Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

11. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Sommersemester 2021

9. Juli 2021

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 82 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 41 (K):

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y'''(x) - y(x) = 0$, (b) $y''(x) + y'(x) - 12y(x) = 4 + 6x^2 - 7x$.

(ii) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y'(x) = Ay(x), \quad y(0) = y_0 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 41:

(i) (a) *Behauptung:* Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir betrachten zunächst die homogene Differentialgleichung. Es gilt

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = (\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$$

Daraus erhalten wir die Nullstellen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ und $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Aus λ_1 erhalten wir die Lösung $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ und da λ_2 komplex ist, ergeben sich die anderen beiden Lösungen durch

$$y_2(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad y_3(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. $\square$

(b) *Behauptung:* Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$y(x) = a\mathrm{e}^{3x} + b\mathrm{e}^{-4x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis: Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 12 = (\lambda + 4)(\lambda - 3),$$

weshalb die beiden Funktionen

$$y_1(x) := \mathrm{e}^{3x} \quad \text{und} \quad y_2(x) := \mathrm{e}^{-4x}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung bilden. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, machen wir den Ansatz $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$ mit $A, B, C \in \mathbb{R}$ (siehe Vorlesung). Damit erhalten wir aus der Differentialgleichung nach einem Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -12A &= 6 \\ 2A - 12B &= -7 \\ 2A + B - 12C &= 4, \end{aligned}$$

dessen Lösung $(A, B, C) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right)$ lautet. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist folglich durch

$$y(x) = a\mathrm{e}^{3x} + b\mathrm{e}^{-4x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. □

(ii) *Behauptung:* Das AWP hat die Lösung

$$y(x) = \begin{pmatrix} -x\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-2x} - x\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Für das charakteristische Polynom der Differentialgleichung gilt

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= -\lambda(-3 - \lambda)(-1 - \lambda) - 1 - 2 + 3 + \lambda - \lambda + 2(-1 - \lambda) \\ &= -\lambda(3 + 4\lambda + \lambda^2) - 2\lambda - 2 = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2. \end{aligned}$$

Durch Ausprobieren findet man heraus, dass $\lambda_1 = -1$ eine Nullstelle von p_A ist. Durch Polynomdivision erhält man

$$p_A(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = -(\lambda + 1)^2(\lambda + 2).$$

und sieht, dass $\lambda_2 = -2$ eine weitere Nullstelle von p ist. Wir erhalten als Eigenräume

$$E_{-2} = \ker(A + 2I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

und

$$E_{-1} = \ker(A + I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Da die Dimension des Eigenraums E_{-1} kleiner ist als die Vielfachheit 2 des Eigenwerts -1, ergänzen wir den Eigenvektor durch $(0, 0, 1)^T$ zu einer Basis des Hauptraums. Die allgemeine Lösung dieser homogenen Differentialgleichung ist somit gegeben durch

$$y(x) = a \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-2x} \\ \mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-x} \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} x\mathrm{e}^{-x} \\ x\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Anfangsbedingung liefert das Gleichungssystem

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

welches die Lösung $(a, b, c) = (1, 0, -1)$ besitzt. Somit lautet die Lösung des AWPs

$$y(x) = \begin{pmatrix} -x\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-2x} - x\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 42:

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y'''(x) - y(x) = (x + 1)\sin(x)$,

(b) $y'''(x) - 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) = -4\cos(x) - 2\sin(x)$.

(ii) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - y(x) = x\mathrm{e}^x, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 42:

(i) (a) *Behauptung:* Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \left(-1 + \frac{1}{2}x\right)\cos(x) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)\sin(x).$$

Beweis: Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet nach A41 (i) (a)

$$y(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = (A_0 + A_1x)\cos(x) + (B_0 + B_1x)\sin(x).$$

Nach der Produktregel gilt

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (A_1 + B_0 + B_1x)\cos(x) + (-A_0 - A_1x + B_1)\sin(x), \\ y_p''(x) &= (-A_0 - A_1x + 2B_1)\cos(x) + (-2A_1 - B_0 - B_1x)\sin(x), \\ y_p'''(x) &= (-3A_1 - B_0 - B_1x)\cos(x) + (A_0 + A_1x - 3B_1)\sin(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$(-3A_1 - B_0 - B_1x - A_0 - A_1x)\cos(x) + (A_0 + A_1x - 3B_1 - B_0 - B_1x)\sin(x) \overset{!}{=} (1 + x)\sin(x)$$

und durch einen Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} -3A_1 - B_0 - A_0 &= 0, \\ -B_1 - A_1 &= 0, \\ A_0 - 3B_1 - B_0 &= 1, \\ A_1 - B_1 &= 1. \end{aligned}$$

Daruas folgt $A_1 = \frac{1}{2}, B_1 = -\frac{1}{2}$ und $A_0 = -1, B_0 = -\frac{1}{2}$. Somit erhalten wir die spezielle Lösung

$$y_p(x) = \left(-1 + \frac{1}{2}x\right)\cos(x) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)\sin(x),$$

woraus die Behauptung folgt. □

(b) <u>*Behauptung:*</u> Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y(x) = a\mathrm{e}^{2x} + b\cos(x) + c\sin(x) + x\sin(x)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

<u>*Beweis:*</u> Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung lautet

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i}),$$

weshalb die Funktionen y_1, y_2, y_3, gegeben durch

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}, \quad y_2(x) = \cos(x), \quad y_3(x) = \sin(x),$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung bilden. Die Inhomogenität hat hier nicht direkt eine der in der Vorlesung betrachteten Formen. Wir definieren deshalb $b_1(x) := -4\cos(x) = -4\mathrm{e}^{0x}\cos(x)$ sowie $b_2(x) := -2\sin(x) = -2\mathrm{e}^{0x}\sin(x)$ und bestimmen für $j \in \{1, 2\}$ mit dem üblichen Ansatz spezielle Lösungen $u_{p,j}$ der inhomogenen Differentialgleichungen

$$y'''(x) - 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) = b_j(x)$$

und setzen anschließend $y_p := y_{p,1} + y_{p,2}$. Da i eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, setzen wir für $j \in \{1, 2\}$ jeweils mit $y_{p,j}(x) = x(\alpha_j \cos(x) + \beta_j \sin(x))$ mit $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ an. Dies führt zu

$$y_{p,1}(x) = x\left(\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{4}{5}\sin(x)\right)$$

und

$$y_{p,2}(x) = x\left(-\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x)\right),$$

woraus sich schließlich

$$y_p(x) = x\sin(x)$$

ergibt. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also durch

$$y_p(x) = a\mathrm{e}^{2x} + b\cos(x) + c\sin(x) + x\sin(x)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ gegeben. □

(ii) <u>*Behauptung:*</u> Das AWP hat die Lösung

$$y(x) = \frac{7}{8}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{x}(2x^2 - 2x + 1).$$

<u>*Beweis:*</u> Wir schreiben die Differentialgleichung in ein System 1.Ordnung um und erhalten mit $u = y$ und $v = y'$ das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ x\mathrm{e}^x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Die Eigenwerte von $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind gegeben durch $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ und für die Eigenräume gilt

$$E_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad \text{und} \quad E_{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

Dies liefert die Fundamentalmatrix

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$$

für $x \in \mathbb{R}$ und

$$Y(x)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^x \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz $\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}(x) = Y(x)c(x)$ mit einer differenzierbaren Funktion $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ führt auf

$$c'(x) = Y(x)^{-1}b(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ -x\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Für die zweite Komponente finden wir mittels partieller Integration eine Stammfunktion: wir wählen also $c(x) = \frac{1}{8}(2x^2, \mathrm{e}^{2x}(1-2x))^T$ und erhalten so

$$\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}(x) = \frac{1}{8}\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 2x^2 - 2x + 1 \\ 2x^2 + 2x - 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) lautet somit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x) = a \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \\ -\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 2x^2 - 2x + 1 \\ 2x^2 + 2x - 1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt ein lineares Gleichungssystem für a und b:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{7}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

welches die Lösung $(a, b) = \left(1, \frac{7}{8}\right)$ besitzt. Somit ergibt sich die Lösung des AWPs (1)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x) = \frac{7}{8} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \\ -\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 2x^2 - 2x + 1 \\ 2x^2 + 2x - 1 \end{pmatrix}.$$

Da $u = y$ gewählt war, erhalte wir für das ursprüngliche AWP die Lösung

$$y(x) = \frac{7}{8}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^x(2x^2 - 2x + 1).$$

$\square$

Aufgabe 43 (K):

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'''(x) - 6y''(x) + 9y'(x) = 2\sin(x).$$

(ii) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - y(x) = x\mathrm{e}^{2x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 43:

(i) *Behauptung:* Die Differentialgleichung hat die allgemeine Lösunge

$$y(x) = a + b\mathrm{e}^{3x} + cx\mathrm{e}^{3x} + \frac{3}{25}\sin(x) - \frac{4}{25}\cos(x)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Beweis: Die zugehörige homogene Gleichung lautet $y'''(x) - 6y''(x) + 9y'(x) = 0$, deren charakteristisches Polynom gegeben ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda(\lambda - 3)^2.$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet daher

$$y_h(x) = a\mathrm{e}^{0x} + b\mathrm{e}^{3x} + cx\mathrm{e}^{3x} = a + b\mathrm{e}^{3x} + cx\mathrm{e}^{3x}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu bestimmen, machen wir den Ansatz $y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$-A\cos(x) + B\sin(x) + 6A\sin(x) + 6B\cos(x) + 9A\cos(x) - 9B\sin(x) = 2\sin(x),$$

was durch Koeffizientenvergleich auf die beiden zu erfüllenden Bedingungen

$$\begin{aligned} B + 6A - 9B &= 2 \\ -A + 6B + 9A &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 3A - 4B &= 1 \\ 8A + 6B &= 0 \end{aligned}$$

führt. Dies führt zu $A = \frac{3}{25}$ und $B = -\frac{4}{25}$. Eine spezielle Lösung lautet somit

$$y_p(x) = \frac{3}{25}\sin(x) - \frac{4}{25}\cos(x).$$

Die Lösungen der Differentialgleichung sind damit gegeben durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = a + b\mathrm{e}^{3x} + cx\mathrm{e}^{3x} + \frac{3}{25}\sin(x) - \frac{4}{25}\cos(x)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. □

(ii) *Behauptung:* Das AWP hat die Lösung

$$y(x) = -\frac{5}{9}\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x} - \frac{4}{9}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{3}x\mathrm{e}^{2x}.$$

Beweis: Die zur Differentialgleichung gehörende homogene Gleichung lautet $y''(x) - y(x) = 0$. Ihr charakteristisches Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1),$$

die Nullstellen sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet damit

$$y_h(x) = a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{x}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wir machen den Ansatz $y_p(x) = (A + Bx)\mathrm{e}^{2x}$, um eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu bestimmen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$4B\mathrm{e}^{2x} + 4A\mathrm{e}^{2x} + 4Bx\mathrm{e}^{2x} - A\mathrm{e}^{2x} - Bx\mathrm{e}^{2x} = x\mathrm{e}^{2x}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erkennt man, dass dies den beiden zu erfüllenden Bedingungen

$$\begin{aligned} 4B - B &= 1 \\ 4B + 4A - A &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 3B &= 1 \\ 3A + 4B &= 0 \end{aligned}$$

entspricht. Wir erhalten $A = -\frac{4}{9}$ und $B = \frac{1}{3}$. Die spezielle Lösung lautet damit

$$y_p(x) = -\frac{4}{9}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{3}x\mathrm{e}^{2x}.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung sind damit gegeben durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{x} - \frac{4}{9}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{3}x\mathrm{e}^{2x}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Deren Ableitung lautet

$$y'(x) = -a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{x} - \frac{8}{9}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x} + \frac{2}{3}x\mathrm{e}^{2x} = -a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{x} - \frac{5}{9}\mathrm{e}^{2x} + \frac{2}{3}x\mathrm{e}^{2x}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ führen auf die beiden Gleichungen

$$a + b - \frac{4}{9} = 0, \quad -a + b - \frac{5}{9} = 1.$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist $a = -\frac{5}{9}$ und $b = 1$. Das AWP hat somit die Lösung

$$y(x) = -\frac{5}{9}\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x} - \frac{4}{9}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{3}x\mathrm{e}^{2x}.$$

