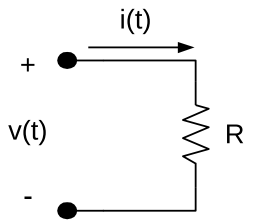
COMO ANALIZAR EL RUIDO – LAS FÓRMULAS NECESARIAS

COMO ANALIZAR EL RUIDO – LAS FÓRMULAS NECESARIAS

1 Potencia y Energía.

Empecemos con los cálculos que hemos realizado en cursos anteriores para determinar la potencia de una señal real. Consideremos el circuito de la figura:



En este circuito la potencia instantánea será:

$$Potencia\ de\ la\ se\tilde{n}al\ f(t) = p_f(t) = v(t)\cdot i(t) = \begin{cases} \dfrac{v^2(t)}{R} \\ i^2(t)\cdot R \end{cases}$$

Y si consideramos que la resistencia tiene el valor de 1 Ohmio obtendremos:

$$p_f(t) = v(t)\cdot i(t) = \begin{cases} v^2(t) \\ i^2(t) \end{cases} = f^2(t)$$

A partir de aquí podemos hallar el valor de la energía total de la señal de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt$$

¿Este cálculo pude ser aplicado para hallar un valor de potencia total?

El valor que calcularemos que represente a la potencia será la potencia promedio y debido a que esta se calculará de igual forma desde -∞ a +∞ lo haremos de la siguiente forma:

$$Potencia\ Promedio\ de\ f(t) = P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t)dt$$

Si analizamos los cálculos de la energía total y de la potencia promedio encontraremos algo muy interesante: SON MUTUAMENTE EXCLUYENTES. Esto implica que cuando obtengo un **valor de energía finito la potencia obtenida es cero** y si calculo un valor **de potencia promedio finito la energía total es infinita**. Por este motivo definiremos:

Señales de potencia:
Señales con valor de potencia promedio finita (las señales periódicas son señales de potencia) es decir $0 < P < \infty$ y por lo tanto son señales con energía infinita.
Señales de energía:
Señales con valor de energía total finita es decir $0 < E < \infty$ y por lo tanto son señales con potencia cero.

Ejercicio 1.1 Determine si las siguientes señales son de potencia o de energía calculando el valor correspondiente:

a) $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ para $-\infty < t < \infty$

b) $x(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_0 t) & \text{para } -T_0/2 \le t \le T_0/2, \text{ donde } T_0 = 1/f_0 \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$

c) $x(t) = \begin{cases} A\exp(-at) & \text{para } t > 0 \text{ y } a > 0 \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$

d) $x(t) = \cos(t) + 5\cos(2t)$ para $-\infty < t < \infty$

Ahora veamos algunas de las operaciones que nos van a permitir calcular tanto Potencia Promedio como la Energía Total.

1.1 Producto escalar.

Este es un cálculo sencillo pero que tiene mucha aplicación posterior. Si tenemos 2 señales del mismo tipo, es decir, de potencia o de energía, el producto escalar se define como:

$$Producto\, escalar = \langle f(t), g(t) \rangle = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot g^*(t)dt & ,Señales\, de\, energía \\ \displaystyle\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\cdot g^*(t)dt & ,Señales\, de\, potencia \end{cases}$$

En el caso particular de que f(t) y g(t) sean señales periódicas de periodo T_0 el cálculo del producto escalar se convierte en:

$$Producto\, escalar = \langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t)\cdot g^*(t)dt$$

A partir de estos valores podemos determinar el valor de la potencia si *g(t) = f(t)* con lo que tendríamos:

$$\langle f(t), f(t)\rangle = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot f^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt & Energía\, E_f \\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt & Potencia\, P_f \end{cases}$$

1.2 Correlación y Autocorrelación.

Esta es una operación matemática que es muy similar a la convolución, sin embargo, mientras que a la convolución la describimos como una herramienta matemática para pasar de tiempo a frecuencia al realizar la multiplicación de señales, en el caso de la correlación esta es una operación que nos ayuda a determinar el grado de similitud de 2 señales.

La operación es la siguiente:

$$R_{fg}(\tau) = \langle f(t+\tau), g(t)\rangle = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau)\cdot g^*(t)dt & ,Señales\, de\, energía \\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t+\tau)\cdot g^*(t)dt & ,Señales\, de\, potencia \end{cases}$$

A partir de la correlación podremos determinar también lo que llamaremos autocorrelación que nos permitirá analizar la similituddе una señal con si misma. Esta operación será:

$$R_{ff}(\tau) = R_f(\tau) = \langle f(t+\tau), f(t)\rangle = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau)\cdot f^*(t)dt & ,Señales\, de\, energía \\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t+\tau)\cdot f^*(t)dt & ,Señales\, de\, potencia \end{cases}$$

Por un momento analice como sería el cálculo gráfico de la autocorrelación y vea su parecido con la convolución.

Ejercicio 1.2 : Mentalmente determine que ocurrirá si analizo la autocorrelación del ruido, o si analizo la autocorrelación de una señal periódica

Propiedades:

Veamos algunas propiedades que nos serán útiles posteriormente:

- **Otra definición de la Correlación:**

Otra forma de calcular la correlación será:

$$R_{fg}(\tau) = \langle f(t+\tau), g(t) \rangle = \langle f(t), g(t-\tau) \rangle$$

- **Autocorrelación y el cálculo de la potencia y energía:**

Fácilmente podemos determinar como calcular a partir de la autocorrelación los valores de potencia o energía de una señal:

$$R_f(0) = \langle f(t+0), f(t) \rangle = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = E_f & ,\textit{Señales de energía} \\ \displaystyle\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot f^*(t) dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt = P_f & ,\textit{Señales de potencia} \end{cases}$$

Esta es otra forma, por lo tanto, de calcular la potencia y la energía.

- **Correlación, Autocorrelación y simetría:**

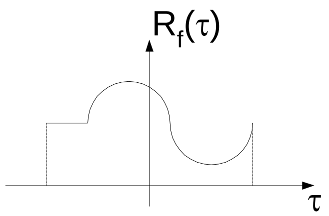
En la correlación se cumple que:

$$R_{fg}(\tau) = R^*{}_{gf}(-\tau)$$

Y en el caso de la autocorrelación obtendríamos:

$$R_f(\tau) = R^*{}_f(-\tau)$$

A partir de este cálculo determine si la siguiente función puede expresar una autocorrelación:



1.3 Densidad Espectral de Energía (DEE, ψ).

Vamos a analizar previamente esta cantidad antes de colocar el análisis. Este cálculo parte del teorema denominado: "Teorema de la Energía de Rayleigh" el mismo que afirma:

$$\textit{Energía}\ E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df$$

Esto implica que podemos calcular la energía tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia. Otro resultado igualmente importante nos dice que el término en el interior de la integral tiene como unidades J/Hz, es decir es una cantidad que expresa el contenido de energía en Joules por cada unidad de frecuencia en Hertz, esto significa, una Densidad Espectral de Energía (DEE ó **ψ**). Entonces tenemos:

$$DEE_g(f) = \Psi_g(f) = |G(f)|^2$$

Finalmente la Energía se calculará como:

$$Energía\ E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} DEE_g(f)df$$

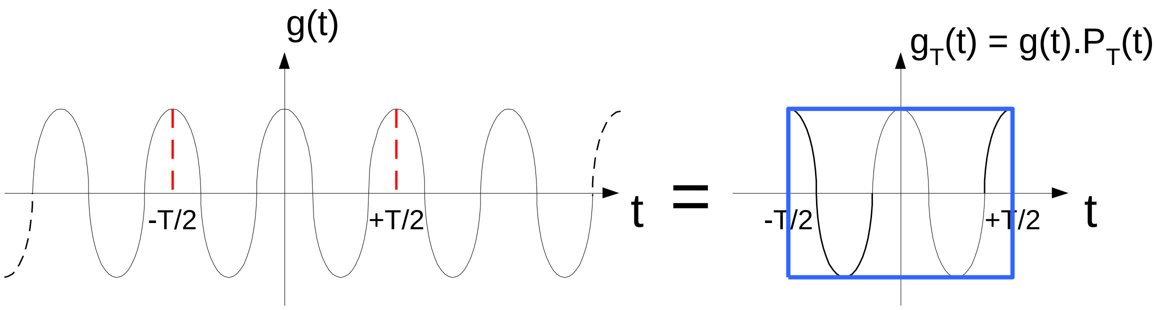
Este cálculo recordemos que se realiza de -∞ a +∞ y debemos tenerlo presente (lo volveremos a mencionar en el cálculo de la DEP). Antes que analizar sus propiedades, veamos el cálculo de la Densidad Espectral pero de potencia, que es probablemente el resultado que más vamos a utilizar.

1.4 Densidad Espectral de Potencia (DEE, S).

Vamos a tratar de aplicar la misma idea en el caso del cálculo de la potencia. Partiremos sin embargo del cálculo básico de la potencia visto al inicio del capítulo:

$$Potencia\ Promedio\ de\ g(t) = P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |g(t)|^2 dt$$

En este cálculo no podremos utilizar directamente el “Teorema de la Energía de Rayleigh” puesto que no contamos con la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt$, así que deberemos utilizar algún artificio u otro teorema. En nuestro caso utilizaremos un artificio; analicemos por un instante el cálculo de la integral que debemos realizar $\int_{-T/2}^{+T/2} |g(t)|^2 dt$. La integral solo considera el intervalo <-T/2, +T/2>, independientemente de la función, por lo tanto nos da lo mismo considerar como base toda la función g(t) o tomar una función $g_T(t)$ que sería la función g(t) pero truncada (o multiplicada por el pulso $P_T(t)$) entre -T/2 y +T/2:



Entonces aplicando esta idea en el cálculo planteado:

$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |g(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |g_T(t)|^2 dt$$

Como ahora trabajamos con una función truncada entre -T/2 y +T/2 la integral da el mismo resultado si la calculamos en ese intervalo o entre -∞ y +∞.

$$P_g = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\left|g_T(t)\right|^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|g_T(t)\right|^2 dt$$

Excelente, ahora si podemos aplicar el Teorema de Rayleigh:

$$P_g = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|g_T(t)\right|^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G_T(f)\right|^2 df$$

No olvidemos recordar que este cálculo es para la función truncada.

A continuación, podemos hacer unos pequeños ajustes en el cambio de posición de las variables y ya está:

$$P_g = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G_T(f)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{\left|G_T(f)\right|^2}{T}df$$

Nuevamente obtenemos una función (no tan fácil de calcular esta vez) dentro de la integral que tendrá unidades de W/Hz y que me representará el aporte en potencia existente en cada valor de frecuencia. A este valor le denominaremos Densidad Espectral de Potencia (DEP)

$$DEP_g(f) = S_g(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{\left|G_T(f)\right|^2}{T}$$

Finalmente la Potencia se calculará como:

$$Potencia\ P_g = \int_{-\infty}^{+\infty} DEP_g(f)df$$

Este cálculo recordemos que se realiza de -∞ a +∞ y debemos tenerlo presente (tal como dijimos que lo volveríamos a mencionar en el ítem anterior)

Propiedades:

Veamos algunas propiedades que nos serán útiles posteriormente:

- **Autocorrelación y DEP ó DEE:**

Existe una relación muy estrecha entre la densidad espectral ya sea de potencia o energía y la autocorrelación. Nosotros verificaremos el cálculo para la DEE.

Consideremos el cálculo de la autocorrelación siguiente para una señal de energía:

$$R_f(\tau) = \langle f(t+\tau), f(t)\rangle$$

Pero tomando en cuenta el siguiente cambio de variable $t = -x$

$$R_f(\tau) = \langle f(-x+\tau), f(-x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x+\tau)\cdot f^*(-x)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau-x)\cdot f^*(-x)dt$$

Recordemos ahora otra operación similar:

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$$

Si $f(t)=f^*(-x)$ y $g(t)=f(x)$ entonces este es un cálculo de convolución que implica que es equivalente a un producto en el dominio de la frecuencia. ¿Cuál es este producto?

$$R_f(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau-x)\cdot f^*(-x)dt=f^*(-x)*f(x)\Leftrightarrow F^*(f)\cdot F(f)=\left|F(f)\right|^2=DEE_f(f)$$

Es decir la Autocorrelación forma un par de transformada de Fourier con la DEE de una señal. Lo mismo ocurrirá con la DEP si es que la señal es de potencia:

$$R_f(\tau)\Leftrightarrow\begin{cases} DEE_f(f) & \textit{Señales de energía} \\ DEP_f(f) & \textit{Señales de potencia}\end{cases}$$

Esta es una forma más de calcular la potencia y energía a través de los cálculos de la DEP y la DEE.

1.5 DEP, DEE y SLIT.

Es un hecho que teníamos que llegar a este punto, después de todo, al trabajar con sistemas de comunicaciones es indispensable retomar la idea del SLIT. Entonces consideremos un SLIT:

$$\begin{matrix} f(t) \\ F(\omega) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\text{S.L.I.T.}} \longrightarrow \begin{matrix} r(t)=f(t)*h(t) \\ R(\omega)=F(\omega)\cdot H(\omega) \end{matrix}$$

En este sistema determinaremos la DEE a la salida del sistema a partir de la entrada.

Si la señal a la salida es $R(\omega)$, entonces la DEE de la señal a la salida será:

$$DEE_r(f)=\left|R(f)\right|^2$$

Este resultado se puede combinar con las características del SLIT para obtener:

$$
\begin{aligned}
DEE_r(f) &= |R(f)|^2 = |F(f)\cdot H(f)|^2 \\
&= |F(f)|^2 \cdot |H(f)|^2 \\
&= DEE_f(f)\cdot |H(f)|^2
\end{aligned}
$$

Recordemos que a $H(\omega)$ no le podemos calcular la DEE pues no es una señal sino la característica de un sistema.

Este resultado nuevamente lo podemos generalizar para la DEP de manera que:

$DEE_r(f) = DEE_f(f)\cdot |H(f)|^2$ Para señales de energía,

$DEP_r(f) = DEP_f(f)\cdot |H(f)|^2$ Para señales de potencia,

Esto nos muestra la gran cantidad de formas de calcular la Potencia y la Energía. Puesto que el cálculo de la potencia será crucial más adelante, veamos un resumen de estos cálculos: