

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

$$\varphi_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m : x \mapsto Ax$$

\mathbb{K} Körper.

φ_A injektiv

\Leftrightarrow

$\forall b \in \mathbb{K}^m$
 $Ax=b$
 hat höchstens
 1 Lösung.

\Leftrightarrow

$$\ker A = \{0\}$$

\Leftrightarrow

$$\dim(\ker A) = 0$$

\Leftrightarrow

$$\text{rg } A = n$$

Spalten von A
 sind verschieden
 und linear unabh.

φ_A surjektiv

\Leftrightarrow

$\forall b \in \mathbb{K}^m$
 $Ax=b$
 hat mindest.
 1 Lösung.

\Leftrightarrow

$$\text{Bild } A = \mathbb{K}^m$$

\Leftrightarrow

$$\text{rg } A = m$$

\Leftrightarrow

Spalten von A
 sind Erzeugnis
 von \mathbb{K}^m

Für $m=n$:

φ_A bijektiv

\Leftrightarrow

$\forall b \in \mathbb{K}^n$
 $Ax=b$
 hat genau
 1 Lösung.

\Leftrightarrow

$$A \text{ invertierbar}$$

$$A \in GL(n, \mathbb{K})$$

\Leftrightarrow

Spalten von A
 sind Basis
 von \mathbb{K}^n