PACS 02.30.Zz, 02.30.Yy

©2007 г. С. А. НАЗИН, канд. физ.-мат. наук,
Б. Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ МЕТОДОМ ЭЛЛИПСОИДОВ В ЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ОПИСАНИЕМ МОДЕЛИ [1]

В рамках эллипсоидального подхода к задачам гарантированного оценивания рассматривается проблема параметрического оценивания в условиях неопределенности описания модели объекта. Неизвестный многомерный объект, вектор параметров которого требуется оценить, предполагается линейным и статическим, а его модель "вход-выход" — содержащей как аддитивную, так и мультипликативную составляющие неопределенности. По результатам наблюдений строятся внешние эллипсоидальные аппроксимации невыпуклых информационных множеств, гарантирующих содержание вектора возможных значений параметров объекта. Метод их построения сводится к задаче полуопределенного программирования, т.е. к минимизации линейной функции при ограничениях в виде линейных матричных неравенств, легко реализующихся численными методами.

1. Введение

Параллельно со стохастическими методами оценивания в условиях неопределенности развивается и альтернативный гарантированный подход [1 – 6]. Основой данного подхода является предположение об ограниченности внешних возмущений и ошибок в системе и об отсутствии информации о законах их распределений. На практике во многих случаях наиболее естественно именно такое описание неопределенностей в модели. В этом контексте задачи оценивания сводятся к нахождению множеств всевозможных значений искомых величин, например вектора параметров или фазовых координат системы, совместимых с данными ограничениями на неопределенность.

Наряду с рядом преимуществ гарантированного подхода, таких как необходимость знания только верхних и нижних границ для неопределенных величин, имеются и существенные его недостатки (вычислительная трудоемкость методов, консерватизм получающихся оценок), осложняющие его применения в реальных приложениях. К примеру, в интервальной постановке задачи оценивания часто оказываются NP-трудными, дальнейшее упрощение которых заметно снижает точность результирующих оценок. В этой связи одним из наиболее удобных и привлекательных подходов в гарантированном оценивании является метод эллипсоидов. В рамках этого метода предполагается, что возмущения и ошибки в системе удовлетворяют квадратичным эллипсоидальным ограничениям, и ставится задача

[1] Работа осуществлялась при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации (МК-1294.2005.8), Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00114) и Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 22.

найти эллипсоид в качестве оценки неизвестного вектора параметров или вектора фазовых координат системы. При этом заметим, что каждая точка этого эллипсоида в равной степени может считаться решением исходной задачи оценивания. В настоящее время метод эллипсоидов хорошо развит для случая линейных динамических систем [4, 7– 9] в частности, для анализа и синтеза управления.

Данная работа посвящена одной из наиболее естественных задач в данном контексте — проблеме параметрического оценивания в многомерных системах при наличии неопределенностей, которая заключается в нахождении границ или множественных ограничений на вектор параметров по результатам наблюдений. Рассмотрим линейную модель “вход-выход” статического многомерного объекта

$$y = C\,x + w, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ есть вектор неизвестных параметров объекта, $y \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений (выходов), $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — матрица регрессоров (входов) модели, а $w \in \mathbb{R}^m$ — вектор ошибок измерений. Будем считать, что в матрице C отсутствует авторегрессионная составляющая, т.е. что C не зависит от y. На основе данных y и C и ограничений на w из (1) необходимо найти гарантированную оценку вектора x.

Классический подход к задаче оценивания параметров объекта основан на предположении, что матрица регрессоров C в модели задана точно, а вектор w ограничен, например, в евклидовой норме $\|w\| \leqslant \delta$ или покомпонентно $|w_i| \leqslant \delta_i$, $i = 1, ..., m$. Одними из основополагающих работ в этом направлении являются [10, 11], предлагающие рекуррентные эллипсоидальные алгоритмы параметрической идентификации линейных систем. Известно, что в рамках эллипсоидальной техники задача оценки параметров сводится к аппроксимации пересечения эллипсоидов, которая в оптимальной постановке также является NP-трудной. Но в то же время поиск субоптимальных аппроксимаций пересечения эллипсоидов может быть осуществлен достаточно просто [9, 12] и без большой потери качества оценок. Полезно также упомянуть в данном контексте специальный выпуск журнала [13] и две обзорные статьи [14, 15] по данной проблематике, работу [16] по идентификации нелинейных систем, а также сборник статей по гарантированной идентификации [17], в которых рассматривается широкий спектр вопросов и методов параметрического оценивания при неизвестных, но ограниченных помехах.

Однако предположение о точном знании регрессоров модели во многих случаях представляется невыполнимым. На практике зачастую недоступна точная информация о структуре физического объекта. Поэтому большую роль здесь играют робастные принципы и подходы, принимающие во внимание также и неизбежно возникающую неопределенность в описании модели, что приводит к появлению матричной мультипликативной неопределенности в (1). Некоторые случаи применения интервальной техники для параметрического оценивания в такой постановке рассмотрены в [13, 18, 19], где подчеркивались возникающие трудности, связанные с NP-сложностью задачи. В новой монографии [20] можно найти последние результаты по интервальным методам оценивания и их приложениям в различных областях. Альтернативно интервальному в [21, 22] предложен эллипсоидальный подход к оцениванию фазовых состояний динамических систем в условиях неопределенности модели, сводящий задачу к одномерной минимизации. С другой стороны, метод эллипсоидов особенно удобен с точки зрения применения техники линейных матричных неравенств [23] и последующего рассмотрения более общей структурированной матричной неопределенности в модели [24]. Это позволяет свести поиск оптимальных эллипсоидальных оценок к решению так называемой задачи полуопределенного программирования [23, 25], т.е. к минимизации линейной функции при условиях в виде линейных матричных неравенств, легко реализующейся вычислительными методами.

Цель настоящей статьи — предложить новый метод эллипсоидального оценивания вектора параметров статического многомерного объекта при неопределенности в описании его модели, обобщая результаты, полученные в [22], и используя технику линейных матричных неравенств. Принципиальная новизна данного метода заключается в том, что оценки параметров систем со многими измерениями (выходами) в нем строятся нерекуррентным образом, используя процедуру полуопределенного программирования. Во многих случаях это позволяет избежать негативного эффекта накопления ошибок и значительно улучшить качество получаемых оценок.

Статья организована следующим образом. В параграфе 2 дана постановка задачи. В разделе 3 сформулированы некоторые вспомогательные утверждения. Для иллюстрации в разделе 4 приведен случай модели с одним измерением (модели со скалярным выходом) при наличии неопределенности в модели. Для многомерных систем в разделе 5 предложен алгоритм эллипсоидального параметрического оценивания. Параграф 6 посвящен обсуждению рекуррентного и прямого алгоритмов оценивания, изложенных в разделах 4 и 5 соответственно. В конце сформулировано краткое заключение.

2. Постановка задачи

Пусть изначально известна некая априорная множественная оценка вектора параметров объекта, которая зачастую может быть достаточно большой и неудовлетворительной. Предположим также, что в некоторый момент нам доступен произвольный набор экспериментальных данных "вход-выход" (наблюдений) для объекта. Ставится задача улучшить априорную оценку на основе результатов наблюдений.

Итак, пусть $x \in \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(c_0, P_0)$ с матрицей $P_0 > 0$, где $\mathcal{E}_0$ есть априорная ограниченная эллипсоидальная оценка неизвестного вектора параметров x. Эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через

$$\mathcal{E}(c, P) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ (x-c)^T P (x-c) \leqslant 1 \right\},$$

где c — центр эллипсоида, а $P = P^T > 0$ — его матрица, определяющая форму и размер эллипсоида. Заметим, что случай с матрицей $P \geqslant 0$ соответствует вырожденному неограниченному эллипсоиду.

Рассмотрим линейную модель объекта с неопределенностью в данных

$$y_k = (a_k + \Delta a_k)^T x + w_k, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Здесь a_k – вектор-столбец, составленный из k-й строки матрицы регрессоров C. Переменная w_k описывает ошибку в значении выхода y_k и является аддитивной неопределенностью в (2). Вектор Δa_k представляет собой недостоверность в описании модели объекта и является мультипликативной составляющей неопределенности в (2). Кроме того, его можно рассматривать и непосредственно как ошибку в значении регрессора (вектора входа) a_k. Будем полагать далее все ошибки в модели неизвестными, но ограниченными. Более того, в рамках эллипсоидальной техники удобно принять, что мультипликативная и аддитивная составляющие неопределенности удовлетворяют совместным квадратичным ограничениям

$$\frac{\|\Delta a_k\|^2}{\varepsilon_k^2} + \frac{|w_k|^2}{\delta_k^2} \leqslant 1, \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

При этом случай $\varepsilon_k = 0$ подразумевает $\Delta a_k = 0$ и $|w_k| \leqslant \delta_k$, а случай $\delta_k = 0$ — соответственно $w_k = 0$ и $\|\Delta a_k\| \leqslant \varepsilon_k$. Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. Номинальные значения y_k, a_k и числа ε_k, δ_k полагаются известными. Тогда все векторы x, удовлетворяющие (2) при ограничениях (3), формируют так называемое *информационное множество* $\mathcal{X}$ системы, т.е. множество всевозможных значений параметров объекта, совместимых с результатами наблюдений

$$\mathcal{X} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \ y_k = (a_k + \Delta a_k)^T x + w_k, \ \ \frac{\|\Delta a_k\|^2}{\varepsilon_k^2} + \frac{|w_k|^2}{\delta_k^2} \leqslant 1, \ \ k = 1, \ldots, m \right\}. \tag{4}$$

Если все ошибки в модели укладываются в указанные для них ограничения, то реальное значение вектора параметров x^* будет принадлежать $\mathcal{X}$. В силу сложности формы информационного множества, невыпуклости при $\Delta a_k \neq 0$ и возможной неодносвязности его точное описание в общем случае весьма затруднительно. Поэтому будем искать его внешние аппроксимации более простыми областями, такими как эллипсоиды. Поскольку изначально полагалось, что задана некая априорная оценка $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(c_0, P_0)$, то в качестве оценки x^* имеет смысл рассматривать $x \in \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{X}$. И задача состоит в нахождении по возможности наименьшего эллипсоида $\mathcal{E} = \mathcal{E}(d, Q)$, содержащего пересечение

$$\mathcal{E} \supseteq \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{X}. \tag{5}$$

Все точки этого эллипсоида и будут искомой оценкой вектора параметров объекта.

Заметим здесь, что в данной работе мы изначально полагаем $\mathcal{X} \neq \emptyset$ и $x^* \in \mathcal{X}$, т.е. что рассматриваемый физический объект адекватно описывается моделью (2)–(3) и что так называемые выбросы в экспериментальных данных (ложные измерения, ошибки которых превышают изначально установленные на них пределы) отсутствуют.

3. Вспомогательные утверждения

Сформулируем в этом разделе несколько вспомогательных утверждений, необходимых для дальнейшего анализа.

Л е м м а 1. Пусть $\zeta = u^T x + v$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \in \mathbb{R}$. Тогда при любом фиксированном x для того, чтобы

$$\frac{\|u\|^2}{\varepsilon^2} + \frac{|v|^2}{\delta^2} \leqslant 1,$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства $|\zeta|^2 \leqslant \varepsilon^2 \|x\|^2 + \delta^2$.

Доказательство леммы можно найти в [22], но для полноты изложения оно приводится в Приложении.

Таким образом, совместное квадратичное ограничение на u и v дает квадратичное ограничение для ζ. Напротив, рассмотрение раздельных ограничений вида $\|u\| \leqslant \varepsilon$ и $|v| \leqslant \delta$ приведут к эквивалентному, но уже неквадратичному неравенству $|\zeta| \leqslant \varepsilon\|x\| + \delta$.

Рассмотрим далее произвольный конечный набор возможно вырожденных эллипсоидов $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}(c_k, P_k)$, $k = 1, ..., K$. Если их пересечение $\mathcal{I}_K = \bigcap_{k=1}^{K} \mathcal{E}(c_k, P_k)$ непусто, то оно является выпуклым. Поскольку поиск оптимального эллипсоида, содержащего это пересечение, NP-сложен, то во многих случаях ограничиваются нахождением простых субоптимальных оценок. При внешней аппроксимации оптимальность эллипсоидальных оценок понимается с точки зрения минимальности размера эллипсоида. Наиболее распространенными считаются критерии минимальности объема и следа, соответствующие весовым функциям

$$f_1(P) = -\ln \det P, \qquad f_2(P) = \operatorname{tr} P^{-1},$$

где P есть матрица эллипсоида. Применение более общих критериев изучено в [7]. Следующая лемма, определяет семейство эллипсоидальных аппроксимаций, содержащих непустое пересечение двух или более эллипсоидов.

Л е м м а 2. *Пусть* $\mathcal{I}_K = \bigcap_{k=1}^{K} \mathcal{E}(c_k, P_k)$, *где* $P_k \geqslant 0$, $k = 1, ..., K$, *и* $\mathcal{I}_K \neq \emptyset$. *Пусть* $\mathcal{A}_K$ *есть множество векторов* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_K)^T \in \mathbb{R}^K$ *таких, что* $\alpha_1 \geqslant 0, ..., \alpha_K \geqslant 0$ *и* $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$. *Рассмотрим*

$$P_\alpha = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k P_k, \qquad c_\alpha = P_\alpha^{-1} \sum_{k=1}^{K} \alpha_k P_k c_k, \qquad \xi_\alpha = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k c_k^T P_k c_k - c_\alpha^T P_\alpha c_\alpha.$$

Тогда

$$\mathcal{E}\left(c_\alpha, (1-\xi_\alpha)^{-1} P_\alpha\right) \supseteq \mathcal{I}_K$$

при всех $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_K)^T \in \mathcal{A}_K$ *и таких, что* $P_\alpha > 0$.

Доказательство дается в [9], поэтому его изложение мы здесь опускаем. Однако его можно легко провести, повторяя рассуждения доказательства теоремы 1.

Заметим, что требование $P_\alpha > 0$ соответствует условию невырожденности (ограниченности) результирующего эллипсоида, поскольку множитель $(1-\xi_\alpha)^{-1}$ оказывается положительным при любом $\alpha \in \mathcal{A}_K$. Таким образом, поиск субоптимальной эллипсоидальной оценки, содержащей пересечение $\mathcal{I}_K$, можно свести к поиску минимального эллипсоида среди семейства леммы 2. Отметим, однако, что выпуклость соответствующих весовых функций $\varphi_1(\alpha) = -\ln \det \frac{P_\alpha}{1-\xi_\alpha}$ и $\varphi_2(\alpha) = (1-\xi_\alpha) \operatorname{tr} P_\alpha^{-1}$ в [9] не установлена. Тем не менее, рассматривая более простые зависимости от α, можно свести поиск минимального эллипсоида среди семейства леммы 2 к задаче выпуклой минимизации.

Л е м м а 3. *В условиях леммы 2 верно также, что*

$$\mathcal{E}\left(c_\alpha, P_\alpha\right) \supseteq \mathcal{I}_K$$

для всех $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_K)^T \in \mathcal{A}_K$ *и таких, что* $P_\alpha > 0$. *При этом функции* $\widehat{\varphi}_1(\alpha) = -\ln \det P_\alpha$ *и* $\widehat{\varphi}_2(\alpha) = \operatorname{tr} P_\alpha^{-1}$ *являются выпуклыми на* $\mathcal{A}_K$.

Таким образом, леммы 2 и 3 предлагают два семейства эллипсоидальных аппроксимаций $\mathcal{E}\left(c_\alpha, (1-\xi_\alpha)^{-1} P_\alpha\right)$ и $\mathcal{E}\left(c_\alpha, P_\alpha\right)$, содержащих пересечение $\mathcal{I}_K$. Причем второе семейство выпукло по α на $\mathcal{A}_K$. Однако минимальный эллипсоид из первого семейства дает лучшую аппроксимацию пересечения. В [9] в то же время отмечается, что разница между минимальными эллипсоидами данных двух семейств в большинстве случаев незначительна.

В данной работе утверждение леммы 2 будет обобщено на случай пересечения квадратичных множеств неэллипсоидального типа, возникающих в задаче оценки параметров линейных систем с неопределенным описанием модели.

4. Система с одним выходом

С точки зрения анализа информационных множеств полезно рассмотреть случай наличия одного измерения в системе, т.е. случай модели со многими входами и одним выходом ($m = 1$)

$$y_1 = (a_1 + \Delta a_1)^T x + w_1, \tag{6}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y_1 \in \mathbb{R}$, а

$$\frac{\|\Delta a_1\|^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{|w_1|^2}{\delta_1^2} \leqslant 1. \tag{7}$$

В соответствии с леммой 1

$$|y_1 - a_1^T x|^2 \leqslant \varepsilon_1^2 \|x\|^2 + \delta_1^2 \tag{8}$$

или, что эквивалентно,

$$x^T \left(a_1 a_1^T - \varepsilon_1^2 I\right) x - 2 y_1 a_1^T x + y_1^2 - \delta_1^2 \leqslant 0. \tag{9}$$

Через I обозначаем единичную матрицу. Предположим $0 < \varepsilon_1 < \|a_1\|$, что всегда выполняется, если мультипликативная ошибка в модели $\Delta a_1 \neq 0$ заведомо меньше соответствующего номинального значения регрессора a_1. Тогда матрица $a_1 a_1^T - \varepsilon_1^2 I$ будет обратимой, и неравенство (9) можно записать в виде квадратичной формы

$$(x - g_1)^T M_1 (x - g_1) \leqslant 1, \tag{10}$$

где

$$\left[\begin{array}{rcl} M_1 & = & R_1 / \left(y_1^2 a_1^T R_1^{-1} a_1 - y_1^2 + \delta_1^2\right), \\ g_1 & = & y_1 R_1^{-1} a_1, \\ R_1 & = & a_1 a_1^T - \varepsilon_1^2 I. \end{array}\right. \tag{11}$$

Матрицы R_1 и M_1 оказываются знаконеопределенными при $\varepsilon_1 > 0$. Поэтому информационное множество $\mathcal{X}_1$, образованное всеми векторами x, удовлетворяющими (10),

$$\mathcal{X}_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \ (x - g_1)^T M_1 (x - g_1) \leqslant 1\right\} \tag{12}$$

не является эллипсоидом в $\mathbb{R}^n$, а будет неограниченным и невыпуклым. На рис. 1 показан один из примеров такого множества для двумерного случая ($n = 2$), где $\mathcal{X}_1$ представляет собой пространство между двумя гиперболами на плоскости. В то же время при $\varepsilon_1 = 0$ область $\mathcal{X}_1$ являлась бы полосой (затемненная область на рис. 1), что, в свою очередь, представляется классическим информационным множеством для скалярного измерения в отсутствие матричной неопределенности.

Зная априорную невырожденную эллипсоидальную оценку $\mathcal{E}_0$ для x, можно построить эллипсоид, аппроксимирующий пересечение $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{X}_1$.

Л е м м а 4. Если вектор $x \in \mathcal{E}(c_0, P_0)$, $P_0 > 0$, *и удовлетворяет* $y_1 = (a_1 + \Delta a_1)^T x + w_1$ *при ограничении (7) на* Δa_1 *и* w_1, *то* $x \in \mathcal{E}(d_\tau, (1-\xi_\tau)^{-1} Q_\tau)$, *где*

$$
\left[\begin{array}{rcl} Q_\tau &=& (1-\tau)P_0 + \tau M_1, \\ d_\tau &=& Q_\tau^{-1}[(1-\tau)P_0 c_0 + \tau M_1 g_1], \\ \xi_\tau &=& (1-\tau)c_0^T P_0 c_0 + \tau g_1^T M_1 g_1 - d_\tau^T Q_\tau d_\tau, \end{array}\right. \tag{13}
$$

при всех значениях τ *из интервала* $0 < \tau < \tau_{\max} = \min\{1, (1-\lambda_{\min})^{-1}\}$, *где* $\lambda_{\min}$ – *минимальное обобщенное собственное значение матричной пары* (M_1, P_0). *Значения* M_1 *и* g_1 *определены в (11).*

Обобщенными называют собственное значение λ_i и собственный вектор v_i матричной пары (M, P), если $M v_i = \lambda_i P v_i$.

Доказательство леммы 4 приведено в [22], поэтому его изложение мы здесь опускаем. Однако его также можно легко провести, повторяя рассуждения доказательства теоремы 1.

Лемма 4 дает однопараметрическое семейство эллипсоидов $\mathcal{E}(d(\tau), Q(\tau))$, содержащих пересечение $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{X}_1$. Поиск минимального эллипсоида среди этого семейства с точки зрения объема $\varphi_1(\tau) = -\ln\det\frac{Q_\tau}{1-\xi_\tau}$ или следа $\varphi_2(\tau) = (1-\xi_\tau)\operatorname{tr} Q_\tau^{-1}$, таким образом, сведется к задаче одномерной минимизации и дает субоптимальную оценку для $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{X}_1$. Эта оценка окажется оптимальной только в частном случае, когда $c_0 = g_1$, что можно доказать, опираясь на результаты из [26]. Отметим, что, как и в случае аппроксимации пересечения эллипсоидов (лемма 2), функции $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$, по-видимому, являются строго выпуклыми по τ на интервале $0 < \tau < \tau_{\max}$, что подтверждается множеством численных экспериментов, но строго доказать этот результат пока не удается.

С другой стороны, рассматривая более простые выпуклые целевые функции, такие как, например, $\widehat{\varphi}_1(\tau) = -\ln\det Q_\tau$ или $\widehat{\varphi}_2(\tau) = \operatorname{tr} Q_\tau^{-1}$, задача нахождения субоптимальной оценки пересечения $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{X}_1$ среди семейства леммы 4 сводится к выпуклой. Очевидно, однако, что в этой ситуации найденный эллипсоид не будет минимальным ни по объему, ни по следу среди данного семейства. Тем не менее в подавляющем большинстве случаев его разница с минимальным по тому или иному выбранному критерию оказывается незначительной. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

П р и м е р 1. Пусть $m = 1$, $n = 2$. Возьмем $y_1 = 3$, $a_1 = (2, 2)^T$, $\varepsilon_1 = 1$ и $\delta_1 = 0,5$. Два собственных значения матрицы $R_1 = a_1 a_1^T - \varepsilon_1^2 I$ из (11) имеют в этом случае разные знаки. Значит, ни R_1, ни M_1 не являются положительно или отрицательно определенными. Поэтому информационное множество $\mathcal{X}_1$ из (12) представляет собой пространство между двумя гиперболами на плоскости (см. рис. 2). Предположим, что априорно известна принадлежность фазового вектора x системы некоторому невырожденному эллипсоиду $\mathcal{E}(c_0, P_0)$ с центром в нуле $c_0 = 0$ и матрицей $P_0 = \operatorname{diag}\{1, 1/9\}$. Вычисляя $\lambda_{\min} = -1,2832$ и

$\tau_{\max} = 0,4380 < 1$ из леммы 4, находим минимальный по критерию объема или следа эллипсоид $\mathcal{E}(d, Q)$ в однопараметрическом семействе (13). Это можно легко сделать, поскольку в данном случае функции $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ будут выпуклы. На рис. 2 сплошной линией показана аппроксимация пересечения минимальным эллипсоидом по критерию следа. Для сравнения на том же рисунке пунктирной линией показан эллипсоид, минимизирующий простую выпуклую функцию $\widehat{\varphi}_2(\tau) = \operatorname{tr} Q_\tau^{-1}$. Отметим незначительную разницу этих двух эллипсоидальных аппроксимаций. $\square$

В случае наличия моделей с несколькими выходами задачу аппроксимации возникающих информационных множеств можно решать рекуррентно, последовательно рассматривая скалярные случаи и применяя лемму 4. Однако эта методика вносит дополнительные погрешности на каждом шаге рекурсии и становится неудобной для моделей с многими выходами. В следующем разделе предлагается нерекуррентный подход к построению эллипсоидальных оценок в многомерном случае, основанный на решении линейных матричных неравенств.

5. Многомерные системы

Перейдем к рассмотрению линейной модели (2) объекта со многими входами и многими выходами

$$y_k = (a_k + \Delta a_k)^T x + w_k, \qquad k = 1, \dots, m,$$

в которой мультипликативная и аддитивная составляющие неопределенности удовлетворяют совместным ограничениям (3)

$$\frac{\|\Delta a_k\|^2}{\varepsilon_k^2} + \frac{|w_k|^2}{\delta_k^2} \leqslant 1, \qquad k = 1, \dots, m.$$

Тогда информационное множество (4) будет образовано пересечением $\mathcal{X} = \bigcap_{k=1}^m \mathcal{X}_k$, где

$$\mathcal{X}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad y_k = (a_k + \Delta a_k)^T x + w_k, \quad \frac{\|\Delta a_k\|^2}{\varepsilon_k^2} + \frac{|w_k|^2}{\delta_k^2} \leqslant 1 \right\} \tag{14}$$

есть информационное множество системы со скалярным выходом y_k. Множество $\mathcal{X}$ будет невыпуклым (в силу невыпуклости $\mathcal{X}_k$), а в некоторых случаях — неодносвязным. Аналогично рассуждениям предыдущего параграфа представим

$$\mathcal{X}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad (x - g_k)^T M_k (x - g_k) \leqslant 1 \right\}, \tag{15}$$

где

$$\left[\begin{array}{rcl} M_k & = & R_k / \left(y_k^2 a_k^T R_k^{-1} a_k - y_k^2 + \delta_k^2 \right), \\ g_k & = & y_k R_k^{-1} a_k, \\ R_k & = & a_k a_k^T - \varepsilon_k^2 I. \end{array} \right. \tag{16}$$

Пусть имеется некая априорная оценка $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(c_0, P_0)$ вектора параметров x, причем полагаем $P_0 > 0$. Сформулируем основной результат.

Т е о р е м а 1. Если вектор $x \in \mathcal{E}(c_0, P_0)$, $P_0 > 0$, и удовлетворяет

$$y_k = (a_k + \Delta a_k)^T x + w_k, \qquad \frac{\|\Delta a_k\|^2}{\varepsilon_k^2} + \frac{|w_k|^2}{\delta_k^2} \leqslant 1, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

то $x \in \mathcal{E}(d_\alpha, (1-\xi_\alpha)^{-1} Q_\alpha)$, где

$$(17) \qquad \left[\begin{array}{rcl} Q_\alpha & = & \alpha_0 P_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k M_k, \\ d_\alpha & = & Q_\alpha^{-1} \left(\alpha_0 P_0 c_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k M_k g_k \right), \\ \xi_\alpha & = & \alpha_0 c_0^T P_0 c_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k g_k^T M_k g_k - d_\alpha^T Q_\alpha d_\alpha, \end{array} \right.$$

при всех значениях $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_m)^T$, таких что $\alpha_k \geqslant 0$, $k = 0, ..., m$, $\sum_{k=0}^m \alpha_k = 1$ и $Q_\alpha > 0$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Теорема 1 дает семейство эллипсоидальных аппроксимаций, содержащих пересечение $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{X}$. Оно обобщает утверждение леммы 2 на случай пересечения множеств неэллипсоидального типа, а результаты леммы 4 — на многомерные системы. Минимизация функций $\varphi_1(\alpha) = -\ln\det\frac{Q_\alpha}{1-\xi_\alpha}$ или $\varphi_2(\alpha) = (1-\xi_\alpha)\operatorname{tr} Q(\alpha)^{-1}$ на этом семействе дает соответственно субоптимальные по объему и по следу эллипсоидальные оценки вектора параметров. Однако, по-видимому, ничего нельзя сказать о выпуклости этих функций. Тем не менее можно рассматривать более простые выпуклые целевые функции такие, как $\widehat{\varphi}_1(\tau) = -\ln\det Q_\tau$ или $\widehat{\varphi}_2(\tau) = \operatorname{tr} Q_\tau^{-1}$, и тогда задача нахождения субоптимальной оценки пересечения $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{X}$ среди данного семейства будет выпуклой.

Обозначим через $\widehat{\mathcal{A}}_m$ множество всех $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)^T$, удовлетворяющих условию теоремы 1:

$$\widehat{\mathcal{A}}_m = \left\{ \alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_m)^T : \ \ \alpha_k \geqslant 0, \ k = 0, ..., m, \ \sum_{k=0}^{m} \alpha_k = 1, \ \ Q_\alpha > 0 \right\}.$$

Задача минимизации функции $\widehat{\varphi}_1(\alpha)$ или $\widehat{\varphi}_2(\alpha)$ на $\widehat{\mathcal{A}}_m$ есть задача выпуклой оптимизации. Рассмотрим далее более подробно минимизацию по критерию следа. Поскольку след является линейной функцией, то в этом случае задачу удается свести к линейной. В самом деле, для нахождения минимального по следу эллипсоида среди семейства теоремы 1 требуется решить

$$(18) \qquad \min \operatorname{tr} Q_\alpha^{-1}$$

при ограничениях

$$(19) \qquad \left[\begin{array}{r} \alpha_k \geqslant 0, \ \ k = 0, ..., m, \\ \sum_{k=0}^m \alpha_k = 1, \\ Q_\alpha = \alpha_0 P_0 + \sum_{k=1}^m \alpha_k M_k > 0. \end{array} \right.$$

Условия (19) представляют собой линейные ограничения, последнее из которых есть линейное матричное неравенство. Кроме того, минимизацию выпуклой нелинейной функции

(18) можно свести к линейной задаче. Действительно, пусть e_i – i-й единичный орт в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда $\operatorname{tr} Q_\alpha^{-1} = \sum_{i=1}^n e_i^T Q_\alpha^{-1} e_i$. Поскольку в соответствии с формулой Шура для блочных матриц (см. [27])

$$\mu_i \geqslant e_i^T Q_\alpha^{-1} e_i \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \mu_i & e_i^T \\ e_i & Q_\alpha \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

то $\operatorname{tr} Q_\alpha^{-1} \leqslant \sum_{i=1}^n \mu_i$. Поэтому задача (18) при условиях (19) эквивалентна линейной задаче

$$\min \sum_{i=1}^n \mu_i \tag{20}$$

при ограничениях

$$\left[\begin{array}{r} \alpha_k \geqslant 0, \quad k = 0, ..., m, \\ \sum_{k=0}^m \alpha_k = 1, \\ Q_\alpha = \alpha_0 P_0 + \sum_{k=1}^m \alpha_k M_k > 0, \\ \begin{pmatrix} \mu_i & e_i^T \\ e_i & Q_\alpha \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad i = 1, ..., n. \end{array} \right. \tag{21}$$

Таким образом, поиск субоптимальной эллипсоидальной оценки по критерию следа свелся к линейной задаче минимизации при ограничениях в виде линейных матричных неравенств. Такие задачи называют задачами полуопределенного программирования, для которых существует целый ряд солверов, например `LMI Toolbox` в системе `MATLAB`, позволяющих эффективно находить их решения.

В качестве иллюстрации работы изложенной процедуры рассмотрим случай с двумерным вектором параметров системы и тремя измерениями такими, что образованное ими информационное множество $\mathcal{X}$ непусто и является ограниченным. Множество $\mathcal{X}$ есть пересечение трех информационных множеств системы со скалярными выходами, т.е. $\mathcal{X} = \bigcap_{i=1}^3 \mathcal{X}_i$. Пример такой ситуации показан на рис. 3, где $\mathcal{X}$ образовано пересечением $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ и $\mathcal{X}_3$ (затемненная область). Поскольку пересечение $\mathcal{X}$ ограничено, то условие $Q_\alpha = \sum_{k=1}^3 \alpha_k M_k > 0$ будет выполнено при некоторых $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_3 \geqslant 0$ таких, что $\sum_{k=0}^m \alpha_k = 1$. Поэтому в данном случае рассмотрение априорной эллипсоидальной оценки $\mathcal{E}(c_0, P_0)$ с $P_0 > 0$ можно опустить. Решая задачу минимизации (20) с ограничениями (21), в которых $\alpha_0 \equiv 0$, получим субоптимальную эллипсоидальную аппроксимацию для $\mathcal{X}$, изображенной на рис. 3 жирной линией. Ограниченное информационное множество $\mathcal{X}$ зачастую может оказываться неодносвязным, как показано, к примеру, на рис. 4. Тем не менее решением задачи (20)–(21) дается эллипсоид, содержащий это множество.

В следующем разделе приведено сравнение прямого и рекуррентного методов эллипсоидального параметрического оценивания.

6. Обсуждение рекуррентного и прямого подходов

В многомерных моделях задачу аппроксимации возникающих информационных множеств можно решать рекуррентно, последовательно рассматривая скалярные случаи и применяя технику, описанную в разделе 4. Данная методика безусловно проста, так как для каждого отдельного измерения требуется решение одномерной выпуклой задачи минимизации. Однако она вносит дополнительные погрешности на каждом шаге рекурсии, что делает этот метод малопривлекательным, а получающиеся оценки весьма консервативными для систем со многими входами и многими выходами. Поэтому большое значение здесь имеет прямой подход, который удается свести к рассмотрению линейных матричных неравенств и к решению задачи полуопределенного программирования, численное решение которой можно легко найти, применяя практически любой программный пакет выпуклой оптимизации. Для сравнения прямого и рекуррентного методов эллипсоидального оценивания рассмотрим следующий пример.

П р и м е р 2. Пусть $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(0, I/9)$ есть шар радиуса $r = 3$, априори содержащий двумерный вектор x параметров объекта, I – единичная матрица. Пусть также даны два измерения в модели (2) со следующими данными: $y_1 = 2$, $a_1 = (1, 1)^T$, $\varepsilon_1 = \delta_1 = 0,5$ и $y_2 = 0$, $a_2 = (2, -1)^T$, $\varepsilon_2 = \delta_2 = 0,5$. Информационное множество $\mathcal{X}$ для данного случая показано на рис. 5 (затемненная область). Рекуррентное применение леммы 4 дает эллипсоидальную оценку $\mathcal{E}_1$ (пунктирная линия), заметно превышающую аппроксимацию $\mathcal{E}_2$, полученную с помощью решения задачи полуопределенного программирования (20)–(21) и показанную на рис. 5 сплошной тонкой линией. Заметим, что при большем количестве измерений разница в этих оценках становится еще более существенной. $\square$

7. Заключение

Предложен метод эллипсоидального оценивания параметров линейных стационарных систем с неопределенным описанием модели. Основой данного подхода является использование техники линейных матричных неравенств, которая позволяет строить оценки параметров, избегая излишнего консерватизма, для многомерных систем через численное решение задачи полуопределенного программирования. Предложенный подход может найти применение, например, в робототехнике и навигации, обработке сигналов и изображений, а также и в других приложениях, где неопределенные величины в моделях предполагаются неизвестными, но ограниченными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bertsekas D.P., Rhodes I.B.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16, P. 117–128.

2. *Schweppe F.C.* Uncertain dynamic systems. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1973.

3. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

4. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.

5. *Matasov A.I.* Estimators for uncertain dynamic systems. Boston: Kluwer, 1999.

6. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наукова Думка, 2006.

7. *Киселев О.Н., Поляк Б.Т.* Эллипсоидальное оценивание по обобщенному критерию // АиТ. 1991. № 9. С. 133–144.

8. *Kurzhanskii A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.

9. *Durieu C., Walter E., Polyak B.T.* Multi-input multi-output ellipsoidal state bounding // J. Opt. Theory Appl. 2001. V. 111. No. 2. P. 273–303.

10. *Fogel E., Huang Y.* On the value of information in system identification – bounded noise case // Automatica. 1982. V. 18. P. 229–238.

11. *Norton J.P.* Identification and application of bounded parameter models // Automatica. 1987. V. 23. No. 4. P. 497–507.

12. *Овсеевич А.И., Решетняк Ю.Н.* Аппроксимация пересечения эллипсоидов в задачах гарантированного оценивания // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 4. С. 182–189.

13. *Walter E.* (Ed.) Special Issue on Parameter Identification with Error Bound // Mathematics and Computers in Simulation. 1990. V. 32. No. 5-6. P. 447–607.

14. *Куржанский А.Б.* Задача идентификации – теория гарантированных оценок // АиТ. 1991. № 4. С. 3–26.

15. *Norton J.P., Veres S.M.* Developments in parameter bounding // Lecture Notes in Control and Information Sciences. V. 161. (Gerencser L., Caines P.E., Eds). Berlin: Springer–Verlag, 1991. P. 137–158.

16. *Куржанский А.Б., Фурасов В.Д.* Идентификация нелинейных процессов — гарантированные оценки // АиТ. 1999. № 6. С. 70–87.

17. *Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E.* (Eds). Bounding approaches to system identification. N.Y.: Plenum Press, 1996.

18. *Cerone V.* Feasible parameter set for linear models with bounded errors in all variables // Automatica. 1993. V. 29. No. 6. P. 1551–1555.

19. *Nazin S.A., Polyak B.T.* Interval Parameter Estimation under Model Uncertainty // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. 2005. V. 11. No. 2. P. 225–238.

20. *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.

21. *Кинев А.Н., Рокитянский Д.Я., Черноусько Ф.Л.* Эллипсоидальные оценки фазового состояния линейных систем с параметрическими возмущениями и неопределенной матрицей наблюдений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 1. С. 5–13.

22. *Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C., Walter E.* Ellipsoidal Parameter or State Estimation Under Model Uncertainty // Automatica. 2004. V. 40. No. 7. P. 1171–1179.

23. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

24. *El Ghaoui L., Calafiore G.* Robust filtering for discrete-time systems with bounded noise and parameter uncertainty // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46, No. 7, P. 1084–1089.

25. *Ben-Tal A., Nemirovski A.* Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications. Philadelphia: SIAM, 2001.

26. *Polyak B.T.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // Journ. Optim. Theory and Appl. 1998. V. 99. No. 3. P. 553–583.

27. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. Мир, 1989.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Если

$$\frac{\|u\|^2}{\varepsilon^2}+\frac{|v|^2}{\delta^2}\leqslant 1,$$

то $|\zeta|=|u^Tx+v|\le\|u\|\|x\|+|v|\leqslant(\varepsilon^2\|x\|^2+\delta^2)^{1/2}$.

С другой стороны, если $|\zeta|^2\leqslant\varepsilon^2\|x\|^2+\delta^2$, то, взяв

$$u=\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2\|x\|^2+\delta^2}\,\zeta\, x,\qquad v=\frac{\delta^2}{\varepsilon^2\|x\|^2+\delta^2}\,\zeta,$$

получим, что $u^Tx+v=\zeta$, а $\frac{\|u\|^2}{\varepsilon^2}+\frac{|v|^2}{\delta^2}\leqslant 1$. Лемма доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Пусть

$$x\in\mathcal{E}(c_0,P_0),\quad P_0>0, \tag{П.1}$$

и верно

$$y_k=(a_k+\Delta a_k)^Tx+w_k,\qquad \frac{\|\Delta a_k\|^2}{\varepsilon_k^2}+\frac{|w_k|^2}{\delta_k^2}\leqslant 1,\qquad k=1,\ldots,m. \tag{П.2}$$

Тогда эквивалентно выполняются неравенства

$$\begin{gathered}(x-c_0)^TP_0(x-c_0)\leqslant 1,\quad P_0>0,\\ (x-g_k)^TM_k(x-g_k)\leqslant 1,\quad k=1,...,m,\end{gathered}$$

где M_k и g_k из (16), причем матрица M_k не является знакоопределенной. Рассмотрим такие $\alpha=(\alpha_0,...,\alpha_m)^T$, что $\alpha_k\geqslant 0,\ k=0,...,m$, и $\sum_{k=0}^m\alpha_k=1$. Возьмем линейную комбинацию квадратичных форм

$$\alpha_0(x-c_0)^TP_0(x-c_0)+\sum_{k=1}^m\left[\alpha_k(x-g_k)^TM_k(x-g_k)\right]\leqslant\alpha_0+\sum_{k=1}^m\alpha_k\leqslant 1.$$

После несложных преобразований получаем

$$\alpha_0(x-c_0)^TP_0(x-c_0)+\sum_{k=1}^m\left[\alpha_k(x-g_k)^TM_k(x-g_k)\right]=(x-d_\alpha)^TQ_\alpha(x-d_\alpha)+\xi_\alpha,$$

где d_α, Q_α и ξ_α из (17). Отсюда непосредственно следует неравенство

$$(x-d_\alpha)^TQ_\alpha(x-d_\alpha)\leqslant 1-\xi_\alpha. \tag{П.3}$$

Таким образом, из условий (П.1) и (П.2) следует выполнение (П.3) или, что эквивалентно, $x\in\mathcal{E}(d_\alpha,(1-\xi_\alpha)^{-1}Q_\alpha)$. При этом для невырожденности эллипсоидальных аппроксимаций достаточно потребовать $Q_\alpha=\alpha_0P_0+\sum\limits_{k=1}^m\alpha_kM_k>0$. Поскольку матрица $P_0>0$, то существуют такие неотрицательные числа α_0, …, α_m, что $\sum_{k=0}^m\alpha_k=1$ и $Q_\alpha>0$. Поэтому условие $Q_\alpha>0$ конструктивно. Теорема доказана. □

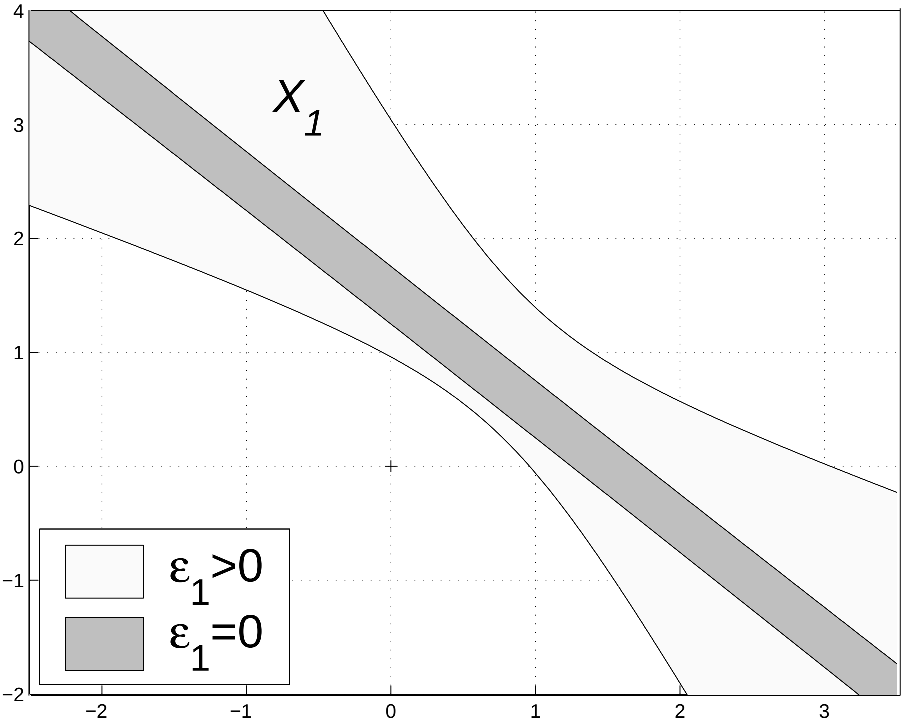

Рис. 1. Информационное множество $\mathcal{X}_1$.

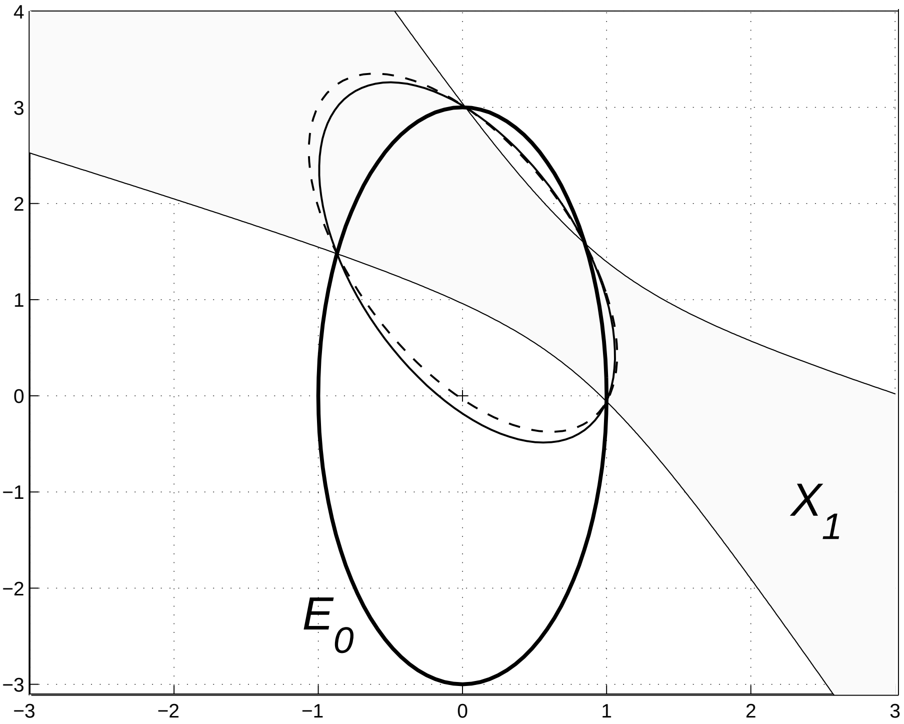

Рис. 2. Аппроксимация пересечения $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{X}_1$.

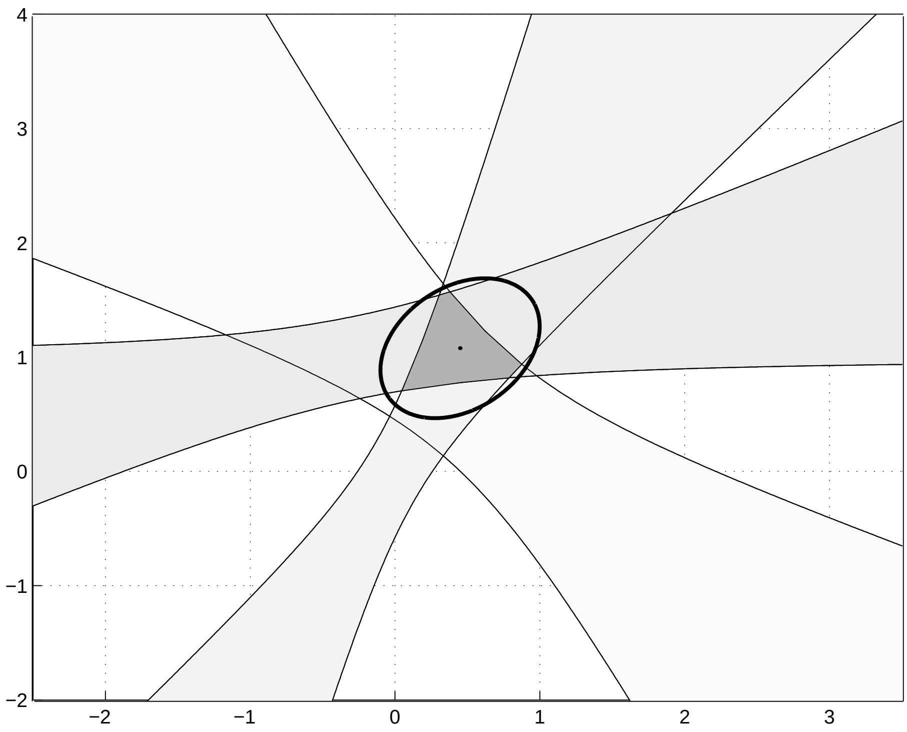

Рис. 3. Аппроксимация пересечения.

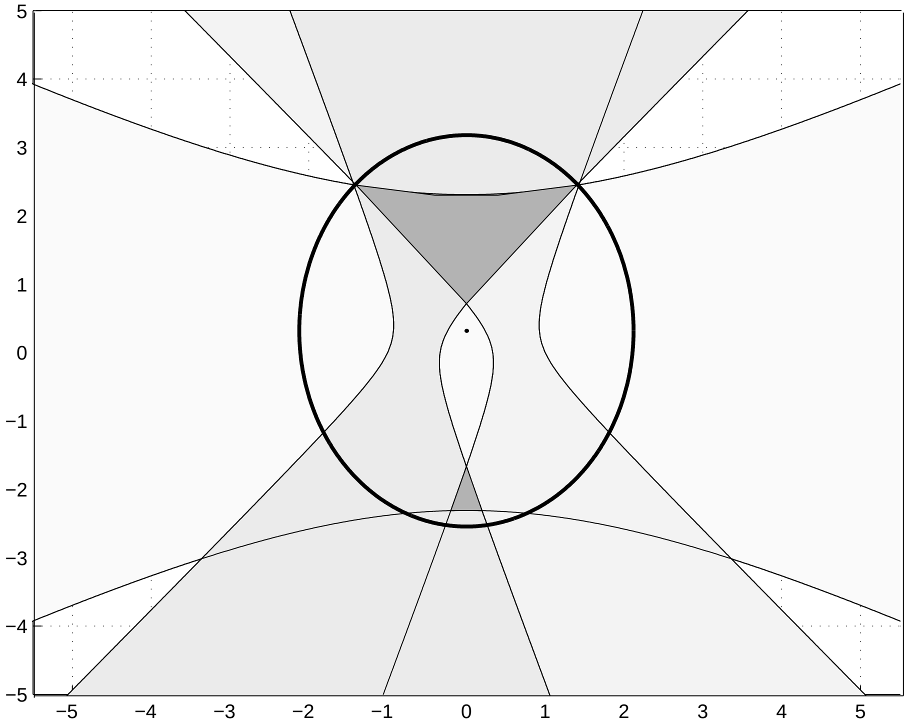

Рис. 4. Аппроксимация пересечения.

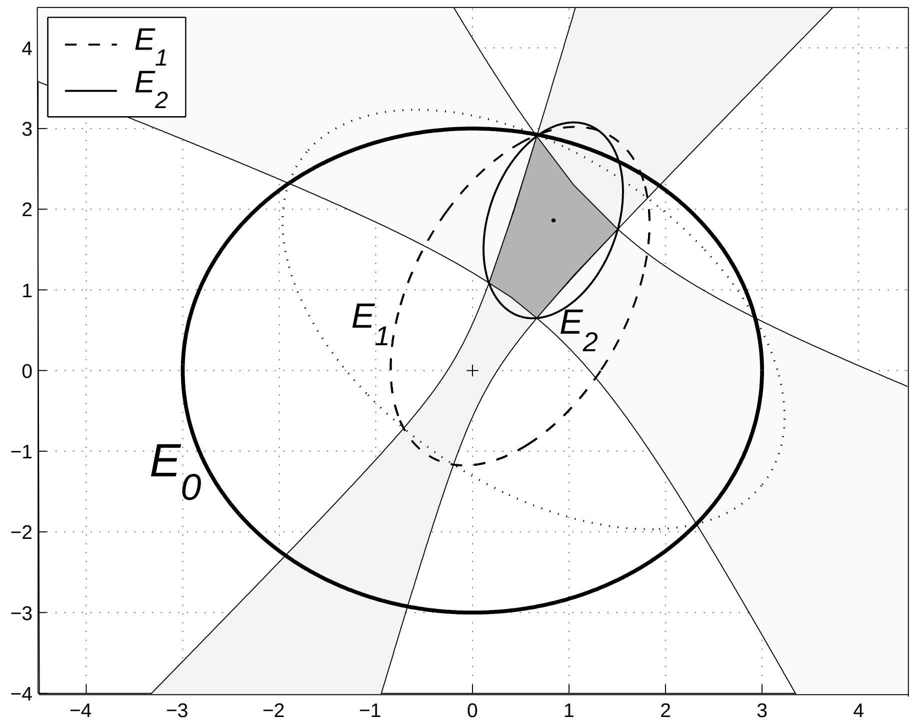

Рис. 5. Аппроксимация пересечения рекуррентным и прямым методом.

Подрисуночные надписи в статье Назин С.А., Поляк Б.Т. "Параметрическое оценивание методом эллипсоидов в линейных многомерных системах с неопределенным описанием модели".

Рис. 1. Информационное множество $\mathcal{X}_1$.

Рис. 2. Аппроксимация пересечения $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{X}_1$.

Рис. 3. Аппроксимация пересечения.

Рис. 4. Аппроксимация пересечения.

Рис. 5. Аппроксимация пересечения рекуррентным и прямым методом.