Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

7. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

8. Januar 2021

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 70 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 25 (K):

(i) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind.

(a) $f(x) := \begin{cases} \frac{x^3-3x^2}{x^2-9}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, \\ \frac{5}{2}, & x = -3, \\ \frac{3}{2}, & x = 3. \end{cases}$ (b) $f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-5x+4}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ \frac{3x-10}{x+2}, & x \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(ii) Es seien $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann bereits $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 25:

(i) (a) _Behauptung:_ f ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ und unstetig in -3.

Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$, d.h. $x^2 - 9$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Daher ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ als Quotient zweier Polynome stetig. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ gilt

$$\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 9} = \frac{x^2(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^2}{x+3}.$$

Ebenfalls weil Quotienten von Polynomen stetig sind, gilt

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2}{x+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = f(3),$$

somit ist f stetig in 3. Definiere die Folge (x_n) durch $x_n := -3 + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_n \to -3$ für $n \to \infty$. Wegen $x_n^2 \to 9 \neq 0$ und $x_n + 3 \to 0$ für $n \to \infty$ divergiert die Folge $f(x_n) = \frac{x_n^2}{x_n+3}$. Daher ist f nicht stetig in -3. □

(b) _Behauptung:_ f ist stetig auf $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{2, 10\}$ und unstetig auf $\mathbb{N} \setminus \{2, 10\}$.

Beweis: An der Faktorisierung $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$ erkennt man, dass $x^2 - 5x + 4$ keine Nullstelle in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ hat. Somit ist f auf $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ als ein Quotient zweier Polynome stetig. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 5x + 4} = \frac{x(x-1)}{(x-4)(x-1)} = \frac{x}{x-4}.$$

Wir betrachten die Folge (x_n) definiert durch $x_n := 4 + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $x_n \to 4$ und $x_n - 4 \to 0$ für $n \to \infty$ folgt die Divergenz von

$$f(x_n) = \frac{x_n}{x_n - 4},$$

somit ist f nicht stetig in 4. Es sei nun $y \in \mathbb{N} \setminus \{4\}$. Für jede Folge (y_n) mit $y_n \neq 4$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_n - 4} = \frac{y}{y-4} \quad \text{und} \quad f(y) = \frac{3y-10}{y+2},$$

f ist also genau dann stetig in y, wenn

$$\frac{y}{y-4} = \frac{3y-10}{y+2}$$

erfüllt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{y}{y-4} = \frac{3y-10}{y+2} \quad &\Leftrightarrow \quad y(y+2) = (3y-10)(y-4) \\ &\Leftrightarrow \quad y^2 + 2y = 3y^2 - 22y + 40 \\ &\Leftrightarrow \quad 2y^2 - 24y + 40 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (y-2)(y-10) = 0, \end{aligned}$$

f ist daher stetig in 2 und 10 und unstetig in $\mathbb{N} \setminus \{2, 10\}$. Insgesamt ist f also stetig auf $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{2, 10\}$ und unstetig auf $\mathbb{N} \setminus \{2, 10\}$. □

(ii) *Voraussetzung:* Es seien $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.
Behauptung: Dann gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Aus der Stetigkeit von f und g folgt nun

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x),$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

Aufgabe 26:

(i) Wie müssen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion $f \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{x+1}}{x-1}, & \text{für } x > 1, \\ \beta, & \text{für } x = 1, \\ \alpha \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1}, & \text{für } 0 < x < 1, \end{cases}$$

auf $(0, \infty)$ stetig ist?

(ii) Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 1$ und $f(x+y) \leq f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Äquivalenz

$$f \text{ ist stetig} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist stetig in } 0.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 26:

(i) *Behauptung:* Mit $\alpha = \frac{-1}{3\sqrt{2}}$ und $\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ wird die Funktion f stetig auf $(0, \infty)$.

Beweis: Als Verkettung stetiger Funktionen ist $x \mapsto \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{x+1}}{x-1}$ stetig für $x > 1$ und genauso ist $x \mapsto \alpha \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1}$ stetig auf $(0, 1)$. Damit f auch in $x = 1$ stetig ist, muss gelten:

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = f(1) = \beta = \lim_{x\to 1-} f(x).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1+} f(x) &= \lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{x+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x}+1-(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{x+1}\right)} \\
&= \lim_{x\to 1+} \frac{1-x^2}{x(x-1)\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to 1+} \frac{-(1+x)}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{x+1}\right)} \\
&= \frac{-2}{1\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \alpha\cdot\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} = \alpha\cdot\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x^2+2)}{x-1} \\
= \alpha\cdot\lim_{x\to 1+}(x^2+2) = \alpha\cdot 3.
\end{aligned}$$

Somit muss gelten

$$3\alpha \overset{!}{=} -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

und

$$\beta = f(1) \overset{!}{=} -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

was die Behauptung beweist. □

(ii) _Voraussetzung:_ Es sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0)=1$ und $f(x+y)\le f(x)f(y)$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$.

Behauptung: Es gilt die Äquivalenz

$$f \text{ ist stetig} \quad\Leftrightarrow\quad f \text{ ist stetig in } 0.$$

Beweis: _⇒:_ Wenn f stetig ist, so ist f insbesondere stetig in 0.

_⇐:_ Es sei nun umgekehrt f stetig in 0. Es sei $x_0\in\mathbb{R}$ und (x_n) eine reelle Folge mit $x_n\to x_0$ für $n\to\infty$. Setze $y_n := x_n - x_0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Aus der Ungleichung folgt

$$f(x_n) = f(y_n + x_0) \le f(y_n)f(x_0)$$

und

$$f(x_0) = f(x_n + (-y_n)) \le f(x_n)f(-y_n)$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Wegen $y_n\to 0$ (und damit auch $-y_n\to 0$) für $n\to\infty$ und $f(0)=1$ folgt aus der Stetigkeit von f in 0, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(-y_n) = f(0) = 1$ gilt. Somit ist $f(-y_n)>0$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$. Daher erhalten wir aus den obigen beiden Abschätzungen die Ungleichung

$$\frac{f(x_0)}{f(-y_n)} \le f(x_n) \le f(y_n)f(x_0) \tag{1}$$

für fast alle $n\in\mathbb{N}$. Außerdem gilt ferner

$$\frac{f(x_0)}{f(-y_n)} \to f(x_0) \quad\text{und}\quad f(y_n)f(x_0)\to f(x_0)$$

für $n\to\infty$. Mit dem Sandwichprinzip folgt aus (1) die Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

d.h. f ist stetig in x_0. Da $x_0\in\mathbb{R}$ beliebig war ist f stetig. □

Aufgabe 27 (K):

(i) Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass die folgenden Gleichungen eine Lösung $x > 0$ besitzen:

(a) $\mathrm{e}^{\cos(x)} - x^7 = \sin(x^3)$, (b) $x - \log(1+x^2) = 100$.

(ii) Es sei $a > 0$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 27:

(i) *Behauptung:* Die folgenden zwei Gleichungen haben jeweils eine Lösung $x > 0$.

(a) *Beweis:* Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \mathrm{e}^{\cos(x)} - x^7 - \sin(x^3)$ ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Ferner ist

$$f(0) = \mathrm{e}^1 - 0 - \sin(0) = \mathrm{e} > 0$$

und

$$f(2) = \mathrm{e}^{cos(2)} - 2^7 - \sin(2^3) \leq \mathrm{e}^1 - 128 + 1 < 4 - 128 = -124 < 0,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Exponentialfunktion monoton wachsend ist. Nach dem Zwischenwertsatz existiert somit ein $\hat{x} \in (0,2)$ mit $f(0) = 0$, d.h. es gilt $\mathrm{e}^{\cos(\hat{x})} - \hat{x}^7 = \sin(\hat{x}^3)$. □

(b) *Beweis:* Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x - \log(1+x^2) - 100$ ist stetig als Komposition stetiger Funktionen mit

$$f(0) = 0 - \log(1) - 100 = -100 < 0$$

und

$$\begin{aligned} f(1000) &= 1000 - \log(1 + 1000^2) - 100 > 900 - \log(10^7) = 900 - 7\log(10) \\ &> 900 - 7\log(\mathrm{e}^3) = 900 - 21\log(\mathrm{e}) = 900 - 21 = 879 > 0, \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass der Logarithmus monoton wachsend ist. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $\hat{x} \in (0, 1000)$ mit $f(\hat{x}) = 0$, d.h. $\hat{x} - \log(1 + \hat{x}^2) = 100$. □

(ii) *Voraussetzung:* Es sei $a > 0$.

(a) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$.

Beweis: Es gilt nach Vorlesung (6.5)

$$\frac{y}{\mathrm{e}^{ay}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{ay}{\mathrm{e}^{ay}} \xrightarrow{y\to\infty} \frac{1}{a} \cdot 0 = 0.$$

Da $y = \log(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, folgt mit der Substitution $y = \log(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{\mathrm{e}^{ay}} = 0.$$

□

(b) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a)$.

Beweis: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ liefert die Definition 7.15 der allgemeinen Potenz

$$\begin{aligned} \frac{a^x - 1}{x} &= \frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{x\log(a)} - 1\right) = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\log(a))^n}{n!} - 1\right) = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x\log(a))^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(a))^n}{n!} x^{n-1} \overset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log(a))^{k+1}}{(k+1)!} x^k \xrightarrow{x\to 0} \frac{(\log(a))^{0+1}}{(0+1)!} = \log(a) \end{aligned}$$

aufgrund der Stetigkeit von Potenzreihenfunktionen (Satz 7.4). □

Aufgabe 28:

(i) Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Beweisen Sie oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) A abgeschlossen $\Rightarrow$ $f(A)$ abgeschlossen.

(b) B abgeschlossen $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

(c) A beschränkt $\Rightarrow$ $f(A)$ beschränkt.

(d) B beschränkt $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$ beschränkt.

(ii) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass D genau dann kompakt ist, wenn jede stetige Funktion auf D beschränkt ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 28:

(i) *Voraussetzung:* Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

(a) *Behauptung:* Die Aussage ist falsch.
Gegenbeispiel: Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \mathrm{e}^x$ und $A := \mathbb{R}$ ist A abgeschlossen, aber $f(A) = (0, \infty)$ ist nicht abgeschlossen.

(b) *Behauptung:* B abgeschlossen $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

Beweis: Es seien B abgeschlossen und (x_n) eine Folge in $f^{-1}(B)$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Wir müssen zeigen, dass $x \in f^{-1}(B)$ liegt, also $f(x) \in B$.
Da f nach Voraussetzung stetig ist, gilt $f(x_n) \to f(x)$ für $n \to \infty$. Nach Voraussetzung gilt $f(x_n) \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da B abgeschlossen ist, erhalten wir damit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in B$. □

(c) *Behauptung:* A beschränkt $\Rightarrow$ $f(A)$ beschränkt.

Beweis: Da A beschränkt ist, existiert ein $M \geq 0$ mit $|x| \leq M$ für alle $x \in A$, d.h. es gilt $A \subseteq [-M, M]$. Da das Intervall $[-M, M]$ kompakt ist, ist wegen der Stetigkeit von f auch $f([-M, M])$ nach Satz 7.11 kompakt. Insbesondere ist also $f([-M, M])$ beschränkt. Nach Wahl von M gilt $f(A) \subseteq f([-M, M])$, also ist $f(A)$ als Teilmenge einer beschränkten Menge selbst beschränkt. □

(d) *Behauptung:* Die Aussage ist falsch.
Gegenbeispiel: Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ und $B := \{0\}$ ist B beschränkt, aber $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$ ist unbeschränkt.

(ii) *Behauptung:* D ist genau dann kompakt ist, wenn jede stetige Funktion auf D beschränkt ist.

Beweis: $\Rightarrow$: Es seien D kompakt und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Nach Satz 7.11 ist $f(D)$ ebenfalls kompakt. Insbesondere ist $f(D)$ also beschränkt, d.h. f ist auf D beschränkt.

$\Leftarrow$: Es sei nun jede stetige Funktion auf D beschränkt. Insbesondere ist also die stetige Funktion $id_D\colon D \to \mathbb{R}$, $id_D(x) := x$ auf D beschränkt. Also ist $D = id_D(D)$ nach Voraussetzung beschränkt. Auf Grund von Satz 7.10 (b) beleibt noch zu zeigen, dass D abgeschlossen ist.

Angenommen D ist nicht abgeschlossen. Dann existiert eine Folge (x_n) in D und ein $x_0 \in \mathbb{R} \setminus D$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Wir definieren die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{|x - x_0|}$. Dann ist f stetig, denn die Betragsfunktion ist stetig und es gilt $x_0 \notin D$. Zudem gilt $f(x_n) = \frac{1}{|x_n - x_0|} \to \infty$ für $n \to \infty$, also ist f unbeschränkt, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist D beschränkt und abgeschlossen, und somit nach Satz 7.10 (b) kompakt. □