LABORATORIO DE TEORÍA DE COMUNICACIONES 1 – PARTE TEÓRICA

TEMA: SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

2024

LABORATORIO DE TEORÍA DE COMUNICACIONES 1 – TEL133

LABORATORIO NÚMERO:	4	SEMESTRE:	2024 – 1

TEMA: SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

Objetivos de aprendizaje:

- Realizar el análisis de Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (SLIT).
- Analizar un SLIT a través de señales sinusoidales.
- Analizar el comportamiento de un filtro como SLIT.
- Evaluar un SLIT usando señales de audio.

Actividades	Descripción	Duración	Puntaje
1	Prueba de entrada	10 min.	6
2	Desarrollo de la guía	95 min.	8
3	Evaluación oral	15 min.	6

El contenido de esta guía es de carácter estrictamente personal y aplicable solo para el curso de **Teoría de Comunicaciones 1 (TEL133)**. Cualquier tipo de plagio será sancionado de acuerdo con el reglamento disciplinario de la

SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

1. INTRODUCCIÓN

En su sentido amplio, un sistema físico es una interconexión de dispositivos y elementos sujetos a las leyes físicas. La mayor parte de los sistemas del mundo real son bastante complejos y casi imposibles de analizar cuantitativamente. Por eso, nos vemos forzados a utilizar modelos o abstracciones que retienen las características esenciales del sistema y simplifican el análisis, en tanto sigan brindando resultados que tengan sentido.

Un sistema que procesa señales analógicas se conoce como un sistema analógico o sistema de tiempo continúo. La señal que se va a procesar forma la excitación o entrada al sistema. La señal procesada recibe el nombre de respuesta o salida. La respuesta de cualquier sistema está gobernada por la entrada y los detalles del sistema. El estudio de sistemas implica la entrada, la salida y las especificaciones del sistema. Conceptualmente podemos determinar cualquiera de estas en términos de las otras dos.

2. SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

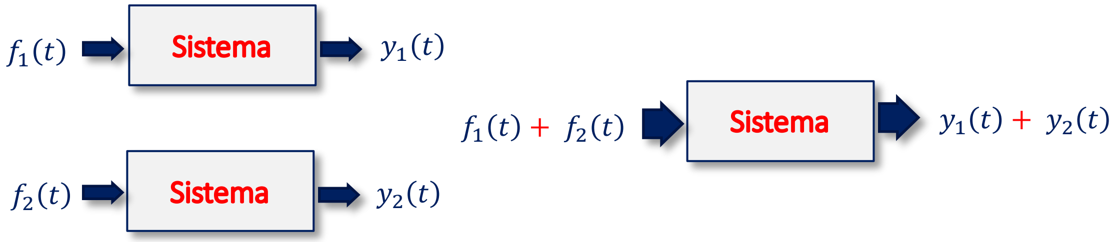
La linealidad y la invariancia en el tiempo juegan un papel muy importante en el estudio de señales y sistemas, debido a que muchos fenómenos físicos se pueden modelar mediante sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

3. LINEALIDAD

Se dice que un sistema es lineal si cumple el principio de superposición, el cual comprende las propiedades de proporcionalidad o escalado y de aditividad. Lo anterior se puede expresar como sigue: si la entrada se ve afectada por un factor, entonces la salida será afectada por el mismo factor. Asimismo, si se tiene como entrada la suma de dos entradas, la salida será la suma de las salidas que producirían cada una de las entradas de forma independiente.

$\boldsymbol{Proporcionalidad}$:

Aditividad:

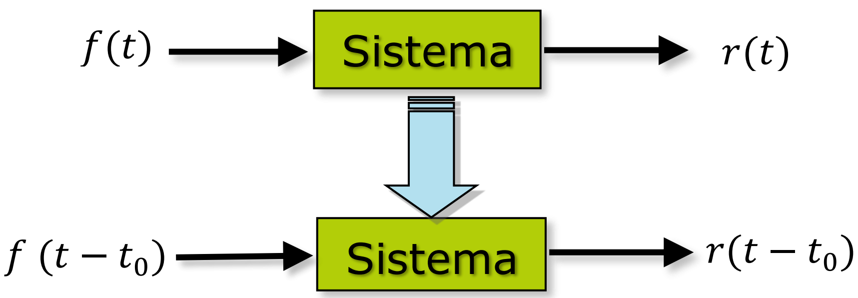


Se pueden aplicar ambas propiedades:

Finalmente, de manera general:

4. INVARIANZA EN EL TIEMPO

Un sistema invariante en el tiempo es aquel en el cual si la entrada se desfasa un tiempo t_0 la salida reproducirá el mismo efecto, es decir, se retrasará t_0:



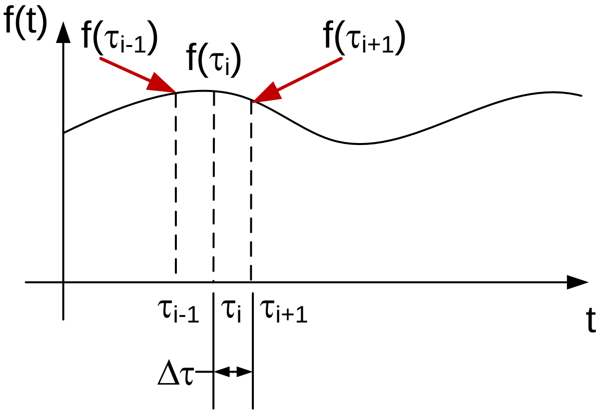
5. ANÁLISIS MATEMÁTICO DE LA RESPUESTA AL IMPULSO EN UN SLIT

Sea un $\mathbf{SISTEMA\ LINEAL\ E\ INVARIANTE\ EN\ EL\ TIEMPO\ (SLIT)}$ en el cual se tiene como entrada la función impulso y como "respuesta al impulso" la función $h(t)$:

Usaremos las características de un SLIT, para ello primero aplicamos la invarianza en el tiempo:

$$\delta(t - t_0) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow h(t - t_0)$$

Ahora, consideremos la función $f(t)$ tomando puntos o valores discretos como se muestra en el siguiente gráfico:



Luego, los valores discretos $\ldots, \boldsymbol{f(\tau_{i-1}), f(\tau_i), f(\tau_{i+1})}, \ldots$ serán utilizados como pesos para utilizar la propiedad de linealidad en el sistema planteado.

$$\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} f(\tau_i)\cdot\delta(t-\tau_i)\cdot\Delta\tau \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} f(\tau_i)\cdot h(t-\tau_i)\cdot\Delta\tau$$

Dichos pesos han sido multiplicados en la entrada del sistema y aplicados a la función original delta pero desfasada; entonces, se obtendrá que dichos pesos han sido aplicados también a la salida del sistema.
Además, se puede observar que adicionalmente se ha multiplicado a la entrada el valor $\Delta\tau$ (constante), que no afectará el análisis, de acuerdo a la propiedad de linealidad.

Finalmente, se toma el límite cuando $\Delta\tau$ tiende a cero. Al hacer esto último, se estarán considerando todos los puntos de la función $f(t)$ y no solo los puntos discretos. Entonces, obtendremos que en el límite la sumatoria se convertirá en una integral, tal y como se muestra a continuación:

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} f(\tau_i)\cdot\delta(t-\tau_i)\cdot\Delta\tau \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} f(\tau_i)\cdot h(t-\tau_i)\cdot\Delta\tau$$

Es decir, lo anterior es igual a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\cdot d\tau \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau$$

Estas integrales son conocidas como integrales de ***convolución***. Luego, el resultado que obtenemos será el siguiente:

$$f(t)*\delta(t)=f(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow r(t)=f(t)*h(t)$$

Esto significa que la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo se puede obtener **a partir de la convolución de la señal de entrada o excitación y la respuesta al impulso.**
Este no es el único resultado pues podemos ahora relacionarlo con el cálculo en frecuencia para obtener finalmente:

$$\begin{matrix} f(t) \\ F(\omega) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \begin{matrix} r(t)=f(t)*h(t) \\ R(\omega)=F(\omega)\cdot H(\omega) \end{matrix}$$

Este resultado nos dice que la respuesta de un sistema en el dominio de la frecuencia es igual: **al producto del espectro en frecuencia de la señal de entrada o excitación con la "Función de Transferencia $H(\omega)$".**

Finalmente, como conclusión podemos afirmar lo siguiente:

> ***Bastará con conocer la función de transferencia o la respuesta al impulso de un sistema para hallar la salida de este sistema ante cualquier entrada.***

6. FILTRO

Un filtro es un dispositivo selectivo en frecuencia que se utiliza para limitar el espectro de una señal a una banda específica de frecuencias. Su respuesta en frecuencia se caracteriza por "bandas de paso" y "bandas eliminadas". Las frecuencias dentro de las bandas de paso se transmiten a través del sistema con ninguna o con una pequeña distorsión, mientras que las frecuencias dentro de las bandas eliminadas son rechazadas por el sistema.

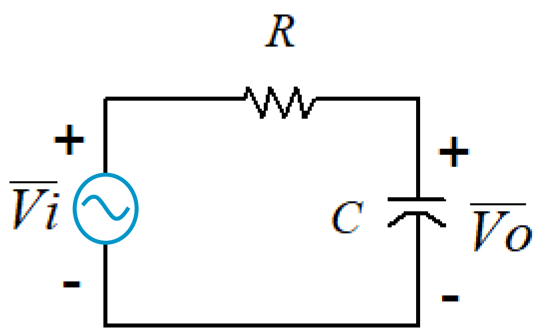
La palabra "banda" se repite varias veces, por lo que es necesario definirla de manera conceptual y simple para luego entenderla con mayor detalle; esto es, una banda es un rango acotado de frecuencias.

