Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Übungsblatt 8 **14.06.21**

Aufgabe 1 (*Normale Matrizen*) (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie alle Werte $\alpha \in \mathbb{C}$, für die die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1+i & i & 1 \\ -i & 1 & 1+i & 0 \\ -1 & i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

komplex unitär diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie für einen solchen Wert eine komplexe Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^4$ aus Eigenvektoren von A.

Hinweis: Für alle Werte von α enthält die Menge der Eigenwerte von A die Zahlen 0 und $2+2i$.

Aufgabe 2 (*Isometrienormalform*) (*10 Punkte*)

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad x \mapsto Ax \qquad \text{mit} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass φ eine Isometrie ist.

b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von φ und alle komplexen Eigenwerte von A.

c) Bestimmen Sie die reelle Isometrienormalform $\tilde{A}$ von A.

d) Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{O}(4)$, so dass gilt:

$$S^\top \cdot A \cdot S = \tilde{A}.$$

Abgabe bis Montag, den 21.06.21 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.