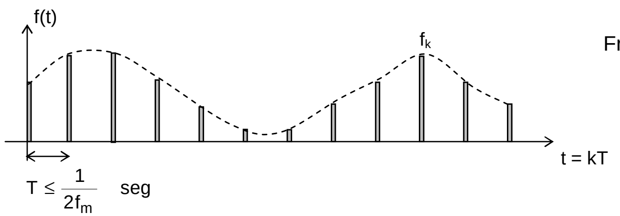
TEOREMA DE MUESTREO DE NYQUIST

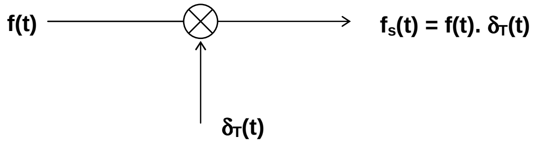
''Una señal f(t) de banda limitada a f_m Hz puede ser reproducida exactamente a partir de un conjunto de muestras tomadas dentro de intervalos uniformes no mayores a $1/2f_m$ seg".



Frecuencia de muestreo:

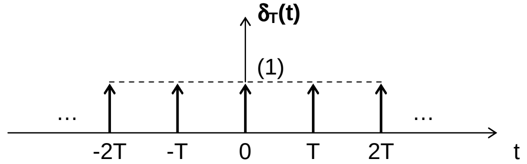
$f_s = 1/T \ge 2f_m$

Demostración: Sea una señal f(t) limitada a f_m Hz que se muestrea en el límite de Nyquist con un tren de impulsos de f_o Hz. Describa la recuperación de f(t) a partir de sus muestras en éste sistema de "muestreo ideal".



Tren de impulsos:

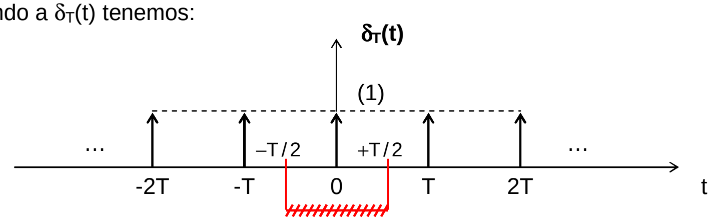
$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



Se sabe para una señal periódica:

$$f(t) = f(t+T) \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n.\delta(w - nw_o) \qquad \text{con} \qquad F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t).e^{-inw_o t}dt\,, \qquad w_o = \frac{2\pi}{T}$$

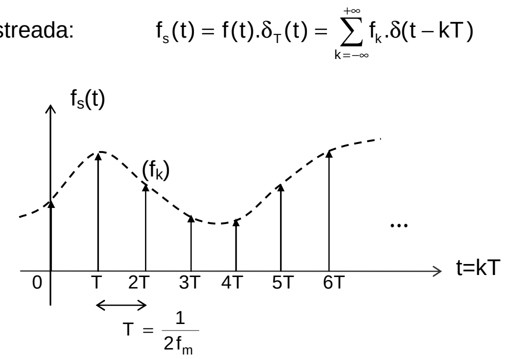
Aplicando a $\delta_T(t)$ tenemos:



$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t).e^{-inw_o t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \delta(t).e^{-inw_o t}dt = \frac{1}{T}\int_{0-}^{0+} \delta(t).e^{-0}dt = \frac{1}{T}$$

$$\therefore \qquad \delta_T(t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(w - nw_o)$$

Señal muestreada: $\qquad f_s(t) = f(t).\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k.\delta(t - kT)$



Límite de Nyquist

$$T = \frac{1}{2f_m} \qquad \rightarrow \qquad f_s = 2f_m \text{ Hz}$$

Se sabe por teorema de la convolución en la frecuencia TCF:

$$f(t).g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(w) * G(w)$$

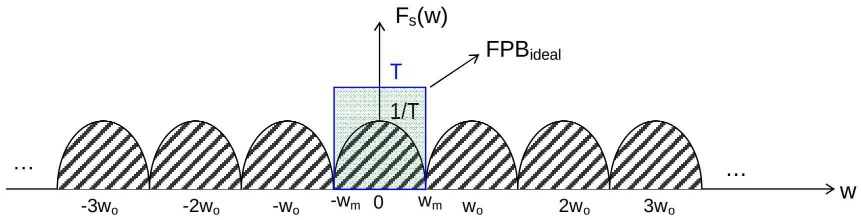
Aplicando a $f_s(t)$ tenemos:

$$f_s(t) = f(t).\delta_T(t) \leftrightarrow F_s(w) = \frac{1}{2\pi}F(w) * \Im[\delta_T(t)]$$

$$F_s(w) = \frac{1}{2\pi}F(w) * \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(w - nw_o) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(w) * \delta(w - nw_o)$$

Por propiedad de $\delta(t)$: $\qquad f(t)*\,\delta(t-t_o)=f(t-t_o)$ entonces:

$$F_s(w) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(w - nw_o) \qquad \text{con} \qquad w_o = \frac{2\pi}{T} = 2w_m$$

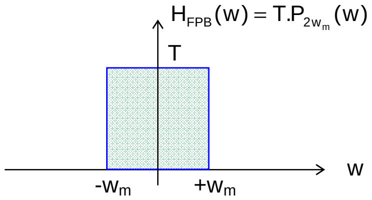


Limitaciones:

- Ancho de banda ilimitado: $\qquad B_{tx}=+\infty$
- Para recuperar f(t) se requiere de un FPB ideal que no existe
- Peligro de aliasing ('overlaping', 'crosstalk' o cruce espectral) por limitaciones del canal de transmisión.
- Energía total necesaria: $\qquad E_{total}=+\infty$

Recuperación de f(t):

Gráficamente: $F(w) = F_s(w).\,H_{FPB}(w)$ con



Por teorema de convolución en el tiempo: $f(t) * g(t) \leftrightarrow F(w).G(w)$

$\therefore \quad f(t) = f_s(t) * \Im^{-1}[H_{FPB}(w)]$

Por dualidad: $f(t) \leftrightarrow F(w)$ entonces $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-w)$

Sea el par de transformadas: $p_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa(w\tau/2)$

$\therefore \quad \tau Sa(t.\tau/2) \leftrightarrow 2\pi.P_\tau(-w)$

Para $\tau=2w_m$ entonces: $2w_m Sa(w_m.t) \leftrightarrow 2\pi P_{2w_m}(w)$, (xT)

Simplificando: $\frac{w_m.T}{\pi} Sa(w_m t) \leftrightarrow T.P_{2w_m}(w)$

Como $w_o = \frac{2\pi}{T} = 2w_m$ entonces $w_m T = \pi$

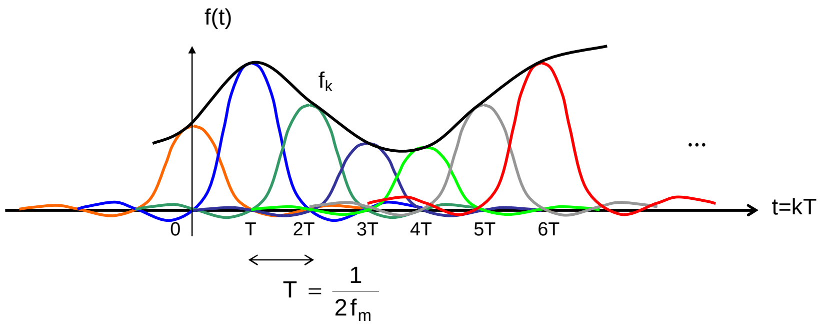
Entonces: $Sa(w_m t) \leftrightarrow H_{FPB}(w) = T.P_{2w_m}(w) \rightarrow \Im^{-1}[H_{FPB}(w)] = Sa(w_m t)$

Por tanto:

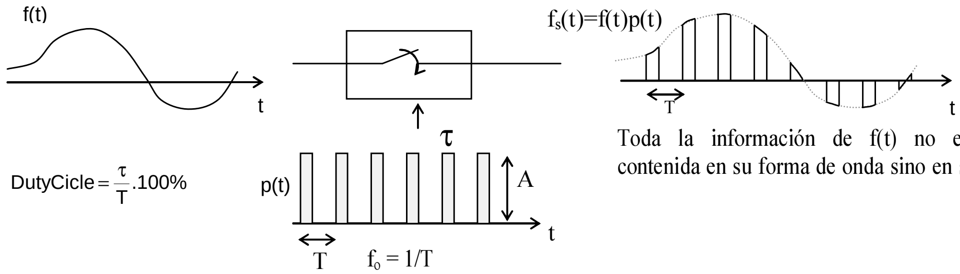
$$f(t) = f_s(t) * \Im^{-1}[H_{FPB}(w)] = f_s(t) * Sa(w_m t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k.\delta(t-kT) * Sa(w_m t)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k.Sa(w_m(t-kT)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k.Sa(w_m t - k w_m T)$$

$\therefore$ Señal reconstruida: $$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k.Sa(w_m t - k\pi)$$



TEOREMA DEL MUESTREO CON UN TREN DE PULSOS PERIÓDICOS



Toda la información de f(t) no está contenida en su forma de onda sino en sus

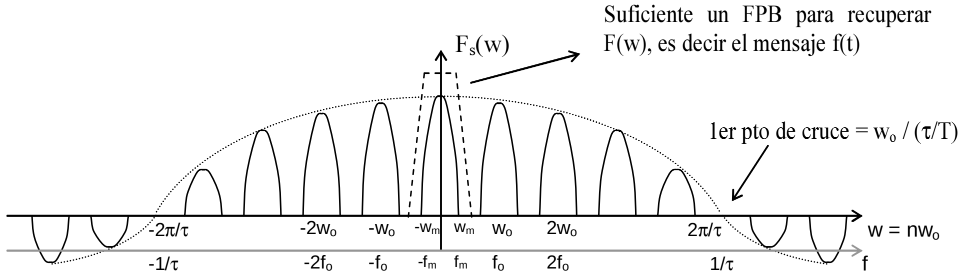
El espectro de p(t) sabemos que está dado por:

$$P(w) = \frac{2\pi A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{nw_o\tau}{2}).\delta(w - nw_o), \qquad w_o = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Analíticamente: $f_s(t) = p(t)f(t) \leftrightarrow F_s(w) = \frac{1}{2\pi} F(w) * P(w)$

$$F_s(w) = \frac{1}{2\pi} F(w) * P(w) = \frac{1}{2\pi} F(w) * \frac{2\pi A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sa(nw_o\tau/2)\delta(w - nw_o) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sa(n\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2})F(w) * \delta(w - nw_o)$$

$$F_s(w) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sa(nw_o\frac{\tau}{2})F(w - nw_o)$$



$f_s = f_o \geq 2f_m$ **Frecuencia de muestreo de Nyquist**

$T \leq 1/2f_m$ **Periodo de muestreo de Nyquist**