Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 2 **26.03.21**

Aufgabe 1 (*Ein Skalarprodukt auf dem Polynomraum*) (*10 Punkte*)

Wir betrachten das reelle Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}\\ (f,g) &\mapsto \langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

auf dem Polynomraum $\mathbb{R}[X]$.
Wir nennen ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ ein *gerades Polynom*, wenn $f(-t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, und *ungerades Polynom*, wenn $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

a) Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein gerades und $g \in \mathbb{R}[X]$ ein ungerades Polynom. Beweisen Sie, dass f und g dann orthogonal zueinander sind.

b) Bestimmen Sie $\langle X^p, X^q\rangle$ für alle $p, q \in \mathbb{N}_0$.

c) Bestimmen Sie alle Polynome von Grad ≤ 2 in $\mathbb{R}[X]$, die gleichzeitig orthogonal zu den Polynomen 1 und X sind.

d) Bestimmen Sie zwei Polynome von Grad 1 in $\mathbb{R}[X]$, die orthogonal zueinander sind.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Es gilt $f(-t)g(-t) = -f(t)g(t)$, also ist fg ungerade. Substituieren wir t durch $-t$, so erhalten wir

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(-t)g(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} -f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -\langle f,g\rangle \implies \langle f,g\rangle = 0.$$

b) Das Polynom X^p ist gerade, wenn p gerade ist, und ungerade, wenn p ungerade ist. Daraus folgt direkt $\langle X^p, X^q\rangle = 0$, falls $p \not\equiv q \pmod 2$ gilt.

Nun sei also $p \equiv q \pmod 2$. In diesem Fall gilt

$$\langle X^p, X^q\rangle = \int_{-1}^{1} t^p\, t^q\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^{p+q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+q+1}\left(1^{p+q+1} - (-1)^{p+q+1}\right) = \frac{2}{p+q+1},$$

da $p + q + 1$ dann ungerade (und insbesondere nicht 0) ist.

(Auch an dieser Rechnung kann man erkennen, dass $\langle X^p, X^q\rangle = 0$ für $p \not\equiv q \pmod 2$ gilt.)

c) Alle Polynome von Grad ≤ 2 haben die Form $a_2X^2 + a_1X + a_0$ für $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\langle a_2X^2 + a_1X + a_0, 1\rangle &= a_2\langle X^2, 1\rangle + a_1\langle X, 1\rangle + a_0\langle 1, 1\rangle = \frac{2}{3}a_2 + 2a_0\\ \langle a_2X^2 + a_1X + a_0, X\rangle &= a_2\langle X^2, X\rangle + a_1\langle X, X\rangle + a_0\langle 1, X\rangle = \frac{2}{3}a_1\end{aligned}$$

Die gesuchten Polynome sind also genau die mit $a_1 = 0$ und $a_2 = -3a_0$. Die Menge dieser Polynome lässt sich als $\mathrm{LH}(3X^2 - 1)$ schreiben.

d) Polynome von Grad 1 haben die Form $f = a_1X + a_0$ und $g = b_1X + b_0$ mit $a_1, b_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\langle a_1X + a_0, b_1X + b_0\rangle &= a_1b_1\langle X, X\rangle + a_1b_0\langle X, 1\rangle + a_0b_1\langle 1, X\rangle + a_0b_0\langle 1, 1\rangle \\ &= \frac{2}{3}a_1b_1 + 2\,a_0b_0\end{aligned}$$

Damit f und g orthogonal sind, muss also $\frac{2}{3}a_1b_1 + 2\,a_0b_0 = 0$ gelten. Dies wird z.B. von $a_0 = a_1 = b_1 = 1$ und $b_0 = -\frac{1}{3}$ erfüllt.

Aufgabe 2 (*Reelle und komplexe Skalarprodukte*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem komplexen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{C}$. Mit entsprechend eingeschränkter skalarer Multiplikation ist V auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (siehe LA I, Übungsblatt 7, Aufgabe 4).

a) Beweisen Sie: Die Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \mathrm{Re}(\langle v, w\rangle)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathrm{Im}\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \mathrm{Im}(\langle v, w\rangle)\end{aligned}$$

sind reell bilinear, $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein reelles Skalarprodukt und $\mathrm{Im}\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist eine alternierende Abbildung.

b) Nun sei $V = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, wobei wir $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a + bi \in \mathbb{C}$ identifizieren. Außerdem sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das komplexe Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\sqrt{\mathrm{Re}\langle v, v\rangle} = |v|$ für alle $v \in V$ gilt, wobei $|\cdot|$ den komplexen Betrag bezeichnet.

c) Es sei weiterhin $V = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha - \beta| \leq \pi$. Beweisen Sie: Bezüglich des reellen Skalarproduktes $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist der Winkel zwischen $e^{i\alpha}$ und $e^{i\beta}$ durch $|\alpha - \beta|$ gegeben.

d) Nun sei $V = \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, wobei wir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x_1 + i\,x_2 \\ x_3 + i\,x_4 \\ \vdots \\ x_{2n-1} + i\,x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

identifizieren. Beweisen Sie: Wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das komplexe Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ ist, dann ist $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ das reelle Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2n}$.

Lösung zu Aufgabe 2

Zur Erinnerung: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich eindeutig als $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben. In diesem Fall definiert man dann $\mathrm{Re}(z) = a, \mathrm{Im}(z) = b$.
Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine weitere reelle Zahl, so gilt $\lambda z = \lambda a + \lambda bi$ mit $\lambda a, \lambda b \in \mathbb{R}$, und somit $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt das im Allgemeinen nicht!
Die komplexe Konjugation ist durch $\overline{z} = \overline{a + bi} := a - bi$ definiert.
Insbesondere gilt $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.

a)
- $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist reell bilinear:
  Für alle $\lambda \in \mathbb{R}, x, y, z \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\langle \lambda x + y, z\rangle\right) &= \mathrm{Re}\left(\lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\lambda\langle x, z\rangle\right) + \mathrm{Re}\left(\langle y, z\rangle\right) \\
&= \lambda \mathrm{Re}\left(\langle x, z\rangle\right) + \mathrm{Re}\left(\langle y, z\rangle\right) \\
\mathrm{Re}\left(\langle z, \lambda x + y\rangle\right) &= \mathrm{Re}\left(\lambda\langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}\langle z, x\rangle\right) + \mathrm{Re}\left(\langle z, y\rangle\right) \\
&= \lambda \mathrm{Re}\left(\langle z, x\rangle\right) + \mathrm{Re}\left(\langle z, y\rangle\right)
\end{aligned}$$

  Dabei nutzen wir aus, dass für reelle Zahlen $\lambda = \overline{\lambda}$ und $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$ gilt.
- $\mathrm{Im}\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist reell bilinear: Zeigt man ganz genau so.
- $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist symmetrisch:
  Für alle $v, w \in V$ gilt $\mathrm{Re}(\langle w, v\rangle) = \mathrm{Re}(\overline{\langle v, w\rangle}) = \mathrm{Re}(\langle v, w\rangle)$.
- $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist positiv definit:
  Für alle $v \in V$ gilt $\langle v, v\rangle > 0$ und insbesondere $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$. Damit gilt $\mathrm{Re}(\langle v, v\rangle) = \langle v, v\rangle > 0$.
- $\mathrm{Im}\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist alternierend:
  Für alle $v \in V$ gilt $\mathrm{Im}(\langle v, v\rangle) = \mathrm{Im}(\overline{\langle v, v\rangle}) = -\mathrm{Im}(\langle v, v\rangle) \implies \mathrm{Im}(\langle v, v\rangle) = 0$.

b) Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ ist durch $\langle x, y\rangle = x\overline{y}$ für alle $x, y \in \mathbb{C}$ definiert. Damit gilt $\langle v, v\rangle = v\overline{v} = |v|^2$ mit $|v| \in \mathbb{R}$ und $|v| \geq 0$. Daraus folgt

$$\sqrt{\mathrm{Re}(\langle v, v\rangle)} = \sqrt{\mathrm{Re}(|v|^2)} = \sqrt{|v|^2} = |v|.$$

c) Nach der Vorlesung gilt $|e^{i\alpha}| = |e^{i\beta}| = 1$. Dies ist nach b) gleichzeitig die durch das Skalarprodukt $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm. Außerdem gilt

$$\mathrm{Re}(\langle e^{i\alpha}, e^{i\beta}\rangle) = \mathrm{Re}(e^{i\alpha}\overline{e^{i\beta}}) = \mathrm{Re}(e^{i\alpha}e^{-i\beta}) = \mathrm{Re}(e^{i(\alpha-\beta)}) = \cos(\alpha - \beta) = \cos(|\alpha - \beta|).$$

und damit auch $\cos(|\alpha - \beta|) = \frac{\mathrm{Re}(\langle e^{i\alpha}, e^{i\beta}\rangle)}{\|e^{i\alpha}\|\,\|e^{i\beta}\|}$.

Wegen $|\alpha - \beta| \in [0, \pi]$ ist $|\alpha - \beta|$ also der gesuchte Winkel.

d) Falls $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das komplexe Standardskalarprodukt ist, so gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left\langle \begin{pmatrix} x_1 + i\, x_2 \\ \vdots \\ x_{2n-1} + i\, x_{2n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 + i\, y_2 \\ \vdots \\ y_{2n-1} + i\, y_{2n} \end{pmatrix} \right\rangle &= \operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} (x_{2i-1} + i\, x_{2i})\overline{(y_{2i-1} + i\, y_{2i})} \right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} (x_{2i-1} + i\, x_{2i})(y_{2i-1} - i\, y_{2i}) \right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i-1}y_{2i-1} - ix_{2i-1}y_{2i} + ix_{2i}y_{2i-1} + x_{2i}y_{2i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_{2i-1}y_{2i-1} + x_{2i}y_{2i} \\
&= \sum_{j=1}^{2n} x_j y_j
\end{aligned}$$

was dem reellen Standardskalarprodukt von $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}$ entspricht.