Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

6. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

18. Dezember 2020

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 58 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 21 (K):
Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2-3n} x^n$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^{\frac{n}{2}} x^n$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4+(-1)^n)^{3n}}(x-1)^{3n}$, (iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})x^n$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 21:

(i) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2-3n} x^n$ hat den Konvergenzradius e^3 und konvergiert genau dann, wenn $|x| < \mathrm{e}^3$.

Beweis: Setze $a_n := \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2-3n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{|a_n|} &= \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n-3} = \left(\frac{n+3}{n}\right)^{3-n} = \left[\left(\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)^{n-3}\right]^{-1} \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n-3}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n-3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-3}\right]^{-1} \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^5\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^4\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^{-3}.
\end{aligned}$$

Somit gilt für den Konvergenzradius $\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \mathrm{e}^3$. Es sei nun $x \in \{\pm\mathrm{e}^3\}$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3k]{|a_{3k}x^{3k}|} &= \sqrt[3k]{\left(\frac{3k}{3k+3}\right)^{9k^2-9k}}\,\mathrm{e}^3 = \left(\frac{3k+3}{3k}\right)^3\left[\left(\frac{3k+3}{3k}\right)^{3k}\right]^{-1}\mathrm{e}^3 \\
&= \underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^3}_{\geq 1}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\right)^3}_{\geq 1} \geq 1,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass die Folge $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ monoton wachsend ist und gegen e konvergiert. Also ist (a_nx^n) für $x \in \{\pm\mathrm{e}^3\}$ keine Nullfolge, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ divergiert, womit die Behauptung folgt. □

(ii) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n^{\frac{n}{2}} x^n$ hat den Konvergenzradius 0 und konvergiert daher nur für $x = 0$.

Beweis: Definiere

$$a_n := n^{\frac{n}{2}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}.$$

Da $(\sqrt{n})$ unbeschränkt ist, hat die Potenzreihe den Konvergenzradius 0, sie konvergiert daher nur in $x = 0$. $\square$

(iii) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4+(-1)^n)^{3n}}(x-1)^{3n}$ hat den Konvergenzradius 3 und konvergiert genau dann, wenn $x \in (-2, 4)$.

Beweis: Substituiere $y := (x-1)^3$ und betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ mit $a_n := \frac{1}{(4+(-1)^n)^{3n}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(4+(-1)^n)^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

Somit ist diese Potenzreihe absolut konvergent für $|y| < 27$ und divergent für $|y| > 27$. Durch Rücksubstitution erhalten wir

$$|x-1|^3 = |y| < 27 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-2, 4),$$

d.h. der Konvergenzradius beträgt 3. Zu prüfen sind nun noch die Randpunkte: für $x = -2$ divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4+(-1)^n)^{3n}}(-1)^{3n}3^{3n}$, weil die Folge $(\frac{1}{(4+(-1)^n)^{3n}}(-1)^{3n}3^{3n})$ den Häufungswert -1 hat und somit keine Nullfolge ist. Die Potenzreihe divergiert also in $x = -2$. In $x = 4$ divergiert die Potenzreihe ebenso, da die Folge $(\frac{1}{(4+(-1)^n)^{3n}}3^{3n})$ den Häufungswert 1 besitzt und somit ebenfalls keine Nullfolge sein kann. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

(iv) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})x^n$ hat den Konvergenzradius 1 und konvergiert genau dann, wenn $x \in (-1, 1]$.

Beweis: Es gilt

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \tag{1}$$

Durch geeignetes Abschätzen erhält man mit dem Sandwich-Theorem, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} = 1.$$

Daher ist der Konvergenzradius der Potenzreihe 1. In $x = 1$ gilt: wegen (1) ist $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. Im Fall $x = -1$ divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ nach dem Minorantenkriterium, denn es gilt $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ divergiert. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 22:

(i) Zeigen Sie mithilfe der Additionstheoreme folgende Formeln für $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$,

(b) $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$,

(c) $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2(x) - \sin^2(y)$.

