Velislav Slavov 2385786 | Tutorium #13
Tutor: Demir

A1)

i) $x \in \mathbb{R}$ 0,5/2

a) $x \leq 5 + \sqrt{x+7} \Leftrightarrow x-5 \leq \sqrt{x+7}$

$\Rightarrow (x-5)^2 \leq x+7 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \leq x+7$

$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 18 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 9x + 18 \leq 0$

Fallunterscheidung vornehmen! $\Leftrightarrow x(x-2) - 9(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-9) \leq 0$

$x-5<0$ $\Leftrightarrow x=2$ ODER $x=9 \Rightarrow \boxed{2 \leq x \leq 9}$ f $x \in [-7, 9]$

$x-5 \geq 0$

b) $|x+5| \leq 2(4-x)$ 1,5/2

Fall: $|x+5| = x+5$ ✓
$\Rightarrow x+5 \leq 2(4-x)$
$\Rightarrow x+5 \leq 8-2x$
$\Rightarrow 3x \leq 3$
$\Rightarrow x \leq 1$ ✓

Fall: $|x+5| = -(x+5)$ ✓
$\Rightarrow -x-5 \leq 8-2x$
$\Rightarrow x \leq 13$ ✓

Für welche x gilt die Gleichung nun?

ii) 1,5/2

a) $A := \left\{ (-1)^n - \frac{3}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, Sei $a \in A \Rightarrow a = (-1)^n - \frac{3}{n}$

Sei $n \leq 3$

so gilt: Für $n=1$ gilt $\frac{3}{n} = 3$
Für $n=3$ gilt $\frac{3}{n} = 1$
$\Big\} \; 1 \leq \frac{3}{n} \leq 3$

Sei n gerade

so gilt: für $\frac{3}{n} = 1$ gilt $a = 1-1 = 0$
für $\frac{3}{n} = 3$ gilt $a = 1-3 = -2$
$\Big\} \; -2 \leq a \leq 0$

$-2 \leq a \leq 0 \Rightarrow a \in [-2, 0]$

Punktzahl

A1	A4	Σ
5	7,5	12,5

Velislav Slavov 2385786

Sei n ungerade

So gilt: für $\frac{3}{n}=1$ gilt $a=-1-3=-4$

für $\frac{3}{n}=3$ gilt $a=-1-1=-2$

$\Big\}\ -4 \leq a \leq -2$

$-4 \leq a \leq -2 \Rightarrow a \in [-4,-2]$

$\Rightarrow$ Sei $n \leq 3 \Rightarrow a \in [-4,0]$ a

Monotonie und Beschränktheit der Folgen $\left((-1)^{n-1} - \frac{3}{2n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left((-1)^{2n} - \frac{3}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ explizit nachrechnen!

Sei $n > 3$

So gilt: $0 < \frac{3}{n} < 1$

Sei n gerade

So gilt: $a = 1 - \frac{3}{n} \Rightarrow 0 < a < 1$

Sei n ungerade

So gilt: $a = -1 - \frac{3}{n} \Rightarrow -2 < a < -1$

$\Big\}\ -2 < a < 1$

$-2 < a < 1 \Rightarrow a \in (-2,1)$ b

a&b

$\Rightarrow a \in [-4,1) \Rightarrow \overset{\text{inf}}{\cancel{\sup}} A = \overset{\text{min}}{\cancel{\max}} A = -4$ ✓

$\cancel{\inf A \neq \min A} = 1$

sup A

Velislav Slavov 2385786

1,5/2

b) $B := \{-x - \frac{1}{x} : 0 < x \leq 2\}$ Sei $b \in B \Rightarrow b = -(x + \frac{1}{x})$

Sei $1 \leq x \leq 2$

So gilt: für $x = 1$ gilt $b = -2$
für $x = 2$ gilt $b = -2{,}5$ $\Big\}$ $-2{,}5 \leq x \leq -2$ ✓

Warum ist $-x-\frac{1}{x}$ in $[1,2]$ monoton?

$-2{,}5 \leq b \leq -2 \Rightarrow b \in [-2{,}5, -2]$ a

Sei $0 < x < 1$

So gilt: $\frac{1}{x} > 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} > 2 \Rightarrow -(x + \frac{1}{x}) < -2$
$\Rightarrow b < -2$ b

a&b
$\Rightarrow b \in (-\infty, 2] \Rightarrow$ kein ~~...~~ inf B ✓ und kein min B ✓
$\Rightarrow \sup B = \max B = -2$ ✓

A 2) $A, B \subseteq \mathbb{R}$; $A, B \neq \emptyset$; $A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\}$

i) Zu zeigen: A und B nach oben beschränkt
$\Rightarrow A+B$ auch & $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Lass:
$p := \sup A \Rightarrow \forall a \in A : a \leq p$
$p' := \sup B \Rightarrow \forall b \in B : b \leq p'$ $\Big\}$ $\forall a, b : a + b \leq p + p'$

$\Rightarrow A+B$ ist nach oben beschränkt

$p'' := \sup(A+B) \Rightarrow \forall (a+b) \in (A+B) : (a+b) \leq p''$

Lass
$a = p$ & $b = p' \Rightarrow p'' = p + p' \Rightarrow \sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Velislav Slavov 2385786

ii) Zu zeigen: A & $(A+B)$ nach oben beschränkt
$\Rightarrow B$ auch & $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Lass
$p := \sup A \Rightarrow \forall a \in A: a \leq p$
$p'' := \sup(A+B) \Rightarrow \forall (a+b) \in (A+B): (a+b) \leq p''$

Sei $a = p \Rightarrow p + b \leq p'' \Rightarrow b \leq p'' - p \Rightarrow B$ ist nach oben beschränkt

Lass $p' = \sup B = p'' - p \Rightarrow p'' = p + p' \Rightarrow \sup(A+B) = \sup A + \sup B$

A3) $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt & $\inf A > 0$
$B := \{ b \in \mathbb{R} : \frac{1}{b} \in A \}$

Zu zeigen: B nach oben beschränkt & $\sup B = \frac{1}{\inf A}$

Lass $p := \inf A \Rightarrow \forall a \in A: p \leq a$ & $p > 0$

$a \in A \Rightarrow a = \frac{1}{b} \Rightarrow p \leq \frac{1}{b} \Rightarrow b \leq \frac{1}{p} \Rightarrow B$ ist nach oben beschränkt

$\Rightarrow \forall b \in B: b \leq \frac{1}{p} \Rightarrow \sup B = \frac{1}{p} \Rightarrow \sup B = \frac{1}{\inf A}$ (per Definition) $\blacksquare$

Velislav Slavov 2385786

A4) $n \in \mathbb{N}$

i) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 =: A$ 2/2

I.A. lass $n=1$

$\sum_{j=1}^{1} = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 = 1^3 \Rightarrow A(1)$ ist wahr

I.V. lass $A(n)$ wahr sein $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

I.S. $\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 + (n+1)^3 \overset{I.V.}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$

$= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1) \right) =$

$= (n+1)^2 \frac{n^2+4n+4}{4} = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = \frac{1}{4} (n+1)^2 \cdot ((n+1)+1)^2$

$\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr ■

ii) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)\, 2^{n+1} + 2 =: A$ 2/2

I.A. Lass $n=1$

$\sum_{k=1}^{1} = 0 \cdot 2^2 + 2 = 2 = 1 \cdot 2^1 \Rightarrow A(1)$ ist wahr

I.V. Lass $A(n)$ wahr sein $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)\, 2^{n+1} + 2$ $\cancel{j^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2}$

I.S. $\sum_{k=1}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} + (n+1) \cdot 2^{n+1} \overset{I.V.}{=} (n-1)\, 2^{n+1} + 2 + (n+1)\, 2^{n+1}$

$= 2^{n+1} ((n-1) + (n+1)) + 2 = 2^{n+1} \cdot 2n + 2 =$

$= n \cdot 2^{n+2} + 2 = ((n+1)-1) \cdot 2^{(n+1)+1} + 2 \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr

Velislav Slavov 2385786

iii) $n \geq 6$ & $3^n > 2n^3 =: A$

1,5/2

I.A. Lass $n=1$

$3^1 \not> 2 \cdot 1^3$, weil $n < 6 \Rightarrow A(1)$ ist wahr ✓

I.V. $A(n)$ sei wahr $\Rightarrow n \geq 6$ & $3^n > 2n^3$ ✓

I.S.

$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$

$2(n+1)^3 = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2$

da $3^n > 2n^3$ (nach I.V.) $\Rightarrow 3 \cdot 3^n > 6n^3$ ✓

also solange $6n^2 + 6n + 2 \leq 4n^3$ ist $A(n+1)$ wahr ✓

Lass $n=6 \Rightarrow A$ ist wahr (nach I.V.)

Für $A(7)$: Was ist mit allen anderen n?

$$\left.\begin{array}{l} 6n^2 + 6n + 2 = 6 \cdot 49 + 6 \cdot 7 + 2 = 294 + 44 = 338 \\ 4n^3 = 4 \cdot 343 = 1372 \end{array}\right\} A(n+1) \text{ ist wahr}$$

Velislav Slavov 2385786

iv) $\frac{n^3+5n}{6} \in \mathbb{N} =: A$ 2/2

$A := \mathbb{N}$?

I.A. Lass $n=1$

$\frac{n^3+5n}{6} = \frac{1+5}{6} = 1 \Rightarrow A(1)$ ist wahr ✓

I.V. Sei $A(n)$ wahr $\Rightarrow \frac{n^3+5n}{6} \in \mathbb{N}$ ✓

I.S. $A(n+1) = \frac{(n+1)^3+5(n+1)}{6} =$

$= \frac{n^3+3n^2+3n+1+5n+5}{6} =$

$= \frac{n^3+3n^2+\overset{5n+3n}{\cancel{8n}}+6}{6} = \frac{(n^3+5n)+(3n^2+3n+6)}{6} =$

$= \frac{n^3+5n}{6} + \frac{3n^2+3n+6}{6}$

da $\frac{n^3+5n}{6} \in \mathbb{N}$ (nach I.V.) $\Rightarrow$ sobald

$\frac{3n^2+3n+6}{6} \in \mathbb{N}$ ist auch $A(n+1)$ wahr ✓

$A' := \frac{3n^2+3n+6}{6} \in \mathbb{N} = \frac{n^2+n+2}{2}$

I.A. Lass $n=1$

$\frac{n^2+n+2}{2} = \frac{1+1+2}{2} = 2 \Rightarrow A'(1)$ ist wahr

Velislav Slavov 2385786

I.V. Sei $A'(n)$ wahr $\Rightarrow \frac{n^2+n+2}{2} \in \mathbb{N}$

I.S. $A'(n+1)$

$$\frac{(n+1)^2+n+1+2}{2} = \frac{n^2+2n+1+n+3}{2} = \cancel{\ldots}$$

$$= \frac{(n^2+n+2)+(2n+2)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2} + \frac{2n+2}{2}$$

da $\frac{n^2+n+2}{2} \in \mathbb{N}$ (nach I.V.) $\Rightarrow$ solange $\frac{2n+2}{2} \in \mathbb{N}$ ist auch $A'(n+1)$ auch wahr

$\frac{2n+2}{2} = n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow A'(n+1)$ ist wahr

Weil $A'(n+1)$ wahr ist $\Rightarrow A(n+1)$ ist auch wahr ■ ✓