Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

20. November 2020

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 19 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 5:
Eine Folge heißt *Nullfolge*, wenn sie gegen 0 konvergiert. Es sei (a_n) eine reelle Folge. Entscheiden Sie jeweils (durch Beweis oder Gegenbeispiel), welche der folgenden Bedingungen erzwingt, dass (a_n) eine Nullfolge ist:
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

(a) $|a_n| < \sqrt{\epsilon}$,
(b) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \epsilon$,
(c) $\left|2a_n - a_n^2\right| < \epsilon$,
(d) $|a_n \cdot a_m| < \epsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) *Behauptung:* Diese Bedingung erzwingt, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

Beweis: Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Die Bedingung (a) impliziert, dass für $\tilde{\epsilon} := \epsilon^2 > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - 0| = |a_n| < \sqrt{\tilde{\epsilon}} = \epsilon$, d.h. (a_n) konvergiert gegen 0. $\square$

(b) *Behauptung:* Diese Bedingung erzwingt nicht, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

Beweis: Definiere die Folge (a_n) durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \\ n & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit gilt $a_n \cdot a_{n+1} = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei nun $\epsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n \cdot a_{n+1}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Die Folge (a_n) erfüllt somit die Bedingung (b), sie ist aber keine Nullfolge (konvergiert nicht einmal). $\square$

(c) *Behauptung:* Diese Bedingung erzwingt nicht, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

Beweis: Definiere die Folge $a_n := 2$ $(n \in \mathbb{N})$. Diese erfüllt offensichtlich die Bedingung (c), ist aber keine Nullfolge. $\square$

(d) *Behauptung:* Diese Bedingung erzwingt, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

Beweis: Die Bedingung (d) besagt, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n \cdot a_m| < \epsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesodnere gilt die Ungleichung dann auch für $m = n$ und man erhält

$$|a_n \cdot a_n| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |a_n|^2 < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| < \sqrt{\epsilon}.$$

Dies entspricht gerade der Bedingung (a), woraus die Behauptung folgt. $\square$

Aufgabe 6 (K):
Untersuchen Sie die folgenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(a) $a_n := \sqrt{4n^2+n+5} - 2$, (b) $a_n := \frac{(n+2)^3-(n-1)^3}{(n-1)^2+2n^2+5}$,
(c) $a_n := (1+2(-1)^n)^n$, (d) $a_n := \frac{1+2+\cdots+n}{1+3+\cdots+(2n-1)}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(a) Die Folge (a_n) ist unbeschränkt und daher divergent.

Beweis: Es gilt:

$$a_n \geq \sqrt{4n^2} - 2 = 2n - 2 = 2(n-1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da die Folge (n) unbeschränkt ist, ist es auch die Folge (a_n), die somit divergiert. □

(b) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen 3.

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^3+6n^2+12n+8-(n^3-3n^2+3n-1)}{n^2-2n+1+2n^2+5} = \frac{9n^2+9n+9}{3n^2-2n+6} \\ &= \frac{9+\frac{9}{n}+\frac{9}{n^2}}{3-\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{9}{3} = 3, \end{aligned}$$

die Konvergenz gilt nach Satz 2.2. □

(c) *Behauptung:* Die Folge (a_n) divergiert.

Beweis: Da konvergente Folgen immer beschränkt sind (Satz 2.1 (b)), reicht es zu zeigen, dass die Folge (a_n) unbeschränkt ist. Wir zeigen daher:

$$\forall s > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon a_n > s. \tag{1}$$

Es sei also $s > 0$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \frac{s}{4}$ und definiere $n := 2k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$a_n = (1+2(-1)^n)^n = (1+2(-1)^{2k})^{2k} = (1+2)^{2k} \geq 1+4k > 4k > s,$$

wobei wir die Bernoullische Ungleichung verwendet haben. □

(d) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

Beweis: Nach Vorlesung gilt: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt (mit Satz 2.2):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n (2k-1)} = \frac{\sum_{k=1}^n k}{2\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2\frac{n(n+1)}{2} - n} = \frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1+\frac{1}{n}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 7:
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Das Produkt einer konvergenten Folge und einer beschränkten Folge ist ebenfalls konvergent.

(ii) Das Produkt einer konvergenten Folge und einer beschränkten Folge ist ebenfalls beschränkt.

(iii) Das Produkt einer Nullfolge und einer beschränkten Folge ist eine Nullfolge.

(iv) Das Produkt einer beliebigen Folge mit einer Nullfolge ist beschränkt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

(i) *Behauptung:* Die Aussage ist falsch.

