Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
Martin Günther, M. Sc.

Lineare Algebra II **Sommersemester 2021**

Übungsblatt 3 **03.05.21**

Aufgabe 1 (*Orthonormalbasen*) (*10 Punkte*)

a) Auf dem Untervektorraum $V \coloneqq \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq 2 \} \subseteq \mathbb{R}[X]$ sei das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \sum_{k=0}^{2} f(k)\, g(k) \end{aligned}$$

definiert. Zeigen Sie, dass die Polynome

$$f_1 \coloneqq 1, \qquad f_2 \coloneqq X - 1, \qquad f_3 \coloneqq 3X^2 - 6X + 1$$

eine Orthogonalbasis in V bilden und bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda_1 f_1$, $\lambda_2 f_2$, $\lambda_3 f_3$ eine Orthonormalbasis von V bilden.

b) Es sei das reelle Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^\top A y \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$b_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass diese Vektoren ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilden und bestimmen Sie einen Vektor $b_4 \in V$, sodass b_1, b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis bilden.

Weiter auf der nächsten Seite $\longrightarrow$

Aufgabe 2 (*Koordinatenabbildungen mit Skalarprodukten*) (*10 Punkte*)

Es sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\mathrm{B} := (b_1, \dots b_n)$ eine geordnete Basis von V. Wir betrachten die folgenden Abbildungen:

$$(\cdot)_{\mathrm{B}} \colon V \to \mathbb{R}^n \qquad\qquad \langle \cdot, \mathrm{B} \rangle \colon V \to \mathbb{R}^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad\qquad v \mapsto \langle v, \mathrm{B} \rangle := \begin{pmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_n \rangle \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Abbildung $\langle \cdot, \mathrm{B} \rangle$ ist linear und sogar ein Vektorraumisomorphismus.

b) Die Abbildungen $(\cdot)_{\mathrm{B}}$ und $\langle \cdot, \mathrm{B} \rangle$ stimmen genau dann überein, wenn B eine geordnete Orthonormalbasis ist.

c) Die Abbildung

$$(\cdot)^\flat \colon V \to V^* \qquad \text{mit} \qquad \langle \cdot, v \rangle \colon V \to \mathbb{R}$$

$$v \mapsto v^\flat := \langle \cdot, v \rangle \qquad\qquad w \mapsto \langle w, v \rangle$$

ist linear.

d) Das Diagramm
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "(\cdot)^\flat"] \arrow[dr, "\langle \cdot, \mathrm{B} \rangle"'] & V^* \arrow[d, "(\cdot)_{\mathrm{B}^*}"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$
kommutiert, wobei B^* die zu B duale Basis bezeichnet.

Abgabe bis Montag, den 10.05.21 um 18:00 Uhr. Bitte verfassen Sie Ihre Lösung handschriftlich und versehen Sie sie mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummern und E-Mail-Adressen aller Teilnehmenden ihrer Lerngruppe. Laden Sie sie dann als eine pdf-Datei in den entsprechenden Postkasten im ILIAS-Kurs hoch.