Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I **Winter-Semester 2020/2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 6 **14.12.20**

Aufgabe 1 (*Zeilenrang und Spaltenrang*) (*10 Punkte*)

Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -a-1 & 2 & a+1 \\ 0 & a^2 & 1-a^2 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & a^2+a & 1-a^2 & -a-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben. Bestimmen für alle $a \in \mathbb{R}$ den Rang von A, indem Sie Zeilen- und Spaltenoperationen anwenden.
Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung und beachten Sie, dass sie nicht z.B. eine Zeile mit einem Term multiplizieren, der Null sein könnte.

Lösung zu Aufgabe 1

Wir versuchen zunächst durch Zeilen- und Spaltenoperationen möglichst viele a^2-Terme loszuwerden und Nullen zu erzeugen:

$$\begin{pmatrix} -1 & -a-1 & 2 & a+1 \\ 0 & a^2 & 1-a^2 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & a^2+a & 1-a^2 & -a-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -a+1 & 2 & a+1 \\ 0 & 1 & 1-a^2 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 1-a^2 & -a-1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -a+1 & 2 & a+1 \\ 0 & 1 & 1-a^2 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & -a-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a^2 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & -a-1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1-a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 0 & -a-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1-a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix}$$

Bisher haben wir nur Zeilen- und Spaltenoperationen gemacht, die den Rang (unabhängig vom

Wert von a) nicht ändern. Falls nun $a = 1$ gilt, erhalten wir

$$\begin{array}{ll} \begin{matrix} 2 & & & + \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} + \\ -1 \mid \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \\ \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

was offenbar den Rang 3 hat.
Im Fall $a = -1$ kommen wir zum selben Ergebnis

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ -1 \mid \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ + \\ -2 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist der Rang dann 3.
Wenn a weder den Wert -1 noch 1 hat, können wir durch $a \pm 1$ dividieren. Für alle a gilt $-a^2 - 1 < 0$, also dürfen wir auch dadurch dividieren und erhalten

$$\begin{array}{ll} \begin{matrix} & + & & -1 \\ & & & : (-a-1) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1-a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} + \\ \mid : (-1-a^2) \quad -2 \\ \mid : (1-a) \\ \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

was den Rang 4 hat.

Aufgabe 2 (*Äquivalenzrelationen*) (*10 Punkte*)

a) Auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei $\sim$ die Relation, die gegeben ist durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und skizzieren Sie die Äquivalenzklasse von $(-1,\, 2)$.

b) Auf der Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ sei $\sim$ diejenige Relation, die gegeben ist durch

$$(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \Leftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und bestimmen Sie eine bijektive Abbildung von der Menge der Äquivalenzklassen $M := \{[(z, n)] \mid (z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$ nach $\mathbb{Q}$.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Wir überprüfen anhand der Axiome, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Die Relation $\sim$ ist reflexiv, denn für $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ folgt $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2$, also $(x_1, x_2) \sim (x_1, x_2)$. Die Relation $\sim$ ist symmetrisch, denn aus $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ folgt $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$ also auch $y_1^2 + y_2^2 = x_1^2 + x_2^2$. Und damit $(y_1, y_2) \sim (x_1, x_2)$. Nun zeigen wir dass $\sim$ transitiv ist. Sind $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \sim (z_1, z_2)$ dann ist

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = z_1^2 + z_2^2$$

also $(x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)$. Die Äquivalenzklasse von $(-1, 2)$ lässt sich durch einen Kreis vom Radius $\sqrt{5}$ um $(0, 0)$ beschreiben.

b) Reflexivität und Symmetrie von $\sim$ lassen sich leicht überprüfen. Wir beweisen Transitivität von $\sim$. Es seien $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2)$ und $(z_2, n_2) \sim (z_3, n_3)$. Also gilt $z_1 n_2 = z_2 n_1$ und $z_2 n_3 = z_3 n_2$. Wir berechnen

$$(z_1 n_3) n_2 = n_3 (z_1 n_2) = n_3 (z_2 n_1) = (z_2 n_3) n_1 = (z_3 n_2) n_1 = (z_3 n_1) n_2.$$

Da $n_2 \neq 0$ können wir schreiben: $z_1 n_3 = z_3 n_1$.

Die Abbildungsvorschrift

$$\begin{aligned} \varphi : M &\to \mathbb{Q} \\ [(z, n)] &\mapsto \frac{z}{n} \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, denn es gilt $n \neq 0$ und $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2)$ impliziert, dass

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_1 n_2}{n_1 n_2} = \frac{z_2 n_1}{n_1 n_2} = \frac{z_2}{n_2}.$$

Die Abbildung ist injektiv, denn $\varphi([(z_1, n_1)]) = \varphi([(z_2, n_2)])$ impliziert, dass

$$z_1 n_2 = \frac{z_1}{n_1} n_1 n_2 = \frac{z_2}{n_2} n_1 n_2 = z_2 n_1.$$

Also repräsentieren $(z_1, n_1), (z_2, n_2)$ dasselbe Element in M. Die Abbildung ist surjektiv, denn für jedes $q \in \mathbb{Q}$ gibt es eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $q = \frac{z}{n}$. Damit ist $\varphi([(z, n)]) = q$.

Aufgabe 3 (*Restklassenarithmetik*) (*10 Punkte*)

Es sei $R = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

a) Bestimmen Sie alle Nullteiler von R. (Ein Element $r \in R$ heißt ein *Nullteiler*, wenn es ein Element $s \in R \setminus \{0\}$ mit $rs = 0$ gibt.)

b) Bestimmen Sie alle invertierbaren Elemente von R.

c) Bestimmen Sie das Inverse der Restklasse $[7]$ in R.

d) Die Menge $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ ist mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation, dem Null-Element $([0], [0])$ und dem Eins-Element $([1], [1])$ ein Ring.

Zeigen Sie: es gibt genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$

e) Zeigen Sie: Der Homomorphismus aus d) ist sogar ein Isomorphismus.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Wegen $[0] = [2][6] = [3][4] = [8][6] = [9][4] = [10][6] = [0][1]$ sind $[2], [3], [4], [6], [8], [9], [10], [0]$ Nullteiler in R. Da die anderen Elemente Einheiten sind (Teilaufgabe b)), sind das alle Nullteiler.

b) Ein Nullteiler kann nicht invertierbar sein, denn falls $rs = 0$ gilt, aber r ein Inverses r^{-1} hatte, dann folgt $0 = r^{-1}0 = r^{-1}rs = s$. Die vier Elemente $\{[1], [5], [7], [11]\} = \{[1], [5], [-5], [-1]\}$ die noch übrig bleiben, sind Einheiten, denn es gilt $[1][1] = [5][5] = [-1][-1] = [-5][-5] = 1$.

c) Durch Probieren, euklidischen Algorithmus oder Anwendung von $[7] = [-5]$ erhält man $[7]^{-1} = [7]$.

d) Definiere

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} &\to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \\ [x] &\mapsto ([x], [x]).\end{aligned}$$

Wir behaupten φ ist ein wohldefinierter Ringhomomorphismus. Zuerst zeigen wir, dass φ wohldefiniert ist. Es sei $x \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\varphi([x + 12k]) = ([x + 3 \cdot 4k], [x + 4 \cdot 3k]) = ([x], [x]) = \varphi([x]).$$

Nun zeigen wir, dass φ ein Gruppenhomomorphismus auf $+$ ist. Es seien $[x], [y] \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Dann ist

$$\varphi([x] + [y]) = \varphi([x + y]) = ([x + y], [x + y]) = ([x], [x]) + ([y, y]) = \varphi([x]) + \varphi([y]).$$

Jetzt überprüfen wir das neutrale Element der Multiplikation. Es gilt offenbar $\varphi([1]) = ([1], [1])$. Außerdem

$$\varphi([x][y]) = \varphi([xy]) = ([xy], [xy]) = ([x], [x])([y], [y]) = \varphi([x])\varphi([y]).$$

Da $[1] \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ die additive Gruppe schon erzeugt (d.h. alle Elemente sind Vielfache von $\pm[1]$), ist φ eindeutig dadurch bestimmt, wohin es $[1]$ schickt. Da φ als Ringhomomorphismus das neutrale Element der Multiplikation auf das neutrale Element der Multiplikation schickt, ist es der einzige Ringhomomorphismus.

e) Wir zeigen, dass φ bijektiv ist. Da $|\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}| = 12 = |(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})|$, genügt es, injektiv oder surjektiv zu zeigen. Es sei also

$$([x], [x]) = \varphi([x]) = 0 = ([0], [0]).$$

Dann folgt $3|x$ und $4|x$. Also $12|x$. Dann ist $[x] = [0] \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4 (*Vektorraumaxiome*) (*10 Punkte*)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) $V_1 = \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$ ist mit der elementweisen Addition und elementweisen skalaren Multiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) $V_2 = \mathbb{Z}$ mit der skalaren Multiplikation, die durch $0 \cdot z = 0$ und $1 \cdot z = z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ gegeben ist, ist ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$.

c) $V_3 = \{ a \in \mathbb{R} \mid a > 0 \}$ ist mit der üblichen Multiplikation als Vektoraddition und der skalaren Multiplikation $\lambda \odot v = v^\lambda$ für $\lambda \in \mathbb{R}, v \in V_3$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

d) $V_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \,\middle|\, x^2 = -y^2 \right\}$ mit der von $\mathbb{Q}^2$ ererbten Addition und skalaren Multiplikation ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Wir überprüfen die Axiome eines Vektorraumes. Offenbar ist elementweise Addition eine abelsche Gruppe, da es für jedes Element eine abelsche Gruppe ist. Es ist nicht offensichtlich, dass V_1 unter $+$ abgeschlossen ist: Sind $(x_i)_i, (y_i)_i \in V_1$ dann

$$\begin{aligned}
\sum_i |x_i + y_i|^2 &= \sum_i (|x_i|^2 + 2x_i y_i + |y_i|^2) \\
&\leq \sum_i (|x_i|^2 + 2\max(|x_i|, |y_i|)^2 + |y_i|^2) \\
&\leq 3(\sum_i |x_i|^2 + \sum_i |y_i|^2) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Außerdem gilt $\lambda(x_i)_i \in V_1$ wenn $\lambda \in \mathbb{R}, (x_i)_i \in V_1$, denn

$$\sum_i |\lambda x_i|^2 = \lambda^2 \sum_i |x_i|^2 < \infty$$

Man überzeugt sich, dass die Distributivgesetze, skalare Assoziativität und Wirkung des Eins-Elementes gelten, da sie offenbar elementweise gelten. Also ist V_1 ein Vektorraum.

b) V_2 ist kein Vektorraum, denn

$$6 = 3 + 3 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = (1 + 1) \cdot 3 = 0 \cdot 3 = 0$$

ist ein Widerspruch, falls man das zweite Distributivgesetz anwendet.

c) Wir überprüfen die Vektorraumaxiome an V_3: Multiplikation auf den positiven reellen Zahlen ist eine abelsche Gruppe. Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\lambda \odot (ab) &= (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda = (\lambda \odot a)(\lambda \odot b) \\
(\lambda + \mu) \odot a &= a^{\lambda+\mu} = a^\lambda a^\mu = (\lambda \odot a)(\mu \odot a) \\
(\lambda\mu) \odot a &= a^{\lambda\mu} = (a^\mu)^\lambda = \lambda \odot (\mu \odot a) \\
1 \odot a &= a^1 = a
\end{aligned}$$

Also ist $(V_3, \cdot, \odot)$ ein Vektorraum.

d) Man überzeugt sich, dass $x^2 = -y^2$ für $x, y \in \mathbb{Q}$ impliziert, dass $x = 0 = y$ gilt. Der Nullvektorraum über $\mathbb{Q}$ erfüllt alle Vektorraumaxiome.