A 42 i) Behauptung: $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,dx = \frac{1}{3}(\sqrt{6}-\sqrt{4})$

Beweis:

Definiere $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{6-2x^3}$
$g(x) := -\frac{1}{3}$

f ist eine Verkettung von integrierbare Funktionen und somit auch integrierbar

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6-2x^3}} \cdot (-6x^2) = -3\,\frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}$ und $g'(x) = 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,dx = \int_0^1 f'(x) \cdot g(x)\,dx$

$= \left[-\frac{1}{3}\sqrt{6-2x^3}\right]_0^1 - \int_0^1 f g'\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{4} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3}(\sqrt{6}-\sqrt{4})$ ∎

A 42 ii) Behauptung: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx$

Beweis:

Definiere $f: [0,\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := \arctan(\sin(x))$
$g: [0,\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) := \sin(x)$

f ist eine Verkettung von integrierbare Funktionen und somit auch integrierbar
$g(x) = \sin(x)$ ist auch auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ integrierbar

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+\sin^2(x)} \cdot \cos(x) \quad \text{und} \quad g'(x) = \cos(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)} \, dx = \int_0^{\pi/2} f'g \, dx$$

$$= \left[fg\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} fg' = \arctan(\sin(\pi/2)) \cdot \sin(\pi/2) -$$

$$\arctan(\sin(0)) \cdot \sin(0) - \int_0^{\pi/2} \arctan(\sin(x)) \cdot \cos(x) \, dx$$

$$= \arctan(1) - 0 - \int_0^{\pi/2} \arctan(\sin(x)) \cdot \cos(x) \, dx \qquad ???$$

A 42 iii) Behauptung: $\int_0^1 x^5 e^{-x^2} dx = -\frac{5}{2e} + 1$

Beweis:

Definiere $f: [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2}$
$g: [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = -\frac{1}{2}x^4$

f ist eine Verkettung von integrierbare Funktionen und somit auch integrierbar
g(x) ist auch auf [0,1] integrierbar

$\Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2}$ und $g'(x) = -2x^3$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^5 e^{-x^2} dx = \int_0^1 f'g\, dx$$

$$= [fg]_0^1 - \int_0^1 fg'dx =$$

$$= e^{-1} \cdot (-\tfrac{1}{2}) - 1.0 - \int_0^1 e^{-x^2} \cdot (-2x^3)$$

$$= -\frac{1}{2e} - \int_0^1 \underbrace{-2x^3 e^{-x^2}}_{f' \cdot x^2} = -\frac{1}{2e} - [f \cdot x^2]_0^1 + \int_0^1 f \cdot (2x)$$

$$= -\frac{1}{2e} - [x^2 \cdot e^{-x^2}]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x^2}$$

$$= -\frac{1}{2e} - \frac{1}{e} + 0 + \int_0^1 \underbrace{2xe^{-x^2}}_{= (-e^{-x^2})'}$$

$$= -\frac{3}{2e} + [-e^{-x^2}]_0^1 = -\frac{3}{2e} + (-\tfrac{1}{e}) - (-1) = -\frac{5}{2e} + 1 \quad \blacksquare$$

A 42

iv) Behauptung: $\int_0^{\pi/4} \underbrace{e^{-x}}_{f'} \underbrace{\cos(4x)}_{g}\,dx = -17(e^{-\pi/4}+1)$

Beweis:

Definiere $f: [0, \pi/4] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = -e^{-x}$
$g: [0, \pi/4] \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \cos(4x)$

f ist eine Verkettung von integrierbare Funktionen und somit auch integrierbar
$g(x) = \cos(4x)$ ist auch auf $[0, \frac{\pi}{4}]$ integrierbar

$\Rightarrow f'(x) = e^{-x}$ und $g'(x) = -4\sin(4x)$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} e^{-x}\cos(4x)\,dx = \int_0^{\pi/4} f'g\,dx$$

$$= [fg]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} fg'\,dx = [-e^{-x}\cos(4x)]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \underbrace{e^{-x}}_{f'} \cdot \underbrace{4\sin(4x)}_{h}\,dx$$

$$= e^{-\pi/4} + 1 - \left([fh]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} fh'\,dx\right)$$

$$= e^{-\pi/4} + 1 - \left([-e^{-x} \cdot 4\sin(4x)]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} -e^{-x} \cdot 16\cos(4x)\,dx\right)$$

$$= e^{-\pi/4} + 1 - 0 - 0 - 16\int_0^{\pi/4} -e^{-x}\cos(4x)\,dx$$

$$= e^{-\pi/4} + 1 + 16\int_0^{\pi/4} e^{-x}\cos(4x)\,dx$$

$$\Rightarrow 15\int_0^{\pi/4} e^{-x}\cos(4x)\,dx = -(e^{-\pi/4}+1)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} e^{-x}\cos(4x)\,dx = -\frac{(e^{-\pi/4}+1)}{15}$$

∎

A 42 v) Behauptung: $\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right) dx$

Beweis:

Definiere F:

A 42 vi) Behauptung: $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1-\sin(x)}\,dx = 2-\sqrt{2} - 2\log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

Beweis:

Definiere $F: [0, \pi/4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1-\sin(x))$
$g: [0, \pi/4] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\sin(x)$

f und g sind Verkettungen von integrierbare Funktionen und somit integrierbar

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{\cos(x)}{1-\sin(x)} \quad \text{und} \quad g'(x) = -\cos(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1-\sin(x)}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1-\sin(x)}\,dx = 2\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\sin(x)}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} F'g\,dx$$

$$= 2\left(\left[-\log(1-\sin(x)).\sin(x)\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} -\log(1-\sin(x))\cos(x)\,dx\right)$$

$$= 2\left(-\log\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \int_0^{\pi/4} -\log(1-\sin(x))\cos(x)\,dx\right)$$

$h: [0, \pi/4] \to \mathbb{R}$, $h(x) = (1-\sin(x))\log(1-\sin(x)) - (1-\sin(x))$

Es gilt: $h'(x) = -\cos(x)\log(1-\sin(x))$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} -\log(1-\sin(x))\cos(x)\,dx$$

$$= \left[(1-\sin(x))\log(1-\sin(x)) - (1-\sin(x))\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\log\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(\log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)-1\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1-\sin(x)}\,dx = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(\log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)-1\right)\right)$$

$$= -\sqrt{2}\log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) - (2-\sqrt{2})\left(\log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)-1\right)$$

$$= -\sqrt{2}\log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) - 2\log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) + 2 + \sqrt{2}\log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2}$$

$$= 2-\sqrt{2} - 2\log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \quad \blacksquare$$

A 44 $\int_0^1 \frac{1}{n} e^{-nx^2} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-nx^2} dx$