Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

13. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

19. Februar 2021

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 132 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 49:
Die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $f(x) = |x|^3$ für $x \in (-\pi, \pi]$ definiert. Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 49:
Behauptung: Die Fourierreihe von f ist gegeben durch

$$\frac{\pi^3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6\pi}{n^2}(-1)^n + \frac{12}{n^4\pi}(1 - (-1)^n) \right) \cos(nx).$$

Beweis: Für $x \in [0, \pi]$ gilt $f(-x) = |-x|^3 = |x|^3 = f(x)$, d.h. f ist gerade. Nach Vorlesung gilt daher $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter berechnen wir

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^3\,dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^3.$$

Weiter gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^3 \cos(nx)\,dx \overset{(P.I.)}{=} \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{\left[x^3 \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi 3x^2 \frac{\sin(nx)}{n}\,dx \right) \\
&\overset{(P.I.)}{=} -\frac{6}{n\pi} \left(\left[x^2 \left(-\frac{\cos(nx)}{n} \right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \left(-\frac{\cos(nx)}{n} \right) dx \right) \\
&= -\frac{6}{n^2\pi} \left(-(-1)^n \pi^2 + 2 \int_0^\pi x \cos(nx)\,dx \right) \\
&\overset{(P.I.)}{=} -\frac{6}{n^2\pi} \left(-(-1)^n\pi^2 + 2 \left(\underbrace{\left[x \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n}\,dx \right) \right) \\
&= -\frac{6}{n^2\pi} \left(-(-1)^n\pi^2 - \frac{2}{n} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi \right) = -\frac{6}{n^2\pi} \left(-(-1)^n\pi^2 + \frac{2}{n^2}((-1)^n - 1) \right) \\
&= \frac{6\pi}{n^2}(-1)^n + \frac{12}{n^4\pi}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{6\pi}{n^2}, & n \text{ gerade}, \\ \frac{24}{n^4\pi} - \frac{6\pi}{n^2}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Für die Fourierreihe von f ergibt sich also

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi^3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6\pi}{n^2}(-1)^n + \frac{12}{n^4\pi}(1 - (-1)^n) \right) \cos(nx) \\
=&\frac{\pi^3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\pi}{2k^2} \cos(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{24}{(2k+1)^4\pi} - \frac{6\pi}{(2k+1)^2} \right) \cos((2k+1)x).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 50 (K):
Berechnen Sie jeweils für die 2π-periodischen Funktionen f die Fourierkoeffizienten. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die zugehörige Fourierreihe konvergiert. In welchen Punkten wird die Funktion f durch die zugehörige Fourierreihe dargestellt?

(i) $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0], \\ x, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$ (ii) $f(x) := |x| \ (x \in (-\pi, \pi])$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 50:

(i) *Behauptung:* Es gilt

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos(nx) - \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx) \right) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0], \\ x, & x \in (0, \pi), \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pi. \end{cases}$$

Beweis: Für $n = 0$ erhalten wir

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{1}{2\pi} \left[x^2\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Weiter gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx \\ &\overset{(P.I.)}{=} \frac{1}{\pi} \left(\left[x \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx)\, dx \right) = -\frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2 \pi} (\cos(n\pi) - \cos(0)) = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx \\ &\overset{(P.I.)}{=} \frac{1}{\pi} \left(\left[x \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{(-1)^n \pi}{n} + \left[\frac{1}{n^2} \sin(nx) \right]_0^{\pi} \right) = -\frac{(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

Da f stückweise glatt ist und die Bedingung (V) erfüllt, konvergiert die zugehörige Fourierreihe nach Satz 13.3 in jedem $x \in \mathbb{R}$ gegen $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$. Wir erhalten also für alle $x \in (-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos(nx) - \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx) \right) \\ &= \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0], \\ x, & x \in (0, \pi), \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Somit wird die Funktion f für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$ durch ihre Fourierreihe dargestellt. $\square$

(ii) *Behauptung:* Es gilt also für $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n^2 \pi} \cos(nx) = |x|\,.$$

Beweis: Es gilt für $x \in [0, \pi]$:

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x),$$

d.h. f ist gerade. Nach Vorlesung gilt demnach $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter berechnen wir

