Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

12. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

12. Februar 2021

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 123 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 45:

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existiert. Zeigen Sie, dass dann $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ gilt.

(ii) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1+x^2}.$$

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ nicht existiert, wohingegen der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$ sehr wohl existiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 45:

(i) _Voraussetzung:_ Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existiert.

Behauptung: Dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

Beweis: Da das uneigentliche Integral konvergiert gelten

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx$$

und

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx.$$

Es sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Dann existieren ein $a_0 < 0$ und ein $b_0 > 0$ derart, dass

$$\left| \int_0^\infty f(x)\,dx - \int_0^b f(x)\,dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $b \geq b_0$ und

$$\left| \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx - \int_a^0 f(x)\,dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $a \leq a_0$ erfüllt sind. Für alle $t \geq \max\{b_0, |a_0|\}$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\left| \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx - \int_{-t}^t f(x)\,dx \right| &\leq \left| \int_0^\infty f(x)\,dx - \int_0^t f(x)\,dx \right| + \left| \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx - \int_{-t}^0 f(x)\,dx \right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

(ii) *Voraussetzung:* Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{x}{1+x^2}$.

Behauptung: Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existiert nicht, wohingegen der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$ sehr wohl existiert.

Beweis: Für $b > 0$ gilt

$$\int_0^b \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{2}\log(1+b^2) \xrightarrow{b\to\infty} \infty,$$

weshalb das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ nicht existiert. Für $t > 0$ gilt allerdings

$$\int_{-t}^{t} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{x=-t}^{x=t} = \frac{1}{2}(\log(1+t^2) - \log(1+(-1)^2)) = 0 \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

d.h. es gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx = 0$. □

Aufgabe 46 (K):

(i) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2|x|}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,dx,\ s<0, t\in\mathbb{R}.$

(ii) Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren oder divergieren. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\log(1+x)\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\log(x)}{x}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_2^{4} \frac{\sin(x)}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}\,dx,$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx.$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 46:

(i) (a) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2|x|}\,dx$ konvergiert und es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2|x|}\,dx = 1$.

Beweis: Es seien $a < 0 < b$. Dann gilt

$$\int_a^0 \mathrm{e}^{-2|x|}\,dx = \int_a^0 \mathrm{e}^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{x=a}^{x=0} = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{2a}\right) \xrightarrow{a\to-\infty} \frac{1}{2}$$

sowie

$$\int_0^b \mathrm{e}^{-2|x|}\,dx = \int_0^b \mathrm{e}^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2b}\right) \xrightarrow{b\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Also existiert das uneigentliche Integral und es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2|x|}\,dx = 1$. □

(b) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,dx$ konvergiert für alle $s,t\in\mathbb{R}$ mit $s<0$ und es gilt $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{s}{s^2+t^2}$.

Beweis: Es seien $s,t\in\mathbb{R}$ mit $s<0$. Mit zweifacher partieller Integration erhalten wir für jedes $R>0$

$$\begin{aligned}
\int_0^R \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,dx &\overset{(P.I.)}{=} \left[\frac{\mathrm{e}^{sx}}{s}\cos(tx)\right]_{x=0}^{x=R} + \int_0^R \frac{\mathrm{e}^{sx}}{s}t\sin(tx)\,dx \\
&\overset{(P.I.)}{=} \frac{\mathrm{e}^{Rs}}{s}\cos(Rt) - \frac{1}{s} + \left[\frac{\mathrm{e}^{sx}}{s^2}t\sin(tx)\right]_{x=0}^{R} - \int_0^R \frac{\mathrm{e}^{sx}}{s^2}t^2\cos(tx)\,dx \\
&= \frac{\mathrm{e}^{Rs}}{s}\cos(Rt) - \frac{1}{s} + \frac{\mathrm{e}^{Rs}}{s^2}t\sin(Rt) - \frac{t^2}{s^2}\int_0^R \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,dx.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{\mathrm{e}^{Rs}}{s}\cos(Rt)-\frac{1}{s}+\frac{\mathrm{e}^{Rs}}{s^2}t\sin(Rt) \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s},$$

da nach Voraussetzung $s<0$ und damit $\mathrm{e}^{sR}\to 0$ ($R\to\infty$) und *sin* und *cos* beschränkt sind. Somit konvergiert das Integral mit

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{1}{s}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{1}{s}\left(\frac{s^2}{s^2+t^2}\right) = -\frac{s}{s^2+t^2}.$$

□

(ii) (a) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\log(1+x)\,dx$ konvergiert.

