Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 8 **14.06.21**

Aufgabe 1 (*Normale Matrizen*) (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie alle Werte $\alpha \in \mathbb{C}$, für die die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1+i & i & 1 \\ -i & 1 & 1+i & 0 \\ -1 & i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

komplex unitär diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie für einen solchen Wert eine komplexe Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^4$ aus Eigenvektoren von A.

Hinweis: Für alle Werte von α enthält die Menge der Eigenwerte von A die Zahlen 0 und $2+2i$.

Lösung zu Aufgabe 1

Die folgende Lösung lässt die Rechnung der Bestimmung der Eigenräume aus und würde als Abgabe eines Übungsblattes daher nicht ausreichen.

Nach der Vorlesung ist A genau dann komplex unitär diagonalisierbar, wenn A normal ist, also wenn $A^*A = AA^*$ gilt. Wir berechnen:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 0 & i & -1 \\ 0 & 1-i & 1 & -i \\ -1 & -i & 1-i & 0 \\ \overline{\alpha} & 1 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2+2i & (1-i)(-i+\alpha) \\ 0 & 4 & 2+2i & 2-2i \\ -2-2i & 2-2i & 4 & -i-\alpha \\ (1+i)\,(i+\overline{\alpha}) & 2+2i & i-\overline{\alpha} & \overline{\alpha}\alpha+3 \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}\alpha+3 & i+\alpha & -2+2i & (1-i)(-i+\alpha) \\ -i+\overline{\alpha} & 4 & 2+2i & 2-2i \\ -2-2i & 2-2i & 4 & 0 \\ (1+i)\,(i+\overline{\alpha}) & 2+2i & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^*A - AA^* = \begin{pmatrix} 1-\overline{\alpha}\alpha & -i-\alpha & 0 & 0 \\ i-\overline{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i-\alpha \\ 0 & 0 & i-\overline{\alpha} & -1+\overline{\alpha}\alpha \end{pmatrix}$$

Also gilt $A^*A = AA^*$ genau dann wenn $\alpha = -i$ ist.

Nach dem Hinweis bestimmen wir für $\alpha = -i$ mittels Gauß-Algorithmus die Eigenräume. Es ergibt sich $E_0(A) = \mathrm{LH}(v_1, v_2)$ und $E_{2+2i}(A) = \mathrm{LH}(v_3, v_4)$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1-i \\ -1-i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 := \begin{pmatrix} -1-i \\ 1-i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_4 := \begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $v_1, \ldots, v_4$ bereits eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A bildet, kann es keine weiteren Eigenwerte von A geben. In jedem der beiden Räume finden wir mit dem Gram-Schmidt-Algorithmus eine Orthonormalbasis:

$$b_1 := \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1-i \\ -1-i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} -1-i \\ 1-i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_4 := \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Unsere Wahl von v_1, v_2, v_3, v_4 war schon eine Orthogonalbasis, daher musste hier nur noch normiert werden.

Aufgabe 2 (*Isometrienormalform*) (*10 Punkte*)

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4 \\ x &\mapsto Ax \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass φ eine Isometrie ist.

b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von φ und alle komplexen Eigenwerte von A.

c) Bestimmen Sie die reelle Isometrienormalform $\tilde{A}$ von A.

d) Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{O}(4)$, so dass gilt:

$$S^\top \cdot A \cdot S = \tilde{A}.$$

Lösung zu Aufgabe 2

Die folgende Lösung lässt die Rechnung bei der Bestimmung des charakteristischen Polynoms und der Eigenräume aus und würde als Abgabe eines Übungsblattes daher nicht ausreichen.

a) Man rechnet aus, dass $A^\top A = 1_4$ gilt. Da es sich um $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt handelt, folgt daraus, dass φ eine Isometrie ist.

b) Das charakteristische Polynom von φ ist $p_\varphi = p_A = X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1) = (X-1)(X+1)(X+i)(X-i)$.

c) Die Eigenwerte 1 und -1 treten jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1 auf. Außerdem gibt es das Paar $i,\ -i = \bar{i}$ von echt komplexen Eigenwerten, mit algebraischer Vielfachheit 1. Es gilt $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$, daher gibt es ein Drehkästchen zum Winkel $\frac{\pi}{2}$. Die Isometrienormalform ist also

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Wir bestimmen die Eigenräume

$$E_1(A) = \mathrm{LH}(v_1), \qquad E_{-1}(A) = \mathrm{LH}(v_{-1}), \qquad E_i(A) = \mathrm{LH}(v_i)$$

mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_{-1} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_i := \begin{pmatrix} -2i \\ -2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da Isometrien normal sind, sind diese Eigenräume paarweise orthogonal zueinander. Analog zum Beweis von Satz 2.6.10 wird der zum Drehkästchen gehörende zweidimensionale Unterraum von den orthogonalen Vektoren $\mathrm{Im}(v_i), \mathrm{Re}(v_i)$ aufgespannt. Nach dem Normieren all dieser Vektoren erhalten wir die Orthonormlbasis.

$$b_1 := \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b_2 := \frac{1}{\|v_{-1}\|} v_{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b_3 := \frac{1}{\|\mathrm{Im}(v_i)\|} \mathrm{Im}(v_i) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_4 := \frac{1}{\|\mathrm{Re}(v_i)\|} \mathrm{Re}(v_i) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da es sich um eine Orthonormalbasis handelt, ist $S := (b_1|b_2|b_3|b_4) \in \mathrm{O}(4)$. Außerdem gilt $\varphi(b_1) = b_1, \varphi(b_2) = -b_2, \varphi(b_3) = b_4, \varphi(b_4) = -b_3$, also

$$AS = S\tilde{A} \quad \Longrightarrow \quad S^\top AS = \tilde{A}$$