Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Sommersemester 2021

14. Mai 2021

Abgabe bis 21. Mai 2021, 12:00 Uhr

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 36 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 17:
Es sei die Menge K gegeben durch

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 \leq 3\}$$

sowie die Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := x^3 - 3xy^2.$$

Bestimmen Sie Art und Lage sämtlicher Extrema von f.

Aufgabe 18 (K):

(i) Die Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien gegeben durch

$$f(x, y) := (x^2, y^2),\ g(x, y) := (\sin(xy), e^{x+y}),\ h(x, y) := (e^x \cos(y), \sinh(x)).$$

Begründen Sie, dass die Funktionen f, g und h differenzierbar sind und berechnen Sie jeweils deren Ableitung. Ermitteln Sie weiter mithilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen $g \circ f$ und $h \circ g$.

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar und positiv homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ die Gleichung $f'(x)x = \alpha f(x)$ erfüllt ist.

Aufgabe 19 (K):

(i) Es seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Die Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$F(x, y) := f(h(xy), xg(y, x), y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist, und stellen Sie die Ableitung F' mithilfe der Kettenregel als Komposition der (partiellen) Ableitungen von f, g und h dar.

(ii) Wir definieren die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x, y, z) := xy + 2x^2,\ g(x, y, z) := (1 + 3z, x^2 + y + z^2, 4zy) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Berechnen Sie jeweils $f', (f \circ g)'$ und $(g \circ g \circ g)'$ im Punkt $(0, 0, 0)$.

Aufgabe 20:
Zeigen Sie, dass es keine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, die injektiv ist.
Hinweis: Beweis durch Widerspruch: Betrachten Sie für geschickt gewähltes $y_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F(x, y) := f(x, y) - f(0, y_0)$.

Information

Aufgrund der aktuellen Situation wird dieses Modul teilweise in digitaler Form angeboten. Die gesamte Abwicklung wird über das System ILIAS stattfinden. Melden Sie sich dafür mit Ihrem KIT-Account an und treten Sie dem Kurs **Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik** bei. Sie können diesem Kurs direkt über folgenden Link beitreten:

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1460343_rcodeUyjdjAUg9P&client_id=produktiv`

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Scheinkriterien, Tutorien, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung. Dort werden Sie auch über mögliche Änderungen informiert.

Zum Bearbeiten der Übungsblätter sollten Sie pro Woche etwa 7-8 Seiten des Skripts mithilfe der angebotenen Vorlesungsvideos durcharbeiten. Das kommende Übungsblatt wird den Vorlesungsstoff bis Seite 43 (ausschließlich Satz 20.2) beinhalten.

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-6 und 7-13 **jeweils** mindestens 48 bwz. 56 Punkte (50%) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal.

Anmeldung zur Klausur

Die Klausur zur Höheren Mathematik I und II für die Fachrichtung Informatik wird am **14.09.2021** von **8:00 - 13:00 Uhr** stattfinden. Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort möglich. Beachten Sie bitte den **Anmeldeschluss** am **30.08.2021**. Eine nachträgliche Anmeldung ist nicht möglich.