A 25 i)

a) $f(x) := \begin{cases} \frac{x^3-3x^2}{x^2-9}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,3\} \\ \frac{5}{2}, & x=-3 \\ \frac{3}{2}, & x=3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2}{x+3}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\} \\ \frac{5}{2}, & x=-3 \end{cases}$

Behauptung: $f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

Beweis:

Seien $x_0 \neq -3$, $\varepsilon > 0$, $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x$ mit $|x-x_0| < \delta$ gilt:

$$|f(x)-f(x_0)| = \left|\frac{x^2}{x+3} - \frac{x_0^2}{x_0+3}\right|$$

$$= \frac{x^2(x_0+3) - x_0^2(x+3)}{(x+3)(x_0+3)} = \frac{x^2x_0 + 3x^2 - x_0^2x - 3x_0^2}{(x+3)(x_0+3)}$$

$$= \frac{xx_0(x-x_0) + 3(x^2-x_0^2)}{(x+3)(x_0+3)} = \frac{(x-x_0)(xx_0+3(x+x_0))}{(x+3)(x_0+3)}$$

$$= \frac{(x-x_0)(xx_0+3(x+x_0)+9-9)}{(x+3)(x_0+3)} = \frac{(x-x_0)(xx_0+3x+3x_0+9) - 9(x-x_0)}{xx_0+3x+3x_0+9}$$

$$= \left|(x-x_0) - \frac{9(x-x_0)}{(x+3)(x_0+3)}\right|$$

$$\leq |x-x_0| + \left|-9\frac{x-x_0}{(x+3)(x_0+3)}\right|$$

$$\leq |x-x_0| + 9\frac{|x-x_0|}{|(x+3)(x_0+3)|} = |x-x_0|\left(1+\frac{9}{|(x+3)(x_0+3)|}\right)$$

$$|xx_0+3x+3x_0+9| \leq |xx_0+3x+3x_0|+|9| > 9$$

$\Rightarrow$

$$< |x-x_0|\,2 = \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2 = \varepsilon$$

Sei $x_0 = -3 \Rightarrow f(x_0) = \frac{5}{2}$

b) $f(x) := \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 5x + 4} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \frac{x}{x-4}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ \frac{3x - 10}{x + 2}, & x \in \mathbb{N} \end{cases}$

Behauptung: $f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

Beweis: Seien $x_0 \neq 4$, $\varepsilon > 0$, $\delta :=$ irgendwas mit $[x]$