1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

−2x3=4−3x4

−x2=−2−x3−5x4=−2−(−2+1,5x4)−5x4=−6,5x4

{x1+x2−x3−2x4=0,

{2x1+x2−x3+x4=−2,

{x1+x2−3x3+x4=4.

Решение

(1 1 -1 -2 | 0)

(2 1 -1 1 | -2)

(1 1 -3 1 | 4)

Умножим первую строку на -2 и сложим со второй

(1 1 -1 -2 | 0)

(0 1 -1 5 | -2)

(1 1 -3 1 | 4)

Умножим первую строку на -1 и сложим с третьей

(1 1 -1 -2 | 0)

(0 1 -1 5 | -2)

(0 0 -2 3 | 4)

{x1+x2−x3−2x4=0,

{0x1+x2−x3+5x4=−2,

{0x1+0x2−2x3+3x4=4.

−2x3 = 4−3x4

x3 = −2+1,5x4

−x2 = −2−x3−5x4 = −2−(−2+1,5x4)−5x4 = −6,5x4

x1 = −x2+x3+2x4 = −6,5x4−2+1,5x4+2x4 = −3x4−2

2. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:

а) {3x1−x2+x3=4,

{2x1−5x2−3x3=−17,

{x1+x2−x3=0;

Решение

(3 -1 1 | 4)

(2 -5 -3 | -17)

(1 1 -1 | 0)

Умножим 1-ую строку на (-2). Умножим 2-ую строку на (3). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

(0 -13 -11 | -59)

(2 -5 -3 | -17)

(1 1 -1 | 0)

Умножим 2-ую строку на (-1). Умножим 3-ую строку на (2). Добавим 3-ую строку к 2-ой:

(0 -13 -11 | -59)

(0 7 1 | 17)

(1 1 -1 | 0)

Умножим 1-ую строку на (7). Умножим 2-ую строку на (13). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

(0 0 -64 | -129)

(0 7 1 | 17)

(1 1 -1 | 0)

Ранг системы = 3

Матрица А:

(0 0 -64)

(0 7 1)

(1 1 -1)

Ранг матрицы А = 3

Ранг системы = Ранг матрицы А = 3 => система совместная

б) {2x1−4x2+6x3=1,

{x1−2x2+3x3=−2,

{3x1−6x2+9x3=5;

Решение

(2 -4 6 | 1)

(1 -2 3 | -2)

(3 -6 9 | 5)

Система не совместна т. к. числа в матрице А пропорциональны и она имеет ранг=1.

в) {x1+2x2+5x3=4,

{3x1+x2−8x3=−2.

Решение

(1 2 5 | 4)

(3 1 -8 | -2)

Умножим 1-ую строку на (-3). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

(0 -5 -23 | -14)

(3 1 -8 | -2)

Ранг системы = 2

Матрица А:

(0 -5 -23)

(3 1 -8)

Ранг матрицы А = 2

Ранг системы = Ранг матрицы А = 2 => система совместная

3. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

~ (1 3 -2 4 | 3)

A = (0 5 0 1 | 2)

(0 0 3 0 | 4)

(0 0 0 2 | 1)

Ранг системы = 4

Матрица А:

(1 3 -2 4)

(0 5 0 1)

(0 0 3 0)

(0 0 0 2)

Ранг матрицы А = 4

Ранг системы = Ранг матрицы А = 4 => система совместная

4. Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

~ ( 1 2 3 | a)

A = (4 5 6 | b)

(7 8 9 | c)

Найти соотношение между параметрами a, b и c, при которых система является несовместной.

1. Решить систему уравнений методом Крамера:

а) {x1−2x2=1

{3x1−4x2=7

detA = |1 -2| = 1 \* (-4) – 3 \* (-2) = 2

|3 -4|

detA1 = |1 -2| = 1 \* (-4) - (-2) \* 7 = 10

|7 -4|

detA2 = |1 1| = 1 \* 7 -1 \* 3 = 4

|3 7|

x1 = detA1/detA = 10/2 = 5

x2 = detA2/detA = 4/2 = 2

б) {2x1−x2+5x3=10

{x1+x2−3x3=−2

{2x1+4x2+x3=1

|2 -1 5|

detA = |1 1 -3| = 2·1·1 + (-1)·(-3)·2 + 5·1·4 – 5·1·2 – 2·(-3)·4 - (-1)·1·1 = 2 + 6 + 20 –

