Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

11. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

29. Januar 2021

Abgabe bis 5. Februar 2021, 12:00 Uhr

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 111 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 41:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a, b])$.

(i) Zeigen Sie: Ist $f \geq 0$ und $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, so gilt bereits $f = 0$.

(ii) Gilt Teil (a) auch dann noch, wenn man nur $f \in R([a, b])$ anstelle von $f \in C([a, b])$ fordert? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Zeigen Sie: Gilt $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ für alle $g \in C([a, b])$, so gilt bereits $f = 0$.

Aufgabe 42 (K):
Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{6 - 2x^3}}\,dx,$ (ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1 + \sin^2(x)}\,dx,$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 x^5 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx,$ (iv) $\displaystyle\int_0^{4\pi} e^{-x}\cos(4x)\,dx,$

(v) $\displaystyle\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x} - 1}\right)\,dx,$ (vi) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{1 - \sin(x)}\,dx.$

Aufgabe 43:

(i) Es sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zudem gelten

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x f(x)\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 1.$$

Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (0, 1)$ existiert mit $|f(x_0)| > 11$.

(ii) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x^3 + 2x - 3}{x^2 + 1}\,dx.$

Aufgabe 44 (K):

(i) Es seien $[a, b]$ und $[c, d]$ mit $a < b$ und $c < d$ zwei kompakte Intervalle und $\varphi, \psi\colon [a, b] \to [c, d]$ differenzierbar. Weiter sei $f\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion $G\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, definiert durch $G(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$, differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung G'.

(ii) Es sei $R > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0, R] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := \int_0^{x^2} \cos(\mathrm{e}^{t^2+1}) \log(t + 1)\,dt$, differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(iii) Untersuchen Sie jeweils, ob für die folgenden Funktionenfolgen $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

existiert:

(a) $f_n(x) := \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx^2},$ (b) $f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{1+nx}.$

Information

Aufgrund der aktuellen Situation wird dieses Modul teilweise in digitaler Form angeboten. Die gesamte Abwicklung wird über das System ILIAS stattfinden. Melden Sie sich dafür mit Ihrem KIT-Account an und treten Sie dem Kurs **Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik** bei. Sie können diesem Kurs direkt über folgenden Link beitreten:

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1253943_rcodeHa6wkYEysN&client_id=produktiv`

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Scheinkriterien, Tutorien, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

Zum Bearbeiten der Übungsblätter sollten Sie pro Woche etwa 9-10 Seiten des Skripts mithilfe der angebotenen Vorlesungsvideos durcharbeiten. Das kommende Übungsblatt wird den Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 123 beinhalten.

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-6 und 7-13 **jeweils** mindestens 48 bwz. 56 Punkte (50%) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Bitte beachten Sie den **Anmeldeschluss** am **21.02.2021**.