Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I — **Winter-Semester 2020/2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 9 — **18.01.21**

Aufgabe 1 (*Summen und Vektorraumkomplemente*) (*10 Punkte*)

Im $\mathbb{R}^4$ seien die Untervektorräume

$$U_1 = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad U_2 = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix}0\\4\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

Lösung zu Aufgabe 1

Zuerst bestimmen wir eine Basis von $U_1 \cap U_2$ Dazu bestimmen wir den Kern von

$$\begin{aligned} \Phi_1 : U_1 \times U_2 &\to \mathbb{R}^4 \\ (u_1, u_2) &\mapsto u_1 - u_2. \end{aligned}$$

Wir stellen Φ_1 als Matrix dar:

$$A_{\Phi_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 4 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-3)\ (-4) \\ + \\ + \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & 12 & 6 \\ 0 & -4 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ + \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (1)\ \mid (1/2) \\ + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also wird der Kern von A_{Φ_1} erzeugt von $\begin{pmatrix}1\\-3/2\\-1\\1\end{pmatrix}$. In Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^4$ ist das

$$-\begin{pmatrix}0\\4\\3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

Also $U_1 \cap U_2 = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\\0\end{pmatrix}\right)$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

Nun bestimmen wir eine Basis von $U_1 + U_2$. Dazu bestimmen wir eine Basis vom Bild von

$$\begin{aligned} \Phi_2 : U_1 \times U_2 &\mapsto \mathbb{R}^4 \\ (u_1, u_2) &\mapsto u_1 + u_2 \end{aligned}$$

Dazu wenden wir Spaltenoperationen auf der Darstellungsmatrix A_{Φ_2} zu Φ_2 an:

$$A_{\Phi_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine geordnete Basis von $U_1 + U_2$ und $\dim(U_1 + U_2) = 3$.

Aufgabe 2 (*Smith-Normalform*) (*10 Punkte*)

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto Ax \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Rang und die Smith-Normalform S von φ.

b) Bestimmen Sie geordnete Basen B_1 und B_2 von $\mathbb{R}^3$, sodass $M_{\mathrm{B}_2,\mathrm{B}_1}(\varphi) = S$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Wir bringen die Matrix zunächst durch Zeilenumformungen in die Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad | \cdot (-1) \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun bringen wir die Matrix mit Spaltenumformungen auf die Smith-Normalform:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow S := \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist also 2 und S ist die Smith-Normalform.

b) Jede der Zeilenoperationen entspricht der Multiplikation von mit den Elementarmatrizen aus Lemma 2.5.4. Wir können alle Umformungen zu einer Matrix zusammenfassen:

$$L := \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\implies L \cdot A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Da die Matrizen nacheinander von links zu A multipliziert werden, entsprechen die Faktoren in umgekehrter Reihenfolge den Zeilenumformungen.

Bei den Spaltenumformungen wird von rechts multipliziert, daher sind die Faktoren hier „in der richtigen Reihenfolge“, auch wenn es in diesem Fall keinen Unterschied machen würde:

$$R := \begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \implies L \cdot A \cdot R = S$$

Die Darstellungsmatrix $M_{\mathrm{E},\mathrm{E}}(\varphi) = A$ bezüglich der Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$ kennen wir bereits. Nun können wir das Produkt als Basiswechsel interpretieren:

$$S = M_{\mathrm{B}_2,\mathrm{B}_1}(\varphi) = \underbrace{M_{\mathrm{B}_2,\mathrm{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})}_{\overset{!}{=}L}\ \underbrace{M_{\mathrm{E},\mathrm{E}}(\varphi)}_{=A}\ \underbrace{M_{\mathrm{E},\mathrm{B}_1}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})}_{\overset{!}{=}R}$$

Die Spalten von R entsprechen also schon den Basisvektoren von B_1:

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\4\\1\end{pmatrix}\right)$$

Um die Basis B_2 zu erhalten, müssen wir noch $M_{\mathrm{E},\mathrm{B}_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = M_{\mathrm{B}_2,\mathrm{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^{-1} = L^{-1}$ berechnen:

$$
\begin{aligned}
L^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\implies B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
$$

Bemerkung: Dies ist nur eine von vielen möglichen Lösungen. Eine andere Wahl von Zeilen- und Spaltenumformungen führt auf andere Basen.

