Gruppe 1

Velislav Slavov, 2385786

ucsmm@student.kit.edu

A2

a) Da A inv.bar ist, folgt nach Satz 4.3.4:

(i) $a_1, \dots, a_n$ sind lin. unabhängig

Beweis:

Satz 4.3.4: $\ker A = \{0\}$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow x_1 \cdot a_{1,1} + \dots + x_n \cdot a_{n,1} = 0 \Rightarrow$ Zeile 1 von A ist lin. unabh.

$\vdots$

$x_1 \cdot a_{1,n} + \dots + x_n a_{n,n} = 0 \Rightarrow$ Zeile n von A ist lin. unabh.

$\Rightarrow$ Für jede Zeile aus A gilt:
die Elemente sind lin. unabh.
$\Rightarrow$ alle Spalten sind lin. unabh.

(ii) $a_1, \dots, a_n$ sind ein Erzeugendensystem für $\mathbb{K}^n$

Beweis:

Satz 4.3.4: $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \to Ax$ ist bijektiv

$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{K}^n : \exists x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = y$

$$Ax = \begin{matrix} x_1 \cdot a_{1,1} + \dots + x_n \cdot a_{n,1} \\ \vdots \\ x_1 \cdot a_{1,n} + \dots + x_n a_{n,n} \end{matrix} = x_1 \cdot a_1 + \dots + x_n a_n$$

$\Rightarrow LH((a_1, \dots, a_n)) = \mathbb{K}^n$

Aus (i) und (ii) Folgt: $a_1, \dots, a_n$ ist eine Basis von $\mathbb{K}^3$ ∎

A2 b) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^n$ und $\alpha \in \mathbb{K}$

(i) $b_i(x_1 + x_2) = \tilde{a}_i(x_1 + x_2) = \tilde{a}_i x_1 + \tilde{a}_i x_2 = b_i(x_1) + b_i(x_2)$

(ii) $b_i(\alpha x_1) = \tilde{a}_i(\alpha x_1) = (\tilde{a}_i \alpha) x_1 = \alpha(\tilde{a}_i x_1) = \alpha b_i(x_1)$

Aus (i) und (ii) Folgt: b_i sind lin. Abbildungen
und per Definition $\in (\mathbb{K}^n)^*$

Es gilt: $A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_n$
$\Rightarrow \tilde{a}_i A = 0 \dots \underset{i}{1} \dots 0 \Rightarrow \tilde{a}_i \cdot a_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$b_i(v) = b_i(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = \tilde{a}_i(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n)$

$= 0\lambda_1 + \dots + 1\lambda_i + \dots + 0\lambda_n = \lambda_i$

$\Rightarrow b_i$ sind die Koordinatenabbildungen von $(a_1, \dots, a_n)$

$\overset{\text{Satz 4.6.8}}{\Rightarrow} (b_1, \dots, b_n)$ ist die duale Basis zu $(a_1, \dots, a_n)$ ∎

A 4

a) Behauptung: β ist Bilinearform $\Rightarrow \Phi_\beta$ ist Bilinearform

Beweis:

Seien $x, y, z \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$

(i) Da $\beta(\cdot, x)$ linear $\Rightarrow \forall x, y, z \in V: \beta(y+z, x) = \beta(y, x) + \beta(z, x)$

$\Phi_\beta(x+y) = \beta(x+y, \cdot) = \beta(x, \cdot) + \beta(y, \cdot) = \Phi_\beta(x) + \Phi_\beta(y)$

(ii) Da $\beta(\cdot, x)$ linear $\Rightarrow \forall x, y \in V\ \lambda \in \mathbb{K}: \beta(\lambda y, x) = \lambda\beta(y, x)$

$\Phi_\beta(\lambda x) = \beta(\lambda x, \cdot) = \lambda\beta(x, \cdot) = \lambda\Phi_\beta(x)$

Aus (i) und (ii) folgt: Φ_β ist linear ■

c) $\beta(x, y) = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$

Definiere $B = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_4} \right)$

Definiere $B^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*, b_4^*)$ Koordinatenabbildungen

Bilder der Basisvektoren:

$$\Phi_\beta(b_1) = \beta(b_1, y) = -b_{1,1} \cdot y_1 + b_{1,2} y_2 + b_{1,3} y_3 + b_{1,4} y_4$$
$$= -1 y_1 + 0 y_2 + 0 y_3 + 0 y_4$$

$$\Phi_\beta(b_2) = \beta(b_2, y) = 0 y_1 + 1 y_2 + 0 y_3 + 0 y_4$$

$$\Phi_\beta(b_3) = \beta(b_3, y) = 0 y_1 + 0 y_2 + 1 y_3 + 0 y_4$$

$$\Phi_\beta(b_4) = \beta(b_4, y) = 0 y_1 + 0 y_2 + 0 y_3 + 1 y_4$$

Bilder dargestellt zur Basis B^*:

$$\Phi_\beta(b_1)_{B^*} = (-1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0)^T$$

$$\Phi_\beta(b_2)_{B^*} = (0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0)^T$$

$$\Phi_\beta(b_3)_{B^*} = (0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0)^T$$

$$\Phi_\beta(b_4)_{B^*} = (0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0)^T$$

$$\Rightarrow M_{B^*,B}(\Phi_\beta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$