Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

11. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

5. Februar 2021

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 111 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 41:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a,b])$.

(i) Zeigen Sie: Ist $f \geq 0$ und $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, so gilt bereits $f = 0$.

(ii) Gilt Teil (a) auch dann noch, wenn man nur $f \in R([a,b])$ anstelle von $f \in C([a,b])$ fordert? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Zeigen Sie: Gilt $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ für alle $g \in C([a,b])$, so gilt bereits $f = 0$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 41:
Voraussetzung: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a,b])$.

(i) *Behauptung:* Ist $f \geq 0$ und $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, so gilt bereits $f = 0$.

Beweis: Es gelte $f \geq 0$ und $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Wir nehmen nun an, dass f nicht die Nullfunktion ist. Da f stetig auf $[a,b]$ ist, existiert somit ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) > 0$. Da (a,b) offen und f stetig ist, existiert ferner ein $r > 0$ mit $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq (a,b)$ und $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0$ für alle $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. Mit Satz 10.7 und Satz 10.2 (a) folgt somit

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0 - r} \underbrace{f(x)}_{\geq 0}\,dx + \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \underbrace{f(x)}_{\geq \frac{f(x_0)}{2}}\,dx + \int_{x_0 + r}^{b} \underbrace{f(x)}_{\geq 0}\,dx \\ &\geq \int_a^{x_0 - r} 0\,dx + \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \frac{f(x_0)}{2}\,dx + \int_{x_0 + r}^{b} 0\,dx \\ &= 0 + \frac{f(x_0)}{2}(x_0 + r - (x_0 - r)) + 0 = f(x_0)r > 0, \end{aligned}$$

und damit ein Widerspruch. Folglich war die Annahme falsch und es gilt $f = 0$. □

(ii) *Behauptung:* Die Bedingung $f \in C([a,b])$ kann nicht durch $f \in R([a,b])$ ersetzt werden.

Beweis: Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Es gilt nach Definition $f \geq 0$. Weiter ist f nach Satz 10.16 integrierbar und es gilt $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$. Aber f ist offensichtlich nicht die Nullfunktion. □

(iii) *Behauptung:* Gilt $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ für alle $g \in C([a,b])$, so gilt bereits $f = 0$.

Beweis: Mit der Wahl $g = f$ folgt insbesondere, dass $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ ist. Da $f^2 \geq 0$ folgt mit Aufgabenteil (a), dass $f^2 = 0$ und somit $f = 0$. $\square$

Aufgabe 42 (K):
Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,dx$, (ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx$,

(iii) $\displaystyle\int_0^1 x^5 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$, (iv) $\displaystyle\int_0^{4\pi} e^{-x}\cos(4x)\,dx$,

(v) $\displaystyle\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)dx$, (vi) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{1-\sin(x)}\,dx$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 42:

(i) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,dx = \frac{1}{3}(\sqrt{6}-2)$.

Beweis: Mit der Substitution $y = y(x) = 6-2x^3$ gilt $y(0) = 6,\ y(1) = 4$ und $dy = -6x^2\,dx$. Damit erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,dx = \int_6^4 -\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int_4^6 \frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \left[\frac{1}{3}\sqrt{y}\right]_{y=4}^{y=6} = \frac{1}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{3}\sqrt{4} = \frac{1}{3}(\sqrt{6}-2).$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx = \frac{1}{2}\log(2)$.

Beweis: Mit der Substitution $y = y(x) = \sin^2(x)$ gilt $y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $dy = 2\sin(x)\cos(x)\,dx$. Damit erhalten wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{1+y}\,dy = \frac{1}{2}\left[\log(1+y)\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}(\log(2)-\log(1)) = \frac{1}{2}\log(2).$$

Alternativ kann man auch direkt einsehen, dass $x \mapsto \frac{1}{2}\log(1+\sin^2(x))$ eine Stammfunktion des Integranden ist. $\square$

(iii) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\int_0^1 x^5\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = 1 - \frac{5}{2\mathrm{e}}$.

Beweis: Mit zweimaliger partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^5\mathrm{e}^{-x^2}\,dx &= \int_0^1 x^4 x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \overset{(P.I.)}{=} \left[x^4\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 4x^3\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \int_0^1 2x^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \\
&\overset{(P.I.)}{=} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \left[2x^2\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 4x\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + \int_0^1 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1} + \left[-\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 = -\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1} + 1.
\end{aligned}$$

$\square$

(iv) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\int_0^{4\pi} e^{-x}\cos(4x)\,dx = \frac{1}{17}\left(1-\mathrm{e}^{-4\pi}\right)$.

Beweis: Wir wenden zweimal partielle Integration an und erhalten

$$\begin{aligned}
I := \int_0^{4\pi} e^{-x}\cos(4x)\,dx &\overset{(P.I.)}{=} \left[-\mathrm{e}^{-x}\cos(4x)\right]_{x=0}^{x=4\pi} - \int_0^{4\pi} \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\left(-4\sin(4x)\right)dx \\
&= -\mathrm{e}^{-4\pi}\underbrace{\cos(16\pi)}_{=1} + 1 - 4\int_0^{4\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin(4x)\,dx \\
&\overset{(P.I.)}{=} 1 - \mathrm{e}^{-4\pi} - 4\left(\left[-\mathrm{e}^{-x}\sin(4x)\right]_{x=0}^{x=4\pi} - \int_0^{4\pi} -\mathrm{e}^{-x}4\cos(4x)\,dx\right) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-4\pi} - 4\left(-\mathrm{e}^{-4\pi}\underbrace{\sin(16\pi)}_{=0} + 0 + 4\int_0^{4\pi} \mathrm{e}^{-x}\cos(4x)\,dx\right) = 1 - \mathrm{e}^{-4\pi} - 16I.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$17I = 1 - \mathrm{e}^{-4\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{4\pi} e^{-x}\cos(4x)\,dx = I = \frac{1}{17}\left(1 - \mathrm{e}^{-4\pi}\right).$$

□

(v) *Behauptung:* Es gilt $\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)dx = \pi - \frac{4}{3}$.

Beweis: Mit der Substitution $y = y(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$ ($\Leftrightarrow x = (y^2+1)^2$) gilt $y(1) = 0,\ y(4) = 1$ und $dy = \frac{1}{4y(y^2+1)}\,dx$. Damit erhalten wir

$$\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)dx = \int_0^1 \arctan(y)\cdot 4y(y^2+1)\,dy = \int_0^1 (4y^3+4y)\arctan(y)\,dy.$$

Mit partieller Integration gilt nun

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (4y^3+4y)\arctan(y)\,dy &\overset{(P.I.)}{=} \left[(y^4+2y^2)\arctan(y)\right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{y^4+2y^2}{1+y^2}\,dy \\
&= 3\arctan(1) - \int_0^1 \left(\frac{y^2(1+y^2)}{1+y^2} + \frac{y^2}{1+y^2}\right)dy \\
&= \frac{3}{4}\pi - \int_0^1 y^2 dy - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right)dy \\
&= \frac{3}{4}\pi - \left[\frac{1}{3}y^3 + y - \arctan(y)\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{4}\pi - \left(\frac{1}{3} + 1 - \frac{\pi}{4}\right) + 0 = \pi - \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

□

(vi) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{1-\sin(x)}\,dx = \log(2) - 2\log(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2}$.

Beweis: Mithilfe der Additionstheoreme erhalten wir zunächst

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{1-\sin(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1-\sin(x)}\,dx.$$

Mit der Substitution $y = y(x) = \sin(x)$ gilt $y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $dy = \cos(x)\,dx$. Damit gilt (beachten Sie, dass $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ für alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1-\sin(x)}\,dx &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2y\sqrt{1-y^2}}{1-y}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{y}{1-y}\,dy \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1-y}-1\right)dy = 2[-\log(1-y)-y]_{y=0}^{y=\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= 2\left(-\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right) = -2\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2} \\ &= \log(2) - 2\log(\sqrt{2}-1)-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 43:

(i) Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zudem gelten

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 1.$$

Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (0,1)$ existiert mit $|f(x_0)| > 11$.

(ii) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^3+2x-3}{x^2+1}\,dx.$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 43:

(i) *Voraussetzung:* Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zudem gelten

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 1.$$

Behauptung: Ex existiert ein $x_0 \in (0,1)$ mit $|f(x_0)| > 11$.

Beweis: Angenommen die Behauptung ist falsch, dann gilt $|f(x)| \le 11$ für alle $x \in (0,1)$. Mit der Voraussetzung erhalten wir

$$\int_0^1 f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx - \int_0^1 xf(x)\,dx + \frac{1}{4}\int_0^1 f(x)\,dx = 1-0+\frac{1}{4}\cdot 0 = 1. \qquad (1)$$

Wir definieren nun

$$\tilde{f}\colon [0,1]\to\mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x\in(0,1),\\ 0, & x\in\{0,1\}.\end{cases}$$

Dann gilt $\left|\tilde{f}(x)\right| \le 11$ für alle $x \in [0,1]$. Zudem stimmt $\tilde{f}$ außer an endlich vielen Stellen, nämlich bei 0 und 1, mit f überein und ist somit nach Satz 10.16 ebenfalls integrierbar und die beiden Integrale stimmen überein. Weiter folgt mit (1), der Monotonie des Integrals und dem 1. Hauptsatz:

$$\begin{aligned}1 &= \int_0^1 f(x)\left(x-\frac{x}{2}\right)^2 dx \le \int_0^1 |f(x)|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 \left|\tilde{f}(x)\right|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &\le \int_0^1 11\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{11}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{11}{3}\left(\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{11}{12} < 1,\end{aligned}$$

also ein Widerspruch. Folglich war die Annahme falsch und die Behauptung ist bewiesen. □

(ii) (a) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\, dx = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + const.$

<u>*Beweis:*</u> Mit der Substitution $y = y(x) = \sqrt{x}$ erhält man wegen $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$, dass

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\, dx = \int 2\mathrm{e}^{y}\, dy = 2\mathrm{e}^{y} + const.$$

Rücksubstituieren ergibt

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\, dx = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + const.$$

Alternativ kann man auch direkt einsehen, dass $x \mapsto 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ ist. □

(b) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $\int \frac{x^4+2x^3+2x-3}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 2\arctan(x) + const.$

<u>*Beweis:*</u> Durch Polynomdivision erhält man

$$(x^4+2x^3+2x-3) : (x^2+1) = x^2 + 2x - 1 - \frac{2}{1+x^2}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+2x^3+2x-3}{x^2+1}\, dx &= \int x^2 + 2x - 1\, dx - 2\int \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 2\arctan(x) + const.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 44 (K):

(i) Es seien $[a,b]$ und $[c,d]$ mit $a < b$ und $c < d$ zwei kompakte Intervalle und $\varphi, \psi \colon [a,b] \to [c,d]$ differenzierbar. Weiter sei $f \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion $G \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definiert durch $G(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt$, differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung G'.

(ii) Es sei $R > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f \colon [0,R] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := \int_0^{x^2} \cos(\mathrm{e}^{t^2+1}) \log(t+1)\, dt$, differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(iii) Untersuchen Sie jeweils, ob für die folgenden Funktionenfolgen $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

existiert:

(a) $f_n(x) := \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx^2}$, (b) $f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{1+nx}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 44:

(i) <u>*Behauptung:*</u> Die Funktion G ist differenzierbar mit Ableitung

$$G'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x) \quad (x \in [a,b]).$$

Beweis: Es sei $x_0 \in [c,d]$. Die Funktion

$$F\colon [c,d] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

ist nach dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar auf $[c,d]$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [c,d]$, da der Integrand f stetig ist. Wegen

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = \int_{\varphi(x)}^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{\psi(x)} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{\psi(x)} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)\,dt \\ &= F(\psi(x)) - F(\varphi(x)) \end{aligned}$$

folgt mit der Kettenregel

$$G'(x) = F'(\psi(x))\psi'(x) - F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

□

(ii) *Voraussetzung:* Für $R > 0$ sei die Funktion $f\colon [0,R] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \int_0^{x^2} \cos(\mathrm{e}^{t^2+1}) \log(t+1)\,dt$.

Behauptung: f ist differenzierbar mit $f'(x) = 2x \cos\left(\mathrm{e}^{x^4+1}\right) \log(x^2+1)$ für $x \in [0,R]$.

Beweis: Definiere die stetige Funktion

$$g\colon [0,R^2] \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \cos(\mathrm{e}^{x^2+1}) \log(x+1).$$

Mit den differenzierbaren Funktionen $\varphi(x) := 0$ und $\psi(x) := x^2 \in [0,R^2]$ für $x \in [0,R]$ ist f gegeben durch $f(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(t)\,dt$ ($x \in [0,R]$). Nach Aufgabenteil (a) ist f differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= g(\psi(x))\psi'(x) - g(\varphi(x))\varphi'(x) = \cos\left(\mathrm{e}^{x^4+1}\right) \log(x^2+1) \cdot 2x + 0 \\ &= 2x \cos\left(\mathrm{e}^{x^4+1}\right) \log(x^2+1). \end{aligned}$$

□

(iii) (a) *Voraussetzung:* Definiere $f_n(x) := \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx^2}$ für $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$.
Behauptung: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

Beweis: Es gilt $|f_n(x)| = \frac{1}{n} \underbrace{\mathrm{e}^{-nx^2}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n}$ für alle $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

d.h. (f_n) konvergiert auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen 0. Nach Vorlesung (Satz 10.8) konvergiert damit auch die Folge der Integrale und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

□

(b) *Voraussetzung:* Definiere $f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{1+nx}$ für $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$.
Behauptung: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt mit der Dreiecksungleichung für Integrale

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 \frac{\sin(nx)}{1+nx}\,dx\right| &\leq \int_0^1 \left|\frac{\sin(nx)}{1+nx}\right| dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+nx}\,dx = \left[\frac{1}{n}\log(1+nx)\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{\log(1+n)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □