Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

9. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

22. Januar 2021

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 92 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 33:

(i) Zeigen Sie, dass die im folgenden definierten Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind, und berechnen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(x)$:

(a) $f(x) := (x^4 + 1)\mathrm{e}^{x^3}$, (b) $f(x) := \left|x^2 - 4\right|^3$.

(ii) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion $f\colon [-1, 9] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^5, & x \in [-1, 1), \\ 2 - (x-2)^2, & x \in [1, 3), \\ 3x - 8, & x \in [3, 4], \\ \frac{12}{x}, & x \in (4, 9]. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 33:

(i) (a) *Behauptung:* Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = x^2(3+4x+3x^4)\mathrm{e}^{x^3}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Die Funktion ist als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 4x^3\mathrm{e}^{x^3} + (x^4+1)\mathrm{e}^{x^3}3x^2 = x^2(3+4x+3x^4)\mathrm{e}^{x^3}.$$

$\square$

(b) *Behauptung:* Die Funktion ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 6x(x^2-4)^2, & x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2], \\ -6x(x^2-4)^2, & x \in [-2, 2]. \end{cases}$$

Beweis: Definiere die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := |x|^3$. Laut Übung ist g differenzierbar und für die Ableitung gilt $g'(x) = 3x\,|x|$ $(x \in \mathbb{R})$. Somit ist f als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Mit der Kettenregel folgt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3(x^2-4)\left|x^2-4\right| \cdot 2x = 6x(x^2-4)\left|x^2-4\right|.$$

Für $x \in [-2, 2]$ ergibt sich $f'(x) = -6x(x^2-4)^2$, für $x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$ erhält man hingegen $f'(x) = 6x(x^2-4)^2$. $\square$

(ii) *Behauptung:* f besitzt für $x_0 \in \{-1, 3, 9\}$ ein lokales Minimum und für $x_0 \in \{2, 4\}$ ein lokales Maximum, und keine weiteren lokalen Extrema.

Beweis: Es gilt $f(-1) = -1$ und $f'(x) = 5x^4$ für $x \in (-1,1)$. Daher gilt $f'(x) > 0$ für $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$ sowie $f'(0) = 0$ und folglich ist f auf $[-1,1) \setminus \{0\}$ streng monoton wachsend. Also ist $f(-1) < f(x)$ für $x \in (-1,1)$ und damit hat f in $x_0 = -1$ ein lokales Minimum.

Es gilt $f(2) = 2$ und $f'(x) = 4 - 2x$ auf $(1,3)$. Daher gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (1,2)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (2,3)$. Also ist f auf $(1,2)$ streng monoton wachsend und auf $(2,3)$ streng monoton fallend. Somit gilt $f(x) \leq f(2)$ für $x \in (1,3)$ und folglich hat f in 2 ein lokales Maximum.

Es gilt $f(3) = 1$ und $f(x) = 3x - 8 \geq 1$ für $x \in [3,4)$. Außerdem gilt $f(x) > 1$ auf $(1,3)$, denn für $x \in (1,3)$ ist $(x-2)^2 < 1$. Also hat f in $x_0 = 3$ ein lokales Minimum. Ferner gilt $f'(x) = 3$ für $x \in (3,4)$ und daher ist f dort streng monoton wachsend.

Es gilt $f(4) = 4$ und $f(x) < 4$ für $x \in (3,4)$. Außerdem gilt $f(x) < 3$ und somit insbesondere $f(x) < 4$ für alle $x \in (4,9)$. Also hat f in 4 ein lokales Maximum. Ferner ist $f'(x) = -\frac{12}{x^2} < 0$ für $x \in (4,9)$ und damit ist f dort streng monoton fallend.

Es gilt $f(9) = \frac{4}{3}$ und $f(x) > \frac{4}{3}$ für $x \in (4,9)$. Somit hat f in 9 ein lokales Minimum.

Wir müssen nun noch ausschließen, dass f weitere lokale Extrema besitzt: auf den Intervallen $(-1,0), (0,1), (1,2), (2,3), (3,4)$ und $(4,9)$ ist, wie wir oben gesehen haben, f jeweils entweder nur streng monoton fallend oder nur streng monoton wachsend. Dort kann also kein lokales Extremum von f existieren. Es sei $\delta \in (0,1)$. Dann gilt für alle $x < 0$ mit $|x| < \delta$, dass $f(x) = x^5 < 0$ und für alle $x > 0$ mit $|x| < \delta$, dass $f(x) = x^5 > 0$. Also hat f in 0 kein lokales Extremum. Für alle x mit $|x-1| < \delta$ und $x < 1$ gilt $f(x) = x^5 < 1$ und für alle x mit $|x-1| < \delta$ und $x > 1$ gilt $f(x) = 2 - (x-2)^2 > 1$. Somit hat f in 1 ebenfalls kein lokales Extremum. □

Aufgabe 34 (K):

(i) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie dort deren Ableitung.

(a) $f(x) := \begin{cases} e^{\cos(x)}, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{1}{x}, & x \in (0,\infty), \end{cases}$ (b) $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(c) $f(x) := (1+x^2)^x$.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $y > x > 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$y \log y - x \log x \leq (y-x)(1 + \log y).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 34:

(i) (a) *Behauptung:* f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{\cos(x)} \sin(x), & x \in (-\infty, 0), \\ -\frac{1}{x^2}, & x \in (0,\infty), \end{cases}$$

in 0 ist f nicht differenzierbar.

Beweis: Auf den offenen Mengen $(-\infty, 0)$ und $(0,\infty)$ ist f als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Mit der Kettenregel erhält man für $x \in (-\infty, 0)$

$$f'(x) = e^{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -e^{\cos(x)} \sin(x).$$

Auf $(0,\infty)$ gilt $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Weiter gilt für $x > 0$

$$f(x) = \frac{1}{x} \to \infty \quad (x \to 0),$$

somit ist f in $x = 0$ nicht stetig und daher auch nicht differenzierbar. □

(b) *Behauptung:* f ist differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Beweis: Für alle $x \neq 0$ ist f als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Weiter gilt für $x \neq 0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

und damit folgt

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leq |x|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \xrightarrow{x\to 0} 0,$$

d.h. f ist differenzierbar in 0 und es gilt $f'(0) = 0$. $\square$

(c) *Behauptung:* Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \left(\log(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}\right)(1+x^2)^x.$$

Beweis: Es gilt

$$f(x) = \mathrm{e}^{\log((1+x^2)^x)} = \mathrm{e}^{x\log(1+x^2)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist f als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x\log(1+x^2)}\left(\log(1+x^2) + x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* Für alle $y > x > 0$ gilt die Ungleichung

$$y\log y - x\log x \leq (y-x)(1+\log y).$$

Beweis: Definiere $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(t) := t\log t$. Mit der Produktregel erhält man, dass f differenzierbar mit $f'(t) = \log t + 1$ ist. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$f(y) - f(x) = (y-x)\cdot f'(\xi).$$

Da f' monoton wächst, gilt $f'(\xi) \leq f'(y)$ für alle $\xi \in (x,y)$. Zusammen mit $y - x > 0$ folgt

$$y\log y - x\log x = f(y) - f(x) \leq (y-x)\cdot f'(y) = (y-x)(1+\log y).$$

$\square$

Aufgabe 35:

(i) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0, \end{cases}$$

in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$, in denen diese existiert.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x^2)\arctan(x)$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $L = \pi + 1$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 35:

(i) <u>*Voraussetzung:*</u> Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x^\alpha e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \le 0. \end{cases}$$

<u>*Behauptung:*</u> Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} x^\alpha \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{2}{x^3}\right), & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

<u>*Beweis:*</u> Für $x \neq 0$ ist f differenzierbar, da f auf $(-\infty, 0)$ identisch 0 ist und auf $(0,\infty)$ eine Verkettung differenzierbarer Funktionen ist. Es gilt also $f'(x) = 0$ für $x < 0$ und für $x > 0$ erhält man

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{x^2}} + x^\alpha e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{2}{x^3}\right) = e^{-\frac{1}{x^2}} x^\alpha \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{2}{x^3}\right).$$

Damit f in 0 differenzierbar ist, muss der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existieren. Es gilt $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Weiter gilt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} x^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung:
Fall $\alpha > 1$: $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} x^{\alpha-1} \cdot \lim\limits_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 0 = 0$.
Fall $\alpha = 1$: $\lim\limits_{x\to 0+} x^0 e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.
Fall $\alpha < 1$: Substituiere $t = \frac{1}{x^2}$, also $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Dann gilt

$$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)} e^{-t} = \lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\alpha)} e^{-t} = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit eine Folgerung aus dem Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty$ $(p \in \mathbb{N}_0)$ und $\frac{1}{2}(1-\alpha) > 0$. Also existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x}$ und ist 0, d.h. $f'(0) = 0$. □

(ii) <u>*Voraussetzung:*</u> Es sei die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := (1+x^2)\arctan(x)$.
<u>*Behauptung:*</u> Die Funktion f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = \pi + 1$.

<u>*Beweis:*</u> Als Produkt stetiger Funktionen ist f stetig. Weiter ist f als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar auf $(-1,1)$. Es seien $x, y \in [-1,1]$, o.B.d.A. gilt $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 9.7) existiert ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x).$$

Weiter berechnen wir

$$f'(x) = 2x\arctan(x) + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} = 2x\arctan(x) + 1,$$

somit gilt $|f'(x)| \le 2 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} + 1 = \pi + 1$ für alle $x \in [-1,1]$. Damit erhalten wir

$$|f(x) - f(y)| \le (\pi+1)\,|x-y|\,.$$

□

Aufgabe 36 (K):

(i) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin(x))}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{1-x+\log(x)}$, (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + x\log(x)}{x^3+1}$.

(ii) Es sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) := (x^{\frac{1}{3}} + x)\sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in 544, d.h. $(f^{-1})'(544)$. *Hinweis:* Verwenden Sie, dass $f(64) = 544$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 36:

(i) (a) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin(x))}{x} = 1$.

Beweis: Wir setzen $f(x) := \sin(\sin(x))$ und $g(x) := x$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann sind f und g differenzierbar. Ferner existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (siehe unten) und es gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Damit erhalten wir nach den Regeln von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

$\square$

(b) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{1-x+\log(x)} = -2$.

Beweis: Wir setzen $f(x) := x^x - x$ und $g(x) := 1 - x + \log(x)$ für $x > 0$. Es gilt $f(x) = \mathrm{e}^{\log(x^x)} = \mathrm{e}^{x\log(x)}$. Also sind f und g zweimal differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^x \cdot \left(\log(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) - 1 = x^x(\log(x)+1) - 1, & g'(x) &= -1 + \frac{1}{x}, \\ f''(x) &= x^x(\log(x)+1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x}, & g''(x) &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Ferner existiert $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ (siehe unten) und es gilt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} g'(x) = 0.$$

Damit erhalten wir durch zweifaches Anwenden der Regeln von de l'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\log(x)} &= \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\log(x)+1) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\log(x)+1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2. \end{aligned}$$

$\square$

(c) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + x\log(x)}{x^3+1} = 0$.

Beweis: Wir setzen $f(x) := x^2 + x\log(x)$ und $g(x) := x^3 + 1$ für $x > 0$. Dann sind f und g zweimal differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + \log(x) + x \cdot \frac{1}{x} = 2x + \log(x) + 1, & g'(x) &= 3x^2, \\ f''(x) &= 2 + \frac{1}{x}, & g''(x) &= 6x. \end{aligned}$$

Ferner existiert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ (siehe unten) und es gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} g'(x) = \infty.$$

Damit erhalten wir durch zweifaches Anwenden der Regeln von de l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x\log(x)}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + \log(x) + 1}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{6x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{6x}\right) = 0.$$

□

(ii) *Voraussetzung:* Es sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) := (x^{\frac{1}{3}} + x)\sqrt{x}$.

Behauptung: Die Funktion f ist bijektiv und $(f^{-1})'(544) = \frac{12}{149}$.

Beweis: Als Verkettung differenzierbarer Funktionen ist f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und es gilt für $x \in (0,\infty)$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 1\right)\sqrt{x} + \left(x^{\frac{1}{3}} + x\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Also gilt $f' > 0$ auf $(0,\infty)$ und somit ist f auf $(0,\infty)$ streng monoton wachsend nach Satz 9.10. Da f auf $[0,\infty)$ stetig ist, ist f damit auf $[0,\infty)$ injektiv. Es gilt $f(0) = 0$ und $f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt $f([0,\infty)) = [0,\infty)$, d.h. f ist surjektiv. Insgesamt ist f also bijektiv.

Da $f(64) = \left(64^{\frac{1}{3}} + 64\right)\sqrt{64} = (4+64)8 = 544$ liefert der Satz 9.3 über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(544) &= \frac{1}{f'(64)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\cdot 64^{-\frac{2}{3}} + 1\right)\sqrt{64} + \left(64^{\frac{1}{3}} + 64\right)\frac{1}{2\sqrt{64}}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16} + 1\right)8 + (4+64)\cdot\frac{1}{2\cdot 8}} = \frac{1}{\frac{1}{6} + 8 + \frac{1}{4} + 4} = \frac{1}{\frac{2+3+144}{12}} = \frac{12}{149}.\end{aligned}$$

□