

Informe: Torque Magnético

Sergio Laverde* and Samuel Hernandez**

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 1 de marzo de 2025)

En el presente informe se reportan los resultados que se obtuvieron tras el manejo del montaje experimental de *Magnetic torque* de *TechSpin*. En la práctica se usaron tres métodos diferentes para estimar el mismo parámetro: el momento dipolar magnético μ de un imán. La primera técnica, que constaba de usar equilibrio mecánico, arrojó un μ de $(0,40 \pm 0,03)A \cdot m^2$ con exactitud perfecta al estar a (0σ) del valor aceptado. El segundo método, mediante el movimiento oscilatorio armónico, obtuvo μ de $(0,43 \pm 0,02)A \cdot m^2$ con exactitud razonable al estar entre 1 y 2 σ del valor aceptado. La tercera técnica constaba en el uso de la precesión de Larmor. Por un error sistemático muy elevado, este método arrojó un valor de μ de $(0,357 \pm 0,002)A \cdot m^2$ con una exactitud casi nula al estar (21σ) del valor aceptado. Además, se evidenció experimentalmente el fenómeno de resonancia magnética.

I. INTRODUCCIÓN

En el siglo *XIX* comenzaron a hacerse experimentos y estudios en torno a la interacción de dipolos magnéticos con campos externos. Estos eran liderados por Gauss y Wilhem Weber. Posteriormente, en 1900, Joseph Larmor estudió el movimiento de electrones en un campo magnético, dedujo que se debía dar un efecto de precesión, que ahora lleva su nombre, y calculó la frecuencia de esta. Esto fue un primer paso en el estudio de la resonancia magnética.

Si consideramos un dipolo magnético, como un imán, este va a tener asociado un vector de momento magnético. Si tomamos un dipolo y lo sometemos a un campo magnético externo \vec{B} uniforme, se cumple que:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (1)$$

Y la fuerza neta es cero. Si el campo no es uniforme se cumple que:

$$\vec{F} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mu})\vec{B}.$$

Por último, si se trabaja con un imán, este puede ser modelado por un bucle circular de área A y corriente \vec{I} . En este caso:

$$\vec{\mu} = I\vec{A}.$$

Ahora bien, en la actividad 1, se considerará un sistema en equilibrio mecánico. Se analizará el sistema descrito en la figura 1

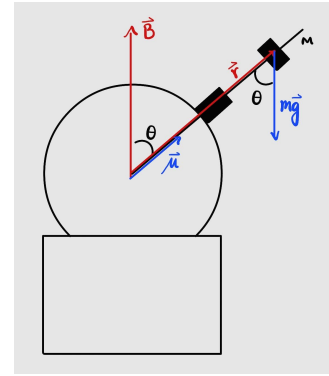


Figura 1. Configuración usada en la actividad 1.

Si hacemos una sumatoria de torques, vemos claramente que:

$$rmg = \mu B - DMg. \quad (2)$$

Por otro lado, en la actividad 2 vamos a ver el movimiento oscilatorio de un dipolo magnético cuando es sometido a un campo magnético externo. Luego de un análisis de torques y aproximar a ángulos pequeños, uno demuestra que:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\mu B}{I_{sph}} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2 I_{sph}}{\mu B} \end{aligned} \quad (3)$$

Siendo I_{sph} es el momento de inercia de la esfera.

$$I_{sph} = \frac{2}{5}m_{sph}r_{sph}^2 \quad (4)$$

Por último, si tenemos que el imán está rotando y su momento angular va en la misma dirección, y además un momento magnético uniforme en dirección z , entonces

* Correo institucional: s.laverdeg@uniandes.edu.co

** Correo institucional: sm.hernandezc1@uniandes.edu.co

tendremos además un movimiento de precesión. Se va a cumplir que:

$$\Omega = \frac{\mu}{L_s} B \quad , \quad (5)$$

$$L_s = I_{sph} \omega = \frac{4\pi}{5} m_{sph} r_{sph}^2 f_{sph}. \quad (6)$$

Todo lo comentado anteriormente va a ser usado principalmente para medir el momento magnético de la bola de resina fenólica que se comentará a continuación.

II. MONTAJE EXPERIMENTAL Y METODOLOGÍA

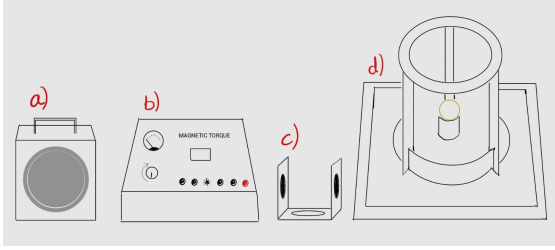


Figura 2. Montaje experimental.

Consiste en: a) Estroboscopio, b) Unidad de control: modifica el campo magnético y el bombeo de aire hacia la unidad principal, c) Imanes, d) Unidad principal: arreglo de bobinas y torre de plástico con resorte en su interior, allí se ubica la bola de resina.

Además del montaje experimental mostrado en la figura 2, para el desarrollo del experimento también se hace uso de una bola de resina fenólica (Aramith) con imán cilíndrico permanente, varas delgadas de aluminio con anillos plásticos, esferas metálicas y un imán permanente. La metodología implementada es la siguiente:

A. Actividad 1: Equilibrio Estático.

El objetivo de esta actividad es medir el momento magnético de la bola en equilibrio.

Ubicando la bola con varilla y pesa instaladas en la unidad principal, se realiza la medición del radio de la bola, la masa de la pesa y la longitud de la manija. Se procedió a verificar que el campo magnético apunte en dirección vertical, el gradiente de campo apagado y que la unidad principal esté nivelada. Se ubicó la pesa sobre la varilla y se midió la distancia r .

Luego, se encendió la fuente de aire y ajustó la corriente hasta aproximadamente 2A. Se posicionó la bola de manera que la varilla forme un ángulo de 90° con respecto a la vertical. Se modificó la corriente hasta que la bola se mantuviera estable en dicho ángulo y registró la corriente. Se repitió este proceso para 7 posiciones de la pesa distintas.

B. Actividad 2: Oscilación Armónica.

El objetivo de esta actividad es medir el momento magnético de la bola en movimiento armónico.

Se encendió el aire, se midió la masa de la bola y se ubicó en la unidad principal. Se incrementó la corriente a un rango entre 1A y 1.5A. Con la mano, se ajustó la bola de manera que la manija experimente un pequeño desplazamiento angular respecto a la vertical, que corresponde a la dirección del campo magnético. Luego, se soltó la manija para que la bola oscilara libremente. Se registró el valor de la corriente y se midió el tiempo que le tardó a la bola realizar 20 oscilaciones. Se repitió el procedimiento para al menos 10 valores diferentes de corriente/campo magnético.

C. Actividad 3: Precesión.

El objetivo de esta actividad es medir el momento magnético de la bola en movimiento de precesión.

Primero, se verificó que el momento angular apunte en la misma dirección del momento magnético y que el gradiente de campo magnético esté apagado. Con la fuente de aire encendida y la corriente ajustada a 0A, se hizo girar la bola evitando que su eje se alinee con la vertical para observar el fenómeno de precesión. La rotación se ajustó de manera que el momento angular apuntara en la dirección deseada.

Utilizando un estroboscopio, se midió la frecuencia de rotación, ajustándola entre 4 Hz y 6 Hz hasta que el punto blanco en la manija negra pareciera estático. Posteriormente, se aumentó la corriente a 1A y se registró el período de precesión, midiendo el tiempo que la bola tardó en completar un ciclo de oscilación alrededor de su eje.

Este procedimiento se repitió tres veces para cada corriente aplicada, y a partir de los datos obtenidos, se calculó un valor promedio. Luego, el procedimiento se repitió incrementando la corriente en pasos de

0.5A hasta alcanzar 4A. Finalmente, se obtuvo una tercera medición independiente del momento magnético utilizando la relación entre la frecuencia de precesión y el campo magnético.

D. Actividad 4: Resonancia magnética.

El objetivo de esta actividad es observar el fenómeno de resonancia magnética.

Se acopló el sistema de imanes a la unidad principal. Con la fuente de aire encendida y el gradiente de campo magnético apagado, se hizo girar la bola de resina para alinear su momento angular con la manija negra. Luego, se incrementó la corriente a 2A y se observó el fenómeno de precesión.

Posteriormente, los imanes en la base de madera se giraron manualmente a la frecuencia de Larmor hasta que la manija negra quedó perpendicular al campo magnético. Se analizó su orientación con respecto a la vertical y se interpretó utilizando las ecuaciones del Ejercicio 1, considerando un campo magnético rotatorio.

Finalmente, se giraron los imanes en dirección opuesta a la precesión con la frecuencia de Larmor y luego en la misma dirección, pero con una frecuencia distinta. Esto permitió observar el efecto de resonancia magnética y analizar cómo la variación de la frecuencia del campo rotatorio influye en el comportamiento del sistema.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los datos en el archivo 'Torque magnético.xlsx' y el análisis desarrollado en Python se encuentran en Github <https://github.com/samuhdz/Laboratorio-Intermedio/tree/main/Torque%20Magn%C3%A9tico>.

Actividad 1: Equilibrio mecánico

En esta actividad hacemos uso activo de la ecuación (ec. 2). La idea es estimar μ a partir de una linealización. En la siguiente figura se grafica rmg en función de B

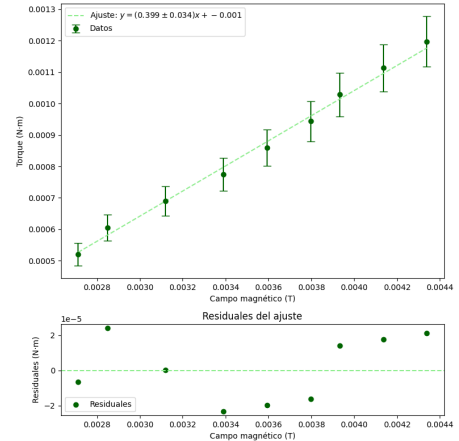


Figura 3. Ajuste lineal realizado con la ecuación (ec. 2). A simple vista, los residuales tienen una forma algo extraña, con un nivel de aleatoriedad medio. Esto nos pone a dudar sobre la fiabilidad del ajuste.

En la figura se puede apreciar una alta incertidumbre en los valores de rmg . Esto es principalmente porque la bola de resina no se quedaba completamente estática en ningún momento. A pesar de esto, se obtiene una buena estimación del momento dipolar magnético, el valor de μ al que llegamos fue de $(0,40 \pm 0,03)A \cdot m^2$. Esta medida no se aleja en ninguna desviación estándar del valor teórico que nos da TechSpin [4], lo cual es extrañamente exacto y preciso.

Actividad 2: Oscilación Armónica.

Para hallar el momento magnético de la bola en movimiento armónico, de acuerdo a la ecuación (ec. 3) se realizó un ajuste lineal entre T^2 y $1/B$ mediante mínimos cuadrados (VB) de la librería numpy en python como se muestra en la figura 3.

Habiendo obtenido la pendiente de esta recta, identificamos el momento magnético de la bola (μ) como:

$$\mu = \frac{4\pi^2 I_{sph}}{p} \quad (7)$$

Donde p es la pendiente de la recta y I_{sph} el momento de inercia de la bola calculado en (13). Entonces, obtenemos como resultado y error calculado mediante la ecuación (ec. 12) calculados de:

$$\mu = (43 \pm 2) \times 10^{-2} A \cdot m^2$$

De acuerdo a los criterios de precisión y exactitud (VA), se obtuvo precisión, y se obtuvo exactitud razonable al estar el valor aceptado de $0,4A \cdot m^2$ entre 1 y 2σ .

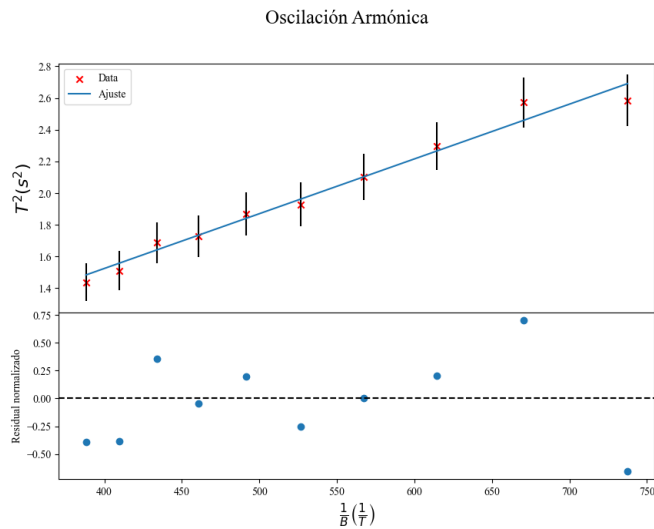


Figura 4. Oscilación armónica de la bola de resina. La gráfica demuestra la dependencia lineal de las variables T^2 y $1/B$ como lo predice la ecuación (ec. 3). La regresión lineal presentada es $T^2 = (34,6 \pm 1) \times 10^{-4} (T \cdot s^2)^{\frac{1}{B}} + (0,1 \pm 0,1)(s^2)$. Los residuales indican una aleatoriedad en el error de los datos.

Actividad 3: Precesión de Larmor

Para esta actividad, se utilizó la ecuación (ec. 6) para realizar una regresión lineal. Sin embargo, debido a un error en la interpretación de la guía, se tomó una cantidad de datos significativamente reducida. Como consecuencia, la confiabilidad de los parámetros obtenidos es baja y la calidad estadística del ajuste es limitada. A pesar de ello, se reportan los resultados en la figura 5.

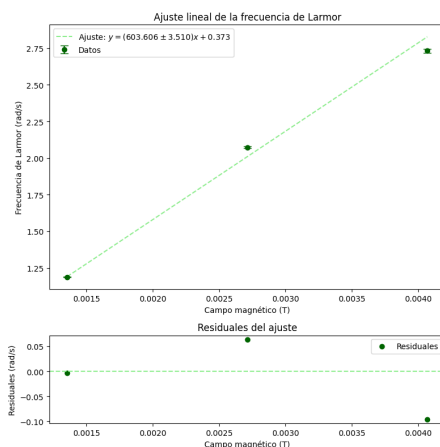


Figura 5. Ajuste lineal realizado usando la ecuación (ec. 6). Como se puede ver, no se puede decir mucho de los residuales por la poca cantidad de datos. Se veían prometedores.

Con esta regresión se realizó un estimado del momento magnético $\mu = (0,357 \pm 0,002) A \cdot m^2$, el cual es preciso. Pero, de nuevo, por la baja cantidad de datos realmente no podemos saber mucho de la exactitud.

Actividad 4: Resonancia magnética.

Cuando se giró el campo magnético horizontal perpendicular al momento magnético a la frecuencia de Larmor se observó que la manija negra cayó. Esto se debió a que se indujo una precesión en sentido de la mano derecha al campo magnético horizontal (hacia abajo para la manija) como se muestra en la figura 6.

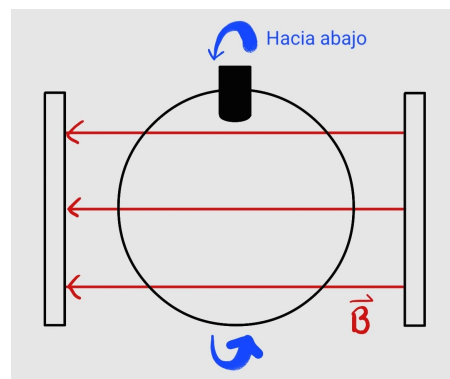


Figura 6. Esquema de actividad con campo magnético horizontal en movimiento a frecuencia de Larmor

Cuando se giró a la frecuencia de Larmor en sentido contrario, se observó que la manija negra subió. En realidad, lo que se debió observar fue un movimiento de nutación, ya que en algunos instantes el campo magnético horizontal estaría como en la figura 6 y en otros en sentido contrario a este. Lo que causaría precesión hacia abajo (de la manija) en algunos instantes y hacia arriba, respectivamente. Es decir, la manija describiría un movimiento armónico en la coordenada del ángulo polar alrededor del ángulo inicial. No se obtuvo el movimiento esperado, probablemente por la dificultad técnica de mover los imanes a la frecuencia deseada o a que el periodo del movimiento de nutación fuera lo suficientemente alto como para no haber observado una oscilación.

Cuando se giró a una frecuencia distinta, no se observó un comportamiento en concreto. Ya que la configuración del campo magnético horizontal y el momento angular resulta muy diferente entre instantes de tiempo diferentes y no se presenta ninguna tendencia en particular.

IV. CONCLUSIONES

El objetivo principal de esta práctica era estimar el momento dipolar magnético μ de la bola de resina. Para ello, se hicieron tres estimaciones con tres técnicas diferentes en las cuales el campo magnético de la Tierra y la resistencia al aire de la manija influyeron.

El primer método nos dio un estimado para μ de $(0,40 \pm 0,03)A \cdot m^2$, con una desviación mínima del valor teórico. Esto es sospechoso ya que se debía hacer un estimado visual del ángulo de $\pi/2$, lo cual era difícil de determinar de forma exacta.

Para el segundo método se obtuvo un valor de momento magnético de $\mu = (43 \pm 2) \times 10^{-2}A \cdot m^2$ el cual se determinó como preciso y con exactitud razonable al

estar el valor aceptado entre 1 y 2 σ .

En el caso de la actividad 3, debido al descuido que se tuvo, la toma de datos fue mala, obteniendo una cantidad de datos muy baja. Esto nos llevó a un valor poco confiable de $\mu = (0,357 \pm 0,002)A \cdot m^2$, el cual se aleja 21σ . Es decir, esta medida es para nada exacta. Como consuelo, tenemos una incertidumbre bajita, lo cual dice que al menos en los tres tristes datos que tomamos, fuimos "precisos". Esto es un error que no se volverá a cometer.

En cuanto al estudio del fenómeno de resonancia magnética, a pesar de la dificultad técnica de mover el imán a la frecuencia de Larmor, se logró evidenciar la resonancia ya que se observaron diferentes perturbaciones al movimiento de precesión convencional generado por el campo magnético vertical.

-
- [1] Jackson, J. D. (1962). *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York.
 - [2] Segura, M. (2023). *Métodos Computacionales*.
 - [3] Slichter, C. (1978). *Principles of Magnetic Resonance*. Springer.
 - [4] TeachSpin (2025). Magnetic Torque. Accedido: 23 de febrero de 2025.

V. ANEXOS

A. Criterios

- Precisión: $= \frac{\sigma}{X_{exp}} \leq 0,1$
- Exactitud: $:= |X_{real} - X_{exp}| \leq 3 \cdot \sigma$

B. Apéndice de cálculo

- Ajuste lineal por mínimos cuadrados[2]:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^T \mathbb{A} \vec{x}^* &= \mathbb{A}^T \vec{b} \\ Proj_{C(\mathbb{A})} \vec{b} &:= \mathbb{A} \vec{x}^* \end{aligned} \quad (8)$$

- Incertidumbre de mínimos cuadrados[2]:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-p} (\vec{b} - \mathbb{A} \vec{x}^*)^T (\vec{b} - \mathbb{A} \vec{x}^*) \\ Cov(\vec{x}^*) &= \hat{\sigma}^2 (\mathbb{A}^T \mathbb{A})^{-1} \\ R^2 &= \frac{Cov(m, b)^2}{Var(m)Var(b)} \\ \Delta x_i &= \sigma_{x_i} = \sqrt{Var(x_i)} \end{aligned} \quad (9)$$

- Propagación de errores:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2} \quad (10)$$

- Incertidumbre momento de inercia:

$$\sigma_I = \frac{2}{3} r \sqrt{(r \sigma_m)^2 + (2m \sigma_r)^2} \quad (11)$$

- Incertidumbre momento magnético actividad 2: Donde p es la pendiente de la recta e I el momento de inercia.

$$\sigma_\mu = 4\pi^2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_I}{p} \right)^2 + \left(\frac{-I \sigma_p}{p^2} \right)^2} \quad (12)$$

- Momento de inercia de la bola: De acuerdo a la ecuación (ec. 4) y con incertidumbre dado por (ec. 11):

$$\begin{aligned} m_{sph} &= (1413 \pm 1) \times 10^{-4} Kg \\ r_{sph} &= (258 \pm 1) \times 10^{-4} m \\ I_{sph} &= \frac{2}{5} m_{sph} r_{sph}^2 = (377 \pm 4) Kg \cdot m^2 \end{aligned} \quad (13)$$

- Campo magnético en la ubicación de la bola: Por la ley de Biot Savart, sabemos que para una espira que da N vueltas, el campo magnético está dado por

$$B_0(z) = \frac{\mu_0 N I r^2}{2(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Si consideramos que cada bobina está en $d/2$ o $-d/2$ en el eje z, entonces

$$B_T(z) = \frac{\mu_0 N I r^2}{2(r^2 + (z + \frac{d}{2})^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 N I r^2}{2(r^2 + (z - \frac{d}{2})^2)^{3/2}}.$$

Evaluable en cero (donde va a estar la bola), con $r=0.109\text{m}$, $d=0.138\text{m}$ y $N=195$.

$$\begin{aligned} B(0) &= \frac{\mu_0 N I r^2}{(r^2 + (\frac{d}{2})^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(4\pi \times 10^{-7})(195)(1)(0,109)^2}{((0,109)^2 + (\frac{0,138}{2})^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(4\pi \times 10^{-7})(195)(1)(0,109)^2}{((0,109)^2 + (\frac{0,138}{2})^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2,9 \times 10^{-6}}{2,1 \times 10^{-3}} \approx (1,36 \times 10^{-3})T. \end{aligned}$$