Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II | **Sommersemester 2021**

Übungsblatt 11 | **05.07.21**

Aufgabe 1 (*Definitheit von Quadratischen Formen*) (*10 Punkte*)

Für ein $a \in \mathbb{R}$ sei die quadratische Form

$$\begin{aligned} q\colon \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &\mapsto -4\,{x_1}^2 - {x_2}^2 - 3{x_3}^2 - 2{x_4}^2 + (a\,x_1 + x_2 + x_4)x_3 \end{aligned}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie eine symmetrische Bilinearform β, die $q = q_\beta$ erfüllt. Wählen Sie eine Basis B von V und bestimmen Sie die Fundamentalmatrix $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)$ bezüglich dieser Basis.

b) Für welche Werte von a ist q positiv definit?

c) Für welche Werte von a ist q negativ definit?

d) Für welche Werte von a ist β entartet?

Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen.

Aufgabe 2 (*„Heraussteilen" des Nullraums*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Abbildungsvorschrift

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}\colon \left(V/\mathrm{Null}(\beta) \right) \times \left(V/\mathrm{Null}(\beta) \right) &\to \mathbb{R} \\ ([v],[w]) &\mapsto \beta(v,w) \end{aligned}$$

definiert eine nicht entartete symmetrische Bilinearform auf $V/\mathrm{Null}(\beta)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Abbildungsvorschrift wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt.

b) Die Bilinearform $\tilde{\beta}$ ist genau dann positiv definit, wenn β positiv semidefinit ist.

c) Falls β positiv semidefinit ist, gilt

$$|\beta(v,w)| \leq \sqrt{\beta(v,v)}\,\sqrt{\beta(w,w)}$$

für alle $v, w \in V$.

Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy- Schwarz-Ungleichung für Skalarprodukte.

Abgabe bis Montag, den 12.07.21 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.