Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Algebra und Geometrie**
**Prof. Dr. Wilderich Tuschmann**
**Dr. Rafael Dahmen**
**Dr. Elisa Hartmann**
**Martin Günther, M. Sc.**

**Lineare Algebra I** **Winter-Semester 2020/2021**

**Übungsblatt 6** **14.12.20**

---

**Aufgabe 1** (*Zeilenrang und Spaltenrang*) (*10 Punkte*)

Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -a-1 & 2 & a+1 \\ 0 & a^2 & 1-a^2 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & a^2+a & 1-a^2 & -a-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben. Bestimmen für alle $a \in \mathbb{R}$ den Rang von $A$, indem Sie Zeilen- und Spaltenoperationen anwenden.
*Hinweis:* Machen Sie eine Fallunterscheidung und beachten Sie, dass sie nicht z.B. eine Zeile mit einem Term multiplizieren, der Null sein könnte.

**Aufgabe 2** (*Äquivalenzrelationen*) (*10 Punkte*)

a) Auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei $\sim$ die Relation, die gegeben ist durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und skizzieren Sie die Äquivalenzklasse von $(-1,\, 2)$.

b) Auf der Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ sei $\sim$ diejenige Relation, die gegeben ist durch

$$(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \Leftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und geben Sie eine bijektive Abbildung von der Menge der Äquivalenzklassen $M := \{[(z,n)] \mid (z,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$ nach $\mathbb{Q}$ an.

**Aufgabe 3** (*Restklassenarithmetik*) (*10 Punkte*)

Sei $R = \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}$.

a) Bestimmen Sie alle Nullteiler von $R$. (Ein Element $r \in R$ heißt ein *Nullteiler*, wenn es ein Element $s \in R \setminus \{0\}$ mit $rs = 0$ gibt.)

b) Bestimmen Sie alle invertierbaren Elemente von $R$.

c) Bestimmen Sie das Inverse der Restklasse $[7]$ in $R$.

d) Die Menge $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ ist mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation, dem Null-Element $([0],[0])$ und dem Eins-Element $([1],[1])$ ein Ring.

Zeigen Sie: es gibt genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$

e) Zeigen Sie: Der Homomorphismus aus d) ist sogar ein Isomorphismus.

**Aufgabe 4** (*Vektorraumaxiome*) (*10 Punkte*)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) $V_1 = \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$ ist mit der elementweisen Addition und elementweisen skalaren Multiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) $V_2 = \mathbb{Z}$ mit der skalaren Multiplikation, die durch $0 \cdot z = 0$ und $1 \cdot z = z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ gegeben ist, ist ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$.

c) $V_3 = \{ a \in \mathbb{R} \mid a > 0 \}$ ist mit der üblichen Multiplikation als Vektoraddition und der skalaren Multiplikation $\lambda \odot v = v^{\lambda}$ für $\lambda \in \mathbb{R}, v \in V_3$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

d) $V_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \,\middle|\, x^2 = -y^2 \right\}$ mit der von $\mathbb{Q}^2$ ererbten Addition und skalaren Multiplikation ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

---

**Abgabe** bis Montag, den 21.12.20 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.