UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA
FACULTATEA DE ŞTIINŢE
SPECIALIZAREA MASTER - MATEMATICI APLICATE

LUCRARE DE DISERTAŢIE

Absolvent
Slavu Florina Spicuţa

Conducător ştiinţific
Prof. Dr. Micu Sorin

CRAIOVA
2019

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA
FACULTATEA DE ŞTIINŢE
SPECIALIZAREA MASTER - MATEMATICI APLICATE

Spaţii şi operatori fracţionari

Absolvent
Slavu Florina Spicuţa

Conducător ştiinţific
Prof. Dr. Micu Sorin

CRAIOVA
2019

Cuprins

Introducere

Această lucrare îşi propune să analizeze spaţiile şi operatorii fracţionari, legăturile dintre acestea, precum şi să menţioneze unele aplicaţii ale lor în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale şi analiza numerică.

Lucrarea conţine trei capitole:

(1) Noţiuni introductive: În acest capitol sunt menţionate şi studiate noţiuni şi rezultate de bază din analiza funcţională şi numerică, necesare introducerii şi analizei spaţiilor şi operatorilor fracţionari. Sunt aduse în discuţie noţiunile de spaţiu Hilbert, produs scalar, normă, operator maximal, monoton, închis, mărginit, baze ortonormate, operator autoadjunct şi antiadjunct. Sunt menţionate rezultate remarcabile precum Inegalitatea lui Bessel şi Egalitatea lui Parseval.

(2) Spaţii de puteri fracţionare: Acest capitol este împărţit în două subcapitole importante strâns conectate: Spaţii de puteri pozitive, unde sunt analizate proprietăţile spaţiilor X^α, cu $\alpha \geq 0$, şi Spaţii de puteri negative, în care sunt analizate proprietăţile spaţiilor X^α, cu $\alpha < 0$, dualul spaţiului X^α, cu $\alpha > 0$. Se definesc aceste spaţii, produsele lor scalare şi normele corespunzătoare. Sunt analizate unele proprietăţi ale spaţiilor, cum ar fi completitudine, incluziune şi compacitate. De asemenea, sunt introduşi operatorii fracţionari şi sunt studiate proprietăţile acestora pe spaţiile fracţionare definite anterior.

(3) Activitate experimentală: În ultimul capitol, prezentăm o aplicaţie care îşi propune să aproximeze soluţia ecuaţiei căldurii 1-dimensională folosind schema numerică a lui Euler în cazul în care data iniţială este o funcţie puţin regulată: δ_0. Această dată iniţială se găseşte într-un spaţiu de exponent negativ $X^{-\alpha}$, dar aşa cum se observă şi din aproximarea numerică, soluţia ecuaţiei căldurii suferă un proces de regularizare care face ca la momente $t > 0$ să aparţină spaţiilor de exponent pozitiv.

CAPITOLUL 1

Noţiuni introductive

1. Spaţii Hilbert

Fie H un spaţiu vectorial peste corpul numerelor complexe.

DEFINIŢIE 1.1.1. *Funcţia scalară* $<\cdot,\cdot>: H \times H \to \mathbb{C}$ *se numeşte produs scalar pe* H *dacă sunt îndeplinite următoarele patru condiţii, pentru orice* $x, y, z \in H$ *şi* $c \in \mathbb{C}$*:*

(1) $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$;
(2) $< c \cdot x, y > = c < x, y >$;
(3) $< x, y > = \overline{< y, x >}$;
(4) $< x, x > \geq 0$, *cu egalitate dacă şi numai dacă* $x = 0$.

DEFINIŢIE 1.1.2. *Aplicaţia* $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ *este o normă dacă sunt verificate simultan condiţiile, pentru orice* $x, y, z \in H$ *şi* $c \in \mathbb{C}$*:*

(1) $\|c \cdot x\| = |c| \cdot \|x\|$;
(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; *(Inegalitatea triunghiului)*
(3) $\|x\| \geq 0$,

cu egalitate în inegalitatea (3) *dacă şi numai dacă* $x = 0$.

Dat un produs scalar $<\cdot,\cdot>$ pe H, aplicaţia $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{1.1.1}$$

este o normă în H.

DEFINIŢIE 1.1.3. *Şirul* $(x_n)_n \subset H$ *se numeşte sir Cauchy dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $n_\varepsilon \geq 0$ *astfel încât pentru orice* $n \geq n_\varepsilon$ *şi* $p > 0$,

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon. \tag{1.1.2}$$

DEFINIŢIE 1.1.4. *Se numeşte spaţiu Hilbert un spaţiu normat înzestrat cu norma generată de un produs scalar şi care, în plus, este complet (Un spaţiu normat în care orice şir Cauchy este şir convergent se numeşte spaţiu complet).*

2. Operatori nemărginiţi

DEFINIŢIE 1.2.1. *Fie* H *un spaţiu Hilbert. Operatorul* $T : H \to H$ *este liniar dacă pentru orice* $x, y \in H$ *şi* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *are loc*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y). \tag{1.2.1}$$

Într-un spaţiu normat H putem defini norma lui T ca fiind

$$\|T\| = \sup_{x \in H, \|x\| \leq 1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in H, \|x\| = 1} \|Tx\| = \sup_{x \in H, \|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{1.2.2}$$

DEFINIŢIE 1.2.2. *Fie* $D(A) \subset H$ *un spaţiu vectorial al lui* H *şi* $A : D(A) \to H$, *o aplicaţie liniară. Perechea* $(D(A), A)$ *se numeşte operator nemărginit în* H.

DEFINIŢIE 1.2.3. *Un operator nemărginit* $(D(A), A)$ *în* H *este închis dacă este adevărată următoarea implicaţie:*

$$\left.\begin{aligned}(x_n)_n \subset D(A)\\ x_n \to x \hat{i}n\ H\\ Ax_n \to y \hat{i}n\ H\end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow x \in D(A) \text{ şi } Ax = y. \tag{1.2.3}$$

REMARCĂ 1.2.1. *Faptul că un operator este închis este echivalent cu faptul că mulţimea*

$$\{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

este închisă în $H \times H$.

DEFINIŢIE 1.2.4. $D(A) \subset H$ *este dens în* H *dacă şi numai dacă* $\overline{D(A)} = H$, *adică pentru orice* $\varepsilon > 0$ *şi orice* $x \in H$, *există* $u \in D(A)$ *astfel încât* $\|x - u\| < \varepsilon$.

REMARCĂ 1.2.2. $D(A) \subset H$ *este dens în* H *dacă şi numai dacă din* $(z, u) = 0$, *pentru orice* $u \in D(A)$, *rezultă* $z = 0$.

DEFINIŢIE 1.2.5. *Un operator nemărginit* $(D(A), A)$ *în* H *este monoton dacă*

$$Re(Au, u) \geq 0, \forall\ u \in D(A). \tag{1.2.4}$$

PROPOZIŢIE 1.2.1. *Operatorul* $(D(A), A)$ *este monoton dacă şi numai dacă pentru orice* $\lambda > 0$ *are loc inegalitatea*

$$\lambda\|u\| \leq \|\,(A + \lambda I)\,u\|, \ \ \forall\ u \in D(A). \tag{1.2.5}$$

DEMONSTRAŢIE. Folosind proprietăţile normei şi ale produsului scalar, avem

$$\|(A + \lambda I)u\|^2 = ((A + \lambda I)u, (A + \lambda I)u) = \|Au\|^2 + \lambda^2\|u\|^2 + \lambda(Au, u) + \lambda(u, Au) =$$

$$= \|Au\|^2 + \lambda^2\|u\|^2 + \lambda\left((Au, u) + \overline{(Au, u)}\right) = \|Au\|^2 + \lambda^2\|u\|^2 + 2\lambda Re(Au, u).$$

Presupunem mai întâi că operatorul $(D(A), A)$ este monoton şi demonstrăm că are loc inegalitatea menţionată, pentru orice λ pozitiv.

Deoarece $(D(A), A)$ monoton, obţinem $Re(Au, u) \geq 0$, pentru orice $u \in D(A)$, şi deci

$$\|(A + \lambda I)u\|^2 \geq \lambda^2\|u\|^2.$$

Presupunem acum că are loc inegalitatea şi demonstrăm ca $(D(A), A)$ este monoton. Cum $\lambda^2\|u\|^2 \leq \|(A + \lambda I)u\|^2$, pentru orice $u \in D(A)$, obţinem

$$0 \leq \|Au\|^2 + 2\lambda Re(Au, u),$$

echivalent cu

$$-\frac{\|Au\|^2}{2\lambda} \leq Re(Au, u).$$

Luând $\lambda \to \infty$ obţinem $0 \leq Re(Au, u)$. □

DEFINIŢIE 1.2.6. *Un operator nemărginit* $(D(A), A)$ *în* H *este maximal dacă există* $\lambda > 0$ *astfel încât pentru orice* $f \in H$, *există* $u \in D(A)$ *cu*

$$(A + \lambda I)\,u = f. \tag{1.2.6}$$

REMARCĂ 1.2.3.
(1) *Operatorul* $(D(A), A)$ *este maximal dacă există* $\lambda > 0$ *astfel încât* $A + \lambda I : D(A) \to H$ *să fie surjectiv.*
(2) *Dacă operatorul* $(D(A), A)$ *este monoton şi* λ *este un număr real strict pozitiv, atunci* $A + \lambda I : D(A) \to H$ *este injectiv.*

Demonstraţie.

Din $(A + \lambda I)\, u = 0$ şi A operator monoton, folosind Propoziţia 1.2.1, obţinem

$$\lambda \|u\| \leq \|\,(A + \lambda I)\, u\| = 0.$$

Deci $u = 0$ şi prin urmare, $A + \lambda I$ este injectiv. $\square$

Remarcă 1.2.4. *Fie $(D(A), A)$ un operator maximal monoton în H. Atunci:*
(i) $D(A)$ dens în H;
(ii) $(D(A), A)$ operator închis.

Propoziţie 1.2.2. *Fie $(D(A), A)$ un operator nemărginit în H, maximal şi monoton. Atunci au loc proprietăţile:*

(1) Există $\lambda > 0$ atfel încât $A + \lambda I : D(A) \to H$ să fie inversabil şi inversul său

$$J_\lambda : H \to H,\ \ J_\lambda(f) = (A + \lambda I)^{-1} f$$

are proprietatea că $\|J_\lambda u\| \leq \frac{1}{u}$, pentru orice $u \in H$.

(2) Pentru orice $\lambda > 0$ şi orice $f \in H$ există $u \in H$ astfel încât

$$(A + \lambda I)u = f.$$

(3) Proprietatea (1) are loc pentru orice $\lambda > 0$.

Definiţie 1.2.7. *Fie $(D(A), A)$ un operator nemărginit în H cu domeniul $D(A)$ dens în H.*

$$D(A^*) = \{v \in H : \exists\, c > 0 \ astfel\ ca\ |(v, Au)| \leq c\|u\|,\ \forall\, u \in D(A)\}. \tag{1.2.7}$$

$D(A^*)$ este subspaţiu liniar al lui H. Operatorul $(D(A^*), A^*)$ nemărginit în H se numeşte adjunctul lui $(D(A), A)$.

Dacă $v \in D(A^*)$, aplicaţia $u \in D(A) \to (v, Au)$ este liniară şi se poate extinde prin continuitate la o aplicaţie liniară şi continuă în H. Rezultă, conform *Teoremei lui Riesz*[1], există unic $A^* v \in H$ astfel încât

$$(A^* v, u) = (v, Au),\ \forall\, u \in D(A). \tag{1.2.8}$$

Propoziţie 1.2.3. *Fie $(D(A), A)$ un operator nemărginit în H cu domeniu dens. Atunci operatorul său autoadjunct $(D(A^*), A^*)$ este închis.*

Teoremă 1.2.1. *Fie $(D(A), A)$ un operator nemărginit, închis şi monoton în H cu domeniu dens. Dacă $(D(A^*), A^*)$ este monoton, atunci $(D(A), A)$ este maximal.*

Definiţie 1.2.8. *Operatorul $(D(A), A)$ este autoadjunct dacă*

$$D(A) = D(A^*),\ iar\ A = A^*.$$

Definiţie 1.2.9. *Operatorul $(D(A), A)$ este antiadjunct dacă*

$$D(A) = D(A^*),\ iar\ A = -A^*.$$

Teoremă 1.2.2. *Un operator $(D(A), A)$ autoadjunct şi monoton este maximal.*

Demonstraţie. $(D(A), A)$ este monoton şi închis deoarece $(D(A^*), A^*)$ operator închis şi $(D(A), A) = (D(A^*), A^*)$. Dar $(D(A^*), A^*)$ este monoton deoarece $(D(A^*), A^*) = (D(A), A)$ şi $(D(A^*), A^*)$ monoton. Prin urmare, $(D(A), A)$ este operator maximal. $\square$

[1] Teorema lui Riesz: Fie $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|_H)$ un spaţiu Hilbert, cu $\phi \in H'$. Atunci există unic $u \in H$ astfel încât $\phi(u) = (u, v)_H$, pentru orice $v \in H$ şi $\|\phi\|_{H'} = \|u\|_H$.
$H' = \{\phi : H \to \mathbb{R} : \phi$ aplicaţie liniară şi continuă$\}$.

TEOREMĂ 1.2.3. *Un operator $(D(A), A)$ antiadjunct este maximal şi monoton.*

DEMONSTRAŢIE. Deoarece A este operator antiadjunct, are loc

$$(Ax, x) = (x, A^*x) = (x, -Ax) = -\overline{(Ax, x)}.$$

Prin urmare $Re(Ax, x) = 0$, pentru orice $x \in D(A)$, deci $((D(A), A)$ monoton.

$(D(A), A)$ închis deoarece $(D(A^*), A^*)$ închis şi $(D(A^*), A^*)$ monoton deoarece $(D(A), -A)$ monoton. În consecinţă $(D(A), -A)$ maximal. □

DEFINIŢIE 1.2.10. *Operatorul $(D(A), A)$ este simetric dacă $(Au, v) = (u, Av)$.*

PROPOZIŢIE 1.2.4. *Un operator $(D(A), A)$ simetric, monoton şi maximal este autoadjunct.*

3. Baze ortonormate

Fie $(H, (\cdot, \cdot))$ un spaţiu Hilbert.

DEFINIŢIE 1.3.1. *Şirul $(e_n)_{n\geq 1} \subset H$ se numeşte şir ortonormat în H dacă*

$$(e_n, e_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = m \\ 0 & \text{dacă } n \neq m \end{cases}, \quad \forall\, n, m \geq 1. \tag{1.3.1}$$

DEFINIŢIE 1.3.2. *$(e_n)_{n\geq 1} \subset H$ este bază ortonormată în H dacă:*
(1) Şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este şir ortonormat
(2) Pentru orice $x \in H$, există unic $(\alpha_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ astfel încât

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n. \tag{1.3.2}$$

EXEMPLU 1.3.1. *Fie spaţiul*

$$H = \ell^2 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}, \tag{1.3.3}$$

cu produsul scalar definit în felul urmator

$$((a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Atunci $(H, (\cdot, \cdot))$ este spaţiu Hilbert.

Pe de altă parte, observăm că $(e_m)_{m\geq 1}$ formează un şir ortonormat, unde

$$e_m = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{pe poziţia } m}, 0, \ldots).$$

REMARCĂ 1.3.1. *Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este bază ortonormată în H şi $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, atunci $x_m = (x, e_m), \forall m \geq 1$, este coeficientul Fourier numărul m al lui x în baza $(e_n)_{n\geq 1}$.*

LEMĂ 1.3.1. *Fie $(e_n)_{1\leq n\leq N}$ un şir finit ortonormat în H. Dacă $x \in H$ şi $(b_n)_{1\leq n\leq N} \subset \mathbb{C}$, atunci*

$$\|x - \sum_{n=1}^{N} b_n e_n\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |b_n - c_n|^2 - \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2, \tag{1.3.4}$$

unde $c_n = (x, e_n)$.

DEMONSTRAŢIE. Folosind proprietăţile normei şi ale produsului scalar, avem

$$\|x - \sum_{n=1}^{N} b_n e_n\|^2 = \left(x - \sum_{n=1}^{N} b_n e_n, x - \sum_{n=1}^{N} b_n e_n \right).$$

Prin urmare,

$$\|x - \sum_{n=1}^{N} b_n e_n\|^2 = (x, x) - \left(x, \sum_{n=1}^{N} b_n e_n \right) - \left(\sum_{n=1}^{N} b_n e_n, x \right) + \left(\sum_{n=1}^{N} b_n e_n, \sum_{n=1}^{N} b_n e_n \right).$$

În continuare,

$$\|x - \sum_{n=1}^{N} b_n e_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \overline{b_n} c_n - \sum_{n=1}^{N} b_n \overline{c_n} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} b_n \overline{b_m} (e_n, e_m)$$

Regrupând sumele, obţinem că

$$\|x - \sum_{n=1}^{N} b_n e_n\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{N} (b_n \overline{b_n} - \overline{b_n} c_n - b_n \overline{c_n} + c_n \overline{c_n}) - \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2$$

şi, prin urmare, am demonstrat că

$$\|x - \sum_{n=1}^{N} b_n e_n\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{N} (b_n - c_n)^2 - \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2.$$

□

CONSECINŢĂ 1.3.1. *Fie $(e_n)_{n \geq 1}$ un şir ortonormat în H şi $x \in H$. Atunci are loc:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2. \quad (\textit{Inegalitatea lui Bessel}) \tag{1.3.5}$$

DEMONSTRAŢIE. Luând $b_n = c_n$ în relaţia (1.3.4), unde $c_n = (x, e_n)$, obţinem

$$\|x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2.$$

Cum membrul stâng al relaţiei de mai sus este un termen pozitiv, obţinem inegalitatea de demonstrat. □

TEOREMĂ 1.3.1. *Fie $(e_n)_{n \geq 1}$ o baza ortonormată în H.*
(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \text{ dacă şi numai dacă seria } \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \text{ este convergentă în } H;$$

(b) Dacă $x \in H$ şi $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, atunci are loc următoarea relaţie:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2. \quad (\textit{Egalitatea lui Parseval}) \tag{1.3.6}$$

DEMONSTRAŢIE. (a) Presupunem mai întâi că seria $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ este finită şi arătăm că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ este convergenă în H. Considerăm $x^N = \sum_{n=1}^{N} x_n e_n$. Cum

$$\|x^{N+p} - x^N\|^2 = \| \sum_{n=N+1}^{N+p} x_n e_n\|^2 = \sum_{n=N+1}^{N+p} |x_n| \overset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

rezultă $(x^N)_{N\geq 1}$ este Cauchy, prin urmare şirul $(x^N)_{N\geq 1}$ este convergent şi deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ este convergentă.

Presupunem acum că seria $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ este convergentă. Conform inegalităţii lui Bessel,

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2.$$

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ converge.

(b) De la punctul (a) avem că

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, \;\; x^N = \sum_{n=1}^{N} x_n e_n, \;\; \text{cu } x^N \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ în H.}$$

Folosind proprietăţile normei şi ale produsului scalar, obţinem că

$$\|\sum_{n=1}^{N} x_n e_n\|^2 = \left(\sum_{n=1}^{N} x_n e_n, \sum_{m=1}^{N} x_m e_m\right) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} x_n \overline{x_m}(e_n, e_m) = \sum_{n=1}^{N} |x|^2.$$

Cum $\|x\|^2 \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \|x^N\|^2$ şi utilizând egalitatea lui Parseval, obţinem

$$\|x^N\|^2 = \|\sum_{n=1}^{N} x_n e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2.$$

Prin urmare,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x|^2.$$

□

4. Descompunerea spectrală a operatorilor maximali monotoni

Definiţie 1.4.1. *Dându-se A un operator liniar dintr-un spaţiu Hilbert H, spunem că un scalar complex λ este valoare proprie a lui A dacă există $x \neq 0$ din H astfel încât $Ax = \lambda x$, iar x se numeşte vector propriu al valorii λ.*

Definiţie 1.4.2 (Condiţiile (CA_+)). *Vom spune că operatorul nemărginit $(D(A), A)$ din spaţiul Hilbert separabil H verifică condiţiile (CA_+) dacă:*

- *$(D(A), A)$ operator maximal monoton;*
- *$(D(A), A)$ operator autoadjunct;*
- *$D(A) \subset H$, incluziune compactă;*
- *$Re(Au, u) > 0, \forall u \in H - \{0\}$.*

Propoziţie 1.4.1. *Fie $(D(A), A)$ un operator maximal monoton în spaţiul Hilbert H. Dacă $(D(A), A)$ operator autoadjunct, atunci :*

(a) $(A + I)^{-1}$ operator autoadjunct;

(b) Valorile proprii ale lui $(A + I)^{-1}$ sunt numere reale pozitive.

Demonstraţie. (a) $(A + I)^{-1} : H \to D(A)$ este bine definit (inversabil).

$(A + I)^{-1}$ operator autoadjunct, deci are loc

$$\big((A + I)^{-1}u, v\big) = \big(u, (A + I)^{-1}v\big)$$

A operator maximal, deci există $\lambda > 0$ astfel încât pentru orice $f \in H$, există $u \in D(A)$ astfel încat

$$(A + \lambda I)u = f. \ \forall\ u,\ v\ \in\ H.$$

Considerăm $(A + I)^{-1}u = w$, $(A + I)^{-1}v = z$,, pentru orice $u, v \in D(A)$. Pentru orice $z \in D(A)$ şi orice $w \in D(A)$, putem scrie că relaţia

$$\big((A + I)^{-1}u, v\big) = \big(u, (A + I)^{-1}v\big)$$

este chivalenta cu relaţia

$$(w, (A + I)z) = ((A + I)w, z)\,.$$

Folosind, în continuare, proprietăţile produsului scalar, obţinem

$$(w, Az) + (w, z) = (Aw, z) + (w, z), \text{ pentru orice } z, w \in\ D(A),$$

şi, prin urmare, are loc

$$(w, Az) = (Aw, z), \text{ pentru orice } z, w \in\ D(A),$$

ceea ce este adevărat deoarece A operator autoadjunct. Prin urmare, $(A + I)^{-1}$ operator autoadjunct.

(b) Fie λ valoare proprie pentru $(A + I)^{-1}$. Există $u \in H$, cu $u \neq 0$, astfel încât $(A + I)^{-1}u = \lambda u$. Rezultă că $u = \lambda(A + I)u$, deci

$$(u, u) = \lambda\,((A + I)u.u)) = \lambda\,((A + I)u, u)$$

Tot din $u = \lambda(A + I)u$ rezultă

$$(u, u) = (u, \lambda(A + I)u) = \overline{\lambda}\,(u, (A + I)u)\,.$$

Deoarece $(u, (A + \lambda I)u) \neq 0$, obţinem că $\lambda = \overline{\lambda}$ şi deci $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cum $(u, u) = \lambda\,(u, (A + I)u)) + \lambda(u, u)$, atunci

$$\|u\|^2 = \lambda Re(Au, u) + \lambda\|u\|^2.$$

În consecinţă

$$\lambda = \frac{\|u\|^2}{Re(Au, u) + \|u\|^2} > 0.$$

□

TEOREMĂ 1.4.1. *Fie $(D(A), A)$ un operator nemărginit în H care verifică acele condiţii (CA_+) (Teorema 1.4.2). Există o bază ortonormată a lui H, $(e_n)_{n\geq 1}$, astfel că $Ae_n = \lambda_n e_n$, formată din vectorii proprii ai lui $(D(A), A)$ şi şirul $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ este format din numere reale strict pozitive pe care îl considerăm crescator, care tinde la 0.*

DEMONSTRAŢIE. $(D(A), A)$ maximal monoton, prin urmare

$$(A + I)^{-1} : H \to D(A) \subset H, \text{ incluziune compactă.}$$

Cum $(A + I)^{-1}$ este un operator compact şi autoadjunct în H, există o bază a lui H formată din vectorii proprii ai lui $(A + I)^{-1}, (e_n)_{n\geq 1}$, iar şirul valorilor proprii corespunzătoare $(\mu_n)_{n\geq 1}$, astfel că

$$(A + I)^{-1}e_n = \mu_n e_n,$$

este un şir de numere reale mai mici decât 1 care tinde la 0 când $n \to \infty$.

$$(A + I)^{-1}e_n = \mu_n e_n, \text{ deci } e_n = \mu(A + I)e_n.$$

Prin urmare $(1 - \mu_n)e_n = \mu Ae_n$, de unde $(1 - \mu_n)(e_n, e_n) = \mu_n(Ae_n, e_n)$ şi se obţine $1 - \mu_n = \mu_n Re(Ae_n, e_n) > 0$. În consecinţă $\mu_n < 1$.

Cum $Ae_n = \frac{1-\mu_n}{\mu_n} e_n$, rezultă $\frac{1-\mu_n}{\mu_n}$ este valoare proprie a lui A, cu

$$\frac{1-\mu_n}{\mu_n} > 0 \text{ şi } \frac{1-\mu_n}{\mu_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

e_n este vector propriu corespunzător valorii proprii $\frac{1-\mu_n}{\mu_n}$, unde $(e_n)_{n\geq 1}$ formează o bază ortonormată a lui H. □

Teoremă 1.4.2. *Fie $(D(A), A)$ un operator ce verifică acele condiţii (CA_+). Atunci:*

$$D(A) = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 |\lambda_n|^2 < \infty \right\}. \tag{1.4.1}$$

Demonstraţie. Conform *Teorema 1.3.1*,

$$H = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Fie $x \in D(A)$, cu $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. Atunci $Ax \in H$ şi $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$, unde

$$\beta_m = (Ax, e_m) = (x, Ae_m) = (x, \lambda_m e_m) = \overline{\lambda_m}(x, e_m) = \overline{\lambda_m} x_m.$$

Cum $\beta_m = \overline{\lambda_m} x_m$, rezultă că

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\overline{\lambda_m} x_m|^2 < \infty. \tag{1.4.2}$$

Fie $x \in H$, deci $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, şi $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 |\lambda_n|^2 < \infty$. Atunci

$$x^N = \sum_{n=1}^{N} x_n e_n \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} x. \tag{1.4.3}$$

Prin urmare,

$$Ax^N = \sum_{n=1}^{N} x_n A e_n = \sum_{n=1}^{N} x_n \lambda_n e_n \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n e_n.$$

A operator închis, deci $x \in D(A)$, cu $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n e_n$. □

CAPITOLUL 2

Spaţii de puteri fracţionare

1. Spaţii de puteri pozitive

Presupunem că $(D(A), A)$ verifică condiţiile (CA_+). Ţinând cont de descompunerea spectrală a operatorului A, definim:

Definiţie 2.1.1. *Fie* $0 \leq \alpha < \infty$. *Definim:*

$$X^\alpha = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H, \sum_{n=1}^{\infty} \mid \lambda_n \mid^{2\alpha} \mid x_n \mid^2 < \infty \right\} \tag{2.1.1}$$

şi

$$A^\alpha : D(A) = X^\alpha \to X^0 = H,$$

definit prin

$$A^\alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha x_n e_n, \tag{2.1.2}$$

pentru $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. *Expresia*

$$\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|_H = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^{2\alpha}|x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.3}$$

defineşte o normă hilbertiană în X^α.
În particular, $X^0 = H$ *şi* $X^1 = D(A)$.

Definiţie 2.1.2. *Pentru* $\alpha \in \mathbb{R}$, *definim* $\boldsymbol{X}^\alpha$ *ca un spaţiu liniar de şiruri de numere complexe* $x = (x_n)_n$, *astfel încât*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha} |x_n|^2 < \infty, \tag{2.1.4}$$

înzestrat cu norma hilbertiană

$$\|x\|_\alpha = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.5}$$

şi produsul scalar

$$(x, y)_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \lambda_n^{2\alpha}, \tag{2.1.6}$$

unde şirul $y = (y_n)_n$ *este un şir din* $\boldsymbol{X}^\alpha$.

A se observa că $\boldsymbol{X}^0 = \ell^2$. *În plus, definim*

$$\boldsymbol{A}^\alpha((x_n)_n) = (\lambda_n^\alpha x_n)_n. \tag{2.1.7}$$

REMARCĂ 2.1.1. *Deoarece $\lambda_n > 0$, nu este necesară scrierea $|\lambda_n|$ în expresia de mai sus, dar această notaţie va fi necesară în extinderea rezultatelor în cazul valorilor proprii complexe.*

PROPOZIŢIE 2.1.1.

(i) $(\boldsymbol{X}^\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ *este un spaţiu Hilbert pentru orice* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Dacă $\alpha \geq \beta$, *atunci* $\boldsymbol{X}^\alpha \subset \boldsymbol{X}^\beta$ *cu injecţie continuă (şi compactă dacă* $\alpha > \beta$*) şi densă. Injecţia verifică*

$$\|\boldsymbol{i}\|_{\alpha,\beta} = |\lambda_1|^{\beta-\alpha}. \tag{2.1.8}$$

(iii) Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi* $\theta \in [0,1]$, *atunci pentru orice* $x \in \boldsymbol{X}^\gamma$ *şi* $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$, *are loc*

$$\|x\|_{\theta\alpha+(1-\theta)\beta} \leq \|x\|_\alpha^\theta \cdot \|x\|_\beta^{1-\theta}. \tag{2.1.9}$$

(iv) Pentru orice $x, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}^\varepsilon : \boldsymbol{X}^{\alpha+\varepsilon} \to \boldsymbol{X}^\alpha$ *este o izometrie surjectivă, cu* $(\boldsymbol{A}^\varepsilon)^{-1} = \boldsymbol{A}^{-\varepsilon}$. *În plus, pentru orice* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{A}^\beta = \boldsymbol{A}^{\alpha+\beta}, \tag{2.1.10}$$

ca operator între $\boldsymbol{X}^{\alpha+\beta+\gamma}$ *şi* $\boldsymbol{X}^\gamma$.

DEMONSTRAŢIE. (i) Fie $(x^m)_{m\geq 1}$ un şir Cauchy în $\mathbf{X}^\alpha$. Atunci $(A^\alpha x^m)_{m\geq 1}$ este un şir Cauchy în $\mathbf{X}^\alpha$, deci există $y \in \mathbf{X}^\alpha$ astfel încât $\lim_{m\to\infty} A^\alpha x^m = y$. Prin urmare,

$$(A^\alpha)^{-1}(A^\alpha x^m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (A^\alpha)^{-1} y.$$

Rezultă $x^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (A^\alpha)^{-1} y$ şi deci $\mathbf{X}^\alpha$ este spaţiu Hilbert.

(ii) Dacă $\alpha \geq \beta$ şi $x \in \mathbf{X}^\alpha$, atunci evident

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \lambda_n^{2\alpha} < \infty \text{ şi deci } \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \lambda_n^{2\beta} \lambda_n^{2\alpha-2\beta} < \infty.$$

Putem scrie

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \lambda_n^{2\beta} \leq \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \lambda_n^{2\alpha}\right) \lambda_1^{2\alpha-2\beta} < \infty.$$

Aşadar, $\|x\|_\alpha \geq |\lambda_1|^{\beta-\alpha} \|x\|_\beta$, prin urmare injecţia este continuă şi are loc estimarea normelor. A se observa că pentru orice $N \in \mathbb{N}$, şirul $\delta^N = \{\delta_n^N\}_N$, cu

$$\delta_n^N = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = N \\ 0 & \text{dacă } n \neq N \end{cases}$$

este ortogonal în $\mathbf{X}^\alpha$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, cu norma $\|\delta^N\|_\alpha = |\lambda_N|^\alpha$.

Pe de altă parte, dacă $x = \{x_n\}_n \in \mathbf{X}^\alpha$, atunci

$$x = \sum_{n=1}^\infty x_n \delta^N$$

în $\mathbf{X}^\alpha$. Prin urmare, $\{\delta^N\}_N$ este şir ortogonal maximal în $\mathbf{X}^\alpha$. În consecinţă, injecţia este densă. În final, dacă $(u^m)_m$ este un şir slab convergent la 0 în $\mathbf{X}^\alpha$, atunci $(x^m)_m$ converge tare la 0 în $\mathbf{X}^\beta$. Rezultă $(x^m)_m$ este mărginit în $\mathbf{X}^\alpha$ şi deci există $M > 0$ astfel încât

$$\|u^m\|_\alpha^2 = \sum_{n=1}^\infty |x_n^m|^2 \lambda_n^{2\alpha} \leq M^2, \ \ \forall m \geq 1.$$

Cum $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\lambda_n^{2\beta-2\alpha} < \frac{\varepsilon}{2M^2}$, pentru orice $n > N\varepsilon$. În plus,

$$\|x^m\|_\beta^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta}|x_n^m|^2 = \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \lambda_n^{2\beta}|x_n^m|^2 + \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha}\lambda_n^{2\beta-2\alpha}|x_n^m|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \lambda_n^{2\beta}|x_n^m|^2 + \frac{\varepsilon}{2M^2} \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha}|x_n^m|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare, când $\alpha \geq \beta$, rezultă că x^m converge la 0 în $\mathbf{X}^\beta$.

(iii) Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \theta \in (0,1), x \in \mathbf{X}^\alpha$ şi $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$, atunci

$$\|x\|_{\theta\alpha+(1-\theta)\beta}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\lambda_n|^{2\alpha}|x_n|^2\right)^\theta (\lambda_n^{2\beta}|x_n|^2)^{1-\theta} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha}|x_n|^2\right)^\theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\beta}|x_n|^2\right)^{1-\theta} = \|x\|_\alpha^{2\theta}\|x\|_\beta^{2(1-\theta)},$$

unde am folosit inegalitatea lui Hölder[1].

(iv) Ştim că $x \in \mathbf{X}^{\alpha+\varepsilon}$ dacă

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, \text{ iar } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \lambda_n^{2(\beta+\varepsilon)} < \infty.$$

Ştim că

$$A^\alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n^\alpha e_n.$$

Ştim că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n^\alpha e_n \in \mathbf{X}^\beta$ dacă

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \lambda_n^\alpha|^2 \lambda_n^{2\beta} < \infty.$$

Atunci,

$$\|\mathbf{A}^\varepsilon x\|_\alpha^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha}|\lambda_n^\varepsilon x_n|^2 = \|x\|_{\alpha+\varepsilon}^2.$$

pentru orice $x \in \mathbf{X}^{\alpha+\varepsilon}$, iar restul reiese în mod clar.

$\square$

Definiţie 2.1.3. *Fiind date (i)-(iv), spunem că* $\left\{\boldsymbol{X}^\alpha\right\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ *este o Scară a Spaţiilor de Interpolare. Fiind dat (iv), spunem că* $\boldsymbol{A}^\varepsilon$ *este un operator (o izometrie) de pas* ε *pe scara* $\left\{\boldsymbol{X}^\alpha\right\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$.

---

[1] Fie $1 \leq p \leq \infty$. Notăm p' exponentul conjugat al lui p, iar $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Inegalitatea lui Hölder: Fie $f \in L^p$ şi $g \in L^{p'}$, cu $1 \leq p \leq \infty$. Atunci $fg \in L^1$ şi

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

.

TEOREMĂ 2.1.1. *Pentru orice $\alpha > 0$ şi $\beta \geq 0$. operatorul $(D(A^\alpha), A^\alpha)$, cu $D(A^\alpha) = X^{\beta+\alpha}$ este maximal monoton şi autoadjunct în X^β.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $x \neq 0$,

$$(A^\alpha x, x)_\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} x_n \lambda_n^\alpha \overline{u_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \lambda_n^{\alpha+2\beta} > 0.$$

Fie $y \in X^\beta$. Există $x \in X^{\alpha+\beta}$ astfel încât $(A^\alpha + I)x = y$. Avem

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n, \text{ cu } \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \lambda_n^{2\beta} < \infty.$$

Dacă $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, şi $(A^\alpha + I)x = y$, atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n^\alpha e_n + \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n.$$

Dezvoltând $(A^\alpha + I)x = y$ obţinem $x_n = \frac{y_n}{1+\lambda_n^\alpha}$, deci $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{1+\lambda_n^\alpha} e_n$ şi, prin urmare,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{y_n}{1+\lambda_n^\alpha} \right|^2 \lambda^{2\alpha+2\beta} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \lambda_n^{2\beta} < \infty.$$

A^α autoadjunct, dacă şi numai dacă A^α simetric, adică

$$(A^\alpha x, v)_\beta = (x, A^\alpha v)_\beta.$$

Făcând calculele, obţinem

$$(A^\alpha x, v)_\beta = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n^\alpha \overline{v_n} \lambda_n^{2\beta}$$

şi

$$(x, A^\alpha v)_\beta = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n^\alpha \overline{v_n} \lambda_n^{2\beta} = (A^\alpha x, v)_\beta.$$

□

TEOREMĂ 2.1.2. *Pentru fiecare $\alpha \geq 0$ spaţiile $\boldsymbol{X}^\alpha$ şi X^α definite prin* (2.1.1) *şi respectiv* (3.1.10) *sunt izomorfe izometric. În plus, următoarea diagramă este comutativă:*

$$\begin{array}{ccc} X^\alpha & \xrightarrow{A^\alpha} & X^0 \\ \Big\downarrow J & & \Big\downarrow J \\ \boldsymbol{X}^\alpha & \xrightarrow{\boldsymbol{A}^\alpha} & \boldsymbol{X}^0 \end{array}$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $J : X^\alpha \to \mathbf{X}^\alpha$, cu

$$J(x) = J\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = (x_n)_{n\geq 1}. \tag{2.1.11}$$

J este liniară dacă $J(\alpha x + \beta y) = \alpha J(x) + \beta J(y)$, pentru orice $x, y \in X^\alpha$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Făcând calculele, obţinem

$$J(\alpha x + \beta y) = \alpha(x_n)_n + \beta(y_n)_n = \alpha J(x) + \beta J(y).$$

Demonstrăm bijectivitatea aplicaţiei J. Din $J(x) = 0$ obţinem $J\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = 0$ şi deci $(x_n)_{n\geq 1} = 0$, prin urmare aplicaţia J este injectivă.

Considerăm $y \in \mathbf{X}^\alpha$, prin urmare

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n, \text{ cu } \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha}|y_n|^2 < \infty.$$

Cum $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n \in X^\alpha$ deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha}|y_n|^2 < \infty$, obţinem că aplicaţia J este surjectivă. În consecinţă, J este bijectivă.

Cum

$$\|J(x)\|_\alpha = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{X^\alpha},$$

obţinem că spaţiile $\mathbf{X}^\alpha$ şi X^α definite prin (2.1.1) şi respectiv (3.1.10) sunt izomorfe izometric.

Conform diagramei din Teorema 2.1.2, considerăm

$$\mathbf{A}^\alpha \circ J : X^\alpha \to \mathbf{X}^0 \text{ şi } J \circ A^\alpha : X^\alpha \to \mathbf{X}^0.$$

Deoarece

$$\mathbf{A}^\alpha\left(J(x)\right) = \mathbf{A}^\alpha\left((x_n)_{n\geq 1}\right) = (\lambda_n^\alpha x_n)_{n\geq 1}$$
$$\text{şi } J\left(A^\alpha(x)\right) = J\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha x_n e_n\right) = (\lambda_n^\alpha x_n)_{n\geq 1}$$

obţinem comutativitatea diagramei. □

2. Spaţii de puteri negative

Reamintim că într-un spaţiu Hilbert H

$$X^\alpha = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H, \sum_{n=1}^{\infty} \mid \lambda_n \mid^{2\alpha} \mid x_n \mid^2 < \infty \right\},$$

pentru orice $\alpha > 0$, cu $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ şi $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

În particular, dacă $\alpha = 0$, se obţine

$$X = X^0 = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H, \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^2 < \infty \right\}.$$

Se observă, aşadar, următorul şir de incluziuni:

(2.2.1) $$X^0 \hookleftarrow X^{\alpha_1} \hookleftarrow X^{\alpha_2} \text{ dacă } 0 < \alpha_1 < \alpha_2.$$

Exemplu 2.2.1. *Fie $\lambda_n = n$ şi $\alpha = -1$. Are loc afirmaţia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid \lambda_n \mid^{-2} \mid x_n \mid^2 < \infty \text{ dacă şi numai dacă } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mid x_n \mid^2}{n^2} < \infty.$$

Arătăm că există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \notin X^0,$$

dar nu are loc relaţia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mid x_n \mid^2}{n^2} < \infty.$$

Considerăm $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \notin X^0$.

Pentru orice $\alpha > 0$, notăm

$$(X^\alpha)' \overset{def}{=} X^{-\alpha} = \left\{ T : X^\alpha \to \mathbb{C},\ \text{T- aplicaţie liniară şi continuă} \right\}. \tag{2.2.2}$$

LEMĂ 2.2.1. *Fie $\alpha > 0$. Pentru orice $T \in X^{-\alpha}$, există un unic şir de scalari $(t_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ cu proprietăţile*

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 |\lambda_n|^{-2\alpha} < \infty; \tag{2.2.3}$$

b)

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t_n, \tag{2.2.4}$$

pentru orice $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, cu proprietatea că $\sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^2 \mid \lambda_n \mid^{2\alpha} < \infty$.

DEMONSTRAŢIE. Definim $t_n = T(e_n) \in \mathbb{C}$. Fie $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X^\alpha$. Arătăm că

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t_n < \infty.$$

Ştim că $T(e_n) = t_n$ şi $T(x) \in \mathbb{C}$. Dar conform liniarităţii, continuităţii aplicaţiei T şi definirii şirului $(t_n)_{n\geq 1}$, obţinem

$$T(x) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n T(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t_n,$$

ceea ce demonstrează (2.2.4).

Trecem să demonstrăm (2.2.3). Avem nevoie înainte de următoarea lemă:

LEMĂ 2.2.2. *Fie $(b_n)_n \subset \mathbb{C}$, cu proprietatea că există $c > 0$ astfel încât*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq c \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \forall (a_n)_n \in \ell^2. \tag{2.2.5}$$

Atunci $(b_n)_n \in \ell^2$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $N \geq 1$. Şirul finit $(\overline{b_n})_{1\leq n\leq N}$ este în ℓ^2 şi, conform (2.2.5), avem

$$\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \leq c \left(\sum_{n=1}^{N} |\overline{b_n}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prin urmare, rezultă că

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq c, \tag{2.2.6}$$

pentru orice $N \leq 1$. În concluzie, $(b_n)_{n\geq 1} \in \ell^2$ şi demonstraţia lemei se încheie. $\square$

Fie $(y_n)_n \in \ell^2$ un şir arbitrar ales, aşadar $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$.
Aleg $x_n = \frac{y_n}{\lambda_n^\alpha}$. Observăm că

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \lambda_n^{2\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|^2}{\lambda_n^{2\alpha}} \lambda_n^{2\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty.$$

Deoarece $T \in X^{-\alpha}$, T este o aplicaţie liniară, continuă, folosind (2.2.4), deducem că

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n t_n \right| = |T(x)| \leq \|T\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right\|_\alpha = \|T\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \lambda_n^{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Luând $a_n = y_n = x_n \lambda_n^\alpha$, şi $b_n = t_n \lambda_n^{-\alpha} \subset \mathbb{C}$, observăm că are loc inegalitatea

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} y_n b_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n t_n \right| \leq \|T\| \|x\|_\alpha = \|T\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \right|^{\frac{1}{2}} = \|T\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right|^{\frac{1}{2}},$$

adică are loc (2.2.5). Cum şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ (sau $(y_n)_{n\geq 1}$) este arbitrar în ℓ^2, conform Lemei 2.2.2, obţinem că $(t_n \lambda_n^{-\alpha})_n \in \ell^2$, deci

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 \lambda_n^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|T\| < +\infty,$$

ceea ce demonstrează (2.2.3).

Pentru a demonstra unicitatea şirului $(t_n)_{n\geq 1}$, presupunem că există şirurile $(t_n^1)_{n\geq 1}$ şi $(t_n^2)_{n\geq 1}$ astfel încât pentru orice $x \in X^\alpha$, are loc

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t_n^1 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t_n^2.$$

Dar, în particular, $T(e_n) = t_n^1 = t_n^2$, pentru orice n, ceea ce demonstrează unicitatea şirului $(t_n)_{n\geq 1}$. □

Teoremă 2.2.1. *Fie aplicaţia*

$$\mathcal{T} : X^{-\alpha} \to \boldsymbol{X}^{-\alpha} := \left\{ (t_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} \mid t_n \mid^2 \mid \lambda_n \mid^{-2\alpha} < \infty \right\},$$

cu $\mathcal{T}(T) = (t_n)_{n\geq 1}$ *definit în lema anterioară.* $\mathcal{T}$ *este un izomorfism liniar de spaţii vectoriale şi, în plus, are loc*

$$\|\mathcal{T}(T)\|_{\boldsymbol{X}^{-\alpha}} \stackrel{def}{=} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \mid t_n \mid^2 \mid \lambda_n \mid^{-2\alpha}} = \|T\|_{X^{-\alpha}}. \tag{2.2.7}$$

Demonstraţie. $\mathcal{T}$ este liniar dacă $\mathcal{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{T}(x) + \beta \mathcal{T}(y)$, pentru orice $T, S \in X^{-\alpha}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Făcând calculele, obţinem

$$\mathcal{T}(\alpha T + \beta S) = \alpha (t_n)_n + \beta (s_n)_n = \alpha \mathcal{T}(T) + \beta \mathcal{T}(S).$$

Demonstrăm bijectivitatea aplicaţiei $\mathcal{T}$. Din $\mathcal{T}(T) = 0$ obţinem $(t_n)_{n\geq 1} = 0$. Cum $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$, rezultă că $T(x) = 0$ pentru orice x. Prin urmare, $T = 0$ şi deci aplicaţia $\mathcal{T}$ este injectivă.

Considerăm $(t_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$, cu $\sum_{n=1}^{\infty} \mid t_n \mid^2 \mid \lambda_n \mid^{-2\alpha} < \infty$.

Conform Lemei 2.2.1, pentru orice şir $(t_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ există unic o aplicaţie $T \in X^{-\alpha}$ cu proprietatea

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t_n, \text{ cu } \sum_{n=1}^{\infty} \mid t_n \mid^2 \mid \lambda_n \mid^{-2\alpha} < \infty \text{ şi } x \in X^{\alpha}.$$

Deci aplicaţia $\mathcal{T}$ este surjectivă. În consecinţă aplicaţia $\mathcal{T}$ este bijectivă.

În continuare, vom demonstra (2.2.7). Cunoaştem

$$\|T\|_{X^{-\alpha}} \overset{def}{=} \sup_{x\neq 0} \frac{|T(x)|}{\|x\|_{X^{\alpha}}} = \sup_{x\neq 0} \frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n t_n\right|}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \lambda_n^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.2.8}$$

Conform inegalităţii Cauchy - Buniakovski - Schwarz[2], avem

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n t_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n^{\alpha} t_n \lambda_n^{-\alpha}\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 |\lambda_n|^{2\alpha}\right|^{\frac{1}{2}} \left|\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 |\lambda_n|^{-2\alpha}\right|^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.9}$$

Prin urmare, se obţine că

$$\frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n t_n\right|}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \lambda_n^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 |\lambda_n|^{2\alpha}\right|^{\frac{1}{2}} \left|\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 |\lambda_n|^{-2\alpha}\right|^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \lambda_n^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left|\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 |\lambda_n|^{-2\alpha}\right|^{\frac{1}{2}} \tag{2.2.10}$$

şi deci, aplicând supremum,

$$\|T\|_{X^{-\alpha}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 |\lambda_n|^{-2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.11}$$

În particular, cum $x, y \in X^0$ deoarece $X^0 \hookleftarrow X^{\alpha}$, cu $\alpha > 0$, $x_n \lambda_n^{\alpha} \in X^0$ şi $y_n \lambda_n^{-\alpha} \in X^0$ avem că

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \lambda_n^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n^{\alpha} y_n \lambda_n^{-\alpha}}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \lambda_n^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 |\lambda_n|^{-2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.12}$$

În consecinţă, din relaţiile (2.2.11) şi (2.2.12), şi aplicând supremum, se obţine relaţia

[2]Inegalitatea Cauchy - Buniakovski - Schwarz: Oricare ar fi numerele $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, cu $i = \overline{1, n}$, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|T\|_{X^{-\alpha}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 |\lambda_n|^{-2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathcal{T}(T)\|_{\mathbf{X}^{-\alpha}}.$$

$\square$

Propoziţie 2.2.1. *Fie $y \in X^{\alpha}$, cu $\alpha > 0$. Aplicaţia*

$$x \in X^{\alpha} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

este bine definită şi reprezintă un element T_y din $X^{-\alpha}$, cu $\alpha > 0$.

Demonstraţie. Aplicăm inegalitatea Cauchy - Buniakovski - Schwarz şi obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n^{\alpha} y_n \lambda_n^{-\alpha} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \lambda_n^{\alpha}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n \lambda_n^{-\alpha}|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 |\lambda_n|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \mid \lambda_n|^{-2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Deoarece $x \in X^{\alpha}$ şi $y \in X^{\alpha}$, sunt adevărate relaţiile

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 |\lambda_n|^{2\alpha} < \infty \text{ şi } \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \mid \lambda_n|^{-2\alpha} < \infty$$

În consecinţă aplicaţia $T_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n < \infty$ este bine definită.
Aplicaţia T_y este liniară deoarece pentru orice $x, z \in X^{\alpha}$ şi orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$T_y(\alpha x + \beta z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta z_n) y_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} z_n y_n = \alpha T_y(x) + \beta T_y(z).$$

Continuitatea aplicaţiei reiese din inegalitatea Cauchy - Buniakovski - Schwarz şi definiţia normelor $\|\cdot\|_{\alpha}$ şi $\|\cdot\|_{-\alpha}$:

$$|T_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 |\lambda_n|^{2\alpha}\right|^{\frac{1}{2}} \left|\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 |\lambda_n|^{-2\alpha}\right|^{\frac{1}{2}} = \|y\|_{-\alpha} \|x\|_{\alpha} = c\|x\|_{\alpha}.$$

$\square$

Ştim din (2.2.1) că dacă $\alpha > \beta \geq 0$, atunci are loc şirul de incluziuni

$$X^{\alpha} \hookrightarrow X^{\beta} \hookrightarrow X^0,$$

iar din (2.2.2), particularizând $\alpha = 0$,

$$\left(X^0\right)' := X^{-0}.$$

Teoremă 2.2.2. *[Teorema de reprezentare Riesz - Fréchet] Fiind dată aplicaţia $\varphi \in H'$, există unic $f \in H$ astfel încât*

$$< \varphi, u >= (u, f), \quad \forall x \in H. \tag{2.2.13}$$

Mai mult,

$$|f| = \|\varphi\|_{H'}.$$

2.1. Identificarea $(X^0)'$ şi X^0. Conform Teoremei 2.2.2, considerăm aplicaţia $\mathcal{F} : X^0 \to (X^0)'$, cu $\mathcal{F}(f) = T_f$, unde $f \in X^0$ dat, iar aplicaţia T_f este aplicaţia liniară şi continuă pe X^0 definită astfel

$$T_f(x) = (x, f), \ \forall\, x \in X^0. \tag{2.2.14}$$

T_f este aplicaţia liniară deoarece pentru orice $x, y \in X^0$ şi orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$T_f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y, f) = (\alpha x, f) + (\beta y, f) = \alpha(x, f) + \beta(y, f) = \alpha T_f(x) + \beta T_f(y),$$

şi continuă deoarece există $c > 0$ astfel încât

$$|T_f(x)| = |(x, f)| \leq \|x\|_{X^0} \|f\|_{X^0} = c\|x\|_{X^0},$$

inegalitate adevărată conform Inegalităţii Cauchy - Schwarz[3].

TEOREMĂ 2.2.3. *$\mathcal{F}$ este o izometrie şi un izomorfism*[4].

DEMONSTRAŢIE. $\mathcal{F}$ este izometrie deoarece pentru $f \in X^0$ dat,

$$\|\mathcal{F}(f)\| = \|T_f\| = \sup_{x \in X^0} \frac{\|T_f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X^0} \frac{|(x, f)|}{\|x\|} = \|f\|.$$

Pentru a arăta că $\mathcal{F}$ este izomorfism, arătăm ca $\mathcal{F}$ este aplicaţie liniară şi bijectivă. Mai întâi, arătăm că $\mathcal{F}$ este liniară. Pentru orice $f, g \in X^0$ date şi pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, ştim că

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = T_{\alpha f + \beta g}.$$

Cum

$$T_{\alpha f + \beta g}(x) = (x, \alpha f + \beta g) = \overline{\alpha}(x, f) + \overline{\beta}(x, g) = \overline{\alpha} T_f(x) + \overline{\beta} T_g(x),$$

rezultă că

$$T_{\alpha f + \beta g} = \overline{\alpha} T_f + \overline{\beta} T_g$$

şi prin urmare

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha}\mathcal{F}(f) + \overline{\beta}\mathcal{F}(g).$$

Apoi, arătăm că $\mathcal{F}$ este aplicaţie bijectivă. $\mathcal{F}$ este injectivă deoarece din $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$ rezultă $T_f = T_g$, deci $(x, f) = (x, g)$, pentru orice $x \in X^0$ şi, prin urmare, $f = g$. Pentru a demonstra că $\mathcal{F}$ este şi surjectivă, fie $T \in (X^0)'$. Din Teorema lui Riesz (Teorema 2.2.2), există $f \in X^0$ astfel încât

$$T(x) = (x, f) = T_f(x).$$

Prin urmare, $T = T_f = \mathcal{F}(f)$ şi deci $\mathcal{F}$ este aplicaţie surjectivă.

$\square$

[3]Inegalitatea Cauchy - Schwarz: Pentru orice vectori x şi y dintr-un spaţiu în care se defineşte un produs scalar real sau complex, are loc relaţia

$$|(x, y) \leq \|x\|\|y\|.$$

[4]În acest caz, noţiunea de morfism va presupune proprietatea

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha}\mathcal{F}(f) + \overline{\beta}\mathcal{F}(g)$$

şi nu proprietatea clasică de liniaritate.

PROPRIETATE 2.2.1. *În* $(X^0)'$ *aplicaţia*

$$(T,S)_{-0} = \left(\mathcal{F}^{-1}(T), \mathcal{F}^{-1}(S)\right)_0, \tag{2.2.15}$$

pentru orice $T,S \in (X^0)'$, *este un produs scalar care induce pe* $(X^0)'$ *o structură de spaţiu Hilbert.*

DEMONSTRAŢIE. Verificăm dacă se îndeplinesc cele patru condiţii ale produsului scalar (Definiţie 1.1.1), pentru orice $T,S,V \in (X^0)'$ şi $c \in \mathbb{C}$:

1) $(T+V,S)_{-0} = (T,S)_{-0} + (V,S)_{-0}$.
Folosind liniaritatea aplicaţiei $\mathcal{F}^{-1}$ şi liniaritatea produsului scalar din X^0, obţinem

$$(T+V,S)_{-0} = \left(\mathcal{F}^{-1}(T+V), \mathcal{F}^{-1}(S)\right)_0 = \left(\mathcal{F}^{-1}(T)+\mathcal{F}^{-1}(V), \mathcal{F}^{-1}(S)\right)_0 =$$
$$\left(\mathcal{F}^{-1}(T), \mathcal{F}^{-1}(S)\right)_0 + \left(\mathcal{F}^{-1}(V), \mathcal{F}^{-1}(S)\right)_0 = (T,S)_{-0} + (V,S)_{-0}.$$

2) $(c\cdot T,S)_{-0} = c\cdot (T,S)_{-0}$.
Folosind proprietăţile produsului scalar din X^0, obţinem că

$$(c\cdot T,S)_{-0} = \left(c\cdot\mathcal{F}^{-1}(T), \mathcal{F}^{-1}(S)\right)_0 = c\cdot\left(\mathcal{F}^{-1}(T), \mathcal{F}^{-1}(S)\right)_0 = c\cdot (T,S)_{-0}.$$

3) $(T,S)_{-0} = \overline{(S,T)_{-0}}$.
Folosind proprietăţile produsului scalar din X^0, obţinem că

$$(T,S)_{-0} = \left(\mathcal{F}^{-1}(T), \mathcal{F}^{-1}(S)\right)_0 = \overline{\left(\mathcal{F}^{-1}(S), \mathcal{F}^{-1}(T)\right)_0} = \overline{(S,T)_{-0}}.$$

4) $(T,T)_{-0} \geq 0$, cu egalitate când $T=0$.
Folosind proprietăţile produsului scalar din X^0, obţinem că

$$(T,T)_{-0} = \left(\mathcal{F}^{-1}(T), \mathcal{F}^{-1}(T)\right)_0 = \left\|\mathcal{F}^{-1}(T)\right\|_0^2 \geq 0,$$

cu egalitate când $T=0$ deoarece

$$(0,0)_{-0} = \left(\mathcal{F}^{-1}(0), \mathcal{F}^{-1}(0)\right)_0 = \left\|\mathcal{F}^{-1}(0)\right\|_0^2 = 0.$$

În continuare vom arăta că produsul scalar definit în (2.2.15) induce pe $(X^0)'$ o structură de spaţiu Hilbert, adică este complet (adică orice şir Cauchy este convergent). Aşadar, fie $(T^k)_{k\geq 1}$ şir Cauchy în spaţiul $(X^0)'$. Atunci $\mathcal{F}(T^k)$ este şir Cauchy în $(X^0)'$ şi deci există $y \in (X^0)'$ astfel încât $\mathcal{F}(T^k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Dar

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T^k)) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}^{-1}(y) = y.$$

Prin urmare, şirul $(T^k)_{k\geq 1}$ este convergent în $(X^0)'$, deci $(X^0)'$ este spaţiu Hilbert. □

Considerăm şirul $(T_{e_n})_{n\geq 1} \in (X^0)'$, obţinut din cazul particular $f = e_n$ din identificarea $(X^0)'$ şi X^0. Astfel, fiecărui element $e_n \in X^0$ îi va corespunde unic un element $T_{e_n} \in (X^0)'$, definit în felul următor:

$$T_{e_n}(x) = (x, e_n) = x_n. \tag{2.2.16}$$

TEOREMĂ 2.2.4. $T_{e_n} \in X^0$ *este bază ortonormată în* $(X^0)'$.

DEMONSTRAŢIE. Mai întâi vom arăta că $(T_{e_n})_{n\geq 1}$ este un şir de elemente din $(X^0)'$ care formează o bază în $(X^0)'$, adică pentru orice $T \in (X^0)'$, există unic un şir $(t_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ astfel încât

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} t_n T_{e_n}. \tag{2.2.17}$$

Conform Lemei (2.2.1), există un şir de scalari $(t_n)_{n\geq 1}$ astfel încât

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}t_nx_n=\sum_{n=1}^{\infty}t_nT_{e_n}(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}t_nT_{e_n}\right)(x),$$

pentru orice $x\in X^0$, ceea ce demonstrează (2.2.17). Pentru demonstrarea unicităţii, considerăm că există două şiruri de scalari, $(t_n)_{n\geq 1}$ şi $(s_n)_{n\geq 1}$, conform Lemei (2.2.1), pentru care

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}t_nT_{e_n}=\sum_{n=1}^{\infty}s_nT_{e_n}.$$

Dar în particular,

$$T(e_m)=\sum_{n=1}^{\infty}t_nT_{e_n}(e_m)=t_m$$

şi

$$T(e_m)=\sum_{n=1}^{\infty}s_nT_{e_n}(e_m)=s_m.$$

Prin urmare, $(t_n)_{n\geq 1}$ şi $(s_n)_{n\geq 1}$ coincid, ceea ce implică faptul că $(T_{e_n})_{n\geq 1}$ este o bază în spaţiul $(X^0)'$. Pentru a arăta că $(T_{e_n})_{n\geq 1}$ este şir ortonormat în $(X^0)'$, observăm că

$$(T_{e_n},T_{e_m})_{-0}=(e_n,e_m)_0=\delta_{nm},$$

unde δ_{nm} este definit în relaţia (1.3.1). În consecinţă, şirul $(T_{e_n})_{n\geq 1}$ formează o bază ortonormată în spaţiul Hilbert $(X^0)'$, înzestrat cu produsul scalar (2.2.15). $\square$

TEOREMĂ 2.2.5. *Dacă $\alpha>\beta$, atunci incluziunea $\left(X^\beta\right)'\hookrightarrow(X^\alpha)'$ (sau $X^{-\beta}\hookrightarrow X^{-\alpha}$) este continuă.*

DEMONSTRAŢIE. Din Propoziţia 2.1.1, dacă $\alpha>\beta$, atunci incluziunea $X^\alpha\hookrightarrow X^\beta$ este continuă, deci pentru orice $x\in X^\alpha$, există $c>0$ astfel încât

$$\|x\|_\beta\leq c\|x\|_\alpha. \tag{2.2.18}$$

Fie $T\in X^{-\beta}$, deci T este aplicaţie liniară şi continuă din X^β în $\mathbb{C}$, ceea ce implică existenţa unei constante $C>0$ astfel încât

$$|T(x)|\leq C\|x\|_\beta,\ \forall\ x\in X^\beta,$$

de unde folosind (2.2.18) deducem că

$$|T(x)|\leq Cc\|x\|_\alpha,\ \forall\ x\in X^\alpha$$

şi deci $T|_{X^\alpha}$ este aplicaţie liniară şi continuă din X^α în $\mathbb{C}$. Prin urmare,

$$\left(X^\beta\right)'\subset(X^\alpha)'. \tag{2.2.19}$$

Demonstrăm în continuare continuitatea incluziunii de mai sus. Folosind proprietăţile aplicaţiei T menţionate, incluziunea spaţiilor $X^\alpha\hookrightarrow X^\beta$ şi relaţia (2.2.18), avem

$$\|T\|_{X^{-\alpha}}=\|T\|_{\mathscr{L}(X^\alpha,\mathbb{C})}=\|T|_{X^\alpha}\|=\sup_{x\in X^\alpha}\frac{|Tx|}{\|x\|_\alpha}\leq$$
$$\leq\sup_{x\in X^\alpha}\frac{|Tx|}{\frac{\|x\|_\beta}{c}}\leq\sup_{x\in X^\beta}\frac{|Tx|}{\frac{\|x\|_\beta}{c}}=c\|T\|_{\mathscr{L}(X^\beta,\mathbb{C})}=c\|T\|_{X^{-\beta}}.$$

În consecinţă, am arătat că există $c>0$ astfel încât are loc

$$\|T\|_{X^{-\alpha}}\leq c\|T\|_{X^{-\beta}} \tag{2.2.20}$$

şi deci demonstraţia teoremei este încheiată.

$\square$

Teoremă 2.2.6. *Dacă $\alpha > \beta$, atunci incluziunea $\left(X^{\beta}\right)' \hookrightarrow (X^{\alpha})'$ (sau $X^{-\beta} \hookrightarrow X^{-\alpha}$) este compactă.*

Demonstraţie. Compacitatea incluziunii reiese din demonstraţia Propoziţiei 2.1.1, pentru orice $\alpha > \beta$. $\square$

Aşadar, cum $\alpha > 0 > -\beta$, am obţinut că are loc şirul de incluziuni

$$X^{\alpha} \hookrightarrow X^{0} \equiv \left(X^{0}\right)' \hookrightarrow X^{-\beta} = \left(X^{\beta}\right)'. \tag{2.2.21}$$

Vom considera în continuare, prin identificare, că $T_{e_n} = e_n$ şi prin urmare, $(e_n)_{n\geq 1}$ va fi o bază ortonormală atât în X^0 cât şi în $(X^0)'$.

Definiţie 2.2.1. *În $X^{-\beta}$ se defineşte produsul scalar*

$$(T, S)_{-\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \overline{s_n} \lambda_n^{-2\beta}, \tag{2.2.22}$$

unde $(t_n)_{n\geq 1}$ şi $(s_n)_{n\geq 1}$ sunt şirurile date de Lema 2.2.1.

Teoremă 2.2.7. *Aplicaţia dată de* (2.2.22) *defineşte un produs scalar.*

Demonstraţie. Verificăm dacă se îndeplinesc cele patru condiţii ale produsului scalar (Definiţie 1.1.1), pentru orice $T, T', S \in X^{-\beta}$ şi $a, a' \in \mathbb{C}$:

1) $(aT + a'T', S)_{-\beta} = a(T, S)_{-\beta} + a'(T', S)_{-\beta}$.
   Din Lema 2.2.1, aplicaţiilor T şi T' le corespund unic şirurile de scalari $(t_n)_{n\geq 1}$ şi respectiv$(t'_n)_{n\geq 1}$ şi deci aplicaţiei $aT + a'T'$ îi va corespunde unic şirul $a(t_n)_{n\geq 1} + a'(t'_n)_{n\geq 1}$, aşadar putem scrie

$$(aT + a'T', S)_{-\beta} = \sum_{n=1}^{\infty}(at_n + a't'_n)\overline{s_n}\lambda_n^{-2\beta} = a\sum_{n=1}^{\infty} t_n\overline{s_n}\lambda_n^{-2\beta} + \overline{a}'\sum_{n=1}^{\infty} t'_n\overline{s_n}\lambda_n^{-2\beta} =$$

$$= a(T, S)_{-\beta} + a'(T', S)_{-\beta}.$$

2) $(T, T)_{-\beta} \geq 0$, cu egalitate când $T = 0$.
   Dar $(T, T)_{-\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 \lambda_n^{-2\beta}$ şi deci $(T, T)_{-\beta} \geq 0$. Pentru orice $n \geq 1$, relaţia $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 \lambda_n^{-2\beta} = 0$ implică $t_n = 0$ şi deci $T = 0$.
3) $(T, S)_{-\beta} = \overline{(S, T)_{-\beta}}$.
   Făcând calculele, obţinem

$$(T, S)_{-\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} t_n\overline{s_n}\lambda_n^{-2\beta} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \overline{t_n} s_n \lambda_n^{-2\beta}} = \overline{(S, T)_{-\beta}}.$$

$\square$

Propoziţie 2.2.2. *$\left(X^{-\beta}, (\cdot, \cdot)_{-\beta}\right)$ este un spaţiu Hilbert.*

Demonstraţie. Fie $(T^k)_{k\geq 1}$ şir Cauchy în $X^{-\beta}$. Fiecare T^k are asociat, conform Lemei 2.2.1, câte un şir de scalari $(t_n^k)_{n\geq 1}$. Pentru fiecare $n \geq 1$, şirul $(t_n^k)_{k\geq 1}$ este şir Cauchy în $\mathbb{C}$ deoarece pentru orice $\varepsilon > 0$, există $k_\varepsilon \geq 0$ astfel încât pentru orice $k \geq k_\varepsilon$ şi $p > 0$,

$$|t_n^{k+p} - t_n^k| = \left|T^{k+p}(e_n) - T^k(e_n)\right| = \left|\left(T^{k+p} - T^k\right)(e_n)\right| \leq$$
$$\leq \left\|T^{k+p} - T^k\right\|_{-\beta} \|e_n\|_{-\beta} = \frac{1}{\lambda_n^\beta}\|T^{k+p} - T^k\| < \frac{\varepsilon\lambda_n^\beta}{\lambda_n^\beta} = \varepsilon.$$

Prin urmare, $t_n^k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} t_n$, pentru orice $n \geq 1$. În continuare demonstrăm că $T^k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} T$ în $X^{-\beta}$, unde T este acel element din $X^{-\beta}$ care are în corespondenţă, conform Lemei 2.2.1, şirul $(t_n)_{n\geq 1}$. Mai întâi, demonstrăm că T este un element din $X^{-\beta}$, ceea ce revine la a arăta că

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 \lambda_n^{-2\beta} < \infty. \tag{2.2.23}$$

Ştim că pentru orice $k \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n^k|^2 \lambda_n^{-2\beta} < \infty.$$

Trecând la limită în relaţia de mai sus cu $k \to \infty$, obţinem relaţia (2.2.23), aşadar $T = \mathcal{T}^{-1}((t_n)_{n\geq 1})$ din Teorema 2.2.9.

Cunoaştem că

$$\|T^k - T\|_{-\beta}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(t_n^k - t_n)^2 \lambda_n^{-2\beta}.$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar ales. Există $n_\varepsilon \geq 1$ astfel încât

$$\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} (t_n^k - t_n)^2 \lambda_n^{-2\beta} < \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{2.2.24}$$

Cum $t_n^k \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} t_n$ când $k \to \infty$, există $k_\varepsilon^n \geq 1$ astfel încât dacă $k \geq k_\varepsilon^n$,

$$|t_n^k - t_n| < \frac{\varepsilon}{\lambda_n^{-\beta}\sqrt{2n_\varepsilon}}.$$

Fie $k_\varepsilon = \max\limits_{1\leq n\leq n_\varepsilon} k_\varepsilon^n$. Pentru $k \geq k_\varepsilon$, avem că

$$\sum_{n=1}^{n_\varepsilon}(t_n^k - t_n)^2 \lambda_n^{-2\beta} < \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\lambda_n^{-\beta}\sqrt{2n_\varepsilon}} \lambda_n^{-2\beta}. \tag{2.2.25}$$

Din (2.2.24) şi (2.2.25) obţinem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $k_\varepsilon \geq 1$ astfel încât

$$\sum_{n=1}^{\infty}(t_n^k - t_n)^2 \lambda_n^{-2\beta} < \varepsilon^2$$

pentru orice $k \geq k_\varepsilon$, ceea ce implică

$$\|T^k - T\|^2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Lemă 2.2.3. *$(e_n)_{n\geq 1}$ baza ortonormată a lui $(X^0)'$ este bază ortogonală în $X^{-\beta}$, pentru orice $\beta \geq 0$.*

Remarcă 2.2.1. *Dacă $x \in X^{-\beta}$, atunci există un unic şir de scalari $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n e_n}{\|e_n\|_{-\beta}}. \tag{2.2.26}$$

Teoremă 2.2.8.

$$(A^{\alpha})^{*} : \left(X^{0}\right)^{'} \to \left(X^{\alpha}\right)^{'} \tag{2.2.27}$$

este izometrie şi izomorfism.

Demonstraţie. Conform Teoremei 2.1.2, operatorul $A^{\alpha} : X^{\alpha} \to X^{0}$ este un izomorfism izometric. Prin urmare, demonstraţia teoremei este evidentă[5]. □

5

Teoremă 2.2.9. *Fie X şi Y sunt două spaţii Hilbert. Dacă $T : X \to Y$ este un izomorfism izometric, atunci $T^{*} : Y' \to X'$ este, de asemenea, un izomorfism izometric.*

CAPITOLUL 3

Activitate experimentală

1. Funcţia delta (Funcţia lui Dirac)

Funcţia delta (funcţia δ) sau funcţia lui Dirac, numită de-a lungul timpului funcţie generalizată sau distribuţie, a fost introdusă de matematicianul Paul Dirac. Funcţia poate fi definită ca o funcţie ce are valoarea 0 pe tot domeniul ei de definiţie, cu excepţia originii, unde este infinită:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x = 0 \\ 0, & \textit{dacă } x \neq 0, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

cu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \tag{3.1.2}$$

Funcţia delta poate fi reprezentată ca o limită a funcţiei Lorentzians:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}, \tag{3.1.3}$$

sau ca o limită a funcţiei lui Gauss:

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.1.4}$$

O proprietate importantă a funcţiei delta este următoarea:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0), \tag{3.1.5}$$

pentru orice funcţie f(x). Demonstraţia relaţiei reiese în mod evident. Funcţia delta este 0 pentru $x \neq 0$, prin urmare putem lua orice valoare pentru funcţia $f(x)$ când x=0, deci putem lua $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$. Cum $f(0)$ este o valoare constantă, iese în faţa integralei şi, prin urmare, obţinem relaţia (3.1.5). Această relaţie se poate generaliza în felul următor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0). \tag{3.1.6}$$

În continuare, exemplificăm funcţia delta printr-un exercitiu.

Exerciţiu 1. *Se dă funcţia* $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$*, definită astfel:*

$$f_n(x) = \begin{cases} (x + \frac{1}{n})n^2, & x \in [-\frac{1}{n}, 0] \\ (\frac{1}{n} - x)n^2, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in [-1, 1]. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Dată orice funcţie continuă $\varphi \in C[-1, 1]$*, este cantitatea* $\int_{-1}^{1} f_n(x)\varphi(x)dx \in \mathbb{R}$ *convergentă când* $n \to \infty$ *? Unde este convergentă?*

Rezolvare 1. *Presupunem că* $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *în* $L^1(-1,1)$. *Verificăm dacă*

$$\int_{-1}^{1} f_n(x)\varphi(x)dx \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)dx. \tag{3.1.8}$$

Conform a doua teoremă de medie[1], *cum* $f_n(x) \geq 0$, *pentru orice* $x \in [-1,1]$, *există* $\xi_n \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ *astfel încat*

$$\int_{-1}^{1} f_n(x)\varphi(x)dx = \varphi(\xi_n)\int_{-1}^{1} f_n(x)dx.$$

Cum $\xi_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *obţinem că* $\varphi(\xi_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0)$ *şi din* $\int_{-1}^{1} f_n(x)dx = 1$ *obţinem*

$$\int_{-1}^{1} f_n(x)\varphi(x)dx \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0). \tag{3.1.9}$$

Prin urmare, din (3.1.8) *şi* (3.1.9) *ar rezulta*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0). \tag{3.1.10}$$

Demonstrăm în continuare, folosind metoda reducerii la absurd, că nu există o funcţie $f \in L^1(-1,1)$ *astfel încât să aibe loc relaţia* (3.1.10), *pentru orice* $\varphi \in C[-1,1]$.

Cum $\varphi \in C[-1,1]$, *obţinem că* $\overline{supp\ \varphi} \subset (-1,0)$ *şi deci* $\varphi(0) = 0$. *Conform Lemei fundamentale a calculului variaţional*[2], *din* $\int_{-1}^{0} f(x)\varphi(x)dx = 0$ *rezultă* $f = 0$ *a.p.t. în* $(-1,0)$. *Analog, cum* $\varphi \in C[-1,1]$, *obţinem că* $\overline{supp\ \varphi} \subset (0,1)$ *şi deci* $\varphi(0) = 0$. *Conform Lemei fundamentale a calculului variaţional, din* $\int_{0}^{1} f(x)\varphi(x)dx = 0$ *rezultă* $f = 0$ *a.p.t. în* $(0,1)$. *Prin urmare,* $f = 0$ *a.p.t. în* $(-1,1)$, *pentru orice* $\varphi \in C[-1,1]$, *contradicţie.*

2. Ecuaţia căldurii

Considerăm ecuaţia căldurii 1-dimensională:

$$u_t - u_{xx} = 0, \tag{3.2.1}$$

cu soluţia $u = u(t,x)$.

Definim funcţia $\varphi_h : \mathbb{R} \to [0, \frac{1}{h}]$,

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} \left|\frac{1}{h^2}\left|x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{h}\right|, & \text{dacă } \left|x - \frac{1}{2}\right| < h \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

1

Teoremă 3.1.1 (A doua teoremă de medie). *Fie* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *două funcţii continue, cu* $g(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$. *Atunci există* $\xi \in [a,b]$ *atfel încât*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

2

Teoremă 3.1.2 (Lema fundamentală a calculului variaţional). *Dacă* $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0$, *pentru orice* $\varphi \in C_C^\infty(a,b)$, *atunci* $f = 0$ *a.p.t. în (a,b).*

Considerăm ecuaţia (3.2.1) cu data iniţială definită în felul următor:

$$u(0) = \lim_{h\to 0}\int_0^1 \varphi_h(x)f(x)dx = f\left(\frac{1}{2}\right) = \delta_{\frac{1}{2}}(f), \tag{3.2.3}$$

unde $\delta_{\frac{1}{2}} \in X^{-\frac{1}{2}}$.

Implementarea funcţiei φ_h în Matlab este următoarea:

```
function rez=u0(x,h)
if abs(x-1/2)<h
    rez=abs(abs(x-1/2)/h^2-1/h);
else
    rez=0;
end;
```

În continuare vom rezolva ecuaţia căldurii folosind metoda Euler înainte. Considerăm $h = \frac{1}{N+1}$ pasul de discretizare spaţială, cu $N \in \mathbb{N}^*$ şi $x_i = ih$, cu $0 \le i \le N+1$, şi $k = \frac{T}{P}$ pasul de discretizare temporală, deci $t_n = nk$, cu $0 \le n \le P$, $P \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, relaţia (3.2.1) se rescrie sub forma următoare:

$$\frac{u(t+k,x)-u(t,x)}{k} - \frac{u(t,x+h)+u(t,x-h)-2u(t,x)}{h^2} = 0 \tag{3.2.4}$$

sau, echivalent,

$$u(n,j) = u(n-1,j) + \frac{k}{h^2}(u(n-1,j+1) - 2u(n-1,j) + u(n-1,j-1)). \tag{3.2.5}$$

Schema Euler înainte este convergentă dacă $k < \frac{1}{2}h^2$. Vom spune că schema este condiţional stabilă şi deci condiţional convergentă. În condiţia de convergenţă a schemei, eroarea este de ordin h^2.

O reprezentare grafică a soluţiei ecuaţiei căldurii rezolvată prin schema Euler înainte este dată de următorul cod descris în programul Matlab:

```
T=1;
N=99;
P=300000;
k=T/P;
h=1/(N+1);
x=h:h:(1-h);
t=0:k:T;
for j=1:N
    u(1,j)=u0(x(j),h);
end;
plot(x,u(1,:));
for n=2:P
    for j=2:(N-1)
        u(n,j)=u(n-1,j)+k/h^2*(u(n-1,j+1)-2*u(n-1,j)+u(n-1,j-1));
    end;
    u(n,1)=u(n-1,1)+k/h^2*(u(n-1,2)-2*u(n-1,1));
    u(n,N)=u(n-1,N)+k/h^2*(-2*u(n-1,N)+u(n-1,N-1));
    plot(x,u(n,:))
```

```
        axis([0 1 -1 1/h]);
        pause(0.0001)
end;
```

Data iniţială a ecuaţiei căldurii reprezentată de soluţia funcţiei $\varphi_h(x)$ este ilustrată în următorul grafic:

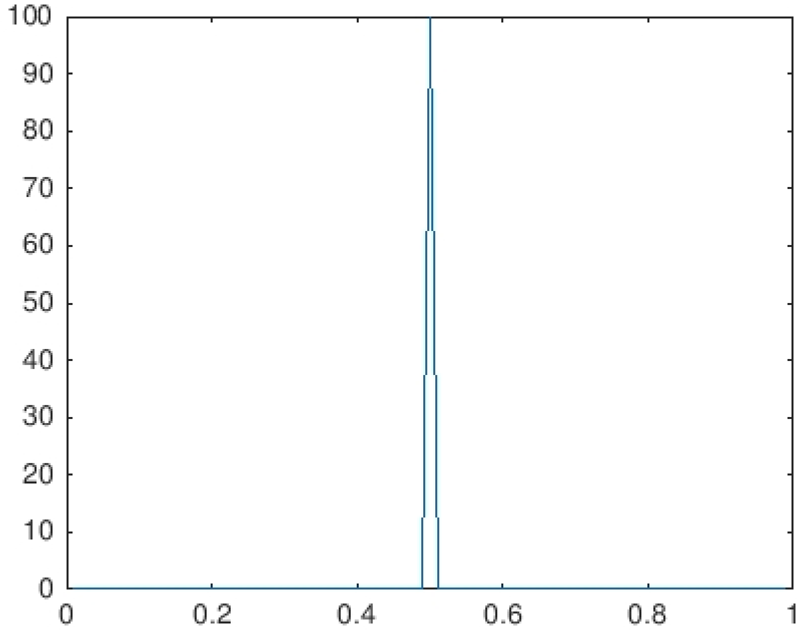

Fig. 1

După $n = 10$ paşi, soluţia ecuaţiei căldurii devine:

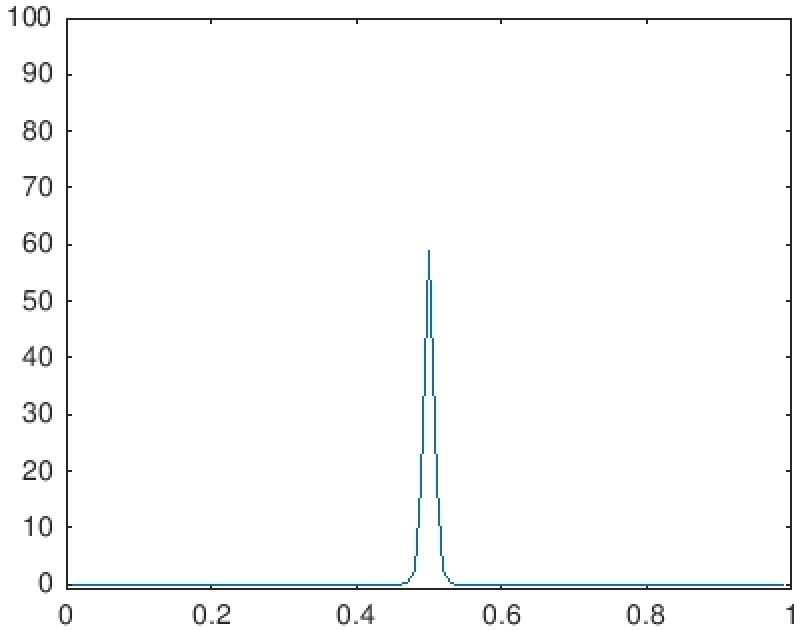

Fig. 2

După $n = 100$ paşi, soluţia ecuaţiei căldurii devine:

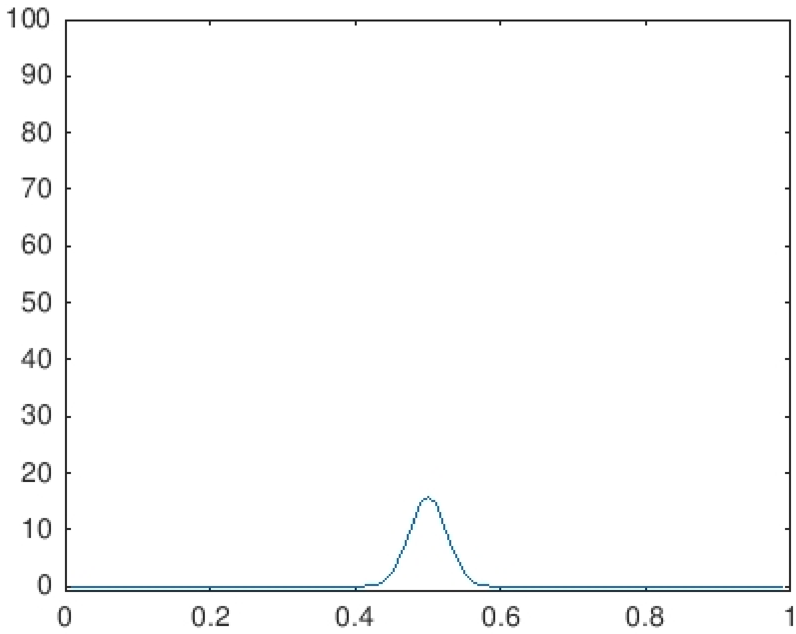

Fig. 3

După $n = 1000$ paşi, soluţia ecuaţiei căldurii devine:

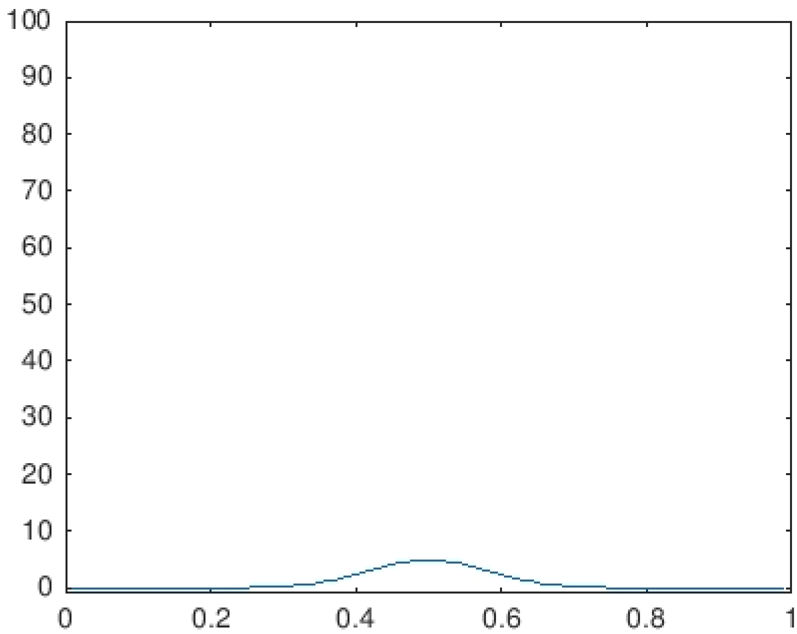

Fig. 4

În concluzie, folosind metoda Euler înainte, soluţia ecuaţiei căldurii trece printr- un proces de regularizare.

Bibliografie

1. Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Editura Springer, 2011.
2. Balakrishnan, V., *All about the Dirac Delta Function (?)* , în *Resonance*, vol. 8, Editura Springer, august 2003, pp 48-58.
3. Niculescu P. Constantin, *Probleme speciale de analiză funcţională*, Editura Universitaria Press, Craiova, 2005.
4. Rodriguez, A., *Note de curs*, Universidad Complutense de Madrid, Spania, 24 aprilie 1997.
5. Triff, T., *Analiză matematică 2. Calcul diferenţial în* $\mathbb{R}^n$, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj Napoca, 2003.