Análisis y transmisión de señales

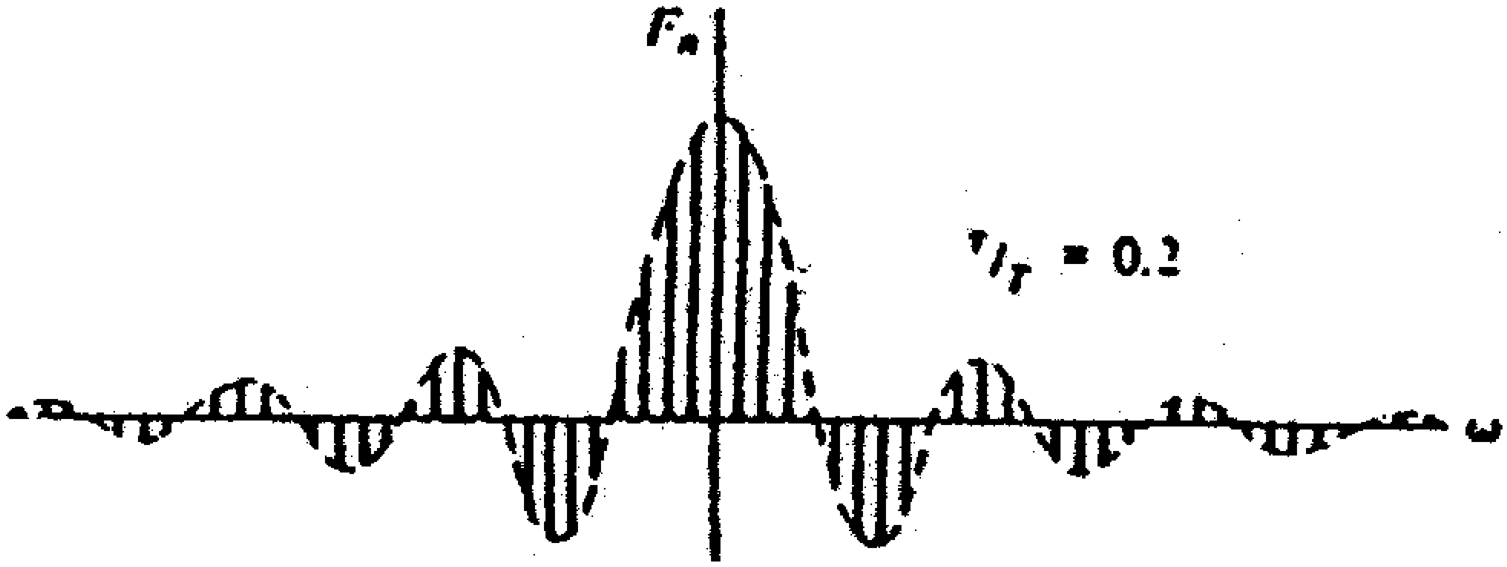
Contenidos

- 1.1. Transformada de Fourier. Propiedades. Espectro de magnitud y de fase. Convolución.
- 1.2. Transmisión de señales. Sistemas SLIT. Transmisión sin distorsión. Filtros ideales.
- 1.3 Ancho de banda y tiempo de subida.

Transformada de Fourier

Se utiliza en general para el análisis de señales no periódicas.

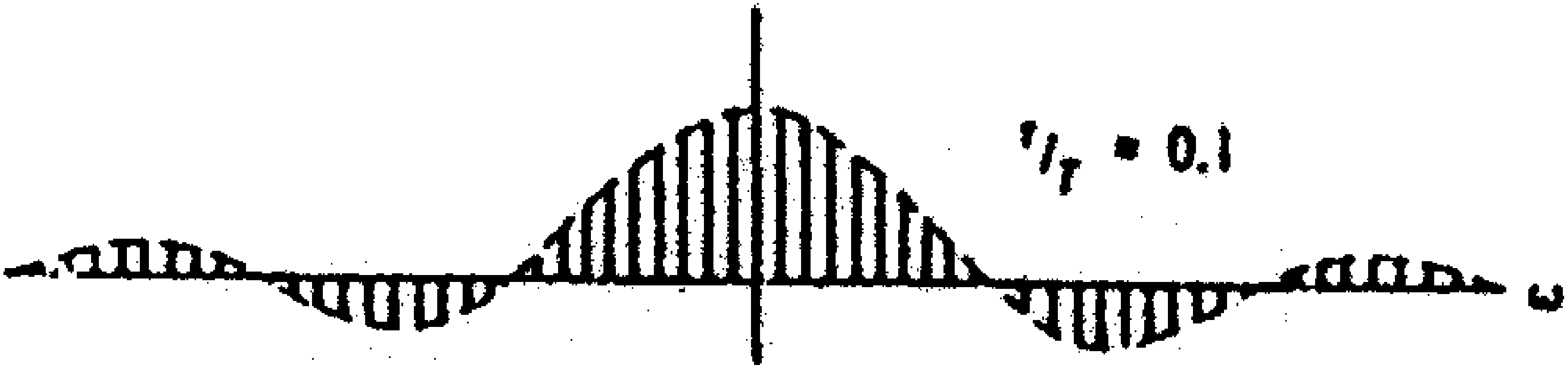
Del análisis de un tren de pulsos:



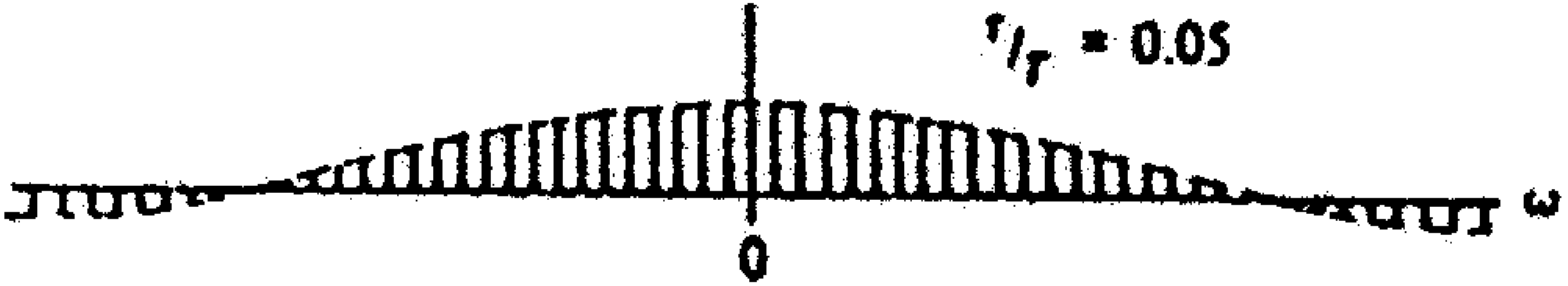
Transformada de Fourier

Al disminuir sólo el ancho τ, la amplitud máxima del espectro Fn decrece y aumenta el punto de cruce.

Se mantiene la separación entre líneas.

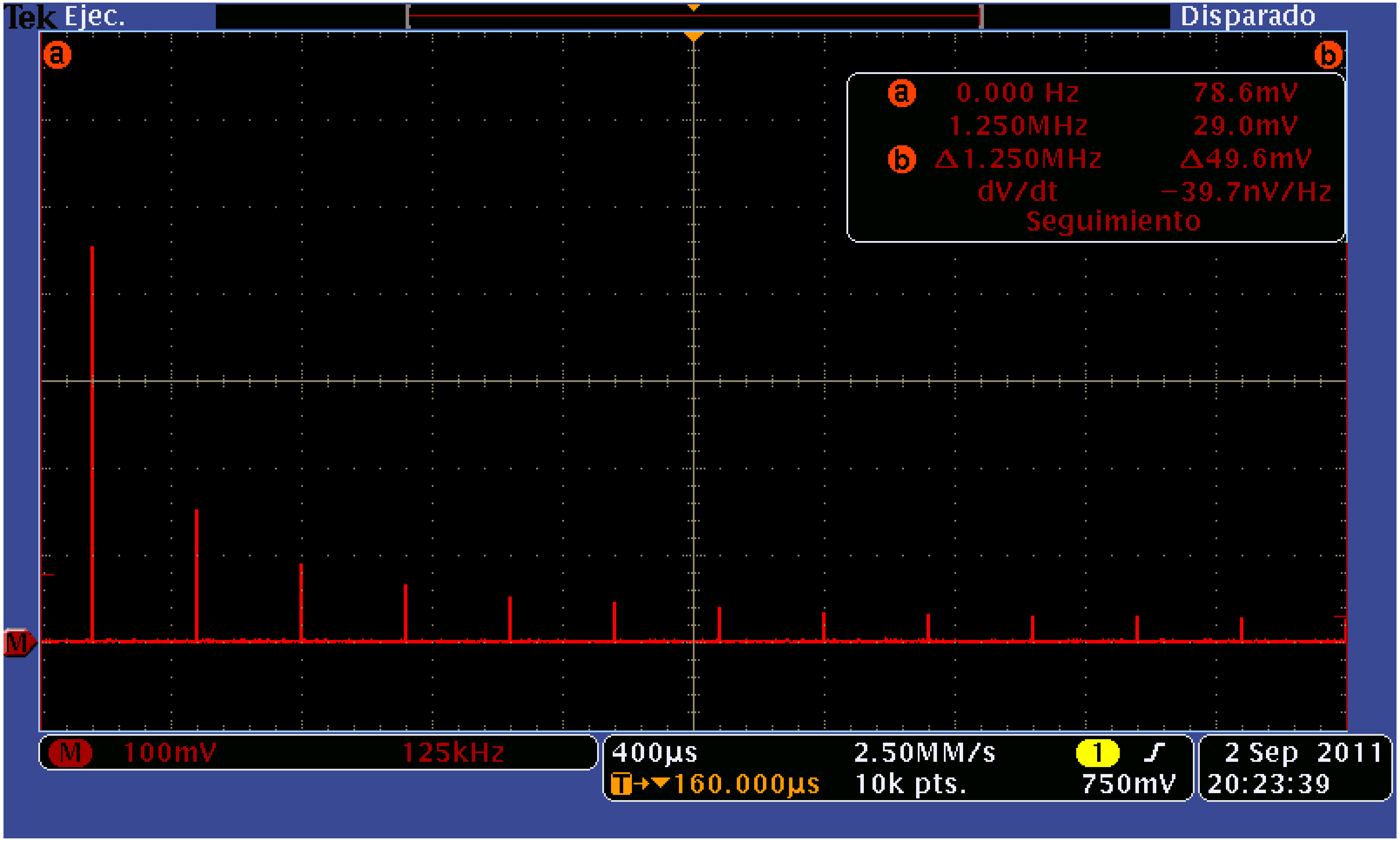


Transformada de Fourier

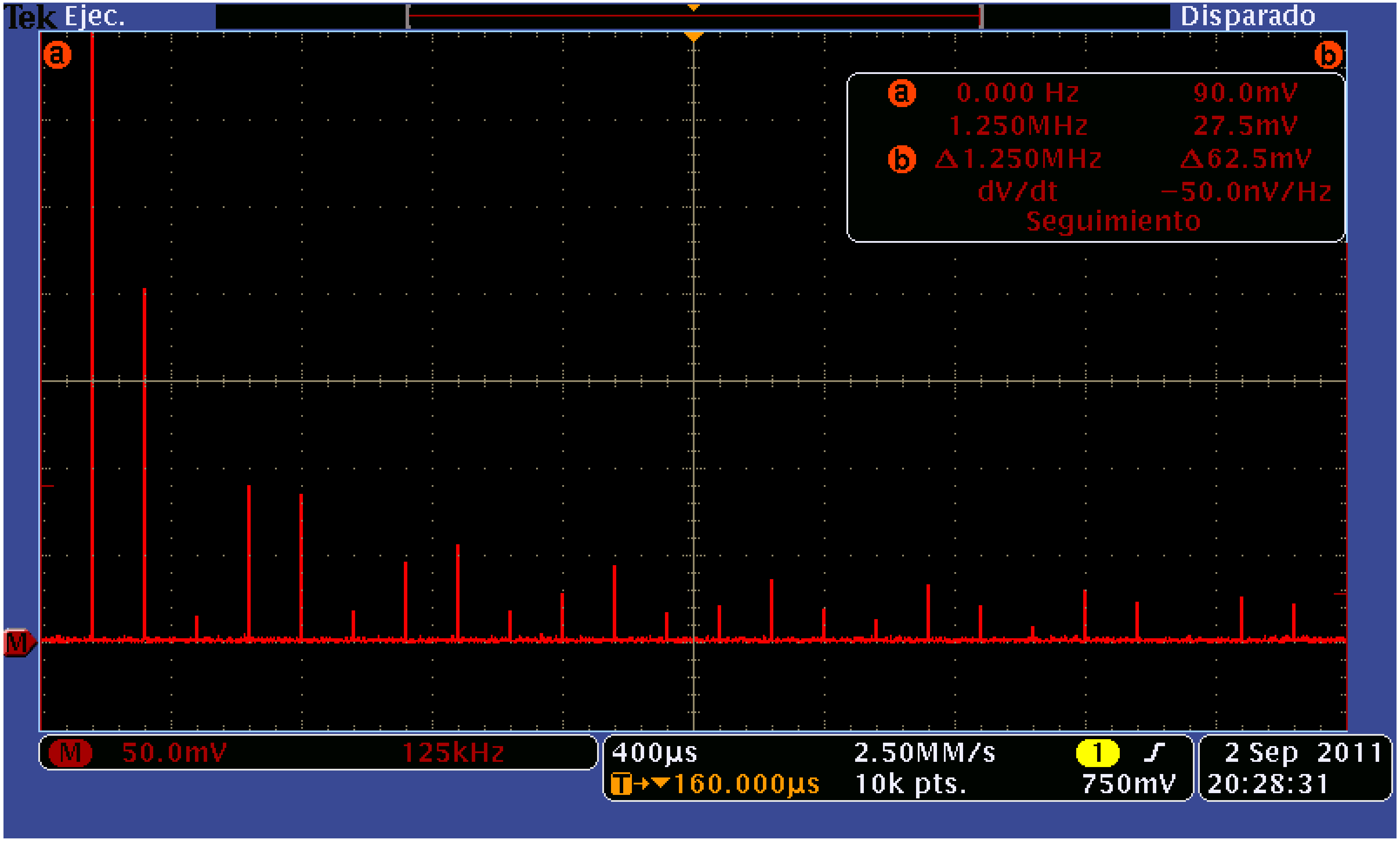


A medida que τ → 0 el espectro no se hace más continuo y el tren de pulsos sigue siendo periódica

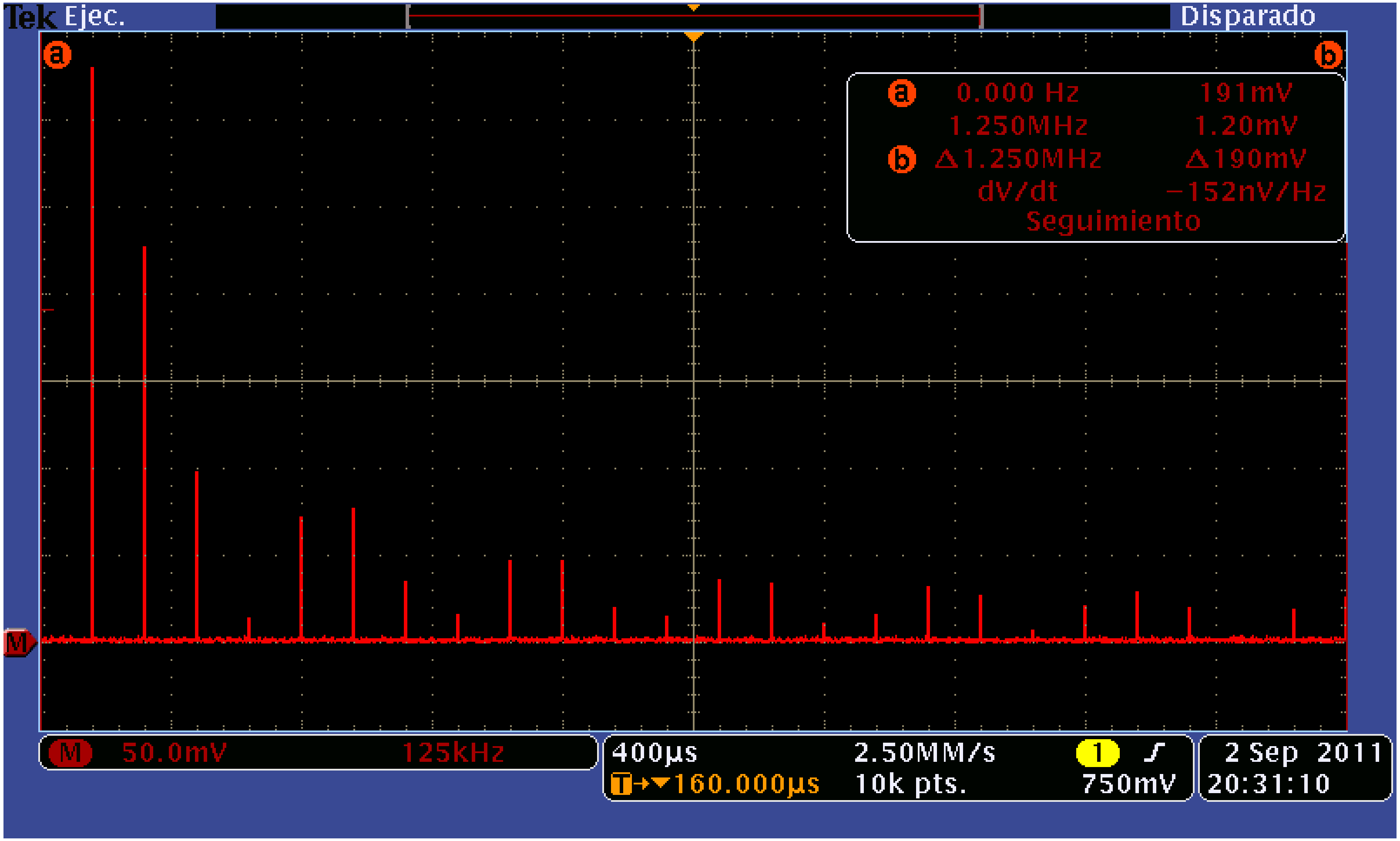
Transformada de Fourier



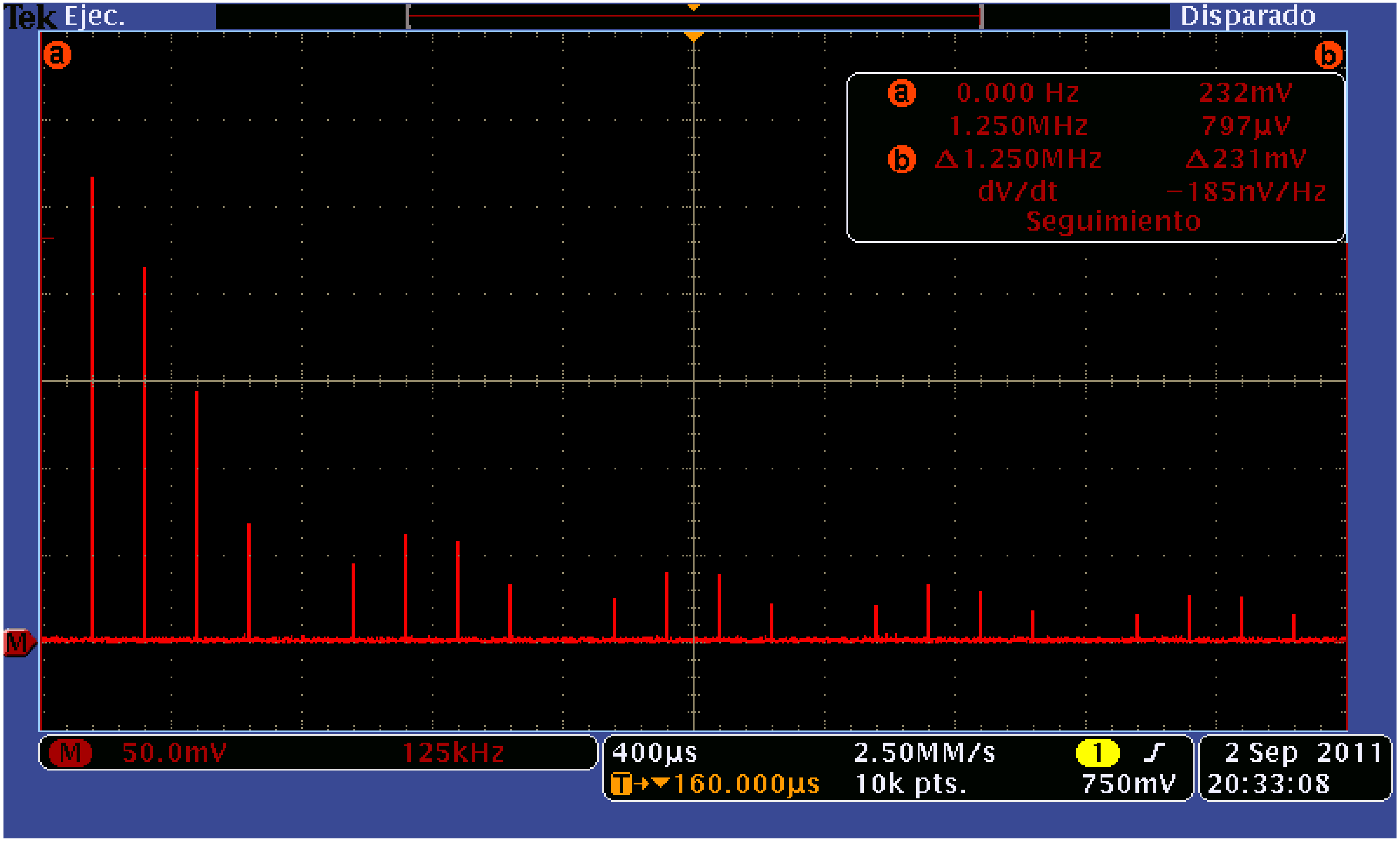
Transformada de Fourier



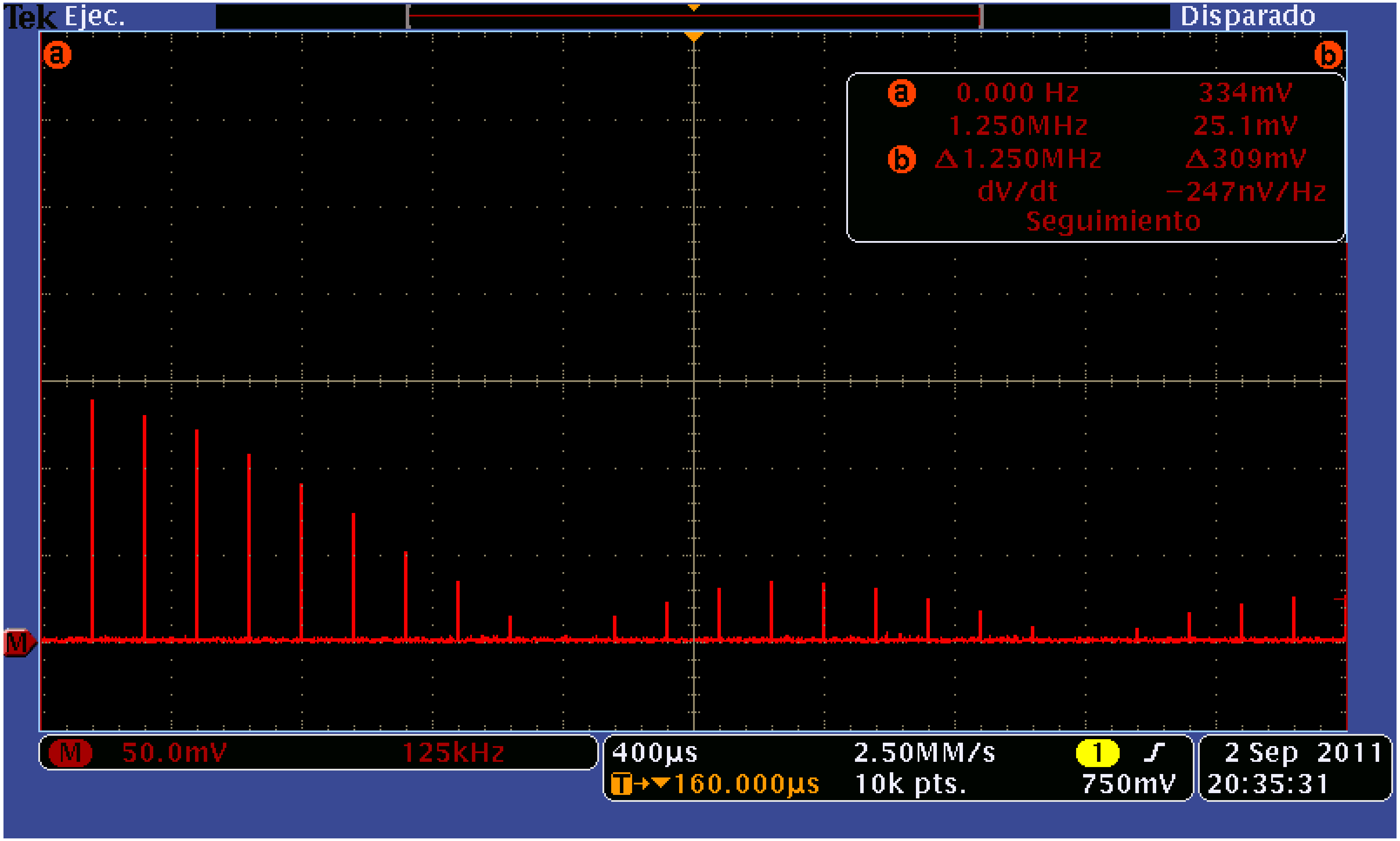
Transformada de Fourier



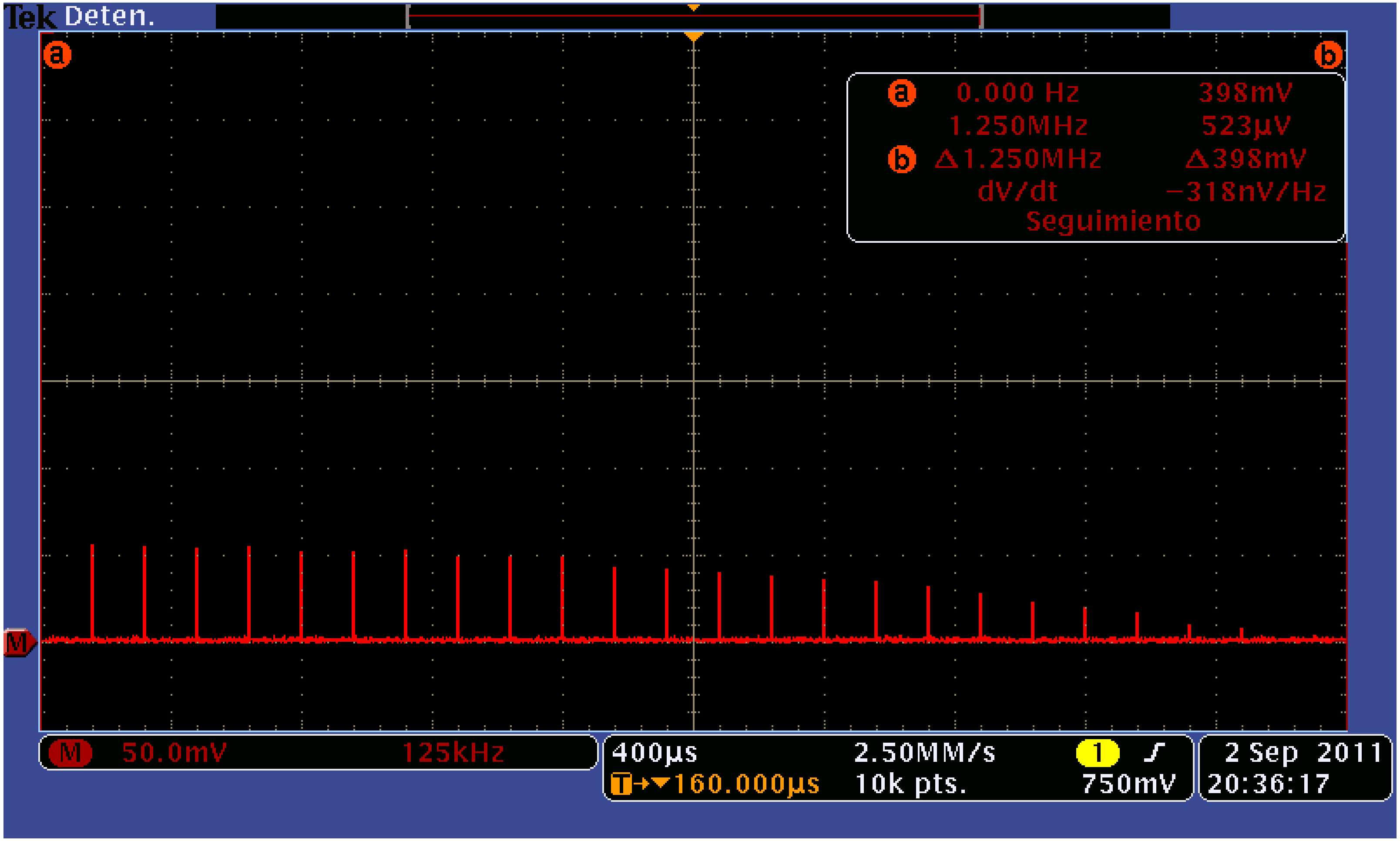
Transformada de Fourier



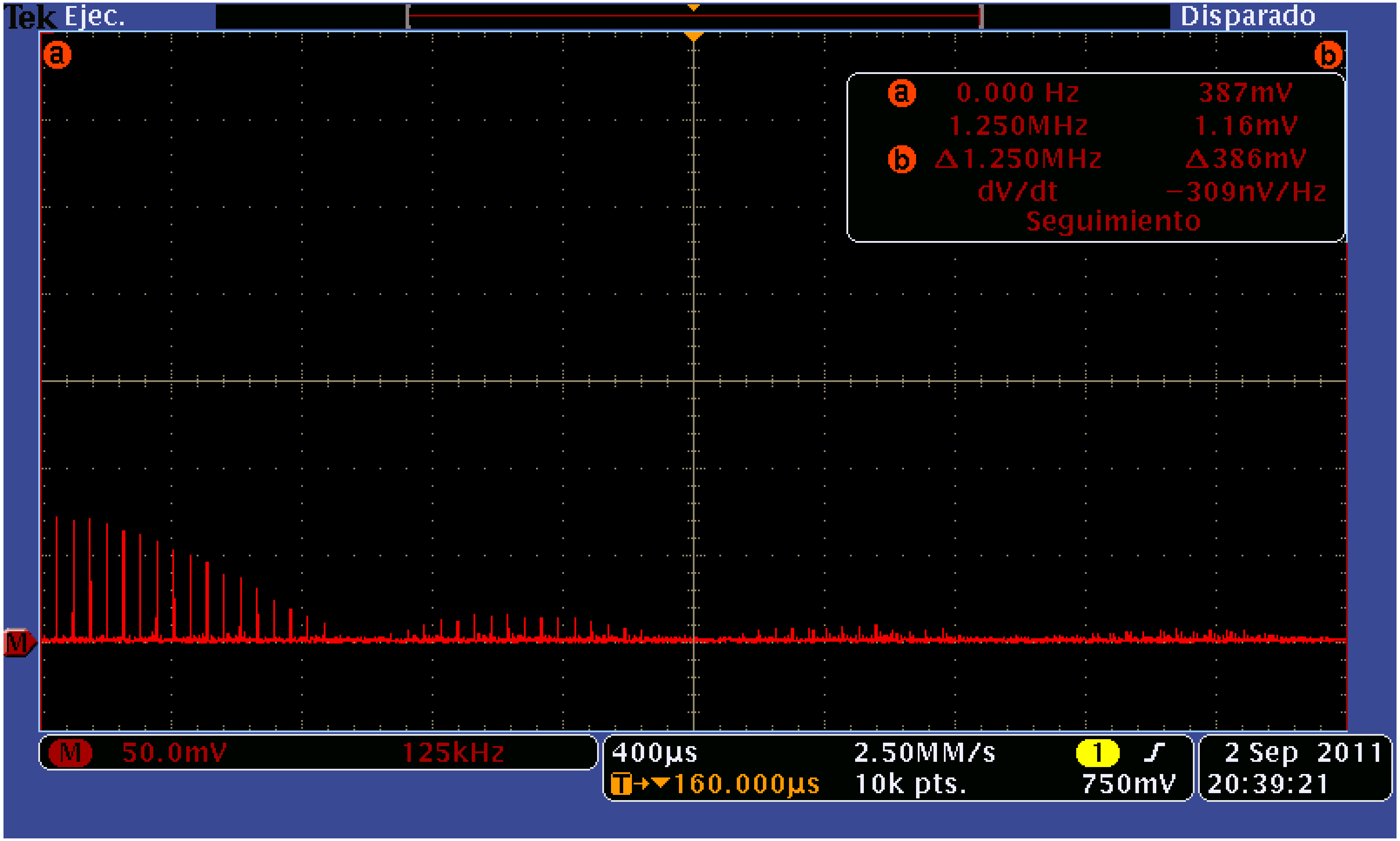
Transformada de Fourier



Transformada de Fourier

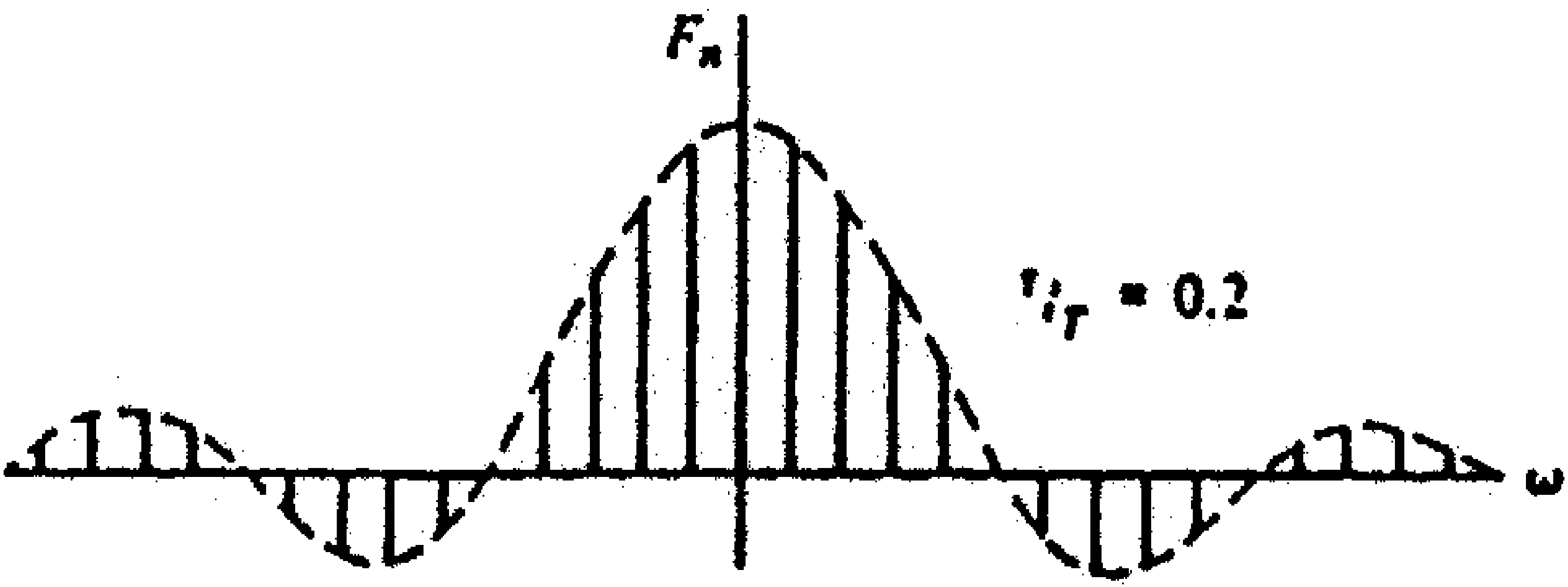


Transformada de Fourier



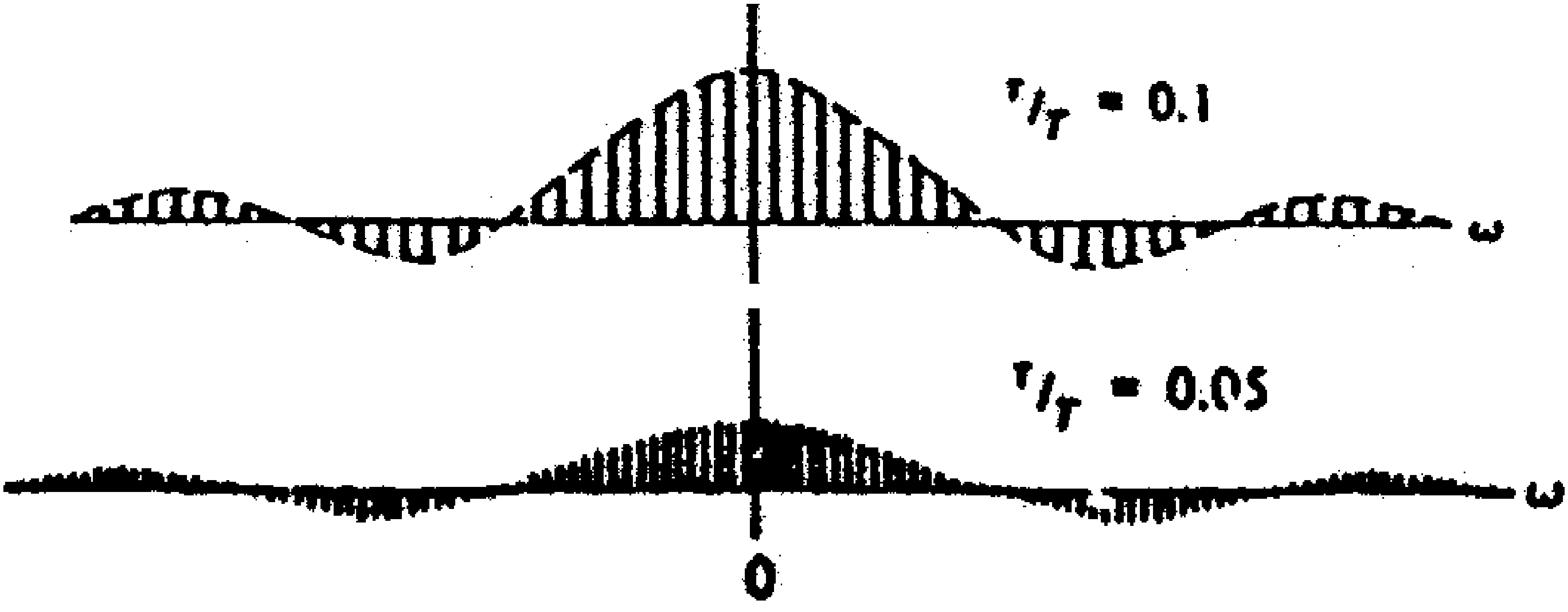
Transformada de Fourier

Si se aumenta sólo T del tren de pulsos Fn también decrece, el punto de cruce se mantiene fijo y la separación entre las líneas espectrales disminuye.

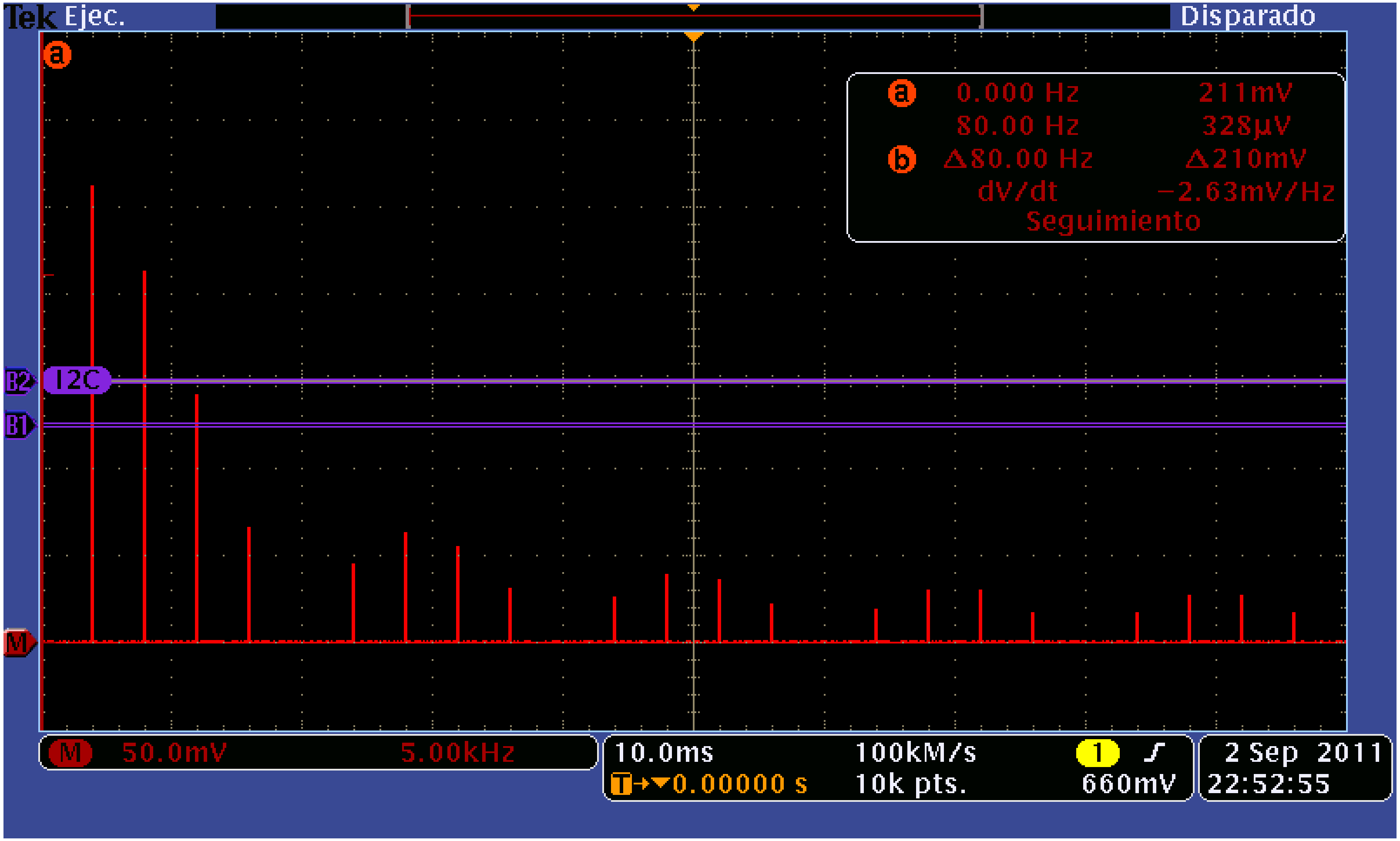


Transformada de Fourier

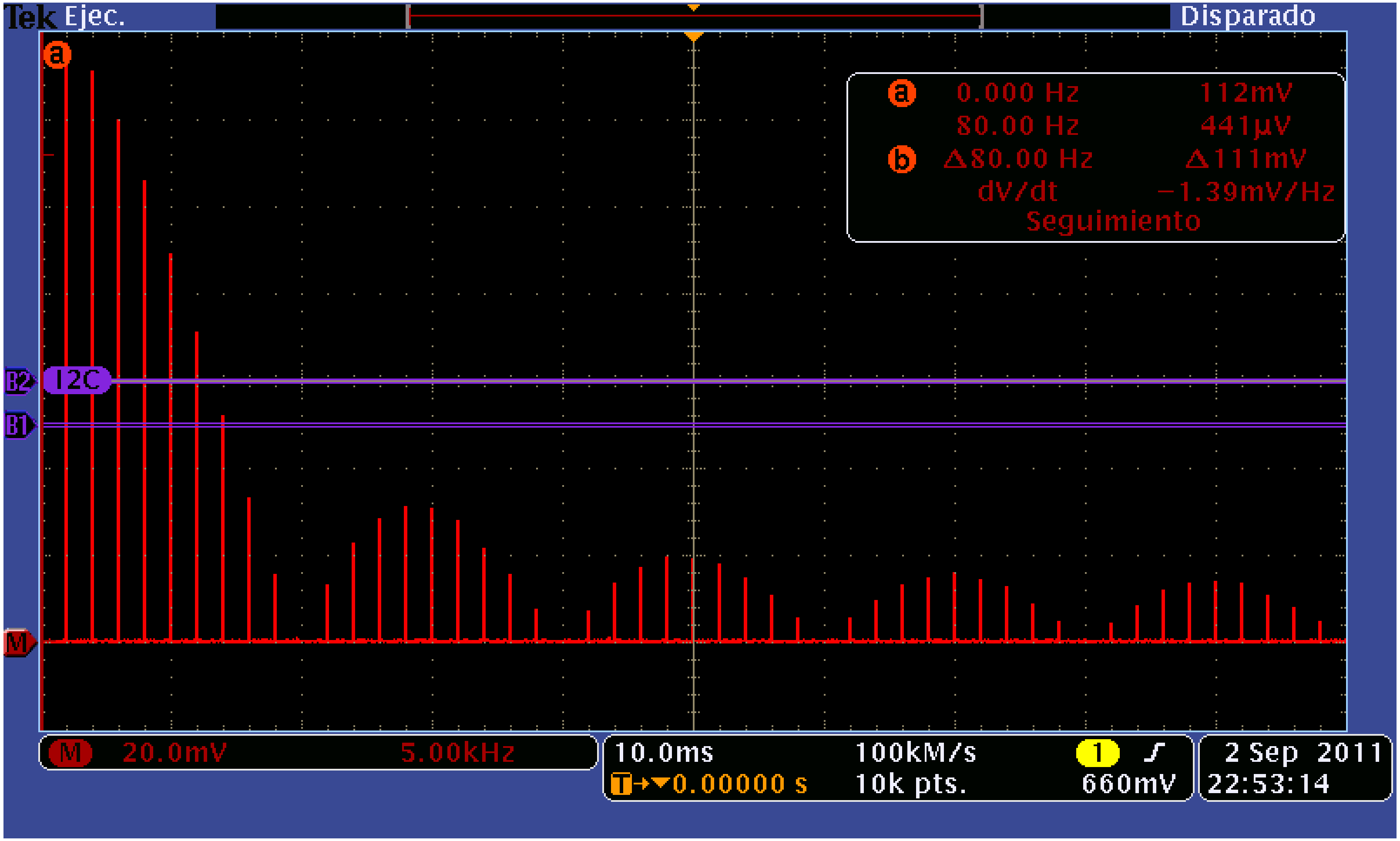
Es decir a medida que T → +∝ el espectro se hace más continuo y Fn tiende a cero.



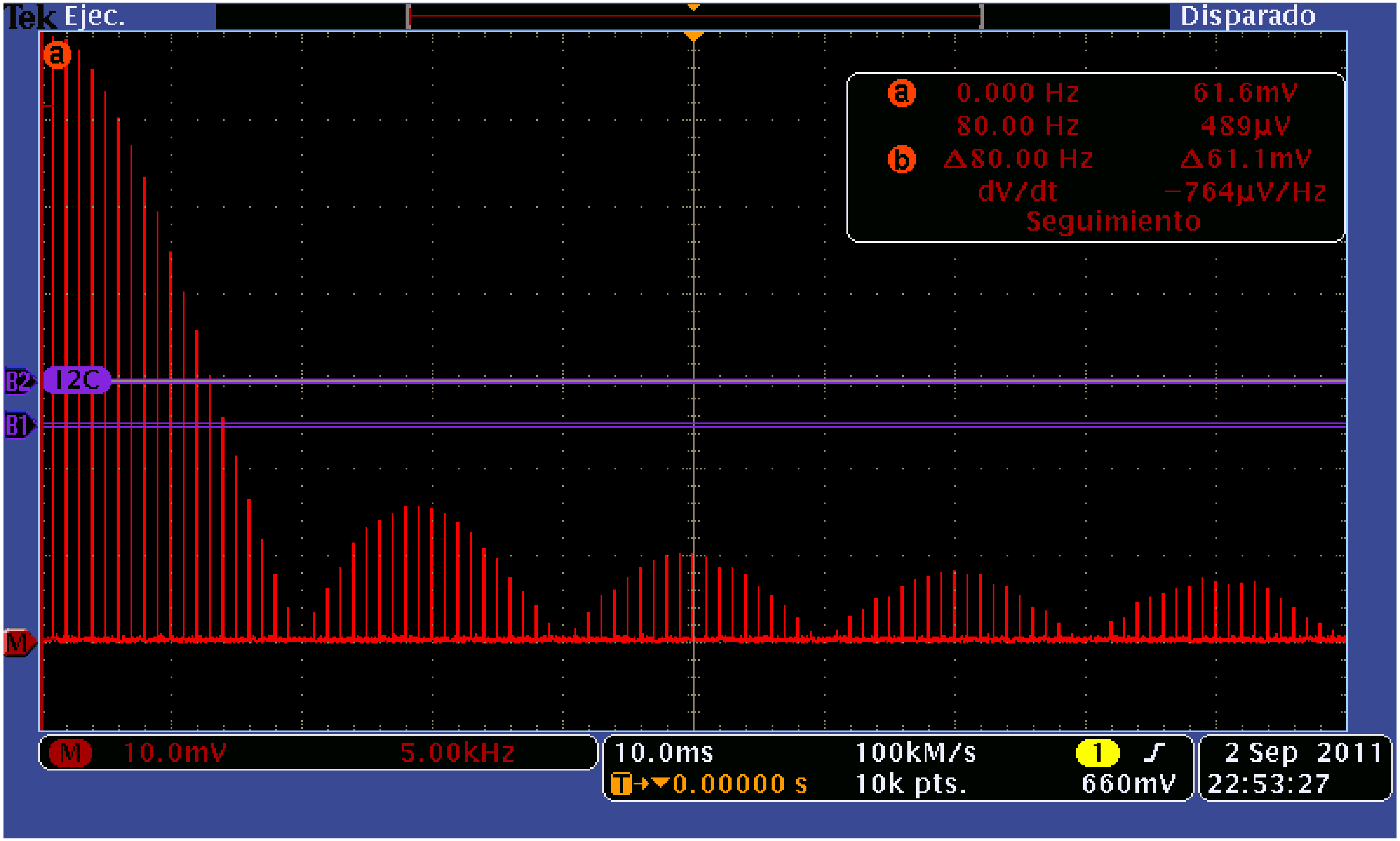
Transformada de Fourier



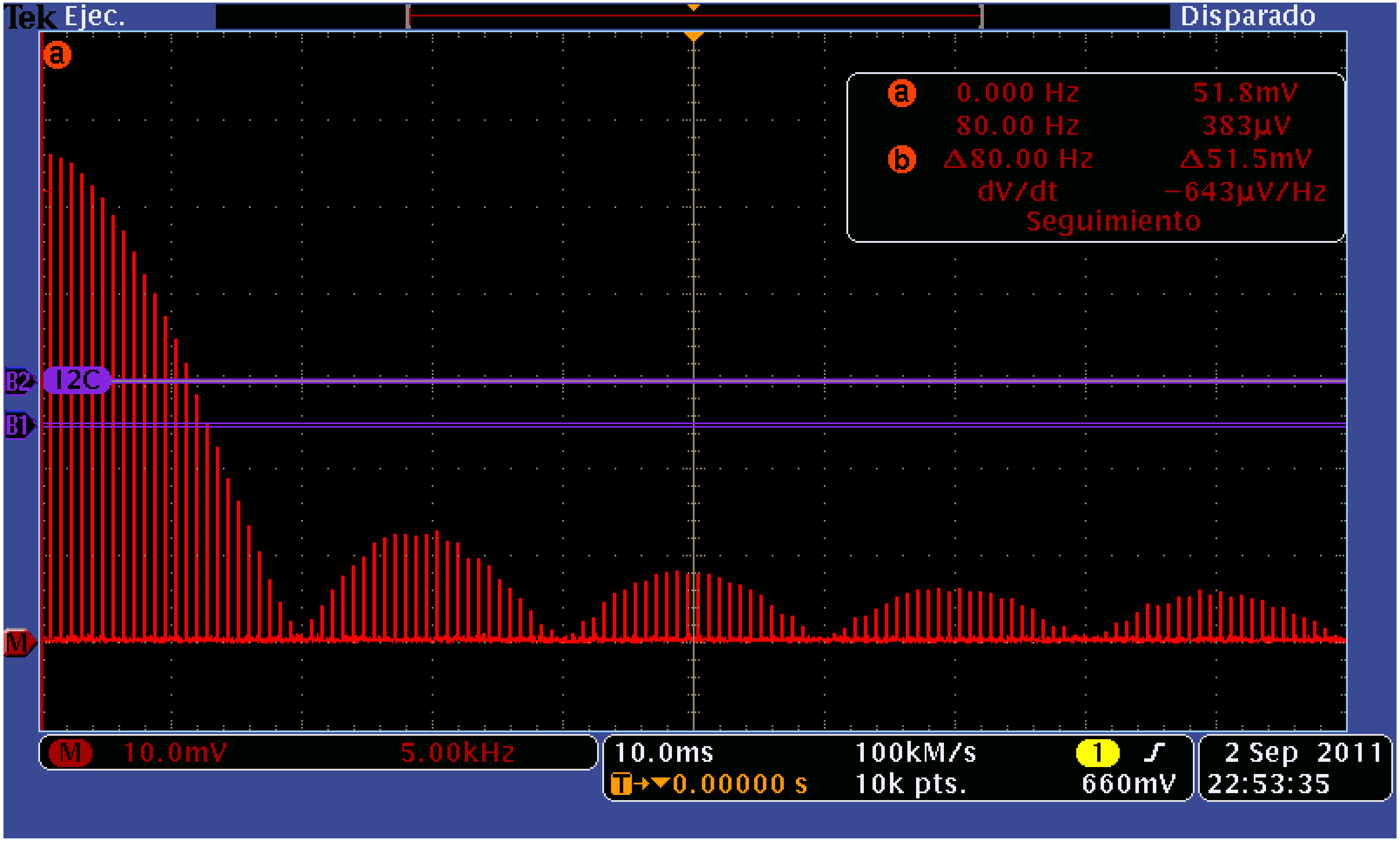
Transformada de Fourier



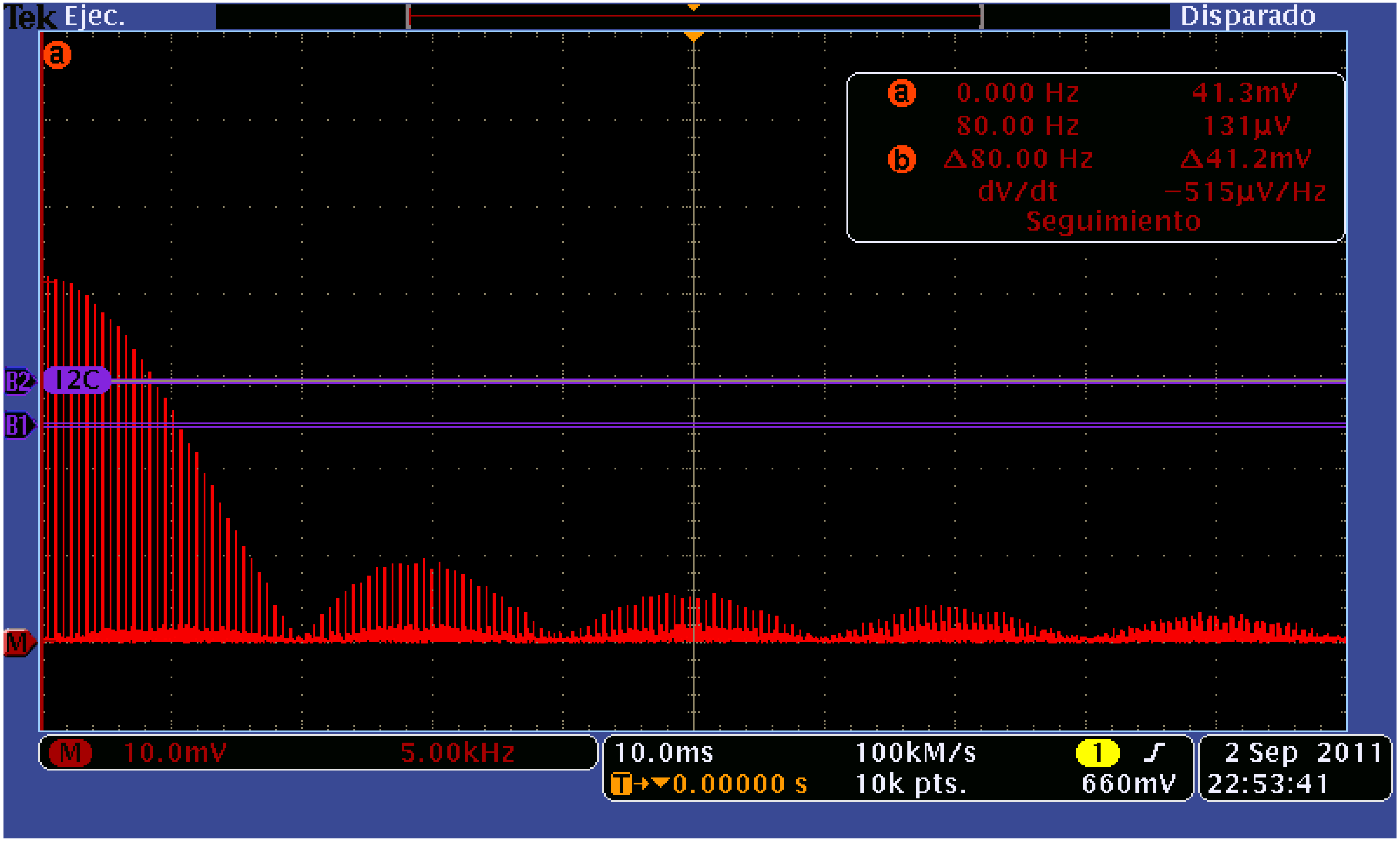
Transformada de Fourier



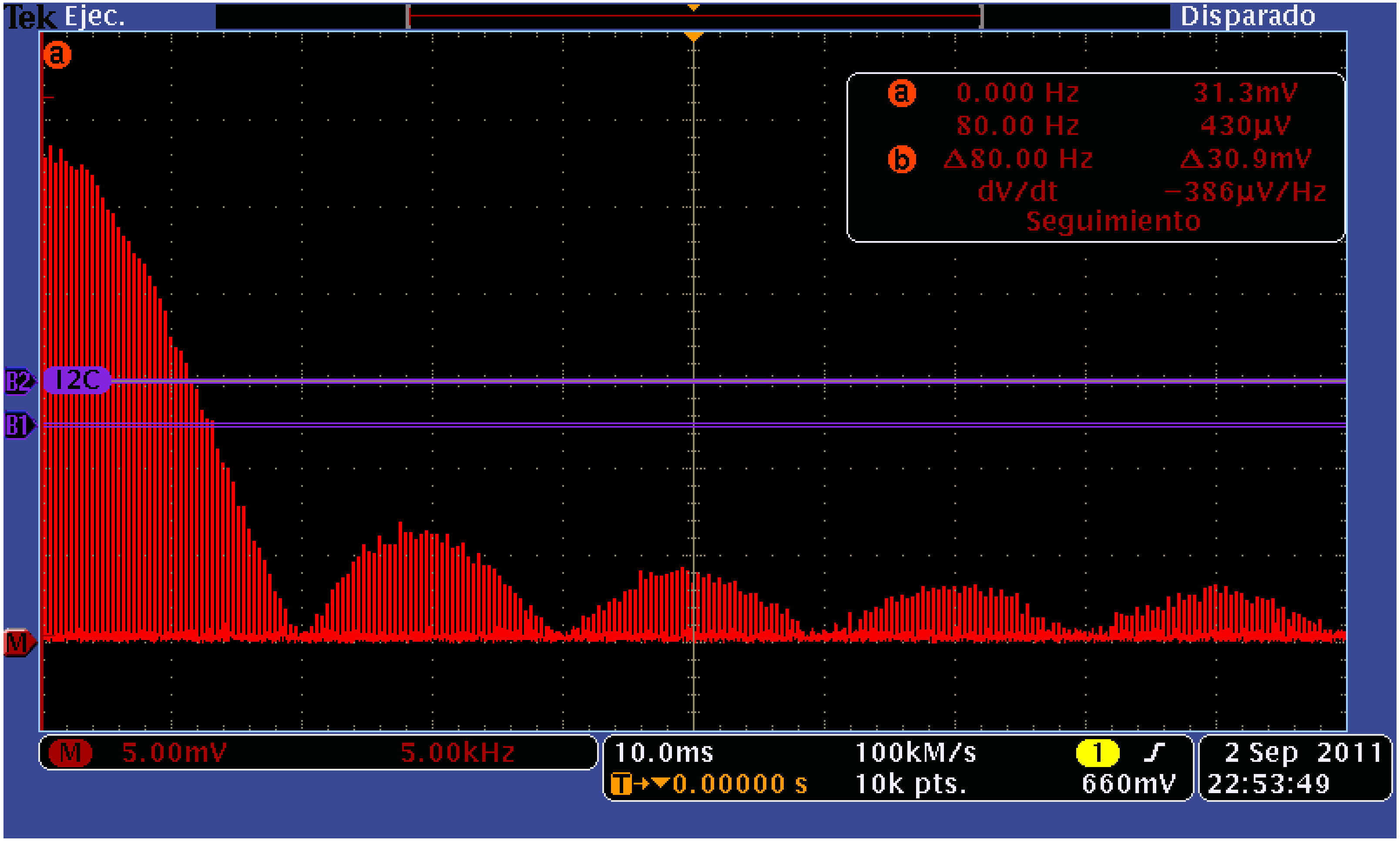
Transformada de Fourier



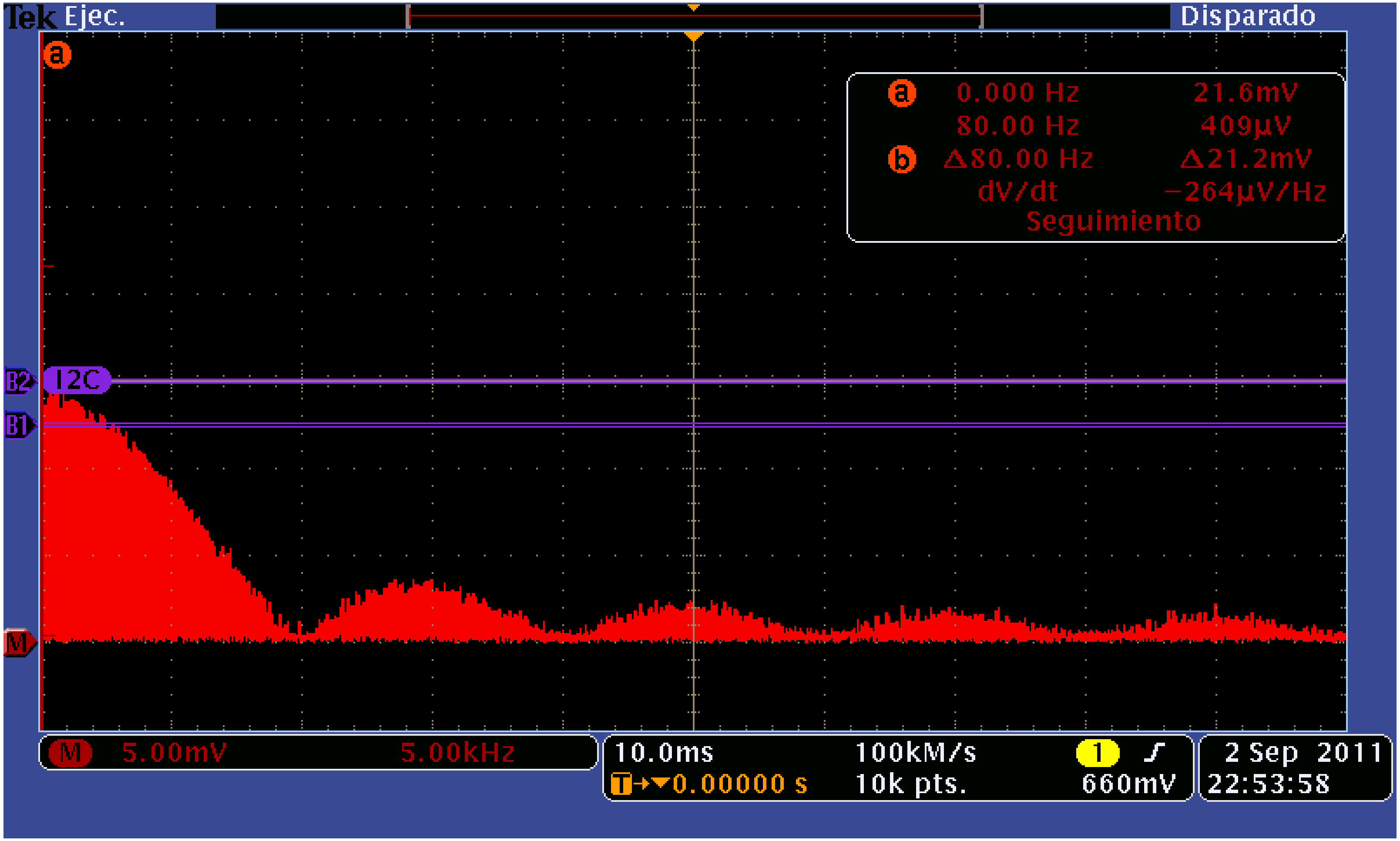
Transformada de Fourier



Transformada de Fourier



Transformada de Fourier



Transformada de Fourier

En el límite cuando T → +∝ el tren de pulsos deja de ser periódica y se convierte en un solo 'pulso'.

En general si en una función *f(t)* periódica se lleva su periodo T al infinito, se convierte en no periódica y se representa por:

$$F(\omega) = \Im\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad \text{Transformada directa}$$

$$f(t) = \Im^{-1}\left[F(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \qquad \text{Transformada inversa}$$

Transformada de Fourier

Condición suficiente de existencia de la Transformada de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < \infty$$, debe ser finita.

Las señales periódicas no cumplen con ésta condición de existencia de F(w).

Propiedades de F(w)

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \left|F(\omega)\right| e^{j\phi(\omega)}$$

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt$$

$R(\omega)$ es par respecto a ω.

Propiedades de F(w)

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \left|F(\omega)\right| e^{j\phi(\omega)}$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt$$

$X(\omega)$ es impar respecto a ω

Propiedades de F(w)

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \left|F(\omega)\right| e^{j\phi(\omega)}$$

Si F(w) es real, entonces *f(t)* es par:

F(w) = R(w)

Si F(w) es imaginaria pura entonces *f(t)* es impar:

F(w) = jX(w)

Propiedades de F(w)

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \left|F(\omega)\right| e^{j\phi(\omega)}$$

$\left|F(\omega)\right|$ es el ***espectro de magnitud***

Es una función par de *w*

Propiedades de F(w)

Linealidad:

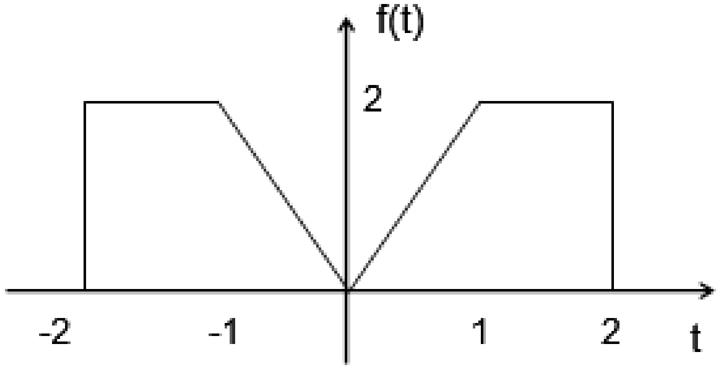
$$af(t) \pm bg(t) \leftrightarrow aF(w) \pm bG(w)$$

En general: $$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i F_i(w)$$

Propiedades de F(w)

Ejemplo 1: Hallar F(w) de la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases} |t|, & t\in[-1,1] \\ 1, & t\in[-2,-1]\cup[1,2] \end{cases}$$



Solución:

Expresando f(t) en función de $G_\tau(t)$ y $\Delta_\tau(t)$: $f(t)=2G_4(t)-2\Delta_1(t)$

Usando luego la propiedad de linealidad tenemos:

$$F(w)=2(4Sa(w.4/2))-2\left(1.Sa^2(w.1/2)\right)=8Sa(2w)-2Sa^2(w/2)$$

$$\boxed{F(w)=8Sa(2w)-2Sa^2(w/2)}$$

Propiedades de F(w)

Dualidad o simetría:

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-w)$$

Propiedades de F(w)

Escala:

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right)$$

Para a < 1 hay una expansión de f(t) en el tiempo y una compresión de F(w) en la frecuencia.

Para a > 1 hay una compresión de f(t) en el tiempo y una expansión de F(w) en la frecuencia.

Propiedades de F(w)

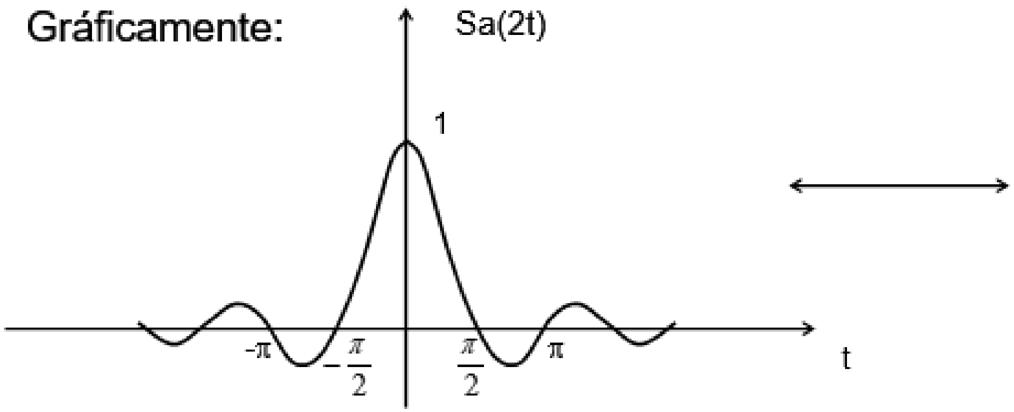
Ejemplo 2: Hallar F(w) de las funciones Sampling Sa(2t) y Sa(t/2), grafique y comente:

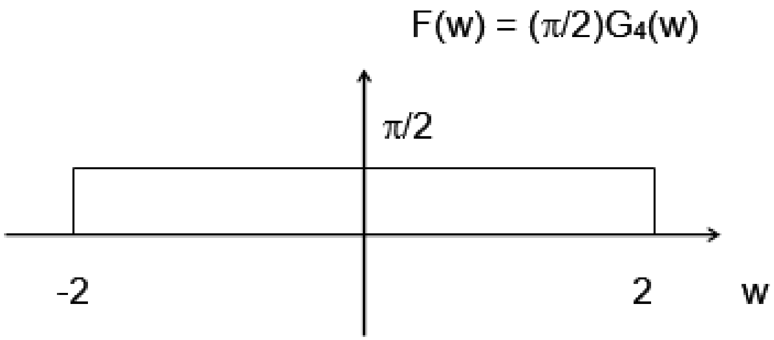
Solución:

Usando propiedad de Escala para Sa(2t): $Sa(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi G_2(\frac{w}{2})$

Entonces: $Sa(2t) \leftrightarrow \frac{\pi}{2} G_4(w)$

Gráficamente:



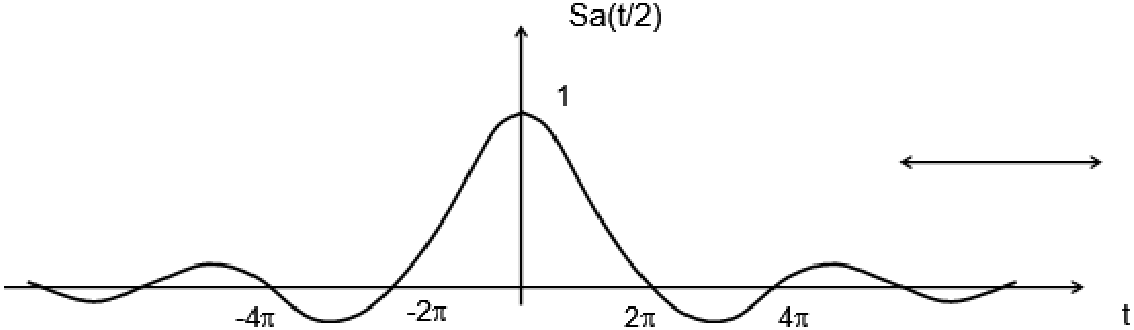


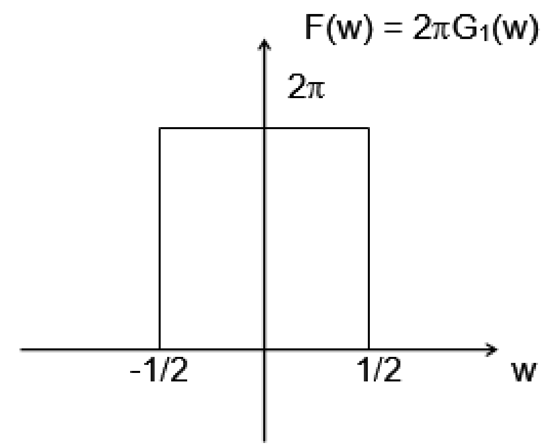
Propiedades de F(w)

Usando propiedad de Escala para Sa(t/2): $Sa(t/2) \quad \leftrightarrow \quad 2\pi G_2(2w)$

Entonces: $Sa(t/2) \quad \leftrightarrow \quad 2\pi G_1(w)$

Gráficamente:





Observación:

Para a < 1 se registra una expansión de f(t) en el tiempo y una compresión de F(w) en la frecuencia.

Para a > 1 se registra una compresión de f(t) en el tiempo y una expansión de F(w) en la frecuencia

Propiedades de F(w)

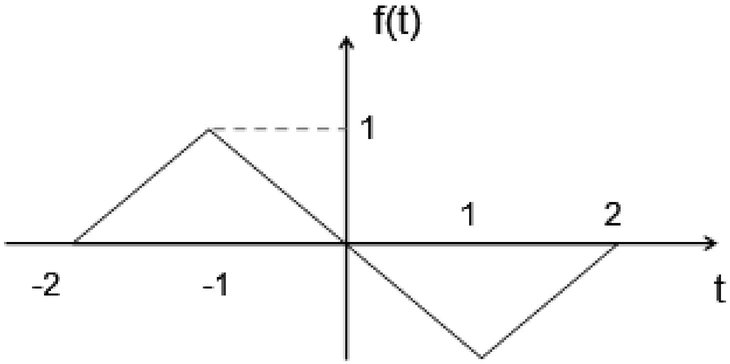
Desplazamiento en tiempo:

$$f(t - t_o) \leftrightarrow F(w)e^{-jwt_o}$$

Propiedades de F(w)

Ejemplo 3: Hallar F(w) de la siguiente función:

$$f(t) = \Delta_1(t+1) - \Delta_1(t-1)$$



Solución:

Usando luego la propiedad de desplazamiento en el tiempo y linealidad tenemos:

$$F(w) = \left(1Sa^2(w.1/2).e^{jw}\right) - \left(1Sa^2(w.1/2).e^{-jw}\right) = Sa^2(w/2).e^{jw} - Sa^2(w/2).e^{-jw}$$

$$F(w) = Sa^2(w/2).\frac{(e^{jw} - .e^{-jw})}{2j}.2j = 2Sa^2(w/2)(senw)j$$

$$\boxed{F(w) = 2Sa^2(w/2)(senw)j}$$

Propiedades de F(w)

Desplazamiento en frecuencia:

$$f(t)e^{jw_o t} \leftrightarrow F(w - w_o)$$

Propiedades de F(w)

Convolución en el tiempo TCT:

$$f_1(t) \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \leftrightarrow F_1(w) F_2(w)$$

Propiedades de F(w)

Convolución en la frecuencia TCF:

$$f_1(t)\, f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(w) \otimes F_2(w)$$

Propiedades de F(w)

Derivación en el tiempo:

$$f(t) \leftrightarrow F(w) \text{ entonces } \frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow jwF(w)$$

En general:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (jw)^n F(w)$$

Propiedades de F(w)

Integración en el tiempo:

$$f(t) \leftrightarrow F(w) \text{ entonces } \int_{-\infty}^{t} f(t)dt \leftrightarrow \pi F(w)\delta(w) + \frac{F(w)}{jw}$$

Propiedades de F(w)

Derivación en la frecuencia:

$$f(t) \leftrightarrow F(w) \text{ entonces } (-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(w)}{dw^n}$$

Convolución

Se define la convolución de dos señales f(t) y g(t) como:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)\,dx$$

Convolución

Propiedades:

Si f(t) y g(t) comienzan desde t = 0 entonces:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx$$

Convolución

Propiedades:

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

$$\left[f(t) * g(t) \right] * h(t) = f(t) * \left[g(t) * h(t) \right]$$

Convolución

Propiedades:

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

$$f(t) * \delta(t - T) = f(t - T)$$

$$f(t - t_1) * \delta(t - t_2) = f(t - t_1 - t_2)$$

Convolución

Teorema de Convolución en el Tiempo TCT:

$$\Im\left[f(t) * g(t)\right] = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

El producto en el tiempo es equivalente a la convolución en frecuencia

Convolución

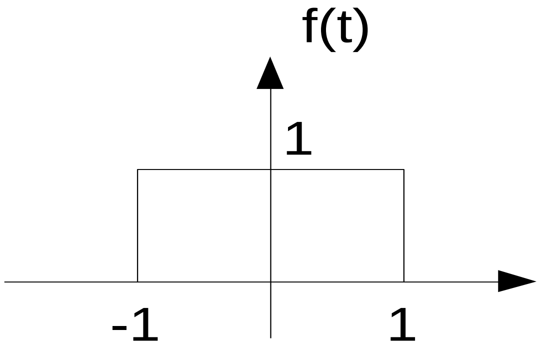
Teorema de Convolución en la frecuencia TCF:

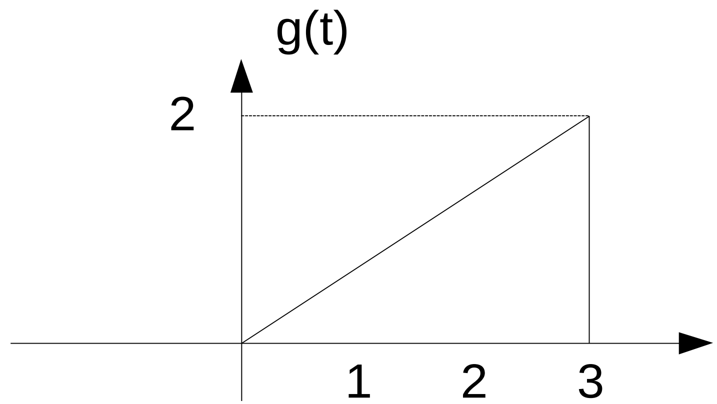
$$\Im^{-1}\left[F(\omega) * G(\omega)\right] = 2\pi \; f(t) \cdot g(t)$$

El producto en frecuencia es equivalente a la convolución en el tiempo.

Convolución gráfica

Hallar la convolución para las señales indicadas:

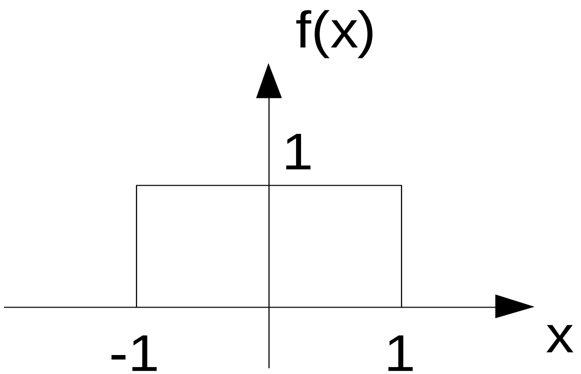


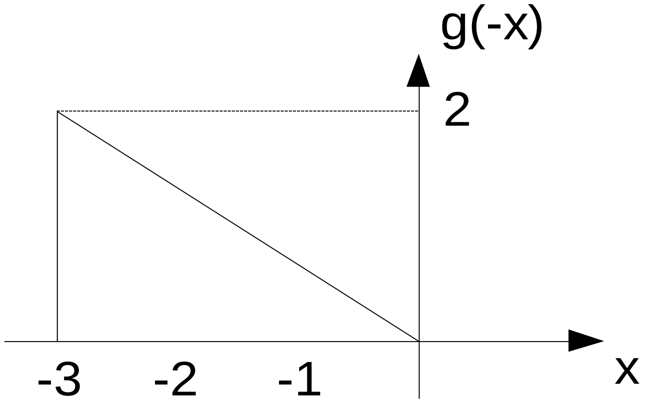


$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$$

Convolución gráfica

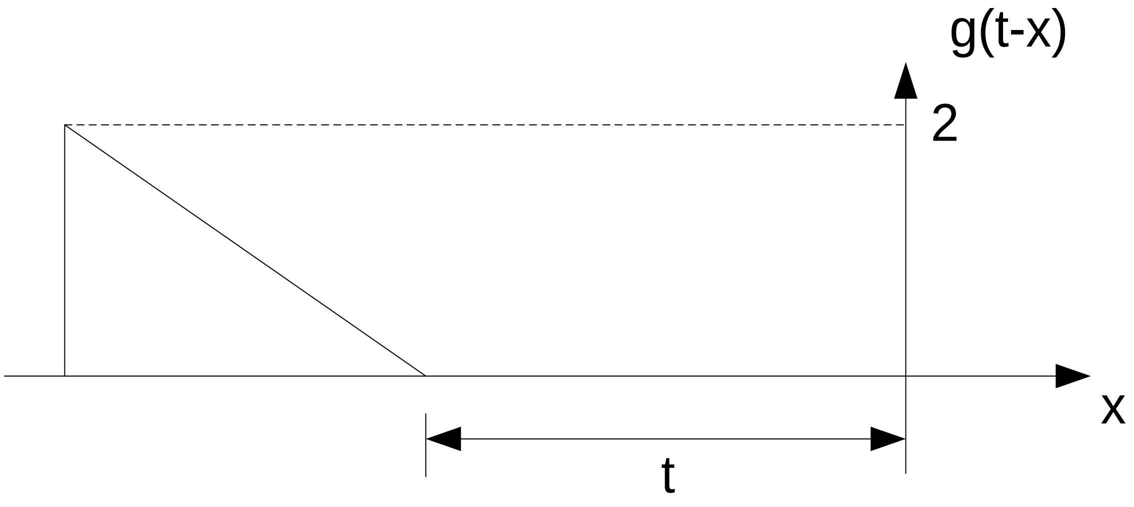
Reflexión:





Convolución gráfica

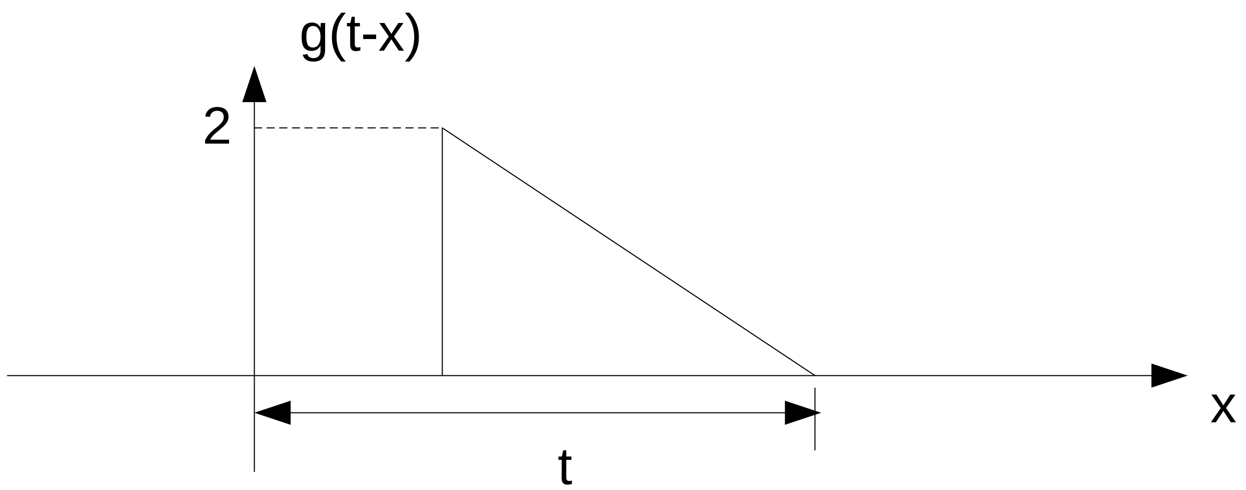
Desplazamiento: Gráfica de g(t-x)



t muy negativo

Convolución gráfica

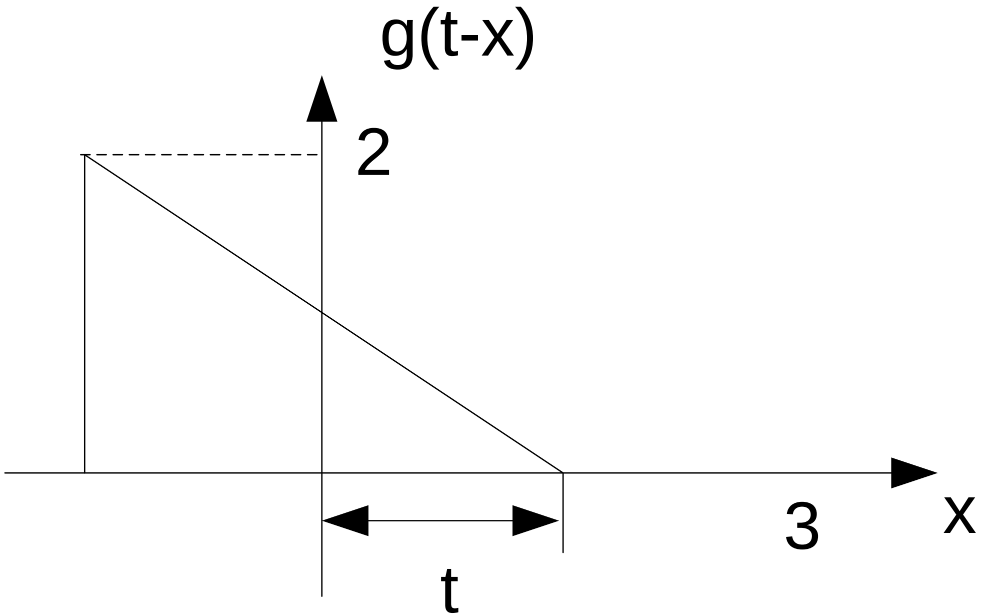
Desplazamiento: Gráfica de g(t-x)



t muy positivo

Convolución gráfica

Multiplicación: p.e para t < 3, los valores de g(t-x) se multiplican con f(x) y se halla el área bajo la curva en cada caso.

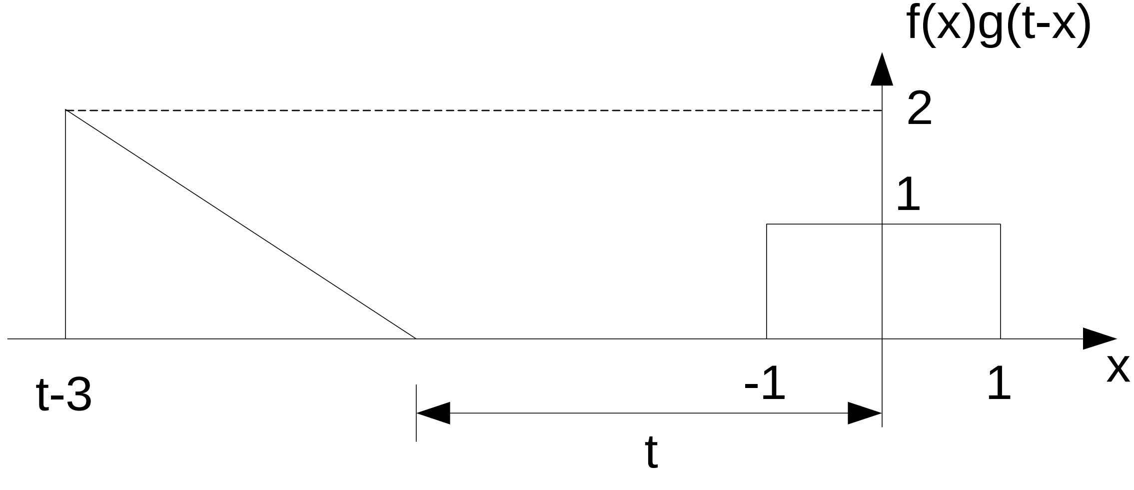


Convolución gráfica

Integración:

t < -1:

En el gráfico el producto es cero: $f(t) * g(t) = 0$



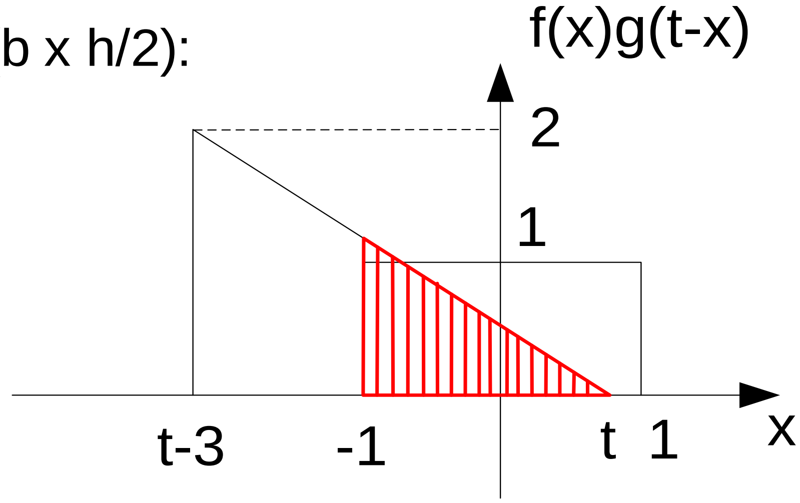
Convolución gráfica

-1 < t < 1:

El producto es un triángulo de área (b x h/2):

$$b = t + 1$$

$$\frac{h}{2} = \frac{t+1}{3} \Rightarrow h = \frac{2(t+1)}{3}$$



$$f(t) * g(t) = \frac{(t+1)x\dfrac{2(t+1)}{3}}{2} = \frac{(t+1)^2}{3}$$

Convolución gráfica

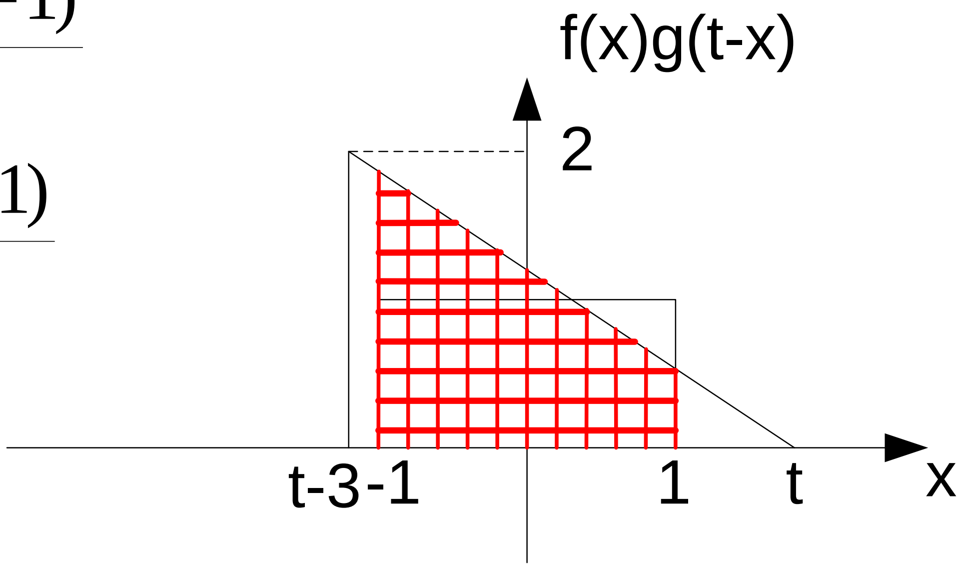
1 < t < 2:

El producto es un trapecio de área: (B+b)xh/2.

$$h = 2$$

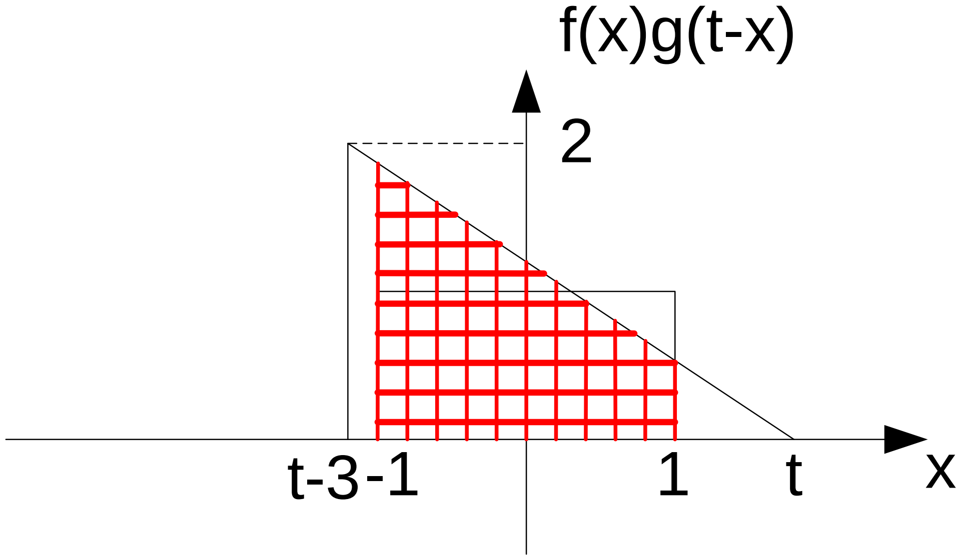
$$\frac{B}{2} = \frac{t+1}{3} \Rightarrow B = \frac{2(t+1)}{3}$$

$$\frac{b}{2} = \frac{t-1}{3} \Rightarrow b = \frac{2(t-1)}{3}$$



Convolución gráfica

$$f(t)*g(t)=\frac{2x\left[\frac{2(t+1)}{3}+\frac{2(t-1)}{3}\right]}{2}=\frac{2x\left[\frac{2t+2+2t-2}{3}\right]}{2}=\frac{4t}{3}$$



Convolución gráfica

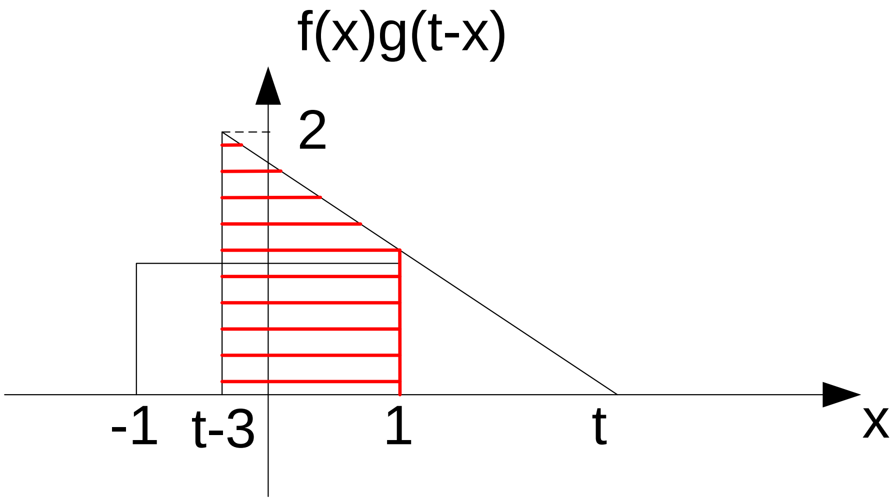
2 < t < 4:

En producto es otro trapecio de área: (B+b)xh/2.

$$B = 2$$

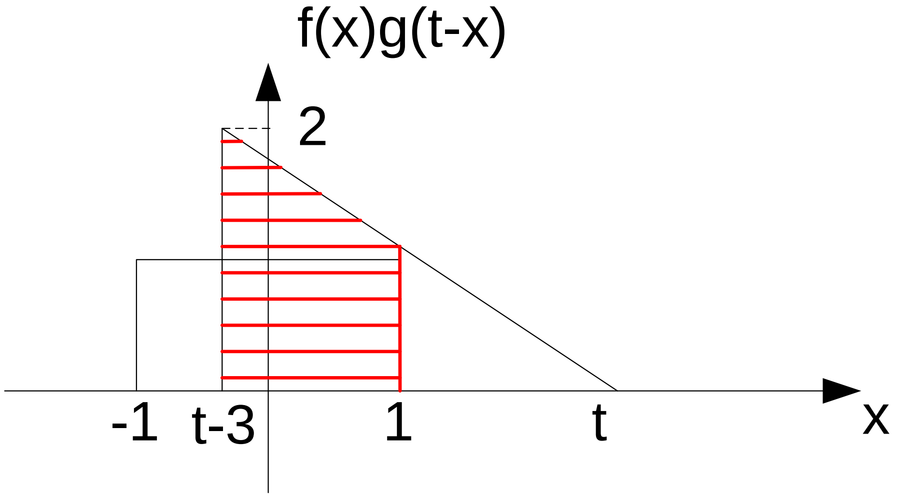
$$h = (3 - t) + 1 = 4 - t$$

$$\frac{b}{2} = \frac{t-1}{3} \Rightarrow b = \frac{2(t-1)}{3}$$



Convolución gráfica

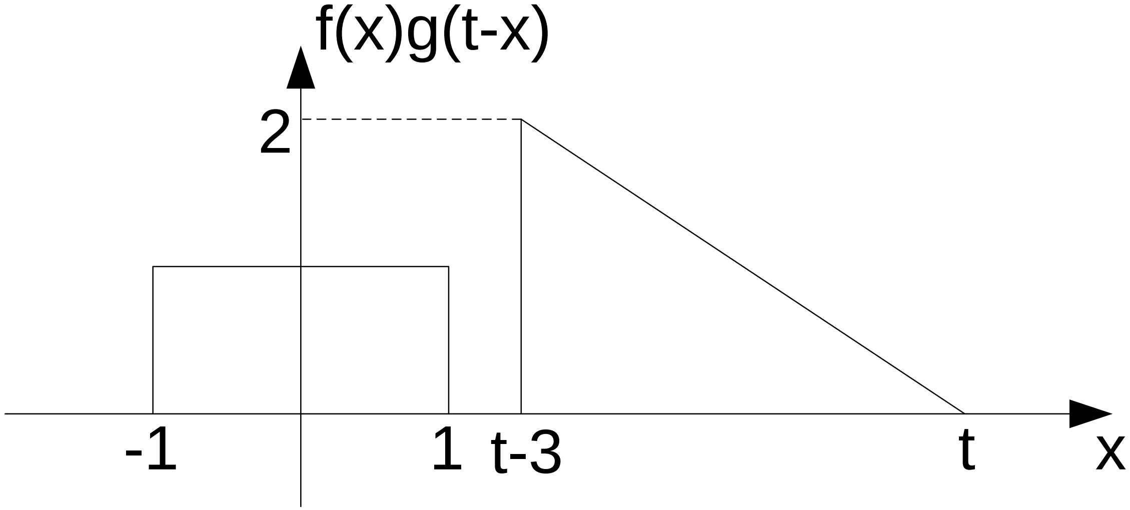
$$f(t)*g(t)=\frac{(4-t)x\left[2+\frac{2(t-1)}{3}\right]}{2}=\frac{(4-t)x\left[\frac{6+2t-2}{3}\right]}{2}=\frac{(4-t)(t+2)}{3}$$



Convolución gráfica

4 < t:

