

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
«Южно-Уральский государственный университет»  
(Национальный исследовательский университет)  
Факультет вычислительной математики и информатики  
Кафедра экономико-математических методов и статистики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА

Рецензент,

\_\_\_\_\_

«    » \_\_\_\_\_ 2015 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой, д. ф.-м. н.,  
профессор

\_\_\_\_\_ А.В. Панюков

«    » \_\_\_\_\_ 2015 г.

Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации  
большой размерности

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ  
ЮУрГУ-010400.62.2015.001.001 ВКР

Консультант,

\_\_\_\_\_

«    » \_\_\_\_\_ 2015 г.

Руководитель проекта,

\_\_\_\_\_ В.А. Голодов

«    » \_\_\_\_\_ 2015 г.

Автор проекта

студент группы ВМИ-413

\_\_\_\_\_ В.А. Безбородов

«    » \_\_\_\_\_ 2015 г.

Нормоконтролер, к. ф.-м. н.,  
доцент

\_\_\_\_\_ Т.А. Макаровских

«    » \_\_\_\_\_ 2015 г.

Челябинск, 2015

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
«Южно-Уральский государственный университет»  
(Национальный исследовательский университет)  
Факультет вычислительной математики и информатики  
Кафедра экономико-математических методов и статистики

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой, д. ф.-м. н.,  
профессор

\_\_\_\_\_ А.В. Панюков

«    » \_\_\_\_\_ 2015 г.

**З А Д А Н И Е**

на выпускную квалификационную работу студента

Безбородова Вячеслава Александровича

Группа ВМИ-413

1. Тема работы

Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации  
большой размерности

утверждена приказом по университету от «    » \_\_\_\_\_ 2015 г.

№ \_\_\_\_\_

2. Срок сдачи студентом законченной работы «    » \_\_\_\_\_ 2015 г.

3. Исходные данные к работе

3.1. Данные из учебной литературы;

3.2. Самостоятельно сконструированные тестовые данные.

4. Перечень вопросов, подлежащих разработке

4.1. Изучение общей схемы работы метода эллипсоидов;

4.2. Изучение приемов параллельной обработки данных;

4.3. Разработка класса (типа данных) для реализации параллельно выполняемых операций над матрицами с применением библиотеки GMP;

- 4.4. Разработка параллельной реализации метода эллипсоидов для задачи линейного программирования;
- 4.5. Оценка сложности полученной реализации;
- 4.6. Сравнение с известными методами решения;
- 4.7. Тестирование;
- 4.8. Проверка на модельных данных.
- 5. Иллюстративный материал
  - 5.1. Энергетическо-трудовой цикл 1л.
  - 5.2. Объект, предмет и цель дипломной работы 1л.
  - 5.3. Задачи дипломной работы 1л.
  - 5.4. Новая концепция управления экономическими системами 1л.
  - 5.5. Концептуальная схема модели 1л.
  - 5.6. Общий вид модели в среде VisSim 1л.
  - 5.7. Элементы модели энергетическо-трудового цикла 1л.
  - 5.8. Система уравнений модели животноводства 2л.
  - 5.9. Принцип управления 1л.
  - 5.10. Результаты эксперимента 10л.
  - 5.11. Заключение 1л.
  - 5.12. Благодарность за внимание 1л.

## 6. Календарный план

Наименование этапов дипломной работы	Срок выполнения этапов работы	Отметка о выполнении
1. Сбор материалов и литературы по теме дипломной работы	02.02.2015 г.	
2. Исследование способов построения математической модели задачи		
3. Разработка математической модели и алгоритма		
4. Реализация разработанных алгоритмов		
5. Проведение вычислительного эксперимента		
6. Подготовка пояснительной записки дипломной работы		
Написание главы 1		
Написание главы 2		
Написание главы 3		
Написание главы 4		
Написание главы 5		
Написание главы 6		
Написание главы 7		
Написание главы 8		
Написание главы 9		
Написание главы 10		
7. Оформление пояснительной записки		
8. Получение отзыва руководителя		
9. Проверка работы руководителем, исправление замечаний		
10. Подготовка графического материала и доклада		
11. Нормоконтроль		
12. Рецензирование, представление зав. кафедрой	10.06.2015 г.	

7. Дата выдачи задания «    »    2015 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ /А.В. Панюков /

Руководитель работы \_\_\_\_\_ /В.А. Голодов /

Студент \_\_\_\_\_ /В.А. Безбородов /

## АННОТАЦИЯ

Безбородов, В.А. Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации большой размерности / В.А. Безбородов . – Челябинск: ЮУрГУ, Факультет вычислительной математики и информатики, 2015 . – 20 с., 1 илл. Библиографический список – 13 названий.

В дипломной работе произведен анализ алгоритма метода эллипсоидов на предмет вычислительной сложности выполняемых операций. На основе результатов анализа разработана параллельная реализация метода эллипсоидов, адаптированная для решения задач оптимизации большой размерности на многопроцессорных и/или многоядерных вычислительных системах с общей разделяемой памятью.

Приведены результаты вычислительных экспериментов, продемонстрирован пример решения задачи оптимизации большой размерности с применением разработанной программной реализации.

					<b>ЮУрГУ-010400.62.2015.001.001 ВКР</b>					
<i>Изм.</i>	<i>Лист</i>	<i>№ докум.</i>	<i>Подп.</i>	<i>Дата</i>						
<i>Разраб.</i>		<i>В.А. Безбородов</i>			<i>Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации большой размерности : Пояснительная записка</i>	<i>Лит.</i>		<i>Лист</i>	<i>Листов</i>	
<i>Пров.</i>		<i>В.А. Голодов</i>				<i>Д</i>			<i>4</i>	<i>20</i>
<i>Рецензент</i>						<i>ЮУрГУ      Кафедра ЭММиС</i>				
<i>Н.Контр.</i>		<i>Т.А. Макаровских</i>								
<i>Утв.</i>		<i>А.В. Панюков</i>								

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	7
1 Метод эллипсоидов . . . . .	9
1.1 Алгоритм метода эллипсоидов . . . . .	9
1.2 Анализ вычислительной сложности операций метода эллипсоидов . . . . .	11
Заключение . . . . .	18
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК . . . . .	19

## **Введение**

Задачи оптимизации получили чрезвычайно широкое распространение в технике, экономике, управлении. Типичными областями применения теории оптимизации являются прогнозирование, планирование промышленного производства, управление материальными ресурсами, а также контроль качества выпускаемой продукции [7].

Успешность хозяйственной деятельности зависит от того, как распределяются имеющиеся ограниченные ресурсы. В связи с тем, что такая задача оптимального распределения довольно часто возникает на практике в различных сферах жизнедеятельности, актуальным становится поиск способов ускорения ее решения.

Задачи оптимизации большой размерности характеризуются высокой трудоемкостью. Использование доступного ресурса аппаратного параллелизма современных вычислительных систем рассматривается как возможность ускорения поиска их решения. Применение библиотек, реализующих поддержку арифметики произвольной точности, диктуется необходимостью достижения высокой точности при решении практических задач.

Разрабатывали и развивали метод эллипсоидов Шор Н.З. [11], Юдин Д.Б. и Немировский А.С. [13], Хачиян Л.Г. [10], Гершович В.И. [5], Стецюк П.И. [9] и др.

В работе исследован алгоритм метода эллипсоидов. Разработана его программная реализация, ориентированная на многопроцессорные и/или многоядерные вычислительные системы с общей разделяемой памятью. Показано приложение программной реализации к решению задачи оптимизации большой размерности.

**Целями** работы являются:

- 1) разработка параллельной реализации метода эллипсоидов, поддерживающей арифметику произвольной точности;
- 2) использование полученной реализации метода эллипсоидов для решения задачи оптимизации большой размерности.

В соответствии с поставленными целями в работе решаются следующие **задачи**:

- Исследование операций классического алгоритма метода эллипсоидов на вычислительную сложность.
- Разработка программной реализации алгоритма с распараллеливанием наиболее длительных по времени операций и поддержкой арифметики произвольной точности.
- Проверка и тестирование разработанного программного обеспечения.

**Объектом** исследования данной работы является метод эллипсоидов, **предметом** – параллельная реализация метода, поддерживающая арифметику произвольной точности.

Работа состоит из введения, 1 глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 20 страниц. Список литературы содержит 13 наименований.

**В первой главе** рассматривается алгоритм метода эллипсоидов, производится его анализ на предмет вычислительной сложности с целью поиска наиболее ресурсоемких операций, нуждающихся в ускорении путем распараллеливания.

**Во второй главе** приведены данные, необходимые для...

**В третьей главе** приводится краткое описание...

**В четвертой главе** построена...

**В пятой главе** приводятся результаты вычислительных экспериментов...

**В заключении** перечислены основные результаты работы.



## 1 Метод эллипсоидов

В настоящее время большое внимание уделяется созданию автоматизированных систем планирования, проектирования и управления в различных областях промышленности. На первый план выдвигаются вопросы качества принимаемых решений, в связи с чем возрастает роль методов и алгоритмов решения оптимизационных задач в математическом обеспечении автоматизированных систем различного уровня и назначения.

Имеется несколько основных источников, порождающих задачи оптимизации: задачи математического программирования, задачи нелинейного программирования, задачи оптимального управления, задачи дискретного программирования или задачи смешанного дискретно-непрерывного типа [12].

Сфера применения методов оптимизации огромна. Создание эффективных методов оптимизации является ключом к решению многих вычислительных проблем математического программирования, особенно для задач большой размерности.

### 1.1 Алгоритм метода эллипсоидов

Рассмотрим алгоритм решения задачи выпуклого программирования, гарантирующий уменьшение объема области, в которой локализуется оптимум, со скоростью геометрической прогрессии, причем знаменатель этой прогрессии зависит только от размерности задачи. Этот алгоритм относится к классу алгоритмов обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении градиента (ОГСРП) [11].

Пусть имеется задача выпуклого программирования:

$$\min f_0(x) \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in E_n, \tag{1.2}$$

где  $E_n$  – евклидово пространство размерности  $n$ ,  $f_\nu(x)$ ,  $\nu = \overline{0, m}$  – выпуклые функции, определенные на  $E_n$ ;  $g_\nu(x)$  – субградиенты соответствующих функций. Пусть имеется априорная информация о том, что существует оптимальная точка  $x^* \in E_n$  (не обязательно единственная), которая находится в шаре радиуса  $R$  с центром в точке  $x_0$  (формально к системе ограничений 1.2 можно добавить ограничение  $\|x - x_0\| \leq R$ ).

Рассмотрим следующий итеративный алгоритм (при  $n > 1$ ).

---

**Алгоритм 1** Метод эллипсоидов

---

*Шаг 0. Инициализация.*

Положить  $x_k = x_0$ ;  $B_k = E$ , где  $E$  – единичная матрица размерности  $n \times n$ ;  $h_k = \frac{R}{n+1}$  – коэффициент, отвечающий за уменьшение объема шара. Перейти к шагу 1.

*Шаг 1. Вычислить*

$$g(x_k) = \begin{cases} g_0(x_k), & \text{если } \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x_k) \leq 0, \\ g_{i^*}(x_k), & \text{если } \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x_k) = f_{i^*}(x_k) > 0. \end{cases}$$

Если  $g(x_k) = 0$ , то завершить алгоритм;  $x_k$  – оптимальная точка. Иначе перейти к шагу 2.

*Шаг 2. Вычислить*  $\xi_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|}$ . Перейти к шагу 3.

*Шаг 3. Вычислить*  $x_{k+1} = x_k - h_k \cdot B_k \cdot \xi_k$ . Перейти к шагу 4.

*Шаг 4. Вычислить*  $B_{k+1} = B_k \cdot R_\beta(\xi_k)$ , где  $R_\beta(\xi_k)$  – оператор растяжения пространства в направлении  $\xi_k$  с коэффициентом  $\beta$  (см. определение 1.1),  $\beta = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ . Перейти к шагу 5.

*Шаг 5. Вычислить*  $h_{k+1} = h_k \cdot r$ , где  $r = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$ . Перейти к шагу 1.

---

**Определение 1.1.** Оператором растяжения пространства  $E_n$  в направлении  $\xi$  с коэффициентом  $\beta$  называется оператор  $R_\beta(\xi)$ , действующий на вектор  $x$  следующим образом [12]:

$$R_\beta(\xi)x = (E - (\beta - 1)\xi_k \xi_k^T) x.$$

Рассмотрим вопрос оценки скорости сходимости метода эллипсоидов. Покажем, что данный вариант алгоритма ОГСРП сходится по функционалу со

скоростью геометрической прогрессии, причем знаменатель этой прогрессии зависит только от размерности задачи.

**Лемма 1.1.** Последовательность  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ , генерируемая алгоритмом 1, удовлетворяет неравенству

$$\|A_k(x_k - x^*)\| \leq h_k \cdot (n + 1), \quad A_k = B_k^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Доказательство леммы для краткости изложения опущено и может быть найдено в [11].

Множество точек  $x$ , удовлетворяющих неравенству

$$\|A_k(x_k - x)\| \leq (n + 1)h_k = R \cdot \left( \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \right)^k,$$

представляет собой эллипсоид  $\Phi_k$ , объем которого  $v(\Phi_k)$  равен

$$\frac{v_0 R^n \left( \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \right)^{nk}}{\det A_k},$$

где  $v_0$  – объем единичного  $n$ -мерного шара. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{v(\Phi_{k+1})}{v(\Phi_k)} &= \frac{\left( \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \right)^n \cdot \det A_k}{\det A_{k+1}} = \frac{\left( \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \right)^n \cdot \det A_k}{\det R_\alpha(\xi_k) \cdot \det A_k} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \right)^n = \\ &= \sqrt{\frac{n - 1}{n + 1}} \left( \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \right)^n = q_n < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, объем эллипсоида, в котором локализуется оптимальная точка  $x^*$  в соответствии с неравенством (1.3), убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $q_n$ .

## 1.2 Анализ вычислительной сложности операций метода эллипсоидов

В индустрии разработки программного обеспечения известен феномен, который состоит в том, что на 20% методов программы приходится 80% вре-

мени ее выполнения [1]. Такое эмпирическое правило хорошо согласуется с более общим принципом.

**Утверждение 1 (Принцип Парето).** Принцип Парето, известный также как «правило 80/20», гласит, что 80% результата можно получить, приложив 20% усилий.

Относящийся не только к программированию, этот принцип очень точно характеризует оптимизацию программ [8]. В классической работе «An Empirical Study of Fortran Programs» Дональд Кнут указал, что менее 4% кода обычно соответствуют более чем 50% времени выполнения программы [2]. Опираясь на принцип Парето, можно сформулировать последовательность действий, приводящих к ускорению работы имеющихся программ: необходимо найти в коде «горячие точки» и сосредоточиться на оптимизации наиболее трудоемких процессов.

Проанализируем подробнее вычислительную сложность операций алгоритма метода эллипсоидов. Для этого введем некоторые обозначения из асимптотического анализа [6].

**Определение 1.2.** Говорят, что  $f(n) = O(g(n))$ , если существуют целые  $N$  и  $K$ , такие, что  $|f(n)| \leq Kg(n)$  при всех  $n \geq N$ .

Это означает, что функция  $f$  ограничена сверху функцией  $g$  (с точностью до постоянного множителя) асимптотически.

**Определение 1.3.** Говорят, что  $f(n) = \Omega(g(n))$ , если существуют целые  $N$  и  $K$ , такие, что  $f(n) \geq Kg(n)$  при всех  $n \geq N$ .

Это означает, что функция  $f$  ограничена снизу функцией  $g$  (с точностью до постоянного множителя) асимптотически.

**Определение 1.4.** Говорят, что  $f(n) = \Theta(g(n))$ , если одновременно выполнены условия определений 1.2 и 1.3.

Это означает, что функция  $f$  ограничена снизу и сверху функцией  $g$  асимптотически.

На первом шаге алгоритма изменение текущего субградиента  $g(x_k)$  происходит на основании анализа значений функций ограничений (1.2) в текущей точке  $x_k$ , т.е. анализируется последовательность значений

$$\max_{1 \leq i \leq m} f_i(x_k).$$

Вычислительная сложность поиска максимального из  $m$  чисел зависит от выбора алгоритма.

При использовании линейного последовательного поиска цикл выполнит  $m$  итераций. Трудоемкость каждой итерации не зависит от количества элементов, поэтому имеет сложность  $T^{iter} = O(1)$ . В связи с этим, верхняя оценка всего алгоритма поиска  $T_m^{min} = O(m) \cdot O(1) = O(m \cdot 1) = O(m)$ . Аналогично вычисляется нижняя оценка сложности, а в силу того, что она совпадает с верхней, можно утверждать  $T_m^{min} = \Theta(m)$ .

При использовании алгоритма бинарного поиска на каждом шаге количество рассматриваемых элементов сокращается в 2 раза. Количество элементов, среди которых может находиться искомый, на  $k$ -ом шаге определяется формулой  $\frac{m}{2^k}$ . В худшем случае поиск будет продолжаться, пока в массиве не останется один элемент, т.е. алгоритм имеет логарифмическую сложность:  $T_m^{binSearch} = O(\log(m))$ . Резюмируем все вышесказанное относительно алгоритмов поиска в виде таблицы 1.

Таблица 1 — Оценка сложности некоторых алгоритмов поиска

Алгоритм	Структура данных	Временная сложность		Сложность по памяти
		В среднем	В худшем	В худшем
Линейный поиск	Массив из $n$ элементов	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$
Бинарный поиск	Отсортированный массив из $n$ элементов	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(1)$

Но при использовании некоторых алгоритмов (например, алгоритма бинарного поиска) потребуются дополнительные процедуры для упорядочивания входной последовательности значений. В таблице 2 представлены асимп-

тотические оценки наиболее известных алгоритмов сортировки массива из  $n$  элементов<sup>1</sup>.

Таблица 2 — Оценка сложности некоторых алгоритмов сортировки<sup>1</sup>

Алгоритм	Временная сложность			Сложность по памяти
	В лучшем	В среднем	В худшем	В худшем
Быстрая сортировка	$O(n \log(n))$	$O(n \log(n))$	$O(n^2)$	$O(n)$
Сортировка слиянием	$O(n \log(n))$	$O(n \log(n))$	$O(n \log(n))$	$O(n)$
Пирамидальная сортировка	$O(n \log(n))$	$O(n \log(n))$	$O(n \log(n))$	$O(1)$
Пузырьковая сортировка	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
Сортировка вставками	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
Сортировка выбором	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
Блочная сортировка	$O(n + k)$	$O(n + k)$	$O(n^2)$	$O(nk)$
Поразрядная сортировка	$O(nk)$	$O(nk)$	$O(nk)$	$O(n + k)$

На втором шаге алгоритма производится вычисление нормированного обобщенного градиента

$$\xi_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|},$$

что подразумевает выполнение трудоемких матричных операций, таких как транспонирование, умножение на вектор и на число. Асимптотическая сложность таких операций для матрицы размерности  $n \times n$  может быть оценена как  $O(n^2)$ .

На шаге 3 при обновлении значения текущей точки выполняется умножение матрицы  $B_k$  на вектор  $\xi_k$ :

$$x_{k+1} = x_k - h_k \cdot B_k \cdot \xi_k.$$

Аналогично предыдущей оценке, цена такой операции составит  $O(n^2)$ .

---

<sup>1</sup>Более подробный анализ может быть найден в [4]

Шаг 4 наиболее сложен из-за необходимости вычисления оператора растяжения пространства

$$B_{k+1} = B_k \cdot R_\beta(\xi_k).$$

Если представить оператор в матричной форме (определение 1.1), то можно видеть, что в процессе его вычисления используются все вышеперечисленные операции, а также операция сложения матриц, сложность которой составляет  $O(n^2)$ .

На пятом шаге осуществляется пересчет коэффициента  $h_k$ , отвечающего за уменьшение объема шара

$$h_{k+1} = h_k \cdot r.$$

Эта операция может быть выполнена за константное время, т.е. асимптотически ее сложность составит  $O(1)$ .

Из проведенного анализа вычислительной сложности операций, входящих в алгоритм метода эллипсоидов, можно сделать несколько выводов. Во-первых, учитывая специфику рассматриваемого класса задач (задачи оптимизации большой размерности), наиболее трудоемкие операции будут выполняться значительно дольше менее трудоемких, что приведет к сильно неравномерной загрузке вычислительной системы. Во-вторых, схема чередования сложных/простых в вычислительном смысле операций, а также выбор целевой платформы (многопроцессорные и/или многоядерные системы с общей разделяемой памятью) наталкивают на возможность использования Fork-Join Model (FJM) модели распараллеливания задач для ускорения работы алгоритма метода эллипсоидов.

В параллельном программировании, Fork-Join Model (Модель Ветвление-Объединение) – это способ запуска и выполнения параллельных участков кода, при котором выполнение ветвей завершается в специально обозначенном месте для того, чтобы в следующей точке продолжить последовательное выполнение. Параллельные участки могут разветвляться рекурсивно до тех пор, пока не будет достигнута заданная степень гранулярности задачи. FJM

может рассматриваться как один из параллельных паттернов проектирования [3]. Модель была впервые сформулирована в 1963 г.

Различные реализации FJM обычно управляют *задачами, волокнами* или *легковесными нитями*, а не *процессами* уровня операционной системы, и используют *пул потоков* для их выполнения. Специальные ключевые слова позволяют программисту определять точки *возможного параллелизма*; проблема создания реальных потоков и управления ими ложится на реализацию.

Иллюстрация<sup>2</sup> парадигмы Fork-Join представлена на рисунке 1, на котором три участка программы потенциально разрешают параллельное исполнение различных блоков. Последовательное выполнение показано сверху, в то время как его Fork-Join эквивалент снизу.

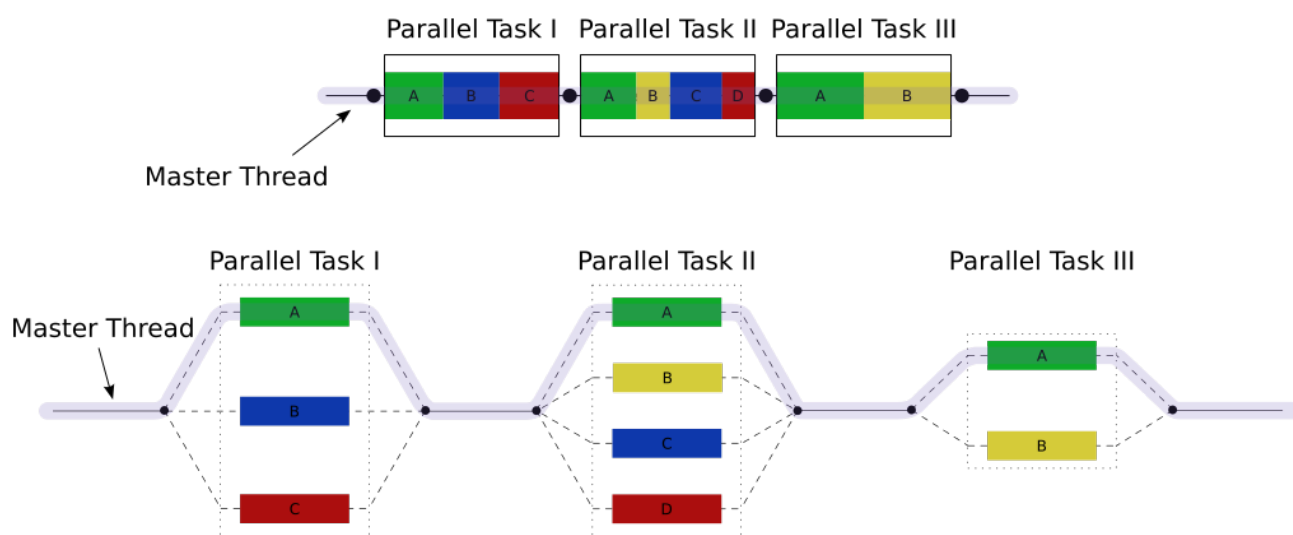


Рисунок 1 — Иллюстрация парадигмы Fork-Join

Легковесные нити, используемые в Fork-Join программировании, обычно имеют свой собственный планировщик, который управляет ими, применяя схему пула потоков. Такой планировщик может быть гораздо проще полнофункционального планировщика задач, применяемого операционной системой. Планировщики потоков общего пользования обязаны приостанавливать/запускать потоки в обозначенных программистом местах, в то время как в парадигме Fork-Join потоки блокируются только в местах непосредственного слияния.

<sup>2</sup>Взято с [http://en.wikipedia.org/wiki/Fork-join\\_model](http://en.wikipedia.org/wiki/Fork-join_model)



Модель Ветвление-Объединение – основная модель параллельного исполнения в технологии OpenMP. Также эта модель поддерживается в Java concurrency framework, в Task Parallel Library для .NET и в Intel Threading Building Blocks. Языки программирования Cilk и Cilk Plus имеют встроенную поддержку FJM в форме ключевых слов *spawn-sync* и *cilk\_spawn-cilk\_sync* соответственно.

## Заключение

В данной работе были приведены основные положения, выведенные из идей физической экономики. На основе этих положений была построена модель экономической системы древнего общества скотоводов-земледельцев.

В дипломной работе выполнены следующие **задачи**:

- 1) построена имитационная модель экономической системы древнего общества скотоводов-земледельцев;
- 2) проведен имитационный эксперимент;
- 3) проверены теоретические положения.

Можно сделать следующие выводы после проведения симуляционного эксперимента в среде VisSim:

- 1) модель экономической системы древнего общества скотоводов-земледельцев является жизнеспособной и правдоподобно описывает поведение древней человеческой общины.
- 2) модель дает возможность объяснить экономическую сущность исторических фактов относительно древних общин периода неолита;
- 3) проверен принцип увеличения доли свободного времени в общем фонде социального времени по ходу развития общины.

Данная модель может быть улучшена путем более точного описания различных хозяйственных процессов, происходивших в экономике общины. Также возможно применение тензорной методологии для описания этих хозяйственных процессов, при этом уравнения примут более понятный внешний вид, не утратив своего содержания.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Boehm, B. W. Industrial software metrics top 10 list / Barry W. Boehm // IEEE Software 4. — 1987. — no. 9 (September). — 84–85.
2. Knuth, D. An empirical study of fortran programs / Donald Knuth // Software – Practice and Experience. — 1971. — 105–33.
3. McCool, M. Structured Parallel Programming: Patterns for Efficient Computation / Michael McCool, James Reinders, Arch Robinson. — МК, 2013.
4. Вирт, Н. Алгоритмы и структуры данных. Новая версия для Оберона + CD / Пер. с англ. Ткачев Ф. В. / Н. Вирт. — М.: ДМК Пресс, 2010. — 272 с.: ил.
5. Гершович, В. И. Метод эллипсоидов, его обобщения и приложения / В. И. Гершович, Н. З. Шор // Кибернетика. — 1982. — №5.
6. Грин, Д. Математические методы анализа алгоритмов / Д. Грин, Д. Кнут. — М.: Мир, 1987. — 120 с., ил.
7. Данилин, А. И. Основы теории оптимизации (постановки задач) [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие / А. И. Данилин. — Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С.П. Королева (нац. исслед. ун-т). — Электрон. текстовые и граф. дан. (1,2 МБайт). — Самара, 2011. — 1 эл. опт. диск (CD-ROM).
8. Макконнелл, С. Совершенный код. Мастер-класс / Пер. с англ. / С. Макконнелл. — М.: Издательство «Русская редакция», 2010. — 896 стр.: ил.
9. Стецюк, П. И. Методы эллипсоидов и г-алгоритмы / П. И. Стецюк. — Нац. акад. наук Украины, Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова, Акад. транспорта, информатики и коммуникаций. — Кишинэу: Эврика, 2014. — 488 с.
10. Хачиян, Л. Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании / Л. Г. Хачиян // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1980. — С. 51-68.

11. Шор, Н. З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования / Н. З. Шор // Кибернетика. — 1977. — № 1. — С. 94–95.
12. Шор, Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н. З. Шор. — Киев: Наук. думка, 1979. — 200 с.
13. Юдин, Д. Б. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач / Д. Б. Юдин, А. С. Немировский // Экономика и мат. методы. — 1976. — т. 12, вып. 2. — С. 357–369.