

Lineare Algebra I

Winter-Semester 2020/2021

Übungsblatt 1

09.11.20

Aufgabe 1 (Satz von Cantor)

(10 Punkte)

Es sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M .

- a) Beschreiben Sie eine injektive Abbildung $\iota : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$.
- b) Beweisen Sie, dass jede Abbildung $\varphi : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ nicht surjektiv ist.
Hinweis: Betrachten Sie $N := \{x \in M \mid x \notin \varphi(x)\}$.

Aufgabe 2 (Abbildungen und Operationen auf Mengen)

(10 Punkte)

Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen den Mengen X und Y .

Beweisen Sie: Für alle $A, B \subseteq X$ und $C, D \subseteq Y$ gilt

- a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
- b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
Begründen Sie anhand eines Beispiels, dass hier das Inklusionszeichen nicht durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden darf.
- c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
- d) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

Aufgabe 3 (Matrizenrechnung)

(10 Punkte)

Es seien die folgenden reellen Matrizen gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Welche der Produkte AB, BA, AC, CA, BC, CB sind definiert? Berechnen Sie diese.
- b) Welche der Produkte AA, BB, CC sind definiert? (Sie brauchen diese nicht zu berechnen.)

Aufgabe 4 (*Rechenregeln für die transponierte Matrix*)

(10 Punkte)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$ für $m, n, p \in \mathbb{N}$, und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- a) $(A^\top)^\top = A$
- b) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$
- c) $(\lambda A)^\top = \lambda(A^\top)$
- d) $(AC)^\top = C^\top A^\top$

Abgabe bis Montag, den 16.11.20 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.