Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации большой размерности

Безбородов В.А.

Научный руководитель, к.ф.-м.н., доцент Голодов В.А.

ФГБОУ ВПО ЮУрГУ
г. Челябинск

10 июня 2015 г.

Содержание

Цели

Целями работы являются:

1. разработка параллельной реализации метода эллипсоидов, поддерживающей арифметику произвольной точности;
2. использование полученной реализации метода эллипсоидов для решения задачи оптимизации большой размерности.

Задачи

В соответствии с поставленными целями в работе решаются следующие **задачи**:

- исследование операций классического алгоритма метода эллипсоидов на вычислительную сложность;
- разработка программной реализации алгоритма с распараллеливанием наиболее длительных по времени операций;
- обеспечение поддержки арифметики расширенной и произвольной точности;
- проверка и тестирование разработанного программного обеспечения.

Содержание

Метод эллипсоидов предложили

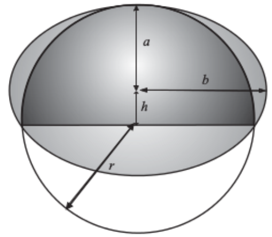
1976 **Юдин Д.Б. и Немировский А.С.** как метод последовательных отсечений.

1977 **Шор Н.З.** как вариант метода с растяжением пространства в направлении субградиента.

1979 **Хачиян Л.** построил первый полиномиальный алгоритм решения задачи ЛП с рациональными коэффициентами.

Содержание

1-d эллипсоид и его свойства



Эллипсоид ε_n, содержащий полушар в E^n, имеет параметры

$$b = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{r}{2}, \quad h = \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{r}{2},$$

где $\alpha = \frac{b}{a}$ и r – радиус шара S_n.

Если пространство «растянуть» с коэффициентом α в направлении полуоси a, то ε_n станет шаром в преобразованном пространстве.

Отношение объема эллипсоида ε_n к объему шара S_n равно

$$q(n) = \frac{vol(\varepsilon_n)}{vol(S_n)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{b}{r}\right)^n = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n.$$

Содержание

Использование метода эллипсоидов

Для решения задачи $\min f_0(x)$ при ограничениях

$$f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in E^n,$$

где E^n – евклидово пространство размерности $n > 1$, $f_\nu(x)$ – выпуклые функции; $g_\nu(x)$ – субградиенты функций, $\nu = \overline{0, m}$. Предполагается, что оптимальная точка $x^* \in E_n$ существует и находится в шаре радиуса R с центром в точке x_0.

К такой задаче сводятся:
- задача безусловной минимизации выпуклой функции,
- общая задача выпуклого программирования,
- задача о седловой точке выпукло-вогнутых функций.

Алгоритм

Выбрать $x_k := x_0 \in E^n$ и радиус R, такие что $||x_0 - x^*|| \le R$. Положить $h_k = \frac{R}{n+1}$, $B_k := E$, где E – единичная матрица. Для перехода к $(k+1)$-й итерации выполнить:

Шаг 1. Вычислить $g(x_k)$. Если $g(x_k) = 0$, то **ОСТАНОВ**$(x^* = x_k)$.

Шаг 2. Вычислить очередную точку $x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k$, где
$$\xi_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{||B_k^T g(x_k)||}.$$

Шаг 3. Пересчитать шаг $h_{k+1} = h_k r$ и матрицу B_{k+1}
$$B_{k+1} = B_k + (\beta - 1)(B_k \xi_k)\xi_k^T, \quad \beta = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

Шаг 4. Перейти к $(k+1)$-й итерации с x_{k+1}, h_{k+1} и B_{k+1}.

О сходимости метода эллипсоидов

Теорема (О скорости сходимости)

Для всех итераций метода эллипсоидов коэффициент уменьшения объема эллипсоида, локализующего x^*, есть величина постоянная и равная

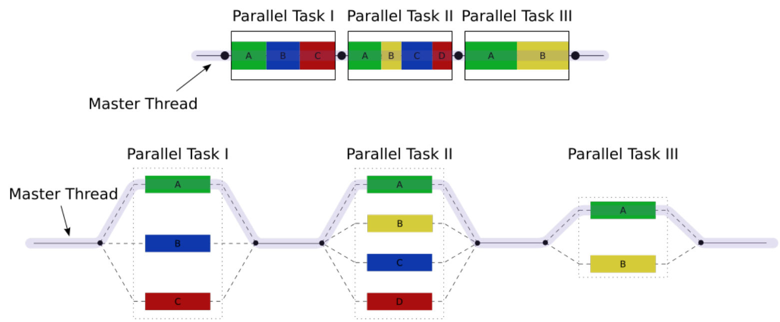
$$q(n) = \frac{vol(\varepsilon_{k+1})}{vol(\varepsilon_k)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n < 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Оптимальный коэффициент растяжения пространства

$$\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \Rightarrow q(n) = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n < 1.$$

Содержание

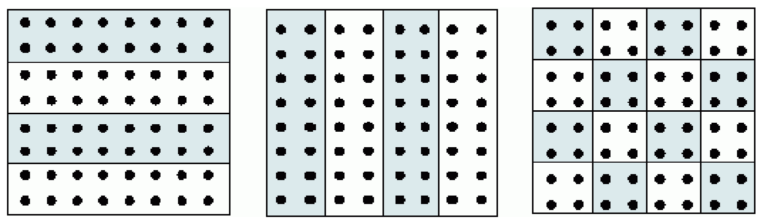
Модель Fork–Join



Способы разбиения матриц

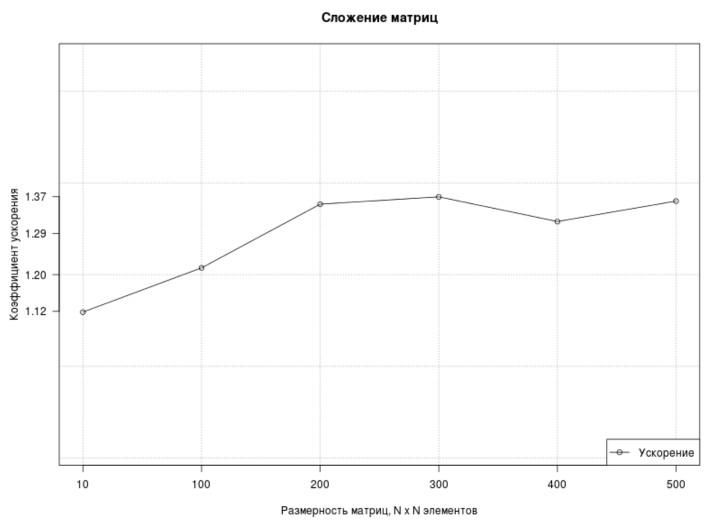
Ускорение матричных операций

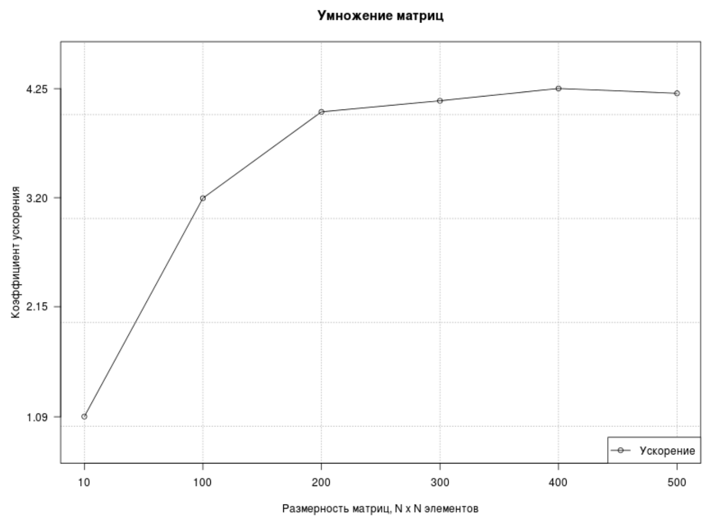
Каждому потоку выделяется некоторое подмножество элементов матрицы для обработки. Вид подмножества определяется способом разбиения.

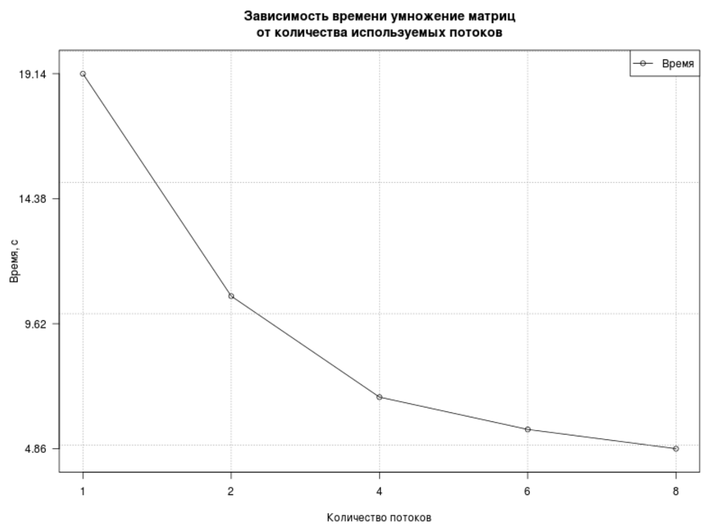


Горизонтальный   Вертикальный   Блочный

Содержание


Сложение матриц
Коэффициент ускорения
1.37
1.29
1.20
1.12
10
100
200
300
400
500
Размерность матриц, N x N элементов
Ускорение


Умножение матриц
Коэффициент ускорения
4.25
3.20
2.15
1.09
10
100
200
300
400
500
Размерность матриц, N x N элементов
Ускорение


Зависимость времени умножение матриц
от количества используемых потоков
Время
19.14
14.38
9.62
4.86
Время, с
1
2
4
6
8
Количество потоков

Содержание

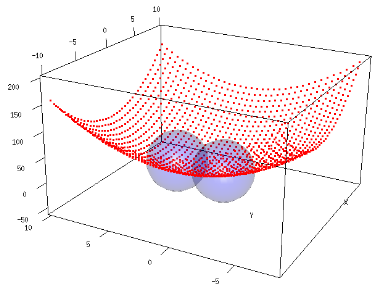
Пример 1

Задача минимизации

$$x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min.$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 9; \\ x_1^2 + (x_2 - 4)^2 - 9. \end{cases}$$



Оптимум

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Расчет (точность – 9 знаков)

$$x^* = \begin{pmatrix} 0.00000000011922745523 \\ 2.00000000033459867651 \end{pmatrix}$$

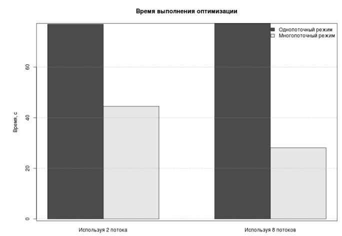
Пример 2

Задача большой размерности

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to \min.$$

Ограничения:

$$f_m = \sum_{i=1, i \neq m}^{n} x_i^2 + (x_m - \alpha/2)^2 - \alpha^2.$$



Для $n = 100$, $m = \overline{1, n}$, $\alpha = 1$

Решение найдено за 403 итерации, точность – 9 знаков.

Ускорение при переходе

от 1 потока к 2: $k_1 = 1.73$
от 1 потока к 8: $k_2 = 2.74$

Заключение

В работе решены следующие **задачи**:

- операции классического алгоритма метода эллипсоидов исследованы на вычислительную сложность;
- разработана программная реализация алгоритма с распараллеливанием наиболее длительных по времени операций;
- обеспечена поддержка арифметики расширенной и произвольной точности;
- разработанный код проверен и протестирован.

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!