Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I — **Winter-Semester 2020/2021**

Übungsblatt 2 — **16.11.20**

Aufgabe 1 (*Lineare Abbildung*) (*10 Punkte*)

Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) injektiv ist;

b) surjektiv ist.

Aufgabe 2 (*Nullteiler im Matrizenring*) (*10 Punkte*)

Es sei eine reelle 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{\mathbf{0}_{3\times 3}\}$, für die $AB = \mathbf{0}_{3\times 3}$ gilt.

b) Bestimmen Sie eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{\mathbf{0}_{3\times 3}\}$, für die $CA = \mathbf{0}_{3\times 3}$ gilt.

Aufgabe 3 (*Symmetrische Matrizen*) (*10 Punkte*)

Wir nennen eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *symmetrische Matrix*, falls $M^\top = M$ gilt.
Beweisen Sie für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

a) $AA^\top$ und $A^\top A$ sind symmetrische Matrizen

b) $A + A^\top$ ist eine symmetrische Matrix.

Aufgabe 4 (*Untervektorräume des* $\mathbb{R}^n$) (*10 Punkte*)

a) Es sei I eine nichtleere Menge und $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ Untervektorräume für jedes $i \in I$. Beweisen Sie, dass die Menge $\bigcap_{i \in I} U_i$ wieder ein Untervektorraum ist.

b) Geben Sie zwei Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ an sodass $U_1 \cup U_2$ kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

c) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Beweisen Sie

$$\mathrm{LH}_{\mathbb{R}}(M) \subseteq \bigcap \{U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ Untervektorraum} \mid M \subseteq U\}$$

Bemerkung: Ist $\mathcal{X}$ eine Menge von Mengen, dann ist das Symbol $\bigcap \mathcal{X}$ definiert durch $x \in \bigcap \mathcal{X} \iff x \in \bigcap_{Y \in \mathcal{X}} Y \iff \forall Y \in \mathcal{X} : x \in Y$.

d) Zusatzaufgabe: Beweisen Sie, dass in Aufgabenteil c) Gleichheit gilt. (*+2 Punkte*)

Abgabe bis Montag, den 23.11.20 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.