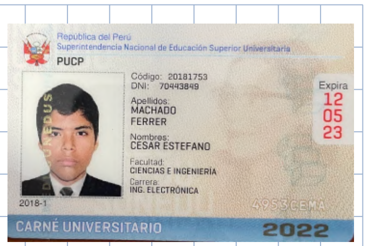
Alumno: Machado Ferrer, César Estéfano
Código: 20181753
Fecha de entrega: 27-08-2022
Curso: (TEL133) Teoría de Comunicaciones 1
Evaluación: Tarea Calificada 1



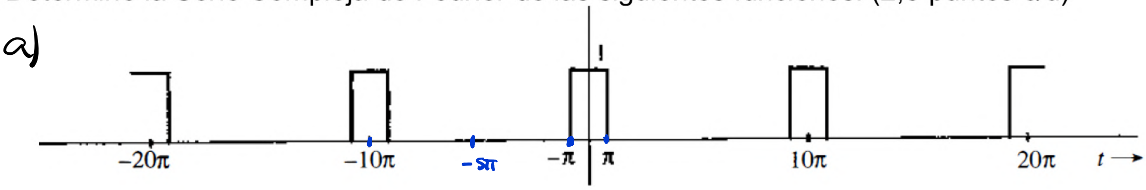
INGENIERÍA DE LAS TELECOMUNICACIONES

PUCP

Separata 01 - Ejercicios de repaso para irse entrenando

1. Determine la Serie Compleja de Fourier de las siguientes funciones: (2,5 puntos c/u)

a)



Podemos escribir esta señal como: $x_{(t)} \begin{cases} 1; & |t| < \pi \\ 0; & \pi < |t| < 5\pi \end{cases}$; con periodo $T = 10\pi$

Para la serie de Fourier Compleja: $x_{(t)} \xleftrightarrow{F.S.} a_K$; $a_K = \frac{1}{T}\int_T x_{(t)} e^{-jK\omega_0 t} dt$ → Ecuación de análisis

→ ecuación de síntesis: $\sum_{K=-\infty}^{+\infty} a_K e^{jK\omega_0 t}$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow a_K = \frac{1}{10\pi}\int_{-5\pi}^{+5\pi} x_{(t)} e^{-jK\left(\frac{1}{5}\right)t} dt = \frac{1}{10\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\frac{K}{5}t} dt = \frac{1}{10\pi}\left(\left.\frac{e^{-j\frac{K}{5}t}}{-j\frac{K}{5}}\right|_{t=-\pi}^{t=\pi}\right)$$

$$= \frac{j}{2K\pi}\left(e^{-j\frac{K\pi}{5}} - e^{j\frac{K\pi}{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{2K\pi j}\left(e^{j\frac{K\pi}{5}} - e^{-j\frac{K\pi}{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{K\pi}\sin\left(\frac{K\pi}{5}\right) = \frac{1}{5}\left[\frac{\sin\left(\frac{K\pi}{5}\right)}{\frac{K\pi}{5}}\right]$$

→ Considerando $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ (sin normalizar)

$$\Rightarrow a_K = \frac{1}{5}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{K\pi}{5}\right)$$

si normalizamos: $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

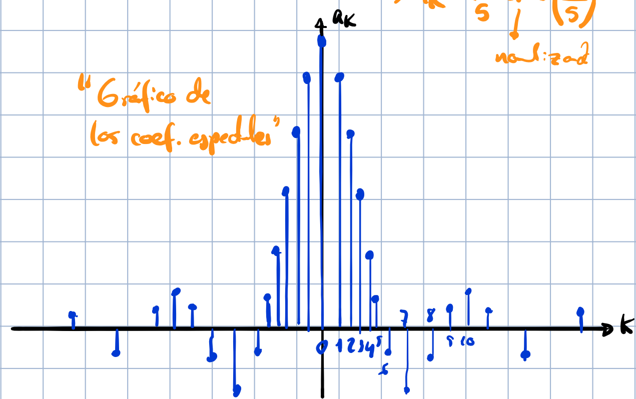
$\Rightarrow a_K = \frac{1}{5}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{K}{5}\right)$ → normalizado

Reemplazando a_K en la ecuación de síntesis:

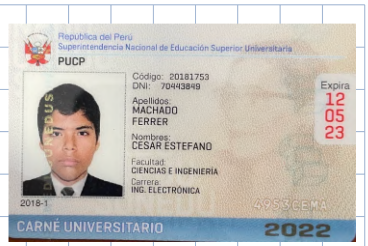
sin normalizar

$$\Rightarrow \boxed{x_{(t)} = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{5}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{K\pi}{5}\right) e^{j\frac{K}{5}t}}$$

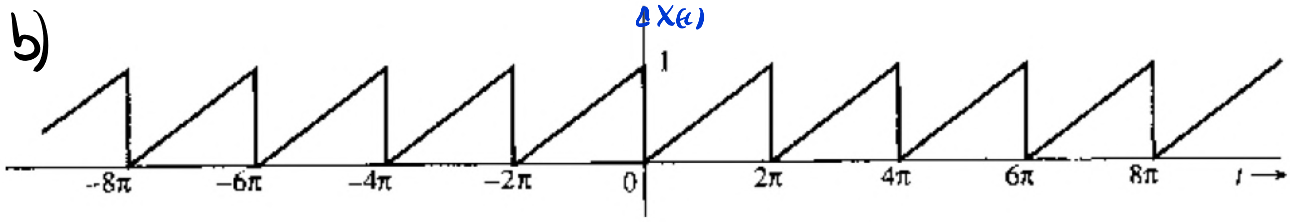
"Gráfico de los coef. espectrales"



Alumno: Machado Ferrer, César Estéfano
Código: 20181753
Fecha de entrega: 27-08-2022
Curso: (TEL133) Teoría de Comunicaciones 1
Evaluación: Tarea Calificada 1



b)



Podemos escribir esta señal como: $x_{(t)} = \frac{t}{2\pi}$; $t \in [0; 2\pi]$ con periodo $T = 2\pi$

tomando la ecuación de análisis:

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \Rightarrow a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{t}{2\pi}\right)e^{-jkt}\,dt = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\underbrace{t}_{u}\,\underbrace{e^{-jkt}\,dt}_{dv}$$

$$\begin{matrix} u = t \\ du = dt \end{matrix} \Rightarrow v = \int e^{-jkt}\,dt = \frac{e^{-jkt}}{-jk} = \frac{je^{-jkt}}{k}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{4\pi^2}\left[uv\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} v\,du\right] = \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{j}{k}\left(te^{-jkt}\Big|_{t=0}^{t=2\pi}\right) - \cancel{\frac{j}{k}\int_0^{2\pi} e^{-jkt}\,dt}^{\,0}\right]$$

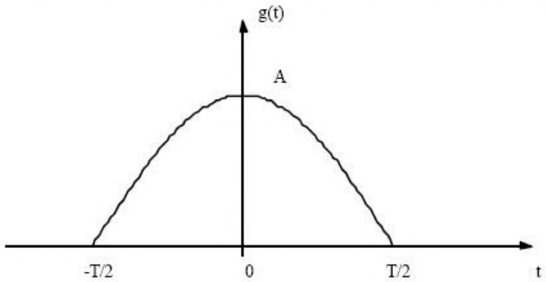
$$\frac{j}{k}e^{-jkt}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{j}{k}\left[e^{-jk2\pi} - e^0\right] = \frac{j}{k}[1-1] = 0$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{j}{\cancel{4}_{2}k\pi^{\cancel{2}}}\left[\left(2\pi \overbrace{e^{-jk2\pi}}^{1} - 0\right) - 0\right]$$

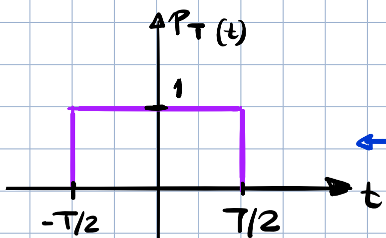
$$\Rightarrow a_k = \frac{j}{2k\pi}$$ ⇒ Reemplazando a_k en la ecuación de síntesis: $$\Rightarrow \boxed{x_{(t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{j}{2k\pi}\right)e^{jkt}}$$

2. Responda a las siguientes preguntas: (3 puntos c/u)

   a. Calcular la transformada de Fourier de la función pulso medio-coseno mostrada.

