Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 6 **25.05.21**

Aufgabe 1 (*Eigenschaften linearer Isometrien*) (*10 Punkte*)

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und V ein n-dimensionaler und W ein m-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, jeweils mit einem Skalarprodukt.
Außerdem sei B eine geordnete Orthonormalbasis von V und C eine geordnete Orthonormalbasis von W. Die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $\varphi\colon V \to W$ nennen wir $A \coloneqq M_{\mathrm{CB}}(\varphi)$.

a) Beweisen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (i) Die Abbildung $\varphi\colon V \to W$ ist eine lineare Isometrie (aber nicht notwendigerweise bijektiv).
   (ii) Die Spalten von A bilden ein Orthonormalsystem bzgl. des Standardskalarprodukts in $\mathbb{K}^m$.
   (iii) Es gilt $A^*A = \mathbb{1}_n$

b) Beweisen Sie (ohne Bemerkung 2.1.2 zu verwenden): Falls $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Isometrie ist, ist φ injektiv und es gilt $m \geq n$.

c) Beweisen Sie: Falls $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Isometrie ist, gibt es geordnete Orthonormalbasen B′ von V und C′ von W, sodass $M_{\mathrm{C'B'}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ gilt.

Hinweis: In der Literatur werden Isometrien manchmal schon als bijektiv (und/oder linear) definiert. Das, was wir als „Isometrie" bezeichnen, wird dann „isometrische Einbettung" genannt.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Es seien a_{ij} die Einträge der Matrix A, und $\mathrm{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathrm{C} = (c_1, \dots, c_m)$. Die Skalarprodukte von V und W bezeichnen wir mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ und das Standardskalarprodukt in $\mathbb{K}^m$ mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{K}^m}$.

Aufgrund der Definition von A gilt $\varphi(b_i) = \sum_{k=1}^m a_{ki} c_k$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, und somit

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(b_i), \varphi(b_j) \rangle_W &= \left\langle \sum_{k=1}^m a_{ki} c_k, \sum_{\ell=1}^m a_{\ell j} c_\ell \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m a_{ki} \overline{a_{\ell j}} \langle c_k, c_\ell \rangle \\
&= \sum_{k=1}^m a_{ki} \overline{a_{kj}} \\
&= (A^* A)_{ji} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{K}^m}
\end{aligned}$$

wobei wir $\langle c_k, c_\ell \rangle = \delta_{k\ell}$ benutzt haben und $(A^*A)_{ji}$ den (j,i)-ten Eintrag der Matrix A^*A bezeichnet.

Falls φ eine Isometrie ist, gilt $\langle \varphi(b_i), \varphi(b_j) \rangle_W = \langle \varphi(b_i), \varphi(b_j) \rangle_W = \langle b_i, b_j \rangle_V = \delta_{ij}$. Aus der obigen Gleichheit folgt dann direkt Aussage (ii) und (iii).

Falls umgekehrt (ii) oder (iii) gilt, folgt daraus $\langle \varphi(b_i), \varphi(b_j) \rangle_W = \delta_{ij}$. Man kann alle Vektoren $x, y \in V$ schreiben als $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ und $y = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle_V &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^n \beta_j b_j \right\rangle_V \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle b_i, b_j \rangle_V \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle \varphi(b_i), \varphi(b_j) \rangle_W \\
&= \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \right), \varphi\left(\sum_{j=1}^n \overline{\beta_j} b_j \right) \right\rangle_W \\
&= \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle_W
\end{aligned}$$

und φ ist eine Isometrie.

Somit haben wir die Äquivalenzen (i) $\iff$ (ii) und (i) $\iff$ (iii) gezeigt.

b) Es sei φ eine lineare Isometrie. Es gibt viele Varianten, zu beweisen, dass φ injektiv ist. Daraus folgt dann direkt $m \geq n$:

- Falls $\varphi(x) = 0$ gilt, gilt $0 = \|\varphi(x)\|_W = \|x\|_V$, also $x = 0$. Damit hat φ trivialen Kern und ist injektiv.
- Aus (ii) folgt, dass die n Spalten der Darstellungsmatrix linear unabhängig sind und sie damit Rang n hat. Daraus folgt mit der Dimensionsformel $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(V) - \mathrm{rg}(\varphi) = n - n = 0$. Damit hat φ trivialen Kern und ist injektiv.

- Wie oben gezeigt bilden die Bilder $\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)$ ein Orthonormalsystem und sind damit linear unabhängig. Daraus folgt, dass φ injektiv ist.
- Wir definieren die „zu φ adjungierte Abbildung“ $\varphi^*\colon W \to V$ mit Abbildungsmatrix $M_{\mathrm{BC}}(\varphi^*) = A^*$. Damit gilt $\varphi^* \circ \varphi = \mathrm{id}_V$. Die Abbildung φ hat also eine linksinverse Abbildung und ist somit injektiv.

c) Wir können eine beliebige Orthonormalbasis $B' = (b_1, \ldots, b_n)$ von V wählen. Da φ eine lineare Isometrie ist, bilden die Bilder $c_1 := \varphi(b_1), \ldots c_n := \varphi(b_n)$ ein Orthonormalsystem in W, das wir zu einer Orthonormalbasis $\mathrm{C}' = (c_1, \ldots c_m)$ ergänzen können. Wegen $\varphi(b_i) = c_i$ für $i \in \{1, \ldots n\}$ sieht man, dass $M_{\mathrm{C'B'}}$ dann die gewünschte Form hat.

Aufgabe 2 (*Orthogonale und unitäre Diagonalisierbarkeit*) (*10 Punkte*)

a) Ist die Matrix

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

reell orthogonal diagonalisierbar? Bestimmen Sie ggf. eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, bezüglich der die Matrix Diagonalform hat.
Hinweis: Die Eigenwerte dieser Matrix sind 0 und 5.

b) Welche der Matrizen

$$A_2 := \begin{pmatrix} 2+i & 1 & 0 \\ -4 & -2+i & 0 \\ i & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -2 \\ 1-i & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist komplex unitär trigonalisierbar? Welche sind komplex unitär diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Versuchen Sie nicht, das charakteristische Polynom von A_3 zu berechnen.

Lösung zu Aufgabe 2

Die folgende Lösung skizziert nur die Rechenwege und würde als Abgabe eines Übungsblattes nicht ausreichen.

a) Man berechnet wie gewohnt die Eigenräume

$$E_0(M) = \ker(M) = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$$

$$E_5(M) = \ker(5\mathbb{1}_3 - M) = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Offenbar sind die Eigenräume orthogonal zueinander. Wir müssen also noch eine Orthonormalbasis jedes Eigenraumes finden. Durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens auf die obigen Erzeugendensysteme finden wir die ONB b_1, b_2 von $E_0(M)$ und b_3 von $E_5(M)$:

$$b_1 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad b_2 := \sqrt{\frac{3}{5}} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}, \qquad b_3 := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dies ist also eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

b) Jede komplexe Matrix ist komplex unitär trigonalisierbar, so auch A_2 und A_3. Außerdem gilt $A_3^* = A_3$ also ist A_3 selbstadjungiert und somit komplex unitär diagonalisierbar.

Wir prüfen, ob A_2 diagonalisierbar ist: Das charakteristische Polynom ist

$$p_{A_2} = (X+2)(X-i)^2.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert i ist aber $E_i(A_2) = \mathrm{LH} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, also nur eindimensional. Damit ist die geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts i und A_2 ist nicht komplex diagonalisierbar (und erst recht nicht unitär diagonalisierbar).

Zusatzaufgabe (*Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen*) (*+3 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils ein Beispiel (mit einem $n \in \mathbb{N}$ ihrer Wahl) für eine symmetrische Matrix

a) aus $\mathbb{C}^{n\times n}$, die nicht über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

b) aus $\mathbb{Q}^{n\times n}$, die nicht über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist.

c) aus $\mathbb{F}_2{}^{n\times n}$, die nicht über $\mathbb{F}_2$ diagonalisierbar ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe

Wir versuchen es zunächst generell mit $n = 2$, also $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ für a, b, d aus dem entsprechenden Körper. Damit gilt $p_A = (X-a)(X-d) - b^2 = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$.

a) In $\mathbb{C}$ zerfällt p_A in Linearfaktoren. Wenn die beiden Linearfaktoren verschieden sind, sind die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten jeweils 1 und A ist diagonalisierbar. Wir versuchen also eine Matrix mit nur einem Eigenwert, z.B. $p_A(X) = X^2$ zu erreichen. Das ist z.B. für $A := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ gegeben. Diese Matrix hat Rang 1, also ist $\dim(E_0(A)) = \dim(\ker(A)) = 1$. Daher unterscheidet sich die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 0, nämlich 1, von der algebraischen Vielfachheit, nämlich 2.

b) Jede rationale symmetrische Matrix ist auch eine reelle symmetrische Matrix und ist damit reell diagonalisierbar. Es kann aber passieren, dass die (reellen) Eigenwerte nicht rational sind. Zum Beispiel hat $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ die reellen Eigenwerte $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$, aber keine rationalen Eigenwerte. Damit ist A nicht rational diagonalisierbar.

c) Da A nicht schon eine Diagonalmatrix sein sollte, muss $b = 1$ gelten. Damit bleiben nur noch 4 Matrizen in $\mathbb{F}_2{}^{2\times 2}$ übrig, die in Frage kommen. Beispielsweise hat $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ das charakteristische Polynom X^2, also nur den Eigenwert 0, aber hat Rang 1. Also ist $\dim(E_0(A)) = \dim(\ker(A)) = 1$ und mit derselben Begründung wie in a) ist A nicht über F_2 diagonalisierbar.