

Informe: Franck Hertz

Sergio Laverde* and Samuel Hernandez**
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 13 de marzo de 2025)

En el presente informe se presentan los resultados obtenidos al usar el montaje experimental *Franck Hertz experiment with a Hg-tube* de PHYWE. Los objetivos para esta práctica fueron: 1) Evidenciar una vez más la cuantización de la energía en los niveles de energía atómicos. 2) Estudiar el efecto de la temperatura en el camino libre medio de los electrones en el gas. 3) Medir experimentalmente tanto la diferencia de energía entre el estado base y un estado excitado de Hg, como su camino libre medio. El valor obtenido para $\Delta E(n=5, T=179C)$ fue de $(4,6 \pm 0,1)eV$, con una desviación del valor teórico de $2,6\sigma$. Para el camino libre medio se obtuvieron: $T=160C \rightarrow \bar{l} = (1,5 \pm 0,2)mm$, $T=170C \rightarrow \bar{l} = (1,2 \pm 0,6)mm$ y $T=180C \rightarrow \bar{l} = (1,1 \pm 0,3)mm$.

I. INTRODUCCIÓN

El concepto de cuantización de la energía es la mayor revolución científica del siglo pasado junto con la relatividad de Einstein. Con la intención de evidenciar este fenómeno, se hicieron varios experimentos, incluido el de Franck Hertz. Este consiste en colisionar electrones con átomos de Mercurio. Si los electrones tienen suficiente energía, colisionarán de manera inelástica con los átomos de mercurio, dando así paso a una transición energética. Pero esto es solo una fracción de los electrones, otros con energía no suficiente para generar una transición, siguen de largo y son detectados por el ánodo. Las caídas de corriente periódicas sugieren que los niveles de energía del átomo están cuantizados.

La gráfica que esperamos observar tiene diferentes picos de energía. Estos van a estar dados por:

$$E_n = n(E_a + \delta_n) = nE_a(1 + n\frac{\bar{l}}{L})$$

Siendo \bar{l} la longitud de camino libre medio y E_a la energía de transición. Así, la distancia entre picos es:

$$\Delta E_n \left(1 + (2n-1)\frac{\bar{l}}{L} \right) E_a$$

Siendo n la cantidad de colisiones. Ahora bien, si consideramos que[4]:

$$\bar{l} = \frac{kT}{p\sigma}, \quad p = 8,7 \times 10^{9-3110/T}, \quad \sigma = \pi d^2$$

Siendo d el radio del átomo de mercurio. Entonces la expresión final, que solo depende de la temperatura y

de n . Entonces $\Delta E(n, T)$ es:

$$\Delta E(n, T) = \left(1 + (2n-1)\frac{kT}{8,7 \times 10^{9-(3110/T)}\pi d^2 L} \right) E_a \quad (1)$$

Esto implica que la diferencia entre energías de cierto número de colisiones y una menos aumenta proporcionalmente al número de colisiones y a la energía inicial del recorrido.

Camino libre medio

El camino libre medio del electrón es la distancia promedio que recorre entre colisiones con los átomos de Mercurio.

Teóricamente viene dado por:

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

Donde σ es la sección transversal ($\sigma \approx \pi R_M^2$, $R_M :=$ radio del átomo de Mercurio), y n es la densidad de átomos de Mercurio que es aproximadamente igual a:

$$n \approx \frac{P}{k_b T} \\ P \approx 8,7 \times 10^{9-3110/T} (Pa)$$

Juntando todo tenemos que el camino libre medio del electrón teóricamente es aproximadamente:

$$\bar{l}_{teo}(T) \approx \frac{k_b T}{\sqrt{2}\pi(8,7 \times 10^{9-3110/T})R_M^2}, R_M \approx 1,5 \times 10^{-10}m \quad (2)$$

Experimentalmente, el camino libre medio del electrón es:

$$\bar{l}_{exp} = \frac{L}{2\Delta E(0,5)} \frac{d}{dn}(\Delta E(n)), \Delta E = e(\Delta U_1)_{mnimos} \quad (3)$$

* Correo institucional: s.laverdeg@uniandes.edu.co

** Correo institucional: sm.hernandezc1@uniandes.edu.co

Donde L es la distancia entre ánodo y cátodo, ΔE 'representa' la distancia entre un mínimo y el siguiente en las gráficas I_A vs U_1 , e la carga del electrón y n el orden del mínimo.

