Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II — **Sommersemester 2021**

Übungsblatt 4 — **10.05.21**

Aufgabe 1 (*Gram-Schmidt-Verfahren und Abstände*)

Es seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^5$ mit dem Standardskalarprodukt gegeben.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $U := \mathrm{LH}(v_1, v_2, v_3)$.

b) Bestimmen Sie den Abstand des Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum affinen Unterraum $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + U$.

c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

Aufgabe 2 (*Projektionen und Orthogonalprojektionen*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der davon induzierten Norm $\| \cdot \|$.
Außerdem sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir nennen einen Endomorphismus $\varphi \colon V \to V$

- *Projektion*, falls $\varphi^2 = \varphi$ gilt.
- *Orthogonalprojektion* auf U, falls $\varphi(v) \in U$ und $\|v - \varphi(v)\| = d(v, U)$ für alle $v \in V$ gilt.
- *nichtexpandierend*, falls $\|\varphi(v)\| \leq \|v\|$ für alle $v \in V$ gilt.

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Falls φ eine Projektion ist, so ist auch $\mathrm{id} - \varphi$ eine Projektion und es gelten die Aussagen

$$\ker(\varphi) = \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - \varphi), \quad \mathrm{Bild}(\varphi) = \ker(\mathrm{id} - \varphi), \quad V = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi).$$

b) Falls φ eine Orthogonalprojektion auf U ist, dann ist φ auch eine Projektion und es gilt $U = \mathrm{Bild}(\varphi)$.

c) Eine Abbildung φ ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn φ eine Projektion mit $\ker(\varphi) = \mathrm{Bild}(\varphi)^\perp$ ist.

d) Falls φ eine Orthogonalprojektion ist, ist φ nichtexpandierend.
Hinweis: Satz des Pythargoras.

e) *Bonus:* Falls φ eine nichtexpandierende Projektion ist, ist φ eine Orthogonalprojektion.
Hinweis: Zeigen Sie $\ker(\varphi)^\perp \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi)$. *(+2 Bonuspunkte)*

Abgabe bis Montag, den 17.05.21 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.