Alternative Lösung: Wenn man S aus a) schon kennt, kann man auch versuchen, die Basen $\mathrm{B}_1 = (b_1, b_2, b_3)$ und $\mathrm{B}_2 = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$ direkt zu bestimmen. Die Gleichung $M_{\mathrm{B}_2,\mathrm{B}_1}(\varphi) = S$ ist hier nämlich äquivalent zu

$$
\varphi(b_1) = \tilde{b}_1, \qquad \varphi(b_2) = \tilde{b}_2 \quad \text{und} \quad b_3 \in \ker(\varphi).
$$

Man bestimmt also eine Basis (b_3) von $\ker(\varphi)$, ergänzt diese zu einer Basis B_1 von $\mathbb{R}^3$, definiert $\varphi(b_1) = \tilde{b}_1$, $\varphi(b_2) = \tilde{b}_2$ und ergänzt $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$ dann wiederum zur Basis B_2.

Aufgabe 3 (*Direkte Summen*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein (möglicherweise unendlich-dimensionaler) $\mathbb{K}$-Vektorraum.

a) Beweisen Sie: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V \setminus \{0\}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Summe $\mathrm{LH}(v_1) + \cdots + \mathrm{LH}(v_n)$ direkt ist.

b) Es seien $U_1, \ldots U_n$ Untervektorräume von V. Beweisen Sie:
Die Summe $U_1 + \cdots + U_n$ ist genau dann direkt, wenn

$$
\forall s \in \{1, \ldots n-1\} : (U_1 + \cdots + U_s) \cap (U_{s+1} + \cdots + U_n) = \{0\}
$$

gilt. *Hinweis:* Die Lösungsidee von Aufgabe 4 auf Blatt 3 könnte helfen.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Die Abbildung

$$
\begin{aligned}
\pi\colon \mathrm{LH}(v_1) \times \cdots \times \mathrm{LH}(v_n) &\to \mathrm{LH}(v_1) + \cdots + \mathrm{LH}(v_n) \\
(\tilde{v}_1, \ldots \tilde{v}_n) &\mapsto \tilde{v}_1 + \cdots + \tilde{v}_n
\end{aligned}
$$

ist (nach Definition der Summe von Untervektorräumen) surjektiv.
Die Summe $\mathrm{LH}(v_1) + \cdots + \mathrm{LH}(v_n)$ ist also genau dann direkt, wenn π injektiv ist, also wenn

$\ker(\pi) = \{(0,\dots,0)\}$ gilt.

Angenommen, die Summe ist direkt und es gilt $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ für $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$. Dann ist $\pi(\alpha_1 v_1,\dots,\alpha_n v_n) = 0$, also gilt $\alpha_1 v_1 = 0$, und wegen $v_i \neq 0$ dann auch $a_i = 0$ für alle $i = 1,\dots,n$, also sind die Vektoren linear unabhängig.

Nehmen wir umgekehrt an, dass die Vektoren $v_1,\dots v_n$ linear unabhängig sind. Angenommen, es gilt nun $(\tilde{v}_1,\dots\tilde{v}_n) \in \ker(\pi)$ für Vektoren $\tilde{v}_i \in \mathrm{LH}(v_i)$ für alle $i = 1,\dots n$. Dann gibt es (nach Definition der linearen Hülle) Elemente $\alpha_i \in \mathbb{K}$ mit $\tilde{v}_i = \alpha_i v_i$. Also gilt $\pi(\tilde{v}_1,\dots\tilde{v}_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$. Da die Vektoren linear unabhängig sind, muss also $\alpha_i = 0$ und somit auch $\tilde{v}_i = 0$ gelten. Damit ist der Kern von π trivial und π ist injektiv. Also ist die Summe $\mathrm{LH}(v_1) + \cdots + \mathrm{LH}(v_n)$ direkt.

b) Es sei wieder

$$\begin{aligned} \pi\colon U_1 \times \cdots \times U_n &\to U_1 + \cdots + U_n \\ (\tilde{v}_1,\dots\tilde{v}_n) &\mapsto \tilde{v}_1 + \cdots + \tilde{v}_n \end{aligned}$$

Die Summe ist, wie in a) begründet, genau dann direkt, wenn $\ker(\pi) = \{(0,\dots,0)\}$ gilt.

Es gilt

$$U_1+\cdots+U_n \text{ ist direkt } \implies \forall i \in \{1,\dots n-1\} : (U_1+\cdots+U_i)\cap(U_{i+1}+\cdots+U_n) = \{0\}.$$

Beweis: Angenommen die Summe $U_1 + \cdots + U_n$ ist direkt.
Es sei $s \in \{1,\dots,n-1\}$ und $v \in (U_1 + \cdots + U_s) \cap (U_{s+1} + \cdots + U_n)$. Dann gibt es (nach Definition der Summe von Unterräumen) Vektoren $v_i \in U_i$ für alle $i = 1,\dots n$ mit

$$\begin{aligned} &\tilde{v}_1 + \cdots + \tilde{v}_s = v = \tilde{v}_{s+1} + \cdots + \tilde{v}_n \\ \implies &\tilde{v}_1 + \cdots + \tilde{v}_s - \tilde{v}_{s+1} - \cdots - \tilde{v}_n = 0 \\ \implies &(\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_s,-\tilde{v}_{s+1},\dots,-\tilde{v}_n) \in \ker(\pi) \\ \implies &\tilde{v}_1 = \cdots = \tilde{v}_n = 0 \\ \implies &v = 0 \end{aligned}$$

Das heißt, $v = 0$ ist das einzige Element von $(U_1 + \cdots + U_s) \cap (U_{s+1} + \cdots + U_n)$.

Es gilt

$$U_1 + \cdots + U_n \text{ ist direkt } \impliedby \forall i \in \{1,\dots n-1\} : (U_1+\cdots+U_i)\cap(U_{i+1}+\cdots+U_n) = \{0\}.$$

Beweis: Angenommen, die Summe ist nicht direkt, dann ist die Abbildung π nicht injektiv. Also gibt es $\tilde{v}_1 \in U_1,\dots,\tilde{v}_n \in U_n$ mit

$$\tilde{v}_1 + \cdots + \tilde{v}_n = 0$$

und ein $s \in \{1,\dots,n\}$ mit $\tilde{v}_s \neq 0$. Wir wählen das minimale solche s. Damit gilt

$$\tilde{v}_s = \underbrace{\tilde{v}_1 + \cdots + \tilde{v}_{s-1}}_{=0, \text{ da } s \text{ mininmal}} + \tilde{v}_s = -\tilde{v}_{s+1} - \cdots - \tilde{v}_n.$$

Dies zeigt aber, dass $\tilde{v}_s \neq 0$ sowohl in $U_1 + \cdots + U_s$ als auch in $U_{s+1} + \cdots + U_n$ liegt, also

$$\{0\} \neq (U_1 + \cdots + U_s) \cap (U_{s+1} + \cdots + U_n).$$

Aufgabe 4 (*Erster Isomorphiesatz für Vektorräume*) (*10 Punkte*)

Es sei W ein (möglicherweise unendlich-dimensionaler) $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V, U \subseteq W$ Untervektorräume. Zeigen Sie, dass es einen Vektorraumisomorphismus zwischen den Quotientenräumen $U \big/ (U \cap V)$ und $(U+V) \big/ V$ gibt.

Lösung zu Aufgabe 4

Bezeichne mit i die Einbettung $U \to U + V$. Außerdem bezeichnet $p : U + V \to (U+V) \big/ V$ die kanonische Projektion. Durch Komposition erhalten wir eine lineare Abbildung $\varphi := p \circ i$. Wir bestimmen dern Kern von φ:

$$\begin{aligned} \ker(\varphi) &= \{u \in U : i(u) \in \ker p\} \\ &= \{u \in U : u \in V\} \\ &= U \cap V. \end{aligned}$$

Weiterhin zeigen wir, dass $\mathrm{Bild}(\varphi) = (U+V) \big/ V$: Sei $w \in (U+V) \big/ V$. Da p surjektiv ist, gibt es $u \in U, v \in V$ mit $p(u+v) = w$. Dann

$$\begin{aligned} w &= p(u+v) \\ &= p(u) + p(v) \\ &= p(u) \\ &= p \circ i(u) \\ &= \varphi(u) \end{aligned}$$

Nun impliziert Korollar 4.5.7, dass

$$\bar{\varphi} : U \big/ (U \cap V) \to (U+V) \big/ V$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen ist.