Адриян БОРИСОВ
Маряна КАЦАРСКА

РЪКОВОДСТВО

за решаване на задачи по

Линейна алгебра

и

Аналитична геометрия

БЛАГОЕВГРАД, 2011

Съдържание

Предговор

към първото издание

Предлаганото „Ръководство за решаване на задачи по линейна алгебра и аналитична геометрия“ е предназначено за студентите от ЮЗУ „Неофит Рилски“, изучаващи дисциплината „Линейна алгебра и аналитична геометрия“ и в общи линии следва реда и означенията в издадения учебник [4].

Всеки параграф започва със сравнително подробно изложение на теоретичния материал, необходим за решаването на задачите. Включени са голям брой задачи с различна степен на трудност, като типовите задачи са решени напълно, а на останалите са дадени указания за тяхното решаване или само отговори. Препоръчваме на читателя да изпълни всички междинни операции, които са изпуснати в решенията и най-вече да реши нерешените задачи - с това той ще провери своите знания.

За улеснение на читателя ще обясним начина на цитиране в текста. Когато се цитира обект (твърдение, формула, задача) от друга глава се използва тройна номерация - номерът на главата, следван от номера на параграфа и номера на обекта. Ако цитираният обект е от същата глава, но от друг параграф, номерацията е двойна - номерът на параграфа, следван от номера на обекта. Например, 1.3(2) означава формула (2) от трети параграф на първа глава, а 2.4) - твърдение 4) от втори параграф на същата глава. Когато се цитира обект от същия параграф, посочва се само неговият номер.

Материалът е подбран и разработен от авторите, както следва: Адриян Борисов - теоретичните бележки към всички глави и задачите от глави 2, 4, 5 и 7, а Мариана Кацарска - задачите от уводната глава и глави 1, 3 и 6.

Авторите считат за свое приятно задължение да изкажат благодарност на рецензентите доц. д-р М. Гаврилов и доц. д-р И. Гюдженов за направените от тях препоръки, които допринесоха за подобряване на книгата.

Благоевград, 1997

Адриян Борисов
Маряна Кацарска

Предговор

към второто издание

Второто издание на ръководството по отношение на съдържанието излиза без изменение – отстранени са само някои забелязани грешки и неточности.

За улеснение на читателя формулите и задачите са снабдени със самостоятелни номера.

Считаме за приятен дълг да изкажем нашата благодарност на д-р Станислава Стоилова, която прояви голяма професионална заинтересованост и извърши значителна работа по техническото оформяне на книгата.

Благоевград, 2011

Адриян Борисов
Маряна Кацарска

Глава 0

Уводна глава

0.1 Основни понятия в комбинаториката

0.1.1 Множества. Операции с множества. Изображения

Понятието *множество* е едно от основните и най-често използвани в математиката понятия. Така например, в геометрията се използват множества от точки, прави, криви; в алгебрата – от числа, полиноми, функции, матрици, линейни пространства, линейни оператори и др.; в анализа – от функции и т.н. Обектите, от които се състои едно множество, се наричат *елементи на множеството.* Обикновено множествата ще означаваме с големи букви, а техните елементи – с малки букви или числа, например $M = \{a, b, \ldots, h\}$, $N = \{1, 2, \ldots, 13\}$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. За да изразим, че *„$a$ е елемент на множеството M“* (или, че *„a принадлежи на M“*) ще използваме означението $a \in M$. Когато *„a не е елемент на множеството M“* (или, че *„a не принадлежи на M“*), това ще означаваме с $a \notin M$.

Две множества A и B се наричат *равни* и това ще означаваме с $A = B$, когато имат едни и същи елементи. Ще казваме, че *A е подмножество на B* (или *A се съдържа в B*), когато всеки елемент на A е елемент и на B. В този случай ще използваме означението $A \subset B$. *Празно множество* (или *нулево множество, пусто множество*) е множество, което не съдържа елементи. Ще го означаваме със символа $\emptyset$. Очевидно то е подмножество на всяко множество. Когато $A \subset B$ и $A \neq \emptyset$, се казва, че A *е истинско подмножество на* B.

Обединение на множествата A и B се нарича множеството, чиито елементи са всички елементи на A и всички елементи на B. Означава се с $A \cup B$.

Сечение на множествата A и B се нарича множеството, чиито елементи принадлежат едновременно и на A и на B. Означава се с $A \cap B$.

Разлика на множествата A и B се нарича множеството, чиито елементи принадлежат на A, но не принадлежат на B. Означава се с $A \backslash B$.

За така дефинираните операции с множества са в сила следните формули, доказателствата на които не представляват никаква трудност:

$A \cup B = B \cup A, \ A \cap B = B \cap A;$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$
$A \cap B = A \backslash (A \backslash B);$
$A \cup (B \backslash A) = A \cup B;$
$A \backslash (A \cap B) = A \backslash B;$
$A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C.$

Ако $A \subset B$, разликата $B \backslash A$ се нарича *допълнение* на множеството A до множеството B.

Когато изрично не е казано друго, ще предполагаме, че всички разглеждани множества са подмножества на някакво фиксирано множество $\mathcal{J}$, което се нарича *универсално множество*. В този случай допълнението на едно множество A (до универсалното множество) се бележи с $\overline{A}$.

Забележка 0.1.1 За някои множества са приети стандартните означенията:

$\mathbb{N}$ – множество на естествените числа;
$\mathbb{Z}$ – множество на целите числа;
$\mathbb{Z}^+$ – множество на положителните цели числа;
$\mathbb{Z}^-$ – множество на отрицателните цели числа;
$\mathbb{Q}$ – множество на рационалните числа;
$\mathbb{R}$ – множество на реалните числа;
$\mathbb{R}^+$ – множество на положителните реални числа;
$\mathbb{R}^-$ – множество на отрицателните реални числа.

За два елемента a и b от множеството M, взети в посочения ред, се казва, че образуват *наредена двойка* (a, b). Следователно в наредената двойка (a, b) имаме, че *a е първи елемент*, а b – *втори*. Две наредени двойки (a_1, b_1) и (a_2, b_2) се наричат *равни* (или *еднакви*) само когато $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Декартово произведение на две множества A и B се нарича множеството $A \times B$ от всички наредени двойки, чиито първи елементи принадлежат на A, а вторите – на B, т.е.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Ако $B = A$, декартовото произведение $A \times B = A \times A$ се нарича *декартов квадрат на A* и накратко се означава с A^2. Очевидно, ако множеството A има m елемента, а множеството B – n елемента, то декартовото произведение $A \times B$ има mn елемента.

1) *Правило на произведението.* Ако един елемент a може да се избере по m различни начина и след всеки такъв избор, елементът b може да се избере по k различни начина, то наредената двойка (a, b) може да се избере по mk различни начина.

Понятията „наредена двойка“, „равенство на наредени двойки“ и „декартово произведение на две множества“ се обобщават по очевиден начин и за случаите на повече от два елемента. Например

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}.$$

Нека A и B са непразни множества. Ако на всеки елемент от множеството A е съпоставен точно един елемент от множеството B, то казваме, че е определено *изображение на множеството* A *в множеството* B.

Изображението на едно множество в друго ще означаваме с буквите f, g, h, φ, ψ, η и т.н. За да отбележим, че „f е изображение на множеството A в множеството B“ ще използваме означението

$$f : A \to B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

Ако f е изображение на множеството A в множеството B, което на елемента $x \in A$ съпоставя елемента $y \in B$, то x се нарича *първообраз* (*праобраз*) на y, а y – *образ* на x при изображението f и се означава

$$f(x) = y.$$

Инекция (*инективно*) се нарича изображение на множеството A в множеството B, при което всеки елемент от B е образ най-много на един елемент от A, т.е. различните елементи от A имат различни образи в B.

Изображение f на множеството A в множеството B се нарича *сюрекция* (*сюрективно*), когато всеки елемент на B е образ поне на един елемент от A, т.е. за всяко $y \in B$ съществува поне едно $x \in A$, такова, че $f(x) = y$.

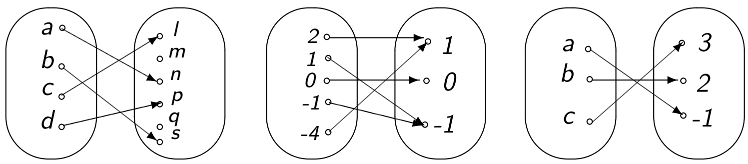
Ако едно изображение на множеството A в множеството B е както инективно, така и сюрективно, то се нарича *биекция* (*биективно* или *взаимно еднозначно изображение*). За да установим, че $f : A \to B$ е биекция, трябва да проверим следните три условия:

(i) на всеки елемент $a \in A$ се съпоставя единствен елемент $b = f(a) \in B$;

(ii) от $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$;

(iii) за всеки елемент $b \in B$ съществува поне един елемент $a \in A$, такъв че $b = f(a)$.

Изображението f е инекция, ако са изпълнени условия (i) и (ii) и f е сюрекция, ако са изпълнени условия (i) и (iii). Когато f е изображение на A в B, казваме че A е *дефиниционна област на* f. Образът $f(A)$ на цялата дефиниционна област се нарича *област от стойности* (*значения*) *на* f.



фиг. 1 фиг. 2 фиг. 3

Изображението, представено чрез диаграми и стрелки на фиг. 1 е инективно, но не е сюрективно; на фиг. 2 е сюрективно, но не е инективно и на фиг. 3 е биективно.

Нека f и g са две изображения, за които областта от стойности на първото изображение се съдържа в дефиниционната област на второто, т.е. $f : A \to B$ и $g : B \to C$. *Произведение* (*композиция* или *суперпозиция*) на изображенията g и f, взети в този ред, се нарича изображението $h = gf$ на A в C, определено с равенството

$$(gf)(x) = g(f(x)).$$

Например, ако $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$ е изображението, дефинирано с равенството $f(x) = -\sqrt[3]{x^2+2}$, а $g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ е изображението $g(x) = 5 + |x|$, то композицията $h = gf$ е изображението, определено с равенството $h(x) = 5 + |-\sqrt[3]{x^2+2}| = 5 + \sqrt[3]{x^2+2}$ от множеството $\mathbb{R}$ в множеството $\mathbb{R}^+$.

Произведението на изображения притежава свойството асоциативност.

Нека изображението $f : A \to B$ е биекция, т.е. всеки елемент $b \in B$ е образ на точно един елемент $a \in A$. Тогава изображението $f^{-1} : B \to A$, което на всеки елемент $b \in B$ съпоставя онзи единствен елемент $a \in A$, за който $b = f(a)$, се нарича *обратно* на изображението $f : A \to B$.

Обратното изображение на биективно изображение е също биективно.

Ако $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^-$ е определено с равенството $f(x) = -(x+1)$, то $f^{-1} : \mathbb{Z}^- \to \mathbb{N}$ се задава с формулата $f^{-1}(y) = |y| - 1$.

0.1.2 Пермутации

Нека M е крайно множество от n различни елемента $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Всяко крайно множество, образувано от елементи на M, се нарича *съединение. Съединение без повторение* се нарича такова съединение, в което всеки елемент участва точно един път. Съединение, в което поне един елемент се среща повече от един път, се нарича *съединение с повторение.*

По-нататък ще разглеждаме само съединения без повторения и за краткост ще ги наричаме просто съединения.

Пермутации от n елемента се наричат съединения, в които участват всички елементи на M и се различават една от друга по наредбата (местата на елементите си).

Пермутацията, в която елементите заемат места, чиито номера са в естествения им ред, се нарича *основна* или *главна пермутация.* Например, главната пермутация на множеството $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ е $a_1 a_2 \ldots a_n$, тъй като числата $1, 2, \ldots, n$ са в естествения си ред.

Ще казваме, че два елемента в една пермутация образуват *инверсия*, ако редът им е обратен на този в главната пермутация. Една пермутация се нарича *четна* (респ. *нечетна*), ако има четен (респ. нечетен) брой инверсии.

2) *Лема на пермутациите.* Ако разменим местата на два кои да е елемента в една пермутация, то тя променя своята

четност, т.е. от четна става нечетна и от нечетна – четна.

За броя на пермутациите на едно множество от n елемента е в сила твърдението:

3) Броят P_n на всички пермутации от n различни елемента е

$$P_n = n!.$$

Лесно се съобразява, че броят на четните пермутации е равен на броя на нечетните и следователно е равен на $\frac{1}{2}n!$.

0.1.3 Вариации

Вариация от n елемента от k-ти клас се наричат съединения от k $(1 \leq k \leq n)$ елемента на множеството M, които се различават едно от друго по елементите си или по техните места. Имаме:

4) Броят V_n^k на всички вариации от n елемента от k-ти клас е

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1), \quad \text{или} \quad V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{0.1}$$

0.1.4 Комбинации

Комбинации от n елемента от k-ти клас се наричат съединения от k $(1 \leq k \leq n)$ елемента на множеството M, които се различават едно от друго поне по един елемент.

5) Броят C_n^k ($\binom{n}{k}$) на всички комбинации от n елемента от k-ти клас е

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad \text{или} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{0.2}$$

По определение приемаме, че $C_n^0 = 1,\ n = 0, 1, 2, \dots.$

0.1.5 Нютонов бином

6) За всяко естествено число $n \geq 1$ и всеки две числа a и b е в сила равенството:

(0.3)
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n,$$

където символите $\binom{n}{k}$ (чете се: „n над k“) се наричат *биномни коефициенти* и

$$\binom{n}{k} = C_n^k, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1. \tag{0.4}$$

Формулата (0.3) се нарича *Нютонов бином.*

Задача 0.1.1 Дадени са множествата $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ и $C = \{3,4,5\}$. Намерете:
а) $A \cup B$; б) $B \cup C$; в) $A \cup B \cup C$; г) $A \cap B$;
д) $B \cap C$; е) $A \cap B \cap C$; ж) $A \backslash B$; з) $B \backslash C$;
и) $A \backslash (B \backslash C)$; й) $A \cup (B \backslash A)$; к) $A \cap (B \backslash C)$.

Отговор. а) $A \cup B = \{1,2,3,4\}$; б) $B \cup C = \{2,3,4,5\}$;
в) $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5\}$; г) $A \cap B = \{2,3\}$;
д) $B \cap C = \{3,4\}$; е) $A \cap B \cap C = \{3\}$; ж) $A \backslash B = \{1\}$;
з) $B \backslash C = \{2\}$; и) $A \backslash (B \backslash C) = \{1,3\}$;
й) $A \cup (B \backslash A) = A \cup B = \{1,2,3,4\}$;
к) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C = \{2\}$.

Задача 0.1.2 Докажете, че за произволни множествата A, B и C са в сила равенствата:
а) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;
б) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$.

Решение. а) Нека x е произволен елемент на множеството $A \backslash (B \cap C)$. Тогава имаме $x \in A$, $x \notin B \cap C$. Оттук следва, че x

не се съдържа в поне едно от множествата B и C. Ако $x \notin B$, то $x \in A \backslash B$ и следователно

$$x \in (A \backslash B) \cup (A \backslash C). \tag{0.5}$$

В случай, че $x \in B$, то сигурно $x \notin C$. Тогава $x \in A \backslash C$ и отново получаваме (0.5). Тъй като x е произволен елемент на $A \backslash (B \cap C)$, от (0.5) заключаваме, че

$$A \backslash (B \cap C) \subseteq (A \backslash B) \cup (A \backslash C). \tag{0.6}$$

С аналогични разсъждения се установява и включването

$$(A \backslash B) \cup (A \backslash C) \subseteq A \backslash (B \cap C). \tag{0.7}$$

От (0.6) и (0.7) следва а).

Задача 0.1.3 Докажете, че за всеки две множествата A и B са в сила следните *закони на де Морган*:
а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Задача 0.1.4 Докажете, че ако A, B и C са произволни множествата, то:
а) $A \cup [(A \cap B) \cup (A \cap C)] = A$; б) $(A \cup \overline{B}) \cap B = A \cap B$;
в) $(A \cap \overline{B}) \cup B = A \cup B$; г) $\overline{(A \cup B)} \cup (A \cap B) = \overline{(A \backslash B) \cup (B \backslash A)}$;
д) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$.

Задача 0.1.5 Посочете кои от следните наредени тройки са равни:
а) $(3, -1, 2)$, $(-3, 1, 2)$, $(2, -1, 3)$, $(3, -1, 2)$;
б) (a, c, m), (a, m, c), (a, c, m), (c, a, m).

Отговор. а) първата и четвъртата; б) първата и третата.

Задача 0.1.6 Намерете декартовите произведения:
а) $A \times B$; б) $B \times A$; в) $C \times A \times B$; г) $B \times B$,
ако $A = \{1, -2, 3\}$, $B = \{3, 5\}$ и $C = \{a\}$.

Отговор. а) $A\times B = \{(1,3),(1,5),(-2,3),(-2,5),(3,3),(3,5)\}$;
б) $B\times A = \{(3,1),(3,-2),(3,3),(5,1),(5,-2),(5,3)\}$;
в) $C\times A\times B = \{(a,1,3),(a,1,5),(a,-2,3),(a,-2,5),(a,3,3),(a,3,5)\}$;
г) $B\times B = \{(3,3),(3,5),(5,3),(5,5)\}$.

Задача 0.1.7 За произволни множества A и B, вярно ли е равенството $A\times B = B\times A$?

Отговор. Ако $A\neq B$, не е вярно; ако $A=B$ – вярно.

Задача 0.1.8 Докажете, че ако A, B, C и D са произволни множества, то:
а) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$;
б) $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$;
в) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$;
г) $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$;
д) $(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C)\cap(B\times D)$.

Решение. Ще докажем в). Интересен е случаят, когато участващите във в) множества са непразни, защото ако някое от тях е празното множество, то очевидно равенството е вярно.

Нека (x,y) е произволен елемент на множеството $A\times(B\cap C)$. Тогава $y\in B\cap C$ и следователно $y\in B$, $y\in C$. От $x\in A$, $y\in B$ и $x\in A$, $y\in C$ получаваме, че $(x,y)\in A\times B$ и $(x,y)\in A\times C$. Оттук следва, че $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$ и предвид направеното предположение за елемента (x,y), заключаваме, че

$$A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C). \tag{0.8}$$

Обратно, нека (x,y) е произволен елемент на множеството $(A\times B)\cap(A\times C)$. Тогава $(x,y)\in A\times B$, $(x,y)\in A\times C$, откъдето намираме $x\in A$, $y\in B$, $y\in C$, т.е. $x\in A$, $y\in B\cap C$. Оттук получаваме $(x,y)\in A\times(B\cap C)$ и следователно

$$(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C). \tag{0.9}$$

От (0.8) и (0.9) следва в).

Задача 0.1.9 Нека f на всяко рационално число $\dfrac{p}{q}$, $(q \neq 0)$ съпоставя естественото число p^2+q^2. Проверете изображение ли е f на $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{N}$.

Решение. Знаем, че f е изображение, ако от $x_1 = x_2$ следва $f(x_1) = f(x_2)$. Тъй като $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2p}{2q}$, но $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = p^2 + q^2 \neq 4p^2 + 4q^2 = f\left(\dfrac{2p}{2q}\right)$, $(q \neq 0)$, то f не е изображение на $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{N}$.

Задача 0.1.10 Определете вида на всяко от следващите изображения:

а) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, където $\varphi(x) = a^x$ $(0 < a \neq 1)$;
б) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$, където $\varphi(x) = x^2 + 1$;
в) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, където $\varphi(x) = x + 3$;
г) $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, където $\varphi(x) = 5x$;
д) $\varphi : \mathbb{N} \to \{-1, 1\}$, където $\varphi(x) = \begin{cases} 1, \text{ ако } x = 2k,\ k \in \mathbb{N}, \\ -1, \text{ ако } x = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}; \end{cases}$
е) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, където $\varphi(x) = x^2 - 2x + 3$;
ж) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, където $\varphi(x) = -x$;
з) $\varphi : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, където $\varphi(x) = \sin x$;
и) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, където $\varphi(x) = |x| + 1$;
к) $\varphi : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, където $\varphi[(a, b)] = a - \sqrt{3}b$.

Решение. а) (i) Ако $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$, т.е. $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Следователно φ е изображение на $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^+$.

(ii) Нека $x_1 \neq x_2$. Допускаме, че $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, т.е. $a^{x_1} = a^{x_2}$. От свойствата на степените с равни основи следва $x_1 = x_2$. Получи се противоречие с условието $x_1 \neq x_2$. Следователно допускането $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ не е вярно, т.е. $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ и φ е инекция.

(iii) Нека $y \in \mathbb{R}^+$. Търсим елемент $x \in \mathbb{R}$, такъв, че $\varphi(x) = y$. Но $\varphi(x) = a^x$, т.е. $y = a^x$. Понеже $y > 0$ и $0 < a \neq 1$, то съществува числото $\log_a y$, което е решение на уравнението $y =$

a^x и $\varphi(\log_a y) = a^{\log_a y} = y$. С това доказахме, че φ е сюрекция. От (i), (ii) и (iii) следва, че φ е биекция.

е) (i) От $x_1 = x_2$ следва $x_1^2 - 2x_1 + 3 = x_2^2 - 2x_2 + 3$, т.е. $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, което означава, че φ е изображение.

(ii) Нека $x_1 \neq x_2$. Да допуснем, че $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Тогава $x_1^2 - 2x_1 + 3 = x_2^2 - 2x_2 + 3$, откъдето $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) = 0$. Но $(x_1 - x_2) \neq 0$ и следователно $(x_1 + x_2 - 2) = 0$. Получаваме, че за всеки две реални числа, за които $x_1 + x_2 - 2 = 0$ е изпълнено равенството $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Например, $\varphi(-1) = \varphi(3) = 6$. Това показва, че φ не е инекция.

(iii) Нека $y \in \mathbb{R}$. Търсим елемент $x \in \mathbb{R}$ такъв, че $\varphi(x) = y$, т.е. $x^2 - 2x + 3 = y$. Следователно x е решение на квадратното уравнение $x^2 - 2x + 3 - y = 0$. То има реални корени при $y \geq -2$, което показва, че всички реални числа по-малки от -2 нямат първообрази от $\mathbb{R}$, т.е. φ не е сюрекция.

Отговор. б) нито инекция, нито сюрекция; в) биекция;
г) инекция, но не сюрекция; д) сюрекция, но не инекция;
ж) биекция; з) сюрекция; и) нито инекция, нито сюрекция;
к) инекция.

Задача 0.1.11 Намерете обратните изображения на изображенията от:

а) задача 0.1.10 а); б) задача 0.1.10 в); в) задача 0.1.10 ж).

Решение. а) Нека φ е биективно изображение (виж задача 0.1.10 а)). Тогава $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ и $\varphi^{-1}(y) = x$ е онзи елемент $x \in \mathbb{R}$, за който $\varphi(x) = y$. Но $\varphi(x) = a^x$. Тогава $y = a^x$ и следователно $x = \log_a y$. Получихме, че изображението $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е определено с равенството $\varphi^{-1}(y) = \log_a y$.

Отговор. б) $\varphi^{-1}(y) = y - 3$; в) $\varphi^{-1}(y) = -y$, т.е. $\varphi^{-1} = \varphi$.

Задача 0.1.12 Намерете изображението $h = gf$, ако:
а) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 3x$ и $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{2}x + 1$;
б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = x^2 + 5$ и $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-,\ g(x) = -\sqrt{x}$;

в) $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ f[(a,b)] = a + \sqrt{3}b$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ g(x) = x^2$.

Отговор. а) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, където $h(x) = 3\sqrt{2}x + 1$;
б) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$, където $h(x) = -\sqrt{x^2 + 5}$;
в) $h : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, където $h[(a,b)] = (a + \sqrt{3}b)^2$.

Задача 0.1.13 Напишете всички трицифрени числа, които се получават от цифрите 2, 3 и 5, като всичките цифри във всяко едно от числата са различни.

Упътване. Търсените трицифрени числа може да отъждествите с пермутациите на множеството $M = \{2, 3, 5\}$.
Отговор. 235, 352, 523, 325, 253, 532.

Задача 0.1.14 По колко различни начина могат да се подредят в една колона 6 студента?

Решение. Броят на различните начини на подреждане на 6 студента в една колона е равен на пермутациите на множество от 6 елемента, т.е. на $P_6 = 6! = 720$.

Задача 0.1.15 Доставчик трябва да разнесе пакети в 5 различни фирми. По колко различни начина може да направи това?

Отговор. $P_5 = 120$.

Задача 0.1.16 Намерете броя на елементите, от които могат да се съставят:
а) 5040 пермутации; б) 362 880 пермутации.

Решение. а) Ако означим с n търсения брой, то съгласно 3) имаме равенството

$$n! = 5040.$$

Разлагаме числото 5040 на прости множители. Тъй като

$$5040 = 2.2.2.2.3.3.5.7 = 2.3.4.5.6.7 = 7!,$$

следва, че $n = 7$.

Отговор. б) $n = 9$.

Задача 0.1.17 Да се решат уравненията:
а) $P_{x+1} - 8P_{x-1} = 8P_x$; б) $P_{x+3} = 48(x.P_{x-1} + P_{x+1})$.

Отговор. а) $x = 8$; б) $x = 5$.

Задача 0.1.18 По колко начина могат да се подредят на лавицата на библиотека 10 книги, като 3 от тях да бъдат една до друга?

Решение. Трите книги могат да се подредят една до друга по $P_3 = 3! = 6$ начина. Ако разглеждаме тези книги като една (т.е. като един елемент), то заедно с останалите 7 (т.е. имаме общо 8 елемента) могат да се подредят по $P_8 = 8! = 40320$ начина. Следователно броят на търсените начини на подреждане е равен на $P_3.P_8 = 3!8! = 241920$.

Задача 0.1.19 В един магазин има 3 модела детски обувки, като от I модел са само бели, от II модел – бели, червени, сини, черни и от III модел – бели и сини. По колко начина могат да бъдат подредени тези обувки на витрина в една редица, като обувките от един модел трябва да са едни до други и от всеки цвят на даден модел да има по един чифт?

Отговор. $P_1.P_4.P_2.P_3 = 1!4!2!3! = 288$.

Задача 0.1.20 Намерете броя на инверсиите в пермутациите:

а) 1 3 6 5 7 2 4;
б) 5 1 2 7 4 3 8 9 6;
в) т е л з а п и н о (главна пермутация – „позлатени“)
г) $1\ 3\ 5 \ldots (2n-1)\ 2\ 4\ 6 \ldots 2n$
д) $1\ 4\ 7 \ldots (3n-2)\ 2\ 5\ 8 \ldots (3n-1)\ 3\ 6\ 9 \ldots (3n)$.

Решение. д) За главна (основна) пермутация приемаме пермутацията $1\ 2\ 3\ \ldots(3n)$. Тъй като във всяка от пермутациите $1\ 4\ 7\ \ldots(3n-2)$, $2\ 5\ 8\ \ldots(3n-1)$ и $3\ 6\ 9\ \ldots(3n)$ броят на инверсиите е равен на нула, то в разглежданата пермутация

$$1\ 4\ 7\ldots(3n-2)\ 2\ 5\ 8\ldots(3n-1)\ 3\ 6\ 9\ldots(3n)$$

числата $2, 5, 8, \ldots, (3n-1)$ образуват съответно n–$1, n$–$2, \ldots, 1, 0$ инверсии, а числата $3, 6, 9, \ldots, (3n)$ – съответно $2n-2, 2n-4, \ldots, 2, 0$ инверсии. Тогава броят на всички инверсии е равен на

$$1+2+\cdots+(n-1)+2+4+\cdots+(2n-2)=$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{2n(n-1)}{2}=\frac{3n(n-1)}{2}.$$

Отговор. а) 8; б) 9; в) 20; г) $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Задача 0.1.21 Намерете при какви стойности на естествените числа k и l, $1 \leq k \leq 7$, $1 \leq l \leq 7$ е вярно твърдението:

а) пермутацията $6\ k\ 1\ 3\ 5\ l\ 2$ е нечетна;

б) пермутацията $5\ 3\ k\ 2\ l\ 4\ 7$ е четна.

Отговор. а) $k = 4$, $l = 7$; б) $k = 6$, $l = 1$.

Задача 0.1.22 Намерете при какви стойности на естественото число n е вярно твърдението:

а) пермутацията $1\ 3\ 5\ldots(2n-1)\ 2\ 4\ 6\ldots 2n$ е четна;

б) пермутацията $1\ 4\ 7\ldots(3n-2)\ 2\ 5\ 8\ldots(3n-1)\ 3\ 6\ 9\ldots 3n$ е нечетна;

в) пермутацията $n\ (n-1)\ (n-2)\ldots\ 3\ 2\ 1$ е четна.

Отговор. а) $n = 4k$ или $n = 4k+1$; б) $n = 4k+2$ или $n = 4k+3$; в) $n = 4k$ или $n = 4k+1$.

Задача 0.1.23 Във футболен турнир участват 10 отбора като всеки от тях играе срещу всеки като гост и домакин. Колко е броят на проведените футболни мачове?

Решение. Броят на проведените футболни мачове е равен на броя на всички вариации от 10 елемента от 2-ри клас. Тогава съгласно 4) при $n = 10$ и $k = 2$, получаваме $V_{10}^2 = 10.9 = 90$.

Задача 0.1.24 В състезание участват 25 състезатели. Колко различни възможности съществуват за разпределение на златния, сребърния и бронзовия медали?

Отговор. $V_{25}^3 = 25.24.23 = 13800$.

Задача 0.1.25 Колко различни трицветни знамена могат да се направят от седем различни по цвят плата?

Отговор. $V_7^3 = 210$.

Задача 0.1.26 Да се решат уравненията:
а) $V_x^2 = 20$; б) $V_{x-2}^2 = 90$; в) $V_{x+10}^2 = 56$; г) $V_x^3 - V_{x-1}^2 = 36$;
д) $V_x^{10} + V_x^9 = 9V_x^8$; е) $V_{x+1}^3 - V_{x-1}^3 = \dfrac{4}{5}V_x^4$;
ж) $V_{x+4}^x = 60V_{x+2}^{x-1}$; з) $V_{2x+1}^{x+2} = 21V_{2x-1}^{x+1}$.

Решение. б) Очевидно допустимите стойности на x са естествените числа по-големи или равни на 4. Като използваме (0.1) записваме б) във вида

$$(x-2)(x-3) = 90,$$

откъдето получаваме $x^2 - 5x - 84 = 0$. Това квадратно уравнение има корени $x_1 = 12$ и $x_2 = -7$. Предвид посочените в началото ограничения за x, решението е $x = 12$.

ж) Съгласно 4) имаме

$$(x+4)(x+3)\dots 5 = 60(x+2)(x+1)\dots 4$$

и като съкратим повтарящите се в двете страни на равенството множители, достигаме до квадратното уравнение $x^2 + 7x - 228 = 0$. То има корени $x_1 = 12$ и $x_2 = -19$ и следователно решението на задачата е $x = 12$.

Отговор. а) $x = 5$; в) $x = -2$; г) $x = 5$; д) $x = 11$; е) $x = 5$; з) $x = 3$.

Задача 0.1.27 В равнината са дадени пет точки, никои три от които не лежат на една права. Да се намери броят на правите, определени от тези точки.

Решение. Броят на търсените прави е равен на броя на комбинациите от 5 елемента от 2-ри клас, т.е. $C_5^2 = \dfrac{5.4}{2} = 10$ (виж (0.2)).

Задача 0.1.28 Да се намери броят на диагоналите на произволен изпъкнал n-ъгълник, ако:
а) $n = 6$; б) $n = 8$; в) $n = 11$.

Решение. а) Върховете на изпъкналия шестоъгълник са 6 точки, никои 3 от които не лежат на една права. Тогава броят на отсечките, определени от тези 6 точки е равен на $C_6^2 = 15$. Тъй като 6 от тях са страните на шестоъгълника, то броят на диагоналите му е равен на 9.
Отговор. б) 20; в) 44.

Задача 0.1.29 В равнината са дадени n $(n \geq 3)$ точки, никои три от които не лежат на една права. Да се намери:
а) броят на определените от тези точки прави;
б) броят на определените от тези точки триъгълници.

Отговор. а) C_n^2; б) C_n^3.

Задача 0.1.30 В равнината са дадени 20 различни точки, никои три от тях не лежат на една права с изключение на 7 от тях. Да се намери:
а) броят на определените от тези точки прави;
б) броят на определените от тези точки триъгълници.

Решение. а) Ако никои три от дадените 20 точки не лежаха на една права, то те биха определили $C_{20}^2 = 190$ различни прави. Съгласно условието обаче, 7 от точките лежат на една права и следователно $C_7^2 = 21$ от получените по-горе 190 прави се сливат в една. Тогава броят на търсените прави е равен на $C_{20}^2 - C_7^2 + 1 = 170$.

Отговор. б) 1105.

Задача 0.1.31 В равнината са дадени n $(n \geq 3)$ точки, никои три от които не лежат на една права с изключение на m $(m < n)$. Да се намери:

а) броят на определените от тези точки прави;

б) броят на определените от тези точки триъгълници.

Отговор. а) $C_n^2 - C_m^2 + 1$; б) $C_n^3 - C_m^3$.

Задача 0.1.32 Пресметнете:

а) $(a+b)^5$; б) $(a+1)^9$.

Решение. а) Съгласно (0.3) и (0.4) имаме

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 \tag{0.10}$$

и

$$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1,\ \binom{5}{1} = C_5^1,\ \binom{5}{2} = C_5^2,\ \binom{5}{3} = C_5^3,\ \binom{5}{4} = C_5^4.$$

Пресмятаме $C_5^1 = 5$, $C_5^2 = 10$, $C_5^3 = 10$, $C_5^4 = 5$ и като заместим в (0.10), получаваме

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Отговор. б) $(a+1)^9 = a^9 + 9a^8 + 36a^7 + 84a^6 + 108a^5 + 108a^4 + 84a^3 + 36a^2 + 9a + 1$.

Задача 0.1.33 Да се докаже, че за всяка двойка естествени числа m и n $(n > m)$ са в сила равенствата:

а) $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$;

б) $\binom{n}{m+1} + \binom{n}{m-1} + 2\binom{n}{m} = \binom{n+2}{m+1}$.

Задача 0.1.34 Пресметнете сумите:
а) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n$;

б) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \cdots + (n+1)C_n^n$;

в) $\dfrac{C_n^0}{1} + \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} + \cdots + \dfrac{C_n^n}{n+1}$;

г) $\dfrac{C_n^0}{2} + \dfrac{C_n^1}{3} + \dfrac{C_n^2}{4} + \cdots + \dfrac{C_n^n}{n+2}$.

Упътване. Използвайте равенството $(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + \cdots + x^nC_n^n$.

Отговор. а) $n.2^{n-1}$; б) $(n+2).2^{n-1}$; в) $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$;
г) $\dfrac{1+n2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

0.2 Комлексни числа

0.2.1 Основни понятия

Разглеждаме множеството

$$\mathbb{C} = \{z = (a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

на всички двойки $z = (a,b)$ от реални числа a и b. Елементите на $\mathbb{C}$ се наричат *комплексни числа*, $\mathbb{C}$ – *множество на комплексните числа*. Ако $z = (a,b)$ е произволно комплексно число, първият елемент a на наредената двойка z се нарича *реална част на* z и се означава с $\operatorname{Re} z = a$, а вторият елемент b – *имагинерна част на* z и се означава с $\operatorname{Im} z = b$.

Две комплексни числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ се наричат *равни*, когато са равни поотделно реалните и имагинерните им части, т.е. когато $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. В този случай се използва записа $z_1 = z_2$.

Сбор (*сума*) на комплексните числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ се нарича комплексното число

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Произведение на комплексните числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ се нарича комплексното число

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

По този начин в $\mathbb{C}$ са определени операциите *събиране и умножение* на комплексни числа, които притежават обичайните свойства на съответните операции в множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа. С помощта на операциите събиране и умножение на комплексни числа се въвеждат и операциите *изваждане, деление* и *степенуване* на комплексни числа.

За *разликата* $z_1 - z_2$ на комплексните числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ имаме

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2),$$

а за тяхното *частно* $\dfrac{z_1}{z_2}$ (при $z_2 \neq 0$) –

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} \right).$$

Всяко комплексно число z, за което $\operatorname{Re} z = 0$, а $\operatorname{Im} z \neq 0$ се нарича *имагинерно число.* Имагинерното число $i = (0, 1)$ се нарича *имагинерна единица.* За квадрата на имагинерната единица получаваме

$$i^2 = -1.$$

0.2.2 Алгебричен вид на комплексните числа

С помощта на имагинерната единица i всяко комплексно число $z = (a, b)$ може да се запише във вида

$$z = a + ib.$$

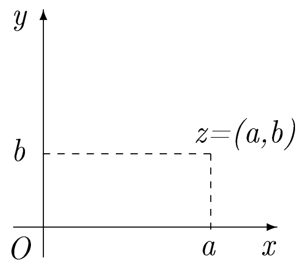
Нарича се *алгебричен вид* на комплексното число z. Комплексното число $\overline{z} = a - ib$ се нарича *спрегнато* или *конюговано* на $z = a + ib$. Казва се още, че числата $z = a + ib$ и $\overline{z} = a - ib$ са *комплексно спрегнати*. Имаме

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2,\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2,\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\ \ (\text{при } z_2 \neq 0),\ \overline{(\overline{z})} = z;$$

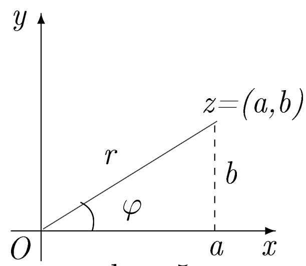
$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\quad \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}),\quad z\overline{z} = a^2 + b^2.$$

0.2.3 Тригонометричен вид на комплексните числа

Спрямо ортогоналната координатна система $K = Oxy$ в равнината на всяко комплексно число $z = a + ib$ съответства точно една точка (a, b),



фиг. 4



фиг. 5

която се означава със същата буква z (фиг. 4).

Да означим с r разстоянието $|Oz|$, а с φ – ориентирания ъгъл, който сключва радиус-векторът на точката z с положителната посока на оста Ox (фиг. 5). Тогава имаме

$$a = r\cos\varphi,\quad b = r\sin\varphi \tag{0.11}$$

и за комплексното число $z = a + ib$ намираме представянето

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{0.12}$$

което се нарича *тригонометричен вид* на z. Неотрицателното число

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{0.13}$$

се нарича *модул* на z, а ъгълът φ, измерен в радиани – *аргумент* на z. Очевидно аргументът φ е определен с точност до цяло число, кратно на 2π и поради това обикновено се работи с *главната стойност на аргумента* – онази стойност на φ, която се намира в интервала $[0, 2\pi)$ или $(-\pi, \pi]$. Означава се с Arg z. Имаме

$$\text{Arg } 1 = 0, \ \text{Arg } i = \frac{\pi}{2}, \ \text{Arg } (-1) = \pi, \ \text{Arg } (-i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Ако $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то получаваме

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \tag{0.14}$$

Степенуването и коренуването на комплексни числа се извършва по формулите

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{0.15}$$

(0.16)
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

където $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и $\sqrt[n]{r}$ е аритметичен корен. Формулите (0.15) и (0.16) са известни като формули на *Moivre*.

Задача 0.2.1 Да се намерят реалните стойности на x и y, при които са в сила равенствата:

а) $x - 3i + (y+5)i = 4$; б) $(3+i)x - 2(1+4i)y = 4 - 6i$;

в) $\dfrac{(-1+5i)x + 4(1+i)y}{-2+2i} = 3$; г) $\dfrac{ix - 4i - y + 1}{1+i} = 5 + 2i$.

Решение. г) Умножаваме двете стрнани на даденото равенство с $1+i$. Получаваме

$$(1-y)+(x-4)i = 3+7i.$$

Комплексните числа в двете страни на последното равенство са равни точно тогава, когато $1-y=3$ и $x-4=7$. Оттук намираме $x=11$, $y=-2$.

Отговор. а) $x=4$, $y=-2$; б) $x=2$, $y=1$;
в) $x=0$, $y=-\dfrac{3}{2}$.

Задача 0.2.2 Определете реалните числа x и y така, че дадените двойки комплексни числа z и $\overline{z}$ да са конюговани.
а) $z=y^2-2y+xy-x+y+(x+y)i$, $\overline{z}=-y^2+2y+11-4i$;
б) $z=x+y^2+1+4i$, $\overline{z}=ixy^2+iy^2-3$.

Упътване. Комплексните числа z и $\overline{z}$ са конюговани точно тогава, когато $\mathrm{Re}\ z=\mathrm{Re}\ \overline{z}$ и $\mathrm{Im}\ z=-\mathrm{Im}\ \overline{z}$.

Отговор. а) $x=1$, $y=3$ или $x=9$, $y=-5$;
б) $x=-5$, $y=-1$ или $x=-5$, $y=1$.

Задача 0.2.3 Намерете комплексното число z, ако:
а) $\overline{z}=3-2i$; б) $\overline{z}=-3z$; в) $z^2=\overline{z}$ г) $|z|+z=1+2i$;
д) $|z|+z=8-4i$; е) $z^3=\overline{z}$ ж) $|(3-i)z|-2(1-2i)z=-5i$.

Решение. в) Нека $z=x+iy$, където $x,y\in\mathbb{R}$. Тогава от $z^2=\overline{z}$ следва равенството $x^2-y^2+2xyi=x-iy$, което е еквивалентно на системата $x^2-y^2=x$, $2xy=-y$. Тя има решенията $x_1=0$, $y_1=0$, $x_2=1$, $y_2=0$, $x_3=-\dfrac{1}{2}$, $y_3=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x_4=-\dfrac{1}{2}$, $y_4=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и следователно получаваме четири комплексни числа $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ и $z_4=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, които удовлетворяват даденото условие.

д) Ако $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ от $|z| + z = 8 - 4i$ следва равенството $\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 8 - 4i$. По-нататък постъпваме както в решението на задача 0.2.1 г) и получаваме $x = 3$, $y = -4$, т.е. $z = 3 - 4i$.

Отговор. а) $z = 3 + 2i$; б) $z = 0$; г) $z = -\dfrac{3}{2} + 2i$;

е) $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$, $z_4 = i$, $z_5 = -i$; ж) $z = \dfrac{5}{4}$.

Задача 0.2.4 Пресметнете изразите:
а) $\sqrt{8i}$; б) $\sqrt{-18i}$; в) $\sqrt{8 + 6i}$; г) $\sqrt{7 - 24i}$; д) $\sqrt{-15 - 8i}$;
е) $\sqrt{-5 + 12i}$; ж) $\sqrt{8 - 6i} + \sqrt{8 + 6i}$.

Решение. г) Нека $\sqrt{7 - 24i} = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Оттук следва равенството $7 - 24i = x^2 - y^2 - 2xyi$, което е еквивалентно на системата $x^2 - y^2 = 7$, $xy = -12$. Тя има решение $x_1 = 4$, $y_1 = -3$ и $x_2 = -4$, $y_2 = 3$ и следователно $\sqrt{7 - 24i} = \pm(4 - 3i)$.

Отговор. а) $\pm(2 + 2i)$; б) $\pm(3 - 3i)$; в) $\pm(3 + i)$; д) $\pm(1 - 4i)$;
е) $\pm(2 + 3i)$; ж) $\pm 2i$ и ± 6.

Задача 0.2.5 Решете уравненията:
а) $z^2 + 2z + 5 = 0$; б) $z^2 - 3iz + 4 = 0$; в) $z^4 + 8z^2 - 9 = 0$;
г) $z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0$; д) $(2 + i)z^2 - (5 - i)z + 2 - 2i = 0$.

Отговор. а) $z_{1,2} = 1 \pm 2i$; б) $z_1 = -i$, $z_2 = 4i$;
в) $z_{1,2} = \pm 1$, $z_{3,4} = \pm 3i$; г) $z_1 = 3 - i$, $z_2 = -1 + 2i$;
д) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i$.

Задача 0.2.6 Представете в тригонометричен вид комплексните числа:
а) 6; б) -4; в) $-4i$; г) $2 + 2i$; д) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i$; е) $-3 + 3i$;
ж) $2 + 2\sqrt{3}i$; з) $\dfrac{1}{8} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}i$; и) $-\sqrt{3} - i$; к) $-2 - 2i$;
л) $\sin\alpha + i\cos\alpha$; м) $-\cos\alpha + i\sin\alpha$; н) $1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$;
о) $1 + \cos\alpha - i\sin\alpha$; п) $-\sin\alpha + (1 + \cos\alpha)i$.

Решение. г) Ако $2+2i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то съгласно (0.11), (0.12) и (0.13) получаваме $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и следователно $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Тогава имаме $2+2i = 2\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$.

о) От $z = 1+\cos\alpha - i\sin\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 2i\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}(\cos\dfrac{\alpha}{2} - i\sin\dfrac{\alpha}{2})$ и $|z| = 2|\cos\dfrac{\alpha}{2}| \geq 0$ следва, че имаме следните възможности:

I. $\cos\dfrac{\alpha}{2} < 0$. Тогава $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ и следователно $(4k+1)\pi < \alpha < (4k+3)\pi$, където k е произволно неотрицателно цяло число. Сега имаме $z = -2\cos\dfrac{\alpha}{2}(\cos\dfrac{2\pi-\alpha}{2} + i\sin\dfrac{2\pi-\alpha}{2})$.

II. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = 0$. Оттук следва, че $\alpha = (2k-1)\pi$ и понеже $z=0$, то в този случай не съществува тригонометрично представяне на z.

III. $\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$. Намираме $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, откъдето следва, че $(4k-1)\pi < \alpha < (4k+1)\pi$. Следователно $z = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]$.

Окончалелно получихме:

$$1+\cos\alpha - i\sin\alpha = \begin{cases} -2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi-\alpha}{2} + i\sin\dfrac{2\pi-\alpha}{2}\right), \\ \qquad (4k+1)\pi < \alpha < (4k+3)\pi; \\ 0, \quad \alpha = (2k-1)\pi; \\ 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right], \\ \qquad (4k-1)\pi < \alpha < (4k+1)\pi. \end{cases}$$

Отговор. а) $6(\cos 0 + i\sin 0)$; б) $4(\cos\pi + i\sin\pi)$;

в) $4\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$; д) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$;

е) $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$; ж) $4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$;

з) $\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$; и) $2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$;

к) $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$; л) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

м) $\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha)$;

н) $$\begin{cases} -2\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{3\pi-\alpha}{2}+i\sin\dfrac{3\pi-\alpha}{2}\right), \\ \qquad 2(2k+1)\pi<\alpha<4(k+1)\pi; \\ 0, \quad \alpha=(2k-1)\pi; \\ 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2}\right), \\ \qquad 4k\pi<\alpha<2(2k+1)\pi; \end{cases}$$

п) $$\begin{cases} 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\pi+\alpha}{2}+i\sin\dfrac{\pi+\alpha}{2}\right), \\ \qquad (4k-1)\pi<\alpha<(4k+1)\pi; \\ 0, \quad \alpha=(2k-1)\pi; \\ -2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{-\pi+\alpha}{2}+i\sin\dfrac{-\pi+\alpha}{2}\right), \\ \qquad (4k+1)\pi<\alpha<(4k+3)\pi. \end{cases}$$

Задача 0.2.7 Извършете означените действия:

а) $(1-i)^5(\sqrt{3}+i)^4$; б) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{20}}{(1-i)^{16}}$; в) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{10}$;

г) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^{12}}{(1-i)^4+(1+i)^8}$; д) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^6}{(1-i)^{12}}+\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{12}}{(1+i)^6}$; е) $\sqrt[3]{-1}$;

ж) $\sqrt[5]{-1+i}$; з) $\sqrt[6]{1-\sqrt{3}i}$; и) $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}}$.

Решение. б) Представяме числителя и знаменателя в тригонометричен вид и използваме (0.14) и (0.15). Получаваме

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{20}}{(1-i)^{16}}=\frac{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{20}}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{16}}=$$

$$=\frac{2^{20}\left(\cos\frac{20\pi}{6}+i\sin\frac{20\pi}{6}\right)}{2^{8}\left[\cos\left(-\frac{16\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{16\pi}{4}\right)\right]}=$$

$$=2^{12}\left[\cos\left(\frac{10\pi}{3}+4\pi\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{3}+4\pi\right)\right]=$$

$$=2^{12}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=2^{12}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-2^{11}(1+\sqrt{3}i).$$

Отговор. а) $64(1+i)$; в) $2^{10}\sin^{10}\dfrac{5\pi}{12}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$;

г) $-\dfrac{2^{10}}{5}$; д) $-1+2^9 i$;

е) $\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{3}+i\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{3}$, $k=0,1,2$;

ж) $\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{(8k+3)\pi}{20}+i\sin\dfrac{(8k+3)\pi}{20}\right)$, $k=0,1,2,3,4$;

з) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{(6k-1)\pi}{18}+i\sin\dfrac{(6k-1)\pi}{18}\right)$, $k=0,1,2,3,4,5$;

и) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{(24k+17)\pi}{48}+i\sin\dfrac{(24k+17)\pi}{48}\right)$, $k=0,1,2,3$.

Задача 0.2.8 Докажете, че ако $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\alpha$, то

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha. \tag{0.17}$$

Решение. Записваме уравнението $z+\dfrac{1}{z} = 2\cos\alpha$ във вида $z^2 - 2\cos\alpha z + 1 = 0$ и намираме корените му $z_1 = \cos\alpha - i\sin\alpha$ и $z_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Ще докажем, че те удовлетворяват (0.17). Имаме:

$$z_1^n + \frac{1}{z_1^n} = \cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha) + \frac{\cos 0 + i\sin 0}{\cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha)} =$$

$$= \cos n\alpha - i\sin n\alpha + \cos n\alpha + i\sin n\alpha = 2\cos n\alpha.$$

Проверката за z_2 е аналогична.

Задача 0.2.9 Да се пресметне изразът $z^{1995} + \dfrac{1}{z^{1995}}$, ако:

а) $z^2 + z + 1 = 0$; б) $z + \dfrac{1}{z} = 1$.

Решение. а) Понеже $z = 0$ не е решение на уравнението $z^2 + z + 1 = 0$, то можем да го запишем във вида $z + \dfrac{1}{z} = -1$, т.е. $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\dfrac{2\pi}{3}$. Прилагаме задача 0.2.8 и получаваме

$$z^{1995} + \frac{1}{z^{1995}} = 2\cos(1995.\frac{2\pi}{3}) =$$

$$= 2\cos 1330\pi = 2\cos(665.2\pi) = 2\cos 0 = 2.$$

Отговор. б) -2.

0.3 Полиноми

0.3.1 Основни понятия

Функция от вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{0.18}$$

или накратко

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \tag{0.19}$$

където n е *цяло неотрицателно число*, а $a_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$, са реални числа, като $a_n \neq 0$, се нарича *полином от n-та степен относно x*. Числата a_i се наричат *коефициенти*, а n – *степен на полинома.* Специално a_0 се нарича още и *свободен член на полинома.*

Числото $f(\alpha)$, което се получава от (0.18) при заместването на x с α се нарича *числена стойност на полинома* $f(x)$ за $x = \alpha$. Ще казваме, че полиномът $f(x)$ е *нулев полином* (*тъждествено равен на нула*), ако $f(x) = 0$ за всяка стойност на x.

1) Полиномът $f(x)$ е нулев полином тогава и само тогава, когато всичките му коефициенти са равни на нула.

Два полинома $f(x)$ и $g(x)$ се наричат *равни* (*тъждествено равни*), ако имат равни числени стойности за всяко x.

2) Полиномите $f(x)$ и $g(x)$ са равни точно тогава, когато са от една и съща степен и коефициентите им пред еднаквите степени на x са равни.

0.3.2 Действия с полиноми

Сума $f(x) + g(x)$ на полиномите

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \tag{0.20}$$

се нарича полиномът

$$h(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i x^i, \tag{0.21}$$

където

$$c_i = a_i + b_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k, \quad k = \max(m, n). \tag{0.22}$$

Ако при това $k = n$, то се полага $b_i = 0$ за всяко $m < i \leq n$.

Произведение $f(x)g(x)$ на полиномите $f(x)$ и $g(x)$, определени с (0.20), се нарича полиномът

$$h(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k, \tag{0.23}$$

където

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \quad k = 0, 1, \ldots, m + n \tag{0.24}$$

и сумирането се извършва по всички индекси i и j, за които $i + j = k$.

Операцията, при която от два полинома се получава тяхната сума (респ. произведение), се нарича *събиране* (респ. *умножение*) на полиноми. Операциите събиране и умножение на полиноми притежават следните свойства:

3) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;

4) $[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$;

5) $f(x)g(x) = g(x)f(x)$;

6) $[f(x)g(x)]h(x) = f(x)[g(x)h(x)]$;

7) $[f(x) + g(x)]h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$;

8) $f(x) + o = f(x)$. В 8) с o е означен нулевият полином.

Ако полиномът $f(x)$ е определен с (0.19), полиномът

$$-f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-a_i) x^i,$$

се нарича *противоположен* на $f(x)$.

Разлика $f(x) - g(x)$ на полиномите $f(x)$ и $g(x)$ се нарича сумата $f(x) + [-g(x)]$, т.е.

$$f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)].$$

Операцията, при която от два полинома се получава тяхната разлика, се нарича *изваждане на полиноми*. Очевидно

9) $f(x) - f(x) = o$.

По-нататък имаме:

10) Нека $f(x)$ и $g(x)$ са полиноми, съответно от степен n и m и за конкретност да предположим, че $n \geq m$. Тогава съществува единствен полином $q(x)$ от степен $n-m$ и единствен полином $r(x)$ от степен $0 \leq k \leq n-1$ такива, че

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x).$$

Операцията, при която при дадени полиноми $f(x)$ и $g(x)$ се намират полиномите $q(x)$ и $r(x)$ от 10), се нарича *деление на полиноми*. Полиномът $f(x)$ се нарича *делимо*, $g(x)$ – *делител*, $q(x)$ – *частно*, а $r(x)$ – *остатък* от делението на $f(x)$ и $g(x)$.

0.3.3 Нули на полиноми

Едно число α се нарича *нула на полинома* $f(x)$, ако $f(\alpha) = 0$. Следователно нулите на полинома $f(x)$ са корени на уравнението от n-та степен $f(x) = 0$.

11) **Теорема на Даламбер** (**Основна теорема на алгебрата**). Всеки полином $f(x)$ от степен $n \geq 1$ има поне една нула в множеството на комплексните числа.

12) **Теорема на Безу**. Остатъкът от делението на полиномите $f(x)$ на линейния полином $g(x) = x - \alpha$ е равен на стойността на полинома при $x = \alpha$, т.е.

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + f(\alpha). \tag{0.25}$$

От теоремата на Безу следва, че полиномът $f(x)$ се дели без остатък на линейния полином $g(x) = x - \alpha$ точно тогава, когато числото α е нула на $f(x)$.

Ако

$$f(x) = (x-\alpha)^p q(x), \quad q(\alpha) \neq 0,$$

числото α се нарича *p-кратна нула на полинома* $f(x)$. При $p = 1$ нулата α се нарича *проста*.

13) Ако $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ са различни помежду си нули на полинома $f(x)$ с кратност съответно $p_1, p_2, \ldots, p_s$, то $f(x)$ се представя еднозначно във вида

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2} \ldots (x-\alpha_s)^{p_s},$$

където $p_1 + p_2 + \cdots + p_s = n$.

От 13) следва, че ако един полином $f(x)$ има само прости нули $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то за него е в сила разлагането

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_n),$$

което се нарича *разлагане на полинома* $f(x)$ *на прости* (*линейни*) *множители*. Освен това всеки полином има толкова на брой нули, колкото е степента му, като всяка нула се брои толкова пъти, колкото е кратността ѝ (в множеството $\mathbb{C}$).

14) Ако комплексното число $\alpha = a + ib$ е нула на полинома $f(x)$ с *реални* коефициенти, то и спрегнатото му число $\overline{\alpha} = a - ib$ е също нула на $f(x)$.

Нулите $\alpha = a + ib$ и $\overline{\alpha} = a - ib$ на полинома $f(x)$ с реални коефициенти се наричат *двойка комплексно спрегнати нули*.

15) Ако рационалното число $\alpha = \dfrac{m}{k}$, където m и k са взаимно прости числа, е нула на полинома $f(x)$, чиито коефициенти $a_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$, са цели числа, то m е делител на свободния член a_0, а k е делител на коефициента a_n пред най-високата степен на x.

Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са нули на полинома $f(x)$, зададен с (0.18). Тогава са в сила следните зависимости между коефициентите и нулите на $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n},\\
x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n},\\
x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\\
x_1x_2x_3 \ldots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}
$$

0.3.4 Правило на Хорнер

Равенството (0.25) може да се запише по-подробно във вида

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=(x-\alpha)(b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0)+f(\alpha)$$

и тогава съгласно 2) коефициентите пред еднаквите степени на x от двете страни на равенството са равни. Оттук за коефициентите $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$ на полинома $q(x)$ получаваме следната таблица, която се нарича *таблица* (*правило*) *на Хорнер* (*Horner*):

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$
α	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-1}$	$b_{n-3} = \alpha b_{n-2} + a_{n-2}$	$\ldots$

$\ldots$	a_2	a_1	a_0
$\ldots$	$b_1 = \alpha b_2 + a_2$	$b_0 = \alpha b_1 + a_1$	$f(\alpha) = \alpha b_0 + a_0$

След неколкократно прилагане на правилото на Хорнер можем да получим развитие на полинома $f(x)$ по степените на

$(x - \alpha)$. Имаме

$$f(x) = q_0 + q_1(x - \alpha) + q_2(x - \alpha)^2 + \cdots + q_n(x - \alpha)^n,$$

където $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ са остатъците от последователните деления, а $q_n = a_n$.

Задача 0.3.1 Да се определят константите A, B, C и D в равенствата:

а) $2x^3 - x^2 + 3x - 2 = (Ax^2 + Bx + C)(Dx - 5) + 7x + 13$;

б) $2x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = (Ax^2 + Bx + C)(x^2 + 3x - 1) + Dx + 11$;

в) $x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^3 + Ax^2 + Bx + C)(x^2 + D)$;

г) $6x^6 + 11x^5 - 9x^4 + 11x^2 - 23x + 10 = (Ax^4 + x^3 + Bx^2 + 3x + C)(3x^2 + Dx - 5)$;

д) $4x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 23x - 6 = (x^2 + x + A)(Bx^2 + Cx + D)$;

е) $\dfrac{2x + 1}{(x - 1)^2(x^2 - 3x + 4)} = \dfrac{A}{(x - 1)^2} + \dfrac{B}{x - 1} + \dfrac{Cx + D}{x^2 - 3x + 4}$.

Решение. а) Ще използваме 2). За тази цел разкриваме скобите в дясната страна на равенството и подреждаме по степените на x. Получаваме

$$2x^3 - x^2 + 3x - 2 = ADx^3 + (-5A + BD)x^2 + (-5B + CD + 7)x - 5C + 13.$$

Тъй като полиномите в двете страни на равенството са равни, то и коефициентите пред еднаквите степени на x са равни, т.е.

$$2 = AD,\ -1 = -5A + BD,\ 3 = -5B + CD + 7,\ -2 = -5C + 13.$$

Решаваме горната система и намираме $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 2$.

Отговор. б) $A = 2$, $B = -6$, $C = 17$, $D = -52$;

в) $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 1$;

г) $A = 2$, $B = -1$, $C = -2$, $D = 4$;

д) $A = 3$, $B = 4$, $C = -7$, $D = -2$;

е) $A = \dfrac{3}{2}$, $B = \dfrac{7}{4}$, $C = -\dfrac{7}{4}$, $D = 2$.

Задача 0.3.2 Съберете и умножете полиномите $f(x)$ и $g(x)$, ако:

а) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + 4,\ g(x) = x^2 - 3x + 5;$
б) $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1,\ g(x) = x^2 + 1;$
в) $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 2,\ g(x) = 3x^2 + 4x - 5;$
г) $f(x) = x^3 + ix - 3,\ g(x) = x^2 - 3x + i.$

Решение. а) За да намерим сумата на полиномите $f(x)$ и $g(x)$, ще използваме формулите (0.21) и (0.22) при $n = 3$, $m = 2$, $k = 3$. Имаме $a_0 = 4$, $a_1 = 5$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2$, $b_0 = 5$, $b_1 = -3$, $b_2 = 1$ и следователно $c_0 = 9$, $c_1 = 2$, $c_2 = 0$, $c_3 = 2$. Тогава $h(x) = f(x) + g(x) = 2x^3 + 2x + 9$.

Произведението $h(x) = f(x)g(x)$ намираме с помощта на (0.23) и (0.24). Съгласно (0.24) имаме:

$$
\begin{aligned}
&c_5 = a_3b_2 = 2.1 = 2,\\
&c_4 = a_2b_2 + a_3b_1 = (-1).1 + 2.(-3) = -7,\\
&c_3 = a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = 5.1 + (-1).(-3) + 2.5 = 18,\\
&c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 4.1 + 5.(-3) + (-1).5 = -16,\\
&c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 = 4.(-3) + 5.5 = 13,\\
&c_0 = a_0b_0 = 4.5 = 20.
\end{aligned}
$$

Тези пресмятания е удобно да се извършат с помощта на следната таблица:

	$a_3 = 2$	$a_2 = -1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 4$		
$b_2 = 1$	2	-1	5	4		
$b_1 = -3$		-6	3	-15	-12	
$b_0 = 5$			10	-5	25	20
	$c_5 = 2$	$c_4 = -7$	$c_3 = 18$	$c_2 = -16$	$c_1 = 13$	$c_0 = 20$

Най-напред записваме хоризонтално и вертикално съответно коефициентите на $f(x)$ и $g(x)$, подредени по низходящите степени на x. Умножаваме коефициентите на $f(x)$ с първия коефициент на $g(x)$ и получените произведения записваме под съответните коефициенти на $f(x)$. След това умножаваме коефициентите на $f(x)$ с втория коефициент на $g(x)$ и съответните произведения записваме на следващия ред, като изместваме с една позиция надясно. Продължаваме описаната процедура и със следващите коефициенти на $g(x)$, като с всеки нов коефициент на $g(x)$ изместваме записа с една позиция надясно. Накрая събираме елементите на колоните и получаваме коефициентите на търсеното произведение $h(x)$, подредени по низходящите степени на x, т.е. $h(x) = f(x)g(x) = 2x^5-7x^4+18x^3-16x^2+13x+20$.

г) $f(x) + g(x) = x^3 + x^2 + (-3 + i)x - 3 + i$.

Имаме

	1	0	i	-3		
1	1	0	i	-3		
-3		-3	0	$-3i$	9	
i			i	0	-1	$-3i$
	1	-3	$2i$	$-3-3i$	8	$-3i$

и следователно $f(x)g(x) = x^5 - 3x^4 + 2ix^3 - 3(1 + i)x^2 + 8x - 3i$.

Отговор. б) $f(x) + g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 2$,
$f(x)g(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x + 1$;
в) $f(x) + g(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 7x - 7$,
$f(x)g(x) = 6x^6 + 11x^5 - 9x^4 + 11x^2 - 23x + 10$.

Задача 0.3.3 Да се раздели полинома $f(x)$ на полинома $g(x)$, ако:

а) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 1,\ g(x) = x^2 - 2x + 2$;
б) $f(x) = x^4 - 2x^2 - x,\ g(x) = x^2 + x$;
в) $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x + 2,\ g(x) = 2x^2 + x - 1$;
г) $f(x) = 6x^7 - 3x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3x - 3$,
$g(x) = 2x^3 - x^2 + 3$;
д) $f(x) = 4x^3 + x^2,\ g(x) = x + 1 + i$;
е) $f(x) = x^3 - x^2 - ix,\ g(x) = x^2 - 2x + i$.

Решение. а) Записваме един до друг полиномите $f(x)$ и $g(x)$, подредени по низходящите степени на x. Умножаваме делителя $g(x)$ с подходящ едночлен така, че да получим полином, чийто първи член е равен на първия член на делимото $f(x)$. От $f(x)$ изваждаме получения полином и ако разликата е полином от степен не по-малка от тази на делителя $g(x)$, с нея (вместо с $f(x)$) повтаряме описаната процедура. Така продължаваме докато получим остатък, чиято степен е по-малка от степента на делителя $g(x)$.

В конкретния случай имаме

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^4 - 3x^3 + x^2 + 1 & x^2 - 2x + 2 \\
 & \underline{x^4 - 2x^3 + 2x^2} & x^2 - x - 3 \\
- & -x^3 - x^2 + 1 & \\
 & \underline{-x^3 + 2x^2 - 2x} & \\
- & -3x^2 + 2x + 1 & \\
 & \underline{-3x^2 + 6x - 6} & \\
 & -4x + 7 &
\end{array}$$

и следователно частното е $q(x) = x^2 - x - 3$, а остатъкът – $r(x) = -4x + 7$.

Отговор. б) $q(x) = x^2 - x - 1,\ r(x) = 0$;
в) $q(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{9}{8},\ r(x) = \frac{1}{8}x + \frac{25}{8}$;
г) $q(x) = 3x^4 - 3x^2 + x - 1,\ r(x) = 0$;
д) $q(x) = 4x^2 - (3 + 4i)x - 1 + 7i,\ r(x) = 8 - 6i$;
е) $q(x) = x + 1,\ r(x) = 2(1 - i)x - i$.

Задача 0.3.4 Да се определят параметрите a и b така, че полиномът $f(x)$ да се дели без остатък на полинома $g(x)$, ако:
а) $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1,\ g(x) = (x + 1)^2$;
б) $f(x) = x^4 + ax^3 + b,\ g(x) = (x - 1)^2$;
в) $f(x) = ax^5 + bx^3,\ g(x) = x^3 - x^2 + 1$.

Решение. а) Извършваме делението на дадените полиноми. Имаме

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{-\begin{array}{l} ax^3+bx^2+1 \\ ax^3+2ax^2-ax \end{array}} & \underline{x^2+2x+1} \\
\quad \underline{-\begin{array}{l}(b-2a)x^2-ax+1 \\ (b-2a)x^2+2(b-2a)x+b-2a\end{array}} & ax+b-2a \\
\qquad\qquad (3a-2b)x+2a-b+1 &
\end{array}
$$

и намираме остатък $r(x)=(3a-2b)x+2a-b+1$, който трябва да бъде тъждествено равен на нулевия полином, т.е. $(3a-2b)x+2a-b+1=0$ за всяко x. Като приложим 1), получаваме системата $3a-2b=0,\ 2a-b+1=0$. Тя има решение $a=-2,\ b=-3$.

Отговор. б) $a=-\dfrac{4}{3},\ b=\dfrac{1}{3}$;

в) не съществуват стойности за параметрите a и b, при които $f(x)$ се дели на $g(x)$ без остатък.

Задача 0.3.5 Да се пресметне $f(x_0)$, ако:
а) $f(x)=2x^5-5x^2+8x-1,\ x_0=-1$;
б) $f(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3,\ x_0=3$;
в) $f(x)=x^4+2x^3-13x^2+12x-10,\ x_0=1-i$;
г) $f(x)=x^4+3x^3-2x^2-3x+1,\ x_0=1$.

Решение. а) Таблицата на Хорнер има вида

	2	0	0	-5	8	-1
-1	2	-2	2	-7	15	-16

и следователно $f(-1)=-16$.

Отговор. б) $f(3)=0$; в) $f(1-i)=-6+10i$; г) $f(1)=0$.

Задача 0.3.6 Да се раздели полинома $f(x)$ на линейния полином $g(x)$, ако:
а) $f(x)=2x^4-5x^3+3x,\ g(x)=x-3$;
б) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16,\ g(x)=x-4$;
в) $f(x)=3x^4-2x^3,\ g(x)=x-1+i$;

г) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1,\ g(x) = x + 2;$
д) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 6,\ g(x) = x - i.$

Решение. в) Ще приложим теоремата на Безу и метода на Хорнер. Имаме

	3	-2	0	0	0
$1-i$	3	$1-3i$	$-2-4i$	$-6-2i$	$-8+4i$

Получаваме частно $q(x) = 3x^3 + (1-3i)x^2 - (2+4i)x - 6 - 2i$ и остатък $r(x) = -8 + 4i$.

Отговор. а) $q(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + 12,\ r(x) = 36;$
б) $q(x) = x^3 + x^2 + 10x + 30,\ r(x) = 136;$
г) $q(x) = x^3 + x^2 - 4x + 5,\ r(x) = -9;$
д) $q(x) = x^4 + (-2+i)x^3 - (5+2i)x^2 + (4-5i)x + 4i,\ r(x) = 2.$

Задача 0.3.7 Ако $f(x)$ е полином, чиято степен е не по-малка от две, да са намери остатъкът от делението му с полинома $g(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$, където $\alpha \neq \beta$.

Решение. Тъй като $g(x)$ е полином от втора степен, то остатъкът от делението на $f(x)$ с $g(x)$ е полином от степен по-малка от 2, т.е.

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)q(x) + r(x), \tag{0.26}$$

където

$$r(x) = ax + b. \tag{0.27}$$

От (0.26) намираме $f(\alpha) = r(\alpha),\ f(\beta) = r(\beta)$ и като използваме (0.27), получаваме системата

$$a\alpha + b = f(\alpha), \quad a\beta + b = f(\beta). \tag{0.28}$$

Понеже $\alpha - \beta \neq 0$, от (0.28) определяме

$$a = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}, \quad b = \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta}, \tag{0.29}$$

и следователно $r(x)$ има вида

$$r(x) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} x + \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta}. \tag{0.30}$$

Задача 0.3.8 Да се намери остатъкът от делението на полинома $f(x)$ с полинома $g(x)$, ако:

а) $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 30,\ g(x) = (x-2)(x+3)$;

б) $f(x) = x^6 - 2x^3 + x - 3,\ g(x) = (x+1)(x-1)$.

Решение. а) Задачата може да се реши и по стандартния начин, както задача 0.3.3, но тук ще използваме решението на задача 0.3.7. От таблицата на Хорнер

	1	3	0	-2	0	-30
2	1	5	10	18	36	42
-3	1	0	0	-2	6	-48

следва, че $f(2) = 42$ и $f(-3) = -48$ и заместване на тези стойности в (0.29) при $\alpha = 2$ и $\beta = -3$, намираме $a = 18$, $b = 6$. Тогава съгласно (0.30) получаваме $r(x) = 18x + 6$.

Отговор. б) $r(x) = -x$.

Задача 0.3.9 Да се определи кратността на нулата α на полинома $f(x)$, ако:

а) $f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4,\ \alpha = -1$;

б) $f(x) = x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27,\ \alpha = -3$;

в) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3,\ \alpha = i$.

Решение. а) Най-напред делим полинома $f(x)$ на $x - \alpha$, след което делим полученото частно на $x - \alpha$ и т.н. докато получим ненулев остатък. Тогава кратността на корена α е равна на броя на получените нулеви остатъци при описаните последователни деления. Имаме следната таблица на Хорнер:

	1	0	-10	-20	-15	-4
-1	1	-1	-9	-11	-4	0
-1	1	-2	-7	-4	0	
-1	1	-3	-4	0		
-1	1	-4	0			
-1	1	-5				

Тъй като получихме четири нулеви остатъка, то $\alpha = -1$ е четирикратна нула на разглеждания полином.

Отговор. б) $\alpha = -3$ е двукратна нула; в) $\alpha = i$ е двукратна нула.

Задача 0.3.10 Намерете рационалните нули на полинома $f(x)$ и го разложете на множители, ако:

а) $f(x) = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12$;

б) $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;

в) $f(x) = x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$;

г) $f(x) = x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

Решение. в) Ще използваме 15). Имаме $a_6 = 1$ и $a_0 = 27$. Следователно, ако полиномът $f(x)$ има рационални нули от вида $\alpha = \dfrac{m}{k}$, то възможностите за взаимно простите числа m и k са $m = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9,\ \pm 27$ и $k = \pm 1$. От таблицата на Хорнер

	1	0	-15	8	51	-72	27
1	1	1	-14	-6	45	-27	0
1	1	2	-12	-18	27	0	
1	1	3	-9	-27	0		
1	1	4	-5	-32			

заключаваме, че числото $\alpha_1 = 1$ е трикратна нула на $f(x)$ и

$$f(x) = (x-1)^3(x^3 + 3x^2 - 9x - 27). \tag{0.31}$$

По-нататък трябва да намерим рационалните нули на полинома $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$. От таблиците на Хорнер

	1	3	-9	-27
-1	1	2	-11	-16

	1	3	-9	-27
3	1	6	9	0
3	1	9	36	

	1	6	9
-3	1	3	0
-3	1	0	

следва, че $\alpha_2 = 3$ е еднократна, а $\alpha_3 = -3$ – двукратна нула на $g(x)$. Тогава имаме, че $g(x) = (x-3)(x+3)^2$ и като заместим в (0.31) получаваме

$$f(x) = (x-1)^3(x-3)(x+3)^2.$$

Отговор. а) $f(x) = (x+1)^3(x-3)(x-4)$;
б) $f(x) = (x+1)^4(x-2)^2$; г) $f(x) = (x-1)^3(x^2+1)^2$.

Задача 0.3.11 Нека $f(x)$ е полином с цели коефициенти и $\alpha \neq \pm 1$ е цяло число. Да се докаже, че ако α е нула на $f(x)$, то числата

$$\frac{f(1)}{1-\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{f(-1)}{1+\alpha}$$

са цели.

Доказателство. Нека $\alpha \neq \pm 1$ е цяло число и $f(\alpha) = 0$. Тогава линейният полином $g(x) = x - \alpha$ дели $f(x)$ и частното $q(x) = \dfrac{f(x)}{x-\alpha}$ е полином с цели коефициенти. Оттук следва, че числата $q(1)$ и $q(-1)$ са цели.

Забележка 0.3.1 В случай, че числата 1 и -1 са нули на полинома $f(x)$, то той има разлагане от вида

$$f(x) = (x-1)^{s_1}(x+1)^{s_2}.g(x),$$

където 1 и -1 не са нули на полинома $g(x)$. Тогава можем да приложим разсъжденията в задача 0.3.11 за $g(x)$.

Задача 0.3.12 Да се намерят целите нули на полинома $f(x) = x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$.

Решение. Според 15) търсените нули на $f(x)$ са измежду числата ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18 и ± 36. За да намалим проверките по схемата на Хорнер, ще изпорзваме задача 0.3.11, като отделим евентуалните нули на $f(x)$ и само за тях направим необходимата проверка. За тази цел намираме, че $f(1) = 24$ и $f(-1) = 24$.

За $\alpha = 2$ получаваме $\dfrac{f(1)}{1-2} = -24$ и $\dfrac{f(-1)}{1+2} = 8$ и следователно числото $\alpha = 2$ може да е нула на $f(x)$. същото се установява и за числата -2 и ± 3.

За $\alpha = 4$ получаваме $\dfrac{f(1)}{1-4} = -8$ и $\dfrac{f(-1)}{1+4} = \dfrac{24}{5}$ и според задача 0.3.11 числото 4 не е измежду нулите на $f(x)$. Като проверим по този начин и за останалите делители на 36, получаваме, че необходимото условие от задача 0.3.11 удовлетворяват само числата ± 2 и ± 3. За тях извършваме проверка по схемата на Хорнер и установяваме, че числата -2 и 3 са еднократни нули на $f(x)$. Окончателно получаваме, че $f(x) = (x+2)(x-3)(x^3 + x^2 - 6)$.

Забележка 0.3.2 Ако $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ и $a_n \neq 1$, с полагането $x = \dfrac{y}{a_n}$ свеждаме намирането на рационалните нули на $f(x)$ до намирането на целите нули на полинома

$$f_1(y) = y^n + a_{n-1}y^{n-1} + a_n a_{n-2} y^{n-2} + a_n^2 a_3 y^{n-3} + \cdots + a_n^{n-2} a_1 y + a_n^{n-1} a_0.$$

Тогава, ако $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ са целите нули на $f_1(y)$ с кратност съответно $s_1, s_2, \ldots, s_k$, то числата $\dfrac{\alpha_1}{a_n}, \dfrac{\alpha_2}{a_n}, \ldots, \dfrac{\alpha_k}{a_n}$ са рационалните нули на $f(x)$ с посочената кратност.

Задача 0.3.13 Да се намерят рационалните нули на полинома $f(x)$, ако:

а) $f(x) = 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2$;

б) $f(x) = 6x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x - 2$;

в) $f(x) = 8x^5 - 14x^4 - 77x^3 + 128x^2 + 45x - 18$.

Решение. а) Полагаме $x = \dfrac{y}{6}$ и получаваме $6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 = \frac{1}{6^3}(y^4 + 7y^3 - 72y^2 - 108y + 432)$. Така задачата се свежда до намирането на целите нули на полинома

$$f_1(y) = y^4 + 7y^3 - 72y^2 - 108y + 432.$$

Както постъпихме в задача 0.3.12, установяваме, че $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = 6$ и $\alpha_4 = -12$ са целите нули на $f_1(y)$. Тогава рационалните нули на полинома $f(x)$ са $\dfrac{\alpha_1}{6} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{\alpha_2}{6} = -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\alpha_3}{6} = 1$, $\dfrac{\alpha_4}{6} = -2$.

Отговор. б) $\alpha_1 = \dfrac{1}{2},\ \alpha_2 = -\dfrac{2}{3}$;

в) $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = -3,\ \alpha_4 = \dfrac{1}{4},\ \alpha_5 = -\dfrac{1}{2}$.

Глава 1

Матрици и детерминанти

1.1 Матрици

1.1.1 Матрици - основни понятия

Матрица от тип (ред) $m \times n$ (чете се „m по n“) се нарича таблица от mn елемента, подредени в m реда и n стълба. Обикновено се използват означенията

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\|,$$

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right),$$

или накратко - $A = \|a_{ij}\|$, $A = (a_{ij})$. Първият индекс i показва номера на реда, а вторият j – номера на стълба, в който се намира елементът a_{ij} на матрицата A. Следователно елементите $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ образуват i-тия ред на A, а елементите $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$ - j-тия стълб.

Ако $m \neq n$, матрицата $A = \|a_{ij}\|$ се нарича *правоъгълна.* В частност, когато $m = 1$, матрицата $A = \|a_{1j}\|$ се нарича *матрица-ред,* а при $n = 1$, матрицата $A = \|a_{i1}\|$ – *матрица-стълб.*

Ако $m = n$, матрицата $A = \|a_{ij}\|$ се нарича *квадратна.* В този случай се казва, че елементите $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ образуват *главния диагонал* на квадратната матрица от n-ти ред A, а елементите $a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$ – *второстепенния (страничния) диагонал.*

Квадратна матрица, на която елементите над или под главния диагонал са равни на 0, се нарича *триъгълна.* Една квадратна матрица са нарича *диагонална,* ако са различни от нула само елементите от главния ѝ диагонал. Диагонална матрица, всичките елементи на която са равни на 1, се нарича *единична* и се означава с E, т.е.

$$E = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right\|.$$

Ако всички елементи на една матрица са равни на 0, тя се нарича *нулева.* Означава се с O.

Квадратна матрица, в която елементите, симетрично разположени относно главния диагонал са равни помежду си, се нарича *симетрична,* а ако са равни по абсолютна стойност, но противоположни по знак – *полусиметрична.* Елементите на главния диагонал на всяка полусиметрична матрица са равни на 0.

Една квадратна матрица $A = \|a_{ij}\|$ с реални елементи се нарича *ортогонална,* ако

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{1.1}$$

1.1.2 Действия с матрици

Две матрици $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ се наричат *равни,* ако са от един и същи тип $m \times n$ и

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.2}$$

Матрицата, получена от матрицата $A = \|a_{ij}\|$ чрез замяна на редовете с едноименните им стълбове са нарича *транспонирана* на A и се означава с A^t. Очевидно, ако A е от тип $m \times n$, то A^t е от тип $n \times m$. Имаме

1. $(A^t)^t = A^{tt} = A.$

Сума $A + B$ *на матриците* $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ *от един и същи тип* $m \times n$ се нарича матрицата $C = \|c_{ij}\|$ от същия тип, за която

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Произведение λA *на матрицата* $A = \|a_{ij}\|$ *от тип* $m \times n$ *с числото* λ (или *на числото* λ *с матрицата* A) се нарича матрицата $C = \|c_{ij}\|$ от същия тип, за която

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.4}$$

От (1.3) и (1.4) следва, че

$$A + B = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{array} \right\| \tag{1.5}$$

и

$$\lambda A = \begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{1.6}$$

Матрицата $-A = (-1)A$ се нарича *противоположна* на A, а матрицата $A - B = A + (-1)B$ – *разлика на матриците A и B*.

Операциите събиране на матрици и умножение на матрица с число се наричат *линейни операции с матрици.* Те притежават свойствата:

2. $A + B = B + A$;
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
4. $A + O = A$;
5. $A + (-A) = O$;
6. $(A + B)^t = A^t + B^t$;
7. $1.A = A$;
8. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
9. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
10. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
11. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

Произведение AB на матрицата $A = \|a_{is}\|$ от тип $m \times n$ и матрицата $B = \|b_{sj}\|$ от тип $n \times k$ се нарича матрицата $C = \|c_{ij}\|$ от тип $m \times k$, за която

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}, \quad i = 1, \dots, m; \ j = 1, \dots, k. \tag{1.7}$$

Изрично ще отбележим, че можем да умножим матрицата A с матрицата B само ако броят на стълбовете на A е равен на броя на редовете на B. Следователно, ако A може да се умножи с B, оттук не следва, че и B може да се умножи с A. Ако съществуват произведенията AB и BA, то в общия случай имаме $AB \neq BA$. Ако $AB = BA$ матриците A и B се наричат *комутативни.*

Операцията умножение на матрици притежава свойствата:

12. $(AB)C = A(BC)$;
13. $(A \pm B)C = AC \pm BC$;
14. $A(B \pm C) = AB \pm AC$;
15. $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$;
16. $AE = EA = A$;
17. $(AB)^t = B^t A^t$.

Условието (1.1) за ортогоналност на матрицата $A = \|a_{ij}\|$ има вида

$$AA^t = E. \tag{1.8}$$

Но $AA^t = A^t A$ и следователно (1.1) е равносилно на условието

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Задача 1.1.1 Намерете матриците $A + B$, $3A$ и $2A - 3B$, ако:

а) $A = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

б) $A = \left\| \begin{array}{rr} i & -1 \\ 2+i & 0 \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{rr} 0 & 1+i \\ -2i & 3 \end{array} \right\|;$

в) $A = \left\| \begin{array}{rrr} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{rrr} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right\|;$

г) $A = \left\| \begin{array}{rrr} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{rrr} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{array} \right\|.$

Решение. а) Ще използваме (1.5) и (1.6). Имаме:

$$A + B = \left\| \begin{array}{rr} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} -1+1 & 2-1 \\ -3+0 & 0+1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{rr} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{array} \right\|;$$

$$3A = 3 \left\| \begin{array}{rr} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 3.(-1) & 3.2 \\ 3.(-3) & 3.0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{rr} -3 & 6 \\ -9 & 0 \end{array} \right\|;$$

$2A - 3B = 2A + (-3B) =$

$$\left\| \begin{array}{lr} 2.(-1) + (-3).1 & 2.2 + (-3).(-1) \\ 2.(-3) + (-3).0 & 2.0 + (-3).1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{rr} -5 & 7 \\ -6 & -3 \end{array} \right\|.$$

Отговор.
б) $A + B = \left\| \begin{array}{cc} i & i \\ 2-i & 3 \end{array} \right\|, \; 3A = \left\| \begin{array}{cr} 3i & -3 \\ 6+3i & 0 \end{array} \right\|,$

$2A - 3B = \left\| \begin{array}{cc} 2i & -5-3i \\ 4+8i & -9 \end{array} \right\|;$

в) $A+B=\left\| \begin{array}{rrr} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{array} \right\|$, $3A=\left\| \begin{array}{rrr} 3 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & 15 \end{array} \right\|$,

$2A-3B=\left\| \begin{array}{rrr} 8 & -4 & -3 \\ 9 & -5 & 10 \end{array} \right\|$;

г) $A+B=\left\| \begin{array}{rrr} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 6 & -5 & 3 \end{array} \right\|$, $3A=\left\| \begin{array}{rrr} 6 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \\ 9 & -6 & 3 \end{array} \right\|$,

$2A-3B=\left\| \begin{array}{rrr} 4 & 1 & -6 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 5 & -4 \end{array} \right\|$.

Задача 1.1.2 Определете матриците X и Y, ако:

а) $3X-2Y=\left\| \begin{array}{rr} -11 & 7 \\ 2 & -8 \end{array} \right\|$,

$2X+5Y=\left\| \begin{array}{rr} -1 & -8 \\ 14 & 20 \end{array} \right\|$;

б) $2X+3Y=\left\| \begin{array}{rrr} 6 & 7 & 1 \\ 6 & -16 & 5 \\ 15 & -7 & 5 \end{array} \right\|$,

$3X-4Y=\left\| \begin{array}{rrr} 9 & -15 & 10 \\ -8 & 10 & -1 \\ -3 & 15 & -35 \end{array} \right\|$;

Решение. а) Означаваме
$A=\left\| \begin{array}{rr} -11 & 7 \\ 2 & -8 \end{array} \right\|$, $B=\left\| \begin{array}{rr} -1 & -8 \\ 14 & 20 \end{array} \right\|$ и получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 3X-2Y=A \\ 2X+5Y=B. \end{array} \right.$$

От нея намираме $X = \dfrac{1}{19}(5A + 2B)$ и $Y = \dfrac{1}{19}(-2A + 3B)$. Следователно

$$X = \frac{1}{19}\left(5\begin{Vmatrix} -11 & 7 \\ 2 & -8 \end{Vmatrix} + 2\begin{Vmatrix} -1 & -8 \\ 14 & 20 \end{Vmatrix}\right) = \begin{Vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$Y = \frac{1}{19}\left(-2\begin{Vmatrix} -11 & 7 \\ 2 & -8 \end{Vmatrix} + 3\begin{Vmatrix} -1 & -8 \\ 14 & 20 \end{Vmatrix}\right) = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Отговор.

б) $X = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{Vmatrix}$, $Y = \begin{Vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \end{Vmatrix}$.

Задача 1.1.3 Извършете умножението:

а) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$;

б) $\begin{Vmatrix} 3 & 4 & -9 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -1 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$;

в) $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & -3 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{Vmatrix}$;

г) $\begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} -4 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$;

д) $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

Решение. а) Ще използваме (1.7). Имаме:

$$\left\| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{array} \right\| . \left\| \begin{array}{rr} 1 & -3 \\ 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} 2.1 + 1.4 + (-1).0 & 2.(-3) + 1.3 + (-1).(-2) \\ 5.1 + (-2).4 + 3.0 & 5.(-3) + (-2).3 + 3.(-2) \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{rr} 6 & -1 \\ -3 & -27 \end{array} \right\| .$$

Отговор.

б) $\left\| \begin{array}{rrr} -9 & -33 & -25 \\ 17 & 22 & 13 \\ 6 & -3 & -4 \end{array} \right\|$; в) $\left\| \begin{array}{rrr} -3 & 16 & -4 \end{array} \right\|$;

г) $\left\| \begin{array}{rrrr} 8 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & -1 \\ -20 & 0 & 5 & -5 \end{array} \right\|$;

д) $\left\| \begin{array}{rrrr} 29 & -9 & -1 & 33 \\ -15 & 6 & 1 & -20 \\ 13 & 11 & 5 & -6 \\ 10 & -13 & 1 & 11 \end{array} \right\|$.

Задача 1.1.4 Пресметнете $f(A)$, ако:

а) $A = \left\| \begin{array}{rr} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{array} \right\|$, $\quad f(x) = 2x^2 + 3x - 5$;

б) $A = \left\| \begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right\|$, $\quad f(x) = 3x^2 - x + 2$;

в) $A = \left\| \begin{array}{rr} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{array} \right\|$, $\quad f(x) = x^3 - 3x + 2$;

г) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{Vmatrix}, \quad f(x) = x^3 - x^2 - 3.$

Решение. в) Имаме $f(A) = A^3 - 3A + 2E$, където E е единичната матрица от тип 2×2. Пресмятаме $A^2 = AA = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $A^3 = A^2A = EA = A$ и следователно

$$f(A) = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} - 3\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} + 2\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Отговор. а) $f(A) = \begin{Vmatrix} -6 & 0 \\ 6 & 0 \end{Vmatrix}$;

б) $f(A) = \begin{Vmatrix} 10 & -3 & 11 \\ 2 & 9 & 5 \\ 19 & -2 & 29 \end{Vmatrix}$;

г) $f(A) = \begin{Vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 7 & -14 & 8 \\ 19 & -7 & 23 \end{Vmatrix}$.

Задача 1.1.5 Да се намерят матриците, комутативни на матрицата A, ако:

а) $A = \begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$; б) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$;

в) $A = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$;

Решение. а) Ако $X = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ е матрица, комутативна на матрицата A, то в сила е равенството

$$AX = XA. \tag{1.9}$$

Пресмятаме

$$AX = \left\| \begin{array}{cc} 3a + 5c & 3b + 5d \\ a + 2c & b + 2d \end{array} \right\|, \ XA = \left\| \begin{array}{cc} 3a + b & 5a + 2b \\ 3c + d & 5c + 2d \end{array} \right\|$$

и като заместим в (1.9) и приложим условието (1.2) за равенство на две матрици, получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 3a + 5c = 3a + b \\ 3b + 5d = 5a + 2b \\ a + 2c = 3c + d \\ b + 2d = 5c + 2d \end{array} \right.$$

От нея намираме $a = c + d, \ b = 5c$ и следователно търсените са

$$X = \left\| \begin{array}{cc} c + d & 5c \\ c & d \end{array} \right\|,$$

където c и d са произволни числа.

Отговор. б) $X = \left\| \begin{array}{cc} a & b \\ -b & a + 3b \end{array} \right\|$, където a и b са произволни числа;

в) $X = \left\| \begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{array} \right\|$, където a, b и c са произволни числа.

Задача 1.1.6 Да се намерят всички квадратни матрици X от втори ред, за които $X^2 = O$.

Решение. Да предположим, че $X = \left\| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right\|$. Тогава от $X^2 = O$ получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} a^2 + bc = 0 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 0 \\ bc + d^2 = 0, \end{array} \right.$$

която можем да запишем и във вида

$$(1.10)\qquad \left|\begin{array}{l} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ (a-d)(a+d)=0. \end{array}\right.$$

Ако допуснем, че $a+d \neq 0$, от (1.10) следва $a=b=c=d=0$, което противоречи на направеното предположение. Тогава имаме $a+d=0$ и $bc+a^2=0$. Оттук заключаваме, че търсените матрици X са $X = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & -a \end{Vmatrix}$, където $a^2+bc=0$.

Задача 1.1.7 Да се намерят всички квадратни матрици X от втори ред, за които $X^2=E$.

Отговор. $X = \begin{Vmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{Vmatrix}$ или $X = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & -a \end{Vmatrix}$, където $a^2+bc=1$.

Задача 1.1.8 Пресметнете A^n (n – естествено число), ако:

а) $A = \begin{Vmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{Vmatrix}$; б) $A = \begin{Vmatrix} i & i \\ 0 & i \end{Vmatrix}$;

в) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$; г) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

д) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; е) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$;

ж) $A = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}$.

Решение. а) Ще използваме метода на пълната математическа индукция. Пресмятаме

$$A^2 = \begin{Vmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = E,$$

$$A^3 = A^2 A = EA = A, \quad A^4 = A^2 . A^2 = E^2 = E$$

и получените резултати ни дават основание да предположим, че

$$A^n = \begin{cases} A, & \text{когато } n \text{ е нечетно,} \\ E, & \text{когато } n \text{ е четно.} \end{cases} \tag{1.11}$$

Наистина, за $n = 2, 3, 4$ предположението е вярно. Да допуснем, че е вярно и за $n \leq k$, т.е.

$$A^k = \begin{cases} A, & \text{когато } k \text{ е нечетно,} \\ E, & \text{когато } k \text{ е четно.} \end{cases}$$

Ще покажем, че е вярно и за $n = k + 1$. Най-напред, ако k е нечетно, то $k + 1$ е четно и имаме $A^{k+1} = A^k.A = A.A = A^2 = E$. В случай, че k е четно, тогава $k + 1$ е нечетно и намираме $A^{k+1} = A^k.A = E.A = A$. С това е установено, че формулата (1.11) е вярна.

Отговор.

б) $A^n = \begin{Vmatrix} i^n & ni^n \\ 0 & i^n \end{Vmatrix}$; в) $A^n = \begin{Vmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 2^n - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{Vmatrix}$;

г) $A^n = 3^{n-1}A$; д) $A^n = 2^{n-1}A$;

е) $A^n = \begin{cases} 4^{k-1}A, & \text{за } n = 2k - 1, \quad k = 1, 2, \dots \\ 4^k E, & \text{за } n = 2k, \quad k = 1, 2, \dots . \end{cases}$

ж) $A^n = \begin{Vmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{Vmatrix}$.

Задача 1.1.9 Проверете ортогонална ли е матрицата A, ако:

а) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$; б) $A = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{Vmatrix}$;

в) $A = \begin{Vmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{4}{5} & \frac{12}{13} \\ \frac{3}{13} & 0 & -\frac{5}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{3}{5} & 0 \end{Vmatrix}$; г) $A = \begin{Vmatrix} \frac{12}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{12}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{12}{13} \end{Vmatrix}$.

Решение. б) Ще използваме условието за ортогоналност (1.8). Имаме

$$AA^t = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E$$

и следователно матрицата A е ортогонална.

Отговор. а) не; в) не; г) да.

Задача 1.1.10 Докажете, че ако съществува, произведението на ортогонални матрици A и B, то също е ортогонална матрица.

Решение. Тъй като A и B са ортогонални матрици, то в сила са равенствата

$$AA^t = E \text{ и } BB^t = E.$$

Тогава имаме

$$AB(AB)^t = AB(B^tA^t) = A(BB^t)A^t =$$

$$= AEA^t = AA^t = E$$

и следователно произведението AB е ортогонална матрица.

1.2 Детерминанти

1.2.1 Детерминанти - основни понятия

Ако $A = \|a_{ij}\|$ е квадратна матрица от ред n (т.е. квадратна матрица от тип $n \times n$), то на A може да се съпостави числото

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \tag{1.12}$$

$$= \sum_{(k_1k_2\dots k_n)} (-1)^{l(k_1k_2\dots k_n)} a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n},$$

което се нарича *детерминанта от ред n, съответна на матрицата A*. В дясната страна на (1.12) сумирането се извършва по всички пермутации $k_1k_2\dots k_n$ на числата $1, 2, \dots, n$, а $l(k_1k_2\dots k_n)$ е броят на инверсиите в пермутацията $k_1k_2\dots k_n$. Понякога детерминантата $|A|$ на матрицата $A = \|a_{ij}\|$ ще означаваме и с $det(a_{ij})$.

Елементите, редовете, стълбовете и диагоналите (главен и второстепенен) на матрицата A се наричат съответно елементи, редове, стълбове и диагонали (главен и второстепенен) и на нейната детерминанта $|A|$. Аналогично се пренасят и останалите понятия от 1.1, свързани с квадратните матрици.

При $n = 2$ от (1.12) получаваме формулата за пресмятането на *детерминантата* $|A|$ *от втори ред:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.13}$$

а при $n = 3$ – за *детерминантата* $|A|$ *от трети ред:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \tag{1.14}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

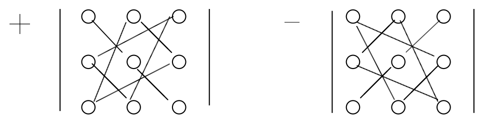
За пресмятането на детерминанта от трети ред се използват главно правилото на Сарус (Sarrus) и правилото на триъгълниците.

а) *Правило на Сарус.* Преписваме първите два стълба на детерминантата $det(a_{ij})$ от трети ред след третия стълб и получаваме правоъгълна таблица с шест диагонала, всеки от които съдържа по три елемента:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \tag{1.15}$$

Тогава първите три събираеми на сумата (1.14) са произведения от елементите на главния диагонал и успоредните с него диагонали на (1.15), а вторите три събираеми - приозведения от елементите на второстепенния диагонал и успоредните с него диагонали, взети с обратен знак.

б) *Правило на триъгълниците.* Правилото на триъгълниците за пресмятане на първите три събираеми на (1.14) и на вторите три събираеми, взети с обратен знак може да се даде схематично по следния начин:



(1.16)

1.2.2 Свойства на детерминантите

При пресмятане на детерминантите се използват следните свойства:

1) Детерминантата на квадратна матрица A е равна на детерминантата на транспонираната ѝ матрица A^t.

Горното свойство показва, че при транспониране, т.е. замяна на редовете с едноименните им стълбове, детерминантата се запазва.

2) Ако детерминанта съдържа ред (респ. стълб), всички елементи на който са равни на нула, тя е равна на нула.

3) Ако всичките елементи на един ред (респ. стълб) на детерминанта се умножат с едно и също число, то със същото число се умножава и детерминантата.

Оттук следва, че ако елементите на ред (респ. стълб) на детерминанта имат общ множител, то той може да се изнесе пред знака на детерминантата.

4) Ако се разменят местата на два реда (респ. стълба), детерминантата си променя знака.

От 4) непосредствено следва, че

5) Детерминанта с два еднакви реда (респ. стълба) е равна на нула.

6) Детерминанта с два пропорционални реда (респ. стълба) е равна на нула.

7) Детерминанта, която съдържа ред (респ. стълб), всичките елементи на който са суми от две събираеми, е равна на сума от две детерминанти: първата от тях съдържа първите, а втората - вторите събираеми от реда (съотв. стълба), а всички останали елементи са еднакви.

8) Детерминантата не се променя, ако към елементите на един ред (респ. стълб) се прибавят елементите на друг ред (респ. стълб), умножени с число.

Ако елементите на даден ред (респ. стълб) на детерминанта са суми от съответните елементи на други редове (респ. стълбове), умножени с числа, се казва, че този ред (респ. стълб) е *линейна комбинация на тези редове (респ. стълбове).*

9) Детерминантата е равна на нула, ако съдържа ред (респ. стълб), който е линейна комбинация на други редове (респ. стълбове).

10) Ако детерминанта има триъгълен вид, т.е. всичките ѝ елементи под или над главния диагонал са равни на нула, то тя е равна на произведението от елементите на главния диагонал.

1.2.3 Поддетерминанти и адюнгирани количества

Нека Δ_n е детерминанта от $n-$ти ред и a_{ij} е произволен неин елемент. Ако премахнем $i-$тия ред и $j-$тия стълб на Δ_n, получаваме детерминантата от $(n-1)-$ви ред

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

която се нарича *поддетерминанта на Δ_n съответна на a_{ij}.*

Числото

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

се нарича *адюнгирано количество на елемента* a_{ij}.

