

Movimiento armónico simple y oscilador amortiguado

David Santa Rozo* and Sergio Laverde**

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 27 de febrero de 2024)

I. INTRODUCCION

La generalización del movimiento de un péndulo, sea este físico o ideal, esta descrito por la ecuación (1), en la cual a primera vista no cumple la condición de linealidad requerida entre el ángulo θ y la aceleración angular $\ddot{\theta}$ sin embargo este problema se puede evitar si se condicional el movimiento a ángulos menores a 10° , lo que provoca que $\sin(\theta) = \theta$. Gracias a esta aproximación, se puede definir la ecuación diferencial necesaria para conocer las expresiones de la frecuencia natural ω_0 y el factor de amortiguamiento γ las cuales son presentadas en las ecuaciones (2) y (3) respectivamente.

$$-mg\sin(\theta)L - bL^2\dot{\theta} = I\ddot{\theta} \quad (1)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{bL^2}{I} \quad (3)$$

A. Esfera de cobre

Para la primera parte que se trabajó en la práctica se usó una esfera de cobre de 0.05Kg y de un diámetro muy pequeño en comparación a la longitud de la cuerda del péndulo, por lo que, para este caso se tomó este sistema como un MAS de un péndulo ideal y sin amortiguamiento. Así pues, el ω para esta situación queda $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

B. Esfera de ICOPOR

Por otro lado, para la segunda parte se usó una pelota de ICOPOR, la cual tenía una masa de 0.041Kg, y un radio apreciable comparado con el largo de la cuerda, por lo tanto, para este caso si fue necesario usar las

ecuaciones de péndulo físico, además que al haber una mayor superficie de contacto con el aire el rozamiento afectaba en mayor escala el movimiento, por lo tanto, también se tomó como amortiguado.

II. ANÁLISIS CUALITATIVO

- **¿Qué diferencia apreciable se ve en las oscilaciones de la esfera de bronce y la de ICOPOR?**
- Las principales diferencias que se observaron entre las oscilaciones de ambos cuerpos, fue que una fue armónica mientras que la otra fue su amortiguada.
- **Suponga que tanto la esfera de bronce como la de ICOPOR tienen la misma masa, pero como las densidades son diferentes, su tamaño también. ¿En ese caso se ven también diferencias en las oscilaciones? ¿Por qué?**
- La diferencia hubiera sido la misma, esto debido a que lo importante en este caso es el tamaño de la esfera, que es lo que causa, al menos para la de ICOPOR, que el rozamiento con el aire sea apreciable. Añadido a lo anterior, las masas que se midieron fueron muy similares, por lo tanto, esto confirma lo mencionado.
- **¿Qué pasaría con la frecuencia y el periodo del péndulo físico amortiguado si la cuerda se cambia por una varilla con masa significativa?**
- En caso de que la cuerda se cambie por una varilla con masa significativa, esto cambiaría el momento de inercia total del sistema, al cual se le tendría que sumar el de la nueva barra, con lo que se obtiene un aumento en el periodo, ya que, para el péndulo físico, el T_0 es proporcional al momento de inercia I .

III. ANÁLISIS CUANTITATIVO

A. Análisis Esfera cobre

Con los datos de la esfera pequeña se debe realizar lo siguiente:

* Correo institucional: d.santar@uniandes.edu.co

** Correo institucional: s.laverdeg@uniandes.edu.co

1. Calcule el periodo ideal para cada altura, según la fórmula para un péndulo simple.

Longitud de la cuerda (m)	Periodo ideal (s)
1,5	2,46
1,35	2,34
1,2	2,2
1,05	2,06
0,9	1,91
0,75	1,74

Cuadro I. Periodo de oscilación para cada altura.

2. Calcule la diferencia entre el periodo ideal y el periodo obtenido experimentalmente.

Longitud de la cuerda (m)	Periodo ideal (s)	Periodo experimental (s)	Error absoluto (s)
1,5	2,46	2,47	0.01
1,35	2,34	2,36	0.02
1,2	2,2	2,21	0.01
1,05	2,06	2,04	0.02
0,9	1,91	1,91	0
0,75	1,74	1,74	0

Cuadro II. Diferencia entre periodo teórico y experimental.

3. Con los datos de periodo experimental y altura, realice una gráfica adecuada para obtener la gravedad en Bogotá y compárelo con el valor teórico. De la ecuación 2 obtenemos para un péndulo simple:

$$w_0^2 = \frac{g}{L} \quad (4)$$

Si para nuestros datos experimentales graficamos w_0^2 vs $\frac{1}{L}$ tendríamos como pendiente la aceleración de la gravedad en Bogotá como se muestra en la figura 1. Regresión realizada mediante mínimos cuadrados.

Dando un valor experimental para g en Bogotá de:

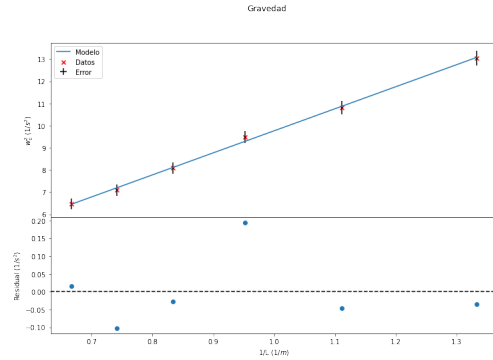
$$g_{exp} = 9,92798 \pm 0,20601 \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

Del cual el valor esperado es de:

$$g_{teo} = 9,76871 \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

Con un error de:

$$\begin{aligned} E_{relativo} &= 0,016 \\ E_{absoluto} &= 0,2\sigma_g \end{aligned} \quad (5)$$

Figura 1. w_0^2 vs $\frac{1}{L}$

Y el cociente de incertidumbre sobre valor experimental de:

$$\frac{\sigma_g}{g_{exp}} = 0,02$$

B. Análisis Esfera ICOPOR

1. Con los datos de γ , encuentre b para cada caso. ¿Cómo se comparan estos valores entre ellos?

L [m]	$b \times 10^{-4} [s^{-1}]$
1,5	5.46
1,35	5.98
1,2	4.67
1,05	4.28
0,9	4.87
0,75	5.04

Cuadro III. B encontrado para cada altura.

R/ A priori se sabe que el B debería ser el mismo para la misma toma de datos, puesto que se varió la altura del péndulo, lo que no debería afectar ni la viscosidad del aire, ni la superficie de contacto entre el aire y la esfera. Según los resultados presentados en el cuadro III se puede evidenciar que lo mencionado se cumple, puesto que se obtiene un resultado muy similar para todos los casos. Más rigurosamente, al obtener el promedio y la desviación estándar de estos datos, obtenemos que el valor es de $b = (5,0 \pm 0,6) \times 10^{-4}$, lo cual significa que la precisión fue aceptable.

2. Determine los valores teóricos de la frecuencia natural.

L [m]	ω_0 Experimental	ω_0 Teorico
1,5	2,48	2,49
1,35	2,61	2,61
1,2	2,77	2,76
1,05	2,97	2,94
0,9	3,17	3,15
0,75	3,47	3,42

Cuadro IV. frecuencias naturales teóricas y experimentales encontradas para cada altura

3. Según los valores obtenidos experimentales y teóricos, ¿se puede decir que el experimento fue exitoso?

R/ La similitud entre las frecuencias naturales angulares de la columna experimental y teórica dan a entender que el experimento fue un gran éxito.

4. Compare para una longitud el periodo de un péndulo simple con el de un péndulo físico. ¿El resultado de comparar las correcciones de período de ambos péndulos será suficiente para ver el efecto de la fuerza de fricción sobre el sistema?

R/ Al comprar los periodos naturales de la altura 1.35 m obtenemos una diferencia de 0.05s. Sin embargo, esta diferencia realmente no se podría atribuir a la fuerza de fricción que amortigua el movimiento de la esfera de ICOPOR, ya que el Q de este sistema es de 200. Por lo tanto, prácticamente el periodo con o sin amortiguamiento serian iguales, por lo menos, en los órdenes de magnitud manejados, Así pues, se piensa que esta discrepancia es ocasionada al manejar un cuerpo como péndulo ideal mientras que el otro como péndulo físico.

IV. CONCLUSIONES

Para finalizar, es importante mencionar que se logró cumplir con los objetivos planteados para la práctica, ya que se logró estudiar las oscilaciones de un péndulo simple comparando los resultados de la práctica con los teóricos. Además, se estudió un ejemplo de oscilador amortiguado que fue el péndulo de la bola de icopor, que aunque tiene masa similar a la de cobre, debido a su mayor área superficial se vió considerablemente más afectada por la resistencia del aire. Mientras que el péndulo de la bola de cobre lo tomamos como oscilador armónico simple porque no se vio practicamente afectada por el aire. También se estudió el periodo y la frecuencia de un péndulo físico comparado con uno simple, se vio que para un péndulo físico el periodo aumenta mientras que

para la frecuencia disminuye. Además, se evidenció que el factor b no depende de la longitud de la cuerda. Para el cálculo experimental de g se obtuvo exactitud, pues el error absoluto no supera las $2,5\sigma$; y precisión, ya que el cociente de incertidumbre sobre valor experimental es inferior a 0,1.

-
- [1] J. P. Salas and Y. Hernández. *2.4 Oscilador armónico amortiguado*, page 51–53. La Imprenta Editores S. A., primera edition, 2023.