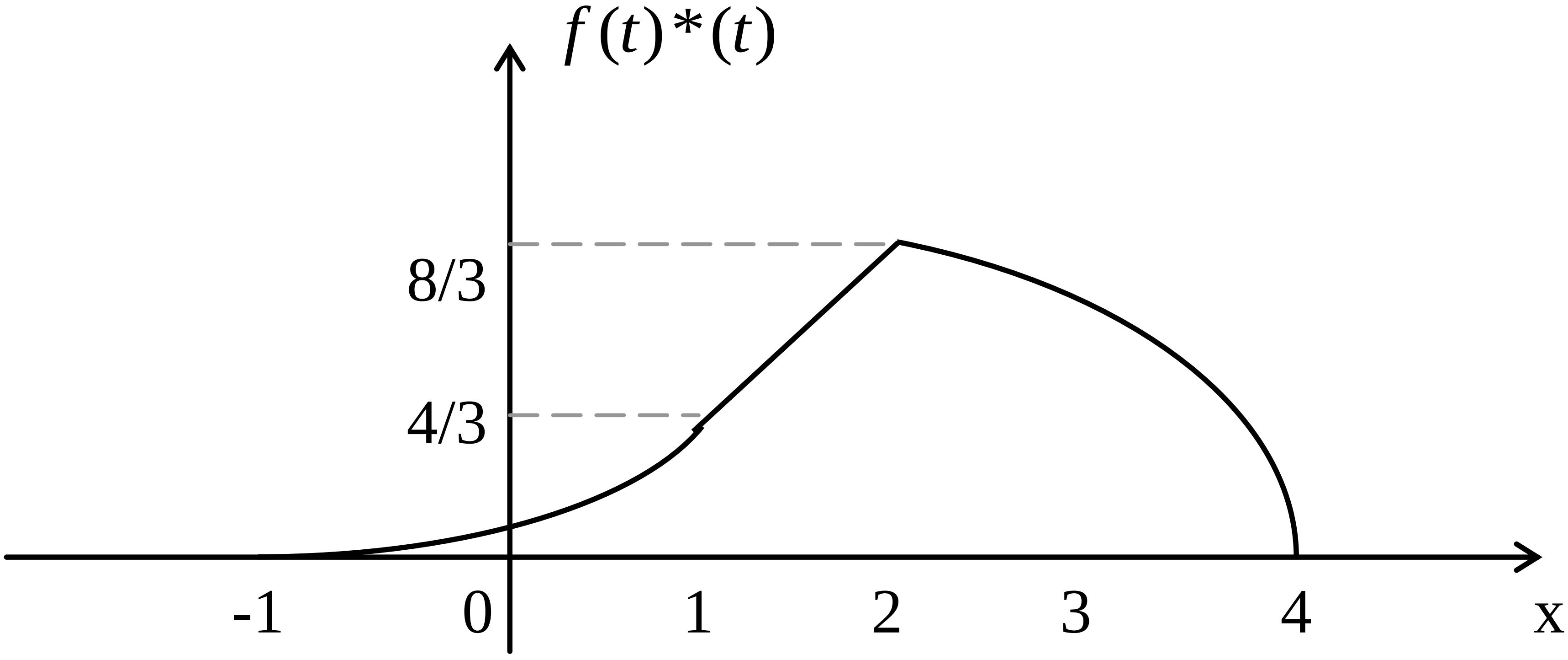
El producto es cero. Por lo tanto: $f(t) * g(t) = 0$



Convolución gráfica

$$f(t) * g(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ \dfrac{(t+1)^2}{3} & -1 < t < 1 \\ \dfrac{4t}{3} & 1 < t < 2 \\ \dfrac{(4-t)(t+2)}{3} & 2 < t < 4 \\ 0 & 4 < t \end{cases}$$

Convolución gráfica



Propiedades de F(w)

F(w) de señales periódicas:

$$f(t) = f(t+T) \quad \leftrightarrow \quad 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(w - nw_o)$$

Propiedades de F(w)

Demostración:

Usando la serie exponencial: $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jnw_0 t}, \quad w_o=\frac{2\pi}{T} \qquad F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jnw_0 t}\,dt$

De la tabla de F(w) se sabe: $1 \;\leftrightarrow\; 2\pi\delta(w)$

Por desplazamiento en w: $e^{jnw_o t} \;\leftrightarrow\; 2\pi\delta(w-nw_o)$

Por linealidad o superposición: $F_n e^{jnw_o t} \;\leftrightarrow\; 2\pi F_n\delta(w-nw_o)$

Por linealidad general: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jnw_0 t} \;\leftrightarrow\; 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n\delta(w-nw_o)$

$$\boxed{f(t)=f(t+T) \;\leftrightarrow\; 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n\delta(w-nw_o)}$$

Propiedades de F(w)

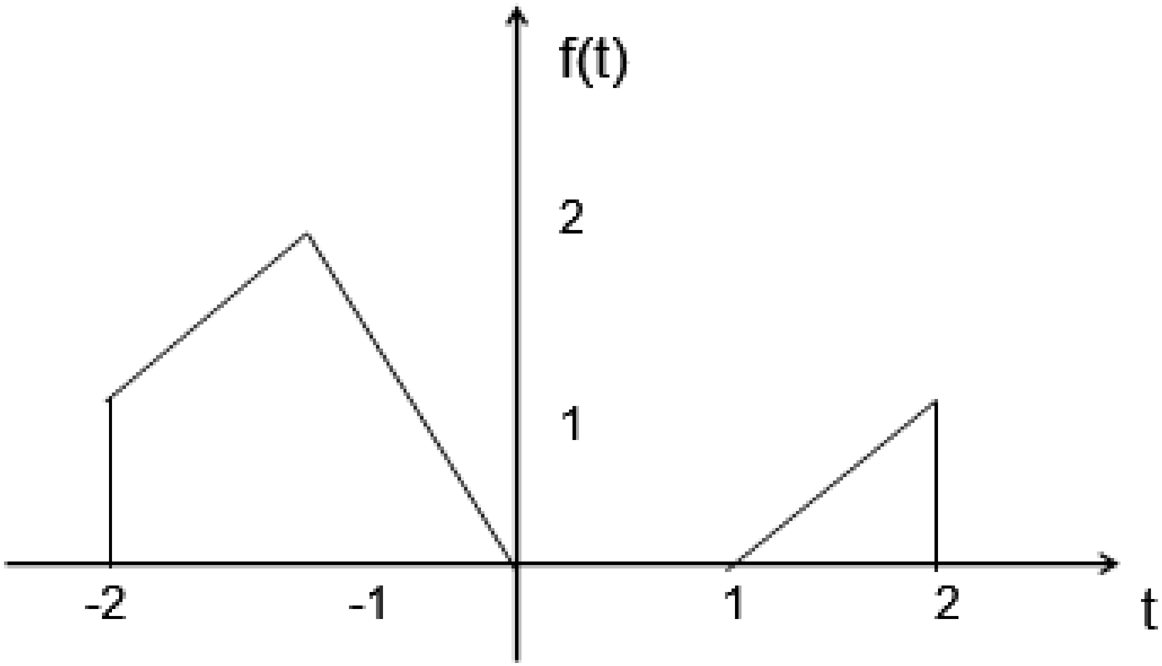
Función par e impar de f(t):

$$f(t) = f_{par}(t) + f_{impar}(t) \quad \leftrightarrow \quad F(w) = F_{par}(w) + F_{impar}(w)$$

$$f_{par}(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad f_{impar}(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

Problemas

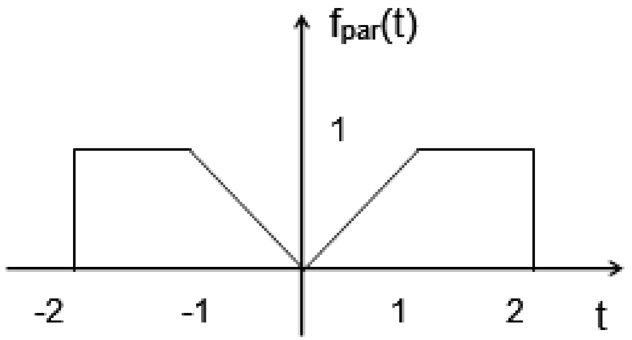
Hallar F(w) de la función:

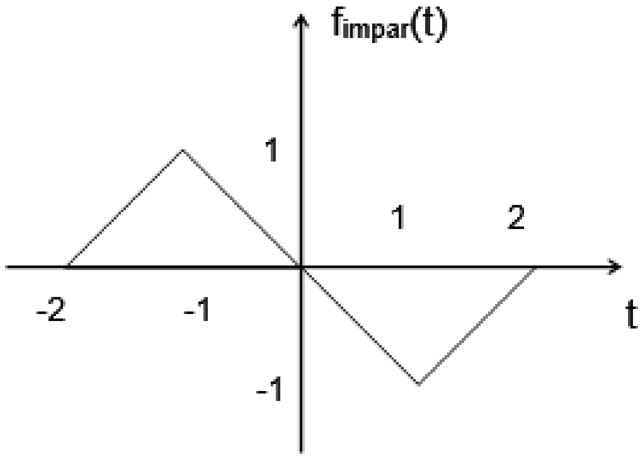


Problemas

Solución:

Las funciones par e impar asociadas a f(t) son:





Determinando las respectivas transformadas:

$$f_{par}(t) = G_4(t) - \Delta_1(t) \quad \leftrightarrow \quad F_{par}(w) = 4Sa(2w) - Sa^2(w/2)$$

$$f_{impar}(t) = \Delta_1(t+1) - \Delta_1(t-1) \quad \leftrightarrow \quad F_{impar}(w) = 2Sa^2(w/2)(senw)j$$

Problemas

Aplicando propiedad de función par e impar de f(t):

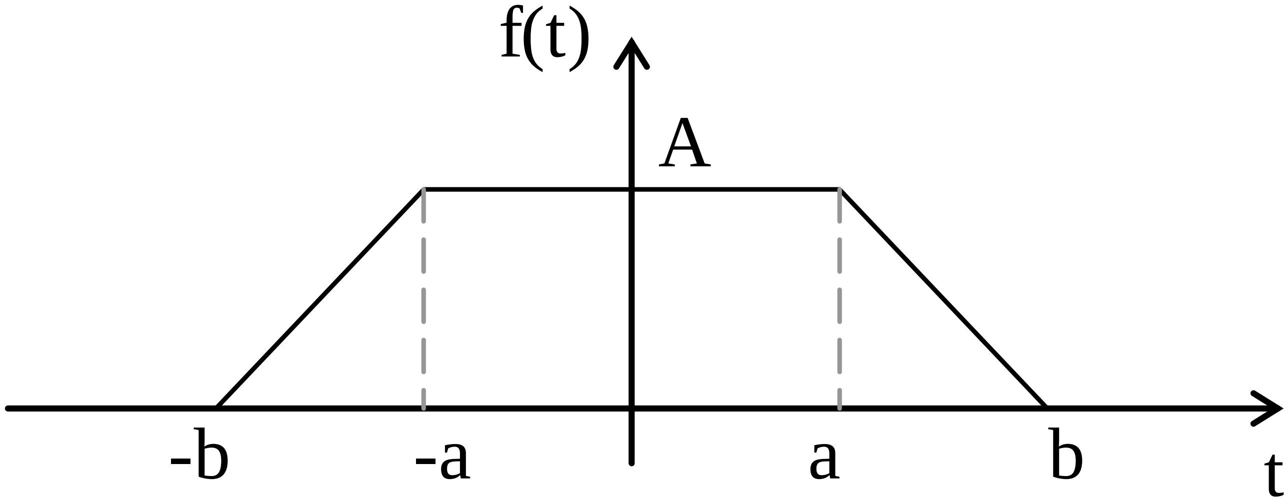
$$f(t) = f_{par}(t) + f_{impar}(t)$$

$$F(w) = F_{par}(w) + F_{impar}(w)$$

$$\boxed{f(t) \quad \leftrightarrow \quad 4Sa(2w) - Sa^2(w/2) + 2Sa^2(w/2)(senw)j}$$

Problemas

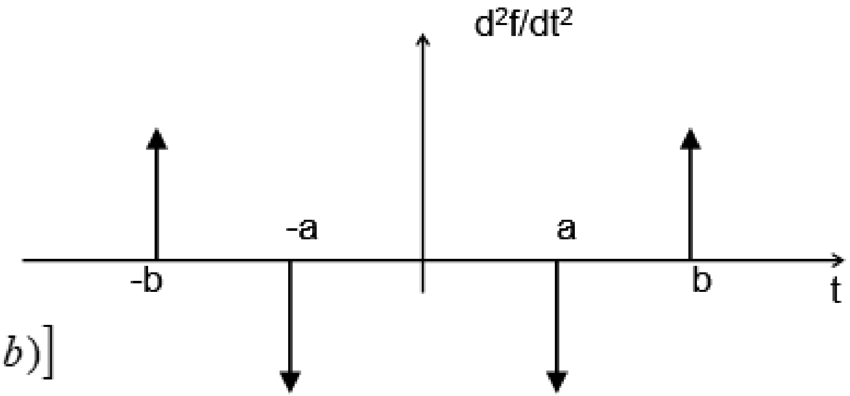
Hallar F(w) de la función:



Problemas

Solución:

Si se deriva 2 veces la señal f(t) se obtiene una sucesión de impulsos, cuya transformada de encuentra rápidamente:



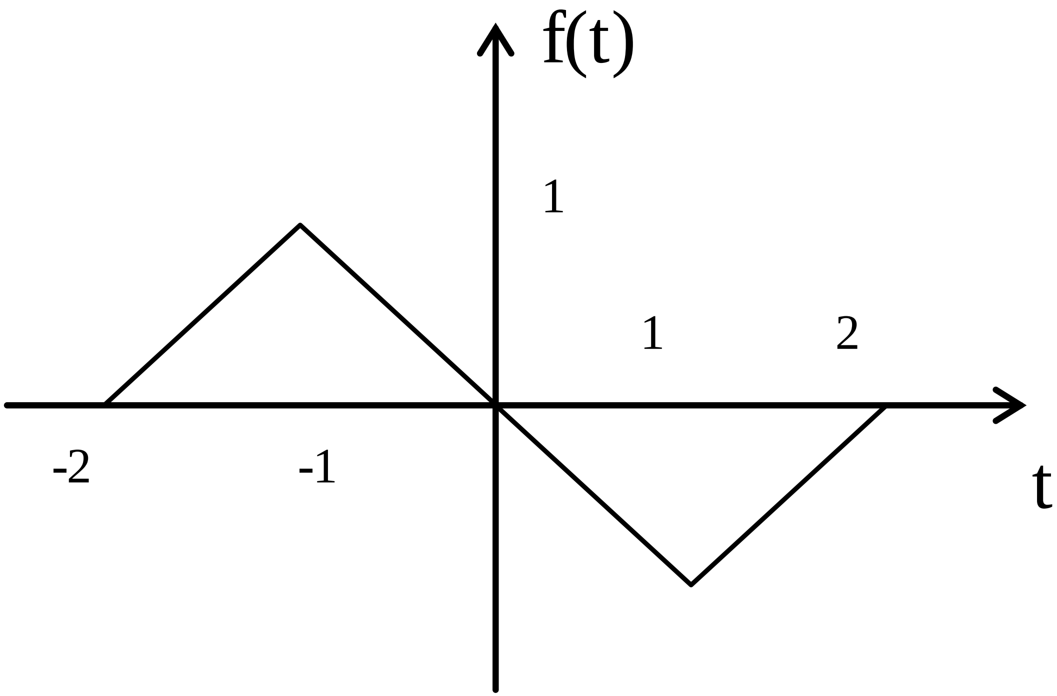
$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{A}{b-a}\left[\delta(t+b) - \delta(t+a) - \delta(t-a) + \delta(t-b)\right]$$

Usando derivación en el tiempo: $$(jw)^2 F(w) = \frac{A}{b-a}\left(e^{jwb} - e^{jwa} - e^{-jwa} + e^{-jwb}\right)$$

Simplificando se obtiene: $$\boxed{F(w) = \frac{2A}{b-a}\left[\frac{\cos aw - \cos bw}{w^2}\right]}$$

Problemas

Hallar F(w) de la función:



Problemas

Hallar F(w) para f(t) = Sa(t), Sa(2t), Sa(t/2), e^{-jwot}

Hallar F(w) para f(t) = f(t+T)