Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 3 **03.05.21**

Aufgabe 1 (*Orthonormalbasen*) (*10 Punkte*)

a) Auf dem Untervektorraum $V := \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq 2 \} \subseteq \mathbb{R}[X]$ sei das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \sum_{k=0}^{2} f(k)\, g(k) \end{aligned}$$

definiert. Zeigen Sie, dass die Polynome

$$f_1 := 1, \qquad f_2 := X - 1, \qquad f_3 := 3X^2 - 6X + 1$$

eine Orthogonalbasis in V bilden und bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda_1 f_1$, $\lambda_2 f_2$, $\lambda_3 f_3$ eine Orthonormalbasis von V bilden.

b) Es sei das reelle Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^\top A y \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass diese Vektoren ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilden und bestimmen Sie einen Vektor $b_4 \in V$, sodass b_1, b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis bilden.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Es gilt

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 1 & f_2(0) &= -1 & f_3(0) &= 1 \\ f_1(1) &= 1 & f_2(1) &= 0 & f_3(1) &= -2 \\ f_1(2) &= 1 & f_2(2) &= 1 & f_3(2) &= 1 \end{aligned}$$

und somit

$$\langle f_1, f_1\rangle = 3, \quad \langle f_1, f_2\rangle = 0, \quad \langle f_1, f_3\rangle = 0, \quad \langle f_2, f_2\rangle = 2, \quad \langle f_2, f_3\rangle = 0, \quad \langle f_3, f_3\rangle = 6,$$

Damit sind f_1, f_2, f_3 paarweise orthogonal. Da $\dim(V) = 3$ gilt, bilden sie also eine Orthogonalbasis. Nach der Vorlesung kann man dann $\lambda_i := \frac{1}{\|f_i\|} = \frac{1}{\sqrt{\langle f_i, f_i\rangle}}$ wählen, also $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, damit $\lambda_1 f_1,\ \lambda_2 f_2,\ \lambda_3 f_3$ eine Orthonormalbasis von V bilden.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} &b_1^\top A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2^\top A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3^\top A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \implies &\langle b_1, b_1\rangle = 1, \quad \langle b_1, b_2\rangle = 0, \quad \langle b_1, b_3\rangle = 0, \quad \langle b_2, b_2\rangle = 1, \quad \langle b_2, b_3\rangle = 0, \quad \langle b_3, b_3\rangle = 1, \end{aligned}$$

Ein weiterer Vektor b_4 ist genau dann senkrecht zu b_1, b_2, b_3, wenn $b_1^\top A b_4 = b_2^\top A b_4 = b_2^\top A b_4 = 0$ gilt, also genau dann, wenn

$$b_4 \in \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

gilt. Wir setzen also $\tilde{b}_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und suchen einen Einheitsvektor $b_4 \in \mathrm{LH}(\tilde{b}_4)$ (da wir noch nicht wissen, ob $\tilde{b}_4$ selbst schon ein Einheitsvektor ist). Dafür berechnen wir die Norm

$$\|\tilde{b}_4\|^2 = \langle \tilde{b}_4, \tilde{b}_4\rangle = b_4^\top A b_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

also gilt bereits $\|\tilde{b}_4\| = 1$ und wir können entweder $b_4 = \tilde{b}_4$ oder $b_4 = -\tilde{b}_4$ wählen.

Aufgabe 2 (*Koordinatenabbildungen mit Skalarprodukten*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$
und $\mathrm{B} := (b_1, \ldots b_n)$ eine geordnete Basis von V. Wir betrachten die folgenden Abbildungen:

$$(\cdot)_{\mathrm{B}} \colon V \to \mathbb{R}^n \qquad\qquad \langle\cdot, \mathrm{B}\rangle \colon V \to \mathbb{R}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad\qquad v \mapsto \langle v, \mathrm{B}\rangle := \begin{pmatrix} \langle v, b_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_n\rangle \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Abbildung $\langle\cdot, \mathrm{B}\rangle$ ist linear und sogar ein Vektorraumisomorphismus.

b) Die Abbildungen $(\cdot)_{\mathrm{B}}$ und $\langle\cdot, \mathrm{B}\rangle$ stimmen genau dann überein, wenn B eine geordnete Orthonormalbasis ist.

c) Die Abbildung

$$(\cdot)^\flat \colon V \to V^* \qquad \text{mit} \qquad \langle \cdot, v\rangle \colon V \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto v^\flat := \langle \cdot, v\rangle \qquad\qquad w \mapsto \langle w, v\rangle$$

ist linear.

d) Das Diagramm
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "(\cdot)^\flat"] \arrow[dr, "\langle\cdot,\mathrm{B}\rangle"'] & V^* \arrow[d, "(\cdot)_{\mathrm{B}^*}"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$
kommutiert, wobei B^* die zu B duale Basis bezeichnet.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Für $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\langle \lambda v + w, \mathrm{B}\rangle &= \begin{pmatrix} \langle \lambda v + w, b_1\rangle \\ \vdots \\ \langle \lambda v + w, b_n\rangle \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} \lambda\langle v, b_1\rangle + \langle w, b_1\rangle \\ \vdots \\ \lambda\langle v, b_n\rangle + \langle w, b_n\rangle \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} \langle v, b_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_n\rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle w, b_1\rangle \\ \vdots \\ \langle w, b_n\rangle \end{pmatrix} &&= \lambda\langle v, \mathrm{B}\rangle + \langle w, \mathrm{B}\rangle \end{aligned}$$

und damit ist $\langle \cdot, \mathrm{B}\rangle$ linear.

Da V und $\mathbb{R}^n$ dieselbe Dimension haben, genügt es zu zeigen, dass $\langle \cdot, \mathrm{B}\rangle$ injektiv ist.

Angenommen $v \in \ker(\langle \cdot, \mathrm{B}\rangle)$. Damit gilt $0 = \langle v, b_i\rangle$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Da B eine Basis ist, gibt es $\alpha_1, \dots \alpha_n$ mit $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$. Daraus folgt nun

$$\langle v, v\rangle = \left\langle v, \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v, b_i\rangle = 0,$$

also wegen der positiven Definitheit $v = 0$. Damit ist $\ker(\langle \cdot, \mathrm{B}\rangle) = \{0\}$ und die Abbildung ist injektiv.

b) Falls $b_1, \dots, b_n$ eine Orthonormalbasis bilden, gilt die Fourierformel $v = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i\rangle b_i$, woraus sofort $(v)_\mathrm{B} = \langle v, \mathrm{B}\rangle$ folgt.

Angenommen die Abbildungen $(\cdot)_\mathrm{B}$ und $\langle \cdot, \mathrm{B}\rangle$ stimmen überein. Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ist die j-te Komponente von $(b_i)_\mathrm{B}$ genau δ_{ij} (Kronecker-Symbol, also 1 für $i = j$ und 0 für $i \neq j$). Die j-te Komponente von $\langle b_i, \mathrm{B}\rangle$ ist per Definition $\langle b_i, b_j\rangle$. Damit gilt $\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, also ist B eine Orthonormalbasis.

c) Für $v, w, x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(\lambda v + w)^\flat(x) &= \langle x, \lambda v + w\rangle \\ &= \lambda\langle x, v\rangle + \langle x, w\rangle \\ &= \lambda\langle x, v\rangle + \langle x, w\rangle \\ &= \lambda(v)^\flat(x) + (w)^\flat(x) \\ &= (\lambda(v)^\flat + (w)^\flat)(x)\end{aligned}$$

und damit ist $(\cdot)^\flat$ linear.

d) Da es sich um lineare Abbildungen handelt, genügt es, die Gleichheit $((b_i)^\flat)_{\mathrm{B}^*} = \langle b_i, \mathrm{B}\rangle$ zu zeigen. Angenommen, es gilt $((b_i)^\flat)_{\mathrm{B}^*} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Dann folgt daraus

$$
\begin{aligned}
& & (b_i)^\flat &= \langle \cdot, b_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k^* \\
\Longrightarrow & & (b_i)^\flat(b_j) &= \langle b_j, b_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k^*(b_j) = \alpha_j \\
\Longrightarrow & & ((b_i)^\flat)_{\mathrm{B}^*} &= \begin{pmatrix} \langle b_1, b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, b_i\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle b_i, b_1\rangle \\ \vdots \\ \langle b_i, b_n\rangle \end{pmatrix} = \langle b_i, \mathrm{B}\rangle
\end{aligned}
$$