Gruppe 1 Velislav Slavov, 2385786, ucsmm@student.kit.edu

A1) $M =$ beliebige Meng, $\mathcal{P}(M) =$ Potenzmenge

a) $i: M \to \mathcal{P}(M)$ injektiv

Seien $x, y \in M \Rightarrow i(x) \in \mathcal{P}(M)$ und $i(y) \in \mathcal{P}(M)$
$i(x) \subseteq M$ und $i(y) \subseteq M$

Falls $i(x) = i(y) \Rightarrow x = y$
$\Rightarrow$ Falls $x \neq y \Rightarrow i(x) \neq i(y)$

Beispiel: $i(x) = \{m \in M \mid m \leq x\}$

b) $\varphi: M \to \mathcal{P}(M) \Rightarrow$ Für $m \in M$ gilt $\varphi(m) \subseteq M$

Sei $N := \{m \in M \mid m \notin \varphi(m)\} \Rightarrow N \subseteq M$ ~~$\wedge N \neq \varphi(m)$~~

~~Da $\varphi(m) \subseteq M \Rightarrow$ Falls m:~~

Da $m \in N \wedge m \notin \varphi(m) \Rightarrow N \neq \varphi(m)$

$\Rightarrow \exists n \in \mathcal{P}(M)\, \exists m \in M: \varphi(m) \neq n$ ■

A2) $f: X \to Y$ wobei $A, B \subseteq X$ und $C, D \subseteq Y$

a) Z.z. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Beweis "$\subseteq$"
Sei $f(x) \in f(A \cup B) \Rightarrow x \in (A \cup B)$
$\Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow f(x) \in f(A) \vee f(x) \in f(B)$
$\Rightarrow f(x) \in (f(A) \cup f(B))$

Beweis "$\supseteq$"

Sei $f(x) \in (f(A) \cup f(B))$, also $f(x) \in f(A) \vee f(x) \in f(B)$

Das heißt $x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B)$

$\Rightarrow f(x) \in f(A \cup B)$ ∎

b) Behauptung: $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Beweis "$\subseteq$"

Sei $f(x) \in f(A \cap B)$, also $x \in (A \cap B)$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow f(x) \in f(A) \wedge f(x) \in f(B)$

$\Rightarrow f(x) \in (f(A) \cap f(B))$

Beispiel "$\supseteq$": Sei f NICHT injektiv

Seien $f(x) = x^2$, $A = \{-2\}$, $B = \{2\}$

Dann ist $A \cap B = \{\} \Rightarrow \boxed{f(A \cap B) = \{\ \}}$

$f(A) = \{4\}$ und $f(B) = \{4\}$

$\Rightarrow \boxed{f(A) \cap f(B) = \{4\}}$ ∎

c) Beh. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Beweis "$\subseteq$"

Sei $x \in f^{-1}(C \cap D) \Rightarrow f(x) \in (C \cap D)$

$\Rightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \in D \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow x \in (f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D))$

Beweis "$\supseteq$"

Sei $x \in (f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \in D \Rightarrow f(x) \in (C \cap D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C \cap D)$

$\blacksquare$

d) Beh. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

Beweis "$\subseteq$"

Sei $x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow f(x) \in (C \cup D) \Rightarrow f(x) \in C \vee f(x) \in D$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C) \vee x \in f^{-1}(D) \Rightarrow x \in (f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D))$

Beweis "$\supseteq$"

Sei $x \in (f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \vee x \in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow f(x) \in C \vee f(x) \in D \Rightarrow f(x) \in (C \cup D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C \cup D)$

$\blacksquare$

A3)
$$A_{4\times3} := \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B_{2\times4} := \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_{4\times4} := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) $$BA = \begin{pmatrix} (2+0+1-2) & (2-4+3-2) & (-1+0+3-3) \\ (0+0-3-4) & (0+4-9+4) & (0+0-9-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -7 & -1 & -15 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} (0+0-3+0) & (0+4-9+0) & (0+0-9+0) \\ (0+0-2+0) & (0-6-6+2) & (0+0-6-3) \\ (-6+0+3+2) & (-6+6+9-2) & (3+0+9+3) \\ (-6+0-3+2) & (-6+0-9-2) & (3+0-9+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -9 \\ -4 & -10 & -9 \\ -1 & 7 & 15 \\ -7 & -17 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} (0+0-3+3) & (-2+6-3+0) & (-3-4+3+3) & (0-2+1-1) \\ (0+0+9+6) & (0-6+9+0) & (0+4-9+6) & (0+2-3-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 15 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Nur CC ist definiert, weil die Anzahl der Spalten ist gleich der Anzahl der Zeilen (nämlich 4)

A4) $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $m,n,p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Behauptung: $(A^T)^T = A$

Beweis: Sei $A_{m\times n} = (a_{i,j})_{i\le m, j\le n}$

Dann gilt $(A_{m\times n})^T = (a_{\underline{j,i}})_{i\le m, j\le n}$ (Per Def. Spalten und Zeilen werden gewächselt)

$\Rightarrow ((A_{m\times n})^T)^T = (a_{\underline{i,j}})_{i\le m, j\le n}$ (Nochmal wächseln der Spalten und Zeilen) ∎

b) Behauptung: $(A+B)^T = A^T + B^T$

Sei $A := (a_{i,j})_{i \leq m, j \leq n}$ und $B := \cancel{(b_{j,k})_{j \leq n, k \leq p}}$ $(b_{i,j})_{i \leq m, j \leq n}$

$(A+B)\cancel{^T} = (a_{i,j})_{i \leq m, j \leq n} + (b_{i,j})_{i \leq m, j \leq n} =$

$= (a_{i,j} + b_{i,j})_{i \leq m, j \leq n}$ $\cancel{\Rightarrow (A+B)^T = (a_{j,i} + b_{j,i})_{i \leq m, j \leq n}}$

Lass $ab_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \Rightarrow A+B = (ab_{i,j})_{i \leq m, j \leq n}$ $\cancel{\Rightarrow (A+B)^T}$ $=$

$\cancel{A^T = (a_{j,i})_{i \leq m, j \leq n}}$ ~~und~~ $\cancel{B^T = (b_{j,i})_{i \leq m, j \leq n}}$

$\cancel{A^T + B^T = (a_{j,i})_{i \leq m, j \leq n} + (b_{j,i})_{i \leq m, j \leq n} =}$

$\cancel{= (a_{j,i} + b}$

$\Rightarrow (A+B)^T = (ab_{j,i})_{i \leq m, j \leq n} = \boxed{(a_{j,i} + b_{j,i})_{i \leq m, j \leq n}}$

$A^T := (a_{j,i})_{i \leq m, j \leq n}$ $\quad B^T := (b_{j,i})_{i \leq m, j \leq n}$

$A^T + B^T = \boxed{(a_{j,i} + b_{j,i})_{i \leq m, j \leq n}}$

∎

c) Behauptung: $(\lambda A)^T = \lambda(A^T)$

Sei $A := (a_{i,j})_{i\le m, j\le n}$. Dann gilt

$(\lambda A) = (\lambda . a_{i,j})_{i\le m, j\le n} \Rightarrow \boxed{(\lambda A)^T = (\lambda . a_{j,i})_{i\le m, j\le n}}$

$A^T := (a_{j,i})_{i\le m, j\le n} \Rightarrow \boxed{\lambda(A^T) = (\lambda . a_{j,i})_{i\le m, j\le n}}$ ■

d) Behauptung: $(AC)^T = C^T A^T$

$A := (a_{i,j})_{i\le m, j\le n} \quad C := (c_{j,k})_{j\le n, k\le p}$

$AC = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} . c_{j,k}\right)_{i\le m, k\le p}$

Lass $ac_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} . c_{j,k} \Rightarrow AC = (ac_{i,k})_{i\le m, k\le p}$

Dann gilt: $(AC)^T = \boxed{(ac_{k,i})_{i\le m, k\le p}}$

$\cancel{A^T = (a_{j,i})_{i\le m, j\le n} \quad C^T = (c_{k,j})_{j\le n, k\le p}}$

$\cancel{C^T A^T = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{k,j} . a_{j,i}\right)_{i\le m, k\le p} = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{k,j} . a_{j,i}\right)_{i\le m, k\le p}}$

~~Lass~~ $\cancel{ca_{k,i} = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{k,j} . a_{j,i}\right)_{i\le m, k\le p}}$

~~Dann gilt~~ $\cancel{C^T A^T = (ca_{k,i})_{i\le m, k\le p}}$

$A^T := (a_{j,i})_{i\le m, j\le n} \quad C^T := (c_{k,j})_{j\le n, k\le p}$

$C^T A^T = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{k,j} . a_{j,i}\right)_{i\le m, k\le p}$

Lass $ca_{k,i} = \sum_{j=1}^{n} c_{k,j} . a_{j,i} \Rightarrow \boxed{C^T A^T = (ca_{k,i})_{i\le m, k\le p}}$:(