Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(Национальный исследовательский университет)
Факультет вычислительной математики и информатики
Кафедра экономико-математических методов и статистики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА	ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Рецензент,	Заведующий кафедрой, д. ф.-м. н., профессор
______________	______________ А.В. Панюков
« » __________ 2015 г.	« » __________ 2015 г.

Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации большой размерности

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ-010400.62.2015.001.001 ВКР

Консультант,	Руководитель проекта,
______________	______________ В.А. Голодов
« » __________ 2015 г.	« » __________ 2015 г.

Автор проекта
студент группы ВМИ-413
______________ В.А. Безбородов
«   » __________ 2015 г.

Нормоконтролер, к. ф.-м. н., доцент
______________ Т.А. Макаровских
«   » __________ 2015 г.

Челябинск, 2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(Национальный исследовательский университет)
Факультет вычислительной математики и информатики
Кафедра экономико-математических методов и статистики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой, д. ф.-м. н.,
профессор
______________ А.В. Панюков
«___» __________ 2015 г.

З А Д А Н И Е

на выпускную квалификационную работу студента
Безбородова Вячеслава Александровича
Группа ВМИ-413

1. Тема работы
   Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации большой размерности
   утверждена приказом по университету от «___» __________ 2015 г.
   №______________
2. Срок сдачи студентом законченной работы «___» __________ 2015 г.
3. Исходные данные к работе
   3.1. Данные из учебной литературы;
   3.2. Самостоятельно сконструированные тестовые данные.
4. Перечень вопросов, подлежащих разработке
   4.1. Изучение общей схемы работы метода эллипсоидов;
   4.2. Изучение приемов параллельной обработки данных;
   4.3. Разработка класса (типа данных) для реализации параллельно выполняемых операций над матрицами с применением библиотеки GMP;

4.4. Разработка параллельной реализации метода эллипсоидов для задачи линейного программирования;
4.5. Оценка сложности полученной реализации;
4.6. Сравнение с известными методами решения;
4.7. Тестирование;
4.8. Проверка на модельных данных.

5. Иллюстративный материал
   5.1. Энергетическо-трудовой цикл 1л.
   5.2. Объект, предмет и цель дипломной работы 1л.
   5.3. Задачи дипломной работы 1л.
   5.4. Новая концепция управления экономическими системами 1л.
   5.5. Концептуальная схема модели 1л.
   5.6. Общий вид модели в среде VisSim 1л.
   5.7. Элементы модели энергетическо-трудового цикла 1л.
   5.8. Система уравнений модели животноводства 2л.
   5.9. Принцип управления 1л.
   5.10. Результаты эксперимента 10л.
   5.11. Заключение 1л.
   5.12. Благодарность за внимание 1л.

6. Календарный план

Наименование этапов дипломной работы	Срок выполнения этапов работы	Отметка о выполнении
1. Сбор материалов и литературы по теме дипломной работы	02.02.2015 г.	
2. Исследование способов построения математической модели задачи		
3. Разработка математической модели и алгоритма		
4. Реализация разработанных алгоритмов		
5. Проведение вычислительного эксперимента		
6. Подготовка пояснительной записки дипломной работы		
Написание главы 1		
Написание главы 2		
Написание главы 3		
Написание главы 4		
Написание главы 5		
Написание главы 6		
Написание главы 7		
Написание главы 8		
Написание главы 9		
Написание главы 10		
7. Оформление пояснительной записки		
8. Получение отзыва руководителя		
9. Проверка работы руководителем, исправление замечаний		
10. Подготовка графического материала и доклада		
11. Нормоконтроль		
12. Рецензирование, представление зав. кафедрой	10.06.2015 г.	

7. Дата выдачи задания «____» ____________2015 г.

Заведующий кафедрой______________________________/А.В. Панюков /

Руководитель работы______________________________/В.А. Голодов /

Студент____/В.А. Безбородов /

АННОТАЦИЯ

Безбородов, В.А. Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации большой размерности / В.А. Безбородов . – Челябинск: ЮУрГУ, Факультет вычислительной математики и информатики, 2015 . – 16 с., 0 илл. Библиографический список – 9 названий.

