Gruppe 1

Velislav Slavov, 2385786

ucsmm@student.kit.edu

A1

$$U_1 = LH\left(\begin{pmatrix}3\\1\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\\0\end{pmatrix}\right) \qquad U_2 = LH\left(\begin{pmatrix}0\\4\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Seien $B_1 = \left(\begin{pmatrix}3\\1\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\\0\end{pmatrix}\right) \qquad B_2 = \left(\begin{pmatrix}0\\4\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

Sei $u \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow u = x_1\begin{pmatrix}3\\1\\4\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\2\\4\\0\end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix}0\\4\\3\\1\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow x_1\begin{pmatrix}3\\1\\4\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\2\\4\\0\end{pmatrix} - \left(x_3\begin{pmatrix}0\\4\\3\\1\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{array}{cccc|l} 3 & 2 & 0 & 0 & \\ 1 & 2 & -4 & -2 & I\cdot(-3),\ \cdot(-4), \\ 4 & 4 & -3 & -1 & \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \\ \hline 1 & 2 & -4 & -2 & \\ 0 & -4 & 12 & 6 & I\cdot(-1),\ \cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\ 0 & -4 & 13 & 7 & \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \\ \hline 1 & 2 & -4 & -2 & \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{3}{2} & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & I\cdot 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|}
1 & 2 & -4 & -2 \\
0 & 1 & -3 & -\frac{3}{2} \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

$1 \cdot 3$, $\cdot 4$

$1 \cdot (-2)$

Setze $x_4 = t$

$\Rightarrow x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -t$

$x_2 + \frac{3}{2}x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{2}t$

$x_1 - x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{3}{2}t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis von $U_1 \cap U_2 \Rightarrow$

$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$

Sei $u \in U_1 + U_2 \Rightarrow u = u_1 + u_2$

$$\Rightarrow u = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A2 $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$x \longrightarrow Ax$

a)

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 4 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ \hline 1 & 0 & 4 & & & \\ 0 & 1 & -4 & & & \\ 0 & 1 & -4 & & & \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$|\cdot(-1)$, $\cdot(-1)$,

$|\cdot(-1)$

$\cdot(-4)$ $\cdot(4)$

$\Rightarrow S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $rg(\varphi) = 2$

b) $\big(\varphi(B_1)\big)_{B_2} = S$

$\Rightarrow$ für $b_{1,1}, b_{1,2}, b_{1,3} \in B_1$ und $b_{2,1}, b_{2,2}, b_{2,3} \in B_2$ gilt:

$\big(\varphi(b_{1,1})\big)_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(b_{1,1}) = 1 b_{2,1}$

$\big(\varphi(b_{1,2})\big)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(b_{1,2}) = 1 b_{2,2}$

$\big(\varphi(b_{1,3})\big)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(b_{1,3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sei $\boxed{B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$

$$\Rightarrow b_{2,1} = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{2,2} = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

A3 a) z.z. $v_1, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$ lin. unab.
$\Leftrightarrow LH(v_1) + \dots + LH(v_n)$ ist direkt

"$\Rightarrow$"

Annahme: $v_1, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$ lin. unab.

Seien $\left.\begin{array}{l} w = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \\ \tilde{w} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \end{array}\right\} \in LH(v_1) + \dots + LH(v_n)$

mit $w = \tilde{w} \Rightarrow w - \tilde{w} = 0$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) v_j = 0$

Da $v_1, \dots, v_n$ lin. unabh. $\Rightarrow \alpha_j - \beta_j = 0$

$\Rightarrow \alpha_j = \beta_j \Rightarrow$ die Darstellung von alle

w aus $LH(v_1) + \dots + LH(v_n)$ ist eindeutig

und somit ist die Summe direkt

"$\Leftarrow$"

Annahme: $LH(v_1) + \dots + LH(v_n)$ ist direkt
mit $v_1, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$

$\forall\ w \in LH(v_1) + \dots + LH(v_n)$: $\quad w = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$