

# Олимпиадное программирование с нуля

Вячеслав Шестаков

26 февраля 2024 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>От автора</b>	<b>5</b>
1.1	Вступление	5
1.2	Установка Code::Blocks	6
1.3	Математика	8
1.3.1	Комбинаторика	8
1.3.2	Множества	8
1.3.3	Логарифмы	9
1.4	Олимпиадное программирование	10
1.4.1	Олимпиадная задача	10
1.4.2	Сложность алгоритма	11
1.5	Образовательные ресурсы	12
1.6	Порядок чтения	13
<b>2</b>	<b>Введение в C++</b>	<b>15</b>
2.1	Первая программа	15
2.2	Типы данных	17
2.3	Операторы	19
2.4	Синтаксис C++	22
2.5	Строки и ввод-вывод	26
2.6	Пары и массивы	29
2.7	Множества и отображения	33
2.8	Другие возможности C++	36
2.8.1	Структуры	36
2.8.2	Встроенные функции	37
2.8.3	Стек, очередь и дек	39
2.8.4	Макросы	40
2.8.5	Шаблоны	40
2.9	Олимпиадные оптимизации кода	42
<b>3</b>	<b>Олимпиадное программирование</b>	<b>44</b>
3.1	Идеи проектирования алгоритмов	44
3.2	Алгебра, часть 1	45
3.2.1	Извлечение корня и бинарное возведение в степень	45
3.2.2	Системы счисления	45
3.2.3	Теория чисел	46
3.2.4	НОД и НОК	46
3.2.5	Расширенный алгоритм Евклида	48
3.2.6	Обратное число по простому модулю	48
3.3	Алгебра, часть 2	49
3.3.1	Проверка на простоту	49
3.3.2	Решето Эратосфена	49
3.3.3	Факторизация	50
3.3.4	Функция делителей	50
3.3.5	Функция Эйлера	51
3.4	Сортировки	52
3.4.1	Bogosort	52
3.4.2	Selection sort	52

3.4.3	Insertion sort . . . . .	52
3.4.4	Bubble sort . . . . .	52
3.4.5	Tree sort . . . . .	53
3.4.6	Merge sort . . . . .	53
3.4.7	Quick sort . . . . .	53
3.4.8	Counting sort . . . . .	54
3.4.9	Оптимальная сортировка . . . . .	54
3.5	Перебор и битовые множества . . . . .	55
3.5.1	Перебор перестановок . . . . .	55
3.5.2	Номер перестановки . . . . .	56
3.5.3	Перебор наборов из заданных элементов . . . . .	56
3.5.4	Перебор подмножеств . . . . .	57
3.5.5	Битовые множества . . . . .	57
3.6	Жадные алгоритмы . . . . .	58
3.6.1	Транснеравенство . . . . .	58
3.6.2	Непрерывная задача о рюкзаке . . . . .	58
3.6.3	Задача о выборе заявок . . . . .	59
3.6.4	Задача о расписании . . . . .	59
3.6.5	Задача о размене . . . . .	60
3.7	Динамическое программирование . . . . .	61
3.7.1	Числа Фибоначчи . . . . .	61
3.7.2	Задача о замощении полосы . . . . .	62
3.7.3	Задача про хромую ладью . . . . .	63
3.7.4	Задача о размене . . . . .	63
3.7.5	Дискретная задача о рюкзаке . . . . .	64
3.7.6	Наибольшая общая подпоследовательность . . . . .	64
3.8	Бинарный поиск . . . . .	66
3.8.1	Поиск элемента в наборе . . . . .	66
3.8.2	Встроенный бинарный поиск . . . . .	67
3.8.3	Бинарный поиск по ответу . . . . .	67
3.8.4	Вещественный бинарный поиск . . . . .	68
3.8.5	Тернарный поиск . . . . .	68
3.9	Простые линейные алгоритмы . . . . .	69
3.9.1	Правильная скобочная последовательность . . . . .	69
3.9.2	Постфиксная запись . . . . .	70
3.9.3	Элементы с максимальной разностью . . . . .	70
3.9.4	Отрезок с заданной суммой . . . . .	71
3.10	Запросы суммы и минимума . . . . .	73
3.10.1	Запрос суммы . . . . .	73
3.10.2	Двумерные суммы . . . . .	73
3.10.3	Стек с минимумом . . . . .	75
3.10.4	Очередь с минимумом . . . . .	76
3.11	Сложные линейные алгоритмы . . . . .	77
3.11.1	Отрезок с максимальной суммой . . . . .	77
3.11.2	Ближайший меньший слева . . . . .	77
3.11.3	Наибольший прямоугольник вписанный в гистограмму . . . . .	78
3.11.4	Минимум в скользящем окне . . . . .	78
3.12	Структуры данных, часть 1 . . . . .	80
3.12.1	DSU . . . . .	80
3.12.2	Sqrt-декомпозиция . . . . .	83
3.13	Структуры данных, часть 2 . . . . .	85
3.13.1	Дерево отрезков . . . . .	85

3.13.2	Разреженная таблица . . . . .	88
3.13.3	Дерево Фенвика . . . . .	88
3.14	Структуры данных, часть 3 . . . . .	91
3.14.1	Куча . . . . .	91
3.14.2	Декартово дерево . . . . .	93
3.15	Введение в графы . . . . .	97
3.15.1	Определения . . . . .	97
3.15.2	Представление в информатике . . . . .	98
3.16	Обходы графа . . . . .	99
3.16.1	Поиск в ширину . . . . .	99
3.16.2	Поиск в глубину . . . . .	99
3.16.3	Компоненты связности . . . . .	100
3.16.4	Топологическая сортировка . . . . .	100
3.16.5	Компоненты сильной связности . . . . .	101
3.16.6	Мосты и точки сочленения . . . . .	102
3.17	Остовные деревья и кратчайшие пути . . . . .	104
3.17.1	Минимальное остовное дерево . . . . .	104
3.17.2	Модификации минимального остова . . . . .	105
3.17.3	Кратчайшие пути от одной вершины до всех . . . . .	106
3.17.4	Кратчайшие пути между всеми парами вершин . . . . .	108
3.18	Геометрия: введение . . . . .	109
3.18.1	Точки . . . . .	109
3.18.2	Вектора . . . . .	109
3.18.3	Прямые . . . . .	111
3.18.4	Дополнения . . . . .	113
3.19	Геометрия: продолжение . . . . .	115
3.19.1	Площадь многоугольника . . . . .	115
3.19.2	Принадлежность точки многоугольнику . . . . .	116
3.19.3	Выпуклая оболочка . . . . .	117
3.20	Алгоритмы на строках . . . . .	119
3.20.1	Хеширование . . . . .	119
3.20.2	Z-функция . . . . .	119
3.20.3	Префикс-функция . . . . .	120
3.20.4	Применение этих алгоритмов . . . . .	121
3.21	Рандомизированные алгоритмы . . . . .	122
3.21.1	Метод Монте-Карло . . . . .	122
3.21.2	Локальные оптимизации . . . . .	123
3.21.3	Другие применения рандома . . . . .	123

## От автора

### Вступление

Данная книга предназначена для изучения олимпиадного программирования на языке C++. Она попытается научить программировать на этом языке с нуля и поможет подготовиться к разным олимпиадам. Для автора это первая книга, поэтому могут быть недочёты :)

Книга разбита на три части: сейчас вы читаете первую часть, и в ней находится введение; во второй части размещается курс по программированию на C++; и в третьей части находятся алгоритмы для олимпиадного программирования.

В книге вставлен исходный код на языке C++, который копируется вместе с нумерацией строк и без пробелов в начале строки. Это сделано специально, чтобы читатель его не копировал, а перепечатывал и пытался осознать.

Автор книги – Шестаков Вячеслав, которому помогали участники спецкурса «Олимпиадная информатика» гимназии «Универс» в 2022–2023 учебном году: Леонтьев Дмитрий, Дегтерева Карина.

Книгу разрешается использовать для собственного обучения. Если Вы хотите использовать её материалы для обучения других людей, то об этом нужно сообщить автору.

# Установка Code::Blocks

Свое знакомство с C++ мы начнём с установки среды разработки. Вы можете задать логичный вопрос: чем так плохи online-компиляторы? Ответ простой: на почти всех олимпиадах доступ в интернет запрещён, а значит, можно использовать только программы, установленные на компьютере. Вторая причина — online компиляторы, в среднем, работают медленнее установленных на компьютер. И, наконец, третья причина, не столь олимпиадная — если вы хотите создавать на C++ большие программы, то их придётся разбивать на много файлов, а под это online-компиляторы не подходят.

Теперь можем перейти непосредственно к установке среды разработки. Для C++ их, конечно, существует много разных, но здесь будет описан процесс установки Code::Blocks, так как это бесплатная IDE с открытым исходным кодом, к тому же, сама среда минималистична и занимает мало места в памяти компьютера.

Но прежде, чем что-то устанавливать давайте немного пробежимся по истории языка и узнаем, какие версии у него были.

- **C с классами.** Изначально был язык программирования C, но в нём не было поддержки нужных для Бьёрна Страуструпа технологий, поэтому он придумал как усовершенствовать язык C. Так в 1983-ем году и началась история C++.
- **C++98.** Далее язык долго развивался и в 1998-ом году вышел его первый стандарт. Во всех стандартах C++ описывается какой функционал есть в языке и как он работает. Никакая программа, способная обрабатывать код на C++ в стандарт не входит.
- **C++11.** Далее язык снова долго развивался и вышел стандарт с обновлениями: изменили «*стандартную библиотеку*» (в ней находятся ввод-вывод информации, контейнеры, некоторые алгоритмы и т.д.) и «*ядро языка*» (добавили отдельные циклы по контейнерам). В целом на этом стандарте уже можно писать олимпиадные программы.
- **C++14.** Через 3 года вышел стандарт, устранивший ошибки предыдущего. Также стандарт немного расширил функционал.
- **C++17.** Следующий стандарт снова добавил функционал к языку и некоторые синтаксические средства (например «*структурное связывание*»), пример использования такого синтаксиса в книге есть.
- **C++20.** Этот стандарт добавил удобный «*оператор трёхстороннего сравнения*», про него также написано в этой книге.
- **C++23.** И самый новый стандарт на текущий момент был выпущен в 2023-ом году, в этом стандарте мне не известно синтаксис, который можно было бы применять в олимпиадах.
- **C++26.** Этот стандарт пока находится на стадии обсуждения и в нём могут произойти какие-то интересные нововведения.

Теперь можем перейти к установке самого Code::Blocks вместе с версией языка 2017-го года (можно установить и более новую версию, но это будет немного сложнее). Для этого переходим на [сайт Code::Blocks](#) и скачиваем установочный файл под названием «*codeblocks-20.03mingw-setup.exe*» (для Windows). В этом файле содержится и Code::Blocks, и компилятор для C++17, если у Вас уже что-то установлено, или другая операционная система, то выбирайте другой установочный файл.

Запускаем установочный файл, нажимаем «*Next*», «*I Agree*» (конечно же, читаем, что там написано). Далее выбираем нужные компоненты, вполне подойдёт «*Full*» (занимает немного места и точно установится всё необходимое), нажимаем «*Next*». Выбираем папку для установки (расположение по умолчанию вполне подходит), жмём «*Install*». Ждём, пока всё установится, отказываемся от запуска Code::Blocks, нажимаем «*Next*» и «*Finish*».

Запускаем IDE (ярлык автоматически добавляется на рабочий стол), в окне «*File associations*» выбираем «*Yes, associate Code::Blocks with C/C++ file types*», чтобы по умолчанию файлы открывались в IDE, жмём «*OK*».

Теперь создадим новый проект, в котором мы и будем писать наши программы на C++. Для этого жмём «*Create a new project*», «*Console application*», «*Next*», выбираем C++ и жмём «*Next*». Теперь выбираем место, где будет храниться папка с нашим проектом («*Folder to create project in*» и указываем название проекта («*Project title*»), жмём «*Next*» и «*Finish*».

Теперь у нас есть проект, в котором мы можем работать. На верхней панели самые важные кнопки: жёлтая шестерёнка — сборка проекта и зелёный треугольник — его запуск. Остаётся лишь сказать, что во вкладке «*Settings*» > «*Compiler*» > «*Compiler settings*» > «*Compiler Flags*» можно выбрать версию C++ (например, для C++17 ставим галочку около «... *C++17 ISO C++ ...*»).

Когда захотите закрыть проект, то откроется окно с сохранением изменений, в нём жмём «*Yes*». Чтобы потом заново открыть проект, достаточно будет открыть файл с расширением «*\*.cbp*», который хранится в папке с проектом.

Возможно, стоит добавить файлы Code::Blocks в Path, чтобы можно было компилировать программы вручную. Для этого ищем «*Изменение системных переменных среды*», «*Переменные среды*». Далее выбираем (для одного пользователя, или же для всего компьютера) «*Path*», «*Изменить*». Далее жмём «*Создать*», вставляем путь «<Путь до Code::Blocks> \MinGW \bin» и закрываем окно кнопкой «*OK*». Далее ещё раз жмём «*Создать*», вставляем путь «<Путь до Code::Blocks>» и закрываем все окна кнопкой «*OK*».

Так мы получим Code::Blocks, установленный на наш компьютер, и значит, скоро сможем перейти непосредственно к программированию.

# Математика

В олимпиадном программировании встречается довольно специфическая математика, которую может не знать читатель. Поэтому некоторые сведения из математика стоит привести заранее.

## Комбинаторика

Факториалом натурального числа  $n$  называется произведение чисел от одного до  $n$ :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = \prod_{x=1}^n x$$

При этом дополнительно определяется, что  $0! = 1$ .

Число перестановок <sup>1</sup>  $n$  элементов обозначается как  $P_n$  и вычисляется как  $P_n = n!$  (потому что первым может быть любой из  $n$  элементов, вторым — любой из  $n - 1$  оставшихся, и т.д.).

Число размещений  $n$  элементов на  $k$  позиций (порядок важен) обозначается как  $A_n^k$  и вычисляется как  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$  (потому что первым может быть любой из  $n$  элементов, вторым — любой из  $n - 1$  оставшихся, и т.д., а последним — любой из  $n - k + 1$ , потому что потом  $k$  мест уже закончатся).

Число сочетаний обозначается как  $C_n^k$  и означает количество наборов размера  $k$  из  $n$  элементов, при этом порядок не важен. Вычисляется же оно как:  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Также у чисел сочетаний есть несколько свойств

1.  $C_n^k = C_n^{n-k}$  — потому что выбрать  $k$  элементов это то же самое, что и не выбрать  $n - k$  элементов.
2.  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$  — потому что  $n$ -ый элемент может быть либо выбран, либо не выбран. При этом стоит считать  $C_n^n = C_n^0 = 1$ .
3.  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$  — потому что для каждого из  $n$  элементов писать 0, если элемент не взят и 1 — если взят, также можно установить и обратную операцию. Так мы получаем однозначное соответствие между набором и двоичным числом, а значит формула верна.
4. Бином Ньютона:  $(a + b)^n = C_n^0 \cdot a^n b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n \cdot a^0 b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} b^k$  — потому что число сочетаний  $C_n^k$  показывает, сколько есть способов выбрать множитель  $b$  в ровно  $k$  скобках. Отсюда второе название чисел сочетания — «*биномиальные коэффициенты*».

## Множества

Множеством называется набор элементов, в котором не должно быть повторов. Над множествами можно совершать следующие операции (чем выше операция, тем выше её приоритет):

---

<sup>1</sup> Немного определений:

Перестановкой длины  $n$  называется список из  $n$  натуральных чисел от 1 до  $n$  (включительно). Каждое число должно встречаться ровно один раз.

Перестановка  $a$  «*лексикографически*» меньше перестановки  $b$ , если первые  $k$  элементов у них совпадают, а  $k + 1$ -ый меньше у  $a$ :  $a_i = b_i$  и  $a_{k+1} < b_{k+1}$ , для  $k \geq 0$  и  $1 \leq i \leq k$ .



Название	Запись	Описание
Мощность	$ A $ или $\#A$	Количество элементов в множестве.
Дополнение	$\overline{A}$	Те элементы, которых нет в $A$ .
Пересечение	$A \cap B$	Те элементы, которые есть в обоих множествах.
Объединение	$A \cup B$	Те элементы, которые есть хотя бы в одном множестве.
Разность	$A \setminus B$	Те элементы, которые есть в $A$ , но нет в $B$ .
Симметрическая разность	$A \triangle B$	Те элементы, которые есть ровно в одном множестве.

## Логарифмы

Логарифм числа  $x$  по основанию  $a$  обозначается, как  $\log_a(x)$ . Значение логарифма определяется следующим образом: если  $b = \log_a(x)$ , то  $x = a^b$ . Для логарифмов по основанию  $e \approx 2.71828$  придумано специальное обозначение  $\ln(x)$ , и такой логарифм называется натуральным. Также есть десятичный логарифм (у него основание — 10), он обозначается, как:  $\lg(x)$ .

Например, поскольку  $2^3 = 8$  и  $\sqrt[3]{8} = 2$ , то  $\log_2(8) = 3$  (отсюда понятна необходимость введения логарифма, ведь у нас есть три переменных, значит нужно уметь выражать каждую через две оставшихся).

Для информатики полезно понимать, что логарифм  $\log_a(x)$  показывает, сколько раз нужно число  $x$  разделить на  $a$ , чтобы получить 1. Например, для 32 понадобится 5 делений:

$$32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Также можно привести некоторые свойства логарифмов:

1. Логарифм произведения:  $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. Логарифм частного:  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. Логарифм степени (следствие произведения):  $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$
4. Замена основания логарифма:  $\log_a(x) \cdot \log_b(a) = \log_b(x)$ , или  $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

# Олимпиадное программирование

В данном разделе мы получим некоторое представление об олимпиадном программировании, а именно, узнаем, как выглядит олимпиадная задача, и что такое «*сложность алгоритмов*».

## Олимпиадная задача

Посмотрим на пример того, как выглядит олимпиадная задача:

The screenshot shows a typical online programming problem interface. The problem title is "A+B" (1). The difficulty is "Сложность: 2%" (2). The problem statement is "Требуется сложить два целых числа A и B." (3). The input format is "Входные данные: В единственной строке входных данных записаны два натуральных числа через пробел. Значения чисел не превышают 10<sup>9</sup>." (4). The output format is "Выходные данные: В единственную строку нужно вывести одно целое число - сумму чисел A и B." (5). The evaluation system is described in block 6. Block 7 shows subproblems. Block 8 shows sample input/output. Block 9 shows a note. Block 10 is the code editor. Block 11 shows the submission button and limits.

№	БАЛЛЫ	НЕОБХ. ПОДЗАДАЧИ	ОГРАНИЧЕНИЯ
1	50	-	$A, B \leq 1000$
2	50	1	$A, B \leq 10^9$

Теперь разберёмся со всеми её частями:

1. Название задачи.
2. Сложность — на олимпиадах такого пункта нет, также сложность есть не на всех сайтах для олимпиадного программирования.
3. Условие задачи — здесь может быть какое-то введение к задаче или список действий, которые должна выполнять программа.
4. В описание входных данных написано, как программе вводятся данные.
5. В описание выходных данных написано, как выводить ответы к задаче.
6. Блок с системой оценивания может отсутствовать, но если он есть, то в нём описывается, как начисляются баллы за задачу.
7. Блок с подзадачами тоже может отсутствовать (вместе с системой оценивания).
8. Примеры того, какие ответы программа должна выводить при каких входных данных. Баллы за примеры обычно не ставятся.
9. В примечании может быть описано, как получились именно такие ответы для примеров.
10. Собственно, поле для отправки Вашей программы.

## 11. Ограничения по времени и памяти (об этом ещё будет чуть дальше).

Когда Вы участвуете в какой-либо олимпиаде, тот там предоставляется несколько задач. При этом за каждую задачу можно получить максимум 100 баллов (обычно), и цель — набрать как можно больше баллов. Также запоминается время, за которая были решены задачи, и если у людей равенство по баллам, то они могут сортироваться по времени (чем меньше суммарное время, тем лучше). Отношение к ошибочным послылкам у олимпиад может быть разным: где-то их количество не имеет значение, но где-то за каждую не правильную послылку даётся штрафное время.

За каждое отправленное решение можно получить один из следующих вердиктов:

- **Accept** — правильное решение.
- **WA** («*Wrong Answer*») — неверный ответ на одном из тестов.
- **TLE** («*Time limit exceeded*») — превышено ограничение по времени.
- **MLE** («*Memory limit exceeded*») — превышено ограничение по памяти.
- **Error** — также могут быть какие-либо другие ошибки: ошибка компиляции, неправильный формат вывода, ошибка во время выполнения и т.д.

## Сложность алгоритма

Основным критерием качества алгоритма является его сложность. Как можно понять по ограничениям, различают сложности по памяти и времени.

Сложность алгоритма по памяти оценивается довольно просто: складываются размеры всех используемых переменных. Если какая-то переменная является контейнером и хранит в себе другие переменные, то, логично, её размер определяется как сумма размеров всех хранимых элементов. С размерами разных переменных мы ознакомимся чуть позже, а пока перейдём к временной сложности алгоритмов.

Временная сложность оценивает, как долго будет выполняться алгоритм. А зная это, мы уже можем понять, пройдёт ли решение ограничение по времени. Обозначается сложность буквой  $O$  при этом буквой  $n$  часто обозначают размер входных данных. Например, сложность может быть  $O(n)$ .

Если в алгоритме используются циклы, то сложность оценивается по количеству его итераций; если циклы вложены, то количество их итераций перемножается; если же циклы идут последовательно, то сложность определяется суммой сделанных итераций.

При этом, поскольку нужно только оценить сложность алгоритма, то все константы опускаются, и оставляется только наибольшая степень. Например, если в алгоритме есть последовательные циклы со количеством итераций 100,  $2n$  и  $0.5n^2$ , то сложность будет  $O(100 + 2n + 0.5n^2) = O(1 + n + n^2) = O(n^2)$ . Более формальное определение таково: если сложность алгоритма составляет  $O(x)$ , то это значит, что начиная с какого-то размера входных данных ( $n_0$ ) алгоритм совершает не более, чем  $c \cdot x$  операций. Согласно такому определению, можно говорить, что сложность алгоритма с  $n$  итерациями, это  $O(n^2)$ , но так делать не принято и стараются оценивать сложность точнее.

Также, иногда применяются другие оценки сложности:  $\Omega(x)$  — «нижняя граница» и  $\Theta(x)$  — «точная граница». Нижняя граница говорит, что алгоритм начиная с какого-то  $n_0$  совершает не менее  $c \cdot x$  операций, а точная граница говорит, точное число операций, и, как следствие, должно выполняться равенство  $\Theta(x) = \Omega(x) = O(x)$ . Но мы будем использовать только  $O$ -нотацию.

Как только мы оценили количество выполняемых операций, то можем легко узнать, как долго будет выполняться алгоритм, ведь компьютер умеет выполнять примерно  $2 \cdot 10^7 - 2 \cdot 10^8$  операций в секунду.

## Образовательные ресурсы

В данном разделе приведён список полезных сайтов, на которых можно получить дополнительные знания по C++ или же порешать олимпиадные задачи. Часть информации в данной книге бралась из этих источников:

- [Введение в программирование \(C++\)](#) — курс на Stepik от Яндекса. Несложный, хороший для старта в C++.
- [Программирование на языке C++](#) — другой курс на Stepik от Computer Science Center. Сложнее курса от Яндекса.
- [Программирование на языке C++ \(продолжение\)](#) — продолжения предыдущего курса. Он правда сложный, лучше сначала пройти первую часть курса :)
- [Сириус Курсы](#) — на этом сайте ОЦ Сириус периодически выкладывает курсы по C++. Также можно подать заявку на программу Сириуса (по информатике), так как у некоторых есть вводные курсы по олимпиадному программированию :)
- [Acmp](#) — сайт с задачами, создан в Красноярском крае.
- [Informatics](#) — тоже сайт с задачами.
- [Codeforces](#) — ещё один сайт с задачами. но чуть популярней, есть пользователи со всего мира.
- [SortMe](#) — относительно новый и перспективный сайт с задачами.
- [Algocode](#) — сайт школы олимпиадного программирования «*Tinkoff Generation*» — можно поступить к ним, слушать лекции и решать задачи, или же читать их [объяснения алгоритмов](#).
- [E-maxx](#) — сайт с алгоритмами.
- [Cplusplus](#) и [Cplusplus](#) — сайты с документацией C++. Стоит научиться читать документацию на английском, благо, что там используется очень ограниченный набор слов.
- «Антти Лааксонен. Олимпиадное программирование (2018)» — большая хорошая книжка, в которой есть как простые алгоритмы, так и сложные. Скачать можно [отсюда](#).
- «Стивен Халим, Феликс Халим. Спортивное программирование (2020)» — эта книга ещё больше, вроде бы в ней содержится достаточно много алгоритмов, но автор изучить её ещё не успел. Скачать книгу можно [отсюда](#).

## Порядок чтения

И в последнем разделе вступительной части хотелось бы привести описание сложности и полезности всех последующих частей книги.

Название	Сложность понимания	Сложность написания	Полезность
Введение в C++	Просто	Просто	Стоит прочитать, если сомневаетесь, что знаете всё необходимое. Или можно возвращаться в процессе чтения.
Идеи проектирования алгоритмов	Просто	Средне	Там собраны полезные идеи на многие случаи жизни – прочитать стоит и применяется часто.
Алгебра	Просто	Просто	Эти алгоритмы не встречаются как самостоятельные задачи, но могут быть подзадачами в более сложных. Стоит именно первой темой, чтобы попрактиковаться в написании алгоритмов, описанных словами.
Сортировки	Просто	Просто и средне	Это классическая тема, которую рассказывают многим начинающим олимпиадникам. Сами по себе сортировки не нужно писать, так как уже есть встроенные, но они тоже учат писать описанный текстом алгоритм.
Перебор	Просто	Просто и средне	Полезная тема, переборы каких-то объектов даже встречаются на олимпиадах.
Жадные алгоритмы	Просто	Просто	Применимость жадных алгоритмов нужно чувствовать, а в главе приведены известные жадные алгоритмы. Тема встречается.
Динамическое программирование	Просто	Просто и средне	Вот динамика встречается очень часто и в ней следует усиленно практиковаться. Приведены какие-то известные задачи на динамику.
Бинарный поиск	Просто	Просто	Сам алгоритм очень короткий и применяется как подзадача в больших задачах. Читать нужно.
Простые линейные алгоритмы	Просто	Просто	Раздел не самый полезный, и не сложный для понимания. Но мыслить в терминах линейных алгоритмов и понимать их иногда бывает полезно.
Запросы суммы и минимума	Средне	Средне	Это уже более сложные линейные алгоритмы, и очень мало задач, в которых пригождаются.
Сложные линейные алгоритмы	Средне	Средне	Этот раздел основан на предыдущем и тоже не отличается большой применимостью в задачах.
Структуры данных	Средне и сложно	Средне и сложно	Это полезный раздел, но некоторые структуры сложны для понимания. Структуры в «хорошем» порядке: DSU, sqrt-декомпозиция, дерево отрезков, декартово дерево, разреженная таблица, дерево Фенвика, куча. Самая сложная структура из них – ДД.

Название	Сложность понимания	Сложность написания	Полезность
Введение в графы	Просто	Просто	В этом разделе собраны разные термины про графы и то, как их хранить в памяти. Тема полезная, графы встречаются часто.
Обходы графов	Среднее	Средне	Этот раздел тоже нужно читать, иначе с графами ничего сделать не сможете. Обходы нужны для дальнейшего понимания графов.
Остовные деревья и кратчайшие пути	Средне и сложно	Средне и сложно	Здесь уже собраны какие-то более серьёзные алгоритмы, но они всё ещё могут быть как подзадачи. Но и кратчайшие пути сами по себе очень полезны.
Геометрия	Средне и сложно	Средне и сложно	Общеизвестно, что мало людей любит геометрию. Но всё же задачи на неё бывают, поэтому прочитывать стоит. В первой части много математики и геометрических примитивов, а вот во второй уже какие-то более содержательные алгоритмы.
Алгоритмы на строках	Средне и сложно	Просто и средне	Чаше всего от строк нужно уметь считать хеши, это довольно не сложно. Но вот с другими алгоритмами могут возникнуть сложности с пониманием (и как следствие с написанием).
Рандом	Просто и средне	Просто и средне	Короткая глава, с какими-то интересными штуками. В олимпиадах рандом обычно не встречается, так что глава больше для общего развития.

В целом, изучать книгу можно в достаточно произвольном порядке, но если идти последовательно, то алгоритмы будут последовательно зависеть друг от друга (то есть текущий алгоритм не будет опираться на ещё не изученные). Вполне может быть, что порядок тем стоит поменять – можете предлагать это автору.

# Введение в C++

## Первая программа

Сегодня мы с Вами погрузимся в изучение нового для Вас языка программирования — C++, но изучать его мы будем в контексте олимпиад. Также по этой книге можно не только учить C++, но и повторять пройденный материал.

Так почему же выбор пал именно не изучение C++? Ответ очевиден — этот язык общепризнан быстрым и поэтому очень часто используется для олимпиадного программирования.

Теперь, когда мы поняли, почему выбор пал именно на этот язык, можно и начинать его изучать. Для этого открываем доступную среду разработки и вставляем в неё следующий код, представленный ниже.

```
1  // Ваша первая программа на C++
2  #include <iostream>
3  using namespace std;
4  int main(){
5      cout << "Hello world!" << endl;
6      return 0;
7  }
8  /* Это многострочный
9     комментарий */
```

Читатель, знакомый с другими языками программирования, может сразу догадаться, что данная программа выведет традиционную надпись `Hello world!`, и это действительно так!

Давайте разберёмся с кодом построчно.

В строке №1 написан однострочный комментарий (начинается с `//` и заканчивается с концом строки кода). Он нужен только для программиста, его содержимое не выполняется.

В строке №2 мы подключаем (`#include`) файл, в котором описаны функции по работе с вводом-выводом информации (`iostream`). Стоит отметить, что в C++ подключение встроенных функций не требует лишних временных и вычислительных затрат, и разные функции находятся в разных файлах (например, чуть позже вы узнаете про `cmath` для работы с математикой и `vector` для массивов с изменяемой длиной). В связи с этим, в олимпиадном программировании принято подключать сразу всё, потому что для этого не нужно запоминать, какие функции где хранятся, и для этого достаточно написать только одну строку:

```
1  #include <bits/stdc++.h>
```

Теперь разберёмся со строкой №3. В C++ для структурирования кода придуманы так называемые «*пространства имён*», которые обозначаются ключевым словом `namespace`. Все стандартные функции языка находятся в пространстве имён `std`, и для их вызова нужно писать `std::` перед названием функции (например, `std::cout`). Но в олимпиадном программировании снова упрощают себе жизнь и пишут строку №3, чтобы каждый раз не добавлять `std::`.

Любые программы на C++ всегда компилируются, то есть переводятся на машинный язык, и поэтому всегда в программах на C++ есть «*точка входа*» — в простейшем случае это функция `main`. В строке №4 как раз объявляется эта функция, с возвращаемым значением `int` (целое число), причём такое возвращаемое значение обязательно (единственное, что можно делать — не указывать ничего вместо `int`, тогда компилятор сам поймёт, что там должно было быть написано). Функции в олимпиадном программировании используются, поэтому мы научимся с ними работать, но это будет чуть позже. Пока важно лишь понимать, что тело функции ограничивается фигурными скобками.

Далее идёт строка с выводом надписи `Hello world!`. Если вы смогли понять значение кода выше, то с этой строкой кода точно справитесь — все строковые значения в C++ всегда содержатся в двойных кавычках, а вывод осуществляется с помощью `cout` и операции сдвига влево (`<<`, в простонародье — «ёлочка влево»). Слово `endl` обозначает, что после этой надписи нужно вывести перевод строки.

Строка №6 возвращает значение из функции. Казалось бы, кому его возвращать? Но нет - оно нужно, и используется компьютером, запустившим программу. При этом, договорились, что если программа вернула 0 или ничего не вернула, то считается, что она выполнилась успешно (поэтому на самом деле строка `return 0;` — не обязательна). А если программа вернула из функции `main` не 0, то это считается за ошибку во время выполнения. Поэтому на всех олимпиадах если программа вернула не 0, то считается, что она сломалась, и участник олимпиады получает соответствующий вердикт.

На строке №7 у нас заканчивается функция `main`, поэтому там просто ставится закрывающая фигурная скобка.

В строках 8-9 показано, как создавать многострочные комментарии, они начинаются с `/*` и заканчиваются `*/`.

Таким образом, общий вид олимпиадной программы на C++ таков:

```
1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  int main(){
4      // нужный код
5      return 0;
6  }
```

Может показаться, что такой код слишком длинный, но на самом деле цель (написать быструю программу на олимпиаде) оправдывает средства!



## Типы данных

В этом блоке мы изучим базовое понятие для языка C++ — «*типы данных*». Если Вы раньше изучали языки программирования, в которых указывать типы данных не обязательно (например, тот же Python), то Вам придётся привыкать, потому что типизация в C++ статическая, а значит, у всех переменных придётся указывать их тип.

Тип данных — это то значение, которое может хранить переменная. Например, какая-то переменная может хранить только число, а другая — только строку. Преобразование переменной из одного типа данных в другой называется «*привидением*». Также, кроме хранимого значения, в C++ типы данных различаются и размерами, занимаемыми в памяти, поэтому их важно изучить, чтобы использовать при необходимости на соревнованиях. Список основных типов данных вы можете посмотреть ниже.

Название	Размер в байтах	Хранимое значение
<code>bool</code>	1	<code>true</code> (истина) или <code>false</code> (ложь)
<code>char</code>	1	Хранит один символ, приводится к числу.
<code>short int</code>	2	Целое число из диапазона $[-2^{15}; 2^{15} - 1]$
<code>long int</code> или <code>int</code>	4	Целое число из диапазона $[-2^{31}; 2^{31} - 1]$
<code>long long int</code>	8	Целое число из диапазона $[-2^{63}; 2^{63} - 1]$
<code>float</code>	4	Рациональное число из диапазона $[-2^{31}; 2^{31} - 1]$
<code>double</code>	8	Рациональное число из диапазона $[-2^{63}; 2^{63} - 1]$

Важный нюанс в C++ это то, что в процессе своего исторического развития C++ много пережил и работал под разными архитектурами процессоров, поэтому получилось столько разных типов данных, и `long int` случайно совпал с `int`. Вообще-то, согласно стандарту C++, размер для типа `int` не зафиксирован, но во всех олимпиадах размер `int` именно 4 байта.

Также во всех типах, где есть слово `int`, его писать не обязательно (кроме обычного `int`, разумеется). Ещё у всех типов, кроме `bool` есть их беззнаковый аналог, для его использования добавляется `unsigned` перед названием типа (`unsigned short`, например). И диапазон значений у таких типов сдвигается в неотрицательные значения (например, `unsigned short` хранит значения из диапазона  $[0; 2^{16} - 1]$ ).

Теперь обсудим использование числовых типов данных в олимпиадной информатике. Здесь стараются использовать только целые числа (потому что при работе с рациональными возникают погрешности), поэтому самый популярный тип — `int`. Если его диапазона не хватает, то используют `long long`. Если рациональных чисел избежать не удаётся, то используют `double`, потому что он точнее, чем `float`. Остальные типы используются реже и в задачах со специальными ограничениями.

Чтобы понять, какой тип данных понадобится — нужно внимательно прочитать ограничения входных данных к задаче и посмотреть, на сколько большие значения будут возникать в процессе работы Вашего алгоритма. Для этого можно использовать приближения:  $2^{31} \approx 2 \cdot 10^9$  и  $2^{63} \approx 9 \cdot 10^{18}$ . Поэтому понятно, что, например, для *этой задачи* обычного `long long` не хватит, так как ограничение на входное число до  $10^{19}$ , но  $10^{19} > 2^{63} - 1$ , а значит, нужно или использовать его `unsigned` версию, или, всё же, воспользоваться рациональными числами.

Теперь, зная типы данных, перейдём к «*литералам*». Здесь всё просто, потому что литерал — это константа, включённая в код программы, и для этого не нужно делать ничего особенного. Вот так в C++ выглядят литералы:

```
1 true;           // встроенный литерал, обозначающий истину
2 'S';           // символ заглавной латинской буквы
3 5;             // просто целое число (int)
4 711;           // большое целое число (long long)
5 3.1416;        // просто рациональное число (double)
6 3.1416f;       // рациональное число с типом float
7 "Hello";       // литерал строки, строки мы пройдем чуть позже
```

Что же касается использования новых знаний, то здесь всё просто. Вы всегда перед первым использованием переменной должны указать её тип, а указывается он перед названием переменной. Это называется *«объявлением переменной»* и выглядит например так:

```
1 float x;
```

Если Вам нужно этой переменной сразу присвоить какое-то значение, то это называется *«определением»*, и нужно написать знак равенства и какой-нибудь литерал, другую переменную или какое-нибудь выражение. Делается это вот так:

```
1 char a = 'a';
2 char symbol = a;
3 char x = symbol + 5;           // Как думаете, рабочий ли это код? Если да, то чему равен x?
```

При этом, если нужно сразу несколько переменных, то их можно перечислить через запятую:

```
1 int a, step = 0, count = 1, b;
```

# Операторы

Раз уж мы узнали про типы данных, то теперь можем начать ими пользоваться. Начнём с того, что операторы в C++ бывают унарные, бинарные и тернарные. Они принимают соответственно один, два или три аргумента. Ещё операторы разделяются по области применения на арифметические, сравнения, логические, побитовые, присваивания и другие. Посмотрим же на те операторы, которыми мы будем пользоваться, и на их функционал по умолчанию (в C++ можно «перегрузить» операторы, но пока мы это не рассматриваем).

- Арифметические унарные. К таким операторам можно отнести `+a` и `-a`. Эти операции в C++ имеют такой же смысл, как и в математике. Но при этом мы можем после плюса или минуса писать не только число но и символ, например вот так: `+'a'`, и в данном примере значение этого выражения — `97`. Но это мы обсудим чуть позже, а пока продолжим изучать другие операторы.
- Арифметические бинарные: `a + b`, `a - b`, `a * b`, `a / b`, `a % b`. С первыми четырьмя операторами вновь всё понятно, потому что они заимствованы из математики. А вот на пятой операции, называемой остатком от деления, нужно немного остановиться. Вообще, такой термин существует и в математике, но там он определяется как число  $r$  являющееся решением уравнения  $a = bq + r$ , где  $0 \leq r < |b|$ . Но в C++ это реализовано немного по-другому. Во-первых, остаток от деления работает только для целых чисел. Во-вторых, модуль значения определяется по тем же правилам, что и в математике, но знак получается таким же, как и у делимого (`a`). Давайте посмотрим это на примере.

Выражение	Значение		
	Математика	C++	Python
<code>5 % 3</code>	2	2	2
<code>5 % -3</code>	2	2	-1
<code>-5 % 3</code>	1	-2	1
<code>-5 % -3</code>	1	-2	-2

Вот так устроен остаток от деления в C++, поэтому если у Вас какие-то переменные могут принимать отрицательные значения, то остаток от деления нужно использовать аккуратно, или не использовать вовсе.

- Несколько более интересные арифметические операторы это инкремент (`++`) и декремент (`--`). Первый из них увеличивает значение переменной на 1, второй — уменьшает. Но, при этом, у этих операторов есть префиксный вариант (`++a` и `--a`) и постфиксный вариант (`a--` и `a++`). Префиксный вариант сначала изменяет значение переменной, и уже потом его возвращает, а вот постфиксный — запоминает старое значение, изменяет значение, и потом возвращает старое значение. Понятнее это будет на примере:

```
1  int a = 5;
2  int b = ++a;
3  // a = 6 и b = 6
4  b = a++;
5  // a = 7 и b = 6
```

В олимпиадном программировании принято использовать префиксные варианты, потому что они немного быстрее постфиксных, так как не требуют запоминать старое значение переменной (хотя на самом деле компилятор достаточно умный, чтобы сгенерировать самый эффективный вариант кода).

- С операторами сравнения (они все бинарные) всё легче. Такие операторы это: `a == b` (проверка на равенство), `a != b` (проверка на неравенство), `a < b` (проверка на меньше), `a <= b` (проверка на меньше или равно), `a > b` (проверка на больше), `a >= b` (проверка на больше или равно). Этим операциям нам будет достаточно, но для общего развития стоит сказать, что в стандарте C++ 2020-го года появился «оператор трёхстороннего сравнения» (неформальное название «космический корабль»), и выглядит он вот так: `a <=> b`.
- Логические операторы это НЕ (`!a`), ИЛИ (`a || b`) и И (`a && b`). Принцип их работы таков: сначала вычисляется значение `a`, потом он приводится к типу `bool`. Если этого недостаточно, чтобы однозначно определить значение выражения, то потом уже и `b` вычисляется и приводится к типу `bool` (понятно, что для НЕ это не актуально, так как там всего один операнд). С НЕ всё просто — этот оператор возвращает противоположное значение для переменной (если была `true`, то вернёт `false` и наоборот). Что же касается для других операторов, то они вычисленные значения из `bool` превращают в целые числа (`true` становится 1, `false` становится 0) и потом используют одноимённые побитовые операторы, про которые написано ниже.
- Унарный побитовый оператор — это инверсия (`~a`). Она смотрит на каждый бит двоичного представления и изменяет его на противоположный (0 на 1, 1 на 0). При этом в C++ все побитовые операции определены для целых чисел, поэтому узнать значение `~2.5` не получится, но `~3` и даже `~-5` являются корректными выражениями.
- Часть бинарных побитовых операторов это: сдвиг влево (`a << b`) и сдвиг вправо (`a >> b`). Они дописывают `b` нулей в двоичное представление числа `a` и после этого оставляют столько битов, сколько было в числе `a` (сдвиг влево дописывает нули справа, как бы сдвигая исходное значение влево; со сдвигом вправо — наоборот). Согласно такому определению, данные операции равносильны домножению на степень двойки, а именно: `c = a << b` то же самое, что и  $c = a \cdot 2^b$ , а `c = a >> b` это  $c = \left\lfloor \frac{a}{2^b} \right\rfloor$  (целая часть от деления).
- Оставшиеся бинарные операторы это: побитовое ИЛИ (`a | b`), побитовое И (`a & b`) и побитовое исключающее ИЛИ, оно же XOR (`a ^ b`). Они последовательно смотрят на все биты операндов и получают значение ответа (по первым битам `a` и `b` определяется первый бит ответа, по вторым — второй и т.д.). Ответ же определяется по всем известным таблицам истинности:

a	b	a   b	a & b	a ^ b
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

- Операторов присваивания в C++ много. Самый простой, которым мы уже пользовались, это `a = b`. Кроме обычного присваивания бывает ещё и составное присваивание, оно есть у каждого бинарного арифметического оператора и бинарного побитового оператора и записывается как `a @= b`, где `@` это собственно и есть наш оператор. И такая запись эквивалентна записи `a = a @ b`, например `x += 2` тоже самое, что и `x = x + 2` (и то, и другое увеличивают значение `x` на 2).
- К другим операторам были отнесены те, которые нужны реже, и с ними будет проще разобраться потом, когда будут конкретные программы. Но, всё же, единственный тернарный оператор в C++ стоит рассмотреть сейчас. На первый взгляд, выглядит страшно: `a ? b : c`, но это только так кажется. А работает он просто: сначала вычисляется выражение `a` и приводится к `bool`, если получилось `true`, то результатом будет значение выражения `b`, если `false` — то значение `c`.

Теперь все основные операторы можно считать изученными! Стоит лишь добавить, что разные выражения с операторами можно комбинировать между собой. При этом, стоит учитывать, что существует приоритет операций, и он влияет на порядок вычисления выражения, и, собственно, на его значение. Весь порядок приоритета операций учить довольно бесполезно, но можно запомнить, что унарные операции важнее, чем бинарные `*`, `/`, `%`. Они, в свою очередь, важнее, чем бинарные `+`, `-`. Далее идут сравнения вперемешку с битовыми операциями, потом `&&`, `||`, и далее тернарный оператор и присваивания. Если сомневаетесь в приоритете операций, то можно поставить лишние круглые скобки, и они заставят сначала вычислить значение внутри них, и уже после этого с данным значением будет делаться окружающие его операции.

Теперь вроде бы мы всё знаем, кроме объяснения такой проблемы, как `+'a'`, которое равно 97 (смотрите самое начало темы). А на самом деле, здесь тоже нет ничего не правильного, ведь в C++ тип `char` тоже является целым числом, и поэтому с ним можно делать операции, как с числами. Вы спросите: "Но почему же тогда именно 97?" А потому, что преобразование происходит не произвольно, а согласно «*таблице символов ASCII*», и там у буквы `'a'` именно такой код.

Следующий разумный вопрос: а к какому из целочисленных типов приводится `char`, ведь мы в прошлый раз изучили, что их много? Здесь просто договорились, что таким универсальным типом, к которому всё приводится, если нужно, будет `int`.

Теперь у Вас может возникнуть новый вопрос: "А что произойдёт, если в одном выражении будет стоять несколько разных числовых типов?" Ответ таков: всё значение выражение приводится к самому информативному из тех типов, которые есть в выражении. Например, если есть `long long` и `int`, то результатом операции с ними будет `long long`; если были `float` и `double` то результатом будет `double`; если `int` и `double` — то будет `double`.

И, в связи с этим, нужно сделать важную оговорку про деление (`a / b`). Если окажется, что оба операнда — целые числа, то и результат тоже будет целым числом (произойдёт целочисленное деление). Поэтому не стоит надеяться, что `3 / 2 == 1.5`, так как сначала произойдёт деление и получится 1, и только потом будут сравниваться `1 == 1.5`, а это, очевидно, `false`. Чтобы поделить не нацело, нужно сделать какой-то из операндов не целым, например значение выражения `3.0 / 2 == 1.5` уже будет `true`.

## Синтаксис C++

В этом блоке мы изучим базовую часть синтаксиса C++ (на самом деле, весь синтаксис очень обширный, и в таком объёме он в олимпиадном программировании не требуется).

В прошлый раз мы изучили операторы, а до этого мы узнали про типы данных. Значит, мы уже можем написать какую-нибудь простенькую программу на C++, например, мы можем вычислить корни квадратного трёхчлена по его коэффициентам. Такая программа вполне может выглядеть вот так:

```
1  #include <iostream>      // нам понадобится ввод-вывод
2  using namespace std;
3  int main(){
4      double a, b, c;
5      cin >> a >> b >> c;
6      double d = b * b - 4 * a * c;
7      // а как дальше, там же разное количество действительных корней в зависимости от знака d?
8      return 0;
9  }
```

Собственно, мы натываемся на проблему: если бы мы знали, что у вводимого квадратного уравнения всегда будет положительный дискриминант, то легко бы посчитали оба его корня, но ведь нам этого никто не обещал, а значит, нужно что-то придумать. Первой идеей может быть тернарный оператор, но это плохо, потому что по стандарту C++ такой оператор должен всегда возвращать одинаковое значение, но у нас не так, ведь корней то два, то ноль (или один, если рассматривать такой случай с двумя совпавшими корнями отдельно).

И здесь нам на помощь приходят условия! В C++ они выглядят вот так:

```
1  if (x){
2      // сделать что-то, если x приводится к true
3  } else if (y){
4      // сделать что-то, если x не верно, но верно y
5  } else {
6      // сделать что-то, если и x, и y оба не верны.
7  }
```

Собственно, в начале идёт «ключевое слово» `if`, потом в круглых скобках значение, истинность которого нужно проверить (для этого компьютер автоматически приведёт его к типу `bool`), и потом в фигурных скобках идут операции, которые нужно выполнить (если операция ровно одна, то фигурные скобки можно опустить). Потом может идти сколько угодно (в том числе 0) блоков `else if`, которые будут выполнены, если их условие истинно, а все предыдущие — нет. После всех `else if` может идти (а может и не идти) блок `else`, который выполнится, если все предыдущие условия не верны.

И понятно, что теперь мы можем написать задуманное вот таким образом (тот фрагмент кода, где мы сомневались):

```
1  if (d > 0){
2      double x1 = (-b - sqrt(d)) / (2 * a), x2 = (-b + sqrt(d)) / (2 * a);
3      cout << "d > 0: " << x1 << ", " << x2;
4  } else if (d == 0) cout << "d = 0: " << (-b) / (2 * a);
5  // блок из одного выражения может быть без {}
6  else {
7      cout << "d < 0: ";
8      cout << "x1 and x2 is not Real :(";
9      // так вполне можно выводить, всё выведется в одну строку
10 }
```

Если вы попытаете запустить, то вам выдадут ошибку `error: 'sqrt' was not declared in this scope` (ошибка: 'sqrt' не был объявлен в этой области видимости). Тае происходит, потому что для использования функции корня нужно подключить соответствующий файл:

```
1 #include <cmath>           // здесь у C++ "прячется" вся математика
```

Конечно, `if` — это уже хорошо, но также стоит сказать, про существование `switch`, хотя и без него вполне можно обойтись. `switch` нужно использовать, когда Вам нужно выбрать часть кода в зависимости от одного целочисленного выражения (например, если `x` равно 1, то выполнить одно, если 2 — то другое, и т.д.). Давайте просто приведём пример использования `switch`, так как он покрывает все тонкости использования данного оператора.

```
1 #include <iostream>
2 using namespace std;
3 int main(){
4     int x;
5     cin >> x;
6     switch(x){
7         case 0:
8         case 1:
9             // выполнится при x == 0 || x == 1
10            cout << "zero or one";
11            break;
12        case 2:
13            // выполнится при x == 2
14            cout << "two";
15            break;
16        case 3:
17            // выполнится при x == 3
18            cout << "three";
19        default:
20            // не выполнится при x == 0 || x == 1 || x == 2
21            // потому что в тех case блоках был оператор break
22            cout << "default";
23    }
24    return 0;
25 }
```

Хорошо, будем считать, что с одной задачей справились, поэтому давайте придумаем другую. Например, будем вычислять  $n$ -ое число Фибоначчи (числа Фибоначчи определяются как  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ , при  $n \geq 2$ ). Понятно, что согласно такому определению, нам для вычисления нужного числа понадобится вычислить предыдущие, для них - пред предыдущие и т.д. И как мы будем такое решать?

Вообще-то если очень хочется, то такое мы уже можем решить: мы знаем как устроен `if`, а значит можем для каждого вводимого `n` можем сделать своё условие и вывод. Но чувствуется же, что это не рационально, да?

И здесь нам на помощь приходят циклы! В C++ их аж 3 штуки, и они выглядят вот так:

```
1 for (x; y; z) {
2     // тело цикла
3 }
4 while (x) {
5     // тело цикла
6 }
7 do {
8     // тело цикла
9 } while(x);
```

Давайте с ними разбираться. Общее во всех циклах — тело. Это, собственно, тот код, который нужно повторять каждый раз, пока длится цикл. Причём во всех циклах тело нужно писать в

фигурных скобках, если совершается много операций, но если операция только одна, то фигурные скобки можно опустить. Как выполнение цикла завершается, то программа начинает выполняться со строки, следующей сразу после цикла. Теперь разберёмся с каждым циклом отдельно.

Первый цикл — `for`. В нём мы сначала объявляем нужные для цикла переменные (`x`), потом пишем условия выхода из цикла (`y`), потом пишем шаг цикла (`z`), и далее тело. Как работает этот цикл? Сначала один раз выполняется `x`, потом проверяется `y`, далее выполняется тело цикла и шаг цикла. Потом происходит проверка условия (вычисляется `y` и приводится к `bool`) и если условие оказалось `true`, то цикл продолжается: выполняется тело, делается шаг и вновь происходит проверка условия, если же `y` оказался `false`, то выполнение цикла завершается.

Второй цикл — `while` несколько проще. Сначала проверяется условие (вычисляется `x` и приводится к `bool`), если условие `true`, то выполняется тело цикла, если оказалось `false`, то выполнение цикла завершается.

Третий цикл — `do while` почти такой же, как `while`. Сначала выполняется тело цикла, потом проверяется условие (вычисляется `x` и приводится к `bool`), если условие `true`, то вновь начинает выполняться тело цикла, если оказалось `false`, то выполнение цикла завершается.

Теперь мы знаем циклы и можем легко вычислять  $n$ -ое число Фибоначчи. Например, можно написать программу так: сначала вводится число `n`, если оно 0 или 1, то эти случаи можно сделать по определению чисел Фибоначчи (потому что  $F_0 = 0$  и  $F_1 = 1$ , а это и есть нужные нам ответы). А во всех других случаях давайте хранить два последних числа Фибоначчи (`a` и `b`), по ним вычислять следующее (`c`), и потом обновлять последние числа. И после нужного числа итераций (шагов цикла) можно будет вывести ответ. Давайте напомним примерный алгоритм:

```
1  // ввод n, проверка, что n > 1
2  int a = 0, b = 1;    // потому что мы начнём вычисления со второго числа,
3                        // а для него предыдущие - 0 и 1
4  // здесь будет тело цикла
5  cout << b;           // напомним циклы так, чтобы ответ оказался в b
```

А теперь будем использовать циклы. Сначала `for`:

```
1  for(int i = 2; i <= n; ++i){
2      int c = a + b;
3      a = b;
4      b = c;
5  }
```

Теперь с помощью `while`:

```
1  int i = 2;
2  while(i <= n){
3      int c = a + b;
4      a = b;
5      b = c;
6      ++i;
7  }
```

И, наконец, с помощью `do while`:

```
1  int i = 2;
2  do {
3      int c = a + b;
4      a = b;
5      b = c;
6      ++i;
7  } while(i <= n);
```



Можно запустить эти циклы и убедиться, что они дадут одинаковые ответы. По данному примеру может показаться, что всегда удобнее всего пользоваться циклом `for`, но это не так, потому что бывают разные ситуации, и в каких-то из них нагляднее оформить цикл с помощью `while`, и такой пример мы ещё разберём, но чуть позже.

Ещё в C++ есть ключевое слово `break`, которое незамедлительно прекращает выполнение цикла, а также `continue`, которые прерывает текущую итерацию и переходит к следующей (с проверкой условия и шагом цикла). Если в программе будет несколько циклов, один внутри другого (такие циклы называются вложенными), то `break` и `continue` повлияют только на один цикл, непосредственно в котором они и написаны.

Также стоит немного поговорить об «областях видимости». В C++ все фрагменты кода, которые заключены между фигурными скобками, имеют свою область видимости, а это значит, что если в них объявить какую-нибудь переменную, то вне этой области видимости узнать значение этой переменной будет нельзя. То есть, в примерах выше, вне цикла нельзя написать, например, так:

```
1  cout << c;  // error: 'c' was not declared in this scope
2              // (ошибка: 'c' не был объявлен в этой области видимости)
```

А что делать, если придётся, например, решать квадратные уравнения раз 10 в разных местах программы? Не писать же каждый раз одно и то же? Конечно нет, ведь в C++ есть функции!

Функция — это часть программы, которая принимает определённые аргументы, что-то делает с ними и после этого возвращает какое-то значение. В нашем примере функцией вполне можно сделать вычисление дискриминанта. Принимаемыми аргументами будут коэффициенты квадратного трёхчлена, а возвращаемым значением — собственно, само значение дискриминанта. Посмотрим, же, как это сделать в C++:

```
1  double get_d(double a, double b, double c){
2      double value = b * b - 4 * a * c;
3      return value;
4  }
```

Что же здесь произошло? Объявление функции начинается с её возвращаемого значения и имени после него (`double get_d`). После этого в круглых скобках перечисляются аргументы функции через запятую: сначала тип, потом значение `double a`, `double b`, `double c`. И после этого идёт само тело функции, у которого фигурные скобки обязательны. Чтобы вернуть значение из функции, используется ключевое слово `return`, и после него указывается возвращаемое значение.

Вы спросите: "А куда это написать и как же это использовать?" И ответ таков: другие функции нужно объявлять выше функции `main` (то есть между `using namespace std;` и `int main()`). А использовать нужно так: в нашей старой программе вместо:

```
1  double d = b * b - 4 * a * c;
```

Можно написать:

```
1  double d = get_d(a, b, c);
```

И всё будет работать также, как и раньше!

По аналогии с циклами и условиями, внутри функции создаётся своя область видимости, и поэтому использовать `value` внутри `main` нельзя.

Теперь можно считать, что основной синтаксис Вы знаете. Остаётся лишь узнать циклы по контейнерам, но это будет в теме контейнеров.

## Строки и ввод-вывод

Теперь, когда мы узнали синтаксис C++, можно переходить и к изучению чуть менее важных вещей. В этом блоке мы познакомимся со строками и операциями ввода-вывода.

Строки в C++ пишутся в двойных кавычках ( `" "` ) и являются контейнером для символов. Но, как уже отмечалось в предыдущих блоках, символы кодируются согласно таблице ASCII, а в этой таблице есть управляющие символы. Например, таким является символ переноса строки — его не видно, но при этом он говорит, что продолжать нужно с новой строки. В C++ эти символы тоже поддерживаются и начинаются они с `\`. Все управляющие символы можно увидеть в табличке ниже.

Символ	Описание
<code>'\r'</code>	возврат каретки в начало строки
<code>'\n'</code>	новая строка
<code>'\t'</code>	горизонтальная табуляция
<code>'\v'</code>	вертикальная табуляция
<code>'\"'</code>	двойные кавычки
<code>'\''</code>	апостроф
<code>'\\'</code>	обратный слэш
<code>'\0'</code>	нулевой символ
<code>'\?'</code>	знак вопроса
<code>'\a'</code>	сигнал бипера (спикера) компьютера

Из всех специальных символы самый полезный (популярный в олимпиадном программировании) — это перенос строки, поэтому приведём пример его использования:

```
1 cout << "Hello\nworld!";
```

Данная строка кода будем выводить надпись в две строки: на первой - `"Hello"` , а на второй — `"world!"` . Другие управляющие символы используются аналогично.

Скажем совсем немного про работу с символами. Иногда бывает нужно перевести символы из верхнего регистра в нижний и наоборот. Это можно сделать формулой, или же использовать две встроенные функции:

```
1 cout << char(tolower('a')) << " " << char(tolower('A')) << "\n";           // a a
2 cout << char(toupper('a')) << " " << char(toupper('A')) << "\n";           // A A
```

Теперь перейдём к самим строкам. Как упоминалось раньше, они в C++ заключаются в двойные кавычки (и именно так у нас в предыдущей программе). Также мы знаем, что у всего в C++ есть свой тип данных. Так какой же тип нам использовать для строк? Оказывается, что такой тип данных встроен (как и все важные и достаточно универсальные типы), и называется он `std::string` . Также, как было сказано в предыдущих блоках, если мы не хотим постоянно писать префикс `std::` , то достаточно один раз в программе написать `using namespace std;` . И последний нюанс со строками, для их использования нужно подключить специальный файл:

```
1 #include <string>
```

А теперь, когда мы знаем всю нюансы, то уже можем что-нибудь со строками сделать, например написать программу-приветствие:

```
1 #include <iostream>           // ввод-вывод
2 #include <string>             // строки
3 using namespace std;
4 int main(){
```

```

5     string s = "Hello,", name;
6     cin >> name;
7     cout << s << " " << name;
8     return 0;
9 }

```

Но, конечно же, это не всё, что можно делать со строками. Во-первых, строки можно друг с другом «конкатенировать», то есть дописывать одну строку в конец другой. Делается это с помощью оператора `+`:

```

1  string s = "Hello ";
2  s = s + "world";           // s = "Hello world"
3  s += "!";                  // s = "Hello world!"

```

Также у строк есть длина и проверка на пустоту:

```

1  cout << s.size() << "\n";           // 12
2  cout << s.empty() << "\n";         // 0, т.к. так выводится false

```

Получение символа по индексу и получение подстроки:

```

1  cout << s[6] << "\n";               // 'w', т.к. индексация с 0
2  cout << s.substr(3, 5) << "\n";     // "lo wo"

```

Ещё можно менять саму строку (добавлять символы в конец или в любое другое место; удалить какие-нибудь символы):

```

1  s.push_back('!');                 // s = "Hello world!!"
2  s.insert(5, ',');                 // s = "Hello, world!!"
3  s.erase(5, 2);                    // s = "Helloworld!!"
4  s.pop_back();                     // s = "Helloworld!"

```

Можно получать первый и последний элементы строки:

```

1  cout << s.front() << "\n";         // 'H', т.к. это первый символ.
2  cout << s.back() << "\n";          // '!', т.к. это последний символ.

```

Можно получать «итераторы» на начало и конец строки (пока может выглядеть бесполезным, но оно нам понадобится):

```

1  s.begin();                        // итератор, указывающий на 'H'
2  s.end();                           // итератор, указывающий на символ сразу после строки

```

Собственно, это все основные методы строк, но если Вам понадобятся ещё какие-нибудь другие методы, то Вы всегда можете посмотреть их в официальной документации.

Теперь можно и переходить к вводу-выводу. Для начала снова придумаем какую-нибудь задачу. Пусть нам нужно считать время (в формате <часы>:<минуты>), извлечь из них отдельно часы и минуты и потом вывести так же, как и было задано изначально.

Первый вариант, который может приходить на ум — это сначала считать строку, потом найти в ней двоеточие, и дальше из левой части получить часы, а из правой — минуты. Реализацию данного способа мы оставим на исполнение читателям.

Другой способ может появиться, если немного поэкспериментировать с оператором `cin` и разными типами данных. Оказывается, что вот такой код будет работать корректно:

```

1  #include <iostream>
2  using namespace std;
3  int main(){
4      int h, m;
5      char c;
6      cin >> h >> c >> m;
7      cout << h << ":" << m;
8      return 0;
9  }

```

Понятно, как C++ справляется с этим: он знает, что двоеточие точно не может быть в целом числе, поэтому сам делает то, что мы придумали в первом способе.

Но и это ещё не всё, потому что C++ сохранил `scanf` для ввода и `printf`, для вывода, которыми пользовались ещё в C. И такая же программа с этими функциями будет выглядеть вот так:

```
1  #include <iostream>
2  using namespace std;
3  int main(){
4      int h, m;
5      scanf("%d:%d", &h, &m);           // вводим два целых через ":"
6      printf("%d:%d", h, m);           // выводим два целых через ":"
7      return 0;
8  }
```

Здесь возникли строки `"%d"`. Они обозначают, что нужно считать или напечатать число с типом `int`. Если нужен другой тип, то его можно узнать по таблице ниже.

Символ	Тип данных
<code>"%d"</code>	<code>int</code>
<code>"%u"</code>	<code>unsigned int</code>
<code>"%x"</code>	<code>int</code> в шестнадцатеричной системе счисления
<code>"%o"</code>	<code>int</code> в восьмеричной системе счисления
<code>"%f"</code>	<code>float</code>
<code>"%lf"</code>	<code>double</code>
<code>"%c"</code>	<code>char</code>
<code>"%s"</code>	<code>string</code>

Хорошо, с этой задачей вроде бы разобрались. А что делать, если нам вдруг понадобится считывать всё, что нам вводится, включая пробелы. Как тогда быть, если при считывании в `string` попадают только не пробельные символы?

И для этого в C++ есть решение — `getline`:

```
1  string s;
2  getline(cin, s);
```

Этот код запишет в переменную `s` всё, что введёт пользователь до перевода на новую строку.

И, наконец, последнее необычное использование ввода. Предположим, что наша задача — это считать сколько-то чисел (но мы не знаем сколько) и вывести их сумму. И тут у нас возникнет проблема: считывать числа и суммировать их мы, конечно, можем, но вот проверять, что больше числа нет — пока не умеем. Но и для этого C++ придумал выход:

```
1  #include <iostream>
2  using namespace std;
3  int main(){
4      int x, sum = 0;
5      while(cin >> x){           // вся магия в этой строке
6          sum += x;
7      }
8      cout << sum;
9      return 0;
10 }
```

Причина, по которой этот код работает, такова: `cin` считывает значение, сохраняет его в переменную и возвращает `true`, если считывание удалось, иначе — `false`.

## Пары и массивы

В одном из прошлых блоков мы пытались найти корни квадратного уравнения. Там мы поняли, что в зависимости от знака дискриминанта, у уравнения может быть разное количество действительных корней, и поэтому у нас возникла проблема, что мы не знаем типа данных, который бы позволил нам использовать тернарный оператор. В этом же блоке мы постараемся исправить данную проблему.

Начнём, пожалуй, с более частного случая. Пусть нам нужно как-то хранить пару чисел в одной переменной (это могут быть, например, координаты точки на плоскости, или те же корни квадратного уравнения). Для таких целей в C++ придумали тип данных `pair`, и для его использования нужно подключить соответствующий файл:

```
1 #include <utility>
```

После того, как мы подключили нужный файл, можно и начать пользоваться парами, делается это вот так:

```
1 pair<int, int> x, y = {3, 7};
2 x.first = 4;
3 x.second = 5;
4 cout << "(" << x.first << "; " << x.second << ")\n";           // (4; 5)
5 cout << "(" << y.first << "; " << y.second << ")\n";           // (3; 7)
```

В строке №1 мы объявляем две переменных, хранящих пару из двух `int`. Такое (`pair<int, int>`) длинное название типа может несколько пугать, но если в нём разобраться, то всё должно стать понятно. `pair` мы пишем потому, что хотим получить пару, а название типов внутри `<>` — это типы для соответствующих полей пары (первый тип — для `first`, второй — для `second`). Причина, по которой нужно писать именно `<>` — это «шаблоны». Если коротко, то в C++ они пишутся всегда, когда нужно объявить какой-то сложный тип, содержащий простые.

Также паре можно присваивать значение, если указать его в фигурных скобках. Если никакое значение не указывать, то присваивается значение по умолчанию (для `int` это `0`). С помощью точки можно обращаться к частям пары: к её первому (`x.first`) или второму (`x.second`) элементам. С элементами пар можно работать как с обычными переменными.

Обобщением пар в C++ являются кортежи (`tuple`). В них можно хранить не две, а сколько угодно переменных. Во-первых, для использования `tuple` вновь придётся подключить одноимённый файл:

```
1 #include <tuple>
```

И после этого кортежи можно использовать (но чуть более хитрым образом, чем пары):

```
1 tuple<int, char, string> t = {5, 'C', "text"};
2 cout << get<0>(t) << " " << get<1>(t) << " " << get<2>(t) << "\n";           // 5 C text
3 get<0>(t) = 512;
4 get<1>(t) = 'a';
5 get<2>(t) = "new text";
6 cout << get<0>(t) << " " << get<1>(t) << " " << get<2>(t) << "\n";           // 512 a new text
```

С объявлением типа должно быть более-менее всё понятно, здесь, так же, как и с парами, первый тип достанется первой переменной, второй — второй и т.д. Что же касается получения элементов кортежа, то нужно использовать `get<1>(t)`, потому что `get` является «шаблонной функцией» и часть аргументов таких функций может передаваться в `<>`.

Теперь, формально, мы умеем хранить в одной переменной столько значений, сколько нужно (достаточно написать побольше типов для `tuple`). Но что делать, если нам вдруг понадобится хранить 200 целочисленных переменных, не серьёзно же повторять один и тот же тип `int` 200 раз?

А если, вдруг, переменных окажется не 200, а столько, сколько введёт пользователь? Справиться с этим всем призваны массивы.

Массивы были ещё в С, поэтому и их использование и создание не сложное. Даже подключать ничего не надо! Давайте снова придумаем какую-нибудь простую задачку. Пусть пользователь вводит сначала число  $n$ , а потом вводит  $n$  чисел и их нужно вывести в обратном порядке. Что ж, приступим к решению!

Для начала нужно считать `n` и создать массив для того, чтобы пользователь его заполнил:

```
1  int n;  
2  cin >> n;  
3  int arr[n];
```

Можно видеть, что, во-первых, массивы могут иметь размер, не указанный в коде (для `tuple` мы в коде прописывали, сколько он будет хранить значений). Во-вторых понятно, как создаётся массив: сначала идёт тип данных, которые он будет хранить (`int`), потом его название (`arr`) и в конце внутри `[]` идёт его размер (`n`). Также стоит добавить, что массив, в отличие от пар и кортежей, хранит значения только одного типа.

Теперь можем и решить саму задачу:

```
1  for (int i = 0; i < n; ++i) cin >> arr[i];  
2  for (int i = n - 1; i >= 0; --i) cout << arr[i] << " ";
```

Из этого примера видно, что обращение к элементам массива выглядит как `arr[i]` и с этим элементами можно делать всё, что мы раньше делали с обычными переменными.

Кроме того, если Вы хотите сразу присвоить массиву значения, то можете не указывать его размер и компьютер сам посчитает число элементов:

```
1  int arr[] = {5, 4, 3, 2, 1};
```

Теперь можно считать, что пары, кортежи и массивы нами изучены. И мы даже сможем сохранить два корня квадратного уравнения с помощью одной переменной (причём можно использовать все три изученных способа). Но вот если мы захотим всегда сохранять все корни уравнения в одну переменную, то у нас это не получится (потому что у пройденных типов размер постоянен после объявления, а мы хотим сначала объявить переменную, а потом в ней сохранить нужное количество корней уравнения). И для этого в C++ есть решение: `vector`!

Во-первых, нам, как обычно, понадобится подключить специальный файл:

```
1  #include <vector>
```

Во-вторых, мы можем создавать переменные с типом `vector`;

```
1  vector<int> vec;
```

Здесь тип данных внутри `<>` это тот, который будет храниться внутри `vector` (а нашем случае — `int`), а после тип, как обычно идёт название переменной (у нас это `vec`).

Если хочется, то можно сразу задать элементы у `vector`, делается это также, как и с предыдущими типами:

```
1  vector<int> prime = {2, 3, 5, 7};
```

Теперь посмотрим на те функции, которые есть у `vector`. Сначала те, которые мы уже видели у строк:

```

1  cout << prime.size() << "\n";           // 4
2  cout << prime.empty() << "\n";         // 0, т.к. так выводится false
3  cout << prime[2] << "\n";             // 5
4  prime.push_back(13);                   // {2, 3, 5, 7, 13}
5  prime.insert(prime.begin() + 4, 11);    // {2, 3, 5, 7, 11, 13}
6  prime.erase(prime.begin() + 3);        // {2, 3, 5, 11, 13}
7  prime.pop_back();                      // {2, 3, 5, 11}
8  cout << prime.front() << "\n";         // 2
9  cout << prime.back() << "\n";         // 11
10 prime.begin();                         // итератор, указывающий на 2
11 prime.end();                          // итератор, указывающий на место после конца prime

```

И в целом это все основные методы, которые есть у `vector`.

Также стоит обратить внимание, что если не аккуратно использовать индексы, то может возникнуть «неопределённое поведение». Например, в этой ситуации:

```

1  cout << prime[5] << "\n";           // неопределённое поведение

```

Стандартом C++ не описывается, что происходит в таком случае: программа может как сломаться, так и вывести какое-то значение, которое компьютер хранит в нужном участке памяти. Но если Вы не хотите следить за индексами, то у `vector` (а также у `string`) есть метод `at`:

```

1  cout << prime.at(2) << "\n";        // 5
2  cout << prime.at(5) << "\n";        // ошибка

```

На этом изучение `vector` закончено, и мы наконец-то сможем записать корни квадратного уравнения в одну переменную, причём это всё можно не сложно сделать в функции! Вот как она может выглядеть:

```

1  vector<double> get_roots(double a, double b, double c){
2      vector<double> ans;
3      double d = b * b - 4 * a * c;
4      if (d > 0){
5          ans.push_back((-b - sqrt(d)) / (2 * a));
6          ans.push_back((-b + sqrt(d)) / (2 * a));
7      } else if (d == 0) ans = {(-b) / (2 * a)};
8      return ans;
9  }

```

И использоваться она может вот так:

```

1  double a, b, c;
2  cin >> a >> b >> c;
3  vector<double> v = get_roots(a, b, c);
4  for (int i = 0; i < v.size(); ++i) cout << v[i] << " ";

```

Таким образом, у нас получилась рабочая программа. Но она ещё не совершенна, а именно, можно написать вывод переменных чуть короче. Это называется «*range-based for loop*» и появилось в стандарте 2011-го года. Пользоваться этим нужно так:

```

1  for (double x : v) cout << x << " ";

```

Такая программа перебирает переменной `x` все элементы из переменной `v`. Чтобы такой циклы сработал переменная `v` должна иметь методы `v.begin()` и `v.end()`, возвращающие итераторы, чтобы компьютер понял в каком месте памяти хранятся элементы, которые нужно перебрать. При желании можно перебрать элементы вектора с помощью только итераторов:

```

1  for (vector<double>::iterator it = v.begin(); it != v.end(); ++it) cout << *it << " ";

```

Здесь можно видеть, что тип у итератора достаточно длинный (`vector<double>::iterator`), поэтому в C++11 придумали специальный тип `auto`. Его можно давать любой переменной, которой сразу с объявлением присваивается и значение. Тогда компьютер автоматически понимает, что у переменной должен быть такой же тип, как и у присваиваемого значения, и сам «выводит тип». Пользоваться `auto` можно так:

```
1 auto pi = 3.1415926535f;           // float
2 for (auto x : v) cout << x << " "; // double
3 for (auto it = v.begin(); it != v.end(); ++it) cout << *it << " "; // vector<double>::iterator
```

Так же «*range-based for loop*» вполне работает и для типа `string`, и для массивов. Но вот для `pair` и `tuple` он работать не будет, потому что кортежи и пары потенциально могут хранить одновременные переменные разных типов, и поэтому компилятор не сможет «вывести тип».

А теперь посмотрите на этот код и скажите, что он выведет:

```
1 #include <iostream>
2 using namespace std;
3 int main(){
4     int n;
5     cin >> n;
6     int a[n];
7     for(int x : a) cin >> x;
8     for(int x : a) cout << x << " ";
9     return 0;
10 }
```

Все, кто считают, что выведутся введённые числа - не правы. Предположение, что получится `n` нулей — тоже не верно (хотя и ближе к истине, потому что для `vector<int>` так бы и получилось). На самом деле выведутся... `n` случайных чисел!

Так происходит, потому что по умолчанию в переменную `x` записывается копия элементов, а не они сами. Поэтому если нужно в цикле менять значение элементов контейнера, то нужно добавить всего один символ `&` (зато какой — на крендель похожий). Отредактированная строка ввода будет выглядеть вот так:

```
1 for(int &x : a) cin >> x;
```

Теперь можно считать, что мы познакомились с циклом по контейнеру и наконец-то смогли красиво найти все корни квадратного уравнения. Будем считать, что это успех!



## Множества и отображения

В прошлом блоке мы узнали, как хранить много данных в одной переменной. Но что, если нам нужно не просто хранить данные, а и поддерживать какие-то их свойства. Например, всегда хранить только по одной копии для равных элементов (проще говоря, удалять повторы). Что тогда делать?

Для таких целей в C++ можно использовать `set`! Во-первых, как обычно, придётся подключить заголовочный файл:

```
1 #include <set>
```

Теперь можно и создать множество:

```
1 set<int> s;
```

У множеств логика составления названия типов такая же, как и у `vector`: сначала пишется `set`, чтобы обозначить, что нам нужно множество, а в `<>` указывается тип элементов множества (в нашем случае `int`).

Если нужно, то можно при объявлении задать элементы множества:

```
1 set<int> prime = {7, 3, 5, 2, 7};
```

Но в C++ множество не только хранит каждое значение по одному разу, но и при этом хранит их в отсортированном порядке. И поэтому внутри `prime` окажется не `{7, 3, 5, 2, 7}` и не `{7, 3, 5, 2}`, а `{2, 3, 5, 7}`.

Теперь можно перечислить основные методы у множеств:

```
1 cout << prime.size() << "\n";           // 4
2 cout << prime.empty() << "\n";         // 0, т.к. так выводится false
3 prime.insert(13);                       // {2, 3, 5, 7, 13}
4 prime.insert(11);                       // {2, 3, 5, 7, 11, 13}
5 prime.erase(7);                        // {2, 3, 5, 11, 13}
6 prime.begin();                         // итератор на 2
7 prime.end();                          // итератор на место после конца prime
8 cout << prime.count(1) << "\n";         // 0, так как нет
9 cout << (prime.find(1) == prime.end()) << "\n"; // 1, 1 не найден, поэтому find вернул end
10 cout << prime.count(2) << "\n";        // 1, так как есть
11 cout << *prime.find(2) << "\n";        // 2, так как find вернул итератор на 2
12 cout << *prime.lower_bound(4) << "\n"; // 5, так как первый элемент >= 4
13 cout << *prime.upper_bound(4) << "\n"; // 5, так как первый элемент > 4
14 cout << *prime.lower_bound(11) << "\n"; // 11, так как первый элемент >= 11
15 cout << *prime.upper_bound(11) << "\n"; // 13, так как первый элемент > 11
16 cout << (prime.upper_bound(15) == prime.end()) << "\n"; // 1 (true), так как не найдено
```

Важное отличие множеств от предыдущих контейнеров — это отсутствие доступа к элементам по индексам, то есть вот так выводить элементы нельзя:

```
1 for (int i = 0; i < prime.size(); ++i) cout << prime[i] << " ";
```

Но варианты с итераторами и «*range-based for loop*» продолжают работать:

```
1 for (set<int>::iterator it = prime.begin(); it != prime.end(); ++it) cout << *it << " ";
2 for (auto it = prime.begin(); it != prime.end(); ++it) cout << *it << " ";
3 for (int x : prime) cout << x << " ";
4 for (auto x : prime) cout << x << " ";
```

Теперь, изучив множества, можно и переходить к отображениям. Отображение — структура данных, которая хранит пару ключ-значение. Например, так устроена телефонная книга: по номеру телефона (ключ) можно узнать имя абонента (значение). При этом нет ограничения на повтор значений (у разных номеров вполне может быть один владелец).

В C++ такой тип данных — `map`. Кроме перечисленных выше свойств, у `map` есть ещё два: во-первых, не могут повторяться ключи, во-вторых, ключи автоматически сортируются. Подключить и создать его можно так:

```
1 #include <map>
2 map<int, string> phones;
3 map<int, string> ph = {{3, "Alice"}, {1, "Bob"}, {2, "Eva"}};
```

Во втором случае после создания `map` (и сортировки ключей) данные будут храниться в таком порядке: `{{1, "Bob"}, {2, "Eva"}, {3, "Alice"}}`.

Теперь, как обычно, перечислим основные методы у отображений:

```
1 cout << ph.size() << "\n";           // 3
2 cout << ph.empty() << "\n";         // 0, т.к. так выводится false
3 ph[5] = "Anna";                       // {{1, "Bob"}, {2, "Eva"}, {3, "Alice"}, {5, "Anna"}}
4 ph[3] = "Peter";                      // {{1, "Bob"}, {2, "Eva"}, {3, "Peter"}, {5, "Anna"}}
5 ph.erase(2);                          // {{1, "Bob"}, {3, "Peter"}, {5, "Anna"}}
6 ph.insert({7, "Bob"});                 // {{1, "Bob"}, {3, "Peter"}, {5, "Anna"}, {7, "Bob"}}
7 ph.begin();                           // итератор на {1, "Bob"}
8 ph.end();                             // итератор на место после {7, "Bob"}
9 cout << ph.count(1) << "\n";          // 1 (true), так как есть ключ 1
10 cout << ph.find(1) -> first << " " << ph.find(1) -> second << "\n"; // 1 Bob
11 cout << ph.count(2) << "\n";          // 0 (false), так как нет ключа 2
12 cout << (ph.find(2) == ph.end()) << "\n"; // 1, ключ 2 не найден, поэтому find вернул end
13 cout << ph.lower_bound(4) -> second << "\n"; // Анна, так как первый элемент с ключом >= 4
14 cout << ph.upper_bound(4) -> second << "\n"; // Анна, так как первый элемент с ключом > 4
15 cout << ph.lower_bound(3) -> second << "\n"; // Peter, так как первый элемент с ключом >= 3
16 cout << ph.upper_bound(3) -> second << "\n"; // Анна, так как первый элемент с ключом > 3
17 cout << (ph.upper_bound(8) == ph.end()) << "\n"; // 1 (true), так как не найдено
```

Можно заметить, что у `map` довольно много общего с `set`. Аналогично, у `map` нет простого доступа к элементам по их порядковому номеру (как в массивах), поэтому вновь помогут циклы с итераторами и «*range-based for loop*»:

```
1 for (map<int, string>::iterator it = ph.begin(); it != ph.end(); ++it)
2     cout << it -> first << " " << it -> second << "\n";
3 for (auto it = ph.begin(); it != ph.end(); ++it)
4     cout << it -> first << " " << it -> second << "\n";
5 for (pair<int, string> x : ph) cout << x.first << " " << x.second << "\n";
6 for (auto x : ph) cout << x.first << " " << x.second << "\n";
7 for (auto [key, value] : ph) cout << key << " " << value << "\n"; // C++17
```

По вызовам `it -> first` и `x -> second` (а также по типу `pair<int, string>`) можно догадаться, что при итерировании по элементам `map` нам на самом деле дают пару (`pair`), где первое поле — ключ, а второе — значение. И это действительно так.

В стандарте 2017-го года появилось «структурное связывание», которое используется в последнем цикле, из-за чего он выглядит особенно приятно. Если нужно менять значения, которые получены из структурного связывания, то нужно добавить амперсанд (&), так как без него происходит копирование значений:

```
1 pair<int, int> p = {1, 2};
2 auto& [x, y] = p; // без & будет копирование!
3 x = 5, y = -1;
4 cout << p.first << " " << p.second << "\n"; // 5 -1
```

На этом можно считать, что `map` мы изучили. Но ...

Оказывается, что в C++ больше одного типа для множеств и отображений (так как C++ старается предоставить простые структуры на все случаи жизни). И поэтому существуют ещё модификации `unordered` и `multi`:

Тип	Сортированность	
	ordered	unordered
Множество	<code>set</code>	<code>unordered_set</code>
Мультимножество	<code>multiset</code>	<code>unordered_multiset</code>
Отображение	<code>map</code>	<code>unordered_map</code>
Мультитообразование	<code>multimap</code>	<code>unordered_multimap</code>

Типы, у которых в названиях есть `multi` отличаются тем, что могут хранить несколько одинаковых элементов для `set` и несколько одинаковых ключей для `map`. `unordered` типы отличаются тем, что в них элементы не упорядочены.

Основным отличием `multi` контейнеров, с точки зрения кода, будет удаление элементов:

```
1 multiset<int> prime = {7, 3, 5, 2, 7, 2};           // {2, 2, 3, 5, 7, 7}
2 prime.erase(7);                                   // {2, 2, 3, 5}
3 prime.erase(prime.find(2));                       // {2, 3, 5}
4 multimap<int, int> data = {{1, 2}, {1, 3}, {2, 4}, {2, 2}, {3, 1}};
5 data.erase(1);                                   // {{2, 4}, {2, 2}, {3, 1}}
6 data.erase(data.find(2));                       // {{2, 2}, {3, 1}}
```

`unordered` контейнеры тоже имеют некоторые отличия от своих сортированных версий. А именно: у них нет методов `lower_bound` и `upper_bound`, но есть много новых методов, без которых в олимпиадном программировании вполне можно обойтись. Такое отличие связано с реализацией самой структуры, которая не позволяет совершать эти операции эффективно (несортированные структуры используют «хэш-таблицы», тогда как в сортированных — «бинарное дерево поиска»).

На этом изучение множеств и отображений заканчивается.

## Другие возможности C++

В данный блок попали те возможности C++, которые в олимпиадном программировании используются лишь частично, а потому их мы разберём поверхностно, чтобы иметь хоть какое-то представление о них. Если возникнет желание, то эти темы можно будет подучить, подробности в разделе образовательные ресурсы.

### Структуры

«Структуры» позволяют определять пользовательские типы данных. Например, давайте рассмотрим точку на декартовой плоскости (у неё две координаты:  $x$  и  $y$ ). Вполне естественно, что хочется, чтобы с этой точкой можно было работать, как с единым целым. Например, узнавать её полярные координаты (угол  $\varphi$  и расстояние  $\rho$ ), или же узнавать расстояние между точками. И, чтобы объединить данные и функции вместе и существует структуры.

Чтобы определить такую структуру понадобится написать вот такой код:

```
1 struct Point{
2     int x, y;
3 };
```

И в программе (например, в `main`) её можно будет использовать так:

```
1 Point p{3, 4}; // Создаём точку, используются фигурные (!) скобки
2 cout << p.x << "; " << p.y << "\n"; // 3; 4
```

Использовать структуры совсем просто — точно также, как и встроенные типы. Например, можно создать `vector` точек:

```
1 vector<Point> v;
```

Определение же структуры чуть сложнее. Например, можно создать «конструктор», который всегда вызывается при создании «объектов» (в нашем случае — точка `p`). Размещать такой конструктор нужно внутри класса (между фигурными скобками):

```
1 Point(int x, int y){
2     this->x = x;
3     this->y = y;
4 }
```

Здесь, для доступа к данным создаваемой точки используется `this->`, такой же синтаксис можно использовать и для других «методов» (функций класса). Например, научимся определять расстояние от точки до начала координат:

```
1 double rho(){ // Метод, его нужно писать внутри Point
2     return sqrt(x * x + y * y); // sqrt - математическая функция, о ней чуть позже
3     // программа сама поймёт, какие x и y брать
4 }
```

Пользоваться методами тоже просто:

```
1 cout << p.rho() << "\n"; // 5
```

Теперь давайте сделаем функцию, вычисляющую расстояние между двумя точками:

```

1 double dist(Point a, Point b){           // обычная функция, она пишется вне структур
2     return sqrt(pow(a.x - b.x, 2) + pow(a.y - b.y, 2));
3 }

```

Теперь воспользуемся ей:

```

1 Point q(4, 5);                           // т.к. у нас определён конструктор,
2                                           // то можно использовать круглые скобки
3 cout << dist(p, q) << "\n";             // 1.41421, так как это корень из 2

```

И, напоследок, определим операцию `-p`, она будет отражать точку относительно начала координат, меняя обе координаты на противоположные:

```

1 Point operator-(Point a){                // тоже функция, пишем вне структур
2     return Point(-a.x, -a.y);            // сама операция отрицания должна создавать новую точку
3 }

```

Остаётся немного сказать о конструкторе. В нём, как и в других функциях можно использовать значения по умолчанию:

```

1 Point(int x = 0, int y = 0){ /* такое же тело, как и раньше */ }

```

Также, выражения вида `this -> x = x` придумали упрощать следующим способом (так можно только в конструкторах):

```

1 Point(int x = 0, int y = 0) : x(x), y(y) {}

```

Теперь можно передавать не все координаты в конструктор:

```

1 Point r(7), s;
2 cout << r.x << "; " << r.y << "\n";      // 7; 0
3 cout << s.x << "; " << s.y << "\n";      // 0; 0

```

Кончено, это только малая часть теории по структурам, но уже этого должно хватать для олимпиадного программирования (там используются структуры в очень ограниченном числе случаев). В курсах, о которых говорилось в начале раздела, можно узнать больше (а там ещё много интересного).

## Встроенные функции

Теперь кратко рассмотрим полезные для олимпиадного программирования встроенные функции.

Во-первых, есть много встроенных математических функций (`sin`, `atan2`, `sqrt` и т.д.), для его использования нужно подключить файл:

```

1 #include <cmath>

```

Во-вторых, иногда нужно вывести дробное число, а оно выводится не так, как нужно, например:

```

1 cout << pow(10, 6) << "\n";              // 1e+006

```

Чтобы такого не происходило, нужно подключить файл, в котором содержатся способы влияния на `cout`:

```

1 #include <iomanip>

```

И написать в начале программы:

```
1 cout << fixed << setprecision(9);          // fixed запрещает выводить число через e
2                                           // setprecision устанавливает число знаков после запятой
```

В-третьих, иногда бывают нужны случайные числа, они генерируются вот так:

```
1 #include <cstdlib>                        // для rand() и srand()
2 #include <ctime>                          // для time()
3 srand(time(0));                          // начальное значение, задаётся 1 раз в начале программы
4 // если не написать, то будет srand(0) - всегда одна и та же последовательность
5 int r = rand();                          // получение случайного числа
```

Но такой способ генерирует только 16-битные числа, поэтому в C++11 появился новый способ рандомить:

```
1 #include <random>                        // для mt19937
2 #include <chrono>                        // для chrono
3 mt19937 rnd(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count()); // начальное значение
4 uniform_int_distribution<> dist(1, 100); // диапазон рандома
5 int r1 = dist(rnd);                      // r1 из [1; 100]
6 int r2 = rnd();                          // r2 - любой int
7 // для 64-битных чисел нужно использовать mt19937_64
```

И ещё в C++ есть встроенные алгоритмы, которые тоже находятся в отдельном файле:

```
1 #include <algorithm>
```

Теперь рассмотрим те функции, которые нам понадобятся в олимпиадном программировании:

```
1 // swap меняет значения местами
2 int a = 3, b = 4;
3 swap(a, b);                             // a = 4, b = 3
4 // sort сортирует значения контейнера, reverse - разворачивает контейнер
5 // next_permutation и prev_permutation - следующая и предыдущая перестановки контейнера
6 int p[3] = {2, 1, 3};
7 bool is_n = next_permutation(p, p + 3); // p = {2, 3, 1}, is_n = true
8 sort(p, p + 3);                         // p = {1, 2, 3}
9 bool is_p = prev_permutation(p, p + 3); // p = {3, 2, 1}, is_p = false
10 reverse(p, p + 3);                     // p = {1, 2, 3}
```

Если операции нужно совершить не с массивом, а, например с `vector` 'ом, то нужно использовать итераторы (да-да, тут-то они нам и понадобились):

```
1 vector<int> v = {2, 1, 3};
2 sort(v.begin(), v.end());               // v = {1, 2, 3}
```

Ещё в сортировку можно передать функцию, по которой и будут упорядочиваться элементы:

```
1 bool cmp(int a, int b){                 // наша функция для сортировки
2     return a > b;                       // по умолчанию a < b
3 }
4 sort(v.begin(), v.end(), cmp);          // v = {3, 2, 1}
```

Помните, что `set` и `map` сами как-то упорядочиваются? Так вот, по умолчанию они используют `operator<` для типа, который хранят. Но если вам не нравится, как элементы упорядочиваются, то можно передать свой «компаратор»:

```
1 struct Cmp{                             // наша структура для сортировки
2     bool operator()(int a, int b) const{ // нужно переопределить оператор круглые скобки
3         return a > b;                   // по умолчанию a < b
4     }
5 };
6 set<int, Cmp> s = {2, 1, 3};             // s = {3, 2, 1}
```

Интересный (и бесполезный) факт, что делать `swap` двух целочисленных переменных можно и формулой:

```
1 a ^= b ^= a ^= b;                       // a = 3, b = 4
```

## Стек, очередь и дек

Кроме популярных контейнеров, которые мы рассмотрели раньше, существуют также и менее используемые, но всё равно очень важные структуры данных: стек, очередь и дек. У них много общего, поэтому мы пройдем их вместе.

Стек довольно бесполезная структура, так как `vector` имеет все возможности стека, но тем не менее, в C++ всё же отдельно есть `stack`. Представлять себе стек можно как стопку монет, на которую сверху можно добавить монету, или забрать верхнюю монету. Используется он вот так:

```
1  stack<int> st;           // st = {}
2  st.push(3);             // st = {3}
3  st.push(2);             // st = {3, 2}
4  int x = st.top();       // x = 2
5  st.pop();               // st = {3}
6  x = st.top();           // x = 3
```

Следующая структура — очередь `queue`. Это как очередь на кассе: в её конец может встать человек, или человек может уйти из её начала. Вот пример работы с ним:

```
1  queue<int> q;           // q = {}
2  q.push(3);              // q = {3}
3  q.push(2);              // q = {3, 2}
4  int x = q.back();       // x = 2
5  x = q.front();          // x = 3
6  q.pop();                // q = {2}
7  x = q.back();           // x = 2
```

И последняя структура — дек. Это обобщение двух предыдущих структур, так как и в начало дека, и в конец дека можно добавлять и удалять элементы. Вот, как это выглядит в коде:

```
1  deque<int> d;           // d = {}
2  d.push_back(2);         // d = {2}
3  d.push_back(4);         // d = {2, 4}
4  d.push_front(1);        // d = {1, 2, 4}
5  int x = d.back();       // 4
6  x = d.front();          // 1
7  x = d[1];               // 2
8  x = d.at(4);            // ошибка
9  d.insert(d.begin() + 2, 3); // d = {1, 2, 3, 4}
10 for(int x : d) cout << x << " "; // 1 2 3 4
11 d.erase(d.begin() + 1); // d = {1, 3, 4}
12 d.pop_back();           // d = {1, 3}
13 reverse(d.begin(), d.end()); // есть итераторы, d = {3, 1}
14 d.pop_front();          // d = {1}
```

Это основные функции, которые есть у данных структур. Ещё, также, как и у других контейнеров, есть методы `size`, который возвращает размер, и `empty`, проверяющий контейнер на пустоты. Также нужно добавить, что для этих структур нужно подключить соответствующие файлы:

```
1  #include <stack>        // содержит stack
2  #include <queue>         // содержит queue
3  #include <deque>         // содержит deque
```

## Макросы

Теперь рассмотрим «макросы» — наследие С, которое позволяет генерировать код. Макросы обрабатываются перед компиляцией программы: в месте его использования просто подставляется тело макроса, и только после этого начинается компиляция, где может выявиться, например, синтаксическая ошибка, возникшая при подстановке макроса.

Рассмотрим простой пример использования макроса:

```
1 #define INF 2e9
```

Такая запись говорит, что везде, где встретится `INF` вместо него нужно будет подставить `2e9`. Но отметим, что вместо макроса можно было бы вполне использовать переменную:

```
1 const int INF = 2e9;
```

Ещё один пример — сокращение имён типов:

```
1 #define ll long long
```

Но это тоже можно написать более современным способом:

```
1 using ll = long long;
```

Другой пример — это упрощение вывода для контейнеров, сделать это можно так:

```
1 #define PRINT(a) for(auto x : a) cout << x << " "; cout << "\n";
```

Использовать же этот макрос можно будет вот так:

```
1 int a[] = {1, 2, 3, 4, 5};
2 PRINT(a) // 1 2 3 4 5
3 vector<int> b = {5, 4, 3, 2, 1};
4 PRINT(b) // 5 4 3 2 1
```

Если макрос не влезает в одну строку, то его можно перенести с помощью `\`, поставленной в конце строки с кодом. Макросы — это довольно интересная возможность С++, но злоупотреблять ими не стоит. В следующем разделе мы представим основные макросы, которые используются, но если нужно, то, конечно, стоит самим писать удобные для себя макросы.

## Шаблоны

В С нельзя было создавать функции с одинаковым именем, но с разными получаемыми значениями (это называется «перезгрузка»), поэтому там, например, была функция `abs` отдельно для каждого типа, и все с разными названиями. В С++ решили, что нужно это исправить и придумали «шаблоны». В простейшем случае шаблоны нужны, чтобы не дублировать код для разных типов данных, а написать его лишь один раз для «шаблонного типа».

Напишем функцию `func`, которая будет сама вычислять минус модуль числа (не используя встроенную функцию `abs`):

```
1 template<typename T>
2 T func(T x){
3     return x > 0 ? x : -x;
4 }
```



И вызывать эту функцию можно так:

```
1 func(-5);           // mun int
2 func(-5ll);         // mun long long
3 func(-5.5);         // mun double
4 func(-5.5f);        // mun float
```

И во время компиляции для каждого используемого типа будет сгенерирована своя функция. Понятно, что в этом примере вместо «шаблонной функции» можно было использовать макрос, но, во-первых, тогда бы пришлось передавать в макрос ещё и тип, а во-вторых, макрос просто подставляет текст, тогда как шаблоны генерируют код.

Ещё одно использование шаблонов — контейнеры, с которыми мы познакомились. Там используются «шаблонные классы», параметры которых мы передаём в треугольных скобках. Например, когда мы пишем `vector<int>`, то компилятор находит шаблонный класс `vector`, и генерирует его для типа `int`.

Также, раз у нас есть код, генерируемый во время компиляции, то возникает желание посчитать что-нибудь во время компиляции, используя шаблоны. Так действительно можно, и это называется «метапрограммированием».

Давайте посмотрим, как во время компиляции посчитать факториалы:

```
1 template<int N>
2 struct Fact{           // определяем шаблонный класс Fact
3     static int const value = Fact<N - 1>::value * N; // рекурсивно определяем факториал
4 };
5 template<>
6 struct Fact<0>{        // «специализация» для факториала нуля
7     static int const value = 1;
8 };
```

Правда, пользоваться этим придётся чуть необычно:

```
1 cout << Fact<5>::value << "\n"; // 120
```

Но есть и проблема — такая программа дольше компилируется и нельзя посчитать факториал числа, не известного во время компиляции. Факториалы тоже можно по-другому посчитать во время компиляции:

```
1 constexpr int fact(int n) {
2     return n == 0 ? 1 : n * fact(n - 1);
3 }
```

И пользоваться этим удобно:

```
1 int n;
2 cin >> n;
3 cout << fact(5) << " " << fact(n); // 120 <n!>
```

Это работает, потому что слово `constexpr` говорит, что функцию для констант нужно посчитать во время компиляции, а для не констант - во время выполнения.

Но, чтобы читатель осознал всю мощь и необходимость шаблонов, приведём вот такой пример части программы на C++11, которая умеет распаковывать `tuple` 'ы, передавать эти значения в функцию, и всё это вычислять (в последующих стандартах этот код стало можно писать чуть короче, а потом и вовсе для этого появилась встроенная функция `apply`). Код оставим без комментариев, чтобы читателю было интересней самому понять, что в нём происходит:

```
1 template<typename F, typename ... Args, int ... Indices>
2 auto apply_f(F f, std::tuple<Args...> t, IntList<Indices...>)
3     -> decltype( f(std::get<Indices>(t)...) ){
4     return f(std::get<Indices>(t)...);
5 }
```

Шаблоны C++ позволяют делать очень много, и читателю стоит с ними разобраться подробнее, если он хочет научиться хорошо программировать на C++. Также, всегда стоит использовать шаблоны вместо макросов (если это возможно).

# Олимпиадные оптимизации кода

В этом блоке вы сможете найти список приёмов, которые помогают в олимпиадном программировании. Эти приёмы могут или ускорять программу, или упрощать её написание. Итак, поехали!

## Ускорение кода

Поскольку очень важно, чтобы программа уложилась в ограничения по времени, то код ускоряют, отключая поддержку функций ввода-вывода из С (после этого нужно пользоваться только `cin` и `cout`). Ускоряется программа вот таким кодом (его помещают в самое начало `main`):

```
1 ios_base::sync_with_stdio(false);
2 cin.tie(nullptr);
3 cout.tie(nullptr);
```

Можно все выражения в скобках заменить на `0`, и это тоже будет работать.

`#include`

В олимпиадном движении не модно запоминать название файлов, в которых содержатся встроенные функции. Поэтому, всегда пишите, как в примере ниже (к тому же, от этого не страдает скорость выполнения программы).

```
1 #include <bits/stdc++.h>
```

Вместо, того, чтобы заниматься чем-то таким:

```
1 #include <iostream>
2 #include <cmath>
3 #include <vector>
4 #include <set>
5 #include <algorithm>
6 // И ещё много-много ...
```

Подробнее вы можете об этом прочитать в блоке первая программа.

`#define`

Макросы позволяют сокращать код и их нужно писать под себя, но вот примеры полезных макросов:

```
1 #define FOR_(i, s, n) for(int i = s; i < n; ++i)
2 #define FOR(i, n) FOR_(i, 0, n)
3 #define FORR(x, a) for(auto &x : a)
4 #define IN(x) FORR(y, x) cin >> y;
5 #define OUT(a) FORR(x, a) cout << x << " "; cout << "\n";
6 #define OUTM(m) FORR(x, m) cout << x.first << " : " << x.second << "\n";
7 #define FAST ios_base::sync_with_stdio(0); cin.tie(0); cout.tie(0);
8 #define F first
9 #define S second
```

Подробнее вы можете об этом прочитать в блоке макросы.

`using`

С помощью слова `using` можно сокращать названия типов данных. Например:

```

1 using ll = long long;
2 using pi = pair<int, int>;
3 using vi = vector<int, int>;

```

Подробнее вы можете об этом прочитать в блоке макросы.

namespace

Аналогично никто не хочет писать что-то длинное, например такое:

```

1 std::sort
2 std::cin
3 std::cout
4 std::min
5 // И ещё много-много ...

```

Поэтому делают оптимизацию ниже.

```

1 using namespace std;

```

Подробнее вы можете об этом прочитать в блоке первая программа.

double

Если вы когда пробовали запускать код ниже, то знаете, что он выведет 0 :

```

1 cout << 1 / 3 + 1 / 3 + 1 / 3;

```

И, как говорилось в блоке операторы, чтобы программа вывела 1 , нужно во делить не целое число, а использовать тип double . Но у double не обязательно указывать нули после точки, поэтому можно писать так:

```

1 cout << 1. / 3 + 1. / 3 + 1. / 3;

```

И такой код уже выведет 1 .

INF

Часто в алгоритмах нам будет нужна константа обозначающая бесконечность ( INF , она уже встречалась в разделе макросы). Значение INF подбирается в зависимости от ограничений в задаче, а именно INF должен быть на столько большим, чтобы точно не являться ответом к задаче. Объявлять INF можно как хочется (хоть через макросы, хоть не как константу), например, так:

```

1 const int INF = 2e9 + 1024; // где-то вверху файла, чтобы везде пользоваться

```

Также работать с бесконечностью нужно аккуратно, чтобы не получилось INF + 5 , 2 \* INF , или, ещё хуже, INF \* INF (так как операции с бесконечностью могут не влезть в тип данных, он переполнится, и может получиться число, меньшее бесконечности).

### Файловый ввод-вывод

Иногда бывает нужно работать с файлами (читать входные данные или записывать выходные). Если делать это совсем честно, то в C++ нужно писать вот так:

```

1 #include <fstream> // для ifstream и ofstream
2 ifstream fin("in.txt"); // чтение из файла
3 ofstream fout("out.txt"); // запись в файл
4 int n;
5 fin >> n; // считали число
6 fout << n; // записали число

```

Но писать дополнительные строчки с кодом никто не любит, поэтому можно «перенаправить» встроенные потоки для записи / чтения ( cin и cout ):

```

1 freopen("in.txt", "r", stdin); // перенаправили cin
2 freopen("out.txt", "w", stdout); // перенаправили cout
3 int n;
4 cin >> n; // считали число
5 cout << n; // записали число

```

# Олимпиадное программирование

## Идеи проектирования алгоритмов

В этом разделе мы посмотрим на важные идеи в проектировании алгоритмов, которые мы потом будем применять при решении задач. Они не дотягивают до самостоятельных задач, но очень хорошо используются в других задачах.

- «*Барьерный элемент*». Пусть у нас есть какой-то алгоритм, который иногда не находит ответы внутри нашего набора данных, и в таком случае нужно вывести какое-то специальное значение. Если мы не хотим обрабатывать такой случай отдельно, то можем добавить в наш набор данных какие-нибудь специальные значения (например,  $\infty$  или  $-\infty$ ), которые наш алгоритм сможет корректно обработать без внесения в него дополнительных условий.
- «*Предподсчёт*». Иногда у нас в задаче есть какие-то входные данные, которые не будут меняться на протяжении всей задачи, и какие-то запросы, которые нужно обработать. Если нам для разных запросов нужно будет считать что-то несколько раз, то можно перед обработкой запросов вычислить нечто, что позволит быстро отвечать на все запросы. Такое вычисление перед обработкой самих запросов и называется предподсчётом.
- «*Два указателя*». Если у нас есть какой-то набор данных, в котором мы работаем с отрезками, то давайте использовать два указателя на концы этого отрезка. И в зависимости от каких-то условий будем двигать либо левый указатель, либо правый в одну сторону (или всегда вправо, или всегда влево). Если задачу таким методом решить можно, то алгоритм будет работать довольно быстро, ведь каждый указатель пройдёт не больше, чем весь набор данных, а значит алгоритм будет линейным.
- «*Сканирующая прямая (scanline)*». Пусть у нас есть какие-то события, которые нужно обработать. Тогда мы можем отсортировать эти события по времени (по порядку, в котором они проходят), и обработать в таком порядке. Например, можно использовать эту идею перед обработкой запросов, сделав предподсчёт ответов для всех возможных запросов.
- «*Встреча в середине (meet in the middle)*». Пусть у нас есть какой-то алгоритм, который начинается в точке  $A$ , заканчивается в точке  $B$  и посещает по пути какие-то другие точки  $C_1, C_2, \dots, C_n$  (например, путь коня по шахматной доске). При этом, требуется найти кратчайший путь между  $A$  и  $B$ . Понятно, что проще всего выйти из  $A$  и искать путь к  $B$ , но может оказаться полезным искать такой путь не из одной вершины, а выйти одновременной из двух, чтобы встретиться в середине пути.
- «*Переливания*». Пусть у нас есть  $n$  объектов, в каждом из которых мы хотим что-то знать про много других. Без оптимизаций нам придётся сохранить  $O(n^2)$  информации, но если мы научимся одни ответы вычислять через несколько других, то сможем сооптимизировать это до  $O(n \log n)$ . Для этого во время объединения ответов мы копируем не всю информацию, а выбираем самую большую по размеру структуру и копируем всю остальную информацию в неё. Тогда каждый элемент будет копироваться не больше  $O(\log n)$  раз и получаем требуемую асимптотику.

# Алгебра, часть 1

Знакомство с олимпиадным программированием мы начнём с алгебры и теории чисел. Вообще, так называет раздел математики, но некоторые функции для чисел можно хорошо вычислять с помощью компьютера. Именно такие функции мы и изучим в этом блоке после того, как пройдем некоторые другие простые алгоритмы.

## Извлечение корня и бинарное возведение в степень

Как всем известно, решением уравнения  $x^2 = a$  являются  $x = \pm\sqrt{a}$ , при  $a \geq 0$ . И все знают, что есть встроенная функция, которая называется `sqrt` и извлекает квадратный корень. Но у этой функции есть проблемы — она не совсем точная, а нам иногда хочется округлять значение корня до целого числа. Поэтому мы напишем функцию, которая будет приближать значение корня двумя целыми числами:

```
1 pair<int, int> sqr(int a){
2     int x = sqrt(a) - 5;                               // погрешности 5 вполне хватает
3     while(x * x < a) ++x;                               // зажимаем корень сверху
4     if (x * x == a) return {x, x};                     // целочисленный корень
5     return {x - 1, x};                                 // дробный корень
6 }
```

Извлекать корень мы научились, теперь хорошо бы и научиться возводить в степень. Для этого снова есть встроенная функция `pow`, но у неё такой же недостаток, как и у `sqrt` — погрешности. К тому же в вычислениях нам часто будет достаточно лишь возвести натуральное число в натуральную степень по модулю, то есть посчитать не значение выражения  $x^n$ , а значение выражения  $x^n \% m$ .

И оказывается, что наивное перемножение числа  $x$  с самим собой  $n$  раз, со взятием каждый раз остатка по модулю  $m$  не является оптимальным и «бинарное возведение в степень» работает быстрее. Основывается оно на формулах  $x^{2k} = x^k \cdot x^k$  и  $x^{2k+1} = x \cdot x^k \cdot x^k$ , при  $k \in \mathbb{Z}$  и двух частных случаях:  $x^0 = 1$  и  $x^1 = x$ . Взятие же по модулю нужно делать после каждой операции умножения, чтобы не происходило переполнение типов данных.

Понятно, что сложность такого возведения в степень будет  $O(\log n)$ , потому что на каждом шаге степень уменьшается в два раза, а значение для каждой степени достаточно вычислить один раз.

## Системы счисления

Системы счисления не совсем описывают операции с числами, а занимаются только их представлением. Но всё же алгоритмы по переводу чисел между системами счисления также относятся к алгебре.

Позиционная система счисления характеризуется своим основанием ( $b$ ) и по определению число  $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_b = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + a_1 \cdot b + a_0$  (черта сверху обозначает, что это одно число, а не произведение, индекс снизу — основание, для десятичной системы счисления мы его опускаем). Мы же займёмся переводами чисел из одной системы счисления в другую, через десятичную (сначала преобразуем любую систему в десятичную, а потом из десятичной научимся получать любую).

Преобразование в десятичную систему счисления можно делать по формуле выше: будем смотреть на знаки числа  $x$  справа налево и сохранять текущую степень  $b$  в переменную  $y$ , а итоговую

сумму в переменную  $z$ . Изначально  $y = 1, z = 0$ , к  $z$  добавляется  $y \cdot a_0$ . Потом мы переходим к следующему знаку и домножаем  $y$  на  $b$  (поскольку степень выросла) и повторяем операцию с добавлением. И так делаем со всеми знаками, получив число в десятичной системе счисления в переменной  $z$ .

Преобразовывать из десятичной системы счисления также не сложно. Для этого, пока у нас число  $z$  не обнулится, будем делать следующую операцию: запишем в строку с ответом значение  $z \% b$ , уменьшим на столько  $z$  и перейдём к следующему знаку, поделив  $z$  на  $b$ . Так мы получим строку, в которой знаки будут храниться в обратном порядке, ей нужно развернуть, и она станет итоговым числом в  $b$ -ричной системе счисления.

Сложность данных алгоритмов  $O(n)$ , где  $n$  — длина представления в  $b$ -ричной системе счисления.

## Теория чисел

Все остальные алгебраические алгоритмы, которые мы пройдем, можно отнести к теории чисел (это раздел математики, изучающий свойства чисел). Поэтому сначала нужно повторить некоторые факты из теории чисел.

Во-первых, в математике есть удобные обозначения для множеств, которые мы будем использовать:  $\mathbb{N}$  — натуральные,  $\mathbb{Z}$  — целые,  $\mathbb{P}$  — простые. В разных источниках можно встретить разное отношение к числу 0, но мы будем считать, что 0 не натуральное число (но, конечно, целое):  $0 \notin \mathbb{N}, 0 \in \mathbb{Z}$ .

Во-вторых, в математике придумали специальное обозначение, которое показывает, что одно число  $(a)$  нацело делится на другое  $(b)$ :  $a : b$ .

И в-третьих, функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  называется «мультипликативной», если  $f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m)$  для любых взаимно простых  $n$  и  $m$  (определение взаимно простых чисел в разделе функция Эйлера).

Также существует основная теорема арифметики, которая гласит: любое натуральное число большее 1 ( $n \in \mathbb{N}, n > 1$ ) можно однозначно представить в виде произведения простых чисел в натуральных степенях:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}, p_i \in \mathbb{P}, \alpha_i \in \mathbb{N}$$

При этом простым числом называется то, которое делится только на 1 и на само себя. А составным — число, у которого есть ещё другие делители. При этом 1 — не составное и не простое число.

## НОД и НОК

НОД — это наибольший общий делитель (наибольшее число, на которое другие делятся без остатка), в английском варианте — gcd (от «*greatest common divisor*»). Вообще НОД определён для набора чисел любой длины, но сначала разберёмся как его считать для двух чисел. Для вычисления НОД используется «алгоритм Евклида», который основывается на следующих свойствах НОД'а:

- $\gcd(a, 0) = a$ , при  $a > 0$ .
- $\gcd(a, b) = \gcd(a - b, b)$ , при  $a \geq b > 0$ . Докажем это свойство. Обозначим  $d = \gcd(a, b)$  и  $d' = \gcd(a - b, b)$ , тогда  $a : d$  и  $b : d$ . А тогда и  $(a - b) : d$ , значит  $d' : d$ , значит  $d' \geq d$ . Но аналогично и  $(a - b) : d'$  и  $b : d'$ . А тогда и  $a = (a - b + b) : d'$ , значит  $d : d'$ , значит  $d \geq d'$ . Но очевидно, что раз  $d' \geq d$  и  $d \geq d'$ , то тогда  $d' = d$ , и исходное свойство доказано.

- $\gcd(a, b) = \gcd(a \% b, b)$ , при  $a \geq b > 0$ . Это свойство является следствием предыдущего, так как можно вычитать  $b$  до тех пор, пока получается вычитать (пока второе число не меньше  $b$ ). Но тогда у нас как раз получится пара  $a \% b$  и  $b$ .

Теперь можно и написать программу, которая смогла бы вычислять НОД по описанным выше свойствам. Это предлагается читателям реализовать самостоятельно.

НОК — это наименьшее общее кратное (наименьшее число, которое делится на другие без остатка), в английском варианте —  $\text{lcm}$  (от «*least common multiple*»). НОК, также, как и НОД, определён и для набора чисел, но пока мы вновь попробуем посчитать его для пары. Оказывается, что для этого достаточно использовать всего одно свойство:

- $\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b) = a \cdot b$ .

Доказывается оно через основную теорему арифметики:

1. Представим оба числа ( $a$  и  $b$ ), как произведение простых, при этом получится два набора простых чисел. Теперь в разложение  $a$  добавим те числа, которые получились в разложении  $b$ , но их нет в разложении  $a$ . Чтобы разложение осталось корректным сделаем эти числа в нулевых степенях. Аналогично дополним разложение  $b$  и получим:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$$

$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s}$$

$$p_i \in \mathbb{P}, \alpha_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \geq 0, \beta_i \in \mathbb{Z}, \beta_i \geq 0$$

2. Заметим, что НОД можно определить по другому, ведь:

$$\gcd(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_s^{\min(\alpha_s, \beta_s)}$$

Потому что другие делители брать нельзя, ведь тогда  $d = \gcd(a, b)$  не будет делиться на  $a$  и  $b$ , аналогично у существующих делителей степень не может быть больше, так как тогда пропадёт одна из делимостей  $a : d$  или  $b : d$ . Значит такой  $d$  — действительно НОД этих чисел.

3. Аналогичные рассуждения приводят к выводу о том, что:

$$\text{lcm}(a, b) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_s^{\max(\alpha_s, \beta_s)}$$

4. И, наконец, заметим, что  $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$ .

5. И теперь равенство становится совсем очевидным:

$$\begin{aligned} \gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b) &= (p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_s^{\min(\alpha_s, \beta_s)}) \cdot (p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_s^{\max(\alpha_s, \beta_s)}) = \\ &= p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s + \beta_s} = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}) \cdot (p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s}) = a \cdot b \end{aligned}$$

Теперь у нас есть формула, из которой мы можем выразить НОК:  $\text{lcm}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\gcd(a, b)}$ . А раз есть формула, то легко написать программу, которая бы по ней считала, что и предлагается сделать читателю.

Остаётся сказать, что сложность этих алгоритмов —  $O(\log \min(a, b))$ .

Если же чисел много, то с НОД'ом и НОК'ом можно работать вполне естественным образом:

$$\gcd(a, b, c) = \gcd(\gcd(a, b), c); \text{lcm}(a, b, c) = \text{lcm}(\text{lcm}(a, b), c)$$

## Расширенный алгоритм Евклида

Оказывается, что с помощью алгоритма Евклида можно получить «линейное представление НОД'а», которое можно записать формулой  $ax + by = \gcd(x, y)$ . Теперь попробуем разобраться, как получить коэффициенты  $a$  и  $b$  в зависимости от чисел  $x$  и  $y$ .

По нашему определению выше  $\gcd(x, 0) = x$ , при  $x > 0$ . Но, кроме этого, понятно, что в таком случае решением являются  $a = 1$  и  $b = 0$ , ведь тогда  $1 \cdot x + 0 \cdot 0 = x$ . Поэтому для одного частного случая решения у нас есть, остаётся лишь понять формулу в общем виде.

Как мы определяли выше,  $\gcd(x, y) = \gcd(x \% y, y)$ . Теперь представим, что мы уже знаем решение уравнение  $a \cdot (x \% y) + b \cdot y = \gcd(x \% y, y)$  и хочется получить решение уравнения  $a'x + b'y = \gcd(x, y)$ . Остаётся лишь сделать немного математических преобразований:  $a \cdot (x \% y) + b \cdot y = \gcd(x \% y, y) = \gcd(x, y) = a'x + b'y = a' \cdot \left(\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \cdot y + x \% y\right) + b'y = a' \cdot \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \cdot y + a' \cdot (x \% y) + b'y = a' \cdot (x \% y) + (a' \cdot \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor + b') \cdot y$  (квадратные скобки в формуле обозначают округление числа вниз).

Понятно, что теперь мы имеем равенство  $a \cdot (x \% y) + b \cdot y = a' \cdot (x \% y) + (a' \cdot \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor + b') \cdot y$ , только вот как его решить? Для этого заметим, что в обеих частях равенства есть выражения  $(x \% y)$  и  $y$ , а значит если окажется, что коэффициенты при них равны, то мы получим верное равенство. Поэтому решим систему уравнений:

$$\begin{cases} a = a' \\ b = a' \cdot \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor + b' \end{cases} \iff \begin{cases} a' = a \\ b' = b - a \cdot \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \end{cases}$$

Всё, теперь мы научились делать линейное представление НОД'а, ведь для конечного случая у нас есть явная формула, а в остальных ситуациях мы можем пересчитывать предыдущий ответ через следующий. В коде же это принято реализовывать с помощью рекурсивной функции, которая возвращает значение НОД'а, а коэффициенты  $a$  и  $b$  меняет по ссылке. Но не стоит заморачиваться с ссылками, ведь всегда можно вернуть из функции тройка чисел :)

К тому же понятно, что от наличия двух дополнительных формул, сложность алгоритма не изменилась и по-прежнему составляет  $O(\log \min(a, b))$ .

## Обратное число по простому модулю

Пусть дано число  $a$  и модуль  $m$ , тогда  $a^{-1}$  называется обратным числом к  $a$  и оно должно отвечать равенству  $a \cdot a^{-1} \equiv 1 \pmod{m}$  (три черты это остаток от деления).

Для поиска обратного числа нам поможет «малая теорема Ферма (МТФ)», которая говорит, что при простом  $p$  и  $a$ , которое на это  $p$  не делится, выполняется равенство  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Докажем эту теорему.

Рассмотрим числа  $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ . Если так оказалось, что среди них есть два числа  $a \cdot i$  и  $a \cdot j$  ( $i \neq j$ ), сравнимые по модулю  $p$ , то рассмотрим их:  $a \cdot i \equiv a \cdot j \pmod{p}$ , а значит  $a \cdot (i - j) \equiv 0$ . Но ведь наше  $a$  на  $p$  не делится по условию МТФ, а разность  $|i - j| < p - 2$ , то есть тоже не может делиться на простое число  $p$ . Следовательно предположение не верное и у всех этих чисел должны быть разные остатки при делении на  $p$ . Но понятно, что всего таких остатков  $p$ , при чём, очевидно нет такого, что  $a \cdot i \equiv 0$ , а значит для  $p-1$  числа остался всего  $p-1$  остаток, следовательно каждый остаток встречается ровно один раз. Перемножим все числа набора:  $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1)$ . И сократив на  $(p-1)!$  имеем:  $a^{p-1} \equiv 1$ , что и утверждает МТФ.

А теперь посмотрим на условие обратимости:  $a \cdot a^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$  и на МТФ:  $a^{p-1} = a \cdot a^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$ . И из них можно заключить вывод, что  $a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod{p}$ .

Значит, чтобы узнать обратное число, нам потребуется всего лишь возвести число  $a$  в степень  $p-2$  по модулю  $p$ , что можно сделать с помощью бинарного возведения в степень за  $O(\log p)$ .



## Алгебра, часть 2

В этом блоке мы продолжим изучать алгоритмы теории чисел, которые очень удобно вычислять с помощью компьютера. Все алгоритмы из этого блока будут так или иначе основываться на разложении числа на простые множители.

### Проверка на простоту

Как мы узнали в самом начале, числа бывают простыми и составными. И хотелось бы как-нибудь проверить, какое число каким является.

Понятно, как проверить за  $O(n)$  — просто перебрать все числа, которое меньше заданного  $n$  и проверить, являются ли они делителями. Но такой способ не оптимален и можно действовать чуть быстрее.

Для этого вспомни (или узнаем), что если число составное, то у него не просто есть делители, но и какие-то из них обязательно не больше, чем  $\sqrt{n}$ . В самом деле, пусть все делители больше, чем  $\sqrt{n}$ , тогда возьмём какой-то из них  $d > \sqrt{n}$ . Но ведь когда мы поделим получится  $\frac{n}{d} = d'$ , при этом  $d'$  — целое, а значит тоже делитель. Остаётся только осознать, что будет выполнено неравенство:  $d' < \sqrt{n}$  и мы всё же найдём делитель, меньший корня.

А раз так, то перебирать можно не все число, а только до корня и сложность такого алгоритма составит  $O(\sqrt{n})$ . Этот алгоритм и нужно реализовать читателю :)

### Решето Эратосфена

Хорошо, для одного числа мы смогли определить, простое оно, или составное. Но что делать, если у нас такую проверку нужно осуществить для диапазона чисел от 1 до  $n$ ?

Конечно, можно каждое число проверить на простоту и получить сложность  $O(n^2)$  при наивной проверке на простоту и  $O(n\sqrt{n})$  при оптимизированной проверке. Но оказывается, что «Решето Эратосфена» способно быстрее решать эту задачу. Суть этого алгоритма проста:

1. Выпишем все числа из нашего диапазона (от 1 до  $n$ ).
2. Единицу сразу зачёркнём, ведь она по определению не простая.
3. Далее для всех чисел в порядке возрастания будем проводить следующую операцию. Пусть очередное число —  $d$ , тогда:
  - Если очередное число зачёркнуто, то оно не простое и можно перейти к следующему числу.
  - Если же очередное число ( $x$ ) не зачёркнуто, то оно простое и нужно зачеркнуть все числа, которые на него делятся:  $2x, 3x, \dots, kx, \dots$  ( $k \in \mathbb{N}, k > 1$ ). И понятно, что закончить зачёркивание нужно, когда мы дойдём до конца выписанного диапазона (до  $n$ ). После этого переходим к следующему числу.
4. Теперь все не зачёркнутые числа — простые, зачёркнутые (кроме 1) — составные.

При этом в алгоритме можно сделать улучшение — вычёркивать все числа, делящиеся на простое  $x$  можно не от  $2x$ , а от  $x^2$ , так как все числа меньше  $x^2$  точно имеют делитель, не превосходящий их корня, а значит меньший  $x$ . И сложность алгоритма после оптимизации составит  $O(n \log \log n)$ .

## Факторизация

Факторизацией называется разложение числа на простые множители, то есть получение выражения вида:  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$ ,  $p_i \in \mathbb{P}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ .

Алгоритм факторизации напоминает алгоритм проверки на простоту: перебираем потенциальные делители, и если число  $n$  делится нацело на очередной делитель  $x$ , то мы делим на это  $x$  и добавляем его в разложение, и повторяем эту операцию, пока  $n$  продолжает делиться на  $x$ . Остановить же алгоритм можно, когда на очередном шаге станет  $x > \sqrt{n}$ , ведь тогда мы знаем, что числа, меньшие оставшегося  $\sqrt{n}$  точно не являются его делителями, а значит, наше число  $n$  либо 1, либо простое.

При этом, сохранять разложение можно любым удобным способом: с помощью `vector` или с помощью `map`.

Сложность алгоритма факторизации составляет  $O(\sqrt{n})$ , если просто перебирать все потенциальные делители. Но понятно, что можно перебирать только простые делители, поэтому в случае использования решета Эратосфена можно достичь сложности  $O(\pi(\sqrt{n}))$ , где  $\pi(m) < O\left(\frac{m}{\ln(m)-1}\right)$  — количество простых чисел, меньших  $m$ .

## Функция делителей

В математике придумали «функцию делителей», которая задаётся формулой:  $\sigma_x(n) = \sum d^x$ , где  $n: d$ .

Понятную практическую пользу функция делителей имеет при  $x = 0$  — количество делителей, и  $x = 1$  — сумма делителей. Именно их мы и научимся вычислять.

Первый способ, очевидный, таков: перебираем все потенциальные делители до корня. Если число  $n$  делится на очередной потенциальный делитель  $x$ , то к сумме добавляем  $x + \frac{n}{x}$ . а к количеству — 2. Отдельный случай, когда  $x = \sqrt{n}$  — тогда  $x$  и  $\frac{n}{x}$  совпадают, поэтому к сумме нужно прибавить  $x$ , а к количеству — 1.

Но второй способ, связанный с факторизацией, чуть более интересный. Он заключается в использовании следующего наблюдений из теории чисел:

- Пусть  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$ ,  $p_i \in \mathbb{P}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ , тогда:
- $\sigma_0(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_s + 1)$ . Это равенство является верным, потому что мы можем получать делители числа  $n$  из разложения на простые множители, ведь у всех делителей  $p_i$  обязательно в степени  $0, 1 \dots \alpha_i$ , а значит всего способов составить делители именно столько, сколько получит эта формула.
- $\sigma_1(n) = (1 + p_1^1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1}) \cdot (1 + p_2^1 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot (1 + p_s^1 + p_s^2 + \dots + p_s^{\alpha_s})$ . Убедиться в верности данной формулы можно с помощью раскрытия скобок. Но видно, что в такой записи использовать формулу не удобно, поэтому её можно упростить, преобразовав выражения в скобках:  $\sigma_1 = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{p_s^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1}$ .
- Также можно заметить, что  $\sigma_0(n)$  и  $\sigma_1(n)$  мультипликативные функции, потому что это видно по формулам для их вычисления.

Сложность вычисления функции делителей обоими представленными способами будет  $O(\sqrt{n})$ .

## Функция Эйлера

Будем называть числа  $a$  и  $b$  «взаимно простыми», если их НОД равен 1 ( $\gcd(a, b) = 1$ ). «Функция Эйлера» ( $\varphi(n)$ ) показывает количество чисел, меньше данного, и взаимно простых с ним. При этом  $\varphi(1) = 1$ , так как  $\gcd(1, 1) = 1$ .

Вычисляется функций Эйлера по формуле:  $\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdot (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}) \cdot \dots \cdot (p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s-1})$ . Для более удобного вычисления её можно преобразовать:  $\varphi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{p_s})$ .

Теперь докажем эту формулу. Во-первых, очевидно, что  $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1} \cdot (p - 1)$ , где  $p \in \mathbb{P}$ .

Чуть сложнее доказать, что функция Эйлера мультипликативная. Для этого возьмём два взаимно простых числа  $n$  и  $m$ , и будем доказывать, что  $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$ . Теперь запишем числа от 1 до  $n \cdot m$  в таблицу из  $n$  строк и  $m$  столбцов (в ячейке со строкой  $i$  ( $0 \leq i \leq n - 1$ ) и столбцом  $j$  ( $0 \leq j \leq m - 1$ ) запишем число  $a_{i,j} = i \cdot m + j + 1$ ). Заметим, что если число взаимно просто с  $n \cdot m$ , то оно должно быть взаимно просто с  $n$  и с  $m$ . Теперь вспомним, что в Алгоритме Евклида мы вычитали, поэтому, если какое-то число взаимно просто с  $m$ , то мы можем вычитать это  $m$  и получать новые числа взаимно простые с  $m$ . Таким образом во всех столбцах числа будут или взаимно просты с  $m$  или нет, а значит всего взаимно простых столбцов окажется  $\varphi(m)$ . Теперь рассмотрим какой-то из этих столбцов, пусть в нём сверху число  $k$ , тогда остальные числа это  $m + k, 2m + k, \dots, (n - 1)m + k$ . Теперь заметим, что все остатки от деления этих на  $n$  должны быть различны. В самом деле, пусть нашлись какие-то два одинаковых остатка ( $(sm + k) \% n = (tm + k) \% n, s < t$ ), тогда их разность должна делиться на  $n$ :  $(t - s)m \% n = 0$ . Но ведь  $\gcd(m, n) = 1$ , значит  $(t - s) \% n = 0$ , но тогда должно выполняться  $(t - s) \geq n$ , но это, очевидно, недостижимо. Значит у набора  $k, m + k, 2m + k, \dots, (n - 1)m + k$  все остатки должны быть различны, а значит это будут  $0, 1, \dots, n - 1$  (в каком-то перемешанном порядке). А мы знаем, что среди них ровно  $\varphi(n)$  взаимно простых с  $n$ . То есть числа, которые взаимно просты с  $n \cdot m$  располагаются в  $\varphi(m)$  столбцах по  $\varphi(n)$  штук в каждом, а значит всего их  $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$ , что и нужно было доказать.

Теперь совмещаем два этих наблюдения, и приходим к выводу, что  $\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \varphi(p_2^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot \varphi(p_s^{\alpha_s}) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdot (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}) \cdot \dots \cdot (p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s-1})$ , а это как раз та формула, что и была выше.

Сложность вычисления функции Эйлера указанным выше способом —  $O(\sqrt{n})$  (на факторизацию). Понятно, что можно просто перебрать все числа, меньшие  $n$ , но тогда сложность будет выше —  $O(n)$ .

Применяется же функция Эйлера в теореме Эйлера, которая гласит, что  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$  для взаимно простых  $a$  и  $m$ . Теорема Эйлера является обобщением МТФ и позволяет искать обратные числа по составным модулям (если число  $m$  является простым, то мы как раз получаем формулировку МТФ).

# Сортировки

Теперь перейдём к изучению сортировок. Задача сортировки заключается в том, что нам дан набор чисел, и его нужно упорядочить по какому-то признаку, мы будем сортировать в порядке не возрастания. При этом, разрешается использовать только операцию  $<$ . Для таких алгоритмов есть одна важная ограничение — они не могут работать быстрее, чем за  $O(n \log n)$ . Чтобы сортировать объекты быстрее, придётся использовать дополнительную информацию о них, и такую сортировку мы тоже рассмотрим. Конечно, все алгоритмы сортировки описать очень сложно, поэтому ниже будет представлена только их часть.

## Bogosort

Первая из сортировок работает дольше всего, аж за  $O(n \cdot n!)$  (хотя это и ожидается из названия «глупая сортировка»).

Но при этом у неё очень простой алгоритм: переберём все возможные перестановки массива и проверим, является ли текущая перестановка отсортированной.

## Selection sort

Название переводится, как «*сортировка выбором*».

Суть сортировки такова: на первом шаге выберем наименьший элемент массива и поставим его на первое место. На втором шаге — выберем наименьший элемент из всех, кроме первого и обменяем его со вторым элементом. И так далее будем выбирать элемент на очередную позицию, а если минимальных элементов будет больше одного, то выберем из них самый первый.

Сложность такого алгоритма составит  $O(n^2)$ .

## Insertion sort

Следующая сортировка — «*сортировка вставками*».

Алгоритм её таков: будем накапливать отсортированный массив в начале данного. Первый элемент можно пропустить — он точно образует отсортированный массив. Для второго мы посмотрим, где он должен стоять: если после первого, то ничего менять не будем; если перед первым, то первый элемент сдвинем на второе место, а этот поставим на первый, то есть как бы вставим его на первую позицию. И дальше будем действовать так для всех элементов — те числа из отсортированной части, которые больше, чем новое значение — сдвинем вправо на одну позицию и поставим это новое значение перед ними.

Сложность такого алгоритма будет  $O(n^2)$ .

## Bubble sort

Это «*сортировка пузырьком*». Она, также как и предыдущие, имеет сложность  $O(n^2)$ .

Но при этом, её алгоритм чуть более прост: будем по очереди смотреть на пары соседних элементов: сначала на первый и второй, потом на второй и третий, ..., в конце на предпоследний и

последний. Если на очередном просмотре окажется, что пара упорядочена неправильно, то элементы в ней нужно поменять местами. Таким образом за один проход по массиву самый большой элемент точно окажется на самой правой позиции (всплывёт, как пузырьёк :)). После этого будем совершать ещё итерации, тем самым накапливая в конце массива его упорядоченную часть. При этом понятно, что уже упорядоченные элементы можно повторно не просматривать, также понятно, что если за одну итерацию не произошло никаких изменений, то алгоритм можно завершать.

## Tree sort

Теперь начнём изучать чуть более оптимальные сортировки и начнём с «*сортировки деревом*».

Концепция у этой сортировки очень простая: вспомним, что есть встроенные структуры, который умеют оптимально хранить отсортированные данные с помощью дерева (в C++ такие структуры — `set` и `map`). Просто сохраним в них все элементы, они сами их отсортируют, а мы после этого запишем данные в отсортированном виде.

Но простота этого алгоритма таит в себе дополнительные расходы (времени и памяти), так как работать с деревом не так легко, как с обычными массивами. Но всё же сложность у такой сортировки будет  $O(n \log n)$ , потому что все операции с деревом выполняются за  $O(\log n)$ , а у нас таких операций  $O(n)$ .

## Merge sort

Она же «*сортировка слиянием*».

Её алгоритм таков: массив из одного элемента точно отсортирован, поэтому ничего делать не нужно. Если элементов больше, то разобьём их на две примерно равных части (если длина чётная, то поровну; если не чётная, то в одной части будет на 1 элемент больше). После этого отдельно отсортируем каждую часть этим же алгоритмом, а далее научимся сливать два отсортированных массива в один. Для этого, будем запоминать два индекса — позиции в первой и второй частях, начиная с которых элементы ещё не сливались. Далее на каждом шаге выбираем наименьший из элементов, на которые указывают индексы, сохраняем его в общий отсортированный массив и сдвигаем этот указатель. Когда один массив целиком обработан (и его указатель стал указывать на конец), то оставшийся можно скопировать в общий отсортированный массив.

Сложность такого алгоритма составляет  $O(n \log n)$ , потому что с каждым из  $O(n)$  элементов совершается  $O(\log n)$  операций по его копированию во время слияния массивов.

## Quick sort

С английского — «*быстрая сортировка*».

Действует эта сортировка так: на каждом шаге будем выбирать элемент массива. Дальше нужно получить массив, в котором в начале бы шли элементы не больше выбранного, потом выбранный и в конце — элементы не меньше выбранного. После этого для обеих частей нужно применить эту же сортировку. Остаётся понять, как упорядочить массив нужным образом. Для этого заведём два указателя — один на первый элемент, второй — на последний. Если так получилось, что они указывают на инверсию (левый — на элемент, больший выбранного, правый — на элемент, меньший выбранного), то нужно поменять местами эти два элемента и сдвинуть указатели внутрь массива. Если оба элемента стоят правильно, то также можно сдвинуть оба указателя внутрь. Если оба элемента меньше, чем выбранный, то мы двигаем левый указатель, так как правый элемент точно

нужно переставить. Если оба больше — то двигаем правый. Остановиться нужно, когда указатели станут указывать на один элемент или же перескочат друг через друга.

При этом случай, когда элемент равен выбранному можно рассматривать как угодно — хоть действовать с ним так, как будто он больше, хоть так, как будто он меньше, хоть чередовать эти варианты. Выбирать элемент тоже можно произвольно — хоть первый, хоть последний, но считается, что лучше выбрать случайный элемент.

Видно, что у этого алгоритма сложность не так явно оценивается, но утверждается, что она  $O(n \log n)$  в среднем случае,  $O(n)$  — в лучшем и  $O(n^2)$  — в худшем.

## Counting sort

Та самая сортировка, которая использует дополнительную информацию и не основывается на операции  $<$ ; переводится с английского как «*сортировка подсчётом*». Дополнительное ограничение, которое накладывается — сортировать мы можем только числа, при этом из ограниченного диапазона длины  $k$ , и сложность будет  $O(n + k)$ .

Суть очень простая: заведём ещё один массив длины  $k$  и заполним его нулями. После этого будем поочерёдно смотреть на элементы (за  $O(n)$ ), которые нужно отсортировать, и прибавлять 1 к соответствующему элементу массива. И после этого мы посмотрим на все элементы нашего массива подсчёта и будем знать, сколько каких чисел встречалось. А значит мы сможем восстановить исходный массив за  $O(k)$ .

При этом на  $k$  накладываются ограничения. Во-первых, память должна позволить разместить  $k$  элементов; во-вторых, если  $k$  очень большое, то такой алгоритм может не уложиться в отведённое время (но, вероятно, ограничение по памяти существеннее, чем по времени).

## Оптимальная сортировка

Теперь покажем, почему сложность  $O(n \log n)$  является оптимальной для алгоритмов сортировки.

Пусть алгоритм совершил  $k$  операций сравнения. Поскольку у нас операция сравнения это  $<$ , а даёт она лишь два варианта ответа, то всего возможных разных вариантов сравнений могло получиться  $2^k$ . При этом, нужно отличать каждый вариант перестановки массива (их всего  $n!$ ), поэтому, должно выполняться неравенство  $2^k \geq n!$ , или же  $k \geq \log_2 n!$ .

Теперь осталось это каким-то образом оценить. Для этого будем использовать «*Формулу Стирлинга*»:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1, \text{ или } n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Теперь прологарифмируем по основанию 2:

$$k \geq \log_2 n! \sim \frac{2n \log(n) - 2n + \log(2\pi n)}{\log(4)} = O(n \log n) + O(n) + O(\log n) = O(n \log n)$$

Собственно, мы и получили нужное равенство  $k \geq O(n \log n)$ , а значит, сложность  $O(n \log n)$  действительно оптимальна для алгоритмов сортировки.

Также можно сделать эту оценку чуть проще:

$$\begin{aligned} k &\geq \log_2 n! = \log_2(1) + \log_2(2) + \dots + \log_2(n) \geq \\ &\geq \log_2 \left(\frac{n}{2}\right) + \log_2 \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \dots + \log_2(n) \geq \frac{n}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{n}{2}\right) = O(n \log n) \end{aligned}$$

# Перебор и битовые множества

Теперь научимся решать любую задачу по информатике! Да, да перебором можно решить любую задачу, правда это не всегда будет оптимально (всего-то придётся подождать несколько сотен лет, чтобы перебрать, например,  $20! \approx 2.4 \cdot 10^{18}$  вариантов :) )

## Перебор перестановок

Сначала разберём перебор, сложность которого будет  $O(n! \cdot n)$ . Во-первых, стоит сказать, что  $10! \approx 3.6 \cdot 10^6$ ,  $11! \approx 4 \cdot 10^7$ ,  $12! \approx 4.8 \cdot 10^8$ . Поэтому ограничение на применение такого перебора 10 – 11 элементов. Во-вторых, такой перебор нужно использовать, когда требуется перебрать все возможные перестановки элементов (потому что  $n!$  — количество перестановок, а  $n$  — их длина, и это как раз даёт сложность, написанную выше).

Самый простой способ - использовать встроенные функции `prev_permutation` и `next_permutation`. Для этого нужно создать какой-нибудь контейнер со всеми элементами, которые мы хотим переставлять. Далее можно перебирать все перестановки (использовать всё время одну и ту же функцию) и проверять, что такой перестановки ещё не было (сравнивать с начальной). Но можно делать такой перебор чуть проще — сначала отсортировать контейнер и получить первую перестановку, сделать с ней операции, потом делать `next_permutation`, и пока он продолжает возвращать `true` делать операции с очередной перестановкой.

Также можно и самостоятельно генерировать все перестановки. Для начала разберём случай, когда элементов — заданное количество (пусть 3). Тогда можно сделать 3 вложенных цикла, которые все будут перебирать значения от 1 до 3 и проверять, что тройка чисел является перестановкой (каждое число используется ровно по одному разу). Так у нас сгенерируются все перестановки, причём в лексикографическом порядке.

Если же количество элементов не постоянное, то нужно использовать рекурсию. Создадим глобальный список, в котором будем хранить очередную перестановку. Наша рекурсивная функция будет принимать позицию, для которой оно будет генерировать все варианты (считаем в 0-нумерации, позиции  $0 \leq i < n$ ). Если позиция уже большая ( $n$ ), то это значит, что мы всю перестановку сгенерировали и её можно как-то обработать, например, вывести. Если позиция ещё в допустимом диапазоне, то будем перебирать для неё возможные варианты. Для каждого варианта проверим, что это число ещё не использовалось и запустим эту же функцию для следующей позиции.

Единственным пунктом, который может быть не понятен в этом алгоритме — проверить, что число ещё не использовалось. Для этого есть несколько решений:

1. Перебрать все уже поставленные числа и сравнить, получим сложность  $O(n)$ .
2. Сохранить все элементы, которые ещё можно использовать в `set` и проверять наличие элементов в нём, сложность —  $O(\log n)$ .
3. В предыдущем способе перебирать не все допустимые числа, а лишь те, которые ещё не использовались.
4. Создать список длины  $n$ , в котором помечать, использованы ли элементы. Сложность —  $O(1)$ .

Лучшим из этих способов является четвёртый, так как у первого получится сложность  $O(n^n \cdot n)$ , у второго  $O(n^n \cdot \log n)$ , у третьего —  $O(n! \cdot n \log n)$ , у четвёртого —  $O(n^n)$ . И при  $n = 10$  четвёртый способ быстрее третьего примерно в 30 раз. Хотя пытаться выбрать самый быстрый способ в таком случае достаточно странно, ведь всё равно получается много операций и работать будет только для маленьких  $n$ .

## Номер перестановки

Следующая задачей на перестановки может быть такой: научиться сопоставлять номер перестановки в лексикографическом порядке и саму перестановку. Мы будем делать это за  $O(n^2)$ , но можно и ускорить до  $O(n \log n)$ , если использовать структуры данных (это остаётся читателю на реализацию).

Сначала будем получать номер перестановки (в 0-нумерации), считая, что у нас перестановка  $a$  длины  $n$  ( $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ ). Понятно, что в 0-нумерации номер перестановки равен количеству перестановок, меньших данной, поэтому такие перестановки мы и посчитаем. Будем смотреть на элементы по порядку (от  $a_0$  к  $a_{n-1}$ ). Если бы первый элемент был меньше  $a_0$ , то и вся перестановка была бы меньше нашей, значит мы точно нашли  $a_0 \cdot (n-1)!$  перестановок, которые меньше. Теперь нужно посчитать, сколько перестановок с первым числом  $a_0$  меньше, чем наша. Посмотрим на второй символ: все перестановки, у которых он меньше, чем  $a_1$  были бы точно меньше. Если  $a_0 > a_1$ , то таких перестановок ровно  $a_1 \cdot (n-2)!$ , но при этом, если  $a_0 < a_1$ , то элемент  $a_0$  уже запрещён, поэтому мы нашли только  $(a_1 - 1) \cdot (n-2)!$  перестановок, меньших нашей. Так мы будем продолжать для всех элементов перестановки, для  $a_i$ : умножать  $(n-1-i)!$  на количество чисел, меньших, чем  $a_i$ , и при этом не использовавшихся среди  $a_0, a_1, \dots, a_{i-1}$ ; и добавлять это произведение к ответу.

Теперь остаётся выполнить обратную задачу: по номеру перестановки ( $x$ , 0-нумерация) и количеству элементов ( $n$ ) определить перестановку. Во-первых должно выполняться, что  $x < n!$ , ведь столько всего перестановок :). Если это выполняется, то снова будем определять элементы по порядку (от  $a_0$  к  $a_{n-1}$ ). Определяем первый элемент, для этого посчитаем  $b = \frac{x}{(n-1)!}$  и  $c = x \% (n-1)!$ . Понятно, что  $b$  — количество чисел, меньших  $a_0$ , а значит  $a_0 = b$  (потому что оставшаяся часть  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  даёт только  $(n-1)!$  вариантов, а значит максимальный вклад в итоговую сумму —  $(n-1)! - 1$ ). Теперь мы знаем первый элемент, знаем, что  $b \cdot (n-1)!$  перестановок уже точно меньше нашей, поэтому смотрим на второй элемент, делаем  $x = c$  и пытаемся найти  $x$ -ую перестановку. Снова считаем два числа  $b = \frac{x}{(n-2)!}$  и  $c = x \% (n-2)!$  и говорим, что  $a_1 = b$  если  $a_0 > a_1$  и  $a_1 = b + 1$  если  $a_0 < a_1$  (так как  $a_0$  нельзя использовать второй раз). Аналогично делаем так для каждого индекса  $i$ : считаем  $b = \frac{x}{(n-1-i)!}$  и  $c = x \% (n-1-i)!$  и говорим, что  $a_i = b + v$ , где  $v$  количество чисел среди  $a_0, a_1, \dots, a_{i-1}$  меньших, чем  $a_i$ ; также обновляем  $x = c$ .

А теперь, умея сопоставлять перестановку и её номер, мы можем сгенерировать все перестановки за  $O(n! \cdot n^2)$  (просто перебрав все допустимые номера и сгенерировав для них перестановки).

## Перебор наборов из заданных элементов

Теперь разберём перебор всех наборов, которые состоят из заданных элементов. Более конкретно: нам нужно сгенерировать все наборы  $a$  длины  $n$ , состоящие из элементов набора  $b$  длины  $m$ . При этом одни и те же элементы  $b$  можно повторять сколько угодно раз (в том числе 0).

Во-первых, ясно, что всего таких наборов будет  $m^n$ , потому что на любую позицию можно независимо выбрать любой элемент, а значит и сложность будет  $O(m^n)$ . Во-вторых, можно заметить, что мы занимались чем-то похожим, когда генерировали перестановки. Теперь же у нас нет ограничения, что элементы должны быть различны, поэтому старый алгоритм упростится: создадим глобальный контейнер для ответа и рекурсивную функцию с одним параметром - позицией. Если позиция ( $i$ ) большая ( $i \geq n$ ), то набор сгенерирован и можно его, например, вывести. Иначе мы переберём все  $m$  вариантов для  $a_i$  и рекурсивно сгенерируем оставшуюся часть набора.



## Перебор подмножеств

Ещё одно полезное применение перебора — перебор подмножеств. Подмножеством набора  $a$  длины  $n$  называется множество  $b$  длины  $m$ , если можно получить  $b$  из  $a$  путём вычёркивания элементов (в том числе разрешено вычёркивать 0 элементов или все).

Можно свести данную задачу к предыдущей, если считать, что у нас в  $b$  будет два элемента:  $b = \{\text{«берём»}, \text{«не берём»}\}$ . И сложность перебора будет  $O(2^n)$ . Заметим, что такой перебор быстрее предыдущего, так как  $2^{24} \approx 1.7 \cdot 10^7$  и  $2^{27} \approx 1.3 \cdot 10^8$ , и можно решить задачу за отведённое время при  $n \approx 25$ .

Но чем особенна данная задача — в компьютере используется двоичная система счисления, поэтому данный алгоритм можно реализовать с помощью битовых операций. А именно: переберём все числа из диапазона  $[0; 2^n)$  (если кто-то забыл, то  $2^n = 1 \ll n$ ). Посмотрим на запись каждого числа в двоичной системе счисления (если в записи меньше, чем  $n$  знаков, то допишем слева незначащие нули) и если  $i$ -ый бит равен 1, то мы берём число  $a_i$  в набор, иначе — нет. Остаётся лишь научиться понимать, чему равен  $i$ -ый бит: для этого можно использовать побитовое И с числом  $2^i = 1 \ll i$ .

Такое использование двоичной системы счисления может навести на мысль, что с помощью чисел можно представлять множества, это действительно так и сейчас мы это изучим, и описание выше станет понятнее.

## Битовые множества

Битовые множества хранят данные таким образом: возьмём все элементы (назовём их  $x_i$ ,  $0 \leq i < n$ ), которые нужно будет хранить в множестве, и сопоставим им числа  $[0; n)$  (пусть  $x_i \rightarrow i$ ). Далее возьмём достаточно большое число (в котором хотя бы  $n$  битов), и если число в множестве есть, то поставим на соответствующую позицию 1, иначе — 0.

Теперь, с такими числами можно делать побитовые операции, и они будут соответствовать операциям с множествами:

Название	Математическая запись	Побитовая запись
Дополнение	$\bar{A}$	$\sim A$
Пересечение	$A \cap B$	$A \& B$
Объединение	$A \cup B$	$A   B$
Разность	$A \setminus B$	$A \& \sim B$
Симметрическая разность	$A \triangle B$	$A \wedge B$
Одно число ( $x_i$ )	$\{x_i\}$	$1 \ll i$

Но в C++ уже есть встроенная структура `bitset`, которая представляет битовые множества. Приведём пример работы с ними:

```
1  #include <bitset>                                // codepsum bitset
2  bitset<9> a, b(13), c;                             // b = 101100000
3  a[1] = a[3] = a[4] = a[7] = 1;                     // a = 010110010
4  c = ~a;                                              // c = 101001101
5  c = a & b;                                           // c = 000100000
6  c = a | b;                                           // c = 111110010
7  c = a & ~b;                                          // c = 010010010
8  c = a ^ b;                                           // c = 111010010
9  cout << c.count() << " " << c.size() << " " << c[0] << " " << c[3];    // 5 9 1 0
```

## Жадные алгоритмы

Перебор, который мы прошли раньше, требует очень больших временных затрат, поэтому существует много способов решать задачи быстрее. Одним из таких способов являются жадные алгоритмы — эти алгоритмы на каждом шаге поступают оптимально и получают оптимальный ответ. Сегодня мы разберём несколько примеров задач, в которых можно придумать жадный алгоритм, и после этого попытаемся доказать, что эти алгоритмы работают или нет.

### Транснеравенство

Начнём мы изучать жадные алгоритмы с примера из математики: пусть у нас есть два набора чисел одинаковой длины:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Требуется так переставить элементы обоих наборов, чтобы найти максимум у выражения  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$ .

Возникает естественное желание отсортировать оба набора и кажется, что тогда мы получим максимум у этого выражения. Давайте попробуем доказать, работает ли наш алгоритм.

Во-первых, давайте отсортируем элементы у набора  $a$ , ведь от перемены мест слагаемых в искомом выражении сумма не изменится, а делать рассуждения станет чуть проще.

Теперь разберём простой случай при  $n = 2$ , пусть у нас  $a_1 \leq a_2$  и  $b_1 \leq b_2$ . Собственно, для таких ограничений можно сделать только два варианта, поэтому нам останется проверить, что  $a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 \leq a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ . Видимо, нужно перенести всё в одну сторону у перегруппировать слагаемые:  $0 \leq a_1 \cdot (b_1 - b_2) + a_2 \cdot (b_2 - b_1)$ , и ещё раз:  $0 \leq (b_1 - b_2) \cdot (a_1 - a_2)$ . А это уже очевидно, ведь  $b_1 - b_2 \leq 0$  и  $a_1 - a_2 \leq 0$ .

Теперь разберём общий случай, когда  $n > 2$ . Пусть у нас получился ответ больше, чем тот, который получается при отсортированных наборах. Тогда у нас набор  $b$  не отсортирован по не убыванию, а значит найдётся два индекса  $i < j$ , для которых  $b_i > b_j$  (для них пары  $a_i$  и  $a_j$  соответственно, при этом, мы раньше упорядочили:  $a_i \leq a_j$ ). Тогда сумма, которую вносят эти два элемента будет  $a_i \cdot b_i + a_j \cdot b_j$ . Но, как мы доказывали раньше, для набора из двух элементов отсортированный вариант не меньше второго, а значит  $a_i \cdot b_i + a_j \cdot b_j \leq a_i \cdot b_j + a_j \cdot b_i$  (так наборы отсортированы:  $a_i \leq a_j$  и  $b_j < b_i$ ). Следовательно мы можем поменять эти два элемента местами и ответ от этого не уменьшится.

То есть, мы предположили, что найдётся ответ лучше нашего и доказали, что такого не бывает. В математике такой метод называется «от противного».

Также стоит немного дополнить про транснеравенство. Наименьшее значение у суммы  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$  будет, если  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  и  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . Доказывается это точно также, только нужно предположить, что нашёлся ответ меньше :) А причина расположения транснеравенства именно в этой теме очевидна: мы можем на каждом шаге выбирать два таких числа ( $a_i$  и  $b_j$ ), что их произведение наибольшее (для этого возьмём наибольшие числа из обоих наборов), добавляем это произведение к ответу и удаляем эти два числа. Такой алгоритм как раз является жадным и при этом формирует нужное нам упорядочивание.

### Непрерывная задача о рюкзаке

Задача о непрерывном рюкзаке формулируется так: вор пробрался на склад, где имеется  $n$  вещей стоимостью  $c_i$  и массой  $m_i$ . Нужно выбрать такие вещи, чтобы их суммарная масса не превосходила заданного  $w$  (ёмкость рюкзака), и при этом набрать максимальную стоимость. Вещи делимы, можно взять любую их часть и стоимость взятой части пропорционально её массе.

Хочется действовать так: давайте вор каждый раз будет выбирать ту вещь, у которого максимальна цена за единицу массы; если вещь целиком не входит, то он возьмёт только её часть.

Теперь докажем верность алгоритма «методом минимального контрпримера»: предположим, что на каких-то наборах данных наш алгоритм не оптимален и среди всех этих наборов возьмём минимальный по количеству вещей. Далее посмотрим на самый выгодный предмет (тот, у которого  $\frac{c_i}{m_i}$  максимально), наш жадный алгоритм брал его как можно больше. Если в контрпримере этого предмета меньше, то мы можем избавиться от части других предметов и заменить на самый выгодный, при этом общая набранная стоимость не уменьшится. А теперь мы знаем, что у нас и в жадном решении, и в контрпримере самый выгодный предмет взят в одинаковом количестве, а значит мы можем его удалить в обоих наборах и перейти к меньшему контрпримеру.

Но мы брали наименьший контрпример, а смогли найти тот, в котором предметов на один меньше. Понятно, что такого не бывает, а значит предположение, что есть контрпримеры — не верно.

Так, довольно компактно, мы смогли доказать верность жадного алгоритма. В целом, такой метод доказательства удобен, потому что позволяет смотреть только на один пример, при этом не требуется доказывать оптимальность жадного решения на нём, а нужно лишь перейти к меньшему примеру.

Сложность такого алгоритма будет  $O(n \log n)$ , потому что элементы требуется отсортировать, а дальнейший выбор можно сделать за  $O(n)$ .

## Задача о выборе заявок

Пусть имеется  $n$  заявок на проведение мероприятия в помещении. Каждая заявка характеризуется двумя временами: временем начала и временем конца ( $l_i$  и  $r_i$ , значит, помещение хотят занять на время  $[l_i; r_i)$ ). Требуется выбрать как можно больше заявок так, чтобы помещение в каждый момент времени было занято не более, чем один раз.

Довольно естественно попытаться смоделировать выбор заявок во времени: пусть сейчас какой-то момент времени  $t$ , часть заявок уже отработана, часть — ещё нет, и нужно выбрать ещё одну заявку. Кажется, что хочется выбрать ту, которая раньше всех закончится. Давайте попробуем доказать верность такого выбора.

Снова воспользуемся методом минимального контрпримера: среди всех контрпримеров выберем тот, в котором меньше всего заявок. Теперь рассмотрим ту заявку, которая раньше всех заканчивается. В жадном решении эта заявка берётся на первом шаге. Если же в контрпримере нет этой заявки, то первая его заявка заканчивается позже, а значит, её можно заменить на ту, которая заканчивается раньше всех. Теперь у нас в обоих решениях есть эта самая ранняя заявка, а значит, мы её можем удалить.

Так мы должны будем перейти к контрпримеру, в котором на одну заявку меньше, но такого нет, ведь мы брали контрпример с минимальным числом заявок. А значит предположение о наличии контрпримеров не верно, а следовательно жадное решение работает.

У этого алгоритма тоже сложность  $O(n \log n)$  на сортировку и  $O(n)$  займут оставшиеся операции.

## Задача о расписании

Пусть имеется  $n$  дел, которые нужно выполнить. Каждое дело выполняется за 1 день, при этом, его нужно начать не позже дня  $d_i$  и за него мы получим  $c_i$  монет. Нужно составить расписание так, чтобы заработать максимальное число монет.

Первое желание — каждый раз выполнять самой дорогое дело из доступных. Но можно легко придумать пример, когда наше жадное решение даст не верный ответ: пусть  $n = 2$ ,  $d = [1, 2]$ ,

$c = [1, 10]$ . Тогда, в первый день, мы выполним второе дело, а во второй день будем отдыхать; итого мы сможем заработать 10 монет. Но если сначала выполнить первое дело, а во второй день — второе, то мы сможем заработать больше — 11 монет.

Второе возможное решение — также брать дела начиная с самого дорого, но выполнять их не сразу, а пытаться отложить на наиболее поздний срок. Во-первых, это хорошо, потому что решает предыдущий пример, а во-вторых — люди часто в обычной жизни всё откладывают на последний момент :)

Теперь снова попробуем доказать наш жадный алгоритм методом минимального контрпримера (успели его полюбить?). Среди всех контрпримеров найдём тот, в котором меньше всего дел. Теперь посмотрим на самое дорогое дело (пусть его индекс  $i$ ). Оно точно есть в жадном решении, потому что оно возьмётся на первом шаге и поставится на день  $d_i$ . Если в контрпримере нет этого дела, то мы можем освободить день  $d_i$  (если он не свободен) и поставить на него дело  $i$  — так общий заработок только увеличится, а значит такой контрпример не был оптимальным (но очевидно, что такого не бывает). Следовательно, в контрпримере дело  $i$  точно есть и выполняется в какой-то день  $x$  (причём по условию  $x \leq d_i$ ). Если  $x < d_i$ , то давайте поставим дело  $i$  на день  $d_i$ , а если на этот день уже было запланировано какое-то другое дело, то переставим его на день  $x$  (так точно можно, ведь день  $x$  раньше). Теперь у нас и в жадном решении, и в контрпримере в день  $d_i$  стоит дело  $i$ , а значит мы можем удалить это дело.

Мы снова перешли к контрпримеру, в котором на одно дело меньше, но так быть не может, ведь мы брали контрпример с наименьшим числом дел. А значит контрпримеров нет и наше жадное решение оптимально. Видно, что в данной задаче и доказательство немного сложнее, и сам алгоритм сложнее (как-никак, наш первый алгоритм не работал).

Как это ни удивительно, но и у этого алгоритма такая же сложность, как и двух предыдущих:  $O(n \log n)$  на сортировку и оставшаяся часть делается за  $O(n)$ .

## Задача о размене

И последняя задача в этой теме — задача о размене: имеется  $n$  номиналов монет  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , количество монет каждого номинала не ограничено. Требуется набрать сумму  $x$  наименьшим числом монет.

На что ж, попробуем действовать жадно: будем брать монеты в порядке убывания номинала, при этом каждую монету будем брать как можно больше раз. Но что-то этот алгоритм ломается на примере:  $n = 3$ ,  $a = [1, 3, 4]$ ,  $x = 6$ . Ведь наш жадный алгоритм возьмёт 3 монеты:  $[4, 1, 1]$ , а оптимальнее было взять 2 монеты:  $[3, 3]$ .

А вот другого жадного решения что-то не придумывается, а значит, вероятно, наша задача должна решаться как-то по-другому...

# Динамическое программирование

Как мы выяснили раньше, перебор работает слишком долго, а жадный алгоритм может не работать. В таких случаях может помочь «динамическое программирование». Основная идея в том, что, задача для заданного  $n_0$  может легко решаться, если мы уже умеем решать задачи для меньших  $n$ . Тогда мы можем решить серию таких задач, при этом запомнив ответы, и потом получить искомым ответ.

При этом в зависимости от того, в каком порядке мы решаем задачи, разделяют «восходящую» и «нисходящую» динамики. В восходящей задаче решаются от меньший к большей, а в нисходящий — наоборот, от большей задачи идут вниз, к меньшим.

Раньше мы уже немного использовали динамическое программирование (там мы считали факториалы и числа Фибоначчи), но не называли его так. Теперь же мы посмотрим на его применение и в более сложных случаях.

## Числа Фибоначчи

Для начала возьмём простой пример — числа Фибоначчи. Их определение таково:  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ , при  $n \geq 2$ . И требуется посчитать  $F_n$ .

Здесь у нас дано «рекуррентное соотношение» — следующий элемент последовательности выражен через предыдущий, а это как раз то, чего мы и хотим от динамического программирования. А это значит, что мы сейчас придумаем два динамических решения (восходящее и нисходящее).

Начнём с восходящей динамики. Для начала давайте создадим структуру, в которой будем хранить ответы (в этой задаче достаточно обычного массива или `vector`'а, но в более сложных задачах может потребоваться и что-то более сложное: многомерные массивы, или `map`, например). И теперь занесём в неё те ответы, которые мы точно знаем (это будет база для нашей динамики, от неё будут считаться другие значения), в нашем случае это  $F_0 = 0$  и  $F_1 = 1$ . А теперь будем перебирать в восходящем порядке все значения  $2 \leq i \leq n$ , для каждого из них считать ответ по известной формуле  $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$ . При этом предыдущие ответы ( $F_{i-2}$  и  $F_{i-1}$ ) мы будем брать из контейнера, где мы храним ответы, а новый ответ — тоже будем записывать в этот контейнер. Так у нас получится посчитать  $F_i$  для всех  $0 \leq i \leq n$  и мы решим исходную задачу.

Теперь разберёмся с нисходящим решением. Начинаться оно будет точно также - создадим контейнер для ответов и сохраним в него  $F_0$  и  $F_1$ . А для вычисления  $F_n$  мы будем использовать рекурсивную функцию от одного аргумента  $i$ . Она будет работать так: если мы раньше считали  $F_i$ , то мы можем вернуть этот ответ, взяв его из контейнера. А иначе мы посчитаем наше  $F_i$ , вызвав эту же функцию рекурсивно (два раза: от  $i-2$  и от  $i-1$ ) и сложив два результата. Как только мы узнали  $F_i$ , то можем его записать в контейнер с ответами и вернуть вычисленное значение. Теперь, чтобы получить  $F_n$  будет достаточно вызвать нашу функцию с аргументом  $n$  и так мы получим нужное значение. При этом, так же, как и в прошлом решении, у нас за одно посчитаются и все остальные  $F_i$  для  $0 \leq i \leq n$ , и потом можно их как-то дополнительно использовать.

Так мы довольно подробно разобрали решения для этой конкретной задачи, его сложность, кстати, составляет  $O(n)$ . Но в целом, все остальные задачи с динамическим программированием будут решаться точно также: сначала запоминаются базовые ответы, а потом вычисляются все остальные. Поэтому другие задачи мы не будем разбирать столь подробно, а будем лишь находить базовые ответы и способ вычислить следующий ответ через предыдущий<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> В математике названия немного другие: динамическое программирование называется «индукцией», базовые ответы — «базой индукции», получение следующего ответа через предыдущие — «шаг индукции».

Для полноты требуется сказать, что Числа Фибоначчи можно вычислять за  $O(1)$ , если использовать «Формулу Бине»:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Ну что ж, докажем эту формулу.

1. Рассмотрим последовательности, которые одновременно отвечают двум условиям:  $f_n = q \cdot f_{n-1}$  (геометрическая прогрессия) и  $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$  (фибоначчиевая последовательность).
2. Такая совокупность условий эквивалентна  $f_0 \cdot q^n = f_0 \cdot q^{n-2} + f_0 \cdot q^{n-1}$ , её можно преобразовать в  $q^2 = q + 1$ . А решениями такого уравнения являются  $q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Переобозначим их за  $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  и  $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .
3. Теперь заметим, что если есть две фибоначчиевые последовательности ( $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$  и  $b_n = b_{n-2} + b_{n-1}$ ), то мы можем их сложить ( $c_n = a_n + b_n$ ) и получить новую фибоначчиевую последовательность ( $a_n + b_n = c_n = c_{n-2} + c_{n-1} = a_{n-2} + b_{n-2} + a_{n-1} + b_{n-1}$ ). Также фибоначчиевая последовательность получается, если все элементы умножить на константу ( $d \cdot a_n = d \cdot a_{n-2} + d \cdot a_{n-1}$ ).

4. А теперь этими двумя операциями получим числа Фибоначчи: 
$$\begin{cases} F_0 = 0 = c_1 + c_2 \\ F_1 = 1 = c_1 \cdot \lambda_1 + c_2 \cdot \lambda_2 \\ F_n = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n \end{cases} \quad . \text{Если}$$

ли решить эту систему, то получится  $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$  и  $c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

5. А теперь эти  $\lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2$  можно подставить в формулу  $F_n = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n$  и получить формулу Бине:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

## Задача о замощении полосы

Пусть у нас есть полоса размера  $2 \times n$  (2 - высота,  $n$  - ширина) и её нужно замостить прямоугольниками  $1 \times 2$  (прямоугольники можно поворачивать, но нельзя накладывать друг на друга; вся полоса должна быть покрыта, прямоугольники не могут вылезать за пределы полосы). Требуется посчитать количество таких замощений.

Может возникнуть желание перебрать все варианты замощений, но давайте не будем этого делать, потому что такой способ будет работать только для не больших значений  $n$ . Так что будем придумывать динамическое решение, обозначив  $d_i$  за ответ для полосы  $2 \times i$ . Рассмотрим полосу  $2 \times i$  и подумаем, что может быть на её конце (мы ведь хотим перейти к меньшей полосе, а для этого достаточно убрать несколько прямоугольников с края). Если у нас на конце находится вертикальный прямоугольник, то оставшуюся часть можно было составить  $d_{i-1}$  способом. Если же там горизонтальный прямоугольник, то их должно быть два (один над другим, так как иначе не получится закрыть обе крайние клетки), а значит заполнить оставшуюся часть полосы можно  $d_{i-2}$  способами.

Теперь остаётся только собрать всё вместе. Мы рассмотрели два варианта (вертикальный и горизонтальный), это разные и независимые варианты, поэтому их нужно сложить:  $d_i = d_{i-1} + d_{i-2}$ . Остаётся определить базу для вычисления других значений. Видимо, достаточно будет два значения (так как в формуле мы используем два предыдущий) поэтому возьмём  $d_0 = 0$  и  $d_1 = 1$ . Теперь, во-первых, это можно написать, а во-вторых, можно заметить, что это формула для чисел Фибоначчи.

Немного модифицируем задачу, теперь у нас полоса  $3 \times n$  и прямоугольники  $1 \times 3$ , а все остальные условия те же.

Снова рассмотрим конец полосы  $3 \times i$ : если там вертикальный прямоугольник, то у нас есть  $d_{i-1}$  способов его дополнить до полосы; если же там горизонтальный прямоугольник, то их должно быть три и они замостят квадратик  $3 \times 3$ , поэтому дополнить их можно будет  $d_{i-3}$  способами. Эти варианты независимы, как и в предыдущей задаче, поэтому формула будет:  $d_i = d_{i-1} + d_{i-3}$ . Остаётся лишь определиться с начальными значениями:  $d_0 = 0$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 2$  (нам нужно три значения, так как в формуле есть  $i - 3$ ). И теперь это можно легко написать.

Заметим, что сложность алгоритма для обеих задач будет  $O(n)$ , хотя если взять полосу и прямоугольник произвольных размеров, то вычислять станет заметно сложнее, так как вариантов взаимного расположения прямоугольников станет больше.

Но для части размеров существует формула, которая позволяет посчитать количество замощений за  $O(n \cdot m)$ . Доказана она была в 1961 году, и работает для досок любого размера  $n \times m$ , которые замощаются прямоугольниками  $1 \times 2$ :

$$\prod_{a=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \prod_{b=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} 4 \cdot \left( \cos^2 \frac{\pi a}{n+1} + \cos^2 \frac{\pi b}{m+1} \right)$$

Эту формулу мы, пожалуй, оставим без доказательства :)

## Задача про хромую ладью

Теперь рассмотрим другую задачу: есть поле  $n \times m$  ( $n$  строк и  $m$  столбцов), в каждой ячейке стоит число  $a_{i,j}$ . Хромая ладья стоит в левой верхней клетки и может ходить только вправо или вниз на 1 клетку; она идёт в правую нижнюю клетку и по дороге складывает все числа в клетках, которые посетила. Нужно посчитать, какую максимальную сумму может набрать ладья.

Теперь попробуем для каждой клетки посчитать  $d_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ ) — максимальную сумму, которую можно набрать, если идти от этой клетки в правую нижнюю. Во-первых понятно, что в конечной клетки идти некуда, поэтому  $d_{n,m} = a_{n,m}$ . Во-вторых из правого столбца и из нижней строки есть только один вариант хода, поэтому  $d_{i,m} = a_{i,m} + d_{i+1,m}$  и  $d_{n,j} = a_{n,j} + d_{n,j+1}$ . Остаётся понять, как посчитать ответы для оставшихся клеток. Понятно, что для этого достаточно из текущей клетки  $(i, j)$  пойти туда, откуда можно набрать большую сумму, поэтому  $d_{i,j} = a_{i,j} + \max(d_{i,j+1}, d_{i+1,j})$ .

Теперь у нас есть формулы, которые позволят вычислить все значения  $d_{i,j}$  и базовые ответы для нашей динамики —  $d_{n,m}$ ,  $d_{i,m}$  и  $d_{n,j}$ . А значит остаётся только аккуратно написать программу. Если использовать нисходящую динамику с рекурсией, то рекурсия сама вычислит значения в нужном порядке, поэтому здесь задумываться особо не придётся. Но если же использовать восходящую динамику, то нужно будет аккуратно работать с индексами, чтобы следующее значение вычислялось только тогда, когда вычислены предыдущие для него; но в этой задаче понятно, в каком порядке можно перебирать: будем смотреть на все строки снизу вверх, а на элементы в строках справа налево — так мы как раз получим, что для очередной клетки уже известны ответы для её соседей справа и снизу.

Сложность такого алгоритма будет  $O(n \cdot m)$ , ведь нам ровно столько ответов  $d_{i,j}$  нужно будет посчитать.

## Задача о размене

В жадных алгоритмах нам встретилась задача о размене, но теперь мы сможем её решить! Напомним её условие: имеется  $n$  номиналов монет  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , количество монет каждого номинала не ограничено. Требуется набрать сумму  $x$  наименьшим числом монет.

Давайте действовать так: пусть нам нужно набрать сумму  $s$ , тогда переберём все номиналы и попробуем набрать сумму  $s - a_i$  наименьшим количеством монет. Потом выберем минимум из этих

вариантов и не забудем прибавить 1, ведь мы использовали монету  $a_i$ . Понятно, что такой алгоритм действительно правильно работает, ведь сумму чем-то нужно набирать, а мы перебрали все варианты для начала набора этой суммы.

Теперь, когда у нас есть алгоритм, давайте попробуем получить формулы. Пусть  $d_i$  — наименьшее количество монет, которыми можно набрать сумму  $i$ . Тогда основная формула, которую мы описали выше будет вот такой:  $d_i = 1 + \min_{1 \leq j \leq n} d_{i-a_j}$ . Остаётся лишь определиться с базовых ответов для нашей динамики. Поскольку здесь у нас из индекса вычитается какое-то число из входных данных, то не понятно, сколько должно быть базовых ответов. Но давайте посмотрим на тот момент, когда мы должны закончить набирать такую сумму, потому что точно знаем, какой будет оптимальный ответ. Во-первых, при вычитании могла получиться отрицательная сумма, но понятно, что для этой суммы размена нет, поэтому  $d_i = \infty$  для  $i < 0$ . Во-вторых, мог получиться 0, это вполне нормальное число, которое набирается без монет, поэтому  $d_0 = 0$ . И в-третьих, могла получиться положительная сумма, но для неё ничего не понятно, поэтому будем продолжать вычитания.

На этой задаче можно заметить, что для ответа могут понадобиться не все числа. В самом деле: пусть  $n = 3$ ,  $a = [5, 15, 25]$ . В этом примере у нас номиналы всех монет делятся на 5, поэтому, чтобы найти ответ для  $x$  нам потребуются только ответы для  $x - 5, x - 10, x - 15, \dots, x \% 5$ . Поэтому для данной задачи восходящая динамика пишется почти также, как и в прошлых задачах: изначально сделаем  $d_i = \infty$ ,  $i > 0$ ; потом из всех сумм  $s$  из диапазона  $[0; x)$  сделаем обновление для чисел, которые можно получить ( $d_{s+a_i} = \min(d_{s+a_i}, 1 + d_s)$ ). Но при этом придётся получать ответы для всех сумм. Если же мы будем использовать нисходящую рекурсию, то мы будем переходить только в те варианты, которые полезны для получения нашей суммы, а таких вариантов потенциально может быть меньше (во всяком случае не больше).

Как и в предыдущей задаче (да и во многих других задачах на динамику), сложность такого алгоритма будет определяться количеством ответов, которые нужно получить, то есть будет  $O(n \cdot x)$ .

## Дискретная задача о рюкзаке

Задача о дискретном рюкзаке очень похожа на непрерывный рюкзак, с той лишь разницей, что вещи не делимы. Итоговая формулировка такова: вор пробрался на склад, где имеется  $n$  вещей стоимостью  $c_i$  и массой  $m_i$ . Нужно выбрать такие вещи, чтобы их суммарная масса не превосходила заданного  $w$  (вместимость рюкзака), и при этом набрать максимальную стоимость. Вещи не делимы.

Здесь, к сожалению, жадный алгоритм перестаёт работать, ведь можно придумать такой пример:  $n = 2$ ,  $c = [10, 12]$ ,  $m = [2, 3]$ ,  $w = 4$ . Жадное решение (которые выбирает наибольшее значение  $\frac{c_i}{m_i}$ ) выберет первый предмет, тогда как второй — лучше. Поэтому давайте придумаем динамическое решение.

Будем вычислять  $d_{i,j}$  — наибольшая стоимость, которую можно набрать, если использовать только первые  $i$  предметов, при этом их суммарная масса составляет  $j$ . Теперь подумаем над переходом от одного значения к другому. Очередной предмет  $i$  можно или взять, или не взять, поэтому  $d_{i,j} = \max(d_{i-1,j}, d_{i-1,j-m_i} + c_i)$ . При этом набирать отрицательную массу нельзя, поэтому  $d_{i,j} = -\infty$ , если  $j < 0$ . Также нулевую массу можно взять всегда, поэтому  $d_{i,j} = 0$ , если  $j = 0$ .

Раз мы знаем формулу, то остаётся лишь посчитать  $d_{i,j}$ . Делать это можно любым изученным способом, массы — тоже можно перебирать в любом порядке, главное — перебирать предметы в порядке  $1, 2, \dots, n$ .

Как это и не удивительно, но сложность представленного выше решения —  $O(n \cdot m)$ .

## Наибольшая общая подпоследовательность

И, напоследок, разберём ещё одну задачу, в которой у нас есть два набора  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и



$b_1, b_2, \dots, b_m$ . От нас требуется найти общую подпоследовательность наибольшей длины (подпоследовательность — часть элементов набора, при этом нельзя менять порядок элементов).

Раз у нас два набора, то будем делать динамику по двум переменным — индексу в первом наборе и во втором наборе соответственно, то есть у нас будет  $d_{i,j}$  — наибольшая длина общей подпоследовательности, если рассмотреть только первые  $i$  элементов из  $a$  и  $j$  первых элементов из  $b$ . Теперь определимся с базовыми ответами: если из какого-то набора ничего не рассматривать, то ответ точно 0:  $d_{i,j} = 0$ , если  $i = 0$  или  $j = 0$ . Теперь подумаем, как сделать переход в  $d_{i,j}$ : для этого посмотрим на элементы  $a_i$  и  $b_j$ . Если они равны, то кандидатом на ответ будет  $d_{i-1,j-1} + 1$ . Но также, вполне может оказаться, что для предыдущей пары индексов ответ был лучше, поэтому ещё кандидатами будут  $d_{i-1,j}$  и  $d_{i,j-1}$ . И из этих ответов остаётся выбрать максимум — он и будет  $d_{i,j}$ .

Теперь мы знаем базовые ответы, алгоритм того, как делать переход, а значит сможем найти ответ на исходную задачу, перебрав индексы от меньшего к большему. И итоговая сложность составит  $O(n \cdot m)$ .

## Бинарный поиск

Теперь мы перейдём к новой концепции, основанной на идеи «разделяй и властвуй» (или «уменьшай (наполовину) и решай», по другой классификации). Смысл достаточно прост: пусть у нас есть какая-то большая задача, которую нужно решить, тогда разобьём её на две примерно равных подзадачи, решим их и после как-то объединим решения. Такой алгоритм нам уже встречался, когда мы проходили сортировку слиянием.

Ну что ж, приступим, наконец, к нашему бинарному поиску: пусть у нас есть функция  $f$ , у которой мы хотим найти корень  $x_0$  на участке  $[l; r]$ , при этом мы знаем, что функция всегда отвечает условию  $f(x_1) \leq f(x_2)$  для  $l \leq x_1 \leq x_2 \leq r$ , а также  $f(l) \cdot f(r) < 0$  (аналогично условию, что  $l < x < r$ ). Тогда мы можем поступить следующим образом: возьмём точку  $m = \frac{l+r}{2}$  и вычислим  $f(m)$ . Теперь возможны три варианта:

1. Если окажется, что  $f(m) = 0$ , то корень мы точно нашли и его можно вернуть.
2. Если же  $f(l) \cdot f(m) > 0$ , то значит  $f(l)$  и  $f(m)$  — одного знака, а следовательно  $x_0$  точно не может лежать внутри отрезка  $[l; m]$ , то есть мы можем присвоить  $l = m$  не потеряв решений.
3. Аналогично, при  $f(m) \cdot f(r) > 0$ , имеем  $f(m)$  и  $f(r)$  — одного знака, а следовательно  $x_0$  точно не может лежать внутри отрезка  $[m; r]$ , то есть мы можем присвоить  $r = m$  не потеряв решений.

Во-первых, заметим, что такой алгоритм пользуется только свойством  $f(l) \cdot f(r) < 0$ , при этом, после одного шага это свойство сохраняется, а значит, такой алгоритм можно применять до тех пор, пока не будет достигнута нужная точность (на каждом шаге границы отрезка  $[l; r]$  сужаются и можно остановиться, когда отрезок станет достаточно маленьким согласно условию задачи). А во-вторых, поймём, что на каждом шаге длина отрезка уменьшается в 2 раза, а значит, наш поиск совершит  $O(\log n)$  шагов, где  $n$  — длина диапозона, в котором мы ищем.

И, в-третьих, добавим, что главное от функции — неубывание или невозрастание (далее будем называть это свойство монотонностью, хотя это и не вполне корректно), поэтому функция, отвечающая условию  $f(x_1) \geq f(x_2)$  для  $l \leq x_1 \leq x_2 \leq r$ , тоже бы подошла.

## Поиск элемента в наборе

Представим, что перед нами стоит такая задача: дан набор чисел  $a$  длины  $n$ , для которого нам нужно ответить на  $q$  запросов вида: есть ли элемент  $x$  внутри  $a$ .

Простое решение, которое можно придумать, будет работать за  $O(q \cdot n)$ : для каждого запроса будем перебирать все элементы и проверять, нашёлся ли запрошенный  $x$ . Но такой способ явно не оптимальный, ведь можно придумать решение с использованием множеств: сохраним набор  $a$  внутрь множества  $s$  и операции поиска будем выполнять уже внутри  $s$ , ведь там они будут работать за  $O(\log n)$ , а значит итоговая сложность алгоритма составит  $O(q \log n)$ . Но такой способ мы использовать не хотим, потому что он требует использование структуры данных, а это влечёт за собой дополнительные накладные расходы. Так что будем придумывать способ, использующий бинарный поиск.

Первое, что нам нужно — монотонная функция  $f$ , у которой мы будем искать корень. Поскольку требуется монотонность, то вполне логично будет отсортировать весь набор  $a$  (для конкретности будем сортировать по неубыванию, хотя по невозрастанию тоже можно). Теперь становится понятно, как нам нужно определить функцию  $f$ :  $f(k) = a_k - x$ , где  $x$  — искомое значение.

Теперь перейдём к самой реализации алгоритма. Для начала возьмём границы нашего исходного отрезка:  $l = -1$  и  $r = n$  (наши элементы в  $a$  имеют индексы  $0, 1, \dots, n-1$ , а такие  $l$  и  $r$  как бы указывают на фиктивные элементы, которые можно считать  $a_{-1} = -\infty$  и  $a_n = \infty$ ).

Также для удобства понимания работы с индексами договоримся, что у нас всегда будут выполняться условия  $a_l < x \leq a_r$ . Тогда наш алгоритм будет выглядеть следующим образом:

```

1  while (r - l > 1) {                               // можно закончить поиск, когда l и r стали соседними
2      int m = (r + l) / 2;                             // вычисляем середину
3      (a[m] < x ? l : r) = m;                         // тернарным оператором очень удобно двигать границы :)
4  }
```

Понятно, что согласно изначальному условию если ответ и содержится, то только в элементе  $a_r$ , поэтому если  $r = n$  или  $a_r > x$ , то элемент не нашёлся, а иначе  $a_r = x$  и это первый элемент равный  $x$ , и поэтому такой бинарный поиск называется «*lower bound*».

Можно было договориться об инварианте  $a_l \leq x < a_r$ , и тогда если  $x$  не нашёлся бы в случаях  $l = -1$  и  $a_l < x$ , а иначе  $a_l = x$  было бы последним подходящим элементом. Если бы наш алгоритм возвращал индекс  $r$ , то такой бинарный поиск назывался бы «*upper bound*»

И понятно, что алгоритм, решающих исходную задачу работал бы за  $O(n \log n + q \log n)$ , где первое слагаемое возникает из-за сортировки, а второе — ответы на запросы.

## Встроенный бинарный поиск

Разумеется, в C++ уже есть встроенные функции, которые ищут значения внутри отсортированных контейнеров. Они называются `lower_bound`, `upper_bound` (откуда же взялись такие названия :)) и `binary_search`, использовать их можно так:

```

1  vector<int> p1 = {2, 3, 5, 7, 11};
2  int p2[] = {2, 3, 5, 7, 7, 11, 13};
3  upper_bound(p1.begin(), p1.end(), 8) - p1.begin(); // 4, так как 8 < p1[4] = 11
4  lower_bound(p2, p2 + 7, 7) - p2;                 // 3, так как 7 <= p2[3] = 7
5  binary_search(p2, p2 + 7, 17);                    // false, так как не нашлось
```

Только перед этим необходимо подключить нужный файл:

```

1  #include <algorithm>                               // содержим lower_bound, upper_bound и binary_search
```

И, конечно же, встроенные алгоритмы бинарного поиска работают за  $O(\log n)^3$ .

## Бинарный поиск по ответу

Есть целый набор задач, в которых относительно легко понять, является ли какое-то число ответом, при этом выписать явную формулы для вычисления этого числа достаточно сложно. Именно в таких задачах используется «*бинарный поиск по ответу*».

Пусть у нас есть  $n > 0$  дипломов шириной  $w$  и высотой  $h$ , при этом дипломы нельзя поворачивать и накладывать друг на друга. Нужно найти минимальное целое  $x$  такое, что все дипломы войдут на квадратный стенд  $x \times x$ , не вылезая за его пределы.

Во-первых заметим, что в этой задаче присутствует монотонная функция: если  $x$  является ответом, то для всех  $x' > x$  стенд  $x' \times x'$  также является ответом, а для всех  $x' < x$  стенд  $x' \times x'$  ответом точно не является. Так что приняв  $l = 0$  и  $r = n \cdot \max(w, h)$  мы сможем сделать бинарный поиск по ответу (стенда  $0 \times 0$  точно не хватит, а вот  $(n \cdot \max(w, h)) \times (n \cdot \max(w, h))$  — точно хватит).

Теперь остаётся понять, является ли какое-то число  $m$  ответом. А сделать это действительно не сложно, ведь на стенд размером  $m \times m$  войдёт  $\lfloor \frac{m}{w} \rfloor$  дипломов по горизонтали и  $\lfloor \frac{m}{h} \rfloor$  по вертикали

<sup>3</sup> Это справедливо для контейнеров, в которых есть доступ к произвольному элементу; для множеств и отображений нужно использовать методы самих контейнеров, которые мы изучили раньше: `s.lower_bound(x)` ; .

(такие скобочки — это округление вниз к ближайшему целому). А значит итоговая функция, по которой совершается поиск является  $f(m) = \lfloor \frac{m}{w} \rfloor \cdot \lfloor \frac{m}{h} \rfloor$ , и если  $f(m) < n$ , то стенд слишком маленький, значит нужно сделать  $l = m$ ; а иначе  $f(m) \geq n$ , а значит стенд достаточного размера, поэтому делаем  $r = m$ . Итоговый ответ окажется в границе  $r$ .

Понятно, что сложность такого решения будет  $O(\log(n \cdot \max(w, h)))$ , ведь мы ищем среди  $n \cdot \max(w, h)$  потенциальных ответов. Также понятно, что при любом бинарном поиске по ответу нам нужно будет делать  $O(\log t)$  операций поиска, где  $t$  — размер диапазона, в котором мы ищем ответ.

## Вещественный бинарный поиск

Теперь рассмотрим ещё одну задачу, чтобы понять широту применимости бинарного поиска. Пусть нам нужно вычислить квадратный корень числа  $n$  с точностью  $10^{-6}$ , при этом использовать встроенные функции корня (и возведения в степень) запрещается.

Здесь достаточно очевидно, что бинарный поиск у нас будет по функции  $f(m) = m^2$ . Если оказалось, что  $f(m) = n$ , то  $m$  — искомое число; если же  $f(m) < n$ , то такого  $m$  ещё мало, поэтому нужно сделать  $l = m$ ; а иначе  $f(m) > n$  и делаем  $r = m$ .

Единственным отличием от предыдущих задач будет то, что  $l$  и  $r$  должны быть вещественными числами, ведь используя целые числа мы не сможем достичь нужной точности. Останавливать же поиск мы можем когда разность  $r - l$  станет слишком маленькой, например меньше  $10^{-7}$ . Но поскольку операции с вещественными числами имеют погрешности, то заданная разность может не достигаться и может получиться бесконечный цикл. Поэтому иногда делают бинарный поиск с заданным числом итераций (например 120, потому что  $\log_2 10^{36} \approx 120$ , а диапазона  $10^{36}$  почти всегда хватает, ведь положительные числа в задачах почти всегда лежат в диапазоне  $[10^{-18}; 10^{18}]$ ).

Такой бинарный поиск называется «вещественным» (потому что работает с вещественными числами), его сложность, как обычно, пропорциональна  $O(\log t)$ , где  $t$  — размер диапазона. Также приятным свойством вещественного бинарного поиска является факт, что после окончания поиска обе границы ( $l$  и  $r$ ) оказываются достаточно близки к ответу, поэтому ответом можно считать любое из чисел.

## Тернарный поиск

Теперь рассмотрим алгоритм, очень похожий на бинарный поиск — тернарный поиск. Его суть заключается в следующем: пусть у нас есть функция  $f(x)$ , у которой ровно один минимум  $x_0$  (с максимумом аналогично) на отрезке  $[l; r]$ , разбивающий функцию на две монотонных части  $[l; x_0]$  и  $[x_0; r]$ .

Тогда на каждом шаге мы можем делить текущий отрезок на три части:  $m_1 = l + \frac{r-l}{3} = \frac{2l+r}{3}$  и  $m_2 = r - \frac{r-l}{3} = \frac{l+2r}{3}$ . И если оказалось, что  $f(m_1) \leq f(m_2)$ , то на участке  $[m_2; r]$  точно нет ответа, поэтому можем присвоить  $r = m_2$ . Аналогично при  $f(m_1) \geq f(m_2)$ , на участке  $[l; m_1]$  точно нет ответа, поэтому можем присвоить  $l = m_1$ .

Заканчивать такой поиск нужно, когда отрезок станет достаточно маленьким или после достаточного числа итераций. Сложность тернарного поиска  $O(\log t)$ , где  $t$  — длина диапазона (на самом деле понятно, что тернарного поиска основание логарифма 1.5, а бинарного — 2, но эта константа в асимптотике опускается, поэтому у поисков одинаковые сложности).

Применять тернарный поиск можно, например, в задачах по геометрии, когда вам не хочется выводить явную формулу. Ещё стоит отметить, что достаточно часто можно обойтись без тернарного поиска, заменив его на бинарный поиск по производной.

## Простые линейные алгоритмы

Сегодня мы изучим несколько популярных линейных алгоритмов, которые могут пригодиться при решении более сложных задач.

### Правильная скобочная последовательность

Первой задачей, которую мы разберём, будет «*правильная скобочная последовательность*» (ПСП). Самое простое определение у ПСП — это такая последовательность скобок, которую можно получить из математического выражения, при удалении всех символов, кроме скобок. Но чуть более практичным является другое определение: пустая СП является правильной; ПСП обёрнутая в ещё одни скобки тоже является ПСП; если  $A$  и  $B$  являются ПСП, то и  $AB$  — тоже ПСП.

Нам даётся строка  $s$  длины  $n$ , нужно проверить, является ли она ПСП. Для начала, разберём случай, когда у нас есть только один вид скобок (например, только круглые скобки).

Давайте поймём, что из-за того, что у нас вид скобок только один, то нам без разницы на то, какие именно скобки будут стоять друг с другом в парах, а главное — лишь способность скобок разбиться на пары. Поэтому придумаем критерий разбиваемости скобок на пары. Во-первых, понятно, что количество открывающих и закрывающих скобок должно быть равно. Во-вторых, и это чуть менее очевидно, если мы рассмотрели первые элемента строки  $s_1, s_2, \dots, s_i$ , то у нас не может закрывающих скобок быть больше, чем открывающих.

Теперь проверим, достаточно ли таких критериев. Понятно, что если наша строка является ПСП, то она отвечает обоим критериям и наш алгоритм скажет, что это действительно ПСП. Остаётся лишь проверить, обратное условие: предположим, что найдутся строки, которые не являются ПСП, но наш алгоритм скажет, что они ПСП. Тогда выберем из этих строк самую короткую, пусть это  $t$ . Мы точно знаем, что  $t$  не пустая, поэтому в ней должна найтись закрывающая скобка (чтобы количество открывающих и закрывающих уравнилось). Среди этих скобок выберем самую первую, пусть она стоит на позиции  $x$ . Согласно нашему алгоритму среди символов  $t_1, t_2, \dots, t_x$  количество закрывающих не больше, чем количество открывающих. А следовательно  $x \geq 2$ , и мы можем удалить символы  $t_{x-1}$  и  $t_x$  (это будут открывающая и закрывающая скобки соответственно), так мы сможем перейти к строке  $t'$ , в которой на 2 символа меньше.

Предположим, что  $t'$  — ПСП, тогда и  $t$  будет ПСП, ведь можно вставить пару скобок в любое место математического выражения; но изначально мы брали, что  $t$  — не ПСП. Значит  $t'$  должна быть не ПСП, при этом наш алгоритм должен был дать правильный ответ на этой строке. Но если алгоритм дал такой ответ, то должно было нарушиться одно из условий. Если нарушилось первое, то количество скобок в  $t'$  разное, а значит и количество скобок в  $t$  — тоже разное. а так нельзя, ведь наш алгоритм, по предположению, ошибся на строке  $t$ . Значит для строки  $t'$  должно было нарушиться второе условие. Если оно нарушилось на каком-то из символов  $1, 2, \dots, x-2$ , то на этом же символе оно нарушится и в строке  $t$ , а так нельзя. Значит второе условие нарушилось на символе  $t'_y$ , где  $y > x-2$ , но тогда точно также условие нарушится и  $t_{y+2}$ , ведь парные скобки никак не влияют на второе условие, а следовательно и так быть не может.

