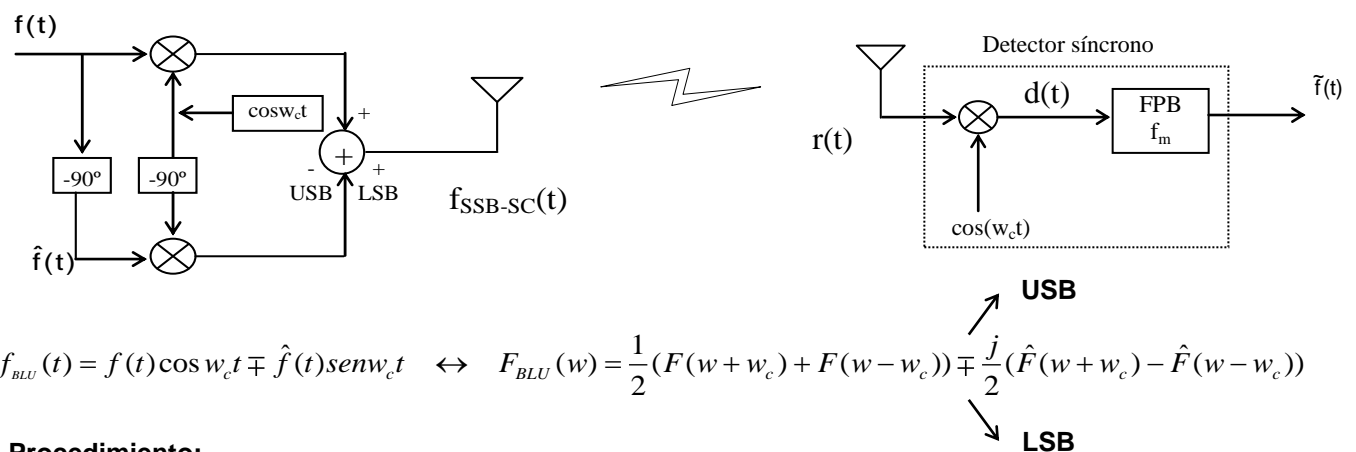


Para la banda inferior sólo cambiamos las frecuencias de corte del filtro. Esta forma de generación presenta un detalle: El filtro debe tener características de corte ideal, de lo contrario las frecuencias bajas de la señal mensaje se distorsionarían y esto no es conveniente.

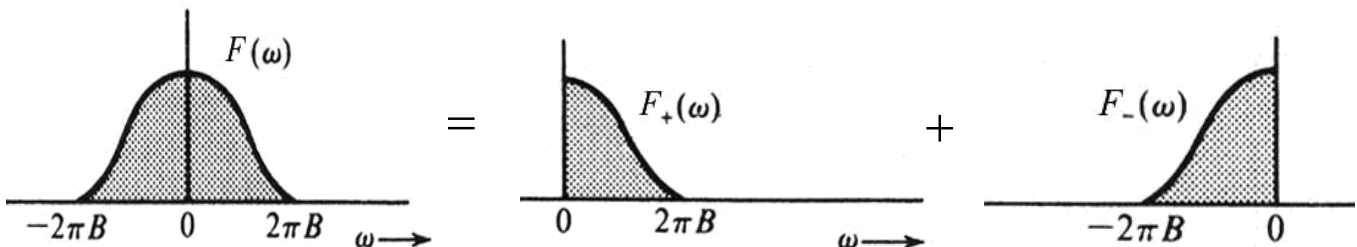
### Método de Desplazamiento de Fase - Transformada de Hilbert



$$f_{BLU}(t) = f(t) \cos \omega_c t \mp \hat{f}(t) \sin \omega_c t \quad \leftrightarrow \quad F_{BLU}(\omega) = \frac{1}{2}(F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)) \mp \frac{j}{2}(\hat{F}(\omega + \omega_c) - \hat{F}(\omega - \omega_c))$$

### Procedimiento:

A partir de  $F(\omega)$  se define  $F_+(\omega) = F(\omega)u(\omega)$  y  $F_-(\omega) = F(\omega)u(-\omega)$  cuyas transformadas inversas son  $f_+(t)$  y  $f_-(t)$ .



Como  $F_+(\omega)$  y  $F_-(\omega)$  no son funciones pares, en el dominio del tiempo son complejas ( $f_+(t)$  y  $f_-(t)$  son conjugadas). Además se cumple que  $f(t) = f_+(t) + f_-(t)$ . Entonces:

$$f_+(t) = \frac{1}{2}[f(t) + j\hat{f}(t)] \quad \quad f_-(t) = \frac{1}{2}[f(t) - j\hat{f}(t)]$$

Donde  $\hat{f}(t)$  se halla a partir de  $F_+(\omega) = F(\omega) \cdot u(\omega)$

$$F_+(\omega) = F(\omega)u(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega)[1 + \text{sgn}(\omega)] = \frac{1}{2}F(\omega) + \frac{1}{2}F(\omega)\text{sgn}(\omega)$$

Haciendo una comparación directa se obtiene:  $\hat{f}(t) \leftrightarrow jF(\omega)\text{sgn}(\omega)$

Donde  $\hat{f}(t)$  se le conoce como la Transformada de Hilbert. Por tanto se define como una operación matemática que produce un desfase de  $-90^\circ$  de cada componente de frecuencia de  $f(t)$ . En los dominios del tiempo y la frecuencia se tiene:

$$\hat{f}(t) = f(t) * \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow \hat{F}(\omega) = -j\text{sgn}(\omega)F(\omega) = \begin{cases} -jF(\omega), & \omega > 0 \\ +jF(\omega), & \omega < 0 \end{cases}$$

El par de **Transformada de Hilbert** se denota por:  $f(t) \xleftrightarrow{h} \hat{f}(t)$

Se tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} - f(t) &= f(-t) \xleftrightarrow{h} \hat{f}(t) = -\hat{f}(-t) & - f(t) &= -f(-t) \xleftrightarrow{h} \hat{f}(t) = \hat{f}(-t) \\ - \hat{f}(t) &\xleftrightarrow{h} -f(t) & - \overline{f^2(t)} &= \overline{\hat{f}^2(t)} \end{aligned}$$

**Problema:** Hallar  $\hat{f}(t)$  para  $f(t) = \frac{a}{t^2 + a^2}$

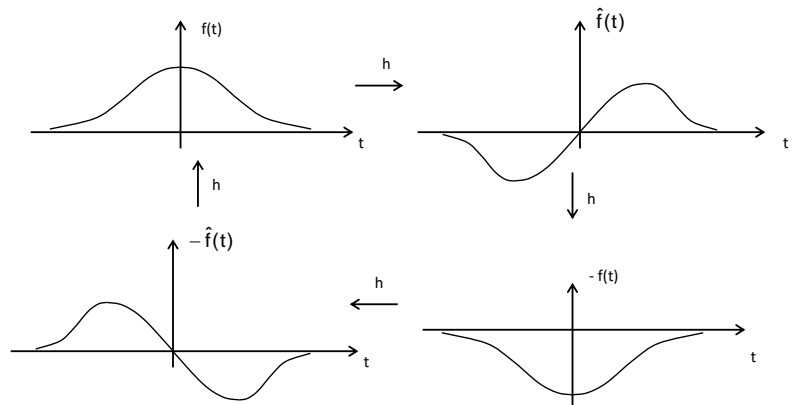
**Solución:**

Usando definición: 
$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{(\tau^2 + a^2)(t - \tau)} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{t^2 + a^2} \left( \frac{t + \tau}{\tau^2 + a^2} + \frac{1}{t - \tau} \right) d\tau$$

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{t^2 + a^2} \left( t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^2 + a^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau d\tau}{\tau^2 + a^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{t - \tau} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{t^2 + a^2} \left\{ \frac{t}{a} \arctan(\tau/a) + \frac{\ln(\tau^2 + a^2)}{2} - \ln(t - \tau) \right\} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{t^2 + a^2} \left( \frac{\pi t}{a} + \ln\left(\frac{\sqrt{1 - a^2/\tau^2}}{1 - t/\tau}\right) \right) = \frac{t}{t^2 + a^2}$$

**Interpretación de la Transformada de Hilbert:**



**Problema:** Graficar el espectro de BLU para la banda lateral superior.

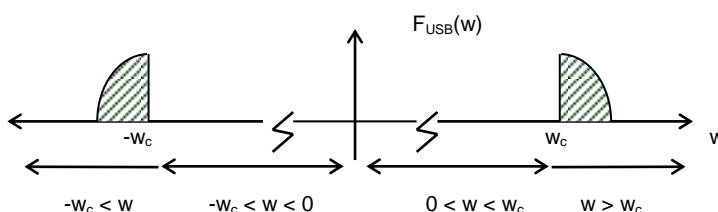
**Solución:** Para USB se tiene 4 rangos de frecuencias indicadas en la figura:

Para  $w > w_c$ :

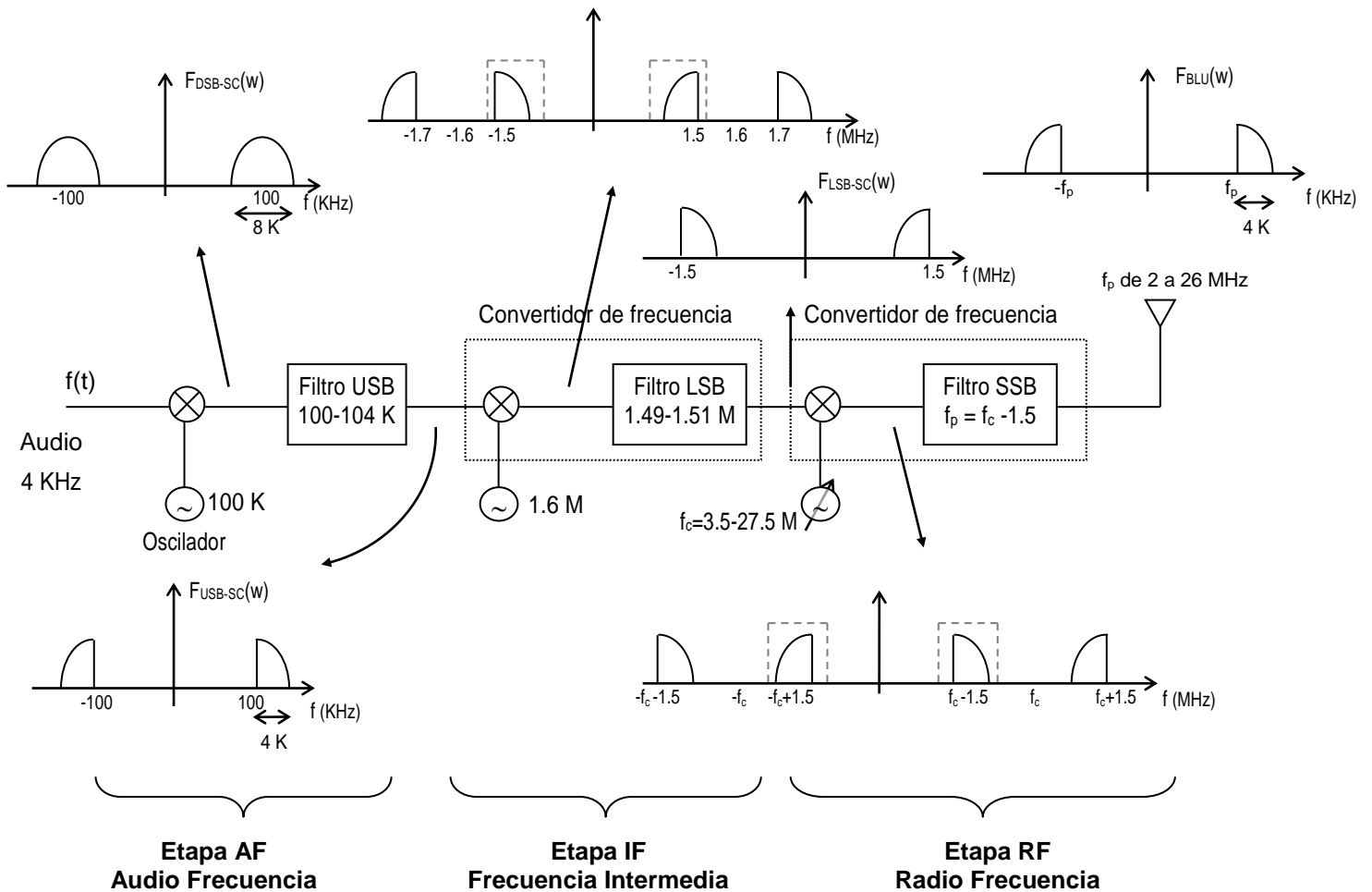
$$F_{\text{BLU}}(w) = \frac{1}{2}(F(w - w_c)) + \frac{j}{2}(\hat{F}(w - w_c)) = \frac{1}{2}(F(w - w_c)) + \frac{j}{2}(-jF(w - w_c)) = F(w - w_c)$$

Para  $0 < w < w_c$ :

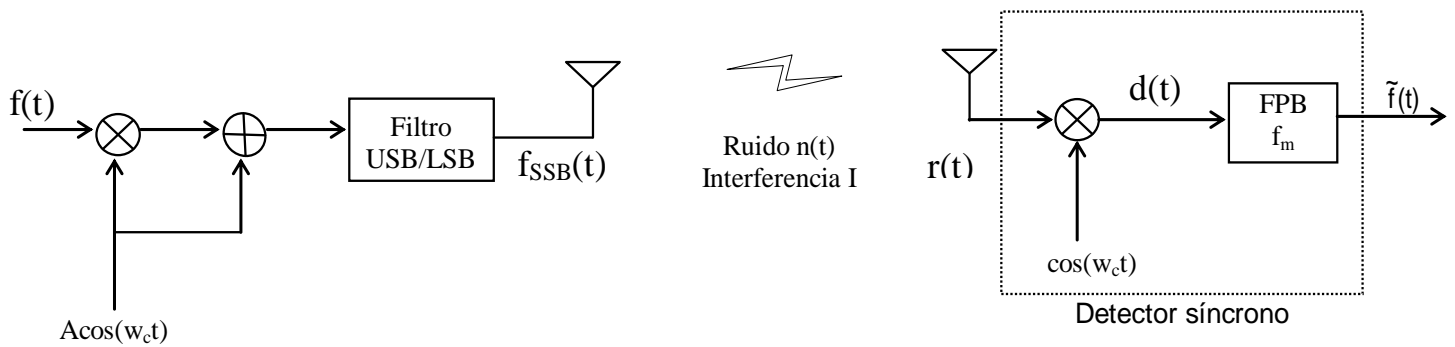
$$F_{\text{BLU}}(w) = \frac{1}{2}(F(w - w_c)) + \frac{j}{2}(\hat{F}(w - w_c)) = \frac{1}{2}(F(w - w_c)) + \frac{j}{2}(+jF(w - w_c)) = 0$$



## Aplicación de BLU en sistemas de microondas:

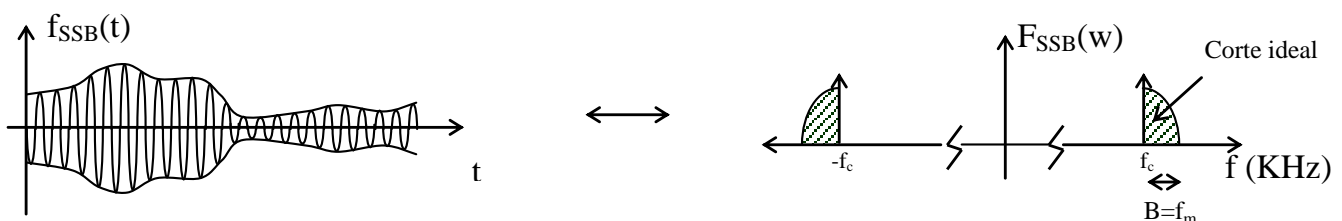


**b. Generación AM-SSB:** Es una modulación BLU más la portadora libre. Se denota también como SSB-RC.



$$f_{SSB}(t) = A \cos w_c t + A f(t) \cos w_c t \mp A \hat{f}(t) \sin w_c t = f_{BLU}(t) + A \cos(w_c t)$$

$$F_{SSB}(w) = \pi A (\delta(w + w_c) + \delta(w - w_c)) + \frac{A}{2} (F(w + w_c) + F(w - w_c)) \mp \frac{A_j}{2} (\hat{F}(w + w_c) + \hat{F}(w - w_c))$$

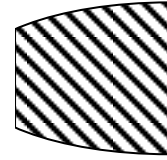
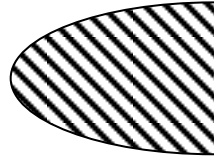


### c) Patrones XY:

Para BLU:



Para SSB:



### d) Demodulación de señales SSB:

**Detección síncrona:** Se utiliza para demodular una señal BLU (el mismo método que DSB-SC). La señal BLU se multiplica por  $\cos \omega_c t$ , para obtener la señal de predetención dada por:

$$\begin{aligned} d(t) &= \varphi_{BLU}(t) \cos \omega_c t = f_{BLU}(t) \cos \omega_c t = [f(t) \cos \omega_c t \mp \hat{f}(t) \sin \omega_c t] \cos \omega_c t \\ &= \frac{f(t)}{2} [1 + \cos 2\omega_c t] \mp \frac{\hat{f}(t)}{2} \sin 2\omega_c t = \frac{f(t)}{2} + \frac{1}{2} [f(t) \cos 2\omega_c t \mp \hat{f}(t) \sin 2\omega_c t] \end{aligned}$$

Se puede apreciar que el segundo término de la suma es otra SSB con frecuencia de portadora  $2\omega_c t$ , la cual se puede eliminar utilizando un filtro pasabajos de ganancia igual a 2 y se obtendría  $f(t)$ .

**Detección de envolvente:** Cuando la señal SSB contiene portadora se puede expresar como:

$$f_{SSB}(t) = \varphi_{SSB}(t) = A \cos \omega_c t + [f(t) \cos \omega_c t + \hat{f}(t) \sin \omega_c t]$$

Si  $A$  es lo suficientemente grande podemos usar detector de envolvente. Para hacer esto reescribimos la ecuación:

$$\varphi_{SSB}(t) = [A + f(t)] \cos \omega_c t + \hat{f}(t) \sin \omega_c t = E(t) \cos[\omega_c t + \theta]$$

Donde  $E(t)$  se expresa como: 
$$E(t) = \sqrt{[A + f(t)]^2 + \hat{f}^2(t)} = A \sqrt{1 + \frac{2f(t)}{A} + \frac{f^2(t)}{A^2} + \frac{\hat{f}^2(t)}{A^2}}$$

Como  $A$  es grande entonces  $A \gg m_p = |f(t)|_{m\acute{a}x}$  y  $A \gg |\hat{f}(t)|$ : 
$$E(t) = A \sqrt{1 + \frac{2f(t)}{A}}$$

Con el desarrollo binomial (sólo los dos términos): 
$$E(t) = A \left[ 1 + \frac{f(t)}{A} \right] = A + f(t)$$

Luego de utilizar un condensador se elimina  $A$  y se obtiene  $f(t)$ .

En resumen para SSB:

- Si  $A \gg m_p$  entonces mediante detección por envolvente se recupera  $E(t) = \sqrt{[A + f(t)]^2 + \hat{f}^2(t)} \approx A + f(t)$ , sin embargo, ésta operación es a costa de una eficiencia de potencia ( $\mu = \eta_p$ ) muy baja (menor a 10%).
- A menos que la señal  $f(t)$  sea de tipo 'pasabanda' existe una dificultad en generar el corte 'ideal' en una de las bandas laterales. Si se utiliza el método de discriminación de frecuencias se requiere de un filtro pasabanda lo más 'ideal' posible. Si se utiliza el método de desplazamiento de fase los desfases de  $90^\circ$  son afectadas por los retardos en el medio.
- Por estas consideraciones la modulación SSB-RC no tiene utilidad práctica incluso con detección síncrona.

## MODULACIÓN AM DE BANDA VESTIGIAL (VSB)

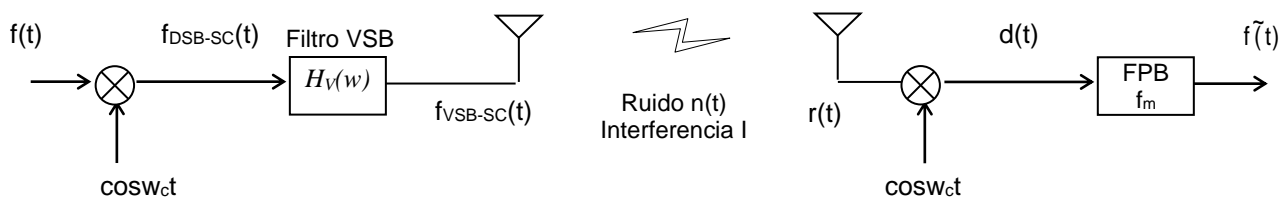
La modulación AM-VSB denominada también AM de banda lateral residual BLR, reúne las ventajas de los sistemas SSB/BLU y DSB/DSB-SC y elimina sus desventajas. Prácticamente, requiere el mismo ancho de banda y la misma potencia que la SSB y se puede obtener a partir de señales DSB con filtros pasabanda más simples con características de corte gradual.

Se distinguen dos tipos de AM vestigial: AM-VSB-SC (sin portadora) y AM-VSB (con portadora).

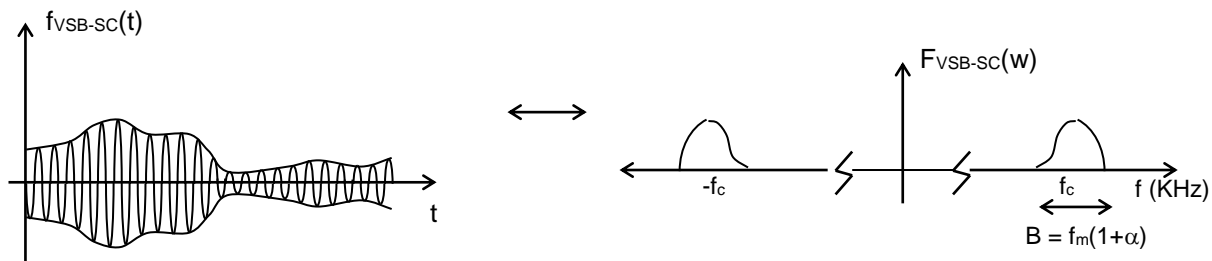
### 1. MODULACIÓN AM-VSB-SC

Es una técnica AM de banda lateral vestigial o residual sin portadora:

#### a) Forma de operación:



$$f_{VSB-SC}(t) = f(t) \cos w_c t * h_v(t) \leftrightarrow F_{VSB-SC}(w) = \frac{1}{2} [F(w + w_c) + F(w - w_c)] H_V(w)$$



Factor de forma (FPBda):  $\alpha = \frac{X}{W_m}$

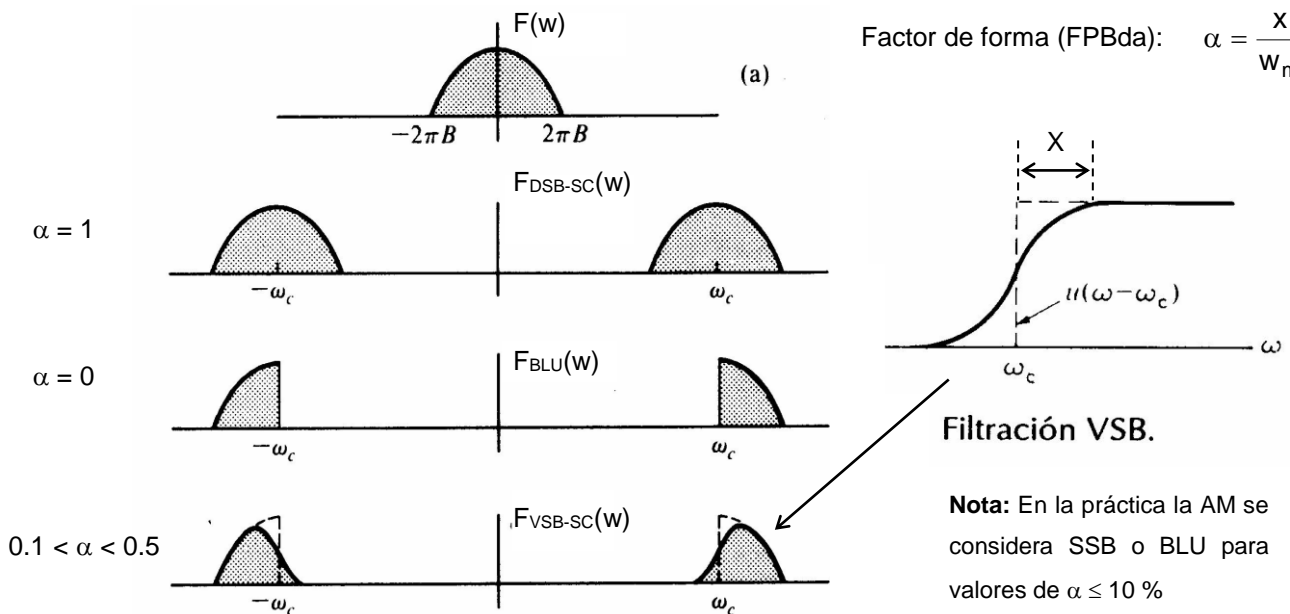


FIGURA 1 MODULACIÓN VSB

#### b) Detección síncrona:

Si consideramos que no hay efectos de interferencia o ruido en el canal entonces:

$$r(t) = f_{VSB-SC}(t) \leftrightarrow R(w) = F_{VSB-SC}(w) = \frac{1}{2} [F(w + w_c) + F(w - w_c)] H_V(w)$$

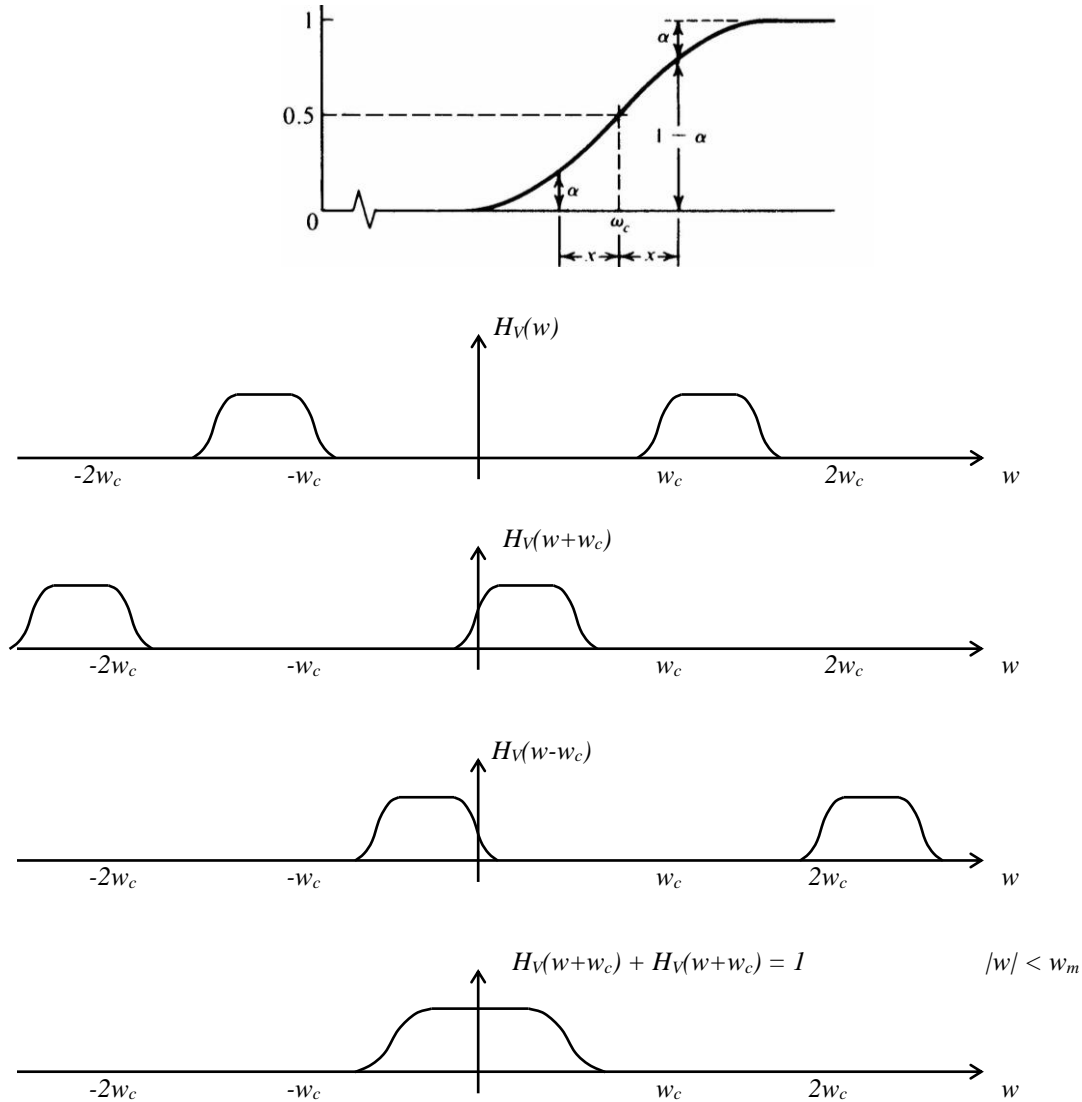
Asumiendo una portadora perfectamente sincronizada entonces:

$$d(t) = r(t) \cdot (\cos w_c t) \leftrightarrow \frac{1}{4} [F(w + 2w_c) + F(w)] H_V(w + w_c) + \frac{1}{4} [F(w - 2w_c) + F(w)] H_V(w - w_c)$$

Haciendo pasar  $d(t)$  por un FPB tenemos:

$$\tilde{r}(t) = d(t)|_{\text{FPB}} \leftrightarrow \frac{1}{4} F(w) [H_V(w + w_c) + H_V(w - w_c)]$$

Debido a la simetría complementaria del filtro pasabanda  $H_V(w)$  alrededor de la frecuencia de portadora es posible recuperar  $f(t)$ :



**FIGURA 2 FILTRACIÓN VSB**

Luego ajustando la ganancia del filtro pasabajos finalmente tenemos:

$$\tilde{f}(t) = d(t)|_{\text{FPB}} \approx f(t)$$

### c) Características

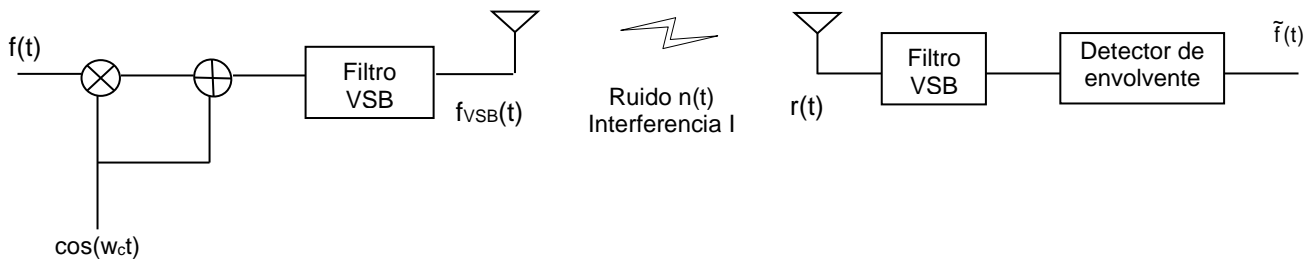
- No se requiere el corte 'ideal' de una de las bandas laterales, suficiente un filtro pasabanda real. Es mejor que usar desfases (en ése caso de menos de 90°) debido a los retardos en el medio.
- Se exige sincronización en fase y en frecuencia de la portadora local del Rx. Si la portadora local presenta un error de fase  $\theta$ , entonces la  $f(t)$  demodulada presenta un término de Hilbert modificada  $f_s(t)$ :

$$\tilde{f}(t) = f(t) \cos \theta \pm f_s(t) \sin \theta + I \cos(w_d t - \theta)$$

## 2. MODULACIÓN AM-VSB

Es una técnica AM de banda lateral vestigial o residual con portadora:

### a) Forma de operación:



$$f_{VSB}(t) = \cos w_c t + f(t) \cos w_c t \pm f_s(t) \sin w_c t$$

$$F_{VSB}(w) = \pi(\delta(w + w_c) + \delta(w - w_c)) + \frac{1}{2}(F(w + w_c) + F(w - w_c)) \pm \frac{1}{2}(F_s(w + w_c) + F_s(w - w_c))$$

