Deckblatt

Tutorium 13 - Berkan Demir

Bearbeitet von:

Julian Tusch, 2359231 (urhrf)
Velislav Slavov, 2385786 (ucsmm)

A17	A19	Σ
7,5	2	9,5

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

4. Dezember 2020

Abgabe bis 11. Dezember 2020, 12:00 Uhr

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 47 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 17 (K):
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$, (ii) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$, (iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+(-1)^n)^n \left(\frac{n+3}{4n}\right)^n$.

Aufgabe 18:

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2+n}{n^3+1}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$.

(ii) Es sei (a_n) eine Folge mit $|a_n| > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann kann man zeigen, dass folgende Ungleichungskette gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|. \tag{1}$$

Zeigen Sie unter Verwendung von (1), dass gilt:

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to \mathrm{e} \quad (n \to \infty).$$

Aufgabe 19 (K):

(i) Bestimmen Sie das Cauchyprodukt der Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^{-n}$ und berechnen Sie dessen Reihenwert.

(ii) Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei definiert durch $a_0 := 0$ und $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Zeigen Sie die Divergenz des Cauchyprodukts von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst. Begründen Sie, warum dies nicht dem Satz über die Konvergenz des Cauchyprodukts widerspricht.

Aufgabe 20:

(i) Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt der beiden divergenten Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $a_0 := -1,\ a_n := 1\ (n \in \mathbb{N})$ und $b_0 := 2,\ b_n := 2^n\ (n \in \mathbb{N})$ absolut konvergiert.

(ii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{n^2}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n!} \frac{1}{k} \right) x^n$.

Hinweis zu (b): Zeigen Sie zunächst $\sum\limits_{k=1}^{n!} \frac{1}{k} \leq n^2$.

Information

Aufgrund der aktuellen Situation wird dieses Modul teilweise in digitaler Form angeboten. Die gesamte Abwicklung wird über das System ILIAS stattfinden. Melden Sie sich dafür mit Ihrem KIT-Account an und treten Sie dem Kurs **Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik** bei. Sie können diesem Kurs direkt über folgenden Link beitreten:

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1253943_rcodeHa6wkYEysN&client_id=produktiv`

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Scheinkriterien, Tutorien, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

Zum Bearbeiten der Übungsblätter sollten Sie pro Woche etwa 9-10 Seiten des Skripts mithilfe der angebotenen Vorlesungsvideos durcharbeiten. Das kommende Übungsblatt wird den Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 58 beinhalten.

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-6 und 7-13 **jeweils** mindestens 48 bwz. 56 Punkte (50%) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal.

Aufgabe 17 (K):

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$, (ii) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$, (iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+(-1)^n)^n \left(\frac{n+3}{4n}\right)^n$.

Behauptung:
Beweis:

17 i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$ $n \geq 1$, $5^n > 0 \Rightarrow \frac{n^5}{5^n} > 0 \Rightarrow \left|\frac{n^5}{5^n}\right| = \frac{n^5}{5^n}$ 2/2

$a_n := \frac{n^5}{5^n}$, $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^5}\right| = \left|\frac{\cancel{5^n}(n+1)^5}{\cancel{5^n} \cdot 5 \cdot n^5}\right| = \left|\frac{(n+1)^5}{5n^5}\right|$$

$$= \left|\frac{\cancel{n^5} \cdot (1+\frac{1}{n})^5}{\cancel{n^5} \cdot 5}\right| = \left|\frac{(1+\frac{1}{n})^5}{5}\right| \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{5}$$

Es gilt $\limsup_{n \to \infty} c_n = \frac{1}{5} < 1$ ✓

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$ ist absolut konvergent (Quotientenkriterium) ✓

17 ii) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{n}$ 1,5/2

Es sei $b_n := \frac{\sqrt{n+1}}{n} = \frac{\sqrt{n+1}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{n\sqrt{n+1}} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n\sqrt{n+1}} = \frac{\overset{\nearrow 0}{1+\frac{1}{n}}}{\underset{\searrow \infty}{\sqrt{n+1}}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ ✓

Behauptung: b_n ist monoton fallend (zz: $b_n \geq b_{n+1}$)

$$b_{n+1} = \frac{1+\frac{1}{n+1}}{\sqrt{n+2}}$$

Es gilt $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}$ und $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{1+\frac{1}{n+1}}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{n+1}}$ $\Rightarrow$ b_n ist monoton fallend ✓

Daraus folgt $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{n}$ ist konvergent (Leibnizkriterium) ✓

Was ist mit der absoluten Konvergenz?

17 iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n \cdot n!}$ $\quad (2n)! = n! \cdot \underbrace{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}_{n\text{-mal}} < n!\,(2n)^n$ 2/2

Nach oben abschätzen: $\frac{(2n)!}{(3n)^n \cdot n!} < \frac{n!\cdot(2n)^n}{n!\cdot(3n)^n} = \frac{(2n)^n}{(3n)^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Es gilt $\left|\frac{2}{3}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergiert (geometrische Reihe)

Außerdem gilt $\left|\frac{(2n)!}{(3n)^n\cdot n!}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(3n)^n\cdot n!}$ ist absolut konvergent (Majorantenkriterium)

17 iv) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n)^n\left(\frac{n+3}{4n}\right)$ 2/2

$a_{\text{ungerade }n} := (1-1)^n\left(\frac{n+3}{4n}\right) = 0$

$a_{\text{gerade }n} := 2^n\left(\frac{n+3}{4n}\right)^n = \left(\frac{2(n+3)}{4n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n = \left(\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n\cdot 2}\right)^n$

$= \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{n}}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Sei $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}$ dann gilt

$c_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{|a_{2n-1}|} = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$c_{2n} = \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt{2^{2n}\cdot\left(\frac{2n+3}{8n}\right)^{2n}} = 2\cdot\frac{2n+3}{8n} = \frac{2n+3}{4n}$

$= \frac{2n}{4n}+\frac{3}{4n} = \frac{1}{2}+\frac{3}{4n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$

Es gilt $H(c_n) = \{0, \frac{1}{2}\} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n)^n\left(\frac{n+3}{4n}\right)$ ist absolut konvergent (Wurzelkriterium)

Aufgabe 19 (K):

(i) Bestimmen Sie das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}$ und berechnen Sie dessen Reihenwert.

(ii) Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei definiert durch $a_0 := 0$ und $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Zeigen Sie die Divergenz des Cauchyprodukts von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst. Begründen Sie, warum dies nicht dem Satz über die Konvergenz des Cauchyprodukts widerspricht.

19 i) Es sei $a_n := 3^{-n}$ und $b_n := 5^{-n}$, $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ 1/4

Dann gilt (CP) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(3^{-k}\cdot 5^{-n+k}\right)\right)$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(3^{-k}\cdot 5^{k}\cdot 5^{-n}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(3^{-k}\cdot 5^{k}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{3}\right)^k\right)$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{3}\right)^k}{5^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{5}{3}\right)^k\right)\left(\frac{5}{3}\right)^n}{5^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{5}{3}\right)^k}{3^n}\right) = \ldots$?

geometrische Summenformel anwenden

19 ii) $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $a_0 := 0$, $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(a) (zz: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent)

0/1,5

Es sei $c_n := \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[2n]{1}}{\sqrt[2n]{n}} \in [0,1]$ also beschränkt

$\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \sqrt[2n]{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ↯

$\underbrace{\sqrt[2n]{\frac{1}{n}}}_{= n^{-\frac{1}{2n}} = (\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1 (n\to\infty)})^{-\frac{1}{2}}} \longrightarrow 1 \ (n\to\infty)$

Also gilt $\alpha := \lim\sup_{n\to\infty} c_n = 0$

$\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent (WK) das ist falsch.

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ist divergent!

(b) Es sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k}$

1/2,5

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n := \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$

$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$ ✓

$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{(-k^2+kn+n+1)}}_{\geq 1}}$ $= (-1)^n \cdot \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\ell}\cdot\sqrt{n-\ell}}$ } damit kann einfacher gerechnet werden.

⇑ Indexshift

Annahme: $|c_n| \geq 1$ (c_n ist divergent)

↯