11) Всяка детерминанта е равна на сумата от произведенията на елементите на произволен ред (респ. стълб) със съответните им адюнгиране количества.

Съгласно 11) за детерминантата Δ_n имаме

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{за всяко} \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1.17}$$

и

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{за всяко} \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{1.18}$$

Формулата (1.17) се нарича *развитие на детерминантата Δ_n по адюнгираните количества на елементите на i-тия ред, а* (1.18) - *развитие на детерминантата Δ_n по адюнгираните количества на елементите на j-тия стълб.*

12) Сумата от произведенията на елементите на кой и да е ред (респ. стълб) на детерминанта с адюнгираните количества на съответните елементи на друг ред (респ. стълб) е равна на нула.

1.2.4 Умножение на детерминанти

Произведението на две детерминанти $|A| = \det(a_{ij})$ и $|B| = \det(b_{ij})$ от един и същи ред n е детерминанта $|C| = \det(c_{ij})$ от ред n, чиито елементи c_{ij} се пресмятат по една от следните четири формули:

а) $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{jk}$ – умножение на редове с редове;

б) $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ – умножение на редове със стълбове;

в) $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}b_{jk}$ – умножение на стълбове с редове;

г) $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}b_{kj}$ – умножение на стълбове със стълбове.

От а) и (1.1) следва, че детерминантата на всяка ортогонална матрица е равна на 1 или -1.

Задача 1.2.1 Посочете кои от дадените произведения участват в развитието на детерминантата $|A| = det(a_{ij})$ от осми ред и с какъв знак.

а) $a_{67}a_{46}a_{13}a_{35}a_{84}a_{21}a_{78}a_{52}$; б) $a_{54}a_{13}a_{35}a_{82}a_{24}a_{76}a_{66}a_{41}$;
в) $a_{32}a_{66}a_{18}a_{55}a_{21}a_{84}a_{73}a_{47}$; г) $a_{21}a_{32}a_{18}a_{45}a_{63}a_{57}$.

Решение. а) Съгласно (1.12) имаме

$$|A| = \sum_{(k_1k_2\dots k_8)} (-1)^{l(k_1k_2\dots k_8)} a_{1k_1}a_2k_2\dots a_{8k_8}, \tag{1.19}$$

където сумирането се извършва по всички пермутации $k_1k_2\dots k_8$ на числата $1, 2, \dots, 8$, а с $l(k_1k_2\dots k_8)$ е означен броят на инверсиите в посочените пермутации. Ясно е, че едно произведение от елементи на $|A|$ участва в (1.19) точно тогава, когато удовлетворява следните условия:

(а) броят на множителите е осем;

(б) първите индекси на множителите образуват главната пермутация $12\dots 8$;

(в) вторите индекси на множителите образуват някаква пермутация на числата $1, 2, \dots, 8$.

Раглежданото произведение $a_{67}a_{46}a_{13}a_{35}a_{84}a_{21}a_{78}a_{52}$ съдържа осем множителя и може да се запише във вида

$$a_{13}a_{21}a_{35}a_{46}a_{52}a_{67}a_{78}a_{84}. \tag{1.20}$$

Следователно то удовлетворява условията (а) и (б). Освен това вторите индекси на множителите на (1.20) образуват пермутацията 31562784 от числата $1, 2, \ldots, 8$. Оттук следва, че произведението участва в равенството (1.19).

Тъй като $l(31562784) = 8$ и $(-1)^8 = 1$, то разглежданото произведение участва в (1.19) със знака „+“.

Отговор. б) не; в) да, с „–“; г) не.

Задача 1.2.2 Определете индексите i и j така, че в развитието на детерминантата $\Delta_9 = \det(a_{ij})$ от девети ред знакът пред дадените произведения да е минус.

а) $a_{11}a_{23}a_{3i}a_{47}a_{59}a_{6j}a_{74}a_{86}a_{98}$; б) $a_{19}a_{2i}a_{37}a_{46}a_{55}a_{64}a_{7j}a_{82}a_{91}$;
в) $a_{25}a_{1i}a_{54}a_{7j}a_{38}a_{41}a_{67}a_{99}a_{86}$; г) $a_{98}a_{73}a_{51}a_{8j}a_{62}a_{17}a_{34}a_{25}a_{4i}$.

Решение. а) Понеже в произведението

$$a_{11}a_{23}a_{3i}a_{47}a_{59}a_{6j}a_{74}a_{86}a_{98}$$

първите индекси на множителите образуват главната пермутация $12\ldots9$, то ще участва в развитието на Δ_n със знак минус, ако пермутацията $13i79j468$ от вторите индекси е нечетна. За i и j имаме две възможности: $i = 2, j = 5$ и $i = 5, j = 2$. Тъй като $l(132795468) = 9$, а $l(1335792468) = 10$, то решение е $i = 2, j = 5$.

Отговор. б) $i = 3, j = 8$; в) $i = 3, j = 2$;
г) $i = 1, j = 9$.

Задача 1.2.3 Определете индексите i и j така, че в развитието на детерминантата $\Delta_6 = \det(a_{ij})$ от шести ред знакът пред дадените произведения да е плюс.

а) $a_{16}a_{2i}a_{31}a_{45}a_{5j}a_{63}$; б) $a_{16}a_{54}a_{2i}a_{31}a_{4j}a_{62}$;
в) $a_{35}a_{i3}a_{62}a_{46}a_{j4}a_{21}$; г) $a_{i5}a_{21}a_{13}a_{j6}a_{34}a_{62}$.

Отговор. а) $i = 4, j = 2$; б) $i = 5, j = 3$;
в) $i = 5, j = 1$; г) $i = 5, j = 4$.

Задача 1.2.4 Да се определи знакът в развитието на детерминантата $\Delta_n = det(a_{ij})$ от n-ти ред пред произведението от елементите на:

а) главния диагонал;

б) второстепенния диагонал.

Решение. а) Произведението от елементите на главния диагонал е $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. Понеже $l(12\dots n) = 0$, то знакът му е плюс.

б) Произведението от елементите на второстепенния диагонал е $a_{1n}a_{2,m-1}\dots a_{n-1,2}a_{n1}$. Тъй като $l(nn-1\dots 21) = n-1+n-2+\dots+2+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, знакът пред произведението ще зависи от вида на числото $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

б1) Ако числото $\dfrac{n(n-1)}{2}$ е четно, т.е. $\dfrac{n(n-1)}{2} = 2m$, то от $n(n-1) = 4m$ следва, че поне едно от числата n и $n-1$ се дели на 4. Следователно знакът пред разглежданото произведение е плюс, когато числото n е от вида $4k$ или $4k+1$.

б2) В случай, че числото $\dfrac{n(n-1)}{2}$ е нечетно, то произведението $n(n-1)$ не се дели на 4. Тъй като $n(n-1)$ е произведение на две последователни естествени числа, то едното от тях е четно, а другото нечетно. Ако n е четно и не се дели на 4, то n е от вида $4k+2$, а ако $n-1$ е четно и не се дели на 4, то $n = 4k+3$. Следователно знакът пред произведението от елементите по втория диагонал е минус, когато числото n е от вида $4k+2$ или $4k+3$.

Задача 1.2.5 Пресметнете детерминантите:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & -15 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 17 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;

и) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix}$; й) $\begin{vmatrix} 16 & 10 & 27 \\ 9 & 6 & 15 \\ 32 & 18 & 37 \end{vmatrix}$;

к) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}$.

Решение. а) Прилагаме (1.13) и получаваме

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = (-1).(-8) - 2.5 = 8 - 10 = -2.$$

д) За да пресметнем дадената детерминанта ще използваме правилото на Сарус (1.15). За тази цел преписваме първите два стълба след трерия. Имаме

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 7 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right. =$$

$$= 2.5.(-2)+(-1).7.4+0.(-3).2-4.5.0-2.7.2-(-2).(-3).(-1) = -70.$$

й) За да работим с по-малки числа, преобразуваме дадената детерминанта Δ, като използваме последователно свойства

8) и 3). Именно, към първия и третия ред на Δ прибавяме втория, умножен съответно с -2 и -3. От втория ред и получения втори стълб изнасяме общите множители 3 и 2. Имаме

$$\begin{vmatrix} 16 & 10 & 27 \\ 9 & 6 & 15 \\ 32 & 18 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 9 & 6 & 15 \\ 5 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

и като приложим правилото на Сарус (1.15) или на триъгълниците (1.16), получаваме

$$\Delta = 6(16 + 0 - 25 + 15 - 0 - 24) = -108.$$

к) Към третия ред прибавяме втория. Получаваме

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x+y+z & x+y+z & x+y+z \end{vmatrix} = 0.$$

Последната детерминанта е нула съгласно свойство 6).

Отговор. б) $ab(b-a)$; в) 45; г) -1;
е) $3x - y - z$; ж) 80; з) $(b-c)(c-a)(a-b)$;
и) $-x^3 + 3x + 2$.

Задача 1.2.6 Пресметнете детерминантите:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 9 & -5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 5 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 6 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 8 & 8 & 3 & 3 & 10 \\ 5 & 5 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & -8 & 2 \\ 4 & 3 & 10 & -9 & 3 \\ 5 & 3 & 11 & -10 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. а) Означаваме дадената детерминанта с Δ. Прибавяме първия ред към втория и третия, умножен с -4 – към четвъртия. Намираме $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 10 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. Развиваме по адюнгираните количества на елементите на третия стълб. Получаваме

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(6 - 10 + 20 - 10 + 4 - 30) = 40.$$

е) Първия стълб, умножен с -3 и -2 прибавяме съответно към втория и третия, а втория, умножен с -1 и -3 – съответно към четвъртия и петия. Получаваме детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -14 \\ 3 & -6 & 3 & -11 & -7 \\ 4 & -9 & 2 & -12 & -6 \\ 5 & -12 & 1 & -13 & -5 \end{vmatrix},$$

която развиваме по адюнгираните количества на елементите от първия ред. Намираме

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & -14 \\ -6 & 3 & -11 & -7 \\ -9 & 2 & -12 & -6 \\ -12 & 1 & -13 & -5 \end{vmatrix}.$$

Прибавяме втория стълб към първия и третия, а след това умножен с 14 – към четвъртия:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -8 & 35 \\ -7 & 2 & -10 & 22 \\ -11 & 1 & -12 & 9 \end{vmatrix}.$$

Като развием по адюнгираните количества на елементите на първия ред, получаваме

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -3 & -8 & 35 \\ -7 & -10 & 22 \\ -11 & -12 & 9 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 4 & 35 \\ 7 & 5 & 22 \\ 11 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

Умножаваме втория ред по -2 и го прибавяме към първия:

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} -11 & -6 & -9 \\ 7 & 5 & 22 \\ 11 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Последната детерминанта е равна на 0 съгласно свойство 6).

Отговор. б) 405; в) 12; г) -184; д) 5.

Задача 1.2.7 Намерете коефициента k пред x в развитието на детерминантата:

а) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & x & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & -3x & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & x & 5 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 4 & 5 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 8 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -3 & x \\ 7 & -1 & 4 & 15 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. а) Търсеният коефициент k е равен на адюнгираното количество на елемента x в дадената детерминанта. Имаме

$$k = A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -15.$$

Отговор. б) $k = -3A_{32} = 132$; в) $k = A_{33} = -20$; г) $k = A_{35} = 255$.

Задача 1.2.8 Без да се развиват съответните детерминанти, да се решат уравненията:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 3-x^2 & 3 & 3 \\ -7 & -7 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 6 & x^2-3 \end{vmatrix} = 0;$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 2-x & 1 & 7 \\ 3 & 6 & 4+x & 12 \\ -4 & x-14 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0,$

Решение. б) Ще използваме свойство 6). Разглежданото уравнение (в детерминантна форма) е от втора степен и следователно ще има два корена. Най-напред, първият и третият ред са пропорционални, т.е. третият ред може да се получи от първия с умножаване с 3 точно тогава, когато $4 + x = 9$. Оттук намираме $x_1 = 5$.

Аналогично, вторият стълб може да се получи от първия чрез умножаване с 2 точно тогава, когато $2 - x = -4$, $\;x - 14 = -8$, т.е. $x_2 = 6$.

Отговор. а) $x_{1,2} = \pm 2$, $\;x_{3,4} = \pm 3$; в) $x_{1,2} = \pm 1$, $\;x_{3,4} = \pm 2$;

Сега ще изложим някои специфични методи за пресмятане на детерминанти от $n-$ти ред.

А. Пресмятане на детерминанти, чрез привеждане в триъгълен вид.

Разглежданата детерминанта се привежда в триъгълен вид, след което се прилага свойство 10).

Задача 1.2.9 Пресметнете следните детерминанти, чрез привеждане в триъгълен вид:

$$\text{а) } \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавяме първия ред към втория, третия,...,$n-$тия ред. Получаваме

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n!.$$

б) $$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 & n \\ n & n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

Упътване. От всеки стълб извадете следващия.

Отговор. $\Delta_n = (-1)^{n-1}n$.

в) $$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x & x \\ a_1 & x & x & \dots & x & x \\ 0 & a_2 & x & \dots & x & x \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}.$$

Упътване. Започвайки от n-тия стълб, от всеки стълб извадете предхождащия го.

Отговор. $\Delta_n = x\prod_{i=1}^{n-1}(x-a_i)$.

г) $$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x_1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & x_2 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x_n & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Упътване. Извадете последния стълб от всички останали.

Отговор. $\Delta_{n+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-1)$.

д) $$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}.$$

Упътване. Извадете последния стълб от всички останали.

Отговор. $\Delta_{n+1} = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \prod_{i=1}^{n} b_i$.

е) $$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Упътване. Извадете първия стълб от всички останали.

Отговор. $\Delta_n = (x-a)^{n-1}[x + (n-1)a]$.

ж) $$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Упътване. Прибавате последния стълб, умножен с -1 към останалите.

Отговор. $\Delta_n = (1-n)^{n-1}$.

з) $$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 5 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 5 \end{vmatrix}.$$

Упътване. Използвайте е).

Отговор. $\Delta_n = 3^{n-1}[5 + 2(n-1)]$.

$$\text{и) } \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

Решение. От първия ред изваждаме втория, от втория – третия и т.н., от $(n-1)$-вия ред изваждаме n-тия. Получаваме детерминантата

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix},$$

в която, чрез $n-1$ последователни премествания на последния ред, го поставяме като първи. Имаме

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n & n & n \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} .(-1)^{n-1} =$$

$$= (-1)^{n-1}.(-1)^{n-1}.(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.n = n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$$\text{й) } \Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

Упътване. Извадете последния ред от останалите редове и след $n-1$ на брой последователни премествания го поставете първи.

Отговор. $\Delta_n = x_1(x_2 - a_{12})(x_3 - a_{23})\dots(x_n - a_{n-1,n})$.

$$\text{к) } \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Упътване. От втория ред извадете третия, от третия – четвъртия и т.н., от последния ред извадете предпоследния.

Отговор. $\Delta_n = 1$.

$$\text{л) } \Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}.$$

Упътване. Прибавете последния стълб към предпоследния, новополучения $(n-1)$-ви стълб прибавете към $(n-2)$-рия и т.н., новополученият втори стълб прибавете към първия.

Отговор. $\Delta_{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^n$.

$$\text{м) } \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix},$$

$x_j \neq 0,\ j = 1, 2, \dots, n$.

Упътване. Изнесете множителите $x_1, x_2, \dots, x_n$ съответно от първия, втория, ..., n-тия стълб. След това използвайте метода, приложен в л).

Отговор. $\Delta_n = \prod_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{x_j}$.

н) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$.

Упътване. Извадете първия ред от всички останали редове.

Отговор. $\Delta_n = \prod_{i=1}^{n-1}(x-i)$.

о) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & 2 & \dots & n-3 \\ 1 & x & x & x & 1 & \dots & n-4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. От всеки ред, започвайки от първия, изваждаме следващия. Получаваме детерминантата

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-x & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & x & x & \dots & x & 1 \end{vmatrix},$$

която развиваме по адюнгирани количества на елементите на първия стълб. В получената поддетерминанта умножаваме всеки стълб с -1 и го прибавяме към следващия. Имаме

$$\Delta_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1-x & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} x^{n-2}.$$

п) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$

Решение. Умножаваме първия ред с $-x$ и го прибавяме към останалите. Получаваме

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix}.$$

Очевидно, ако $x = 0$, то $\Delta_n = 0$ при $n \neq 2$ и $\Delta_n = -1$ при $n = 2$. Нека $x \neq 0$. От втория, третия, ..., n-тия стълб изнасяме множител x. Намираме

$$\Delta_n = x^{n-1}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} & \dots & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

и като прибавим всички стълбове към първия, получаваме

$$\Delta_n = x^{n-1}\begin{vmatrix} \frac{n-1}{x} & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} & \dots & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}.$$

р) $$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1 & -x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & -x_n \end{vmatrix}.$$

Решение. Като умножим първия стълб последователно с $-x_1, -x_2, \cdots - x_n$ и го прибавим съответно към втория, третия,

..., $(n+1)$-вия стълб, намираме

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -2x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -2x_2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -2x_n \end{vmatrix}.$$

Умножаваме втория, третия, ..., $(n+1)$-вия редове съответно с $\dfrac{1}{2x_1}, \dfrac{1}{2x_2}, \dots, \dfrac{1}{2x_n}$ и ги прибавяме към първия. Получаваме

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2x_2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -2x_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n 2^{n-1} \prod_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}.$$

Разбира се, предположили сме, че $x_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$.

c) $$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & a & \dots & a & a & x_1 \\ a & a & \dots & a & x_2 & a \\ a & a & \dots & x_3 & a & a \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a & x_{n-1} & \dots & a & a & a \\ x_n & a & \dots & a & a & a \end{vmatrix}.$$

Решение. Изваждаме първия ред от всички останали:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & a & \dots & a & a & x_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_2 - a & a - x_1 \\ 0 & 0 & \dots & x_3 - a & 0 & a - x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_{n-1} - a & \dots & 0 & 0 & a - x_1 \\ x_n - a & 0 & \dots & 0 & 0 & a - x_1 \end{vmatrix}.$$

Нека най-напред $x_i \neq a$, $i = 1, 2, \dots, n$. От първия, втория, ..., n-тия стълбове изнасяме съответно множителите $x_n - a, x_{n-1} - a, \dots, x_1 - a$. Получаваме

$$\Delta_n =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (x_i - a) \begin{vmatrix} \dfrac{a}{x_n - a} & \dfrac{a}{x_{n-1} - a} & \dots & \dfrac{a}{x_3 - a} & \dfrac{a}{x_2 - a} & \dfrac{x_1}{x_1 - a} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Като заместим $\dfrac{x_1}{x_1 - a} = 1 + \dfrac{a}{x_1 - a}$ и прибавим всички стълбове към последния, намираме

$$\Delta_n =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(x_i - a) \begin{vmatrix} \dfrac{a}{x_n - a} & \dfrac{a}{x_{n-1} - a} & \dots & \dfrac{a}{x_3 - a} & \dfrac{a}{x_2 - a} & 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{a}{x_1 - a} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n}(x_i - a) \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a}{x_j - a}\right).$$

Ако $x_i = x_j = a, \;\; i \neq j$, то $\Delta_n = 0$, понеже съдържа два равни реда.

Ако само $x_k = a$ и $x_j \neq a, \;\; j \neq k$, то в този случай след $k-1$ на брой последователни премествания поставяме $k-$тия стълб за първи и го изваждаме от всички останали. По този начин привеждаме детерминантата в триъгълен вид и получаваме

$$\Delta_n = (-1)^{k-1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.Q$$

където

$$Q = a(x_1 - a)(x_2 - a)\dots(x_{k-1} - a)(x_{k+1} - a)\dots(x_n - a).$$

Б. Метод на рекурентните връзки.

Разглежданата детерминанта се изразява чрез детерминанти от същия вид, но от по-нисък ред.

Нека е дадена детерминантата $\Delta_n, \;\; n > 2$ и да предположим, че сме получили рекурентната връзка

$$\Delta_n = p\Delta_{n-1} + q\Delta_{n-2}, \tag{1.21}$$

в която Δ_{n-1} и Δ_{n-2} са детерминанти съответно от ред $n-1$ и $n-2$, имащи същия вид, като Δ_n, а p и q са константи, които не зависят от n.

В случай, че $q = 0$, то от (1.21) получаваме

$$\Delta_n = p\Delta_{n-1} = p^2\Delta_{n-2} = \cdots = p^{n-1}\Delta_1.$$

Нека сега $q \neq 0$ и да означим с α и β корените на квадратното уравнение

$$x^2 - px - q = 0, \tag{1.22}$$

т.е.

$$\alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = -q. \tag{1.23}$$

От (1.21) и (1.23) следва $\Delta_n = (\alpha + \beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}$ и следователно

$$\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \beta(\Delta_{n-1} - \alpha\Delta_{n-2}), \tag{1.24}$$

$$\Delta_n - \beta\Delta_{n-1} = \alpha(\Delta_{n-1} - \beta\Delta_{n-2}). \tag{1.25}$$

Да предположим най-напред, че $\alpha \neq \beta$. Тъй като (1.24) и (1.25) са в в сила за произволно $n > 2$, то очевидно те могат да бъдат записани във вида

$$\begin{aligned} \Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} &= \beta^{n-2}(\Delta_2 - \alpha\Delta_1), \\ \Delta_n - \beta\Delta_{n-1} &= \alpha^{n-2}(\Delta_2 - \beta\Delta_1). \end{aligned} \tag{1.26}$$

От (1.26), изключвайки Δ_{n-1}, получаваме

$$\Delta_n = \frac{\alpha^{n-1}(\Delta_2 - \beta\Delta_1) - \beta^{n-1}(\Delta_2 - \alpha\Delta_1)}{\alpha - \beta}.$$

Последното равенство е еквивалентно на

$$\Delta_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n, \tag{1.27}$$

където сме положили

$$c_1 = \frac{\Delta_2 - \beta\Delta_1}{\alpha(\alpha - \beta)}, \quad c_2 = -\frac{\Delta_2 - \alpha\Delta_1}{\beta(\alpha - \beta)}. \tag{1.28}$$

Непосредствено се проверява, че коефициентите (1.28) удовлетворяват системата

$$\left| \begin{array}{l} \alpha c_1 + \beta c_2 = \Delta_1 \\ \alpha^2 c_1 + \beta^2 c_2 = \Delta_2. \end{array} \right. \tag{1.29}$$

Остава да разгледаме случая $\alpha = \beta$. Тогава равенствата (1.24) и (1.25) са еквивалентни на равенството $\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \alpha(\Delta_{n-1} - \alpha\Delta_{n-2})$ и от него следва, че

$$\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \alpha^{n-2}(\Delta_2 - \alpha\Delta_1). \tag{1.30}$$

Аналогично имаме $\Delta_{n-1} - \alpha\Delta_{n-2} = \alpha^{n-3}(\Delta_2 - \alpha\Delta_1)$ и като заместим в (1.30), получаваме $\Delta_n = \alpha^2\Delta_{n-2} + 2\alpha^{n-2}(\Delta_2 - \alpha\Delta_1)$. Продължавайки този процес на заместване на $\Delta_{n-2}, \Delta_{n-3}, \ldots, \Delta_4, \Delta_3$, достигаме до равенството $\Delta_n = \alpha^{n-1}\Delta_1 + (n-1)\alpha^{n-2}(\Delta_2 - \alpha\Delta_1)$, което можем да запишем във вида

$$\Delta_n = [(n-1)c_1 + c_2]\alpha^n, \tag{1.31}$$

където

$$c_1 = \frac{\Delta_2 - \alpha\Delta_1}{\alpha^2}, \quad c_2 = \frac{\Delta_1}{\alpha} \tag{1.32}$$

От (1.32) следва, че c_1 и c_2 удовлетворяват системата

$$\left| \begin{array}{l} \alpha c_2 = \Delta_1 \\ \alpha^2(c_1 + c_2) = \Delta_2. \end{array} \right. \tag{1.33}$$

Задача 1.2.10 Като използвате метода на рекурентните връзки, пресметнете детерминантите:

$$\text{а)}\ \Delta_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение. Развиваме Δ_n по елементите на първия ред. Получаваме

$$\Delta_n = 7 \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}.$$

Развиваме втората детерминанта по адюнгираните количества на първия стълб и получаваме рекурентната връзка $\Delta_n = 7\Delta_{n-1} - 5\Delta_{n-2}$, която е от вида (1.21). Сега (1.22) е $x^2 - 7x + 10 = 0$ и има корените

$$\alpha = 2, \quad \beta = 5. \tag{1.34}$$

Тъй като $\Delta_1 = 7, \quad \Delta_2 = 39$, от (1.28) (или (1.29)) намираме

$$c_1 = -\frac{2}{3}, \quad c_2 = \frac{5}{3}. \tag{1.35}$$

Заместваме (1.34) и (1.35) в (1.27) и получаваме $\Delta_n = \dfrac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}$.

$$\text{б)}\ \Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Развиваме Δ_n по елементите на първия ред (или стълб) и получаваме рекурентната връзка

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2},$$

която е от вида (1.21). Тогава (1.22) е $x^2-2x+1=0$ и има двоен корен $\alpha=\beta=1$. Понеже $\Delta_1=2,\ \ \Delta_2=3$, от (1.32) (или (1.33)) намираме $c_1=1,\ \ c_2=2$ и от (1.31) получаваме $\Delta_n=n+1$.

в) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$

Отговор. $\Delta_n = 2^{n+1}-1$.

г) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

Упътване. Развивайки Δ_n по елементите на последния ред, ще получите рекурентната връзка $\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$.

Отговор. $\Delta_n = 9 - 2^{n+1}$.

д) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$

Упътване. Развийте Δ_n по елементите на последния ред. Ще получите рекурентната връзка $\Delta_n = 5\Delta_{n-1} - 6\Delta_{n-2}$.

Отговор. $\Delta_n = 5.2^{n+1} - 4.3^{n-1}$.

е) $\Delta_n = \begin{vmatrix} -6 & 9 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -6 & 9 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 9 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -6 \end{vmatrix}$.

Упътване. Получете рекурентната връзка $\Delta_n = -6\Delta_{n-1} - 9\Delta_{n-2}$.

Отговор. $\Delta_n = (-3)^n(n+1)$.

ж) $\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & -12 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & -12 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -12 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$.

Упътване. Получете рекурентната връзка $\Delta_n = -\Delta_{n-1} + 12\Delta_{n-2}$.

Отговор. $\Delta_n = \dfrac{3^{n+1} - (-4)^{n+1}}{7}$.

з) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

Упътване. Получете рекурентната връзка $\Delta_n = 9\Delta_{n-1} - 20\Delta_{n-2}$.

Отговор. $\Delta_n = 5^{n+1} - 4^{n+1}$.

и) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Упътване. Получете рекурентната връзка $\Delta_n = -\Delta_{n-2}$.

Отговор. $\Delta_n = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n - \text{нечетно;} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{при} \quad n - \text{четно.} \end{cases}$

й) $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$.

Упътване. Получете рекурентната връзка
$\Delta_n = (a+b)\Delta_{n-1} - ab\Delta_{n-2}$.

Отговор. $\Delta_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.

к) $\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1+a & a & a & \dots & a & a \\ a & x_2+a & a & \dots & a & a \\ a & a & x_3+a & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x_{n-1}+a & a \\ a & a & a & \dots & a & x_n+a \end{vmatrix}$.

Решение. Представяме елементите на последния стълб на Δ_n като суми $0+a, 0+a, \dots, 0+a, x_n+a$. Тогава съгласно свойство 7) детерминантата Δ_n може да се представи като сума на две детерминанти. Имаме

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1+a & a & \dots & a & 0 \\ a & x_2+a & \dots & a & 0 \\ a & a & \dots & a & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a & a & \dots & x_{n-1}+a & 0 \\ a & a & \dots & a & x_n \end{vmatrix} +$$

(1.36)

$$+ \begin{vmatrix} x_1+a & a & \dots & a & a \\ a & x_2+a & \dots & a & a \\ a & a & \dots & a & a \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a & a & \dots & x_{n-1}+a & a \\ a & a & \dots & a & a \end{vmatrix}.$$

Първата детерминанта в (1.36) развиваме по елементите на последния стълб, а втората – привеждаме в триъгълен вид чрез изваждане на последния стълб от всички останали. Получаваме

$$\Delta_n = x_n \begin{vmatrix} x_1+a & a & \dots & a & a \\ a & x_2+a & \dots & a & a \\ a & a & \dots & a & a \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a & a & \dots & x_{n-2}+a & a \\ a & a & \dots & a & x_{n-1}+a \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 & a \\ 0 & x_2 & \dots & 0 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

и следователно

$$\Delta_n = x_n \Delta_{n-1} + a \prod_{i=1}^{n-1} x_i. \tag{1.37}$$

Тъй като рекурентната връзка (1.37) не е от вида (1.21), не можем да приложим метода, използван в решенията на задачите а) - й). Сега ще използваме метода на пълната математическа индукция. Пресмятаме

$$\Delta_1 = (1 + a\frac{1}{x_1})x_1,$$

$$\Delta_2 = [1 + a(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2})]x_1 x_2,$$

$$\Delta_3 = [1 + a(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3})]x_1 x_2 x_3.$$

Ще докажем, че

$$\Delta_n = (1 + a\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}) \prod_{j=1}^{n} x_j. \tag{1.38}$$

Да допуснем, че (1.38) е в сила за $n \leq k$, т.е.

$$\Delta_k = (1 + a\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i}) \prod_{j=1}^{k} x_j. \tag{1.39}$$

Ще докажем, че (1.38) е вярно и за $n = k + 1$. Действително, от рекурентната връзка (1.37), като вземем предвид (1.39), получаваме

$$\Delta_{k+1} = x_{k+1}\Delta_k + a\prod_{j=1}^{k} x_j =$$

$$= x_{k+1}(1 + a\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i})\prod_{j=1}^{k}x_j + a\prod_{j=1}^{k}x_j =$$

$$= (1 + a\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{x_i})\prod_{j=1}^{k+1}x_j$$

и формулата (1.38) е установена.

$$\text{л) } \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (n-1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Упътване. Като развиете Δ_n по елементите на последния ред, ще получите рекурентната връзка

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + (n-1)^2\Delta_{n-2}.$$

Чрез метода на пълната математическа индукция докажете, че $\Delta_n = n!$.

$$\text{м) } \Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 3 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & x \end{vmatrix}.$$

Решение. Развиваме Δ_{n+1} по елементите на последния стълб и получаваме рекурентната връзка

$$\Delta_{n+1} = a_0x^n - 3\Delta_n. \tag{1.40}$$

Тогава

$$(1.41)\qquad \begin{array}{l} \Delta_n = a_1x^n - 3\Delta_{n-1},\\ \Delta_{n-1} = a_2x^n - 3\Delta_{n-2},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Delta_2 = a_{n-1}x^n - 3\Delta_1,\\ \Delta_1 = a_n. \end{array}$$

Умножаваме първото равенство на (1.41) с -3, второто – с $(-3)^2$, третото – с $(-3)^3$, ..., последното – с $(-3)^n$ и ги прибавяме към (1.40). Получаваме

$$\Delta_{n+1} + (-3)\Delta_n + (-3)^2\Delta_{n-1} + (-3)^3\Delta_{n-2} + \cdots +$$
$$+(-3)^{n-1}\Delta_2 + (-3)^n\Delta_1 =$$
$$= a_0x^n + (-3)a_1x^{n-1} + (-3)^2a_2x^{n-2} + \cdots +$$
$$+(-3)^{n-1}a_{n-1}x + (-3)^na_n +$$
$$+(-3)\Delta_{n-1} + (-3)^2\Delta_{n-2} + (-3)^3\Delta_{n-3} + \cdots +$$
$$+(-3)^{n-1}\Delta_2 + (-3)^n\Delta_1$$

и като направим приведение намираме

$$\Delta_{n+1} = a_0x^n + (-3)a_1x^{n-1} + (-3)^2a_2x^{n-2} + \cdots +$$
$$+(-3)^{n-1}a_{n-1}x + (-3)^na_n.$$

н) $\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \dots & 0\\ a_{n-2} & 0 & x & -1 & \dots & 0\\ a_{n-3} & 0 & 0 & x & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$

Отговор.
$\Delta_{n+1} = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$

о) $$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \\ -y & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -y & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Отговор.
$\Delta_{n+1} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + \cdots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n.$

п)
$$W(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Решение. Умножаваме първия ред с x_1 и го изваждаме от втория, умножаваме втория ред с x_1 и го изваждаме от третия, ..., умножаваме $(n-1)-$вия ред с x_1 и го изваждаме от $n-$тия. Получаваме детерминантата

$$W(x_1, \dots, x_n) =$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1x_2 & x_3^2 - x_1x_3 & \dots & x_n^2 - x_1x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

която развиваме по първия стълб. Получаваме

$$W(x_1, \dots, x_n) =$$
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & \dots & x_n^2(x_n - x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

От всеки стълб изнасяме общия множител. Имаме

$$W(x_1,\dots,x_n)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\times$$
$$\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

Следователно е в сила рекурентната връзка:

$$W(x_1,\dots,x_n)= \tag{1.42}$$
$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)W(x_2,\dots,x_n).$$

Аналогично намираме

(1.43)

$$\begin{aligned} &W(x_2,\dots,x_n)=(x_3-x_2)\dots(x_n-x_2)W(x_3,\dots,x_n),\\ &W(x_3,\dots,x_n)=(x_4-x_3)\dots(x_n-x_3)W(x_4,\dots,x_n),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &W(x_{n-2},x_{n-1},x_n)=(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})W(x_{n-1},x_n),\\ &W(x_n)=1.\end{aligned}$$

От (1.42) и (1.43) следва

$$\begin{aligned} W(x_1,\dots,x_n)= \;&(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\times\\ &\times(x_3-x_2)(x_4-x_2)\dots(x_n-x_2)\times\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\times(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})\times\\ &\times(x_n-x_{n-1}),\end{aligned}$$

или накратко записано

$$W(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\le j\le i\le n}(x_i-x_j).$$

Детерминантата $W(x_1,\dots,x_n)$ се нарича *детерминанта на Вандермонд от ред* n.

р) $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^{n+1} \\ a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^{n+1} \end{vmatrix}$.

Упътване. От всеки ред изнесете общия множител и транспонирайте получената детерминанта.

Отговор. $\Delta_n = \prod\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \prod\limits_{1\le k\le j\le n} (a_j - a_k)$.

с) $\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (n+1) & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}$.

Отговор. $\Delta_{n+1} = \prod\limits_{i=1}^{n} i!$.

B. Представяне на детерминанта като сума от детерминанти.

Разглежданата детерминанта се разлага относно подходящо избран ред или стълб на сума от детерминанти от същия ред.

Задача 1.2.11 Да се пресметнат дадените детерминанти, като се представят като сума от детерминанти:

а) $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 & \dots & a_2+b_n \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 & \dots & a_3+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & a_n+b_3 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

Решение. Като приложим свойство 7) относно първия стълб на Δ_n, получаваме

$$
\begin{aligned}
\Delta_n = & \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 & \dots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2+b_3 & \dots & a_2+b_n \\ a_3 & a_3+b_2 & a_3+b_3 & \dots & a_3+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n+b_2 & a_n+b_3 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \\
+ & \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 & \dots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 & \dots & a_2+b_n \\ b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 & \dots & a_3+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & a_n+b_2 & a_n+b_3 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.
\end{aligned}
\tag{1.44}
$$

В първата детерминанта на (1.44) изваждаме първия стълб от втория и третия, а във втората – изнасяме от първия стълб общия множител b_1 и новополучения стълб, умножен с b_2 и b_3, изваждаме съответно от втория и третия:

$$
\begin{aligned}
\Delta_n = & \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_1+b_n \\ a_2 & b_2 & b_3 & \dots & a_2+b_n \\ a_3 & b_2 & b_3 & \dots & a_3+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_2 & b_3 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \\
+ \; b_1 & \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1 & a_1+b_4 & \dots & a_1+b_n \\ 1 & a_2 & a_2 & a_2+b_4 & \dots & a_2+b_n \\ 1 & a_3 & a_3 & a_3+b_4 & \dots & a_3+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & a_n & a_n & a_n+b_4 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.
\end{aligned}
\tag{1.45}
$$

В първата детерминанта на (1.45) втория и третия стълб са пропорционални, а във втората – те са равни. Тогава съгласно свойства 6) и 5) те са равни на нула и следователно $\Delta_n = 0$.

б) $$\Delta_n = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

Упътване. Представете Δ_n като сума от $n+1$ детерминанти:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} +$$

$$+a_2 \begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & x \end{vmatrix} + \dots + a_n \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 1 \\ 0 & x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Отговор. $\Delta_n = x^{n-1}(x + \sum_{i=1}^{n} a_i)$.

в)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & -b & -b & \dots & -b & -b \\ b & a & -b & \dots & -b & -b \\ b & b & a & \dots & -b & -b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a & -b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}. \tag{1.46}$$

Решение. Можем да представим Δ_n като сума от следните две детерминанти:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & -b & \dots & -b & -b \\ b & b & a & \dots & -b & -b \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ b & b & b & \dots & a & -b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -b & -b & -b & \dots & -b & -b \\ b & a & -b & \dots & -b & -b \\ b & b & a & \dots & -b & -b \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ b & b & b & \dots & a & -b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

Първата от тях развиваме по елементите на първия ред, а втората привеждаме в триъгълен вид като прибавим първия ред към останалите. Получаваме рекурентната връзка

$$\Delta_n = (a+b)\Delta_{n-1} - b(a-b)^{n-1}. \tag{1.47}$$

Съгласно 1) имаме $(\Delta_n)^t = \Delta_n$ и следователно

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ -b & a & b & \dots & b & b \\ -b & -b & a & \dots & b & b \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ -b & -b & -b & \dots & -b & a \end{vmatrix}. \tag{1.48}$$

Но детерминантата (1.48) се получава от тази в (1.46) чрез формална замяна на b с $-b$ и следователно имаме рекурентната връзка

$$\Delta_n = (a-b)\Delta_{n-1} + b(a+b)^{n-1}. \tag{1.49}$$

От (1.47) и (1.49) получаваме

$$\Delta_n = \frac{1}{2}[(a-b)^n + (a+b)^n].$$

г) $$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & n & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Отговор. $\Delta_{n+1} = \prod_{i=1}^{n}(x-i) - x^n$.

Задача 1.2.12 Умножете детерминантите

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ и } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Умножението ще извършим по четирите възможни начина.

а) Умножаваме редовете на Δ_1 с редовете на Δ_2:

$$\Delta_1\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2+0+1 & 1+1+1 & 1-2+1 \\ 2+0+0 & 1-1+0 & 1+2+0 \\ -2+0+1 & -1-2+1 & -1+4+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -15.$$

б) Умножаваме редовете на Δ_1 със стълбовете на Δ_2:

$$\Delta_1\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2-1+1 & 0+1+2 & 1-1+1 \\ 2+1+0 & 0-1+2 & 1+1+0 \\ -2+2+1 & 0-2+2 & -1+2+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -15.$$

в) Умножаваме стълбовете на Δ_1 с редовете на Δ_2:

$$\Delta_1\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2+0-1 & 1-1-1 & 1+2-1 \\ -2+0+2 & -1-1+2 & -1+2+2 \\ 2+0+1 & 1+0+1 & 1+0+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -15.$$

г) Умножаваме стълбовете на Δ_1 със стълбовете на Δ_2:

$$\Delta_1\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2+1-1 & 0-1-2 & 1+1-1 \\ -2+1+2 & 0-1+4 & -1+1+2 \\ 2+0+1 & 0+0+2 & 1+0+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -15.$$

Задача 1.2.13 Умножете детерминантите

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \text{ и } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

като умножавате:

а) редовете на Δ_1 с редовете на Δ_2;
б) редовете на Δ_1 със стълбовете на Δ_2;
в) стълбовете на Δ_1 с редовете на Δ_2;
г) стълбовете на Δ_1 със стълбовете на Δ_2.

Отговор.

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \\ -11 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 7$; б) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 13 \end{vmatrix} = 7$;

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 4 & -3 & -4 \\ -7 & 7 & 7 \\ -3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 7; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 1 & 6 & 10 \\ 8 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7.$$

1.3 Обратна матрица

Нека $A = \|a_{ij}\|$ е квадратна матрица от $n-$ти ред. Ще казваме, че тя е *неособена* (респ. *особена*) ако $det(a_{ij}) \neq 0$ (респ. $det(a_{ij}) = 0$).

Обратна матрица на матрицата A се нарича такава матрица X от $n-$ти ред (ако съществува), за която

$$AX = XA = E, \tag{1.50}$$

където E е единичната матрица от същия ред. Обикновено вместо X се използва означението A^{-1}.

От (1.50) следва:

1) Матрицата A притежава обратна матрица точно тогава, когато е неособена. При това тази обратна матрица е единствена и има вида

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \left\| \begin{array}{cccc} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{array} \right\|, \tag{1.51}$$

където A_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij} в A.

Елементарни преобразувания на редовете (респ. *на стълбовете*) на дадена матрица A се наричат следните преобразувания:

а) разменяне на местата на два реда (респ. стълба);

б) умножаване на елементите на даден ред (респ. стълб) с число различно от нула;

в) прибавяне на ред (респ. стълб), умножен с произволно число, към друг ред (респ. стълб).

Обратната матрица A^{-1} на квадратната неособена матрица A може да се намери посредством формула (1.51). При матрици от по-висок ред е по-целесъобразно да се използва метода на Гаус-Жордан, който се състои в следното:

А) записваме до дадената матрица A единичната матрица (от същия ред) E;

Б) чрез елементарни преобразувания на редовете преобразуваме A в E;

В) при посочените в Б) елементарни преобразувания единичната матрица E се преобразува в обратната матрица A^{-1}.

Задача 1.3.1 Да се намери обратната матрица A^{-1} на матрицата A, ако:

а) $A = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{Vmatrix}$; б) $A = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{Vmatrix}$; в) $A = \begin{Vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$;

г) $A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}, ad - bc \neq 0$; д) $A = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{Vmatrix}$;

е) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ -3 & 3 & 6 \end{Vmatrix}$; ж) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{Vmatrix}$;

з) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; и) $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

к) $A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; л) $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & -4 & 3 & -3 \\ 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$;

Решение. д) **I начин.** Пресмятаме

$$\det(A) = 60, \quad A_{11} = 6, \quad A_{21} = 12, \quad A_{31} = 6,$$

$$A_{12} = 1, \quad A_{22} = -18, \quad A_{32} = 11,$$

$$A_{13} = 11, \quad A_{23} = -18, \quad A_{33} = 1$$

и като заместим в (1.51) при $n = 3$, получаваме

$$A^{-1} = \frac{1}{60} \left\| \begin{array}{rrr} 6 & 12 & 6 \\ 1 & -18 & 11 \\ 11 & -18 & 1 \end{array} \right\|.$$

II начин. Ще приложим метода на Гаус-Жордан. За тази цел написваме дадената матрица A и единичната матрица E от трети ред една да друга, т.е.

$$\left\| \begin{array}{rrr|rrr} 3 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Изваждаме първия ред от последния, а втория – от първия. Получаваме

$$\left\| \begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Умножаваме първия ред с -2 и го прибавяме към втория:

$$\left\| \begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Прибавяме втория ред към първия и умножен с -6 – към последния:

$$\left\| \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -6 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 11 & -18 & 1 \end{array} \right\|.$$

Умножаваме последния ред с $\dfrac{1}{10}$ и го прибавяме към първия. Умножаваме го и с $\dfrac{11}{60}$ и го прибавяме към втория. Намираме

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{10} & \dfrac{2}{10} & \dfrac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{60} & -\dfrac{18}{60} & \dfrac{11}{60} \\ 0 & 0 & 60 & 11 & -18 & 1 \end{array}\right\|.$$

Умножаваме с $\dfrac{1}{60}$. Получаваме

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{60} & -\frac{18}{60} & \frac{11}{60} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{60} & -\frac{18}{60} & \frac{1}{60} \end{array}\right\|$$

и следователно

$$A^{-1} = \left\|\begin{array}{ccc} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{60} & -\frac{18}{60} & \frac{11}{60} \\ \frac{11}{60} & -\frac{18}{60} & \frac{1}{60} \end{array}\right\| = \frac{1}{60}\left\|\begin{array}{rrr} 6 & 12 & 6 \\ 1 & -18 & 11 \\ 11 & -18 & 1 \end{array}\right\|.$$

Отговор.

а) $A^{-1} = \left\|\begin{array}{rr} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{array}\right\|$; б) $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{rr} 3 & -2 \\ -7 & 4 \end{array}\right\|$;

в) $A^{-1} = \left\|\begin{array}{rr} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{array}\right\|$; г) $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\left\|\begin{array}{rr} d & -b \\ -c & a \end{array}\right\|$;

е) $A^{-1} = \dfrac{1}{201}\begin{Vmatrix} 33 & 15 & -51 \\ 21 & -27 & -2 \\ 6 & 21 & 6 \end{Vmatrix}$; ж) $A^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$;

з) $A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & -8 \\ -2 & 1 & 7 \end{Vmatrix}$; и) $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$;

$$\text{к) } A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 6 \\ 1 & 1 & 11 & -9 \\ 2 & -1 & 7 & -6 \end{Vmatrix};$$

$$\text{л) } A^{-1} = \frac{1}{117}\begin{Vmatrix} -17 & 7 & 18 & 3 \\ 16 & -41 & 45 & -51 \\ 24 & -3 & 9 & -18 \\ -43 & 59 & -99 & 159 \end{Vmatrix};$$

Задача 1.3.2 Намерете обратната матрица A^{-1} на матрицата A, ако:

$$\text{а) } A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{Vmatrix}; \text{ б) } A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Решение. а) Ще използваме метода на Гаус-Жордан. Написваме до A единичната матрица E от същия ред:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right\|.$$

Започвайки от първия ред, умножаваме всеки ред с -1 и го прибавяме към следващия. Получаваме:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{array}\right\|.$$

и следователно

$$A^{-1} = \left\|\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{array}\right\|.$$

Отговор. б)

$$A^{-1} = \frac{1}{n}\left\|\begin{array}{ccccccc} 1 & 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2-n & 3-n & \dots & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3-n & \dots & -2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \end{array}\right\|.$$

Задача 1.3.3 Намерете неизвестната матрица X от матричните уравнения:

$$\text{а)} \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{Vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix};$$

$$\text{в)}\ X \begin{Vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix};$$

$$\text{г)}\ X \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix}; \ \text{д)} \begin{Vmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix};$$

$$\text{е)}\ X \begin{Vmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{Vmatrix};$$

$$\text{ж)} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix};$$

$$\text{з)}\ X \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{Vmatrix};$$

$$\text{и)} \begin{Vmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -5 \\ -4 & 2 & -4 \end{Vmatrix} X \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix};$$

$$\text{к)} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{Vmatrix} X \begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix};$$

л) $\left\| \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| X \left\| \begin{matrix} -3 & 10 \\ 1 & -3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\|$;

м) $A.X.B = C$, където

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$B = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$C = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{matrix} \right\|.$$

Решение. д) Означаваме

$$A = \left\| \begin{matrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{matrix} \right\|, \quad C = \left\| \begin{matrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \right\|$$

и даденото уравнение приема вида

$$AX = C. \tag{1.52}$$

Умножаваме отляво двете страни на (1.52) с A^{-1} и получаваме

$$X = A^{-1}C. \tag{1.53}$$

Намираме

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{Vmatrix}$$

и като заместим в (1.53), получаваме

$$X = \begin{Vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -8 \\ -1 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

к) Ако означим

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix},$$

получаваме уравнението

$$AXB = C. \tag{1.54}$$

От (1.54), като умножим отляво и отдясно съответно с A^{-1} и B^{-1}, намираме

$$X = A^{-1}CB^{-1}. \tag{1.55}$$

Пресмятаме

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{Vmatrix}$$

и заместваме в (1.55). Получаваме

$$X = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5 & -4 \\ -7 & -5 \\ -8 & -6 \end{Vmatrix}.$$

Отговор. а) $X = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$; б) $X = \begin{Vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$;

в) $X = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$; г) $X = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \end{Vmatrix}$;

е) $X = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{Vmatrix}$; ж) $X = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$;

з) $X = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$;

и) $X = \dfrac{1}{10}\begin{Vmatrix} 28 & 10 & -3 \\ 65 & -18 & 9 \\ 8 & -4 & 0 \end{Vmatrix}$; л) $X = \begin{Vmatrix} -2 & -8 \\ 3 & 11 \end{Vmatrix}$;

м) $X = E + \dfrac{1-n}{n^2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$.

Задача 1.3.4 Докажете, че една квадратна матрица A е ортогонална точно тогава, когато

$$A^t = A^{-1}. \tag{1.56}$$

Решение. Необходимост. Нека матрицата A е ортогонална. Тогава е изпълнено равенството

$$AA^t = E. \tag{1.57}$$

Като умножим двете страни на (1.57) отляво с A^{-1} и отчетем, че $A^{-1}A = E$, $EA^t = A^t$ и $A^{-1}E = A^{-1}$, получаваме точно (1.56).

Достатъчност. Нека е в сила равенството (1.56). Получаваме $AA^t = AA^{-1} = E$ и следователно матрицата A е ортогонална.

Задача 1.3.5 Докажете, че обратната матрица A^{-1} на ортогоналната матрица A е също ортогонална.

Решение. Понеже A е ортогонална, в сила е равенството (1.56). От

$$A^{-1}(A^{-1})^t = A^t(A^t)^t = A^tA = E$$

следва, че обратната матрица A^{-1} на A е ортогонална.

Глава 2

Вектори и координати

2.1 Насочена отсечка и ориентиран ъгъл

2.1.1 Насочена отсечка

Отсечка, единият край на която е приет за първи, а другият - за втори, се нарича *насочена отсечка* или *свързан вектор*. Първият край се нарича още *начало на насочената отсечка*, а вторият - *край*. Ако началото и краят на една насочена отсечка са различни точки, тя се нарича *ненулева*, а ако съвпадат - *нулева*. Насочената отсечка с начало A и край B ще означаваме с $\overrightarrow{AB}$.

Ако $\overrightarrow{AB}$ е ненулева насочена отсечка, то еднозначно са определени следните елементи:

а) *начало* - A;

б) *край* - B;

в) *посока* - посоката на лъча $AB^{\rightarrow}$;

г) *директриса* - правата AB;

д) *дължина* - дължината $|AB|$ на отсечката AB, измерена с дадена единица-отсечка.

Ако насочената отсечка е нулева, тя няма посока и директриса, а дължината ѝ е равна на нула.

Две ненулеви насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат *еднопосочни* и това ще отбелязваме с $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, ако лъчите $AB^{\rightarrow}$ и $CD^{\rightarrow}$ са еднопосочни; в противен случай се наричат *противопосочни* и ще използваме записа $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

Насочена отсечка, която при избрана единица-отсечка има дължина 1, се нарича *единична*.

2.1.2 Ос и алгебрична мярка на насочена отсечка върху ос

Права, едната от двете посоки върху която е наречена *положителна*, се нарича *ос* или *ориентирана права*; другата посока се нарича *отрицателна*.

Нека g^+ е ос и $\overrightarrow{AB}$ е ненулева насочена отсечка върху нея. *Алгебрична мярка* $\overline{AB}$ на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ върху оста g^+ се нарича реалното число $\overline{AB} = \varepsilon|AB|$, където $\varepsilon = 1$, ако посоката на $\overrightarrow{AB}$ съвпада с положителната посока на g^+, и $\varepsilon = -1$ - ако съвпада с отрицателната посока.

Всяка нулева насочена отсечка върху g^+ има алгебрична мярка, равна на нула.

1) $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$ за произволни точки A и B от g^+.

2) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ за произволни точки A, B и C от g^+.

3) $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1} = 0$ за произволни $n \geq 3$ точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ от g^+.

Равенството 2) се нарича *релация на Шал за три точки*, а 3) - *релация на Шал за n точки*.

2.1.3 Ориентиран ъгъл

Ако $p^{\rightarrow}$ и $q^{\rightarrow}$ са лъчи с общо начало O, нележащи на една права, то казваме, че те определят *елементарно-геометричния ъгъл* $\angle pq$ или $\angle qp$ с *рамене* $p^{\rightarrow}$, $q^{\rightarrow}$ и *връх* O. Накратко елементарно-геометричния ъгъл ще наричаме $e-$ъгъл. *Вътрешността* на $\angle pq$ се състои от всички точки от равнината на ъгъла, които относно правата, съдържаща $p^{\rightarrow}$, са в полуравнината, съдържаща $q^{\rightarrow}$, а относно правата, съдържаща $q^{\rightarrow}$ - в полуравнината, съдържаща $p^{\rightarrow}$.

За мярка на $\angle pq$ в радиани ще използваме означението $(p,q)_e$. Очевидно $(p,q)_e \in (0,\pi)$. Ако допуснем лъчите $p^{\rightarrow}$ и $q^{\rightarrow}$ да съвпадат или да са противоположни, то в първия случай имаме $(p,q)_e = 0$, а във втория - $(p,q)_e = \pi$.

Нека α е равнина, а O - произволна нейна точка. Всички лъчи в α с начало O образуват *сноп лъчи с център* O *и носител* α. Ако едната от двете възможни посоки на въртене в снопа е избрана за *положителна*, той се нарича *ориентиран*; другата посока се нарича *отрицателна*. Равнина, в която всичките снопове лъчи са еднакво ориентирани, се нарича *ориентирана*.

Нека S е ориентиран сноп лъчи в равнината α. Всяка наредена двойка лъчи $(p^{\rightarrow}, q^{\rightarrow})$ на S, нележащи на една права, се нарича *ориентиран ъгъл* и ще го означаваме с $\angle\overrightarrow{pq}$. Всички стойности на мярката (p,q) на $\angle\overrightarrow{pq}$ се дават с формулата

$$(p,q) = \varepsilon(p,q)_e + k.2\pi,$$

където k е *произволно цяло число*, а $\varepsilon = 1$, ако посоката на въртене на $p^{\rightarrow}$ до $q^{\rightarrow}$, при която се описва вътрешността на $\angle pq$, съвпада с положителната посока на S и $\varepsilon = -1$ - когато тя съвпада с отрицателната посока на S.

Ако допуснем лъчите $p^{\rightarrow}$ и $q^{\rightarrow}$ да съвпадат или да са противоположни, то в този случай за ε се избира кое да е от числата 1 или -1.

Най-малката неотрицателна стойност на (p,q) се нарича *главна стойност на* (p,q) и се означава с $(p,q)_0$. Очевидно $0 \leq (p,q)_0 < 2\pi$.

4) $(p,q) + (q,p) = k.2\pi$ за произволни лъчи $p^{\rightarrow}$ и $q^{\rightarrow}$ от ориентиран сноп лъчи S.

5) $(p,q)+(q,r)+(r,p)=k.2\pi$ за произволни лъчи $p^{\rightarrow}$, $q^{\rightarrow}$ и $r^{\rightarrow}$ от ориентиран сноп лъчи S.

6) $(p_1,p_2)+(p_2,p_3)+\cdots+(p_{n-1},p_n)+(p_n,p_1)=k.2\pi$ за произволни лъчи $p_1^{\rightarrow}, p_2^{\rightarrow}, \ldots, p_n^{\rightarrow} (n \geq 3)$ от ориентиран сноп лъчи S.

Равенството 5) се нарича *релация на Шал за ъглите.*

Задача 2.1.1 Ако M е средата на отсечката AB, а P - произволна точка върху оста AB^+, да се докаже, че

$$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PM}^2 - \overline{MB}^2.$$

Решение. Понеже M е средата на отсечката AB, то $\overline{MA} = -\overline{MB}$. Прилагаме релацията на Шал за тройките точки A, M, P и B, M, P. Получаваме съответно равенствата

$$\overline{PA} = \overline{PM} + \overline{MA} \quad \text{и} \quad \overline{PB} = \overline{PM} + \overline{MB}.$$

Следователно

$$\overline{PA}.\overline{PB} = (\overline{PM} + \overline{MA})(\overline{PM} + \overline{MB}) =$$

$$= (\overline{PM} - \overline{MB})(\overline{PM} + \overline{MB}) = \overline{PM}^2 - \overline{MB}^2.$$

Задача 2.1.2 Да се докаже, че за всеки три различни точки A, B и C от една ос е в сила равенството

$$\frac{1}{\overline{AB}.\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{BC}.\overline{BA}} + \frac{1}{\overline{CA}.\overline{CB}} = 0.$$

Упътване. Умножете лявата страна на горното равенство с $\overline{AB}.\overline{AC}.\overline{BC}$ и използвайте релацията на Шал за три точки.

Задача 2.1.3 Да се докаже, че за четири точки A, B, C и D от една ос е в сила *релацията на Ойлер*

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0.$$

Решение. Като използваме 1) и 2), получаваме

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} = (\overline{AD} + \overline{DB}).\overline{CD} + (\overline{AD} + \overline{DC}).\overline{DB} =$$

$$= \overline{AD}(\overline{CD} + \overline{DB}) + \overline{DB}(\overline{CD} + \overline{DC}) = \overline{AD}.\overline{CB}$$

и оттук релацията на Ойлер следва непосредствено.

Задача 2.1.4 Да се докаже, че ако за точките P и Q от ос AB^+ е изпълнено равенството

$$\overline{PA}.\overline{QA} = \overline{PB}.\overline{QB}, \tag{2.1}$$

то те са симетрично разположени относно средата M на отсечката AB.

Решение. I начин. Нека M' е средата на отсечката PQ. Тогава съгласно задача 2.1.1 имаме равенствата

$$\overline{AP}.\overline{AQ} = \overline{AM'}^2 - \overline{M'Q}^2, \quad \overline{BP}.\overline{BQ} = \overline{BM'}^2 - \overline{M'Q}^2,$$

от които, предвид (2.1), намираме, че $\overline{AM'}^2 = \overline{BM'}^2$. Оттук следва, че M' съвпада със средата M на отсечката AB.

II начин. Записваме (2.1) във вида

$$(\overline{PB} + \overline{BA}).\overline{QA} = \overline{PB}.(\overline{QA} + \overline{AB})$$

и правим привидение. Получаваме $\overline{BA}.\overline{QA} = \overline{PB}.\overline{AB}$ и понеже $\overline{AB} \neq 0$, то следва, че $\overline{PB} = \overline{AQ}$. Тогава от $\overline{MB} - \overline{MP} = \overline{MQ} - \overline{MA}$ и $\overline{MB} = -\overline{MA}$ намираме $-\overline{MP} = \overline{MQ}$ и следователно точката M е средата на отсечката PQ.

Задача 2.1.5 Да се докаже, че за четири точки A, B, C и D от една ос е в сила *релацията на Стюарт*

$$\overline{AB}^2.\overline{CD} + \overline{AC}^2.\overline{DB} + \overline{AD}^2.\overline{BC} + \overline{CD}.\overline{DB}.\overline{BC} = 0. \tag{2.2}$$

Упътване. Изразете алгебричните мерки в лявата част на (2.2) чрез $\overline{DA}, \overline{DB}$ и $\overline{DC}$.

Задача 2.1.6 Нека A, B и C са различни точки върху ос g^+. Да се докаже, че ако M е произволна точка от g^+, то

$$\frac{\overline{AM}^2}{\overline{AB}.\overline{AC}} + \frac{\overline{BM}^2}{\overline{BC}.\overline{BA}} + \frac{\overline{CM}^2}{\overline{CA}.\overline{CB}} = 1.$$

Упътване. Запишете релацията на Стюарт за точките M, A, B и C във вида

$$\overline{MA}^2.\overline{BC} + \overline{MB}^2.\overline{CA} + \overline{MC}^2.\overline{AB} = -\overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} \tag{2.3}$$

и разделете двете страни на (2.3) с $-\overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$.

Задача 2.1.7 Нека A, B и C са произволни точки от ос g^+, а D е точка, нележаща на g^+. Да се докаже, че

$$\overline{|DA|^2}.\overline{BC} + \overline{|DB|^2}.\overline{CA} + \overline{|DC|^2}.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0. \tag{2.4}$$

Упътване. Ако D' е ортогоналната проекция на точката D върху оста g^+, изразете $|DA|^2, |DB|^2$ и $|DC|^2$ чрез $\overline{DD'}^2, \overline{D'A}^2, \overline{D'B}^2$ и $\overline{D'C}^2$ и заместете в лявата част на (2.4).

Задача 2.1.8 Да се докаже, че за всеки четири лъча $p^{\to}$, $q^{\to}$, $r^{\to}$ и $s^{\to}$ от ориентиран сноп лъчи е в сила равенството

$$\sin(q,r)\sin(p,s) + \sin(r,p)\sin(q,s) + \sin(p,q)\sin(r,s) = 0. \tag{2.5}$$

Решение. Прилагайки 4) и 5), намираме

$$(q,r) = (p,r) - (p,q) + k_1.2\pi,$$
$$(r,p) = -(p,r) + k_2.2\pi,$$
$$(q,s) = (p,s) - (p,q) + k_3.2\pi,$$
$$(r,s) = (p,s) - (p,r) + k_4.2\pi,$$

където константите k_1, k_2, k_3 и k_4, независимо една от друга, приемат стойностите $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогава

$$\sin(q,r) = \sin((p,r) - (p,q)) = \sin(p,r)\cos(p,q) - \cos(p,r)\sin(p,q),$$

$$\sin(r,p) = -\sin(p,r),$$

$$\sin(q,s) = \sin((p,s)-(p,q)) = \sin(p,s)\cos(p,q)-\cos(p,s)\sin(p,q),$$

$$\sin(r,s) = \sin((p,s)-(p,r)) = \sin(p,s)\cos(p,r)-\cos(p,s)\sin(p,r)$$

и като заместим тези изрази в лявата част на (2.5), се убеждаваме, че тя се анулира.

2.2 Афинни операции с вектори

2.2.1 Равенство на насочени отсечки

Ще казваме, че две насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са *равни* и ще записваме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, когато или и двете са нулеви, или и двете са ненулеви и имат равни дължини и еднакви посоки, т.е.

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \ \text{ и } \ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}.$$

1) Две ненулеви насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, съответно върху еднопосочните оси g_1^+ и g_2^+, са равни тогава и само тогава, когато са равни алгебричните им мерки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, измерени с една и съща единица-отсечка.

2) Всяка насочена отсечка е равна на себе си.

3) Ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

4) Ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

5) За всяка насочена отсечка $\overrightarrow{AB}$ и произволна точка C съществува единствена точка D такава, че $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

6) Ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

2.2.2 Свободен вектор

Съвкупността $S_{\overrightarrow{AB}}$ от всички насочени отсечки, които са равни на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, се нарича *свободен вектор* *с представител* $\overrightarrow{AB}$. От 5) следва, че във всяка точка, всеки свободен вектор има точно един представител.

Свободните вектори ще означаваме с малки латински букви със стрелки над тях: $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \ldots$. Равенства от вида $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ или $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ ще означават, че насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ е представител в точката A на свободния вектор $\overrightarrow{a}$, или, че свободният вектор $\overrightarrow{a}$ е породен от насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, т.е. те имат смисъла на означението $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{a}$.

Посока и дължина на свободен вектор се нарича посоката и дължината на кой да е негов представител. Всеки свободен вектор е напълно определен с посоката и дължината си.

Ако $\overrightarrow{a}$ е свободен вектор с представител $\overrightarrow{AB}$, свободният вектор с представител $\overrightarrow{BA}$ се нарича *противоположен* на $\overrightarrow{a}$ и се означава с $-\overrightarrow{a}$. Свободният вектор, с представител коя да е нулева насочена отсечка, се нарича *нулев свободен вектор*. Ще го означаваме с $\overrightarrow{o}$. Той няма посока и има дължина равна на нула.

Ще казваме, че един ненулев свободен вектор е *колинеарен на дадена права*, когато негов представител е успореден или лежи на правата. Два или повече ненулеви свободни вектора, колинеарни на една и съща права, се наричат *колинеарни помежду си*. По дефиниция ще смятаме, че нулевият свободен вектор $\overrightarrow{o}$ е колинеарен на всяка права и на всеки ненулев свободен вектор.

Ще казваме, че един ненулев свободен вектор е *компланарен на дадена равнина*, когато негов представител е успореден или лежи в равнината. Три или повече ненулеви вектора, които са компланарни на една и съща равнина, се наричат *компланарни помежду си*.

За да означим, че свободните вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са колинеарни (респ. неколинеарни), ще използваме означението $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$ (респ. $\overrightarrow{a} \nparallel \overrightarrow{b}$), а ако са и еднопосочни (респ. противопосочни)

- записа $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$ (респ. $\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$). Аналогично, ако свободният вектор $\overrightarrow{a}$ е компланарен (респ. некомпланарен) на равнината α, това ще означаваме с $\overrightarrow{a} \parallel \alpha$ (респ. $\overrightarrow{a} \nparallel \alpha$).

Когато един свободен вектор $\overrightarrow{a}$ е колинеарен с ос g^+, алгебричната мярка на кой да е негов представител върху g^+ се нарича *алгебрична мярка на свободния вектор* $\overrightarrow{a}$ и се означава с $\overline{a}$.

Нека $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са ненулеви свободни вектори, O е произволна точка и $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$. Тогава еднозначно са определени лъчите $OA^{\rightarrow}$ и $OB^{\rightarrow}$. Това ни позволява да дефинираме *елементарно-геометричен ъгъл* $\angle\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$ и *ориентиран ъгъл* $\angle\overrightarrow{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}$, съответно като елементарно-геометричния ъгъл $\angle OAOB$ и ориентирания ъгъл $\angle\overrightarrow{OAOB}$. Оттук следва, че $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = (OA, OB)_e$ и $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (OA, OB)$. Тогава, ако $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$ или $\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$, то имаме съответно $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = 0$ или $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \pi$.

По-нататък (за краткост) свободните вектори ще наричаме само *вектори*.

2.2.3 Събиране на вектори

Нека $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са вектори, O е произволна точка и $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$. Векторът $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{OB}$ се нарича *сбор* или *сума на векторите* $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ (*в посочения ред*) и това ще означаваме с

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{s} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}.$$

Дадената дефиниция не зависи от избраната точка O. Това директно следва от 5) и 6).

7) Ако векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са колинеарни, то тяхната сума $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ е вектор, колинеарен с тях и

$$\overline{s} = \overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b},$$

като алгебричните мерки са взети върху ос g^+, с която са колинеарни дадените вектори.

8) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{o} = \overrightarrow{a}$ за всеки вектор $\overrightarrow{a}$.

9) $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{o}$ за всеки вектор $\overrightarrow{a}$.

10) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ за всеки три вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$.

11) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ за всеки два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

2.2.4 Изваждане на вектори

Разлика $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ *на векторите* $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a}$ се нарича сумата $\overrightarrow{b} + (-\overrightarrow{a})$ на векторите $\overrightarrow{b}$ и $-\overrightarrow{a}$. От 11) следва, че

$$\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + (-\overrightarrow{a}) = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}.$$

2.2.5 Умножение на вектор с реално число

Произведение на вектора $\overrightarrow{a}$ *с реалното число* λ се нарича векторът $\overrightarrow{b}$, определен по следния начин:

а) ако $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{o}$ или $\lambda = 0$, то $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{o}$;

б1) ако $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{o}$ и $\lambda > 0$, то $|\overrightarrow{b}| = |\lambda||\overrightarrow{a}|$ и $\overrightarrow{b} \uparrow\uparrow \overrightarrow{a}$;

б2) ако $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{o}$ и $\lambda < 0$, то $|\overrightarrow{b}| = |\lambda||\overrightarrow{a}|$ и $\overrightarrow{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{a}$.

Ще използваме означението $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$ или $\overrightarrow{b} = \lambda.\overrightarrow{a}$. От даденото определение следва, че $\overrightarrow{b} \parallel \overrightarrow{a}$.

12) $1.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ за всеки вектор $\overrightarrow{a}$.

13) $\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$ за произволни числа λ, μ и вектор $\overrightarrow{a}$.

14) $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$ за произволни числа λ, μ и вектор $\overrightarrow{a}$.

15) $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$ за произволно число λ и вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Операциите събиране на вектори и умножение на вектор с число се наричат *афинни (линейни) операции с вектори.*

2.2.6 Условия за колинеарност и компланарност на вектори

16) Ако $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ са вектори, като $\overrightarrow{a_1} \neq \overrightarrow{o}$, то те са колинеарни тогава и само тогава, когато съществува число λ, такова, че

$$\overrightarrow{a_2} = \lambda \overrightarrow{a_1}. \tag{2.6}$$

Числото λ в (2.6) е еднозначно определено.

17) Ако $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$ са вектори, като $\overrightarrow{a_1} \nparallel \overrightarrow{a_2}$, то трите вектора са компланарни точно тогава, когато съществуват числа λ_1 и λ_2, такива, че

$$\overrightarrow{a_3} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2}. \tag{2.7}$$

Числата λ_1 и λ_2 в (2.7) е еднозначно определени.

18) Ако $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$ са некомпланарни вектори, то всеки вектор $\overrightarrow{a_4}$ в пространството се представя по единствен начин във вида

$$\overrightarrow{a_4} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \lambda_3 \overrightarrow{a_3}.$$

Вектор $\overrightarrow{a}$, който може да се представи във вида

$$\overrightarrow{a} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a_n},$$

където $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ са реални числа, се нарича *линейна комбинация на векторите* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$.

Задача 2.2.1 Да се докаже, че за средата M на произволна отсечка AB е в сила равенството

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

където O е произволна точка.

Решение. Имаме

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} =$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Задача 2.2.2 Ако A, B, C и D са произволни точки в пространството, а M и N са средите съответно на отсечките AC и BD, да се докаже, че

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}). \tag{2.8}$$

Упътване. Ако O е произволна точка, то $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$. По-нататък използвайте задача 2.2.1.

Задача 2.2.3 Да се докаже, че диагоналите на всеки успоредник са разполовяват от пресечната си точка.

Решение. I начин. Нека $ABCD$ е успоредник, в който M е средата на диагонала AC, а N - средата на диагонала BD. Тогава от (2.8) и $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ получаваме $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{o}$ и следователно точките M и N съвпадат.

II начин. При въведените по-горе означения, като използваме задача 2.2.1, намираме

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}), \\ \overrightarrow{DM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Но $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{DC}$ и замествайки в първото равенство на (2.9), отчитайки второто, получаваме $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{DM}$. Оттук заключаваме, че точките B, M и D са колинеарни и понеже $|BM| = |DM|$, то M е средата и на диагонала BD.

Задача 2.2.4 Ако P и Q са средите съответно на отсечките AD и BC, докажете, че средите на отсечките AB, PQ и CD лежат на една права.

Решение. Нека L, M и N са средите съответно на отсечките AB, PQ и CD. Тогава $\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{LQ}) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC})] = \frac{1}{4}(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD})$ и като отчетем, че $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{o}$, $\overrightarrow{LN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD})$, получаваме $\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LN}$. Оттук, съгласно 16), следва $\overrightarrow{LM} \parallel \overrightarrow{LN}$ и следователно точките L, M и N лежат на една права.

Задача 2.2.5 В четириъгълника $ABCD$ и точките M и N са средите съответно на страните AB и CD. Да се докаже, че средите на диагоналите на четириъгълниците $AMND$ и $MBCN$ са върхове на успоредник.

Упътване. За четириъгълниците $AMND$ и $MBCN$ приложете задача 2.2.2.

Задача 2.2.6 Нека ABC е произволен триъгълник. Да се докаже, че:

а) съществува триъгълник, чиито страни са равни и успоредни на трите медиани на $\triangle ABC$;

б) трите медиани на $\triangle ABC$ се пресичат в една точка, която дели всяка една от тях в отношение $2:1$, считано от съответния връх на триъгълника.

Решение. а) Ако означим $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{b}$, а средите на страните BC, CA и AB - съответно с P, Q и R, то намираме

$$\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}).$$

Избираме произволна точка O и построяваме векторите $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{BQ}$ и $\overrightarrow{Q_1R_1} = \overrightarrow{CR}$. От

$$\overrightarrow{OR_1} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{Q_1R_1} = -\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{o}$$

следва, че точките O и R_1 съвпадат. Тъй като $\overrightarrow{AP} \not\parallel \overrightarrow{BQ}$, то страните OP_1, P_1Q_1 и Q_1R_1 на $\triangle OP_1Q_1$ са равни и успоредни съответно на медианите AP, BQ и CR на $\triangle ABC$, т.е. в сила е а).

б) Да означим с M пресечната точка на правите AP и BQ. От $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BM} \parallel \overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{AP} \neq \overrightarrow{o}$, $\overrightarrow{BQ} \neq \overrightarrow{o}$ и 16) следва, че $\overrightarrow{AM} = \lambda_1\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BM} = \lambda_2\overrightarrow{BQ}$. Тогава от $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{b}$ получаваме съответно $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{a} = \lambda_1(-\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b})$ и $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{b} = \lambda_2(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$ и следователно $\overrightarrow{a} + \lambda_1(-\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{b} + \lambda_2(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$. Оттук намираме равенството

$$(2.10) \qquad (1 - \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2)\overrightarrow{a} + (-1 + \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{b} = \overrightarrow{o}.$$

Ако допуснем, че поне един от коефициентите пред $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ е различен от нула, например $1 - \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 \neq 0$, то можем да запишем (2.10) във вида

$$\overrightarrow{a} = \frac{-1 + \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2}{1 - \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2}\overrightarrow{b}.$$

Но $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{o}$ и от 16) заключаваме, че $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$, което е невъзможно. Следователно имаме:

$$(2.11) \qquad \left|\begin{array}{r} 1 - \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 = 0 \\ -1 + \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{array}\right.$$

От (2.11) определяме $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{2}{3}$ и намираме

$$(2.12) \qquad \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{a} + \frac{2}{3}(-\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{CR}.$$

Тогава $\overrightarrow{CM} \parallel \overrightarrow{CR}$ и точките C, M и R лежат на една права, т.е. третата медиана CR минава през пресечната точка M на другите две.

От $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BQ}$ и $\overrightarrow{CM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CR}$ следва, че точката M дели всяка от медианите в отношение $2:1$, считано от съответния връх.

Задача 2.2.7 Ако M_1 и M_2 са медицентровете съответно на $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$, да се докаже, че

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}).$$

Упътване. От формула (2.12), приложена за $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$, следва съответно $\overrightarrow{OM_1} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1})$ и $\overrightarrow{OM_2} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2})$, където O е произволна точка.

Задача 2.2.8 Нека M е медицентърът на $\triangle ABC$. Да са представи векторът $\overrightarrow{AB}$ като линейна комбинация на векторите $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CM}$.

Решение. Нека

$$\overrightarrow{AB} = \lambda_1\overrightarrow{AM} + \lambda_2\overrightarrow{CM}, \tag{2.13}$$

където λ_1 и λ_2 са реални числа, които ще определим. Като използваме означенията от задача 2.2.6, намираме $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{a} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{CM} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$. Заместваме в (2.13) и правим приведение. Получаваме

$$(-\frac{2}{3}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 + 1)\overrightarrow{a} + (\frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2 - 1)\overrightarrow{b} = \overrightarrow{o}$$

и понеже $\overrightarrow{a} \not\parallel \overrightarrow{b}$, то

$$(2.14)\qquad \left|\begin{array}{l} -\dfrac{2}{3}\lambda_1 + \dfrac{1}{3}\lambda_2 + 1 = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{3}\lambda_1 + \dfrac{2}{3}\lambda_2 - 1 = 0. \end{array}\right.$$

От (2.14) намираме $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ и следователно

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}.$$

Задача 2.2.9 В правилния шестоъгълник $ABCDEF$ означаваме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{e}$. Да се изразят векторите $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{EF}$ като линейна комбинация на $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{e}$.

Отговор. $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{b} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{e}$,
$\overrightarrow{AF} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{b} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{EF} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{b} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{e}$.

Задача 2.2.10 Точките A_1, B_1 и C_1 са средите съответно на ръбовете BC, CA и AB на тетраъдъра $OABC$. Да се изразят векторите $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ като линейна комбинация на векторите $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OC_1}$.

Отговор. $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$,
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OC_1}$.

Задача 2.2.11 Дадени са векторите $\overrightarrow{p} = -\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{r} = 2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{s} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, където $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са некомпланарни вектори. Да се представи векторът $\overrightarrow{s}$ като линейна комбинация на векторите $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ и $\overrightarrow{r}$.

Отговор. $\overrightarrow{s} = \dfrac{5}{9}\overrightarrow{p} - \dfrac{1}{9}\overrightarrow{q} - \dfrac{1}{9}\overrightarrow{r}$.

Задача 2.2.12 Векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са некомпланарни. Определете числата λ и μ така, че векторите $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ да са колинеарни, ако:

а) $\overrightarrow{p} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b} + \mu\overrightarrow{c}$;

б) $\overrightarrow{p} = -2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + \lambda\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = \mu\overrightarrow{a} - 6\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$.

Решение. а) Очевидно $\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{o}$ и $\overrightarrow{q} \neq \overrightarrow{o}$, защото ако допуснем, че $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{o}$ или $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{o}$ от всяко от равенствата $\overrightarrow{c} = -\lambda\overrightarrow{a} - \mu\overrightarrow{b}$ или $\overrightarrow{a} = -\lambda\overrightarrow{b} - \mu\overrightarrow{c}$ съгласно 17) би следвало, че векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са компланарни, което противоречи на условието на задачата. Според 16) имаме $\overrightarrow{p} \parallel \overrightarrow{q}$ точно тогава, когато съществува подходящо число ρ такова, че $\overrightarrow{p} = \rho\overrightarrow{q}$. Заместваме $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ с равните им и като направим приведение, получаваме

$$(\lambda - \rho)\overrightarrow{a} + (\mu - \rho\lambda)\overrightarrow{b} + (1 - \rho\mu)\overrightarrow{c} = \overrightarrow{o}. \tag{2.15}$$

Понеже векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са некомпланарни, то от (2.15) намираме

$$\lambda - \rho = 0, \quad \mu - \rho\lambda = 0, \quad 1 - \rho\mu = 0$$

и следователно $\lambda = 1$, $\mu = 1$.

Отговор. б) $\lambda = -1$, $\mu = 4$.

Задача 2.2.13 Векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са некомпланарни. Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ и $\overrightarrow{r}$ са компланарни, ако:

а) $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} - 7\overrightarrow{c}$;

б) $\overrightarrow{p} = 3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = 7\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c}$,
$\overrightarrow{r} = 10\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} - 4\overrightarrow{c}$;

в) $\overrightarrow{p} = 10\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = -\overrightarrow{a} + 7\overrightarrow{c}$,
$\overrightarrow{r} = 17\overrightarrow{a} - 10\overrightarrow{b} + 23\overrightarrow{c}$.

Упътване. Покажете, че два от векторите, например $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ са неколинеарни и след това намерете числа λ и μ такива, че $\overrightarrow{r} = \lambda\overrightarrow{p} + \mu\overrightarrow{q}$. Тогава съгласно 17) векторите $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ и $\overrightarrow{r}$ са компланарни.

Отговор. а) $\overrightarrow{r} = -\overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q}$; б) $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$; в) $\overrightarrow{r} = 2\overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q}$.

Задача 2.2.14 Ако векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са некомпланарни, докажете, че векторите $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = -\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{r} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$ са също некомпланарни.

Упътване. Допуснете противното и приложете 17).

Задача 2.2.15 Нека O, A_1, A_2 и P са произволни точки, като $A_1 \neq A_2$. Да се докаже, че необходимото и достатъчно условие точката P да лежи на правата A_1A_2 е да съществуват числа α_1 и α_2 такива, че да са изпълнени едновременно равенствата

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2}, \tag{2.16}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1. \tag{2.17}$$

Да се докаже, че числата α_1 и α_2 са единствени и не зависят от точката O.

Решение. Необходимост. Да предположим, че $P \in A_1A_2$. Ще покажем, че са в сила (2.16) и (2.17). Действително, от

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{OA_1} + k\overrightarrow{A_1A_2} = (1-k)\overrightarrow{OA_1} + k\overrightarrow{OA_2},$$

като положим $\alpha_1 = 1-k$, $\alpha_2 = k$, получаваме (2.16). Освен това имаме $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - k + k = 1$ и следователно удовлетворено е и (2.17).

Достатъчност. Обратно, нека са изпълнени равенствата (2.16) и (2.17). Ще покажем, че $P \in A_1A_2$.

От (2.17) изразяваме $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ и като заместим в (2.16), намираме $\overrightarrow{OP} = \alpha_1\overrightarrow{OA_1} + (1-\alpha_1)\overrightarrow{OA_2}$, откъдето следва, че

$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_2} = \alpha_1(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2})$. Последното равенство можем да запишем и във вида $\overrightarrow{A_2P} = \alpha_1\overrightarrow{A_2A_1}$ и съгласно 16) имаме $\overrightarrow{A_2P} \parallel \overrightarrow{A_2A_1}$, т.е. P лежи върху правата A_1A_2.

Единственост. От (2.16) и (2.17), по начина показан по-горе, намираме $\overrightarrow{A_1P} = \alpha_2\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2P} = \alpha_1\overrightarrow{A_1A_2}$ и от 16) следва, че числата α_1 и α_2 са еднозначно определени. Освен това, от получените изрази заключаваме, че те не зависят от точката O.

Задача 2.2.16 В $\triangle ABC$ имаме $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ и правата MN пресича BC в точката K.

а) Да се представи векторът $\overrightarrow{AK}$ като линейна комбинация на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

б) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MK}$ са колинеарни.

Упътване. а) Като използвате, че $K \in BC, K \in MN$ и приложите задача 2.2.15, ще получите $\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

б) Покажете, че $\overrightarrow{p} \parallel \overrightarrow{q}$ и $\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} + \overrightarrow{r} = \overrightarrow{o}$.

Задача 2.2.17 В $\triangle ABC$ права g пресича правите BC, CA и AB съответно в точките A_1, B_1 и C_1. Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B_1C_1}$ и $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C_1A_1}$ са колинеарни.

Упътване. Използвайте задача 2.2.15 и задача 2.2.16.

Задача 2.2.18 Вътрешните ъглополовящи на ъглите при върховете A, B и C на $\triangle ABC$ пресичат срещуположните страни съответно в точките A_0, B_0 и C_0. Да се изразят векторите $\overrightarrow{AA_0}$, $\overrightarrow{BB_0}$ и $\overrightarrow{CC_0}$ като линейни комбинации на векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$. Да се докаже, че:

а) всяка ъглополовяща дели срещуположната страна в отношение, равно на отношението на прилежащите страни;

б) трите ъглополовящи се пресичат в една точка.

Решение. Тъй като векторите $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}$ и $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}$ са единични, векторът $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}$ е колинеарен с вектора $\overrightarrow{AA_0}$ и понеже е ненулев (Защо?), то съгласно 16) можем да запишем

$$\overrightarrow{AA_0}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}\right), \tag{2.18}$$

където λ е реално число, което сега ще определим. Точката A_0 лежи на правата BC и съгласно задача 2.2.15 имаме

$$\frac{\lambda}{|AB|}+\frac{\lambda}{|AC|}=1,$$

откъдето

$$\lambda=\frac{|AB||AC|}{|AB|+|AC|}. \tag{2.19}$$

Заместваме (2.19) в (2.18) и получаваме

$$\overrightarrow{AA_0}=\frac{|AC|.\overrightarrow{AB}+|AB|.\overrightarrow{AC}}{|AB|+|AC|}.$$

Аналогично намираме и равенствата

$$\overrightarrow{BB_0}=\frac{|AB|.\overrightarrow{BC}+|BC|.\overrightarrow{BA}}{|AB|+|BC|},\ \overrightarrow{CC_0}=\frac{|BC|.\overrightarrow{CA}+|AC|.\overrightarrow{CB}}{|AC|+|BC|}.$$

а) От $\overrightarrow{BA_0}=\overrightarrow{AA_0}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{|AB|}{|AB|+|AC|}\overrightarrow{BC}$ и

$$\overrightarrow{CA_0}=-\frac{|AC|}{|AB|+|BC|}\overrightarrow{BC}$$

следва равенството $\overrightarrow{BA_0} = -\dfrac{|AB|}{|AC|}\overrightarrow{CA_0}$, което показва, че A_0 е вътрешна точка за страната AB и

$$\frac{|BA_0|}{|CA_0|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

По същия начин намираме и равенствата

$$\frac{|CB_0|}{|AB_0|} = \frac{|BC|}{|BA|}, \quad \frac{|AC_0|}{|BC_0|} = \frac{|CA|}{|CB|}.$$

б) Постъпваме както в задача 2.2.6.

Задача 2.2.19 Нека O, A_1, A_2, A_3 и P са произволни точки, като A_1, A_2 и A_3 са неколинеарни. Да се докаже, че необходимо и достатъчно условие точката P да лежи в равнината $A_1A_2A_3$ е да съществуват три числа α_1, α_2 и α_3 такива, че да са изпълнени едновременно равенствата:

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \alpha_3\overrightarrow{OA_3},$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

Да се докаже, че числата α_1, α_2 и α_3 са единствени и не зависят от точката O.

Упътване. Вижте решението на задача 2.2.15, като използвате 17).

Задача 2.2.20 Докажете, че четирите отсечки, всяка едно от които съединява връх на тетраедъра с медицентъра на срещуположната стена, се пресичат в една точка, която ги дели в отношение $3:1$, считано от съответния връх.

Забележка. Дефинираните в задача 2.2.20 отсечки се наричат *медиани на тетраедъра.*

2.3 Координати на вектори и точки

2.3.1 Координати на вектори и точки върху права

Нека g е произволна права и $\overrightarrow{e}$ е ненулев вектор, колинеарен с g. От 2.16) следва, че за всеки вектор $\overrightarrow{a} \parallel g$ съществува единствено число λ такова, че

$$\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{e}. \tag{2.20}$$

Векторът $\overrightarrow{e}$ се нарича *координатен вектор* или *база на* g, а числото λ - *координата на вектора* $\overrightarrow{a}$ *относно базата* $\overrightarrow{e}$. Ще записваме $\overrightarrow{a}(\lambda)$. Равенството (2.20) се нарича *разлагане на вектора* $\overrightarrow{a}$ *по базисния вектор* $\overrightarrow{e}$. Очевидно имаме $\overrightarrow{e}(1)$, $\overrightarrow{o}(0)$.

Да фиксираме върху g някаква точка O. Съвкупност от фиксирана точка O и базисен вектор $\overrightarrow{e}$ се нарича *афинна координатна система върху правата* g. Ще я означаваме с $K = O\overrightarrow{e}$. Точката O се нарича *начало на координатната система* или *координатно начало.*

Ако M е точка върху g, векторът $\overrightarrow{OM}$ се нарича *радиус-вектор на точката* M относно O. От $\overrightarrow{OM} \parallel \overrightarrow{e}$ следва, че съществува единсствено число x такова, че

$$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{e}.$$

Числото x се нарича *афинна координата на точката* M *относно* $K = O\overrightarrow{e}$ и това ще записваме с $M(x)$. Очевидно началото O на K има относно K афинна координата нула.

Ако $|\overrightarrow{e}| = 1$, координатната система $K = O\overrightarrow{e}$ се нарича *ортонормирана.* В този случай и координатите на векторите и точките относно K ще наричаме също *ортонормирани.* Понякога координатната система $K = O\overrightarrow{e}$ ще означаваме и с $K = Ox$.

2.3.2 Координати на вектори и точки в равнината

Нека α е произволна равнина, а $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ – наредена двойка неколинеарни вектори, компланарни с α. Ако $\overrightarrow{a}$ е вектор, компланарен с α, съгласно 2.17) съществува точно една двойка реални числа (λ, μ) такива, че

$$\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2}. \tag{2.21}$$

Векторите $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ се наричат *база (базис)* на α, а числата λ, μ - *координати на вектора* $\overrightarrow{a}$ *относно базата* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$. Това ще отбелязваме с $\overrightarrow{a}(\lambda, \mu)$. Равенството (2.21) се нарича *разлагане на вектора* $\overrightarrow{a}$ *по базата* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$. От (2.21) следва, че $\overrightarrow{e_1}(1, 0)$, $\overrightarrow{e_2}(0, 1)$, $\overrightarrow{o}(0, 0)$.

Съвкупност от фиксирана точка O и база $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ на α се нарича *афинна координатна система* в равнината α. Ще я означаваме с $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$. Точката O се нарича *начало на координатната система* (или *координатно начало*), векторът $\overrightarrow{e_1}$ - *първи координатен вектор*, а векторът $\overrightarrow{e_2}$ - *втори координатен вектор*.

Нека M е произволна точка в α. Координатите на радиусвектора ѝ $\overrightarrow{OM}$ относно базата $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ се наричат *афинни координати на точката* M *относно* $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$. Ако

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2},$$

ще записваме $M(x, y)$. Координатата x се нарича *абсциса*, а y - *ордината* на M. Очевидно имаме, че $O(0, 0)$.

Нека $\overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{e_2}$. Тогава правата OE_1, ориентирана с $\overrightarrow{e_1}$, се нарича *абсцисна ос*, а правата OE_2, ориентирана с $\overrightarrow{e_2}$ - *ординатна ос* на K. Обикновено се означават с Ox и Oy. Началото O разделя абсцисната ос Ox на *положителна абсцисна полуос* $+Ox$ и *отрицателна абсцисна полуос* $-Ox$. Аналогично са определени *положителна ординатна полуос* $+Oy$ и *отрицателна ординатна полуос* $-Oy$. Координатните оси разделят равнината α на четири $e-$ъгъла, наречени *координатни ъгли* на K :

I с рамене $+Ox$ и $+Oy$;
II с рамене $-Ox$ и $+Oy$;
III с рамене $-Ox$ и $-Oy$;
IV с рамене $+Ox$ и $-Oy$.

Знаците на координатите на точките от вътрешността на даден координатен ъгъл съвпадат със съответните знаци на координатните полуоси, които ги определят.

Онази посока в α, в която трябва да завъртим около O абсцисната ос до съвпадане с ординатната ос, при което се описва вътрешността на $\angle\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ се нарича *посока на въртене* на $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$. Ако тази посока е обратна на посоката на движение на часовниковата стрелка, координатната система се нарича *дясна*, а в противен случай - *лява.* Тогава и наредената двойка вектори $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (респ. и всяка наредена двойка вектори $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}))$ ще наричаме съответно *дясна* или *лява двойка* вектори.

Две координатни системи K и K' са *еднакво* или *противоположно ориентирани*, ако имат еднакви или противоположни посоки на въртене.

Когато $|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = 1$ и $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})_e = \dfrac{\pi}{2}$, координатната система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ се нарича *ортонормирана*, а съответните координати - *ортонормирани.* В този случай координатните ъгли се наричат *квадранти.* За $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ ще използваме още и означението $K = Oxy$.

2.3.3 Координати на вектори и точки в пространството

Нека $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ – наредена тройка некомпланарни вектори в пространството. Ако $\overrightarrow{a}$ е произволен вектор, съгласно 2.18) съществува точно една тройка реални числа (λ, μ, ν) такива, че

$$\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2} + \nu\overrightarrow{e_3}. \tag{2.22}$$

Векторите $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ се наричат *база (базис) на пространството* , а числата λ, μ, ν - *координати на вектора* $\overrightarrow{a}$ *относно базата* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ и този факт ще означаваме с $\overrightarrow{a}(\lambda, \mu, \nu)$. Равенството (2.22) се нарича *разлагане на вектора* $\overrightarrow{a}$ *по базата* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Очевидно имаме $\overrightarrow{e_1}(1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2}(0,1,0)$, $\overrightarrow{e_3}(0,0,1)$ и $\overrightarrow{o}(0,0,0)$.

Съвкупност от фиксирана точка O и база $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ се нарича *афинна координатна система в пространството*. Ще я означаваме с $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$. Точката O се нарича *начало на координатната система* (или *координатно начало*), векторът $\overrightarrow{e_1}$ - *първи координатен вектор*, векторът $\overrightarrow{e_2}$ - *втори координатен вектор*, а векторът $\overrightarrow{e_3}$ - *трети координатен вектор*.

Нека M е произволна точка в пространството. Координатите на радиус-вектора ѝ $\overrightarrow{OM}$ относно базата $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ се наричат *афинни координати на точката* M *относно* $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$. Ако

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3},$$

ще записваме $M(x, y, z)$. Координатата x се нарича *абсциса*, y - *ордината*, а z - *апликата* на M. Очевидно имаме, че $O(0,0,0)$.

Да означим $\overrightarrow{OE_i} = \overrightarrow{e_i}$, $i = 1, 2, 3$. Правите OE_1, OE_2 и OE_3, ориентирани съответно с координатните вектори $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_3}$ се наричат *координатни оси - абсцисна, ординатна и апликатна ос*. Те се означават с Ox, Oy и Oz. Началото O разделя всяка от тях на *положителна и отрицателна полуос:* $+Ox$ и $-Ox$, $+Oy$ и $-Oy$, $+Oz$ и $-Oz$. Равнините $\alpha_1 = OE_2E_3$, $\alpha_2 = OE_3E_1$ и $\alpha_3 = OE_1E_2$ се наричат *координатни равнини* на K и се означават съответно с Oyz, Ozx и Oxy. Те разделят пространството на осем тристенни ъгъла - *координатни тристенни ъгли* на K:

I с ръбове $+Ox$, $+Oy$, $+Oz$;
II с ръбове $-Ox$, $+Oy$, $+Oz$;
III с ръбове $-Ox$, $-Oy$, $+Oz$;
IV с ръбове $+Ox$, $-Oy$, $+Oz$;
V с ръбове $+Ox$, $+Oy$, $-Oz$;
VI с ръбове $-Ox$, $+Oy$, $-Oz$;
VII с ръбове $-Ox$, $-Oy$, $-Oz$;
VIII с ръбове $+Ox$, $-Oy$, $-Oz$.

Знаците на координатите на точките от вътрешността на даден координатен тристенен ъгъл съвпадат със съответните знаци на координатните полуоси, които го определят. Така например, ако точката $M(x, y, z)$ лежи в V координатен тристенен ъгъл, то $x > 0$, $y > 0$, $z < 0$.

Афинната координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ се нарича *дясна* или *лява*, когато равнинната координатна система $K_0 = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$, наблюдавана от полупространството с контур координатната равнина Oxy, в което сочи третият координатен вектор $\overrightarrow{e_3}$, е съответно дясна или лява. Тогава и наредената тройка вектори $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ (респ. и произволна наредена тройка вектори $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$) се нарича съответно *дясна* или *лява*.

Казваме, че две афинни координатни системи K и K' са *еднакво ориентирани*, ако и двете са десни или и двете са леви. Когато едната е дясна, а другата лява, ще ги наричаме *противно ориентирани*.

Ако $|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = |\overrightarrow{e_3}| = 1$ и $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})_e = (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1})_e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})_e = \dfrac{\pi}{2}$, координатната система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ се нарича *ортонормирана*, а съответните координати *ортонормирани*. В този случай координатните тристенни ъгли се наричат *октанти*.

Освен $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$, като еквивалентно ще използваме и означението $K = Oxyz$.

2.3.4 Координати на линейни комбинации на вектори

Нека $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ е база в пространството и са дадени векторите $\overrightarrow{a}(\lambda, \mu, \nu)$, $\overrightarrow{a_1}(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $\overrightarrow{a_2}(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $\ldots$, $\overrightarrow{a_k}(\lambda_k, \mu_k, \nu_k)$, $k \geq 1$.

1) Координатите на вектор, който е линейна комбинация на вектори, са линейни комбинации със същите коефициенти на съответните координати на векторите, т.е., ако

$$\overrightarrow{a} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{a_k},$$

то

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k, \\ \mu &= \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \cdots + \alpha_k \mu_k, \\ \nu &= \alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 + \cdots + \alpha_k \nu_k, \end{aligned}$$

и обратно.

2.3.5 Аналитични критерии за колинеарност на два вектора и три точки

От 2.16) и 1) непосредствено следва:

2) Два вектора $\overrightarrow{a_1}(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) \neq \overrightarrow{o}$ и $\overrightarrow{a_2}(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ са колинеарни точно тогава, когато съществува число ρ такова, че

$$\lambda_2 = \rho \lambda_1, \quad \mu_2 = \rho \mu_1, \quad \nu_2 = \rho \nu_1.$$

С помощта на 2) леко се установява, че:

3) Два вектора $\overrightarrow{a_1}(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $\overrightarrow{a_2}(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ са колинеарни тогава и само тогава, когато

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1 \\ \nu_2 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

От 3) следва условието за това три точки да лежат на една права, т.е. да бъдат колинеарни:

4) Три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ са колинеарни точно тогава, когато

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

В равнинния случай са в сила следните аналози на 2), 3) и 4):

2′) Два вектора $\overrightarrow{a_1}(\lambda_1, \mu_1) \neq \overrightarrow{o}$ и $\overrightarrow{a_2}(\lambda_2, \mu_2)$ са колинеарни точно тогава, когато съществува число ρ такова, че

$$\lambda_2 = \rho\lambda_1, \quad \mu_2 = \rho\mu_1.$$

3′) Два вектора $\overrightarrow{a_1}(\lambda_1, \mu_1)$ и $\overrightarrow{a_2}(\lambda_2, \mu_2)$ са колинеарни тогава и само тогава, когато

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

4′) Три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ са колинеаррни точно тогава, когато

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.3.6 Аналитични критерии за компланарност на три вектора и на четири точки

Имаме:

5) Три вектора $\overrightarrow{a_1}(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $\overrightarrow{a_2}(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ и $\overrightarrow{a_3}(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ са компланарни точно тогава, когато

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0.$$

От 5) следва условие за това четири точки да лежат в една равнина, т.е. да бъдат компланарни:

6) Четири точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, са компланарни тогава и само тогава, когато

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 2.3.1 Точките M и N са средите съответно на страните BC и CD на успоредника $ABCD$ ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$). Да се намерят координатите на върховете му относно афинната координатна система $K = A\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$, където $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AN}$.

Решение. Понеже A е начало на K, то $A(0, 0)$. От

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NA}) =$$

$$= \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN}\right) = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$$

намираме

$$\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AM} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{e_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{e_2}$$

и следователно $B\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Тъй като

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{AN} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AM} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{e_1} + \frac{4}{3}\overrightarrow{e_2},$$

то имаме $D\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Най-после, от

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{e_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{e_2} - \frac{2}{3}\overrightarrow{e_1} + \frac{4}{3}\overrightarrow{e_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{e_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{e_2}$$

получаваме, че $C\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Задача 2.3.2 Даден е успоредникът $ABCD$ ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$). В координатната система $K = A\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$, където $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AD}$, една точка M има координати (x, y). Да се намерят координатите на M относно координатната система K', ако

а) $K' = B\overrightarrow{e_1'}\overrightarrow{e_2'}$, където $\overrightarrow{e_1'} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{e_2'} = \overrightarrow{BA}$;

б) $K' = C\overrightarrow{e_1'}\overrightarrow{e_2'}$, където $\overrightarrow{e_1'} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{e_2'} = \overrightarrow{CD}$;

в) $K' = D\overrightarrow{e_1'}\overrightarrow{e_2'}$, където $\overrightarrow{e_1'} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{e_2'} = \overrightarrow{DA}$;

Решение. а) Понеже M има координати (x, y) относно K, то

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} = -x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}.$$

Тогава

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = (1-x)\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC} =$$

$$= y\overrightarrow{e_1'} + (1-x)\overrightarrow{e_2'}$$

и следователно точката M има координати $(y, 1-x)$ относно координатната система $K' = B\overrightarrow{e_1'}\overrightarrow{e_2'}$.