Так мы разобрали все варианты и пришли к противоречиям, а значит нет строк на которых наш алгоритм даёт не правильный ответ. Поэтому мы можем немного упростить эти два критерия, чтобы их было проще проверять: будем последовательно смотреть на символы  $s$  и на каждом символе будем пересчитывать величину  $b$  — количество открывающих скобок минус количество закрывающих (изначально  $b = 0$ ). И теперь первое условие превратится в то, что должно быть  $b = 0$  после просмотра всех символов, а второе условие — должно быть  $b \geq 0$  после каждого очередного символа.

И раз у нас есть алгоритм для одного типа скобок, то мы теперь можем перейти к более общей задаче, где несколько типов скобок. Понятно, что для такой задачи должны выполняться все

предыдущие условия (причём для каждого типа скобок отдельно). Но также, ещё нужно проверять, что у нас пары скобок одинакового типа.

Поэтому будем смотреть на строку  $s$  слева направо и запоминать открывающие скобки, которые мы уже видели, в стек  $v$ . Если очередной символ — открывающая скобка, то добавим её в  $v$ . Если же наш символ — закрывающая скобка, то нужно проверить, что последняя скобка из  $v$  парна нашей текущей скобки. Если не парна — то  $s$  не ПСП, если парна — то нужно забыть эти обе скобки (удалить открывающую из  $v$ ) и продолжить смотреть на строку. В конце не должно остаться не парных открывающих скобок, а значит  $v$  должен быть пуст.

Понятно, что такой алгоритм верен, ведь наличие парной скобки в  $v$  гарантирует, что  $b \geq 0$ , а также, что скобки действительно парные. Условие же для конца строки  $b = 0$  в нашем случае эквивалентно, что в конце  $v$  пуст. Также понятно, что этот общий алгоритм справится и с частной задачей, когда тип скобок был только один.

И сложность обоих алгоритмов будет  $O(n)$ , ведь для каждого символа нужно только изменение  $b$  или  $v$ , а это элементарные операции и делаются они за  $O(1)$ .

## Постфиксная запись

Важным этапом в информатике было научиться вычислять математические операции с учётом скобок, приоритета и прочего. Одним из способов, которым удалось решить эту проблему, является «обратная польская запись» (ОПЗ). У неё есть ряд преимуществ, из-за которых выражения в ней очень легко считаются: во-первых, нет скобок, во-вторых, нет приоритета у операций. Алгоритм преобразования обычного выражения (записанного в «инфиксной нотации») в ОПЗ мы рассматривать не будем<sup>4</sup>, а лишь рассмотрим пример такого соответствия:

$$(1 - 2) \times 4 + 3 \rightarrow 1\ 2 - 4 \times 3 +$$

А теперь мы узнаем алгоритм вычисления выражений в ОПЗ и поймём, что такая запись действительно очень упрощает алгоритм. Для этого заведём стек  $v$  и если нам встретилось число, то его нужно добавить в  $v$ . Если же очередной элемент ОПЗ — оператор  $op$ , то его нужно обработать: возьмём  $a$  — верхний элемент стека, удалим его, возьмём  $b$  — новый верхний элемент и удалим и его; и после этого в  $v$  нужно добавить  $b\ op\ a$ . Если исходная ОПЗ корректна, то в конце этого алгоритма в  $v$  будет одно число — результат вычисления выражения.

Теперь мы научились вычислять выражения, записанные в ОПЗ. Остаётся добавить, что, во-первых, сложность такого алгоритма  $O(n)$ , где  $n$  — длина входной строки с ОПЗ. Во-вторых, и это чуть менее очевидно, такой калькулятор можно развивать достаточно сильно, например, из него можно сделать язык программирования, если добавить новые операторы и научиться их обрабатывать (присваивание, сравнения, условия, циклы и т.д.), но этим мы заниматься не будем, так как это не относится к олимпиадному программированию<sup>5</sup>.

## Элементы с максимальной разностью

Теперь рассмотрим другую задачу: дан набор  $a$  длины  $n$ , требуется найти такие индексы  $i$  и  $j$ , что  $i < j$  и при этом  $a_j - a_i$  принимает максимальное значение.

Самый первый алгоритм, который можно придумать — перебрать за  $O(n^2)$  все возможные пары и найти среди них наилучшую. Но понятно, что у нас сейчас тема линейные алгоритмы, а значит эту задачу можно решать быстрее.

<sup>4</sup> Если читатель заинтересовался, то может изучить этот алгоритм самостоятельно, прочитав, например, [статью на Википедии](#)

<sup>5</sup> Читателю, который решится создать язык программирования на основе этого калькулятора, стоит знать, что это действительно возможно, так как автор книги сам так сделал язык программирования :)

А раз так, то давайте думать, как оптимизировать перебор. Мы хотим придумать линейный алгоритм, а это значит, что должно быть  $n$  каких-то состояний, которые мы по очереди сможем перебирать, при этом из одного состояния мы должны переходить в следующее достаточно быстро. Во-первых, давайте определимся, что  $n$  состояниями будет та часть набора, которую мы уже обработали. После этого нам нужно будет перейти к следующему состоянию, а значит придётся двигать правую границу. А раз так, то давайте на каждом шаге будем фиксировать правую границу и подбирать наилучший ответ.

Понятно, что для заданного  $a_j$  наилучшем будет минимальное среди чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}$ . Конечно, мы бы могли каждый раз заново вычислять минимальное значение среди всех этих чисел, но такой алгоритм не будет оптимальным, так как мы вновь будем перебирать все пары индексов. Поэтому нужно как-то воспользоваться ответом, который мы знали раньше. А на прошлом состоянии у нас было число  $a_{j-1}$  и набор  $a_1, a_2, \dots, a_{j-2}$ , в котором мы знали минимальный элемент (пусть  $x$ ). Тогда видно, что для у нас в наборе стало на один элемент больше, а значит его минимум это  $\min(x, a_{j-1})$ , что уже легко считается. Остаётся лишь как-то посчитать первое состояние для этого алгоритма, ведь его нельзя пересчитать через предыдущее. Поэтому при  $j = 2$  минимальным числом нужно считать  $a_1$ , и текущим ответом  $a_2 - a_1$ .

Теперь ещё раз опишем этот алгоритм без лишних рассуждений. Будем хранить 3 числа: индекс текущего минимального значения ( $i$ ) и индексы текущей оптимальной пары. Изначально считаем  $i = 1$ , а оптимальной парой —  $(1, 2)$ . Теперь для всех правых границ ( $j$ ) из диапазона  $[3; n]$  сначала сделаем  $i = j - 1$ , если  $a_i > a_{j-1}$  и после этого сравним текущий ответ (пара  $(i, j)$ ) с предыдущим ответом, и если нужно, то обновим ответ на задачу. Так после всех шагов мы узнаем пару индексов с наибольшим значением  $a_j - a_i$  (при  $i < j$ ).

Понятно, что сложность такого алгоритма  $O(n)$  — как раз линейная, чего мы и хотели добиться изначально.

## Отрезок с заданной суммой

Теперь рассмотрим другую задачу про набор  $a$  длины  $n$ . Здесь нам нужно будет найти такие два числа  $l$  и  $r$ , что будет выполнено равенство  $a_l + a_{l+1} + \dots + a_r = x$ , где  $x$  вводится пользователем и при этом  $a_i \geq 0$ .

Решение за  $O(n^3)$  очевидно, для этого достаточно перебрать все пары индексов и для них посчитать сумму, но такое решение что-то совсем не оптимальное. Поэтому снова будем придумывать линейный алгоритм.

Будем пользоваться методом двух указателей: заведём два индекса  $i$  и  $j$ , и будем для них проверять условие задачи, и если ответ до сих пор не найден, то будем двигать какой-нибудь из указателей, но только вправо. Поскольку оба указателя переберут не более  $n$  значений, то мы получим линейную сложность.

Так вот, пусть мы получили указатели  $i$  и  $j$ , а также знаем, что  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_r = s$ . Тогда нам нужно понять, какой из указателей стоит двигать. Первый, наиболее очевидный случай, когда  $s = x$ , то это значит, что мы уже нашли ответ на задачу и можем заканчивать поиск. Если же  $s < x$ , то это значит, что элементов ещё мало и нужно расширить диапазон, а значит добавим к  $s$  число  $a_{j+1}$  и передвинем вправо  $j$ , так наш диапазон станет расширится на один элемент справа. И последний случай, когда  $s > x$ , то диапазон следует уменьшать, а значит нужно двигать  $i$ : сначала убавим  $s$  на  $a_i$ , а потом увеличим  $i$  на единицу, уменьшив диапазон на один элемент слева. И дополнительная проверка, которую нужно делать — что оба индекса ещё находятся в наборе, а если какой-то из них вылез за его пределы (сначала это будет  $j$ ), то алгоритм нужно завершать, с ответом, что такой пары не существует.

Остаётся понять, почему такой алгоритм будет всегда давать верные ответы. Если алгоритм нашёл два индекса, то, понятно, что такая пара действительно подходит. Поэтому проверим второй вариант: пусть у нас есть какой-то набор  $a$ , для которого ответами являются  $L$  и  $R$ , но наш алгоритм

эту пару не нашёл. Но раз алгоритм не нашёл ответа, то это значит, что наше  $j$  прошло по всем элементам  $a$ , в частности по  $R$ , а вот  $i$  могла когда-то быть  $L$  (но не обязательно). Теперь рассмотрим два случая, если сначала наступил момент, когда  $i = L$ , то значит  $j < R$ , и тогда наш текущий отрезок  $[i; j]$  лежит внутри ответа  $[L; R]$ , а значит  $s \leq x$ , и поэтому мы будем двигать правую границу и найдём ответ. Если же сначала наступило условие  $j = R$ , то значит  $i < L$ , но тогда отрезок с ответом  $[L; R]$  лежит внутри текущего  $[i; j]$ , а следовательно  $s \geq x$ , и мы будем уменьшать сумму, двигая левую границу, и найдём ответ. То есть мы в любом случае найдём наш правильный отрезок, если он есть.

Как говорилось выше, сложность этого алгоритма  $O(n)$ , потому что оба указателя совершают не более  $n$  перемещений вправо.



# Запросы суммы и минимума

Сегодня мы займёмся другими важными линейными алгоритмами, а именно для заданного набора научимся вычислять сумму и минимумы на определённых участках набора (отрезках). Эти алгоритмы часто можно применять в других, более сложных задачах.

## Запрос суммы

Первая задача, которую мы разберём будет такая: дан набор  $a$  длины  $n$ , требуется ответить на  $q$  запросов сумму на отрезке:  $s = a_l + a_{l+1} + \dots + a_r$ . Называется она «RSQ» (range sum query).

Очевидно, как решать эту задачу за  $O(n \cdot q)$  — просто для каждого запроса будем перебирать нужные элементы и искать их сумму. Но ведь понятно, что мы будем часто считать одни и те же суммы, а значит алгоритм можно как-то улучшить, чтобы таких лишних операций не делать.

Для этого воспользуемся идеей предподсчёта. Поэтому нужно придумать, что бы такого посчитать заранее, чтобы потом легко отвечать на запросы. При этом понятно, что подсчитывать мы будем какие-то суммы, остаётся лишь определить какие именно.

Оказывается, что достаточно под- считать  $p_i$  — сумму первых  $i$  элементов:  $p_0 = 0$ ,  $p_1 = a_1$ ,  $p_2 = a_1 + a_2$ , ...,  $p_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Причём понятно, как вычислить эти числа быстро, это ведь динамика с  $p_0 = 0$  и  $p_i = p_{i-1} + a_i$ , для  $1 \leq i \leq n$ .

А теперь нужно понять, зачем мы вообще это посчитали. Для этого попробуем выразить сумму  $s$  через элементы  $p$ : давайте добавим и вычтем первые элементы набора  $s = (a_l + a_{l+1} + \dots + a_r) + (a_1 + a_2 + \dots + a_{l-1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{l-1})$ . Но ведь теперь мы можем сгруппировать первые две скобки:  $s = (a_1 + a_2 + \dots + a_r) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{l-1})$ , и заметим, что эти скобки — как раз те суммы, которые мы предподсчитали в  $p$ :  $s = p_r - p_{l-1}$ .

Таким образом, у нас есть алгоритм, который решает эту задачу: сначала предподсчитаем  $p$ , а потом будем вычислять ответы для каждого запроса по формуле выше. Так, мы за  $O(n)$  сделаем предподсчёт и потом на каждый из  $q$  запросов будем отвечать за  $O(1)$ , а значит итоговая сложность —  $O(n + q)$ . Стоит отметить, что вычисленное  $p$  называется префиксными-суммами.

Начальный массив										
3	25	36	45	49	52	61	74	86	89	
Префиксные суммы (каждый элемент - это сумма всех предыдущих)										
0	3	28	64	109	158	210	271	345	431	520
Пусть нам нужна сумма от 4 до 7 элемента Это тоже самое, что и разница между суммами первых 7-и и первых 3-х										
3	25	36	45	49	52	61	74	86	89	
Значит ответ на наш запрос это разница между 7-ым и 4-ым элементами префиксных сумм (при нумерации с 0)										
0	3	28	64	109	158	210	271	345	431	520
271 - 64 = 207, это и есть ответ										

## Двумерные суммы

Теперь усложним задачу: пусть имеется двумерный набор  $a$  из  $n$  строк и  $m$  столбцов. Требуется для  $q$  запросов с параметрами  $x_1, y_1, x_2, y_2$  вычислить сумму  $s = \sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=y_1}^{y_2} a_{i,j}$  (понятно, что  $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq n$  и  $1 \leq y_1 \leq y_2 \leq m$ ).

Очевидно, что если каждый раз перебирать все элементы, то получим сложность  $O(n \cdot m \cdot q)$ , это, конечно плохо, поэтому можно по одной оси посчитать префикс-суммы, а по другой проходить циклом, и тогда можно получить сложность  $O(q \cdot \min(n, m))$ . Но понятно, что мы хотим линейный алгоритм, поэтому снова нужно будет что-то предподсчитать, чтобы потом быстро отвечать на каждый из запросов.

Давайте воспользуемся идеей из предыдущей задачи и предподсчитаем  $p_{i,j}$  — сумму на прямоугольнике с началом в начале набора  $(1, 1)$  и концом в точке  $(i, j)$ :  $p_{i,j} = \sum_{x=1}^i \sum_{y=1}^j a_{x,y}$ . Раз у нас есть идея, что предподсчитать, то остаётся лишь две вещи: во-первых, научиться это считать, а во-вторых, использовать это для решения нашей задачи.

Начнём с вычисления  $p_{i,j}$ . Начало нашей динамики очевидно:  $p_{0,0} = 0$ , так как это пустой набор по обеим осям, а также  $p_{0,j} = 0$  и  $p_{i,0} = 0$ , так как у это тоже пустые наборы, ведь они пусты по одной оси. Теперь поймём, как посчитать  $p_{i,j}$ , если мы уже знаем  $p_{x,y}$ , где  $x < i$  или  $y < j$  (или выполняются оба условия). Во-первых, понятно, что у этой суммы будут  $a_{i,j}$ , а также соседние числа  $a_{i-1,j}$  и  $a_{i,j-1}$  (если они есть), поэтому давайте попробуем выразить  $p_{i,j}$  через ответы для соседей:  $p_{i,j} = a_{i,j} + p_{i-1,j} + p_{i,j-1} + r$ , где  $r$  — поправка, чтобы получилась та, сумма которую мы хотели изначально.

Давайте подставим значения для всех слагаемых и выразим  $r$ :  $p_{i,j} = a_{i,j} + \sum_{x=1}^{i-1} \sum_{y=1}^j a_{x,y} + \sum_{x=1}^i \sum_{y=1}^{j-1} a_{x,y} + r = a_{i,j} + \left( \sum_{x=1}^{i-1} \sum_{y=1}^{j-1} a_{x,y} + \sum_{x=1}^{i-1} a_{x,j} \right) + \left( \sum_{x=1}^{i-1} \sum_{y=1}^{j-1} a_{x,y} + \sum_{y=1}^{j-1} a_{i,j} \right) + r = \left( a_{i,j} + \sum_{x=1}^{i-1} \sum_{y=1}^{j-1} a_{x,y} + \sum_{x=1}^{i-1} a_{x,j} + \sum_{y=1}^{j-1} a_{i,j} \right) + \left( \sum_{x=1}^{i-1} \sum_{y=1}^{j-1} a_{x,y} + r \right)$ . Теперь остаётся заметить, что первая скобка — как раз требуемая сумма, а значит

вторая скобка равна нулю и  $r = - \sum_{x=1}^{i-1} \sum_{y=1}^{j-1} a_{x,y} = -p_{i-1,j-1}$ . А это значит, что наша формула для подсчёта  $p_{i,j}$  будет вот такой:  $p_{i,j} = a_{i,j} + p_{i-1,j} + p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1}$ . Также эту формулу можно получить и графически, если закрашивать те элементы, которые мы уже взяли в сумму, то нужно будет вычитать  $p_{i-1,j-1}$ , так как благодаря  $p_{i-1,j}$  и  $p_{i,j-1}$  этот участок покроется дважды, а нужно посчитать его ровно один раз.

Теперь вторая часть — использование наших сумм для ответов на запросы. Для этого заметим, что  $p_{x_2,y_2} = \sum_{i=1}^{x_2} \sum_{j=1}^{y_2} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{x_1-1} \sum_{j=1}^{y_1-1} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{x_1-1} \sum_{j=y_1}^{y_2} a_{i,j} + \sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=1}^{y_1-1} a_{i,j} + \sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=y_1}^{y_2} a_{i,j}$  (мы разбили всю сумму на 4 не пересекающихся области). Теперь добавим и вычтем первое слагаемое ещё раз и перегруппируем слагаемые:  $p_{x_2,y_2} = \left( \sum_{i=1}^{x_1-1} \sum_{j=1}^{y_1-1} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{x_1-1} \sum_{j=y_1}^{y_2} a_{i,j} \right) + \left( \sum_{i=1}^{x_1-1} \sum_{j=1}^{y_1-1} a_{i,j} + \sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=1}^{y_1-1} a_{i,j} \right) + \sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=y_1}^{y_2} a_{i,j} - \sum_{i=1}^{x_1-1} \sum_{j=1}^{y_1-1} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{x_1-1} \sum_{j=1}^{y_2} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{x_2} \sum_{j=1}^{y_1-1} a_{i,j} + \sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=y_1}^{y_2} a_{i,j} - \sum_{i=1}^{x_1-1} \sum_{j=1}^{y_1-1} a_{i,j} = p_{x_1-1,y_2} + p_{x_2,y_1-1} + s - p_{x_1-1,y_1-1}$ . И теперь мы можем выразить  $s$ , который и требовалось подсчитать:  $s = p_{x_2,y_2} - p_{x_1-1,y_2} - p_{x_2,y_1-1} + p_{x_1-1,y_1-1}$ . Эту формулу, так же, как и формулу для вычисления  $p_{i,j}$ , можно было получить графически, но это останется маленьким заданием для читателя.

А теперь мы можем подвести итог в этой задаче: за  $O(n \cdot m)$  мы можем предподсчитать все  $p_{i,j}$ , а дальше на каждый из  $q$  запросов мы сможем ответить за  $O(1)$ , а значит итоговая сложность  $O(n \cdot m + q)$ , то есть мы получили линейный алгоритм (хоть в нём и есть произведение, но линейность это когда количество операций пропорционально размеру входных данных, а в нашем случае размер исходного набора  $a$  как раз и был  $n \cdot m$ ). Также стоит сказать, что такими же рассуждениями можно научиться отвечать и на запросы для больших размерностей (3, 4, 5...), с той лишь разницей, что формулы станут длиннее.

## Стек с минимумом

Все было бы хорошо, но если в предыдущих задачах мы захотим найти минимум вместо суммы, то у нас ничего не получится. В самом деле, пусть мы подсчитали значения  $p_i$ , как минимум из первых  $i$  элементов, как тогда ответить на запрос минимума на отрезке  $[l; r]$ ? Например, возьмём наборы  $a = [1, 2, 1]$  и  $b = [1, 2, 2]$ , тогда  $p$  для обоих наборов будет  $p = [1, 1, 1]$ , но при этом если нам нужно ответить на запрос  $l = 1, r = 2$  (элементы нумеруются с единицы), то для  $a$  ответом будет 1, а для  $b$  — 2. Что-то пошло не так!

Поэтому такую задачу мы решать не будем, а придумаем другую: нам нужно сделать стек, который бы поддерживал взятие минимума среди своих элементов за  $O(1)$ . И к тому же нужно поддерживать обычные операции со стеком: добавление элемента, удаление элемента, взятие верхнего элемента и взятие размера.

В целом, не сложно придумать, как поддерживать минимум для всего стека: пусть мы знаем, что он был  $x$ , а потом добавился элемент  $a$ , тогда новым минимумом станет  $\min(x, a)$ . Что же делать, если нам нужно удалить элемент из стека? Поскольку, зная текущий минимум и зная удаляемое значение, мы не сможем посчитать новый минимум (если мы удаляем элемент равный минимальному, то минимум может как измениться, так и нет, если есть другие элементы с таким же значением), то на каждом шаге будем запоминать минимум в ещё один стек.

Теперь опишем, как будут работать наш стек с минимумом. Заведём два стека  $st$  и  $st\_min$ , в  $st$  будем хранить сами элементы стека, а в  $st\_min$  — накапливать минимальные значения. Тогда если мы хотим добавить элемент  $x$ , то в  $st\_min$  добавится минимум из текущего минимума (лежит на верху  $st\_min$ ) и элемента  $x$ , а в  $st$  добавится сам  $x$ . Если требуется удалить элемент из стека, то нужно удалить верхний элемент и из  $st$ , и из  $st\_min$ . На взятие минимум будем возвращать верхний элемент из  $st\_min$ , а при взятии верхнего элемента — вернём верхний элемент из  $st$ . Если же нужно найти размер стека, то можно вернуть размер любого из стеков, так как в них всегда одинаковое число элементов.

Небольшим нюансом является момент, когда наш стек пуст. Понятно, что взятие размера тоже будет работать, а операции взятия верхнего элемента, взятия минимума, удаление элемента — лишены смысла. Но вот при добавлении стоит быть аккуратными, так как мы берём старый минимум из вершины  $st\_min$ , а там нет элементов. Чтобы не происходило ошибок, можно либо добавить отдельное условие, либо же в самом начале положить в оба стека  $\infty$ , чтобы потом операции минимума корректно работали, но тогда нужно не забыть вычитать из размеров стека единицу, когда мы хотим узнать размер нашего стека с минимумом.

Конечно же, читатель и сам сможет по описанному выше алгоритму сделать все операции, например прямо в функции `main`, или вынести их в отдельные функции. Но хочется привести образец кода, как это можно оформить структурой, чтобы взаимодействие со стеком с минимумом было удобным.

```
1 struct StackMin{
2     vector<int> st, st_min;      /* можно использовать stack<int>, но это не принято */
3     StackMin(){                  /* здесь можно добавить INF, если хочется */      }
4     void push(int x){            /* здесь обработать добавление x в стек */      }
5     void pop(){                  /* здесь удаление элемента из стека */      }
6     int top(){                   /* вернуть верхний элемент */      }
7     int get_min(){               /* вернуть минимум текущего стека */      }
8     int size(){                  /* вернуть размер стека */      }
9 };
```

Остаётся лишь добавить, что, как и было обещано, все операции с таким стеком выполняются за  $O(1)$ . Так же понятно, что вместо минимума можно считать какую-то другую функцию, например максимум или НОД, это уже зависит от конкретной задачи.

## Очередь с минимумом

Теперь сделаем небольшое изменение в предыдущей задаче: нужно сделать очередь, которая бы поддерживала взятие минимума среди своих элементов за  $O(1)$ . И к тому же нужно поддерживать обычные операции с очередью: добавление элемента (в конец), удаление элемента (из начала), взятие первого элемента и взятие размера.

Может показаться, что задача почти такая же, как и предыдущая, но нет, работать с очередью немного сложнее. Давайте для начала научимся делать очередь с помощью стеков. Заметим, что из очереди элементы выходят в том порядке, в котором их туда положили (так называемое «*FIFO* — *first in, first out*»). А стек же наоборот, возвращает элементы в обратном порядке («*LIFO* — *last in, first out*»). Поэтому очередь можно реализовать с помощью двух стеков, так как каждый из них последовательно развернёт, то она выйдет в исходном порядке.

Назовём эти стеки  $s_1$  и  $s_2$ . Если мы добавляем элемент  $x$ , то добавим его в  $s_1$ . Если же нам нужно удалить элемент, то удалим его из  $s_2$ , если он не пуст. Если же  $s_2$  пуст, то сначала переложим все элементы из  $s_1$  в  $s_2$  и лишь потом удалим верхний элемент  $s_2$ . Понятно, что такой алгоритм будет работать как очередь, ведь между двумя переключиваниями мы добавили в  $s_1$  элементы  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , потом мы их переложили в  $s_2$ , где они стали в порядке  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  (других элементов нет, ведь мы переключиваем только если  $s_2$  пуст). При этом мы не будем совершать других переключиваний, пока  $s_2$  снова не опустошится, а значит элементы выйдут в нужном порядке  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Таким образом мы смогли сделать очередь через два стека, а если нам нужна очередь с поддержкой минимума, то вместо обычных стеков достаточно будет использовать стеки с минимумами. Тогда операции добавления и удаления мы сможем реализовать так, как описано выше; взятие первого элемента будем делать из  $s_2$ , если он не пуст, иначе переложим все элементы из  $s_1$  в  $s_2$  и потом возьмём верхний; взятие размера и минимума мы будем делать с учётом обоих стеков: размером будет суммарный размер стеков, а общим минимумом — минимум из текущих значений в стеках. Единственный нюанс, если в стеках с минимумом используется  $\infty$ , то её не стоит переключивать из одного стека в другой :)

Теперь снова приведём образец кода программы, чтобы читатель смог реализовать очередь с минимумом с помощью классов.

```
1 struct QueueMin{
2     StackMin s1, s2;
3     void push(int x){ /* добавление x в начало конец очереди */ }
4     void pop(){ /* удаление элемента из начала очереди */ }
5     int front(){ /* вернуть первый элемент */ }
6     int get_min(){ /* вернуть минимум очереди */ }
7     int size(){ /* вернуть размер очереди */ }
8 };
```

Остаётся лишь проверить, какая на самом деле сложность будет у операций с такой очередью. Понятно, что одна операция извлечения может выполняться довольно долго, ведь может понадобиться переложить весь  $s_1$  в  $s_2$ , поэтому мы рассмотрим «амортизационную сложность» — среднюю сложность одной операции, если выполнено  $n$  добавлений и не больше  $n$  удалений. Для этого рассмотрим то, сколько операций наша очередь потратит на каждый элемент: он один раз добавится в  $s_1$ , а потом он один раз извлечётся из  $s_1$ , добавится в  $s_2$  и удалится из  $s_2$ . Итого не более четырёх простых операций со стеком на один элемент (может быть меньше четырёх операций, если из очереди извлечётся меньше элементов, чем в ней добавится). А значит после всех  $O(n)$  запросов наш алгоритм совершит  $O(n)$  операций, а следовательно каждая операция действительно занимает  $O(1)$  в среднем.

## Сложные линейные алгоритмы

Сегодня мы продолжим изучение линейных алгоритмов на более сложных примерах. Алгоритмы, которые на предстоит пройти, будут опираться на уже пройденные линейные алгоритмы, поэтому сначала нужно осознать прошлые алгоритмы и только потом переходить к чтению этого раздела.

### Отрезок с максимальной суммой

Раньше мы уже рассматривали поиск отрезка с заданной суммой, а теперь мы хотим решить похожую задачу: есть набор  $a$  длины  $n$  и нам нужно найти такие индексы  $1 \leq l \leq r \leq n$ , что значение выражения  $a_l + a_{l+1} + \dots + a_r$  — максимально возможное. При этом элементы могут быть как положительные, так и отрицательные.

К сожалению, идея двух указателей, которыми мы пользовались при поиске заданной суммы, так просто не сработает, ведь если у нас есть отрицательные элементы, то не известно, как будет меняться сумма при добавлении и удалении элементов: при добавлении она может стать меньше, а при удалении — больше. Поэтому давайте сначала придумаем какое-нибудь решение, а потом попробуем его упростить. Понятно, как решать задачу за  $O(n^3)$  — просто переберём все пары индексов и циклом сложим значения между этими индексами. Но раз мы раньше научились искать суммы на отрезке за  $O(1)$ , то теперь мы можем применить тот алгоритм и в этой задаче, и получить сложность  $O(n^2)$ , потому что перебирать пары индексов всё равно придётся.

Теперь вспомним, что сумма на отрезке  $s = a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$  считается по формуле  $s = p_j - p_{i-1}$ , где  $p$  — префиксные суммы (кто забыл:  $p_i$  — сумма первых  $i$  чисел). А теперь заметим, что если индекс  $j$  зафиксирован, то поиск оптимального  $s$  превращается в поиск наименьшего  $p_i$ , или же в поиск элементов с наименьшей разностью. А такую задачу мы раньше уже решали!

Поэтому давайте опишем итоговый линейный алгоритм. Во-первых, предподсчитаем префиксные суммы в  $p$ . А во-вторых, запустим наш алгоритм поиска элементов с наибольшей разностью на этом наборе  $p$ . Результат выполнения как раз и даст нам оптимальный ответ.

Понятно, что сложность такого алгоритма будет  $O(n)$ , ведь он состоит из двух последовательных частей, каждая из которых выполняется за линейное время.

### Ближайший меньший слева

Рассмотрим другую задачу: задан набор  $a$  длины  $n$ , для каждого элемента которого нужно найти ближайший слева меньший элемент, более формально для  $a_i$  у нас будет ответ  $d_i$ , если  $a_{d_i} < a_i$  и  $a_j \geq a_i$  для  $d_i < j < i$ . Если же у нас нет такого  $d_i$ , то будем считать, что ответом должен быть  $d_i = 0$ .

Мы хотим придумать линейный алгоритм, поэтому, как и в прошлых задачах, на каждом шаге нам будет нужно хранить какую-то полезную информацию, по которой мы сможем находить ответы для следующих шагов. Логично, что хотелось бы хранить такие индексы, которые бы потом смогли стать ответами. Поэтому придумаем, как поддерживать список таких индексов, и что с ним делать.

Пусть на очередном шаге у нас есть список потенциальных ответов  $s$  длины  $m$ :  $s_1, s_2, \dots, s_m$  эти элементы добавлялись последовательно, то есть  $s_1 < s_2 < \dots < s_m$ ). Но ведь понятно, что если в этом наборе есть какие-то индексы, указывающие на элементы большие или равные очередного  $a_i$ , то такие элементы точно больше не будут потенциальными ответами, ведь  $a_i$  будет меньше их и при этом правее, а значит такие элементы можно удалить. А остальные элементы вполне могут ещё служить ответами, поэтому мы их оставим. Таким образом в наборе  $s$  останутся только такие числа,

что  $a_{s_j} < a_i$ , поэтому самый правый элемент и будет нашим  $d_i$ . А далее нам стоит добавить индекс  $i$ , ведь  $a_i$  может быть ответом для какого-нибудь ещё числа.

Во-первых, заметим, что такой алгоритм будет всё время хранить возрастающую последовательность. А во-вторых, понятно, что если принять  $a_0 = -\infty$  и добавить 0 в  $s$ , то при работе алгоритма в  $s$  всегда будет оставаться 0, указывающий на  $-\infty$ , и ответы вида  $d_i = 0$  получатся автоматически.

Теперь проверим, что наш алгоритм, хранящий возрастающую последовательность, действительно является линейным. Каждый индекс у нас ровно один раз добавится в  $s$  и не более одного раза удалится (может не удалиться). Поэтому на каждый элемент тратится не более 2 операций с  $s$ , а значит итоговая сложность составит  $O(n)$ . Также стоит отметить, что симметричная задача по поимку ближайшего меньшего справа решается аналогично.

## Наибольший прямоугольник вписанный в гистограмму

Рассмотрим ещё одну задачу: есть набор  $h$  размера  $n$ :  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , при этом  $h_i \geq 0$ . По ним строится гистограмма (над каждым элементом рисуется столбик соответствующей высоты), и требуется найти наибольший по площади прямоугольник, который можно вписать в эту гистограмму.

Одно решение можно придумать достаточно быстро: переберём все пары индексов  $(l, r)$  и будем вписывать наибольший прямоугольник на участке  $h_l, h_{l+1}, \dots, h_r$ . При этом если ещё немного подумать, то понятно, что его максимальная высота будет  $x = \min_{i=l}^r h_i$ , ширина  $y = r - l + 1$ , а площадь  $s = x \cdot y$ . Если каждый раз минимум искать циклом, то получим сложность  $O(n^3)$ .

Понятно, что такой алгоритм совсем не оптимальный, поэтому заметим в нём одно важное свойство — высота прямоугольника всегда равна одному из  $h_i$ . а значит прямоугольник можно задавать одним числом  $i$ , означающим прямоугольник с высотой  $h_i$  и наибольшей возможной шириной. Но ведь наибольшая ширина как раз ограничивается двумя элементами, меньшими нашего:  $h_l, h_r < h_i$  при  $l < i < r$ . А это значит, что мы можем использовать алгоритм из предыдущей задачи.

И тогда наш итоговый алгоритм будет таким: предподсчитаем  $l_i$  — ближайший меньший слева и  $r_i$  — ближайший меньший справа. Тогда для всех индексов  $1 \leq i \leq n$  ответом будет  $s = h_i \cdot (r_i - l_i - 1)$ , и среди этих  $s$  нужно выбрать наибольший. При этом нужно как-нибудь аккуратно обработать случаи, когда слева или справа нет меньших элементов, например считать, что в таких случаях  $l_i = 0$  и  $r_i = n + 1$  соответственно.

Понятно, что такой алгоритм линейный, ведь он состоит из трёх линейных частей (подсчёт  $l_i$ , подсчёт  $r_i$  и поиск ответа), а значит итоговая сложность —  $O(n)$ .

## Минимум в скользящем окне

Следующей задачей, которую мы рассмотрим будет минимум в скользящем окне: дан набор  $a$  длины  $n$  и для каждой  $k$  подряд идущих элементов (их называют окном) нужно найти минимум среди них. Конечно, мы могли бы решить эту задачу за  $O(k \cdot (n - k))$ , перебрав элементы в каждом окне, но такой метод не оптимальный и мы хотим придумать линейный алгоритм. Поскольку мы уже изучили много линейных алгоритмов, то придумаем целых 3 решения этой задачи.

**Способ №1.** Вспомним, что раньше мы уже реализовали очередь с поддержкой минимума. Поэтому мы можем сначала добавить  $k$  первых элемента и узнать минимум среди них. А после этого мы будем добавлять очередной элемент в конец, удалять один элемент из начала и получать ответ для нового окна.

Понятно, что сложность такого алгоритма  $O(n)$ , ведь все операции с очередью мы реализовали за  $O(1)$ .

**Способ №2.** Воспользуемся идеей, которая у нас была раньше: будем хранить индексы текущих перспективных элементов в наборе  $d$ . Понятно, что последовательность значений  $a_{d_i}$  должна строго возрастать, ведь если найдётся убывающий фрагмент, то  $i < j$ ,  $d_i < d_j$  и  $a_{d_i} > a_{d_j}$ , а значит когда мы теперь будем сдвигать наше окно вправо, то оба элемента будут присутствовать в окне до тех пор, пока  $d_i$  не выйдет за границу окна, а следовательно  $a_{d_i}$  не перспективный, так как всегда будет  $a_{d_j}$ , который меньше.

Таким образом у нас получится следующий алгоритм: сохраним в  $d$  возрастающую последовательность для первых  $k$  элементов (такое мы раньше уже делали). Дальше на каждом шаге будем удалять первый элемент, если его индекс вышел за пределы окна. После этого обработаем добавление нового элемента  $x$  справа: пока последний элемент  $d$  больше или равен, чем  $x$ , то он не перспективный и его можно удалить. В конце добавим  $x$  в конец  $d$  и возьмём ответ для текущего окна из начала  $d$  (у нас же там хранится возрастающая последовательность, а значит минимум в её начале).

Стоит отметить, что если использовать структуру данных `deque`, то она сможет обработать все операции с  $d$  за  $O(1)$  и итоговая сложность алгоритма составит  $O(n)$ .

**Способ №3.** Будем использовать задачу, где мы искали ближайший справа элемент, меньший данного. Найдём для нашего набора  $a$  ответ на ту задачу и сохраним его в набор  $r$ .

Теперь заведём один указатель  $i$ , который будет указывать на текущий минимум в окне, изначально присвоим  $i = 1$ . А теперь, пока  $p_i$  будет указывать на элемент окна, будем перемещать наш указатель:  $i = p_i$ , и понятно, что если мы больше не можем переместить указатель, то уже нашли минимум в окне. А теперь остаётся сдвинуть окно: если минимум старого окна находится в новом, то мы можем делать те же операции, что и в начале, и так найдётся минимум для нового окна; если же старый минимум вылез за границы окна, то поступим как в начале: присвоим  $i$  первый индекс окна и будем делать  $i = p_i$ , пока не вылезем из окна.

Может показаться, что такой алгоритм не является линейным, но это не так, ведь наше  $i$  каждый раз перемещается только вправо, а значит, таких перемещений будет не больше, чем  $n$ , а, следовательно, сложность такого алгоритма будем  $O(n)$ .

# Структуры данных, часть 1

Мы уже прошли достаточно много разных алгоритмов, и поэтому сделаем небольшой перерыв в их изучении. Сегодня мы будем рассматривать «*структуры данных*», позволяющие решать некоторые задачи асимптотически быстрее.

## DSU

Первая структура данных, которая мы пройдем это «*disjoint-set-union (DSU)*», также известная, как «*union-find data structure*», а в русскоязычном варианте — «*Система непересекающихся множеств*». Структура нужна, чтобы оптимально обрабатывать три операции со множествами: создание множества из одного элемента ( $make(x)$ ), получение множества для элемента ( $find(x)$ ) и объединение двух множеств ( $merge(a, b)$ ). При этом, изначально в структуре в каждом множестве по одному элементу. На практике мы часто будем знать количество элементов  $n$  в DSU до всех операций объединения, поэтому вместо (помимо)  $make(x)$  нам понадобится  $build(n)$ , которая по своей сути будет вызывать  $make(i)$  для всех  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , где  $n$  — как раз количество элементов в структуре.

Конечно, хотелось бы использовать встроенные структуры данных. Но оказывается, что это не эффективно, ведь если хранить каждое множество как `set` (или отсортированный `vector`, что для наших целей тоже подходит), то на операцию  $find$  нам в худшем случае придётся посмотреть на все текущие множества, что займёт  $O(n)$ , в худшем случае, когда каждый элемент в отдельном множестве. Также медленно будет работать и операция  $merge$ , ведь когда объединяемые множества будут иметь суммарный размер порядка  $O(n)$ , то потребуется столько же операций. Поэтому использовать встроенные структуры достаточно неэффективно.

Основная идея, которой мы будем пользоваться, это представление данных в виде дерева. Хотя графы мы ещё и не изучали (а дерево — это как раз термин из теории графов), но сама суть дерева довольно понятно: у нас есть корень, который никуда не ведёт и все остальные вершины ведут в одну какую-то вершину так, что в итоге все эти пути приходят в корень. Нагляднее будет представлять дерево, как одну вершину сверху (корень) и от корня ведут рёбра в низ, к другим вершинам, от них ещё в низ и так далее, причём в каждую вершину ведёт только одно ребро сверху, и идёт сколько-то рёбер вниз, а вбок рёбра не идут.

В компьютере же мы будем представлять как список  $p$ , в котором  $p_i$  соответствует вершине, в которую мы попадём, если пойдём от  $i$  вверх. При этом для корня будем хранить какое-то специальное значение, самое удобное это  $p_r = r$ , где  $r$  как раз и есть корень.

Всё это конечно хорошо, но пора бы и переходить к самой структуре данных. Будем представлять каждое множество в DSU как дерево. При этом каждое дерево мы будем характеризовать его корневой вершиной (также называется представителем или лидером). Тогда для ответа на запрос  $make(x)$  мы будем делать отдельное дерево для  $x$ :  $p_x = x$ . Для запроса  $find$  будем подниматься по дереву до его корня  $r$  и возвращать  $r$ . А если же нам требуется объединить два дерева, заданных какими-то своими вершинами, то мы корень одного дерева подвесим к корню другого, сделав  $p_a = b$  (можно было бы подвешивать и не к корню, но это нам понадобится чуть позже). И в целом, можно уже написать реализацию, которая бы работала:

```
1  struct DSU{                               // класс для удобства работы
2      vector<int> p;                         // здесь и далее может понадобится short, если мы близки к MLE
3
4      DSU(int n = 0){                       // конструктор от размера DSU
5          p.assign(n, 0);                   // задаём для p нужный размер
6          build();                           // строим DSU
7      }
```



```

8
9     void make(int x){ p[x] = x; }
10
11     void build(){ for(int i = 0; i < p.size(); ++i) p[i] = i; }
12
13     int find(int x){
14         if (p[x] == x) return x;           // корень
15         else return find(p[x]);           // поднялись выше
16     }
17
18     void merge(int a, int b){
19         a = find(a), b = find(b);         // нашли корни
20         p[a] = b;                         // подвесили
21     }
22 };

```

Вот только есть одна проблема, она всё ещё не эффективна, ведь дерево может случайно вырасти в длинную цепочку и тогда все операции у нас будут за  $O(n)$ , что медленно. Поэтому нужно прибегнуть к двум «эвристикам»: одна будет ускорять операцию *find*, а другая ускорит *merge* и в итоге после этих двух оптимизаций получится что-то хорошее. Далее мы рассмотрим эвристики по отдельности и в конце узнаем, какую итоговую сложность мы всё же получим, если будем использовать несколько эвристик вместе.

**Эвристика «сжатие путей».** Раз у нас дерево может вырождаться в длинную цепь, то от этого стоит избавиться. И это действительно можно сделать, ведь нам же не важно, как выглядит дерево, главное, чтобы все его вершины оставались в дереве. Поэтому давайте те вершины, которые расположены далеко от корня, будем поднимать вверх, делая их непосредственным родителем сам корень.

Но делать это постоянно не хочется, ведь тогда всё время придётся проверять все вершины. Поэтому давайте будем переподвешивать вершины только когда это ничему не мешает, то есть во время операции *find* будем поднимать все посещённые вершины наверх:

```

1  int find(int x){
2      if (p[x] != x) p[x] = find(p[x]);    // подняли всё, что не корень
3      return p[x];
4  }

```

А с тернарным оператором тело функции можно сократить до одной строки:

```

1  int find(int x){ return p[x] == x ? p[x] : p[x] = find(p[x]); }

```

И такая эвристика уже даёт нам сложность  $O(\log n)$  в среднем на один запрос

**Эвристика «Random-Union».** В общем-то теперь хочется как-то оптимизировать операцию *merge*, потому что вдруг у нас одно из деревьев маленькое, а второе большое. Тогда если мы подвесим большое дерево к маленькому, то у нас много путей до корня станет на 1 больше, а вот если мы к большому дереву подвесим маленькое, то только небольшое количество путей увеличится на 1. Но, чтобы не заморачиваться с размерами деревьев, то будем просто подвешивать деревья в случайном порядке :)

```

1  void merge(int a, int b){
2      a = find(a), b = find(b);
3      if (rand() & 1) swap(a, b);          // делаем swap, если rand() % 2 == 1
4      p[a] = b;
5  }

```

Такой подход действительно эффективно работает на случайных данных, давая сложность  $O(\log n)$ , но вот если запросов на объединение большого дерева с маленьким много, то такая эвристика даёт ускорение всего в два раза<sup>6</sup>.

<sup>6</sup> Точнее в два раза уменьшается математическое ожидание времени работы, ведь для алгоритмов со случайными числами скорость работы зависит от самих этих чисел.

**Эвристика объединения по рангу.** Но всё же можно придумать честные способы, как подвешивать именно маленькое дерево к большому. Для этого будем дополнительно хранить для каждой вершины её ранг  $rank_i$ . Понятно, что в начале у нас все вершины одинаковые, поэтому будем считать, что  $rank_i = 1$ .

Вариант первый, ранговая эвристика на основе размера дерева, она же Union-By-Size. Будем поддерживать  $rank_i$  как количество вершин, находящихся в дереве с корнем в  $i$ :

```

1 void merge(int a, int b){
2     a = find(a), b = find(b);
3     if (a != b) { // чтобы rank менялся правильно
4         if (rank[a] < rank[b]) swap(a, b);
5         p[b] = a;
6         rank[a] += rank[b]; // добавили дерево к размеру
7     }
8 }
```

Вариант второй, ранговая эвристика на основе глубины дерева, или же Union-By-Height. Будем поддерживать  $rank_i$ , как максимальную длину пути из  $i$  вниз, в какую-то вершину:

```

1 void merge(int a, int b){
2     a = find(a), b = find(b);
3     if (a != b) { // чтобы rank менялся правильно
4         if (rank[a] < rank[b]) swap(a, b);
5         p[b] = a;
6         if (rank[a] == rank[b]) ++rank[a]; // или rank[a] = max(rank[a], rank[b] + 1);
7     }
8 }
```

Оказывается, что оба варианта ранговой эвристики тоже дают нам сложность  $O(\log n)$  в среднем (что для эвристики по высоте, ведь высота увеличивается на 1 при увеличении дерева в два раза).

**Объединение эвристик.** Понятно, что если использовать несколько эвристик вместе, то итоговая сложность операций с DSU уменьшится. Также понятно, что нужно выбрать по одной эвристики для *find* и *merge* (ведь не понятно, как объединить несколько вариантов для *merge*).

Также можно заметить, что Random-Union эвристика продолжает работать, если ей использовать одновременно с сжатием путей. Аналогично, эвристика по размеру дерева тоже работает, ведь для корней деревьев  $rank_i$  будут подсчитываться правильно, а для других вершин *find* может их сломать переподвешиванием, но это и не важно, ведь их ранг нигде в коде не используется. С эвристикой по высоте не всё так очевидно, ведь *find* меняет высоту деревьев, но это не страшно, так как теперь  $rank_i$  превращается в верхнюю оценку для глубины, которая при этом была когда-то достижима, а значит выбор дерева в *merge* останется правильным.

Поэтому давайте ещё раз представим DSU с эвристиками:

```

1 struct DSU{
2     vector<int> p, rank;
3
4     DSU(int n = 0){
5         p.assign(n, 0);
6         rank.assign(n, 1);
7         build();
8     }
9
10    void make(int x){ p[x] = x; rank[x] = 1; }
11
12    void build(){ for(int i = 0; i < p.size(); ++i) p[i] = i; }
13
14    int find(int x){
15        return p[x] == x ? p[x] : p[x] = find(p[x]); // сжатие путей
16    }
```

```

17
18     void merge(int a, int b){
19         a = find(a), b = find(b);
20         if (a == b) return;
21         if (rank[a] < rank[b]) swap(a, b);
22         p[b] = a;
23         rank[a] += rank[b];
24     }
25 };

```

*// ранг = размер поддерева*

И в такой реализации все операции в среднем занимают  $O(\alpha(n))$ , где  $\alpha(n)$  — обратная функция Аккермана. Но важным свойством  $\alpha(n)$  является то, что она растёт ооочень медленно и для всех разумных чисел (меньших  $10^{10^{19500}}$  :) она даёт значения меньше пяти. Поэтому фактически можно считать, что операции с DSU выполняются за константное  $O(1)$  время.

## Sqrt-декомпозиция

Теперь изучим корневую декомпозицию, основанную на идеи «разделяй и властвуй» и на формуле  $\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ . Что же это может значить?

А это означает, что  $n$  входных элементов мы можем разбить на  $\sqrt{n}$  блоков по  $\sqrt{n}$  элементов в каждом (только эти корни нужно округлить до целых чисел). И теперь мы сможем обрабатывать запросы на диапазонах элементов. Для этого каждый запрос обработает  $O(\sqrt{n})$  блоков, полностью вошедших в диапазон, и  $O(\sqrt{n})$  элементов, которые попали в боковые блоки запроса. И таким образом мы сможем обработать запрос за  $O(\sqrt{n})$ . При этом на хранение элементов и блоков нам понадобится всего  $O(n)$  памяти ( $O(n)$  на элементы и  $O(\sqrt{n})$  на блоки).

Давайте, чтобы было понятнее, рассмотрим задачу, которую у нас раньше не получалось решить. Пусть дано  $n$  элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и требуется ответить на  $q$  запросов поиска минимума на отрезке  $[l; r]$ :  $x = \min(a_l, a_{l+1}, \dots, a_r)$ .

Понятно, что мы будем делать в такой задаче. Разобьём этот набор на блоки и для каждого блока вычислим минимум. А после этого для всех поступающих запросов будем вычислять минимум на основе предподсчитанных ответов для блоков. Посмотрим, как это будет выглядеть в коде:

```

1  struct Sqrt{
2      int n, m;
3      vector<int> a, b;
4
5      Sqrt(){}
6      Sqrt(vector<int> v){ build(v); }
7
8      void build(vector<int> v){
9          n = v.size(); m = sqrt(n); a = v;
10         for(int i = 0; i < n; i += m){
11             int now = INF;
12             for(int j = i; j < min(n, i + m); ++j) now = min(now, a[j]);
13             b.push_back(now);
14         }
15     }
16
17     int get_min(int l, int r){
18         int lb = l / m, rb = r / m, ans = INF;
19         if (lb == rb){
20             for(int i = l; i <= r; ++i) ans = min(ans, a[i]);
21         } else{
22             for(int i = l; i < (lb + 1) * m; ++i) ans = min(ans, a[i]);
23             for(int i = lb * m + 1; i < rb * m; ++i) ans = min(ans, b[i]);
24             for(int i = rb * m; i <= r; ++i) ans = min(ans, a[i]);

```

*// всего элементов n, по m в блоке*  
*// a - сами элементы, b - блоки*

*// предподсчёт*

*// поиск минимума*  
*// блоки, в которых лежат границы*  
*// границы в одном блоке*  
*// границы в разных блоках*

```

25     }
26     return ans;
27 }
28 };

```

Вот так относительно просто реализуется корневая декомпозиция. Единственное, что может вызывать затруднения, это вычисление индексов при ответе на запросы, но это можно легко сделать, если нарисовать нашу  $\text{sqrt}$ -декомпозиция на листочке. Кроме того, можно заметить, что мы нигде не пользуемся специальными свойствами операции минимума. Поэтому с помощью этого же кода можно решить задачу, в которой требуется найти сумму или НОД на отрезке, лишь поменяв в нужных местах значения  $INF$  и функцию по пересчёту ответа (поменять с минимума на сумму).

Но кроме универсальности к операции  $\text{sqrt}$ -декомпозиция обладает возможностью быстрого обновления элементов! Для этого нам достаточно поменять значение самого элемента и пересчитать ответ для блока, в котором располагается элемент, следовательно обновление делается за  $O(\sqrt{n})$ . В коде же это тоже выглядит достаточно просто:

```

1 void update(int pos, int value){                                     // метод внутри класса
2     a[pos] = value;
3     int bpos = pos / m;                                           // блок, который нужно обновить
4     int apos = bpos * m;                                          // первый элемент блока
5     b[bpos] = INF;
6     for(int i = apos; i < min(apos + m, n); ++i) b[bpos] = min(b[bpos], a[i]);
7 }

```

Но, на самом деле, и это ещё не всё, что умеет  $\text{sqrt}$ -декомпозиция. Потому что на самом деле корневая декомпозиция — это не структура данных, а образ мысли!

Если подходить более формально, то кроме разбиения элементов массива на блоки, также может быть полезно и разделение запросов на блоки. Рассмотрим же мы это на примере усложнения DSU, в котором также поддерживается и удаление рёбер. А именно: в начале имеется пустой граф из  $n$  вершин, и поступает  $m$  запросов трёх типов: провести ребро  $(a, b)$ , удалить ребро  $(a, b)$  и проверить, есть ли путь между  $a$  и  $b$ .

Следует заметить, что если бы операций удаления рёбер не было, то задача бы решалась с помощью обычного DSU. Ведь проведение ребра это тоже самое, что и операция *merge* в DSU, а проверку на наличие пути между вершинами можно сделать через сравнение представителей для вершин (которые возвращаются из *find*). Но вот удаление рёбер DSU никак не может поддерживать, ведь DSU думает, что работает с деревом, а на самом деле граф в этой задаче может иметь циклы и деревом не являться.

Поэтому давайте будем действовать так: все операции, кроме удаления рёбер обработаем с помощью DSU, а удаление обработаем отдельно. Для этого разобьём все  $m$  запросов на  $\sqrt{m}$  блоков по  $\sqrt{m}$  элементов и при этом будем поддерживать список рёбер, проведённых на данный момент (идеи, как именно это сделать, можно почерпнуть из разделов про графы).

В начале каждого блока мы построим DSU по тем рёбрам, которые уже есть и при этом не удалятся в текущем блоке. Далее каждый запрос добавления ребра мы сделаем с помощью DSU, а на каждое удаление ребра, будем просто удалять его из списка рёбер. Когда же нам потребуется проверить, связаны ли две вершины, мы сначала узнаем множества, в которых находятся наши вершины, а после этого с помощью алгоритма обхода графа (о них будет позже) проверим, есть ли связь между вершинами по рёбрам, которые удалены из DSU но фактически ещё не удалены.

Можем попытаться оценить сложность представленного выше алгоритма (список рёбер будем хранить в `unordered_set`, в котором все операции за  $O(1)$  в среднем). На построение DSU понадобится  $O(\sqrt{m} \cdot m\alpha(m))$ , на добавление рёбер  $O(m\alpha(m))$ , на удаление рёбер  $O(m)$ . Проверки же на связность займут  $O(m\sqrt{m}\alpha(m))$ , потому что обход графа займёт  $O(\sqrt{m})$ , а на каждом шаге будет нужно делать *find* для концов ребра. И итоговая сложность алгоритма будет  $O(m\sqrt{m}\alpha(m))$ , что очень даже хорошо.

## Структуры данных, часть 2

В прошлый раз мы познакомились с  $\text{sqrt}$ -декомпозицией — структурой данных, которая позволяет хранить набор элементов и делать разные манипуляции с ними: изменять отдельные элементы, изменять отрезки, вычислять какие-то функции на отрезках и так далее. Сегодня же мы изучим другие структуры данных, которые позволяют делать такие же запросы, но асимптотически быстрее (правда, часто от этого расход памяти будет выше).

### Дерево отрезков

В первый раз, когда слышится фраза «*дерево отрезков*», можно подумать, что это про геометрию. Но на самом деле это не так, потому что дерево отрезков (ДО) — это структура данных, которые умеет работать с отрезками в наборах элементов (как и было анонсировано выше). Иногда можно встретить и другие названия этой структуры данных: «*SegmentTree*» и «*дерево сегментов*» — но это всё об одном и том же.

Итак, давайте перейдём к описанию самой структуры. Она будет древовидной и немного напоминать вложенную друг в друга  $\text{sqrt}$ -декомпозицию, в которой каждый блок состоит из двух элементов. На первом слое сохраним наши элементы набора, на втором сделаем так: первый элемент будет отвечать за первый и второй элементы набора, второй — за третий и четвёртый, третий — за пятый и шестой и так далее. После этого сделаем третий слой, который будет похож на предыдущий: первый элемент отвечает за первую пару элементов второго слоя, второй — за вторую пару и так далее. После этого добавим сверху ещё сколько-то таких же слоёв, пока у нас не станет слой из одного элемента, который называется корнем.

Теперь попробуем узнать полезную информацию про слои такой структуры. На первом слое у нас  $n$  элементов набора и каждый из них отвечает за отрезок длины 1. На втором слое элементов уже  $\frac{n}{2}$  и каждый элемент отвечает за отрезок длины 2. На третьем слое  $\frac{n}{4}$  элементов, каждый отвечает за 4 элемента исходного набора. И так далее, на каждом следующем слое отрезки становятся в два раза больше, а количество элементов в два раза меньше. А следовательно, всего слоёв будет  $O(\log n)$ , что очень даже приятно, если мы сможем этим воспользоваться.

Теперь давайте оценим количество элементов в дереве отрезков. В самом последнем слое всего 1 элемент, в предпоследнем — 2, потому что корень отвечает ровно за 2 элемента предыдущего слоя. И так далее все слои будут иметь размеры: 1, 2, 4, ...,  $2^i$ , .... Но согласитесь, что если у нас каждый слой может вмещать  $2^k$  элементов, то хочется, чтобы и в самом нижнем, первом слое (где хранится исходный набор) количество элементов было тоже степенью двойки. Поэтому мы в исходный набор добавим какое-то количество нейтральных элементов так, чтобы размер набора стал степенью двойки. А нейтральный элемент нужно выбирать в зависимости от цели ДО: если мы считаем суммы, то нейтральным будет 0, если минимум — то  $\infty$ , и так далее. В конце концов можно просто заполнить все лишние элементы каким-то специальным значением, которые потом можно отдельно обрабатывать.

В прошлом абзаце мы выяснили, что количество элементов в слоях ДО будут степенями двойки: 1, 2, 4, ...,  $2^i$ , ...,  $2^{sz-1}$ ,  $2^{sz}$ , где  $2^{sz-1} < n \leq 2^{sz}$  и исходные элементы хранятся в слое размера  $2^{sz}$ . Теперь хочется оценить, сколько это занимает памяти, для это посчитаем общее количество элементов:  $1 + 2 + 4 + \dots + 2^i + \dots + 2^{sz} = 2^{sz+1} - 1$  (сумма геометрической прогрессии, или же просто сложение этих чисел в двоичной системе счисления). А если учесть наше неравенство на количество элементов ( $2^{sz-1} < n \leq 2^{sz}$ ), то мы можем прийти к выводу, что при  $n \approx 2^{sz-1}$  нам требуется  $O(2^{sz+1} - 1) \approx O(2^{sz+1}) = O(4 \cdot 2^{sz-1}) = O(4n)$  памяти на хранение ДО, а в другом крайнем случае  $n \approx 2^{sz}$  получаем  $O(2^{sz+1} - 1) \approx O(2^{sz+1}) = O(2 \cdot 2^{sz}) = O(2n)$ . То есть если мы дополняем набор нейтральными элементами до размера равного степени двойки, то мы можем считать, что

$n = 2^{sz}$  и всего элементов в ДО  $2n$ .

Если в sqrt-декомпозиции было понятно, к какие элементы попадают в один блок, то в ДО переход от родительского элемента к двум дочерним, за которые он отвечает (и обратный переход), не столь очевиден. Но оказывается, что и навигация по ДО достаточно простая, если все элементы хранить в одном большом массиве, слой за слоем, от корня и исходном набору, причём корень будет в ячейке с индексом 1. Тогда слои занимают соответственно ячейки:  $[1]$ ,  $[2, 3]$ ,  $[4, 5, 6, 7]$ ,  $\dots$ ,  $[2^i, 2^i + 1, \dots, 2^{i+1} - 2, 2^{i+1} - 1]$ ,  $\dots$ ,  $[2^{sz}, \dots, 2^{sz+1} - 1]$ . И уже даже можно предположить (по первым элементам), что для вершины  $j$  дочерними будут  $2j$  и  $2j + 1$ , а родительской —  $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor$  (такие скобки — это округление вниз).

Теперь давайте докажем эти простые формулы. Рассмотрим слой, в котором лежит вершина  $j$ :  $2^i \leq j \leq 2^{i+1} - 1$ , тогда можно сказать, что  $j = 2^i + d$ , где  $0 \leq d \leq 2^i - 1$  — количество элементов в слое до  $j$ . Но понятно, что первые  $d$  элементов текущего слоя будут отвечать за первый  $2d$  элементов следующего слоя (который больше), а значит элементы  $[2^{i+1}, 2^{i+1} + 2d - 1]$  уже имеет родительский, а вот для  $j$  дочерними будут  $2^{i+1} + 2d$  и  $2^{i+1} + 2d + 1$ . Остаётся лишь подставить все числа:  $2^{i+1} + 2d = 2^{i+1} + 2(j - 2^i) = 2^{i+1} + 2j - 2^{i+1} = 2j$  и аналогично  $2^{i+1} + 2d + 1 = 2^{i+1} + 2(j - 2^i) + 1 = 2j + 1$ . То есть мы теперь знаем, что для  $j$  дочерними элементами являются  $2j$  и  $2j + 1$  и тогда формула перехода к родительскому элементу понятна, ведь  $\lfloor \frac{2j}{2} \rfloor = j$  и  $\lfloor \frac{2j+1}{2} \rfloor = j$ , что и требовалось доказать.

Теперь узнав много фактов о структуре ДО, мы можем уже и перейти к работе с ним.

**Функция на отрезке.** Пусть нам дан какой-то набор данных и требуется вычислять на его отрезках минимум (или другую функцию, в которой не важен порядок вычисления). И оказывается, что в ДО это реализуется очень удобно: для каждой вершины дерева предподсчитаем функцию на отрезке, за который вершина отвечает, а после этого из таких частичных ответов будем получать ответ для нужного отрезка.

При этом понятно, что предподсчёт занимает  $O(n)$  времени, ведь половина значений уже вычислена (если у отрезка длина 1, то этот элемент и будет минимальным), а вторую половину можно вычислить, взяв минимум из значений, которые получились у дочерних вершин. Правда при этом для вычисления значения в вершине необходимо, чтобы мы уже знали значения для её детей, но это тоже не сложно, ведь для этого достаточно вычислять значения для вершин в обратном порядке.

Теперь пусть мы хотим обработать запрос вычисления минимума на отрезке  $[l; r]$ . Тогда заведём два указателя  $i = l, j = r$ , которые мы будем двигать, постепенно вычисляя минимум на всём отрезке (изначально берём его за  $\infty$ ). Двигать же указатели мы будем по простому правилу: если можем перейти к родительской вершине, то делаем это, а иначе обрабатываем значение, в которое указывает указатель и сдвинем границу, после чего уже перейдём к родительской вершине. Если вспомнить структуры ДО, то становится понятно, что если  $i \% 2 = 1$ , то это правый ребёнок своего родителя, а значит нужно обработать элемент  $i$  и сузить отрезок:  $i = i + 1$ . Аналогично делаем с правой границей, если вдруг она является левый ребёнком: при  $j \% 2 = 0$  обрабатываем  $j$  и делаем  $j = j - 1$ . После таких операций  $i$  будет точно указывать на левого сына, а  $j$  — на правого, а значит мы можем перейти к родительским вершинам  $i /= 2, j /= 2$ , а они будут покрывать тот же отрезок, что и до перехода.

Остаётся лишь только понять, когда такие переходы к родительским вершинам нужно остановить. Понятно, что в нашем дереве указатели двигаются так, что между ними всё время уменьшается расстояние, при этом не слишком резко (указатели не перепрыгивают друг через друга. если до этого не были рядом). Поэтому будем рассматривать только когда отрезки стали маленькими. Пусть у нас на каком-то шаге  $i + 2 = j$ , тогда  $i$  и  $j$  одной чётности, а значит из них сдвинется ровно один и мы получим отрезок из двух элементов. Теперь пусть  $i + 1 = j$ , при этом могут быть два варианта: если  $i \% 2 = 1$ , то наш алгоритм сдвинет границы  $i = i + 1$  и  $j = j - 1$ , перейдёт к разным родительским вершинам (то есть получит  $j < i$ ), и можно завершить работу алгоритма, ведь весь отрезок уже обработался. Если же  $i \% 2 = 0$ , то  $i$  и  $j$  указывают правильно, поэтому мы перейдём к их общему родителю, который обработается только один раз согласно алгоритму выше и после этого мы поднимемся ещё на один уровень вверх и получим  $j < i$ , то есть алгоритм можно завершать.

А теперь, по длинному описанию выше, можно легко написать ДО:

```
1  const int N = 1 << 17; // 2^17 = 131072, это точно больше, чем обрабатываемых элементов
```

```

2  struct SegmentTree{
3      int st[2 * N];
4      SegmentTree(vector<int> v){
5          for(int i = 0; i < v.size(); ++i) st[N + i] = v[i];           // сохранение данных
6          for(int i = v.size(); i < N; ++i) st[N + i] = INF;           // нейтральные элементы
7          for(int i = N - 1; i > 0; --i) st[i] = min(st[2 * i], st[2 * i + 1]); // предподсчёт
8      }
9
10     int get_min(int l, int r){
11         l += N, r += N;           // сдвинулись в самый нижний слой
12         int ans = INF;           // текущей ответ
13         while(l <= r){
14             if (l & 1) ans = min(ans, st[l++]);           // обработали и сдвинули l
15             if (!(r & 1)) ans = min(ans, st[r--]);         // обработали и сдвинули r
16             l /= 2, r /= 2;           // перешли к родителям
17         }
18         return ans;
19     }
20 };

```

Легко можно видеть, что строится ДО за линейное время, а на один запрос уходит  $O(\log n)$ , потому что всего столько уровней, а на каждом нам нужно выполнить константное число операций.

**Обход вниз.** Предположим, что нам также дан набор  $a$  из 0 и 1 и на каждый запрос требуется находить позицию  $k$ -ой единицы. Понятно, что в этой задаче у нас не получится подниматься вверх, начав с какого-то отрезка, ведь у нас нет этого отрезка :) Поэтому будем двигаться вниз, начиная с корня.

Но это движение, в целом, тоже довольно естественно: пусть мы сейчас находимся в какой-то вершине, тогда если в левом подотрезке достаточное количество единиц, то мы перейдём в него, а иначе — перейдём в правый, учтя количество единиц левого подотрезка. Такими шагами, если искомая единица была, то мы когда-то спустимся к ней, а если её не было, то такой случай можно обработать в самом начале, ведь мы можем посчитать общее число единиц. Теперь заметим, что поскольку все числа либо 0, либо 1, то количество единиц на отрезке как раз равно сумме цифр отрезка. То есть в каждой вершине достаточно хранить сумму подотрезка, поэтому приведём лишь код обхода ДО:

```

1  int get_k(int k){           // внутри класса
2      int p = 1;             // корень
3      while(p < N){           // пока не нижний уровень
4          if (st[2 * p] < k) { k -= st[2 * p]; p = 2 * p + 1; } // переход вправо
5          else p *= 2;         // переход влево
6      }
7      return p - N;           // вернуть обычный индекс
8  }

```

Понятно, что и такой запрос выполняется за  $O(\log n)$ , потому что на каждом слое константное число операций.

**Обновление элементов и отрезков.** Кроме получающих запросов, ДО также может поддерживать и обновляющие запросы. Если требуется обновить всего один элемент, то здесь всё просто: мы его обновим и после этого будем идти по всем его родителям снизу вверх и пересчитывать значения в них. Поэтому интереснее рассмотреть запросы, обновляющие отрезок (такие запросы поддерживает и sqrt-декомпозиция, что читателю требуется придумать самому).

Пусть нам нужно получать значение элемента и при этом мы можем прибавлять ко всему отрезку одно значение. Тогда построим ДО, в котором содержатся прибавления: на каждый запрос обновления мы будем также обходить дерево снизу вверх, при этом перед операцией  $l = l + 1$  и  $r = r - 1$  будем пометить, сколько добавилось к подотрезку вершины  $l$  (или  $r$ ). Когда же нам понадобится определённый элемент, то мы должны будем просуммировать значение этого элемента и всех добавлений в родительских вершинах.

Так мы научились и обновлять ДО за  $O(\log n)$ .

## Разреженная таблица

Следующая структура данных — это «*sparse table*» или «*разреженная таблица*». Нужна она для быстрого поиска минимального значения на отрезке, при этом обновлять значения нельзя. Казалось бы, зачем вообще нужна такая структура, если есть ДО? А вот и нет, во-первых, оказывается, разреженная таблица очень даже хороша. если запросов будет достаточно много, а во-вторых — иногда все возможности ДО не нужны, а разреженной таблицы хватает.

Эта структура данных основывается на таком свойстве, что для любых длин отрезка  $x$  найдётся нужная степень двойки  $2^t$ , где  $t \in \mathbb{Z}$ , такая, что  $2^t \leq x \leq 2^t + 2^t$ . То есть для нахождения минимума на отрезке нам достаточно разбить его на два отрезка, с размерами  $2^t$ , а их пересечение даст нам весь искомый отрезок.

Теперь, когда мы знаем основную идею, можно и перейти к более подробному описанию. Пусть имеется  $n$  элементов, тогда для всех  $2^i \leq n$  считаем ответы на всех запросах длины  $2^i$ . Пусть  $a_{i,j}$  — ответ на запрос минимума на отрезке  $[j; j + 2^i - 1]$ . Тогда понятно, что при  $i = 0$  у нас отрезки длины 1 и ответы для них мы знаем из входных данных, а иначе  $a_{i+1,j} = \min(a_{i,j}, a_{i,j+2^i})$ . Так мы сможем предподсчитать все нужные ответы, на что уйдёт  $O(n \log n)$  времени, ведь длина отрезка каждый раз увеличивается в два раза, а всего отрезков одной длины не больше, чем элементов в наборе.

Когда же нам требуется найти минимум на  $[l; r]$ , то длина отрезка будет  $x = r - l + 1$ , после чего мы найдём  $2^t \leq x \leq 2^t + 2^t$ . И ответом на запрос станет  $ans = \min(a_{t,l}, a_{t,r-2^t+1})$ , то есть каждый запрос обрабатывается за  $O(1)$ .

Теперь можем реализовать это в коде:

```
1  struct SparseTable{
2      vector<vector<int>>> v;
3      SparseTable(vector<int> a){
4          v.push_back({});
5          for(int x : a) v[0].push_back(x);           // i = 0
6          for(int i = 1; (1 << i) < a.size(); ++i){    // i > 0
7              v.push_back({});
8              int ln = (1 << i - 1), ln2 = (1 << i);   // ln2 - длина отрезка
9              for(int j = 0; j + ln2 <= a.size(); ++j){ // все отрезки длины ln2
10                 v.back().push_back(min(v[v.size() - 2][j], v[v.size() - 2][j + ln]));
11             }
12         }
13     }
14
15     int get_min(int l, int r){
16         int t = log2(r - l + 1);                     // подходящее t
17         return min(v[t][l], v[t][r - (1 << t) + 1]); // получение ответа
18     }
19 };
```

Интересно, что разреженная таблица - настолько специфичная структура данных, что встречается не во всех книгах, а также не имеет (известных автору) усложнений :)

## Дерево Фенвика

А теперь изучим ещё одну структуру данных (последнюю в этом блоке) — «*дерево Фенвика*» или «*FenwickTree*» — которая умеет быстро вычислять обратимую функцию на динамических данных. Если говорить менее формальным языком, то обратимые функции — это сумма и произведение, а динамичность данных означает, что структура поддерживает поэлементное изменение. Для определённости будем считать, что мы хотим вычислять сумму на отрезках.



Идея у дерева Фенвика похожа на предыдущие структуры: предподсчитаем какие-то значения, с помощью которых нам будет легко отвечать на запросы, а при обновлении часть значений будем пересчитывать. Пусть нам дан набор  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ , тогда мы предподсчитаем значения по формуле  $t_i = \sum_{k=F(i)}^i a_k$ , где самым важным элементом является функция  $F(i)$ , из-за которой и получается быстрая структура данных. Пока мы не будем выписывать саму функцию, а лишь заметим, что  $F(i) \leq i$ .

Теперь научимся отвечать на запрос суммы на отрезке  $[l; r]$ . Но понятно, что для этого нам достаточно вычислить  $sum(r) - sum(l-1)$ , где  $sum(x)$  — сумма первых элементов до  $x$  включительно. Так что остаётся лишь найти сумму на отрезке  $[0; r]$  и понятно, как это делать: сначала возьмём сумму элементов в  $[F(r); r]$ , она посчитана в  $t_r$ , после этого сделаем  $r' = F(r) - 1$  и к ответу добавится отрезок  $[F(r'); F(r) - 1]$ , так мы будем продолжать переходить к предыдущему отрезку, пока не выйдем за границы набора (при  $r < 0$  нужно остановиться).

Теперь остаётся лишь научиться обновлять значение  $a_k$ , а для этого требуется знать, на какие  $t_i$  влияет  $a_k$ , то есть нужно решить неравенство  $F(i) \leq k \leq i$ . Одно из решений этого неравенства при  $i = k$  очевидно, и если читателю очень интересно самостоятельно получить все решения этого неравенства, то он может ознакомиться с информацией в интернете. А мы лишь будем использовать готовую формулу: нужно взять  $F(i) = i \& (i + 1)$ , тогда индексы, использующие  $a_k$  будут  $i_0 = k$ , а после этого  $i_{s+1} = i_s \mid (i_s + 1)$ . При этом остановиться нужно будет, если очередное  $i$  стало слишком большим, то есть при  $i \geq n$ .

Теперь кажется, что если поверить в верность формул  $F(i) = i \& (i + 1)$  и  $i_{s+1} = i_s \mid (i_s + 1)$ , то мы уже сможем написать дерево Фенвика:

```

1  struct FenwickTree{
2      vector<int> t;
3      int n;
4
5      FenwickTree(vector<int> a){
6          n = a.size();
7          t.assign(n, 0);
8          for(int i = 0; i < a.size(); ++i) add(i, a[i]);           // конструирование -
                                                                    // это много обновлений
9      }
10
11     void add(int p, int d){
12         for (; p < n; p = (p | (p + 1))) t[p] += d;              // запомнить p | (p + 1)
13     }
14
15     int sum(int r){
16         int result = 0;
17         for (; r >= 0; r = (r & (r + 1)) - 1) result += t[r];    // запомнить r & (r + 1),
                                                                    // понять -1 из формулы t[i]
18         return result;
19     }
20
21     int sum(int l, int r){
22         return sum(r) - sum(l - 1);
23     }
24 };

```

Остаётся лишь сказать, что из-за битовых операций сложность операций с деревом Фенвика это  $O(\log n)$ , потому что в битовом представлении у нас в конце скапливаются одинаковые знаки, которых с каждым шагом становится хотя бы на 1 больше (при операции  $\&$  растёт число нулей, а при  $\mid$  — количество единиц). Кроме того, дерево Фенвика занимает  $O(n)$  памяти, что асимптотически также, как и у дерева отрезков, но всё же ДФ хранит только  $n$  элементов, а в ДО их от  $2n$  до  $4n$  — что больше. И последнее преимущество ДФ — краткость кода.

Выше была представлена стандартная реализация ДФ, а ниже вы можете увидеть вариант, в котором формулы немного другие, из-за чего такую реализацию будет проще запомнить:

```

1  struct FenwickTree{
2      vector<int> t;
3      int n;
4
5      FenwickTree(vector<int> a){
6          n = a.size() + 1;           // t[0] - не используем
7          t.assign(n, 0);             // конструирование -
8          for(int i = 0; i < a.size(); ++i) add(i + 1, a[i]); // это много обновлений
9      }
10
11     void add(int p, int d){
12         for (; p < n; p += p & -p) t[p] += d; // запомнить p & -p
13     }
14
15     int sum(int r){
16         int result = 0;
17         for (; r > 0; r -= r & -r) result += t[r]; // запомнить r & -r,
18         return result;
19     }
20
21     int sum(int l, int r){
22         return sum(r) - sum(l - 1);
23     }
24 };

```

Интересно, что ДФ достаточно просто расширяется на многомерные случаи: для этого достаточно сделать несколько вложенных циклов. И тогда для двумерного случая функция нахождения суммы будет возвращать сумму в прямоугольнике, начинающемся в углу и заканчивающемся в заданной клетке. А чтобы находить сумму в произвольном прямоугольнике, придётся использовать формулу из главы про двумерную префиксную сумму.

Сегодня мы изучили много структур данных, каждая из которых хорошо применима в конкретных случаях. Стоит запомнить их все, но главная из изученных — это ДО, так как оно имеет меньше всего ограничений и большего всего применений.

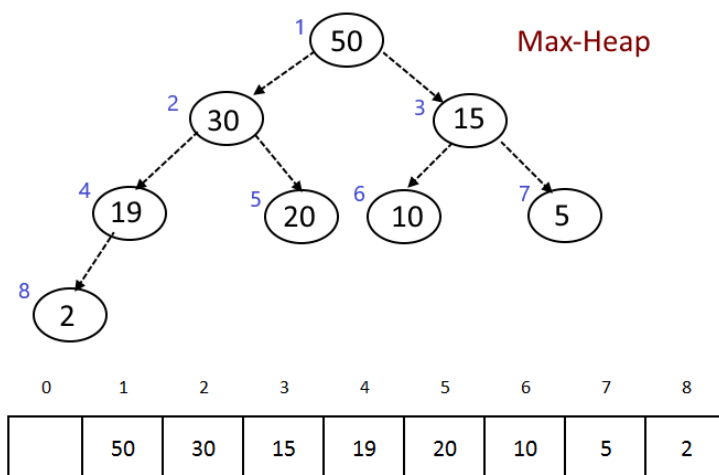
## Структуры данных, часть 3

В прошлый раз мы познакомились с двумя деревьями: Деревом отрезков и Деревом Фенвика. На этом же уроке мы изучим ещё две древовидные структуры данных: кучу и декартово дерево. Куча является довольно специфичной структурой данных, так как она позволяет делать довольно мало операций, но взамен имеет маленькую скрытую асимптотику. Декартово дерево же можно рассматривать как мощную модификацию встроенных структур данных: массивов, множеств и куч.

### Куча

«Куча (*heap*)» — полное двоичное дерево, в котором значение в вершине не меньше, чем значения во всех дочерних вершинах (так устроена «*max-heap*», она же «*невозрастающая куча*» аналогично в «*min-heap*» («*неубывающей куче*») в вершине значение не больше, чем в дочерних). Полнота дерева означает, что все его слои заполняются последовательно, то есть новый слой добавляется только после того, как предыдущий полностью закончится.

Пример невозрастающей кучи можно увидеть на картинке справа. При этом оказывается, что кучу очень удобно хранить в массиве, ведь можно пронумеровать элементы кучи так же, как мы это делали в ДО. Тогда для вершины  $p$  дочерними будут  $2p$  и  $2p + 1$ , при этом нужно либо проверять, входят ли эти элементы в массив, или же дополнить его какими-то специальными значениями.



Куча должна поддерживать такие операции, как: добавление элемента, извлечение максимума (числа в корне) и удаление максимума. Дополнительно можно реализовать такие операции, как удаление произвольного элемента по индексу, слияние двух куч и смена приоритета элемента (тоже по индексу). Все эти операции можно реализовать через два типа «просеиваний»: вверх и вниз, которые будут работать за  $O(\log n)$ , потому что на каждом шаге просеивания будут переходить на один уровень.

Чтобы добавить элемент, нам понадобится просеивание вверх: добавим наше число в конец кучи и после этого будем поднимать его наверх, пока свойство кучи будет нарушаться. Иными словами, мы будем обмениваться местами родительскую вершину и дочернюю, если вдруг так оказалось, что они упорядочены неправильно. Понятно, что такое просеивание работает, ведь свойство кучи у нас нарушается максимум по одному ребру, с которым мы и работаем в текущий момент.

Просеивание вниз нам понадобится при удалении минимального значения. Удалять числа из начала массива — это затратная операция, поэтому мы сделаем так: обменяем первый и последний элемент местами, и удалим минимум (который теперь находится в конце). После этого нужно будет восстановить свойство кучи, для этого будем просеивать первый элемент вниз: если этот элемент портит кучу, то мы поменяем его с его наименьшим потомком. Так среди этих трёх вершин (элемента и двух дочерних) минимальное значение окажется родителем двух оставшихся, а значит наша куча стала чуть лучше.

Кроме того, просеивание вниз позволяет строить кучу за  $O(n)$ , потому что можно запустить просеивания вниз от всех родительских вершин. А если запускать эти просеивания в обратном по-

рядке (от  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  до 1), то оказывается, что получится линейное число операций (мы это доказывать не будем, но читатель может сделать это сам).

В коде это можно реализовать вот так:

```
1  template<typename T>
2  struct Heap{
3      vector<T> data;
4
5      Heap(){
6          data.push_back({}); // 0-вой элемент
7      }
8
9      Heap(vector<T> d){
10         data.push_back({});
11         for(T v : d) data.push_back(v);
12         size_t n = data.size();
13         for(int i = n / 2; i > 0; --i) sift_down(i);
14     }
15
16     void sift_up(size_t pos){ // просеивание вверх
17         while(pos > 1 && data[pos] < data[pos / 2]){
18             swap(data[pos], data[pos / 2]);
19             pos /= 2;
20         }
21     }
22
23     void sift_down(size_t pos){ // просеивание вниз
24         size_t n = data.size();
25         while(true){
26             size_t l = 2 * pos, r = 2 * pos + 1, good;
27             if (l < n && data[l] < data[pos] || r < n && data[r] < data[pos]){
28                 good = l;
29                 if (r < n && data[l] > data[r]) good = r;
30                 swap(data[pos], data[good]);
31                 pos = good;
32             }
33             else break;
34         }
35     }
36
37     void insert(T v){
38         data.push_back(v);
39         sift_up(data.size() - 1);
40     }
41
42     void pop(){
43         swap(data.back(), data[1]);
44         data.pop_back();
45         sift_down(1);
46     }
47
48     T get(){ return data[1]; }
49
50     T extract(){
51         T ans = get();
52         pop();
53         return ans;
54     }
55 };
```

Но видно, что кода получилось достаточно много, но это не беда, ведь в C++ есть встроенная куча, которая называется `priority_queue`. Она, как и положено куче, позволяет добавлять элементы,

получать максимальное значение и удалять его. Пример использования «очереди с приоритетом» есть ниже.

```

1  priority_queue<int> q;
2  q.push(2);
3  q.push(5);
4  q.push(3);
5  cout << q.size() << "\n";           // 3
6  cout << q.empty() << "\n";         // 0 (false)
7  cout << q.top() << "\n";           // 5
8  q.pop();
9  cout << q.top() << "\n";           // 3
10 q.push(0);
11 q.push(4);
12 cout << q.top() << "\n";           // 4

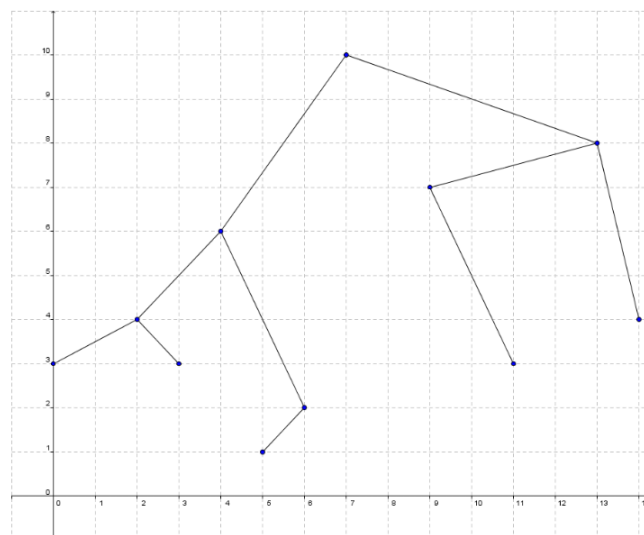
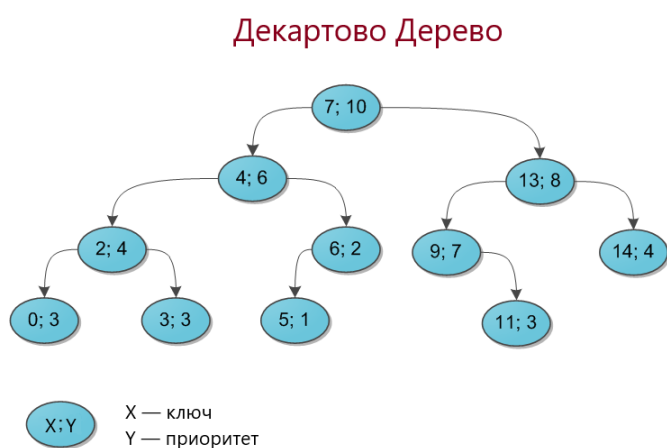
```

Стоит отметить, что в обеих реализациях значение в вершине является её приоритетом, но в общем случае, у каждой вершины отдельно может быть значение и приоритет. В таком случае нужно будем поменять тип, хранимые в вершине, например, на `pair`.

## Декартово дерево

«Декартово дерево» — это ещё одна древовидная структура данных, у которой есть и другие названия: «*treap*», «*дуча*», «*дерамиды*» и «*рандомизированное бинарное дерево поиска*». Формально, эта структура хранит в своих вершинах пары  $(X, Y)$  так, что по  $X$  она является бинарным деревом поиска, а по  $Y$  — бинарной пирамидой (ничего не понятно, ведь?:)).

Но если посмотреть на картинку, то всё становится понятней. По  $X$  (они ещё называются «*ключами*») значения в левом поддереве меньше, чем в родительской вершине, а оно в свою очередь, меньше, чем в правом поддереве. По  $Y$  же (другое название — «*приоритет*») родительское значение больше, чем дочерние. Хотя Декарт и не придумывал эту структуру данных, но если расставить точки  $(X, Y)$  на Декартовой плоскости, то мы как раз получим дерево.



Теперь перейдём к работе с Декартовым деревом (ДД), которое поддерживает достаточно много операций: добавление элементов, их поиск и удаление (по ключам). Кроме того, ДД может разбиваться на два других ДД по определённому ключу и также сопоставлять индексу элемента его значение и наоборот. Отсюда видно, что ДД объединяет в себе функционал массивов (получение элемента по индексу), множеств (поиск элементов) и куч (ДД является кучей по приоритетам), то есть такая структура может очень даже пригодиться.

При этом, так же, как и в куче, через две операции (разбиения и слияния) можно выразить все другие операции. Но перед этим стоит сказать, что в нашей реализации ДД в каждой вершине

будут храниться: ключ, значение и «указатели» на левое и правое поддеревья. Про указатели нужно знать то, что это не сами данные, а лишь информация о месте их расположения. что позволит нам переходить от родительской вершины к дочерним. Кроме того, хранить всё ДД мы будем с помощью её корня.

Начнём с операции разбиения ДД по ключу *key*. Разбивать мы будем рекурсивно, начиная с корня, а получить мы хотим два ДД таких, что в левом все ключи меньше, чем *key*, а в правом — все остальные. Пусть мы сейчас находимся в какой-то вершинке и требуется разбить ДД, за которое она отвечает. Тогда по ключу в вершине мы можем понять, куда она пойдёт:

- Если ключ в вершине больше (или равен) *key*, то это значит, что вершина вместе со своим правым ребёнком должны оказаться в правом поддереве (так как по ключам у нас дерево поиска). То есть остаётся лишь рекурсивно разбить левую часть, и, очевидно, присоединить средний кусок из трёх к правому.
- Аналогично при ключе в вершине меньшим *key* разбивать придётся правое поддерево. А из трёх образовавшихся частей две левых имеют ключи меньшие, чем *key*, поэтому их нужно объединить.

Операция слияния должна принимать два ДД и объединять их в одно. При этом у первого ДД все ключи должны быть меньше всех ключей второго ДД. А раз по ключам у нас всё определено, то остаётся лишь не нарушить приоритеты. Но здесь всё совсем просто: у одного из ДД в корне приоритет будет больше, чем у другого (пусть у первого, аналогично будет для второго), а поскольку в корне у нас самый большой приоритет, то после объединения корнем станет корень первого ДД. Но тогда мы точно знаем, что в левом поддереве ничего поменяться не может (из-за условия на ключи), а значит в правом поддереве нам нужно будет объединить правого сына первого ДД и второе ДД, что делается рекурсивно.

Две сложных операции мы разобрали, теперь остались операции попроще. Чтобы найти ключ, мы будем пользоваться отсортированностью ключей, и в зависимости от ключа в родителе, выбирать левого или правого сына. А для них поиск можно сделать рекурсивно.

Удаление элемента *key* мы можем сделать через два разреза: сначала разрежем левее *key* (в нашей реализации это разбиение по *key*), а после этого правую часть разделим правее *key* (то есть сделаем разбиение по *key* + 1). Из полученных трёх частей в средней ключи равны *key* и эту часть нужно удалить. Оставшиеся же части просто соединяем операцией слияния.

И последняя операция — это добавление. Во-первых, мы не хотим хранить повторяющиеся ключи, поэтому если добавляемый ключ уже есть, то ничего делать не будем. Иначе же, мы можем разрезать по этому ключу и объединить три ДД в одно: левое, сам элемент и правое.

Хоть описание получилось достаточно длинным, но в коде это выглядит коротко и лаконично.

```
1  struct Treap;
2  using PTreap = Treap*;
3
4  struct Treap{
5      int key, pr;
6      PTreap l, r;
7      Treap() {}
8      Treap(int key, int pr = random()) : key(key), pr(pr), l(nullptr), r(nullptr) {}
9  };
10
11 pair<PTreap, PTreap> split(PTreap t, int key){                // key попадает в правое дерево!
12     if (!t) return {nullptr, nullptr};
13     if (key <= t->key){                                        // корень пойдёт направо
14         auto [l, r] = split(t->l, key);                      // поэтому разбиваем левое ДД
15         t->l = r;
16         return {l, t};
17     } else {                                                // корень пойдёт налево
18         auto [l, r] = split(t->r, key);                      // поэтому разбиваем правое ДД
```

```

19         t -> r = l;
20         return {t, r};
21     }
22 }
23
24 PTreap merge(PTreap l, PTreap r){
25     if (!l) return r;
26     if (!r) return l;
27     if (l -> pr > r -> pr){
28         l -> r = merge(l -> r, r);
29         return l;
30     } else {
31         r -> l = merge(l, r -> l);
32         return r;
33     }
34 }
35
36 PTreap find(PTreap t, int key){
37     if (!t) return nullptr;
38     if (t -> key == key) return t;
39     if (t -> key < key) return find(t -> r, key);
40     else return find(t -> l, key);
41 }
42
43 PTreap erase(PTreap t, int key){
44     auto [l, m1] = split(t, key);
45     auto [m2, r] = split(m1, key + 1);
46     delete m2;
47     return merge(l, r);
48 }
49
50 PTreap insert(PTreap t, PTreap val){
51     if (find(t, val -> key)) return t;
52     auto [l, r] = split(t, val -> key);
53     return merge(merge(l, val), r);
54 }

```

*// у первого ДД приоритет больше  
// его левого сына не трогаем*

*// у второго ДД приоритет больше  
// его правого сына не трогаем*

Но реализация ДД — это хорошо, но ещё бы уметь её пользоваться. Поэтому приведём ещё и примеры работы с полученным ДД:

```

1  PTreap treap = nullptr;
2  treap = insert(treap, new Treap(3));
3  treap = insert(treap, new Treap(7));
4  treap = insert(treap, new Treap(5));
5  treap = insert(treap, new Treap(7));
6  treap = erase(treap, 7);

```

*// создали пустое ДД  
// добавили 3, имеем {3}  
// добавили 7, имеем {3, 7}  
// добавили 5, имеем {3, 5, 7}  
// 7 уже было, имеем {3, 5, 7}  
// удалили 7, имеем {3, 5}*

И ещё один нюанс — это функция `random` в восьмой строке. Если приоритеты мы получаем из задачи, то эта функция нам не нужна, а если приоритетов нам никто не дал, то придётся генерировать их самостоятельно. За это и отвечает функция `random`, которую нужно заменить на понравившийся способ генерировать случайные числа (о них написано в разделе встроенные функции).

Теперь немного поговорим, зачем нам нужна такая сложная структура данных, которая хранит кроме ключей ещё какие-то приоритеты. Если бы у нас не было приоритетов, то ключи должны были бы храниться в отсортированном порядке. Но если ключи бы добавлялись в отсортированном порядке, то вместо равномерной древовидной структуры получился бы «бамбук» (у каждой вершины, кроме последней, ровно один ребёнок). Тогда каждая операция с таким деревом поиска могла бы выполняться за  $O(n)$ , что долго (потому что такая же сложность операций с массивом).

Но когда мы используем приоритеты, то получается сбалансированная структура, в которой количество уровней составляет  $O(\log n)$ . Но ведь наши рекурсивные функции делают постоянное количество операций на одном уровне, а значит все они работают за  $O(\log n)$ .

Но раньше было заявлено, что ДД — это очень мощная структура данных, а пока наше ДД умеет делать только операции, которые и так уже реализованы в `set`. Но, это легко исправить, если научиться искать  $k$ -й элемент по ключам (или же по указателю на элемент получать его индекс). Этого не умеют обычные множества, но мы легко это можем добавить.

Для этого в каждой вершине будем дополнительно хранить количество вершин в её поддереве. Тогда чтобы узнать  $k$ -ый элемент мы пойдём от корня и сможем определять, в какую из дочерних вершин спуститься (как мы это делали в ДО). Аналогично узнаётся и индекс элемента. А чтобы размеры поддеревьев хранились правильно, достаточно в конце каждой функции, меняющие ДД, пересчитывать размеры поддерева. Таким образом мы сможем узнавать  $k$ -ый элемент за  $O(\log n)$ .

Но и это ещё не всё, ведь существуют «*неявные Декартовы деревья*». Неявные ДД — это ДД, которые хранят в себе массивы: приоритетом элемента является его значение, а ключом — индекс в массиве. Но ДД не зря называется неявным: мы не будем хранить ключи, потому что можем вычислять их во время спуска от корня. Вот так неожиданно получилось, что отказ от приоритетов вреден, а отказ от ключей полезен.

Чтобы вычислять ключи мы будем использовать уже описанную выше технику хранения размера поддеревьев. А поскольку индекс элемента в массиве равен количеству элементов, стоящих раньше искомого, то на каждом спуске к правому сыну мы будем прибавлять размер левого плюс один (размер родителя), а если будем спускаться к левому сыну, то добавлять ничего не будем.

Слияние в неявном ДД останется таким же, как и в явном (потому что там нигде не используются ключи). А вот функция разбиения теперь должна будет вычислять `t -> key` перед её использованием согласно описанию выше: это размер левого поддерева плюс количество уже обработанных вершин (будем передавать его рекурсивно ещё одним параметром), или же просто размер левого поддерева, но тогда при переходе в правого сына нужно будет уменьшать `key`, который мы ищем (мы так уже делали в ДО). Таким же образом нужно обработать и `t -> key` в функции поиска.

Поскольку мы определяли удаление и добавление элементов через слияния и разбиения, то наши производные функции продолжают работать. Поменяется лишь смысл `key`, которые они принимают: теперь это будет индекс, откуда нужно удалить или куда требуется вставить элемент.

Таким образом у нас получился аналог массива, который за  $O(\log n)$  позволяет делать все операции с собой: добавление, поиск и удаление элементов. Но неявное ДД способно на большее.

Вспомним, что в ДО у нас было вычисление функций на диапазонах и их изменение. Оказывается, что и это умеет ДО, если будет хранить в себе дополнительную информацию.

Например, чтобы вычислить сумму на отрезке нам будет достаточно сохранить в каждой вершине сумму её поддерева (эту сумму нужно обновлять, когда меняется поддерево). А когда для ответа на сам запрос, мы вырежем нужный кусок массива и в его корне будет храниться сумма на этом отрезке. После этого нужно не забыть восстановить ДД обратно.

А если нам потребует, например, прибавлять на отрезках, то мы дополнительно в вершинах будем хранить сумму прибавлений. Когда будет поступать запрос на обновление, то мы вырежем наш отрезок и в корне отрезка увеличим прибавление. После этого нам нужно будет вновь объединить все три части. Но теперь стоит немного поменять функции объединения и слияния, добавив в них проталкивание. Проталкивание мы запускаем от корневых вершин, меняем значение в корне и помечаем, что в дочерних вершинах нужно сделать обновления. А после этого операции слияния и объединения делаются без потери информации.

А теперь осознаем мощь ДД, пройдя операции, которое не умеет делать ДО. Во-первых, ДО не умеет себя разрезать на части и склеивать ДО из частей. А значит, что если нам, например, требуется сдвигать все элементы массива, то мы можем сделать это очень легко, с помощью стандартных операций ДД.

Также заметим, что ДД может даже разворачивать отрезки массива, если рассмотреть разворот, как операцию на изменения отрезка, а в момент проталкивания менять местами детей. Удивительная операция!

Вот мы и познакомились с ДД, которое умеет делать все операции массивов, множеств и ДО за  $O(\log n)$ , а кроме того, умеет делать и специфичные операции. Также стоит сказать, что существует разреженное ДО, которое по своей сути напоминает неявное ДД.



# Введение в графы

Сегодня мы начинаем изучение задач, связанных с графами. Таких задач довольно много (как и алгоритмов на графах), поэтому начнём мы с определений, которые нам потом понадобятся, и способов представления графа в памяти компьютера.

## Определения

- Основные объекты:

1. Вершина — изображается на картинках, как точка, для удобства нумеруется. Множество всех вершин обозначается  $V$  (от «*vertex*»), количество вершин обозначается как  $n = |V|$ .
2. Ребро — связь между вершинами, чаще всего двумя (хотя есть и обобщения, например, рёбра соединяют по три вершины); задаётся ребро номерами вершин, которые соединяет. Множество всех рёбер обозначается  $E$  (от «*edge*»), количество рёбер обозначается как  $m = |E|$ .
3. Граф — совокупность вершин и рёбер:  $G(V, E)$ .

- Ориентированность:

1. Ориентированный — граф, у которого на рёбрах есть направления (т.е. по ребру  $e = (u, v)$  из  $u$  можно пройти в  $v$ , а из  $v$  в  $u$  — нельзя).
2. Неориентированный — граф, в котором у рёбер нет направлений.
3. Смешанный — граф, в котором у части рёбер есть направления, а у части — нет.

- Свойства вершин:

1. Степень — количество рёбер вершины.
2. Входящая и исходящая степени — количество входящих и исходящих рёбер для данной вершины ориентированного графа.
3. Изолированная вершина — вершина со степенью 0.
4. Висячая вершина (или лист) — вершина со степенью 1.

- Свойства рёбер:

1. Путь — последовательность вершин, в которой каждая следующая вершина (кроме первой) соединена ребром с предыдущей.
2. Цикл — путь, у которого начальная и конечная вершина совпадают.
3. Простые путь и цикл — те, в которых рёбра не повторяются.
4. Петля — ребро, соединяющее вершину саму с собой.
5. Кратные рёбра — рёбра, соединяющие одинаковые вершины.

- Связность:

1. Компонента связности — подграф, в котором между каждой парой вершин есть путь, без учёта направления рёбер.

2. Компонента сильной связности — то же, что и обычная компонента связности, но с учётом направления рёбер.
  3. Связный граф — граф с одной компонентой связности.
  4. Несвязный граф — граф, в котором больше одной компоненты связности.
- Другие свойства графа:
    1. Взвешенный граф — граф, в котором у рёбер есть числа (веса).
    2. Простой граф — граф без петель и кратных ребер.
    3. Дерево — связный простой граф без циклов.
    4. Лес — граф, в котором каждая компонента является деревом.
    5. Полный граф — простой граф, в котором между всеми парами вершин есть ребро.
    6.  $k$ -дольный граф — граф, вершины которого можно раскрасить в  $k$  цветов так, чтобы не было рёбер между вершинами одного цвета (так называемая правильная раскраска).
    7. Неявный граф — граф, в котором рёбра заданы не в явном виде, а через правило. Например, ходы коня на шахматной доске задают такой граф (в этом случае мы проводим ребро, по правилу «ребро  $(u, v)$  есть, если конь может походить из клетки  $u$  в клетку  $v$ »).
    8. Остовное дерево — множество всех вершин и подмножество рёбер, которые образует дерево. Его всегда можно выделить в связном графе, в несвязном есть остовный лес — остовное дерево для каждой компоненты связности.

## Представление в информатике

Если мы работаем с неориентированным графом, то каждое ребро  $(u, v)$  можно хранить два раза: отдельно для вершины  $u$  и отдельно для  $v$ . Если граф ориентирован, то таких проблем не возникает и каждое ребро можно хранить ровно один раз. В смешанных графах, которые не встречаются в олимпиадном программировании, можно заменить неориентированные рёбра на пару ориентированных.

Если мы работаем со взвешенным графом, то если ребро есть, то мы будем хранить его вес; если же ребра нет, то можно хранить какое-то специальное значение ( $0$ ,  $-\infty$  или  $+\infty$  в зависимости от задачи), или не хранить ребро вовсе. Если же граф невзвешенный, то можем считать вес каждого ребра равным 1, что будет просто обозначать наличие ребра.

Теперь мы рассмотрим основные способы представления взвешенного ориентированного графа.

- **Матрица смежности.** Таблица размера  $n \times n$ , в которой в строке  $i$ , столбце  $j$  мы храним вес ребра из  $i$  в  $j$ . Недостатки — большой расход памяти  $O(n^2)$  и невозможность хранить кратные рёбра.
- **Список смежности.** Для каждой вершины  $u$  сохраним список вершин  $v$ , в которые можно попасть из  $u$ . Достоинства — легко обойти граф (получить вершины, в которые можно пойти из текущей), малый расход памяти  $O(n + m)$ .
- **Список рёбер.** Просто сохраним информацию о каждом ребре (соединяемые вершины, вес, ориентированность). Достоинство — малый расход памяти  $O(m)$ , из-за чего чаще всего именно так и дают граф во входных данных.

Эти способы представления графа легко запомнить, если думать о количестве вершин каждого ребра, которые мы хотим сохранить как дополнительную информацию (0, 1 и 2 соответственно для способов выше).

# Обходы графа

Раз уж мы научились хранить графы в памяти компьютера, то можем и начать изучать алгоритмы на графах. Начнём мы с самых простых — обхода графа, потом научимся работать с компонентами связности, потом изучим ещё одну сортировку — топологическую (только это сортировка не обычного набора, а вершин графа). И в самом конце нас ждут компоненты сильной связности, мосты и точки сочленения.

## Поиск в ширину

Первый алгоритм обхода это «BFS» (от «*Breadth First Search*» — обход графа в ширину. Этот алгоритм начинает обходить граф со стартовой вершины, потом посещает её соседей, потом соседей её соседей, и так далее, слой за слоем, пока соседи не закончатся.

BFS основывается на очереди  $q$  из вершин, которые ещё нужно посетить и списке  $used$ , хранящим информацию, какие вершины уже добавлялись в очередь (чтобы не обходить их два раза). Для этого сначала в  $q$  добавляется стартовая вершина  $s$  и она отмечается в  $used$ . Далее алгоритм шаг за шагом делает следующие операции:

1. Берёт первую вершину  $u$  из  $q$  и удаляет её из  $q$ .
2. Обходит все вершины  $v$ , связанные ребром с  $u$ . Если очередная вершина  $v$  помечена в  $used$ , то пропускаем её; если же в вершине  $v$  мы ещё не бывали, то добавляем её в конец  $q$  и отмечаем её в  $used$ .
3. Если в  $q$  ещё остались вершины, то операции нужно повторить.

Благодаря списку  $used$  каждая вершина добавляется в  $q$  ровно один раз, а значит, на каждое ребро мы смотрим не более двух раз (потому что у ребра два конца), следовательно, сложность такого алгоритма будет  $O(n + m)$ . Но, такая сложность доступна, только если граф представлен списком смежности, ведь только такое представление (из изученных) позволяет быстро получать всех соседей вершины.

Также понятно, что такой алгоритм применим на любом графе (ориентированном, взвешенном, не связном, не простом и т.д.) и при этом обходит все достижимые вершины, в частности, для неориентированных графов такой алгоритм посетит всю компоненту связности (для ориентированных тоже можно, если не учитывать направление рёбер, но это менее полезно).

## Поиск в глубину

Второй алгоритм обхода это «DFS» (от «*Depth First Search*» — обход графа в глубину. Этот алгоритм начинает со стартовой вершины, потом посещает её первого соседа, потом первого соседа первого соседа, и так далее, пока остаются вершины, потом возвращается на несколько вершин, посещает второго соседа и так далее.

DFS основывается на рекурсии и списке  $used$ , хранящем информацию о том, какие вершины уже посещались. Для этого запускаем рекурсивный алгоритм, начиная со стартовой вершины  $s$ , и далее действуем шаг за шагом:

1. Пусть мы запустились от вершины  $u$ , тогда её нужно отметить в  $used$  как посещённую.

2. Теперь обойдём все вершины  $v$ , в которые ведут рёбра из  $u$ . Если очередная вершина  $v$  уже отмечена в  $used$ , то пропускаем эту вершину; иначе запускаем рекурсивный алгоритм от этой вершины  $v$ .

Благодаря списку  $used$  обход от каждой вершины запускается ровно один раз, а значит на каждое ребро мы посмотрим не более двух раз (потому что у ребра два конца), и итоговая сложность алгоритма будет  $O(n + m)$ . При этом DFS, также как и BFS, требует быстро получать соседей очередной вершины, а значит такая сложность достигается только на списках смежности.

При этом этот обход работает на любом графе и, как и предыдущий, посещает все достижимые вершины, а значит для неориентированных графов он посетит всю компоненту связности (можно искать их и в ориентированных графах, если не учитывать направление рёбер, но это мало полезно).

## Компоненты связности

Как мы заметили, оба обхода графа (в ширину и в глубину) из заданной вершины  $s$  посещают всю компоненту связности. А значит их можно модифицировать, чтобы найти все компоненты связности (и их свойства).

Запустим цикл, перебирающий все вершины. Если очередная вершина  $s$  уже посещалась обходом, то пропускаем её; иначе запускаем какой-нибудь обход от этой вершины  $s$ . При этом можно сделать три (или больше) полезных модификации алгоритма:

1. Считать количество запусков обхода, это и будет количеством компонент связности.
2. Если во время каждого обхода считать количество посещаемых вершин, то получим размер компонент связности.
3. С помощью  $used$  можно определить к какой компоненте связности относится какая вершина. Для этого при первом запуске обхода посещаемые вершины в  $used$  помечаем числом 1, при втором обходе — числом 2, и так далее (при этом непосещённые вершины отмечены, например, как 0).

## Топологическая сортировка

Пусть у нас есть ациклический (без циклов) ориентированный граф, в котором нужно упорядочить вершины так, чтобы рёбра шли только слева направо (представим, что все вершины записаны в одну строчку). Для этого мы можем использовать уже изученные нами обходы графа (следовательно граф должен быть представлен как список смежности), которые сформируют список вершин  $ts$  в порядке топологической сортировки.

**Алгоритм Кана**, он же модификация BFS и основывается на очереди  $q$ . Сначала посчитаем для каждой вершины  $deg\_in_i$  — входящую степень вершины  $i$  и все вершины с  $deg\_in_i = 0$  добавим в очередь  $q$ . Далее будем действовать следующим образом:

1. Берём первую вершину  $u$  из  $q$  и удаляем её из  $q$ . Добавляем  $u$  в список  $ts$ .
2. Проходим по всем рёбрам  $(u, v)$  (из вершины  $u$  в вершину  $v$ ). Уменьшаем входящую степень  $deg\_in_v$  на 1 и если оказалось, что  $deg\_in_v = 0$ , то добавим  $v$  в  $q$ .
3. Повторяем эти операции, пока в  $q$  остаются вершины.

Теперь осознаем, почему этот алгоритм корректен. Понятно, что если у вершины  $deg\_in_i = 0$ , то в вершину  $i$  не входят рёбра, а значит ей вполне можно поставить самой первой из всех оставшихся (если какие-то рёбра входили в  $i$ , то их начала уже были добавлены в  $ts$ , а значит всё на этой вершине правильно). Остаётся понять, что вершина с нулевой входящей степенью всегда должна быть: понятно, что такая вершина должна быть в начале, ведь иначе нет вершины, которая бы стала первой; также понятно, что это должно выполняться на каждом шаге, ведь мы удаляем вершины со всеми выходящими рёбрами, а значит остаётся только подграф, который тоже должен топологически сортироваться (ведь иначе и весь граф не отсортируется). То есть мы выяснили, что наш алгоритм корректен.

Сложность у этого алгоритма такая же  $O(n + m)$ , как и предыдущих, ведь он добавляет каждую вершину в  $q$  ровно один раз, а значит и на каждое ребро смотрит только один раз (т.к. граф ориентирован, то мы смотрим только с одной стороны, откуда ребро выходит).

**Алгоритм Тарьяна**, он же модификация DFS. Единственная модификация заключается в том, что в конце рекурсивной функции для вершины  $u$  нужно будет добавить  $u$  в конец  $ts$ . А когда все компоненты связности будут обработаны, то нужно будет развернуть  $ts$ .

Понятно, почему такой алгоритм работает, ведь когда мы заканчиваем рекурсивную функцию для вершины  $u$ , то это значит, что мы обработали уже все вершины, достижимые из  $u$  и добавили их в  $ts$ , а значит после добавления вершины  $u$  в  $ts$  получим, что все рёбра из  $u$  идут влево, поэтому в конце мы и разворачиваем  $ts$ .

Также понятно, что сложность у этого алгоритма  $O(n + m)$  такая же, как и у DFS, ведь их разница только в формировании списка  $ts$ , что делается быстро за  $O(n)$ .

## Компоненты сильной связности

Пусть нам дан ориентированный граф, в котором требуется найти компоненты сильной связности (КСС, или SCC от «*Strongly Connected Component*»). Оказывается, что для решения такой задачи достаточно всего лишь модифицировать DFS.

**Алгоритм Косараджу**, основанный на двух DFS:

1. Запустим обычный DFS, который запишет вершины в порядке выхода алгоритма из них (как  $ts$  в Алгоритме Тарьяна для топологической сортировки), назовём этот список  $tout$ .
2. Теперь будем рассматривать транспонированный граф (у него все рёбра развёрнуты относительно исходного графа).
3. Будем запускать второй DFS от вершин в порядке уменьшения  $tout$  для них. Все вершины, которые посещаются одним таким обходом являются одной SCC (посещается вся компонента и при этом без других вершин).

Алгоритм выглядит понятным, но вот его корректность не очевидна, поэтому будем её доказывать. Во-первых нужно понять, что в обоих графах (исходном и транспонированном) SCC одинаковые (в самом деле, пусть  $u$  и  $v$  лежат в одной SCC в исходном графе, тогда есть какие-то пути  $a : u \rightarrow v$  и  $b : v \rightarrow u$ , но после транспонирования они превратятся в  $a^T : v \rightarrow u$  и  $b^T : u \rightarrow v$ , а значит  $u$  и  $v$  снова будут лежать в одной SCC; аналогично вершины разных SCC попали в разные SCC).

Для этого рассмотрим две компоненты сильной связности  $C_1$  и  $C_2$ , между которыми есть путь из  $C_1$  в  $C_2$  (если бы при этом было путь из  $C_2$  в  $C_1$ , то компоненты бы объединились в одну; если же между компонентами нет пути, то алгоритм, очевидно, работает). Рассмотрим вершину  $u$ , которая является первой из посещённых в  $C_1$  и  $C_2$  первым DFS.

Пусть  $u$  лежит в  $C_1$ , тогда после этого он в каком-то порядке посетил остальные вершины из  $C_1$  и из  $C_2$  и потом вышел из них. Следовательно алгоритм сначала вышел из всех вершин  $C_2$  и только потом вернулся в  $u$  и вышел из неё. Но тогда запуск второго DFS сначала произойдёт из  $u$ ,

и попасть в  $C_2$  мы не сможем (ведь второй DFS запускается на транспонированном графе), то есть в таком случае наш алгоритм работает корректно.

Иначе  $u$  лежит в  $C_2$ , тогда сначала посетится вся  $C_2$  и, возможно, какие-то ещё вершины, но в  $C_1$  мы попасть не сможем, ведь туда нет пути. Следовательно мы сначала выйдем из  $C_2$  и только потом зайдём и выйдем в  $C_1$ . То есть также, как и в предыдущий раз, второй DFS сначала запустится в  $C_1$  и только потом из  $C_2$ , а значит и в таком случае всё работает.

Таким образом мы доказали корректность алгоритма, его сложность понятна, ведь это всего лишь два DFS и транспонирование графа, а такие операции делаются суммарно за  $O(n + m)$ .

**Алгоритм Тарьяна**, для него хватает одного DFS. Дополнительно нам понадобится в ходе алгоритма поддерживать  $tin_i$  — время входа DFS'а в вершину  $i$ ,  $fup_i$  — минимальное время ( $tin_u$ ), в которое можно попасть, выйдя из вершины  $i$ , и  $processed_i$  — обозначающая, нашлась ли для  $i$  SCC. Ещё мы будем запоминать в стек  $s$  текущие вершины, которые ещё не попали ни в одну SCC. Изначально считаем все  $tin_i = fup_i = -1$ ,  $processed_i = false$ ,  $s$  — пуста.

1. В начале обхода вершины  $u$  нужно: добавить  $u$  в  $s$ , отметить её, как вычисляющуюся  $processed_u = true$  и присвоить в  $tin_u = fup_u$  текущее значение таймера (и увеличить таймер на 1).
2. Перебираем все рёбра  $u \rightarrow v$ . Если очередную вершину  $v$  мы ещё не посещали ( $tin_v = -1$ ), то для неё нужно запустить DFS. После этого, если  $processed_v = true$ , то следует обновить  $fup_u = \min(fup_u, fup_v)$ .
3. Если после обработки всех рёбер  $u \rightarrow v$  значение  $fup_u$  не обновилось ( $fup_u = tin_u$ ), то это значит, что текущая вершина является началом SCC. Поэтому будем снимать вершины  $x$  со стека, отмечать их как обработанные ( $processed_x = false$ ) и добавлять к текущей SCC. Если же оказалось, что  $x = u$ , то SCC закончилась и можно выходить из функции.

Понятно, почему такой алгоритм работает, ведь SCC должны образовывать циклы, а цикл обязательно заканчивается где-то в вершине  $a$  среди обрабатываемых вершин. А раз так, то дойдя до  $a$  мы начнём постепенно возвращаться к предыдущим вершинам  $b$  цикла и по сути делать для них обновление  $fup_b = \min(fup_b, tin_a)$ , в вершине  $a$  такое обновление ничего не даст, поэтому мы найдём начало цикла (если же из  $a$  есть ещё какие-то рёбра в более ранние вершины, то после их посещения  $fup_a$  уменьшится и мы цикл на этом шаге не найдём, ведь его начало было где-то ещё раньше).

Также понятна временная сложность алгоритма  $O(n + m)$ , потому что мы всего лишь модифицировали DFS, при этом все новые операции выполняются за постоянное время.

## Мосты и точки сочленения

Пусть нам дан неориентированный граф, и в нём требуется найти «мосты» — рёбра, после удаления которых число компонент связности увеличивается и «точки сочленения» — вершины, после удаления которых компонент связности становится больше. Как это ни удивительно, но и для этого нам достаточно всего лишь модифицировать DFS.

Но перед быстрым алгоритмом заметим, что относительно легко можно придумать медленный алгоритм, который сначала запускает DFS, считающий компоненты связности, а потом по очереди убирает все вершины и рёбра и проверяет, сколько компонент стало. Но такой алгоритм действительно долгий, со сложностью  $O((n + m)^2)$ , а нам хотелось бы быстрее.

Давайте снова будем вычислять  $tin_i$  — время входа DFS'а в вершину  $i$ ,  $fup_i$  — минимальное время ( $tin_u$ ), в которое можно попасть, выйдя из вершины  $i$ . Изначально считаем все  $tin_i = fup_i = -1$ . После этого запускаем обход от вершины  $root$ .

1. Пусть обход перешёл в вершину  $u$  из вершины  $p$  (для  $root$  считаем, что  $p = -1$ ). И присваиваем  $tin_u = fup_u$  текущее значение таймера (и увеличить таймер на 1).

2. Перебираем все рёбра  $(u, v)$ . Если  $v = p$ , то такое ребро нужно пропустить. Если очередную вершину  $v$  мы уже посещали ( $tin_v > -1$ ), то нужно обновить  $fup_u = \min(fup_u, tin_v)$ .
3. Если же  $v$  мы ещё не посещалась, то нужно запустить для неё DFS (передав  $u$  как родительскую вершину) и обновить  $fup_u = \min(fup_u, fup_v)$ . Если  $u = root$ , то нужно запомнить, что запускался DFS, иначе если  $fup_v \geq tin_u$ , то из  $v$  не нашёлся путь куда-то вверх, а значит  $v$  — точка сочленения, а если  $fup_v > tin_u$ , то ребро  $(u, v)$  является мостом.
4. Если после обхода всех рёбер оказалось, что  $u = root$  и мы запускали DFS больше одного раза, то посещённые поддеревья не связаны, а значит,  $root$  — точка сочленения.

Понятно, что такой алгоритм работает, ведь,  $fup_i$  действительно подсчитывает наименьшее время, достижимое из  $i$ , а критерии моста  $fup_v > tin_u$  и точки сочленения  $fup_v \geq tin_u$  понятны, ведь это и обозначает, нашёлся ли путь в какую-то более раннюю вершину. Наличие отдельного критерия для  $root$  тоже понятно, ведь корневая вершина никогда не попадает под обычное условие, так как время входа в неё минимальное.

Сложность этого алгоритма (как и всех предыдущих алгоритмов обхода) составляет  $O(n + m)$ , что явно лучше нашего тривиального решения.

## Остовные деревья и кратчайшие пути

Мы продолжаем изучать графы, и сегодня займёмся поиском «*минимального остовного дерева*» — остовного дерева в неориентированном графе с минимальным суммарным весом рёбер, и модификациями данной задачи, а после этого будем искать «*кратчайшие пути*» между парой вершин, от одной вершины до всех остальных и между всеми парами вершин. Хотя алгоритмов и много, но все они (почти) достаточно понятны и частично основываются на уже пройденных алгоритмах.

### Минимальное остовное дерево

На самом деле, раньше мы уже находили остовные деревья, когда совершали обходы графа (для DFS это деревья строятся рекурсией, а для BFS дерево создаётся из рёбер, помещающих новые вершины в очередь). Поэтому если наш граф невзвешенный, то мы можем считать все веса рёбер равными 1, а значит любое остовное дерево будет являться минимальным, то есть мы уже частично умеем решать задачу. Но для взвешенных графов алгоритм не такой простой, поэтому перейдём к его изучению.

**Алгоритм Прима.** Это своего рода модификация алгоритмов обхода графа, потому что запустимся мы от одной вершины и рёбра будем добавлять последовательно (так, что всё время будем иметь дерево). Также нам понадобится знать, какие вершины уже в дереве (список *used*) и структура данных, позволяющая быстро выбирать минимальный элемент (множество / отображение или куча), назовём её *p*. И алгоритм выглядит так:

1. Произвольно выберем стартовую вершину *u*, пометим её в *used* и добавим все рёбра  $(u, v)$  в *p*, при этом *p* должна уметь выдавать ребро с минимальным весом.
2. Теперь пока структура *p* не пуста будем брать из неё минимальное ребро  $(u, v)$  и удалять его из *p*. Если так оказалось, что обе вершины (*u* и *v*) уже в дереве (помечены как *used*), то ребро нужно пропустить. А иначе мы добавляем ребро  $(u, v)$  в итоговое дерево, помечаем *v* как *used* (*u* уже в дереве, потому что ребро оказалось в *p*) и добавляем в *p* все рёбра  $(v, t)$ , где *t* ещё не в дереве (не *used*), чтобы избежать заикливания.

Понятно, почему такой алгоритм работает, ведь из уже существующего минимального дерева какое-то ребро провести придётся и поэтому мы выбираем максимальное. А раз мы так делаем пока все доступные рёбра не получатся, то мы как раз получим минимальное остовное дерево текущей компоненты связности. Если же ещё есть другие КС, то будем запускать построение дерева от каких-то вершины из них и в итоге получим минимальный остовный лес.

Чем полезен такой алгоритм, так это возможностью смотреть не на все рёбра, а только на их часть, при выборе следующего ребра. Также для этого алгоритма граф должен быть представлен как список смежности, что тоже удобно, потому что применим в большом количестве других задач.

Сложность такого алгоритма составляет  $O(m \log m)$ , так обрабатывается *m* рёбер и на каждое из них тратится  $O(\log m)$ , ведь его нужно добавить в *p* и достать из неё, а делается это не быстрее, чем за логарифм размера *p*. Также можно улучшить алгоритм до  $O(m \log n)$ , если для каждой вершины хранить только минимальное ребро, ведущее в неё, но даже если считать, что в графе много рёбер, то  $m = O(n^2)$  и  $O(m \log m) = O(m \log n^2) = O(2m \log n) = O(m \log n)$ , поэтому фактически улучшение может и не быть.

**Алгоритм Краскала.** Этот алгоритм сильно отличается от предыдущего, но схож тем, что на очередном шаге выбирает минимальное ребро. Для алгоритма нам понадобится список рёбер *e*, список *used* посещённых вершин и структура *p*, позволяющая объединять множества и проверять элементы на принадлежность одному множеству (в простейшем случае можно использовать массив, но с DSU будет быстрее):



1. Для начала отсортируем  $e$  по неубыванию веса, а в структуре  $p$  размера  $n$  сохраним, что все вершины пока принадлежат разным множествам (деревьям).
2. Теперь будем перебирать все рёбра от меньшего веса к большему и если очередное ребро  $(u, v)$  соединяет разные деревья, то это ребро нужно добавить к итоговому дереву и в  $p$  объединить множества, представленные  $u$  и  $v$ .

Понятно, что и этот алгоритм тоже работает, ведь когда мы добавляем ребро  $(u, v)$ , то соединяем множество вершины  $u$  с остальным деревом, и делаем мы это ребром с минимальным доступным весом. А значит и получаем в конце минимальное остовное дерево для связного графа и минимальный остовный лес для несвязного графа.

Сложность же алгоритма также составляет  $O(m \log n)$ , ведь нам требуется  $O(m \log m) = O(m \log n^2) = O(2m \log n) = O(m \log n)$  на сортировку рёбер и после этого мы выполняем  $O(m)$  операций с  $p$ , которые в DSU можно реализовать за  $O(\alpha(n))$ , то есть итогом имеем  $O(m \log n + m\alpha(n)) = O(m \log n)$ . Также важно, что этому алгоритму, в отличие от предыдущего, требуется список рёбер, что может быть несколько не удобно, но в зато этот алгоритм будет легко модифицировать, что мы дальше и увидим.

## Модификации минимального остова

Искать только минимальное остовное дерево — это скучно, поэтому существуют другие схожие задачи, которые решаются теми же алгоритмами, что мы и прошли, после внесения небольших изменений. При этом нам будет проще вносить изменения в алгоритм Краскала, но некоторые задачи также решаемы и с помощью алгоритма Прима. Рассмотрением этих задач мы и займёмся.

**Максимальное остовное дерево.** В общем-то понятно, что здесь нужно сделать: раз у нас вместо минимума нужно найти максимум, то достаточно поменять правило сортировки на противоположное. То есть, для алгоритма Прима мы будем выбирать ребро с максимальным весом, а для алгоритма Краскала будем идти от рёбер с большим весом к рёбрам с меньшим весом. Но можно поступить более олимпиадно и поменять все веса  $w \rightarrow -w$  и использовать уже их в обычных алгоритмах :)

**Минимальное достроение.** Пусть у нас в графе уже выбраны какие-то рёбра и нам нужно ещё выбрать какие-то рёбра так, чтобы суммарный вес был минимальным и количество компонент связности было таким же, как и в исходном графе.

Решить эту задачу также не сложно с помощью алгоритма Краскала. Для этого, перед запуском основного алгоритма, добавим все обязательные рёбра к результату и отметим в  $p$ , что какие-то множества соединены ребром. А после этого сделаем обычный запуск алгоритма Краскала.

**Лес из заданного числа компонент связности.** Пусть нам требуется найти минимальный остовный лес, но при этом он должен состоять из  $k$  компонент связности (где  $k$  не меньше, чем количество исходных КС).

Это тоже достаточно простая задача, ведь алгоритм Краскала на каждом шаге действует жадно, поэтому его достаточно будет прервать, когда останется  $k$  компонент связности. Определить же это можно посчитав количество добавленных рёбер, их должно быть  $m' = n - k$ , ведь в каждой КС рёбер  $m'_i = n_i - 1$  (так как это деревья), а всего  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ , а значит  $m' = \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = \sum_{i=1}^k n_i - k = n - k$ . Такую же формулу можно получить, если учесть, что изначально мы имеем  $n$  КС, а должны сделать  $k$  КС, при этом каждое проводимое ребро объединяет две КС, а значит  $m' = n - k$ .

**Минимакс и максимин.** Минимаксом называют поиск пути между вершинами  $i$  и  $j$  такой, что вес этого пути минимален. При этом весом пути называется максимальный вес ребра, которые встречается на этом пути. Аналогично определяется максимин, там нужно максимизировать минимальный вес ребра на пути.

Если подумать, то оказывается, что искомый путь будет лежать в минимальном остовном дереве. В самом деле, при построении минимального остовного дерева мы на каждом шаге выбираем минимальное ребро, а значит и на пути между  $i$  и  $j$  добавляется ребро с минимальным возможным весом, а следовательно максимальный вес среди них действительно минимально возможный.

Итоговым алгоритмом будет: сначала найти минимальное остовное дерево, а после этого запустить какой-нибудь обход графа и найти максимальное значение на пути между  $i$  и  $j$ . Итоговая сложность будет такой же, как и у построения дерева, ведь его обход выполняется за линейное время (так как в дереве имеем  $m = n - 1$ , и алгоритмы обхода отработают за  $O(n + m) = O(n + n - 1) = O(n)$ ).

**Второе лучшее остовное дерево.** В этой задаче требуется найти не минимальное остовное дерево, а второе по минимальности. Это задача уже не такая очевидная, и сложность у неё получится несколько больше.

Заметим, что второе по минимальности остовное дерево можно получить, если произвести всего одну замену в обычном минимальном остовном дереве (то есть одно ребро удалить и одно добавить). И понятно, почему это условие выполняется, ведь если мы производим замену, то от этого суммарный вес дерева только увеличивается, а если делать несколько таких замен, то вес увеличится ещё больше. Следовательно, второе лучшее дерево отличается от лучшего всего одной заменой.

А раз так, то сначала построим первое лучшее дерево, а потом будем по очереди запрещать использовать его рёбра и строить новые минимальные остовные деревья. Тогда нам потребуется  $O(m \log n)$  на первоначальную сортировку,  $O(m)$  на поиск лучшего остовного дерева и после этого мы будем закрывать  $O(n)$  рёбер, тратя на каждое ещё один поиск лучшего остовного дерева за  $O(m)$ . И итоговая сложность будет  $O(nm)$ . Но стоит отметить, что можно ускорить алгоритм, если использовать DSU или LCA, но это уже остаётся на изучение читателю :)

## Кратчайшие пути от одной вершины до всех

С минимальными остовными деревьями мы разобрались, поэтому можем переходить к кратчайшим путям. При этом хотелось бы начать с кратчайшего пути между парой вершин, но для этой задачи нет отдельного алгоритма, поэтому мы начнём с кратчайшего пути из одной вершины во все.

Оказывается, что и эту задачу мы уже умеем решать для невзвешенных графов с помощью BFS. Для этого в BFS будем поддерживать  $d_i$  — номер слоя для вершины  $i$ , который нужно пересчитывать при добавлении вершины  $i$  в очередь из-за ребра  $x \rightarrow i$ , как  $d_i = d_x + 1$ . Но всё же это частный случай для невзвешенных графов, а хочется уметь решать задачу в общем виде, поэтому перейдём к изучению алгоритмов для взвешенных графов.

**Алгоритм Дейкстры.** Этот алгоритм похож на смесь BFS и алгоритма Прима. И своей целью ставит определение  $d_i$  — расстояние от стартовой вершины  $s$  до вершины  $i$ . При этом во время работы алгоритма нам понадобится брать вершину с минимальным расстоянием, и из-за разных способов это сделать мы будем получать разные сложности.

1. Положим  $d_s = 0$  и  $d_u = \infty^7$ , для  $u \neq s$ .
2. Теперь в цикле будем выбирать необработанную вершину  $u$  с минимальным расстоянием до ней (как это делать будет описано ниже). Обходим все рёбра  $(u; v)$  и пытаемся обновить минимальное расстояние  $d_v = \min(d_v, d_u + c)$ , где  $c$  — это стоимость ребра  $(u, v)$ .

Собственно, это и есть весь алгоритм, теперь осталось понять, как искать вершину  $u$ .

Выбирать вершину  $u$  можно с помощью массивов. Для этого дополнительно будем поддерживать список *used*, отвечающий за посещённость вершины (будем отмечать вершину  $u$  в *used*, до обхода рёбер из  $u$ ). И теперь для выбора минимальной вершины будем проходить по всем вершинам и выбирать ту, у которой  $d_i$  минимальна и при этом она ещё не посещалась согласно списку *used*.

---

<sup>7</sup> Здесь и далее константу  $\infty$  нужно выбирать так, чтобы сумма  $\infty + \infty$  ещё входила в тип данных!

Заканчивать же алгоритм мы можем или когда посещены все вершины, или когда посещена все КС (тогда мы сможем найти только  $d_i = \infty$  среди не посещённых вершин).

Другой способ — это использовать множество / отображение или кучу  $p$ . Тогда в самом начале нам нужно добавить пару  $(0; s)$  в  $p$ . А после этого на каждом шаге брать минимальную пару  $(u, c)$  из  $p$  и уже работать с этой вершиной. При этом после изменения расстояния до вершины  $v$  нам нужно добавить ей в  $p$  (в таком же формате  $(v, d_v)$ ). Но понятно, что так одна и та же вершина  $v$  может попасть в  $p$  из-за разных вершин  $u$ , а обрабатывать мы её хотим только один раз. Поэтому если нам позволяет структура данных  $p$ , то перед добавлением нужно будет удалить старое значение для вершины  $v$ , что мы и будем делать для встроённых в C++ множеств и отображений, а также можем сделать для декартового дерева, написанного самостоятельно. А если же мы используем встроённую в C++ кучу или пишем её сами, то операции удаления в ней нет, поэтому обходить все рёбра из  $u$  мы будем только в случае, когда  $c = d_u$  (то есть между добавлением пары в кучу и обновлением вершин не было других обновлений). Заканчивать же алгоритм мы в любом случае будем, когда  $p$  станет пусто.

Алгоритм, конечно, хороший и понятный, но в общем есть одна проблема — он не всегда работает. Пусть мы уже правильно обработали какое-то множество вершин (нашли кратчайшие пути до них) и все рёбра, выходящие из них, а сейчас обрабатываем вершину  $u$ . Тогда для неё  $d_u$  будет правильным ответом только если нет рёбер отрицательного веса  $w$ , ведь если они существуют, то может найтись ещё какая-то вершина  $x$  такая, что  $d_x > d_u$ , но при этом  $d_x + w < d_u$ , а значит для вершину  $u$  у нас пока не правильный ответ. Но вот если все веса неотрицательны то точно всё хорошо, ведь тогда для любого  $x$  будем иметь  $d_x > d_u$  и  $d_x + w > d_u$ .

Поэтому алгоритм Дейкстры работает только для графов без рёбер отрицательного веса, а его сложность для случая с массивами будет  $O(n^2 + m)$ , потому что мы для каждого шага перебираем все вершины и плюс просматриваем все ребра. А вот если использовать правильные структуры данных, то имеем сложность  $O(m \log n)$ , потому что в худшем случае каждое ребро обновляет кратчайшие пути, а на одну операцию с  $p$  требуется  $O(\log n)$  операций в случае с удалением повторов и  $O(\log m) = O(\log n^2) = O(2 \log n) = O(\log n)$  если повторы не удалять :) Всего же таких операций  $m$  для рёбер  $n$  для взятия минимальной вершины, поэтому на самом деле сложность составляет  $O((n + m) \log n)$ .

Также стоит сказать, что есть решение со сложностью  $O(n \log n + m)$ , если использовать «*Фибоначчиевы кучи*», и линейный алгоритм Торупа, но это тоже остаётся для самостоятельного изучения читателями.

**Алгоритм Форда–Беллмана.** На самом деле, разобранный выше реализация алгоритма Дейкстры на основе кучи без удаления лишних пар всё же умеет обрабатывать отрицательные веса рёбер (просто работает несколько дольше, потому что делает несколько обновлений для одной вершины), но ломается, если в графе есть цикл отрицательного веса (обновления в алгоритме Дейкстры происходят бесконечно). Именно для этого и нужно использовать очень простой алгоритм Форда–Беллмана, вычисляющий  $d_i$  минимальное расстояние от  $s$  до  $i$ :

1. Изначально принимаем  $d_s = 0$  и  $d_u = \infty$ , для  $u \neq s$ .
2. Теперь повторим цикл  $n - 1$  раз, в каждом из которых для всех рёбер  $(u, v)$  с весом  $c$  сделаем «*релаксацию*» (обновление ответа):  $d_v = \min(d_v, d_u + c)$ .

И это собственно весь алгоритм!

А если нужно проверить, есть ли цикл отрицательного веса, то достаточно ещё раз сделать релаксацию для всех рёбер и проверить, поменялись ли ответы: если поменялись, то есть цикл отрицательного веса, если нет — то и цикла нет. Просто, правда? :)

Но и в таком простом алгоритме можно сделать пару модификаций. Во-первых, если на каком-то шаге не один  $d_i$  не обновился, то у нас уже есть ответ. А во-вторых, если нужно, то можно восстановить сами кратчайшие пути (как, собственно, и в алгоритме Дейкстры).

Теперь быстренько докажем правильность этого алгоритма. Заметим, что на  $i$ -ой итерации цикла мы получаем правильные ответы для всех вершин, кратчайшие расстояния до которых состоят из  $i$  рёбер. Это утверждение очевидно, ведь на первом шаге мы посетим первое ребро и получим

оптимальный ответ для первой вершины, на втором шаге точно посмотрим на второе ребро пути и получим ответ для второй вершины, и так далее, а на  $i$ -ом шаге как раз пройдем по  $i$ -ому ребро и получим ответ для этой вершины. А поскольку граф состоит из  $n$  вершин, то самый длинный путь может состоять из  $n - 1$  ребра, именно столько итераций цикла мы и делаем, а значит наш алгоритм корректен.

Также стоит сказать, что граф можно хранить и как список рёбер, и как список смежности, и тогда сложность этого алгоритма  $O(nm)$ , хоть это читатель мог понять и сам :) А вот если мы работаем с матрицей смежности, то на каждом шаге цикла будем проходить всю матрицу и получим сложность  $O(n^3)$ .

## Кратчайшие пути между всеми парами вершин

Раз уж мы решали задачу для случая с одной стартовой вершиной, то теперь совсем усложним её и будем искать путь между всеми парами вершин. Наивные решения, которые  $n$  раз бы запускали поиск расстояния от одной вершины нас не интересуют, потому что они получатся слишком сложными для  $m = O(n^2)$ :  $O(n^3 \log n)$  для алгоритма Дейкстры и  $O(n^4)$  для алгоритма Форда–Беллмана, а хочется найти алгоритм быстрее. Поэтому, можно бы начать бояться, что тут будет какой-нибудь очень сложный алгоритм, но на самом деле всё просто:

1. Сохраним граф в матрице смежности  $g$  и в ячейку  $(i, j)$  поставим  $\infty$ , если в графе нет ребра из  $i$  в  $j$ , а иначе запишем в эту ячейку вес самого ребра. Также считаем, что в вершине можно оставаться:  $g_{i \rightarrow i} = 0$  (если в графе разрешены петли, то пишем вес петель).
2. Теперь сделаем цикл  $n$  раз и на  $k$ -ом шаге цикла переберём все пары вершин  $(i, j)$  и будем пытаться обновить ответ для этой пары через вершину  $k$ :  $g_{i \rightarrow j} = \min(g_{i \rightarrow j}, g_{i \rightarrow k} + g_{k \rightarrow j})$ .

Вот и всё, мы получили рабочий алгоритм в 3 цикла и одну операцию!

Давайте докажем этот алгоритм, который основывается на динамическом программировании. Пусть  $D_{i \rightarrow j}^k$  это оптимальный путь из  $i$  в  $j$ , промежуточно проходящий только через первые  $k$  вершин:  $1, 2, \dots, k$ . Тогда понятна и основная формула перехода:  $D_{i \rightarrow j}^{k+1} = \min(D_{i \rightarrow j}^k, D_{i \rightarrow k}^k + D_{k \rightarrow j}^k)$ , ведь очередная вершина  $k$  может как использоваться в пути  $i \rightarrow j$ , так и нет. Базой же динамики будут изначальные кратчайшие расстояния, не проходящие через другие вершины, которые являются весами рёбер:  $k = 0$  и  $D_{i \rightarrow j}^0 = g_{i \rightarrow j}$ .

Но поскольку в нашей формуле мы вычисляем  $D^{k+1}$  только через  $D^k$ , то для ответов можно хранить не трёхмерную матрицу  $n \times n \times k$ , а ограничиться лишь двумя матрицами  $n \times n$ . А если понять, что от рассмотрения лишних вершин наш ответ не ухудшится, то можно смело хранить ответы для обеих итераций ( $k$  и  $k + 1$ ) в одном и том же массиве, именно поэтому мы и имеем такую простую формулу для алгоритма Флойда–Уоршелла (так называется то, что мы прошли).

Понятно, что сложность алгоритма Флойда–Уоршелла составляет  $O(n^3)$ , ведь у нас просто три вложенных цикла. Также понятно, что алгоритму требуется граф, сохранённый в матрице смежности.

В заключение стоит сказать, что можно сделать много модификаций этого алгоритма, которые бы решали разные задачи (но не для больших графов, потому что алгоритм выполнялся бы долго).

Например, можно выводить сами кратчайшие пути, если запомнить, из какой вершины мы попали к текущему ребру: сначала возьмём  $p_{i \rightarrow j} = i$ , и если мы делаем обновление внутри цикла, то сделаем и  $p_{i \rightarrow j} = p_{k \rightarrow j}$ , а при выводе пути  $i \rightarrow j$  нужно будет сначала вывести путь  $i \rightarrow p_{i \rightarrow j}$ , а после этого и вершину  $j$ .

Также можно использовать этот алгоритм для поиска кратчайших путей из одной вершины; для поиска «транзитивного замыкания» — проверки, что есть путь  $i \rightarrow j$ ; для задач минимакса и максимина; для проверки наличия отрицательного цикла (просто запустим алгоритм ещё раз и все ячейки, в которых поменялись ответы будут иметь ответ  $-\infty$ ). И ещё много других интересных задач, с которыми читатель может ознакомиться сам.

# Геометрия: введение

Сегодня мы начинаем изучение задач, связанных с вычислительной геометрией. Это не обычные геометрические задачи по математике, в которых нужно использовать разные теоремы, чтобы доказать что-то в задаче, а задачи, в которых нужно что-то посчитать. Например, найти площадь, найти точку, уравнение прямой и многое другое.

Сегодня мы рассмотрим такие базовые понятия вычислительной геометрии, как точки (`Point`), вектора (`Vector`) и прямые (`Line`). Всё это мы будем рассматривать на плоскости, потому что задачи про трёхмерное пространство не встречаются. Вычислительная геометрия — это как раз один из тех разделов, в которых будет не очень удобно использовать структуры, поэтому мы научимся работать с ними ещё лучше. Также в вычислительной геометрии очень важна точность, поэтому мы будем использовать шаблоны, чтобы получить реализацию и для целых чисел, и для вещественных.

## Точки

Точка очень простой геометрический объект, поэтому каждая точка будет обладать своими координатами (`x` и `y`), и точки будут поддерживать следующие операции (их достаточно мало):

- Создание точки по координатам или без них. Для этого будем использовать конструктор с точкой `(0; 0)` по умолчанию.
- Сдвиг точки на вектор. Для этого определим операторы `+` и `-`, чтобы можно было писать `p + v` и `p - v`.
- Ввод и вывод точки. Определим операторы `>>` и `<<` с нужными аргументами и C++ сам поймёт, как обрабатывать выражения `cin >> p` и `cout << p`.

Все эти операции можно реализовать следующим образом:

```
1  template<typename T>
2  struct Point{
3      T x, y;
4      Point(T x = 0, T y = 0) : x(x), y(y) {}
5
6      Point<T> operator+(Vector<T> v){ return Point<T>(x + v.x, y + v.y); }
7      Point<T> operator-(Vector<T> v){ return Point<T>(x - v.x, y - v.y); }
8
9      friend istream& operator>>(istream& is, Point<T>& p){ return is >> p.x >> p.y; }
10     friend ostream& operator<<(ostream& os, Point<T>& p){ return os << p.x << ' ' << p.y; }
11 };
```

## Вектора

Хоть вектора, также, как и точки, хранят только два числа (`x` и `y`), но это уже более сложный объект, поэтому для них нам нужно определить много операций:

- Создание вектора по координатам или без них; создание вектора по двум точкам. Для этого будем использовать конструкторы и вектор  $(0, 0)$  по умолчанию.

- Сложение и вычитание векторов. Нам помогут бинарные операторы `+` и `-` чтобы писать `v + u` и `v - u`, а также их унарные версии, чтобы делать `+v` и `-v` (как бинарные операции, в которых второй операнд  $\vec{0}$ ).
- Умножение вектора на число реализуем с помощью операторов `*` и `/`.
- На произведениях векторов нужно остановиться подробнее:
  1. **Скалярное произведение.** В математике обозначается как  $\vec{v} \cdot \vec{u}$  и имеет важное равенство  $|v| \cdot |u| \cdot \cos(\widehat{v;u}) = \vec{v} \cdot \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y$ . Считать мы, конечно, будем по второй формуле и обозначим такое произведение за `v * u`. Также важно знать, что если  $\vec{v}, \vec{u} \neq \vec{0}$  и  $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ . то  $\vec{v} \perp \vec{u}$ .
  2. **Псевдоскалярное произведение.** В математике обозначается как  $\vec{v} \wedge \vec{u}$  и имеет важное равенство  $|v| \cdot |u| \cdot \sin(\widehat{v;u}) = \vec{v} \wedge \vec{u} = v_x u_y - v_y u_x$ . Считать мы, конечно, будем по второй формуле и обозначим такое произведение за `v % u` (потому что хочется, чтобы приоритет произведений был одинаковым, а использовать `/` как-то странно для произведения). Также важно знать, что если  $\vec{v}, \vec{u} \neq \vec{0}$  и  $\vec{v} \wedge \vec{u} = 0$ . то  $\vec{v} \parallel \vec{u}$ .
- Угол между векторами, обозначается как  $\widehat{v;u}$ . Понятно, что для этой операции можно придумать формулы через произведения:  $\widehat{v;u} = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|v| \cdot |u|} = \arcsin \frac{\vec{v} \wedge \vec{u}}{|v| \cdot |u|}$ . Но тогда у нас возникнут дополнительные погрешности при делении (да и случай деления на ноль придётся разбирать отдельно), поэтому принято считать по формуле  $\widehat{v;u} = \arctg \frac{\vec{v} \wedge \vec{u}}{\vec{v} \cdot \vec{u}}$ . А в программировании есть функция `atan2(y, x) = arctg \frac{y}{x}`, которая дополнительно умеет обрабатывать случай  $x = 0$ . Для угла будем использовать оператор `^`, чтобы писать `v ^ u`.
- Длину вектора мы будем считать по теореме Пифагора:  $len = \sqrt{x^2 + y^2}$ . При этом в некоторых задачах нам достаточно использовать квадрат длины (например, если мы сравниваем длины векторов), поэтому сделаем отдельную функцию, которая бы не извлекала корень, потому что так вычисления точнее:  $sqlen = x^2 + y^2$ .
- Полярный угол будем считать через `atan2(y, x)`.
- Используя полярный угол можно легко нормировать вектор, ведь если  $\alpha$  — полярный угол вектора  $v(x; y)$ , то понятно, что  $\vec{n} = (\cos \alpha; \sin \alpha)$  будет искомым вектором. Также можно было бы считать по формуле  $\vec{n} = \left( \frac{x}{|v|}; \frac{y}{|v|} \right)$ .
- Перпендикулярным вектором (одним из) для  $v(x, y)$  является  $u(-y, x)$ , так как их перпендикулярность можно проверить через скалярное произведение.
- Ввод и вывод вектора тоже бывает нужен. Для этого определим операторы `>>` и `<<` с нужными аргументами и C++ будет понимать выражения `cin >> v` и `cout << v`.

