Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I **Winter-Semester 2020/2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 1 **09.11.20**

Aufgabe 1 (*Satz von Cantor*) (*10 Punkte*)

Es sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M.

a) Beschreiben Sie eine injektive Abbildung $\iota : M \to \mathcal{P}(M)$.

b) Beweisen Sie, dass jede Abbildung $\varphi : M \to \mathcal{P}(M)$ nicht surjektiv ist.
Hinweis: Betrachten Sie $N := \{x \in M \mid x \notin \varphi(x)\}$.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Definiere $\iota : M \to \mathcal{P}(M)$ durch $\iota(x) = \{x\}$ für jedes $x \in M$. Diese Abbildung ist injektiv, denn $\{x\} = \{y\}$ impliziert $x = y$.

b) Sei $\varphi : M \to \mathcal{P}(M)$ eine Abbildung. Definiere

$$N := \{x \in M \mid x \notin \varphi(x)\}.$$

Wir zeigen jetzt, dass N nicht im Bild von φ enthalten ist. Sei nun $y \in M$. Wir unterscheiden zwei Fälle. Ist $y \in \varphi(y)$, dann ist $y \notin N$. Daraus folgt $\varphi(y) \neq N$. Ist $y \notin \varphi(y)$ dann ist $y \in N$. Auch in diesem Fall folgt $\varphi(y) \neq N$. Da y beliebig war ist N nicht im Bild von φ enthalten. Das heißt, φ ist nicht surjektiv. Da φ beliebig war, folgt die Aussage.

Aufgabe 2 (*Abbildungen und Operationen auf Mengen*) (*10 Punkte*)

Es sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen den Mengen X und Y.
Beweisen Sie: Für alle $A, B \subseteq X$ und $C, D \subseteq Y$ gilt

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
Begründen Sie anhand eines Beispiels, dass hier das Inklusionszeichen nicht durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden darf.

c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

d) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Für alle $y \in Y$ gelten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B : y = f(x) \\ &\iff \exists x \in X, (x \in A) \vee (x \in B) : y = f(x) \\ &\iff \big(\exists x \in A : y = f(x)\big) \vee \big(\exists x \in B : y = f(x)\big) \\ &\iff y \in f(A) \vee y \in f(B) \\ &\iff y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

Damit haben $f(A \cup B)$ und $y \in f(A) \cup f(B)$ dieselben Elemente und die Aussage ist gezeigt.

b) Für alle $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\iff \exists x \in A \cap B : y = f(x) \\ &\iff \exists x \in X, (x \in A) \wedge (x \in B) : y = f(x) \\ &\overset{(*)}{\Longrightarrow} \big(\exists x \in A : y = f(x)\big) \wedge \big(\exists x \in B : y = f(x)\big) \\ &\iff y \in f(A) \wedge y \in f(B) \\ &\iff y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

Damit ist jedes Element von $f(A \cap B)$ auch ein Element von $y \in f(A) \cap f(B)$. Die Umkehrung gilt nicht, da die mit $(*)$ markierte Implikation keine Äquivalenz ist. Die Aussage in Zeile 3 bedeutet in Worten „Es gibt ein $x \in A$ mit $y = f(x)$ und es gibt ein $x \in B$ mit $y = f(x)$“, aber diese beiden x sind nicht notwendigerweise identisch! Sie müssten aber identisch sein, damit man daraus die Aussage in Zeile 2 folgern kann.

Ein Beispiel, bei dem keine Gleichheit gilt, ist

$$\begin{aligned} f\colon \{1,2\} &\to \{1\} \\ 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A &= \{1\} \\ B &= \{2\} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} f(A \cap B) = f(\emptyset) &= \emptyset \\ f(A) \cap f(B) = \{1\} \cap \{1\} &= \{1\} \end{aligned}$$

c) Für alle $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cap D) &\iff f(x) \in C \cap D \\ &\iff f(x) \in C \wedge f(x) \in D \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \wedge x \in f^{-1}(D) \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \end{aligned}$$

d) Für alle $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cup D) &\iff f(x) \in C \cup D \\ &\iff f(x) \in C \vee f(x) \in D \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \vee x \in f^{-1}(D) \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*Matrizenrechnung*) (*10 Punkte*)

Es seien die folgenden reellen Matrizen gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Welche der Produkte AB, BA, AC, CA, BC, CB sind definiert? Berechnen Sie diese.

b) Welche der Produkte AA, BB, CC sind definiert? (Sie brauchen diese nicht zu berechnen.)

Lösung zu Aufgabe 3

Laut Vorlesung ist die Multiplikation einer Matrix aus $\mathbb{R}^{m\times n}$ mit einer Matrix aus $\mathbb{R}^{p\times q}$ genau dann definiert, wenn $n = p$ gilt, also wenn die Anzahl der Spalten im ersten Faktor gleich der Anzahl Zeilen im zweiten Faktor ist.

a) Von den sechs genannten Produkten trifft dies nur auf

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -7 & -1 & -15 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -9 \\ -4 & -10 & -9 \\ -1 & 7 & 15 \\ -7 & -17 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad BC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 15 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

zu.

b) In diesen Fällen sind beide Faktoren dieselbe Matrix. Das Produkt existiert also genau dann, wenn die Matrix genauso viele Spalten wie Zeilen hat. Dies trifft nur auf C zu. Die Produkte AA und BB existieren also nicht.

Aufgabe 4 (*Rechenregeln für die transponierte Matrix*) (*10 Punkte*)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ für $m, n, p \in \mathbb{N}$, und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $(A^\top)^\top = A$

b) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$

c) $(\lambda A)^\top = \lambda(A^\top)$

d) $(AC)^\top = C^\top A^\top$

Lösung zu Aufgabe 4

a) Der (i, j)-Eintrag von $A^\top$ ist der (j, i)-Eintrag von A. Wendet man $\top$ nochmal an, erhält man, dass der (i, j)-Eintrag von $(A^\top)^\top$ dem (i, j)-Eintrag von A entspricht.

b) Der (i, j)-Eintrag von $A^\top + B^\top$ ist die Summe der (j, i)-Einträge von A und B. Dies entspricht dem (j, i)-Eintrag der Summe der (i, j)-Einträge von A, B. Das ist gerade der (i, j)-Eintrag von $(A + B)^\top$.

c) Der (i, j)-Eintrag von $\lambda A^\top$ ist das Produkt von λ mit dem (j, i)-Eintrag von A. Dies ist gleichzeitig der (j, i)-Eintrag von λA. Das ist gerade der (i, j)-Eintrag von $(\lambda A)^\top$.

d) Bezeichne mit c_{ij} die Einträge von AB, mit a_{ij} die Einträge von A und mit b_{ij} die Einträge von B. Dann ist der (i, j)-Eintrag von $(AB)^\top$ gleich

$$c_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k b_{ki} a_{jk}$$

Dies entspricht dem (i, j)-Eintrag von $B^\top A^\top$.