



## 1 слайд



# Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации большой размерности

Безбородов В.А.

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент Голодов В.А.

Челябинск, 2015 г.

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС Параллельная реализация МЭ (C++) ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г. 1 / 26

## 4 слайд

Введение Выпускная квалификационная работа

## Задачи

В соответствии с поставленными целями в работе решаются следующие **задачи**:

- исследование операций классического алгоритма метода эллипсоидов на вычислительную сложность;
- разработка программной реализации алгоритма с распараллеливанием наиболее длительных по времени операций;
- обеспечение поддержки арифметики расширенной и произвольной точности;
- демонстрация использования разработанного ПО для решения задачи оптимизации большой размерности;
- проверка и тестирование разработанного ПО.

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС Параллельная реализация МЭ (C++) ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г. 4 / 26

## 2 слайд

## Содержание

- 1 Метод эллипсоидов
  - Кратко об истории
  - Геометрия метода
  - Применение метода
  - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций
  - Параллельная обработка матриц
  - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ
  - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС Параллельная реализация МЭ (C++) ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г. 2 / 26

## 5 слайд

Метод эллипсоидов Кратко об истории

## Содержание

- 1 Метод эллипсоидов
  - Кратко об истории
    - Геометрия метода
    - Применение метода
    - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций
  - Параллельная обработка матриц
  - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ
  - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС Параллельная реализация МЭ (C++) ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г. 5 / 26

## 3 слайд

Введение Выпускная квалификационная работа

## Цели

**Целями** работы являются:

1. разработка параллельной реализации метода эллипсоидов, поддерживающей арифметику произвольной точности;
2. использование полученной реализации метода эллипсоидов для решения задачи оптимизации большой размерности.

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС Параллельная реализация МЭ (C++) ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г. 3 / 26

## 6 слайд

Метод эллипсоидов Кратко об истории

## Метод эллипсоидов предложили

- 1976 **Юдин Д.Б. и Немировский А.С.** как метод последовательных отсечений.
- 1977 **Шор Н.З.** как вариант метода с растяжением пространства в направлении субградиента.
- 1979 **Хачиян Л.** построил первый полиномиальный алгоритм решения задачи ЛП с рациональными коэффициентами.

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС Параллельная реализация МЭ (C++) ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г. 6 / 26

## 7 слайд

Метод эллипсоидов Геометрия метода

### Содержание

- 1 Метод эллипсоидов**
  - Кратко об истории
  - Геометрия метода
  - Применение метода
  - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций**
  - Параллельная обработка матриц
  - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ**
  - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС Параллельная реализация МЭ (C++) ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г. 7 / 26

## 10 слайд

Метод эллипсоидов Применение метода

### Использование метода эллипсоидов

Для решения задачи  $\min f_0(x)$  при ограничениях

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in E^n,$$

где  $E^n$  – евклидово пространство размерности  $n > 1$ ,  $f_\nu(x)$  – выпуклые функции;  $g_\nu(x)$  – субградиенты функций,  $\nu = 0, m$ . Предполагается, что оптимальная точка  $x^* \in E^n$  существует и находится в шаре радиуса  $R$  с центром в точке  $x_0$ .

К такой задаче сводятся:

- задача безусловной минимизации выпуклой функции,
- общая задача выпуклого программирования,
- задача о седловой точке выпукло-вогнутых функций.

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС Параллельная реализация МЭ (C++) ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г. 10 / 26

## 8 слайд

Метод эллипсоидов Геометрия метода

### 1-d эллипсоид и его свойства



Эллипсоид  $\varepsilon_n$ , содержащий полушар в  $E^n$ , имеет параметры

$$b = \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{r}{2}, \quad h = \left( 1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{r}{2},$$

где  $\alpha = \frac{b}{a}$  и  $r$  – радиус шара  $S_n$ .

Если пространство «растянуть» с коэффициентом  $\alpha$  в направлении полуоси  $a$ , то  $\varepsilon_n$  станет шаром в преобразованном пространстве.

Отношение объема эллипсоида  $\varepsilon_n$  к объему шара  $S_n$  равно

$$q(n) = \frac{vol(\varepsilon_n)}{vol(S_n)} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{b}{r} \right)^n = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n.$$

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС Параллельная реализация МЭ (C++) ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г. 8 / 26

## 11 слайд

Метод эллипсоидов Применение метода

### Оптимизация в экономике

Прикладные задачи выпуклого программирования:

- производственная задача;
- задача потребления;
- задача о диете;
- задача планирования номенклатуры и объемов выпуска;
- транспортная задача;
- задача о ранце.

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС Параллельная реализация МЭ (C++) ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г. 11 / 26

## 9 слайд

Метод эллипсоидов Применение метода

### Содержание

- 1 Метод эллипсоидов**
  - Кратко об истории
  - Геометрия метода
  - Применение метода
  - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций**
  - Параллельная обработка матриц
  - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ**
  - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС Параллельная реализация МЭ (C++) ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г. 9 / 26

## 12 слайд

Метод эллипсоидов Алгоритм метода

### Содержание

- 1 Метод эллипсоидов**
  - Кратко об истории
  - Геометрия метода
  - Применение метода
  - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций**
  - Параллельная обработка матриц
  - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ**
  - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС Параллельная реализация МЭ (C++) ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г. 12 / 26

## 13 слайд

Метод эллипсоидов    Алгоритм метода

### Алгоритм

Выбрать  $x_k := x_0 \in E^n$  и радиус  $R$ , такие что  $\|x_0 - x^*\| \leq R$ . Положить  $h_k = \frac{R}{n+1}$ ,  $B_k := E$ , где  $E$  – единичная матрица. Для перехода к  $(k+1)$ -й итерации выполнить:

- Шаг 1. Вычислить  $g(x_k)$ . Если  $g(x_k) = 0$ , то **ОСТАНОВ** ( $x^* = x_k$ ).
- Шаг 2. Вычислить очередную точку  $x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k$ , где  $\xi_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|}$ .
- Шаг 3. Пересчитать шаг  $h_{k+1} = h_k r$  и матрицу  $B_{k+1}$   
 $B_{k+1} = B_k + (\beta - 1)(B_k \xi_k) \xi_k^T, \quad \beta = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ .
- Шаг 4. Перейти к  $(k+1)$ -й итерации с  $x_{k+1}$ ,  $h_{k+1}$  и  $B_{k+1}$ .

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС    Параллельная реализация МЭ (C++)    ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г.    13 / 26

## 16 слайд

Ускорение матричных операций    Параллельная обработка матриц

### Модель Fork–Join

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС    Параллельная реализация МЭ (C++)    ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г.    16 / 26

## 14 слайд

Метод эллипсоидов    Алгоритм метода

### О сходимости метода эллипсоидов

**Теорема (О скорости сходимости)**  
 Для всех итераций метода эллипсоидов коэффициент уменьшения объема эллипсоида, локализирующего  $x^*$ , есть величина постоянная и равная

$$q(n) = \frac{\text{vol}(\varepsilon_{k+1})}{\text{vol}(\varepsilon_k)} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Оптимальный коэффициент растяжения пространства**

$$\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \Rightarrow q(n) = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left( \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \right)^n < 1.$$

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС    Параллельная реализация МЭ (C++)    ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г.    14 / 26

## 17 слайд

Ускорение матричных операций    Параллельная обработка матриц

### Способы разбиения матриц

**Ускорение матричных операций**  
 Каждому потоку выделяется некоторое подмножество элементов матрицы для обработки. Вид подмножества определяется способом разбиения.

Горизонтальный    Вертикальный    Блочный

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС    Параллельная реализация МЭ (C++)    ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г.    17 / 26

## 15 слайд

Ускорение матричных операций    Параллельная обработка матриц

### Содержание

- 1 Метод эллипсоидов
  - Кратко об истории
  - Геометрия метода
  - Применение метода
  - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций
  - Параллельная обработка матриц
  - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ
  - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС    Параллельная реализация МЭ (C++)    ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г.    15 / 26

## 18 слайд

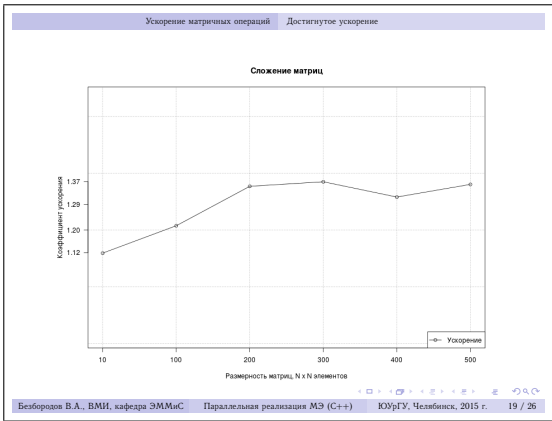
Ускорение матричных операций    Достигнутое ускорение

### Содержание

- 1 Метод эллипсоидов
  - Кратко об истории
  - Геометрия метода
  - Применение метода
  - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций
  - Параллельная обработка матриц
  - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ
  - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС    Параллельная реализация МЭ (C++)    ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г.    18 / 26

19 слайд



22 слайд

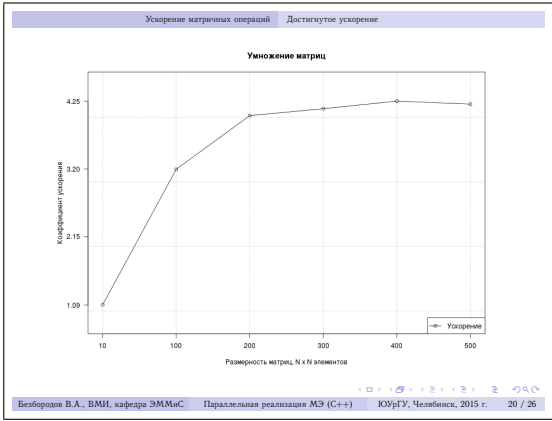
Параллельная реализация МЭ    Вычислительный эксперимент

Содержание

- 1 Метод эллипсоидов
  - Кратко об истории
  - Геометрия метода
  - Применение метода
  - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций
  - Параллельная обработка матриц
  - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ
  - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС    Параллельная реализация МЭ (C++)    ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г.    22 / 26

20 слайд



23 слайд

Параллельная реализация МЭ    Вычислительный эксперимент

Пример 1

**Задача минимизации**

$$x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min.$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 9; \\ x_1^2 + (x_2 - 4)^2 - 9. \end{cases}$$

**Оптимум**

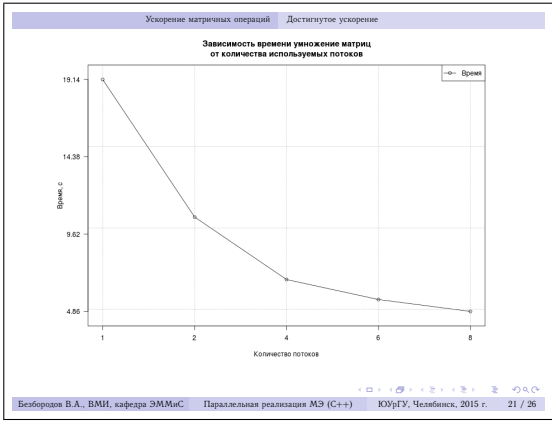
$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**МЭ: 160 итераций, точность – 9 знаков**

$$x^* = \begin{pmatrix} 0.00000000011922745523 \\ 2.00000000033459867651 \end{pmatrix}$$

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС    Параллельная реализация МЭ (C++)    ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г.    23 / 26

21 слайд



24 слайд

Параллельная реализация МЭ    Вычислительный эксперимент

Пример 2

**Задача большой размерности**

$$f_0 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow \min.$$

Ограничения:

$$f_m = \sum_{i=1, i \neq m}^n x_i^2 + (x_m - \alpha/2)^2 - \alpha^2.$$

**Для  $n = 100$ ,  $m = \overline{1, n}$ ,  $\alpha = 1$**

Решение найдено за 403 итерации, точность – 9 знаков.

**1 поток: 78 с. Падение времени:**

2 потока:  $T_2 = 44.89$  с.

8 потоков:  $T_8 = 28.14$  с.

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС    Параллельная реализация МЭ (C++)    ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г.    24 / 26

## 25 слайд

Параллельная реализация МЭ    Основные выводы

Заключение

В работе решены следующие **задачи**:

- операции классического алгоритма метода эллипсоидов исследованы на вычислительную сложность;
- разработана программная реализация алгоритма с распараллеливанием наиболее длительных по времени операций;
- обеспечена поддержка арифметики расширенной и произвольной точности;
- продемонстрировано использование разработанного ПО для решения задачи оптимизации большой размерности;
- разработанный код проверен и протестирован.

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС    Параллельная реализация МЭ (C++)    ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г.    25 / 26

## 26 слайд

Благодарности    Панькову А.В., Макаровских Т.А., Голозову В.А.

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Безбородов В.А., ВМИ, кафедра ЭММиС    Параллельная реализация МЭ (C++)    ЮУрГУ, Челябинск, 2015 г.    26 / 26