Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

22. Januar 2021

Abgabe bis 29. Januar 2021, 12:00 Uhr

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 102 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 37:

(i) Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{x}$. Berechnen Sie das 3-te Taylorpolynom $T_3 f$ im Entwicklungspunkt 4.

(ii) Zeigen Sie die folgende Abschätzung:

$$\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{für alle } x \in [0,\infty).$$

Aufgabe 38 (K):

(i) Es sei $f\colon (-2,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \log(x+2)$. Berechnen Sie das 3-te Taylorpolynom $T_3 f$ zu f mit Entwicklungspunkt 1 und zeigen Sie, dass gilt:

$$|(T_3 f)(x) - f(x)| < 0.02 \quad (x \in [0,2]).$$

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und f und f'' seien beschränkt. Beweisen Sie, dass dann auch f' beschränkt ist.

Aufgabe 39:
Zeigen Sie mithilfe geeigneter Ober- und Untersummen die Existenz der folgenden Integrale und berechnen Sie mithilfe dieser Ober- und Untersummen den Wert der Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$, (b) $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}\,dx$, wobei $a > 1$.

Hinweis zu (a): Sie dürfen ohne Beweis $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ verwenden.
Hinweis zu (b): Verwenden Sie die Zerlegung $Z := \{x_0, \cdots, x_n\}$ mit $x_j = a^{\frac{j}{n}},\ j = 0, \cdots, n$.

Aufgabe 40 (K):
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C^1([a,b])$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe des 1. Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, indem Sie jeweils eine Stammfunktion ermitteln.

(a) $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$, sofern $f([a,b]) \subseteq (0,\infty)$, (b) $\displaystyle\int_a^b f'(x)f(x)\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + 4x\right) \mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\tan(\sqrt{x})}{\cos(\sqrt{x})\sqrt{x}}\,dx$.

Information

Aufgrund der aktuellen Situation wird dieses Modul teilweise in digitaler Form angeboten. Die gesamte Abwicklung wird über das System ILIAS stattfinden. Melden Sie sich dafür mit Ihrem KIT-Account an und treten Sie dem Kurs **Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik** bei. Sie können diesem Kurs direkt über folgenden Link beitreten:

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1253943_rcodeHa6wkYEysN&client_id=produktiv`

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Scheinkriterien, Tutorien, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

Zum Bearbeiten der Übungsblätter sollten Sie pro Woche etwa 9-10 Seiten des Skripts mithilfe der angebotenen Vorlesungsvideos durcharbeiten. Das kommende Übungsblatt wird den Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 111 beinhalten.

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-6 und 7-13 **jeweils** mindestens 48 bwz. 56 Punkte (50%) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Bitte beachten Sie den **Anmeldeschluss** am **21.02.2021**.