A 34 i) a) $f(x) := \begin{cases} e^{\cos(x)} & , x \in (-\infty, 0] \\ \frac{1}{x} & , x \in (0, \infty) \end{cases}$

Behauptung: $f(x)$ ist in $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ d.b.

und $f'(x) := \begin{cases} -\sin(x) e^{\cos(x)} & , x \in (-\infty, 0) \\ -\frac{1}{x^2} & , x \in (0, \infty) \end{cases}$

Beweis:

Fall 1:

Sei $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) = e^{\cos(x)}$

$\forall x$: $\cos(x)$ ist d.b. und $\cos(x) \in [-1, 1]$

$\forall y \in [-1, 1]: e^y$ ist d.b. $\overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow} \forall x: e^{\cos(x)}$ ist d.b.

$f'(x) = e^{\cos(x)}(-\sin(x)) = -\sin(x) e^{\cos(x)}$

Fall 2:

Sei $x \in (0, \infty) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$

$\forall x$: $f(x)$ ist db und $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Fall 3:

$x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(h+0)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{e^{\cos(h+0)} - e^{\cos(0)}}{h} = \frac{e^{\cos(h)} - e^{1}}{h}$$

$$= \frac{e(e^{\cos(h)-1} - 1)}{h} \Rightarrow \text{existiert nicht}$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(h+0)-f(0)}{h} = \frac{\frac{1}{h} - \frac{1}{0}}{h} \Rightarrow \text{existiert nicht}$$

b) $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Behauptung:
$f(x)$ ist in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ d.b.

und $f'(x) := 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Beweis:

Fall 1:

x^2 ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ d.b.
und $\sin(\frac{1}{x})$ ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ d.b.

$\Rightarrow f(x)$ ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ d.b.

und $f'(x) = 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \cdot \cos(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2})$

$$= 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$

Fall 2:

$x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h+0) + f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \sin(\frac{1}{h}) + 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot \sin(\frac{1}{h})$$

$\Rightarrow$ existiert nicht

c) $f(x) := (1+x^2)^x$

$(1+x^2) > 0 \Rightarrow f(x) = e^{x \log(1+x^2)}$

$(1+x^2)$ ist auf $\mathbb{R}$ d.b. und $1+x^2 \in \mathbb{R}$

$\log(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ d.b. und $\log(x) \in \mathbb{R}$

Kettenregel

$\Rightarrow$ $x\log(1+x^2)$ ist auf $\mathbb{R}$ d.b. und $x\log(1+x^2) \in \mathbb{R}$

Da e^x ist auf $\mathbb{R}$ d.b.

Kettenregel
$\Rightarrow$ $e^{x\log(1+x^2)}$ ist auf $\mathbb{R}$ d.b.

und $f'(x) = \left(e^x \cdot e^{\log(1+x^2)}\right)'$

$= (e^x)' \cdot e^{\log(1+x^2)} + e^x \cdot \left(e^{\log(1+x^2)}\right)'$

$= e^x \cdot e^{\log(1+x^2)} + e^x \cdot e^{\log(1+x^2)} \cdot \left(\log(1+x^2)\right)'$

$= e^x \cdot e^{\log(1+x^2)} \left(1 + (\log(1+x^2))' \cdot (1+x^2)'\right)$

$= e^x \cdot e^{\log(1+x^2)} \left(1 + \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x\right)$

$= (1+x^2)^x \left(\frac{x^2+2x+1}{1+x^2}\right) = (1+x^2)^{x-1} \cdot (x+1)^2$

A 34 ii) $0 < x < y$ z.z. $y\log y - x\log x \leq (y-x)(1+\log y)$

$f(x) := x\log x$ auf $(0,\infty)$ d.b. $\Rightarrow$ auch auf (x,y)

und $f'(x) = \log x + x\frac{1}{x} = \log x + 1$

Da $f(x)$ d.b. $\Rightarrow \exists \xi \in (x,y) : \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi)$

$\Rightarrow \frac{y\log y - x\log x}{y-x} = \log\xi + 1$

$$\overset{\xi < y}{\iff} \frac{y\log y - x\log x}{y - x} \leq \log y + 1$$

$$\iff y\log y - x\log x \leq (y-x)(1+\log y) \blacksquare$$

A 36 i) a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x}$ auf $(0,\infty)$ oder $(-\infty,0)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) := \sin(\sin(x)) \\ g(x) := x \end{array}\right\} \text{beide sind d.b.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \sin(\sin(0)) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 \end{array}\right\} \text{l'Hospital gilt}$$

$$f'(x) = \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)$$
$$g'(x) = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)}{1}$$

$$= \cos(\sin(0)) \cdot \cos(0) = \cos(0) \cdot \cos(0) = 1 \blacksquare$$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)}$ auf $(1, \infty)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) := x^x - x = e^{x\log x} - x \\ g(x) := 1 - x + \log(x) \end{array}\right\} \text{beide sind d.b.}$$

$f'(x) = e^{x\log x} \cdot (\log x + 1) - 1 = x^x(\log x + 1) - 1$

$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ (für $x \neq 0$)

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \big(1(\log 1 + 1) - 1\big) \cdot \frac{1}{1-1} = 0 \cdot \frac{1}{0}$ ex. nicht

$\Rightarrow$ der Limes existiert nicht!

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + x\log x}{x^3 + 1}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) := x^2 + x\log x \\ g(x) := x^3 + 1 \end{array}\right\} \text{beide sind d.b.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x + \log x + 1 \\ g'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0 \end{array}\right\} \text{beide sind d.b.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} g'(x) = \infty$

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{x} = \frac{2x+1}{x}$$

$$g''(x) = 6x$$

$$\lim_{x \to \infty} g''(x) = \infty \Rightarrow \text{l'Hospital gilt}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

$$= \frac{2x+1}{x} \cdot \frac{1}{6x} = \frac{2x+1}{6x^2} = \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{6} \to 0 \quad (x \to \infty) \; \blacksquare$$