Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Übungsblatt 05 **17.05.21**

Aufgabe 1 (*Die orthogonale Gruppe*)

a) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $\varphi\colon G \to G$ ein Gruppenendomorphismus.

i) Beweisen Sie, dass

$$H \coloneqq \{ g \in G \mid \varphi(g) = g \}$$

eine Untergruppe von G ist.

ii) Die Gruppe sei nun $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit Matrixmultiplikation. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon G &\to G \\ A &\mapsto (A^\top)^{-1} \end{aligned}$$

ein Gruppenendomorphismus ist.

iii) Beweisen Sie unter Verwendung von i) und ii) erneut, dass $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ Gruppen sind.

b) Es sei V ein unitärer Vektorraum. Beweisen Sie, dass jeder komplexe Eigenwert λ einer linearen Isometrie $\varphi\colon V \to V$ den Betrag $|\lambda| = 1$ hat.

Weiter auf der nächsten Seite $\longrightarrow$

Aufgabe 2 (*Reflexionen an Hyperebenen*)

Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ sei der Endomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi_v \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto A_v x \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad A_v := \mathbb{1}_n - 2\,vv^\top$$

definiert.
Hinweis: $vv^\top$ ist eine $n \times n$-Matrix und **nicht** dasselbe wie $v^\top v = \langle v, v\rangle$.

a) Beweisen Sie, dass φ_v genau dann eine Isometrie von $\mathbb{R}^n$ ist, wenn v ein Einheitsvektor oder der Nullvektor ist.

b) Beweisen Sie im Fall $\|v\| = 1$, dass $E_1(\varphi_v) = \{v\}^\perp$ gilt und φ_v über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

c) Nun sei $n = 3$ und wir betrachten zwei Einheitsvektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$, die den Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschließen. Beweisen Sie, dass es eine geordnete Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ gibt, bezüglich der

$$M_{\mathrm{BB}}(\varphi_v \circ \varphi_w) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Hinweis: Es gilt $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Zeigen Sie zunächst, dass die Vektoren v und $(\varphi_v \circ \varphi_w)(v)$ ein Orthonormalsystem bilden.

Abgabe bis Montag, den 31.05.21 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.