Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I **Winter-Semester 2020/2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 13 **15.02.21**

Dieses Übungsblatt geht nicht mehr in die Bewertung ein.

Aufgabe 1

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\partial_X \colon \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K}[X]\\ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i i X^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(i+1)X^i\end{aligned}$$

a) Es sei $U_n \subseteq \mathbb{K}[X]$ derjenige Untervektorraum, der aus den Polynomen bis zum Grad n besteht. Beweisen Sie, dass $\partial_x(U_n) \subseteq U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Bestimmen Sie eine geordnete Basis B von U_n und die Darstellungsmatrix von $\partial_x|_{U_n}^{U_n}$ bezüglich B, für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $\partial_x|_{U_n}^{U_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von ∂_x.

e) Gelten Ihre Ergebnisse in Aufgabenteil c),d) auch für andere Körper?

Lösung zu Aufgabe 1

a) Ist $p \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom vom Grad n dann ist $\partial_X(p)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ also insbesondere vom Grad $\leq n$.

b) Aus der Vorlesung wissen wir bereits, dass $\{X^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ eine Basis von $\mathbb{K}[X]$ ist. Nun erzeugen $1, X, \ldots, X^n$ den Vektorraum U_n. Also ist $B = (1, \ldots, X^n)$ eine geordnete Basis von U_n. Dann ist

$$M_{B,B}(\partial_X|_{U_n}^{U_n}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Da $M_{B,B}(\partial_X|_{U_n}^{U_n})$ bereits eine obere Dreiecksmatrix ist, können wir das charakteristische Polynom ablesen: $p_{\partial_X|_{U_n}^{U_n}}(T) = T^{n+1}$. Also ist 0 der einzige Eigenwert von $\partial_X|_{U_n}^{U_n}$. Weiterhin ist

$$E_0(\partial_X|_{U_n}^{U_n}) = \ker(M_{B,B}(\partial_X|_{U_n}^{U_n})) = \mathrm{LH}(1).$$

d) Ist $v \in \mathbb{K}[X]$ ein Eigenvektor von ∂_X dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $v \in U_n$ und v ist ein Eigenvektor von $\partial_X|_{U_n}^{U_n}$. Also gilt $v \in \mathbb{K}$ ist ein Eigenvektor von $\partial_X|_{U_n}^{U_n}$ also auch ∂_X zum Eigenwert 0.

e) Etwa in $\mathbb{F}_p$ für p eine Primzahl ist 1 auch ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Aber auch X^{kp} für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0.

Aufgabe 2 (*Diagonalisieren einer Matrix*)

Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie Basen aller Eigenräume von A.

b) Bestimmen Sie eine geordnete Basis $\mathrm{B} = (b_1, \ldots, b_4)$ von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A und bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $S = M_{\mathrm{E},\mathrm{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$.

c) Rechnen Sie nach, dass $AS = SD$ gilt, wobei D die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ ist. Dabei sei λ_i jeweils der Eigenwert zum Eigenvektor b_i für $i = 1, \ldots, 4$.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} p_A(X) = \det \begin{pmatrix} X+2 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & X & 8 & 6 \\ 0 & 0 & X-4 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & X+5 \end{pmatrix} &= (X+2) \cdot \det \begin{pmatrix} X & 8 & 6 \\ 0 & X-4 & -3 \\ 0 & 6 & X+5 \end{pmatrix} \\ &= (X+2)X \cdot \det \begin{pmatrix} X-4 & -3 \\ 6 & X+5 \end{pmatrix} = (X+2)X((X-4)(X+5)+3\cdot 6) \\ &= (X+2)X(X^2+X-2) \\ &= (X+2)^2X(X-1) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von p_A, also $-2, 0$ und 1. Wir bestimmen die Eigenräume:

$$
\begin{aligned}
E_{-2}(A) = \ker(-2\,\mathbb{1}_4 - A) &= \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -1 \\ + \\ \\ + \end{array} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \\ \end{array} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ 2 \\ \\ \\ \end{array} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

Diese beiden Vektoren sind linear unabhängig, bilden also eine Basis des Eigenraums. Also ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts -2 gerade $\dim(E_{-2}(A)) = 2$, also gleicht der algebraischen Vielfachheit (also der Potenz des entsprechenden Linearfaktors in p_A).

Die Algebraische Vielfachheit der Eigenwerte 0 und 1 ist jeweils 1, also muss die geometrische Vielfachheit auch jeweils 1 sein (da diese immer zwischen 1 und der algebraischen Vielfachheit liegt). Das heißt, diese beiden Räume werden jeweils von einem Vektor aufgespannt. Dies lässt sich nutzen, um Rechenarbeit zu sparen:

$$
E_0(A) = \ker(0\,\mathbb{1}_4 - A) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
$$

$$
E_1(A) = \ker(1\,\mathbb{1}_4 - A) = \ker \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
$$

Die oben angegebenen Erzeugendensysteme sind jeweils auch linear unabhängig, also Basen der jeweiligen Eigenräume.

b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Summe der Eigenräume direkt ist. Durch Vereinigen der Basen ergibt sich also die geordnete Basis

$$
\mathrm{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
$$

des Raumes $E_{-2}(A) \oplus E_0(A) \oplus E_1(A) \subseteq \mathbb{R}^4$. Da B aus vier Vektoren besteht, haben wir somit schon eine Basis von $\mathbb{R}^4$ gefunden. Schreibt man die Vektoren in die Spalten einer Matrix, ergibt sich die Basiswechselmatrix

$$S = M_{\mathrm{E,B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Man rechnet nach:

$$\begin{aligned} AS &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = SD \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*Simultane Diagonalisierbarkeit*)

Es seien $\Phi, \Psi\colon V \to V$ zwei Endomorphismen eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V.

a) Beweisen Sie: Falls es eine Basis B von V gibt, so dass die Abbildungsmatrizen von Φ und Ψ zugleich Diagonalgestalt haben, dann gilt $\Phi\Psi = \Psi\Phi$.

Ab jetzt gelte $\Phi\Psi = \Psi\Phi$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

b) Es gilt $\Psi\big(E_\lambda(\Phi)\big) \subseteq E_\lambda(\Phi)$ für jeden Eigenwert λ von Φ.

c) Wenn $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\Psi(U) \subseteq U$ ist, und es Eigenvektoren $v_1, \dots v_k \in V$ von Ψ zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gibt, die $v_1 + \cdots + v_k \in U$ erfüllen, dann gilt auch $v_1, \dots v_k \in U$.

Hinweis: Betrachten Sie das Polynom $p = \prod_{i=1}^{k-1}(X - \lambda_i)$, wenden Sie die Abbildung $p(\Psi)$ auf $v_1 + \cdots + v_k$ an, und errinnern Sie sich an Aufgabe 1 von Blatt 12.

d) Ist Ψ diagonalisierbar, so ist für jeden Eigenwert λ von Φ auch die Einschränkung

$$\Psi\big|_{E_\lambda(\Phi)}^{E_\lambda(\Phi)}\colon E_\lambda(\Phi) \to E_\lambda(\Phi)$$

diagonalisierbar.

e) Sind Φ und Ψ beide diagonalisierbar, so gibt es eine Basis B von V bezüglich derer die Abbildungsmatrizen von Φ und Ψ zugleich Diagonalgestalt haben.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Angenommen, es gibt so eine Basis B mit

$$M_{\mathrm{B,B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad M_{\mathrm{B,B}}(\Psi) = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \eta_n \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{B,B}}(\Phi \circ \Psi) = M_{\mathrm{B,B}}(\Phi) M_{\mathrm{B,B}}(\Psi) &= \begin{pmatrix} \lambda_1\eta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\eta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\eta_n \end{pmatrix} \\ &= M_{\mathrm{B,B}}(\Psi) M_{\mathrm{B,B}}(\Phi) = M_{\mathrm{B,B}}(\Psi \circ \Phi) \end{aligned}$$

Also auch $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$, da lineare Abbildungen eindeutig durch ihre Darstellungsmatrizen bestimmt sind.

b) Angenommen, wir haben einen Vektor $w \in \Psi\big(E_\lambda(\Phi)\big)$. Dann gibt es ein $v \in E_\lambda(\Phi)$ mit $w = \Psi(v)$. Daraus folgt

$$\Phi(w) = \Phi(\Psi(v)) = \Psi(\Phi(v)) = \Psi(\lambda v) = \lambda\Psi(v) = \lambda w.$$

Also gilt auch $w \in E_\lambda(\Phi)$. Da dies für alle $w \in \Psi\big(E_\lambda(\Phi)\big)$ gilt, ist die Behauptung bewiesen.

