Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 12 **12.07.21**

Aufgabe 1 (*Signatur*)

Wir betrachten die Bilinearform

$$\beta\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) \mapsto -x_1(y_1+y_2+y_4) - y_1(x_1+x_2+x_4) + 2(x_2y_3 + x_3y_3 + x_3y_2)$$

a) Bestimmen Sie die Signatur und den Rang von β. Ist β entartet?

b) Bestimmen Sie jeweils eine Zerlegung $\mathbb{R}^4 = U_+ \oplus U_- \oplus U_0$ in Untervektorräume $U_+, U_-, U_0 \subseteq \mathbb{R}^4$, sodass $\beta|_{U_+\times U_+}$ positiv definit ist, $\beta|_{U_-\times U_-}$ negativ definit ist, $\beta|_{U_0\times U_0} = 0$ gilt, und außerdem

   i) $\dim(U_+) = 1,\ \dim(U_-) = 1,\ \dim(U_0) = 2$ gilt.

   ii) $\dim(U_+) = 2,\ \dim(U_-) = 0,\ \dim(U_0) = 2$ gilt.

   Hinweis: Wie muss die Fundamentalmatrix $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)$ bezüglich einer Basis B eines der Unterräume aussehen? Können die Unterräume orthogonal zueinander sein?

Lösung zu Aufgabe 1

a) Wir lesen die Fundametalmatrix bezüglich der Standardbasis abd:

$$\mathrm{FM}_{\mathsf{E}}(\beta) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir führen simultane Zeilen-und Spaltenoperationen durch, um einen Basiswechsel zu einer

Diagonalform auzuführen:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{array} & \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mid \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mid \sqrt{2} \\ \mid \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \mid \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{array} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

An den Diagonaleinträgen liest man nun ab: Die symmetrische Bilinearform β hat Rang 4 und Signatur 2, und ist nicht entartet.

b) i) Nach einem Blick auf das Vorzeichen der Diagonaleinträge von $\mathrm{FM}_{\mathsf{E}}(\beta)$ wählen wir $U_+ := \mathrm{LH}(e_3)$, $U_- := \mathrm{LH}(e_1)$,$U_0 := \mathrm{LH}(e_2, e_4)$. Damit gilt $\mathbb{R}^4 = U_+ \oplus U_- \oplus U_0$. Wegen $\beta(e_3, e_3) > 0$, $\beta(e_1, e_1) < 0$ und $\beta(e_2, e_2) = \beta(e_2, e_4) = \beta(e_4, e_4) = 0$ sind die Bedingungen der Aufgabenstellung damit erfüllt.

ii) Wir können weiterhin $U_0 := \mathrm{LH}(e_2, e_4)$ wählen (dies entspricht dem Block aus Nullen unten rechts in der folgenden Rechnung) und versuchen durch Basiswechsel in der Fundamentalmatrix einen positiv definiten 2×2-Block oben links zu erzeugen:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ e_1 & e_3 & e_2 & e_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ e_1 - 2e_4 & e_3 & e_2 & e_4 \end{pmatrix}$$

Für die Basis $\mathsf{B} := (e_1 - 2e_4, e_3)$ des Unterraums $U_+ := \mathrm{LH}(e_1 - 2e_4, e_3)$ gilt somit $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta|_{U_+ \times U_+}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $\beta|_{U_+ \times U_+}$ ist damit positiv definit.

Weiterhin wählen wir $U_- := \{0\}$. Damit gilt $\mathbb{R}^4 = U_+ \oplus U_0 = U_+ \oplus U_- \oplus U_0$ und die Bedingungen der Aufgabenstellung sind erfüllt.

Aufgabe 2 (*Symmetrien von Quadriken*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\beta\colon V \times V$ eine Bilinearform, $q = q_\beta$ die zugehörige quadratische Form, $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ eine Linearform, $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und

$$M \coloneqq \{\, x \in V \mid q(x) + 2\varphi(x) + c = 0 \,\}$$

die zugehörige Quadrik.
Wir sagen

- M ist punktsymmetrisch am Punkt $p \in V$, wenn

  $$\forall x \in V : (p + x \in M \iff p - x \in M)$$

  gilt.
- M ist verschiebungssymetrisch in Richtung $v \in V$, wenn

  $$\forall x \in V : (x \in M \iff x + v \in M)$$

  gilt.
- M hat volle Dimension, wenn es keinen affinen Unterraum $A \subsetneq V$ gibt, der $M \subseteq A$ erfüllt.
  Hinweis: Daraus folgt insbesondere $\mathrm{LH}(M) = V$.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gibt Quadriken, die an keinem Punkt punktsymmetrisch sind. (Geben Sie ein Beispiel an und begründen Sie).

b) Falls $\ker(\varphi) \setminus \mathrm{Null}(\beta) \neq \emptyset$ gilt oder q indefinit ist, ist M nicht leer.
Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes $v \in V$ und zeigen Sie dann, dass es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha v \in M$ gibt.

c) Falls $v \in \mathrm{Null}(\beta) \cap \ker(\varphi)$ gilt, ist M verschiebungssymetrisch in Richtung $v \in V$.

d) Falls M volle Dimension hat und verschiebungssymetrisch in Richtung $v \in V$ ist, gilt $v \in \mathrm{Null}(\beta) \cap \ker(\varphi)$.

e) Falls $\varphi = 0$ gilt und M volle Dimension hat, ist M punktsymmetrisch am Punkt p genau dann, wenn $p \in \mathrm{Null}(\beta)$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 2

Zur Erinnerung: Für eine symmetrische Bilinearform β und die zugehörige quadratische Form $q = q_\beta$ gilt die binomische Formel $q(x + y) = q(x) + 2\beta(x, y) + q(y)$.

a) Wir setzen $V = \mathbb{R}^2$, $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2$, $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_2$. Dann ist $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2 = x_1^2 \right\}$ eine nach oben geöffnete Parabel. Nach einer Punktspiegelung erhielte man eine nach unten geöffnete Parabel, daher ist M nicht punktsymmetrisch.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha v \in M &\iff q(\alpha v) + 2\varphi(\alpha v) + c = 0 \\ &\iff \alpha^2 q(v) + 2\alpha\varphi(v) + c = 0 \end{aligned}$$

- Angenommen, es gibt ein $v \in \mathrm{Null}(\beta) \setminus \ker(\varphi)$. Dann ist $q(v) = 0$, $\varphi(v) \neq 0$ und mit $\alpha = -\frac{c}{2\varphi(v)}$ gilt $\alpha v \in M$, also $M \neq \emptyset$.
- Angenommen, q ist indefinit und $c \leq 0$. Dann wählen wir ein $v \in V$ mit $q(v) > 0$. Damit ist die Diskriminante der quadratischen Gleichung $\alpha^2 q(v) + 2\alpha\varphi(v) + c = 0$ durch $4\varphi(v)^2 - 4q(v)c > 0$ gegeben und die Gleichung hat deshalb zwei Lösungen α. Für diese Werte gilt $\alpha v \in M$, also $M \neq \emptyset$.
- Angenommen, q ist indefinit und $c \geq 0$. Dann wählen wir ein $v \in V$ mit $q(v) < 0$ und argumentieren analog zum letzten Fall.

c) Aus $v \in \mathrm{Null}(\beta) \cap \ker(\varphi)$ folgt

$$\begin{aligned} q(x+v) + 2\varphi(x+v) + c &= q(x) + \underbrace{2\beta(x,v) + q(v)}_{=0 \text{ da } v \in \mathrm{Null}(\beta)} + 2\varphi(x) + \underbrace{2\varphi(v)}_{=0 \text{ da } v \in \ker(\varphi)} + c \\ &= q(x) + 2\varphi(x) + c \end{aligned}$$

und damit $x + v \in M \iff x \in M$.

d) Aus $x + v \in M$ für alle $x \in M$ folgt

$$\begin{aligned} q(x+v) + 2\varphi(x+v) + c &= q(x) + 2\varphi(x) + c \\ \implies q(x) + 2\beta(v,x) + q(v) + 2\varphi(x) + 2\varphi(v) + c &= q(x) + 2\varphi(x) + c \\ \implies 2\beta(v,x) &= -q(v) - 2\varphi(v) \end{aligned}$$

für alle $x \in M$. Da der Ausdruck $2\beta(v,x)$ linear in x und die rechte Seite konstant ist, muss dies auch für alle $x \in \mathrm{LH}(M) = V$ gelten. Setzt man $x = 0$, so folgt daraus $-q(v) - 2\varphi(v) = 0$ und daher $\beta(v,x) = 0$ für alle $x \in V$, also $v \in \mathrm{Null}(\beta)$. Daraus folgt auch $q(v) = 0$ und damit $\varphi(v) = 0$, also $v \in \ker(\varphi)$.

e) Angenommen, es gilt $\varphi = 0$. Dann gelten für $p, x \in V$ die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} p + x \in M \quad &\iff q(p+x) + c = 0 \quad &&\iff q(p) + 2\beta(x,p) + q(x) + c = 0, \\ p - x \in M \quad &\iff q(p-x) + c = 0 \quad &&\iff q(p) - 2\beta(x,p) + q(x) + c = 0. \end{aligned}$$

- Für $p \in \mathrm{Null}(\beta)$ gilt $2\beta(x,p) = -2\beta(x,p) \implies \beta(x,p) = 0$, also $p + x \in M \iff p - x \in M$. Daher ist M punktsymmetrisch an p.
- Es sei nun M punktsymmetrisch an p. Für alle $x \in M - p$ gilt $p + x \in M \implies p - x \in M \implies \beta(x,p) = 0$. Da der Ausdruck $\beta(x,p)$ linear in x ist, gilt $\beta(x,p) = 0$ sogar für alle $x \in \mathrm{LH}(M - p)$.

  Wäre nun $\mathrm{LH}(M - p) \neq V$, so wäre M im affinen Unterraum $\mathrm{LH}(M - p) + p \subsetneq V$ enthalten, im Widerspruch zur vollen Dimension. Damit gilt $\beta(x,p) = 0$ für alle $x \in \mathrm{LH}(M - p) = V$ und somit $p \in \mathrm{Null}(\beta)$.