Beweis: Für alle $x\geq 0$ gilt

$$1+x\leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x.$$

Da der Logarithmus monoton wächst folgt $\log(1+x)\leq x$, also $|\mathrm{e}^{-x}\log(1+x)|\leq x\mathrm{e}^{-x}$ für alle $x\geq 0$. Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,dx$ konvergiert, denn mit partieller Integration folgt für $R>0$

$$\begin{aligned}\int_0^R x\mathrm{e}^{-x}\,dx &= \left[x(-\mathrm{e}^{-x})\right]_{x=0}^{x=R} - \int_0^R 1(-\mathrm{e}^{-x})\,dx = -R\mathrm{e}^{-R}+\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{x=0}^{x=R}\\ &= -R\mathrm{e}^{-R}-\mathrm{e}^{-R}+1 = -\frac{R}{\mathrm{e}^R}-\mathrm{e}^{-R}+1 \xrightarrow{R\to\infty} 1.\end{aligned}$$

Mit dem Majorantenkriterium konvergiert also auch $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\log(1+x)\,dx$. □

(b) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_2^\infty \frac{\log(x)}{x}\,dx$ divergiert.

Beweis: Für $R>2$ gilt

$$\int_2^R \frac{\log(x)}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log^2(x)\right]_{x=2}^{x=R} = \frac{1}{2}\log^2(R)-\frac{1}{2}\log^2(2) \xrightarrow{R\to\infty} \infty,$$

d.h. das uneigentliche Integral divergiert. □

(c) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_2^4 \frac{\sin(x)}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}\,dx$ konvergiert.

Beweis: Definiere $f(x):=\frac{\sin(x)}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$ für $x\in(2,4]$. Es gilt $|f(x)|\leq\frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$ für alle $x\in(2,4]$. Ferner gilt für $a\in(2,4)$

$$\int_a^4 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \left[3(x-2)^{\frac{1}{3}}\right]_{x=a}^{x=4} = 3\left(2^{\frac{1}{3}}-(a-2)^{\frac{1}{3}}\right) \xrightarrow{a\to 2} 3\cdot 2^{\frac{1}{3}},$$

d.h. das uneigentliche Integral $\int_2^4 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}\,dx$ konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert also auch das uneigentliche Integral $\int_2^4 f(x)\,dx$. □

(d) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ konvergiert.

Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq 1$ gilt $x^2 \geq |x|$ und damit auch $\mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-|x|}$. Ferner gilt für $a < -1$ und $b > 1$

$$\int_a^{-1} \mathrm{e}^{-|x|}\, dx = [\mathrm{e}^x]_{x=a}^{x=-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^a \xrightarrow{a \to -\infty} \frac{1}{\mathrm{e}}$$

sowie

$$\int_1^b \mathrm{e}^{-|x|}\, dx = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{x=1}^{x=b} = -\mathrm{e}^{-b} + \frac{1}{\mathrm{e}} \xrightarrow{b \to \infty} \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergieren daher die uneigentlichen Integrale $\int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$ und $\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$. Darüber hinaus existiert auch das Riemann-Integral $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$ (stetiger Integrand auf kompaktem Intervall). Somit konvergiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$. $\square$

Aufgabe 47:

(i) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $D_1 := \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z + 2 + \mathrm{i}| = |z - \mathrm{i}|\}$, (b) $D_2 := \{z \in \mathbb{C} \colon 1 < \mathrm{Im}(\mathrm{i}z) < 2\}$.

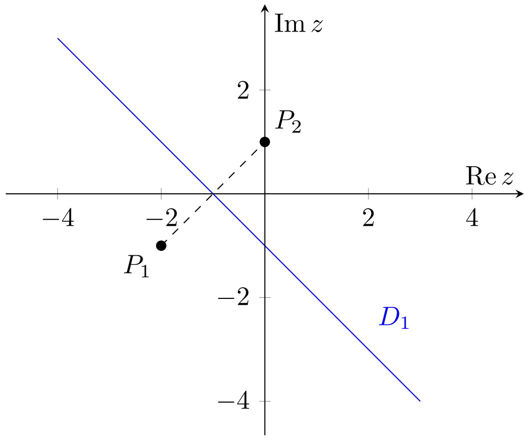
(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ $(z \in \mathbb{C})$ ein Polynom mit $a_j \in \mathbb{R}$ für alle $j \in \{0, \cdots, n\}$ und $a_n \neq 0$. Zeigen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, so ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von p.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 47:

(i) (a) Setze $P_1 := -2 - \mathrm{i}$ und $P_2 := \mathrm{i}$. Dann gilt

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z - P_1| = |z - P_2|\},$$

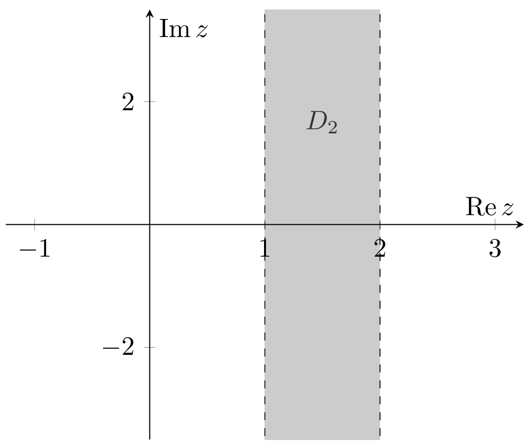
d.h. D_1 enthält all jene Punkte, welche von P_1 und P_2 denselben Abstand haben. Es handelt sich bei D_1 also um eine Gerade in der komplexen Zahlenebene.



(b) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + \mathrm{i}y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ gilt $\mathrm{i}z = -y + \mathrm{i}x$. Damit folgt

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} \colon 1 < \mathrm{Re}(z) < 2\}$$

und die Menge D_2 kann in der komplexen Zahlenebene wie folgt dargestellt werden.



(ii) *Voraussetzung:* Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ $(z \in \mathbb{C})$ ein Polynom mit $a_j \in \mathbb{R}$ für alle $j \in \{0, \cdots, n\}$ und $a_n \neq 0$.

Behauptung: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, so ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von p.

Beweis: Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, d.h. es gelte $p(z) = 0$. Da alle Koeffizienten von p reell sind gilt

$$0 = \overline{0} = \overline{p(z)} = \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j z^j} = \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j z^j} = \sum_{j=0}^{n} a_j \bar{z}^j = p(\bar{z}).$$

$\square$

Aufgabe 48 (K):

(i) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen.

(a) $z_1 := \dfrac{3+5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$, (b) $z_2 := \dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2}$,

(c) $z_3 := (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^{3n}$ für $n \in \mathbb{N}$, (d) $z_4 := \sum_{k=0}^{26} (2\mathrm{i})^k$.

Hinweis zu c): Sie dürfen verwenden, dass $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ gilt.

(ii) Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, welche die gegebene Gleichung lösen.

(a) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$, (b) $\mathrm{e}^z = \sqrt{12} + 2\mathrm{i}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 48:

(i) (a) *Behauptung:* Es gilt $\mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{5}$, $\mathrm{Im}(z_1) = \frac{13}{5}$ und $|z_1| = \frac{\sqrt{170}}{5}$.

Beweis: Es gilt

$$z_1 = \frac{3+5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} \cdot \frac{2+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{6+13\mathrm{i}-5}{4+1} = \frac{1}{5} + \frac{13}{5}\mathrm{i}.$$

Daraus folgt: $\mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{5}$ und $\mathrm{Im}(z_1) = \frac{13}{5}$. Weiter gilt

$$|z_1| = \sqrt{\mathrm{Re}(z_1)^2 + \mathrm{Im}(z_1)^2} = \sqrt{\frac{1+169}{25}} = \frac{\sqrt{170}}{5}.$$

$\square$

(b) *Behauptung:* Es gilt $\mathrm{Re}(z_2) = 0$, $\mathrm{Im}(z_2) = -\frac{1}{2}$ und $|z_2| = \frac{1}{2}$.

Beweis: Es gilt

$$z_2 = \frac{1}{(1+\mathrm{i})^2} = \frac{1}{1+2\mathrm{i}-1} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = -\frac{1}{2}\mathrm{i},$$

woraus sich die Behauptung direkt ablesen lässt. $\square$

(c) *Behauptung:* Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{Re}(z_3) = (-1)^n 2^{3n}$, $\mathrm{Im}(z_3) = 0$ und $|z_3| = 2^{3n}$.