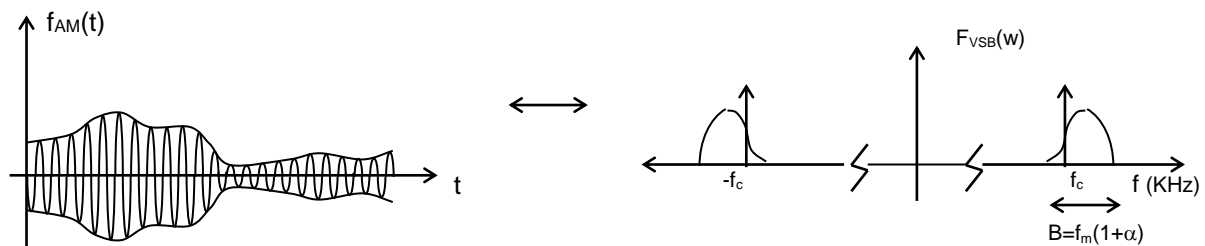


FIGURA 3 OPERACIÓN DEL SISTEMA VSB

### b) Ventajas

En general la modulación VSB representa un compromiso entre AM-DSB y AM-BLU. Es relativamente inmune al desvanecimiento selectivo (mejor que DSB/DSB-SC pero menor que BLU/SSB). Si además la portadora es de alta potencia, la señal VSB se puede demodular mediante un simple detector de envolvente. Por todas éstas razones, en los sistemas de difusión de TV, las señales de video se transmiten mediante banda laterales residuales, lo que reduce el ancho de banda de 8 MHz a 4.5 MHz aprox.

En la figura 4 se muestra que la caída gradual del filtro VSB no se sitúa sobre la portadora sino 1 MHz por debajo de ella y en el receptor se completa la característica de banda lateral residual. Observe que también la información de color y audio están centradas en otras frecuencias denominadas sub portadoras obteniéndose en realidad una señal múltiple FDM como anticipo al concepto de multicanalización.

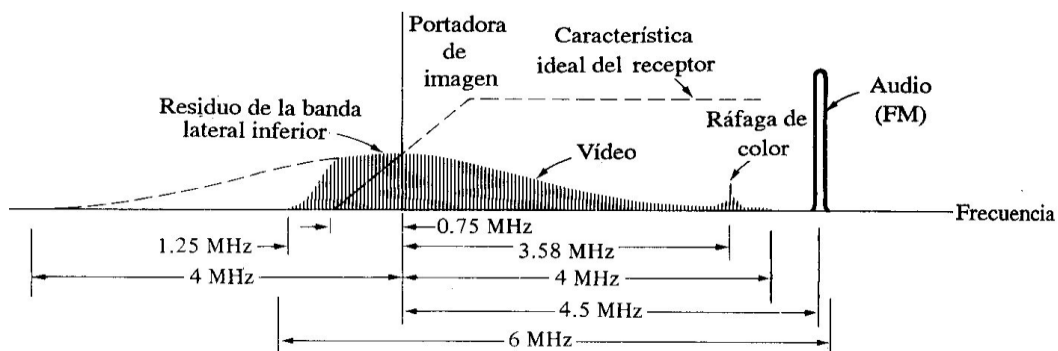


FIGURA 4 ESPECTRO DE TRANSMISIÓN PÚBLICA DE TV

## COMPARACIÓN DE TÉCNICAS DE AM

Base de comparación	AM-DSB-SC	AM-DSB-LC	AM-BLU	AM-SSB-RC	AM-VSB-SC	AM-VSB-LC
Ancho de banda	$2f_m$ Hz	$2f_m$ Hz	$f_m$ Hz	$f_m$ Hz	$f_m(1+\alpha)$ Hz	$f_m(1+\alpha)$ Hz
Potencia Tx	$A^2 \frac{\overline{f^2(t)}}{2}$	$A^2 \frac{1+m^2\overline{f^2(t)}}{2}$	50% DSB-SC	$\frac{A^2}{2} \left( \frac{\overline{f^2(t)}}{2} + 1 \right)$	= BLU	=SSB-RC
Inmunidad al desvanecimiento selectivo	Baja	Baja	Alta	Alta	Regular	Regular
Eficiencia de potencia $\eta_p$	100%	$= \frac{\overline{m^2 f^2(t)}}{\overline{m^2 f^2(t)} + 1}$	100%	< 10%	100%	10-30%
SNRo	$= \frac{S_i}{\eta f_m} = \gamma_{op}$	$= \eta_p \frac{S_i}{\eta f_m} = \eta_p \gamma_{op}$	$\gamma_{op}$	$\eta_p \gamma_o$	$\gamma_{op}$	$\eta_p \gamma_o$
HW	Simple	Regular	Complejo	Complejo	Simple	Regular
Índice de modulación	$\infty$	$im = \frac{D-d}{D+d} = mm_p$	-	-	-	-
Patrón XY	