

# Technische Mechanik II



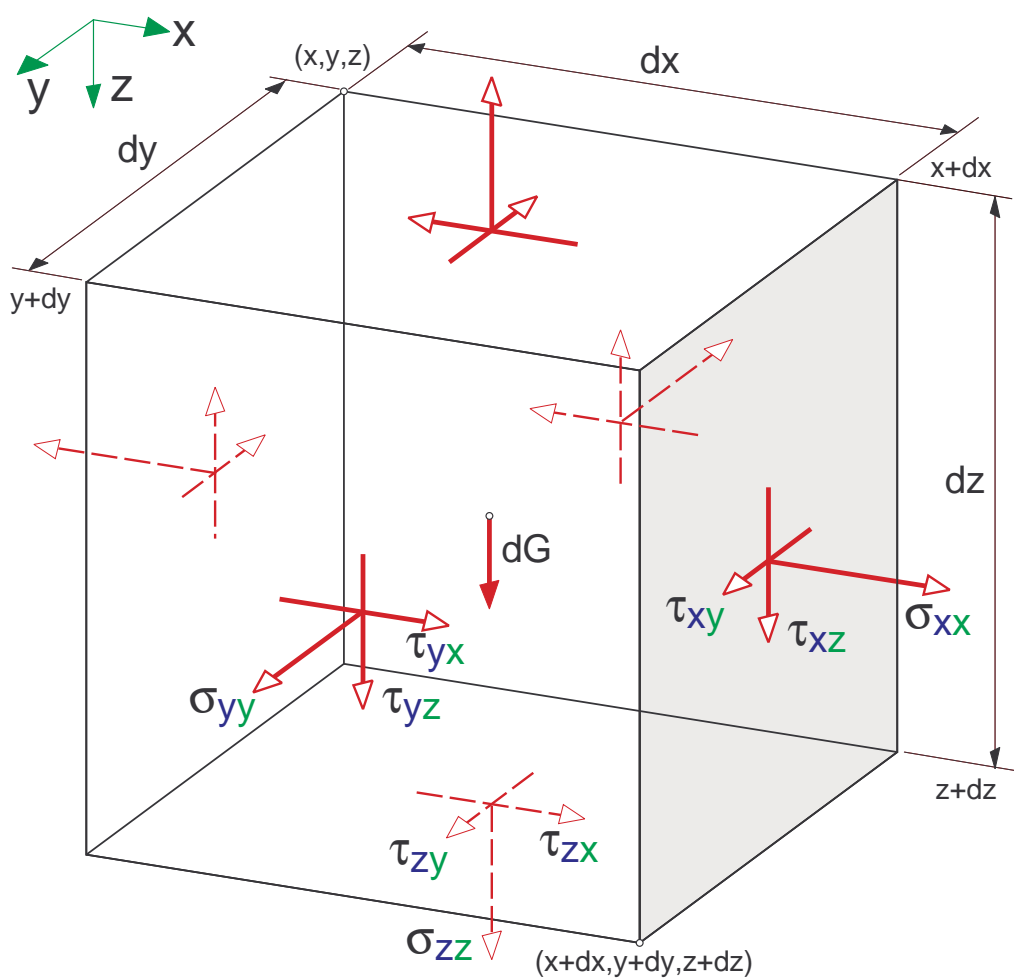
OSTBAYERISCHE  
TECHNISCHE HOCHSCHULE  
REGENSBURG

MASCHINENBAU

VORLESUNGSSKRIPT

Prof. Dr. Georg Rill

© Oktober 2015



download unter: <https://hps.hs-regensburg.de/rig39165/>



# Inhalt

<b>1</b>	<b>Grundgleichungen der Elasto-Statik</b>	<b>1</b>
1.1	Modellvorstellung . . . . .	1
1.2	Spannungen . . . . .	1
1.2.1	Formale Definition . . . . .	1
1.2.2	Gleichgewicht . . . . .	1
1.2.3	Der Spannungstensor . . . . .	2
1.2.3.1	Definition . . . . .	2
1.2.3.2	Hauptspannungen . . . . .	3
1.2.3.3	Beispiel . . . . .	3
1.3	Verformungen . . . . .	3
1.3.1	Verschiebungen und Verzerrungen . . . . .	3
1.3.2	Dehnungen . . . . .	4
1.3.3	Verzerrungen . . . . .	4
1.3.4	Der Verzerrungstensor . . . . .	5
1.3.5	Volumenänderung . . . . .	5
1.4	Materialgesetz . . . . .	5
1.4.1	Querdehnung . . . . .	5
1.4.2	Allgemeines Hookesches Gesetz . . . . .	6
1.4.3	Kompressionsmodul . . . . .	6
1.5	Übungen . . . . .	7
1.5.1	Ebener Spannungszustand . . . . .	7
1.5.2	Elastomer Lager . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Einfache Belastungsfälle</b>	<b>8</b>
2.1	Äquivalenzbeziehungen . . . . .	8
2.2	Zug- und Druck . . . . .	8
2.2.1	Spannungsansatz . . . . .	8
2.2.2	Verformungen . . . . .	9
2.2.3	Beispiel Rotorblatt . . . . .	9
2.2.4	Beispiel Wärmedehnung . . . . .	9
2.3	Reine Biegung um y-Achse . . . . .	10
2.3.1	Spannungsansatz . . . . .	10
2.3.2	Flächenmomente 2. Grades . . . . .	11
2.4	Gerade Biegung . . . . .	12
2.4.1	Normalspannung . . . . .	12
2.4.2	Verformungen . . . . .	12
2.5	Technische Biegelehre . . . . .	13
2.5.1	Die Euler-Bernoulli-Hypothese . . . . .	13
2.5.2	Ansatz von Euler und Bernoulli . . . . .	13
2.5.3	Biegelinie . . . . .	14
2.6	Katalog einfacher Biege-Belastungen . . . . .	15
2.6.1	Einspannung mit Einzelkraft . . . . .	15
2.6.2	Einspannung mit Streckenlast . . . . .	16
2.6.3	Einspannung mit Moment . . . . .	16
2.6.4	Gelenkige Lagerung mit Einzelkraft . . . . .	16
2.6.5	Gelenkige Lagerung mit Streckenlast . . . . .	16

2.6.6	Gelenkige Lagerung mit Moment . . . . .	16
2.7	Torsion kreiszyklindrischer Wellen . . . . .	17
2.7.1	Belastungsbeispiel . . . . .	17
2.7.2	Schubspannungs-Ansatz . . . . .	17
2.7.3	Polares Flächenmoment . . . . .	17
2.7.4	Maximale Schubspannung . . . . .	18
2.7.5	Verwindung oder Drillung . . . . .	18
2.7.6	Verdrehung . . . . .	18
2.7.7	Beispiel . . . . .	19
2.7.8	Kreiszyklindrische Rohre . . . . .	19
2.8	Übungen . . . . .	20
2.8.1	Einfacher Gitterrost . . . . .	20
2.8.2	Kompensationspendel . . . . .	20
2.8.3	Draht unter Eigengewicht . . . . .	20
2.8.4	Vierpunkt-Biegung . . . . .	21
2.8.5	Pinzette . . . . .	21
2.8.6	Hohlwelle . . . . .	21
2.8.7	Bohrgestänge . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Statisch überbestimmte Systeme</b>	<b>22</b>
3.1	Motivation . . . . .	22
3.2	Beispiele . . . . .	22
3.2.1	Zusätzliche Strebe . . . . .	22
3.2.2	Zusätzliches Lager . . . . .	22
3.3	Lösungsschritte . . . . .	22
3.3.1	Teilsysteme . . . . .	22
3.3.2	Lineare Superposition . . . . .	23
3.3.2.1	Spindelpresse . . . . .	23
3.3.2.2	Lagerung . . . . .	23
3.3.3	Kompatibilität . . . . .	24
3.3.3.1	Spindelpresse . . . . .	24
3.3.3.2	Lagerung . . . . .	24
3.4	Übungen . . . . .	25
3.4.1	Gelenk-Träger . . . . .	25
3.4.2	Träger mit Abspannseil . . . . .	25
3.4.3	Bretter über Grube . . . . .	25
3.4.4	Rahmen-Träger . . . . .	25
3.4.5	Welle mit Rohr . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Knickung</b>	<b>26</b>
4.1	Vorbemerkung . . . . .	26
4.2	Exzentrische Krafteinleitung . . . . .	26
4.2.1	Gleichgewicht am unverformten Bauteil . . . . .	26
4.2.2	Gleichgewicht am verformten Bauteil . . . . .	27
4.3	Knickfälle nach Euler . . . . .	28
4.4	Knickspannung . . . . .	28
4.5	Übungen . . . . .	29
4.5.1	Förderband . . . . .	29
4.5.2	Wärmedehnung . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Schiefe Biegung</b>	<b>30</b>
5.1	Motivation und Belastungsszenario . . . . .	30
5.2	Normalspannung . . . . .	30
5.2.1	Ansatz . . . . .	30

5.2.2	Neutrale Faser . . . . .	31
5.2.3	Beispiel . . . . .	31
5.3	Flächenmomente 2. Grades . . . . .	32
5.3.1	Definition . . . . .	32
5.3.2	Zusammengesetzte Querschnitte . . . . .	32
5.3.2.1	Beispiel Z-Profil . . . . .	32
5.3.2.2	Koordinatentransformation . . . . .	33
5.3.2.3	Ergebnis Z-Profil . . . . .	34
5.3.3	Hauptachsensystem . . . . .	34
5.3.3.1	Bestimmungsgleichungen . . . . .	34
5.3.3.2	Beispiel gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck . . . . .	35
5.3.3.3	Beispiel Z-Profil . . . . .	35
5.3.4	Widerstandsmomente . . . . .	36
5.4	Schubspannungen . . . . .	36
5.4.1	Ansatz . . . . .	36
5.4.2	Beispiel Rechteckquerschnitt . . . . .	37
5.5	Verformungen . . . . .	38
5.5.1	Vorüberlegung . . . . .	38
5.5.2	Biegelinie . . . . .	39
5.5.2.1	Differentialgleichungen . . . . .	39
5.5.2.2	Randbedingungen . . . . .	40
5.5.2.3	Aufteilung in Biegung und Schub . . . . .	40
5.5.2.4	Längs- und Querverformung . . . . .	40
5.6	Beispiel . . . . .	41
5.6.1	Aufgabenstellung . . . . .	41
5.6.2	Beanspruchungen . . . . .	41
5.6.3	Spannungen . . . . .	41
5.6.4	Biegelinie . . . . .	42
5.6.4.1	Verformungen in der xy-Ebene . . . . .	42
5.6.4.2	Verformungen in der xz-Ebene . . . . .	43
5.7	Übungen . . . . .	44
5.7.1	Bauteil mit Nutquerschnitt . . . . .	44
5.7.2	Flächenmomente . . . . .	44
5.7.3	Blattfeder . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Allgemeine Torsion</b> . . . . .	<b>46</b>
6.1	Belastungen und Spannungen . . . . .	46
6.2	Kreiszyllindrische Rohre . . . . .	46
6.3	Dünnwandig geschlossene Profile . . . . .	47
6.3.1	Schubspannung . . . . .	47
6.3.2	Verformungen . . . . .	48
6.3.3	Torsions-Flächenmoment . . . . .	50
6.4	Schmale Rechteckquerschnitte . . . . .	50
6.4.1	Unterteilung in Hohlquerschnitte . . . . .	50
6.4.2	Schubspannungen . . . . .	50
6.4.3	Verwindung . . . . .	51
6.5	Dünnwandig offene Querschnitte . . . . .	51
6.5.1	Prinzipielles Vorgehen . . . . .	51
6.5.2	Schubspannung . . . . .	52
6.5.3	Verformung . . . . .	52
6.5.4	Vergleich offen geschlossen . . . . .	52
6.6	Torsion und Biegung . . . . .	53
6.6.1	Allgemeines . . . . .	53
6.6.2	Beispiel . . . . .	53

6.6.3	Spannungen aus der Biegebelastung . . . . .	53
6.6.4	Statisches Moment der Restfläche . . . . .	55
6.6.5	Schubspannungsverlauf . . . . .	55
6.6.6	Momentenwirkung und Schubmittelpunkt . . . . .	56
6.6.7	Verformungen . . . . .	56
6.6.8	Verallgemeinerung . . . . .	57
6.7	Übungen . . . . .	58
6.7.1	Zusammengesetztes Bauteil . . . . .	58
6.7.2	Verkehrssampel . . . . .	58
6.7.3	Seilwinde . . . . .	58
6.7.4	Kragträger . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Rotationssymmetrische Belastungen</b>	<b>60</b>
7.1	Grundgleichungen . . . . .	60
7.1.1	Belastungen . . . . .	60
7.1.2	Spannungen . . . . .	60
7.1.3	Verformungen . . . . .	61
7.1.4	Linear elastisches Materialverhalten . . . . .	61
7.2	Rohre und Behälter unter Innen- und Außendruck . . . . .	62
7.3	Dünnwandige Rohre . . . . .	63
7.3.1	Rotierend . . . . .	63
7.3.2	Unter Innen- und Außendruck . . . . .	63
7.4	Übungen . . . . .	65
7.4.1	Schwunzscheibe mit Ring . . . . .	65
7.4.2	Behälter . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Spannungs- und Verformungszustände</b>	<b>66</b>
8.1	Der zweiachsige Spannungszustand . . . . .	66
8.1.1	Beispiel . . . . .	66
8.1.2	Spannungen für verschiedene Schnittrichtungen . . . . .	66
8.1.3	Hauptspannungen . . . . .	67
8.1.4	Maximale Schubspannungen . . . . .	67
8.1.5	Der Mohrsche Spannungskreis . . . . .	67
8.2	Vergleichsspannungen . . . . .	68
8.2.1	Bauteildimensionierung . . . . .	68
8.2.2	Spannungsorientiert . . . . .	68
8.2.2.1	Die Normalspannungshypothese . . . . .	68
8.2.2.2	Die Schubspannungshypothese . . . . .	69
8.2.3	Verformungsorientiert . . . . .	69
8.2.3.1	Formänderungsarbeit . . . . .	69
8.2.3.2	Gestaltänderungshypothese . . . . .	70
8.3	Der zweiachsige Verformungszustand . . . . .	70
8.3.1	Grundgleichungen . . . . .	70
8.3.2	Auswertung gemessener Dehnungen . . . . .	71
8.4	Übungen . . . . .	72
8.4.1	Hohlprofil . . . . .	72
8.4.2	T-Profil . . . . .	72
8.4.3	Dehnmessrosette . . . . .	72

# 1 Grundgleichungen der Elasto-Statik

## 1.1 Modellvorstellung

In der Technischen Mechanik II oder der Festigkeitslehre steht das Modell des festen Körpers im Vordergrund. Der feste Körper ist zwar deformierbar, aber die Verformungen bleiben im Vergleich zu den Abmessungen des Körpers so klein, dass die Gleichgewichtsbeziehungen in der Regel für das unverformte Bauteil angeschrieben werden können. Stabilitätsprobleme wie das Durchschnappen von Mechanismen, das Knicken dünner Stäbe oder das Beulen dünnwandiger Bauteile bilden Ausnahmen und müssen dann gesondert behandelt werden.

## 1.2 Spannungen

### 1.2.1 Formale Definition

Schnittkräfte unterteilt man entsprechend ihrer Orientierung in Normal- und Querkräfte. Analog dazu unterscheidet man bei den Spannungen zwischen Normal- und Schubspannungen. Normalspannungen  $\sigma$  wirken senkrecht zur Schnittfläche und die mit  $\tau$  bezeichneten Schubspannungen liegen in der Schnittfläche. Die Vorzeichendefinition erfolgt analog zu den Schnittreaktionen jeweils am positiven Schnittufer. Die Spannungen werden entsprechend der Schnitt- und ihrer Wirkrichtung durch jeweils zwei Indizes bezeichnet, Bild 1.1.

Ein Schnitt senkrecht zur  $x$ -Achse hat die Normalspannung  $\sigma_{xx}$  in Richtung der  $x$ -Achse sowie mit  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$  Schubspannungen in Richtung der  $y$ - und  $z$ -Achse zur Folge.

Dementsprechend treten die Spannungen  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{yx}$  und  $\tau_{yz}$  in einem Schnitt senkrecht zur  $y$ -Achse auf. Und ein Schnitt senkrecht zur  $z$ -Achse hat die Spannungen  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{zx}$  und  $\tau_{zy}$  zur Folge.

Der in Bild 1.1 dargestellte infinitesimale Quader mit den Kantenlängen  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  befindet sich an der Stelle  $(x, y, z)$ . Die Schnittflächen mit positivem Schnittufer liegen an den Stellen  $x + dx$ ,  $y + dy$  und  $z + dz$ . An den negativen Schnittufern sind die Spannungspfeile nicht

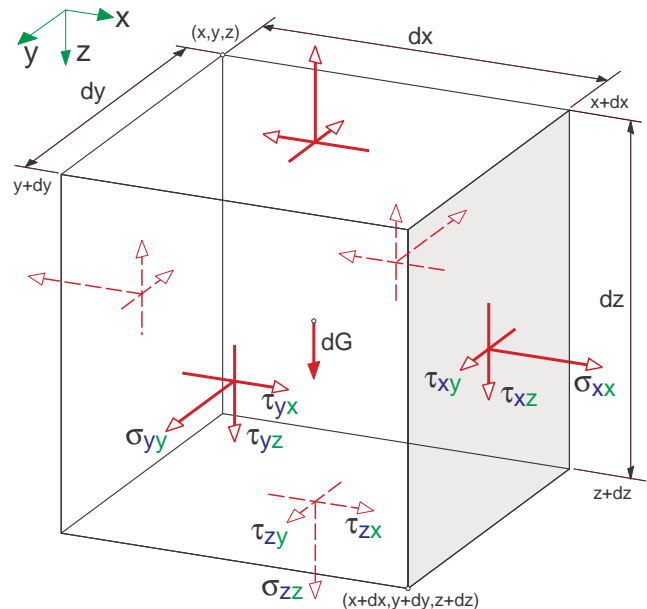


Bild 1.1: Normal- und Schub-Spannungen am infinitesimalen Element

bezeichnet. Das Koordinatensystem ist so ausgerichtet, dass das Eigengewicht

$$dG = \rho g dV = \rho g dx dy dz \quad (1.1)$$

in Richtung der  $z$ -Achse wirkt. Da alle Abmessungen hier in  $mm$  gemessen werden, die Erdbeschleunigung  $g$  allerdings weiterhin in  $m/s^2$  angegeben wird, muss die Dichte  $\rho$  hier in  $kg/mm^3$  eingesetzt werden.

### 1.2.2 Gleichgewicht

Um das Schnittprinzip anwenden zu können, müssen die Spannungen durch Multiplikation mit den infinitesimal kleinen Schnittflächen in Schnittkräfte umgewandelt werden.

Das Momentengleichgewicht um eine Achse parallel zur  $x$ -Achse durch die Mitte des infinitesimalen Quaders liefert dann

$$\frac{1}{2} dy (\tau_{yz}(x, y, z) + \tau_{yz}(x, y + dy, z)) dA_y - \frac{1}{2} dz (\tau_{zy}(x, y, z) + \tau_{zy}(x, y, z + dz)) dA_z = 0 \quad (1.2)$$

wobei die Schubspannungen  $\tau_{yz}$  und  $\tau_{zy}$  multipliziert mit den Flächen

$$dA_y = dx dz \quad \text{und} \quad dA_z = dx dy \quad (1.3)$$

zu Schnittkräften werden, die dann mit den Hebelarmen  $\frac{1}{2}dy$  und  $\frac{1}{2}dz$  multipliziert die Momentenanteile ergeben. Die aus den Normalspannungen resultierenden Schnittkräfte haben bezüglich der Quadermitte keine Momentenwirkung.

Die Schubspannungen  $\tau_{yz}(x, y+dy, z)$ ,  $\tau_{zy}(x, y, z+dz)$  werden nun in eine Taylor-Reihe entwickelt, wobei Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden. Damit erhält man

$$\begin{aligned}\tau_{yz}(x, y+dy, z) &\approx \tau_{yz}(x, y, z) + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial y} dy \\ \tau_{zy}(x, y, z+dz) &\approx \tau_{zy}(x, y, z) + \frac{\partial \tau_{zy}(x, y, z)}{\partial z} dz\end{aligned}\quad (1.4)$$

wobei partielle Ableitungen erforderlich sind, da die Spannungen ja Funktionen von  $x$ ,  $y$  und  $z$  sind, die Änderung aber jeweils nur in eine Koordinatenrichtung betrachtet wird. In (1.2) eingesetzt bleibt unter Berücksichtigung von (1.3)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \left( 2 \tau_{yz}(x, y, z) + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dy dz \\ &- \frac{1}{2} \left( 2 \tau_{zy}(x, y, z) + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy dz = 0\end{aligned}\quad (1.5)$$

Da die partiellen Ableitungen mit den infinitesimal kleinen Abmessungen  $dy$  und  $dz$  multipliziert werden, können diese Terme gegenüber den Spannungen  $\tau_{yz}(x, y, z)$  und  $\tau_{zy}(x, y, z)$  vernachlässigt werden. Es bleibt dann

$$\tau_{yz}(x, y, z) - \tau_{zy}(x, y, z) = 0 \quad (1.6)$$

Ähnliche Beziehungen erhält man aus den restlichen Momentensummen. Die Ergebnisse können im Satz der zugeordneten Schubspannungen

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(x, y, z) &= \tau_{yx}(x, y, z) \\ \tau_{yz}(x, y, z) &= \tau_{zy}(x, y, z) \\ \tau_{zx}(x, y, z) &= \tau_{xz}(x, y, z)\end{aligned}\quad (1.7)$$

zusammengefasst werden.

Das Kräftegleichgewicht in  $x$ -Richtung liefert

$$\begin{aligned}&(\sigma_{xx}(x+dx, y, z) - \sigma_{xx}(x, y, z)) dA_x \\ &+ (\tau_{yx}(x, y+dy, z) - \tau_{yx}(x, y, z)) dA_y \\ &+ (\tau_{zx}(x, y, z+dz) - \tau_{zx}(x, y, z)) dA_z = 0\end{aligned}\quad (1.8)$$

wobei die infinitesimalen Schnittflächen durch  $dA_x = dydz$ ,  $dA_y = dx dz$ , und  $dA_z = dx dy$  gegeben sind. Die Spannungen an den positiven Schnittufern  $\sigma_{xx}(x+dx, y, z)$ ,  $\tau_{yx}(x, y+dy, z)$  und  $\tau_{zx}(x, y, z+dz)$  können nun wieder analog zu (1.4) durch die beiden ersten Glieder

einer Taylor-Reihe approximiert werden. Dann lautet (1.8)

$$\left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz + \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dz dx + \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy = 0 \quad (1.9)$$

Nach Ausklammern des Volumenelement  $dV = dx dy dz$  bleibt

$$\left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz = 0 \quad (1.10)$$

Da die Abmessungen des infinitesimalen Quaders zwar klein aber endlich sind, muss der Ausdruck in den runden Klammern verschwinden. Berücksichtigt man noch die Gleichgewichtsbeziehungen in  $y$ - und  $z$ -Richtung, dann erhält man mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= -\rho g\end{aligned}\quad (1.11)$$

drei gekoppelte partielle Differentialgleichungen, die die Spannungsänderungen innerhalb eines festen Körpers beschreiben. Da die Gleichgewichtsbeziehungen auf das Volumenelement  $dV = dx dy dz$  bezogen sind, reduziert sich die in  $z$ -Richtung wirkende Gewichtskraft  $dG$  auf den Ausdruck  $\rho g$ .

Die partiellen Differentialgleichungen können allerdings nur in Sonderfällen mit geeigneten Vereinfachungen analytisch gelöst werden.

## 1.2.3 Der Spannungstensor

### 1.2.3.1 Definition

Wegen (1.7) wird der räumliche Spannungszustand durch drei Normal- und drei Schubspannungen vollständig charakterisiert. Diese können im symmetrischen  $3 \times 3$ -Spannungstensor zusammengefasst werden

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Die Spannungen sind jedoch abhängig von der gewählten Schnitttrichtung.



### 1.2.3.2 Hauptspannungen

Es gibt stets drei aufeinander senkrechte Schnittrichtungen bei denen der Spannungstensor dann nur noch auf der Hauptdiagonalen besetzt ist

$$\bar{\bar{\sigma}}_S = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Schnitt-richtungen}]{\text{geeignet gedrehte}} \bar{\bar{\sigma}}_H = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Die durch Komma abgetrennten Indizes kennzeichnen mit  $S$  Schnitte in einem beliebigen Koordinatensystem und mit  $H$  Schnitte im Hauptachsensystem. Die Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma_3$  sowie die durch Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  gekennzeichneten Hauptspannungsrichtungen sind nicht-triviale Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$(\bar{\bar{\sigma}}_S - \sigma E) \vec{e} = \vec{0} \quad (1.14)$$

wobei  $E$  eine  $3 \times 3$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Das Eigenwertproblem (1.14) hat eine nicht triviale Lösung, wenn

$$\det |\bar{\bar{\sigma}}_S - \sigma E| = 0 \quad (1.15)$$

erfüllt ist. Die Bedingung (1.15) führt auf ein charakteristische Polynom, dessen Nullstellen die Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma_3$  liefern.

Die maximale Hauptspannung

$$\sigma_M = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (1.16)$$

kann dann für die Dimensionierung des Bauteils verwendet werden.

### 1.2.3.3 Beispiel

Nimmt man an, dass ein Bauteil in der  $x$ - $y$ -Ebenen lediglich durch die Schubspannung  $\tau_{xy}$  beansprucht wird, dann hat das homogene Gleichungssystem (1.14) die Form

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} \vec{e} = \vec{0} \quad (1.17)$$

Die notwendige Bedingung für eine Lösung

$$\det \begin{vmatrix} -\sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1.18)$$

führt auf ein Polynom 3. Grades

$$-\sigma^3 + \sigma \tau_{xy}^2 = 0 \quad (1.19)$$

das sofort die Hauptspannungen

$$\sigma_{1,2} = \pm \tau_{xy} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = 0 \quad (1.20)$$

liefert. Die homogenen Gleichungssysteme

$$\begin{bmatrix} \mp \tau_{xy} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \mp \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & \mp \tau_{xy} \end{bmatrix} \vec{e}_{1,2} = \vec{0} \quad (1.21)$$

und

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{e}_3 = \vec{0} \quad (1.22)$$

liefern dann die Hauptspannungsrichtungen, die hier durch die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

festgelegt sind. Die Richtungen der Hauptspannungen  $\sigma_1 = +\tau_{xy}$  und  $\sigma_2 = -\tau_{xy}$  sind hier also um  $45^\circ$  gegenüber den ursprünglichen Koordinatenachsen  $e_x = [1 \ 0 \ 0]^T$  und  $e_y = [0 \ 1 \ 0]^T$  gedreht.

## 1.3 Verformungen

### 1.3.1 Verschiebungen und Verzerrungen

Die Verformungen eines festen Körpers werden von einem fest mit dem unverformten Körper verbundenen Koordinatensystem aus beobachtet. Dadurch können die „Starrkörperbewegungen“ eliminiert werden. Da die Eckpunkte des Volumenelements  $dV = dx dy dz$  bei der Verformung eines festen Körpers im allgemeinen unterschiedlich verschoben werden, kommt es auch zu Verzerrungen, Bild 1.2.

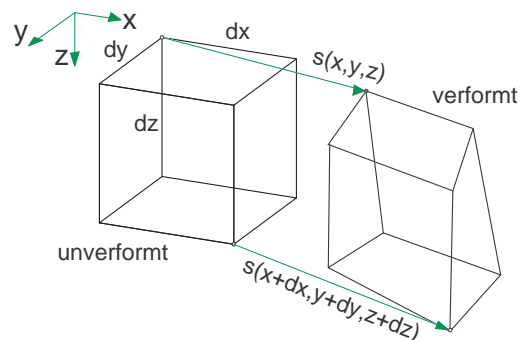


Bild 1.2: Verformungen am Volumenelement

Der Vektor  $\vec{s}$  mit den Komponenten  $u$ ,  $v$  und  $w$  beschreibt die Verschiebungen einzelner Punkte. Gibt

$$\vec{s}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

die Verschiebungen an der Stelle  $x$ ,  $y$ ,  $z$  an, dann kann der Verschiebungsvektor an benachbarten Stellen über eine Taylor-Reihe, die nach dem linearen Glied abgebrochen wird, angenähert werden. So beschreibt dann

$$\vec{s}_{x+dx,y,z} = \vec{s}_{x,y,z} + \frac{\partial \vec{s}_{x,y,z}}{\partial x} dx \quad (1.25)$$

Verschiebung an der Stelle  $(x + dx, y, z)$  und

$$\begin{aligned} \vec{s}_{x+dx,y+dy,z+dz} = \\ \vec{s}_{x,y,z} + \frac{\partial \vec{s}_{x,y,z}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{s}_{x,y,z}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{s}_{x,y,z}}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (1.26)$$

gibt Verschiebung an der Stelle  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  an. Der Verschiebungsgradient

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{s}_{x,y,z}}{\partial x} & \frac{\partial \vec{s}_{x,y,z}}{\partial y} & \frac{\partial \vec{s}_{x,y,z}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

fasst alle erforderlichen partiellen Ableitungen zusammen.

### 1.3.2 Dehnungen

Die Längenänderung eines Elements bezogen auf die unverformte Länge gibt die Dehnung  $\epsilon$  an. Die Eckpunkte  $(x, y, z)$  und  $(x + dx, y, z)$  legen eine Elementkante mit der unverformten Länge  $dx$  fest. Mit den  $x$ -Komponenten der in (1.24) und (1.25) angegebenen Verschiebungsvektoren ist die Dehnung in  $x$ -Richtung durch

$$\epsilon_x = \frac{u(x+dx, y, z) - u(x, y, z)}{dx} \quad (1.28)$$

definiert. In erster Näherung bleibt dann

$$\epsilon_x = \frac{u(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u(x, y, z)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.29)$$

Analog dazu geben dann

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.30)$$

die Dehnungen in  $y$ - und  $z$ -Richtung an.

### 1.3.3 Verzerrungen

Die Verzerrung  $\gamma_{xy}$  beschreibt die Winkeländerung des Volumenelements in der  $xy$ -Ebene, Bild 1.3.

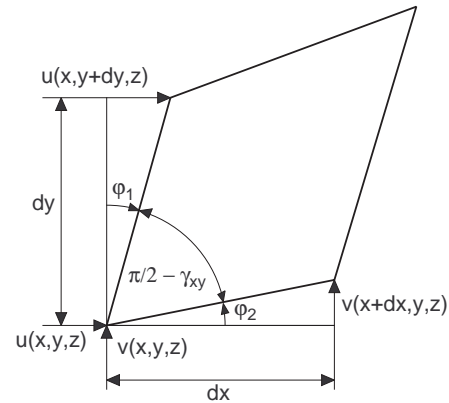


Bild 1.3: Winkeländerung in der  $xy$ -Ebene

Sie setzt sich aus zwei Anteilen zusammen

$$\gamma_{xy} = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (1.31)$$

Für kleine Winkel  $\varphi_1 \ll 1$  und  $\varphi_2 \ll 1$  gilt in erster Näherung

$$\varphi_1 = \frac{u(x, y+dy, z) - u(x, y, z)}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.32)$$

und

$$\varphi_2 = \frac{v(x+dx, y, z) - v(x, y, z)}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.33)$$

in (1.31) eingesetzt erhält man somit

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.34)$$

Analog dazu findet man für die Verzerrungen in der  $xz$ - und  $yz$ -Ebene die Beziehungen und

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.35)$$

und

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.36)$$

Genauso wie die Dehnungen können also auch die Verzerrungen über partiellen Ableitungen der Komponenten des Verschiebungsvektors berechnet werden.

### 1.3.4 Der Verzerrungstensor

Das gesamte Deformationsverhalten eines festen Körpers kann durch den symmetrischen Deformator oder Verzerrungstensor

$$\bar{\bar{D}} = \bar{\bar{D}}^T = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

beschrieben werden. Die Dehnungen  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  und die Verzerrungen  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  können dabei gemäß (1.29), (1.30) und (1.34) bis (1.36) aus den partiellen Ableitungen des Verschiebungsvektors ermittelt werden. Ein Vergleich mit (1.27) zeigt, dass der Verzerrungstensor  $D$  über

$$\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2} (H + H^T) \quad (1.38)$$

direkt aus dem Verschiebungsgradient  $H$  bestimmt werden kann. Genau wie beim Spannungstensor werden die Dehnungen und Verzerrungen von der Richtung der Koordinatenachsen beeinflusst. Auch hier gibt es ein Hauptachsensystem, in dem die Verzerrungen verschwinden und das gesamte Deformationsverhalten durch die Hauptdehnungen  $\epsilon_1, \epsilon_2$  und  $\epsilon_3$  charakterisiert wird. Auf Grund der Symmetrie des Verzerrungstensors und der Orthogonalität der Koordinatensysteme gilt der wichtige Zusammenhang<sup>1</sup>

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (1.39)$$

Die Summe der Dehnungen ist damit unabhängig von der Koordinatenrichtung.

### 1.3.5 Volumenänderung

Die Deformation eines festen Körpers kann durch die Hauptdehnungen  $\epsilon_1, \epsilon_2$  und  $\epsilon_3$  vollständig beschrieben werden, Bild 1.4.

Das Volumenelement mit den Abmessungen  $dx, dy$  und  $dz$  hat nach der Deformation die Kantenlängen  $dx + \epsilon_1 dx, dy + \epsilon_2 dy$  und  $dz + \epsilon_3 dz$ . Die Volumenänderung ist dann durch

$$\Delta V = (1 + \epsilon_1) dx (1 + \epsilon_2) dy (1 + \epsilon_3) dz - dx dy dz \quad (1.40)$$

gegeben. Auf das anfängliche Volumen  $V_0 = dx dy dz$  bezogen erhält man

$$\frac{\Delta V}{V_0} = (1 + \epsilon_1) (1 + \epsilon_2) (1 + \epsilon_3) - 1 \quad (1.41)$$

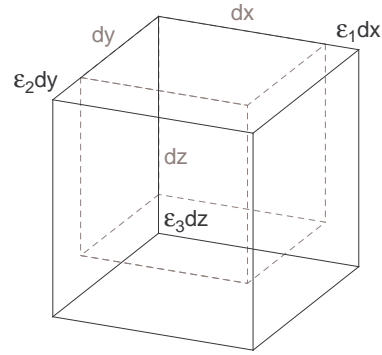


Bild 1.4: Volumenänderung

Ausmultipliziert bleibt

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 - 1. \quad (1.42)$$

Bei kleinen Dehnungen  $\epsilon_1 \ll 1, \epsilon_2 \ll 1$  und  $\epsilon_3 \ll 1$  können Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden und man erhält

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_V \quad (1.43)$$

Auf Grund der Invarianzbeziehung (1.39) ist die spezifische Volumenänderung oder die Volumendilatation eines festen Körpers auch durch

$$\epsilon_V = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (1.44)$$

gegeben. Die Verzerrungen  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}$  und  $\gamma_{yz}$  haben also im Rahmen dieser linearen Betrachtung keine Volumenänderung zur Folge.

## 1.4 Materialgesetz

### 1.4.1 Querdehnung

Beim Zugversuch stellt man neben der Längenänderung  $\Delta L$  auch eine Veränderung des Durchmessers fest, Bild 1.5.

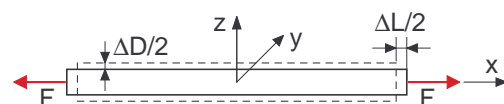


Bild 1.5: Querkontraktion

Der einachsige Spannungszustand mit  $\sigma_{xx} = F/A$  führt also zu Dehnungen in allen drei Raumrichtungen. Im

<sup>1</sup>Invariante des Verzerrungstensors

linear-elastischen Bereich liefert das Hookesche Materialgesetz mit

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_x \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_{xx} \quad (1.45)$$

den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung in Belastungsrichtung. Die Dehnungen quer zur Belastungsrichtung sind bei isotropen Materialien gleich und auf Grund des linear-elastischen Werkstoffverhalten proportional zur Dehnung in Belastungsrichtung. Mit  $\nu$  als Querdehnzahl und (1.45) erhält man dann

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \quad (1.46)$$

wobei das Minuszeichen berücksichtigt, dass bei Zugbelastung mit der Vergrößerung der Länge ( $\epsilon_x > 0$ ) eine Verringerung des Durchmessers ( $\epsilon_y < 0$ ,  $\epsilon_z < 0$ ) einhergeht.

### 1.4.2 Allgemeines Hookesches Gesetz

Analog zu (1.46) erzeugen die Spannungen  $\sigma_{yy}$  und  $\sigma_{zz}$  ebenfalls entsprechenden Dehnungen in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung. Berücksichtigt man ferner noch näherungsweise den Einfluss der Temperatur  $T$ , dann erhält man das allgemeine Hookesche Gesetz in der Form

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] + \alpha_T \Delta T \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \right] + \alpha_T \Delta T \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] + \alpha_T \Delta T \end{aligned} \quad (1.47)$$

wobei  $\alpha_T$  der Wärmeausdehnungskoeffizient mit der Dimension  $[1/K]$  ist und  $\Delta T = T - T_0$  die Änderung der Temperatur  $T$  gegenüber einem Referenzwert  $T_0$  angibt. Bei  $T = T_0$  ist das Material spannungs- und dehnungsfrei. Da in (1.47) nur die Temperaturdifferenz benötigt wird, können  $T$  und  $T_0$  sowohl nach Kelvin  $[K]$  als auch nach Celsius  $[^\circ C]$  gemessen werden. Bei großen Temperaturänderungen verändern sich auch die Materialkennwerte mit der Temperatur  $E = E(T)$  und  $\nu = \nu(T)$ . Bei Kunststoffen macht sich dieser Einfluss schon bei geringen Temperaturänderungen bemerkbar.

Bei gegebenen Dehnungen, die z.B. durch Messungen ermittelt wurden, kann (1.47) auch nach den Spannungen aufgelöst werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha_T \Delta T \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \epsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha_T \Delta T \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha_T \Delta T \end{aligned} \quad (1.48)$$

Temperaturänderungen haben in der Regel keine Verzerrungen zur Folge. Bei genügend kleinen Deformationen sind die Verzerrungen  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  und  $\gamma_{yz}$  proportional zu den entsprechenden Schubspannungen  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  und  $\tau_{yz}$ . Analog zu (1.45) gilt deshalb

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} & \text{bzw.} & \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} & & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (1.49)$$

wobei  $G$  als Schubmodul bezeichnet wird. Über

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.50)$$

sind die drei Materialkonstanten, der Elastizitätsmodul  $E$ , die Querdehnzahl  $\nu$  und der Schubmodul  $G$ , miteinander verknüpft.

### 1.4.3 Kompressionsmodul

Mit dem Materialgesetz kann die Volumendilatation auf den Spannungszustand zurückgeführt werden. Mit (1.47) lautet (1.44)

$$\begin{aligned} \epsilon_V &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] + \alpha_T \Delta T \\ &+ \frac{1}{E} \left[ \sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \right] + \alpha_T \Delta T \\ &+ \frac{1}{E} \left[ \sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] + \alpha_T \Delta T \\ &= \frac{1}{E} (1-2\nu) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + 3\alpha_T \Delta T \end{aligned} \quad (1.51)$$

Mit der mittleren Spannung

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (1.52)$$

bleibt

$$\epsilon_V = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_m + 3\alpha_T \Delta T = \frac{1}{K} \sigma_m + 3\alpha_T \Delta T \quad (1.53)$$

Die Proportionalitätskonstante

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (1.54)$$

wird als Kompressionsmodul bezeichnet. Bei einer Querdehnzahl  $\nu \rightarrow 0.5$  wird das Material inkompressibel, da der dann unendlich große Kompressionsmodul  $K \rightarrow \infty$  bei beliebigen aber endlichen Belastungen mit  $\epsilon_V \rightarrow 0$  eine verschwindende Volumenänderung bei der Referenztemperatur  $T = T_0$  zur Folge hat. Der Wert  $\nu = 0.5$  stellt somit eine Obergrenze für die Querdehnzahl dar. Da bei Stahl die Querdehnzahl bei  $\nu_{\text{Fe}} \approx \frac{1}{3}$  liegt, erhält man hier in etwa gleiche Werte für den Elastizitäts- und Kompressionsmodul,  $K_{\text{Fe}} \approx E_{\text{Fe}}$ . Silizium dagegen kommt mit  $\nu_{\text{Si}} = 0.45$  einem inkompressiblen Materialverhalten sehr nahe.

## 1.5 Übungen

### 1.5.1 Ebener Spannungszustand

Der Spannungstensor

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

beschreibt einen allgemeinen Spannungszustand in der  $x$ - $y$ -Ebene.

Zeigen Sie, dass dieser ebene Spannungszustand durch die Hauptspannungen

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_3 = 0$$


gekennzeichnet wird.

Ermitteln Sie die Hauptspannungen und die Hauptspannungsrichtungen, wenn der ebene Spannungszustand durch

$$\sigma_{xx} = 150 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_{yy} = 0 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_{zz} = 0 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_{xy} = 100 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_{xz} = 0 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_{yz} = 0 \text{ N/mm}^2$$

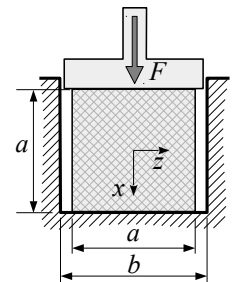
gegeben ist.

Lösung: 

### 1.5.2 Elastomer Lager

Ein Elastomer-Lager wird als würfelförmiger Block ausgeführt, der unbelastet die Kantenlänge  $a$  hat. Der Block sitzt mittig in einer Vertiefung mit quadratischem Grundriss der Kantenlänge  $b$ .

Die Materialeigenschaften des Elastomer-Blocks werden durch den Elastizitäts-Modul  $E$  und die Querdehnzahl  $\nu$  beschrieben. Für einen ersten Funktionstest wird ein Stempel auf den Elastomer-Block gesetzt und mit der Kraft  $F$  belastet.



- Bei welcher Kraft  $F = F^*$  legt sich der Block an die Vertiefung an und um welchen Betrag  $\Delta V$  hat sich dabei sein Volumen verändert?
- Ermitteln Sie Normalspannungen  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  und  $\sigma_{zz}$ , die im Block auftreten, wenn der Stempel mit einer Kraft  $F > F^*$  belastet wird und die Verformungen der Vertiefung unberücksichtigt bleiben.

Lösung: 

## 2 Einfache Belastungsfälle

### 2.1 Äquivalenzbeziehungen

In der Technik werden häufig lang gestreckte Bauteile verwendet. Die Schnittreaktionen geben bei abschnittsweise konstanten Belastungen Auskunft über die Beanspruchungen im Innern. Bei einem Schnitt senkrecht zur  $x$ -Achse treten in der Schnittfläche  $A$  die Spannungen  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$  auf, Bild 2.1.

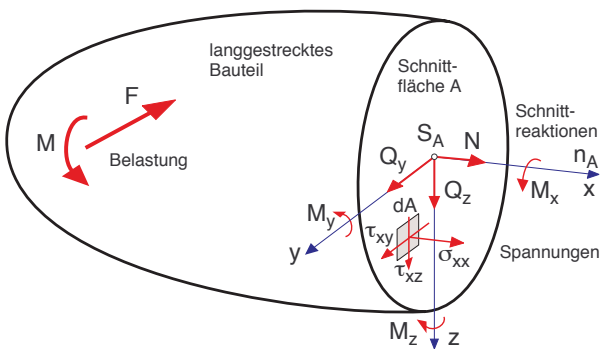


Bild 2.1: Schnittreaktionen und Spannungen

Die Äquivalenzbeziehungen

$$N = \int \sigma_{xx} dA \quad (2.1)$$

$$Q_y = \int \tau_{xy} dA \quad (2.2)$$

$$Q_z = \int \tau_{xz} dA \quad (2.3)$$

$$M_x = \int (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA \quad (2.4)$$

$$M_y = \int z \sigma_{xx} dA \quad (2.5)$$

$$M_z = \int -y \sigma_{xx} dA \quad (2.6)$$

stellen den Zusammenhang zwischen den Schnittreaktionen und den Spannungen her, wobei die  $x$ -Achse durch den Mittelpunkt  $S_A$  der Schnittfläche läuft und sich das Flächenelement  $dA = dydz$  an der Stelle  $(y, z)$  befindet.

Die Schwierigkeit besteht nun darin, dass bei bekannten Querschnittsabmessungen zwar die Schnittreaktion aus den Spannungen nicht aber die Spannungen aus den Schnittreaktionen eindeutig ermittelt werden können. Die direkte Berechnung des Spannungszustand

erfordert das Lösen partieller Differentialgleichungen und ist deshalb äußerst kompliziert. Die Schnittreaktionen dagegen können mit den Methoden der Statik aus den Belastungen ermittelt werden. In der Festigkeitslehre versucht man deshalb geeignete Ansätze für die Spannungen zu finden, die den Äquivalenzbeziehungen (2.1) bis (2.6) und gleichzeitig den Spannungsdifferentialgleichungen (1.11) genügen. In manchen Fällen gelingt dies allerdings nur näherungsweise.

### 2.2 Zug- und Druck

#### 2.2.1 Spannungsansatz

Wird ein Bauteil nur auf Zug oder Druck belastet, dann hat ein Schnitt senkrecht zur Belastungsrichtung die Schnittreaktionen

$$N \neq 0, Q_y = 0, Q_z = 0, M_x = 0, M_y = 0, M_z = 0 \quad (2.7)$$

zur Folge. Das Koordinatensystem wurde dabei so angeordnet, dass die  $x$ -Achse mit der Belastungsrichtung zusammenfällt. Das Eigengewicht des Bauteils wird gegenüber den äußeren Belastungen vernachlässigt. Der einfache Spannungsansatz

$$\sigma_{xx} \neq 0 \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{sowie} \quad \tau_{xz} = 0 \quad (2.8)$$

hat über die Äquivalenzbeziehungen (2.2), (2.3) verschwindende Querkräfte  $Q_y = 0, Q_z = 0$  zur Folge und erzeugt mit der Äquivalenzbeziehung (2.4) auch kein Torsionsmoment,  $M_x = 0$ . Nimmt man, wie beim Zugstab geschehen, eine über der Querschnittsfläche konstante Normalspannung an, dann kann  $\sigma$  weder von  $y$  noch von  $z$  abhängen. Mit  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x)$  haben die verbleibenden Äquivalenzbeziehungen (2.1) mit (2.5) und (2.6)

$$N = \int \sigma_{xx}(x) dA = \sigma_{xx}(x) A \quad (2.9)$$

$$M_y = \int z \sigma_{xx} dA = \sigma_{xx} \int z dA \quad (2.10)$$

$$M_z = \int -y \sigma_{xx} dA = -\sigma_{xx} \int y dA \quad (2.11)$$

zur Folge. Die Normalspannung kann hier also mit

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{N(x)}{A} \quad (2.12)$$



direkt aus dem Verlauf der Normalkraft  $N = N(x)$  ermittelt werden. Die verschwindenden Biegemomente

$$M_y = 0 \quad \text{und} \quad M_z = 0 \quad (2.13)$$

sind mit (2.10) und (2.11) unabhängig von der Normalspannung gewährleistet, da die  $x$ -Achse durch den Mittelpunkt  $S_A$  der Schnittfläche läuft und deshalb  $\int y dA = 0$  und  $\int z dA = 0$  gilt.

Bei konstanter Normalkraft  $N = \text{const.}$  ist gemäß (2.12) auch die Normalspannung konstant. Mit  $\tau_{xy} = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$  und  $\sigma_{xx} = \text{const.}$  ist dann die hier relevante erste partielle Differentialgleichung aus (1.11) ebenfalls in trivialer Weise erfüllt.

### 2.2.2 Verformungen

Beim hier vorliegenden ein-achsigen Spannungszustand mit  $\sigma_{xx} = \sigma(x)$ ,  $\sigma_{yy} = 0$ ,  $\sigma_{zz} = 0$  und  $\tau_{xy} = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$  sowie  $\tau_{yz} = 0$  treten keine Verzerrungen auf,  $\gamma_{xy} = 0$ ,  $\gamma_{xz} = 0$  und  $\gamma_{yz} = 0$ . Auf Grund der Querdehnung kommt es gemäß (1.47) auch ohne Temperatureinfluss ( $\Delta T = 0$ ) mit

$$\epsilon_x(x) = \frac{1}{E} \sigma(x) \quad \text{und} \quad \epsilon_y(x) = \epsilon_z(x) = -\frac{\nu}{E} \sigma(x) \quad (2.14)$$

zu einem dreiachsigen Verformungszustand. Die Integration der Dehnung  $\epsilon_x(x)$  über die Bauteillänge  $L$  liefert mit

$$\Delta L = \int_0^L \epsilon_x(x) dx = \int_0^L \frac{1}{E} \sigma(x) dx \quad (2.15)$$

die gesamte Längenänderung.

### 2.2.3 Beispiel Rotorblatt

Zur Abschätzung der Beanspruchung und Dehnung wird ein Rotorblatt durch einen dünnen Stab mit dem Querschnitt  $A$  und der Länge  $L$  approximiert. Das Rotorblatt hat die Dichte  $\rho$  und rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um eine vertikale Achse, Bild 2.2. Die Beanspruchungen und Verformungen des Rotorblattes werden vom mitrotierenden Koordinatensystem  $B$  aus beschrieben. Die  $x_B$ -Achse läuft durch den Mittelpunkt der Querschnittsfläche. Auf Grund der Drehung des Rotorblattes mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  entsteht im abgeschnittenen Teil die Fliehkraft

$$F_Z = \underbrace{\rho A (L-x)}_{m(x)} \underbrace{\left(x + \frac{1}{2} (L-x)\right)}_{r(x)} \Omega^2 \quad (2.16)$$

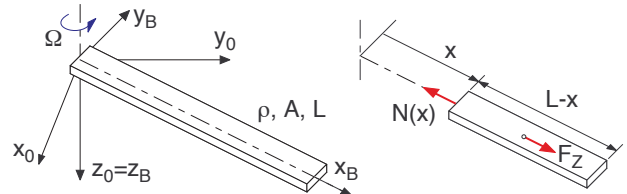


Bild 2.2: Rotierendes Rotorblatt

wobei  $m(x)$  die Masse und  $r(x)$  die radiale Entfernung von der Drehachse angeben. Das Kräftegleichgewicht liefert dann die Normalkraft

$$N(x) = F_Z = \frac{1}{2} \rho A \Omega^2 (L^2 - x^2) \quad (2.17)$$

wobei die Beziehung  $x + \frac{1}{2} (L-x) = \frac{1}{2} (L+x)$  und die binomische Formel  $(L-x)(L+x) = L^2 - x^2$  verwendet wurden. Die Normalspannung

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (L^2 - x^2) \quad (2.18)$$

fällt also quadratisch vom Maximalwert an der Einspannstelle

$$\sigma_{max} = \sigma(x=0) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 L^2 \quad (2.19)$$

auf den Wert Null am freien Ende  $\sigma(x=L) = 0$  ab. Mit (2.18) gilt für die Dehnung  $\epsilon_x$  in Stabrichtung

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (L^2 - x^2) \quad (2.20)$$

Gemäß (2.15) folgt die Verlängerung des Rotorblattes aus

$$\begin{aligned} \Delta L &= \int_0^L \epsilon_x(x) dx = \frac{1}{E} \frac{1}{2} \rho \Omega^2 \int_0^L (L^2 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{E} \frac{1}{2} \rho \Omega^2 \left( L^3 - \frac{1}{3} L^3 \right) = \frac{1}{E} \frac{1}{2} \rho \Omega^2 \frac{2}{3} L^3 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Mit der maximalen Spannung aus (2.19) bleibt dann

$$\Delta L = \frac{1}{E} \frac{2}{3} \sigma_{max} L \quad (2.22)$$

### 2.2.4 Beispiel Wärmedehnung

Ein abgesetztes Bauteil mit der Gesamtlänge  $L_1 + L_2$  ist an einem Ende fest eingespannt. Am anderen Ende ist bei der Temperatur  $T = T_0$  ein Spalt von der Größe  $\Delta x$  vorhanden. Das Bauteil besteht aus zwei Werkstoffen, deren Eigenschaften durch die Dehnsteifigkeiten  $E_1 A_1$  und  $E_2 A_2$  sowie durch die Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  bestimmt sind. Bei zunehmender Erwärmung wird der Spalt immer kleiner, bis er bei

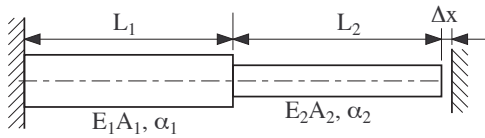


Bild 2.3: Abgesetztes Bauteil

$T = T_K$  ganz verschwindet. Solange der Spalt besteht ist das Bauteil spannungsfrei. Dem erweiterten Hookeschen Gesetz (1.47 zu Folge gilt dann in den einzelnen Abschnitten

$$\epsilon_1 = \alpha_1 \Delta T \quad \text{und} \quad \epsilon_2 = \alpha_2 \Delta T \quad (2.23)$$

Die Integration der Dehnungen über die Bauteillängen liefert gemäß (2.15) die Längenänderungen.

$$\Delta L_i = \int_0^{L_i} \epsilon_i dx = \alpha_i \Delta T L_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2 \quad (2.24)$$

Bei  $T = T_K$  oder  $\Delta T = T_K - T_0$  stimmt die Längenänderung des Bauteils  $\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$  mit dem Spalt  $\Delta x$  überein. Aus

$$\alpha_1 (T_K - T_0) L_1 + \alpha_2 (T_K - T_0) L_2 = \Delta x \quad (2.25)$$

erhält man sofort

$$T_K = T_0 + \frac{\Delta x}{\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2} \quad (2.26)$$

Wird das Bauteil weiter aufgeheizt, dann drückt es bei  $T > T_K$  mit einer Kraft  $F$  auf die Lager. Da jetzt mit  $\sigma_1 = -F/A_1$  und  $\sigma_2 = -F/A_2$  in den Bauteilabschnitten auch Normalspannungen in axialer Richtung auftreten, liefert (1.47) die Dehnungen

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 + \alpha_1 \Delta T \quad \text{und} \quad \epsilon_2 = \frac{1}{E_2} \sigma_2 + \alpha_2 \Delta T \quad (2.27)$$

Mit  $\Delta T = T - T_K$  (weitere Aufheizung) erhält man analog zu (2.24) die Längenänderungen

$$\Delta L_i = \left( -\frac{1}{E_i} \frac{F}{A_i} + \alpha_i (T - T_K) \right) L_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2 \quad (2.28)$$

Die Begrenzung lässt jedoch keine weitere Längenänderung zu. Folglich muss

$$\Delta L = \left( \alpha_1 (T - T_K) - \frac{F}{E_1 A_1} \right) L_1 + \left( \alpha_2 (T - T_K) - \frac{F}{E_2 A_2} \right) L_2 = 0 \quad (2.29)$$

gelten. Nach der Kraft  $F$  aufgelöst, erhält man

$$F = \frac{(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) (T - T_K)}{\frac{L_1}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2}} \quad (2.30)$$

## 2.3 Reine Biegung um y-Achse

### 2.3.1 Spannungsansatz

In Analogie zum Zugstab wird nun ein langgestrecktes Bauteil betrachtet, das an beiden Enden durch Momente  $M$  um die  $y$ -Achse belastet wird, die gleich groß sind aber entgegengesetzt wirken, Bild 2.4. Die Reaktionen

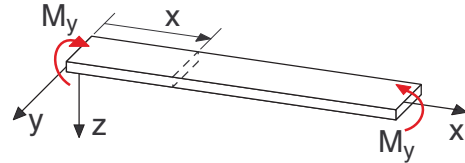


Bild 2.4: Bauteil belastet durch Momente

in einem Schnitt an der Stelle  $x$  sind dann durch

$$N = 0, \quad Q_y = 0, \quad Q_z = 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = M, \quad M_z = 0 \quad (2.31)$$

gegeben. Das im Bauteil auftretende Biegemoment  $M_y$  hat entsprechend der Äquivalenzbeziehung (2.4) eine Normalspannung  $\sigma_{xx} \neq 0$  zur Folge. Da weder Querkkräfte noch ein Torsionsmoment auftreten, kann wieder mit Spannungsansatz

$$\sigma_{xx} \neq 0 \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{sowie} \quad \tau_{xz} = 0 \quad (2.32)$$

gearbeitet werden. Die Äquivalenzbeziehungen (2.2), (2.3) und (2.4) sind dann wieder in trivialer Weise erfüllt. Eine über den Querschnitt konstante Normalspannung  $\sigma_{xx} = \text{const.}$  hat, wie in Abschnitt 2.2.1 gezeigt, verschwindende Biegemomente  $M_y = 0$  und  $M_z = 0$  zur Folge und kann deshalb hier nicht verwendet werden. Da keine Belastung in  $x$ -Richtung vorliegt und die Schubspannungen verschwinden, hat die Spannungsdifferentialgleichung (1.11) in  $x$ -Richtung

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + 0 + 0 = 0 \quad (2.33)$$

zur Folge. Damit kann die Normalspannung  $\sigma_{xx}$  zwar nicht von  $x$  aber sehr wohl von  $y$  und  $z$  abhängen. Wie im folgenden nachgewiesen wird, können im vorliegenden Belastungsfall die verbleibenden Äquivalenzbeziehungen (2.1), (2.5) und (2.6) mit dem linearen Spannungsansatz

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(y, z) = C_0 + C_1 y + C_2 z \quad (2.34)$$

erfüllt werden. Mit  $N = 0$ ,  $M_y = M$  und  $M_z = 0$  und dem Spannungsansatz aus (2.34) lauten die ent-



sprechenden Äquivalenzbeziehungen

$$0 = \int (C_0 + C_1 y + C_2 z) dA \quad (2.35)$$

$$M_y = \int z (C_0 + C_1 y + C_2 z) dA \quad (2.36)$$

$$0 = \int -y (C_0 + C_1 y + C_2 z) dA \quad (2.37)$$

Nach Ausklammern der Konstanten  $C_0$ ,  $C_1$  und  $C_2$  und Aufteilen der Integrale erhält man

$$0 = C_0 \int dA + C_1 \int y dA + C_2 \int z dA \quad (2.38)$$

$$M_y = C_0 \int z dA + C_1 \int y z dA + C_2 \int z^2 dA \quad (2.39)$$

$$0 = C_0 \int y dA + C_1 \int y^2 dA + C_2 \int y z dA \quad (2.40)$$

wobei die letzte Gleichung mit  $-1$  multipliziert wurde. Die Integrale  $\int y dA$  und  $\int z dA$  verschwinden, da die  $x$ -Achse wieder durch den Mittelpunkt des Querschnitts verläuft. Mit  $\int y dA = 0$ ,  $\int z dA = 0$  und  $\int dA = A$  bleiben mit

$$0 = C_0 A \quad (2.41)$$

$$M_y = C_1 \int y z dA + C_2 \int z^2 dA \quad (2.42)$$

$$0 = C_1 \int y^2 dA + C_2 \int y z dA \quad (2.43)$$

drei Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Konstanten  $C_0$ ,  $C_1$  und  $C_2$ . Die Integrale in (2.39) und (2.40) werden als Flächenmomente 2. Grades oder 2. Ordnung bezeichnet.

### 2.3.2 Flächenmomente 2. Grades

Die Flächenmomente 2. Grades

$$I_{yy} = \int z^2 dA \quad \text{und} \quad I_{zz} = \int y^2 dA \quad (2.44)$$

werden auch als Flächenträgheitsmomente bezüglich der  $y$ - und  $z$ -Achse bezeichnet. Das Flächenmoment 2. Grades oder das Flächendeviationsmoment

$$I_{yz} = \int y z dA \quad \text{oder} \quad I_{yz} = - \int y z dA \quad (2.45)$$

verschwindet für alle Querschnitte die symmetrisch zur  $y$ - und/oder  $z$ -Achse aufgebaut sind.

In einschlägigen Fachbüchern, z.B. in der Hütte – Grundlagen der Ingenieurwissenschaften oder im

Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau, findet man für eine Reihe unterschiedlicher Querschnitte die Flächenmomente 2. Grades. Bei den Angaben für eventuell vorhandene Flächendeviationsmomente muss allerdings die dabei zugrunde gelegte Definition beachtet werden.

In diesem Skript wird in Analogie zum Massendeviationsmoment die Definition mit dem Minuszeichen verwendet.

Bei einem Rechteckquerschnitt kann das Flächenelement  $dA$  mit  $dy dz$  angegeben werden. Mit den aus Bild 2.5 abgelesenen Integrationsgrenzen erhält man dann gemäß (5.26) für das Flächenmoment 2. Grades bezüglich der  $y$ -Achse

$$I_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} z^2 \underbrace{dy dz}_{dA} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy dz \quad (2.46)$$

Die Integrationen über  $y$  und  $z$  können hier sukzessi-

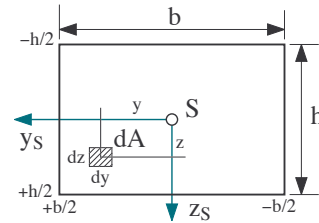


Bild 2.5: Rechteckquerschnitt

ve durchgeführt werden. Unter Berücksichtigung des konstanten Ergebnisses der inneren Integration  $\frac{b}{2} + (-\frac{b}{2}) = b$  liefert die formale Integration über  $z$  das Resultat

$$I_{yy}^{\square} = b \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left( \frac{h^3}{8} - \frac{-h^3}{8} \right) = \frac{1}{12} b h^3 \quad (2.47)$$

Analog dazu erhält man auch das Flächenmoment 2. Grades bezüglich der  $z$ -Achse. Für einen Rechteckquerschnitt gilt also

$$I_{yy}^{\square} = \frac{1}{12} b h^3 \quad \text{und} \quad I_{zz}^{\square} = \frac{1}{12} h b^3 \quad (2.48)$$

Das Flächendeviationsmoment verschwindet nicht nur hier beim Rechteckquerschnitt

$$I_{yz}^{\square} = 0 \quad (2.49)$$

sondern für alle Querschnitte, die symmetrisch zu mindestens einer Koordinatenachse sind. Beim Rechteckquerschnitt sind das die  $y_S$ - und die  $z_S$ -Achse.

## 2.4 Gerade Biegung

### 2.4.1 Normalspannung

Für symmetrische Querschnitte mit  $I_{yz} = 0$  können die Gleichungen in (2.41) bis (2.43) sehr leicht nach den Konstanten aufgelöst werden. Man erhält

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0 \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{M}{I_{yy}}. \quad (2.50)$$

Die Normalspannung ist dann dem Ansatz in (2.34) entsprechend mit

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(z) = \frac{M_y}{I_{yy}} z \quad (2.51)$$

eine Funktion von  $z$ . Sie verschwindet auf der Höhe des Flächenmittelpunktes (neutrale Linie) und erreicht die Extremwerte am oberen und unteren Rand des Querschnitts (Randfasern) Bild 2.6. Bei einem Rechteckpro-

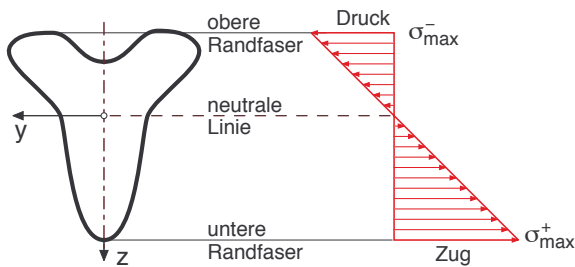


Bild 2.6: Verlauf der Normalspannung bei gerader Biegung um die  $y$ -Achse in einem Querschnitt symmetrisch zur  $z$ -Achse

fil mit der Höhe  $h$  liegen die Randfasern bei  $z_R = \pm \frac{1}{2}h$ . Mit dem entsprechenden Flächenmoment aus (2.48) erhält man gemäß (2.50) die maximale Normalspannung zu

$$\sigma_{max}^{\pm} = \frac{M_y}{\frac{1}{12} b h^3} \left( \pm \frac{1}{2} h \right) = \pm \frac{6 M_y}{A h} \quad (2.52)$$

wobei  $A = b h$  die Querschnittsfläche angibt. Bei vorgegebener Belastung kann folglich der Betrag der maximalen Spannung durch eine größere Querschnittsfläche  $A$  oder durch eine größere Höhe  $h$  reduziert werden. Da die Erhöhung der Querschnittsfläche das Gewicht des Bauteils erhöht, verwendet man in der Praxis in der Regel kleine aber hohe Querschnitte.

### 2.4.2 Verformungen

Die reine Biegung um die  $y$ -Achse ist für symmetrische Querschnitte entsprechend dem Ansatz (2.32) und dem

Ergebnis (2.51) durch den Spannungszustand

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_{yy}} z, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (2.53)$$

und

$$\tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (2.54)$$

gekennzeichnet. Analog zu (2.14) hat dies auch ohne Temperatureinfluss ( $\Delta T = 0$ ) mit

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_{xx} = \frac{M_y}{E I_{yy}} z \quad \text{und} \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \sigma_{xx} \quad (2.55)$$

einen drei-achsigen Verformungszustand zur Folge. Auf Grund der verschwindenden Schubspannungen treten keine Verzerrungen auf

$$\gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (2.56)$$

Die Belastung durch das Moment  $M_y = M$  führt zu einer Durchbiegung in  $z$ -Richtung, wobei

$$w(x) = w(x, y=0, z=0) \quad (2.57)$$

die  $z$ -Verschiebung des Querschnittmittelpunktes an der Schnittstelle  $x$  bezeichnet, Bild 2.7. Die Verzerrun-

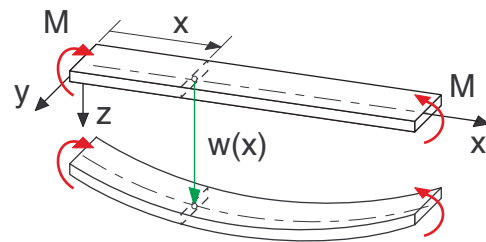


Bild 2.7: Verformung durch Biegemoment

gen sind mit den Ableitungen der Verschiebungen verknüpft. Mit  $\gamma_{xz} = 0$  folgt dann aus (1.35) der Zusammenhang

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.58)$$

Aus der Längsdehnung erhält man im vorliegenden Fall über (1.29) die Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_{xx} = \frac{M_y}{E I_{yy}} z \quad (2.59)$$

Da das Moment  $M_y$ , der Elastizitätsmodul  $E$  und das Flächenträgheitsmoment  $I_{yy}$  nicht von der Koordinate  $z$  abhängen, kann (2.59) nochmals partiell nach  $z$  abgeleitet werden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{M_y}{E I_{yy}} \quad (2.60)$$

Die partielle Ableitung von (2.58) nach  $x$  liefert

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \quad (2.61)$$

Da die gemischten partiellen Ableitungen von  $u$  nach  $x$  und  $z$  auf Grund der Schwarzschen Vertauschungsregel<sup>1</sup> gleich sind, erhält man schließlich

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{E I_{yy}} \quad (2.62)$$

oder

$$E I_{yy} w'' = -M_y \quad (2.63)$$

wobei  $w''$  die zweite Ableitung der Durchbiegung  $w$  nach der Koordinate  $x$  angibt und der Term  $E I_{yy}$  als Biegesteifigkeit bezeichnet wird.

## 2.5 Technische Biegelehre

### 2.5.1 Die Euler-Bernoulli-Hypothese

In den meisten technischen Anwendungsfällen werden Bauteile nicht allein durch Momente sondern auch durch einzelne Kräfte und/oder verteilte Lasten beansprucht. Unter folgenden Voraussetzungen

- kleine Verformungen (lineare Theorie)
- keine wesentlichen Schubdeformation (lange schlanke Balken)
- Querschnitte bleiben eben
- linear-elastisches Materialgesetz

die als Euler<sup>2</sup>-Bernoulli<sup>3</sup>-Hypothese bezeichnet werden, können jedoch die Ergebnisse aus den Abschnitten 2.3 und 2.4 auch auf technisch relevante Belastungsfälle übertragen werden. Beschränkt man sich auf die Fälle der geraden Biegung, dann erhält man für die Biegung in der  $xz$ -Ebene die Längsspannung im Querschnitt aus

$$\sigma_{xx}(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}(x)} z \quad (2.64)$$

und die entsprechende Biegedifferentialgleichung lautet

$$E I_{yy}(x) w'' = -M_y(x) \quad (2.65)$$

wobei die Erweiterung von (2.51) und (2.63) hier formal durch die Abhängigkeit des Biegemomentes  $M_y$  und des Flächenträgheitsmomentes  $I_{yy}$  von der Längskoordinate  $x$  zum Ausdruck kommt.

Analog dazu erhält man für die Biegung in der  $xy$ -Ebene, die Längsspannung im Querschnitt aus

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{zz}(x)} y \quad (2.66)$$

und die entsprechende Biegedifferentialgleichung zu

$$E I_{zz}(x) v'' = M_z(x) \quad (2.67)$$

wobei

$$v(x) = v(x, y=0, z=0) \quad (2.68)$$

die  $y$ -Verschiebung des Querschnittmittelpunktes an der Schnittstelle  $x$  bezeichnet,  $M_z$  das Schnittmoment um die  $z$ -Achse ist und  $I_{zz}$  das Flächenträgheitsmoment bezüglich der  $z$ -Achse angibt. Aufgrund der Vorzeichendefinition in einem rechtshändigen Koordinatensystem entfällt in der Biegedifferentialgleichung (2.67) das Minuszeichen vor dem Moment.

Ist das Flächenträgheitsmoment  $I_{yy}$  über der Bauteillänge konstant, dann kann die Biegedifferentialgleichung (2.65) nochmals differenziert werden. Man erhält dann

$$\begin{aligned} E I_{yy} w''' &= -\frac{d M_y(x)}{d x} = -Q_z(x) \\ E I_{yy} w^{IV} &= -\frac{d Q_z(x)}{d x} = q_z(x) \end{aligned} \quad (2.69)$$

wobei die differentiellen Zusammenhänge zwischen dem Biegemoment  $M_y(x)$ , der Querkraft  $Q_z(x)$  und der Streckenlast  $q_z(x)$  bereits berücksichtigt wurden.

Ähnliche Beziehungen können auch für die Biegung in der  $yz$ -Ebene angegeben werden.

### 2.5.2 Ansatz von Euler und Bernoulli

Da die Querschnitte per Voraussetzung eben bleiben und auch keine Verzerrungen auftreten, kann die Verformung eines Balkenelements durch einen Kreisbogen approximiert werden, Bild 2.8. In der Randfaser bei  $z = \frac{1}{2}h$  tritt gemäß (2.53) die maximale Spannung auf

$$\sigma_M = \sigma_{xx} \left( z = \frac{1}{2}h \right) = \frac{M_y}{I_{yy}} \frac{h}{2} \quad (2.70)$$

<sup>1</sup> Satz von Schwarz: Sind die partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung stetig, so ist die Reihenfolge der Differentiationen beliebig vertauschbar

<sup>2</sup> Leonhard Euler, Mathematiker, Schweiz/Russland (1707-1783)

<sup>3</sup> Jacob Bernoulli, schweizer Mathematiker (1654-1705) und Daniel Bernoulli, Mathematiker, Physiker, Philosoph, Niederlande/Schweiz (1700-1782)

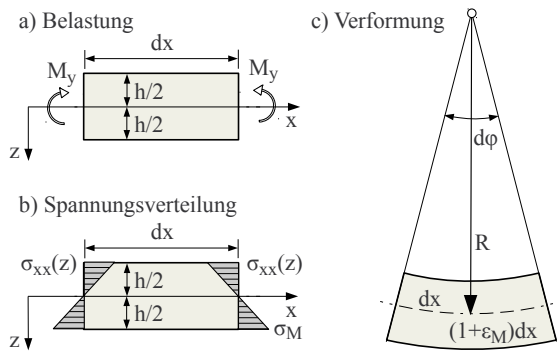


Bild 2.8: Balkenabschnitt mit Belastung, Spannungsverteilung und Verformung

Die  $x$ -Achse bildet die neutrale Faser, da dort die Normalspannung verschwindet,  $\sigma_{xx}(z=0) = 0$ . Die spannungsfreie Mittellinie des Balkenelements wird folglich nicht gedehnt und behält mit  $dx$  ihre ursprüngliche Länge. Die Randfaser dagegen wird auf die Länge  $(1+\epsilon_M) dx$  gedehnt, wobei die maximale Dehnung analog zu (2.55) über das Hooksche Materialgesetz über

$$\epsilon_M = \frac{1}{E} \sigma_M = \frac{M_y}{E I_{yy}} \frac{h}{2} \quad (2.71)$$

mit der maximalen Spannung  $\sigma_M$  und schließlich mit der Belastung  $M_y$  verknüpft ist. Für das zu einem Kreissegment gebogene Balkenelement gilt dann

$$R d\phi = dx \quad \text{und} \quad \left(R + \frac{1}{2}h\right) d\phi = (1 + \epsilon_M) dx \quad (2.72)$$

wobei  $d\phi$  den Öffnungswinkel und  $R$  den Radius der gebogenen Balkenmittellinie angibt. Die Kombination beider Gleichungen liefert zunächst

$$\left(R + \frac{1}{2}h\right) d\phi = (1 + \epsilon_M) R d\phi \quad \text{oder} \quad R + \frac{1}{2}h = R + \epsilon_M R \quad (2.73)$$

Mit (2.71) bleibt

$$\frac{1}{R} \frac{h}{2} = \epsilon_M = \frac{M_y}{E I_{yy}} \frac{h}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R} = \frac{M_y}{E I_{yy}} \quad (2.74)$$

Die spannungsfreie neutrale Faser eines Balkens, der in einem Abschnitt durch ein konstantes Biegemoment  $M_y$  belastet wird, beschreibt gemäß Euler einen Kreisbogen, dessen Radius  $R$  durch (2.74) bestimmt ist. Über die Definition der Krümmung  $k = 1/R$  kann (2.74) auch auf Fälle angewendet werden, bei denen sich das Biegemoment und/oder das Flächenträgheitsmoment über der Balkenlänge verändern. Rein formal ist die Krümmung der Biegelinie  $w = w(x)$  durch

$$k(x) = \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{w''}{\left(1 + (w')^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.75)$$

beschrieben, wobei zur Abkürzung die Ableitungen der Durchbiegung  $w$  nach der Koordinate  $x$  durch Striche gekennzeichnet wurden. Ein positives Biegemoment  $M_y > 0$  krümmt den Balken nach oben, Bild 2.7. Da aber die Durchbiegung  $w(x)$  nach unten gemessen wird, entspricht dies einer negativen Krümmung,  $k(x) < 0$ . Die Biegelinie  $w = w(x)$  ist dann durch

$$-\frac{w''}{\left(1 + (w')^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R(x)} = \frac{M_y(x)}{E I_{yy}(x)} \quad (2.76)$$

definiert. In den meisten technischen Anwendungen bleibt die Durchbiegung klein. Dann ist auch die Neigung klein und (2.76) kann dann mit  $w' \ll 1$  zu

$$-w'' = \frac{M_y(x)}{E I_{yy}(x)} \quad \text{oder} \quad E I_{yy}(x) = -M_y(x) \quad (2.77)$$

vereinfacht werden.

### 2.5.3 Biegelinie

An einem einfachen Beispiel kann das Vorgehen zur Bestimmung der Biegelinie  $w = w(x)$  demonstriert werden. Dazu wird ein Balken mit der Länge  $a$  und der Biegesteifigkeit  $EI$  an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende durch die Kraft  $F$  in  $z$ -Richtung belastet, Bild 2.9. Da keine Streckenlast vorhanden ist,

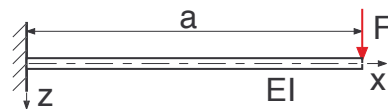


Bild 2.9: Balken belastet durch Einzelkraft

kann die Biegedifferenzialgleichung gemäß (2.69) in der Form

$$EI w^{IV} = 0 \quad (2.78)$$

angeschrieben werden. Ersetzt man die vierte Ableitung durch die Ableitung der dritten

$$w^{IV} = \frac{dw'''}{dx} \quad (2.79)$$

dann erhält man

$$EI \frac{dw'''}{dx} = 0 \quad (2.80)$$

Nach der Separation

$$EI dw''' = 0 \cdot dx \quad (2.81)$$

kann eine unbestimmte Integration durchgeführt werden

$$\int EI dw''' = \int 0 \cdot dx + C_{III} \quad (2.82)$$

wobei die auf beiden Seiten anfallenden Integrationskonstanten in  $C_{III}$  zusammengefasst wurden. Da hier die Biegesteifigkeit  $EI$  konstant ist, erhält man in trivialer Weise

$$EI w''' = 0 \cdot x + C_{III} \quad (2.83)$$

Analog dazu findet man

$$\begin{aligned} EI w'' &= C_{III} x + C_{II} \\ EI w' &= \frac{1}{2} C_{III} x^2 + C_{II} x + C_I \\ EI w &= \frac{1}{6} C_{III} x^3 + \frac{1}{2} C_{II} x^2 + C_I x + C_0 \end{aligned} \quad (2.84)$$

Die vier Integrationskonstanten  $C_0$  bis  $C_{III}$  müssen nun an die spezielle Belastung und Lagerung angepasst werden. Dazu stehen zwei geometrische und zwei dynamische Randbedingungen zur Verfügung. Die geometrischen Randbedingungen ergeben sich aus der Art der Lagerung. Im vorliegenden Fall lässt die feste Einspannung an der Stelle  $x = 0$  weder eine Verschiebung in  $z$ -Richtung noch eine Neigung der Balkenachse zu. Das führt auf die geometrischen Randbedingungen

$$w(x=0) = 0 \quad (2.85)$$

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = w'(x=0) = 0 \quad (2.86)$$

Da der Balken am freien Ende, an der Stelle  $x = a$ , durch die Kraft  $F$  in  $z$ -Richtung belastet wird, erhält man dort die Schnittreaktionen  $Q_z(x=a) = F$  und  $M_y(x=a) = 0$ . Gemäß (2.67) und (2.69) sind Querkraft und Moment aber proportional zur zweiten und dritten Ableitung von  $w$ . Deshalb sind die zwei dynamischen Randbedingungen hier durch

$$EI w''(x=a) = -M_y(x=a) = 0 \quad (2.87)$$

$$EI w'''(x=a) = -Q_z(x=a) = -F \quad (2.88)$$

gegeben. In (2.84) und (2.83) eingesetzt erhält man

$$C_{III} = -F \quad \text{und} \quad C_{III} a + C_{II} = 0 \quad (2.89)$$

Schließlich führen die geometrischen Randbedingungen (2.85) und (2.86) auf

$$C_0 = 0 \quad \text{und} \quad C_I = 0 \quad (2.90)$$

Die Biegelinie ist im vorliegenden Fall also durch das kubische Polynom

$$EI w = -\frac{1}{6} F x^3 + \frac{1}{2} F a x^2 \quad (2.91)$$

oder

$$w(x) = \frac{1}{6} \frac{F a^3}{EI} \left( \frac{x}{a} \right)^2 \left( 3 - \frac{x}{a} \right) \quad (2.92)$$

gegeben. Die maximale Durchbiegung

$$f = w_{max} = w(x=a) = \frac{1}{3} \frac{F a^3}{EI} \quad (2.93)$$

tritt erwartungsgemäß an der Stelle der Krafteinleitung auf. Da es sich dabei um ein Rand-Extremum handelt, ist dort die Neigung nicht Null sondern durch

$$\tan \alpha = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=a} = w'(x=a) = \frac{1}{2} \frac{F a^2}{EI} \quad (2.94)$$

gegeben, Bild 2.10. Da die Berechnung nur für kleine

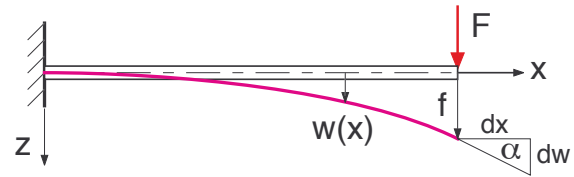


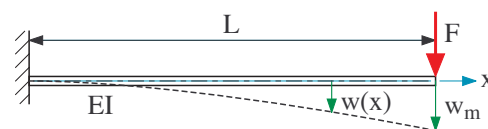
Bild 2.10: Biegelinie

Deformationen gilt, kann natürlich die Tangensfunktion in (2.93) durch das Argument approximiert werden,  $\tan \alpha \approx \alpha$ .

In einschlägigen Fachbüchern, z.B. in der Hütte – Grundlagen der Ingenieurwissenschaften oder im Dubbel – Taschenbuch des Maschinenbaus, findet man für eine Vielzahl von Belastungs- und Lagerungsfällen Angaben über die Biegelinie, den Ort und die Größe der maximalen Durchbiegung und Neigung. Die Ergebnisse für einige einfache Fälle sind im folgenden zusammengestellt.

## 2.6 Katalog einfacher Biege-Belastungen

### 2.6.1 Einspannung mit Einzelkraft



Biegelinie

$$w(x) = \frac{1}{6} \frac{FL^3}{EI} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \left( 3 - \frac{x}{L} \right)$$

Neigung

$$w'(x) = \frac{1}{2} \frac{FL^2}{EI} \frac{x}{L} \left( 2 - \frac{x}{L} \right)$$

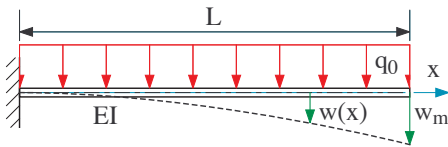
Maximale Durchbiegung

$$w_m = w(L) = \frac{1}{3} \frac{FL^3}{EI}$$

Neigung am Ende

$$w'(L) = \frac{1}{2} \frac{FL^2}{EI}$$

## 2.6.2 Einspannung mit Streckenlast



Biegelinie

$$w(x) = \frac{1}{24} \frac{q_0 L^4}{EI} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \left( 6 - 4 \frac{x}{L} + \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

Neigung

$$w'(x) = \frac{1}{6} \frac{q_0 L^3}{EI} \frac{x}{L} \left( 3 - 3 \frac{x}{L} + \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

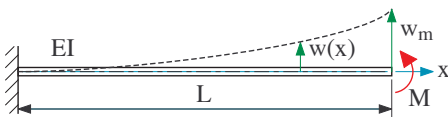
Maximale Durchbiegung

$$w_m = w(L) = \frac{1}{8} \frac{q_0 L^4}{EI}$$

Neigung am Ende

$$w'(L) = \frac{1}{6} \frac{q_0 L^3}{EI}$$

## 2.6.3 Einspannung mit Moment



Biegelinie und maximale Durchbiegung

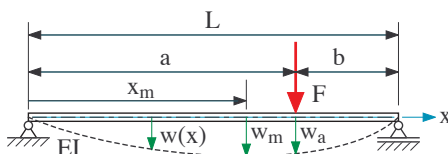
$$w(x) = \frac{1}{2} \frac{ML^2}{EI} \left( \frac{x}{L} \right)^2, \quad w_m = w(L) = \frac{1}{2} \frac{ML^2}{EI}$$

Neigung und Neigung am Ende

$$w'(x) = \frac{ML}{EI} \frac{x}{L}, \quad w'(L) = \frac{ML}{EI}$$

Der Belastung entsprechend wurde hier die Durchbiegung und die Neigung nach oben positiv beschrieben.

## 2.6.4 Gelenkige Lagerung mit Einzelkraft



Biegelinie

$$w(x) = \frac{1}{6} \frac{FL^3}{EI} \begin{cases} \frac{b}{L} \frac{x}{L} \left( 1 - \left( \frac{b}{L} \right)^2 - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right), & x \leq a \\ \frac{a}{L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \left( 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 - \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^2 \right), & x \geq a \end{cases}$$

Neigung

$$w'(x) = \frac{1}{6} \frac{FL^2}{EI} \begin{cases} \frac{b}{L} \left( 1 - \left( \frac{b}{L} \right)^2 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right), & x \leq a \\ -\frac{a}{L} \left( 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 - 3 \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^2 \right), & x \geq a \end{cases}$$

Durchbiegung am Angriffspunkt der Kraft

$$w_a = w(a) = \frac{1}{3} \frac{FL^3}{EI} \left( \frac{a}{L} \right)^2 \left( \frac{b}{L} \right)^2$$

Maximale Durchbiegung für  $a \geq b$

$$x_m = \sqrt{\frac{1}{3} (L^2 - b^2)} \quad w_m = w(x_m) = \frac{1}{3} \frac{F x_m^3}{EI} \frac{b}{L}$$

Neigung an den Enden

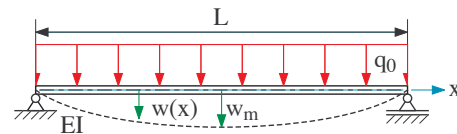
$$w'(0) = \frac{1}{6} \frac{FL^2}{EI} \frac{b}{L} \left( 1 - \left( \frac{b}{L} \right)^2 \right)$$

$$w'(L) = -\frac{1}{6} \frac{FL^2}{EI} \frac{a}{L} \left( 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 \right)$$

Neigung am Angriffspunkt der Kraft

$$w'(a) = -\frac{1}{3} \frac{FL^2}{EI} \frac{a}{L} \frac{b}{L} \left( \frac{b}{L} - \frac{a}{L} \right)$$

## 2.6.5 Gelenkige Lagerung mit Streckenlast



Biegelinie

$$w(x) = \frac{1}{24} \frac{q_0 L^4}{EI} \frac{x}{L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \left( 1 + \frac{x}{L} - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

Neigung

$$w'(x) = \frac{1}{24} \frac{q_0 L^3}{EI} \left( 1 - 2 \frac{x}{L} \right) \left( 1 + 2 \frac{x}{L} - 2 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

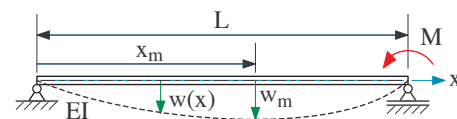
Maximale Durchbiegung

$$w_m = w\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{q_0 L^4}{EI}$$

Neigung an den Enden

$$w'(0) = -w'(L) = \frac{1}{24} \frac{q_0 L^3}{EI}$$

## 2.6.6 Gelenkige Lagerung mit Moment



Biegelinie

$$w(x) = \frac{1}{6} \frac{ML^2}{EI} \frac{x}{L} \left( 1 - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

Neigung

$$w'(x) = \frac{1}{6} \frac{ML}{EI} \left( 1 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

Maximale Durchbiegung

$$x_m = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad w_m = w(x_m) = \frac{\sqrt{3}}{27} \frac{ML^2}{EI}$$

Neigung an den Enden

$$w'(0) = \frac{1}{6} \frac{ML}{EI} \quad w'(L) = -\frac{1}{3} \frac{ML}{EI} = -2 w'(0)$$



## 2.7 Torsion kreiszylindrischer Wellen

### 2.7.1 Belastungsbeispiel

Kreuzschlüssel werden zum Lösen von fest angezogenen Muttern verwendet. Das über die Querstreben eingeleitete Kräftepaar ( $F$ ,  $-F$ ) belastet den unteren Schaft dann nur mit einem Torsionsmoment  $M_x$ , Bild 2.11. Auf Grund der speziellen Belastung, die

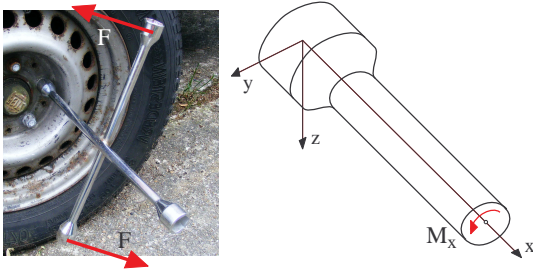


Bild 2.11: Belastung durch Torsionsmoment  $M_x$

durch die Schnittreaktionen

$$\begin{aligned} N &= 0, & Q_y &= 0, & Q_z &= 0 \\ M_x &\neq 0, & M_y &= 0, & M_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.95)$$

gekennzeichnet ist, können in einem Schnitt senkrecht zur  $x$ -Achse nur die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$  auftreten. Da keine Normalspannung ( $\sigma_{xx} = 0$ ) auftritt, sind die Äquivalenzbeziehungen (2.1), und (2.5), (2.6) in trivialer Weise erfüllt.

### 2.7.2 Schubspannungs-Ansatz

Bei Bauteilen mit Kreisquerschnitt können die in  $y$ - und  $z$ -Richtung wirkenden Schubspannungen über

$$\tau_{xy} = -\tau_{x\varphi} \sin \varphi \quad \text{und} \quad \tau_{xz} = \tau_{x\varphi} \cos \varphi \quad (2.96)$$

durch eine tangentielle Spannung  $\tau_{x\varphi}$  ersetzt werden, Bild 2.12. Der einfache lineare Ansatz

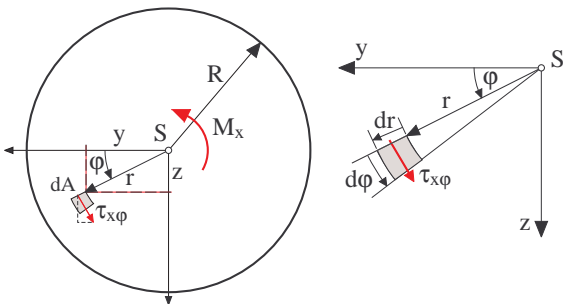


Bild 2.12: Tangentielle Schubspannung und Flächenelement im Kreisquerschnitt

$$\tau_{x\varphi} = \tau_{x\varphi}(r) = C r \quad (2.97)$$

erfüllt dann infolge der Rotationssymmetrie die Äquivalenzbeziehungen

$$Q_y = \int \tau_{xy} dA = \int -C r \sin \varphi r d\varphi dr = 0 \quad (2.98)$$

und

$$Q_z = \int \tau_{xz} dA = \int C r \cos \varphi r d\varphi dr = 0 \quad (2.99)$$

Die verbleibende Äquivalenzbeziehung für das Torsionsmoment (6.4) vereinfacht sich zu

$$M_x = \int r \tau_{x\varphi} dA \quad (2.100)$$

Mit dem Ansatz (2.97) bleibt

$$M_x = \int r C r dA = C \int r^2 dA \quad (2.101)$$

Die Belastung mit dem Torsionsmoment  $M_x$  hat dann gemäß (2.97) die tangentialen Schubspannungen

$$\tau_{x\varphi}(r) = \frac{M_x}{\int r^2 dA} r = \frac{M_x}{I_P} r \quad (2.102)$$

zur Folge, wobei  $I_P$  das dabei auftretende polare Flächen-Trägheitsmoment<sup>4</sup> bezeichnet.

### 2.7.3 Polares Flächenmoment

Das Flächenmoment 2. Grades

$$I_P = \int r^2 dA \quad (2.103)$$

wird als polares Flächen-Trägheitsmoment des Querschnitts bezeichnet, das mit  $r^2 = y^2 + z^2$  über

$$I_P = \int r^2 dA = \int (y^2 + z^2) dA = I_{zz} + I_{yy} \quad (2.104)$$

auf die Flächenmomente 2. Grades  $I_{yy}$  und  $I_{zz}$  zurückgeführt werden kann.

Das Flächenelement in Bild 2.12 kann auf Grund seiner infinitesimal kleinen Ausdehnung durch ein Rechteck mit den Kantenlängen  $dr$  und  $r d\varphi$  approximiert werden. Mit

$$dA = r d\varphi dr \quad (2.105)$$

erhält man dann für einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius  $R$

$$I_P^{\circ} = \int r^2 dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r d\varphi dr \quad (2.106)$$

<sup>4</sup> Hinweis: Polare Flächen-Trägheitsmomente können formal für jeden Querschnitt angegeben werden. Die damit nach (2.102) berechneten Schubspannungen gelten jedoch nur für kreisförmige Querschnitte.

Die Integration über den Winkel  $\varphi$  kann hier unabhängig vom Radius  $r$  durchgeführt werden. Damit bleibt

$$I_P^\circ = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{\pi}{2} R^4 \quad (2.107)$$

Auf Grund der Symmetrie des Querschnittes können daraus über

$$I_{yy}^\circ = I_{zz}^\circ = \frac{1}{2} I_P^\circ = \frac{\pi}{4} R^4 \quad (2.108)$$

auch die Flächenmomente 2. Grades abgeleitet werden.

### 2.7.4 Maximale Schubspannung

Mit (2.107) sind die Schubspannungen in einem Kreisquerschnitt gemäß (2.102) durch

$$\tau_{x\varphi}(r) = \frac{M_x}{I_P^\circ} r = \frac{M_x}{\frac{\pi}{2} R^4} r \quad (2.109)$$

gegeben. Sie steigen linear vom Wert Null in der Mitte auf den maximalen Wert

$$\tau_{x\varphi}^{max} = \tau_{x\varphi}(r=R) = \frac{M_x}{\frac{\pi}{2} R^4} R = \frac{M_x}{\frac{\pi}{2} R^3} = \frac{M_x}{W_P^\circ} \quad (2.110)$$

am Rand, wobei mit

$$W_P^\circ = \frac{I_P^\circ}{R} = \frac{\frac{\pi}{2} R^4}{R} = \frac{\pi}{2} R^3 \quad (2.111)$$

das polare Widerstandsmoment des Kreisquerschnitts definiert ist.

### 2.7.5 Verwindung oder Drillung

Bei linear elastischem Materialverhalten sind die Verformungen proportional zu den Spannungen. Analog zu (1.49) gilt dann

$$\gamma_{x\varphi} = \frac{1}{G} \tau_{x\varphi} \quad (2.112)$$

wobei  $\gamma_{x\varphi}$  die in Bild 2.13 dargestellte Verzerrung eines Volumenelements im Kreisquerschnitt beschreibt. Für die tangentielle Verschiebung des Eckpunktes  $P \rightarrow P'$  entnimmt man aus Bild 2.13 den Zusammenhang

$$dx \gamma_{x\varphi} = (r + dr) (\varphi(x+dx) - \varphi(x)) \quad (2.113)$$

Mit der Näherung  $\varphi(x+dx) \approx \frac{d\varphi}{dx} dx$  bleibt unter Vernachlässigung quadratisch kleiner Terme

$$dx \gamma_{x\varphi} = r \frac{d\varphi}{dx} dx \quad \text{oder} \quad \gamma_{x\varphi} = r \frac{d\varphi}{dx} \quad (2.114)$$

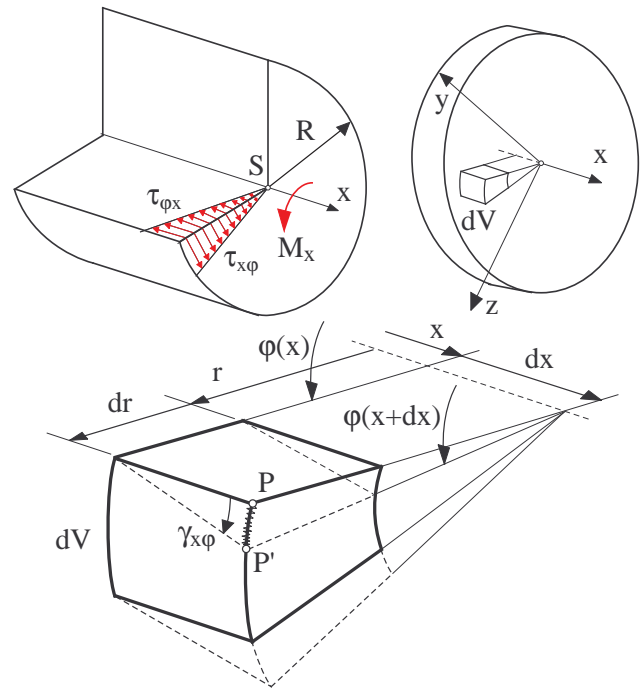


Bild 2.13: Verteilung der Schubspannungen und Verformungen am Kreisquerschnitt

wobei  $\frac{d\varphi}{dx}$  als Verwindung oder Drillung bezeichnet wird. Mit dem Materialgesetz (2.112) und der Schubspannung aus (2.102) erhält man

$$r \frac{d\varphi}{dx} = \gamma_{x\varphi} = \frac{1}{G} \tau_{x\varphi} = \frac{1}{G} \frac{M_x}{I_P^\circ} r \quad (2.115)$$

Schließlich bleibt für die Verwindung oder Drillung

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{G I_P^\circ} \quad (2.116)$$

wobei das Produkt  $G I_P^\circ$  die Verdrehsteifigkeit des Kreisquerschnittes angibt.

### 2.7.6 Verdrehung

Bei allgemeiner Belastung  $M_x = M_x(x)$  und über der Länge  $L$  des Bauteils variierenden Querschnittsabmessungen  $I_P = I_P(x)$  kann der gesamte Verdrehwinkel nach Separation der Gleichung (2.116) aus

$$\varphi_L = \int_0^L \frac{M_x(x)}{G I_P(x)} dx \quad (2.117)$$

ermittelt werden. Sind das Moment und die Querschnittsabmessungen konstant, dann ist der Verdrehwinkel durch

$$\varphi_L^\circ = \frac{M_x L}{G \frac{\pi}{2} R^4} = \frac{2}{\pi} \frac{M_x L}{G R^4} \quad (2.118)$$



gegeben, wobei das durch (2.107) gegebene polare Flächenmoment des Kreisquerschnitts bereits eingesetzt wurde.

Die Verdrehsteifigkeit einer Voll-Welle mit der Dimension Nm/rad ist dann durch

$$c_{\varphi}^{\circ} = \frac{M_x}{\varphi_L^{\circ}} = \frac{\pi}{2} \frac{G R^4}{L} \quad (2.119)$$

bestimmt. Sie nimmt mit zunehmender Länge  $L$  ab und steigt mit der vierten Potenz des Radius  $R$  an.

### 2.7.7 Beispiel

Eine kreiszylindrische Welle aus Stahl mit dem Schubmodul  $G$ , die sich im Mittelteil konisch vom Radius  $R_A$  auf den Radius  $R_E$  aufweitet, wird durch das Torsionsmoment  $M_t$  belastet, Bild 2.14. Die gesamte Ver-

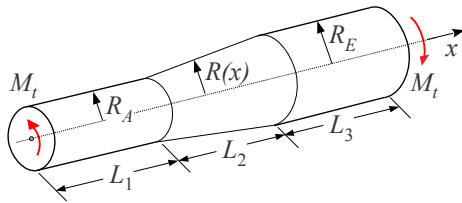


Bild 2.14: Welle mit konischem Mittelteil

drehung setzt sich aus drei Anteilen zusammen

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \quad (2.120)$$

Im ersten und letzten Teil ist der Radius konstant. Gemäß (2.118) gilt dann

$$\varphi_1 = \frac{2}{\pi} \frac{M_t L_1}{G R_A^4} \quad \text{und} \quad \varphi_3 = \frac{2}{\pi} \frac{M_t L_3}{G R_E^4} \quad (2.121)$$

Im Bereich  $L_1 \leq x \leq L_1 + L_2$  nimmt der Radius des Mittelteils linear von  $R(x=L_1) = R_A$  auf  $R(x=L_1+L_2) = R_E$  zu. Das polare Flächenmoment  $I_{P2}$  ist dann von  $x$  abhängig und kann über (2.107) mit

$$I_{P2}(x) = \frac{\pi}{2} \left( R_A + \frac{R_E - R_A}{L_2} (x - L_1) \right)^4 \quad (2.122)$$

angegeben werden. Gemäß (2.117) erfolgt dann die Berechnung des Verdrehwinkels über

$$\varphi_2 = \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{M_t dx}{G \frac{\pi}{2} \left( R_A + \frac{R_E - R_A}{L_2} (x - L_1) \right)^4} \quad (2.123)$$

Mit der Substitution

$$\xi = \frac{R_E - R_A}{L_2} (x - L_1) \quad \text{bzw.} \quad x = L_1 + \frac{L_2}{R_E - R_A} \xi \quad (2.124)$$

erhält man

$$\varphi_2 = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{G} \frac{L_2}{R_E - R_A} \int_0^{R_E - R_A} \frac{d\xi}{(R_A + \xi)^4} \quad (2.125)$$

wobei mit (2.124) die Integrationsgrenzen angepasst,  $dx$  durch  $\frac{L_2}{R_E - R_A} d\xi$  ersetzt und alle konstanten Terme vor das Integral gezogen wurden. Die Integration liefert

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{G} \frac{L_2}{R_E - R_A} \frac{1}{-3} \left[ \frac{1}{(R_A + \xi)^3} \right]_0^{R_E - R_A} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{G} \frac{L_2}{R_E - R_A} \frac{1}{-3} \left( \frac{1}{R_E^3} - \frac{1}{R_A^3} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{G} \frac{L_2}{R_E - R_A} \frac{1}{-3} \frac{R_A^3 - R_E^3}{R_A^3 R_E^3} \end{aligned} \quad (2.126)$$

Mit der binomischen Formel

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad (2.127)$$

kann (2.126) noch weiter vereinfacht werden. Es bleibt dann mit

$$\varphi_2 = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{G} \frac{R_A^2 + R_A R_E + R_E^2}{3 R_A^3 R_E^3} L_2 \quad (2.128)$$

die allgemein gültige Formel zur Berechnung des Verdrehwinkels einer konischen Welle, die durch das Torsionsmoment  $M_t$  belastet wird und deren Radius sich über der Länge  $L_2$  linear von  $R_A$  auf  $R_E$  aufweitet.

Mit den Zahlenwerten  $M_t = 240 \text{ Nm}$ ,  $L_1 = 2 \text{ m}$ ,  $L_2 = 1.2 \text{ m}$ ,  $L_3 = 4 \text{ m}$ ,  $R_A = 0.02 \text{ m}$ ,  $R_E = 0.04 \text{ m}$  und  $G = 7.8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$  bzw.  $G = 7.8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$  erhält man aus (2.121) und (2.128) den Gesamtverdrehwinkel zu

$$\varphi = 0.0245 + 0.0043 + 0.0031 = 0.0319 \approx 1.83^\circ$$

Der dritte Abschnitt hat im Vergleich zum ersten den doppelten Radius  $R_E = 2R_A$  und die doppelte Länge  $L_3 = 2L_1$ . Da das polare Flächenmoment  $I_P$  eines kreisförmigen Querschnitts aber mit der 4. Potenz des Radius zunimmt, ist hier der Verdrehwinkel des ersten Abschnitts 8-mal so groß wie der des dritten. Hätte man den Verdrehwinkel des mittleren konischen Abschnitts nicht nach (2.128) sondern mit dem aus dem mittleren Radius  $R_M = (R_A + R_E)/2$  berechneten polaren Flächenmoment ermittelt, dann wäre das Ergebnis mit 0.0029 im Vergleich zum exakten Wert von 0.0043 um mehr als 30% zu klein ausgefallen.

### 2.7.8 Kreiszylindrische Rohre

Der einfache lineare Schubspannungsansatz (2.97) gilt auch für Kreiszylindrische Rohre. Analog zu (2.102) erhält man

$$\tau_{x\varphi}(r) = \frac{M_x}{I_P^{\circ}} r \quad \text{mit} \quad R_i \leq r \leq R_a \quad (2.129)$$

wobei zu beachten ist, dass der Radius  $r$  durch den Innen- und Außenradius des Querschnitts auf  $R_i \leq r \leq R_a$  beschränkt wird. Das polare Flächenträgheitsmoment ist dabei

$$I_P^{\circ} = \frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{32} (D_a^4 - D_i^4) \quad (2.130)$$

gegeben, wobei  $D_a = 2R_a$  und  $D_i = 2R_i$  den Außen- und Innendurchmesser angeben. Analog zu (2.116) definiert

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{G I_P^{\circ}} \quad (2.131)$$

die Verwindung oder Drillung eines kreiszylindrischen Rohres.

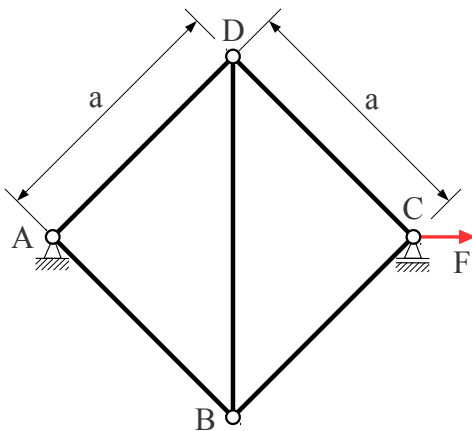
Analog zu (2.108) können aus (2.130) auch die Flächenmomente 2. Grades für kreiszylindrisches Rohr abgeleitet werden

$$I_{yy}^{\circ} = I_{zz}^{\circ} = \frac{1}{2} I_P^{\circ} = \frac{\pi}{4} (R_a^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{64} (D_a^4 - D_i^4) \quad (2.132)$$

## 2.8 Übungen

### 2.8.1 Einfacher Gitterrost

Der skizzierte einfache Gitterrost wird in horizontaler Richtung durch die Kraft  $F$  belastet.

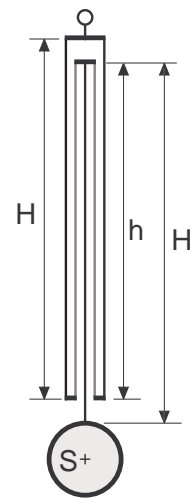


Bestimmen Sie die Lagerreaktionen, die Kräfte in den Gitterstäben sowie die Verschiebung des Kraftangriffspunktes, wenn die Dehnsteifigkeit der Stäbe mit  $EA$  gegeben ist

Lösung:

### 2.8.2 Kompensationspendel

Die Schwingungsdauer eines Pendels hängt von seiner Länge ab. Temperatur bedingte Änderungen der Pendellänge führen deshalb bei mechanischen Uhren zu Gangabweichungen. Ältere mechanische Uhren, die auch Regulatoren genannt werden, verfügen über ein Kompensationspendel, dessen Länge bei Temperaturschwankungen nahezu konstant bleibt. Die Pendelstange wird dabei aus zwei Materialien mit unterschiedlichen Wärmedehnzahlen gefertigt.



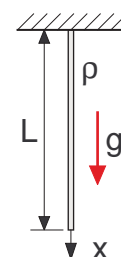
Die kürzeren, aber sich stärker ausdehnenden Stäbe schieben dabei den Pendelschwerpunkt  $S$  ebensoweit nach oben, als er durch die längeren, aber weniger ausdehnungsfähigen Stäbe nach unten geschoben wird.

Bei welchem Verhältnis der Wärmedehnzahlen bleibt die Pendellänge unabhängig von der Temperatur konstant, wenn die drei längeren Stäbe jeweils die Länge  $H$  und die beiden kürzeren die Länge  $h = 0.96 H$  haben?

Lösung:

### 2.8.3 Draht unter Eigengewicht

Ein dünner Stahldraht mit der Dichte  $\rho$  und der Länge  $L$  ist am oberen Ende fest eingespannt.



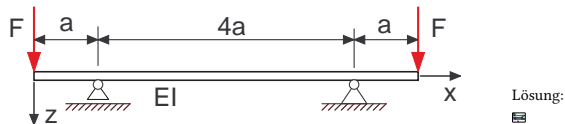
Lösung:

Ermitteln Sie den Verlauf der Normalspannung über der Drahtlänge. Welche Längenänderung erfährt der Draht?

Wie lang kann der Draht höchstens sein, wenn die Bruchspannung durch  $\sigma_B$  gegeben ist?

### 2.8.4 Vierpunkt-Biegung

Ein dünner Balken mit der Biegesteifigkeit  $EI$  und der Länge  $6a$  wird an den Enden mit den Kräften  $F$  belastet.

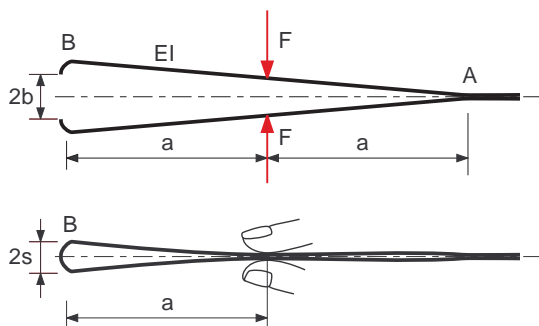


Lösung:

Skizzieren Sie den Verlauf der Schnittgrößen  $Q_z$  und  $M_y$  über der Balkenlänge und bestimmen Sie die Durchbiegung an der Stelle  $x = 3a$ .

### 2.8.5 Pinzette

Die beiden Arme einer Pinzette haben die Länge  $2a$  und die Biegesteifigkeit  $EI$ . Sie sind bei A fest miteinander



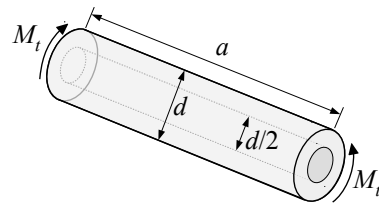
verbunden. Im unbelasteten Zustand sind die Arme der Pinzette gerade und ihr Abstand bei B beträgt  $2b$ .

- Mit welcher Kraft  $F$  muss die Pinzette in der Mitte zusammengedrückt werden, damit sich die Enden in B gerade berühren?
- Mit welcher Kraft  $F_B$  werden die Enden bei B aufeinander gepresst, wenn die Pinzette in der Mitte fest zusammengedrückt wird?

Lösung:

### 2.8.6 Hohlwelle

Eine zylindrische Vollwelle mit dem Durchmesser  $d$  und der Länge  $a$  wird durch das Torsionsmoment  $M_t$  belastet. Zur Gewichtseinsparung soll sie nun mit dem Bohrungsdurchmesser  $d/2$  hohlgebohrt werden.

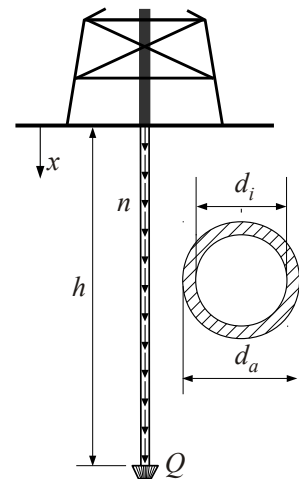


- Um wie viel Prozent verringert sich das Wellengewicht?
- Um wie viel Prozent erhöht sich die maximale Torsionsspannung?
- Um wie viel Prozent erhöht sich der Verdrehwinkel?

Lösung:

### 2.8.7 Bohrgestänge

An einer Landbohrstelle wird nach Öl gebohrt. Der Bohrkopf mit dem Gewicht  $Q$  befindet sich in der Tiefe  $h$ . Das Bohrgestänge besteht aus Rohrprofilen mit dem Innendurchmesser  $d_i$  und dem Außendurchmesser  $d_a$ , die das längenbezogene Gewicht  $n$  und den E-Modul  $E$  haben.



- Berechnen Sie den aufgrund des Eigengewichts und des Gewichts des Bohrkopfs wirkenden Normalkraftverlauf  $N(x)$ , die Dehnung  $\epsilon(x)$  und die Verschiebungsfunktion  $u(x)$ , wenn der Bohrkopf den Boden nicht berührt.
- Berechnen Sie mit den Werten:  
 $h = 1000 \text{ m}$ ,  $d_a = 177 \text{ mm}$ ,  $d_i = 165 \text{ mm}$ ,  
 $n = 245 \text{ N/m}$ ,  $Q = 8 \text{ kN}$ ,  $E = 210 \text{ kN/mm}^2$   
 die maximale Zugspannung  $\sigma_{xx}^{max}$  und die Verlängerung  $\Delta h$  des Bohrgestänges.

Nun wird der Bohrvorgang gestartet. Dabei wirkt auf den Bohrkopf das Bohrmoment  $M_B = 10 \text{ kNm}$ .

- Berechnen Sie mit den Zahlen aus b) und dem Schubmodul  $G = 80.8 \text{ kN/mm}^2$  die Drillung  $d\varphi/dx$  des Bohrgestänges und die maximale Torsionsspannung  $\tau_{x\varphi}^{max}$  im Rohr.

Lösung:

# 3 Statisch überbestimmte Systeme

## 3.1 Motivation

Um Durchbiegungen, Verdrehungen und/oder Neigungen von Bauteilen bei Belastungen zu verringern, werden häufig zusätzliche Lagerungen, Verstreben oder Abstützungen verwendet. In der Regel entstehen dadurch zum Teil mehrfach statisch überbestimmte Systeme.

## 3.2 Beispiele

### 3.2.1 Zusätzliche Strebe

Der dehnstarre Rahmen einer Spindelpresse hat die Biegesteifigkeit  $EI$ . Um große Spindelkräfte  $F$  zu ermöglichen, wird er durch einen beidseitig gelenkig gelagerten Zuganker mit der Dehnsteifigkeit  $EA$  verstärkt, Bild 3.1.

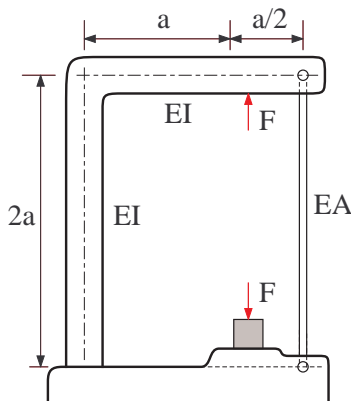


Bild 3.1: Spindelpresse mit Zuganker

Da das System durch die Verstreben einfach statisch überbestimmt geworden ist, kann die Kraft  $Z$  im Zuganker nicht mehr aus den Gleichgewichtsbedingungen allein ermittelt werden.

### 3.2.2 Zusätzliches Lager

Der einseitig eingespannte Träger mit der Länge  $L$ , der durch eine konstante Streckenlast  $q_0$  belastet ist, wird an der Stelle  $s$  zusätzlich durch ein horizontal verschiebbares Gelenklager abgestützt, Bild 3.2.

Das System ist nun einfach statisch überbestimmt.

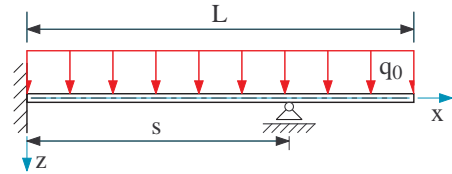


Bild 3.2: Bauteil mit zusätzlichem Lager

## 3.3 Lösungsschritte

### 3.3.1 Teilsysteme

Statisch überbestimmte Systeme können stets durch gezielte Schnitte, durch Entfernen oder Abändern von Lagern sowie durch Einfügen zusätzlicher Gelenke in statisch bestimmtes System überführt oder in statisch bestimmte Teilsysteme zerlegt werden.

Entfernt man im Beispiel aus dem Abschnitt 3.2.1 den Zuganker, dann erhält man mit dem Rahmen und dem Zuganker die statisch bestimmten Teilsysteme I und II, Bild 3.3.

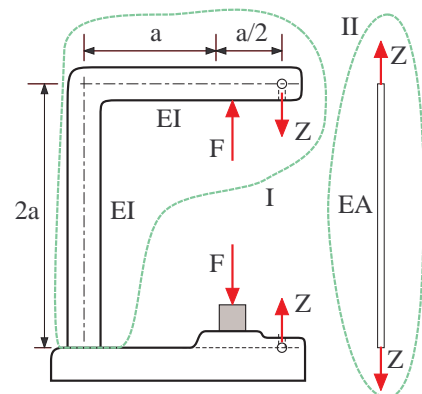


Bild 3.3: Spindelpresse zerlegt in Teilsysteme

Beim Beispiel aus dem Abschnitt 3.2.2 führt das formale Entfernen des zusätzlichen Gelenklagers direkt auf ein statisch bestimmtes System, Bild 3.4

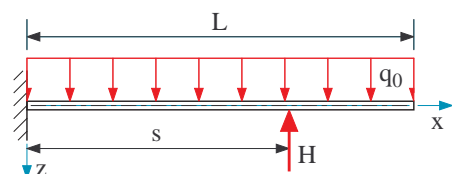


Bild 3.4: Gelenklager ersetzt durch Kraft



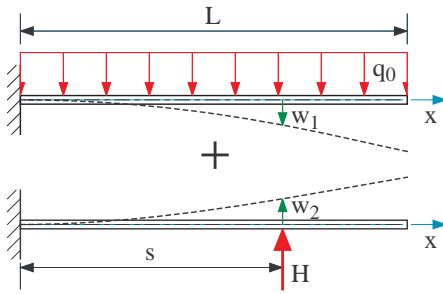


Bild 3.7: Unterteilung in einfache Teilsysteme

Im relevanten Bereich  $0 \leq x \leq s$  wird das zweite Teilsystem durch den Belastungsfall aus Abschnitt 2.6.1 abgebildet. Ersetzt man  $F$  durch  $H$  und  $L$  durch  $s$ , dann erhält man für die Durchbiegung an der Stelle  $x = s$ , die im vorliegenden Fall das Bauteilende markiert, den Wert

$$w_2 = \frac{1}{3} \frac{Hs^3}{EI} \quad (3.12)$$

Die gesamte Verschiebung an der Stelle  $x = s$  ist dann durch

$$w = w_1 - w_2 \quad (3.13)$$

gegeben.

### 3.3.3 Kompatibilität

#### 3.3.3.1 Spindelpresse

Die Verformungen des Zugankers und des Rahmens sind durch die Kompatibilitätsbedingung

$$\Delta L_Z = w_Z \quad (3.14)$$

an einander gekoppelt. Mit (3.1) und (3.10) folgt daraus eine Bestimmungsgleichung für die Kraft  $Z$  im Zuganker

$$\frac{2aZ}{EA} = \left( \frac{43}{12} F - \frac{45}{8} Z \right) \frac{a^3}{EI} \quad (3.15)$$

Aufgelöst bleibt

$$Z = \frac{\frac{43}{12} \frac{a^3}{EI}}{\frac{45}{8} \frac{a^3}{EI} + \frac{2a}{EA}} F = \frac{86}{135 + \frac{48I}{a^2A}} F \quad (3.16)$$

#### 3.3.3.2 Lagerung

Das Lager an der Stelle  $x = s$  lässt keine vertikale Verschiebung zu. Die daraus resultierende Kompatibilitätsbedingung

$$w = 0 \quad (3.17)$$

liefert dann mit (3.13) sowie (3.11) und (3.12) eine Bestimmungsgleichung für die Kraft  $H$

$$\frac{1}{3} \frac{Hs^3}{EI} = \frac{1}{24} \frac{q_0 L^4}{EI} \left( \frac{s}{L} \right)^2 \left( 6 - 4 \frac{s}{L} + \left( \frac{s}{L} \right)^2 \right) \quad (3.18)$$

Aufgelöst bleibt

$$H = \frac{1}{8} q_0 L \frac{L}{s} \left( 6 - 4 \frac{s}{L} + \left( \frac{s}{L} \right)^2 \right) \quad (3.19)$$

Für den Sonderfall  $s = L$  erhält man mit

$$H = \frac{3}{8} q_0 L \quad (3.20)$$

ein Ergebnis, das auch mit dem Ersatzsystem aus Bild 3.5 berechnet werden kann. Die Kompatibilitätsbedingung

$$w'(x=0) = 0 \quad (3.21)$$

führt über die Belastungsfälle aus Abschnitt 2.6.5 und Abschnitt 2.6.6 zu einer Bestimmungsgleichung für das Moment  $M$

$$\frac{1}{3} \frac{ML}{EI} = \frac{1}{24} \frac{q_0 L^3}{EI} \quad \text{oder} \quad M = \frac{1}{8} q_0 L^2 \quad (3.22)$$

Das Momentengleichgewicht bezüglich der Stelle  $x = 0$

$$M - q_0 L \frac{1}{2} L + HL = 0 \quad (3.23)$$

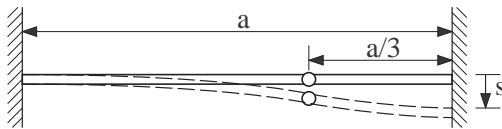
ermöglicht dann die Bestimmung der Kraft  $H$ , die im zusätzlichen Lager an der Stelle  $x = L$  auftritt. Löst man (3.23) mit (3.22) nach  $H$  auf, dann erhält man das bereits in (3.20) angegebene Ergebnis.



### 3.4 Übungen

#### 3.4.1 Gelenk-Träger

Ein auf beiden Seiten fest eingespannter Träger mit einem Gelenk hat die Biegesteifigkeit  $EI$ . Er ist spannungsfrei montiert.

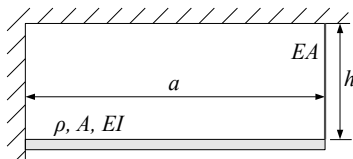


Berechnen Sie den Verlauf der Querkraft  $Q$  und des Biegemomentes  $M$  über der Länge des Trägers, wenn sich die Lagerwände um eine kleine Strecke  $s$  gegeneinander verschieben.

Lösung:

#### 3.4.2 Träger mit Abspannseil

Ein Träger (Dichte  $\rho$ , Querschnitt  $A$ , Biegesteifigkeit  $EI$ , Länge  $a$ ) ist an einem Ende fest eingespannt und wird am anderen Ende an einem Drahtseil abgestützt. Das Drahtseil hat die Dehnsteifigkeit  $EA$  und ist im Ab-



stand  $h$  oberhalb des Trägers an der Decke befestigt.

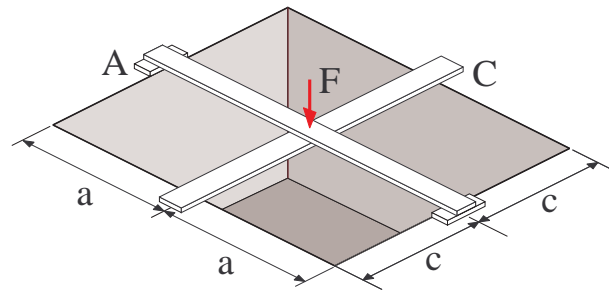
- Welche Kraft muss das Drahtseil auf den Träger ausüben, damit die durch das Eigengewicht des Trägers hervorgerufene Durchbiegung am Trägerende verschwindet?
- Wie lang muss das Drahtseil vor der Montage sein, damit es im eingebauten Zustand die durch das Eigengewicht des Trägers hervorgerufene Durchbiegung am Trägerende verhindert?

Lösung:

#### 3.4.3 Bretter über Grube

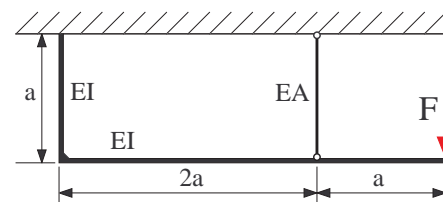
Über eine rechteckige Grube mit den Abmessungen  $2a \times 2c$  werden, wie skizziert, zwei Bretter gelegt. Die Bretter haben den gleichen Querschnitt (Breite  $b$ , Höhe  $h$ ) und jeweils den Elastizitätsmodul  $E$ . Am Rand der Grube liegen die Bretter lose auf und berühren sich im unbelasteten Zustand gerade noch.

Berechnen Sie die Durchbiegung am Kraftangriffspunkt und die Auflagerkräfte in A und C. Lösung:



#### 3.4.4 Rahmen-Träger

Das skizzierte Rahmen-Tragwerk, bestehend aus einem abgewinkelten Träger und einem Stab, wird am Ende durch die Kraft  $F$  belastet.

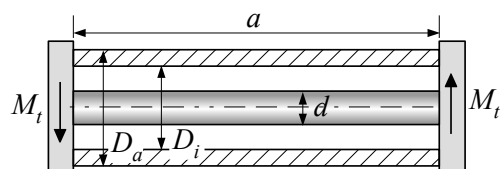


Wie groß ist die Stabkraft?

Lösung:

#### 3.4.5 Welle mit Rohr

Ein Rohr und eine Welle, jeweils der Länge  $a$ , sind an beiden Enden an starren Flanschen befestigt. Die Welle hat den Durchmesser  $d$  und  $D_i$  und  $D_a$  geben den Innen- und Außendurchmesser des Rohrs an. Die Flansche werden mit dem Torsionsmoment  $M_t$  belastet.



Ermitteln Sie die Torsionssteifigkeit der Welle-Rohr-Verbindung.

Lösung:

# 4 Knickung

## 4.1 Vorbemerkung

In der Elasto-Statik werden in der Regel die Gleichgewichtsbeziehungen für das unverformte Bauteil angesetzt. Die in technischen Anwendungen auftretenden kleinen Verformungen rechtfertigen meist dieses Vorgehen. In einigen Ausnahmesituation können jedoch auch kleine Verformungen große Änderungen in den Kräften bewirken. In diesen Fällen müssen dann die Gleichgewichtsbeziehungen für das verformte Bauteil angeschrieben werden.

## 4.2 Exzentrische Krafteinleitung

### 4.2.1 Gleichgewicht am unverformten Bauteil

Ein Stab ist an beiden Enden gelenkig gelagert und wird bei A durch die um den Abstand  $e$  versetzte Kraft  $F$  exzentrisch belastet, Bild 4.1. Der Stab hat die Länge  $L$  und bezüglich der  $y$ -Achse ist seine Biegesteifigkeit durch  $E I_{yy}$  gegeben.

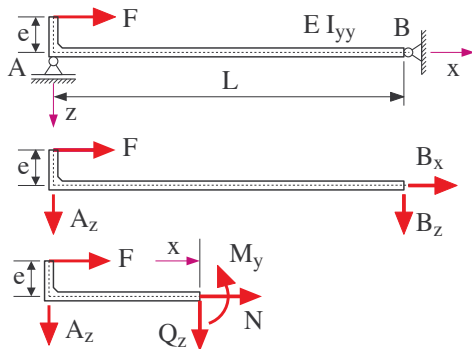


Bild 4.1: Stab mit exzentrischer Belastung

Die Gleichgewichtsbeziehungen am Gesamtsystem

$$F + B_x = 0 \quad (4.1)$$

$$A_z + B_z = 0 \quad (4.2)$$

$$A_z L - F e = 0 \quad (4.3)$$

liefern die Lagerreaktionen

$$A_z = \frac{e}{L} F, \quad B_x = -F \quad \text{und} \quad B_z = -\frac{e}{L} F \quad (4.4)$$

An der Stelle  $x$  ergeben sich damit die Schnittreaktionen zu

$$N = -F, \quad Q_z = -A_z = -\frac{e}{L} F \quad (4.5)$$

und

$$M_y = eF - xA_z = eF - x\frac{e}{L}F = eF\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (4.6)$$

Der Stab wird also auf Druck und Biegung belastet. Bei langgestreckten Bauteilen kann die Schubverformung gegenüber der reinen Biegung vernachlässigt werden. Die in (5.144) angegebene Differentialgleichung der Biegelinie vereinfacht sich dann zu

$$w'' = -\frac{M_y}{EI_{yy}} \quad (4.7)$$

Mit (4.6) bleibt

$$w'' = -eF\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{1}{EI_{yy}} = \frac{eF}{EI_{yy}}\left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad (4.8)$$

Nach zweimaliger, unbestimmter Integration erhält man

$$w(x) = \frac{eF}{EI_{yy}}\left(\frac{1}{6}\frac{x^3}{L} - \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2\right) \quad (4.9)$$

Die Randbedingungen

$$w(x=0) = 0 \quad \text{und} \quad w(x=L) = 0 \quad (4.10)$$

werden mit den Integrationskonstanten

$$C_2 = 0 \quad \text{und} \quad C_1 = \frac{1}{3}L \quad (4.11)$$

erfüllt. Damit ergibt sich die Biegelinie zu

$$w(x) = \frac{1}{6} \frac{eFL^2}{EI_{yy}} \frac{x}{L} \left( \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 3\frac{x}{L} + 2 \right) \quad (4.12)$$

Nach Abspalten der Nullstelle bei  $x=L$  bleibt

$$w(x) = \frac{1}{6} \frac{eFL^2}{EI_{yy}} \frac{x}{L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \left( 2 - \frac{x}{L} \right) \quad (4.13)$$

Das Ergebnis kann mit  $M = eF$  auch dem Belastungsfall aus Abschnitt 2.6.6 entnommen werden. Da das Moment dort an der Stelle  $x=L$  eingeleitet wird, muss das in Abschnitt 2.6.6 angegebene Ergebnis durch die Koordinatentransformation  $x \rightarrow L-x$  erst auf den hier vorliegenden Fall angepasst<sup>1</sup> werden.



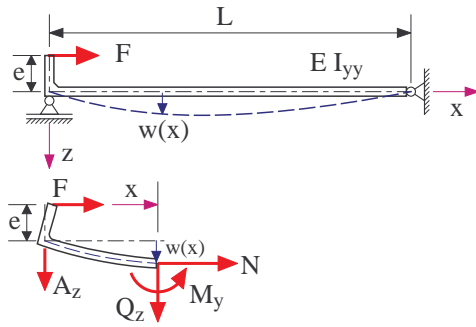


Bild 4.2: Stab mit Biegeverformung

#### 4.2.2 Gleichgewicht am verformten Bauteil

Aus Bild 4.2 erkennt man, dass die aus (4.13) resultierende Biegeverformung einen Einfluss auf das Schnittmoment hat.

Berücksichtigt man die Verformung bei der Berechnung der Schnittreaktionen an der Stelle  $x$ , dann erhält man an Stelle von (4.6) für das Schnittmoment den Ausdruck

$$M_y = (w+e)F - xA_z = wF + eF \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (4.14)$$

wobei die Lagerreaktion  $A_z$  weiterhin durch (4.4) gegeben ist und  $w = w(x)$  die Durchbiegung des Stabes an der Stelle  $x$  angibt. Aus (4.8) erhält man dann die Differentialgleichung der Biegelinie zu

$$w'' + \omega^2 w = \omega^2 e \left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad (4.15)$$

wobei die Abkürzung

$$\omega^2 = \frac{F}{EI_{yy}} \quad (4.16)$$

verwendet und der aus der Durchbiegung  $w$  resultierende Anteil im Biegemoment auf die linke Seite gestellt wurde. Diese lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung kann nun nicht mehr durch einfache Integration gelöst werden. Die Biegelinie  $w = w(x)$  kann aber mit

$$w(x) = w_h(x) + w_p(x) \quad (4.17)$$

durch Addition der homogenen und partikulären Lösung der Differentialgleichung bestimmt werden. Die homogene Differentialgleichung

$$w_h'' + \omega^2 w_h = 0 \quad (4.18)$$

kann durch den Ansatz

$$w_h(x) = A \sin \omega x + B \cos \omega x \quad (4.19)$$

gelöst werden, wobei  $A$  und  $B$  noch zu bestimmende Konstante sind. Für die partikuläre Lösung wird mit

$$w_p(x) = C \left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad (4.20)$$

ein Ansatz verwendet, der bis auf die Konstante  $C$  der rechten Seite der Differentialgleichung (4.15) entspricht. Setzt man den aus (4.19) und (4.20) zusammengesetzten Lösungsansatz (4.17) in (4.15) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} & \underbrace{-A\omega^2 \sin \omega x - B\omega^2 \cos \omega x}_{w_h''} + \underbrace{0}_{w_p''} \\ & + \omega^2 \left\{ \underbrace{A \sin \omega x + B \cos \omega x}_{w_h} + \underbrace{C \left(\frac{x}{L} - 1\right)}_{w_p} \right\} \quad (4.21) \\ & = \omega^2 e \left(\frac{x}{L} - 1\right) \end{aligned}$$

Linke und rechte Seite stimmen für

$$\omega^2 C = \omega^2 e \quad \text{oder} \quad C = e \quad (4.22)$$

überein. Die allgemeine Lösung

$$w(x) = A \sin \omega x + B \cos \omega x + e \left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad (4.23)$$

muss nun noch an die Randbedingungen angepasst werden. Aus (4.10) erhält man mit (4.23) zwei Gleichungen

$$0 = B - e \quad \text{und} \quad 0 = A \sin \omega L + B \cos \omega L \quad (4.24)$$

die nach den Konstanten aufgelöst werden können

$$B = e \quad \text{und} \quad A = -e \frac{\cos \omega L}{\sin \omega L} \quad (4.25)$$

Während die Konstante  $B$  stets endlich bleibt, kann  $A$  für  $\sin \omega L = 0$  unendlich groß werden. Der Stab ist dann nicht mehr im Gleichgewicht sondern knickt aus. Der kritische Fall tritt erstmals auf bei

$$\omega L = \pi \quad \text{oder} \quad \omega^2 L^2 = \pi^2 \quad (4.26)$$

Durch Einsetzen der Abkürzung (4.16) ergibt sich daraus die kritische Knicklast zu

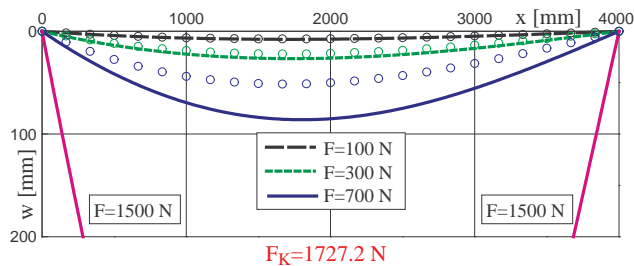
$$F_K = \pi^2 \frac{EI_{yy}}{L^2} \quad (4.27)$$

Der Einfluss der Normalkraft auf die Biegelinie macht sich nicht erst bei der kritischen Belastung sondern bereits vorher deutlich bemerkbar, Bild 4.3.

Die mit kleinen Kreisen markierten Biegelinien wurden ohne Einfluss der Normalkraft berechnet. Für kleine Normalkräfte, z.B. bei  $F = 100 \text{ N}$ , stimmen die aus (4.13) und (4.23) mit (4.25) berechneten Lösungen gut überein. Mit steigender Normalkraft ( $F = 300 \text{ N}$  und  $F = 700 \text{ N}$ ) werden die Abweichungen immer größer. Nähert man sich mit  $F = 1500 \text{ N}$  an die kritische Knicklast  $F_K = 1727.2 \text{ N}$  an, dann tritt eine extreme Durchbiegung auf. Die entsprechende Biegelinie kann zwar noch gezeichnet werden, entspricht aber nicht mehr der Realität, da die Biegedifferentialgleichung nur für kleine Durchbiegungen Gültigkeit besitzt.

Da in der Praxis die Krafteinleitung nie exakt zentrisch erfolgt und die Mittellinie des Bauteils oftmals bereits leicht vorgekrümmt ist, muss die Knickung bei auf Druck belasteten Bauteilen auch für  $e \rightarrow 0$  bei der Dimensionierung mit berücksichtigt werden.

