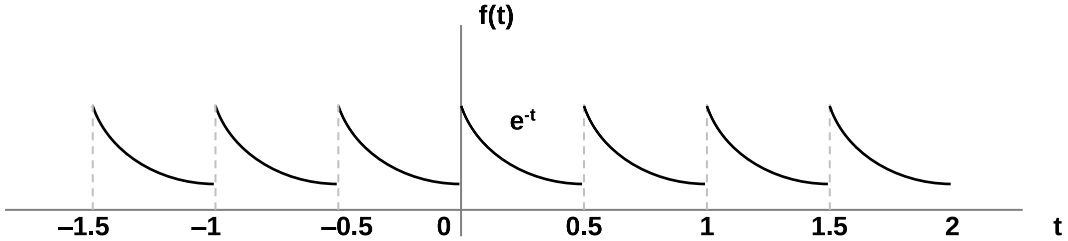
EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1: Evalúe todas las series de Fourier para la señal periódica f(t) de la figura:



Solución:

Asumiendo como referencia $t_o = 0$ entonces T = 0.5 → $f_o = 2$ → $w_o = 2\pi f_o = 4\pi$.

La serie Trigonométrica de Fourier se expresa por:

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos 4\pi nt + b_n sen 4\pi nt$$

en donde:

$$a_o = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = 2\int_0^{0.5} e^{-t}dt = 0.79$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos nw_o t dt = 4\int_0^{0.5} e^{-t}\cos 4\pi nt dt = 0.79\left(\frac{2}{1+16\pi^2 n^2}\right)$$

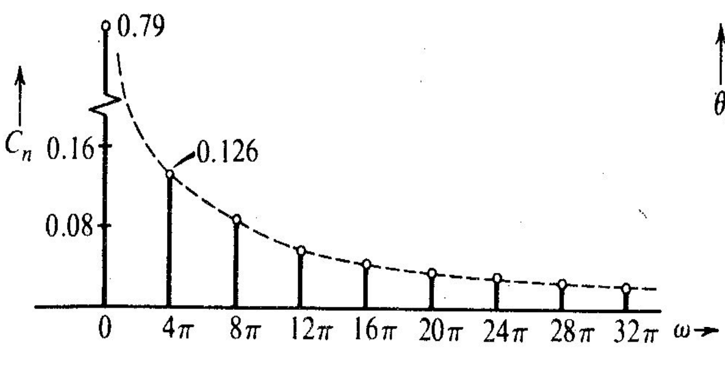
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) sen nw_o t dt = 4\int_0^{0.5} e^{-t} sen 4\pi nt dt = 0.79\left(\frac{8\pi n}{1+16\pi^2 n^2}\right)$$

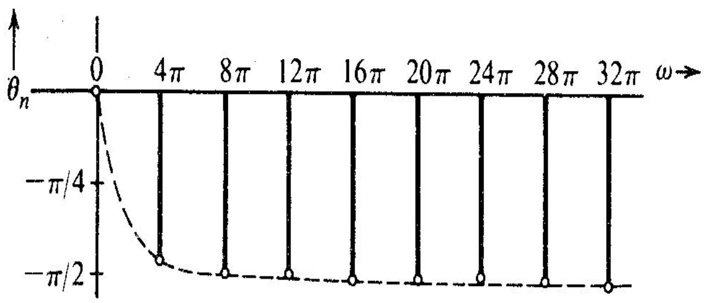
La serie compacta de Fourier se obtiene de: $f(t) = c_o + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(4\pi nt + \theta_n)$

donde:

$$c_o = a_o = 0.79 \qquad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0.79\left(\frac{2}{\sqrt{1+16\pi^2 n^2}}\right) \qquad \theta_n = -\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} = -\tan^{-1}(4\pi n)$$

Luego se trazan los espectros de magnitud y fase en función de w como se observa en la figura:





Espectros de Magnitud y Fase de f(t) periódica

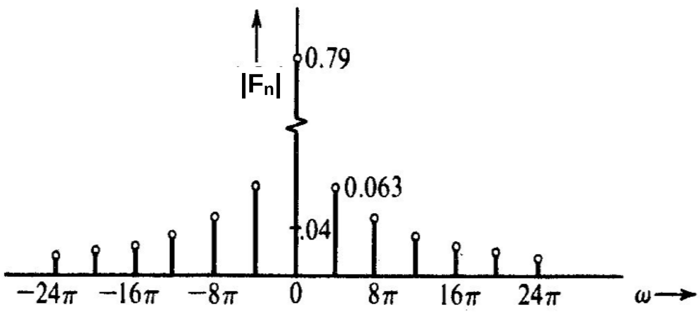
La serie exponencial de Fourier se expresa por:

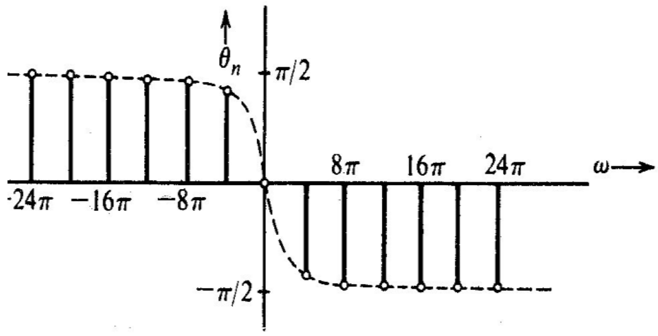
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{j4\pi n t}$$ donde:

$$F_n = 2\int_0^{0.5} e^{-t} e^{-j4\pi n t} dt = 2\int_0^{0.5} e^{-(1+j4\pi n)t} dt = \frac{0.79}{1+j4\pi n}$$

Hallando espectros de magnitud y fase:

$$|F_n| = \frac{0.79}{\sqrt{1+16\pi^2 n^2}} \qquad \theta_n = -\tan^{-1}(4\pi n)$$

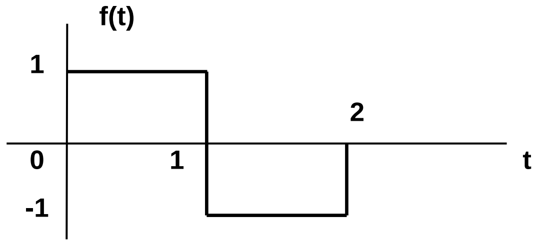




Notas:

- Observe que siempre el espectro de magnitud es par y el espectro de fase es impar.
- Compare éstos espectros con los obtenidos en la serie compacta de Fourier.

Ejemplo 2: Encuentre la serie exponencial de Fourier para la señal f(t) de la figura:



Solución:

Sólo interesa representar f(t) en el intervalo finito de 0 a 2:

Asumiendo como referencia $t_o = 0$ entonces $T = 2 \rightarrow f_o = 0.5 \rightarrow w_o = 2\pi f_o = \pi$.

Por tanto la serie exponencial de Fourier se expresa por:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{j\pi n t}$$ donde:

$$F_n = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t) e^{-j\pi n t} dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-j\pi n t} dt - \frac{1}{2}\int_1^2 e^{-j\pi n t} dt = \frac{1}{2jn\pi}(-e^{-jn\pi} + 1 + e^{-j2n\pi} - e^{-jn\pi})$$

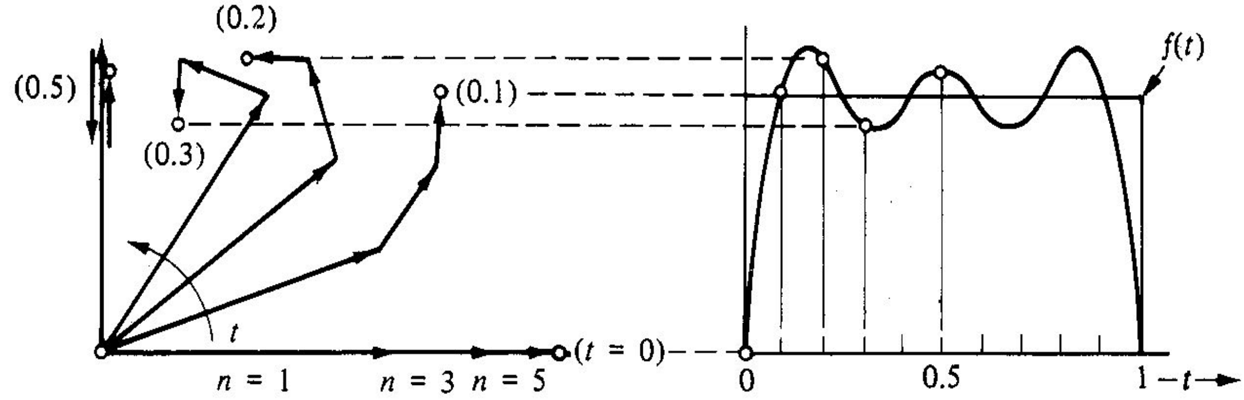
$$F_n = \frac{1}{jn\pi}(1 - e^{-jn\pi}) = \frac{2}{jn\pi}, \quad n\ impar$$

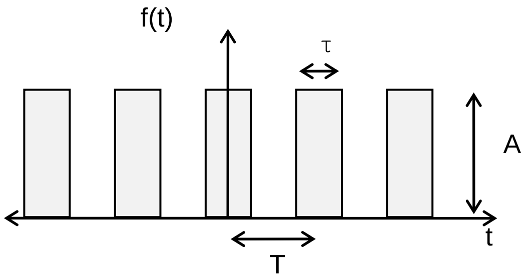
Desarrollando la serie exponencial:

$$f(t)=\frac{2}{j\pi}(e^{j\pi t}+\frac{1}{3}e^{j3\pi t}+\frac{1}{5}e^{j5\pi t}+...-e^{-j\pi t}-\frac{1}{3}e^{-j3\pi t}-\frac{1}{5}e^{-j5\pi t}-...)$$

Considerando los 3 1ros términos para representar f(t) usando fasores en el intervalo de 0 a 0.5 seg, tenemos:

$$f(t)\approx\frac{2}{j\pi}(e^{j\pi t}+\frac{1}{3}e^{j3\pi t}+\frac{1}{5}e^{j5\pi t})$$





Ejemplo 3: Encuentre la serie exponencial de Fourier para un tren de pulsos periódicos como se muestra en la figura. Grafique los espectros de magnitud para valores de ciclo τ/T = 50 y 20%. Comente.

Solución:

La **serie exponencial** de Fourier se expresa por:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jnw_0 t}$$

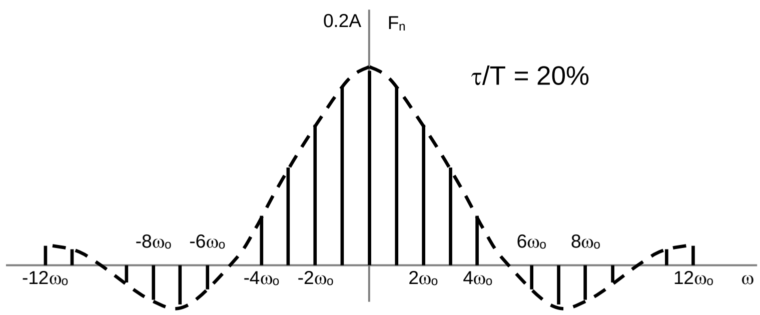
donde: $$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}f(t)e^{-jnw_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2}Ae^{-jnw_0 t}dt=\frac{A}{T}\frac{e^{-jnw_0 t}}{-jnw_o}\Bigg|_{-\tau/2}^{+\tau/2}=\frac{A}{T}\frac{2}{nw_o}\frac{e^{jnw_0\tau/2}-e^{-jnw_0\tau/2}}{2j}$$

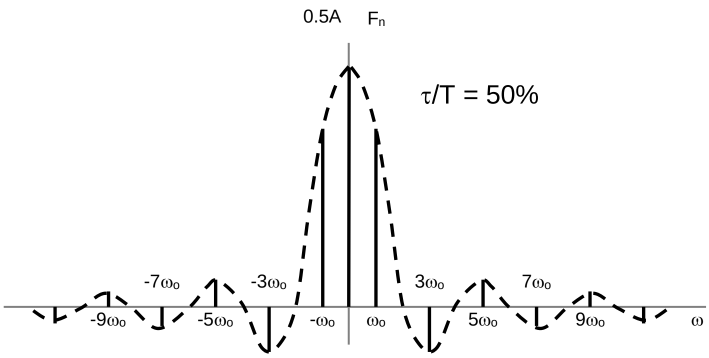
$$F_n=\frac{A}{T}\frac{2}{nw_o}sen(nw_o\tau/2)=\frac{A\tau}{T}\frac{sen(nw_o\tau/2)}{nw_o\tau/2}=\frac{A\tau}{T}Sa(nw_o\tau/2)$$

Expresando la serie exponencial para τ/T = 20 y 50% respectivamente tenemos:

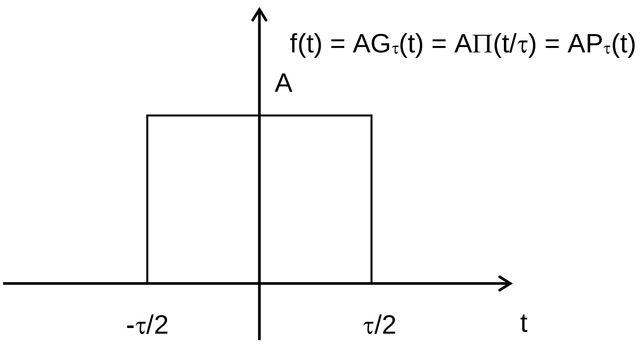
$$f(t)=\frac{A}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa(\frac{n\pi}{2})e^{jnw_0 t}\qquad\qquad f(t)=\frac{A}{5}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa(\frac{n\pi}{5})e^{jnw_0 t}$$

Graficando el espectro F_n de la serie exponencial:





Ejemplo 4: Encuentre la Transformada de Fourier de la señal cuadrada f(t) mostrada en la figura:.

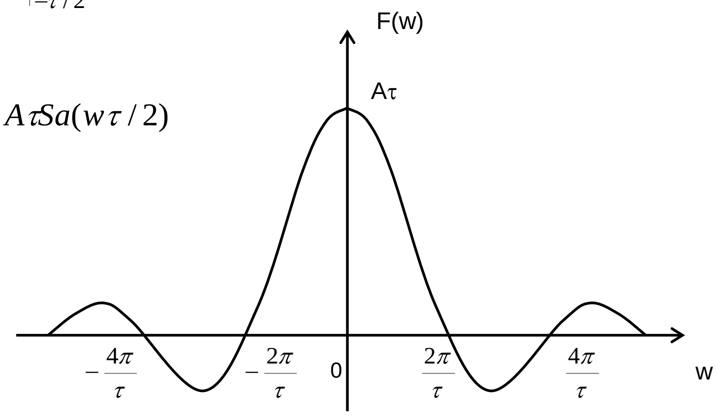


Solución:

Por definición:

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jwt}dt=\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} Ae^{-jwt}dt=A\left.\frac{e^{-jwt}}{-jw}\right|_{-\tau/2}^{+\tau/2}=\frac{A}{jw}(e^{jw\tau/2}-e^{-jw\tau/2})=\frac{2A}{w}\left(\frac{e^{jw\tau/2}-e^{-jw\tau/2}}{2j}\right)$$

$$F(w)=\frac{2A}{w}sen(w\tau/2)=\frac{2A\tau}{2}\frac{sen(w\tau/2)}{w\tau/2}=A\tau Sa(w\tau/2)$$

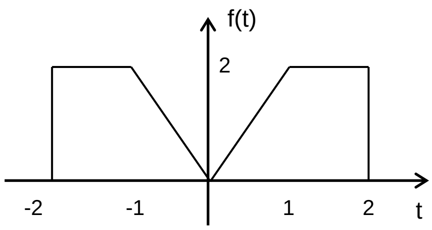


A partir de la serie:

$$F(w)=\lim_{T\to+\infty} TF_n=\lim_{T\to+\infty} T\left(A\frac{\tau}{T}Sa(nw_o\tau/2)\right)=A\tau Sa(w\tau/2)$$

Se observa que cuando T → +∝, la indeterminación 0. ∝ se elimina y el espectro F_n que tendía a cero se expresa ahora como F(w) en el límite.

Ejemplo 5: Hallar F(w) de la siguiente función:



Solución:

Expresando f(t) en función de $G_\tau(t)$ y $\Delta_\tau(t)$: $f(t)=2G_4(t)-2\Delta_1(t)$

Usando luego la propiedad de linealidad tenemos:

$$F(w)=2\big(4Sa(w.4/2)\big)-2\big(1.Sa^2(w.1/2)\big)=8Sa(2w)-2Sa^2(w/2)$$

$$\boxed{F(w)=8Sa(2w)-2Sa^2(w/2)}$$

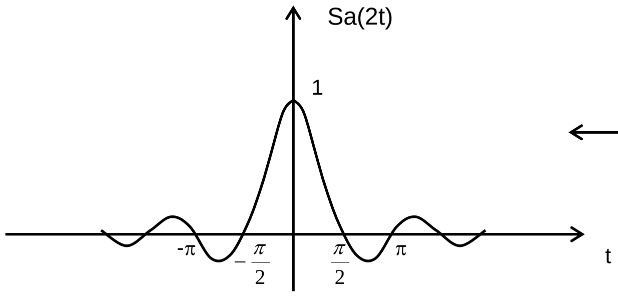
Ejemplo 6: Hallar F(w) de las funciones Sampling Sa(2t) y Sa(t/2), grafique y comente:

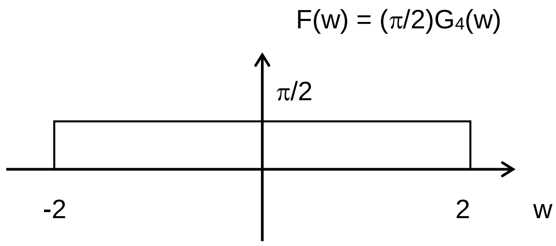
Solución:

Usando propiedad de Escala para Sa(2t):

$$Sa(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi G_2(\frac{w}{2}) \quad \rightarrow \quad Sa(2t) \leftrightarrow \frac{\pi}{2}G_4(w)$$

Gráficamente:

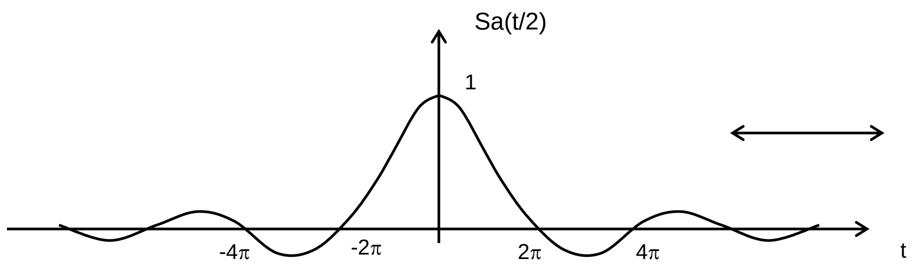


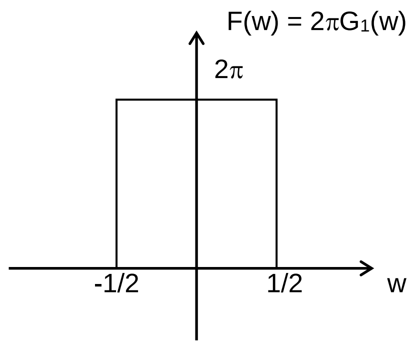


Usando propiedad de Escala para Sa(t/2):

$$Sa(t/2) \leftrightarrow 2\pi G_2(2w) \quad \rightarrow \quad Sa(t/2) \leftrightarrow 2\pi G_1(w)$$

Gráficamente:





Obs: Para a < 1 se registra una expansión de f(t) en el tiempo y una compresión de F(w) en la frecuencia

Para a > 1 se registra una compresión de f(t) en el tiempo y una expansión de F(w) en la frecuencia

Ejemplo 7: Demuestre la propiedad de F(w) para una señal periódica f(t)

Justificación:

Usando la serie exponencial: $$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jnw_0 t}, \quad w_o = \frac{2\pi}{T} \qquad F_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jnw_0 t}dt$$

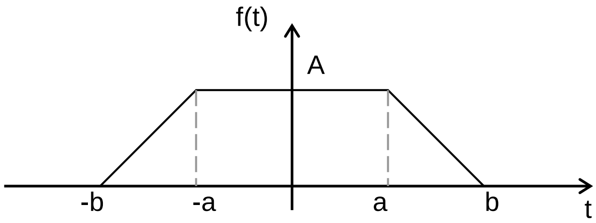
Por desplazamiento en frecuencia: $$e^{jnw_o t} \leftrightarrow 2\pi\delta(w - nw_o)$$

Por linealidad: $$F_n e^{jnw_o t} \leftrightarrow 2\pi F_n\delta(w - nw_o)$$

Por linealidad general: $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jnw_o t} \leftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n\delta(w - nw_o)$$

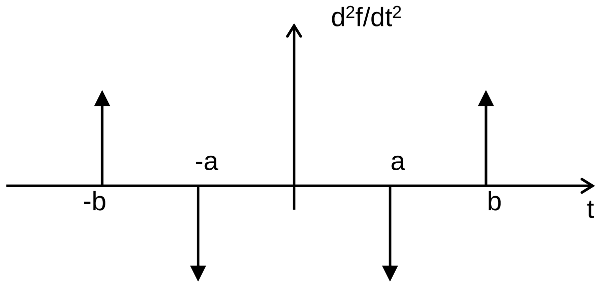
$$\boxed{f(t) = f(t+T) \leftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n\delta(w - nw_o)}$$

Ejemplo 8: Efectuar F(w) para la señal f(t) mostrada:



Solución:

Si se deriva f(t) 2 veces se obtiene una sucesión de impulsos, cuya transformada de encuentra rápidamente:

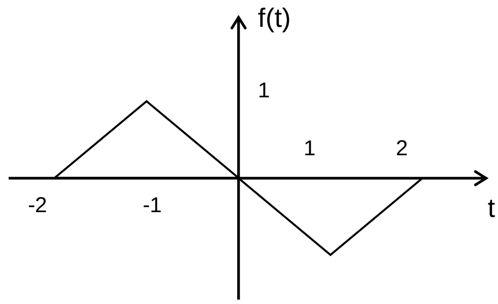


$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{A}{b-a}\left[\delta(t+b) - \delta(t+a) - \delta(t-a) + \delta(t-b)\right]$$

Usando derivación en el tiempo: $(jw)^2 F(w) = \frac{A}{b-a}\left(e^{jwb} - e^{jwa} - e^{-jwa} + e^{-jwb}\right)$

Simplificando se obtiene: $\boxed{F(w) = \frac{2A}{b-a}\left[\frac{\cos aw - \cos bw}{w^2}\right]}$

Ejemplo 9: Hallar F(w) de la siguiente función:



Solución:

Expresando f(t) en función de G_τ(t): $f(t) = \Delta_1(t+1) - \Delta_1(t-1)$

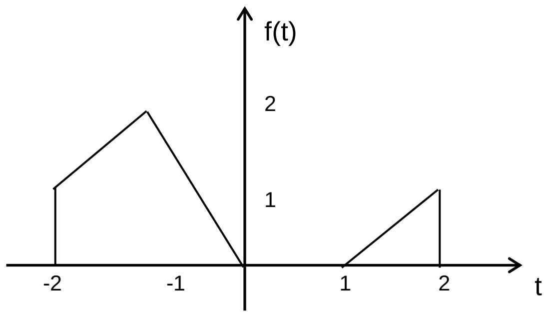
Usando luego la propiedad de desplazamiento en el tiempo y linealidad tenemos:

$$F(w) = \left(1Sa^2(w.1/2).e^{jw}\right) - \left(1Sa^2(w.1/2).e^{-jw}\right) = Sa^2(w/2).e^{jw} - Sa^2(w/2).e^{-jw}$$

$$F(w) = Sa^2(w/2).\frac{(e^{jw} - .e^{-jw})}{2j}.2j = 2Sa^2(w/2)(senw)j$$

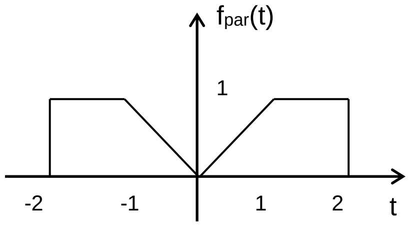
$$\boxed{F(w) = 2Sa^2(w/2)(senw)j}$$

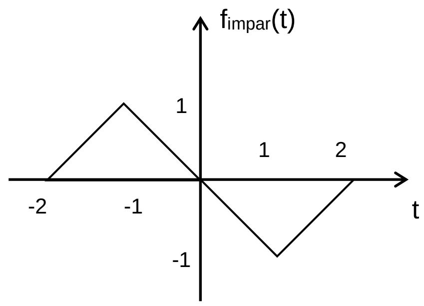
Ejemplo 10: Efectuar F(w) para la señal f(t) mostrada:



Solución:

Las funciones par e impar asociadas a f(t) son:





Determinando las respectivas transformadas:

$$f_{par}(t) = G_4(t) - \Delta_1(t) \quad \leftrightarrow \quad F_{par}(w) = 4Sa(2w) - Sa^2(w/2)$$

$$f_{impar}(t) = \Delta_1(t+1) - \Delta_1(t-1) \quad \leftrightarrow \quad F_{impar}(w) = 2Sa^2(w/2)(senw)j$$

Aplicando propiedad:

$$\boxed{f(t) \quad \leftrightarrow \quad 4Sa(2w) - Sa^2(w/2) + 2Sa^2(w/2)(senw)j}$$

Ejemplo 11: Hallar F(w) de la función f(t) = $e^{-jw_o t}$

Solución:

Sabemos: $\delta(t) \quad \leftrightarrow \quad 1$

Por dualidad: $1 \quad \leftrightarrow \quad 2\pi\delta(w)$

Por desplazamiento en frecuencia: $\boxed{e^{-jw_o t} \quad \leftrightarrow \quad 2\pi\delta(w + w_o)}$