Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

1. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Sommersemester 2021

16. April 2021

Abgabe bis 23. April 2021, 12:00 Uhr

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 8 (einschließlich Satz 16.4) des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 1:

(i) Untersuchen Sie die folgenden Mengen jeweils auf Beschränktheit, Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit.

(a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, x - y \leq 3\}$,

(b) $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 4)^2 + (y - 1)^4 + (z - 3)^6 < 16\}$.

(ii) Es seien $f, g \in C(\mathbb{R})$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$, seien Schnittstellen von f und g, das heißt es gilt $f(x_k) = g(x_k)$ $(k = 1, 2)$. Ferner sei $f(x) > g(x)$ $(x \in (x_1, x_2))$ und $f(x) \leq g(x)$ sonst. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x) < y < f(x)\}$ ist offen,

(b) die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x) \leq y \leq f(x)\}$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 2 (K):

(i) Es sei $D := U_1(0) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie jeweils für die angegebene Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$, ob der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

(a) $$f(x, y) := \frac{4xy}{x^2 + y^2} \sin(xy^2 - x^2y),$$ (b) $$f(x, y) := \frac{xy^5 + x^2y^4}{6x^6 + 4y^6}.$$

(ii) Untersuchen Sie für die folgende Funktion f die Grenzwerte $\lim\limits_{t\to 0+} f(tv)$ für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und prüfen Sie, ob f stetig in 0 ist.

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Aufgabe 3:

Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(i) Untersuchen Sie die Funktion f in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf Stetigkeit.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ die Grenzwerte

$$\lim_{x\to a} \left(\lim_{y\to b} f(x, y) \right) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to b} \left(\lim_{x\to a} f(x, y) \right)$$

existieren. Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ stimmen diese überein?

Aufgabe 4 (K):
Untersuchen Sie jeweils, an welchen Stellen die folgenden Funktionen stetig bzw. unstetig sind.

(i) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) := \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt[4]{x^2+y^2+z^2}} & \text{für } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$

(ii) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} (x+y)\sin\left(\frac{1}{xy}\right) & \text{für } xy \neq 0, \\ 0 & \text{für } xy = 0. \end{cases}$

(iii) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin(x)y - xy}{x^3} & \text{für } x \neq 0, \\ -\frac{1}{6}y & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Information

Aufgrund der aktuellen Situation wird dieses Modul teilweise in digitaler Form angeboten. Die gesamte Abwicklung wird über das System ILIAS stattfinden. Melden Sie sich dafür mit Ihrem KIT-Account an und treten Sie dem Kurs **Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik** bei. Sie können diesem Kurs direkt über folgenden Link beitreten:

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1460343_rcodeUyjdjAUg9P&client_id=produktiv`

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Scheinkriterien, Tutorien, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung. Dort werden Sie auch über mögliche Änderungen informiert.

Zum Bearbeiten der Übungsblätter sollten Sie pro Woche etwa 7-8 Seiten des Skripts mithilfe der angebotenen Vorlesungsvideos durcharbeiten. Das kommende Übungsblatt wird den Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 15 beinhalten.

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-6 und 7-13 **jeweils** mindestens 48 bwz. 56 Punkte (50%) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal.