Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Übungsblatt 6 **25.05.21**

Aufgabe 1 (*Eigenschaften linearer Isometrien*) (*10 Punkte*)

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und V ein n-dimensionaler und W ein m-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, jeweils mit einem Skalarprodukt.
Außerdem sei B eine geordnete Orthonormalbasis von V und C eine geordnete Orthonormalbasis von W. Die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $\varphi\colon V \to W$ nennen wir $A \coloneqq M_{\mathrm{CB}}(\varphi)$.

a) Beweisen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (i) Die Abbildung $\varphi\colon V \to W$ ist eine lineare Isometrie (aber nicht notwendigerweise bijektiv).
   (ii) Die Spalten von A bilden ein Orthonormalsystem bzgl. des Standardskalarprodukts in $\mathbb{K}^m$.
   (iii) Es gilt $A^*A = \mathbb{1}_n$

b) Beweisen Sie (ohne Bemerkung 2.1.2 zu verwenden): Falls $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Isometrie ist, ist φ injektiv und es gilt $m \geq n$.

c) Beweisen Sie: Falls $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Isometrie ist, gibt es geordnete Orthonormalbasen B′ von V und C′ von W, sodass $M_{\mathrm{C'B'}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ gilt.

Hinweis: In der Literatur werden Isometrien manchmal schon als bijektiv (und/oder linear) definiert. Das, was wir als „Isometrie“ bezeichnen, wird dann „isometrische Einbettung“ genannt.

Weiter auf der nächsten Seite $\longrightarrow$

Aufgabe 2 (*Orthogonale und unitäre Diagonalisierbarkeit*) (*10 Punkte*)

a) Ist die Matrix

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

reell orthogonal diagonalisierbar? Bestimmen Sie ggf. eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, bezüglich der die Matrix Diagonalform hat.
Hinweis: Die Eigenwerte dieser Matrix sind 0 und 5.

b) Welche der Matrizen

$$A_2 := \begin{pmatrix} 2+i & 1 & 0 \\ -4 & -2+i & 0 \\ i & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -2 \\ 1-i & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist komplex unitär trigonalisierbar? Welche sind komplex unitär diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Versuchen Sie nicht, das charakteristische Polynom von A_3 zu berechnen.

Zusatzaufgabe (*Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen*) (*+3 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils ein Beispiel (mit einem $n \in \mathbb{N}$ ihrer Wahl) für eine symmetrische Matrix

a) aus $\mathbb{C}^{n\times n}$, die nicht über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

b) aus $\mathbb{Q}^{n\times n}$, die nicht über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist.

c) aus ${\mathbb{F}_2}^{n\times n}$, die nicht über $\mathbb{F}_2$ diagonalisierbar ist.

Abgabe bis Montag, den 07.06.21 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.