(ii) Entwickeln Sie die durch die folgenden Abbildungsvorschriften definierten Funktionen in Potenzreihen um 0, und bestimmen Sie den Konvergenzradius:

(a) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$, (b) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x-2}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 22:

(i) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) *Behauptung:* Es gilt $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Beweis: Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Die Behauptung folgt direkt aus dem Additionstheorem

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

durch Setzen von $x = y$. $\square$

(b) *Behauptung:* Es gilt $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$.

Beweis: Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Mit dem Additionstheorem

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

folgt

$$\cos(x) = \cos(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}) = \cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}) - \sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$$

und

$$\begin{aligned}\cos(y) = \cos(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}) &= \cos(\frac{x+y}{2})\cos(-\frac{x-y}{2}) - \sin(\frac{x+y}{2})\sin(-\frac{x-y}{2}) \\ &= \cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}) + \sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}).\end{aligned}$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert die Behauptung. $\square$

(c) *Behauptung:* Es gilt $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2(x) - \sin^2(y)$.

Beweis: Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Aus dem Additionstheorem

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

folgt

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(-y) + \sin(-y)\cos(x) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x).$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\sin(x+y)\sin(x-y) &= (\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)) \cdot (\sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)) \\ &= \sin^2(x)\cos^2(y) - \sin^2(y)\cos^2(x) \\ &= \sin^2(x)\cos^2(y) - \sin^2(y)\big(1 - \sin^2(x)\big) \\ &= \sin^2(x)\underbrace{\big(\cos^2(y) + \sin^2(y)\big)}_{=1} - \sin^2(y) \\ &= \sin^2(x) - \sin^2(y).\end{aligned}$$

$\square$

(ii) (a) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, wobei $c_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, besitzt den Konvergenzradius 1 und für alle $x \in (-1, 1)$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{e^x}{1-x}$.

Beweis: Es sei $x \in (-1, 1)$. Da die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ dann absolut konvergieren, folgt mit dem Satz über das Cauchyprodukt (Satz 3.12), dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} x^{n-k}\right)$ konvergiert und es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1-x} &= e^x \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} x^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\end{aligned}$$

wobei $c_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dies zeigt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ größer oder gleich 1 ist. Um zu zeigen, dass der Konvergenzradius gleich 1 ist, reicht es zu zeigen, dass die Potenzreihe in $x = 1$ divergiert, d.h. dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergiert. Es gilt:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \neq 0,$$

also ist (c_n) keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}$ somit divergent. □

(b) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n := -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ hat Konvergenzradius 1 und für alle $x \in (-1, 1)$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{x^2+x-2}$.

Beweis: Es sei $x \in (-1, 1)$. Dann konvergieren die Rgeometrischen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n$ absolut. Mit dem Satz über das Cauchyprodukt (Satz 3.12) erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+x-2} &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k \left(-\frac{x}{2}\right)^{n-k}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\end{aligned}$$

mit $a_n := -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$. Dies zeigt die behauptete Gleichheit sowie, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ größer oder gleich 1 ist. Wir zeigen nun, dass die Reihe für $x = 1$ divergiert. Da $a_n \to -\frac{1}{3}$ für $n \to \infty$, ist (a_n) keine Nullfolge, folglich divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, woraus die Behauptung folgt. □

Aufgabe 23:

(i) Berechnen Sie die q-adische Entwicklung von $\frac{1}{5}$ für $q = 3$ und $q = 4$.

(ii) Es sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 3$ und $0,212121...$ die q-adische Entwicklung einer Zahl $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie von q abhängige Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = \frac{m}{n}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 23:

(i) *Behauptung:* Die q-adische Entwicklung von $\frac{1}{5}$ ist $0,01210121\cdots$ für $q = 3$ und $0,030303\cdots$ für $q = 4$.

Beweis: Wir verwenden die bekannte Rekursion, um die Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ zu bestimmen. Die q-adische Entwicklung von a ist also gegeben durch

$$z_0 = [a], \quad a_0 = a - z_0, \quad z_{n+1} = [a_n q],\ a_{n+1} = a_n 1 - z_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für $a = \frac{1}{5}$ und $q = 3$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
z_0 &= [\frac{1}{5}] = 0, & a_0 &= \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5},\\
z_1 &= [\frac{1}{5} \cdot 3] = [\frac{3}{5}] = 0, & a_1 &= \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5},\\
z_2 &= [\frac{3}{5} \cdot 3] = [\frac{9}{5}] = 1, & a_2 &= \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5},\\
z_3 &= [\frac{4}{5} \cdot 3] = [\frac{12}{5}] = 2, & a_3 &= \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5},\\
z_4 &= [\frac{2}{5} \cdot 3] = [\frac{6}{5}] = 1, & a_4 &= \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5},\\
z_5 &= [\frac{1}{5} \cdot 3] = [\frac{3}{5}] = 0, & a_5 &= \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Wegen $a_5 = a_1$ folgt nun $z_6 = z_2, z_7 = z_3, \cdots$, d.h. es gilt

$$\frac{1}{5} = 0,01210121\cdots \quad (q = 3).$$

Für $a = \frac{1}{5}$ und $q = 4$ hat man

$$\begin{aligned}
z_0 &= [\frac{1}{5}] = 0, & a_0 &= \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5},\\
z_1 &= [\frac{1}{5} \cdot 4] = [\frac{4}{5}] = 0, & a_1 &= \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5},\\
z_2 &= [\frac{4}{5} \cdot 4] = [\frac{16}{5}] = 3, & a_2 &= \frac{16}{5} - 3 = \frac{1}{5},\\
z_3 &= [\frac{1}{5} \cdot 4] = [\frac{4}{5}] = 0, & a_3 &= \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

In diesem Fall gilt also $a_3 = a_1$, sodass sich $z_4 = z_2, z_5 = z_3, \cdots$ ergibt. Damit folgt

$$\frac{1}{5} = 0,030303\cdots \quad (q = 4).$$

□

(ii) *Voraussetzung:* Es sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 3$. Definiere $m := 2q + 1$ und $n = q^2 - 1$ sowie $a := \frac{m}{n}$.
Behauptung: Die Zahl a besitzt die q-adische Entwicklung $0,212121\cdots$.

Beweis: Dass $0,212121\cdots$ die q-adische Entwicklung von a ist, bedeutet definitionsgemäß

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n} \quad \text{mit } z_0 = 0, z_1 = 2, z_2 = 1, z_3 = 2, z_4 = 1, \cdots.$$

Es ist also $z_0 = 0$ und $z_{2k-1} = 2$ sowei $z_{2k} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
a &= z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_{2k-1}}{q^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_{2k}}{q^{2k}} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{q^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2k}} = (2q+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2k}}\\
&= \frac{2q+1}{q^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q^2}\right)^k = \frac{2q+1}{q^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q^2}} = \frac{2q+1}{q^2} \cdot \frac{q^2}{q^2 - 1} = \frac{2q+1}{q^2 - 1},
\end{aligned}$$

d.h. wir können $m = 2q + 1$ und $n = q^2 - 1$ wählen. □

Aufgabe 24 (K):
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren. Der Definitionsbereich sei dabei jeweils die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die der Ausdruck erklärt ist.

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^3-27}$, (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{12}{8-x^3}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x}{x^2-x-6}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$, (f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^r-1}{x-1}$ mit $r \in \mathbb{Q}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 24:

(a) *Behauptung:* Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+2x-15}{x^3-27}$ existiert und ist $\frac{8}{27}$.

Beweis: Es gilt

$$\frac{x^2+2x-15}{x^3-27} = \frac{(x-3)(x+5)}{(x^2+3x+9)(x-3)} = \frac{x+5}{x^2+3x+9}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Damit erhalten wir

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+2x-15}{x^3-27} = \lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x^2+3x+9} = \frac{8}{27}.$$

□

(b) *Behauptung:* Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right)$ existiert und ist $-\frac{1}{4}$.

