Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

4. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

27. November 2020

Abgabe bis 4. Dezember 2020, 12:00 Uhr

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 35 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 13 (K):
Bestimmen Sie für die Folgen (a_n) jeweils die Menge aller Häufungswerte und geben Sie $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ an:

(i) $a_n := (3+(-1)^n)\,(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

(ii) $a_n := \left(\frac{n+2(-1)^{n-1}}{n}\right)^n$,

(iii) $a_n := \begin{cases} 3+\frac{2-n}{n}, & n=3k-2 \quad (k\in\mathbb{N}) \\ 3+\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n=3k-1 \quad (k\in\mathbb{N}) \\ 3+\sqrt[n+2]{8}, & n=3k \quad (k\in\mathbb{N}), \end{cases}$

(iv) $a_n := 8^n\left(8+\frac{12}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)^{-n}$.

Aufgabe 14:

(i) Es sei (a_n) eine Folge, sodass für jedes $p\in\mathbb{N}$ gilt:

$$a_{p+n}-a_n \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Ist die Folge (a_n) dann konvergent?

(ii) Es sei (a_n) eine Folge und $q\in(0,1)$ mit

$$|a_{n+1}-a_n| < q^n$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert.

Aufgabe 15 (K):
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Reihenwert an:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3n+2}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}}$,

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+k)}\right)$.

Aufgabe 16:

(i) Es sei (a_n) eine reelle Folge. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

(ii) Es sei (a_n) eine monoton fallende Folge und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot a_n = 0.$$

Information

Aufgrund der aktuellen Situation wird dieses Modul teilweise in digitaler Form angeboten. Die gesamte Abwicklung wird über das System ILIAS stattfinden. Melden Sie sich dafür mit Ihrem KIT-Account an und treten Sie dem Kurs **Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik** bei. Sie können diesem Kurs direkt über folgenden Link beitreten:

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1253943_rcodeHa6wkYEysN&client_id=produktiv`

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Scheinkriterien, Tutorien, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

Zum Bearbeiten der Übungsblätter sollten Sie pro Woche etwa 9-10 Seiten des Skripts mithilfe der angebotenen Vorlesungsvideos durcharbeiten. Das kommende Übungsblatt wird den Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 47 beinhalten.

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-6 und 7-13 **jeweils** mindestens 48 bwz. 56 Punkte (50%) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal.