Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(Национальный исследовательский университет)
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического и компьютерного моделирования

Практические занятия

Дискретная математика

ОТЧЕТ ПО ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ
ЮУрГУ-010400.68.2017.049.001 КР

Руководитель от кафедры,
к.ф.-м.н., доцент
______________ Т.А. Макаровских
«   » __________ 2016 г.

Руководитель от предприятия,
к.т.н., доцент
______________ В.И. Дударева
«   » __________ 2016 г.

Автор проекта
студент группы ЕТ-213
______________ В.А. Безбородов
«   » __________ 2016 г.

Проект защищен
с оценкой
____
«   » __________ 2016 г.

Челябинск, 2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(Национальный исследовательский университет)
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического и компьютерного моделирования

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н., доцент
_____________ Загребина С.А.
«   » __________ 2016 г.

З А Д А Н И Е

на педагогическую практику студента

Безбородова Вячеслава Александровича

Группа ЕТ-213

1. Тема работы: Практические занятия по дискретной математике.
2. Срок сдачи студентом законченной работы «   » __________ 2016 г.
3. Исходные данные к работе
   3.1. Учебное пособие по комбинаторике и теории графов [1];
   3.2. Издательская система компьютерной верстки LaTeX.
4. Перечень вопросов, подлежащих разработке
   4.1. Изучить педагогический опыт преподавания дискретной математики;
   4.2. Изучить опыт и систему воспитательной работы преподавателя;
   4.3. Овладеть методикой подготовки и проведения практического занятия;

4.4. Обучить студентов методам мышления, характерным для дискретной математики, основным понятиям комбинаторики и теории графов;
4.5. Развить навыки алгоритмического мышления;
4.6. Разработка отчетной документации (дневника), в котором отражены основные этапы работы (по дням).

5. Перечень графического материала
   5.1. Бинарное дерево – 1 л.
   5.2. Граф для нахождения минимального остовного дерева – 1 л.
   5.3. Граф для решения задачи единого среднего – 1 л.
   5.4. Граф для нахождения кратчайшего пути – 1 л.
   5.5. Граф для нахождения максимального потока в сети – 1 л.
   5.6. Начальный поток – 1 л.
   5.7. Поток 1 – 1 л.
   5.8. Поток 2 – 1 л.
   5.9. Поток 3 – 1 л.
   5.10. Максимальный поток – 1 л.

6. Календарный план

Наименование этапов педагогической практики	Срок выполнения этапов	Отметка о выполнении
1. Сбор материалов и литературы по теме педагогической практики	10.09.2015 г.	
2. Проведение практических занятий		
Занятие 1	11.09.2015 г.	
Занятие 2	18.09.2015 г.	
Занятие 3	25.09.2015 г.	
Занятие 4	02.10.2015 г.	
Занятие 5	09.10.2015 г.	
Занятие 6	23.10.2015 г.	
Занятие 7	30.10.2015 г.	
Занятие 8	06.11.2015 г.	
Занятие 9	13.11.2015 г.	
Занятие 10	20.11.2015 г.	
Занятие 11	27.11.2015 г.	
Занятие 12	04.12.2015 г.	
Занятие 13	11.12.2015 г.	
Занятие 14	18.12.2015 г.	
3. Оформление дневника практики	24.11.2016 г.	
4. Проверка дневника практики руководителем, исправление замечаний	08.12.2016 г.	
5. Подготовка графического материала и доклада	16.12.2016 г.	
6. Защита педагогической практики	24.12.2016 г.	

7. Дата выдачи задания «___» _________ 2015 г.

Заведующий кафедрой______________________________/Загребина С.А./

Руководитель работы______________________________/В.И. Дударева/

Студент____/В.А. Безбородов/

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Практика (педагогическая) предусмотрена как один из компонентов основной образовательной программы подготовки магистров.

Педагогическая практика в системе высшего образования является компонентом профессиональной подготовки к научно-педагогической деятельности в высшем учебном заведении.

Педагогическая практика проводилась на базе Южно-Уральского государственного университета, руководитель практики: к.т.н., доцент В.И. Дударева.

Цели педагогической практики:

- осмысление сущности и целостности педагогического процесса,
- подготовка к преподавательской деятельности в ВУЗе,
- овладение основами учебно-методической и воспитательной работы,
- формирование педагогических навыков и умений ведения практических занятий по дискретной математике.

Задачи практики:

- изучить педагогический опыт преподавания дискретной математики;
- изучить опыт и систему воспитательной работы преподавателя;
- овладеть методикой подготовки и проведения практического занятия.

Практика проводилась в период с 11.09.2015 по 25.12.2015.

Работа состоит из введения, 3 глав, заключения, 1 приложения и списка литературы. Объем работы составляет 41 страниц. Список литературы содержит 1 наименование.

В первой главе даются общие положения по педагогической практике магистров.

Во второй главе описывается план практических занятий.

В третьей главе приводится содержание всех проведенных практических занятий с краткими комментариями, самостоятельных работ и примеров решения типичных задач.

В заключении перечислены основные результаты прохождения педагогической практики.

1 Общие положения

Практика студентов является составной частью основной образовательной программы высшего профессионального учреждения.

Организатором педагогической практики является кафедра, за которой закреплена подготовка магистров по соответствующей научной специальности. Руководителем педагогической практики является научный руководитель.

Документальное обеспечение учебного процесса определяется образовательным стандартом программ по соответсвующим программам подготовки и педагогическим практикам с рекомендациями по организации практики студентов образовательных учреждений высшего профессионального образования.

В ходе педагогических практик студентам предоставляется возможность реализовать приоритетные направления педагогической деятельности, образовательные технологии, приемы педагогического взаимодействия.

В соответствии с п. 4.4 федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриата) (утвержден приказом от 12 марта 2015 г. №228), выпускник-практикант, освоивший программу бакалавриата, в соответствии с видом (видами) профессиональной деятельности, на который (которые) ориентирована программа бакалавриата, должен быть готов решать в том числе следующие профессиональные задачи:

- преподавание физико-математических дисциплин и информатики в общеобразовательных и профессиональных образовательных организациях;
- разработка методического обеспечения учебного процесса в общеобразовательных и профессиональных образовательных организациях;
- владение методами электронного обучения.

В соответствии с требованиями к организации практики на факультете Вычислительной математики и информатики разработаны и утверждены положения о практике студентов с учетом специфики подготовки специалистов.

Сроки проведения практики устанавливаются вузом в соответствии с учебным планом и годовым календарным учебным графиком.

Студентам, имеющим стаж практической работы по профилю подготовки, по решению соответствующей кафедры на основе аттестации может быть зачтена учебная и преддипломная практики.

Продолжительность рабочего дня для студентов при прохождении практики составляет:

- для студентов в возрасте от 16 до 18 лет не более 36 часов в неделю;
- для студентов в возрасте от 18 и старше не более 40 часов в неделю.

На практикантов распространяются правила охраны труда и правила внутреннего распорядка действующие в организациях.

Для организации педагогических практик предусматривается выделение учебного времени, свободного от академических занятий.

В процессе прохождения педагогической практики магистр должен овладеть основами научно-методической и учебно-методической работы:

1) навыками структурирования и психологически грамотного преобразования научного знания в учебный материал;
2) систематизации учебных и воспитательных задач;
3) методами и приемами составления задач, упражнений, тестов по различным темам, устного и письменного изложения предметного материала, разнообразными образовательными технологиями.

В ходе практической деятельности по ведению учебных занятий должны быть сформированы умения постановки учебно-воспитательных целей, выбора типа, вида занятия, использования различных форм организации учебной деятельности студентов; диагностики, контроля и оценки эффективности учебной деятельности.

В ходе посещения занятий преподавателей соответствующих дисциплин магистр должен познакомиться с различными способами структурирования и предъявления учебного материала, способами активизации учебной деятельности, особенностями профессиональной риторики, с различными способами и приемами оценки учебной деятельности в высшей школе, со спецификой взаимодействия в системе «студент-преподаватель».

По итогам выполнения программного модуля практики студент получает комплексную оценку. В случае получения неудовлетворительной оценки педагогическая практика продлевается по согласованию с деканатом.

Оценка по практике или зачет приравнивается к оценкам (зачетам по теоретическому обучению) и учитывается при проведении итогов общей успеваемости студентов.

2 План практических занятий

При разработке плана практических занятий необходимо не забывать о разных сторонах одного процесса: что нужно делать, чтобы спокойно преподавать и что нужно сделать, чтобы курсы были хорошие в смысле качества и объема предлагаемого материала.

Федеральный закон "Об образовании в Российской Федерации"№ 273-ФЗ от 29 декабря 2012 года с изменениями 2015-2016 года гласит, что «организация образовательного процесса в образовательном учреждении регламентируется учебным планом (разбивкой содержания образовательной программы по учебным курсам, по дисциплинам и по годам обучения), годовым календарным учебным графиком и расписаниями занятий, разрабатываемыми и утверждаемыми образовательным учреждением самостоятельно».

Это, в свою очередь, означает, что любая учебная программа курса (или учебный план дисциплины) должна иметь некоторый обязательный набор характеристик, который опишем ниже.

Название. Практические занятия по комбинаторике и теории графов.

Выходные данные автора программы. Макаровских Татьяна Анатольевна, доцент, кандидат физико-математических наук (2006).

Требования к слушателям. Студенты специальностей "Прикладная информатика в экономике "Математические методы в экономике"Южно-Уральского государственного университета.

Характеристика изучаемой дисциплины и ее место в системе образования. Дискретная математика — часть математики, изучающая дискретные математические структуры, такие, как графы и утверждения в логике. В рамках учебных программ дискретная математика обычно рассматривается как совокупность разделов, связанных с приложениями к информатике и вычислительной технике: теория функциональных систем, теория графов, теория автоматов, теория кодирования, комбинаторика, целочисленное программирование. Дискретная математика и примыкающие к ней дисциплины изучаются во всех университетах, где осуществляется подготовка специалистов в областях программирования, математики, экономики, а также по техническим и гуманитарным дисциплинам.

Формат занятий и виды контроля. Практические занятия по дисциплине подразумевают повторение и закрепление знаний, полученных в ходе лекций. Каждое занятие должно включать в себя проверку домашнего задания, работу у доски и разбор нового материала. Виды контроля включают в себя *регулярный* (минитесты на каждом практическом занятии по предыдущей теме, 5-7 мин.), *промежуточный* (проведение 3-х контрольных по завершении соответствующих блоков) и *итоговый* (экзамен).

Содержание дисциплины. Программа курса включает в себя решение практических задач по следующим основным разделам.

1) Множества и операции над ними:
   - множества;
   - способы задания множеств;
   - операции над множествами;
   - свойства операций над множествами.
2) Метод математической индукции:
   - решение практических задач.
3) Основные принципы комбинаторики:
   - правило произведения;
   - правило сложения.
4) Размещения, перестановки, сочетания:
   - выборки и размещения;
   - сочетания;
   - перестановки с повторениями;
   - полиномиальная формула.
5) Комбинаторные тождества:
   - решение практических задач.
6) Формирование перестановок и сочетаний:
   - перестановки;
   - сочетания;

- размещения без повторений;
- сочетания с повторениями.

7) Принцип включения-исключения:
   - решение практических задач.
8) Введение в теорию графов, основные понятия и определения:
   - основные определения;
   - лемма о рукопожатиях;
   - вершинная и реберная связность.
9) Способы представления графов и методы просмотра вершин:
   - матрица инцидентности;
   - матрица смежности;
   - списки смежности;
   - поиск в глубину;
   - поиск в ширину.
10) Деревья и леса:
    - числовые параметры, характеризующие ориентированное дерево;
    - бинарные деревья;
    - сортировка;
    - бинарные деревья поиска;
    - остовные деревья;
    - матричная формула Кирхгофа.
11) Эйлеровы и гамильтоновы графы:
    - эйлеровы графы и задача о Кенигсбергских мостах;
    - гамильтоновы графы и задача коммивояжера;
    - связь между эйлеровыми и гамильтоновыми циклами.
12) Двудольные графы и паросочетания:
    - двудольные графы;
    - паросочетания;
    - задача о назначениях.
13) Укладки графов:
    - свойства планарных графов;

- формула Эйлера;
- критерий планарности графа;
- алгоритм укладки графа на плоскости.

14) Нахождение кратчайших путей в графе:
    - решение практических задач.
15) Задачи сетевого планирования:
    - правила построения сетевых графиков;
    - метод критического пути;
    - управление проектами с неопределенным временем выполнения работ;
    - оптимизация сетевого графика.
16) Потоки в сетях:
    - алгоритм Форда и Фалкерсона;
    - метод блокирующих потоков.
17) Раскраска графов:
    - точный алгоритм раскрашивания;
    - приближенный алгоритм последовательного раскрашивания;
    - улучшенный алгоритм последовательного раскрашивания;
    - клики и независимые множества.

Учебно-методическое обеспечение дисциплины. Для лучшего усвоения курса рекомендуется использовать следующую литературу: Панюкова, Т. Комбинаторика и теория графов: Учебное пособие. Изд. 3-е, испр. / Т.А. Панюкова. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 2016 с.

3 Дневник практики

В этом разделе приводится содержание всех проведенных практических занятий с краткими комментариями, самостоятельных работ и примеров решения типичных задач.

Занятие 1

Цель занятия. Введение в дисциплину. Определение понятий: дискретная математика, множество. Таблицы истинности логических операций: конъюнкция, дизъюнкция, исключающее или, отрицание, импликация. Операции над множествами: объединение, объединение семейства, пересечение, пересечение семейства, разность, симметрическая разность, декартово произведение, декартова степень. Свойства операций над множествами: законы идемпотентности, двойное дополнение, законы де Моргана, коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, свойства тождества, свойства дополнения. Алгоритм нахождения всех положительных делителей данного числа.

Внутриклассные задания.[1] 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.10.

Задания на дом. 1.9, 1.11, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16.

Примеры задач

Задача. Привести примеры задания множеств с помощью характеристического признака.

Решение.

- $\{(a,b,c) \mid a^2+b^2=c^2,\ a,b,c \in \mathbb{N},\ a,b,c > 0\}$ – множество всех Пифагоровых троек.
- $\{a^2 \mid a \in \mathbb{N},\ a \vdots 2\}$ – множество всех точных четных квадратов.

Задача. Пусть $A = \{2,3,5,6,9\}$, $B = \{10,5,2,6\}$. Определить $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Решение.

[1] Согласно учебнику [1].

- $A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 9, 10\}$
- $A \cap B = \{2, 5, 6\}$
- $A \backslash B = \{3, 9\}$
- $\overline{A} = \{1, 4, 7, 8\}$ (при $U = \{1, \ldots, 9\}$)
- $\overline{B} = \{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$ (при $U = \{1, \ldots, 10\}$)

Занятие 2

Цель занятия. Метод математической индукции: база индукции, индукционный шаг. Основные принципы комбинаторики: правило произведения, правило сложения.

Внутриклассные задания. 2.1, 2.2, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.12, 3.14, 3.17, 3.18, 3.20, 3.21, 3.23, 3.24.

Задания на дом. 2.3, 2.4, 3.11, 3.19, 3.22, 3.25.

Самостоятельная работа

Вариант 1.

1) Определение дискретной математики.
2) Таблица истинности для исключающего или.
3) Разность множеств.
4) Ассоциативность.

Вариант 2.

1) Определение множества.
2) Таблица истинности для импликации.
3) Симметрическая разность множеств.
4) Дистрибутивность.

Примеры задач

Задача. С помощью метода математической индукции доказать, что

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Решение. Пусть утверждение $P(k)$ истинно, т.е.

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1 \qquad \text{(верно).}$$

Докажем, что $P(k+1)$ истинно.

$$P(k+1) = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Что и требовалось доказать.

