Gruppe 1

Velislav Slavov, 2385786

ucsmm@student.kit.edu

$\Sigma 8$

A2

8

a) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ $\qquad \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(1) Behauptung: $\sim$ ist reflexiv

Beweis:

Seien $x_{\cancel{1}}, y_{\cancel{1}} \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest

Dann gilt $(x, y) \sim (x, y)$, weil $\forall x, y \in \mathbb{R}: x^2 + y^2 = x^2 + y^2$

$\blacksquare$

(2) Behauptung: $\sim$ ist symmetrisch

Beweis:

Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beliebig aber fest

Es gelte $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ $\qquad$ (z.z. $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$)

$\iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}: x^2 \in \mathbb{R} \\ \forall x, y \in \mathbb{R}: (x + y) \in \mathbb{R} \\ \forall x, y \in \mathbb{R}: x = y \iff y = x \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ \iff \\ x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2 \end{array}$$

$\blacksquare$

(3) Behauptung: $\sim$ ist transitiv

Beweis:

Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beliebig aber fest

Es gelten auch: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$

$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ und $x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2$

$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \in \mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: (x + y) \in \mathbb{R}$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x = y \land y = z \Rightarrow x = z$

$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2 \Rightarrow (x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$ $\blacksquare$

Aus (1),(2),(3) folgt, dass $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation

$[(-1,2)]_\sim = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2+y^2=5\}$ Und wie sieht die Äquivalenzklasse aus? Skizze? -1

4/5

b) $(z_1,n_1) \sim (z_2,n_2) \Longleftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$ $\quad \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

(1) Behauptung: $\sim$ ist reflexiv

Beweis:

Sei $(z,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ beliebig aber fest

Es gilt $(z,n) \sim (z,n)$, weil $zn = zn$

$\blacksquare$

(2) Behauptung: $\sim$ ist symmetrisch

Beweis:

Seien $(z_1,n_1),(z_2,n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ beliebig aber fest

Es gelte $(z_1,n_1) \sim (z_2,n_2)$ $\quad$ (Z.z. $(z_2,n_2) \sim (z_1,n_1)$)

$\Rightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$

$\forall z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}: z \cdot n \in \mathbb{Z}$

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}: z_1 = z_2 \Leftrightarrow z_2 = z_1$

$\Rightarrow z_2 n_1 = z_1 n_2 \Longleftrightarrow (z_2,n_2) \sim (z_1,n_1)$

$\blacksquare$

(3) Behauptung: $\sim$ transitiv

Beweis:

Seien $(z_1,n_1),(z_2,n_2),(z_3,n_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ beliebi aber fest

Es gelten auch:

$(z_1,n_1) \sim (z_2,n_2)$ und $(z_2,n_2) \sim (z_3,n_3)$

$$\Rightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1 \qquad \text{und} \qquad z_2 n_3 = z_3 n_2$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{z_1 n_2}{n_1} \checkmark \qquad \text{und} \qquad z_2 = \frac{z_3 n_2}{n_3} \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1 n_2}{n_1} = \frac{z_3 n_2}{n_3} \Leftrightarrow \frac{z_1}{n_1} = \frac{z_3}{n_3} \checkmark$$

$$\Leftrightarrow z_1 n_3 = z_3 n_1 \Leftrightarrow (z_1, n_1) \sim (z_3, n_3) \checkmark$$

Aus (1), (2), (3) folgt, dass $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation

$$M := \{ [(z,n)] \mid (z,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \}$$

Sei $q: M \longrightarrow \mathbb{Q}$
$\quad [(z,n)] \longmapsto \frac{z}{n}$ ✓

Hier ist noch zu zeigen, dass q wohldef. ist, d.h. dass für $(z_1,n_1) \sim (z_2,n_2)$ $\frac{z_1}{n_2} = \frac{z_2}{n_2}$ gilt. Denn schließlich gilt ja $[(z_1,n_1)]_\sim = [(z_2,n_2)]_\sim$.

Seien $a := [(z_1, n_1)]$, $b := [(z_2, n_2)] \in M$

(4) Behauptung: q ist injektiv

Beweis:

Es gelte $q(a) = q(b)$

$$q(a) = \frac{z_1}{n_1} \qquad \text{und} \qquad q(b) = \frac{z_2}{n_2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2}{n_2} \Leftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$$

$$\Rightarrow \boxed{(z_2, n_2) \in a} \checkmark$$

Aus $(z_2,n_2) \in a$ folgt schon $[(z_2,n_2)]_\sim = a$, weil $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. (Das gilt für jede Äquivalenzrelation :)

Da $\sim$ symmetrisch $\Rightarrow z_2 n_1 = z_1 n_2$

$\Leftrightarrow (z_2, n_2) \sim (z_1, n_1) \Leftrightarrow \boxed{(z_1, n_1) \in b}$

$\Rightarrow a = b$ ■

(5) Behauptung: q ist surjektiv

Beweis:

Sei $a := \frac{z_1}{n_1} \in \mathbb{Q}$ beliebig aber fest

$$a = a \Rightarrow \frac{z_1}{n_1} = \frac{z_1}{n_1} \Rightarrow z_1 n_1 = z_1 n_1$$

$$\Rightarrow \forall \frac{z_1}{n_1} \in \mathbb{Q}\ \exists\, m := [(z_1, n_1)] \in M : (z_1, n_1) \in m$$ ■

Aus (4) und (5) Folgt: q ist bijektiv ✓

4/5