Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 11 **05.07.21**

Aufgabe 1 (*Definitheit von Quadratischen Formen*) (*10 Punkte*)

Für ein $a \in \mathbb{R}$ sei die quadratische Form

$$\begin{aligned} q\colon \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &\mapsto -4\,{x_1}^2 - {x_2}^2 - 3{x_3}^2 - 2{x_4}^2 + (a\,x_1 + x_2 + x_4)x_3 \end{aligned}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie eine symmetrische Bilinearform β, die $q = q_\beta$ erfüllt. Wählen Sie eine Basis B von V und bestimmen Sie die Fundamentalmatrix $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)$ bezüglich dieser Basis.

b) Für welche Werte von a ist q positiv definit?

c) Für welche Werte von a ist q negativ definit?

d) Für welche Werte von a ist β entartet?

Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Wir definieren zunächst die (nicht symmetrische) Bilinearform

$$\begin{aligned} \eta\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) &\mapsto -4x_1y_1 - x_2y_2 - 3x_3y_3 - 2x_4y_4 + (ax_1 + x_2 + x_4)y_3 \end{aligned}$$

die offenbar $q_\eta = q$ erfüllt. Es gilt $\mathrm{FM}_{\mathsf{E}}(\eta) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Durch $\beta(v,w) := \frac{1}{2}(\eta(v,w) + \eta(w,v))$ wird daraus eine symmetrische Bilinearform mit $q_\beta = \beta$. Es gilt $\mathrm{FM}_{\mathsf{E}}(\beta) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{FM}_{\mathsf{E}}(\eta) + \mathrm{FM}_{\mathsf{E}}(\eta)^\top\right) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$.

b) Die quadratische Form kann für kein a positiv definit sein, denn es gilt $q(e_1) = -4 < 0$.

c) Die Hauptminoren von $\mathrm{FM}_{\mathsf{E}}(\beta)$ sind

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}-4\end{pmatrix} &= -4\\
\det\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} &= 4\\
\det\begin{pmatrix}-4 & 0 & \frac{a}{2}\\ 0 & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{a}{2} & \frac{1}{2} & -3\end{pmatrix} &= -4\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -3\end{pmatrix} + \frac{a}{2}\begin{pmatrix}0 & \frac{a}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = -11 + \frac{a^2}{4}\\
\det\begin{pmatrix}-4 & 0 & \frac{a}{2} & 0\\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{a}{2} & \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2\end{pmatrix} &= -\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}-4 & 0 & \frac{a}{2}\\ 0 & -1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix}-4 & 0 & \frac{a}{2}\\ 0 & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{a}{2} & \frac{1}{2} & -3\end{pmatrix}\\
&= -1 - 2\left(-11 + \frac{a^2}{4}\right)\\
&= 21 - \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

Damit die Matrix negativ definit ist, müssen diese abwechselnd negativ und positiv sein, also

$$\left.\begin{aligned}-4 &< 0\\ 4 &> 0\\ -11 + \frac{a^2}{4} &< 0\\ 21 - \frac{a^2}{2} &> 0\end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned}-44 + a^2 &< 0\\ 42 - a^2 &> 0\end{aligned}\right\} \iff a^2 < 42 \iff -\sqrt{42} < a < \sqrt{42}$$

Die Bilinearform β und damit auch die quadratische Form $\beta_q = q$ sind also genau dann negativ definit, wenn $-\sqrt{42} < a < \sqrt{42}$ gilt.

d) Es gilt $\det(\mathrm{FM}_{\mathsf{E}}(\beta)) - 21 - \frac{a^2}{2}$. Die Bilinearform β ist genau dann entartet, wenn dies 0 ist, also genau für $a = \pm\sqrt{42}$.

Aufgabe 2 (*„Herausteilen" des Nullraums*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Abbildungsvorschrift

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}\colon \left(V/\mathrm{Null}(\beta)\right) \times \left(V/\mathrm{Null}(\beta)\right) &\to \mathbb{R}\\ ([v],[w]) &\mapsto \beta(v,w)\end{aligned}$$

definiert eine nicht entartete symmetrische Bilinearform auf $V/\mathrm{Null}(\beta)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Abbildungsvorschrift wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt.

b) Die Bilinearform $\tilde{\beta}$ ist genau dann positiv definit, wenn β positiv semidefinit ist.

c) Falls β positiv semidefinit ist, gilt

$$|\beta(v,w)| \leq \sqrt{\beta(v,v)}\,\sqrt{\beta(w,w)}$$

für alle $v, w \in V$.

Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy- Schwarz-Ungleichung für Skalarprodukte.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit. Angenommen, für $v, v', w, w' \in V$ mit $[v] = [v']$ und $[w] = [w']$, also $v' - v, w' - w \in \mathrm{Null}(\beta)$. Damit gilt $\beta(v', w) - \beta(v, w) = \beta(v' - v, w) = 0$ und $\beta(v', w') - \beta(v', w) = \beta(v', w' - w) = 0$. Damit gilt $\beta(v', w') = \beta(v, w)$ und die Abbildungsvorschrift ist wohldefiniert.

Die Abbildung $\tilde{\beta}$ ist symmetrisch, denn es gilt $\tilde{\beta}([w], [v]) = \beta(w, v) = \beta(v, w) = \tilde{\beta}([v], [w])$ für alle $v, w \in V$.

Außerdem ist die Abbildung linear in der ersten Komponente, denn für $v, w, x \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}([v] + \lambda[w], [x]) &= \tilde{\beta}([v + \lambda w], [x]) \\
&= \beta(v + \lambda w, x) \\
&= \beta(v, x) + \lambda\,\beta(w, x) \\
&= \tilde{\beta}([v], [x]) + \lambda\,\tilde{\beta}([w], [x]).
\end{aligned}$$

Angenommen, $\tilde{\beta}$ ist entartet. Das bedeutet, es gibt ein $[v] \in V/\mathrm{Null}(\beta)$ mit $[v] \neq 0$ und $\tilde{\beta}([v], [w]) = 0$ für alle $[w] \in V/\mathrm{Null}(\beta)$. Damit gilt $\beta(v, w) = 0$ für alle $w \in V$, also $v \in \mathrm{Null}(\beta)$. Das bedeutet aber $[v] = [0]$, im Widerspruch zur Annahme.

Damit haben wir bewiesen, dass $\tilde{\beta}$ nicht entartet ist.

b) Es gilt $\tilde{\beta}([v], [v]) \geq 0$ genau dann, wenn $\beta(v, v) \geq 0$. Also ist $\tilde{\beta}$ genau dann positiv semidefinit, wenn β positiv semidefinit ist.

Außerdem ist $\tilde{\beta}$ nach a) nicht entartet und nach dem Tutorium ist eine positiv semidefinite symmetrische Bilinearform genau dann positiv definit, wenn sie nicht entartet ist.

c) Falls β positiv semidefinit ist, ist $\tilde{\beta}$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform, also ein Skalarprodukt. Für diese gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\tilde{\beta}([v], [w])| \leq \sqrt{\tilde{\beta}([v], [v])}\,\sqrt{\tilde{\beta}([w], [w])}$$

für alle $v, w \in V$, und daraus folgt

$$|\beta(v,w)| \leq \sqrt{\beta(v,v)}\,\sqrt{\beta(w,w)}.$$