Задача. В меню столовой 3 первых блюда, 5 вторых и 3 третьих. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд (первое, второе и третье)?

Решение. По правилу произведения имеем

$$3 \cdot 5 \cdot 3 = 45.$$

Обед из трех блюд можно выбрать 45 способами.

Занятие 3

Цель занятия. Размещения, перестановки, сочетания, полиномиальная формула, бином Ньютона.

Внутриклассные задания. 4.1, 4.2, 4.4, 4.7, 4.8, 4.10, 4.11, 4.12, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.19, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24.

Задания на дом. 4.3, 4.5, 4.6, 4.9, 4.13, 4.18.

Самостоятельная работа

Вариант 1.

1) С помощью метода математической индукции доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

2) Сколько положительных чисел, меньших 700, делятся на 5?

Вариант 2.

1) С помощью метода математической индукции доказать, что

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

2) Сколькими способами можно 8 человек поставить в очередь, если на первых 3-х местах могут стоять только 3 VIP-клиента в произвольном порядка?

Примеры задач

Задача. В однокруговом турнире по футболу участвует 8 команд. Сколько всего матчей будет сыграно?

Решение. Вычислим число сочетаний из 8 по 2.

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 6!} = 28.$$

Всего будет сыграно 28 матчей.

Задача. Найти коэффициент при $x^k y^m$ в разложении $(1+x+y)^n$, $k+m \leq n$.

Решение. Используя полиномиальную формулу, имеем

$$(1 + x + y)^n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} x^{n_2} y^{n_3},$$

$$n_2 = k, \ n_3 = m, \ \frac{n!}{k! m! (n - k - m)!}.$$

Занятие 4

Цель занятия. Комбинаторные тождества.

Внутриклассные задания. 5.2, 5.4, 5.5.

Задания на дом. 5.6.

Самостоятельная работа

Вариант 1.

1) Формула числа сочетаний без повторений.

2) Полиномиальная формула.

3) В разложении $(3x-4y)^{13}$, найти коэффициент при множителе x^8y^5.

Вариант 2.

1) Формула числа перестановок с повторениями.

2) Формула бинома Ньютона.

3) В разложении $(2x+3y)^{10}$, найти коэффициент при множителе x^6y^4.

Примеры задач

Задача. Доказать равенство

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Решение.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \left[k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n+1}^{k-1}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n\right] = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right).$$

Что и требовалось доказать.

Задача. Доказать равенство

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}.$$

Решение.

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = 0 \cdot C_n^0 + \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k =$$

$$= \left[k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n+1}^{k-1}\right] = \sum_{k=1}^{n} n \cdot C_{n-1}^{k-1} =$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = [t = k-1] =$$

$$= n\sum_{t=0}^{n-1} C_{n-1}^{t} = \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n\right] = n\cdot 2^{n-1}.$$

Что и требовалось доказать.

Занятие 5

Цель занятия. Формирование перестановок и сочетаний.

Внутриклассные задания. 6.1, 6.2, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8.

Задания на дом. 6.3, 6.4.

Самостоятельная работа

Вариант 1.

1) Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Вариант 2.

1) Доказать, что

$$\sum_{i=0}^{k} C_{n+i-1}^{i} = C_{n+k}^{k}.$$

Примеры задач

Задача. Определить перестановку, следующую за 21435.

Решение. Согласно алгоритму ПЕРЕСТАНОВКА имеем:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} & 5 & \\ P & (& 2 & 1 & 4 & \underline{3} & 5 &) \end{array}$$

1) $m = 4$

2) $a_i = 5$

3) $214\boxed{5}3$

4) 21453

Следующая перестановка 21453.

Задача. Дано множество $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Определить сочетание, следующее за $S_1 = \{1, 3, 4\}$.

Решение. Согласно алгоритму СОЧЕТАНИЕ имеем:

1) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S_1 = \{1, 3, 4\}$
2) 10110
3) 10111
4) $S_2 = \{1, 3, 4, 5\}$

Следующее сочетание $\{1, 3, 4, 5\}$.

Занятие 6

Цель занятия. Принцип включения-исключения. Введение в теорию графов. Основные понятия и определения. Принцип Дирихле.

Внутриклассные задания. 7.3, 7.4, 7.5, 7.6.

Задания на дом. 7.7, 7.8.

Самостоятельная работа

Вариант 1.

1) Определить перестановку, следующую за 13765.
2) Дано множество $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Определить сочетание, следующее за $S_1 = \{1, 4, 5, 6\}$.

Вариант 2.

1) Определить перестановку, следующую за 42018.
2) Дано множество $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Определить сочетание, следующее за $S_1 = \{1, 3, 4, 5\}$.

Примеры задач

Задача. Сколько существует четырехзначных чисел, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Решение. Четырехзначных чисел, которые делятся на 3 – 2999, на 5 – 1799, на 7 – 1285, на 3 и 5 – 599, на 3 и 7 – 428, на 5 и 7 – 257, на 3, 5 и 7 – 85. Тогда по принципу включения-исключения

$$X = 8999 - (2999 + 1799 + 1285) + (599 + 428 + 257) - 85 =$$

$$= 8999 - 6083 + 1284 - 85 = 4115.$$

Существует 4115 четырехзначных чисел, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7.

Задача. Пусть в простом графе никакие две вершины одинаковой степени не соединены путем длины 2. Доказать, что в графе имеется висячая вершина.

Решение. Докажем от противного. Пусть граф является простым, и в нем нет ни изолированных, ни висячих вершин. Рассмотрим вершину V максимальной степени k. Она соединена ребрами с k попарно различными вершинами. Их степени могут принимать значения от 2 до k. По принципу Дирихле, среди этих значений есть одинаковые. Значит, существует 2 вершины равной степени, соединенной путем длины 2 (через V). Получили противоречие. Что и требовалось доказать.

Занятие 7

Цель занятия. Способы представления графов и методы просмотра вершин. Матрица инцидентности, матрица смежности, список смежности. Поиск в глубину, поиск в ширину. Деревья и леса.

Внутриклассные задания. 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.8, 8.9, 8.13.

Задания на дом. 8.6, 8.7, 8.10, 8.11, 8.12.

Самостоятельная работа

Вариант 1.

1) Степень вершины.
2) Цикл.
3) Простой путь.
4) Связный неориентированных граф.

Вариант 2.

1) Простая цепь.
2) Петля.
3) Контур.
4) Связный ориентированный граф.

Примеры задач

Задача. Дана симметричная матрица размера $n \times n$, в каждой строке которой располагается нечетное число ненулевых элементов. Показать, что n является четным. Диагональные элементы матрицы равны нулю.

Решение. Построим пример матрицы, удовлетворяющей условиям задачи.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что матрица M, удовлетворяющая всем условиям задачи, имеет размерность 4×4, т.е. $n = 4$ является четным, и построить матрицу с нечетным n невозможно.

Занятие 8

Цель занятия. Бинарные деревья. Сортировка. Бинарные деревья поиска. Остовные деревья. Алгоритм Краскала. Алгоритм Прима. Матричная формула Кирхгофа.

Внутриклассные задания. 9.4, 9.8.

Задания на дом. 8.6, 8.7, 8.10, 8.11, 8.12.

Самостоятельная работа

Вариант 1.

1) Лес.
2) Корень дерева.
3) Лист.
4) Высота дерева.
5) Высота вершины.

Вариант 2.

1) Дерево.
2) Мост.
3) Куст.
4) Глубина вершины.
5) Уровень вершины.

Примеры задач

Задача. Для приведенного ниже графа определить следующие параметры:

1) высоту дерева;
2) уровень вершины e;
3) уровень вершины g;
4) уровень вершины a;
5) какая вершина является родителем i;
6) какие веришны являются сыновьями b?

Решение. 1) 4; 2) 2; 3) 1; 4) 4; 5) e; 6) c, d, e.

Задача. Сколько остовных деревьев имеет граф K_4?

Решение. По формуле Кирхгофа для матрицы смежности A и матрицы степеней D имеем:

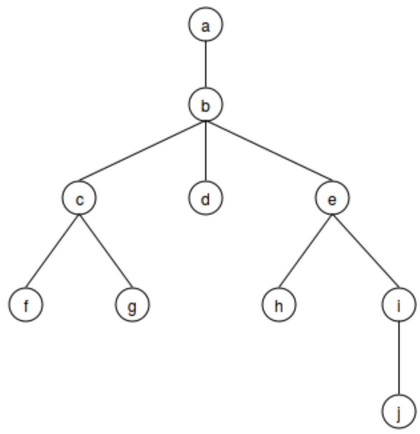


Рисунок 1 — Бинарное дерево.

$$K = D - A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$K_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3^3 + (-1)^3 + (-1)^3 - 3 - 3 - 3 = 27 - 11 = 16.$$

Граф K_4 имеет 16 остовных деревьев.

Занятие 9

Эйлеровы и гамильтоновы графы. Алгоритм Флери. Двудольные графы и паросочетания.

Самостоятельная работа

Вариант 1.

1) Для графа построить минимальное остовное дерево, используя алгоритм Прима.

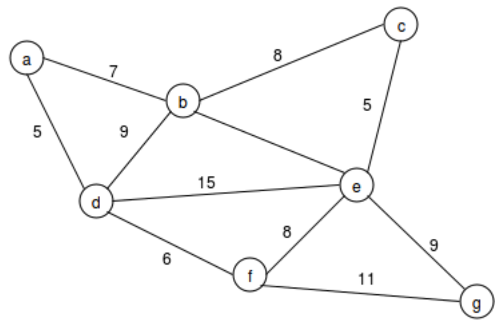


Рисунок 2 — Граф для нахождения минимального остовного дерева.

Вариант 2.

1) Для графа построить минимальное остовное дерево, используя алгоритм Краскала.

Примеры задач

Задача. Могут ли существовать двудольные графы со следующими степенями вершин:

1) в доле A – 2,3,4,5; в доле B – 3,3,4,4;
2) в доле A – 2,3,3,4; в доле B – 3,3,3,4;
3) в доле A – 3,4,5,5,5,6,6,6; в доле B – 3,5,5,5,5,5,5,5?

Решение. 1) да; 2) нет; 3) нет.

Задача. В классе 12 мальчиков и 16 девочек. Каждая девочка дружит ровно с 3 мальчиками. Количество девочек, с которыми дружат мальчики, одинаково. Со сколькими девочками дружит каждый мальчик?

Решение. Построив двудольный граф, удовлетворяющий всем условиям задачи, убедимся, что каждый мальчик дружит с 4 девочками.

Занятие 10

Задача о назначениях.

