Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 10 **28.06.21**

Aufgabe 1 (*Orthogonale Unterräume bei entarteten Bilinearformen*) (*10 Punkte*)

Es sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform. Zu einem Untervektorraum $U \subseteq V$ definieren wir den zu U orthogonalen Raum

$$U^\perp := \{\, w \in V \mid \forall v \in U : \beta(v,w) = 0 \,\}.$$

analog zu euklidischen Räumen, und den Nullraum

$$\mathrm{Null}(\beta) := V^\perp = \{\, w \in V \mid \forall v \in V : \beta(v,w) = 0 \,\}.$$

Sie können ohne Beweis verwenden, dass

$$\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U) + \dim(U \cap \mathrm{Null}(\beta)) \tag{$*$}$$

gilt.

a) Beweisen Sie: $U^\perp$ ist tatsächlich ein Untervektorraum von V.

b) Beweisen Sie: $\mathrm{Null}(\beta) \subseteq U^\perp$.

c) Beweisen Sie: Es gilt $U \oplus U^\perp = V$ genau dann, wenn die Einschränkung $\beta|_{U\times U}$ nicht entartet ist.

d) Beweisen Sie: Es gilt $(U^\perp)^\perp = U + \mathrm{Null}(\beta)$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $U + \mathrm{Null}(\beta) \subseteq (U^\perp)^\perp$ und benutzen Sie dann die Formel $(*)$.

e) Nun sei $V = \mathbb{R}^3$ und

$$\begin{aligned} \beta\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) &\mapsto -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \end{aligned}$$

Finden Sie einen Untervektorraum $U_1 \subseteq V$ der Dimension 1 und einen Untervektorraum $U_2 \subseteq V$ der Dimension 2, für die $U_1 \oplus U_1^\perp \neq V$ und $U_2 \oplus U_2^\perp \neq V$ gelten.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Es ist

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{\, w \in V \mid \forall v \in U :\ \beta(v,w) = 0 \,\} \\ &= \bigcap_{v \in U} \{\, w \in V \mid \beta(v,w) = 0 \,\} \\ &= \bigcap_{v \in U} \ker(\beta(v,\cdot)). \end{aligned}$$

Da $\beta(v,\cdot)\colon V \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung ist, ist $\ker(\beta(v,\cdot))$ ein Untervektorraum von V. Damit ist $U^\perp$ als Schnitt von Untervektorräumen selbst ein Untervektorraum von V.

Alternativ kann man die Untervektorraumaxiome direkt nachrechnen.

b) Die Aussage $\forall v \in V: \ \beta(v,w) = 0$ impliziert die Aussage $\forall v \in U: \ \beta(v,w) = 0$, also ist gemäß der obigen Definitionen $\mathrm{Null}(\beta) \subseteq U^\perp$.

c) Zunächst stellen wir die folgenden Äquivalenzen fest:

$$\begin{aligned}\text{Die Summe } U + U^\perp \text{ ist nicht direkt.} &\iff \exists u \in U \cap U^\perp \setminus \{0\}\\ &\iff \exists u \in U \setminus \{0\}\, \forall v \in U: \ \beta(v,w) = 0\\ &\iff \beta|_{U\times U} \text{ ist entartet.}\end{aligned}$$

Negation auf beiden Seiten ergibt: Die Summe $U + U^\perp$ ist genau dann direkt, wenn $\beta|_{U\times U}$ nicht entartet ist.

Falls also $\beta|_{U\times U}$ nicht entartet ist, gilt

$$\dim(U + U^\perp) = \dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V) + \dim(U \cap \mathrm{Null}(\beta))$$

Aus b) folgt aber $U \cap \mathrm{Null}(\beta) \subseteq U \cap U^\perp = \{0\}$, also $\dim(U + U^\perp) = \dim(V)$. Damit muss $U + U^\perp = V$ gelten.

d)
- Wir zeigen $U + \mathrm{Null}(\beta) \subseteq (U^\perp)^\perp$:
  Aus b) folgt direkt $\mathrm{Null}(\beta) \subseteq (U^\perp)^\perp$. Da $(U^\perp)^\perp$ ein Untervektorraum ist, müssen wir also nur noch $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ zeigen:

