Formulae und Sätze

- **Dreiecksungleichung:** $|a+b| \leq |a| + |b|$

- Für jede Reele Zahl x existiert eine Natürliche Zahl n mit: n > x

$$\forall n \in \mathbb{N}: \;\; 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n$$

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

- **Binomischer Satz:** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

x >= -1 - **Bernoullische Ungleichung:** $\forall n \in \mathbb{N}: \;\; (1+x)^n \geq 1 + nx$

$$\textit{Für } x, y \geq 0 \textit{ und } n \in \mathbb{N} \textit{ gilt: } x \leq y \iff x^n \leq y^n$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \;\; \sqrt{x^2} = |x|$$

Exponentialle Summe: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$

Mengen / Induktion

$M \subseteq \mathbb{R}$ **Beschränktheit:**

- Nach oben beschränkt: $\exists \gamma \in \mathbb{R} \; \forall x \in M : \; x \leq \gamma$
- Supremum = kleinste obere Schranke
- Maximum = Supremum, falls teil von M

- Nach unten beschränkt: $\exists \gamma \in \mathbb{R} \; \forall x \in M : \; \gamma \leq x$
- Infimum = größte untere Schranke
- Minimum = Infimum, falls teil von M

- Beschränkt = sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt

$\gamma = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists x = x(\varepsilon) \in A : x > \gamma - \varepsilon$

$\gamma = \inf A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists x = x(\varepsilon) \in A : x < \gamma + \varepsilon$

- Induktionsmenge: $\begin{cases} (i) & 1 \in A; \\ (ii) & \textit{aus } x \in A \textit{ folgt stets } x + 1 \in A \end{cases}$

Vollständige Induktion:

- Induktionsanfang (I.A.): Beweise A(1)
- Induktionsvoraussetzung (I.V.): Annahmen, dass A(n) gilt
- Induktionsschluß (I.S.): Beweise A(n+1) mit Hilfe von I.V.

Bekannte Folgen

$(n \in \mathbb{N})$

$a_n := c$: $a_n \to c \ (n \to \infty)$

$a_n := n$: divergiert (nicht beschränkt)

$a_n := \frac{1}{n}$: $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$

$a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$: $a_n \to 0$

$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$: $a_n \to 0$

$a_n := (-1)^n$: divergiert (aber beschränkt)

$$a_n = \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{2.2} \frac{5}{4}$$

$a_n := \frac{1}{n^p}$: konvergiert für p >= 1

$a_1 := \sqrt[3]{6},\ a_{n+1} := \sqrt[3]{6+a_n} \ (n \geq 1)$: konvergiert gegen 2

(monoton wachsend + nach oben beschränkt => lim = sup = 2

Beispiel 2.4 ((a_n) eine konvergente Folge in $[0, \infty)$ mit Grenzwert a $p \in \mathbb{N}$):

$\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.

Beispiel 2.5 ((x^n) ist konvergent $\iff x \in (-1, 1]$):

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{falls } x \in (-1,1) \end{cases}$$

Beispiel 2.6 ($s_n := 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$):

$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$ falls x != 1, else - divergiert

$\sqrt[n]{n} \to 1$

$\sqrt[n]{c} \to 1$

Beispiel 2.9 ($a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$):

(a_n) und (b_n) sind konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

Eulersche Zahl (e = 2,718...): $e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$\left(1+\frac{2}{2k-1}\right)^{2k-1}$ konvergiert gegen e^2 für $k \to \infty$

$\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{-(k-1)} \xrightarrow{k\to\infty} \mathrm{e}^{-1}$

Folgen und Konvergenz

- Folge = $Funktion\ a\colon \mathbb{N} \to X$

Beschränktheit:

$Es\ sei\ (a_n)\ eine\ Folge\ und\ M := \{a_1, a_2, \dots\}$

- Nach oben beschränkt: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup\limits_{n=1}^{\infty} a_n := \sup M$

  $M\ ist\ nach\ oben\ beschränkt.$

- Nach unten beschränkt: $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf\limits_{n=1}^{\infty} a_n := \inf M$

  $M\ ist\ nach\ unten\ beschränkt.$

- Beschränkt: $M\ ist\ beschränkt$ $\quad \exists c \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}:\ |a_n| \leq c$

- Für fast alle (ffa): $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : A(n)\ ist\ wahr$
- Epsilon-Umgebung: $U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$

Epsilon-Definition von Konvergenz:

$$\exists a \in \mathbb{R} : \begin{cases} Zu\ jedem\ \varepsilon > 0\ existiert\ ein\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ so, \\ daß\ für\ jedes\ n \geq n_0\ gilt\ : |a_n - a| < \varepsilon. \end{cases}$$

a = Grenzwert / Limes

Grenzwert und Konvergenz (Satz 2.1):

- Der Grenzwert ist eindeutig
- Konvergenz => Beschränktheit

Rechenregeln für Folgen:

$(a_n) \pm (b_n) := (a_n \pm b_n);\ \alpha(a_n) := (\alpha a_n);\ (a_n)(b_n) := (a_n b_n)$

Regeln für Grenzwerte (Satz 2.2):

- Grenzwert: $a_n \to a \iff |a_n - a| \to 0$
- Kleiner als Nullfolge:

  $|a_n - a| \leq \alpha_n$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\alpha_n \to 0$, *so gilt* $a_n \to a$
- Rechenregeln für Grenzwerte:

  (i) $|a_n| \to |a|$;

  (ii) $a_n + b_n \to a + b$;

  (iii) $\alpha a_n \to \alpha a$;

  (iv) $a_n b_n \to ab$;

  (v) *ist* $a \neq 0$, *so existiert ein* $m \in \mathbb{N}$ *mit:*

  $$a_n \neq 0 \ (n \geq m) \text{ und für die Folge } \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=m}^{\infty} \text{ gilt: } \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}.$$
- Monotonie des Grenzwerts:

  $a_n \to a$, $b_n \to b$ *und* $a_n \leq b_n$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $a \leq b$
- Sandwichkriterium:

  $a_n \to a$, $b_n \to a$ *und* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt* $c_n \to a$

Monotonie:

- (streng) monoton wachsend: $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leq a_{n+1}$ $\quad$ ($a_n < a_{n+1}$)
- Analog für (streng) monoton fallend
- (Streng) Monoton = falls entweder oder

Monotoniekriterium:

- Monoton wachsend + nach oben beschränkt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$
  => konvergent:
- Monoton fallend + nach unten beschränkt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$
  => konvergent:

Teilfolgen:

$b_k := a_{n_k}$ ($b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{n_2}, b_3 = a_{n_3}, \ldots$) u $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

Abstrakte Beispiele:

$(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ mit $n_k = 2k$ $(a_1, a_4, a_9, \ldots)$ mit $n_k = k^2$

$(a_2, a_6, a_4, a_{10}, a_8, a_{14}, \ldots)$ - KEINE Teilfolge

Häufungswert: $wenn\ eine\ Teilfolge\ (a_{n_k})\ von\ (a_n)\ existiert\ mit\ a_{n_k} \to \alpha\ (k \to \infty)$

- Menge aller Häufungswerte: $H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha\ ist\ ein\ Häufungswert\ von\ (a_n)\}$
- Epsilon-Definition: $\alpha \in H(a_n) \iff \forall \varepsilon > 0 : a_n \in U_\varepsilon(\alpha)\ für\ unendlich\ viele\ n \in \mathbb{N}$

Konkrete Beispiele:

$a_n = (-1)^n$: $a_{2k} \to 1, a_{2k+1} \to -1$ => $H(a_n) = \{1, -1\}$

$a_n = n$: $H(a_n) = \emptyset$

Teilfolgen von konvergente Folgen ($H(a_n) = \{\lim_{n\to\infty} a_n\}$):

$a := \lim_{n\to\infty} a_n\ und\ (a_{n_k})\ eine\ Teilfolge$ => $a_{n_k} \to a \quad (k \to \infty)$

m heißt Niedrig einer Folge, falls $\forall n \geq m : a_n \geq a_m$

$m \in \mathbb{N}$ ist nicht niedrig $\iff \exists n \geq m : a_n < a_m \Rightarrow \exists n > m : a_n < a_m$

Jede Folge enthält eine monotone Teilfolge

Satz von Bolzano-Weierstraß:

$H(a_n) \neq \emptyset$ - Eine beschränkte Folge besitzt immer eine konvergente Teilfolge

- Für eine beschränkte Folge gilt:

$\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n);\ es\ existieren\ also\ \max H(a_n)\ und\ \min H(a_n)$

Limes superior: größter Häufungspunkt $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \max H(a_n)$

Limes inferior: kleinster Häufungspunkt $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \min H(a_n)$

Regeln für Limes superior/inferior:

a) $\forall \alpha \in H(a_n): \ \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \alpha \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$

b) Ist (a_n) *konvergent, so ist* $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$

c) $\forall \alpha \geq 0: \ \limsup_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \limsup_{n\to\infty} a_n.$

d) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n.$

Cauchyfolgen:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 : \ |a_n - a_m| < \varepsilon$

- Konvergente Folge <==> Cauchyfolge

Bekannte Reihen

Geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

konvergiert für |x| < 1 UND $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$

eine Teleskopsumme: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

Eulersche Zahl: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent

alternierende harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent

P-Series: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Exponentialreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$

Unendliche Reihen

(a_n) *Folge*

Definition: $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ = $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots.$

s_n = n-te Teilsumme von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Konvergenz:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist konvergent bzw. divergent* $\iff$ (s_n) *ist konvergent bzw. divergent*

Reihenwert: $\lim_{n\to\infty} s_n$ =$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent)

Monotoniekriterium:

Sind alle $a_n \geq 0$ *und ist* (s_n) *beschränkt*, => $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent

Cauchykriterium:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist konvergent* $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m > n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$

Konvergente Reihe => konvergente Folge:

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent, so gilt* $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, also $a_n \not\to 0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Konvergenz von weitere Summen: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sei konvergent*

$r_m := \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ *gilt:* $r_m \to 0$ $(m \to \infty)$

Summe konvergenter Reihen: $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Leibnizkriterium: *a)* (b_n) *ist monoton fallend*, => $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ *konvergent.*

b) $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Absolute Konvergenz:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *heißt* ***absolut konvergent*** $:\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *ist konvergent.*

Für absolute konvergente Reihen gilt:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist konvergent,*

b) $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *($\triangle$-Ungleichung für Reihen)*

Majorantenkriterium:

$|a_n| \leq b_n$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$ *und ist* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergent* => $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent*

Minorantenkriterium:

$a_n \geq b_n \geq 0$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$ *und ist* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergent* => $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent*

Beispiele:

- Konvergente Folgen: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$|a_n| = a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+2n} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: b_n$$ ($\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent)

- Absolut konvergent: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^3+1}$

$$\left|(-1)^n \frac{n+2}{n^3+1}\right| = \frac{n+2}{n^3+1} \leq \frac{n+2}{n^3} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \quad (n \geq 2)$$ ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ ist konvergent , p-Series)

- Divergent: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$ ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ divergiert , p-Series)

$c_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *und* $\limsup_{n\to\infty} c_n = 0$, *so gilt* $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$

Wurzelkriterium: $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}$ $(n \in \mathbb{N})$, (a_n) *eine Folge*

- (c_n) *unbeschränkt, so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent*
- (c_n) *beschränkt und* $\alpha := \limsup_{n\to\infty} c_n$

  Ist $\alpha < 1$, *so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

  Ist $\alpha > 1$, *so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Quotientenkriterium (QK): $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $a_n \neq 0$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$

a) Ist $c_n \geq 1$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$, *so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

b) Es sei (c_n) *beschränkt,* $\alpha := \limsup_{n\to\infty} c_n$ *und* $\beta := \liminf_{n\to\infty} c_n$. *Dann gilt:*

(i) Ist $\alpha < 1$, *so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(ii) Ist $\beta > 1$, *so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Folgerung: (c_n) sei konvergent und $\alpha := \lim_{n\to\infty} c_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent,} & \text{falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent,} & \text{falls } \alpha > 1 \end{cases}$$

a) $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

b) $a_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Umordnungen: $(a_2, a_4, a_1, a_3, a_6, a_8, a_5, a_7, \dots)$ ist eine Umordnung von (a_n)

$b_1 = a_{\varphi(1)}, \quad b_2 = a_{\varphi(2)}, \quad b_3 = a_{\varphi(3)}, \dots$ => (b_n) *eine* ***Umordnung*** *von* (a_n)

Konvergenz von Folgen und Reihen:

a) Ist (a_n) *konvergent, so ist* (b_n) *konvergent und* $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$

b) Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *absolut konvergent, so ist* $\sum_{n=1}^\infty b_n$ *absolut konvergent und* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

Bemerkung: sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent $s \in \mathbb{R}$

a) Es existiert eine Umordnung mit: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = s$

a) Es existiert eine Umordnung mit: $\sum_{n=1}^\infty c_n$ ist divergent

Cauchyprodukt (CP) von $\sum_{n=0}^\infty a_n$ *und* $\sum_{n=0}^\infty b_n$:

$\sum_{n=0}^\infty c_n$

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$

CP und absolute Konvergenz: $\sum_{n=0}^\infty a_n$ *und* $\sum_{n=0}^\infty b_n$ *absolut konvergent.*

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *ist absolut konvergent und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n)$

Potenzreihen (PR):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

Beispiele:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Hier: $a_n = \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $x_0 = 0$ (konvergiert absolut)

$\sum_{n=0}^{\infty} (x-x_0)^n$. Hier: $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ (konvergiert absolut für $|x-x_0| < 1$
= geometrische Reihe)

$\sum_{n=0}^{\infty} n^n(x-x_0)^n$. Hier: $a_n = n^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ (konvergiert nur für $x = x_0$)

Konvergenzradius (KR):

$$r := \begin{cases} 0, & \textit{falls } \rho = \infty \\ \infty, & \textit{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \textit{falls } \rho \in (0,\infty) \end{cases}$$

$$\rho := \begin{cases} \infty, & \textit{falls } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \textit{ unbeschränkt} \\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, & \textit{falls } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \textit{ beschränkt} \end{cases}$$

Konvergenz:

a) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur für $x = x_0$.

b) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

c) Ist $r \in (0,\infty)$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| < r$ und sie divergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| > r$. Für $x = x_0 \pm r$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beispiele:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $x_0 = 0$; $\rho = 1$, $r = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; $a_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$, $x_0 = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; $a_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$, $x_0 = 0$

Konvergenzradius, falls nicht 0:

$a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}_0$, die Folge $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$ sei konvergent und $L := \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

=> *Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ den Konvergenzradius L*

Exponentialfunktion / Logarithmus

Die Exponentialfunktion: $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$ $\quad E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

a) $E(0) = 1, E(1) = e$;

b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : E(x+y) = E(x)E(y)$;

c) $\forall x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R} : E(x_1 + \ldots + x_m) = E(x_1) \cdot \ldots \cdot E(x_m)$;

d) $E(x) > 1$ $(x > 0)$; $E(x) > 0$ $(x \in \mathbb{R})$; $E(-x) = E(x)^{-1}$ $(x \in \mathbb{R})$;

e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall r \in \mathbb{Q} : E(rx) = E(x)^r$;

f) $\forall r \in \mathbb{Q} : E(r) = e^r$;

g) E ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, d.h. aus $x < y$ folgt stets $E(x) < E(y)$

$E(x) \to \infty \quad (x \to \infty), E(x) \to 0 \quad (x \to -\infty).$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{E(x) - 1}{x} = 1$ $\quad \lim_{h \to 0} \frac{E(x_0 + h) - E(x_0)}{h} = E(x_0)$

Der Logarithmus: E ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

$\log x := \ln x := E^{-1}(x) \quad (x \in (0, \infty))$

$a > 0$

Eigenschaften:

a) $\log 1 = 0$, $\log e = 1$;

b) $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend;

c) $\log((0, \infty)) = \mathbb{R}$;

d) $\log x \to \infty$ $(x \to \infty)$, $\log x \to -\infty$ $(x \to 0)$;

e) $\forall x, y > 0 :\ \log(xy) = \log x + \log y$;

f) $\forall x, y > 0 :\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall r \in \mathbb{Q} :\ E(rx) = E(x)^r$

$\forall r \in \mathbb{Q} :\ E(r \log a) = E(\log a)^r = a^r$

$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (x \in (-1, 1])$

$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Die Allgemeine Potenz:

$a^x := E(x \log a) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ $\quad a = e$, so ist $e^x = E(x \log e) = E(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ $\quad a^x = e^{x \log a}$ $(x \in \mathbb{R}, a > 0)$

a) $a^x > 0$;

b) Die Funktion $x \mapsto a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig;

c) $a^{x+y} = e^{(x+y)\log a} = e^{x \log a + y \log a} = e^{x \log a} e^{y \log a} = a^x a^y$;

d) $a^{-x} = e^{-x \log a} = \frac{1}{e^{x \log a}} = \frac{1}{a^x}$;

e) $\log(a^x) = \log(e^{x \log a}) = x \log a$;

f) $(a^x)^y = e^{y \log a^x} \stackrel{e)}{=} e^{xy \log a} = a^{xy}$;

g) Ist auch $x > 0$, so ist $a^{x^y} := a^{(x^y)}$. Im allgemeinen ist $a^{x^y} \neq (a^x)^y$

Trigonometrie

Cosinus: $\begin{cases} \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$ **Sinus:** $\begin{cases} \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases}$

Sinus und Cosinus sind Stetig auf $\mathbb{R}$

Rechenregeln:

$\forall x \in \mathbb{R}: \ \sin(-x) = -\sin(x), \ \cos(-x) = \cos(x)$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $|\cos x| \leq 1$ und $|\sin x| \leq 1$

$\cos$ hat in $[0, \pi]$ genau eine Nullstelle

$\sin(x + 2\pi) = \sin x,$ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

$\sin(x + \pi) = -\sin x,$ $\cos(x + \pi) = -\cos x$

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x$, $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ Konvergenzradius $r = \infty$, also ist $\rho = 0$

Bekante Werte:

$\sin 0 = 0, \ \cos 0 = 1$

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\cos x = 0 \iff x \in \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$

$\sin x = 0 \iff x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Grenzwerte bei Funktionen

$D \subseteq \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$

Häufungspunkt (HP) von D: *Es gibt eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$*

a) $D = (0, 1]$. Es gilt: x_0 ist Häufungspunkt von $D \iff x_0 \in [0, 1]$.

b) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Es gilt: D hat genau einen Häufungspunkt: $x_0 = 0$.

Epsilon Definition der Häufungswert:

x_0 ist Häufungspunkt von $D \iff \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

$D_\delta(x_0) := U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$

Funktionen vergleichen:

- f <= g auf M für: "$f(x) \le g(x)$ $(x \in M)$"

Grenzwert einer Funktion:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ *oder* $f(x) \to a$ $(x \to x_0)$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert $:\iff$ Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ so,

daß für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to a$

Epsilon Definition des Grenzwerts:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_\delta(x_0) :\ |f(x) - a| < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert $\iff$ Für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ ist $(f(x_n))$ konvergent.

Cauchykriterium:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *existiert* $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in D_\delta(x_0) :\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Rechenregeln für Grenzwerte: $f, g, h \colon D \to \mathbb{R}$, $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(x) \to a,\ g(x) \to b\ (x \to x_0)$

a) $\alpha f(x) + \beta g(x) \to \alpha a + \beta b; \quad f(x)g(x) \to ab; \quad |f(x)| \to |a| \quad (x \to x_0)$

b) Ist $a \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x) \neq 0$ $(x \in D_\delta(x_0))$. Für $\frac{1}{f} \colon D_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{a} \quad (x \to x_0).$$

c) Für ein $\delta > 0$ gelte $f \le g$ auf $D_\delta(x_0)$. Dann ist $a \le b$.

d) Für ein $\delta > 0$ gelte $f \le h \le g$ auf $D_\delta(x_0)$. Ist $a = b$, so gilt $h(x) \to a$ $(x \to x_0)$

Weitere Aussagen:

$$x_n \to \infty :\iff \forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ x_n > c,$$
$$x_n \to -\infty :\iff \forall c < 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ x_n < c.$$

$$x_n \to \infty \iff x_n > 0 \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{1}{x_n} \to 0,$$
$$x_n \to -\infty \iff x_n < 0 \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{1}{x_n} \to 0.$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty :\iff \textit{Für jede Folge } (x_n) \textit{ in } D \setminus \{x_0\} \textit{ mit } x_n \to x_0 \textit{ gilt: } g(x_n) \to \infty,$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty :\iff \textit{Für jede Folge } (x_n) \textit{ in } D \setminus \{x_0\} \textit{ mit } x_n \to x_0 \textit{ gilt: } g(x_n) \to -\infty.$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = a :\iff \textit{Für jede Folge } (x_n) \textit{ in } D \textit{ mit } x_n \to \infty \textit{ gilt: } g(x_n) \to a.$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = a :\iff \textit{Für jede Folge } (x_n) \textit{ in } D \textit{ mit } x_n \to -\infty \textit{ gilt: } g(x_n) \to a.$$

Beispiele:

$\frac{1}{x} \to \infty\ (x \to 0+)$, $\frac{1}{x} \to -\infty\ (x \to 0-)$, $\frac{1}{x} \to 0\ (x \to \pm\infty)$

Stetigkeit von Funktionen

Definition von Stetigkeit:

a) f *heißt* ***in*** x_0 ***stetig*** $:\iff$ *Für jede Folge* (x_n) *in* D *mit* $x_n \to x_0$ *gilt:* $f(x_n) \to f(x_0)$.

b) f *heißt* ***auf*** D ***stetig*** $:\iff$ f *ist in jedem* $x \in D$ *stetig.*

c) $C(D) := C(D,\mathbb{R}) := \{g : D \to \mathbb{R} : \ g \text{ ist stetig auf } D\}$ (Menge stetiger Funktionen)

Epsilon Definition von Stetigkeit:

$f \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Stetigkeit und Häufungspunkte:

$f \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Rechenregeln für stetige Funktionen:

a) $f, g\colon D \to \mathbb{R} \text{ stetig in } x_0 \in D$ => $\alpha f + \beta g,\ fg \text{ und } |f| \ \text{ stetig in } x_0$

$x_0 \in \tilde{D} := \{x \in D : f(x) \neq 0\}$, *so ist* $\frac{1}{f}\colon \tilde{D} \to \mathbb{R}$ *stetig in* x_0

b) $\text{Sind } f, g \in C(D)$ => $\alpha f + \beta g,\ fg,\ |f| \in C(D)$

Verkettung stetiger Funktionen: *Ist* f *in* x_0 *stetig und ist* g *in* y_0 *stetig,* $x_0 \in D$ $y_0 := f(x_0)$

$g \circ f\colon D \to \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) := g(f(x))$ *stetig in* x_0

Stetigkeit und Potenzreihen: $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (x \in D)$

$$\left.\begin{array}{l} D := (x_0 - r, x_0 + r) \text{ falls } r < \infty \ , \ r > 0 \\ D := \mathbb{R} \text{ falls } r = \infty \end{array}\right\} f \in C(D)$$

Zwischenwertsatz:

$f \in C([a,b])$ & $y_0 \text{ zwischen } f(a) \text{ und } f(b)$ = $\text{existiert ein } x_0 \in [a,b] \text{ mit } f(x_0) = y_0$

Nullstellensatz von Bolzano:

$f \in C([a,b]) \text{ und } f(a)f(b) \leq 0$ => existiert $x_0 \in [a,b] \text{ mit } f(x_0) = 0$

Abgeschlossenheit und Kompaktheit von Mengen:

a) *D heißt* ***abgeschlossen*** $:\iff$ *Für jede konvergente Folge* (x_n) *in* D *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in D.$$

b) *D heißt* ***kompakt*** $:\iff$ *Jede Folge* (x_n) *in* D *enthält eine konvergente Teilfolge* (x_{n_k}) *mit*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in D.$$

a) *D ist abgeschlossen* $\iff$ *Jeder Häufungspunkt von D gehört zu D*

b) *D ist kompakt* $\iff$ *D ist beschränkt und abgeschlossen*

c) *Ist D kompakt und* $D \neq \emptyset$, *so existieren* $\max D$ *und* $\min D$

Beispiele:

a) $[a,b]$ ist kompakt, also auch abgeschlossen.

b) Endliche Mengen sind kompakt.

c) $[a,\infty)$, $(-\infty,a]$ und $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen, aber nicht kompakt

d) $\emptyset$ ist kompakt.

e) $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b) sind nicht abgeschlossen.

Beschränktheit von Funktionen:

$f: D \to \mathbb{R}$ *heißt* ***beschränkt*** $:\iff$ $f(D)$ *ist beschränkt* <=> $\exists c \geq 0\ \forall x \in D:\ |f(x)| \leq c$

Stetigkeite Funktionen bilden kompakte Mengen auf kompakte Mengen:

$\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ *kompakt und* $f \in C(D)$ => $f(D)$ *kompakt.* , f *beschränkt*

es existieren $x_1, x_2 \in D$ *mit* $f(x_1) = \min f(D)$ *und* $f(x_2) = \max f(D)$

$\forall x \in D:\ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

a) *Ist* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und ist* $f \in C(I)$, *so ist* $f(I)$ *ein Intervall.*

b) *Sei* $f \in C([a,b])$, $A := \min f([a,b])$ *und* $B := \max f([a,b])$, *so ist* $f([a,b]) = [A,B]$

Monotonie bei Funktionen:

a) $f : D \to \mathbb{R}$ *heißt* ***monoton wachsend*** $:\iff$ *Aus* $x_1, x_2 \in D$ *und* $x_1 < x_2$ *folgt stets* $f(x_1) \leq f(x_2)$.

$f : D \to \mathbb{R}$ *heißt* ***streng monoton wachsend*** $:\iff$ *Aus* $x_1, x_2 \in D$ *und* $x_1 < x_2$ *folgt stets* $f(x_1) < f(x_2)$.

b) Entsprechend definiert man ***(streng) monoton fallend****.*

c) f *heißt* ***(streng) monoton*** $:\iff$ f *ist (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend.*

Umkehrfunktionen von (streng) monoton wachsenden/fallenden Funktionen sind ebenso (streng) monoton wachsend/fallend.

Monotonie und Intervalle:

$I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f \in C(I)$ *und* f *sei auf* I *streng monoton*

=> $f(I)$ *ein Intervall* und $f^{-1} \in C(f(I))$

Gleichmäßige Stetigkeit:

Sind (x_n), (y_n) *Folgen in* D *mit* $x_n - y_n \to 0$, *so gilt* $f(x_n) - f(y_n) \to 0$

Epsilon Definition: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

gleichmäßig stetig => stetig

Satz von Heine: *Ist* $D \subseteq \mathbb{R}$ *kompakt und ist* $f \in C(D)$, *so ist* f *auf* D *gleichmäßig stetig.*

Lipschitz-stetig: $\exists L \geq 0\ \forall x, y \in D : \ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

Lipschitz-stetig => gleichmäßig stetig

Funktionsfolgen und -reihen

(f_n) eine Folge von Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ & $s_n := f_1 + f_2 + \dots + f_n \ (n \in \mathbb{N})$

Punktweise Konvergenz:

- von Funktionsfolgen:

*Die Funktionenfolge (f_n) heißt **auf D punktweise konvergent** $:\iff$ Für jedes $x \in D$ ist die Folge $(f_n(x))$ konvergent.*

Grenzfunktion: *$f \colon D \to \mathbb{R}$ heißt die **Grenzfunktion** von (f_n)* $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in D)$

- von Funktionsfolgen:

*Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt **auf D punktweise konvergent** $:\iff$ Für jedes $x \in D$ ist die Folge $(s_n(x))$ konvergent.*

Summenfunktion: *$f \colon D \to \mathbb{R}$ heißt die **Summenfunktion** von (f_n)* $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in D)$,

Beispiel: $D = [0,1]$, $f_n(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N})$

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Epsilon Definition: $\forall x \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_0 : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Gleichmäßige Konvergenz:

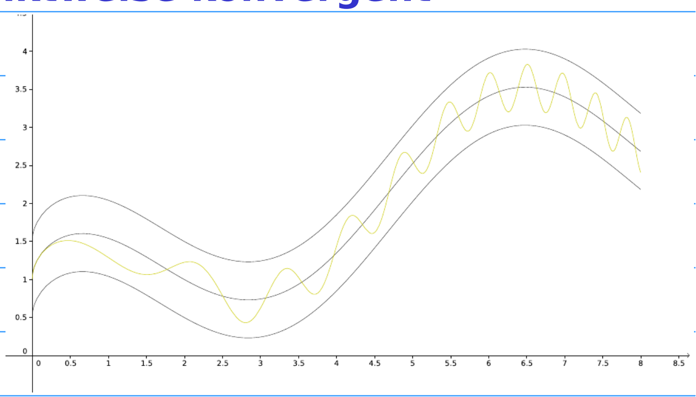
- von Funktionsfolgen: *(f_n) konvergiert auf D gleichmäßig (glm) gegen $f \colon D \to \mathbb{R} :\iff$*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_0 \ \forall x \in D : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- von Funktionsreihen: *$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf D gleichmäßig (glm) gegen $f \colon D \to \mathbb{R} :\iff$*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_0 \ \forall x \in D : \ |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- gleichmäßig konvergent => punktweise konvergent



Beispiel: $D = [0,1], f_n(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N})$

Bekannt: (f_n) konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0,1) \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Es sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Wegen $f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0,1)$ gilt

$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N})$$

Also konvergiert (f_n) auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen f.

$\alpha_n \to 0$

Punktweise Konvergenz und Nullfolgen:

(f_n) *konvergiere auf* D *punktweise gegen* $f\colon D \to \mathbb{R}$ & $\forall n \geq m\ \forall x \in D: \ |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$

=> *konvergiert* (f_n) *auf* D *gleichmäßig gegen* f

$(c_n) in\ [0, \infty)$

Kriterium von Weierstraß:

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *sei konvergent* & $\forall n \geq m\ \forall x \in D: \ |f_n(x)| \leq c_n$

=> *konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *auf* D *gleichmäßig*

Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$
$D := (x_0 - r, x_0 + r)$ $(D := \mathbb{R}$, *falls* $r = \infty)$
$[a, b] \subseteq D$ => *konvergiert die Potenzreihe auf* $[a, b]$ *gleichmäßig*

Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit:

(f_n) *bzw.* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergiere auf* D *gleichmäßig gegen* $f\colon D \to \mathbb{R}$

a) Sind alle f_n *in* $x_0 \in D$ *stetig, so ist* f *in* x_0 *stetig*

b) Sind alle $f_n \in C(D)$, *so ist* $f \in C(D)$.

a) Konvergiert (f_n) auf D punktweise gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$ und gilt $f_n \in C(D)$ $(n \in \mathbb{N})$ aber $f \notin C(D)$, so ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

b) Häufungspunkt von D:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \overset{8.3\ a)}{=} f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right).$$

Identitätssatz für Potenzreihen:

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$
$D := (x_0 - r, x_0 + r)$ $(D := \mathbb{R}$, *falls* $r = \infty)$

(x_k) *eine Folge in* $D \setminus \{x_0\}$ *mit* $x_k \to x_0$ *und* $f(x_k) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$

=> $\forall n \in \mathbb{N}_0: \ a_n = 0$ $r, = \infty$ *und* $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$

Bekannte Ableitungen

$c \in \mathbb{R}$ (c)' = 0 auf R $(a^x)' = a^x \log a$ auf $\mathbb{R}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ auf $(0, \infty)$

$n \in \mathbb{N}$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ auf $\mathbb{R}$ $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ auf $(0, \infty)$ $(\log(1+t))' = \frac{1}{1+t}$

$a > 0$ $(e^x)' = e^x$ auf $\mathbb{R}$ $(\log x)' = \frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$(\sin x)' = \cos x.$ $(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$

$(\cos x)' = -\sin x$ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(e^x)''' = e^x$, $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$. Es gilt: $E, \sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$

Differentialrechnung

$I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

Differenzierbarkeit:

Definition: f *heißt* **in** $x_0 \in I$ ***differenzierbar*** *(db)* $: \iff$ *Es existiert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Äquivalent: *Es existiert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Grenzwert = $f'(x_0)$ = Ableitung von f in x_0

Beispiel: $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) := c$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = 0$

differenzierbar => stetig

Differentiationsregeln: $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ *seien in* $x_0 \in I$ *differenzierbar*

a) *Für* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ist* $\alpha f + \beta g$ *differenzierbar in* x_0 *und*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

b) fg *ist differenzierbar in* x_0 *und*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

c) *Ist* $g(x_0) \neq 0$, *so existiert ein* $\delta > 0$ *mit* $g(x) \neq 0$ $(x \in J := I \cap U_\delta(x_0))$. *Die Funktion* $\frac{f}{g} \colon J \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar in* x_0 *und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion:

$f \in C(I)$ *streng monoton, in* $x_0 \in I$ *differenzierbar* & $f'(x_0) \neq 0$

=> $f^{-1} \colon f(I) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $y_0 := f(x_0)$ *und*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Kettenregel:

$J \subseteq \mathbb{R}$ *sei ein weiteres Intervall,* $g \colon J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subseteq J$ &

f *in* $x_0 \in I$ *differenzierbar und* g *sei in* $y_0 := f(x_0)$ *differenzierbar*

=> $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

Lokales/Globales Extremum:

- Innerer Punkt von M: $\exists \delta > 0: \ U_\delta(x_0) \subseteq M$
- Lokales Maximum (bzw. Minimum):

  $\exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M: \ g(x) \leq g(x_0) \ \ [\ bzw.\ g(x) \geq g(x_0)]$
- Globales Maximum (bzw. Minimum): $\forall x \in M: \ g(x) \leq g(x_0) \ \ [\ bzw.\ g(x) \geq g(x_0)]$
- Extremum = Maximum || Minimum

Lokales Extremum und Differenzierbarkeit:

$f: I \to \mathbb{R}$ *habe in* $x_0 \in I$ *ein lokales Extremum und sei in* x_0 *differenzierbar.*

x_0 *ein innerer Punkt von* I => $f'(x_0) = 0$

$f \in C([a,b])$

Mittelwertsatz (MWS) der Differentialrechnung:

f *sei auf* (a,b) *differenzierbar.* => $\exists \xi \in (a,b): \ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Differenzierbarkeit und Konstanz: $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I

f ist auf I konstant $\iff \forall x \in I: \ f'(x) = 0$

Differenzierbarkeit und Monotonie:

a) *Ist* $f' = g'$ *auf* I*, so existiert ein* $c \in \mathbb{R}$ *mit* $f = g + c$ *auf* I.

b) *Ist* $f' \geq 0$ *auf* I*, so ist* f *monoton wachsend auf* I.
Ist $f' > 0$ *auf* I*, so ist* f *streng monoton wachsend auf* I.

c) *Ist* $f' \leq 0$ *auf* I*, so ist* f *monoton fallend auf* I.
Ist $f' < 0$ *auf* I*, so ist* f *streng monoton fallend auf* I.

Regeln von de l'Hospital:

$I = (a, b)$, wobei $a = -\infty$ oder $b = \infty$, $c = a$ oder $c = b$ $\quad L := \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$f, g\colon I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar & $g'(x) \neq 0$ $(x \in I)$

(I) $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ || (II) $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$ => $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Beispiele:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x - \beta^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x \log\alpha - \beta^x \log\beta}{1} = \log\alpha - \log\beta$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

Differenzierbarkeit von Potenzreihen:

$x \in I$

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$
$I = (x_0 - r, x_0 + r)$ *($I = \mathbb{R}$, falls $r = \infty$)*

a) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ hat den Konvergenzradius r.

b) f ist auf I differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad (x \in I).$$

Abelscher Grenzwertsatz für Potenzreihen:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe , *Konvergenzradius $r \in (0, \infty)$*

Konvergiert die Potenzreihe auch in $x_0 + r$ & $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *für $x \in (x_0 - r, x_0 + r]$*

=> *f stetig in $x_0 + r$*

- analog für $x_0 - r$

Zweite Ableitung: $f: I \to \mathbb{R}$ *auf* I *differenzierbar*

- Differenzierbar in einem Punkt:

f' *in* $x_0 \in I$ *differenzierbar* => $f''(x_0) := (f')'(x_0)$ (analog: $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), f^{(5)}(x_0)$)

- Differenzierbar auf einer Menge:

f' *auf* I *differenzierbar* => $f'' := (f')'$ (analog: $f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots$)

n-mal Stetige Differenzierbarkeit:

*c) Für $n \in \mathbb{N}$ heißt f **auf I n-mal stetig differenzierbar** $:\iff$ f ist auf I n-mal differenzierbar und $f^{(n)} \in C(I)$. In diesem Fall gilt: $f, f', \ldots, f^{(n)} \in C(I)$. Wir setzen*

$$C^0(I) := C(I), \quad f^{(0)} := f,$$

$$C^n(I) := \{f : I \to \mathbb{R} : \ f \text{ ist auf } I \ n\text{-mal stetig differenzierbar}\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$C^\infty(I) := \bigcap_{n \geq 0} C^n(I).$$

n-malige Differenzierbarkeit von Potenzreihen:

$x \in I$ $f(x) := \sum_{n=0}^\infty a_n (x - x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$

$I = (x_0 - r, x_0 + r)$ $(I = \mathbb{R}$, *falls* $r = \infty)$

$f \in C^\infty(I)$ & $\forall k \in \mathbb{N}_0 \ \forall x \in I: \ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}$

Für $x = x_0$: $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$, *also* $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \ a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

$x, x_0 \in I$ **Satz von Taylor:** *f sei auf I $(n+1)$-mal differenzierbar*

$x \neq x_0$ *existiert ein* $\xi \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ *mit* $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$\text{Grad} \leq n$ n-tes Taylorpolynom von f im Punkt Xo: $T_n f(x, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

Restglied: $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

Lokales Extremum und Taylorpolynom: $n \geq 2$, $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$ *sei ein innerer Punkt von* I

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ *und* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ =>

a) Ist n *gerade und* $f^{(n)}(x_0) < 0$, *so hat* f *in* x_0 *ein lokales Maximum.*

b) Ist n *gerade und* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *so hat* f *in* x_0 *ein lokales Minimum.*

c) Ist n *ungerade, so hat* f *in* x_0 *kein lokales Extremum.*

Riemann-Integral

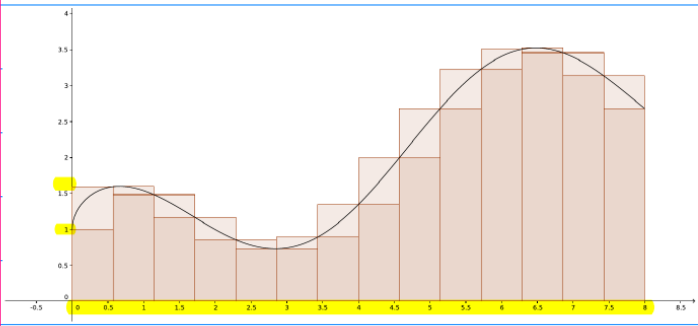
$a < b$ $\quad f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad m := \inf f([a,b]), M := \sup f([a,b])$

Definitionen:

- Zerlegung: $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mi $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$
- Menge aller Zerlegungen: $\mathfrak{Z} := \{Z : Z \textit{ ist eine Zerlegung von } [a,b]\}$

$I_j := [x_{j-1}, x_j],\ |I_j| := x_j - x_{j-1},\ m_j := \inf f(I_j),\ M_j := \sup f(I_j) \quad (j = 1, \ldots, n)$

Untersumme: $s_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j|$ **Obersumme:** $S_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j|$



$j \in \{1, \ldots, n\}$

$m \le m_j \le M_j \le M$

$m|I_j| \le m_j|I_j| \le M_j|I_j| \le M|I_j|$

$m(b-a) = m\sum_{j=1}^{n} |I_j| \le s_f(Z) \le S_f(Z) \le M\sum_{j=1}^{n} |I_j| = M(b-a)$

Verfeinerung: $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$. Z_2 *heißt eine Verfeinerung von* $Z_1 :\iff Z_1 \subseteq Z_2$

Zerlegungen und Summen:

a) $s_f(Z_1) \le S_f(Z_2)$.

b) Ist $Z_1 \subseteq Z_2$, *so gilt:* $s_f(Z_1) \le s_f(Z_2), \quad S_f(Z_1) \ge S_f(Z_2)$

$s_f := \sup\{s_f(Z) \colon Z \in \mathfrak{Z}\}$ und $S_f := \inf\{S_f(Z) \colon Z \in \mathfrak{Z}\}$ $\quad m(b-a) \le s_f \le S_f \le M(b-a)$

(Riemann-)integrierbar (ib) über [a,b]: $s_f = S_f$

(Riemann-)Integral von f über [a,b]: $\int_a^b f dx := \int_a^b f(x)dx := S_f (= s_f)$

$f \in R([a,b])$ *oder* $f \in R([a,b],\mathbb{R})$

Beispiele:

$f(x) = c \ (x \in [a,b])$ => $c(b-a) \leq s_f \leq S_f \leq c(b-a)$ => $f \in R([a,b])$ und $\int_a^b c dx = c(b-a)$

$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ => $m_j = \inf f(I_j) = 0,\ M_j = \sup f(I_j) = 1 \ (j = 1, \dots, n)$

=> $s_f(Z) = 0 \neq 1 = S_f(Z)$ => $f \notin R([0,1])$

$f, g \in R([a,b])$

Rechenregeln für Integrale:

a) *Ist* $f \leq g$ *auf* $[a,b]$, *so ist* $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$

b) *Für* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ist* $\alpha f + \beta g \in R([a,b])$ *und* $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$

Riemannsches Integrabilitätskriterium:

$f \in R([a,b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists Z = Z(\varepsilon) \in \mathcal{Z}: \ S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$

Monotonie und Integrierbarkeit: *Ist* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monoton, so ist* $f \in R([a,b])$

Stetigkeit und Integrierbarkeit: $C([a,b]) \subseteq R([a,b])$

Stammfunktion von g auf I: *G ist auf I differenzierbar und $G' = g$ auf I*

Mehrere Stammfunktionen:

$G' = g = H'$ auf I & $\exists c \in \mathbb{R} \ \forall x \in I : \ G(x) = H(x) + c$

Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$f \in R([a,b])$ & besitzt auf [a,b] eine Stammfunktion F

=> $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ $\qquad F(x)\Big|_a^b := [F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$

Beispiele:

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [a,b]$, $0 < a < b$, $f \in C([a,b]) \overset{10.5}{\Longrightarrow} f \in R([a,b])$ $\quad F(x) := \log x$

=> $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log x\Big|_a^b = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

BEMERKUNG:

Es gibt integrierbare Funktionen OHNE Stammfunktionen!

Es gibt nicht integrierbare Funktionen MIT Stammfunktionen

Integrierbarkeit und Mittelwerte:

$c \in (a,b)$

$f \in R([a,b]) \iff f \in R([a,c])$ *und* $f \in R([c,b])$ $\qquad \int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$

Motivation:

$$f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}), \\ n - (x - \frac{1}{n})n^2, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Es gilt:

$$f_n \in C([0,1]) \overset{10.5}{\Longrightarrow} f_n \in R([0,1]) \overset{10.6}{\underset{10.7}{\Longrightarrow}} \int_0^1 f_n dx = 1 \ (n \geq 2).$$

Übung: (f_n) konvergiert auf $[0,1]$ punktweise gegen $f = 0$. Also gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$$

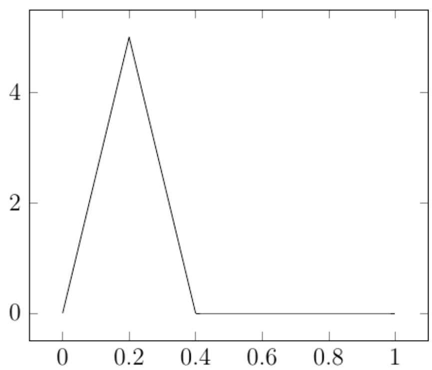


Abbildung 10.1: f_n für $n = 5$.

Integrierbarkeit und Funktionsfolgen:

(f_n) *eine Folge in* $R([a,b])$ & konvergiert auf [a,b] gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

=> $f \in R([a,b])$ & $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Stammfunktionen und Potenzreihen:

$x \in I$

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$

$I = (x_0 - r, x_0 + r)$ $(I = \mathbb{R}$, *falls* $r = \infty)$

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ *den Konvergenzradius* r

G' = g (G ist Stammfunktion v g)

$f, g \in R([a,b])$

Rechenregeln für Integrale und Funktionen:

a) Es sei $D := f([a,b])$ *und mit einem* $L \geq 0$ *gelte für* $h\colon D \to \mathbb{R}$:

$$|h(s) - h(t)| \leq L|s-t| \quad (t, s \in D).$$

Dann ist $h \circ f \in R([a,b])$.

b) $|f| \in R([a,b])$ *und* $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ *($\triangle$-Ungleichung für Integrale).* <- Dreiecksungleichung

c) $fg \in R([a,b])$.

d) Ist $g(x) \neq 0$ $(x \in [a,b])$ *und* $\frac{1}{g}$ *auf* $[a,b]$ *beschränkt, so ist* $\frac{1}{g} \in R([a,b])$.

$f \in R([a,b])$

Integral mit gleiche Grenzen: $\int_\alpha^\alpha f(x)dx := 0$

$\alpha, \beta \in [a,b]$

Integrierbarkeit auf Teilintervalle:

$\alpha < \beta$ => $f \in R([\alpha,\beta])$

Grenzen von Intervalle vertauschen: $\int_\beta^\alpha f(x)dx := -\int_\alpha^\beta f(x)dx$

Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$f \in R([a,b])$ & $F(x) := \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a,b])$ =>

a) $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt \ (x, y \in [a,b])$.

b) F *ist Lipschitz-stetig.*

c) Ist $f \in C([a,b])$, *so ist* $F \in C^1([a,b])$ *und* $F'(x) = f(x) \ (x \in [a,b])$

^ = Stetige Funktionen besitzen immer eine Stammfunktion

Stammfunktionen über Intervalle:

$I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall , $g \in C(I)$, $x_0 \in I$ (fest)

$G: I \to \mathbb{R}$ mit $G(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ => $G \in C^1(I)$ und $G' = g$ auf I

Unbestimmtes Integral von g:

$\int g dx$ *oder* $\int g(x)dx$ = Stammfunktion von g auf I

Beispiel: $\int \cos x dx = \sin x, \quad \int \cos x dx = \sin x + 17$

$f, g \in C^1(I)$

Partielle Integration:

a) $\int f'g dx = fg - \int fg' dx$ *auf* I.

b) Ist $I = [a,b]$, *so ist* $\int_a^b f'g dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg' dx$.

Beispiele:

$$\int \sin^2 x dx = \int \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\sin x}_{g} dx = -\cos x \sin x - \int -\cos^2 x dx$$

$$= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x dx = -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= x - \cos x \sin x - \int \sin^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x).$$

Ungeeignete Anwendung der partiellen Integration:

$$\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} dx = \frac{1}{2}x^2 e^x - \int \frac{1}{2} x^2 e^x dx.$$

Besser:

$$\int \underbrace{x}_{g} \underbrace{e^x}_{f'} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

$$\int \log x dx = \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\log x}_{g} dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x$$

Bezeichnung: $\langle\alpha,\beta\rangle := \begin{cases} [\alpha,\beta], & \text{falls } \alpha < \beta \\ [\beta,\alpha], & \text{falls } \alpha > \beta \end{cases}$

Substitutionsregeln:

I und J Intervalle in $\mathbb{R}$ $\quad f \in C(I)$, $g \in C^1(J)$ und $g(J) \subseteq I$

a) *Es gilt*

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=g(t)} \quad \textit{auf } J.$$

b) *Es sei $g'(t) \neq 0$ $(t \in J)$ ($\Rightarrow g' > 0$ auf J oder $g' < 0$ auf $J \Rightarrow g$ ist streng monoton).*
Dann gilt:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} \quad \textit{auf } I.$$

c) *Ist $I = \langle a,b\rangle$, $J = \langle\alpha,\beta\rangle$, $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$, so gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

Merkregel: sei y = y(x) eine differenzierbare Funktion => y' = $\frac{dy}{dx}$

Fasse x als Funktion von t auf: x = g(t) =>

$\frac{dx}{dt} = g'(t)$ & "$dx = g'(t)dt$"

Beispiele:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x}dx \quad \begin{cases} x = \log t, e^x = t \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, dx = \frac{1}{t}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 1 \Rightarrow t = e \end{cases}$$

$$= \int_1^e \frac{t^2+1}{t}\cdot\frac{1}{t}dt = \int_1^e \frac{t^2+1}{t^2} = \int_1^e (1+\frac{1}{t^2})dt$$
$$= \left[t - \frac{1}{t}\right]_1^e = e - \frac{1}{e} - (1-1) = e - \frac{1}{e}.$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \quad \begin{cases} x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{dx}{dt} = \cos t, dx = \cos t dt \end{cases}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)dt$$
$$= \left[t - \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Beschränktheit und integrierbarkeit: $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt.*

a) *Ist $\{x \in [a,b] : f$ ist in x nicht stetig $\}$ endlich, so ist $f \in R([a,b])$.*

b) *Ist $f \in R([a,b])$ und $\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ endlich, so ist $g \in R([a,b])$ und*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Integrierbarkeit und inf/sup von f([a,b]):

$f, g \in R([a,b])$, $g \geq 0$ *auf* $[a,b]$, $m := \inf f([a,b])$ *und* $M := \sup f([a,b])$

a) $\exists \mu \in [m, M]$: $\int_a^b f g dx = \mu \int_a^b g dx$.

b) $\exists \mu \in [m, M]$: $\int_a^b f dx = \mu(b-a)$.

Ist $f \in C([a,b])$, *so existiert ein* $\xi \in [a,b]$ *mit* $\mu = f(\xi)$ *in a) bzw. b).*

(f_n) *eine Folge*

Differenzierbarkeit und Funktionsfolgen:

i) $f_n \in C^1([a,b])$ $(n \in \mathbb{N})$,

ii) $(f_n(a))$ *ist konvergent,*

iii) (f_n') *konvergiert auf* $[a,b]$ *gleichmäßig gegen* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

=> (f_n) konvergiert gleichmäßig auf [a,b] & für $f(x) := \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)$ $(x \in [a,b])$

$f \in C^1([a,b])$ *und* $f'(x) = g(x)$ $(x \in [a,b])$

Bemerkung: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) = f'(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'$ $\quad (x \in [a,b])$

Uneigentliche Integrale

$f \in R(J)$ für jedes kompakte Intervall $J \subseteq I$

Konvergenz nach oben:

$a \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < \beta$ *und* $f\colon [a,\beta) \to \mathbb{R}$ *eine Funktion*

Es existiert $\lim\limits_{t\to\alpha+} \int_t^b f(x)dx \in \mathbb{R}$.

$$\int_\alpha^b f(x)dx := \lim_{t\to\alpha+} \int_t^b f(x)dx.$$

Konvergenz nach unten:

$b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\alpha < b$ *und* $f\colon (\alpha,b] \to \mathbb{R}$ *eine Funktion*

Es existiert $\lim\limits_{t\to\alpha+} \int_t^b f(x)dx \in \mathbb{R}$.

$$\int_\alpha^b f(x)dx := \lim_{t\to\alpha+} \int_t^b f(x)dx.$$

Beispiele:

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx,\ \gamma > 0\ (a = 1, \beta = \infty)$. Für $t > 1$ gilt:

$$\int_1^t \frac{1}{x^\gamma}dx = \begin{cases} \log t, & \text{falls } \gamma = 1 \\ \frac{1}{1-\gamma}(t^{1-\gamma} - 1), & \text{falls } \gamma \neq 1 \end{cases}$$

Also gilt: $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx$ konvergiert $\iff \gamma > 1$. In diesem Fall ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma}dx,\ \gamma > 0\ (\alpha = 0, b = 1)$. Wie in Beispiel a) sieht man:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma}dx \text{ konvergiert} \iff \gamma < 1.$$

In diesem Fall ist

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma}dx = \frac{1}{1-\gamma}.$$

b) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx\ (a = 0, \beta = \infty)$. Für $t > 0$ gilt:

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan t \to \frac{\pi}{2}\ (t \to \infty)$$

Also ist $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ konvergent und $= \frac{\pi}{2}$.

d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx\ (\alpha = -\infty, b = 0)$. Wie in Beispiel b) sieht man:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx \text{ konvergiert und } = \frac{\pi}{2}.$$

Konvergenz:

$\alpha < \beta$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *und* $f\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$

$\exists c \in (\alpha,\beta) : \int_\alpha^c f(x)dx$ *und* $\int_c^\beta f(x)dx$ *sind konvergent*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx := \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx.$$

Beispiele:

b) Es sei $\gamma > 0$. Obige Beispiele a) und c) zeigen: $\int_0^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx$ ist divergent.

c) Obige Beispiele b) und d) zeigen: $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ ist konvergent und $= \pi$

Uneigentliche Integrale und Funktionenlimes:

Für $t \in [a, \beta)$ sei $g(t) := \int_a^t f(x)dx$. Dann gilt:

$\int_a^\beta f(x)dx$ konvergiert $\iff \lim_{t\to\beta-} g(t)$ existiert und ist in $\mathbb{R}$

Cauchykriterium:

$$\int_a^\beta f(x)dx \ \textit{konvergiert} \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists c \in (a, \beta)\ \forall u, v \in (c, \beta) : \left|\int_u^v f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Absolute Konvergenz: $\int_a^\beta |f(x)|dx$ *ist konvergent*

absolut konvergent => konvergent & $|\int_a^\beta f(x)dx| \leq \int_a^\beta |f(x)|dx$

Majorantenkriterium:

$|f| \leq h$ *auf* $[a, \beta)$ *und* $\int_a^\beta h(x)dx$ *konvergent* => $\int_a^\beta f(x)dx$ *absolut konvergent*

Minorantenkriterium:

$f \geq h \geq 0$ *auf* $[a, \beta)$ *und* $\int_a^\beta h(x)dx$ *divergent* => $\int_a^\beta f(x)dx$ *divergent*

Beispiel: $\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^5}}}_{=:f(x)} dx$. Für $x \geq 1$ gilt: $|f(x)| = f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} =: g(x)$.

$$\int_1^\infty g(x)dx \text{ konvergiert } \Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergiert}$$