<sup>1</sup>  $\frac{x}{L} \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) \rightarrow \frac{L-x}{L} \left(1 - \left(\frac{L-x}{L}\right)^2\right) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} \left(2 - \frac{x}{L}\right)$

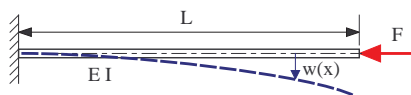


$E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$ ,  $I_{yy} = 13\,333 \text{ mm}^4$ ,  $L = 4000 \text{ mm}$ ,  $e = 200 \text{ mm}$

Bild 4.3: Biegung durch exzentrische Druckkraft

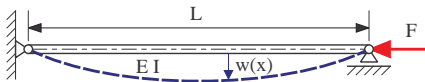
### 4.3 Knickfälle nach Euler

Die kritische Knicklast hängt nicht nur von der Geometrie ( $I_{yy}$ ,  $L$ ) und den Materialeigenschaften ( $E$ ) sondern auch von der Belastungsart und der Lagerung ab. Leonard Euler hat sich erstmals mit Knickproblemen beschäftigt und dabei vier verschiedene, heute nach ihm benannte, Lagerungsfälle untersucht, Bilder 4.4 bis 4.7



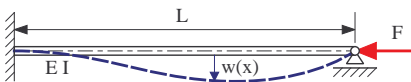
$$F_K = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Bild 4.4: Einseitige Einspannung: Euler I



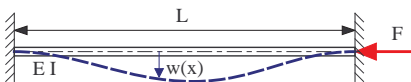
$$F_K = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

Bild 4.5: Beidseitig gelenkig gelagert: Euler II



$$F_K = 4.49^2 \frac{EI}{L^2}$$

Bild 4.6: Einspannung und Gelenk: Euler III<sup>2</sup>



$$F_K = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

Bild 4.7: Beidseitige Einspannung: Euler IV

Durch Einführen einer effektiven Knicklänge  $\ell_K$  können die kritischen Knicklasten der vier Euler-Fälle in einer Formel zusammengefasst werden

$$F_K = \pi^2 \frac{EI}{\ell_K^2} \quad (4.28)$$

Die effektiven Knicklängen für die Euler-Fälle I bis IV

$$\ell_K^I = 2L, \quad \ell_K^{II} = L, \quad \ell_K^{III} \approx 0.7L, \quad \ell_K^{IV} = \frac{1}{2}L \quad (4.29)$$

erhält man aus dem Vergleich mit den in den Bildern 4.4 bis 4.7 angegebenen Beziehungen, wobei der dabei auftretende Ausdruck  $\frac{\pi}{4.49}$  auf den Wert 0.7 gerundet wurde.

Da die kritische Knicklast direkt proportional zum Flächenmoment 2. Grades ist, erfolgt das Knicken um die Achse mit dem kleinsten Hauptflächenträgheitsmoment des Bauteilquerschnittes.

### 4.4 Knickspannung

Flächenmomente 2. Grades können auf Grund ihrer Dimension auch in der Form

$$I = A \varrho^2 \quad (4.30)$$

dargestellt werden, wobei  $A$  die Fläche und  $\varrho$  den Trägheitsradius<sup>3</sup> angeben. In (4.28) eingesetzt erhält man

$$F_K = \pi^2 \frac{EA \varrho^2}{\ell_K^2} = A \frac{\pi^2 E}{(\ell_K/\varrho)^2} \quad (4.31)$$

Die kritische Knickspannung ist dann durch

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A} = \frac{\pi^2 E}{(\ell_K/\varrho)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (4.32)$$

gegeben, wobei

$$\lambda = \frac{\ell_K}{\varrho} \quad (4.33)$$

den Schlankheitsgrad des Bauteils angibt. Der Verlauf der kritischen Knickspannung  $\sigma_K$  über dem Schlankheitsgrad  $\lambda$  ist in Bild 4.8 für Baustahl ( $E = 200\,000 \text{ N/mm}^2$ ) und Aluminium ( $E = 70\,000 \text{ N/mm}^2$ ) aufgetragen.

Bei der Berechnung der kritischen Knicklast und der daraus abgeleiteten kritischen Knickspannung wurde linear elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Die aus (4.32) resultierenden Hyperbeln sind deshalb nur gültig, solange die kritische Knickspannung unterhalb der jeweiligen Fließgrenze  $\sigma_F$ , bzw. Proportionalitätsgrenze  $\sigma_P$  bleibt.

<sup>2</sup> Den Wert 4.49 erhält man aus der numerisch berechneten Lösung der transzendenten Gleichung  $\tan x = x$

<sup>3</sup> Die Fläche eines Rechteckquerschnitts mit der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  ist durch  $A = b h$  gegeben. Für die Flächenmomente 2. Grades gilt dann  $I_{yy} = A h^2/12$  und  $I_{zz} = A b^2/12$ . Damit sind  $\varrho_y = \frac{h}{2\sqrt{3}}$  und  $\varrho_z = \frac{b}{2\sqrt{3}}$  die Trägheitsradien eines Rechteckquerschnitts.

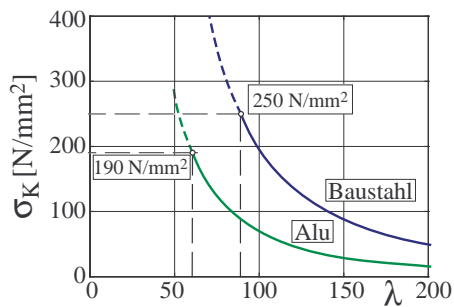
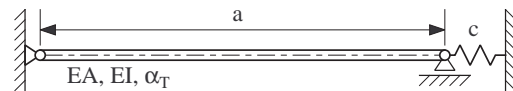


Bild 4.8: Knickspannungen für Stahl und Alu ( $\sigma_F = 250 \text{ N/mm}^2$  bzw.  $\sigma_F = 190 \text{ N/mm}^2$ )

Konstanten  $c$  ab. Bei der Temperatur  $T = T_0$  ist die Feder entspannt.

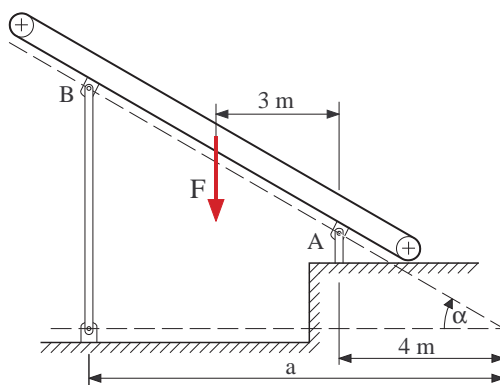


Um Welche Temperatur  $\Delta T$  darf der Stab nur erwärmt werden, damit noch eine  $v_K$ -fache Sicherheit gegen elastisches Knicken gewährleistet ist? Lösung:

## 4.5 Übungen

### 4.5.1 Förderband

Das um den Winkel  $\alpha = 30^\circ$  geneigte Förderband ist in A in einem festen Gelenklager und bei B auf einer Pendelstütze gelagert. Das Eigengewicht und das Gewicht des Schüttgutes sind in der vertikalen Kraft  $F = 120 \text{ kN}$  zusammengefasst. Bei der aus einem Stahlrohr ( $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$ ) gefertigten Pendelstütze stehen Innen- und Außendurchmesser im Verhältnis  $d_i/d_a = 0.8$ .



- Die Pendelstütze ist zunächst bei  $a = 10 \text{ m}$  geplant. Wie groß muss dann der Außendurchmesser  $d_a$  mindestens gewählt werden, damit eine Sicherheit von  $v_K = 2.5$  gegen ein elastisches Knicken gewährleistet ist?
- Bei welchem Abstand  $a = a_{opt}$  könnte die größtmögliche Sicherheit gegen elastisches Knicken erreicht werden?

Lösung:

### 4.5.2 Wärmedehnung

Ein Stab mit der Länge  $a$ , der Dehnsteifigkeit  $EA$ , der Biegesteifigkeit  $EI$  und dem Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha_T$  ist an einem Ende gelenkig gelagert und stützt sich am anderen Ende auf einer Feder mit der

# 5 Schiefe Biegung

## 5.1 Motivation und Belastungsszenario

Bei der Technischen Biegelehre, die im Abschnitt 2.5 beschrieben ist, wird der Einfluss von Querkräften auf den Spannungs- und Verformungszustand vernachlässigt. Unter welchen Voraussetzungen dies gerechtfertigt ist und wie gegebenenfalls der aus  $Q_y$  und  $Q_z$  resultierende Schub zu berücksichtigen ist, soll in diesem Kapitel exemplarisch untersucht werden.

Das Belastungsszenario "schiefe Biegung" tritt bereits bei einem relativ einfachen Beispiel auf. Ein Stab der Länge  $L$  ist an einem Ende fest eingespannt und wird am anderen Ende durch die Kräfte  $F_x$ ,  $F_y$  und  $F_z$  in Längs-, Quer- und Vertikalrichtung belastet, Bild 5.1. Das Kräfte- und Momentengleichgewicht an einem

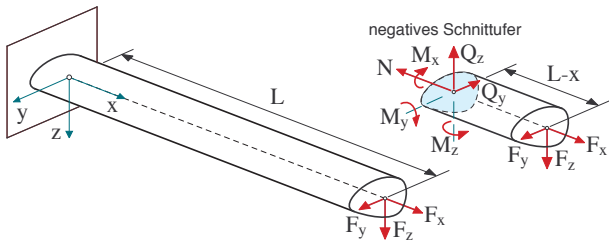


Bild 5.1: Stab auf Zug und Biegung belastet

Teilstück der Länge  $L - x$  liefert sofort die Schnittreaktionen zu

$$N = F_x, \quad Q_y = F_y, \quad Q_z = F_z \quad \text{und} \quad (5.1)$$

$$M_x = 0, \quad M_y = -F_z (L - x), \quad M_z = F_y (L - x) \quad (5.2)$$

was selbstverständlich auch den allgemein gültigen Beziehungen

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z \quad \text{und} \quad \frac{dM_z}{dx} = -Q_y \quad (5.3)$$

genügt. Eine allgemeine Belastung eines Bauteils durch Streckenlasten (Eigengewicht) und/oder durch Einzelkräfte in Längs-, Quer- und Vertikalrichtung hat deshalb in einem Schnitt senkrecht zur Bauteilachse ( $x$ -Achse) stets Schnittreaktionen der Form

$$N \neq 0, \quad Q_y \neq 0, \quad Q_z \neq 0, \quad M_x = 0, \quad M_y \neq 0, \quad M_z \neq 0 \quad (5.4)$$

zur Folge, die über die Äquivalenzbeziehungen (2.1) bis (2.6) mit der Normalspannungen  $\sigma_{xx}$  und den Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$  verknüpft sind.

## 5.2 Normalspannung

### 5.2.1 Ansatz

Ein geeigneter Ansatz für die Normalspannung  $\sigma = \sigma(y, z)$  muss zunächst einmal die Äquivalenzbeziehungen (2.1), (2.5) und (2.6) erfüllen. Die durch den Flächenmittelpunkt  $S_A$  laufende  $x$ -Achse hat  $\int y dA = 0$  und  $\int z dA = 0$  zur Folge. Die über dem Querschnitt konstante Normalspannung  $\sigma = N/A$  würde zwar in trivialer Weise die Beziehung (2.1) erfüllen, kann aber weder ein Moment  $M_y$  noch ein Moment  $M_z$  erzeugen. Der Ansatz

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(y, z) = C_0 + C_1 y + C_2 z \quad (5.5)$$

beinhaltet mit  $C_0$ ,  $C_1$  und  $C_2$  drei zunächst noch unbekannte Konstante, die über die Äquivalenzbeziehungen

$$N = \int (C_0 + C_1 y + C_2 z) dA \quad (5.6)$$

$$M_y = \int z (C_0 + C_1 y + C_2 z) dA \quad (5.7)$$

$$M_z = \int -y (C_0 + C_1 y + C_2 z) dA \quad (5.8)$$

an den speziellen Belastungsfall  $N \neq 0$ ,  $M_y \neq 0$  und  $M_z \neq 0$  angepasst werden können. Nach Ausklammern der Konstanten  $C_0$ ,  $C_1$  und  $C_2$  und Aufteilen der Integrale bleibt

$$N = C_0 \int dA + C_1 \int y dA + C_2 \int z dA \quad (5.9)$$

$$M_y = C_0 \int z dA + C_1 \int y z dA + C_2 \int z^2 dA \quad (5.10)$$

$$-M_z = C_0 \int y dA + C_1 \int y^2 dA + C_2 \int y z dA \quad (5.11)$$

wobei die letzte Gleichung mit  $-1$  multipliziert wurde. Wegen  $\int y dA = 0$ ,  $\int z dA = 0$ ,  $\int dA = A$  kann die Gleichung (5.9) sofort nach  $C_0$  aufgelöst werden. Das Ergebnis

$$C_0 = \frac{N}{A} \quad (5.12)$$

hängt nur von der Normalkraft  $N$  nicht aber von den Biegemomenten  $M_y$  und  $M_z$  ab. Mit den Flächenmomenten 2. Grades<sup>1</sup>

$$I_{yy} = \int z^2 dA, \quad I_{zz} = \int y^2 dA, \quad I_{yz} = - \int y z dA \quad (5.13)$$

<sup>1</sup> In Analogie zum Massendeвиationsmoment bezieht man häufig, wie auch hier geschehen, ein Minuszeichen in die Definition des Flächendeвиationsmomentes mit ein

sowie unter Berücksichtigung von  $\int y dA = 0$  und  $\int z dA = 0$  können die verbleibenden Beziehungen (5.10) und (5.11) nach den Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  aufgelöst werden. Man findet

$$C_1 = -\frac{M_z I_{yy} - M_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (5.14)$$

$$C_2 = \frac{M_y I_{zz} - M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (5.15)$$

Dem Ansatz (5.5) entsprechend ist die Normalspannung bei der Belastung durch die Normalkraft  $N$  und die Biegemomente  $M_y$  und  $M_z$  durch

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} - \frac{M_z I_{yy} - M_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_{zz} - M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z \quad (5.16)$$

gegeben. Bei Querschnitten mit  $I_{yz} = 0$  setzt sich die Normalspannung

$$\sigma_{xx}^{I_{yz}=0} = \underbrace{\frac{N}{A}}_{\text{Zug/Druck}} - \underbrace{\frac{M_z}{I_{zz}} y}_{\text{Biegung um z-Achse}} + \underbrace{\frac{M_y}{I_{yy}} z}_{\text{Biegung um y-Achse}} \quad (5.17)$$

aus Anteilen zusammen (Superposition), die jeweils nur durch die Normalkraft  $N$ , das Biegemoment  $M_y$  und das Biegemoment  $M_z$  bestimmt sind. Die Normalkraft und insbesondere die Biegemomente hängen bei allgemeiner Belastung von der Koordinate  $x$  ab, deshalb ist die durch (5.16) oder (5.17) definierte Normalspannung mit  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y, z)$  in der Regel eine Funktion von allen drei Ortskoordinaten.

## 5.2.2 Neutrale Faser

Der Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y, z)$  über der Querschnittsfläche  $A$  lässt sich dem Ansatz (5.5) entsprechend an der Schnittstelle  $x$  grafisch als geneigte Ebene darstellen, Bild 5.2. Die aus der Forderung  $\sigma_{xx} = 0$  folgende Geradengleichung

$$C_0(x) + C_1(x) y_N + C_2(x) z_N = 0 \quad (5.18)$$

gibt den geometrischen Ort verschwindender Normalspannungen an und wird als neutrale Faser des Querschnitts an der Stelle  $x$  bezeichnet. Die extremalen Spannungen  $\sigma_{xx}^{\min}$  und  $\sigma_{xx}^{\max}$  treten an den Punkten des Querschnitts auf, die den größten Abstand zur neutralen Faser<sup>2</sup> haben. Reine Zug-  $\sigma_{xx}(x, y, z) > 0$  oder Druckbelastungen  $\sigma_{xx}(x, y, z) < 0$  erhält man in allen Punkten des Querschnitts  $y, z \in A$ , wenn die neutrale Faser außerhalb der Querschnittsfläche liegt.

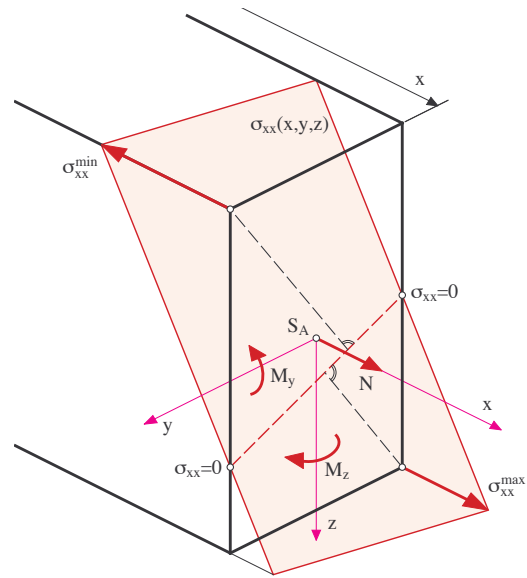


Bild 5.2: Verlauf der Normalspannung

Dies kann stets durch eine entsprechend große Belastung durch Normalkräfte erreicht werden. Materialien, die über unterschiedliche Festigkeiten bei Zug- und Druckbelastung verfügen, können so auch relativ großen Biegebeanspruchungen<sup>3</sup> ausgesetzt werden.

## 5.2.3 Beispiel

Ein einseitig fest eingespanntes Bauteil mit der Länge  $L = 1200 \text{ mm}$  und einer Querschnittsfläche in Form eines rechtwinkligen Dreiecks wird am freien Ende

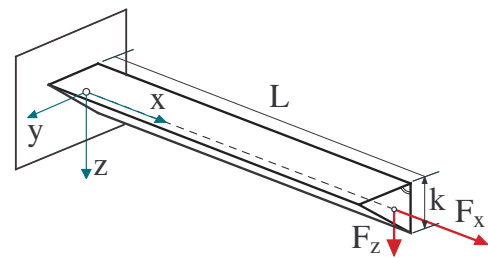


Bild 5.3: Bauteil mit Dreiecks-Querschnitt

durch die horizontale Kraft  $F_x = 1800 \text{ N}$  und die vertikale Kraft  $F_z = 300 \text{ N}$  belastet, Bild 5.3. Wobei die Kantenlänge des Dreiecks mit  $k = 30 \text{ mm}$  gegeben ist.

In Querrichtung liegt keine Belastung vor, deshalb erhält man an der Einspannstelle  $x = 0$  mit  $F_y = 0$  aus (5.1) und (5.2) die Schnittreaktionen

$$\begin{aligned} N &= 1800 \text{ N}, & Q_y &= 0, & Q_z &= 300 \text{ N} \\ M_x &= 0, & M_y &= -360\,000 \text{ Nmm}, & M_z &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

<sup>3</sup> Beton verträgt große Druck- aber kaum Zugbelastungen. Im Spann-Beton erzeugen deshalb vorgespannte Stahlstangen genügend große Druckspannungen und gewährleisten so, dass die resultierende Normalspannung im Querschnitt mit  $\sigma < 0$  bei Biegebeanspruchungen stets eine Druckbelastung erzeugt.

<sup>2</sup> größter Randfaserabstand



Im vorliegenden Sonderfall tritt kein Biegemoment um die  $z$ -Achse auf, somit vereinfacht sich wegen  $M_z = 0$  die Verteilung der Normalspannung gemäß (5.16) zu

$$\sigma_{xx}^{M_z=0} = \frac{N}{A} + \frac{M_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z \quad (5.20)$$

Die Flächenmomente 2. Grades für ein rechtwinkliges Dreieck der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  sind in Bild 5.4 angegeben. Für die Abmessungen  $b = h = k = 30 \text{ mm}$

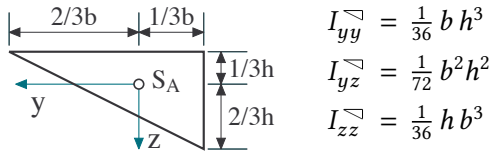


Bild 5.4: Rechtwinkliges Dreieck mit den Flächenmomenten 2. Grades aus Hütte: Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften, 29. Auflage, Springer 1991

erhält man für die Flächenmomente die Werte

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{36} * 30 * 30^3 = 22\,500 \text{ mm}^4 \quad (5.21)$$

$$I_{yz} = \frac{1}{72} * 30^2 * 30^2 = 11\,250 \text{ mm}^4 \quad (5.22)$$

Mit der Querschnittsfläche  $A = \frac{1}{2} b h = 450 \text{ mm}^2$  und  $I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2 = 379\,687\,500 \text{ mm}^4$  ergibt sich dann gemäß (5.20) die Verteilung der Normalspannung zu

$$\sigma_{xx} = \frac{1800}{450} + \frac{-360\,000 * 11\,250}{379\,687\,500} y + \frac{-360\,000 * 11\,250}{379\,687\,500} z \quad (5.23)$$

$$= 4 - \frac{32}{3} y - \frac{64}{3} z$$

Die neutrale Faser  $\sigma_{xx} = 0$  schneidet die vertikal verlaufenden Kante an der Stelle  $y_V = -10 \text{ mm}$  und

$$z_V = 4 \frac{3}{64} - \frac{32}{64} (-10) = 5.1875 \text{ mm} \quad (5.24)$$

etwa auf halber Höhe des Querschnittes. Der Schnittpunkt mit der horizontal verlaufenden oberen Kante, bzw. deren Verlängerung liegt mit  $z_H = -10 \text{ mm}$  und

$$y_H = 4 \frac{3}{32} - \frac{64}{32} (-10) = 20.375 \text{ mm} \quad (5.25)$$

etwas außerhalb des Querschnittes. Im Bild 5.5 sind für den Querschnitt an der Einspannstelle  $x = 0$  neben der neutralen Faser  $\sigma_{xx} = 0$  auch noch die Normalspannungen an den drei Eckpunkten angegeben, die mit  $(y_1 = 20 \text{ mm}, z_1 = -10 \text{ mm})$ ,  $(y_2 = -10 \text{ mm}, z_2 = -10 \text{ mm})$  und  $(y_3 = -10 \text{ mm}, z_3 = 20 \text{ mm})$  aus der Beziehung (5.23) berechnet wurden. Auf Grund der aus der Längskraft  $F_x$  resultierenden Zugvorspannung verläuft die neutrale Faser nicht durch den Koordinatenursprung.

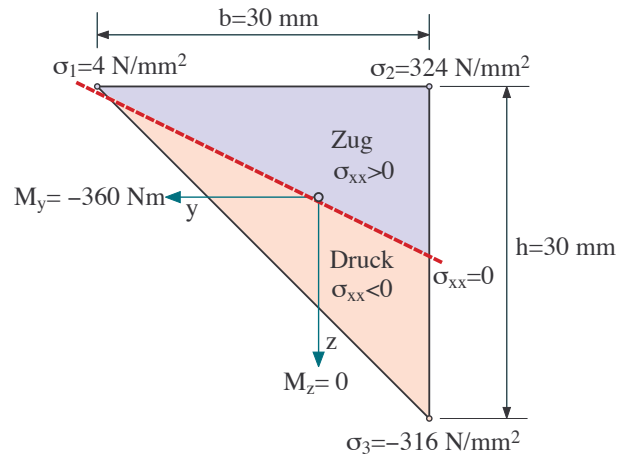


Bild 5.5: Spannungsverteilung

## 5.3 Flächenmomente 2. Grades

### 5.3.1 Definition

Im Abschnitt 5.2 wurde gezeigt, dass die Konstanten im Ansatz für die Normalspannung über die Äquivalenzbeziehungen an den Belastungsfall der schiefen Biegung angepasst werden können. Dabei wurden mit

$$I_{yy} = \int z^2 dA, \quad I_{zz} = \int y^2 dA, \quad I_{yz} = - \int yz dA \quad (5.26)$$

die Flächenmomente 2. Grades definiert. Für einfache Querschnitte können die Integrale direkt gelöst werden. Komplizierte Geometrien können oft aus einfachen Teilstücken zusammengesetzt werden.

### 5.3.2 Zusammengesetzte Querschnitte

#### 5.3.2.1 Beispiel Z-Profil

Ein dünnes Blech mit der Breite  $3b$  und der Wandstärke  $t \ll b$  ist z-förmig gebogen, Bild 5.6. Da gleich breite Teile jeweils mit dem Winkel  $\alpha$  nach oben bzw. nach unten gebogen wurden, bleibt der Gesamtschwerpunkt  $S_0$  in seiner ursprünglichen Position. Auf Grund der

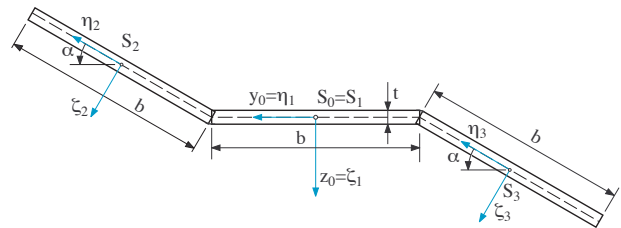


Bild 5.6: Blech z-förmig gebogen

dünnen Wandstärke kann der Querschnitt in guter

Näherung durch drei dünne Rechtecke zusammengesetzt werden. Dann können die Integrale in (5.26) entsprechend unterteilt werden. Für das Flächenmoment 2. Grades bezüglich der  $y_0$ -Achse bedeutet dies

$$I_{yy} = \int_A z^2 dA = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} z^2 dA \quad (5.27)$$

wobei wegen der drei Teilkörper hier  $n = 3$  zu setzen ist.

### 5.3.2.2 Koordinatentransformation

Die Beschreibung der geometrischen Eigenschaften der Teilflächen gelingt am einfachsten in den jeweiligen lokalen Koordinatenrichtungen.

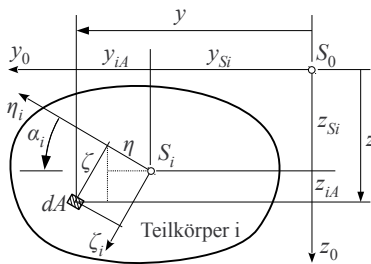


Bild 5.7: Globale und lokale Koordinaten

Aus Bild 5.7 entnimmt man

$$y = y_{Si} + \underbrace{\eta \cos \alpha_i + \zeta \sin \alpha_i}_{y_{iA}} \quad (5.28)$$

$$z = z_{Si} - \underbrace{\eta \sin \alpha_i + \zeta \cos \alpha_i}_{z_{iA}} \quad (5.29)$$

wobei das Flächenelement  $dA$  mit  $y, z$  gegenüber dem globalen  $y_0$ - $z_0$ -Koordinatensystem und mit  $\eta, \zeta$  gegenüber dem lokalen  $y_i$ - $z_i$ -Koordinatensystem beschrieben wird. Ferner legen die Koordinaten  $y_{Si}, z_{Si}$  die Lage des Koordinatenursprungs bzw. Teilkörperschwerpunktes  $S_i$  gegenüber dem mit dem Gesamtschwerpunkt zusammenfallenden Koordinatenursprung  $S_0$  fest. In (5.27) eingesetzt erhält man

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} (z_{Si} - \eta \sin \alpha_i + \zeta \cos \alpha_i)^2 dA \quad (5.30)$$

Ausmultipliziert bleibt

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{A_i} z_{Si}^2 dA + \int_{A_i} \eta^2 \sin^2 \alpha_i dA + \int_{A_i} \zeta^2 \cos^2 \alpha_i dA - 2 \int_{A_i} z_{Si} \eta \sin \alpha_i dA + 2 \int_{A_i} z_{Si} \zeta \cos \alpha_i dA - 2 \int_{A_i} \eta \sin \alpha_i \zeta \cos \alpha_i dA \right\} \quad (5.31)$$

wobei zunächst darauf verzichtet wurde, die für die Integration über die Teilkörper konstanten Terme  $z_{Si}, \sin \alpha_i$  und  $\cos \alpha_i$  vor die Integrale zu ziehen. Da die lokalen Koordinatensysteme den Ursprung im jeweiligen Flächenmittelpunkt  $S_i$  haben, gilt

$$\int_{A_i} \eta dA = 0 \quad \text{und} \quad \int_{A_i} \zeta dA = 0 \quad (5.32)$$

Mit  $\int_{A_i} dA = A_i$  und den analog zu (5.26) definierten Flächenmomenten für die Teilkörper

$$I_{\eta_i \eta_i} = \int_{A_i} \eta^2 dA, \quad I_{\zeta_i \zeta_i} = \int_{A_i} \zeta^2 dA, \quad I_{\eta_i \zeta_i} = - \int_{A_i} \eta \zeta dA \quad (5.33)$$

sowie unter Berücksichtigung von (5.32) vereinfacht sich dann (5.31) zu

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^n \left\{ z_{Si}^2 A_i + I_{\zeta_i \zeta_i} \sin^2 \alpha_i + I_{\eta_i \eta_i} \cos^2 \alpha_i + 2 I_{\eta_i \zeta_i} \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right\} \quad (5.34)$$

Eine Umformung mit den trigonometrischen Beziehungen  $\sin^2 \alpha_i = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha_i)$ ,  $\cos^2 \alpha_i = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha_i)$  und  $2 \sin \alpha_i \cos \alpha_i = \sin 2\alpha_i$  liefert schließlich

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} (I_{\eta_i \eta_i} + I_{\zeta_i \zeta_i}) + \frac{1}{2} (I_{\eta_i \eta_i} - I_{\zeta_i \zeta_i}) \cos 2\alpha_i + I_{\eta_i \zeta_i} \sin 2\alpha_i + z_{Si}^2 A_i \right\} \quad (5.35)$$

Analog dazu findet man

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} (I_{\eta_i \eta_i} + I_{\zeta_i \zeta_i}) - \frac{1}{2} (I_{\eta_i \eta_i} - I_{\zeta_i \zeta_i}) \cos 2\alpha_i - I_{\eta_i \zeta_i} \sin 2\alpha_i + y_{Si}^2 A_i \right\} \quad (5.36)$$

und

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n \left\{ I_{\eta_i \zeta_i} \cos 2\alpha_i - \frac{1}{2} (I_{\eta_i \eta_i} - I_{\zeta_i \zeta_i}) \sin 2\alpha_i - y_{Si} z_{Si} A_i \right\} \quad (5.37)$$

Bei reiner Parallel-Verschiebung der Koordinatensysteme vereinfachen sich die Beziehungen (5.35), (5.36) und (5.37) mit  $\alpha_i = 0$  zu

$$\begin{aligned} I_{yy}^{\alpha_i=0} &= \sum_{i=1}^n \left\{ I_{\eta_i \eta_i} + z_{Si}^2 A_i \right\} \\ I_{zz}^{\alpha_i=0} &= \sum_{i=1}^n \left\{ I_{\zeta_i \zeta_i} + y_{Si}^2 A_i \right\} \\ I_{yz}^{\alpha_i=0} &= \sum_{i=1}^n \left\{ I_{\eta_i \zeta_i} - y_{Si} z_{Si} A_i \right\} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Die aus der Parallel-Verschiebung der Koordinatensysteme resultierenden Terme  $z_{Si}^2 A_i$ ,  $y_{Si}^2 A_i$  und  $y_{Si} z_{Si} A_i$  werden auch als Steiner-Anteile bezeichnet.

### 5.3.2.3 Ergebnis Z-Profil

Die zur Auswertung der Beziehungen (5.35), (5.36) und (5.37) erforderlichen Größen in der Tabelle 5.1 zusammengestellt.

Tabelle 5.1: Geometrische Größen des Z-Profiles

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$\alpha_i$	0	$\alpha$	$\alpha$
$y_{Si}$	0	$(1 + \cos \alpha) \frac{b}{2}$	$-(1 + \cos \alpha) \frac{b}{2}$
$z_{Si}$	0	$-\frac{1}{2} b \sin \alpha$	$\frac{1}{2} b \sin \alpha$
$A_i$	$bt$	$bt$	$bt$
$I_{\eta_i \eta_i}$	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$
$I_{\zeta_i \zeta_i}$	$\frac{1}{12} t b^3$	$\frac{1}{12} t b^3$	$\frac{1}{12} t b^3$
$I_{\eta_i \zeta_i}$	0	0	0

Als Ergebnis erhält man

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \frac{2}{3} t b^3 \sin^2 \alpha \\ I_{zz} &= \frac{2}{3} t b^3 \left( (\cos \alpha + \frac{3}{4})^2 + \frac{5}{16} \right) \\ I_{yz} &= \frac{1}{6} t b^3 \sin \alpha (5 \cos \alpha + 3) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Die Verschiebung und die Drehung der Teilquerschnitte 2 und 3 ist hier nicht achsensymmetrisch und hat deshalb im Gesamtquerschnitt ein Flächendeviationsmoment zur Folge. Die Ergebnisse, normiert auf den Term  $t b^3$ , sind im Bild 5.8 für den Bereich  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$  dargestellt. Für den Sonderfall  $\alpha = 0$ , der einen recht-

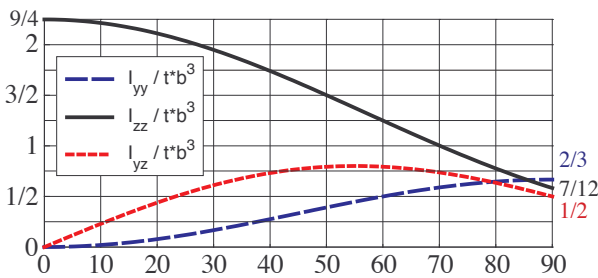


Bild 5.8: Flächenmomente für das Z-Profil

eckigen Querschnitt der Breite  $3b$  und der Höhe  $t$  beschreibt, erhält man

$$I_{yy}^{\alpha=0} = 0 \quad \text{und} \quad I_{yz}^{\alpha=0} = 0 \quad (5.40)$$

sowie

$$\begin{aligned} I_{zz}^{\alpha=0} &= \frac{2}{3} t b^3 \left( (1 + \frac{3}{4})^2 + \frac{5}{16} \right) = \frac{2}{3} t b^3 \left( \frac{49}{16} + \frac{5}{16} \right) \\ &= \frac{9}{4} t b^3 = \frac{1}{12} t (3b)^3 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Da  $t \ll b$  vorausgesetzt wurde, verschwindet hier das Flächenmoment 2. Grades bezüglich der  $y$ -Achse. Für  $\alpha = 90^\circ$  ergeben sich mit

$$I_{yy}^{\alpha=90^\circ} = \frac{2}{3} t b^3 \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} I_{zz}^{\alpha=90^\circ} &= \frac{2}{3} t b^3 \left( (0 + \frac{3}{4})^2 + \frac{5}{16} \right) = \frac{2}{3} t b^3 \left( \frac{9}{16} + \frac{5}{16} \right) \\ &= \frac{7}{12} t b^3 \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$I_{yz}^{\alpha=90^\circ} = \frac{1}{6} t b^3 (0 + 3) = \frac{1}{2} t b^3 \quad (5.44)$$

Ergebnisse, die auch durch eine reine Parallel-Verschiebung der Koordinatensysteme aus den Beziehungen (5.38) ermittelt werden können.

### 5.3.3 Hauptachsensystem

#### 5.3.3.1 Bestimmungsgleichungen

Die Verschiebung und die Drehung von Koordinatensystemen beeinflusst die Flächenmomente 2. Grades. Für das Z-Profil aus dem vorigen Abschnitt ist so bezüglich des nach dem Mittelstück ausgerichteten globalen Koordinatensystems auch ein Flächendeviationsmoment entstanden. Legt man nun ein mit dem Winkel  $\varphi$  um den Ursprung  $S_0$  gedrehtes Koordinatensystem zugrunde, dann gelten analog zu (5.35), (5.36) und (5.37) die Transformationsbeziehungen

$$\begin{aligned} I_{yy}^\varphi &= \frac{1}{2} (I_{yy} + I_{zz}) + \frac{1}{2} (I_{yy} - I_{zz}) \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi \\ I_{zz}^\varphi &= \frac{1}{2} (I_{yy} + I_{zz}) - \frac{1}{2} (I_{yy} - I_{zz}) \cos 2\varphi - I_{yz} \sin 2\varphi \\ I_{yz}^\varphi &= I_{yz} \cos 2\varphi - \frac{1}{2} (I_{yy} - I_{zz}) \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (5.45)$$

Das neue Flächendeviationsmoment verschwindet,  $I_{yz}^\varphi = 0$ , wenn der Winkel  $\varphi = \varphi_H$  der Forderung

$$\tan 2\varphi_H = \frac{2 I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}} \quad (5.46)$$

genügt. Querschnitte mit  $I_{yz} \neq 0$  und  $I_{yy} = I_{zz}$  haben  $\tan 2\varphi_H \rightarrow \pm\infty$  bzw.  $2\varphi_H = \pm 90^\circ$  oder  $\varphi_H = \pm 45^\circ$  zur Folge. Der triviale Sonderfall  $I_{yz} = 0$  führt wie erwartet auf  $\varphi_H = 0$ .

Formt man die erste Gleichung in (5.45) etwas um und berücksichtigt die trigonometrische Beziehung

$$\cos 2\varphi_H = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi_H}} \quad (5.47)$$

dann erhält man

$$\begin{aligned} I_{yy}^{\varphi_H} &= \frac{1}{2} (I_{yy} + I_{zz}) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi_H}} \left( \frac{1}{2} (I_{yy} - I_{zz}) + I_{yz} \tan 2\varphi \right) \end{aligned} \quad (5.48)$$

Mit (5.46) ergibt sich nach einigen Umformungen



$$I_{yy}^{\varphi_H} = \frac{1}{2} (I_{yy} + I_{zz}) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4 I_{yz}^2} \quad (5.49)$$

Analog dazu erhält man aus der zweiten Gleichung in (5.45) das Ergebnis

$$I_{zz}^{\varphi_H} = \frac{1}{2} (I_{yy} + I_{zz}) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4 I_{yz}^2} \quad (5.50)$$

Mit den Hauptflächenmomenten 2. Grades hat man auch gleichzeitig das minimale und das maximale Flächenmoment des Querschnittes gefunden. Denn die notwendigen Bedingungen für extreme Werte der Flächenmomente bezüglich der um den Winkel  $\varphi$  gedrehten  $y$ - und  $z$ -Achse führen mit

$$\begin{aligned} \frac{d I_{yy}^{\varphi}}{d \varphi} &= - (I_{yy} - I_{zz}) \sin 2\varphi + 2 I_{yz} \cos 2\varphi = 0 \\ \frac{d I_{zz}^{\varphi}}{d \varphi} &= + (I_{yy} - I_{zz}) \sin 2\varphi - 2 I_{yz} \cos 2\varphi = 0 \end{aligned} \quad (5.51)$$

jeweils auf die in (5.46) formulierte Forderung für ein verschwindendes Flächendeviationsmoment.

### 5.3.3.2 Beispiel gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck

Im Abschnitt 5.2.3 wurde als Querschnitt ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck behandelt. In einem Koordinatensystem, mit dem Ursprung im Flächenmittelpunkt, das parallel zu den rechtwinkligen Kanten verläuft, sind die Flächenmomente 2. Grades mit  $b = k$  und  $h = k$  gemäß den Angaben in Bild 5.4 durch

$$I_{yy}^{\nabla} = I_{zz}^{\nabla} = \frac{1}{36} k^4 \quad \text{und} \quad I_{yz}^{\nabla} = \frac{1}{72} k^4 \quad (5.52)$$

gegeben. Da hier die Flächenmomente bezüglich der  $y$ - und  $z$ -Achse identisch sind, aber das Flächendeviationsmoment nicht verschwindet, ist entsprechend (5.46) die Lage des Hauptachsensystems durch

$$\tan 2\varphi_H = \frac{2 \frac{1}{72} k^4}{\frac{1}{36} k^4 - \frac{1}{36} k^4} \rightarrow \infty \quad (5.53)$$

oder

$$2\varphi_H = \pm 90^\circ \quad \text{bzw.} \quad \varphi_H = \pm 45^\circ \quad (5.54)$$

bestimmt. Die entsprechenden Hauptträgheitsmomente, bzw. die extremalen Werte der Flächenmomente, sind dann gemäß (5.49) und (5.50) durch

$$\begin{aligned} I_{yy}^{\varphi_H} &= \frac{1}{36} k^4 + \frac{1}{72} k^4 = \frac{3}{72} k^4 = \frac{1}{24} k^4 \\ I_{zz}^{\varphi_H} &= \frac{1}{36} k^4 - \frac{1}{72} k^4 = \frac{1}{72} k^4 \end{aligned} \quad (5.55)$$

gegeben. Das Flächenmoment um  $y_H$ -Achse ist hier dreimal so groß wie das bezüglich der  $z_H$ -Achse. Bei

dem, um den Winkel  $\varphi_H = +45^\circ$  gedrehten Koordinatensystem ist, wie in Bild 5.9 zu erkennen, die Ausdehnung des Querschnitts senkrecht zur  $y_H$ -Achse dann tatsächlich auch deutlich größer als senkrecht zur  $z_H$ -Achse. In der Regel können so das minimale und das

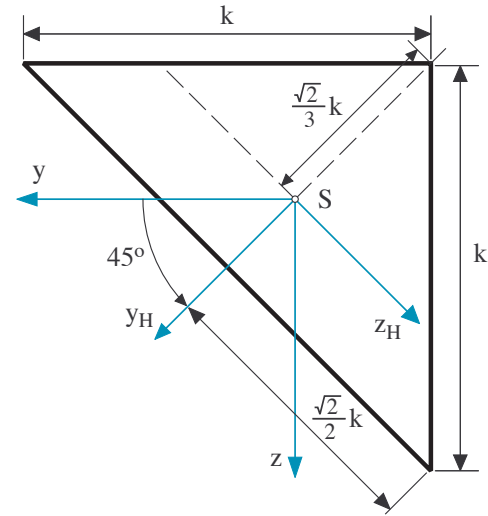


Bild 5.9: Hauptachsensystem für ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck

maximale Flächenmoment sehr einfach den entsprechenden Hauptachsen zugeordnet werden.

### 5.3.3.3 Beispiel Z-Profil

Für das in Bild 5.8 dargestellte Z-Profil erhält man für den Sonderfall  $\alpha = 90^\circ$  die in (5.42), (5.43) und (5.43) angegebenen Werte. Die Lage des Hauptachsensystems ist dann durch

$$\tan 2\varphi_H = \frac{2 \frac{1}{2} t b^3}{\frac{2}{3} t b^3 - \frac{7}{12} t b^3} = \frac{1}{\frac{8}{12} - \frac{7}{12}} = 12 \quad (5.56)$$

oder

$$2\varphi_H = 85.2^\circ \quad \text{bzw.} \quad \varphi_H = 42.6^\circ \quad (5.57)$$

festgelegt. Aus (5.49) und (5.50) erhält man mit

$$\begin{aligned} I_{yy}^{\varphi_H} &= \frac{1}{2} \left( \frac{5}{4} + \sqrt{\left( \frac{1}{12} \right)^2 + 4 \left( \frac{1}{2} \right)^2} \right) t b^3 \\ &= \left( \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{145}}{24} \right) t b^3 \approx 1.1267 t b^3 \end{aligned} \quad (5.58)$$

und

$$I_{zz}^{\varphi_H} = \left( \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{145}}{24} \right) t b^3 \approx 0.1233 t b^3 \quad (5.59)$$

wieder sehr unterschiedliche Hauptflächenmomente 2. Grades. Die aus dem Drehwinkel  $\varphi_H = 42.6^\circ$  resultierenden Hauptachsen  $y_H$  und  $z_H$  mit den zugehörigen Hauptflächenmomenten entsprechen der Flächenverteilung des Querschnitts, Bild 5.10.

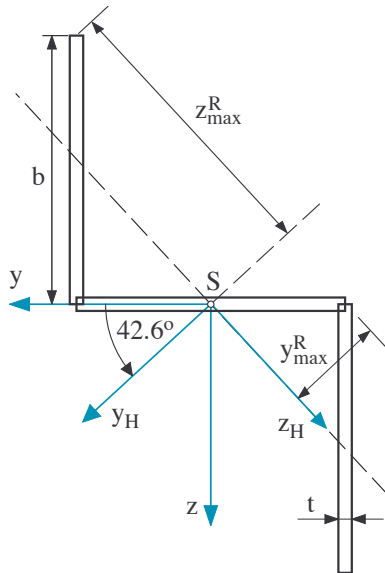


Bild 5.10: Hauptachsen für ein Z-Profil

### 5.3.4 Widerstandsmomente

Gemäß (5.17) kann die Normalspannung im Hauptachsensystem eines Querschnittes den Belastungen entsprechend unterteilt werden

$$\sigma_{xx} = \underbrace{\frac{N}{A}}_{\text{Zug/Druck}} - \underbrace{\frac{M_z}{I_{zz}} y}_{\text{Biegung um z-Achse}} + \underbrace{\frac{M_y}{I_{yy}} z}_{\text{Biegung um y-Achse}} \quad (5.60)$$

Die Spannungsanteile aus der Biegung um die  $z = z_H$ - und die  $y = y_H$ -Achse erreichen ihre maximalen Werte an den Stellen des Querschnittes, die den größten Abstand von der  $y$ - und der  $z$ -Achse haben. Bezeichnet man diese Randfaserabstände mit  $y_{\max}^R$  und  $z_{\max}^R$  dann erhält man

$$\sigma_{xx}^{\max}|_{M_y} = \frac{M_y}{I_{yy}} z_{\max}^R = \frac{M_y}{\frac{I_{yy}}{z_{\max}^R}} = \frac{M_y}{W_y} \quad (5.61)$$

$$\sigma_{xx}^{\max}|_{M_z} = \frac{M_z}{I_{zz}} y_{\max}^R = \frac{M_z}{\frac{I_{zz}}{y_{\max}^R}} = \frac{M_z}{W_z} \quad (5.62)$$

wobei  $W_y$  und  $W_z$  die Widerstandsmomente des Querschnitts um die  $y$ - und die  $z$ -Achse angeben.

Für den in Bild 2.5 dargestellten Rechteckquerschnitt mit der Höhe  $h$  und der Breite  $b$  ergibt sich dann

$$W_y^{\square} = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{\frac{1}{2} h} = \frac{1}{6} b h^2 \quad \text{und} \quad W_z^{\square} = \frac{1}{6} h b^2 \quad (5.63)$$

## 5.4 Schubspannungen

### 5.4.1 Ansatz

Die im Querschnitt auftretenden Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$  müssen die Äquivalenzbeziehungen (2.2), (2.3) und (2.4) erfüllen und gleichzeitig den Spannungsdifferentialgleichungen (1.11) genügen. Unter Berücksichtigung von (1.7) lautet die erste Spannungsdifferentialgleichung

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (5.64)$$

Diese Beziehung setzt voraus, dass in  $x$ -Richtung keine Belastungsänderung auftritt, also die Normalkraft  $N$  zumindest abschnittsweise konstant ist. In einem Hauptachsensystem setzt sich die Normalspannung gemäß (5.60) aus Anteilen zusammen, die der Normalkraft  $N$  und den Biegemomenten  $M_y$  und  $M_z$  zugeordnet sind. Die partielle Ableitung der Normalspannung  $\sigma_{xx}$  nach der Koordinate  $x$  ist dann durch

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0 - \frac{\frac{\partial M_z(x)}{\partial x}}{I_{zz}} y + \frac{\frac{\partial M_y(x)}{\partial x}}{I_{yy}} z \quad (5.65)$$

gegeben, wobei konstante Querschnittsabmessungen und mit  $N = \text{const.}$  auch eine konstante Normalkraft vorausgesetzt wurden. Mit den Beziehungen (5.3) erhält man

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{Q_y}{I_{zz}} y + \frac{Q_z}{I_{yy}} z \quad (5.66)$$

In (5.64) eingesetzt bleibt

$$\frac{Q_y}{I_{zz}} y + \frac{Q_z}{I_{yy}} z + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (5.67)$$

Diese Forderung kann mit

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{Q_y}{I_{zz}} y \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{Q_z}{I_{yy}} z \quad (5.68)$$

erfüllt werden. Da die Ableitungen der Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$  linear von  $y$  und  $z$  abhängen, müssen nun selbst einfachste Ansätze für die Schubspannungen mit

$$\tau_{xy} = C_0^y - \frac{1}{2} \frac{Q_y}{I_{zz}} y^2 \quad \text{und} \quad \tau_{xz} = C_0^z - \frac{1}{2} \frac{Q_z}{I_{yy}} z^2 \quad (5.69)$$

quadratisch in  $y$  und  $z$  sein, wobei  $C_0^y$  und  $C_0^z$  noch zu bestimmende Konstante sind. Da in (5.68) nur Forderungen an die partiellen Ableitungen gestellt werden, kann  $\tau_{xy}$  noch in beliebiger Weise von  $z$  und  $\tau_{xz}$  von  $y$  abhängen. Die Minimal-Ansätze in (5.69) sind allerdings nur brauchbar, wenn damit auch die Äquivalenzbeziehungen erfüllt werden können. Setzt man den Ansatz für  $\tau_{xy}$  in (2.2) ein, dann erhält man zunächst

$$Q_y = \int \left( C_0^y - \frac{1}{2} \frac{Q_y}{I_{zz}} y^2 \right) dA \quad (5.70)$$

Mit  $\int dA = A$  und  $\int y^2 dA = I_{zz}$  bleibt

$$Q_y = C_0^y A - \frac{1}{2} Q_y \quad (5.71)$$

Nach der Konstanten aufgelöst ergibt sich

$$C_0^y = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{A} \quad (5.72)$$

Analog dazu erhält man aus (2.3) für die Konstante im Ansatz für die Schubspannung  $\tau_{xz}$  das Ergebnis

$$C_0^z = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{A} \quad (5.73)$$

Die dadurch bereits festgelegten Ansätze für die Schubspannungen müssen allerdings noch der Äquivalenzbeziehung (2.4) genügen. Mit  $M_x = 0$  ergibt das

$$\underbrace{0}_{M_x} = \int \left\{ y \left( \underbrace{\frac{3}{2} \frac{Q_z}{A} - \frac{1}{2} \frac{Q_z}{I_{yy}} z^2}_{\tau_{xz}} \right) - z \left( \underbrace{\frac{3}{2} \frac{Q_y}{A} - \frac{1}{2} \frac{Q_y}{I_{zz}} y^2}_{\tau_{xy}} \right) \right\} dA \quad (5.74)$$

Da der Ursprung des Koordinatensystems im Schwerpunkt der Querschnittsfläche liegt, verschwinden die Flächenmomente 1. Grades,  $\int y dA = 0$  sowie  $\int z dA = 0$  und es bleibt dann

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{Q_z}{I_{yy}} \int y z^2 dA - \frac{1}{2} \frac{Q_y}{I_{zz}} \int z y^2 dA \quad (5.75)$$

Diese Forderung ist für beliebige Querkräfte  $Q_y$  und  $Q_z$  nur dann zu erfüllen, wenn mit

$$\int y z^2 dA = 0 \quad \text{und} \quad \int z y^2 dA = 0 \quad (5.76)$$

auch die Flächenmomente 3. Grades verschwinden.

Dies ist allerdings nur bei Querschnittsformen mit Achsensymmetrie zur  $y$ - und zur  $z$ -Achse der Fall. Da mit den Minimal-Ansätzen in (5.69) die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$  nur als reine Funktionen von  $y$  und  $z$  dargestellt werden, kann dieser einfache Ansatz letztlich nur für Rechteckquerschnitte verwendet werden.

### 5.4.2 Beispiel Rechteckquerschnitt

Mit (5.72) erhält man gemäß (5.69) die Schubspannung

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{A} - \frac{1}{2} \frac{Q_y}{I_{zz}} y^2 = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{A} \left( 1 - \frac{\frac{1}{3} A}{I_{zz}} y^2 \right) \quad (5.77)$$

Für einen Rechteckquerschnitt der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  sind die Fläche mit  $A = bh$  und das Flächenmoment

2. Grades bezüglich der  $z$ -Achse durch  $I_{zz} = \frac{1}{12} hb^3$  gegeben. Damit ergibt sich

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{b h} \left[ 1 - \frac{\frac{1}{3} b h}{\frac{1}{12} h b^3} y^2 \right] = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{b h} \left[ 1 - \left( \frac{y}{b/2} \right)^2 \right] \quad (5.78)$$

Analog dazu erhält man mit (5.73) und dem entsprechenden Flächenmoment 2. Grades  $I_{yy} = \frac{1}{12} b h^3$  für die Schubspannung  $\tau_{xz}$  das Ergebnis

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{b h} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \quad (5.79)$$

Beide Schubspannungen erreichen in der Querschnittsmitte bei  $y = 0$  bzw. bei  $z = 0$  ihr Maximum, Bild 5.11. An den Querschnittsrändern, die senkrecht zu den jeweiligen Schubspannungen verlaufen, verschwinden sie,  $\tau_{xy}(y = \pm b/2) = 0$  und  $\tau_{xz}(z = \pm h/2) = 0$ . Da an freien Oberflächen keine Spannungen auf-

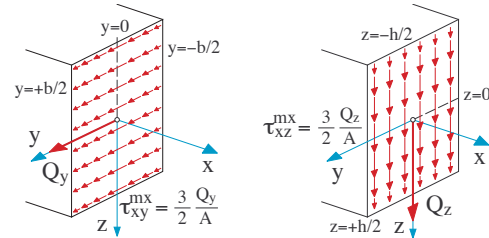


Bild 5.11: Verlauf der Schubspannungen

treten können, müssen die Schubspannungen entsprechend dem Satz der zugeordneten Schubspannungen stets parallel zu den Rändern verlaufen.

Die aus der Normalkraft  $N$  sowie aus den Biegemomenten  $M_y$  und  $M_z$  resultierenden Anteile der über (5.60) definierten Normalspannung sind in Bild 5.12 aufgetragen. Wird ein Balken der Länge  $\ell$  mit quadra-

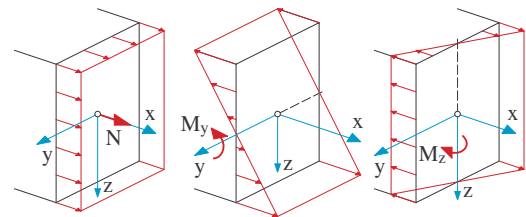


Bild 5.12: Verlauf der Normalspannung

tischem Querschnitt ( $h = b = a$ ) an einem Ende fest eingespannt und am freien Ende durch eine Längskraft  $F_x$  und mit  $F_y = F_z = F$  durch gleich große Kräfte in Quer- und Vertikal-Richtung belastet, dann erhält man an der Einspannstelle  $x = 0$  aus (5.1) und (5.2) die für die schiefe Biegung relevanten Schnittreaktionen

$$N = F_x, \quad Q_y = Q_z = F, \quad M_y = -F\ell, \quad M_z = F\ell \quad (5.80)$$

Mit der Querschnittsfläche  $A = a^2$  erhält man die aus der Normalkraft resultierende Normalspannung zu

$$\sigma_{xx}^N = \frac{F_x}{a^2} \quad (5.81)$$

Die maximalen Schubspannungen sind gleich und durch

$$\tau_{xy}^{mx} = \tau_{xz}^{mx} = \frac{3}{2} \frac{F}{a^2} \quad (5.82)$$

gegeben. An den diagonal gegenüberliegenden Eckpunkten des Querschnitts überlagern sich die Extremwerte der aus den Biegemomenten  $M_y$  und  $M_z$  resultierenden Normalspannungen und ergeben so die maximale Biegespannung

$$\sigma_{xx}^{Bmx} = \frac{F\ell}{\frac{1}{12}a^4} \frac{a}{2} + \frac{F\ell}{\frac{1}{12}a^4} \frac{a}{2} = \frac{12F\ell}{a^2} \frac{a}{a} \quad (5.83)$$

Bei genügend langen Bauteilen mit Vollquerschnitt<sup>4</sup> kann wegen  $\sigma_{xx}^{Bmx}/\tau_{xy}^{mx} = 8\ell/a$  und  $\ell \gg a$  der Einfluss der Schubspannung gegenüber der Biegespannung vernachlässigt werden.

## 5.5 Verformungen

### 5.5.1 Vorüberlegung

Bei der schiefen Biegung treten in einem Schnitt senkrecht zur  $x$ -Achse, die mit der Längsachse des Bauteils zusammenfällt, die Normalspannung  $\sigma_{xx}$  sowie die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$  auf. Ohne Einfluss der Temperatur hat das dem allgemeinen Hookeschen Gesetz (1.47) entsprechend die Dehnungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_{xx} \quad (5.84)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y = \frac{-\nu}{E} \sigma_{xx}, \quad (5.85)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_z = \frac{-\nu}{E} \sigma_{xx}, \quad (5.86)$$

sowie die Verzerrungen

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (5.87)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad (5.88)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz} = 0 \quad (5.89)$$

zur Folge. Wobei die Definitionen (1.29), (1.30) sowie (1.34), (1.35) und (1.36) mit verwendet wurden. Während der aus der Normalkraft  $N$  resultierende Anteil der Normalspannung  $\sigma_{xx}$  gleichmäßig über den

Querschnitt verteilt ist, verändern sich die Anteile aus den Biegemomenten  $M_y$  und  $M_z$  linear von einer maximalen Zug- zu einer maximalen Druckbelastung, Bild 5.12. Ein Bauteilabschnitt der Länge  $dx$  erfährt so im ersten Fall neben der Querkontraktion lediglich eine Längenänderung. In den beiden anderen Fällen wird das Bauteil durch die über den Querschnitt veränderliche Normalspannung verkrümmt, Bild 5.13.

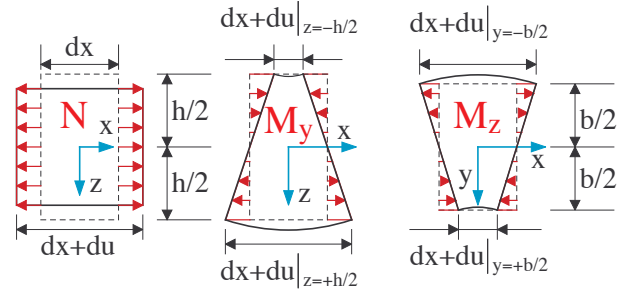


Bild 5.13: Bauteil-Verformungen durch die Anteile der Normalspannung, die aus  $N$ ,  $M_y$  und  $M_z$  resultieren.

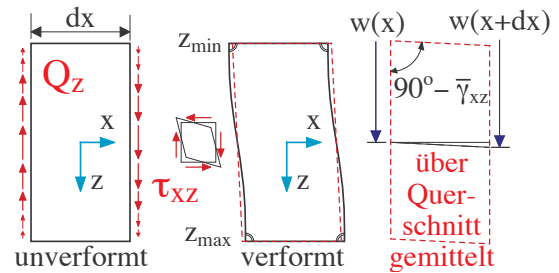


Bild 5.14: Bauteil-Verformungen hervorgerufen durch die Schubspannung  $\tau_{xz}$

Die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$ , die aus den Querkraften  $Q_y$  und  $Q_z$  resultieren, führen zu einer S-förmigen Verwölbung der Querschnitte, die in Bild 5.14 beispielhaft für  $\tau_{xz}$  dargestellt ist. Durch Mittelung über den Querschnitt kann der komplexe Verformungszustand mit

$$\bar{\gamma}_{xy}(x) = \frac{1}{y_{\max} - y_{\min}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \gamma_{xy}(x, y) dy \quad (5.90)$$

$$\bar{\gamma}_{xz}(x) = \frac{1}{z_{\max} - z_{\min}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \gamma_{xz}(x, z) dz \quad (5.91)$$

durch mittlere Verzerrungen approximiert werden. Die Mittellinie des Bauteils erfährt dadurch mit  $v = v(x)$  und  $w = w(x)$  Verschiebungen in  $y$ - und  $z$ -Richtung. Die Verzerrungen selbst können dann über das Materialgesetz auf die entsprechenden Schubspannungen zurückgeführt werden.

Für einen rechteckigen Querschnitt der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  ist die Schubspannungsverteilung über den

<sup>4</sup> Bei dünnwandigen Profilen, die bei kleinen Querschnittsflächen über vergleichbar große Flächenmomente 2. Grades verfügen, können allerdings die Schubspannungen maßgebend für die Dimensionierung sein.

Querschnitt durch (5.79) gegeben. Damit erhält man aus (5.91) mit

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{xz}(x) &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{1}{G} \frac{3}{2} \frac{Q_z}{b h} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right] dz \\ &= \frac{3 Q_z}{2 G b h^2} \left[ z - \frac{1}{3} \left( \frac{z}{h/2} \right)^3 \frac{h}{2} \right]_{-h/2}^{+h/2} \\ &= \frac{3 Q_z}{2 G b h^2} \frac{2 h}{3} = \frac{1}{G} \frac{Q_z}{b h} = \frac{1}{G} \frac{Q_z}{A}\end{aligned}\quad (5.92)$$

ein Ergebnis, das in analoger Weise auf die mittlere Verzerrung in der  $xy$ -Ebene übertragen werden kann.

Das zunächst nur für Rechteckquerschnitte geltende Ergebnis (5.92) kann mit Korrekturfaktoren an beliebige Querschnitte angepasst werden

$$\bar{\gamma}_{xy}(x) = \frac{1}{G} k_{Sy} \frac{Q_y}{A} \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}_{xz}(x) = \frac{1}{G} k_{Sz} \frac{Q_z}{A} \quad (5.93)$$

Die häufig auch als Querschubzahlen bezeichneten Korrekturfaktoren  $k_{Sy}$  und  $k_{Sz}$  werden über die Formänderungsarbeit bestimmt. Dabei wird nicht einfach nur über die S-förmige Verwölbung gemittelt, sondern die Formänderungsarbeit bei S-förmiger Verwölbung wird mit der aus der gemittelten Verzerrung resultierenden gleichgesetzt. Durch diese etwas genauere Vorgehensweise ergibt sich mit  $k_S^o = 1.2$  bereits ein Korrekturfaktor für Rechteckquerschnitte. Für Kreisquerschnitte gilt  $k_S^o = 1.33$  und bei dünnwandigen I-Profilen liegen die Korrekturfaktoren im Bereich  $2 \leq k_S^o \leq 5$ . Manchmal wird  $k_S$  auch durch den Kehrwert  $\lambda_S = 1/k_S$  ersetzt oder es wird mit dem effektiven Schubquerschnitt  $A_S = \lambda_S A$  gearbeitet. Für die mittlere Verzerrung in der  $xz$ -Ebene gilt dann zum Beispiel

$$\bar{\gamma}_{xz}(x) = \frac{1}{G} k_S \frac{Q_z}{A} = \frac{1}{G} \frac{Q_z}{\lambda_S A} = \frac{1}{G} \frac{Q_z}{A_S} \quad (5.94)$$

Mit dieser Korrektur wird die Berechnung der Verformungen ermöglicht. Die Äquivalenzbeziehung (2.6) kann jedoch bei unsymmetrischen Profilen damit nicht erfüllt werden. Dies erzeugt dann eine zusätzliche Verdrehung (Torsion) der Querschnitte um die Bauteillängsachse. Mit einem exzentrischen Kraftangriffspunkt im "Schubmittelpunkt" des Querschnitts kann diese Torsion verhindert werden.

## 5.5.2 Biegelinie

### 5.5.2.1 Differentialgleichungen

Der Bernoulli-Hypothese entsprechend, können die Querschnitte auch nach der Verformung durch Ebenen approximiert werden. Die Bauteilverformung kann

dann durch die Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  beschrieben werden, die der Mittelpunkt  $S$  eines Querschnitts erfährt, Bild 5.15. Mit den mittleren Verzerrungen (5.93)

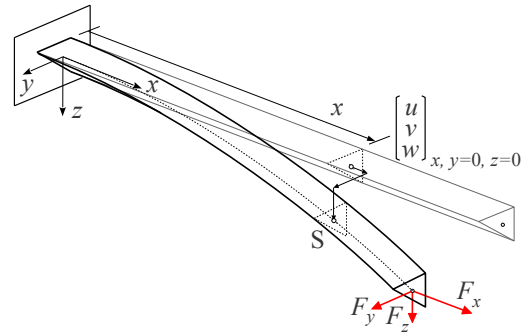


Bild 5.15: Bauteilverformung und Biegelinie

erhält man aus (5.87) und (5.88) die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G} k_{Sy} \frac{Q_y}{A} \quad (5.95)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} k_{Sz} \frac{Q_z}{A} \quad (5.96)$$

Nochmals nach  $x$  abgeleitet bleibt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{k_{Sy}}{GA} q_y \quad (5.97)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{k_{Sz}}{GA} q_z \quad (5.98)$$

wobei die Ableitungen der im allgemeinen von der Koordinate  $x$  abhängigen Querkräfte  $Q_y = Q_y(x)$  und  $Q_z = Q_z(x)$  mit den Beziehungen

$$q_y = -\frac{dQ_y}{dx} \quad \text{und} \quad q_z = -\frac{dQ_z}{dx} \quad (5.99)$$

durch die entsprechenden Streckenlasten  $q_y$  und  $q_z$  ersetzt wurden. Setzt man den Ansatz für die Normalspannung (5.16) in die Bestimmungsgleichung für die Dehnung in Längsrichtung (5.84) ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} \frac{N}{A} \\ &+ \frac{1}{E} \left( \frac{M_y I_{yz} - M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_{zz} - M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z \right)\end{aligned}\quad (5.100)$$

Unter Verwendung der Schwarzen Vertauschungsregel können daraus die gemischten partiellen Ableitungen berechnet werden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{E} \frac{M_y I_{yz} - M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (5.101)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{1}{E} \frac{M_y I_{zz} - M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (5.102)$$



In (5.97) und (5.98) eingesetzt und nach den zweiten partiellen Ableitungen aufgelöst, erhält man mit

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = v'' = \frac{M_z I_{yy} - M_y I_{yz}}{E (I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)} - \frac{k_{Sy}}{GA} q_y \quad (5.103)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w'' = \frac{M_z I_{yz} - M_y I_{zz}}{E (I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)} - \frac{k_{Sz}}{GA} q_z \quad (5.104)$$

Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Verschiebungen  $v$  und  $w$ , die die Verformungen der Mittellinie in  $y$ - und  $z$ -Richtung angeben und damit die Durchbiegung des Bauteils beschreiben.

### 5.5.2.2 Randbedingungen

Die Differentialgleichungen 2. Ordnung können in der Regel nach der Separation durch einfache Integration gelöst werden. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten werden zwei mal zwei Randbedingungen benötigt. Gelenkige Lagerungen an den Stellen  $x = x_1$  und  $x = x_2$  liefern mit

$$v(x_1) = 0, w(x_1) = 0, v(x_2) = 0, w(x_2) = 0 \quad (5.105)$$

genügend Bestimmungsgleichungen. Bei einer festen Einspannung an der Stelle  $x = x^*$  ist zu beachten, dass zwar wieder

$$v(x^*) = 0 \quad \text{und} \quad w(x^*) = 0 \quad (5.106)$$

gilt, aber infolge der Schubverformung die Steigungen gemäß (5.93) durch

$$\begin{aligned} v'(x^*) &= \bar{\gamma}_{xy}(x^*) = \frac{1}{G} k_{Sy} \frac{Q_y(x^*)}{A} \\ w'(x^*) &= \bar{\gamma}_{xz}(x^*) = \frac{1}{G} k_{Sz} \frac{Q_z(x^*)}{A} \end{aligned} \quad (5.107)$$

über die Querkraften bestimmt sind. Zu beachten ist ferner, dass ein Scharniergelenk zum Beispiel in einer Richtung als Gelenk in der anderen aber als feste Einspannung wirkt.

### 5.5.2.3 Aufteilung in Biegung und Schub

Häufig unterteilt man die Differentialgleichungen mit

$$v'' = v_B'' + v_S'' \quad \text{und} \quad w'' = w_B'' + w_S'' \quad (5.108)$$

in Anteile aus der Beanspruchung durch Biegemomente (Index  $B$ ) und durch Streckenlasten oder Querkraften (Index  $S$ ). Die Differentialgleichungen

$$v_B'' = \frac{M_z I_{yy} - M_y I_{yz}}{E (I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)} \quad (5.109)$$

$$w_B'' = \frac{M_z I_{yz} - M_y I_{zz}}{E (I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)} \quad (5.110)$$

beschreiben dann die Biegeverformungen und die entsprechenden Schubverformungen sind durch

$$v_S'' = -\frac{k_{Sy}}{GA} q_y \quad \text{oder} \quad v_S' = \frac{k_{Sy}}{GA} Q_y + C_{Sy} \quad (5.111)$$

$$w_S'' = -\frac{k_{Sz}}{GA} q_z \quad \text{oder} \quad w_S' = \frac{k_{Sz}}{GA} Q_z + C_{Sz} \quad (5.112)$$

definiert. Dabei wurden die Zusammenhänge (5.99) verwendet und die Integrationskonstanten  $C_{Sy}$  sowie  $C_{Sz}$  sind über  $v_S'(x = x^*) = v_S'^*$  sowie  $w_S'(x = x^*) = w_S'^*$  durch die Steigungen der Schubverformungen an einer bestimmten Stelle  $x = x^*$  festgelegt. Die Überlagerung<sup>5</sup> ergibt dann mit  $v = v_B + v_S$  und  $w = w_B + w_S$  die gesamte Verformung.

### 5.5.2.4 Längs- und Querverformung

Bei der schiefen Biegung wird die Normalspannung  $\sigma_{xx}$  im Querschnitt an der Stelle  $x$  gemäß (5.16) in linearer Abhängigkeit von den Querschnittskoordina-ten  $y$  und  $z$  beschrieben. Die Längsverschiebung  $u = u(x, y = 0, z = 0)$  der Querschnittsmittelpunkte  $S$  sowie die Querkontraktionen des Querschnitts können deshalb in guter Näherung aus der mittleren Normalspannung

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{xx}(x, y, z) = \sigma_{xx}(x, y = 0, z = 0) = \frac{N}{A} \quad (5.113)$$

berechnet werden. Aus (5.84) folgt dann

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=0, z=0} = \frac{1}{E} \frac{N(x)}{A} \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{1}{EA} \int_0^x N(x) dx \quad (5.114)$$

wobei mit  $N = N(x)$  eine variable Normalkraft angenommen und mit  $u(0) = 0$  eine an der Stelle  $x = 0$  verschwindende Längsverschiebung vorausgesetzt wurde. Analog dazu erhält man aus den Querdehnungen (5.85) und (5.86) die Änderungen

$$\Delta h = -\nu \frac{N}{EA} h \quad \text{und} \quad \Delta b = -\nu \frac{N}{EA} b \quad (5.115)$$

die die Höhe  $h$  und die Breite  $b$  des Querschnitts an der Stelle  $x$  erfahren.

<sup>5</sup> Wie bei den Spannungen so können auch in den meisten technischen Anwendungen die Verformungen durch Schub gegenüber den Verformungen durch Biegung vernachlässigt werden.

## 5.6 Beispiel

### 5.6.1 Aufgabenstellung

Ein quaderförmiges Bauteil (Länge  $L$ , Höhe  $h$ , Breite  $b$ ) ist an einem Ende in einem Scharniergelenk gelagert und stützt sich am anderen Ende auf einer horizontalen Unterlage ab, Bild 5.16. Das Bauteil hat das Gewicht  $mg$  und wird am Ende durch die horizontale Kraft  $F$  belastet. Der Elastizitätsmodul  $E$  und der Schubmodul  $G$  kennzeichnen die Materialeigenschaften. Für den rechteckigen Querschnitt sind die Flächenmo-

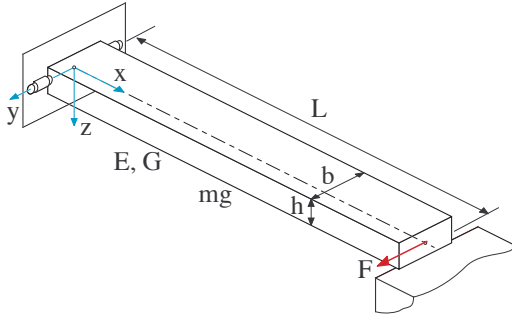


Bild 5.16: Bauteil belastet durch das Eigengewicht  $mg$  und die Einzelkraft  $F$

mente 2. Grades durch

$$I_{yy}^{\square} = \frac{1}{12} b h^3, \quad I_{zz}^{\square} = \frac{1}{12} h b^3 \quad \text{und} \quad I_{yz}^{\square} = 0 \quad (5.116)$$

gegeben.

Die Berechnung wird im folgenden mit den Zahlenwerten  $L = 2000 \text{ mm}$ ,  $h = 20 \text{ mm}$ ,  $b = 30 \text{ mm}$ ,  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ ,  $G = 82000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$   $k_{Sy} = k_{Sz} = 1.2$  durchgeführt. Das Eigengewicht ist dann durch  $mg = \rho b h L g$  gegeben und die Einzelkraft wird mit  $F = \frac{1}{3} mg$  an das Eigengewicht angepasst.

### 5.6.2 Beanspruchungen

Die aus dem Eigengewicht resultierende Streckenlast in  $z$ -Richtung

$$q_z = \frac{mg}{L} = q_0 \quad (5.117)$$

ist konstant und wird im Folgenden mit  $q_0$  abgekürzt. Durch Integration ergibt sich daraus, zunächst rein formal, der Verlauf der Querkraft

$$Q_z(x) = -(q_0 x + C_1) \quad (5.118)$$

und des zugehörigen Biegemomentes

$$M_y(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 - C_1 x + C_2 \quad (5.119)$$

wobei die differentiellen Zusammenhänge (5.99) und (5.3) beachtet wurden. Das Scharniergelenk und die horizontale Unterlage an den beiden Enden des Bauteils bei  $x = 0$  und  $x = L$  lassen jeweils eine ungehinderte Drehung um die  $y$ -Achse zu und haben deshalb die Bedingungen

$$M_y(x=0) = 0 \quad \text{und} \quad M_y(x=L) = 0 \quad (5.120)$$

zur Folge. Daraus ergeben sich die Integrationskonstanten zu

$$C_2 = 0 \quad \text{und} \quad C_1 = -\frac{1}{2} q_0 L \quad (5.121)$$

Der Querkraft- und Momentenverlauf ist dann durch

$$Q_z(x) = -\left(q_0 x - \frac{1}{2} q_0 L\right) = \frac{1}{2} q_0 L \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) \quad (5.122)$$

$$M_y(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{1}{2} q_0 L x = \frac{1}{2} q_0 L^2 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (5.123)$$

bestimmt. Das Biegemoment erreicht das Maximum  $M_y^{\max} = \frac{1}{8} q_0 L^2$  an der Stelle  $x^* = \frac{1}{2} L$ , die durch die Nullstelle der Querkraft  $Q_z$  festgelegt ist.

In  $y$ -Richtung wird das Bauteil nur durch die Einzelkraft  $F$  belastet. Dies hat eine verschwindende Streckenlast

$$q_y = 0 \quad (5.124)$$

und die konstante Querkraft

$$Q_y = F \quad (5.125)$$

zur Folge. Da das Scharniergelenk in  $y$ -Richtung wie eine feste Einspannung wirkt, ist der Momentenverlauf analog zu (5.2) durch

$$M_z = F(L - x) = FL \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (5.126)$$

bestimmt. Das Biegemoment erreicht den Extremwert  $M_z^{\max} = FL$  an der „Einspann“-Stelle  $x^* = 0$ .

### 5.6.3 Spannungen

Da hier keine Normalkräfte auftreten und ein Hauptachsensystem vorliegt, ist die Normalspannung gemäß (5.17) durch

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = \frac{-M_z(x)}{I_{zz}} y + \frac{M_y(x)}{I_{yy}} z \quad (5.127)$$

gegeben. Wie aus (5.123) und (5.126) ersichtlich, sind im gesamten Bereich  $0 \leq x \leq L$  die Momente um die  $y$ - und  $z$ -Achse stets positiv. In den durch  $y^{z/D} = \mp \frac{1}{2} b$  und  $z^{z/D} = \pm \frac{1}{2} h$  bestimmten Eckpunkten des Querschnitts tritt dann die maximale Zug- und Druckspannung auf. Mit den in (5.63) angegebenen Widerstandsmomenten



des Rechteckquerschnitts und den Biegemomenten aus (5.123) und (5.126) erhält man dann

$$\sigma_{xx}^{z/D}(x) = \pm \frac{FL \left(1 - \frac{x}{L}\right)}{\frac{1}{6}hb^2} \pm \frac{\frac{1}{2}q_0 L^2 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)}{\frac{1}{6}bh^2} \quad (5.128)$$

Das Nullsetzen der Ableitung liefert mit

$$0 = -\frac{6FL}{hb^2} \frac{1}{L} + \frac{3q_0 L^2}{bh^2} \left(\frac{1}{L} - 2\frac{x_M}{L} \frac{1}{L}\right) \quad (5.129)$$

eine Bestimmungsgleichung für die Stelle

$$x_M = \frac{1}{2}L - \frac{F}{q_0} \frac{h}{b} \quad (5.130)$$

an der die maximale Zug- und Druckspannung auftritt. Im Sonderfall  $F = 0$  erhält man die maximale Normalspannung mit  $x_M = \frac{1}{2}L$  wie erwartet in der Bauteilmitte. Überwiegt mit  $F > \frac{1}{2}q_0 L \frac{b}{h}$  die Beanspruchung durch die Einzelkraft, dann tritt die maximale Zug- und Druckbelastung als Randextremum stets im Querschnitt am Bauteilende bei  $x_M = 0$  auf.

Die maximalen Schubspannungen ergeben sich gemäß (5.78) und (5.79) zu

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{b h} \quad \text{und} \quad \tau_{xz}^{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{b h} \quad (5.131)$$

und treten im Querschnitt an der Stelle  $x$  bei  $y = 0$  bzw. bei  $z = 0$  auf. Da an den entsprechenden Randpunkten  $y_R = 0$ ,  $z_R = \pm \frac{1}{2}h$  und  $y_R = \pm \frac{1}{2}b$ ,  $z_R = 0$  gemäß (5.128) auch Normalspannungen wirken, hat man es mit einem 2-dimensionalen Spannungszustand zu tun, der bei Bauteildimensionierung über geeignete Vergleichsspannungen berücksichtigt wird. Bei langgestreckten Bauteilen mit Vollquerschnitt sind die maximalen Normalspannungen allein entscheidend für die Dimensionierung, da sie um ein Vielfaches größer als die maximalen Schubspannungen sind, vgl. Abschnitt 5.4.2. Der Verlauf der Normalspannung in den

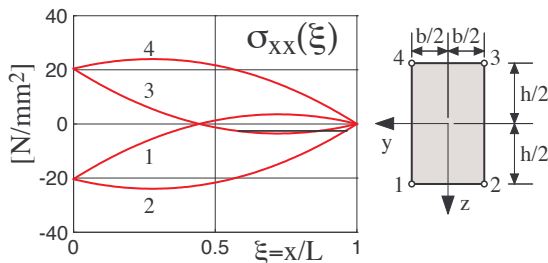


Bild 5.17: Verlauf der Normalspannungen

vier Eckpunkten des Querschnitts berechnet für die Zahlenwerte aus Abschnitt 5.6.1 ist in Bild 5.17 aufgetragen.

## 5.6.4 Biegelinie

### 5.6.4.1 Verformungen in der xy-Ebene

Auf Grund des verschwindenden Flächendeviationsmoments vereinfacht sich die Biegedifferentialgleichung (5.103) zu

$$v'' = \frac{M_z}{EI_{zz}} - \frac{k_{sy}}{GA} q_y \quad (5.132)$$

Mit (5.124) und (5.126) erhält man

$$v'' = \frac{FL}{EI_{zz}} \left(1 - \frac{x}{L}\right) - 0 \quad (5.133)$$

Eine erste Integration liefert zunächst

$$v' = \frac{FL}{EI_{zz}} \left(x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L}\right) + C_1 \quad (5.134)$$

Nach einer weiteren Integration bleibt

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{FL}{EI_{zz}} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6} \frac{x^3}{L}\right) + C_1 x + C_2 \\ &= \frac{1}{6} \frac{FL^3}{EI_{zz}} \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(3 - \frac{x}{L}\right) + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad (5.135)$$

Das Scharniergelenk an der Stelle  $x = 0$  lässt keine Verschiebungen in  $y$ -Richtung zu. Die Randbedingung  $v(x = 0) = 0$  hat dann  $C_2 = 0$  zur Folge. Infolge der Schubverformung tritt dort gemäß (5.107) jedoch die Neigung

$$v'(x=0) = \frac{k_{sy}}{GA} Q_y(x=0) = \frac{k_{sy}}{GA} F \quad (5.136)$$

auf, wobei die Querkraft  $Q_y(x = 0)$  durch (5.125) bestimmt ist. Mit (5.136) erhält man aus (5.134) die erste Integrationskonstante zu

$$C_1 = \frac{k_{sy}}{GA} F \quad (5.137)$$

Damit ist die Durchbiegung in der  $xy$ -Ebene durch

$$v(x) = \underbrace{\frac{1}{6} \frac{FL^3}{EI_{zz}} \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(3 - \frac{x}{L}\right)}_{v_B} + \underbrace{\frac{k_{sy} FL}{GA} \frac{x}{L}}_{v_S} \quad (5.138)$$

gegeben. Der erste Anteil beschreibt die Verformung auf Grund der reinen Biegebeanspruchung und kann für viele Lagerungs- und Belastungsfälle aus der Fachliteratur (z.B.: Hütte) entnommen werden. Im vorliegenden Fall einer einseitigen Einspannung an der Stelle  $x = 0$  und der Belastung am freien Ende  $x = \ell$  durch die Einzelkraft  $F$  wird dort die mit  $w$  bezeichnete Biegelinie mit

$$w = \frac{1}{6} W \xi^2 (3 - \xi), \quad W = \frac{F \ell^3}{EI}, \quad \xi = \frac{x}{\ell} \quad (5.139)$$

angegeben. Die maximale Durchbiegung tritt an der Stelle  $x^M = L$  auf und beträgt

$$v^M = v(x=L) = \frac{1}{3} \frac{FL^3}{EI_{zz}} + \frac{k_{Sy}}{GA} FL \quad (5.140)$$

Bezieht man die Anteile aufeinander, dann ergibt sich für einen Rechteckquerschnitt

$$\frac{v_S^M}{v_B^M} = \frac{k_{Sy} FL}{Gbh} \frac{3E \frac{1}{12} hb^3}{FL^3} = \frac{1}{4} k_{Sy} \frac{E}{G} \left( \frac{b}{L} \right)^2 \quad (5.141)$$

Der Anteil aus der Schubverformung im Vergleich zum Anteil aus der reinen Biegung nimmt hier sogar quadratisch mit dem Verhältnis der relevanten Querschnittsabmessung  $b$  zur Bauteillänge  $L$  ab und kann deshalb bei langgestreckten Bauteilen vernachlässigt werden.

Die Ergebnisse für die Zahlenwerte aus Abschnitt 5.6.1 sind in Bild 5.18 aufgetragen. Aus (5.134) erhält man mit

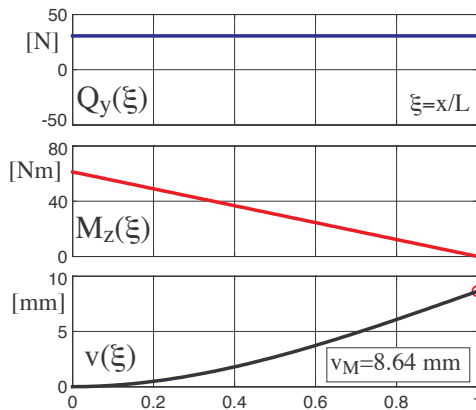


Bild 5.18: Belastung und Biegelinie:  $xy$ -Ebene

(5.137) die Neigung der Biegelinie zu

$$v' = \frac{1}{2} \frac{FL^2}{EI_{zz}} \frac{x}{L} \left( 2 - \frac{x}{L} \right) + \frac{k_{Sy} F}{GA} \quad (5.142)$$

die neben dem konstanten Schubanteil durch einen bis zur Stelle  $x = L$  zunehmenden Anteil aus der Biegung gekennzeichnet wird. Die maximale Neigung tritt an der Stelle  $x = L$  auf und ist durch

$$v'_M = v'(x=L) = \frac{1}{2} \frac{FL^2}{EI_{zz}} + \frac{k_{Sy} F}{GA} \quad (5.143)$$

gegeben.

#### 5.6.4.2 Verformungen in der $xz$ -Ebene

Mit  $I_{yz} = 0$  erhält man aus (5.104) die Biegedifferentialgleichung

$$w'' = -\frac{M_y}{EI_{yy}} - \frac{k_{Sz}}{GA} q_z \quad (5.144)$$

Mit (5.117) und (5.123) bleibt

$$w'' = \frac{\frac{1}{2} q_0 L^2 \frac{x}{L} \left( \frac{x}{L} - 1 \right)}{EI_{yy}} - \frac{k_{Sz}}{GA} q_0 \quad (5.145)$$

wobei das Minuszeichen vor dem ersten Term in (5.144) durch Umdrehen der Differenz in  $M_y$  kompensiert wurde. Eine erste Integration liefert

$$w' = \frac{1}{2} \frac{q_0 L^2}{EI_{yy}} \left( \frac{1}{3} \frac{x^3}{L^2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L} \right) - \frac{k_{Sz} q_0}{GA} x + C_1 \quad (5.146)$$

wobei die dabei auftretende erste Integrationskonstante wieder mit  $C_1$  bezeichnet wird. Nochmals integriert erhält man

$$w(x) = \frac{1}{2} \frac{q_0 L^2}{EI_{yy}} \left( \frac{1}{12} \frac{x^4}{L^2} - \frac{1}{6} \frac{x^3}{L} \right) - \frac{1}{2} \frac{k_{Sz} q_0}{GA} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (5.147)$$

Nach einer Umformung bleibt

$$w(x) = \frac{1}{24} \frac{q_0 L^4}{EI_{yy}} \left[ \left( \frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right] - \frac{1}{2} \frac{k_{Sz} q_0}{GA} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (5.148)$$

Das Scharniergelenk an der Stelle  $x = 0$  und die horizontale Unterlage bei  $x = L$  lassen in  $z$ -Richtung keine Verschiebungen zu. Aus den Randbedingungen

$$w(x=0) = 0 \quad \text{und} \quad w(x=L) = 0 \quad (5.149)$$

und (5.148) folgt

$$0 = C_2 \quad (5.150)$$

$$0 = -\frac{1}{24} \frac{q_0 L^4}{EI_{yy}} - \frac{1}{2} \frac{k_{Sz} q_0}{GA} L^2 + C_1 L + C_2 \quad (5.151)$$

Nach  $C_1$  und  $C_2$  aufgelöst und in (5.148) eingesetzt erhält man

$$w(x) = \frac{1}{24} \frac{q_0 L^4}{EI_{yy}} \left[ \left( \frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right] - \frac{1}{2} \frac{k_{Sz} q_0}{GA} x^2 + \left( \frac{1}{24} \frac{q_0 L^3}{EI_{yy}} + \frac{1}{2} \frac{k_{Sz} q_0 L}{GA} \right) x \quad (5.152)$$

Zusammengefasst bleibt

$$w(x) = \underbrace{\frac{1}{24} \frac{q_0 L^4}{EI_{yy}} \left[ \left( \frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + \left( \frac{x}{L} \right) \right]}_{w_B} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{k_{Sz} q_0 L^2}{GA} \left( \frac{x}{L} \right) \left[ 1 - \left( \frac{x}{L} \right) \right]}_{w_S} \quad (5.153)$$

wobei die Anteile aus der reinen Biegung und der Schubverformung mit  $w_B$  und  $w_S$  markiert wurden.

Auch hier kann  $w_B$  direkt aus entsprechenden Tabellen übernommen werden. Für ein beidseitig gelenkig gelagertes Bauteil, das über der gesamten Länge  $\ell$  mit der konstanten Streckenlast  $q$  belastet wird, entnimmt man, z.B. aus der Hütte, für die mit  $w$  bezeichnete Durchbiegung mit der normierten Koordinate  $\xi = x/\ell$

$$w = W\xi(1-\xi)(1+\xi-\xi^2)/24, \quad W = \frac{q\ell^4}{EI} \quad (5.154)$$

Im Vergleich zu (5.153) wurden hier die beiden Nullstellen bei  $\xi = 0$  und  $\xi = 1$  nach dem Satz von Vieta vom Polynom 4. Grades<sup>6</sup> abgespalten.

Die maximale Durchbiegung tritt an der Stelle  $x = \frac{1}{2}L$  und ist mit

$$w_M = w(x = \frac{1}{2}L) = \frac{5}{384} \frac{q_0 L^4}{EI_{yy}} + \frac{1}{8} \frac{k_{Sz} q_0 L^2}{GA} \quad (5.155)$$

gegeben. Auch hier ist bei langgestreckten Bauteilen der Schubanteil gegenüber dem Anteil aus der reinen Biegung vernachlässigbar klein.

Die Ergebnisse mit den Zahlenwerten aus Abschnitt 5.6.1 sind in Bild 5.19 aufgetragen. Die Ablei-

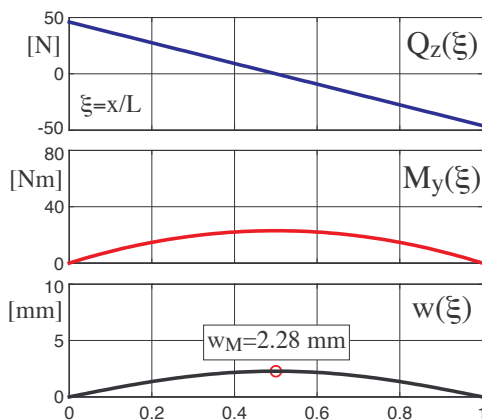


Bild 5.19: Belastung und Biegelinie:  $xy$ -Ebene

tung von (5.152) liefert die Neigung der Biegelinie zu

$$w'(x) = \frac{1}{24} \frac{q_0 L^3}{EI_{yy}} \left[ 4 \left( \frac{x}{L} \right)^3 - 6 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 1 \right] + \frac{1}{2} \frac{k_{Sz} q_0 L}{GA} \left( 1 - 2 \frac{x}{L} \right) \quad (5.156)$$

Die Neigung verschwindet in der Mitte des Bauteils  $w'(x = \frac{1}{2}L) = 0$  und erreicht an den Bauteilenden bei  $x=0$  und  $x=L$  mit

$$w'_M = \pm \left( \frac{1}{24} \frac{q_0 L^3}{EI_{yy}} + \frac{1}{2} \frac{k_{Sz} q_0 L}{GA} \right) \quad (5.157)$$

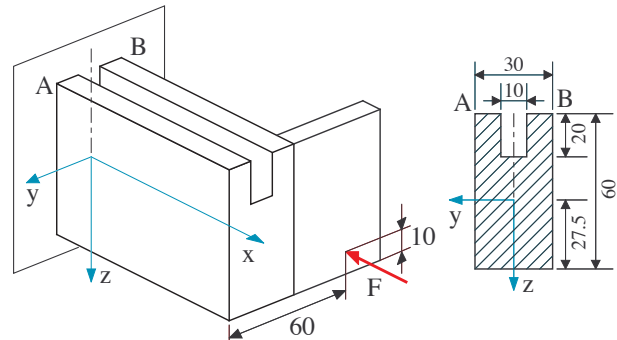
die maximalen Werte.

<sup>6</sup>  $\xi(1-\xi)(1+\xi-\xi^2) = \xi(1+\xi-\xi^2-\xi-\xi^2+\xi^3) = \xi-2\xi^3+\xi^4$

## 5.7 Übungen

### 5.7.1 Bauteil mit Nutquerschnitt

Ein Bauteil mit Nutquerschnitt ist an einem Ende fest eingespannt. Am anderen Ende wird über ein seitlich angeschweißtes Blech die Druckkraft  $F = 21 \text{ kN}$  eingeleitet.



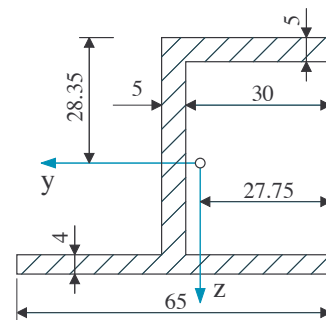
Berechnen Sie:

- die Flächenmomente 2. Grades ( $I_{yy}$ ,  $I_{yz}$ ,  $I_{zz}$ ) im Nutquerschnitt,
- die Normalspannungen in den Eckpunkten A und B.

Lösung:

### 5.7.2 Flächenmomente

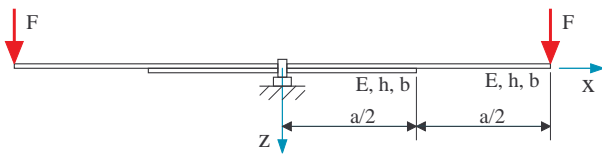
Ermitteln Sie für das skizzierte Profil die Flächenhauptträgheitsmomente und die Lage des Hauptachsensystems.



Lösung:

### 5.7.3 Blattfeder

Eine Blattfeder besteht aus zwei Lagen Federstahl mit gleichen Rechteckquerschnitten. Durch Witterungseinflüsse (Schmutz, Rost) sind beide Teile fest miteinander verbunden.



- Skizzieren Sie den Verlauf der maximalen Normalspannung im Bereich  $0 \leq x \leq a$  und geben Sie die Extremwerte an.
- Wie groß ist die Durchbiegung am Angriffspunkt der Kraft?
- Welche Schubspannung muss durch die Verbindungsschicht übertragen werden?

Lösung:

# 6 Allgemeine Torsion

## 6.1 Belastungen und Spannungen

Eine Torsionsbelastung ist durch die Schnittreaktionen

$$\begin{aligned} N &= 0, \quad Q_y = 0, \quad Q_z = 0, \\ M_x &\neq 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

gekennzeichnet. In einem Schnitt senkrecht zur  $x$ -Achse können deshalb nur die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$  auftreten. Die Schubspannungen müssen den Äquivalenzbeziehungen

$$0 = \int \tau_{xy} dA \quad (6.2)$$

$$0 = \int \tau_{xz} dA \quad (6.3)$$

$$M_x = \int (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA \quad (6.4)$$

genügen. Die den Schnittreaktionen  $N = 0$ ,  $M_y = 0$  und  $M_z = 0$  zugeordneten Äquivalenzbeziehungen werden in trivialer Weise durch eine verschwindende Normalspannung  $\sigma_{xx} = 0$  erfüllt.

Die Oberfläche des Bauteils ist spannungsfrei. Der Satz der zugeordneten Schubspannungen verlangt dann, dass die Schubspannungen am Rand des Querschnitts nur parallel zu diesem verlaufen können, Bild 6.1. Für beliebige Vollquerschnitte gelingt es im Allgemei-

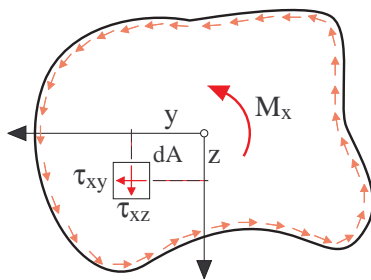


Bild 6.1: Spannungsverlauf in einem auf Torsion belasteten Querschnitt

nen nicht mehr, die Äquivalenzbeziehungen (6.2), (6.3) und (6.4) durch analytische Ansatz-Funktionen für die Schubspannungen zu erfüllen. Hier müssen partielle Differentialgleichungen, die aus den Gleichgewichtsbedingungen und den Verzerrungsbeziehungen abgeleitet werden können, numerisch gelöst werden.

In Bild 6.2 ist der numerisch berechnete Verlauf der Schubspannungen für ein auf Torsion belastetes Bauteil mit einem Z-förmigen Vollquerschnitt dargestellt.

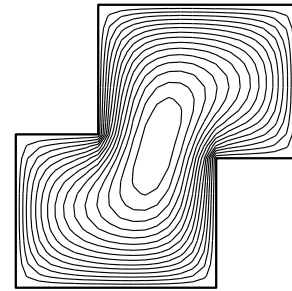


Bild 6.2: Linien gleicher Schubspannung in einem Z-Profil bei Torsionsbelastung

Da in der Darstellung der Abstand der Spannungslinien umgekehrt proportional zur Größe der Schubspannung ist, erkennt man sofort, dass hier die größte Belastung an den inneren Ecken des Querschnitts auftritt.

Für einfache Auslegungsberechnungen wird die maximale Schubspannung und die Verwindung oder Drillung analog zu (2.110) und (2.116) über die Beziehungen

$$\tau^{max} = \frac{M_x}{W_t} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{G I_t} \quad (6.5)$$

durchgeführt. Das polare Widerstandsmoment  $W_p$  und das polare Flächenmoment  $I_p$  wurden dabei durch das allgemeinere Torsions-Widerstandsmoment  $W_t$  und das allgemeinere Torsions-Flächenmoment  $I_t$  ersetzt. Näherungsformeln oder Zahlenwerte für  $W_t$  (Einheit  $\text{mm}^3$ ) und  $I_t$  (Einheit  $\text{mm}^4$ ) findet man für zahlreiche Querschnitte in einschlägigen Fachbüchern<sup>1</sup> oder bei den Herstellern von Halbzeugen.

In den folgenden Abschnitten werden Näherungsformeln für dünnwandige Profile abgeleitet. Ferner wird der wechselseitige Einfluss von Biege- und Torsionsbelastungen auf das Entstehen von Schubspannungen betrachtet.

## 6.2 Kreiszyklindrische Rohre

Für einen Rohrquerschnitt mit dem Außenradius  $R_a$  und dem Innenradius  $R_i$  sind die Flächenmomente gemäß (2.130) und (2.132) durch

<sup>1</sup>z.B.: Hütte - Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften

$$I_P^{\circ} = \frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4) \quad \text{bzw.} \quad I_{yy}^{\circ} = I_{zz}^{\circ} = \frac{\pi}{4} (R_a^4 - R_i^4) \quad (6.6)$$

gegeben. Ein Rohrquerschnitt kann aber auch durch den mittleren Radius  $R_m = \frac{1}{2} (R_a + R_i)$  und die Wandstärke  $t = R_a - R_i$  beschrieben werden. Bei dünnwandigen Rohren können dann die Flächenmomente unter der Berücksichtigung von  $t \ll R_m$  über

$$\begin{aligned} R_a^4 - R_i^4 &= (R_a^2 + R_i^2) (R_a^2 - R_i^2) \\ &= \underbrace{(R_a^2 + R_i^2)}_{\approx 2R_m^2} \underbrace{(R_a + R_i)}_{= 2R_m} \underbrace{(R_a - R_i)}_{= t} \end{aligned} \quad (6.7)$$

durch

$$I_P^{\circ} \approx 2\pi R_m^3 t \quad \text{bzw.} \quad I_{yy}^{\circ} = I_{zz}^{\circ} = \pi R_m^3 t \quad (6.8)$$

angenähert werden.

Während im Querschnitt eines dickwandigen Rohres die Schubspannungen gemäß (2.102) mit dem Radius  $r$  vom Wert  $\tau_i = \tau_{x\varphi}(r=R_i)$  auf den Wert  $\tau_a = \tau_{x\varphi}(r=R_a)$  ansteigen, sind im Querschnitt eines dünnwandigen Rohres die Schubspannungen innen und außen nahezu gleich groß,  $\tau_i \approx \tau_a$ , Bild 6.3.

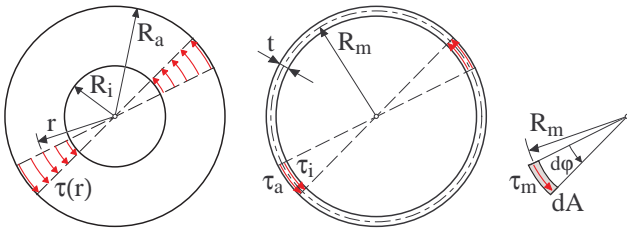


Bild 6.3: Torsionsbelastete Rohre

Die mittlere Schubspannung  $\tau_m$  in einem torsionsbelasteten dünnwandigen Rohr muss der Äquivalenzbeziehung

$$M_t = \int R_m \tau_m dA \quad (6.9)$$

genügen, wobei  $M_t$  das Torsionsmoment und  $R_m$  den mittleren Radius bezeichnen. Da die Wandstärke  $t$  sehr klein ist, kann das Flächenelement  $dA = t R_m d\varphi$  verwendet werden. Dann ergibt sich aus (6.9)

$$M_t = \int_0^{2\pi} R_m \tau_m t R_m d\varphi = R_m^2 \tau_m t 2\pi \quad (6.10)$$

Die mittlere Schubspannung ist somit durch

$$\tau_m = \frac{M_t}{2\pi R_m^2 t} = \frac{M_t}{2\pi R_m^3 t} R_m = \frac{M_t}{I_P^{\circ}} R_m \quad (6.11)$$

gegeben, wobei durch die Erweiterung mit  $R_m/R_m$  und unter Berücksichtigung von (6.8) die Analogie zu (2.102) hergestellt wurde.

## 6.3 Dünnwandig geschlossene Profile

### 6.3.1 Schubspannung

Ein dünnwandiges Rohr ist durch den mittleren Radius  $R_m$  und die konstante Wandstärke  $t$  eindeutig definiert. Beliebige dünnwandige Profile können über den Verlauf der Profilmittellinie und eine variable Wandstärke  $t = t(s)$  beschrieben werden. Die Koordinate  $s$  läuft dabei längs der Mittellinie um den Querschnitt herum und der variable Radius  $R = R(s)$  definiert die Profilmittellinie, Bild 6.4. Der dünnwandige Querschnitt kann

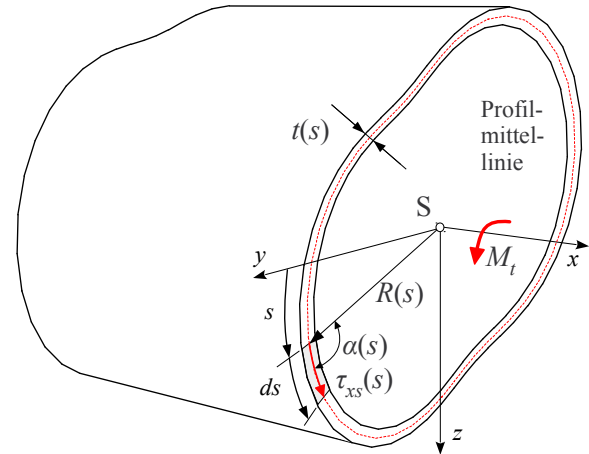


Bild 6.4: Dünnwandig geschlossenes Profil

wegen  $t(s) \ll R(s)$  in Flächenelemente  $dA = t(s) ds$  unterteilt werden. Die dort auftretende Schubspannung  $\tau_{xs} = \tau_{xs}(s)$  und der Radiusvektor  $R(s)$  stehen nun nicht mehr senkrecht aufeinander, sondern schließen den Winkel  $\alpha = \alpha(s)$  ein. Die Äquivalenzbeziehung für das Torsionsmoment  $M_x \rightarrow M_t$  lautet damit

$$M_t = \int_0^U R(s) \sin \alpha(s) \tau_{xs}(s) \underbrace{t(s) ds}_{dA} \quad (6.12)$$

wobei  $U$  den durch die Länge der Profilmittellinie definierten Umfang des Querschnitts bezeichnet.

Die Schubspannung  $\tau_{xs}(s)$  muss auch dem Kräftegleichgewicht genügen. Die Belastung erfolgt gemäß (6.1) nur durch ein Torsionsmoment. Setzt man zusätzlich voraus, dass Bauteilverformungen in  $x$ -Richtung nicht behindert werden, dann wird das Volumenelement der Länge  $dx$ , der Breite  $t(s)$  und der Höhe  $ds$  nur durch die Schubspannungen  $\tau_{sx}$  und  $\tau_{xs}$  belastet, Bild 6.5. Berücksichtigt man ferner mit  $\tau_{sx} = \tau_{xs}$  den Satz der zugeordneten Schubspannungen, dann liefert das Kräftegleichgewicht in  $x$ -Richtung die Beziehung

$$-\tau_{xs}(s) dx t(s) + \tau_{xs}(s+ds) dx t(s+ds) = 0 \quad (6.13)$$



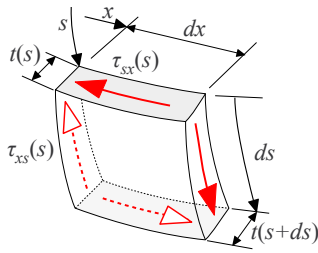


Bild 6.5: Durch Schubspannungen belastetes Volumenelement

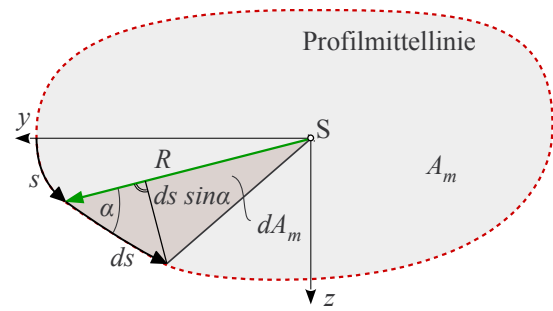


Bild 6.6: Flächenelement der Profil-Mittellinie

Mit den Näherungen

$$\tau_{xs}(s+ds) \approx \tau_{xs}(s) + \frac{d\tau_{xs}}{ds} ds \quad (6.14)$$

und

$$t(s+ds) \approx t(s) + \frac{dt}{ds} ds \quad (6.15)$$

erhält man

$$\left( \tau_{xs}(s) + \frac{d\tau_{xs}}{ds} ds \right) dx \left( t(s) + \frac{dt}{ds} ds \right) = \tau_{xs}(s) dx t(s) \quad (6.16)$$

Ausmultipliziert und unter Vernachlässigung quadratisch kleiner Terme bleibt

$$\left( \frac{d\tau_{xs}}{ds} t(s) + \tau_{xs}(s) \frac{dt}{ds} \right) ds dx = 0 \quad (6.17)$$

Der Ausdruck in den Klammern stellt die Ableitung des Produktes aus Schubspannung  $\tau_{xs}$  und Wandstärke  $t$  nach der Koordinate  $s$  dar

$$\frac{d}{ds} (\tau_{xs}(s) t(s)) = \frac{d\tau_{xs}}{ds} t(s) + \tau_{xs}(s) \frac{dt}{ds} \quad (6.18)$$

Auf Grund von (6.17) und (6.18) muss das als Schubfluss  $T$  bezeichnete Produkt aus  $\tau_{xs}$  und  $t$  konstant sein

$$T = \tau_{xs}(s) t(s) = \text{konst.} \quad (6.19)$$

Mit (6.19) kann (6.12) etwas vereinfacht werden

$$M_t = \tau_{xs}(s) t(s) \int_0^U R(s) \sin \alpha(s) ds \quad (6.20)$$

Das verbleibende Integral kann nun geometrisch interpretiert werden. Die von der Profilmittellinie umschlossene Fläche ergibt sich durch Integration

$$A_m = \int dA_m = \int_0^U \frac{1}{2} R(s) \sin \alpha(s) ds \quad (6.21)$$

wobei das Flächenelement aus Bild 6.6 verwendet wurde. Damit kann das Integral in (6.12) durch das Doppelte der von der Profil-Mittellinie umschlossene Fläche ersetzt werden. Es bleibt dann

$$M_t = \tau_{xs}(s) t(s) 2A_m \quad (6.22)$$

oder allgemein

$$\tau_{xs}(x, s) = \frac{M_t(x)}{2A_m(x) t(x, s)} \quad (6.23)$$

wobei mit  $M_t = M_t(x)$  eine von  $x$  abhängige Belastung angesetzt wurde. Gegebenfalls auftretende Querschnittsveränderungen, die durch  $A_m \rightarrow A_m(x)$  und  $t(s) \rightarrow t(x, s)$  erfasst werden, müssen dabei so langsam erfolgen, dass das Kräftegleichgewicht (6.13) noch genügend genau erfüllt wird.

Die Beziehung (6.23) wird als 1. Bredtsche Formel bezeichnet und ist, wie ein Vergleich mit (6.11) zeigt, auch für dünnwandige kreiszylindrische Rohre gültig.

Die maximale Schubspannung in einem Querschnitt an der Stelle  $x$  tritt an den Stellen auf, wo mit  $t = t_{min}$  die Wandstärke des Profils am dünnsten ist.

$$\tau_{xs}^{max} = \frac{M_t}{2A_m t_{min}} = \frac{M_t}{W_t} \quad (6.24)$$

Dabei definiert  $W_t = 2A_m t_{min}$  für dünnwandig geschlossene Profile das Torsionswiderstandsmoment.

### 6.3.2 Verformungen

Bleiben die Verformungen gegenüber den Bauteilabmessungen klein, dann kann angenommen werden, dass die Form des Querschnitts im Wesentlichen erhalten bleibt. Ein Volumenelement der Länge  $dx$ , der Höhe  $ds$  und der Breite  $t$  wird dabei geschert, leicht zur Seite gebogen und verwunden, Bild 6.7.

Auf Grund der Dünnwandigkeit des Profils sind die Verformungen am Volumenelement, die aus Biegung und Verwindung resultieren, sehr klein und können in erster Näherung unberücksichtigt bleiben. Die für die Torsion maßgebliche Scherung der Volumenelemente kann durch die relevante Verschiebung der Endquerschnitte beschrieben werden.

Die Position der Endquerschnitte eines Volumenelements an den Stellen  $(x, s)$  und  $(x+dx, s)$  wird durch die



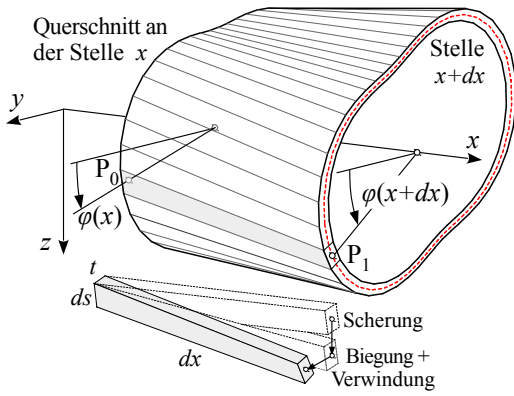


Bild 6.7: Verformungen eines Volumenelements

Punkte  $P_0$  und  $P_1$  gekennzeichnet. Wobei die Koordinaten  $s$  und  $\varphi$  über die differentielle Beziehung  $ds = R d\varphi$  miteinander verknüpft sind. In der  $y$ - $z$ -Ebene kann die Verschiebung der Endquerschnitte ( $P_0$  nach  $P_1$ ) durch einen Kreisbogen der Länge  $R(\varphi)(\varphi_{x+dx} - \varphi_x)$  dargestellt werden, Bild 6.8. Dabei beschreibt  $R(\varphi)$  den Ra-

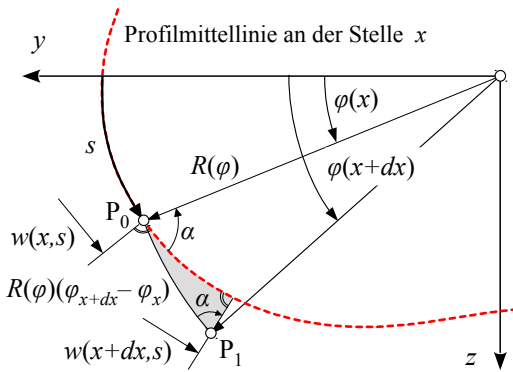


Bild 6.8: Verschiebung der Endquerschnitte

dius der Profilmittellinie im Punkt  $P_0$  und  $\varphi_x = \varphi(x)$  sowie  $\varphi_{x+dx} = \varphi(x + dx)$  geben die Verdrehwinkel der Profilquerschnitte an den Stellen  $x$  und  $x + dx$  an. Bei allgemeinen Querschnitten verläuft die Profilmittellinie nicht senkrecht sondern unter dem Winkel  $\alpha$  zum Radius  $R = R(\varphi)$ . Die Projektion des Bogens liefert dann die für die Scherung maßgebliche Verschiebung der Endquerschnitte längs der Profilmittellinie

$$R(\varphi(x+dx) - \varphi(x)) \sin \alpha = w(x+dx, s) - w(x, s) \quad (6.25)$$

Mit Näherungen analog zu (6.15) bleibt

$$\frac{\partial w(x, s)}{\partial x} = R(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \alpha \quad (6.26)$$

Dabei wird der Radius  $R$  nun als Funktion der Querschnittsordinate  $s$  beschrieben und  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  gibt die Verwindung des Querschnitts an.

Die aus der Schubspannung resultierenden Verformungen an einem Volumenelement mit den Abmessungen  $dx$ ,  $t$  und  $ds$  sind in Bild 6.9 dargestellt.

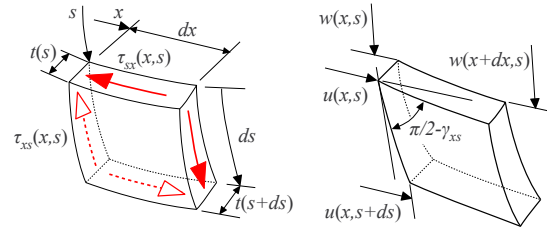


Bild 6.9: Belastung und Verformung

Für die Verzerrung (Scherung) in der  $xs$ -Ebene gilt

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (6.27)$$

wobei  $u$  und  $w$  die Verschiebungen in Richtung der  $x$ - und der  $s$ -Koordinate bezeichnen. Mit dem linear elastischen Materialverhalten folgenden Stoffgesetz

$$\gamma_{xs} = \frac{1}{G} \tau_{xs} \quad (6.28)$$

der durch (6.23) bestimmten Schubspannung und dem Zusammenhang (6.26) erhält man aus der Beziehung (6.27)

$$\frac{1}{G} \frac{M_t}{2A_m t(s)} = \frac{\partial u}{\partial s} + R \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \alpha \quad (6.29)$$

Bei einem geschlossenen Querschnitt kann die Längsverschiebung  $u(x, s)$  am Anfang  $s=0$  und am Ende der Profil-Mittellinie  $s=U$  keine unterschiedlichen Werte annehmen. Das bedeutet

$$u(x, s=U) - u(x, s=0) = \int_{s=0}^{s=U} \frac{\partial u}{\partial s} ds = 0 \quad (6.30)$$

oder

$$\int_{s=0}^{s=U} \frac{\partial u}{\partial s} ds = \oint \frac{\partial u}{\partial s} ds = 0 \quad (6.31)$$

wobei das Symbol des Kreisintegrals  $\oint$  die Integration um den Querschnitt herum kennzeichnet. Aus (6.29) erhält man damit

$$\oint \frac{1}{G} \frac{M_t}{2A_m t(s)} ds = 0 + \oint R \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \alpha ds \quad (6.32)$$

Die Größen  $G$ ,  $M_t$ ,  $A_m$  und die Verwindung des Querschnitts hängen nicht von der Koordinate  $s$  ab und können deshalb vor die Kreisintegrale gestellt werden. Es bleibt dann

$$\frac{M_t}{2A_m G} \oint \frac{ds}{t(s)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \oint R \sin \alpha ds \quad (6.33)$$

Das Kreisintegral auf der rechten Seite ist unter Berücksichtigung von (6.31) durch (6.21) gegeben. Damit erhält man

$$\frac{M_t}{2A_m G} \oint \frac{ds}{t(s)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} 2A_m \quad (6.34)$$

Die Verwindung des Querschnitts kann damit analog zu (2.116) durch

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{G \oint \frac{ds}{t(s)}} = \frac{M_t}{G I_t} \quad (6.35)$$

angegeben werden. Diese Beziehung wird in der Literatur als **2. Bredtsche Formel** bezeichnet.

### 6.3.3 Torsions-Flächenmoment

Mit (6.35) wird auch das Torsions-Flächenmoment für dünnwandig geschlossene Profile definiert

$$I_t = \frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \quad (6.36)$$

Es entspricht dem polaren Flächenmoment  $I_P$ , das ja auf Querschnitte mit Kreisquerschnitt beschränkt ist.

Bei dünnwandigen Profilen mit konstant dünner Wandstärke  $t = t_0$  kann das Kreisintegral in (6.36) direkt angegeben werden

$$\oint \frac{ds}{t_0} = \frac{1}{t_0} \oint ds = \frac{1}{t_0} \int_{s=0}^{s=U} ds = \frac{U}{t_0} \quad (6.37)$$

wobei  $U$  den Umfang der Profilmittellinie angibt. Das Torsions-Flächenmoment vereinfacht sich dann zu

$$I_t = \frac{(2A_m)^2}{\frac{U}{t_0}} = \frac{(2A_m)^2 t_0}{U} \quad (6.38)$$

Im Bild 6.10 sind für ein Kreisrohr und ein Vierkantrohr die Profildaten zusammengestellt, die zur Berechnung des Torsions-Flächenmoment benötigt werden. Im Vergleich erhält man

Profildaten	
Kreisrohr	Vierkantrohr
$U^\circ = \pi a$	$U^\square = 4a$
$A_m^\circ = \frac{\pi}{4} a^2$	$A_m^\square = a^2$

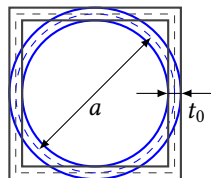


Bild 6.10: Kreisrohr und Vierkantrohr im Vergleich

nung des Torsions-Flächenmoment benötigt werden. Im Vergleich erhält man

$$\frac{I_t^\circ}{I_t^\square} = \frac{\left(2 \frac{\pi}{4} a^2\right)^2 t_0}{\frac{\pi a}{(2a^2)^2 t_0}} = \frac{\frac{\pi}{4} t_0 a^3}{t_0 a^3} = \frac{\pi}{4} = 0.785 \quad (6.39)$$

Wegen  $U^\circ/U^\square = \pi/4 = 0.785$  benötigt der Kreisrohrquerschnitt im Vergleich zu einem umschriebenen Vierkantrohr auch entsprechend weniger Material.

## 6.4 Schmale Rechteckquerschnitte

### 6.4.1 Unterteilung in Hohlquerschnitte

Bei Bauteilen mit schmalen rechteckigen Querschnitten, die auf Torsion belastet werden, kann angenommen werden, dass der Verlauf der Schubspannungen auch im Inneren des Querschnitts durch den Verlauf am Rand dominiert wird, Bild 6.11.

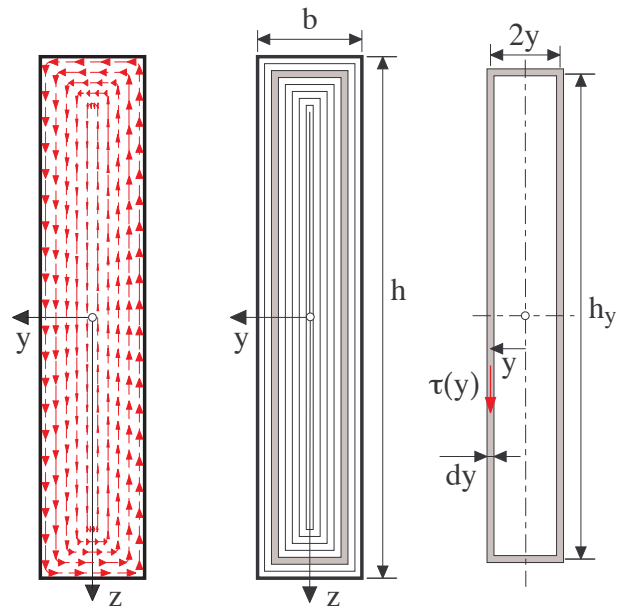


Bild 6.11: Verlauf der Schubspannungen in einem schmalen Rechteckquerschnitt und Unterteilung in geeignete dünnwandige Hohlprofile

Unterteilt man nun den Querschnitt mit der Höhe  $h$  und der Breite  $b$  in ineinander geschachtelte dünnwandige Hohlquerschnitte mit der Wandstärke  $dy$ , dann müssen aus Kompatibilitätsgründen Höhe und Breite in gleichem Maße abnehmen. Betrachtet man einen Hohlquerschnitt mit der Breite  $2y$ , dann haben Breite und Höhe um den Betrag  $b - 2y$  abgenommen. Die Höhe eines Hohlquerschnittes an der Stelle  $y$  ist somit durch

$$h_y = h - (b - 2y) \quad (6.40)$$

gegeben.

### 6.4.2 Schubspannungen

Auf jeden Hohlquerschnitt kann nun die 1. Bredtsche Formel angewendet werden. Aus (6.23) ergibt sich

dann eine von  $y$  abhängige Schubspannung

$$\tau_{xs}(s) = \frac{M_t}{2A_m t(s)} \rightarrow \tau(y) = \frac{dM_t}{2(2y h_y) dy} \quad (6.41)$$

Entsprechend der Unterteilung des Profils wurde das Torsionsmoment  $M_t$  dabei mit  $dM_t$  in infinitesimale Beiträge zerlegt. Ferner wurden die von der Profilmittellinie umschlossene Querschnittsfläche  $A_m$  durch  $2y h_y$  und die Wandstärke  $t$  durch  $dy$  ersetzt. Mit (6.40) ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} dM_t &= \tau(y) 2y (h - (b - 2y)) dy \\ &= \tau(y) 4y (h - b + 2y) dy \end{aligned} \quad (6.42)$$

Die Hohlprofile sind wie der Ausgangsquerschnitt schmal. Mit  $2y \ll h$  und  $b \ll h$  bleibt dann in erster Näherung

$$dM_t = 4h \tau(y) y dy \quad (6.43)$$

Mit dem linearen Spannungsansatz

$$\tau(y) = C y \quad (6.44)$$

kann in (6.43) auf beiden Seiten integriert werden

$$M_t = \int dM_t = \int_{y=0}^{y=\frac{b}{2}} 4h C y y dy = 4h C \frac{1}{3} \frac{b^3}{8} \quad (6.45)$$

Die Konstante aus dem Spannungsansatz und die Schubspannung sind somit durch

$$C = 6 \frac{M_t}{h b^3} \quad \text{und} \quad \tau(y)^\parallel = \frac{6 M_t}{h b^3} y \quad (6.46)$$

gegeben. Die maximale Schubspannung tritt am Rand bei  $y = b/2$  auf und ist durch

$$\tau_{max}^\parallel = \tau\left(y = \frac{b}{2}\right) = \frac{3 M_t}{h b^2} \quad (6.47)$$

bestimmt.

### 6.4.3 Verwindung

Die Verwindung von Hohlquerschnitten kann über die 2. Bredtsche Formel errechnet werden. Das dabei erforderliche Torsions-Flächenmoment ist für konstante Wandstärken durch (6.38) gegeben. Die ineinander geschachtelten Hohlquerschnitte verfügen über infinitesimal kleine Torsions-Flächenmomente, die gemäß (6.38) durch

$$I_t = \frac{(2A_m)^2 t_0}{U} \rightarrow dI_t = \frac{(2y h_y)^2 dy}{2(2y + h_y)} \quad (6.48)$$

gegeben sind, wobei  $A_m$  mit  $2y h_y$ ,  $t$  durch  $dy$  und  $U$  durch  $2(2y + h_y)$  ersetzt wurde. Mit den Näherungen

$h_y \approx h$  und  $2y + h_y \approx h$ , die durch  $2y \ll h$  und  $b \ll h$  gerechtfertigt sind, bleibt

$$dI_t = \frac{(2y h)^2}{2h} dy = 8h y^2 dy \quad (6.49)$$

Die Integration liefert dann schließlich das Torsions-Flächenmoment für einen schmalen Rechteckquerschnitt der Höhe  $h$  und der Breite  $b \ll h$  zu

$$I_t^\parallel = \int dI_t = \int_{y=0}^{y=\frac{b}{2}} 8h y^2 dy = 8h \frac{1}{3} \frac{b^3}{8} = \frac{1}{3} h b^3 \quad (6.50)$$

Die Verwindung ist dann entsprechend (6.35) durch

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{G I_t^\parallel} = \frac{3 M_t}{G h b^3} \quad (6.51)$$

gegeben. Sind das Torsionsmoment  $M_t$  und die Querschnittsabmessungen  $h$  und  $b$  über der Bauteillänge  $L$  konstant, dann gibt

$$\varphi = \int_0^L \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{3 M_t}{G h b^3} L \quad (6.52)$$

die Verdrehung der beiden Endquerschnitte an.

## 6.5 Dünnwandig offene Querschnitte

### 6.5.1 Prinzipielles Vorgehen

Dünnwandig offene Querschnitte, die z.B. bei L-, T-, U- und I-Profilen auftreten, können aus schmalen Rechteckprofilen zusammengesetzt werden. So lässt sich das in Bild 6.12 dargestellte I-Profil sehr einfach in drei schmale Rechtecke unterteilen.

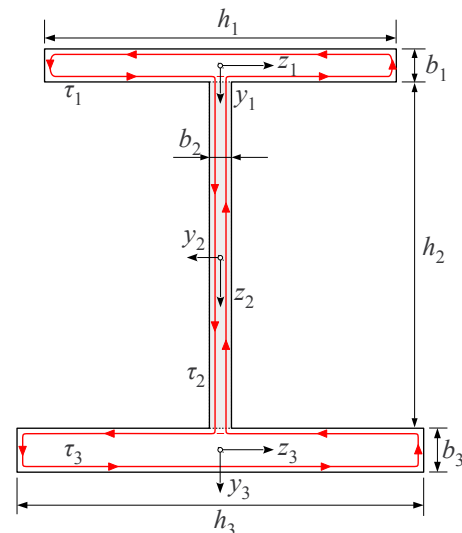


Bild 6.12: I-Profil unterteilt in Rechtecke

Jedes der  $n$  schmalen Rechtecke (hier:  $n = 3$ ) wird dann wieder in dünne Hohlquerschnitte unterteilt, die gemäß (6.43) die Torsions-Momente

$$dM_{ti} = 4 h_i \tau(y_i) y_i dy_i, \quad i = 1, 2 \dots n \quad (6.53)$$

übertragen. Das gesamte Torsions-Moment ist dann analog zu (6.43) durch

$$M_t = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{y_i=0}^{y_i=\frac{b_i}{2}} 4 h_i \tau(y_i) y_i dy_i \quad (6.54)$$

gegeben, wobei zunächst über die einzelnen Rechtecke integriert wird und dann die Anteile aufsummiert werden.

## 6.5.2 Schubspannung

Mit dem einfachen Ansatz

$$\tau_i = C y_i \quad (6.55)$$

nimmt man an, dass die Schubspannung in allen Rechtecken mit der gleichen Intensität (Konstante  $C$ ) von Null auf den jeweiligen maximalen Wert am Rand ansteigt. Damit ergibt sich

$$M_t = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{y_i=0}^{y_i=\frac{b_i}{2}} 4 h_i C y_i y_i dy_i \quad (6.56)$$

Nach der Integration bleibt

$$M_t = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{4}{3} h_i \frac{b_i^3}{8} C \quad \text{oder} \quad \frac{C}{2} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} \sum h_i b_i^3} \quad (6.57)$$

Dem Ansatz (6.55) entsprechend ist dann die maximale Schubspannung im Rechteck  $j$  durch

$$\tau_j^{max} = C \frac{b_j}{2} = \frac{C}{2} b_j = \frac{M_t}{\frac{1}{3} \sum h_i b_i^3} b_j \quad (6.58)$$

gegeben. Bei dünnwandig geschlossenen Profilen erreicht die Schubspannung an der Stelle mit der kleinsten Wandstärke den maximalen Wert. Bei dünnwandig offenen Profilen dagegen, tritt die insgesamt größte Schubspannung in dem Rechteck mit der größten Breite  $b^{max} = \max(b_1, b_2, \dots, b_n)$  auf. Man erhält dann

$$\tau^{max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} \sum h_i b_i^3} b^{max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (6.59)$$

wobei

$$W_t = \frac{\frac{1}{3} \sum h_i b_i^3}{b^{max}} \quad (6.60)$$

das Torsions-Widerstandsmoment für dünnwandig offene Querschnitte angibt.

## 6.5.3 Verformung

Über die 2. Bredtsche Formel ergibt sich die Verwindung oder Drillung aus

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{G I_t} \quad (6.61)$$

wobei das Torsions-Flächenmoment für dünnwandige offene Profile unter Berücksichtigung von (6.50) mit

$$I_t = \sum I_{ti} = \frac{1}{3} \sum h_i b_i^3 \quad (6.62)$$

additiv aus den Anteilen der einzelnen schmalen Rechteckquerschnitte zusammengesetzt wird.

In der Praxis werden bei  $W_t$  und  $I_t$  häufig noch von der Profilform abhängige Korrekturfaktoren hinzugefügt.

## 6.5.4 Vergleich offen geschlossen

In dünnwandigen geschlossenen Profilen, die auf Torsion belastet sind, ergibt sich der Verlauf der Schubspannungen direkt aus der 1. Bredtschen Formel (6.23). Ist das Profil offen, dann muss die über den Umweg schmaler Rechteckprofile aus der 1. Bredtschen Formel abgeleitete Beziehung (6.58) verwendet werden.

Die Berechnung der Verwindung kann jedoch in beiden Fällen über die 2. Bredtsche Formel

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t(x)}{G I_t(x)} \quad (6.63)$$

durchgeführt werden. Das Torsion-Flächenmoment ist dabei je nach Art des Profils (g: geschlossen, o: offen) entweder durch

$$I_t^g = \frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \quad \text{oder} \quad I_t^o = \frac{1}{3} \sum h_i b_i^3 \quad (6.64)$$

gegeben, wobei  $A_m$  die von Profil-Mittellinie umschlossene Fläche angibt und bei den Seiten der rechteckigen Teilquerschnitte  $b_i \ll h_i$  zu beachten ist.

Bei den im Bild 6.13 dargestellten Vierkantprofilen ist die Wandstärke konstant. Damit vereinfacht sich die erste Beziehung in (6.64) zu

$$I_t^g = \frac{(2A_m)^2}{\frac{U}{t}} = (2A_m)^2 \frac{t}{U} \quad (6.65)$$

wobei  $U$  den Umfang der Profil-Mittellinie angibt. Das Torsions-Flächenmoment für ein geschlossenes quadratisches Vierkantprofil mit der Kantenlänge  $a$  und der Wandstärke  $t$  wurde bereits in (6.39) mit

$$I_t^\square = (2a^2)^2 \frac{t}{4a} = t a^3 \quad (6.66)$$

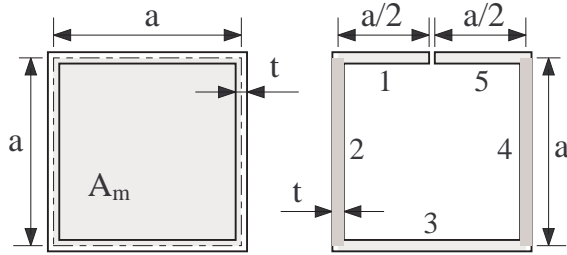


Bild 6.13: Vierkantrohr mit quadratischem Profil in geschlossener und geschlitzter Ausführung

angegeben. Das offene Profil aus Bild 6.13 kann zunächst in 5 schmale Rechtecke unterteilt werden. Gemäß der zweiten Beziehung in (6.64) gilt dann

$$I_t^{\square} = \frac{1}{3} t^3 \sum_{i=1}^5 \left( \frac{a}{2} + a + a + a + \frac{a}{2} \right) = \frac{1}{3} t^3 4a = \frac{1}{3} t^3 U \quad (6.67)$$

wobei die konstante Wandstärke bereits vor die Summation gezogen wurde und  $U$  den Umfang, bzw. die Länge der Profil-Mittellinie bezeichnet.

Die Beziehung  $I_t = \frac{1}{3} t^3 U$  gilt allgemein<sup>2</sup> für alle offenen Profile mit konstanter Wandstärke.

Setzt man nun die aus (6.63) folgenden Verwindungen der beiden Profile ins Verhältnis, dann erhält man mit (6.66) und (6.67) das Ergebnis

$$\frac{\left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^{\square}}{\left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^{\square}} = \frac{\frac{M}{G I_t^g}}{\frac{M}{G I_t^o}} = \frac{I_t^o}{I_t^g} = \frac{\frac{1}{3} t^3 4a}{t a^3} = \frac{4}{3} \left( \frac{t}{a} \right)^2 \quad (6.68)$$

Da die Wandstärke mit  $t \ll a$  ja gemäß Voraussetzung dünn sein muss, ist die Verwindung eines geschlossenen Profils um ein Vielfaches kleiner als die eines vergleichbaren offenen.

Profile, die auf Torsion belastet werden, sollten also möglichst geschlossen ausgeführt werden.

## 6.6 Torsion und Biegung

### 6.6.1 Allgemeines

Wird ein Bauteil auf Biegung belastet, dann können in einem Schnitt senkrecht zur  $x$ -Achse entsprechend dem Beispiel in Abschnitt 5.1 eine Normalkraft, Querkraft und Biegemomente auftreten. Die Normalkraft

<sup>2</sup> Das Torsions-Flächenmoment eines dünnwandigen geschlitzten Kreisrohrs ist demnach durch  $I_t = \frac{1}{3} t^3 2\pi R_m = \frac{2\pi}{3} R_m t^3$  gegeben, wobei  $t$  die Wandstärke und  $R_m$  den mittleren Radius angeben.

und die Biegemomente haben im Querschnitt die Normalspannung  $\sigma_{xx}$  zur Folge. Die Querkraften führen zu den Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$ , die nur noch für einfache Belastungen und Querschnittsformen, wie in Abschnitt 5.4.2 gezeigt, über passende Ansatzfunktionen ermittelt werden können. Schubspannungen, die nicht symmetrisch über den Querschnitt verteilt sind, entsprechen einem Torsionsmoment, das jedoch nicht notwendigerweise zu einer zusätzlichen Belastung auf Torsion passt.

### 6.6.2 Beispiel

Bei einem Bauteil, das, wie in Bild 6.14 dargestellt, an einem Ende fest eingespannt und am anderen durch eine exzentrisch angreifende vertikale Kraft belastet

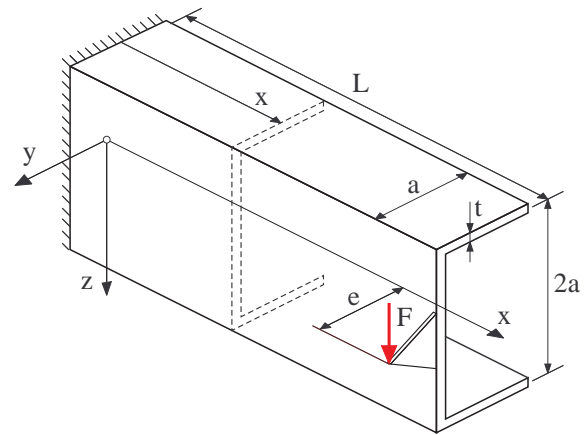


Bild 6.14: U-Profil mit exzentrischer Belastung

wird, treten in einem Schnitt senkrecht zur  $x$ -Achse analog zu (5.1) und (5.2) die Schnittreaktionen

$$N = 0, \quad Q_y = 0, \quad Q_z = F, \quad (6.69)$$

$$M_x = e F, \quad M_y = -F(L - x), \quad M_z = 0 \quad (6.70)$$

auf, wobei  $F$  die in  $z$ -Richtung wirkende Kraft bezeichnet,  $e$  den Abstand der Wirkungslinie von  $F$  zur  $x$ -Achse angibt und  $L$  die Länge des Bauteils beschreibt.

### 6.6.3 Spannungen aus der Biegebelastung

Das U-Profil ist im vorliegenden Fall symmetrisch zur  $y$ -Achse angeordnet. Damit verschwindet das Flächen-Deviationsmoment und die Verteilung der Normalspannung ist gemäß (5.17) durch

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}} z \quad (6.71)$$

gegeben, Bild 6.15.



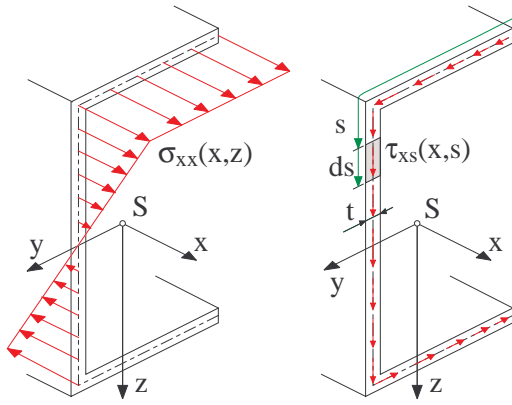


Bild 6.15: Spannungen aus der Biegebelastung in einem Schnitt an der Stelle  $x$

Das Biegemoment ist durch (6.70) bestimmt und das Flächenmoment 2. Grades ist für  $t \ll a$  durch

$$I_{yy}^L = \frac{1}{12} t (2a)^3 + a^2 t a + (-a)^2 t a = \frac{8}{3} t a^3 \quad (6.72)$$

gegeben.

Mit  $t \ll a$  wurde ein dünnwandiges Profil vorausgesetzt. Der Querschnitt des U-Profils kann deshalb in Flächenelemente  $dA = t ds$  unterteilt werden, wobei die Koordinate  $s$  längs der Profil-Mittellinie verläuft. Die im Flächenelement  $dA$  auftretende Schubspannung  $\tau_{xs}$  kann dann jeweils in Richtung der Mittellinie angesetzt werden, Bild 6.15. An den freien Enden des Profils bei  $s = 0$  und bei  $s = 4a$  muss die Schubspannung verschwinden. Ferner muss sie auch dem Kräftegleichgewicht genügen. In Erweiterung zu Abschnitt 6.3.1 sind nun am Volumenelement auch die Normalspannungen zu berücksichtigen, Bild 6.16. Das Kräftegleichgewicht

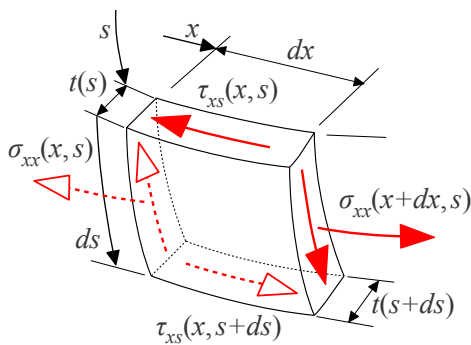


Bild 6.16: Volumenelement belastet mit Normal- und Schubspannungen

in  $x$ -Richtung liefert dann

$$\tau_{xs}(x, s+ds) dx t(s+ds) - \tau_{xs}(x, s) dx t(s) + (\sigma_{xx}(x+dx, s) - \sigma_{xx}(x, s)) ds \frac{1}{2} (t(s) + t(s+ds)) = 0 \quad (6.73)$$

wobei mit  $t = t(s)$  der allgemeine Fall einer variablen Wandstärke berücksichtigt und eine Änderung

der Wandstärke in  $x$ -Richtung als vernachlässigbar klein vorausgesetzt wurde. Mit den Näherungen

$$\tau_{xs}(x, s+ds) \approx \tau_{xs}(x, s) + \frac{\partial \tau_{xs}}{\partial s} ds \quad (6.74)$$

$$t(s+ds) \approx t(s) + \frac{\partial t}{\partial s} ds \quad (6.75)$$

$$\sigma_{xx}(x+dx, s) \approx \sigma_{xx}(x, s) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \quad (6.76)$$

bleibt unter Vernachlässigung aller quadratisch kleinen Terme

$$\left[ \frac{\partial}{\partial s} (\tau_{xs}(x, s) t(s)) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} t(s) \right] dx ds = 0 \quad (6.77)$$

wobei die aus den Schubspannungen resultierenden Terme analog zu (6.18) durch die Ableitung des Schubflusses  $T = \tau_{xs} t$  ersetzt wurden. Gemäß (5.3) erhält man mit (6.71) für die Ableitung der Normalspannung

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{z}{I_{yy}} = \frac{Q_z}{I_{yy}} z \quad (6.78)$$

Damit folgt aus (6.77) mit

$$\frac{\partial}{\partial s} (\tau_{xs}(x, s) t(s)) = -\frac{Q_z}{I_{yy}} z t \quad (6.79)$$

eine Differentialgleichung für den Schubfluss, die durch Separation gelöst werden kann. Die Integration wird nun von einer beliebigen Position  $s$  bis zum Ende oder Rand  $s = s_R$  des Profils durchgeführt

$$\int_s^{s=s_R} \partial (\tau_{xs}(x, s) t(s)) = - \int_s^{s=s_R} \frac{Q_z}{I_{yy}} z(s) t(s) ds \quad (6.80)$$

wobei  $t = t(s)$  verdeutlicht, dass die Wandstärke längs der Mittellinie variieren kann und  $z = z(s)$  zum Ausdruck bringt, dass die  $z$ -Koordinate eines Flächenelements  $dA = t ds$ , wie in Bild 6.15 zu sehen, eine Funktion der Koordinate  $s$  ist. Der Schubfluss  $\tau_{xs}(s) t(s)$  bildet die Stammfunktion des Integrals auf der linken Seite. Die Querkraft  $Q_z$  und das Flächenmoment 2. Grades, die ja nicht von der Koordinate  $s$  abhängen, können auf der rechten Seite vor das Integral gezogen werden. Man erhält dann

$$\left[ \tau_{xs}(x, s) t(s) \right]_s^{s_R} = -\frac{Q_z}{I_{yy}} \int_s^{s_R} z(s) t(s) ds \quad (6.81)$$

Am Rand des Profils muss die Schubspannung verschwinden. Mit  $\tau_{xs}(s_R) = 0$  bleibt

$$0 - \tau_{xs}(x, s) t(s) = -\frac{Q_z}{I_{yy}} \int_s^{s_R} z(s) t(s) ds \quad (6.82)$$

oder

$$\tau_{xs}(x, s) = \frac{Q_z(x) S_R(s)}{I_{yy}(x) t(s)} \quad (6.83)$$

wobei das auf der rechten Seite verbleibende Integral, das mit  $S_R(s)$  abgekürzt wurde, das statische Moment der Restfläche darstellt. Der Verlauf der Schubspannung  $\tau_{xs} = \tau_{xs}(x, s)$  ist somit durch die entsprechende Belastung  $Q_z(x)$  sowie durch die Profileigenschaften  $S_R(s)$ ,  $I_{yy}(x)$  und  $t(s)$  bestimmt.

#### 6.6.4 Statisches Moment der Restfläche

Gemäß (6.82) und (6.83) ist das statische Moment der Restfläche durch

$$S_R(s) = \int_s^{s_R} z(s) t(s) ds \quad (6.84)$$

definiert. Das Produkt aus der Wandstärke  $t(s)$  und dem Differential  $ds$  kann als Flächenelement  $dA_R$  interpretiert werden. Damit kann das statische Moment der Restfläche über

$$S_R(s) = \int_s^{s_R} z(s) t(s) ds = \int_s^{s_R} z(s) dA_R = z_{SR} A_R \quad (6.85)$$

auf ein Produkt zurückgeführt werden, das aus den geometrischen Größen Schwerpunkt  $z_{SR}$  und Fläche  $A_R$  des Restquerschnittes besteht, der sich vom Rand  $s_R$  bis zur momentanen Position  $s$  erstreckt.

Zur Auswertung von (6.85) wird das U-Profil aus Abschnitt 6.6.2 in drei Abschnitte unterteilt, Bild 6.17.

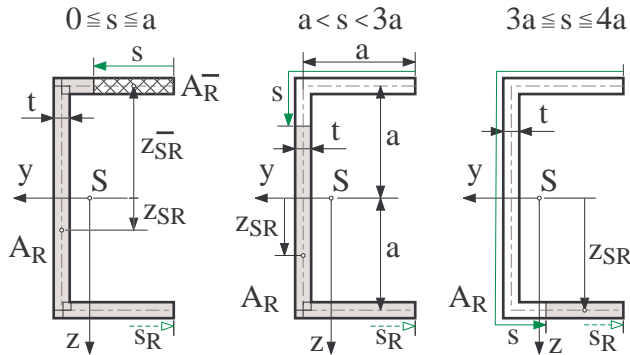


Bild 6.17: Statische Momente einzelner Restflächen beim U-Profil

Im ersten Bereich von  $s$  bis  $s_R$  mit  $0 \leq s \leq a$  ist die Restfläche sehr groß und müsste zur Berechnung der Schwerpunktkoordinate  $z_{SR}$  in drei Rechtecke zerlegt werden. Die komplementäre Restfläche  $A_R^- = t s$  ergänzt jedoch die Restfläche  $A_R$  zur Gesamtfläche  $A$  des Querschnitts. Da das Koordinatensystem den Ursprung im Schwerpunkt  $S$  der Gesamtfläche hat, gilt für die Teilschwerpunkte

$$0 = z_{SR} A_R + z_{SR}^- A_R^- \quad \text{oder} \quad z_{SR} A_R = -z_{SR}^- A_R^- \quad (6.86)$$

Mit  $z_{SR}^- = -a$  ergibt im vorliegenden Fall das statische Moment der Restfläche für den ersten Teilbereich aus

$$S_R(s) \Big|_{0 \leq s \leq a} = -(-a) t s = a t s \quad (6.87)$$

Im zweiten Teilbereich  $a < s < 3a$  wird die Restfläche in zwei geeignete Rechtecke unterteilt, die hier jeweils die Breite  $t$  und die Längen  $3a - s$  und  $a$  haben. Das statische Moment der Restfläche ist dann durch

$$\begin{aligned} S_R(s) \Big|_{a < s < 3a} &= \sum_{i=1}^{i=2} z_{SR}^{(i)} A_R^{(i)} \\ &= \left(a - \frac{3a-s}{2}\right) (3a-s) t + a t s \\ &= \frac{t}{2} \left[ (2a-3a+s)(3a-s) + 2a^2 \right] \\ &= \frac{t}{2} \left[ (s-a)(3a-s) + 2a^2 \right] \\ &= \frac{t}{2} \left[ - (s^2 - 4as + 3a^2) + 2a^2 \right] \\ &= \frac{t}{2} \left[ - (s-2a)^2 + 3a^2 \right] \\ &= \frac{t}{2} \left[ 3a^2 - (s-2a)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.88)$$

gegeben. Im dritten Teilbereich  $3a \leq s \leq 4a$  kann das statische Moment der Restfläche mit

$$S_R(s) \Big|_{3a \leq s \leq 4a} = a t (4a - s) \quad (6.89)$$

direkt dem Bild 6.17 entnommen werden.

#### 6.6.5 Schubspannungsverlauf

Mit den statischen Momenten der Restflächen kann nun aus (6.83) der aus der Querkraft  $Q = F$  resultierende Verlauf der Schubspannung angegeben werden. Mit (6.87), (6.88), (6.89) und (6.72) erhält man

$$\tau_{xs}(s, x) \Big|_{0 \leq s \leq a} = \frac{F a t s}{\frac{8}{3} t a^3 t} = \frac{3}{2} \frac{F}{A} \frac{s}{a} \quad (6.90)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xs}(s, x) \Big|_{a < s < 3a} &= \frac{F \frac{t}{2} [3a^2 - (s-2a)^2]}{\frac{8}{3} t a^3 t} \\ &= \frac{3}{4} \frac{F}{A} \left[ 3 - \left( \frac{s}{a} - 2 \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.91)$$

und

$$\tau_{xs}(s, x) \Big|_{3a \leq s \leq 4a} = \frac{F a t (4a - s)}{\frac{8}{3} t a^3 t} = \frac{3}{2} \frac{F}{A} \left( 4 - \frac{s}{a} \right) \quad (6.92)$$

wobei  $A = 4at$  die Fläche des U-Profiles bezeichnet. Der maximale Wert tritt in der Profilmitte bei  $s = 2a$  auf und ist mit

$$\tau_{xs}^{max} = \tau_{xs}(s=2a, x) = \frac{9}{4} \frac{F}{A} = 2.25 \tau_m \quad (6.93)$$

mehr als doppelt so groß wie die mittlere Schubspannung  $\tau_m = F/A$ .



### 6.6.6 Momentenwirkung und Schubmittelpunkt

Der durch (6.90) bis (6.92) bestimmte Verlauf der Schubspannung hat bezüglich der durch den Schwerpunkt  $S$  des Profils laufenden  $x$ -Achse eine Momentenwirkung, Bild 6.18.

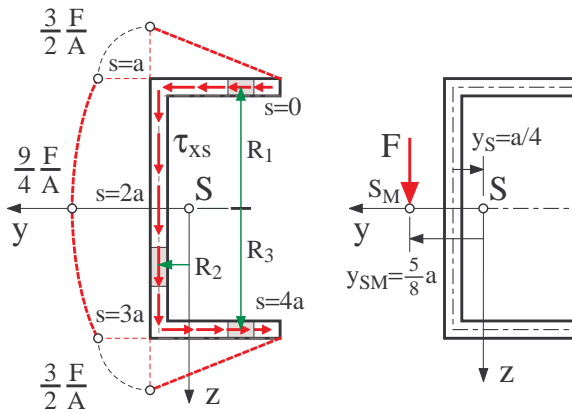


Bild 6.18: Schubspannungen im U-Profil mit entsprechenden Hebelarmen und Lage des Schubmittelpunktes

Mit den Schubspannungen (6.90) bis (6.92) und den entsprechenden Hebelarmen<sup>3</sup>

$$R_1 = a, \quad R_2 = y_S = \frac{a}{4} \quad \text{und} \quad R_3 = a \quad (6.94)$$

erhält man

$$\begin{aligned} M_x^\tau &= \sum_{i=1}^3 \int R_i \tau_{xs}^{(i)} dA \\ &= \int_{s=0}^{s=a} a \frac{3}{2} \frac{F}{4at} \frac{s}{a} t ds \\ &\quad + \int_{s=a}^{s=3a} \frac{a}{4} \frac{3}{4} \frac{F}{4at} \left[ 3 - \left( \frac{s}{a} - 2 \right)^2 \right] t ds \\ &\quad + \int_{s=3a}^{s=4a} a \frac{3}{2} \frac{F}{4at} \left( 4 - \frac{s}{a} \right) t ds \end{aligned} \quad (6.95)$$

wobei die Querschnittsfläche  $A$  durch den Wert  $4at$  ersetzt wurde und die Flächenelemente jeweils durch  $dA = t ds$  gegeben sind. Nach der Auswertung der Integrale bleibt

$$M_x^\tau = a F \left( \frac{3}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} \right) = \frac{5}{8} a F \quad (6.96)$$

wobei dem Verlauf der Schubspannungen entsprechend die Momentenwirkung in den horizontal verlaufenden Schenkeln mit jeweils  $\frac{3}{16} a F$  identisch ist. Die exzentrisch angreifende Kraft hat jedoch das Moment

$$M_x^F = e F \quad (6.97)$$

<sup>3</sup> Die  $y$ -Koordinate des Schwerpunktes eines aus mehreren Teilflächen zusammengesetzten Querschnitts ist allgemein durch  $y_S = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$  gegeben. Im vorliegenden Fall erhält man  $y_S = \frac{1}{4a} \left( \frac{a}{2} at + 0 + \frac{a}{2} at \right) = \frac{a}{4}$ .

zur Folge. Das Bauteil ist im Gleichgewicht, wenn das durch die Schubspannungen hervorgerufene Torsionsmoment der äußeren Belastung entspricht. Im vorliegenden ist das für

$$e = y_{SM} = \frac{5}{8} a \quad (6.98)$$

der Fall. Der Hebelarm  $y_{SM}$  und der aus einer Belastung in  $y$ -Richtung resultierende Hebelarm  $z_{SM}$  legen den Schubmittelpunkt fest.

Jede Symmetrieachse des Querschnitts ist ein geometrischer Ort für den Schubmittelpunkt. Beim U-Profil liegt also  $S_M$  mit  $y_{SM} = \frac{5}{8} a$  und  $z_{SM} = 0$  auf der  $y$ -Achse, die hier Symmetrieachse des Querschnitts ist, Bild 6.18.

Die Berechnung kann oft vereinfacht werden, wenn die Lage des Schubmittelpunktes nicht vom Flächenmittelpunkt sondern von einem geschickt gewählten Bezugspunkt aus bestimmt wird. Beim U-Profil ist der Schnittpunkt der  $y$ -Achse mit der Profilmittellinie ein geeigneter Bezugspunkt, da diesbezüglich nur die Schubspannungen in den horizontal verlaufenden Teilen zur Momentenwirkung beitragen.

### 6.6.7 Verformungen

Läuft die Wirkungslinie der vertikalen Kraft  $F$  durch den Schubmittelpunkt  $S_M$ , dann ist das Moment aus den Schubspannungen, die aus den Querkräften resultieren, äquivalent zu dem Moment, das durch die exzentrisch angreifende Kraft hervorgerufen wird. Die Verformungen des Bauteils beschränken sich dann auf die Durchbiegung  $w$ ; eine Verdrehung der Endquerschnitte tritt dabei nicht auf, Bild 6.19a.

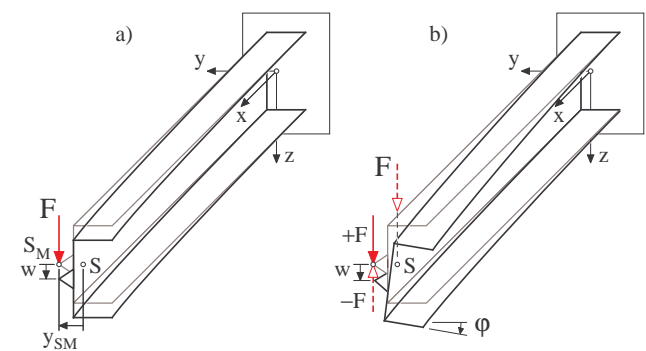


Bild 6.19: Bauteilverformung bei verschiedenen Belastungen: a) im Schubmittelpunkt und b) im Schwerpunkt

In allen anderen Fällen, z.B. wenn die Wirkungslinie der vertikalen Kraft  $F$  durch den Schwerpunkt  $S$  des Querschnitts läuft, kommt es zu einer Verdrehung  $\varphi$  der Endquerschnitte, Bild 6.19b. Durch Hinzufügen einer Nullkraft  $+F, -F$  im Schubmittelpunkt  $S_M$  können die Durchbiegung  $w$  wie im Fall a) über die reine

Biegung und die Verdrehung mit dem Moment  $M_t = -F y_{SM}$  aus der reinen Torsion ermittelt werden.

Da dünnwandig offene Profile sehr wenig Widerstand gegen Torsion aufweisen, kann die Verdrehung der Endquerschnitte relativ groß werden. Bei Querschnitten, die wie das U-Profil mit  $I_{yy} = \frac{8}{3} a^3 t$  und  $I_{zz} = \frac{5}{12} a^3 t$  recht unterschiedliche Flächenmomente 2. Grades bezüglich der  $y$ - und  $z$ -Achse haben, wird die Durchbiegung dann allerdings von der Drehung des Querschnitts um die  $x$ -Achse beeinflusst, da mit der Drehung die Flächenmomente 2. Grades verändert werden und auch noch ein Deviationsmoment entsteht.

### 6.6.8 Verallgemeinerung

Die Beziehung (6.83) setzt voraus, dass in einem Querschnitt Orte  $s = s_R$  gefunden werden können, an den die Schubspannung verschwindet. Bei offenen Querschnitten sind das die Enden (Ränder) der Querschnitte. Bei dünnwandigen Profilen, die in Richtung einer Symmetrieachse durch Querkräfte belastet werden, kann die Koordinate  $s$  in zwei symmetrisch verlaufende Linien unterteilt werden, Bild 6.20.

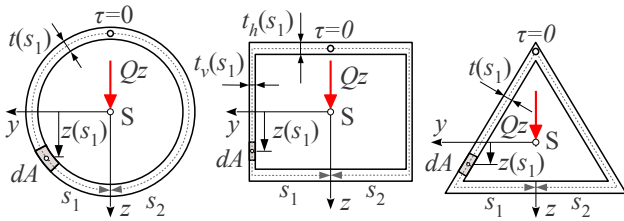


Bild 6.20: Dünnwandig geschlossene Profile mit Belastung in Richtung einer Symmetrieachse

An den Stellen, wo die Symmetrieachse die Profilmittellinie schneidet, müssen die Schubspannungen verschwinden. Analog zu (6.83) erhält man dann an der Stelle  $s = s_1 = s_2$  die Schubspannung in einem Schnitt an der Stelle  $x$  aus

$$\tau_{xs}(x, s) = \frac{Q_z(x) S_R(s)}{I_{yy}(x) (t(s_1) + t(s_2))} \quad (6.99)$$

wobei  $S_R(s)$  das statische Moment der Restfläche ist, die aus den Koordinaten  $s_1$  und  $s_2$  resultiert,  $I_{yy}$  das Flächenmoment des Gesamtquerschnitts angibt und auf Grund der Symmetrie die Wandstärken des Profils an den Stellen  $s_1$  und  $s_2$  gleich sein müssen.

Bei einem dünnwandigen Kreisrohr mit dem mittleren Radius  $R_m$  und der Wandstärke  $t$  ist das Flächenmoment 2. Grades gemäß (6.8) durch  $I_{yy}^O = \pi t R_m^3$  gegeben. Die maximale Schubspannung tritt in der Querschnittsmitte bei  $z = 0$ , bzw.  $s = s_1 = s_2 = \frac{\pi}{2} R_m$  auf.

Das statische Moment der Restfläche, die dann aus der unteren Hälfte des Rohres besteht, ist dann durch

$$S_R^\vee(z=0) = \underbrace{\pi R_m t}_{A_R^\vee} \underbrace{\frac{2R_m}{\pi}}_{z_{SR}^\vee} = 2R_m^2 t \quad (6.100)$$

Mit  $Q_z = F$  erhält man dann aus (6.83) die maximale Schubspannung zu

$$\tau_{max}^O = \frac{F 2R_m^2 t}{\pi t R_m^3 (t + t)} = \frac{2F}{2\pi R_m t} = 2 \frac{F}{A^O} \quad (6.101)$$

die genau doppelt so groß wie die mittlere Schubspannung  $F/A^O$  ist.

Bei unsymmetrischen dünnwandig geschlossenen Profilen ist die Berechnung der Schubspannungen etwas komplizierter aber noch analytisch möglich.

Zunächst startet man die Schubfluss-Berechnung mit der Koordinate  $s$  an einer beliebigen Stelle des Profils. Allerdings kann jetzt die Schubspannung  $\tau_{xs}(s_R)$  und damit auch der Schubfluss  $T_R = \tau_{xs}(s_R) t(s_R)$  am Rand  $s = s_R$ , der bei einem geschlossenen Profil ja mit dem Startpunkt  $s = 0$  zusammenfällt, nicht mehr direkt angegeben werden. Deshalb ist in Erweiterung zu (6.82) der Schubfluss im Profil nun durch

$$\tau_{xs}(x, s) t(s) = \frac{Q_z}{I_{yy}} \int_s^{s_R} z(s) t(s) \partial s + T_R \quad (6.102)$$

festgelegt. Da der Schubspannungsverlauf aber auch dem Torsionsmoment  $M_t$  äquivalent sein muss, kann dann über (6.12) der Schubfluss  $T_R = \tau_{xs}(s_R) t(s_R)$  am Rand  $s = s_R$  bestimmt werden.

Die Beziehung (6.83) kann auch auf Vollquerschnitte angewendet werden, Bild 6.21.

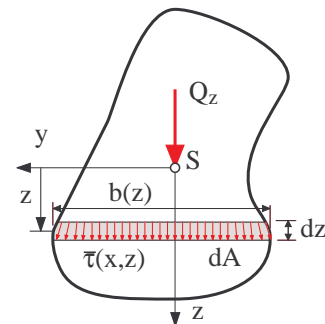


Bild 6.21: Schubfluss im Vollquerschnitt

Allerdings erhält man dann mit

$$\bar{\tau}(x, z) = \frac{Q_z(x) S_R(z)}{I_{yy}(x) b(z)} \quad (6.103)$$

eine über die Breite des Querschnitts gemittelte Schubspannung, die sich aus dem Schubfluss im Flächenelement  $dA = b(z) dz$  ergibt. Das statische Moment der Restfläche ist dabei analog zu (6.84) durch

$$S_R(z) = \int_z^{z_R} z b(z) dz = z_{SR} A_R \quad (6.104)$$

bestimmt. Bei unsymmetrischen Querschnitten stellt (6.103) nur eine grobe Näherung dar, weil die damit ermittelte Schubspannung in der Regel nicht mehr der Äquivalenzbeziehung für das Torsionsmoment genügt.

Beim Rechteckquerschnitt liefert (6.103) das in Abschnitt 5.4.2 angegebene Ergebnis. Sowohl beim Rechteck als auch bei einem Kreisquerschnitt tritt auf Grund der Symmetrie die maximale Schubspannung in der Querschnittmitte bei  $z = 0$  auf.

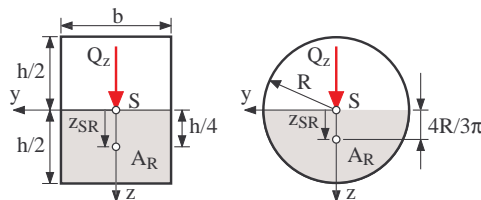


Bild 6.22: Restflächen zur Bestimmung der maximalen Schubspannung

Mit den Angaben in Bild 6.22 und den Flächenmomenten 2. Grades für einen Rechteck- und einen Kreisquerschnitt

$$I_{yy}^{\square} = \frac{1}{12} b h^3 \quad I_{yy}^{\circ} = \frac{\pi}{4} R^4 \quad (6.105)$$

erhält man aus (6.103) die maximalen Spannungen

$$\tau_{max}^{\square} = \frac{Q_z \frac{h}{4} b \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} b h^3 b} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{b h} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{A} \quad (6.106)$$

und

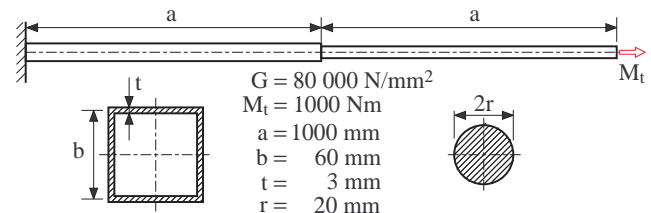
$$\tau_{max}^{\circ} = \frac{Q_z \frac{4R}{3\pi} \frac{R^2\pi}{2}}{\frac{\pi}{4} R^4 2R} = \frac{4}{3} \frac{Q_z}{R^2\pi} = \frac{4}{3} \frac{Q_z}{A} \quad (6.107)$$

die um den Faktor 3/2 bzw. 4/3 größer als die mittlere Spannung  $F/A$  sind.

## 6.7 Übungen

### 6.7.1 Zusammengesetztes Bauteil

Ein Bauteil besteht aus einem kreisförmigen Vollquerschnitt und einem dünnwandigen quadratischen Hohlquerschnitt. Es ist an einem Ende fest eingespannt und wird am anderen Ende durch das Torsionsmoment  $M_t$  belastet.

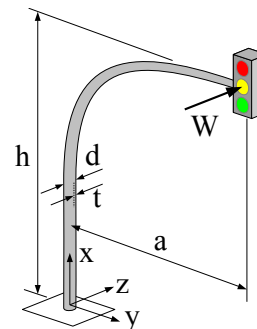


- Um welchen Winkel verdreht sich der Endquerschnitt gegenüber der Einspannstelle?
- Wie groß sind die maximalen Schubspannungen in den beiden Bauteilabschnitten?

Lösung:

### 6.7.2 Verkehrsampel

Eine Verkehrsampel wird bei Sturm in  $z$ -Richtung durch die Windkraft  $W$  belastet. Der gebogene Träger mit der Höhe  $h$  und der Kragweite  $a$  hat an der Einspannstelle ( $x = 0$ ) einen dünnwandigen Rohrquerschnitt mit dem Durchmesser  $d$  und der Wandstärke  $t \ll d$ .

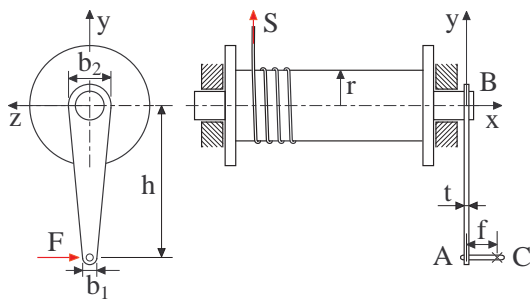


Lösung:

Ermitteln Sie die Schnittreaktionen an der Einspannstelle ( $x = 0$ ) sowie die Maximalwerte der dort im Querschnitt auftretenden Spannungen.

### 6.7.3 Seilwinde

Für die skizzierte Seilwinde sind folgende Berechnungen durchzuführen:

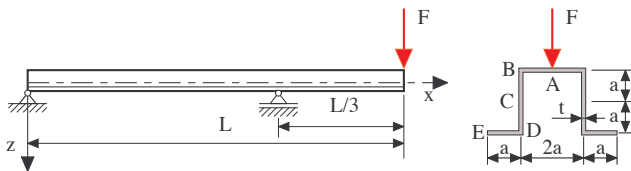


- Welche Kraft  $F$  ist erforderlich um der Seilkraft  $S$  das Gleichgewicht zu halten?
- Mit welchem Torsionsmoment  $M_t$  wird die Kurbel A-B belastet?
- Um welchen Winkel  $\beta$  neigt sich der Griff A-C?

Lösung:

#### 6.7.4 Kragträger

Ein überkragender Balken mit dünnwandigem Querschnitt wird am freien Ende mit der Kraft  $F$  belastet.



- Ermitteln Sie die Schubspannungen in den Punkten A bis E für den Bereich der größten Querkraft.
- Skizzieren Sie den Schubspannungsverlauf über dem Querschnitt unter Verwendung der errechneten Werte.

Lösung:

# 7 Rotationssymmetrische Belastungen

## 7.1 Grundgleichungen

### 7.1.1 Belastungen

Rotierende Bauteile werden durch die an den einzelnen Massenelementen  $dm$  angreifenden Fliehkräften  $dF_z$  radial symmetrisch belastet. Auch bei Schrumpfverbindungen zwischen Wellen und Naben sowie bei zylindrischen Behältern und Rohren, die unter Innen- und/oder Außendruck stehen, treten radial symmetrische Belastungen auf, Bild 7.1. Bei zylindrischen Be-

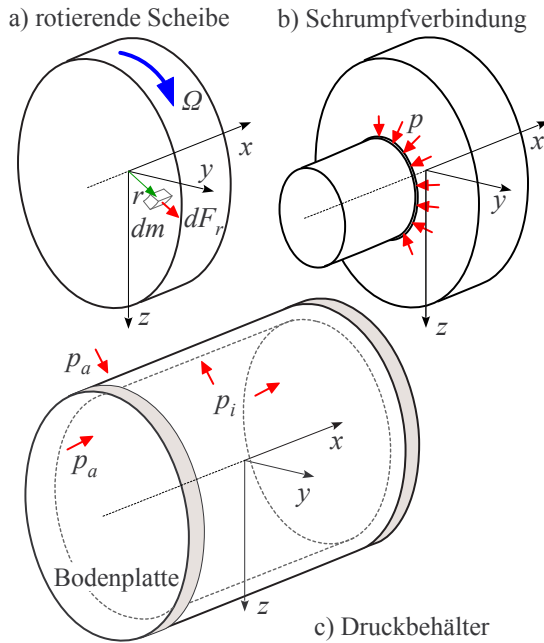


Bild 7.1: Rotationssymmetrische Belastungen

hältern, die unter Innen-  $p_i$  und/oder Außendruck  $p_a$  stehen, belastet der Druck auf die Enden des Behälters (Bodenplatten) die Wand des Behälters auch noch in axialer Richtung.

Der Spannungs- und Verformungszustand rotations-symmetrischer Bauteile kann am einfachsten in Polar- oder Zylinderkoordinaten beschrieben werden.

### 7.1.2 Spannungen

Die Belastung durch Innen- und/oder Außendruck sowie die Belastung durch Fliehkräfte erfolgt ausschließlich in radialer Richtung. An einem krummlinigen Massenelement  $dm = \rho dV$  treten deshalb mit  $\sigma_{rr}$

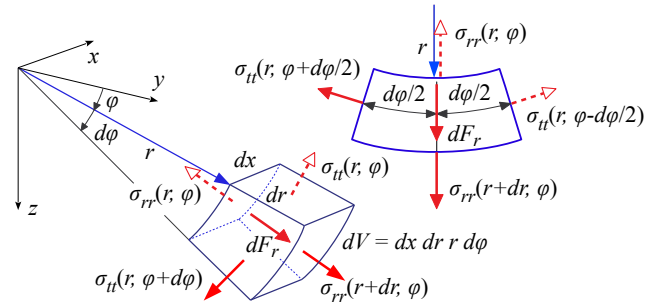


Bild 7.2: Spannungszustand bei rotationssymmetrischer Belastung

und  $\sigma_{tt}$  lediglich Normalspannungen und keine Schubspannungen auf, Bild 7.2.

Gegebenenfalls vorhandene Spannungen  $\sigma_{xx}$  in axialer Richtung werden zunächst nicht berücksichtigt, da sie später problemlos überlagert werden können.

Das Kräftegleichgewicht in tangentialer Richtung

$$\left( \sigma_{tt}(r, \varphi + \frac{d\varphi}{2}) - \sigma_{tt}(r, \varphi - \frac{d\varphi}{2}) \right) \cos \frac{d\varphi}{2} dx dr = 0 \quad (7.1)$$

ist nur für

$$\sigma_{tt}(r, \varphi + \frac{d\varphi}{2}) - \sigma_{tt}(r, \varphi - \frac{d\varphi}{2}) = 0 \quad (7.2)$$

erfüllt. Mit den Näherungen

$$\sigma_{tt}(r, \varphi \pm \frac{d\varphi}{2}) \approx \sigma_{tt}(r, \varphi) \pm \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{2} \quad (7.3)$$

bleibt

$$\frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{2} - \left( -\frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{2} \right) = 0 \quad (7.4)$$

oder

$$\frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \varphi} = 0 \quad (7.5)$$

Die Normalspannung in tangentialer Richtung kann sich also nur mehr in radialer Richtung verändern

$$\sigma_{tt} = \sigma_{tt}(r, \varphi) \rightarrow \sigma_{tt} = \sigma_{tt}(r) \quad (7.6)$$

Das Kräftegleichgewicht in radialer Richtung liefert

$$\begin{aligned} & -\sigma_{rr}(r, \varphi) dx r d\varphi \\ & + \sigma_{rr}(r+dr, \varphi) dx (r+dr) d\varphi \\ & + dF_r \\ & - \left( \sigma_{tt}(r, \varphi - \frac{d\varphi}{2}) + \sigma_{tt}(r, \varphi + \frac{d\varphi}{2}) \right) \sin \frac{d\varphi}{2} dx dr = 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Mit (7.3) sowie den Näherungen

$$\sigma_{rr}(r+dr, \varphi) \approx \sigma_{rr}(r, \varphi) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr \quad (7.8)$$

und

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2} \quad (7.9)$$

erhält man unter Vernachlässigung aller quadratisch kleinen Terme

$$\left( \sigma_{rr} + r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \right) dx dr d\varphi - \sigma_{tt} dx dr d\varphi = -dF_r \quad (7.10)$$

Bezieht man diese Gleichung nun noch auf das Volumen des Masseteilchens

$$dV = dx dr r d\varphi \quad (7.11)$$

dann bleibt mit

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{tt}}{r} = -\frac{dF_r}{dV} \quad (7.12)$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Spannung  $\sigma_{rr}$  in radialer Richtung, die allerdings auch die radiale Spannung  $\sigma_{tt}$  enthält und somit noch nicht gelöst werden kann. Beim Übergang von (7.10) auf (7.12) wurde die partielle Ableitung durch die gewöhnliche ersetzt. Denn infolge der rotationssymmetrischen Belastungen können  $\sigma_{tt}$  und  $\sigma_{rr}$  nur von  $r$  nicht aber von  $\varphi$  abhängen. Dies wird für  $\sigma_{tt}$  durch (7.5) bestätigt.

### 7.1.3 Verformungen

Die radialsymmetrische Belastung führt zu entsprechenden Verformungen. Die radialen Dehnungen können jedoch nicht beliebig erfolgen, da das Bauteil auch im verformten Zustand geschlossen und radialsymmetrisch bleiben muss, Bild 7.3. Bezeichnet man mit  $u_r =$

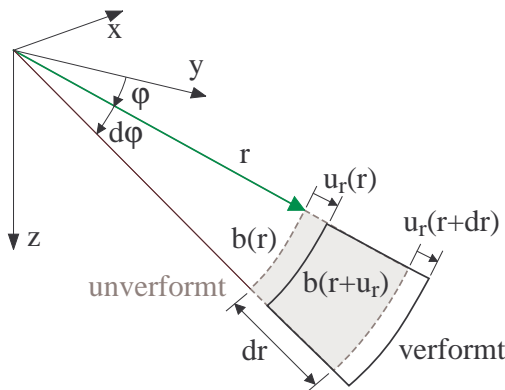


Bild 7.3: Verformungen am krummlinigen Element

$u_r(r)$  die Verschiebungen in radialer Richtung, dann erhält man die entsprechende Dehnung aus

$$\epsilon_r = \frac{u_r(r+dr, \varphi) - u_r(r, \varphi)}{dr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} dr = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (7.13)$$

Bei einer Verformung des Volumenelements, die mit dem Bauteil verträglich ist, weitet sich der Bogen mit der Länge  $b(r) = r\varphi$  auf die Länge  $b(r+u_r) = (r+u_r)\varphi$ . Die Dehnung in tangentialer Richtung ist demnach durch

$$\epsilon_t = \frac{b(r+u_r) - b(r)}{b(r)} = \frac{(r+u_r)\varphi - r\varphi}{r\varphi} = \frac{u_r}{r} \quad (7.14)$$

gegeben. Analog zu (7.12) können auch die Dehnungen in einer Differentialgleichung zusammengefasst werden. So liefert die Ableitung von (7.14) nach der Koordinate  $r$  den Zusammenhang

$$\frac{d\epsilon_t}{dr} = \frac{du_r}{dr} \frac{1}{r} - \frac{u_r}{r^2} = \left( \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} \right) \frac{1}{r} = \frac{\epsilon_r - \epsilon_t}{r} \quad (7.15)$$

wobei am Ende die Beziehungen (7.13) und (7.14) eingesetzt wurden. Umgestellt bleibt eine Differentialgleichung erster Ordnung für die tangentialen Dehnung

$$\frac{d\epsilon_t}{dr} + \frac{\epsilon_t - \epsilon_r}{r} = 0 \quad (7.16)$$

die allerdings von der radialen Dehnung  $\epsilon_r$  abhängt und deshalb nicht direkt gelöst werden kann.

### 7.1.4 Linear elastisches Materialverhalten

Lässt man zunächst wieder gegebenenfalls vorhandene Spannungen in axialer Richtung mit  $\sigma_{xx} = 0$  außer Acht, dann erhält man das Materialgesetz in der Form

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{tt}) + \alpha_T \Delta T \quad (7.17)$$

$$\epsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_{tt} - \nu \sigma_{rr}) + \alpha_T \Delta T \quad (7.18)$$

wobei der Term  $\alpha_T \Delta T$  die Wärmedehnung beschreibt. Die Differenz der beiden Beziehungen liefert

$$\begin{aligned} \epsilon_t - \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_{tt} - \nu \sigma_{rr}) - \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{tt}) + \alpha_T \Delta T - \alpha_T \Delta T \\ &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{tt} - \sigma_{rr}) \end{aligned} \quad (7.19)$$

und die Ableitung von (7.18) nach der radialen Koordinate  $r$  führt auf

$$\frac{d\epsilon_t}{dr} = \frac{1}{E} \left( \frac{d\sigma_{tt}}{dr} - \nu \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \right) \quad (7.20)$$



Damit kann die Differentialgleichung für die Dehnungen (7.16) in eine Spannungsdifferentialgleichung umgeschrieben werden

$$\frac{d\sigma_{tt}}{dr} - \nu \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{(1+\nu)(\sigma_{tt} - \sigma_{rr})}{r} = 0 \quad (7.21)$$

Nun steht eine weitere Differentialgleichung für die Spannungen in radialer und tangentialer Richtung zur Verfügung, die mit der Differentialgleichung (7.12) gekoppelt ist.

## 7.2 Rohre und Behälter unter Innen- und Außendruck

Der Spannungszustand in Rohren, die durch Innen- und Außendruck belastet werden, kann entsprechend (7.12) und (7.21) durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{tt}}{r} &= 0 \\ \nu \frac{d\sigma_{rr}}{dr} - \frac{d\sigma_{tt}}{dr} + (1+\nu) \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{tt}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

beschrieben werden, wobei eine Belastung durch zusätzliche Fliehkräfte mit  $dF_r = 0$  außer Acht gelassen und die Differentialgleichung (7.21) mit  $-1$  multipliziert wurde. Mit den Ansatzfunktionen

$$\sigma_{rr} = A + \frac{B}{r^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{tt} = A - \frac{B}{r^2} \quad (7.23)$$

können die Differentialgleichungen (7.22) allgemein gelöst werden.

Mit den Bezeichnungen aus Bild 7.4 gelten je nach Be-

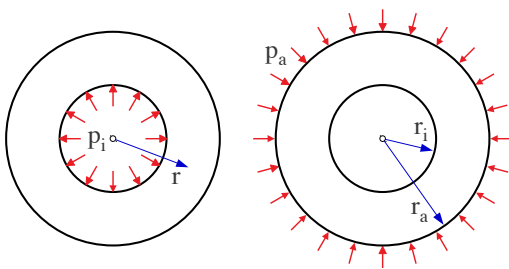


Bild 7.4: Rohr unter Innen- und Außendruck

lastung für die radiale Spannung die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \text{Innendruck } p_i & \quad \text{Außendruck } p_a \\ \sigma_{rr}(r=r_i) &= -p_i & \sigma_{rr}(r=r_i) &= 0 \\ \sigma_{rr}(r=r_a) &= 0 & \sigma_{rr}(r=r_a) &= -p_a \end{aligned} \quad (7.24)$$

wobei das Minuszeichen vor den Drücken berücksichtigt, dass Druckbelastungen negativen Normalspannungen entsprechen.

Die damit aus (7.23) ermittelten Spannungen für Rohre unter Innen- und Außendruck sind in der Tabelle 7.1 zusammengestellt und für  $\eta = r_a/r_i = 2$  grafisch veranschaulicht.

$\eta = \frac{r_a}{r_i}$	Innendruck $p_i$	Außendruck $p_a$
	$\sigma_{rr} = -p_i \frac{1}{\eta^2 - 1} \left( \frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right)$	$\sigma_{rr} = -p_a \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \left( 1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right)$
	$\sigma_{tt} = p_i \frac{1}{\eta^2 - 1} \left( \frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right)$	$\sigma_{tt} = -p_a \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \left( 1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right)$
$\eta = 2$		

Tabelle 7.1: Radiale  $\sigma_{rr}$  und tangentialer Spannung  $\sigma_{tt}$  in Druck belasteten Rohren

Man erkennt, dass die tangentialer Spannung in beiden Belastungsfällen mit

$$\sigma_{max}^i = \sigma_{tt}^{(i)}(r=r_i) = p_i \frac{\eta^2 + 1}{\eta^2 - 1} \quad (7.25)$$

und

$$\sigma_{max}^a = \sigma_{tt}^{(a)}(r=r_i) = -p_a \frac{2\eta^2}{\eta^2 - 1} \quad (7.26)$$

am Innenrand die maximalen Werte erreicht.

Bei geschlossenen Behältern wird die Wand auch noch in axialer Richtung belastet, Bild 7.5

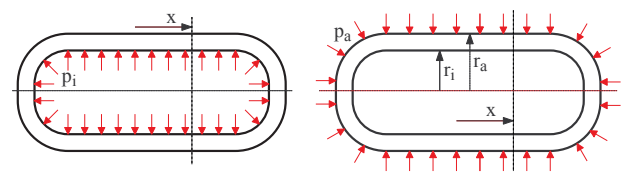


Bild 7.5: Geschlossene Behälter unter Innen- und Außendruck

Innen- oder Außendruck erzeugen in einem Schnitt senkrecht zur Behälterachse unabhängig von der Form der Bodenplatten die Normalkräfte

$$N^i = p_i r_i^2 \pi \quad \text{bzw.} \quad N^a = -p_a r_a^2 \pi \quad (7.27)$$

Bei gleichmäßiger Verteilung über die ringförmige Querschnittsfläche resultieren daraus die Normalspannungen

$$\sigma_{xx}^i = \frac{p_i r_i^2 \pi}{(r_a^2 - r_i^2) \pi} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{xx}^a = \frac{-p_a r_a^2 \pi}{(r_a^2 - r_i^2) \pi} \quad (7.28)$$



Unter Verwendung des dimensionslosen Verhältnisses  $\eta = r_a/r_i$  bleibt

$$\sigma_{xx}^i = p_i \frac{1}{\eta^2 - 1} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{xx}^a = -p_a \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \quad (7.29)$$

Ein Vergleich mit den Ergebnissen aus Tabelle 7.1 zeigt, dass die Normalspannung in Längsrichtung  $\sigma_{xx}$  mit

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2} (\sigma_{rr} + \sigma_{tt}) \quad (7.30)$$

jeweils dem Mittelwert aus den Spannungen in radialer und tangentialer Richtung entspricht.

## 7.3 Dünnwandige Rohre

### 7.3.1 Rotierend

Die Massenelemente  $dm$  eines mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  rotierenden dünnwandigen Rohres (Hohlwelle) oder eines Rings werden durch die Fliehkräfte

$$dF_z = dm R \Omega^2 \quad (7.31)$$

belastet, Bild 7.6.

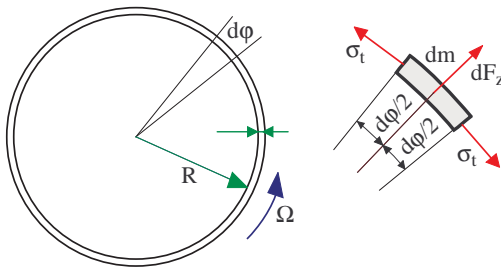


Bild 7.6: Rotierende Hohlwelle

Das Kräftegleichgewicht am Massenelement liefert in tangentialer Richtung

$$dF_z - 2 \sigma_t t dx \frac{d\varphi}{2} = 0 \quad (7.32)$$

wobei  $t$  die Wandstärke und  $dx$  die Breite des Massenelements angeben und der Sinus durch das Argument approximiert wurde. Nach der tangentialen Spannung aufgelöst, erhält man zunächst

$$\sigma_t = \frac{dF_z}{t dx d\varphi} \quad (7.33)$$

Gemäß (7.31) ergibt sich die Fliehkraft zu

$$dF_z = dm R \Omega^2 = \underbrace{\varrho \frac{dm}{dV}}_{\varrho} R \Omega^2 \quad (7.34)$$

In (7.33) eingesetzt bleibt

$$\sigma_t^{\text{rot}} = \varrho R^2 \Omega^2 \quad (7.35)$$

Zu beachten ist dabei, dass  $\varrho$  meist in der Einheit  $\text{kg/m}^3$  angegeben wird. Setzt man den Radius  $R$  nun auch in m an, dann erhält man mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  in der Einheit  $1/\text{s}$  aus (7.35) die tangentielle Spannung  $\sigma_t$  nicht in der üblichen Einheit  $\text{N/mm}^2$  sondern in  $\text{kg/m}^3 \text{m}^2 1/\text{s}^2 = \text{N/m}^2$ .

Zusätzliche axiale Belastungen treten bei rotierenden Hohlwellen und Ringen in der Regel nicht auf. Auf Grund der Dünnwandigkeit gibt es auch keine radiale Spannung. Mit

$$\sigma_{xx}^{\text{rot}} = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_r^{\text{rot}} = 0 \quad (7.36)$$

reduziert sich dann das erweiterte Hookesche Gesetz auf

$$\epsilon_t = \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{E} \underbrace{\varrho R^2 \Omega^2}_{\sigma_t^{\text{rot}}} + \alpha_T \Delta T \quad (7.37)$$

wobei  $\Delta R$  die radiale Aufweitung beschreibt und der Term  $\alpha_T \Delta T$  den Einfluss von Temperaturschwankungen berücksichtigt.

### 7.3.2 Unter Innen- und Außendruck

Bei einer Druckbelastung wird das Volumenelement  $dV$  auf der Innen- und/oder Außenseite durch die Drücke  $p_i$  und/oder  $p_a$  beaufschlagt. Auf Grund der Dünnwandigkeit haben Innen- und Außenseite des Volumenelements jeweils die Fläche  $dA = R d\varphi dx$ . Die in radialer Richtung wirkende Kraft ist dann durch

$$dF_z = p_i dA - p_a dA = (p_i - p_a) dA = (p_i - p_a) R d\varphi dx \quad (7.38)$$

gegeben. Damit ergibt sich die tangentielle Spannung aus (7.33) zu

$$\sigma_t = \frac{dF_z}{t dx d\varphi} = (p_i - p_a) \frac{R}{t} \quad (7.39)$$

Wegen  $t \ll R$  bzw.  $R \gg t$  können bereits geringe Druckbelastungen zu beachtlichen tangentialen Spannungen führen.

Dieses Ergebnis kann auch aus den in der Tabelle 7.1 zusammengestellten Ergebnissen abgeleitet werden. Mit der Wandstärke  $t = r_a - r_i$  erhält man zunächst

$$\eta = \frac{r_a}{r_i} = \frac{r_i + t}{r_i} = 1 + \frac{t}{r_i} \quad (7.40)$$

bzw.

$$\frac{1}{\eta} = \frac{r_i}{r_a} = \frac{r_a - t}{r_i} = 1 - \frac{t}{R} \quad (7.41)$$

wobei infolge der mit  $t \ll r_i$  und  $t \ll r_a$  vorausgesetzten dünnen Wandstärke der Innen- und der Außenradius durch den mittleren Rohrradius  $R$  approximiert wurde. Da der laufende Radius auf das nun kleine Intervall  $r_i \leq r \leq r_a$  beschränkt ist, gilt in guter Näherung

$$r_i^2/r^2 \approx 1 \quad \text{und} \quad r_a^2/r^2 \approx 1 \quad (7.42)$$

Mit den weiteren Näherungen

$$\frac{1}{\eta^2 - 1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{R}\right)^2 - 1} = \frac{1}{1 + 2\frac{t}{R} + \left(\frac{t}{R}\right)^2 - 1} \approx \frac{R}{2t} \quad (7.43)$$

$$\frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{\eta}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{t}{R}\right)^2} \approx \frac{R}{2t} \quad (7.44)$$

erhält man dann aus der Tabelle 7.1 die Ergebnisse

$$\sigma_{rr} \approx 0 \quad (7.45)$$

sowie

$$\sigma_{tt}^{(i)} \approx p_i \frac{R}{2t} (1 + 1) = p_i \frac{R}{t} \quad (7.46)$$

$$\sigma_{tt}^{(a)} \approx -p_a \frac{R}{2t} (1 + 1) = -p_a \frac{R}{t} \quad (7.47)$$

Bei geschlossenen zylindrischen Behältern wird die Wand gemäß (7.30) noch zusätzlich durch die Spannung

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{1}{2} (\sigma_{rr} + \sigma_{tt}) = \frac{1}{2} \left( 0 + (p_i - p_a) \frac{R}{t} \right) \\ &= \frac{1}{2} (p_i - p_a) \frac{R}{t} = \frac{1}{2} \sigma_{tt} \end{aligned} \quad (7.48)$$

in axialer Richtung belastet. Die Beziehungen (7.39) und (7.48) werden häufig auch als Kesselformeln<sup>1</sup> bezeichnet.

Der Spannungszustand und die daraus resultierenden Verformungen eines unter Innendruck stehenden dünnwandigen zylindrischen Behälters mit dem mittleren Radius  $R$ , der Wandstärke  $t \ll R$  und der Länge  $L$  ist in Bild 7.7 dargestellt. Die Längsdehnung des Behälters  $\epsilon_x$  sowie seine Dehnung in tangentialer Richtung sind durch

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L} \quad \text{und} \quad \epsilon_t = \frac{\Delta R}{R} \quad (7.49)$$

gegeben. Über das erweiterte Hookesche Materialgesetz

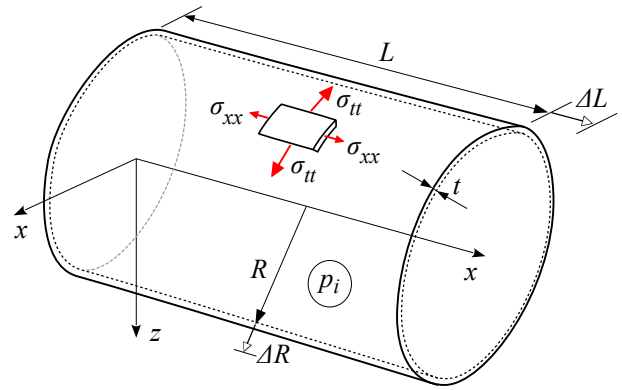


Bild 7.7: Dünnwandiger zylindrischer Behälter unter Innendruck ( $p_i > 0, p_a = 0$ )

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{tt}) + \alpha_T \Delta T \quad (7.50)$$

$$\epsilon_t = \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{E} (\sigma_{tt} - \nu \sigma_{xx}) + \alpha_T \Delta T \quad (7.51)$$

können sie mit den Spannungen  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{tt}$  und einer Temperaturänderung  $\Delta T$  verknüpft werden. Mit (7.39) und (7.48) bleibt

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2} \frac{p}{E} \frac{R}{t} (1 - 2\nu) + \alpha_T \Delta T \quad (7.52)$$

$$\epsilon_t = \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{2} \frac{p}{E} \frac{R}{t} (2 - \nu) + \alpha_T \Delta T \quad (7.53)$$

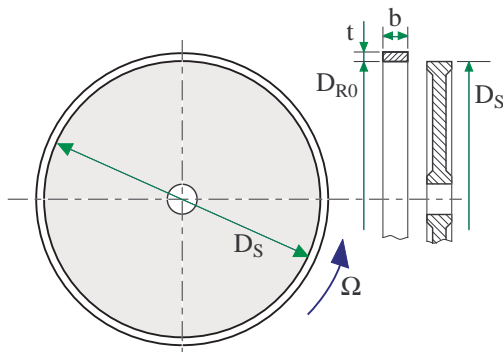
wobei mit  $p = p_i - p_a$  die Dehnungen infolge einer gleichzeitigen Belastung durch Innen- und Außendruck erfasst werden können.

<sup>1</sup> Manchmal auch als Brat- oder Weißwurstformeln bezeichnet, da Würste, wenn sie zu stark erhitzt werden, stets in Längsrichtung platzen. Da die radiale Spannung mit  $\sigma_{tt} = 2\sigma_{xx}$  doppelt so groß wie die Längsspannung ist, können auch lokal unterschiedliche Festigkeiten der Wursthaut daran in der Regel nichts ändern.

## 7.4 Übungen

### 7.4.1 Schwungscheibe mit Ring

Auf eine als starr anzunehmende Schwungscheibe mit dem Außendurchmesser  $D_S$  wird ein dünner schmaler Ring mit dem Innendurchmesser  $D_{R0}$ , der Dicke  $t \ll D_{R0}$ , der Breite  $b \ll D_{R0}$ , der Dichte  $\rho$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  aufgeschraubt.



- Wie groß muss  $D_{R0}$  vor dem Aufschrauben sein, damit sich der Ring bei einer Drehung der Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  nicht löst?
- Wie groß ist dann im Stillstand ( $\Omega = 0$ ) die Flächenpressung zwischen dem Ring und der Schwungscheibe?

Lösung:



### 7.4.2 Behälter

Ein zylindrischer Behälter aus Stahl mit dem Elastizitätsmodul  $E = 206\,000 \text{ N/mm}^2$ , der Querdehnzahl  $\nu = 0.3$ , dem mittleren Durchmesser  $D_m = 1600 \text{ mm}$ , der Wandstärke  $t = 20 \text{ mm}$  und der Länge  $L = 4000 \text{ mm}$  erfährt unter dem Innendruck  $p_i$  die radiale Weitung  $\Delta_R = 0.396 \text{ mm}$ .

- Wie groß ist der Innendruck  $p_i$ ?
- Wie groß sind die Spannungen in der Behälterwand?
- Wie groß ist die Längenänderung?

Lösung:



# 8 Spannungs- und Verformungszustände

## 8.1 Der zweiachsige Spannungszustand

### 8.1.1 Beispiel

Wird ein dünnwandiger zylindrischer Behälter, der unter dem Innendruck  $p = p_i$  steht noch durch ein Torsionsmoment belastet, dann tritt an einem Volumenelement der Länge  $dx$  der Breite  $dy$  und der Höhe  $t$  neben den Normalspannungen  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  noch die Schubspannung  $\tau_{xy}$  auf, Bild 8.1.

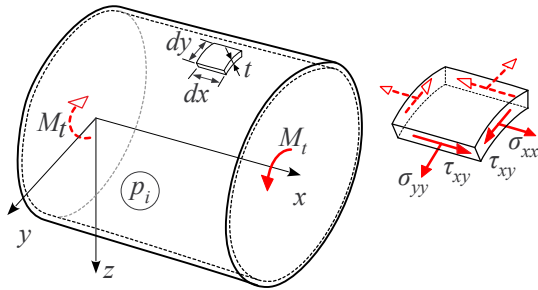


Bild 8.1: Spannungen in einem dünnwandigen zylindrischen Druck-Behälter, der zusätzlich auf Torsion belastet wird

Auf Grund der dünnwandigkeit können in  $z$ -Richtung keine Spannungen auftreten  $\sigma_{zz} = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$  und  $\tau_{yz} = 0$ . Die verbleibenden Spannungen  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  und  $\tau_{xy}$  kennzeichnen einen zweiachsigen oder ebenen Spannungszustand.

### 8.1.2 Spannungen für verschiedene Schnittrichtungen

Ein zweiachsiger Spannungszustand ist in den Schnittrichtungen  $x_0$  und  $y_0$  durch die Spannungen  $\sigma_{xx}^0$ ,  $\sigma_{yy}^0$  und  $\tau_{xy}^0$  bestimmt. Um die Spannungen in einer beliebigen Schnittrichtung zu erhalten, wird ein dünnes prismatisches Volumenelement mit dreieckiger Grundfläche betrachtet, Bild 8.2.

Bezeichnet  $t$  die Dicke des prismatischen Volumenelements, dann liefert das Kräftegleichgewicht in  $x_0$ - und  $y_0$ -Richtung die Beziehungen

$$\begin{aligned} & (\sigma_{xx}^{\varphi} \cos \varphi - \tau_{xy}^{\varphi} \sin \varphi) dy t \\ & - \sigma_{xx}^0 dy \cos \varphi t - \tau_{xy}^0 dy \sin \varphi t = 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

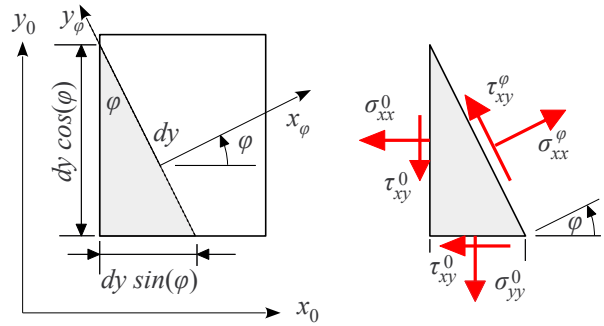


Bild 8.2: Spannungen an einem prismatischen Volumenelement

$$\begin{aligned} & (\sigma_{xx}^{\varphi} \sin \varphi + \tau_{xy}^{\varphi} \cos \varphi) dy t \\ & - \sigma_{yy}^0 dy \sin \varphi t - \tau_{xy}^0 dy \cos \varphi t = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Sie sind für

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{\varphi} \cos \varphi - \tau_{xy}^{\varphi} \sin \varphi &= \sigma_{xx}^0 \cos \varphi + \tau_{xy}^0 \sin \varphi \\ \sigma_{xx}^{\varphi} \sin \varphi + \tau_{xy}^{\varphi} \cos \varphi &= \sigma_{yy}^0 \sin \varphi + \tau_{xy}^0 \cos \varphi \end{aligned}$$

erfüllt. Nach  $\sigma_{xx}^{\varphi}$  und  $\tau_{xy}^{\varphi}$  aufgelöst bleibt

$$\sigma_{xx}^{\varphi} = \sigma_{xx}^0 \cos^2 \varphi + \sigma_{yy}^0 \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy}^0 \sin \varphi \cos \varphi \quad (8.3)$$

$$\tau_{xy}^{\varphi} = \tau_{xy}^0 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (\sigma_{xx}^0 - \sigma_{yy}^0) \sin \varphi \cos \varphi \quad (8.4)$$

Mit den in Abschnitt 5.3.2 angegebenen trigonometrischen Beziehungen erhält man schließlich analog zu den Beziehungen (5.35) und (5.37) die Ergebnisse

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{\varphi} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi \\ &+ \tau_{xy} \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\tau_{xy}^{\varphi} = \tau_{xy} \cos 2\varphi - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi \quad (8.6)$$

Dabei wurden trigonometrische Umformungen angewandt und der hochgestellte Index  $^0$  zur Kennzeichnung der Spannungen, die in Schnitten senkrecht zur  $x_0$ - und  $y_0$ -Achse auftreten, wurde nicht mehr verwendet.

Die Normalspannung  $\sigma_{yy}^{\varphi}$  erhält man durch einen um  $90^\circ$  gedrehten Schnitt. Analog zu (5.36) erhält man

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{\varphi} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi \\ &- \tau_{xy} \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (8.7)$$

### 8.1.3 Hauptspannungen

Für die durch

$$\tan 2\varphi^* = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (8.8)$$

bestimmte Schnittrichtung verschwindet die Schubspannung,  $\tau_{xy}(\varphi^*) = 0$  und beide Normalspannungen  $\sigma_{xx}$  sowie  $\sigma_{yy}$  erreichen wegen

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma}{d\varphi} \right|_{\varphi^*} &= \frac{\mp 2}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi^* \pm 2\tau_{xy} \cos 2\varphi^* \\ &= [\mp (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \tan 2\varphi^* \pm 2\tau_{xy}] \cos 2\varphi^* \quad (8.9) \\ &= [\mp 2\tau_{xy} \pm 2\tau_{xy}] \cos 2\varphi^* = 0 \end{aligned}$$

extremale Werte, die als Hauptspannungen bezeichnet werden. Sie sind analog zu den Hauptflächenmomenten durch

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (8.10)$$

gegeben. Da ein ebener Spannungszustand vorliegt, gibt  $\sigma_3 = 0$  die dritte Hauptspannung an.

Bei räumlichen Spannungszuständen können die drei Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  analog zum Vorgehen in Abschnitt 1.2.3.3 aus dem Eigenwertproblem (1.15) ermittelt werden. Die nicht trivialen Lösungen des linearen und homogen Gleichungssystems (1.14) liefern dann die aufeinander senkrechten Hauptspannungsrichtungen, die durch die Einheitsvektoren  $e_{1,0}$ ,  $e_{2,0}$  und  $e_{3,0}$  im Koordinatensystem 0 definiert werden.

### 8.1.4 Maximale Schubspannungen

Die notwendige Bedingung für einen Extremwert der in der  $xy$ -Ebene auftretenden Schubspannung

$$\frac{d\tau_{xy}^\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{2} [-2\tau_{xy} 2 \sin 2\varphi - (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) 2 \cos 2\varphi] = 0 \quad (8.11)$$

liefert die durch

$$\tan 2\bar{\varphi} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}} \quad (8.12)$$

festgelegte Schnittrichtung. Im Vergleich zu (8.8) sind im Argument der Tangensfunktion Zähler und Nenner vertauscht. Die Winkel  $2\bar{\varphi}$  und  $2\varphi^*$  sind somit um  $90^\circ$  verschoben. Die durch

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{max/min} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned} \quad (8.13)$$

gegebenen extremalen Schubspannungen treten also stets in einem Schnitt auf, der um  $-45^\circ$  zur Hauptspannungsrichtung gedreht ist. Die Normalspannungen verschwinden allerdings dabei nicht, sondern sind durch den mittleren Wert

$$\sigma_{xx}^\varphi = \sigma_{yy}^\varphi = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_m \quad (8.14)$$

bestimmt.

Auch bei räumlichen Spannungszuständen gibt es ausgezeichnete Schnittrichtungen, die durch extremale Schubbeanspruchung gekennzeichnet sind. In Erweiterung zu (8.13) ermittelt man die betragsmäßig maximale Schubspannung nun mit

$$\tau^{max} = \frac{1}{2} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \quad (8.15)$$

aus allen möglichen Differenzen der Hauptspannungen.

### 8.1.5 Der Mohrsche Spannungskreis

Mit der in (8.14) definierten mittleren Spannung  $\sigma_m$  und der Abkürzung

$$\sigma_R = \tau_{xy}^{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (8.16)$$

sind die Hauptspannungen sehr einfach darstellbar

$$\sigma_{1,2} = \sigma_m \pm \sigma_R \quad (8.17)$$

Für die Normalspannung  $\sigma = \sigma_{xx}^\varphi$  und die Schubspannung  $\tau = \tau_{xy}^\varphi$ , die in einer unter dem Winkel  $\varphi$  geneigten Schnittrichtung auftreten, erhält man dann ausgehend von (8.5) und (8.6) die Beziehungen

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_R \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_R} \cos 2\varphi + \frac{\tau_{xy}}{\sigma_R} \sin 2\varphi \right) \quad (8.18)$$

sowie

$$\tau = \sigma_R \left( \frac{\tau_{xy}}{\sigma_R} \cos 2\varphi - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_R} \sin 2\varphi \right) \quad (8.19)$$

Die Faktoren mit denen dabei die Winkelfunktionen  $\cos 2\varphi$  und  $\sin 2\varphi$  multipliziert werden, können durch die entsprechenden Winkelfunktionen der Hauptschnittrichtung  $\varphi^*$  ersetzt werden

$$\sin 2\varphi^* = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_R} \quad \text{und} \quad \cos 2\varphi^* = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_R} \quad (8.20)$$

Sie genügen der Beziehung (8.8) und erfüllen die trigonometrische Bedingung  $\sin^2 + \cos^2 = 1$ . Für die in (8.18) und (8.19) angegebenen Spannungen erhält man dann

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_m + \sigma_R (\cos 2\varphi^* \cos 2\varphi + \sin 2\varphi^* \sin 2\varphi) \\ &= \sigma_m + \sigma_R \cos (2\varphi^* - 2\varphi)\end{aligned}\quad (8.21)$$

$$\begin{aligned}\tau &= \sigma_R (\sin 2\varphi^* \cos 2\varphi - \cos 2\varphi^* \sin 2\varphi) \\ &= \sigma_R \sin (2\varphi^* - 2\varphi)\end{aligned}\quad (8.22)$$

wobei  $\sigma_m$  die mittlere Spannung bezeichnet und die Additionstheoreme  $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y)$  sowie  $\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x-y)$  verwendet wurden. Die Beziehungen (8.21) und (8.22) entsprechen in der  $\sigma$ - $\tau$ -Ebene der Parameterdarstellung eines Kreises mit dem Mittelpunkt  $M$  in  $\sigma = \sigma_m$  und  $\tau = 0$  und dem Radius  $\sigma_R$ .

Der nach Mohr benannte Spannungskreis ist für die Zahlenwerte  $\sigma_{xx}^0 = 177 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_{yy} = 84 \text{ N/mm}^2$  und  $\tau_{xy}^0 = 89 \text{ N/mm}^2$  in Bild 8.3 dargestellt.

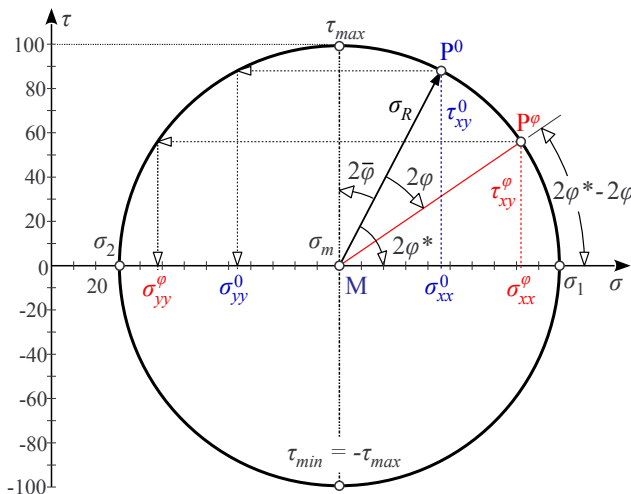


Bild 8.3: Der Mohrsche Spannungskreis

Ein Mohrscher Spannungskreis wird wie folgt konstruiert. Man startet mit dem Mittelpunkt  $M$ , der hier mit

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0}{2} = \frac{177 + 84}{2} = 130.5 \text{ N/mm}^2 \quad (8.23)$$

gegeben ist. Nun wird der Punkt  $P^0$  mit den Koordinaten  $\sigma_{P^0} = \sigma_{xx}^0$  und  $\tau_{P^0} = \tau_{xy}^0$  eingetragen. Die Punkte auf dem Kreis um  $M$  mit dem Radius  $\sigma_R = MP^0$  liefern dann die Spannungszustände  $\sigma_{xx}^\varphi$ ,  $\sigma_{yy}^\varphi$  und  $\tau_{xy}^\varphi$  für beliebige Schnitttrichtungen. Zu beachten ist dabei, dass alle Winkel  $\varphi$ ,  $\varphi^*$  und  $\bar{\varphi}$  ausgehend von der Bezugslinie  $MP^0$  in Uhrzeigersinn positiv zu zählen sind. Die Schnittpunkte des Mohrschen Kreises mit der  $\sigma$ - und der  $\tau$ -Achse liefern die Hauptspannungen  $\sigma_{1,2}$  und die

maximale Schubspannung  $\pm \tau_{max}$ . Der Mohrsche Spannungskreis, der in analoger Weise als Mohrscher Trägheitskreis auch für die Flächenmomente 2. Grades verwendet werden kann, verdeutlicht zweidimensionale Spannungszustände sehr anschaulich.

Die aus der Grafik abgelesenen Werte

$$2\varphi^* \approx 60^\circ, \sigma_1 \approx 230 \text{ N/mm}^2, \sigma_2 \approx 30 \text{ N/mm}^2$$

$$2\bar{\varphi} \approx -30^\circ \text{ und } \tau_{max} \approx \pm 100 \text{ N/mm}^2$$

stimmen recht gut mit den aus (8.8), (8.10), (8.12) und (8.13) ermittelten Ergebnissen

$$2\varphi^* = 62.4^\circ, \sigma_1 = 230.9 \text{ N/mm}^2, \sigma_2 = 30.1 \text{ N/mm}^2$$

$$2\bar{\varphi} = -27.6^\circ \text{ und } \tau_{max} = 100.4 \text{ N/mm}^2$$

überein.

## 8.2 Vergleichsspannungen

### 8.2.1 Bauteildimensionierung

Die Festigkeitsberechnung liefert bei räumlichen Spannungszuständen mit  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  und  $\tau_{yz}$  sechs Spannungen. Zur Dimensionierung eines Bauteils wird deshalb eine Vergleichsspannung  $\sigma_V$  benötigt, die in geeigneter Form

$$(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \Rightarrow \sigma_V \quad (8.24)$$

den vorhandenen Spannungszustand so gut wie möglich abbildet. Mit einem Sicherheitsbeiwert  $\nu$ , der abhängig von der Belastung, der Bauteilform, der Genauigkeit der Berechnung mit Werten im Bereich  $1 < \nu < 10$  angesetzt wird, kann dann die Dimensionierung in der Form

$$\nu \sigma_V \leq \sigma_{zul} \quad (8.25)$$

durchgeführt werden. Die zulässige Spannung  $\sigma_{zul}$  ist dabei eine aus Versuchen ermittelte Kenngröße, die vom Werkstoff und der Art der Belastung (statisch, dynamisch, wechselnd, schwellend) abhängt.

### 8.2.2 Spannungsorientiert

#### 8.2.2.1 Die Normalspannungshypothese

Bei spröden Materialien, wie Grauguss oder gehärteter Stahl, ist meist die maximale Normalspannung für die Zerstörung des Bauteils verantwortlich.

Die Normalspannungshypothese liefert dann mit

$$\sigma_V^N = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \quad (8.26)$$

eine passende Vergleichsspannung. Häufig verzichtet man auf die Betragsstriche und zieht je nach Belastung die maximale oder minimale Hauptspannung in Betracht.



Bei einem zweidimensionalen Spannungszustand kann mit (8.10) die Vergleichspannung direkt aus den Spannungen  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  und  $\tau_{xy}$  in einer beliebigen Schnittrichtung berechnet werden

$$\sigma_{V_2}^N = \frac{1}{2} \left( |\sigma_{xx} + \sigma_{yy}| + \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \right) \quad (8.27)$$

wobei der Faktor  $\frac{1}{2}$  aus der Wurzel herausgezogen und dann als gemeinsamer Faktor ausgeklammert wurde.

Beim Zugstab ist der Spannungszustand in einem Schnitt senkrecht zur Stabachse in trivialer Weise durch  $\sigma_{xx} = \sigma$ ,  $\sigma_{yy} = 0$  und  $\tau_{xy} = 0$  gegeben. Die aus (8.10) errechnete Vergleichspannung

$$\sigma_{V_2}^N = \frac{1}{2} (|\sigma| + \sqrt{\sigma^2 + 0}) = \frac{1}{2} (|\sigma| + |\sigma|) = |\sigma| \quad (8.28)$$

liefert dann auch das erwartete Ergebnis.

### 8.2.2.2 Die Schubspannungshypothese

Die maximale Schubspannung ist in vielen Fällen verantwortlich, wenn das Bauteil durch plastische Verformungen versagt oder ein spröder Werkstoff auf Druck beansprucht wird. Da in Schnittrichtungen mit maximaler Schubspannung auch noch Normalspannungen auftreten, kann die Vergleichspannung nicht einfach der maximalen Schubspannung gleichgesetzt werden, sondern wird zunächst nur proportional zu ihr angesetzt

$$\begin{aligned} \sigma_V^S &= p \tau_{max} \\ &= p \frac{1}{2} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \end{aligned} \quad (8.29)$$

wobei mit (8.15) die maximale Schubspannung auf die Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  zurückgeführt wurde.

Der Proportionalitätsfaktor  $p$  wird nun so gewählt, dass man für den Zugstab mit  $\sigma_V^S = \sigma$  wieder das erwartete Ergebnis erhält. Mit  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = 0$  und  $\sigma_3 = 0$  führt der Ansatz (8.29) auf die Vergleichsspannung

$$\sigma_V^S = p \frac{1}{2} \max(|\sigma - 0|, |0 - 0|, |0 - \sigma|) = p \frac{1}{2} \sigma \quad (8.30)$$

Die Forderung  $\sigma_V^S = \sigma$  wird somit für  $p = 2$  erfüllt. Damit ist die Vergleichspannung gemäß der Schubspannungshypothese durch

$$\sigma_V^S = 2 \tau_{max} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \quad (8.31)$$

bestimmt. Bei einem zweidimensionalen Spannungszustand mit  $\sigma_3 \equiv 0$  vereinfacht sich (8.31) zu

$$\sigma_{V_2}^S = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2|, |\sigma_1|\} \quad (8.32)$$

Die Differenz der Hauptspannungen kann dann gemäß (8.10) mit

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= 2 \sqrt{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \end{aligned} \quad (8.33)$$

auch noch auf die in der  $xy$ -Ebene wirkenden Spannungen  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  und  $\tau_{xy}$  zurückgeführt werden.

## 8.2.3 Verformungsorientiert

### 8.2.3.1 Formänderungsarbeit

In Schnitten senkrecht zur Hauptspannungsrichtung wird das Volumenelement  $dV = dx dy dz$  nur durch die Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  belastet, Bild 8.4.

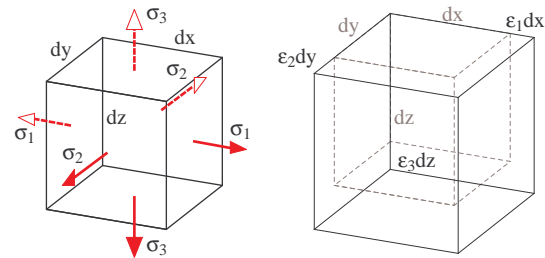


Bild 8.4: Hauptspannungen und Verformungen

Die auf das Volumen  $dV$  bezogene innere Arbeit, die auch als spezifische Formänderungsenergie bezeichnet wird, ist allgemein durch

$$W_V = \int \sigma d\epsilon \quad (8.34)$$

bestimmt. Die am räumlichen Volumenelement verrichtete spezifische innere Arbeit bzw. die spezifische Formänderungsenergie ist dann durch

$$W_V = \int \sigma_1 d\epsilon_1 + \int \sigma_2 d\epsilon_2 + \int \sigma_3 d\epsilon_3 \quad (8.35)$$

gegeben. Das Hooksche Materialgesetz verknüpft die Spannungen mit den Dehnungen. Es gilt dann auch

$$\begin{aligned} d\epsilon_1 &= \frac{1}{E} [d\sigma_1 - \nu(d\sigma_2 + d\sigma_3)] \\ d\epsilon_2 &= \frac{1}{E} [d\sigma_2 - \nu(d\sigma_3 + d\sigma_1)] \\ d\epsilon_3 &= \frac{1}{E} [d\sigma_3 - \nu(d\sigma_1 + d\sigma_2)] \end{aligned} \quad (8.36)$$

Damit können die Integrale in (8.35) mit den Grenzen von jeweils 0 bis  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  gelöst werden. Zusammengefasst bleibt

$$\begin{aligned} W_V &= \frac{1}{18K} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &+ \frac{1}{12G} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} \end{aligned} \quad (8.37)$$

wobei die Querdehnzahl  $\nu$  und der Elastizitätsmodul  $E$  über

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8.38)$$

im Kompressionsmodul  $K$  und im Schubmodul  $G$  zusammengefasst sind.

Der erste Anteil der spezifischen Formänderungsarbeit (8.37) beschreibt die zur Volumenänderung erforderliche Arbeit. Er verschwindet für inkompressible Stoffe, die durch  $K \rightarrow \infty$  oder  $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$  charakterisiert werden. Der zweite Anteil kann der Gestaltänderung zugeordnet werden.

### 8.2.3.2 Gestaltänderungshypothese

Nimmt man die Gestaltänderung als Maß für die Zerstörung des Werkstoffs, dann kann die Vergleichspannung zunächst mit

$$\sigma_V^{GE} = \sqrt{p \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right\}} \quad (8.39)$$

angesetzt werden. Die Proportionalitätskonstante wird wieder durch Vergleich mit dem durch  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = 0$  gegebenen einachsigen Spannungszustand und  $\sigma_V = \sigma$  bestimmt. Mit dem aus

$$\sigma_V^{GE} = \sigma = \sqrt{p \left\{ \sigma_1^2 + 0 + \sigma_1^2 \right\}} \quad (8.40)$$

folgenden Wert  $p = \frac{1}{2}$  ist dann die Vergleichspannung nach der Gestaltänderungshypothese durch

$$\sigma_V^{GE} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right\}} \quad (8.41)$$

gegeben. Die Vergleichspannung kann mit den Spannungen in beliebigen Schnitttrichtungen ausgedrückt werden. Für zweiachsige Spannungszustände erhält man

$$\sigma_{V_2}^{GE} = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2} \quad (8.42)$$

Im Vergleich zu (8.32) wird hier mit dem Ersetzen von einem  $\tau_{xy}^2$  durch den Term  $\sigma_{xx}\sigma_{yy}$  die Schubspannung weniger stark gewichtet.

## 8.3 Der zweiachsige Verformungszustand

### 8.3.1 Grundgleichungen

Die Elemente des Spannungstensors  $\bar{\sigma}$  und des Verzerrungstensors oder Deformators  $\bar{D}$  beschreiben allgemeine Spannungs- und Verformungszustände. Die

Elemente beider Tensoren sind in gleicher Weise von den Schnitttrichtungen abhängig. Damit können die Ergebnisse aus Abschnitt 8.1 analog auch für die Dehnungen und Verzerrungen angewendet werden. Vergleicht man die Elemente des Spannungstensors (1.12) mit den entsprechenden Elementen im Verzerrungstensor (1.37) dann erkennt man folgende Analogie

$$\sigma \simeq \epsilon \quad \text{und} \quad \tau \simeq \frac{1}{2}\gamma \quad (8.43)$$

Entsprechend (8.5) bis (8.7) gilt dann

$$\epsilon_x^\varphi = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\varphi \quad (8.44)$$

$$\epsilon_y^\varphi = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) - \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\varphi \quad (8.45)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy}^\varphi = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cos 2\varphi - \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\varphi \quad (8.46)$$

wobei  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  die Dehnungen und die Verzerrung in der ursprünglichen Schnitttrichtung angeben und der hochgestellte Index  $\varphi$  den Verformungszustand in der um den Winkel  $\varphi$  gedrehten Schnitttrichtung kennzeichnet.

Analog zu (8.8) treten dann die Hauptdehnungen in der durch

$$\tan 2\varphi^\star = \frac{\frac{1}{2}\gamma_{xy}}{\frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y)} = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (8.47)$$

bestimmten Schnitttrichtung auf und sind in Analogie zu (8.10) durch

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2}\gamma_{xy} \right)^2} \quad (8.48)$$

gegeben. Die extremale Verzerrung in der  $xy$ -Ebene tritt analog zu (8.12) in der durch

$$\tan 2\bar{\varphi} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}} \quad (8.49)$$

festgelegte Schnitttrichtung auf. Entsprechend (8.13) erhält man

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy}^{ext} = \pm \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{xy}^{ext} = \pm(\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (8.50)$$

### 8.3.2 Auswertung gemessener Dehnungen

Dehnmessstreifen, die auf Bauteilen geklebt werden, können Dehnungen in der Oberfläche des Bauteils messtechnisch erfassen. Drei in unterschiedlichen Richtungen aufgeklebte Messstreifen reichen aus, um die Verformungen und die Verzerrung in der Oberfläche vollständig zu beschreiben, Bild 8.5.

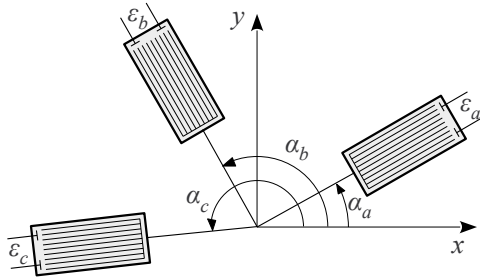


Bild 8.5: Anordnung von Dehnmessstreifen

Die Winkeln  $\alpha_a$ ,  $\alpha_b$  und  $\alpha_c$  geben die Orientierung der Messstreifen gegenüber der  $x$ -Richtung an. Die Dehnungen  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  und die Verzerrung  $\gamma_{xy}$  sind dann entsprechend (8.44) über

$$\epsilon_i = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\alpha_i + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\alpha_i, \quad i = a, b, c \quad (8.51)$$

mit den in den Messstreifen gemessenen Dehnungen  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_b$  und  $\epsilon_c$  verknüpft. Zusammengefasst bleibt mit

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos 2\alpha_a & \sin 2\alpha_a \\ 1 & \cos 2\alpha_b & \sin 2\alpha_b \\ 1 & \cos 2\alpha_c & \sin 2\alpha_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x + \epsilon_y \\ \epsilon_x - \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\epsilon_a \\ 2\epsilon_b \\ 2\epsilon_c \end{bmatrix} \quad (8.52)$$

ein lineares Gleichungssystem der Form  $Ax = b$ , das nach den Dehnungen  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  und der Verzerrung  $\gamma_{xy}$  aufgelöst werden kann.

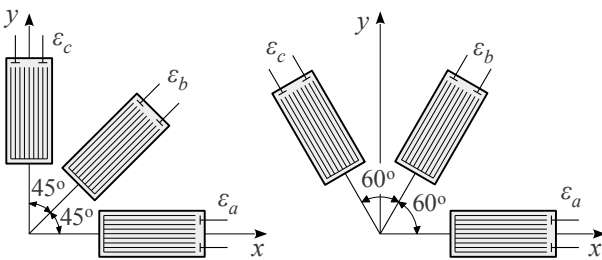


Bild 8.6: Typische Dehnungsrosetten

Für die in Bild 8.6 dargestellten Sonderfälle kann das Gleichungssystem sehr einfach gelöst werden.

$$\begin{aligned} \alpha_a &= 0^\circ & \epsilon_x &= \epsilon_a \\ \alpha_b &= 45^\circ & \implies \epsilon_y &= \epsilon_c \\ \alpha_c &= 90^\circ & \gamma_{xy} &= 2\epsilon_b - (\epsilon_a + \epsilon_c) \end{aligned} \quad (8.53)$$

$$\begin{aligned} \alpha_a &= 0^\circ & \epsilon_x &= \epsilon_a \\ \alpha_b &= 60^\circ & \implies \epsilon_y &= \frac{1}{3}(2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a) \\ \alpha_c &= 120^\circ & \gamma_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_b - \epsilon_c) \end{aligned} \quad (8.54)$$

Anschließend können dann über (8.47) und (8.48) die Hauptdehnungen  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  sowie deren Winkellage  $\varphi^*$  ermittelt werden.

Bei einem zweiachsigen Spannungszustand, der durch  $\sigma_{xx} \neq 0$ ,  $\sigma_{yy} \neq 0$ ,  $\sigma_{zz} = 0$ ,  $\tau_{xy} \neq 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$  und  $\tau_{yz} = 0$  gekennzeichnet ist, können aus der Verzerrung  $\gamma_{xy}$  sowie den Dehnungen  $\epsilon_x$  und  $\epsilon_y$  auch noch die Spannungen berechnet werden. Dazu wird das verallgemeinerte Hookesche Materialgesetz verwendet. Die Verzerrung  $\gamma_{xy}$  liefert über

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (8.55)$$

sofort die Schubspannung. Mit  $\sigma_{zz} = 0$  und  $\Delta T = 0$  reduzieren sich die ersten beiden Gleichungen in (1.47) auf

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] \quad \text{und} \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] \quad (8.56)$$

Nach den Spannungen aufgelöst erhält man.

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad (8.57)$$

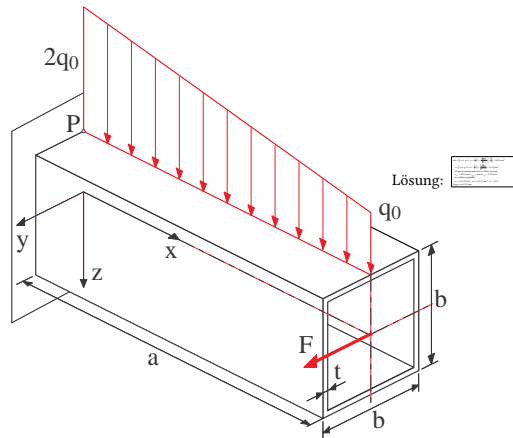
$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad (8.58)$$

Ersetzt man die Dehnungen  $\epsilon_x$  und  $\epsilon_y$  durch die Hauptdehnungen  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ , dann liefern die Beziehungen (8.57) und (8.58) direkt die Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ .

## 8.4 Übungen

### 8.4.1 Hohlprofil

Ein dünnwandiges Hohlprofil ist an einem Ende fest eingespannt und wird durch eine Einzelkraft  $F$  und die Streckenlast  $q(x)$  belastet.



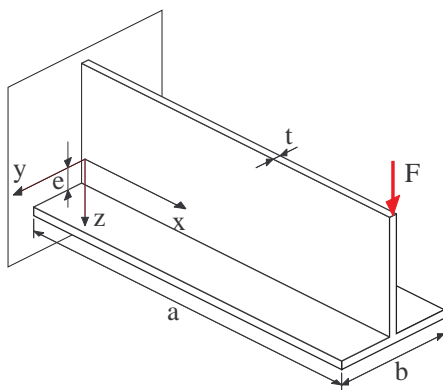
Mit den Zahlenwerten

$F = 24\,000\text{ N}$ ,  $q_0 = 20\text{ N/mm}$ ,

$a = 500\text{ mm}$ ,  $b = 100\text{ mm}$  und  $t = 5\text{ mm}$  sind für den Punkt P ( $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=-\frac{1}{2}b$ ) zu ermitteln:

- die Hauptspannungen nach Größe und Richtung
- und die Vergleichsspannung nach der Hypothese der Gestaltänderung.

### 8.4.2 T-Profil



Ein einseitig fest eingespanntes Bauteil mit dünnwandigem Querschnitt wird am freien Ende mit der Kraft  $F$  belastet.

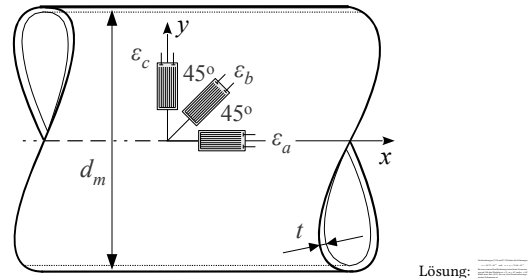
Lösung:

Für  $F = 2500\text{ N}$ ,  $I_{yy} = 225 \cdot 10^3\text{ mm}^4$ ,  $a = 80\text{ mm}$ ,  $b = 60\text{ mm}$ ,  $t = 5\text{ mm}$  und  $e = 12.5\text{ mm}$  sind für die Stelle  $x=0$ ,  $y=0$  und  $z=e$  sind zu ermitteln:

- die Hauptspannungen nach Größe und Richtung
- und die Vergleichsspannung nach der Normalspannungshypothese.

### 8.4.3 Dehnmessrosette

Eine dünnwandige Rohrleitung mit dem Durchmesser  $d_m = 125\text{ mm}$  und der Wandstärke  $t = 5\text{ mm}$  wird für eine Online-Überwachung der Belastungen auf der Außenfläche mit einer Dehnmessrosette beklebt. Ein Dehnmessstreifen zeigt dabei in axialer Richtung und die beiden anderen sind um jeweils  $45^\circ$  gedreht angeordnet. Die Werkstoffkennwerte der Rohrleitung sind mit  $E = 2 \cdot 10^5\text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0.3$  gegeben.



Welche Dehnungen zeigen die Dehnmessstreifen an, wenn die an beiden Enden abgeschlossene Rohrleitung mit dem Innendruck  $p_i = 1.5\text{ bar}$  beaufschlagt wird?