Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I **Winter-Semester 2020/2021**

Übungsblatt 3 **23.11.20**

Aufgabe 1 (*Basisergänzungssatz*) (*10 Punkte*)

Wir definieren die Mengen

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\} \text{ und}$$
$$M := \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Zeigen Sie, dass M ein Erzeugendensystem von U ist.

c) Ergänzen Sie $L := \emptyset$ zu einer Basis $B \subseteq M$ von U.

Aufgabe 2 (*Maximal linear unabhängig / minimales Erzeugendensystem*) (*10 Punkte*)

Es $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum und $B \subseteq U$ eine Menge. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die Menge B ist linear unabhängig und jede linear unabhängige Menge $L \subseteq U$ mit $B \subseteq L$ erfüllt $B = L$.

(ii) Die Menge B ist Erzeugendendensystem von U und jedes Erzeugendensystem E von U mit $E \subseteq B$ erfüllt $B = E$.

(iii) Die Menge B ist eine Basis von U.

Bemerkung: Man sagt auch: Eine Basis B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von U und ein minimales Erzeugendensystem von U.

Aufgabe 3 (*Basis eines Kerns*) (*10 Punkte*)

Es sei die reelle 4×4-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(A) \subseteq \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 4 (*Lineare Unabhängigkeit und lineare Hülle*) (*10 Punkte*)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum.

a) Es seien $v_1, v_2, v_3 \in U$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$ gilt. Zeigen Sie:
$$\mathrm{LH}(v_1, v_2) = \mathrm{LH}(v_1, v_3).$$

b) Es seien $v_1, ..., v_n \in U \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Die Menge $\{v_1, ..., v_n\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn
$$\mathrm{LH}(v_1, ..., v_s) \cap \mathrm{LH}(v_{s+1}, ..., v_n) = \{0\}$$
für alle $1 \leq s < n$ gilt.

Abgabe bis Montag, den 30.11.20 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.