Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

4. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2020/21

4. Dezember 2020

Auf diesem Übungsblatt wird der Vorlesungsstoff bis Seite 35 des Vorlesungsskripts behandelt.

Aufgabe 13 (K):
Bestimmen Sie für die Folgen (a_n) jeweils die Menge aller Häufungswerte und geben Sie $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ an:

(i) $a_n := (3+(-1)^n)\,(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

(ii) $a_n := \left(\frac{n+2(-1)^{n-1}}{n}\right)^n$,

(iii) $a_n := \begin{cases} 3+\frac{2-n}{n}, & n=3k-2 \quad (k\in\mathbb{N}) \\ 3+\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n=3k-1 \quad (k\in\mathbb{N}) \\ 3+\sqrt[n+2]{8}, & n=3k \quad (k\in\mathbb{N}), \end{cases}$

(iv) $a_n := 8^n\left(8+\frac{12}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)^{-n}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 13:

(i) *Behauptung:* Es gilt: $H(a_n)=\{-4,-2,2,4\}$ und somit $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 4$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -4$.

Beweis: Wir betrachten die Teilfolgen (a_{4k}), (a_{4k-1}), (a_{4k-2}) und (a_{4k-3}) $(k\in\mathbb{N})$. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_{4k} &= (3+(-1)^{4k})(-1)^{\frac{4k(4k+1)}{2}} = 4\cdot 1 \xrightarrow{k\to\infty} 4, \\ a_{4k-1} &= (3+(-1)^{4k-1})(-1)^{\frac{(4k-1)(4k)}{2}} = 2\cdot 1 \xrightarrow{k\to\infty} 2, \\ a_{4k-2} &= (3+(-1)^{4k-2})(-1)^{\frac{(4k-2)(4k-1)}{2}} = 4\cdot(-1) \xrightarrow{k\to\infty} -4, \\ a_{4k-3} &= (3+(-1)^{4k-3})(-1)^{\frac{(4k-3)(4k-2)}{2}} = 2\cdot(-1) \xrightarrow{k\to\infty} -2. \end{aligned}$$

Da alle Folgenglieder von (a_n) in einer der drei Teilfolgen enthalten sind, hat (a_n) keine weiteren Häufungswerte und es gilt $H(a_n)=\{-4,-2,2,4\}$. Nach Definition gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -4$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 4$. □

(ii) *Behauptung:* Es gilt: $H(a_n)=\{\frac{1}{\mathrm{e}^2},\mathrm{e}^2\}$ und somit $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^2$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

Beweis: Für $n\in\mathbb{N}$ gilt $a_n = \left(1+\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\right)^n$. Wir betrachten die Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k-1}). Es gilt:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \left(1+\frac{2(-1)^{2k-1}}{2k}\right)^{2k} = \left(1-\frac{2}{2k}\right)^{2k} = \left(1-\frac{1}{k}\right)^{2k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^2}, \\ a_{2k-1} &= \left(1+\frac{2(-1)^{2k-2}}{2k-1}\right)^{2k-1} = \left(1+\frac{2}{2k-1}\right)^{2k-1} \xrightarrow{k\to\infty} \mathrm{e}^2. \end{aligned}$$

Da alle Folgenglieder von (a_n) in einer der drei Teilfolgen enthalten sind, hat (a_n) keine weiteren Häufungswerte und es gilt $H(a_n)=\{\frac{1}{\mathrm{e}^2},\mathrm{e}^2\}$. Nach Definition gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^2$.

Bemerkung: Es gilt für $k \geq 2$:

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^k = \left(\frac{k-1}{k}\right)\cdot\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k-1} = \frac{k-1}{k}\cdot\left(\frac{1+k-1}{k-1}\right)^{-(k-1)}$$
$$= \frac{k-1}{k}\cdot\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{-(k-1)} \xrightarrow{k\to\infty} 1\cdot \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

und

$$\mathrm{e}^2 \xleftarrow{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{2k}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-1} \leq \left(1+\frac{2}{2k-1}\right)^{2k-1} \leq \left(1+\frac{2}{2k-2}\right)^{2k-1}$$
$$= \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{2(k-1)}\cdot\left(1+\frac{1}{k-1}\right) \xrightarrow{k\to\infty} \mathrm{e}^2,$$

d.h. $\left(1+\frac{2}{2k-1}\right)^{2k-1}$ konvergiert gegen e^2 für $k\to\infty$. $\square$

(iii) *Behauptung:* Es gilt: $H(a_n) = \{2,3,4\}$ und somit $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 4$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Beweis: Wir definieren die drei Teilfolgen (a_{3k}), (a_{3k-1}) und (a_{3k-2}). Es gilt:

$$a_{3k} = 3 + \sqrt[3k+2]{8} \xrightarrow{k\to\infty} 3+1 = 4,$$
$$a_{3k-1} = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1} = 3 + 2\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^k \xrightarrow{k\to\infty} 3+0 = 3,$$
$$a_{3k-2} = 3 + \frac{4-3k}{3k-2} = 3 + \frac{\frac{4}{k}-3}{3-\frac{2}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} 3-1 = 2.$$

Somit sind $2, 3$ und 4 Häufugnswerte der Folgen (a_n). Da alle Folgenglieder von (a_n) in einer der drei Teilfolgen enthalten sind, hat (a_n) keine weiteren Häufungswerte und es gilt $H(a_n) = \{2,3,4\}$. Nach Definition gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 4$. $\square$

(iv) *Behauptung:* Es gilt: $H(a_n) = \{\frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}\}$ und somit $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Beweis: Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$a_n = 8^n\left(\frac{8n^3+12n^2+6n+1}{n^3}\right)^{-n} = \left(\frac{8n^3}{8n^3+12n^2+6n+1}\right)^n = \left(\frac{(2n)^3}{(2n+1)^3}\right)^n$$
$$= \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{3n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-3n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-2n}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-2n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

Also ist (a_n) konvergent und die Behauptung folgt. $\square$

Aufgabe 14:

(i) Es sei (a_n) eine Folge, sodass für jedes $p\in\mathbb{N}$ gilt:

$$a_{p+n} - a_n \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Ist die Folge (a_n) dann konvergent?

(ii) Es sei (a_n) eine Folge und $q\in(0,1)$ mit

$$|a_{n+1}-a_n| < q^n$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 14:

(i) *Voraussetzung:* Es sei (a_n) eine Folge, sodass für jedes $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{p+n} - a_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Behauptung: Die Folge (a_n) ist im Allgemeinen nicht konvergent.

Beweis: Betrachte zum Beispiel die Folge (a_n) definiert durch

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

also die Folge der Partialsummen der harmonischen Reihe. Dann gilt:

$$a_{p+n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

für alle $p \in \mathbb{N}$, da jeder der endlich vielen Summanden für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Die Folge (a_n) divergiert jedoch, da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent ist (siehe Vorlesung). $\square$

(ii) *Voraussetzung:* Es seien (a_n) eine Folge und $q \in (0,1)$ mit

$$|a_{n+1} - a_n| < q^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Behauptung: Die Folge (a_n) konvergiert.

Beweis: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt (Teleskopsumme)

$$|a_m - a_n| = \left| \sum_{j=n}^{m-1} (a_{j+1} - a_j) \right| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |a_{j+1} - a_j| < \sum_{j=n}^{m-1} q^j < \sum_{j=n}^{\infty} q^j.$$

Wegen $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$. Das bedeutet, dass die Folge ihrer Partialsummen konvergiert. Es sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{j=n}^{\infty} q^j \right| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} q^j - \sum_{j=0}^{n-1} \right| < \epsilon$$

für alle $n \geq k_\epsilon$. Für alle $m > n \geq k_\epsilon$ gilt daher

$$|a_m - a_n| < \sum_{j=n}^{\infty} q^j < \epsilon.$$

Die Folge (a_n) ist also eine Cauchyfolge und somit konvergent. $\square$

Aufgabe 15 (K):
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Reihenwert an:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 3n + 2}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}}$, (iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+k)} \right)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 15:

(i) *Behauptung:* Die Reihe divergiert.

Beweis: Setze

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Durch Erweitern und mit Hilfe einer Teleskopsumme erhält man

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})\cdot(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})} = \sum_{n=1}^{k} \sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \sqrt{k}-\sqrt{0} = \sqrt{k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Die Folge der Partialsummen (s_k) ist unbeschränkt und somit divergent, was bedeutet, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ divergiert. $\square$

(ii) *Behauptung:* Die Reihe konvergiert und hat den Reihenwert 1.

Beweis: Setze

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{n^2+3n+2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung und einer Teleskopsumme erhält man

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}\right) = \frac{2}{2} - \frac{2}{k+2} \to \frac{2}{2} = 1 \quad (k \to \infty).$$

Da die Folge der Partialsummen (s_k) gegen 1 konvergiert, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3n+2}$ konvergent mit Reihenwert 1. $\square$

(iii) *Behauptung:* Die Reihe divergiert.

Beweis: Definiere die Folge (a_n) durch

$$a_n := \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ $(n \to \mathbb{N})$ konvergiert die Folge (a_n) gegen $\frac{1}{2}$. Die Folge (a_n) ist also insbesondere keine Nullfolge. Aus Satz 3.1 (c) folgt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dann divergiert. $\square$

(iv) *Behauptung:* Die Reihe konvergiert und hat den Reihenwert 4.

Beweis: Setze

$$a_m := \sum_{k=0}^{m} 2^{-(k+n)}$$

für alle $n, m \in N_0$. Mit der geometrischen Summenformel erhält man (für alle $n \in \mathbb{N}_0$)

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right) \to 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \quad (m \to \infty). \end{aligned}$$

Setze

$$s_l := \sum_{n=0}^{l} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+k)} \right)$$

für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Es gilt, ebenfalls mit der geometrischen Summenformel,

$$s_l = \sum_{n=0}^{l} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}\right) \to 4 \quad (l \to \infty).$$

Aus der Konvergenz der Folge der Partialsummen (s_l) gegen 4 folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+k)}\right)$ und dass ihr Reihenwert 4 ist. □

Aufgabe 16:

(i) Es sei (a_n) eine reelle Folge. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

(ii) Es sei (a_n) eine monoton fallende Folge und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 16:

(i) (a) *Behauptung:* Die Aussage ist falsch.

Beweis: Wir widerlegen die Aussage durch Angabe eines Gegenbeispiels. Definiere die Folge (a_n) durch $a_n := (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Da $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent. Jedoch ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nach der Vorlesung divergent (harmonische Reihe). □

(b) *Behauptung:* Die Aussage ist falsch.

Beweis: Für $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent. Allerdings ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. □

(ii) *Voraussetzung:* Es sei (a_n) eine monoton fallende Folge und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent.

Behauptung: Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$.

Beweis: Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt, dass (a_n) eine Nullfolge ist (siehe Satz 3.1 (c)). Wegen der Monotonie der Folge erhalten wir somit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es sei nun $\epsilon > 0$. Wegen der Konvergenz der Reihe liefert das Cauchy-Kriterium die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| = \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } n > m \geq n_0.$$

Speziell gilt für $m = n_0$:

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } n > n_0. \tag{1}$$

Da (a_n) monoton fällt erhalten wir zudem

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \geq (n - n_0) a_n. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) erhalten wir

$$n \cdot a_n < \frac{\epsilon}{2} + n_0 \cdot a_n \quad \text{für alle } n > n_0. \tag{3}$$

Da (a_n) eine Nullfolge ist, existiert zudem ein $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_1$ gilt: $a_n < \frac{\epsilon}{2n_0}$. Somit folgt mit (3):

$$0 \leq n \cdot a_n < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{für alle } n \geq \max\{n_0, n_1\}.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt schließlich $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$. $\square$