Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I **Winter-Semester 2020/2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 5 **07.12.20**

Aufgabe 1 (*Gruppen*) (*10 Punkte*)

a) Beweisen Sie: In jeder Gruppe $(G, *)$ gilt für Elemente $x, y, a \in G$:

$$a * x = a * y \iff x = y \iff x * a = y * a$$

b) Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und $a, b \in G$. Zeigen Sie:

$$(ab = ba) \iff \forall n \in \mathbb{N} : (ab)^n = a^n b^n$$

c) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $|\mathscr{S}(n)| = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei bezeichnet $\mathscr{S}(n)$ die symmetrische Gruppe auf n Elementen und $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ die Fakultät von n.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Mengen

$$M_k \coloneqq \{\sigma \in \mathscr{S}(n+1) \,|\, \sigma(n+1) = k\}$$

für $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ alle gleich groß sind, und $M_{n+1} \cong \mathscr{S}(n)$ gilt.
Außerdem ist jedes Element von $\mathscr{S}(n+1)$ in genau einer der Mengen $M_1, \ldots, M_{n+1}$ enthalten.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Wenn $x = y$ gilt, gilt offenbar auch $a * x = a * y$, denn wir multiplizieren ja zweimal dasselbe Element mit a. Außerdem folgt auch $x * a = y * a$.

Da a in G ein Inverses a^{-1} hat, haben wir auch die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} a * x = a * y &\implies a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * (a * y) \\ &\implies (a^{-1} * a) * x = (a^{-1} * a) * y \\ &\implies e_G * x = e_G * y \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt benutzen wir die Assoziativität der Gruppe und danach die Definitionen von Inversem und Neutralelement.

Analog zeigt man auch die Folgerung $x * a = y * a \implies x = y$.

b) Wir zeigen „$\Leftarrow$“:
Für $n = 2$ erhalten wir aus der rechten Aussage $abab = aabb$. mit Teilaufgabe a) können wir „kürzen“:

$$a(bab) = a(abb) \implies bab = abb \implies (ba)b = (ab)b \implies ba = ab.$$

Wir zeigen „⇒“:
Nun sei also $ab = ba$. Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion:

Induktionsbeginn: Für $n = 1$ gilt offenbar $(ab)^1 = ab = ba = b^1 a^1$.

Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $(ab)^n = a^n b^n$

Induktionssschluss: Wegen $ab = ba$ gilt auch $(ab)^n = (ba)^n$. Wir benutzen die Assoziativität der Halbgruppe, um Klammern zu versetzen:

$$(ab)^{n+1} = \underbrace{(ab)(ab)\dots(ab)(ab)}_{n+1 \text{ mal } ab} = a\,\underbrace{(ba)(b\dots a)(ba)}_{n \text{ mal } ba}\,b = a(ba)^n b = a(ab)^n b = a(a^n b^n)b = a^{n+1}b^{n+1}$$

Somit gilt die Induktionsannahme auch für $n + 1$.

Allgemein sagt die Gleichung $ab = ba$ aus, dass die Reihenfolge der Faktoren in einem Produkt aus beliebig vielen a und b keine Rolle spielt.

c) Induktionsbeginn: Für $n = 1$ gibt es nur eine Bijektion $1 \to 1$, also gilt $|\mathscr{S}(1)| = 1 = 1!$

Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $|\mathscr{S}(n)| = n!$

Induktionsschluss: Die Mengen

$$M_k := \{\sigma \in \mathscr{S}(n+1) \,|\, \sigma(n+1) = k\}\,.$$

sind disjunkt und ergeben vereinigt ganz $\mathscr{S}(n + 1)$.

Für jede Permutation $\sigma \in M_k$ betrachten wir nun die Permutation $\tilde{\sigma} := (k, n + 1) \circ \sigma$, wobei $(k, n + 1)$ wie in der Vorlesung die Permutation bezeichnet, die k und $n + 1$ vertauscht und alle anderen Elemente gleich lässt. Es gilt offenbar $\tilde{\sigma}(n + 1) = n + 1$, also $\tilde{\sigma} \in M_{n+1}$.

Die Abbildung

$$f\colon M_k \to M_{n+1}, \quad \sigma \mapsto (k, n+1) \circ \sigma$$

ist eine Bijektion mit inverser Abbildung

$$f^{-1}\colon M_{n+1} \to M_k, \quad \sigma \mapsto (k, n+1) \circ \sigma$$

das heißt, M_k und M_{n+1} haben gleich viele Elemente. Außerdem sind die Elemente von M_{n+1} Permutationen, die $n + 1$ fest lassen und $\{1, \dots n\}$ beliebig permutieren, also ergibt die Einschränkung auf $\{1, \dots n\}$ eine Bijektion zwischen M_{n+1} und $\mathscr{S}(n)$.

Das bedeutet, die $n+1$ Mengen $M_1, \dots M_{n+1}$ haben jeweils $|\mathscr{S}(n)| = n!$ Elemente. Insgesamt hat $\mathscr{S}(n + 1)$ also $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ Elemente.

Aufgabe 2 (*Ringhomomorphismen zwischen Körpern*) (*10 Punkte*)

Es seien K_1, K_2 zwei Körper (und damit auch Ringe) und $\varphi\colon K_1 \to K_2$ ein Ringhomomorphismus. Beweisen Sie, dass φ dann injektiv ist.

Lösung zu Aufgabe 2

Es seien $a, b \in K_1$ mit $\varphi(a) = \varphi(b)$. Also $\varphi(a - b) = 0$. Nehme an, $a - b$ hat ein Inverses c. Dann ist

$$1 = \varphi(1) = \varphi((a - b)c) = \varphi(a - b)\varphi(c) = 0$$

Das ist ein Widerspruch. Also hat $a - b$ kein Inverses. Dies impliziert $a - b = 0$, also $a = b$. Damit haben wir gezeigt, dass φ injektiv ist.

Aufgabe 3 (*Zwei Ringe*) (*10 Punkte*)

a) Die Menge

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}$$

bildet einen Unterring von $(\mathbb{Q}^{2\times 2}, +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ die Addition und Multiplikation von Matrizen bezeichnet.

b) Die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \left\{ x + \sqrt{2}\,y \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

bildet einen Unterring von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ die Addition und Multiplikation von reellen Zahlen bezeichnet.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Wir überprüfen die Axiome eines Unterringes:

i Wir überprüfen $(R, +)$ ist eine Untergruppe: Sind $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Q}$, dann ist

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_2 & 2\beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & 2\beta_1 - 2\beta_2 \\ \beta_1 - \beta_2 & \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \in R.$$

ii Wir zeigen, die 1 ist enthalten: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R.$

iii Wir zeigen R ist multiplikativ abgeschlossen. Sind $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Q}$, dann ist

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & 2\beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + 2\beta_1\beta_2 & 2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 \\ \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 & 2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} \in R.$$

b) Für alle $x, y, x', y' \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{2}\,y) + (x' + \sqrt{2}\,y') &= (x + x') + \sqrt{2}(y + y') && \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \\ (x + \sqrt{2}\,y) \cdot (x' + \sqrt{2}\,y') &= (xx' + 2yy') + \sqrt{2}(xy' + x'y) && \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Damit liegt die Summe und das Produkt zweier Elemente aus $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ wieder in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + \sqrt{2} \cdot 0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \\ -(x + \sqrt{2}\,y) &= (-x) + \sqrt{2}\,(-y) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}). \\ 1 &= 1 + \sqrt{2} \cdot 0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \end{aligned}$$

damit ist $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ und abgeschlossen unter der Multiplikation. Insgesamt ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ also ein Unterring von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (*Körper und Isomorphismen*) (*10 Punkte*)

a) Für $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt: $x + \sqrt{2}\, y = 0 \iff x = y = 0$.
Hinweis: Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

b) Der Ring $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ aus Aufgabe 3 ist sogar ein Körper.
Hinweis: Es könnte helfen, einen Bruch mit $x - \sqrt{2}\, y$ zu erweitern, falls dieser Term nicht Null ist.

c) Die Ringe $(R, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ aus Aufgabe 3 sind isomorph zueinander, d.h. es gibt einen bijektiven Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Wenn $x = y = 0$ gilt, dann gilt offensichtlich auch $x + \sqrt{2}\, y = 0$.

Angenommen, es gilt $x + \sqrt{2}\, y = 0$. Falls nun $y \neq 0$ gälte, würde daraus $\sqrt{2} = -\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ folgen, was nicht wahr ist, da $\sqrt{2}$ irrational ist. Also muss $y = 0$ und somit $x = -\sqrt{2}\, y = 0$ gelten.

b) Damit $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Körper ist, müssen wir noch zeigen, dass jedes Element in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses besitzt.

Nach Aufgabenteil a) sind die Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}$ genau diejenigen $x + \sqrt{2}\, y$, für die $x, y \in \mathbb{Q}$ nicht beide 0 sind. In $\mathbb{R}$ gibt es dann ein multiplikatives Inverses:

$$(x + \sqrt{2}\, y)^{-1} = \frac{1}{x + \sqrt{2}\, y} = \frac{x - \sqrt{2}\, y}{(x + \sqrt{2}\, y)(x - \sqrt{2}\, y)} = \frac{x}{x^2 - 2y^2} - \sqrt{2}\frac{y}{x^2 - 2y^2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Das Erweitern mit $x - \sqrt{2}\, y$ ist eine erlaubte Umformung, denn nach a) gilt auch $x - \sqrt{2}\, y \neq 0$. Das bedeutet, $\frac{x}{x^2-2y^2} - \sqrt{2}\frac{y}{x^2-2y^2}$ ist auch in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ das multiplikativ Inverse zu $x + \sqrt{2}\, y$, und wir haben es mit einem Körper zu tun.

c) Wir zeigen, dass die Abbildung

$$\varphi\colon R \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$
$$\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \mapsto x + \sqrt{2}\, y$$

ein Ringisomorphismus ist.

Zunächst prüfen wir, dass φ ein Ringhomomorphismus ist: Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} x+x' & 2(y+y') \\ y+y' & x+x' \end{pmatrix}\right) \\
&= (x+x') + \sqrt{2}(y+y') \\
&= (x+\sqrt{2}\,y) + (x'+\sqrt{2}\,y') \\
&= \varphi\left(\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} xx'+2yy' & 2(xy'+x'y) \\ yx'+xy' & xx'+2yy' \end{pmatrix}\right) \\
&= (xx'+2yy') + \sqrt{2}(xy'+x'y) \\
&= (x+\sqrt{2}\,y) \cdot (x'+\sqrt{2}\,y') \\
&= \varphi\left(\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}\right) \cdot \varphi\left(\begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + \sqrt{2} \cdot 0 = 1$$

Außerdem ist φ offensichtlich surjektiv, denn x, y sind beliebige Elemente aus $\mathbb{Q}$. Außerdem gilt mit Teilaufgabe a)

$$\begin{aligned}
\ker(\varphi) &= \{\, A \in R \,|\, \varphi\,(A) = 0 \,\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Q}, x + \sqrt{2}\,y = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Q}, x = y = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}$$

also ist der Kern trivial und φ ist somit injektiv. Damit ist φ ein bijektiver Ringhomomorphismus und somit ein Ringisomorphismus.

Aufgabe 5 (*Bonusaufgabe zum Nikolaus*) (*10 Punkte*)

Diese Aufgabe ist als Bonusaufgabe gedacht. Zur Bearbeitung haben Sie zwei Wochen Zeit, also bis zum 21.12.20.

Durch folgende Additions- und Multiplikationstabellen wird ein Körper mit 4-Elementen gegeben:

+	🚲	⚽	🍩	🥨
🚲	🚲	⚽	🍩	🥨
⚽	⚽	🚲	🥨	🍩
🍩	🍩	🥨	🚲	⚽
🥨	🥨	🍩	⚽	🚲

·	🚲	⚽	🍩	🥨
🚲	🚲	🚲	🚲	🚲
⚽	🚲	⚽	🍩	🥨
🍩	🚲	🍩	🥨	⚽
🥨	🚲	🥨	⚽	🍩

Außerdem sei

$$\text{🍩}\text{🎁}_1 + \text{🥨}\text{🎁}_2 + \text{🚲}\text{🎁}_3 = \text{🥨}$$

$$\text{🥨}\text{🎁}_1 + \text{🍩}\text{🎁}_2 + \text{🍩}\text{🎁}_3 = \text{⚽}$$

$$\text{⚽}\text{🎁}_1 + \text{🍩}\text{🎁}_2 + \text{🥨}\text{🎁}_3 = \text{🚲}$$

Was bekommt Gauß vom Nikolaus?