Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II — **Sommersemester 2021**

Übungsblatt 7 — **07.06.21**

Aufgabe 1 (*Selbstadjungierte Endomorphismen*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie:

a) Die Menge der selbstadjungierten Endomorphismen von V ist ein Untervektorraum von $\operatorname{End}(V)$.

b) Gilt für zwei selbstadjungierte Endomorphismen φ, $\psi \in \operatorname{End}(V)$ die Gleichung

$$\forall v \in V \colon \langle \varphi(v), v \rangle = \langle \psi(v), v \rangle,$$

dann gilt schon $\varphi = \psi$.

Aufgabe 2 (*Adjungiertheit bezüglich verschiedener Skalarprodukte*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\theta \colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Wir definieren außerdem die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle \colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle := \langle \theta(x), y \rangle \end{aligned}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussgagen:

a) Die Abbildung $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn θ selbstadjungiert bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist und nur positive reelle Eigenwerte hat.

b) Falls $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ ein Skalarprodukt ist, ist θ auch selbstadjungiert bzgl. $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$.

c) Der Endomorphismus $\psi \colon V \to V$ ist genau dann adjungiert zum Endomorphismus $\varphi \colon V \to V$ bzgl. des Skalarproduktes $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$, wenn $\psi = \theta^{-1} \circ \varphi^* \circ \theta$ gilt.

Hinweis: Die Abbildung φ^* ist bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu φ adjungiert (nicht bzgl. $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$!). Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$ für alle invertierbaren Endomorphismen φ gilt.

Abgabe bis Montag, den 14.06.21 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.