Gruppe 1 Velislav Slavov, 2385786
ucsmm@student.kit.edu

Σ 20

A1) $U := \{ x \in \mathbb{R}_3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \}$

a) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \iff (1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, damit

2/2

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \ker(1\ 2\ 3) \Rightarrow U$ UVR v. $\mathbb{R}^3$ ✓ ∎

b) Sei $x \in U$, also $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 - 3x_3$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U$

$\begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-x_3)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in LH(M)} \Rightarrow \boxed{U \subseteq LH(M)}$ ✓

Aus $M \subseteq U$ folgt, dass $\boxed{LH(M) \subseteq U}$ ✓

$\Rightarrow LH(M) = U \Rightarrow M$ ist ein Erzeugendensystem von U ✓

4/4 ∎

c) Sei $B = \left\{ \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$

Aus (b): $\boxed{LH(B) = U}$

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sodass $\lambda_1 \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ \lambda_1 + 0 \\ 0 - \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{B \text{ ist lin. unabhängig}}$$

$\Rightarrow B$ ist eine Basis von U ■ 4/4

10

A3) $\ker A := \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0 \}$

$$Ax = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x_3 + x_4 = 0,\ x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0,\ x_4 = 0$$

$$\Rightarrow 2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_1$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix}x_1\\-2x_1\\0\\0\end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ker A = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x = \lambda \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \ker A = \left\{ \lambda \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = LH\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \text{ ist ein Erzeugendensystem von } \ker A}$

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist lin. unabhängig}}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $\ker A$ $\blacksquare$

10