Хоть описание выше достаточно большое, но в коде это выглядит достаточно компактно:

```

1  template<typename T>
2  struct Vector{
3      T x, y;
4      Vector(T x = 0, T y = 0) : x(x), y(y) {}
5      template<typename Q, typename R>
6      Vector(Point<Q> a, Point<R> b) : x(b.x - a.x), y(b.y - a.y) {}
7
8      Vector<T> operator+() const { return Vector<T>(x, y); }
9      Vector<T> operator-() const { return Vector<T>(-x, -y); }
10     Vector<T> operator+(Vector<T> const& o) const { return Vector<T>(x + o.x, y + o.y); }
11     Vector<T> operator-(Vector<T> const& o) const { return Vector<T>(x - o.x, y - o.y); }
12

```

```

13 Vector<T> operator*(T d){ return Vector<T>(x * d, y * d); }
14 Vector<T> operator/(T d){ return Vector<T>(x / d, y / d); }
15
16 T operator*(Vector<T> const& o) const{ return x * o.x + y * o.y; }
17 T operator%(Vector<T> const& o) const{ return x * o.y - o.x * y; }
18 double operator^(Vector<T> const& o) const{ return atan2((*this) % o, (*this) * o); }
19
20 double len() const{ return sqrt(x * x + y * y); }
21 T sqlen() const{ return x * x + y * y; }
22 double alpha() const{ return atan2(y, x); }
23 Vector<double> norm(){ double a = alpha(); return Vector<double>(cos(a), sin(a)); }
24 Vector<T> pd(){ return Vector<T>(-y, x); }
25
26 friend istream& operator>>(istream& is, Vector<T>& v){ return is >> v.x >> v.y; }
27 friend ostream& operator<<(ostream& os, Vector<T>& v){ return os << v.x << ' ' << v.y; }
28 };

```

## Прямые

Вот прямые это уже совсем сложный объект хотя бы потому, что для задания одной прямой на плоскости требуется целых три числа :)

Уравнение прямой мы будем рассматривать в общем виде  $ax + by + c = 0$ , но иногда для доказательства формул будем переходить к более простым уравнениям двух видов:  $y = kx + m$  и  $x = t$ . Стоит отметить, что уравнений общего вида для одной прямой бесконечно много, ведь можно домножать все коэффициенты на произвольные ненулевые константы. Перейдём же к операциям с прямыми:

- Создание прямой по трём коэффициентам или без них (тогда все коэффициенты будут 0) сделаем через конструктор с аргументами по умолчанию.
- Создание прямой по двум точкам ( $p$  и  $q$ ) это уже достаточно интересно. Если точки лежат на прямой, то они являются корнями её уравнения, а значит нам нужно решить систему:

$$\begin{cases} ap_x + bp_y + c = 0 \\ aq_x + bq_y + c = 0 \end{cases} \iff a(p_x - q_x) + b(p_y - q_y) = 0 \iff a(p_x - q_x) = b(q_y - p_y)$$

Но ведь понятно, что если взять  $a = q_y - p_y$  и  $b = p_x - q_x$ , то это точно будет решением уравнения, ведь левая и правая часть будут иметь одинаковые формулы. Остётся лишь узнать коэффициент  $c$ , но это совсем просто:  $c = -ap_x - bp_y = -aq_x - bq_y$ .

- Получение двух точек на прямой. Они нам понадобятся, чтобы, например, находить расстояние от точки до прямой без вывода формул с нуля. Если у нас  $b = 0$ , то мы имеем уравнение  $ax + c = 0$ , то есть  $x = t = -\frac{c}{a}$ , то есть на прямой лежат, например, точки  $(-\frac{c}{a}; 0)$  и  $(-\frac{c}{a}; 1)$ . Иначе наша прямая представима в виде  $y = kx + m$ , где  $k = -\frac{a}{b}$  и  $m = -\frac{c}{b}$  и на прямой лежат, например, точки  $(0; -\frac{c}{b})$  и  $(1; -\frac{a+c}{b})$ .
- Расстояние от точки  $p$  до прямой теперь считается совсем просто. Найдём две точки ( $q$  и  $r$ ) на прямой и рассмотрим площадь  $S$  для  $\triangle pqr$ . По формулам площадей треугольника имеем:  $2S = h_p \cdot qr$  — площадь через высоту и сторону и  $2S = pq \cdot pr \cdot |\sin(\overrightarrow{pq}; \overrightarrow{pr})| = |\overrightarrow{pq} \wedge \overrightarrow{pr}|$  — площадь через синус угла. Но тогда имеем равенство  $h_p = \frac{|\overrightarrow{pq} \wedge \overrightarrow{pr}|}{qr}$ , по которому мы уже можем легко рассчитать искомое расстояние.
- Параллельные прямые, удалённые на заданное расстояние ( $r$ ). Конечно, можно придумать, как находить такие прямые уже имеющимися средствами. Например, найдём точки  $p$  и  $q$  на прямой,

построим вектор  $\vec{pq}$ , найдём  $\vec{v} \perp \vec{pq}$  и сделаем его заданной длины (сначала нормируем, а потом домножим на  $r$ ) и получим  $\vec{u}$ . После этого проведём одну прямую через точки  $p + \vec{u}$  и  $q + \vec{u}$ , а вторую через  $p - \vec{u}$  и  $q - \vec{u}$ . Но, оказывается, что такой способ недостаточно точный, и можно придумать точнее.

Вспомним, что если прямая задана в виде  $y = kx + m$ , то две прямые параллельны, когда их коэффициенты  $k$  равны. Это наталкивает на мысль, что если прямые заданы в общем виде и их коэффициенты при переменных ( $a$  и  $b$ ) равны, то они будут параллельны. Будем использовать это предположение, а чуть позже мы докажем его, когда будем искать точку пересечения прямых.

Рассмотрим случай параллельных прямых, когда  $x_1 = t_1$  и  $x_2 = t_2$ . Тогда понятно, что  $r = |t_1 - t_2|$ . С другой стороны коэффициенты  $t$  мы можем выразить, как  $t = -\frac{c}{a}$ , а следовательно  $r = \left| -\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} \right| = \left| \frac{c_2 - c_1}{a} \right|$ , из нашего предыдущего предположения, что  $a$  и  $b$  равны.

Теперь более сложный случай, когда  $y_1 = kx_1 + m_1$  и  $y_2 = kx_2 + m_2$ . Если  $k = 0$ , то такой случай аналогичен предыдущему и мы получим  $r = \left| \frac{c_2 - c_1}{b} \right|$ , поэтому будем рассматривать случай  $k \neq 0$ . Пусть  $P(0, m_1)$ ,  $Q(0, m_2)$ . причём понятно, что  $P$  лежит на первой прямой, а  $Q$  на второй. Также на первой прямой лежит и точка  $R(\frac{m_2 - m_1}{k}; m_2)$ , поэтому хочется рассмотреть  $\triangle PQR$ . Его площадь можно посчитать два раза:  $2S = PQ \cdot QR = PR \cdot h_Q$ , отсюда имеем расстояние между прямыми  $h_Q = \frac{PQ \cdot QR}{PR} = \frac{|m_2 - m_1| \cdot \left| \frac{m_2 - m_1}{k} \right|}{\sqrt{(m_2 - m_1)^2 + \left( \frac{m_2 - m_1}{k} \right)^2}} = \frac{(m_2 - m_1)^2}{|k| \cdot |m_2 - m_1| \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}} = \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{k^2 + 1}}$ . А теперь вспомним, что  $k = -\frac{a}{b}$  и  $m = -\frac{c}{b}$ , а к тому же по нашему предположению коэффициенты  $a$  и  $b$  равны:  $h_Q = \frac{\left| -\frac{c_2}{b} + \frac{c_1}{b} \right|}{\sqrt{\left( \frac{a}{b} \right)^2 + 1}} = \frac{|c_1 - c_2|}{|b| \cdot \frac{1}{|b|} \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

А теперь заметим, что формула  $r = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  отвечает всем трём случаям, ведь если один из коэффициентов при переменных ( $a$  или  $b$ ) зануляется, то под корнем остаётся только квадрат одного из слагаемых, корень из которого как раз его модуль. Вспоминая исходную задачу, получаем, что у исходных прямых коэффициенты  $a$  и  $b$  можно сделать такими же, а коэффициент  $c$  должен быть  $c' = c \pm r\sqrt{a^2 + b^2}$ . Как говорилось выше, уравнение прямой в общем виде не единственно, поэтому на самом деле коэффициенты  $a$  и  $b$  у параллельных прямых не обязаны быть равны, но параллельные прямые представимы в таком виде.

- Пересечение двух прямых. Это, пожалуй, вычислительно самое сложное, что мы сегодня рассматриваем, к тому же, результатов у этой операции много: точка (если пересекаются), пустое множество (если параллельны) и прямая (если прямые совпадают). Но, тем не менее, мы приступим к выводу формул. Понятно, как это делать, ведь нужно просто решить систему уравнений для двух прямых и точки пересечения:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = -\frac{b_1y + c_1}{a_1} \\ y = -\frac{a_2x + c_2}{b_2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{b_1}{a_1b_2}(a_2x + c_2) - \frac{c_1}{a_1} \\ y = \frac{a_2}{a_1b_2}(b_1y + c_1) - \frac{c_2}{b_2} \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} x \left( 1 - \frac{a_2b_1}{a_1b_2} \right) = \frac{b_1c_2}{a_1b_2} - \frac{c_1}{a_1} \\ y \left( 1 - \frac{a_2b_1}{a_1b_2} \right) = \frac{a_2c_1}{a_1b_2} - \frac{c_2}{b_2} \end{cases} \iff \begin{cases} x(a_1b_2 - a_2b_1) = b_1c_2 - b_2c_1 \\ y(a_1b_2 - a_2b_1) = a_2c_1 - a_1c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь поймём, когда наша система не имеет решений, то есть, что значит  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ . Понятно, что первая прямая параллельна вектору  $\vec{v} = (b_1; -a_1)$  (потому что если  $(x_0; y_0)$  лежит на прямой, то  $ax_0 + by_0 + c = 0$ , а значит и  $a(x_0 + b) + b(y_0 - a) + c = (ax_0 + by_0 + c) + (ab - ba) = 0$ ), аналогично вторая прямая параллельна вектору  $\vec{u} = (b_2; -a_2)$ . А теперь заметим, что  $\vec{v} \wedge \vec{u} = b_1 \cdot (-a_2) - (-a_1) \cdot b_2 = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ , следовательно, если система не решилась, то прямые действительно параллельны или совпали.

Хочется разделять эти два случая, поэтому проверим различаются ли все коэффициенты в одинаковое количество раз (если да, то это уравнения одной прямой). Понятно, что это означает



необходимость проверить три равенства:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \\ \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 b_2 = a_2 b_1 \\ b_1 c_2 = b_2 c_1 \\ a_2 c_1 = a_1 c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0 \\ a_2 c_1 - a_1 c_2 = 0 \end{cases}$$

Интересно, что первое из этих равенств мы уже проверили, а второе и третье выражения используются в формулах для координаты точки пересечения прямых.

Таким образом, мы умеем разделять случаи взаимного расположения прямых и определять точку их пересечения, а в коде для пересечения удобно использовать оператор `^`.

- Ввод и вывод прямых тоже бывает нужен. Для этого, как и раньше, определим операторы `>>` и `<<` с нужными аргументами. чтобы использовать `cin >> v` и `cout << v`.

Видно, что прямые действительно достаточно интересный объект, ведь наше текстовое описание достаточно растянулось, но в коде это занимает не так и много места:

```

1  template<typename T>
2  struct Line{
3      T a, b, c;
4      Line(T a = 0, T b = 0, T c = 0) : a(a), b(b), c(c) {}
5      Line(Point<T> p, Point<T> q) : a(q.y - p.y), b(p.x - q.x) { c = -a * p.x - b * p.y; }
6
7      pair<Point<double>, Point<double>> points(){
8          if (!b) return {{-1. * c / a, 0}, {-1. * c / a, 1}};
9          return {{0, -1. * c / b}, {1, -1. * (c + a) / b}};
10     }
11
12     template<typename Q>
13     double ro(Point<Q> p){
14         auto [q, r] = points();
15         Vector<double> pq(p, q), pr(p, r), qr(q, r);
16         return abs(pq % pr) / qr.len();
17     }
18
19     pair<Line<double>, Line<double>> parallel(double r){
20         r *= sqrt(a * a + b * b);
21         return {{a, b, c - r}, {a, b, c + r}};
22     }
23
24     pair<bool, Point<double>> operator^(Line<T> o){
25         T ab = a * o.b - o.a * b, ac = o.a * c - a * o.c, bc = o.c * b - c * o.b;
26         if (abs(ab) < EPS){
27             if (abs(ac) < EPS && abs(bc) < EPS)
28                 return {false, Point<double>(0, 0)};
29             else return {false, Point<double>(1, 1)};
30         }
31         return {true, Point<double>(1. * bc / ab, 1. * ac / ab)};
32     }
33
34     friend istream& operator>>(istream& is, Line<T>& l){ return is >> l.a >> l.b >> l.c; }
35     friend ostream& operator<<(ostream& os, Line<T>& l)
36         { return os << l.a << ' ' << l.b << ' ' << l.c; }
37 };

```

// синтаксис C++17

// совпадение

// параллельность

// пересечение

## Дополнения

Понятно, что точки, вектора и прямые — это не все объекты, которые бывают в геометрии. Например, ещё бывают лучи и отрезки, которые представимы как прямые с концами или даже

окружности, с которыми мы сегодня не работали. Но хочется считать, что если читателю попадутся лучи и отрезки, то он сможет с ними разобраться, используя описание выше. Окружности же, встречаются реже, но всё же, читатель может разобраться и с ними.

Также следует сделать несколько комментариев по кодированию вычислительной геометрии:

1. Старайтесь считать в целых числах, а если этого не избежать, то сравнивайте числа с учётом погрешности, как это сделано в пересечении прямых. Константу *EPS* нужно выбирать с учётом задачи, например, вполне подходит точность  $10^{-9}$ , для этого вполне подойдёт вот такой код:

```
1  const double EPS = 1e-9;
```

2. Бывает, что требуется число  $\pi$ . Во-первых, его, конечно же, можно запомнить с желаемой точностью, но если запоминать его не хочется, то можно воспользоваться вторым способом — аркфункциями, например арккосинусом:

```
1  const double PI = acos(-1);
```

3. В вычислительной геометрии часто численный ответ просят вывести с заданной точностью. Мы проходили раньше, как это делать, но всё же напомним, что для этого в начале программы достаточно написать:

```
1  cout << fixed << setprecision(9);
```

После такой строчки числа не будут выводиться в экспоненциальном виде и всегда будут иметь заданное количество знаков (у нас 9) после запятой.

4. Если будете использовать классы, представленные в этом разделе, то в начале нужно будет объявить константы, потом добавить вот эти две строчки:

```
1  template<typename T>
2  struct Vector;
```

А после этого, можно будет и написать все классы в том порядке, в котором они были представлены (сначала `Point`, потом `Vector` и в конце `Line`). Две строки кода, написанные чуть выше, нужны для сложения точки с вектором (иначе компилятор к моменту использования вектора ни разу не видел объявления этого класса).

5. Кроме базовых операций, о которых говорилось раньше, ещё очень часто требуется определять взаимное расположение трёх точек  $a$ ,  $b$  и  $c$ . А именно, требуется определять, с какой стороны от прямой  $ab$  лежит точка  $c$  (если смотреть из  $a$  на  $b$ ): справа («*Clockwise (CW)*» — поворот по часовой стрелке), слева («*Counter Clockwise (CCW)*» — поворот против часовой стрелки) или на  $ab$ . Делается это с помощью знака псевдоскалярного произведения:

```
1  template<typename T>
2  T area2(Point<T> a, Point<T> b, Point<T> c){ return Vector<T>(a, b) % Vector<T>(a, c); }
3  template<typename T>
4  bool cw(Point<T> a, Point<T> b, Point<T> c){ return area2(a, b, c) < 0; }
5  template<typename T>
6  bool ccw(Point<T> a, Point<T> b, Point<T> c){ return area2(a, b, c) > 0; }
7  template<typename T>
8  bool collinear(Point<T> a, Point<T> b, Point<T> c){ return abs(area2(a, b, c)) < EPS; }
```

## Геометрия: продолжение

Мы продолжаем изучать вычислительную геометрию и сегодня перейдём к алгоритмам, работающим с ещё более сложными геометрическими объектами (многоугольниками и наборами точек). Для этих алгоритмов мы будем использовать уже написанные нами классы, при этом, для многоугольников создавать отдельного класса мы не будем, потому что алгоритмы достаточно объёмны, и использовать их в одной задаче вряд ли понадобится.

Единственное, что стоит сказать про многоугольники, это способ их хранения: набор точек в порядке их обхода (по часовой стрелке или против). При для  $n$ -угольника удобно хранить на одну точку больше:  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n = p_0$ , чтобы все стороны многоугольника легко обходились одним циклом без дополнительных условий:  $p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow \dots \rightarrow p_{n-1} \rightarrow p_n$ .

### Площадь многоугольника

Первым алгоритмом мог бы быть поиск периметра многоугольника, но это совсем тривиальный алгоритм, ведь достаточно сложить длины сторон, а это мы уже умеем делать (например, через длину вектора). Поэтому первым нашим алгоритмом будет поиск площади многоугольника. Хотя для многоугольников и нет такой простой формулы, как, например, для треугольника или прямоугольника, но всё равно площадь многоугольника можно вычислить, если разбить его на отдельные фигуры.

**«Метод трапеций».** Оказывается, что многоугольник очень хорошо разбивается на трапеции, площадь которых уже легко считается. Пусть мы рассматриваем очередную сторону из точки  $a = p_i$  в точку  $b = p_{i+1}$ , тогда рассмотрим трапецию с точками  $a, b, c(b_x; 0), d(a_x; 0)$  и вычислим её площадь  $\Delta S = \frac{1}{2} \cdot (b_y + a_y) \cdot (b_x - a_x)$ . А если мы посчитаем суммы всех таких площадей, то как раз получится площадь исходного многоугольника (потому что часть из этих слагаемых положительна, а часть отрицательна, и как раз всё получается хорошо).

Формула, конечно, приятная, но вот ее верность не очевидна. Чтобы проверить верность формулы, будем доказывать, что каждая точка<sup>8</sup> посчитана правильное количество раз (точки внутри многоугольника должны быть посчитаны ровно один раз, вне — 0 раз, а на границе — без разницы, потому что суммарная площадь границы всё равно 0).

А теперь рассмотрим какую-нибудь точку  $r(r_x; r_y)$ , не лежащую на границе (для определённости  $r_y > 0$ , случай  $r_y = 0$  понятен, а  $r_y < 0$  аналогичен текущему), построим точку  $r'(r_x; 0)$ , проведём прямую  $rr'$ . Далее рассмотрим все стороны, которые пересекают  $rr'$  (то есть потенциально влияют на учёт точки  $r$ ). Во-первых, не будем учитывать вертикальные стороны (которые лежат на  $rr'$ ), ведь для них  $\Delta S = 0$  и они ни на что не влияют. А во-вторых понятно, что нужны только стороны, пересекающие  $rr'$  выше  $r$ , ведь только они учитывают нашу точку  $r$ .

А теперь всё совсем просто, ведь если точка лежит вне многоугольника, то должно остаться чётное количество прямых, ведь над  $r$  должно быть какое-то целое количество частей многоугольника, и у каждой из них должна быть верхняя и нижняя сторона. Но раз мы в нашем алгоритме по очереди обходим все стороны, то по одной стороне мы должны пройти слева направо, а по другой справа налево, а следовательно наша точка  $r$  посчитается 0 раз. А если же точка лежит внутри многоугольника, то на пары разобьются все стороны, кроме самой верхней (или самой нижней), а значит точка  $r$  посчитается ровно 1 раз. И, очевидно, что все точки внутри будут посчитаны с одинаковым знаком (потому что разные части верхней границы мы не могли пройти в разные стороны, ведь обходим вершины последовательно).

---

<sup>8</sup> Так как площадь точки 0, то, возможно, правильнее разбивать на маленькие прямоугольники. Но, понятно, что поскольку в программах точность координат у точек конечная, то такое разбиение точно найдётся. Поэтому, для дальнейшего удобства, будем использовать точки.

**«Метод треугольников».** Но рассмотренный способ не единственный и существует другой. Произвольно выберем точку  $O$  и для каждой стороны из точки  $a = p_i$  в точку  $b = p_{i+1}$  посчитаем «ориентированную площадь» треугольника  $Oab$ :  $\Delta S = \frac{1}{2} \cdot (\vec{Oa} \wedge \vec{Ob})$ . И в конце нужно просуммировать все эти частичные суммы.

Снова алгоритм не сложный, но не очевидный, поэтому будем его доказывать (благо доказательство почти такое же). Для каждой точки  $r$  будем доказывать, что она посчитана нужное число раз. Точка же считается только когда сторона пересекает луч  $Or$  за точкой  $r$ , при этом стороны, лежащие на луче, мы учитывать не будем. Если  $r$  лежит вне многоугольника, то мы имеем чётное количество пересечений, разбиваемые на пары, а следовательно  $r$  посчитается 0 раз. Если же  $r$  лежит внутри, то получим нечётное количество пересечений, все из которых, кроме одного, разобьются на пары и самоуничтожатся. А оставшаяся одна сторона посчитает нашу точку  $r$  ровно один раз, причём все точки внутри многоугольника будут посчитаны с одним знаком, ведь мы обходим стороны последовательно.

Теперь мы знаем два метода вычисления площади многоугольников, оба из которых работают за  $O(n)$ . При этом, если у нас точки целочисленные, то площадь будет «полуцелым» числом (так называются числа вида  $\frac{m}{2}$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ ), поэтому лучше вынести коэффициент  $\frac{1}{2}$ , и сначала посчитать удвоенную площадь, а в конце только один раз поделить её на 2 (так погрешность будет меньше). Ещё стоит добавить, что второй способ можно модифицировать, если у нас будут более сложные фигуры, у которых стороны не прямые, а, например, дуги окружностей (формула поменяется, но общий алгоритм останется прежним).

## Принадлежность точки многоугольнику

Теперь пусть нам дан многоугольник  $p$  и требуется проверить, где лежит данная точка  $r$ : внутри, снаружи или на границе многоугольника. Но определить принадлежность точки границе легко (просто переберём все стороны и проверим принадлежность точки отрезку), поэтому нам нужно научиться разделять точку внутри и снаружи многоугольника.

**Ray shooting.** Этот метод очень похож на то, что мы делали раньше, когда искали площадь многоугольника. Выпустим какой-нибудь луч из точки  $r$  и будем считать количество сторон, пересекающих луч. Если оно оказалось нечетным, то точка внутри многоугольника, а если чётным — то снаружи. Единственная проблема — случай, когда луч прошёл через вершину многоугольника, в таком случае можно действовать несколькими способами:

1. Выпускать новый луч, пока эта проблема не устранилась. Такой способ достаточно весёлый и действенный, причём если генерировать луч не случайным образом, то при целочисленных точках такая проблема гарантирована не возникнет, например, если все точки в задаче из диапазона  $[-C; C]$ , то можно выпустить луч в точку  $(3C + 1; 3C + 2)$  и всё будет хорошо из соображений теории чисел.
2. Если предыдущий способ показался каким-то ненадёжным, то давайте немного модифицируем алгоритм. Выпустим луч вправо (чтобы он прошёл через  $(r_x + 1; r_y)$ ) и будем засчитывать пересечение только если один из концов стороны строго ниже луча, а другой конец — выше или лежит на луче. Утверждается, что такой способ даёт верные ответы, что читатель может попробовать доказать самостоятельно.

**Winding number.** Будем суммировать углы поворота нашей точки, для этого проведём  $\vec{a} = \vec{rp_i}$  и  $\vec{b} = \vec{rp_{i+1}}$ , и к текущей сумме углов добавим  $\Delta\theta = \widehat{a; b}$  (это мы как раз уже умеем считать). Если в итоге сумма  $\theta$  оказалось равна 0, то точка лежит вне многоугольника, а если же  $\theta = \pm 2\pi$ , то точка лежит внутри многоугольника. Видно, что этот способ очень простой, главное в конце учесть погрешности, которые могли накопиться при вычислении большого количества углов.

Оба представленных выше алгоритма работают за  $O(n)$ , причём проверка принадлежности точки границе многоугольника делается с такой же сложностью, а значит и вся классификация выполняется за линейное время.

**Выпуклый случай.** Но не всё так просто, как могло бы показаться. Оказывается, что для выпуклых многоугольников существует более быстрый алгоритм, основанный на бинарном поиске.

Найдём самые левые точки и выберем из них самую нижнюю, назовём её  $O$ . Теперь заметим, что из-за выпуклости остальные точки упорядочены по углу относительно точки  $O$ , причём эти углы лежат в диапазоне  $(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  радиан. Поэтому если точка  $r$  не попала в этот диапазон, то она точно не лежит внутри многоугольника, а если попала, то можно сделать бинарный поиск, который найдёт две такие вершины  $a$  и  $b$ , что луч  $Or$  лежит между лучами  $Oa$  и  $Ob$ . А после этого остаётся лишь проверить, лежит ли точка  $r$  внутри треугольника  $Oab$ , что делается хоть через CW/CCW, хоть через способы, изученные чуть раньше.

Сложность такого алгоритма составляет всего  $O(\log n)$  на один запрос, но при этом требуется предподсчёта за  $O(n)$  для поиска точки  $O$ .

## Выпуклая оболочка

Последняя задача, которую мы сегодня изучим, берёт множество точек и строит по ним «выпуклую оболочку» — выпуклый многоугольник минимальной площади, в котором содержатся все исходные точки. Оба алгоритма, которые мы пройдем, будут основываться на том факте, что у выпуклых многоугольников для троек подряд идущих вершин выполняется или всегда CW, или всегда CCW, в зависимости от обхода многоугольника по/против часовой стрелки.

**Алгоритм Грэхема.** Выберем самую правую точку из самых нижних и назовём её опорной  $r$ . Затем отсортируем все остальные точки относительно опорной: сначала будут идти точки с меньшим углом, а если у каких-то точек угол одинаковый, то раньше будет идти та точка, которая ближе к опорной.

Теперь заметим, что опорная точка  $r$ , а также самая маленькая  $p_0$  и самая большая  $p_{n-2}$  точно должны лежать в выпуклой оболочке. Поэтому добавим их в стек  $s$  в порядке  $p_{n-2}$ ,  $r$ ,  $p_0$ . А далее для всех вершин  $p_2, p_3, \dots, p_{n-2}$  будем действовать следующим образом: если  $s_{|s|-1}, s_{|s|}$  (последние точки стека) и  $p_i$  образуют CCW, то добавляем  $p_i$  в  $s$  и переходим к следующему  $i$ ; иначе у нас неправильный поворот, поэтому удаляем последнюю вершину из  $s$ .

Правильность алгоритма, вроде бы, очевидна, ведь самую дальнюю точку по углу нам точно придётся брать и при этом они должны образовать выпуклую фигуру, чего мы и добились проверкой на CCW. Также понятно, что опорная точка тоже должна лежать в выпуклой оболочке, ведь оно является крайней и не может быть включена в оболочку за счёт других рёбер.

**Алгоритм Эндрю.** Найдём две опорных точки:  $a$  — самая нижняя из левых и  $b$  — самая верхняя из правых точек. Теперь разобьём все точки на два множества (верхнее и нижнее) в зависимости от расположения с прямой  $ab$ , при этом точки  $a$  и  $b$  попадают в оба множества, а точки на отрезке  $ab$  можно никуда не добавлять, потому что они точно не будут в выпуклой оболочке. Для каждого множества будем отдельно строить выпуклые оболочки, причём точки  $a$  и  $b$  точно лежат в обеих.

Для верхнего множества в стек  $u$  добавим  $a$ , аналогично сделаем для нижнего  $d$ . Теперь отсортируем все точки каждого множества, кроме  $a$  сначала по координате  $x$ , а потом по  $y$ . Далее пойдём по верхнему множеству и пока  $|u| \geq 2$  и при этом поворот точек  $u_{|u|-1}, u_{|u|}, p_i$  неправильный (не CW) будем удалять верхнюю вершину из стека  $u$ , а после всех удалений добавим  $p_i$  на стек. Аналогично сделаем в нижнем множестве, только вместо CW поворота будем проверять CCW.

После этого у нас в обоих будут какие-то последовательности вершин  $u = a, u_2, u_3, \dots, u_{|u|-1}$ ,  $b$  и  $d = a, d_2, d_3, \dots, d_{|d|-1}$ ,  $b$ , которые нужно объединить в итоговую выпуклую оболочку  $h = a, u_2, u_3, \dots, u_{|u|-1}, b, d_{|d|-1}, d_{|d|-2}, \dots, d_2$ , что делается за линейное от размера оболочки время.

Правильность же алгоритма следует из правильности Алгоритма Грэхема, ведь если выбрать опорной точку  $(0; -\infty)$ , то сортировка по координате эквивалентна сортировке по углу.

Сложность у обоих алгоритмов составляет  $O(n \log n)$ , поскольку требуется сортировка, а после алгоритмы действуют за линейное время.

Стоит заметить, что можно доказать оптимальность такой временной сложности для алгоритмов, не зависящих от размеров выходных данных. В самом деле, пусть нам дали  $n$  точек, лежащих на одной параболе:  $(x_1; x_1^2), (x_2; x_2^2), \dots, (x_n; x_n^2)$ . Тогда все эти точки должны оказаться в выпуклой оболочке, а значит, алгоритм построения выпуклой оболочки должен будет отсортировать все точки по координате  $x$  а после этого соединить их последовательно. Но а сортировка, как мы доказывали раньше, в общем случае делается за  $O(n \log n)$ .

Но всё же, если использовать алгоритмы сортировки, не основанные на сравнениях (так, например, можно сделать с целыми числами), то можно будет строить выпуклую оболочку с той же временной сложностью, что и для алгоритма сортировки. К тому же, если алгоритм как-то зависит от количества  $h$  вершин итоговой выпуклой оболочки, то его сложность в общем виде  $O(n \log h)$ , но, при этом, может быть ещё улучшена за счёт алгоритмов сортировки.

Также стоит сказать, что существуют алгоритмы, работающие и для 3, 4, 5,  $n$ -мерных пространств, но мы их рассматривать не будем, ведь это не требуется в олимпиадной информатике.

# Алгоритмы на строках

Сегодня нас ждёт тема, которой не было в первой версии книги. Идея добавления этой главы возникла из-за поездки автора книги в Сириус. Поэтому сегодня мы пройдем базовые алгоритмы на строках: хеширование, z-функцию и префикс-функцию. Стоит отметить, что алгоритмов на строках достаточно много, но в этой главе будут рассмотрены только самые простые.

## Хеширование

Пусть перед нами стоит такая задача: дано  $m$  строк:  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , каждая из которых имеет длину  $n$ . Требуется проверить все пары строк на равенство.

Понятно, что эта задача решается за  $O(m^2 \cdot n)$  простым перебором всех пар строк и их посимвольным сравнением. Но всё же интересно, можно ли решать эту задачу быстрее? Оказывается, что да: можно сравнивать две строки за  $O(1)$  с помощью «хэшей», но при этом такое сравнение может иногда выполняться не точно. Но давайте разберёмся со всем по порядку.

Хешем называется преобразование набора данных произвольной длины в данные какой-то фиксированной длины. При этом, судя по происхождению от слова «*hash*» (переводится как «*превращать в фарш*» или «*мешанина*»), исходный набор данных восстановить нельзя. Поскольку длина выходного хеша фиксирована, то неизбежны «*коллизии*» — то есть совпадение хэшей для разных входных данных. Но поскольку вероятность коллизий мала, особенно при правильном выборе хэш-функции, то они используются на практике как в практических задачах, так и в олимпиадном программировании.

Оказывается, что в качестве хеша в олимпиадных задачах очень удобно использовать функцию вида:  $h = s_1 + s_2 \cdot P + s_3 \cdot P^2 + \dots + s_n \cdot P^{n-1}$ , где  $s$  — исходная строка,  $h$  — результирующий хэш, а  $P$  — постоянное число. При этом логично выбирать  $P$  простым, и большим, чем размер используемого алфавита (символы, которые потенциально могут встретиться в строке). Если бы числовые типы данных были бы произвольного размера и всегда бы быстро сравнивались, то таких хеши получались бы разными для разных строк. Но поскольку встроенные длинные типы данных есть не во всех языках, а их сравнение всё равно выполняется долго, то считая эту сумму по какому-нибудь модулю, мы увеличиваем шанс коллизий, но при этом ускоряем алгоритм. На практике в C++ брать по модулю не обязательно, ведь встроенные типы данных сами это делают при переполнении, поэтому можно просто считать эту сумму, ни о чём не думая :)

## Z-функция

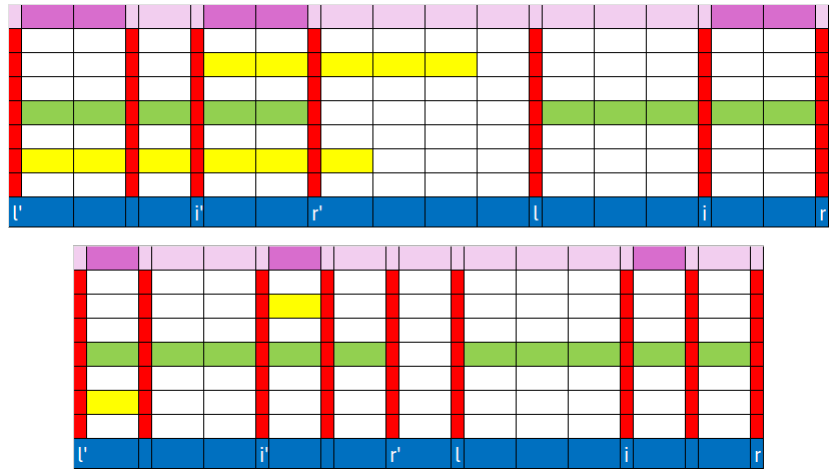
Теперь, когда мы научились проверять две строки на равенство, хочет научиться и более сложным операциям, например вычислять на сколько две строки похожи. Но две строки — это слишком много, поэтому давайте мы их склеим через какой-то разделитель и будем смотреть на сколько конец строки похож на её начало.

Более формальное определение «*z-функции*»:  $z_i$  — это количество символов, начиная с позиции  $i$ , совпадающих с началом строки. При этом  $z_1$  фактически не даёт полезной информации, поэтому можно считать, что  $z_1 = 0$  или  $z_1 = n$ , где  $n$  — длина строки. Эту функцию легко посчитать за  $O(n^2)$ , ведь для каждой позиции можно перебирать все идущие после неё символы. Но такая сложность нас не устраивает, ведь можно написать более быстрый алгоритм.

Для этого будем поддерживать наибольший уже просмотренный отрезок  $[l; r]$ , совпадающий с началом строки  $[0; r - l]$ . Тогда при вычислении  $z_i$  могут возникнуть всего две ситуации:

Если  $i$  попало в  $[l; r]$ , тогда мы знаем, что зелёные части строк совпадают (где  $l' = 0, i' = i - l, r' = r - l$ ). Посмотрим на  $z_{i'}$  (на рисунке жёлтым), тогда можно заметить, что в качестве  $z_i$  точно можно взять фиолетовый кусочек, который можно посчитать как:

$$z_i = \min(z_{i'}, r - i)$$



Если  $i$  не лежит в отрезке  $[l; r]$ , то воспользоваться предыдущей информацией не получится, поэтому можем только предположить  $z_i = 0$ . А вот дальше в обеих ситуациях стоит запустить тривиальный алгоритм, так как оценка на  $z_i$  могла быть маленькой.

А после вычисления  $z_i$  можно обновить  $[l; r]$  на  $[i; i + z_i]$ , если у нового отрезка правый конец правее старого. Для большего понимания описанного выше алгоритма, хочется привести код, его реализующий:

```

1  vector<int> zf(string s) {
2      int n = s.size(), l = 0, r = 0;
3      vector<int> z(n);
4      z[0] = 0;
5      for(int i = 1; i < n; ++i) {
6          if (i > r) z[i] = 0;
7          else {
8              int j = i - 1;
9              z[i] = min(z[j], r - i);
10         }
11         while (i + z[i] < n && s[z[i]] == s[i + z[i]]) z[i]++;
12         if (i + z[i] > r) l = i, r = i + z[i];
13     }
14     return z;
15 }
```

Теперь перейдём к оценке сложности алгоритма. Кажется, что мы недалеко ушли от тривиального решения, ведь мы добавили всего пару проверок. Но на самом деле этот алгоритм работает за  $O(n)$ , потому что всегда при вычислении нового  $z_i$  используется как можно больше старых данных, поэтому все новые вычисления производятся только после позиции  $r$ , ну а границы движутся только вправо, откуда и получаем линейную сложность.

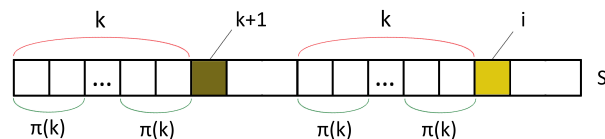
## Префикс-функция

«Префикс-функция» это ещё один способ проверить на сколько часть строки похожа на её начало. А именно,  $p_i$  — это самое большое количество символов такое, что часть  $[i - p_i + 1, i]$  совпадает с началом строки.

Зачем же нам ещё одна функция, очень похожая на предыдущую? А вот оказывается, что обе функции бывает запомнить сложно, но одну через другую вспомнить проще. К тому же для сложных алгоритмов может понадобиться какая-то конкретная из этих двух функция.



Теперь перейдём к её работе. По определению префикс-функции при вычислении  $p_i$  мы знаем  $k = p_{i-1}$ , то есть совпадение красных отрезков  $([0; k])$  и  $(i - 1 - k; i - 1])$ . Тогда, если так оказалось, что  $s_i = s_k$ , то нашли самый большой подходящий отрезок. Иначе же мы можем рассматривать только зелёные отрезки



Для наглядности приведём код и этого алгоритма:

```

1  vector<int> pf(string s){
2      int n = s.size();
3      vector<int> p(n);
4      p[0] = 0;
5      for(int i = 1; i < n; ++i){
6          int j = p[i - 1];
7          while(j > 0 && s[j] != s[i]) j = p[j - 1];
8          if (s[i] == s[j]) ++j;
9          p[i] = j;
10     }
11     return p;
12 }
```

Оказывается, что и этот алгоритм выполняется за  $O(n)$  (ведь иначе о нём было бы странно рассказывать :)). Такая сложность получается из-за того, что от позиции к позиции значение префикс-функции или уменьшается, или увеличивает не больше, чем на один. А раз так, то всего таких увеличений (и соответственно уменьшений) не больше, чем количество символов в строке, а поскольку каждое увеличение и уменьшение делается быстро, то итоговая сложность линейная.

## Применение этих алгоритмов

Разных задач, конечно же, много, но всё же часть из них стоит кратко упомянуть, ведь они решаются через пройденные в этой главе алгоритмы.

**Проверка на палиндромность.** Пусть у нас для одной строки поступает много запросов, для которых требуется проверить, является ли фрагмент строки  $[l; r]$  палиндромом. Здесь нам на помощь придут хеши, ведь, по сути, требуется проверять, равна ли строка её развороту. А значит посчитаем хэш для обычной строки и хэш для развёрнутой. Тогда при аккуратной работе с индексами, мы можем получить хэш одного участка строки и слева, и справа, и если эти хеши окажутся равны, то значит фрагмент строки является палиндромом.

**Сжатие строки.** Предположим, что какую-то короткую строку записали несколько (возможно не целое) количество раз и дали нам полученную длинную строку. Требуется понять, какой могла быть короткая строка и из всех этих вариантов выбрать с самой короткой строкой. Вот оказывается, что ответом будет строка  $[0; i)$ , где  $i$  — первый индекс, для которого выполняется равенство  $i + z_i = n$ .

**Поиск подстроки в строке.** Пусть нам требуется найти какой-то образец длины  $n$  в тексте и вывести все позиции, где этот образец начинается. Тогда, как уже говорилось выше, давайте сделаем одну строку, в начале которой будет образец, потом разделитель (этот разделитель не должен встречаться в строках), а в конце уже сам текст. Тогда понятно, что все  $i$ , для которых выполняется  $z_i = n$ , являются началами вхождений образца. Для префикс-функции же, имеем  $p_i = n$  для концов образцов.

# Рандомизированные алгоритмы

Как и предыдущая, эта тема возникла благодаря поездки автора книги в Сириус. В этой главе мы изучим алгоритмы, главной основой которых являются случайные числа. Применять же такие алгоритмы мы можем, когда в задаче требуется найти приближённое значение какой-то величины, или найти максимально хорошую конструкцию для какой-либо задачи. Понятнее это станет на примерах.

## Метод Монте-Карло

Пусть нам задана функция  $f(x)$  и требуется вычислить её определённый интеграл:  $\int_a^b f(x) dx$ . Если функция  $f$  простая, то такой интеграл можно выразить через другие математические функции, но для сложных функций  $f$  такой интеграл может и не посчитаться. Поэтому перед информатиками ставится задача численно вычислять такие величины.

Геометрическая интерпретация интеграла — площадь под графиком, поэтому немного переформулируем нашу задачу. Пусть на плоскости есть какая-то фигура сложной формы и нам требуется узнать её площадь. Тогда нам на помощь приходит «Метод Монте-Карло», который может численно решить такую задачу.

Суть самого метода очень проста: ограничим нашу фигуру какой-нибудь другой, площадь которой  $S$  мы точно знаем (например, площадь прямоугольника или окружности). Тогда если сложная фигура будет иметь площадь  $S_0$ , то оказывается, что будет верно равенство:  $\frac{S_0}{S} = \frac{N_0}{N}$ , где  $N$  — количество случайно взятых точек внутри простой фигуры, а  $N_0$  — сколько из этих точек попали внутрь сложной фигуры. Тогда площадь сложной фигуры можно выразить:  $S_0 = S \cdot \frac{N_0}{N}$ .

Корректность этого метода основывается на геометрической вероятности и математическом ожидании, поэтому приводить полное доказательство этого метода в книге не хочется. Из важного же стоит сказать, что если мы хотим получить точность оценки площади  $\frac{1}{r}$ , то нам потребуется взять  $N = r^2$ , например, если требуется точность 0.01, то достаточно взять 10000 случайных точек (но можно и больше, хуже не будет).

Для примера, посчитаем данным методом площадь прямоугольного треугольника с вершинами (0; 0), (0; 1) и (1; 0), взяв за известную фигуру прямоугольник (0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0):

```
1  #include <iostream>
2  #include <random>                                     // для mt19937
3  #include <chrono>                                       // для chrono
4
5  using namespace std;
6  const int n = 1000000, D = 10000;
7
8  int main(){
9      mt19937 rnd(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
10     uniform_int_distribution<> dist(0, D);              // случайные числа из [0; D]
11     int n0 = 0;
12     for(int i = 0; i < n; ++i){
13         double x = 1. * dist(rnd) / D, y = 1. * dist(rnd) / D; // обе координаты в [0; 1]
14         n0 += (x + y < 1);                                   // внутри треугольника?
15     }
16     cout << 1. * n0 / n;
17     return 0;
18 }
```

Можно поэкспериментировать с количеством точек и убедиться в получаемой точности. Но поскольку в алгоритме используются случайные величины, то он может выдавать немного разные

ответы при новых запусках и точность может варьироваться. Поэтому, если отправлять случайные алгоритмы на проверку несколько раз, то они могут набрать разное количество баллов :)

## Локальные оптимизации

Пусть нам нужно решить какую-то сложную задачу, в которой есть несколько решений, но с нас требуется одно найти лишь одно любое. Тогда мы могли перебрать все варианты и проверить, являются ли они решениями, но бывает, что перебирать все варианты долго. Поэтому снова приходится прибегать к случайным числам.

Сгенерируем какое-нибудь решение и будем пытаться его оптимизировать. На каждом шаге оптимизации будем пытаться поменять один элемент в решении и если оно от этого улучшится, то применим это изменение, а иначе ничего делать не будем. Этот метод и называется «*локальные оптимизации*». Минусами такого метода является вероятность его захождения в тупик, то есть в такую позицию, которую нельзя улучшить. В таких ситуациях стоит начать поиск решения с начала, или же применить какое-то ухудшающее изменение.

Оказывается, что ухудшающие изменения можно совершать не только при захождении в тупик, но и при обычных попытках оптимизации. Но такие изменения следует делать не очень часто на хороших решениях, чтобы случайно их не ухудшить слишком сильно.

Для этого введём  $T$  — текущая «температура» и  $f(u)$  — функция, которая возвращает, насколько решение  $u$  хорошо (чем меньше, тем лучше, 0 для наилучшего решения). Тогда если для старое решение  $old$ , а новое —  $new$ , то улучшающие изменения нужно делать всегда, а ухудшающие только с вероятностью  $e^{\frac{f(old)-f(new)}{T}}$ . А температуру на каждой оптимизации будем менять по правилу  $T' = T \cdot k$ , где  $k \approx 0.99$ , но эту константу нужно подбирать. Данный метод называется «*отжигом*» (или методом «*паяльника*», потому что горячим паяльником тыкают в хорошие решения, от чего им приходится ухудшаться :)) и с его помощью можно решить какое-то количество задач.

Также, кроме отжига, есть и другие улучшения локальных оптимизаций. Одним из них являются «*генетические*» (или «*эволюционные*») алгоритмы. Их суть в том, что текущее решение мы скопируем несколько раз и для каждой копии отдельно сделаем набор «*мутаций*» (можно как в методе отжига). После этого проведём «*естественный отбор*» и выберем лучшие мутации. Можно выбирать несколько лучших вариантов, можно один, здесь всё уже зависит от желания :)

## Другие применения рандома

**Арифметическая прогрессия.** Пусть дано  $2n$  чисел, среди которых  $n$  образуют арифметическую прогрессию, которую требуется найти.

Выберем два случайных числа из  $2n$ , тогда вероятность, что они оба принадлежат арифметической прогрессии, будет 0.25. То есть спустя 4 таких выбора мы (это математическое ожидание, случайно может понадобится много таких выборов), найдём пару чисел из арифметической прогрессии. Проверка же, что пара чисел находится в арифметической прогрессии, делается через перебор шага прогрессии среди делителей разности выбранных элементов.

**«Градиентный спуск».** В нейросетях существует такой метод, как градиентный спуск. Суть его в том, что нам даны какие-то точки в многомерном пространстве и нам нужно так подобрать коэффициенты, чтобы заданная функция была максимально близка к этим точкам. Поскольку параметров очень много, то перебирать их все не получаются и используют математические формулы.

Но недостаток этих формул в том, что их достаточно долго считать, если использовать все данные точки. Поэтому используют только часть, которую можно выбирать случайным образом. ведь если часть не очень маленькая, то она должна быть примерно такой же, как и все данные. Такой градиентный спуск называется «*стохастическим*» (в переводе означает «*случайный*»).