Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Sommersemester 2021

30. April 2021

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 15 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 5:
Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter sei $\overline{U_R(x)}$ die abgeschlossene Kugel um $x \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $R > 0$. Zeigen Sie, dass dann $f(\overline{U_R(x)})$ ein kompaktes Intervall ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Voraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig.

Behauptung: $f(\overline{U_R(x)}) \subseteq \mathbb{R}$ ist ein kompaktes Intervall.

Beweis: Zunächst stellen wir fest, dass für zwei Punkte $y, z \in \overline{U_R(x)}$ jeder Punkt der Form $tz + (1-t)y$ für $0 \le t \le 1$ ebenfalls in $\overline{U_R(x)}$ liegt, denn es gilt:

$$\|x - (tz + (1-t)y)\| \le t\|x - z\| + (1-t)\|x - y\| \le tR + (1-t)R = R$$

(Diese Eigenschaft nennt man auch Konvexität einer Menge). Des Weiteren ist $\overline{U_R(x)}$ kompakt, daher nimmt f nach Satz 16.5 auf $\overline{U_R(x)}$ sein Maximum und Minimum an. Wir bezeichnen diese Stellen mit y und z. Betrachte nun die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(tz+(1-t)y)$. Diese ist stetig als Verkettung stetiger Funktionen und es gilt $\max f = \max g$ und $\min f = \min g$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es nun für jedes $a \in [\min f, \max f]$ ein $t_0 \in [0,1]$ mit $g(t_0) = a$, das bedeutet aber insbesondere $f(t_0 z + (1-t_0 y)) = a$. Folglich liegt a im Bild von f unter $\overline{U_R(x)}$. Da a beliebig gewählt war, gilt $[\min f, \max f] \subseteq f(\overline{U_R(x)})$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial. Somit folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 6 (K):

(i) Untersuchen Sie die folgenden komplexen Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Reihenwert:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2-\mathrm{i}}\right)^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \mathrm{i}\sqrt{n}}$.

(ii) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + \mathrm{i})z^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} z^{3n}$.

(iii) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die die folgende Reihe konvergiert: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(i) (a) *Behauptung:* Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2-\mathrm{i}}\right)^n$ konvergiert und hat den Reihenwert $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

Beweis: Es gilt $z := \frac{1}{2-\mathrm{i}} = \frac{2+\mathrm{i}}{5}$ und damit $|z| = \left|\frac{1}{2-\mathrm{i}}\right| = \frac{\sqrt{5}}{5} < 1$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist also als geometrische Reihe absolut konvergent und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Weiter gilt

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\frac{1}{2-\mathrm{i}}} = \frac{1}{\frac{1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}} = \frac{2-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{2} = \frac{3+\mathrm{i}}{2}.$$

Somit gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2-\mathrm{i}}\right)^n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

□

(b) *Behauptung:* Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \mathrm{i}\sqrt{n}}$ divergiert.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{n-\mathrm{i}\sqrt{n}} = \frac{n+\mathrm{i}\sqrt{n}}{(n-\mathrm{i}\sqrt{n})(n+\mathrm{i}\sqrt{n})} = \frac{n+\mathrm{i}\sqrt{n}}{n^2+n},$$

also gilt $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{n-\mathrm{i}\sqrt{n}}\right) = \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{n+1}$. Somit divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{n-\mathrm{i}\sqrt{n}}\right)$ und damit auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\mathrm{i}\sqrt{n}}$. □

(ii) (a) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + \mathrm{i})z^n$ hat den Konvergenzradius 1.

