Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Sommersemester 2021

21. Mai 2021

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 36 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 17:
Es sei die Menge K gegeben durch

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 \leq 3\}$$

sowie die Funktion $f \colon K \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := x^3 - 3xy^2.$$

Bestimmen Sie Art und Lage sämtlicher Extrema von f.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 17:
Behauptung: f nimmt im Punkt $(\sqrt{3}, 0)$ sein globales Maximum an (mit Wert $3\sqrt{3}$) und im Punkt $(-\sqrt{3}, 0)$ sein globales Minimum (mit Wert $-3\sqrt{3}$).

Beweis: Die Menge K ist beschränkt und abgeschlossen und somit kompakt. Da die Funktion f stetig ist, nimmt f auf K ihr Minimum und Maximum an. Wir untersuchen zunächst, ob f im Inneren von K, d.h. in der offenen Menge $K^\circ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 < 3\}$ ein lokales Extremum besitzt. Notwendigerweise müssen diese Punkte kritische Punkte von f, d.h. Nullstellen von $\operatorname{grad} f$, sein. f ist beliebig oft stetig partiell differenzierbar und wir erhalten für alle $(x, y) \in K$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6xy.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0) \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 = y^2 \ \wedge \ xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2 \ \wedge \ (x = 0 \ \vee \ y = 0) \\ &\Leftrightarrow \quad x = y = 0. \end{aligned}$$

Es gilt zwar $(0, 0) \in K^\circ$, aber f hat in $(0, 0)$ kein lokales Extremum, denn für hinreichend kleines $\delta \neq 0$ gilt $(\delta, \delta) \in K^\circ$ und

$$f(\delta, \delta) = -2\delta^3 \begin{cases} < 0 = f(0, 0), & \text{falls } \delta > 0, \\ > 0 = f(0, 0), & \text{falls } \delta < 0, \end{cases}$$

weshalb es also in jeder noch so kleinen Umgebung von $(0, 0)$ Punkte mit größerem und solche mit kleinerem Funktionswert gibt. Deshalb kann bei $(0, 0)$ kein lokales Extremum vorliegen. Da also f kein Extremum im Inneren von K besitzt, müssen die globalen Extrema auf dem Rand von K, d.h. auf der Menge $\partial K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 = 3\}$, liegen. Weiter gilt

$$\partial K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \text{ und } y^2 = \frac{1}{2}(3 - x^2) \right\}.$$

Es sei nun $(x, y) \in \partial K$. Dann erhalten wir

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 = x^3 - \frac{3x}{2}(3 - x^2) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{9}{2}x.$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$g \colon [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{5}{2}t^3 - \frac{9}{2}t = t\left(\frac{5}{2}t^2 - \frac{9}{2}\right).$$

Es gilt

$$g'(t) = \frac{15}{2}t^2 - \frac{9}{2} = \frac{15}{2}\left(t + \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \cdot \left(t - \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \quad (t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]).$$

Hieraus ergibt sich, dass g auf den Intervallen $\left[-\sqrt{3}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right]$ und $\left[\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{3}\right]$ jeweils streng monoton wachsend ist und auf dem Intervall $\left[-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right]$ streng monoton fallend ist. Daher liegt in $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ ein lokales Maximum vor, für das gilt:

$$g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{5}}\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{9}{2}\right) = 3\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

In $\sqrt{\frac{3}{5}}$ liegt ein lokales Minimum vor mit

$$g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = -g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = -3\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Für das Minimum am Rand, d.h. an der Stelle $-\sqrt{3}$, gilt

$$g\left(-\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}\left(\frac{5}{2} \cdot 3 - \frac{9}{2}\right) = -3\sqrt{3} < -3\sqrt{\frac{3}{5}},$$

woraus folgt, dass g sein globales Minimum nur an der Stelle $-\sqrt{3}$ annimmt mit Wert $-3\sqrt{3}$. Analog folgert man, dass g sein globales Maximum am rechten Rand, d.h. an der Stelle $\sqrt{3}$ mit Wert $3\sqrt{3}$ annimmt. Für alle $(x, y) \in \partial K$ gilt daher

$$-3\sqrt{3} = g(-\sqrt{3}) \le g(x) = f(x, y) \le g(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}.$$

Ist $(x, y) \in \partial K$ mit $f(x, y) = g(x) = 3\sqrt{3}$, so folgt $x = \sqrt{3}$ und damit $y = 0$. Gilt $f(x, y) = g(x) = -3\sqrt{3}$, dann ergibt sich $x = -\sqrt{3}$ und somit ebenfalls $y = 0$. Zusammenfassend stellen wir fest, dass f nur im Punkt $(\sqrt{3}, 0)$ sein globales Maximum annimmt und dieses $3\sqrt{3}$ lautet. Ebenso konstatieren wir, dass f lediglich im Punkt $(-\sqrt{3}, 0)$ sein globales Minimum annimmt und dass dieses den Wert $-3\sqrt{3}$ hat. $\square$

Aufgabe 18 (K):

(i) Die Funktionen $f, g, h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien gegeben durch

$$f(x, y) := (x^2, y^2),\ g(x, y) := (\sin(xy), e^{x+y}),\ h(x, y) := (e^x \cos(y), \sinh(x)).$$

Begründen Sie, dass die Funktionen f, g und h differenzierbar sind und berechnen Sie jeweils deren Ableitung. Ermitteln Sie weiter mithilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen $g \circ f$ und $h \circ g$.

