Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

13. November 2020

Abgabe bis 20. November 2020, 12:00 Uhr

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 19 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 5:
Eine Folge heißt *Nullfolge*, wenn sie gegen 0 konvergiert. Es sei (a_n) eine reelle Folge. Entscheiden Sie jeweils (durch Beweis oder Gegenbeispiel), welche der folgenden Bedingungen erzwingt, dass (a_n) eine Nullfolge ist:
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

(a) $|a_n| < \sqrt{\epsilon}$,
(b) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \epsilon$,
(c) $\left|2a_n - a_n^2\right| < \epsilon$,
(d) $|a_n \cdot a_m| < \epsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6 (K):
Untersuchen Sie die folgenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(a) $a_n := \sqrt{4n^2 + n + 5} - 2$,
(b) $a_n := \frac{(n+2)^3 - (n-1)^3}{(n-1)^2 + 2n^2 + 5}$,
(c) $a_n := (1 + 2(-1)^n)^n$,
(d) $a_n := \frac{1+2+\cdots+n}{1+3+\cdots+(2n-1)}$.

Aufgabe 7:
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Das Produkt einer konvergenten Folge und einer beschränkten Folge ist ebenfalls konvergent.

(ii) Das Produkt einer konvergenten Folge und einer beschränkten Folge ist ebenfalls beschränkt.

(iii) Das Produkt einer Nullfolge und einer beschränkten Folge ist eine Nullfolge.

(iv) Das Produkt einer beliebigen Folge mit einer Nullfolge ist beschränkt.

Aufgabe 8 (K):

(i) Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 0,\ a_1 := 1,\ a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass $a_n = \frac{2}{3}(1 - \frac{(-1)^n}{2^n})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Prüfen Sie diese Folge zudem auf Konvergenz.

(ii) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass dann eine Folge (a_n) existiert mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

(iii) Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b. Zeigen Sie, dass die Folge $c_n := \max\{a_n, b_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ gegen $\max\{a, b\}$ konvergiert.

Information

Aufgrund der aktuellen Situation wird dieses Modul teilweise in digitaler Form angeboten. Die gesamte Abwicklung wird über das System ILIAS stattfinden. Melden Sie sich dafür mit Ihrem KIT-Account an und treten Sie dem Kurs **Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik** bei. Sie können diesem Kurs direkt über folgenden Link beitreten:

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1253943_rcodeHa6wkYEysN&client_id=produktiv`

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Scheinkriterien, Tutorien, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

Zum Bearbeiten der Übungsblätter sollten Sie pro Woche etwa 9-10 Seiten des Skripts mithilfe der angebotenen Vorlesungsvideos durcharbeiten. Das kommende Übungsblatt wird den Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 27 beinhalten.

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-6 und 7-13 **jeweils** mindestens 48 bwz. 56 Punkte (50%) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal.