Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I — **Winter-Semester 2020/2021**

Übungsblatt 13 — **15.02.21**

Dieses Übungsblatt geht nicht mehr in die Bewertung ein.

Aufgabe 1

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \partial_X \colon \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K}[X] \\ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i i X^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(i+1)X^i \end{aligned}$$

a) Es sei $U_n \subseteq \mathbb{K}[X]$ derjenige Untervektorraum, der aus den Polynomen bis zum Grad n besteht. Beweisen Sie, dass $\partial_x(U_n) \subseteq U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Bestimmen Sie eine geordnete Basis B von U_n und die Darstellungsmatrix von $\partial_x|_{U_n}^{U_n}$ bezüglich B, für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $\partial_x|_{U_n}^{U_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von ∂_x.

e) Gelten Ihre Ergebnisse in Aufgabenteil c),d) auch für andere Körper?

Aufgabe 2 (*Diagonalisieren einer Matrix*)

Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie Basen aller Eigenräume von A.

b) Bestimmen Sie eine geordnete Basis $\mathrm{B} = (b_1, \dots, b_4)$ von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A und bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $S = M_{\mathrm{E},\mathrm{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$.

c) Rechnen Sie nach, dass $AS = SD$ gilt, wobei D die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots \lambda_n$ ist. Dabei sei λ_i jeweils der Eigenwert zum Eigenvektor b_i für $i = 1, \dots, 4$.

Aufgabe 3 (*Simultane Diagonalisierbarkeit*)

Es seien $\Phi, \Psi \colon V \to V$ zwei Endomorphismen eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V.

a) Beweisen Sie: Falls es eine Basis B von V gibt, so dass die Abbildungsmatrizen von Φ und Ψ zugleich Diagonalgestalt haben, dann gilt $\Phi\Psi = \Psi\Phi$.

Ab jetzt gelte $\Phi\Psi = \Psi\Phi$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

b) Es gilt $\Psi\big(E_\lambda(\Phi)\big) \subseteq E_\lambda(\Phi)$ für jeden Eigenwert λ von Φ.

c) Wenn $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\Psi(U) \subseteq U$ ist, und es Eigenvektoren $v_1, \dots v_k \in V$ von Ψ zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gibt, die $v_1 + \dots + v_k \in U$ erfüllen, dann gilt auch $v_1, \dots v_k \in U$.

   Hinweis: Betrachten Sie das Polynom $p = \prod_{i=1}^{k-1}(X - \lambda_i)$, wenden Sie die Abbildung $p(\Psi)$ auf $v_1 + \dots + v_k$ an, und errinnern Sie sich an Aufgabe 1 von Blatt 12.

d) Ist Ψ diagonalisierbar, so ist für jeden Eigenwert λ von Φ auch die Einschränkung

$$\Psi\big|_{E_\lambda(\Phi)}^{E_\lambda(\Phi)} \colon E_\lambda(\Phi) \to E_\lambda(\Phi)$$

   diagonalisierbar.

e) Sind Φ und Ψ beide diagonalisierbar, so gibt es eine Basis B von V bezüglich derer die Abbildungsmatrizen von Φ und Ψ zugleich Diagonalgestalt haben.

Aufgabe 4 (*Kästchensatz*)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(p+q)\times(p+q)}$$

eine Blockmatrix, die aus den quadratischen Matrizen $A \in \mathbb{K}^{p\times p}$, und $D \in \mathbb{K}^{q\times q}$ und den rechteckigen Matrizen $B \in \mathbb{K}^{p\times q}$ und $C \in \mathbb{K}^{q\times p}$ durch Nebeneinanderschreiben der Einträge zusammengesetzt ist.

a) Beweisen Sie: Falls $B = 0$ oder $C = 0$ ist, gilt $\det(M) = \det(A)\det(D)$.

b) Finden Sie ein Beispiel für $p = q$, in dem $\det(M) \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$ gilt.

Dieses Blatt geht nicht mehr in die Bewertung für den Übungsschein ein, aber Sie können es trotzdem abgeben, um Feedback zu erhalten.
Abgabe bis Montag, den 22.02.21 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.