□

Aufgabe 44:
In dieser Aufgabe möchten wir die gedämpfte Schwingung eines Federpendels genauer betrachten. Berücksichtigt man neben dem Einfluss der Rückstellkraft ($-Du$, mit der Federkonstanten D) auch die Reibung ($-\mu u'$, für $\mu > 0$), so ergibt sich für die zugehörige Bewegungsgleichung mit Anfangsauslenkung $x_0 \in \mathbb{R}$ und Anfangsgeschwindigkeit 0 das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} mu''(t) = -\mu u'(t) - Du(t), \\ \quad u(0) = x_0, \quad u'(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

wobei m die Masse des Massepunktes bezeichnet. Bestimmen Sie die Lösung von (2) und bestimmen Sie μ so, dass das Pendel nicht über die Ruhelage hinausschwingt. Den Fall für das kleinste μ, für welches dies erfüllt ist, bezeichnet man als aperiodischen Grenzfall, bei allen weiteren solchen μ spricht man vom Kriechfall.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 44:
Behauptung: Für $\mu \geq 2\sqrt{Dm}$ liegt der sogenannte Kriechfall vor, d.h. das Pendel schwingt nicht über die Ruhelage hinaus; für $\mu < 2\sqrt{Dm}$ schwingt das Pendel über die Ruhelage hinaus, wobei der Reibungsparameter entsprechend die Auslenkung dämpft.

Beweis: Umgeschrieben in ein System erster Ordnung erhalten wir für das AWP (2):

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{D}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t), \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Es handelt sich also um ein lineares homogenes System mit konstanten Koeffizienten. Wir bestimmen die Eigenwerte von A. Es gilt

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda\left(\frac{\mu}{m} + \lambda\right) + \frac{D}{m} = \lambda^2 + \frac{\mu}{m}\lambda + \frac{D}{m}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\lambda + \frac{\mu}{2m}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2 - \frac{D}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\lambda + \frac{\mu}{2m}\right| = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \end{aligned}$$

wobei wir $\delta := \frac{\mu}{2m}$ und $\omega := \sqrt{\frac{D}{m}}$ gesetzt haben. Die Eigenwerte hängen nun von δ und ω ab, daher machen wir eine Fallunterscheidung:
Fall 1: $\delta = \omega$ (d.h. $\mu = 2\sqrt{Dm}$): $-\delta$ ist doppelter Eigenwert von A und es gilt

$$\ker(A - \lambda I) = \ker \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ -\delta^2 & -\delta \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\delta \end{pmatrix} \right] \subseteq \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \ker((A - \lambda I)^2).$$

Somit ist

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}(t) := \mathrm{e}^{-\delta t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}(t) := \mathrm{e}^{-\delta t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t(A - \lambda I) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{e}^{-\delta t} \begin{pmatrix} t \\ 1 - \delta t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von (3). Die Anfangsbedingung liefert nun

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -\delta \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit $a = x_0$ und $b = \delta x_0$. Die Lösung von (3) lautet in diesem Fall also

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = x_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \begin{pmatrix} 1 + \delta t \\ -\delta^2 t \end{pmatrix}.$$

Es gilt $(u, v)(t) \to (0, 0)$ für $t \to \infty$ und u wechselt nicht das Vorzeichen, d.h. das Pendel schwingt nicht über die Ruhelage hinaus, es "kriecht“ sozusagen in die Ruhelage. Diesen Fall bezeichnet man als aperiodischen Grenzfall.

Fall 2: $\delta > \omega$ (d.h. $\mu > 2\sqrt{Dm}$). A hat nun die Eigenwerte $\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$ und $\lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$. Es gilt

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2} & 1 \\ -\omega^2 & -\delta^2 + \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2} & 1 \\ -\omega^2 & -\delta^2 - \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \left[\begin{pmatrix} \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \\ -\omega^2 \end{pmatrix} \right], \quad \ker(A - \lambda_2 I) = \left[\begin{pmatrix} \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \\ -\omega^2 \end{pmatrix} \right].$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung erhalten wir für die Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2} & \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \\ -\omega^2 & -\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Invertieren dieser Matrix erhalten wir $a = -\frac{x_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega^2}}$ und $b = \frac{x_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega^2}}$. Somit ist die Lösung von (3) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = \frac{x_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega^2}} \mathrm{e}^{-\delta t} \left(-\mathrm{e}^{-\sqrt{\delta^2 - \omega^2} t} \begin{pmatrix} \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \\ -\omega^2 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{\sqrt{\delta^2 - \omega^2} t} \begin{pmatrix} \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \\ -\omega^2 \end{pmatrix} \right),$$

u setzt sich aus zwei Funktionen zusammen, die beide monoton gegen 0 gehen (die eine ist positiv, die andere negativ), d.h. u schwingt nicht über die Ruhelage hinaus (Kriechfall).

Fall 3: $\delta < \omega$ (d.h. $\mu < 2\sqrt{Dm}$): A hat die komplexen Eigenwerte $\lambda_1 = -\delta - \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ und $\lambda_2 = -\delta + \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$. Es gilt

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} \delta + \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - \delta^2} & 1 \\ -\omega^2 & -\delta + \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - \delta^2} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \left[\begin{pmatrix} \delta - \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - \delta^2} \\ -\omega^2 \end{pmatrix} \right].$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}\delta-\mathrm{i}\sqrt{\omega^2-\delta^2}\\-\omega^2\end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{-\delta t}(\cos(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)-\mathrm{i}\sin(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t))\begin{pmatrix}\delta-\mathrm{i}\sqrt{\omega^2-\delta^2}\\-\omega^2\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{e}^{-\delta t}\begin{pmatrix}\delta\cos(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)-\sqrt{\omega^2-\delta^2}\sin(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)\\-\omega^2\cos(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)\end{pmatrix}\\
&\quad+\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{i}\begin{pmatrix}-\sqrt{\omega^2-\delta^2}\cos(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)-\delta\sin(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)\\\omega^2\sin(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dann bilden $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ mit

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}(t) &= \mathrm{e}^{-\delta t}\begin{pmatrix}\delta\cos(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)-\sqrt{\omega^2-\delta^2}\sin(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)\\-\omega^2\cos(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}(t) &= \mathrm{e}^{-\delta t}\begin{pmatrix}-\sqrt{\omega^2-\delta^2}\cos(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)-\delta\sin(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)\\\omega^2\sin(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem von (3). Die Anfangsbedingung führt auf die Gleichung

$$\begin{pmatrix}x_0\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\delta\\-\omega^2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-\sqrt{\omega^2-\delta^2}\\0\end{pmatrix},$$

mit der Lösung $a = 0$ und $b = -\frac{x_0}{\sqrt{\omega^2-\delta^2}}$. In diesem Fall lautet die Lösung von (3)

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(t) = -\frac{x_0}{\sqrt{\omega^2-\delta^2}}\mathrm{e}^{-\delta t}\begin{pmatrix}-\sqrt{\omega^2-\delta^2}\cos(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)-\delta\sin(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)\\\omega^2\sin(\sqrt{\omega^2-\delta^2}t)\end{pmatrix}.$$

Der Term $\mathrm{e}^{-\delta t}$ sorgt dafür, dass u gegen 0 geht für $t \to \infty$, d.h. das Pendel strebt auch gegen die Ruhelage, aber es schwingt (unendlich oft) über die Ruhelage hinaus (Schwingfall). $\square$