Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I **Winter-Semester 2020/2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 12 **08.02.21**

Aufgabe 1 (*Polynome, Eigenwerte und Ähnlichkeit*) (*10 Punkte*)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $p \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zueinander ähnlich sind, sind auch $p(A)$ und $p(B)$ zueinander ähnlich.

b) Wenn λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist, dann ist auch $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$.

c) Sind $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ zwei Matrizen, und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ein Eigenwert von AB, dann ist λ auch ein Eigenwert von BA.

Hinweis: Denken sie daran, dass wir den Nullvektor nicht als Eigenvektor bezeichnen.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Wenn A und B ähnlich sind, dann gibt es eine invertierbare Matrix S mit $B = SAS^{-1}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} B^k &= BB\cdots B \\ &= (SAS^{-1})(SAS^{-1})\cdots(SAS^{-1}) \\ &= SA(S^{-1}S)A(S^{-1}S)\cdots(S^{-1}S)AS^{-1} \\ &= SA^kS^{-1} \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $B^0 = \mathbb{1} = S\mathbb{1}S^{-1} = SA^0S^{-1}$ per Definition.
Ist $p = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ so gilt also

$$p(B) = \sum_{k=0}^{d} a_k B^k = \sum_{k=0}^{d} a_k SA^kS^{-1} = S\left(\sum_{k=0}^{d} a_k A^k\right)S^{-1} = Sp(A)S^{-1}$$

und $p(A)$ und $p(B)$ sind zueinander ähnlich.

b) Wenn λ ein Eigenwert von A ist, gibt es einen zugehörigen Eigenvektor $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$. Damit gilt per vollständiger Induktion

$$A^k v = A^{k-1}Av = A^{k-1}(\lambda v) = \lambda A^{k-1}v = \lambda^2 A^{k-2}v = \cdots = \lambda^k v$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $A^0 v = \mathbb{1}v = \lambda^0 v$ per Definition. Daraus folgt

$$p(A)v = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k v = \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k v = p(\lambda)v$$

und v ist somit ein Eigenvektor von $p(A)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$.

c) Ist $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von AB, so gilt

$$ABv = \lambda v \implies BABv = \lambda Bv,$$

Außerdem ist $Bv \neq 0$, sonst wäre $ABv = 0 \neq \lambda v$, da $\lambda \neq 0$ und $v \neq 0$ gilt. Damit ist Bv ein Eigenvektor von BA zum Eigenwert λ.

Aufgabe 2 (*Spur ist linear und zyklisch.*) (*10 Punkte*)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\ell, m, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen, ohne Lemma 5.5.6. zu verwenden:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Spur $\operatorname{tr}\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung von Vektorräumen.

b) Für $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

c) Geben Sie ein Beispiel für solche A und B an, sodass $\operatorname{tr}(AB) \neq \operatorname{tr}(A)\cdot\operatorname{tr}(B)$ gilt.

d) Für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times m}, B \in \mathbb{K}^{m\times \ell}, C \in \mathbb{K}^{\ell\times n}$ gilt

$$\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(BCA).$$

Lösung zu Aufgabe 2

Wir nennen die Elemente von A und B jeweils a_{ij} bzw. b_{ij}.

a) Es sei $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A+B) &= \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ii}\right) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)\\ \operatorname{tr}(\lambda A) &= \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \operatorname{tr}(A)\end{aligned}$$

und somit ist tr linear.

b) Der (i,j)-te Eintrag von $AB \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist per Definition $\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$,
der (i,j)-te Eintrag von $BA \in \mathbb{K}^{m\times m}$ ist $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$. Damit sind die Spuren durch

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{ki} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}$$

gegeben. Nach Umbenennen der Summationsindizes i und k erkennt man, dass diese beiden Terme gleich sind.

c) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(0) = 0 \neq 1 = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$

d) Es gilt $AB \in \mathbb{K}^{n\times \ell}$ und $BC \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und somit nach Aufgabenteil a)

$$\operatorname{tr}((AB)C) = \operatorname{tr}(C(AB)) = \operatorname{tr}((CA)B) = \operatorname{tr}(B(CA))$$

Aufgabe 3 (*Charakteristisches Polynom und Eigenräume*) (*10 Punkte*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p_A \in \mathbb{F}_5[X]$.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.
Hinweis: Beachten Sie, dass in $\mathbb{F}_5$ die üblichen Lösungsformeln für Nullstellen von Polynomen nicht funktionieren.

c) Stellen Sie p_A als Produkt von Linearfaktoren dar.
Hinweis: Linearfaktoren sind Polynome der Form $(X - a)$ für ein $a \in \mathbb{F}_5$. Die Linearfaktoren müssen nicht alle verschieden sein.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} p_A = \det(X \cdot \mathbb{1}_4 - A) &= \det \begin{pmatrix} X-2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & X-2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & X-2 & -3 \\ -4 & -2 & 0 & X-4 \end{pmatrix} \\ &= (X-2)^2 \det \begin{pmatrix} X-2 & -2 \\ -2 & X-4 \end{pmatrix} \\ &= (X-2)^2((X-2)(X-4)-4) \\ &= (X-2)^2(X^2-6X+8-4) \\ &= (X-2)^2(X^2-X+4) \end{aligned}$$

In der letzten Umformung wurde benutzt, dass wir in $\mathbb{F}_5$ rechnen.

b) Nach Vorlesung sind die Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{F}_5$ genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also $p_A(\lambda) = 0$. Wegen $p_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda^2-\lambda+4)$ muss also $\lambda = 2$ oder $\lambda^2 - \lambda + 4 =$ sein. Wir finden die restlichen Nullstellen durch ausprobieren:

λ	0	1	2	3	4
$\lambda^2-\lambda+4$	4	4	1	0	1

Also sind 2 und 3 die einzigen Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenräume können mittels Gauß-Algorithmus bestimmt werden:

$$E_2(A) = \ker(2\cdot\mathbb{1}_4 - A) = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right), \quad E_3(A) = \ker(3\cdot\mathbb{1}_4 - A) = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

c) Wir müssen nur noch das Polynom $X^2 - X + 4$ in Linearfaktoren zerlegen. Aus der Lösung von Teilaufgabe b) wissen wir, dass 3 die einzige Nullstelle ist, also kommt nur der Linearfaktor

$(X-3)$ als Teiler in Frage. Es ergibt sich $X^2 - X + 4 = (X-3)^2$ in $\mathbb{F}_5[X]$, also

$$p_A = (X-2)^2(X-3)^2.$$

Aufgabe 4 (*Boolesche Algebren*) (*10 Punkte*)

Es sei X eine Menge. Von Tutoriumsblatt 5 wissen wir, dass $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ ein kommutativer Ring mit Null-Element $\emptyset$ und Eins-Element X ist. Dabei bezeichnet $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge, $\triangle$ die symmetrische Differenz (als Addition) und $\cap$ die Schnittmenge (als Multiplikation).

Nun definieren wir eine Skalarmultiplikation $\mathbb{F}_2 \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ durch $0 \cdot A = \emptyset$ und $1 \cdot A = A$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$.

Beweisen Sie, dass durch diese Skalarmultiplikation $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap, \cdot)$ zu einer $\mathbb{F}_2$-Algebra wird.

Lösung zu Aufgabe 4

$(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ ist ein Ring. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cdot)$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist und die beiden Multiplikationen $\cap$ und $\cdot$ verträglich sind. Wir überprüfen zunächst die Vektorraumaxiome (Siehe Definition 4.1.1). Es gilt:

(i) $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ ist eine abelsche Gruppe, da $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ ein Ring ist.

(ii) Für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \cdot (A \triangle B) &= \emptyset = \emptyset \triangle \emptyset = 0 \cdot A \triangle 0 \cdot B \\ 1 \cdot (A \triangle B) &= A \triangle B = (1 \cdot A) \triangle (1 \cdot B) \end{aligned}$$

(iii) Für alle $A \in \mathcal{P}(X)$ gilt

$$\begin{aligned} (0+0) \cdot A &= \emptyset = \emptyset \triangle \emptyset = (0 \cdot A) \triangle (0 \cdot A), \\ (0+1) \cdot A &= A = \emptyset \triangle A = (0 \cdot A) \triangle (1 \cdot A), \\ (1+1) \cdot A &= \emptyset = A \triangle A = (1 \cdot A) \triangle (1 \cdot A). \end{aligned}$$

(iv) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_2$ gilt

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A),$$

denn falls $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$ gilt, steht auf beiden Seiten der Gleichung $\emptyset$, falls $\lambda = 1$ und $\mu = 1$ gilt, steht auf beiden Seiten A.

(v) $1 \cdot A = A$ gilt per Definition.

Die beiden Multiplikationen sind verträglich, denn für alle $A, B \in \mathcal{P}$ gilt

$$\begin{aligned} (0 \cdot A) \cap B &= \emptyset \cap B = \emptyset = 0 \cdot (A \cap B) \\ (1 \cdot A) \cap B &= A \cap B = 1 \cdot (A \cap B) \end{aligned}$$