Параллельная реализация метода эллипсоидов для задач оптимизации большой размерности

Безбородов В.А.

ФГБОУ ВПО ЮУрГУ
г. Челябинск

10 мая 2015 г.

Содержание

Метод эллипсоидов предложили

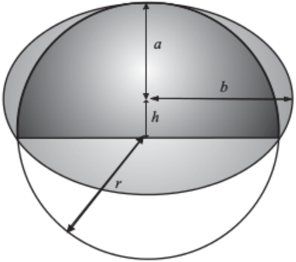
1976 **Юдин Д.Б. и Немировский А.С.** как метод последовательных отсечений.

1977 **Шор Н.З.** как вариант метода с растяжением пространства в направлении субградиента.

1979 **Хачиян Л.** построил первый полиномиальный алгоритм решения задачи ЛП с рациональными коэффициентами.

Содержание

1-d эллипсоид и его свойства



Эллипсоид ε_n, содержащий полушар в E_n, имеет параметры
$$b = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{r}{2}, \quad h = \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{r}{2},$$
где $\alpha = \dfrac{b}{a}$ и r – радиус шара S_n.

Если пространство «растянуть» с коэффициентом α в направлении полуоси a, то ε_n станет шаром в преобразованном пространстве.

Отношение объема эллипсоида ε_n к объему шара S_n равно

$$q(n) = \frac{vol(\varepsilon_n)}{vol(S_n)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{b}{r}\right)^n = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n.$$

Сходимость метода эллипсоидов

Отношение объема эллипсоида ε_n к объему шара S_n равно

$$q(n) = \frac{vol(\varepsilon_n)}{vol(S_n)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{b}{r}\right)^n = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n.$$

Если коэффициент α такой, что $\alpha + 1/\alpha < 2\sqrt[n]{\alpha}$, то отношение $q(n) < 1$ и объем эллипсоида, в котором локализуется искомая точка x^*, убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q(n)$.

Содержание

Использование метода эллипсоидов

МЭ используется для решения следующей задачи

На E_n $(n \geq 1)$ определено векторное поле $g(x)$, $g(x) \in E_n$. Требуется найти точку x^*, такую, что $(g(x), x - x^*) \geq 0$ для всех $x \in E_n$. Предполагается, что x^* существует и $g(x) \neq 0$ для $x \neq x^*$.

К такой задаче сводятся задачи математического программирования:

- задача безусловной минимизации выпуклой функции,
- общая задача выпуклого программирования,
- задача о седловой точке выпукло-вогнутых функций.

Стартовые условия для МЭ

Задан:

Коэффициент α такой, что $\alpha + 1/\alpha < 2\sqrt[n]{\alpha}$.

Инициализация:

1. Выбрать стартовую точку $x_0 \in E_n$ и начальный радиус r_0, такой что $||x_0 - x^*|| \leq r_0$.
2. Положить $B_0 := E$, где E – единичная матрица.

Перейти к очередной итерации со значениями x_0, r_0, B_0.

Алгоритм

Пусть на k-й итерации найдены $x_k \in E_n$, r_k и B_k. Для перехода к $(k+1)$-й итерации выполнить:

Шаг 1. Вычислить $g(x_k)$. Если $g(x_k) = 0$, то **ОСТАНОВ**$(x^* = x_k)$.

Шаг 2. Вычислить очередную точку $x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k$, где

$$h_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right),\ \xi_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{||B_k^T g(x_k)||}.$$

Шаг 3. Пересчитать матрицу B_{k+1} и радиус r_{k+1}

$$B_{k+1} = B_k + (\beta - 1)(B_k \xi_k)\xi_k^T,\ \beta = \frac{1}{\alpha},$$

$$r_{k+1} = (\alpha + \beta)\frac{r_k}{2}.$$

Шаг 4. Перейти к $(k+1)$-й итерации с x_{k+1}, r_{k+1} и B_{k+1}.

О сходимости метода эллипсоидов

Теорема (Локализация x^* в эллипсоиде)

Генерируемая методом эллипсоидов последовательность точек $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$||B_k^{-1}(x_k - x^*)|| \leq r_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Следствие

Эллипсоид $\varepsilon_k = \{x : ||B_k^{-1}(x_k - x)|| \leq r_k\}$ *содержит точку* x^*.

О сходимости метода эллипсоидов

Теорема (О скорости сходимости)

Для всех итераций метода эллипсоидов коэффициент уменьшения объема эллипсоида, локализующего x^*, есть величина постоянная и равная

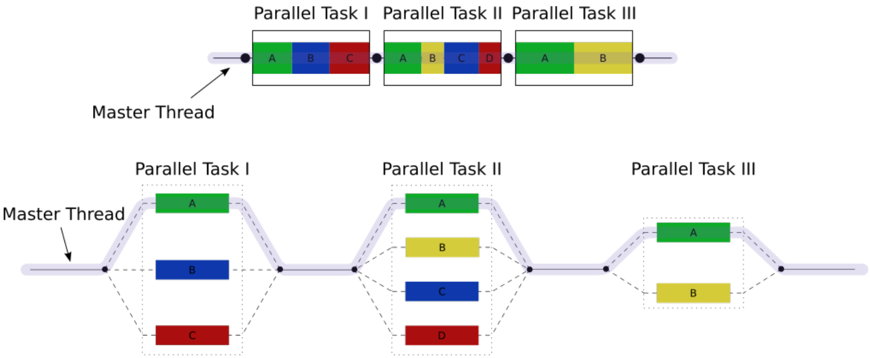
$$q(n) = \frac{vol(\varepsilon_{k+1})}{vol(\varepsilon_k)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n < 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Оптимальный коэффициент растяжения пространства

$$\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \Rightarrow q(n) = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n/2} \leq 1 - \frac{1}{2n}.$$

Содержание

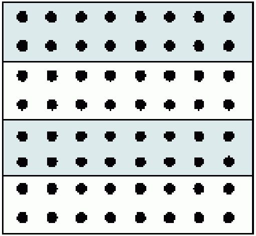
Модель Fork–Join



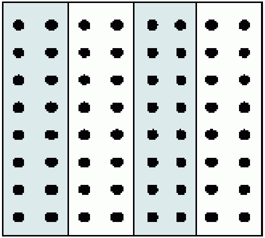
Способы разбиения матриц

Ускорение матричных операций

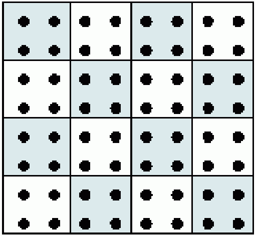
Каждому потоку выделяется некоторое подмножество элементов матрицы для обработки. Вид подмножества определяется способом разбиения.



