

Penerapan *Trapezoidal Rule* dan *Simpson's 1/3 Rule* Untuk Menghitung *Centroid*

Wesley Frederick Oh
2306202763

Teknik Komputer - Universitas Indonesia
Depok, Jawa Barat
pempeklg3@gmail.com

Abstrak—Perhitungan *centroid* (pusat gravitasi) merupakan salah satu aspek penting dalam analisis benda dua dimensi, baik dalam bidang fisika, teknik, maupun komputasi. Perhitungan ini umumnya dilakukan secara analitis dengan metode integrasi. Namun terkadang, karena bentuk benda yang rumit atau tidak beraturan, perhitungan analitis menjadi sulit atau tidak mungkin dilakukan. Untuk itu diperlukan integrasi secara numerik. Salah satu metodenya adalah integrasi Newton-Cotes dengan aturan trapesium (*trapezoidal rule*) dan aturan 1/3 Simpson (*Simpson's 1/3 rule*). Kedua metode ini diterapkan dalam bahasa C untuk menghitung *centroid* dari sebuah benda dua dimensi yang bentuknya bisa dideskripsikan dengan persamaan yang sulit diintegrasikan secara analitis. Hasil integrasi numerik dari kedua metode ini dibandingkan untuk melihat konvergensinya. Aturan 1/3 Simpson ternyata memberikan konvergensi yang lebih baik dibandingkan dengan aturan trapesium.

Kata Kunci—integrasi numerik, Newton-Cotes, *trapezoidal rule*, *Simpson's 1/3 rule*, *centroid*

I. PENDAHULUAN

Perhitungan pusat gravitasi (*center of gravity / centroid*) merupakan salah satu aspek penting dalam analisis benda dua dimensi, baik dalam bidang fisika, teknik, maupun komputasi. Pusat gravitasi merepresentasikan titik di mana berat benda terdistribusi secara merata, sehingga memahami lokasinya sangat diperlukan untuk mengevaluasi kestabilan, keseimbangan, dan dinamika benda tersebut. Untuk benda dengan bentuk tidak beraturan atau distribusi massa yang heterogen, perhitungan pusat gravitasi memerlukan pendekatan numerik karena sulit diselesaikan secara analitis.

Salah satu cara yang dapat digunakan adalah *numerical integration* dengan metode Newton-Cotes [2]), khususnya dengan menerapkan aturan trapesium (*multiple-application trapezoidal rule*) dan aturan 1/3 Simpson (*multiple-application Simpson's 1/3 rule*).

Tulisan ini akan membahas implementasi kedua aturan tersebut untuk sebuah contoh kasus dalam menghitung pusat gravitasi benda dua dimensi.

II. STUDI LITERATUR

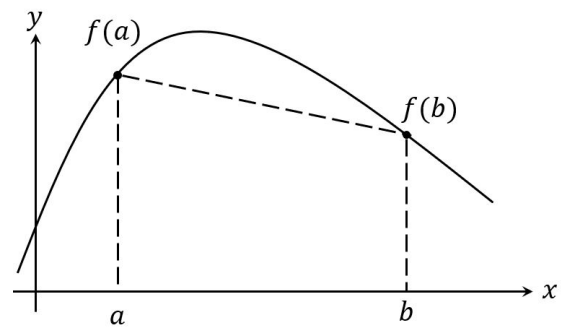
A. Aturan Trapezium

Dalam aturan trapesium, luas sebuah bidang di bawah kurva fungsi $f(x)$ antara dua titik $x = a$ dan $x = b$ diaproksimasi

dengan sebuah trapesium (Gambar 1), dengan luas yang bisa diaproksimasi sebagai:

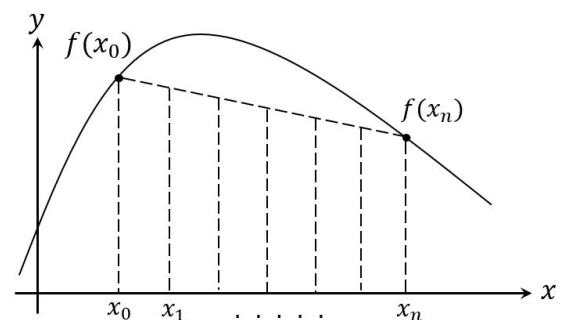
$$A = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

Untuk memperoleh hasil yang lebih akurat, interval dapat



Gambar 1: Menghitung luas di bawah kurva dengan aproksimasi trapesium.

dibagi menjadi n subinterval, lalu metode trapesium diterapkan pada setiap segmen (Gambar 2). Pendekatan ini dikenal



Gambar 2: Menghitung luas di bawah kurva dengan segmen sebanyak n .

sebagai aturan trapesium majemuk (*composite trapezoidal rule / multiple-application trapezoidal rule*) dan luas semua trapesium itu dinyatakan dengan rumus:

$$A = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

di mana $h = (b - a)/n$ dan $x_i = a + ih$. Metode ini memberikan hasil yang cukup akurat untuk fungsi yang kontinu dan halus, terutama jika nilai n cukup besar. Metode trapesium memiliki *error* sebesar:

$$E_t = -\frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3 \quad (1)$$

di mana ξ merupakan sebuah titik yang berada dalam interval $[a, b]$.

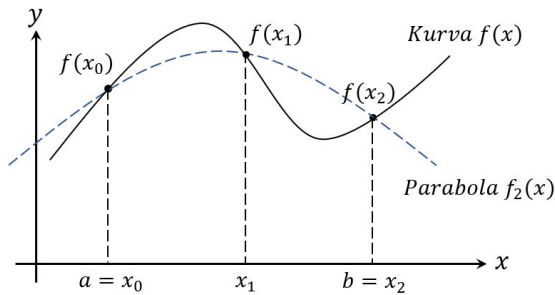
Persamaan ini menunjukkan bahwa jika fungsi yang diintegrasikan bersifat linier, hasil dari aturan trapesium akan tepat. Namun, untuk fungsi yang memiliki turunan orde kedua atau lebih tinggi (yaitu, memiliki kelengkungan), dapat terjadi kesalahan [2].

B. Aturan 1/3 Simpson

Aturan 1/3 Simpson adalah salah satu metode integrasi numerik yang digunakan untuk menghitung aproksimasi nilai integral dari suatu fungsi kontinu. Metode ini bekerja dengan membagi interval integrasi $[a, b]$ menjadi dua subinterval, lalu mengaproksimasi fungsi tersebut dengan sebuah polinomial kuadrat (parabola) yang melalui tiga titik: dua titik di ujung interval dan satu titik di tengah (Gambar 3), dengan aproksimasi sbb:

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx$$

Secara matematis, aturan 1/3 Simpson dirumuskan sebagai



Gambar 3: Integrasi dengan aturan 1/3 Simpson.

berikut:

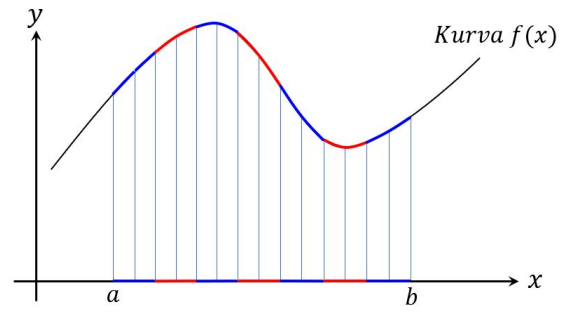
$$A \cong \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

dengan $h = (b - a)/2$. Pendekatan ini secara umum lebih akurat dibandingkan aturan trapesium karena mempertimbangkan kelengkungan fungsi.

Aturan ini disebut aturan "1/3" karena adanya faktor $h/3$ dalam rumusnya. Aturan Simpson ini dapat diperluas menjadi *multiple-application Simpson's 1/3 rule* dengan membagi interval menjadi bagian kecil yang lebih banyak dan menerapkan aturan 1/3 pada setiap dua subinterval (Gambar 4). Subinterval harus berjumlah genap.

$$A \cong (b-a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

Dengan jumlah segmen n , lebar tiap segmen menjadi $h =$



Gambar 4: Aturan 1/3 Simpson (*multiple-application*). Jumlah segmen harus genap.

$(b - a)/n$. Rumus integrasinya sbb:

$$A = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

Rumus ini disubstitusikan menjadi:

$$A \cong 2h \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h \frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} + \dots + 2h \frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}$$

Rumus di atas disederhanakan menjadi:

$$A \cong (b-a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

Aturan 1/3 Simpson memiliki *error* sebesar:

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \quad (2)$$

di mana ξ merupakan sebuah titik yang berada dalam interval $[a, b]$. Persamaan ini menunjukkan bahwa fungsi polinomial berderajat tiga bisa diaproksimasi dengan tepat dengan aturan 1/3 Simpson ini [2].

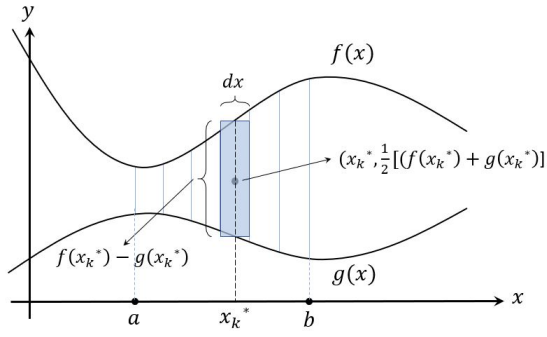
C. Pusat Gravitasi

Pusat gravitasi atau *center of gravity* dari suatu benda dua dimensi adalah titik di mana seluruh berat benda dapat dianggap terpusat. Untuk benda tipis yang memiliki ketebalan dan densitas massa yang seragam, pusat gravitasi berimpit dengan pusat luas atau *centroid* dari bidang tersebut. Titik ini penting untuk menentukan keseimbangan dan respons mekanis suatu sistem terhadap gaya luar.

Secara matematis, pusat gravitasi dari suatu daerah bidang dua dimensi A dinyatakan melalui koordinat (\bar{x}, \bar{y}) , yang dihitung menggunakan rumus integral berikut [1]:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_A x dA \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_A y dA$$

Jika daerah A dibatasi oleh dua fungsi $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ pada interval $x \in [a, b]$ (Gambar 5), maka integral dua dimensi tersebut dapat disederhanakan menjadi bentuk satu dimensi. Luas daerahnya dapat dihitung dengan rumus:



Gambar 5: Daerah kurva dibatasi di atas oleh $f(x)$ dan di bawah oleh $g(x)$.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (3)$$

Sedangkan *centroid* \bar{x} dinyatakan dengan persamaan:

$$\bar{x} = \frac{m_x}{A}$$

di mana:

$$m_x = \int_a^b x dA = \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx$$

sehingga:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx \quad (4)$$

Serupa dengan itu:

$$\bar{y} = \frac{m_y}{A}$$

di mana:

$$\begin{aligned} m_y &= \int_a^b y dA = \int_a^b \left[\frac{1}{2} [f(x) + g(x)] \right] [f(x) - g(x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx \end{aligned}$$

sehingga:

$$\bar{y} = \frac{1}{2A} \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx \quad (5)$$

m_x dan m_y merupakan momen-massa x dan y dari benda tersebut.

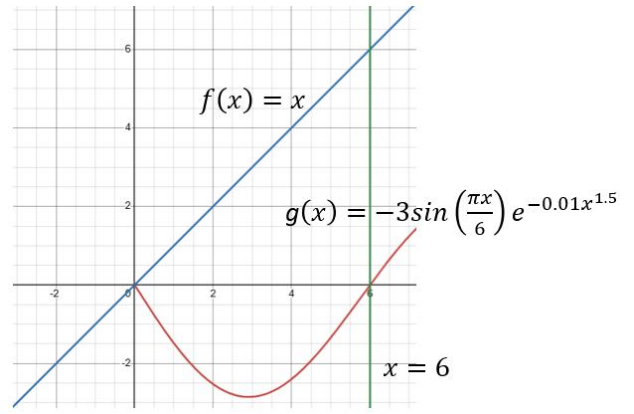
III. APLIKASI, DATA DAN METODE

A. Aplikasi

Sebuah mesin mekanik memiliki komponen berbentuk benda tipis homogen yang bisa dianggap sebagai benda dua dimensi. Komponen ini bisa dideskripsikan dengan persamaan-persamaan pada sumbu xy sbb (Gambar 6):

- Batas atas $f(x) = x$
- Batas bawah $g(x) = -3\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)e^{-0.01x^2}$
- Batas kiri $x = 0$
- Batas kanan $x = 6$

Komponen ini merupakan sebuah komponen yang bisa berotasi bebas dalam bidang dua dimensi dan hendak diletakkan di



Gambar 6: Ilustrasi objek, digambar dengan aplikasi Desmos (Desmos, 2025).

atas sebuah poros penyangga. Supaya gerakannya stabil, poros penyangga itu harus menembus titik pusat gravitasi (*centroid*) komponen tersebut. Untuk itu, koordinat (\bar{x}, \bar{y}) dari *centroid*-nya harus dihitung. Diperlukan tiga perhitungan sbb:

- Luas A (sesuai rumus 3):

$$A = \int_0^6 \left[x - \left(-3\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)e^{-0.01x^2} \right) \right] dx$$

- *Centroid*- x (sesuai rumus 4):

$$\bar{x} = \frac{\int_0^6 x \left[x - \left(-3\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)e^{-0.01x^2} \right) \right] dx}{A}$$

- *Centroid*- y (sesuai rumus 5):

$$\bar{y} = \frac{\int_0^6 \left[x^2 - \left(-3\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)e^{-0.01x^2} \right)^2 \right] dx}{2A}$$

Fungsi $g(x)$ dan fungsi-fungsi di atas sulit diintegrasikan secara analitis. Karena itu, semua perhitungan integrasi ini harus dilakukan secara numerik.

B. Data

Dalam aplikasi ini tidak diperlukan data eksternal, namun hanya dibutuhkan input terhadap program bahasa C untuk memasukkan jumlah segmen yang dihendaki:

- jumlah segmen awal (n_{start})
- jumlah step (n_{step})
- jumlah segmen akhir (n_{finish})

C. Metode

Program akan menghitung A , \bar{x} dan \bar{y} dengan jumlah segmen n_i , yaitu: $n_1 = n_{start}, n_2 = n_{start} + n_{step}, n_3 = n_{start} + 2n_{step}, \dots, n_{finish}$.

Nilai A , \bar{x} dan \bar{y} dihitung berdasarkan jumlah segmen dari $n = 2 \dots 20$. Untuk tiap iterasi, deviasi nilai A untuk jumlah segmen n_i juga dihitung terhadap jumlah segmen n_{i-1} , sbb:

$$\Delta A = \frac{A_{n_i} - A_{n_{i-1}}}{A_{n_i}}$$

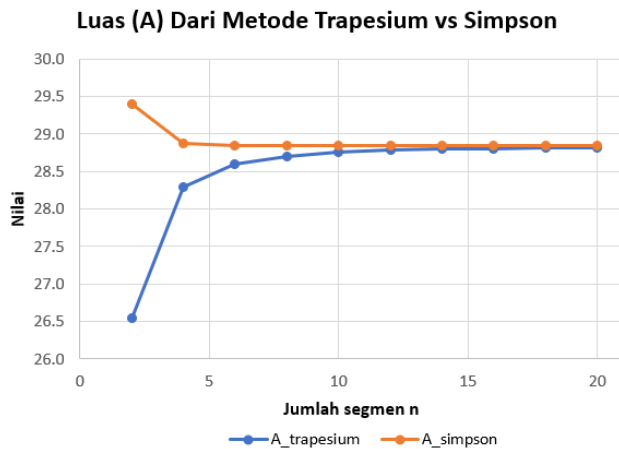
Dalam berbagai literatur, nilai seperti ΔA ini sering disebut sebagai *error* relatif dengan simbol ε_A [2].

IV. DISKUSI DAN ANALISIS

Nilai A untuk kedua aturan, termasuk deviasi masing-masing terlampir dalam Tabel I. Terlihat bahwa aturan Simpson memiliki konvergensi yang lebih baik dibandingkan aturan trapesium. Misalnya, dengan jumlah segmen $n = 10$, aturan trapesium memiliki deviasi untuk luas $\Delta A_{trapesium}$ sebesar 0.001728877 , sementara untuk aturan 1/3 Simpson, deviasinya $\Delta A_{Simpson} = -3.22113 \times 10^{-5}$. Dan untuk $n = 20$, $\Delta A_{trapesium} = 0.000178885$, dan $\Delta A_{Simpson} = -7.4089 \times 10^{-7}$. Nilai A dan ΔA untuk $n = 2$ sampai $n = 20$ terlihat pada Gambar 7 dan 8.

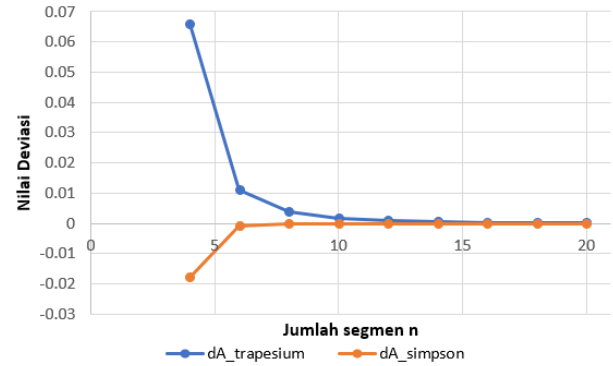
Tabel I: Konvergensi nilai A dan ΔA

n	$A_{trapesium}$	$\Delta A_{trapesium}$	$A_{Simpson}$	$\Delta A_{Simpson}$
2	26.54428854	0	29.39238472	0
4	28.28847965	0.065708716	28.86987669	-0.017776987
6	28.59844864	0.010957428	28.84863309	-0.00073584
8	28.70601976	0.003761432	28.84519979	-0.000119011
10	28.75564895	0.001728877	28.84427065	-3.22113×10^{-5}
12	28.78256514	0.000936031	28.84393731	-1.15565×10^{-5}
14	28.79878008	0.000563360	28.84379413	-4.96395×10^{-6}
16	28.80929825	0.000365230	28.84372442	-2.41681×10^{-6}
18	28.81650676	0.000250215	28.84368717	-1.29144×10^{-6}
20	28.82166159	0.000178885	28.84366580	-7.4089×10^{-7}



Gambar 7: Konvergensi nilai A .

**Deviasi Nilai Luas (A)
Metode Trapesim & Simpson**

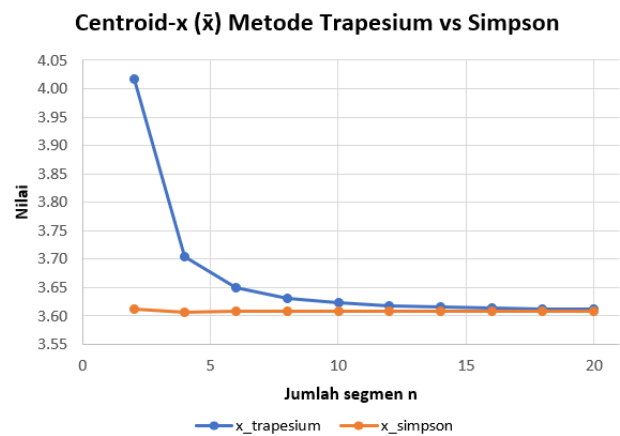


Gambar 8: Konvergensi nilai ΔA .

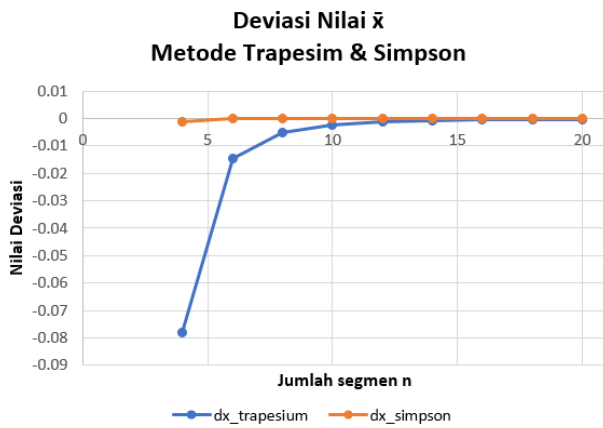
Nilai \bar{x} dan $\Delta \bar{x}$ untuk berbagai jumlah segmen n bisa dilihat pada Tabel II. Sama dengan A , nilai \bar{x} dari aturan Simpson juga mengalami konvergensi yang lebih cepat dibandingkan aturan trapesium (Gambar 9 dan 10). Misalnya, dengan jumlah segmen $n = 10$, $\Delta \bar{x}_{Simpson}$ memiliki ordo 10^{-7} , sementara $\Delta \bar{x}_{trapesium}$ baru memiliki ordo 10^{-4} .

Tabel II: Konvergensi nilai \bar{x} dan $\Delta \bar{x}$.

n	$\bar{x}_{trapesium}$	$\Delta \bar{x}_{trapesium}$	$\bar{x}_{Simpson}$	$\Delta \bar{x}_{Simpson}$
2	4.01716797	0	3.61240352	0
4	3.70354897	-0.078069676	3.60743040	-0.001376679
6	3.64986799	-0.014494470	3.60771746	7.95746×10^{-5}
8	3.63137174	-0.005067649	3.60777701	1.65063×10^{-5}
10	3.62286095	-0.002343685	3.60779494	4.96982×10^{-6}
12	3.61825109	-0.001272436	3.60780182	1.90698×10^{-6}
14	3.61547601	-0.000766967	3.60780493	8.62021×10^{-7}
16	3.61367670	-0.000497669	3.60780651	4.37939×10^{-7}
18	3.61244392	-0.000341143	3.60780738	2.41144×10^{-7}
20	3.61156254	-0.000243984	3.60780789	1.41360×10^{-7}



Gambar 9: Konvergensi nilai \bar{x} .

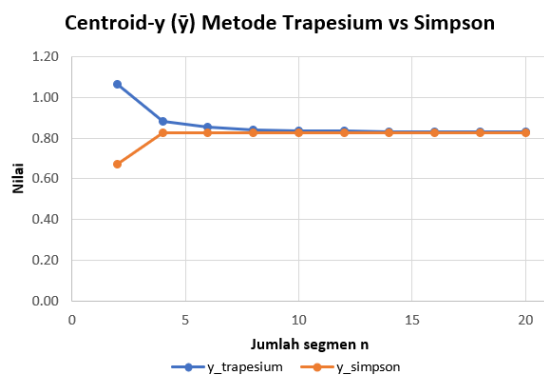


Gambar 10: Konvergensi nilai \bar{x} .

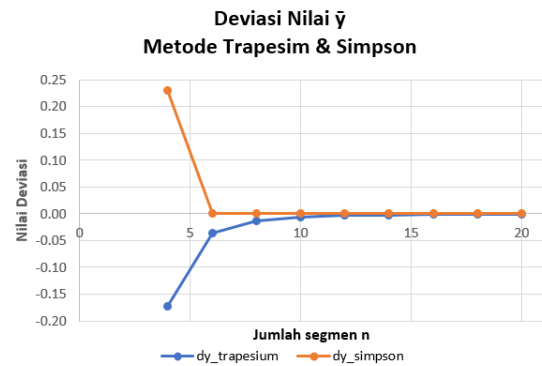
Demikian pula, nilai \bar{y} dan $\Delta\bar{y}$ untuk berbagai jumlah segmen n dapat dilihat pada Tabel III. Sama seperti A dan \bar{x} , nilai \bar{y} dari aturan Simpson juga mengalami konvergensi yang lebih cepat dibandingkan dengan aturan trapesium (Gambar 11 dan 12). Misalnya, dengan jumlah segmen $n = 10$, $\Delta\bar{y}_{\text{Simpson}}$ memiliki ordo 10^{-5} , sedangkan $\Delta\bar{y}_{\text{trapesium}}$ baru mencapai ordo 10^{-3} .

Tabel III: Nilai \bar{y} dan $\Delta\bar{y}$

n	$\bar{y}_{\text{trapesium}}$	$\Delta\bar{y}_{\text{trapesium}}$	\bar{y}_{Simpson}	$\Delta\bar{y}_{\text{Simpson}}$
2	1.06736793	0	0.67285103	0
4	0.88373757	-0.172040357	0.82745818	0.229779168
6	0.85237146	-0.035492561	0.82773116	0.000329902
8	0.84156816	-0.012674404	0.82778299	6.26169×10^{-5}
10	0.83659774	-0.005906141	0.82779749	1.75167×10^{-5}
12	0.83390563	-0.003217926	0.82780275	6.35421×10^{-6}
14	0.83228504	-0.001943373	0.82780501	2.73012×10^{-6}
16	0.83123429	-0.001262488	0.82780611	1.32882×10^{-6}
18	0.83051438	-0.000866074	0.82780670	7.12727×10^{-7}
20	0.82999968	-0.000619736	0.82780703	3.98644×10^{-7}



Gambar 11: Konvergensi nilai \bar{y} .



Gambar 12: Konvergensi nilai $\Delta\bar{y}$.

Dengan jumlah segmen $n = 20$, menurut aturan trapesium benda memiliki *centroid* $(\bar{x}, \bar{y}) = (3.61156254, 0.82999968)$, sementara dengan aturan 1/3 Simpson, *centroid*-nya adalah $(3.60780789, 0.82780703)$.

V. KESIMPULAN

Hasil integrasi numerik dari A , \bar{x} , dan \bar{y} menunjukkan bahwa secara umum aturan 1/3 Simpson memiliki performa yang lebih baik dibandingkan aturan trapesium. Dengan aturan 1/3 Simpson, aproksimasi terhadap nilai akhir bisa dicapai lebih cepat. Penyebabnya adalah karena aturan 1/3 Simpson menggunakan parabola untuk mendekati fungsi, bukan garis lurus seperti aturan trapesium, sehingga lebih cocok untuk fungsi dengan perubahan kelengkungan karena menangkap bentuk kurva lebih alami. *Error* relatif dari aturan 1/3 Simpson (Rumus 2) lebih kecil dibandingkan dengan *error* relatif dari aturan trapesium (Rumus 1).

Namun kedua pendekatan ini sesungguhnya cukup baik dan memiliki algoritma yang cukup sederhana. Dengan jumlah segmen n yang cukup, keduanya bisa konvergen ke angka yang relatif mirip. Ini menjadi kekuatan dari kedua aturan tersebut.

Sebagai saran pengembangan, konvergensi serta deviasi (*error* relatif) dari kedua metode ini bisa dibandingkan dengan metode integrasi numerik lainnya, seperti metode *Romberg integration* dan *adaptive quadrature* [2].

VI. TAUTAN PENGUMPULAN TUGAS

Berkas yang digunakan dalam tugas ini bisa diunduh dari internet, sbb:

- Program dalam bahasa C: http://github.com/Wesley_Tolong_Isi
- Video Youtube: https://www.youtube.com/Wesley_Tolong_Isi

DAFTAR PUSTAKA

- [1] A. Anton, I. Bivens, dan S. Davis, *Calculus: Early Transcendentals*, 10th ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2012.
- [2] S. C. Chapra, *Numerical Methods for Engineers*, 8th ed. New York, NY: McGraw-Hill, 2021.
- [3] Desmos, “*Desmos Calculator*,” [Online]. <https://www.desmos.com/calculator>