Amortiguamiento eléctrico en un circuito RLC

David Santa Rozo* and Sergio Laverde**
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
(Dated: 5 de marzo de 2024)

I. INTRODUCCION

Se denomina circuito RLC aquel circuito que posee una inductancia (L), una capacitancia (C) y una resistencia (R). En el caso de es experimento desarrollado se utilizó un circuito de estas características en serie. Por Ley de Mallas tenemos que el voltaje de la fuente (fem) es igual a la suma de las caídas de potencial en cada elemento antes mencionados. Al derivar con respecto al tiempo y reordenando términos tenemos:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0 \tag{1}$$

La ecuación obtenida es una ecuación de movimiento armónico amortiguado. De la teoría de este típo de movimiento tenemos que:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \\ \gamma &= \frac{R}{L} \end{aligned} \tag{2}$$

Además, de resolver la ecuación diferencial (1) se obtienen 3 soluciones diferentes dadas por el discriminante de la ecuación característica:

- **Sobreamortiguado:** $\frac{\gamma^2}{4} > \omega_0^2$.

$$I(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} \tag{3}$$

- **Críticamente amortiguado:** $\frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$.

$$I(t) = A_1te^{\frac{-\gamma}{2}t} + A_2e^{\frac{-\gamma}{2}t} \tag{4}$$

- **Subamortiguado:** $\frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$.

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0e^{\frac{-\gamma}{2}t}cos(\omega' t + \phi) \\ \omega' &= \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \end{aligned} \tag{5}$$

II. ANÁLISIS CUALITATIVO

- **Matemáticamente, ¿qué pasa si no está el elemento Resistencia?**
- La ecuación (1) quedaría:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{LC}i = 0 \tag{6}$$

  Ecuación diferencial correspondiente a un movimiento armónico simple cual solución es:

$$I(t) = I_0cos(\omega_0t) \tag{7}$$

- **Con relación a la respuesta anterior, quite el potenciómetro y describa lo que se obtiene en el osciloscopio. ¿Concuerda esto con la respuesta anterior? ¿Por qué?**
- Si, ya que el potenciómetro se define como una resistencia variable. Entonces, al retirarlo tendríamos la situación del punto anterior.
- **Considera un oscilador amortiguado mecánico, como una masa unida a un resorte. ¿Qué analogía se puede establecer con los elementos usados en este experimento? Es decir, ¿qué es la resistencia, la inductancia, la capacitancia, el voltaje y la corriente con respecto al resorte, la masa del bloque, la constante del resorte y demás variables involucradas?**
- Para realizar la comparación entre un sistema masa resorte y el circuito RLC, es conveniente observar las ecuaciones diferenciales que describen dichos sistemas. Para el caso del circuito RLC se tiene la ecuación (1), mientras que para el sistema masa resorte se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{8}$$

  Comparando ambas ecuaciones, se evidencia que la inductancia L es análoga a la masa, la resistencia R es análoga al factor de ficción b, el inverso de la capacitancia $\frac{1}{C}$ es análoga a la constante k y que la corriente I es análoga a la posición x. Además, de cómo se obtienen estas ecuaciones podemos decir que el voltaje V es análoga a la fuerza F.

* Correo institucional: d.santar@uniandes.edu.co
** Correo institucional: s.laverdeg@uniandes.edu.co

- **¿Qué valores de los elementos (resistencia, inductancia y/o capacitancia) podría modificar para que el tiempo característico de un caso subamortiguado aumente y se siga teniendo un caso subamortiguado?**

- Ya que queremos aumentar el tiempo característico de un caso subamortiguado manteniendo que aún se trate de un caso subamortiguado, entonces el objetivo es disminuir el factor γ ya que es el responsable de la pérdida de energía. Sabiendo esto, hay dos opciones: disminuir la resistencia R o aumentar la inductancia L. Para que aún se trate de un caso subamortiguado se revisa que aún se cumpla la condición $\frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$:

  - Disminuir R: multiplicar a R por un factor de $\frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 1$.

$$\frac{(\frac{R}{\lambda})^2}{4L^2} < \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \tag{9}$$

  - Aumentar L: multiplicar a L por un factor de λ, $\lambda > 1$.

$$\frac{R^2}{4(\lambda L)^2} < \frac{1}{\lambda LC} \tag{10}$$

  Entonces, se concluye que ambas opciones son válidas.

