

1 слайд

Введение

Выпускная квалификационная работа

Задачи

В соответствии с поставленными целями в работе решаются следующие **задачи**:

- исследование операций классического алгоритма метода эллипсоидов на вычислительную сложность;
- разработка программной реализации алгоритма с распараллеливанием наиболее длительных по времени операций;
- обеспечение поддержки арифметики расширенной и произвольной точности;
- проверка и тестирование разработанного программного обеспечения.

Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 4 / 24

4 слайд

Метод эллипсоидов

Кратко об истории

Содержание

- 1 Метод эллипсоидов
 - Кратко об истории
 - Геометрия метода
 - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций
 - Параллельная обработка матриц
 - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ
 - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 2 / 24

2 слайд

Метод эллипсоидов

Кратко об истории

Содержание

- 1 Метод эллипсоидов
 - Кратко об истории
 - Геометрия метода
 - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций
 - Параллельная обработка матриц
 - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ
 - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 2 / 24

5 слайд

Метод эллипсоидов

Кратко об истории

Содержание

- 1 Метод эллипсоидов
 - Кратко об истории
 - Геометрия метода
 - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций
 - Параллельная обработка матриц
 - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ
 - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 3 / 24

3 слайд

Введение

Выпускная квалификационная работа

Цели

Целями работы являются:

1. разработка параллельной реализации метода эллипсоидов, поддерживающей арифметику произвольной точности;
2. использование полученной реализации метода эллипсоидов для решения задачи оптимизации большой размерности.

Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 3 / 24

6 слайд

Метод эллипсоидов

Кратко об истории

Метод эллипсоидов предложили

- 1976 Юдин Д.Б. и Немировский А.С. как метод последовательных отсечений.
- 1977 Шор Н.З. как вариант метода с растяжением пространства в направлении субградиента.
- 1979 Хачиян Л. построил первый полиномиальный алгоритм решения задачи ЛП с рациональными коэффициентами.

Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 6 / 24

7 слайд

Метод эллипсоидов Геометрия метода

Содержание

- 1 Метод эллипсоидов
 - Кратко об истории
 - Геометрия метода
 - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций
 - Параллельная обработка матриц
 - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ
 - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А. (ЭМММС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 7 / 24

10 слайд

Метод эллипсоидов Алгоритм метода

Использование метода эллипсоидов

Для решения задачи $\min f_0(x)$ при ограничениях

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in E^n,$$

где E^n – евклидово пространство размерности $n > 1$, $f_\nu(x)$ – выпуклые функции; $g_\nu(x)$ – субградиенты функций, $\nu = 0, m$. Предполагается, что оптимальная точка $x^* \in E_n$ существует и находится в шаре радиуса R с центром в точке x_0 .

К такой задаче сводятся:

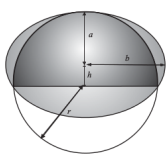
- задача безусловной минимизации выпуклой функции,
- общая задача выпуклого программирования,
- задача о седловой точке выпукло-вогнутых функций.

Безбородов В.А. (ЭМММС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 10 / 24

8 слайд

Метод эллипсоидов Геометрия метода

1-d эллипсоид и его свойства



Эллипсоид ε_n , содержащий полушар в E^n , имеет параметры

$$b = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{r}{2}, \quad h = \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{r}{2},$$

где $\alpha = \frac{b}{a}$ и r – радиус шара S_n .

Если пространство «растянуть» с коэффициентом α в направлении полуоси a , то ε_n станет шаром в преобразованном пространстве.

Отношение объема эллипсоида ε_n к объему шара S_n равно

$$q(n) = \frac{\text{vol}(\varepsilon_n)}{\text{vol}(S_n)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{b}{r} \right)^n = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n.$$

Безбородов В.А. (ЭМММС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 8 / 24

11 слайд

Метод эллипсоидов Алгоритм метода

Алгоритм

Выбрать $x_k := x_0 \in E^n$ и радиус R , такие что $\|x_0 - x^*\| \leq R$. Положить $h_k = \frac{R}{n+1}$, $B_k := E$, где E – единичная матрица. Для перехода к $(k+1)$ -й итерации выполнить:

- Шаг 1. Вычислить $g(x_k)$. Если $g(x_k) = 0$, то **ОСТАНОВ** ($x^* = x_k$).
- Шаг 2. Вычислить очередную точку $x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k$, где $\xi_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|}$.
- Шаг 3. Пересчитать шаг $h_{k+1} = h_k r$ и матрицу B_{k+1}
$$B_{k+1} = B_k + (\beta - 1)(B_k \xi_k \xi_k^T), \quad \beta = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$
- Шаг 4. Перейти к $(k+1)$ -й итерации с x_{k+1} , h_{k+1} и B_{k+1} .

Безбородов В.А. (ЭМММС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 11 / 24

9 слайд

Метод эллипсоидов Алгоритм метода

Содержание

- 1 Метод эллипсоидов
 - Кратко об истории
 - Геометрия метода
 - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций
 - Параллельная обработка матриц
 - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ
 - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А. (ЭМММС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 9 / 24

12 слайд

Метод эллипсоидов Алгоритм метода

О сходимости метода эллипсоидов

Теорема (О скорости сходимости)

Для всех итераций метода эллипсоидов коэффициент уменьшения объема эллипсоида, локализирующего x^* , есть величина постоянная и равная

$$q(n) = \frac{\text{vol}(\varepsilon_{k+1})}{\text{vol}(\varepsilon_k)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Оптимальный коэффициент растяжения пространства

$$\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \Rightarrow q(n) = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \right)^n < 1.$$

Безбородов В.А. (ЭМММС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 12 / 24

13 слайд

Ускорение матричных операций

Параллельная обработка матриц

Содержание

1

Метод эллипсоидов

■ Кратко об истории

■ Геометрия метода

■ Алгоритм метода

2

Ускорение матричных операций

■ Параллельная обработка матриц

■ Достигнутое ускорение

3

Параллельная реализация МЭ

■ Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413)

Параллельная реализация МЭ

Челябинск, 10 июня 2015 г.

13 / 24

16 слайд

Ускорение матричных операций

Достигнутое ускорение

Содержание

1

Метод эллипсоидов

■ Кратко об истории

■ Геометрия метода

■ Алгоритм метода

2

Ускорение матричных операций

■ Параллельная обработка матриц

■ Достигнутое ускорение

3

Параллельная реализация МЭ

■ Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413)

Параллельная реализация МЭ

Челябинск, 10 июня 2015 г.

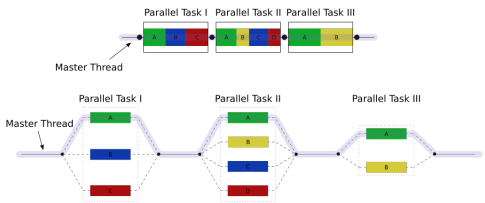
16 / 24

14 слайд

Ускорение матричных операций

Параллельная обработка матриц

Модель Fork-Join



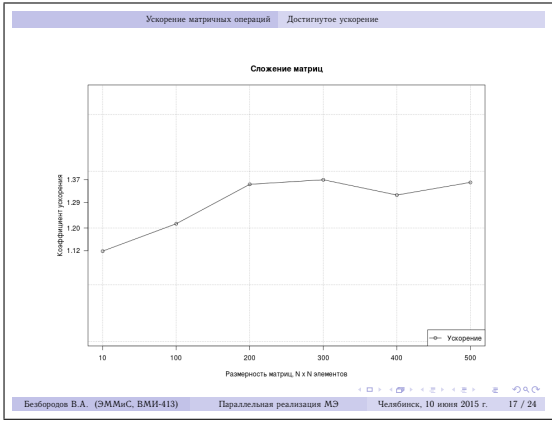
Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413)

Параллельная реализация МЭ

Челябинск, 10 июня 2015 г.

14 / 24

17 слайд



15 слайд

Ускорение матричных операций

Параллельная обработка матриц

Способы разбиения матриц

Ускорение матричных операций

Каждому потоку выделяется некоторое подмножество элементов матрицы для обработки. Вид подмножества определяется способом разбиения.



Горизонтальный

Вертикальный

Блочный

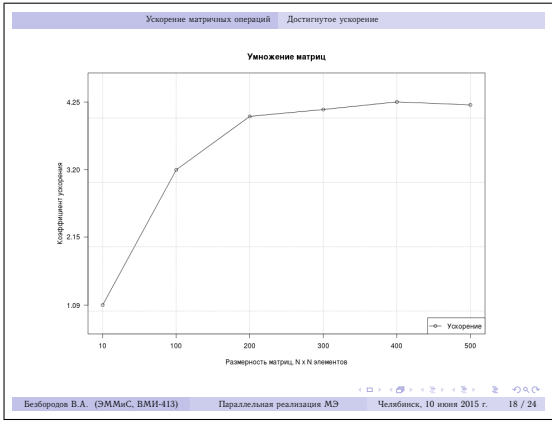
Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413)

Параллельная реализация МЭ

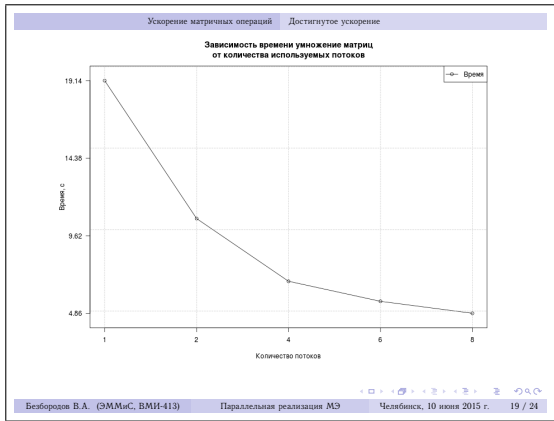
Челябинск, 10 июня 2015 г.

15 / 24

18 слайд



19 слайд



22 слайд

Параллельная реализация МЭ Вычислительный эксперимент

Пример 2

Задача большой размерности

$$f_0 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow \min.$$

Ограничения:

$$f_m = \sum_{i=1, i \neq m}^n x_i^2 + (x_m - \alpha/2)^2 - \alpha^2.$$

Для $n = 100, m = \overline{1, n}, \alpha = 1$
Решение найдено за 403 итерации, точность – 9 знаков.

Ускорение при переходе
от 1 потока к 2: $k_1 = 1.73$
от 1 потока к 8: $k_2 = 2.74$

Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 22 / 24

20 слайд

Параллельная реализация МЭ Вычислительный эксперимент

Содержание

- 1 Метод эллипсоидов
 - Кратко об истории
 - Геометрия метода
 - Алгоритм метода
- 2 Ускорение матричных операций
 - Параллельная обработка матриц
 - Достигнутое ускорение
- 3 Параллельная реализация МЭ
 - Вычислительный эксперимент

Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 20 / 24

23 слайд

Параллельная реализация МЭ Основные выводы

Заключение

В работе решены следующие задачи:

- операции классического алгоритма метода эллипсоидов исследованы на вычислительную сложность;
- разработана программная реализация алгоритма с распараллеливанием наиболее длительных по времени операций;
- обеспечена поддержка арифметики расширенной и произвольной точности;
- разработанный код проверен и протестирован.

Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 23 / 24

21 слайд

Параллельная реализация МЭ Вычислительный эксперимент

Пример 1

Задача минимизации

$$x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min.$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 9; \\ x_1^2 + (x_2 - 4)^2 - 9. \end{cases}$$

Оптимум

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Расчет (точность – 9 знаков)

$$x^* = \begin{pmatrix} 0.00000000011922745523 \\ 2.00000000033459867651 \end{pmatrix}$$

Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 21 / 24

24 слайд

Особая благодарность Голозову В.А.

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Безбородов В.А. (ЭММыС, ВМИ-413) Параллельная реализация МЭ Челябинск, 10 июня 2015 г. 24 / 24