Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Übungsblatt 9 **21.06.21**

Aufgabe 1 (*Eine Bilinearform auf Polynomen*) (*10 Punkte*)

Es sei $V := \mathbb{R}[X] = \mathrm{LH}_{\mathbb{R}}(X^0, X^1, X^2, \ldots)$ der reelle Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Auf V definieren wir nun die folgende Bilinearform:

$$\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \beta(p,q) := \int_{-1}^{1} \frac{t}{2} \cdot p(t) \cdot q(t)\; dt \in \mathbb{R}$$

a) Es sei $k, \ell \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie $\beta(X^k, X^\ell)$ in Abhängigkeit von k und ℓ.
Hinweis: Es empfiehlt sich eine Fallunterscheidung, ob k kongruent ℓ modulo 2 ist oder nicht.

b) Für $N \in \mathbb{N}$ sei $U_N \subseteq V$ der Untervektorraum aller Polynome mit Höchstgrad N und $\beta_N : U_N \times U_N \to \mathbb{R}$ die Einschränkung von β auf U_N. Geben Sie eine Basis B_2 von U_2 und eine Basis B_3 von U_3 an und bestimmen Sie dann die Fundamentalmatrizen

$$\mathrm{FM}_{\mathsf{B}_2}(\beta_2) \text{ und } \mathrm{FM}_{\mathsf{B}_3}(\beta_3).$$

c) Bestimmen Sie $\ker(\beta_2^\vee)$ und $\ker(\beta_3^\vee)$. Untersuchen Sie beide Abbildungen $\beta_2^\vee$ und $\beta_3^\vee$ auf Injektivität und Surjektivität.
Hinweis: Die Notation $\beta^\vee$ für eine Bilinearform β wurde in Lemma 3.1.4 eingeführt.

Aufgabe 2 (*Eine Äquivalenzrelation*) (*10 Punkte*)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren auf der Menge $\mathbb{K}^{n\times n}$ eine Relation $\sim$ wie folgt:

$$A \sim B :\Longleftrightarrow \Big(\exists S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) :\ A = S^\top B S\Big).$$

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. (Äquivalenzrelationen wurden in LA1 definiert.)

b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse der Nullmatrix bezüglich $\sim$.

c) Es sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ und $n = 2$. Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2\times 2}$$

nicht äquivalent bezüglich $\sim$ sind.

d) Es sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und $n = 1$. Überprüfen Sie, welche der folgenden Zahlen (aufgefasst als rationale (1×1)-Matrizen) äquivalent bezüglich $\sim$ sind:

$$1\,; \quad 2\,; \quad 4 \;\in \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{1\times 1}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

Abgabe bis Montag, den 28.06.21 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.