

Algorithm PA2 report

李采蓉
心理五 b08207042

November 12, 2023

Data Structures and Algorithms

本題主要用到的資料結構為 vector，演算法為 dynamic programming。

Subproblems and Recurrence Formulae

根據Supowit (1987) 此篇論文以及張耀文教授在 2016 年的 dynamic programming 講義第 45、46 頁 (如下圖)，可以將問題拆分成三種情況。

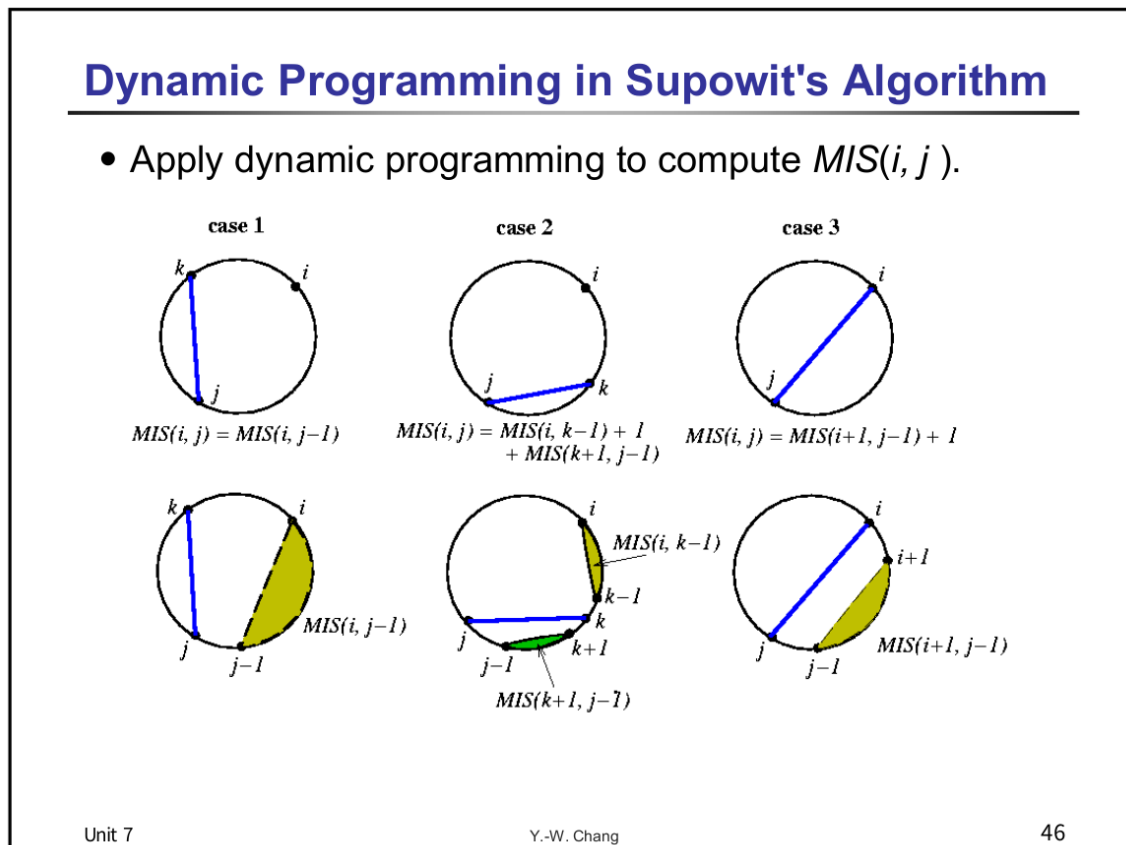


Figure 1: MIS in three cases

$j > i$ 恆成立

- Case 1: k 大於 j 或者小於 i ，造成 k, j 連線不在 i, j 連線所成範圍內，故 i, j 範圍內的不相交弦最大數量會與 $i, j-1$ 相同。
- Case 2: k 在 i 和 j 之間，故 i, j 範圍內不相交弦最大數量會是 $i, k-1$ 範圍內的最大數量加上 $k+1, j-1$ 範圍內的最大數量再加上 1 (k, j 為新的一條線)。
- Case 3: k 等於 i ，於是乎 i, j 範圍內不相交弦最大數量便為 $i+1, j-1$ 的最大數量加上 1 (k, j 為新的一條線)。

根據上述整理，可以歸納出下列遞迴式：

$$MIS(i, j) = \begin{cases} MIS(i, j-1) & Case1 \\ MIS(i, k-1) + 1 + MIS(k+1, j-1) & Case2 \\ MIS(i+1, j-1) + 1 & Case3 \end{cases}$$

Complexity Analysis

Space Complexity Analysis

此程式中總共包含一個一維陣列以及四個二維陣列。首先一維陣列 (data) 用來儲存 chord 的兩點，例如有一條弦的兩點為 0 和 4，則陣列中的儲存方式為 data[0]=4 和 data[4]=0。而另外有三個陣列 (MIS, dirt, table) 大小為 $n \times n$ ，用以紀錄不同兩點所形成範圍中，弦的多寡。最後一個二維陣列 (result) 是用來紀錄不相交弦分別為何，為一動態陣列，其大小為 $n \times 2$ 。

綜合以上，故空間複雜度約略為 $O(n^2)$

Time Complexity Analysis

此程式主要可以分成四個部分：

- 輸入：從檔案中抓取資料，這段的 for loop 由 0 至 $n/2$ ，所花時間為 $O(n)$ 。
- 找尋 MIS：這一段主要由一個 for loop 和一個 while loop 組成，外迴圈的範圍為變數 sub 由 1 到 $n-1$ ，內迴圈則為 j 由 sub 到 n ，時間為 $O(n^2)$
- 回推符合的 chord：負責計算回推過程的函式 trace 為一個遞迴式，其內容由 if-else 所組成，且在 dirt==1 和 dirt==3 (分別代表 j,k 連線在 i,j 範圍之外，以及 j,k 連線等於 i,j 連線) 僅會呼叫一次 trace，除非 dirt==2 (代表 k 介於 i,j 之間) 才會需要呼叫兩次 trace。
- 輸出：從 result 這個陣列中抓取不相交的弦回傳，所花時間為 $O(n)$ 。

綜合以上，時間複雜度略為 $O(n^2)$ 。

Verification

此次驗證出現問題，單就能掌握的部分結果來說，推斷是使用當大量矩陣進而導致所花 memory 過多，在資料量為 10000 時便會被強制終止。由上述空間複雜度統整來看，資料量為 10000 時大約會佔用超過 3×10^8 的空間。目前能掌握的數據如下，借用了 pal 中的 tm_usage.cpp 所得。

	Input Size	CPU time(ms)	Memory(KB)
12.in	12	0.231	6036
1000.in	1000	955.068	775440

光是 1000 筆資料的大小就能用到接近 800000KB，往後要修改的話需從三個 $n \times n$ 的陣列著手。同時單從兩筆大小不同的測資中很難推測上述分析的正確性，因此這邊不敢保證驗證成功。

References

Supowit, K. J. (1987). Finding a maximum planar subset of a set of nets in a channel. IEEE transactions on computer-aided design of integrated circuits and systems, 6(1), 93-94.