Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 1 **19.04.21**

Aufgabe 1 (*Eine Matrix ist ähnlich zu ihrer Transponierten*) (*10 Punkte*)

a) Es sei $\lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ und $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ein Jordankästchen, wobei freie Stellen in der Matrix für Nullen stehen. Beweisen Sie, dass $J_n(\lambda)$ und $J_n(\lambda)^\top$ ähnlich zueinander sind.

Hinweis: Es gibt eine invertierbare Matrix S, die nur Nullen und Einsen als Einträge hat, und $J_n(\lambda)^\top = S\,J_n(\lambda)\,S^{-1}$ erfüllt. Versuchen Sie die Aufgabe zunächst für $n = 2$ und $n = 3$ zu lösen.

b) Nun sei $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix in jordanscher Normalform.
Beweisen Sie, dass J und $J^\top$ ähnlich zueinander sind.

c) Nun sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine beliebige quadratische Matrix.
Beweisen Sie, dass A und $A^\top$ ähnlich zueinander sind.

Bemerkung: Die Aussage dass A und $A^\top$ ähnlich zueinander sind, gilt sogar für jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über jedem beliebigen Körper $\mathbb{K}$. Dies lässt sich mit Verallgemeinerungen der Jordanschen Normalform zeigen.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ die Matrix $S_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$, also die Permutationsmatrix zur Permutation $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ n & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Links- bzw. Rechtsmultiplikation einer Matrix mit S_n dreht also die Reihenfolge der Zeilen bzw. Spalten komplett um. Daraus folgt $S_n S_n = \mathbb{1}_n$, also $S_n^{-1} = S_n$ und

$$S_n\,J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} & & & \lambda \\ & & \iddots & 1 \\ & \iddots & \iddots & \\ \lambda & 1 & & \end{pmatrix}, \qquad S_n\,J_n(\lambda)\,S_n^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} = J_n(\lambda)^\top.$$

b) J hat die Blockform $\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$ für geeignete $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$.

Wir definieren die Blockmatrix $\begin{pmatrix} S_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & S_{n_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Damit gilt

$$S^2 = \begin{pmatrix} S_{n_1}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & S_{n_k}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbb{1}_{n_k} \end{pmatrix} = \mathbb{1}_n \implies S^{-1} = S$$

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} S_{n_1}J_{n_1}(\lambda_1)S_{n_1}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & S_{n_k}J_{n_k}(\lambda_k)S_{n_k}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1)^\top & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k)^\top \end{pmatrix} = A^\top$$

c) Über $\mathbb{C}$ zerfällt jedes (charakteristische) Polynom in Linearfaktoren (Fundamentalsatz der Algebra). Daher wissen wir aus der Vorlesung, dass die Matrix A ähnlich zu ihrer jordanschen Normalform J ist. Es gibt also eine Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $TAT^{-1} = J$. Daraus folgt $(T^\top)^{-1}A^\top T^\top = J^\top$, also ist auch $A^\top$ ähnlich zu $J^\top$. Aus b) wissen wir, dass $J^\top$ ähnlich zu J ist. Da Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist, folgt daraus, dass auch A ähnlich zu $A^\top$ ist.

Aufgabe 2 (*Jordansche Normalform*) (*10 Punkte*)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ eine Matrix, die genau die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ hat.

a) Bestimmen Sie alle möglichen charakteristischen Polynome, die A haben kann. Geben Sie für jedes dieser Polynome ein Beispiel für eine solche Matrix A an.

b) Wir betrachten nun das Polynom $m = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \in \mathbb{C}[X]$. Beweisen Sie: A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $m(A) = 0$ gilt.
Hinweis: Erinnern Sie sich an Aufgabe 1 von Übungsblatt 12 der Linearen Algebra I.

c) Ab jetzt sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte, deren geometrische Vielfachheiten und die jordansche Normalform J von A.

d) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, sodass $SJS^{-1} = A$.
Hinweis: Dies ist auch äquivalent zu $SJ = AS$. Überlegen Sie sich zuerst, dass vier der Spalten von S Eigenvektoren von A sind. Worauf wird die verbleibende Spalte abgebildet?

Lösung zu Aufgabe 2

a) Jedes Polynom aus $\mathbb{C}[X]$ zerfällt nach dem Fundamentalsatz der Algebra in Linearfaktoren. Das charakteristische Polynom von A hat außerdem Grad 5, ist normiert (d.h. der Vorfaktor von X^5 ist 1) und hat genau die Nullstellen λ_1 und λ_2. Damit kommen nur folgende Polynome in Frage:

$$(X-\lambda_1)^4(X-\lambda_2) = p_A \qquad \text{z.B. für} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&& \\ & \lambda_1 &&& \\ && \lambda_1 && \\ &&& \lambda_1 & \\ &&&& \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$(X-\lambda_1)^3(X-\lambda_2)^2 = p_A \qquad \text{z.B. für} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&& \\ & \lambda_1 &&& \\ && \lambda_1 && \\ &&& \lambda_2 & \\ &&&& \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$(X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)^3 = p_A \qquad \text{z.B. für} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&& \\ & \lambda_1 &&& \\ && \lambda_2 && \\ &&& \lambda_2 & \\ &&&& \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)^4 = p_A \qquad \text{z.B. für} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&& \\ & \lambda_2 &&& \\ && \lambda_2 && \\ &&& \lambda_2 & \\ &&&& \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

b) Es sei J die Jordansche Normalform von A. Damit ist A zu J ähnlich und aus dem Hinweis wissen wir, dass dann auch $m(A)$ ähnlich zu $m(J)$ ist. Insbesondere gilt die Äquivalenz $m(A) = 0 \iff m(J) = 0$.

Mit

$$J = \begin{pmatrix} J_*(\lambda_1) &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && J_*(\lambda_1) &&& \\ &&& J_*(\lambda_2) && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& J_*(\lambda_2) \end{pmatrix},$$

wobei die Sternchen für die Größe der Jordanästchen stehen, gilt

$$m(J) = \begin{pmatrix} m(J_*(\lambda_1)) &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && m(J_*(\lambda_1)) &&& \\ &&& m(J_*(\lambda_2)) && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& m(J_*(\lambda_2)) \end{pmatrix}.$$

In den einzelnen Kästchen ergibt sich

$$\begin{aligned} m(J_k(\lambda_1)) &= (J_k(\lambda_1) - \lambda_1 \mathbb{1}_k)(J_k(\lambda_1) - \lambda_2 \mathbb{1}_k) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 && \\ & \ddots & \ddots & \\ && \ddots & 1 \\ &&& 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\lambda_1-\lambda_2) & 1 && \\ & \ddots & \ddots & \\ && \ddots & 1 \\ &&& (\lambda_1-\lambda_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1-\lambda_2) & 1 && \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ && \ddots & \ddots & 1 \\ &&& \ddots & (\lambda_1-\lambda_2) \\ &&&& 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wegen $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ kann dies nur dann die Nullmatrix sein, wenn die Größe des Jordankästchens, k, genau 1 ist. Das gleiche gilt analog für Kästchen zum Eigenwert λ_2.

Insgesamt sehen wir also: $m(J) = 0$ gilt genau dann, wenn alle Jordankästchen die Länge 1 haben, also wenn J schon eine Diagonalmatrix ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn A diagonalisierbar ist.

c) Es gilt $p_A = (X-3)^3(X-2)^2$. Wir bestimmen die Eigenräume

$$E_3(A) = \ker(A - 3\,\mathbb{1}_5) = \mathrm{LH}(e_1, e_2, e_3)$$
$$E_2(A) = \ker(A - 2\,\mathbb{1}_5) = \mathrm{LH}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Anzahl der Jordankästchen zu einem Eigenwert dessen geometrischer Vielfachheit gleicht, kann die Jordansche Normalform nur

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sein (bis auf Permutation der Blöcke).

d) Wir bezeichnen die Spalten der gesuchten invertierbaren Matrix S mit $b_1, \dots b_5$.

Damit ist J die Darstellungsmatrix von A bezüglich der Basis $(b_1, \dots, b_5)$. Es muss also $Ab_1 = 3b_1$, $Ab_2 = 3b_2$, $Ab_3 = 3b_3$, $Ab_4 = 2b_4$ und $Ab_5 = b_4 + 2b_5$ gelten (Dies kann man alternativ auch an der Gleichheit $AS = SJ$ ablesen). Wir können also zunächst die Eigenvektoren

$$b_1 := e_1, \qquad b_2 := e_2, \qquad b_3 := e_3, \qquad b_4 := \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen. Damit muss $(A - 2\,\mathbb{1}_5)b_5 = b_4$ gelten. Dies wird z.B. von $b_5 := e_5$ erfüllt. Damit ist

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine mögliche Lösung.

Die gefundene Basiswechselmatrix ist natürlich nicht eindeutig.