Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Übungsblatt 12 **12.07.21**

Aufgabe 1 (*Signatur*)

Wir betrachten die Bilinearform

$$\begin{aligned}\beta\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}\\ \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}\right) &\mapsto -x_1(y_1+y_2+y_4) - y_1(x_1+x_2+x_4) + 2(x_2y_3 + x_3y_3 + x_3y_2)\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Signatur und den Rang von β. Ist β entartet?

b) Bestimmen Sie jeweils eine Zerlegung $\mathbb{R}^4 = U_+ \oplus U_- \oplus U_0$ in Untervektorräume $U_+, U_-, U_0 \subseteq \mathbb{R}^4$, sodass $\beta|_{U_+\times U_+}$ positiv definit ist, $\beta|_{U_-\times U_-}$ negativ definit ist, $\beta|_{U_0\times U_0} = 0$ gilt, und außerdem

   i) $\dim(U_+) = 1,\ \dim(U_-) = 1,\ \dim(U_0) = 2$ gilt.

   ii) $\dim(U_+) = 2,\ \dim(U_-) = 0,\ \dim(U_0) = 2$ gilt.

   Hinweis: Wie muss die Fundamentalmatrix $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)$ bezüglich einer Basis B eines der Unterräume aussehen? Können die Unterräume orthogonal zueinander sein?

Aufgabe 2 (*Symmetrien von Quadriken*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\beta\colon V \times V$ eine Bilinearform, $q = q_\beta$ die zugehörige quadratische Form, $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ eine Linearform, $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und

$$M := \{\, x \in V \mid q(x) + 2\varphi(x) + c = 0 \,\}$$

die zugehörige Quadrik.
Wir sagen

- M ist punktsymmetrisch am Punkt $p \in V$, wenn

  $$\forall x \in V : (p + x \in M \iff p - x \in M)$$

  gilt.

- M ist verschiebungssymetrisch in Richtung $v \in V$, wenn

  $$\forall x \in V : (x \in M \iff x + v \in M)$$

  gilt.

- M hat volle Dimension, wenn es keinen affinen Unterraum $A \subsetneq V$ gibt, der $M \subseteq A$ erfüllt.

  Hinweis: Daraus folgt insbesondere $\mathrm{LH}(M) = V$.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gibt Quadriken, die an keinem Punkt punktsymmetrisch sind. (Geben Sie ein Beispiel an und begründen Sie).

b) Falls $\ker(\varphi) \setminus \mathrm{Null}(\beta) \neq \emptyset$ gilt oder q indefinit ist, ist M nicht leer.

   Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes $v \in V$ und zeigen Sie dann, dass es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha v \in M$ gibt.

c) Falls $v \in \mathrm{Null}(\beta) \cap \ker(\varphi)$ gilt, ist M verschiebungssymetrisch in Richtung $v \in V$.

d) Falls M volle Dimension hat und verschiebungssymetrisch in Richtung $v \in V$ ist, gilt $v \in \mathrm{Null}(\beta) \cap \ker(\varphi)$.

e) Falls $\varphi = 0$ gilt und M volle Dimension hat, ist M punktsymmetrisch am Punkt p genau dann, wenn $p \in \mathrm{Null}(\beta)$ gilt.

Abgabe bis Montag, den 19.07.21 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.