Beweis: Es sei $a_n := 1$ $(n \in \mathbb{N})$ eine konstante Folge, die somit auch gegen 1 konvergiert. Definiere weiter $b_n := (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Die Folge (b_n) ist beschränkt, denn $|b_n| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Aber die Folge (c_n) mit $c_n := a_n \cdot b_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist nicht konvergent (siehe Vorlesung). □

(ii) *Behauptung:* Die Aussage ist wahr.

Beweis: Es seien (a_n) eine konvergente Folge und (b_n) eine beschränkte Folge (d.h. $|b_n| \leq B$ für ein $B \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$). Definiere $c_n := a_n \cdot b_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Nach Satz 2.1 (b) der Vorlesung ist die Folge (a_n) beschränkt, d.h. $|a_n| \leq A$ für ein $A \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt: $|c_n| = |a_n|\,|b_n| \leq A \cdot B =: C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (c_n) ist also beschränkt und die Aussage somit bewiesen. □

(iii) *Behauptung:* Die Aussage ist wahr.

Beweis: Es seien (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, d.h. $|b_n| \leq B$ für ein $B \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass dann auch die Folge (c_n) definiert durch $c_n := a_n \cdot b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge ist: es sei $\epsilon > 0$. Da (a_n) eine Nullfolge ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \frac{\epsilon}{B}$ für alle $n \geq n_0$. Somit gilt

$$|c_n| = |a_n|\,|b_n| \leq \frac{\epsilon}{B} \cdot B = \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

d.h. (c_n) konvergiert gegen 0. □

(iv) *Behauptung:* Die Aussage ist falsch.

Beweis: Definiere $a_n := n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ und $b_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Die Folge (b_n) ist eine Nullfolge, aber die Folge $c_n := a_n \cdot b_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist unbeschränkt. □

Aufgabe 8 (K):

(i) Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 0,\ a_1 := 1,\ a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass $a_n = \frac{2}{3}(1 - \frac{(-1)^n}{2^n})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Prüfen Sie diese Folge zudem auf Konvergenz.

(ii) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass dann eine Folge (a_n) existiert mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

(iii) Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b. Zeigen Sie, dass die Folge $c_n := \max\{a_n, b_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ gegen $\max\{a, b\}$ konvergiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8:

(i) *Voraussetzung:* Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 0,\ a_1 := 1,\ a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Behauptung: Es gilt: $a_n = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen $\frac{2}{3}$.

Beweis: Wir beweisen die explizite Darstellung der Folge durch vollständige Induktion:
IA: Für $n = 0$ gilt $a_0 = 0 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^0}{2^0}\right)$ und für $n = 1$ gilt $a_1 = 1 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^1}{2^1}\right)$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $a_n = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$ und $a_{n-1} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt mit der Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right) + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2(-1)^n}{2^{n+1}} + 1 - \frac{4(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{2(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{4(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Weiter gilt (für alle $n \in \mathbb{N}$):

$$\left|a_n - \frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \left|\frac{1}{2^n}\right| \le \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty),$$

d.h. $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen $\frac{2}{3}$. $\square$

(ii) *Voraussetzung:* Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt.
Behauptung: Dann exisitert eine Folge (a_n) mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

Beweis: Da A nichtleer und nach oben beschränkt ist, existiert $\sup A \in \mathbb{R}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ setze $\epsilon_n := \frac{1}{n} > 0$. Nach der Definition des Supremums gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ mit

$$a_n > \sup A - \epsilon_n.$$

Da das Supremum eine obere Schranke von A ist, gilt außerdem $a_n \le \sup A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen erhalten wir

$$|a_n - \sup A| \le \epsilon_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es nach Satz 1.3 (c) ein $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $k_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$. Somit gilt

$$|a_n - \sup A| \le \epsilon_n = \frac{1}{n} \le \frac{1}{k_\epsilon} < \epsilon$$

für alle $n \ge k_\epsilon$. Also konvergiert (a_n) gegen $\sup A$. $\square$

(iii) *Voraussetzung:* Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b.
Behauptung: Die Folge $c_n := \max\{a_n, b_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergiert gegen $\max\{a, b\}$.

Beweis: Wir zeigen zunächst:

$$\text{für } x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt: } \max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|). \tag{2}$$

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$, es gilt also $x \le y$ oder $y \le x$. O.B.d.A. gelte $y \le x$. Dann gilt $x - y \ge 0$ und somit

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x = \max\{x, y\},$$

womit (2) gezeigt wäre.
Nach Satz 2.2 gilt für die Folge (c_n):

$$c_n = \max\{a_n, b_n\} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \overset{(2)}{=} \max\{a, b\}.$$

$\square$