Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 7 **07.06.21**

Aufgabe 1 (*Selbstadjungierte Endomorphismen*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie:

a) Die Menge der selbstadjungierten Endomorphismen von V ist ein Untervektorraum von $\mathrm{End}(V)$.

b) Gilt für zwei selbstadjungierte Endomorphismen φ, $\psi \in \mathrm{End}(V)$ die Gleichung

$$\forall v \in V \colon \langle \varphi(v), v \rangle = \langle \psi(v), v \rangle,$$

dann gilt schon $\varphi = \psi$.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Die Menge der selbstadjungierten Endomorphismen von V ist ein Untervektorraum von $\mathrm{End}(V)$.

Es seien $v, w \in V$.

- Es gilt $\langle 0, w \rangle = 0 = \langle v, 0 \rangle$, und damit ist die Nullabbildung selbstadjungiert.
- Falls $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert ist und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\langle \lambda\varphi(v), w \rangle = \lambda\langle \varphi(v), w \rangle = \lambda\langle v, \varphi(w) \rangle = \langle v, \lambda\varphi(w) \rangle$$

und somit ist auch $\lambda\varphi$ selbstadjungiert.

- Falls $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ gilt, dann gilt

$$\langle (\varphi + \psi)(v), w \rangle = \langle \varphi(v), w \rangle + \langle \psi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle + \langle v, \psi(w) \rangle = \langle v, (\varphi + \psi)(w) \rangle$$

und somit ist auch $\varphi + \psi$ selbstadjungiert.

Damit ist gezeigt, dass die selbstadjungierten Endomorphismen von V einen Untervektorraum von $\mathrm{End}(V)$ bilden.

b) Aus $\langle \varphi(v), v \rangle = \langle \psi(v), v \rangle$ folgt $\langle \varphi(v) - \psi(v), v \rangle = 0$. Wenn nun v ein Eigenvektor von $\varphi - \psi$ zum Eigenwert λ ist, gilt

$$0 = \langle \varphi(v) - \psi(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda\langle v, v \rangle.$$

Der einzige Eigenwert von $\varphi - \psi$ ist also 0.

Aus a) folgt, dass $\varphi - \psi$ selbstadjungiert ist. Da V endlichdimensional ist, gibt es also eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von $\varphi - \psi$ zum Eigenwert 0. Diese Basisvektoren werden von $\varphi - \psi$ alle auf 0 abgebildet; daraus folgt $\varphi - \psi = 0$, also $\varphi = \psi$.

Aufgabe 2 (*Adjungiertheit bezüglich verschiedener Skalarprodukte*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\theta\colon V\to V$ eine lineare Abbildung. Wir definieren außerdem die Abbildung

$$\begin{aligned}\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle\colon V\times V&\to\mathbb{R}\\ (x,y)&\mapsto\langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle:=\langle\theta(x),y\rangle\end{aligned}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussgagen:

a) Die Abbildung $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn θ selbstadjungiert bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist und nur positive reelle Eigenwerte hat.

b) Falls $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ ein Skalarprodukt ist, ist θ auch selbstadjungiert bzgl. $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$.

c) Der Endomorphismus $\psi\colon V\to V$ ist genau dann adjungiert zum Endomorphismus $\varphi\colon V\to V$ bzgl. des Skalarproduktes $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$, wenn $\psi=\theta^{-1}\circ\varphi^*\circ\theta$ gilt.

Hinweis: Die Abbildung φ^* ist bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zu φ adjungiert (nicht bzgl. $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$!). Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $(\varphi^*)^{-1}=(\varphi^{-1})^*$ für alle invertierbaren Endomorphismen φ gilt.

Lösung zu Aufgabe 2

Da V endlichdimensional ist, haben alle linearen Endomorphismen von V eine adjungierte Abbildung bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

a) $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ ist linear im ersten Argument, da für jedes feste $w\in V$ die Abbildungen $\langle\cdot,w\rangle$ und θ linear sind.

   Es gilt
$$\langle\!\langle w,v\rangle\!\rangle=\langle\theta(w),v\rangle=\langle v,\theta(w)\rangle=\langle\theta^*(v),w\rangle.$$

   Damit ist $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ genau dann symmetrisch, wenn $\langle\theta(v),w\rangle=\langle\theta^*(v),w\rangle$ für alle $v,w\in V$ gilt, also genau dann, wenn $\theta^*=\theta$ gilt.

   - Angenommen, $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ ist ein Skalarprodukt. Da $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ symmetrisch ist, muss θ also selbstadjungiert sein. Ist $v\in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, dann gilt
$$0<\langle\!\langle v,v\rangle\!\rangle=\langle\theta(v),v\rangle=\langle\lambda v,v\rangle=\lambda\langle v,v\rangle,$$
     also $\lambda>0$.
   - Angenommen, θ ist selbstadjungiert mit nur positiven Eigenwerten. Damit ist $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ symmetrisch (siehe oben). Es sei $b_1,\dots,b_n$ eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von θ zu den Eigenwerten λ. Jeder Vektor $v\in V$ lässt sich dann als $\sum_{i=1}^n\alpha_ib_i$ schreiben und somit gilt
$$\begin{aligned}\langle\!\langle v,v\rangle\!\rangle&=\left\langle\theta\left(\sum_{i=1}^n\alpha_ib_i\right),\sum_{j=1}^n\alpha_jb_j\right\rangle\\&=\sum_{i,j=1}^n\langle\alpha_i\theta(b_i),\alpha_jb_j\rangle\\&=\sum_{i,j=1}^n\lambda\alpha_i\alpha_j\underbrace{\langle b_i,b_j\rangle}_{=\delta_{ij}}\\&=\sum_{i=1}^n\lambda_i\alpha_i^2\end{aligned}$$

Da alle λ_i positiv sind, ist dies nicht negativ und kann nur dann 0 sein, wenn $\alpha_i = 0$ für alle i gilt, also für $v = 0$. Das bedeutet $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ ist positiv definit.

b) Falls $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ ein Skalarprodukt ist, ist θ nach a) selbstadjungiert bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Damit gilt

$$\langle\!\langle \theta(v), w \rangle\!\rangle = \langle \theta(\theta(v)), w \rangle = \langle \theta(v), \theta(w) \rangle = \langle\!\langle v, \theta(w) \rangle\!\rangle$$

für alle $v, w \in V$, und θ ist daher selbstadjungiert bzgl. $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$.

c) Es gelten die Äquivalenzen

$$\begin{array}{crc}
& \forall v, w \in V: & \langle\!\langle \varphi(v), w \rangle\!\rangle = \langle\!\langle v, \psi(w) \rangle\!\rangle \\
\iff & \forall v, w \in V: & \langle \theta(\varphi(v)), w \rangle = \langle \theta(v), \psi(w) \rangle \\
\iff & \forall v, w \in V: & \langle \theta(\varphi(v)), w \rangle = \langle \psi^*(\theta(v)), w \rangle \\
\iff & \forall v \in V: & \theta(\varphi(v)) = \psi^*(\theta(v)) \\
\iff & & \theta \circ \varphi = \psi^* \circ \theta \\
\iff & & \theta \circ \varphi \circ \theta^{-1} = \psi^* \\
\iff & & (\theta^{-1})^* \circ \varphi^* \circ \theta^* = \psi \\
\iff & & \theta^{-1} \circ \varphi^* \circ \theta = \psi.
\end{array}$$