Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I **Winter-Semester 2020/2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 0 **02.11.20**

Dieses Übungsblatt geht noch nicht in die Bewertung ein.

Aufgabe 1 (*Aussagenlogik*)

Wir definieren eine neue Art, zwei Aussagen zu kombinieren, durch die folgende Wahrheitstabelle:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \mid \mathcal{B}$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} \mid \mathcal{B}$ zu $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ äquivalent ist.

b) Zeigen Sie, dass die Aussagen $\neg\mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ äquivalent sind.

c) Stellen Sie, ähnlich wie in b), die Aussagen $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$ nur mithilfe des Symbols $\mid$, mit Klammern und mit $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ dar.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Wir stellen eine Wahrheitstabelle für $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ auf und erhalten

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

. Diese entspricht der für $\mathcal{A} \mid \mathcal{B}$ gegebenen Wahrheitstabelle.

b) $\mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ gdw $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{A})$ nach Teilaufgabe a). Das ist gdw $\neg\mathcal{A}$.

c) Wir stellen Wahrheitstabellen auf:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \mid \mathcal{B}) \mid (\mathcal{A} \mid \mathcal{B})$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Dies entspricht der Wahrheitstabelle von $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \mid \mathcal{A}) \mid (\mathcal{B} \mid \mathcal{B})$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Dies entspricht der Wahrheitstabelle von $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \mid (\mathcal{B} \mid \mathcal{B})$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Dies entspricht der Wahrheitstabelle von $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$.

Weiterhin gilt $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$ gdw $(\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \implies \mathcal{A})$ gdw $(\mathcal{A} \mid (\mathcal{B} \mid \mathcal{B})) \wedge (\mathcal{B} \mid (\mathcal{A} \mid \mathcal{A}))$ gdw $((\mathcal{A} \mid (\mathcal{B} \mid \mathcal{B})) \mid (\mathcal{B} \mid (\mathcal{A} \mid \mathcal{A}))) \mid ((\mathcal{A} \mid (\mathcal{B} \mid \mathcal{B})) \mid (\mathcal{B} \mid (\mathcal{A} \mid \mathcal{A})))$.

Aufgabe 2 (*Operationen auf Mengen*)

Es seien A, B, C, D beliebige Mengen und I eine nichtleere Menge. Weiterhin sei für jedes $i \in I$ die Menge M_i eine Teilmenge von D.
Zeigen Sie:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. *Bemerkung:* Dies lässt sich auch aus den *De Morgan'schen Gesetzen* ableiten.

b) $A \times \bigcap_{i \in I} M_i = \bigcap_{i \in I} (A \times M_i)$.

c) $\bigcup_{i \in I} \mathcal{P}(M_i) \subseteq \mathcal{P}(\bigcup_{i \in I} M_i)$.

d) Gilt in c) auch die umgekehrte Inklusion („$\supseteq$“)? Belegen Sie Ihre Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Es gilt $x \in A \setminus (B \cup C)$ gdw $x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C)$ gdw $x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$ gdw $x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$ gdw $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Hier haben wir die de-morgansche Regel in der Logik angewandt, die sich durch Wahrheitstafeln beweisen lässt.

b) Es gilt: $(x, y) \in A \times \bigcap_i M_i$ gdw $x \in A \wedge \forall i \in I : y \in M_i$ gdw $\forall i \in I : (x \in A \wedge y \in M_i)$ gdw $(x, y) \in \bigcap_i (A \times M_i)$.

c) Es gilt: $A \in \mathcal{P}(M_i)$ gdw $\exists i \in I : A \in \mathcal{P}(M_i)$ gdw $\exists i \in I : A \subseteq M_i$ dann $\exists i \in I : A \subseteq \bigcup_i M_i$ gdw $A \in \mathcal{P}(\bigcup_i M_i)$.

d) Definiere $D = \{1, 2\}, M_1 = \{1\}, M_2 = \{2\}$. Dann ist $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(M_1 \cup M_2)$ aber $\{1, 2\} \notin \mathcal{P}(M_1) \cup \mathcal{P}(M_2)$.

Aufgabe 3 (*Injektive und bijektive Abbildungen*)

Entscheiden Sie für die Abbildungen

$$f_1\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad\qquad f_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad\qquad f_3\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$z \mapsto 2z \qquad\qquad z \mapsto \left\lfloor \frac{z}{2} \right\rfloor \qquad\qquad z \mapsto \begin{cases} \frac{z}{2}, & z \text{ gerade} \\ \frac{1-z}{2} & z \text{ ungerade} \end{cases}$$

jeweils, ob sie injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind.
Dabei definiert $\lfloor x \rfloor$ für $x \in \mathbb{R}$ die größte Zahl $z \in \mathbb{Z}$, die $z \leq x$ erfüllt. Beachten Sie, dass die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (zumindest in dieser Vorlesung) nicht die 0 enthalten.

Lösung zu Aufgabe 3

- f_1 ist nicht surjektiv, denn die ungeraden ganzen Zahlen sind offenbar nicht im Bild von f_1 enthalten. Damit ist f_1 auch nicht bijektiv.

  f_1 ist aber injektiv. Falls nämlich $f_1(z) = f_1(z')$ für zwei Zahlen $z, z' \in \mathbb{Z}$ gilt, so gilt $2z = 2z'$. Das ist äquivalent zu $z = z'$. Damit gibt es keine zwei verschiedenen Zahlen, die auf dasselbe Element im Bild abgebildet werden.

- f_2 ist surjektiv, denn für jedes $z \in \mathbb{Z}$ gilt $f_2(2z) = z$, also liegt z im Bild von f_2.

  f_2 ist nicht injektiv, denn es gilt z.B. $f_2(0) = 0 = f_2(1)$. Damit ist f_2 auch nicht bijektiv.

  Alternativ kann man auch sehen, dass $f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ bijektiv ist. Daraus folgt nach der Vorlesung, dass f_1 injektiv und f_2 surjektiv sein muss. (Mehr lässt sich damit aber nicht beweisen.)

- f_3 ist injektiv. Angenommen, es gilt $f_3(z) = f_3(z')$. Da gerade Zahlen auf positive Zahlen und ungerade Zahlen auf nichtpositive Zahlen abgebildet werden, müssen z und z' also entweder beide gerade oder beide ungerade sein. Damit gilt $\frac{z}{2} = \frac{z'}{2}$ oder $\frac{1-z}{2} = \frac{1-z'}{2}$. In beiden Fällen folgt daraus $z = z'$.

  f_3 ist auch surjektiv. Für eine positive Zahl $z \in \mathbb{Z}$ gilt $f_3(2z) = z$, denn $2z$ ist eine gerade natürliche Zahl. Für eine nichtpositive Zahl $z \in \mathbb{Z}$ gilt $f_3(1-2z) = z$, und $1-2z$ ist tatsächlich eine natürliche ungerade Zahl, denn $z \leq 0 \implies 1 - 2z \geq 1$. In beiden Fällen ist z im Bild von f_3 enthalten, somit ist f_3 surjektiv.

  Als injektive und surjektive Funktion ist f_3 auch bijektiv.

Aufgabe 4 (*Satz von Beatty*)

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $a, b > 0$ und $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Außerdem seien die folgenden Mengen definiert:

$$A := \{\, \lfloor a \cdot n \rfloor \mid n \in \mathbb{N} \,\}, \qquad\qquad B := \{\, \lfloor b \cdot m \rfloor \mid m \in \mathbb{N} \,\}.$$

Beachten Sie dabei auch die Definitionen aus Aufgabe 3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $\lfloor a \cdot n \rfloor < a \cdot n < \lfloor a \cdot n \rfloor + 1$ und $\lfloor b \cdot m \rfloor < b \cdot m < \lfloor b \cdot m \rfloor + 1$.
(*Hinweis*: Kann $a \cdot n$ oder $b \cdot m$ eine ganze Zahl sein?)

b) Es gibt keine Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, sodass $\lfloor a \cdot n \rfloor = \lfloor b \cdot m \rfloor$ gilt.

c) Es gilt $A \cap B = \emptyset$.

d) Es gilt $A \cup B = \mathbb{N}$.
Hinweis: Was wäre, wenn es Zahlen $z, m, n \in \mathbb{N}$ gäbe,
die $\lfloor a(n-1) \rfloor < z < z+1 \leq \lfloor an \rfloor$ und $\lfloor b(m-1) \rfloor < z < z+1 \leq \lfloor bm \rfloor$ erfüllen würden?

Lösung zu Aufgabe 4

a) Nach der Definition (siehe Aufgabe 3) ist $z = \lfloor a \cdot n \rfloor$ die größte ganze Zahl mit $z \leq a \cdot n$.

Das bedeutet jede ganze Zahl $z' > z$ kann nicht $z' \leq a \cdot n$ erfüllen. Daher gilt $z' > a \cdot n$. Das gilt insbesondere für $z' = z + 1$

Damit ist $\lfloor a \cdot n \rfloor \leq a \cdot n < \lfloor a \cdot n \rfloor + 1$ gezeigt. Wir müssen also nur noch $\lfloor a \cdot n \rfloor \neq a \cdot n$ zeigen.

Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis: Angenommen es gälte $z = \lfloor a \cdot n \rfloor = a \cdot n$. Also wäre $a \cdot n$ ganzzahlig. Wegen $a > 0$ und $n > 0$ gilt $z = a \cdot n > 0$. Damit wäre $a = \frac{n}{z}$ der Quotient zweier ganzer Zahlen, also $a \in \mathbb{Q}$, im Widerspruch zur Aufgabenstellung.

Insgesamt haben wir also $\lfloor a \cdot n \rfloor < a \cdot n < \lfloor a \cdot n \rfloor + 1$ gezeigt. Analog zeigt man $\lfloor b \cdot m \rfloor < a \cdot n < \lfloor b \cdot m \rfloor + 1$.

Anmerkung: $\lfloor a \cdot 0 \rfloor = a \cdot 0 = 0$ ist eine ganze Zahl, das widerspricht jedoch nicht der eben bewiesenen Aussage, da wir $0 \notin \mathbb{N}$ definiert haben.

b) Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen, $n, m \in \mathbb{N}$ wären Zahlen, sodass $z = \lfloor a \cdot n \rfloor = \lfloor b \cdot m \rfloor$ gälte.

Nach Teilaufgabe a) gälte dann

$$\begin{aligned} z < an < z+1 \qquad & \implies z\frac{1}{a} < n < (z+1)\frac{1}{a}, \\ z < bm < z+1 \qquad & \implies z\frac{1}{b} < m < (z+1)\frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Addiert man beide Ungleichungen miteinander, so würde daraus

$$z\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) < m + n < (z+1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

folgen, also $z < m + n < z + 1$. Damit wäre $m + n$ eine ganze Zahl, die zwischen der ganzen Zahl z und ihrem Nachfolger $z + 1$ läge. Da es eine solche Zahl nicht gibt, muss unsere ursprüngliche Annahme $\lfloor a \cdot n \rfloor = \lfloor b \cdot m \rfloor$ falsch sein.

c) Angenommen, es gälte $A \cap B \neq \emptyset$. Also gäbe es ein Element z, das sowohl in A als auch in B läge. Dieses könnte man sowohl als $z = \lfloor a \cdot n \rfloor$ als auch als $z = \lfloor b \cdot m \rfloor$ für geeignete $m, n \in \mathbb{N}$ darstellen, im Widerspruch zu Teilaufgabe b).

d) Wegen $a, b > 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \lfloor 0a \rfloor \leq \lfloor a \rfloor \leq \lfloor 2a \rfloor \leq \lfloor 3a \rfloor \leq \ldots \\ 0 &= \lfloor 0a \rfloor \leq \lfloor b \rfloor \leq \lfloor 2b \rfloor \leq \lfloor 3b \rfloor \leq \ldots \end{aligned}$$

Gäbe es nun ein $z \in \mathbb{N}$ das nicht in $A \cup B$ enthalten ist, so müssten beide Folgen diese Zahl z überspringen, also gäbe es $m, n \in \mathbb{N}$ mit

$$\lfloor a(n-1) \rfloor < z < \lfloor an \rfloor \qquad \text{und} \qquad \lfloor b(m-1) \rfloor < z < \lfloor bm \rfloor$$

Da z und $\lfloor an \rfloor$ ganze Zahlen sind, müsste also auch $z+1 \leq \lfloor an \rfloor$ und $z+1 \leq \lfloor bm \rfloor$ gelten. Aus Teilaufgabe a) würde dann auch

$$\begin{aligned} a(n-1) < z < z+1 < an \qquad &\text{und} \qquad b(m-1) < z < z+1 < bm \\ \implies n-1 < z\frac{1}{a} < (z+1)\frac{1}{a} < n \qquad &\text{und} \qquad m-1 < z\frac{1}{b} < (z+1)\frac{1}{b} < m \end{aligned}$$

folgen. Addiert man diese Ungleichungen, so erhielte man

$$n+m-2 < z < z+1 < n+m,$$

was zum Widerspruch führt, da zwischen den ganzen Zahlen $n+m-2$ und $n+m$ nicht noch zwei andere ganze Zahlen z und $z+1$ liegen. Daher muss unsere Annahme falsch sein und $A \cup B = \mathbb{N}$ gelten.