Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

9. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

15. Januar 2021

Abgabe bis 22. Januar 2021, 12:00 Uhr

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 92 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 33:

(i) Zeigen Sie, dass die im folgenden definierten Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind, und berechnen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(x)$:

(a) $f(x) := (x^4 + 1)\mathrm{e}^{x^3}$, (b) $f(x) := \left|x^2 - 4\right|^3$.

(ii) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion $f\colon [-1, 9] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^5, & x \in [-1, 1), \\ 2 - (x-2)^2, & x \in [1, 3), \\ 3x - 8, & x \in [3, 4], \\ \frac{12}{x}, & x \in (4, 9]. \end{cases}$$

Aufgabe 34 (K):

(i) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie dort deren Ableitung.

(a) $f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{\cos(x)}, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{1}{x}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$ (b) $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(c) $f(x) := (1 + x^2)^x$.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $y > x > 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$y \log y - x \log x \leq (y - x)(1 + \log y).$$

Aufgabe 35:

(i) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$, in denen diese existiert.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := (1 + x^2)\arctan(x)$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $L = \pi + 1$.

Aufgabe 36 (K):

(i) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)}$, (c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x\log(x)}{x^3 + 1}$.

(ii) Es sei $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ definiert durch $f(x) := (x^{\frac{1}{3}} + x)\sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in 544, d.h. $(f^{-1})'(544)$. *Hinweis:* Verwenden Sie, dass $f(64) = 544$.

Information

Aufgrund der aktuellen Situation wird dieses Modul teilweise in digitaler Form angeboten. Die gesamte Abwicklung wird über das System ILIAS stattfinden. Melden Sie sich dafür mit Ihrem KIT-Account an und treten Sie dem Kurs **Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik** bei. Sie können diesem Kurs direkt über folgenden Link beitreten:

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1253943_rcodeHa6wkYEysN&client_id=produktiv`

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Scheinkriterien, Tutorien, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

Zum Bearbeiten der Übungsblätter sollten Sie pro Woche etwa 9-10 Seiten des Skripts mithilfe der angebotenen Vorlesungsvideos durcharbeiten. Das kommende Übungsblatt wird den Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 102 beinhalten.

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-6 und 7-13 **jeweils** mindestens 48 bwz. 56 Punkte (50%) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Bitte beachten Sie den **Anmeldeschluss** am **21.02.2021**.