Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

29. Januar 2021

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 102 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 37:

(i) Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{x}$. Berechnen Sie das 3-te Taylorpolynom $T_3 f$ im Entwicklungspunkt 4.

(ii) Zeigen Sie die folgende Abschätzung:

$$\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{für alle } x \in [0,\infty).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 37:

(i) *Voraussetzung:* Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \sqrt{x}$.

Behauptung: Es gilt $T_3 f(x,4) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^2$ für alle $x \in (0,\infty)$.

Beweis: Es gilt $f \in C^\infty((0,\infty))$ und daher berechnen wir für $x \in (0,\infty)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, & f'(4) &= \frac{1}{4}, \\
f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, & f''(4) &= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}^3} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} = -\frac{1}{32}, \\
f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}, & f'''(4) &= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}^5} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{32} = \frac{3}{256}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
T_3 f(x,4) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(4)}{k!}(x-4)^k = \frac{2}{1}(x-4)^0 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2}(x-4)^2 + \frac{3}{256}\cdot\frac{1}{6}(x-4)^3 \\
&= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3.
\end{aligned}$$

□

(ii) *Behauptung:* Für $x \in [0,\infty)$ gilt $\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

Beweis: Wir betrachten die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{1+x}$. Dann ist $f \in C^\infty([0,\infty))$ und für $x \in [0,\infty)$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{\frac{5}{2}}}.$$

Damit erhalten wir

$$T_2 f(x,0) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

Für $x = 0$ gilt in der behaupteten Ungleichung sogar Gleichheit, sei nun also $x > 0$. Dann existiert nach dem Satz von Taylor (Satz 9.20) ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$f(x) = T_2 f(x, 0) + \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3 = T_2 f(x, 0) + \frac{1}{16(1+\xi)^{\frac{5}{2}}} x^3$$

für alle $x \in [0, \infty)$. Wegen $\frac{1}{16(1+\xi)^{\frac{5}{2}}} x^3 \geq 0$ erhalten wir die behauptete Abschätzung

$$\sqrt{1+x} = f(x) \geq T_2 f(x, 0) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

□

Aufgabe 38 (K):

(i) Es sei $f\colon (-2, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \log(x+2)$. Berechnen Sie das 3-te Taylorpolynom $T_3 f$ zu f im Entwicklungspunkt 1 und zeigen Sie, dass gilt:

$$|(T_3 f)(x) - f(x)| < 0.02 \quad (x \in [0, 2]).$$

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und f und f'' seien beschränkt. Beweisen Sie, dass dann auch f' beschränkt ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 38:

(i) *Voraussetzung:* Es sei $f\colon (-2, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \log(x+2)$.

Behauptung: Für das 3-te Taylorpolynom $T_3 f$ im Entwicklungspunkt 1 gilt

$$|(T_3 f)(x) - f(x)| < 0.02 \quad (x \in [0, 2]).$$

Beweis: Es gilt $f \in C^\infty((-2, \infty))$ und daher berechnen wir die ersten drei Ableitungen: es gilt für $x \in (-2, \infty)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x+2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} T_3 f(x, 1) &= \log(3) + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{6}(x-1)^3 \\ &= \log(3) + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{18}(x-1)^2 + \frac{1}{81}(x-1)^3. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Taylor existiert zu $x \in [0, 2]$ ein ξ zwischen x und 1, sodass gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4 = T_3 f(x, 1) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4.$$

Wegen $x \in [0, 2]$ gilt $|x - 1| \leq 1$. Für alle $t > -2$ haben wir weiter $f^{(4)}(t) = \frac{-6}{(t+2)^4}$. Dies liefert wegen $\xi \in [0, 2]$

$$\begin{aligned} |T_3 f(x, 1) - f(x)| &= \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4 \right| = \frac{(x-1)^4}{24} \left| f^{(4)}(\xi) \right| \leq \frac{1}{24} \left| f^{(4)}(\xi) \right| \\ &= \frac{1}{24} \cdot \frac{6}{(\xi+2)^4} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{64} < \frac{1}{50} = 0.02. \end{aligned}$$

□

(ii) <u>*Voraussetzung:*</u> Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und f und f'' seien beschränkt.

<u>*Behauptung:*</u> Dann ist auch f' beschränkt.

<u>*Beweis:*</u> Da f zweimal differenzierbar ist, gilt nach dem Satz von Taylor: für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $\xi = \xi(x) \in (x, x+1)$ mit

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{f''(\xi)}{2}.$$

Daraus folgt

$$|f'(x)| = \left| f(x+1) - f(x) - \frac{f''(\xi)}{2} \right| \leq 2 \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \frac{1}{2} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|\,.$$

Da f und f'' beschränkt sind, existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, sodass gilt:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq C_1 \quad \text{und} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| \leq C_2.$$

Somit erhalten wir schließlich

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2 \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \frac{1}{2} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| \leq 2C_1 + \frac{C_2}{2} < \infty,$$

d.h. f' ist beschränkt. $\square$

Aufgabe 39:

Zeigen Sie mithilfe geeigneter Ober- und Untersummen die Existenz der folgenden Integrale und berechnen Sie mithilfe dieser Ober- und Untersummen den Wert der Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$, (ii) $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}\,dx$, wobei $a > 1$.

Hinweis zu (a): Sie dürfen ohne Beweis $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ verwenden.

Hinweis zu (b): Verwenden Sie die Zerlegung $Z := \{x_0, \cdots, x_n\}$ mit $x_j = a^{\frac{j}{n}}$, $j = 0, \cdots, n$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 39:

(i) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$.

<u>*Beweis:*</u> Wir führen den Beweis durch Betrachten von geeigneten Ober- und Untersummen. Dazu definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0,1]$

$$Z_n := \left\{ x_j := \frac{j}{n} : j \in \{0, \cdots, n\} \right\}$$

sowie für $j \in \{1, \cdots, n\}$ die Teilintervalle $I_j := [x_{j-1}, x_j]$. Es gilt dann $|I_j| = \frac{1}{n}$ für jedes $j \in \{1, \cdots, n\}$ und da die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^3$ auf $[0,1]$ streng monoton wachsend ist, folgt für jedes $j \in \{1, \cdots, n\}$

$$\inf(f(I_j)) = x_{j-1}^3 \quad \text{und} \quad \sup(f(I_j)) = x_j^3.$$

Damit gilt für die zu diesen Zerlegungen gehörenden Ober- und Untersummen

$$\begin{aligned} s_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^n \inf(f(I_j))\,|I_j| = \sum_{j=1}^n x_{j-1}^3 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(j-1)^3}{n^3} = \frac{1}{n^4} \sum_{j=1}^n (j-1)^3 \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{j=0}^{n-1} j^3 = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{4} n^2 (n-1)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} S_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^n \sup(f(I_j))\,|I_j| = \sum_{j=1}^n x_j^3 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{j^3}{n^3} = \frac{1}{n^4}\sum_{j=1}^n j^3 \\ &= \frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}(n+1)^2 n^2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} s_f(Z_n) &\le \sup\{s_f(Z)\colon Z \,\text{Zerlegung von } [0,1]\} = s_f \\ &\le S_f = \inf\{S_f(Z)\colon Z \,\text{Zerlegung von } [0,1]\} \le S_f(Z_n) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt damit

$$\frac{1}{4} = \lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) \le s_f \le S_f \le \lim_{n\to\infty} S_f(Z_n) = \frac{1}{4},$$

d.h. es ist $s_f = S_f$ erfüllt. Somit existiert das Integral $\int_0^1 x^3\,dx$ und es gilt

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}.$$

□

(ii) Behauptung: Für $a > 1$ gilt $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \log(a)$.

Beweis: Wir führen den Beweis durch Betrachten von geeigneten Ober- und Untersummen. Es sei $a > 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Zerlegung des Intervalls $[1, a]$

$$Z_n := \left\{x_j := a^{\frac{j}{n}} : j \in \{0, \cdots, n\}\right\}$$

sowie für $j \in \{1, \cdots, n\}$ die Teilintervalle $I_j := [x_{j-1}, x_j]$. Es gilt dann $|I_j| = a^{\frac{j}{n}} - a^{\frac{j-1}{n}}$ für $j \in \{1, \cdots, n\}$ und da die Funktion $f\colon [1,a] \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{x}$ monoton fallend ist, folgt für jedes $j \in \{1, \cdots, n\}$

$$\inf(f(I_j)) = f(x_j) = a^{-\frac{j}{n}} \quad \text{und} \quad \sup(f(I_j)) = f(x_{j-1}) = a^{-\frac{j-1}{n}}.$$

Hiermit ergibt sich:

$$\begin{aligned} s_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^n \inf(f(I_j))\,|I_j| = \sum_{j=1}^n a^{-\frac{j}{n}}\left(a^{\frac{j}{n}} - a^{\frac{j-1}{n}}\right) = \sum_{j=1}^n \left(1 - a^{-\frac{1}{n}}\right) = n\left(1 - a^{-\frac{1}{n}}\right) \\ &= a^{-\frac{1}{n}} n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \xrightarrow{n\to\infty} \log(a), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass nach den Regeln von de l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{y}} - 1}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to\infty} \frac{-\frac{1}{y^2}\log(a)a^{\frac{1}{y}}}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to\infty} \log(a)a^{\frac{1}{y}} = \log(a).$$

Analog gilt

$$\begin{aligned} S_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^n \sup(f(I_j))\,|I_j| = \sum_{j=1}^n a^{-\frac{j-1}{n}}\left(a^{\frac{j}{n}} - a^{\frac{j-1}{n}}\right) = \sum_{j=1}^n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \\ &= n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \xrightarrow{n\to\infty} \log(a). \end{aligned}$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
s_f(Z_n) &\le \sup\{s_f(Z)\colon Z \,\text{Zerlegung von } [1,a]\} = s_f \\
&\le S_f = \inf\{S_f(Z)\colon Z \,\text{Zerlegung von } [1,a]\} \le S_f(Z_n)
\end{aligned}
$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt damit

$$
\log(a) = \lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) \le s_f \le S_f \le \lim_{n\to\infty} S_f(Z_n) = \log(a),
$$

d.h. es ist $s_f = S_f$ erfüllt. Somit existiert das Integral $\int_1^a \frac{1}{x}\,dx$ und es gilt

$$
\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \log(a).
$$

$\square$

Aufgabe 40 (K):
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C^1([a,b])$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe des 1. Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, indem Sie jeweils eine Stammfunktion ermitteln.

(i) $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$, sofern $f([a,b]) \subseteq (0,\infty)$,

(ii) $\displaystyle\int_a^b f'(x)f(x)\,dx$,

(iii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + 4x\right) \mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}\,dx$,

(iv) $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\tan(\sqrt{x})}{\cos(\sqrt{x})\sqrt{x}}\,dx$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 40:

(i) *Voraussetzung:* Es sei $f([a,b]) \subseteq (0,\infty)$.

Behauptung: Es gilt $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log(f(b)) - \log(f(a))$.

Beweis: Wegen $f \in C^1([a,b])$ ist $f' \in C([a,b])$ und daher die Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \frac{f'(x)}{f(x)}$ stetig als Quotient stetiger Funktionen, also ist g Riemann-integrierbar. Nach der Kettenregel gilt für $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(x) := \log(f(x))$, dass $G' = g$ auf $[a,b]$, d.h. G ist eine Stammfunktion von g auf $[a,b]$. Der erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert also

$$
\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a) = \log(f(b)) - \log(f(a)).
$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\int_a^b f'(x)f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(f(b)^2 - f(a)^2\right)$.

Beweis: Wegen $f \in C([a,b])$ ist die Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := f(x)\cdot f'(x)$ stetig und somit Riemann-integrierbar. Nach der Produktregel gilt für $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(x) := \frac{1}{2}f(x)^2$, dass $G' = g$ auf $[a,b]$, d.h. G ist eine Stammfunktion von g auf $[a,b]$. Der erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert also

$$
\int_a^b f'(x)f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a) = \frac{1}{2}\left(f(b)^2 - f(a)^2\right).
$$

$\square$

(iii) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + 4x\right) \mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}\,dx = 2\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi^2}{16}+1} - 1\right)$.

Beweis: Die Funktion $g\colon [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + 4x\right) \mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}$ ist stetig, also gilt $g \in R([0, \frac{\pi}{4}])$. Wegen der Kettenregel ist nun $G\colon [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(x) := 2\mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}$ eine Stammfunktion von g auf $[0, \frac{\pi}{4}]$, denn es gilt

$$G'(x) = 2\mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}\left(\frac{1}{\cos^2(x)} + 2x\right) = \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + 4x\right)\mathrm{e}^{\tan(x)+x^2} \quad (x \in [0, \frac{\pi}{4}]).$$

Der erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert nun

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + 4x\right)\mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx = G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0)\\ &= 2\mathrm{e}^{\tan(\frac{\pi}{4})+(\frac{\pi}{4})^2} - 2\mathrm{e}^{\tan(0)+0^2} = 2\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi^2}{16}+1} - 1\right).\end{aligned}$$

□

(iv) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\tan(\sqrt{x})}{\cos(\sqrt{x})\sqrt{x}}\,dx = 4 - 2\sqrt{2}$.

Beweis: Die Funktion $g\colon [\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \frac{\tan(\sqrt{x})}{\cos(\sqrt{x})\sqrt{x}}$ ist stetig, also gilt $g \in R([\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}])$. Außerdem gilt für $x \in [\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}]$ die Umformung

$$g(x) = \frac{\tan(\sqrt{x})}{\cos(\sqrt{x})\sqrt{x}} = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})}.$$

Wegen der Kettenregel ist nun $G\colon [\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}] \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(x) := \frac{2}{\cos(\sqrt{x})}$ eine Stammfunktion von g, denn es gilt

$$G'(x) = -\frac{2}{\cos^2(\sqrt{x})} \cdot (-\sin(\sqrt{x})) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = g(x) \quad (x \in [\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}]).$$

Der erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert nun

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\tan(\sqrt{x})}{\cos(\sqrt{x})\sqrt{x}}\,dx &= \int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} g(x)\,dx = G\left(\frac{\pi^2}{9}\right) - G\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{2}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{9}}\right)} - \frac{2}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{16}}\right)}\\ &= \frac{2}{\cos(\frac{\pi}{3})} - \frac{2}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{2}{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

□