Gruppe 1

Velislav Slavov, 2385786

ucsmm@student.kit.edu

A1 $p \in \mathbb{K}[X]$

a) Behauptung: $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ähnlich $\Rightarrow p(A)$ und $p(B)$ ähnlich

Beweis:

Es gilt: $A = SBS^{-1}$ $(S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ inv.bar$)$

$p(A) = \sum_{j=0}^{n} a_j A^j$ und $p(B) = \sum_{j=0}^{n} a_j B^j$

$\sum_{j=0}^{n} a_j A^j = \sum_{j=0}^{n} a_j (SBS^{-1})^j =$

$\forall j \in (0 \dots n): (SBS^{-1})^j = \underbrace{(SBS^{-1}) \dots (SBS^{-1})}_{j \text{ mal}}$

$= SB\underbrace{(S^{-1}S)}_{\mathbb{1}_n}B\underbrace{(S^{-1}S)}_{\mathbb{1}_n} \dots (S^{-1}S)BS^{-1} = SB^jS^{-1}$ (Assoziativität von Matrixprodukte)

$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} a_j (SBS^{-1})^j = \sum_{j=0}^{n} a_j SB^jS^{-1} = S \sum_{j=0}^{n} a_j B^j S^{-1} = S\,p(B)S^{-1}$

$\Rightarrow p(A) = S\,p(B)S^{-1} \Leftrightarrow p(A)$ und $p(B)$ sind ähnlich ∎

A1 b) Behauptung: λ EW von $A \Rightarrow p(\lambda)$ EW von $p(A)$

Beweis:
Es gilt: $\exists v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}: Av = \lambda v$

$$p(A) = \sum_{j=0}^{n} a_j A^j \Rightarrow p(A) \cdot v = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j A^j\right) \cdot v$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j A^j v = \sum_{j=0}^{n} a_j \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{j \text{ mal}} \cdot v = \sum_{j=0}^{n} a_j \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{j-1 \text{ mal}} \cdot (\lambda v)$$

Bilinearität von Matrixpr. $$= \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{j-1 \text{ mal}} \cdot v \overset{\text{nach } j \text{ Schritten}}{=} \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j v = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j\right) \cdot v = p(\lambda) \cdot v$$

$\Rightarrow p(A) \cdot v = p(\lambda) \cdot v \Rightarrow p(\lambda)$ ist EW von $p(A)$ ■

A1 c) $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

Behauptung: λ EW von $AB \Rightarrow \lambda$ EW von BA

Beweis:
Es gilt: $\exists v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}: (AB)v = \lambda v$

(i) $(BA)(Bv) = B(AB)v = B(\lambda v) = \lambda(Bv)$

(ii) Da $v \neq 0 \Rightarrow Bv \neq 0$

Aus (i) und (ii) folgt: Bv ist EV von BA mit EW λ ■

A2 a) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad tr: \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}, A \longmapsto \sum_{j=1}^{n} a_{j,j}$ ist $\mathbb{K}$-Linear

Induktionsanfäng: $n=1$

$A := a_{1,1}, B := b_{1,1} \in \mathbb{K}^{1 \times 1}$

Es gilt: $tr(A) = a_{1,1}$ und $tr(B) = b_{1,1}$

$A + B := a_{i,j} + b_{i,j} \ \ (i,j \in (1 \dots n)) = a_{1,1} + b_{1,1}$

$tr(A+B) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j} + b_{j,j} = a_{1,1} + b_{1,1} = tr(A) + tr(B)$

$\lambda A := \lambda a_{i,j} \ \ (i,j \in (1 \dots n)) = \lambda a_{1,1}$

$tr(\lambda A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda a_{j,j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{j,j} = \lambda . tr(A)$

Induktionsvoraussetzung:
Sei tr $\mathbb{K}$-Linear für ein beliebiges, aber festes n

Induktionsschritt:
Seien $A' := a'_{i,j}, B' := b'_{i,j} \in \mathbb{K}^{n+1 \times n+1}, \lambda \in \mathbb{K}$

(i) $tr(A' + B') = \sum_{j=1}^{n+1} a'_{j,j} + b'_{j,j} = \left(\sum_{j=1}^{n} a'_{j,j} + b'_{j,j}\right) + \left(a'_{n+1,n+1} + b'_{n+1,n+1}\right)$

$\overset{I.V.}{=} \sum_{j=1}^{n} a'_{j,j} + \sum_{j=1}^{n} b'_{j,j} + \left(a'_{n+1,n+1} + b'_{n+1,n+1}\right)$

$= \left(\sum_{j=1}^{n} a'_{j,j} + a'_{n+1,n+1}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} b'_{j,j} + b'_{n+1,n+1}\right)$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} a'_{j,j} + \sum_{j=1}^{n+1} b'_{n+1,n+1} = tr(A') + tr(B')$$

(ii) $tr(\lambda A') = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda a'_{j,j} = \lambda \sum_{j=1}^{n+1} a'_{j,j} = \lambda . tr(A')$

$\Rightarrow$ tr ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{K}$-Linear ∎

A2 b) Seien $A := a_{i,j} \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $B := b_{k,l} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $(i,l \in (1 \dots n), j,k \in (1 \dots m))$

Behauptung: $tr(AB) = tr(BA)$

Beweis:

$AB := c_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k} \quad (i,k \in (1 \dots n))$

$BA := c'_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} a_{j,k} \quad (i,k \in (1 \dots m))$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{j,i} a_{i,j}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} c'_{j,j} = tr(BA) ∎$$

A2 c) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB := \begin{pmatrix} (1+4+4) & (2+2+8) & (1+4+4) \\ (2+6+5) & (4+3+10) & (2+6+5) \\ (4+10+6) & (8+5+12) & (4+10+6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 9 \\ 13 & 17 & 13 \\ 20 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

$tr(A) = 10$, $tr(B) = 3$, $tr(AB) = 46$

$tr(AB) \neq tr(A) \cdot tr(B)$

A2 d) $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m \times l}$, $C \in \mathbb{K}^{l \times n}$

Behauptung: $tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$

Beweis:

(i) $tr(ABC) \overset{\text{Assoz.}}{=} tr(\underbrace{(AB)}_{\in \mathbb{K}^{n \times l}}C) \overset{A2\,b)}{=} tr(C(AB)) = tr(CAB)$

(ii) $tr(CAB) \overset{\text{Assoz.}}{=} tr(\underbrace{(CA)}_{\in \mathbb{K}^{l \times m}}B) \overset{A2\,b)}{=} tr(B(CA)) = tr(BCA)$

(iii) $tr(BCA) \overset{\text{Assoz.}}{=} \underbrace{tr((BC)A)}_{\in \mathbb{K}^{m \times n}} \overset{A2\,b)}{=} tr(A(BC)) = tr(ABC)$

Aus (i), (ii), (iii) folgt die Behauptung ∎

A3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$$

$\mathbb{F}_5$

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

A3 a) Behauptung: $p_A = x^4 + 2x^2 - 4$

Beweis:

$$x\mathbb{1}_4 - A = \begin{pmatrix} (x-2) & 0 & 0 & 0 \\ 3 & (x-2) & 0 & 2 \\ 0 & 1 & (x-2) & 3 \\ 4 & 2 & 0 & (x-4) \end{pmatrix}$$

Wir entwickeln nach der 1. Zeile:

$$\det(x\mathbb{1}_4 - A) = (x-2)\det\begin{pmatrix} (x-2) & 0 & 2 \\ 1 & (x-2) & 3 \\ 2 & 0 & (x-4) \end{pmatrix}$$

Wir entwickeln nach der 1. Zeile:

$$\det\begin{pmatrix} (x-2) & 0 & 2 \\ 1 & (x-2) & 3 \\ 2 & 0 & (x-4) \end{pmatrix} = (x-2)\det\begin{pmatrix} (x-2) & 3 \\ 0 & (x-4) \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 1 & (x-2) \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (x-2)\cdot\big((x-2)(x-4) - 0\big) + 2\big(0 - 2(x-2)\big)$$

$$= (x-2)\,(x^2 - 4x - 2x + 3) - 4(x-2)$$

$$= (x-2)\,(x^2 - 1x + 3) - 4x + 3$$

$$= x^3 - x^2 + 3x - 2x^2 + 2x - 1 - 4x + 3$$

$$= x^3 - 3x^2 + x + 2$$

$$\Rightarrow \det(x\,\mathbb{1}_4 - A) = (x-2)\left(x^3 - 3x^2 + x + 2\right)$$

$$= x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x - 2x^3 + x^2 - 2x - 4$$

$$= x^4 + 2x^2 - 4 \blacksquare$$

A3 b) Behauptung: EW von $A = \{2, 3\}$

Beweis:
Es gilt: die EW von A sind die Nullstellen von p_A

$p_A(0) = 0^4 + 2 0^2 - 4 = -4 = 1$

$p_A(1) = 1^4 + 2.1^2 - 4 = 1 + 2 - 4 = -1 = 4$

$p_A(2) = 2^4 + 2.2^2 - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

$p_A(3) = 3^4 + 2.3^2 - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

$p_A(4) = 4^4 + 2.4^2 - 4 = 1 + 2 - 4 = -1 = 4$

$\Rightarrow$ Die Nullstellen von p_A (somit die EW von A) sind 2 & 3 ∎

A3 c) Behauptung: $x^4 + 2x^2 - 4 =$

Beweis: