Gruppe 1

Velislav Slavov, 2385786
ucsmm@student.kit.edu

$\Sigma 21$

A 1)

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &- x_3 &- 2x_4 &= 0\\ -2x_1 &- x_2 &- 2x_3 &+ x_4 &= -4\\ -1x_1 &+ 3x_2 &+ 5x_3 & &= 4\\ 2x_1 &+ 2x_2 & &- 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ✓ $b := \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✓

b)

x_1	x_2	x_3	x_4	b	
1	1	-1	-2	0	$\mid \cdot 2$; $\cdot 1$; $\cdot(-2)$
-2	-1	-2	1	-4	
-1	3	5	0	4	
2	2	0	-3	2	
1	1	-1	-2	0	
0	1	-4	-3	-4	$\mid \cdot(-4)$
0	4	4	-2	4	
0	0	2	1	2	
1	1	-1	-2	0	
0	1	-4	-3	-4	
0	0	20	10	20	
0	0	2	1	2	$\mid \cdot(-10)$;
1	1	-1	-2	0	
0	1	-4	-3	-4	
0	0	2	1	2	
0	0	0	0	0	$\leftarrow b_4$ ✓

Wir haben 3 Pivot Variablen ✓ und es gilt
$\forall j > 3 : b_j = 0 \Rightarrow b \in \mathrm{Bild}(A)$ ✓

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	-1	-2	0
0	1	-4	-3	-4
0	0	2	1	2
0	0	0	0	0

Nicht-Pivot Variablen: x_4 ✓

Sei: $x_4 = t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$$x_3 = \frac{2-t}{2}$$

$$x_2 = -4 + 3t + 4\left(\frac{2-t}{2}\right) = -4 + 3t + 4 - 2t = t$$

$$x_1 = -t + \frac{2-t}{2} \cancel{-} + 2t = 1 - \frac{\cancel{7}1t}{2}$$

-1

Also gilt:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\cancel{7}1t}{2} \\ t \\ \frac{2-t}{2} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\cancel{7}1}{2}t \\ t \\ -\frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \cancel{7}1/2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$ (✓)

$$\Rightarrow \boxed{\ker A = LH\left(\left\{\begin{pmatrix} \cancel{7}1/2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)}$$ (✓) 3/4

c) Aus b) $\Rightarrow$ -1

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = b\} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + LH\left(\left\{\begin{pmatrix} \cancel{7}1/2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)}$$ (✓) 3/4

8

A 2)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & -4 & 6 \\ -9 & -6 & 8 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 6}.$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
9	6	3	6	1	1	0	
-3	-2	2	0	1	0	0	$\mid \cdot 3$; $\cdot 1$; $\cdot(-3)$;
3	2	-2	0	-4	6	0	
-9	-6	8	0	4	0	0	
-3	-2	2	0	1	0	0	
0	0	9	0	4	1	0	$\mid \cdot 2$;
0	0	0	6	-3	6	0	
0	0	2	0	1	0	0	$\mid \cdot(-9)$;
-3	-2	2	0	1	0	0	
0	0	2	0	1	0	0	
0	0	0	6	-3	6	0	
0	0	0	0	-1	2	0	$\mid \cdot(-3)$;
-3	-2	2	0	1	0	0	
0	0	2	0	1	0	0	
0	0	0	6	-1	2	0	
0	0	0	0	0	0	0	✓

Wir haben 3 Pivot Variablen und es gilt
$\forall j > 3 : b_j = 0 \implies b \in \mathrm{Bild}(A)$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\
\hline
-3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Nicht-Pivot Variablen:

x_2, x_4, x_6

Seien $x_2 = t_1 \in \mathbb{R}$

$x_4 = t_2 \in \mathbb{R}$

$x_6 = t_3 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$x_5 = 2t_3$

$x_3 = -2t_3 / 2 = -t_3$

$$x_1 = \frac{-2t_1 + 2(-t_3) + 2t_3}{3} = \frac{-2t_1}{3}$$

Also gilt:

$$x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\, t_1\\t_1\\-2t_3\\t_2\\2t_3\\t_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}t_1\\t_1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\t_2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-2t_3\\0\\2t_3\\t_3\end{pmatrix} =$$

$$= t_1 \begin{pmatrix}-2/3\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ker A = LH\left(\left\{\begin{pmatrix}-2/3\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}\right)$$

Sei $B := \left\{ \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ✓ .

Da B lin. unabhängig $\wedge$ $LH(B) = \ker A$ (10)
$\Rightarrow$ B ist Basis von $\ker A$ ✓

A 3) $U = LH(v_1, v_2, v_3)$

a) Sei $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ƒ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin LH(v_1, v_2, v_3)$

(1) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$

(2) $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$

(3) $v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Da B lin. unabhängig $\wedge$ (1), (2), (3) ƒ $\quad$ 0/5
$\Rightarrow$ B ist Basis von U

b) Sei $B' := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cancel{0}\,1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (✓)

Warum ist das eine Basis, also warum lin. unabh.? −2

3/5

3