  Für alle $w \in U$ und $v \in U^\perp$ gilt $\beta(v,w) = \beta(w,v) = 0$, also $w \in (U^\perp)^\perp$.
- Die oben angegebene Dimensionsformel $(*)$ angewandt auf $U^\perp$ ergibt

$$\begin{aligned}\dim((U^\perp)^\perp) &= \dim(V) - \dim(U^\perp) + \dim(U^\perp \cap \mathrm{Null}(\beta))\\ &= \dim(V) - \big(\dim(V) - \dim(U) + \dim(U \cap \mathrm{Null}(\beta))\big) + \dim(U^\perp \cap \mathrm{Null}(\beta))\\ &= \dim(U) - \dim(U \cap \mathrm{Null}(\beta)) + \dim(U^\perp \cap \mathrm{Null}(\beta))\\ &= \dim(U) - \dim(U \cap \mathrm{Null}(\beta)) + \dim(\mathrm{Null}(\beta))\\ &= \dim(U + \mathrm{Null}(\beta))\end{aligned}$$

  wobei wir benutzen, dass $\mathrm{Null}(\beta) \subseteq U^\perp$ und damit $U^\perp \cap \mathrm{Null}(\beta) = \mathrm{Null}(\beta)$ gilt. Der letzte Schritt folgt aus der Dimensionsformel für Summen von Unterräumen.

Das bedeutet $(U^\perp)^\perp$ ist ein Untervektorraum von $U + \mathrm{Null}(\beta)$ mit derselben Dimension, also sind sie gleich.

e) Nach c) muss $\beta|_{U\times U}$ entartet sein. Es muss also insbesondere einen Vektor $v \in U \setminus \{0\}$ geben, der $\beta(v,v) = 0$ erfüllt. Wir suchen also einen Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$ mit $-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0$.

Das wird zum Beispiel von $v = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ erfüllt. Mit $U_1 := \mathrm{LH}(v)$ gilt also

$$U_1^\perp = v^\perp = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid \beta(v,x) = 0 \,\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -x_1 + x_2 = 0 \right\} = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \right)$$

Also ist $U_1 \cap U_1^\perp = \mathrm{LH}(v) = U_1 \neq \{0\}$ und die Summe ist nicht direkt.

Da $\mathrm{Null}(\beta) = \{0\}$ ist, gilt $(U_1^\perp)^\perp = U_1$. Damit ist $U_2 := U_1^\perp$ ein zweidimensionaler Unterraum mit $U_2 \cap U_2^\perp = U_1 \neq \{0\}$.

Aufgabe 2 (*Die symplektische Normalform*) (*10 Punkte*)

Es sei die reelle 4×4-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie eine geordnete Basis B, bezüglich der die Bilinearform

$$\begin{aligned} \beta \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right) &\mapsto \begin{array}{l} x_1y_3 - y_1x_3 - 2(x_1y_4 - y_1x_4 + x_3y_4 - y_3x_4) \\ -3(x_2y_3 - y_2x_3) + 4(x_2y_4 - y_2x_4) \end{array} \end{aligned}$$

die Fundamentalmatrix $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta) = A$ hat.

Hinweis: Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix bezüglich einer Basis Ihrer Wahl und nutzen Sie simultane Zeilen- und Spaltenoperationen zum Basiswechsel. (Siehe auch Übung und Aufgabe 1 des Tutoriumsblattes.)

b) Beweisen Sie, dass es für jede nicht-entartete alternierende Bilinearform $\eta \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ eine geordnete Basis B gibt, bezüglich der die Bilinearform die Fundamentalmatrix $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\eta) = A$ hat.

Hinweis: Geben Sie einen Algorithmus an und beweisen Sie, dass dieser immer funktioniert und das gewünschte Ergebnis hat.

Die Bilinearform η ist genau dann nicht entartet, wenn die Fundamentalmatrix (bzgl. einer beliebigen Basis) invertierbar ist.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Wir beginnen mit dem Ablesen der Fundamentalmatrix bzgl. der Standardbasis:

$$\mathrm{FM}_{\mathsf{E}}(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun versuchen wir, die Fundamentalmatrix durch zueinander gehörende Zeilen- und Spaltentransformationen in die Form von A zu bringen, während wir die gleichen Transformationen auf die Standardbasis anwenden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit schreiben wir die Basisvektoren unter die Fundamentalmatrix:

$$
\left(\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & -3 & 4 \\
-1 & 3 & 0 & -2 \\
2 & -4 & 2 & 0 \\
 & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\leadsto
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} & 2 & & + \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc}
0 & 1 & 0 & -2 \\
-1 & 0 & 3 & -2 \\
0 & -3 & 0 & 4 \\
2 & 2 & -4 & 0 \\
 & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ + \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
\leadsto
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} -2 & & & + \\ 3 & & + & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc}
0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 3 & -2 \\
0 & -3 & 0 & -2 \\
0 & 2 & 2 & 0 \\
 & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{cc} 3 & -2 \\ & \\ + & \\ & + \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{array}
\end{array}
$$

$$
\leadsto
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} & & (-\frac{1}{2}) & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc}
0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 2 & 0 \\
 & & & \\
1 & 0 & 3 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ \\ \mid (-\frac{1}{2}) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
\leadsto
\left(\begin{array}{cccc}
0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
 & & & \\
1 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

Die gesuchte Basis ist also

$$
\mathsf{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
$$

Eine andere Wahl der Transformationen kann auf eine andere Basis führen.

b) Wir beginnen wie oben mit der Fundamentalmatrix bzgl einer beliebigen Basis und führen simultan Zeilen- und Spaltenoperationen durch. Laut Vorlesung gehen wir dabei zu Fundamentalmatrizen bzgl. einer geänderten Basis über.

Da η alternierend ist, ist ihre Fundamentalmatrix immer antisymmetrisch. Insbesondere sind die Diagonaleinträge immer 0. Außerdem ist die Fundamentalmatrix invertierbar, da die Form nicht entartet ist. Es seien nun f_{ij} die Matrixeinträge im aktuellen Schritt. Wir führen folgende Transformationen durch:

- Es gilt $f_{11} = 0$, aber die erste Zeile von A kann keine Nullzeile sein.
  Falls $f_{12} \neq 0$ gilt, tun wir nichts. Falls $f_{12} = 0$ gilt, muss es ein $i > 2$ mit $f_{1i} \neq 0$ geben. In diesem Fall tauschen wir die 2-te Zeile/Spalte mit der i-ten.

  Nach diesem Schritt ist also $f_{12} \neq 0$.
- Wir multiplizieren die 1. Zeile/Spalte mit $(f_{12})^{-1}$. Wegen $f_{12} \neq 0$ ist das möglich.

  Nach diesem Schritt gilt $f_{12} = 1$.

- Für alle $i > 2$ addieren wir das $-f_{1i}$-Fache der 1. Zeile/Spalte auf die i-te Zeile/Spalte.

  Nach diesem Schritt ist $f_{12} = 1$ und $f_{1i} = 0$ für alle $i > 2$; Aufgrund der Antisymmetrie gilt auch $f_{11} = 0$, $f_{21} = -1$.

- Wir addieren das f_{2i}-Fache der 2. Zeile/Spalte auf die i-te für alle $i > 2$.

  Nach diesem Schritt $f_{2i} = 0$ alle $i \neq 1$. Die erste Zeile hat sich nicht geändert. Die ersten zwei Zeilen stimmen also jetzt mit denen von A überein. Aufgrund der Antisymmetrie stimmen auch die ersten zwei Spalten mit denen von A überein.

- Es muss $f_{34} \neq 0$ gelten, da sonst die 3. Zeile eine Nullzeile wäre. Wir multiplizieren die 3. Zeile/Spalte mit $(f_{34})^{-1}$.

  Das ändert die 1. und 2. Zeile und Spalte nicht mehr, da an den entsprechenden Stellen Nullen stehen. Nun gilt $f_{34} = 1$ und aufgrund der Antisymmetrie $f_{43} = -1$, $f_{33} = 0$ und $f_{44} = 0$. Das bedeutet, die Matrix stimmt jetzt mit A überein.

Die entsprechende Basis findet sich dann durch Anwendung entsprechenden Transformationen auf die ursprünglich gewählte Basis.