Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I **Winter-Semester 2020/2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 3 **23.11.20**

Aufgabe 1 (*Basisergänzungssatz*) (*10 Punkte*)

Wir definieren die Mengen

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\},$$
$$M := \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Zeigen Sie, dass M ein Erzeugendensystem von U ist.

c) Erzgänzen Sie $L := \emptyset$ zu einer Basis $B \subseteq M$ von U.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Wir prüfen die Untervektorraumaxiome nach:

(i) Es gilt $0 \in U$, denn $0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

(ii) Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U$ gilt $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ und $y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0$ und somit auch $(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) = 0$, woraus $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U$ folgt.

(iii) Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ und somit auch $\lambda x_1 + 2\lambda x_2 + 3\lambda x_3 = 0$ und deshalb $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U$

Alternative Lösung: U ist der Kern der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ und somit nach Vorlesung ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

b) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ ist äquivalent zu $x_1 = -2x_2 - 3x_3$. Damit haben alle Elemente von U die Form

$$\begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in M} - x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in M}$$

für geeignete $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ und liegen somit in $\mathrm{LH}(M)$; daraus folgt $U \subseteq \mathrm{LH}(M)$.

Umgekehrt kann man leicht nachrechnen, dass alle Elemente von M auch Elemente von U sind. Daraus folgt $M \subseteq U$ und wegen Lemma 2.3.4. gilt dann $\mathrm{LH}(M) \subseteq U$.

c) Der Beweis von Satz 2.3.18 (Basisauswahl- und Ergänzungssatz) zeigt uns, wie wie diese Basis konstruieren:

Wir starten mit $r = 0$ und definieren $L_0 := L = \emptyset$ und $W_0 := \mathrm{LH}(L_0) = \{0\}$.

Die Lineare Hülle eines Vektors besteht aus allen Vielfachen dieses Vektors. Wir wählen nun ein $v_2 \in M \setminus L_1$, also ein Element aus M, das kein Vielfaches von v_1 ist. Dies trifft hier auf alle Elemente von M außer v_1 selbst zu, also z.B. auf $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit ist nun $L_2 = \{v_1, v_2\}$ und $W_2 = \mathrm{LH}(L_2)$. Wir haben aber in b) schon gesehen, dass $U = \mathrm{LH}(v_1, v_2)$ gilt und somit sind wir fertig. Nach Satz 2.3.18 bildet dann $B := L_2 = \{v_1, v_2\}$ eine Basis von U mit $L \subseteq B \subseteq M$.

Aufgabe 2 (*Maximal linear unabhängig / minimales Erzeugendensystem*) (*10 Punkte*)

Es $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum und $B \subseteq U$ eine Menge. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Jede linear unabhängige Menge $L \subseteq U$ mit $B \subseteq L$ erfüllt $B = L$.

(ii) Jedes Erzeugendensystem E von U mit $E \subseteq B$ erfüllt $B = E$.

(iii) Die Menge B ist eine Basis von U.

Bemerkung: Man sagt auch: Eine Basis B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von U und ein minimales Erzeugendensystem von U.

Lösung zu Aufgabe 2

Wir zeigen i) $\Longrightarrow$ iii): Sei B maximal linear unabhängig in U. Nach dem Basisergänzungssatz Satz 2.3.18 kann B zu einer Basis B' von U ergänzt werden. Nun ist B' linear unabhängig. Also gilt $B' = B$. Das bedeutet B ist eine Basis von U.

Wir zeigen iii) $\Longrightarrow$ i): Sei B eine Basis von U und $L \supseteq B$ linear unabhängig. Da B schon U erzeugt, erzeugt L auch U. Also ist L eine Basis von U. Dann ist $|B| = \dim U = |L|$. Also $L = B$. Das bedeutet L ist maximal linear unabhängig.

Wir zeigen ii) $\Longrightarrow$ iii): Sei B ein minimales Ezeugendensystem von U. Nach dem Basisergänzungssatz Satz 2.3.18 gibt es eine Basis $B' \subseteq B$ von U. Nun ist B' auch ein Erzeugendensystem. Also gilt $B' = B$. Das bedeutet B ist eine Basis von U.

Wir zeigen iii) $\Longrightarrow$ ii): Sei B eine Basis von U und $E \subseteq B$ ein Erzeugendensystem von U. Da B linear unabhängig ist, ist auch E linear unabhängig, also eine Basis von U. Dann gilt $|B| = \dim U = |E|$. Also $E = B$. Das bedeutet B ist ein minimales Erzeugendensystem.

Aufgabe 3 (*Basis eines Kerns*) (*10 Punkte*)

Es sei die reelle 4×4-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(A) \subseteq \mathbb{R}^4$.

Lösung zu Aufgabe 3

Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ ist im Kern von A wenn

$$0 = Av = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \\ 2v_3 + v_4 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der dritten Zeile folgt $v_3 = 0$. Wenn man $v_3 = 0$ in der zweiten Zeile einsetzt, folgt aus der zweiten Zeile $v_4 = 0$. Wenn man in der ersten Zeile die Werte für v_3, v_4 einsetzt, folgt $2v_1 = -v_2$. Also $\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$. Die Menge $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig. Ist $v \in \ker A$, dann ist $v = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Dann $v = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also wird $\ker A$ von B erzeugt. Damit folgt, dass B eine gewünschte Basis von $\ker A$ ist.

Aufgabe 4 (*Lineare Unabhängigkeit und lineare Hülle*) (*10 Punkte*)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum.

a) Es seien $v_1, v_2, v_3 \in U$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$ gilt. Zeigen Sie:

$$\mathrm{LH}(v_1, v_2) = \mathrm{LH}(v_1, v_3).$$

b) Seien $v_1, ..., v_n \in U \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Die Menge $\{v_1, ..., v_n\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn

$$\mathrm{LH}(v_1, ..., v_s) \cap \mathrm{LH}(v_{s+1}, ..., v_n) = \{0\}$$

für alle $1 \leq s < n$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Aus der Aufgabenstellung folgt direkt, dass v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind. Wegen $\lambda_3 \neq 0$ gilt

$$v_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} v_2,$$

Damit ist $v_3 \in \mathrm{LH}(v_1, v_2)$. Der Untervektorraum $\mathrm{LH}(v_1, v_2)$ enthält also insbesondere die Vektoren v_1, v_3 und umfasst somit ganz $\mathrm{LH}(v_1, v_3)$, denn $\mathrm{LH}(v_1, v_3)$ ist der kleinste Untervektorraum, der v_1 und v_3 enthält (siehe . Wir haben also

$$\mathrm{LH}(v_1, v_3) \subseteq \mathrm{LH}(v_1, v_2)$$

gezeigt. Analog folgt

$$v_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} v_3,$$

und mit derselben Argumentation

$$\mathrm{LH}(v_1, v_2) \subseteq \mathrm{LH}(v_1, v_3)$$

und somit die Gleichheit.

b) Zu zeigen ist die Äquivalenz

$$\{v_1, ..., v_n\} \text{ linear unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall s \in \mathbb{N}, 1 \leq s < n : \mathrm{LH}(v_1, ..., v_s) \cap \mathrm{LH}(v_{s+1}, ..., v_n) = 0$$

„$\Longrightarrow$“: Es seien $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig, $1 \leq s < n$, und $v \in \mathrm{LH}(v_1, ..., v_s) \cap \mathrm{LH}(v_{s+1}, ..., v_n)$. Dann gibt es nach Definition der linearen Hülle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} &\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s = v = \lambda_{s+1} v_{s+1} + \cdots + \lambda_n v_n \\ \Longrightarrow\ &\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s - \lambda_{s+1} v_{s+1} - \cdots - \lambda_n v_n = 0 \\ \Longrightarrow\ &\lambda_1 = \ldots \lambda_s = -\lambda_{s+1} = \cdots = -\lambda_n = 0 \\ \Longrightarrow\ &v = 0 \end{aligned}$$

Das heißt, $v = 0$ ist das einzige Element von $\mathrm{LH}(v_1, ..., v_s) \cap \mathrm{LH}(v_{s+1}, ..., v_n)$.

„$\Longleftarrow$“: Angenommen, $v_1, ..., v_n$ sind linear abhängig. Dann gibt es Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

und ein $s \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_s \neq 0$. Wir wählen das minimale solche s. Damit gilt

$$\lambda_s v_s = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{s-1} v_{s-1}}_{=0,\text{ da } s \text{ mininmal}} + \lambda_s v_s = -\lambda_{s+1} v_{s+1} - \cdots - \lambda_n v_n.$$

Dies zeigt aber, dass $\lambda_s v_s$ sowohl in $\mathrm{LH}(v_1, \ldots, v_s)$ als auch in $\mathrm{LH}(v_{s+1}, \ldots, v_n)$ liegt. Außerdem ist $v_s \in U \setminus \{0\}$ und $\lambda_s \neq 0$ und somit

$$0 \neq \lambda_s v_s \in \mathrm{LH}(v_1, \ldots, v_s) \cap \mathrm{LH}(v_{s+1}, \ldots, v_n).$$