Beweis: Definiere die Folge (a_n) durch $a_n := 3n^2 + \mathrm{i}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$1 \xleftarrow{n\to\infty} 1 \leq \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\sqrt{9n^4+1}} \leq \sqrt[n]{\sqrt{10n^4}} \leq \sqrt[n]{4n^2} = \sqrt[n]{4}\,\sqrt[n]{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

d.h. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Somit hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{1} = 1$. □

(b) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} z^{3n}$ hat den Konvergenzradius $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Beweis: Substituiere $w := z^3$ und betrachte die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$ mit $a_n := \frac{5^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{5}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 5,$$

woraus sich für letztere Potenzreihe der Konvergenzradius $\frac{1}{5}$ ergibt. Durch Rücksubstitution erhalten wir für $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} z^{3n}$ den Konvergenzradius $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$. □

(iii) *Behauptung:* Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$ konvergiert genau dann, wenn $|z| \leq 1$.

Beweis: Definiere die Folge (a_n) durch $a_n := \frac{1}{n^3}$ $(n \in \mathbb{N})$. Wegen $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} \to 1$ für $n \to \infty$ hat die Potenzreihe den Konvergenzradius 1. Das bedeutet, die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt: $\left|\frac{z^n}{n^3}\right| = \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$ absolut, womit die Behauptung folgt. □

Aufgabe 7 (K):
Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die komplexe Fourierreihe. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Fourierreihe konvergiert.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f(x) = x\ (x \in (-\pi, \pi]),\ f(x + 2\pi) = f(x)\ (x \in \mathbb{R})$,

(ii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f(x) = 1 + x + |x|\ \ (x \in (-\pi, \pi]),\ f(x + 2\pi) = f(x)\ (x \in \mathbb{R})$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

(i) *Behauptung:* Die komplexe Fourierreihe von f ist gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}(-1)^n}{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right).$$

Beweis: Laut Vorlesung hat die Funktion f die komplexen Fourierkoeffizienten

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\, dx$$

für $n \in \mathbb{Z}$. Daraus erhalten wir direkt

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = 0.$$

Für $n \neq 0$ liefert partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\, dx &= \left[x \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{-\mathrm{i}n}\right]_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{-\mathrm{i}n}\, dx = \frac{\pi(-1)^n - (-\pi)(-1)^n}{-\mathrm{i}n} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{(-\mathrm{i}n)^2}\right]_{x=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2\pi\mathrm{i}(-1)^n}{n} - 0, \end{aligned}$$

also

$$c_n = \mathrm{i}\frac{(-1)^n}{n} \quad \text{für } n \neq 0.$$

Die komplexe Fourierreihe von f lautet also

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}(-1)^n}{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right).$$

Da f stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe die Funktion an allen Stetigkeitsstellen dar, an den Unstetigkeitsstellen $(2n + 1)\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$ konvergiert die Fourierreihe gegen

$$\frac{1}{2}(f(\pi+) + f(\pi-)) = \frac{1}{2}(\pi + (-\pi)) = 0.$$

□

(ii) *Behauptung:* Die komplexe Fourierreihe von f ist gegeben durch

$$1 + \frac{\pi}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{\mathrm{i}(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Beweis: Es gilt $f(x) = 1$ für $x \in (-\pi, 0]$ und $f(x) = 1 + 2x$ für $x \in (0, \pi]$. Damit gilt für die komplexen Fourierkoeffizienten von f

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Für $n = 0$ erhalten wir also

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Für $n \neq 0$ folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} c_n &= 0 + \frac{1}{\pi}\left(\left[x\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{-\mathrm{i}n}\right]_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{-\mathrm{i}n}\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi\frac{(-1)^n}{-\mathrm{i}n} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{(-\mathrm{i}n)^2}\right]_{x=0}^{\pi}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\pi\frac{(-1)^n}{-\mathrm{i}n} - \frac{(-1)^n}{-n^2} + \frac{1}{-n^2}\right) = \frac{\mathrm{i}(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}. \end{aligned}$$

Die komplexe Fourierreihe von f lautet also

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = 1 + \frac{\pi}{2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{\mathrm{i}(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Da f stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe die Funktion an allen Stetigkeitsstellen dar, an den Unstetigkeitsstellen $(2n+1)\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$ konvergiert die Fourierreihe gegen

$$\frac{1}{2}(f(\pi+) + f(\pi-)) = \frac{1}{2}(1 + 2\pi + 1) = 1 + \pi.$$

□

Aufgabe 8:

(i) Es seien $r \in [0, 1)$ und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mithilfe der komplexen Exponentialfunktion:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1 - r\cos(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2}.$$

(ii) Untersuchen Sie die komplexe Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ auf Konvergenz.

