Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Musterlösung zu Übungsblatt 4 **10.05.21**

Aufgabe 1 (*Gram-Schmidt-Verfahren und Abstände*)

Es seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^5$ mit dem Standardskalarprodukt gegeben.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $U := \mathrm{LH}(v_1, v_2, v_3)$.

b) Bestimmen Sie den Abstand des Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum affinen Unterraum $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + U$.

c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

Lösung zu Aufgabe 1

a)

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \langle w_1, w_1 \rangle = 4$$

$$\langle v_2, w_1 \rangle = 16$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = v_2 - 4w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \langle w_2, w_2 \rangle = 2$$

$$\langle v_3, w_1 \rangle = 16$$

$$\langle v_3, w_2 \rangle = -8$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = v_3 - 4w_1 + 4w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \langle w_3, w_3 \rangle = 4$$

Normieren von w_1, w_2, w_3 ergibt die Orthonormalbasis

$$b_1 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\|w_2\|} w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{\|w_3\|} w_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von U.

b) Es gilt

$$d\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\\-4\end{pmatrix}+U\right) = d\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\\-4\end{pmatrix}, U\right)$$

$$= d\left(v, U\right) = \|v - \pi_U\left(v\right)\|$$

$$\text{mit} \qquad v := \begin{pmatrix}-2\\0\\2\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$$

und nach der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}\pi_U\left(v\right) &= \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 + \langle v, b_3\rangle b_3\\ &= \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}w_1 + \frac{\langle v, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}w_2 + \frac{\langle v, w_3\rangle}{\langle w_3, w_3\rangle}w_3\\ &= 2w_1 - 3w_2 + 0w_3 = \begin{pmatrix}-5\\-1\\0\\2\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

wobei wir $\langle v, b_1\rangle b_1 = \left\langle v, \frac{1}{\|w_i\|}w_i\right\rangle \frac{1}{\|w_i\|}w_i = \frac{\langle v, w_i\rangle}{\|w_i\|^2}w_i$ benutzt haben.

Damit ist der gesuchte Abstand durch

$$\|v - \pi_U(v)\| = \left\|\begin{pmatrix}-5\\-1\\2\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\-1\\0\\2\\2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6}$$

gegeben.

c) Wenn wir die Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ zu einer Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_5\}$ von $\mathbb{R}^5$ fortsetzen, dann bildet b_4, b_5 eine Orthonormalbasis von $U^\perp$. Wir egänzen also zunächst zu einer Basis $\{b_1, b_2, b_3, v_4, v_5\}$ und orthonormieren mit dem Gram-Schmidt-Verfahren. Man kann sich hier Rechenaufwand sparen, indem man $v_4 := v - \pi_U(v)$ und $v_5 := e_3$ setzt, da diese Vektoren schon orthogonal zu U sind. Damit gilt

$$w_4 = v_4 \underbrace{-\frac{\langle v_4, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}w_1 - \frac{\langle v_4, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}w_2 - \frac{\langle v_4, w_3\rangle}{\langle w_3, w_3\rangle}w_3}_{0} = v_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$w_5 = v_5 \underbrace{-\frac{\langle v_5, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}w_1 - \frac{\langle v_5, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}w_2 - \frac{\langle v_5, w_3\rangle}{\langle w_3, w_3\rangle}w_3}_{0} - \frac{\langle v_5, w_4\rangle}{\langle w_4, w_4\rangle}w_4 = v_5 - \frac{2}{6}w_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

und die normierten Vektoren bilden die Orthonormalbasis

$$b_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

von $U^\perp$.

Aufgabe 2 (*Projektionen und Orthogonalprojektionen*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der davon induzierten Norm $\| \cdot \|$.
Außerdem sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir nennen einen Endomorphismus $\varphi \colon V \to V$

- *Projektion*, falls $\varphi^2 = \varphi$ gilt.
- *Orthogonalprojektion* auf U, falls $\varphi(v) \in U$ und $\|v - \varphi(v)\| = d(v, U)$ für alle $v \in V$ gilt.
- *nichtexpandierend*, falls $\|\varphi(v)\| \leq \|v\|$ für alle $v \in V$ gilt.

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Falls φ eine Projektion ist, so ist auch $\mathrm{id} - \varphi$ eine Projektion und es gelten die Aussagen

$$\ker(\varphi) = \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - \varphi), \quad \mathrm{Bild}(\varphi) = \ker(\mathrm{id} - \varphi), \quad V = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi).$$

b) Falls φ eine Orthogonalprojektion auf U ist, dann ist φ auch eine Projektion und es gilt $U = \mathrm{Bild}(\varphi)$.

c) Eine Abbildung φ ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn φ eine Projektion mit $\ker(\varphi) = \mathrm{Bild}(\varphi)^\perp$ ist.

d) Falls φ eine Orthogonalprojektion ist, ist φ nichtexpandierend.
Hinweis: Satz des Pythargoras.

e) *Bonus:* Falls φ eine nichtexpandierende Projektion ist, ist φ eine Orthogonalprojektion.
Hinweis: Zeigen Sie $\ker(\varphi)^\perp \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi)$. (*+2 Bonuspunkte*)

Lösung zu Aufgabe 2

a) Wegen

$$(\mathrm{id} - \varphi)^2 = \mathrm{id}^2 - 2\varphi + \varphi^2 = \mathrm{id} - \varphi$$

ist $(\mathrm{id} - \varphi)$ eine Projektion. Wir zeigen die Mengengleichheiten:

$$
\begin{aligned}
v \in \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - \varphi) &\Longrightarrow \exists w \in V : v = (\mathrm{id} - \varphi)(w) \\
&\Longrightarrow \varphi(v) = \varphi(w - \varphi(w)) = \varphi(w) - \varphi^2(w) = 0 \\
&\Longrightarrow v \in \ker(\varphi) \\
\Longrightarrow \ \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - \varphi) \subseteq \ker(\varphi) & \\
v \in \ker(\varphi) &\Longrightarrow 0 = \varphi(v) \\
&\Longrightarrow (\mathrm{id} - \varphi)(v) = v - \varphi(v) = v \\
&\Longrightarrow v \in \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - \varphi) \\
\Longrightarrow \ \ker(\varphi) \subseteq \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - \varphi) & \\
v \in \mathrm{Bild}(\varphi) &\Longrightarrow \exists w \in V : v = \varphi(w) \\
&\Longrightarrow (\mathrm{id} - \varphi)(v) = v - \varphi(v) = \varphi(w) - \varphi^2(w) = 0 \\
&\Longrightarrow v \in \ker(\mathrm{id} - \varphi) \\
\Longrightarrow \ \mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq \ker(\mathrm{id} - \varphi) & \\
v \in \ker(\mathrm{id} - \varphi) &\Longrightarrow 0 = (\mathrm{id} - \varphi)(v) = v - \varphi(v) \\
&\Longrightarrow \varphi(v) = v \\
&\Longrightarrow v \in \mathrm{Bild}(\varphi) \\
\Longrightarrow \ \ker(\mathrm{id} - \varphi) \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi) &
\end{aligned}
$$

Außerdem gilt

$$
\begin{aligned}
v \in V \qquad &\Longrightarrow v = v - \varphi(v) + \varphi(v) = (\mathrm{id} - \varphi)(v) + \varphi(v) \\
&\Longrightarrow v \in \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - \varphi) + \mathrm{Bild}(\varphi(v)) = \ker(\varphi) + \mathrm{Bild}(\varphi(v)) \\
v \in \ker(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi(v)) &\Longrightarrow v \in \ker(\varphi) \cap \ker(\mathrm{id} - \varphi(v)) \\
&\Longrightarrow v = (\mathrm{id} - \varphi)(v) + \varphi(v) = 0
\end{aligned}
$$

was zeigt, dass $V = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi(v))$ eine direkte Summe ist.

b) Aus der Definition der Orthogonalprojektion folgt direkt $\mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq U$. Für alle $u \in U$ gilt andererseits $\|u - \varphi(u)\| = d(u, U) = 0$, also $\varphi(u) = u$. Damit ist auch $U \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi)$, insgesamt also $U = \mathrm{Bild}(\varphi)$.

   Für $u := \varphi(v)$ folgt daraus direkt $\varphi(\varphi(v)) = \varphi(v)$ für alle $v \in V$, also ist φ eine Projektion.

c)
- Es sei φ die Orthogonalprojektion auf U. Nach b) ist φ dann eine Projektion. Der Punkt $\varphi(v)$ ist der Punkt aus U mit minimalem Abstand zu v. Nach Proposition 1.4.4. muss also $\langle v - \varphi(v), u\rangle$ für alle $v \in V$ und $u \in U$ gelten. Insbesondere sind also alle Vektoren aus $\mathrm{Bild}(\mathrm{id} - \varphi) = \ker(\varphi)$ zu allen Vektoren aus $U = \mathrm{Bild}(\varphi)$ orthogonal. Daraus folgt $\ker(\varphi) \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi)^{\perp}$. Außerdem gilt $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)^{\perp})$, woraus dann $\ker(\varphi) = \mathrm{Bild}(\varphi)^{\perp}$ folgt.
- Es sei nun φ eine Projektion mit $\ker(\varphi) = \mathrm{Bild}(\varphi)^{\perp}$. Da φ eine Projektion ist, gilt $\ker(\varphi) = \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - \varphi)$. Damit sind alle Vektoren aus $\mathrm{Bild}(\mathrm{id} - \varphi)$ orthogonal zu allen Vektoren aus $\mathrm{Bild}(\varphi)$. Damit gilt $\langle v - \varphi(v), u$ für alle Vektoren $v \in V, u \in \mathrm{Bild}(\varphi)$. Gemäß Proposition 1.4.4. ist dann $\varphi(v)$ der Punkt aus $\mathrm{Bild}(\varphi)$ mit minimalem Abstand zu v, also ist φ die Orthogonalprojektion auf $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

d) Es sei φ die Orthogonalprojektion auf U. Für jeden Vektor $v \in V$ gilt $\varphi(v) \in U$, also sind

$v - \varphi(v)$ und $\varphi(v)$ nach c) orthogonal zueinander. Nach Satz des Pythargoras gilt also $\|v - \varphi(v)\|^2 + \|\varphi(v)\|^2 = \|(v - \varphi(v)) + \varphi(v)\|^2 = \|v\|^2$. Daraus folgt direkt $\|\varphi(v)\| \leq \|v\|$.

e) Es sei φ eine nichtexpandierende Projektion. Es sei $v \in \ker(\varphi)^\perp = \text{Bild}(\text{id} - \varphi)^\perp$. Damit ist insbesondere $v - \varphi(v)$ und v orthogonal zueinander. Nach Satz des Pythargoras gilt also $\|v - \varphi(v)\|^2 + \|v\|^2 = \|(v - \varphi(v)) + v\|^2 = \|-\varphi(v)\|^2 \leq \|v\|$. Daraus folgt dann $\|v - \varphi(v)\|^2 \leq 0$, also $v = \varphi(v)$. Damit ist $v \in \text{Bild}(\varphi)$.

   Insgesamt folgt also $\ker(\varphi)^\perp \subseteq \text{Bild}(\varphi)$, was aus Dimensionsgründen (siehe auch die Argumentation in c) äquivalent zu $\ker(\varphi) = \text{Bild}(\varphi)^\perp$ ist. Somit ist φ also eine Orthogonalprojektion.