A 29 i) $D = [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$

Behauptung: f ist glm stetig

Beweis:

Seien $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon^2$ und $x, y \in [0, \infty)$ mit $|x-y| < \delta$

o.B.d.A. $x \leq y \iff |x-y| = |y-x| = y-x < \delta$

$0 \leq x \leq y < x+\delta$

$y < x+\delta \iff y < x+\varepsilon^2 \iff y < x + 2\sqrt{x}\,\varepsilon + \varepsilon^2$

$\iff y < (\sqrt{x}+\varepsilon)^2 \iff \sqrt{y} < \sqrt{x}+\varepsilon \iff \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$

Da $x \leq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$ ∎

ii) $D = (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Behauptung: f ist nicht glm stetig

Definiere $(x_n) := \frac{1}{n^2}$ und $(y_n) := \frac{1}{4n^2}$

Dann gilt: $x_n - y_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4n^2} = \frac{3}{4n^2} \to 0$

$f(x_n) - f(y_n) = n - 2n = -n \not\to 0$

$\Rightarrow$ f ist nicht glm stetig ∎

iii) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Behauptung: f ist nicht glm stetig