Министерство образования и науки Российской Федерации Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Южно-Уральский государственный университет»

(Национальный исследовательский университет)

Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического и компьютерного моделирования

Решение практических задач

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К КУРСОВОЙ РАБОТЕ по дисциплине «Теория принятия решений» ЮУрГУ-010400.62.2015.11-001-1909 КР

Преподава	атель,
	А.В. Панюков
« »	2016 г.
Автор раб	ОТЫ
студент гр	уппы ET-224
	В.А. Безбородов
« »	2016 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1	Задаг	ния для с	амо	ост	CO:	ЯТ	еј	ΙЬ	ΗC	ρй	p	al	бo	Τŀ	Ι									3
	1.1	Задание	1 .			٠			٠							٠	٠							3
	1.2	Задание	2 .									•			•									7
	1.3	Задание	3.									•			•									10
	1.4	Задание	4 .									•			•						٠			11
	1.5	Задание	5 .	•								•			•						•			12
	1.6	Задание	6.	•								•			•						•			16
2	Мето	д анализ	а ие	ера	ap	XV	ΙЙ																	17

1 Задания для самостоятельной работы

1.1 Задание 1

1.1.1 Постановка задачи

Является ли заданная матрица A матрицей парных сравнений? Для матрицы A найти приближенное \overline{W} и точное W значение главного собственного вектора. Оценить погрешность $\Delta \overline{W} = |\overline{W} - W|$. Определить, является ли матрица парных сравнений согласованной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1/4 & 1 & 3 & 2 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 3 \\ 1/8 & 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Ход решения

Метод парных сравнений заключается в сравнении изучаемых объектов между собой. Объекты сравниваются попарно по отношению к их воздействию ("весу", или "интенсивности") на общую для них (вышестоящую в иерархии) характеристику.

Для матрицы парных сравнений всегда должно выдерживаться соотношение, отвечающее условию: если при сравнении i-го объекта с j-м объектом ставится оценка a_{ij} , то при сравнении j-го объекта с i-м, оценка a_{ji} должна быть обратной.

Видно, что для матрицы A такое соотношение строго выдерживается для каждой оценки. Поэтому матрица $\mathbf A$ является матрицей парных сравнений.

Определим приближенное \overline{W} значение главного собственного вектора. Введем матрицу A (здесь и далее все вычисления выполняются на языке Julia; секция In соответствует введенному коду, секция Out - результатам вычислений; секции для удобства нумеруются).

In [1]:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Out[1]: $4x4 Array\{Float64,2\}$:
 $1.0 \quad 4.0 \quad 6.0 \quad 8.0$
 $0.25 \quad 1.0 \quad 3.0 \quad 2.0$
 $0.166667 \quad 0.3333333 \quad 1.0 \quad 3.0$
 $0.125 \quad 0.5 \quad 0.3333333 \quad 1.0$

Приближенное значение \overline{W} главного собственного вектора с некоторой точностью ε можно получить по формуле

$$\overline{W} = \lim_{k \to N} \frac{A^k e}{e^T A^k e}, e = (1, 1, K, 1)^T,$$

при таком N, что $|\overline{W}_i - \overline{W}_{i-1}| < \varepsilon$. Выберем ε такое, чтобы абсолютная разница текущего и предыдущего значений не превышала 9 знаков после запятой.

```
In [2]: eps = 1e-9
Out[2]: 1.0e-9
```

Введем единичный вектор, соответствующий размерности матрицы A.

```
In [3]: e = ones(size(A)[1])
Out[3]: 4-element Array{Float64,1}:

1.0

1.0

1.0

1.0
```

Выполним вычисления согласно приведенному алгоритму.

```
In [4]: num = A * e
      denom = e^{\,\raisebox{.4ex}{$\scriptscriptstyle \parallel}} \, * \, num
      prev = num / denom
      num = A * num
      denom = e ' * num
      next = num / denom
       while true
          prev = next
          num = A * num
          denom = e' * num
          next = num / denom
          result = abs(next - prev) .> eps
          done = true
          for r in result
             if !r
                 done = false
                 break
             end
          end
```

```
if \ done \\ break \\ end \\ end \\ approx = next \\ Out[4]: 4x1 \ Array{Float64,2}: \\ 0.623881 \\ 0.195949 \\ 0.113291 \\ 0.0668799
```

Таким образом, мы получили приближенное значение $\overline{\mathbf{W}}$ главного собственного вектора с точностью до 9 знаков после запятой.

Найдем аналитические представления максимального собственного числа и главного собственного вектора для матрицы A через ее элементы. Введем символьные обозначения для наддиагональных элементов матрицы и выполним вспомогательные вычисления.

```
In |5|: a = A|1, 2|
     b = A[1, 3]
     c = A[1, 4]
     d = A[2, 3]
     e = A[2, 4]
     f = A[3, 4]
     B = (d*f/e+e/d/f)+(a*e/c+c/a/e)+(b*f/c+c/b/f)+(a*d/b+b/a/d)
Out[5]: 11.916666666666688
In [6]: C = 3-(a*d*f/c+c/a/d/f)-(a*e/b/f+b*f/a/e)-(c*d/a/e)-(c*d/b/e+b*e/c/d)
Out[6]: -9.91666666666668
In [7]: x = B^2/2 + 8C - 8
Out[7]: -16.3298611111111
In [8]: y = (4(C+3)/3)^3
Out[8]: -784.3443072702335
In [9]: r = Float64((x+sqrt(Complex(y)+x^2))^(1/3) +
(x-sqrt(Complex(y)+x^2))^(1/3)
Out[9]: 4.5214327417548645
   Вычислим точное значение \lambda_{\max} максимального собственного числа.
```

In [10]: lmax = Float64((2+sqrt(r+4))/2 + sqrt((8-r)/4) + B/(2sqrt(r+4)))

```
Определим точное значение главного собственного вектора.
In [11]: Q = (lmax-1)^3 + (c+f+e)*(lmax-1)^2 +
((a*e-3)+(b+d)f+c/a+c/b+e/d)*(lmax-1) +
(a*d*f-c-e-f+(b*e/d+b*f/a)+(c*d+a*e-a*d)/b+(c-b)/a/d)
Out[11]: 537.2229210859609
In [12]: first = c^*(lmax-1)^2 + (a^*e+b^*f)^*(lmax-1) + (a^*d^*f+b^*e/d-c)
Out[12]: 304.4932032342129
In [13]: second = e^*(lmax-1)^2 + (d^*f+c/a)^*(lmax-1) + (b^*f/a+c^*d/b-e)
Out[13]: 94.57288211091533
In [14]: third = f^*(lmax-1)^2 + (e/d+c/b)^*(lmax-1) + (c/a/d+a^*e/b-f)
Out[14]: 66.82733896987288
In [15]: fourth = (lmax-1)^3 - 3*(lmax-1) - (b/a/d+a*d/b)
Out[15]: 71.32949677095984
In [16]: accurate = [first; second; third; fourth]
Out[16]: 4-element Array{Float64,1}:
       304.493
        94.5729
        66.8273
        71.3295
   Вычислим точное значение \overline{\mathbf{W}} главного собственного вектора.
In [17]: accurate \neq Q
Out[17]: 4-element Array{Float64,1}:
       0.566791
       0.17604
       0.124394
       0.132774
   Оценим погрешность \Delta \overline{W} = |\overline{W} - W|.
In [18]: abs(accurate - approx)
Out[18]: 4x1 Array{Float64,2}:
       0.0570894
       0.0199085
       0.0111034
       0.0658946
```

Out[10]: 5.433240289413801

Расчеты показывают, что абсолютная разница между точным и приближенным значениями главного собственного вектора составляет не более 10%.

Вычислим ранг матрицы A.

```
In [19]: rank(A)
Out[19]: 3
```

Ранг, не равный 1, означает, что матрица A не является согласованной.

- 1.2 Задание 2
- 1.2.1 Постановка задачи

Преобразовать матрицу парных стравнений A из задания 1 таким образом, чтобы она стала абсолютно согласованной. При этом оставить без изменений: * первую строку матрицы, * последнюю строку матрицы.

1.2.2 Ход решения

Матрица A из задания 1 имеет вид.

```
In [20]: A
```

Добьемся абсолютной согласованности матрицы, не изменяя первую строку. Запомним исходные значения первого столбца матрицы.

```
In [21]: tmp = deepcopy(A)

origin = A[:,1]

Out[21]: 4-element Array{Float64,1}:

1.0

0.25

0.166667

0.125
```

Для каждой из строк (2-3) будем последовательно вычитать строку (1), умноженную на первый элемент текущей строки для обнуления первого столбца.

```
In [22]: for i in 2:size(origin)[1]
          A[i,:] -= A[i,1] * A[1,:]
       end
       Α
Out[22]: 4x4 Array{Float64,2}:
             4.0
        1.0
                       6.0
        0.0
             0.0
                       1.5
                                0.0
        0.0 - 0.333333 - 0.0
                                  1.66667
        0.0 - 0.0
                      -0.416667 0.0
```

Обнулим все элементы получившейся матрицы, кроме элементов 1-го столбца и 1-ой строки.

```
In [23]: A[2:4, 2:4] = 0
A
Out[23]: 4x4 Array\{Float64, 2\}:

1.0 4.0 6.0 8.0
0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0
```

"Вернем" сделанные изменения обратно. После этого имеем матрицу, полученную путем применения преобразований Жордана-Гаусса к исходной матрице без изменения первой строки.

```
In [24]: for i in 2:size(origin)[1] A[i,:] += \text{origin}[i] * A[1,:] end A Out[24]: 4x4 \text{ Array}\{\text{Float}64,2\}: 1.0 \quad 4.0 \quad 6.0 \quad 8.0 0.25 \quad 1.0 \quad 1.5 \quad 2.0 0.166667 \quad 0.666667 \quad 1.0 \quad 1.33333 0.125 \quad 0.5 \quad 0.75 \quad 1.0
```

Вычислим ранг полученной матрицы.

```
In [25]: rank(A)
Out[25]: 1
```

Ранг равен 1. Это означает, что полученная матрица абсолютно согласована.

Теперь проделаем то же самое, только на этот раз оставим неизменной последнюю строку.

In [26]:
$$A = tmp$$

```
Out[26]: 4x4 Array{Float64,2}:
        1.0
                 4.0
                           6.0
                                    8.0
        0.25
                           3.0
                  1.0
                                    2.0
        0.166667 \ 0.3333333 \ 1.0
                                        3.0
        0.125
                           0.3333331.0
                  0.5
In [27]: origin = A[:,4]
Out[27]: 4-element Array{Float64,1}:
        8.0
        2.0
        3.0
        1.0
In [28]: for i in 1:\text{size}(A)[1]-1
           A[i,:] -= A[i,4] * A[4,:]
       end
       Α
Out[28]: 4x4 Array{Float64,2}:
         0.0
                   0.0
                           3.33333
                                      0.0
                   0.0
                           2.33333
         0.0
                                      0.0
        -0.208333 -1.16667 0.0
                                        0.0
         0.125
                    0.5
                            0.333333 1.0
In [29]: A[1:3, 1:3] = 0
       Α
Out[29]: 4x4 Array{Float64,2}:
               0.0 \ 0.0
        0.0
                             0.0
        0.0
               0.0 \ 0.0
                             0.0
        0.0
               0.0 \ 0.0
                             0.0
        0.125 \ 0.5 \ 0.3333333 \ 1.0
In [30]: for i in 1:size(origin)[1]-1
           A[i,:] += origin[i] * A[4,:]
       end
       Α
Out[30]: 4x4 Array{Float64,2}:
               4.0 2.66667
        1.0
        0.25 \quad 1.0 \quad 0.666667 \quad 2.0
        0.375 \ 1.5 \ 1.0
                              3.0
        0.125 \ 0.5 \ 0.3333333 \ 1.0
In [31]: rank(A)
Out[31]: 1
```

Таким образом, получили абсолютно согласованную матрицу, не изменяя последнюю строку.

