PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

TEORIA DE CONTROL 2

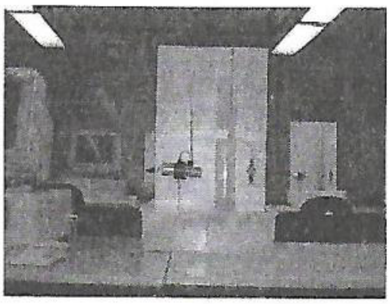
1era. práctica (tipo a)
(Segundo semestre 2016)

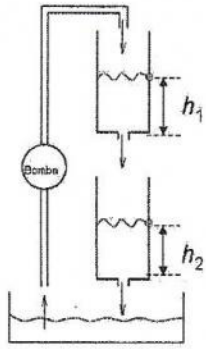
Indicaciones Generales:
Duración: 110 minutos.
Materiales o equipos a utilizar: Sólo se permite el uso de calculadora personal.
La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.
Advertencia:
Puntaje debido al cuestionario: 20 puntos
Puntaje debido a tareas académicas: 00 puntos
Puntaje total: 20 puntos

Tareas académicas: 00 puntos
Cuestionario: 20 puntos.

Problema 1: (03 ptos)

1. Considere el siguiente proceso implementado en forma experimental el cual consiste de una bomba de agua y dos tanques conectados en cascada





Department of Automatic Control – Lund Institute of Technology - Sweden

Las dinámicas en las tuberías y del motor de la bomba se pueden despreciar. Considere A_1 y A_2 el área de la sección cruzada de los tanques, a_1 y a_2 denotan las áreas del flujo de salida de los tanques.
La ley de balance de masa y de Bernoulli da la siguiente ecuación diferencial para un tanque con sección cruzada A y área de flujo de salida a.

$$A\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh} + q_{in}$$

Asuma que el flujo desde la bomba es directamente proporcional al voltaje aplicado al motor: $q_{bomba} = ku$

Esto es debido al hecho de que la constante de tiempo de la bomba es "pequeña" comparada con las dinámicas de los tanques.

Del mismo modo, asuma que la señal medida de nivel y es proporcional al nivel verdadero $\boldsymbol{h}$. Así se puede escribir: $y = k_c h$. Considere que las salidas del sistema son las medidas de los sensores para h_1 y h_2.

Considere que los tanques tienen la misma área de sección cruzada, i.e. $A_1 = A_2 = A$, y defina $\gamma_1 = a_1/A$, $\gamma_2 = a_2/A$ y $\beta = k/A$. Utilice los siguientes datos:

Área de la sección cruzada de los tanques:	$A_1 = A_2 = A = 2.8 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$
Áreas de los orificios de salida:	$a_1 = a_2 = 7 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$
Constante de proporcionalidad de la bomba:	$k = 2.7 \times 10^{-6}\ \text{m}^3/\text{s/V}$
Constante de proporcionalidad del sensor:	$k_c = 50\ \text{V/m}$

Obtenga el modelo no lineal en espacio estado del sistema (ecuación de estado y de salida), considere: $x_1(t) = h_1(t),\quad x_2(t) = h_2(t)$.

Problema 2: (05 ptos)

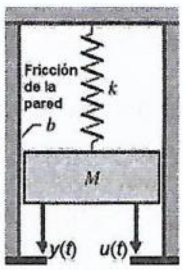
Considere el sistema dinámico dado por la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+5}{s^2+5s+4}$$

a) Dibujar el diagrama de simulación correspondiente a la forma diagonal. Sugerencia: Expandir en fracciones parciales. (2.0 p)
b) Obtener el modelo estado en la forma diagonal. (1.0 p)
c) Determinar la matriz de transición, $\phi(t) = e^{At}$ (2.0 p)

Problema 3: (09 ptos)

Considere el sistema amortiguador masa-resorte con entrada $u(t)$ y como salida, la posición de la masa $y(t)$. Defina los estados como: $x(t) = [x_M(t) \quad v_M(t)]^T$, esto es posición y velocidad. Asuma $k = 1$, $b = 1$, $M = 1$.



Considere:

$$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \Leftrightarrow e^{-at}\cos(\omega t)$$

$$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \Leftrightarrow e^{-at}\sin(\omega t)$$

a) Determine la ecuación de movimiento del sistema. (2.0 p)
b) Determinar la descripción en espacio estado (ecuación de estado y de salida) en forma matricial, indicar **A**, **B**, **C** y **D**. (1.0 p)

c) Determine la función de transferencia usando la ecuación: $G(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$

(1.5 p)

d) ¿Cuál es la respuesta del estado, $x(t)$, a una condición inicial $x(0) = [1 \quad 0]^T$ y a una entrada impulsiva? (2.5 p)

e) ¿Evalúe la respuesta en el tiempo de la salida, $y(t)$? (1.0 p)

f) Muestre mediante un gráfico, un esbozo de $y(t)$ (1.0 p)

Problema 4: (03 ptos)

Determine las condiciones (en términos del parámetro w) que garantice que el siguiente sistema sea controlable y observable.

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} w & 2w \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[2 \quad 1]}_{C} x(t)$$

Profesores del curso:
Javier Sotomayor.
Julio C. Tafur

Lima, 17 de septiembre del 2016.

FACULTAD
DE **CIENCIAS**
E INGENIERÍA

07 OCT. 2016

Código del alumno

2	0	1	2		0	2	5	0

Nombre del alumno

Christian Jair Luis Peña

PRÁCTICA Nº 1 DE

IEE 245	Teoría de control 2
Clave del curso	Nombre del curso

Firma del alumno

No llenar por el alumno

Nota

18

Aula: A 203

Horario: 921 - 1

Fecha: 17/09/16

Nombre del asistente de docencia

J. G. V

Nombre del profesor

Julio Tafur

Firma del asistente de docencia

PUCP

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII

ADVERTENCIAS ANTES DE INICIAR LA PRÁCTICA:

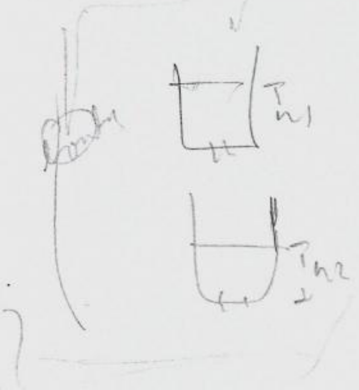
- La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.
- Utilice las zonas señaladas del cuadernillo para presentar su trabajo en limpio.
- Todo el material de desarrollo de la práctica debe ser incluido en este cuadernillo.

ATENCIÓN A LAS INDICACIONES DE LA ÚLTIMA PÁGINA

19

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



$\cancel{X}\ q_{in2} = Y_1$

$X_1^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2} X^{-\frac{1}{2}}$

$X_3 = \sqrt{X_1}$

$\dot{X}_3 = \frac{1}{\sqrt{X_1}}$

$\dot{X}_3 = \frac{1}{X_3}$

① 1.25

1) $A\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh} + q_{in}$ $\qquad q_{bomba} = K\mu$

$Y = K_c h$

$X_1 = h_1 \qquad X_2 = h_2$

Para el tanque 1

$A\frac{dX_1}{dt} = -a\sqrt{2gX_1} + K\mu$

Para el tanque 2

$A\frac{dX_2}{dt} = -a\sqrt{2gX_2} + q_{A1}$

Para el modelo espacio estado

$C = [1 \quad 1] \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para el tanque 1

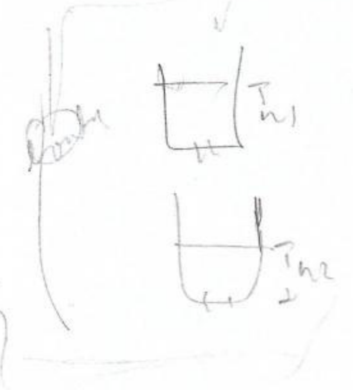
$\frac{dX_1}{dt} = -\varphi_1\sqrt{2g}\sqrt{X_1} + K_\mu$

$\frac{dX_1}{dt} = \frac{-\varphi_1\sqrt{2g}}{\sqrt{X_3}} X_3 + K\mu$

Falta

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)



$q_{in2} = Y_1$

$X_1^{\frac{1}{2}}$

$-\frac{1}{2} X^{-\frac{1}{2}}$

$X_3 = \sqrt{X_1}$

$\dot{X}_3 = \frac{1}{\sqrt{X_1}}$

$\dot{X}_3 = \frac{1}{X_3}$

① 1.25

1) $A \frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh} + q_{in}$ $\quad q_{bomba} = K\mu$

$Y = K_c h$

$X_1 = h_1 \qquad X_2 = h_2$

Para el tanque 1

$A \frac{dX_1}{dt} = -a\sqrt{2gX_1} + K\mu$

Para el tanque 2

$A \frac{dX_2}{dt} = -a\sqrt{2gX_2} + q_{A1}$

Para el modelo espacio estado

$C = [1 \quad 1] \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para el tanque 1

$\frac{dX_1}{dt} = -\varphi_1 \sqrt{2g}\sqrt{X_1} + K_\mu$

$\frac{dX_1}{dt} = \frac{-\varphi_1\sqrt{2g}}{\sqrt{X_1}} X_1 + K\mu$

Falta

Presente aquí su trabajo

2) a)

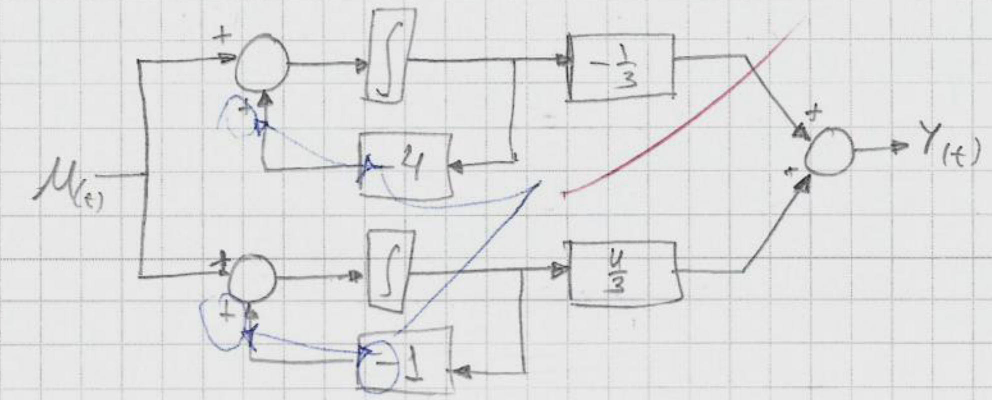
$$G(s) = \frac{s+5}{s^2+5s+4} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = \left.\frac{s+5}{s+1}\right|_{s=-4} = -\frac{1}{3}$$

$$B = \left.\frac{s+5}{s+4}\right|_{s=-1} = \frac{4}{3}$$

$$G(s) = \frac{-\frac{1}{3}}{s+4} + \frac{\frac{4}{3}}{s+1}$$

$\lambda_1 = -4$ $\qquad$ $\lambda_2 = -1$



b)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

c)

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1} B\}$$ × Error

$$\phi(s) = \begin{bmatrix} s+4 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

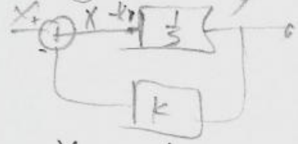
$$\frac{1}{(s+4)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(s) = \frac{1}{(s+4)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 \\ s+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-4t} \\ e^{-1t} \end{bmatrix}$$

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

$\frac{1}{s}$



$$\frac{Y}{X-KY} = \frac{1}{s}$$

$$sY = X - KY$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{s+k}$$

$$\frac{1}{s-4}$$

$$\frac{1}{s-1}$$

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$sX - X(0) = AX + BU$$

$$(sI-A)X = X_0 + BU$$

$$X = (sI-A)^{-1}X(0) + (sI-A)^{-1}BU$$

$$\begin{matrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+4 \end{matrix}$$

② a) 2.0
b) 1.0
c) 1.5

4.5

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

K F_R

$fr: KF_R$

3

a) 2.0
b) 1.0
c) 1.5
d) 2.5
e) 1.0
f) 1.0

9.0

$s(s+1)+1$

$\begin{matrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{matrix}$ 1

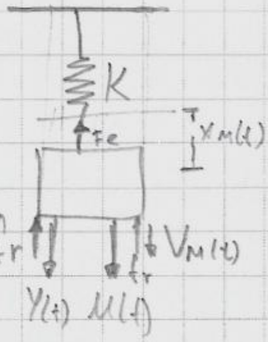
$\begin{matrix} s+1 & -1 \\ 1 & s \end{matrix}$ 2

$\begin{matrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{matrix}$ 3

3) a) $X_1(t) = X_M(t) \qquad X_2(t) = X_V(t)$

$K=1 \qquad b=1 \qquad M=1$

$X_{(t)} = Y_M(t) \qquad Y(t) = Y(t)$



$$\mu_{(t)} - b\dot{X}_{(t)} - KX_{(t)} = \ddot{X}_{(t)}M$$

$$\mu_{(t)} - \dot{X}_{(t)} - X_{(t)} = \ddot{X}_{(t)}$$

$$\mu(s) - sX(s) - X(s) = s^2X(s)$$

$$\frac{1}{s^2+s+1} = \frac{Y(s)}{\mu(s)}$$

b) $X_1(t) = X(t) \qquad X_2(t) = \dot{X}(t)$

$$\dot{X}_1(t) = \dot{X}(t) = X_2$$

$$\mu(t) - \dot{X}(t) - X(t) = \ddot{X}(t)$$

$$\mu(t) - X_2(t) - X_1(t) = \dot{X}_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \mu$$

$$Y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} \mu$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = G(s)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{s(s+1)+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{s^2+s+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = G(s)$$

$$\frac{1}{s^2+s+1} = G(s)$$

Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

0

1

d) $X = (sI-A)^{-1} X(0) + (sI-A)^{-1} B\, U(s)$

$$(sI-A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+s+1}\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{s^2+s+1}\begin{bmatrix} s+1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2+s+1}\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} U(s)$$

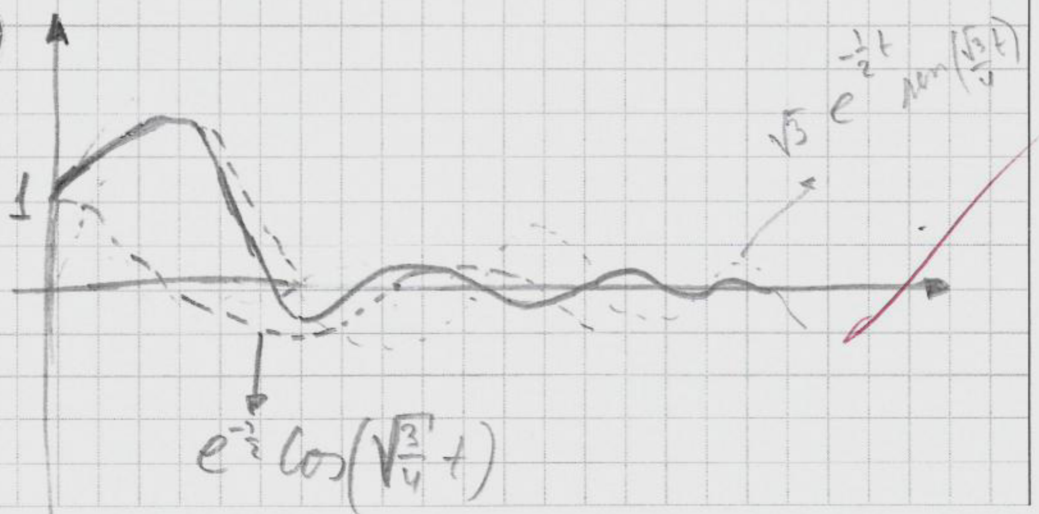
$$X = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+s+1} + \frac{1}{s^2+s+1} \\ \frac{-1}{s^2+s+1} + \frac{s}{s^2+s+1} \end{bmatrix}$$

$$X = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+s+1} \\ \frac{s-1}{s^2+s+1} \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{\frac{3}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{\frac{3}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,t\right) + e^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,t\right)(\sqrt{3}) \\ e^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,t\right) - e^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,t\right)(\sqrt{3}) \end{bmatrix}$$

e) $y = e^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,t\right) + e^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,t\right)\sqrt{3}$.

f)



Presente aquí su trabajo

Zona exclusiva para cálculos y desarrollos (borrador)

CA

AB

w

1 -2

4) 3.0

4=

Para la controlabilidad

$C_o = [B \quad AB]$

$C_o = \begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} w & 2w \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ 2 & \end{bmatrix}$

$C_o = \begin{bmatrix} 1 & 5w \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\det \neq 0 \longrightarrow$ para que sea controlable

$-1 - 10w \neq 0$

$w \neq -\frac{1}{10}$

Para la observabilidad

$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \quad 1 \\ [2 \quad 1]\begin{bmatrix} w & 2w \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2w-1 & 4w-1 \end{bmatrix}$

$\det \neq 0 \Rightarrow 4w - 2 - (2w-1) \neq 0$

$\downarrow$

Para que sea observable

$4w - 2 - 2w + 1 \neq 0$

$2w - 1 \neq 0$

$w \neq \frac{1}{2}$