Table of Contents Übungsblätter:

- Blatt 8:

- A1 = Inverse von Matrizen
- A2 = Selbstinverse
- A3 = Darstellungsmatrizen
- A4 = Basiswechselmatrizen

- Blatt 9:

- A1 = Summe von Vektorräume
- A2 = Smith-Normalform & Basen
- A3 = Direkte Summen & lin. unabhängig
- A4 = Isomorphiesatz für Vektorräume

- Blatt 10:

- A1 = R als Q-Vektorraum
- A2 = Dualbasen
- A3 = Dimension und Linearformen
- A4 = Beweis: Bilinearformen

- Blatt 11:

- A1 = Determinante bestimmen
- A2 = Basen und Determinanten
- A3 = UVR, Direkte Summe, Dimension
- A4 = Dimension und Untervektorraum

- Blatt 12:

- A1 = Polynome, Eigenwerte, Ähnlich
- A2 = Spur
- A3 = Char. Polynom und Eigenräume
- A4 = Boolesche Algebren

- Blatt 13:

- A1 = Polynome, Eigenwerte & -vektoren
- A2 = Diagonalisieren einer Matrix
- A3 = Simultane Diagonalisierbarkeit
- A4 = Blockmatrizen & Determinanten

Basics

Aussagenlogik:

- A <=> B = ((A => B) & (B => A))

- Elementare logische Umformungen

(i) $(\neg(\neg\mathscr{A})) \iff \mathscr{A}$. (doppelte Negation)

(ii) $\mathscr{A} \vee (\neg\mathscr{A})$. (Tertium non datur.)

(iii) $\neg(\mathscr{A} \implies \mathscr{B}) \iff (\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B})$ (Negation einer Implikation)

(iv) $(\mathscr{A} \implies \mathscr{B}) \iff ((\neg\mathscr{B}) \implies (\neg\mathscr{A}))$. (Kontrapositionsprinzip)

(v) $((\mathscr{A} \implies \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{B} \implies \mathscr{C})) \implies (\mathscr{A} \implies \mathscr{C})$. (Transitivität der Implikation)

(vi) $((\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \wedge \mathscr{C}) \iff (\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}))$
$((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \vee \mathscr{C}) \iff (\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}))$. (Assoziativität von $\wedge$ und $\vee$)

(vii) $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \iff (\mathscr{B} \wedge \mathscr{A})$
$(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \iff (\mathscr{B} \vee \mathscr{A})$. (Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$)

(viii) $\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}) \iff (\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \vee (\mathscr{A} \wedge \mathscr{C})$
$\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}) \iff (\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{A} \vee \mathscr{C})$. (Distributivität)

(ix) $(\neg(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})) \iff ((\neg\mathscr{A}) \vee (\neg\mathscr{B}))$
$(\neg(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})) \iff ((\neg\mathscr{A}) \wedge (\neg\mathscr{B}))$. (de Morgansche[1] Regeln)

- De Morgansche Regeln für Quantoren:

$$\neg(\forall x : \mathscr{A}(x)) \iff (\exists x : \neg\mathscr{A}(x)),$$
$$\neg(\exists x : \mathscr{A}(x)) \iff (\forall x : \neg\mathscr{A}(x)).$$

Mengenlehre:

- M ist Teilmenge von N, wenn $\forall x : (x \in M \implies x \in N)$
- $(M = N) \iff ((M \subseteq N) \wedge (N \subseteq M))$
- (i) $M \cap N := \{x \mid (x \in M) \wedge (x \in N)\}$

  (ii) $M \cup N := \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N)\}$

  (iii) $M \setminus N := \{x \mid (x \in M) \wedge (x \notin N)\}$
- Symmetrische Differenz: $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (= XOR)
- Kartesisches Produkt: $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$
- Anzahl der Elemente: $|M \times N| = |M| \cdot |N|$ und $|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$

- Rechenregeln für Mengen

(i) $X \setminus (X \setminus A) = A$. (doppelte Negation)

(ii) $A \cup (X \setminus A) = X$. (Tertium non datur)

(iii) $\neg(A \subseteq B) \iff (\exists x : x \in A \wedge x \notin B)$. (Negation der Teilmengenrelation)

(iv) $(A \subseteq B) \iff (X \setminus B \subseteq X \setminus A)$. (Kontrapositionsprinzip)

(v) $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Longrightarrow (A \subseteq C)$. (Transitivität der Teilmengenrelation)

(vi) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. (Assoziativität von $\cap$ und $\cup$)

(vii) $A \cap B = B \cap A$,
$A \cup B = B \cup A$. (Kommutativität von $\cap$ und $\cup$)

(viii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. (Distributivität)

(ix) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$,
$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$. (de Morgansche Regeln)

- Potenzmenge: Die Menge $\mathscr{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$ aller Teilmengen

- Mengensystem: $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(M)$

- Schnitt (bzw. Vereinigung) über A:

$\bigcap \mathscr{A} := \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A := \{x \in M \mid \forall A \in \mathscr{A} : x \in A\}$ und $\bigcup \mathscr{A} := \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A := \{x \in M \mid \exists A \in \mathscr{A} : x \in A\}$

Funktionen und Abbildungen:

Tripel (M,N,f):
M = Definitionsbereich
N = Zielbereich
f = Zuordnungsvorschrift

- Bildet ein m aus M EINDEUTIG auf ein f(m) aus N

- Gleichheit von Funktionen: $M = M'$, $N = N'$ und $\forall m \in M : f(m) = f'(m)$

- N^M = Alle Funktionen von M nach N und $|N^M| = |N|^{|M|}$

$A \subseteq M$ - Bild einer Funktion (Bild(M,N,f)):

f(A) = $\{n \in N \mid \exists a \in A : f(a) = n\} = \{f(a) | a \in A\}$

$B \subseteq N$ - Urbild einer Funktion: $f^{-1}(B) := \{m \in M \mid f(m) \in B\}$

$A \subseteq M$ - Einschränkung: $f|_A : A \to N, \quad a \mapsto f(a)$

$B \subseteq N$ - Koeinschränkung: $f|^B : M \to B, \quad m \mapsto f(m))$

- Komposition (Verkettung) von Funktionen ("g nach f"):

$f : M \to N$ und $g : N \to O$

$g \circ f : M \to O, \quad m \mapsto g(f(m))$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & N \arrow[d, "g"] \\ & O. \end{tikzcd}$$

- Assoziativität der Verkettung: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & N \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\ & O \arrow[r, "h"'] & P \end{tikzcd}$$

- Injektivität: $(f(m_1) = f(m_2)) \Longrightarrow (m_1 = m_2)$

Für alle n aus N gilt: es gibt höchstens ein m mit f(m) = n

- Surjektivität: $\mathrm{Bild}(f) = f(M) = N$

Für alle n aus N gilt: es gibt mindestens ein m mit f(m) = n

- Bijektivität: Injektiv & Surjektiv

Für alle n aus N gilt: es gibt genau ein m mit f(m) = n

- Umkehrfunktion: $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$
- Existiert gdw. f bijektiv ist
- Falls existiert, dann ist eindeutig

(a) *Wenn f und g beide injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.*

(b) *Wenn f und g beide surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.*

(c) *Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.*

(d) *Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.*

MATRIZEN

Lineares Gleichungssystem (LGS) (Def 2.1.3)

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Lösungsmenge eines Gleichungssystem

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \subseteq \mathbb{R}^n$

Struktur der Lösungsmenge eines LGS

Falls das LGS mind. eine Lösung x0 hat, gilt:

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} = x_0 + \ker A$

- Die Lösungsmenge ist ein affiner Unterraum von R^n

Transponierte Matrix (Def 2.2.2)

- A^T= A mit Spalten und Zeilen getauscht

Matrix Addition und Skalierung (Def 2.2.3)

- Addition: die entsprechende Elemente addieren
- Skalierung: jedes Element mit dem Skalar multiplizieren

Rechenregeln für Addition und Skalierung von Matrizen

(i) $(A+B)+C = A+(B+C)$

(ii) $A + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n} + A = A$

(iii) $A + (-1)A = (-1)A + A = \mathbf{0}_{m\times n}$

(iv) $A + B = B + A$

(v) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

(vi) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

(vii) $(\lambda\cdot\mu)A = \lambda(\mu A)$

(viii) $1A = A.$

Rechenregeln für Matrixprodukte

(i)	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p}, C \in \mathbb{R}^{p\times r}:$	$(AB)C = A(BC).$	*(Assoziativität)*
(ii)	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}:$	$\mathbb{1}_m A = A\mathbb{1}_n = A.$	*(Neutralelement)*
(iii)	$\forall A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p}:$	$(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B.$	*(Distributivgesetz I)*
(iv)	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}:$	$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2.$	*(Distributivgesetz II)*
(v)	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p}, \lambda \in \mathbb{R}:$	$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB).$	*(Bilinearität)*

Rechenregeln für die transponierte Matrix

(i)	$\forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}:$	$(A+B)^\top = A^\top + B^\top.$	*(Transponieren und Summieren)*
(ii)	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \lambda \in \mathbb{R}:$	$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top.$	*(Transponieren und Skalieren)*
(iii)	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p}:$	$(AB)^\top = B^\top A^\top.$	*(Transponieren und Produkte)*
(iv)		$(\mathbf{0}_{m\times n})^\top = \mathbf{0}_{n\times m}.$	*(Transponierte der Nullmatrix)*
(iv)		$(\mathbb{1}_n)^\top = \mathbb{1}_n.$	*(Transponierte der Einheitsmatrix)*
(v)	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}:$	$(A^\top)^\top = A.$	*(Transponierte der Transponierten)*

Matrix Multiplikation (Def 2.2.9)

- Jedes Element = Summe von Zeile * Spalte

$-A^{MxN} . B^{NxP}$

Einheitsmatrix (Def 2.2.11)

$$\mathbb{1}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Multiplikation mit der Nullmatrix

$$\left(A = \mathbf{0}_{m\times n} \text{ oder } B = \mathbf{0}_{n\times p}\right) \implies \left(AB = \mathbf{0}_{m\times p}\right)$$

Bild einer Matrix (Def. 2.4.11)

$\text{Bild}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \{b \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$

- Ein LGS Ax = b hat genaut dann eine Lösung, wenn b in Bild(A) liegt

Bild(A) = LH(Spaltenvektoren von A) (Lemma 2.4.12)

- Bild(A) ist immer UVR von R^n

Basis des Bildes:

- Transponieren -> Gauß (Zeilenstufenform) -> Transponieren -> Spalten != 0
- Spalten-Gauß (Untere Dreiecksmatrix) -> Spalten != 0

Rang einer Matrix (Def. 2.4.13)

$\text{rg}(A) := \dim(\text{Bild}(A))$

- Auch die Dimension des Unterraums der von Spalten aus A aufgespannt wird
- Auch die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A

Bemerkung 2.4.14

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax$

- Für rg(A) = m ist die Abbildung surjektiv => das LGS Ax = b ist
für alle b aus dem Zielbereich lösbar

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- rg(A) <= min{m,n}
- rg(A) = rg(A^T): Spaltenrang = Zeilenrang
(maximale Anzahl lin. unabh. Spalten/Zeilen)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}\ und\ B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

- rg(AB) <= rg(A) und rg(AB) <= rg(B)
- rg(A) + dim(ker(A)) = Anzahl Zeilen <=> dim(bild(A)) + dim(ker(A)) = dim(R^n)

Invertierbare Matrizen

$AB = \mathbb{1}_n = BA$ - Quadratische Matrix im Ring ($\mathbb{K}^{n \times n}, +, \cdot$) bzgl. Matrixmultiplikation invertierbar

- Allgemeine lineare Gruppe (GL(n,K) = alle invertierbare Matrizen): $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

- Das Neutralelement jedes Monoids ist invertierbar

- Eine Matrix mit Nullzeile ist NICHT invertierbar

Erste Charakterisierung der Invertierbarkeit von Matrizen

(i) A *ist invertierbar.*

(ii) $A^\top$ *ist invertierbar.*

(iii) $\exists B \in \mathbb{K}^{n \times n} : BA = \mathbb{1}_n$.

(iv) $\exists B \in \mathbb{K}^{n \times n} : AB = \mathbb{1}_n$.

(v) $\ker A = \{0\}$.

(vi) $\mathrm{rg} A = n$.

(vii) $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad x \mapsto Ax$ *ist injektiv.*

(viii) $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad x \mapsto Ax$ *ist surjektiv.*

(ix) $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad x \mapsto Ax$ *ist bijektiv.*

Wie berechnet man die Inverse einer Matrix?

- Wir fangen an mit A links und die Einheitsmatrix rechts

- Zeilenumformungen anwenden, bis Links in erw. Zeilenstufenform (Einheitsmatrix)

- Falls irgendwann eine Nullzeile vorkommt - A ist NICHT invertierbar

- Die Matrix rechts ist die Inverse von A

Dreiecksmatrizen

- Obere Dreiecksmatrix: $\forall i > j : a_{i,j} = 0$
- Untere Dreiecksmatrix: $\forall i < j : a_{i,j} = 0$
- Diagonalmatrix: $\forall i \neq j : a_{i,j} = 0$

Gauß-Algorithmus

Algorithmus:

Schritt 1:

- Bringe die Matrix in Zeilenstufenform (ggf. in erw. ...) durch Zeilenumformungen
Wende die Zeilenumformungen auch auf b, damit die Lösungsmenge gleich bleibt!

- rg(A) = r (Anzahl von Pivotelemente)

- Die Pivot-Spalten sind eine Basis für Bild(A)

Schritt 2:

- Falls für alle j > r: bj = 0 => das LGS hat eine Lösung
(also gegen jede Nullzeile steht wieder eine 0)

- Falls es existiert ein j > r mit bj != 0 => das LGS hat KEINE Lösung - Abbrechen!

Schritt 3:

- Pivot-Elemente kriegen Variablen und Nicht-Pivot - Konstanten

- Löse jede Gleichung von unten nach oben (x1 = 1 + t)

- $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + t\frac{1}{3} \\ 1 + t \\ \frac{1}{3} + t\frac{1}{3} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\frac{1}{3} \\ t \\ t\frac{1}{3} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hierbei ist $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ eine spezielle Lösung und der Kern von A ist gegeben durch LH $\left(\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$

Die Lösungsmenge ist $x_0 + \mathrm{LH}(v_1, \ldots, v_{n-r})$ <- affiner Unterraum

- Die Vektoren sind lin. unabhängig

- dim(Lösungsmenge) = n - r = Anzahl Spalten - rg(A)

- Für b = 0 ist das ein Untervektorraum = kern von A

- Für n = r ist dim = 0 (Es gibt mind. eine Lösung)
=> $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax$ ist Injektiv

Elementare Zeilenumformungen (Def. 2.5.3)

(G1) Das Addieren des μ-fachen einer Zeile auf eine *andere* Zeile.

(G2) Das Vertauschen zweier Zeilen.

(G3) Das Multiplizieren einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$.

- Jede davon lässt sich auch durch Linksmultiplikation mit einer Matrix erreichen
- Sie ändern den Rang einer Matrix NICHT

Zeilenstufenform (Def. 2.5.1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pivot-Eintrag = der erste nicht-0 Eintrag einer Zeile
- Zeilenstufenform =
i) Nach einer Nullzeile kommen nur weitere Nullzeilen
ii) Der Pivotelement von i2 steht rechts von dem von i1
- Erweiterte Zeilenstufenform = Zeilenstufenform +
i) Alle Pivotelemente sind 1
ii) Über die Pivotelemente stehen nur 0
- Ax = b ist in (erw.) Zeilenstufenform, wenn A in (erw.) Zeilenstufenform ist

Linearer Unterraum

$U \subseteq \mathbb{R}^n$

Untervektorraum (Def 2.3.1)

$$\begin{array}{rll} & 0 \in U & (U \text{ enthällt den Nullvektor}) \\ \forall v,w \in U: & v+w \in U & (U \text{ ist abgeschlossen unter Addition}) \\ \forall v \in U, \lambda \in \mathbb{R}: & \lambda v \in U & (U \text{ ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren}) \end{array}$$

Kern einer Matrix:

$\ker A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullstellenmenge von: $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax$

- Der Kern ist immer ein UVR (Lemma 2.3.2)
- Der Kern ist niemals leer (0-Vektor ist eine Lösung)

Linearkombination

$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$ $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ mit $r \in \mathbb{N}_0$

$M \subseteq \mathbb{R}^n$

Lineare Hülle

$$\mathrm{LH}_{\mathbb{R}}(M) := \mathrm{LH}(M) := \left\{ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j \,\middle|\, r \in \mathbb{N}_0; \forall j \le r: v_j \in M; \lambda_j \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\mathrm{LH}(v_1, v_2 \ldots, v_r) := \mathrm{LH}(\{v_1, v_2 \ldots, v_r\}) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \mid \lambda_j \in \mathbb{R}\}$$

- Die Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus M
- Der von M erzeugten Untervektorraum
- $\mathrm{LH}(\emptyset) = \{0\}$, weil leere Summe = 0

Lemma 2.3.4

- $\mathrm{LH}(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ UVR $M \subseteq \mathrm{LH}(M)$ Jede Menge LH(M) ist UVR von $\mathbb{R}^n$
- $\mathrm{LH}(M) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ UVR mit $M \subseteq U$ Jeder andere UVR, mit M⊆U enthält LH(M)
- LH(M) ist der kleinste UVR von $\mathbb{R}^n$ der M enthält

$M \subseteq U$

Erzeugendensystem (Def. 2.3.5)

$\mathrm{LH}(M) = U$

- Jedes Element in U lässt sich als Linearkombination von Elementen aus M schreiben.

- $M_1 \subseteq M_2 \subseteq U$ und M1 ist ein Erzeugendensystem => M2 ist auch eins
- U ist immer ein Erzeugendensystem

Satz 2.3.7

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, m < n

$\ker A \neq \{0\}$

- Es gibt mind. eine Lösung des LGS Ax = 0

$M \subseteq \mathbb{R}^n$

Lineare Unabhängigkeit (Def. 2.3.9)

- Nullvektor als Linearkombination aus M = alle Skalare null

$$M \text{ ist linear unabhängig } :\Longleftrightarrow \left(\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j = 0 \Longrightarrow (\forall j : \lambda_j = 0)\right)\right)$$

$$M \text{ ist linear abhängig } :\Longleftrightarrow \left(\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j = 0 \text{ und } (\exists j : \lambda_j \neq 0)\right)\right)$$

- Die leere Menge ist linear unabhängig
- Eine einelementige Menge ist linear unabhängig

$$\{v, w\} \text{ ist linear abhängig } \Longleftrightarrow ((v = 0) \text{ oder } (w = 0) \text{ oder } (\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : v = \lambda w))$$

Lemma 2.3.11

endliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$

(i) M ist linear unabhängig
(ii) Jeder Vektor v in LH(M) hat eindeutige Darstellung als Linearkombination aus Vektoren in M.
(iii) Für v aus M gilt: v nicht in LH(M \ {v})

Äquivalent

$M_1 \subseteq M_2$

Bemerkung 2.3.12

- M2 ist linear unabhängig => M1 auch

Satz 2.3.13

Menge linear unabhängiger Vektoren $M \subseteq \mathbb{R}^n$. *Dann ist* $|M| \leq n$.

Basis eines Untervektorraums von $\mathbb{R}^n$ (Def. 2.3.14)

- Endliche Teilmenge B von U
- B heißt Basis, wenn:

(i) Die Menge B ist ein Erzeugendensystem für U, d.h. $\mathrm{LH}(B) = U$.

(ii) Die Menge B ist linear unabhängig.

Lemma 2.3.15

(i) B ist eine Basis von U

(ii) Jeder Vektor in U besitzt eine eindeutige Darstellung als Linearkombination aus Elementen aus B.

Äquivalent

Standardbasis (Def. 2.3.17)

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$$

- Standardbasisvektoren

$$e_1:=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad e_2:=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\quad e_n:=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

Basisauswahl- und ergänzungssatz (Satz. 2.3.18)

- *ein Untervektorraum* $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
- *ein Erzeugendensystem* M *von* U,
- *eine linear unabhängige Teilmenge* $L \subseteq M$.

Dann gibt es eine Basis B von U mit: $L \subseteq B \subseteq M$

Korollar 2.3.19

Jeder Untervektorraum U von $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Basis

Steinitzscher Austauschsatz

Sei U ein UVR von $\mathbb{R}^n$

B = {b1,...,br} - Basis von U

v = Vektor in U: $v=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j b_j.$

Wenn $k\in\{1,\dots,r\}$ *so gewählt ist, dass* $\lambda_k\neq 0$, *dann ist auch* $B':=(B\setminus\{b_k\})\cup\{v\}$

$=\{b_1,\dots,b_{k-1},v,b_{k+1},\dots,b_r\}$ *eine Basis von* U.

Satz 2.3.22

Alle Basen eines UVRs haben gleich viele Elemente.

Dimension eines UVRs (Def. 2.3.23)

$\dim U := |B| \in \mathbb{N}_0$ für eine Basis B von U.

- Die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ hat n Elemente.
- $U := \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist eine Gerade durch die 0. {v} ist eine Basis => dim U = 1
- $U := \mathrm{LH}(v, w) = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ ist eine Ebene durch 0 mit dim U = 2

Monotonie der Dimension (Lemma 2.3.26)

Untervektorräume $W \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$.

(a) $\dim W \leq \dim U$.

(b) $(W \subsetneq U) \implies (\dim W < \dim U)$.

Affiner Unterraum

Verschobene Menge M (um Vektor p)

$$p + M := M + p := \{p + x \mid x \in M\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Affiner Unterraum (Def. 2.4.2)

$R \subseteq \mathbb{R}^n, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n$ UVR

$$R = p + U$$

- p = Fußpunkt
- Affiner Unterraum = verschobener Unvervektorraum
- Jeder Untervektorraum ist auch affiner Unterraum (p=0)
- p ist nicht eindeutig, U aber doch (U = {x - y, x,y in R})

Dimension eines affinen Unterraums (Def. 2.4.4)

$$\dim R := \dim U$$

- Jede einelementige Menge ist ein affiner Unterraum

Affinkombinationen (Def. 2.4.7)

Linearkombination der Form: $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$

wobei: $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1$

Charakterisierung affiner Unterräume (Satz 2.4.8)

(i) R *ist ein affiner Unterraum von* $\mathbb{R}^n$

(ii) $R \neq \emptyset$ *und* $\forall x, y, z \in R, \lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda(y - z) \in R$.

(iii) $R \neq \emptyset$ *und jede Affinkombination von endlich vielen Vektoren in* R *ist in* R.

Algebraische Strukturen

Halbgruppe:

- Paar (S,*):
  S = Menge
  * = assoziative binäre Verknüpfung $\forall x, y, z \in S : (x * y) * z = x * (y * z)$
- Kommutative Halbgruppe: Halbgruppe + $\forall x, y \in S : x * y = y * x$
- Neutralelement (eindeutig): $\forall x \in S : x * e = x = e * x$

Monoid:

- Halbgruppe mit Neutralelement

Monoid $(S, *)$

- Invertierbar: $x * y = e = y * x$
- Inverses von x (eindeutig): x^{-1}
- $(S, *)^{\times}$= Menge aller invertierbaren Elemente
- Invertierbarkeit des Produkts: $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$
- Potenzen: $x^n := \underbrace{x * \cdots * x}_{n}$ & $x^0 := e$

$$x^{-n} := (x^{-1})^n = \underbrace{x^{-1} * \cdots * x^{-1}}_{n} \quad \& \quad x^{k+l} = x^k * x^l \quad \text{und} \quad (x^k)^l = x^{kl}$$

Gruppe:

- Monoid, in dem jedes Element invertierbar ist

- $* : G \times G \to G$
- $\forall x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z)$
- $\exists e \in G : x * e = x = e * x$
- $\forall x \in G : \exists y \in G : x * y = e = y * x$

Monoid $(S, *)$

- Einheitsgruppe: $S^{\times} := (S, *)^{\times}$

$$\forall x, y, a \in G : (a * x = a * y \implies x = y) \quad \& \quad \forall x, y, z \in G : (x * a = y * a \implies x = y)$$

$H \subseteq G$

Untergruppe:

(i) $e_G \in H$

(ii) $\forall a, b \in H : a * b \in H$

(iii) $\forall a \in H : a^{-1} \in H$.

- H ist mit die (ko)eingeschränkte Operation wieder eine Gruppe
- Jeder Untervektorraum U von $\mathbb{R}^n$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^n, +)$.

Gruppenhomomorphismus:

$\forall x, y \in G : \varphi(x *_G y) = \varphi(x) *_H \varphi(y)$

=> $\varphi(e_G) = e_H$ & $\forall x \in G : \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$

- Injektiv, wenn: $\ker \varphi = \{e_G\}$
- Isomorphismus wenn phi bijektiv
  Die Umkehrfunktion ist auch ein Isomorphismus
  Zwei Gruppen sind isomorph, falls es ein Isomorphismus existiert
- Endomorphismus wenn Zielbereich=Def.bereich
  Falls auch Isomorphismus => Automorphismus

Ring:

(i) $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe.

(ii) $(R, \cdot)$ ist ein Monoid.

(iii) $\forall x, y, z \in R : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ und $\forall x, y, z \in R : (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$

- Kommutativ, falls die Multiplikation kommutativ ist
- Ein Element ist invertierbar, falls es bezüglich die Multiplikation inv.bar ist
- Rechenregeln:

(a) $\forall x \in R : 0_R \cdot x = 0_R = x \cdot 0_R$.

(b) $\forall x \in R : -x = (-1_R) \cdot x = x \cdot (-1_R)$.

$na := \underbrace{a + \cdots + a}_{n}$ und $a^n := \underbrace{a \cdot \cdots \cdot a}_{n}$

$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ und $(m+n)a = ma + na$

Unterring:

(i) T ist eine Untergruppe von $(R,+)$

(ii) $1_R \in T$

(iii) $\forall a,b \in T : a \cdot b \in T$.

Ringhomomorphismus:

$\forall x,y \in R : \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

$\forall x,y \in R : \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

$\varphi(1_R) = 1_T$.

- Genauso für Iso-/Endo- und Automorphismen

Körper:

(i) Die Einheitengruppe ist gegeben durch: $K^\times = K \setminus \{0_K\}$.

(ii) Die Multiplikation ist kommutativ.

- Nur 0 ist also nicht invertierbar

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

- Körper sind immer nullteilerfrei: $a \cdot b = 0_K$ folgt immer $a = 0_K$ oder $b = 0_K$

($\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_4$).

$+$	0	1	A	B
0	0	1	A	B
1	1	0	B	A
A	A	B	0	1
B	B	A	1	0

und

$\cdot$	0	1	A	B
0	0	0	0	0
1	0	1	A	B
A	0	A	B	1
B	0	B	1	A

Ring(Z,+,*) & Quotientenringe

Division mit Rest

$a \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N},\ k, r \in \mathbb{Z}$

$a = mk + r \quad und\ 0 \le r < m$ (r = Rest)

Teilbarkeitsrelation

- m teilt a (a ist durch m teilbar)

m|a <=> a = mk

(a) $\forall a \in \mathbb{Z} : 1|a.$

(b) $\forall a \in \mathbb{Z} : (0|a \iff a = 0).$

(c) $\forall a \in \mathbb{Z} : a|a.$

(d) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a|b\ und\ b|c) \implies a|c.$

(e) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a|b\ und\ b|a) \iff |a| = |b|.$

Kongruent modulo m

$m|(a-b) \qquad a \equiv_m b \quad \text{oder} \quad a \equiv b (\text{mod } m)$

- m = 0 => a = b
- m = 1 => gilt für alle a,b aus Z
- a und b haben den gleichen Rest modulo m

Relation

Teilmenge $\sim \subseteq X \times X$

- man schreibt auch $x \sim y$ anstelle $(x, y) \in \sim$

$$\left.\begin{array}{l} \textit{reflexiv}, \text{ falls } \forall x \in X : x \sim x \\ \textit{symmetrisch}, \text{ falls } \forall x, y \in X : x \sim y \implies y \sim x \\ \textit{transitiv}, \text{ falls } \forall x, y, z \in X : (x \sim y \text{ und } y \sim z) \implies x \sim z \end{array}\right\} \text{Äquivalenzrelation}$$

- Äquivalenzklasse: $[x]_\sim := \{y \in X \mid x \sim y\}$

$q : X \to Q$

- Für m aus Z ist Kongruenz modulo m immer eine Äquivalenzrelation
- Äquivalenzrelation auf X: $(x \sim_q y) :\Longleftrightarrow q(x) = q(y)$

Quotientenmengen und -abbildungen

- Quotientenmenge (Faktorenmenge): $X/\sim$
- Quotientenabbildung: $q : X \to X/\sim$

$\forall x, y \in X : x \sim y \Longleftrightarrow q(x) = q(y)$

- Menge aller Äquivalenzklassen modulo m: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} := \mathbb{Z}/\equiv_m$

$m \in \mathbb{N}_0$

Ringstruktur über Quotientenmengen

- Quotientenmenge die ein Ringhomomorphismus: $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \quad x \mapsto [x]_m$

Für $[x]_m, [y]_m, \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gilt dann $[x]_m + [y]_m = [x+y]_m$ und $[x]_m \cdot [y]_m = [x \cdot y]_m$. Das Einselement ist $[1]_m$, das Nullelement ist $[0]_m$.

- Für m = 0 ist das ein Ringisomorphismus: $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$
- Else - Bijektion: $b : \{0, \ldots, m-1\} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \quad r \mapsto q(x) = [r]_m$ ($|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| = m$)

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein endlicher kommutativer Ring

Lemma 3.4.15

- R ein endlicher kommutativer Ring mit 0 != 1, dann Äquivalent:

(i) R ist ein Körper.

(ii) R ist nullteilerfrei, d.h. $\forall a, b \in R : (ab = 0_R) \Longrightarrow (a = 0_R \text{ oder } b = 0_R)$

- Nicht äquivalent für unendliche Ringe

Primzahl:

$p > 1 \quad \text{und} \quad \forall m \in \mathbb{N} : (m|p \implies (m = 1 \text{ oder } m = p))$

(i) m *ist eine Primzahl.*

(ii) *Der Ring* $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *ist ein Körper.*

Lemma von Euklid

$p|(ab) \implies (p|a \text{ oder } p|b)$

- Für jede Primzahl gibt es einen Körper mit p Elementen ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

Komplexe Zahlen

Definition:

- $\mathbb{C}$ = Körpererweiterung von R ($i^2 = -1$)
- Jedes Element z = a + ib ist eindeutig

$(a + ib = 0) \iff (a = 0 \text{ und } b = 0)$

(a) $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

(b) $(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$.

(c) $(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

(d) Für $a + ib \neq 0$ gilt: $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i \cdot \frac{-b}{a^2+b^2}$

Komplexkonjugiertes: $\overline{z} := a - ib$

$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$

- Betrag: $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Re : C -> R und Im : C -> R sind Gruppenhomomorphismen ((C,+) & (R,+))
- iR ist Untergruppe von (C,+)
- Konjunktion ist ein Körperautomorphismus

Komplexe Exponentialfunktion: $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times, \quad z \mapsto e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

- Ist surjektiver Gruppenhomo. von $(\mathbb{C}, +)$ in $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$

Fundamentalsatz der Algebra:

- Jedes Polynom mit komplexe Koeffizienten hat eine Lösung für $p(z) = 0$
- In Linearfaktoren zerlegbar: $p(X) = a_k (X - z_1)(X - z_2) \cdots (X - z_k)$
- Körper ist algebraisch abgeschlossen, falls
jedes nichtkonstante Polynom eine Nullstelle hat

Vektorräume

Vektorraum über K:

$\mathbb{K}$ ein Körper, $\quad +: V \times V \to V, \quad \cdot: \mathbb{K} \times V \to V$

(i)		$(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe	
(ii)	$\forall \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in V:$	$\lambda \cdot (v+w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w.$	(Skalares Distributivgesetz I)
(iii)	$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V:$	$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v.$	(Skalares Distributivgesetz II)
(iv)	$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V:$	$(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v).$	(Skalares Assoziativgesetz)
(v)	$\forall v \in V:$	$1_{\mathbb{K}} \cdot v = v.$	(Wirkung des Einselementes)

Lemma 4.1.5

(i) $\lambda v = 0_V \iff (\lambda = 0_{\mathbb{K}})$ *oder* $(v = 0_V)$).

(ii) $(-1_{\mathbb{K}})v = -v.$

Untervektorraum (siehe oben)

- ker A ist UVR von $\mathbb{K}^n$.
- Die Menge aller symmetrischen Matrizen ($A^\top = A$) ist UVR von $\mathbb{K}^{n \times n}$

Affiner Unterraum (siehe oben)

Lineare Abbildungen

$\varphi : V \to W$ Homomorphismus von K-Vektroräumen:

$\forall x, y \in V : \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
$\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K} : \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$

$\varphi(0) = 0$
$\varphi(0_V) = 0_W$

- Isomorphismus, falls bijektiv
- Die Umkehrfunktion ist auch lineare Abbildung
- Endomorphismus, falls Def.bereich = Zielbereich
- Automorphismus, falls beide

- U UVR von V => phi(U) UVR von W | Bild(phi) = phi(V) UVR von W
- U UVR von W => phi-1(U) UVR von V | ker(phi) = phi-1({0}) UVR von V

- injektiv, falls ker phi = {0}
- Beispiele:

$\Phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad x \mapsto Ax$

$\mathbb{K}^{n\times p} \to \mathbb{K}^{m\times p}, \quad X \mapsto AX$ | $\mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}^{m\times p}, \quad X \mapsto XB$

$\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{z}$ (R-Linear, aber nicht C-linear)

Menge aller linearen Abbildungen ($\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$)

- UVR des Raumes W^V (alle Abbildungen von V nach W)

Lineare Hülle, Basis, Dimension

Isomorphismen und Basen:

$\varphi : V \to W$ sei eine lineare Abbildung.

- $M \subseteq V$ Erzeugendensystem von V und φ surjektiv => $\varphi(M)$ Erzeugendensystem für W
- $L \subseteq V$ linear unabhängig und φ injektiv => $\varphi(L)$ linear unabhängig
- $B \subseteq V$ Basis von V und φ bijektiv => $\varphi(B)$ Basis von W

$$\psi : \mathbb{K}^n \to V, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$$

(a) Die Abbildung $\psi : \mathbb{K}^n \to V$ ist $\mathbb{K}$-linear, also ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

(b) Die Abbildung $\psi : \mathbb{K}^n \to V$ genau dann injektiv, wenn $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig ist.

(c) Die Abbildung $\psi : \mathbb{K}^n \to V$ genau dann surjektiv, wenn $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem ist.

(d) Die Abbildung $\psi : \mathbb{K}^n \to V$ genau dann ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen, wenn $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

Endlich dimensionale Vektorräume

(i) Es gibt eine endliche Menge $M \subseteq V$, die V erzeugt.

(ii) Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, sodass jede Menge mit mehr als n Elementen linear abhängig ist.

(iii) Es gibt eine endliche Basis $B \subseteq V$.

(iv) Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $V \cong_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n$.

- Jede Basis von V hat gleich viele Elemente
- Dimension = Anzahl der Elemente in einer Basis ($\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim(V) \in \mathbb{N}_0$)
- auch min. Größe eines Erzeugendensystems
- auch max. Größe eines lin.unabh. Tilmenge
- auch = n mit $V \cong \mathbb{K}^n$.

$W \subseteq V$

Monotonie der Dimension

- Verallgemeinerung von der Definition oben
- + W unendl. dimensional => V unendlich dimensional

Geordnete Basis:

- Tupel aus die Vektoren einer Basis (Reihenfolge ist wichtig)
- Vektorraum-Isomorphismus: $\mathbb{K}^n \to V, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k b_k$

Koordinatenvektor:

- Darstellung bezüglich einer Basis: $(\cdot)_B : V \to \mathbb{K}^n, \quad v = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k \mapsto (v)_B := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- Wir stellen einen Vektor als Linearkombination aus Basisvektoren dar.

Koordinatenvektor = Vektor aus die Skalaren

Koordinatenvektor bestimmen:

$$\underbrace{x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Basis}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}}$$

=> $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & x_2 \\ x_3 & -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

=> $\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = a \\ & x_2 & & & = b \\ & & x_3 & & = c \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = d, \end{array}$

=> Gauß: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 - d/2 \\ b \\ c \\ a/2 - b - c + d/2 \end{pmatrix}$

Lineare Abbildungen zwischen Vektorräume & Darstellungsmatrizen

Rang einer linearen Abbildung

$\mathrm{rg}\varphi := \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim_{\mathbb{K}}(\varphi(V)) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

Fortsetzungssatz

- Eine lin. Abbildung ist eindeutig, wenn man sie über ein Erzeugendensystem kennt
- Eine lin. Abbildung ist ^ + Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) \to W^B, \quad \varphi \mapsto \varphi|_B$ für eine Basis B

Darstellungsmatrix einer Abbildung

- Für jede Matrix A ist $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad x \mapsto Ax$ linear ($\varphi_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$)
- In den Spalten der Matrix stehen die Bilder der Standardbasisvektoren
- Zu jeder linearen Abbildung gibt es eine Darstellungsmatrix: $\mathrm{M}_{\mathrm{E,E}}(\varphi)$
- Matrixmultiplikation entspricht Verketten von Abbildungen:

$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB} \quad \& \quad \mathrm{M}_{\mathrm{E,E}}(\varphi)\mathrm{M}_{\mathrm{E,E}}(\psi) = \mathrm{M}_{\mathrm{E,E}}(\varphi \circ \psi)$

- Einheitsmatrix = Identitätsabbildung: $\varphi_{\mathbb{1}_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \quad und \quad \mathrm{M}_{\mathrm{E,E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = \mathbb{1}_n$
- Isomorphismus zwischen Matrix und Abbildung:

$\mathbb{K}^{m\times n} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \quad A \mapsto \varphi_A \quad \& \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \to \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \varphi \mapsto \mathrm{M}_{\mathrm{E,E}}(\varphi)$

- $\varphi = \varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist bijektiv, wenn m=n und A (quadratisch) multiplikativ invertierbar ist

$\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1} \quad und \quad (\mathrm{M}_{\mathrm{E,E}}(\varphi))^{-1} = \mathrm{M}_{\mathrm{E,E}}(\varphi^{-1})$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\cdot)_{B_V}"'] & W \arrow[d, "(\cdot)_{B_W}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "\varphi_A"'] & \mathbb{K}^m. \end{tikzcd}$$

$A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

$\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad x \mapsto Ax$

- Lineare Abbildung: $\varphi : V \to W, \quad v \mapsto ((\cdot)_{B_W})^{-1}(A\,(v)_{B_V}) = ((\cdot)_{B_W})^{-1} \circ \varphi_A \circ ((\cdot)_{B_V})(v)$
- In den Spalten von A stehen die Bilder der Basisvektoren aus Bv, dargestellt bzgl. Bw

- Für jede lineare Abbildung existiert A: $\forall v \in V: \quad (\varphi(v))_{B_W} = A\,(v)_{B_V}$
- A = Darstellungsmatrix von phi bzgl. Bv und Bw: $\forall v \in V: \quad (\varphi(v))_{B_W} = M_{B_W,B_V}(\varphi)\,(v)_{B_V}$

- Multiplizieren von Matrizen enspricht dem Verketten von Abbildungen:

$M_{B_W,B_V}(\varphi)\,M_{B_V,B_U}(\psi) = M_{B_W,B_U}(\varphi \circ \psi)$

- Einheitsmatrix = Identitätsabbildung: $M_{B_V,B_V}(\mathrm{id}_V) = \mathbb{1}_n$
- Isomorphismus (Abbildung -> Darstellungsmatrix): $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) \to \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \varphi \mapsto M_{B_W,B_V}(\varphi)$

- Bijektiv, falls Darstellungsmatrix invertierbar ist (insbesondere: m = n)
- Falls bijektiv: $(M_{B_W,B_V}(\varphi))^{-1} = M_{B_V,B_W}(\varphi^{-1})$

Basiswechselmatrix:

- Darstellungsmatrix von id, bzgl. 2 Basen: $M_{C,B}(\mathrm{id}_V) \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$(v)_C = M_{C,B}(\mathrm{id})(v)_B$

- Basiswechselmatrix in andere Richtung = Inverse: $M_{B,C}(\mathrm{id}_V) = (M_{C,B}(\mathrm{id}_V))^{-1} = M_{B,C}(\mathrm{id}_V^{-1})$
- Basiswechselmatrix bzgl. andere Basen:

$M_{C_W,C_V}(\varphi) = M_{C_W,C_V}(\mathrm{id}_W \circ \varphi \circ \mathrm{id}_V) = M_{C_W,B_W}(\mathrm{id}_W)\,M_{B_W,B_V}(\varphi)\,M_{B_V,C_V}(\mathrm{id}_V)$

- Die eine Richtung ist immer einfacher zu bestimmen!
- Siehe Beispiel 4.3.14

Jede invertierbare Matrix ist eine Basiswechselmatrix

- Für jede S $\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ gibt es geordnete Basen C und B mit: $S = M_{B,C}(\mathrm{id}_V)$

Smithsche Normalform:

- Zu jeder lin. Abbildung existieren Bw und Bv mit:

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B}_W,\mathrm{B}_V}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix in Smith-Normalform bringen:

- Gauß-Algorithmus um die Matrix in erw. Zeilenstufenform zu bringen
- Danach Spaltenumformungen um die Matrix in Smith-Normalform zu bringen
- Zeilenumformungen = Linksmultiplikation = Basiswechsel im Definitionsbereich
- Spaltenumformungen = Rechtsmultiplikation = Basiswechsel im Zielbereich

Äquivalenz von Matrizen

- Äquivalenz = beschreiben die selbe lin. Abbildung, nur bzgl. andere Basen
- Falls existieren invertierbare Matrizen S, T mit: $SAT = B$
- Jede Matrix ist äquivalent zu einer Matrix in Smith-Normalform
- Zwei Matrizen sind äquivalent, falls die den gleichen Rang haben

Direkte Summen & Komplemente

Direktes Produkt von Vektorräumen

$(V_1 \times \cdots \times V_r, +, \cdot)$

- Operationen:

$(v_1, \ldots, v_r) + (w_1, \ldots, w_r) := (v_1 + w_1, \ldots, v_r + w_r)$

$\lambda \cdot (v_1, \ldots, v_r) := (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_r)$

Basis des direkten Produkts:

- V_1, V_2 *Vektorräume*, B eine Basis von V1 und C eine Basis von V2
- Basis von V1xV2: $\{(b,0) \mid b \in B\} \cup \{(0,c) \mid c \in C\}$

$\dim_{\mathbb{K}}(V_1 \times V_2) = \dim_{\mathbb{K}}(V_1) + \dim_{\mathbb{K}}(V_2)$

- Der Durchschnitt von Untervektorräumen ist wieder ein UVR:

$U := \bigcap_{j \in J} U_j = \{v \in V \mid \forall j \in J : v \in U_j\}$

- Die Summe von Untervektorräumen ist wieder ein UVR:

$U_1 + \cdots + U_r := \{u_1 + \cdots + u_r \mid \forall j \leq r : u_j \in U_j\} = \mathrm{LH}_{\mathbb{K}}(U_1 \cup \cdots \cup U_r)$

Lineare Abbildungen und kartesische Produkte

- Addition ist K-linear: $+ : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r \text{ Faktoren}} \to V, \quad (v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 + \cdots + v_r$
- Bild($U_1 \times \cdots \times U_r \to V, \quad (u_1, \ldots, u_r) \mapsto u_1 + \cdots + u_r$ = $U_1 + \cdots + U_r$
- ker($\varphi : U_1 \times U_2 \to V, \quad (u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$ = $\{(x, -x) \mid x \in U_1 \cap U_2\} \cong U_1 \cap U_2$

Direkte Summe von Vektorräume:

$V = \bigoplus_{j=1}^{r} U_j = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, falls $U_1 \times \cdots \times U_r \to V, \quad (u_1, \ldots, u_r) \mapsto u_1 + \cdots + u_r$ bijektiv

- Jedes v aus V lässt sich eindeutig schreiben als Summe von Elementen aus die UVR

- Für 2 UVR gilt: $V = U \oplus W \quad \Longleftrightarrow \quad (U + W = V \; und \; U \cap W = \{0\})$
  W = Vektorraumkomplement von U
  jedes v aus V lässt sich eindeutig schreiben als v = u + w
  dim(W) = dim(V) - dim(U)

- Wie findet man ein Vektorraumkomplement? (Beispiel 4.4.12)

Quotientenektorräume

U UVR von V

Äquivalenzrelation auf Vektorraum

$v \equiv_U w :\Longleftrightarrow v - w \in U$

K-lineare surjektive Quotientenabbildung:

$q : V \to V/U, \quad v \mapsto [v]_U := [v]_{\equiv_U}$

- Quotientenmenge $V/U := V/\equiv_U$ = Quotientenvektorraum (Faktorraum) von V modulo U

  $[v]_U + [w]_U = [v+w]_U \qquad \lambda \cdot [v]_U = [\lambda \cdot v]_U \qquad$ Nullvektor $= [0]_U$

- ker(q) = U
- Die Elemente in V/U sind affine Unterräume parallel zu U mit unterschiedlichen Aufpunkten: $[p]_U = \{x \in V \mid x - p \in U\} = p + U$
  Nichteindeutigkeit von p <=> Nichtinjektivität von q
- Jeder Untervektorraum ist der kern einer linearen Abbildung

Faktorisieren von linearen Abbildungen

- Lineare Abbildungen $q : V \to Q \text{ und } \varphi : V \to W$, q sei surjektiv

$$\left.\begin{array}{l} (i)\ \ker(q) \subseteq \ker(\varphi) \\ (ii)\ \textit{Es gibt eine Abbildung } \tilde{\varphi} : Q \to W \textit{ mit } \varphi = \tilde{\varphi} \circ q. \end{array}\right\} \text{Äquivalent}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q"] & W \\ Q \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

- "phi faktorisiert durch q"
- $\tilde{\varphi}$ ist eindeutig (falls existiert), linear und $\mathrm{Bild}(\tilde{\varphi}) = \mathrm{Bild}(\varphi)$

Homomorphiesatz

- Isomorphismus von K-Vektorräume: $\overline{\varphi} : V/\ker(\varphi) \to \mathrm{Bild}(\varphi), \quad [v]_{\ker(\varphi)} \mapsto \varphi(v)$
  also für jedes phi: $\varphi = \iota \circ \overline{\varphi} \circ q$

- $q : V \to V/\ker(\varphi)$ = die (surjektive) Quotientenabbildung
- $\overline{\varphi} : V/\ker(\varphi) \to \mathrm{Bild}(\varphi)$ = (bijektiver) Vektorraumisomorphismus
- $\iota : \mathrm{Bild}(\varphi) \to W$ = die (injektive) Inklusionsabbildung

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q"'] & W \\ V/\ker(\varphi) \arrow[r, "\overline{\varphi}", "\simeq"'] & \mathrm{Bild}(\varphi) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

$V = U \oplus W$

Quotienten und Komplemente:

- Isomorphismus von K-Vektorräume: $q|_W : W \to V/U, \quad x \mapsto q(x) = [x]_U$
- Falls V endlich dimensional: $\dim_{\mathbb{K}}(V/U) = \dim_{\mathbb{K}}(V) - \dim_{\mathbb{K}}(U)$
- Wie findet man eine Basis eines Quotientenraums? (Siehe Beispiel 4.5.9)

Dimensionsformel für lineare Abbildungen:

$\mathrm{rg}(\varphi) + \dim_{\mathbb{K}} \ker(\varphi) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$ $\quad$ $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Bild}(\varphi))$

Dimensionsformel für Summe und Schnitt

$\dim_{\mathbb{K}}(U + W) = \dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(W) - \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W)$

Der Dualraum

Dualraum:

- Vektorraum aller Linearformen auf V: $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$

Linearform:

- Element in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$, also eine lineare Abbildung $\sigma : V \to \mathbb{K}$

$\varphi : V \to W$

Dualisierung von linearen Abbildungen

- Lineare Abbildung, die eine Linearform auf W zu eine Linearform auf V macht:

$\varphi^* : W^* \to V^*, \quad \sigma \mapsto \sigma \circ \varphi$ (sigma: W -> K (also teil von W*))

- Falls φ surjektiv -->φ^* ist injektiv
- Falls φ bijektiv -->φ^* ist bijektiv
- $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$
- $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$

Untervoktorraum vom Dualraum:

- Menge aller Linearformen auf V, die auf U verschwinden: $\{\sigma \in V^* \mid \sigma|_U = 0\} \subseteq V^*$
- Isomorph zum Dualraum des Faktorraums (V/U)*:

$(V/U)^* \to \{\rho \in V^* \mid \rho|_U = 0\}, \quad \sigma \mapsto q^*(\sigma) = \sigma \circ q$ (q = Quotientenabbildung)

Auswertungsabbildung:

- Linearform auf dem Dualraum: $\eta_V(v) : V^* \to \mathbb{K}, \quad \sigma \mapsto \sigma(v)$

Bidual:

- $(V^*)^*$ $\quad (\varphi^*)^* \circ \eta_V = \eta_W \circ \varphi.$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta_V"'] & W \arrow[d, "\eta_W"] \\ (V^*)^* \arrow[r, "(\varphi^*)^*"'] & (W^*)^* \end{tikzcd}$$

- Lineare Abbildung, die jeden Vektor auf die dazugehörige Auswertungsabbildung:

$\eta_V : V \to (V^*)^*, \quad v \mapsto \eta_V(v),$

- Koordinatenabbildung (lineare Abbildung, die jeden Vektor auf der j-te Koordinate):

$b_j^* : V \to \mathbb{K}, \quad \sum_{i \in I} \lambda_i b_i \mapsto \lambda_j.$

- Lineare unabhängige Teilmenge von V*: $\{b_i^* \mid i \in I\}$
- Der Dualraum ist isomorph zu $\mathbb{K}^B$ und $\mathbb{K}^I$
- $\eta_V : V \to (V^*)^*, \quad v \mapsto \sigma \mapsto \sigma(v)$ ist injektiv

Geordnete Basis des Dualraums (duale Basis):

- B = geordnete Basis des Vektorraums V
- Koordinatenabbildungen = geordnete Basis: $\mathrm{B}^* := (b_1^*, \dots, b_n^*)$

$\dim_{\mathbb{K}}(V^*) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$ *und* $V^* \cong_{\mathbb{K}} V$

- $(\sigma)_{\mathrm{B}^*} = \left(\mathrm{M}_{\mathrm{E},\mathrm{B}}(\sigma)\right)^\top$ (sigma = Linearform)

Transponieren entspricht Dualisieren:

- Das Dualisieren einer Abbildung enspricht dem Transponieren der Matrix:

$\mathrm{M}_{\mathrm{B}^*,\mathrm{C}^*}(\varphi^*) = \left(\mathrm{M}_{\mathrm{C},\mathrm{B}}(\varphi)\right)^\top$

Der Bidual ist endlich dimensional:

- Der Bidualraum eines Vektorraums ist natürlich isomorph dazu:

$\eta_V : V \to (V^*)^*, \quad v \mapsto \eta(v) : \sigma \mapsto \sigma(v)$

- Für Beispiel siehe 4.6.12

Permutationen

- Eindeutige Anordnung einer Menge

Symmetrische Gruppe:

- Menge aller Permutationen auf einer Menge: $\mathscr{S}(n) := \{\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} \mid \sigma \text{ ist bijektiv}\}$
- Verkettung von Abbildungen
- Größe: $|\mathscr{S}(n)| = n!$

Transposition:

- Permutation, die genau 2 Elemente vertauscht: $\tau : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}, \quad j \mapsto \begin{cases} l & \text{falls } j = k, \\ k & \text{falls } j = l, \\ j & \text{sonst.} \end{cases}$

Permutation = Produkt von Transpositionen:

- Die Gruppe $\mathscr{S}(n)$ wird von den Transpositionen erzeugt

$\sigma = \tau_r \circ \cdots \circ \tau_1$ (für r = 0 ist das gleich id)

Signum einer Permutation

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{\substack{\{i,j\} \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ i \neq j}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \qquad \operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$$

- Signum einer Transposition = -1
- Signum ist ein Gruppenhomomorphismus:

$\forall \sigma, \tau \in \mathscr{S}(n) : \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$ $\qquad \operatorname{sgn} : (\mathscr{S}(n), \circ) \to \mathbb{Z}^\times = (\{-1, 1\}, \cdot)$

$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^r$ (r = Anzahl von Transpositionen in der Permutation)

- Permutation = gerade, falls sgn = 1
  = ungerade, falls sgn = -1

Alternierende Gruppe:

- Untergruppe der geraden Permutationen: $\mathscr{A}(n) := \ker(\mathrm{sgn}) = \{\sigma \in \mathscr{S}(n) \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$

Ungerade Permutationen:

$\{\sigma \in \mathscr{S}(n) \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = -1\} = \left\{\rho \circ \tau \;\middle|\; \rho \in \mathscr{A}(n)\right\}$

- Es gibt genauso viele gerade wie ungerade Permutationen: $|\mathscr{A}(n)| = \frac{n!}{2}$

Alternierende Abbildungen

- N-fache kartesische Produkt: $V^n := V \times \cdots \times V = \{(v_1, \ldots, v_n) \mid \forall j \in \{1, \ldots, n\} : v_j \in V\}$

Linear in der j-ten Komponente:

$\omega(v_1, \ldots, v_{j-1}, v + v', v_{j+1}, \ldots, v_n) = \omega(v_1, \ldots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \ldots, v_n) + \omega(v_1, \ldots, v_{j-1}, v', v_{j+1}, \ldots, v_n)$

$\omega(v_1, \ldots, v_{j-1}, \lambda v, v_{j+1}, \ldots, v_n) = \lambda \omega(v_1, \ldots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \ldots, v_n)$

- Bilinear, falls n = 2
- Multilinear, falls linear in jeder Komponente

Alternierende Abbildung:

- Falls multilinear & sobald mind. 2 Komponente gleich sind, liefert 0:

$\left(\exists i, j \in \{1, \ldots, n\} : \left(v_i = v_j \text{ und } i \neq j\right)\right) \implies \omega(v_1, \ldots, v_n) = 0$

Rechenregeln für alternierende Abbildungen:

- μ-fache der i-ten Komponente auf die j-te addieren:

$\omega(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j + \mu v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n) = \omega(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n)$

- i-ten und j-ten Eintrag vertauschen:

$\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n) = (-1) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n)$

- Koeffizient aus beliebiger Komponente herausziehen:

$\omega(v_1, \ldots, v_{j-1}, \lambda v, v_{j+1}, \ldots, v_n) = \lambda \omega(v_1, \ldots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \ldots, v_n)$

Alternierende Abbildung und Permutationen:

$\omega\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\right) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_n)$

Transformationsformel für alt. Abbildungen:

$\omega(v_1,\dots,v_n) = \Delta \cdot \omega(u_1,\dots,u_n)$. $\Delta \in \mathbb{K}$ $v_1,\dots,v_n \in \mathrm{LH}_{\mathbb{K}}(u_1,\dots,u_n)$.

- Δ berechnen:
  v als Linearkombination schreiben: $v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} u_i$ $mit\ \alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$

$\Delta = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \alpha_{\sigma(1),1} \cdots \alpha_{\sigma(n),n}$

- Für linear abhängige Vektoren gilt: $\omega(v_1,\dots,v_n) = 0$.
  <=> falls $\omega(v_1,\dots,v_n) \neq 0$, dann sind die Vektoren paarweise verschieden und lin. unabh.

Determinanten

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Determinante einer quadratischen Matrix:

$\det(A) := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$

- Leibniz-Formel = das Δ von der Transformationsformel
- Für n = 1: $\det(a) = a$
- Für n = 2: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
- Für n = 3 (Regel von Sarrus): $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$
- Die Determinante ändert sich NICHT beim Transponieren: $\det(A^\top) = \det(A)$

Determinante einer Obere/Untere Dreiecks-/Diagonalmatrix:

$\det A = a_{1,1} \cdots a_{n,n}.$

- det(Einheitsmatrix) = 1

Eigenschaften der Determinante:

- Ist alternierend in den Spalten, also ist $(\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}, \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto \det\left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & \cdots & v_m \end{array}\right)$ alternierend und multilinear
- Ist alternierend in den Zeilen, also ist $(\mathbb{K}^{1\times n})^n \to \mathbb{K}, \quad (z_1, \dots, z_n) \mapsto \det\begin{pmatrix} z_1 \\ \hline \vdots \\ \hline z_n \end{pmatrix}$ alternierend und multilinear
- Ist NICHT linear
- Ist multiplikativ: $\forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n} : \det(AB) = \det(A)\det(B)$

Determinanten und Invertierbarkeit

$\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n} : (A \textit{ ist invertierbar}) \iff (\det(A) \neq 0)$

- Für invertierbare A: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$
- Gruppe der invertierbaren Matrizen: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0\}$

Spezielle lineare Gruppe (SL(n,K))

- Gruppenhomomorphismus: $(\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}),\cdot) \to (\mathbb{K}^{\times} = \mathbb{K} \setminus \{0\},\cdot), \quad A \mapsto \det(A)$

- Die Spezielle lineare Gruppe = kern (Untergruppe) von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$:

$\mathrm{SL}(n,\mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \det(A) = 1\}$

$\sigma \in \mathscr{S}(n)$

Signum = Spezialfall der Determinante:

- Permutationsmatrix von σ: $A_\sigma := \left(\left| e_{\sigma(1)} \right| \cdots \left| e_{\sigma(n)} \right| \right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\mathrm{sgn}(\sigma) = \det(A_\sigma)$

- In der j-te Spalte von A steht der j-te Standardbasisvektor nach der Permutation

Streichungsmatrix:

- Die Matrix, die durch das Streichen der k-ten Zeile und der l-ten Spalte entsteht:

$\mathrm{St}_{(k,l)}(A) := (b_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}} \in \mathbb{K}^{n-1\times n-1}$

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{für } i < k \text{ und } j < l \\ a_{i+1,j} & \text{für } i \geq k \text{ und } j < l \\ a_{i,j+1} & \text{für } i < k \text{ und } j \geq l \\ a_{i+1,j+1} & \text{für } i \geq k \text{ und } j \geq l \end{cases}$$

Entwicklungssatz von Laplace:

- Entwickeln nach der l-ten Spalte: $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{k,l} \det\left(\mathrm{St}_{(k,l)}(A)\right)$

- Entwickeln nach der k-ten Zeile: $\det(A) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{k,l} \det\left(\mathrm{St}_{(k,l)}(A)\right)$

- Am besten Spalten/Zeilen wählen, wo viele Nullen sind!

- Um die Berechnung zu erleichtern - benutze elementare Spalten-/Zeilenumformungen:

- G1 (Addieren des m-fachn einer Zeile/Spalte): Determinante ändert sich NICHT

- G2 (Vertauschen zweier Zeilen/Spalten): (-1) * det

- G3 (Statt durch Skalar teilen: Skalar nach vorne ziehen): det * skalar

Adjunkte:

$A^\sharp := (\alpha_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $\alpha_{i,j} := (-1)^{i+j}\det(\mathrm{St}_{(j,i)}(A))$.

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^\sharp$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ $A^\sharp = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Cramersche Regel:

$A \cdot A^\sharp = \det(A) \cdot \mathbb{1}_n$. $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^\sharp$

Polynome

$+ : \mathbb{R}^\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\mathbb{R}$ = punktweise Summe von Functionen: $f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\bullet : \mathbb{R}^\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\mathbb{R}$ = punktweises Produkt von Functionen: $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\mathbb{R}$ = skalieren von Funktionen: $\lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Algebren:

- Tupel $(\mathbf{A}, +, \bullet, \cdot)$

(i) $(\mathbf{A}, +, \bullet)$ ein Ring ist,

(ii) $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist und

(iii) die beiden Multiplikationen auf folgende Weise verträglich sind:

$$\forall a, b \in \mathbf{A}, \forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda \cdot a) \bullet b = a \bullet (\lambda \cdot b) = \lambda \cdot (a \bullet b).$$

- Kommutativ, falls der Ring $(\mathbf{A}, +, \bullet)$ kommutativ ist
- Endlich dimensional, falls der Vektorraum $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ endlich dimensional ist
- dim(Algebra) = dim(Vektorraum)

Unteralgebren:

- B = Unterring von $(\mathbf{A}, +, \bullet)$ und Unteralgebra von $(\mathbf{A}, +, \cdot)$

K-Algebra-Homomorphismus:

- φ = Ring-Homomorphismus zwischen $(\mathbf{A}, +, \bullet)$ und $(\mathbf{B}, +, \bullet)$ &
  Vektorraum-Homomorphismus (lin.Abb.) zwischen $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ und $(\mathbf{B}, +, \cdot)$

$A = \mathbb{K}[X]$

Polynom-Algebra:

- Polynomalgebra in der formalen Variable X:
  die Potenzen $X^0, X^1, X^2, \ldots$ sind paarweise verschieden

$p \in \mathbb{K}[X]$

- Elemente = formale Polynome: $p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ = Koeffizienten
- Grad eines Polynoms = erste Potenz mit Koeffizient != 0: $\deg(p) = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k \neq 0\} \in \mathbb{N}_0$
- Nullpolynom = 0 ($\deg(0) := -\infty$)

Existenz und Eindeutigkeit der Polynomalgebra:

- Für ein Körper existiert eine Polynomalgebra: $\mathbf{A} = \mathbb{K}[X]$
- Es existiert ein eindeutiger Algebra-Isomorphismus: $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[Y], \quad \varphi(X) = Y$
  => im Wesentlichen gibt es nur eine solche Polynomalgebra

$p, q \in \mathbb{K}[X]$

Grad eines Polynoms:

(a) *Es gilt:* $\deg(p+q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$.

(b) *Falls* $p, q \neq 0$, *dann gilt* $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$

Auswertungshomomorphismus:

- Homomorphismus, der X auf a abbildet: $\mathbb{K}[X] \to \mathbf{A}, \quad p \mapsto p(a)$
  (wir setzen a in p)

Nullstellen von Polynomen:

(i) $p(\lambda) = 0$.

(ii) $\exists q \in \mathbb{K}[X] : p = (X - \lambda)q$

Äquivalent

- Ein Polynom hat höchstens deg(p) verschiedene Nullstellen

Polynom und Polynomfunktion:

- Algebra-Homomorphismus, der jedes Polynom auf eine Polynomfunktion abbildet:

$\Phi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}^{\mathbb{K}}, \quad p \mapsto (\mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad t \mapsto p(t))$ $(\mathrm{Bild}(\Phi) = \mathbf{P}_{\mathbb{K}}$ = Menge aller Polynomfunktionen)

- Injektiv, falls K unendlich: $\mathbb{K}[X]$ *isomorph zu* $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}$
  Funktionen der Form $(\mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad t \mapsto t^n), n \in \mathbb{N}_0$ sind paarweise verschieden und lin.unabh.

- Surjektiv, falls K endlich: $\mathbf{P}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$
  Funktionen der Form $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ sind Polynomfunktionen

Endomorphismen & Ähnlichkeit

Beispiele:

- i) $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\varphi(v_0) = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(\varphi(v_0)) = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(\varphi(\varphi(v_0)))$ = Nullvektor

- ii) $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ \gamma \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

- iii) $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \cdots$

$S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$

Ähnlichkeit von Matrizen:

- A und B sind ähnlich <=> sie entstehen durch Basiswechsel auseinander
- A und B sind ähnlich, falls invertierbare Matrix S mit: $SAS^{-1} = B$
- Ähnlichkeitsvarianten:

(a) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

(b) $\det(A) = \det(B)$.

(c) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Spur einer Matrix:

- Summe der Diagonaleinträge: $\mathrm{tr}(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{j,j} = a_{1,1} + \cdots + a_{n,n} \in \mathbb{K}$
- Die Spur-Abbildung $\mathrm{tr} : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ist linear
- Spur und Multiplikation: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
- Im Allgemeinen gilt NICHT: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$

Determinante und Spur eines Endomorphismus:

- B = geordnete Basis

$\det(\varphi) := \det(\mathrm{M}_{\mathrm{B,B}}(\varphi)) \in \mathbb{K}$. $\mathrm{tr}(\varphi) := \mathrm{tr}(\mathrm{M}_{\mathrm{B,B}}(\varphi)) \in \mathbb{K}$

Eigenwerte & Eigenvektoren

$\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$

Eigenvektor:

- Ein Vektor, der auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet wird: $\exists \lambda \in \mathbb{K} : \varphi(v) = \lambda v$
- Zu jedem Eigenvektor gibt es genau einen Eigenwert: $\varphi(v) = \lambda v$
- Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerte sind linear unabhängig

Eigenwert:

- Der Skalar, der zu einem Eigenvektor gehört: $\exists v \in V \setminus \{0\} : \varphi(v) = \lambda v$
- Sind Ähnlichkeitsvarianten (2 ähnliche Matrizen haben die gleiche Eigenwerte):

$\{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \textit{ ist Eigenwert von } A\} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \textit{ ist Eigenwert von } B\}$

$\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$

Eigenvektoren/-werte und Endomorphismen:

- Geordnete Basis: $\mathrm{B} = (v_1, \ldots, v_n)$
- Die Darstellungsmatrix ist in Diagonalform: $\mathrm{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
- Die Basis besteht aus Eigenvektoren: $\forall j \in \{1, \ldots, n\} : \varphi(v_j) = \lambda_j v_j$

Ähnlich

- Die Diagonaleinträge sind die Eigenwerte zu den Eigenvektoren. (Reihenfolge)
- φ ist diagonalisierbar, falls eine solche Basis B existiert

Eigenräume:

- Menge aller Eigenvektoren zu einem Eigenwert:

$\{v \in V \mid v \textit{ ist ein Eigenvektor zu } \lambda\} \cup \{0\} = \left\{v \in V \,\middle|\, \varphi(v) = \lambda v\right\} = \ker(\lambda \mathrm{id}_V - \varphi) = \ker(\varphi - \lambda \mathrm{id}) \subseteq V$

- Eigenräume sind Unvervektorräume: $E_\lambda(\varphi) := \ker(\varphi - \lambda \mathrm{id}) \subseteq V$
- Geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts: $\dim_{\mathbb{K}} E_\lambda(\varphi)$

- Wie findet man einen Eigenwert (gegeben einen Eigenvektor): $\varphi(v) = \lambda(v)$
- Wie findet man allen Eigenvektoren (gegeben einen Eigenwert): $\ker(\lambda \mathrm{id}_V - \varphi) = \ker(\varphi - \lambda \mathrm{id})$

Charakteristisches Polynom einer Matrix:

$p_A := p_A(X) := \det(X\mathbb{1}_n - A) \in \mathbb{K}[X]$

$$\begin{pmatrix} X-a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & X-a_{2,2} & & -a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & X-a_{n,n} \end{pmatrix} \in (\mathbb{K}[X])^{n\times n}$$

- Zwei ähnliche Matrizen haben das gleiche char. Polynom: $p_A = p_B \in \mathbb{K}[X]$
- Falls A quadratisch: Polynom hat Grad n & höchste Potenz X^n hat Koeffizient 1

$\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$

Charakteristisches Polynom eines Endomorphismus:

$p_\varphi := p_A \in \mathbb{K}[X], \quad \text{wobei } A = \mathrm{M}_{\mathrm{B,B}}(\varphi) \in \mathbb{K}^{n\times n}$

- Nullstellen des Polynoms = Eigenwerte von φ : $\{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \textit{ ist ein Eigenwert von } \varphi\} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid p_\varphi(\lambda) = 0\}$
- Ein Endomorphismus hat höchstens n verschiedene Eigenwerte (n = dim(V))

Eigenwerte und Endomorphismen:

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *sind paarweise verschiedene Eigenwerte*

- Direkte Summe: $W := E_{\lambda_1}(\varphi) + \cdots + E_{\lambda_k}(\varphi)$
- Bijektive Abbildung: $E_{\lambda_1}(\varphi) \times \cdots \times E_{\lambda_k}(\varphi) \to W, \quad (v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 + \cdots + v_k$
- Falls φ genau n verschiedene Eigenwerte besitzt, ist es diagonalisierbar
- Beispiel zu diagonalisierbarkeit (Siehe Beispiel 5.6.17)

Diagonalisierbarkeit und geometrische Vielfachheit:

(i) φ *ist diagonalisierbar.*

(ii) Der Vektorraum V *ist die Summe der Eigenräume von* φ*, d.h. jedes* $v \in V$ *lässt sich als endliche Summe von Eigenvektoren schreiben.*

(iii) Der Vektorraum V *ist die direkte Summe der Eigenräume:*

$$V = \bigoplus_\lambda E_\lambda(\varphi)$$

(iv) Die Summe der geometrischen Vielfachheiten ist gleich der Dimension von V*:*

$$\sum_\lambda \dim(E_\lambda(\varphi)) = n.$$

Äquivalent

Endomorphismus ohne Eigenwerte (Beispiel 5.6.19)

Zerlägung von Polynome in Linearfaktoren:

- p != 0 lässt sich schreiben als Produkt von Grad 1 Polynome:

$$p = a(X-\lambda_1)^{r_1}\cdots(X-\lambda_k)^{r_k} \quad \text{mit } a \in \mathbb{K}^\times; k \in \mathbb{N}_0; \lambda_j \in \mathbb{K}; r_j \in \mathbb{N}.$$

- Polynome über algebraisch abgeschlossene Körper zerfallen immer in Linearfaktoren

Diagonalisierbarkeit und Linearfaktoren:

- Diagonalisierbare Matrix => ähnlich zu einer Matrix in Diagonalform
- Diagonalisierbares Endomorphismus => char. Polynom zerfällt in Linearfaktoren

Nullstellen und Linearfaktoren von Polynome:

- $\mathbb{K}$ *ist* algebraisch abgeschlossen[21], *d.h.*

$$\forall p \in \mathbb{K}[X] : \deg(p) \geq 1 \implies \exists \lambda \in \mathbb{K} : p(\lambda) = 0.$$

- *Jedes Polynom* $p \in \mathbb{K}[X]$ *mit* $p \neq 0$ *zerfällt in Linearfaktoren in* $\mathbb{K}[X]$.

Algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts:

$q \in \mathbb{K}[X]$ - r, wenn es ein q existiert mit: $p = (X-\lambda)^r q \quad \text{mit } q(\lambda) \neq 0$

- r existiert immer und ist eindeutig
- Geometrische Vielfachheit <= Algebraische Vielfachheit

Diagonalisierbarkeit und Algebraische Vielfachheit:

- Für diagonalisierbare Endomorphismen gilt:
  char. Polynom zefällt in Linearfaktoren
  algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit für alle Eigenwerte