1.3 Задание 3

1.3.1 Постановка задачи

Найдите агрегированную оценку двух экспертов, если матрица парных сравнений первого эксперта имеет вид, представленный в задании 1, а матрица парных сравнений второго имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 8 \\ 1/3 & 1 & 4 & 5 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 3 \\ 1/8 & 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.2 Ход решения

0.125

Для объединения оценок суждений двух экспертов строится матрица с средним геометрическим оценок. В данной задаче будем считать, что суждения двух экспертов обладают одинаковой степенью значимости. Введем оценки первого (A_1) и второго (A_2) экспертов.

```
In [1]: A1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3
Out[1]: 4x4 Array{Float64,2}:
                                                                                                                     4.0
                                                                                                                                                                                     6.0
                                                                                                                                                                                                                                                      8.0
                                                      1.0
                                                      0.25
                                                                                                                        1.0
                                                                                                                                                                                                                                                          2.0
                                                                                                                                                                                        3.0
                                                      0.166667 \ \ 0.3333333 \ \ 1.0
                                                                                                                                                                                                                                                                                   3.0
                                                      0.125 \quad 0.5 \quad 0.3333333 \quad 1.0
In [2]: A2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}; 1/3 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}; 1/6 & 1/4 & 1 & 3 \end{bmatrix}; 1/8 & 1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}
Out[2]: 4x4 Array{Float64,2}:
                                                     1.0
                                                                                                                     3.0 6.0
                                                     0.33333331.04.0
                                                                                                                                                                                                                                              5.0
                                                     0.166667 \ 0.25 \ 1.0
                                                                                                                                                                                                                                                 3.0
```

Построим результирующую матрицу A со средним геометрическим оценок.

In [3]: using Stats
$$A = map((x, y) -> geomean([x, y]), A1, A2)$$
 Out[3]: 4x4 Array{Float64,2}:
$$1.0 \quad 3.4641 \quad 6.0 \quad 8.0$$

$$0.288675 \quad 1.0 \quad 3.4641 \quad 3.16228$$

$$0.166667 \quad 0.288675 \quad 1.0 \quad 3.0$$

$$0.125 \quad 0.316228 \quad 0.3333333 \quad 1.0$$

 $0.2 \quad 0.3333333 \quad 1.0$

Таким образом, получили агрегированную оценку двух экспертов при условии, что суждения экспертов обладают одинаковой степенью значимости.

1.4 Задание 4

1.4.1 Постановка задачи

Найти агрегированную оценку экспертов из задания 3, при условии, что квалификация первого эксперта имеет вес 3 (первый эксперт более квалифицированный), а второго - 1.

1.4.2 Ход решения

Расчет агрегированной оценки в случае привлечения n экспертов, имеющих различную значимость $\alpha_k,\ k=\overline{1,n},$ осуществляется по формуле:

$$\alpha_{ij} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{ij}^{\alpha_k}}, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1.$$

Введем в рассмотрение веса w^s (квалификацию) экспертов.

Рассчитаем значимость суждения каждого эксперта таким образом, чтобы общая значимость была равна 1.

```
In [5]: a = [w / sum(ws) for w in ws]
Out[5]: 1x2 Array{Float64,2}:
0.75 0.25
```

Рассчитаем результирующую матрицу.

```
In [6]: A = map((x, y) -> geomean([x^a[1], y^a[2]]), A1, A2)

Out[6]: 4x4 Array\{Float64, 2\}:

1.0 1.92936 2.44949 2.82843

0.518307 1.0 1.79547 1.58583

0.408248 0.556957 1.0 1.73205

0.353553 0.630583 0.57735 1.0
```

Таким образом, получили агрегированную оценку двух экспертов при условии, что суждения экспертов обладают разной степенью значимости.

1.5 Задание 5

1.5.1 Постановка задачи

Для иерархической структуры, представленной на рисунке, определите приоритет провайдера, выполнив иерархический синтез.

Матрица сравнения критериев относительно цели имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1/3 \\ 1/7 & 1/2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы сравнения альтернатив относительно критериев считаются заданными.

1.5.2 Ход решения

Иерархический синтез используется для общего ранжирования альтернатив относительно цели, т.е. для подсчета количественной оценки качества альтернатив. Действовать будем согласно алгоритму.

Шаг 1. Для каждого элемента иерархии построить матрицы парных сравнений элементов иерархии следующего уровня. На первом уровне иерархии будем использовать матрицу сравнения относительно удовлетворения провайдером [УП].

$$[\mathbb{Y}\Pi] = \begin{pmatrix} & \underline{T} & \underline{C} & \underline{\mathcal{H}} & \underline{O} & \underline{\mathbb{Y}} \\ T & | & 1 & 4 & 6 & 2 & 7 \\ C & | & 1/4 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ \underline{\mathcal{H}} & | & 1/6 & 1/3 & 1 & 2 & 1 \\ O & | & 1/2 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1/3 \\ \underline{\mathbb{Y}} & | & 1/7 & 1/2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

In [1]: A = [1 4 6 2 7; 1/4 1 3 4 2; 1/6 1/3 1 2 1; 1/2 1/4 1/2 1 1/3; 1/7 1/2 1 3 1] Out[1]: 5x5 Array{Float64,2}:

- 1.0 4.0 6.0 2.0 7.0
- 0.25 1.0 3.0 4.0 2.0
- $0.166667 \ 0.3333333 \ 1.0 \ 2.0 \ 1.0$
- $0.5 \qquad 0.25 \qquad 0.5 \ 1.0 \ 0.333333$
- $0.142857 \quad 0.5 \qquad \quad 1.0 \quad 3.0 \quad 1.0$

Введем функцию вычисления приближенных значений максимального собственного числа и главного собственного вектора.

```
In [2]: function eigvalvecapprox(A)
        eps = 1e-9
        e = ones(size(A)[1])
        num = A * e
        denom = e * * num
        prev = num / denom
        num = A * num
        denom = e * * num
        next = num / denom
        while true
           prev = next
           num = A * num
           denom = e^{*} * num
           next = num / denom
           result = abs(next - prev) .> eps
           done = true
           for r in result
              if !r
                 done = false
                 break
              end
           end
           if done
              break
           end
        end
        Wa = next
        lmax = (e^* * A * Wa) / (e^* * Wa)
        return lmax[1], Wa
     end
Out[2]: eigvalvecapprox (generic function with 1 method)
   Вычислим приближенные значения максимального собственного чис-
ла и главного собственного вектора для матрицы A.
In [3]: val, vec = eigvalvecapprox(A)
Out[3]: (5.643273525681777,
```

Введем функцию для вычисления индекса однородности (индекса со-

 $[0.505324; 0.205149; \dots; 0.0867938; 0.110393])$

```
гласованности)
```

$$I_S = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}.$$

```
In [4]: function ids(lmax, n)
return (lmax - n) / (n - 1)
end
```

Out[4]: ids (generic function with 1 method)

Вычислим индекс однородности для матрицы A.

In [5]: Is = ids(val, size(A)[1])Out[5]: 0.16081838142044425

Также, потребуется функция для вычисления отношения однородности (отношения согласованности)

$$R_S = \frac{I_S}{\hat{I}_S}.$$

```
In [6]: function rs(idx, n)
mean = 0
if n == 3
mean = 0.58
elseif n == 4
mean = 0.9
elseif n == 5
mean = 1.12
end
return idx / mean
end
```

Out[6]: rs (generic function with 1 method)

Вычислим отношение однородности для матрицы A.

In [7]: Rs = rs(Is, size(A)[1])Out[7]: 0.14358784055396806

```
\begin{array}{l} \text{In [8]: As = []} \\ \text{push!(As, [1\ 4\ 6\ 8;\ 1/4\ 1\ 3\ 2;\ 1/6\ 1/3\ 1\ 3;\ 1/8\ 1/2\ 1/3\ 1])} \\ \text{push!(As, [1\ 3\ 6\ 9;\ 1/3\ 1\ 1/4\ 2;\ 1/6\ 4\ 1\ 3;\ 1/9\ 1/2\ 1/3\ 1])} \\ \text{push!(As, [1\ 8\ 3\ 2;\ 1/8\ 1\ 3\ 2;\ 1/3\ 1/3\ 1\ 1;\ 1/2\ 1/2\ 1\ 1])} \\ \text{push!(As, [1\ 4\ 6\ 1;\ 1/4\ 1\ 3\ 2;\ 1/6\ 1/3\ 1\ 3;\ 1\ 1/2\ 1/3\ 1])} \\ \text{push!(As, [1\ 3\ 2\ 8;\ 1/3\ 1\ 1/4\ 1/2;\ 1/2\ 1/4\ 1\ 3;\ 1/8\ 2\ 1/3\ 1])} \end{array}
```