III. ANÁLISIS CUANTITATIVO

- **Verifique si en cada caso de amortiguamiento se cumple la relación de R^2 respecto a 4L/C. Argumente.**

- $L = 9 \times 10^{-3} H$ y $C = 4{,}7 \times 10^{-8} F$

  - Sobreamortiguado: $R = 2{,}31 \times 10^3 \Omega$.

$$\begin{aligned} R^2 &> \frac{4L}{C} \\ 5,3361 \times 10^6 &> \frac{4(9 \times 10^{-3})}{4{,}7 \times 10^{-8}} \\ 5,3361 \times 10^6 &> 7{,}66 \times 10^5 \end{aligned} \tag{11}$$

  - Críticamente amortiguado: $R = 0{,}69 \times 10^3 \Omega$.

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{4L}{C} \\ 0{,}48 \times 10^6 &= \frac{4(9 \times 10^{-3})}{4{,}7 \times 10^{-8}} \\ 0{,}48 \times 10^6 &= 7{,}66 \times 10^5 \end{aligned} \tag{12}$$

  -Subamortiguado: $R = 70 \Omega$.

$$\begin{aligned} R^2 &< \frac{4L}{C} \\ 4{,}9 \times 10^3 &< \frac{4(9 \times 10^{-3})}{4{,}7 \times 10^{-8}} \\ 4{,}9 \times 10^3 &< 7{,}66 \times 10^5 \end{aligned} \tag{13}$$

  Se encontró que para sobreamortiguado y subamortiguado si se cumple la relación. Sin embargo, para críticamente amortiguado no se cumple.

- **Para cada conjunto de datos en Logger Pro, grafique voltaje en función del tiempo.**

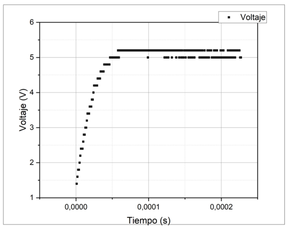

Figura 1. Grafica de voltaje contra tiempo para el caso de amortiguamiento crítico, el cual sucedió a un valor de resistencia de $r = 690\Omega$

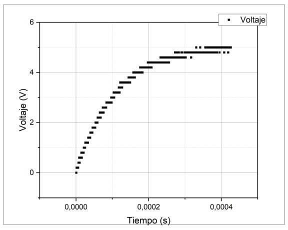

Figura 2. Grafica de voltaje contra tiempo para el caso sobre amortiguamiento, el cual sucedió a un valor de resistencia de $r = 2310\Omega$

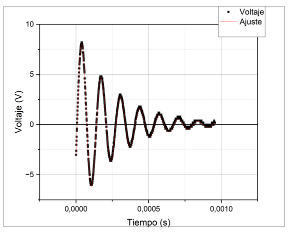

Figura 3. Grafica de voltaje contra tiempo para el caso sub amortiguado, el cual sucedió a un valor de resistencia de $r = 70\Omega$, con su respectivo ajuste de la forma presentado en la ecuación (14)

$$V(t) = V_0 e^{\frac{-\gamma}{2}t} cos(\omega' t) \tag{14}$$

- **Determine los valores de γ y ω', así como también la incertidumbre de estos.**

R/ A partir del ajuste realizado en la figura **??** se obtuvieron los siguientes valores: $\omega' = (4{,}717 \pm 0{,}001) \times 10^4 \frac{rad}{s}$ y $\gamma = (8{,}00 \pm 0{,}03) \times 10^4 s^{-1}$

- **Determine los valores de γ y ω' teóricos directamente de las ecuaciones (2) y (5) con los valores de R, L y C.**

- Los valores teóricos obtenidos fueron: $\omega' = 48457 \frac{rad}{s}$ y $\gamma = 7778 s^{-1}$

- **Verifique si en el resultado con su incertidumbre están los valores calculados de γ y ω'. Argumente su resultado.**

- Los valores teóricos obtenidos no estuvieron dentro del rango dado por la incertidumbre de los valores experimentales. Sin embargo, fueron en gran medida similares. La diferencia se pudo deber a problemas técnicos a la hora de tomar los datos, puesto que el circuito presento varios percances a lo largo de la práctica. Por lo tanto, podemos atribuirle esa diferencia a la medición de la resistencia para el caso su amortiguado.

IV. CONCLUSIONES

Para finalizar, es importante recalcar que se lograron cumplir todos los objetivos propuestos para la práctica. Puesto que se estudió los tres casos de amortiguamiento para un circuito RLC con una fuente con señal cuadrada. Además, se profundizo en gran medida en el caso sub amortiguado y se logró encontrar experimentalmente los parámetros de esta oscilación, $\omega y \gamma$. Por último, la exactitud de estos parámetros no fue muy aceptable, ya que se obtuvieron con una precisión muy alta, lo que generó que la distancia entre el valor medido y el real fuera de más de 100σ. Aun así, revisando los valores fueron muy cercanos.

[1] D. de Física de la Universidad de los Andes. Guías de laboratorio: Ondas y fluidos. 2022.

[1]