Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

3. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Sommersemester 2021

7. Mai 2021

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis einschließlich Seite 22 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 9 (K):

(i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^6+y^6}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass in allen Punkten beide partiellen Ableitungen erster Ordnung existieren und berechnen Sie diese. Zeigen Sie zudem, dass f in $(0,0)$ nicht stetig ist.

(ii) Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, 2xy+z, 2xz+y) \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(iii) Begründen Sie, dass es keine differenzierbare Funktion gibt, für die folgendes gilt:

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2xy+z, x^2+y^2+z^2, 2xz+y) \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Hinweis: Satz von Schwarz.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9:

(i) Behauptung: f ist partiell differenzierbar, aber in $(0,0)$ nicht stetig.

Beweis: Nach der Quotientenregel ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^6+y^6) - 6x^7y^2}{(x^6+y^6)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y(x^6+y^6) - 6x^2y^7}{(x^6+y^6)^2}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Es seien nun $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Für $j \in \{1,2\}$ gilt dann

$$\frac{f((0,0)+he_j) - f(0,0)}{h} = \frac{0}{h} = 0 \to 0 \quad (h \to 0),$$

d.h. f ist in $(0,0)$ partiell differenzierbar mit $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Weiter gilt, dass f in $(0,0)$ nicht stetig ist, denn:

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^6}} = \frac{n^2}{2} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

$\square$

(ii) <u>*Behauptung:*</u> Alle differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der gegebenen Eigenschaft sind von der Form

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + xz^2 + yz + C \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

für ein $C \in \mathbb{R}$.

<u>*Beweis:*</u> Aufgrund von Satz 18.2. gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = f'(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, 2xy+z, 2xz+y) \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Diese vektorielle Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 2xy+z, \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 2xz+y
\end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Nach einem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gibt es folglich "Konstanten" $C_1(y,z)$, $C_2(x,z)$ und $C_3(x,y)$ mit

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + xz^2 + C_1(y,z), \\
f(x,y,z) &= xy^2 + yz + C_2(x,z), \\
f(x,y,z) &= xz^2 + yz + C_3(x,y)
\end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Differenzieren der jeweiligen Gleichungen nach den anderen Variablen liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z) &= z, & \frac{\partial C_1}{\partial z}(y,z) &= y, \\
\frac{\partial C_2}{\partial x}(x,z) &= x^2+z^2, & \frac{\partial C_2}{\partial z}(x,z) &= 2xz, \\
\frac{\partial C_3}{\partial x}(x,y) &= x^2+y^2, & \frac{\partial C_3}{\partial y}(x,y) &= 2xy
\end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Daraus erhält man $C_1(y,z) = yz + C$, $C_2(x,z) = \frac{1}{3}x^3 + xz^2 + C$, $C_3(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Insgesamt folgt für f:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + xz^2 + yz + C \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

$\square$

(iii) <u>*Behauptung:*</u> Es gibt keine differenzierbare Funktion mit der gegebenen Eigenschaft.

<u>*Beweis:*</u> Für jede differenzierbare Funktion f mit der Eigenschaft gilt: $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, da die partiellen Ableitungen existieren, stetig und wiederum selbst stetig partiell differenzierbar sind. Nach dem Satz von Schwarz spielt demnach die Reihenfolge der partiellen Differentiation keine Rolle, d.h. es muss gelten $f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Es gilt aber

$$f_{xz}(x,y,z) = 1 \neq 2z = f_{zx}(x,y,z)$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $z \neq \frac{1}{2}$. $\square$

Aufgabe 10:

(i) Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x,y) := f(x+g(y))$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

$$F_x \cdot F_{xy} = F_y \cdot F_{xx}.$$

(ii) Bestimmen Sie alle $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 10:

(i) Voraussetzung: Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x, y) := f(x + g(y))$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Behauptung: Es gilt

$$F_x \cdot F_{xy} = F_y \cdot F_{xx}. \tag{1}$$

Beweis: Aufgrund der Kettenregel ist F zweimal stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= f'(x + g(y)), \\ F_y(x, y) &= f'(x + g(y)) \cdot g'(y), \\ F_{xx}(x, y) &= f''(x + g(y)), \\ F_{xy}(x, y) &= f''(x + g(y)) \cdot g'(y) \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Damit folgt die Behauptung. □

(ii) Behauptung: Die Gleichung

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2). \tag{2}$$

wird genau von folgenden zweimal stetig differenzierbaren Funktion gelöst: $f(x) = x + b$ für ein $b \in \mathbb{R}$ und $f(x) \equiv 0$.

Beweis: Mit $f \in C^2(\mathbb{R})$ setze $g := f$. Dann erfüllt die Funktion F aus (i) die Gleichung (1). Da f die Eigenschaft (2) erfüllt, vereinfacht sich die Gleichung (1) aus (a) wegen $\partial_x \partial_y f(x + f(y)) = \partial_x \partial_y (f(x) + f(y)) = 0$ zu

$$0 = f''(x + f(y)) \cdot f'(y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2). \tag{3}$$

Daraus folgt $f(z) \equiv 0$: Angenommen es gibt $z \in \mathbb{R}$ mit $f''(z) \neq 0$. Wir wählen zu $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $z = x + f(y)$, d.h. $x := z - f(y)$. Mit Hilfe von (3) folgt $f'(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und damit $f''(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Widerspruch zur Annahme. Das heißt $f''(y) \equiv 0$ $(y \in \mathbb{R})$. Daher existieren Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$. Durch Einsetzen in die Funktionalgleichung (2) ergibt sich $a(x+ay+b)+b = ax+ay+2b$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dies ist äquivalent zu $a^2 = a$ und $ab = b$ (Koeffizientenvergleich). Die einzigen Lösungen der Funktionalgleichung sind daher $f(x) = x + b$ (Fall $a = 1$ und $b \in \mathbb{R}$) und $f(x) = 0$ (Fall $a = b = 0$). □

Aufgabe 11 (K):

Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5}{2x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \qquad g(t) = (t, t).$$

(i) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ stetig und partiell differenzierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $(f \circ g)'(0) \neq \operatorname{grad} f(0, 0) \cdot g'(0)$. Warum ist dies kein Widerspruch zur Kettenregel?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 11:

(i) Behauptung: f ist in $(0, 0)$ stetig und partiell differenzierbar.

Beweis: Es sei $((x_n, y_n))$ eine Folge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $(x_n, y_n) \to (0,0)$ $(n \to \infty)$, dann gilt:

$$|f(x_n, y_n)| \leq \frac{|y_n| \left|x_n^4 + y_n^4\right|}{|x_n^4 + y_n^4|} = |y_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0 = f(0,0),$$

somit ist f stetig in $(0,0)$. Darüber hinaus gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1,$$

Somit ist f in $(0,0)$ partiell differenzierbar und der Gradient von f in $(0,0)$ ist gegeben durch

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (0,1).$$

□

(ii) *Behauptung:* Es gilt $(f \circ g)'(0) \neq \operatorname{grad} f(0,0) \cdot g'(0)$.

Beweis: Es gilt

$$(f \circ g)(t) = \begin{cases} \frac{t^5}{3t^4} & t \neq 0, \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$

Dann gilt $(f \circ g)'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{3h^4} - 0}{h} = \frac{1}{3}$, aber $\operatorname{grad} f(0,0) \cdot g'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$. Dies widerspricht der Kettenregel nicht, da f nicht differenzierbar in $(0,0)$ ist, denn für $h = (t,t)$ mit $t \to 0+$ gilt:

$$\frac{f((0,0)+h) - f((0,0)) - \operatorname{grad} f((0,0)) \cdot h}{\|h\|} = \frac{\frac{t^5}{2t^4+t^4} - 0 - t}{\sqrt{t^2+t^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \xrightarrow{t\to 0+} -\frac{\sqrt{2}}{3} \neq 0.$$

□

Aufgabe 12:
Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 y \sin\left(\frac{y}{x}\right), & (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0, \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0. \end{cases}.$$

(i) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen f_x und f_y.

(ii) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 12:

(i) *Behauptung:* Es gilt:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 3x^2 y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - xy^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f_y(x,y) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 y \cos\left(\frac{y}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Beweis: Es sei zunächst $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 y \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x^3 y \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= 3x^2 y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - xy^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right), \\ f_y(x,y) &= x^3 \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x^3 y \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \\ &= x^3 \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 y \cos\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_x(0,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 y \sin\left(\frac{y}{h}\right) = 0, \\ f_y(0,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,y+h) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, \end{aligned}$$

wobei im ersten Limes genutzt wurde, dass der Sinus beschränkt ist. □

(ii) *Behauptung:* f ist ist $(0, 0)$ differenzierbar.

Beweis: Wir zeigen, dass die partiellen Ableitungen in $(0, 0)$ stetig sind. Dann folgt mit Satz 18.3 aus der Vorlesung die Differenzierbarkeit von f in $(0, 0)$. Sei dazu $((x_n, y_n))$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ $(n \to \infty)$. Dann hat jede Teilfolge davon entweder eine weitere Teilfolge mit $x_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ oder eine mit $x_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Im ersten Fall sind die partiellen Ableitungen an jedem Folgenglied 0 und damit konvergieren sie auch gegen die entsprechenden partiellen Ableitungen an der Stelle $(0, 0)$. Im zweiten Fall hat man nach dem Sandwich-Kriterium:

$$\begin{aligned} |f_x(x_n, y_n)| &\leq \left|3x_n^2 y_n \sin\left(\frac{y_n}{x_n}\right) - x_n y_n^2 \cos\left(\frac{y_n}{x_n}\right)\right| \leq \left|3x_n^2 y_n\right| + \left|x_n y_n^2\right| \to 0 \quad (n \to \infty), \\ |f_y(x_n, y_n)| &\leq \left|x_n^3\right| + \left|x_n^2 y_n\right| \to 0 \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

womit die Behauptung folgt. □