Gruppe 1

Velislav Slavov, 2385786
ucsmm@student.kit.edu

A 1)

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &- x_3 &- 2x_4 &= 0 \\ -2x_1 &- x_2 &- 2x_3 &+ x_4 &= -4 \\ -1x_1 &+ 3x_2 &+ 5x_3 & &= 4 \\ 2x_1 &+ 2x_2 & &- 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b)

x_1	x_2	x_3	x_4	b	
1	1	-1	-2	0	$\mid \cdot 2$; $\cdot 1$; $\cdot(-2)$
-2	-1	-2	1	-4	
-1	3	5	0	4	
2	2	0	-3	2	
1	1	-1	-2	0	
0	1	-4	-3	-4	$\mid \cdot(-4)$
0	4	4	-2	4	
0	0	2	1	2	
1	1	-1	-2	0	
0	1	-4	-3	-4	
0	0	20	10	20	
0	0	2	1	2	$\mid \cdot(-10)$;
1	1	-1	-2	0	
0	1	-4	-3	-4	
0	0	2	1	2	
0	0	0	0	0	$\leftarrow b_4$

Wir haben 3 Pivot Variablen und es gilt
$\forall j > 3 : b_j = 0 \Rightarrow b \in \text{Bild}(A)$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Nicht-Pivot Variablen: x_4

Sei: $x_4 = t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$$x_3 = \frac{2-t}{2}$$

$$x_2 = -4+3t+4\left(\frac{2-t}{2}\right) = -4+3t+4-2t = t$$

$$x_1 = -t+\frac{2-t}{2} - 2t = 1 - \frac{7t}{2}$$

Also gilt:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-7t}{2} \\ t \\ \frac{2-t}{2} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{2}t \\ t \\ -\frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ker A = LH\left(\left\{\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)}$$

c) Aus b) $\Rightarrow$

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = b\} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + LH\left(\left\{\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)}$$

A 2)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & -4 & 6 \\ -9 & -6 & 8 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 6}.$$

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ \hline 9 & 6 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & -4 & 6 & 0 \\ -9 & -6 & 8 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ \hline -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$| \cdot 3$; $\cdot 1$; $\cdot (-3)$;

$| \cdot 2$;

$| \cdot (-9)$;

$| \cdot (-3)$;

Wir haben 3 Pivot Variablen und es gilt
$\forall j > 3 : b_j = 0 \implies b \in \text{Bild}(A)$

Nicht-Pivot Variablen:
x_2, x_4, x_6

$$\begin{pmatrix} 0\\0\\-2\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ \hline -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Seien $x_2 = t_1 \in \mathbb{R}$
$x_4 = t_2 \in \mathbb{R}$
$x_6 = t_3 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$x_5 = 2t_3$
$x_3 = -2t_3/2 = -t_3$
$x_1 = \dfrac{-2t_1 + 2(-t_3) + 2t_3}{3} = \dfrac{-2t_1}{3}$

Also gilt:

$$x = \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3\,t_1\\t_1\\-2t_3\\t_2\\2t_3\\t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t_1\\t_1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\t_2\\0\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\0\\-2t_3\\0\\2t_3\\t_3 \end{pmatrix} =$$

$$= t_1 \begin{pmatrix} -2/3\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0\\0\\-2\\0\\2\\1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ker A = LH\left(\left\{ \begin{pmatrix} -2/3\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\-2\\0\\2\\1 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

Sei $B := \left\{ \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Da B lin. unabhängig $\wedge$ $LH(B) = \ker A$
$\Rightarrow$ B ist Basis von $\ker A$

A 3) $U = LH(v_1, v_2, v_3)$

a) Sei $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(1) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$

(2) $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$

(3) $v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Da B lin. unabhängig $\wedge$ (1), (2), (3)
$\Rightarrow$ B ist Basis von U

b) Sei $B' := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$