Aufgabe 1)

i) $a_1 := \frac{1}{2}$, $a_{n+1} := a_n - a_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Behauptung: $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

I.A. $n=1$

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 > a_2$

I.V. $a_n > a_{n+1}$

I.S.

$a_{n+1} = a_n - a_n^2 \overset{I.V.}{\Rightarrow} a_n > a_n - a_n^2 \Rightarrow a_{n+1} > a_{n+1} - a_{n+1}^2$

$a_{n+2} = a_{n+1} - a_{n+1}^2 \Rightarrow a_{n+1} > a_{n+2}$ ∎

$\Rightarrow$ Die Folge ist streng monoton fallend

Behauptung: $0 < a_n < 1$

I.A. $n=1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < a_1 < 1$

I.V. $0 < a_n < 1 \Leftrightarrow 0 < a_n^2 < 1 \Leftrightarrow a_n > a_n^2$

I.S. $a_{n+1} = a_n - a_n^2 \overset{I.V.}{\Rightarrow} a_n - a_n^2 > 0 \Leftrightarrow a_n+1 > 0$

Da die Folge streng monoton fallend ist $\Rightarrow a_n > a_n+1$

$\Rightarrow 0 < a_{n+1} < a_n \overset{\text{I.V.}}{<} 1 \Rightarrow 0 < a_{n+1} < 1$ ∎

Aus dem Monotoniekriterium folgt, das (a_n) konvergiert und zwar gegen 0. ∎

ii) $a_1 := 2$, $a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 12)

(i) (a) $a_n := \sqrt[n]{3+2\frac{n-1}{n+1}}$

Sei $b_n := \frac{n-1}{n+1}$.

Da $n-1 < n+1 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \le \frac{n-1}{n+1} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow b_n$ ist beschränkt

Behauptung: $b_n < b_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

I.A. $n=1$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = \frac{0}{2} = 0 \\ \\ b_2 = \frac{1}{3} \end{array}\right\} b_n < b_{n+1}$$

I.V. $b_n < b_{n+1}$

I.S.

$b_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{n}{n+2}$

$b_{n+2} = \frac{(n+2)-1}{(n+2)+1} = \frac{n+1}{n+3}$

Aus I.V. $\Rightarrow \frac{n-1}{n+1} < \frac{n}{n+2} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} < \frac{n+1}{n+2}$

$\Rightarrow b_{n+1} < b_{n+2}$ ∎

Da $b_n < 1$ & b_n monoton wachsend

$\Rightarrow b_n \rightarrow 1$

$\Rightarrow 3+2b_n \rightarrow 5 \overset{\text{Bsp. 2.4}}{\Longrightarrow} \sqrt[n]{3+2b_n} \rightarrow \sqrt[n]{5}$

$\Rightarrow a_n \rightarrow \sqrt[n]{5} \approx 1$ ∎

(i)(c) $a_n := \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

Behauptung: $a_n < a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{2n} > 0 \Rightarrow 1+\frac{1}{2n} > 1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n > 1^n > 0$ und damit

ist $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ definiert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n} = \frac{\left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2n}\right) \cdot \left(\frac{1+\frac{1}{2(n+1)}}{1+\frac{1}{2n}}\right)^{n+1} = \frac{2n+1}{2n} \cdot \left(\frac{2(n+1)+1}{2(n+1)} \cdot \frac{2n}{2n+1}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{2n+1}{2n} \cdot \left(\frac{2n(2n+2+1)}{2(n+1)(2n+1)}\right)^{n+1} = \frac{2n+1}{2n} \cdot \left(\frac{2n^2+3n}{2n^2+3n+1}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{2n+1}{2n} \cdot \left(\frac{2n^2+3n+-1}{2n^2+3n+1}\right)^{n+1} = \frac{2n+1}{2n} \cdot \left(1-\frac{1}{2n^2+3n+1}\right)^{n+1}$$

$\left(-\frac{1}{2n^2+3n+1}\right) \geq -1 \wedge \neq 0$

Bernoulische Ungleichung

$$> \frac{2n+1}{2n} \cdot \left(1 - \frac{n+1}{2n^2+3n+1}\right) = \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n^2+3n+1-n-1}{(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n^2+2n}{n+1} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n(n+1)}{n+1} = 1$$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$ ∎ Also ist a_n streng monoton wachsend

Behauptung: Sei $b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, so gilt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{2n} \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{2n}\right) \; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \; \forall n \in \mathbb{N} \;\blacksquare$$

$\Rightarrow a_n$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt (insbesondere auf $b_1 = 2$)

$$\Rightarrow a_1 < \lim_{n\to\infty} a_n < 2 \iff 1{,}5 < \lim_{n\to\infty} a_n < 2 \;\blacksquare$$