Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

15. Januar 2021

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 82 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 29 (K):
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf gleichmäßige Stetigkeit.

(i) $D = [0, \infty),\ f(x) = \sqrt{x}$,

(ii) $D = (0, \infty),\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

(iii) $D = \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$,

(iv) $D = (0, \infty),\ f(x) = \log(x)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 29:

(i) <u>*Behauptung:*</u> Die Funktion $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig.

<u>*Beweis:*</u> Zu zeigen ist:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in [0, \infty)\colon\ |x - y| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| < \epsilon.$$

Es sei $\epsilon > 0$. Definiere $\delta := \epsilon^2 > 0$. Es gilt zunächst für alle $x, y \in [0, \infty)$:

$$|x - y| \le |x| + |y| = x + y \le x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2,$$

d.h. es gilt

$$\sqrt{|x - y|} \le \sqrt{x} + \sqrt{y}. \tag{1}$$

Es seien nun $x, y \in [0, \infty)$ mit $|x - y| < \delta$. Dann gilt mit (1)

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \le \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} = \epsilon.$$

□

(ii) <u>*Behauptung:*</u> Die Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist nicht gleichmäßig stetig.

<u>*Beweis:*</u> Zu zeigen ist:

$$\exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in (0, \infty)\colon\ |x - y| < \delta \text{ und } \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| \ge \epsilon.$$

Setze $\epsilon := 1$ und sei $\delta > 0$. Definiere $y := \delta$ und $x := \min\left\{\frac{\delta}{2}, \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^{-2}\right\}$. Dann gilt $0 < x < y = \delta$, also $|x - y| = \delta - x < \delta$. Zudem gilt nach Definition $0 < x \le \left(1 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{-2}$, also $\frac{1}{\sqrt{x}} \ge 1 + \frac{1}{\sqrt{y}} > \frac{1}{\sqrt{y}}$ und damit

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \ge 1 + \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = 1 = \epsilon.$$

□

(iii) <u>*Behauptung:*</u> Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ ist gleichmäßig stetig.

<u>*Beweis:*</u> Wir zeigen, dass f sogar Lipschitz-stetig. ist. Dann ist f insbesondere gleichmäßig stetig. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| = \left| \frac{1+y^2-(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| = \left| \frac{y^2-x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| = \left| \frac{(y+x)(y-x)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| \\ &= \frac{|x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \cdot |x-y| \leq \left(\frac{|y|}{1+y^2} + \frac{|x|}{1+x^2} \right) \cdot |x-y|\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Für $|x| \leq 1$ gilt $\frac{|x|}{1+x^2} \leq |x| \leq 1$.

Für $|x| > 1$ gilt $|x| < x^2$, also $x^2 + 1 > |x|$ und damit auch $\frac{|x|}{x^2+1} < 1$. Dieselben Abschätzungen wenden wir auch für y an. Somit lässt sich (2) weiter abschätzen zu

$$|f(x) - f(y)| \leq (1+1)\,|x-y| = 2\,|x-y|\,,$$

was die Lipschitz-Stetigkeit von f zeigt. □

(iv) <u>*Behauptung:*</u> Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \log(x)$ ist nicht gleichmäßig stetig.

<u>*Beweis:*</u> Zu zeigen ist:

$$\exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in (0,\infty)\colon\ |x-y| < \delta \text{ und } |\log(x) - \log(y)| \geq \epsilon.$$

Setze $\epsilon := 1$ und sei $\delta > 0$. Wähle $x = \delta$ und $y = \frac{\delta}{\mathrm{e}}$. Dann gilt $|x-y| = \left|\delta\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right| < \delta$. Zudem gilt

$$|f(x) - f(y)| = |\log(x) - \log(y)| = \left| \log(\delta) - \log\left(\frac{\delta}{\mathrm{e}}\right) \right| = |\log(\delta) - (\log(\delta) - \underbrace{\log(\mathrm{e})}_{=1})| = 1 = \epsilon.$$

□

Aufgabe 30:

(i) Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, welche punktweise auf D gegen eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie: (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f auf D genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0.$$

(ii) Es sei $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge monoton wachsender Funktionen mit

(a) $f_n(a) \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(b) = 0.$

Zeigen Sie, dass (f_n) dann gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen 0 konvergiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 30:

(i) <u>*Voraussetzung:*</u> Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, welche punktweise auf D gegen eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert.

<u>*Behauptung:*</u> (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f auf D genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in D gilt

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0.$$

Beweis: $\Rightarrow$: Es sei also (f_n) gleichmäßig konvergent gegen f und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Folglich gilt dies auch für $x = x_n$.

$\Leftarrow$: Angenommen (f_n) ist nicht gleichmäßig konvergent gegen f. Dann gibt es ein $\epsilon_0 > 0$, sodass es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ und ein $x(n) \in D$ gibt mit

$$|f_n(x(n)) - f(x(n))| \geq \epsilon_0.$$

Definiere die Folge (x_n) durch $x_n := x(n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann konvergiert $f_n(x_n) - f(x_n)$ nicht gegen 0. $\square$

(ii) *Voraussetzung:* Es sei $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge monoton wachsender Funktionen mit

(a) $f_n(a) \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, (b) $\lim_{n\to\infty} f_n(b) = 0$.

Behauptung: Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen 0.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen der Monotonie

$$0 \leq f_n(a) \leq f_n(x) \leq f_n(b) \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Es sei nun $\epsilon > 0$. Wegen der Eigenschaft (b) existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $0 \leq f_n(b) < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wegen der Monotonie erhalten wir

$$\forall n \geq n_0 \; \forall x \in [a,b] \colon 0 \leq f_n(x) \leq f_n(b) < \epsilon.$$

Somit gilt insgesamt

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in [a,b] \colon \; |f_n(x) - 0| < \epsilon,$$

also konvergiert (f_n) auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen 0. $\square$

Aufgabe 31 (K):
Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(i) $f_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\; f_n(x) := x\mathrm{e}^{-nx}$ $(n \in \mathbb{N})$, (ii) $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R},\; f_n(x) := nx(1-x)^n$ $(n \in \mathbb{N})$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx - n^2}$ für $x \in (0,1)$, (iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 31:

(i) *Behauptung:* Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig und insbesondere punktweise gegen die Funktion $f \colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\; f(x) := 0$.

Beweis: Wir zeigen gleichmäßige Konvergenz, woraus sich dann auch die punktweise Konvergenz ergibt. Für alle $x \in [0,\infty)$ gilt

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq x,$$

d.h. $\frac{x}{\mathrm{e}^x} \leq 1$. Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,\infty)$:

$$|f_n(x) - f(x)| = x\mathrm{e}^{-nx} = \frac{1}{n} \cdot \frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}} \leq \frac{1}{n},$$

also gilt $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

(ii) *Behauptung:* Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$.

Beweis: Es gilt $f_n(0) = 0 \to 0$ für $n \to \infty$. Für $x \in (0,1]$ gilt $(1-x) \in [0,1)$ und damit folgt

$$\sqrt[n]{|nx(1-x)^n|} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{x}(1-x) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot 1 \cdot (1-x) = 1-x < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(nx(1-x)^n)$ und somit ist die Folge $(nx(1-x)^n)$ eine Nullfolge. Somit ist die punktweise Konvergenz von (f_n) gegen die Nullfunktion gezeigt.

Weiter gilt für die Folge $(\frac{1}{n})$ in $[0,1]$:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1} \neq 0$$

für $n \to \infty$. Nach Aufgabe 30 (i) ist die Konvergenz daher nicht gleichmäßig. □

(iii) *Behauptung:* Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx-n^2}$ konvergiert auf $(0,1)$ punktweise und gleichmäßig.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $x \in (0,1)$ gilt

$$\left|\frac{1}{nx-n^2}\right| = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-x} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{(n-1)^2} =: a_n.$$

Setze $a_1 := 1$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und es gilt $\left|\frac{1}{nx-n^2}\right| \leq a_n$ für alle $n \geq 2$ und alle $x \in (0,1)$. Nach dem Kriterium von Weierstraß konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx-n^2}$ auf $(0,1)$ gleichmäßig, und daher insbesondere auch punktweise. □

(iv) *Behauptung:* Die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n}$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sin(x)\left(1 + \frac{1}{x^4}\right), & x \neq 0. \end{cases}$$

Beweis: Es sei $x \in \mathbb{R}$. Für $x = 0$ ergibt sich wegen $\sin(0) = 0$ direkt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n} = 0 = f(0)$.

Für $x \neq 0$ ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^4}\right)^n$ konvergent und damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n} &= \sin(x) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^4}\right)^n = \sin(x) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^4}} = \sin(x) \cdot \frac{1+x^4}{1+x^4-1} \\ &= \sin(x)\left(\frac{1}{x^4} + 1\right) = f(x).\end{aligned}$$

Somit konvergiert (f_n) punktweise gegen f.

Für $x \neq 0$ gilt $f(x) = \sin(x) + \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^3}$. Nach Vorlesung gilt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\frac{1}{x}$ divergiert aber für $x \to 0$. Somit existiert der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to 0$ nicht, insbesondere ist f in 0 nicht stetig. Damit kann die Konvergenz der stetigen Funktionen $s_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s_k(x) := \sum_{n=0}^{k} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n}$ $(k \in \mathbb{N})$ gegen f nicht gleichmäßig sein (vgl. Satz 8.3 b)). □

Aufgabe 32:

(i) Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Die Funktion f sei stetig in 0 und g sei differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass das Produkt $g \cdot f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \cdot f)(x) := g(x)f(x)$ in 0 differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$:

$$f(x) := \begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 32:

(i) *Voraussetzung:* Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, wobei f stetig in 0 ist und g differenzierbar in 0 ist mit $g(0) = 0$.

Behauptung: Das Produkt $\varphi := g \cdot f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) := (g \cdot f)(x) := g(x)f(x)$ ist in 0 differenzierbar mit Ableitung $\varphi'(0) = (g \cdot f)'(0) = f(0) \cdot g'(0)$.

Beweis: Für alle $h \neq 0$ gilt

$$\frac{\varphi(0+h) - \varphi(0)}{h} = \frac{g(h)f(h) - g(0)f(0)}{h} = \frac{g(h)f(h)}{h} = f(h) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h}.$$

Da f in 0 stetig ist, gilt $f(h) \to f(0)$ für $h \to 0$. Da g in 0 differenzierbar ist, gilt $\frac{g(h)-g(0)}{h} \to g'(0)$ für $h \to 0$. Insgesamt gilt also

$$\frac{\varphi(0+h) - \varphi(0)}{h} = f(h) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h} \xrightarrow{h \to 0} f(0) \cdot g'(0),$$

also ist φ nach Definition in 0 differenzierbar mit $\varphi'(0) = f(0) \cdot g'(0)$. □

(ii) *Behauptung:* f ist genau dann differenzierbar, wenn $x \in \{0, 1\}$. In diesem Fall gilt $f'(x) = 0$.

Beweis: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt $f(x) = x^2(x-1)^2$. Es sei zunächst $x \in \{0, 1\}$. Dann gilt $f(x) = 0$, also

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h)}{h}$$

für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Folglich gilt

$$\left|\frac{f(x+h)}{h}\right| \leq \left|\frac{(x+h)^2(x+h-1)^2}{h}\right| = \left|(x+h)(x-1+h) \cdot \frac{(x+h)(x-1+h)}{h}\right|$$

für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Somit gelten

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| \leq \left|h(h-1) \cdot \frac{h(h-1)}{h}\right| = |h|\,(h-1)^2 \xrightarrow{h \to 0} 0$$

und

$$\left|\frac{f(1+h) - f(1)}{h}\right| \leq \left|(1+h)h \cdot \frac{(1+h)h}{h}\right| = |h|\,(1+h)^2 \xrightarrow{h \to 0} 0,$$

d.h. f ist in diesen x differenzierbar mit $f'(x) = 0$.

Es sei nun $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Wir zeigen, dass f in x nicht stetig ist, somit kann f dort auch nicht differenzierbar sein.

<u>1. Fall:</u> Es sei $x \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $f(x) = 0$. Wähle eine Folge (x_n) in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Dann gilt

$$f(x_n) = x_n^2(x_n - 1)^2 \xrightarrow{n \to \infty} x^2(x-1)^2 \neq 0 = f(x),$$

also ist f nicht stetig in x.

<u>2. Fall:</u> Es sei $x \notin \mathbb{Q}$. Dann gilt $f(x) = x^2(x-1)^2 \neq 0$. Wähle eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Dann gilt $f(x_n) = 0 \xrightarrow{n \to \infty} 0 \neq f(x)$, also ist f nicht stetig in x. □