(ii) Es sei $f \colon \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar und positiv homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ die Gleichung $f'(x)x = \alpha f(x)$ erfüllt ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 18:

(i) Behauptung: Es gilt für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(g \circ f)'(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 \cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2x\mathrm{e}^{x^2+y^2} & 2y\mathrm{e}^{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

$$(h \circ g)'(x,y)$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\sin(xy)}\,(y\cos(xy)\cos(\mathrm{e}^{x+y}) - \mathrm{e}^{x+y}\sin(\mathrm{e}^{x+y})) & \mathrm{e}^{\sin(xy)}\,(x\cos(xy)\cos(\mathrm{e}^{x+y}) - \mathrm{e}^{x+y}\sin(\mathrm{e}^{x+y})) \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Alle drei Funktionen sind als Komposition stetig partiell differenzierbarer Funktion wieder stetig partiell differenzierbar und damit differenzierbar. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}, \quad g'(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ \mathrm{e}^{x+y} & \mathrm{e}^{x+y} \end{pmatrix}, \quad h'(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x\cos(y) & -\mathrm{e}^x\sin(y) \\ \cosh(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel folgt nun die Differenzierbarkeit der Kompositionen und es gilt

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x,y) = g'(f(x,y)) \cdot f'(x,y) &= \begin{pmatrix} y^2\cos(x^2y^2) & x^2\cos(x^2y^2) \\ \mathrm{e}^{x^2+y^2} & \mathrm{e}^{x^2+y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2x\mathrm{e}^{x^2+y^2} & 2y\mathrm{e}^{x^2+y^2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und

$$(h \circ g)'(x,y) = h'(g(x,y)) \cdot g'(x,y)$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\sin(xy)}\cos(\mathrm{e}^{x+y}) & -\mathrm{e}^{\sin(xy)}\sin(\mathrm{e}^{x+y}) \\ \cosh(\sin(xy)) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ \mathrm{e}^{x+y} & \mathrm{e}^{x+y} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\sin(xy)}\,(y\cos(xy)\cos(\mathrm{e}^{x+y}) - \mathrm{e}^{x+y}\sin(\mathrm{e}^{x+y})) & \mathrm{e}^{\sin(xy)}\,(x\cos(xy)\cos(\mathrm{e}^{x+y}) - \mathrm{e}^{x+y}\sin(\mathrm{e}^{x+y})) \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

□

(ii) Behauptung: Für alle $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ ist die Gleichung $f'(x)x = \alpha f(x)$ erfüllt.

Beweis: Es sei $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Definiere $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ durch $g(t) := f(tx) = t^\alpha f(x)$. Dann ist g nach der Kettenregel differenzierbar und wir berechnen für $t > 0$ die Ableitung auf folgende zwei Arten: einerseits gilt nach der Kettenregel und der Formel $g(t) = f(tx)$

$$g'(t) = f'(tx)x,$$

andererseits erhält man aus der Formel $g(t) = t^\alpha f(x)$ direkt

$$g'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x).$$

Die Behauptung ergibt sich nun durch Betrachtung von $g'(1)$. □

Aufgabe 19 (K):

(i) Es seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Die Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$F(x,y) := f(h(xy), xg(y,x), y) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist, und stellen Sie die Ableitung F' mithilfe der Kettenregel als Komposition der (partiellen) Ableitungen von f, g und h dar.

(ii) Wir definieren die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x,y,z) := xy + 2x^2,\ g(x,y,z) := (1+3z, x^2+y+z^2, 4zy) \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

Berechnen Sie jeweils $f', (f \circ g)'$ und $(g \circ g \circ g)'$ im Punkt $(0,0,0)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 19:

(i) *Behauptung:* Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

mit

$$\frac{\partial F_i}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(h(xy), xg(y,x), y)h'(xy)y + \frac{\partial f_i}{\partial y}(h(xy), xg(y,x), y)(g(y,x) + x\frac{\partial g}{\partial y}(y,x)),$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(h(xy), xg(y,x), y)h'(xy)x + \frac{\partial f_i}{\partial y}(h(xy), xg(y,x), y)x\frac{\partial g}{\partial x}(y,x) + \frac{\partial f_i}{\partial z}(h(xy), xg(y,x), y)$$

für $i = 1, 2$.

Beweis: Wir definieren $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch $G(x,y) := (h(xy), xg(y,x), y)$. Dann ist G nach der Produkt- und Kettenregel differenzierbar. Für die Komponentenfunktionen $G_1(x,y) := h(xy), G_2(x,y) := xg(y,x)$ und $G_3(x,y) = y$ ergeben sich

$$\frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y) = h'(xy)y, \quad \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y) = h'(xy)x$$
$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y) = g(y,x) + \left(t\frac{d}{dt}g(y,t)\right)|_{t=x} = g(y,x) + x\frac{\partial g}{\partial y}(y,x),$$
$$\frac{\partial G_2}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dt}(xg(t,x))|_{t=y} = x\frac{\partial g}{\partial x}(y,x), \quad \frac{\partial G_3}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial G_3}{\partial y}(x,y) = 1,$$

d.h. es gilt

$$G'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \\ \frac{\partial G_3}{\partial x} & \frac{\partial G_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h'(xy)y & h'(xy)x \\ g(y,x) + x\frac{\partial g}{\partial y}(y,x) & x\frac{\partial g}{\partial x}(y,x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach der Kettenregel ist auch $F = f \circ G$ differenzierbar und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\begin{aligned} F'(x,y) &= f'(G(x,y)) \cdot G'(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(h(xy), xg(y,x), y) \\ \operatorname{grad} f_2(h(xy), xg(y,x), y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h'(xy)y & h'(xy)x \\ g(y,x) + x\frac{\partial g}{\partial y}(y,x) & x\frac{\partial g}{\partial x}(y,x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ausmultipliziert ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

wobei für $i = 1, 2$ gilt:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(h(xy), xg(y,x), y)h'(xy)y + \frac{\partial f_i}{\partial y}(h(xy), xg(y,x), y)(g(y,x) + x\frac{\partial g}{\partial y}(y,x)),$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(h(xy), xg(y,x), y)h'(xy)x + \frac{\partial f_i}{\partial y}(h(xy), xg(y,x), y)x\frac{\partial g}{\partial x}(y,x) + \frac{\partial f_i}{\partial z}(h(xy), xg(y,x), y).$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* Es gilt

$$f'(0,0,0) = (0,0,0), \quad (f \circ g)'(0,0,0) = (0,1,12)$$

und

$$(g \circ g \circ g)'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis: f und g sind als Verkettung von Polynomen beliebig oft differenzierbar. Es gilt für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f'(x,y,z) = (y + 4x, x, 0) \quad \text{und} \quad g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2x & 1 & 2z \\ 0 & 4z & 4y \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt direkt $f'(0,0,0) = (0,0,0)$. Zudem ergeben sich

$$g(0,0,0) = (1,0,0) \quad \text{und} \quad g(g(0,0,0)) = g(1,0,0) = (1,1,0).$$

Damit folgt also $f'(g(0,0,0)) = f'(1,0,0) = (4,1,0)$ sowie

$$g'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g'(g(0,0,0)) = g'(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g'(g(g(0,0,0))) = g'(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel folgt nun

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(0,0,0) &= f'(g(0,0,0)) \cdot g'(0,0,0) = (4,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,1,12), \\
(g \circ g)'(0,0,0) &= g'(g(0,0,0)) \cdot g'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
(g \circ g \circ g)'(0,0,0) &= (g \circ (g \circ g))'(0,0,0) = g'(g(g(0,0,0))) \cdot (g \circ g)'(0,0,0) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 20:
Zeigen Sie, dass es keine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, die injektiv ist.
Hinweis: Beweis durch Widerspruch: Betrachten Sie für geschickt gewähltes $y_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F(x,y) := f(x,y) - f(0,y_0)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 20:
Behauptung: Es gibt keine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die injektiv ist.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch Widerspruch. Angenommen es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die injektiv ist. Wir definieren die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(y) := f(0,y)$. Dann ist g injektiv, denn: Sind $y, z \in \mathbb{R}$ mit $g(y) = g(z)$, so gilt $f(0,y) = f(0,z)$, woraus aus der Injektivität von f direkt $(0,y) = (0,z)$, also $y = z$ folgt. Zudem ist g stetig differenzierbar mit $g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Da g injektiv ist, ist g insbesondere nicht konstant. Deshalb muss es ein $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $g'(y_0) \neq 0$ geben. Wir betrachten nun (mit diesem y_0) die stetig differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) - f(0,y_0)$. Damit gelten $F(0,y_0) = 0$ sowie

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = g'(y_0) \neq 0.$$

Nach 19.4 aus der Vorlesung existieren $\delta, \eta > 0$ und genau eine stetig differenzierbare Funktion $G\colon (-\delta,\delta) \to (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ mit

$$G(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \forall x \in (-\delta,\delta)\colon F(x, G(x)) = 0.$$

Für alle $x \in (-\delta,\delta)$ gilt also $f(x,G(x)) = f(0,y_0)$, was wegen der Injektivität von f bereits $(x,G(x)) = (0,y_0)$ für jedes $x \in (-\delta,\delta)$ impliziert, d.h. $x = 0$ für jedes solche $x \in (-\delta,\delta)$, was ein Widerspruch ist. Folglich war die Annahme falsch und es kann keine stetig differenzierbare, injektive Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geben. $\square$