Отговор. б) $M(1-y, 1-x)$; в) $M(x, 1-y)$.

Задача 2.3.3 Точките A_1, B_1 и C_1 са средите на ръбовете BC, CA и AB на тетраедъра $OABC$. Да се намерят координатите на върховете A, B и C на тетраедъра относно афинната координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$, ако $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OC_1}$.

Упътване. Виж задача 2.2.10.

Отговор. $A_1(-1,1,1)$, $B(1,-1,1)$, $C(1,1,-1)$.

Забележка. До края на параграфа ще предполагаме, че координатната система, относно която са дадени координатите на векторите и точките е *афинна*.

Задача 2.3.4 Дадени са векторите $\overrightarrow{a}(1,2)$, $\overrightarrow{b}(-5,-1)$ и $\overrightarrow{c}(-1,3)$. Да се намерят:

а) координатите на векторите $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{q} = 16\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b} - 9\overrightarrow{c}$;

б) числата α и β, при които $\alpha\overrightarrow{a} - 10\overrightarrow{b} + \beta\overrightarrow{c} = \overrightarrow{o}$.

Решение. а) Ако относно избраната координатна система векторът $\overrightarrow{p}$ има координати (λ,μ), то съгласно 1), получаваме

$$\begin{aligned}\lambda &= 2.1 + 3.(-5) - (-1) = -12,\\ \mu &= 2.2 + 3.(-1) - 3 = -2\end{aligned}$$

и следователно $\overrightarrow{p}(-12,-2)$. Аналогично намираме $\overrightarrow{q}(0,0)$.

б) Тъй като $\overrightarrow{o}$ има координати $(0,0)$, то според 1) в сила са равенствата

$$\alpha - \beta + 50 = 0, \quad 2\alpha + 3\beta + 10 = 0,$$

от които получаваме $\alpha = -32, \quad \beta = 18$.

Задача 2.3.5 Да се намерят координатите на векторите $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{c}$, ако $\overrightarrow{a}(3,-2,5)$, $\overrightarrow{b}(\dfrac{2}{3},0,4)$ и $\overrightarrow{c}(0,0,-3)$.

Отговор. $\overrightarrow{p}(4,-4,-5)$, $\overrightarrow{q}(\dfrac{11}{3},-2,10)$.

Задача 2.3.6 Да се намерят координатите на средата M на отсечката AB, ако:

а) $A(1,2,3)$, $B(1,-2,1)$;
б) $A(\frac{1}{2},0,\frac{1}{3})$, $B(\frac{3}{2},-4,\frac{5}{3})$;
в) $A(0,0,0)$, $B(4,6,8)$

Упътване. Използвайте задача 2.2.1 и твърдение 1).
Отговор. а) $M(1,0,2)$; б) $M(1,-2,1)$;
в) $M(2,3,4)$.

Задача 2.3.7 Дадени са точките $A(1,6,2)$ и $M(-1,2,3)$. Да се намерят координатите на точката B, ако M е средата на отсечката AB.

Отговор. $B(-3,-2,4)$.

Задача 2.3.8 Да се намерят координатите на медицентъра M на триъгълника с върхове $A(1,0,3)$, $B(2,1,2)$ и $C(0,2,1)$.

Упътване. Съгласно задача 2.2.7 имаме

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Отговор. $M(1,1,2)$.

Задача 2.3.9 Дадени са точките $A(2,6,1)$, $B(0,3,4)$ и $M(2,-1,3)$. Да се намерят координатите на точката C, ако M е медицентърът на $\triangle ABC$.

Отговор. $C(4,-12,4)$.

Задача 2.3.10 Дадени са точките $A(3,4,-2)$, $M(0,2,1)$ и $N(4,3,2)$. Да се намерят координатите на точките B и C, ако M е медицентърът на $\triangle ABC$, а N - средата на отсечката AB.

Отговор. $B(5,0,8)$, $C(-8,2,-3)$.

Задача 2.3.11 Да се намерят координатите на върховете на $\triangle ABC$, ако точките $M_1(-1,1)$, $M_2(-1,2)$ и $M_3(1,3)$ са средите съответно на страните BC, CA и AB.

Отговор. $A(1,4)$, $B(1,2)$, $C(-3,0)$.

Задача 2.3.12 Дадени са точките $A(1,3)$, $B(4,7)$ и $C(2,8)$, които са последователни върхове на успоредника $ABCD$. Да се намерят координатите на върха D.

Решение. Нека върхът D има координати (x,y). Тогава от $\overrightarrow{AB}(3,4)$, $\overrightarrow{DC}(2-x,8-y)$ и равенството $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 2-x=3 \\ 8-y=4, \end{array} \right.$$

от която намираме $x=-1$, $\;y=4$.

Задача 2.3.13 Дадени са точките $A(1,-3,-2)$, $B(8,0,-4)$ и $C(4,8,-3)$, които са последователни върхове на успоредника $ABCD$. Да се намерят координатите на върха D.

Отговор. $D(-3,5,-1)$.

Задача 2.3.14 Дадени са върховете $A(-3,5)$, $B(1,7)$ и пресечната точка $M(1,1)$ на диагоналите на успоредника $ABCD$ ($\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DC}$). Да се намерят координатите на C и D.

Отговор. $C(5,-3)$, $D(1,-5)$.

Задача 2.3.15 Дадени са точките:
а) $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(2,3)$, $D(1,-2)$;
б) $A(1,0)$, $B(2,-1)$, $C(0,-2)$, $D(1,-3)$;
в) $A(0,3)$, $B(1,1)$, $C(2,-1)$, $D(-1,5)$;
г) $A(2,1)$, $B(3,2)$, $C(1,0)$, $D(0,2)$;
д) $A(0,2)$, $B(1,4)$, $C(0,3)$, $D(1,5)$;
е) $A(2,0)$, $B(-1,2)$, $C(\frac{1}{2},1)$, $D(0,\frac{4}{3})$;

Да се определи взаимното положение на правите AB и CD и в случай, че се пресичат, да се намерят координатите на пресечната точка.

Решение. а) За векторите $\overrightarrow{AB}(0,1)$ и $\overrightarrow{CD}(-3,-1)$ прилагаме 3′). От

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

следва, че $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{DC}$ и правите AB и CD се пресичат. Да означим с $M(x,y)$ пресечната им точка. Тъй като точките A, B и M са колинеарни, то съгласно 4′) имаме

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т.е.} \quad x - 1 = 0.$$

Аналогично, от колинеарността на точките C, D и M, следва

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{откъдето} \quad x - 3y + 7 = 0.$$

Решаваме получената система и намираме $x = 1$, $y = \dfrac{8}{3}$.

б) От $\overrightarrow{AB}(1,-1)$, $\overrightarrow{CD}(1,-1)$, $\overrightarrow{AC}(-1,-2)$ заключаваме, че $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$ и следователно правите AB и CD са успоредни.

в) Намираме $\overrightarrow{AB}(1,-2)$, $\overrightarrow{CD}(-3,6)$, $\overrightarrow{AC}(2,-4)$. Тъй като $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$, то следва, че правите AB и CD съвпадат.

Отговор. г) Правите AB и CD се пресичат в точка $M(1,0)$; д) $AB \parallel CD$; е) $AB = CD$.

Задача 2.3.16 Дадени са точките:
а) $A(3,-1,0)$, $B(4,1,4)$, $C(-2,-1,4)$, $D(1,-1,-1)$;
б) $A(5,1,3)$, $B(6,2,7)$, $C(4,1,4)$, $D(5,0,-2)$;
в) $A(1,2,1)$, $B(0,2,2)$, $C(0,3,0)$, $D(-1,3,1)$;
г) $A(2,1,0)$, $B(1,2,1)$, $C(3,0,-1)$, $D(0,3,2)$;
д) $A(7,3,9)$, $B(8,5,8)$, $C(3,1,1)$, $D(-4,3,4)$;

е) $A(2,1,-3)$, $B(1,1,-1)$, $C(1,4,-1)$, $D(0,7,1)$;
ж) $A(1,2,1)$, $B(1,-1,3)$, $C(2,1,3)$, $D(2,-2,5)$;
з) $A(1,2,3)$, $B(0,0,-1)$, $C(2,4,7)$, $D(3,6,11)$.

Да се определи взаимното положение на правите AB и CD и в случай, че се пресичат, да се намерят координатите на пресечната точка.

Решение. а) Прилагаме 6). Тъй като

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 26 \neq 0,$$

точките A, B, C и D са некомпланарни и следователно правите AB и CD са кръстосани.

б) Сега имаме

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

и точките A, B, C и D са компланарни, т.е. правите AB и CD лежат в една равнина. Тъй като векторите $\overrightarrow{AB}(1,1,4)$ и $\overrightarrow{CD}(1,-1,-6)$ са неколинеарни (Защо?), то посочените прави се пресичат в някаква точка $M(x,y,z)$. За тройките колинеарни точки A, B, M и C, D, M прилагаме 4) и съответно получаваме равенствата

$$\left| \begin{array}{l} -4y + z + 1 = 0 \\ 4x - z - 17 = 0 \\ -x + y + 4 = 0 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} 6y - z - 2 = 0 \\ 6x + z - 28 = 0 \\ 2x - 28y + 5 = 0. \end{array} \right.$$

От тях намираме $x = \dfrac{9}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$, $z = 1$.

Отговор. в) $AB \parallel CD$; г) $AB = CD$;
д) AB и CD са кръстосани;
е) AB и CD се пресичат в точката $M(2, 1, -3)$;
ж) $AB \parallel CD$; з) $AB = CD$.

Задача 2.3.17 Дадени са точките:
а) $A(1, 0, -1)$, $B(6, 2, 4)$, $C(5, 0, -3)$, $D(5, 2, 1)$, $E(-1, 0, 3)$;
б) $A(1, 2, -1)$, $B(-5, 3, 3)$, $C(5, 1, 1)$, $D(0, 1, 4)$, $E(4, 2, 2)$;
в) $A(5, 4, 2)$, $B(9, 8, 3)$, $C(1, 0, 1)$, $D(2, 3, 3)$, $E(4, 1, 0)$;
г) $A(2, 1, -3)$, $B(4, 2, 4)$, $C(0, 1, 0)$, $D(2, 2, 0)$, $E(0, 2, 3)$;
д) $A(0, 5, 7)$, $B(2, -1, 1)$, $C(0, 0, -5)$, $D(-2, 2, 0)$, $E(-1, 5, -1)$;
е) $A(4, 1, 4)$, $B(1, 0, 4)$, $C(5, 0, 0)$, $D(3, 1, 5)$, $E(1, 0, 4)$.
Да се определи взаимното положение на правата AB и равнината CDE и в случай, че правата пробожда равнината, да се намерят координатите на прободната точка.

Решение. а) Използваме 5). Тъй като детерминантата

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 72$$

от координатите на векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$ е различна от нула, посочените вектори са некомпланарни и следователно правата AB пробожда равнината CDE. Ако $M(x, y, z)$ е прободната точка, от условието

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 5 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

за компланарност на точките M, C, D и E получаваме уравнението

$$x - 2y + z - 2 = 0. \tag{2.23}$$

От друга страна, условието $\overrightarrow{AM} = \rho\overrightarrow{AB}$ за колинеарност на векторите $\overrightarrow{AB}(5, 2, 5)$ и $\overrightarrow{AM}(x-1, y, z+1)$ дава

$$\left| \begin{array}{l} x - 1 = 5\rho \\ y = 2\rho \\ z + 1 = 5\rho. \end{array} \right. \tag{2.24}$$

Решаваме системата (2.23), (2.24) и намираме $\rho = \dfrac{1}{3}$, $x = \dfrac{8}{3}$, $y = \dfrac{2}{3}$, $z = \dfrac{2}{3}$ и следователно $M(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

б) От

$$\begin{vmatrix} -6 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

съгласно 5) следва, че векторите $\overrightarrow{AB}(-6, 1, 4)$, $\overrightarrow{CD}(-5, 0, 3)$ и $\overrightarrow{CE}(-1, 1, 1)$ са компланарни. Тогава правата AB или лежи или е успоредна на равнината CDE. Тъй като

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 24 \neq 0,$$

точките A, C, D и E са некомпланарни и следователно правата AB е успоредна на равнината CDE.

Отговор. в) Правата AB лежи в равнината CDE;

г) Правата AB пробожда равнината CDE в точката $M(2, 1, -3)$;

д) Правата AB и равнината CDE са успоредни;

е) Правата AB лежи в равнината CDE.

2.4 Метрични операции с вектори

2.4.1 Скаларно произведение на два вектора

Скаларно произведение $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$ на два ненулеви вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ се нарича *числото* $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e$. Ако поне един от векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ е нулев, скаларното им произведение е равно на нула.

1) Скаларното произведение на два вектора е точно тогава равно на нула, когато поне един от векторите е нулев или и двата са ненулеви, но са перпендикулярни.

2) $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}$ за произволни вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

3) $(\lambda\overrightarrow{a})\overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})$ за произволни вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и реално число λ.

4) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$ за произволни вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$.

Числото $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$ се нарича *скаларен квадрат на вектора* $\overrightarrow{a}$ и се означава с $\overrightarrow{a}^2$.

5) $\overrightarrow{a}^2 \geq 0$ за произволен вектор $\overrightarrow{a}$, като равенството е в сила точно тогава, когато $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{o}$.

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е афинна координатна система в пространството и $\overrightarrow{a}(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $\overrightarrow{b}(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$. Тогава

(2.25)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \; & g_{11}\lambda_1\lambda_2 + g_{22}\mu_1\mu_2 + g_{33}\nu_1\nu_2 + \\ & + g_{23}(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1) + g_{31}(\nu_1\lambda_2 + \nu_2\lambda_1) + g_{12}(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1),\end{aligned}$$

където
$$g_{ij} = \overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Ако координатната система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е ортонормирана, то

$$|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = |\overrightarrow{e_3}| = 1, \; (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})_e = (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1})_e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})_e = \frac{\pi}{2}$$

и тогава

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \; g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0. \tag{2.26}$$

Замествайки (2.26) в (2.25), получаваме *формулата за скаларно произведение при ортонормирана координатна система*:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2. \tag{2.27}$$

Формулите (2.25) и (2.27) са в сила в тримерното пространство. Аналогични формули са в сила и в двумерното пространство (т.е. в равнината) и в едномерното пространство (т.е. върху права). Например, в равнинния случай на имаме съответно

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = g_{11}\lambda_1\lambda_2 + g_{22}\mu_1\mu_2 + g_{12}(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) \tag{2.28}$$

и

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2.$$

2.4.2 Дължина на вектор и разстояние между две точки

От $|\overrightarrow{a}|^2 = \overrightarrow{a}^2$ за *дължината на вектора* $\overrightarrow{a}$ намираме

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a}^2}. \tag{2.29}$$

Ако $K = O\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3}$ е афинна координатна система и $\overrightarrow{a}$ има афинна координати (λ, μ, ν), то от (2.25) и (2.29) получаваме

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{g_{11}\lambda^2 + g_{22}\mu^2 + g_{33}\nu^2 + 2g_{23}\nu\mu\nu + 2g_{31}\nu\lambda + 2g_{12}\lambda\mu} \tag{2.30}$$

Ако координатната система $K = O\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3}$ е ортонормирана, (2.30) приема вида

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}. \tag{2.31}$$

Нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са точки, зададени със своите ортонормирани координати. Тогава $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и като използваме (2.31), за разстоянието $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ между двете точки намираме

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{2.32}$$

За случая на равнина съответните формули на (2.30), (2.31) и (2.32) са:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{g_{11}\lambda^2 + g_{22}\mu^2 + 2g_{12}\lambda\mu}, \tag{2.33}$$

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \tag{2.34}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{2.35}$$

2.4.3 Директорни косинуси на посока

Нека S е посоката, определена от единичния вектор $\overrightarrow{p}^0$. Координатите (α, β, γ) на $\overrightarrow{p}^0$ относно координатната система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ се наричат *директорни косинуси на посоката S, определена от единичния вектор $\overrightarrow{p}^0$*. От $|\overrightarrow{p}^0| = 1$ следва равенството

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Ако $\overrightarrow{a}(\lambda, \mu, \nu)$ е произволен ненулев вектор, за директорните косинуси α, β, γ на посоката S, определена от $\overrightarrow{a}$, имаме

$$\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}, \ \beta = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}, \ \gamma = \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}.$$

Нека δ е равнина с фиксирана ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ и да предположим, че δ е ориентирана с посоката на K. Ако S е посоката, определена от единичния вектор $\overrightarrow{p}^0(\alpha, \beta)$ и положим $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{p}^0) = \vartheta$, то за директорните косинуси на S са в сила равенствата

$$\alpha = \cos\vartheta, \quad \beta = \sin\vartheta.$$

2.4.4 Векторно произведение на два вектора

Нека $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са произволни вектори в пространството. Ако $\overrightarrow{a} \nparallel \overrightarrow{b}$, *векторно произведение* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ се нарича *векторът*, определен по следния начин:

а) $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e$;

б) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ е перпендикулярен на $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$;

в) тройката вектори $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ е дясна.

Ако $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$, векторното произведение $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ е равно на нулевия вектор $\overrightarrow{o}$.

6) Ако $\overrightarrow{a} \nparallel \overrightarrow{b}$, то в сила е равенството

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e . \overrightarrow{n},$$

където $\overrightarrow{n}$ е единичният вектор еднопосочен с $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

7) Ако $\overrightarrow{a} \nparallel \overrightarrow{b}$, големината $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$ на векторното произведение $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ е равна на лицето на успоредника със съседни страни $|OA|$ и $|OB|$, където O е произволна точка и $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$.

8) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{o}$ точно тогава, когато $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$.

9) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ за произволни вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

10) $(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ за произволни вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и реално число λ.

11) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ за всеки три вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$.

12) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2 - (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})^2$ за произволни вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Свойството 12) е известно като *тъждество на Лагранж.*

13) Ако векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ имат относно дясната ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ съответно координати $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, то векторното произведение $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$

има спрямо K координати

$$\lambda = \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1,\quad \mu = \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1,\quad \nu = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1. \tag{2.36}$$

2.4.5 Формули за ъглите

Нека $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са ненулеви вектори. Тогава от дефиницията на скаларно произведение получаваме

$$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}, \tag{2.37}$$

а от дефиницията на векторно произведение -

$$\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \frac{|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}. \tag{2.38}$$

От (2.38), като отчетем 12), намираме

$$\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \frac{\sqrt{\overrightarrow{a}^2\,\overrightarrow{b}^2 - (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})^2}}{\sqrt{\overrightarrow{a}^2}\sqrt{\overrightarrow{b}^2}}.$$

Ако $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ имат ортонормирани координати съответно $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, то вземайки предвид (2.27), (2.31) и (2.36), получаваме от (2.37) и (2.38) съответно формулите:

$$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \frac{\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2}\sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2}}, \tag{2.39}$$

$$\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \frac{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2}\sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2}}, \tag{2.40}$$

където

$$\Delta_1 = \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1,$$
$$\Delta_2 = \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1,$$
$$\Delta_3 = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1.$$

В случая на равнина, аналогичните на (2.39) и (2.40) формули имат вида:

$$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \frac{\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2}{\sqrt{\lambda_1^2+\mu_1^2}\sqrt{\lambda_2^2+\mu_2^2}}, \tag{2.41}$$

$$\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \frac{|\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1|}{\sqrt{\lambda_1^2+\mu_1^2}\sqrt{\lambda_2^2+\mu_2^2}}. \tag{2.42}$$

2.4.6 Двойно векторно произведение

Нека $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са произволни вектори. Тогава *двойните векторни произведения* $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ са *вектори* и за тях са в сила следните формули:

14) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}.\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}.\overrightarrow{a}$.

15) $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}.\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}$.

Ще отбележим, че *при операцията векторно умножение на вектори не е валиден асоциативният закон*, т.е. в общия случай имаме

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}).$$

2.4.7 Смесено произведение на три вектора

Нека $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са произволни вектори. *Смесено произведение* $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$ на векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ (*в този им ред*) се нарича *числото*

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}.$$

16) Три вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са компланарни точно тогава, когато $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = 0$.

17) Ако векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са некомпланарни, то

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \varepsilon V,$$

където V е обемът на паралелепипеда, построен върху векторите $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$, а $\varepsilon = \pm 1$ в зависимост от това дали $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ е дясна или лява тройка вектори.

18) Три некомпланарни вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ образуват дясна (респ. лява) тройка точно тогава, когато $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} > 0$ (респ. $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} < 0$).

19) $\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$.

20) $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}$.

21.а) $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2})\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a_1}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a_2}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$;

21.б) $\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2})\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b_1}\,\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b_2}\,\overrightarrow{c}$;

21.в) $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}(\overrightarrow{c_1} + \overrightarrow{c_2}) = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c_1} + \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c_2}$.

22) $(\lambda\overrightarrow{a})(\mu\overrightarrow{b})(\nu\overrightarrow{c}) = \lambda\mu\nu.\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$.

23) Ако $\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{a} + \mu_1\overrightarrow{b} + \nu_1\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{v} = \lambda_2\overrightarrow{a} + \mu_2\overrightarrow{b} + \nu_2\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{w} = \lambda_3\overrightarrow{a} + \mu_3\overrightarrow{b} + \nu_3\overrightarrow{c}$, където $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \quad i = 1, 2, 3$, са реални числа, то

$$\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} .\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}.$$

24) Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е афинна координатна система, относно която векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ имат съответно координати $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ и $(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$. Тогава

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} .\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}. \tag{2.43}$$

Ако координатната система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е *дясна ортонормирана*, то $\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} = 1$ и (2.43) приема вида

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}. \tag{2.44}$$

25) Ако K е дясна ортонормирана координатна система, относно която векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ имат съответно координати $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ и $(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$, то тройката вектори $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ е дясна (респ. лява) точно тогава, когато

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} > 0 \quad (\text{респ.} \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} < 0).$$

2.4.8 Лице на триъгълник и обем на тетраедър

Ако A, B и C са неколинеарни точки, от 7) следва, че *лицето* S на $\triangle ABC$ се изразява с формулата

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}|. \tag{2.45}$$

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е ортонормирана координатна система, относно която $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Тогава от (2.45), като отчетем (2.36), получаваме

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}, \tag{2.46}$$

където

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ако $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е равнинна ортонормирана координатна система и $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, то

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|. \tag{2.47}$$

Реалното число

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.48}$$

се нарича *ориентирано лице* на $\triangle ABC$ с върхове в посочения ред.

Нека отново $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е ортонормирана координатна система в пространството и $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ и $D(x_4, y_4, z_4)$ са некомпланарни точки. Тогава от 17) и 24) непосредствено следва, че за обема V на тетраедъра $ABCD$ имаме

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix} \right|. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Реалното число

$$\overline{V} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.50}$$

се нарича *ориентиран обем на тетраедъра* $ABCD$, с върхове, взети в посочения ред.

2.4.9 Четворни произведения на вектори

Нека $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{d}$ са произволни вектори. Произведението $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d})$ се нарича *четворно произведение на векторите* в посочения ред. То е *число*, което се пресмята по формулата

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\overrightarrow{c} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a}\overrightarrow{d} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{d} \end{vmatrix}.$$

Произведението $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d})$ също се нарича *четворно произведение на векторите* в посочения ред. То обаче е *вектор* и за него са в сила следните равенства:

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{d}\,.\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,.\overrightarrow{d}$$

и

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d}\,.\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d}\,.\overrightarrow{a}\,.$$

Задача 2.4.1 Да се пресметне скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, ако:

а) $|\overrightarrow{a}| = 2$, $|\overrightarrow{b}| = 1$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \frac{\pi}{3}$;

б) $|\overrightarrow{a}| = 4$, $|\overrightarrow{b}| = 2$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \frac{\pi}{4}$;

в) $|\overrightarrow{a}| = \frac{1}{2}$, $|\overrightarrow{b}| = 1$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \frac{\pi}{6}$.

Решение. а) Имаме

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = 2.1.\frac{1}{2} = 1.$$

Отговор. б) $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 4\sqrt{2}$; в) $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Задача 2.4.2 Да се пресметне $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e$, ако:

а) $|\overrightarrow{a}| = 3$, $|\overrightarrow{b}| = 6$, $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 9\sqrt{2}$;

б) $|\overrightarrow{a}| = \dfrac{1}{2}$, $|\overrightarrow{b}| = 1$, $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

в) $|\overrightarrow{a}| = 2$, $|\overrightarrow{b}| = 1$, $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 1$.

Решение. а) Ще използваме (2.37). Получаваме

$$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{9\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

и следователно $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \dfrac{\pi}{4}$.

Отговор. б) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \dfrac{\pi}{6}$; в) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \dfrac{\pi}{3}$.

Задача 2.4.3 Дадени са векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, като $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{b}| = 1$. Да се намери $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e$, ако векторите $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{q} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ са перпендикулярни.

Решение. От $\overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{q}$ следва $\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q} = 0$. Имаме

$$(\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b})(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = -\overrightarrow{a}^2 - \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{b}^2 = 0$$

и следователно $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{a}^2 + 2\overrightarrow{b}^2$. Но $\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2 = 2$, $\overrightarrow{b}^2 = |\overrightarrow{b}|^2 = 1$ и като заместим тези стойности, получаваме $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 0$. Тъй като $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{o}$, $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{o}$, от 1) следва $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, т.е. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 2.4.4 Да се определи $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e$, ако векторите $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$ са перпендикулярни съответно на векторите $\overrightarrow{r} = 7\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{s} = 7\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$.

Отговор. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \dfrac{\pi}{3}$.

Задача 2.4.5 Дадени са векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, като $|\overrightarrow{a}| = 2$, $|\overrightarrow{b}| = 1$, $|\overrightarrow{c}| = 1$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \dfrac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})_e = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a})_e = \dfrac{\pi}{3}$. Да се намери $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})_e$, ако:

а) $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$;

б) $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$;

в) $\overrightarrow{p} = 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$.

Отговор. а) $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})_e = \arccos \dfrac{1}{2\sqrt{15}}$;

б) $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})_e = \arccos \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$;

в) $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})_e = \arccos \left(-\dfrac{5}{2\sqrt{37}}\right)$.

Задача 2.4.6 Дадени са векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, като $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 1$ и $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})_e = \dfrac{\pi}{2}$. Да се намери $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})_e$, ако векторът $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ има дължина 2.

Отговор. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})_e = \dfrac{\pi}{3}$.

Задача 2.4.7 Дадени са векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, като $|\overrightarrow{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{b}| = 3$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \dfrac{\pi}{4}$. Да се намерят дължините на диагоналите AC и BD на успоредника $ABCD$, ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.

Отговор. $|AC| = \sqrt{17}$, $|BD| = 9$.

Задача 2.4.8 Ако H_1, H_2 и H_3 са петите на височините на $\triangle ABC$ съответно през върховете A, B и C, да се представят векторите $\overrightarrow{AH_1}$, $\overrightarrow{BH_2}$ и $\overrightarrow{CH_3}$ като линейни комбинации на векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$.

Решение. От $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH_1}$ и $\overrightarrow{BH_1} \parallel \overrightarrow{BC}$ следва

$$\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{BC}, \tag{2.51}$$

където λ е число, което сега ще определим. За тази цел умножаваме двете страни на (2.51) скаларно с вектора $\overrightarrow{BC}$ и получаваме $\overrightarrow{AH_1}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \lambda\overrightarrow{BC}^2$. Но $\overrightarrow{AH_1} \perp \overrightarrow{BC}$ и следователно $\overrightarrow{AH_1}.\overrightarrow{BC} = 0$. Тогава

$$\lambda = -\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}^2}$$

и като заместим в (2.51), намираме

$$\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}^2}\overrightarrow{BC}.$$

Аналогично получаваме и равенствата

$$\overrightarrow{BH_2} = \overrightarrow{BC} - \frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CA}^2}\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{CH_3} = \overrightarrow{CA} - \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}^2}\overrightarrow{AB}.$$

Забележка. До края на параграфа в задачите, в които се използва координатна система, ако нищо не е казано за нея, ще считаме, че тя е *дясна и ортонормирана.*

Задача 2.4.9 Дадени са векторите $\overrightarrow{a}(2,2,1)$ и $\overrightarrow{b}(3,0,4)$. Да се пресметне:

а) $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$; б) $|\overrightarrow{a}|, |\overrightarrow{b}|$; в) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e$.

Решение. а) Понеже координатната система е ортонормирана, ще използваме (2.27). Имаме

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 2.3 + 2.0 + 1.4 = 10.$$

б) Сега ще приложим (2.31). Намираме

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$|\overrightarrow{b}| = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

в) Можем да използваме (2.39). Намираме

$$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \frac{2.3+2.0+1.4}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\sqrt{3^2+0^2+4^2}} = \frac{10}{3.5} = \frac{2}{3}$$

и следователно $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \arccos\dfrac{2}{3}$.

Задача 2.4.10 Дадени са векторите $\overrightarrow{a}(2,1,3)$ и $\overrightarrow{b}(-1,0,4)$. Намерете:

а) $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$; б) $|\overrightarrow{a}|$, $|\overrightarrow{b}|$; в) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e$.

Отговор. а) $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 10$; б) $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{14}$, $|\overrightarrow{b}| = \sqrt{17}$;
в) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \arccos\dfrac{10}{\sqrt{14}\sqrt{17}}$.

Задача 2.4.11 Да се намери разстоянието между точките A и B, ако:

а) $A(1,2)$, $B(3,-1)$;
б) $A(1,2,3)$, $B(2,0,1)$;
в) $A(-1,2,-3)$, $B(0,1,5)$.

Решение. а) **I начин.** Разстоянието $|AB|$ между точките можем да пресметнем, като използваме (2.35). Имаме

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

II начин. Разстоянието $|AB|$ е равно на дължината на вектора $\overrightarrow{AB}(2,-3)$. Като използваме (2.34), намираме $|AB| = \sqrt{13}$.

Упътване. За б) и в) използвайте (2.32) или (2.31).
Отговор. б) $|AB| = 3$; в) $|AB| = \sqrt{66}$.

Задача 2.4.12 Да се определи числото λ така, че векторите $\overrightarrow{a}(1,\lambda,-2\lambda)$ и $\overrightarrow{b}(3,1,2)$ да бъдат ортогонални.

Упътване. Използвайте 1).

Отговор. $\lambda = 1$.

Задача 2.4.13 Да се намерят ъглите, които векторът $\overrightarrow{a}(\sqrt{2}, 1, -1)$ сключва с координатните вектори $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_3}$ на K.

Упътване. Координатните вектори $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_3}$ имат относно K съответно координати $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$. Използвайте (2.39).

Отговор. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_1})_e = \dfrac{\pi}{4}$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_2})_e = \dfrac{\pi}{3}$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_3})_e = \dfrac{2\pi}{3}$.

Задача 2.4.14 Дадени са върховете $A(2, 1, -3)$, $B(1, 0, -1)$ и $C(1, 8, -1)$ на $\triangle ABC$. Да се намерят:

а) дължините на страните на триъгълника;
б) вътрешният ъгъл при върха A;
в) дължината на медианата при върха B;
г) дължината на височината при върха C;
д) дължината на вътрешната ъглополовяща при върха A;
е) лицето S на триъгълника.

Решение. а) Като използваме (2.32), намираме $|AB| = \sqrt{6}$, $|BC| = 8$, $|CA| = 3\sqrt{6}$.

б) Имаме

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})_e = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = -\frac{1}{9}$$

и следователно $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})_e = \arccos(-\dfrac{1}{9})$.

в) Ако означим с M средата на отсечката AC, като имаме предвид задача 2.2.1, намираме $M\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}, -2\right)$. Пресмятаме $|BM| = \dfrac{1}{2}\sqrt{86}$. Може да използвате и задача 2.2.5.

г) За да намерим дължината на височината CH_3, ще използваме задача 2.4.8. Имаме

$$\overrightarrow{CH_3} = \overrightarrow{CA} - \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}^2}\overrightarrow{AB} \tag{2.52}$$

и като пресметнем $\dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}^2} = \dfrac{1}{3}$ и заместим в (2.52), получаваме

$$\overrightarrow{CH_3} = \overrightarrow{CA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Оттук намираме $\overrightarrow{CH_3}\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{20}{3}, -\dfrac{8}{3}\right)$ и следователно $|\overrightarrow{CH_3}| = \dfrac{4}{3}\sqrt{30}$.

д) Ако означим с AA_0 вътрешната ъглополовяща при върха A, то съгласно задача 2.2.18 имаме

$$\overrightarrow{AA_0} = \frac{|\overrightarrow{AC}|.\overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{4}(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

и следователно $\overrightarrow{AA_0}(-1, 1, 2)$. Намираме $|\overrightarrow{AA_0}| = \sqrt{6}$.

е) Лицето S на $\triangle ABC$ е $S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{CH_3}||\overrightarrow{AB}| = 4\sqrt{5}$.

Задача 2.4.15 Точките $A(-1, 2)$, $B(3, -5)$ и $C(1, 0)$ са върховете на $\triangle ABC$. Да се намерят:

а) дължините на страните на триъгълника;

б) вътрешният ъгъл при върха C;

в) дължините на медианата и височината при върха C;

г) лицето на триъгълника.

Отговор. а) $\sqrt{65}, \sqrt{29}, \sqrt{8}$; б) $\arccos\left(-\dfrac{7}{58}\right)$;

в) $\dfrac{3}{2}$, $\sqrt{\dfrac{5}{13}}$; г) 3.

Задача 2.4.16 Дадени са върховете $A(1, 2, -1)$, $B(3, 1, 2)$ и $C(-1, 0, 1)$ на $\triangle ABC$. Да се намерят:

а) дължините на страните на триъгълника;

б) вътрешният ъгъл при върха B;

в) дължините на медианата, на височината и на вътрешната ъглополовяща при върха A;

г) лицето на триъгълника.

Отговор. а) $\sqrt{14}, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{3}$; б) $\arccos\dfrac{5}{3\sqrt{7}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$, $\dfrac{2\sqrt{19}}{3}$, $\dfrac{4\sqrt{21+\sqrt{42}}}{\sqrt{14}+\sqrt{12}}$; г) $\sqrt{38}$.

Задача 2.4.17 Да се докаже, че триъгълникът с върхове $A(3, -1, 3)$, $B(2, 0, 3)$ и $C(2, -1, 4)$ е равностранен.

Задача 2.4.18 Да се докаже, че триъгълникът с върхове $A(2, -1, 3)$, $B(1, 1, 1)$ и $C(0, 0, 5)$ е равнобедрен и правоъгълен.

Задача 2.4.19 Да се докаже, че четириъгълникът с върхове $A(6, 3, 1)$, $B(8, 5, 2)$, $C(8, 2, -1)$ и $D(10, 4, 0)$ е квадрат.

Задача 2.4.20 Точките $A(0, 0, -2)$, $B(4, 0, -4)$, $C(2, 0, 0)$ и $D(5, 3, -3)$ са върхове на тетраедър. Да се намерят:

а) острият ъгъл между ръбовете AB и CD;

б) координатите на точките M и N съответно върху правите AB и CD такива, че правата MN да бъде перпендикулярна на правите AB и CD.

Решение. а) Имаме $\overrightarrow{AB}(4, 0, -2)$, $\overrightarrow{CD}(3, 3, -3)$ и тогава

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})_e = \frac{3}{\sqrt{15}}.$$

Получихме $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})_e > 0$ и следователно острият ъгъл между ръбовете AB и CD е $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})_e = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{15}}$.

б) Тъй като тройките точки A, B, M и C, D, N са съответно колинеарни, то можем да запишем

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CN} = \mu\overrightarrow{CD}, \tag{2.53}$$

където λ и μ са числа, които ще определим. Ако предположим, че точките M и N имат съответно координати (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), от (2.53) намираме

$$\begin{aligned} &x_1 = 4\lambda, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = -2 - 2\lambda, \\ &x_2 = 2 + 3\mu, \quad y_2 = 3\mu, \quad z_2 = -3\mu \end{aligned} \tag{2.54}$$

и следователно $\overrightarrow{MN}(-4\lambda + 3\mu + 2, 3\mu, 2\lambda - 3\mu + 2)$.

Понеже $MN \perp AB$ и $MN \perp CD$, то $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = 0$ и $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = 0$. От последните две равенства получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} -10\lambda + 9\mu + 2 = 0 \\ 2\lambda - 3\mu = 0, \end{array} \right.$$

от която определяме $\lambda = \dfrac{1}{2}, \quad \mu = \dfrac{1}{3}$. Като заместим тези стойности в (2.54), намираме $M(2, 0, -3)$, $N(3, 1, -1)$.

Задача 2.4.21 Точките $A(1, 3)$, $B(1, 0)$ и $C(2, 1)$ са върхове на триъгълник. Да се намерят:

а) дължините на страните на триъгълника;

б) вътрешният ъгъл при върха A.

Координатната система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е афинна и е определена с равенствата

$$|\overrightarrow{e_1}| = 4, \quad |\overrightarrow{e_2}| = 2, \quad (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})_e = \frac{\pi}{3}.$$

Решение. а) Понеже K е афинна координатна система в равнината, трябва да използваме формулата (2.33) за дължина на вектор. Намираме

$$g_{11} = 16, \quad g_{22} = 4, \quad g_{12} = 4 \tag{2.55}$$

и (2.33) приема вида

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{16\lambda^2 + 4\mu^2 + 4\lambda\mu}. \tag{2.56}$$

Прилагаме (2.56) за векторите $\overrightarrow{AB}(0,-3)$, $\overrightarrow{BC}(1,1)$, $\overrightarrow{AC}(1,-2)$ и получаваме $|AB| = 6, \quad |BC| = 2\sqrt{7}, \quad |AC| = 4$.

б) Като заместим (2.55) в (2.28), получаваме формулата за скаларно произведение относно K. Имаме

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 16\lambda_1\lambda_2 + 4\mu_1\mu_2 + 4(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1). \tag{2.57}$$

Прилагаме (2.57) за векторите $\overrightarrow{AB}(0,-3)$ и $\overrightarrow{AC}(1,-2)$ и намираме $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12$. Тогава

$$\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})_e = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

и следователно $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})_e = \dfrac{\pi}{3}$.

Задача 2.4.22 Дадени са върховете $A(1,1)$, $B(5,3)$ и $C(3,5)$ на $\triangle ABC$. Да се намерят:

а) дължините на страните на триъгълника;

б) вътрешният ъгъл при върха A.

Координатната система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е афинна и е определена с равенствата

$$|\overrightarrow{e_1}| = 2, \quad |\overrightarrow{e_2}| = 1, \quad (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})_e = \frac{2\pi}{3}.$$

Отговор. а) $|AB| = 2\sqrt{13}$, $|AC| = 4$, $|BC| = 2\sqrt{7}$;
б) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})_e = \arccos\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$.

Задача 2.4.23 Точките $A(1,2,-1)$, $B(3,1,2)$ и $C(-1,0,1)$ са върхове на триъгълник. Да се намерят:

а) дължините на страните на триъгълника;
б) вътрешният ъгъл при върха B;
в) дължините на медианата и на височината при върха B;
г) лицето на $\triangle ABC$.

Координатната система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е афинна и е определена с равенствата

$$|\overrightarrow{e_1}| = 1, \quad |\overrightarrow{e_2}| = 2, \quad |\overrightarrow{e_3}| = 1,$$
$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})_e = \frac{\pi}{3}, \quad (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})_e = (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1})_e = \frac{\pi}{2}. \tag{2.58}$$

Упътване. Използвайте (2.25) и (2.30). Предвид (2.58), формула (2.25) приема вида

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \lambda_1\lambda_2 + 4\mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 + \lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2$$

а (2.30) -

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\lambda^2 + 4\mu^2 + \nu^2 + 2\lambda\mu}.$$

По-нататък следвайте схемата на решението на задача 2.4.21.

Отговор. а) $|AB| = \sqrt{13}$, $|AC| = 4\sqrt{2}$, $|BC| = \sqrt{29}$;
б) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})_e = \arccos\dfrac{5}{\sqrt{13}\sqrt{29}}$;
в) $|BM_2| = \sqrt{13}$, $|BH_2| = \sqrt{11}$;
г) $S = 2\sqrt{22}$.

Задача 2.4.24 Да се пресметне $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$, ако $|\overrightarrow{a}| = 2$, $|\overrightarrow{b}| = 3$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Имаме

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = 2.3.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Задача 2.4.25 Да се пресметне лицето на триъгълника, построен върху векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, ако $|\overrightarrow{a}| = 4$, $|\overrightarrow{b}| = 1$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \dfrac{\pi}{3}$.

Упътване. Използвайте (2.45).
Отговор. $S = \sqrt{3}$.

Задача 2.4.26 Ако $|\overrightarrow{a}| = 10$, $|\overrightarrow{b}| = 2$, $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 12$, пресметнете:
а) $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$;
б) $|(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})|$.

Решение. а) От тъждеството на Лагранж следва

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \sqrt{\overrightarrow{a}^2\,\overrightarrow{b}^2 - (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})^2} = \sqrt{100.4 - 144} = \sqrt{256} = 16.$$

б) Най-напред преработваме израза $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$. Имаме

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) =$$

$$= \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} - \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b} = 2.\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$$

и следователно

$$|(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})| = |2.\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}| = 2.|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}| = 2.16 = 32.$$

Задача 2.4.27 Да се докаже, че ако $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{o}$, то

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}. \tag{2.59}$$

Решение. От $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{o}$ намираме $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$. Аналогично от $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{o}$ следва $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$, с което (2.59) е установено.

Задача 2.4.28 Да се докаже, че ако $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{o}$, то $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{o}$.

Решение. От $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ следва $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{o}$ и следователно $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{o}$. Тъй като $\overrightarrow{a} \nparallel \overrightarrow{c}$, то $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{o}$ и от последното векторно равенство намираме, че $\overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c})$, където λ е неизвестно засега число. Тогава от $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$ получаваме $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$, откъдето $\lambda.\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$. Оттук намираме $\lambda = -1$ и следователно $\overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c})$, т.е. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{o}$.

Задача 2.4.29 Нека $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са некомпланарни вектори. Ако $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ и H е ортогонална проекция на точката C върху равнината OAB, да се изрази векторът $\overrightarrow{CH}$ чрез векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$.

Решение. От $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{b}$ следва $\overrightarrow{CH} \parallel \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, т.е. $\overrightarrow{CH} = \lambda.\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$. Ще намерим числото λ.

Тъй като точката H е компланарна с точките O, A и B, то съгласно задача 2.2.19 имаме

$$\begin{gathered} \overrightarrow{CH} = \alpha_1.\overrightarrow{CO} + \alpha_2.\overrightarrow{CA} + \alpha_3.\overrightarrow{CB}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1. \end{gathered} \tag{2.60}$$

Заместваме $\overrightarrow{CH} = \lambda.\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ в (2.60) и получаваме

$$\lambda.\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\alpha_1.\overrightarrow{c} + \alpha_2.(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}) + \alpha_3.(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}).$$

Оттук, с помощта на второто равенство на (2.60), намираме

$$\lambda.\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \alpha_2.\overrightarrow{a} + \alpha_3.\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}.$$

Умножаваме скаларно горното равенство с $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ и като направим приведение, получаваме

$$\lambda = -\frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}}{(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})^2}.$$

Следователно
$$\overrightarrow{CH} = -\frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}}{(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2}\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}.$$

Задача 2.4.30 Дадени са некомпланарните вектори $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$. Да се изрази чрез тях векторът $\overrightarrow{OH}$, където H е ортогонална проекция на точката A върху равнината OBC.

Упътване. Използвайте, че $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$ и за да намерите $\overrightarrow{AH}$, приложете схемата, която използвахме при решението на задача 2.4.29.

Отговор. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{a} - \dfrac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}}{(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})^2}\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}.$

Задача 2.4.31 Ако $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са произволни вектори, а λ, μ и ν - произволни числа, да се докаже, че векторите $\overrightarrow{p} = \lambda\overrightarrow{a} - \mu\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{q} = \nu\overrightarrow{b} - \lambda\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{r} = \mu\overrightarrow{c} - \nu\overrightarrow{a}$ са компланарни.

Упътване. Покажете, че $\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q}\,\overrightarrow{r} = 0$.

Задача 2.4.32 Докажете тъждествата:

а) $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}) + \overrightarrow{b}\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{c}\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{o}$;

б) $\overrightarrow{a}\times[\overrightarrow{b}\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})] = (\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c})\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{d} - (\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{d})\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$;

в) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})\overrightarrow{e} = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{d}.\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{e} - \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}.\overrightarrow{d}\,\overrightarrow{e}$;

г) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})[(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c}][(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})] = -\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}.\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}.(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2$;

д) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c})^2 - [(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c})]^2 = \overrightarrow{a}^2(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c})^2$;

е) $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}.\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{u} & \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{v} & \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{u} & \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{v} & \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{u} & \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{v} & \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{w} \end{vmatrix}$;

ж) $(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c})^2 = (\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})$;

$$\text{з) } (\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\overrightarrow{c}\overrightarrow{d} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{c}\overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{a}\overrightarrow{u}\overrightarrow{v} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{u}\overrightarrow{v} \end{vmatrix};$$

$$\text{и)} (\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{c}\overrightarrow{u}\overrightarrow{v} & \overrightarrow{d}\overrightarrow{u}\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{d} \end{vmatrix}.$$

Решение. а) Прилагаме 15). Имаме

$$\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})+\overrightarrow{b}\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})+\overrightarrow{c}\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}) =$$
$$= \overrightarrow{a}\overrightarrow{c}.\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}.\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}\overrightarrow{b}.\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = \overrightarrow{o}.$$

е) От

$$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times[(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{c}] = \overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}.\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}-\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}).\overrightarrow{c} =$$
$$= (\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\overrightarrow{c}\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\overrightarrow{c}\overrightarrow{b}.\overrightarrow{a}$$

намираме

$$(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c})(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}) =$$
$$= \overrightarrow{a}\overrightarrow{b}(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}).\overrightarrow{c}+(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\overrightarrow{c}\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\overrightarrow{c}\overrightarrow{b}.\overrightarrow{a} =$$
$$= (\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}).\overrightarrow{c}+(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}).\overrightarrow{b}-$$
$$-(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{b}).\overrightarrow{a} =$$
$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{b}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{v} \end{vmatrix}.\overrightarrow{c} - \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{c}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{c}\overrightarrow{v} \end{vmatrix}.\overrightarrow{b} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{b}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{c}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{c}\overrightarrow{v} \end{vmatrix}.\overrightarrow{a}.$$

Оттук, като умножим скаларно с $\overrightarrow{w}$, получаваме

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}.\overrightarrow{u}\overrightarrow{v}\overrightarrow{w} =$$
$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{b}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{v} \end{vmatrix}.\overrightarrow{c}\overrightarrow{w} - \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{c}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{c}\overrightarrow{v} \end{vmatrix}.\overrightarrow{b}\overrightarrow{w} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{b}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{c}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{c}\overrightarrow{v} \end{vmatrix}.\overrightarrow{a}\overrightarrow{w} =$$
$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{v} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{b}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{v} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{c}\overrightarrow{u} & \overrightarrow{c}\overrightarrow{v} & \overrightarrow{c}\overrightarrow{w} \end{vmatrix}.$$

Задача 2.4.33 Да се пресметне лицето S на $\triangle ABC$, ако $A(1,0)$, $B(2,3)$ и $C(2,2)$.

Решение. Използваме (2.47). Имаме

$$S = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}.$$

Задача 2.4.34 Да се пресметне ориентираното лице $\overline{S}$ на $\triangle ABC$, ако $A(3,2)$, $B(1,1)$ и $C(4,4)$.

Решение. За да намерим ориентираното лице $\overline{S}$ на $\triangle ABC$, ще използваме (2.48). Намираме

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}.$$

Задача 2.4.35 В $\triangle ABC$ имаме $A(1,1)$, $B(3,2)$ и $C(4,4)$. Да се намери дължината на височината на триъгълника през върха A.

Отговор. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Задача 2.4.36 Да се намери лицето S на $\triangle ABC$, ако $A(2,-3,4)$, $B(1,1,-2)$ и $C(2,-1,3)$.

Упътване. Използвайте (2.47).

Отговор. $S = \frac{\sqrt{69}}{2}$.

Задача 2.4.37 Дадени са точките $A(4,-2,2)$, $B(3,1,1)$ и $C(4,2,0)$. Да се пресметне дължината на височината на $\triangle ABC$ през върха A.

Отговор. $2\sqrt{\frac{14}{3}}$.

Задача 2.4.38 Да се пресметне обемът V на тетраедъра $ABCD$, ако $A(1,-5,4)$, $B(0,-3,1)$, $C(-2,-4,3)$ и $D(4,4,-2)$.

Решение. Ще използваме (2.49). Имаме

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{45}{6}.$$

Задача 2.4.39 Да се пресметне ориентираният обем $\overline{V}$ на тетраедъра $ABCD$, ако $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$ и $D(0,8,0)$.

Упътване. Използвайте (2.50).
Отговор. $\overline{V} = -5$.

Задача 2.4.40 Върховете на един тетраедър се намират в точките $A(4,4,-2)$, $B(-2,-4,3)$, $C(1,-5,4)$ и $D(0,-3,1)$. Да се намери дължината на височината му през върха C.

Отговор. 3.

Задача 2.4.41 Дадени са векторите $\overrightarrow{a}(1,0,2)$, $\overrightarrow{b}(2,-1,3)$ и $\overrightarrow{c}(1,-1,0)$. Да се пресметнат координатите на вектора $\overrightarrow{p}$, ако

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{p} = 1, \quad \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{p} = 2, \quad \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{p} = 0. \tag{2.61}$$

Решение. Ако предположим, че векторът $\overrightarrow{p}$ има координати (λ,μ,ν), то съгласно (2.44), равенствата (2.61) приемат вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето

$$\left|\begin{array}{l} 2\lambda + \mu - \nu = 1 \\ 3\lambda + 3\mu - \nu = 2 \\ 2\lambda + 2\mu - \nu = 0. \end{array}\right. \tag{2.62}$$

От (2.62) намираме $\lambda = 3, \mu = -1, \nu = 4$ и следователно $\overrightarrow{p}(3,-1,4)$.

2.5 Смяна на координатна система

2.5.1 Смяна на координатна система в равнината

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ и $K' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$ са две афинни координатни системи в равнината α, които накратко ще наричаме „стара“ и „нова“. Положението на новата координатна система K' е определено с координатите на елементите ѝ относно старата K: $O'(a,b)$, $\overrightarrow{e_1'}(\alpha_1,\beta_1)$ и $\overrightarrow{e_2'}(\alpha_2,\beta_2)$. От $\overrightarrow{e_1'} \not\parallel \overrightarrow{e_2'}$ следва, че

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Детерминантата Δ се нарича *трансформационна детерминанта.* Очевидно $\Delta > 0$, когато K и K' са еднакво ориентирани и $\Delta < 0$ - когато са противоположно ориентирани.

Ако $\overrightarrow{v}$ е произволен вектор в α със стари координати (λ,μ) и нови - (λ',μ'), в сила са *трансформационните формули*

$$\lambda = \alpha_1\lambda' + \alpha_2\mu', \quad \mu = \beta_1\lambda' + \beta_2\mu' \tag{2.63}$$

и

$$\lambda' = \frac{A_1}{\Delta}\lambda + \frac{B_1}{\Delta}\mu, \quad \mu' = \frac{A_2}{\Delta}\lambda + \frac{B_2}{\Delta}\mu, \tag{2.64}$$

където A_1, B_1, A_2 и B_2 са адюнгираните количества съответно на α_1, β_1, α_2 и β_2 в Δ.

Аналогично, ако една точка M от α има стари координати (x,y) и нови - (x',y'), те са свързани с *трансформационните формули*

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha_1 x' + \alpha_2 y', \\ y &= b + \beta_1 x' + \beta_2 y' \end{aligned} \tag{2.65}$$

и

$$x' = \frac{A_1}{\Delta}(x-a) + \frac{B_1}{\Delta}(y-b),$$
(2.66)
$$y' = \frac{A_2}{\Delta}(x-a) + \frac{B_2}{\Delta}(y-b).$$

Ако K и K' са ортонормирани координатни системи и равнината α е ориентирана посредством K, то в този случай координатите (α_1, β_1) и (α_2, β_2) са директорните косинуси на посоките, определени съответно от $\overrightarrow{e_1'}$ и $\overrightarrow{e_2'}$ и могат да се изразят посредством $\vartheta = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}')$. Имаме

$$\alpha_1 = \cos\vartheta, \quad \beta_1 = \sin\vartheta,$$

$$\alpha_2 = -\varepsilon\sin\vartheta, \quad \beta_2 = \varepsilon\cos\vartheta,$$

където $\varepsilon = 1$, ако K и K' са еднакво ориентирани и $\varepsilon = -1$ - ако са противоположно ориентирани.

Сега трансформационните формули (2.63)-(2.66) приемат вида:

$$\begin{aligned} \lambda &= \cos\vartheta.\lambda' - \varepsilon\sin\vartheta.\mu', \\ \mu &= \sin\vartheta.\lambda' + \varepsilon\cos\vartheta.\mu', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda' &= \cos\vartheta.\lambda + \sin\vartheta.\mu, \\ \mu' &= \varepsilon(-\sin\vartheta.\lambda + \cos\vartheta.\mu), \end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned} x &= a + \cos\vartheta.x' - \varepsilon\sin\vartheta.y', \\ y &= b + \sin\vartheta.x' + \varepsilon\cos\vartheta.y', \end{aligned} \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned} x' &= \cos\vartheta.(x-a) + \sin\vartheta.(y-b), \\ y' &= -\varepsilon\sin\vartheta.(x-a) + \varepsilon\cos\vartheta.(y-b). \end{aligned}$$

2.5.2 Смяна на координатна система в пространството

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ и $K' = O'\overrightarrow{e_1'}\overrightarrow{e_2'}\overrightarrow{e_3'}$ са две афинни координатни системи в пространството, съответно „стара“ и „нова“ и да предположим, че $O'(a, b, c)$, $\overrightarrow{e_1'}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\overrightarrow{e_2'}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $\overrightarrow{e_3'}(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ относно K. Детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

е различна от нула и се нарича *трансформационна детерминанта.* Съгласно (2.43) имаме

$$\overrightarrow{e_1'}\overrightarrow{e_2'}\overrightarrow{e_3'} = \Delta.\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$$

и следователно $\Delta > 0$ или $\Delta < 0$ в зависимост от това дали K и K' са съответно еднакво или противоположно ориентирани.

Ако (λ, μ, ν) и (λ', μ', ν') са съответно старите и новите координати на произволен вектор $\overrightarrow{v}$ в пространството, в сила са *трансформационните формули*

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha_1\lambda' + \alpha_2\mu' + \alpha_3\nu', \\ \mu &= \beta_1\lambda' + \beta_2\mu' + \beta_3\nu', \\ \nu &= \gamma_1\lambda' + \gamma_2\mu' + \gamma_3\nu', \end{aligned} \tag{2.69}$$

и обратните им -

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{A_1}{\Delta}\lambda + \frac{B_1}{\Delta}\mu + \frac{\Gamma_1}{\Delta}\nu, \\ \mu' &= \frac{A_2}{\Delta}\lambda + \frac{B_2}{\Delta}\mu + \frac{\Gamma_2}{\Delta}\nu, \\ \nu' &= \frac{A_3}{\Delta}\lambda + \frac{B_3}{\Delta}\mu + \frac{\Gamma_3}{\Delta}\nu, \end{aligned} \tag{2.70}$$

където A_i, B_i, Γ_i, $i = 1, 2, 3$, са адюнгираните количества съответно на елементите α_i, β_i, γ_i в Δ.

Аналогично, ако една точка M в пространството има стари координати (x, y, z) и нови - (x', y', z'), *трансформационните формули* са

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= b + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z &= c + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z', \end{aligned} \tag{2.71}$$

и

$$\begin{aligned} x' &= \frac{A_1}{\Delta}(x-a) + \frac{B_1}{\Delta}(y-b) + \frac{\Gamma_1}{\Delta}(z-c), \\ \mu' &= \frac{A_2}{\Delta}(x-a) + \frac{B_2}{\Delta}(y-b) + \frac{\Gamma_2}{\Delta}(z-c), \\ \nu' &= \frac{A_3}{\Delta}(x-a) + \frac{B_3}{\Delta}(y-b) + \frac{\Gamma_3}{\Delta}(z-c). \end{aligned} \tag{2.72}$$

Ако K и K' са ортонормирани координатни системи, то $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ и $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ са директорните косинуси на посоките, определени съответно от координатните вектори на K'. Те удовлетворяват равенствата

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0, \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0, \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0, \end{aligned}$$

а за трансформационната детерминанта имаме

$$\Delta^2 = 1.$$

Оттук следва, че $\Delta = \pm 1$ в зависимост от това дали K и K' са съответно еднакво или противоположно ориентирани.

2.5.3 Полярна координатна система в равнината

Една *полярна координатна система в равнината* α е съвкупност от :

а) точка O, наречена *начало* или *полюс на системата*;

б) лъч $l^{\rightarrow}$ с начало O, който се нарича *полярна ос*;

в) фиксирана *посока на въртене* S *на системата*;

г) *единици за измерване на отсечки и ъгли.*

Ако M е произволна точка от α, различна от началото O, реалните числа

$$\rho = |OM|, \quad \omega = (l^{\rightarrow}, \overrightarrow{OM}) \tag{2.73}$$

се наричат *полярни координати на* M *относно дадената координатна система.* По-точно: ρ се нарича *полярно разстояние*, а ω - *полярен ъгъл* на M.

Понеже ω е ориентиран ъгъл и има безбройно много стойности, то всяка точка M от α има безбройно много двойки полярни координати (ρ, ω). Но всяка двойка реални числа (ρ, ω), $\rho > 0$, определя точно една точка M от α, чиито полярни координати са точно (2.73).

За полюса O имаме $\rho = 0$, а за ω може да се приеме кое да е реално число.

Полярният ъгъл ω може да се избира еднозначно, ако се ограничим с неговата *главна стойност* ω_0, за която имаме

$$0 \leq \omega_0 < 2\pi.$$

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е ортонормирана координатна система в α, за която $\overrightarrow{e_1} \uparrow\uparrow l^{\rightarrow}$, има същата посока S на въртене и същата единица-отсечка, както избраната по-горе полярна координатна система. Тогава, ако една точка M от α има полярни координати (ρ, ω) и ортонормирани координати (x, y), то те са свързани с формулите

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega \tag{2.74}$$

и

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho \geq 0,$$
$$\cos\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{2.75}$$
$$\sin\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Очивидно M описва цялата равнина, когато $\rho \in [0, +\infty)$, $\omega \in [0, 2\pi)$.

2.5.4 Полярна и цилиндрична координатна система в пространството

Една *полярна координатна система в пространството* е съвкупност от :

а) точка O, наречена *начало* или *полюс на системата*;

б) равнина α през O и полярна координатна система в α с полюс O, полярна ос $l^{\rightarrow}$ и положителна посока на въртене S;

в) положителна посока T върху правата p, която минава през началото O и е перпендикулярна на равнината α.

Нека $g^{\rightarrow}$ е лъчът върху p с начало O и посока T. Ако M е произволна точка в пространството, която не лежи на p, да означим с M_1 ортогоналната ѝ проекция в равнината α. Тогава реалните числа

$$\rho = |OM|, \quad \omega = (l^{\rightarrow}, \overrightarrow{OM_1}), \quad \vartheta = (g^{\rightarrow}, \overrightarrow{OM})_e$$

се наричат *полярни координати на точката M относно дадената координатна система*. Числото $\rho > 0$ се нарича *полярно разстояние* на M.

Ъгълът ω има безбройно много стойности, а ϑ - една стойност в интервала $(0, \pi)$. Следователно всяка точка M в пространството има безбройно много тройки полярни координати $(\rho, \omega, \vartheta)$, но всяка такава тройка определя единствена точка.

Ако се условим, както в равнинния случай, за ω да избираме само главната стойност ω_0, то на всяка точка M, нележаща на правата p, ще съответства точно една тройка полярни координати

$$\rho > 0, \quad 0 \leq \omega_0 < 2\pi, \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

Когато M е върху правата p, но е различна от полюса O, то ъгълът ω е неопределен (т.е. за ω можем да изберем произволно число), полярното разстояние ρ е положително число, а ъгълът ϑ е равен на 0 или π, в зависимост от това дали M е съответно върху лъча $g^{\rightarrow}$ или върху допълнителния му лъч $\bar{g}^{\rightarrow}$. Ако M съвпада с полюса O, ъгълът ω е неопределен, $\rho = 0$, а ъгълът ϑ е кое да е число в интервала $[0, \pi]$.

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е ортонормирана координатна система, за която $\overrightarrow{e_1} \uparrow\uparrow l^{\rightarrow}$, $\overrightarrow{e_3} \uparrow\uparrow g^{\rightarrow}$ и равнинната ортонормирана координатна система $K_0 = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ в равнината α има посока на въртене S. Освен това предполагаме, че K и дадената полярна координатна система имат една и съща единица-отсечка.

Ако M е произволна точка в пространството, която има полярни координати $(\rho, \omega, \vartheta)$ и ортонормирани координати (x, y, z), в сила са формулите

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\vartheta \cos\omega, \\ y &= \rho \sin\vartheta \sin\omega, \\ z &= \rho \cos\vartheta \end{aligned} \tag{2.76}$$

и обратните им –

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho \geq 0, \tag{2.77}$$

$$\cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\omega = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\omega = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Очевидно точката M описва цялото пространство, когато $\rho \in [0, +\infty)$, $\omega \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi]$.

Точката M е напълно определена с тройката (ρ_1, ω, z), където ρ_1 е полярният радиус на ортогоналната проекция M_1 на M върху α, относно описаната в 2.5.3. полярна координатна система в α, т.е. $\rho_1 = |OM_1| = |OM|\sin\vartheta = \rho\sin\vartheta$. Числата ρ_1, ω, z се наричат *полуполярни* или *цилиндрични координати на* M. Цилиндричните координати (ρ_1, ω, z) и ортонормираните координати (x, y, z) на M са свързани с формулите

$$x = \rho_1\cos\omega, \quad y = \rho_1\sin\omega, \quad z = z,$$

или

$$\rho_1 = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \rho_1 \geq 0,$$

$$\cos\omega = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\omega = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Задача 2.5.1 Спрямо афинната координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ в равнината α е даден векторът $\overrightarrow{v}(2, 1)$. Да се намерят координатите на $\overrightarrow{v}$, относно афинната координатна система $K' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$, ако:

а) $\overrightarrow{e_1}' = 4\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}' = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{e_2}$;

б) $\overrightarrow{e_1}' = 3\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_2}' = -2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.

Как са ориентирани K и K' в случаите а) и б)?

Упътване. Използвайте (2.64) и знака на трансформационната детерминанта Δ.

Задача 2.5.2 Спрямо афинната координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ в равнината α са дадени точките $A(2,1)$, $B(3,0)$ и $C(1,4)$. Да се определят:

а) афинната координатна система $K' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$, относно която $A(1,6)$, $B(1,9)$ и $C(3,1)$;

б) ориентацията на K' относно K;

в) координатите на точките O, E_1 и E_2 относно K', ако $\overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{e_2}$.

Решение. а) Заместваме в трансформационните формули (2.65) съответните координати на точките A, B и C относно K и K'. Получаваме

$$\begin{array}{ll} 2 = a + \alpha_1 + 6\alpha_2, & 1 = b + \beta_1 + 6\beta_2, \\ 3 = a + \alpha_1 + 9\alpha_2, & 0 = b + \beta_1 + 9\beta_2, \\ 1 = a + 3\alpha_1 + \alpha_2, & 4 = b + 3\beta_1 + \beta_2 \end{array}$$

От горната система намираме $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{7}{3}$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{3}$, $\beta_1 = \dfrac{2}{3}$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{3}$, $\beta_2 = -\dfrac{1}{3}$ и следователно координатната система K' е определена с формулите

$$\overrightarrow{OO'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{e_1} + \frac{7}{3}\overrightarrow{e_2},$$

$$\overrightarrow{e_1}' = \frac{1}{3}\overrightarrow{e_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{e_2},$$

$$\overrightarrow{e_2}' = \frac{1}{3}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{e_2}.$$

б) Тъй като трансформационната детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

е отрицателна, координатните системи K и K' са противоположно ориентирани.

в) За адюнгираните количества A_1, B_1, A_2, B_2 съответно на α_1, β_1, α_2, β_2 в Δ намираме

$$A_1 = -\frac{1}{3}, \quad B_1 = -\frac{1}{3}, \quad A_2 = -\frac{2}{3}, \quad B_2 = \frac{1}{3}$$

и формулите (2.66) приемат вида

$$\begin{aligned} x' &= (x + \frac{1}{3}) + (y - \frac{7}{3}) = x + y - 2, \\ y' &= 2(x + \frac{1}{3}) - (y - \frac{7}{3}) = 2x - y + 3. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Относно K точките O, E_1 и E_2 имат съответно координати $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$. Като заместим последователна тези стойности вместо x и y в (2.78), получаваме $O(-2,3)$, $E_1(-1,5)$ и $E_2(-1,2)$ относно K'.

Задача 2.5.3 Дължините на страните на правоъгълника $ABCD$ са $|AB| = 2$ и $|AD| = 1$. Посоката на обикаляне на контура $ABCD$ съвпада с положителната посока на равнината. Една ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ има за начало $O = A$, абсцисна ос Ox - правата AB, ориентирана от A към B, ординатна ос Oy - правата AD, ориентирана от A към D. Афинната координатна система $K' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$ има за начало O' пресечната точка на диагоналите на правоъгълника и координатни вектори $\overrightarrow{e_1}' = \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{e_2}' = \overrightarrow{O'D}$. Да се намерят трансформационните формули между K и K'.

Решение. Имаме $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Тогава $\overrightarrow{e_1}' = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_2}' = \overrightarrow{O'D} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AO'} = -\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{e_2}$,

$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{e_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{e_2}$ и следователно

$$a = 1,\ b = \frac{1}{2},\ \alpha_1 = 2,\ \beta_1 = 1,\ \alpha_2 = -1,\ \beta_2 = \frac{1}{2}. \tag{2.79}$$

Като заместим (2.79) в (2.63), (2.64), (2.65) и (2.66), получаваме търсените трансформационни формули. Например от (2.65) и (2.66) получаваме съответно

$$x = 1 + 2x' - y', \quad y = \frac{1}{2} + x' + \frac{1}{2}y'$$

и

$$x' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y, \quad y' = -\frac{1}{2}x + y.$$

Задача 2.5.4 Равностранният $\triangle ABC$ има страна с дължина 4. Афинната координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ има начало $O = A$, абсцисна ос Ox - правата AB, ориентирана от A към B и ординатна ос Oy - правата AC, ориентирана от A към C. Освен това имаме, че $|\overrightarrow{e_1}| = 3$, $|\overrightarrow{e_2}| = 6$. Ортонормираната координатна система $K' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$ има за начало медицентъра на $\triangle ABC$, абсцисна ос $O'x'$ - правата през O', ориентирана с вектора $\overrightarrow{AB}$. Да се намерят трансформационните формули между K и K'.

Решение. От

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{e_1}' = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}, \overrightarrow{e_2}' = \frac{\overrightarrow{O'C}}{|O'C|},$$

като отчетем $\overrightarrow{e_1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e_2} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, намираме

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{4}{9}\overrightarrow{e_1} + \frac{2}{9}\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_1}' = \frac{1}{3}\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}' = \varepsilon\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\overrightarrow{e_1} + \frac{\sqrt{3}}{9}\overrightarrow{e_2}\right),$$

където $\varepsilon = \pm 1$ в зависимост от това дали K и K' са съответно еднакво или противоположно ориентирани. Тогава

$$a = \frac{4}{9},\ \ b = \frac{2}{9},\ \alpha_1 = \frac{1}{3},\ \ \beta_1 = 0,\ \alpha_2 = -\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{9},\ \beta_2 = \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{9}$$

и трансформационните формули за точковите координати са

$$x = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}x' - \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{9}y', \quad y = \frac{2}{9} + \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{9}y'$$

и

$$x' = -2 + 3x + 3y, \quad y' = \varepsilon\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} + 3\sqrt{3}y\right).$$

Задача 2.5.5 Спрямо ортонормираната координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ са дадени точките $A(2,-3)$ и $B(4,3)$. Ортонормираната координатна система $K' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$ е противоположно ориентирана на K и има за начало O' средата на отсечката AB и абсцисна ос $O'x'$ - правата AB, ориентирана от A към B. Да се намерят трансформационните формули между K и K'. Да се намерят координатите относно K' на единичния вектор $\overrightarrow{e} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}$.

Упътване. От

$$\overrightarrow{e_1}' = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2})$$

следва

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin\vartheta = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

където $\vartheta = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}')$. Приложете (2.67) и (2.68) при $\varepsilon = -1$.

Отговор. $x = 3 + \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y')$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y')$; $\overrightarrow{e}\left(-\dfrac{7}{\sqrt{130}}, \dfrac{9}{\sqrt{130}}\right)$.

Задача 2.5.6 Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е паралелепипед, в който O_1, O_2 и O_3 са пресечните точки на диагоналите съответно в успоредниците ADD_1B_1, ABB_1A_1 и $ABCD$, а O' е пресечната точка на телесните диагонали. Да се намерят трансформационните формули между афинните координатни системи $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ и $K' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$, ако $O = A$, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{e_1}' = \overrightarrow{O'O_1}$, $\overrightarrow{e_2}' = \overrightarrow{O'O_2}$, $\overrightarrow{e_3}' = \overrightarrow{O'O_3}$. Определете ориентацията на K' относно K.

Решение. От

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}), \quad \overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})$$

и $\overrightarrow{O'O_1} = \overrightarrow{OO_1} - \overrightarrow{OO'}$ намираме $\overrightarrow{e_1}' = -\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}$. Аналогично получаваме $\overrightarrow{e_2}' = -\frac{1}{2}\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}' = -\frac{1}{2}\overrightarrow{e_3}$. Тогава

$$a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{2},\ \alpha_1 = -\frac{1}{2},\ \beta_1 = 0,\ \gamma_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = 0,\ \beta_2 = -\frac{1}{2},\ \gamma_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \beta_3 = 0,\ \gamma_2 = -\frac{1}{2}$$

и като заместим в (2.69) и (2.71), получаваме съответно

$$\lambda = -\frac{1}{2}\lambda', \quad \mu = -\frac{1}{2}\mu', \quad \nu = -\frac{1}{2}\nu', \tag{2.80}$$

и

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x', \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y', \quad z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z'. \tag{2.81}$$

От (2.80) и (2.81) лесно намираме и обратните формули.

Тъй като трансформационната детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}$$

е отрицателна, то K и K' са противоположно ориентирани.

Задача 2.5.7 Даден е тетраедърът $OABC$, в който M_1, M_2 и M_3 са медицентровете съответно в триъгълниците OBC, OCA и OAB. Да се намерят трансформационните формули между афинните координатни системи $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ и $K' = O\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$, ако $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{e_1}' = \overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{e_2}' = \overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{e_3}' = \overrightarrow{OM_3}$. Определете ориентацията на K' относно K.

Упътване. Като използвате задача 2.2.6, ще получите $\overrightarrow{e_1}'\left(0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{e_2}'\left(\dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{e_3}'\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right)$ относно K.

Отговор.
$\lambda = \dfrac{1}{3}(\mu' + \nu')$, $\mu = \dfrac{1}{3}(\lambda' + \nu')$, $\nu = \dfrac{1}{3}(\lambda' + \mu')$;
$x = \dfrac{1}{3}(y' + z')$, $y = \dfrac{1}{3}(x' + z')$, $z = \dfrac{1}{3}(x' + y')$;
K и K' са еднакво ориентирани.

Задача 2.5.8 Дадени са трансформационните формули

$$\begin{aligned} x &= -1 - 2x' - y' - z', \\ y &= -y' - z', \\ z &= 1 + x' + 3y' + z' \end{aligned} \tag{2.82}$$

за преминаване от афинната координатна система $K' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$ към афинната координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$. Да се намерят:

а) трансформационните формули за преминаване от K към K';

б) координатите относно K' на координатните вектори на K;

в) точката M, за която $x' = x,\quad y' = y,\quad z' = z$.

Решение. а) От (2.82) намираме трансформационната детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \tag{2.83}$$

и съответните адюнгирани количества на елементите на Δ:

$$\begin{aligned} &A_1 = 2, && B_1 = -2, && \Gamma_1 = 0, \\ &A_2 = -1, && B_2 = -1, && \Gamma_2 = -2, \\ &A_3 = 1, && B_3 = 5, && \Gamma_3 = 2. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Освен това имаме

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 1. \tag{2.85}$$

Като заместим (2.83), (2.84) (2.85) в (2.70) и (2.72), намираме

$$\begin{aligned} \lambda' &= -\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu, \\ \mu' &= \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{2}\nu, \\ \nu' &= -\frac{1}{4}\lambda - \frac{5}{4}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{aligned} \tag{2.86}$$

и

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}y, \\ y' &= \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}(z-1), \\ z' &= -\frac{1}{4}(x+1) - \frac{5}{4}y - \frac{1}{2}(z-1). \end{aligned}$$

б) Относно K векторите $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_3}$ имат съответно координати $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$. Като заместим тези стойности в (2.86), получаваме, че същите вектори имат относно K' съответно координати $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right)$ и $\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

в) Полагаме в (2.82) $x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z$ и решаваме получената система. Получаваме

$$x' = x = -\frac{2}{5}, \quad y' = y = -\frac{1}{5}, \quad z' = z = \frac{2}{5}.$$

Задача 2.5.9 Относно ортонормираната координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ са дадени точките $A(1,1)$ и $B(1,\sqrt{3})$. Да се намерят полярните координати на същите точки спрямо полярната координатна система, която има същото начало O, полярна ос, която е еднопосочна с $\overrightarrow{e_1}$ и посока на въртене, еднаква с посоката на K.

Решение. Като заместим координатите на A в (2.75), получаваме $\rho = \sqrt{2}$, $\cos\omega = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ако се ограничим с главната стойност на ω, намираме $\omega_0 = \dfrac{\pi}{4}$ и следователно $A(\rho = \sqrt{2}, \omega_0 = \dfrac{\pi}{4})$.

Аналогично, заместването на координатите на B в (2.75) дава $\rho = 2$, $\cos\omega = \dfrac{1}{2}$, откъдето заключаваме, че $B(\rho = 2, \omega_0 = \dfrac{\pi}{3})$.

Задача 2.5.10 Същите изисквания като в задача 2.5.9 за точките $A(-1,1)$ и $B(\sqrt{3},1)$.

Отговор. $A(\rho = \sqrt{2}, \omega_0 = \dfrac{3\pi}{4})$, $B(\rho = 2, \omega_0 = \dfrac{\pi}{6})$.

Задача 2.5.11 Координатите (x, y) на точката M относно ортонормираната координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ удовлетворяват уравненията:

а) $Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| \neq 0$;

б) $x^2 + y^2 - R^2 = 0, \ R > 0$;

в) $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Какви уравнения ще удовлетворяват полярните координати (ρ, ω) на M относно полярната координатна система от задача 2.5.9?

Упътване. Използвайте (2.74).

Отговор. а) $\rho = -\dfrac{C}{A\cos\omega + B\sin\omega}$;
б) $\rho = R$; в) $\rho = \cos\omega$.

Задача 2.5.12 Точката A има ортонормирани координати $(1, 0, 1)$. Да се намерят полярните координати $(\rho, \omega, \vartheta)$ на същата точка, ако полярните координати са свързани с ортонормираните чрез (2.77).

Отговор. $A(\rho = \sqrt{2}, \omega_0 = 0, \vartheta = \dfrac{\pi}{4})$

Задача 2.5.13 Ортонормираните координати (x, y, z) на точката M удовлетворяват уравненията:
а) $Ax + By + Cz + D = 0, \quad |A| + |B| + |C| \neq 0$;
б) $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \ R > 0$.
Какви уравнения ще удовлетворяват полярните координати $(\rho, \omega, \vartheta)$ на M, ако полярните координати са свързани с ортонормираните чрез (2.76)?

Отговор. а) $\rho = -\dfrac{D}{A\sin\vartheta\cos\omega + B\sin\vartheta\sin\omega + C\cos\vartheta}$;
б) $\rho = R$.

Глава 3

Системи линейни уравнения

3.1 Метод на Гаус за решаване на системи линейни уравнения. Формули на Крамер

3.1.1 Метод на Гаус за решаване на системи линейни уравнения

Една система от m линейни уравнения с n неизвестни има вида

$$
\begin{array}{|c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{array}
\tag{3.1}
$$

Числата $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ се наричат *коефициенти пред неизвестните*, а числата $b_1, b_2, \dots, b_m$ - *свободни членове*. Ако $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, системата (3.1) се нарича *хомогенна*, а в противен случай - *нехомогенна*. Матрицата от коефициентите пред неизвестните

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| \tag{3.2}$$

се нарича *матрица на системата* (3.1), а матрицата

$$\overline{A} = \left\| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right\| \tag{3.3}$$

- *разширена матрица* на разглежданата система.

Всяка n-орка числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, които заместени в (3.1), съответно вместо $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяват всяко от уравненията, се нарича *решение на системата.* Ако системата (3.1) има поне едно решение, тя се нарича *съвместима*, а когато няма решение – *несъвместима.* Една съвместима система се нарича *определена*, ако има точно едно решение и *неопределена* – ако има безбройно много решения.

Ще казваме, че две системи линейни уравнения са *еквивалентни* (*равносилни*), когато всяко решение на едната система е решение и на другата.

Всяка система линейни уравнения се преобразува в еквивалентна на нея система с помощта на следните *елементарни преобразувания*:

а) разменяне на местата на две уравнения;

б) умножаване на двете страни на едно уравнение с различно от нула число;

в) прибавяне към двете страни на едно уравнение съответните страни на друго уравнение, умножени с едно и също число.

След краен брой такива преобразувания системата (3.1) може да бъде приведена в следната трапецовидна форма:

$$(3.4)\qquad \left|\begin{array}{r} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1s}x_s + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2s}x_s + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ c_{33}x_3 + \cdots + c_{3s}x_s + \cdots + c_{3n}x_n = d_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{ss}x_s + \cdots + c_{sn}x_n = d_s \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + \cdots + 0.x_s + \cdots + 0.x_n = 0 \\ 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + \cdots + 0.x_s + \cdots + 0.x_n = 1, \end{array}\right.$$

където $c_{ij} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s; \quad s \leq \min(m, n)$.

Системата (3.4) може и да не съдържа уравнения от вида

$$(3.5)\qquad 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + \cdots + 0.x_s + \cdots + 0.x_n = 0$$

или

$$(3.6)\qquad 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + \cdots + 0.x_s + \cdots + 0.x_n = 1.$$

Понеже уравненията от вида (3.5) са тъждествено удовлетворени за кои да е стойности на неизвестните, то те могат да не се разглеждат, т.е. да бъдат отстранени от системата.

Уравненията от вида (3.6) нямат решение и ако системата (3.4) съдържа такова уравнение, тя също няма решение, т.е. е несъвместима.

В частност, при $s = n$, системата (3.1) може да се приведе в еквивалентна на нея система, която има следната триъгълна форма:

$$(3.7)\qquad \left|\begin{array}{r} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ c_{33}x_3 + \cdots + c_{3n}x_n = d_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{nn}x_n = d_n, \end{array}\right.$$

където $c_{ij} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Ако системата (3.1) се преобразува в еквивалентна на нея система от вида (3.7), тя има единствено решение, т.е. тя е определена. Тогава от последното уравнение на (3.7) определяме x_n и получената стойност заместваме в предпоследното уравнение. От него определяме x_{n-1} и намерените стойности за x_n и x_{n-1} заместваме в $(n-2)$-то уравнение и т.н., докато стигнем до първото уравнение и от него определим x_1.

Ако системата (3.1) се преобразува в еквивалентна на нея система от вида (3.4), която не съдържа уравнения от вида (3.6), тя има безройно много решения, които очевидно зависят от $n-s$ променливи, т.е. тя е неопределена. В този случай можем да изразим x_s от $s-$тото уравнение чрез $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$ и замествайки в останалите уравнения, получаваме система линейни уравнения относно $x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}$, за решаването на която можем да използваме приложената вече схема.

Описаният по-горе метод за решаване на система линейни уравнения от вида (3.1), чрез привеждане в еквивалентна на нея система от вида (3.4) или (3.7), с помощта на елементарните преобразувания а) – в), се нарича *метод на Гаус* или *метод на последователното изключване на неизвестните*. От него непосредствено се вижда, че всяка хомогенна система, в която броят на неизвестните е по-голям от броят на уравненията, има ненулеви решения.

Решавайки една система от вида (3.1) по метода на Гаус, ние всъщност привеждаме в трапецовидна или триъгълна форма нейната разширена матрица (3.3). Следователно описаните елементарни преобразувания се извършват с редовете на тази матрица и получената нова матрица (т.е. разширената матрица на получената еквивалентна система) ще свързваме със старата чрез знака „$\sim$“ (чете се „вълнà“). Освен това ще отделяме стълба, съдържащ свободните членове, от останалите стълбове с прекъсната отвесна линия.

3.1.2 Формули на Крамер

Да разгледаме системата от n линейни уравнения с n неизвестни

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array} \right. \tag{3.8}$$

Ако детерминантата на системата

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

е различна от нула, системата (3.8) има единствено решение от вида

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{3.9}$$

където Δ_i е детерминанта също от n-ти ред, която е получена от Δ чрез замяна на i-тия стълб със стълба на свободните членове $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Формулите (3.9) се наричат *формули на Крамер за линейната система* (3.8).

3.1.3 Матрична форма на системи линейни уравнения

Да разгледаме системата линейни уравнения (3.8). С помощта на матриците

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad X = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \right\|$$

тази система може да запише в *матричната форма*

$$AX = B.$$

Ако A е неособена матрица, горното матрично уравнение има единствено решение

$$X = A^{-1}B.$$

Този метод за решаване на системи от n линейни уравнения с n неизвестни, чиито матрици са неособени, се нарича *матричен*.

Задача 3.1.1 Като използвате метода на Гаус, решете следните системи:

$$\text{а)} \left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \\ 3x_1 & -5x_2 & & = 4 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & = 4; \end{array} \right.$$

$$\text{б)} \left| \begin{array}{rrrrl} 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & +2x_4 & = -3 \\ 6x_1 & +8x_2 & +x_3 & +5x_4 & = -8 \\ 3x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +5x_4 & = -6 \\ 3x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +7x_4 & = -8; \end{array} \right.$$

$$\text{в)} \left| \begin{array}{rrrrl} 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 4 \\ x_1 & +2x_2 & -5x_3 & +6x_4 & = -10 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & +x_4 & = 2 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = -2; \end{array} \right.$$

$$\text{г)} \left| \begin{array}{rrrrrl} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & +2x_4 & -x_5 & = 3 \\ 3x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = 8 \\ 3x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & -2x_5 & = 4 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & +x_5 & = 7 \\ 4x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = 9; \end{array} \right.$$

д) $\left|\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = 8 \\ & 2x_2 & +2x_3 & +8x_4 & = -5 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = 4 \\ 3x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +10x_4 & = -2; \end{array}\right.$

е) $\left|\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 1 \\ & -3x_2 & +2x_3 & -8x_4 & = 8 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = -4 \\ 2x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +5x_4 & = -6; \end{array}\right.$

ж) $\left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +5x_3 & -3x_4 & = -4 \\ x_1 & +5x_2 & +5x_3 & -4x_4 & = -4 \\ x_1 & +8x_2 & +7x_3 & -5x_4 & = -8; \end{array}\right.$

з) $\left|\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & = 5 \\ & x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +2x_5 & +6x_6 & = 17 \\ 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & -3x_6 & = -6 \\ 4x_1 & +3x_2 & -x_3 & +2x_4 & +2x_5 & -2x_6 & = 7; \end{array}\right.$

и) $\left|\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = 2 \\ 4x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = 3; \end{array}\right.$

к) $\left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 5 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = 8 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 2 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = 11; \end{array}\right.$

л) $\left|\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 2 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +3x_4 & +3x_5 & = 5 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & -x_5 & = 1; \end{array}\right.$

м) $\left|\begin{array}{rrrl} x_1 & +4x_2 & -4x_3 & = -2 \\ 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = 12 \\ 5x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 7; \end{array}\right.$

н) $\left|\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & -8x_3 & -x_4 & -3x_5 & = -3 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = 3 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +4x_4 & +4x_5 & = 1 \\ 5x_1 & +9x_2 & +4x_3 & +7x_4 & +5x_5 & = 8; \end{array}\right.$

о) $\left|\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +2x_2 & -9x_3 & +4x_4 & -6x_5 & = -1 \\ 2x_1 & -x_2 & +7x_3 & -3x_4 & +5x_5 & = 2 \\ x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +5x_4 & -7x_5 & = 3 \\ x_1 & -x_2 & & -2x_4 & +3x_5 & = 1. \end{array}\right.$

Решение. а) Записваме разширената матрица

$$\left\|\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right\|. \tag{3.10}$$

Посредством елементарни преобразувания ще я приведем в трапецовидна (или триъгълна) форма. Понеже в първото уравнение коефициентът пред променливата x_1 не е нула, запазваме първия ред на матрицата без изменение. За да изключим неизвестното x_1 от останалите три уравнения, умножаваме последователно първия ред на (3.10) с -3, -2 и -1 и го прибавяме съответно към втория, третия и четвъртия ред. Получаваме матрицата

$$\left\|\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right\|. \tag{3.11}$$

Във второто уравнение на новата система коефициентът пред x_2 е различен от нула и поради това не се налага да го преобразуваме. За да изключим неизвестното x_2 от третото и четвъртото уравнение, умножаваме последователно втория ред на (3.11) с -3 и -1 и го прибавяме съответно към третия и четвъртия:

$$\left\| \begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{3.12}$$

Приведохме матрицата в желания вид. При това, понеже елементите на последния ред на (3.12) са нули, можем да отстраним уравнението $0.x_1+0.x_2+0.x_3 = 0$ и получаваме системата

$$\left| \begin{array}{rrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 = & 0 \\ & x_2 & -3x_3 = & 4 \\ & & 8x_3 = & -8. \end{array} \right. \tag{3.13}$$

От третото уравнение на (3.13) определяме $x_3 = -1$ и заместваме във второто. Получаваме $x_2 + 3 = 4$ и следователно $x_2 = 1$. Накрая заместваме $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ в първото уравнение и намираме $x_1 = 3$.

в) Преобразуваме последователно разширената матрица:

$$\left\| \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 6 & -10 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & 5 & -7 & 10 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -17 & 15 & -34 \\ 0 & 0 & -11 & 9 & -22 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -17 & 15 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \end{array} \right\|.$$

Разглежданата система е еквивалентна на системата

$$(3.14)\qquad \left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 = & -2 \\ & x_2 & -4x_3 & +4x_4 = & -8 \\ & & -17x_3 & +15x_4 = & -34 \\ & & & 12x_4 = & 0. \end{array}\right.$$

От (3.14) намираме $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

г) Записваме разширената матрица

$$(3.15)\qquad \left\|\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -1 & 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right\|.$$

За удобство разменяме местата на първия и на четвъртия стълб на (3.15) и по този начин въвеждаме нова номерация на неизвестните: x_4, x_2, x_3, x_1, x_5. Получаваме

$$\left\|\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right\|.$$

Първия ред, умножен с 2, прибавяме към втория. Втория ред, умножен с -1, прибавяме към третия. Третия ред, умножен с -1, прибавяме към четвъртия. Най-после прибавяме първия ред към последния. Получаваме

$$\left\|\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & 9 & 0 & 18 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & 16 \end{array}\right\|.$$

Прибавяме третия ред към втория и четвъртия към третия:

$$\left\|\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 4 & 22 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & 16 \end{array}\right\|.$$

Втория ред, умножен с 4, прибавяме към четвъртия и разменяме местата на третия и петия ред:

$$\left\|\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 4 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 28 & 35 & 13 & 83 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right\|.$$

Третия ред, умножен с -28, прибавяме към четвъртия, а четвъртия, а умножен с -2 – към петия:

$$\left\|\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 4 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -161 & -43 & -365 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -3 & -33 \end{array}\right\|.$$

Петия ред, умножен с $-\dfrac{32}{3}$, прибавяме към четвъртия, а самия пети ред делим на -3:

$$\left\|\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 4 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 11 \end{array}\right\|.$$

Най-после, четвъртият ред, умножен с 5, прибавяме към последния:

$$\left\|\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 4 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & -54 \end{array}\right\|.$$

Получената матрица има желаната триъгълна форма. Тогава дадената система е еквивалентна на системата

$$\left|\begin{array}{rrrrrrr} -x_4 & -x_2 & +2x_3 & +3x_1 & +x_5 & = & 7 \\ & x_2 & +7x_3 & +9x_1 & +4x_5 & = & 22 \\ & & x_3 & +7x_1 & +2x_5 & = & 16 \\ & & & -x_1 & -11x_5 & = & -13 \\ & & & & -54x_5 & = & -54 \end{array}\right.$$

и има единственото решение $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$.

з) Преобразуваме разширената матрица:

$$\left\|\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 6 & 17 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & -3 & -6 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 2 & -2 & 7 \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 6 & 17 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & -6 & -21 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -2 & -6 & -13 \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 6 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 6 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

Дадената система прие трапецовидната форма:

$$\left|\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 = & 5 \\ & x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +2x_5 & +6x_6 = & 17 \\ & & x_3 & & & = & -2 \end{array}\right.$$

Тази система е неопределена. За свободни неизвестни можем да изберем x_4, x_5 и x_6. Получаваме $x_1 = -16 + x_4 + x_5 + 5x_6$, $x_2 = 23 - 2x_4 - 2x_5 - 6x_6$, $x_3 = -2$.

н) Преобразуваме разширената матрица по следния начин:

$$\left\|\begin{array}{rrrrrcr} 1 & 1 & -8 & -1 & -3 & | & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & | & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 4 & | & 1 \\ 5 & 9 & 4 & 7 & 5 & | & 8 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrrrrcr} 1 & 1 & -8 & -1 & -3 & | & -3 \\ 0 & 1 & 11 & 3 & 5 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & -5 \\ 0 & -1 & -11 & -3 & -5 & | & -7 \end{array}\right\|.$$

Тъй като преобразуваната система съдържа уравнение $0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 = -5$, което няма решение, то и тя няма решение.

Отговор. б) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$;

д) $x_1 = \dfrac{1}{4}$, $x_2 = -\dfrac{13}{2}$, $x_3 = -\dfrac{3}{2}$, $x_4 = \dfrac{11}{8}$;

е) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = \dfrac{5}{3}$, $x_4 = -\dfrac{4}{3}$;

ж) $x_1 = 6 + \dfrac{5}{2}x_2$, $x_3 = -2 - \dfrac{3}{2}x_2$, $x_4 = 0$;

и) $x_1 = 10 - 10x_2$, $x_3 = 15 - 16x_2$, $x_4 = 4 - 5x_2$;

к) $x_1 = 2 + x_4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$;

л) $x_1 = -1 + 2x_4 + 2x_5$, $x_2 = \dfrac{3}{2} - x_4 - x_5$, $x_3 = \dfrac{3}{2} - 2x_4 - 2x_5$;

м) системата няма решение; о) системата няма решение.

Задача 3.1.2 Решете следните системи в зависимост от стойностите на участващите параметри λ и μ:

$$\text{а)}\ \left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & -x_3 & -4x_4 = & -2 \\ 2x_1 & +3x_2 & +6x_3 & +8x_4 = & 5 \\ x_1 & -6x_2 & -9x_3 & -20x_4 = & -11 \\ 3x_1 & +7x_2 & +13x_3 & +(\lambda+20)x_4 = & 13; \end{array}\right.$$

б) $$\left|\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & +4x_4 = & 5 \\ 2x_1 & & -x_3 & -2x_4 = & -3 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +2x_4 = & 2 \\ (\lambda-4)x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 = & 1; \end{array}\right.$$

в) $$\left|\begin{array}{lrrrl} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 3 \\ 4x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = 5 \\ 6x_1 & +9x_2 & +5x_3 & +6x_4 & = 7 \\ 8x_1 & +12x_2 & +7x_3 & +\lambda x_4 & = 9; \end{array}\right.$$

г) $$\left|\begin{array}{rrrrl} \lambda x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 2 \\ x_1 & +\lambda x_2 & +x_3 & +x_4 & = 2 \\ x_1 & +x_2 & +\lambda x_3 & +x_4 & = 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +\lambda x_4 & = 2; \end{array}\right.$$

д) $$\left|\begin{array}{rrrrr} (1-\lambda)x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +x_4 = & 2 \\ 3x_1 & (1-\lambda)x_2 & +5x_3 & +x_4 = & 2 \\ 3x_1 & +5x_2 & +(1-\lambda)x_3 & +x_4 = & -3 \\ 3x_1 & +5x_2 & +x_3 & +(1-\lambda)x_4 = & -3; \end{array}\right.$$

е) $$\left|\begin{array}{rrrrr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +2x_4 = & 1 \\ 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & -10x_2 & +15x_3 & +13x_4 = & \lambda+6 \\ 4x_1 & -2x_2 & +(6-\mu)x_3 & -4x_4 = & 1 \\ 2x_1 & -6x_2 & +9x_3 & +9x_4 = & 3. \end{array}\right.$$

Решение. в) Преобразуваме разширената матрица

$$\left\|\begin{array}{rrrrcr} 2 & 3 & 1 & 2 & | & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 4 & | & 5 \\ 6 & 9 & 5 & 6 & | & 7 \\ 8 & 12 & 7 & \lambda & | & 9 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrrrcr} 2 & 3 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda-8 & | & -1 \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{Vmatrix}$$

и получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad + 2x_4 = 3 \\ \qquad\qquad x_3 \qquad\quad = -1 \\ \qquad\qquad (\lambda - 8)x_4 = 0. \end{array} \right. \tag{3.16}$$

(i) Ако $\lambda = 8$, след отстраняване на уравнението $0.x_4 = 0$, системата (3.16) приема вида

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ \qquad\qquad x_3 \qquad = -1. \end{array} \right.$$

Тя има решение $x_1 = 2 - \dfrac{3}{2}x_2 - x_4$, $x_3 = -1$.

(ii) Ако $\lambda \neq 8$, системата има решение $x_1 = 2 - \dfrac{3}{2}x_2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$.

е) Преобразуваме разширената матрица

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & | & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & | & 1 \\ 4 & -10 & 15 & 13 & | & \lambda+6 \\ 4 & -2 & 6-\mu & -4 & | & 1 \\ 2 & -6 & 9 & 9 & | & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & | & -1 \\ 0 & -6 & 9 & 13 & | & \lambda+4 \\ 0 & 2 & -\mu & -4 & | & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 & | & 1 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 3-\mu & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & | & -1 \\ 0 & 0 & 3-\mu & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \lambda+1 \end{Vmatrix}$$

и получаваме системата

$$(3.17)\qquad \left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +2x_4 = & 1 \\ & 2x_2 & -3x_3 & -4x_4 = & -1 \\ & & (3-\mu)x_3 & = & 0 \\ & & & x_4 = & 0 \\ & & & 0.x_4 = & \lambda+1. \end{array}\right.$$

(i) Ако $\lambda \neq -1$, уравнението $0.x_4 = \lambda + 1$ няма решение и следователно системата е несъвместима.

(ii) Ако $\lambda = -1$ и $\mu \neq 3$, системата (3.17) приема вида

$$\left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +2x_4 = & 1 \\ & 2x_2 & -3x_3 & -4x_4 = & -1 \\ & & x_3 & = & 0 \\ & & & x_4 = & 0 \end{array}\right.$$

и има единствено решение $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

(iii) Ако $\lambda = -1$ и $\mu = 3$, дадената система е еквивалентна на системата

$$\left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +2x_4 = & 1 \\ & 2x_2 & -3x_3 & -4x_4 = & -1 \\ & & & x_4 = & 0, \end{array}\right.$$

която очевидно е неопределена. Избирайки x_3 за свободно неизвестно, получаваме $x_1 = -6x_3$, $x_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}x_3$, $x_4 = 0$.

Отговор. а) При $\lambda = 0$ системата е несъвместима, а при $\lambda \neq 0$ системата е неопределена: $x_1 = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5\lambda} - \dfrac{3}{5}x_3$, $x_2 = \dfrac{9}{5} - \dfrac{16}{5\lambda} - \dfrac{8}{5}x_3$, $x_4 = \dfrac{1}{\lambda}$.

б) При всяка стойност на λ системата има единствено решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$.

г) Ако $\lambda \neq 1, -3$, системата има единствено решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{2}{\lambda + 3}$.

При $\lambda = 1$ системата е неопределена и $x_1 = 2 - x_2 - x_3 - x_4$.
Ако $\lambda = -3$, системата е несъвместима.
д) При $\lambda \neq 0, -2, -4, 10$ системата има единствено решение

$$x_1 = x_2 = -\frac{2\lambda - 22}{(\lambda+4)(\lambda-10)}, \quad x_3 = x_4 = \frac{3\lambda - 28}{(\lambda+4)(\lambda-10)}.$$

Ако $\lambda = -4$ или $\lambda = 10$, системата е несъвместима.
При $\lambda = -2$ системата е неопределена. Имаме

$$x_1 = -\frac{13}{3} - 3x_2, \quad x_3 = \frac{5}{2} + x_2, \quad x_4 = x_2.$$

Ако $\lambda = 0$, системата е неопределена и

$$x_1 = \frac{1}{4} + x_4, \quad x_2 = \frac{9}{4} + x_4, \quad x_3 = -1 - x_4.$$

Задача 3.1.3 Като използвате формулите на Крамер, решете системите:

а) $\left|\begin{array}{rrrrr} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & & -x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = & 0; \end{array}\right.$

б) $\left|\begin{array}{rrrrr} x_1 & -2x_2 & & = & -8 \\ x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 10; \end{array}\right.$

в) $\left|\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 0; \end{array}\right.$

г) $\left|\begin{array}{rrrrr} 3x_1 & -2x_2 & -3x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 2; \end{array}\right.$

д) $\left|\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +2x_2 & -4x_3 & -6x_4 & = & -1\\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = & -3\\ 2x_1 & +3x_2 & -8x_3 & -4x_4 & = & 5\\ 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & -7;\end{array}\right.$

е) $\left|\begin{array}{rrrrrr} 2x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +x_4 & = & 0\\ x_1 & +2x_2 & +5x_3 & & = & -7\\ x_1 & -2x_2 & & -5x_4 & = & -5\\ x_1 & -2x_2 & +2x_3 & & = & -9;\end{array}\right.$

ж) $\left|\begin{array}{lllll} x_1 & +ax_2 & +a^2x_3 & = & a^3\\ x_1 & +bx_2 & +b^2x_3 & = & b^3\\ x_1 & +cx_2 & +c^2x_3 & = & c^3,\end{array}\right.$
при $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$;

з) $\left|\begin{array}{rrrrrl} -x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & a_1\\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = & a_2\\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & a_3\\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = & a_4;\end{array}\right.$

и) $\left|\begin{array}{cccccl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1\\ ax_1 & +bx_2 & +bx_3 & +ax_4 & = & c\\ b_1x_1 & +a_1x_2 & +b_1x_3 & +a_1x_4 & = & c_1\\ b_2x_1 & +b_2x_2 & +a_2x_3 & +a_2x_4 & = & c_2,\end{array}\right.$
при $a \neq b$, $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$;

Решение. а) Пресмятаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 3 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix} = 18 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1\\ 4 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{vmatrix} = 18,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix} = -18$$

и следователно

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

ж) Имаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = W(a,b,c) = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-a)(c-b)(bc+ca+ab),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$$

и получаваме

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = abc, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -(bc+ca+ab), \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = a+b+c.$$

Отговор. б) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$;
в) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$;
г) $x_1 = \dfrac{3}{4}$, $x_2 = -\dfrac{7}{2}$, $x_3 = \dfrac{11}{4}$;
д) $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -\dfrac{3}{2}$, $x_4 = \dfrac{1}{2}$;
е) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 0$;
з) $x_1 = \dfrac{1}{4}(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$, $x_2 = \dfrac{1}{4}(a_1 - a_2 + a_3 + a_4)$,
$x_3 = \dfrac{1}{4}(a_1 + a_2 - a_3 + a_4)$, $x_4 = \dfrac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 - a_4)$;

и) $x_1 = \frac{1}{2}(-\frac{c-a}{b-a} + \frac{c_1-a_1}{b_1-a_1} + \frac{c_2-a_2}{b_2-a_2})$,

$x_2 = \frac{1}{2}(\frac{c-a}{b-a} - \frac{c_1-a_1}{b_1-a_1} + \frac{c_2-a_2}{b_2-a_2})$,

$x_3 = \frac{1}{2}(\frac{c-a}{b-a} + \frac{c_1-a_1}{b_1-a_1} - \frac{c_2-a_2}{b_2-a_2})$,

$x_4 = 1 - \frac{1}{2}(\frac{c-a}{b-a} + \frac{c_1-a_1}{b_1-a_1} + \frac{c_2-a_2}{b_2-a_2})$.

Задача 3.1.4 Като се използва матричния метод, да се решат системите линейни уравнения:

а) $\left| \begin{array}{rrrcr} x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = & 11 \\ & 3x_2 & -x_3 & = & 2; \end{array} \right.$

б) $\left| \begin{array}{rrrcr} 8x_1 & -29x_2 & +11x_3 & = & 5 \\ 5x_1 & -18x_2 & +7x_3 & = & 3 \\ -x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & -1; \end{array} \right.$

в) $\left| \begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & -15; \end{array} \right.$

г) $\left| \begin{array}{rrrcr} 5x_1 & +4x_2 & -x_3 & = & 2 \\ 10x_1 & +12x_2 & -3x_3 & = & 11 \\ & x_2 & +x_3 & = & 3; \end{array} \right.$

д) $\left| \begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & -2 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -8 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -4 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -6; \end{array} \right.$

$$\text{е)}\ \left|\begin{array}{llllrr} & x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 = & 1 \\ x_1 & & +x_3 & +x_4 & +x_5 = & -1 \\ x_1 & +x_2 & & +x_4 & +x_5 = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5 = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & -1. \end{array}\right.$$

Решение. а) Имаме

$$A = \left\| \begin{array}{rrr} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{r} 1 \\ 11 \\ 2 \end{array} \right\|, \quad X = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\|$$

и дадената система може да се запише във вида

$$AX = B.$$

Намираме

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \left\| \begin{array}{rrr} 10 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 7 \\ -9 & 3 & 1 \end{array} \right\|.$$

Тогава

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{22} \left\| \begin{array}{rrr} 10 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 7 \\ -9 & 3 & 1 \end{array} \right\| . \left\| \begin{array}{r} 1 \\ 11 \\ 2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\|$$

и следователно $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Отговор. б) $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$;

в) $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$;

г) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$;

д) $x_1 = -5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$;

е) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = -1$, $x_5 = 1$.

3.2 n-мерно векторно пространство. Линейна зависимост на вектори

3.2.1 n-мерно векторно пространство

Нека V е множество от числа, например множеството на рационалните числа, множеството на реалните числа, множеството на комплексните числа и т.н. Множеството

$$V_n = \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n - \text{пъти}},$$

в което са въведени операциите *събиране* и *умножение с число от* V, дефинирани чрез равенствата

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n),$$

се нарича *n-мерно векторно пространство.* Елементите $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), \ldots$ се наричат *n-мерни вектори* или накратко *вектори*, а числата, които ги определят – *техни координати.*

Два вектора се наричат *равни*, когато са равни съответните им координати. Векторът $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$ се нарича *противоположен* на вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, а векторът $o = (0, 0, \ldots, 0)$ – *нулев вектор.*

Операциите събиране на вектори и умножение на вектор с число притежават следните свойства:

1) $a + b = b + a$;
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) $a + o = a$;
4) $a + (-a) = o$;
5) $1.a = a$;
6) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$;
7) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
8) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

3.2.2 Линейна зависимост на вектори

Ще казваме, че векторите $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \geq 1)$ са *линейно зависими* (*образуват линейно зависима система от вектори*), ако съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, поне едно от които е различно от нула, такива че

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k = 0. \tag{3.18}$$

Ако векторите $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \geq 1)$ не са линейно зависими, те се наричат *линейно независими*, т.е. когато от равенството (3.18) следва $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Един вектор a се нарича *линейна комбинация на векторите* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ $(s \geq 1)$, когато може да се представи във вида

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_s a_s.$$

9) Един вектор е линейно зависим тогава и само тогава, когато е равен на нулевия.

10) Векторите $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ са линейно зависими точно тогава, когато поне един от тях е линейна комбинация на останалите.

11) Ако векторите $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \geq 1)$ са линейно зависими, то такива са и векторите $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}$ $(m \geq 1)$.

12) Ако векторите $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ са линейно независими, то такива са и векторите $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(1 \leq m < k)$.

13) Ако всеки вектор от системата

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{3.19}$$

се изразява като линейна комбинация на векторите от системата

$$b_1, b_2, \ldots, b_s$$

и $k > s$, то системата (3.19) е линейно зависима.

14) Всеки $n+1$ на брой n-мерни вектори са линейно зависими.

Задача 3.2.1 Намерете координатите на векторите:

а) $a_1 - 3a_2 + 4a_3$, ако $a_1 = (0, 1, -2, 3, 5)$, $a_2 = (2, -3, 0, -1, 4)$ и $a_3 = (-1, 3, -2, 0, 1)$;

б) $2a_1 - 3a_2 + a_3 - 5a_4$, ако $a_1 = (2, -1, 3)$, $a_2 = (0, -3, 1)$, $a_3 = (-1, 1, 1)$ и $a_4 = (2, 0, -1)$;

в) $2b_1 - b_2 + 4b_3 - 3b_4$, ако $b_1 = a_1 - a_2 + a_3$, $b_2 = a_2 - a_3$, $b_3 = a_1 + a_3$, $b_4 = a_1 + 2a_3$ и $a_1 = (-1, 2, 0)$, $a_2 = (1, 1, 1)$, $a_3 = (2, -1, 3)$.

Решение. а) Имаме

$$a_1 - 3a_2 + 4a_3 = (0, 1, -2, 3, 5) - 3.(2, -3, 0, -1, 4) + 4.(-1, 3, -2, 0, 1) =$$

$$= (0, 1, -2, 3, 5) + (-6, 9, 0, 3, -12) + (-4, 12, -8, 0, 4) =$$

$$= (0-6-4, 1+9+12, -2+0-8, 3+3-0, 5-12+4) = (-10, 22, -10, 6, -3).$$

Отговор. б) $(-7, 8, 9)$; в) $(-4, 2, 0)$.

Задача 3.2.2 Да се реши системата $\left|\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = a_1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & = a_2 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = a_3, \end{array}\right.$

ако $a_1 = (2, -1, 0, 3)$, $a_2 = (1, 0, -1, 0)$, $a_3 = (0, -2, 1, -3)$.

Отговор. $x_1 = (0, -3, 3, 0)$, $x_2 = \left(\frac{1}{2}, 1, -1, \frac{3}{2}\right)$,

$x_3 = \left(\frac{1}{2}, -2, 2, \frac{3}{2}\right)$.

Задача 3.2.3 Проверете линейно зависими ли са следните вектори:

а) $\begin{array}{l} a_1 = (3, 2, 1) \\ a_2 = (2, 3, 1) \\ a_3 = (2, 1, 3); \end{array}$ б) $\begin{array}{l} a_1 = (1, 0, -2) \\ a_2 = (0, 1, -3) \\ a_3 = (2, 0, -5); \end{array}$ в) $\begin{array}{l} a_1 = (1, 2, 3, 2) \\ a_2 = (1, -1, 1, 0) \\ a_3 = (1, 3, -1, -2) \\ a_4 = (3, 4, 3, 0); \end{array}$

г) $\begin{array}{l} a_1 = (1, 1, 2, 3, 1) \\ a_2 = (3, -1, -1, -2, -4) \\ a_3 = (2, 3, -1, -1, -6) \\ a_4 = (1, 2, 3, -1, -4); \end{array}$ д) $\begin{array}{l} a_1 = (2, -1, 2, 4) \\ a_2 = (3, -3, 2, 6) \\ a_3 = (3, -1, 2, 6) \\ a_4 = (3, -1, -1, 6); \end{array}$

е) $\begin{array}{l} a_1 = (1, 2, 3, -1, 0) \\ a_2 = (1, -1, 1, 2, 4) \\ a_3 = (1, 5, 5, -4, -4) \\ a_4 = (1, 8, 7, -7, -8); \end{array}$ ж) $\begin{array}{l} a_1 = (5, -3, 3) \\ a_2 = (4, -2, 3) \\ a_3 = (8, -6, 1) \\ a_4 = (7, -3, 7). \end{array}$

Решение. а) Трябва да проверим дали съществуват числа λ_1, λ_2 и λ_3, поне едно от тях различно от нула, такива, че да бъде удовлетворено равенството

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0. \tag{3.20}$$

Векторното равенство (3.20) е в сила точно тогава, когато всички координати на вектора $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$ са равни на нула, т.е.

$$\left| \begin{array}{rrrl} 3\lambda_1 & +2\lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0. \end{array} \right. \tag{3.21}$$

Решаваме системата (3.21) по някои от познатите ни вече методи и получаваме $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Следователно векторите са линейно независими.

в) Равенството $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0$ е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +3\lambda_4 & = 0 \\ 2\lambda_1 & -\lambda_2 & +3\lambda_3 & +4\lambda_4 & = 0 \\ 3\lambda_1 & +\lambda_2 & -\lambda_3 & +3\lambda_4 & = 0 \\ 2\lambda_1 & & -2\lambda_3 & & = 0, \end{array} \right.$$

която има безбройно много решения, зависещи от един параметър. Едно ненулево решение е например $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -1$. Оттук следва, че векторите a_1, a_2, a_3 и a_4 са линейно зависими.

ж) Съгласно 13) дадените вектори са линейно зависими.

Отговор. б) линейно независими; г) линейно независими; д) линейно зависими; е) линейно зависими.

3.3 Ранг на система от вектори. Ранг на матрица

3.3.1 Ранг на система от вектори

Нека е дадена системата от вектори

$$a_1, a_2, \ldots, a_n. \tag{3.22}$$

Максималният брой линейно независими вектори от (3.22) се нарича *ранг на системата от вектори.* Една подсистема вектори на (3.22) се нарича *максимална линейно независима подсистема*, ако е линейно независима и след добавяне към нея на произволен друг вектор от (3.22) се получава линейно зависима система.

1) Системата от вектори (3.22) има ранг r тогава и само тогава, когато в (3.22) има r линейно независими вектора и всеки вектор от системата се изразява линейно чрез тях.

2) Всеки две максимални линейно независими подсистеми на (3.22) имат един и същ брой вектори равен на ранга на системата.

Ако всеки вектор на системата (3.22) е линейна комбинация на векторите от системата

$$b_1, b_2, \ldots, b_m, \tag{3.23}$$

то казваме, че *системата вектори* (3.22) *се изразява линейно чрез системата* (3.23).

3) Ако системата от вектори (3.22) се изразява линейно чрез системата вектори (3.23), то рангът на (3.22) не надминава ранга на (3.23).

Две системи от вектори се наричат *еквивалентни*, ако всяка от тях се изразява линейно чрез другата.

От 3) следва:

4) Ако две системи от вектори са еквивалентни те имат равни рангове.

3.3.2 Ранг на матрица

Нека $A = \|a_{ij}\|$ е матрица от тип $m \times n$. Ако в нея изберем k реда и k стълба $(1 \leq k \leq \min(m, n))$, то общите им елементи образуват детерминанта от k-ти ред, която се нарича *минор* от k-ти ред и се означава със символа M_k. *Ранг на матрицата* A се нарича максималният ред на различните от нула минори, принадлежащи на A. Следователно, ако матрицата A има ранг r, то тя има поне един минор от ред r, който е различен от нула, а всички останали минори от ред $r+1$ са равни на нула. Нулевата матрица има ранг нула.

Когато се пресмята ранга на една матрица, обикновено се започва с пресмятане на минори от най-нисък ред и последователно се преминава към минори от по-висок ред. При това, ако сме намерили минор $M_r \neq 0$ от ред r, то достатъчно е да пресметнем само минорите от $(r+1)-$ви ред, които заграждат M_r, и ако всички те са равни на нула, дадената матрица има ранг r.

Друг начин за намиране на ранга на една матрица дава следното твърдение:

5) Системата вектори-редове и системата вектори-стълбове на една матрица имат един и същи ранг, равен на ранга на матрицата.

На практика, за пресмятане на ранга на една матрица, се постъпва по следния начин:

(i) Чрез подходящи елементарни преобразувания матрицата се привежда в диагонален вид;

(ii) преброяват се различните от нула диагонални елементи и техният брой е равен на ранга на матрицата.

Задача 3.3.1 Намерете ранга на системата вектори:

а) $a_1 = (0, -1, 3, 0, 2)$, $a_2 = (2, -4, 1, 5, 3)$,
$a_3 = (-4, 5, 7, -10, 0)$;

б) $a_1 = (1, -2, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -2, 1, -1, -1)$,

$a_3 = (1, -2, 1, 5, 5)$;

в) $a_1 = (1, -1, -2, 3)$, $a_2 = (2, 1, 0, -1)$, $a_3 = (7, -1, -6, 7)$, $a_4 = (-1, -2, -2, 4)$;

г) $a_1 = (2, 3, -1, 4)$, $a_2 = (-2, -1, 4, 1)$, $a_3 = (1, 0, 1, 2)$, $a_4 = (4, -2, 3, 5)$, $a_5 = (3, 4, 0, 7)$.

Решение. в) Съгласно 5), рангът на разглежданата система вектори е равен на ранга на матрицата

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & -6 & 7 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Матрицата A има минор от втори ред, различен от нула, например

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Разглеждаме минорите от трети ред, заграждащи M_2. Имаме

$$M_3^I = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3^{II} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3^{III} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3^{IV} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

и следователно матрицата A има ранг $r = 2$. Тогава и рангът на дадената система от вектори е 2.

Отговор. а) $r = 2$; б) $r = 2$; г) $r = 3$.

Задача 3.3.2 Намерете максималната линейно независима подсистема на всяка от системите вектори, разгледани в задача 3.3.1.

Решение. в) Както вече показахме в задача 3.3.1, разглежданата система от вектори има ранг 2. Тогава според 2) произволна максимална линейно независима подсистема се състои от два линейно независими вектора на дадената система. Такива са например векторите $a_1 = (1, -1, -2, 3)$ и $a_2 = (2, 1, 0, -1)$.

Отговор. а) $a_1 = (0, -1, 3, 0, 2)$, $a_2 = (2, -4, 1, 5, 3)$;

б) $a_2 = (1, -2, 1, -1, -1)$, $a_3 = (1, -2, 1, 5, 5)$;

г) $a_1 = (2, 3, -1, 4)$, $a_2 = (-2, -1, 4, 1)$, $a_3 = (1, 0, 1, 2)$.

Задача 3.3.3 Намерете ранга на матриците:

а) $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 7 & 49 & -42 & -56 & -105 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \end{Vmatrix}$;

в) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$; г) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & -7 & -11 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -16 \end{Vmatrix}$.

Решение. в) Чрез елементарни преабразувания ще приведем разглежданата матрица в диагонален вид. Първия ред, умножен с -3 и -1, прибавяме съответно към втория и четвъртия, втория ред изваждаме от третия, а четвъртия, умножен с -2, прибавяме към петия. Получаваме

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Втория ред, умножен с -3, -2 и -1, прибавяме съответно към третия, четвъртия и петия. Намираме

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Четвъртия ред, умножен с -2, прибавяме към третия, а петия, умножен с -3 – към четвъртия. Получаваме

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Разменяме местата на третия и петия ред:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Последната матрица има диагонален вид и понеже различните от нула диагонални елементи са 4, то дадената матрица има ранг $r = 4$.

б) Имаме

$$\begin{Vmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 7 & 49 & -42 & -56 & -105 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} -8 & -21 & 13 & 29 & 50 \\ -8 & 27 & -35 & -19 & -46 \\ 1 & 30 & -29 & -31 & -61 \\ 1 & 7 & -6 & -8 & -15 \\ 7 & -9 & 16 & 2 & 11 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 0 & 35 & -35 & -35 & -70 \\ 0 & 48 & -48 & -48 & -96 \\ 0 & 23 & -23 & -23 & -46 \\ 1 & 7 & -6 & -8 & -15 \\ 0 & -58 & 58 & 58 & 116 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 7 & -6 & -8 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -6 & -8 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 7 & -6 & -8 & -15 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

и следователно рангът на разглежданата матрица е равен на 2.

Отговор. а) $r = 2$; г) $r = 2$.

Задача 3.3.4 Намерете ранга на всяка от следващите матрици, в зависимост от стойностите на участващите в тях параметри λ, μ и ν:

$$\text{а)} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & \lambda \end{Vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{Vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{Vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 \\ 1 & \nu & \nu^2 & \nu^3 \end{Vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{Vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 3-\lambda & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n-\lambda \end{Vmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$
\text{е)}\left\|\begin{array}{cccccc}
1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\
\lambda-1 & 2 & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\
\lambda-2 & \lambda & 3 & \dots & \lambda & \lambda \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
\lambda-n+2 & \lambda & \lambda & \dots & n-1 & \lambda \\
\lambda-n+1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & n
\end{array}\right\|.
$$

Решение. а) Преобразуваме

$$
\left\|\begin{array}{rrrr}
1 & 2 & 0 & 2 \\
3 & 1 & -1 & 3 \\
-4 & 7 & 3 & 1 \\
-3 & 4 & 2 & \lambda
\end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrrr}
1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & -5 & -1 & -3 \\
0 & 15 & 3 & 9 \\
0 & 5 & 1 & \lambda+3
\end{array}\right\| \sim
$$

$$
\sim \left\|\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 5 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 2 & 0 \\
0 & 5 & 3 & 1 \\
0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right\|.
$$

Следователно, ако $\lambda = 0$, дадената матрица има ранг $r = 2$, а ако $\lambda \neq 0$ – ранг $r = 3$.

Отговор. б) $\lambda = 1$, $r = 1$; $\lambda \neq 1$, $r = 3$;

в) $\lambda = \mu = \nu$, $r = 1$; $\lambda = \mu \neq \nu$ или $\lambda \neq \mu = \nu$ или $\lambda = \nu \neq \mu$, $r = 2$; $\lambda \neq \mu, \mu \neq \nu, \nu \neq \lambda$, $r = 3$;

г) $\lambda = 0$, $r = 1$; $\lambda = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $r = n-1$; $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \dfrac{n(n-1)}{2}$, $r = n$;

д) $\lambda = 1, 2, \dots, n-1$, $r = n-1$; $\lambda \neq 1, 2, \dots, n-1$, $r = n$;

е) $\lambda = 2, \dots, n, -\dfrac{1}{n-1}$, $r = n-1$; $\lambda \neq 2, \dots, n, -\dfrac{1}{n-1}$, $r = n$.

3.4 Съвместимост на система линейни уравнения. Теорема на Руше-Кронекер-Капели

3.4.1 Теорема на Руше-Кронекер-Капели

Нека е дадена системата (3.1) от m уравнения с n неизвестни и свързаните с нея матрици: матрицата (3.2) от коефициентите на системата и разширената матрица (3.3), които означаваме съответно с A и $\overline{A}$. В сила е следната

1) *Теорема на Руше-Кронекер-Капели.* Системата линейни уравнения (3.1) е съвместима точно тогава, когато рангът r на матрицата A е равен на ранга на разширената матрица $\overline{A}$. При това, ако рангът r е равен на броя на неизвестните n, системата (3.1) има единствено решение, а когато $r < n$, системата има безбройно много решения и общото решение зависи от $n - r$ параметъра.

Горната теорема прилагаме по следния начин:

Най-напред определяме ранга $r(\overline{A})$ на разширената матрица $\overline{A}$ и ранга $r(A)$ на матрицата A. В случай, че $r(A) = r(\overline{A}) = r$, системата е съвместима и от нея избираме r линейно независими уравнения, т.е. уравнения, коефициентите на които, разгледани като вектори-редове са линейно независими. Ако $r = n$, системата има единствено решение, което намираме с някои от известните ни вече методи. Когато $r < n$, в левите страни на избраните уравнения оставяме онези r неизвестни, детерминантата от коефициентите пред които е различна от нула, а останалите $n - r$ неизвестни прехвърляме от дясната страна на уравненията и ги приемаме за параметри (свободни неизвестни). По-нататък, решаваме получената система от r уравнения с r неизвестни и намираме всички решения на системата.

3.4.2 Система линейни хомогенни уравнения

Да разгледаме системата линейни хомогенни уравнения

$$
(3.24) \qquad \left|\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0.
\end{array}\right.
$$

Ако рангът r на матрицата A от коефициентите на (3.24) е равен на броя на неизвестните n, то съгласно теоремата на Руше-Кронекер-Капели разглежданата система има точно едно решение и това решение е *тривиалното*, т.е.

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Ако $r < n$, системата (3.24), освен тривиалното решение, притежава още безбройно много други решения, които намираме по същия начин, както в случая на произволна система линейни уравнения. Всяко от тези решения може да се разглежда като $n-$мерен вектор и очевидно всяка линейна комбинация от решения на (3.24) е също решение на тази система. Освен това съществуват краен брой линейно незивисими решения.

Една система от решения $a_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}),\quad a_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}), \dots, a_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kn})$ на (3.24) се нарича *фундаментална*, ако е линейно независима и всяко решение на (3.24) е нейна линейна комбинация. Имаме:

2) Ако рангът r на матрицата A от коефициентите на линейната хомогенна система (3.24) е по-малък от броя n на неизвестните, то съществува фундаментална система от решения на (3.24) и всяка такава система се състои от $n - r$ решения.

Задача 3.4.1 Решете системите линейни уравнения:

а) $\left|\begin{array}{rrrrr} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 9 \\ -x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = & -11 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 9 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & -1; \end{array}\right.$

б) $\left|\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & -2x_5 & +x_6 & +x_7 & = & 3 \\ 2x_1 & -4x_2 & -x_3 & +2x_4 & -x_5 & +2x_6 & +8x_7 & = & -3 \\ -3x_1 & +6x_2 & +2x_3 & -3x_4 & +6x_5 & -3x_6 & +7x_7 & = & 6 \\ -x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -x_4 & +3x_5 & -x_6 & +x_7 & = & -6; \end{array}\right.$

в) $\left|\begin{array}{llllll} 3x_1 & -5x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & -11x_2 & +5x_3 & +9x_4 & = & 2; \end{array}\right.$

г) $\left|\begin{array}{llllll} 7x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +6x_4 & = & -4 \\ 6x_1 & -x_2 & -x_3 & +5x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 6; \end{array}\right.$

д) $\left|\begin{array}{rrrrrr} x_1 & -2x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & -6 \\ 2x_1 & -3x_2 & -3x_3 & +3x_4 & = & -2 \\ x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & -x_4 & = & -5; \end{array}\right.$

е) $\left|\begin{array}{rrrrrr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & -2; \end{array}\right.$

ж) $\left|\begin{array}{lllllll} 12x_1 & +7x_2 & +15x_3 & +21x_4 & +21x_5 & = & 15 \\ 24x_1 & +14x_2 & +30x_3 & +40x_4 & +41x_5 & = & 28 \\ 60x_1 & +35x_2 & +75x_3 & +99x_4 & +102x_5 & = & 69 \\ 48x_1 & +28x_2 & +60x_3 & +82x_4 & +83x_5 & = & 58; \end{array}\right.$

з) $$\left|\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -7x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & +6x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & +5x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 4; \end{array}\right.$$

и) $$\left|\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 13 \\ 4x_1 & -3x_2 & +4x_3 & & = & 18 \\ & 2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & -1; \end{array}\right.$$

к) $$\left|\begin{array}{rrrrrcr} 4x_1 & -4x_2 & +3x_3 & +3x_4 & +8x_5 & = & 11 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 5 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = & 6 \\ 2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -5x_4 & +14x_5 & = & 0; \end{array}\right.$$

л) $$\left|\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 4 \\ x_1 & & +5x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & +5x_2 & +11x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & +3x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +x_5 & = & 1 \\ 5x_1 & +4x_2 & -x_3 & +x_4 & +3x_5 & = & 8; \end{array}\right.$$

м) $$\left|\begin{array}{rrrrrcr} 6x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & & = & 5 \\ 3x_1 & +2x_2 & +6x_3 & +x_4 & & = & 1 \\ & x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +x_5 & = & -1 \\ & & 3x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & +x_2 & & +x_4 & +x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

Решение. а) За матриците

$$A = \left\| \begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \overline{A} = \left\| \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \\ -1 & 5 & 2 & -11 \\ 3 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right\|$$

намираме, че $r(A) = r(\overline{A}) = 3$. От 1) следва, че разглежданата система е съвместима и има единствено решение. Тъй като

$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{array} \right| = -8 \neq 0,$$

първите три вектор-реда на $\overline{A}$ са линейно независими. Тогава разглеждаме системата

$$\left| \begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 9 \\ -x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = & -11 \end{array} \right. \tag{3.25}$$

от първите три уравнения, чиито коефициенти са координатите на посочените по-горе вектор-редове на $\overline{A}$. Решаваме (3.25) и намираме $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

б) Понеже $r(A) = r(\overline{A}) = 3$, разглежданата система е съвместима и има безбройно много решения, които зависят от 4 параметъра. Минорът

$$M_3 = \left| \begin{array}{rrr} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 6 \end{array} \right| = -15$$

от трети ред, образуван от коефициентите пред x_1, x_3 и x_5 в първите три уравнения е различен от нула. Тогава оставяме в левите страни на тези уравнения само неизвестните x_1, x_3 и

x_5, а останалите неизвестни прехвърляме в десните страни на уравненията. Получаваме системата

$$\left|\begin{array}{rrrcrrrrr} x_1 & +x_3 & -2x_5 & = & 3 & +2x_2 & -x_4 & -x_6 & -x_7 \\ 2x_1 & -x_3 & -x_5 & = & -3 & +4x_2 & -2x_4 & -2x_6 & -8x_7 \\ -3x_1 & +2x_3 & +6x_5 & = & 6 & -6x_2 & +3x_4 & +3x_6 & -7x_7 \end{array}\right.$$

и като я решим, например по метода на Гаус, намираме $x_1 = 2x_2 - x_4 - x_6 - 7x_7$, $x_3 = 3 - 2x_7$, $x_5 = -4x_7$. Ако положим $x_2 = p$, $x_4 = q$, $x_6 = s$, $x_7 = t$, общото решение на разглежданата система има вида

$$x_1 = 2p - q - s - 7t, \quad x_2 = p, \quad x_3 = 3 - 2t,$$

$$x_4 = q, \quad x_5 = -4t, \quad x_6 = s, \quad x_7 = t,$$

където p, q, s и t са произволни параметри.

в) Тъй като $r(A) = 2$, $r(\overline{A}) = 3$, дадената система е несъвместима.

Отговор. г) $x_1 = 8 - 9p - 4q$, $x_2 = p$, $x_3 = q$, $x_1 = -10 + 11p + 5q$;

д) системата е несъвместима;

е) $x_1 = \frac{83}{15}$, $x_2 = \frac{31}{15}$, $x_3 = -\frac{64}{15}$, $x_4 = -\frac{82}{5}$;

ж) $x_1 = 7q$, $x_2 = 3p - 12q - 15s - \frac{17}{7}$, $x_3 = 7s$, $x_4 = p$, $x_5 = 2 - 2p$;

з) системата е несъвместима;

и) $x_1 = 4 - p$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_3 = p$, $x_4 = \frac{1}{3} - 2p$;

к) $x_1 = q$, $x_2 = 1 - p + q$, $x_3 = 3 - 4p$, $x_4 = 2$, $x_5 = p$;

л) системата е несъвместима;

м) $x_1 = 2 - \frac{1}{3}p$, $x_2 = -5 + p$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1 - p$, $x_5 = p$.

Задача 3.4.2 Определете параметрите a, b и c в системата

$$\left|\begin{array}{l} ax_1 - bx_2 = 2a - b \\ (c+1)x_1 + cx_2 = 10 - a + 3b, \end{array}\right. \tag{3.26}$$

ако е дадено, че тя има безбройно много решения и $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ е едно нейно решение.

Решение. Понеже системата (3.26) има безбройно много решения, то рангът на разширената матрица на (3.26) е по-малък от 2. Оттук следва, че

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ c+1 & c \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & 2a-b \\ c+1 & 10-a+3b \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} -b & 2a-b \\ c & 10-a+3b \end{vmatrix} = 0. \tag{3.27}$$

Тъй като $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ са решение на (3.26), то в сила са и уравненията

$$a + 2b = 0, \quad a - 3b + 4c = 9. \tag{3.28}$$

От (3.27) и (3.28) намираме $a = 0$, $b = 0$, $c = \frac{9}{4}$ или $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$.

Задача 3.4.3 Решете системите в зависимост от стойностите на участващите в тях реални параметри a, b и c:

а) $\left|\begin{array}{lcl} 2x_1 & -(19a^2-2)x_2 = & 3a \\ x_1 & +x_2 = & 1; \end{array}\right.$

б) $\left|\begin{array}{lcl} ax_1 & -4x_2 = & a+1 \\ 2x_1 & +(a+6)x_2 = & a+3; \end{array}\right.$

в) $\left|\begin{array}{lcl} (a^2-1)x_1 & +(a+1)x_2 = & a^2-2 \\ (a+1)x_1 & +2ax_2 = & 2a+1; \end{array}\right.$

г) $\left|\begin{array}{llll} ax_1 & +a^2x_2 & +x_3 = & -a^3 \\ bx_1 & +b^2x_2 & +x_3 = & -b^3 \\ cx_1 & +c^2x_2 & +x_3 = & -c^3; \end{array}\right.$

д) $\left|\begin{array}{llll} (5a+1)x_1 & +2ax_2 & +(4a+1)x_3 & = 1+a \\ (4a-1)x_1 & +(1-a)x_2 & +(4a-1)x_3 & = -1 \\ 2(3a+1)x_1 & +2ax_2 & +(5a+2)x_3 & = 2-a; \end{array}\right.$

е) $\left|\begin{array}{llll} (a+1)x_1 & +x_2 & +x_3 & = a^2+3a \\ x_1 & +(a+1)x_2 & +x_3 & = a^3+3a^2 \\ x_1 & +x_2 & +(a+1)x_3 & = a^4+3a^3. \end{array}\right.$

Решение. а) Намираме

$$\left\| \begin{array}{ccc} 2 & -9a^2+2 & | & 3a \\ 1 & 1 & | & 1 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & -9a^2+2 & | & 3a \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -9a^2 & | & 3a-2 \end{array} \right\|$$

и следователно при $a \neq 0$ имаме $r(A) = r(\overline{A}) = 2$ и дадената система има единствено решение

$$x_1 = \frac{1}{9a^2}(9a^2+3a-2), \quad x_2 = \frac{1}{9a^2}(2-3a).$$

Ако $a = 0$, тогава $r(A) = 1$, $r(\overline{A}) = 2$ и системата е несъвместима.

Отговор. б) При $a \neq -2, -4$ системата има единствено решение $x_1 = \dfrac{a+9}{a+4}$, $x_2 = \dfrac{a-1}{a+4}$. Ако $a = -2$ системата има безбройно много решения $x_1 = \dfrac{1}{2} - 2p$, $x_2 = p$, зависещи от един параметър. При $a = -4$ системата е несъвместима;

в) Ако $a \neq -1, \dfrac{1}{4}(3 \pm \sqrt{17})$ системата има единствено решение $x_1 = \dfrac{2a^2-4a-3}{2a^2-3a-1}$, $x_2 = \dfrac{a^2-a+1}{2a^2-3a-1}$. При $a = -1, \dfrac{1}{4}(3 \pm \sqrt{17})$ системата е несъвместима;

г) Ако $a \neq b \neq c \neq a$, системата има единствено решение $x_1 = ab+ac+bc$, $x_2 = -a-b-c$, $x_3 = -abc$. При $a = b =$

c системата има безбройно много решения, които зависят от два параметъра: $x_1 = p$, $x_2 = q$, $x_3 = -a^3 - ap - a^2q$. Ако $a = b \neq c$, системата има безбройно много решения, зависещи от един параметър: $x_1 = -p(c+a) - (c^2 + ca + a^2)$, $x_2 = p$, $x_3 = ac(p + a + c)$. При $a = c \neq b$ общото решение на системата има вида $x_1 = -p(b+a) - (b^2 + ab + a^2)$, $x_2 = p$, $x_3 = ab(p+a+b)$. Ако $b = c \neq a$, общото решение на системата има вида $x_1 = -p(a+b) - (a^2 + ab + b^2)$, $x_2 = p$, $x_3 = ab(p + a + b)$;

д) При $a \neq 0, \pm 1$ системата има единствено решение $x_1 = \dfrac{a(25a-23)}{a^2-1}$, $x_2 = -\dfrac{a(8a-7)}{a^2-1}$, $x_3 = -\dfrac{27a^2-26a+1}{a^2-1}$. Ако $a = 0$, системата има безбройно много решения, зависещи от един параметър: $x_1 = 1 - p$, $x_2 = 0$, $x_3 = p$. При $a = \pm 1$ системата е несъвместима;

е) Ако $a \neq 0, -3$, системата има единствено решение $x_1 = -a^2 + a + 1$, $x_2 = a^2 - a - 1$, $x_3 = a(a^2 + 2a - 1)$. При $a = 0$ общото решение на системата има вида $x_1 = -p - q$, $x_2 = p$, $x_3 = q$. Ако $a = -3$, системата има безбройно много решения, зависещи от един параметър: $x_1 = p$, $x_2 = p$, $x_3 = p$.

Задача 3.4.4 Решете системите линейни хомогенни уравнения:

$$\text{а)}\ \left|\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -x_2 & -x_3 & -2x_4 & +x_5 & = 0 \\ 3x_1 & -2x_2 & & -3x_4 & +2x_5 & = 0 \\ 5x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +13x_5 & = 0; \end{array}\right.$$

$$\text{б)}\ \left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & -5x_3 & +13x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +5x_4 & = 0 \\ 5x_1 & -2x_2 & +x_3 & -2x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -7x_4 & = 0; \end{array}\right.$$

в) $\left|\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +3x_4 & -3x_5 & = 0 \\ 3x_1 & +3x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & = 0 \\ -x_1 & +3x_2 & +3x_3 & -4x_4 & +5x_5 & = 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & -2x_4 & -3x_5 & = 0 \\ x_1 & -5x_2 & +8x_3 & -7x_4 & -5x_5 & = 0; \end{array}\right.$

г) $\left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ 5x_1 & -x_2 & -3x_3 & +3x_4 & = 0 \\ 5x_1 & +7x_2 & +x_3 & +4x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = 0; \end{array}\right.$

д) $\left|\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 \\ 5x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0. \end{array}\right.$

Решение. а) Имаме

$$\left\|\begin{array}{rrrrr} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & -2 & 13 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrrrr} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 8 & 8 \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{rrrrr} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -17 & -16 & 16 \end{array}\right\|$$

и следователно $r(A) = 3$. Тогава системата има безбройно много решения, зависещи от два параметъра. От

$$\left|\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -x_2 & -x_3 & -2x_4 & +x_5 & = 0 \\ & x_2 & +3x_3 & +3x_4 & -x_5 & = 0 \\ & & 17x_3 & +16x_4 & -16x_5 & = 0 \end{array}\right.$$

получаваме $x_5 = \dfrac{17}{16}x_3 + x_4$, $x_2 = -\dfrac{31}{16}x_3 - 2x_4$, $x_1 = -2x_3 - x_4$. Полагаме $x_3 = 16p$, $x_4 = q$ и намираме, че общото решение има вида $x_1 = -32p-q$, $x_2 = -31p-2q$, $x_3 = 16p$, $x_4 = q$, $x_5 = 17p+q$, където p и q са произволни параметри.

б) От

$$\left\|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -5 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -5 & 13 \\ 0 & -1 & 9 & -21 \\ 0 & 8 & -19 & 33 \\ 0 & -4 & 9 & -20 \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -5 & 13 \\ 0 & -1 & 9 & -21 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -27 & 64 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -5 & 13 \\ 0 & -1 & 9 & -21 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 253 \end{array}\right\|$$

намираме $r(A) = 4$ и следователно системата има само тривиалното решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Отговор. в) $x_1 = -p$, $x_2 = 0$, $x_3 = p$, $x_4 = p$, $x_5 = 0$;
г) $x_1 = 5p + 3q$, $x_2 = p$, $x_3 = q$, $x_4 = -8p - 4q$;
д) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Задача 3.4.5 Определете стойностите на параметъра λ, при които дадените системи линейни хомогенни уравнения имат и ненулеви решения:

а) $$\left|\begin{array}{l} \lambda x_1 - (\lambda+1)x_2 = 0 \\ \lambda x_1 + (\lambda-2)x_2 = 0; \end{array}\right.$$

б) $$\left|\begin{array}{rrrl} -\lambda x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & -\lambda x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -\lambda x_3 & = 0; \end{array}\right.$$

в) $$\left|\begin{array}{rrrrl} (\lambda-2)x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +(\lambda-2)x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & +(\lambda-2)x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +(\lambda-2)x_4 & = 0; \end{array}\right.$$

г) $$\left|\begin{array}{lllll} \lambda x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +\lambda x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +\lambda x_3 & +2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +\lambda x_4 & = 0. \end{array}\right.$$

Упътване. Една система от n линейни хомогенни уравнения с n неизвестни има ненулево решение точно тогава, когато детерминантата на системата е равна на нула.

Отговор. а) $\lambda = 0$ и $\lambda = \frac{1}{2}$; б) $\lambda = -1$ и $\lambda = 2$;
в) $\lambda = 5$ и $\lambda = 1$; г) $\lambda = 2$ и $\lambda = -6$.

Задача 3.4.6 Намерете фундаментални системи от решения на следните хомогенни системи:

а) $$\left| \begin{array}{rrrrrl} 3x_1 & +6x_2 & -5x_3 & +4x_4 & -2x_5 & = 0 \\ 6x_1 & +10x_2 & -10x_3 & +7x_4 & -3x_5 & = 0 \\ 9x_1 & +14x_2 & -15x_3 & +10x_4 & -4x_5 & = 0 \\ & 2x_2 & & +x_4 & -x_5 & = 0; \end{array} \right.$$

б) $$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & +6x_3 & -4x_4 & = 0 \\ x_1 & & -8x_3 & +7x_4 & = 0 \\ 7x_1 & +10x_2 & +4x_3 & -x_4 & = 0; \end{array} \right.$$

в) $$\left| \begin{array}{rrrrrl} x_1 & & & -x_4 & & = 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +4x_4 & +2x_5 & = 0 \\ 3x_1 & +3x_2 & -x_3 & -3x_4 & +2x_5 & = 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = 0 \\ 5x_1 & +9x_2 & -3x_3 & +x_4 & +6x_5 & = 0; \end{array} \right.$$

г) $$\left| \begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & -2x_4 & -2x_5 & = 0 \\ 2x_1 & +5x_2 & -7x_3 & -7x_4 & -7x_5 & = 0; \end{array} \right.$$

д) $$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = 0 \\ 3x_1 & -4x_2 & +7x_3 & +5x_4 & = 0 \\ x_1 & -7x_2 & +3x_3 & +8x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -5x_2 & +4x_3 & +4x_4 & = 0; \end{array} \right.$$

$$\text{e)}\ \left|\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & -x_5 & +2x_6 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & -4x_4 & +x_5 & -x_6 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & +x_5 & +3x_6 & = 0 \\ 4x_1 & -7x_2 & +8x_3 & -15x_4 & +6x_5 & -5x_6 & = 0 \\ 5x_1 & +5x_2 & -6x_3 & +11x_4 & & +9x_6 & = 0. \end{array}\right.$$

Решение. а) Преобразуваме

$$\left\|\begin{array}{rrrrr} 3 & 6 & -5 & 4 & -2 \\ 6 & 10 & -10 & 7 & -3 \\ 9 & 14 & -15 & 10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrrrr} 3 & 6 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{rrrrr} 3 & 6 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

и понеже $r(A) = r(\overline{A}) = 2$, системата има безбройно много решения, зависещи от три параметъра. От

$$\left|\begin{array}{rrrrrl} 3x_1 & +6x_2 & -5x_3 & +4x_4 & -2x_5 & = 0 \\ & 2x_2 & & +x_4 & -x_5 & = 0 \end{array}\right.$$

намираме $x_1 = \dfrac{1}{3}(-2x_2+5x_3-2x_4)$, $x_5 = 2x_2+x_4$ и като положим $x_2 = 3p$, $x_3 = 3q$, $x_4 = 3s$, получаваме, че общото решение на дадената система има вида

$$\begin{array}{lll} x_1 = -2p + 5q - 2s, & x_2 = 3p, & x_3 = 3q, \\ x_4 = 3s, & x_5 = 6p + 3s, & \end{array} \tag{3.29}$$

където p, q и s са произволни параметри.

Общото решение (3.29) можем да запишем във векторна форма като вектора

$$X = (-2p + 5q - 2s, 3p, 3q, 3s, 6p + 3s).$$

Очевидно векторът X може да се представи като линейна комбинация във вида

$$X = pX_1 + qX_2 + sX_3, \tag{3.30}$$

където

$$\begin{aligned} X_1 &= (-2, 3, 0, 0, 6),\\ X_2 &= (5, 0, 3, 0, 0),\\ X_3 &= (-2, 0, 0, 3, 3). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Непосредствено се проверява, че векторите (3.31) са линейно независими и следователно представяните от тях решения образуват линейно независима система. Освен това от (3.30) следва, че всяко решение на дадената система е линейна комбинация на X_1, X_2 и X_3. Тогава съгласно дадената дефиниция, решенията (3.31) образуват фундаментална система от решения.

Отговор. б) $X_1 = (8, -6, 1, 0)$, $X_2 = (13, -5, 0, 1)$;

в) $X_1 = (0, 1, 3, 0, 0)$, $X_2 = (0, 0, 2, 0, 1)$;

г) $X_1 = (-1, -1, 3, 3, -7)$;

д) системата има само тривиалното решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ и следователно не притежава фундаментална система от решения;

е) $X_1 = (0, -1, 1, 1, 0, 0)$, $X_2 = (8, -14, -5, 0, -15, 0)$, $X_3 = (2, 1, -2, 0, 0, -3)$.

Задача 3.4.7 Проверете определят ли векторите
$X_1 = (3, 2, 1, 1, 0)$, $X_2 = (3, 0, 1, 1, 1)$, $X_3 = (5, 1, 0, 1, 2)$ и
$Y_1 = (4, 1, 1, 1, 1)$, $Y_2 = (1, 1, 0, 1, 0)$, $Y_3 = (7, 4, 1, 4, 1)$ фундаментални системи от решения на системата хомогенни уравнения

$$\left|\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & -2x_5 & = 0\\ 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +x_4 & -4x_5 & = 0\\ 3x_1 & +x_2 & -3x_3 & -4x_4 & -6x_5 & = 0\\ 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & -x_4 & -4x_5 & = 0. \end{array}\right.$$

Отговор. X_1, X_2 и X_3 определят фундаментална система от решения, а Y_1, Y_2 и Y_3 не определят такава.

Задача 3.4.8 Същите изисквания, както в задача 3.4.7 за векторите $X_1 = (10, 3, 0, -18, 9)$, $X_2 = (2, 1, 0, -3, 2)$, $X_3 = (0, 2, 0, 3, 1)$ и $Y_1 = (4, 2, 0, -6, 4)$, $Y_2 = (2, 1, 1, -1, 3)$, $Y_3 = (0, 2, 1, 5, 2)$ и системата хомогенни уравнения

$$\left| \begin{array}{llllll} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +3x_4 & +5x_5 & = 0 \\ 6x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +5x_4 & +7x_5 & = 0 \\ 9x_1 & +6x_2 & +5x_3 & +7x_4 & +9x_5 & = 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & & +4x_4 & +8x_5 & = 0. \end{array} \right.$$

Отговор. Векторите X_1, X_2 и X_3 определят фундаментална система от решения, а Y_1, Y_2 и Y_3 не определят такава.

Глава 4

Уравнения на права и равнина

4.1 Уравнения на права в равнина

4.1.1 Параметрични уравнения на права в равнината

Нека α е произволна равнина и $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е фиксирана афинна координатна система в нея, относно която ще отчитаме координатите на точките и векторите в α. Ако g е права в α, определена от точката $M_0(x_0, y_0)$ и ненулевия вектор $\overrightarrow{p}(\lambda, \mu)$, двойката уравнения

$$x = x_0 + \lambda s, \quad y = y_0 + \mu s, \quad -\infty < s < +\infty \tag{4.1}$$

се наричат *координатни* (*скаларни*) *параметрични уравнения на правата* g *относно* K, *а* s *- параметър.*

4.1.2 Общо уравнение на права

Имаме:

1) Всяка права g в α има относно K поне едно уравнение от вида

$$(4.2) \qquad Ax + By + C = 0,$$

където A, B и C са реални числа, такива че

$$(4.3) \qquad |A| + |B| \neq 0.$$

2) Всяко уравнение от вида (4.2), за което е в сила (4.3), е уравнение относно K на точно една права g от α.

Уравнението (4.2), със свойството (4.3), се нарича *общо уравнение на правата g относно K*, а само лявата му страна - *полином на g*.

3) Ако правата g има общо уравнение (4.2), векторът $\overrightarrow{p}(-B, A)$ е колинеарен с нея.

4) Ако (4.2) е общо уравнение на правата g и ρ е произволно различно от нула реално число, то и уравнението

$$(\rho A)x + (\rho B)y + \rho C = 0$$

е уравнение на същата права g.

5) Един вектор $\overrightarrow{q}(\lambda, \mu)$ е колинеарен на правата g с общо уравнение (4.2) точно тогава, когато координатите му удовлетворяват равенството

$$A\lambda + B\mu = 0.$$

Когато правата g има специално положение относно координатната система K, тогава и уравнението ѝ (4.2) има специален вид. По-точно имаме:

6.а) Правата g минава през началото O на K тогава и само тогава, когато $C = 0$;

6.б) Правата g е успоредна или сливаща се с абсцисната ос Ox на K тогава и само тогава, когато $A = 0$; g е точно тогава успоредна на Ox, когато $A = 0$, но $C \neq 0$; g съвпада с Ox точно тогава, когато $A = 0$, $C = 0$.

6.в) Правата g е успоредна или сливаща се с ординатната ос Oy на K тогава и само тогава, когато $B = 0$; g е точно тогава успоредна на Oy, когато $B = 0$, но $C \neq 0$; g съвпада с Oy точно тогава, когато $B = 0$, $C = 0$.

Ако координатната система K е *ортонормирана* свойствата 1) - 6) са в сила и сега, но в този случай още имаме:

7) Векторът $\overrightarrow{N}(A, B)$ е перпендикулярен на правата g с общо уравнение (4.2).

4.1.3 Уравнение на права през една точка

Ако $M_0(x_0, y_0)$ е фиксирана точка в α, а g е произволна права през M_0 с общо уравнение (4.2), то тогава уравнението (4.2) приема вида

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{4.4}$$

Уравнението (4.4) се нарича *уравнение на правата g, минаваща през точката $M_0(x_0, y_0)$* (или *уравнение на права през една точка*).

Ако предположим, че правата g пресича ординатната ос Oy, то от 6.в) следва $B \neq 0$ и следователно можем да запишем (4.4) във вида

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{4.5}$$

където

$$k = -\frac{A}{B}$$

е *ъгловият коефициент на правата g относно абсцисната ос Ox*. Уравнението (4.5) се нарича *уравнение на права през една точка с даден ъглов коефициент.*

Полагайки $b = y_0 - kx_0$, от (4.5) намираме уравнението

$$y = kx + b, \tag{4.6}$$

което се нарича *обикновено* (или *декартово*) *уравнение на права.*

Ако предположим, че координатната система K е ортонормирана и равнината α е ориентирана посредством K, то тогава

$$k = \operatorname{tg}\theta,$$

където $\theta = (\overrightarrow{e_1}, g)$.

4.1.4 Уравнение на права през две точки

Нека $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ са две точки в равнината α. Правата $g = M_1M_2$ минава през точката $M_1(x_1, y_1)$ и върху нея лежи вектора $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ и следователно едно нейно уравнение ще намерим, като заместим в (4.4) $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$, $A = y_2 - y_1$, $B = -(x_2 - x_1)$. Получаваме уравнението

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0, \tag{4.7}$$

което можем да запишем и във вида

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{4.8}$$

или

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.9}$$

Всяко от уравненията (4.7) – (4.9) се нарича *уравнение на права през две точки.*

В случай, че правата $g = M_1M_2$ пресича ординатната ос Oy, то $x_2 - x_1 \neq 0$ и тогава можем да запишем (4.7) по следния начин:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{4.10}$$

4.1.5 Отрезово уравнение на права

Да предположим, че правата g не минава през началото O на K и пресича координатните ѝ оси Ox и Oy съответно в точките $M_1(a, 0)$ и $M_2(0, b)$. Реалните числа a и b се наричат *отрези на правата* $g = M_1M_2$ *от координатните оси.* От (4.9) следва, че правата $g = M_1M_2$ има уравнение

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

което след кратко преобразуване, приема вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{4.11}$$

Уравнението (4.11) се нарича *отрезово уравнение на правата* g.

4.1.6 Нормални уравнения на права

Нека K е *ортонормирана* координатна система в α и правата g е зададена с общото си уравнение (4.2). Тогава съгласно 7) векторът $\overrightarrow{N}(A, B)$ е перпендикулярен на g. Търсим общо уравнение на g относно K, в което нормалният ѝ вектор $\overrightarrow{N}$ е единичен, т.е. $\overrightarrow{N}^2 = 1$. Такова уравнение се нарича *нормално уравнение на правата* g *относно* K. Имаме:

8) Всяка права в α има точно две нормални уравнения, като всяко от тях се получава от другото с умножение с -1.

9) Ако една права g има общо уравнение (4.2), двете ѝ нормални уравнения са

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{Ax + By + C}{-\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \tag{4.12}$$

Очевидно двете нормални уравнения (4.12) на g съответстват на двата ѝ нормални единични вектора

$$\overrightarrow{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) \text{ и } -\overrightarrow{n}\left(-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right).$$

Двете нормални уравнения (4.12) на правата g са съвършено равноправни. Обаче в случая, когато g не минава през началото O на K, за конкретност можем да приемем да работим с нормалното уравнение

$$\frac{Ax+By+C}{-sgnC\sqrt{A^2+B^2}} = 0, \tag{4.13}$$

което съответства на нормалния единичен вектор $\overrightarrow{n} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OO_0}$, където O_0 е ортогоналната проекция на началото O върху g.

4.1.7 Разстояние от точка до права

Нека $M_1(x_1, y_1)$ е произволна точка в α, която не лежи на правата g, зададена с нормалното си уравнение (4.13). Тогава *ориентираното разстояние* δ *от точката* M_1 *до правата* g (при дадения нормален вектор $\overrightarrow{n}$, който сочи към полуравнината, несъдържаща началото O) се пресмята по формулата

$$\delta = \frac{Ax_1+By_1+C}{-sgnC\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{4.14}$$

а за обикновеното разстояние $d = |\delta|$ имаме

$$d = |\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}|.$$

4.1.8 Уравнения на ъглополовящите на две пресекателни прави

Нека g_1 и g_2 са две пресекателни прави, определени съответно с общите уравнения

$$g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \;\text{ и }\; g_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0, \tag{4.15}$$

относно ортонормираната координатна система K. Тогава двете ъглополовящи b_1 и b_2 на ъглите, образувани от g_1 и g_2 имат уравнения

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0. \tag{4.16}$$

4.1.9 Взаимно положение на две прави

Нека g_1 и g_2 са две прави в равнината α, които имат относно афинната координатна система K съответно общи уравнения (4.15). Тогава:

10)

10.а) Правите g_1 и g_2 се пресичат тогава и само тогава, когато

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

10.б) Правите g_1 и g_2 съвпадат тогава и само тогава, когато съществува реално число $\rho \neq 0$, такова че

$$A_2 = \rho A_1, \quad B_2 = \rho B_1, \quad C_2 = \rho C_1.$$

10.в) Правите g_1 и g_2 са различни и успоредни тогава и само тогава, когато съществува реално число $\rho \neq 0$, такова, че

$$A_2 = \rho A_1, \quad B_2 = \rho B_1, \quad C_2 \neq \rho C_1.$$

В случай, че правите g_1 и g_2 имат съответно декартови уравнения

$$g_1 : y = k_1x + b_1 \;\text{ и }\; g_2 : y = k_2x + b_2, \tag{4.17}$$

то 10) приема вида

11)

11.а) Правите g_1 и g_2 се пресичат тогава и само тогава, когато $k_1 \neq k_2$.

11.б) Правите g_1 и g_2 съвпадат тогава и само тогава, когато $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$.

11.в) Правите g_1 и g_2 са различни и успоредни тогава и само тогава, когато $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$.

12)

12.а) Правите g_1 и g_2, определени с (4.15), са точно тогава перпендикулярни, когато

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

12.б) Правите g_1 и g_2, определени с (4.17), са точно тогава перпендикулярни, когато

$$k_1k_2 = -1.$$

4.1.10 Сноп прави

Множеството от всички прави в равнината α, които минават през дадена точка, се нарича *сноп прави с център дадената точка.*

Нека g_1 и g_2 са две различни прави от сноп прави, зададени с уравненията

$$g_1 : l_1(x, y) = 0, \quad g_2 : l_2(x, y) = 0,$$

където $l_i(x, y) = A_ix + B_iy + C_i$, $i = 1, 2$, са полиномите на правите. Тогава

13)

13.а) Ако поне едно от числата λ_1 и λ_2 е различно от нула, уравнението

$$\lambda_1 l_1(x, y) + \lambda_2 l_2(x, y) = 0 \tag{4.18}$$

е уравнение на права от снопа.

13.б) За всяка права от снопа съществува ненулева двойка числа (λ_1, λ_2), такава че (4.18) е уравнение на правата.

Ако правите g_1 и g_2 са успоредни, с уравнението (4.18), при условието $\lambda_1 + \rho\lambda_2 \neq 0$, $\rho \neq 0$, се описва множеството на всички успоредни или съвпадащи с тях прави. Това множество се нарича *сноп успоредни прави*.

4.1.11 Ъгъл между две прави

Нека сега координатната система K в α е ортонормирана и g_1 и g_2 са две пресекателни прави, зададени относно K с общите си уравнения (4.15). Когато g_1 и g_2 не са перпендикулярни, те определят една двойка равни връхни остри $e-$ъгли и една двойка равни връхни тъпи $e-$ъгли. Ако означим мярката на първите с φ, вторите ще имат мярка $\pi - \varphi$. Тъй като векторите $\overrightarrow{p_1}(-B_1, A_1)$ и $\overrightarrow{p_2}(-B_2, A_2)$ са колинеарни съответно с g_1 и g_2, то $(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})_e = \varphi$ или $(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})_e = \pi - \varphi$ в зависимост от това дали $\overrightarrow{p_1}\overrightarrow{p_2} > 0$ или $\overrightarrow{p_1}\overrightarrow{p_2} < 0$. От (2.41) и (2.42) следват равенствата

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})_e &= \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \\ \sin(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})_e &= \frac{|A_1B_2 + A_2B_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

които очевидно са в сила и когато двете прави са перпендикулярни, т.е. когато $(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})_e = \dfrac{\pi}{2}$.

В случай, че равнината α е ориентирана посредством K и g_1, g_2 имат съответно ъглови коефициенти $k_1 = \text{tg}\ \theta_1$, $k_2 = \text{tg}\ \theta_2$, където $\theta_1 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{p_1})$, $\theta_2 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{p_2})$, то за мярката θ на $\angle\overrightarrow{p_1p_2}$ имаме

$$\text{tg}\ \theta = \text{tg}\ (\theta_2 - \theta_1) = \frac{\text{tg}\ \theta_2 - \text{tg}\ \theta_1}{1 + \text{tg}\ \theta_1 \text{tg}\ \theta_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{4.20}$$

Забележка 4.1.1 До края на параграфа, ако не е казано друго, ще считаме, че координатната система K е *ортонормирана.*

Задача 4.1.1 Относно афинната координатна система K са дадени точките $M_1(1,1)$ и $M_2(2,-3)$. За правата $g = M_1M_2$ да се напишат:

а) параметрични уравнения;
б) общо уравнение;
в) декартовото уравнение;
г) отрезовото уравнение;
д) нормалните уравнения.

Решение. а) Правата $g = M_1M_2$ е определена с точката $M_1(1,1)$ и вектора $\overrightarrow{p}(1,-4)$. Тогава, като заместим в (4.1) $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $\lambda = 1$, $\mu = -4$, получаваме, че правата g има параметрични уравнения

$$x = 1 + s, \quad y = 1 - 4s, \quad -\infty < s < +\infty.$$

б) **I начин.** Да предположим, че правата g има общо уравнение (4.2). Тъй като точките M_1 и M_2 лежат на g, координатите им удовлетворяват уравнението (4.2) на g, т.е.

$$A + B + C = 0, \quad 2A - 3B + C = 0.$$

От горната система определяме $A = 4\rho$, $B = \rho$, $C = -5\rho$, където $\rho \neq 0$ е произволен параметър. Като заместим тези стойности в (4.2) и съкратим на ρ, получаваме, че g има общо уравнение

$$4x + y - 5 = 0. \tag{4.21}$$

II начин. Заместваме координатите на M_1 и M_2 в (4.9) (или (4.7), или (4.8)). Имаме

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

и като развием детерминантата и направим приведение ще получим точно (4.21).

в) **I начин.** Нека g има декартово уравнение (4.6). От $M_1 \in g$ и $M_2 \in g$ следват равенствата

$$1 = k + b, \quad -3 = 2k + b,$$

от които намираме $k = -4$, $b = 5$. Заместваме тези стойности в (4.6) и получаваме

$$y = -4x + 5. \tag{4.22}$$

II начин. Декартовото уравнение (4.22) можем да получим и като изразим y от общото уравнение (4.21).

г) Записваме (4.21) във вида

$$\frac{x}{\frac{5}{4}} + \frac{y}{5} = 1$$

и това е търсеното отрезово уравнение на g.

д) Тъй като общото уравнение на g е (4.21), то съгласно 9) двете ѝ нормални уравнения са

$$\frac{4x + y - 5}{\sqrt{17}} = 0 \;\text{ и }\; \frac{4x + y - 5}{-\sqrt{17}} = 0.$$

Задача 4.1.2 Дадени са точките $L(1, -1)$, $M(-2, 2)$ и $N(2, 3)$. Да се намери уравнение на правата g, която минава през точката L и е:

а) успоредна на правата MN;

б) перпендикулярна на правата MN.

Решение. а) **I начин.** Тъй като $g \parallel MN$, векторът $\overrightarrow{MN}(4, 1)$ е колинеарен на g. Тогава съгласно 3), правата g има общо уравнение от вида

$$x - 4y + C = 0.$$

Изразяваме, че правата g минава през точката L и получаваме $C = -5$. Следователно $g : x - 4y - 5 = 0$.

II начин. Понеже $g \parallel MN$, съгласно 11.в), двете прави имат равни ъглови коефициенти, т.е.

$$k_g = k_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{3-2}{2+2} = \frac{1}{4} \qquad (\text{Виж}(4.10)).$$

Тогава като използваме (4.5), написваме уравнението на правата g, която минава през точката $L(1, -1)$ и има ъглов коефициент $k_g = \dfrac{1}{4}$. Имаме

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x-1), \quad \text{т.е.} \quad x - 4y - 5 = 0.$$

б) **I начин.** От $g \perp MN$ следва, че векторът $\overrightarrow{MN}(4, 1)$ е перпендикулярен на g. Тогава съгласно 7), правата g има общо уравнение от вида

$$4x + y + C = 0.$$

От условието точката $L(1, -1)$ да лежи върху g, намираме $C = -3$ и следователно $g : 4x + y - 3 = 0$.

II начин. Тъй като $g \perp MN$, то съгласно 12.б) имаме

$$k_g k_{MN} = -1.$$

Но $k_{MN} = \dfrac{1}{4}$ и следователно $k_g = -4$. Тогава

$$y + 1 = -4(x-1), \quad \text{т.е.} \quad 4x + y - 3 = 0.$$

Задача 4.1.3 Намерете уравнение на правата g, която минава през точката $M(1, 1)$ и е:

а) успоредна на правата $h : 2x + 3y - 12 = 0$;

б) перпендикулярна на правата $h : x - 2y + 3 = 0$.

Отговор. а) $g : 2x + 3y - 5 = 0$; б) $g : 2x + y - 3 = 0$.

Задача 4.1.4 Да се напишат уравнения на страните на $\triangle ABC$, ако $M_1(2,1)$, $M_2(5,3)$ и $M_3(3,-4)$ са средите съответно на BC, CA и AB. (Координатната система е афинна).

Упътване. Използвайте, че например $AB \ \mathbf{z}\ M_3$, $AB \parallel M_1M_2$

Отговор. $AB : 2x - 3y - 18 = 0$, $BC : 7x - 2y - 12 = 0$, $CA : 5x + y - 28 = 0$.

Задача 4.1.5 Точките $A(1,-1)$, $B(-2,1)$ и $C(3,5)$ са върхове на $\triangle ABC$. Да се намери уравнение на перпендикуляра h, спуснат от върха A към медианата през върха B.

Отговор. $h : 4x + y - 3 = 0$.

Задача 4.1.6 Да се напишат уравнения на страните на $\triangle ABC$, ако $A(3,5)$, $B(6,1)$, а $M(4,0)$ е пресечната точка на медианите му. (Координатната система е афинна).

Решение. Нека върхът C има координати (x_C, y_C). Тъй като координатите на медицентъра M са средно аритметично от координатите на върховете A, B и C (виж задача 2.2.7), то в сила са равенствата

$$\frac{3+6+x_C}{3} = 4, \quad \frac{5+1+y_C}{3} = 0,$$

от които следва, че $x_C = 3$, $y_C = -6$. Тогава, както постъпихме в задача 4.1.1, намираме $AB : 4x+3y-27 = 0$, $BC : 7x-3y-39 = 0$, $CA : x - 3 = 0$.

Задача 4.1.7 Да се намерят координатите на върха C на $\triangle ABC$, ако $A(-6,2)$, $B(2,-2)$, а $H(1,2)$ е ортоцентърът му.

Упътване. Върхът C е пресечна точка на правата
$a : \begin{cases} a \ \mathbf{z}\ B, \\ a \perp AH \end{cases}$ с правата $b : \begin{cases} b \ \mathbf{z}\ A, \\ b \perp BH. \end{cases}$

Отговор. $C(2,4)$.

Задача 4.1.8 Да се определят ъглите между правите g_1 и g_2 ако:

а) $g_1 : 5x - y + 7 = 0$, $g_2 : 3x + 2y = 0$;

б) $g_1 : 2x + y - 1 = 0$, $g_2 : x - y + 2 = 0$;

в) $g_1 : 3x - 2y + 7 = 0$, $g_2 : 2x + 3y - 3 = 0$;

г) $g_1 : x - 2y - 4 = 0$, $g_2 : 2x - 4y + 3 = 0$.

Решение. а) Имаме $\overrightarrow{p_1}(1,5) \parallel g_1$, $\overrightarrow{p_2}(-2,3) \parallel g_2$ и като използваме (4.19), получаваме

$$\cos(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})_e = \frac{5.3 + (-1).2}{\sqrt{25+1}\sqrt{9+4}} = \frac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и следователно правите g_1 и g_2 сключват ъгли $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi_2 = \pi - \varphi_1 = \frac{3\pi}{4}$.

Отговор. б) $\varphi_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$;

в) $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$; г) $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$.

Задача 4.1.9 Да се намери уравнение на права g_2, която минава през точката M и сключва ъгъл φ с правата g_1, ако:

а) $M(2,1)$, $g_1 : 2x + 3y + 4 = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

б) $M(1,3)$, $g_1 : 3x - y = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

в) $M\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -3\right)$, $g_1 : x = \sqrt{3} + t, y = -2 + \sqrt{3}t$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Решение. а) **I начин.** Тъй като правата g_2 минава през точката $M(2,1)$, то съгласно (4.4), тя има уравнение от вида

$$A(x-2) + B(y-1) = 0. \tag{4.23}$$

От друга страна, правата g_2 сключва ъгъл $\varphi = \frac{\pi}{4}$ с дадената права g_1 и съгласно (4.19), в сила е равенството

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2A+3B}{\sqrt{13}\sqrt{A^2+B^2}},$$

което преобразуваме до $5A^2 - 24AB - 5B^2 = 0$. В последното уравнение полагаме $\dfrac{A}{B} = q$ и получаваме квадратното уравнение $5q^2 - 24q - 5 = 0$, което има корени $q' = 5$ и $q'' = -\dfrac{1}{5}$. Оттук намираме

$$A' = 5\rho', B' = \rho', \rho' \neq 0 \ \text{ и } \ A'' = \rho'', B'' = -5\rho'', \rho'' \neq 0. \tag{4.24}$$

Но съгласно 4), общото уравнение на всяка права е определено с точност до ненулев множител. От (4.23) и (4.24) получаваме, че има две прави, които удовлетворяват условията на задачата:

$$g_2' : 5x + y - 11 = 0 \ \text{ и } \ g_2'' : x - 5y + 3 = 0.$$

II начин. Дадената права g_1 има ъглов коефициент $k_1 = -\dfrac{2}{3}$. Да означим с k_2 ъгловия коефициент на търсената права g_2, а с θ – мярката на ориентирания ъгъл $\angle\overrightarrow{g_1 g_2}$. Тогава имаме, че

$$\theta = \pm\frac{\pi}{4} + m.2\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и от (4.20) получаваме

$$\frac{k_2 + \dfrac{2}{3}}{1 - \dfrac{2}{3}k_2} = \pm 1. \tag{4.25}$$

От (4.25) намираме $k_2' = -5$, $k_2'' = \dfrac{1}{5}$ и следователно

$$g_2' : y - 1 = (x - 2), \quad \text{т.е.} \quad 5x + y - 11 = 0,$$

$$g_2'' : y - 1 = \frac{1}{5}(x-2), \quad \text{т.е.} \quad x - 5y + 3 = 0.$$

Отговор. б) $g_2' : 2x + y - 5 = 0$, $g_2'' : x - 2y + 5 = 0$;
в) $g_2' : y + 3 = 0$, $g_2'' : \sqrt{3}x + y + 1 = 0$.

Задача 4.1.10 Дадени са точките $A(-2,1)$, $B(1,-1)$, $C(-4,-2)$ и правата $g : 5x - 12y - 4 = 0$. Да се определят:

а) ориентираните разстояния от дадените точки до правата g;

б) положението на началото O и точките A и B относно g.

Решение. а) Тъй като правата g не минава през началото O, можем да използваме формулата (4.14) за ориентирано разстояние от точка до права. Намираме:

$$\delta_A = \frac{5.(-2) - 12.1 - 4}{\sqrt{25 + 144}} = -2.$$

Аналогично получаваме $\delta_B = 1$, $\delta_C = 0$.

б) От $\delta_O < 0$ и $\delta_A < 0$ следва, че точката A и началото O са от една и съща стана на правата g, а от $\delta_B > 0$ – B и O са от различни страни на g.

Задача 4.1.11 Да се пресметнат дължините на височините на $\triangle ABC$, ако:

а) $A(3,6)$, $B(-1,3)$, $C(2,-1)$;

б) $A(3,-4)$, $B(-4,-2)$, $C(1,3)$.

Отговор. а) $|AH_1| = 5$, $|BH_2| = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$, $|CH_3| = 5$;

б) $|AH_1| = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$, $|BH_2| = \dfrac{45}{\sqrt{53}}$, $|CH_3| = \dfrac{45}{\sqrt{53}}$.

Задача 4.1.12 Да се пресметне дължината d на перпендикуляра, спуснат от върха B към медианата през върха C в $\triangle ABC$, ако $A(1,2)$, $B(3,7)$ и $C(5,-13)$.

Отговор. $d = \dfrac{25}{\sqrt{34}}$.

Задача 4.1.13 Да се намери уравнение на права h, която е успоредна на правата $g : 12x + 5y - 52 = 0$ и се намира на разстояние $d = 2$ от нея.

Решение. Всички прави, които са успоредни на дадената права g, образуват сноп успоредни прави с уравнение

$$12x + 5y + C = 0. \tag{4.26}$$

На този сноп принадлежи и правата h, която се намира на разстояние $d = 2$ от g. Тогава, ако $M_0(x_0, y_0)$ е произволна точка от правата g, то тя се намира на разстояние $d = 2$ от h и следователно

$$|\frac{12x_0 + 5y_0 + C}{13}| = 2. \tag{4.27}$$

Можем да изберем $x_0 = \dfrac{13}{3}$, $y_0 = 0$ и като заместим в (4.27), получаваме $C' = -26$ и $C'' = -78$. С тези стойности от (4.26) получаваме уравненията на двете прави:

$$h' : 12x + 5y - 26 = 0 \ \text{ и } \ h'' : 12x + 5y - 78 = 0.$$

Задача 4.1.14 Да се намери уравнение на права h, която е успоредна на правата $g : 15x - 8y + 2 = 0$ и се намира на разстояние $d = 3$ от нея.

Отговор. $h' : 15x - 8y - 19 = 0, \quad h'' : 15x - 8y + 53 = 0.$

Задача 4.1.15 Да се намери уравнение на права g, която минава през точката $M(1, 2)$ и се намира на равни разстояния от точките $P(2, 3)$ и $Q(4, -5)$.

Решение. Съгласно (4.4) правите, минаващи през $M(1, 2)$, имат уравнения от вида

$$A(x - 1) + B(y - 2) = 0. \tag{4.28}$$

От тези прави отделяме онези, които се намират на равни разстояния от точките $P(2,3)$ и $Q(4,-5)$. За тях имаме

$$\left|\frac{A(2-1)+B(3-2)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \left|\frac{A(4-1)+B(-5-2)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

и оттук намираме $A' = 4$, $B' = 1$ и $A'' = 3$, $B'' = 2$. Заместваме в (4.28) и получаваме двете прави

$$g' : 4x + y - 6 = 0 \quad \text{и} \quad g'' : 3x + 2y - 7 = 0.$$

Задача 4.1.16 Да се намери уравнение на права g, която минава през точката M и се намира на разстояние d от точката P, ако:

а) $M(-1,2)$, $d = 5$, $P(6,1)$;
б) $M(2,-2)$, $d = 3$, $P(5,2)$;
в) $M(-4,3)$, $d = 5$, $P(0,0)$.

Отговор. а) $g' : 3x - 4y + 11 = 0$, $\quad g'' : 4x + 3y - 2 = 0$;
б) $g' : 7x - 24y - 62 = 0$, $\quad g'' : x - 2 = 0$;
в) $g : 4x - 3y + 25 = 0$.

Задача 4.1.17 Да се намери уравнение на права g, от която точките $P(1,1)$ и $Q(2,3)$ се намират съответно на разстояние $d_1 = 2$ и $d_2 = 4$.

Отговор. $g' : 4x + 3y + 3 = 0$, $\quad g'' : y + 1 = 0$.

Задача 4.1.18 Да се намери уравнение на права g, която е перпендикулярна на правата $h : 2x+6y-3 = 0$ и е на разстояние $d = \sqrt{10}$ от точката $P(5,4)$.

Упътване. Всички прави, които са перпендикулярни на правата $h : 2x + 6y - 3 = 0$, образуват сноп успоредни прави с уравнение $3x - y + C = 0$. От този сноп отделете онези прави, които се намират на разстояние $d = \sqrt{10}$ от точката $P(5,4)$.

Отговор. $g' : 3x - y - 21 = 0$, $\quad g'' : 3x - y - 1 = 0$.

Задача 4.1.19 Да се намери уравнение на права g, която минава през пресечната точка на правите g_1 и g_2 и се намира на разстояние $d = 5$ от точката P, ако:

а) $g_1 : x + 2y - 11 = 0,\ g_2 : 2x - y - 2 = 0,\ P(0, 0)$;

б) $g_1 : 7x + y - 58 = 0,\ g_2 : x - 7y + 6 = 0,\ P(1, 1)$;

в) $g_1 : 3x + y - 5 = 0,\ g_2 : x - 2y + 10 = 0,\ P(-1, -2)$.

Решение. в) **I начин.** Дадените прави g_1 и g_2 се пресичат в точката $Q(0, 5)$. Правите, минаващи през точката Q, имат уравнение от вида

$$Ax + B(y - 5) = 0.$$

От тези прави отделяме онези, които се намират на разстояние $d = 5$ от точката $P(-1, -2)$. За тях получаваме условието

$$|\frac{-A - 7B}{\sqrt{A^2 + B^2}}| = 5,$$

от което намираме $A' = 4$, $B' = 3$ и $A'' = 3$, $B'' = -4$. Следователно има две прави $g' : 4x + 3y - 15 = 0$, $g'' : 3x - 4y + 20 = 0$, които удовлетворяват условието на задачата.

II начин. Търсената права g принадлежи на снопа прави, определени от g_1 и g_2 и съгласно 13.б) има уравнение от вида

$$\lambda_1(3x + y - 5) + \lambda_2(x - 2y + 10) = 0, \tag{4.29}$$

където λ_1 и λ_2 е ненулева двойка реални числа. Определяме ги от изискването g да отстои на разстояние $d = 5$ от точката $P(-1, -2)$, т.е.

$$|\frac{-10\lambda_1 + 13\lambda_2}{\sqrt{(3\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - 2\lambda_2)^2}}| = 5.$$

От последното равенство намираме $\lambda_1' = 5$, $\lambda_2' = -11$ и $\lambda_1'' = 2$, $\lambda_2'' = 15$. С тези стойности от (4.29) получаваме отново $g' : 4x + 3y - 15 = 0$ и $g'' : 3x - 4y + 20 = 0$.

Отговор. а) $g : 3x + 4y - 25 = 0$;
б) $g' : 4x - 3y - 26 = 0$, $g'' : 3x + 4y - 32 = 0$.

Задача 4.1.20 Правите $m_B : 3x - 2y + 2 = 0$ и $m_C : 3x + 5y - 12 = 0$ са медиани на $\triangle ABC$ съответно през върховете му B и C. Да се намери лицето S на триъгълника, ако $A(-4, 2)$.

Решение. Медианите m_B и m_C се пресичат в медицентъра $M(x_0, y_0)$ на триъгълника. От системата

$$\left| \begin{array}{l} 3x_0 - 2y_0 + 2 = 0 \\ 3x_0 + 5y_0 - 12 = 0 \end{array} \right.$$

намираме $x_0 = \dfrac{2}{3}$, $y_0 = 2$. Координатите (x_B, y_B) и (x_C, y_C) съответно на B и C, удовлетворяват уравненията

$$\begin{array}{l} 3x_B - 2y_B + 2 = 0, \\ 3x_C + 5y_C - 12 = 0, \end{array}$$

$$\frac{1}{3}(-4 + x_B + x_C) = \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{3}(2 + y_B + y_C) = 2.$$

От тях получаваме $x_B = 2$, $y_B = 4$, $x_C = 4$, $y_C = 0$. За да намерим лицето S на $\triangle ABC$ използваме (2.47). Имаме

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = 14.$$

Задача 4.1.21 Правите $m_A : 4x + y - 6 = 0$, $m_B : 2x + y - 2 = 0$ и $m_C : x - 2 = 0$ са медианите на $\triangle ABC$ съответно през върховете A, B и C. Да се намерят координатите на върховете на триъгълника, ако се знае, че ориентираното му лице е равно на -3.

Отговор. $A'(3,-6)$, $B'(1,0)$, $C'(2,0)$;
$A''(1,2)$, $B''(3,-4)$, $C''(2,-4)$.

Задача 4.1.22 Спрямо афинна координатна система са дадени страните $AB : 7x+4y-1=0$ и $BC : 5x+2y-5=0$ на $\triangle ABC$, чийто медиани се пресичат в точката $M(1,-1)$. Да се намерят координатите на върховете на триъгълника.

Отговор. $A(-1,2)$, $B(3,-5)$, $C(1,0)$.

Задача 4.1.23 Точката $A(4,-1)$ и правите $h : 2x-3y+12=0$ и $m : 2x+3y=0$ са връх, височина и медиана, които минават през един и същи връх на триъгълник. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника.

Упътване. Най-напред покажете, че правите h и m не минават през A.

Отговор. $3x+2y-10=0$, $3x+7y-5=0$, $9x+11y+5=0$.

Задача 4.1.24 Точката A и правите h и m са съответно връх, височина и медиана, които минават през различни върхове на триъгълник. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако:
а) $A(8,-3)$, $h : 5x-6y+26=0$, $m : x+2y-16=0$;
б) $A(2,7)$, $h : 3x+y+11=0$, $m : x+2y+7=0$.

Отговор. а) $x-5y+47=0$, $x-8=0$, $6x+5y-33=0$;
б) $x-3y-23=0$, $7x+9y+19=0$, $4x+3y+13=0$.

Задача 4.1.25 Да се намери точката M', ортогонално симетрична на точката M относно правата g, ако:
а) $M(1,2)$, $g : x+y-5=0$;
б) $M(8,-9)$, $g : x+2y+5=0$;
в) $M(2,-6)$, $g : 4x-5y+3=0$.

Решение. а) **I начин.** Търсената точка M' лежи на перпендикуляра $h : x=1+s,\ \ y=2+s$ през M към правата g и следователно координатите ѝ (x',y') се получават за някаква стойност s' на параметъра s на h, т.е. $x'=1+s',\ \ y'=2+s'$. От друга страна, средата $M_0(x_0, y_0)$ на отсечката MM' лежи върху g, откъдето следва, че координатите ѝ $x_0 = \frac{1}{2}(2 + s')$, $y_0 = \frac{1}{2}(4 + s')$ удовлетворяват уравнението на g, т.е. $\frac{1}{2}(2+s')+\frac{1}{2}(4+s')-5 = 0$. Оттук намираме $s' = 2$ и следователно $M'(3, 4)$.

II начин. Правата $h : x - y + 1 = 0$, която минава през точката M и е перпендикулярна на дадената права g, пресича g в точката $M_0(2, 3)$. Но точката M_0 е средата на отсечката MM' и следователно координатите (x', y') на M' намираме, като от удвоените координати на M_0 извадим координатите на M, т.е.

$$x' = 2.2 - 1 = 3, \quad y' = 2.3 - 2 = 4.$$

Отговор. б) $M'(10, -5)$; в) $M'(-6, 4)$.

Задача 4.1.26 Светлинен лъч $l^{\rightarrow}$ е пуснат по правата $g : 2x - y + 9 = 0$ и се отразява от абсцисната ос Ox. Да се намери уравнение на правата g' на отразения лъч $l'^{\rightarrow}$.

Решение. Върху правата g' на отразения лъч $l'^{\rightarrow}$ лежат ортогонално симетричните точки на точките на правата g на падащия лъч $l^{\rightarrow}$ относно отразяващата права. Избираме произволна точка от правата g, например $P(-4, 1)$. Намираме ортогонално симетричната ѝ точка $P'(-4, -1)$ относно абсцисната ос Ox. От друга страна, правата g пресича оста Ox в точката $Q(-\frac{9}{2}, 0)$. Правата g' е определена от точките си P' и Q и следователно има уравнение $2x + y + 9 = 0$.

Задача 4.1.27 Светлинен лъч $l^{\rightarrow}$ е пуснат по правата g и се отразява от правата m. Да се намери уравнение на правата g' на отразения лъч $l'^{\rightarrow}$, ако:

а) $g : x - 2y + 5 = 0$, $m : 3x - 2y + 7 = 0$;

б) $g : 2x - 9y + 18 = 0$, $m : 8x - 2y - 3 = 0$.

Отговор. а) $g' : 29x - 2y + 33 = 0$; б) $g' : 6x + 7y - 21 = 0$.

Задача 4.1.28 Светлинен лъч $l^{\rightarrow}$, пуснат от точката P, след отразяването си от правата m, минава през точката Q. Да се намерят уравнения на правите g и g', съответно на падащия и на отразения лъч, ако:

а) $P(1,1)$, $m : x + y - 1 = 0$, $Q(2,3)$;
б) $P(2,3)$, $m : x + y + 1 = 0$, $Q(1,1)$;
в) $P(-3,4)$, $m : x - y = 0$, $Q(-2,5)$.

Упътване. Върху правата g' лежи ортогонално симетричната точка P' на P относно m, а върху g – ортогонално симетричната точка Q' на Q относно m.

Отговор. а) $g : 2x - 3y + 1 = 0$, $g' : 3x - 2y = 0$;
б) $g : 5x - 4y + 2 = 0$, $g' : 4x - 5y + 1 = 0$;
в) $g : 3x + 4y - 7 = 0$, $g' : 4x + 3y - 7 = 0$.

Задача 4.1.29 Светлинен лъч $l^{\rightarrow}$, пуснат от точката $P(1,1)$, след отразяването си от правата $m : x + y + 1 = 0$, става успореден на правата $n : 5x - 4y - 10 = 0$. Да се намерят уравнения на правите g и g', съответно на падащия и на отразения лъч.

Отговор. $g : 4x - 5y + 1 = 0$, $g' : 5x - 4y + 2 = 0$.

Задача 4.1.30 Да се намерят уравнения на ъглополовящите b_1 и b_2 на двойките връхни ъгли, определени от правите g_1 и g_2, ако:

а) $g_1 : 3x - y + 5 = 0$, $g_2 : 3x + y - 4 = 0$;
б) $g_1 : x - y = 0$, $g_2 : x + y = 0$;
в) $g_1 : 4x + 3y = 0$, $g_2 : 3x - 4y = 0$.

Решение. а) За да намерим двойката ъглополовящи на ъглите между правите g_1 и g_2 ще използваме (4.16). Имаме

$$\frac{3x - y + 5}{\sqrt{10}} \pm \frac{3x + y - 4}{\sqrt{10}} = 0$$

и следователно $b_1 : 6x + 1 = 0$, $b_2 : 2y - 9 = 0$.

Отговор. б) $b_1 : x = 0$, $b_2 : y = 0$;
в) $b_1 : 7x - y = 0$, $b_2 : x + 7y = 0$.

Задача 4.1.31 Да се определи ъглополовящата b на острите ъгли между правите g_1 и g_2, ако:
а) $g_1 : x + y + 1 = 0$, $g_2 : x - 7y - 3 = 0$;
б) $g_1 : x - 3y = 0$, $g_2 : 3x - y + 5 = 0$;
в) $g_1 : x + 2y - 7 = 0$, $g_2 : 4x + 2y + 3 = 0$;
г) $g_1 : 3x + 4y - 5 = 0$, $g_2 : 5x - 12y + 3 = 0$;
д) $g_1 : 3x + 4y - 3 = 0$, $g_2 : 5x + 12y + 6 = 0$;
е) $g_1 : 3x - 2y - 4 = 0$, $g_2 : 2x - 3y - 7 = 0$.

Решение. а) Векторите $\overrightarrow{p_1}(-1, 1)$ и $\overrightarrow{p_2}(7, 1)$ са колинеарни съответно с правите g_1 и g_2 и понеже

$$\overrightarrow{p_1}\overrightarrow{p_2} = -1.7 + 1.1 = -6 < 0,$$

то $(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})_e > \dfrac{\pi}{2}$. Тогава векторите $-\overrightarrow{p_1}(1, -1)$ и $\overrightarrow{p_2}(7, 1)$ определят остър ъгъл.

По-нататък можем да приложим идеята, която използвахме в решението на задача 2.2.18. Векторът

$$\left(-\frac{\overrightarrow{p_1}}{|\overrightarrow{p_1}|} + \frac{\overrightarrow{p_2}}{|\overrightarrow{p_2}|}\right)\left(\frac{12}{5\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)$$

е колинеарен с търсената ъглополовяща b. Вместо него, можем да изберем колинеарния му вектор $\overrightarrow{p}(3, -1)$, който има по-прости координати. Тогава търсената ъглополовяща b на острите ъгли е определена от пресечната точка $P(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2})$ на правите g_1 и g_2 и векторът $\overrightarrow{p}(3, -1)$. Като заместим в (4.1), получаваме, че b има параметрични уравнения

$$x = -\frac{1}{2} + 3s, \quad y = -\frac{1}{2} - s.$$

От тях, изключвайки параметъра s, получаваме общото уравнение $x + 3y + 2 = 0$.

Отговор. б) $b : 4x - 4y + 5 = 0$; в) $b : 6x + 6y - 11 = 0$;
г) $b : 7x + 56y - 40 = 0$; д) $b : 64x + 112y - 9 = 0$;
е) $b : 5x - 5y - 11 = 0$.

Задача 4.1.32 Да се определи ъглополовящата b на тъпите ъгли между правите g_1 и g_2, ако:
а) $g_1 : x - 3y + 5 = 0$, $g_2 : 3x - y + 15 = 0$;
б) $g_1 : x + 2y - 7 = 0$, $g_2 : 4x + 2y + 3 = 0$;
в) $g_1 : 3x + 4y - 7 = 0$, $g_2 : 12x - 5y - 11 = 0$.

Отговор. а) $b : x + y + 5 = 0$; б) $b : 6x - 6y + 11 = 0$;
в) $b : 21x - 77y + 36 = 0$.

Задача 4.1.33 Да се намери ъглополовящата b на онзи ъгъл определен от правите g_1 и g_2, в който лежи точката P, ако:
а) $g_1 : 3x + 4y - 11 = 0$, $g_2 : 4x + 3y - 6 = 0$, $P(1, 1)$;
б) $g_1 : 4x + 7y - 3 = 0$, $g_2 : 8x - y + 6 = 0$, $P(0, 0)$;
в) $g_1 : 3x - 2y + 1 = 0$, $g_2 : 2x - 3y - 1 = 0$, $P(-1, -1)$.

Решение. а) Ще използваме (4.14). Тъй като ориентираните разстояния

$$\delta_1 = \frac{3.1 + 4.1 - 11}{5} = -\frac{4}{5} \quad \text{и} \quad \delta_2 = \frac{4.1 + 3.1 - 6}{5} = \frac{1}{5}$$

от точката P съответно до правите g_1 и g_2 са с различни знаци, ъглополовящата b на ъгъла, в който лежи точката P, има уравнение

$$\frac{3x + 4y - 11}{5} = -\frac{4x + 3y - 6}{5},$$

от което, след приведение, получаваме $7x + 7y - 17 = 0$.
Отговор. б) $b : 4x + 2y + 1 = 0$; в) $b : x - y = 0$.

Задача 4.1.34 Да се намери уравнение на ъглополовящата b на вътрешния ъгъл при върха A на $\triangle ABC$, ако $A(1, 2)$, $B(3, -4)$ и $C\left(\frac{14}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Упътване. I начин. Намерете средата M на отсечката BC и след това приложете метода от задача 4.1.33, за да получите уравнение на ъглополовящата на онзи ъгъл на правите AB и AC, в който се намира точката M.

II начин. Ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A на $\triangle ABC$ е определена от точката A и вектора $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}$ (виж задача 2.2.18).

Отговор. $b : 2x + y - 4 = 0$.

Задача 4.1.35 Да се намерят уравнения на ъглополовящите на вътрешните ъгли на триъгълника, страните на който имат уравнения $4x - 3y = 0$, $3x - 4y + 1 = 0$, $5x + 12y - 10 = 0$.

Отговор. $77x + 21y - 50 = 0$, $7x - 56y + 25 = 0$, $x - y = 0$.

Задача 4.1.36 Да се намери радиусът r на окръжността, вписана в $\triangle ABC$, ако $AB : 3x-4y-25 = 0$, $BC : 5x+12y-65 = 0$, $CA : 8x + 15y - 85 = 0$.

Отговор. $r = 5$.

Задача 4.1.37 Точката A и правите b_B и b_C са връх и ъглополовящи на вътрешните ъгли съответно при върховете B и C на $\triangle ABC$. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако:

а) $A(4, -1)$, $b_B : x - 1 = 0$, $b_C : x - y - 1 = 0$;
б) $A(2, -4)$, $b_B : x + y - 2 = 0$, $b_C : x - 3y - 6 = 0$;
в) $A(2, 5)$, $b_B : 3x + 4y - 12 = 0$, $b_C : x - y - 1 = 0$.

Решение. а) Ще използваме, че ортогонално симетричните точки A' и A'' на върха A съответно относно ъглополовящите b_B и b_C лежат върху правата BC (Защо?). Както в задача 4.1.25, намираме $A'(-2, -1)$, $A''(0, 3)$ и следователно $BC : 2x - y + 3 = 0$. Тогава намираме върховете B и C като пресечни точки на правата BC съответно с правите b_B и b_C. Получаваме $B(1,5)$, $C(-4,-5)$ и оттук следва, че $AB : 2x+y-7=0$, $CA : x-2y-6=0$.

Отговор. б) $AB : 7x+y-10=0$, $BC : x+7y-6=0$, $CA : x-y-6=0$;

в) $AB : 9x+2y-28=0$, $BC : 3x-46y+28=0$, $CA : 46x-3y-77=0$.

Задача 4.1.38 От $\triangle ABC$ са дадени страната $AB : 3x+4y=0$ и ъглополовящите $b_A : x+4=0$ и $b_B : 4x+7y+5=0$ на вътрешните ъгли съответно при върховете A и B. Да се намерят уравнения на страните BC и CA.

Отговор. $BC : 5x+12y+16=0$, $CA : 3x-4y+24=0$.

Задача 4.1.39 Да се намерят уравнения на страните на $\triangle ABC$, ако $A(2,-1)$, $B(1,5)$, а $L(3,0)$ е центърът на вписаната в триъгълника окръжност.

Отговор. $AB : 6x+y-11=0$, $BC : 146x+99y-641=0$, $CA : x+6y+4=0$.

Задача 4.1.40 Дадени са върхът A и правите h_B и b_B, които са съответно височината и ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха B на $\triangle ABC$. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако:

а) $A(2,6)$, $h_B : x-7y+15=0$, $b_B : 7x+y+5=0$;

б) $A(4,-3)$, $h_B : 6x-5y+7=0$, $b_B : 3x-2y+5=0$.

Отговор. а) $AB : 4x-3y+10=0$, $BC : 3x+4y-5=0$, $CA : 7x+y-20=0$;

б) $AB : y+3=0$, $BC : 276x+115y+1357=0$, $CA : 5x+6y-2=0$.

Задача 4.1.41 Дадени са върхът A и правите h_B и b_C, които са съответно височината през върха B и ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха C на $\triangle ABC$. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако:

а) $A(2,5)$, $h_B : x - 2y + 7 = 0$, $b_C : 4x + y - 1 = 0$;
б) $A(2,-1)$, $h_B : 3x - 4y + 27 = 0$, $b_C : x + 2y - 5 = 0$.

Отговор. а) $AB : 254x - 431y + 1647 = 0$, $BC : 38x + y + 135 = 0$, $CA : 2x + y - 9 = 0$;
б) $AB : 4x+7y-1 = 0$, $BC : y-3 = 0$, $CA : 4x+3y-5 = 0$.

Задача 4.1.42 Дадени са върхът A и правите m_C и b_C, които са съответно медианата и ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха C на $\triangle ABC$. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако:
а) $A(-5,5)$, $m_C : 19x + 26y - 79 = 0$, $b_C : 3x + 3y - 11 = 0$;
б) $A(4,3)$, $m_C : 4x + 13y - 10 = 0$, $b_C : x + 2y - 5 = 0$.

Отговор. а) $AB : x + 6y - 25 = 0$, $BC : 2x + y - 6 = 0$, $CA : x + 2y - 5 = 0$;
б) $AB : x-8y+20 = 0$, $BC : x+7y+5 = 0$, $CA : x+y-7 = 0$.

Задача 4.1.43 Дадени са върхът C и правите m_B и b_A, които са съответно медианата през върха B и ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A на $\triangle ABC$. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако:
а) $C(4,3)$, $m_B : 4x + 13y - 10 = 0$, $b_A : x + 2y - 5 = 0$;
б) $C(3,-1)$, $m_B : 6x + 10y - 59 = 0$, $b_A : x - 4y + 10 = 0$.

Отговор. а) $AB : 2x + 5y + 1 = 0$, $BC : 2x + 29y - 95 = 0$, $CA : 14x + 23y - 125 = 0$;
б) $AB : 2x + 9y - 65 = 0$, $BC : 18x + 13y - 41 = 0$, $CA : 6x - 7y - 25 = 0$.

4.2 Уравнения на равнина и права в пространството

4.2.1 Параметрични уравнения на равнина

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е афинна координатна система в пространството и α е произволна равнина, която е определена с точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколинеарни вектора $\overrightarrow{p_1}(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $\overrightarrow{p_2}(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$. Тогава за α имаме координатните параметрични уравнения

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2, \\ y &= y_0 + \mu_1 s_1 + \mu_2 s_2, \\ z &= z_0 + \nu_1 s_1 + \nu_2 s_2, \end{aligned} \tag{4.30}$$

където параметрите s_1 и s_2 се менят от $-\infty$ до $+\infty$.

4.2.2 Общо уравнение на равнина

В сила са следните твърдения:

1) Всяка равнина α има относно K поне едно уравнение от вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.31}$$

където A, B, C и D са реални числа и

$$|A| + |B| + |C| \neq 0. \tag{4.32}$$

2) Всяко уравнение от вида (4.31), при условието (4.32), е уравнение относно K на точно една равнина.

Уравнението (4.31), със свойството (4.32), се нарича *общо уравнение на равнината* α *относно* K, а само лявата му част – *полином на* α *относно* K.

3) Един вектор $\overrightarrow{p}(\lambda, \mu, \nu)$ е компланарен с равнината α с общо уравнение (4.31) тогава и само тогава, когато

$$A\lambda + B\mu + C\nu = 0. \tag{4.33}$$

4) Ако (4.31) е общо уравнение на равнината α и ρ е произволно реално число, различно от нула, то и уравнението

$$(\rho A).x + (\rho B).y + (\rho C).z + \rho D = 0$$

е уравнение на същата равнина α.

Ще отбележим следните частни случаи на (4.31):

5) Равнината α с общо уравнение (4.31)

5.а) минава през началото O на K точно тогава, когато $D = 0$;

5.б) е успоредна на оста Ox (респ. Oy или Oz) точно тогава, когато $A = 0$ (респ. $B = 0$ или $C = 0$);

5.в) съдържа оста Ox (респ. Oy или Oz) точно тогава, когато $D = 0$, $A = 0$ (респ. $D = 0$, $B = 0$ или $D = 0$, $C = 0$);

5.г) е успоредна на равнината Oxy (респ. Oyz или Oxz) точно тогава, когато $A = 0$, $B = 0$ (респ. $B = 0$, $C = 0$ или $C = 0$, $A = 0$);

5.д) съвпада с равнината Oxy (респ. Oyz или Oxz) точно тогава, когато $D = 0$, $A = 0$, $B = 0$ (респ. $D = 0$, $B = 0$, $C = 0$ или $D = 0$, $C = 0$, $A = 0$).

По-нататък имаме:

6) Ако координатната система K е ортонормирана, векторът $\overrightarrow{N}(A, B, C)$ е перпендикулярен на равнината α с общо уравнение (4.31) относно K.

4.2.3 Уравнение на равнина през три неколинеарни точки

Ако $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ са неколинеарни точки, те определят единствена равнина α, която има относно K общо уравнение, което може да се запише в следната детерминантна форма

$$\begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.34}$$

4.2.4 Отрезово уравнение на равнина

Нека α е равнина, която не минава през началото O на K и пресича координатните оси Ox, Oy и Oz съответно в точките $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$ и $M_3(0, 0, c)$. Тогава α има уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{4.35}$$

което се нарича *отрезово уравнение*, а числата a, b и c – *отрези на* α *от координатните оси.*

4.2.5 Нормални уравнения на равнина

Нека K е *ортонормирана координатна система* и α е равнина с общо уравнение (4.31). Тогава съгласно 6) векторът $\overrightarrow{N}(A, B, C)$ е нормален на α. Интерес представлява общо уравнение на α относно K, в което коефициентите A, B и C са координати на нормален единичен вектор $\overrightarrow{N}$ на α. Такова уравнение се нарича *нормално уравнение на* α *относно* K. Имаме:

7) Всяка равнина в пространството има точно две нормални уравнения и всяко от тях се получава от другото с умножение с -1.

8) Ако една равнина има общо уравнение (4.31), двете ѝ нормални уравнения са

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{Ax + By + Cz + D}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \tag{4.36}$$

Очевидно нормалните уравнения (4.36) на α съответстват на двата ѝ нормални единични вектора

$$\overrightarrow{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

и

$$-\overrightarrow{n}\left(-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

Ако равнината α не минава през началото O на K, за конкретност можем да приемем да работим само с едно от двете ѝ нормални уравнения (4.36), а именно с онова, което има вида

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{-sgnD\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0. \tag{4.37}$$

Ще отбележим, че уравнението (4.37) е получено с онзи нормален единичен вектор на α, който сочи в полупространството относно α, което не съдържа началото O на K.

4.2.6 Разстояние от точка до равнина

Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка в пространството, която не лежи в равнината α. Ако предположим, че α е определена с нормалното уравнение, получено с нормалния единичен вектор $\overrightarrow{n}$, то числото

$$\delta = \frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{4.38}$$

се нарича *ориентирано разстояние от точката M_0 до равнината α при нормален вектор $\overrightarrow{n}$ на α.*

В случай, че α не минава през началото O на K, можем да използваме нормалното ѝ уравнение (4.37) и тогава за ориентираното разстояние δ ще бъде в сила формулата

$$\delta = \frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{-sgnD\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4.39}$$

Числото $d = |\delta|$ се нарича *разстояние от точката M_0 до равнината α*. За него от (4.38) (или (4.39)) намираме

$$d = |\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}|. \tag{4.40}$$

4.2.7 Взаимно положение на две равнини

Нека α_1 и α_2 са равнини, които имат относно афинната координатна система K съответно уравненията

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \alpha_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned} \tag{4.41}$$

9)

9.а) Равнините α_1 и α_2 се пресичат точно тогава, когато поне едно от числата

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \tag{4.42}$$

е различно от нула, т.е. точно тогава, когато не съществува реално число $\rho \neq 0$, такова че да бъдат изпълнени едновременно равенствата $A_2 = \rho A_1$, $B_2 = \rho B_1$, $C_2 = \rho C_1$.

9.б) Равнините α_1 и α_2 съвпадат тогава и само тогава, когато съществува реално число $\rho \neq 0$, такова че

$$A_2 = \rho A_1, \ B_2 = \rho B_1, \ C_2 = \rho C_1, \ D_2 = \rho D_1.$$

9.в) Равнините α_1 и α_2 са различни и успоредни точно тогава, когато съществува реално число $\rho \neq 0$, такова че

$$A_2 = \rho A_1, \ B_2 = \rho B_1, \ C_2 = \rho C_1, \text{ но } D_2 \neq \rho D_1.$$

4.2.8 Сноп равнини

Ако g е произволна права в пространството, множеството от всички равнини, минаващи през правата g, се нарича *сноп* *равнини с ос g*. Очевидно всеки сноп се определя с две кои да е свои пресекателни равнини.

Нека α_1 и α_2 са две различни равнини от снопа с ос правата g, зададени с (4.41) и да означим с

$$l_i(x, y, z) = A_i x + B_i y + C_i z + D_i, \; i = 1, 2,$$

техните полиноми. Тогава имаме:

10)

10.а) Ако поне едно от числата λ_1 и λ_2 е различно от нула, уравнението

$$\lambda_1 l_1(x, y, z) + \lambda_2 l_2(x, y, z) = 0 \tag{4.43}$$

е уравнение на равнина от снопа.

10.б) За всяка равнина от снопа съществува ненулева двойка реални числа (λ_1, λ_2) такава, че (4.43) е уравнение на равнината.

Ще отбележим, че ако $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, то с уравнението (4.43), при условието $\lambda_1 + \rho\lambda_2 \neq 0$, $\rho \neq 0$, се описва множеството на всички успоредни или съвпадащи с тях равнини. Така множеството се нарича *сноп успоредни равнини*.

4.2.9 Ъгъл между две равнини

Нека α_1 и α_2 са пресекателни равнини с нормални вектори съответно $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$. Тогава под ъгъл между α_1 и α_2 ще разбираме e−ъгъла между $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$. Ако равнините α_1 и α_2 са зададени с общите уравнения (4.41) и координатната система K е ортонормирана, то имаме

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \\ \sin\varphi &= \frac{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \end{aligned} \tag{4.44}$$

където $\varphi = (\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2})_e$ и Δ_1, Δ_2, Δ_3 са числата, дефинирани с (4.42).

4.2.10 Уравнения на ъглополовящите равнини на две пресекателни равнини

Ако α_1 и α_2 са пресекателни равнини съответно с нормални уравнения

$$\alpha_1 : \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = 0 \text{ и } \alpha_2 : \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0,$$

двете им ъглополовящи (бисектрични) равнини β_1 и β_2 имат уравнения

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0. \tag{4.45}$$

4.2.11 Параметрични уравнения на права в пространството

Нека K е афинна координатна система и g е произволна права в пространството, определена с точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевия вектор $\overrightarrow{p}(\lambda, \mu, \nu)$. Тогава g има относно K *параметрични уравнения*

$$x = x_0 + \lambda.s, \; y = y_0 + \mu.s, \; z = z_0 + \nu.s, \tag{4.46}$$

където *параметърът* s се мени от $-\infty$ до $+\infty$.

4.2.12 Представяне на права чрез уравнения на две равнини през нея

Ако α_1 и α_2 са пресекателни равнини с пресечница правата g, които имат относно K уравненията (4.41), то съгласно 9.а) поне едно от числата (4.42) е различно от нула. Тогава двойката уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{4.47}$$

се нарича *двойка уравнения на правата g относно K*.

Очевидно правата g може да се представи чрез уравненията на коя да е двойка равнини през нея и следователно:

11) Всяка права има безбройно много двойки уравнения от вида (4.47).

12) Всяка двойка уравнения от вида (4.47), за която поне едно от числата (4.42) не е нула, е двойка уравнения спрямо K на точно една права.

Ако правата g пробожда координатната равнина Oxy (респ. Oyz или Ozx), тя има двойка уравнения относно K от вида

$$x = az + p, \quad y = bz + q, \tag{4.48}$$

респективно

$$y = ax + p, \quad z = bx + q \tag{4.49}$$

или

$$z = ay + p, \quad x = by + q. \tag{4.50}$$

Уравненията (4.48), (4.49) и (4.50) се наричат *канонични уравнения на правата g относно K*. Тъй като всяка права пробожда поне една от координатните равнини на K, следва че всяка права има поне една двойка канонични уравнения.

Забележка 4.2.1 До края на параграфа, ако не е казано друго, ще предполагаме, че *координатната система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$* е *дясна и ортонормирана.*

Задача 4.2.1 Спрямо афинна координатна система са дадени точката M_0 и неколинеарните вектори $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$. Да се намерят параметрични уравнения и общо уравнение на равнината α, определена от M_0, $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$, ако:
а) $M_0(3,1,2)$, $\overrightarrow{p_1}(1,0,2)$, $\overrightarrow{p_2}(2,-1,1)$;
б) $M_0(0,0,1)$, $\overrightarrow{p_1}(1,2,3)$, $\overrightarrow{p_2}(0,5,2)$;
в) $M_0(2,0,1)$, $\overrightarrow{p_1}(1,1,1)$, $\overrightarrow{p_2}(1,0,0)$.

Решение. а) За да намерим параметрични уравнения на равнината α, заместваме в (4.30) $x_0 = 3$, $y_0 = 1$, $z_0 = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\nu_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_2 = -1$, $\nu_2 = 1$. Получаваме

$$x = 3 + s_1 + 2s_2,\ y = 1 - s_2,\ z = 2 + 2s_1 + s_2.$$

Оттук, като изключим параметрите s_1 и s_2, получаваме общото уравнение на α:

$$\alpha : 2x + 3y - z - 7 = 0. \tag{4.51}$$

До същото уравнение достигаме и като изразим условието за компланарност на векторите $\overrightarrow{M_0M}(x-3, y-1, z-2)$, $\overrightarrow{p_1}(1,0,2)$ и $\overrightarrow{p_2}(2,-1,1)$ (виж параграф 2.3.6):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2x + 3y - z - 7 = 0.$$

За да намерим общо уравнение на α, можем да постъпим и по друг начин. Нека α има общо уравнение (4.31). Тъй като равнината съдържа точката M_0, координатите ѝ $(3,1,2)$ удовлетворяват (4.31), т.е.

$$3A + B + 2C + D = 0. \tag{4.52}$$

От друга страна, векторите $\overrightarrow{p_1}(1,0,2)$ и $\overrightarrow{p_2}(2,-1,1)$ са компланарни с α и следователно съгласно 3) ще бъдат изпълнени равенства от вида (4.33):

$$A + 2C = 0, \quad 2A - B + C = 0. \tag{4.53}$$

От (4.52) и (4.53) намираме $A = 2\rho$, $B = 3\rho$, $C = -\rho$, $D = -7\rho$, $\rho \neq 0$ и като заместим в (4.31) и отчетем 4), получаваме отново (4.51).

Отговор. б) $x = s_1$, $y = 2s_1 + 5s_2$, $z = 1 + 3s_1 + 2s_2$,
$11x + 2y - 5z + 5 = 0$;
в) $x = 2 + s_1 + s_2$, $y = s_1$, $z = 1 + s_1$, $y - z + 1 = 0$.

Задача 4.2.2 Спрямо афинна координатна система са дадени точките:
а) $M_1(1,2,3)$, $M_2(1,3,-1)$, $M_3(0,1,4)$;
б) $M_1(1,1,1)$, $M_2(2,2,2)$, $M_3(-1,0,3)$;
в) $M_1(1,0,1)$, $M_2(3,1,1)$, $M_3(4,-1,1)$.
Да се намерят общо уравнение и параметрични уравнения на равнината α, определена от дадените точки.

Решение. а) Заместваме координатите на дадените точки в (4.34):

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пресмятаме горната детерминанта и получаваме, че α има общо уравнение $3x - 4y - z + 8 = 0$.

Векторите $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{M_1M_2}(0,1,-4)$ и $\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{M_1M_3}(-1,-1,1)$ са компланарни с α, откъдето следва, че тя има параметрични уравнения

$$x = 1 - s_2,\ y = 2 + s_1 - s_2,\ z = 3 - 4s_1 + s_2.$$

Отговор. б) $3x - 4y + z = 0$, $x = 1 + s_1 + 2s_2$, $y = 1 + s_1 + s_2$, $z = 1 + s_1 - 2s_2$;
в) $z - 1 = 0$, $x = 1 + 2s_1 + s_2$, $y = s_1 - 2s_2$, $z = 1$.

Задача 4.2.3 Спрямо афинната координатна система $K = Oxyz$ в пространството е дадена точката $M(1,-1,2)$. Намерете уравнения на равнините, които минават през M и:

а) съдържат съответно координатните оси Ox, Oy и Oz;

б) са успоредни съответно но координатните равнини Oyz, Ozx и Oxy.

Решение. Ще използваме 5).

а) Всяка равнина, която съдържа оста Ox има уравнение от вида

$$By + Cz = 0. \tag{4.54}$$

От снопа равнини (4.54) отделяме равнината α_1, която минава през точката $M(1, -1, 2)$. Заместваме координатите на M в (4.54) и получаваме $-B + 2C = 0$. Оттук намираме $B = 2\rho$, $C = \rho$, $\rho \neq 0$ и следователно α_1 има общо уравнение $2y + z = 0$.

До същото уравнение достигаме и като изразим, че равнината α_1 минава през дадената точка M и през две точки от оста Ox, например $O(0, 0, 0)$ и $N(1, 0, 0)$.

Аналогично за равнините α_2 и α_3, които минават през точката M и съдържат съответно осите Oy и Oz, намираме уравненията $\alpha_2 : 2x - z = 0$ и $\alpha_3 : x + y = 0$.

б) Равнината β_1, успоредна на координатната равнина Oyz, има общо уравнение от вида $Ax + D = 0$. Понеже β_1 съдържа точката $M(1, -1, 2)$, то $A + D = 0$. Следователно $A = \rho$, $D = -\rho$, $\rho \neq 0$. Тогава β_1 има уравнение $x - 1 = 0$.

Като постъпим по същия начин, намираме, че равнините β_2 и β_3, които минават през M и са успоредни съответно на координатните равнини Ozx и Oxy имат уравнения $\beta_2 : y + 1 = 0$, $\beta_3 : z - 2 = 0$.

Задача 4.2.4 Да се намери уравнение на равнината α, която минава през точката M и е успоредна на равнината β, ако:

а) $M(1, 2, 1)$, $\beta : 3x - y + z + 10 = 0$;

б) $M(1, 1, 0)$, $\beta : x + y - z + 1 = 0$.

(Координатната система е афинна).

Решение. а) От 9.в) следва, че равнината α, която минава през точката $M(1,2,1)$ и е успоредна на равнината $\beta : 3x - y + z + 10 = 0$ има общо уравнение

$$3.(x-1) - 1.(y-2) + 1.(z-1) = 0,$$

т.е. $3x - y + z - 2 = 0$.

Отговор. б) $\alpha : x + y - z - 2 = 0$.

Задача 4.2.5 Да се намери уравнение на равнината α, която минава през точката M и съдържа правата g, ако:

а) $M(3,2,1)$, $g : x = 2 + 4s,\ y = -3 + s,\ z = 1 + 2s$;

б) $M(-1,-2,0)$, $g : x = s,\ y = 1 - s,\ z = 2$;

в) $M(2,3,1)$, $g : 3x - 2y + 5z - 2 = 0,\ x - 4y + z + 3 = 0$.

(Координатната система е афинна).

Решение. а) **I начин.** Равнината α е определена от дадената точка $M(3,2,1)$ и точките $M_1(2,-3,1)$ и $M_2(6,-2,3)$, които се получават от параметричните уравнения на g съответно за $s = 0$ и $s = 1$. Тогава α има общо уравнение $10x-2y-19z-7 = 0$. (Виж задача 4.2.2).

II начин. Равнината α принадлежи на снопа равнини с ос правата g. Като изключим параметъра s от параметричните уравнения на g, получаваме двойката уравнения $x-4y-14 = 0$, $2y-z+7 = 0$. Тогава съгласно 10.б) съществува ненулева двойка числа (λ_1, λ_2) така, че α има уравнение от вида

$$\lambda_1(x - 4y - 14) + \lambda_2(2y - z + 7) = 0. \tag{4.55}$$

Двойката (λ_1, λ_2) намираме, като изразим, че M лежи в α. Получаваме равенството $-19\lambda_1 + 10\lambda_2 = 0$, от което определяме $\lambda_1 = 10\rho$, $\lambda_2 = 19\rho$, $\rho \neq 0$. Заместваме тези стойности в (4.55) и достигаме до уравнението $10x - 2y - 19z - 7 = 0$.

Отговор. б) $\alpha : x+y-2z+3 = 0$; в) $\alpha : 7x-8y+11z-1 = 0$.

Задача 4.2.6 Да се намери уравнение на равнината α, която съдържа точките $M_1(3,-2,2)$ и $M_2(1,0,4)$ и е успоредна на правата $g: x = 5 + 5s,\ y = 3 + 3s,\ z = 1 + s$. (Координатната система е афинна).

Упътване. Равнината α минава през точката $M_2(1, 0, 4)$ и е компланарна на векторите $\overrightarrow{p}(5, 3, 1) \parallel g$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2}(-1, 1, 1)$.

Отговор. $\alpha : x - 3y + 4z - 17 = 0$.

Задача 4.2.7 Да се намерят отрезите, които равнината $\alpha : x + 2y - 3z + 6 = 0$ отсича от координатните оси на афинната координатна система $K = Oxyz$.

Решение. Отчитайки (4.35), заключаваме, че равнината α има отрезово уравнение

$$\frac{x}{-6} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{2} = 1$$

и следователно отрезите ѝ от координатните оси Ox, Oy и Oz са съответно $a = -6$, $b = -3$ и $c = 2$.

Задача 4.2.8 Да се намери уравнение на равнината α, която минава през точката $M(2, 1, -1)$ и отсича от координатните оси Ox и Oz на афинната координатна система $K = Oxyz$ съответно отрези $a = 2$ и $c = 1$.

Отговор. $\alpha : x + 2y + 2z - 2 = 0$.

Задача 4.2.9 Да се намери уравнение на равнината α, която минава през точката $M(2, -1, 3)$ и отрезите ѝ от координатните оси Oy и Oz са два пъти по-големи от отреза ѝ от оста Ox на афинната координатна система $K = Oxyz$.

Отговор. $\alpha : 2x + y + z - 6 = 0$.

Задача 4.2.10 Да се намери уравнение на равнината α, която минава през точката M и има нормален вектор $\overrightarrow{N}$, ако:

а) $M(2, 1, -1)$, $\overrightarrow{N}(1, -2, 3)$;

б) $M(1, 1, 3)$, $\overrightarrow{N}(5, 2, 1)$.

Упътване. Използвайте, че ако координатната система K е ортонормирана, равнината α, която минава през точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и има нормален вектор $\overrightarrow{N}(A, B, C)$, притежава уравнение от вида

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{4.56}$$

Отговор. а) $\alpha : x-2y+3z+3 = 0$; б) $\alpha : 5x+2y+z-10 = 0$.

Задача 4.2.11 Да се намери уравнение на равнината α, която е перпендикулярна на отсечката AB и съдържа средата ѝ, ако:

а) $A(1, 2, 3)$, $B(3, 4, -1)$;
б) $A(0, 0, 1)$, $B(4, 2, 1)$;
в) $A(1, 1, 1)$, $B(3, -1, 5)$.

Отговор. а) $\alpha : x + y - 2z - 3 = 0$; б) $\alpha : 2x + y - 5 = 0$,
в) $\alpha : x - y + 2z - 8 = 0$.

Задача 4.2.12 Да се намери уравнение на равнината α, която минава през точката M и е перпендикулярна на равнините β и γ, ако:

а) $M(4, -2, 1)$, $\beta : x - 2y + z - 3 = 0$, $\gamma : 3x - y + 2z - 4 = 0$;
б) $M(3, 1, 1)$, $\beta : 3x - y + 2z + 4 = 0$, $\gamma : x + 2y - z + 5 = 0$.

Решение. а) **I начин.** Понеже координатната система K е ортонормирана, векторите $\overrightarrow{N_\beta}(1, -2, 1)$ и $\overrightarrow{N_\gamma}(3, -1, 2)$ са нормалните вектори съответно на β и γ и следователно са компланарни с търсената равнина α. Тогава α има общо уравнение, което може да се запише в детерминантната форма

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+2 & z-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $3x - y - 5z - 9 = 0$.

II начин. От $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$ следва, че векторното произведение $\overrightarrow{N_\beta} \times \overrightarrow{N_\gamma}$ е вектор, нормален на α. Намираме $(\overrightarrow{N_\beta} \times \overrightarrow{N_\gamma})(-3, 1, 5)$ и следвайки (4.56), получаваме, че α има уравнение $-3.(x-4) + 1.(y+2) + 5.(z-1) = 0$, или $3x - y - 5z - 9 = 0$.

III начин. Равнината α минава през точката $M(4, -2, 1)$ и съгласно (4.56) има уравнение от вида

$$A(x-4) + B(y+2) + C(z-1) = 0, \tag{4.57}$$

където $\overrightarrow{N_\alpha}(A, B, C)$ е нормален вектор на α. От $\alpha \perp \beta$ и $\alpha \perp \gamma$ следва $\overrightarrow{N_\alpha}\overrightarrow{N_\beta} = 0$ и $\overrightarrow{N_\alpha}\overrightarrow{N_\gamma} = 0$. Последните скаларни произведения са еквивалентни на равенствата $A - 2B + C = 0$ и $3A - B + 2C = 0$, от които намираме $A = 3\rho$, $B = -\rho$, $C = -5\rho$, $\rho \neq 0$. Заместваме тези стойности в (4.57) и получаваме уравнението $3x - y - 5z - 9 = 0$.

Отговор. б) $\alpha : 3x - 5y - 7z + 3 = 0$.

Задача 4.2.13 Да се намери уравнение на равнината α, която съдържа точките A и B и е перпендикулярна на равнината β ако:

а) $A(3, 1, 1)$, $B(1, -1, -2)$, $\beta : x - 2y + 3z - 5 = 0$;

б) $A(1, 1, 1)$, $B(1, 0, 2)$, $\beta : x + 2y - 3z + 2 = 0$.

Отговор. а) $\alpha : 4x - y - 2z - 9 = 0$; б) $\alpha : x + y + z - 3 = 0$.

Задача 4.2.14 Да се намери уравнение на равнината α, която съдържа правата $g : 3x - 2y + 3z - 5 = 0, x - 4y + 2z - 3 = 0$ и е перпендикулярна на равнината $\beta : 2x + y - 3z + 2 = 0$.

Упътване. Равнината α принадлежи на снопа равнини с ос дадената права g.

Отговор. $\alpha : 25x - 20y + 10z - 11 = 0$.

Задача 4.2.15 Да се намери ориентираното разстояние от точката A до равнината α, ако:

а) $A(1, 0, -2)$, $\alpha : x + y + 3z - 1 = 0$;

б) $A(-1, 2, -2)$, $\alpha : 2x - 3y + 2z - 9 = 0$.

Решение. а) Тъй като равнината α не минава през началото O на координатната система (Защо?), можем да използваме формулата (4.39) за ориентирано разстояние от точка до равнина. Имаме

$$\delta = \frac{1.1 + 1.0 + 3.(-2) - 1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2}} = -\frac{6}{\sqrt{10}}.$$

Отговор. б) $\delta = -\dfrac{21}{\sqrt{17}}$.

Задача 4.2.16 Върху апликатната ос Oz намерете точка, която се намира на разстояние d от равнината α, ако:

а) $d = 4$, $\alpha : x + 2y - 2z - 2 = 0$;

б) $d = 2$, $\alpha : 2x - 3y + 6z + 2 = 0$.

Упътване. Търсената точка върху Oz има координати от вида $(0, 0, z_0)$. Използвайте (4.40).

Отговор. а) $M'(0, 0, 5)$, $M''(0, 0, -7)$;

б) $M'(0, 0, 2)$, $M''\left(0, 0, -\dfrac{8}{3}\right)$.

Задача 4.2.17 Върху абсцисната ос Ox намерете точка, която е равноотдалечена от равнините α и β, ако:

а) $\alpha : 12x - 16y + 15z + 1 = 0$, $\beta : 2x + 2y - z - 1 = 0$;

б) $\alpha : 3x - 2y - 6z - 1 = 0$, $\beta : x - 2y - 2z + 1 = 0$.

Отговор. а) $M'(2, 0, 0)$, $M''\left(\dfrac{11}{43}, 0, 0\right)$;

б) $M'(5, 0, 0)$, $M''\left(-\dfrac{1}{4}, 0, 0\right)$.

Задача 4.2.18 Да се намери разстоянието d между успоредните равнини α и β, ако:

а) $\alpha : 2x - y - 2z + 5 = 0$, $\beta : 2x - y - 2z - 4 = 0$;

б) $\alpha : 3x - 2y - 6z - 12 = 0$, $\beta : 3x - 2y - 6z + 2 = 0$.

Отговор. а) $d = 3$; б) $d = 2$.

Задача 4.2.19 Да се намери уравнение на равнината α, която е успоредна на равнината $\beta : 4x - 2y - 4z - 5 = 0$ и се намира на разстояние $d = 4$ от нея.

Решение. Равнините, успоредни на равнината β, образуват сноп успоредни равнини с уравнение $4x - 2y - 4z + D = 0$. Тогава търсената равнина α има нормално уравнение от вида

$$\frac{4x - 2y - 4z + D}{\pm\sqrt{36}} = 0.$$

Понеже $\alpha \parallel \beta$, разстоянието от коя да е точка на β, например $M(0, -\frac{5}{2}, 0)$ до α е равно на 4. Имаме

$$|\frac{4.0 - 2.\frac{5}{2} - 4.0 + D}{6}| = 4,$$

т.е. $|5 + D| = 24$. От последното равенство намираме $D_1 = 19$, $D_2 = -29$ и следователно имаме две равнини, удовлетворяващи условието на задачата: $\alpha_1 : 4x - 2y - 4z + 19 = 0$ и $\alpha_2 : 4x - 2y - 4z - 29 = 0$.

Задача 4.2.20 Да се намери уравнение на равнина α, която съдържа правата $g : 2x - 3y - z = 0, 4x + y + 5z - 28 = 0$ и се намира на разстояние $d = \sqrt{14}$ от началото O на координатната система.

Отговор. $\alpha_1 : 3x - y + 2z - 14 = 0$ и $\alpha_2 : x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Задача 4.2.21 Да се пресметне ъгълът между равнините:

а) $\alpha : x + 4y - z + 1 = 0$, $\beta : x + y - z - 3 = 0$; б) $\alpha : x + 2y - z - 1 = 0$, $\beta : x - y - 3 = 0$; в) $\alpha : x + 2y - 2z = 0$, $\beta : z - 5 = 0$; г) $\alpha : x + 2y - z - 1 = 0$, $\beta : 3x - 5y - 7z = 0$.

Решение. а) Нормалните вектори на равнините α и β са съответно $\overrightarrow{N_\alpha}(1,4,-1)$ и $\overrightarrow{N_\beta}(1,1,-1)$. Тогава, като използваме (4.44), за ъгъла φ между тях, получаваме

$$\cos\varphi = \frac{1.1+4.1+(-1).(-1)}{\sqrt{1^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{18}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

и следователно $\varphi = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Отговор. б) $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$; в) $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$;

г) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Задача 4.2.22 Да се напишат уравнения на бисектричните равнини β_1 и β_2 на равнините α_1 и α_2, ако:

а) $\alpha_1 : x-3y+2z-5=0$, $\alpha_2 : 3x-2y-z+3=0$;

б) $\alpha_1 : 5x-5y-2z-3=0$, $\alpha_2 : x+7y-2z+1=0$;

в) $\alpha_1 : 2x-y+5z+3=0$, $\alpha_2 : x-5y+2z-1=0$.

Решение. а) Равнините α_1 и α_2 имат съответно нормални уравнения

$$\alpha_1 : \frac{x-3y+2z-5}{\sqrt{14}} = 0, \quad \alpha_2 : \frac{3x-2y-z+3}{\sqrt{14}} = 0$$

и като приложим (4.45), намираме

$$\beta_1 : \frac{x-3y+2z-5}{\sqrt{14}} + \frac{3x-2y-z+3}{\sqrt{14}} = 0,$$

$$\beta_2 : \frac{x-3y+2z-5}{\sqrt{14}} - \frac{3x-2y-z+3}{\sqrt{14}} = 0.$$

Оттук получаваме $\beta_1 : 4x-5y+z-2=0$ и $\beta_2 : 2x+y-3z+8=0$.

Отговор. б) $\beta_1 : 3x+y-2z-1=0$, $\beta_2 : x-3y-1=0$;

в) $\beta_1 : 3x-6y+7z+2=0$, $\beta_2 : x+4y+3z+4=0$.

Задача 4.2.23 Спрямо афинна координатна система са дадени точката $M(1,-2,3)$ и вектора $\overrightarrow{p}(1,2,-1)$. Да се намерят:

а) параметрични уравнения на правата g, която минава през точката M и е колинеарна с вектора $\overrightarrow{p}$;

б) възможните двойки канонични уравнения на правата g.

Решение. а) Съгласно (4.46) правата g има параметрични уравнения

$$g : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -2 + 2s \\ z = 3 - s. \end{cases} \tag{4.58}$$

б) Правата g пробожда координатната равнина $Oxy : z = 0$ в точката $M_1(4,4,0)$ и е колинеарна с вектора $\overrightarrow{p_1}(-1,-2,1)$. Тогава според (4.48) тя има каноничните уравнения

$$g : x = -z + 4,\ y = -2z + 4. \tag{4.59}$$

Тъй като g пробожда координатната равнина $Oyz : x = 0$ в точката $M_2(0,-4,4)$ и е колинеарна с вектора $\overrightarrow{p}(1,2,-1)$, тя има каноничните уравнения

$$g : y = 2x - 4,\ z = -x + 4. \tag{4.60}$$

Най-после, g пробожда координатната равнина $Ozx : y = 0$ в точката $M_3(2,0,2)$ и е колинеарна с вектора $\overrightarrow{p_2}(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})$. Оттук следва, че g има каноничните уравнения

$$g : z = -\frac{1}{2}y + 2,\ x = \frac{1}{2}y + 2. \tag{4.61}$$

Ще отбележим, че да каноничните уравнения (4.59), (4.60) и (4.61) можем да стигнем и ако изразим параметъра s съответно от третото, първото и второто уравнение на (4.58) и заместим в останалите две.

Задача 4.2.24 Относно афинна координатна система са дадени точките $M_1(1,-1,0)$ и $M_2(2,3,1)$. За правата $g = M_1M_2$ да се напишат:

а) параметрични уравнения;

б) възможните двойки канонични уравнения.

Отговор. а) $g: x = 1+s,\ y = -1+4s,\ z = s$;

б) $x = z+1,\ y = 4z-1;\ y = 4x-5,\ z = x-1;$

$z = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4},\ x = \frac{1}{4}y + \frac{5}{4}.$

Задача 4.2.25 Относно афинна координатна система е дадена правата

$$g: x-2y+3z+1=0,\ 2x+y-4z-8=0. \tag{4.62}$$

Да се напишат възможните двойки канонични уравнения на g.

Упътване. От уравненията (4.62) изразете последователно: x и y посредством z; y и z посредством x; z и x посредством y.

Отговор. $x = z+3,\ y = 2z+2;\ y = 2x-4,\ z = x-3;$

$z = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2},\ x = \frac{1}{2}y - 2.$

Задача 4.2.26 Дадена е правата

$$g: x+2y-3z+4=0,\ x-y-z+2=0. \tag{4.63}$$

Да се намери вектор, колинеарен с g в случаите, когато:

а) координатната система е афинна;

б) координатната система е дясна и ортонормирана.

Решение. а) Ще намерим две точки от правата g. Полагаме $y=0$ в (4.63) и получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} x-3z+4=0 \\ x-z+2=0. \end{array}\right.$$

От нея намираме $x = -1$, $z = 1$ и следователно точката $M_1(-1, 0, 1)$ лежи върху g. Аналогично, като положим $z = 4$, от системата

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y - 8 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{array} \right.$$

определяме и координатите $x = 4$, $y = 2$ на точката $M_2(4, 2, 4)$ на g. Тогава векторът $\overrightarrow{M_1M_2}(5, 2, 3)$ е колинеарен на правата g.

б) Методът от а) е приложим и при ортонормирана координатна система. Сега обаче ще използваме, че векторното произведение $\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$ на нормалните вектори $\overrightarrow{N_1}(1, 2, -3)$ и $\overrightarrow{N_2}(1, -1, -1)$ на двете равнини, чиито уравнения са тези в (4.63), е вектор, колинеарен с тяхната пресечница, т.е. с g. По този начин намираме $(\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2})(5, 2, 3)$.

Задача 4.2.27 Да се намери разстоянието от точката A до правата g, ако:

а) $A(1, -1, -2)$, $g : x = -3 + 3s,\ y = -2 + 2s,\ z = 8 - 2s$;
б) $A(7, 9, 7)$, $g : x = 2 + 4s,\ y = -1 + 3s,\ z = 2s$;
в) $A(-1, 1, 2)$, $g : x - y + 1 = 0,\ x - z - 2 = 0$.

Решение. а) Търсеното разстояние е $d = |AA_0|$, където A_0 е ортогоналната проекция на точката A върху правата g. За да намерим A_0, през A прекарваме равнина α, перпендикулярна на g. Тогава A_0 е прободът на g и α. За равнината α получаваме уравнението $3.(x - 1) + 2.(y + 1) - 2.(z + 2) = 0$, т.е.

$$3x + 2y - 2z - 5 = 0. \tag{4.64}$$

За да намерим координатите на A_0, решаваме системата, образувана от параметричните уравнения на g и уравнението (4.64). Имаме

$$3(-3 + 3s) + 2(-2 + 2s) - 2(8 - 2s) - 5 = 0$$

и оттук следва, че точката A_0 се получава за $s = 2$. Намираме $A_0(3, 2, 4)$ и следователно $d = |AA_0| = 7$.

Отговор. б) $d = \sqrt{10}$; в) $d = \sqrt{14}$.

Задача 4.2.28 Да се намери точката M', която е ортогонално симетрична на точката M относно равнината α, ако:
а) $M(-12, -4, 18)$, $\alpha : 6x + 2y - 9z + 121 = 0$;
б) $M(2, 7, 1)$, $\alpha : x - 4y + z + 7 = 0$;
в) $M(0, 0, 0)$, $\alpha : 6x + 2y - 9z + 121 = 0$.

Решение. а) Ортогонално симетричната точка M' на M относно равнината α лежи върху перпендикуляра

$$h : x = -12 + 6s,\ y = -4 + 2s,\ z = 18 - 9s,$$

през M към α и следователно има координати от вида $M'(-12+6s_0, -4 + 2s_0, 18 - 9s_0)$. Числото s_0 ще определим, като използваме, че средата $M_0(-12 + 3s_0, -4 + s_0, 18 - \frac{9}{2}s_0)$ на отсечката MM' лежи в α, т.е.

$$6.(-12 + 3s_0) + 2.(-4 + s_0) - 9.(18 - \frac{9}{2}s_0) + 121 = 0.$$

Оттук намираме $s_0 = 2$ и следователно $M'(0, 0, 0)$.
Отговор. б) $M'(4, -1, 3)$; в) $M'(-12, -4, 18)$.

Задача 4.2.29 Да се намери точката M', ортогонално симетрична на точката M относно правата g, ако:
а) $M(4, 3, 10)$, $g : x = 1 + 2s,\ y = 2 + 4s,\ z = 3 + 5s$;
б) $M(3, 1, -4)$, $g : x = -1 + 2s,\ y = -4 - s,\ z = -1 - s$.

Решение. а) През точката M прекарваме равнина α, която е перпендикулярна на правата g. Имаме

$$\alpha : 2.(x - 4) + 4.(y - 3) + 5.(z - 10) = 0,$$

т.е. $\alpha : 2x + 4y + 5z - 70 = 0$. Равнината α пресича правата g в точката $M_0(3, 6, 8)$, която е средата на отсечката MM'. Оттук намираме $M'(2, 9, 6)$.
Отговор. б) $M'(-1, -11, 0)$.

Задача 4.2.30 Дадени са точката $M(7,5,1)$, правата $g: x=1+2s,\ y=9-s,\ z=-4+2s$ и равнината $\alpha: x+y+2z-8=0$. Нека M' е точката, ортогонално симетрична на M относно g, а M'' – точката, ортогонално симетрична на M относно α. Да се намери лицето S на $\triangle MM'M''$.

Упътване. Използвайте, че $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{MM'}\times\overrightarrow{MM''}|$.

Отговор. $S=6\sqrt{2}$.

Задача 4.2.31 Дадени са точките $A(0,2,3)$, $B(1,4,1)$ и равнината $\alpha: x+2y-z+1=0$. Светлинен лъч, пуснат от A, след отразяването си от равнината α, минава през B. Да се намерят уравнения на правите на падащия и отразения лъч, ъглите между тях и директорните косинуси на посоката на падащия лъч.

Решение. Да означим с l и l' правите съответно на падащия и отразения лъч. Тогава $l=AB'$ и $l'=A'B$, където A' и B' са ортогонално симетричните точки съответно на A и B относно равнината α. Както в задача 4.2.28, намираме $A'(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{11}{3})$, $B'(-2,-2,4)$ и следователно

$$l: x=2s,\ y=2+4s,\ z=3-s$$

и

$$l': x=1+5t,\ y=4+10t,\ z=1-8t.$$

Векторът $\overrightarrow{p}(2,4,-1)$ е колинеарен с l, а $\overrightarrow{q}(5,10,-8)$ – с l'. Тогава

$$\cos(\overrightarrow{p},\overrightarrow{q})_e=\frac{2.5+4.10+(-1).(-8)}{\sqrt{21}\sqrt{189}}=\frac{58}{63}$$

и ъглите между l и l' са $\varphi_1=\arccos\dfrac{58}{63}$ и $\varphi_2=\pi-\varphi_1$.

Директорните косинуси на посоката на падащия лъч са координатите на единичния вектор

$$\frac{\overrightarrow{AB'}}{|AB'|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}\right).$$

Задача 4.2.32 Светлинен лъч, пуснат от точката $A(23, 0, 4)$, след отразяването си от равнината $\alpha : 2x-y+z-5 = 0$, минава през точката $B(-2, -5, 4)$. Да се намерят уравнения на правите l и l' съответно на падащия и на отразения лъч.

Отговор. $l : z = 4,\ x - 5y - 23 = 0;$
$l' : x = -2 + s,\ y = -5 - 4s,\ z = 4 + 3s.$

Задача 4.2.33 Светлинен лъч, пуснат от началото на координатната система, след отразяването си от равнината $\alpha : 2x + 3y + 2z - 4 = 0$, става успореден на ординатната ос. Да се намерят уравнения на падащия лъч.

Отговор. $l : x = 12s,\ y = s,\ z = 12s.$

Задача 4.2.34 Светлинен лъч, пуснат от точката $A(7, 3, 6)$ в посоката, определена от вектора $\overrightarrow{p}(-1, 3, -2)$, се отразява от равнината $\alpha : 5x + 3y - 2z + 8 = 0$. Да се намерят уравнения на правата l' на отразения лъч и ъгълът φ на падане.

Упътване. Точката A и векторът $\overrightarrow{p}$ определят правата l на падащия лъч. Тогава $l' = A'B$, където B е прободната точка на l с α, а A' – ортогонално симетричната точка на A относно α.

Отговор. $l' : x = 12 + 59s,\ y = -12 - 33s,\ z = 16 + 22s;$ $\varphi = \arccos \dfrac{4}{\sqrt{133}}.$

Задача 4.2.35 Светлинен лъч, пуснат от точката $A(1, 1, 3)$ успоредно на оста Ox, се отразява от равнината $\alpha : 5x + y - z + 12 = 0$. Намерете точката на отражение B и правата l' на отразения лъч.

Отговор. $B(-2,1,3)$; $l' : x = -2+3s,\ y = 1+10s,\ z = 3-10s$.

Задача 4.2.36 Светлинен лъч, пуснат от точката $A(4,1,2)$, се отразява последователно от координатните равнини Oxy и Oyz. Да се намерят уравнения на правата l'' на повторно отразения лъч, ако след отразяването си от Oyz той минава през точката $B(1,1,4)$.

Упътване. Намерете ортогонално симетричната точка A' на A относно Oxy. Тогава $l'' = A''B$, където A'' е ортогонално симетрична точка на A' относно Oyz.

Отговор. $l'' : x = 1+5s,\ y = 1,\ z = 4+6s$.

Задача 4.2.37 Светлинен лъч, пуснат по оста Oy, се отразява последователно от равнините $\alpha : 2x-3y-z+9 = 0$ и $\beta : x-y+z+1 = 0$. Да се намерят уравнения на правата l'' на повторно отразения лъч.

Отговор. $l'' : x = 4+8s,\ y = 3+4s,\ z = -5-19s$.

Задача 4.2.38 Да се намерят уравнения на бисектрисите на правите g_1 и g_2, ако:

а) $g_1 : x = 3+6s,\ y = -2-3s,\ z = 1+2s$, $g_2 : x = 3+2t,\ y = -2+3t,\ z = 1+6t$;

б) $g_1 : x = 1+3s,\ y = 2+8s,\ z = 3+s$, $g_2 : x = 1+4t,\ y = 2+7t,\ z = 3+3t$.

Решение. а) Векторите $\overrightarrow{p_1}(6,-3,2)$ и $\overrightarrow{p_2}(2,3,6)$ са колинеарни съответно на g_1 и g_2. Тогава бисектрисите b_1 и b_2 минават през пресечната точка $M(3,-2,1)$ на g_1 и g_2 и са колинеарни съответно с векторите $\overrightarrow{p} = \dfrac{\overrightarrow{p_1}}{|\overrightarrow{p_1}|} + \dfrac{\overrightarrow{p_2}}{|\overrightarrow{p_2}|}$ и $\overrightarrow{q} = \dfrac{\overrightarrow{p_1}}{|\overrightarrow{p_1}|} - \dfrac{\overrightarrow{p_2}}{|\overrightarrow{p_2}|}$. Намираме $\overrightarrow{p}\left(\dfrac{8}{7}, 0, \dfrac{8}{7}\right)$ и $\overrightarrow{q}\left(\dfrac{4}{7}, -\dfrac{6}{7}, -\dfrac{4}{7}\right)$ и следователно имаме $b_1 : x = 3+u,\ y = -2,\ z = 1+u$ и $b_2 : x = 3-2v,\ y = -2+3v,\ z = 1+2v$.

Отговор. б) $b_1 : x = 1 + 7u,\ y = 2 + 15u,\ z = 3 + 4u$ и $b_2 : x = 1 - v,\ y = 2 + v,\ z = 3 - 2v$.

Забележка 4.2.2 Една права се нарича *трансверзала на две кръстосани прави*, ако пресича и двете прави.

Задача 4.2.39 Относно афинна координатна система са дадени точката $A(1, 0, 1)$, правите $l : x = 1 - s,\ y = s,\ z = 4s$, $m : x = 2 - u,\ y = 4 + 2u,\ z = 1$, $n : x = 1 + 2v,\ y = 2 + 4v,\ z = -1 + 3v$ и равнината $\alpha : y + 2z = 0$. Да се намерят уравнения на трансверзалата t на кръстосаните прави l и m в случаите, когато:

а) t минава през точката A;

б) t е успоредна на правата n;

в) t лежи в равнината α.

Решение. а) **I начин.** Понеже t минава през точката A и пресича l, тя лежи в равнината α_1, определена от A и l. Равнината α_1 има уравнение

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } \alpha_1 : x + y - 1 = 0.$$

Аналогично, от изискването t да минава през A и да пресича m следва, че t лежи в равнината α_2 с уравнение

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \alpha_2 : z - 1 = 0.$$

Следователно трансверзалата t, като пресечница на равнините α_1 и α_2, има уравнения

$$t : x + y - 1 = 0,\ z - 1 = 0.$$

II начин. Нека $L_0(1 - s_0, s_0, 4s_0)$ и $M_0(2 - u_0, 4 + 2u_0, 1)$ са пресечните точки на търсената трансверзала t с правите l и m.

От $\overrightarrow{AL_0} = \lambda \overrightarrow{AM_0}$, като вземем предвид, че $\overrightarrow{AL_0}(-s_0, s_0, -1+4s_0)$, $\overrightarrow{AM_0}(1-u_0, 4+2u_0, 0)$ намираме

$$-s_0 = \lambda(1-u_0),\ s_0 = \lambda(4+2u_0),\ -1+4s_0 = 0.$$

Оттук определяме $s_0 = \dfrac{1}{4}$ и тогава $\overrightarrow{AL_0}(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, 0)$. Трансверзалата t има параметрични уравнения

$$t : x = 1 + w,\ y = -w, z = 1. \tag{4.65}$$

III начин. Тъй като трансверзалата t минава пред точката A, тя има параметрични уравнения от вида

$$t : x = 1 + \lambda.w,\ y = \mu.w, z = 1 + \nu.w, \tag{4.66}$$

където векторът $\overrightarrow{p}(\lambda, \mu, \nu)$ е колинеарен с t.

Трансверзалата t пресича l и следователно

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \text{или}\ \lambda + \mu = 0. \tag{4.67}$$

Аналогично от пресичането на t и m следва

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \text{т.е.}\ \nu = 0. \tag{4.68}$$

От (4.67) и (4.68) намираме $\lambda = \rho$, $\mu = -\rho$, $\nu = 0$, $\rho \neq 0$, и като заместим в (4.66), получаваме (4.65).

б) **I начин.** Понеже трансверзалата t е успоредна на правата n, векторът $\overrightarrow{p}(2, 4, 3)$ е колинеарен с t. Тогава t лежи в равнината α_1, която съдържа l и е компланарна с $\overrightarrow{p}$. Имаме

$$\alpha_1 : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0,\ \text{или}\ \alpha_1 : 13x - 11y + 6z - 13 = 0.$$

Трансверзалата t лежи и в равнината α_2, която съдържа m и е компланарна с $\overrightarrow{p}$ и следователно

$$\alpha_2 : \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \alpha_2 : 6x+3y-8z-16=0.$$

Тогава t, като пресечница на α_1 и α_2, има уравненията

$$t : 13x - 11y + 6z - 13 = 0,\ 6x + 3y - 8z - 16 = 0.$$

II начин. Тъй като трансверзалата t е успоредна на правата n, тя има параметрични уравнения от вида

$$t : x = x_0 + 2w,\ y = y_0 + 4w,\ z = z_0 + 3w, \tag{4.69}$$

където (x_0, y_0, z_0) са координатите на някаква точка върху t. Можем да изберем тази точка да съвпада с пресечната точка на t и m и тогава координатите ѝ ще удовлетворяват уравненията на m, т.е. $x_0 = 2 - u_0,\ y_0 = 4 + 2u_0,\ z_0 = 1$. От условието t да пресича l, следва

$$\begin{vmatrix} -1+u_0 & -4-2u_0 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Оттук намираме $u_0 = -\dfrac{5}{7}$ и следователно $x_0 = \dfrac{19}{7}$, $y_0 = \dfrac{18}{7}$, $z_0 = 1$. Заместваме тези стойности в (4.69) и получаваме $t : x = \dfrac{19}{7} + 2w,\ y = \dfrac{18}{7} + 4w,\ z = 1 + 3w$.

в) Трансверзалата t е определена от прободните точки $L(1, 0, 1)$ и $M(5, -2, 1)$ съответно на правите l и m с равнината α. Тогава $t : x = 1 + 4w,\ y = -2w,\ z = w$.

Задача 4.2.40 Да се намерят уравнения на трансверзалата t на кръстосаните прави p и q, която минава през точката M, ако относно афинна координатна система имаме:

а) $M(-4,-5,3)$, $p: x=-1+3s,\ y=-3-2s,\ z=2+s$,
$q: x=2+2u,\ y=-1+3u,\ z=1-5u$;
б) $M(-4,9,1)$, $p: x=1+s,\ y=2-s,\ z=3+2s$,
$q: x=2+u,\ y=-1-u,\ z=5-2u$;
в) $M(4,0,1)$, $p: 2x-y-5=0,\ 3x-2z+7=0$,
$q: x+5y-10=0,\ 2y+z-3=0$.

Отговор. а) $t: x=-4+3v,\ y=-5+2v,\ z=3-v$;
б) $t: x=-4+2v,\ y=9-3v,\ z=1$;
в) $t: 25x-17y+6z-106=0,\ 3x+y-7z-9=0$.

Задача 4.2.41 Да се намерят уравнения на трансверзалата t на кръстосаните прави $l: x=3+s,\ y=-1+2s,\ z=4s$ и $m: x=-2+3u,\ y=-1,\ z=4-5u$, в случаите, когато:
а) минава през точката $A(1,1,1)$;
б) е успоредва на правата $n: x-3y+z=0,\ x+y-z+4=0$;
в) лежи в равнината $\alpha: x-3y+z-5=0$.
(Координатната система е афинна).

Отговор. а) $t: 7x+z-8=0,\ 16x+3y-19=0$;
б) $t: 5x-5y-49=0,\ 10x-5z-4=0$;
в) $t: x=4+3w,\ y=1+w,\ z=4$.

Задача 4.2.42 Да се намерят уравнения на трансверзалата t на кръстосаните прави $l: x=1+s,\ y=-3+2s,\ z=s$ и $m: x=4-2u,\ y=3u,\ z=-3+8u$, която е перпендикулярна на равнината $\alpha: 3x-y-4z-24=0$.

Упътване. Трансверзалата t е колинеарна с вектора $\overrightarrow{N_\alpha}(3,-1,-4)$.
Отговор. $t: x=2+3v,\ y=3-v,\ z=5-4v$.

Забележка 4.2.3 *Ос на две кръстосани прави* се нарича трансверзалата, която е перпендикулярна и на двете прави.

Задача 4.2.43 Да се намерят уравнения на оста на кръстосаните прави l и m, ако:

а) $l: x = 1 + 8s,\ y = 2 + 4s,\ z = 3 + s,$
$m: x = 1 + 2t,\ y = -2t,\ z = -1 + t;$
б) $l: x + 4z + 1 = 0,\ x - 4y + 9 = 0,\ m: y = 0,\ x + 2z + 4 = 0.$

Решение. а) **I начин.** Нека $L(1 + 8s, 2 + 4s, 3 + s)$ и $M(1 + 2t, -2t, -1 + t)$ са точки съответно върху правите l и m. Търсим онези стойности на параметрите s и t, при които $LM \perp l$ и $LM \perp m$. Оттук следва системата

$$\left|\begin{array}{l} 27s - 3t + 4 = 0 \\ s - t = 0, \end{array}\right.$$

която има решението $s = t = -\dfrac{1}{6}$. При тези стойности на параметрите намираме $L(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{17}{6})$, $M(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{7}{6})$ и следователно параметричните уравнения на оста o са $x = \dfrac{2}{3} + u,\ y = \dfrac{1}{3} - u,\ z = -\dfrac{7}{6} - 4u.$

II начин. Векторите $\overrightarrow{p}(8, 4, 1)$ и $\overrightarrow{q}(2, -2, 1)$ са колинеарни съответно с правите l и m. Тъй като оста o е перпендикулярна на l и m, то векторът $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ е колинеарен с o. По-нататък задачата се рашава, както задача 4.2.39 б).

Отговор. б) $o: y + z - 2 = 0,\ 2x + 5y + 4z + 8 = 0.$

Забележка 4.2.4 *Ос-отсечка на две кръстосани прави* се нарича отсечката върху оста, ограничена от кръстосаните прави.

Задача 4.2.44 Да се намери дължината d на оста-отсечка на кръстосаните прави $l: x = 9 + 4s,\ y = -2 - 3s,\ z = s$ и $m: x = -2t,\ y = -7 + 9t,\ z = 2 + 2t.$

Решение. I начин. Ако L е произволна точка от правата l, а μ – равнината, която съдържа m и е успоредна на l, то дължината d на оста-отсечка е равна на разстоянието от L до

μ. Да изберем за L точката върху l, която се получава при $s = 0$, т.е. $L(9, -2, 0)$. Равнината μ има уравнение

$$\begin{vmatrix} x & y+7 & z-2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } 3x + 2y - 6z + 26 = 0$$

и следователно $d = |\dfrac{3.9 + 2.(-2) - 6.0 + 26}{\sqrt{49}}| = 7$.

II начин. До същия резултат достигаме и ако използваме идеята в I начин на решението на задача 4.2.43 а). Ако L и M са пресечните точки на оста с l и m, то $d = |LM|$.

Задача 4.2.45 Да се намерят уравнения на оста o и дължината d на оста-отсечка на кръстосаните прави p и q, ако:

а) $p : x = 5 + s,\ y = 3 - s,\ z = 13 + s$,
$q : x = 6 + t,\ y = 1 + 2t,\ z = 10 - t$;
б) $p : 2x - 7y - 13 = 0,\ 3y - 2z - 1 = 0$,
$q : x + y - 8 = 0,\ 2x + y - z = 0$;
в) $p : x = 6 + s,\ y = 1 + 2s,\ z = 10 - s$,
$q : 2x + 7y - 13 = 0,\ 3x + 2z - 16 = 0$.

Отговор. а) $o : 5x + 4y - z - 24 = 0,\ 4x - y + 2z - 43 = 0$, $d = \sqrt{14}$;
б) $o : 2x - 5y + 8z - 9 = 0,\ x - z + 8 = 0$, $d = 3\sqrt{6}$;
в) $o : 3x - 2y - z - 6 = 0,\ 5x + 34y - 11z - 38 = 0$, $d = 2\sqrt{21}$.

Задача 4.2.46 Даден е $\triangle ABC$ $A(1, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$, $C(1, 1, 1)$. Да се намерят:

а) общо уравнение на равнината α на триъгълника;
б) координатите на медицентъра;
в) координатите на ортоцентъра;
г) координатите на центъра на вписаната окръжност;
д) координатите на центъра на описаната окръжност;
е) вътрешният ъгъл при върха A на триъгълника;
ж) лицето S на триъгълника.

Решение. а) Равнината α на $\triangle ABC$ е определена от точките A, B и C и следователно има общо уравнение

$$\alpha : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \alpha : x + z - 2 = 0.$$

б) Координатите на медицентъра M на $\triangle ABC$ са средно аритметични от съответните координати на върховете му. Получаваме $M(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

в) Да означим с β равнината, която минава през A и е перпендикулярна на BC, а с γ – равнината през B, перпендикулярна на AC. Тогава равнините α, β и γ се пресичат в ортоцентъра H на $\triangle ABC$ (Защо?). Тъй като $\overrightarrow{BC}(-1, 1, 1)$ и $\overrightarrow{AC}(0, 1, 0)$, то $\beta : x - y - z = 0$ и $\gamma : y = 0$. Системата от уравнения на α, β и γ има решение $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$ и следователно $H(1, 0, 1)$.

г) Координатите на центъра L на вписаната окръжност намираме като приложим формулата

$$\overrightarrow{OL} = \frac{|BC|.\overrightarrow{OA} + |CA|.\overrightarrow{OB} + |AB|.\overrightarrow{OC}}{|BC| + |CA| + |AB|},$$

която следва от задача 2.2.18. Получаваме

$$L\left(\frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}, \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}\right).$$

д) Центърът Z на описаната окръжност около $\triangle ABC$ е пресечната точка на равнината α на триъгълника и симетралните равнини σ_1 и σ_2 съответно на страните CA и BC. Намираме $\sigma_1 : 2y - 1 = 0$, $\sigma_2 : -2x + 2y + 2z + 1 = 0$ и от системата уравнения на α, σ_1 и σ_2 получаваме $Z(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

е) От равенството $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})_e = \dfrac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{|AB||AC|} = 0$ следва, че $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})_e = \dfrac{\pi}{2}$.

ж) От $S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ и $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})(1,0,1)$ намираме $S = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 4.2.47 Точките $A(5,0,3)$ и $B(3,3,1)$ са върхове при основата на равнобедрения $\triangle ABC$, а равнината на триъгълника е успоредна на правата $g: x = 3s,\ y = s,\ z = 3s$. Да се намери лицето на триъгълника, ако се знае, че върхът C лежи в равнината Oxz.

Упътване. Върхът C е общата точка на равнината на $\triangle ABC$, равнината Oxz и симетралната равнина на отсечката AB.

Отговор. $C(2, -\dfrac{7}{6}, 0),\ S = \dfrac{17\sqrt{2}}{3}$.

Задача 4.2.48 Дадени са точките $A(3,3,1)$, $M(0,2,-1)$ и правата $h_C: x = -2,\ y = 1+s,\ z = -2-s$. Да се намерят координатите на върховете B и C на $\triangle ABC$, за който точката M е медицентърът, а правата h_C – височината през върха C.

Решение. Правата AB е пресечницата на равнината α на $\triangle ABC$ с равнината β, която минава през върха A и е перпендикулярна на правата h_C. Равнината α е определена от точките $A(3,3,1)$, $M(0,2,-1)$ и произволно избрана точка от h_C, например $L(-2,1,-2)$. Следователно α има уравнение $x-y-z+1=0$. Равнината β минава през A и има нормален вектор $\overrightarrow{N_\beta}(0,1,-1)$. Оттук следва, че β има уравнение $y-z-2=0$. Тогава правата AB е определена с двойката уравнения $x-y-z+1=0$, $y-z-2=0$ и следователно има параметрични уравнения $AB: x = 3+2u,\ y = 3+u,\ z = 1+u$. Понеже точката B лежи на правата AB, тя има координати от вида $(3+2u_0, 3+u_0, 1+u_0)$. Аналогично, върхът C е точка от h_C и следователно и неговите координати са от вида $(-2, 1+s_0, -2-s_0)$. Тъй като координатите на медицентъра $M(0,2,-1)$ са средно аритметични от съответните координати на трите върха A, B и C, то имаме системата

$$\left| \begin{array}{l} 3+3+2u_0-2=0 \\ 3+3+u_0+1+s_0=6 \\ 1+1+u_0-2-s_0=-3, \end{array} \right.$$

от която намираме $s_0 = 1$, $u_0 = -2$. С тези стойности получаваме $B(-1,1,-1)$ и $C(-2,2,3)$.

Задача 4.2.49 Правите $h_A : x = 2-s,\ y = 1,\ z = -3+2s$ и $b_A : x = 1-t,\ y = 2+t,\ z = -1+2t$ са съответно височината и ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A на $\triangle ABC$. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако $B(1,0,z)$.

Решение. Най-напред намираме върха $A(2,1,-3)$ като пресечна точка на h_A и b_A. Равнината α на $\triangle ABC$ има общо уравнение

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т.е.} \quad 2x+z-1=0.$$

Понеже върхът B лежи в равнината α, за третата му координата намираме $z=-1$ и следователно $B(1,0,-1)$. Тогава имаме

$$AB : x = 1+u,\ y = u,\ z = -1-2u.$$

Правата AC е определена от точката A и ортогонално симетричната точка B' на B относно ъглополовящата b_A. Намираме $B'(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{7}{3})$ и тогава

$$AC : x = 2+v,\ y = 1-7v,\ z = -3-2v.$$

Правата BC е пресечница на равнината α на $\triangle ABC$ с равнината β, която минава през B и е перпендикулярна на височината h_A. Тъй като за β намираме уравнението $x-2z-3=0$, то

$$BC : 2x+z-1=0,\ x-2z-3=0.$$

Задача 4.2.50 Да се намерят координатите на върховете на $\triangle ABC$, в който правите $b_A : x-y=0,\ z-2=0$, $b_B : x=3+2t,\ y=3-t,\ z=2$ и $b_C : x=2-u,\ y=6+3u,\ z=2$ са ъглополовящите на вътрешните ъгли при върховете A, B и C, а центърът P на вписаната окръжност се намира на разстояние $d=\sqrt{2}$ от върха A.

Решение. Центърът P на вписаната окръжност е пресечната точка на ъглополовящите, откъдето намираме $P(3,3,2)$. Ъглополовящата b_A има параметрични уравнения $x=s,\ y=s,\ z=2$ и понеже A лежи на b_A, то $A(s_0,s_0,2)$. От $d=|PA|=\sqrt{2}$ получаваме уравнението $(s_0-3)^2=1$, от което определяме $s_0'=4$ и $s_0''=2$. Следователно за върха A намираме две положения: $A'(4,4,2)$ и $A''(2,2,2)$. По-нататък продължаваме решението само с $A'(4,4,2)$.

Правата BC минава през точките A_1' и A_2', които са ортогонално симетричните точки на върха A' съответно спрямо ъглополовящите b_B и b_C (Защо?). Намираме $A_1'\left(\dfrac{14}{5},\dfrac{8}{5},2\right)$ и $A_2'\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5},2\right)$ и тогава $BC : x=\dfrac{14}{5}-3v,\ y=\dfrac{8}{5}+4v,\ z=2.$

Върховете B и C са пресечните точки на BC съответно с b_B и b_C. Оттук получаваме $B(1,4,2)$ и $C(4,0,2)$. Ако работим с $A''(2,2,2)$ по аналогичен начин намираме $B(5,2,2)$ и $C(2,6,2)$.

Задача 4.2.51 Правите $b_A : x=s,\ y=1+s,\ z=1$, $b_B : x+2y+z-9=0,\ x+2y-8=0$ и $b_C : 3x+y-9=0,\ 6x+2y-3z-15=0$ са ъглополовящите на вътрешните ъгли при върховете A, B и C на $\triangle ABC$. Да се намерят координатите на върховете A, B и C, ако центърът P на вписаната окръжност се намира на разстояние $d = \sqrt{5}$ от върха B.

Отговор. $A'(3,4,1)$, $B'(0,4,1)$, $C'(3,0,1)$;
$A''(1,2,1)$, $B''(4,2,1)$, $C''(1,6,1)$.

Задача 4.2.52 Дадени са правите $b_A : x = 2s,\ y = -s,\ z = \sqrt{5}s$, $c : x = 0,\ y = 0$ и точката $H(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$. Да се намерят координатите на върховете на $\triangle ABC$, ако b_A и c са съответно вътрешната ъглополовяща и страна през върха A, а H е петата на височината през същия връх.

Отговор. $A(0,0,0)$, $B(0,0,1)$, $C(2,-1,0)$ или
$A(0,0,0)$, $B(2,-1,0)$, $C(0,0,1)$.

Глава 5

Аналитично представяне на линии и повърхнини

5.1 Окръжност

5.1.1 Общо понятие за линия в равнината

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е афинна координатна система в равнината ε и

$$F(x, y) = 0 \tag{5.1}$$

е уравнение, в което $F(x, y)$ е функция на независимите променливи x и y. Множеството от всички точки в ε, чиито координати (x, y) относно K удовлетворяват (5.1), се нарича *равнинна линия*, а (5.1) – *уравнение на равнинната линия относно K*.

В частност, една линия може да се определи и с уравнение от вида

$$y = f(x) \quad \text{или} \quad x = g(y), \tag{5.2}$$

в което една от координатите е функция на другата.

Най-после, една линия в ε може да се представи и с параметрични уравнения

$$x = \varphi_1(t) \quad y = \varphi_2(t), \tag{5.3}$$

където функциите $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имат общ дефиниционен интервал J.

Аналитичните представяния (5.1), (5.2) и (5.3) на една равнинна линия не са еквивалентни и преминаването от един вид към друг е възможно само при определени условия за участващите в уравненията функции.

Спрямо полярна координатна система в ε една равнинна линия c има уравнения от вида

$$\Phi(\rho, \omega) = 0,$$

където (ρ, ω) са полярните координати на точките в ε.

5.1.2 Уравнения на окръжност

Нека P е фиксирана точка в равнината ε и r е положително число. Множеството от всички точки в ε, за които

$$|PM| = r \tag{5.4}$$

се нарича *окръжност с център P и радиус r*.

Ако $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е ортонормирана координатна система в ε, относно която точката P има ортонормирани координати (α, β), окръжността k в ε с център P и радиус r има уравнение

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0, \tag{5.5}$$

което се нарича *нормално уравнение на k относно K*. То често се записва и във вида

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \tag{5.6}$$

където $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$. Очевидно и уравнението

$$\rho(x-\alpha)^2 + \rho(y-\beta)^2 - \rho r^2 = 0, \tag{5.7}$$

където $\rho \neq 0$ е произволно реално число, удовлетворява дефиниционното равенство (5.4) и следователно е уравнение на същата окръжност k. Имаме:

1) Всяка окръжност има безбройно много общи уравнения от вида (5.7) и точно едно нормално – онова общо уравнение, в което $\rho = 1$.

В частност, когато центърът $P(\alpha, \beta)$ на k съвпада с началото $O(0,0)$ на K, имаме $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и (5.5) приема вида

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \tag{5.8}$$

Уравнението (5.8) се нарича *централно уравнение на* k *относно* K.

От еквивалентността на (5.4) и (5.5) следва:

2) Една точка $M_0(x_0, y_0)$ е вътрешна за окръжността k, лежи върху k или е външна за k, точно тогава, когато съответно

$$(x_0-\alpha)^2 + (y_0-\beta)^2 - r^2 \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 0.$$

От особена важност е следното твърдение:

3) Едно уравнение от втора степен от вида

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

е тогава и само тогава уравнение на окръжност k, когато

$$A = B \neq 0,\ C = 0,\ D^2 + E^2 - 4AF > 0.$$

В този случай центърът $P(\alpha, \beta)$ и радиусът r на k се определят с

$$\alpha = -\frac{D}{2A},\ \beta = -\frac{E}{2A},\ r = \frac{1}{2|A|}\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}. \tag{5.9}$$

Ако $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ са неколинеарни точки, те определят точно една окръжност, която има уравнение

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.10}$$

Нека заедно с ортонормираната координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}$ да изберем и полярна координатна система, чиито полюс съвпада с центъра $P(\alpha, \beta)$ на k, а полярната ѝ ос е $P\overrightarrow{e_1}$. Тогава произволна точка M от k има полярен радиус $\rho = r$ и полярен ъгъл ω, а за ортонормираните ѝ координати (x, y) относно K получаваме

$$x = \alpha + r\cos\omega, \quad y = \beta + r\sin\omega. \tag{5.11}$$

Уравненията (5.11) се наричат *параметрични уравнения на окръжността k относно K*. За да получим еднократно всичките точки на k, достатъчно е параметърът ω в (5.11) да се мени в интервала $[0, 2\pi)$ или в $(-\pi, \pi]$.

5.1.3 Инверсия относно окръжност

Нека k_0 е окръжност с център началото O на K и радиус r, а M е произволна точка в равнината, различна от O. Точката M' от правата OM, определена с равенството $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = r^2$, се нарича *инверсен образ на точката M относно окръжността k_0*.

Очевидно, ако M' е инверсен образ на M, то и обратно – M е инверсен образ на M'. По такъв начин се установява едно биективно съответствие на точките в равнината, без центъра O на k_0, което се нарича *инверсия относно окръжността k_0*.

Окръжността k_0 се нарича *основна окръжност*, центърът ѝ O – *полюс*, а числото r^2 – *степен на инверсията.*

Ако относно K инверсните точки M и M' имат съответно ортонормирани координати (x, y) и (x', y'), в сила са равенствата

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \; y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}, \tag{5.12}$$

които определят аналитично инверсията относно k_0.

Ако F е фигура в равнината, фигурата F', образувана от точките, които са инверсни образи относно k_0 на точките от F, се нарича *инверсен образ на F относно k_0*. Имаме:

4) При инверсия:

4.а) Права, минаваща през полюса на инверсията, се изобразява в себе си,

4.б) Права, неминаваща през полюса на инверсията се изобразява в окръжност, минаваща през полюса,

4.в) Окръжност, минаваща през полюса на инверсията се изобразява в права, неминаваща през полюса,

4.г) Окръжност, неминаваща през полюса на инверсията се изобразява в окръжност, също неминаваща през полюса.

Задача 5.1.1 Да се намери уравнение на окръжността k с център P и радиус r, ако:

а) $P(-3, 4)$, $r = 4$;
б) $P(0, 3)$, $r = 3$;
в) $P(-2, -3)$, $r = 5$;
г) $P(0, 0)$, $r = 1$;
д) $P(1, 0)$, $r = 1$;

Решение. а) За да намерим нормалното уравнение на k, заместваме в (5.5) $\alpha = -3$, $\beta = 4$, $r = 4$. Получаваме

$$k : (x + 3)^2 + (y - 4)^2 - 16 = 0,$$

т.е. $k : x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$.

Отговор. б) $k : x^2 + y^2 - 6y = 0$;
в) $k : x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$;
г) $k : x^2 + y^2 - 1 = 0$; д) $k : x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Задача 5.1.2 Да се провери кои от дадените уравнения от втора степен определят окръжности и да се намерят координатите на центровете и радиусите на тези окръжности:
а) $k : 3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y = 0$;
б) $k : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 20 = 0$;
в) $k : x^2 + y^2 - 30x + 10y + 1 = 0$;
г) $k : 3x^2 + 5y^2 + 3xy + 2x - 8y = 0$;
д) $k : 2x^2 + 3y^2 - 6x + 3y - 2 = 0$;
е) $k : x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$;
ж) $k : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 15 = 0$;
з) $k : x^2 + y^2 + 2x - 8y + 10 = 0$;
и) $k : x^2 + y^2 - 4x = 0$;
к) $k : x^2 + y^2 = 0$;
л) $k : 3x^2 + 3y^2 - xy + 3x - y = 0$;
м) $k : x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$;
н) $k : x^2 + y^2 + 1 = 0$;
о) $k : x^2 + y^2 - 2x + 6y + 14 = 0$;
п) $k : x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Решение. а) Ще приложим 3). Имаме $A = B = 3 \neq 0, C = 0$, $D^2 + E^2 - 4AF = (-6)^2 + 8^2 - 4.3.0 = 100 > 0$ и следователно даденото уравнение определя окръжност. Съграсно (5.9) тя има център $P(1, -\dfrac{4}{3})$ и радиус $r = \dfrac{5}{3}$.

б) Сега имаме $A = B = 1 \neq 0$, $C = 0$, но $D^2 + E^2 - 4AF = (-4)^2 + (-6)^2 - 4.1.20 = -28 < 0$ и даденото уравнение не е уравнение на окръжност.

г) Понеже $C = 3 \neq 0$, даденото уравнение не определя окръжност.

д) Тъй като $A = 2 \neq B = 3$, следва, че разглежданото уравнение не е уравнение на окръжност.

е) Имаме $A = B = 1$, $C = 0$, $D^2 + E^2 - 4AF = 64$ и следователно даденото уравнение определя окръжност с център $P(-3, 4)$ и радиус $r = 4$.

Отговор. в) окръжност с център $P(15, -5)$ и радиус $r = \sqrt{249}$;

ж) не е уравнение на окръжност;

з) окръжност с център $P(-1, 4)$ и радиус $r = \sqrt{7}$;

и) окръжност с център $P(2, 0)$ и радиус $r = 2$;

к) не е уравнение на окръжност;

л) не е уравнение на окръжност;

м) окръжност с център $P(-1, 5)$ и радиус $r = 5$;

н) не е уравнение на окръжност;

о) не е уравнение на окръжност;

п) окръжност с център $P(0, 0)$ и радиус $r = 1$.

Задача 5.1.3 Да се намери уравнение на окръжността k, описана около $\triangle ABC$, ако:

а) $A(7, 7)$, $B(0, 8)$, $C(-2, 4)$;

б) $A(0, 1)$, $B(2, 2)$, $C(2, -3)$;

в) $A(0, 2)$, $B(1, 1)$, $C(2, -2)$;

г) $A(1, 1)$, $B(2, 0)$, $C(1, -1)$;

д) $A(-2, -2)$, $B(-1, 5)$, $C(5, 5)$;

Решение. а) **I начин.** Ще използваме (5.10). Окръжността k, минаваща през точките $A(7, 7)$, $B(0, 8)$, и $C(-2, 4)$ има уравнение

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 98 & 7 & 7 & 1 \\ 64 & 0 & 8 & 1 \\ 20 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т.е.} \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0.$$

II начин. Търсим уравнение на k от вида (5.6). Условието

k да минава през дадените точки води до системата

$$\left| \begin{array}{lcl} 14\alpha & + & 14\beta - \gamma = 98 \\ & & 16\beta - \gamma = 64 \\ 4\alpha & - & 8\beta + \gamma = -20, \end{array} \right.$$

от която намираме $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 0$. Заместваме тези стойности в (5.6) и получаваме $k : x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

III начин. Понеже търсената окръжност е описана около $\triangle ABC$, то симетралите s_1 и s_2 съответно на страните AB и BC се пресичат в центъра ѝ P. Намираме $s_1 : 7x - y - 17 = 0$, $s_2 : x + 2y - 11 = 0$ и оттук определяме $P(3,4)$. Освен това имаме $r = |AP| = 5$ и следователно $k : x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

Отговор. б) $k : x^2 + y^2 - 4x + y - 2 = 0$;
в) $k : x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$;
г) $k : x^2 + y^2 - 2x = 0$; д) $k : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

Задача 5.1.4 Да се намери уравнение на окръжност k, която минава през точките A и B и има радиус r, ако:
а) $A(-5,5)$, $B(1,3)$, $r = \sqrt{10}$;
б) $A(2,-1)$, $B(3,0)$, $r = 5$.

Решение. а) **I начин.** Нека търсената окръжност има нормалното уравнение (5.5). От условието k да минава през точките $A(-5,5)$ и $B(1,3)$ и да има радиус $r = \sqrt{10}$ получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} (-5-\alpha)^2 + (5-\beta)^2 - 10 = 0 \\ (1-\alpha)^2 + (3-\beta)^2 - 10 = 0, \end{array} \right.$$

от която намираме $\alpha = -2$, $\beta = 4$. Тогава окръжността k има уравнение $(x+2)^2 + (y-4)^2 - 10 = 0$.

II начин. Центърът $P(\alpha, \beta)$ на търсената окръжност k лежи на симетралата s на отсечката AB. За симетралата s намираме параметричните уравнения $s : x = -2 + \lambda,\ y = 4 + 3\lambda$ и следователно $\alpha = -2 + \lambda_0,\ \beta = 4 + 3\lambda_0$. От $|AP| = \sqrt{10}$ следва

$(-3-\lambda_0)^2+(1-3\lambda_0)^2-10=0$ и оттук получаваме $\lambda_0=0$. Тогава имаме $\alpha=-2$, $\beta=4$ и като заместим в (5.5), намираме отново $(x+2)^2+(y-4)^2-10=0$.

Отговор. б) $k_1:(x+1)^2+(y-3)^2-25=0$,
$k_2:(x-6)^2+(y-4)^2-25=0$.

Задача 5.1.5 Да се определи положението на точките $A(-3,0)$, $B(5,0)$, $C(4,2)$, $D(2,7)$, $E(-4,6)$ и $F(-2,3)$, относно окръжността $k:x^2+y^2+2x-4y-20=0$.

Упътване. Използвайте 2).

Отговор. Точките A и F са вътрешни за k, C и E лежат върху k, а B и D са външни за k.

Задача 5.1.6 Да се намери уравнение на окръжността k, която минава през точките A и B и центърът ѝ P лежи на правата g, ако:

а) $A(5,7)$, $B(-2,4)$, $g:4x+3y-18=0$;
б) $A(5,2)$, $B(2,3)$, $g:y=0$;
в) $A(1,4)$, $B(5,0)$, $g:x+y-3=0$.

Решение. а) **I начин.** Нека търсената окръжност k има уравнение от вида (5.6). Тъй като k минава през точките A и B, то техните координати удовлетворяват (5.6) и следователно имаме

$$\left|\begin{aligned} 10\alpha+14\beta-\gamma&=74\\ 4\alpha-8\beta+\gamma&=-20.\end{aligned}\right. \tag{5.13}$$

Условието центърът $P(\alpha,\beta)$ да лежи на правата g води до равенството

$$4\alpha+3\beta-18=0. \tag{5.14}$$

От (5.13) и (5.14) намираме $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=-16$ и като заместим в (5.6), получаваме уравнението $k:x^2+y^2-6x-4y-16=0$.

II начин. Упътване. Вижте II начин в решението на задача 5.1.4 а).

Задача 5.1.7 Да се намери уравнение на окръжност k, която минава през точката A и се допира до правите g_1 и g_2, ако:

а) $A(1,1)$, $g_1 : 7x+y-3=0$, $g_2 : x+7y-3=0$;
б) $A(-1,3)$, $g_1 : 7x+y=0$, $g_2 : x-y+8=0$;
в) $A(2,2)$, $g_1 : x+3y-3=0$, $g_2 : x-3y+2=0$;
г) $A(1,0)$, $g_1 : x+y-2=0$, $g_2 : x+y+3=0$.

Решение. а) Центърът $P(\alpha,\beta)$ на k лежи на ъглополовящата b на онзи ъгъл между g_1 и g_2 във вътрешността, на който лежи и дадената точка A. За да намерим уравнение на b, ще използваме метода на решението на задача 4.1.33. Понеже ориентираните разстояния $\delta_1 = \dfrac{5}{\sqrt{50}}$ и $\delta_2 = \dfrac{5}{\sqrt{50}}$ от точката A съответно до правите g_1 и g_2 са с еднакви знаци, то търсената ъглополовяща b има уравнение

$$\frac{7x+y-3}{\sqrt{50}} = \frac{x+7y-3}{\sqrt{50}}, \quad \text{т.е.} \quad x-y=0.$$

Оттук намираме $\alpha-\beta=0$. От друга страна, центърът P на k е равноотдалечен от точката A и правата g_1 и следователно

$$\left(\frac{7\alpha+\beta-3}{\sqrt{50}}\right)^2 = (1-\alpha)^2+(1-\beta)^2.$$

Получената система за α и β има две решения: $\alpha_1 = \dfrac{13}{18}$, $\beta_1 = \dfrac{13}{18}$ и $\alpha_2 = \dfrac{7}{2}$, $\beta_2 = \dfrac{7}{2}$. С тях намираме съответно $r_1 = \dfrac{5}{\sqrt{162}}$ и $r_2 = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$. Заместваме тези стойности в (5.5) и получаваме уравненията на двете окръжности, които удовлетворяват изискванията на задачата: $k_1 : \left(x - \frac{13}{18}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{18}\right)^2 - \frac{25}{162} = 0$ и $k_2 : \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} = 0$.

Отговор. б) $k_1 : (x+2)^2 + (y-4)^2 - 2 = 0$,
$k_2 : (x+3)^2 + (y-1)^2 - 8 = 0$;
в) $k_1 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} = 0$,
$k_2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{65}{2} = 0$;
г) $k_1 : \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} = 0$,
$k_2 : \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} = 0$.

Задача 5.1.8 Да се намери уравнение на окръжност k, която се допира до правата g_1 в точката A и до правата g_2, ако:
а) $A(-1,0)$, $g_1 : x - 2y + 1 = 0$, $g_2 : x + 2y = 0$;
б) $A(1,2)$, $g_1 : 7x - y - 5 = 0$, $g_2 : x + y + 13 = 0$.

Отговор. а) $k_1 : \left(x + \frac{9}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{64} = 0$,
$k_2 : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 - \frac{5}{4} = 0$;
б) $k_1 : (x+6)^2 + (y-3)^2 - 50 = 0$,
$k_2 : (x-29)^2 + (y+2)^2 - 800 = 0$.

Задача 5.1.9 Да се намери уравнение на окръжност k, която се допира до правите g_1 и g_2, а центърът ѝ P лежи на правата g_3, ако:
а) $g_1 : 2x - y = 0$, $g_2 : x - 2y - 6 = 0$, $g_3 : -5x + 7y + 8 = 0$;
б) $g_1 : 2x - 3y - 10 = 0$, $g_2 : 3x - 2y + 5 = 0$, $g_3 : 4x - 5y - 3 = 0$;
в) $g_1 : x - 3y + 3 = 0$, $g_2 : 3x + y - 6 = 0$, $g_3 : 2x + 4y + 1 = 0$.

Упътване. Центърът P на търсената окръжност k лежи на правата g_3 и на ъглополовяща на g_1 и g_2. Ако g_3 пресича и двете ъглополовящи на g_1 и g_2, задачата има две решения. В случай, че g_3 е успоредна на някоя от посочените ъглополовящи, задачата има едно решение.

Отговор. а) $k_1 : (x-3)^2 + (y-1)^2 - 5 = 0$,

$k_2 : \left(x + \dfrac{17}{6}\right)^2 + \left(y + \dfrac{19}{6}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = 0$;

б) $k_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 - \dfrac{81}{13} = 0$,

$k_2 : (x+8)^2 + (y+7)^2 - \dfrac{25}{13} = 0$;

в) $k_1 : \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{2} = 0$.

Задача 5.1.10 Да се намери уравнение на окръжност k, която се допира до правите g_1, g_2 и g_3, ако:

а) $g_1 : 4x - 3y + 10 = 0$, $g_2 : 3x - 4y - 5 = 0$, $g_3 : 3x - 4y - 15 = 0$;

б) $g_1 : x + y - 2 = 0$, $g_2 : x - y + 4 = 0$, $g_3 : x - 7y = 0$.

Отговор. а) $k_1 : \left(x + \dfrac{10}{7}\right)^2 + \left(y + \dfrac{25}{7}\right)^2 - 1 = 0$,

$k_2 : \left(x - \dfrac{30}{7}\right)^2 + \left(y - \dfrac{5}{7}\right)^2 - 1 = 0$;

б) $k_1 : \left(x + \dfrac{13}{2}\right)^2 + (y-3)^2 - \dfrac{121}{8} = 0$,

$k_2 : (x+1)^2 + \left(y - \dfrac{7}{6}\right)^2 - \dfrac{121}{72} = 0$;

$k_3 : \left(x - \dfrac{8}{3}\right)^2 + (y-3)^2 - \dfrac{121}{18} = 0$;

$k_4 : (x+1)^2 + (y+8)^2 - \dfrac{121}{2} = 0$.

Задача 5.1.11 Да се намери уравнение на окръжност k, която минава през точката $A(1,0)$ и се допира до успоредните прави $g_1 : 2x + y + 2 = 0$ и $g_2 : 2x + y - 18 = 0$.

Упътване. Диаметърът на k е равен на разстоянието между g_1 и g_2, а центърът ѝ P лежи на правата g, която е успоредна на g_1 и g_2 и се намира на равни разстояния от тях.

Отговор. $k_1 : (x-5)^2 + (y+2)^2 - 20 = 0$,

$k_2 : \left(x - \dfrac{9}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{22}{5}\right)^2 - 20 = 0.$

Задача 5.1.12 Да се намери уравнение на окръжност k, която се допира до правата $g_1 : 2x+y+15 = 0$ и до успоредната ѝ права $g_2 : 2x + y - 5 = 0$ в точката $A(2,1)$.

Отговор. $k : (x+2)^2 + (y+1)^2 - 20 = 0$.

Задача 5.1.13 Да се намери уравнение на окръжност k, която се допира до окръжността $k_0 : x^2 + y^2 - 4 = 0$ и отсича от координатните оси Ox и Oy отсечки съответно с дължини $2\sqrt{6}$ и $2\sqrt{2}$.

Решение. Нека търсената окръжност има нормалното уравнение (5.5). Абсцисната ос $Ox : y = 0$ пресича k в точките

$$M_1(\alpha + \sqrt{-\beta^2 + r^2}, 0) \quad \text{и} \quad M_2(\alpha - \sqrt{-\beta^2 + r^2}, 0),$$

а ординатната ос $Oy : x = 0$ – в точките

$$N_1(0, \beta + \sqrt{-\alpha^2 + r^2}) \quad \text{и} \quad N_2(0, \beta - \sqrt{-\alpha^2 + r^2}).$$

Разбира се, координатните оси Ox и Oy пресичат k точно тогава, когато $|\alpha| < r$ и $|\beta| < r$.

От $|M_1M_2| = 2\sqrt{6}$ и $|N_1N_2| = 2\sqrt{2}$ следват равенствата

$$-\beta^2 + r^2 = 6, \; -\alpha^2 + r^2 = 2. \tag{5.15}$$

Две окръжности $k_0(P_0, r_0)$ и $k(P, r)$ се допират тогава и само тогава, когато

$$|PP_0| = r_0 + \varepsilon r, \tag{5.16}$$

където $\varepsilon = \pm 1$ в зависимост от това дали съответно допирането е външно или вътрешно.

Дадената окръжност k_0 има център $P_0(0,0)$ и радиус $r_0 = 2$. Тъй като $|M_1M_2| = 2\sqrt{6} > 4 = 2r_0$, то окръжността k не може да се допира вътрешно до k_0 и следователно възможно е само външно допиране, т.е. в (5.16) имаме $\varepsilon = 1$. Получаваме

$$\alpha^2 + \beta^2 = (2 + r)^2. \tag{5.17}$$

От (5.15) и (5.17) намираме $\alpha = \pm\sqrt{34}$, $\beta = \pm\sqrt{30}$, $r = 6$ и така решение на задачата са следните четири окръжности:
$k_1 : x^2 + y^2 - 2\sqrt{34}x - 2\sqrt{30}y + 28 = 0$,
$k_2 : x^2 + y^2 - 2\sqrt{34}x + 2\sqrt{30}y + 28 = 0$,
$k_3 : x^2 + y^2 + 2\sqrt{34}x - 2\sqrt{30}y + 28 = 0$,
$k_4 : x^2 + y^2 + 2\sqrt{34}x + 2\sqrt{30}y + 28 = 0$.

Задача 5.1.14 Да се намери уравнение на окръжност k с радиус $r = 1$, която минава през точката $A(2,1)$ и се допира до окръжността $k_0 : x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$.

Упътване. Покажете, че точката A е външна за k_0. Тогава центърът P на k ще лежи на окръжността k' с център P и радиус $r' = r_0 + 1$ и върху окръжността k'' с център A и радиус $r'' = 1$.

Отговор. $k_1 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 1 = 0$;
$k_2 : \left(x - \dfrac{24}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{2}{5}\right)^2 - 1 = 0$.

Задача 5.1.15 Да се намери уравнение на окръжност k с радиус $r = 1$, която минава през точката $M(3, -2)$, допира се до правата $g : x - 2y + 3 = 0$ и до окръжността $k_0 : x^2 + y^2 - 6x - 4y - 7 = 0$.

Упътване. Покажете, че точката M е вътрешна за k_0 и следователно е възможно само вътрешно допиране на k с k_0.

Отговор. $k_1 : x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$;
$k_0 : 81(x^2 + y^2) - 644x - 80y + 719 = 0$.

Задача 5.1.16 Да се намерят уравнения на допирателните към окръжността k, които минават през точката M, ако:
а) $k : x^2 + y^2 - 16 = 0$, $M(5, 4)$;
б) $k : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, $M(9, 2)$.

Решение. а) Търсените допирателни принадлежат на снопа прави с център точката M и следователно имат уравнения от вида $A(x - 5) + B(y - 4) = 0$. От друга страна, разстоянието d от центъра $P(0, 0)$ на k до всяка от допирателните е равно на радиуса $r = 4$. Имаме $|\dfrac{A(0 - 5) + B(0 - 4)}{\sqrt{A^2 + B^2}}| = 4$, т.е $9A^2 + 40AB = 0$. Оттук намираме $A' = 0$, $B' = \rho'$ и $A'' = 40\rho''$, $B'' = -9\rho''$, където $\rho' \neq 0$, $\rho'' \neq 0$ са произволни числа. Следователно търсените допирателни са: $t' : y - 4 = 0$ и $t'' : 40x - 9y - 164 = 0$.

Отговор. б) $t' : 4x + 3y - 42 = 0$, $t'' : 3x - 4y - 19 = 0$.

Задача 5.1.17 Да се намерят уравнения на допирателните към окръжността $k : x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$, които са перпендикулярни на правата $g : 12x - 3y - 5 = 0$.

Упътване. Търсените допирателни принадлежат на снопа успоредни прави с уравнение $x + 4y + C = 0$.

Отговор. $t' : x + 4y + 8 = 0$, $t'' : x + 4y - 26 = 0$.

Задача 5.1.18 Да се намерят инверсните образи относно окръжността $k_0 : x^2 + y^2 - 4 = 0$ на:
а) точките $A(4, 4)$, $B(0, 2)$, $C(1, 1)$;
б) правите $g_1 : x - 2y + 4 = 0$, $g_2 : x - 2y = 0$;
в) окръжностите $k_1 : x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$, $k_2 : x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$.

Упътване. Окръжността на инверсията k_0 има център $O(0,0)$ и радиус $r = 2$. Тогава инверсията с полюс O и степен $r^2 = 4$, съгласно (5.12), се задава аналитично с

$$x' = \frac{4x}{x^2+y^2},\ y' = \frac{4y}{x^2+y^2}.$$

Отговор. а) $A'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $B' = B$, $C'(2,2)$;
б) $g_1' : x'^2 + y'^2 + x' - 2y' = 0$, $g_2' = g_2$;
в) $k_1' : x'^2 + y'^2 + 8x' - 48y' + 16 = 0$, $k_2' : 3x' - 4y' - 2 = 0$.

Задача 5.1.19 Да се докаже, че ако инверсната окръжност k_0 има център $P(\alpha,\beta)$ и радиус r, инверсията относно k_0 се представя аналитично с равенствата

$$\begin{aligned} x' &= \alpha + \frac{r^2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}, \\ y' &= \beta + \frac{r^2(y-\beta)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Решение. Нека $M(x,y)$ и $M'(x',y')$ са инверсни точки относно k_0. Тогава от $\overrightarrow{PM'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PM} \neq \overrightarrow{o}$ следва съществуването на число $\lambda > 0$, такова, че $\overrightarrow{PM'} = \lambda\overrightarrow{PM}$. Имаме

$$x' - \alpha = \lambda(x-\alpha),\ y' - \beta = \lambda(y-\beta) \tag{5.19}$$

и оттук намираме

$$\lambda = \frac{\sqrt{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2}}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}} = \frac{|PM'|}{|PM|} = \frac{|PM'|}{|PM|}.\frac{|PM|}{|PM|} =$$

$$= \frac{r^2}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}.$$

Като заместим тази стойност за λ в (5.19), получаваме (5.18).

Задача 5.1.20 Да се намерят инверсните образи относно окръжността $k_0 : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$ на:

а) точките $A(5,3)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$;

б) правите $g_1 : x - 2y + 1 = 0$, $g_2 : x - 2y - 3 = 0$;

в) окръжностите $k_1 : x^2 + y^2 - 10y - 11 = 0$, $k_2 : x^2 + y^2 - 8x + 10y + 16 = 0$.

Отговор. а) $A'\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $B' = B$, $C'(3,1)$;

б) $g_1' : x'^2 + y'^2 - x' - 1 = 0$, $g_2' = g_2$;

в) $k_1' : x'^2 + y'^2 + 6x' - 46y' - 38 = 0$, $k_2' : 3x' - 4y' - 9 = 0$.

Задача 5.1.21 Даден е $\triangle ABC$. Да се докаже, че съществува инверсия, която преобразува върховете на триъгълника в точки, които лежат на една права.

Решение. Да означим с k описаната около $\triangle ABC$ окръжност и да разгледаме инверсията φ с произволна степен r^2 и полюс – произволна точка на k, различна от върховете A, B и C. Тъй като окръжността k минава през полюса на φ, съгласно 4.в) образът ѝ k' при φ е права, неминаваща през полюса на инверсията. Тогава върху правата k' ще лежат и образите A', B', C' на върховете на $\triangle ABC$.

5.2 Конични сечения

5.2.1 Конични сечения - обща характеристика

Нека в равнината ε са дадени права f и нележаща на нея точка F, разстоянието между които е равно на числото $p > 0$. Множеството от точки M в ε, за които отношенията на разстоянията съответно до точката F и до правата f е постоянно и равно на дадено число $e > 0$, се нарича *конично сечение*. Точката F се нарича *фокус*, правата f – *директриса*, числото e –

числен ексцентрицитет, а числото p – *параметър на коничното сечение*.

При $e < 1$ коничното сечение се нарича *елипса*, при $e > 1$ – *хипербола*, а при $e = 1$ – *парабола*.

5.2.2 Елипса

Спрямо подходящо избрана ортонормирана координатна система $K = Oxy$ в ε всяка елипса E има уравнение от вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ a > 0, \ b > 0, \tag{5.20}$$

което се нарича (*метрично*) *канонично уравнение на* E.

Когато $a = b$, от (5.20) намираме

$$x^2 + y^2 = a^2$$

и E е *окръжност* с център O и радиус a.

Нека $a \neq b$ и за конкретност да приемем, че $a > b$. От (5.20) следва, че координатните оси Ox и Oy са *оси на симетрия*, а координатното начало O – *център на симетрия на елипсата* E. При направеното предположение $a > b$, осите на симетрия Ox и Oy се наричат съответно *голяма и малка ос* на елипсата, а числата a и b – *дължини на голямата и малката полуос*. Те се изразяват чрез числения ексцентрицитет e и параметъра p с формулите

$$a^2 = \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}, \quad b^2 = \frac{p^2e^2}{1-e^2}. \tag{5.21}$$

Голямата и малката ос на E я пресичат съответно в точките $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$, които се наричат *върхове на елипсата*.

От (5.20) заключаваме, че за координатите (x, y) на точките на елипсата са в сила неравенствата

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b$$

и следователно всички точки на елипсата са вътрешни за правоъгълника, чиито страни са върху правите

$$t_1 : x = -a,\ t_2 : x = a,\ t_3 : y = -b,\ t_4 : y = b.$$

Тези прави се допират до E съответно във върховете A_1, A_2, B_1 и B_2 и поради това се наричат *върхови тангенти* (*допирателни*) *на елипсата.*

Величината

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = ea \tag{5.22}$$

се нарича *линеен ексцентрицитет на елипсата*; очевидно $0 < c < a$.

1) Елипсата има два (реални) фокуса и две (реални) директриси. Ако е зададена с каноничното уравнение (5.20) и $a > b$, фокусите са

$$F_1(-c, 0) \ \text{ и } \ F_2(c, 0), \tag{5.23}$$

а директрисите –

$$f_1 : x = -\frac{a^2}{c} \ \text{ и } \ f_2 : x = \frac{a^2}{c}. \tag{5.24}$$

От (5.23) следва, че фокусите F_1 и F_2 на елипсата E лежат на голямата ѝ ос Ox на разстояние c от центъра O на симетрия. Поради това оста Ox се нарича още *фокална ос на елипсата.*

2) Една точка M лежи на елипсата E точно тогава, когато сумата от разстоянията ѝ до фокусите F_1 и F_2 е равна на дължината на голямата ос на елипсата, т.е.

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a.$$

Ако точката M има ортонормирани координати (x_0, y_0), числата

$$\rho_1 = a + \frac{cx_0}{a} \ \text{ и } \ \rho_2 = a - \frac{cx_0}{a}$$

се наричат *фокални радиуси на точката* M. Чрез тях характеристичното свойство 2) на елипсата приема вида

$$\rho_1 + \rho_2 = 2a.$$

В случая, когато $a < b$, голямата полуос на елипсата има дължина b, а малката – a. Тогава фокусите ѝ лежат върху оста на симетрия Oy на разстояние $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ от центъра O на симетрия на елипсата.

5.2.3 Хипербола

Относно подходящо избрана ортонормирана координатна система $K = Oxy$ в ε всяка хипербола H има уравнение от вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \; a > 0, \; b > 0, \tag{5.25}$$

което се нарича (*метрично*) *канонично уравнение на* H.

Осите Ox и Oy са *оси на симетрия*, а началото O – *център на симетрия на хиперболата* H. Оста на симетрия Ox пресича H в точките $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$, които се наричат *върхове на хиперболата*, а самата ос Ox – *главна или реална ос на хиперболата.* Другата ос на симетрия, не пресича H в реални точки и поради това се нарича *имагинерна или странична ос на хиперболата.* Числата a и b се наричат *дължини* съответно на *реалната и на имагинерната полуос на* H. Те се изразяват чрез числения ексцентрицитет e и параметъра p на H с формулите

$$a^2 = \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}, \quad b^2 = -\frac{p^2e^2}{1-e^2}.$$

От (5.25) следва, че всички точки на H лежат в полуравнините $x \leq -a$ и $x \geq a$. Правите

$$t_1 : x = -a \;\text{ и }\; t_2 : x = a$$

минават съответно през върховете A_1 и A_2 на H и освен тях нямат други общи точки с хиперболата. Поради това те се наричат *върхови тангенти* (*допирателни*) *на* H.

Правите

$$a_1 : y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad a_2 : y = -\frac{b}{a}x \tag{5.26}$$

се наричат *асимптоти на хиперболата.*

Величината

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = ea \tag{5.27}$$

се нарича *линеен ексцентрицитет на хиперболата*; очевидно $c > a$.

3) Хиперболата има два (реални) фокуса и две (реални) директриси. Ако е зададена с каноничното уравнение (5.25) фокусите ѝ са

$$F_1(-c, 0) \quad \text{и} \quad F_2(c, 0), \tag{5.28}$$

а директрисите –

$$f_1 : x = -\frac{a^2}{c} \quad \text{и} \quad f_2 : x = \frac{a^2}{c}. \tag{5.29}$$

Очевидно фокусите F_1 и F_2 на хиперболата H лежат върху реалната ѝ ос Ox на разстояние c от центъра O на симетрия.

4) Една точка M лежи на хиперболата H точно тогава, когато абсолютната стойност на разликата от разстоянията ѝ до фокусите F_1 и F_2 е равна на дължината на реалната ос, т.е.

$$||F_1M| - |F_2M|| = 2a.$$

Ако точката M има ортонормирани координати (x_0, y_0), числата

$$\rho_1 = \left|\frac{cx_0}{a} + a\right| \quad \text{и} \quad \rho_2 = \left|\frac{cx_0}{a} - a\right|$$

се наричат *фокални радиуси на* M. С тяхна помощ характеристичното свойство 4) се записва във вида

$$|\rho_1 - \rho_2| = 2a.$$

Когато $a = b$, асимптотите на хиперболата имат уравнения

$$a_1 : y = x \quad \text{и} \quad a_2 : y = -x$$

и очевидно са перпендикулярни. Ето защо в този случай H се нарича *правоъгълна хипербола*; използва се още и термина *равнораменна хипербола.*

Кривата c, която има относно K уравнения

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

е също хипербола и се нарича *спрегната хипербола на хиперболата* (5.25). За нея ординатната ос Oy е главна (реална) ос, а абсцисната ос Ox – странична (имагинерна) ос.

5.2.4 Парабола

Спрямо подходящо избрана ортонормирана координатна система $K = Oxy$ в ε всяка парабола P има уравнение от вида

$$y^2 = 2px, \ p > 0 \tag{5.30}$$

което се нарича (*метрично*) *канонично уравнение на* P.

Абсцисната ос Ox на K е *ос на симетрия* на параболата P. Нарича се *ос* на P. Оста пресича P единствено в точката $O(0, 0)$, която се нарича *връх на параболата.* Ординатната ос Oy също има само една обща точка с параболата – нейния връх O. Поради това Oy се нарича *върхова тангента* на P.

5) Параболата има един фокус и една директриса. Ако е зададена с каноничното уравнение (5.30), фокусът е $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а директрисата – $f : x = -\frac{p}{2}$.

Ако $M(x_0, y_0)$ е точка от параболата P, числото

$$\rho = x_0 + \frac{p}{2}$$

се нарича *фокален радиус на* M.

Кривата с уравнение

$$y^2 = -2px, \quad p > 0,$$

е също парабола, която е симетрична на параболата (5.30) относно ординатната ос Oy на K.

Аналогично всяко едно от уравненията

$$x^2 = 2py, \quad p > 0,$$

и

$$x^2 = -2py, \quad p > 0,$$

определя парабола с връх началото O на K и ос на симетрия Oy.

Задача 5.2.1 Да се намерят дължините на полуосите, координатите на фокусите и уравнения на директрисите на следните елипси:

а) $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$;
б) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$;
в) $x^2 + 25y^2 - 25 = 0$;
г) $16x^2 + y^2 - 16 = 0$;
д) $16x^2 + 25y^2 - 1600 = 0$.

Решение. а) Записваме даденото уравнение на елипсата E във вида

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1. \tag{5.31}$$

От (5.31) намираме, че дължината на голямата полуос на елипсата е $a = \sqrt{25} = 5$, а на малката – $b = \sqrt{9} = 3$. Имаме, че

$a > b$ и тогава линейният ексцентрицитет на E, съгласно (5.22), е $c = 4$. Тогава предвид (5.23) и (5.24) за фокусите и директрисите на E намираме съответно $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$ и $f_1 : x = -\dfrac{25}{\sqrt{4}}$, $f_2 : x = \dfrac{25}{\sqrt{4}}$.

б) От

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

следва, че елипсата има полуоси $a = 2$ и $b = 3$. Сега $a < b$ и фокусите на елипсите лежат на ординатната ос. Намираме $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{5}$ и за фокусите получаваме $F_1(0, -\sqrt{5})$ и $F_2(0, \sqrt{5})$. В този случай директрисите на елипсата са успоредни на абсцисната ос Ox и имат съответно уравнения $f_{1,2} : y = \mp\dfrac{b^2}{c}$, т.е. $f_1 : y = -\dfrac{9}{\sqrt{5}}$, $f_2 : y = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

Отговор. в) $a = 5$, $b = 1$, $c = 2\sqrt{6}$, $F_1(-2\sqrt{6}, 0)$, $F_2(2\sqrt{6}, 0)$, $f_1 : x = -\dfrac{25}{2\sqrt{6}}$, $f_2 : x = \dfrac{25}{2\sqrt{6}}$;

г) $a = 1$, $b = 4$, $c = \sqrt{15}$, $F_1(0, -\sqrt{15})$, $F_2(0, \sqrt{15})$, $f_1 : y = -\dfrac{16}{\sqrt{15}}$, $f_2 : y = \dfrac{16}{\sqrt{15}}$;

д) $a = 10$, $b = 8$, $c = 4$, $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $f_1 : x = 25$, $f_2 : x = -25$.

Задача 5.2.2 Да се намерят дължините на полуосите, координатите на фокусите и уравнения на директрисите и на асимптотите на следните хиперболи:

а) $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$;
б) $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$;
в) $x^2 - 4y^2 - 16 = 0$;
г) $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Решение. а) Записваме даденото уравнение във вида:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Имаме $a = 3$, $b = 4$ и съгласно (5.27) получаваме $c = 5$. Тъй като реалната ос на тази хипербола е Ox, то (виж (5.28) и (5.29)) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$ и $f_1 : x = -\frac{9}{5}$, $f_2 : x = \frac{9}{5}$. За асимптотите, отчитайки (5.26), намираме $a_1 : y = \frac{4}{3}x$ и $a_2 : y = -\frac{4}{3}x$.

б) От

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

следва, че реалната ос на разглежданата хипербола е оста Oy. Сега имаме $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$ и фокусите са $F_1(0, -5)$ и $F_2(0, 5)$. Директрисите са успоредни на имагинерната ос Ox на хиперболата и имат уравнения $f_1 : y = -\frac{9}{5}$, $f_2 : y = \frac{9}{5}$. Асимптотите са $a_1 : y = \frac{3}{4}x$, и $a_2 : y = -\frac{3}{4}x$.

Отговор. в) $a = 4$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{5}$, $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$, $F_2(2\sqrt{5}, 0)$, $f_1 : x = -\frac{8}{\sqrt{5}}$, $f_2 : x = \frac{8}{\sqrt{5}}$, $a_1 : y = \frac{1}{2}x$, $a_2 : y = -\frac{1}{2}x$;

г) $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$, $F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$, $f_1 : x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_2 : x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_1 : y = x$, $a_2 : y = -x$.

Задача 5.2.3 Да се намерят параметърът p, координатите на фокуса F и уравнение на директрисата f на параболата P, ако:

а) $P : y^2 - 6x = 0$;
б) $P : x^2 - 5y = 0$;
в) $P : y^2 + 4x = 0$;
г) $P : x^2 + y = 0$;
д) $P : y^2 - 4x = 0$;

е) $P : x^2 - 2y = 0$.

Решение. а) Написваме уравнението на параболата във вида:

$$y^2 = 6x.$$

Като сравним с (5.30), получаваме $p = 3$. Разглежданата парабола има за ос Ox и следователно $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ и $f : x = -\frac{3}{2}$.

б) От

$$x^2 = 5y$$

следва, че $p = \frac{5}{2}$ и оста на параболата е Oy. Тогава имаме $F\left(0, \frac{5}{4}\right)$ и $f : y = -\frac{5}{4}$.

в) Тъй като параболата има уравнение

$$y^2 = -4x$$

то фокусът ѝ се намира върху отрицателната полуос $-Ox$, т.е. $F(-1, 0)$, а директрисата f има уравнение $f : x = 1$.

Отговор. г) $p = \frac{1}{2}$, $F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$, $f : y = \frac{1}{4}$;

д) $p = 2$, $F(1, 0)$, $f : x = -1$;

е) $p = 1$, $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $f : y = -\frac{1}{2}$.

Задача 5.2.4 Да се намери каноничното уравнение на хиперболата H, която има числен ексцентрицитет $e = 2$ и фокусите ѝ съвпадат с фокусите на елипсата $E : 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$.

Решение. Дължините на полуосите на дадената елипса са $a_E = 5$, $b_E = 3$ и следователно линейният ѝ ексцентрицитет е $c_E = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Тогава фокусите ѝ са $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$ и понеже съвпадат с фокусите на търсената хипербола H, то

$c_H = 4$. Съгласно (5.27) имаме $4 = \sqrt{a_H^2 + b_H^2}$, $4 = 2a_H$ и оттук намираме $a_H = 2$, $b_H = \sqrt{12}$. Следователно каноничното уравнение на хиперболата H е $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$.

Задача 5.2.5 Да се намери каноничното уравнение на елипсата E, която има числен ексцентрицитет $e = \dfrac{5}{7}$ и фокусите ѝ съвпадат с фокусите на хиперболата $H : 9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

Отговор. $E : \dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{24} = 1$.

Задача 5.2.6 Дадена е елипсата $E : 9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$. Да се намери каноничното уравнение на хиперболата H, върховете на която съвпадат с фокусите на E, а фокусите ѝ – с два от върховете на E.

Отговор. $H : \dfrac{x^2}{7} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Една права и една елипса (респ. хипербола, парабола) могат да имат 2, 1 или 0 общи точки. Тогава правата се нарича съответно *секуща, допирателна и несекуща* на елипсата (респ. хиперболата, параболата).

Задача 5.2.7 Да се докаже, че елипсата $E : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и правата $g : Ax + By + C = 0$:

а) се пресичат точно тогава, когато $a^2A^2 + b^2B^2 - C^2 > 0$;

б) се допират точно тогава, когато $a^2A^2 + b^2B^2 - C^2 = 0$;

в) нямат обща точка точно тогава, когато $a^2A^2 + b^2B^2 - C^2 < 0$.

Доказателство. Да разгледаме системата

$$\left| \begin{array}{l} b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ Ax + By + C = 0, \end{array} \right.$$

образувана от уравненията на елипсата и правата. Тъй като $|A|+|B| \neq 0$, за конкретност да предположим, че $B \neq 0$. Тогава горната система е еквивалентна с квадратното уравнение

$$(a^2A^2 + b^2B^2)x^2 + 2a^2ACx + a^2C^2 - a^2b^2B^2 = 0. \tag{5.32}$$

Броят на общите точки на E и g е равен на броя на корените на уравнението (5.32) и следователно зависи от знака на дискриминантата

$$D = a^2b^2B^2(a^2A^2 + b^2B^2 - C^2).$$

Тъй като $a^2b^2B^2 > 0$, правата g и елипсата E имат 2, 1 или 0 общи точки точно тогава, когато е изпълнено съответно $a^2A^2 + b^2B^2 - C^2 \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 0$.

От задача 5.2.7 непосредствено следва, че правата

$$t : \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

е *допирателна на елипсата в точката ѝ* $M(x_0, y_0)$.

Правата, която минава през точката $M(x_0, y_0)$ на E и е перпендикулярна на допирателната на E в същата точка, се нарича *нормала на елипсата в точката ѝ* M. Тя има уравнения

$$n : -\frac{y_0}{b^2}(x - x_0) + \frac{x_0}{a^2}(y - y_0) = 0. \tag{5.33}$$

Задача 5.2.8 Да се докаже, че правата $g : y = kx + \sqrt{a^2k^2 + b^2}$ се допира да елипсата E, определена с (5.20), при всяка стойност на k.

Задача 5.2.9 Да се напише каноничното уравнение на елипсата, която минава през точката $M(4, -1)$ и се допира до правата $g : x + 4y - 10 = 0$, ако осите ѝ лежат върху координатните оси.

Решение. Елипсата E минава през точката $M(4,-1)$ и следователно координатите на точката удовлетворяват уравнението (5.20), т.е. $a^2+16b^2-a^2b^2=0$. От условието за допиране на E и g, съгласно задача 5.2.7, имаме $a^2+16b^2-100=0$. Получената система има две решения: $a^2=20$, $b^2=5$ и $a^2=80$, $b^2=\frac{5}{4}$, на които съответствуват елипсите E_1 и E_2, които имат съответно каноничните уравнения

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{80}+\frac{y^2}{\frac{5}{4}}=1.$$

Задача 5.2.10 (Оптическо свойство на елипсата) Да се докаже, че допирателната към елипсата в произволна нейна точка образува равни ъгли с фокалните радиуси на допирната точка.

Доказателство. За върховите тангенти твърдението е очевидно. Поради това нека $M(x_0,y_0)$ е произволна точка на елипсата E. Ще покажем, че нормалата n в точката $M(x_0,y_0)$ към елипсата е ъглополовяща на $\angle F_1MF_2$, от което ще следва, че твърдението е в сила. Наистина, имаме

$$\frac{\overrightarrow{F_1M}}{|F_1M|}\left(\frac{x_0+c}{a+ex_0},\frac{y_0}{a+ex_0}\right), \quad \frac{\overrightarrow{F_2M}}{|F_2M|}\left(\frac{x_0-c}{a-ex_0},\frac{y_0}{a-ex_0}\right)$$

и за вектора $\overrightarrow{p}=\dfrac{\overrightarrow{F_1M}}{|F_1M|}+\dfrac{\overrightarrow{F_2M}}{|F_2M|}$ върху ъглополовящата на $\angle F_1MF_2$, намираме

$$\overrightarrow{p}\left(\frac{2b^2x_0}{a(a^2-e^2x_0^2)},\frac{2ay_0}{a^2-e^2x_0^2}\right). \tag{5.34}$$

От (5.33) намираме, че векторът $\overrightarrow{q}$, колинеарен с нормалата n на E в точка M, има координати

$$\overrightarrow{q}\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2}\right). \tag{5.35}$$

Сравняваме (5.34) и (5.35) и получаваме векторното равенство

$$\overrightarrow{p} = \frac{2ab^2}{a^2 - e^2 x_0^2} \overrightarrow{q},$$

което показва, че нормалата n в точката $M(x_0, y_0)$ е ъглополовяща на $\angle F_1 M F_2$.

Задача 5.2.11 Да се докаже, че хиперболата $H : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и правата $g : Ax + By + C = 0$:

а) се пресичат точно тогава, когато $a^2A^2 - b^2B^2 - C^2 < 0$;

б) се допират точно тогава, когато $a^2A^2 - b^2B^2 - C^2 = 0$;

в) нямат обща точка точно тогава, когато $a^2A^2 - b^2B^2 - C^2 > 0$.

Упътване. Доказателството не се отличава принципно от това в задача 5.2.7.

От задача 5.2.11 следва, че правата с уравнение

$$t : \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

е *допирателна на хиперболата в точката ѝ* $M(x_0, y_0)$, а правата,

$$n : \frac{y_0}{b^2}(x - x_0) + \frac{x_0}{a^2}(y - y_0) = 0 \ \ -$$

нормала на хиперболата в същата точка.

Задача 5.2.12 Да се напише каноничното уравнение на хиперболата, която се допира да правите $t_1 : 5x - 6y - 16 = 0$ и $t_2 : 13x - 10y - 48 = 0$, ако реалната ѝ ос съвпада с оста Ox.

Отговор. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1.$

Задача 5.2.13 Да се напише каноничното уравнение на хиперболата, която се допира да правата $t : x - y - 2 = 0$ в точката ѝ $A(4, 2)$, ако реалната ѝ ос съвпада с оста Ox.

Отговор. $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{4} = 1.$

Задача 5.2.14 (Оптическо свойство на хиперболата) Да се докаже, че допирателната на хиперболата в произволна нейна точка образува равни ъгли с фокалните радиуси на допирната точка.

Упътване. Вижте доказателството на твърдението в задача 5.2.10.

Задача 5.2.15 Да се докаже, че параболата $P : y^2 = 2px$ и правата $g : Ax + By + C = 0$, която не е успоредна на оста на параболата:

а) се пресичат точно тогава, когато $pB^2 - 2AC^2 > 0$;
б) се допират точно тогава, когато $pB^2 - 2AC^2 = 0$;
в) нямат обща точка точно тогава, когато $pB^2 - 2AC^2 < 0$.

От задача 5.2.15 следва, че правата

$$t : y_0 y = p(x + x_0)$$

е *допирателна на параболата* P *в точката ѝ* $M(x_0, y_0)$, а правата,

$$n : y_0(x - x_0) + p(y - y_0) = 0 \text{ –}$$

нормала на P *в същата точка.*

Задача 5.2.16 Да се напише уравнение на допирателната на параболата $y^2 = 8x$, която е успоредна на правата $g : 2x + 2y - 3 = 0$.

Отговор. $t : x + y + 2 = 0.$

Задача 5.2.17 Да се намери каноничното уравнение на параболата P, която е симетрично разположена относно абсцисната ос Ox, има за връх началото O и се допира до правата $t : x - y + 1 = 0$.

Решение. Параболите с връх O и фокална ос Ox имат уравнения от вида $y^2 = 2\varepsilon px$, $p > 0$, където $\varepsilon = \pm 1$ в зависимост от това дали фокусът на параболата е съответно върху $+Ox$ или $-Ox$. От условието за допиране на P и t следва равенството $\varepsilon p = 2$. Ще определим знака на ε, като вземем предвид, че той съвпада със знака на абсцисите на точките на параболата. Понеже тангентата t пресича оста на параболата в точката $Q(-1, 0)$, можем да заключим, че върху параболата лежат само точки с положителни абсциси. В противен случай тангентата t ще пресича параболата, което е невъзможно. Следователно $\varepsilon = +1$, $p = 2$ и параболата има каноничното уравнение $y^2 = 4x$.

Задача 5.2.18 (Оптическо свойство на параболата) Да се докаже, че допирателната на параболата в произволна нейна точка образува равни ъгли с фокалния радиус на допирната точка и с правата, която минава през допирената точка и е успоредна на оста на параболата.

Права, която минава през центъра O на симетрия на елипсата (респ. хиперболата) се нарича *диаметър на елипсата* (респ. *хиперболата*). Права, която е успоредна или съвпада с оста на параболата, се нарича *диаметър на параболата.*

Ако една права пресича елипсата (респ. хиперболата, параболата) в две различни точки, отсечката, която те определят, се нарича *хорда на елипсата* (респ. *хиперболата, параболата*).

Задача 5.2.19 Да се докаже, че средите на успоредните хорди на елипса лежат на диаметър на елипсата.

Доказателство. Очевидно твърдението е в сила, ако хордите са перпендикулярни на координатните оси Ox и Oy, които са и диаметри на елипсата.

Нека сега g е произволна хорда, която не е перпендикулярна на никоя от координатните оси и следователно можем да предположим, че е зададена с уравнението $y = kx + m$. Всяка друга хорда, която е успоредна на g има същия ъглов коефициент k. Ще покажем, че средата S на хордата g лежи на диаметър на елипсата E с уравнение (5.20).

Общите точки на елипсата E и хордата ѝ g се определят от решенията на системата

$$\left| \begin{array}{l} b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = kx + m, \end{array} \right.$$

от която намираме

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2(m^2 - b^2) = 0. \tag{5.36}$$

Ако $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ са двата края на хордата g, то x_1 и x_2 са корени на (5.36). За абсцисата x_0 на средата S на хордата g имаме $x_0 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$, откъдето, като приложим съответната формула на Виет за квадратното уравнение (5.36), получаваме

$$x_0 = -\frac{a^2km}{a^2k^2 + b^2}. \tag{5.37}$$

Но точката S лежи на g и следователно за нейната ордината y_0 намираме

$$y_0 = kx_0 + m = \frac{b^2m}{a^2k^2 + b^2}. \tag{5.38}$$

От (5.37) и (5.38) заключаваме, че точката S лежи на правата d' с уравнение

$$d' : y = -\frac{b^2}{a^2k}x, \tag{5.39}$$

която очевидно минава през координатното начало O. Но O е център на елипсата E и следователно d' е неин диаметър.

Тъй като в уравнението (5.39) участват само константите a, b и k, които са едни и същи за всички успоредни на g хорди, то диаметърът d' съдържа средите на всички тези хорди.

От (5.39) намираме, че диаметърът d' има ъглов коефициент $k' = -\frac{b^2}{a^2k}$. Това равенство ни дава основание за следната дефиниция:

Диаметрите $d : y = kx$ и $d' : y = k'x$ на елипсата E, чиито ъглови коефициенти са свързани с формулата

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2}, \tag{5.40}$$

се наричат *спрегнати диаметри на* E.

Сега задача 5.2.19 може да формулира в следната еквивалентна форма:

Задача 5.2.20 Да се докаже, че всеки диаметър на елипсата разполовява хордите, които са успоредни на спрегнатия му диаметър.

Задача 5.2.21 Да се намери уравнение на диаметъра d на елипсата $E : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, който разполовява хордата ѝ върху правата $g : 2x - y - 3 = 0$.

Отговор. $d : 8x + 25y = 0$.

Задача 5.2.22 Да се намерят уравнения на два взаимно спрегнати диаметъра на елипсата $E : x^2 + 3y^2 = 1$, единият от които е перпендикулярен на правата $g : 3x + 2y - 7 = 0$.

Решение. Нека търсената двойка спрегнати диаметри са $d : y = kx$ и $d' : y = k'x$. От (5.40) получаваме

$$kk' = -\frac{1}{3}. \tag{5.41}$$

От $d \perp g$ следва $kk_g = -1$ и понеже $k_g = -\frac{3}{2}$, то $k = \frac{2}{3}$. Тогава от (5.41) намираме $k' = -\frac{1}{2}$ и следователно

$$d : y = \frac{2}{3}x \quad \text{и} \quad d' : y = -\frac{1}{2}x$$

Задача 5.2.23 (Теорема на Аполоний) Да се докаже, че сборът от квадратите на дължините на хордите на всеки два спрегнати диаметъра на елипсата E, определена с (5.20), е равен на константата $4(a^2 + b^2)$.

Задача 5.2.24 Да се докаже, че средите на успоредните хорди на хипербола, лежат на диаметър на хиперболата.

Упътване. Доказателството не се различава принципно от това на твърдението в задача 5.2.19.

Диаметрите $d : y = kx$ и $d' : y = k'x$ на хиперболата H (с уравнение (5.25)), чиито ъглови коефициенти k и k' са свързани с формулата

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}, \tag{5.42}$$

се наричат *спрегнати диаметри на* H.

Покажете, че задача 5.2.24 може да се изкаже в следната еквивалентна форма:

Задача 5.2.25 Да се докаже, че всеки диаметър на хиперболата, разполовява хордите, успоредни на спрегнатия му диаметър.

Задача 5.2.26 Дадена е хиперболата $H : \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{7} = 1$. Да се напише уравнение на хордата ѝ h, която се разполовява от точката $A(3, -1)$.

Упътване. Търсената хорда h е успоредна на спрегнатия диаметър d' на диаметъра d, който минава през средата $A(3, -1)$ на h. Използвайте (5.42).

Отговор. $h : 7x + y - 20 = 0$.

Задача 5.2.27 Да се докаже, че средите на успоредните хорди на парабола лежат на диаметър на параболата.

Задача 5.2.28 Да се намери уравнение на диаметъра d на параболата $P : y^2 = 12x$, който разполовява хордата ѝ, отсичана от правата $g : 3x + y - 5 = 0$.

Отговор. $d : y + 2 = 0$.

5.3 Сфера

5.3.1 Общо понятие за повърхнина и линия в пространството

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е афинна координатна система в пространството и

$$F(x, y, z) = 0 \tag{5.43}$$

е уравнение, в което $F(x, y, z)$ е функция на независимите променливи x, y и z. Множеството S от всички точки в пространството, чиито координати (x, y, z) относно K удовлетворяват (5.43) се нарича *повърхнина*, а (5.43) – *уравнение на повърхнината относно* K.

В частност, уравнението на една повърхнина S може да бъде от вида

$$z = f(x, y), \quad \text{или} \quad x = f(y, z), \quad \text{или} \quad y = f(x, z),$$

т.е. уравнение, в което една от променливите е функция на останалите две.

Най-после, една повърхнина може да се представи и с параметрични уравнения

$$x = \varphi_1(u, v), \ y = \varphi_2(u, v), \ z = \varphi_3(u, v),$$

в които функциите $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_2(u, v)$ и $\varphi_3(u, v)$ имат обща дефиниционна област D, която е множеството от наредени двойки (u, v) реални числа.

Нека S_1 и S_2 са две различни повърхнини, които имат относно K съответно уравнения

$$F(x, y, z) = 0, \; G(x, y, z) = 0 \tag{5.44}$$

и да означим с k множеството от общите им точки. Ако никоя част на k не е повърхнина, то k се нарича *пространствена линия* (или *пространствена крива*), а (5.44) – *уравнение на k относно K*.

Пространствените линии имат тройки *параметрични уравнения*

$$x = \varphi_1(t), \; y = \varphi_2(t), \; z = \varphi_3(t),$$

в които функциите $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и $\varphi_3(t)$ са дефинирани в един и същ дефиниционен интервал $J \subset \mathbb{R}$.

Ще отбележим, че ако всичките точки на една пространствена линия лежат в една равнина, тя се нарича *равнинна*.

5.3.2 Уравнения на сфера

Нека P е фиксирана точка в пространството и R е положително число. Множеството от всички точки M в пространството, за които

$$|PM| = R \tag{5.45}$$

се нарича *сфера с център P и радиус R.*

Ако $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е ортонормирана координатна система, относно която точката P има координати (α, β, γ), сферата σ с център P и радиус R има *относно K нормално уравнение*

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - R^2 = 0. \tag{5.46}$$

То очевидно може да се запише и във вида

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0, \tag{5.47}$$

където $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$. Ако умножим (5.46) с произволно реално число $\rho \neq 0$, получаваме уравнението

$$\rho(x-\alpha)^2 + \rho(y-\beta)^2 + \rho(z-\gamma)^2 - \rho R^2 = 0 \tag{5.48}$$

на същата сфера σ. Нарича се *общо уравнение на сферата σ относно K*. Тъй като $\rho \neq 0$ е произволно, то:

1) Всяка сфера има безбройно много общи уравнения от вида (5.48) и точно едно нормално – онова общо уравнение, в което $\rho = 1$.

Когато центърът $P(\alpha, \beta, \gamma)$ на σ съвпада с началото $O(0,0,0)$ на K, имаме $\alpha = \beta = \gamma = 0$ и (5.46) приема вида

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \tag{5.49}$$

Уравнението (5.49) се нарича *централно уравнение на сферата σ относно K*.

2) Едно уравнение от вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

е точно тогава уравнение на сфера, когато коефициентите му удовлетворяват условията

$$\begin{gathered} A = B = C \neq 0,\ D = E = F = 0, \\ G^2 + H^2 + K^2 - 4AL > 0. \end{gathered} \tag{5.50}$$

Тогава координатите (α, β, γ) на центъра P и радиусът R на сферата се определят съответно с равенствата

$$\alpha = -\frac{G}{2A},\ \beta = -\frac{H}{2A},\ \gamma = -\frac{K}{2A} \tag{5.51}$$

и

$$R = \frac{1}{2|A|}\sqrt{G^2 + H^2 + K^2 - 4AL}. \tag{5.52}$$

Ако $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, са четири некомпланарни точки, те определят сфера σ, която има уравнението

$$(5.53)\qquad \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Най-после от еквивалентността на (5.45) и (5.46) следва:

3) Една точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от пространството лежи вътре, върху или вън относно σ точно тогава, когато съответно

$$(x_0-\alpha)^2 + (y_0-\beta)^2 + (z_0-\gamma)^2 - R^2 \mathrel{\substack{<\\=\\>}} 0.$$

Задача 5.3.1 Да се определи кои от дадените по-долу повърхнини са сфери и да се намерят координатите на центровете и радиусите на тези сфери:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 20 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8 = 0$;
г) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x + 16y - 10z + 1 = 0$;
д) $x^2 + y^2 + z^2 + xy - 2x + 4y - 5z + 1 = 0$.

Решение. а) Трябва да проверим верността на (5.50). Имаме

$$A = B = C = 1,\ D = E = F = 0,\ G^2 + H^2 + K^2 - 4AL = 100.$$

Условията (5.50) са удовлетворени и съгласно 2) даденото уравнение е уравнение на сфера σ. Координатите на центъра P и дължината на радиуса R пресмятаме по (5.51) и (5.52). Намираме, че σ има център $P(2, 1, -1)$ и радиус $R = 5$.

б) Сега имаме

$$A = B = C = 1,\ D = E = F = 0,\ G^2 + H^2 + K^2 - 4AL = -16 < 0$$

и следователно дадената повърхнина не е сфера.

Отговор. в) сфера с център $P(-1, 0, 0)$ и радиус $R = 3$;

г) сфера с център $P\left(2, -4, \dfrac{5}{2}\right)$ и радиус $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{103}$;

д) сфера с център $P\left(\dfrac{5}{2}, -2, \dfrac{7}{2}\right)$ и радиус $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{86}$;

е) не е сфера.

Задача 5.3.2 Да се намери уравнение на сферата σ с център P и радиус R, ако:

а) $P(4, 5, -2)$, $R = 5$;
б) $P(1, 2, 0)$, $R = 3$;
в) $P(0, 0, 3)$, $R = 4$.

Решение. а) За да намерим нормалното уравнение на σ, заместваме $\alpha = 4$, $\beta = 5$, $\gamma = -2$ и $R = 5$ в (5.46). Получаваме

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z + 2)^2 - 25 = 0$$

и като повдигнем на квадрат и направим приведение, достигаме да уравнението

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y + 4z + 20 = 0.$$

Отговор. б) $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$;
в) $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 6z - 7 = 0$.

Задача 5.3.3 Да се определи положението на точката $M(2, -1, 3)$ спрямо сферите, определени с уравненията:

а) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 - 4 = 0$;
б) $(x + 14)^2 + (y - 11)^2 + (z + 12)^2 - 625 = 0$;
в) $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 - 25 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 22 = 0$;
д) $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z - 3 = 0$.

Упътване. Приложете 3).

Отговор. а) вън от сферата; б) и д) върху сферата; в) и г) в сферата.

Задача 5.3.4 Да се намери нормалното уравнение на сферата σ, която минава през точките:

а) $M_1(1,0,0)$, $M_2(3,0,0)$, $M_3(0,2,0)$, $M_4(0,0,3)$;

б) $M_1(1,-2,-1)$, $M_2(-5,10,-1)$, $M_3(4,1,1)$, $M_4(-8,-2,2)$.

Решение. а) **I начин.** Ще използваме (5.53). Имаме

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

и като развием детерминантата, получаваме уравнението $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x - 7y - 8z + 6 = 0$, което записваме във вида

$$(x-2)^2 + \left(y - \frac{7}{4}\right)^2 + (z-2)^2 - \frac{129}{16} = 0. \tag{5.54}$$

II начин. Нека σ има уравнението (5.47). Като изразим, че σ минава през дадените точки, получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 1 - 2\alpha + \delta = 0 \\ 9 - 6\alpha + \delta = 0 \\ 4 - 4\beta + \delta = 0 \\ 9 - 6\gamma + \delta = 0, \end{array} \right.$$

от която намираме $\alpha = 2$, $\beta = \dfrac{7}{4}$, $\gamma = 2$, $\delta = 3$. С тези стойности, по формулата $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta = R^2$, получаваме $R^2 = \dfrac{129}{16}$. Заместването в (5.46) води пак до нормалното уравнение (5.54).

Отговор. б) $\sigma : (x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 + 81 = 0$.

Задача 5.3.5 Да се намери уравнение на сферата σ, която има за център точката:

а) $P(0,0,0)$ и минава през точката $M(6,-2,-3)$;

б) $P(1,4,-7)$ и се допира до равнината $\alpha : 6x+6y-7z+42 = 0$;

в) $P(6,-8,3)$ и се допира до координатната ос Oz.

Решение. в) Сферата σ има нормално уравнение от вида

$$(x-6)^2 + (y+8)^2 + (z-3)^2 - R^2 = 0. \tag{5.55}$$

Тъй като σ се допира да координатната ос

$$Oz : x = 0,\ y = 0,\ z = s, \tag{5.56}$$

системата от уравнения (5.55) и (5.56) трябва да има точно едно решение. Това е налице точно тогава, когато квадратното уравнение

$$s^2 - 6s + 109 - R^2 = 0$$

има дискриминанта равна на нула, т.е. когато

$$D = 9 - 109 + R^2 = 0$$

Оттук намираме $R^2 = 100$ и като заместим в (5.55), получаваме

$$\sigma : (x-6)^2 + (y+8)^2 + (z-3)^2 - 100 = 0.$$

Отговор. а) $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$;
б) $\sigma : (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 - 121 = 0$.

Задача 5.3.6 Да се намери уравнение на сферата σ, която минава през точките $M_1(3,1,-3)$, $M_2(-2,4,1)$, $M_3(-5,0,0)$ и центърът ѝ лежи в равнината $\alpha : 2x + y - z + 3 = 0$.

Отговор. $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 35 = 0$.

Задача 5.3.7 Да се намери уравнение на сферата σ, която минава през точките M_1 и M_2 и центърът ѝ лежи върху правата g, ако:

а) $M_1(1,2,2)$, $M_2(1,0,0)$, $g: x = 1+2s,\ y = 2+2s,\ z = s$;

б) $M_1(3,4,4)$, $M_2(1,2,2)$, $g: x = 1+2s,\ y = 4+2s,\ z = -1+s$.

Решение. а) Нека σ има уравнение от вида (5.47). Тъй като σ минава през точките M_1 и M_2, то

$$9 - 2\alpha - 4\beta - 4\gamma + \delta = 1, \quad 1 - 2\alpha + \delta = 0. \tag{5.57}$$

От условието центърът $P(\alpha,\beta,\gamma)$ на σ да лежи на правата g получаваме

$$\alpha = 1 + 2s_0, \quad \beta = 2 + 2s_0, \quad \gamma = s_0. \tag{5.58}$$

Получената система (5.57), (5.58) има решение $s_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$ и следователно

$$\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 1 = 0.$$

Отговор. б) $\sigma : 5(x^2 + y^2 + z^2) - 26x - 56y + 2z + 89 = 0.$

Задача 5.3.8 Да се намери уравнение на сферата σ, която се допира до равнините $\alpha_1 : x+2y-2z-2 = 0$, $\alpha_2 : x+2y-2z+4 = 0$ и центърът ѝ лежи върху правата $g : 2x + 4y - z - 7 = 0,\ 4x + 5y + z - 14 = 0$.

Упътване. Тъй като равнините α_1 и α_2 са успоредни, центърът P на σ е средата на отсечката P_1P_2, където P_1 и P_2 са прободните точки на правата g съответно с равнините α_1 и α_2. Радиусът R на σ е равен на разстоянието от P до коя да е от равнините α_1 и α_2.

Отговор. $\sigma : (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 - 1 = 0.$

Задача 5.3.9 Да се намери уравнение на сферата σ, която се допира до равнината $\alpha_1 : 6x-3y-2z+63 = 0$ и до равнината $\alpha_2 : 6x - 3y - 2z - 35 = 0$ в точката ѝ $M(5,-1,1)$.

Упътване. Центърът P на σ е средата на отсечката MM_0, където M_0 е ортогоналната проекция на M върху равнината α_1.

Отговор. $\sigma : (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 - 49 = 0.$

Задача 5.3.10 Да се намери уравнение на сферата σ, която се допира до правата $g_1 : x = 1+3s,\ y = -4+6s,\ z = 6+4s$ в точката $M_1(1, -4, 6)$ и до правата $g_2 : x = 4+2t,\ y = -3+t,\ z = 2-6t$ в точката $M_2(4, -3, 2)$.

Решение. Центърът P е пресечната точка на следните три равнини: симетралната равнина α на отсечката M_1M_2, равнината β през M_1, която е перпендикулярна на правата g_1 и равнината γ през M_2, която е перпендикулярна на правата g_2. За тези равнини, по познатите ни вече начини, намираме съответно уравненията $\alpha : 3x+y-4z+12 = 0$, $\beta : 3x+6y+4z-3 = 0$, $\gamma : 2x + y - 6z + 7 = 0$ и следователно $P(-5, 3, 0)$. Тогава $R = |PM_1| = 11$ и сферата σ има нормално уравнение $\sigma : (x+5)^2 + (y-3)^2 + z^2 - 121 = 0$.

Задача 5.3.11 Да се намери уравнение на сферата σ, която минава през точките $A(2, 0, 0)$, $B(0, 5, 0)$, $C(0, 0, 3)$ и се допира до правата $g : x = -2-4s,\ y = \dfrac{1}{2}+s,\ z = \dfrac{1}{2}+s.$

Решение. Да предположим, че търсената сфера σ има уравнението (5.47). Понеже σ минава през точките A, B и C, то $4\alpha - \delta - 4 = 0$, $10\beta - \delta - 25 = 0$, $6\gamma - \delta - 9 = 0$. Оттук намираме $\alpha = 1+\dfrac{1}{4}\delta$, $\beta = \dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{10}\delta$, $\gamma = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{6}\delta$ и заместваме тези стойности в (5.47). Получаваме уравнението

(5.59)
$$x^2 + y^2 + z^2 - \left(2 + \frac{1}{2}\delta\right) x - \left(5 + \frac{1}{5}\delta\right) y + \left(3 + \frac{1}{3}\delta\right) z + \delta = 0,$$

което определя всички сфери, минаващи през трите дадени точки. Измежду тях е и сферата σ, която се допира до правата g.

Заместваме x, y и z от уравненията на g в (5.59) и получаваме квадратното уравнение

$$18s^2 + 2\left(9 + \frac{11}{5}\delta\right)s + \frac{9}{2} + \frac{26}{15}\delta = 0,$$

което трябва да има единствено решение, т.е. дискриминантата му трябва да е равна на нула. Имаме

$$\left(9 + \frac{11}{5}\delta\right)^2 - 81 - \frac{156}{5}\delta = 0$$

и оттук намираме $\delta_1 = 0$ и $\delta_2 = \dfrac{4050}{121}$. Заместваме в (5.59) и получаваме двете сфери: $\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 5y - 3z = 0$ и $\sigma_2 : 121(x^2 + y^2 + z^2) - 2267x - 1415y - 1713z + 4050 = 0$.

Задача 5.3.12 Да се намери уравнение на сферата σ, която минава през точката $M(0, -3, 1)$ и съдържа окръжността $k : x^2 + y^2 - 16 = 0,\ z = 0$.

Решение. Нека σ има уравнение от вида (5.47). От условието σ да минава през M получаваме

$$10 + 6\beta - 2\gamma + \delta = 0. \tag{5.60}$$

От друга страна, равнината $z = 0$ пресича σ по окръжността k, определена с уравненията

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = 0, \quad z = 0,$$

които трябва да бъдат идентични с дадените уравнения на k в условието на задачата. От тяхното сравняване получаваме $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\delta = -16$ и като заместим тези стойности в (5.60), намираме $\gamma = -3$. Тогава търсената сфера σ има уравнението $x^2 + y^2 + z^2 - 6z - 16 = 0$.

Задача 5.3.13 Да се намери уравнение на сферата σ, която минава през точката A и съдържа окръжността k, ако:

а) $A(7,-3,1)$, $k:\ x^2+y^2+z^2-6x-8y-11=0, 4x+y-z-9=0$;

б) $A(2,2,2)$, $k: x^2+y^2+z^2-4=0,\ x+y+z-2=0$.

Решение. а) Търсената сфера σ принадлежи на снопа сфери σ_λ с уравнение

$$\sigma_\lambda : x^2+y^2+z^2-6x-8y-11+\lambda(4x+y-z-9)=0, \tag{5.61}$$

където λ е параметър. Понеже σ минава през точката A, като заместим в (5.61) координатите на A, получаваме $\lambda=-2$. Следователно σ има уравнението $x^2+y^2+z^2-14x-10y+2z+7=0$.

Отговор. б) $\sigma: x^2+y^2+z^2-3x-3y-z+2=0$.

Задача 5.3.14 Да се намери уравнение на допирателната равнина τ към сферата σ, в точката ѝ M, ако:

а) $\sigma: x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+4=0$, $M(2,1,7)$;

б) $\sigma: (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2-4=0$, $M(-1,2,-1)$.

Упътване. Равнината τ минава през дадената точка M и е перпендикулярна на радиуса PM на σ в тази точка.

Отговор. а) $\tau: 4y+3z-25=0$; б) $\tau: z+1=0$.

Задача 5.3.15 Да се намери уравнение на допирателната равнина τ към сферата $\sigma: x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+2=0$, която минава през правата $g: x+1=0,\ y-4=0$.

Упътване. Равнината τ принадлежи на снопа равнини с ос правата g и се намира на разстояние $R=2$ от центъра $P(-1,2,1)$ на σ.

Отговор. $\tau_1: x+y-3=0$, $\tau_2: x-y+5=0$.

Задача 5.3.16 Да се намери уравнение на сферата σ, която се допира до трите координатни равнини и центърът ѝ лежи в равнината $\varepsilon: 2x-3y+4z-18=0$ в I октант.

Упътване. Тъй като σ се допира до трите координатни равнини и центърът ѝ $P(\alpha, \beta, \gamma)$ е в I октант, то $\alpha = \beta = \gamma = R$.

Отговор. $\sigma : (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 - 36 = 0$.

5.4 Цилиндрични, конични и ротационни повърхнини

5.4.1 Цилиндрична повърхнина

Цилиндрична повърхнина (или накратко *цилиндър*) се нарича множеството от всички точки върху всички прави, които пресичат дадена крива k и имат постоянно направление. Кривата k се нарича *управителна крива*, а правите – *образуващи* (или *образувателни*) *на повърхнината.*

Нека $K = Oxyz$ е афинна координатна система и относно нея управителната крива има уравнения

$$k : F(x, y, z) = 0, \ G(x, y, z) = 0, \tag{5.62}$$

а постоянното направление на образуващите се определя от вектора $\overrightarrow{p}(a, b, c)$. Тогава, за да намерим уравнението на цилиндричната повърхнина, от системата

$$F(\lambda, \mu, \nu) = 0, \ G(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

$$\frac{x-\lambda}{a} = \frac{y-\mu}{b} = \frac{z-\nu}{c} \tag{5.63}$$

изключваме параметрите λ, μ и ν и получаваме уравнение от вида $\varphi(x, y, z) = 0$.

В частния случай, когато в едно от уравненията (5.62) липсва една от променливите x, y, z, това уравнение определя в пространството цилиндрична повърхнина, чиито образуващи са успоредни на координатната ос, която е съответна на липсващата в уравнението координата. Например, ако k има уравнение от вида

$$F(x,y)=0,\ z=0, \tag{5.64}$$

уравнението

$$F(x,y)=0$$

определя цилиндрична повърхнина с управителна крива k и образуващи, които са успоредни на апликантната ос Oz.

5.4.2 Конична повърхнина

Конична повърхнина (или накратко *конус*) се нарича множеството от всички точки върху всички прави, които съединяват фиксирана точка Q с точките на дадена крива k. Точката Q се нарича *връх*, а линията k – *управителна крива на коничната повърхнина.*

Нека относно афинната координатна система $K = Oxyz$ върхът Q има координати (x_0, y_0, z_0), а управителната крива k – уравненията (5.62). Тогава, като изключим параметрите λ, μ и ν от системата

$$F(\lambda,\mu,\nu)=0,\ G(\lambda,\mu,\nu)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{\lambda-x_0}=\frac{y-y_0}{\mu-y_0}=\frac{z-z_0}{\nu-z_0}, \tag{5.65}$$

получаваме уравнението $\psi(x,y,z)=0$ на коничната повърхнина.

Забележка 5.4.1 Използваната форма на записване на формулите (5.63) и (5.65) ще считаме за валидна и когато някой от знаменателите е равен на нула. Тогава това просто ще означава, че и съответният числител също е равен на нула.

5.4.3 Ротационна повърхнина

Нека са дадени права l и крива линия k_0, които лежат в една равнина α. Множеството от всички точки върху всички криви, които се получават при завъртането в пространството на кривата k_0 около фиксираната права l, се нарича *ротационна повърхнина.* Правата l се нарича *ос на ротационната повърхнина.* Обикновено се казва, че ротационната повърхнина е описана от кривата k_0 при завъртането ѝ около правата l.

Нека $K = Oxyz$ е ортонормирана координатна система, чиято апликатна ос Oz е върху правата l, а координатната равнина Oxz съвпада с равнината α. Ако кривата k_0 е зададена относно K с уравненията

$$k_0 : F(x, z) = 0, y = 0,$$

ротационната повърхнина S, получена от завъртането на k_0 около Oz, има уравнение

$$S : F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

В случай, че k_0 е представена с параметрични уравнения

$$k_0 : x = \varphi(u),\ y = 0,\ z = \psi(u),\ u \in J_1, \tag{5.66}$$

тогава ротационната повърхнина S има параметрични уравнения

$$S : x = \varphi(u)\cos v,\ y = \varphi(u)\sin v,\ z = \psi(u), \tag{5.67}$$

където $u \in J_1,\ v \in J_2$.

Аналогично постъпваме и когато за ротационна ос е избрана някоя друга координатна ос.

Задача 5.4.1 Да се намери уравнение на цилиндричната повърхнина ζ с управителна крива k и образуващи, колинеарни на вектора $\overrightarrow{v}$, ако:

а) $k : 4x^2 + 4y^2 - 7z^2 + 28 = 0,\ z + 4 = 0,\ \overrightarrow{v}(1, -1, 2)$;
б) $k : x^2 + y^2 - 25 = 0,\ z = 0,\ \overrightarrow{v}(5, 3, -2)$;
в) $k : y^2 - z^2 - 4 = 0,\ x = 0,\ \overrightarrow{v}(5, 3, -2)$;
г) $k : x^2 - 2z = 0,\ y = 0,\ \overrightarrow{v}(5, 3, -2)$.
(Координатната система е афинна).

Решение. а) За да намерим уравнението на цилиндричната повърхнина ζ, изключваме параметрите λ, μ и ν от системата

$$4\lambda^2 + 4\mu^2 - 7\nu^2 + 28 = 0, \nu + 4 = 0, \frac{x - \lambda}{1} = \frac{y - \mu}{-1} = \frac{z - \nu}{2}.$$

Получаваме

$$\zeta : 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2yz - 2xz - 8x + 8y + 8z - 26 = 0.$$

Отговор. б) $\zeta : \left(x + \frac{5}{2}z\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}z\right)^2 - 25 = 0$;
в) $\zeta : \left(y - \frac{3}{5}x\right)^2 - \left(z + \frac{2}{5}x\right)^2 - 4 = 0$;
г) $\zeta : \left(x - \frac{5}{3}y\right)^2 - 2\left(z + \frac{2}{3}y\right)^2 = 0$.

Задача 5.4.2 Да се намери уравнение на цилиндричната повърхнина ζ с управителна крива k и образуващи, колинеарни на вектора $\overrightarrow{v}$, ако:
а) $k : x^2 + y^2 - 1 = 0,\ z = 0,\ \overrightarrow{v}(0, 0, 1)$;
б) $k : y^2 - z^2 - 4 = 0,\ x = 0,\ \overrightarrow{v}(1, 0, 0)$;
в) $k : x^2 - 2z = 0,\ y = 0,\ \overrightarrow{v}(0, 1, 0)$.
(Координатната система е афинна).

Решение. а) Тъй като уравненията на k са от вида (5.64) и образувателните на цилиндричната повърхнина ζ са успоредни на апликатната ос Oz, то ζ има уравнението $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Отговор. б) $\zeta : y^2 - z^2 - 4 = 0$; в) $\zeta : x^2 - 2z = 0$.

Задача 5.4.3 Да се намери уравнение на цилиндричната повърхнина ζ с управителна крива k и образуващи, успоредни на правата g, ако:

а) $k : (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2-25=0,\ x+y-z+2=0,$ $g : y=0,\ \ z=0;$

б) $k : (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2-25=0,\ x+y-z+2=0,$ $g : x-y=0,\ \ z=a;$

в) $k : y^2+z^2-x=0,\ x-2z=0,\ g : y-2=0,\ 2x+z-111=0;$

г) $k : 4y^2-2z^2+x-8y-8z-2=0,\ x+y-z=0,$ $g : 2x=-2y=z.$

(Координатната система е афинна).

Отговор. а) $\zeta : 2(y-z)^2+2yz+12y-10z-3=0;$
б) $\zeta : (x-y)^2+3z^2-8(x-y)-8z-26=0;$
в) $\zeta : 4x^2+25y^2+z^2+4xz-20x-10z=0;$
г) $\zeta : 2x^2+2y^2-2z^2+12xy+4xz-4yz+5x+23y+9z+4=0.$

Задача 5.4.4 Да се намери уравнение на цилиндричната повърхнина ζ с управителна крива k и образуващи, перпендикулярни на равнината α, ако:

а) $k : y^2-z^2-x=0,\ x-2z=0,\ \alpha : x-2z=0;$

б) $k : y^2-2x=0,\ x-y+2z-1=0,\ \alpha : x-y+2z-1=0.$

(Координатната система е ортонормирана).

Решение. а) Образуващите на търсената цилиндрична повърхнина ζ са колинеарни с нормалния вектор $\overrightarrow{n_\alpha}(1,0,-2)$ на равнината α. Изключваме параметрите λ, μ и ν от системата

$$\mu^2-\nu^2-\lambda=0,\quad \lambda-2\nu=0,$$

$$\frac{x-\lambda}{1}=\frac{y-\mu}{0}=\frac{z-\nu}{-2}, \tag{5.68}$$

в която съгласно Забележка 5.4.1, записаното в (5.68) трябва да се схваща като

$$\frac{x-\lambda}{1}=\frac{z-\nu}{-2},\quad y-\mu=0.$$

Получаваме $\zeta : (2x+z)^2 - 25y^2 + 10(2x+z) = 0$.

Отговор. б) $\zeta : (x+5y+2z-1)^2 - 60x - 12y + 24z - 12 = 0$.

Задача 5.4.5 Да се намери уравнение на цилиндричната повърхнина ζ, която съдържа успоредните прави $g_1 : x - y = 0,\ y - z = 0$, $g_2 : x - y + 1 = 0,\ y - z + 1 = 0$ и $g_3 : x - y - 2 = 0,\ y - z + 3 = 0$. (Координатната система е ортонормирана).

Упътване. Ако се прекара равнина, перпендикулярна на дадените успоредни прави, то за управителна крива на ζ може да се избере окръжността, определена от пресечните точки на равнината с правите.

Отговор. $\zeta : 5(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)+2x+11y+13z = 0$.

Задача 5.4.6 Да се намерят параметрични уравнения на цилиндричната повърхнина ζ с управителна крива

$$k : x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t,\ -\infty < t < +\infty$$

и образуващи, колинеарни с вектора $\overrightarrow{v}(a, b, c)$.
(Координатната система е афинна).

Решение. Произволна образуваща l на ζ пресича k и е колинеарна с вектора $\overrightarrow{v}$ и следователно има параметрични уравнения

$$x = e^t \cos t + as,\ y = e^t \sin t + bs,\ z = e^t + cs,\ -\infty < s, t < +\infty.$$

Когато параметрите s и t се менят в интервала $(-\infty, +\infty)$, получаваме всички точки на ζ. Оттук следва, че цилиндричната повърхнина има параметрични уравнения

$$x = e^t \cos t + as,\ y = e^t \sin t + bs,\ z = e^t + cs,\ -\infty < s, t < +\infty.$$

Задача 5.4.7 Да се намерят параметрични уравнения на цилиндричната повърхнина ζ с управителна крива

$$k : x = 3t + t^2,\ y = 3t^2,\ z = t^3,\ -\infty < t < +\infty$$

и образуващи, успоредни на всяка от равнините $\alpha_1 : 2x-y+z=0$ и $\alpha_2 : x-2y+1=0$.
(Координатната система е афинна).

Отговор. $\zeta : x=3t+t^2+2s,\ y=3t^2+s,\ z=t^3-3s,\ -\infty< s,t<+\infty$.

Задача 5.4.8 Да се намери уравнение на цилиндричната повърхнина ζ, чиито образуващи са допирателни към сферата $\sigma : x^2+y^2+z^2-1=0$ и сключват равни ъгли с координатните оси.
(Координатната система е ортонормирана).

Упътване. Покажете, че образуващите на ζ са колинеарни с вектора $\overrightarrow{v}(1,1,1)$ и пресичат кривата $k : x^2+y^2+z^2-1=0, x+y+z=0$.

Отговор. $\zeta : (y-z)^2+(x-z)^2+(x-y)^2-3=0$.

Задача 5.4.9 Да се намери уравнение на коничната повърхнина χ с управителна крива k и връх в точката Q, ако:

а) $k : 9y^2+25z^2-225=0, x=0,\ Q(4,0,-3)$;

б) $k : x^2+y^2-h^2=0, z=h,\ Q(0,0,0)$;

в) $k : x^2+y^2-a^2=0, z=0,\ Q(0,0,h)$;

г) $k : x^2-2z+1=0, y-z+1=0,\ Q(0,0,0)$.

(Координатната система е афинна).

Решение. а) За да намерим уравнение на коничната повърхнина χ изключваме параметрите λ, μ и ν от системата

$$9\mu^2+25\nu^2-225,\ \lambda=0,\ \frac{x-4}{\lambda-4}=\frac{y}{\mu}=\frac{z+3}{\nu+3}.$$

Получаваме $\chi : 18y^2+50z^2+75xz+225x-450=0$.

Отговор. б) $\chi : x^2+y^2-z^2=0$;

в) $\chi : h^2(x^2+y^2)-a^2(z-h)^2=0$;

г) $\chi : x^2+y^2-z^2=0$.

Задача 5.4.10 Да се намери уравнение на коничната повърхнина χ с управителна крива k и връх в точката Q, ако:

а) $k : 16x^2 + 9y^2 - 36z^2 - 144 = 0, x + y = 0,\ Q(1, 0, -1)$;

б) $k : 3x^2 + 6y^2 - z = 0, x + y + z = 0,\ Q(-3, 0, 0)$;

в) $k : x^2 + y^2 - x = 0, z = 1,\ Q(0, 0, 0)$.

(Координатната система е афинна).

Отговор. а) $\chi : 36(x + y + z)^2 + 144(x + y - 1)^2 - 25y^2 = 0$;

б) $\chi : 3x^2 + 123y^2 + 23z^2 - 18xy - 22xz + 50yz + 18x - 54y - 66z + 27 = 0$;

в) $\chi : x^2 + y^2 - zx = 0$.

Задача 5.4.11 Да се намери уравнение на коничната повърхнина χ с връх $Q(5, 0, 0)$, която е описана около сферата $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. (Координатната система е афинна).

Решение. Произволна образуваща l на χ има параметрични уравнения от вида

$$x = 5 + as, \quad y = bs, \quad z = cs, \tag{5.69}$$

където $\overrightarrow{v}(a, b, c)$ е ненулев вектор, колинеарен с l. За да намерим общите точки на l и σ заместваме (5.69) в уравнението на σ. Получаваме квадратното уравнение

$$(a^2 + b^2 + c^2)s^2 + 10as + 24 = 0,$$

което трябва да има двоен корен, тъй като l и σ се допират, т.е.

$$25a^2 - 24(a^2 + b^2 + c^2) = 0. \tag{5.70}$$

Заместваме в (5.70) параметрите a, b и c с пропорционалните им $x - 5$, y и z от (5.69) и получаваме, че коничната повърхнина χ има уравнение

$$(x - 5)^2 + 24(y^2 + z^2) = 0.$$

Задача 5.4.12 Да се намерят параметрични уравнения на коничната повърхнина χ с връх в началото O на координатната система и управителна крива $k : x = 3t - t^3,\ y = 3t^2,\ z = 3t + t^3,\ -\infty < t < +\infty$. (Координатната система е афинна).

Упътване. Напишете параметрични уравнения на произволна образуваща на χ.

Отговор. $\chi : x = (3t - t^3)s,\ y = 3t^2 s,\ z = (3t + t^3)s,\ -\infty < s, t < +\infty$.

Задача 5.4.13 Да се намери уравнение на ротационната повърхнина S, описана от кривата k_0, при завъртането ѝ около правата l, ако:

а) $k_0 : x^2 + z^2 - R^2 = 0,\ y = 0,\ l = Oz$;

б) $k_0 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0,\ z = 0,\ l = Oz$;

в) $k_0 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0,\ z = 0,\ l = Ox$;

г) $k_0 : \dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0,\ x = 0,\ l = Oz$;

д) $k_0 : y^2 = 2px,\ z = 0,\ l = Ox$;

е) $k_0 : y = kx,\ x = 0,\ l = Oz$;

ж) $k_0 : x + z - 1 = 0,\ y = 0,\ l = Oz$;

з) $k_0 : x^2 + (y - b)^2 - a^2 = 0,\ z = 0\ (b > a > 0),\ l = Ox$.

(Координатната система е ортонормирана).

Решение. а) Тъй като ротационната ос на S е Oz, за да получим уравнението на повърхнината трябва в първото уравнение на k_0 да заместим x с $\sqrt{x^2 + y^2}$. Получаваме $S : x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ и следователно S е *сфера*.

Отговор. б) $S : \dfrac{x^2 + z^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – *ротационен елипсоид*;

в) $S : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$ – *двоен ротационен хиперболоид*;

г) $S : \dfrac{x^2 + y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – *прост ротационен хиперболоид*;

д) $S : y^2 + z^2 = 2px$ – *ротационен параболоид*;

е) $S : x^2+y^2-k^2z^2 = 0$ – *ротационен конус с връх* $Q(0,0,0)$;

ж) $S : x^2 + y^2 - (1-z)^2 = 0$ – *ротационен конус с връх* $Q(0,0,1)$;

з) $S : (x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2) - 4b^2(y^2 + z^2) = 0$ – *тор*.

Задача 5.4.14 Да се намерят параметрични уравнения на повърхнината S, получена от завъртането на *трактрисата* k_0 : $x = \sin u,\ y = 0,\ z = \cos u + \ln \operatorname{tg} \dfrac{u}{2},\ 0 < u < \dfrac{\pi}{2}$, около оста Oz. (Координатната система е ортонормирана).

Решение. Тъй като уравненията на k_0 са от вида (5.66) и ротационната ос е Oz, уравненията на S се получават от (5.67). Имаме

$$S : x = \sin u \cos v,\ y = \sin u \sin v,\ z = \cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

Ако искаме всяка точка на S да се получи само по един път, трябва $0 < u < \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le v < 2\pi$. Получената повърхнина се нарича *псевдосфера*.

Задача 5.4.15 Да се намерят параметрични уравнения на ротационната повърхнина S, получена от завъртането на *верижката* $k_0 : x = \operatorname{ch} u,\ y = 0,\ z = u,\ -\infty < u < +\infty$, около оста Oz. (Координатната система е ортонормирана).

Отговор. $S : x = \operatorname{ch} u \cos v,\ y = \operatorname{ch} u \sin v,\ z = u, u \in (-\infty, +\infty),\ v \in [0, 2\pi)$.

Получената повърхнина се нарича *катеноид*.

5.5 Праволинейни образуващи на простия хиперболоид и на хиперболичния параболоид

5.5.1 Прост хиперболоид

Повърхнината, която относно подходяща ортонормирана координатна система $K = Oxyz$ има (*метрично*) *канонично уравнение*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,$$

се нарича *прост хиперболоид*. За конкретност ще предполагаме, че $a \geq b$.

Върху простия хиперболоид има две системи от прави, определени съответно с уравненията:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) - \mu_1 \left(1 + \frac{y}{b}\right) = 0, \\ &\mu_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) - \lambda_1 \left(1 - \frac{y}{b}\right) = 0, \quad (\lambda_1, \mu_1) \neq (0,0) \end{aligned} \tag{5.71}$$

и

$$\begin{aligned} &\lambda_2 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) - \mu_2 \left(1 - \frac{y}{b}\right) = 0, \\ &\mu_2 \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) - \lambda_2 \left(1 + \frac{y}{b}\right) = 0, \quad (\lambda_2, \mu_2) \neq (0,0) \end{aligned} \tag{5.72}$$

От (5.71) и (5.72) следва твърдението:

1.а) През всяка точка на простия хиперболоид минават точно две негови прави.

1.б) Всеки две прави от различни системи лежат в една равнина. Те са успоредни точно тогава, когато минават през диаметрално противоположни точки на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ z = 0.$$

1.в) Всеки две прави от една система са кръстосани.

5.5.2 Хиперболичен параболоид

Повърхнината, която относно подходяща ортонормирана координатна система $K = Oxyz$ има (*метрично*) *канонично уравнение*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \ p > 0, \ q > 0,$$

се нарича *хиперболичен параболоид.*

Хиперболичният параболоид притежава две системи от прави, определени съответно с уравненията:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = \mu_1, \\ &\mu_1 \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2\lambda_1 z, \quad (\lambda_1, \mu_1) \neq (0, 0) \end{aligned} \tag{5.73}$$

и

$$\begin{aligned} &\lambda_2 \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2\mu_2 z, \\ &\mu_2 \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = \lambda_2, \qquad (\lambda_2, \mu_2) \neq (0, 0) \end{aligned} \tag{5.74}$$

В сила е твърдението:

2.а) През всяка точка на хиперболичния параболоид минават точно две негови прави.

2.б) Всеки две прави от различни системи се пресичат.

2.в) Всеки две прави от една и съща система са кръстосани.

Задача 5.5.1 Да се докаже, че правата $g : 2x + 3y - 6 = 0,\ 2x - 3z - 3 = 0$ лежи върху хиперболичния параболоид $P :$ $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = z$.

Решение. Дадената права g има параметрични уравнения $x = 3s,\ y = 2 - 2s,\ z = -1 + 2s$. За да намерим общите точки на g и P, заместваме тези уравнения в уравнението на P. Получаваме равенството

$$\frac{(3s)^2}{9} - \frac{(2-2s)^2}{4} = -1 + 2s,$$

за което, след необходимите пресмятания, намираме, че има вида $0.s^2 + 0.s + 0 = 0$. Оттук следва, че всяка точка на g лежи върху P и следователно g лежи върху P.

Задача 5.5.2 Да се намерят уравнения на правите върху простия хиперболоид H, които минават през точката M, ако:

а) $H : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1,\ M(-3, 2, -1)$;

б) $H : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = 1,\ M(4, 3, 2)$;

в) $H : \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{9} = 1,\ M(6, 4, 3)$.

Решение. а) **I начин.** Съгласно 1.а) през точката $M(-3, 2, -1)$ минават две прави върху H, които са определени съответно с уравнения от вида (5.71) и (5.72). Заместваме $x = -3,\ y = 2,\ z = -1, a = 3,\ b = 2,\ c = 1$ в (5.71) и (5.72) и получаваме съответно $\lambda_1 + \mu_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$. Тогава можем да изберем $\lambda_1 = \rho_1,\ \mu_1 = -\rho_1,\ \rho_1 \neq 0,\ \mu_2 = \rho_2,\ \rho_2 \neq 0$ и за двете прави върху H намираме

$$g_1 : \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z + 1 = 0,\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} - z + 1 = 0$$

и

$$g_2 : 1 - \frac{y}{2} = 0,\ \frac{x}{3} - z = 0.$$

След очевидни преобразувания, окончателно получаваме:
(5.75)

$$g_1 : x + 3 = 0,\ y + 2z = 0 \ \text{ и } \ g_2 : y - 2 = 0,\ x - 3z = 0.$$

II начин. Произволна права g, която минава през точката $M(-3, 2, -1)$ има параметрични уравнения от вида

$$x = -3 + \lambda s,\ y = 2 + \mu s,\ z = -1 + \nu s, \tag{5.76}$$

където поне едно от числата λ, μ и ν не е нула. Понеже всяка точка на правата g лежи върху H, имаме равенството

$$\frac{(-3 + \lambda s)^2}{9} + \frac{(2 + \mu s)^2}{4} - (-1 + \nu s)^2 = 1,$$

от което получаваме

$$\left(\frac{1}{9}\lambda^2 + \frac{1}{4}\mu^2 - \nu^2\right) s^2 + \left(-\frac{2}{3}\lambda + \mu + 2\nu\right) s = 0. \tag{5.77}$$

Тъй като уравнението (5.77) трябва да бъде удовлетворено за всяка стойност на s, следва, че

$$\frac{1}{9}\lambda^2 + \frac{1}{4}\mu^2 - \nu^2 = 0,\ -\frac{2}{3}\lambda + \mu + 2\nu = 0. \tag{5.78}$$

Системата (5.78) има две решения: $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = 2\rho_1$, $\nu_1 = -\rho_1$, $\rho_1 \neq 0$ и $\lambda_2 = 3\rho_2$, $\mu_2 = 0$, $\nu_2 = \rho_2$, $\rho_2 \neq 0$, които заместени в (5.76), определят правите

$$g_1 : x = -3,\ y = 2 + 2s,\ z = -1 - s$$

и

$$g_2 : x = -3 + 3s,\ y = 2,\ z = -1 + s.$$

Очевидно получените прави g_1 и g_2 са точно дадените в (5.75).

Отговор. б) $g_1 : x - 4 = 0,\ 2y - 3z = 0,\ g_2 : x - 2z = 0,\ y - 3 = 0$;

в) $g_1 : x - 6 = 0,\ 3y - 4z = 0,\ g_2 : x - 2z = 0,\ y - 4 = 0.$

Задача 5.5.3 Намерете уравнения на правите върху простия хиперболоид $x^2 + y^2 = 2(z^2 + 1)$, минаващи през точката $M(1, 1, 0)$.

Отговор. $g_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}$, $g_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$.

Задача 5.5.4 Да се намерят уравнения на правите, които лежат върху хиперболичния параболоид P и минават през точката M, ако:

а) $P : \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 2z$, $M(2, 1, 0)$;

б) $P : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 2z$, $M\left(3, 0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Упътване. Използвайте (5.73) и (5.74).

Отговор. а) $g_1 : x - 2y = 0,\ z = 0$, $g_2 : x - 2y - 2z = 0,\ x + 2y - 4 = 0$;

б) $g_1 : 2x - 3y - 6 = 0,\ 2x + 3y - 12z = 0$, $g_2 : 2x + 3y - 6z = 0,\ 2x + 3y - 6 = 0$.

Глава 6

Линейни пространства и линейни преобразувания

6.1 Линейни пространства

6.1.1 Поле

Нека F е непразно множество от елементи, в което са определени операциите:

I. Операция „Събиране на елементи от F“, при която на всеки два елемента $\lambda, \mu \in F$ се съпоставя еднозначно определен елемент $\lambda + \mu \in F$, наречен *сбор* (или *сума*) на λ и μ;

II. Операция „Умножение на елементи от F“, при която на всеки два елемента $\lambda, \mu \in F$ се съпоставя еднозначно определен елемент $\lambda\mu \in F$, наречен *произведение* на λ и μ.

Множеството F, заедно с горните две операции, се нарича *числово поле* (накратко *поле*), ако са удовлетворени следните *аксиоми*:

а) $\lambda + \mu = \mu + \lambda$ за всеки два елемента $\lambda, \mu \in F$;

б) $(\lambda+\mu)+\nu = \lambda+(\mu+\nu)$ за всеки три елемента $\lambda, \mu, \nu \in F$;

в) съществува елемент $0 \in F$, такъв че за всеки елемент $\lambda \in F$ е в сила равенството $\lambda + 0 = \lambda$;

г) за всеки елемент $\lambda \in F$ съществува елемент $-\lambda \in F$, такъв че $\lambda + (-\lambda) = 0$;

д) $\lambda\mu = \mu\lambda$ за всеки два елемента $\lambda, \mu \in F$;

е) $(\lambda\mu)\nu = \lambda(\mu\nu)$ за всеки три елемента $\lambda, \mu, \nu \in F$;

ж) съществува елемент $e \in F$, такъв че за всеки елемент $\lambda \in F$ е в сила равенството $\lambda e = \lambda$. Този елемент e се нарича единица на F;

з) за всеки елемент $\lambda \in F, \lambda \neq 0$ съществува елемент $\lambda^{-1} \in F$, такъв че $\lambda\lambda^{-1} = e$;

и) $(\lambda + \mu)\nu = \lambda\nu + \mu\nu$ за всеки три елемента $\lambda, \mu, \nu \in F$.

От аксиомите непосредствено следват твърденията:

А) Елементът $0 \in F$ със свойството в) е единствен.

Този елемент 0 се нарича *нула на числовото поле* F.

Б) За всеки елемент $\lambda \in F$, елементът $-\lambda$ от аксиома г) е единствен и се нарича *противоположен* на λ.

В) За всеки ненулев елемент $\lambda \in F$, елементът λ^{-1} от аксиома з) е единствен и се нарича *обратен* (*реципрочен*) на λ.

Г) За всеки два елемента $\lambda, \mu \in F$ съществува точно един елемент $\tau \in F$, такъв че при $\mu \neq 0$ е вярно равенството $\lambda = \mu\tau$. Елементът τ се нарича *частно* на λ и μ и се означава с $\dfrac{\lambda}{\mu}$.

Ако елементите на полето F са числа, то F се нарича *числово поле.*

6.1.2 Линейно пространство

Нека F е числово поле, L е непразно множество от елементи, в което са определени операциите:

I операция „събиране на елементи от L“, при която на всеки два елемента $a, b \in L$ се съпоставя еднозначно определен елемент $a + b \in L$, наречен *сбор* (или *сума*) на a и b;

II операция „умножение на елемент от L с число от F“, при която на всеки елемент $a \in L$ и всяко число $\lambda \in F$

се съпоставя еднозначно определен елемент $\lambda a \in L$, наречен *произведение на елемента a с числото λ.*

Множеството L, заедно с посочените две операции, се нарича *линейно пространство над полето F*, ако са удовлетворени следните аксиоми:

1. $a+b=b+a$ за всеки два елемента $a,b \in L$.

2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ за всеки три елемента $a,b,c \in L$.

3. Съществува елемент $o \in L$ такъв, че за всеки елемент $a \in L$ е в сила равенството $a+o=a$.

4. За всеки елемент $a \in L$ съществува елемент $-a \in L$ такъв, че $a+(-a)=o$.

5. $1.a=a$ за всеки елемент $a \in L$.

6. $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$ за всеки две числа $\lambda,\mu \in F$ и произволен елемент $a \in L$.

7. $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$ за всеки две числа $\lambda,\mu \in F$ и произволен елемент $a \in L$.

8. $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$ за произволно число $\lambda \in F$ и всеки два елемента $a,b \in L$.

Обикновено елементите на линейното пространство се наричат *вектори*, а вместо линейно пространство се използва терминът *векторно пространство.*

От аксиомите за линейно пространство непосредствено следват твърденията:

1) Векторът o в 3. е единствен.

Този единствен вектор o се нарича *нулев вектор на линейното пространство L.*

2) За всеки вектор $a \in L$ съществува точно един вектор $-a \in L$, удовлетворяващ равенството $a+(-a)=o$.

Векторът $-a$ се нарича *противоположен вектор* на a.

3) $\lambda o=o$ за всяко число $\lambda \in F$.

4) $0a=o$ за всеки вектор $a \in L$.

5) $(-1)a=-a$ за всеки вектор $a \in L$.

6) За всеки два вектора $a,b \in L$ съществува единствен

вектор $x \in L$, удовлетворяващ равенството

$$a + x = b. \tag{6.1}$$

Векторът $x = b + (-a)$, който е решение на векторното уравнение (6.1), се нарича *разлика на векторите* b *и* a и се означава с $b - a$.

7) $\lambda(a - b) = \lambda a - \lambda b$ за всеки два вектора $a, b \in L$ и произволно число $\lambda \in F$.

8) $(\lambda - \mu)a = \lambda a - \mu a$ за всеки вектор $a \in L$ и произволни числа $\lambda, \mu \in F$.

Дефинициите на понятията линейна зависимост, линейна независимост, максимална линейно независима система и свойствата, свързани с тях, имат същата форма, както тези при аритметично $n-$мерно векторно пространство (виж 3.2 и 3.3).

Ако в дадената дефинициея на линейно пространство L заменим полето F с *полето на реалните числа* $\mathbb{R}$ (респ. *полето на комплексните числа* $\mathbb{C}$) линейното пространство L се нарича *реално линейно пространство* (респ. *комплексно линейно пространство*).

6.1.3 Размерност и базис на линейно пространство

Всяка максимална линейно независима система от вектори в линейното пространство L се нарича *базис* на L, а броят на векторите в кой да е базис на L – *размерност на линейното пространство* L. Размерността на L се означава с $\dim L$. Пространството L се нарича *крайномерно*, ако притежава краен базис. В противен случай се нарича *безкрайномерно*.

Нека $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е базис на $n-$мерното линейно пространство L_n. Тогава всеки вектор $a \in L_n$ се представя по единствен начин като линейна комбинация от вида

$$a = \alpha_1 e + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n. \tag{6.2}$$

Коефициентите $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в (6.2) се наричат *координати на вектора a относно дадения базис.*

В сила е следното твърдение:

9) Нека $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ са координатите съответно на векторите a и b спрямо един и същи базис в L_n, а λ и μ са произволни числа на F. Тогава $\lambda\alpha_1+\mu\beta_1, \lambda\alpha_2+\mu\beta_2, \ldots, \lambda\alpha_n+\mu\beta_n$ са координати на вектора $\lambda a+\mu b \in L_n$ относно същия базис.

Всички координати на нулевия вектор $o \in L_n$ са равни на нула спрямо всеки базис на L_n.

Нека сега $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*$ са два базиса на L_n, които накратко ще означаваме с $\{e\}$ и $\{e^*\}$ и да предположим, че

$$\begin{aligned} e_1^* &= \gamma_{11}e_1 + \gamma_{21}e_2 + \cdots + \gamma_{n1}e_n, \\ e_2^* &= \gamma_{12}e_1 + \gamma_{22}e_2 + \cdots + \gamma_{n2}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n^* &= \gamma_{1n}e_1 + \gamma_{2n}e_2 + \cdots + \gamma_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Системата (6.3) реализира прехода от базиса $\{e\}$ към базиса $\{e^*\}$. Тя може да се запише и в матричната форма

$$e^* = T^t e, \tag{6.4}$$

където

$$e^* = \begin{Vmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{Vmatrix}, \quad e = \begin{Vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{Vmatrix}, \quad T = \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{Vmatrix},$$

а T^t е транспонираната матрица на матрицата T.

Матрицата T е неособена и се нарича *матрица на прехода от базиса* $\{e\}$ *към базиса* $\{e^*\}$.

Ако a е произволен вектор на L_n и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ са координатите му спрямо базиса $\{e\}$, а $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ – координатите му спрямо базиса $\{e^*\}$, тези координати са свързани с формулите

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \gamma_{11}\alpha_1^* + \gamma_{12}\alpha_2^* + \cdots + \gamma_{1n}\alpha_n^*,\\
\alpha_2 &= \gamma_{21}\alpha_1^* + \gamma_{22}\alpha_2^* + \cdots + \gamma_{2n}\alpha_n^*,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_n &= \gamma_{n1}\alpha_1^* + \gamma_{n2}\alpha_2^* + \cdots + \gamma_{nn}\alpha_n^*
\end{aligned}$$

или накратко записано

$$\alpha = T\alpha^*, \tag{6.5}$$

където

$$\alpha = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \alpha^* = \begin{Vmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \vdots \\ \alpha_n^* \end{Vmatrix}.$$

От (6.5) получаваме

$$\alpha^* = T^{-1}\alpha, \tag{6.6}$$

където T^{-1} е обратната матрица на T.

6.1.4 Линейни подпространства

Едно *непразно* подмножество M на линейното пространство L се нарича *линейно подпространство на* L, ако е линейно пространство относно зададените в L операции „събиране на вектори в L“ и „умножение на вектор от L с число от полето F“.

10) Едно непразно подмножество M на линейното пространство L е линейно подпространство на L точно тогава, когато

за всеки два вектора a и b от M и всеки две числа λ, μ от полето F, векторът $\lambda a + \mu b$ принадлежи на M.

11) Сечението $M_1 \cap M_2$ на всеки две линейни подпространства M_1 и M_2 на линейното пространство L е също линейно подпространство на L.

Сума $M_1 + M_2$ на линейните подпространства M_1 и M_2 на линейното пространство L се нарича множеството от всички вектори $a \in L$, които могат поне по един начин да се представят във вида $a = a_1 + a_2$, където $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$. Ако горното представяне е еднозначно, сумата на M_1 и M_2 се нарича *директна* и за нея се използва означението $M_1 \oplus M_2$.

12) Сумата на всеки две линейни подпространства на линейното пространство L е линейно подпространство на L.

13) Сумата $M_1 + M_2$ на линейните подпространства M_1 и M_2 на линейното пространство L е директна точно тогава, когато $M_1 \cap M_2 = \{o\}$.

Нека M е непразно подмножество на линейното пространство L. Множеството от всички вектори на L, които могат да се представят като линейни комбинации на вектори от M, се нарича *линейна обвивка на* M. Ще я означаваме с $\text{æ}(M)$.

14) Линейната обвивка $\text{æ}(M)$ на всяко непразно подмножество M на линейното пространство L е линейно подпространство на L.

15) Линейната обвивка $\text{æ}(M)$ на всяко непразно подмножество M на линейното пространство L съвпада със сечението на всички линейни подпространства на L, съдържащи M.

16) Ако L е крайномерно линейно пространство, то сумата $M_1 + M_2$ и сечението $M_1 \cap M_2$ на всеки две линейни подпространства M_1 и M_2 на L са също крайномерни линейни пространства и

$$\dim(M_1 + M_2) + \dim(M_1 \cap M_2) = \dim M_1 + \dim M_2.$$

От 13) и 16) непосредствено следва равенството:

$$\dim(M_1 \oplus M_2) = \dim M_1 + \dim M_2.$$

6.1.5 Изоморфизъм между линейни пространства

Две линейни пространства L и L^* се наричат *изоморфни*, ако съществува биективно изображение $\varphi : L \to L^*$, което притежава свойството

$$\varphi(\lambda a + \mu b) = \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(b), \tag{6.7}$$

за всеки два вектора $a, b \in L$ и произволни числа $\lambda, \mu \in F$.

Биективното изображение $\varphi : L \to L^*$ със свойството (6.7) се нарича *изоморфизъм на L върху L^**. От (6.7) непосредствено следва, че изоморфизмът φ запазва операциите в L и L^*. Очевидно, ако изображението $\varphi : L \to L^*$ е изоморфизъм на L върху L^*, то обратното му изображение $\varphi^{-1} : L^* \to L$ е изоморфизъм на L^* върху L.

17) Ако изображението $\varphi : L \to L^*$ е изоморфизъм, то φ изобразява:

17.а) Нулевия вектор $o \in L$ в нулевия вектор $o^* \in L^*$.

17.б) Линейно зависими вектори на L в линейно зависими вектори на L^*.

17.в) Линейно независими вектори на L в линейно независими вектори на L^*.

18) Две крайномерни линейни пространства L и L^* над едно и също числово поле са изоморфни точно тогава, когато $\dim L = \dim L^*$.

Задача 6.1.1 Нека L е непразно множество от елементи, в което са въведени следните две операции:

I операция „$*$“, която на всеки два елемента $a, b \in L$ съпоставя елемента $a * b \in L$;

II операция „$\circ$“, която на всеки елемент $a \in L$ и произволно реално число λ съпоставя елемента $\lambda \circ a \in L$.

Проверете дали L е реално линейно пространство, ако:

а) L е множеството на положителните реални числа, $a*b = ab$, $\lambda \circ a = a^\lambda$;

б) L е множеството на отрицателните реални числа, $a*b = -|ab|$, $\lambda \circ a = -|a|^{\lambda}$;

в) L е множеството на всички квадратни матрици от $n-$ти ред, $a*b = a+b$, $\lambda \circ a = \lambda a$;

г) L е множеството на всички квадратни матрици от $n-$ти ред, $a*b = ab$, $\lambda \circ a = \lambda a$;

д) L е множеството на всички полиноми от вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

с произволни коефициенти $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, n е фиксирано естествено число, $a*b = a+b$, $\lambda \circ a = \lambda a$.

Решение. а) Ще проверим валидността на аксиомите 1. – 8. за линейно пространство.

1. Имаме $a*b = ab = ba = b*a$ и следователно първата аксиома е в сила.

2. От $(a*b)*c = (ab)c = a(bc) = a*(b*c)$ следва, че и втората аксиома е удовлетворена.

3. $1 \in L$ и за всеки елемент $a \in L$ имаме $a*1 = a.1 = a$, откъдето заключаваме, че и третата аксиома е валидна. Следователно в случая 1 е нулевият елемент на L.

4. За всеки елемент $a \in L$ съществува елементът $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ такъв, че $a*a^{-1} = aa^{-1} = 1$ и четвъртата аксиома е в сила.

5. Имаме $1 \circ a = a^1 = a$ за всеки елемент $a \in L$ и петата аксиома е удовлетворена.

6. От $\lambda \circ (\mu \circ a) = \lambda \circ a^{\mu} = (a^{\mu})^{\lambda} = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \circ a$ следва, че и шестата аксиома е валидна.

7. Имаме $(\lambda+\mu) \circ a = a^{\lambda+\mu} = a^{\lambda} a^{\mu} = (\lambda \circ a)*(\mu \circ a)$ и с това валидността на аксиомата е установена.

8. Понеже $\lambda \circ (a*b) = \lambda \circ (ab) = (ab)^{\lambda} = a^{\lambda} b^{\lambda} = (\lambda \circ a)*(\lambda \circ b)$, то следва, че и последната, осма аксиома е в сила.

Следователно множеството L на положителните реални числа е реално линейно пространство.

Отговор. б) да; в) да; г) не; д) да.

Задача 6.1.2 Да се определи размерността на реалното линейно пространство L от:

а) задача 6.1.1 а);

б) задача 6.1.1 в);

в) задача 6.1.1 д).

Решение. б) Да означим с E_{ij} квадратната матрица от n−ти ред, в която елементът на i−тия ред и j−тия стълб е равен на 1, а всички останали елементи са равни на 0. Когато индексите i и j се менят от 1 до n, получаваме n^2 на брой такива матрици E_{ij}. Очевидно те са линейно независими, тъй като равенството

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_{ij} = o,$$

където $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$, а o е нулевата квадратна матрица от n−ти ред, е изпълнено тогава и само тогава, когато $\lambda_{ij} = 0,\ i,j = 1,2,\ldots,n$. Освен това, всички квадратни матрици от n−ти ред се изразяват като линейни комбинации на матриците $E_{ij},\ i,j = 1,2,\ldots,n$ и следователно те образуват базис на L. Тъй като броят на матриците E_{ij} е n^2, следва, че $\dim L = n^2$.

Упътване. в) Покажете, че полиномите

$$e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x,\ e_2(x) = x^2, \ldots, e_n(x) = x^n$$

образуват базис на L и следователно $\dim L = n + 1$.

Отговор. а) $\dim L = 1$.

Задача 6.1.3 Нека L_3 е реалното линейно пространство на всички полиноми с реални коефициенти, чиято степен е не по-голяма от 2. Покажете, че полиномите

$$e_0^*(x) = 1,\ e_1^*(x) = 1 + x,\ e_2^*(x) = x^2 + 2x - 3$$

образуват базис на L_3 и намерете координатите на полинома $f(x) = 3x^2 + x - 12$ относно този базис.

Решение. Полиномите $e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x,\ e_2(x) = x^2$ образуват базис на L_3 (Защо?). Тогава

$$e_0^* = e_0,\ e_1^* = e_0 + e_1,\ e_2^* = -3e_0 + 2e_1 + e_2$$

и от

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

следва, че векторите $e_0^*,\ e_1^*$ и e_2^* са линейно независими. От друга страна, броят им е равен на $\dim L_3 = 3$ и следователно те образуват базис на L_3.

Матрицата на прехода от базиса $\{e\}$ към базиса $\{e^*\}$ е

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

а обратната ѝ –

$$T^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Относно базиса $\{e\}$ полиномът $f(x)$ има координати $\alpha_1 = -12,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 3$ и ако означим с $\alpha_1^*,\ \alpha_2^*,\ \alpha_3^*$ координатите му относно базиса $\{e^*\}$, съгласно (6.6) е в сила матричното равенство

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \alpha_3^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -12 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

От него намираме $\alpha_1^* = 2,\ \alpha_2^* = -5,\ \alpha_3^* = 3$.

Координатите $\alpha_1^*,\ \alpha_2^*,\ \alpha_3^*$ на $f(x)$ относно базиса $\{e^*\}$ можем да намерим и по друг начин. За тази цел в равенството $f(x) = \alpha_1^* e_0^* + \alpha_2^* e_1^* + \alpha_3^* e_2^*$ заместваме $f(x)$, $e_0^*,\ e_1^*$ и e_2^* и получаваме

$$-12 + x + 3x^2 = \alpha_1^* + \alpha_2^* - 3\alpha_3^* + (\alpha_2^* + 2\alpha_3^*)x + \alpha_3^* x^2.$$

Оттук следва системата

$$\left|\begin{array}{l} \alpha_1^* + \alpha_2^* - 3\alpha_3^* = -12 \\ \alpha_2^* + 2\alpha_3^* = 1 \\ \alpha_3^* = 3, \end{array}\right.$$

от която намираме $\alpha_1^* = 2,\ \alpha_2^* = -5,\ \alpha_3^* = 3$.

Задача 6.1.4 Нека L_4 е реалното линейно пространство на всички полиноми с реални коефициенти, чиято степен е не по-голяма от 3. Покажете, че полиномите

$$e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x - 1,\ e_2(x) = (x-1)^2,\ e_3(x) = (x-1)^3$$

образуват базис на L_4 и намерете координатите на полинома $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 1$ спрямо този базис.

Отговор. $f(x) = 5e_0(x) + 7e_1(x) + 3e_2(x) + 2e_3(x)$.

Задача 6.1.5 Нека L_5 е реалното линейно пространство на всички полиноми с реални коефициенти, чиято степен е не по-голяма от 4. Проверете определя ли базис на L_5 всяка от следващите системи полиноми и намерете координатите на полинома $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$ във всеки един от тях:

а) $e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x,\ e_2(x) = x^2,\ e_3(x) = x^3,\ e_4(x) = x^4$;

б) $e_0(x) = 1 - x,\ e_1(x) = x,\ e_2(x) = x^2 - x,\ e_3(x) = x^3,\ e_4(x) = x^4 - x$;

в) $e_0(x) = 1 - x^4,\ e_1(x) = x - x^4,\ e_2(x) = x^2 - x^4,\ e_3(x) = x^3 - x^4,\ e_4(x) = x^4$.

Отговор. а) $(1, -2, 3, -4, 5)$; б) $(1, 2, 3, 1, 5)$; в) $(6, 3, 8, 1, 5)$.

Задача 6.1.6 Нека $\{e\}$ и $\{e^*\}$ са базиси на тримерното реално линейно пространство L_3. Намерете координатите на вектора a относно базиса $\{e^*\}$, ако:

а) $\begin{array}{rrrr} e_1^* = & e_1 & +e_2 & +3e_3, \\ e_2^* = & -3e_1 & +e_2, & \\ e_3^* = & -e_1 & +e_2 & +e_3, \\ a = & e_1 & +2e_2 & +e_3; \end{array}$ б) $\begin{array}{rrrr} e_1^* = & 7e_1 & -e_2, & \\ e_2^* = & -e_1 & +e_2 & +e_3, \\ e_3^* = & e_1 & +e_2 & +2e_3, \\ a = & -12e_1 & +e_2 & +6e_3; \end{array}$

$$\text{в)}\ \begin{aligned} e_1 &= e_1^* + e_2^* + 2e_3^*, \\ e_2 &= 2e_1^* + e_3^*, \\ e_3 &= e_1^* + e_2^* + e_3^*, \\ a &= e_1 - 6e_2 + 3e_3; \end{aligned} \qquad \text{г)}\ \begin{aligned} e_1^* &= 4e_1 - e_2, \\ e_2^* &= e_1 - e_2 + e_3, \\ e_3^* &= -e_1 + e_3, \\ a &= 2e_1 - e_2 + 4e_3; \end{aligned}$$

Отговор. а) $\left(-\frac{5}{2}, -4, \frac{17}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{21}{4}, -\frac{29}{2}, \frac{41}{4}\right)$; в) $(-2, 4, -2)$; г) $(-2, 1, 5)$.

Задача 6.1.7 Нека векторите e_1, e_2, e_3 образуват базис на тримерното линейно пространство L_3. Проверете, че векторите $a_1 = e_1 + e_2,\ a_2 = e_1 + e_2 - e_3,\ a_3 = 2e_1$ и $b_1 = e_1 - e_2,\ b_2 = e_1 - e_2 + e_3,\ b_3 = -2e_1 + e_2$ също образуват базиси на L_3. Намерете матрицата на прехода от базиса $\{a\}$ към базиса $\{b\}$ и координатите на вектора $x = 2b_1 - b_3$ спрямо базиса $\{a\}$.

Решение. Понеже

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

следва, че векторите $a_1,\ a_2,\ a_3$ и $b_1,\ b_2,\ b_3$ също образуват базиси на L_3.

Съгласно (6.4) имаме $a = T_a^t e,\ b = T_b^t e$, и следователно $b = T_b^t (T_a^t)^{-1} a$. Ако означим с T матрицата на прехода от базиса $\{a\}$ към базиса $\{b\}$, то $T^t = T_b^t (T_a^t)^{-1}$ и тогава $T = T_a^{-1} T_b$. Намираме

$$T_a = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, T_b = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, T_a^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}$$

и следователно

$$T = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{3}{2} \end{Vmatrix}.$$

Векторът x има координати $(2,0,-1)$ относно базиса $\{b\}$ и ако означим с (ξ_1,ξ_2,ξ_3) координатите му относно базиса $\{a\}$, съгласно (6.5) можем да запишем

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{3}{2} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}.$$

Оттук намираме $\xi_1 = -3,\ \xi_2 = 0,\ \xi_3 = \dfrac{7}{2}$.

Задача 6.1.8 Същите изисквания както в задача 6.1.7 за векторите $a_1 = e_1 + e_2,\ a_2 = e_1 - e_2,\ a_3 = e_1 + e_2 + e_3,\ b_1 = 3e_1+2e_2+e_3,\ b_2 = e_1-2e_2+e_3,\ b_3 = 2e_1+2e_2+3e_3,\ x = 2b_1-3b_2+b_3$.

Отговор. $T = \begin{Vmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{Vmatrix},\ x = 17a_1 - 7a_2 - 5a_3.$

Задача 6.1.9 Покажете, че всяко от следващите подмножества на $n-$мерното векторно пространство V_n е негово подпространство и определете размерността му:

а) $M = \{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \mid \alpha_n = 0\}$;

б) $M = \{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \mid \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n = 0\}$;

в) $M = \{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \mid \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\dots+(-1)^{n-1}\alpha_n = 0\}$.

Решение. б) Нека $a = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ и $b = (\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ са произволни елементи на M, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i = 0$. Тогава от

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i) = \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$$

следва, че тяхната сума $a+b=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\dots,\alpha_n+\beta_n)$ и произведението с реалното число $\lambda a=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\dots,\lambda\alpha_n)$ са също елементи на M. Освен това, аксиомите 1.– 8., които са валидни за V_n, са валидни и за M. Оттук следва, че M е реално линейно подпространство на реалното линейно пространство V_n.

Разглеждаме векторите $e_1=(1,-1,0,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,-1,0,\dots,0),\dots$, $e_{n-2}=(0,0,0,0,\dots,1,-1,0)$, $e_{n-1}=(0,0,0,0,\dots,1,-1)$. Очевидно те са линейно независими. Ще покажем, че всеки вектор $a=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in M$ може да се представи като тяхна линейна комбинация, т.е. съществуват числа $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-1}\in\mathbb{R}$ такива, че

$$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_{n-1}e_{n-1}=a. \tag{6.8}$$

Но равенството (6.8) е еквивалентно на системата

$$\left|\begin{array}{lllll}\lambda_1 & & & & =\alpha_1\\ -\lambda_1 & +\lambda_2 & & & =\alpha_2\\ & -\lambda_2 & +\lambda_3 & & =\alpha_3\\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\ & & -\lambda_{n-2} & +\lambda_{n-1} & =\alpha_{n-1}\\ & & & -\lambda_{n-1} & =\alpha_n.\end{array}\right.$$

Ако прибавим първото уравнение към второто, новополученото второ уравнение към третото и т.н. до края, получаваме еквивалентната система

$$\left|\begin{array}{ll}\lambda_1 & =\alpha_1\\ \quad\lambda_2 & =\alpha_1+\alpha_2\\ \qquad\lambda_3 & =\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\ \qquad\qquad\lambda_{n-1} & =\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}\\ \qquad\qquad\quad 0 & =\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\end{array}\right.$$

която е съвместима и има единствено решение. Следователно векторите $e_1,e_2,\dots,e_{n-1}$ образуват базис на M и $\dim M=n-1$.

Упътване. а) M е линейно подпространство на V_n и един негов базис е $e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots, 0), \ldots$, $e_{n-2} = (0, 0, 0, 0, \ldots, 1, 0, 0)$, $e_{n-1} = (0, 0, 0, 0, \ldots, 1, 0)$. Следователно $\dim M = n - 1$.

в) Покажете, че векторите $e_1 = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots$, $e_{n-2} = (0, 0, 0, 0, \ldots, 1, 1, 0)$, $e_{n-1} = (0, 0, 0, 0, \ldots, 1, 1)$ образуват базис на M, откъдето ще следва, че $\dim M = n - 1$.

Задача 6.1.10 Нека L е реалното линейно пространство на всички квадратни матрици от $n-$ти ред относно операциите събиране на матрици и умножение на матрица с реално число. Покажете, че:

а) $\dim L = n^2$;

б) симетричните матрици от $n-$ти ред образуват реално линейно подпространство S на L и $\dim S = \dfrac{1}{2}n(n+1)$;

в) полусиметричните матрици от $n-$ти ред образуват реално линейно подпространство P на L и $\dim P = \dfrac{1}{2}n(n-1)$.

Упътване. б) Покажете, че матриците $E_{ij} = \|e_{ij}\|$, където $e_{ij} = e_{ji} = 1$, а всички останали елементи са равни на нула, образуват базис на S. Тъй като за $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то техният брой е равен на $\dfrac{1}{2}n(n+1)$, то $\dim S = \dfrac{1}{2}n(n+1)$.

в) Матриците $E_{ij} = \|e_{ij}\|$, където $e_{ij} = -e_{ji} = 1$, а всички останали елементи са равни на нула, образуват базис на P. Техният брой за $i, j = 1, 2, \ldots, n$, е равен на $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ и следователно $\dim P = \dfrac{1}{2}n(n-1)$.

Задача 6.1.11 Намерете базис на линейното пространство M, което представлява линейна обвивка на векторите:

а) $a_1 = (2, 1, -2)$, $a_2 = (-9, 5, -6)$, $a_3 = (2, -5, -1)$, $a_4 = (-1, -1, -1)$, $a_5 = (-1, 2, -3)$;

б) $a_1 = (1, 1, 1, 1),\ a_2 = (2, 0, 1, -1),\ a_3 = (3, -4, 0, -1),$
$a_4 = (13, -10, 3, -2);$
в) $a_1 = (2, 3, 1, -1),\ a_2 = (3, 1, 4, 2),\ a_3 = (1, 2, 3, -1),$
$a_4 = (1, -4, -7, 5);$
г) $a_1 = (2, -1, -3, 2, -6),\ a_2 = (1, 5, -2, 3, 4),$
$a_3 = (3, 4, -5, 5, -2),\ a_4 = (3, -7, 0, 1, 2),\ a_5 = (0, 11, -5, 4 - 4).$

Решение. а) Базис на M е всяка максимална линейно независима подсистема вектори на дадената система вектори $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$. За да намерим такава, използваме метода от задача 3.3.2. Тъй като матрицата

$$\left\| \begin{array}{rrrrr} 2 & -9 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right\|$$

има ранг $r = 3$, то всяка максимална линейно независима подсистема съдържа три вектора. Такива са например векторите $a_1,\ a_2,\ a_3$. Следователно $\dim M = 3$.

Отговор. б) $\dim M = 3$ и базис образуват например векторите $a_1,\ a_2,\ a_3$;

в) $\dim M = 3$ и базис образуват например векторите $a_1,\ a_2,\ a_3$;

г) $\dim M = 3$ и базис образуват например векторите $a_1,\ a_2,\ a_4$.

Задача 6.1.12 Нека M и N са линейни обвивки съответно на векторите $a_1,\ a_2, \ldots$ и $b_1,\ b_2, \ldots$. Намерете базиси на сечението $M \cap N$ и на сумата $M + N$ и определете техните размерности, ако:

а) $a_1 = (1, 2, 0, 1),\ a_2 = (1, 0, 1, 0)$
$b_1 = (1, 1, 1, 0),\ b_2 = (1, 3, 0, 1);$
б) $a_1 = (1, 1, 0, 0),\ a_2 = (1, 0, 0, -1),\ a_3 = (1, -1, 1, -1),$
$b_1 = (3, -3, -1, 1),\ b_2 = (5, -3, 1, 1),\ b_3 = (3, -1, 1, 1);$
в) $a_1 = (1, -2, 0, -2),\ a_2 = (1, 1, 0, -1),\ a_3 = (1, 2, 1, 1),$

$b_1 = (1, 4, -1, -1),\ b_2 = (1, 4, 4, 8),\ b_3 = (2, 0, 1, -1);$

г) $a_1 = (1, 2, 1, -2),\ a_2 = (2, 3, 1, 0),\ a_3 = (1, 2, 2, -3),$
$b_1 = (1, 1, 1, 1),\ b_2 = (1, 0, 1, -4),\ b_3 = (1, 3, 0, -4).$

Решение. б) От $x \in M \cap N$ следва, че съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ и числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ така, че

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \quad \text{и} \quad x = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3.$$

Като заместим дадените вектори и приравним, получаваме линейната хомогенна система

$$\left| \begin{array}{rrrrrrl} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & -3\mu_1 & -5\mu_2 & -3\mu_3 & = 0 \\ \lambda_1 & & -\lambda_3 & +3\mu_1 & +3\mu_2 & +\mu_3 & = 0 \\ & & \lambda_3 & +\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & = 0 \\ & -\lambda_2 & -\lambda_3 & -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & = 0, \end{array} \right.$$

от която намираме $\lambda_1 = -4p - 2q, \lambda_2 = 4p + 2q, \lambda_3 = -3p - q$, $\mu_1 = p, \mu_2 = q, \mu_3 = -2p - 2q$, където p и q са параметри. На стойностите $p = 1, q = 0$ и $p = 0, q = 1$ съответстват решенията $(-4, 4, -3, 1, 0, -2)$ и $(-2, 2, -1, 0, 1, -2)$ и следователно векторите

$$c_1 = -4a_1 + 4a_2 - 3a_3 = b_1 - 2b_3 = (-3, -1, -3, -1),$$
$$c_2 = -2a_1 + 2a_2 - a_3 = b_2 - 2b_3 = (-1, -1, -1, -1)$$

образуват базис на $M \cap N$. Оттук следва, че $\dim(M \cap N) = 2$.

Векторите c_1, c_2, a_2 образуват базис на M, а c_1, c_2, b_2 – на N. Тогава векторите c_1, c_2, a_2, b_2 образуват базис на $M + N$ и следователно $\dim(M + N) = 4$.

Отговор. а) Базис на $M \cap N$ образува например векторът $c_1 = a_1 - a_2 = -b_1 + b_2 = (0, 2, -1, 1)$, а на $M + N$ – например векторите c_1, a_1, b_1. Следователно $\dim(M \cap N) = 1, \dim(M + N) = 3$.

в) Базис на $M \cap N$ образуват например векторите $c_1 = 3a_1 - 10a_2 + 6a_3 = -2b_1 + b_3 = (-1, -4, 6, 10)$, $c_2 = a_1 + a_3 =$

$b_3 = (2, 0, 1, -1)$, а на $M + N$ – например векторите c_1, c_2, a_2, b_1. Следователно $\dim(M \cap N) = 2$, $\dim(M + N) = 4$.

г) Базис на $M \cap N$ образуват например векторите $c_1 = -2a_1 + a_2 + a_3 = b_1 = (1, 1, 1, 1)$, $c_2 = 5a_1 - a_2 - 2a_3 = b_3 = (1, 3, 0, -4)$, а на $M + N$ – например векторите c_1, c_2, a_1, b_2. Следователно $\dim(M \cap N) = 2$, $\dim(M + N) = 4$.

Задача 6.1.13 Да се докаже, че реалното линейно пространство L на всички полиноми с реални коефициенти, чиято степен е не по-голяма от n и $(n+1)-$мерното реално векторно пространство V_{n+1} са изоморфни.

Решение. От задача 6.1.2 в) следва, че $\dim L = n + 1$. Тогава $\dim L = \dim V_{n+1}$ и съгласно 18) линейните пространства L и V_{n+1} са изоморфни.

Задача 6.1.14 Дадени са множествата

$$M = \left\{ \left\| \begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix} \right\| \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ и } \mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

в които са определени обичайните операции „събиране“ и „умножение с реално число“. Да се докаже, че:

а) M и $\mathbb{C}$ са реални линейни пространства;

б) линейните пространства M и $\mathbb{C}$ са изоморфни.

6.2 Линейни преобразувания

6.2.1 Линейни преобразувания - дефиниция и основни понятия

Всяко изображение на линейното пространство L в себе си се нарича *преобразувание на* L (или *оператор* в L). Едно преобразувание φ на L се нарича *линейно*, ако притежава свойствата:

I. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ за всеки два вектора $a, b \in L$;

II. $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ за всеки вектор $a \in L$ и произволно число λ.

1) Ако $e_1, e_2, \dots, e_n$ е базис на $n-$мерното линейно пространство L_n и $a_1, a_2, \dots, a_n$ са произволни вектори в L_n, то съществува единствено линейно преобразувание φ, което преобразува векторите $e_1, e_2, \dots, e_n$ съответно във векторите $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Нека

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n, \\ a_2 &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n &= \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Тогава матрицата

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix}$$

се нарича *матрица на линейното преобразувание* φ *относно базиса* $\{e\}$. Равенствата (6.9) можем да запишем и в матричната форма

$$\varphi(e) = A^t e, \tag{6.10}$$

където

$$\varphi(e) = \begin{Vmatrix} \varphi(e_1) \\ \varphi(e_2) \\ \vdots \\ \varphi(e_n) \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad e = \begin{Vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{Vmatrix}.$$

Ако предположим, че един вектор x и неговият образ $\varphi(x)$ имат относно базиса $\{e\}$ съответно координати $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и

$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, в сила са равенствата

$$\begin{array}{l} \eta_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n, \\ \eta_2 = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_n = \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{nn}\xi_n, \end{array}$$

които можем да запишем и във вида

$$\eta = A\xi, \tag{6.11}$$

където

$$\eta = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad e = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{Vmatrix}.$$

Нека $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*$ са два базиса в L_n и да предположим, че

$$e^* = T^t e,$$

т.е. T е матрицата на прехода от базиса $\{e\}$ към базиса $\{e^*\}$. Тогава, ако A и B са матриците на едно линейно преобразувание φ в L_n съответно спрямо $\{e\}$ и $\{e^*\}$, то

$$B = T^{-1}AT. \tag{6.12}$$

Две матрици A и B, за които е в сила равенство от вида (6.12), се наричат *подобни*. От (6.12) следва, че матриците на едно и също линейно преобразувание спрямо два базиса са подобни. Вярно е и обратното: ако две матрици са подобни, то те могат да се разглеждат като матрици на едно и също линейно преобразувание спрямо два подходящо избрани базиса.

6.2.2 Действия с линейни преобразувания

Нека φ и ψ са две преобразувания на линейното пространство L. Дефинираме:

а) Преобразуванието $\varphi+\psi$, определено с равенството

$$(\varphi+\psi)(a)=\varphi(a)+\psi(a)$$

се нарича *сума на преобразуванията φ и ψ.*

б) Преобразуванието $\lambda\varphi$, определено с равенството

$$(\lambda\varphi)(a)=\lambda\varphi(a)$$

се нарича *произведение на преобразуванието φ с числото λ.*

в) Преобразуванието $\psi\circ\varphi$, определено с равенството

$$(\psi\circ\varphi)(a)=\psi(\varphi(a))$$

се нарича *произведение* (*композиция*) *на преобразуванията φ и ψ.*

2) Сумата на линейни преобразувания, произведението на линейно преобразувание с число и произведението на линейни преобразувания са също линейни преобразувания.

3) Нека φ и ψ са линейни преобразувания съответно с матрици A и B. Тогава:

а) матрицата на $\varphi+\psi$ е $A+B$;

б) матрицата на $\lambda\varphi$ е λA;

в) матрицата на $\psi\circ\varphi$ е BA.

Задача 6.2.1 Проверете линейни ли са преобразуванията φ, ψ и θ, дийстващи в тримерното векторно пространство V_3, ако са определени по следния начин:

а) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(4x_1-3x_2-2x_3,x_1,x_1+2x_2^2+3x_3)$,
$\psi(x_1,x_2,x_3)=(4x_1-3x_2-2x_3,x_1,x_1+2x_2+3x_3)$,
$\theta(x_1,x_2,x_3)=(4x_1-3x_2-2x_3,1,x_1+2x_2+3x_3)$;

б) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(3x_1-2x_2-x_3,1,x_1+2x_2+3)$,
$\psi(x_1,x_2,x_3)=(3x_1-2x_2-x_3,0,x_1^3+2x_2+3x_3)$,
$\theta(x_1,x_2,x_3)=(3x_1-2x_2-x_3,x_3,x_1+2x_2+3x_3)$;

в) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(5x_1-4x_2-3x_3,2x_1-x_2,x_2+2)$,
$\psi(x_1,x_2,x_3)=(5x_1-4x_2-3x_3,0,x_2^2+2x_3)$,
$\theta(x_1,x_2,x_3)=(6-5x_2-4x_3,3x_1-2x_2-x_3,x_2+2)$;

г) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3^3)$,
$\psi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$\theta(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

Решение. а) Ако $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ са произволни вектори на V_3, то

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \ \text{ и } \ \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3),$$

където λ е произволно число. От

$$\varphi(x+y) =$$

$$(4(x_1{+}y_1){-}3(x_2{+}y_2){-}2(x_3{+}y_3), x_1{+}y_1, x_1{+}y_1{+}2(x_2{+}y_2)^2{+}3(x_3{+}y_3))$$

и

$$\varphi(x) + \varphi(y) =$$

$$(4x_1{-}3x_2{-}2x_3{+}4y_1{-}3y_2{-}2y_3, x_1{+}y_1, x_1{+}2x_2^2{+}3x_3{+}y_1{+}2y_2^2{+}3y_3) =$$

$$((4(x_1{+}y_1){-}3(x_2{+}y_2){-}2(x_3{+}y_3), x_1{+}y_1, x_1{+}y_1{+}2(x_2^2{+}y_2^2){+}3(x_3{+}y_3))$$

заключаваме, че $\varphi(x + y) \neq \varphi(x) + \varphi(y)$ и следователно преобразуванието φ не е линейно.

Имаме

$$\psi(x+y) =$$

$$(4(x_1{+}y_1){-}3(x_2{+}y_2){-}2(x_3{+}y_3), x_1{+}y_1, x_1{+}y_1{+}2(x_2{+}y_2){+}3(x_3{+}y_3)),$$

$$\psi(x) + \psi(y) =$$

$$(4x_1{-}3x_2{-}2x_3{+}4y_1{-}3y_2{-}2y_3, x_1{+}y_1, x_1{+}2x_2{+}3x_3{+}y_1{+}2y_2{+}3y_3) =$$

$$(4(x_1{+}y_1){-}3(x_2{+}y_2){-}2(x_3{+}y_3), x_1{+}y_1, x_1{+}y_1{+}2(x_2{+}y_2){+}3(x_3{+}y_3))$$

и следователно

$$\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y). \tag{6.13}$$

Намираме

$$\psi(\lambda x) = (4\lambda x_1 - 3\lambda x_2 - 2\lambda x_3, \lambda x_1, \lambda x_1 + 2\lambda x_2 + 3\lambda x_3),$$

$$\lambda\psi(x) = (4\lambda x_1 - 3\lambda x_2 - 2\lambda x_3, \lambda x_1, \lambda x_1 + 2\lambda x_2 + 3\lambda x_3)$$

и заключаваме, че

$$\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x). \tag{6.14}$$

От (6.13) и (6.14) следва, че ψ е линейно преобразувание на V_3.

След аналогични пресмятания получаваме, че θ не е линейно преобразувание на V_3.

Отговор. б) φ – не, ψ – не, θ – да;
в) φ – не, ψ – не, θ – не;
г) φ – не, ψ – да, θ – да.

Нека L_n е линейно пространство с базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ е произволен вектор на L_n. Преобразуванието φ, определено с равенството

$$\varphi(a) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_k e_k,$$

където k $(1 \leq k \leq n)$ е фиксирано число, се нарича *проектиране на линейното пространство L_n върху подпространството* $æ(e_1, e_2, \ldots, e_k)$.

Задача 6.2.2 Нека V_3 е линейното пространство на свободните вектори и e_1, e_2, e_3 е базис на V_3. Да се напише матрицата A на преобразуванието φ на V_3, ако φ е:
а) проектиране на V_3 върху абсцисната ос Ox;
б) проектиране на V_3 върху ординатната ос Oy;
в) проектиране на V_3 върху апликатната ос Oz;
г) проектиране на V_3 върху координатната равнина Oyz;
д) проектиране на V_3 върху координатната равнина Ozx;
е) проектиране на V_3 върху координатната равнина Oxy.

Решение. а) Нека a и b са произволни вектори във V_3, които относно базиса e_1, e_2, e_3 имат съответно координати $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Очевидно имаме, че $Ox = æ(e_1)$

и $\varphi(a) = \alpha_1 e_1$, $\varphi(b) = \beta_1 e_1$. Понеже $\varphi(a+b) = (\alpha_1 + \beta_1)e_1$ и $\varphi(a) + \varphi(b) = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_1 = (\alpha_1 + \beta_1)e_1$, то

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b). \tag{6.15}$$

Аналогично, от

$$\varphi(\lambda a) = \lambda \alpha_1 e_1 \text{ и } \lambda\varphi(a) = \lambda\alpha_1 e_1$$

намираме

$$\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a). \tag{6.16}$$

От (6.15) и (6.16) следва, че φ е линейно преобразувание на V_3 върху абсцисната ос Ox.

За да намерим матрицата на φ относно дадения базис на V_3, ще използваме равенството (6.10). Имаме $\varphi(e_1) = e_1, \varphi(e_2) = 0, \varphi(e_3) = 0$ и следователно търсената матрица на φ има вида

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

г) Сега $Oyz = æ(e_2, e_3)$, $\varphi(a) = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, $\varphi(b) = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$ и понеже

$$\varphi(a+b) = (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + (\alpha_3 + \beta_3)e_3 = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\lambda a) = (\lambda\alpha_2)e_2 + (\lambda\alpha_3)e_3 = \lambda\varphi(a),$$

то φ е линейно преобразувание на V_3 върху координатната равнина Oyz.

От $\varphi(e_1) = 0, \varphi(e_2) = e_2, \varphi(e_3) = e_3$ следва, че матрицата на φ е

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отговор. б) $A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; в) $A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

д) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; е) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

Задача 6.2.3 Нека L_{n+1} е линейното пространство на полиномите с реални коефициенти от степен не по-голяма от n. Да се докаже, че преобразуванието φ, което на всеки полином $f(x) \in L_{n+1}$ съпоставя неговата производна $f'(x)$ е линейно. Намерете матрицата на φ в базиса:

а) $e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x,\ e_2(x) = x^2, \dots, e_n(x) = x^n$;

б) $e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x - c,\ e_2(x) = \dfrac{(x-c)^2}{2!}, \dots,$
$e_n(x) = \dfrac{(x-c)^n}{n!},\ c \in \mathbb{R}$.

Решение. а) Линейността на преобразуванието непосредствено следва от свойствата на диференцирането.

Имаме $\varphi(e_0(x)) = 0,\ \varphi(e_1(x)) = 1 = e_0(x),\ \varphi(e_2(x)) = 2x = 2e_1(x),\ \varphi(e_3(x)) = 3x^2 = 3e_2(x), \dots, \varphi(e_n(x)) = nx^{n-1} = ne_{n-1}(x)$. Като използваме (6.10), получаваме, че матрицата на линейното преобразувание φ е

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

$$\textbf{Отговор.}\ \text{б)}\ A = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Задача 6.2.4 Линейното преобразувание φ на двумерното линейно пространство L_2 има матрица A относно базиса $e_1,\ e_2$. Намерете векторите, в които се преобразуват базисните вектори $e_1,\ e_2$ и векторът x, ако:

а) $A = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right\|,\ x = e_1 - 2e_2;$

б) $A = \left\| \begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{array} \right\|,\ x = 2e_1 + e_2.$

Упътване. Използвайте (6.11).

Отговор. а) $\varphi(e_1) = e_1 + 2e_2,\ \varphi(e_2) = 2e_1 + e_2,\ \varphi(x) = -3e_1;$
б) $\varphi(e_1) = e_1 - e_2,\ \varphi(e_2) = 2e_2,\ \varphi(x) = 2e_1.$

Задача 6.2.5 Линейното преобразувание φ на тримерното линейно пространство L_3 има матрица A относно базиса $e_1,\ e_2,\ e_3$. Намерете векторите, в които се преобразуват базисните вектори $e_1,\ e_2,\ e_3$ и векторът x, ако:

а) $A = \left\| \begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{array} \right\|,\ x = e_1 + 2e_2 - e_3;$

б) $A = \left\| \begin{array}{lrr} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right\|,\ x = e_1 - 2e_2 + 3e_3.$

Отговор.

а) $\varphi(e_1) = e_1 + e_2 - e_3$,
$\varphi(e_2) = 2e_1 + e_2 + 2e_3$,
$\varphi(e_3) = -e_1 - e_2 + 2e_3$,
$\varphi(x) = 6e_1 + 4e_2 + e_3$;

б) $\varphi(e_1) = 2e_1 + e_2 + 2e_3$,
$\varphi(e_2) = -e_1 + 2e_2 + e_3$,
$\varphi(e_3) = -e_1 - 3e_2 + 3e_3$,
$\varphi(x) = e_1 - 12e_2 + 9e_3$.

Задача 6.2.6 Да се докаже, че съществува единствено линейно преобразувание φ на тримерното линейно пространство L_3, което преобразува векторите $a_1,\ a_2,\ a_3$ съответно във векторите $b_1,\ b_2,\ b_3$ и намерете матрицата на φ спрямо дадения базис $e_1,\ e_2,\ e_3$, ако:

а) $a_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ a_2 = e_1 - e_2 + e_3,\ a_3 = 2e_1 + 2e_2 + e_3,$
$b_1 = 2e_1 + 5e_2 + 3e_3,\ b_2 = 2e_2 + e_3,\ b_3 = e_1;$

б) $a_1 = 3e_1 + 2e_2,\ a_2 = 5e_1 + 4e_2 + e_3,\ a_3 = 2e_1 + 3e_2 + e_3,$
$b_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3, b_2 = -2e_1 + 4e_2 + 5e_3, b_3 = e_1 + e_2 - e_3.$

Решение. а) Лесно се проверява, че векторите $a_1,\ a_2,\ a_3$ образуват базис на L_3 и тогава съществуването и единствеността на φ следват от 1).

Нека линейното преобразувание φ на L_3 има матрицата

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix}.$$

Тогава от

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

получаваме равенствата

$$\begin{array}{lll} \alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}=2, & \alpha_{11}-\alpha_{12}+\alpha_{13}=0, & 2\alpha_{11}+2\alpha_{12}+\alpha_{13}=1,\\ \alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}=5, & \alpha_{21}-\alpha_{22}+\alpha_{23}=2, & 2\alpha_{21}+2\alpha_{22}+\alpha_{23}=0,\\ \alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{33}=3, & \alpha_{31}-\alpha_{32}+\alpha_{33}=1, & 2\alpha_{31}+2\alpha_{32}+\alpha_{33}=0. \end{array}$$

От тях намираме $\alpha_{11}=-3$, $\alpha_{12}=2$, $\alpha_{13}=3$, $\alpha_{21}=-\dfrac{13}{2}$, $\alpha_{22}=\dfrac{3}{2}$, $\alpha_{23}=10$, $\alpha_{31}=-5$, $\alpha_{32}=2$, $\alpha_{33}=6$ и следователно

$$A=\begin{Vmatrix} -3 & 2 & 3\\ -\frac{13}{2} & \frac{3}{2} & 10\\ -5 & 2 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Отговор. б) $A=\dfrac{1}{3}\begin{Vmatrix} -5 & 6 & -5\\ 5 & -6 & 11\\ 10 & -12 & 13 \end{Vmatrix}.$

Задача 6.2.7 В тримерното линейно пространство L_3 са дадени базисите $e_1,\ e_2,\ e_3$ и $e_1^*,\ e_2^*,\ e_3^*$, които са свързани с равенствата $e_1^*=e_1-e_2+e_3,\ e_2^*=-e_1+e_2-2e_3,\ e_3^*=-e_1+2e_2+e_3$. Намерете матрицата B относно базиса $\{e^*\}$ на линейното преобразувание φ на L_3, ако относно базиса $\{e\}$ има матрица A:

а) $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$; б) $A=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$;

в) $A=\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$; г) $A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 1\\ -1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$;

д) $A=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$.

Упътване. Намерете матрицата T на прехода от базиса $\{e\}$ към базиса $\{e^*\}$ и приложете (6.11).

Отговор. а) $B = \begin{Vmatrix} 29 & -41 & -9 \\ 19 & -27 & -6 \\ 7 & -9 & -4 \end{Vmatrix}$;

б) $B = \begin{Vmatrix} 10 & -12 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \\ 5 & -7 & -1 \end{Vmatrix}$; в) $B = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 37 \\ 0 & 4 & 22 \\ 1 & 0 & 7 \end{Vmatrix}$;

г) $B = \begin{Vmatrix} 18 & 18 & 39 \\ 11 & -18 & 26 \\ 6 & -9 & 9 \end{Vmatrix}$; д) $B = \begin{Vmatrix} 30 & -39 & 27 \\ 22 & -30 & 19 \\ 8 & -11 & 8 \end{Vmatrix}$.

Задача 6.2.8 В четиримерното линейно пространство L_4 е даден базисът $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ и матрицата

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

на линейното преобразувание φ на L_4 относно дадения базис $\{e\}$. Намерете матрицата B на φ относно базиса $e_1^*,\ e_2^*,\ e_3^*,\ e_4^*$ на L_4, ако:

а) $e_1^* = e_1,$
$e_2^* = e_1 + e_2,$
$e_3^* = e_1 + e_2 + e_3,$
$e_4^* = e_1 + e_2 + e_3 + e_4;$

б) $e_1^* = 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4,$
$e_2^* = 3e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4,$
$e_3^* = 4e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4,$
$e_4^* = 5e_1 + 4e_2 + 3e_3 + 2e_4;$

в) $e_1^* = 2e_1 - e_2 - 2e_3 + 3e_4,$
$e_2^* = 3e_1 - e_2 - 2e_3 + 2e_4,$
$e_3^* = 2e_1 - 2e_3 + 2e_4,$
$e_4^* = 2e_1 - e_2 - e_3 + 2e_4;$

г) $e_1^* = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 5e_4,$
$e_2^* = 3e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 5e_4,$
$e_3^* = 4e_1 + 4e_2 + 3e_3 + 5e_4,$
$e_4^* = 5e_1 + 5e_2 + 5e_3 + 5e_4.$

Отговор.а) $B = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{Vmatrix}$;

б) $B = \begin{Vmatrix} 22 & 14 & 8 & 7 \\ -23 & -15 & -7 & -6 \\ 25 & 18 & 8 & 5 \\ -33 & -22 & -11 & -8 \end{Vmatrix}$;

в) $B = \dfrac{1}{2}\begin{Vmatrix} 39 & -12 & -29 & 36 \\ 77 & -18 & -59 & 62 \\ 55 & -14 & -39 & 44 \\ 43 & -10 & -31 & 32 \end{Vmatrix}$;

г) $B = \dfrac{1}{3}\begin{Vmatrix} -3 & 3 & 10 & 30 \\ 15 & 5 & -2 & -20 \\ -60 & -61 & -65 & -80 \\ 48 & 53 & 61 & 64 \end{Vmatrix}$.

Задача 6.2.9 В тримерното линейно пространство L_3 с базис e_1, e_2, e_3 са дадени линейните преобразувания φ и ψ, които са определени съответно с равенствата

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x_2 - x_3)e_1 + x_1 e_2 + (x_1 + x_3)e_3, \\ \psi(x) &= x_2 e_1 + 2x_3 e_2 + x_1 e_3, \end{aligned}$$

където $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ е произволен вектор в L_3.

Намерете:

а) $\psi \circ \varphi$; б) φ^2; в) $\varphi^2 - \psi$; г) ψ^2; д) $\varphi^2 + \psi^2$;
е) $(2\psi - \varphi) \circ \varphi$; ж) $\varphi + \varphi \circ \psi + \psi$; з) $\psi \circ (\varphi + 2\psi)$.

Решение. а) **I начин.** Имаме

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi((x_2 - x_3)e_1 + x_1e_2 + (x_1 + x_3)e_3) =$$

$$= x_1e_1 + 2(x_1 + x_3)e_2 + (x_2 - x_3)e_3.$$

II начин. Линейните преобразувания φ и ψ имат относно дадения базис съответно матриците

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Тогава съгласно 3) линейното преобразувание $\psi \circ \varphi$ има относно същия базис матрицата

$$BA = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

и следователно

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ 2(x_1 + x_3) \\ x_2 - x_3 \end{Vmatrix}.$$

Отговор. б) $\varphi^2(x) = -x_3e_1 + (x_2 - x_3)e_2 + (x_1 + x_2)e_3$;
в) $(\varphi^2 - \psi)(x) = -(x_2 + x_3)e_1 + (x_2 - 3x_3)e_2 + x_3e_3$;
г) $\psi^2(x) = 2x_3e_1 + 2x_1e_2 + x_2e_3$;
д) $(\varphi^2 + \psi^2)(x) = -3x_3e_1 + (-2x_1 + x_2 - x_3)e_2 + x_1e_3$;
е) $((2\psi - \varphi) \circ \varphi)(x) = (2x_1 + x_3)e_1 + (4x_1 - x_2 + 5x_3)e_2 - (x_1 + x_3)e_3$;
ж) $(\varphi + \varphi \circ \psi + \psi)(x) = (-x_1 + 2x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_2 + 2x_3)e_2 + (3x_1 + x_2 + x_3)e_3$;
з) $(\psi \circ (\varphi + 2\psi))(x) = 2(-x_1 + x_3)e_1 + (3x_2 - x_3)e_2 + 3(x_1 + x_2)e_3$.

Задача 6.2.10 В двумерното линейно пространство L_2 са дадени базисите $e_1,\ e_2$ и $e_1^*,\ e_2^*$, които са свързани с равенствата $e_1^* = e_1 + 2e_2,\ e_2^* = e_1 + 3e_2$. Ако $A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{Vmatrix}$ е матрицата на линейното преобразувание φ относно базиса $\{e\}$, а $B^* = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ е матрицата на линейното преобразувание ψ

относно базиса $\{e^*\}$, намерете матрицата на линейното преобразуване:

а) $\varphi + \psi$ относно базиса $\{e\}$;
б) $\psi - 2\varphi$ относно базиса $\{e^*\}$;
в) $\psi \circ \varphi$ относно базиса $\{e^*\}$;
г) $\varphi \circ \psi$ относно базиса $\{e^*\}$;
д) $2\psi \circ \varphi - \varphi$ относно базиса $\{e\}$;
е) $3\psi - \varphi^2$ относно базиса $\{e\}$.

Решение. а) За да приложим 3), трябва да намерим матрицата B на линейното преобразуване ψ относно базиса $\{e\}$. Съгласно (6.12) имаме

$$B^* = T^{-1}BT$$

и като вземем предвид, че

$$T = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} \right\|, \quad T^{-1} = \left\| \begin{matrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

намираме

$$B = TB^*T^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 8 & -3 \\ 19 & -7 \end{matrix} \right\|.$$

Тогава според 3) линейното преобразуване $\varphi + \psi$ има относно базиса $\{e\}$ матрицата

$$A + B = \left\| \begin{matrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 8 & -3 \\ 19 & -7 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 10 & 0 \\ 16 & 11 \end{matrix} \right\|.$$

Отговор. б) $\left\| \begin{matrix} -37 & -49 \\ 23 & 26 \end{matrix} \right\|$; в) $\left\| \begin{matrix} 30 & 37 \\ 19 & 24 \end{matrix} \right\|$;

г) $\left\| \begin{matrix} 43 & -19 \\ -24 & 11 \end{matrix} \right\|$; д) $\left\| \begin{matrix} 48 & 21 \\ 121 & 54 \end{matrix} \right\|$; е) $\left\| \begin{matrix} 29 & -3 \\ 51 & 28 \end{matrix} \right\|$.

Задача 6.2.11 В тримерното линейно пространство L_3 са дадени базисите $e_1,\ e_2,\ e_3$ и $e_1^*,\ e_2^*,\ e_3^*$, които са свързани с равенствата $e_1^* = e_1 + e_3,\ e_2^* = -e_3,\ e_3^* = -e_1 + e_2$. Ако $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$ е матрицата на линейното преобразувание φ относно базиса $\{e\}$, а $B^* = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$ е матрицата на линейното преобразувание ψ относно базиса $\{e^*\}$, намерете матрицата на линейното преобразувание:

а) $\psi \circ \varphi$ относно базиса $\{e\}$;
б) $\varphi \circ \psi$ относно базиса $\{e\}$;
в) $\varphi \circ \psi$ относно базиса $\{e^*\}$.

Отговор. а) $\begin{Vmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 5 & 13 & 6 \end{Vmatrix}$;

в) $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{Vmatrix}$.

Задача 6.2.12 В двумерното линейно пространство L_2 са дадени базисите $e_1 = (1,2),\ e_2 = (1,3)$ и $e_1^* = (2,1),\ e_2^* = (3,2)$. Ако $A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{Vmatrix}$ е матрицата на линейното преобразувание φ относно базиса $\{e\}$, а $B^* = \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix}$ е матрицата на линейното преобразувание ψ относно базиса $\{e^*\}$, намерете матрицата на линейното преобразувание:

а) $\varphi - \psi$ относно базиса $\{e\}$;
б) $\varphi + \psi$ относно базиса $\{e^*\}$;
в) $\psi \circ \varphi$ относно базиса $\{e^*\}$.

Упътване. Трябва да намерим матрицата T на прехода от $\{e\}$ към $\{e^*\}$. За тази цел да означим с $a_1,\ a_2$ базиса, спрямо който са дадени координатите на базисните вектори на $\{e\}$ и $\{e^*\}$. Тогава $T_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$ и $T_2 = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$ са матриците на прехода от $\{a\}$ съответно към $\{e\}$ и $\{e^*\}$, т.е. $e = T_1^t a$ и $e^* = T_2^t a$, където

$$e = \begin{Vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Vmatrix}, \quad e^* = \begin{Vmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad a = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}.$$

Оттук намираме

$$e^* = T_2^t (T_1^t)^{-1} e = (T_1^{-1} T_2) e$$

и следователно

$$T = T_1^{-1} T_2.$$

Отговор. а) $\begin{Vmatrix} -60 & -96 \\ 33 & 59 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 136 & 187 \\ -90 & -121 \end{Vmatrix}$; в) $\begin{Vmatrix} -104 & -142 \\ -156 & -213 \end{Vmatrix}$.

Задача 6.2.13 Линейното преобразувание φ има матрица $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{Vmatrix}$ спрямо базиса $a_1 = -3e_1 + 7e_2$, $a_2 = e_1 - 2e_2$, а линейното преобразувание ψ има матрица $B = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{Vmatrix}$ спрямо базиса $b_1 = 6e_1 - 7e_2$, $b_2 = -5e_1 + 6e_2$. Намерете матрицата на линейното преобразувание $\varphi \circ \psi$ относно базиса $e_1,\ e_2$ и образа $(\varphi \circ \psi)(x)$ на вектора $x = -3e_1 + 5e_2$ относно този базис.

Решение. Матриците

$$T_1 = \begin{Vmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad T_2 = \begin{Vmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{Vmatrix}$$

са матриците на прехода от базиса $\{e\}$ съответно към базисите $\{a\}$ и $\{b\}$. Тогава $C = T_1AT_1^{-1}$ и $D = T_2BT_2^{-1}$ са матриците съответно на линейните преобразувания φ и ψ спрямо базиса $\{e\}$. Намираме

$$C = \begin{Vmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$D = \begin{Vmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{Vmatrix}$$

и за матрицата CD на линейното преобразувание $\varphi \circ \psi$ спрямо базиса $\{e\}$ получаваме

$$CD = \begin{Vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{Vmatrix}.$$

Тогава имаме

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \begin{Vmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -3 \\ 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 138 \\ 43 \end{Vmatrix}$$

и следователно $(\varphi \circ \psi)(x) = 138e_1 + 43e_2$.

Задача 6.2.14 В тримерното линейно пространство са дадени базисите $e_1,\ e_2,\ e_3$ и $e_1^*,\ e_2^*,\ e_3^*$, които са свързани с равенствата $e_1^* = 2e_1 + 3e_2 + e_3,\ e_2^* = 3e_1 + 4e_2 + e_3,\ e_3^* = e_1 + 2e_2 + 2e_3$. Нека φ е линейното преобразувание, което е дефинирано чрез равенството

$$\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_1 + 3x_2)e_1 + (2x_2 + x_3)e_2 + (-2x_1 + x_2 + 3x_3)e_3,$$

а линейното преобразувание ψ има матрица

$$B^* = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

спрямо базиса $e_1^*,\ e_2^*,\ e_3^*$. Намерете матрицата на линейното преобразувание $\varphi \circ \psi$ в базиса $\{e\}$.

Отговор. $-\dfrac{1}{7}\left\|\begin{array}{rrr} -71 & 36 & 106 \\ -130 & 6 & 135 \\ -29 & -33 & 24 \end{array}\right\|.$

6.3 Собствени вектори и собствени стойности на линейно преобразуване

Нека L е линейно пространство над полето F и φ е линейно преобразуване на L. Един вектор $a \in L$ се нарича *собствен вектор на* φ, ако

а) $a \neq o$,

б) $\varphi(a) = \lambda_0 a$, където $\lambda_0 \in F$.

Числото λ_0 се нарича *собствена стойност* (или *собствено значение*) на φ, съответна на собствения вектор a.

Нека $A = \|\alpha_{ij}\|$ е квадратна матрица от $n-$ти ред. Матрицата

$$A - \lambda E,$$

където λ е независима променлива, а E е единичната матрица от $n-$ти ред, се нарича *характеристична матрица на матрицата* A, а нейната детерминанта

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

– *характеристичен полином на матрицата* A.

Уравнението

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

се нарича *характеристично уравнение на матрицата* A, а неговите корени $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – *характеристични корени на* A.

Ако векторът a е собствен вектор на преобразуванието φ с матрица A, съответстващ на собствената стойност λ_0, то координатите му $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ са решение на хомогенната система уравнения

$$\left| \begin{array}{llll} (\alpha_{11} - \lambda_0)\alpha_1 & +\alpha_{12}\alpha_2 + \ldots & & +\alpha_{1n}\alpha_n = 0 \\ \alpha_{21}\alpha_1 & +(\alpha_{22} - \lambda_0)\alpha_2 + \ldots & & +\alpha_{2n}\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\alpha_1 & +\alpha_{n2}\alpha_2 + \ldots & & +(\alpha_{nn} - \lambda_0)\alpha_n = 0. \end{array} \right.$$

1) Подобните матрици имат еднакви характеристични полиноми и следователно имат едни и същи характеристични корени.

Понеже матриците на всяко линейно преобразувание φ спрямо различните базиси на L_n са подобни, от 1) следва, че те имат един и същи характеристичен полином, който се нарича *характеристичен полином на* φ.

2) Едно число λ_0 е собствена стойност на линейното преобразувание φ на L_n тогава и само тогава, когато е корен на характеристичния полином на φ.

Множеството от всички собствени стойности на линейното преобразувание φ се нарича *спектър на* φ. Ако всички собствени стойности са различни, спектърът се нарича *прост*.

Задача 6.3.1 Нека L е реално линейно пространство. Да се намерят собствените стойности и собствените вектори на линейното преобразувание φ на L, зададено с матрицата A, ако:

а) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$; б) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{Vmatrix}$;

в) $A = \begin{Vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{Vmatrix}$; г) $A = \begin{Vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$;

$$\text{д) } A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{Vmatrix}; \text{ е) } A = \begin{Vmatrix} -7 & -10 & -6 & -16 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ -5 & 0 & 2 & -10 \\ 4 & 5 & 3 & 9 \end{Vmatrix}.$$

Решение. а) Характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

има корени $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 5$, които са собствени стойности на линейното преобразуване φ.

Координатите на собствените вектори, съответни на собствената стойност $\lambda_1 = -2$, удовлетворяват системата

$$\left| \begin{array}{rr} (2-(-2))\alpha_1 & +4\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 & +(1-(-2))\alpha_2 = 0, \end{array} \right.$$

която се редуцира до уравнението $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. То има решение $\alpha_1 = p$, $\alpha_2 = -p$, което зависи от един параметър $p \neq 0$. Оттук следва, че собствените вектори, съответни на собствената стойност $\lambda_1 = -2$, образуват едномерно подпространство, което се поражда от собствения вектор $a_1 = (1, -1)$.

Аналогично от системата

$$\left| \begin{array}{rr} (2-5)\beta_1 & +4\beta_2 = 0 \\ 3\beta_1 & +(1-5)\beta_2 = 0 \end{array} \right.$$

намираме координатите на собствените вектори, съответни на собствената стойност $\lambda_2 = 5$. Тя се редуцира до уравнението $3\beta_1 - 4\beta_2 = 0$ и следователно има решение $\beta_1 = 4q$, $\beta_2 = 3q$, където $q \neq 0$ е параметър. Получихме, че собствените вектори, съответни на собствената стойност $\lambda_2 = 5$, образуват едномерно подпространство, което се поражда от собствения вектор $a_2 = (4, 3)$.

в) Характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 9 \\ 1 & -2-\lambda & 3 \\ -3 & 6 & -9-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda+8) = 0$$

има корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\lambda_3 = -8$.

Хомогенната система

$$\left| \begin{array}{rrr} 3\alpha_1 & -6\alpha_2 & +9\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 & -2\alpha_2 & +3\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 & +6\alpha_2 & -9\alpha_3 = 0 \end{array} \right.$$

има решение $\alpha_1 = 2p - 3q$, $\alpha_2 = p$, $\alpha_3 = q$, което зависи от два независими параметъра p и q, които не се анулират едновременно, т.е. $p^2 + q^2 \neq 0$. Следователно собствените вектори, съответни на двукратната собствена стойност $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, образуват двумерно подпространство, което се поражда от собствените вектори $a_1 = (2, 1, 0)$ и $a_2 = (-3, 0, 1)$.

Както по-горе намираме, че на собствената стойност $\lambda_3 = -8$ съответства едномерно подпространство от собствени вектори, което се поражда от собствения вектор $a_3 = (3, 1, -3)$.

г) Характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 7\lambda + 18) = 0$$

има един корен $\lambda_1 = 1$ над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа. Следователно линейното преобразувание φ на тримерното реално линейно пространство L има една собствена стойност $\lambda_1 = 1$. На нея съответства едномерно подпространство от собствени вектори, което се поражда от собствения вектор $a_1 = (0, -1, 1)$.

Отговор. б) $\lambda_1 = -2$, $a_1 = p(-2, 3)$, $p \neq 0$;
$\lambda_2 = 3$, $a_2 = q(1, 1)$, $q \neq 0$;

д) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$, $a = p(1, 1, 0, 1) + q(0, 0, 1, 1)$,

$p^2 + q^2 \neq 0$;

е) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $a_1 = p(-2, 0, 0, 1)$, $p \neq 0$;
$\lambda_3 = -2$, $a_2 = q(10, 3, 0, -5)$, $q \neq 0$;
$\lambda_4 = 2$, $a_3 = r(-6, 3, -4, 3)$, $r \neq 0$.

Задача 6.3.2 Нека L е комплексно линейно пространство. Да се намерят собствените стойности и собствените вектори на линейното преобразуване φ на L, зададено с матрицата A, ако:

а) $A = \begin{Vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{Vmatrix}$; б) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$

в) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

Решение. а) Характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9 = 0$$

има корени $\lambda_1 = 3i$ и $\lambda_2 = -3i$ и следователно това са собствените стойности на φ.

Както в задача 6.3.1 намираме, че на собствената стойност $\lambda_1 = 3i$ съответства едномерното подпространство от собствени вектори, породено от собствения вектор $a_1 = (1, i)$, а на собствената стойност $\lambda_2 = -3i$ – едномерното подпространство от собствени вектори, породено от собствения вектор $a_2 = (1, -i)$.

Отговор. б) $\lambda_1 = 2$, $a_1 = p(0, -1, 1)$, $p \neq 0$;
$\lambda_2 = 1 + i$, $a_2 = q(1 + i, 1, 1)$, $q \neq 0$;
$\lambda_3 = 1 - i$, $a_3 = r(1 - i, 1, 1)$, $r \neq 0$;

в) $\lambda_1 = 4$, $a_1 = p(1, 2, 4)$, $p \neq 0$;
$\lambda_2 = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}$, $a_2 = q(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}, 1)$, $q \neq 0$;
$\lambda_3 = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}$, $a_3 = r(-\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}, 1)$, $r \neq 0$.

Задача 6.3.3 Докажете, че собствените вектори $a_1, a_2, \dots, a_m$ на линейното преобразувание φ, съответни на различните собствени стойности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, образуват линейно независима система.

Решение. Доказателството ще извършим индуктивно по отношение на броя на собствените вектори. При $m = 1$ имаме един собствен вектор a_1, който по определение е ненулев и следователно е линейно независим, т.е. твърдението е вярно.

Допускаме, че твърдението е вярно и когато броят на векторите е $k \leq m$. Значи имаме k собствени вектора $a_1, a_2, \dots, a_k$, които са съответни на различните помежду си собствени стойности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, т.е.

$$\varphi(a_i) = \lambda_i a_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \tag{6.17}$$

като $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Ако допуснем, че собствените вектори $a_1, a_2, \dots, a_k$ са линейно зависими, следва, че съществуват числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, поне едно от които е различно от нула, така че

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_k a_k = 0. \tag{6.18}$$

Нека например $\mu_1 \neq 0$. Тъй като φ е линейно преобразувание, от (6.18) следват равенствата

$$\varphi(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_k a_k) = \varphi(0),$$

$$\mu_1 \varphi(a_1) + \mu_2 \varphi(a_2) + \cdots + \mu_k \varphi(a_k) = 0. \tag{6.19}$$

В последното равенство (6.19) заместваме (6.17) и получаваме

$$\mu_1 \lambda_1 a_1 + \mu_2 \lambda_2 a_2 + \cdots + \mu_k \lambda_k a_k = 0. \tag{6.20}$$

Поне една от собствените стойности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ е различна от нула. Нека например $\lambda_k \neq 0$. От (6.20) изваждаме равенството (6.18), умножено с λ_k. Получаваме равенството

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_k)a_1 + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_k)a_2 + \cdots + \mu_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)a_{k-1} = 0,$$

в което поне един от коефициентите, например $\mu_1(\lambda_1 - \lambda_k)$, е различен от нула. Оттук следва, че векторите $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ са линейно зависими, което противаречи на допускането, че те са линейно независими.

С това твърдението е доказано.

Задача 6.3.4 Докажете, че ако едно линейно преобразувание φ има прост спектър, то съществува базис, относно който матрицата му е диагонална.

Решение. Нека φ е линейно преобразувание на $n-$мерното линейно пространство L_n над полето F, чиито характеристични корени $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ принадлежат на F и са различни помежду си. Но тогава съгласно задача 6.3.3 съответните им собствени вектори $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са линейно независими и следователно образуват базис на L_n. Тъй като $\varphi(a_i) = \lambda_i a_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, то матрицата A на линейното преобразувание φ спрямо базиса $\{a\}$ има вида

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{array} \right\|. \tag{6.21}$$

Задача 6.3.5 Нека $e_1,\ e_2,\ e_3$ е базис на тримерното реално линейно пространство L_3 и φ е линейно преобразувание на L_3, зададено с матрицата A, което има прост спектър. Намерете матрицата T на прехода от дадения базис $\{e\}$ към базиса, образуван от собствените вектори на φ, а също така и матрицата B на φ спрямо дадения базис, ако:

а) $A = \left\| \begin{array}{rrr} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{array} \right\|$; б) $A = \left\| \begin{array}{rrr} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{array} \right\|$;

в) $A = \left\| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{array} \right\|$.

Решение. а) Решаваме характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 & 2 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ 4 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

и получаваме, че собствените значения на φ са $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$. На тези собствени значения съответстват собствените вектори

$$\begin{aligned} a_1 &= 5e_1 - 2e_2 + 5e_3, \\ a_2 &= -5e_1 + e_2 + 5e_3, \\ a_3 &= -e_1 + e_3, \end{aligned} \tag{6.22}$$

които съгласно задача 6.3.3 са линейно независими и тъй като броят им е равен на $\dim L_3$, те образуват базис $\{a\}$ на L_3. От (6.22) следва, че матрицата T на прехода от базиса $\{e\}$ към базиса $\{a\}$ е

$$T = \begin{Vmatrix} 5 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{Vmatrix}.$$

За да намерим матрицата B на φ спрямо базиса $\{a\}$, можем да постъпим по следните два начина:

I начин. Съгласно (6.12) имаме

$$B = T^{-1}AT$$

и като отчетем, че

$$T^{-1} = \frac{1}{10}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ -15 & -50 & -5 \end{Vmatrix},$$

намираме

$$B = \frac{1}{10}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ -15 & -50 & -5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 5 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{Vmatrix}.$$

II начин. Изпълнени са условията в твърдението на задача 6.3.4 и следователно матрицата B на φ има вида (6.21), т.е.

$$B = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Отговор. б) $T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \\ -2 & 0 & 6 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$;

в) $T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{Vmatrix}$.

Забележка 6.3.1 Ако φ е линейно преобразуване на $n-$мерното линейно пространство L_n, съществува базис от собствени вектори на φ, спрямо които матрицата A на φ е диагонална само в случаите, когато:

а) φ има прост спектър (виж задача 6.3.4);

б) всички корени на характеристичния полином на φ са реални и ако измежду тях има кратни корени, кратността на всеки корен λ е равна на числото $n - r$, където r е рангът на матрицата $A - \lambda E$. В този случай кратният корен λ се записва в диагоналната матрица на φ толкова пъти, колкото е кратността му.

Забележка 6.3.2 Числото $n - r$ се нарича *дефект на матрицата* $A - \lambda E$.

Задача 6.3.6 Нека L е реално линейно пространство и φ е линейно преобразуване на L, зададено с матрицата A. Проверете съществува ли базис на L, относно който φ има диагонална матрица и в случай, че съществува, напишете матрицата на прехода T от първоначалния базис към новия базис, ако:

а) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$; б) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$;

в) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$; г) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$;

д) $A = \begin{Vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$; е) $A = \begin{Vmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$;

ж) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$; з) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Решение. в) Характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$$

има корени $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 - i$, $\lambda_3 = 1 + i$. Тъй като λ_2 и λ_3 не принадлежат на полето $\mathbb{R}$ на реалните числа, следва, че не съществува базис на L, спрямо който линейното преобразувание φ има диагонална матрица.

г) Характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^3 = 0$$

има троен реален корен $\lambda = -1$. Матрицата

$$A - (-1)E = A + E = \left\| \begin{array}{rrr} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right\|$$

има ранг $r = 2$ и понеже числото $n - r = 3 - 2 = 1$ е различно от кратността 3 на корена λ, то следва че не съществува базис на L, спрямо който φ има диагонална матрица.

д) Характеристичното уравнение

$$\left| \begin{array}{ccc} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{array} \right| = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

има реални корени $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Матрицата

$$A - 2E = \left\| \begin{array}{rrr} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{array} \right\|$$

има ранг $r = 1$. Сега числото $n - r = 3 - 1 = 2$ е равно на кратността 2 и следователно съществува базис от собствени вектори на φ, спрямо който φ има диагонална матрица. По познатия ни начин (виж например задача 6.3.1) намираме, че този базис има вида

$$\begin{array}{llll} a_1 = e_1 & +e_2 & +e_3, \\ a_2 = e_1 & +e_2, & \\ a_3 = e_1 & & -3e_3 \end{array}$$

и следователно матрицата T на прехода от базиса $\{e\}$ към базиса $\{a\}$ е

$$T = \left\| \begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{array} \right\|.$$

Съгласно Забележка 6.3.1, линейното преобразувание φ има относно базиса $\{a\}$ матрица

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Отговор. а) не съществува; б) $T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$; е) не съществува; ж) $T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$; з) не съществува.

6.4 Евклидови и унитарни пространства

6.4.1 Евклидови пространства

Нека E е реално линейно пространство, в което е въведена операцията *„скаларно умножение на вектори“*, която на всеки два вектора a и b от E съпоставя еднозначно определено реално число (a, b), така че са в сила аксиомите:

1°. $(a, b) = (b, a)$ за всеки два вектора $a, b \in E$;

2°. $(a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b)$ за всеки три вектора $a_1, a_2, b \in E$;

3°. $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$ за всеки два вектора $a, b \in E$ и всяко реално число λ;

4°. $(a, a) > 0$ за всеки ненулев вектор $a \in E$.

Линейното пространство E, заедно с операцията „скаларно умножение на вектори“, удовлетворяваща аксиомите 1° – 4°, се нарича *евклидово пространство*, а числото (a, b) – *скаларно произведение* на векторите a и b.

Непосредствено от 1° – 4° следват твърденията:

1) $(a, b_1+b_2) = (a, b_1)+(a, b_2)$ за всеки три вектора $a, b_1, b_2 \in E$;

2) $(a, \lambda b) = \lambda(a, b)$ за всеки два вектора $a, b \in E$ и всяко реално число λ;

3) $(o, a) = (a, o) = 0$ за всеки вектор $a \in E$;

4) $(a, a) = 0$ тогава и само тогава, когато $a = o$;

5) $\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j (a_i, b_j)$, където a_i, b_j са произволни вектори в E, а λ_i, μ_j – произволни реални числа.

Числото (a, a) се нарича *скаларен квадрат на вектора* a, а числото $|a| = \sqrt{(a, a)}$ – *дължина* (*норма*) *на вектора* a. Вектор e, за който $|e| = 1$ се нарича *единичен*. Ако векторът a е ненулев, то очевидно векторът $\dfrac{a}{|a|}$ е единичен и за него се казва, че е получен от вектора a чрез *нормиране*.

Казваме, че евклидовото пространство E_n е $n-$мерно (и записваме $\dim E_n = n$), ако то е $n-$мерно линейно пространство.

6.4.2 Унитарни пространства

Нека U е комплексно линейно пространство, в което е въведена операцията „*скаларно умножение на вектори*“, която на всеки два вектора $a, b \in U$ съпоставя еднозначно определено комплексно число (a, b), така че са в сила аксиомите:

1*. $(a, b) = \overline{(b, a)}$ за всеки два вектора $a, b \in U$;

2*. $(a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b)$ за всеки три вектора $a_1, a_2, b \in U$;

3*. $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$ за всеки два вектора $a, b \in U$ и всяко комплексно число λ;

4*. $(a, a) > 0$ за всеки ненулев вектор $a \in U$.

Линейното пространство U заедно с операцията „скаларно умножение на вектори“, удовлетворяваща аксиомите 1^* – 4^*, се нарича *унитарно пространство*, а числото (a, b) – *скаларно* *произведение* на векторите a и b.

Следните твърдения непосредствено следват от аксиомите 1^* – 4^*:

1^*) $(a, b_1 + b_2) = (a, b_1) + (a, b_2)$ за всеки три вектора $a, b_1, b_2 \in U$;

2^*) $(a, \lambda b) = \overline{\lambda}(a, b)$ за всеки два вектора $a, b \in U$ и всяко комплексно число λ;

3^*) $(o, a) = (a, o) = 0$ за всеки вектор $a \in U$;

4^*) $\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \lambda_i \overline{\mu_j}(a_i, b_j)$, където a_i, b_j са произволни вектори в U, а λ_i, μ_j – произволни комплексни числа.

Понятията скаларен квадрат на вектор, дължина на вектор и нормиране на вектор, дефинирани в 6.4.1 за евклидово пространство, се въвеждат без изменение и в унитарно пространство.

Разбира се, понеже всяко реално число λ съвпада с конюгованото си число $\overline{\lambda}$, то аксиомите и твърденията за унитарно пространство са в сила и за евклидово пространство. Този факт позволява понякога да се разглеждат едновременно и двете пространства.

6.4.3 Метод на Грам и Шмид за ортогонализация на линейно независима система от вектори в евклидово и унитарно пространство

За два вектора a и b в евклидово или унитарно пространство L ще казваме, че са *ортогонални* и това ще означаваме с $a \perp b$, когато $(a, b) = 0$. Оттук следва, че нулевият вектор o е ортогонален на всеки вектор $a \in L$ и обратно, ако един вектор a е ортогонален на всеки вектор $b \in L$, то $a = o$.

Една система $a_1, a_2, \dots, a_k,\ k > 1$, се нарича *ортогонална*, ако $(a_i, a_j) = 0$ при $i \neq j$. Система, която се състои само от един вектор a, също ще считаме, че е ортогонална.

б) Ако системата от ненулеви вектори $a_1, a_2, \dots, a_k$ в унитарно (и следователно и в евклидово) пространство е ортогонална, то тя е линейно независима.

Нека L_n е $n-$мерно евклидово или унитарно пространство. Всяка ортогонална система от n ненулеви вектора $e_1, e_2, \dots, e_n$ се нарича *ортогонален базис на* L_n. Казваме, че ортогоналният базис е *ортонормиран*, ако се състои от *единични вектори*, т.е.

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Ако $a_1, a_2, \dots, a_m$ е произволна линейно независима система от вектори на L_n (очевидно $m \leq n$), с помощта на метода на Грам и Шмид можем да построим ортогонална система от вектори $e_1, e_2, \dots, e_m$ на L_n по следния начин:

а) Полагаме $e_1 = a_1$.

б) За втория вектор e_2 полагаме

$$e_2 = a_2 + \lambda e_1, \tag{6.23}$$

като числото λ определяме от условието $e_2 \perp e_1$, т.е. от

$$(e_2, e_1) = 0. \tag{6.24}$$

Векторът e_2 сигурно е ненулев, тъй като векторите a_1 и a_2 са линейно независими. Умножаваме скаларно двете страни на (6.23) с вектора e_1 и отчитаме (6.24). Намираме

$$\lambda = -\frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$$

и следователно

$$e_2 = a_2 - \frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1.$$

в) За третия вектор e_3 полагаме

$$e_3 = a_3 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2, \tag{6.25}$$

като числата μ_1 и μ_2 определяме от условията

$$(6.26) \qquad (e_3, e_1) = 0, \quad (e_3, e_2) = 0.$$

От линейната независимост на a_1, a_2 и a_3, следва, че $e_3 \neq o$. Като умножим (6.25) скаларно с e_1 и e_2 и отчетем (6.24) и (6.26), получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} (a_3, e_1) + \mu_1(e_1, e_1) = 0 \\ (a_3, e_2) + \mu_2(e_2, e_2) = 0, \end{array} \right.$$

от която намираме

$$\mu_1 = -\frac{(a_3, e_1)}{(e_1, e_1)}, \quad \mu_2 = -\frac{(a_3, e_2)}{(e_2, e_2)}.$$

Тогава

$$e_3 = a_3 - \frac{(a_3, e_1)}{(e_1, e_1)}e_1 - \frac{(a_3, e_2)}{(e_2, e_2)}e_2.$$

г) Продължавайки този процес, получаваме ортогоналната система вектори

$$(6.27) \qquad e_1, e_2, \dots, e_m,$$

където $e_k = a_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{(a_k, e_i)}{(e_i, e_i)}e_i$. Очевидно (6.27) не е еднозначно определена, тъй като зависи от първоначалната номерация на $a_1, a_2, \dots, a_m$.

По-нататък, от ортогоналната система (6.27) лесно може да се получи ортонормирана

$$e_1^\circ, e_2^\circ, \dots, e_m^\circ,$$

полагайки

$$e_i^\circ = \frac{1}{\sqrt{(e_i, e_i)}}e_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Нека (6.27) е ортонормиран базис ($m = n$) и спрямо него са дадени векторите $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$ и $b = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n$. Тогава за скаларното им произведение в евклидово пространство имаме

$$(a, b) = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \cdots + \lambda_n \mu_n, \tag{6.28}$$

а в унитарно –

$$(a, b) = \lambda_1 \overline{\mu}_1 + \lambda_2 \overline{\mu}_2 + \cdots + \lambda_n \overline{\mu}_n. \tag{6.29}$$

За дължината на вектор в евклидово пространство е в сила формулата

$$|a| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2}, \tag{6.30}$$

а в унитарно –

$$|a| = \sqrt{|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2}. \tag{6.31}$$

6.4.4 Ортогонално допълнение на подпространство

Нека L е евклидово или унитарно пространство и M е произволно негово непразно подпространство. Множеството $M^\perp$ от всички вектори от L, ортогонални на всеки вектор от M, се нарича *ортогонално допълнение на подпространството* M. В сила е следното твърдение:

7) Ако L е крайномерно евклидово или унитарно пространство и M е негово подпространство, то

$$L = M \oplus M^\perp.$$

6.4.5 Изоморфизъм между евклидови (респ. унитарни) подпространства

Нека L и L' са евклидови (респ. унитарни) пространства. Едно изображение $\varphi : L \to L'$ се нарича *изоморфизъм на* L *върху* L', ако:

а) φ е изоморфизъм на L върху L', разглеждани като линейни пространства;

б) φ запазва скаларното произведение, т.е. $(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$ за всеки два вектора $a, b \in L$.

8) Две крайномерни евклидови (респ. унитарни) пространства L и L' са изоморфни тогава и само тогава, когато имат една и съща размерност, т.е. когато $\dim L = \dim L'$.

6.4.6 Симетрични линейни преобразувания в евклидови пространства

Едно линейно преобразувание φ в евклидово пространство E_n се нарича *симетрично*, ако

$$(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))$$

за всеки два вектора a и b от E_n. Ако φ е симетрично линейно преобразувание в E_n, матрицата му A относно произволен ортонормиран базис е симетрична, т.е. $A = A^t$. Вярно е и обратното, всяка симетрична матрица от $n-$ти ред с реални елементи е матрица на някакво симетрично линейно преобразувание относно ортонормиран базис в E_n.

В сила са следните твърдения:

9) Собствените стойности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ на всяко симетрично линейно преобразувание φ в E_n са реални числа.

10) (**Теорема за диагонализация на симетричните преобразувания**). Ако φ е симетрично линейно преобразувание в E_n, съществува ортонормиран базис, спрямо който матрицата на φ е диагонална, като елементите по диагонала са равни съответно на собствените стойности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ на φ.

6.4.7 Ортогонални линейни преобразувания в евклидови пространства

Едно линейно преобразувание φ в евклидово пространство E_n се нарича *ортогонално*, ако

$$(\varphi(a), \varphi(a)) = (a, a),$$

за всеки вектор a от E_n. Оттук следва:

11) Ако φ е ортогонално преобразувание в E_n, то

$$(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b),$$

за всеки два вектора a и b от E_n.

Ако φ е ортогонално линейно преобразувание в E_n, матрицата му A относно произволен ортонормиран базис е ортогонална, т.е. $A.A^t = E$. Вярно е и обратното, всяка ортогонална матрица от $n-$ти ред е матрица на някакво ортогонално линейно преобразувание относно ортонормиран базис в E_n.

Ортогоналните линейни преобразувания преобразуват ортонормирана система от вектори в ортонормирана система.

Задача 6.4.1 Проверете евклидово пространство ли е двумерното реално векторно пространство $\mathbb{R}^2$, в което на всяка двойка вектори $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ се съпоставя реалното число (a, b), ако:

а) $(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2$;

б) $(a, b) = ka_1b_1 + la_2b_2,\ k > 0, l > 0$;

в) $(a, b) = a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$;

г) $(a, b) = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$;

д) $(a, b) = 3a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 - a_2b_2$.

Решение. б) Проверяваме аксиомите 1° – 4° за евклидово пространство:

1°. $(a, b) = ka_1b_1 + la_2b_2 = kb_1a_1 + lb_2a_2 = (b, a)$;

2°. Ако $a' = (a_1', a_2')$ и $a'' = (a_1'', a_2'')$, то $a' + a'' = (a_1' + a_1'', a_2' + a_2'')$ и тогава $(a' + a'', b) = k(a_1' + a_1'')b_1 + l(a_2' + a_2'')b_2 = k(a_1'b_1 + a_1''b_1) + l(a_2'b_2 + a_2''b_2) = ka_1'b_1 + la_2'b_2 + ka_1''b_1 + la_2''b_2 = (a', b) + (a'', b)$;

3°. Имаме $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2)$ и следователно $(\lambda a, b) = k(\lambda a_1)b_1 + l(\lambda a_2)b_2 = k\lambda a_1 b_1 + l\lambda a_2 b_2 = \lambda(ka_1b_1 + la_2b_2) = \lambda(a, b)$;

4°. $(a, a) = ka_1a_1 + la_2a_2 = ka_1^2 + la_2^2 > 0$.

Тъй като аксиомите за евклидово пространство са в сила, следва, че $\mathbb{R}^2$, с така определеното скаларно произведение, е евклидово пространство.

Отговор. а) да; в) не; г) да; д) не.

Задача 6.4.2 Проверете унитарно ли е комплексното векторно пространство $\mathbb{C}^n$, в което на двойка вектори $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ са съпоставя комплексното число (a, b), ако:

а) $(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$;

б) $(a, b) = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + \cdots + a_n\bar{b}_n$.

Упътване. Проверете в сила ли са аксиомите 1^* – 4^* за унитарно пространство.

Отговор. а) не; б) да.

Задача 6.4.3 Намерете скаларното произведение и дължините на векторите $a = (-1, 3)$ и $b = (2, -1)$ в евклидовото пространство E_2 във всеки един от случаите в:

а) задача 6.4.1 а); б) задача 6.4.1 б); в) задача 6.4.1 г).

Решение. б) Имаме

$$(a, b) = k.(-1).2 + l.3.(-1) = -2k - 3l,$$

$$|a| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{k.(-1)^2 + l.3^2} = \sqrt{k + 9l},$$

$$|b| = \sqrt{(b, b)} = \sqrt{k.2^2 + l.(-1)^2} = \sqrt{4k + l}.$$

Отговор. а) $(a, b) = -5$, $|a| = \sqrt{10}$, $|b| = \sqrt{5}$;
в) $(a, b) = 0$, $|a| = \sqrt{2}$, $|b| = \sqrt{5}$.

Задача 6.4.4 Намерете скаларното произведение и дължините на векторите $a = (2 + 3i, 1 - i)$ и $b = (-2i, 5 + i)$ в унитарното пространство U_2 от задача 6.4.2 б) при $n = 2$.

Отговор. $(a, b) = -2 - 2i$, $|a| = \sqrt{15}$, $|b| = \sqrt{30}$.

Задача 6.4.5 Унитарно ли е комплексното векторно пространство $\mathbb{C}^2$, ако на всяка двойка вектори $a = a_1 + ia_2$ и $b = b_1 + ib_2$, където $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, е съпоставено комплексното число $(a, b) = (a_1 + ia_2)\overline{(b_1 + ib_2)} = a_1b_1 + a_2b_2 + i(a_2b_1 - a_1b_2)$?

Отговор. да.

Задача 6.4.6 Намерете скаларното произведение и дължините на векторите $a = 2 - 3i$ и $b = 4 + 5i$ от унитарното пространство U в задача 6.4.5.

Отговор. $(a, b) = -7 - 22i$, $|a| = \sqrt{13}$, $|b| = \sqrt{41}$.

Задача 6.4.7 Векторите e_1^*, e_2^* и e_3^* образуват ортонормиран базис на тримерното евклидово пространство E_3. Постройте ортогонален базис по метода на Грам и Шмид, изхождайки от базиса a_1, a_2 и a_3 на E_3, ако:

а) $a_1 = e_1^* + 2e_2^* + 3e_3^*,\ \ a_2 = 2e_2^*,\ \ a_3 = 3e_3^*$;

б) $a_1 = e_1^*,\ \ a_2 = e_2^* - e_3^*,\ \ a_3 = e_1^* + e_2^* + e_3^*$;

в) $a_1 = 2e_1^* - e_2^* + 2e_3^*,\ \ a_2 = -e_1^* - e_2^* - e_3^*,\ \ a_3 = e_1^* - 3e_3^*$.

Нормирайте получения ортогонален базис.

Решение. в) Тъй като e_1^*, e_2^* и e_3^* образуват ортонормиран базис на E_3, в сила са формулите (6.28) и (6.30) при $n = 3$. За да построим ортогонален базис e_1, e_2, e_3 по метода на Грам и Шмид, изхождайки от базиса $a_1 = (2, -1, 2)$, $a_2 = (-1, -1, -1)$, $a_3 = (1, 0, -3)$, постъпваме по следния начин. За вектор e_1 можем да изберем кой да е от дадените вектори, например a_1:

$$e_1 = a_1 = (2, -1, 2).$$

След това за e_2 полагаме

$$e_2 = a_2 + \lambda e_1,$$

където

$$\lambda = -\frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{-1.2 + (-1).(-1) + (-1).2}{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = -\frac{-3}{9} = \frac{1}{3},$$

т.е.

$$e_2 = a_2 + \frac{1}{3}e_1 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

И накрая, за e_3 полагаме

$$e_3 = a_3 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2,$$

където

$$\mu_1 = -\frac{(a_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{4}{9}, \quad \mu_2 = -\frac{(a_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{1}{3}$$

и следователно

$$e_3 = a_3 + \frac{4}{9}e_1 - \frac{1}{3}e_2 = (2, 0, -2).$$

Така получихме ортогоналния базис

$$e_1 = (2, -1, 2), \quad e_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad e_3 = (2, 0, -2).$$

От него, като нормираме всеки от векторите му, получаваме ортонормирания базис

$$e_1^\circ = \frac{e_1}{|e_1|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$e_2^\circ = \frac{e_2}{|e_2|} = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}\right),$$

$$e_3^\circ = \frac{e_3}{|e_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Отговор. Например:
а) $e_1^\circ = (0,1,0)$, $e_2^\circ = (0,0,1)$, $e_3^\circ = (1,0,0)$;
б) $e_1^\circ = (1,0,0)$, $e_2^\circ = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e_3^\circ = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Задача 6.4.8 Векторите e_1^*, e_2^*, e_3^* и e_4^* образуват ортонормиран базис на четиримерното евклидово пространство E_4. Постройте ортогонален базис по метода на Грам и Шмид, изхождайки от базиса a_1, a_2, a_3 и a_4 на E_4, ако:

$$\begin{array}{ll}
\text{а) } a_1 = e_1^* + e_2^*, & \text{б) } a_1 = 2e_1^* + e_2^* - e_3^* + 2e_4^*, \\
\phantom{\text{а) }} a_2 = e_3^* + e_4^*, & \phantom{\text{б) }} a_2 = e_1^* + e_2^* + 3e_3^* - 5e_4^*, \\
\phantom{\text{а) }} a_3 = e_1^* + e_3^* + e_4^*, & \phantom{\text{б) }} a_3 = 2e_1^* + 3e_2^* - 7e_3^* + 8e_4^*, \\
\phantom{\text{а) }} a_4 = e_3^* - e_4^*; & \phantom{\text{б) }} a_4 = 2e_2^* + e_3^* + 2e_4^*.
\end{array}$$

От построения ортогонален базис получете ортонормиран базис.

Отговор. Например:

$$\begin{array}{ll}
\text{а) } e_1^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), & \text{б) } e_1^\circ = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), \\
e_2^\circ = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), & e_2^\circ = \left(\frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{2}{\sqrt{26}}, \frac{2}{\sqrt{26}}, -\frac{3}{\sqrt{26}}\right), \\
e_3^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), & e_3^\circ = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right), \\
e_4^\circ = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); & e_4^\circ = \left(-\frac{2}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{2}{\sqrt{26}}\right).
\end{array}$$

Задача 6.4.9 В унитарното пространство U_3 векторите e_1, e_2, e_3 образуват ортонормиран базис. Проверете ортогонални ли са векторите a и b, ако:
а) $a = (1, 1, i)$, $b = (-1 + 3i, 2, 3 - i)$;
б) $a = (-2i, -3 + i, 4i)$, $b = (4 + i, 5 + 2i, -1)$;

в) $a = (2+i, -3i, 1)$, $b = (2+i, 1+2i, 3-3i)$.

Решение. а) Тъй като базисът e_1, e_2, e_3, относно който са зададени векторите a и b, е ортонормиран, ще използваме формулата (6.29) за скаларно произведение при $n = 3$. Получаваме

$$(a, b) = 1.\overline{(-1+3i)} + 1.2 + i.\overline{(3-i)} = -1 - 3i + 2 + 3i + i^2 = 0$$

и следователно векторите a и b са ортогонални.

Отговор. б) не; в) да.

Задача 6.4.10 Векторите e_1^*, e_2^*, e_3^* образуват ортонормиран базис на тримерното унитарно пространство U_3. Постройте ортогонален базис по метода на Грам и Шмид, изхождайки от базиса $a_1 = e_1^* + e_2^* + ie_3^*$, $a_2 = ie_1^* + e_2^* + e_3^*$, $a_3 = ie_1^* + ie_2^* + ie_3^*$. Нормирайте получения ортогонален базис.

Упътване. Използвайте формулите (6.29) и (6.31) при $n = 3$ и приложете схемата в решението на задача 6.4.7.

Отговор. Например:

$$e_1^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}\right),$$

$$e_2^\circ = \left(\frac{-1+3i}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3-i}{2\sqrt{6}}\right),$$

$$e_3^\circ = \left(\frac{1+i}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\right).$$

Задача 6.4.11 Векторите e_1, e_2 и e_3 образуват ортонормиран базис на тримерното унитарно пространство U_3. Намерете скаларното произведение (a, b) и дължините $|a|$ и $|b|$ на векторите a и b от U_3, ако:

а) $a = (i, 1, -2-i)$, $b = (i-4, -3, -1)$ и $|e_1| = 1$, $|e_2| = 3$, $|e_3| = 2$;

б) $a = (i, -5, 2-i)$, $b = (-i, 3, -2+i)$ и $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$.

Упътване. В случая в U_3 формулата за скаларно произведение има вида

$$(a,b) = a_1\bar{b}_1(e_1,e_1) + a_2\bar{b}_2(e_2,e_2) + a_3\bar{b}_3(e_3,e_3).$$

Отговор. а) $(a,b) = -34 - 8i$, $|a| = \sqrt{30}$, $|b| = \sqrt{102}$;
б) $(a,b) = -156$, $|a| = \sqrt{246}$, $|b| = \sqrt{101}$.

Задача 6.4.12 Векторите e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^* образуват ортонормиран базис на евклидовото пространство E_4. Покажете, че системата от вектори a_1, a_2 е ортогонална и я допълнете до ортогонален базис, ако:
а) $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (2,2,-2,-2)$;
б) $a_1 = (1,1,1,2)$, $a_2 = (1,2,3,-3)$;
в) $a_1 = (1,-1,-1,3)$, $a_2 = (1,1,-3,-1)$.

Решение. а) Имаме

$$(a_1,a_2) = 1.2 + 1.2 + 1.(-2) + 1.(-2) = 0$$

и следователно векторите a_1 и a_2 са ортогонални.

Сега ще допълним ортогоналната система a_1, a_2 до ортогонален базис. Това можем да направим по следните два начина.

I начин. Избираме векторите a_3 и a_4 така, че новополучената система a_1, a_2, a_3, a_4 да е линейно независима. Например, можем да изберем $a_3 = (-1,0,3,4)$ и $a_4 = (1,1,1,-1)$. След това ортогонализираме тази система по познатия ни вече от задача 6.4.7 метод на Грам и Шмид. Получаваме

$$e_1 = a_1 = (1,1,1,1), \quad e_2 = a_2 = (2,2,-2,-2),$$

$$e_3 = a_3 - \frac{3}{2}e_1 + e_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$e_4 = a_4 - \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{4}e_2 + e_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

II начин. Да предположим, че търсените вектори a_3 и a_4 имат относно дадения базис e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^* съответно координати (x_1, x_2, x_3, x_4) и (y_1, y_2, y_3, y_4). Понеже базисът a_1, a_2, a_3, a_4 трябва да бъде ортогонален, в сила са равенствата:

$$(a_1, a_3) = 0,\ (a_1, a_4) = 0,\ (a_2, a_3) = 0,\ (a_2, a_4) = 0,\ (a_3, a_4) = 0,$$

които можем да запишем и във вида

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\\
&y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0,\\
&2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0,\\
&2y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 2y_4 = 0,\\
&x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = 0.
\end{aligned}$$

Избираме кое да е нетривиално решение на горната система, например $a_3 = (-1, 1, -1, 1)$, $a_4 = (-2, 2, 2, -2)$ и получаваме ортогоналния базис

$$\begin{aligned}
&e_1 = a_1 = (1, 1, 1, 1), && e_2 = a_2 = (2, 2, -2, -2),\\
&e_3 = a_3 = (-1, 1, -1, 1), && e_4 = a_4 = (-2, 2, 2, -2).
\end{aligned}$$

Отговор. Например:
б) $e_1 = a_1$, $e_2 = a_2$, $e_3 = (-4, -1, 3, 1)$, $e_4 = (-31, 53, -24, 1)$;
в) $e_1 = a_1$, $e_2 = a_2$, $e_3 = (0, 5, 1, 2)$, $e_4 = (-5, 0, -2, 1)$.

Задача 6.4.13 В евклидовото пространство E_4 намерете ортонормиран базис на ортогоналното допълнение на линейната обвивка на векторите a_1, a_2, a_3, ако:

а) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (3, 3, -1, -1)$, $a_3 = (1, 1, -3, -3)$;

б) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (3, 1, -1, -1)$, $a_3 = (-1, 0, 3, 4)$.

Решение. а) Тъй като системата вектори a_1, a_2, a_3 е линейно зависима, избираме нейна линейно независима подсистема, например a_1, a_2. Ортогонализираме системата вектори a_1, a_2

по метода на Грам и Шмид и получаваме ортогоналната система вектори $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (2, 2, -2, -2)$. Както постъпихме в задача 6.4.12 а), допълваме тази система до ортогонален базис, например $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (2, 2, -2, -2)$, $e_3 = (-1, 1, -1, 1)$, $e_4 = (-2, 2, 2, -2)$.

Линейната обвивка $\text{æ}(a_1, a_2)$ на векторите a_1, a_2 и a_3 има за базис векторите e_1 и e_2 и тогава съгласно (6.29) ортогоналното ѝ допълнение $\text{æ}^{\perp}(a_1, a_2)$ ще има за базис векторите e_3 и e_4.

Отговор. б) Например $e_4 = (7, -7, -1, 1)$.

6.5 Квадратични форми

6.5.1 Квадратични форми - основни понятия

Израз от вида

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{6.32}$$

където $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, са реални числа се нарича (*реална*) *квадратична форма* на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а симетричната матрица

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array} \right\|$$

от коефициенти на (6.32) – *матрица на квадратичната форма* f. Рангът на матрицата A се нарича *ранг на* f.

Ще казваме, че квадратичната форма f е *особена* или *изродена*, ако матрицата ѝ A е особена. В противен случай f се нарича *неособена*.

В матричен запис квадратичната форма (6.32) може да се запише във вида

$$f = X^t AX, \tag{6.33}$$

където X е матрицата-стълб на променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$.

6.5.2 Привеждане на квадратични форми в каноничен вид чрез неособени линейни преобразувания

Ще казваме, че квадратичната форма f е в *каноничен вид*, ако матрицата ѝ A е диагонална, т.е. когато f има вида

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2. \tag{6.34}$$

Очевидно броят на различните от нула коефициенти $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ в (6.34) е равен на ранга на f.

Възможно е в (6.34) някои от коефициентите да са положителни числа, а други – отрицателни. Ако предположим, че след преномериране на коефициентите в (6.34) постигнем $a_{11} > 0, \dots, a_{kk} > 0$, $a_{k+1,k+1} < 0, \dots, a_{nn} < 0$, то като извършим неособеното линейно преобразувание

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} y_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{-a_{jj}}} y_j, \quad j = k+1, \dots, n,$$

(6.34) приема вида

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - y_{k+2}^2 - \cdots - y_n^2. \tag{6.35}$$

Каноничният вид (6.35) се нарича *каноничен нормален вид на квадратичната форма f*.

В сила е следната

1) **Теорема на Лагранж.** Всяка квадратична форма може да се приведе в каноничен вид чрез неособено линейно преобразувание на променливите ѝ.

6.5.3 Привеждане на квадратични форми в каноничен вид чрез ортогонално преобразувание

Ако квадратичната форма f е приведена в каноничен вид с помощта на ортогонално преобразувание, то казваме, че тя е *приведена към главните оси.* Тогава

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

където $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ са характеристичните корени на реалната симетрична матрица A на f. Следователно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ удовлетворяват характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

и са определени еднозначно от f. Ортогоналната матрица Q на ортогоналното преобразувание, чрез което f се привежда към главните оси има за вектор-стълбове собствените ортонормирани вектори, които съответстват на характеристичните корени $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

2) Всяка квадратична форма може да се приведе към главните оси, при което каноничният вид е определен с точност до номерация на променливите.

6.5.4 Дефинитни квадратични форми

Квадратичната форма f се нарича *положително* (респ. *отрицателно*) *дефинитна,* ако $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ (респ. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$) за всяка ненулева система от реални стойности на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3) Квадратичната форма f е положително (респ. отрицателно) дефинитна точно тогава, когато всичките характеристични корени $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ на матрицата ѝ A са положителни (респ. отрицателни).

4) **Критерий на Силвестър**

4.а) Квадратичната форма f, зададена с (6.33), е положително дефинитна, тогава и само тогава, когато всичките *главни минори*

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6.36}$$

на матрицата A са положителни числа.

4.б) Квадратичната форма f, определена с (6.33), е отрицателно дефинитна, тогава и само тогава, когато главните минори (6.36) на A от четен ред са положителни числа, а от нечетен ред – отрицателни.

Една квадратична форма може чрез едни или други неособени линейни преобразувания да се приведе в каноничен вид, като в сила е следното твърдение:

5) **Закон за инерцията**. Броят на положителните и броят на отрицателните коефициенти в каноничния вид на една квадратична форма не зависят от неособеното линейно преобразувание, което я привежда в този вид.

Броят на положителните коефициенти в каноничния вид на дадена квадратична форма f се нарича *положителен индекс*, а броят на отрицателните коефициенти – *отрицателен индекс на инерцията*. Разликата между порожителния и отрицателния индекси на инерцията се нарича *сигнатура на* f. От 5) заключаваме, че сигнатурата на всяка квадратична форма е еднозначно определена.

Ще казваме, че две квадратични форми са *еквивалентни*, ако съществува неособено линейно преобразувание, което привежда едната форма в другата.

Задача 6.5.1 Приведете в каноничен вид квадратичната форма f и посочете неособено линейно преобразувание, чрез което се осъществява прехода от дадения в каноничния вид, ако:

а) $f = x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;
б) $f = 4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3$;
в) $f = 4x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;
г) $f = -5x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;
д) $f = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;
е) $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
ж) $f = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$;
з) $f = x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 12x_2x_3 - 2x_3x_4$;
и) $f = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$;
к) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$.

Решение. а) Имаме коефициенти пред квадрати на променливи, които са различни от нула – например коефициентът пред x_1^2 е 1. Отделяме в скоби всички събираеми на f, които съдържат променливата x_1:

$$f = (x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3) + 4x_3^2 + 4x_2x_3.$$

Допълваме израза в скобите до точен квадрат, прибавяйки и изваждайки израза $4x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_2x_3$:

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3) - \\ &\quad -4x_2^2 - 9x_3^2 - 12x_2x_3 + 4x_3^2 + 4x_2x_3 = \\ &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - 4x_2^2 - 5x_3^2 - 8x_2x_3. \end{aligned} \tag{6.37}$$

Разглеждаме израза

$$g = -4x_2^2 - 5x_3^2 - 8x_2x_3,$$

който очевидно е квадратична форма на останалите променливи x_2 и x_3. Отделяме събираемите, които съдържат променливата x_2. От тях изнасяме пред скоби коефициента пред x_2^2 и допълваме до точен квадрат израза в скобите. Имаме

$$g = -4(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2) - 5x_3^2 = -4(x_2 + x_3)^2 - x_3^2. \tag{6.38}$$

От (6.37) и (6.38) следва

$$f = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - 4(x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

и като положим

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ y_2 &= x_2 + x_3, \\ y_3 &= x_3, \end{aligned} \tag{6.39}$$

квадратичната форма f добива каноничния вид

$$f = y_1^2 - 4y_2^2 - y_3^2. \tag{6.40}$$

Неособеното линейно преобразувание, чрез което се осъществява прехода от дадения към получения каноничен вид (6.40) намираме, като изразим от (6.39) x_1, x_2 и x_3 чрез y_1, y_2 и y_3. Получаваме

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - 2y_2 - y_3, \\ x_2 &= y_2 - y_3, \\ x_3 &= y_3, \end{aligned} \tag{6.41}$$

Неособеното линейно преобразувание (6.41) има матрица

$$Q = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

а връзката между матрицата

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{Vmatrix}$$

на дадената квадратична форма f и матрицата

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

на получения каноничен вид (6.40) е $B = Q^t AQ$, т.е.

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тъй като в дадената квадратична форма f коефициентът пред x_3^2 е $4 \neq 0$, можем да приведем f в каноничен вид и като започнем групирането на събираемите, съдържащи x_3. Имаме

$$f = 4(x_3^2 + \frac{3}{2}x_1x_3 + x_2x_3) + x_1^2 + 4x_1x_2 =$$
$$= 4(x_3 + \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{9}{4}x_1^2 - x_2^2 + x_1^2 + 4x_1x_2 =$$
$$= 4(x_3 + \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{5}{4}x_1^2 - (x_2^2 - 4x_1x_2) =$$
$$= 4(\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 - \frac{5}{4}x_1^2 - (x_2^2 - 4x_1x_2 + 4x_1^2) + 4x_1^2 =$$
$$= \frac{11}{4}x_1^2 - (2x_1 - x_2)^2 + 4(\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 =$$
$$= \frac{11}{4}y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2,$$

където сме положили

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= 2x_1 - x_2, \\ y_3 &= \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Сега неособеното линейно преобразувание, осъществяващо прехода от дадения вид към получения каноничен вид

$$f = \frac{11}{4}y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$$

е

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= 2y_1 - y_2, \\ x_3 &= -\frac{7}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3. \end{aligned}$$

е) Тъй като всичките коефициенти пред квадратите на променливите са равни на нула, най-напред извършваме линейното преобразувание

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_2 , \\ x_2 &= y_1 + y_2 , \\ x_3 &= y_3. \end{aligned} \tag{6.42}$$

и дадената квадратична форма приема вида

$$f = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3. \tag{6.43}$$

Сега в (6.43) има ненулеви коефициенти пред квадрати на променливи и можем да приложим познатия ни вече метод на привеждане в каноничен вид. Имаме

$$\begin{aligned} f = (y_1^2 + 2y_1y_3) - y_2^2 &= (y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^3) - y_2^2 - y_3^2 \\ &= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

и като положим

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + y_3, \\ z_2 &= y_2, \\ z_3 &= y_3, \end{aligned} \tag{6.44}$$

получаваме за f нормалния каноничен вид

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2. \tag{6.45}$$

От (6.42) и (6.44) намираме неособеното линейно преобразувание, което привежда дадената квадратична форма f в каноничен вид (6.45):

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 - z_2 - z_3, \\ x_2 &= z_1 + z_2 - z_3, \\ x_3 &= z_3. \end{aligned}$$

Отговор. Тъй като една квадратична форма няма еднозначно определен каноничен вид, посочен е по един възможен такъв и матрицата Q на линейното преобразувание, осъществяващо прехода от началния към дадения каноничен вид.

б) $f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$,
$$Q = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

в) $f = y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2$,
$$Q = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 \end{Vmatrix};$$

г) $f = -y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$,
$$Q = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

д) $f = y_1^2 - y_2^2$,
$$Q = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

ж) $f = y_1^2 - y_2^2$,
$$Q = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix};$$

з) $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 9y_4^2$,
$$Q = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix};$$

и) $f = y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$, к) $f = y_1^2 - 3y_2^2 + 3y_3^2 - 3y_4^2$,

$$Q = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}; \qquad Q = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}.$$

Ако $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е квадратична форма, за която всичките главни минори $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ на матрицата ѝ A са различни от нула, тя може да се приведе в каноничен вид чрез *метода на Якоби*. Съществува единствено линейно преобразуване от вида

$$\begin{array}{rlllll} x_1 = & y_1 & +\alpha_{21}y_2 & +\alpha_{31}y_3 & +\ldots & +\alpha_{n1}y_n, \\ x_2 = & & y_2 & +\alpha_{32}y_3 & +\ldots & +\alpha_{n2}y_n, \\ x_3 = & & & y_3 & +\ldots & +\alpha_{n3}y_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ x_n = & & & & & y_n, \end{array} \tag{6.46}$$

което привежда дадената квадратична форма f в каноничен вид

$$f = \sum_{k=1}^{n} \mu_k y_k^2,$$

където

$$\mu_1 = \Delta_1, \quad \mu_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Освен това за коефициентите $\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n,n-1}$ в (6.46) имаме

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{\Delta_{i-1,j}}{\Delta_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \ i > j,$$

където $\Delta_{i-1,j}$ е минорът на матрицата A на f, получен при пресичането на първия, втория,..., $(i-1)-$я редове с първия, втория,..., $(j-1)-$я, $(j+1)-$я стълбове.

Задача 6.5.2 Да се приведе в каноничен вид по метода на Якоби квадратичната форма f и да се посочи съответното линейно преобразувание, ако:
а) $f = 5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
б) $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
в) $f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Решение. а) Тъй като всички главни минори

$$\Delta_1 = 5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

на матрицата

$$A = \begin{Vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

на дадената квадратична форма f са различни от нула, можем да приложим метода на Якоби. Имаме

$$\mu_1 = \Delta_1 = 5, \quad \mu_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{1}{5}, \quad \mu_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = -1,$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\frac{\Delta_{11}}{\Delta_1} = -\frac{2}{5},\ \alpha_{31} = (-1)^{3+1}\frac{\Delta_{21}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{1} = -1,$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2}\frac{\Delta_{22}}{\Delta_2} = -\frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{1} = 3$$

и следователно f придобива каноничния вид

$$f = 5y_1^2 + \frac{1}{5}y_2^2 - y_3^2,$$

а неособеното линейно преобразувание е

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - \frac{2}{5}y_2 - y_3, \\ x_2 &= \qquad y_2 + 3y_3, \\ x_3 &= \qquad\qquad y_3. \end{aligned}$$

Отговор.

б) $f = 3y_1^2 + \dfrac{10}{3}y_2^2 - \dfrac{16}{5}y_3^2$,

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{12}{5}y_3, \\ x_2 &= \qquad y_2 - \frac{12}{5}y_3, \\ x_3 &= \qquad\qquad y_3. \end{aligned};$$

в) $f = 3y_1^2 - 5y_2^2 + 39y_3^2$,

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + 3y_2 + \frac{29}{5}y_3, \\ x_2 &= \qquad y_2 + \frac{24}{5}y_3, \\ x_3 &= \qquad\qquad y_3. \end{aligned};$$

Задача 6.5.3 Намерете ортогонално преобразувание, което привежда квадратичната форма f в каноничен вид и посочете каноничния вид, ако:

а) $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
б) $f = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;
в) $f = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
г) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
д) $f = 8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;
е) $f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 + x_1x_2 - 4x_3x_4$;
ж) $f = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 + 8x_1x_2 - 4x_3x_4$;
з) $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$;
и) $f = 4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_4^2 + x_5^2 - 4x_1x_2 + 12x_4x_5$.

Решение. д) Като решим уравнението

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 & -1 \\ 4 & -7-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-9)^2(\lambda+9) = 0,$$

намираме характеристичните корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ и $\lambda_3 = -9$ на матрицата

$$A = \begin{Vmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{Vmatrix}$$

на дадената квадлатична форма f. Оттук следва, че f има каноничния вид

$$f = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2. \tag{6.47}$$

Сега ще намерим ортогоналното преобразуване, което привежда f в каноничния вид (6.47). За тази цел по познатия ни вече начин намираме собствените вектори, съответстващи на получените характеристични корени. За двойния корен $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ намираме два линейно независими собствени вектора $a_1 = (-1, 0, 1)$ и $a_2 = (4, 1, 0)$, а за $\lambda_3 = -9$ – собствения вектор $a_3 = (1, -4, 1)$ (виж задача 6.3.1). Ортогонализираме по метода на Грам и Шмид системата от собствени вектори a_1, a_2, a_3 и получаваме

$$e_1 = (-1, 0, 1),\ e_2 = (2, 1, 2),\ e_3 = (1, -4, 1). \tag{6.48}$$

Нормираме получената ортогонална система (6.48) и получаваме ортонормираната система

$$\begin{aligned} e_1^\circ &= \frac{e_1}{|e_1|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ e_2^\circ &= \frac{e_2}{|e_2|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ e_3^\circ &= \frac{e_3}{|e_3|} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \tag{6.49}$$

Тогава търсеното ортогонално преобразуване е определено с ортогоналната матрица

$$Q = \left\| \begin{array}{rcr} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{3} & -\dfrac{4}{3\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \end{array} \right\|,$$

чиито стълбове са точно векторите (6.49) и има вида

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}y_3, \\ x_2 &= \phantom{-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 +{}} \frac{1}{3}y_2 - \frac{4}{3\sqrt{2}}y_3, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}y_3. \end{aligned}$$

Отговор.

а) $f = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_3, \\ x_3 &= \frac{-2}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_3; \end{aligned}$$

б) $f = y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{30}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_2 &= \frac{5}{\sqrt{30}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_3 &= \frac{-1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{30}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_3; \end{aligned}$$

в) $f = -6y_2^2 + 3y_3^2$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 &= \qquad\quad -\frac{4}{3\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{3}y_3, \\ x_3 &= \frac{-1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}}y_2 + \frac{2}{3}y_3; \end{aligned}$$

г) $f = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_2; \end{aligned}$$

е) $f = 2y_3^2 - 4y_4^2$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_3), \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-y_1 + y_3), \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 + y_4), \\ x_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-y_2 + y_4); \end{aligned}$$

ж) $f = 5y_2^2 + 5y_3^2 - 5y_4^2$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_2 + y_4), \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(y_2 - 2y_4), \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(y_1 - 2y_3), \\ x_4 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_3); \end{aligned}$$

з) $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 + \frac{1}{2}y_4, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \qquad\qquad\qquad\quad - \frac{1}{2}y_4, \\ x_3 &= \qquad\quad \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \qquad\qquad - \frac{1}{2}y_4, \\ x_4 &= \qquad\qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 + \frac{1}{2}y_4; \end{aligned}$$

и) $f = 5y_2^2 + 5y_3^2 + 5y_4^2 - 6y_5^2$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(y_1 + y_2), \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 - y_2), \\ x_3 &= y_3, \\ x_4 &= \frac{1}{\sqrt{13}}(2y_4 - 3y_5), \\ x_5 &= \frac{1}{\sqrt{13}}(3y_4 + 2y_5). \end{aligned}$$

Задача 6.5.4 Намерете при кои стойности на параметъра λ квадратичната форма f е положително дефинитна, ако:

а) $f = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

б) $f = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;
в) $f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Решение. а) Ще използваме критерия на Силвестър. За тази цел пресмятаме главните минори на матрицата

$$A = \left\| \begin{array}{rrr} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{array} \right\|$$

на дадената квадратична форма f. Получаваме

$$\Delta_1 = 5, \quad \Delta_2 = 1, \quad \Delta_3 = \lambda - 2$$

и следователно f е положително дефинитна точно тогава, когато $\lambda > 0$.

Отговор. б) $-\sqrt{2} < \lambda < 1$; в) $-2 < \lambda < 2$.

Задача 6.5.5 Намерете сигнатурата на квадратичната форма f, ако:
а) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
б) $f = 4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + x_5^2 - 8x_2x_3 + 6x_4x_5$;
в) $f = x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Отговор. а) -1; б) 1; в) 0.

Задача 6.5.6 Докажете, че ако $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ са квадратични форми, като g е положително дефинитна, то съществува неособено линейно преобразувание, което едновременно привежда формите f и g в каноничен вид.

Решение. С неособено линейно преобразувание $X = TY$ можем да преобразуваме положително дефинитната форма $g = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в каноничен нормален вид

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2.$$

Под действието на това линейно преобразувание квадратичната форма f се преобразува в квадратична форма $\varphi =$

$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Чрез ортогонално преобразуване $Y = SZ$ можем да приведем φ в каноничния вид

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_n z_n^2.$$

Тъй като всяко ортогонално преобразуване запазва инвариантно скаларното произведение, то сумата от квадратите $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$ се преобразува в сума от квадрати $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$. Получихме, че като извършим неособено линейно преобразуване

$$X = (TS)Z, \tag{6.50}$$

разглежданите квадратични форми f и g приемат вида

$$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_n z_n^2,$$
$$g = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$$

и следователно (6.50) е търсеното линейно преобразуване, което едновременно привежда формите f и g в каноничен вид.

Задача 6.5.7 Докажете, че ако $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ са квадратични форми, като g е отрицателно дефинитна, то съществува неособено линейно преобразуване, което едновременно привежда формите f и g в каноничен вид.

Упътване. В този случай

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = -y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2.$$

Задача 6.5.8 Намерете линейно преобразуване, което едновременно привежда квадратичните форми f и g в каноничен вид, ако:

а) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$,
$g = 2x_2^2 + 2x_1x_2$;

б) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$,
$g = x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

в) $f = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3$,
$g = -x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_3$.

Решение. в) Матрицата на квадратичната форма g е

$$B = \left\| \begin{array}{rrr} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{array} \right\|.$$

За главните минори на B намираме $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = -4$ и съгласно критерия на Силвестър квадратичната форма g е отрицателно дефинитна. Имаме

$$g = -(x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 - x_3^2) - 4x_2^2 - 2x_3^2 = -(x_1 + x_3)^2 - (2x_2)^2 - x_3^2$$

и като положим

$$y_1 = x_1 + x_3, \quad y_2 = 2x_2, \quad y_3 = x_3,$$

получаваме нормалния каноничен вид на g:

$$g(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Следователно линейното преобразувание

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \qquad\quad -y_3, \\ x_2 &= \quad \frac{1}{2}y_2, \\ x_3 &= \qquad\qquad\quad y_3 \end{aligned} \tag{6.51}$$

осъществява прехода към получения нормален каноничен вид на g и неговата матрица е

$$T = \left\| \begin{array}{ccr} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Под действието на (6.51) квадратичната форма f приема вида

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 7y_2^2 + 8y_3^2 + 8y_1y_2 - 2y_1y_3 + 8y_2y_3. \tag{6.52}$$

По познатия ни вече начин (виж например задача 6.5.3) намираме, че ортогоналното преобразувание

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{2}{3}z_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}z_3, \\ y_2 &= \qquad\quad\;\; \frac{1}{3}z_2 - \frac{4}{3\sqrt{2}}z_3, \\ y_3 &= \;\;\frac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{2}{3}z_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}z_3, \end{aligned}$$

с матрица

$$S = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{Vmatrix}$$

привежда квадратичната форма (6.52) в каноничния вид

$$f(z_1, z_2, z_3) = 9z_1^2 + 9z_2^2 - 9z_3^2.$$

Пресмятаме

$$TS = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{Vmatrix}$$

и следователно линейното преобразувание

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{2}z_1, \\ x_2 &= \qquad\qquad \frac{1}{6}z_2 - \frac{2}{3\sqrt{2}}z_3, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{2}{3}z_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}z_3 \end{aligned}$$

привежда едновременно квадратичните форми f и g в каноничен вид. Имаме

$$f = 9z_1^2 + 9z_2^2 - 9z_3^2, \quad g = -z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Отговор.

а) $f = z_1^2 - z_2^2, \quad g = z_1^2 + z_2^2,$

$x_1 = -\sqrt{2}z_2, \quad x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}z_2;$

б) $f = y_1^2 + \dfrac{1}{2}y_2^2 + \dfrac{1}{3}y_3^2, \quad g = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$

$x_1 = y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}y_3,\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3,\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3.$

Задача 6.5.9 Докажете, че две квадратични форми са еквивалентни тогава и само тогава, когато могат да се приведат чрез подходящи линейни неособени преобразувания в един и същи каноничен вид.

Решение. Необходимост. Нека $f = X^tAX$ и $g = Y^tBY$ са еквивалентни квадратични форми и $X = CY$ е неособено линейно преобразувание, което привежда f в g. Тогава, ако неособеното линейно преобразувание $Y = DZ$ привежда g в каноничен вид, очевидно неособеното линейно преобразувание $X = (CD)Z$ ще приведе и f в същия каноничен вид.

Достатъчност. Обратно, нека $f = X^tAX$ и $g = Y^tBY$ са две квадратични форми, за които съществуват неособени линейни преобразувания $X = A_1Z$ и $Y = B_1Z$, които ги привеждат в един и същи каноничен вид $f = g = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_n z_n^2$. Но тогава неособеното линейно преобразувание $X = (A_1B_1^{-1})Y$ привежда квадратичната форма f в квадратичната форма g и следователно те са еквивалентни.

Задача 6.5.10 Докажете, че квадратичните форми f и g са еквивалентни и намерете неособеното линейно преобразувание, привеждащо f в g, ако:

а) $f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$,
$g = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$;

б) $f = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$,
$g = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + 2y_1y_2 - 4y_1y_3$;

в) $f = 3x_1^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 40x_2x_3$,
$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2$.

Упътване. Използвайте задача 6.5.6.

Отговор.

а) $\begin{aligned} x_1 &= y_1 - 3y_2 - 6y_3, \\ x_2 &= y_2 + 3y_3, \\ x_3 &= y_3; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1 &= y_1 + 3y_2 + \frac{4-3\sqrt{2}}{2}y_3, \\ x_2 &= y_2 + (2-\sqrt{2})y_3, \\ x_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}y_3; \end{aligned}$

в) $\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}y_2 + 5y_3, \\ x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + y_3, \\ x_3 &= y_3. \end{aligned}$

Глава 7

Комплексни елементи в геометрията. Метрична класификация на кривите и повърхнините от втора степен

7.1 Комплексни елементи

7.1.1 Комплексни точки, прави и равнини

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е афинна координатна система в тримерното евклидово пространство E_3. Всяка наредена тройка комплексни числа (x, y, z) се нарича *комплексна точка*, а числата x, y, z – *нейни координати относно* K. Ако поне едно от числата x, y и z не е реално, точката $M(x, y, z)$ се нарича *имагинерна*, а ако и трите числа x, y и z са реални – *реална*. Точката $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, чиито координати $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ са конюгованите числа съответно на x, y, z, се нарича *конюгована* (*спрегната*) *на точката* $M(x, y, z)$.

Множеството от всички комплексни числа, чиито координати относно K удовлетворяват уравнението

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{7.1}$$

в което A, B, C и D са комплексни числа, като поне едно от тях е различно от нула, се нарича *комплексна равнина*, а (7.1) – нейно *уравнение относно* K. Казваме, че една равнина α е *реална*, когато има поне едно уравнение от вида (7.1) с реални коефициенти и *имагинерна* – в противен случай. Равнината $\overline{\alpha} : \overline{A}x + \overline{B}y + \overline{C}z + \overline{D} = 0$, за която четворката $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$ е конюгована четворка на (A, B, C, D), се нарича *конюгована* на α.

Критериите за пресичане, съвпадане и успоредност на две комплексни равнини запазват същата форма, както в 4.2.9) с тази разлика, че сега числото $\rho \neq 0$ е *комплексно*.

Множеството от общите точки на две пресекателни комплексни равнини се нарича *комплексна права*. Ще казваме, че една комплексна права е *реална*, ако съдържа безбройно много реални точки. Когато върху правата има точно една реална точка, тя се нарича *слабоимагинерна* и ако няма реални точки – *силноимагинерна*.

7.1.2 Комплексни вектори

Всяка наредена двойка комплексни точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ се нарича *комплексна насочена отсечка* $\overrightarrow{M_1M_2}$ с *начало* M_1, *край* M_2 и *директриса* правата M_1M_2. Числата $\lambda = x_2 - x_1$, $\mu = y_2 - y_1$, $\nu = z_2 - z_1$ се наричат *координати* на $\overrightarrow{M_1M_2}$ относно K. Ако M_1 и M_2 се реални точки, насочената отсечка $\overrightarrow{M_1M_2}$ се нарича *реална*. Ще казваме, че насочената отсечка $\overrightarrow{\overline{M}_1\overline{M}_2}$ е *конюгована* на $\overrightarrow{M_1M_2}$, ако $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ са конюгованите точки съответно на M_1 и M_2.

Две комплексни насочени отсечки $\overrightarrow{M_1M_2}(\lambda, \mu, \nu)$ и $\overrightarrow{M_1'M_2'}(\lambda', \mu', \nu')$ се наричат *равни*, когато са равни съответните им координати, т.е. когато $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$. Множеството от всички комплексни насочени отсечки, които са равни на дадена комплексна насочена отсечка се нарича *комплексен свободен вектор* или накратко *комплексен вектор*, а всяка от посочените комплексни насочени отсечки – негов *представител.* Ще казваме, че един комплексен вектор е *реален*, когато поне един негов представител е реален.

Определенията за *колинеарност и компланарност* на комплексен вектор съответно с комплексна права и с комплексна равнина са същите, както при обикновените (реалните) вектори, прави и равнини. Аналитичните критерии за това са:

1) Един комплексен вектор $\overrightarrow{p}(\lambda, \mu, \nu)$ е компланарен с комплексната равнина α с уравнението (7.1) тогава и само тогава, когато

$$A\lambda + B\mu + C\nu = 0.$$

2) Един комплексен вектор $\overrightarrow{p}(\lambda, \mu, \nu)$ е колинеарен на правата $g : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ тогава и само тогава, когато

$$A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu = 0,\ A_2\lambda + B_2\mu + C_2\nu = 0.$$

Нека $\overrightarrow{a}(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $\overrightarrow{b}(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ са комплексни вектори, зададени спрямо една и съща координатна система K. *Сбор* (*сума*) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ на тези вектори се нарича комплексният вектор $\overrightarrow{s}(\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2, \nu_1 + \nu_2)$. Ако ρ е произволно комплексно число, а $\overrightarrow{a}(\lambda, \mu, \nu)$ – комплексен вектор, векторът $\overrightarrow{b}(\rho\lambda, \rho\mu, \rho\nu)$ се нарича *произведение на вектора* $\overrightarrow{a}$ *с комплексното число* ρ и ще го означаваме с $\rho.\overrightarrow{a}$ или $\rho\overrightarrow{a}$.

За така дефинираните операции *„събиране на комплексни вектори“* и *„умножение на комплексен вектор с комплексно число“* са в сила свойствата 2.2.8) – 2.2.15). Следователно *множеството на комплексните вектори е комплексно линейно пространство, което очевидно съдържа реалното линейно пространство на обикновените (реалните) вектори.*

7.1.3 Метрични понятия при комплексните вектори

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е *ортонормирана координатна система* и относно нея комплексните вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ имат координати съответно $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$. *Скаларно произведение* $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$ *на комплексните вектори* $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ се нарича комплексното число

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2. \tag{7.2}$$

В сила са познатите ни от 2.4.2) – 2.4.3) комутативен, асоциативен и дистрибутивен закон на операцията *„скаларно умножение на вектори“*.

Два комплексни вектори $\overrightarrow{a}(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $\overrightarrow{b}(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ се наричат *перпендикулярни*, ако скаларното им произведение (7.2) е равно на нула, т.е. когато $\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0$

Нека g_1 и g_2 са две комплексни прави. Ще казваме, че двете прави са *перпендикулярни*, ако ненулев вектор, колинеарен с g_1, е перпендикулярен на ненулев вектор, колинеарен с g_2. Един вектор се нарича *перпендикулярен* (*нормален*) *на комплексна равнина*, ако е перпендикулярен на всеки вектор, компланарен с равнината.

Числото $\overrightarrow{a}^2 = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a}$ се нарича *скаларен квадрат на комплексния вектор* $\overrightarrow{a}(\lambda, \mu, \nu)$, а всяка една от двете стойности на

$$\sqrt{\overrightarrow{a}^2} = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \ \ - \tag{7.3}$$

дължина на вектора $\overrightarrow{a}$ и се означава с $|\overrightarrow{a}|$. Един комплексен вектор $\overrightarrow{e}$ се нарича *единичен*, ако $\overrightarrow{e}^2 = 1$.

Разстояние $|M_1M_2|$ между комплексните точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ се нарича дължината на вектора $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, т.е.

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Нека сега K е *дясна* ортонормирана координатна система и относно нея са дадени комплексните вектори $\overrightarrow{a}(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $\overrightarrow{b}(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$. Векторът, който има относно K координати

$$\lambda = \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1, \ \mu = \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1, \ \nu = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1,$$

се нарича *векторно произведение на* $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ и се означава с $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$. В сила са познатите ни от 2.4.8) – 2.4.11) свойства на операцията *„векторно умножение на вектори“*.

С въвеждането на комплексните елементи, възникват нови геометрични обекти, които нямат реален аналог. *Ненулев* комплексен вектор $\overrightarrow{a}(\lambda, \mu, \nu)$, който има дължина, равна на нула, се нарича *изотропен*. Съгласно (7.3), условието за изотропност на вектора $\overrightarrow{a}$ е

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0. \tag{7.4}$$

От (7.2) и (7.4) веднага следва, че всеки *изотропен вектор е ортогонален на себе си*. В сила са твърденията:

3) Ако $\overrightarrow{a} \parallel g$ е неизотропен вектор, то и всеки друг вектор $\overrightarrow{b} \parallel g$ е също неизотропен.

В този случай правата g се нарича *неизотропна* или *евклидова права*.

4) Ако $\overrightarrow{a} \parallel g$ е изотропен вектор, то и всеки друг вектор $\overrightarrow{b} \parallel g$, с изключение на нулевия вектор $\overrightarrow{o}(0, 0, 0)$, е също изотропен.

Сега правата g се нарича *изотропна*.

5) Разстоянието между всеки две точки на изотропната права е равно на нула.

Следователно върху изотропните прави няма единични вектори.

Нека α е комплексна равнина, определена с уравнението (7.1). Ако нормалният ѝ вектор $\overrightarrow{N}(A, B, C)$ е неизотропен, равнината се нарича *неизотропна*, а в противен случай – *изотропна.* Следователно α е точно тогава изотропна равнина, когато

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0. \tag{7.5}$$

От (7.2) и (7.5) следва:

6) Всеки нормален вектор на една изотропна равнина е компланарен с равнината.

Обикновеното (реално) евклидово пространство E_3, допълнено с комплексните елементи, се нарича *комплексно евклидово пространство* и се означава с $E_3^{\mathbb{C}}$.

По-нататък, ако не е казано друго, под точка, права, равнина и вектор ще разбираме съответно комплексна точка, комплексна права, комплексна равнина и комплексен вектор.

Аналогично се *„комплексифицира"* и обикновената (реална) евклидова равнина E_2 и се получава *комплексната евклидова равнина* $E_2^{\mathbb{C}}$.

Задача 7.1.1 Спрямо афинна координатна система в пространството са дадени точките $A(2, 1, i)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 2 - i, -1)$ и $D(1 + i, 1, i - 1)$.

а) Определете кои от тях са реални и кои не.

б) Намерете конюгонаните им точки.

в) Изотропни ли са правите AB и CD?

Решение. а) Тъй като само на точката B и трите координати са реални, то само тя е реална. Останалите точки са имагинерни.

б) Тройката $(2, 1, -i)$ е конюгована на тройката $(2, 1, i)$ и следователно конюгованата точка на точката $A(2, 1, i)$ е $\overline{A}(2, 1, -i)$. Аналогично намираме и точките $\overline{B}(1, 0, -1)$, $\overline{C}(0, 2+$

$i, -1)$ и $\overline{D}(1-i, 1, i-1)$, които са конюгованите точки съответно на точките $B(1, 0, -1)$, $C(0, 2-i, -1)$ и $D(1+i, 1, i-1)$. Тъй като точката B е реална, тя съвпада с конюгованата си точка $\overline{B}$.

в) За да отговорим на въпроса дали AB и CD са изотропни прави, трябва да определим вида на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Намираме $\overrightarrow{AB}(-1, -1, -1-i)$, $\overrightarrow{CD}(1+i, -1+i, 0)$ и пресмятаме

$$\overrightarrow{AB}^2 = (-1)^2 + (-1)^2 + (-1-i)^2 = 1+1+1+2i-1 = 2(1+i) \neq 0,$$

$$\overrightarrow{CD}^2 = (1+i)^2 + (-1+i)^2 + 0^2 = 1 + 2i - 1 + 1 - 2i - 1 = 0.$$

Оттук заключаваме, че $\overrightarrow{AB}$ е неизотропен вектор, а $\overrightarrow{CD}$ – изотропен. Следователно правата AB е неизотропна, а правата CD – изотропна.

Задача 7.1.2 Спрямо афинна координатна система K в пространството са дадени правите:

а) $g_1 : x + iy + 2i = 0,\ 2x - iy + z + 3i = 0;$

б) $g_2 : x + 2iy - (1+i)z = 0,\ ix + (3-i)z + 1 = 0;$

в) $g_3 : x + 2y + (-1+i)z - i = 0,\ z - 1 = 0;$

г) $g_4 : z - 3 = 0,\ ix - (3+2i)y + 1 + 2i = 0.$

Да се определи видът на всяка една от тях.

Решение. а) Видът на една права се определя в зависимост от броя на реалните ѝ точки. Ако предположим, че точката $M(x_0, y_0, z_0)$ е реална точка на правата g_1, то имаме

$$\begin{aligned} &x_0 + iy_0 + 2i = x_0 + i(y_0 + 2) = 0, \\ &2x_0 - iy_0 + z_0 + 2i = 2x_0 + z_0 + i(-y_0 + 3) = 0. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Тъй като комплексните числа (7.6) са равни на нула, следва, че съответните им реални и имагинерни части са също равни на нула, т.е.

$$x_0 = 0,\ y_0 + 2 = 0,\ \ 2x_0 + z_0 = 0,\ -y_0 + 3 = 0. \tag{7.7}$$

Очевидно системата (7.7) няма решение и следователно правата g_1 няма реални точки, т.е. тя е силноимагинерна права.

б) Системата

$$x_0 - z_0 = 0,\ 2y_0 - z_0 = 0,\ 3z_0 + 1 = 0,$$

притежава решението $x_0 = -\dfrac{1}{3}$, $y_0 = -\dfrac{1}{6}$, $z_0 = -\dfrac{1}{3}$. Правата g_2 има само една реална точка и следователно е слабоимагинерна.

в) Сега имаме

$$x_0 + 2y_0 - z_0 = 0,\ z_0 - 1 = 0.$$

Очевидно горната система има безбройно много решения, откъдето следва, че и правата g_3 има безбройно много реални точки, т.е. тя е реална права.

Отговор. г) Слабоимагинерна.

Задача 7.1.3 Спрямо дясна ортонормирана координатна система K в пространството са дадени правите $g_1 : z - 1 = 0,\ ix - y - 1 - 2i = 0$, $g_2 : 2x + z - 5 = 0,\ 2y + iz + 2 - i = 0$, $g_3 : 2x + iy - 5 = 0,\ \sqrt{3}x + z - 1 - 3\sqrt{3} = 0$. Определете:

а) кои от тези прави са изотропни;

б) видът на правите в зависимост от броя на реалните им точки.

Решение. а) За да намерим вектор, колинеарен с g_1, пресмятаме векторното произведение $\overrightarrow{p}$ на нормалните вектори $\overrightarrow{N_1}(0,0,1)$ и $\overrightarrow{N_2}(i,0,0)$ на равнините, с които правата е определена. Намираме $\overrightarrow{p} = (\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2})(-1, i, 0)$ и от $\overrightarrow{p}^2 = 0$ следва, че правата g_1 е изотропна.

Аналогично получаваме, че правата g_2 е неизотропна, а g_3 – изотропна.

Отговор. б) Трите прави са слабоимагинерни.

Задача 7.1.4 Решете условие а) на задача 7.1.3 при афинна координатна система.

Упътване. За да намерите вектори, колинеарни с дадените прави, изберете по две различни точки от всяка права.

Задача 7.1.5 Спрямо ортонормирана координатна система K в пространството са дадени равнините $\alpha : x+y+z-2i = 0$, $\beta : x + iy - 5 = 0$ и $\gamma : ix + (2 - i)y + z - i = 0$. Кои от тези равнини са изотропни?

Решение. Нормалните вектори на равнините α, β и γ са съответно $\overrightarrow{N_\alpha}(1, 1, 1)$, $\overrightarrow{N_\beta}(1, i, 0)$ и $\overrightarrow{N_\gamma}(i, 2 - i, 1)$. Тъй като

$$\overrightarrow{N_\alpha}^2 = 3, \ \overrightarrow{N_\beta}^2 = 0, \ \overrightarrow{N_\gamma}^2 = 3 - 4i,$$

изотропна е само равнината β.

Задача 7.1.6 Да се намерят изотропните равнини, които минават през правата g, ако:
а) $g : x - y + 1 = 0, \ x - z - 2 = 0$;
б) $g : x - 1 = 0, \ y + iz - 2i = 0$;
в) $g : x - y - 1 = 0, \ x - 2y + z = 0$.
(Координатната система е ортонормирана).

Решение. а) Равнините, минаващи през правата g, принадлежат на снопа равнини с уравнение

$$\lambda(x - y + 1) + \mu(x - z - 2) = 0, \tag{7.8}$$

където λ и μ са комплексни числа, поне едно от които е различно от нула. Записваме (7.8) във вида

$$(\lambda + \mu)x - \lambda y - \mu z + \lambda - 2\mu = 0.$$

За изотропните равнини от снопа нормалният вектор $\overrightarrow{N}(\lambda + \mu, -\lambda, -\mu)$ е изотропен, т.е. $\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 0$. От последното равенство намираме

$$\lambda_1 = (-1 + i\sqrt{3})\rho_1, \ \mu_1 = 2\rho_1 \ \text{ и } \ \lambda_2 = (-1 - i\sqrt{3})\rho_2, \ \mu_2 = 2\rho_2,$$

където $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$ са произволни комплексни числа.

Тогава изотропните равнини са

$$\alpha_1 : (1 + i\sqrt{3})x + (1 - i\sqrt{3})y - 2z - 5 + i\sqrt{3} = 0$$

и

$$\alpha_2 : (1 - i\sqrt{3})x + (1 + i\sqrt{3})y - 2z - 5 - i\sqrt{3} = 0.$$

Отговор. б) $\alpha : -iy + z - 2 = 0$;
в) $\alpha_1 : (-1 + i\sqrt{3})x - (1 + i\sqrt{3})y - 2z + 3 - i\sqrt{3} = 0$,
$\alpha_2 : (-1 - i\sqrt{3})x - (1 - i\sqrt{3})y - 2z + 3 + i\sqrt{3} = 0$.

Задача 7.1.7 Да се намерят изотропните вектори в равнината α, ако:
а) $\alpha : 2x + y - iz + 2 = 0$;
б) $\alpha : x + \sqrt{2}iy + z + 1 = 0$;
в) $\alpha : x + y + z - 1 = 0$;
г) $\alpha : x + iy + 2 = 0$;
д) $\alpha : ix + (2 - i)y + z - i = 0$.
(Координатната система е ортонормирана).

Решение. а) Тъй като нормалният вектор $\overrightarrow{N_\alpha}(2, 1, -i)$ на равнината α е неизотропен, тя е неизотропна. Ако предположим, че $\overrightarrow{p}(\lambda, \mu, \nu)$ е изотропен вектор, който е компланарен с α, то от $\overrightarrow{p}^2 = 0$, $\overrightarrow{N_\alpha}\overrightarrow{p} = 0$ получаваме системата

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0, \quad 2\lambda + \mu - i\nu = 0,$$

която има две независими решения $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = i\rho_1$, $\nu_1 = \rho_1$ и $\lambda_2 = 4i\rho_2$, $\mu_2 = -3i\rho_2$, $\nu_2 = 5\rho_2$, където $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$ са комплексни числа. Следователно в α има две системи изотропни вектори $\overrightarrow{p_1}(0, i\rho_1, \rho_1)$ и $\overrightarrow{p_2}(4i\rho_2, -3i\rho_2, 5\rho_2)$.

б) Нормалният вектор $\overrightarrow{N_\alpha}(1, \sqrt{2}i, 1)$ на равнината α е изотропен и следователно и α е изотропна. Тогава в α има само една система изотропни вектори – тези, които са колинеарни на вектора $\overrightarrow{N_\alpha}$.

Отговор. в) $\overrightarrow{p_1}((-1+i\sqrt{3})\rho_1, 2\rho_1, (-1-i\sqrt{3})\rho_1)$, $\rho_1 \neq 0$, $\overrightarrow{p_2}((-1-i\sqrt{3})\rho_2, 2\rho_2, (-1+i\sqrt{3})\rho_2)$, $\rho_2 \neq 0$;
г) $\overrightarrow{p}(\rho, i\rho, 0)$, $\rho \neq 0$;
д) $\overrightarrow{p_1}(\rho_1, 0, -i\rho_1)$, $\overrightarrow{p_2}((-2+2i)\rho_2, (1+2i)\rho_2, (-2-i)\rho_2)$, $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$.

Задача 7.1.8 Да се докаже, че два изотропни вектора $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ са точно тогава ортогонални, когато са колинеарни.

Доказателство. Понеже $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ са изотропни вектори, то $\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{o}$, $\overrightarrow{q} \neq \overrightarrow{o}$ и $\overrightarrow{p}^2 = 0$, $\overrightarrow{q}^2 = 0$.

Необходимост. Нека $\overrightarrow{p} \parallel \overrightarrow{q}$. Тогава съществува ненулево комплексно число ρ, такова, че $\overrightarrow{q} = \rho.\overrightarrow{p}$. Оттук получаваме $\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q} = \rho.\overrightarrow{p}^2 = \rho.0 = 0$ и следователно $\overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{q}$.

Достатъчност. Нека $\overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{q}$, т.е. $\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q} = 0$. Пресмятаме

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}) \times \overrightarrow{p} &= \overrightarrow{p}^2.\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q}.\overrightarrow{p} = \overrightarrow{o}, \\
(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}) \times \overrightarrow{q} &= \overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q}.\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q}^2.\overrightarrow{p} = \overrightarrow{o}.
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

Ако допуснем, че $\overrightarrow{p} \not\parallel \overrightarrow{q}$, то $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} \neq \overrightarrow{o}$ и от (7.9) следва, че $\overrightarrow{p} = \rho.\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{q} = \sigma.\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$, $\rho \neq 0$, $\sigma \neq 0$. Но тогава получаваме $\overrightarrow{p} \parallel \overrightarrow{q}$, противно на направеното предположение. Следователно векторите $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ са колинеарни.

Задача 7.1.9 Да се докаже, че векторното произведение на два изотропни вектора е неизотропен вектор.

Доказателство. Нека $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ са изотропни вектори, т.е. $\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{o}$, $\overrightarrow{q} \neq \overrightarrow{o}$, $\overrightarrow{p}^2 = 0$, $\overrightarrow{q}^2 = 0$. Ако $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} = \overrightarrow{o}$, то съгласно дефиницията на изотропен вектор, векторът $\overrightarrow{r}$ е неизотропен.

Да предположим сега, че $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} \neq \overrightarrow{o}$ и е изотропен, т.е. $\overrightarrow{r}^2 = 0$. Оттук получаваме

$$\overrightarrow{r}^2 = (\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q})^2 = \overrightarrow{p}^2.\overrightarrow{q}^2 - (\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q})^2 = 0$$

и следователно $\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q} = 0$. Тогава $\overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{q}$ и от задача 7.1.8 следва, че $\overrightarrow{p} \parallel \overrightarrow{q}$, т.е. $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} = \overrightarrow{o}$, което противоречи на направеното предположение. Следователно $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ е неизотропен вектор.

Задача 7.1.10 Нека $\overrightarrow{p}$ е изотропен вектор, а $\overrightarrow{q}$ – неизотропен. Да се докаже, че ако $\overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{q}$, то векторът $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ е неизотропен.

Решение. Тъй като $\overrightarrow{p}$ е изотропен, а $\overrightarrow{q} \neq \overrightarrow{o}$ – неизотропен, то двата вектора са неколинеарни и следователно $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} \neq \overrightarrow{o}$. От друга страна имаме

$$\overrightarrow{r}^2 = (\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q})^2 = \overrightarrow{p}^2 . \overrightarrow{q}^2 - (\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q})^2 = 0$$

и следователно векторът $\overrightarrow{r}$ е изотропен.

7.2 Метрична класификация на кривите от втора степен

7.2.1 Дефиниция на крива от втора степен

Нека в комплексната евклидова равнина $E_2^{\mathbb{C}}$ е фиксирана афинна координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}$. *Крива линия от втора степен* (накратко *крива от 2 ст.*) се нарича множеството c от всички точки в равнината, чиито координати (x, y) относно K, удовлетворяват уравнението от втора степен

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{7.10}$$

в което всички коефициенти $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{33}$ са *реални числа*, като поне едно от числата a_{11}, a_{12} и a_{22} не е нула. Уравнението (7.10) се нарича *общо уравнение на кривата* c *относно* K, а само лявата му страна – *полином на* c *относно* K.

За удобство въвеждаме и числата

$$a_{21} = a_{12},\ a_{31} = a_{13},\ a_{32} = a_{23}.$$

Симетричната детерминанта

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

от коефициенти на (7.10) се нарича *дискриминанта* на кривата.

Една крива c от 2 ст. се нарича *изродена*, ако съдържа права. Необходимо и достатъчно условие за това е $A = 0$. За една крива c от 2 ст. и една права g са възможни следните три случая:

а) кривата c и правата g имат точно две различни общи точки;

б) кривата c и правата g имат точно една обща точка;

в) всяка точка на правата g лежи върху кривата c.

В случая б) правата g се нарича *истинска тангента* или *допирателна* на кривата c, а в случая в) – *образуваща* или *образувателна* на c. Обикновено тези два случая се обединяват и се казва, че правата g е *тангента* (*допирателна*) на c и всяка нейна обща точка с c се нарича *допирна точка* на g.

7.2.2 Снопове криви от втора степен

Нека c_1 и c_2 са две различни криви от 2 ст., които имат относно K съответно уравнения $F(x, y) = 0$ и $G(x, y) = 0$. Образуваме линейната комбинация

$$\lambda F(x, y) + \mu G(x, y) = 0 \tag{7.11}$$

от полиномите на двете криви, като предполагаме, че

$$|\lambda| + |\mu| \neq 0. \tag{7.12}$$

Множеството σ от всички криви от 2 ст., които се получават от (7.11), когато λ и μ се менят, удовлетворявайки (7.12), се нарича *сноп криви от 2 ст., породен от c_1 и c_2*, а (7.11) –

уравнение на снопа. Общите точки на c_1 и c_2 се наричат *основни* (*базисни*) *точки на снопа.* В сила са следните твърдения:

1) Нека M_1, M_2, M_3 и M_4 се четири точки, никои три от които не са колинеарни и съединителните им прави M_iM_j, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, имат относно K съответно уравнения $l_{ij}(x, y) = 0$. Тогава множеството σ_1 на всички криви от 2 ст., които минават през дадените точки, е сноп криви с уравнение

$$\lambda l_{12}(x, y) l_{34}(x, y) + \mu l_{13}(x, y) l_{24}(x, y) = 0, \ |\lambda| + |\mu| \neq 0. \tag{7.13}$$

σ_1 се нарича *сноп криви от 2 ст. от I тип с основни точки M_1, M_2, M_3 и M_4.*

2) Нека M_1, M_2 и M_3 са три неколинеарни точки и g е права, която минава през M_1, но не минава през M_2 и M_3. Ако относно K правите M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3 и g имат съответно уравнения $l_{12}(x, y) = 0$, $l_{13}(x, y) = 0$, $l_{23}(x, y) = 0$ и $l(x, y) = 0$, множеството σ_2 на всички криви от 2 ст., които минават през M_1, M_2 и M_3 и имат за тангента g, е сноп криви с уравнение

$$\lambda l_{12}(x, y) l_{13}(x, y) + \mu l_{23}(x, y) l(x, y) = 0, \ |\lambda| + |\mu| \neq 0. \tag{7.14}$$

σ_2 се нарича *сноп криви от 2 ст. от II тип с основни точки M_1, M_2 и M_3 и основна тангента g.*

3) Нека M_1 и M_2 са точки, а g_1 и g_2 – прави, които минават съответно през M_1 и M_2 и са различни от съединителната права M_1M_2. Ако относно K правите g_1, g_2 и M_1M_2 имат съответно уравнения $l_1(x, y) = 0$, $l_2(x, y) = 0$ и $l_{12}(x, y) = 0$, множеството σ_3 на всички криви от 2 ст., които минават през M_1 и M_2 и имат за тангенти g_1 и g_2, е сноп криви с уравнение

$$\lambda l_1(x, y) l_2(x, y) + \mu l_{12}^2(x, y) = 0, \ |\lambda| + |\mu| \neq 0. \tag{7.15}$$

σ_3 се нарича *сноп криви от 2 ст. от III тип с основни точки M_1 и M_2 и основни тангенти g_1 и g_2.*

7.2.3 Метрични канонични уравнения на кривите от втора степен

Нека c е крива от 2 ст., която относно дясната ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ има общо уравнение (7.10). За квадратичната форма

$$\varphi(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy \tag{7.16}$$

можем да приложим резултатите от 6.5.3. Съществува *ортогонално преобразувание*

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y',\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y', \tag{7.17}$$

при което квадратичната форма (7.16) приема каноничния вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2. \tag{7.18}$$

В (7.18) коефициентите λ_1 и λ_2 са корени на характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{7.19}$$

които винаги са реални. Наредените двойки (α_1, β_1) и (α_2, β_2) са координатите относно K на собствените вектори $\overrightarrow{e_1}'$ и $\overrightarrow{e_2}'$ на симетричната матрица

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Векторите $\overrightarrow{e_1}'$ и $\overrightarrow{e_2}'$ образуват ортонормирана база. За да намерим техните координати постъпваме по следния начин:

От системата

$$\left|\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda_1)\alpha_1 + a_{12}\beta_1 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda_1)\beta_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{array}\right. \tag{7.20}$$

намираме координатите (α_1, β_1) на единичния собствен вектор $\overrightarrow{e_1}'$. От изискването ортонормираната база $\overrightarrow{e_1}'$, $\overrightarrow{e_2}'$ да бъде еднакво ориентирана с ортонормираната база $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ следва, че вторият собствен вектор $\overrightarrow{e_2}'$ има координати

$$\alpha_2 = -\beta_1, \quad \beta_2 = \alpha_1. \tag{7.21}$$

Геометрично това означава, че избираме втора ортонормирана координатна система $K' = O\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$, която се получава от $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ чрез ротацията (7.17) около началото O.

Като заместим (7.17) в (7.10) и отчетем (7.18), получаваме, че кривата c има относно K' уравнението

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2q_1 x' + 2q_2 y' + a_{33} = 0, \tag{7.22}$$

където сме означили

$$q_1 = a_{31}\alpha_1 + a_{32}\beta_1, \quad q_2 = a_{31}\alpha_2 + a_{32}\beta_2. \tag{7.23}$$

За да продължим опростяването на уравнението (7.22) на c, избираме трета ортонормирана координатна система $K'' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$, която се получава от K' чрез *транслацията*

$$x' = X + \alpha, \quad y' = Y + \beta. \tag{7.24}$$

Очевидно (α, β) са координатите относно K' на началото O' на K''. Засега те са неопределени и ние ще ги определим допълнително.

Заместваме (7.24) в (7.22) и подреждаме по X и Y. Получаваме

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2(\lambda_1\alpha + q_1)X + 2(\lambda_2\beta + q_2)Y + a'_{33} = 0, \tag{7.25}$$

където

$$a'_{33} = \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + 2q_1\alpha + 2q_2\beta + a_{33}. \tag{7.26}$$

Имаме следните възможности:

I. *Двата характеристични корена λ_1 и λ_2 са различни от нула.* Тогава можем да определим α и β от системата $\lambda_1\alpha + q_1 = 0$, $\lambda_2\beta + q_2 = 0$, т.е.

$$\alpha = -\frac{q_1}{\lambda_1}, \quad \beta = -\frac{q_2}{\lambda_2}$$

и (7.25) приема вида

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a'_{33} = 0, \quad (\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0). \tag{7.27}$$

II. *Единият от характеристичните корени, например λ_1 е равен на нула, а другият – λ_2, е различен от нула.* Сега (7.25) и (7.26) са съответно

$$\lambda_2 Y^2 + 2q_1 X + 2(\lambda_2\beta + q_2)Y + a'_{33} = 0, \tag{7.28}$$

и

$$a'_{33} = \lambda_2\beta^2 + 2q_1\alpha + 2q_2\beta + a_{33}. \tag{7.29}$$

За коефициента q_1 в (7.28) имаме две възможности: $q_1 \neq 0$ и $q_1 = 0$.

II.1. $q_1 \neq 0$. В този случай можем да определим β от равенството $\lambda_2\beta + q_2 = 0$, а α – от анулирането на свободния член a'_{33} от (7.29). Тогава (7.28) приема вида

$$\lambda_2 Y^2 + 2q_1 X = 0, \quad (\lambda_2 \neq 0,\ q_1 \neq 0). \tag{7.30}$$

II.2. $q_1 = 0$. Сега пак определяме β от равенството $\lambda_2\beta + q_2 = 0$, а за α избираме числото нула. От (7.28) намираме

$$\lambda_2 Y^2 + a'_{33} = 0, \quad (\lambda_2 \neq 0). \tag{7.31}$$

Следователно имаме:

4) С помощта на подходяща ротация и транслация на координатната система общото уравнение (7.10) на кривата c от втора степен може да се приведе към едно от уравненията (7.27), (7.30) и (7.31).

Уравненията (7.27), (7.30) и (7.31) се наричат *метрични канонични уравнения на кривите от втора степен.* В зависимост от вида на коефициентите им, валидна е следната метрична класификация на кривите от втора степен в $E_2^{\mathbb{C}}$:

5) В $E_2^{\mathbb{C}}$ съществуват девет метрично нееквивалентни типа криви от втора степен. Това са кривите от втора степен със следните метрични канонични уравнения:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – *реална елипса*;
2. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – *хипербола*;
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ – *имагинерна елипса*;
4. $y^2 = 2px$ – *парабола*;
5. $x^2 = a^2y^2$ – *две реални пресекателни прави*;
6. $x^2 = -a^2y^2$ – *две конюговани имагинерни пресекателни прави*;
7. $y^2 = a^2$ – *две реални успоредни прави*;
8. $y^2 = -a^2$ – *две конюговани имагинерни успоредни прави*;
9. $y^2 = 0$ – *две сливащи се реални прави.*

Забележка 7.2.1 В случаите, когато не е посочен видът на координатната система K ще считаме, че тя е афинна.

Задача 7.2.1 Да се намери общото уравнение на кривата c от 2 ст., която минава през точките M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5, ако:
а) $M_1(0,0)$, $M_2(0,2)$, $M_3(-1,0)$, $M_4(-2,1)$, $M_5(-1,3)$;
б) $M_1(1,0)$, $M_2(2,4)$, $M_3(3,-1)$, $M_4(2,4)$, $M_5(0,5)$;
в) $M_1(0,-1)$, $M_2(4,3)$, $M_3(3,0)$, $M_4(1,2)$, $M_5(2,2)$;
г) $M_1(1,1)$, $M_2(4,1)$, $M_3(4,3)$, $M_4(1,3)$, $M_5(-1,2)$.

Решение. а) **I начин.** Нека кривата c има общо уравнение (7.10). Тъй като дадените точки лежат върху c, координатите им удовлетворяват уравнението на кривата, т.е.

$$
\begin{aligned}
&a_{33} = 0,\ 4a_{22} + 4a_{23} + a_{33} = 0,\ a_{11} - 2a_{13} + a_{33} = 0,\\
&4a_{11} + a_{22} - 4a_{12} - 4a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0,\\
&a_{11} + 9a_{22} - 6a_{12} - 2a_{13} + 6a_{23} + a_{33} = 0.
\end{aligned}
\tag{7.32}
$$

Системата линейни хомогенни уравнения (7.10) и (7.32) от коефициентите $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{33}$ има ненулево решение точно тогава, когато детерминантата ѝ е равна на нула. Записваме

$$
\begin{vmatrix}
x^2 & y^2 & 2xy & 2x & 2y & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 1\\
1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1\\
4 & 1 & -4 & -4 & 2 & 1\\
1 & 9 & -6 & -2 & 6 & 1
\end{vmatrix} = 0
$$

и като направим необходимите пресмятания, получаваме, че търсеното общо уравнение на c е

$$
3x^2 + 2y^2 + 2xy + 3x - 4y = 0. \tag{7.33}
$$

II начин. Кривата c принадлежи на снопа криви от 2 ст. от I тип с основни точки M_1, M_2, M_3 и M_4 и следователно има уравнение от вида (7.13). Понеже $M_1M_2 : x = 0$, $M_3M_4 : x+y+1 = 0$, $M_1M_3 : y = 0$, $M_2M_4 : x-2y+4 = 0$, то $l_{12}(x,y) = x$, $l_{34}(x,y) = x + y + 1$, $l_{13}(x,y) = y$, $l_{24}(x,y) = x - 2y + 4$ и като заместим в (7.13), получаваме

$$
\lambda x(x + y + 1) + \mu y(x - 2y + 4) = 0. \tag{7.34}
$$

Параметрите λ и μ определяме от изискването кривата c да минава през точката $M_5(-1, 3)$. Заместваме тези координати в (7.34) и намираме $\lambda + 3\mu = 0$. Оттук определяме $\lambda = 3\rho$, $\mu = -\rho$, $\rho \neq 0$ и при тези стойности на λ и μ от (7.34) следва (7.33).

Отговор. б) $c : 18x^2 - y^2 + 22xy - 58x - 39y + 40 = 0$;
в) $c : 67x^2 + 8y^2 - 45xy - 223x + 74y + 66 = 0$;
г) $c : x^2 + 10y^2 - 5x - 40y + 34 = 0$.

Задача 7.2.2 Да се намери общо уравнение на кривата c от 2 ст., която минава през точките M_1, M_2, M_3, M_4 и се допира до правата g, ако:

а) $M_1(1,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(-1,0)$, $M_4(0,-1)$, $g : x+2y-1 = 0$;
б) $M_1(0,1)$, $M_2(4,2)$, $M_3(5,6)$, $M_4(1,5)$, $g : x + y - 1 = 0$.

Решение. а) Кривата c принадлежи на снопа криви от 2 ст. от тип II с основни точки M_1, M_2 и M_3 и основна тангента $g\mathbf{z}M_1$. Този сноп има уравнение от вида (7.14). За полиномите на съответните прави намираме $l_{12}(x,y) = x+y-1$, $l_{13}(x,y) = y$, $l_{23}(x,y) = x-y+1$, $l(x,y) = x+2y-1$ и като заместим в (7.14), получаваме

$$\lambda y(x + y - 1) + \mu(x - y + 1)(x + 2y - 1) = 0. \tag{7.35}$$

От снопа (7.35) отделяме онази крива, която минава през точката $M_4(0,-1)$. За нея имаме $\lambda - 3\mu = 0$ и оттук определяме $\lambda = 3\rho$, $\mu = \rho$, $\rho \neq 0$. Заместваме тези стойности в (7.35) и получаваме

$$c : x^2 + y^2 + 4xy - 1 = 0.$$

Отговор. б) $c : 17x^2 + 17y^2 - 16xy - 29x - 79y + 62 = 0$.

Задача 7.2.3 Да се намери общо уравнение на кривата c от 2 ст., която минава през точките M_1, M_2, M_3 и се допира до правите g_1 и g_2, ако:

а) $M_1(3,0)$, $M_2(0,3)$, $M_3\left(\dfrac{7}{2},0\right)$, $g_1 : 2x + y - 6 = 0$,
$g_2 : x + 2y - 6 = 0$;

б) $M_1(0,0)$, $M_2(1,-2)$, $M_3(0,-1)$, $g_1 : 4x + 3y + 2 = 0$,
$g_2 : x - y - 1 = 0$.

Решение. а) Тъй като $M_1 \in g_1$, $M_2 \in g_2$ и g_1 и g_2 са различни от правата M_1M_2, кривата c принадлежи на снопа криви от 2 ст. от III тип с основни точки M_1 и M_2 и основни тангенти g_1 и g_2. Този сноп има уравнение от вида (7.15). Заместваме $l_1(x,y) = 2x + y - 6$, $l_2(x,y) = x + 2y - 6$, $l_{12}(x,y) = x + y - 3$ в (7.15) и получаваме

$$\lambda(2x + y - 6)(x + 2y - 6) + \mu(x + y - 3)^2 = 0. \tag{7.36}$$

Понеже M_3 лежи на c, координатите ѝ удовлетворяват (7.36). Заместването им в (7.36) дава $10\lambda - \mu = 0$ и оттук намираме $\lambda = \rho$, $\mu = 10\rho$, $\rho \neq 0$. С тези стойности за λ и μ от (7.36) получаваме

$$c : 12x^2 + 10y^2 + 25xy - 78x - 78y + 126 = 0.$$

Отговор. б) $c : 6x^2 - y^2 + 3xy + 2x - y = 0$.

Задача 7.2.4 Дадени са кривите от 2 ст.:
а) $c : 4x^2 - y^2 + 2xy + 6x + 2y + 3 = 0$;
б) $c : y^2 - xy - 5x + 7y + 10 = 0$;
в) $c : 2x^2 - 2y^2 - 3xy - x + 7y - 3 = 0$;
г) $c : 4x^2 + y^2 - 4xy + 12x - 6y + 9 = 0$;
д) $c : x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 6y + 3 = 0$;
е) $c : x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y - 4 = 0$.

Да се изследва кои от тях са изродени и кои не. За изродените криви линии да се намерят уравнения на правите, на които се разпадат.

Решение. а) Тъй като дискриминантата

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

на кривата c е различна от нула, то тя е неизродена.

б) Дискриминантата

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 10 \end{vmatrix} = 0$$

е равна на нула и следователно разглежданата крива е изродена. За да намерим уравнения на правите, на които тя се разпада, решаваме квадратното уравнение

$$y^2 - (x-7)y - 5x + 10 = 0$$

относно y. Получаваме

$$y = \frac{1}{2}(x - 7 \pm (x+3))$$

и следователно кривата c се разпада на двете прави
$g_1 : x - y - 2 = 0$ и $g_2 : y + 5 = 0$.

Отговор. в) $g_1 : x - 2y + 1 = 0$, $g_2 : 2x + y - 3 = 0$;
г) $g_1 = g_2 : 2x - y + 3$; д) кривата c е неизродена;
е) $g_1 : x + y + 1 + \sqrt{5} = 0$, $g_2 : x + y + 1 - \sqrt{5} = 0$.

Задача 7.2.5 Да се намерят стойностите на параметъра λ, при които кривата c е изродена, ако:
а) $c : x^2 + 2\lambda y^2 - x + y = 0$;
б) $c : x^2 + y^2 + 2\lambda xy - 5x - 7y + 6 = 0$;
в) $c : x^2 + \lambda y^2 - 2xy - 4x - 6y + 3 = 0$.

Отговор. а) $\lambda = -\dfrac{1}{2}$; б) $\lambda_1 = \dfrac{5}{3}$, $\lambda_2 = \dfrac{5}{4}$; в) $\lambda = -24$.

Задача 7.2.6 Да се намерят общите точки на кривата $c : x^2 - 3y^2 - 2xy - 4x - 6y + 3 = 0$ и правата g, ако:
а) $g : 5x - y - 5 = 0$;
б) $g : x + 2y = 0$;
в) $g : x + 4y - 1 = 0$.

Упътване. Ако $M(x, y)$ е обща точка на кривата c и правата g, координатите ѝ x и y удовлетворяват системата от уравненията на c и g.

Отговор. а) $M_1(1, 0)$, $M_2\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$;

б) $M_1\left(-\dfrac{2+2i\sqrt{14}}{5}, \dfrac{1+i\sqrt{14}}{2}\right)$, $M_2\left(\dfrac{-2+2i\sqrt{14}}{5}, \dfrac{1-i\sqrt{14}}{2}\right)$;

в) $M(1, 0)$.

Задача 7.2.7 Спрямо дясната ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ кривата c има уравнение $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x + 4y - 4 = 0$. Да се намерят:

а) метричното канонично уравнение на c и последователните координатни трансформации, чрез които даденото уравнение се преобразува в канонично;

б) координатите относно K на върховете и фокусите на c;

в) уравнения относно K на осите, върховите тангенти и директрисите на c.

Решение. а) Характеристичното уравнение (7.19) има вида

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

и притежава корени $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 4$. Решаваме системата (виж (7.20))

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{array} \right.$$

и намираме $\alpha_1 = \rho$, $\beta_1 = \rho$, $\rho = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Избираме $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и получаваме координатите $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ на единичния собствен вектор $\overrightarrow{e_1}'$. Тогава съгласно (7.21) вторият собствен вектор $\overrightarrow{e_2}'$ има координати $\alpha_2 = -\beta_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $\beta_2 = \alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ортогоналната трансформация (7.17) е

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \tag{7.37}$$

Като използваме (7.23), пресмятаме

$$q_1 = 2.\frac{1}{\sqrt{2}} + 2.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},\ q_2 = 2.\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2.\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

и съгласно (7.22), уравнението на кривата c приема вида $2x'^2 + 4y'^2 + 2\sqrt{2}x' - 2 = 0$, или като разделим на 2:

$$x'^2 + 2y'^2 + \sqrt{2}x' - 1 = 0. \tag{7.38}$$

Полученото уравнение (7.38) е общо уравнение на кривата c относно дясната ортонормирана координатна система $K' = O\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$. За да продължим опростяването му, избираме нова (трета) координатна система $K'' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$, която се получава от K' с помощта на транслацията (7.24). Заместваме (7.24) в (7.38) и като подредим по X и Y, получаваме

$$X^2 + 2Y^2 + 2(\alpha + \sqrt{2})X + 2\beta Y + \alpha^2 + 2\beta^2 + 2\sqrt{2}\alpha - 2 = 0. \tag{7.39}$$

Можем да изберем

$$\alpha = -\sqrt{2},\quad \beta = 0$$

и транслацията (7.24) приема вида

$$x' = -\sqrt{2} + X,\ y' = Y, \tag{7.40}$$

а уравнението (7.39) на c –

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{2} = 1. \tag{7.41}$$

От 5) следва, че кривата c с метричното канонично уравнение (7.41) е *реална елипса.*

б) Елипсата (7.41) има полуоси $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ и следователно за линейния ѝ ексцентрицитет получаваме $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2}$. За координатите на върховете ѝ относно K'' имаме

$$A_1(-2, 0),\ A_2(2, 0),\ B_1(0, -\sqrt{2}),\ B_2(0, \sqrt{2}), \tag{7.42}$$

а на фокусите –

$$F_1(-\sqrt{2}, 0), \quad F_2(\sqrt{2}, 0). \tag{7.43}$$

От (7.37) и (7.40) намираме трансформационните формули за преминаване от K'' към K:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2} + X - Y),\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2} + X + Y). \tag{7.44}$$

Заместваме съответните координати на върховете от (7.42) и на фокусите от (7.43) в (7.44) и получаваме координатите им относно K:

$$A_1(-\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} - 1),\ A_2(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1),\ B_1(0, -2),\ B_2(-2, 0)$$

и

$$F_1(-2, -2), \quad F_2(0, 0).$$

в) От (7.44) намираме трансформационните формули за преминаване от K към K''. Имаме

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y + 2),\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y). \tag{7.45}$$

Относно K'' осите на кривата са $o_1 : Y = 0$ и $o_2 : X = 0$. Като заместим в (7.45), получаваме уравненията им относно K:

$$o_1 : x - y = 0 \ \text{ и } \ o_2 : x + y + 2 = 0.$$

Върховите тангенти имат относно K'' уравнения

$$t_1 : X = -2,\ t_2 : X = 2,\ t_3 : Y = -\sqrt{2},\ t_4 : Y = \sqrt{2},$$

а директрисите –

$$f_1 : X = -\frac{4}{\sqrt{2}}, \quad f_2 : X = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Както по-горе, намираме уравненията им относно K:

$$t_1 : x+y+2+\sqrt{2} = 0,\ t_2 : x+y+2-2\sqrt{2} = 0,\ t_3 : -x+y+2 = 0,$$

$$t_4 : -x+y-2 = 0,\ f_1 : x+y+6 = 0,\ f_2 x+y-2 = 0.$$

Задача 7.2.8 Същите изисквания, както в задача 7.2.7, за кривите:

а) $c : 3x^2 + 3y^2 + 10xy - 2x - 14y - 13 = 0$;
б) $c : 25x^2 + 25y^2 - 14xy + 64x - 64y - 224 = 0$;
в) $c : 3y^2 + 4xy + 16x + 12y - 36 = 0$;
г) $c : 5x^2 + 5y^2 + 8xy - 18x - 18y + 9 = 0$.

Отговор. а) $c : X^2 - \dfrac{Y^2}{4} = 1$; $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$,
$y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$, $x' = X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y' = Y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
$A_1\left(-\dfrac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$, $A_2\left(\dfrac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$;
$F_1\left(\dfrac{-\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$, $F_2\left(\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$;
$o_1 : x - y - 3 = 0$, $o_2 : x + y - 1 = 0$; $t_1 : x + y - 1 + \sqrt{2} = 0$,
$t_2 : x+y-1-\sqrt{2} = 0$; $f_1 : x+y-1+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 0$, $f_2 : x+y-1-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 0$;

б) $c : \dfrac{X^2}{16} + \dfrac{Y^2}{9} = 1$; $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$, $x' = X$, $y' = Y + \sqrt{2}$, $A_1\left(-\dfrac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \dfrac{-4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$, $A_2\left(\dfrac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \dfrac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$;
$B_1\left(\dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \dfrac{-3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$, $B_2\left(-\dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$;
$F_1\left(-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \dfrac{-\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$, $F_2\left(\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$;
$o_1 : x - y + 2 = 0$, $o_2 : x + y = 0$; $t_1 : x + y + 4\sqrt{2} = 0$,
$t_2 : x + y - 4\sqrt{2} = 0$, $t_3 : x - y + 2 - 3\sqrt{2} = 0$, $t_4 : x - y + 2 + 3\sqrt{2} = 0$;
$f_1 : x + y + 16\sqrt{\dfrac{2}{7}} = 0$, $f_2 : x + y - 16\sqrt{\dfrac{2}{7}} = 0$;

в) $c : \dfrac{X^2}{9} - \dfrac{Y^2}{36} = 1$; $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y')$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$, $x' = X - \sqrt{5}$, $y' = Y - 2\sqrt{5}$, $A_1\left(\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}, -\dfrac{6+4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)$,
$A_2\left(\dfrac{3+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}, \dfrac{6-4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)$; $F_1(0, -10)$, $F_2(6, 2)$; $o_1 : -2x + y + 10 = 0$, $o_2 : x + 2y + 5 = 0$; $t_1 : x + 2y + 5 + 3\sqrt{5} = 0$, $t_2 : x + 2y + 5 - 3\sqrt{5} = 0$;
$f_1 : x + 2y + 8 = 0$, $f_2 : x + 2y + 2 = 0$;

г) $c : X^2 + \dfrac{Y^2}{9} = 1$; $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$,
$x' = X + \sqrt{2}$, $y' = Y$,
$A_1\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$, $A_2\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)$;
$B_1\left(\dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}}\right)$, $B_2\left(\dfrac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}\right)$;
$F_1(3, -1)$, $F_2(-1, 3)$; $o_1 : x - y = 0$, $o_2 : x + y - 2 = 0$;

$t_1 : x+y+\sqrt{2}-2=0$, $t_2 : x+y-2-\sqrt{2}=0$, $t_3 : x-y-3\sqrt{2}=0$, $t_4 : x-y+3\sqrt{2}=0$; $f_1 : 2x-2y-9=0$, $f_2 : 2x-2y+9=0$.

Задача 7.2.9 Спрямо дясната ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ са дадени кривите линии от втора степен:

а) $c : 7x^2 - y^2 + 6xy + 28x + 12y + 28 = 0$;

б) $c : 19x^2 + 11y^2 + 6xy + 38x + 6y + 29 = 0$;

в) $c : 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 4x + 20y + 20 = 0$;

г) $c : x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 = 0$.

Да се намерят метричните канонични уравнения на дадените криви и последователните координатни трансформации, чрез които дадените уравнения се преобразуват в канонични.

Отговор. а) $c : Y^2 = \frac{1}{4}X^2$; $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' + y')$, $x' = X - \frac{2}{\sqrt{10}}$, $y' = Y - \frac{6}{\sqrt{10}}$;

б) $c : X^2 + \frac{Y^2}{\frac{1}{2}} = -1$; $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' + y')$, $x' = X - \frac{1}{\sqrt{10}}$, $y' = Y - \frac{3}{2\sqrt{10}}$;

в) $c : Y^2 = -\frac{2}{3}X^2$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$, $x' = X - \sqrt{2}$, $y' = Y - \sqrt{2}$;

г) $c : Y^2 = -\frac{1}{3}X^2$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$, $x' = X + \sqrt{2}$, $y' = Y$.

Задача 7.2.10 Спрямо дясната ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е дадена кривата $c : 9x^2 + 16y^2 - 24xy + 20x - 110y + 50 = 0$. Да се намерят:

а) метричното канонично уравнение на кривата c и последователните координатни трансхормации, чрез които даденото уравнение се трансформира в канонично;

б) координатите относно K на върха и фокуса на c;

в) уравнението относно K на оста, върховата тангента и директрисата на c.

Решение. а) Характеристичното уравнение на c е

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -12 \\ -12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda = 0$$

и има корени $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 25$. От системата

$$\left| \begin{array}{l} 9\alpha_1 - 12\beta_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{array} \right.$$

намираме $\alpha_1 = 4\rho$, $\beta_1 = 3\rho$, $\rho = \pm\frac{1}{5}$ и като изберем $\rho = \frac{1}{5}$, получаваме $\alpha_1 = \frac{4}{5}$, $\beta_1 = \frac{3}{5}$, които са координатите на единичния собствен вектор $\overrightarrow{e_1}'$. Вторият собствен вектор $\overrightarrow{e_2}'$ има координати $\alpha_2 = -\beta_1 = -\frac{3}{5}$ и $\beta_2 = \alpha_1 = \frac{4}{5}$ и следователно ротацията (7.17) има вида

$$x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y', \quad y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'. \tag{7.46}$$

Ако заместим (7.46) в уравнението на c, получаваме

$$25y'^2 + 2q_1x' + 2q_2y' + 50 = 0,$$

където съгласно (7.23), имаме

$$q_1 = 10.\frac{4}{5} - 55.\frac{3}{5} = -25, \; q_2 = 10.\left(-\frac{3}{5}\right) - 55.\frac{4}{5} = -50.$$

Следователно относно $K' = O\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$ c има общо уравнение

$$c : y'^2 - 2x' - 4y' + 2 = 0. \tag{7.47}$$

За да продължим опростяването на (7.47), избираме нова координатна система $K'' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$, която се получава от K' чрез транслацията

$$x' = X + \alpha, \quad y' = Y + \beta, \tag{7.48}$$

като засега координатите α и β на O' относно K' са неизвестни. Заместваме (7.48) в (7.47) и след приведение получаваме

$$Y^2 - 2X + 2(\beta - 2)Y + \beta^2 - 2\alpha - 4\beta + 2 = 0.$$

Избираме α и β така, че $\beta - 2 = 0$ и $\beta^2 - 2\alpha - 4\beta + 2 = 0$, т.е. $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Тогава трансформационните формули (7.48) приемат вида

$$x' = X - 1, \quad y' = Y + 2, \tag{7.49}$$

и търсеното канонично уравнение на кривата c е

$$Y^2 = 2X. \tag{7.50}$$

Следователно кривата c е *парабола*.

б) От (7.48) и (7.49) намираме формулите за преминаване от K'' към K:

$$x = \frac{1}{5}(4X - 3Y - 10), \quad y = \frac{1}{5}(3X + 4Y + 5). \tag{7.51}$$

Координатите на върха V на параболата (7.50) относно K'' са $(0,0)$, а на фокуса ѝ F – $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Заместваме съответните координати в (7.51) и за същите точки намираме $V(-2,1)$ и $F\left(-\frac{8}{5}, \frac{13}{10}\right)$ относно K.

в) Трансформационните формули за преминаване от K към K'' са

$$X = \frac{1}{5}(4x + 3y + 5), \quad Y = \frac{1}{5}(-3x + 4y - 10). \tag{7.52}$$

Оста o на параболата, върховата тангента t и директрисата f имат относно K'' съответно уравнения

$$o : Y = 0, \quad t : X = 0, \quad f : X = -\frac{1}{2}. \tag{7.53}$$

От (7.52) и (7.53) намираме, че същите прави имат относно K следните уравнения:

$$o : 3x - 4y + 10 = 0, \quad t : 4x + 3y + 5 = 0, \quad f : 8x + 6y + 15 = 0.$$

Задача 7.2.11 Същите изисквания, както в задача 7.2.10, за кривите линии:

а) $c : 3x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}xy - 4(1 + \sqrt{3})x - 4(1 - \sqrt{3})y + 12 = 0$;
б) $c : x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 8y - 6 = 0$;
в) $c : 9x^2 + 16y^2 - 24xy - 10x - 70y + 125 = 0$.

Отговор. а) $c : Y^2 = 2X$; $x = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y')$, $y = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x' + y')$, $x' = X + 1$, $y' = Y + 1$; $V\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)$, $F\left(\frac{3 + 3\sqrt{3}}{4}, \frac{3 - 3\sqrt{3}}{4}\right)$; $o : \sqrt{3}x + y - 2 = 0$, $t : x - \sqrt{3}y - 2 = 0$, $f : x - \sqrt{3}y - 1 = 0$;

б) $c : Y^2 = 3\sqrt{2}X$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')$, $x' = X - \frac{7\sqrt{2}}{12}$, $y' = Y - \frac{\sqrt{2}}{2}$; $V\left(-\frac{13}{12}, \frac{1}{12}\right)$, $F\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$; $o : x + y + \sqrt{2} = 0$, $t : x - y + 7\sqrt{2} = 0$, $f : 3x - 3y + 8 = 0$;

в) $c : Y^2 = 2X$; $x = \frac{1}{5}(4x' - 3y')$, $y = \frac{1}{5}(3x' + 4y')$, $x' = X + 2$, $y' = Y + 1$; $V(1, 2)$, $F\left(\frac{7}{5}, \frac{23}{10}\right)$; $o : 3x - 4y + 5 = 0$, $t : 4x + 3y - 10 = 0$, $f : 8x + 6y - 15 = 0$.

Задача 7.2.12 Спрямо дясната ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ са дадени кривите линии от втора степен:

а) $c : 9x^2 + 4y^2 + 12xy - 24x - 16y + 3 = 0$;

б) $c : 16x^2 + 9y^2 - 24xy - 160x + 120y + 425 = 0$;

в) $c : x^2 + y^2 - 2xy - 12x + 12y - 14 = 0$;

г) $c : 4x^2 + 9y^2 + 12xy - 4x - 6y + 1 = 0$;

д) $c : x^2 + y^2 + 2xy + 4 = 0$.

Да се намерят метричните им канонични уравнения и последователните координатни трансформации, чрез които дадените уравнения се преобразуват в канонични.

Отговор. а) $c : Y^2 = 1$; $x = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2x'+3y')$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(-3x'+2y')$, $x' = X$, $y' = Y + \dfrac{4}{\sqrt{13}}$;

б) $c : Y^2 = -1$; $x = \dfrac{1}{5}(3x' - 4y')$, $y = \dfrac{1}{5}(4x' + 3y')$, $x' = X$, $y' = Y - 4$;

в) $c : Y^2 = 25$; $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$, $x' = X$, $y' = Y - 3\sqrt{2}$;

г) $c : Y^2 = 0$; $x = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3x' + 2y')$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(-2x' + 3y')$, $x' = X$, $y' = Y - \dfrac{1}{\sqrt{13}}$;

д) $c : y'^2 = -2$; $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')$.

7.3 Метрична класификация на повърхнините от втора степен

7.3.1 Дефиниция на повърхнина от втора степен

Нека в комплексното евклидово пространство $E_3^{\mathbb{C}}$ е фиксирана афинна координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$.

Повърхнина от втора степен (накратко *повърхнина от 2ст.*) се нарича множеството от всички точки в пространството, чиито координати (x, y, z) относно K удовлетворяват уравнението от втора степен

$$\begin{gathered} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \\ +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \end{gathered} \tag{7.54}$$

в което коефициентите $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{44}$ са *реални* числа, като поне едно от числата a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{31} и a_{12} е различно от нула; (7.54) се нарича *общо уравнение на повърхнината относно* K, а само лявата му страна – *полином на повърхнината.*

За удобство въвеждаме още шест числа:

$$a_{32} = a_{23},\ a_{13} = a_{31},\ a_{21} = a_{12},\ a_{41} = a_{14},\ a_{42} = a_{24},\ a_{43} = a_{34}.$$

Детерминантата

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

се нарича *дискриминанта на повърхнината.*

Една повърхнина от втора степен се нарича *изродена*, ако съдържа равнина. Необходимо и достатъчно условие за това е $rang\ A < 3$.

7.3.2 Метрични канонични уравнения на повърхнините от втора степен

Нека относно дясната ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ повърхнината S от втора степен има общо уравнение (7.54). От 6.5.3 знаем, че за квадратичната форма $\varphi(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy$ съществува ортогонално преобразувание

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',\\
y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',\\
z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z',
\end{aligned}
\tag{7.55}
$$

под действието на което тя приема каноничния вид $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$. Тук λ_1, λ_2, λ_3 са корените на характеристичното уравнение

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda
\end{vmatrix} = 0,
\tag{7.56}
$$

а наредените тройки $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ и $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ са координатите на собствените вектори $\overrightarrow{e_1}'$, $\overrightarrow{e_2}'$ и $\overrightarrow{e_3}'$ на симетричната матрица

$$
\begin{Vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{Vmatrix}.
$$

За да намерим посочените координати, постъпваме по следния начин: най-напред от системата

$$
\left|
\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda_i)\alpha_i + a_{12}\beta_i + a_{13}\gamma_i = 0\\
&a_{21}\alpha_i + (a_{22}-\lambda_i)\beta_i + a_{23}\gamma_i = 0\\
&a_{31}\alpha_i + a_{32}\beta_i + (a_{33}-\lambda_i)\gamma_i = 0\\
&\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1,
\end{aligned}
\right.
$$

при $i = 1$, намираме координатите $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ на $\overrightarrow{e_1}'$, а при $i = 2$ – координатите $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ на $\overrightarrow{e_2}'$. Тогава координатите $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ на третия вектор $\overrightarrow{e_3}'$ можем да намерим по формулите

$$\alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1,\ \beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1,\ \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

Последното означава, че $\overrightarrow{e_3}' = \overrightarrow{e_1}' \times \overrightarrow{e_2}'$ и следователно тройката $(\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$ е дясна, такава каквато е и тройката $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

Като заместим (7.55) в (7.54), получаваме уравнението

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2q_1 x' + 2q_2 y' + 2q_3 z' + a_{44} = 0 \tag{7.57}$$

на повърхнината S относно координатната система $K' = O\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$. В него сме положили

$$q_i = a_{41}\alpha_i + a_{42}\beta_i + a_{43}\gamma_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7.58}$$

Ще продължим опростяването на уравнението (7.57) на S в зависимост от вида на λ_1, λ_2 и λ_3. Имаме следните възможности:

I. *И трите корена λ_1, λ_2 и λ_3 на* (7.56) *са различни от нула.* Тогава избираме нова (трета) ортонормирана координатна система $K'' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$, която се получава от K' чрез транслацията

$$x' = X + \alpha,\ y' = Y + \beta,\ z' = Z + \gamma, \tag{7.59}$$

като координатите (α, β, γ) на O' относно K' ще определим допълнително. Заместваме (7.59) в (7.57) и подреждаме по X, Y и Z. Получаваме

$$\begin{gathered}\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + 2(\lambda_1\alpha + q_1)X + \\ +2(\lambda_2\beta + q_2)Y + 2(\lambda_3\gamma + q_3)Z + a'_{44} = 0,\end{gathered} \tag{7.60}$$

където

$$a'_{44} = \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + \lambda_3\gamma^2 + 2q_1\alpha + 2q_2\beta + 2q_3\gamma + a_{44}. \tag{7.61}$$

Избираме

$$\alpha = -\frac{q_1}{\lambda_1},\ \beta = -\frac{q_2}{\lambda_2},\ \gamma = -\frac{q_3}{\lambda_3} \tag{7.62}$$

и уравнението (7.60) приема вида

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + a'_{44} = 0,\ (\lambda_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3). \tag{7.63}$$

II. *Единият от корените на* (7.56) *е равен на нула, а останалите два са различни от нула.* Да предположим, че $\lambda_3 = 0$, а $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Тогава (7.57) е

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2q_1 x' + 2q_2 y' + 2q_3 z' + a_{44} = 0. \tag{7.64}$$

Имаме два подслучая: $q_3 \neq 0$ и $q_3 = 0$.

II.1. $q_3 \neq 0$. Избираме нова (трета) ортонормирана координатна система $K'' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$, която се получава от K' чрез транслацията (7.59), като засега α, β и γ са неизвестни и ще ги определим допълнително. Заместваме (7.59) в (7.64). Получаваме

$$\begin{gathered} \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2(\lambda_1\alpha + q_1)X + \\ +2(\lambda_2\beta + q_2)Y + 2q_3 Z + a'_{44} = 0, \end{gathered} \tag{7.65}$$

където

$$a'_{44} = \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + 2q_1\alpha + 2q_2\beta + 2q_3\gamma + a_{44}. \tag{7.66}$$

Сега определяме α и β от равенствата $\lambda_1\alpha + q_1 = 0$, $\lambda_2\beta + q_2 = 0$, а γ – от анулирането на (7.66). Тогава (7.65) приема вида

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2q_3 Z = 0,\ (\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ q_3 \neq 0). \tag{7.67}$$

II.2. $q_3 = 0$. Избираме трета ортонормирана координатна система $K'' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$, която се получава от K' чрез транслацията

$$x' = X + \alpha,\ y' = Y + \beta,\ z' = Z, \tag{7.68}$$

като засега α и β са неизвестни. Заместваме (7.68) в (7.64) при $q_3 = 0$ и получаваме

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2(\lambda_1\alpha + q_1)X + 2(\lambda_2\beta + q_2)Y + a'_{44} = 0, \tag{7.69}$$

където

$$a'_{44} = \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + 2q_1\alpha + 2q_2\beta + a_{44}.$$

Полагаме $\alpha = -\dfrac{q_1}{\lambda_1}$, $\beta = -\dfrac{q_2}{\lambda_2}$ и (7.69) става

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a'_{44} = 0, \ (\lambda_1 \neq 0, \ \lambda_2 \neq 0). \tag{7.70}$$

III. *Два от характеристичните корени на* (7.56) *са равни на нула, а третият – различен от нула.* Нека сега $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, а $\lambda_1 \neq 0$. Повърхнината S има относно K' общо уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + 2q_1 x' + 2q_2 y' + 2q_3 z' + a_{44} = 0. \tag{7.71}$$

Възможни са два подслучая: $|q_2| + |q_3| \neq 0$ и $|q_2| + |q_3| = 0$.

III.1. $|q_2| + |q_3| \neq 0$. Избираме трета ортонормирана координатна система $K'' = O\overrightarrow{e_1}''\overrightarrow{e_2}''\overrightarrow{e_3}''$, която се получава от K' чрез въртене около оста Ox' на ъгъл φ, който ще определим допълнително. Трансформационните формули са

$$x' = x'', \ y' = y''\cos\varphi - z''\sin\varphi, \ z' = y''\sin\varphi + z''\cos\varphi,$$

и след заместването им в (7.71), получаваме

$$\begin{gathered} \lambda_1 x''^2 + 2q_1 x'' + 2(q_2\cos\varphi + q_3\sin\varphi)y'' + \\ +2(-q_2\sin\varphi + q_3\cos\varphi)z'' + a_{44} = 0. \end{gathered} \tag{7.72}$$

Избираме ъгъла φ така, че коефициентът пред z'' да се анулира, т.е. $-q_2\sin\varphi + q_3\cos\varphi = 0$. Оттук определяме

$$\cos\varphi = \frac{q_2}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{q_3}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2}}$$

и като заместим в (7.72), намираме уравнението

$$\lambda_1 x''^2 + 2q_1 x'' + 2\sqrt{q_2^2 + q_3^2}.y'' + a_{44} = 0 \tag{7.73}$$

на S относно K''.

Продължаваме опростяването на (7.73), като избираме четвърта ортонормирана координатна система $K''' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}''\overrightarrow{e_3}''$, която се получава от K'' с помощта на транслацията

$$x'' = X + \alpha,\ y'' = Y + \beta,\ z'' = Z, \tag{7.74}$$

като α и β ще определим допълнително. Заместването на (7.74) в (7.73) дава

$$\begin{aligned} &\lambda_1 X^2 + 2(\lambda_1\alpha + q_1)X + 2\sqrt{q_2^2 + q_3^2}.Y + \\ &+\lambda_1\alpha^2 + 2q_1\alpha + 2\sqrt{q_2^2 + q_3^2}.\beta + a_{44} = 0. \end{aligned} \tag{7.75}$$

Определяме α и β от равенствата

$$\lambda_1\alpha + q_1 = 0,\ \lambda_1\alpha^2 + 2q_1\alpha + 2\sqrt{q_2^2 + q_3^2}.\beta + a_{44} = 0$$

и (7.75) приема вида

$$\lambda_1 X^2 + 2\sqrt{q_2^2 + q_3^2}.Y = 0,\ (\lambda_1 \neq 0). \tag{7.76}$$

III.2. $q_2 = q_3 = 0$. От (7.71) следва

$$\lambda_1 x'^2 + 2q_1 x' + a_{44} = 0. \tag{7.77}$$

Избираме трета ортонормирана координатна система $K'' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$, която се получава от K' чрез транслацията

$$x' = X + \alpha,\ y' = Y,\ z' = Z, \tag{7.78}$$

където засега величината α е неопределена. Заместваме (7.78) в (7.77) и получаваме

$$\lambda_1 X^2 + 2(\lambda_1\alpha + q_1)X + a'_{44} = 0, \tag{7.79}$$

като $a'_{44} = \lambda_1\alpha^2 + 2q_1\alpha + a_{44}$. Определяме α от равенството $\lambda_1\alpha + q_1 = 0$ и (7.79) приема вида

$$\lambda_1 X^2 + a'_{44} = 0, \ (\lambda_1 \neq 0). \tag{7.80}$$

Получихме:

1) С помощта на подходящи ортогонална трансформация и транслация на координатната система K, общото уравнение (7.54) на повърхнината S от втора степен може да се приведе към едно от *метричните канонични уравнения* (7.63), (7.67), (7.70), (7.76) и (7.80).

След изследване на метричните канонични уравнения (7.63), (7.67), (7.70), (7.76) и (7.80) установяваме:

2) В $E_3^{\mathbb{C}}$ съществуват седемнадесет метрично нееквивалентни типа повърхнини от 2 ст. Това са повърхнините от 2 ст. със следните метрични канонични уравнения:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – *реален елипсоид*;
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ – *имагинерен елипсоид*;
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – *прост хиперболоид*;
4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – *двоен хиперболоид*;
5. $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$ – *елиптичен параболоид*;
6. $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$ – *хиперболичен параболоид*;
7. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ – *реален конус*;

8. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ – *имагинерен конус*;
9. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – *реален елиптичен цилиндър*;
10. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ – *имагинерен елиптичен цилиндър*;
11. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – *хиперболичен цилиндър*;
12. $x^2 = 2py$ – *параболичен цилиндър*;
13. $x^2 = a^2y^2$ – *двойка реални пресекателни равнини*;
14. $x^2 = -a^2y^2$ – *двойка конюговани имагинерни пресекателни равнини*;
15. $x^2 = a^2$ – *двойка реални успоредни равнини*;
16. $x^2 = -a^2$ – *двойка конюговани имагинерни успоредни равнини*;
17. $x^2 = 0$ – *двойка реални сливащи се равнини.*

Забележка 7.3.1 В случаите, когато не е посочен видът на координатната система K, ще считаме, че тя е афинна.

Задача 7.3.1 Дадени са повърхнините:
а) $S : x^2 + 2y^2 + z^2 + 4yz - 2xy - 6x + 2y + 3 = 0$;
б) $S : 2x^2 - 3z^2 + 2yz - 5zx + 4xy - 8x - 12y + 17z + 6 = 0$;
в) $S : x^2 - 5z^2 + 2yz + 3xy - 7x - 6y - 2z + 10 = 0$;
г) $S : x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 2yz + 2zx + 2xy + 4y - 10z + 4 = 0$;
д) $S : x^2 - 3z^2 + yz - 2zx + xy - 9x + y - 13z - 10 = 0$;
е) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx + 2xy + 2x + 2y - 2z + 1 = 0$.
Да се определи кои от тях са изродени и кои не. За изродените повърхнини да се намерят уравненията на равнините, на които те се разпадат.

Решение. а) Дискриминантата

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 14$$

на S е различна от нула и следователно повърхнината е неизродена.

б) Сега дискриминантата

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -\frac{5}{2} & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -6 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -3 & \frac{17}{2} \\ -4 & -6 & \frac{17}{2} & 6 \end{vmatrix}$$

има ранг 2 и следователно повърхнината S е изродена. За да намерим уравненията на равнините, на които се разпада, записваме уравнението ѝ във вида

$$2x^2 + (4y - 5z - 8)x - 3z^2 + 2yz - 12y + 17z + 6 = 0$$

и го решаваме като квадратно уравнение относно x. Получаваме

$$x = \frac{-4y + 5z + 8 \pm (4y - 7z + 4)}{4}$$

и следователно S се разпада на двете реални пресекателни равнини $\alpha_1 : 2x + z - 6 = 0$ и $\alpha_2 : x + 2y - 3z - 1 = 0$.

в) В този случай рангът на A е равен на 3 и следва, че повърхнината S е неизродена.

Отговор. г) S е неизродена; д) S се разпада на двете реални пресекателни равнини $\alpha_1 : x + y - 3z - 10 = 0$ и $\alpha_2 : x + z + 1 = 0$; е) S се разпада на двете сливащи се реални равнини $\alpha_1 = \alpha_2 : x + y - z + 1 = 0$.

Задача 7.3.2 Да се намерят координатите на общите точки на повърхнината S и правата g, ако:

а) $S : 4x^2 + y^2 + 9z^2 - 3yz + 5zx - 10x + 12z + 4 = 0$,
$g : x = 0, z = 0$;

б) $S : z^2 - yz + xy - 5x = 0$, $g : \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-10}{7}$;

в) $S : 5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6zx - 12xy + 12x - 36z = 0$,
$g : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-4}{1}$;

г) $S : x^2 - 2y^2 + z^2 - yz + 4zx - 2xy + 3x - 5z = 0$,
$g : \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{0}$;

д) $S : x^2 + 2z^2 - 3z + 1 = 0$, $g : x = 0, y + z = 0$.

Решение. а) Ако $M(x, y, z)$ е обща точка на S и g, координатите ѝ удовлетворяват системата

$$\left| \begin{array}{l} 4x^2 + y^2 + 9z^2 - 3yz + 5zx - 10x + 12z + 4 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

от уравненията им. Горната система е еквивалентна на системата

$$x = 0,\ y^2 + 4 = 0,\ z = 0$$

и следователно правата g пробожда повърхнината S в точките $M_1(0, 2i, 0)$ и $M_2(0, -2i, 0)$.

б) Полагаме

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-10}{7} = \rho.$$

Оттук намираме $x = -\rho$, $y = 5 + 3\rho$, $z = 10 + 7\rho$ и като заместим тези стойности в уравнението на S, получаваме квадратното уравнение

$$\rho^2 + 3\rho + 2 = 0,$$

което притежава корените $\rho_1 = -1$ и $\rho_2 = -2$. Следователно S и g имат две общи точки $M_1(1, 2, 3)$ и $M_2(2, -1, -4)$.

Отговор. в) g лежи върху S; г) $M(-3, 0, 0)$;

д) $M_1(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $M_2(0, -1, 1)$.

Задача 7.3.3 Да се намерят уравнения на праволинейните образуващи на повърхнината $S : y^2+2yz-zx+3xy+3x+2y = 0$, които минават през началото O на K.

Решение. Всяка права през началото O на K има параметрични уравнения от вида $x = as$, $y = bs$, $z = cs$, където $|a| + |b| + |c| \neq 0$. Заместваме тези стойности в уравнението на S и получаваме

$$(b^2 + 2bc - ac + 3ab)s^2 + (3a + 2b)s = 0. \tag{7.81}$$

Тъй като търсените прави лежат върху S, равенството (7.81) трябва да бъде удовлетворено за всяка стойност на s, откъдето следва, че

$$b^2 + 2bc - ac + 3ab = 0, \quad 3a + 2b = 0.$$

Оттук намираме $a' = 0$, $b' = 0$, $c' \neq 0$ и $a'' = -16\rho$, $b'' = 24\rho$, $c'' = 9\rho$, $\rho \neq 0$ и следователно S има през O две праволинейни образуващи: $g' : x = 0,\ y = 0$ и $g'' : x = -16s,\ y = 24s,\ z = 9s$.

Задача 7.3.4 Да се намерят уравнения на праволинейните образуващи на повърхнината $S : x^2+y^2+5z^2+2yz-2zx-6xy-12 = 0$, които са успоредни на правата $g : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

Упътване. Произволна образуваща g на S има канонични уравнения от вида $x = 2y + p,\ z = -y + q$, където p и q са параметри. Заместете тези стойности за x и z в уравнението на S и използвайте, че полученото равенство трябва да бъде удовлетворено за всяко y.

Отговор. $g' : x = 2y - \sqrt{12},\ z = -y,\ g'' : x = 2y + \sqrt{12}$, $z = -y$.

Задача 7.3.5 Да се намерят уравнения на праволинейните образуващи на повърхнината S, ако:

а) $S : zx + xy + x + y + 1 = 0$;

б) $S : x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 6 = 0$.

Решение. а) Уравнението на S може да се представи във вида $(x + 1)(y + 1) + xz = 0$. Оттук следва, че повърхнината S има две системи праволинейни образуващи $\sigma_1 : \lambda_1(x + 1) = \mu_1 z,\ \mu_1(y + 1) = -\lambda_1 x$ и $\sigma_2 : \lambda_2(x + 1) = \mu_2 x,\ \mu_2(y + 1) = -\lambda_2 z$, където (λ_1, μ_1) и (λ_2, μ_2) са произволни ненулеви двойки комплексни числа.

б) **Упътване.** Представете уравнението на S във вида $(x - y - z)^2 = 2(\sqrt{3} + y - z)(\sqrt{3} - y + z)$.

Отговор. б) $\sigma : \lambda(x-y-z) = \mu(\sqrt{3}+y-z),\ \mu(x-y-z) = 2\lambda(\sqrt{3} - y + z)$.

Задача 7.3.6 Спрямо дясната ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ в пространството е дадена повърхнината $S : 2x^2 + 9y^2 + 2z^2 + 4yz - 4xy + 4x + 2y - 4z - 1 = 0$. Да се намерят:

а) метричното канонично уравнение на S и последователните координатни трансформации, чрез които даденото уравнение се привежда в канонично;

б) координатите относно K на върховете на S;

в) уравнения относно K на осите и на главните равнини на S.

Решение. а) Характеристичното уравнение на S е

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = 0$$

и има корени $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 10$. От системата

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \\ 2\beta_1 + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \end{array} \right.$$

намираме $\alpha_1 = 2\rho$, $\beta_1 = \rho$, $\gamma_1 = -2\rho$, $\rho = \pm\dfrac{1}{3}$. Избираме $\rho = \dfrac{1}{3}$ и получаваме координатите

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}, \quad \beta_1 = \frac{1}{3}, \quad \gamma = -\frac{2}{3} \tag{7.82}$$

на единичния собствен вектор $\overrightarrow{e_1}'$, съответстващ на корена $\lambda_1 = 1$.

Аналогично, от системата

$$\left| \begin{array}{l} \beta_2 = 0 \\ -\alpha_2 + \gamma_2 = 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \end{array} \right.$$

намираме координатите

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{7.83}$$

на единичния собствен вектор $\overrightarrow{e_2}'$, съответстващ на корена $\lambda_2 = 2$.

Координатите на третия собствен вектор $\overrightarrow{e_3}'$ определяме от условието $\overrightarrow{e_3}' = \overrightarrow{e_1}' \times \overrightarrow{e_2}'$. Имаме

$$\alpha_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad \beta_3 = -\frac{4}{3\sqrt{2}}, \quad \gamma = -\frac{1}{3\sqrt{2}}. \tag{7.84}$$

Заместваме (7.82), (7.83) и (7.84) в (7.55) и получаваме трансформационните формули за преминаване от координатната система $K' = O\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$ към $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$:

$$(7.85)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{2}{3}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{3\sqrt{2}}z' \\ y &= \frac{1}{3}x' \qquad\quad - \frac{4}{3\sqrt{2}}z' \\ z &= -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{3\sqrt{2}}z'. \end{aligned}$$

С помощта на (7.58) пресмятаме

$$q_1 = 2.\frac{2}{3} + 1.\frac{1}{3} - 2.\left(-\frac{2}{3}\right) = 3,$$

$$q_2 = 2.\frac{1}{\sqrt{2}} + 1.0 - 2.\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$q_3 = 2.\frac{1}{3\sqrt{2}} + 1.\left(-\frac{4}{3\sqrt{2}}\right) - 2.\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = 0$$

и като заместим в (7.57), намираме общото уравнение на S относно K':

$$(7.86)\qquad x'^2 + 2y'^2 + 10z'^2 + 6x' - 1 = 0.$$

За да продължим опростяването на (7.86), избираме нова (трета) ортонормирана координатна система $K'' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$, която се получава от K' чрез транслацията

$$(7.87)\qquad x' = X + \alpha, \quad y' = Y + \beta, \quad z' = Z + \gamma.$$

Тук (α, β, γ) са координатите на O' относно K' и се пресмятат съгласно (7.62), т.е. $\alpha = -3$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Тогава транслацията (7.87) приема вида

$$(7.88)\qquad x' = X - 3, \quad y' = Y, \quad z' = Z.$$

С помощта на (7.61) намираме $a'_{44} = -10$ и според (7.63) търсеното канонично уравнение на S е

$$X^2 + 2Y^2 + 10Z^2 - 10 = 0,$$

което можем да запишем и във вида

$$\frac{X^2}{10} + \frac{Y^2}{5} + Z^2 = 1.$$

Съгласно 2) повърхнината S е *реален* (*триосен*) *елипсоид*.

б) Върховете на елипсоида S имат относно K'' координати

$$A_1(-\sqrt{10}, 0, 0),\ A_2(\sqrt{10}, 0, 0),\ B_1(0, -\sqrt{5}, 0),$$

$$B_2(0, \sqrt{5}, 0),\ C_1(0, 0, -1),\ \ C_2(0, 0, 1).$$

Като ги заместим в (7.88), получаваме координатите на върховете относно K':

$$A_1(-\sqrt{10} - 3, 0, 0),\ A_2(\sqrt{10} - 3, 0, 0),\ B_1(-3, -\sqrt{5}, 0),$$

$$B_2(-3, \sqrt{5}, 0),\ C_1(-3, 0, -1),\ \ C_2(-3, 0, 1).$$

Най-после, заместването в (7.85) дава координатите на върховете на елипсоида спрямо първоначалната координатна система K. Имаме

$$A_1(-\frac{2\sqrt{10}+6}{3}, -\frac{\sqrt{10}+3}{3}, \frac{2\sqrt{10}+6}{3}),$$

$$A_2(\frac{2\sqrt{10}-6}{3}, \frac{\sqrt{10}-3}{3}, \frac{-2\sqrt{10}+6}{3}),$$

$$B_1(-\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}),\ B_2(\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -1, \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}),$$

$$C_1(-\frac{1+6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}, \frac{4-3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}, \frac{1+6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}),$$

$$C_2(\frac{1-6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}, -\frac{4+3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}, \frac{-1+6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}).$$

в) От (7.85) и (7.88) намираме формулите за преминаване от K към K'':

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3}(2x+y-2z+9), \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x+z), \\ Z &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(x-4y-z). \end{aligned} \tag{7.89}$$

Главните равнини δ_1, δ_2, δ_3 на елипсоида са координатните равнини $O'YZ$, $O'ZX$, $O'XY$ и следователно спрямо K'' те имат съответно уравнения

$$\delta_1 : X = 0,\ \delta_2 : Y = 0,\ \delta_3 : Z = 0. \tag{7.90}$$

Тогава от (7.89) и (7.90) намираме уравненията им относно K:

$$\begin{aligned} &\delta_1 : 2x+y-2z+9 = 0, \\ &\delta_2 : x+z = 0, \\ &\delta_3 : x-4y-z = 0. \end{aligned} \tag{7.91}$$

Главните равнини δ_1, δ_2 и δ_3 се пресичат две по две в осите на елипсоида. Тогава, ако приемем, че

$$o_1 = \delta_2 \cap \delta_3,\ o_2 = \delta_3 \cap \delta_1,\ o_3 = \delta_1 \cap \delta_2,$$

от (7.91) следва

$$o_1 : \left| \begin{array}{l} x+z=0 \\ x-4y+z=0, \end{array} \right. \quad o_2 : \left| \begin{array}{l} x-4y+z=0 \\ 2x+y-2z+9=0, \end{array} \right.$$

$$o_3 : \left| \begin{array}{l} 2x+y-2z+9=0 \\ x+z=0, \end{array} \right.$$

Задача 7.3.7 Същите изисквания, както в задача 7.3.6 за повърхнините:

а) $S: 4x^2+5y^2+6z^2+4yz-4xy+4x+6y+4z-27=0$;

б) $S: x^2+5y^2+z^2+2yz+6zx+2xy-2x+6y-10z=0$;

в) $S: 5x^2+6y^2+7z^2+4yz-4xy-10x+8y+14z-6=0$.

Отговор. а) $S: 2X^2+5Y^2+8Z^2-32=0$; $x=\frac{1}{3}(2x'+2y'+z')$, $y=\frac{1}{3}(2x'-y'-2z')$, $z=\frac{1}{3}(-x'+2y'-2z')$, $x'=X-\frac{4}{3}$, $y'=Y-\frac{1}{3}$, $z'=Z+\frac{1}{3}$; $A_1(\frac{5}{3},\frac{5}{3},-\frac{4}{3})$, $A_2(-\frac{11}{3},-\frac{11}{3},\frac{4}{3})$, $B_1(-\frac{3\sqrt{5}+8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}},\frac{-3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}},-\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}})$, $B_2(\frac{-3\sqrt{5}+8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}},-\frac{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}},\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}})$, $C_1(-\frac{1}{3},-\frac{7}{3},-\frac{4}{3})$, $C_2(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})$; $\delta_1: 2x+2y-z+4=0$, $\delta_2: 2x-y+2z+1=0$, $\delta_3: x-2y-2z-1=0$,

$$o_1: \left|\begin{array}{l} 2x-y+2z+1=0 \\ x-2y-2z-1=0, \end{array}\right. \quad o_2: \left|\begin{array}{l} x-2y-2z-1=0 \\ 2x+2y-z+4=0, \end{array}\right.$$

$$o_3: \left|\begin{array}{l} 2x+2y-z+4=0 \\ 2x-y+2z+1=0. \end{array}\right.$$

б) $S: 3X^2+6Y^2-2Z^2-5=0$; $x=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'-\frac{1}{\sqrt{2}}z'$, $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{2}{\sqrt{6}}y'$, $z=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'$, $x'=X+\sqrt{3}$, $y'=Y$, $z'=Z-\sqrt{2}$; $A_1(\frac{6-\sqrt{5}}{3},-\frac{3-\sqrt{5}}{3},-\frac{\sqrt{5}}{3})$, $A_2(\frac{6+\sqrt{5}}{3},-\frac{3+\sqrt{5}}{3},\frac{\sqrt{5}}{3})$, $B_1(\frac{12-\sqrt{5}}{6},-\frac{6+\sqrt{5}}{6},-\frac{\sqrt{5}}{6})$, $B_2(\frac{12+\sqrt{5}}{6},\frac{-6+\sqrt{5}}{6},\frac{\sqrt{5}}{6})$; $\delta_1: x-y+z-3=0$,

$\delta_2 : x + 2y + z = 0,\ \delta_3 : -x + z + 2 = 0,$

$$o_1 : \left| \begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ -x + z + 2 = 0, \end{array} \right. \qquad o_2 : \left| \begin{array}{l} -x + z + 2 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0, \end{array} \right.$$

$$o_3 : \left| \begin{array}{l} x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y + z = 0. \end{array} \right.$$

в) $S : X^2 + 2Y^2 + 3Z^2 - 6 = 0;\ x = \dfrac{1}{3}(2x' + 2y' + z'),$
$y = \dfrac{1}{3}(2x' - y' - 2z'),\ z = \dfrac{1}{3}(-x' + 2y' - 2z'),$
$x' = X + 1,\ y' = Y,\ z' = Z + 1;\ A_1(\dfrac{-2\sqrt{6} + 3}{3}, -\dfrac{2\sqrt{6}}{3}, \dfrac{\sqrt{6} - 3}{3}),$
$A_2(\dfrac{2\sqrt{6} + 3}{3}, \dfrac{2\sqrt{6}}{3}, -\dfrac{\sqrt{6} + 3}{3}),\qquad B_1(\dfrac{-2\sqrt{3} + 3}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{2\sqrt{3} + 3}{3}),$
$B_2(\dfrac{2\sqrt{3} + 3}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3} - 3}{3}),\qquad C_1(\dfrac{\sqrt{2} + 3}{3}, -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}, -\dfrac{2\sqrt{2} + 3}{3}),$
$C_2(\dfrac{-\sqrt{2} + 3}{3}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \dfrac{2\sqrt{2} - 3}{3});\ \delta_1 : 2x + 2y - z - 3 = 0,$
$\delta_2 : 2x - y + 2z = 0,\ \delta_3 : x - 2y - 2z - 3 = 0,$

$$o_1 : \left| \begin{array}{l} 2x - y + 2z = 0 \\ x - 2y - 2z - 3 = 0, \end{array} \right. \qquad o_2 : \left| \begin{array}{l} x - 2y - 2z - 3 = 0 \\ 2x + 2y - z - 3 = 0, \end{array} \right.$$

$$o_3 : \left| \begin{array}{l} 2x + 2y - z - 3 = 0 \\ 2x - y + 2z = 0. \end{array} \right.$$

Задача 7.3.8 Спрямо дясната ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ в пространството са дадени повърхнините:

а) $S : x^2 - 3z^2 - 4yz - 4y + 2z + 5 = 0;$

б) $S : x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 10yz + 2x + 2y + 2z + 3 = 0.$

Да се намерят метричните канонични уравнения на повърхнините и последователните координатни трансформации, чрез които дадените уравнения се преобразуват в канонични.

Решение. а) Характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+3\lambda-4) = 0$$

на S има корени $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. На простия корен $\lambda_1 = -4$ съответства единичният собствен вектор $\overrightarrow{e_1}'$ с координати

$$\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

На двукратния корен $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ съответвстват безбройно много единични вектори, чиито координати удовлетворяват системата

$$\beta_2 + 2\gamma_2 = 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1.$$

Очевидно можем да изберем за $\overrightarrow{e_2}'$ вектора с координати

$$\alpha_2 = 0,\ \beta_2 = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \gamma_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тогава от условието $\overrightarrow{e_3}' = \overrightarrow{e_1}' \times \overrightarrow{e_2}'$ намираме

$$\alpha_3 = -1,\ \beta_3 = 0,\ \gamma_3 = 0.$$

Така новата координатната система $K' = O\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$ е вече определена и ортогоналната трансформация

$$\begin{aligned} x &= -z', \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y', \\ z &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y', \end{aligned}$$

преобразува даденото уравнение на S в уравнението

$$-4x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2\sqrt{5}y' + 5 = 0. \tag{7.92}$$

Избираме трета ортонормирана координатна система $K'' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$, която се получава от K' чрез транслацията

$$x' = X + \alpha,\ y' = Y + \beta,\ z' = Z + \gamma, \tag{7.93}$$

където α, β и γ определяме от (7.61). Имаме $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{5}$, $\gamma = 0$ и следователно (7.93) стават

$$x' = X,\ y' = Y + \sqrt{5},\ z' = Z. \tag{7.94}$$

Заместваме (7.94) в (7.92) и получаваме каноничното уравнение

$$-4X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

от което заключаваме, че S е реален (ротационен) конус.

Отговор. б) $-9X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$; $x = z',\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y'),\ x' = X,\ y' = Y - \sqrt{2},\ z' = Z - 1.$

Задача 7.3.9 Спрямо дясната ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е дадена повърхнината $S : 5x^2 + 8y^2 + 4xy + 2x + 44y - 36z + 65 = 0$. Да се намери метричното канонично уравнение на S и последователните координатни трансформации, чрез които даденото уравнение се привежда в канонично.

Решение. Характеристичното уравнение на S

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 13\lambda + 36) = 0$$

има корени $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 0$. По познатия ни вече начин избираме втора ортонормирана координатна система

$K' = O\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$ със същото начало O и координатни вектори, съответвстващи на корените на характеристичното уравнение. Имаме

$$\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \beta_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}},\ \gamma_1 = 0,$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \beta_2 = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \gamma_2 = 0,$$
$$\alpha_3 = 0,\ \beta_3 = 0,\ \gamma_3 = 1$$

и следователно трансформационните формули за преминаване от K' към K са

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y', \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y', \\ z &= z'. \end{aligned} \tag{7.95}$$

Като заместим (7.95) в даденото уравнение на S, получаваме

$$4x'^2 + 9y'^2 + 2q_1x' + 2q_2y' + 2q_3z' + 65 = 0,$$

където с $q_i,\ i = 1, 2, 3$, са означени изразите (7.58). От (7.58) намираме $q_1 = -4\sqrt{5}$, $q_2 = 9\sqrt{5}$, $q_3 = -18$ и следователно S има относно K' уравнение

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8\sqrt{5}x' + 18\sqrt{5}y' - 36z' + 65 = 0. \tag{7.96}$$

Избираме трета ортонормирана координатна система $K'' = O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$, която се получава от K' чрез транслацията

$$x' = X + \alpha,\ y' = Y + \beta,\ z' = Z + \gamma, \tag{7.97}$$

където координатите α, β и γ на O' относно K' засега са неизвестни. Заместваме (7.97) в (7.96). Получаваме

$$\begin{aligned} &4X^2 + 9Y^2 + 8(\alpha - \sqrt{5})X + 18(\beta + \sqrt{5})Y - 36Z+ \\ &+4\alpha^2 + 9\beta^2 - 8\sqrt{5}\alpha + 18\sqrt{5}\beta - 36\gamma + 65 = 0. \end{aligned} \tag{7.98}$$

От (7.98) е ясно, че можем да изберем α, β и γ така, че коефициентите пред X и Y и свободният член да станат равни на нула, т.е.

$$\begin{aligned}&\alpha-\sqrt{5}=0, \quad \beta+\sqrt{5}=0,\\&4\alpha^2+9\beta^2-8\sqrt{5}\alpha+18\sqrt{5}\beta-36\gamma+65=0.\end{aligned}$$

Получената система има решение $\alpha=\sqrt{5}$, $\beta=-\sqrt{5}$, $\gamma=0$ и трансформационните формули (7.98) приемат вида

$$x'=X+\sqrt{5},\ y'=Y-\sqrt{5},\ z'=Z.$$

За повърхнината S получаваме каноничното уравнение

$$\frac{X^2}{\frac{9}{2}}+Y^2=2Z$$

и съгласно 2) тя е *елиптичен параболоид*.

Задача 7.3.10 Същите изисквания, както в задача 7.3.9 за повърхнините:

а) $S: 3x^2+4xy+8x+8y-4z=0$;
б) $S: 4x^2+2y^2+3z^2-4yz+4zx+6x+4y+8z+2=0$;
в) $S: x^2+y^2+z^2-2xy-4x+4y+3=0$;
г) $S: -x^2+y^2+4yz+4zx+4x+10y+12z+6=0$;
д) $S: x^2+4y^2+z^2+4xy+2x+4y+1=0$;
е) $S: x^2+y^2-z^2+2xy=0$.

Отговор. а) $S: 4X^2-Y^2=4Z$; $x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x'-\dfrac{1}{\sqrt{5}}y'$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x'+\dfrac{2}{\sqrt{5}}y'$, $z=z'$, $x'=X-\dfrac{3}{\sqrt{5}},\ y'=Y+\dfrac{4}{\sqrt{5}},\ z'=Z-1$;

б) $S: X^2+2Y^2=2Z$; $x=\dfrac{1}{3}(2x'+2y'+z')$, $y=\dfrac{1}{3}(2x'-y'-2z')$, $z=\dfrac{1}{3}(-x'+2y'-2z')$, $x'=X-\dfrac{2}{3},\ y'=Y-\dfrac{2}{3},\ z'=Z-\dfrac{1}{3}$;

в) $S: X^2+2Y^2=1$; $x=\dfrac{1}{2}(y'+z')$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-y'+z')$, $z=x'$, $x'=X,\ y'=Y+\sqrt{2},\ z'=Z$;

г) $S: X^2-Y^2=5$; $x=\dfrac{1}{3}(x'+2y'-2z')$, $y=\dfrac{1}{3}(2x'+y'+2z')$, $z=\dfrac{1}{3}(2x'-2y'-z')$, $x'=X-\dfrac{8}{3},\ y'=Y-\dfrac{1}{3},\ z'=Z$;

д) $S: X^2=-5Y^2$; $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}y'-\dfrac{2}{\sqrt{5}}z'$, $y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{5}}z'$, $z=x'$, $x'=X,\ y'=Y-\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ z'=Z$;

е) $S: x'^2=\dfrac{1}{2}y'^2$; $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+z')$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-z')$, $z=y'$.

Задача 7.3.11 Спрямо дясната ортонормирана координатна система $K=O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е дадена повърхнината $S: x^2+9y^2-6xy-50x-50y+15z+100=0$. Да се намери метричното канонично уравнение на S и последователните координатни трансформации, чрез които даденото уравнение се привежда в канонично.

Решение. Характеристичното уравнение на S

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 9-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda-10)=0$$

има корени $\lambda_1=10$, $\lambda_2=\lambda_3=0$. На корена $\lambda_1=10$ съответства собственият единичен вектор $\overrightarrow{e_1}'$, за чиито координати намираме $\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\beta_1=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\gamma_1=0$. От системата $\alpha_2-3\beta_2=0$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ определяме координатите на собствения единичен вектор $\overrightarrow{e_2}'$, съответстващ на двойния корен $\lambda_2=\lambda_3=0$. Можем да изберем $\alpha_2=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\gamma_2=0$. Третият собствен единичен вектор $\overrightarrow{e_3}'$ е векторно произведение на $\overrightarrow{e_1}'$ и $\overrightarrow{e_2}'$

и следователно има координати $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$, $\gamma_3 = 1$. Тогава ортогоналната трансформация

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y'),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' + y'),$$

$$z = z'$$

привежда даденото уравнение на S в уравнението

$$10x'^2 + 2q_1x' + 2q_2y' + 2q_3z' + 100 = 0, \tag{7.99}$$

където

$$q_1 = -25.\frac{1}{\sqrt{10}} - 25.\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{15}{2}.0 = 5\sqrt{10},$$

$$q_2 = -25.\frac{3}{\sqrt{10}} - 25.\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{15}{2}.0 = -10\sqrt{10},$$

$$q_3 = -25.0 - 25.0 + \frac{15}{2}.1 = \frac{15}{2}.$$

Като заместим тези стойности в (7.99), получаваме уравнението на S относно координатната система $K' = O\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$:

$$2x'^2 + 2\sqrt{10}x' - 4\sqrt{10}y' + 3z' + 20 = 0. \tag{7.100}$$

Избираме трета ортонормирана координатна система $K'' = O\overrightarrow{e_1}''\overrightarrow{e_2}''\overrightarrow{e_3}''$, която се получава от K' с ротация около оста Ox' на ъгъл φ, който ще определим допълнително. Трансформационните формули са

$$x' = x'',$$
$$y' = y''\cos\varphi - z''\sin\varphi,$$
$$z' = y''\sin\varphi + z''\cos\varphi$$

и след заместването им в (7.100), получаваме

$$\begin{aligned} 2x''^2 + 2\sqrt{10}x'' + (-4\sqrt{10}\cos\varphi + 3\sin\varphi)y'' + \\ +(4\sqrt{10}\sin\varphi + 3\cos\varphi)z'' + 20 = 0. \end{aligned} \tag{7.101}$$

Избираме ъгъла φ така, че коефициентът пред z'' да се анулира, т.е. $4\sqrt{10}\sin\varphi + 3\cos\varphi = 0$. Оттук получаваме

$$\cos\varphi = -\frac{4\sqrt{10}}{13}, \quad \sin\varphi = \frac{3}{13}$$

и като заместим в (7.101), намираме уравнението

$$2x''^2 + 2\sqrt{10}x'' + 13y'' + 20 = 0 \tag{7.102}$$

на S относно K''.

Избираме четвърта ортонормирана координатна система $K''' = O'\overrightarrow{e_1}''\overrightarrow{e_2}''\overrightarrow{e_3}''$, която се получава от K'' с помощта на транслацията

$$x'' = X + \alpha,\ y'' = Y + \beta,\ z'' = Z, \tag{7.103}$$

като α и β ще определим допълнително. Заместваме (7.103) в (7.102). Получаваме

$$2X^2 + 2(2\alpha + \sqrt{10})X + 13Y + 2\alpha^2 + 2\sqrt{10}\alpha + 13\beta + 20 = 0. \tag{7.104}$$

Определяме α и β така, че коефициентът пред X и свободният член в (7.104) да се анулират, т.е.

$$2\alpha + \sqrt{10} = 0, \quad 2\alpha^2 + 2\sqrt{10}\alpha + 13\beta + 20 = 0.$$

Оттук намираме $\alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$, $\beta = -\dfrac{15}{13}$ и следователно трансформационните формули (7.103) приемат вида

$$x'' = X - \frac{\sqrt{10}}{2},\ y'' = Y - \frac{15}{13},\ z'' = Z. \tag{7.105}$$

От (7.104) следва, че повърхнината S има каноничното уравнение
$$X^2=-\frac{13}{2}Y$$
и съгласно 2) е *параболичен цилиндър.*

Задача 7.3.12 Същите изисквания, както в задача 7.3.11 за повърхнините:

а) $S: 4x^2+9y^2-12xy+2x+10y+1=0$;
б) $S: 4x^2+y^2+4z^2-4yz+8zx-4xy-12x-12y+6z=0$;
в) $S: x^2+y^2+4z^2-4yz+4zx-2xy-12x+12y-24z+6=0$;
г) $S: 4x^2+y^2+9z^2-6yz-12zx+4xy+4x+2y-6z+1=0$.

Отговор. а) $S: X^2=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}Y^2$; $x=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(2x'+3y')$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(-3x'+2y')$, $z=z'$, $x'=X+\dfrac{1}{\sqrt{13}},\ y'=Y,\ z'=Z$;

б) $S: x''^2=2y''$; $x=\dfrac{2}{3}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}z'$, $y=-\dfrac{1}{3}x'+\dfrac{4}{3\sqrt{2}}z'$, $z=\dfrac{2}{3}x'-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}z'$, $x'=x''$, $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y''-z'')$, $z'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y''+z'')$;

в) $S: X^2=5$; $x=\dfrac{1}{\sqrt{6}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'-\dfrac{1}{\sqrt{3}}z'$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{3}}z'$, $z=\dfrac{2}{\sqrt{6}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{3}}z'$, $x'=X+\sqrt{6},\ y'=Y,\ z'=Z$;

г) $S: X^2=0$; $x=\dfrac{2}{\sqrt{14}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y'-\dfrac{6}{\sqrt{70}}z'$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{14}}x'-\dfrac{2}{\sqrt{5}}y'-\dfrac{3}{\sqrt{70}}z'$, $z=-\dfrac{3}{\sqrt{14}}x'-\dfrac{5}{\sqrt{70}}z'$, $x'=X-\dfrac{1}{\sqrt{14}},\ y'=Y,\ z'=Z$.

Литература

[1] **Апатенок, Р. Ф., А. М. Маркина, В. Б. Хейнман**, Сборник задач по линейной алгебре и аналитичной геомитрии, *Вышейшая школа, Минск*, 1990.
[2] **Борисов, А., Г. Станилов**, Ръководство по аналитична геометрия, *Университетско издателство „Св. Кл. Охридски“, София*, 1991.
[3] **Борисов, А.**, Ръководство за решаване на задачи по аналитична геометрия, *Университетско издателство „Н. Рилски“, Благоевград*, 1993.
[4] **Борисов, А., И. Гюдженов**, Линейна алгебра и аналитична геометрия, *Университетско издателство „Н. Рилски“, Благоевград*, 1995.
[5] **Гаврилов, М., Г. Станилов**, Линейна алгебра и аналитична геометрия, *Наука и изкуство, София*, 1991.
[6] **Гьонов, А., Н. Стоев**, Сборник от задачи по аналитична геометрия, *Наука и изкуство, София*, 1988.
[7] **Дадаян, А. А., Е. С. Масалова**, Сборник задач по аналитической геометрии и елементам линейной алгебры, *Вышейшая школа, Минск*, 1982.
[8] **Дочев, К., Д. Димитров, Т. Кирпикова**, Ръководство зо упражнения по висша алгебра, *Наука и изкуство, София*, 1974.
[9] **Кузнецов, Л. А.** Сборник заданий по высшей математике, *Высшая школа, Москва*, 1983.
[10] **Проскуряков, И. В.**, Сборник задач по линейной алгебре,

Наука, Москва, 1984.

[11] **Топенчаров, В., Н. Стоянов, М. Илиев, К. Стоева, В. Чалъков**, Сборник от задачи по висша математика, I ч., *Техника, София*, 1970.

[12] **Фадеев, Д. К., И. С. Соминский**, Сборник заданий по высшей алгебре, *Наука, Москва*, 1968.

[13] **Шнеперман, Л. Б.**, Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях, *Вышейшая школа, Минск*, 1986.

[14] **Шнеперман, Л. Б.**, Сборник задач по алгебре и теории чисел, *Вышейшая школа, Минск*, 1982.