Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Übungsblatt 13 **19.07.21**

Dieses Übungsblatt geht nicht mehr in die Bewertung ein.

Aufgabe 1 (*Eine Verallgemeinerung von Aufgabe 2 von Blatt 7*)

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Für einen Endomorphismus $\theta\colon V \to V$ definieren wir die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned}\beta_\theta\colon V \times V &\to \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto \langle\theta(x),y\rangle\end{aligned}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für jede beliebige Bilinearform $\beta\colon V\times V\to\mathbb{R}$ gibt es genau einen Endomorphismus θ, sodass $\beta=\beta_\theta$ ist.

b) Für jede beliebige symmetrische Bilinearform $\beta\colon V\times V\to\mathbb{R}$ gibt es genau einen bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ selbstadjungierten Endomorphismus θ, sodass $\beta=\beta_\theta$ ist.

c) Falls $\beta=\beta_\theta$ symmetrisch ist, erfüllen die Untervektorräume

$$V_+ := \bigoplus_{\substack{\lambda\in\mathrm{Spec}(\theta),\\ \lambda>0}} E_\lambda(\theta),\quad V_- := \bigoplus_{\substack{\lambda\in\mathrm{Spec}(\theta),\\ \lambda<0}} E_\lambda(\theta),\quad V_0=\ker(\theta)$$

die Bedingungen im Trägheitssatz von Sylvester. Dabei sei $\mathrm{Spec}(\theta)$ die Menge aller Eigenwerte von θ.

Das heißt, $V_+, V_-, V_0 \subseteq V$ sind paarweise orthogonal, es gilt $V=V_+\oplus V_-\oplus V_0$ und $\beta|_{V_+\times V_+}$ ist positiv definit, $\beta|_{V_-\times V_-}$ ist negativ definit und $\beta|_{V_0\times V_0}$ ist die Nullform.

d) Für jede beliebige symmetrische Bilinearform $\beta\colon V\times V\to\mathbb{R}$ gibt es eine Orthogonalbasis B von $\langle\cdot,\cdot\rangle$, die gleichzeitig eine Orthogonalbasis von β ist.

e) Welche der Aussagen a) - d) gelten immer noch, wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ kein Skalarprodukt, sondern nur eine nicht entartete symmetrische Bilinearform ist?

f) Welche der Aussagen a) - d) gelten immer noch, wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine entartete symmetrische Bilinearform ist?

Weiter auf der nächsten Seite $\longrightarrow$

Aufgabe 2 (*Stumpfe Winkel und lineare Unabhängigkeit*)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Wir bezeichnen eine Menge aus k Vektoren $\{v_1, \dots v_k\} \subseteq V$ als *stumpfwinkliges System*, falls $v_i \neq 0$ und $\sphericalangle(v_i, v_j) > \frac{\pi}{2}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \neq j$ gilt.

a) Beweisen Sie: Für zwei Vektoren v_1, v_2 gilt die Äquivalenz

$$\sphericalangle(v_1, v_2) > \frac{\pi}{2} \iff \langle v_1, v_2 \rangle < 0.$$

b) Finden Sie ein Beispiel für ein stumpfwinkliges System $\{v_1, v_2, v_3\}$ in $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt.

c) Finden Sie ein Beispiel für ein stumpfwinkliges System $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ in $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt.

d) Beweisen Sie: Ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ ein stumpfwinkliges System in V, dann ist auch

$$\left\{ \pi_{v_k^\perp}(v_1), \pi_{v_k^\perp}(v_2), \dots, \pi_{v_k^\perp}(v_{k-1}) \right\}$$

ein stumpfwinkliges System. Dabei bezeichnet π_U die Orthogonalprojektion auf einen Untervektorraum $U \subseteq V$.

e) Beweisen Sie: Ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ ein stumpfwinkliges System in V, und $\left\{ \pi_{v_k^\perp}(v_1), \dots \pi_{v_k^\perp}(v_{k-2}) \right\}$ ist linear unabhängig, dann ist auch $\{v_1, \dots v_{k-2}, v_k\}$ linear unabhängig.

f) Beweisen Sie: Ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ ein stumpfwinkliges System mit $k \geq 2$, dann ist $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ linear unabhängig.

Hinweis: Führen Sie einen Beweis per vollständiger Induktion und benutzen Sie d) und e). Die Reihenfolge der Vektoren spielt keine Rolle.

Dieses Blatt geht nicht mehr in die Bewertung für den Übungsschein ein, aber Sie können es trotzdem abgeben, um Feedback zu erhalten.

Abgabe bis Montag, den 26.07.21 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.