Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

3. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

27. November 2020

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 27 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 9:

(i) Zeigen Sie, dass die durch

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(ii) Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_N > 0$. Zeigen Sie, dass die durch

$$b_n := \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{N} a_k^n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge (b_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9:

(i) *Voraussetzung:* Die Folge (a_n) sei definiert durch

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \; (n \in \mathbb{N}).$$

Behauptung: Die Folge (a_n) konvergiert gegen 1.

Beweis: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}.$$

Damit folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

es gilt also $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \le a_n \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$ folgt mit Satz 2.2 (e), dass (a_n) gegen 1 konvergiert. □

(ii) <u>*Voraussetzung:*</u> Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \cdots, a_N > 0$. Die Folge (b_n) ist definiert durch

$$b_n := \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{N} a_k^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

<u>*Behauptung:*</u> Die Folge (b_n) konvergiert gegen $\max\{a_j \colon 1 \leq j \leq N\}$.

<u>*Beweis:*</u> Wir setzen $a_0 := \max\{a_j \colon 1 \leq j \leq N\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_0^n \leq \sum_{k=1}^{N} a_k^n \leq \sum_{k=1}^{N} a_0^n = N a_0^n.$$

Damit erhält man insbesondere

$$a_0 \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{N} a_k^n} = b_n \leq \sqrt[n]{N} a_0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach der Vorlesung gilt $\sqrt[n]{N} \to 1$ $(n \to \infty)$, also gilt $\sqrt[n]{N} a_0 \to a_0$ $(n \to \infty)$. Mit Satz 2.2 (e) folgt somit $b_n \to a_0$ $(n \to \infty)$. $\square$

Aufgabe 10 (K):
Untersuchen Sie die folgenden rekursiv definierten Folgen (a_n) auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) $a_1 := \frac{1}{2},\ a_{n+1} := a_n - a_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $a_1 := 2,\ a_{n+1} := \frac{a_n^2+1}{2a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 10:

(i) <u>*Voraussetzung:*</u> Die Folge (a_n) sei definiert durch

$$a_1 := \frac{1}{2},\ a_{n+1} := a_n - a_n^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

<u>*Behauptung:*</u> Die Folge (a_n) konvergiert gegen 0.

<u>*Beweis:*</u> Wir wenden das Monotoniekriterium an und zeigen zunächst mittels vollständiger Induktion, dass $a_n \in (0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

<u>IA:</u> Für $n = 1$ gilt $a_1 = \frac{1}{2} \in (0,1)$.
<u>IV:</u> Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $a_n \in (0,1)$.
<u>IS $(n \rightsquigarrow n+1)$:</u> Es gilt:

$$a_{n+1} = a_n - a_n^2 = \underbrace{a_n}_{\overset{\text{(IV)}}{\in}(0,1)} \cdot \underbrace{(1 - a_n)}_{\overset{\text{(IV)}}{\in}(0,1)} \in (0,1).$$

Insbesondere gilt $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge (a_n) ist somit nach unten beschränkt. Zudem gilt $a_{n+1} = a_n - a_n^2 \leq a_n + 0 = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Folge (a_n) monoton fallend. Nach dem Monotoniekriterium (Satz 2.3) ist die Folge konvergent. Wir setzen $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, dann gilt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (a_n - a_n^2) = a - a^2.$$

Diese Gleichheit ist äquivalent zu $a^2 = 0$, was genau für $a = 0$ erfüllt wird. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

(ii) *Voraussetzung:* Die Folge (a_n) sei definiert durch

$$a_1 := 2,\ a_{n+1} := \frac{a_n^2+1}{2a_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Behauptung: Die Folge (a_n) konvergiert gegen 1.

Beweis: Wir zeigen zunächst mittels vollständiger Induktion, dass gilt: $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
IA: Für $n = 1$ gilt $a_1 = 2 \geq 1$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $a_n \geq 1$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Nach der Induktionsvoraussetzung gilt insbesondere $a_n \geq 1 > 0$. Damit folgt:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2a_n} = \frac{(a_n^2 - 2a_n + 1) + 2a_n}{2a_n} = \underbrace{\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}}_{\geq 0} + 1 \geq 1.$$

Die Folge (a_n) ist somit nach unten beschränkt. Weiter gilt:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2a_n} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n} = a_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2a_n^2}\right) \leq a_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = a_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

wobei in der Ungleichung ausgenutzt wurde, dass $a_n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Also ist die Folge (a_n) monoton fallend und nach dem Monotoniekriterium konvergent. Setze $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Da $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt auch $a \geq 1 > 0$. Es gilt (mit Satz 2.2):

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+1}{2a_n} = \frac{a^2+1}{2a}.$$

Es folgt also

$$2a^2 = a^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 \lor a = -1.$$

Wegen $a \geq 1$ muss $a = 1$ gelten. □

Aufgabe 11:

(i) Es sei $b \in (0, \infty)$ und $a_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_0 < b^{-1}$. Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ mit $a_n := 2a_{n-1} - ba_{n-1}^2$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(ii) Geben Sie für die folgende rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ einen geschlossenen Ausdruck an und prüfen Sie die Folge auf Konvergenz. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

$$a_0 := 1,\ a_{n+1} := \frac{1}{(n+1)!} - \frac{a_n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 11:

(i) *Voraussetzung:* Es sei $b \in (0, \infty)$ und $a_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_0 < b^{-1}$. Die Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ sei rekursiv definiert durch $a_n := 2a_{n-1} - ba_{n-1}^2$ $(n \in \mathbb{N})$.
Behauptung: Die Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert gegen den Grenzwert b^{-1}.

Beweis: Wir zeigen zunächst mittels vollständiger Induktion, dass $a_n \in (0, b^{-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
IA: Für $n = 0$ gilt nach Voraussetzung $0 < a_0 < b^{-1}$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gelte bereits $0 < a_n < b^{-1}$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt:

$$a_{n+1} = 2a_n - ba_n^2 \overset{\text{(IV)}}{>} 2a_n - a_n^{-1}a_n^2 = a_n > 0. \tag{1}$$

Die Beschränktheit nach oben erfolgt durch direktes Berechnen:

$$a_{n+1} = 2a_n - ba_n^2 = -b(a_n^2 - 2a_n b^{-1} + b^{-2} - b^{-2}) = -b\underbrace{(a_n - b^{-1})^2}_{\geq 0} + b^{-1} \leq b^{-1}.$$

Die Monotonie der Folge erhält man aus (1). Mit dem Monotoniekriterium folgt die Konvergenz der Folge, es sei a der Grenzwert. Damit folgt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(2a_n - ba_n^2) = 2a - ba^2 \quad \Leftrightarrow \quad a(a - b^{-1}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \vee a = b^{-1}.$$

Wegen $a_n \geq a_0 > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ folgt $a \geq a_0 > 0$ und somit konvergiert die Folge gegen b^{-1}. □

(ii) *Voraussetzung:* Die Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ sei definiert durch

$$a_0 := 1,\ a_{n+1} := \frac{1}{(n+1)!} - \frac{a_n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Behauptung: Es gilt:

$$a_n := \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{n!} & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Folge konvergiert somit gegen 0.

Beweis: Wir zeigen die behauptete Darstellung durch vollständige Induktion:
IA: Für $n = 0$ gilt $a_0 = 1 = \frac{1}{1!}$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte die Darstellung bereits für a_n.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Wir unterscheiden die Fälle, dass n gerade bzw. ungerade ist. Es sei n zunächst gerade, d.h. $n+1$ ist ungerade. Dann gilt:

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{a_n}{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = 0,$$

d.h. a_{n+1} erfüllt die gewünschte Darstellung. Es sei nun n ungerade. Dann folgt:

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{a_n}{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{(n+1)!},$$

womit die Darstellung gezeigt ist.
Es bleibt noch zu zeigen, dass die Folge gegen 0 konvergiert. Es gilt (für alle $n \in \mathbb{N}$):

$$|a_n - 0| \leq \left|\frac{1}{n!}\right| = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

Aufgabe 12 (K):

(i) Untersuchen Sie die Folgen (a_n) auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:
(a) $a_n := \sqrt[n]{3 + 2\frac{n-1}{n+1}}$, (b) $a_n := \sqrt[n]{-n + 2n^2}$, (c) $a_n := \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$.

(ii) Zeigen Sie, dass eine Folge (a_n) genau dann gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ wiederum eine gegen a konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_{j=1}^\infty$ besitzt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 12:

(i) (a) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen 1.

Beweis: Es gilt:

$$3 \leq 3 + 2\frac{n-1}{n+1} \leq 3 + 2\frac{n+1}{n+1} = 5 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mit der Monotonie der $n-$ten Wurzel folgt:

$$\sqrt[n]{3} \leq a_n \leq \sqrt[n]{5}.$$

Nach Beispiel 2.8 aus der Vorlesung konvergieren sowohl $(\sqrt[n]{3})$ als auch $(\sqrt[n]{5})$ gegen 1. Nach Satz 2.2 (e) konvergiert damit auch (a_n) gegen 1. $\square$

(b) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen 1.

Beweis: Es gilt:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{-n+2n} \leq \sqrt[n]{-n+2n^2} \leq \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da die Folgen $(\sqrt[n]{2})$ und $(\sqrt[n]{n})$ gegen 1 konvergieren (siehe Beispiele 2.7 und 2.8), konvergiert nach Satz 2.2 auch die Folge (a_n) gegen 1 (für $n \to \infty$). $\square$

(c) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Beweis: Wir definieren die Folge $b_k := \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ $(k \in \mathbb{N})$. Nach Beispiel 2.9 aus der Vorlesung konvergiert diese Folge und den Grenzwert definiert man als die Eulersche Zahl e. Nach Satz 2.11 konvergieren auch Teilfolgen konvergenter Folgen, und zwar gegen denselben Grenzwert. Somit konvergiert die Teilfolge $b_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$ gegen e. Da $a_n = \sqrt{b_{2n}}$ $(n \in \mathbb{N})$, konvergiert (a_n) gegen $\sqrt{\mathrm{e}}$ (vgl. Bsp. 2.4). $\square$

(ii) *Behauptung:* Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ wiederum eine gegen a konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ besitzt.

Beweis: $\Rightarrow$: Es sei (a_n) eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge. Nach Satz 2.11 ist jede Teilfolge von (a_n) konvergent und hat denselben Grenzwert. Also konvergiert jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ von (a_n) gegen a für $k \to \infty$ und besitzt daher eine Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$, nämlich $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ selbst, die für $j \to \infty$ gegen a konvergiert.

$\Leftarrow$: Angenommen, die Folge (a_n) konvergiert nicht gegen a für $n \to \infty$. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ von (a_n) und ein $\epsilon > 0$ mit

$$|a_{n_k} - a| \geq \epsilon \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Nach Voraussetzung besitzt die Folge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ aber eine Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ mit $a_{n_{k_j}} \to a$ $(j \to \infty)$. Dies ist ein Widerspruch zu (2). Somit war die Annahme falsch und es gilt, dass (a_n) gegen a konvergiert. $\square$