Для каждой из матриц найти максимальные собственные значения (они потребуются для оценки однородности суждений) и главные собственные векторы, элементы которых равны приоритетам соответствующих элементов следующего уровня иерархии. Для этого воспользуемся алгоритмом вычисления точного значения максимального собственного числа и главного собственного вектора из задания 1, который оформим в виде функции.

```
In [9]: function eigvalvecaccurate(A)
         a = Complex(A[1, 2])
        b = Complex(A[1, 3])
        c = Complex(A[1, 4])
         d = Complex(A[2, 3])
         e = Complex(A[2, 4])
        f = Complex(A[3, 4])
        B = (d^*f/e + e/d/f) + (a^*e/c + c/a/e) + (b^*f/c + c/b/f) + (a^*d/b + b/a/d)
        C = 3-(a*d*f/c+c/a/d/f)-(a*e/b/f+b*f/a/e)-(c*d/a/e)-(c*d/b/e+b*e/c/d)
        x = B^2/2 + 8C-8
        y = (4(C+3)/3)^3
        r = (x+sqrt(y+x^2))^(1/3) + (x-sqrt(y+x^2))^(1/3)
        lmax = (2+sqrt(r+4))/2 + sqrt((8-r)/4) + B/(2sqrt(r+4))
         Q = (lmax-1)^3 + (c+f+e)*(lmax-1)^2 +
         ((a*e-3)+(b+d)f+c/a+c/b+e/d)*(lmax-1) +
         (a*d*f-c-e-f+(b*e/d+b*f/a)+(c*d+a*e-a*d)/b+(c-b)/a/d)
         first = c*(lmax-1)^2 + (a*e+b*f)*(lmax-1) + (a*d*f+b*e/d-c)
        second = e^*(lmax-1)^2 + (d^*f+c/a)^*(lmax-1) + (b^*f/a+c^*d/b-e)
         third = f^*(lmax-1)^2 + (e/d+c/b)^*(lmax-1) + (c/a/d+a*e/b-f)
        fourth = (lmax-1)^3 - 3*(lmax-1) - (b/a/d+a*d/b)
         accurate = [first; second; third; fourth]
         accurate /= Q
         return lmax, accurate
     end
Out[9]: eigvalvecaccurate (generic function with 1 method)
In [10]: Vals = []
      Vecs = []
      Iss = []
      Rss = []
      for A in As
         maxval, mainvec = eigvalvecaccurate(A)
         Is = ids(maxval, size(A)[1])
```

```
Rs = rs(Is, size(A)[1])
push!(Vals, real(maxval))
push!(Vecs, map(real, mainvec))
push!(Iss, real(Is))
push!(Rss, real(Rs))
end
```

Выполним иерархический синтез.

Таким образом, видно, что в системе предпочтений индивидуума наибольший приоритет имеет провайдер 1 ("Связьинформ").

- 1.6 Задание 6
- 1.6.1 Постановка задачи

Оценить отношение согласованности иерархии из задания 5.

1.6.2 Ход решения

Завершается алгоритм анализом однородности построенной иерархии. Для этого вычислим индекс однородности и отношение однородности в соответствии с третьим шагом алгоритма.

```
\begin{split} & \text{In [12]: I = real(Is + vec " * Iss)} \\ & \text{Out[12]: 1-element Array{Float64,1}:} \\ & \text{1.05641} \\ & \text{In [13]: Ihat = real(Rs + vec " * Rss)} \\ & \text{Out[13]: 1-element Array{Float64,1}:} \\ & \text{1.17379} \\ & \text{In [14]: Rs = I / Ihat} \\ & \text{Out[14]: 1x1 Array{Float64,2}:} \\ & \text{0.9} \\ \end{split}
```

Однородность иерархии принято считать удовлетворительной при $R_s \leq 0.1$. Неудовлетворительную однородность построенной иерархии можно объяснить тем, что на шаге 1 были построены несогласованные матрицы.

2 Метод анализа иерархий

С задачами принятия решений человек сталкивается повседневно. При этом в ситуациях, когда последствия принимаемых решений не связаны с заметным материальным или социальным ущербом, предпочтение отдается, как правило, той или иной альтернативе на основании интуиции и опыта субъекта, осуществляющего выбор.

Однако существует и другой класс задач принятия решений, которые можно охарактеризовать как "ответственные". Это задачи, где принятые решения влияют на разработку сложных систем, которыми будут пользоваться тысячи человек. В таких задачах лицо (лица), принимающее решение, зачастую должно учитывать не только множество критериев качества, но и различные цели, которые преследуют различные участники.

Рассмотрим следующую задачу выбора. Необходимо принять решение о разработке новой программной системы. При этом существуют различные подходы к процессу разработки (см. рисунок 1).



Чтобы понять, какая из альтернатив предпочтительнее, необходимо произвести экспертную оценку и проанализировать доминантные иерархии (один из методов принятия решений).

Конечный результат определяется различными социальными группами (акторами) и целями, которые преследуют акторы.

Какой из акторов обладает наибольшим										
влиянием на разработку системы?										
Решение о	Испол-	Заказ-	Пользо-	Собственный						
разработке	нитель	чик	ватель	вектор						
Испол-	1	0.41	0.70	0.2103						
нитель	1	0.11	0.10	3.2100						
Заказ-	2.47	1	0.70	0.3813						
чик	2.11	1	0.10	0.0010						
Пользо-	1.45	1.45	1	0.4086						
Ватель										
λ_{max} 3.11										
			R_s	0.095						

Наибольшее влияние на разработку системы имеют заказчик и пользователь

Какие из целей важнее для исполнителя?											
Испол- нитель	Эконо- мия денег при разра- ботке	Эконо- мия времени при разра- ботке	Архи- тектура системы	Интер- фейс системы	Собственный вектор						
Эконо- мия денег при разра- ботке	1	0.59	0.15	0.20	0.0640						
Эконо- мия времени при разра- ботке	1.71	1	0.17	0.24	0.0898						
Архи- тектура системы	6.81	6.09	1	1.92	0.5228						
Интер- фейс системы	5.13	4.33	0.53	1	0.3236						
				λ_{max}	4.07						
				R_s	0.026 интерфейс системы						

Какие из целей важнее для заказчика?											
Заказ- чик	Эконо- мия денег при разра- ботке	Эконо- мия времени при разра- ботке	Архи- тектура системы	Интер- фейс системы	Собственный вектор						
Эконо- мия денег при разра- ботке	1	0.59	5.13	0.85	0.2528						
Эконо- мия времени при разра- ботке	1.71	1	6.09	1.00	0.3587						
Архи- тектура системы	0.20	0.17	1	0.15	0.0532						
Интер- фейс системы	1.19	1.00	6.81	1	0.3355						
				R_s	4.05 0.019						

Для заказчика важнее всего экономия времени при разработке и интерфейс системы

Какие из целей важнее для пользователя?										
Поль- зова- тель	Эконо- мия денег при разра- ботке	Эконо- мия времени при разра- ботке	Архи- тектура системы	Интер- фейс системы	Собственный вектор					
Эконо- мия денег при разра- ботке	1	0.59	1.71	0.14	0.1085					
Эконо- мия времени при разра- ботке	1.71	1	1.71	0.34	0.1763					
Архи- тектура системы	0.59	0.59	1	0.14	0.0833					
Интер- фейс системы	7.40	3.01	7.40	1	0.6321					
				λ_{max}	4.09					
	R_s 0.034									
Для пользователя важнее всего интерфейс системы										