Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Übungsblatt 1 **19.04.21**

Aufgabe 1 (*Eine Matrix ist ähnlich zu ihrer Transponierten*) (*10 Punkte*)

a) Es sei $\lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ und $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ein Jordankästchen, wobei freie Stellen in der Matrix für Nullen stehen. Beweisen Sie, dass $J_n(\lambda)$ und $J_n(\lambda)^\top$ ähnlich zueinander sind.

Hinweis: Es gibt eine invertierbare Matrix S, die nur Nullen und Einsen als Einträge hat, und $J_n(\lambda)^\top = S\,J_n(\lambda)\,S^{-1}$ erfüllt. Versuchen Sie die Aufgabe zunächst für $n = 2$ und $n = 3$ zu lösen.

b) Nun sei $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix in jordanscher Normalform.
Beweisen Sie, dass J und $J^\top$ ähnlich zueinander sind.

c) Nun sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine beliebige quadratische Matrix.
Beweisen Sie, dass A und $A^\top$ ähnlich zueinander sind.

Bemerkung: Die Aussage dass A und $A^\top$ ähnlich zueinander sind, gilt sogar für jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über jedem beliebigen Körper $\mathbb{K}$. Dies lässt sich mit Verallgemeinerungen der Jordanschen Normalform zeigen.

Aufgabe 2 (*Jordansche Normalform*) (*10 Punkte*)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ eine Matrix, die genau die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ hat.

a) Bestimmen Sie alle möglichen charakteristischen Polynome, die A haben kann. Geben Sie für jedes dieser Polynome ein Beispiel für eine solche Matrix A an.

b) Wir betrachten nun das Polynom $m = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \in \mathbb{C}[X]$. Beweisen Sie: A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $m(A) = 0$ gilt.
Hinweis: Erinnern Sie sich an Aufgabe 1 von Übungsblatt 12 der Linearen Algebra I.

c) Ab jetzt sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte, deren geometrische Vielfachheiten und die jordansche Normalform J von A.

d) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, sodass $SJS^{-1} = A$.
Hinweis: Dies ist auch äquivalent zu $SJ = AS$. Überlegen Sie sich zuerst, dass vier der Spalten von S Eigenvektoren von A sind. Worauf wird die verbleibende Spalte abgebildet?

Abgabe bis Montag, den 26.04.21 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.