Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

1. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

13. November 2020

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 11 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 1 (K):

(i) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

(a) $x \leq 5 + \sqrt{x+7}$, (b) $|x+5| \leq 2(4-x)$.

(ii) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen ein Infimum, Supremum, Minimum bzw. Maximum haben, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte:

(a) $A := \{(-1)^n - \frac{3}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$, (b) $B := \{-x - \frac{1}{x} \colon 0 < x \leq 2\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(i) (a) *Behauptung:* Die Ungleichung $x \leq 5 + \sqrt{x+7}$ wird genau dann erfüllt, wenn $x \in [-7, 9]$ gilt.

Beweis: Der Ausdruck $\sqrt{x+7}$ ist nur für diejenigen $x \in \mathbb{R}$ definiert, für die

$$x + 7 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -7$$

gilt. Für $x \geq -7$ gilt

$$x \leq 5 + \sqrt{x+7} \quad \Leftrightarrow \quad x - 5 \leq \sqrt{x+7}.$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung:
Fall 1 ($x < 5$): Im Fall $x < 5$ ist die Ungleichung

$$x - 5 \leq \sqrt{x+7}$$

offensichtlich erfüllt, da die rechte Seite nichtnegativ ist und somit die Ungleichung aus der Aufgabenstellung für alle $x \in [-7, 5)$ gilt.
Fall 2 ($x \geq 5$): In diesem Fall sind beide Seiten der Ungleichung positiv. Daher ist das Quadrieren dieser Ungleichung eine Äquivalenzumformung und wir erhalten

$$\begin{aligned} x - 5 \leq \sqrt{x+7} \quad &\Leftrightarrow \quad (x-5)^2 \leq x + 7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 11x \leq -18 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{121}{4} \leq -18 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 \leq \frac{49}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \left|x - \frac{11}{2}\right| \leq \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 9 \vee x \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2, 9], \end{aligned}$$

was bedeutet, dass in diesem Fall ($x \geq 5$) die Ungleichung für alle $x \in [5, 9]$ erfüllt ist.
Insgesamt gilt die gegebene Ungleichung also für $x \in [-7, 9]$. □

(b) *Behauptung:* Die Ungleichung $|x+5| \leq 2(4-x)$ wird genau dann erfüllt, wenn $x \in (-\infty, 1]$ gilt.

Beweis: Wir betrachten die folgenden zwei Fälle:
Fall 1 ($x \geq -5$): In diesem Fall gilt $x+5 \geq 0$ und somit ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu

$$x+5 \leq 8-2x \quad \Leftrightarrow \quad 3x \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 1.$$

Die Ungleichung ist also für $x \in (-\infty, 1] \cap [-5, \infty) = [-5, 1]$ erfüllt.
Fall 2 ($x < -5$): In diesem Fall gilt $x+5 < 0$ und wir erhalten $|x+5| = -(x+5)$. Damit ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu

$$-(x+5) \leq 8-2x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 13$$

Die Ungleichung ist also für $x \in (-\infty, 13] \cap (-\infty, -5) = (-\infty, -5)$ erfüllt.
Insgesamt wird die gegebene Ungleichung also für $x \in (-\infty, 1]$ erfüllt. $\square$

(ii) (a) *Behauptung:* Es gilt $\min A = \inf A = -4$, $\sup A = 1$ und $\max A$ existiert nicht.

Beweis: Es gilt $(-1)^n - \frac{3}{n} \geq -1-3 = -4$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also ist -4 eine untere Schranke von A. Außerdem ist $-4 = (-1)^1 - \frac{3}{1} \in A$, somit folgt $\min A = \inf A = -4$. Weiter gilt $(-1)^n - \frac{3}{n} < 1-0 = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also ist $\sup A \leq 1$, aber $1 \notin A$. Wir müssen noch zeigen, dass 1 die kleinste obere Schranke von A ist. Wir zeigen dafür

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \colon (-1)^n - \frac{3}{n} > 1 - \epsilon. \tag{1}$$

Dies zeigt, dass für alle $\epsilon > 0$ die Zahl $1-\epsilon$ keine obere Schranke von A sein kann (vgl. Satz 1.2 (c)). Daraus folgt $\sup A \geq 1$ und mit obigem erhalten wir $\sup A = 1$.
Beweis von (1): Sei $\epsilon > 0$. Nach Satz 1.3 (c) aus der Vorlesung finden wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \frac{3}{2\epsilon}$. Setze $n := 2k$, dann gilt:

$$(-1)^n - \frac{3}{n} = (-1)^{2k} - \frac{3}{2k} = 1 - \frac{3}{2k} > 1 - \epsilon.$$

$\square$

(b) *Behauptung:* Es gilt $\max B = \sup B = -2$, $\min B$ und $\inf B$ existieren nicht.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass B nach unten unbeschränkt ist und somit weder $\inf B$ noch $\min B$ existieren. Es sei $r < -2$, dann ist $-\frac{1}{r} \subseteq (0, \frac{1}{2}) \subseteq (0, 2]$. Mit $x = -\frac{1}{r}$ folgt

$$B \ni -x - \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{x} = r,$$

d.h. B ist nach unten nicht beschränkt und somit folgt der erste Teil der Behauptung.
Wegen $-x - \frac{1}{x} \leq -x \leq 0$ (für $x \in (0, 2]$) ist B allerdings nach oben beschränkt. Wir werden zeigen: $x + \frac{1}{x} \geq 1 + \frac{1}{1} = 2$ für alle $x \in (0, 2]$ und somit auch $-x - \frac{1}{x} \leq -1 - \frac{1}{1} = -2$ für alle $x \in (0, 2]$, womit $\sup B = \max B = -2$ gezeigt ist.
Wir zeigen zunächst: Für $0 < x < y \leq 1$ gilt $x + \frac{1}{x} > y + \frac{1}{y}$. Es seien also $0 < x < y \leq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(x-y)(xy-1) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad xy(x-y) + y - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(x^2+1) > x(y^2+1) \\ &\Leftrightarrow \quad xy(x + \frac{1}{x}) > xy(y + \frac{1}{y}) \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{x} > y + \frac{1}{y}.\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für alle $x \in (0, 1]$ somit $x + \frac{1}{x} \geq 1 + \frac{1}{1} = 2$, also $-x - \frac{1}{x} \leq -2$ für alle $x \in (0, 1]$.
Weiter gilt $x + \frac{1}{x} < y + \frac{1}{y}$ für $1 \leq x < y$: in einer analogen Rechnung wie oben erhalten wir für $1 \leq x < y$

$$(y-x)(xy-1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{x} < y + \frac{1}{y}.$$

Es gilt also $x + \frac{1}{x} \geq 1 + \frac{1}{1} = 2$ für alle $x \in [1, 2]$ und damit $-x - \frac{1}{x} \leq -2$ für alle $x \in [1, 2]$.
Insgesamt gilt $-x - \frac{1}{x} \leq -2$ für alle $x \in (0, 2]$. Da diese obere Schranke für $x = 1$ angenommen wird, folgt $\sup B = \max B = -2$. $\square$

Aufgabe 2:
Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $A, B \neq \emptyset$. Wir definieren $A + B := \{a + b\colon a \in A,\, b \in B\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sind A und B nach oben beschränkt, dann ist $A+B$ nach oben beschränkt und es gilt: $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

(ii) Sind A und $A + B$ nach oben beschränkt, dann ist B nach oben beschränkt und es gilt ebenfalls: $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) *Behauptung:* Sind A und B nach oben beschränkt, so ist $A + B$ nach oben beschränkt und es gilt $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Beweis: Da A und B beschränkt sind, gilt $a \leq \sup A$ für alle $a \in A$ und $b \leq \sup B$ für alle $b \in B$. Somit erhält man für $a \in A$ und $b \in B$:

$$a + b \leq \sup A + b \leq \sup A + \sup B,$$

d.h. $A + B$ ist nach oben durch $\sup A + \sup B$ beschränkt. Außerdem gilt damit $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.

Wir zeigen nun, dass $\sup A + \sup B$ auch die kleinste obere Schranke von $A + B$ ist (dann ist die Behauptung gezeigt). Dazu nehmen wir an, dass es eine kleinere obere Schranke c von $A + B$ gäbe, d.h. es würde $c < \sup A + \sup B$ und

$$a + b \leq c \quad \text{für alle } a \in A,\, b \in B \tag{2}$$

gelten. Wir definieren nun $\varepsilon := \sup A + \sup B - c > 0$. Zu ε existiert nun nach Definition des Supremums ein $a_0 \in A$ mit $a_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ und analog ein $b_0 \in B$ mit $b_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$. Insgesamt gilt somit

$$a_0 + b_0 > \sup A + \sup B - 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \sup B - \varepsilon = c,$$

ein Widerspruch zu (2). Also ist $\sup A + \sup B$ die kleinste obere Schranke von $A + B$. □

(ii) *Behauptung:* Sind A und $A+B$ nach oben beschränkt, dann ist B nach oben beschränkt und es gilt ebenfalls: $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Beweis: Es sei $a_0 \in A$ fest, dann gilt für jedes $b \in B$:

$$b = a_0 + b - a_0 \leq \sup(A + B) - a_0,$$

daher ist B nach oben beschränkt. Die Gleichheit folgt nun genau wie in Aufgabenteil (i). □

Aufgabe 3:
Es sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt mit $\inf A > 0$ und $B := \{b \in \mathbb{R}\colon \frac{1}{b} \in A\}$. Zeigen Sie, dass B nach oben beschränkt ist mit $\sup B = \frac{1}{\inf A}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

Beweis: Zunächst halten wir fest, dass $B \neq \emptyset$: wegen $A \neq \emptyset$ existiert ein $a_0 \in A$ und nach Voraussetzung gilt $a_0 \geq \inf A > 0$, also ist insbesondere $a_0 \neq 0$ und damit per Definition $\frac{1}{a_0} \in B$.

Es sei nun $b \in B$, dann gilt $b \neq 0$ und $\frac{1}{b} \in A$. Somit ist $\frac{1}{b} \geq \inf A$, also $b \leq \frac{1}{\inf A}$. Damit haben wir gezeigt, dass B nach oben beschränkt ist und $\frac{1}{\inf A}$ eine obere Schranke von B ist. Es bleibt zu zeigen, dass $\frac{1}{\inf A}$ auch die kleinste obere Schranke von B ist. Wir wählen $S \in (0, \frac{1}{\inf A})$ und zeigen, dass S keine obere Schranke von B ist. Es gilt $\frac{1}{S} > \inf A$. Per Definition vom Infimum existiert nun ein $a \in A$ mit $\frac{1}{S} > a \geq \inf A$. Mit $b := \frac{1}{a} \in B$ folgt $S < \frac{1}{a} = b$ und damit ist S keine obere Schranke von B. Somit gilt $\sup B = \frac{1}{\inf A}$. □

Aufgabe 4 (K):
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k 2^k = (n-1) 2^{n+1} + 2.$$

(iii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$ gilt $3^n > 2n^3$.

(iv) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{n^3+5n}{6}$ eine natürliche Zahl.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) *Behauptung:* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$.

Beweis: IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{j=1}^{1} j^3 = 1 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1} j^3 &= \sum_{j=1}^{n} j^3 + (n+1)^3 \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= \frac{1}{4}(n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4) = \frac{1}{4}(n^2 + 2n + 1)(n^2 + 4n + 4) = \frac{1}{4}(n+1)^2((n+1)+1)^2.\end{aligned}$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k 2^k = (n-1) 2^{n+1} + 2$.

Beweis: IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} k 2^k = 2 = 0 \cdot 2^2 + 2$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $\sum_{k=1}^{n} k 2^k = (n-1) 2^{n+1} + 2$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k 2^k &= \sum_{k=1}^{n} k 2^k + (n+1) 2^{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} (n-1) 2^{n+1} + 2 + (n+1) 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1}(n - 1 + n + 1) + 2 = 2^{n+2} n + 2 = ((n+1) - 1) 2^{(n+1)+1} + 2.\end{aligned}$$

$\square$

(iii) *Behauptung:* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$ gilt $3^n > 2n^3$.

Beweis: IA: Für $n = 6$ gilt $3^6 = 729 > 432 = 2 \cdot 6^3$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$ gelte bereits $3^n > 2n^3$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt:

$$\begin{aligned}2(n+1)^3 &= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 6 \overset{(6 \leq n)}{\leq} 2n^3 + n^3 + n^2 + n = 3n^3 + n^2 + n \\ &\leq 3n^3 + 2n^3 \leq 6n^3 = 3 \cdot 2n^3 \overset{\text{(IV)}}{<} 3 \cdot 3^n = 3^{n+1},\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile genutzt wurde, dass $n \leq n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

(iv) *Behauptung:* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{n^3+5n}{6}$ eine natürliche Zahl.

Beweis: IA: Für $n = 1$ gilt $\frac{1^3+5\cdot 1}{6} = 1 \in \mathbb{N}$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $\frac{n^3+5n}{6} \in \mathbb{N}$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Da eine der beiden Zahlen n oder $n+1$ gerade ist, ist $3n(n+1)$ und damit auch $3n(n+1)+6$ durch 6 teilbar. Somit gilt:

$$\frac{(n+1)^3 + 5(n+1)}{6} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5}{6} = \underbrace{\frac{n^3 + 5n}{6}}_{\overset{\text{(IV)}}{\in} \mathbb{N}} + \frac{3n(n+1)+6}{6} \in \mathbb{N}.$$

$\square$