II. MONTAJE EXPERIMENTAL Y METODOLOGÍA

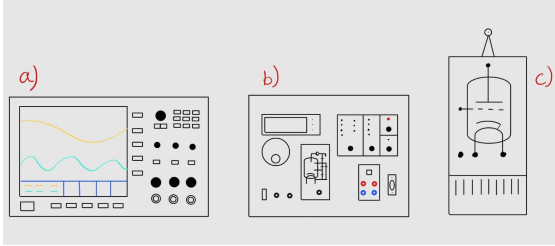


Figura 1. Montaje experimental.

Consiste en: a) Osciloscopio: mide señales eléctricas dependientes del tiempo, b) Módulo de control y medición : modifica los voltajes y corrientes suministrados y mide corriente de electrones y la temperatura de la termo-cúpula, c) Estufa, tubo Franck-Hertz y termo-cúpula.

Además del montaje experimental mostrado en la figura 1, para el desarrollo del experimento también se hizo uso de 2 cables BNC a caimán (impedancia de 50Ω), software *Phywe measure 4* y cable de datos RS 232.

Estudio Cualitativo.

Se conectaron la estufa y la unidad de control mediante el cable DIN en los puertos correspondientes, y se insertó la termocupla en la parte superior de la estufa, asegurando que el cable solo tocara la manija. Luego, se utilizó un cable BNC para conectar la estufa al módulo de control (puerto 11) y se alimentaron ambos dispositivos con la fuente de voltaje.

Se configuró el voltaje en la unidad de control ($U_H = 6,3V$, $U_1 = 0V$, $U_2 = 2V$) y se ajustó la perilla de la estufa a un valor entre 5 y 6, monitoreando la temperatura hasta alcanzar aproximadamente $180^\circ C$. En ese momento, se conectaron las salidas analógicas de corriente y voltaje al osciloscopio en modo XY, verificando la polaridad y asignando el voltaje al eje X y la corriente al eje Y.

Al llegar a la temperatura deseada, se incrementó manualmente U_1 a cerca de $50V$, se seleccionó el modo de medición en forma de diente de sierra y se inició

la medición, observándose en el osciloscopio un patrón similar al esperado. Para temperaturas inferiores a $160^\circ C$, el módulo detuvo automáticamente la medición como medida de protección, lo que requirió aumentar la temperatura y reiniciar el proceso.

A. Actividad 1.

Se midió la distancia entre los mínimos utilizando el osciloscopio. Luego, se posicionaron los cursores del osciloscopio de manera que uno de los picos quedara centrado en el origen y se apagó la estufa.

Se observó el comportamiento de los picos a medida que la temperatura disminuía, asegurando que no bajara de $160^\circ C$ y ajustando el voltaje máximo U_1 cuando fue necesario.

Finalmente, se modificó el voltaje U_2 primero a $1.5V$ y luego a $1V$, manteniendo la temperatura constante, y se describió el cambio en la curva observada en el osciloscopio.

Medición de la corriente I_A en función del voltaje U_1 .

Se conectó el computador con el software especializado de Franck-Hertz al módulo de control. Con la estufa encendida y la temperatura estabilizada alrededor de $180^\circ C$, se cambió el selector de medición a la posición PC.

Se ejecutó el programa de medición desde la carpeta Franck-Hertz, seleccionando una nueva medición y ajustando los parámetros de control y medición, incluyendo la temperatura como variable a reportar. Una vez configurados los parámetros, se inició la medición al alcanzar la temperatura establecida.

Durante el proceso, se aseguró que la temperatura se mantuviera estable. Los resultados se obtuvieron en forma de gráfica y, a través del menú de análisis de curva, se identificaron los máximos y mínimos, ajustando la sensibilidad del análisis según fuera necesario. Finalmente, los datos y las gráficas se guardaron para su posterior análisis y reporte.

B. Actividad 2.

Se realizaron varias series de mediciones manteniendo la temperatura constante y minimizando las variaciones. Se registraron los valores de corriente I_A y voltaje U_1 para diferentes temperaturas dentro del rango de 165°C a 185°C , manteniendo U_H y U_2 constantes.

Para cada temperatura, se calculó la distancia entre mínimos y se comparó con el valor esperado de 4.67 eV . Además, se identificó la posición del primer mínimo y se analizó su relación con el voltaje de retardo U_2 .

Posteriormente, con la temperatura fija, se varió U_2 entre 1V y 2V , registrando I_A en función de U_1 y graficando los resultados. Luego, manteniendo U_2 y la temperatura constantes, se modificó U_H dentro del rango de $6.3 \pm 0.5\text{V}$, observando los cambios en la curva I_A vs. U_1 y explicando el comportamiento en términos de emisión termoiónica, temperatura del cátodo y la distribución de Maxwell-Boltzmann.

Finalmente, se graficó la distancia entre mínimos en función del orden del mínimo, realizando regresiones lineales para cada temperatura y calculando el camino libre medio experimental $\bar{\ell}_{\text{exp}}$ utilizando la ecuación (8). A partir de las regresiones, se evaluó $\Delta E(0.5)$ y se comparó con el valor reportado de 4.67 eV , considerando $L = 12\text{ cm}$.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los datos en el archivo 'Data.xlsx' y el análisis desarrollado en Python se encuentran en Github <https://github.com/samuhdz/Laboratorio-Intermedio/tree/main/Franck%20Hertz>.

Análisis cualitativo

En primer lugar, se nos pedía hallar el distanciamiento entre los picos. Recordemos que teóricamente, este distanciamiento está dado por la fórmula 1. Si usamos $L = 12\text{cm}$, $d = 1.55 \times 10^{-10}$, $E_a = (4.86 \pm 0.09)\text{ eV}$, $T = 452\text{K}$ [2], entonces tenemos un valor aproximado de 4.92 eV . El valor que encontramos experimentalmente fue de $(4.6 \pm 0.1)\text{ eV}$. Esto se aleja en 2.6σ del valor aproximado con la teoría. Además, conforme bajamos la temperatura, la diferencia en los picos se hacía más grande. Esto lo podemos ver en la figura 2

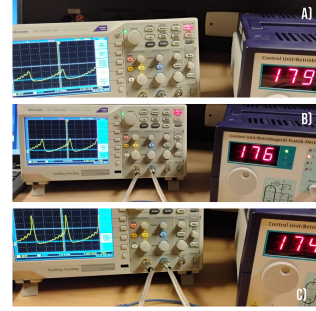


Figura 2. Gráfica de corriente I en función de t para diferentes temperaturas. a) $T=179^\circ\text{C}$, b) $T=176^\circ\text{C}$, c) $T=174^\circ\text{C}$. En las gráficas podemos ver el comportamiento que predice la ecuación 1.

Medidas a temperatura constante

En primer lugar, se tomaron datos de I vs U_1 para una temperatura cercana a 180°C . Con el software del experimento se pudo evidenciar la forma 'funcional' esperada. Sin embargo, en la figura se puede apreciar como las pequeñas fluctuaciones en la temperatura afectan de manera considerable la medición.



Figura 3. La corriente I en función del voltaje de aceleración U_1 para una misma temperatura, cercana a 180°C . Podemos ver como el valor de I varía bastante, sin embargo, su posición en U_1 no se ve afectada, como esperaríamos.

Estas fluctuaciones las podemos justificar en la dependencia funcional de la energía con la temperatura. Como vemos de la ecuación I, $E \propto \frac{T}{8.7 \times 10^9 - 3110/T} + E_a$. Esta función cambia considerablemente con la temperatura. Por otro lado, se pueden determinar los mínimos y el espaciamiento entre los mismos. Estos valores se reportan en las siguientes tablas

U_n	T3	T2	T1
U_1	14.26	14.48	14.12
U_2	19.31	19.38	19.07
U_3	24.05	24.12	23.98
U_4	28.96	29.03	28.89
U_5	33.96	34.09	33.80
U_6	39.07	39.24	38.91

Cuadro I. Valores de los mínimos U_n para los tres conjuntos de datos.

ΔU_n	T3	T2	T1
$\Delta U_1 = U_2 - U_1$	5.05	4.90	4.86
$\Delta U_2 = U_3 - U_2$	4.74	4.74	4.95
$\Delta U_3 = U_4 - U_3$	4.91	4.91	4.91
$\Delta U_4 = U_5 - U_4$	5.00	5.06	5.20
$\Delta U_5 = U_6 - U_5$	5.11	5.15	5.11

Cuadro II. Diferencias entre valores mínimos consecutivos para los tres conjuntos de datos.

Medidas variando voltaje de retardo

Como se muestra en la figura 4, se puede concluir que las 3 curvas no presentan algún orden según cambia el voltaje de retardo (U_2). De acuerdo con la teoría, a mayor voltaje de retardo, mayor la corriente (I_A), y por tanto, en la figura 4 debería estar la curva de $U_2 = 1,5V$ encima de la de $U_2 = 1V$ y la de $U_2 = 2V$ encima de las 2 anteriores.

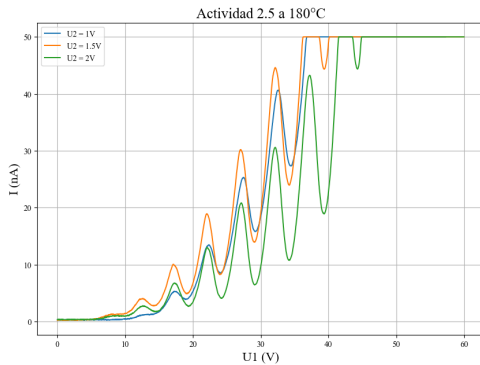


Figura 4. Corriente en función del voltaje de retardo. Medidas realizadas a 180°C

Medidas variando voltaje de emisión termoiónica

Como se muestra en la figura 5, se puede concluir que las 3 curvas no presentan algún orden según cambia el voltaje de emisión termoiónica (U_h). De acuerdo con la teoría, a mayor voltaje de emisión termoiónica, mayor la corriente (I_A). Esto se debe a que a mayor voltaje U_h la temperatura del cátodo es mayor, y de acuerdo con la distribución Maxwell-Boltzmann, los electrones tendrán en promedio más energía cinética inicial. Y por tanto, en la figura 5 debería estar la curva de $U_h = 6,3V$ encima de la de $U_h = 6,1V$ y la de $U_h = 6,5V$ encima de las 2 anteriores.

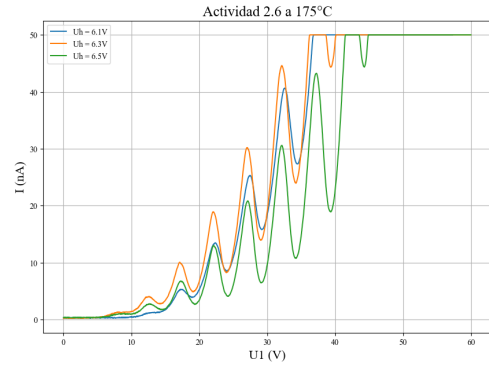


Figura 5. Corriente en función del voltaje de emisión termoiónica. Medidas realizadas a 175°C

Camino libre medio

Se graficaron los datos de distancia entre mínimos mostrados en la tabla II en función del orden del mínimo como se muestra en la figura 6.

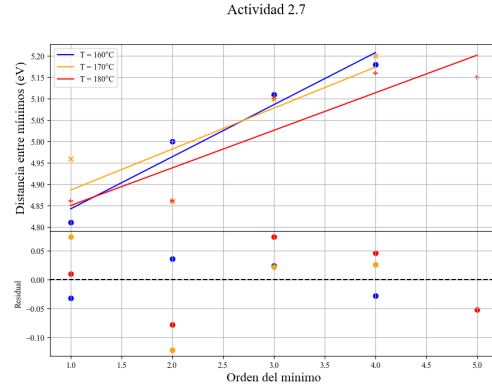


Figura 6. Distancia entre mínimos en función del orden del mínimo. Mediciones realizadas a distintas temperaturas. No se añaden barras de error ya que se desconoce la incertidumbre en la medición de U_1 .

T (°C)	E_A (eV)	σ_{E_A} (7) (eV)	\bar{l}_{teo}	\bar{l}_{exp}	$\sigma_{\bar{l}_{exp}}$ (8)
160	4.78	0.05	0.104	1.5	0.2
170	4.8	0.1	0.073	1.2	0.6
180	4.80	0.07	0.052	1.1	0.3

Cuadro III. Se muestran los resultados experimentales obtenidos de la pérdida de energía cinética del electrón al chocar inelástica con un átomo de Mercurio (E_A), camino libre medio teórico (\bar{l}_{teo}) y experimental (\bar{l}_{exp}) con sus respectivas incertidumbres (todos en milímetros) para la temperatura del gas de Mercurio correspondiente.

Entonces, de acuerdo a las ecuaciones (2) y (3) se calcularon los caminos libre medios para cada medición según la temperatura. Los resultados se muestran en la tabla III.

De acuerdo a los criterios establecidos en la sección V A. Se encontró que para E_A se obtuvo precisión en todos los casos y exactitud razonable en los 2 últimos. Además, para \bar{l}_{exp} no se obtuvo precisión en ningún caso y exactitud razonable solo en el segundo caso.

IV. CONCLUSIONES

En primer lugar, en el desarrollo del análisis cualitativo pudimos evidenciar la respuesta a la temperatura de la gráfica de I vs U_1 predicho en el marco teórico. Conforme bajamos la temperatura, los picos se distancian cada vez más por el cambio en el camino libre

medio. Por otro lado, obtuvimos un valor experimental para el distanciamiento entre el quinto y cuarto pico de $(4,6 \pm 0,1)\text{eV}$. Tenemos un valor de precisión de 0,02, concluyendo así que nuestra medida fue bastante precisa; sin embargo, la medida se alejó en $2,6\sigma$ del valor teórico que calculamos. A pesar de que es menor a 3σ , está en el límite de exactitud. Esto se puede deber a errores al determinar en qué temperatura dar inicio de la toma de datos.

Por otro lado, para las mediciones variando el voltaje de retardo y el voltaje de emisión termoiónica no se obtuvieron los resultados esperados. Esto debido posiblemente al ligero cambio de la temperatura en el transcurso de la medición que se supone constante.

En el cálculo del camino libre medio se evidenció la tendencia lineal para la diferencia energética entre mínimos como se muestra en la figura 6, se evidenció que para el valor experimental de E_A se obtuvo precisión y exactitud razonable y para el valor experimental de \bar{l}_{exp} no se obtuvo precisión ni exactitud razonable en ningún caso. Esto puede deberse, aparte de lo ya mencionado anteriormente, a que el valor teórico del camino libre medio es una aproximación.

Además, en la primera actividad evidenciamos la alta sensibilidad a cambios de temperatura que presenta la corriente. Se determinaron diferentes valores de ΔE_i para medidas con aproximadamente la misma temperatura.

-
- [1] Eisberg, R. M. and Resnick, R. (1985). *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles*. Wiley, New York, 2nd ed edition.
 - [2] KG, P. S. G. . C. (2025). Franck-Hertz-Experiment mit der Hg-Röhre.
 - [3] Preston, D. W. and Dietz, E. R. (1991). *The art of experimental physics*. Wiley, New York.
 - [4] Rapior, G., Sengstock, K., and Baev, V. (2006). New features of the Franck-Hertz experiment. *American Journal of Physics*, 74(5):423–428.
 - [5] Segura, M. (2023). *Métodos Computacionales*.

V. ANEXOS

A. Criterios

- Precisión: $= \frac{\sigma}{X_{exp}} \leq 0,1$
- Exactitud: $= |X_{real} - X_{exp}| \leq 2 \cdot \sigma$

B. Apéndice de cálculo

- Ajuste lineal por mínimos cuadrados[5]:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^T \mathbb{A} \vec{x}^* &= \mathbb{A}^T \vec{b} \\ \text{Proy}_{C(\mathbb{A})} \vec{b} &:= \mathbb{A} \vec{x}^* \end{aligned} \quad (4)$$

- Incertidumbre de mínimos cuadrados[5]:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-p} (\vec{b} - \mathbb{A} \vec{x}^*)^T (\vec{b} - \mathbb{A} \vec{x}^*) \\ \text{Cov}(\vec{x}^*) &= \hat{\sigma}^2 (\mathbb{A}^T \mathbb{A})^{-1} \\ R^2 &= \frac{\text{Cov}(m, b)^2}{\text{Var}(m) \text{Var}(b)} \\ \Delta x_i &= \sigma_{x_i} = \sqrt{\text{Var}(x_i)} \end{aligned} \quad (5)$$

■ **Propagación de errores:**

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma x_i \right)^2} \quad (6)$$

- Incertidumbre de E_a :

$$\sigma_{E_a} = \sqrt{(0,5\sigma_m)^2 + \sigma_b^2} \quad (7)$$

$$m = \frac{d}{dn}(\Delta E(n)), b := \text{punto de corte}$$

- Incertidumbre de \bar{l}_{exp} :

$$\sigma_{\bar{l}_{exp}} = \frac{L}{2} \sqrt{\left(\frac{-m\sigma_{E_a}}{E_a^2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{E_a} \right)^2} \quad (8)$$

$$m = \frac{d}{dn}(\Delta E(n))$$