|2 4 1|

- 10 + 24 + 1 = 43

|10 -1 5|

detA1 = |-2 1 -3| = 10·1·1 + (-1)·(-3)·1 + 5·(-2)·4 – 5·1·1 – 10·(-3)·4 - (-1)·(-2)·1 = 10 +

|1 4 1|

+ 3 – 40 – 5 + 120 – 2 = 86

|2 10 5|

detA2 = |1 -2 -3| = 2·(-2)·1 + 10·(-3)·2 + 5·1·1 – 5·(-2)·2 – 2·(-3)·1 – 10·1·1 = -4 – 60 +

|2 1 1|

+ 5 + 20 + 6 – 10 = -43

|2 -1 10|

detA3 = |1 1 -2| = 2·1·1 + (-1)·(-2)·2 + 10·1·4 – 10·1·2 – 2·(-2)·4 - (-1)·1·1 = 2 + 4 +

|2 4 1|

+ 40 – 20 + 16 + 1 = 43

x1 = detA1/detA = 86/43 = 2

x2 = detA2/detA = -43/43 = -1

x3 = detA3/detA = 43/43 = 1

2\*. Найти L-матрицу LU-разложения для матрицы коэффициентов:

а)

(1 2 4)

(2 9 12)

(3 26 30)

Решение

Умножаем первую строчку на 2, чтобы избавится от 2

(1 2 4)

(0 5 4)

(3 26 30)

Умножаем первую строчку на 3, чтобы избавится от 3

(1 2 4)

(0 5 4)

(0 20 18)

Умножаем вторую строчку на 4, чтобы избавится от 20

(1 2 4)

(0 5 4)

(0 0 2)

(1 0 0)

Матрица L = (2 1 0)

(3 4 1)

б)

(1 1 2 4)

(2 5 8 9)

(3 18 29 18)

(4 22 53 33)

Решение

Умножаем первую строчку на 2, чтобы избавится от 2

(1 1 2 4)

(0 3 4 1)

(3 18 29 18)

(4 22 53 33)

Умножаем первую строчку на 3, чтобы избавится от 3

(1 1 2 4)

(0 3 4 1)

(0 15 23 6)

(4 22 53 33)

Умножаем первую строчку на 4, чтобы избавится от 4

(1 1 2 4)

(0 3 4 1)

(0 15 23 6)

(0 18 45 17)

Умножаем вторую строчку на 5, чтобы избавится от 15

(1 1 2 4)

(0 3 4 1)

(0 0 3 1)

(0 18 45 17)

Умножаем вторую строчку на 6, чтобы избавится от 18

(1 1 2 4)

(0 3 4 1)

(0 0 3 1)

(0 0 21 11)

Умножаем третью строчку на 7, чтобы избавится от 21

(1 1 2 4)

(0 3 4 1)

(0 0 3 1)

(0 0 0 4)

(1 0 0 0)

Матрица L = (2 1 0 0)

(3 5 1 0)

(4 6 7 1)

3\*. Решить систему линейных уравнений методом LU-разложения

{2x1+x2+3x3=1

{11x1+7x2+5x3=−6

{9x1+8x2+4x3=−5

Решение

(2 1 3 | 1)

(11 7 5 | -6)

(9 8 4 | -5)

Умножим первую строчку на 5,5, чтобы избавиться от 11

(2 1 3 | 1)

(0 1,5 -10,5 | -11,5)

(9 8 4 | -5)

Умножим первую строчку на 4,5, чтобы избавиться от 9

(2 1 3 | 1)

(0 1,5 -10,5 | -11,5)

(0 3,5 -9,5 | -9,5)

Умножим первую строчку на 3,5, чтобы избавиться от 3,5

(2 1 3 | 1)

(0 1,5 -10,5 | -11,5)

(0 0 -13 | -13)

Уравнение

{2x1 + x2 + 3x3 = 1

{1,5x2 – 10,5x3 = −11,5

{-13x3 = −13

x3 = 1

x2 = (-11,5 + 10,5) / *1,5 = -2*/3

x1 = (1 – 3 – 1,5) / 2 = -1,75

4\*. Решить систему линейных уравнений методом Холецкого

{81x1−45x2+45x3=531

{−45x1+50x2−15x3=−460

{45x1−15x2+38x3=193