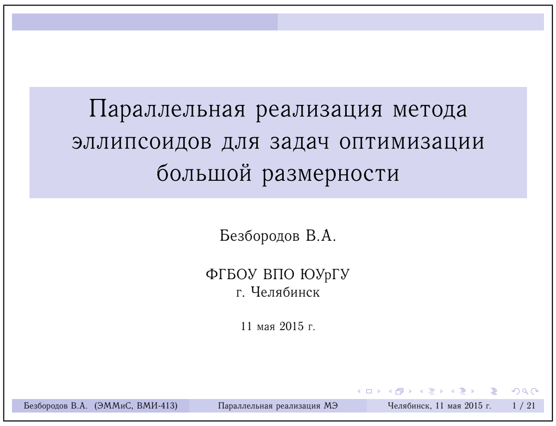
1 слайд



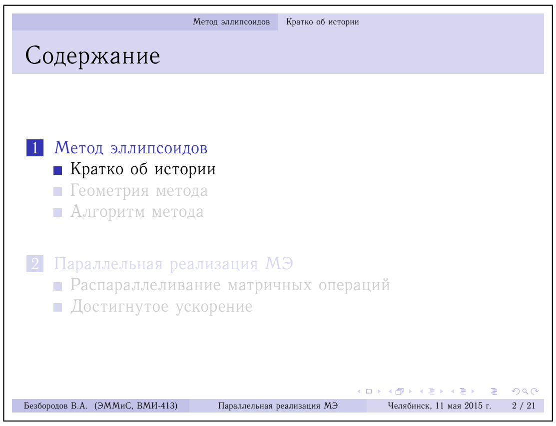
Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации большой размерности

Безбородов В.А.

ФГБОУ ВПО ЮУрГУ
г. Челябинск

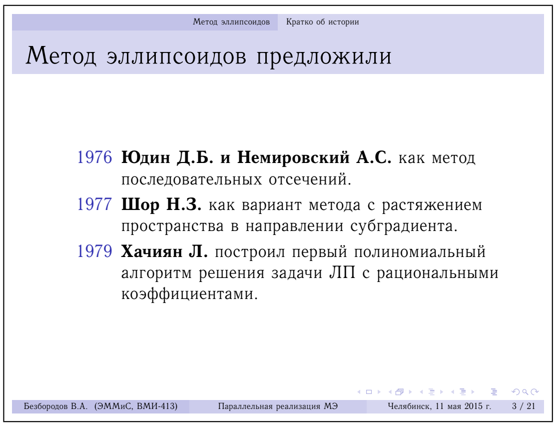
11 мая 2015 г.

2 слайд



Содержание

3 слайд



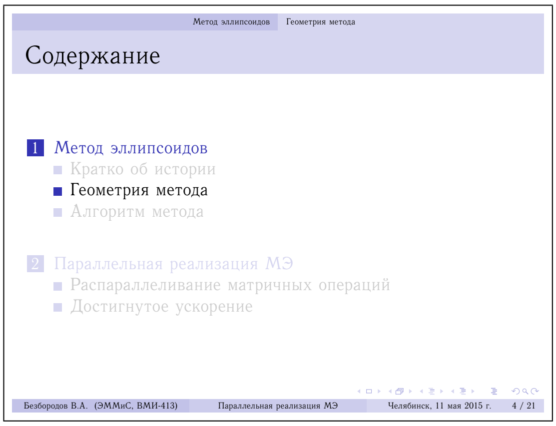
Метод эллипсоидов предложили

1976 **Юдин Д.Б. и Немировский А.С.** как метод последовательных отсечений.

1977 **Шор Н.З.** как вариант метода с растяжением пространства в направлении субградиента.

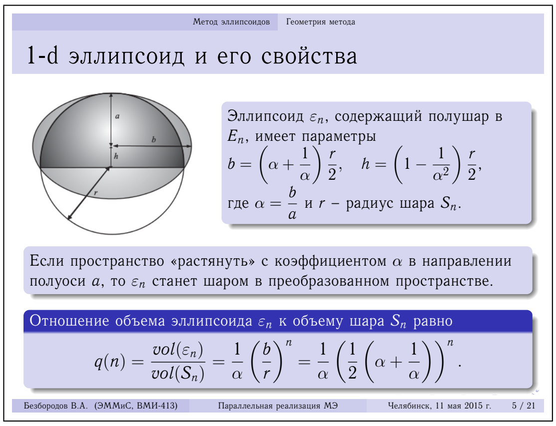
1979 **Хачиян Л.** построил первый полиномиальный алгоритм решения задачи ЛП с рациональными коэффициентами.

4 слайд



Содержание

5 слайд



1-d эллипсоид и его свойства

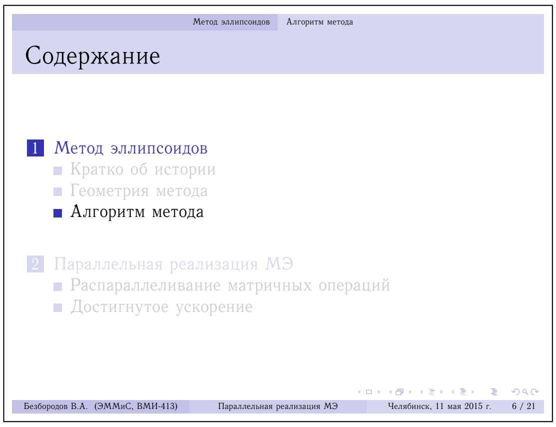
Эллипсоид ε_n, содержащий полушар в E_n, имеет параметры
$b = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{r}{2}$, $h = \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{r}{2}$,
где $\alpha = \frac{b}{a}$ и r – радиус шара S_n.

Если пространство «растянуть» с коэффициентом α в направлении полуоси a, то ε_n станет шаром в преобразованном пространстве.

Отношение объема эллипсоида ε_n к объему шара S_n равно

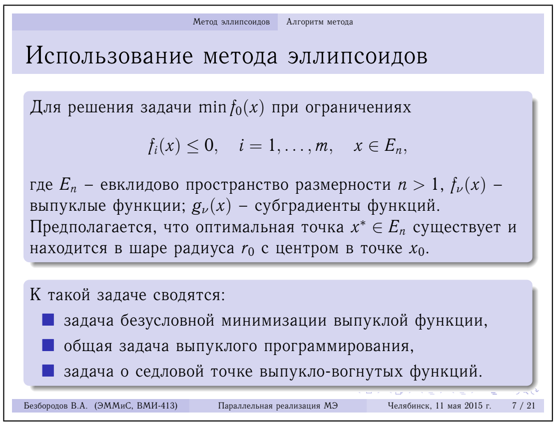
$$q(n) = \frac{vol(\varepsilon_n)}{vol(S_n)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{b}{r}\right)^n = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n.$$

6 слайд



Содержание

7 слайд



Метод эллипсоидов Алгоритм метода

Использование метода эллипсоидов

Для решения задачи $\min f_0(x)$ при ограничениях

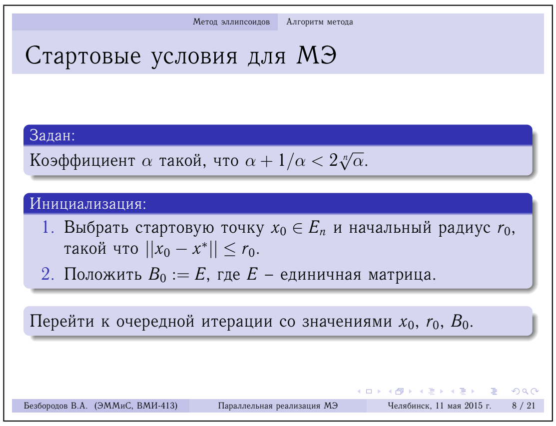
$$f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in E_n,$$

где E_n – евклидово пространство размерности $n > 1$, $f_\nu(x)$ – выпуклые функции; $g_\nu(x)$ – субградиенты функций. Предполагается, что оптимальная точка $x^* \in E_n$ существует и находится в шаре радиуса r_0 с центром в точке x_0.

К такой задаче сводятся:
- задача безусловной минимизации выпуклой функции,
- общая задача выпуклого программирования,
- задача о седловой точке выпукло-вогнутых функций.

Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 11 мая 2015 г. 7 / 21

8 слайд



Метод эллипсоидов Алгоритм метода

Стартовые условия для МЭ

Задан:

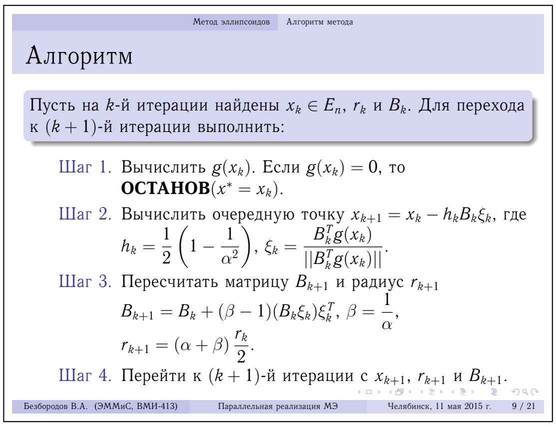
Коэффициент α такой, что $\alpha + 1/\alpha < 2\sqrt[n]{\alpha}$.

Инициализация:
1. Выбрать стартовую точку $x_0 \in E_n$ и начальный радиус r_0, такой что $||x_0 - x^*|| \le r_0$.
2. Положить $B_0 := E$, где E – единичная матрица.

Перейти к очередной итерации со значениями x_0, r_0, B_0.

Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 11 мая 2015 г. 8 / 21

9 слайд



Метод эллипсоидов Алгоритм метода

Алгоритм

Пусть на k-й итерации найдены $x_k \in E_n$, r_k и B_k. Для перехода к $(k+1)$-й итерации выполнить:

Шаг 1. Вычислить $g(x_k)$. Если $g(x_k) = 0$, то **ОСТАНОВ**$(x^* = x_k)$.

Шаг 2. Вычислить очередную точку $x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k$, где $h_k = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\alpha^2}\right)$, $\xi_k = \dfrac{B_k^T g(x_k)}{||B_k^T g(x_k)||}$.

Шаг 3. Пересчитать матрицу B_{k+1} и радиус r_{k+1}

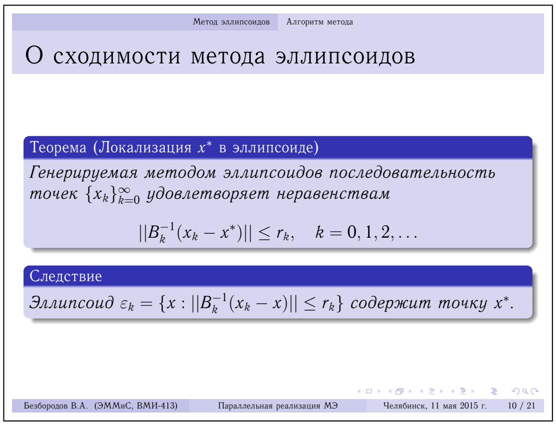
$$B_{k+1} = B_k + (\beta - 1)(B_k \xi_k)\xi_k^T, \ \beta = \frac{1}{\alpha},$$

$$r_{k+1} = (\alpha + \beta)\frac{r_k}{2}.$$

Шаг 4. Перейти к $(k+1)$-й итерации с x_{k+1}, r_{k+1} и B_{k+1}.

Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 11 мая 2015 г. 9 / 21

10 слайд



Метод эллипсоидов Алгоритм метода

О сходимости метода эллипсоидов

Теорема (Локализация x^* в эллипсоиде)

Генерируемая методом эллипсоидов последовательность точек $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ *удовлетворяет неравенствам*

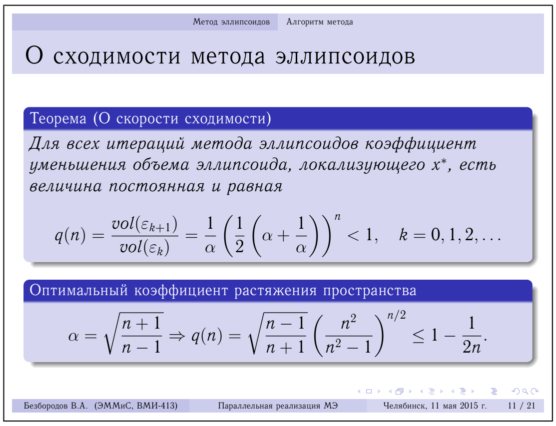
$$||B_k^{-1}(x_k - x^*)|| \le r_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следствие

Эллипсоид $\varepsilon_k = \{x : ||B_k^{-1}(x_k - x)|| \le r_k\}$ *содержит точку* x^*.

Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 11 мая 2015 г. 10 / 21

11 слайд



Метод эллипсоидов Алгоритм метода

О сходимости метода эллипсоидов

Теорема (О скорости сходимости)

Для всех итераций метода эллипсоидов коэффициент уменьшения объема эллипсоида, локализующего x^*, *есть величина постоянная и равная*

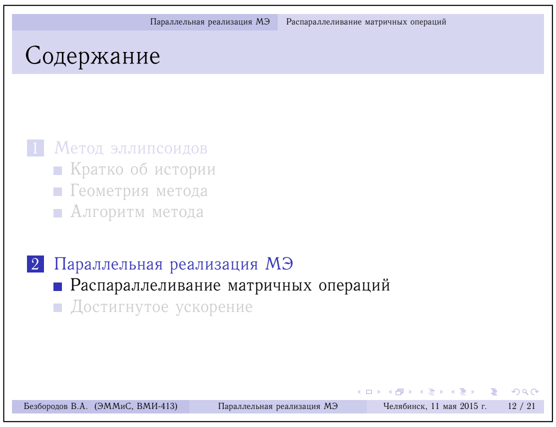
$$q(n) = \frac{vol(\varepsilon_{k+1})}{vol(\varepsilon_k)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Оптимальный коэффициент растяжения пространства

$$\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \Rightarrow q(n) = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n/2} \le 1 - \frac{1}{2n}.$$

Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 11 мая 2015 г. 11 / 21

12 слайд



Параллельная реализация МЭ Распараллеливание матричных операций

Содержание

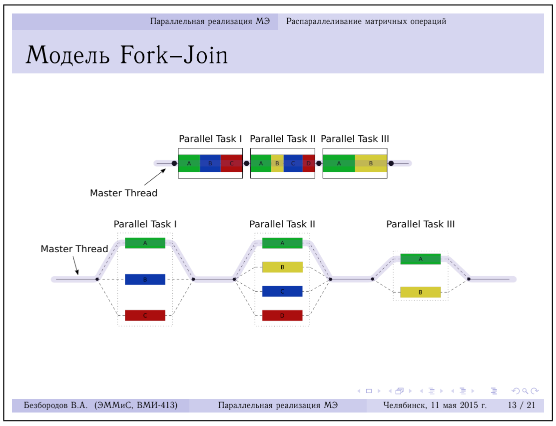
1 Метод эллипсоидов
- Кратко об истории
- Геометрия метода
- Алгоритм метода

2 Параллельная реализация МЭ
- Распараллеливание матричных операций
- Достигнутое ускорение

Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 11 мая 2015 г. 12 / 21

Метод эллипсоидов активно использует матричные операции, вычислительная сложность которых варьируется от $O(n^2)$ (сложение, вычитание, транспонирование) до $O(n^3)$ (умножение). Ускорив выполнение этих операций, можно добиться ускорения выполнение всего метода.

13 слайд



Параллельная реализация МЭ Распараллеливание матричных операций

Модель Fork–Join

Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 11 мая 2015 г. 13 / 21

Fork-Join model – это способ запуска и выполнения параллельных участков кода.

На слайде представлены три участка программы, которые потенциально разрешают параллельное исполнение различных блоков. Последовательное выполнение показано сверху, в то время как его Fork-Join эквивалент снизу.

14 слайд

Параллельная реализация МЭ Распараллеливание матричных операций

Способы разбиения матриц

Ускорение матричных операций
Каждому потоку выделяется некоторое подмножество элементов матрицы для обработки. Вид подмножества определяется способом разбиения.

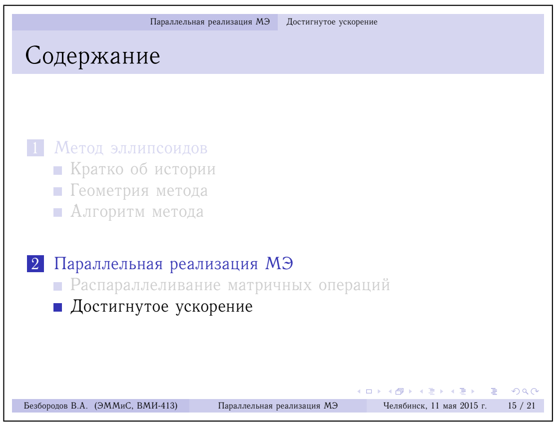
Горизонтальный Вертикальный Блочный

Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 11 мая 2015 г. 14 / 21

Для многих методов матричных вычислений характерным является повторение одних и тех же вычислительных действий для разных элементов матриц. Данный момент свидетельствует о наличии *параллелизма по данным* при выполнении матричных расчетов и, как результат, распараллеливание матричных операций сводится в большинстве случаев к разделению обрабатываемых матриц между потоками.

Наиболее общие и широко используемые способы разделения матриц состоят в разбиении данных на *полосы* (по вертикали или горизонтали) или на прямоугольные фрагменты (*блоки*).

15 слайд



Параллельная реализация МЭ Достигнутое ускорение

Содержание

1 Метод эллипсоидов
- Кратко об истории
- Геометрия метода
- Алгоритм метода

2 Параллельная реализация МЭ
- Распараллеливание матричных операций
- Достигнутое ускорение

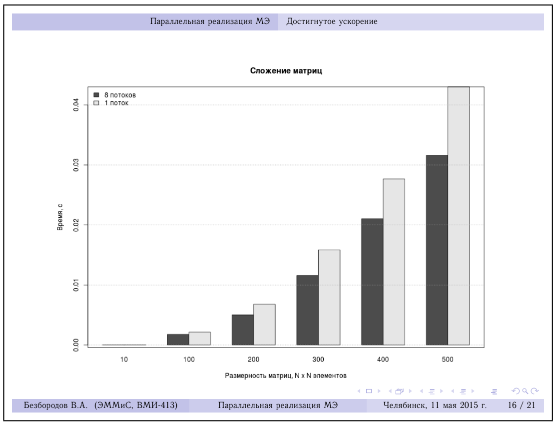
Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 11 мая 2015 г. 15 / 21

Для разработанного класса необходимо провести анализ эффективности, доказывающий его преимущество перед последовательным выполнением.

Алгоритмы параллельных матричных операций, основанные на ленточном горизонтальном разбиении матрицы, обладают хорошей «локализацией вычислений», т.е. каждый поток параллельной программы использует только «свои» данные, и ему не требуются данные, которые в данный момент обрабатывает другой поток, нет обмена данными между потоками, не возникает необходимости синхронизации. Это означает, что практически не существуют накладные расходы на организацию параллелизма (за исключением расходов на создание/завершение потоков), и можно ожидать линейного ускорения.

Рассмотрим ускорение, которое удалось получить на практике.

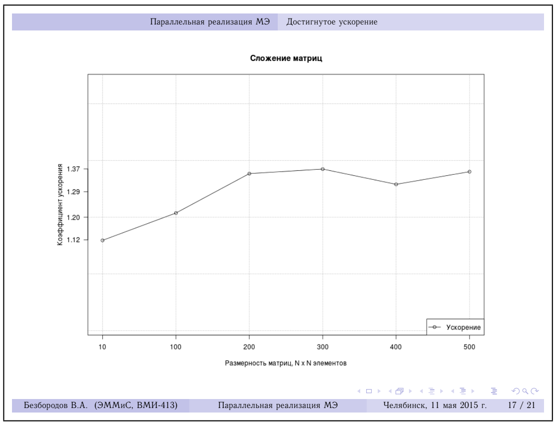
16 слайд


Параллельная реализация МЭ | Достигнутое ускорение

Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) | Параллельная реализация МЭ | Челябинск, 11 мая 2015 г. | 16 / 21

Время сложения матриц разных размерностей при использовании одного и нескольких потоков.

17 слайд


Параллельная реализация МЭ | Достигнутое ускорение

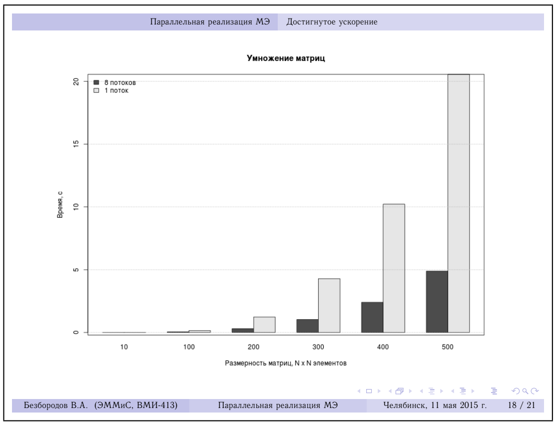
Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) | Параллельная реализация МЭ | Челябинск, 11 мая 2015 г. | 17 / 21

На слайде представлено достигнутое ускорение для операции сложения матриц различных размерностей.

Под *ускорением* выполнения операции понимается отношение времени выполнения операции в многопоточном режиме ко времени выполнения той же операции в однопоточном режиме.

Как видно, время работы параллельного алгоритма сложения матриц превосходит время выполнения однопоточной версии в среднем всего в 1.3 раза. Этот эксперимент можно рассматривать, как подтверждение предположения о том, что значительная часть времени тратится на выборку необходимых данных из оперативной памяти в кэш процессора.

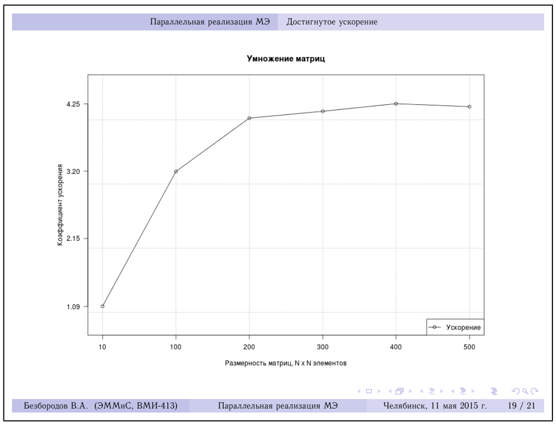
18 слайд


Параллельная реализация МЭ | Достигнутое ускорение

Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) | Параллельная реализация МЭ | Челябинск, 11 мая 2015 г. | 18 / 21

Время умножения матриц разных размерностей при использовании одного и нескольких потоков.

19 слайд


Параллельная реализация МЭ | Достигнутое ускорение

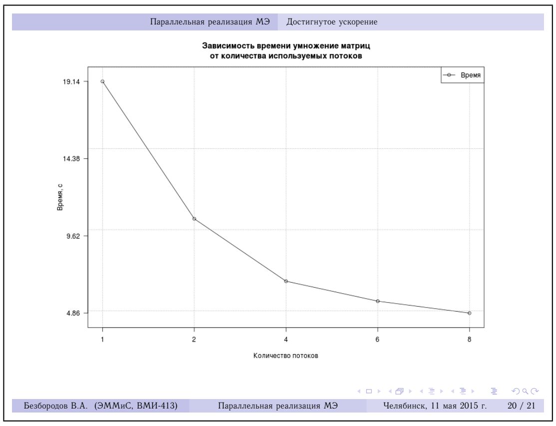
Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) | Параллельная реализация МЭ | Челябинск, 11 мая 2015 г. | 19 / 21

На слайде представлено достигнутое ускорение для операции умножения матриц различных размерностей.

Ускорение имеет существенный порядок из-за того, что сложность операции умножения $O(n^3)$.

Проведем другой эксперимент. Зафиксируем и положим равной 500×500 размерность матриц–операндов. Будем выполнять операцию умножения матриц, применяя каждый раз различное количество потоков, чтобы определить поведение функции времени.

20 слайд



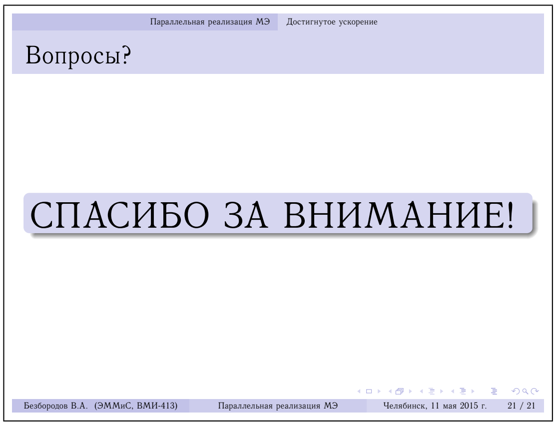
Параллельная реализация МЭ Достигнутое ускорение

Зависимость времени умножение матриц
от количества используемых потоков

Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 11 мая 2015 г. 20 / 21

Из рисунка видно, что линейное увеличение количества используемых потоков приводит к нелинейному падению времени выполнения операции умножения. Из анализа результатов эксперимента также следует, что использование числа потоков большего, чем аппаратно поддерживается оборудованием, не приведет к дальнейшему падению функции времени. Такое замедление будет возникать из-за частых переключений планировщика потоков для симуляции параллелизма.

21 слайд



Параллельная реализация МЭ Достигнутое ускорение

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Безбородов В.А. (ЭММиС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 11 мая 2015 г. 21 / 21