6.1 ANCHO DE BANDA

Se define como el intervalo de frecuencias reales (positivas) en el cual la magnitud de la función de transferencia $H(\omega)$ tiene mayor contenido de energía. La magnitud límite en mención será $1/\sqrt{2}$ veces o lo que es lo mismo, **menos de $3\ dB$** de su valor máximo.

6.2 ANÁLISIS DE UN SLIT REAL: FILTRO PASABAJO RC

Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo más conocidos en la práctica son quizás los filtros, y uno de los modelos más simple es el filtro RC de primer orden, el cual está compuesto por una resistencia y un capacitor. Asimismo, es necesario mencionar que existen, además del filtro pasa bajos, los filtros pasa altos, pasa banda, y el rechaza banda. La siguiente figura muestra el esquema del filtro pasa bajos RC.



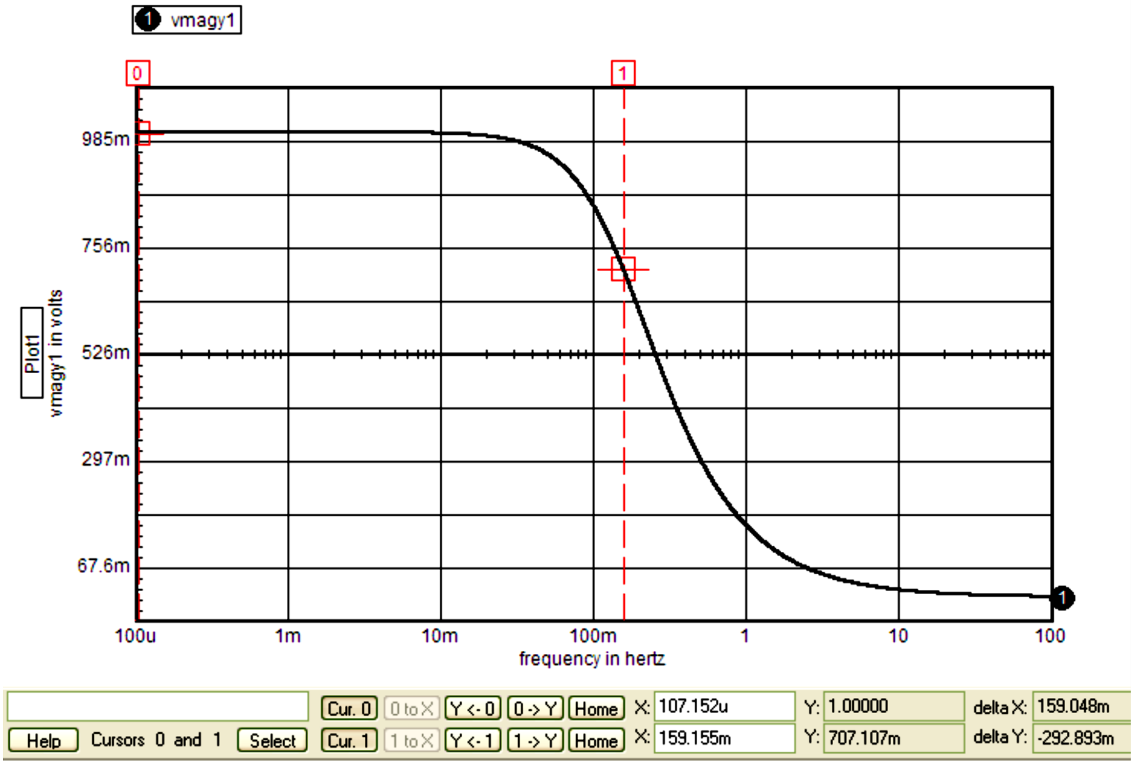
Donde, la función de transferencia $H(\omega)$ será:

$$\boxed{H(\omega) = \frac{\overline{V_0}}{\overline{V_i}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}}$$

Obteniendo la magnitud de $H(\omega)$:

$$\boxed{|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}$$

Finalmente, se muestra una gráfica de la respuesta en frecuencia de un filtro RC (obtenida con el software SPICE), considerando $\boldsymbol{R = 1\ \Omega}$ y $\boldsymbol{C = 1\ F}$ como ejemplo.



Luego, para el ancho de banda del filtro pasa bajos, tomaremos el rango de frecuencias que comprende las frecuencias desde el valor DC hasta la denominada frecuencia de corte f_c (frecuencia límite), valor que puede ser calculado de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_c^2}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{1+\omega_c^2} \quad \rightarrow \quad \omega_c^2 = 1$$

$$\therefore \quad \omega_c = 1 \quad rad/seg \quad \rightarrow \quad f_c = 159.15\, mHz$$

De este análisis, podemos afirmar que el valor de la magnitud de la función cuando $\omega_c = 1\, rad/s$ es $707.107mV$, lo cual se corresponde con el gráfico mostrado y que coincide con el valor máximo entre $\sqrt{2}$.