k+1 步 Adams 外插法

无法直接求解 ⇒ 数值积分

目标 $y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$

① 利用 $(t_{n-k}, f_{n-k}), \cdots, (t_n, f_n)$ 构造插值多项式：

$$p(t) = p(t_n + sh) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n$$

② 用 $p(t)$ 代替 $f(t, y(t))$ 积分得：

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{k} a_j \nabla^j f_n$$

其中 $a_j = \int_0^1 (-1)^j \binom{-s}{j} ds$

$$\nabla^j f_n = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} f_{n-j}$$ → 杨辉三角

a_j 的计算由递推式得到：

$$a_n + \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{3} a_{n-2} + \cdots + \frac{1}{n+1} a_0 = 1$$

j	0	1	2	3	4	5	6
a_j	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{10987}{60480}$

由 Newton 插值公式余项可知

$$R_{n,k} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (-1)^{k+1} \binom{-s}{k+1} y^{(k+2)}(\xi)\, ds$$

$$= a_{k+1} h^{k+2} \cdot y^{(k+2)}(\xi) \qquad \xi \in [t_{n-k}, t_{n+1}]$$

$\Rightarrow$ $k+1$ 步显式Admas方法的

局部截断误差为 $O(h^{k+2})$

两个节点内插法

(t_n, f_n)、(t_{n+1}, f_{n+1})

$$p(t) = \frac{t-t_n}{t_{n+1}-t_n} f_{n+1} + \frac{t-t_{n+1}}{t_n-t_{n+1}} f_n$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t)\,dt$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f_{n+1} + \frac{h}{2} f_n$$

k+2步 Adams 内插法

目标 $y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$

① 利用 $(t_{n-k}, f_{n-k}), \cdots, (t_n, f_n), (t_{n+1}, f_{n+1})$ 构造插值多项式

$$p(t) = p(t_{n+1}+sh) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n \quad (s\in[-1,0])$$

② 用 $p(t)$ 代替 $f(t, y(t))$ 积分得:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{k+1} a_j^* \nabla^j f_n$$

其中 $a_j^* = \int_{-1}^{0} (-1)^j \binom{-s}{j} ds$

$$\nabla^j f_{n+1} = \sum_{i=0}^{j} (-1)^j \binom{j}{i} f_{n+i-1}$$

可证明 $a_j = \sum_{i=0}^{j} a_i^*$

$$R_{n,k}^{in} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (-1)^k \binom{-s}{k+2} h^{k+2} y^{(k+3)}(\xi) ds$$

$$= O(h^{k+3})$$

$k+2$ 步 Adams in 局部截断误差为 $O(h^{k+3})$

k 步 Adams 方法 $\dfrac{k \text{ 阶}}{\text{收敛阶}}$ 的

$t_n \to t_{n+1}$

$t_{n-m} \to t_{n+1}$

$$y(t_{n+1}) = y(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

$(t_{n-m}, f_{n-m}) \cdots (t_{n+1}, f_{n+1})$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4 f_n + f_{n-1})$$

(Milne 方法)

(Milne 方法)

2、待定系数法（Taylor 展开法）

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=0}^{k+1} a_j^* f_{n+1-j}$$

$y_{n-k}, y_{n-k+1}, \dots,$ $\qquad y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=0}^{k+1}\beta_j f_{n+1-j}$

⇒ k步线性多步法一般形式

左为 $y_n \cdots y_{n+k}$ 线性组合

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j}$$

右为 $f_n \cdots f_{n+k}$ 的线性组合

y_{n+k} $\quad (y_n, \dots, y_{n+k-1}, f_n, \dots, f_{n+k-1}, f_{n+k})$

① 当 $\beta_k = 0$，显式方程

② 当 $\beta_k \neq 0$，隐式方程

有是隐式
无是显式

待定 定义 α_j, β_j 分析局部截断误差

$$R_{n,k} = \sum_{j=0}^{k}\left(\alpha_j y(t_{n+j}) - h\beta_j y'(t_{n+j})\right)$$

⇒ 将 $y(t_{n+j}), y'(t_{n+j})$ 在 t_n 处作 Taylor 展开

（根树理论）

（彩色树理论）

$$K_{n,k} = C_0 y(t_n) + C_1 h \cdot y'(t_n) + \cdots + C_p h^p y^{(p)}(t_n) + \cdots$$

$$C_i = C_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_k)$$

$$\left(\begin{array}{l} y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + y'(t_n) \cdot h + \frac{h^2}{2!} y''(t_n) + \cdots \\ y(t_{n+2}) = y(t_n + 2h) = y(t_n) + y'(t_n) \cdot 2h + \frac{(2h)^2}{2!} y''(t_n) + \cdots \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \\ C_1 = \sum_{i=0}^{k} (\alpha_i \cdot i - \beta_i) \\ \vdots \\ C_j = \frac{1}{j!} \sum_{i=1}^{k} i^{j-1} (i\alpha_i - j\beta_i) \end{cases} \quad j = 2, 3, \cdots$$

① $C_0 = 0 \quad C_1 \neq 0 \Rightarrow y(t_{n+1}) = y(t_n) \quad O(h^1)$

$\Rightarrow$ 相容阶为 $O(h^0)$，不收敛

$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \qquad -\beta_0 + (\alpha_1 - \beta_1) = 0$

② $C_0 = 0 \quad C_1 = 0, \ C_2 \neq 0 \qquad O(h^2)$

$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0 \qquad \sum_{i=0}^{k} (\alpha_i \cdot i - \beta_i) = 0$