Горизонтальный

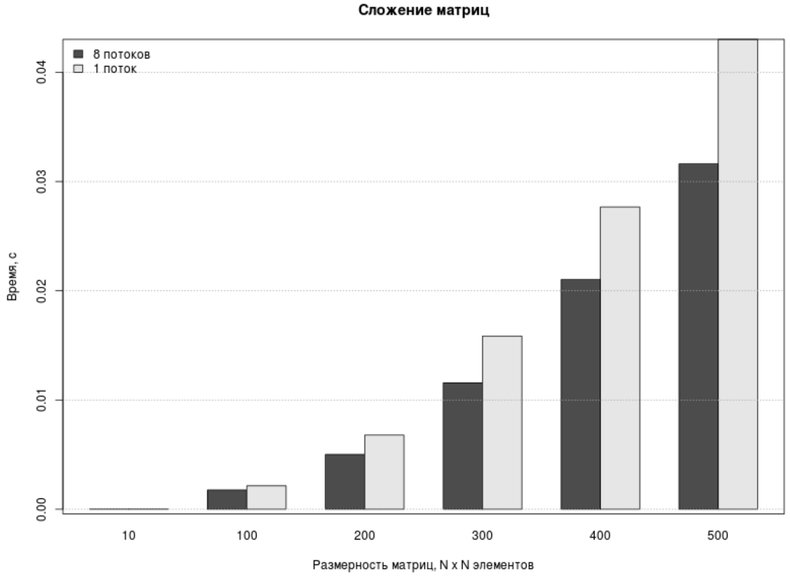


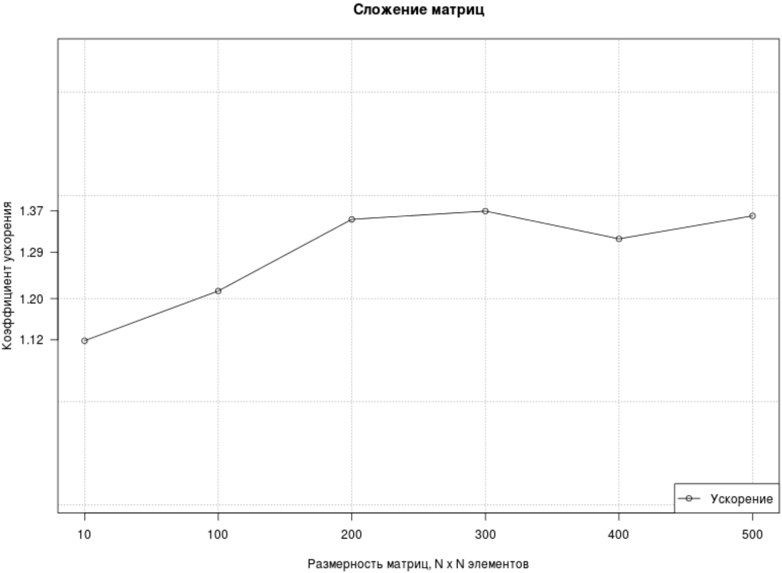
Вертикальный

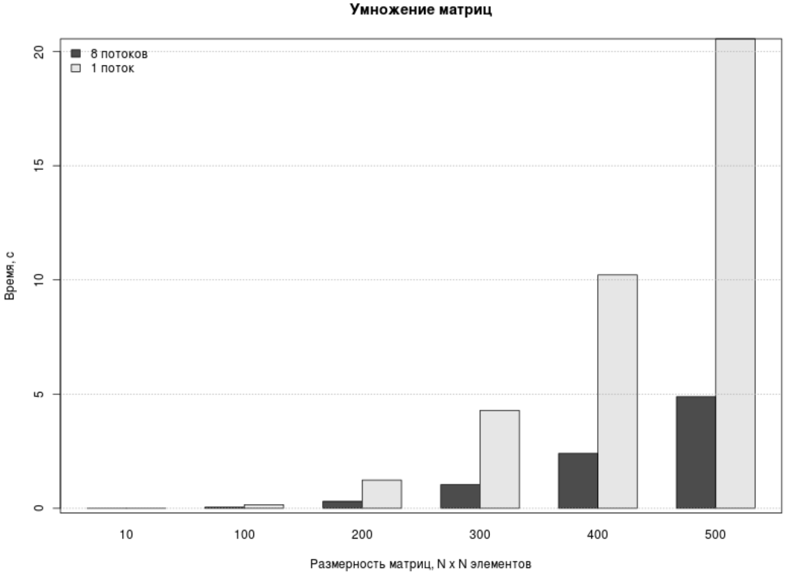


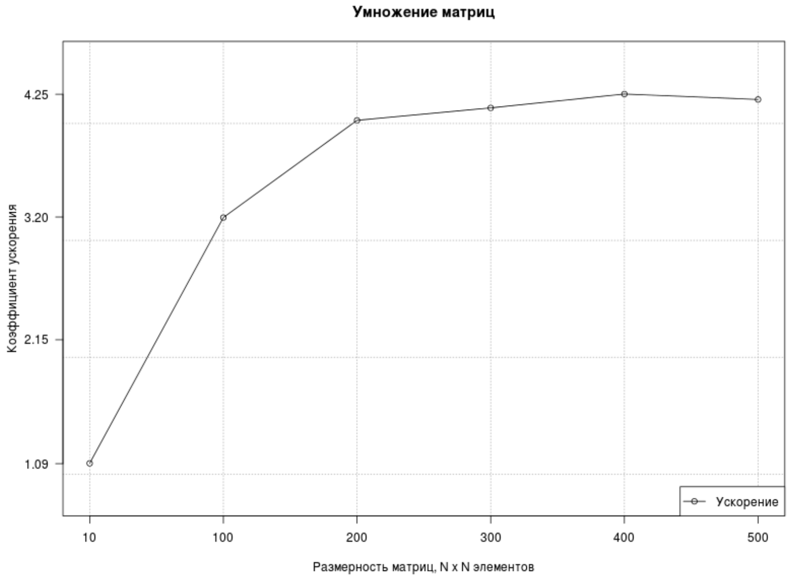
Блочный

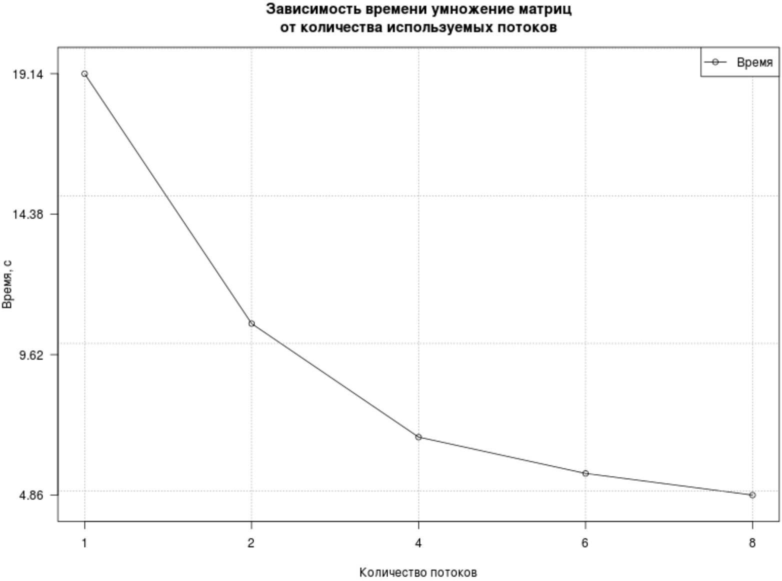
Содержание


Сложение матриц
8 потоков
1 поток
Время, с
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
10
100
200
300
400
500
Размерность матриц, N x N элементов


Сложение матриц
Коэффициент ускорения
1.37
1.29
1.20
1.12
10
100
200
300
400
500
Размерность матриц, N x N элементов
Ускорение


Умножение матриц
8 потоков
1 поток
Время, с
0
5
10
15
20
10
100
200
300
400
500
Размерность матриц, N x N элементов


Умножение матриц
Коэффициент ускорения
4.25
3.20
2.15
1.09
10
100
200
300
400
500
Размерность матриц, N x N элементов
Ускорение


Зависимость времени умножение матриц
от количества используемых потоков
Время
19.14
14.38
9.62
4.86
Время, с
1
2
4
6
8
Количество потоков

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!