Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I — **Winter-Semester 2020/2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 8 — **11.01.21**

Aufgabe 1 (*Inverse von Matrizen*)

Es sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Interpretieren Sie A als Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ und bestimmen Sie ihr Inverses.

b) Interpretieren Sie A als Matrix in $\mathbb{F}_5^{3\times 3}$ und beweisen Sie, dass sie kein Inverses hat.

c) Interpretieren Sie A als Matrix in $\mathbb{F}_3^{3\times 3}$ und bestimmen Sie ihr Inverses.

Lösung zu Aufgabe 1

Wir wenden den Gauß-Algorithmus jeweils auf die Blockmatrix $(A|\mathbb{1}_3)$ an. Solange wir nur Vielfache von Zeilen zu anderen Zeilen addieren, kommen wir in allen drei Körpern zum selben Ergebnis. Die Zahlen sind dabei jeweils als z.B. $3 = 1 + 1 + 1$ im jeweiligen Körper zu interpretieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

a) in $\mathbb{R}$ können wir die letzte Zeile mit $(-5)^{-1} = -\frac{1}{5}$ multiplizieren und weiter rechnen:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

und damit gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{in } \mathbb{R}^{3\times 3}$$

b) in $\mathbb{F}_5$ gilt $-5 = 0$. Damit hat die Matrix A nur Rang 2 und besitzt somit keine Inverse.

c) in $\mathbb{F}_3$ ist die obige Matrix identisch zu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

und somit gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in } \mathbb{F}_3^{3\times 3}$$

Wichtige Bemerkung: Man sollte nicht versuchen, die Inverse von A in $\mathbb{F}_3^{3\times 3}$ aus der Inversen von A in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ zu berechnen. Im Allgemeinen würde man so zum falschen Ergebnis kommen.

Aufgabe 2 (*Selbstinverse* 2×2*-Matrizen*) (*10 Punkte*)

Es seien K ein Körper und $a, b \in K$ fest gewählt. Entscheiden Sie, ob es $x, y \in K$ gibt, sodass

$$B := \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}^2 = \mathbb{1}_2$$

gilt, und bestimmen Sie gegebenenfalls alle möglichen Wahlen für (x, y).

Lösung zu Aufgabe 2

Damit das Quadrat der Matrix die Einheitsmatrix ist, muss sie ihr eigenes Inverses sein. Wir machen eine Fallunterscheidung: Wir testen $a = 0, b = 0$ und dann $a \neq 0 \neq b$.
1.Fall: Es sei $a = 0$.
Falls zusätzlich $b = 0$ oder $x = 0$ gilt, hat die Matrix nicht vollen Rang und kann somit nicht die Aufgabenstellung erfüllen. Angenommen, es gilt $b \neq 0 \neq x$. Dann können wir schreiben:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & x & 1 & 0 \\ b & y & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} b & y & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ (-yx^{-1}) \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} b & 0 & -yx^{-1} & 1 \\ 0 & x & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \mid \cdot b^{-1} \\ \mid \cdot x^{-1} \end{matrix}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -yx^{-1}b^{-1} & b^{-1} \\ 0 & 1 & x^{-1} & 0 \end{array}\right)$$

Damit die Matrix ihr eigenes Inverses ist, folgt $y = 0, x = b^{-1}$. Die Matrix hat die Form

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b^{-1} \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

2.Fall: Es sei $b = 0$ Falls zusätzlich $a = 0$ oder $y = 0$ gilt, hat die Matrix nicht vollen Rang und kann somit nicht die Aufgabenstellung erfüllen. Angenommen es gilt $a \neq 0 \neq y$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & x & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ (-xy^{-1}) \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 & -xy^{-1} \\ 0 & y & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a^{-1} & -xy^{-1}a^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & y^{-1} \end{array}\right)$$

Damit folgt $a = a^{-1}, y = y^{-1}$, also $y^2 = 1 \implies y^2 - 1 = (y+1)(y-1) = 0 \implies y = \pm 1$ und analog $a = \pm 1$. Falls $a \neq \pm 1$ gilt, gibt es keine x, y, die die Aufgabenstellung erfüllen. Außerdem muss $x = -xay$, gelten, also $x = 0$ oder $ay = -1$.
Die Matrix hat also die Form

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ oder } B = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

für beliebiges x.

3.Fall: $a \neq 0 \neq b$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & x & 1 & 0 \\ b & y & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \urcorner^{(-ba^{-1})} \\ \hookleftarrow_{+} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & x & 1 & 0 \\ 0 & y-ba^{-1}x & -ba^{-1} & 1 \end{array}\right)$$

Damit die Matrix vollen Rang hat, muss also $y - ba^{-1}x \neq 0$ und somit auch $ay - bx \neq 0$ gelten. Um die Rechnung zu vereinfachen, benutzen wir $(y - ba^{-1}x)^{-1} = a(ay - bx)^{-1}$:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|cc} a & x & 1 & 0 \\ 0 & y-ba^{-1}x & -ba^{-1} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid (a^{-1}) \\ \mid (a(ay-bx)^{-1}) \end{array} \\ \rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a^{-1}x & a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & -b(ay-bx)^{-1} & a(ay-bx)^{-1} \end{array}\right) \begin{array}{l} \hookleftarrow_{+} \\ \lrcorner_{-a^{-1}x} \end{array} \\ \rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a^{-1}x & y(ay-bx)^{-1} & -x(ay-bx)^{-1} \\ 0 & 1 & -b(ay-bx)^{-1} & a(ay-bx)^{-1} \end{array}\right) \end{aligned}$$

denn $a^{-1} + a^{-1}xb(ay - bx)^{-1} = a^{-1}((ay - bx) + bx)(ay - bx)^{-1} = y(ay - bx)^{-1}$.
Aus dem $(2, 1)$-ten Eintrag folgt $-(ay - bx)^{-1} = 1$, also $ay - bx = -1$. Dann folgt $y = -a$ und

$$x = -b^{-1}(-1 - ay) = b^{-1}(1 - a^2).$$

Die Matrix hat also die Form

$$B = \begin{pmatrix} a & b^{-1}(1-a^2) \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (*Darstellungsmatrizen*) (*10 Punkte*)

Es sei

$$S_3 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \;\middle|\; A = A^\top \right\}$$

die Menge der reellen symmetrischen 3×3-Matrizen. Weiterhin sei die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{sym}\colon \mathbb{R}^{3\times 3} &\to S_3 \\ A &\mapsto \frac{1}{2}(A + A^\top) \end{aligned}$$

gegeben.

a) Geben Sie (ohne Beweis) eine geordnete Basis B_{S_3} von S_3 und eine geordnete Basis $\mathrm{B}_{\mathbb{R}^{3\times 3}}$ von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ als $\mathbb{R}$-Vektorräume an.

b) Zeigen Sie, dass sym eine lineare Abbildung ist und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathrm{B}_{S_3},\mathrm{B}_{\mathbb{R}^{3\times 3}}}(\mathrm{sym})$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Bezeichne

$$B_{S_3} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Und

$$B_{\mathbb{R}^{3\times 3}} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

b) Die Abbildung sym bildet tatsächlich in S_3 ab, denn es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{sym}(A)^\top &= \left(\frac{1}{2}(A + A^\top) \right)^\top \\ &= \frac{1}{2}(A^\top + A) = \operatorname{sym}(A) \end{aligned}$$

Außerdem ist sie linear, denn für alle $A, B \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{sym}(A + B) &= \frac{1}{2}(A + B + (A + B)^\top) \\ &= \frac{1}{2}(A + B + A^\top + B^\top) \\ &= \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(B + B^\top) = \operatorname{sym}(A) + \operatorname{sym}(B) \\ \operatorname{sym}(\lambda A) &= \frac{1}{2}(\lambda A + (\lambda A)^\top) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda A + \lambda A^\top) \\ &= \lambda \frac{1}{2}(A + A^\top) = \lambda \operatorname{sym}(A) \end{aligned}$$

Wir lesen die Darstellungsmatrix ab:

$$\operatorname{sym}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (*Basiswechsel*) (*10 Punkte*)

Es seien

$$\mathrm{B} := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \qquad \mathrm{C} := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

geordnete Basen von $\mathbb{F}_3^3$ Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $M_{\mathrm{B},\mathrm{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{F}_3^3})$ und $M_{\mathrm{C},\mathrm{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{F}_3^3})$.

Lösung zu Aufgabe 4

Wir gehen wie in Beispiel 4.3.14. im Skript vor und schreiben die Basisvektoren von C als Linearkombinationen der Basisvektoren aus B. Beachte dabei, dass $2^{-1} = 2$ in $\mathbb{F}_3$ gilt.

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten der Linearkombinationen ergeben dabei jeweils die Spalten der Basiswechselmatrix

$$M_{\mathrm{B,C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{F}_3^3}) = \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Durch Invertieren erhalten wir dann die Matrix $M_{\mathrm{C,B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{F}_3^3}) = M_{\mathrm{B,C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{F}_3^3})^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0\end{array}\right) \quad \Longrightarrow M_{\mathrm{C,B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{F}_3^3}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Hinweis für Studierende der Mathematik

Die Anmeldefrist für die Proseminare ist nächste Woche vom 18.01.2021 bis 24.01.2021.
Alle Informationen darüber finden Sie auf der folgenden Seite:
`https://www.math.kit.edu/lehre/seite/prosemanmeld/`