Velislav Slavov 2385786 | Tutorium #13
Tutor: Demir

A1)

i) $x \in \mathbb{R}$

a) $x \leq 5 + \sqrt{x+7} \Rightarrow x-5 \leq \sqrt{x+7}$

$\Rightarrow (x-5)^2 \leq x+7 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 \leq x+7$

$\Rightarrow x^2 - 11x + 18 \leq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 9x + 18 \leq 0$

$\Rightarrow x(x-2) - 9(x-2) \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x-9) \leq 0$

$\Rightarrow x = 2$ ODER $x = 9 \Rightarrow \boxed{2 \leq x \leq 9}$

b) $|x+5| \leq 2(4-x)$

Fall: $\|x+5\| = x+5$	Fall: $\|x+5\| = -(x+5)$
$\Rightarrow x+5 \leq 2(4-x)$	$\Rightarrow -x-5 \leq 8-2x$
$\Rightarrow x+5 \leq 8-2x$	$\Rightarrow x \leq 13$
$\Rightarrow 3x \leq 3$	
$\Rightarrow x \leq 1$	

ii)

a) $A := \left\{ (-1)^n - \frac{3}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, Sei $a \in A \Rightarrow a = (-1)^n - \frac{3}{n}$

Sei $n \leq 3$

$$\left.\begin{array}{l} \text{so gilt: Für } n=1 \text{ gilt } \frac{3}{n} = 3 \\ \qquad\qquad \text{Für } n=3 \text{ gilt } \frac{3}{n} = 1 \end{array}\right\} 1 \leq \frac{3}{n} \leq 3$$

Sei n gerade

$$\left.\begin{array}{l} \text{so gilt: für } \frac{3}{n} = 1 \text{ gilt } a = 1-1 = 0 \\ \qquad\qquad \text{für } \frac{3}{n} = 3 \text{ gilt } a = 1-3 = -2 \end{array}\right\} -2 \leq a \leq 0$$

$-2 \leq a \leq 0 \Rightarrow a \in [-2, 0]$

Velislav Slavov 2385786

Sei n ungerade

So gilt: für $\frac{3}{n} = 1$ gilt $a = -1-3 = -4$

für $\frac{3}{n} = 3$ gilt $a = -1-1 = -2$ $\Big\} -4 \leq a \leq -2$

$-4 \leq a \leq -2 \Rightarrow a \in [-4,-2]$

$\Rightarrow$ Sei $n \leq 3 \Rightarrow a \in [-4, 0]$ a

Sei $n > 3$

So gilt: $0 < \frac{3}{n} < 1$

Sei n gerade

So gilt: $a = 1 - \frac{3}{n} \Rightarrow 0 < a < 1$

Sei n ungerade

So gilt: $a = -1 - \frac{3}{n} \Rightarrow -2 < a < -1$ $\Big\} -2 < a < 1$

$-2 < a < 1 \Rightarrow a \in (-2, 1)$ b

a&b

$\Rightarrow a \in [-4, 1) \Rightarrow \sup A = \max A = -4$

$\inf A \neq \min A = 1$ ■

Velislav Slavov 2385786

b) $B := \left\{ -x - \frac{1}{x} : 0 < x \leq 2 \right\}$ Sei $b \in B \Rightarrow b = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$

Sei $1 \leq x \leq 2$

So gilt: $\left.\begin{array}{l} \text{für } x=1 \text{ gilt } b = -2 \\ \text{für } x=2 \text{ gilt } b = -2{,}5 \end{array}\right\} -2{,}5 \leq x \leq -2$

$-2{,}5 \leq b \leq -2 \Rightarrow b \in [-2{,}5, 2]$ a

Sei $0 < x < 1$

So gilt: $\frac{1}{x} > 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} > 2 \Rightarrow -\left(x + \frac{1}{x}\right) < -2$

$\Rightarrow b < -2$ b

a&b

$\Rightarrow b \in (-\infty, 2] \Rightarrow$ kein inf B und kein min B

$\Rightarrow \sup B = \max B = 2$

A2) $A, B \subseteq \mathbb{R}$; $A, B \neq \emptyset$; $A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\}$

i) Zu zeigen: A und B nach oben beschränkt

$\Rightarrow A+B$ auch & $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Lass:

$\left.\begin{array}{l} p := \sup A \Rightarrow \forall a \in A : a \leq p \\ p' := \sup B \Rightarrow \forall b \in B : b \leq p' \end{array}\right\} \forall a, b : a+b \leq p + p'$

$\Rightarrow A+B$ ist nach oben beschränkt

$p'' := \sup(A+B) \Rightarrow \forall (a+b) \in (A+B) : (a+b) \leq p''$

Lass

$a = p$ & $b = p' \Rightarrow p'' = p + p' \Rightarrow \sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Velislav Slavov 2385786

ii) Zu zeigen: A & $(A+B)$ nach oben beschränkt
$\Rightarrow B$ auch & $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Lass

$p := \sup A \Rightarrow \forall a \in A: a \leq p$

$p'' := \sup(A+B) \Rightarrow \forall (a+b) \in (A+B): (a+b) \leq p''$

Sei $a = p \Rightarrow p + b \leq p'' \Rightarrow b \leq p'' - p \Rightarrow B$ ist nach oben beschränkt

Lass $p' = \sup B = p'' - p \Rightarrow p'' = p + p' \Rightarrow \sup(A+B) = \sup A + \sup B$

A3) $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt & $\inf A > 0$
$B := \{ b \in \mathbb{R} : \frac{1}{b} \in A \}$

Zu zeigen: B nach oben beschränkt & $\sup B = \frac{1}{\inf A}$

Lass $p := \inf A \Rightarrow \forall a \in A: p \leq a$ & $p > 0$

$a \in A \Rightarrow a = \frac{1}{b} \Rightarrow p \leq \frac{1}{b} \Rightarrow b \leq \frac{1}{p} \Rightarrow B$ ist nach oben beschränkt

$\Rightarrow \forall b \in B: b \leq \frac{1}{p} \Rightarrow \sup B = \frac{1}{p} \Rightarrow \sup B = \frac{1}{\inf A}$ (per Definition) ∎

Velislav Slavov 2385786

A4) $n \in \mathbb{N}$

i) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 =: A$

I.A. lass $n=1$

$\sum_{j=1}^{1} = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 = 1^3 \Rightarrow A(1)$ ist wahr

I.V. lass $A(n)$ wahr sein $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

I.S. $\sum_{j=1}^{n+1} = \sum_{j=1}^{n} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$

$= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1) \right) =$

$= (n+1)^2 \frac{(n^2+4n+4)}{4} = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = \frac{1}{4} (n+1)^2 \cdot ((n+1)+1)^2$

$\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr ■

ii) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)\, 2^{n+1} + 2 =: A$

I.A. Lass $n=1$

$\sum_{k=1}^{1} = 0 \cdot 2^2 + 2 = 2 = 1 \cdot 2^1 \Rightarrow A(1)$ ist wahr

I.V. Lass $A(n)$ wahr sein $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1) 2^{n+1} + 2$

I.S. $\sum_{k=1}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} + (n+1) \cdot 2^{n+1} = (n-1) 2^{n+1} + 2 + (n+1) 2^{n+1}$

$= 2^{n+1} ((n-1) + (n+1)) + 2 = 2^{n+1} \cdot 2n + 2 =$

$= n \cdot 2^{n+2} + 2 = ((n+1)-1) \cdot 2^{(n+1)+1} + 2 \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr

Velislav Slavov 2385786

iii) $n \geq 6$ & $3^n > 2n^3 =: A$

I.A. Lass $n=1$

$3^1 \not> 2 \cdot 1^3$, weil $n<6 \Rightarrow A(1)$ ist wahr

I.V. $A(n)$ sei wahr $\Rightarrow n \geq 6$ & $3^n > 2n^3$

I.S.

$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$

$2(n+1)^3 = 2(n^3+3n^2+3n+1) = 2n^3+6n^2+6n+2$

da $3^n > 2n^3$ (nach I.V.) $\Rightarrow 3 \cdot 3^n > 6n^3$

also solange $6n^2+6n+2 \leq 4n^3$ ist $A(n+1)$ wahr

Lass $n=6 \Rightarrow A$ ist wahr (nach I.V.)

Für $A(7)$:

$$\left.\begin{array}{l} 6n^2+6n+2 = 6 \cdot 49 + 6 \cdot 7 + 2 = 294+44 = 338 \\ 4n^3 = 4 \cdot 343 = 1372 \end{array}\right\} A(n+1) \text{ ist wahr}$$

Velislav Slavov 2385786

iv) $\frac{n^3+5n}{6} \in \mathbb{N} =: A$

I.A. Lass $n=1$

$\frac{n^3+5n}{6} = \frac{1+5}{6} = 1 \Rightarrow A(1)$ ist wahr

I.V. Sei $A(n)$ wahr $\Rightarrow \frac{n^3+5n}{6} \in \mathbb{N}$

I.S. $A(n+1) = \frac{(n+1)^3+5(n+1)}{6} =$

$= \frac{n^3+3n^2+3n+1+5n+5}{6} =$

$= \frac{n^3+3n^2+\overset{5n+3n}{\cancel{8n}}+6}{6} = \frac{(n^3+5n)+(3n^2+3n+6)}{6} =$

$= \frac{n^3+5n}{6} + \frac{3n^2+3n+6}{6}$

da $\frac{n^3+5n}{6} \in \mathbb{N}$ (nach I.V.) $\Rightarrow$ sobald

$\frac{3n^2+3n+6}{6} \in \mathbb{N}$ ist äuch $A(n+1)$ wahr

$A' := \frac{3n^2+3n+6}{6} \in \mathbb{N} = \frac{n^2+n+2}{2}$

I.A. Lass $n=1$

$\frac{n^2+n+2}{2} = \frac{1+1+2}{2} = 2 \Rightarrow A'(1)$ ist wahr

Velislav Slavov 2385786

I.V. Sei $A'(n)$ wahr $\Rightarrow \frac{n^2+n+2}{2} \in \mathbb{N}$

I.S. $A'(n+1)$

$$\frac{(n+1)^2+n+1+2}{2} = \frac{n^2+2n+1+n+3}{2} =$$

$$= \frac{(n^2+n+2)+(2n+2)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2} + \frac{2n+2}{2}$$

da $\frac{n^2+n+2}{2} \in \mathbb{N}$ (nach I.V.) $\Rightarrow$ solange $\frac{2n+2}{2} \in \mathbb{N}$ ist auch $A'(n+1)$ auch wahr

$\frac{2n+2}{2} = n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow A'(n+1)$ ist wahr

Weil $A'(n+1)$ wahr ist $\Rightarrow A(n+1)$ ist auch wahr $\blacksquare$