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2\right]_0^\pi = \pi,$$

und für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx)\, dx \\ &\overset{(P.I.)}{=} \frac{2}{\pi} \left(\left[x \cdot \frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n}\, dx \right) = -\frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin(nx)\, dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = -\frac{2}{n^2\pi}(-\cos(n\pi) + \cos(0)) \\ &= -\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi}. \end{aligned}$$

Da f stückweise glatt ist, die Bedingung (V) erfüllt und auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, konvergiert die zugehörige Fourierreihe nach Satz 13.3 in jedem $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$. Es gilt also für $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi} \cos(nx) = |x|\,.$$

Die Funktion f wird also für alle $x \in \mathbb{R}$ durch ihre Fourierreihe dargestellt. $\square$

Aufgabe 51:

(i) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(nx)}{n^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

für alle $x \in [0, 2\pi]$ gilt.

(ii) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $g \in C^1([a, b])$. Zeigen Sie mithilfe partieller Integration, dass gilt:

$$\int_a^b g(x) \sin(nx)\, dx \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b g(x) \cos(nx)\, dx \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 51:

(i) *Behauptung:* Für alle $x \in [0, 2\pi]$ gilt

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(nx)}{n^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}.$$

Beweis: Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, welche auf $(0, 2\pi]$ definiert ist durch $f(x) := \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$. Wir berechnen für f die Fourierkoeffizienten. Nach Satz 13.1 können wir auch über das Intervall $[0, 2\pi]$ integrieren. Es gilt

$$\begin{aligned} \pi a_0 &= \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \right) dx = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^3 - \frac{\pi^2}{12} x\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^3}{6} - \frac{(-\pi)^3}{12} = 0. \end{aligned}$$

Weiter gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\pi a_n &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}\right)\cos(nx)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 \cos(nx)\,dx - \frac{\pi^2}{12}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\,dx \\
&\overset{(P.I.)}{=} \underbrace{\left[\frac{1}{n}\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 \sin(nx)\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} \frac{x-\pi}{2n}\sin(nx)\,dx - \frac{\pi^2}{12}\underbrace{\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{=0} \\
&\overset{(P.I.)}{=} \left[\frac{x-\pi}{2n^2}\cos(nx)\right]_0^{2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{\cos(nx)}{2n^2}\,dx}_{=0} = \frac{1}{2n^2}(\pi-(-\pi)) = \frac{\pi}{n^2},
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\pi b_n &= \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}\right)\sin(nx)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 \sin(nx)\,dx - \frac{\pi^2}{12}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,dx \\
&\overset{(P.I.)}{=} \underbrace{\left[-\frac{1}{n}\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 \cos(nx)\right]_0^{2\pi}}_{=0} + \int_0^{2\pi} \frac{x-\pi}{2n}\cos(nx)\,dx - \frac{\pi^2}{12}\underbrace{\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{=0} \\
&\overset{(P.I.)}{=} \underbrace{\left[\frac{x-\pi}{2n^2}\sin(nx)\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{\sin(nx)}{2n^2}\,dx}_{=0} = 0,
\end{aligned}$$

d.h. $a_n = \frac{1}{n^2}$ und $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist f stückweise glatt, erfüllt die Bedingung (V) und ist zudem stetig auf ganz $\mathbb{R}$, somit folgt mit Satz 13.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad \forall x \in [0, 2\pi].$$

□

(ii) <u>*Voraussetzung:*</u> Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $g \in C^1([a,b])$.
<u>*Behauptung:*</u> Dann gilt

$$\int_a^b g(x)\sin(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b g(x)\cos(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

<u>*Beweis:*</u> Es sei $g \in C^1([a,b])$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\sin(nx)\,dx &= \left[g(x)\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\right]_a^b - \int_a^b g'(x)\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)dx \\
&= \frac{1}{n}(-g(b)\cos(nb) + g(a)\cos(na)) + \frac{1}{n}\int_a^b g'(x)\cos(nx)\,dx. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Es gilt $|\sin(nx)| \le 1$ und $|\cos(nx)| \le 1$ für alle $x \in [a,b]$ und $n \in \mathbb{N}$. Wegen $g \in C^1([a,b])$ sind g und g' stetig auf $[a,b]$. Da stetige Funktionen auf kompakten Intervallen beschränkt sind und ihr

Maximum annehmen, existieren Konstanten C_1 und C_2, sodass $|g(x)| \leq C_1$ und $|g'(x)| \leq C_2$ für alle $x \in [a,b]$. Damit folgt aus (1)

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(x)\sin(nx)\,dx\right| &\leq \frac{1}{n}(|g(b)|\,|\cos(nb)| + |g(a)|\,|\cos(na)|) + \frac{1}{n}\int_a^b |g'(x)|\,|\cos(nx)|\,dx \\ &\leq \frac{1}{n}(\underbrace{2C_1 + C_2(b-a)}_{=:C}) = \frac{C}{n},\end{aligned}$$

wobei die Konstante C unabhängig von n ist. Für $n \to \infty$ folgt daraus

$$\int_a^b g(x)\sin(nx)\,dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Analog zeigt man, dass

$$\int_a^b g(x)\cos(nx)\,dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□

Aufgabe 52 (K):

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, welche durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{2}(x-\pi)\right), & x \in (0, 2\pi), \\ 0, & x = 2\pi. \end{cases}$$

definiert ist. Bestimmen Sie die Fourierreihe von f.

(ii) Berechnen Sie den Reihenwert von

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1-4k^2)^2}.$$

Hinweis: Parsevalsche Gleichung.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 52:

(i) *Behauptung:* Die Fourierreihe von f ist gegeben durch

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{1-4k^2}\sin(kx)$$

Beweis: Da der Sinus eine ungerade Funktion ist, erhält man auch, dass f ungerade ist: Es gilt für $x \in (0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned} f(-x) = f(-x+2\pi) &= \sin\left(\frac{1}{2}(-x+2\pi-\pi)\right) = \sin\left(\frac{1}{2}(-x+\pi)\right) \\ &= \sin\left(-\frac{1}{2}(x-\pi)\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}(x-\pi)\right) = -f(x). \end{aligned}$$

Mit $f(2\pi) = 0$ und der 2π-Periodizität von f folgt, dass f ungerade ist. Somit gilt nach Vorlesung $a_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Mit der Substitution $y = y(x) = \frac{1}{2}(x-\pi)$ gilt $y(0) = -\frac{\pi}{2}, y(\pi) = 0$ und $dy = \frac{1}{2}\,dx$. Damit erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{2}(x-\pi)\right)\sin(kx)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(y)\sin(2ky+k\pi)\,dy \\ &= \frac{4}{\pi}(-1)^k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(y)\sin(2ky)\,dy. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration ergibt sich

$$
\begin{aligned}
I_k &:= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(y)\sin(2ky)\,dy \overset{(P.I.)}{=} [-\cos(y)\sin(2ky)]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + 2k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(y)\cos(2ky)\,dy \\
&= 2k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(y)\cos(2ky)\,dy \overset{(P.I.)}{=} 2k\left([\sin(y)\cos(2ky)]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + 2k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(y)\sin(2ky)\,dy\right) \\
&= 2k(\cos(-\pi k) + 2kI_k) = 4k^2 I_k + 2k(-1)^k.
\end{aligned}
$$

Es gilt daher $I_k = \frac{2k(-1)^k}{1-4k^2}$ und damit $b_k = \frac{4}{\pi}\frac{2k}{1-4k^2}$. Somit ist die Fourierreihe zu f gegeben durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi}\frac{2k}{1-4k^2}\sin(kx).$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1-4k^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}.$$

Beweis: Die Parsevalsche Gleichung liefert

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx. \tag{2}$$

Die linke Seite ist gegeben durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2}\frac{4k^2}{(1-4k^2)^2} = \frac{64}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(1-4k^2)^2}.$$

Für das Integral auf der rechten Seite von (2) berechnen wir mit der gleichen Substitution wie in Teil (i):

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \int_{0}^{2\pi} f(x)^2\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{1}{2}(x-\pi)\right)\,dx \\
= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(y)\,dy = 2\left[\frac{1}{2}(y - \cos(y)\sin(y)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.
\end{aligned}
$$

Eine Stammfunktion von $y \mapsto \sin^2(y)$ wurde bereits in der Vorlesung berechnet. Damit folgt aus (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1-4k^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}.$$

$\square$