Примеры задач

Задача. Четверо вкладчиков решили открыть счета в четырех банках. Их годовая прибыль указана в матрице

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 & 7 \\ 13 & 10 & 14 & 14 \\ 9 & 9 & 16 & 13 \\ 12 & 10 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальное распределение суммарной прибыли вкладчиков.

Решение. Согласно алгоритму решения задачи о назначениях:

$$\begin{pmatrix} -4 & -6 & \boxed{-9} & -7 \\ -13 & -10 & \boxed{-14} & -14 \\ -9 & -9 & \boxed{-16} & -13 \\ \boxed{-12} & -10 & -12 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 2 \\ \boxed{1} & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & \boxed{0} & 0 & 2 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & \boxed{0} & 3 \\ \boxed{0} & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, максимальная прибыль составит $S = 6 + 14 + 16 + 12 = 48$.

Занятие 11

Укладки графов. Формула Эйлера. Критерий планарности графа. Алгоритм укладки графа на плоскости.

Самостоятельная работа

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & 6 \\ 17 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 1.

1) Для матрицы M решить задачу о назначениях на минимум.

Вариант 2.

1) Для матрицы M решить задачу о назначениях на максимум.

Примеры задач

Задача. Планарный граф содержит 12 вершин степени 3. Сколько у этого графа ребер и граней?

Решение. По формуле Эйлера:

$$\begin{cases} n - m + f = 2, \\ m \le 3n - 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = 2 + m - n, \\ m \le 30. \end{cases}$$

Сумма степеней всех вершин графа $12 \cdot 3 = 36$.

$$36 = 2m \Rightarrow m = 18 \Rightarrow f = 2 + 18 - 12 = 8.$$

Таким образом, у графа 18 ребер и 8 граней.

Задача. Проверить граф K_6 на планарность.

Решение. Для графа K_6 $n = 6$, $m = 15$. Тогда по формуле Эйлера

$$15 \le 3 \cdot 6 - 6,$$

$$15 \le 12. \text{ (не верно)}$$

Значит, граф K_6 не планарный.

Занятие 12

Нахождение кратчайших путей в графе. Алгоритм Дейкстры.

Примеры задач

Задача. Для схемы городов решить задачу единого среднего.

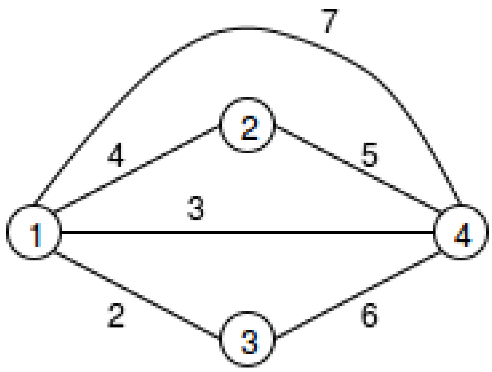


Рисунок 3 — Граф для решения задачи единого среднего.

Масса грузов, которые необходимо привезти, указана в таблице.

Пункт	1	2	3	4
Груз (т)	8	9	7	6

Решение. Составим таблицу.

Пункт	Груз	Склад				$\Gamma\times C_1$	$\Gamma\times C_2$	$\Gamma\times C_3$	$\Gamma\times C_4$
		1	2	3	4				
1	8	0	4	2	3	0	32	16	24
2	9	4	0	6	5	36	0	54	45
3	7	2	6	0	6	14	42	0	42
4	6	3	5	6	0	18	30	36	0
					$\sum$	$\boxed{68}$	104	106	111

Исходя из положения минимума в последней строке, разместим склад в пункте 1.

Занятие 13

Задачи сетевого планирования. Метод критического пути. Управление проектами с неопределенным временем выполненения работ. Оптимизация сетевого графика.

Самостоятельная работа

Для графа найти кратчайшие пути от вершины 1 до всех остальных.

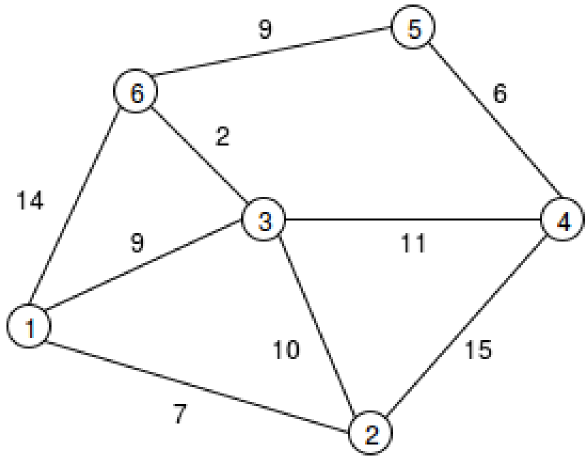


Рисунок 4 — Граф для нахождения кратчайшего пути.

Примеры задач

Задача. Минимизировать общее время выполнения проекта с наименьшими дополнительными затратами. Построить сетевой график.

Решение. Найдем критический путь при условии, что все работы совершаются за минимальное время.

Таким образом, минимальное время, за которое может быть выполнен проект, равно 12 дням. Критический путь проходит по этапам B, D, E, F, H. То есть, работы A, C, G не лежат на критическом пути.

Построим сетевой график, соответствующий условию задачи (рисунок 5).

Рассмотрим эти работы и определим, нельзя ли выполнить их в стандартные сроки без увеличения общего времени выполнения проекта. Выполнение этих работ в стандартное время дает следующую экономию: A – 800 т.р., C – 500 т.р., G – 1800 т.р.

