

Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации большой размерности

Безбородов В.А.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:
к.ф.-м.н., доцент Голодов В.А.

Челябинск, 2015 г.

Содержание

1 Метод эллипсоидов

- Кратко об истории
- Геометрия метода
- Применение метода
- Алгоритм метода

2 Ускорение матричных операций

- Параллельная обработка матриц
- Достигнутое ускорение

3 Параллельная реализация МЭ

- Вычислительный эксперимент

Цели

Целями работы являются:

1. разработка параллельной реализации метода эллипсоидов, поддерживающей арифметику произвольной точности;
2. использование полученной реализации метода эллипсоидов для решения задачи оптимизации большой размерности.

Задачи

В соответствии с поставленными целями в работе решаются следующие **задачи**:

- исследование операций классического алгоритма метода эллипсоидов на вычислительную сложность;
- разработка программной реализации алгоритма с распараллеливанием наиболее длительных по времени операций;
- обеспечение поддержки арифметики расширенной и произвольной точности;
- демонстрация использования разработанного ПО для решения задачи оптимизации большой размерности;
- проверка и тестирование разработанного ПО.

Содержание

1 Метод эллипсоидов

- Кратко об истории
- Геометрия метода
- Применение метода
- Алгоритм метода

2 Ускорение матричных операций

- Параллельная обработка матриц
- Достигнутое ускорение

3 Параллельная реализация МЭ

- Вычислительный эксперимент

Метод эллипсоидов предложили

- 1976 **Юдин Д.Б. и Немировский А.С.** как метод последовательных отсечений.
- 1977 **Шор Н.З.** как вариант метода с растяжением пространства в направлении субградиента.
- 1979 **Хачиян Л.** построил первый полиномиальный алгоритм решения задачи ЛП с рациональными коэффициентами.

Содержание

1 Метод эллипсоидов

- Кратко об истории
- Геометрия метода
- Применение метода
- Алгоритм метода

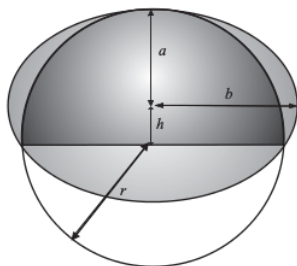
2 Ускорение матричных операций

- Параллельная обработка матриц
- Достигнутое ускорение

3 Параллельная реализация МЭ

- Вычислительный эксперимент

1-d эллипсоид и его свойства



Эллипсоид ε_n , содержащий полушар в E^n , имеет параметры

$$b = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{r}{2}, \quad h = \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{r}{2},$$

где $\alpha = \frac{b}{a}$ и r – радиус шара S_n .

Если пространство «растянуть» с коэффициентом α в направлении полуоси a , то ε_n станет шаром в преобразованном пространстве.

Отношение объема эллипсоида ε_n к объему шара S_n равно

$$q(n) = \frac{\text{vol}(\varepsilon_n)}{\text{vol}(S_n)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{b}{r} \right)^n = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n.$$

Содержание

1 Метод эллипсоидов

- Кратко об истории
- Геометрия метода
- Применение метода
- Алгоритм метода

2 Ускорение матричных операций

- Параллельная обработка матриц
- Достигнутое ускорение

3 Параллельная реализация МЭ

- Вычислительный эксперимент

Использование метода эллипсоидов

Для решения задачи $\min f_0(x)$ при ограничениях

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in E^n,$$

где E^n – евклидово пространство размерности $n > 1$, $f_\nu(x)$ – выпуклые функции; $g_\nu(x)$ – субградиенты функций, $\nu = \overline{0, m}$. Предполагается, что оптимальная точка $x^* \in E_n$ существует и находится в шаре радиуса R с центром в точке x_0 .

К такой задаче сводятся:

- задача безусловной минимизации выпуклой функции,
- общая задача выпуклого программирования,
- задача о седловой точке выпукло-вогнутых функций.

Оптимизация в экономике

Прикладные задачи выпуклого программирования:

- производственная задача;
- задача потребления;
- задача о диете;
- задача планирования номенклатуры и объемов выпуска;
- транспортная задача;
- задача о ранце.

Содержание

1 Метод эллипсоидов

- Кратко об истории
- Геометрия метода
- Применение метода
- Алгоритм метода

2 Ускорение матричных операций

- Параллельная обработка матриц
- Достигнутое ускорение

3 Параллельная реализация МЭ

- Вычислительный эксперимент

Алгоритм

Выбрать $x_k := x_0 \in E^n$ и радиус R , такие что $\|x_0 - x^*\| \leq R$.
Положить $h_k = \frac{R}{n+1}$, $B_k := E$, где E – единичная матрица. Для перехода к $(k+1)$ -й итерации выполнить:

Шаг 1. Вычислить $g(x_k)$. Если $g(x_k) = 0$, то
ОСТАНОВ($x^* = x_k$).

Шаг 2. Вычислить очередную точку $x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k$, где
$$\xi_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|}.$$

Шаг 3. Пересчитать шаг $h_{k+1} = h_k r$ и матрицу B_{k+1}
$$B_{k+1} = B_k + (\beta - 1)(B_k \xi_k) \xi_k^T, \quad \beta = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

Шаг 4. Перейти к $(k+1)$ -й итерации с x_{k+1} , h_{k+1} и B_{k+1} .

О сходимости метода эллипсоидов

Теорема (О скорости сходимости)

Для всех итераций метода эллипсоидов коэффициент уменьшения объема эллипсоида, локализирующего x^ , есть величина постоянная и равная*

$$q(n) = \frac{\text{vol}(\varepsilon_{k+1})}{\text{vol}(\varepsilon_k)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Оптимальный коэффициент растяжения пространства

$$\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \Rightarrow q(n) = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \right)^n < 1.$$

Содержание

1 Метод эллипсоидов

- Кратко об истории
- Геометрия метода
- Применение метода
- Алгоритм метода

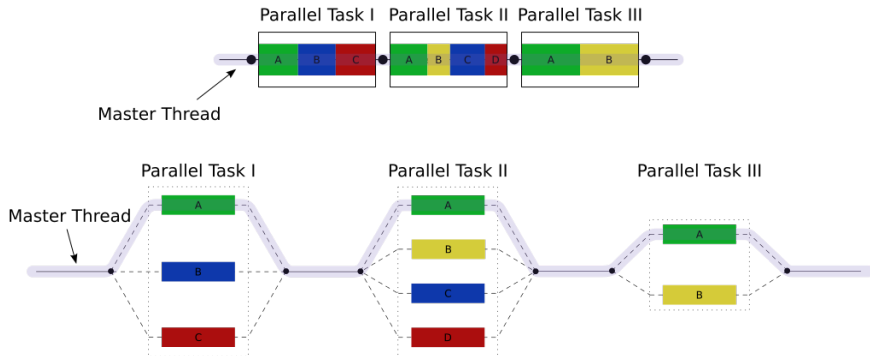
2 Ускорение матричных операций

- Параллельная обработка матриц
- Достигнутое ускорение

3 Параллельная реализация МЭ

- Вычислительный эксперимент

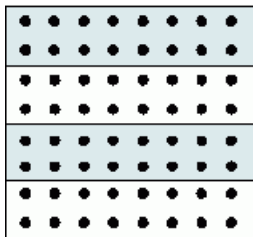
Модель Fork–Join



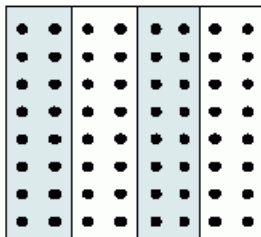
Способы разбиения матриц

Ускорение матричных операций

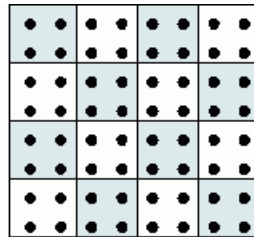
Каждому потоку выделяется некоторое подмножество элементов матрицы для обработки. Вид подмножества определяется способом разбиения.



Горизонтальный



Вертикальный



Блочный

Содержание

1 Метод эллипсоидов

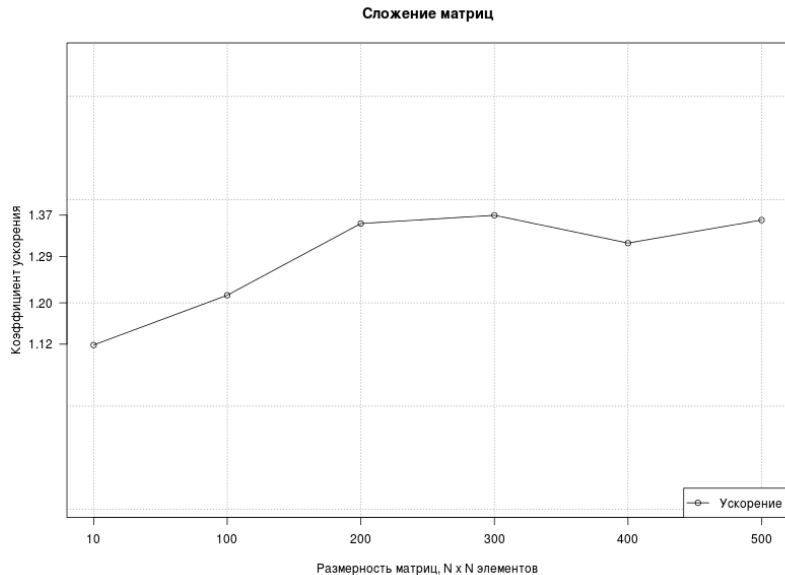
- Кратко об истории
- Геометрия метода
- Применение метода
- Алгоритм метода

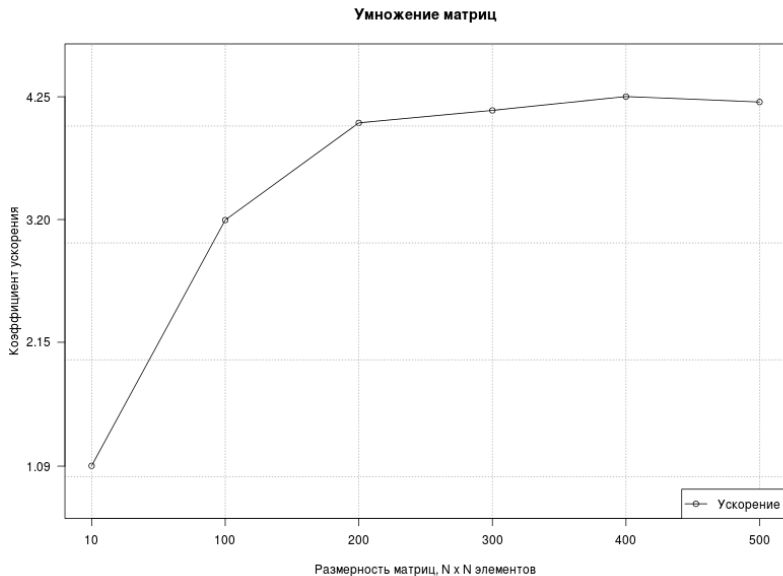
2 Ускорение матричных операций

- Параллельная обработка матриц
- Достигнутое ускорение

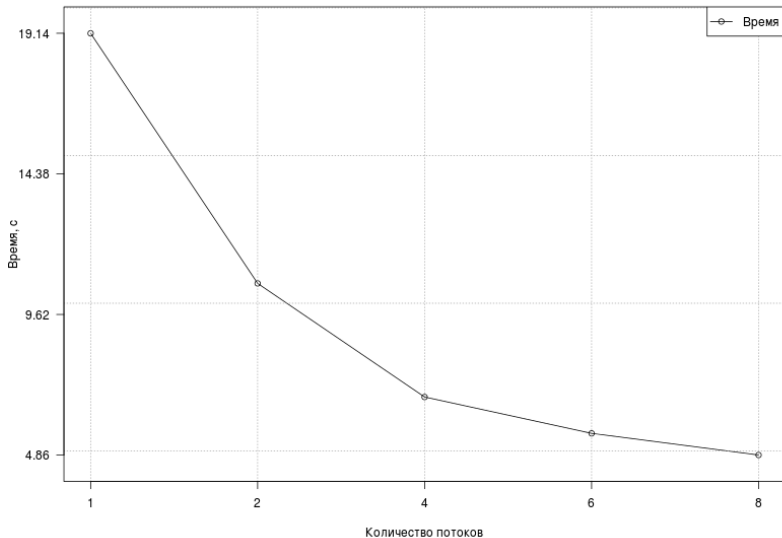
3 Параллельная реализация МЭ

- Вычислительный эксперимент





**Зависимость времени умножение матриц
от количества используемых потоков**



Содержание

1 Метод эллипсоидов

- Кратко об истории
- Геометрия метода
- Применение метода
- Алгоритм метода

2 Ускорение матричных операций

- Параллельная обработка матриц
- Достигнутое ускорение

3 Параллельная реализация МЭ

- Вычислительный эксперимент

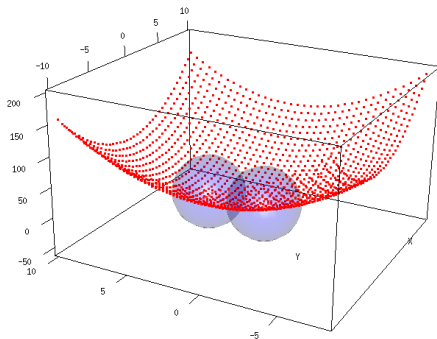
Пример 1

Задача минимизации

$$x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min.$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 9; \\ x_1^2 + (x_2 - 4)^2 - 9. \end{cases}$$



Оптимум

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

МЭ: 160 итераций, точность – 9 знаков

$$x^* = \begin{pmatrix} 0.00000000011922745523 \\ 2.00000000033459867651 \end{pmatrix}$$

Пример 2

Задача большой размерности

$$f_0 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow \min.$$

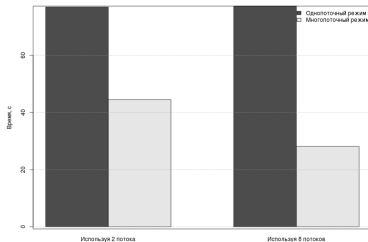
Ограничения:

$$f_m = \sum_{i=1, i \neq m}^n x_i^2 + (x_m - \alpha/2)^2 - \alpha^2.$$

Для $n = 100$, $m = \overline{1, n}$, $\alpha = 1$

Решение найдено за 403
итерации, точность – 9 знаков.

Время выполнения оптимизации



1 поток: 78 с. Падение времени:

2 потока: $T_2 = 44.89$ с.

8 потоков: $T_8 = 28.14$ с.

Заключение

В работе решены следующие **задачи**:

- операции классического алгоритма метода эллипсоидов исследованы на вычислительную сложность;
- разработана программная реализация алгоритма с распараллеливанием наиболее длительных по времени операций;
- обеспечена поддержка арифметики расширенной и произвольной точности;
- продемонстрировано использование разработанного ПО для решения задачи оптимизации большой размерности;
- разработанный код проверен и протестирован.

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!