Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 05 **17.05.21**

Aufgabe 1 (*Die orthogonale Gruppe*)

a) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $\varphi\colon G \to G$ ein Gruppenendomorphismus.

   i) Beweisen Sie, dass
$$H \coloneqq \{ g \in G \mid \varphi(g) = g \}$$
   eine Untergruppe von G ist.

   ii) Die Gruppe sei nun $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit Matrixmultiplikation. Beweisen Sie, dass die Abbildung
$$\begin{aligned} \varphi\colon G &\to G \\ A &\mapsto (A^\top)^{-1} \end{aligned}$$
   ein Gruppenendomorphismus ist.

   iii) Beweisen Sie unter Verwendung von i) und ii) erneut, dass $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ Gruppen sind.

b) Es sei V ein unitärer Vektorraum. Beweisen Sie, dass jeder komplexe Eigenwert λ einer linearen Isometrie $\varphi\colon V \to V$ den Betrag $|\lambda| = 1$ hat.

Lösung zu Aufgabe 1

a) i) Wir überprüfen, dass H eine Untergruppe ist:
   - $e_G \in H$ gilt, da φ ein Endomorphismus ist und deshalb $\varphi(e_G) = e_G$ erfüllt.
   - Für $a, b \in H$ gilt $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = ab$, also auch $ab \in H$.
   - Für $a \in H$ gilt $\varphi(a) = a$ und somit auch $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = a^{-1}$ und deshalb $a^{-1} \in H$.

   ii) Für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gilt auch $A^\top \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, denn aus
$$A^\top (A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = \mathbb{1}_n^\top = \mathbb{1}_n$$
   folgt, dass $A^\top$ die Inverse Matrix $(A^{-1})^\top$ hat.

   Für alle $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gilt
$$\varphi(AB) = ((AB)^\top)^{-1} = (B^\top A^\top)^{-1} = (A^\top)^{-1}(B^\top)^{-1} = \varphi(A)\varphi(B)$$
   und somit ist φ ein Gruppenhomomorphismus.

   Anmerkung: Die Abbildungen $A \mapsto A^\top$ und $A \mapsto A^{-1}$ sind alleine keine Homomorphismen, da durch Transponieren und Invertieren jeweils die Reihenfolge der Faktoren vertauscht wird. Dadurch dass hier transponiert und invertiert wird, erhält φ aber wieder die Reihenfolge.

iii) Für den Endomorphismus φ aus ii) ist H gerade die Menge der Matrizen, die $(A^\top)^{-1} = A$ erfüllen, also ist $H = \mathrm{O}(n)$ nach i) eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Für alle Matrizen $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gilt $\det((A^\top)^{-1}) = \frac{1}{\det(A^\top)} = \frac{1}{\det(A)} = 1$, also $\varphi(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})) \subseteq \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Daher kann man φ auf $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ einschränken und koeinschränken und erhält einen Endomorphismus $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Für diesen gilt $H = \left\{ A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \,\middle|\, (A^\top)^{-1} = A \right\}$, also $H = \mathrm{SO}(n)$.

b) Angenommen, v ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von φ. Da φ eine Isometrie ist, gilt $\|v\| = \|\varphi(v)\|$. Weiterhin gilt $\|v\| = \|\varphi(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$. Wegen $v \neq 0$ kann man durch $\|v\| \neq 0$ teilen und erhält direkt $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 2 (*Reflexionen an Hyperebenen*)

Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ sei der Endomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi_v \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto A_v x \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad A_v := \mathbb{1}_n - 2\, v v^\top$$

definiert.
Hinweis: $vv^\top$ ist eine $n \times n$-Matrix und **nicht** dasselbe wie $v^\top v = \langle v, v \rangle$.

a) Beweisen Sie, dass φ_v genau dann eine Isometrie von $\mathbb{R}^n$ ist, wenn v ein Einheitsvektor oder der Nullvektor ist.

b) Beweisen Sie im Fall $\|v\| = 1$, dass $E_1(\varphi_v) = \{v\}^\perp$ gilt und φ_v über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

c) Nun sei $n = 3$ und wir betrachten zwei Einheitsvektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$, die den Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschließen. Beweisen Sie, dass es eine geordnete Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ gibt, bezüglich der

$$M_{\mathrm{BB}}(\varphi_v \circ \varphi_w) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Hinweis: Es gilt $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Zeigen Sie zunächst, dass die Vektoren v und $(\varphi_v \circ \varphi_w)(v)$ ein Orthonormalsystem bilden.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Es gilt

$$\langle \varphi_v(x), \varphi_v(y) \rangle = \langle A_v x, A_v y \rangle = (A_v x)^\top A_v y = x^\top A_v^\top A_v y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Damit kann φ_v nur dann eine Isometrie sein, wenn $A_v^\top A_v = \mathbb{1}_n$ gilt, also A_v orthogonal ist.

$$\begin{aligned}
\varphi_v \text{ ist Isometrie} &\iff A_v^\top A_v = \mathbb{1}_n \\
&\iff (\mathbb{1}_n - 2\,vv^\top)^\top(\mathbb{1}_n - 2\,vv^\top) = \mathbb{1}_n \\
&\iff (\mathbb{1}_n^\top - 2\,(vv^\top)^\top)(\mathbb{1}_n - 2\,vv^\top) = \mathbb{1}_n \\
&\iff (\mathbb{1}_n - 2\,vv^\top)(\mathbb{1}_n - 2\,vv^\top) = \mathbb{1}_n \\
&\iff \mathbb{1}_n^2 - 4\,vv^\top + 4vv^\top vv^\top = \mathbb{1}_n \\
&\iff -vv^\top + v\,\underbrace{(v^\top v)}_{=\|v\|^2\in\mathbb{R}}\,v^\top = 0 \\
&\iff (\|v\|^2 - 1)\,vv^\top = 0.
\end{aligned}$$

Falls $v = 0$ gilt, ist diese Gleichung erfüllt und φ_v ist die Identität.

Falls $v \neq 0$ ist, ist $vv^\top$ nicht die Nullmatrix (da der (i,i)-te Eintrag von $vv^\top$ gerade $(v_i)^2$ ist, ist mindestenstens ein Diagonaleintrag nicht 0). In diesem Fall ist die Gleichung genau dann erfüllt, wenn $(\|v\|^2 - 1) = 0$ also $\|v\| = 1$ gilt. $\square$

b) Es sei $\|v\| = 1$. Wir zeigen die Mengengleichheit $E_1(\varphi_v) = \{v\}^\perp$:

$$\begin{aligned}
x \in E_1(\varphi_v) &\iff x \in \ker(\mathbb{1}_n - A_v) \\
&\iff x \in \ker(2\,vv^\top) \\
&\iff 2\,vv^\top x = 0 \\
&\iff 2\langle v, x\rangle v = 0 \\
&\iff \langle v, x\rangle = 0 \\
&\iff x \in \{v\}^\perp
\end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\{v\}^\perp$ ein Komplement von $\mathrm{LH}(v)$ ist, also

$$\dim\{v\} = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\mathrm{LH}(v)) = n - 1$$

gilt. Wir brauchen also noch einen weiteren Eigenvektor. Wir versuchen v selbst:

$$\varphi_v(v) = (\mathbb{1}_n - 2\,vv^\top)v = v - 2\,vv^\top v = (1 - 2\|v\|)v = -v$$

Damit gilt $\mathbb{R}^n = \mathrm{LH}(v) \oplus \mathrm{LH}(v)^\perp = E_{-1}(\varphi_v) \oplus E_1(\varphi_v)$ und φ_v ist diagonalisierbar.

c) Es gilt $v^\top w = w^\top v = \langle v, w\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \|v\| \, \|w\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und somit

$$\left.\begin{aligned} \varphi_v(v) &= -v \\ \varphi_v(w) &= (\mathbb{1}_n - 2\, vv^\top)w \\ &= w - 2\, vv^\top w \\ &= w - \sqrt{2}v \\ \varphi_w(v) &= (\mathbb{1}_n - 2\, ww^\top)v \\ &= v - 2\, ww^\top v \\ &= v - \sqrt{2}w \\ \varphi_w(w) &= -w \end{aligned}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} (\varphi_v \circ \varphi_w)(v) &= \varphi_v(\varphi_w(v)) \\ &= \varphi_v(v - \sqrt{2}w) \\ &= \varphi_v(v) - \sqrt{2}\varphi_v(w) \\ &= -v - \sqrt{2}(w - \sqrt{2}v) \\ &= v - \sqrt{2}w \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|(\varphi_v \circ \varphi_w)(v)\|^2 &= \|v - \sqrt{2}\, w\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2\langle v, \sqrt{2}w\rangle + \|\sqrt{2}\, w\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2\sqrt{2}\langle v, w\rangle + 2\|w\|^2 \\ &= 1 \\ \langle v, (\varphi_v \circ \varphi_w)(v)\rangle &= \langle v, v - \sqrt{2}\, w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle - \sqrt{2}\langle v, w\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit haben wir ein Orthonormalsystem $b_1 \coloneqq v,\ b_2 \coloneqq (\varphi_v \circ \varphi_w)(v) = v + \sqrt{2}\, w$, das wir zu einer Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 ergänzen können. Es gilt

$$\begin{aligned} (\varphi_v \circ \varphi_w)(b_1) &= (\varphi_v \circ \varphi_w)(v) = b_2 \\ (\varphi_v \circ \varphi_w)(b_2) &= \varphi_v(\varphi_w(v - \sqrt{2}w)) \\ &= \varphi_v(\varphi_w(v) - \sqrt{2}\varphi_w(w)) \\ &= \varphi_v((v - \sqrt{2}w) + \sqrt{2}w) \\ &= \varphi_v(v) \\ &= -v \end{aligned}$$

Das bedeutet, bezüglich der Orthonormalbasis $\mathrm{B} \coloneqq (b_1, b_2, b_3)$ hat $M_{\mathrm{BB}}(\varphi_v \circ \varphi_w)$ die in der Aufgabenstellung behauptete Form.