1 слайд

Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации большой размерности

Безбородов В.А.

Научный руководитель, к.ф.-м.н., доцент Голодов В.А.

ФГБОУ ВПО ЮУрГУ
г. Челябинск

10 июня 2015 г.

2 слайд

Содержание

3 слайд

Цели

Целями работы являются:

1. разработка параллельной реализации метода эллипсоидов, поддерживающей арифметику произвольной точности;
2. использование полученной реализации метода эллипсоидов для решения задачи оптимизации большой размерности.

4 слайд

Задачи

В соответствии с поставленными целями в работе решаются следующие **задачи**:

- исследование операций классического алгоритма метода эллипсоидов на вычислительную сложность;
- разработка программной реализации алгоритма с распараллеливанием наиболее длительных по времени операций;
- обеспечение поддержки арифметики расширенной и произвольной точности;
- проверка и тестирование разработанного программного обеспечения.

5 слайд

Содержание

6 слайд

Метод эллипсоидов предложили

1976 **Юдин Д.Б. и Немировский А.С.** как метод последовательных отсечений.

1977 **Шор Н.З.** как вариант метода с растяжением пространства в направлении субградиента.

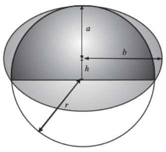
1979 **Хачиян Л.** построил первый полиномиальный алгоритм решения задачи ЛП с рациональными коэффициентами.

7 слайд

Содержание

8 слайд

1-d эллипсоид и его свойства



Эллипсоид ε_n, содержащий полушар в E^n, имеет параметры
$b = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{r}{2}, \quad h = \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{r}{2}$,
где $\alpha = \frac{b}{a}$ и r – радиус шара S_n.

Если пространство «растянуть» с коэффициентом α в направлении полуоси a, то ε_n станет шаром в преобразованном пространстве.

Отношение объема эллипсоида ε_n к объему шара S_n равно

$$q(n) = \frac{vol(\varepsilon_n)}{vol(S_n)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{b}{r}\right)^n = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n.$$

9 слайд

Содержание

10 слайд

Использование метода эллипсоидов

Для решения задачи $\min f_0(x)$ при ограничениях

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in E^n,$$

где E^n – евклидово пространство размерности $n > 1$, $f_\nu(x)$ – выпуклые функции; $g_\nu(x)$ – субградиенты функций, $\nu = \overline{0, m}$. Предполагается, что оптимальная точка $x^* \in E_n$ существует и находится в шаре радиуса R с центром в точке x_0.

К такой задаче сводятся:

- задача безусловной минимизации выпуклой функции,
- общая задача выпуклого программирования,
- задача о седловой точке выпукло-вогнутых функций.

11 слайд

Алгоритм

Выбрать $x_k := x_0 \in E^n$ и радиус R, такие что $||x_0 - x^*|| \leq R$. Положить $h_k = \frac{R}{n+1}$, $B_k := E$, где E – единичная матрица. Для перехода к $(k+1)$-й итерации выполнить:

Шаг 1. Вычислить $g(x_k)$. Если $g(x_k) = 0$, то **ОСТАНОВ**$(x^* = x_k)$.

Шаг 2. Вычислить очередную точку $x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k$, где $\xi_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{||B_k^T g(x_k)||}$.

Шаг 3. Пересчитать шаг $h_{k+1} = h_k r$ и матрицу B_{k+1}
$$B_{k+1} = B_k + (\beta - 1)(B_k \xi_k)\xi_k^T, \quad \beta = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

Шаг 4. Перейти к $(k+1)$-й итерации с x_{k+1}, h_{k+1} и B_{k+1}.

