6.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} A_{11}X_1 & A_{12}X_2 & \cdots & A_{1i}X_i & \cdots & A_{1(n-1)}X_{n-1} & A_{1n}X_n & b_1 \\ 0 & A_{22}X_2 & \cdots & A_{2i}X_i & \cdots & A_{2(n-1)}X_{n-1} & A_{2n}X_n & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ii}X_i & \cdots & A_{i(n-1)}X_{n-1} & A_{in}X_n & b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & A_{nn}X_n & b_n \end{array}\right]$$

Miremos la fila i: $\left[0 \; 0 \cdots A_{ii}X_i \cdots A_{i(n-1)}X_{n-1} \;\; A_{in}X_n \mid b_i\right] \equiv \sum_{j=0}^{n} A_{ij}X_j = b_i$

Sin embargo, $\sum_{j=0}^{n} A_{ij}X_j = \sum_{j=i}^{n} A_{ij}X_j$ pues todos los terminos antes de la columna i son 0. Entonces tenemos:

$\sum_{j=i}^{n} A_{ij}X_j = b_i$ Sacamos el termino de la columna i de la sumatoria:

$A_{ii}X_i + \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}X_j = b_i$ Despejando X_i tenemos: $X_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}X_j}{A_{ii}}$

Como desconosemos los valores X_j no podemos encontrar X_i. Sin embargo, como tenemos una matriz triangular superior sabemos que $A_{nn}X_n = b_n$ despejando: $X_n = \frac{b_n}{A_{nn}}$. Entonces es conveniente partir de $i=n$ hasta $i=0$ y no afecta el resultado pues la suma es conmutativa.

$i = n, n-1, \ldots, 1, 0$ $\qquad X_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}X_j}{A_{ii}}$ //