(iii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}((1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n)z^n.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8:

(i) *Behauptung:* Für $r \in [0, 1)$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1 - r\cos(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2}$.

Beweis: Für $z := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = r(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))$ gilt $|z| = r < 1$. Also konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ mit Reihenwert $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Zudem gilt $z^n = (r\mathrm{e}^{ix})^n = r^n\mathrm{e}^{inx}$, also $\mathrm{Re}(z^n) = r^n\cos(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos(nx) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}(z^n) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-\bar{z}}{|1-z|^2}\right) = \frac{1 - \mathrm{Re}(z)}{|1-z|^2}.$$

Nun gilt $1 - \mathrm{Re}(z) = 1 - r\cos(x)$. Zudem gilt

$$\begin{aligned} |1-z|^2 = (1 - r\cos(x))^2 + (-r\sin(x))^2 &= 1 - 2r\cos(x) + r^2\cos^2(x) + r^2\sin(x) \\ &= 1 - 2r\cos(x) + r^2. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

(ii) <u>*Behauptung:*</u> Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ konvergiert.

<u>*Beweis:*</u> Wegen $\mathrm{i}^4 = 1$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{i}^{4m-3} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4m-2} = -1, \quad \mathrm{i}^{4m-1} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4m} = 1.$$

Folglich gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{4k} \frac{\mathrm{i}^n}{n} &= \sum_{m=1}^{k} \left(\frac{\mathrm{i}^{4m-3}}{4m-3} + \frac{\mathrm{i}^{4m-2}}{4m-2} + \frac{\mathrm{i}^{4m-1}}{4m-1} + \frac{\mathrm{i}^{4m}}{4m} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{k} \left(\frac{1}{4m} - \frac{1}{4m-2} \right) + \mathrm{i} \sum_{m=1}^{k} \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-1} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{2k} (-1)^m \frac{1}{2m} + \mathrm{i} \sum_{m=1}^{2k} (-1)^{m+1} \frac{1}{2m-1}.\end{aligned}$$

Die letzten beiden Summen konvergieren für $k \to \infty$ nach dem Leibnizkriterium. Bezeichnen wir mit s_k die k-te Partialsumme, so haben wir gezeigt: $(s_{4k})_{k=1}^{\infty}$ konvergiert für $k \to \infty$. Bezeichne mit s den Grenzwert. Zudem gilt für $j \in \{1, 2, 3\}$: $s_{4k+j} = s_{4k} + \sum_{n=4k+1}^{4k+j} \frac{\mathrm{i}^n}{n} \xrightarrow{k\to\infty} s$, denn $\left|\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Somit ist gezeigt, dass (s_k) konvergiert, d.h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ konvergiert. □

(iii) <u>*Behauptung:*</u> Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}((1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n) z^n$ beträgt $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

<u>*Beweis:*</u> Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n = (1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Mit den Polarkoordinatendarstellungen $(1+\mathrm{i}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ und $(1-\mathrm{i}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ folgt

$$a_n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}n\pi}{4}} \right) = 2^{\frac{n}{2}} \cdot 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{1+\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Somit gilt $|a_n| \le 2^{1+\frac{n}{2}}$ und damit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le \sqrt[n]{2^{1+\frac{n}{2}}} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt{2} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{2},$$

also $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \sqrt{2}$. Wegen $|a_{4m}| = 2^{1+2m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt aber auch

$$\sqrt[4m]{|a_{4m}|} = \sqrt[4m]{2^{1+2m}} = \sqrt[4m]{2} \cdot \sqrt{2} \xrightarrow{m\to\infty} \sqrt{2},$$

d.h. es gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{2}$. Also gilt für den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

□