Вячеслав Безбородов

Распараллеливание симплекс-метода на практике

29 сентября 2016 г.

Аннотация

В большинстве случаев симплекс-метод является самым эффективным методом решения задач линейного программирования (ЗЛП). В работе рассматриваются существующие попытки распараллеливания симплекс-метода по отношению к эффективной последовательной реализации и характеру практических ЗЛП. Для решения разреженных ЗЛП большой размерности не существует параллельной реализации симплекс-метода, значительно превосходящей по производительности хорошую последовательную реализацию. Хотя существует некоторый прогресс в разработке параллельных реализаций для неразреженных ЗЛП или ЗЛП, не имеющих особых структурных свойств. Как результат такого обзора, эта работа определяет направления будущих исследований в области разработки параллельных реализаций симплекс-метода, имеющих практическое значение.

Ключевые слова: линейное программирование, симплекс-метод, разреженная матрица, пораллельные вычисления.

1 Введение

Задачи линейного программирования (ЗЛП) возникают из различных областей науки, в т.ч. и как промежуточные этапы при решении других оптимизационных задач. Симплекс-метод и методы внутренней точки являются двумя главными подходами для решения ЗЛП. В случаях, когда решаются семейства взаимосвязанных ЗЛП (целочисленное программирование, методы разложения, некоторые классы задач линейного программирования), симплекс-метод обычно более эффективен.

Приложения параллельной и векторной обработки к симплекс-методу для решения ЗЛП стали обсуждаться с 1970-х гг., хотя первые попытки разработать практические реализации были предприняты только с начала 1980-х гг. Наибольшая активность в этом направлении наблюдалась с середины 1980-х до середины 1990-х гг. Также предпринимались эксперименты использования векторной обработки данных и ЭВМ с общей разделяемой памятью, подавляющее большинство реализаций использовали мультипроцессоры с распределенной памятью и сетевые кластеры.

2 Симплекс–метод

Симплекс–метод и его требования в вычислительному процессу наиболее удобно обсуждать в контексте ЗЛП в стандартной форме

$$\begin{aligned} & c^T x \to \min \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Матрица A в (2.1) обычно содержит столбцы с единицами, соответствующими фиктивным переменным, возникающим при переводе ограничений-неравенств в равенства. Оставшиеся столбцы A соответствуют обычным переменным.

В симплекс–методе индексы переменных подразделяются на два подмножества: $\mathcal{B}$, соответствующее m базисным переменным x_B, и $\mathcal{N}$, соответствующее $n-m$ небазисным переменным x_N. При этом базисная матрица B, составленная из столбцов A, соответствующих $\mathcal{B}$, является несингулярной. Множество $\mathcal{B}$ условно называют базисом. Столбцы A, соответствующие $\mathcal{N}$, формируют матрицу N. Компоненты c, соответствующие $\mathcal{B}$ и $\mathcal{N}$, называют базисными издержками c_B и небазисными издержками c_N.

Когда небазисные переменные нулевые, значения $\hat{b} = B^{-1}b$ базисных переменных соответствуют вершинам допустимого региона при условии, что они неотрицательны. Выражение $x_B + B^{-1}N = \hat{b}$, следующее из (2.1), позволяет убрать базисные переменные из целевой функции, которая становится $(c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N + c_B^T\hat{b}$. Если все компоненты вектора уменьшенных издержек $\hat{c}_N = c_N^T - c_B^T B^{-1}N$ неотрицательны, тогда текущий базис оптимален.

На каждой итерация симплекс-метода, если текущий базис неоптимален, выбирается небазисная переменная x_q с отрицательной уменьшенной издержкой для ввода в базис. Увеличение этой переменной от нуля при выполнении условий (2.1) соответствует перемещению вдоль ребра допустимого региона в направлении уменьшения значения целевой функции. Направление этого ребра определяется столбцом $\hat{a}_q$ при $\hat{N} = B^{-1}N$, соответствующим x_q. При просмотре отношений компонентов вектора $\hat{b}$ к соответствующим положительным компонентам $\hat{a}_q$ находится первая базисная переменная для обнуления при росте x_q и, следовательно, шаг к следующей точке допустимого региона вдоль этого ребра.

Существует много стратегий выбора переменной x_q для ввода в базис. Первоначальное правило выбора переменной с наименьшей уменьшенной издержкой известно как критерий Данцига. Хотя, если компоненты $\hat{a}_j$ намного превосходят компоненты $\hat{c}_j$, только небольшое увеличение x_j возможно до того, как одна из базисных переменных обратится в ноль. Альтернативные ценовые стратегии взвешивают уменьшенную издержку путем деления на длину $\hat{a}_j$.