$\Sigma 22$

Velislav Slavov, 2385786, ucsmm@student.kit.edu

A1)

a)

A	B	$\overbrace{A \wedge B}^{C}$	$\neg C$	$A \mid B$
w	w	w	f	f
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	w	w

$\blacksquare$ 2/2

b) z.z. $\neg A \Leftrightarrow A \mid A$

aus a): $\underline{A \mid A} = \underline{\neg(A \wedge A)}$

$A \wedge A = A \Rightarrow \underline{\neg(A \wedge A)} = \underline{\neg A}$ $\blacksquare$ 2/2

c.1) $A \wedge B$

aus a): $\neg(A \wedge B) = A \mid B$ $\Rightarrow$ ~~$A \wedge B = \neg(A \mid B)$~~

$\Rightarrow \neg(\neg(A \wedge B)) = \neg(A \mid B)$ nach b)

$\Rightarrow A \wedge B = \neg(A \mid B)$ $\blacksquare$ $\Rightarrow (A \mid B) \mid (A \mid B)$ $\blacksquare$

c.2) $A \vee B$

aus b): $A = \neg(A \mid A)$ UND $B = \neg(B \mid B)$

$\Rightarrow A \vee B = \neg(A \mid A) \vee \neg(B \mid B)$

de Morg $\Rightarrow A \vee B = \neg((A \mid A) \wedge (B \mid B))$ $\blacksquare$ nach b) $= \neg((\neg A) \wedge (\neg B))$

nach a) $\Rightarrow \neg((\neg A) \wedge (\neg B)) = (\neg A) \mid (\neg B)$ $\blacksquare$ nach b) $\Rightarrow (A \mid A) \mid (B \mid B)$ $\blacksquare$

c.3) $A \Rightarrow B$

$$A \Rightarrow B \overset{S.1.1.6\ iii)}{=} \neg(A \wedge (\neg B))$$

nach a): $\neg(A \wedge (\neg B)) = A \mid (\neg B)$

$$\Rightarrow A \Rightarrow B = A \mid (\neg B) \overset{\text{nach } b)}{\Rightarrow} A \mid (B \mid B)$$ ✓

c.4) $A \Leftrightarrow B$

Fall $A \Rightarrow B$ – Folgt aus c.3 ✓

Fall $B \Rightarrow A$:

$$B \Rightarrow A \overset{S.1.1.6.\ iii)}{=} \neg(B \wedge (\neg A))$$

nach a): $\neg(B \wedge (\neg A)) = B \mid (\neg A)$

$$\Rightarrow B \Rightarrow A = B \mid (\neg A) \overset{\text{nach } b)}{\Rightarrow} B \mid (A \mid A)$$ ✓ ✓

~~Aus Fall + Def. für "<=>"~~

$\cancel{A \Leftrightarrow B = ((A \mid (B \mid B)) \wedge (B \mid (A \mid A)))}$

$\cancel{= (A \mid (B \mid B)) \wedge (B \mid (A \mid A))}$

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$ ✓

$$\overset{\text{nach } c.1}{\Rightarrow} ((A \Rightarrow B) \mid (B \Rightarrow A)) \mid ((A \Rightarrow B) \mid (B \Rightarrow A))$$

$$= ((A \mid (B \mid B)) \mid (B \mid (A \mid A))) \mid ((A \mid (B \mid B)) \mid (B \mid (A \mid A)))$$ ∎ ✓

6/6

10

A2) $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

a) Sei $x \in ((A\setminus B)\cap(A\setminus C))$

$\Leftrightarrow \{x \in (A\setminus B) \wedge x\in(A\setminus C)\}$

$\Downarrow \qquad\qquad \Updownarrow$

$(x\in A \wedge x\notin B) \wedge ((x\in A)\wedge(x\notin C))$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge \underbrace{((x\notin B)\wedge(x\notin C))}$ De Morgan

$\neg(x\in B \vee x\in C)$

$\underbrace{\neg(x\in(B\cup C))}$

$x\notin(B\cup C)$

$x\in(A\setminus(B\cup C))$ ✓

3/3

Du hast hier nur Äquivalenzumformungen gemacht. Also $x\in A\setminus(B\cup C) \Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ gezeigt. Das genügt. Wäre allerdings an einer Stelle eine echte Implikation, so hättest du lediglich $A\setminus(B\cup C)\subseteq(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ gezeigt.

b) $A\times\bigcap_{i\in I} M_i = \bigcap_{i\in I}(A\times M_i)$, $M_i\subseteq D$

$\cancel{\bigcap_{i\in I} M_i \quad A\times\bigcap_{i\in I} M_i = \{(x,y) \mid x\in A,\ y\in\bigcap_{i\in I} M_i}$

$\cancel{\{y\in D \mid \forall i\in I: y\in M_i\}}$

$\cancel{\{(x,y) \mid x\in A,\ \forall i\in I: y\in M_i}$

$\forall i\in I: x\in(A\times M_i) \qquad (x,y)=z$

$\forall i\in I: (x,y) \mid x\in A,\ y\in M_i$

s.o. zu Äquivalenzen & Implikationen.

$\overset{(x,y)}{\Leftrightarrow} x\in A,\ \forall i\in I: y\in M_i \Leftrightarrow x\in A,\ y\in\bigcap_{i\in I} M_i$

3/3

$\Leftrightarrow z\in(A\times\bigcap_{i\in I} M_i)$ ✓

c) $\bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(M_i) \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)$

z.z. $N \in \bigcup_{i\in I}\mathcal{P}(M_i) \Rightarrow N \in \mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)$

Annahme: $N \in \bigcup_{i\in I}\mathcal{P}(M_i)$

z.z. $N\in\mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I}M_i\right)$

$\exists i\in I: N\in \mathcal{P}M_i$

$N \subseteq \bigcup_{i\in I} M_i$

$\forall n: n\in N \Rightarrow n\in\bigcup_{i\in I}M_i$

$N\subseteq M_i$

$\forall n\in N \Rightarrow \exists i\in I: n\in M_i$

$\Rightarrow n\in \bigcup_{i\in I} M_i \Rightarrow N\subseteq \bigcup_{i\in I} M_i \Rightarrow N\in\mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)$ ■ ✓

2/2

d) $\mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in I}\mathcal{P}(M_i)$?

8

z.z. $N\in\mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) \Rightarrow N\in\bigcup_{i\in I}\mathcal{P}(M_i)$

Annahme: $N\in\mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)$

0/2

$\forall n\ \exists i\in I: n\in N\in\mathcal{P}(M_i)$

$\forall n: n\in N\in \bigcup_{i\in I}\mathcal{P}(M_i)$ f

$N\subseteq \bigcup_{i\in I} M_i$

$\forall n: n\in N\Rightarrow n\in\bigcup_{i\in I}M_i$

$n\in\{x \mid \exists i\in I: x\in M_i\}$

$\forall n$ $\exists i\in I: n\in M_i$

$\exists i\in I: (n\in N\Rightarrow n\in M_i) \neq \forall n\ \exists i\in I: N\subseteq M_i$

f Aus $N\subseteq \bigcup_i M_i$ folgt i.A. nicht $N\subseteq M_i$ für geeignetes $i\in I$.

8

falls inj: $\forall m_1, m_2 \in M \ (f(m_1) = f(m_2)) \Rightarrow m_1 = m_2$

A3)

a) $f_1: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad$ z.z. $(f_1(z_1) = f_1(z_2)) \Rightarrow (z_1 = z_2)$

$z \mapsto 2z$

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

$f_1(z_1) = z_1/2$

$f_1(z_2) = z_2/2$

Annahme: $f_1(z_1) = f_1(z_2)$

$z_1/2 = z_2/2 \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow$ injektiv ✓

z.z. $f_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

$f_1(\mathbb{Z}) = \{z' \in \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{Z}: f_1(z) = z'\}$

$z' \in f_1(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow z' \in \mathbb{Z}$

Fall "$\Rightarrow$"

Annahme:

$z' \in f_1(\mathbb{Z})$

Du darfst ganze Sätze schreiben. Also:

"Es ex. kein $z \in \mathbb{Z}$ mit $z' = 2z$."

$f_1(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow z' \in \mathbb{Z}$ (per Definition)

Fall "$\Leftarrow$"

Annahme:

$z' \in \mathbb{Z}$ $\quad$ Sei z' ungerade

$\Rightarrow \nexists z \in \mathbb{Z}: 2z = z')$ $\quad$! surjektiv ✓

$z/2 \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\Rightarrow z \notin f_1(\mathbb{Z})$ $\quad$ ↯

3/3

$\lfloor x \rfloor$ = größte Zahl z, $z \leq x \Rightarrow z+1 > x$

b) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \, (f_2(z_1) = f_2(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2)$

$z \mapsto \left\lfloor \frac{z}{2} \right\rfloor$

Annahme: ~~$f_2(z_1) = f_2(z_2)$~~ $z_1 \neq z_2$

Sei $z_1 = z_2 + 1$

$f_2(z_1) = \left\lfloor \frac{z_2+1}{2} \right\rfloor =$

$f_2(z_2) = \left\lfloor \frac{z_2}{2} \right\rfloor$

$f_2(z_1) \leq \frac{z_2+1}{2} = \frac{z_2}{2} + \frac{1}{2}$

$f_2(z_2) \leq \frac{z_2}{2} -$

$\Rightarrow f_2(z_2) < \frac{z_2}{2} + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Falls $f_2(z_1) = \frac{z_2}{2} + \frac{1}{2}$

$f_2(z_1) > f_2(z_2) \Rightarrow \exists z_1, z_2 \in \mathbb{Z} : f_2(z_1) \neq f_2(z_2)$ ↯

$\Rightarrow$! injektiv

Es genügt hier auch einfach ein Gegenbeispiel.

$f_2(1) = f_2(0)$, aber $1 \neq 0$.

$f_2(z) = z'$

Fall "=>" z.z. $f_2(\mathbb{Z}) \overset{z' \in}{<=>} z' \in \mathbb{Z}$

$f_2(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ (per Definition) ✓

$=> z' \in f_2(\mathbb{Z}) => z' \in \mathbb{Z}$

Fall "<=" z.z. $z' \in \mathbb{Z} => z' \in f_2(\mathbb{Z})$

Annahme $z' \in \mathbb{Z}$

$f_2(\mathbb{Z}) = \{ z' \in \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : f_2(z) = z' \}$

$z' = \lfloor \frac{z}{2} \rfloor \in \mathbb{Z}$

$f_2(z) \leq \frac{z}{2}$

Wir brauchen für $x \in \mathbb{Z}$ ein $y \in \mathbb{Z}$ sodass $f_2(y) = x$. Offensichtlich ist $f_2(2x) = x$ und $2x \in \mathbb{Z}$. Wir finden also für jedes $x \in \mathbb{Z}$ ein $y \in \mathbb{Z}$ mit $f_2(y) = x$.

1/3

4