Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Rafael Dahmen
Dr. Elisa Hartmann
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra I **Winter-Semester 2020/2021**

Übungsblatt 5 **07.12.20**

Aufgabe 1 (*Gruppen*) (*10 Punkte*)

a) Beweisen Sie: In jeder Gruppe $(G, *)$ gilt für Elemente $x, y, a \in G$:

$$a * x = a * y \iff x = y \iff x * a = y * a$$

b) Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und $a, b \in G$. Zeigen Sie:

$$(ab = ba) \iff \forall n \in \mathbb{N} : (ab)^n = a^n b^n$$

c) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $|\mathscr{S}(n)| = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei bezeichnet $\mathscr{S}(n)$ die symmetrische Gruppe auf n Elementen und $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ die Fakultät von n.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Mengen

$$M_k := \{\sigma \in \mathscr{S}(n+1) \,|\, \sigma(n+1) = k\}$$

für $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ alle gleich groß sind, und $M_{n+1} \cong \mathscr{S}(n)$ gilt.
Außerdem ist jedes Element von $\mathscr{S}(n+1)$ in genau einer der Mengen $M_1, \ldots, M_{n+1}$ enthalten.

Aufgabe 2 (*Ringhomomorphismen zwischen Körpern*) (*10 Punkte*)

Es seien K_1, K_2 zwei Körper (und damit auch Ringe) und $\varphi\colon K_1 \to K_2$ ein Ringhomomorphismus. Beweisen Sie, dass φ dann injektiv ist.

Aufgabe 3 (*Zwei Ringe*) (*10 Punkte*)

a) Die Menge

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}$$

bildet einen Unterring von $(\mathbb{Q}^{2\times 2}, +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ die Addition und Multiplikation von Matrizen bezeichnet.

b) Die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \left\{ x + \sqrt{2}\, y \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

bildet einen Unterring von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ die Addition und Multiplikation von reellen Zahlen bezeichnet.

Aufgabe 4 (*Körper und Isomorphismen*) (*10 Punkte*)

a) Für $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt: $x + \sqrt{2}\,y = 0 \iff x = y = 0$.
Hinweis: Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

b) Der Ring $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ aus Aufgabe 3 ist sogar ein Körper.
Hinweis: Es könnte helfen, einen Bruch mit $x - \sqrt{2}\,y$ zu erweitern, falls dieser Term nicht Null ist.

c) Die Ringe $(R, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ aus Aufgabe 3 sind isomorph zueinander, d.h. es gibt einen bijektiven Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Aufgabe 5 (*Bonusaufgabe zum Nikolaus*) (*10 Punkte*)

Diese Aufgabe ist als Bonusaufgabe gedacht. Zur Bearbeitung haben Sie zwei Wochen Zeit, also bis zum 21.12.20.

Durch folgende Additions- und Multiplikationstabellen wird ein Körper mit 4-Elementen gegeben:

+	🚲	⚽	🍩	🥨
🚲	🚲	⚽	🍩	🥨
⚽	⚽	🚲	🥨	🍩
🍩	🍩	🥨	🚲	⚽
🥨	🥨	🍩	⚽	🚲

·	🚲	⚽	🍩	🥨
🚲	🚲	🚲	🚲	🚲
⚽	🚲	⚽	🍩	🥨
🍩	🚲	🍩	🥨	⚽
🥨	🚲	🥨	⚽	🍩

Außerdem sei

🍩🎁$_1$ + 🥨🎁$_2$ + 🚲🎁$_3$ = 🥨

🥨🎁$_1$ + 🍩🎁$_2$ + 🍩🎁$_3$ = ⚽

⚽🎁$_1$ + 🍩🎁$_2$ + 🥨🎁$_3$ = 🚲

Was bekommt Gauß vom Nikolaus?

Abgabe bis Montag, den 14.12.20 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.