Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I **Winter-Semester 2020/2021**

Übungsblatt 9 **18.01.20**

Aufgabe 1 (*Summen und Vektorraumkomplemente*) (*10 Punkte*)

Im $\mathbb{R}^4$ seien die Untervektorräume

$$U_1 = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad U_2 = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix}0\\4\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

Aufgabe 2 (*Smith-Normalform*) (*10 Punkte*)

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto Ax\end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 4\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Rang und die Smith-Normalform S von φ.

b) Bestimmen Sie geordnete Basen B_1 und B_2 von $\mathbb{R}^3$, sodass $M_{\mathrm{B}_2,\mathrm{B}_1}(\varphi) = S$ gilt.

Aufgabe 3 (*Direkte Summen*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein (möglicherweise unendlich-dimensionaler) $\mathbb{K}$-Vektorraum.

a) Beweisen Sie: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V \setminus \{0\}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Summe $\mathrm{LH}(v_1) + \cdots + \mathrm{LH}(v_n)$ direkt ist.

b) Es seien $U_1, \ldots U_n$ Untervektorräume von V. Beweisen Sie:
Die Summe $U_1 + \cdots + U_n$ ist genau dann direkt, wenn

$$\forall s \in \{1, \ldots n-1\} : (U_1 + \cdots + U_s) \cap (U_{s+1} + \cdots + U_n) = \{0\}$$

gilt. *Hinweis:* Die Lösungsidee von Aufgabe 4 auf Blatt 3 könnte helfen.

Aufgabe 4 (*Erster Isomorphiesatz für Vektorräume*) (*10 Punkte*)

Es sei W ein (möglicherweise unendlich-dimensionaler) $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V, U \subseteq W$ Untervektorräume. Zeigen Sie, dass es einen Vektorraumisomorphismus zwischen den Quotientenräumen $U\big/(U \cap V)$ und $(U+V)\big/V$ gibt.

Abgabe bis Montag, den 25.01.21 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.