Logika rozmyta, wykład 2

Joanna Jędrzejowicz

Instytut Informatyki

Motywacje

Pojęcia nieprecyzyjne, np

- wysoka temperatura,
- dobry uczeń,
- duże miasto
- ..

klasyczna teoria zbiorów i logika nie wystarczają do opisu

Lofti A. Zadeh 1965 Teoria zbiorów rozmytych

Zbiór rozmyty - definicja

Zbiór rozmyty w przestrzeni X

Zbiór rozmyty jest zbiorem par $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$, gdzie $\mu_A : X \to [0, 1]$ jest funkcją przynależności zbioru rozmytego.

Jeżeli $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ to zbiór rozmyty zapisuje się:

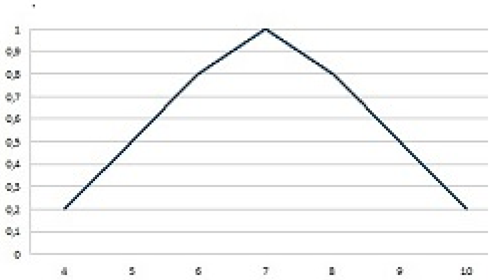
$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$$

uwaga: teoria zbiorów rozmytych opisuje niepewność, nie prawdopodobieństwo

Przykład

Określamy pojęcie zbioru liczb naturalnych 'bliskich 7'. definiujemy zbiór rozmyty

$$A = \frac{0.2}{4} + \frac{0.5}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0.8}{8} + \frac{0.5}{9} + \frac{0.2}{10}$$



Zadanie

zadanie: zdefiniować zbiór rozmyty odpowiadający pojęciu 'temperatura w Bałtyku odpowiednia do kąpieli'.

Przykłady standardowych funkcji przynależnosci

- Funkcja singleton

$$\mu_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{jezeli } x = \bar{x} \\ 0 & \text{w przeciwnym przyp} \end{cases}$$

- Gaussowska funkcja przynależnosci, $\bar{x}$ - środek, σ-szerokosc krzywej

$$\mu_A(x) = \exp(-(\frac{x - \bar{x}}{\sigma})^2)$$

- funkcja przynależnosci typu dzwonowego, a - szerokosc, b - nachylenie, c - środek

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + |\frac{x-c}{a}|^{2b}}$$

Przykłady standardowych funkcji przynależnosci, cd

- funkcja klasy s

$$s(x;a,b,c) = \begin{cases} 0 & \text{jezeli } x \leq a \\ 2(\frac{x-a}{c-a})^2 & \text{dla } a < x \leq b \\ 1 - 2(\frac{x-c}{c-a})^2 & \text{dla } b < x \leq c \\ 1 & \text{dla } x > c \end{cases}$$

gdzie $b = \frac{a+c}{2}$

- funkcja przynależnosci klasy Π

$$\Pi(x;b,c) = \begin{cases} s(x;c-b,c-\frac{b}{2},c) & \text{jezeli } x \leq c \\ 1 - s(x;c,c+\frac{b}{2},c+b) & \text{dla } x > c \end{cases}$$

Nośnik i wysokość zbioru rozmytego

Nośnik zbioru rozmytego

Zbiór elementów przestrzeni X, dla których $\mu_A(x) > 0$ nazywamy nośnikiem zbioru rozmytego i oznaczamy *suppA*

$$suppA = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}$$

Wysokość zbioru rozmytego

Wysokość zbioru rozmytego A

$$h(A) = sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

W przykładzie $suppA = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ oraz $h(A) = 1$.

Operacje na zbiorach rozmytych

Przecięciem zbiorów rozmytych A, $B \subset X$ jest zbiór rozmyty $A \cap B$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{A \cap B} = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Sumą zbiorów rozmytych A, $B \subset X$ jest zbiór rozmyty $A \cup B$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{A \cup B} = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Przykład

Załóżmy, że $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ oraz

$$A = \frac{0.9}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.6}{6}$$

$$B = \frac{0.7}{3} + \frac{1}{5} + \frac{0.4}{6}$$

wtedy

$$A \cap B = \frac{0.7}{3} + \frac{0.4}{6}$$

$$A \cup B = \frac{0.9}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.6}{6}$$

Normy

Operacje przeciecia i sumy można definiowac także ogólniej przy pomocy tzw. norm

$$\mu_{A \cap B} = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

gdzie T jest t-normą (np. $T(x, y) = min(x, y)$)

Warunki dla norm

Norma $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ spełnia nast. warunki:

- funkcja T jest niemalejaca względem obu argumentów

$$T(a,c) \leq T(b,d) \; a \leq b, c \leq d$$

Warunki dla norm

Norma $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ spełnia nast. warunki:

- funkcja T jest niemalejaca względem obu argumentów

$$T(a,c) \leq T(b,d) \; a \leq b, c \leq d$$

- spełnia warunek przemienności

$$T(a,b) = T(b,a)$$

Warunki dla norm

Norma $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ spełnia nast. warunki:

- funkcja T jest niemalejaca względem obu argumentów

$$T(a,c) \leq T(b,d) \; a \leq b, c \leq d$$

- spełnia warunek przemienności

$$T(a,b) = T(b,a)$$

- spełnia warunek łączności

$$T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$$

Warunki dla norm

Norma $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ spełnia nast. warunki:

- funkcja T jest niemalejaca względem obu argumentów

$$T(a,c) \leq T(b,d) \; a \leq b, c \leq d$$

- spełnia warunek przemienności

$$T(a,b) = T(b,a)$$

- spełnia warunek łączności

$$T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$$

- spełnia warunek brzegowy

$$T(a,1) = a$$

skad wynika $T(a,0) = 0$ bo
$T(a,0) = T(0,a) \leq T(0,1) = 0$

Relacje rozmyte

Relacje rozmyte mogą formalizować pojęcia takie jak 'x prawie równe y', 'x znacznie większy od y' itd

$$R \subset X \times Y,\ \mu_R : X \times Y \to [0,1]$$

Przykład. Definiujemy relację R 'y prawie równe x' dla $X = \{3,4,5\},\ Y = \{4,5,6\}$

$$\begin{aligned} R \quad = \quad & \frac{1}{(4,4)} + \frac{1}{(5,5)} + \frac{0.8}{(3,4)} + \frac{0.8}{(4,5)} \\ & + \frac{0.8}{(5,4)} + \frac{0.8}{(5,6)} + \frac{0.6}{(3,5)} + \frac{0.6}{(4,6)} + \frac{0.4}{(3,6)} \end{aligned}$$

Złożenie relacji rozmytych

Złożeniem relacji rozmytych $R \subset X \times Y$ oraz $S \subset Y \times Z$ jest relacja rozmyta $R \circ S \subset X \times Y$ z funkcją przynależnosci

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = sup_{y \in Y} T(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))$$

gdzie T jest normą.

Złożenie relacji rozmytych

Złożeniem relacji rozmytych $R \subset X \times Y$ oraz $S \subset Y \times Z$ jest relacja rozmyta $R \circ S \subset X \times Y$ z funkcją przynależnosci

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = sup_{y \in Y} T(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))$$

gdzie T jest normą.
Złożenie zbioru rozmytego $A \subset X$ i relacji rozmytej $R \subset X \times Y$ oznaczamy $A \circ R$ i definiujemy jako zbiór rozmyty $B \subset Y$ z funkcją przynależnosci

$$\mu_{A \circ R}(y) = sup_{x \in X} T(\mu_A(x), \mu_R(x.y))$$

Zmienne lingwistyczne

Zmienna lingwistyczna jest czwórką postaci (N, T, X, M_N) gdzie

N- nazwa zmiennej, np. prędkosć samochodu

T - zbiór wartosci zmiennej, np (duża, srednia, mała)

X - przestrzeń rozważań

M_N funkcja semantyczna, która każdej wartosci $t \in T$ przyporządkowuje funkcję przynależnosci

Rozmyte reguły wnioskowania

Reguła *modus ponens* w logice dwuwartościowej:
przesłanka: A,
implikacja: $A \to B$,
wniosek: B

Rozmyte reguły wnioskowania

Reguła *modus ponens* w logice dwuwartościowej:
przesłanka: A,
implikacja: $A \to B$,
wniosek: B
Przypadek rozmyty: zakładamy, że A i B odpowiadają pewne zbiory rozmyte, funkcja przynależnosci $\mu_{A\to B}(x, y)$ rozmytej implikacji $A \to B$ jest równoważna pewnej relacji rozmytej $R \subset X \times Y$ z funkcją przynależnosci

$$\mu_{A\to B}(x, y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

gdzie T jest normą,

Rozmyte reguły wnioskowania, cd

Najczęściej używane reguły dla rozmytej implkacji:

1. $$\mu_{A\to B}(x,y) = min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

2. $$\mu_{A\to B}(x,y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$$

3. $$\mu_{A\to B}(x,y) = min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y))$$

4. $$\mu_{A\to B}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{jesli } \mu_A(x) \le \mu_B(y) \\ 0 & \text{jesli } \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases}$$

Rozmyte reguły wnioskowania, cd

Wniosek reguły rozmytej odnosi się do pewnego zbioru rozmytego B', który jest okreslony przez złożenie zbioru rozmytego A' i rozmytej implikacji $A \to B$

$$B' = A' \circ A \to B$$

Rozmyte reguły wnioskowania, przykład

przeslanka: Prędkosc samochodu jest duża
implikacja: Jeżeli prędkosc samochodu jest bardzo duża, to poziom hałasu jest wysoki
wniosek : Poziom hałasu jest srednio wysoki.

Rozmyte reguły wnioskowania, przykład

przeslanka: Prędkosc samochodu jest duża
implikacja: Jeżeli prędkosc samochodu jest bardzo duża, to poziom hałasu jest wysoki
wniosek : Poziom hałasu jest srednio wysoki.
Zmienne lingwistyczne:
x- prędkość samochodu, y-poziom hałasu,
Zbiory rozmyte:
A-bardzo duża prędkość samochodu, A'-duża prędkość samochodu, B- wysoki poziom hałasu, B'- srednio wysoki poziom hałasu (wniosek z przesłanki)

Rozmyte reguły wnioskowania, przykład

przeslanka: Prędkosc samochodu jest duża (A')
implikacja: Jeżeli prędkosc samochodu jest bardzo duża (A), to poziom hałasu jest wysoki (B)
wniosek : Poziom hałasu jest srednio wysoki (B').

Rozmyte reguły wnioskowania, przykład

przeslanka: Prędkosc samochodu jest duża (A')
implikacja: Jeżeli prędkosc samochodu jest bardzo duża (A), to poziom hałasu jest wysoki (B)
wniosek : Poziom hałasu jest srednio wysoki (B').
Jesli przyjąć

$$\mu_{A \to B}(x, y) = min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

to

$$\mu_{B'}(y) = max_{x \in X} min(\mu'_A(x), min(\mu_A(x), \mu_B(y)))$$

Zastosowanie - podejmowanie decyzji w otoczeniu rozmytym

Dany jest pewien zbiór opcji (wyborów) X_{op}. Cel rozmyty G jest określony przy pomocy funkcji przynależnosci μ_G, ktora dla kazdego $x \in X_{op}$ okresla stopień przynależności opcji do zbioru rozmytego. Ponadto, dane jest ograniczenie rozmyte C dane przy pomocy funkcji przynależności μ_C.
Decyzja rozmyta $D = G \cap C$ jest interpretowana jako 'osiągnąć G i spełnić C' , przy czym

$$\mu_D(x) = T(\mu_G(x), \mu_C(x))$$

gdzie T jest normą. Poszukuje się decyzji maksymalizujacej μ_D.

Zastosowanie - podejmowanie decyzji w otoczeniu rozmytym

Dany jest pewien zbiór opcji (wyborów) X_{op}. Cel rozmyty G jest określony przy pomocy funkcji przynależnosci μ_G, ktora dla kazdego $x \in X_{op}$ okresla stopień przynależności opcji do zbioru rozmytego. Ponadto, dane jest ograniczenie rozmyte C dane przy pomocy funkcji przynależności μ_C.
Decyzja rozmyta $D = G \cap C$ jest interpretowana jako 'osiągnąć G i spełnić C' , przy czym

$$\mu_D(x) = T(\mu_G(x), \mu_C(x))$$

gdzie T jest normą. Poszukuje się decyzji maksymalizujacej μ_D.
Uwaga. Czesto $G = G_1 \cap \cdots \cap G_n$ jest wiele celów i wiele ograniczeń $C = C_1 \cap \cdots \cap C_m$

Przykład - polityka zatrudnienia

W firmie jest konkurs na stanowisko asystenta dyrektora. Dla kandydatów ustalono następujące kryteria oceny:

- G_1 - doświadczenie,
- G_2 - obsługa programów biurowych,
- G_3 - młody wiek,
- G_4 - znajomość języków obcych

Kandydaci x_1, x_2, x_3, x_4 sa oceniani z punktu widzenia celów G_1, G_2, G_3, G_4 oraz spełnienia ograniczenia C związanego z gotowoscią kandydatów do zaakceptowania oferowanego wynagrodzenia.

Przykład - polityka zatrudnienia, cd

Załóżmy, ze zbiory rozmyte odpowiadające poszczególnym kryteriom sa następujące

- $G_1 = \frac{0.7}{x_1} + \frac{0.2}{x_2} + \frac{0.5}{x_3} + \frac{0.3}{x_4}$,
- $G_2 = \frac{0.8}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{0.5}{x_3} + \frac{0.2}{x_4}$,
- $G_3 = \frac{0.7}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{0.5}{x_4}$,
- $G_4 = \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.7}{x_3} + \frac{0.8}{x_4}$
- $C = \frac{0.3}{x_1} + \frac{0.4}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{0.9}{x_4}$

Decyzja D jest

$$D = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \cap C$$

Przykład - polityka zatrudnienia, cd

Załóżmy, ze zbiory rozmyte odpowiadające poszczególnym kryteriom sa następujące

- $G_1 = \frac{0.7}{x_1} + \frac{0.2}{x_2} + \frac{0.5}{x_3} + \frac{0.3}{x_4}$,
- $G_2 = \frac{0.8}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{0.5}{x_3} + \frac{0.2}{x_4}$,
- $G_3 = \frac{0.7}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{0.5}{x_4}$,
- $G_4 = \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.7}{x_3} + \frac{0.8}{x_4}$
- $C = \frac{0.3}{x_1} + \frac{0.4}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{0.9}{x_4}$

Decyzja D jest

$$D = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \cap C$$

otrzymujemy

$$D = \frac{0.3}{x_1} + \frac{0.2}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{0.2}{x_4}$$

wygrywa kandydat oznaczony x_3.

Przykład - ocena studentów

Firma ufundowała praktyki dla najlepszych studentów. Atrybut 'najlepszy' jest opisany przy pomocy zmiennych lingwistycznych, oddzielnie dla przedmiotów ścisłych (NS) oraz języków (NJ).

$$\mu_{NS}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 2 \leq x \leq 4.3 \\ \frac{x-4.3}{0.5} & \text{dla } 4.3 \leq x \leq 4.8 \\ 1 & \text{dla } 4.8 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$\mu_{NJ}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 2 \leq x \leq 4.2 \\ \frac{x-4.2}{0.4} & \text{dla } 4.2 \leq x \leq 4.6 \\ 1 & \text{dla } 4.6 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Przykład - ocena studentów, cd

Sześciu studentów otrzymało nastepujace oceny:

stud	elektr	infor	mat	ang	niem
x_1	4.8 1	5.0 1	4.7 0.8	4.3 0.25	4.7 1
x_2	4.4 0.2	4.7 0.8	4.8 1	4.4 0.5	4.40.5
x_3	4.9 1	4.9 1	4.6 0.6	4.71	4.30.25
x_4	4.5 0.4	4.8 1	4.9 1	5 1	4.5 0.75
x_5	5 1	4.6 0.6	4.7 0.8	4.4 0.5	5.0 1
x_6	4.9 1	4.5 0.4	5.0 1	4.5 0.75	4.40.5

na czerwono zaznaczono wartosci funkcji przynależnosci

Przykład - ocena studentów, cd

zbiory rozmyte odpowiadające kolejnym przedmiotom:

$$G_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{0.2}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{0.4}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_6}$$

$$G_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{0.6}{x_5} + \frac{0.4}{x_6}$$

$$G_3 = \frac{0.8}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{0.8}{x_5} + \frac{1}{x_6}$$

$$G_4 = \frac{0.25}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{0.5}{x_5} + \frac{0.75}{x_6}$$

$$G_5 = \frac{1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.25}{x_3} + \frac{0.75}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{0.5}{x_6}$$

Przykład - ocena studentów, cd

Podstawiając $D = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \cap G_5$
Decyzja rozmyta typu minimum jest

$$D = \frac{0.25}{x_1} + \frac{0.2}{x_2} + \frac{0.25}{x_3} + \frac{0.4}{x_4} + \frac{0.5}{x_5} + \frac{0.4}{x_6}$$

Student x_5 charakteryzuje się największym stopniem przynależnosci i zostanie wybrany.