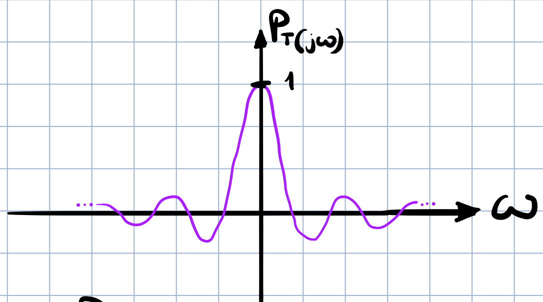


Notemos que esta señal corresponde a un coseno enventanado por un pulso finito de ancho de banda T.



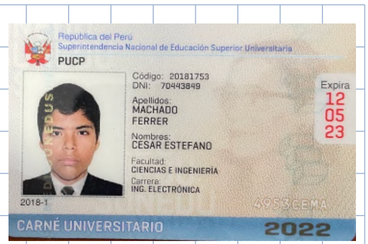
(resultado conocido)

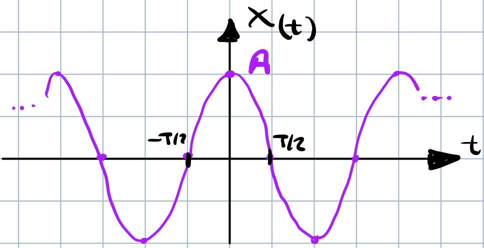
$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}\{\}}$$



$$P_T(t) = \begin{cases} 1; & |t| \leq T/2 \\ 0; & |t| > T/2 \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}\{\}} P_T(j\omega) = \frac{2\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega} = T\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} = T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

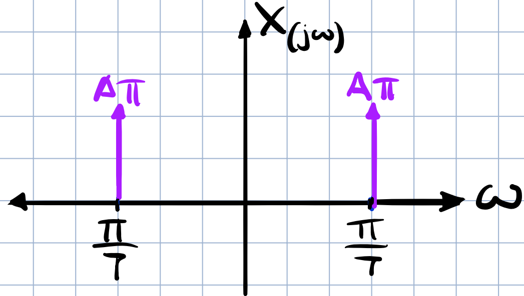
Alumno: Machado Ferrer, César Estéfano
Código: 20181753
Fecha de entrega: 27-08-2022
Curso: (TEL133) Teoría de Comunicaciones 1
Evaluación: Tarea Calificada 1





(resultado conocido)

$\xleftrightarrow{\mathcal{F}\{\}}$



$$x(t) = A\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}\{\}} X(j\omega) = \mathcal{F}\left\{A\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\right\} = A\pi\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{T}\right) + \delta\left(\omega+\frac{\pi}{T}\right)\right]$$

Podemos expresar $g(t)$ como: $g(t) = (p_T(t))\left[\underbrace{A\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)}_{x(t)}\right]$

y sabemos que: (prop. de convolución en frecuencia) $\leftrightarrow$ multiplicación en el dominio del tiempo

$$\mathcal{F}\{x(t)\,y(t)\} = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * Y(j\omega)\right]$$

donde: $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

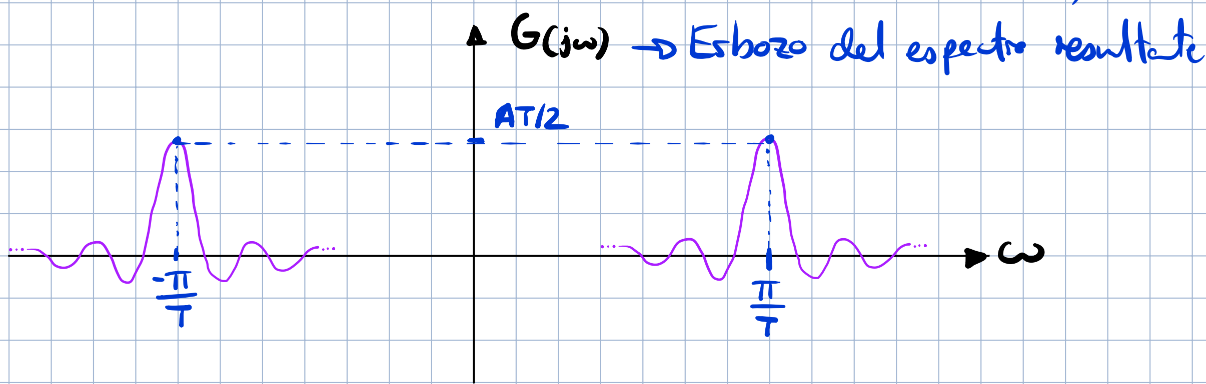
$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{g(t)\} = G(j\omega) = \frac{A}{2\pi}\left\{\pi T\left[\underbrace{\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) * \delta\left(\omega-\frac{\pi}{T}\right)} + \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) * \delta\left(\omega+\frac{\pi}{T}\right)\right]\right\}$$

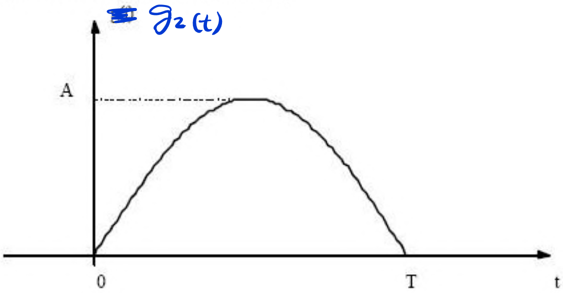
desplaza el espectro: $X(\omega) * \delta(\omega-\omega_0) = X(\omega-\omega_0)$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{AT}{2}\left\{\text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2} - \frac{T\omega_0}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2} + \frac{T\omega_0}{2}\right)\right\}$$

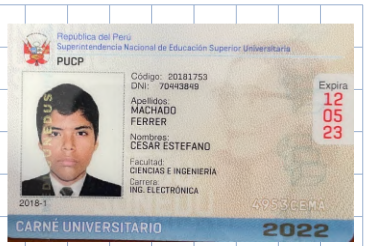
donde $\omega_0 = \frac{\pi}{T}$



b. Aplicando propiedades al resultado anterior hallar la transformada de Fourier del pulso desplazado. (pulso medio-seno positivo)



Alumno: Machado Ferrer, César Estéfano
Código: 20181753
Fecha de entrega: 27-08-2022
Curso: (TEL133) Teoría de Comunicaciones 1
Evaluación: Tarea Calificada 1



Usaremos la propiedad de desplazamiento en el tiempo (Time-Shifting)

$$\text{Sea } x(t) \overset{\mathcal{F}\{\}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \Rightarrow x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}\{\}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$\text{Como } g_2(t) = g\left(t-\tfrac{T}{2}\right) \Rightarrow G_2(j\omega) = e^{-j\omega\frac{T}{2}} G(j\omega)$$

$$\Rightarrow G_2(j\omega) = \frac{ATe^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2}\left\{\text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2}-\frac{T\omega_0}{2}\right)+\text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2}+\frac{T\omega_0}{2}\right)\right\}$$

donde $\omega_0 = \frac{\pi}{T}$

c. ¿Cuál sería la transformada de Fourier del pulso medio-seno positivo de duración aT?

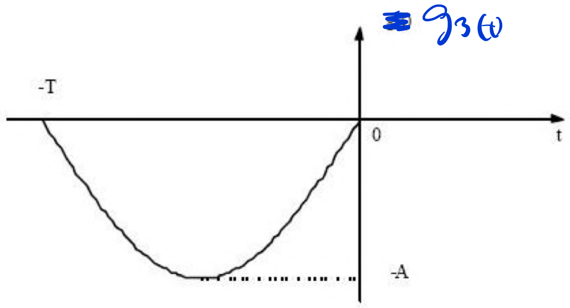
Si en vez de durar "T", el pulso durara "aT" unidades de tiempo, podemos utilizar la propiedad de ESCALAMIENTO EN EL TIEMPO de la Transf. de Fourier:

$$\text{(Time-scaling) Sea: } x(t) \overset{\mathcal{F}\{\}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \Rightarrow x(at) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{g_2(at)\} = \frac{ATe^{-j\frac{\omega T}{2a}}}{2|a|}\left\{\text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2a}-\frac{T\omega_0}{2}\right)+\text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2a}+\frac{T\omega_0}{2}\right)\right\};\ \omega_0 = \frac{\pi}{T}$$

d. Hallar la transformada de Fourier del pulso medio-seno negativo mostrado.

$\Rightarrow g_3(t)$



Partiendo del pulso medio-coseno positivo del ítem a)

$$g_3(t) = -g\left(t+\tfrac{T}{2}\right)$$

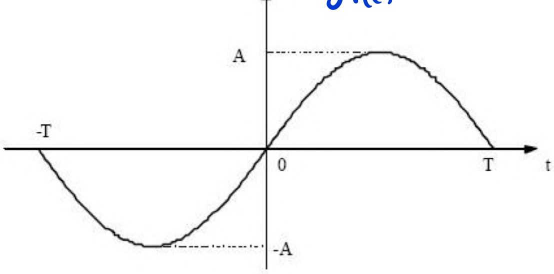
$$\Rightarrow \mathcal{F}\{g_3(t)\} = -e^{j\omega\frac{T}{2}} G(j\omega)$$

aplicamos linealidad y desplazamiento en el tiempo.

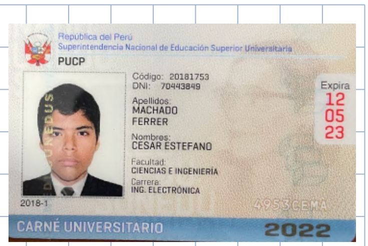
$$\Rightarrow \mathcal{F}\{g_3(t)\} = \frac{-ATe^{j\omega\frac{T}{2}}}{2}\left\{\text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2}-\frac{T\omega_0}{2}\right)+\text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2}+\frac{T\omega_0}{2}\right)\right\};\ \omega_0 = \frac{\pi}{T}$$

e. Calcular el espectro del pulso seno que se muestra.

$\Rightarrow g_4(t)$



Alumno: Machado Ferrer, César Estéfano
Código: 20181753
Fecha de entrega: 27-08-2022
Curso: (TEL133) Teoría de Comunicaciones 1
Evaluación: Tarea Calificada 1



Como $g_4(t) = g_2(t) + g_3(t)$

pulso seno — pulso medio-seno positivo — pulso medio-seno negativo

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{g_4(t)\} = G_4(j\omega) = G_2(j\omega) + G_3(j\omega)$$

Aunque, también podemos calcular el espectro como calculamos el espectro de la señal del ítem 2a), es decir utilizando la propiedad de "enventanado" (multiplicación) que equivale a una convolución en frecuencia:

Podemos escribir $g_4(t)$ como: $g_4(t) = p_{2T}(t)\left[A\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)\right]$; $p_{2T}(t)\begin{cases}1; |t|\leq T\\0; |t|>T\end{cases}$

Sabemos que:

$$\mathcal{F}\{p_{2T}(t)\} = \frac{2\sin(\omega T)}{\omega} = 2T\,\mathrm{sinc}(\omega T)$$

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{g_4(t)\} = \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\pi}}[\cancel{2}T]\left[\frac{\cancel{\pi}}{j}\right]\left\{\mathrm{sinc}(\omega T) * \left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]\right\}$$

$$\Rightarrow G_4(j\omega) = \frac{T}{j}\left\{\mathrm{sinc}(\omega T - \omega_0 T) - \mathrm{sinc}(\omega T + \omega_0 T)\right\}; \ \omega_0 = \frac{\pi}{T}$$