Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

12. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

5. Februar 2021

Abgabe bis 12. Februar 2021, 12:00 Uhr

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 123 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 45:

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existiert. Zeigen Sie, dass dann $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ gilt.

(ii) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1+x^2}.$$

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ nicht existiert, wohingegen der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$ sehr wohl existiert.

Aufgabe 46 (K):

(i) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2|x|}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,dx,\ s<0, t\in\mathbb{R}$.

(ii) Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren oder divergieren. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\log(1+x)\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{\log(x)}{x}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{\sin(x)}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$.

Aufgabe 47:

(i) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $D_1 := \{z \in \mathbb{C}\colon |z+2+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|\}$, (b) $D_2 := \{z \in \mathbb{C}\colon 1 < \operatorname{Im}(\mathrm{i}z) < 2\}$.

(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ $(z \in \mathbb{C})$ ein Polynom mit $a_j \in \mathbb{R}$ für alle $j \in \{0, \cdots, n\}$ und $a_n \neq 0$. Zeigen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, so ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von p.

Aufgabe 48 (K):

(i) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen.

(a) $z_1 := \dfrac{3+5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$, (b) $z_2 := \dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2}$,

(c) $z_3 := (1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{3n}$ für $n \in \mathbb{N}$, (d) $z_4 := \displaystyle\sum_{k=0}^{26} (2\mathrm{i})^k$.

Hinweis zu c): Sie dürfen verwenden, dass $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ gilt.

(ii) Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, welche die gegebene Gleichung lösen.

(a) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$, (b) $\mathrm{e}^z = \sqrt{12} + 2\mathrm{i}$.

Information

Aufgrund der aktuellen Situation wird dieses Modul teilweise in digitaler Form angeboten. Die gesamte Abwicklung wird über das System ILIAS stattfinden. Melden Sie sich dafür mit Ihrem KIT-Account an und treten Sie dem Kurs **Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik** bei. Sie können diesem Kurs direkt über folgenden Link beitreten:

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1253943_rcodeHa6wkYEysN&client_id=produktiv`

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Scheinkriterien, Tutorien, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

Zum Bearbeiten der Übungsblätter sollten Sie pro Woche etwa 9-10 Seiten des Skripts mithilfe der angebotenen Vorlesungsvideos durcharbeiten. Das kommende Übungsblatt wird den Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 132 beinhalten.

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-6 und 7-13 **jeweils** mindestens 48 bwz. 56 Punkte (50%) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Bitte beachten Sie den **Anmeldeschluss** am **21.02.2021**.