c) Angenommen, $\Psi(U) \subseteq U$, dann ist auch $\Psi^0(U) = \mathrm{id}(U) = U$, $\Psi^k(U) \subseteq U$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $(p(\Psi))(U) \subseteq U$ für das Polynom $p \in \mathbb{K}[X]$.
Wenn wir nun Eigenvektoren $v_1, \dots v_k \in V$ von Ψ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ haben, die $v_1 + \dots + v_k \in U$ erfüllen, dann gilt nach der Lösung von Blatt 12,Aufgabe 1 b):

$$\begin{aligned} & & (p(\Psi))(v_i) &= p(\lambda_i) \cdot v_i \quad \text{für alle} \quad i = 1, \dots k \\ &\implies & (p(\Psi))(v_1 + \dots + v_k) &= \underbrace{p(\lambda_1)v_1 + \dots + p(\lambda_{k-1})v_{k-1}}_{=0} + \underbrace{p(\lambda_k)}_{\neq 0} v_k \in U \\ &\implies & p(\lambda_k)v_k &\in U \\ &\implies & v_k &\in U \end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Indizes erhalten wir analog die Aussagen $v_1 \in U, \dots v_{k-1} \in U$.

d) Wir setzen $U = E_\lambda(\Phi)$. Nach Teilaufgabe b) gilt $\Psi(U) \subseteq U$. Ist Ψ diagonalisierbar, so lässt sich jedes Element von V und somit auch jedes Element von U als Summe aus Eigenvektoren $v_1, \dots v_k \in V$ von Ψ schreiben. Diese Eigenvektoren liegen nach Teilaufgabe c) alle selbst schon in U. Das bedeutet, jedes Element in U lässt sich als Summe von Eigenvektoren von $\Psi|_U^U$ schreiben, also ist $\Psi|_U^U$ diagonalisierbar.

e) Wir wählen für jeden Eigenraum $E_\lambda(\Phi)$ von Φ jeweils eine Basis aus Eigenvektoren von $\Psi|_{E_\lambda(\Phi)}^{E_\lambda(\Phi)}$. Da die direkte Summe der Eigenräume von Φ ganz V ist, können wir die Basen zu einer Basis von V vereinigen. Jeder einzelne Basisvektor ist dann sowohl Eigenvektor von Φ als auch Eigenvektor von Ψ, also sind die Darstellungsmatrizen beide diagonal.

Aufgabe 4 *(Kästchensatz)*

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(p+q)\times(p+q)}$$

eine Blockmatrix, die aus den quadratischen Matrizen $A \in \mathbb{K}^{p\times p}$, und $D \in \mathbb{K}^{q\times q}$ und den rechteckigen Matrizen $B \in \mathbb{K}^{p\times q}$ und $C \in \mathbb{K}^{q\times p}$ durch Nebeneinanderschreiben der Einträge zusammengesetzt ist.

a) Beweisen Sie: Falls $B = 0$ oder $C = 0$ ist, gilt $\det(M) = \det(A)\det(D)$.

b) Finden Sie ein Beispiel für $p = q$, in dem $\det(M) \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Wir bezeichnen mit m_{ij} den (i,j)-Eintrag von M Nehme an $B = 0$. Der Beweis für $C = 0$ lässt sich auf den anderen Fall übertragen.

Sei $\sigma : \{1,\ldots,p+q\} \to \{1,\ldots,p+q\}$ eine Permutation. Wird $\{1,\ldots,p\}$ von σ invariant gehalten so wird (aus Platzgründen) auch $\{p+1,\ldots,p+q\}$ von σ invariant gehalten. Gibt es ein $i \in \{1,\ldots,p\}$ mit $\sigma(i) \in \{p+1,\ldots,p+q\}$ dann ist $m_{i\sigma(i)} = 0$.

Nach den Vorüberlegungen können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \sum_{\sigma\in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{p+q} m_{i\sigma(i)} \\
&= \sum_{\substack{\sigma\in S_{p+q} \\ \sigma(\{1,\ldots,p\})=\{1,\ldots,p\}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{p+q} m_{i\sigma(i)} \\
&= \sum_{\substack{\sigma_1\in S_p \\ \sigma_2\in S_q}} \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2) \prod_{i=1}^{p} m_{i\sigma_1(i)} \prod_{i=1}^{q} m_{(i+p)(\sigma_2(i)+p)} \\
&= \left(\sum_{\sigma_1\in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma_1) \prod_{i=1}^{p} m_{i\sigma_1(i)}\right) \left(\sum_{\sigma_2\in S_q} \operatorname{sgn}(\sigma_2) \prod_{i=1}^{q} m_{(i+p)(\sigma_2(i)+p)}\right) \\
&= \det(A)\det(D)
\end{aligned}$$

b) Setze $M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Betrachten wir M als Blockmatrix mit 2×2-Blöcken, dann ist

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$