В дипломной работе произведен анализ алгоритма метода эллипсоидов на предмет вычислительной сложности выполняемых операций. На основе результатов анализа разработана параллельная реализация метода эллипсоидов, адаптированная для решения задач оптимизации большой размерности на многопроцессорных и/или многоядерных вычислительных системах с общей разделяемой памятью.

Приведены результаты вычислительных экспериментов, продемонстрирован пример решения задачи оптимизации большой размерности с применением разработанной программной реализации.

					ЮУрГУ-010400.62.2015.001.001 ВКР				
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата					
Разраб.		В.А. Безбородов			Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации большой размерности : Пояснительная записка	Лит.		Лист	Листов
Пров.		В.А. Голодов				Д		4	16
Рецензент						ЮУрГУ Кафедра ЭММиС			
Н.Контр.		Т.А. Макаровских							
Утв.		А.В. Панюков							

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Задачи оптимизации получили чрезвычайно широкое распространение в технике, экономике, управлении. Типичными областями применения теории оптимизации являются прогнозирование, планирование промышленного производства, управление материальными ресурсами, а также контроль качества выпускаемой продукции [4].

Успешность хозяйственной деятельности зависит от того, как распределяются имеющиеся ограниченные ресурсы. В связи с тем, что такая задача оптимального распределения довольно часто возникает на практике в различных сферах жизнедеятельности, актуальным становится поиск способов ускорения ее решения.

Задачи оптимизации большой размерности характеризуются высокой трудоемкостью. Использование доступного ресурса аппаратного параллелизма современных вычислительных систем рассматривается как возможность ускорения поиска их решения. Применение библиотек, реализующих поддержку арифметики произвольной точности, диктуется необходимостью достижения высокой точности при решении практических задач.

Разрабатывали и развивали метод эллипсоидов Шор Н.З. [7], Юдин Д.Б. и Немировский А.С. [9], Хачиян Л.Г. [6], Гершович В.И. [2], Стецюк П.И. [5] и др.

В работе исследован алгоритм метода эллипсоидов. Разработана его программная реализация, ориентированная на многопроцессорные и/или многоядерные вычислительные системы с общей разделяемой памятью. Показано приложение программной реализации к решению задачи оптимизации большой размерности.

Целями работы являются:

1) разработка параллельной реализации метода эллипсоидов, поддерживающей арифметику произвольной точности;
2) использование полученной реализации метода эллипсоидов для решения задачи оптимизации большой размерности.

В соответствии с поставленными целями в работе решаются следующие **задачи**:

- Исследование операций классического алгоритма метода эллипсоидов на вычислительную сложность.
- Разработка программной реализации алгоритма с распараллеливанием наиболее длительных по времени операций и поддержкой арифметики произвольной точности.
- Проверка и тестирование разработанного программного обеспечения.

Объектом исследования данной работы является метод эллипсоидов, **предметом** – параллельная реализация метода, поддерживающая арифметику произвольной точности.

Работа состоит из введения, 1 глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 16 страниц. Список литературы содержит 9 наименований.

В первой главе рассматривается алгоритм метода эллипсоидов, производится его анализ на предмет вычислительной сложности с целью поиска наиболее ресурсоемких операций, нуждающихся в ускорении путем распараллеливания.

Во второй главе приведены данные, необходимые для...

В третьей главе приводится краткое описание...

В четвертой главе построена...

В пятой главе приводятся результаты вычислительных экспериментов...

В заключении перечислены основные результаты работы.

1 Метод эллипсоидов

В настоящее время большое внимание уделяется созданию автоматизированных систем планирования, проектирования и управления в различных областях промышленности. На первый план выдвигаются вопросы качества принимаемых решений, в связи с чем возрастает роль методов и алгоритмов решения оптимизационных задач в математическом обеспечении автоматизированных систем различного уровня и назначения.

Имеется несколько основных источников, порождающих задачи оптимизации: задачи математического программирования, задачи нелинейного программирования, задачи оптимального управления, задачи дискретного программирования или задачи смешанного дискретно-непрерывного типа [8].

Сфера применения методов оптимизации огромна. Создание эффективных методов оптимизации является ключом к решению многих вычислительных проблем математического программирования, особенно для задач большой размерности.

Рассмотрим алгоритм решения задачи выпуклого программирования, гарантирующий уменьшение объема области, в которой локализуется оптимум, со скоростью геометрической прогрессии, причем знаменатель этой прогрессии зависит только от размерности задачи. Этот алгоритм относится к классу алгоритмов обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении градиента (ОГСРП) [7].

Пусть имеется задача выпуклого программирования:

$$\min f_0(x) \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in E_n, \tag{1.2}$$

где E_n – евклидово пространство размерности n, $f_\nu(x)$, $\nu = \overline{0, m}$ – выпуклые функции, определенные на E_n; $g_\nu(x)$ – субградиенты соответствующих функций. Пусть имеется априорная информация о том, что существует оптимальная точка $x^* \in E_n$ (не обязательно единственная), которая находится в шаре радиуса R с центром в точке x_0 (формально к системе ограничений 1.2 можно добавить ограничение $||x - x_0|| \leq R$).

Рассмотрим следующий итеративный алгоритм (при $n > 1$).

Алгоритм 1 Метод эллипсоидов

Шаг 0. Инициализация.
Положить $x_k = x_0$; $B_k = E$, где E – единичная матрица размерности $n \times n$; $h_k = \frac{R}{n+1}$ – коэффициент, отвечающий за уменьшение объема шара. Перейти к шагу 1.
Шаг 1. Вычислить

$$g(x_k) = \begin{cases} g_0(x_k), & \text{если } \max\limits_{1 \leq i \leq m} f_i(x_k) \leq 0, \\ g_{i^*}(x_k), & \text{если } \max\limits_{1 \leq i \leq m} f_i(x_k) = f_{i^*}(x_k) > 0. \end{cases}$$

Если $g(x_k) = 0$, то завершить алгоритм; x_k – оптимальная точка. Иначе перейти к шагу 2.
Шаг 2. Вычислить $\xi_k = \dfrac{B_k^T g(x_k)}{||B_k^T g(x_k)||}$. Перейти к шагу 3.
Шаг 3. Вычислить $x_{k+1} = x_k - h_k \cdot B_k \cdot \xi_k$. Перейти к шагу 4.
Шаг 4. Вычислить $B_{k+1} = B_k \cdot R_\beta(\xi_k)$, где $R_\beta(\xi_k)$ – оператор растяжения пространства в направлении ξ_k с коэффициентом β (см. определение 1.1), $\beta = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$. Перейти к шагу 5.
Шаг 5. Вычислить $h_{k+1} = h_k \cdot r$, где $r = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$. Перейти к шагу 1.

Определение 1.1. Оператором растяжения пространства E_n в направлении ξ с коэффициентом β называется оператор $R_\beta(\xi)$, действующий на вектор x следующим образом [8]:

$$R_\beta(\xi)x = \left(E - (\beta - 1)\xi_k \xi_k^T\right) x.$$

Рассмотрим вопрос оценки скорости сходимости метода эллипсоидов. Покажем, что данный вариант алгоритма ОГСРП сходится по функционалу со скоростью геометрической прогрессии, причем знаменатель этой прогрессии зависит только от размерности задачи.

Лемма 1.1. Последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, генерируемая алгоритмом 1, удовлетворяет неравенству

$$||A_k(x_k - x^*)|| \leq h_k \cdot (n+1), \quad A_k = B_k^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

Доказательство леммы для краткости изложения опущено и может быть найдено в [7].

Множество точек x, удовлетворяющих неравенству

$$||A_k(x_k - x)|| \leq (n+1)h_k = R \cdot \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^k,$$

представляет собой эллипсоид Φ_k, объем которого $v(\Phi_k)$ равен

$$\frac{v_0 R^n \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^{nk}}{\det A_k},$$

где v_0 – объем единичного n-мерного шара. Получаем

$$\frac{v(\Phi_{k+1})}{(\Phi_k)} = \frac{\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n \cdot \det A_k}{\det A_{k+1}} = \frac{\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n \cdot \det A_k}{\det R_\alpha(\xi_k) \cdot \det A_k} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n =$$

$$= \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n = q_n < 1.$$

Таким образом, объем эллипсоида, в котором локализуется оптимальная точка x^* в соответствии с неравенством (1.3), убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q_n.

Проанализируем подробнее вычислительную сложность операций алгоритма метода эллипсоидов. Для этого введем некоторые обозначения из асимптотического анализа [3].

Определение 1.2. Говорят, что $f(n) = O(g(n))$, если существуют целые N и K, такие, что $|f(n)| \leq Kg(n)$ при всех $n \geq N$.

Это означает, что функция f ограничена сверху функцией g (с точностью до постоянного множителя) асимптотически.

Определение 1.3. Говорят, что $f(n) = \Omega\left(g(n)\right)$, если существуют целые N и K, такие, что $f(n) \geq Kg(n)$ при всех $n \geq N$.

Это означает, что функция f ограничена снизу функцией g (с точностью до постоянного множителя) асимптотически.

Определение 1.4. Говорят, что $f(n) = \Theta\left(g(n)\right)$, если одновременно выполнены условия определений 1.2 и 1.3.

Это означает, что функция f ограничена снизу и сверху функцией g асимптотически.

На первом шаге алгоритма изменение текущего субградиента $g(x_k)$ происходит на основании анализа значений функций ограничений (1.2) в текущей точке x_k, т.е. анализируется последовательность значений

$$\max_{1 \leq i \leq m} f_i(x_k).$$

Вычислительная сложность поиска максимального из m чисел зависит от выбора алгоритма.

При использовании линейного последовательного поиска цикл выполнит m итераций. Трудоемкость каждой итерации не зависит от количества элементов, поэтому имеет сложность $T^{iter} = O(1)$. В связи с этим, верхняя оценка всего алгоритма поиска $T_m^{min} = O(m) \cdot O(1) = O(m \cdot 1) = O(m)$. Аналогично вычисляется нижняя оценка сложности, а в силу того, что она совпадает с верхней, можно утверждать $T_m^{min} = \Theta(m)$.

При использовании алгоритма бинарного поиска на каждом шаге количество рассматриваемых элементов сокращается в 2 раза. Количество элементов, среди которых может находиться искомый, на k-ом шаге определяется формулой $\frac{m}{2^k}$. В худшем случае поиск будет продолжаться, пока в массиве не останется один элемент, т.е. алгоритм имеет логарифмическую сложность: $T_m^{binSearch} = O\left(\log(m)\right)$. Резюмируем все вышесказанное относительно алгоритмов поиска в виде таблицы 1.

Но при использовании некоторых алгоритмов (например, алгоритма бинарного поиска) потребуются дополнительные процедуры для упорядочива-

Таблица 1 — Оценка сложности некоторых алгоритмов поиска

Алгоритм	**Структура данных**	**Временная сложность**		**Сложность по памяти**
		В среднем	**В худшем**	**В худшем**
Линейный поиск	Массив из n элементов	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$
Бинарный поиск	Отсортированный массив из n элементов	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(1)$

ния входной последовательности значений. В таблице 2 представлены асимптотические оценки наиболее известных алгоритмов сортировки массива из n элементов[1].

Таблица 2 — Оценка сложности некоторых алгоритмов сортировки[1]

Алгоритм	**Временная сложность**			**Сложность по памяти**
	В лучшем	**В среднем**	**В худшем**	**В худшем**
Быстрая сортировка	$O(n\log(n))$	$O(n\log(n))$	$O(n^2)$	$O(n)$
Сортировка слиянием	$O(n\log(n))$	$O(n\log(n))$	$O(n\log(n))$	$O(n)$
Пирамидальная сортировка	$O(n\log(n))$	$O(n\log(n))$	$O(n\log(n))$	$O(1)$
Пузырьковая сортировка	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
Сортировка вставками	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
Сортировка выборомм	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
Блочная сортировка	$O(n+k)$	$O(n+k)$	$O(n^2)$	$O(nk)$
Поразрядная сортировка	$O(nk)$	$O(nk)$	$O(nk)$	$O(n+k)$

На втором шаге алгоритма производится вычисление нормированного обобщенного градиента

$$\xi_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{||B_k^T g(x_k)||},$$

что подразумевает выполнение трудоемких матричных операций, таких как транспонирование, умножение на вектор и на число. Асимптотическая слож-

[1]Более подробный анализ может быть найден в [1]

ность таких операций для матрицы размерности $n \times n$ может быть оценена как $O(n^2)$.

На шаге 3 при обновлении значения текущей точки выполняется умножение матрицы B_k на вектор ξ_k:

$$x_{k+1} = x_k - h_k \cdot B_k \cdot \xi_k.$$

Аналогично предыдущей оценке, цена такой операции составит $O(n^2)$.

Шаг 4 наиболее сложен из-за необходимости вычисления оператора растяжения пространства

$$B_{k+1} = B_k \cdot R_\beta(\xi_k).$$

Если представить оператор в матричной форме (определение 1.1), то можно видеть, что в процессе его вычисления используются все вышеперечисленные операции, а также операция сложения матриц, сложность которой составляет $O(n^2)$.

На пятом шаге осуществляется пересчет коэффициента h_k, отвечающего за уменьшение объема шара

$$h_{k+1} = h_k \cdot r.$$

Эта операция может быть выполнена за константное время, т.е. асимптотически ее сложность составит $O(1)$.

Заключение

В данной работе были приведены основные положения, выведенные из идей физической экономики. На основе этих положений была построена модель экономической системы древнего общества скотоводов-земледельцев.

В дипломной работе выполнены следующие **задачи**:

1) построена имитационная модель экономической системы древнего общества скотоводов-земледельцев;
2) проведен имитационный эксперимент;
3) проверены теоретические положения.

Можно сделать следующие выводы после проведения симуляционного эксперимента в среде VisSim:

1) модель экономической системы древнего общества скотоводов-земледельцев является жизнеспособной и правдоподобно описывает поведение древней человеческой общины.
2) модель дает возможность объяснить экономическую сущность исторических фактов относительно древних общин периода неолита;
3) проверен принцип увеличения доли свободного времени в общем фонде социального времени по ходу развития общины.

Данная модель может быть улучшена путем более точного описания различных хозяйственных процессов, происходивших в экономике общины. Также возможно применение тензорной методологии для описания этих хозяйственных процессов, при этом уравнения примут более понятный внешний вид, не утратив своего содержания.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вирт, Н. Алгоритмы и структуры данных. Новая версия для Оберона + CD / Пер. с англ. Ткачев Ф. В. / Н. Вирт. — М.: ДМК Пресс, 2010. — 272 с.: ил.
2. Гершович, В. И. Метод эллипсоидов, его обобщения и приложения / В. И. Гершович, Н. З. Шор // Кибернетика. — 1982. — №5.
3. Грин, Д. Математические методы анализа алгоритмов / Д. Грин, Д. Кнут. — М.: Мир, 1987. — 120 с., ил.
4. Данилин, А. И. Основы теории оптимизации (постановки задач) [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие / А. И. Данилин. — Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С.П. Королева (нац. исслед. ун-т). – Электрон. текстовые и граф. дан. (1,2 МБайт). – Самара, 2011. — 1 эл. опт. диск (CD-ROM).
5. Стецюк, П. И. Методы эллипсоидов и r-алгоритмы / П. И. Стецюк. — Нац. акад. наук Украины, Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова, Акад. транспорта, информатики и коммуникаций. – Кишинэу: Эврика, 2014. — 488 с.
6. Хачиян, Л. Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании / Л. Г. Хачиян // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1980. — С. 51-68.
7. Шор, Н. З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования / Н. З. Шор // Кибернетика. — 1977. — № 1. – С. 94–95.
8. Шор, Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н. З. Шор. — Киев: Наук. думка, 1979. — 200 с.
9. Юдин, Д. Б. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач / Д. Б. Юдин, А. С. Немировский // Экономика и мат. методы. — 1976. — т. 12, вып. 2. – С. 357–369.