Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

12. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Sommersemester 2021

16. Juli 2021

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 90 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 45:
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise glatt und absolut integrierbar.

(i) Weiter sei f stetig differenzierbar und f' absolut integrierbar. Zeigen Sie unter diesen Voraussetzungen die Aussage c) (ii) aus Satz 24.3:

$$\lim_{s\to\pm\infty} \hat{f}(s) = 0.$$

Hinweis: Sie können Satz 24.2 verwenden.

(ii) Zeigen Sie: ist f reellwertig und gerade (d.h. $f(t) = f(-t)$ $(t \in \mathbb{R})$), dann ist auch $\hat{f}$ reellwertig und gerade.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 45:
Voraussetzung: Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise glatt und absolut integrierbar.

(i) *Voraussetzung:* Weiter sei f stetig differenzierbar und f' absolut integrierbar.

Behauptung: Es gilt $\lim\limits_{s\to\pm\infty} \hat{f}(s) = 0$.

Beweis: Es sei $s \neq 0$ und $a > 0$. Mit partieller Integration folgt dann

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt &= \left[\frac{\mathrm{i}}{s} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\right]_{t=-a}^{a} - \frac{\mathrm{i}}{s}\int_{-a}^{a} f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt \\ &= \frac{\mathrm{i}}{s}\left(f(a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}as} - f(-a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}as}\right) - \frac{\mathrm{i}}{s}\int_{-a}^{a} f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt.\end{aligned}$$

Für den ersten Term gilt

$$\left|\frac{\mathrm{i}}{s}\left(f(a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}as} - f(-a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}as}\right)\right| \leq \frac{1}{|s|}\left(|f(a)| + |f(-a)|\right) \xrightarrow{a\to\infty} 0,$$

wobei die Konvergenz der Satz 24.2 liefert. Da f' absolut integrierbar ist, existiert das Integral in obigem Ausdruck, d.h. es existiert ein $C > 0$, sodass gilt:

$$\left|-\frac{\mathrm{i}}{s}\int_{-a}^{a} f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt\right| \leq \frac{1}{|s|}\int_{-a}^{a} |f'(t)|\,dt \leq \frac{1}{|s|}\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\,dt \leq \frac{C}{|s|} \xrightarrow{|s|\to\infty} 0.$$

Somit folgt

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi}\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt = -\frac{\mathrm{i}}{2\pi s}\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt \xrightarrow{s\to\pm\infty} 0$$

nach dem eben berechneten. □

(ii) <u>*Voraussetzung:*</u> f sei reellwertig und gerade (d.h. $f(t) = f(-t)$ $(t \in \mathbb{R})$).

<u>*Behauptung:*</u> Dann ist auch $\hat{f}$ reellwertig und gerade.

<u>*Beweis:*</u> Es sei $s \in \mathbb{R}$. Da f reellwertig und gerade ist, gilt

$$\begin{aligned}2\pi\overline{\hat{f}(s)} &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(-t)}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(-\tau)}_{=f(\tau)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\tau}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\tau}\,d\tau = 2\pi\hat{f}(s).\end{aligned}$$

Somit ergibt sich $\hat{f}(s) \in \mathbb{R}$. Zudem gilt

$$2\pi\hat{f}(-s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-s)t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\tau}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\tau}\,d\tau = 2\pi\hat{f}(s),$$

also ist auch $\hat{f}$ gerade. □

Aufgabe 46 (K):

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise glatte und absolut integrierbare Funktion, $h \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Zeigen Sie für $g_1(t) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ht}f(t)$ und $g_2(t) := f(at)$ die Gleichungen

$$\hat{g}_1(s) = \hat{f}(s+h) \quad \text{und} \quad \hat{g}_2(s) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right).$$

(ii) Bestimmen Sie jeweils den folgenden Cauchyschen Hauptwert, falls dieser existert:

(a) $CH - \int_{-\infty}^{\infty} 2x^5 + \frac{1}{1+x^2}\,dx,$ (b) $CH - \int_{-\infty}^{\infty} x^2\sin(x) + \mathrm{e}^{-x^2}\,dx.$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 46:

(i) <u>*Voraussetzung:*</u> Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise glatte und absolut integrierbare Funktion, $h \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Wir definieren $g_1(t) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ht}f(t)$ und $g_2(t) := f(at)$.

<u>*Behauptung:*</u> Es gilt

$$\hat{g}_1(s) = \hat{f}(s+h) \quad \text{und} \quad \hat{g}_2(s) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right).$$

<u>*Beweis:*</u> Nach Definition der Fouriertransformierten und der Funktion g_1 gilt für $s \in \mathbb{R}$:

$$\hat{g}_1(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ht}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(s+h)t}\,dt = \hat{f}(s+h).$$

Für die Funktion g_2 ergibt sich

$$\hat{g}_2(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt,$$

und mit der Substitution $\tau = at$ (also $d\tau = a\,dt$) erhalten wir dann

$$\hat{g}_2(s) = \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\frac{\tau}{a}}\,d\tau = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{s}{a}\tau}\,d\tau = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right).$$

□

(ii) (a) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $CH - \int_{-\infty}^{\infty} 2x^5 + \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$

Beweis: Für $R>0$ berechnen wir

$$\int_{-R}^{R} 2x^5 + \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{3}x^6 + \arctan(x)\right]_{-R}^{R} = \arctan(R) - \arctan(-R) \xrightarrow{R\to\infty} \pi.$$

Der Cauchysche Hauptwert existiert somit und es folgt die Behauptung. $\square$

(b) *Behauptung:* Es gilt $CH - \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2\sin(x) + \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Beweis: Nach der Vorlesung gilt $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, also folgt $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Außerdem ist $x \mapsto x^2\sin(x)$ ungerade, d.h. es gilt $\int_{-R}^{R} x^2\sin(x)\,dx = 0$ für alle $R>0$. Somit folgt $CH - \int_{-\infty}^{\infty} x^2\sin(x) + \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. $\square$

Aufgabe 47 (K):
Berechnen Sie jeweils die Fouriertransformierte der Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$:

(i) $f(t) = \begin{cases} 1-|t|, & \text{falls } |t|<1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$ (ii) $f(t) = t\mathrm{e}^{-|t|}$,

(iii) $f(t) = \max\{0, 1-t^2\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 47:

(i) *Behauptung:* Es gilt $\hat{f}(0) = \dfrac{1}{2\pi}$ und $\hat{f}(s) = \dfrac{2\sin^2(\frac{s}{2})}{\pi s^2}$ $(s\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

Beweis: Für alle $t\in\mathbb{R}$ mit $|t|\geq 1$ gilt $f(t)=0$. Somit erhalten wir für alle $s\in\mathbb{R}$:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-|t|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt.$$

Für $s=0$ erhalten wir

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-|t|)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}(1-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi}.$$

Für $s\neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
2\pi\hat{f}(s) &= \int_{-1}^{1}(1-|t|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt = \int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt + \int_{-1}^{0} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt - \int_{0}^{1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt \\
&= \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{-\mathrm{i}s}\right]_{t=-1}^{t=1} + \left[\frac{t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{-\mathrm{i}s}\right]_{t=-1}^{t=0} - \underbrace{\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{-\mathrm{i}s}\,dt}_{=\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{-s^2}\right]_{t=-1}^{t=0}} - \left[\frac{t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{-\mathrm{i}s}-\right]_{t=0}^{t=1} + \underbrace{\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{-\mathrm{i}s}\,dt}_{=\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{-s^2}\right]_{t=0}^{t=1}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}}{-\mathrm{i}s} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}}{-\mathrm{i}s} + 0 - \frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}}{-\mathrm{i}s} - \frac{1}{-s^2} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}}{-s^2} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}}{-\mathrm{i}s} + 0 + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}}{-s^2} - \frac{1}{-s^2} \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}+1}{s^2} = 2\cdot\frac{1-\cos(s)}{s^2} = \frac{4}{s^2}\sin^2\left(\frac{s}{2}\right),
\end{aligned}$$

da $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$. Es gilt also

$$\hat{f}(s) = \frac{2}{\pi s^2}\sin^2\left(\frac{s}{2}\right) \quad (s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}).$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\hat{f}(s) = -\dfrac{2\mathrm{i}s}{\pi(1+s^2)^2}$ $(s\in\mathbb{R})$.

Beweis: Für $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} t\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} t\mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt.$$

Für $\alpha \neq 0$ gilt mit partieller Integration

$$\int t\mathrm{e}^{\alpha t}\,dt = \frac{t}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha t} - \int \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha t}\,dt = \frac{t}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Somit gilt für $r > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^r t\mathrm{e}^{-t}e^{-\mathrm{i}st}\,dt &= \int_0^r t\mathrm{e}^{-t(1+\mathrm{i}s)}\,dt = \left[\frac{t}{-(1+is)}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}s)t} - \frac{1}{(1+\mathrm{i}s)^2}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}s)t}\right]_{t=0}^{t=r}\\ &= \underbrace{\frac{r}{-(1+\mathrm{i}s)}e^{-(1+\mathrm{i}s)r}}_{\xrightarrow{r\to\infty}0} - \underbrace{\frac{1}{(1+\mathrm{i}s)^2}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}s)r}}_{\xrightarrow{r\to\infty}0} + \frac{1}{(1+\mathrm{i}s)^2} \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{(1+\mathrm{i}s)^2}.\end{aligned}$$

Für das zweite Integral ergibt sich analog

$$\int_{-\infty}^0 t\mathrm{e}^{t(1-\mathrm{i}s)}\,dt = -\int_0^\infty \tau\mathrm{e}^{-\tau(1-\mathrm{i}s)}\,d\tau = -\frac{1}{(1-\mathrm{i}s)^2}.$$

D.h. insgesamt haben wir

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{(1+\mathrm{i}s)^2} - \frac{1}{(1-\mathrm{i}s)^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(1-\mathrm{i}s)^2-(1+\mathrm{i}s)^2}{(1+s^2)^2} = -\frac{2\mathrm{i}s}{\pi(1+s^2)^2}.$$

□

(iii) *Behauptung:* Es gilt $\hat{f}(0) = \frac{2}{3\pi}$ und $\hat{f}(s) = \dfrac{2\sin(s) - 2s\cos(s)}{\pi s^3}$ $(s \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$.

Beweis: Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| > 1$ gilt $f(t) = 0$, daher erhält man für alle $s \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,dt.$$

Speziell für $s = 0$ ergibt sich

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^1(1-t^2)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3\pi}.$$

Für $s \neq 0$ liefert zweimalige partielle Integration:

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi}\left[(1-t^2)\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{-\mathrm{i}s}\right]_{t=-1}^{t=1} - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} 2t\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{\mathrm{i}s}\,dt\\ &= 0 - \frac{1}{2\pi}\left[2t\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{-(\mathrm{i}s)^2}\right]_{t=-1}^{t=1} + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{-(\mathrm{i}s)^2}\,dt\\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}}{\pi s^2} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{(\mathrm{i}s)^3}\right]_{t=-1}^{t=1} = -\frac{2\cos(s)}{\pi s^2} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}}{-\mathrm{i}\pi s^3}\\ &= -\frac{2\cos(s)}{\pi s^2} + \frac{2\sin(s)}{\pi s^3} = \frac{2\sin(s)-2s\cos(s)}{\pi s^3}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 48:
Berechnen Sie

$$CH - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,\sin(2x)}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 48:
Behauptung: Es gilt $CH - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,\sin(2x)}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{\mathrm{e}^2}$.

Beweis: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = t\mathrm{e}^{-|t|}$ ist stückweise glatt und absolut integrierbar. Da f zudem stetig auf $\mathbb{R}$ ist, gilt laut VL (Umkehrformel):

$$f(t) = CH - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{ist}\,ds.$$

Nach Aufgabe 47 (ii) gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\,ds &= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{2is}{\pi(1+s^2)^2}(\cos(st) + i\sin(st))\,ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2s\sin(st}{\pi(1+s^2)^2}\,ds - \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2s\cos(st)}{\pi(1+s^2)^2}\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2s\sin(st)}{\pi(1+s^2)^2}\,ds\end{aligned}$$

aufgrund der Punktsymmetrie des zweiten Integranden. Speziell für $t = 2$ ergibt sich somit

$$2\mathrm{e}^{-2} = f(2) = CH - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2s\sin(2s)}{\pi(1+s^2)^2}\,ds,$$

woraus sich direkt

$$CH - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\sin(2x)}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{\mathrm{e}^2}$$

ergibt. □