От Инвариантов к Мартингалам

Искусство законов сохранения в вероятностных процессах

Калашников Александр

Wildberries & Russ, ФКН ВШЭ

> «Случайность — это лишь непознанная закономерность. Там, где дилетант видит хаос и бесконечные деревья исходов, настоящий математик находит мартингал».
>
> — Джозеф Дуб (Joseph Doob)

Содержание

1 Введение: Эволюция закона сохранения

В классической (детерминированной) олимпиадной математике фундаментом служат инварианты — величины, которые строго не меняются после применения любых разрешённых правилами операций. Алгоритм решения прост: если начальное значение инварианта не равно конечному, цель недостижима (вспомните раскраски досок, остатки по модулю или алгебраическую сумму квадратов).

Но что происходит, когда в задачу вмешивается случайность? (Броски кубика, блуждания по графу, вероятностные турниры). Здесь строгих детерминированных инвариантов нет: любая величина на следующем шаге может вырасти, а может и упасть. Однако мы можем потребовать, чтобы величина сохранялась в среднем.

$$\text{Инвариант} \implies \text{сохраняется абсолютно.}$$
$$\text{Мартингал} \implies \text{сохраняется в математическом ожидании.}$$

Это концептуальный скачок, который позволяет решать тяжелейшие вероятностные задачи без составления бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) или суммирования рядов.

2 Первое касание: Инварианты матожидания

Давайте посмотрим на задачу, где результат каждого шага случаен, но математическое ожидание системы ведёт себя жёстко и предсказуемо.

Задача 2.1: Игра Незнайки (ВсОШ)

Незнайка 2026 раз подкидывает волшебную монетку. Изначально вероятность выпадения орла $p_1 = 0.5$.

- Если выпадает орёл, вероятность орла в будущем падает на 0.1, и Незнайка выигрывает 1 тугрик.
- Если выпадает решка, вероятность орла растёт на 0.1, а выигрыш равен 0.

Сколько тугриков в среднем он выиграет за всю игру? (Гарантируется, что $p_k \in [0, 1]$).

РЕШЕНИЕ. Обозначим состояние монетки перед k-м броском через $X_k = 10 \cdot p_k$. Изначально $X_1 = 5$. Посчитаем условное математическое ожидание состояния на следующем шаге, зная, что сейчас $X_k = x$:

$$\mathbb{E}[X_{k+1} \mid X_k = x] = \underbrace{\left(\frac{x}{10}\right)}_{\mathbb{P}(\text{орёл})} \cdot (x-1) \;+\; \underbrace{\left(\frac{10-x}{10}\right)}_{\mathbb{P}(\text{решка})} \cdot (x+1)$$
$$= \frac{x^2 - x + 10x + 10 - x^2 - x}{10} = \frac{8x+10}{10} = 0.8x + 1.$$

(Заметим, что формула работает идеально даже на границах: при $x = 0$ матожидание равно 1, при $x = 10$ равно 9).
Используя свойство линейности, перейдём к безусловному матожиданию: $m_k = \mathbb{E}[X_k]$.
Получаем рекурренту: $m_{k+1} = 0.8m_k + 1$.
Так как $m_1 = 5$, проверяем следующий шаг: $m_2 = 0.8 \cdot 5 + 1 = 5$. По индукции $m_k = 5$ для любого k.

Значит, ожидаемая вероятность выпадения орла на любом шаге неизменна и равна 0.5. Так как выигрыш равен 1 только при выпадении орла, ожидаемый куш за 2026 бросков составит $2026 \cdot 0.5 = \mathbf{1013}$ тугриков. ■

3 Строгая теория: Мартингалы и Теорема Дуба

В задаче про Незнайку сохранялось безусловное ожидание. Но истинная мощь мартингалов раскрывается тогда, когда сохраняется условное ожидание — то есть когда локально, на каждом шаге, игра абсолютно честна.

Определение 3.1: Мартингал

Пусть $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ — последовательность случайных величин. Через $\mathcal{F}_n$ обозначается фильтрация — вся накопленная информация о процессе до шага n включительно. Процесс называется мартингалом, если:

1. $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ (математическое ожидание существует и конечно).
2. Значение M_n полностью определяется известной историей $\mathcal{F}_n$.
3. Свойство честной игры: $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$.

Смысл третьего пункта: «Даже зная всю историю процесса до текущей секунды, моё лучшее математическое предсказание капитала на завтра — это мой капитал сегодня».

Из определения по индукции следует, что $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0]$ для любого фиксированного момента n. Но в олимпиадных задачах игра почти всегда останавливается в случайный момент τ (достижение цели, банкротство, появление нужной строки). Сохранится ли инвариант?

Внимание: Ловушка бесконечного капитала (Стратегия Мартингейл)

Самая известная система игры в рулетку: ставь 1 рубль на красное; если проиграл — ставь 2; проиграл — ставь 4, и так до первой победы. Как только выигрываешь, забираешь чистую прибыль (1 рубль) и уходишь (это и есть момент остановки τ).
Каждая ставка честная (ожидание 0), значит ваш капитал M_n — мартингал. Очевидно, игра конечна: вероятность вечно проигрывать равна нулю ($\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$).
В момент остановки τ ваш баланс строго равен +1 рублю. То есть $M_\tau \equiv 1$, значит $\mathbb{E}[M_\tau] = 1$. Но изначально у вас было 0 рублей ($\mathbb{E}[M_0] = 0$). Мы математически доказали, что $\mathbf{1} = \mathbf{0}$! Где ошибка?
Разгадка: В этой стратегии возможный минус на балансе до выигрыша ничем не ограничен (игрок может уйти в бесконечные долги). Бездушная математика запрещает приравнивать матожидания для процессов, которые могут неограниченно падать вниз. Нам нужна теорема, которая защитит нас от «генерации денег из воздуха».

Теорема 3.1: Теорема Дуба об опциональной остановке

Пусть $\{M_n\}$ — мартингал, а τ — марковский момент остановки (решение об остановке не использует взгляд в будущее). Равенство $\mathbb{E}[\mathbf{M}_{\boldsymbol{\tau}}] = \mathbb{E}[\mathbf{M_0}]$ гарантированно выполняется, если выполнено хотя бы одно из условий регулярности:

1. Время игры строго ограничено ($\tau \leqslant C$).
2. Ожидаемое время конечно ($\mathbb{E}[\tau] < \infty$), а «прыжки» ограничены ($|M_{n+1} -$

$M_n| \leqslant K$).
3. Практическое: Значения мартингала ограничены вплоть до остановки ($|M_{n\wedge\tau}| \leqslant C$).

Олимпиадный инсайт: Как оформлять решение на чистовик

На школьных олимпиадах строгая проверка условий Теоремы Дуба почти никогда не требует сложных выкладок. Если процесс происходит на конечном графе или капитал ограничен (например, колеблется от 0 до N), смело пишите: «Так как состояния системы ограничены, и из любого состояния вероятность достичь конца за N шагов $\geqslant \varepsilon > 0$, игра завершится с вероятностью 1. Условия Теоремы об остановке выполнены.» Жюри поставит полный балл.

4 Пять видов мартингалов (Тяжелая артиллерия)

Существует 5 классов мартингалов, которые покрывают 99% вероятностных задач высшего уровня. Поймёте их — и СЛАУ вам больше не понадобятся.

4.1 Линейные мартингалы (Симметричные игры)

Задача 4.1: Турнир гладиаторов (ВсОШ по ИИ)

Гладиаторы армии Тимофея (сумма сил $S_T = 55$) и армии Максима ($S_M = 30$) сошлись в турнире. В каждом бою случайно выбираются два любых бойца (с силами x и y). Боец с силой x побеждает y с вероятностью $\frac{x}{x+y}$ и забирает его силу себе. Проигравший умирает. Найти вероятность победы армии Максима.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим суммарную силу армии Тимофея S_T. Найдём ожидаемое изменение её силы ΔS_T за один бой между $x \in T$ и $y \in M$:

$$\mathbb{E}[\Delta S_T \mid \mathcal{F}_n] = \underbrace{(+y)}_{\text{Тимофей забрал силу } y} \cdot \left(\frac{x}{x+y}\right) + \underbrace{(-x)}_{\text{Тимофей потерял бойца } x} \cdot \left(\frac{y}{x+y}\right) = \frac{xy - xy}{x+y} = 0.$$

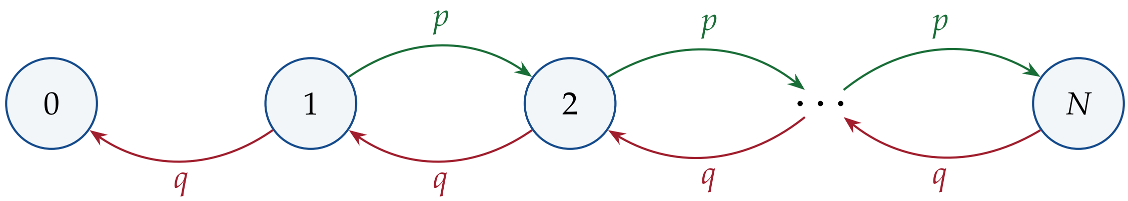
Поразительный факт! Неважно, по какому алгоритму генералы выбирают бойцов на арену. Для любых x и y матожидание изменения равно нулю. Процесс S_T — строгий мартингал.
Игра конечна (в каждом бою умирает 1 человек), состояния ограничены от 0 до 85. В момент окончания τ сила Тимофея равна 85 (вероятность P_T) или 0 (вероятность $1 - P_T$).
По Теореме Дуба:

$$\mathbb{E}[S_\tau] = S_0 \implies 85 \cdot P_T + 0 \cdot (1 - P_T) = 55.$$

Отсюда $P_T = 55/85 = 11/17$. Вероятность победы Максима равна **6/17**. ■

4.2 Экспоненциальные мартингалы (Асимметрия и Искривление)

Что делать, если игра нечестная? Например, игрок делает шаг $+1$ с вероятностью p и -1 с вероятностью q ($p \neq q$). В этом случае капитал X_n имеет тренд (он убывает или растет), и линейный мартингал ломается. Школьный метод требует составления жуткой рекурренты 2-го порядка. Олимпиадный метод — искривить метрику пространства.



Задача 4.2: Несправедливое разорение

У игрока $A = 10$ руб, он хочет достичь $N = 100$ руб. На каждом шаге он выигрывает 1 руб с вероятностью $p = 0.48$ и теряет с $q = 0.52$. Найти вероятность P_{win} того, что он доберётся до цели.

РЕШЕНИЕ. Магическим инвариантом для несимметричного блуждания является функция $M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}$. Проверим её условное матожидание:

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid X_n] = p \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n+1} + q \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n} \cdot \left[p\frac{q}{p} + q\frac{p}{q}\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n} (q+p) = M_n.$$

Экспонента идеально скомпенсировала дрейф! Применяем Теорему Дуба: $\mathbb{E}[M_\tau] = M_0$.

$$P_{win} \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^N + (1 - P_{win}) \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^0 = \left(\frac{q}{p}\right)^A.$$

Так как любое число в нулевой степени — это 1, получаем готовую формулу:

$$P_{win} = \frac{\mathbf{(q/p)^A - 1}}{\mathbf{(q/p)^N - 1}}.$$

Подставляем: $q/p = {}^{0.52}/_{0.48} \approx 1.083$. Вероятность победы ничтожна: $P_{win} \approx \frac{(1.083)^{10}-1}{(1.083)^{100}-1} \approx 0.0004$. ■

4.3 Квадратичные мартингалы (Поиск времени)

Линейные и экспоненциальные мартингалы находят вероятности исходов, но "схлопывают"время. Чтобы найти ожидаемое время $\mathbb{E}[\tau]$, нужен мартингал, который явно вычитает n.

Задача 4.3: Время разорения

Два игрока с капиталами A и B играют в честную орлянку со ставкой 1. Сколько бросков монеты в среднем продлится игра до разорения одного из них?

РЕШЕНИЕ. Пусть X_n — капитал первого игрока. Мы знаем, что X_n — линейный мартингал. А как ведёт себя его квадрат?

$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = \frac{1}{2}(X_n+1)^2 + \frac{1}{2}(X_n-1)^2 = X_n^2 + 1.$$

Квадрат капитала в среднем растёт строго на 1 каждую секунду. Следовательно, функция $M_n = X_n^2 - n$ обязана быть мартингалом! Проверим:

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}^2 - (n+1) \mid \mathcal{F}_n] = (X_n^2+1) - n - 1 = X_n^2 - n = M_n.$$

Применяем Теорему Дуба: $\mathbb{E}[M_\tau] = M_0 \implies \mathbb{E}[X_\tau^2 - \tau] = A^2 \implies \mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[X_\tau^2] - A^2$. В конце игры капитал X_τ равен либо $A+B$ (с вероятностью $\frac{A}{A+B}$), либо 0.

$$\mathbb{E}[X_\tau^2] = (A+B)^2 \cdot \frac{A}{A+B} + 0^2 \cdot \frac{B}{A+B} = A(A+B).$$

Подставляем в формулу: $\mathbb{E}[\tau] = A(A+B) - A^2 = \mathbf{AB}$. Время честной игры в точности равно произведению стартовых капиталов! ■

4.4 Сдвиговые мартингалы и Тождество Вальда

А что если мы суммируем не фиксированное число случайных величин, а случайное число? И при этом игра нечестная (ожидаемое смещение за 1 шаг $\mu \neq 0$)? Здесь работает сдвиговый мартингал $M_n = X_n - \mu \cdot n$.

Теорема 4.1: Тождество Вальда (Wald's Equation)

Пусть $Y_1, Y_2, \ldots$ — независимые одинаково распределённые величины с матожиданием $\mathbb{E}[Y]$. Пусть N — случайный момент остановки, причём $\mathbb{E}[N] < \infty$. Тогда математическое ожидание случайной суммы $S_N = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$ равно:

$$\mathbb{E}[\mathbf{S_N}] = \mathbb{E}[\mathbf{N}] \cdot \mathbb{E}[\mathbf{Y}]$$

Доказательство. Рассмотрим процесс $M_n = S_n - n\mathbb{E}[Y]$. Проверим мартингал:

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + Y_{n+1} - (n+1)\mathbb{E}[Y] \mid \mathcal{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[Y] - n\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y] = M_n.$$

По Теореме Дуба $\mathbb{E}[M_N] = M_0 = 0 \implies \mathbb{E}[S_N - N\mathbb{E}[Y]] = 0 \implies \mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y]$. □

Задача 4.4: Броски кубика (Парадокс остановки)

Мы бросаем стандартный кубик до тех пор, пока не выпадет шестёрка (включительно). Какова ожидаемая сумма всех выпавших очков за эту серию бросков?

РЕШЕНИЕ. Количество бросков $N \sim \mathrm{Geom}(1/6)$, значит $\mathbb{E}[N] = 6$. Матожидание одного броска (любого) равно $\mathbb{E}[Y] = 3.5$. По тождеству Вальда, матожидание суммы: $\mathbb{E}[S_N] = 6 \cdot 3.5 = \mathbf{21}$. ■

Внимание: Вопрос от отличника

«Но ведь последний бросок в этой серии всегда равен 6! Значит, его ожидание не 3.5, а 6. Разве мы можем просто умножить $\mathbb{E}[N]$ на безусловное $\mathbb{E}[Y] = 3.5$?»
Разгадка: Давайте посчитаем вручную. Сумма равна $(N-1)$ бросков без шестерок плюс последняя шестерка. $\mathbb{E}[N-1] = 5$. Ожидание броска при условии, что это не шестерка: $(1+2+3+4+5)/5 = 3$. Итого: $5 \cdot 3 + 6 = \mathbf{21}$. Математика Вальда абсолютно безупречна! Мартингал элегантно прячет зависимость последнего элемента внутрь случайности самой длины суммы.

4.5 Дробные мартингалы (Процессы с памятью)

Иногда инварианты работают даже там, где вероятности зависят от предыстории (памяти).

Задача 4.5: Урна Пойа (Pólya Urn)

В урне R_0 красных и B_0 синих шаров. На каждом шаге мы наугад достаём шар, и возвращаем его обратно, добавляя ещё c шаров такого же цвета. Какова ожидаемая доля красных шаров после N шагов?

РЕШЕНИЕ. Пусть $S_n = R_0 + B_0 + n \cdot c$ — детерминированное число шаров на шаге n. Пусть R_n — количество красных. Найдём математическое ожидание доли $M_n = {}^{R_n}/_{S_n}$ на следующем шаге:

$$\mathbb{E}[R_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \underbrace{M_n \cdot (R_n + c)}_{\text{добавили красные}} + \underbrace{(1 - M_n) \cdot R_n}_{\text{добавили синие}} = R_n + c \cdot M_n.$$

Переходим к доле:

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{R_n + c\left(\frac{R_n}{S_n}\right)}{S_n + c} = \frac{R_n\left(\frac{S_n + c}{S_n}\right)}{S_n + c} = \frac{R_n}{S_n} = M_n.$$

Доля M_n является строгим мартингалом! Следовательно, ожидаемая доля красных шаров на любом шаге, даже спустя миллион итераций, равна стартовой пропорции $\frac{\mathbf{R_0}}{\mathbf{R_0+B_0}}$. (Более того, по теореме сходимости, при $n \to \infty$ эта доля сходится к случайной величине, имеющей Бета-распределение). ■

5 Жемчужина: Метод Мартина-Лёфа (Трюк с Казино)

В олимпиадном программировании (задачи на строки/NLP/автоматы) составить СЛАУ для генерации длинной строки невозможно. На помощь приходит гениальный трюк (алгоритм Conway / ABR).

Задача 5.1: Обезьяна и АБРАКАДАБРА

Обезьяна равновероятно нажимает клавиши (33 буквы алфавита). Найти матожидание количества нажатий, через которое впервые напечатается слово АБРАКАДАБРА (длина 11).

РЕШЕНИЕ. Представим идеально честное казино, в которое перед каждым нажатием клавиши заходит новый Игрок. У Игрока есть ровно 1 рубль.

- Игрок ставит 1 рубль на первую букву «А». Не угадал — ушёл. Угадал (шанс 1/33) — казино выплачивает ему 33 рубля.
- Свой выигрыш Игрок ставит на вторую букву «Б». Угадал — получает 33^2.
- Так он продолжает, пока не пройдет всё слово, сорвав джекпот 33^{11}.

Поскольку игра честная, баланс казино M_n (сборы минус выплаты) является мартингалом. Пусть τ — момент, когда слово напечатано. По Теореме Дуба: $\mathbb{E}[M_\tau] = 0 \implies \mathbb{E}[\text{Сборы}] = \mathbb{E}[\text{Выплаты}]$.

В каждый из τ тактов заходил 1 игрок с 1 рублем. Казино собрало $\mathbb{E}[\tau]$ рублей! А кому казино выплачивает деньги в момент τ? Смотрим на конец строки: ... А Б Р А К А Д А Б Р А.

1. Игрок, зашедший 11 ходов назад, угадал всё слово! Ему платим 33^{11}.
2. Игрок, зашедший 4 хода назад, ставил на «А», «Б», «Р», «А». И они совпали! (Суффикс длины 4 совпадает с префиксом длины 4). Ему платим 33^4.
3. Игрок, зашедший на последнем такте, ставил на «А». И последняя буква — «А». Ему платим 33^1.

Суммируя долги, получаем точный ответ без решения матрицы 11×11:

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\tau}] = \mathbf{33^{11} + 33^4 + 33^1}.$$

Алгоритм «Казино»: Время генерации слова равно $\sum K^m$, где K — алфавит, а m — длины префиксов слова, которые одновременно являются его суффиксами. ∎

Олимпиадный инсайт: Парадокс Конвея (Игры Пенни)

Чего мы дождемся быстрее при бросках монеты: комбинации ОРО (Орел-Решка-Орел) или РОО (Решка-Орел-Орел)? Применим алгоритм Казино (алфавит $K = 2$).

Для ОРО: Слово совпадает само с собой по длине 3 (ОРО) и по длине 1 (О). $\mathbb{E}[\tau] = 2^3 + 2^1 = \mathbf{10}$ бросков.

Для РОО: Совпадает с собой только по длине 3 (префикс Р $\neq$ суффикс О). $\mathbb{E}[\tau] = 2^3 = \mathbf{8}$ бросков.

Абсолютно поразительно! Комбинация РОО выпадает в среднем быстрее, чем ОРО, хотя их вероятности совершенно одинаковы.

6 Шпаргалка Олимпиадника (Cheat Sheet)

Перед финалом ВсОШ или перечневой олимпиадой прогоняйте любую вероятностную задачу по этому сканеру:

Как выбрать правильный мартингал?

1. Найти вероятность победы (Симметричная игра $p = q$):
   Ищем классический линейный мартингал X_n (сумма ресурсов). Решаем: $X_{start} = P \cdot X_{win} + (1 - P) \cdot X_{loss}$.
2. Найти вероятность победы (Асимметричная игра $p \neq q$):
   Используем Экспоненциальный мартингал Муавра $(q/p)^{X_n}$. Он мгновенно линеаризует процесс.
3. Найти ожидаемое время игры (Симметричная игра):
   Если X_n меняется на ± 1, то $X_n^2 - n$ является мартингалом. Приравниваем $X_0^2 = \mathbb{E}[X_\tau^2] - \mathbb{E}[\tau]$.
4. Найти ожидаемое время (С дрейфом μ / Тождество Вальда):
   Если матожидание шага $\mu \neq 0$, используйте мартингал $X_n - \mu n$. Отсюда $\mathbb{E}[\tau] = (\mathbb{E}[X_\tau] - X_0)/\mu$.
5. Найти время генерации слова (Строки, NLP, Графы):
   Включаем логику «Казино». Ищем все перекрытия слова (префиксы, равные суффиксам). Ответ всегда имеет вид суммы степеней алфавита.

Удачи! Помните: умение находить строгий порядок внутри кажущегося случайным хаоса — абсолютный признак высшего математического мастерства.