Gruppe 1

Velislav Slavov, 2385786

ucsmm@student.kit.edu

A1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Behauptung: A ist invertierbar

Beweis:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad |2,$$

$$= -2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \cdot(-1), \cdot(3), \cdot(-1)$$

$$= -2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \cdot 1$$

$$= 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdot 2 \qquad = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist eine obere Dreiecksmatrix

$$\Rightarrow \det(A) = 2 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot (-2) \cdot (-1)) = 2 \cdot 8 = 16$$

Die Determinante $\neq 0 \Rightarrow A$ ist inv.bar ∎

A3 $\tilde{S}_n = \{ A \in K^{n \times n} \mid A^T = -A \}$

a) Behauptung: $\tilde{S}_n$ ist UVR von $K^{n \times n}$

Beweis:
(i) Es gilt: $0_{n\times n}^T = 0_{n \times n}$

Definiere $-0_{n\times n}$:= die Additive Inverse von $0_{n\times n}$
$\Rightarrow 0_{n\times n} + (-0_{n\times n}) = 0_{n\times n} \Rightarrow -0_{n\times n} = 0_{n\times n}$
$\Rightarrow 0_{n\times n} = 0_{n\times n}^T = -0_{n\times n} \Rightarrow 0_{n\times n} \in \tilde{S}_n$

(ii) Seien $A := a_{i,j}, B := b_{i,j} \in \tilde{S}_n \quad (i,j \in (1 \dots n))$
Definiere $A^T := \tilde{a}_{i,j}$ mit $a_{i,j} = \tilde{a}_{j,i}$
und $B^T := \tilde{b}_{i,j}$ mit $b_{i,j} = \tilde{b}_{j,i}$

Es gilt: $A + B = a_{i,j} + b_{i,j}$ und $(A+B)^T = A^T + B^T$

$\Rightarrow (A+B)^T = \tilde{a}_{i,j} + \tilde{b}_{i,j}$

Weiter gilt: Da $A, B \in \tilde{S}_n$

$\Rightarrow A + (-A) = 0$ & $B + (-B) = 0 \Rightarrow A + A^T = 0$ & $B + B^T = 0$

$\Rightarrow a_{i,j} + \tilde{a}_{i,j} = 0$ & $b_{i,j} + \tilde{b}_{i,j} = 0$

$\Rightarrow (a_{i,j} + b_{i,j}) + (\tilde{a}_{i,j} + \tilde{b}_{i,j}) = 0$

$\Rightarrow (A+B) + (A+B)^T = 0 \Rightarrow (A+B)^T = -(A+B)$
$\Rightarrow (A+B) \in \tilde{S}_n$

(iii) Seien $A := a_{i,j} \in \tilde{S}_n \ (i,j \in (1 \dots n))$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Definiere $A^T := \tilde{a}_{i,j}$ mit $a_{i,j} = \tilde{a}_{j,i}$

Es gilt: $\lambda A = \lambda a_{i,j}$ und $(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda \tilde{a}_{i,j}$

$\lambda A + (\lambda A)^T = \lambda a_{i,j} + \lambda \tilde{a}_{i,j} = \lambda (a_{i,j} + \tilde{a}_{i,j})$

Da $A \in \tilde{S}_n \Rightarrow A + A^T = 0 \Rightarrow a_{i,j} + \tilde{a}_{i,j} = 0$

$\Rightarrow \lambda A + (\lambda A)^T = \lambda . 0 = 0 \Rightarrow (\lambda A)^T = -(\lambda A) = -\lambda (A)$
$\Rightarrow \lambda A \in \tilde{S}_n$

Aus (i),(ii),(iii) folgt: $\tilde{S}_n$ ist UVR von $\mathbb{K}^{n \times n}$ ∎

A3 b) Behauptung: $\mathbb{K}^{n \times n} = \tilde{S}_n \oplus S_n$

Beweis:
(i) Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

Es gilt: $\frac{1}{2}(A + A^T) \in S_n$ (Blatt 8, Aufgabe 3)

$A - \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} A^T = \frac{1}{2}(A - A^T)$

$\left(\frac{1}{2}(A - A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T - A^{T^T}) = \frac{1}{2}(A^T - A)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(A-A^T)+\left(\frac{1}{2}(A-A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A-A^T)+\frac{1}{2}(A^T-A)$$

$$= \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{2}A^T - \frac{1}{2}A = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}(A-A^T)\right)^T = -\frac{1}{2}(A-A^T)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(A-A^T) \in \tilde{S}_n$$

Da $\underbrace{\frac{1}{2}(A+A^T)}_{\in S_n} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^T)}_{\in \tilde{S}_n} = \underbrace{A}_{\in \mathbb{K}^{n\times n}}$

$\Rightarrow \forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt: $A \in LH(S_n \cup \tilde{S}_n)$

(ii) Sei $A = a_{i,j} \in S_n \cap \tilde{S}_n \quad (i,j \in (1 \dots n))$

$A^T := \tilde{a}_{i,j}$ mit $a_{i,j} = \tilde{a}_{j,i}$

$A \in S_n \Rightarrow A = A^T \Rightarrow a_{i,j} = \tilde{a}_{j,i} = \tilde{a}_{i,j}$

$A \in \tilde{S}_n \Rightarrow A^T = -A \Rightarrow a_{i,j} = \tilde{a}_{j,i} = \tilde{a}_{i,j} = -a_{i,j}$

Für $a_{i,j} = 0$ gilt: $a_{i,j} + (-a_{i,j}) = a_{i,j} + a_{i,j} = 0 + 0 = 0$

Für $a_{i,j} \neq 0$:

$a_{i,j}$ läst sich schreiben als $\lambda 1$ $(\lambda \neq 0 \in \mathbb{K})$

$a_{i,j} + a_{i,j} = \lambda 1 + \lambda 1 = \lambda(1+1) = 0$

Per Definition von $\mathbb{K}$ gilt: $1 \neq -1 \Rightarrow 1+1 \neq 0$

Wir haben ein Widerspruch $\Rightarrow A \neq 0_{n \times n} \notin S_n \cap \tilde{S}_n$

Aus (i) und (ii) folgt: $S_n \oplus \tilde{S}_n = \mathbb{K}^{n \times n}$ ist eine direkte Summe

$\blacksquare$

A3 d) Behauptung: n ist ungerade $\Rightarrow$ A ist nicht invertierbar

Beweis:

Angenommen n ist ungerade

Sei: $A := a_{i,j} \in \tilde{S}_n \quad (i,j \in (1 \dots n))$

$A^T := \tilde{a}_{i,j} = -a_{i,j} =: -A$

Es gilt:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \underbrace{a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}}_{n \text{ mal}}$$

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A)$$

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \underbrace{(-1 \cdot a_{\sigma(1),1}) \cdots (-1 \cdot a_{\sigma(n),n})}_{n \text{ mal}}$$

$$\overset{\swarrow \text{ unabhängig von } \sigma}{}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} (-1)^n \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$= (-1)^n \cdot \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}}_{\det(A)}$$

Da n ungerade:

$\Rightarrow \det(A) = -\det(A)$

$\Rightarrow \det(A) + \det(A) = 0 \Rightarrow 2\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$

Da $\det(A) = 0 \Rightarrow A$ ist nicht invertierbar ∎

A3 e) Definiere $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Behauptung: A ist invertierbar

Beweis:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 8 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} /2 \\ /2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= -4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |\cdot(-2),\ \cdot(-4) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= -4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -8 & -4 \\ 0 & 6 & -14 & -12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ |\cdot(-8),\ \cdot(-6) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= -4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & -20 \\ 0 & 0 & -20 & -24 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot(-5/4) \\ \\ \end{array}$$

$$= -4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -4 \cdot (1 \cdot 1 \cdot (-16) \cdot 1) = 64$$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ ist invertierbar $\blacksquare$

A4 $Alt^n(V, \mathbb{K}) := \{ \omega : V^n \rightarrow \mathbb{K} \mid \omega$ ist alternierend$\}$

a) Behauptung: $Alt^n(V, \mathbb{K})$ ist UVR von $\mathbb{K}^{V^n}$

Beweis:
(i) Definiere $\omega_0 : V^n \rightarrow \mathbb{K}, \; v \longmapsto 0$

$\forall v_j, v_j' \in V^n \; j \in (1 \dots n), \lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$\omega_0(v_1, \dots, v_j + v_j', \dots v_n) = \omega_0(v_1, \dots, v_j, \dots v_n)$
$= \omega_0(v_1, \dots, v_j', \dots v_n) = 0$

$\Rightarrow \omega_0(v_1, \dots, v_j + v_j', \dots v_n) = \omega_0(v_1, \dots, v_j, \dots v_n) + \omega_0(v_1, \dots, v_j', \dots v_n)$

Weiter gilt auch:
$\omega_0(v_1, \dots, \lambda v_j', \dots v_n) = \lambda \omega_0(v_1, \dots, v_j', \dots v_n) = 0$

$\Rightarrow \omega_0$ ist multilinear

ω_0 bildet jedes Tupel von Vektoren auf 0, also insbesondere die Tupel bei dennen mind. 2 Komponente gleich sind.

$\Rightarrow \omega_0$ ist alternierend (also $\omega_0 \in Alt^n(V, \mathbb{K})$)

(ii) Seien $\omega_1, \omega_2 \in Alt^n(V, \mathbb{K})$

Es gilt: $(\omega_1 + \omega_2)(v_1, \dots, v_n) = \omega_1(v_1, \dots, v_n) + \omega_2(v_1, \dots, v_n)$

$\forall v_j, v_j' \in V^n$ $j \in (1 \dots n)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$(\omega_1 + \omega_2)(\dots, v_j + v_j', \dots) = \omega_1(\dots, v_j + v_j', \dots) + \omega_2(\dots, v_j + v_j', \dots)$

$= \Big(\omega_1(\dots, v_j, \dots) + \omega_1(\dots, v_j', \dots)\Big) + \Big(\omega_2(\dots, v_j, \dots) + \omega_2(\dots, v_j', \dots)\Big)$

$= \Big(\omega_1(\dots, v_j, \dots) + \omega_2(\dots, v_j, \dots)\Big) + \Big(\omega_1(\dots, v_j', \dots) + \omega_2(\dots, v_j', \dots)\Big)$

$= (\omega_1 + \omega_2)(\dots, v_j, \dots) + (\omega_1 + \omega_2)(\dots, v_j', \dots)$

$(\omega_1 + \omega_2)(\dots, \lambda v_j, \dots) = \omega_1(\dots, \lambda v_j, \dots) + \omega_2(\dots, \lambda v_j, \dots) = \lambda \omega_1(\dots, v_j, \dots) + \lambda \omega_2(\dots, v_j, \dots)$
$= \lambda\big(\omega_1(\dots, v_j, \dots) + \omega_2(\dots, v_j, \dots)\big) = \lambda(\omega_1 + \omega_2)(\dots, v_j, \dots)$

$\Rightarrow (\omega_1 + \omega_2)$ ist multilinear

Seien $v_i = v_k$, $i \neq k$ $(i, k \in (1 \dots n))$

$(\omega_1 + \omega_2)(\dots, v_i, \dots, v_k, \dots) = \omega_1(\dots, v_i, \dots, v_k, \dots) + \omega_2(\dots, v_i, \dots, v_k, \dots) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow (\omega_1 + \omega_2)$ ist alternierend (also $(\omega_1 + \omega_2) \in Alt^n(V, \mathbb{K})$)

(iii) Sei $\omega \in Alt^n(V, \mathbb{K})$, $\beta \in \mathbb{K}$

$\forall\, v_j, v_j' \in V^n$ $j \in (1 \dots n)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$\beta\omega(\dots, v_j + v_j', \dots) = \beta(\omega(\dots, v_j, \dots) + \omega(\dots, v_j', \dots))$
$= \beta\omega(\dots, v_j, \dots) + \beta\omega(\dots, v_j', \dots)$

$\beta\omega(\dots, \lambda v_j, \dots) = (\lambda\beta)\omega(\dots, v_j, \dots) = \lambda(\beta\omega(\dots, v_j, \dots))$

$\Rightarrow \beta\omega$ ist multilinear

Seien $v_i = v_k$, $i \neq k$ $(i, k \in (1 \dots n))$

$\beta\omega(\dots, v_i, \dots, v_k, \dots) = \beta \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \beta\omega$ ist alternierend (also $\beta\omega \in Alt^n(V, \mathbb{K})$)

Aus (i), (ii), (iii) Folgt: $Alt^n(V, \mathbb{K})$ ist UVR von $\mathbb{K}^{V^n}$ $\blacksquare$