A 17) i) $S_n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$ $\quad a_n := \frac{n^5}{5^n}$

ii) $S_n := \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$ $\quad a_n := (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$

Sei $b_n := \frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{\sqrt{n+1}}{n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\sqrt{n+1}}{n(n+1)} < \frac{1}{n(n+1)}$ (weil $\frac{1}{n+1} < 0$)

Da $|a_n| \leq b_n$ und $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow S_n$ absolut konvergent

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$

$(2n)! = n! \cdot \underbrace{(n+1) \cdot \ldots \cdot 2n}_{\substack{n \text{ mal} \\ < (2n)^n}} \Rightarrow \frac{(2n)!}{(3n)^n n!} < \frac{n! (2n)^n}{n! (3n)^n} = \left(\frac{2n}{3n}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Da $\left|\frac{2}{3}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergiert (geometrische Reihe)

Da $\left|\frac{(2n)!}{(3n)^n n!}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$ ist absolut konvergent

iv) $S_n := \sum_{n=1}^{\infty} (1+(-1)^n)^n \left(\frac{n+3}{4n}\right)^n$

Sei $a_n := (1+(-1)^n)^n \left(\frac{n+3}{4n}\right)^n \begin{cases} 2^n \left(\frac{n+3}{4n}\right)^n & , n \text{ gerade} \\ 0 & , n \text{ ungerade} \end{cases}$

Sei $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}$

$\sqrt[2n-1]{|a_{2n-1}|} = 0 \longrightarrow 0$

$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{2^{2n} \cdot \left(\frac{n+3}{4n}\right)^{2n}} = 2 \cdot \frac{n+3}{4n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2}$

Also $H(c_n) = \{0, \frac{1}{2}\} \Rightarrow \limsup_{n \to \infty} c_n = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ nach Wurzelkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

A 19)