c(s) = (S-S_1)(S-S_2)(S-S_3) = (S^2+2s+3.19543)(s+10) = S^3+2s^2+3.19543s+10s^2+20s+31.9543$$

$$\alpha_c(S) = s^3 + 12s^2 + 23.19543s + 31.9543$$

Ahora, se determina el polinomio característico de lazo cerrado:

$$a_K(s) = \det(\underbrace{sI - A + BK})$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -0.4 & 0.8 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 4 & s+0.4 & -0.8 \\ 0 & 0 & s+4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.45K_1 & 1.45K_2 & 1.45K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 4 & s+0.4 & -0.8 \\ 1.45K_1 & 1.45K_2 & 4+1.45K_3+s \end{pmatrix}$$

$$\det(sI - A + BK) = s^3 + s^2(1.45K_3 + 4.4) + s(5.6 + 1.16K_2 + 0.58K_3) + (5.8K_3 + 1.16K_1 + 16)$$

Para determinar los valores de K, se comparan los coeficientes de ambos polinomios:

$$s^2: \quad 1.45K_3 + 4.4 = 12 \rightarrow K_3 = 5.24138$$

$$s: \quad 5.6 + 1.16K_2 + 0.58K_3 = 23.19543 \rightarrow K_2 = \frac{23.19543 - 0.58(5.24138) - 5.6}{1.16} = 12.54778$$

$$s^0: \quad 5.8(5.24138) + 1.16K_1 + 16 = 31.9543 \rightarrow K_1 = -12.4532$$

Finalmente, se obtienen los valores de K:

$$K = [-12.4532 \quad 12.54778 \quad 5.24138]$$

Para comprobar por Ackermann, se reemplaza A en la ecuación característica.

Empleando la matriz de controlabilidad hallada con anterioridad, se escribe la ecuación para hallar K.

Los valores hallados son prácticamente los mismos que por el método manual. Se comprueba correctamente la respuesta.

$$\phi(A) = A^3 + \alpha_1 A^2 + \alpha_2 A + \alpha_3 I,$$

donde $\alpha_1 = 12$, $\alpha_2 = 23.19543$, $\alpha_3 = 31.9543$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -0.4 & 0.8 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -0.4 & 0.8 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -0.4 & 0.8 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -0.4 & 0.8 \\ 1.6 & -3.84 & -3.52 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^3 = A.A^2 = \begin{bmatrix} 1.6 & -3.84 & -3.52 \\ 15.36 & 3.136 & 11.008 \\ 0 & 0 & -64 \end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = \begin{pmatrix} 81.5543 & 24.1554 & -13.12 \\ -96.6217 & 71.8921 & 71.8043 \\ 0 & 0 & -316.8274 \end{pmatrix}$$

$$K = [0 \quad 0 \quad 1]\, C^{-1} . \phi(A) = [-12.4532 \quad 12.5478 \quad 5.2414]$$

2.2 Usando Matlab

Se definen las matrices A, B, y C

```
A = [0 1 0; -4 -0.4 0.8; 0 0 -4]
B = [0; 0; 1.45]
C = [1 0 0]
```

Se comprueba la controlabilidad del sistema mediante el determinante de la matriz de controlabilidad Co.

Se establecen los parámetros deseados para el sistema y se hallan los polos.

```
syms s

%Controlabilidad
Co = ctrb(A,B)
det_Co = det(Co)  %el sistema es controlable

%Dinámica deseada
%Usando polos dominantes
Tes = 4;
Mp = 0.12;
sigmad = 4/Tes;
wd = -pi*sigmad/log(Mp);

s1 = -sigmad+wd*i
s2 = -sigmad-wd*i
s3 = -10 % Polo no dominante
```

```
s1 = -1.0000 + 1.4817i
s2 = -1.0000 - 1.4817i
s3 = -10
```

Se halla el polinomio característico deseado:

```
Pdes = conv(conv([1 -s1],[1 -s2]),[1 -s3])
```

```
Pdes = 1×4
    1.0000    12.0000    23.1954    31.9543
```

Mediante este, se reemplaza A en el polinomio característico:

```
Phi_A = A^3 + Pdes(2)*A^2 + Pdes(3)*A + Pdes(4)*eye(3)
%Formula de Ackerman
K = [0 0 1]*inv(Co)*Phi_A
```

```
Phi_A = 3×3
    -14.4457   14.5554    6.0800
    -58.2217  -20.2678  -12.6757
           0         0   67.1726

K = 1×3
    -12.4532   12.5478    5.2414
```

De forma alternativa, se puede usar la función place para determinar K, con los mismos resultados:

```
K2 = place(A, B, [s1 s2 s3])
```

```
K2 = 1×3
    -12.4532   12.5478    5.2414
```

2.3 Usando Simulink y Simscape

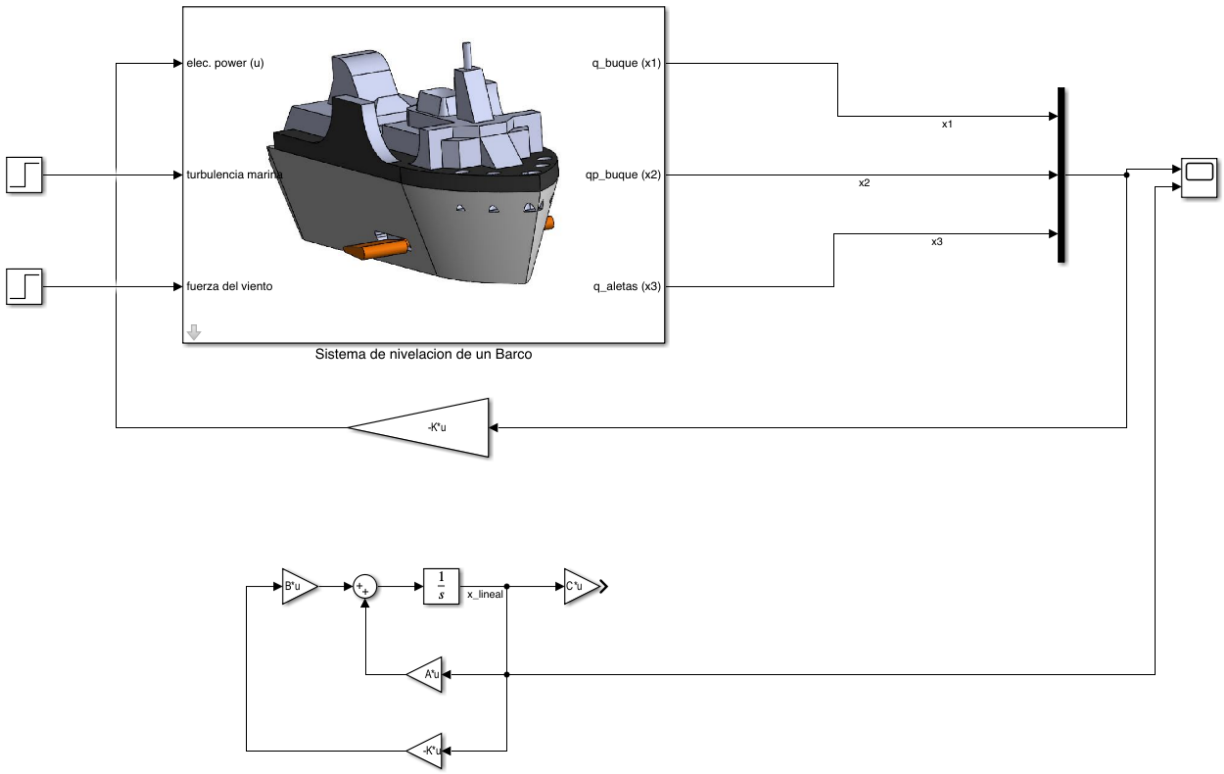

Fig 1. Sistema del barco y sistema linealizado con controlador

Primero, al observar las gráficas de los estados de ambos sistemas, estos se superponen, ya que la aproximación lineal es adecuada para este sistema.

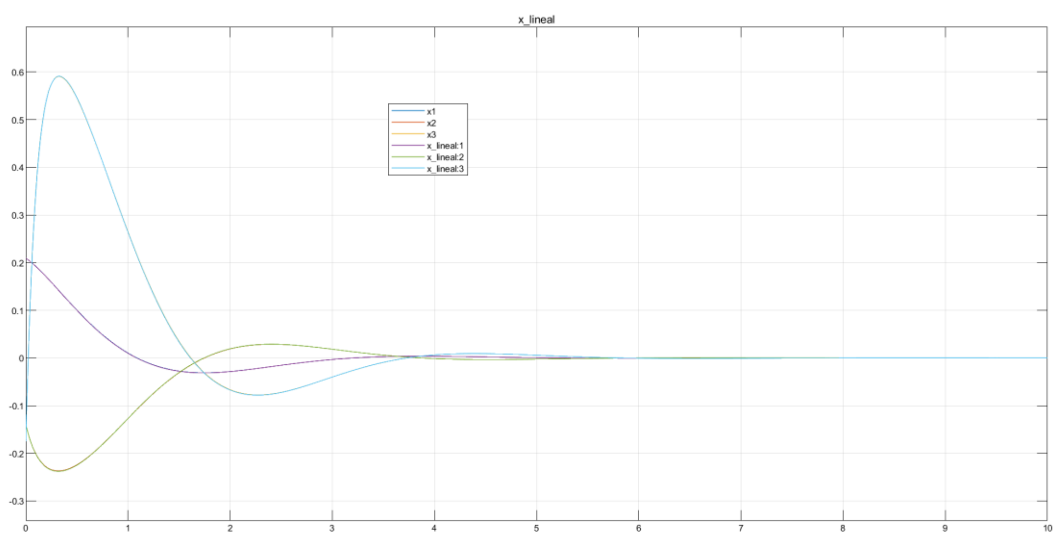

Fig 2. Sistema sin perturbaciones

Luego, se realiza la prueba con un step de 0.15 a los 6 segundos, como entrada de perturbación para el sistema del barco (turbulencia marina y fuerza del viento)

Se aprecia que, ante la perturbación, el punto de equilibrio de los estados cambia, el x1 se estabiliza en un valor de aproximadamente 0.46 rad. El tiempo de establecimiento es de aproximadamente 4 segundos. Y su sobreimpulso es de 10.2%.

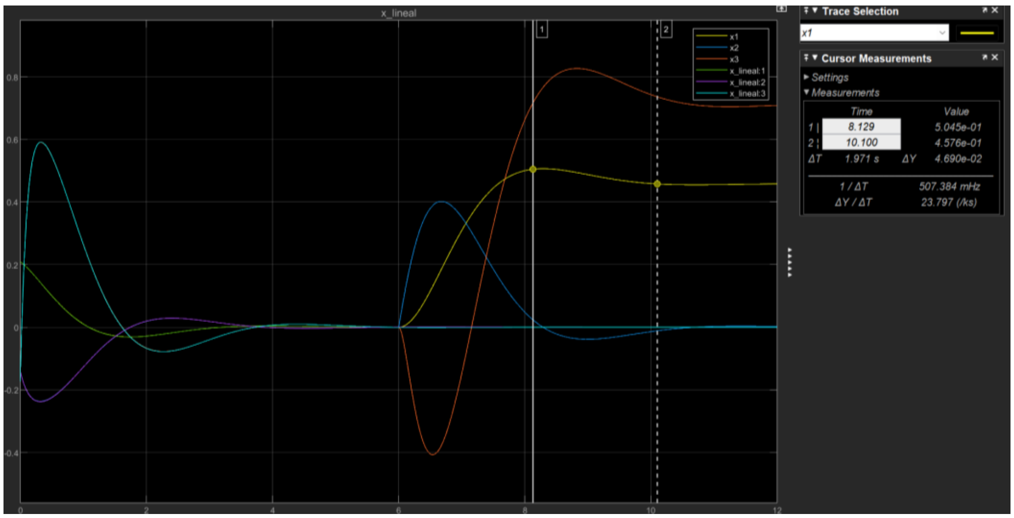

Fig 3. Sistema con ambas perturbaciones de 0.15

Ante la perturbación por turbulencia con amplitud de 0.15 a los 6 segundos, se observa un tiempo de establecimiento de aproximadamente 4 segundos, y un sobreimpulso de 12.5% para x1.

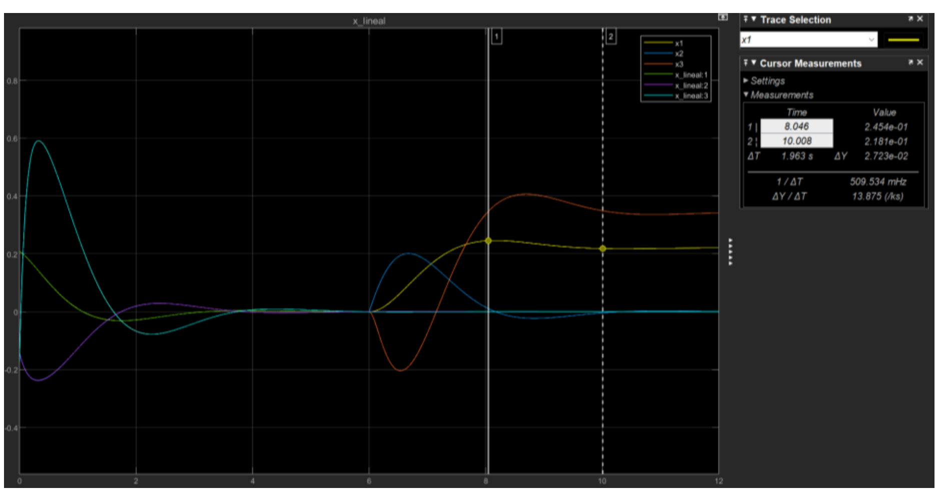

Fig 4. Sistema con perturbación por turbulencia de 0.15

De manera similar, se observa que, para una perturbación por fuerza del viento, x1 tiene un tiempo de establecimiento de 4 segundos y un sobreimpulso de 12.6%.

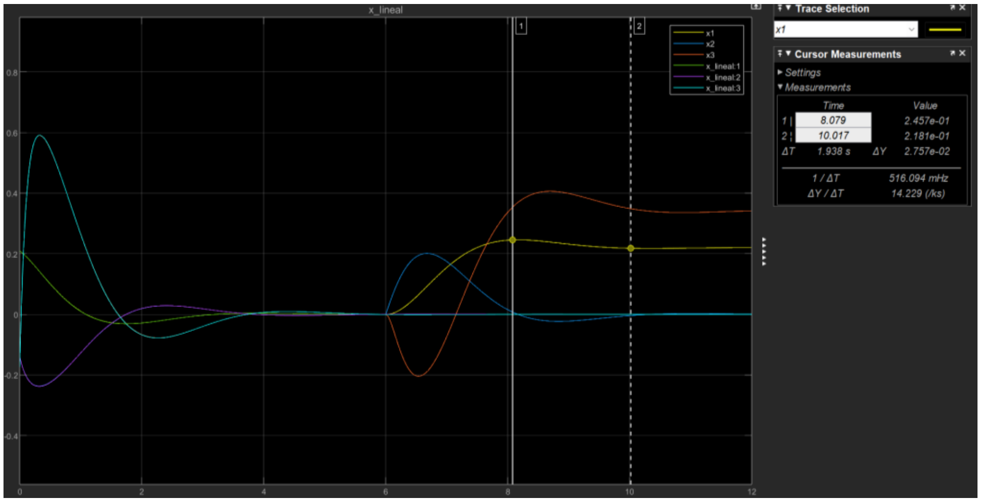

Fig 5. Sistema con perturbación por fuerza del viento de 0.15

Para una perturbación de 0.5 en ambos, se observa que el sistema no llega a converger a un valor. Esto se debe a que la aproximación usada para diseñar el controlador deja de ser apropiado para el sistema no lineal.

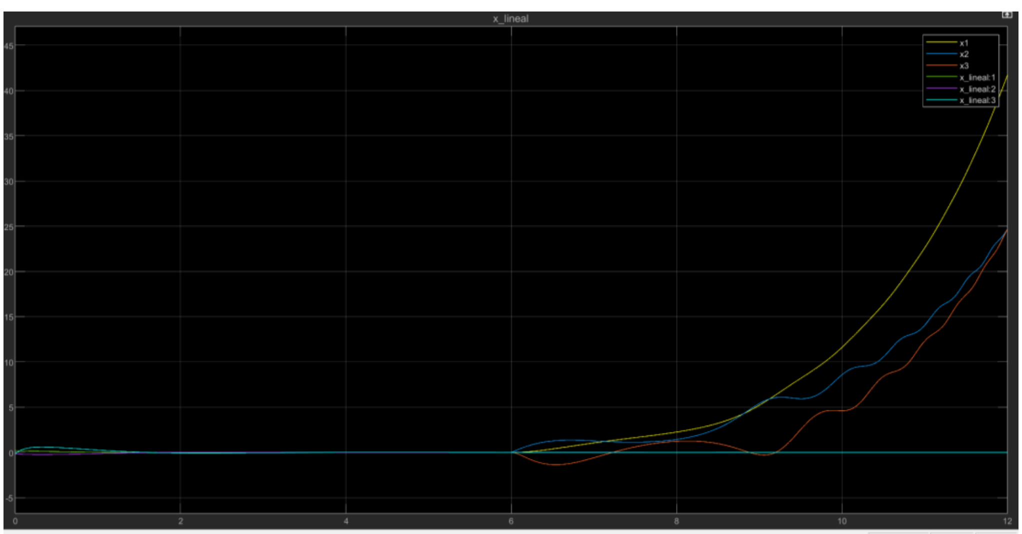

Fig 6. Sistema con perturbación de 0.5

Para una perturbación de 0.25 a los 6 segundos, el sistema aún se puede estabilizar. Sin embargo, se observa que el tiempo de establecimiento es mayor al esperado, aproximadamente de 5 segundos. El sobreimpulso es de 3.41% para x1.

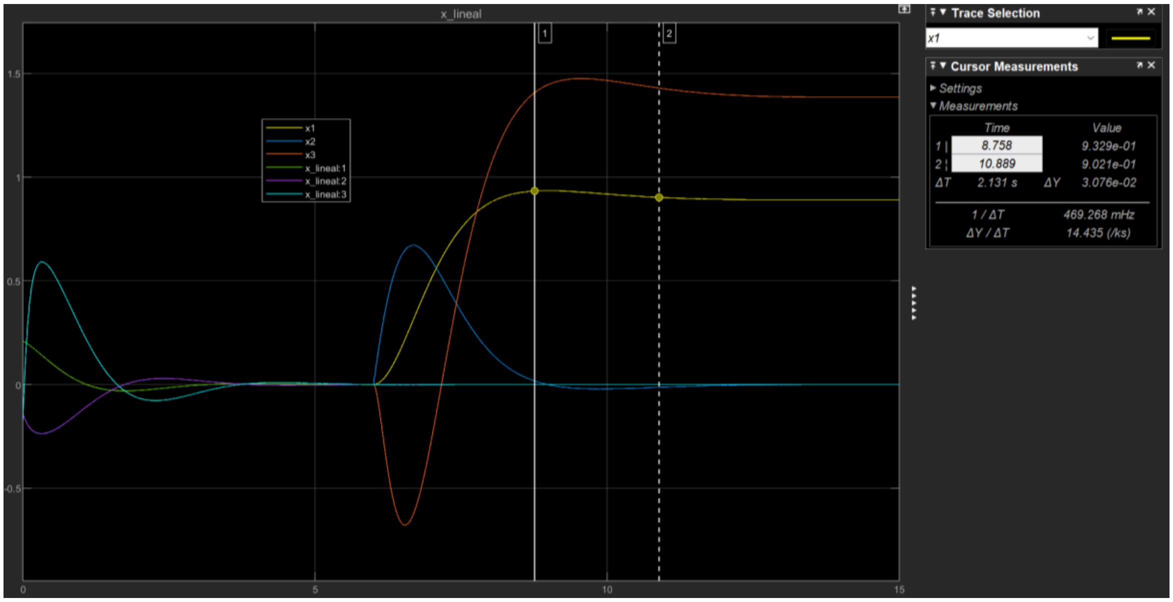

Fig 7. Sistema con perturbación por turbulencia de 0.15

Con condiciones iniciales [0.1, 0.2, 0.3], el sistema se comporta de manera similar.

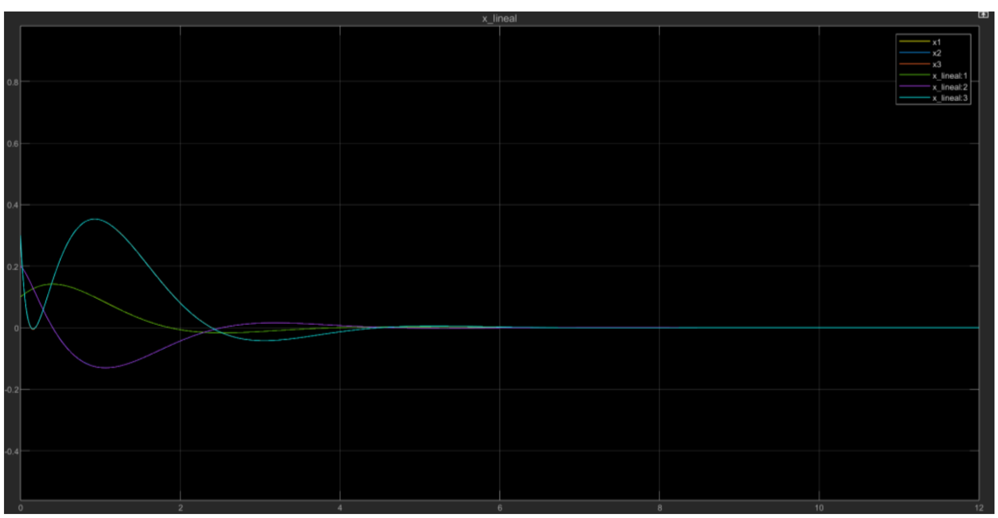

Fig 8. Sistema con condiciones iniciales [0.1, 0.2, 0.3]

Con las mismas condiciones iniciales y una perturbación de 0.15, el sistema responde de manera similar. El sobreimpulso es de 11.2%.

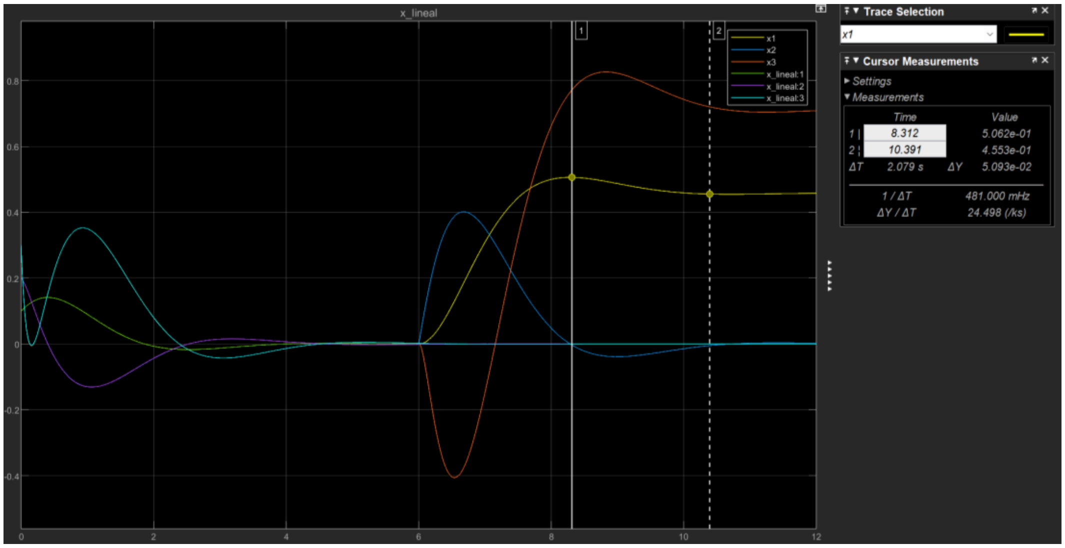

Fig 9. Sistema con condiciones iniciales distintas y perturbación

3. Conclusiones

Se pudo determinar que el sistema era estable y controlable, empleando el criterio de estabilidad y controlabilidad respectivamente.

Se diseñó el controlador mediante el método de polos dominantes, aproximando un sistema de tercer orden a uno de segundo orden. Se determinó de forma manual los valores de ganancia del controlador, y se comprobó el resultado correcto mediante la fórmula de Ackermann.

Al simular el sistema, se observó que las perturbaciones solo podían ser añadidas a la planta no lineal que contaba con entradas para las mismas. Para añadir perturbaciones a la planta linealizada, habría que considerarlas desde un inicio para elaborar el Espacio de Estados en base a estas.

Se observó que el punto de equilibrio de los estados cambió ante perturbaciones reducidas, pero se cumplió los requerimientos de diseño de tiempo de establecimiento y máximo sobreimpulso.

Ante perturbaciones mayores, se observó que el sistema deja de converger a un valor, y se vuelve inestable. Esto debido a que la aproximación lineal del sistema deja de ser válida ante una entrada de mayor magnitud.