Gruppe 1

Velislav Slavov, 2385786

ucsmm@student.kit.edu

A1 a) Gruppe $(G, *)$ $x, y, a \in G$

(1) Behauptung: $a * x = a * y \iff x = y$

Beweis:

"$\Rightarrow$"

Annahme: $a * x = a * y$ z.z. $x = y$

$a * x = (a * e) * x \iff (a * (y * y^{-1})) * x$

$\iff ((a * y) * y^{-1}) * x \iff (a * y) * (y^{-1} * x)$

$\overset{\text{Annahme}}{\Rightarrow} (a * y) * (y^{-1} * x) = a * y$

$\Rightarrow y^{-1} * x = e$ (Weil e eindeutig sein muss)

$\Rightarrow \boxed{x = y \ \blacksquare}$

"$\Leftarrow$"

Annahme: $x = y$ Z.Z. $a * x = a * y$

$a * x \iff a * (x * e) \iff a * (x * (y^{-1} * y))$

$\iff a * ((x * y^{-1}) * y) \overset{\text{Annahme}}{\iff} a * (e * y)$

$\iff \boxed{a * y \ \blacksquare}$

(2) Behauptung: $x = y \Leftrightarrow x * a = y * a$

Beweis:

"$\Rightarrow$"

Annahme: $x = y$ z.z. $x * a = y * a$

$$x * a \Leftrightarrow (x * e) * a \Leftrightarrow (x * (y^{-1} * y)) * a$$

$$\Leftrightarrow ((x * y^{-1}) * y) * a \overset{\text{Annahme}}{\Leftrightarrow} (e * y) * a$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y * a \;\blacksquare}$$

"$\Leftarrow$"

Annahme: $x * a = y * a$ z.z. $x = y$

$$x * a \Leftrightarrow (x * e) * a \Leftrightarrow (x * (y^{-1} * y)) * a$$

$$\Leftrightarrow ((x * y^{-1}) * y) * a \Leftrightarrow (x * y^{-1}) * (y * a)$$

$$\overset{\text{Annahme}}{\Rightarrow} (x * y^{-1}) * (y * a) = y * a$$

$$\Rightarrow x * y^{-1} = e \Rightarrow \boxed{x = y \;\blacksquare}$$

Aus (1) und (2) Folgt:

$$a * x = a * y \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow x * a = y * a$$

b) Gruppe $(G, *)$ $a, b \in G$

Behauptung: $(ab = ba) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: (ab)^n = a^n b^n$

Beweis:

"$\Rightarrow$"

Annahme: $ab = ba$ Z.z $\forall n \in \mathbb{N}: (ab)^n = a^n b^n$

I.A. Sei $n = 1$

$\left.\begin{array}{l}(ab)^1 = a \cdot b \\ a^1 \cdot b^1 = a \cdot b\end{array}\right\}$ Die Aussage ist wahr

I.V. Für ein beliebiges aber festes n gilt

$(ab)^n = a^n \cdot b^n \overset{\text{Annahme}}{=} (ba)^n = b^n \cdot a^n$

I.S.

$(ab)^{n+1} = (ab)^n \cdot (ab)$

$= (a^n \cdot b^n) \cdot (a \cdot b) = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ mal}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b}_{n \text{ mal}}) \cdot (a \cdot b)$

$= ((\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ mal}}) \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b}_{n \text{ mal}}) \cdot a) \cdot b$

$= ((\underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}}) \cdot (\underbrace{b \cdots b}_{n-1 \text{ mal}}) \cdot (b \cdot a)) \cdot b$ Nach mehrmalige Anwendung von dem Assoziativgesetz und die Annahme von dem Beweis

$= ((\underbrace{a \cdots a}_{n+1 \text{ mal}}) \cdot (\underbrace{b \cdots b}_{n \text{ mal}})) \cdot b$

$$= \underbrace{(a \cdots a)}_{n+1 \text{ mal}} \cdot \underbrace{(b \cdots b)}_{n+1 \text{ mal}} = \boxed{a^{n+1} \cdot b^{n+1} \blacksquare}$$

"$\Leftarrow$"

Annahme: $\forall n \in \mathbb{N}: (ab)^n = a^n b^n$ z.z $ab = ba$

Aus a) gilt:

$$b \cdot (ab)^n = (a^n \cdot b^n) \cdot b$$

$$b \cdot (ab)^n \Leftrightarrow b \cdot (\underbrace{(a \cdot b) \ldots (a \cdot b)}_{n \text{ mal}}) \Leftrightarrow (b \cdot a) \cdot b \cdot (\underbrace{(a \cdot b) \ldots (a \cdot b)}_{n-1 \text{ mal}})$$

$$\Leftrightarrow (\underbrace{(b \cdot a) \ldots (b \cdot a)}_{n \text{ mal}}) \cdot b \Leftrightarrow (ba)^n \cdot b$$

Somit gilt:

$$b \cdot (ab)^n = (ba)^n \cdot b$$

Wieder aus a) folgt, dass $(ab)^n = (ba)^n$

$$\Rightarrow \boxed{ab = ba \blacksquare}$$

A2 K_1, K_2 Körper $\varphi: K_1 \to K_2$ Ringhomomorph.

Behauptung: φ ist injektiv

Beweis:

Gegeben seien $k_1, k_1' \in K_1$
mit $\varphi(k_1), \varphi(k_1') \in K_2$

Annahme: $\varphi(k_1) = \varphi(k_1')$ z.z. $k_1 = k_1'$

$$\varphi(k_1 \cdot 1_{K_1}) \overset{\varphi = \text{Ringhomomorph}}{=} \varphi(k_1) \cdot \varphi(1_{K_1}) \overset{\text{Annahme}}{=} \varphi(k_1') \cdot \varphi(1_{K_1}) \Rightarrow k_1 = k_1' \blacksquare$$

A3 a) $R := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}$

Behauptung: R ist Unterring von $(\mathbb{Q}^{2x2}, +, \cdot)$

Beweis:

(1) Behauptung: R ist Untergruppe von $(\mathbb{Q}^{2x2}, +)$

(i) Seien $\alpha, \beta = 0$ so gilt $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{Q}^{2x2}}$ ✓

(ii) Seien $R_1 := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$, $R_2 := \begin{pmatrix} \alpha_2 & 2\beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \in R$

Seien $\alpha_3 := \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_3 := \beta_1 + \beta_2$

Sei $R_3 := R_1 + R_2 = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 2\beta_3 \\ \beta_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} \in R$ ✓

(iii) Sei $R^{-1} := \begin{pmatrix} -\alpha & -2\beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$

So gilt $R + R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_R \in R$ ✓ ∎

(2) Seien $\alpha = 1, \beta = 0$
So gilt $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_{\mathbb{Q}^{2x2}} \in R$ ✓

(3) $R_1 \times R_2 = \begin{pmatrix} (\alpha_1\alpha_2 + 2\beta_1\beta_2) & (2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1) \\ (\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2) & (2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2) \end{pmatrix} \in R$ ✓

Aus (1), (2), (3) folgt: R Unterring von $\mathbb{Q}^{2x2}$ ∎

b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{ x + \sqrt{2}\, y \mid x, y \in \mathbb{Q} \}$

Behauptung: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ Unterring von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Beweis:

(1) Behauptung: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$

(i) Seien $x, y = 0 \Rightarrow 0 + 0\sqrt{2} = 0 = 0_{\mathbb{R}}$ ✓

(ii) Seien $q_1, q_2, q_3 := q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$q_3 = (x_1 + \sqrt{2}\, y_1) + (x_2 + \sqrt{2}\, y_2) = (x_1 + x_2) + \sqrt{2}\,(y_1 + y_2)$$

$\Rightarrow q_3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ✓

(iii) Seien $q, q^{-1} := -x - \sqrt{2}\, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$q + q^{-1} = (x + \sqrt{2}\, y) + (-x - \sqrt{2}\, y) = (x - x) + \sqrt{2}\,(y - y)$$

$= 0 + 0\sqrt{2} = 0 = 0_{\mathbb{Q}}$ ✓ ∎

(2) Sei $x = 1, y = 0 \Rightarrow x + \sqrt{2}\, y = 1 = 1_{\mathbb{R}}$

(3) Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$q_3 := q_1 \cdot q_2 = (x_1 + y_1\sqrt{2})(x_2 + y_2\sqrt{2})$

$= x_1 x_2 + x_1 y_2 \sqrt{2} + x_2 y_1 \sqrt{2} + 2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 + 2 y_1 y_2) + \sqrt{2}\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$\Rightarrow q_3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Aus (1), (2), (3) $\Rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ Unterring von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ∎