Gruppe 1

Velislav Slavov, 2385786

ucsmm@student.kit.edu

A2

a) $\varphi_1 : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow \sqrt{2}a + \frac{b}{\sqrt{2}}$

(i) Seien $q_1 := \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, q_2 := \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$

$$\varphi_1(q_1 + q_2) = \varphi_1\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} = \sqrt{2}(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\overset{\text{Distr. Ges.}}{=} (\sqrt{2}a_1 + \sqrt{2}a_2) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} b_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} b_2\right)$$

$$\overset{\text{Komm. Ges.}}{=} \left(\sqrt{2}a_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} b_1\right) + \left(\sqrt{2}a_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} b_2\right)$$

$$= \varphi_1\begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \varphi_1\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \blacksquare$$

(ii) Seien $q := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2, \lambda \in \mathbb{Q}$

$$\lambda q = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(\lambda q) = \sqrt{2}(\lambda a) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda b)$$

$$\overset{\text{Assoz. Ges.}}{=} \lambda(\sqrt{2}a) + \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2}} b\right)$$

$$\overset{\text{Distr. Ges.}}{=} \lambda\left(\sqrt{2}a + \frac{1}{\sqrt{2}} b\right)$$

$$= \lambda\left(\varphi_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \varphi_1(q) \blacksquare$$

φ_1 erfüllt beide Bedingungen einer Linearen Abbildung.

$\ker(\varphi_1) := \{ q \in \mathbb{Q}^2 \mid \varphi_1(q) = 0 \}$

$\varphi_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = 0 \iff \sqrt{2}\,a + \frac{b}{\sqrt{2}} = 0 \quad | \cdot \sqrt{2}$

$\iff \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\,a + \frac{b}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,0$

$\iff 2a + b = 0$

$\Rightarrow \ker(\varphi_1) := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \mid b = -2a \right\}$

Sei $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

(i) $\forall q \in \ker(\varphi_1) : q = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\iff q \in LH(B)$

(ii) $\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 0 \wedge -2\beta = 0$

$\iff \lambda = 0 \wedge \beta = 0$

$\Rightarrow$ B ist linear unabhängig über $\ker(\varphi_1)$

Aus (i) und (ii) $\Rightarrow$ B ist Basis von $\ker(\varphi_1)$

b) $\varphi_2 := \mathbb{F}_5^3 \longrightarrow \mathbb{F}_5^3$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+2b+2c \\ 2a+3b+c \\ a+c \end{pmatrix}$$

Seien $f_1 := \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, f_2 := \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^3$

(i) $\varphi_2(f_1+f_2) = \varphi_2\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+2(b_1+b_2)+2(c_1+c_2) \\ 2(a_1+a_2)+3(b_1+b_2)+(c_1+c_2) \\ (a_1+a_2)+(c_1+c_2) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (a_1+2b_1+2c_1)+(a_2+2b_2+2c_2) \\ (2a_1+3b_1+c_1)+(2a_2+3b_2+c_2) \\ (a_1+c_1)+(a_2+c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1+2b_1+2c_1) \\ (2a_1+3b_1+c_1) \\ (a_1+c_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (a_2+2b_2+2c_2) \\ (2a_2+3b_2+c_2) \\ (a_2+c_2) \end{pmatrix}$

$= \varphi_2(f_1) + \varphi_2(f_2)$ ∎

(ii) Seien $f \in \mathbb{F}_5^3$, $\lambda \in \mathbb{F}_5$

$\varphi_2(\lambda f) = \varphi_2\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a+2\lambda b+2\lambda c \\ 2\lambda a+3\lambda b+\lambda c \\ \lambda a+\lambda c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a+2b+2c) \\ \lambda(2a+3b+c) \\ \lambda(a+c) \end{pmatrix}$

$= \lambda\begin{pmatrix} a+2b+2c \\ 2a+3b+c \\ a+c \end{pmatrix} = \lambda\varphi_2(f)$ ∎

Aus (i) und (ii) $\Rightarrow \varphi_2$ ist Linear

Behauptung: φ_2 ist NICHT injektiv

$\Rightarrow \exists f_1 := \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, f_2 := \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^3$ mit $a_1 \neq a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$

und es gilt: $\varphi_2(f_1) = \varphi_2(f_2)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (a_1 + 2b_1 + 2c_1) \\ (2a_1 + 3b_1 + c_1) \\ (a_1 + c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_2 + 2b_2 + 2c_2) \\ (2a_2 + 3b_2 + c_2) \\ (a_2 + c_2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1 + 2b_1 + 2c_1 = a_2 + 2b_2 + 2c_2$$

Def von f_1, f_2

$\Rightarrow a_1 = a_2$ $\lightning$ Somit ist φ_2 injektiv

$$\Rightarrow \ker(\varphi_2) := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} a+2b+2c \\ 2a+3b+c \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Sei $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

(i) $\forall f \in \ker(\varphi_2): f = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow f \in LH(B) \Rightarrow LH(B) = \ker(\varphi_2)$

(ii) Seien $\lambda, \beta, \mu \in \mathbb{F}_5$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\beta \\ 3\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 0, \beta = 0, \mu = 0$$

$\Rightarrow B$ ist lin. unabhängig

Aus (i) und (ii) $\Rightarrow B$ ist Basis von $\ker(\varphi_2)$ $\blacksquare$

A4 $(V,+,\cdot) :=$ n-dimentionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum

a) $(V,+,\cdot|_{\mathbb{R}\times V})$

$\forall z \in \mathbb{C} : z := a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} : x := a + 0i \in \mathbb{C} = a$

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x_1 := a_1 + 0i, x_2 := a_2 + 0i \in \mathbb{C}$

(ii) $\lambda(x_1 + x_2) = \lambda((a_1 + 0i) + (a_2 + 0i)) = \lambda((a_1 + a_2) + i(0+0))$
$= \lambda(a_1 + a_2) = \lambda a_1 + \lambda a_2 = \lambda x_1 + \lambda x_2$

(iii) $(\lambda + \mu) \cdot x_1 = (\lambda + \mu)(a_1 + 0i) = (\lambda + \mu) a_1 + (\lambda + \mu) 0i$
$= (\lambda + \mu) a_1 = \lambda a_1 + \mu a_1 = \lambda x_1 + \mu x_1$

(iv) $(\lambda\mu) x_1 = (\lambda\mu)(a_1 + 0i) = (\lambda\mu) a_1 + (\lambda\mu) 0i$
$= (\lambda\mu) a_1 = \lambda(\mu a_1) = \lambda(\mu x_1)$

(v) $1 \cdot x_1 = 1(a_1 + 0i) = a_1 + 0i = x_1$

Aus (ii), (iii), (iv), (v) $\Rightarrow (V,+,\cdot|_{\mathbb{R}\times V})$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ■

b) Es gilt: $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$
somit gilt $\forall v \in V : v \in \mathbb{R}^2$

$|\mathbb{R}^2| = 2$

$|V$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum$| = n \Rightarrow |V$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum$| = 2$