Работа	Предшественник	Стандартное время, дн.	Минимальное время, дн.	Затраты на работы	
				При стандартном времени, т.р.	При минимальном времени, т.р.
A	—	3	1	900	1700
B	—	6	3	2000	4000
C	A	2	1	500	1000
D	B, C	5	3	1800	2400
E	D	4	3	1500	1850
F	E	3	1	3000	3900
G	B, C	9	4	8000	9800
H	F, G	3	2	1000	2000

i	1	2	3	4	5	6	7
$l(v_i)$	0	1	3	6	9	10	12
$l'(v_i)$	12	10	9	6	3	2	0
$L(v_i)$	0	2	3	6	9	10	12

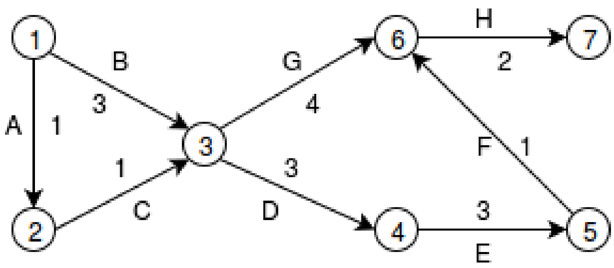


Рисунок 5 — Сетевой график.

Проверим, существует ли реальная возможность сэкономить. Для работы G: $r(3,6) = 3$ дня – невозможно сэкономить; A: $r(1,2) = 1$ день – также невозможно; C: $r(2,3) = 1$ день – экономия возможна, новый критический путь: $A \to C \to D \to E \to F \to H$.

Таким образом, общая стоимость проекта: $1700+500+2400+1850+3900+2000 = 12350$ т.р.

Занятие 14

Потоки в сетях. Алгоритм Форда и Фалкерсона. Метод блокирующих потоков. Раскраска графов. Клики и независимые множества.

Примеры задач

Задача. Найти максимальный поток для сети.

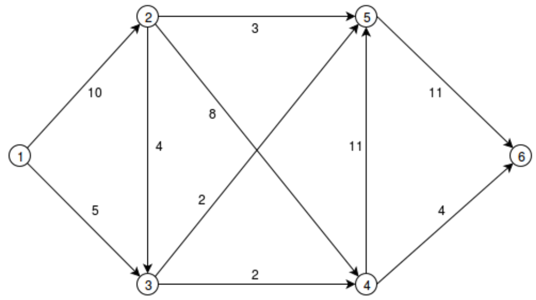


Рисунок 6 — Граф для нахождения максимального потока в сети.

Решение. Согласно алгоритму Форда-Фалкерсона, построим начальный поток в сети. Для примера, это может быть поток $1 \to 2 \to 5 \to 6$. Максимальная пропускная способность сети на этом участке определяется участком $2 \to 5$ и ограничивается 3 единицами траффика. Построив такой поток мы тем самым полностью загрузим участок $2 \to 5$. Отразим это на рисунке путем введения обратного потока указанного объема. Пропускная способность исходных каналов, естественно, сократится.

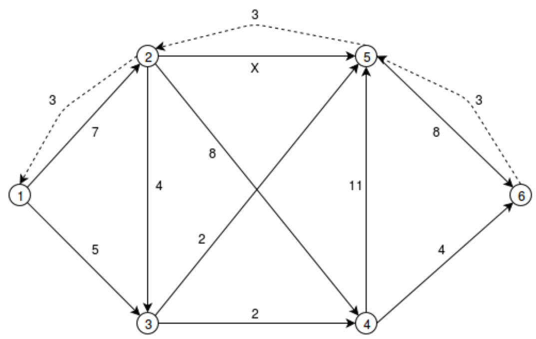


Рисунок 7 — Начальный поток.

Следующий поток $1 \to 3 \to 4 \to 6$ величиной 2 (рисунок 8).

Следующий поток $1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6$ величиной 7 (рисунок 9).

Следующий поток $1 \to 3 \to 5 \to 6$ величиной 1 (рисунок 10).

После выполнения этого шага не существует возможности пустить в сети еще поток ненулевого траффика. Таким образом, величина максимального потока известна и равна $3 + 2 + 7 + 1 = 13$.

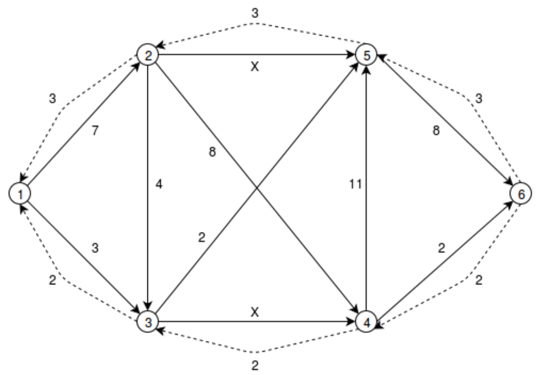


Рисунок 8 — Поток 2.

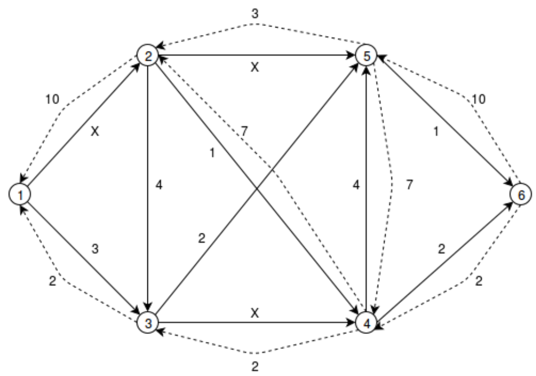


Рисунок 9 — Поток 3.

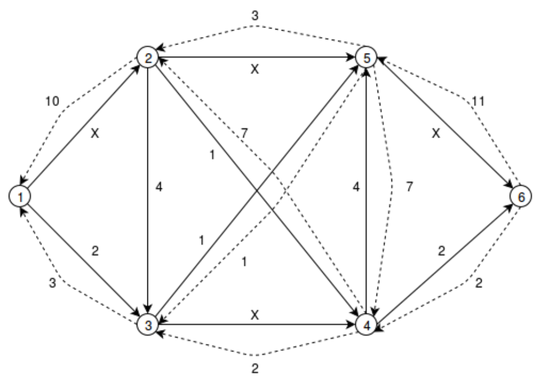


Рисунок 10 — Максимальный поток.

Заключение

В ходе практики удалось реализовать все поставленные цели и задачи:

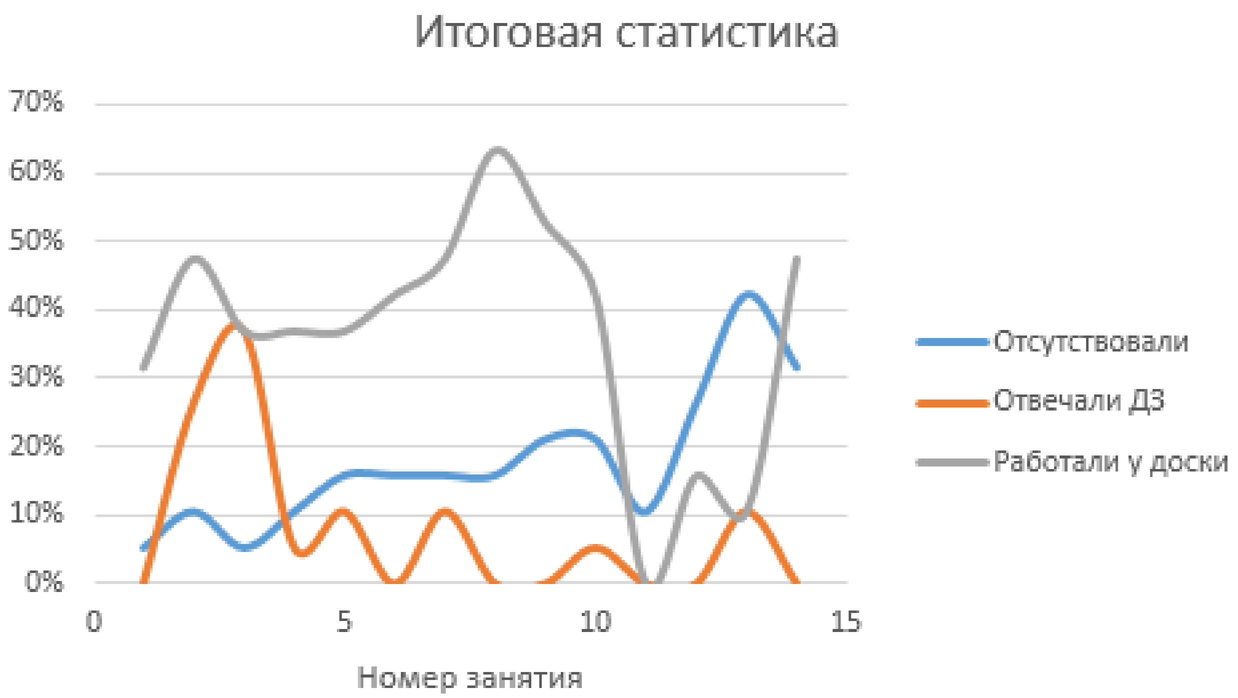
- приобрести бесценный практический опыт и навыки работы с коллективом студентов с учетом его психологической структуры и уровня развития;
- углубить свои знания в дискретной математике и педагогике;
- приобрести опыт индивидуального консультирования по сложным вопросам предмета;
- сформировать умения по организации продуктивного взаимодействия с группой на паре (установление личных контактов, навыки сотрудничества, диалогового общения и т.д.);
- развить умения выявлять, анализировать и учитывать при организации учебно-воспитательного процесса общие психологические закономерности;
- умение помечать и анализировать возникающие в коллективе ситуации, требующие педагогического вмешательства.

Очень важным, если не определяющим фактором, способствующим успешному прохождению педагогической практики, явилось доброжелательное, участвующее отношение преподавателей: оказывалась всякая помощь, давались ценные советы по разработке и проведению занятий. В свою очередь, студенты проявляли дисциплинированность, одобрение и заинтересованность, демонстрировали хорошую посещаемость в семестре и успеваемость на экзамене (некоторая статистика по занятиям приведена в приложении A).

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ИТОГОВАЯ СТАТИСТИКА



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Панюкова, Т. Комбинаторика и теория графов: Учебное пособие. Изд. 3-е, испр. / Т.А. Панюкова. — М.: ЛЕНАНД, 2014. — 216 с.