МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет

информационных технологий, механики и оптики»

Факультет информационных технологий и программирования

Кафедра информационных систем

Методы оптимизации

Лабораторная работа № 3

Выполнили студенты группы M33051:

Ефимов Вячеслав Иосифович

Мелентьев Петр Алексеевич

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2021

LU-разложение

Матрица A

6	−3	5	0	2	0	0
−4	0	7	−3	0	2	0
0	9	−3	−6	0	7	1
5	−2	0	0	1	7	−3
−1	0	0	5	0	2	0
9	−8	7	0	2	3	0
3	0	−4	1	9	0	5

Матрица L

1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
−0.667	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	−4.5	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.833	−0.25	−0.036	1.0	0.0	0.0	0.0
−0.167	0.25	−0.04	−3.402	1.0	0.0	0.0
1.5	1.75	−0.427	2.11	3.526	1.0	0.0
0.5	−0.75	0.029	0.472	−59.368	−15.245	1.0

Матрица U

6.0	−3.0	5.0	0.0	2.0	0.0	0.0
0.0	−2.0	10.333	−3.0	1.333	2.0	0.0
0.0	0.0	43.5	−19.5	6.0	16.0	1.0
0.0	0.0	0.0	−1.46	−0.115	8.082	−2.964
0.0	0.0	0.0	0.0	−0.15	29.636	−10.041
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	−115.228	42.088
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	51.914

Матрица L * U

6.0	−3.0	5.0	0.0	2.0	0.0	0.0
−4.002	0.001	6.998	−3.0	−0.001	2.0	0.0
0.0	9.0	−2.998	−6.0	0.002	7.0	1.0
4.998	−1.999	0.016	−0.008	1.002	7.006	−3.0
−1.002	0.001	0.008	4.997	0.0	2.001	0.003
9.0	−8.0	7.008	−0.004	1.999	2.99	0.002
3.0	0.0	−3.988	0.995	9.025	−0.0	5.027

Нахождение обратной матрицы

Матрица A

```
3  -5  0   2   0  8
4  1   2   0   4  3
1  -1  3   0   2  0
0  1   9   -2  5  0
7  -4  -5  0   6  -3
0  -4  2   8   0  7
```

Матрица A^{-1}

```
[[-0.065  0.275  1.12  -0.492 -0.147 -0.107]
 [-0.117  0.218 -0.04  -0.076 -0.069  0.01 ]
 [-0.034  0.06   0.647 -0.172 -0.112 -0.034]
 [-0.149  0.083  0.266 -0.147 -0.022  0.126]
 [ 0.026 -0.119 -1.05   0.467  0.207  0.11 ]
 [ 0.114  0.012 -0.511  0.174  0.017  0.015]]
```

Матрица $A * A^{-1}$

```
[[ 1.000e+00  0.000e+00  0.000e+00  0.000e+00  0.000e+00  5.551e-17]
 [ 1.110e-16  1.000e+00  4.441e-16 -2.220e-16 -4.163e-17  2.776e-17]
 [ 1.388e-17 -2.776e-17  1.000e+00 -2.776e-17  4.163e-17  1.735e-18]
 [ 1.110e-16 -3.469e-17  3.331e-16  1.000e+00 -6.939e-17 -5.551e-17]
 [ 4.996e-16 -2.220e-16 -1.776e-15  4.441e-16  1.000e+00  3.331e-16]
 [ 6.800e-16 -5.135e-16  1.332e-15 -3.220e-15 -3.886e-16  1.000e+00]]
```

Решение СЛАУ

Матрица коэффициентов A

```
10  -7  2   -3  0   0
-3  4   6   0   5   4
5   -1  5   -9  2   8
0   1   -6  3   2   7
0   0   0   5   -9  3
6   0   4   7   -2  0
```

Вектор свободных членов b

```
[-15, 23, -3, -34, 27, 8]
```

Вектор x

```
[-4.178 -2.749  5.308  1.026 -2.326  0.311]
```

Вектор A * x

```
[-15.  23.  -3. -34.  27.   8.]
```

Задание 3

3. Провести исследование реализованного метода на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счет изменения диагонального преобладания (т.е. оценить влияние увеличения числа обусловленности на точность решения). Для этого необходимо решить последовательность СЛАУ

$$A^k x^k = F^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

где матрицы A^k строятся следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} -\sum_{i \neq j} a_{ij}, i > 1, \\ -\sum_{i \neq j} a_{ij} + 10^{-k}, i > 1, \end{cases},$$

и $a_{ij} \in 0, -1, -2, -3, -4$ выбираются достаточно произвольно, а правая часть F_k получается умножение матрицы A^k на вектор $x* = (1, ..., n)$. Для каждого k, для которого система вычислительно разрешима, оценить погрешность найденного решения.

k	Норма	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1														
2	0	1	2													
3	0	1	2	3												
4	0	1	2	3	4											
5	0	1	2	3	4	5										
6	0	1	2	3	4	5	6									
7	0	1	2	3	4	5	6	7								
8	0	1	2	3	4	5	6	7	8							
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10					
11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11				
12	0.02	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
13	0.16	1.04	2.04	3.04	4.04	5.04	6.04	7.04	8.04	9.04	10.04	11.04	12.04	13.04		
14	1.07	0.71	1.71	2.71	3.71	4.71	5.71	6.71	7.71	8.71	9.71	10.71	11.71	12.71	13.71	
15	3.87	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Задание 4

4. Провести аналогичные исследования на матрицах Гильберта различной размерности.

   Матрицы Гильберта размерности k строится следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j = 1..k.$$

k	Норма	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1														
2	0	1	2													
3	0	1	2	3												
4	0	1	2	3	4											
5	0	1	2	3	4	5										
6	0	1	2	3	4	5	6									
7	0	1	2	3	4	5	6	7								
8	0	1	2	3	4	5	6	7	8							
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10					
11	0.03	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11				
12	3.9	1	2	3	4.01	4.91	6.41	5.86	10.01	6.6	11.76	10.27	12.13			
13	357.9	1	2	2.98	4.33	2.01	22.19	-49	138.7	-194	220.2	-127	64.38	4.3		
14	195.9	1	2	3	4.01	5.02	4.96	14.58	-21.4	80.01	-102	126.7	-63.4	41.2	9.37	
15	242.3	1	2	3	3.97	5.33	3.57	18.52	-29	91.64	-119	152.1	-92.9	63.5	-0.2	16.7

Вывод

В результате проведения лабораторной работы были изучены различные методы хранения матриц, а также реализованы методы LU-разложения матриц, решение СЛАУ и отыскание обратной матрицы с помощью данного разложения. Как выяснилось, этот вид разложения удобен тем, что позволяет во многих ситуациях значительно упростить процесс решения задачи. Написав собственную реализацию на языке Python LU-разложения, мы ее протестировали на случайных матрицах из задания 3 и матрицах Гильберта из задания 4 для различных размеров матриц $k \times k$. Логичным фактом, который мы заметили, оказалось то, что для больших значений k увеличивается погрешность получаемого решения СЛАУ для данных матриц. Вместе с этим такая же тенденция наблюдается и у числа обусловленности: с увеличением k оно также растет.