Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I **Winter-Semester 2020/2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 10 **25.01.21**

Aufgabe 1 ($\mathbb{R}$ *als unendlichdimensionaler* $\mathbb{Q}$*-Vektorraum*) (*10 Punkte*)

$\mathbb{R}$ ist eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ und somit ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $p_1, \dots, p_n$ paarweise verschiedene Primzahlen. Wir betrachten die Menge

$$M := \{\log(p_i) \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

a) Beweisen Sie, dass die Menge M über $\mathbb{Z}$ linear unabhängig ist, also, dass Folgendes gilt:

$$\forall z_1, \dots z_n \in \mathbb{Z} : \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \log(p_i) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_1 = \cdots = z_n = 0 \right)$$

Hinweis: Diese Aussage ist unabhängig von der Basis des Logarithmus. Sie dürfen ohne Beweis die Logarithmengesetze und die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung (Satz 3.4.17) verwenden.

b) Folgern Sie aus Teilaufgabe a), dass M auch über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist.

c) Wie ändert sich Ihre Antwort, wenn stattdessen $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet wird?

d) Folgern Sie, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum unendlichdimensional ist.

Hinweis: Teilaufgabe a) ist der schwierigste Teil. Wenn Sie Teilaufgabe a) nicht gelöst haben, dürfen Sie das Ergebnis natürlich trotzdem in b)-d) weiterverwenden.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Zu Abkürzung schreiben wir $I = \{1, \dots n\}$.

Da die Vektoren reelle Zahlen sind und die Skalarmultiplikation auch von $\mathbb{R}$ ererbt ist, können wir mit den Logarithmengesetzen folgern:

$$\begin{aligned} & 0 = \sum_{i \in I} z_i \log(p_i) = \sum_{i \in I} \log(p_i^{z_i}) = \log\left(\prod_{i \in I} p_i^{z_i}\right) \\ \Longrightarrow \quad & 1 = \prod_{i \in I} p_i^{z_i} = \prod_{\substack{i \in I \\ z_i \neq 0}} p_i^{z_i} \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir alle Faktoren $p_i^0 = 1$ weggelassen. Per Konvention hat ein Produkt ohne Faktoren immer noch den Wert 1.

Falls $z_i \geq 0$ für alle $i \in I$ gilt, ist die rechte Seite eine Primfaktorzerlegung der 1. Da es keine Primfaktoren gibt, die 1 teilen, muss also $z_i = 0$ und damit auch $\lambda_i = 0$ für alle $i \in I$ gelten und die Linearkombination, mit der wir begonnen haben, ist die triviale.

Falls es $i \in I$ mit $z_i < 0$ gibt, dividieren wir durch die entsprechenden Faktoren und erhalten

$$\prod_{\substack{j \in I \\ z_i < 0}} p_j^{-z_j} = \prod_{\substack{i \in I \\ z_i > 0}} p_i^{z_i}.$$

Nun stehen links und rechts des Gleichheitszeichens zwei Primfaktorzerlegungen derselben Zahl. Wenn nun $z_i \neq 0$ für ein $i \in I$ gälte, kommt der zugehörige Primfaktor p_i in einer der beiden Zerlegungen vor und in der anderen nicht, im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung (Satz 3.4.17). Also muss $z_i = 0$ für alle $i \in I$ gelten und die Linearkombination, mit der wir begonnen haben, ist die triviale.

Damit ist gezeigt, dass M über $\mathbb{Z}$ linear unabhängig ist.

b) Angenommen, wir haben eine $\mathbb{Q}$-Linearkombination

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \log(p_i) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}.$$

Die rationalen Zahlen λ_i können durch Brüche $\lambda_i = \frac{x_i}{y_i}$ mit $x_i \in \mathbb{Z}, y_i \in \mathbb{N}$ dargestellt werden. Wir „bringen die Brüche auf den Hauptnenner“, indem wir die Gleichung mit $z := \prod_{i \in I} y_i$ multiplizieren, dann gilt

$$\sum_{i \in I} \underbrace{z\lambda_i}_{\in \mathbb{Z}} \log(p_i) = 0.$$

Nach Aufgabenteil a) gilt also $z\lambda_i = 0$ und somit auch $\lambda_i = 0$ für alle $i \in I$. Damit ist gezeigt, dass die Menge M auch über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist.

c) $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist eindimensional. Damit ist M nur für $n = 1$ linear unabängig und sonst linear abhängig.

d) Angenommen, die Dimension von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum wäre $n \in \mathbb{N}$. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, gibt es nach Teilaufgabe b) aber auch eine linear unabhängige Menge mit $n + 1$ Elementen, die nach dem Basisergänzungssatz Teilmenge einer Basis mit mindestens $n + 1$ Elementen ist, im Widerspruch zur Annahme.

Aufgabe 2 (*Dualbasen in* $\mathbb{K}^n$) (*10 Punkte*)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix, deren Spalten wir mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^n$ bezeichnen. Die Zeilen von A^{-1} bezeichnen wir mit $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n \in \mathbb{K}^{1 \times n}$. Außerdem definieren wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} b_i \colon \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K} \\ v &\mapsto \tilde{a}_i \cdot v \end{aligned}$$

für alle $i = 1, \ldots n$. Beweisen Sie:

a) Die Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ bilden eine Basis von $\mathbb{K}^n$.

b) Es gilt $b_i \in (\mathbb{K}^n)^*$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ ist die duale Basis zu $(a_1, \ldots a_n)$.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Angenommen, wir haben $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit

$$0 = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt aber auch

$$0 = A^{-1} 0 = A^{-1} A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

also muss $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$ gelten, und $a_1, \dots, a_n$ sind somit linear unabhängig. Als n linear unabhängige Vektoren in einem n-dimensionalen Vektorraum bilden sie somit eine Basis.

b) Da die Matrix-Vektor-Multiplikation linear ist, ist b_i eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ in den Körper $\mathbb{K}$ und somit ein Element von $(\mathbb{K}^n)^*$.