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $8-x^3 = (2-x)(4+2x+x^2)$. Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) &= \frac{1}{x(2-x)}\left(1 - \frac{12}{4+2x+x^2}\right) = \frac{1}{x(2-x)} \cdot \frac{4+2x+x^2-12}{4+2x+x^2} \\ &= \frac{1}{x(2-x)} \cdot \frac{(x-2)(x+4)}{4+2x+x^2} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{x+4}{4+2x+x^2}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) = \lim_{x\to 2} -\frac{1}{x} \cdot \frac{x+4}{4+2x+x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2+4}{4+2\cdot 2+2^2} = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4}.$$

□

(c) *Behauptung:* Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-x}{x^2-x-6}$ existiert nicht.

Beweis: Es gilt

$$(x^2-x-6) = (x-3)(x+2) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Für die Folge $x_n := 3 + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt $x_n \to 3$ für $n \to \infty$ und

$$\frac{x_n^2 - x_n}{x_n^2 - x_n - 6} = \frac{1}{x_n - 3} \cdot \frac{x_n^2 - x_n}{x_n + 2} = n \cdot \frac{(3+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{5+\frac{1}{n}} \geq n,$$

d.h. die obige Folge divergiert und somit existiert der gesuchte Grenzwert nicht. □

(d) *Behauptung:* Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ existiert und ist 4.

Beweis: Es gilt für $x \neq 0$:

$$\frac{x}{\sqrt{x+4}-2} = \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4} = \sqrt{x+4}+2.$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x+4}+2 = 4.$$

□

(e) *Behauptung:* Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$ existiert und ist $\frac{1}{12}$.

Beweis: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt folgende Gleichheit:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Mit $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$ ergibt sich mit obiger Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x}-2 = a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = \frac{(\sqrt[3]{8+x})^3-2^3}{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+4}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8+0})^2+2\sqrt[3]{8+0}+4} = \frac{1}{12}.$$

□

(f) *Behauptung:* Für $r \in \mathbb{Q}$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^r-1}{x-1}$ und ist r.

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x^n - 1 = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k. \tag{2}$$

Für $r \in \mathbb{Q}$ schreiben wir $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Es sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

1) Es sei $r > 0$, d.h. $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit (2)

$$x^{\frac{p}{q}} - 1 = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p - 1 = \left(x^{\frac{1}{q}} - 1\right)\sum_{k=0}^{p-1} x^{\frac{k}{q}}$$

und

$$x - 1 = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q - 1 = \left(x^{\frac{1}{q}} - 1\right)\sum_{k=0}^{q-1} x^{\frac{k}{q}},$$

also gilt

$$\frac{x^r-1}{x-1} = \frac{\left(x^{\frac{1}{q}}-1\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{p-1} x^{\frac{k}{q}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{q}}-1\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{q-1} x^{\frac{k}{q}}\right)} \overset{x\neq 1}{=} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} x^{\frac{k}{q}}}{\sum_{k=0}^{q-1} x^{\frac{k}{q}}} \xrightarrow{x\to 1} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} 1}{\sum_{k=0}^{q-1} 1} = \frac{p}{q} = r.$$

2) Es sei $r = 0$, dann gilt $\frac{x^0-1}{x-1} = 0 \xrightarrow{x\to 1} 0$.

3) Es sei $r < 0$, d.h. $-p \in \mathbb{N}$. Dann ergibt sich

$$\frac{x^r-1}{x-1} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-r}-1}{x-1} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-r}-1}{\frac{1}{x}-1}\cdot\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-r}-1}{\frac{1}{x}-1}\cdot\frac{1-x}{x(x-1)} = \underbrace{\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-r}-1}{\frac{1}{x}-1}}_{\to -r \text{ (Fall } \mathit{1)})}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{\to -1}$$

$$\xrightarrow{x\to 1} (-r)\cdot(-1) = r.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □