PUCP

Teoría de Comunicaciones 1 (2024-1)

Modulación Angular

Prof. Angelo Velarde

Ing. de las Telecomunicaciones

ÍNDICE

1. ¿Qué sabemos de FM?
2. Definiciones generales
3. FM de Banda Angosta (Narrow-Band) (FM-NB).
4. Modulación de Banda Ancha (Wide-Band) (FM-WB).
5. Ancho de banda para FM
6. Generación de FM (Generación Directa-Generación de Armstrong)
7. FM Estéreo

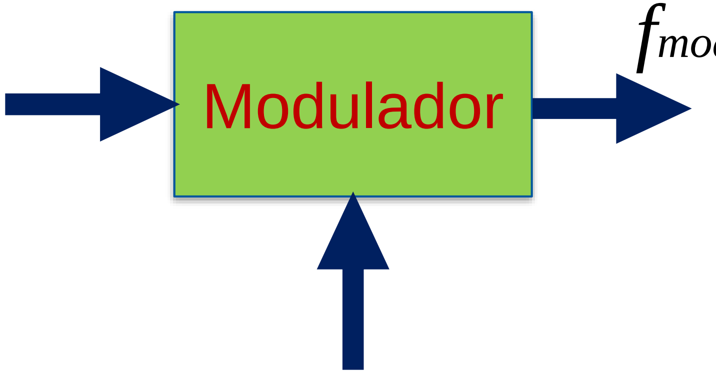
El modulador (de nuevo)

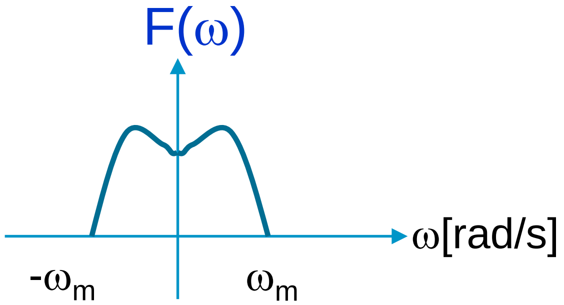
Señal modulada

$$f_{mod.ang.}(t) = A\cos X(t)$$

Información

f (t)

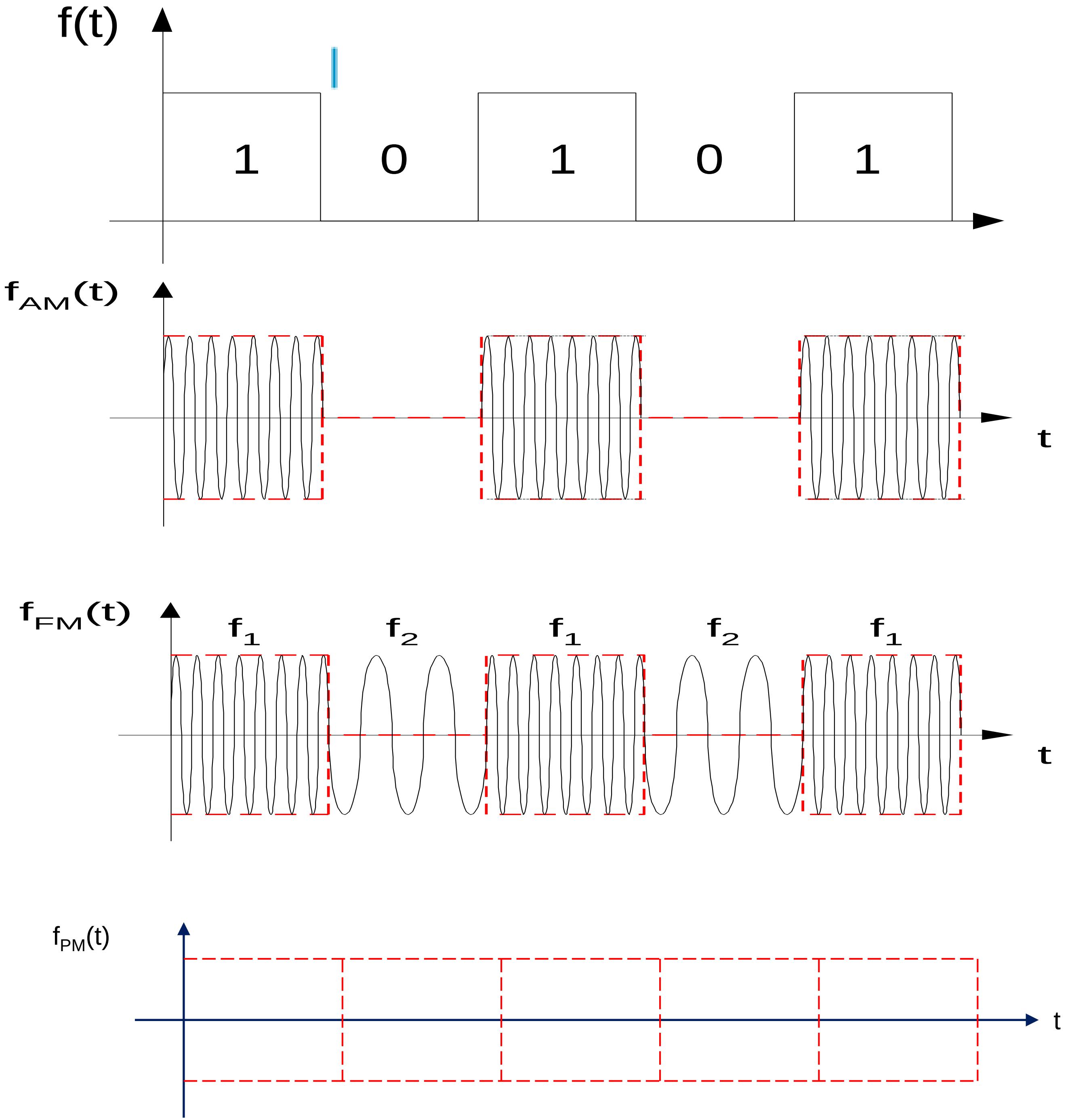


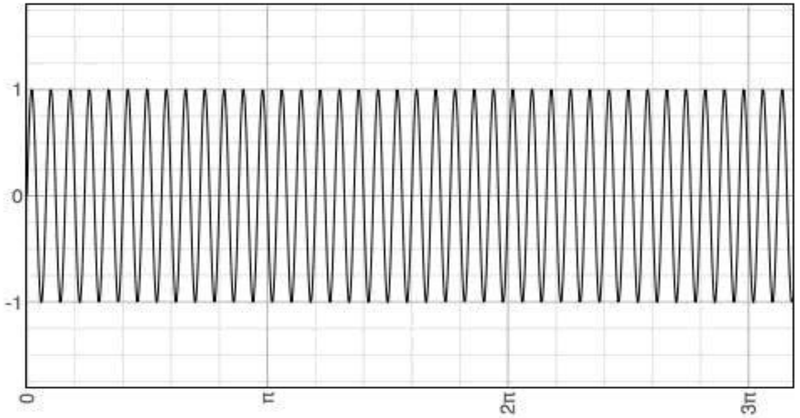


$$f_c(t) = A\cos[\omega_c t]$$

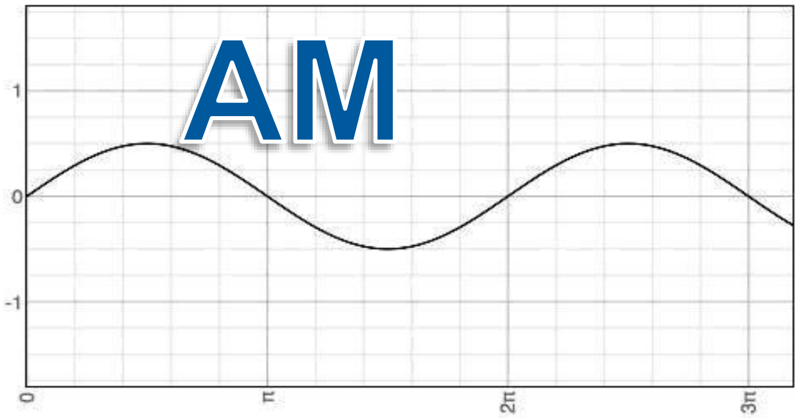
Señal portadora

Un ejemplo

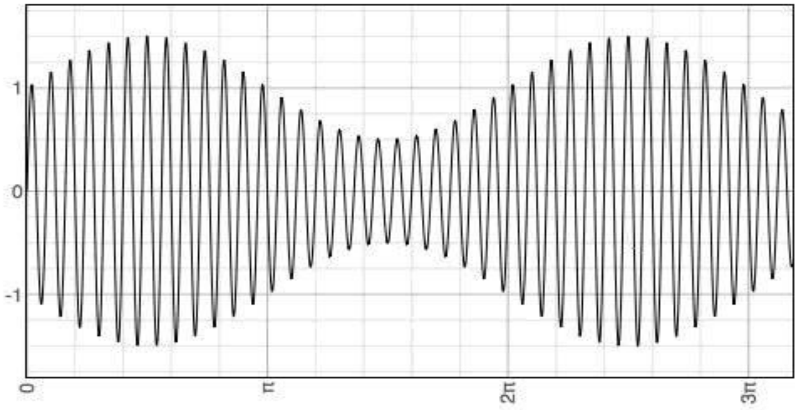




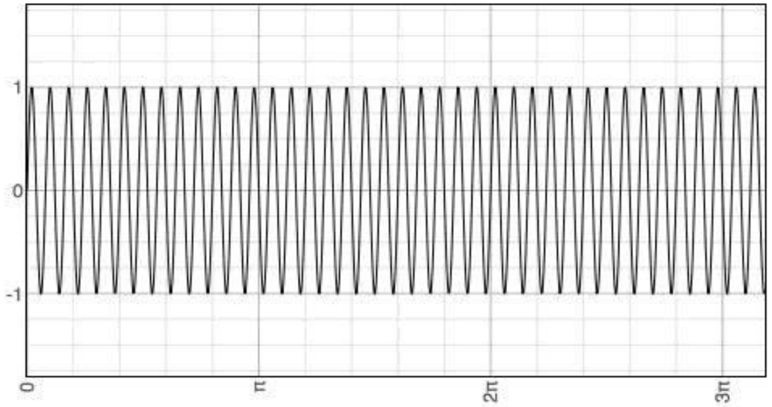
Señal Portadora



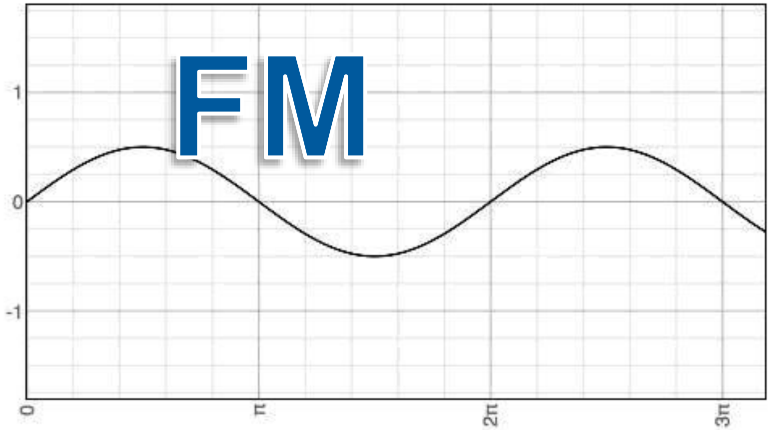
Señal Moduladora (Datos)



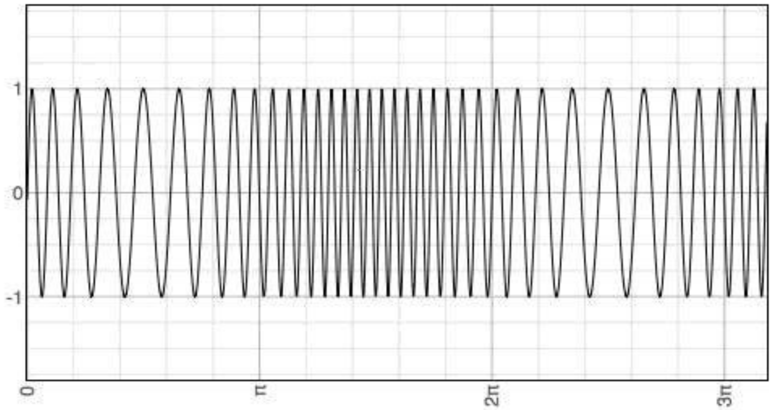
Señal Modulada



Señal Portadora



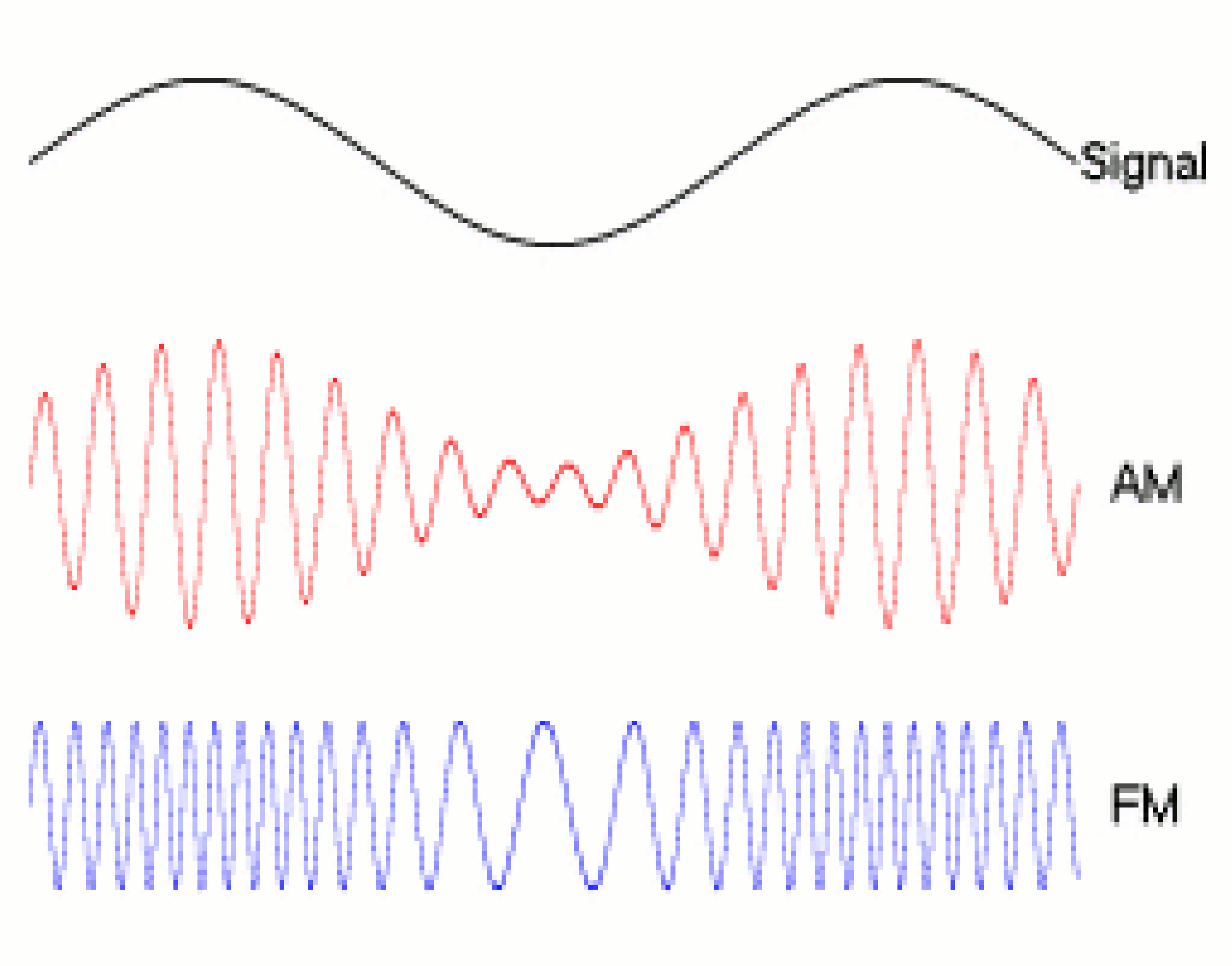
Señal Moduladora (Datos)



Señal Modulada

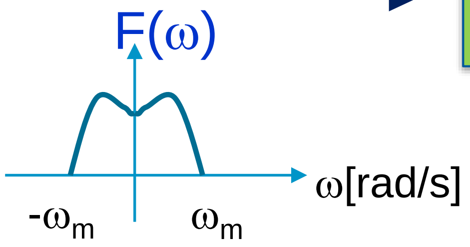
PUCP

AM vs. FM



Ahora si: Los moduladores

Información f (t)



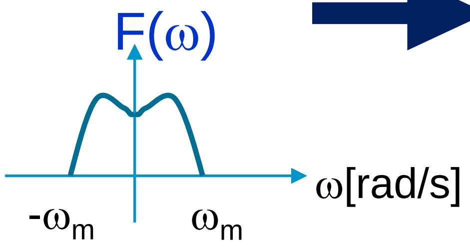
Modulador

$$f_{PM}(t) = A\cos[\omega_c t + \theta + k_p f(t)]$$

Señal modulada

$$f_c(t) = A\cos[\omega_c t]$$

Información f (t)



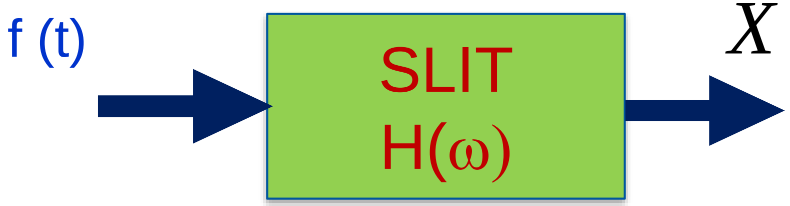
Modulador

$$f_{FM}(t) = A\cos[\omega_c t + \theta + k_f \int f(t)dt]$$

Señal modulada

$$f_c(t) = A\cos[\omega_c t]$$

Análisis general, Cómo se obtienen las señales en el interior del modulador?



$$X(t) = \psi\left[f(t)\right]_{FM/PM}$$

$$f_{mod.ang}(t) = A\cos[\omega_c t + \theta + f(t) * h(t)]$$

$$= A\cos[\omega_c t + \theta + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau]$$

Análisis complejo

- Usaremos la misma idea de los fasores:

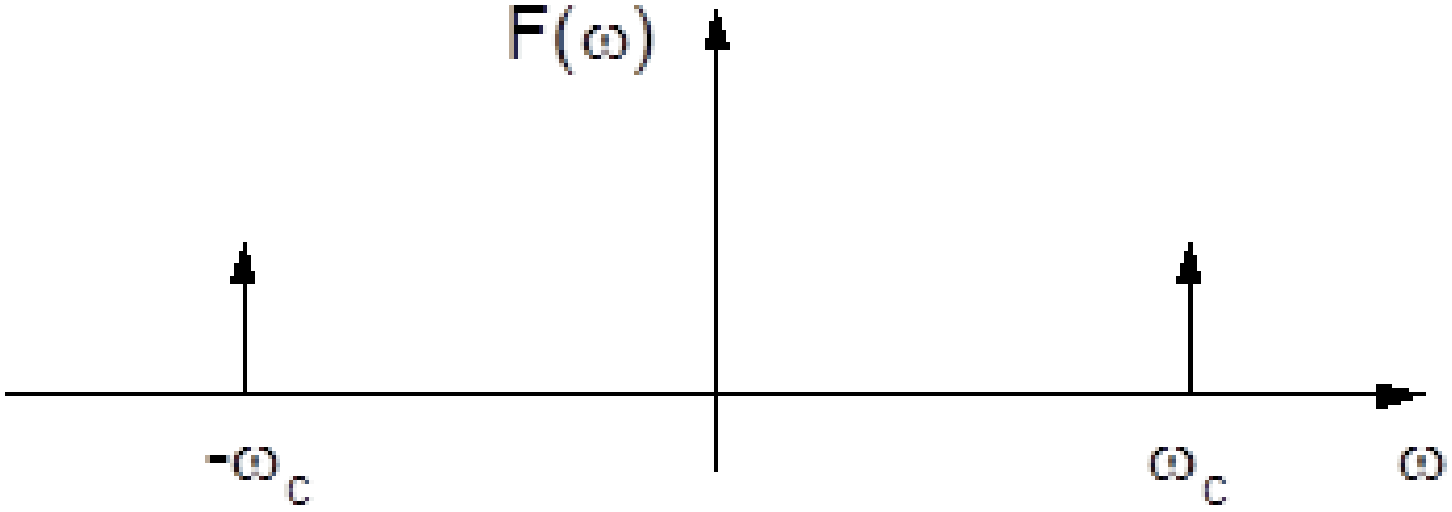
$$f_{mod.ang.}(t) = \mathrm{Re}\left\{Ae^{jX(t)}\right\} = A\cos X(t)$$

- Es decir usaremos una expresión compleja para poder simplificar el cálculo

$$\Rightarrow \tilde{f}_{mod.ang.}(t) = Ae^{jX(t)} \begin{cases} \tilde{f}_{PM}(t) = Ae^{j[\omega_c t + kpf(t)]} \\ \tilde{f}_{FM}(t) = Ae^{j\left[\omega_c t + K_f \int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right]} \end{cases}$$

Repasando: Frecuencia instantánea, fase instantánea, m_p, máxima desviación de fase, máxima desviación de frecuencia.

- Empecemos con un coseno:



FM-Banda Angosta

$$|kf \cdot g(t)| << 1$$

- Ahora si se puede simplificar la expresión:

$$\tilde{f}_{FM}(t) = Ae^{j\left[\omega_c t + K_f \int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right]}$$

FM de Banda Ancha

$$\left| kf \cdot g(t) \right| \not< < 1$$

- Iniciamos en la misma expresión:

$$\tilde{f}_{FM}(t) = Ae^{j\left[\omega_c t + K_f \int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right]}$$

- Pero solo se trabajará con un tono:

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega_m t)$$

Para matar el tiempo: Funciones de Bessel

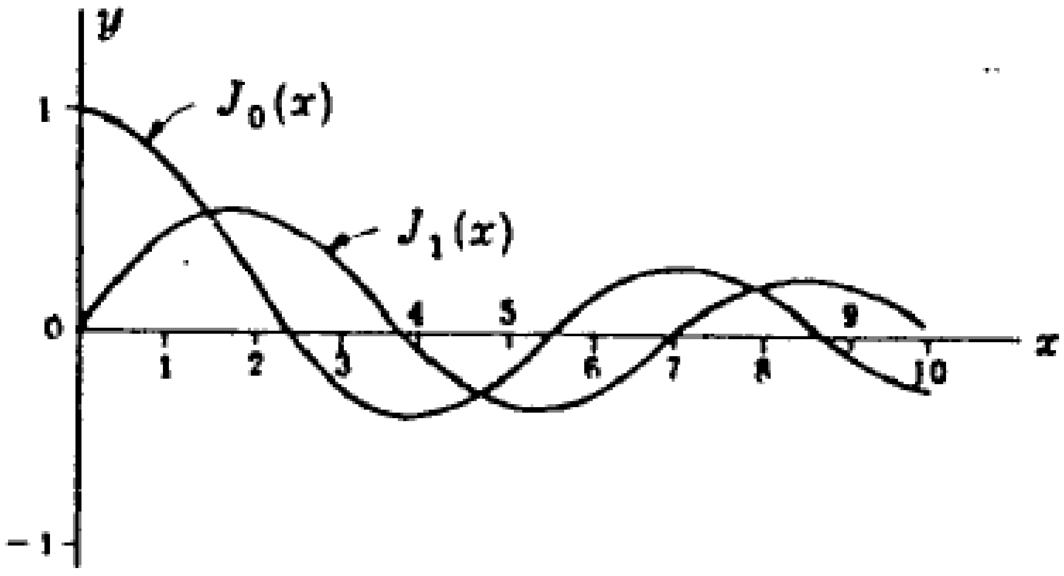
- De dónde vienen?:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0. \qquad y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

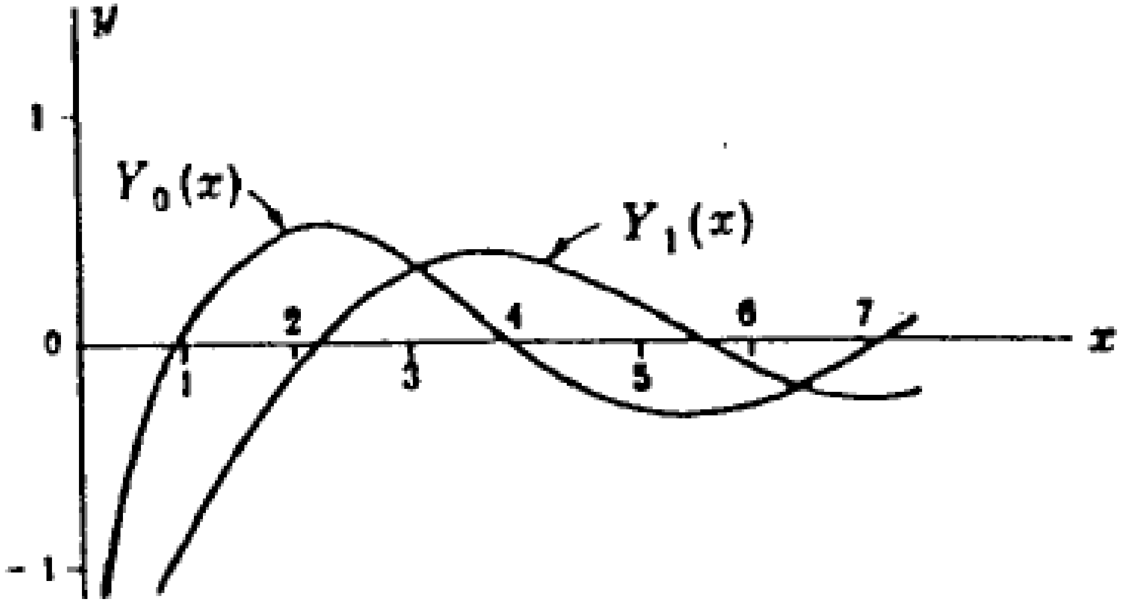
- Las soluciones para estas ecuaciones son:
  - Primera solución: $y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$ Funciones de Bessel de Primera Clase
  - Segunda solución: $y = C_1 J_\nu(x) + C_2\ Y_\nu(x)$ Funciones de Bessel de Segunda Clase
  - Tercera solución: $y = C_1 H_\nu^{(1)}(x) + C_2 H_\nu^{(2)}(x)$ Funciones de Hankel

$$H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x)$$
$$H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iY_\alpha(x)$$

Gráficas referenciales



Funciones de Bessel de Primera Clase



Funciones de Bessel de Segunda Clase

Algunas propiedades

- $J_n(z)$ es una función compleja que está definida por las expresiones:

$$e^{\left(\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(z) t^n \qquad J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{n+2m}}{2^{n+2m} m!(n+m)!}$$

  - Ejemplo:

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots\ldots$$

- Además:

$$\boxed{J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)} \qquad \boxed{\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n^2(z) = 1}$$

Algunas propiedades

- Algunas fórmulas de recurrencia adicionales:

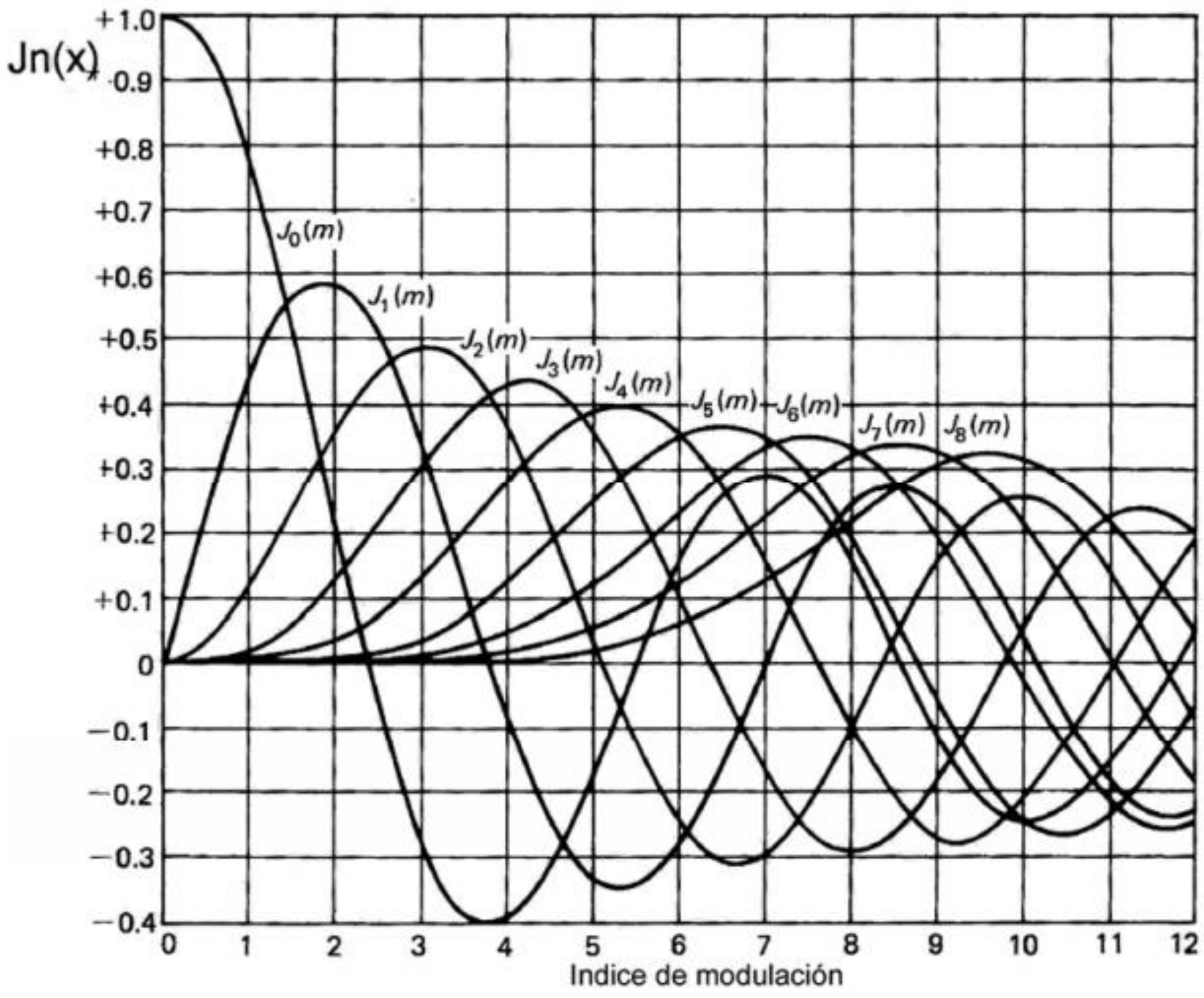
$$J_{n-1}(z)+J_{n+1}(z)=\frac{2n}{z}J_{n-1}(z) \qquad \frac{d}{dz}\left[z^{n}J_{n}(z)\right]=z^{n}J_{n-1}(z)$$

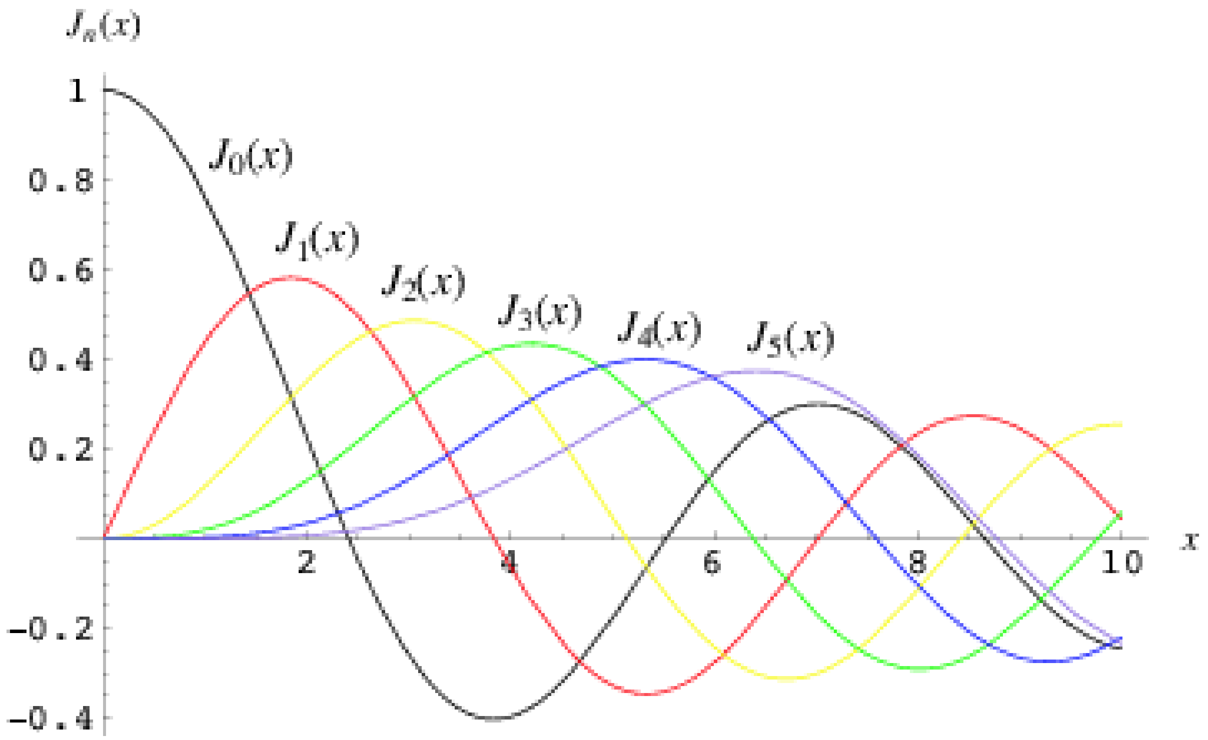
$$J_{n-1}(z)-J_{n+1}(z)=2\frac{dJ_{n}(z)}{dz} \qquad \frac{d}{dz}\left[z^{-n}J_{n}(z)\right]=-z^{-n}J_{n+1}(z)$$

- Además:

$$\boxed{J_{n}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos\left(n\theta-zsen\theta\right)d\theta} \qquad \boxed{J_{n}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}e^{j\left(zsen\theta-n\theta\right)}d\theta}$$

Ahora si veamos las gráficas con más detalle





Funciones de Bessel de Primera Clase
[Cortesía de http://www.efunda.com/math/bessel/besselJYPlot.cfm]

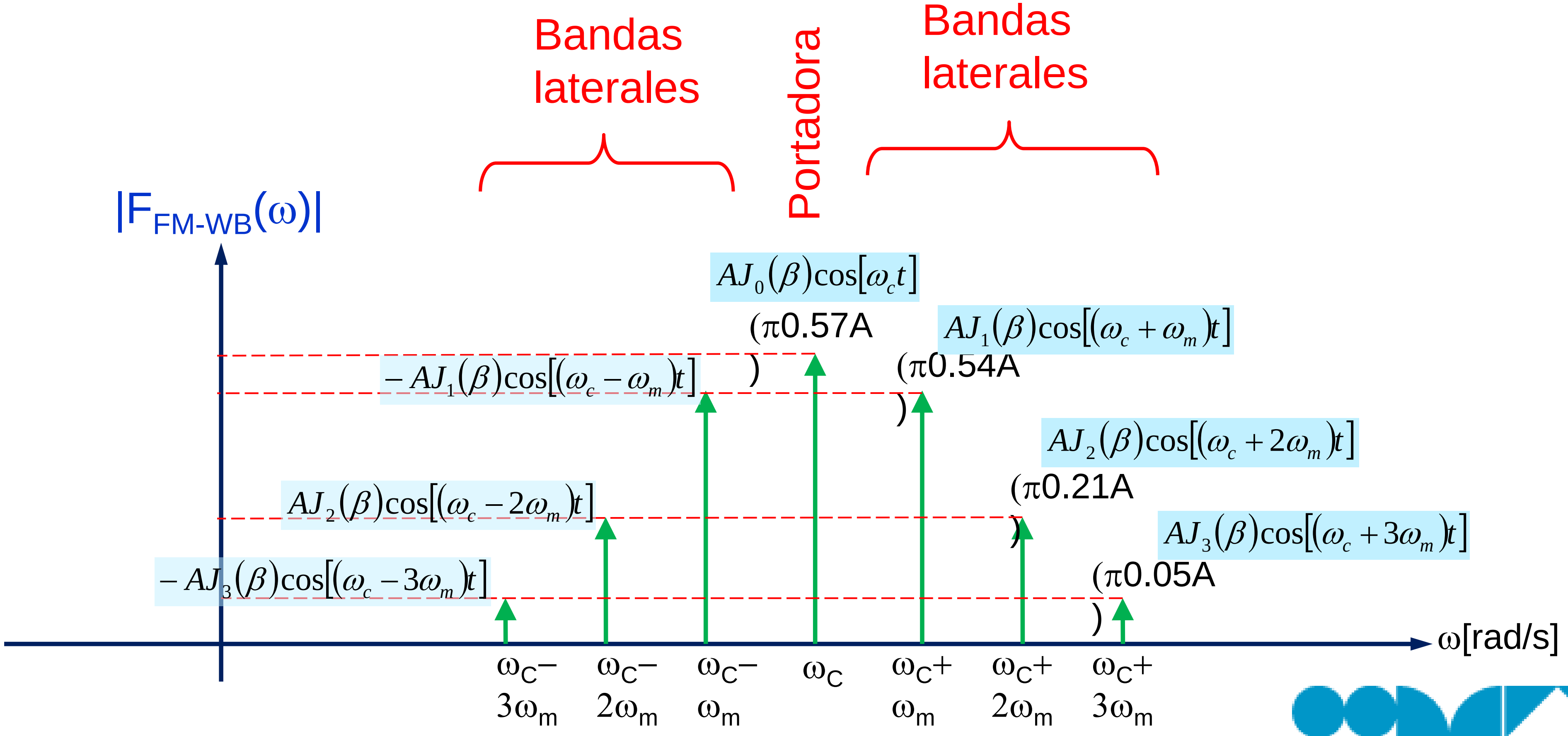
Desde otra vista

Coeficientes de las Funciones de Bessel de 1er. Orden											
b	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
0	1										
0.2	0.99	0.1									
0.4	0.96	0.2	0.02								
0.6	0.91	0.29	0.04								
0.8	0.85	0.37	0.08	0.01							
1	0.77	0.44	0.11	0.02							
1.2	0.67	0.5	0.16	0.03	< 0.01						
1.4	0.57	0.54	0.21	0.05	< 0.01						
1.6	0.46	0.57	0.26	0.07	0.01						
1.8	0.34	0.58	0.31	0.1	0.02						
2	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03	< 0.01					
2.2	0.11	0.56	0.4	0.16	0.05	0.01					
2.4	0	0.52	0.43	0.2	0.06	0.02					
2.6	-0.1	0.47	0.46	0.24	0.08	0.02	< 0.01				
2.8	-0.19	0.41	0.48	0.27	0.11	0.03	< 0.01				
3	-0.26	0.34	0.49	0.31	0.13	0.04	0.01				
3.2	-0.32	0.26	0.48	0.34	0.16	0.06	0.02				
3.4	-0.36	0.18	0.47	0.37	0.19	0.07	0.02	< 0.01			
3.6	-0.39	0.1	0.44	0.4	0.22	0.09	0.03	< 0.01			

Gráfico de un caso

b	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4
1.4	0.57	0.54	0.21	0.05	< 0.01

$$f_{FM-WB}(t) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos[(\omega_c + n\omega_m)t]$$



Detalles Finales

- Potencia
- Ancho de Banda