Es gilt $b_i(a_j) = \tilde{a}_i \cdot a_j$ für $i, j \in \{1, \dots n\}$. Dies ist also das Produkt der i-ten Zeile von A^{-1} und der j-ten Spalte von A. Nach Definition der Matrixmultiplikation ist dies der (i,j)-te Eintrag von $A^{-1}A = \mathbb{1}_n$, also gilt

$$b_i(a_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

was zeigt, dass es sich um die duale Basis handelt.

Aufgabe 3 (*Lineare Unabhängigkeit von Linearformen*)

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für $d \leq n$ seien $\ell_1, \dots, \ell_d \in V^*$ nicht-triviale Linearformen auf V. Weiter bezeichne U_i den Kern von ℓ_i und es sei $U = \bigcap_{i=1}^d U_i$. Beweisen Sie:

a) Für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ ist $1 + \dim U_i = n$ und es ist $d + \dim U \geq n$.

b) Sind die $\ell_1, \dots, \ell_d$ linear unabhängig, dann gilt $\dim(U) = n - d$. *Hinweis*: Betrachten Sie den Rang der Abbildung

$$\begin{aligned} \ell : V &\to \mathbb{K}^d \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_d(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Gilt in Teilaufgabe b) auch die umgekehrte Implikation?

Lösung zu Aufgabe 3

a) Da ℓ_i nicht-trivial ist, gilt $\operatorname{rg}(\ell_i) = 1$. Nach der Rang-Defekt-Formel gilt

$$\dim(U_i) = \dim(\ker \ell_i) = \dim V - \operatorname{rg} \ell_i = \dim V - 1.$$

Die zweite Aussage zeigen wir induktiv über die Anzahl der Linearformen d. Den Induktionsanfang haben wir eben gezeigt. Nun folgt der Induktionsschluss $d-1 \to d$:

$$\begin{aligned}\dim(U_1 \cap \cdots \cap U_d) &= \dim(U_1 \cap \cdots \cap U_{d-1}) + \dim(U_d) - \dim(U_1 \cap \cdots \cap U_{d-1} + U_d) \\ &\geq \dim(V) - (d-1) + \dim(V) - 1 - \dim(V) \\ &= \dim(V) - d.\end{aligned}$$

b) Es sei $n \coloneqq \dim(V)$. Wähle eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von V. Dann hat

$$M_{E,B}(\ell) = \begin{pmatrix} \ell_1(b_1) & \cdots & \ell_1(b_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_d(b_1) & \cdots & \ell_d(b_n) \end{pmatrix}$$

Rang d genau dann, wenn $\ell_1, \ldots, \ell_d$ linear unabhängig sind. Dann gilt

$$\dim(V) = \operatorname{rg} \ell + \dim(\ker \ell) = \operatorname{rg} \ell + \dim(\ker \ell_1 \cap \cdots \cap \ker \ell_d) = d + \dim(U)$$

Damit haben wir auch die umgekehrte Richtung also Teilaufgabe c) gezeigt.

Aufgabe 4 (*Bilinearformen und Linearformen*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ wird *Bilinearform auf V* genannt, wenn für alle $x \in V$ die Abbildungen

$$\begin{aligned}\beta(x, \cdot) : V &\to \mathbb{K} \\ y &\mapsto \beta(x,y)\end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned}\beta(\cdot, x) : V &\to \mathbb{K} \\ y &\mapsto \beta(y,x)\end{aligned}$$

linear sind. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Ist β eine Bilinearform auf V, dann ist für alle $x \in V$ die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi_\beta : V &\to V^* \\ x &\mapsto \beta(x, \cdot)\end{aligned}$$

linear.

b) Ist umgekehrt $\varphi : V \to V^*$ eine lineare Abbildung, dann gibt es eine Bilinearform β auf V mit $\Phi_\beta = \varphi$.

c) Nun wählen wir $V = \mathbb{R}^4$ und $\beta(x,y) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{B^*,B}(\Phi_\beta)$ von Φ_β bezüglich einer von Ihnen gewählten geordneten Basis B von V und der dazugehörigen dualen geordneten Basis B^* von V^*.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Es seien $x, y, z \in V$. Dann ist

$$\Phi_\beta(x+y)(z) = \beta(x+y,z) = \beta(x,z) + \beta(y,z) = \Phi_\beta(x)(z) + \Phi_\beta(y)(z) = (\Phi_\beta(x) + \Phi_\beta(y))(z).$$

Ist weiterhin $\lambda \in \mathbb{K}$ dann ist

$$\Phi_\beta(\lambda x)(z) = \beta(\lambda x, z) = \lambda\beta(x,z) = \lambda\Phi(x)(z) = (\lambda\Phi_\beta(x))(z).$$

Damit haben wir gezeigt, dass Φ_β linear ist.

b) Definiere $\beta(x, y) = \varphi(x)(y)$. Da φ linear ist, ist β linear in der ersten Komponente. Da $\varphi(x)$ für jedes $x \in V$ linear ist, ist β linear in der zweiten Komponente.

c) Wir wählen $B = E$. Die duale Basis ist gegeben durch $B^* = (e_1^*, \ldots, e_4^*)$ mit $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Dann ist

$$M_{B^*,B}(\Phi_\beta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$