

3. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

20. November 2020

Abgabe bis 27. November 2020, 12:00 Uhr

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 27 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 9:

- (i) Zeigen Sie, dass die durch

$$a_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

- (ii) Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \dots, a_N > 0$. Zeigen Sie, dass die durch

$$b_n := \sqrt[n]{\sum_{k=1}^N a_k^n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge (b_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 10 (K):

Untersuchen Sie die folgenden rekursiv definierten Folgen (a_n) auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

- (i) $a_1 := \frac{1}{2}$, $a_{n+1} := a_n - a_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

- (ii) $a_1 := 2$, $a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 1}{2a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 11:

- (i) Es sei $b \in (0, \infty)$ und $a_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_0 < b^{-1}$. Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ mit $a_n := 2a_{n-1} - ba_{n-1}^2$ ($n \in \mathbb{N}$) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

- (ii) Geben Sie für die folgende rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ einen geschlossenen Ausdruck an und prüfen Sie die Folge auf Konvergenz. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

$$a_0 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{(n+1)!} - \frac{a_n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Aufgabe 12 (K):

- (i) Untersuchen Sie die Folgen (a_n) auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

$$(a) \quad a_n := \sqrt[n]{3 + 2\frac{n-1}{n+1}}, \quad (b) \quad a_n := \sqrt[n]{-n + 2n^2}, \quad (c) \quad a_n := \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

- (ii) Zeigen Sie, dass eine Folge (a_n) genau dann gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ wiederum eine gegen a konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_{j=1}^\infty$ besitzt.

Information

Aufgrund der aktuellen Situation wird dieses Modul teilweise in digitaler Form angeboten. Die gesamte Abwicklung wird über das System ILIAS stattfinden. Melden Sie sich dafür mit Ihrem KIT-Account an und treten Sie dem Kurs **Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik** bei. Sie können diesem Kurs direkt über folgenden Link beitreten:

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1253943_rcodeHa6wkYEysN&client_id=produktiv

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Scheinkriterien, Tutorien, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

Zum Bearbeiten der Übungsblätter sollten Sie pro Woche etwa 9-10 Seiten des Skripts mithilfe der angebotenen Vorlesungsvideos durcharbeiten. Das kommende Übungsblatt wird den Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 35 beinhalten.

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-6 und 7-13 **jeweils** mindestens 48 bzw. 56 Punkte (50%) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal.