

Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации большой размерности

Безбородов В.А.

ФГБОУ ВПО ЮУрГУ
г. Челябинск

10 мая 2015 г.

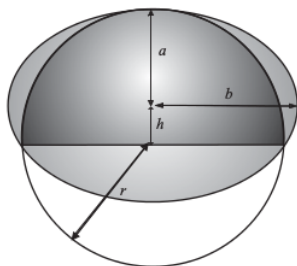
Содержание

- 1 Метод эллипсоидов
 - Кратко об истории
 - Геометрия метода
 - Алгоритм метода

Метод эллипсоидов предложили

- 1976 **Юдин Д.Б. и Немировский А.С.** как метод последовательных отсечений.
- 1977 **Шор Н.З.** как вариант метода с растяжением пространства в направлении субградиента.
- 1979 **Хачиян Л.** построил первый полиномиальный алгоритм решения задачи ЛП с рациональными коэффициентами.

1-d эллипсоид и его свойства



Эллипсоид ε_n , содержащий полушар в E_n , имеет параметры

$$b = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{r}{2}, \quad h = \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{r}{2},$$

где $\alpha = \frac{b}{a}$ и r – радиус шара S_n .

Если пространство «растянуть» с коэффициентом α в направлении полуоси a , то ε_n станет шаром в преобразованном пространстве.

Отношение объема эллипсоида ε_n к объему шара S_n равно

$$q(n) = \frac{\text{vol}(\varepsilon_n)}{\text{vol}(S_n)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{b}{r} \right)^n = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n.$$

Сходимость метода эллипсоидов

Отношение объема эллипсоида ε_n к объему шара S_n равно

$$q(n) = \frac{\text{vol}(\varepsilon_n)}{\text{vol}(S_n)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{b}{r} \right)^n = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n.$$

Если коэффициент α такой, что $\alpha + 1/\alpha < 2\sqrt[n]{\alpha}$, то отношение $q(n) < 1$ и объем эллипсоида, в котором локализуется искомая точка x^* , убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q(n)$.

Использование метода эллипсоидов

МЭ используется для решения следующей задачи

На E_n ($n \geq 1$) определено векторное поле $g(x)$, $g(x) \in E_n$. Требуется найти точку x^* , такую, что $(g(x), x - x^*) \geq 0$ для всех $x \in E_n$. Предполагается, что x^* существует и $g(x) \neq 0$ для $x \neq x^*$.

К такой задаче сводятся задачи математического программирования:

- задача безусловной минимизации выпуклой функции,
- общая задача выпуклого программирования,
- задача о седловой точке выпукло-вогнутых функций.

Стартовые условия для МЭ

Задан:

Коэффициент α такой, что $\alpha + 1/\alpha < 2\sqrt[n]{\alpha}$.

Инициализация:

1. Выбрать стартовую точку $x_0 \in E_n$ и начальный радиус r_0 , такой что $\|x_0 - x^*\| \leq r_0$.
2. Положить $B_0 := E$, где E – единичная матрица.

Перейти к очередной итерации со значениями x_0, r_0, B_0 .

Алгоритм

Пусть на k -й итерации найдены $x_k \in E_n$, r_k и B_k . Для перехода к $(k+1)$ -й итерации выполнить:

Шаг 1. Вычислить $g(x_k)$. Если $g(x_k) = 0$, то
ОСТАНОВ ($x^* = x_k$).

Шаг 2. Вычислить очередную точку $x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k$, где
$$h_k = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right), \quad \xi_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|}.$$

Шаг 3. Пересчитать матрицу B_{k+1} и радиус r_{k+1}
$$B_{k+1} = B_k + (\beta - 1)(B_k \xi_k) \xi_k^T, \quad \beta = \frac{1}{\alpha},$$
$$r_{k+1} = (\alpha + \beta) \frac{r_k}{2}.$$

Шаг 4. Перейти к $(k+1)$ -й итерации с x_{k+1} , r_{k+1} и B_{k+1} .

О сходимости метода эллипсоидов

Теорема (Локализация x^* в эллипсоиде)

Генерируемая методом эллипсоидов последовательность точек $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$\|B_k^{-1}(x_k - x^*)\| \leq r_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следствие

Эллипсоид $\varepsilon_k = \{x : \|B_k^{-1}(x_k - x)\| \leq r_k\}$ содержит точку x^ .*

О сходимости метода эллипсоидов

Теорема (О скорости сходимости)

Для всех итераций метода эллипсоидов коэффициент уменьшения объема эллипсоида, локализирующего x^ , есть величина постоянная и равная*

$$q(n) = \frac{\text{vol}(\varepsilon_{k+1})}{\text{vol}(\varepsilon_k)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Оптимальный коэффициент растяжения пространства

$$\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \Rightarrow q(n) = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left(\frac{n^2}{n^2-1} \right)^{n/2} \leq 1 - \frac{1}{2n}.$$

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!