Gruppe 1 Velislav Slavov, 2385786, ucsmm@student.kit.edu

$\sum 30,5$

A1) M= beliebige Meng, $\mathcal{P}(M)$=Potenzmenge

a) $i: M \to \mathcal{P}(M)$ injektiv

Seien $x,y \in M \Rightarrow i(x) \in \mathcal{P}(M)$ und $i(y) \in \mathcal{P}(M)$
$i(x) \subseteq M$ und $i(y) \subseteq M$

Falls $i(x) = i(y) \Rightarrow x = y$ ✓
$\Leftrightarrow$ Falls $x \neq y \Rightarrow i(x) \neq i(y)$ Das ist ebenfalls ein Kriterium für die Injektivität.

Beispiel: $i(x) = \{m \in M \mid m \subseteq x\}$

1/3

$x \in M$ die Aussage $m \subseteq x$ ist also immer falsch und daher $i(x) = \emptyset$, $\forall x \in M$. Falls $M \neq \emptyset$ ist i nicht injektiv.

b) $\varphi: M \to \mathcal{P}(M) \Rightarrow$ Für $m \in M$ gilt $\varphi(m) \subseteq M$

Sei $N := \{m \in M \mid m \notin \varphi(m)\} \Rightarrow N \subseteq M$ ~~$\land N \neq \varphi(m)$~~

~~Da $\varphi(m) \subseteq M \Rightarrow$ Falls m:~~

~~An~~ Da $m \in N \land m \notin \varphi(m) \Rightarrow N \neq \varphi(m)$. Was ist mit $m \in M \setminus N$?

$\Rightarrow \exists n \in \mathcal{P}(M)\ \forall m \in M: \varphi(m) \neq n$ ■ 3/4

4

A2) $f: X \to Y$ wobei $A, B \subseteq X$ und $C, D \subseteq Y$

a) Z.z. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Beweis "$\subseteq$"

Sei $f(x) \in f(A \cup B) \Rightarrow x \in (A \cup B)$ ⚡
$\Rightarrow x \in A \lor x \in B \Rightarrow f(x) \in f(A) \lor f(x) \in f(B)$
$\Rightarrow f(x) \in (f(A) \cup f(B))$ (✓) Bis auf den Anfang ist das eig. die richtige Idee!

Siehe $f: \{1,2,3\} \to \{1\}$, $x \mapsto 1$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. Dann ist $f(3) \in f(A \cup B)$ aber $3 \notin A \cup B$.

Beweis "$\supseteq$"

Sei $f(x) \in (f(A) \cup f(B))$, also $f(x) \in f(A) \vee f(x) \in f(B)$

Das heißt $x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B)$

f siehe Gegenbsp. auf nachfolger Seite.

$\Rightarrow f(x) \in f(A \cup B)$ ■ ($\checkmark$)

1,5/2,5

b) Behauptung: $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Beweis "$\subseteq$"

So solltest du das auch in v(a) machen!

Sei $\cancel{f(x)}\ y \in f(A \cap B)$, also ex. $x \in (A \cap B)$ mit $f(x) = y$.

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow f(x) \in f(A) \wedge f(x) \in f(B)$

$\Rightarrow f(x) \in (f(A) \cap f(B))$ ($\checkmark$)

Beispiel "$\supseteq$": Sei f NICHT injektiv

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (z.B.)

Seien $f(x) = x^2$, $A = \{-2\}$, $B = \{2\}$

Dann ist $A \cap B = \{\} \Rightarrow \boxed{f(A \cap B) = \{\}}$

$f(A) = \{4\}$ und $f(B) = \{4\}$

$\Rightarrow \boxed{f(A) \cap f(B) = \{4\}}$ $\checkmark$ ■

2,5/2,5

c) Beh. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Beweis "$\subseteq$"

Sei $x \in f^{-1}(C \cap D) \Rightarrow f(x) \in (C \cap D)$

$\Rightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \in D \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow x \in (f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D))$

Beweis "$\supseteq$"

Sei $x \in (f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \in D \Rightarrow f(x) \in (C \cap D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C \cap D)$

2,5/2,5

d) Beh. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

Beweis "$\subseteq$"

Sei $x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow f(x) \in (C \cup D) \Rightarrow f(x) \in C \vee f(x) \in D$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C) \vee x \in f^{-1}(D) \Rightarrow x \in (f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D))$

Beweis "$\supseteq$"

9

Sei $x \in (f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \vee x \in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow f(x) \in C \vee f(x) \in D \Rightarrow f(x) \in (C \cup D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C \cup D)$

2,5/2,5

A3)

$$A_{4\times 3} := \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B_{2\times 4} := \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_{4\times 4} := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) $BA = \begin{pmatrix} (2+0+1-2) & (2-4+3+2) & (-1+0+3-3) \\ (0+0-3-4) & (0+4-9+4) & (0+0-9-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -7 & -1 & -15 \end{pmatrix}$ (✓)

$$CA = \begin{pmatrix} (0+0-3+0) & (0+4-9+0) & (0+0-9+0) \\ (0+0-2+0) & (0-6-6+2) & (0+0-6-3) \\ (-6+0+3+2) & (-6+6+9-2) & (3+0+9+3) \\ (-6+0-3+2) & (-6+0-9-2) & (3+0-9+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -9 \\ -4 & -10 & -9 \\ -1 & 7 & 15 \\ -7 & -17 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} (0+0-3+3) & (-2+6-3+0) & (-3-4+3+3) & (0-2+1-1) \\ (0+0+9+6) & (0-6+9+0) & (0+4-9+6) & (0+2-3-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 15 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$ ✓

b) Nur CC ist definiert, weil die Anzahl der Spalten ist gleich der Anzahl der Zeilen (nämlich 4) ✓

10

A4) $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $m, n, p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Behauptung: $(A^T)^T = A$

Beweis: Sei $A_{m\times n} = (a_{i,j})_{i\le m, j\le n}$ — sonst wieder eine $m\times n$-Matrix.

Dann gilt $(A_{m\times n})^T = (a_{j,i})_{j\le m, i\le n}$ (Per Def. Spalten und Zeilen werden gewechselt) [red: n over m, m over n]

$\Rightarrow ((A_{m\times n})^T)^T = (a_{i,j})_{i\le m, j\le n}$ (Nochmal wechseln der Spalten und Zeilen) ∎ (✓)

2/2,5

b) Behauptung: $(A+B)^T = A^T + B^T$

Sei $A := (a_{i,j})_{i\le m, j\le n}$ und $B := \cancel{(b_{j,k})_{j\le n, k\le p}}$ $(b_{i,j})_{i\le m, j\le n}$

$(A+B) = (a_{i,j})_{i\le m, j\le n} + (b_{i,j})_{i\le m, j\le n} =$

$= (a_{i,j}+b_{i,j})_{i\le m, j\le n}$ $\cancel{\Rightarrow (A+B)^T = (a_{j,i}+b_{j,i})_{i\le m, j\le n}}$

Lass $ab_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \Rightarrow A+B = (ab_{i,j})_{i\le m, j\le n}$ $\cancel{\Rightarrow (A+B)^T}$ $=$

$\cancel{A^T = (a_{j,i})_{i\le m, j\le n} \text{ und } B^T = (b_{j,i})_{i\le m, j\le n}}$

$\cancel{A^T + B^T = (a_{j,i})_{i\le m, j\le n} + (b_{j,i})_{i\le m, j\le n} =}$

$\cancel{= (a_{j,i} + b}$

s.o.

$\Rightarrow (A+B)^T = (ab_{j,i})_{i\le n, j\le m} = \boxed{(a_{j,i}+b_{j,i})_{i\le n, j\le m}}$

$A^T := (a_{j,i})_{i\le m, j\le n}$ $\quad B^T := (b_{j,i})_{i\le m, j\le n}$

$A^T + B^T = \boxed{(a_{j,i}+b_{j,i})_{i\le m, j\le n}}$ ∎

2/2,5

c) Behauptung: $(\lambda A)^T = \lambda(A^T)$

Sei $A := (a_{i,j})_{i \le m, j \le n}$. Dann gilt

s.o.

$(\lambda A) = (\lambda \cdot a_{i,j})_{i \le m, j \le n} \Rightarrow \boxed{(\lambda A)^T = (\lambda \cdot a_{j,i})_{i \le n, j \le m}}$

$A^T := (a_{j,i})_{i \le m, j \le n} \Rightarrow \boxed{\lambda(A^T) = (\lambda \cdot a_{j,i})_{i \le n, j \le m}}$

s.o.

2/2,5

d) Behauptung: $(AC)^T = C^T A^T$

$A := (a_{i,j})_{i \le m, j \le n} \quad C := (c_{j,k})_{j \le n, k \le p}$

$AC = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot c_{j,k}\right)_{i \le m, k \le p}$

Lass $ac_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot c_{j,k} \Rightarrow AC = (ac_{i,k})_{i \le m, k \le p}$

Dann gilt: $(AC)^T = \boxed{(ac_{k,i})_{i \le p, k \le m}}$

$\cancel{A^T = (a_{j,i})_{i \le m, j \le n}} \quad \cancel{C^T = (c_{k,j})_{j \le n, k \le p}}$

$\cancel{C^T A^T = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{k,j} \cdot a_{j,i}\right)_{i \le m, k \le p} = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{k,j} \cdot a_{j,i}\right)_{i \le m, k \le p}}$

~~Lass~~ $\cancel{ca_{k,i} = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{k,j} \cdot a_{j,i}\right)_{i \le m, k \le p}}$

~~Dann gilt~~ $\cancel{C^T A^T = (ca_{k,i})_{i \le m, k \le p}}$

7,5

$A^T := (a_{j,i})_{i \le n, j \le m} \quad C^T := (c_{k,j})_{j \le p, k \le n}$

1,5/2,5

$C^T A^T = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{k,j} \cdot a_{j,i}\right)_{i \le p, k \le m}$

über diesen Index wird summiert! Dann sollte das mit obigem übereinstimmen!

Lass $ca_{k,i} = \sum_{j=1}^{n} c_{k,j} \cdot a_{j,i} \Rightarrow \boxed{C^T A^T = (ca_{k,i})_{i \le m, k \le p}}$

:(