12 слайд

О сходимости метода эллипсоидов

Теорема (О скорости сходимости)

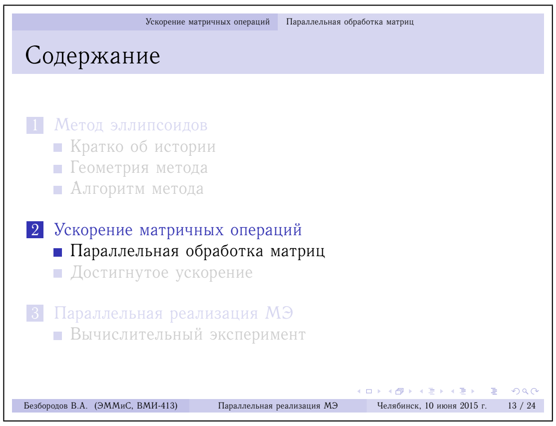
Для всех итераций метода эллипсоидов коэффициент уменьшения объема эллипсоида, локализующего x^*, есть величина постоянная и равная

$$q(n) = \frac{vol(\varepsilon_{k+1})}{vol(\varepsilon_k)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n < 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

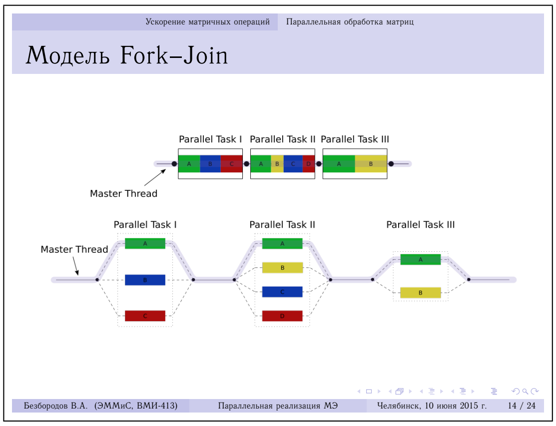
Оптимальный коэффициент растяжения пространства

$$\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \Rightarrow q(n) = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n < 1.$$

