Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

4. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Sommersemester 2021

14. Mai 2021

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 30 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 13 (K):

(i) Die zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ werden definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & 0 < y < x^2, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad g(x,y) := \begin{cases} x, & xy \geq 0, \\ x+y, & xy < 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie für f und g alle Richtungsableitungen im Nullpunkt, sofern sie existieren.

(ii) Es seien $D := \mathbb{R} \times (-1,1)$ und $g\colon D \to \mathbb{R}, g(x,y) := \arctan(x)y^2$. Zeigen Sie, dass g Lipschitz-stetig ist, d.h. es existiert eine Konstante $C \geq 0$, sodass gilt:

$$|g(x) - g(y)| \leq C\|x - y\| \quad (x, y \in D).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 13:

(i) *Behauptung:* Alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren und haben den Wert 0

Beweis: Es sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ ein Richtungsvektor. Per Definition gilt dann

$$\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+ta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(ta_1, ta_2)}{t},$$

denn $f(0,0) = 0$. Ist $a_2 = 0$, so gilt $f(ta_1, ta_2) = 0$ für alle t. Sei also $a_2 \neq 0$. Dann gilt für alle hinreichend kleinen t: $a_1^2\,|t| \leq |a_2|$, also $(a_1 t)^2 \leq |ta_2|$. Somit ist entweder $ta_2 < 0$ und damit $f(ta_1, ta_2) = 0$, oder aber $(a_1 t)^2 \leq ta_2$ und demnach ebenfalls $f(ta_1, ta_2) = 0$. Insgesamt gilt für hinreichend kleine t stets $f(ta_1, ta_2) = 0$, d.h. sämtliche Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren und haben jeweils den Wert 0. □

Behauptung: Alle Richtungsableitungen von g im Nullpunkt existieren und für alle $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $a_1^2 + a_2^2 = 1$ gilt

$$\frac{\partial g}{\partial a}(0,0) = \begin{cases} a_1, & \text{falls } a_1 a_2 \geq 0, \\ a_1 + a_2, & \text{falls } a_1 a_2 < 0. \end{cases}$$

Beweis: Es sei wieder $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine Richtung, d.h. $a_1^2 + a_2^2 = 1$. Wegen $g(0,0)$ gilt dann

$$\frac{\partial g}{\partial a}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{g((0,0)+ta) - g(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(ta_1, ta_2)}{t}.$$

Gilt $a_1 a_2 \geq 0$, so gilt ebenso $ta_1 \cdot ta_2 = t^2 a_1 a_2 \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit

$$\frac{\partial g}{\partial a}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(ta_1, ta_2)}{t} = \frac{ta_1}{t} = a_1.$$

Ist $a_1 a_2 < 0$, so auch $ta_1 \cdot ta_2 = t^2 a_1 a_2 < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und demzufolge

$$\frac{\partial g}{\partial a}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(ta_1, ta_2)}{t} = \frac{ta_1 + ta_2}{t} = a_1 + a_2.$$

□

(ii) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $|g(x) - g(y)| \le \sqrt{1+\pi^2}\|x-y\|$ $((x,y) \in D)$.

<u>*Beweis:*</u> Die Funktion g ist auf D differenzierbar mit

$$g'(x,y) = \left(\frac{y^2}{1+x^2}, 2y\arctan(x)\right).$$

Damit erhält man für alle $(x,y) \in D$ (Beachte: $|y| \le 1$ und $|\arctan(x)| \le \frac{\pi}{2}$):

$$\|g'(x,y)\|^2 = \frac{y^4}{(1+x^2)^2} + 4y^2\arctan^2(x) \le 1 + 4 \cdot \frac{\pi^2}{4} = 1 + \pi^2.$$

Es seien nun $a, b \in D$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in S[a,b] \subseteq D$ mit $g(b) - g(a) = g(\xi) \cdot (b-a)$. Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt

$$|g(b) - g(a)| = |g'(\xi) \cdot (b-a)| \le \|g'(\xi)\| \cdot \|b-a\| \le \sqrt{1+\pi^2}\|b-a\|,$$

d.h. g ist Lipschitz-stetig. $\square$

Aufgabe 14:
Die Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ erfülle folgende Bedingung:

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Zeigen Sie, dass dann für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt: $f(x+y,0) = f(x,y)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 14:
<u>*Voraussetzung:*</u> Die Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ erfülle folgende Bedingung:

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2). \tag{1}$$

<u>*Behauptung:*</u> Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $f(x+y,0) = f(x,y)$.

<u>*Beweis:*</u> Es sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein ξ zwischen $(x+y,0)$ und (x,y), sodass gilt:

$$\begin{aligned} f(x+y,0) - f(x,y) &= f'(\xi) \cdot ((x+y,0) - (x,y)) = f'(\xi) \cdot (y,-y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi)y - \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)y = 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung wegen (1) gilt. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 15:

(i) Wenden Sie den aus der Vorlesung bekannten Satz von Taylor auf die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$$

an der Stelle $(3,4)$ an und schätzen Sie die Differenz der Funktion und des Taylor-Polynoms erster Ordnung für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|(x-3, y-4)| < 0.1$ ab.
Hinweis: Dieses Taylor-Polynom ist gegeben durch

$$P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad P(x,y) = f(3,4) + \operatorname{grad} f(3,4) \cdot (x,y).$$

(ii) Untersuchen Sie die folgende Funktion auf lokale und globale Extrema.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x^2+2y^2)e^{-x^2-y^2}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 15:

(i) *Behauptung:* Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|(x-3, y-4)| < 0.1$ ist die Differenz von f und ihrer linearen Approximation kleiner gleich $0,0024$.

Beweis: Für die partiellen Ableitungen von f ergeben sich für $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es sei $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $S[(3,4), (3,4)+h] \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dann gilt nach dem Satz von Taylor: Es existiert ein $\xi \in S[(3,4), (3,4)+h]$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} f((3,4)+(h_1,h_2)) &= f(3,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,4)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4)h_2 + \frac{1}{2}\left(H_f(\xi)h\right) \cdot h \\ &= 5 + \frac{3}{5}h_1 + \frac{4}{5}h_2 + \frac{1}{2}\left(H_f((3,4)+\theta(h_1,h_2))h\right) \cdot h \end{aligned}$$

mit einem $\theta \in [0,1]$. Auf $U_{\frac{1}{10}}(3,4)$ gilt:

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right| \leq \frac{4,1^2}{(2,9^2+3,9^2)^{\frac{3}{2}}} < 0,15$$

und genauso

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right| \leq 0,09, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right| \leq 0,12.$$

Somit gilt für $\|h\| \leq 1$

$$\frac{1}{2}\left(H_f(3,4)+\theta(h_1,h_2)h\right) \cdot h \leq \frac{1}{2} \cdot 0,15 \cdot 0,1^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,09 \cdot 0,1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,12 \cdot 0,1^2 = 0,0024,$$

woraus die Behauptung folgt. □

(ii) *Behauptung:* f besitzt in $(0,0)$ ein globales Minimum und globale Maxima in den Punkten $(0, \pm 1)$ (mit Wert $f(0, \pm 1) = \frac{2}{\mathrm{e}}$) und keine weiteren Extrema.

Beweis: f ist als Komposition differenzierbarer C^2–Funktionen wieder eine C^2–Funktion und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} - 2x(x^2+2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = (2x-2x^3-4xy^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y\mathrm{e}^{-x^2-y^2} - 2y(x^2+2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = (4y-2x^2y-4y^3)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}.$$

Damit ergibt sich für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x - 2x^3 - 4xy^2 = 0 \quad \wedge \quad 4y - 2x^2y - 4y^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x = 0 \ \vee \ 1 - x^2 - 2y^2 = 0) \quad \wedge \quad (y = 0 \ \vee \ 2 - x^2 - 2y^2 = 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y = 0) \ \vee \ (x = 0 \ \wedge \ 2 - 2y^2 = 0) \ \vee \ (1 - x^2 = 0 \ \wedge \ y = 0). \end{aligned}$$

Die stationären Punkte von f sind also $(0,0),(0,\pm 1)$ und $(\pm 1,0)$. Wegen $f(0,0)=0<f(x,y)$ für alle $(x,y)\neq(0,0)$ hat f in $(0,0)$ ein globales Minimum. Weiter gilt für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)&=(2-6x^2-4y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}-2x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)&=(4-2x^2-12y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}-2y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y),\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)&=-4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}-2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y),\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)&=-8xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}-2y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).\end{aligned}$$

Da in den stationären Punkten die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ verschwinden, erhalten wir

$$H_f(0,\pm 1)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pm 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,\pm 1)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,\pm 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\pm 1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\mathrm{e}} & 0\\ 0 & -\frac{8}{\mathrm{e}}\end{pmatrix}$$

und

$$H_f(\pm 1,0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\pm 1,0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\pm 1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\pm 1,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{\mathrm{e}} & 0\\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}}\end{pmatrix}.$$

Wegen $-\frac{2}{\mathrm{e}}<0$ und $\det H_f(0,\pm 1)=\frac{16}{\mathrm{e}^2}>0$ ist $H_f(0,\pm 1)$ negativ definit, also hat f in $(0,\pm 1)$ lokale Maxima (der Wert ist jeweils $f(0,\pm 1)=\frac{2}{\mathrm{e}}$). Für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $\|(x,y)\|\to\infty$ gilt $|f(x,y)|\to 0$, somit handelt es sich in diesen Punkten um globale Maxima.

Wegen $\det H_f(\pm 1,0)=-\frac{8}{\mathrm{e}}<0$ ist $H_f(\pm 1,0)$ indefinit. In den Punkten $(\pm 1,0)$ hat f also keine Extrema. □

Aufgabe 16 (K):

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f\colon D\to\mathbb{R}$ auf lokale und globale Extrema:

(i) $D:=\mathbb{R}^2$, $f(x,y):=(x-y)^2-8xy$,

(ii) $D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$, $f(x,y)=xy^2(x+y-1)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 16:

(i) *Behauptung:* f hat keine Extrema.

Beweis: Die Funktion f ist nach oben und nach unten unbeschränkt, hat daher kein globales Extremum. Für die lokalen Extrema gilt:

$$\begin{aligned}f'(x,y)\overset{!}{=}0\quad&\Leftrightarrow\quad\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2(x-y)-8y=0\quad\wedge\quad\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-2(x-y)-8x=0\\ &\Leftrightarrow\quad 2x-10y=0\quad\wedge\quad -10x+2y=0.\end{aligned}$$

Folglich ist $(0,0)$ der einzige stationäre Punkt. Für die Hessematrix gilt

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2 & -10\\ -10 & 2\end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Insbesondere ist

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2 & -10\\ -10 & 2\end{pmatrix}.$$

Da $\det(H_f(0,0))=-96<0$, ist die Hessematrix $H_f(0,0)$ nach Satz 18.9(c) indefinit. Daher hat f nach Satz 18.10 in $(0,0)$ kein lokales Extremum. Also gibt es insgesamt wegen Satz 18.10 keine lokalen Extrema. □

(ii) *Behauptung:* f hat in $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ein globales Minimum, und jeder Punkt auf dem Rand von D ist ein globales Maximum.

Beweis: Da f eine stetige Funktion ist, wird auf der kompakten Menge das Maximum und Minimum angenommen. Ferner gilt für $(x,y) \in D$, $x, y \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f'(x,y) &= (y^2(x+y-1) + xy^2, 2xy(x+y-1) + xy^2) \overset{!}{=} (0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^2(2x+y-1) \\ xy(2x+3y-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2x+y-1 \\ 2x+3y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Auf dem Rand von D gilt $f \equiv 0$ und im Inneren $f < 0$. Damit ist $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ein globales Minimum und jeder Punkt auf dem Rand ein globales Maximum. Es gibt keine weiteren lokalen Extrema. $\square$