Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I | **Winter-Semester 2020/2021**

Übungsblatt 4 | **30.11.20**

Aufgabe 1 (*Lineares Gleichungssystem*) (*10 Punkte*)

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & + \ x_2 & - \ x_3 & -2x_4 & = \ 0 \\ -2x_1 & - \ x_2 & -2x_3 & + \ x_4 & = -4 \\ -1x_1 & +3x_2 & +5x_3 & & = \ 4 \\ 2x_1 & +2x_2 & & -3x_4 & = \ 2 \end{array}$$

a) Schreiben Sie dieses Gleichungssystem als $Ax = b$ mit einer geeigneten Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^4$.

b) Bestimmen Sie den Kern von A.

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 2 (*Kern*) (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & -4 & 6 \\ -9 & -6 & 8 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 6}.$$

Hinweis: Versuchen Sie, Brüche zu vermeiden, indem Sie die Zeilenoperationen geschickt wählen.

Aufgabe 3 (*Basisergänzung mit Gauß-Algorithmus*) (*10 Punkte*)

Wir definieren die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis des linearen Unterraums $U := \mathrm{LH}(v_1, v_2, v_3)$.

b) Ergänzen Sie die Basis aus a) zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 4 (*Gauß-Algorithmus zum Bestimmen des Kerns einer Matrix*) (*10 Punkte*)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei Matrizen.

a) Beweisen Sie: Es gilt $\ker(B) \subseteq \ker(AB)$.

b) Beweisen Sie: Falls $\ker(A) = \{0\}$ gilt, so gilt $\ker(B) = \ker(AB)$.

c) Finden Sie ein Beispiel für Matrizen $A, B \neq 0$, sodass $\ker(B) \neq \ker(AB)$ gilt.

Bemerkung: Dies zeigt zusammen mit Lemma 2.5.4 noch einmal, dass die Zeilenoperationen des Gauß-Algorihmus den Kern einer Matrix nicht verändern.

Abgabe bis Montag, den 07.12.20 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.