Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I — **Winter-Semester 2020/2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 4 — **30.11.20**

Aufgabe 1 (*Lineares Gleichungssystem*) (*10 Punkte*)

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -4 \\ -1x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & & & = & 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

a) Schreiben Sie dieses Gleichungssystem als $Ax = b$ mit einer geeigneten Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^4$.

b) Bestimmen Sie den Kern von A.

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Man liest ab:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Wir führen Zeilenoperationen des Gauß-Algorithmus durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid\ :20 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Kern besteht also aus allen x, die

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \tfrac{1}{2}x_4 &= 0 \\ x_2 \quad - \quad x_4 &= 0 \\ x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen, also gilt $\ker(A) = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

c) Wir wenden dieselben Zeilenoperationen auf b an:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \;\; | : 20 \qquad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das ursprüngliche LGS ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \tfrac{1}{2}x_4 &= 1 \\ x_2 \quad - \quad x_4 &= 0 \\ x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung ist z.B. durch $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ die Lösungsmenge des LGS.

Aufgabe 2 (*Kern*) (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & -4 & 6 \\ -9 & -6 & 8 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 6}.$$

Hinweis: Versuchen Sie, Brüche zu vermeiden, indem Sie die Zeilenoperationen geschickt wählen.

Lösung zu Aufgabe 2

Wir führen Zeilenoperationen des Gauß-Algorithmus durch, um das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & -4 & 6 \\ -9 & -6 & 8 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Elemente des Kerns sind also genau die $x \in \mathbb{R}^6$, die

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_3 + x_6 &= 0 \\ x_5 - 2x_6 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Die Variablen x_1, x_3, x_5, die zu den Pivot-Elementen gehören, sind also eindeutig bestimmt, wenn man die restlichen Variablen x_2, x_4, x_6 beliebig vorgibt. Daraus ergibt sich:

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x_2 \\ x_2 \\ -x_6 \\ x_4 \\ 2x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{hat die Basis} \quad \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 3 (*Basisergänzung mit Gauß-Algorithmus*) (*10 Punkte*)

Wir definieren die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis des linearen Unterraums $U := \mathrm{LH}(v_1, v_2, v_3)$.

b) Ergänzen Sie die Basis aus a) zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Wir führen Spaltenoperationen an der durch v_1, v_2, v_3 aufgespannten Matrix aus:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 2 & & + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} & -1 & + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun haben die Spalten der rechten Matrix $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ in verschiedenen Einträgen den Wert 0, sind also linear unabhängig. Die lineare Hülle verändert sich nicht durch Spaltenoperationen. Also ist $\{b_1, b_2\}$ eine Basis von U.

b) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ hat vollen Rang, also bilden die Spalten diser Matrix eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 4 (*Gauß-Algorithmus zum Bestimmen des Kerns einer Matrix*) (*10 Punkte*)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei Matrizen.

a) Beweisen Sie: Es gilt $\ker(B) \subseteq \ker(AB)$.

b) Beweisen Sie: Falls $\ker(A) = \{0\}$ gilt, so gilt $\ker(B) = \ker(AB)$.

c) Finden Sie ein Beispiel für Matrizen $A, B \neq 0$, sodass $\ker(B) \neq \ker(AB)$ gilt.

Bemerkung: Dies zeigt zusammen mit Lemma 2.5.4 noch einmal, dass die Zeilenoperationen des Gauß-Algorihmus den Kern einer Matrix nicht verändern.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Sei $x \in \ker B$. Dann ist
$$ABx = A(Bx) = A0 = 0.$$
Also ist $x \in \ker AB$.

b) Sei $x \in \ker AB$. Dann ist $Bx \in \ker A = \{0\}$. Also $Bx = 0$, was impliziert, dass $x \in \ker B$.

c) Wähle $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist
$$\ker B = \{0\} \neq \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \ker AB.$$