13 слайд

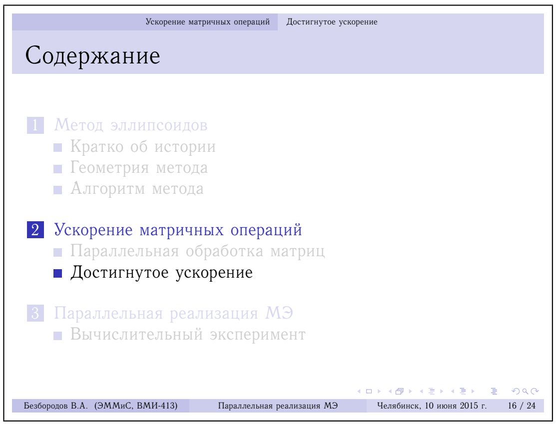


14 слайд

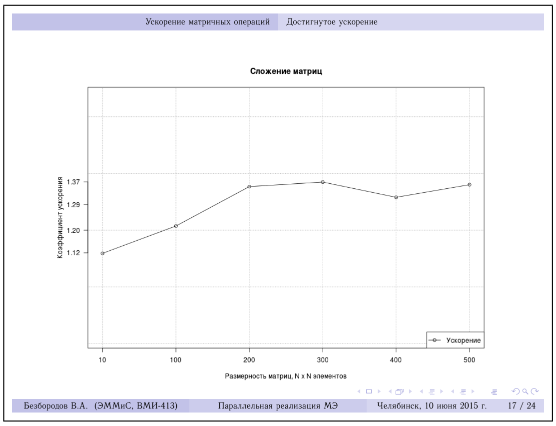


15 слайд

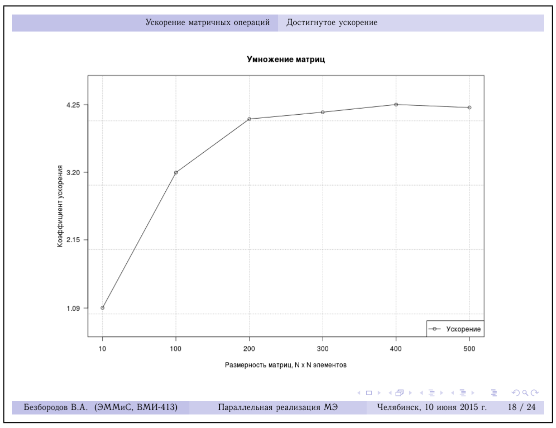
16 слайд



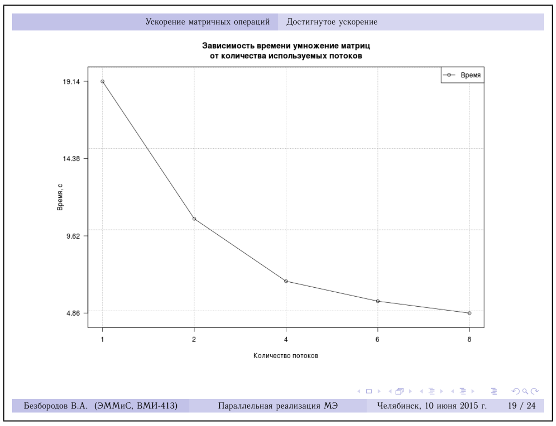
17 слайд



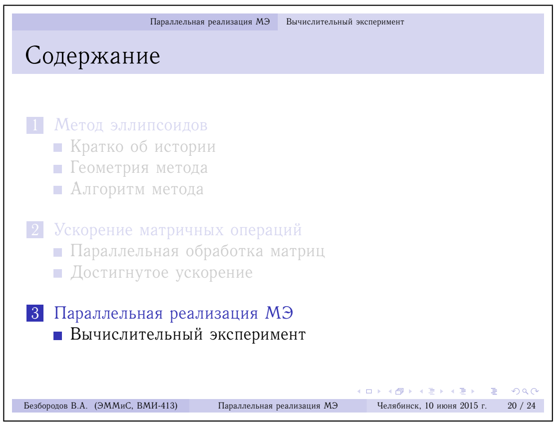
18 слайд



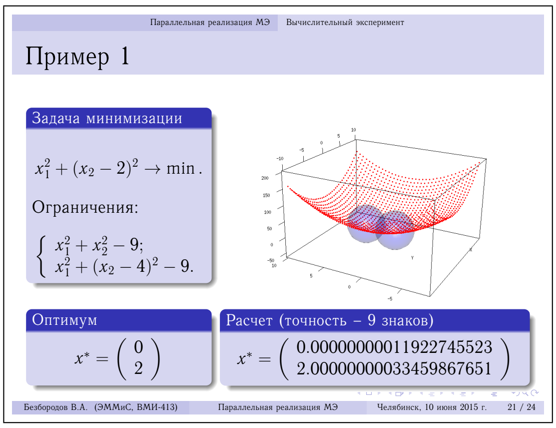
19 слайд



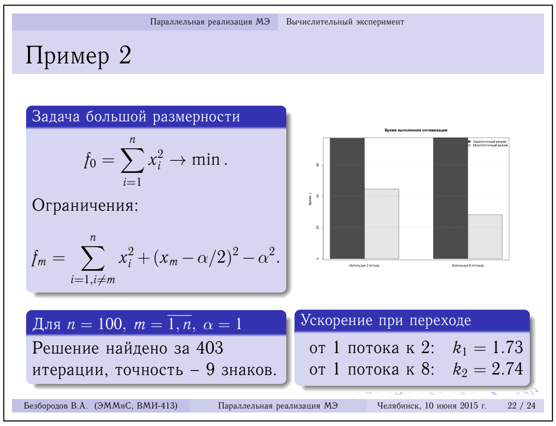
20 слайд



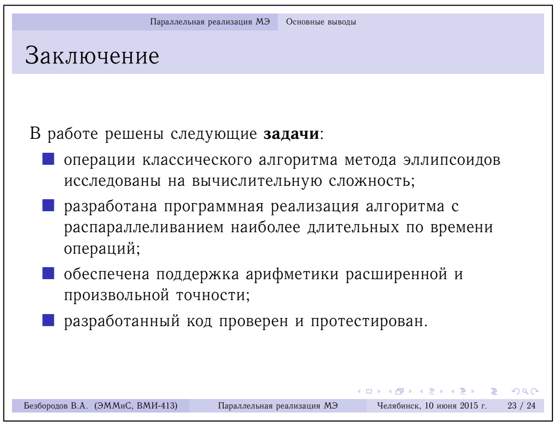
21 слайд



22 слайд



23 слайд



24 слайд