Beweis: Wir bestimmen zunächst die Polarkoordinatendarstellung von $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$: Es gilt $\left|1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2$. Wir bestimmen nun ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$, sodass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \overset{!}{=} 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 2\cos(\varphi) + 2\mathrm{i}\sin(\varphi).$$

Durch Vergleichen der Real- und Imaginärteile sehen wir, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ und $\sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Nach dem Hinweis ist dies für $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ der Fall. Damit folgt (für $n \in \mathbb{N}$)

$$(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{3n} = \left(2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^{3n} = 2^{3n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi n} = 2^{3n}\cos(\pi n) = (-1)^n 2^{3n},$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

(d) *Behauptung:* Es gilt $\mathrm{Re}(z_4) = \frac{1-2^{28}}{5}$, $\mathrm{Im}(z_4) = \frac{2+2^{27}}{5}$ und $|z_4| = \sqrt{\frac{1+2^{54}}{5}}$.

Beweis: Es gilt mit der geometrischen Summenformel

$$z_4 = \sum_{k=0}^{26} (2\mathrm{i})^k = \frac{1-(2\mathrm{i})^{27}}{1-2\mathrm{i}} = \frac{1+2^{27}\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \cdot \frac{1+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = \frac{1-2^{28}}{5} + \frac{2+2^{27}}{5}\mathrm{i},$$

woraus sich der Real- und Imaginärteil ablesen lassen. Weiter gilt

$$\begin{aligned} |z_4| &= \sqrt{\frac{(1-2^{28})^2 + (2+2^{27})^2}{25}} = \sqrt{\frac{1-2^{29}+2^{56}+2^2+2^{29}+2^{54}}{5^2}} = \sqrt{\frac{5+2^{56}+2^{54}}{5^2}} \\ &= \sqrt{\frac{5+5\cdot 2^{54}}{5^2}} = \sqrt{\frac{1+2^{54}}{5}}. \end{aligned}$$

$\square$

(ii) (a) *Behauptung:* Die Lösungsmenge der Gleichung $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$ ist gegeben durch $\{1, -1 \pm 2\mathrm{i}\}$.

Beweis: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + \mathrm{i}y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+\mathrm{i}y)^2 - 2(x-\mathrm{i}y) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} - 2x + 2y\mathrm{i} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 - 2x + 1 + \mathrm{i}(2xy + 2y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \quad \wedge \quad 2xy + 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - y^2 = 0 \quad \wedge \quad y(x+1) = 0. \end{aligned}$$

Letztere ist für $y = 0$ oder für $x = -1$ erfüllt. Im Fall $y = 0$ erhalten wir durch die erste Gleichung

$$(x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Im Fall $x = -1$ gilt

$$(-1-1)^2 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad |y| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2 \vee y = 2.$$

Somit erhalten wir als Lösungen der Gleichung $z = 1$, $z = -1 - 2\mathrm{i}$ und $z = -1 + 2\mathrm{i}$. $\square$

(b) <u>*Behauptung:*</u> Die Lösungsmenge der Gleichung $\mathrm{e}^z = \sqrt{12} + 2\mathrm{i}$ ist gegeben durch $\left\{\log(4) + \frac{\pi}{6}\mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i} \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$.

<u>*Beweis:*</u> Wir schreiben $\sqrt{12} + 2\mathrm{i}$ in Polarkoordinaten um: Es gilt $\left|\sqrt{12} + 2\mathrm{i}\right| = \sqrt{12+4} = 4$. Wir bestimmen $\varphi \in (-\pi, \pi]$, sodass gilt

$$\sqrt{12} + 2\mathrm{i} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 4\cos(\varphi) + 4\mathrm{i}\sin(\varphi),$$

d.h. es gilt $\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin(\varphi) = \frac{1}{2}$. Mit dem Hinweis aus (i) und den Eigenschaften von Sinus und Kosinus folgt $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Es gilt also $\sqrt{12} + 2\mathrm{i} = 4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$. Die Lösungen der Gleichung $\mathrm{e}^z = \sqrt{12} + 2\mathrm{i}$ sind also gerade die Logarithmen von $4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$, d.h.

$$\left\{\log(4) + \frac{\pi}{6}\mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i} \colon k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

□