Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

8. Januar 2021

Abgabe bis 15. Januar 2021, 12:00 Uhr

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 82 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 29 (K):
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf gleichmäßige Stetigkeit.

(i) $D = [0, \infty),\ f(x) = \sqrt{x}$,

(ii) $D = (0, \infty),\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

(iii) $D = \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,

(iv) $D = (0, \infty),\ f(x) = \log(x)$.

Aufgabe 30:

(i) Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, welche punktweise auf D gegen eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie: (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f auf D genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0.$$

(ii) Es sei $f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge monoton wachsender Funktionen mit

(a) $f_n(a) \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(b) = 0$.

Zeigen Sie, dass (f_n) dann gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 31 (K):
Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(i) $f_n\colon [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) := x\mathrm{e}^{-nx}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(ii) $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) := nx(1-x)^n$ $(n \in \mathbb{N})$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx - n^2}$ für $x \in (0, 1)$,

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 32:

(i) Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Die Funktion f sei stetig in 0 und g sei differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass das Produkt $g \cdot f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \cdot f)(x) := g(x)f(x)$ in 0 differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$:

$$f(x) := \begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Information

Aufgrund der aktuellen Situation wird dieses Modul teilweise in digitaler Form angeboten. Die gesamte Abwicklung wird über das System ILIAS stattfinden. Melden Sie sich dafür mit Ihrem KIT-Account an und treten Sie dem Kurs **Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik** bei. Sie können diesem Kurs direkt über folgenden Link beitreten:

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1253943_rcodeHa6wkYEysN&client_id=produktiv`

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Scheinkriterien, Tutorien, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

Zum Bearbeiten der Übungsblätter sollten Sie pro Woche etwa 9-10 Seiten des Skripts mithilfe der angebotenen Vorlesungsvideos durcharbeiten. Das kommende Übungsblatt wird den Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 92 beinhalten.

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-6 und 7-13 **jeweils** mindestens 48 bwz. 56 Punkte (50%) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Bitte beachten Sie den **Anmeldeschluss** am **21.02.2021**.