**### 01.行列式**

**#### 1.1 n阶行列式**

**\* 排列：由自然数1，2，···，n组成的一个有序数组称为一个n阶排列，记为j1,j2,…,jn.**

**\* 按数字的自然顺序由小到大的阶排列称为标准排列或自然排列.**

**\* 逆序和逆序数:在一个排列中，若一个较大的数排在一个较小的数的前面，则称这两个数构成一个逆序,一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数.用 t(j1,j2,…,jn)表示排列j1,j2,…,jn的逆序数**

**\* 逆序数是偶数的排列称为偶排列，逆序数是奇数的排列称为奇排列.**

**\* t(j1,j2,…,jn) =t(j1) +t(j2) + …+t(jn-1)**

**\* 对换: 把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到一个新的排列，这种变换称为排列的一个对换.**

**\* 一次对换改变排列奇偶性**

**\* 任何一个n阶排列都可以通过对换化成标准排列,并且所作对换的次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同.**

**\* 二阶行列式**

**𝐷==**

**，**

**其中数*aij*称为行列式的元素**

**\* 主对角线，副对角线**

**\***

**\* 三阶行列式**

**𝐷==−**

**，，**

**\* n阶行列式**

**由*n*2个元素排成 *n*行*n*列,以**

**#### 1.2 行列式的性质**

**\* 性质1 行列式与它的转置行列式相等,即*D*=*DT .***

**\* 性质 2 如果行列式某一行(列)元素有公因数 k, 则 k 可以提到行列式符号外边,即**

**\* 推论1 如果行列式中某一行(列)元素全为零, 那么行列式等于零**

**\* 性质3 如果行列式中两行（列）互换，那么行列式只改变一个符号,**

**\* 推论2 如果行列式中有两行(列)相同, 则行列式的值为零.**

**\* 推论3 如果行列式中两行（列）的对应元素成比例，那么行列式值为 0．**

**\* 性质4如果行列式某行(列)的各元素都可以写成两数之和，例如aij=bij+cij(i,j=1,2,…,n),则此行列式等于两个行列式的和**

**\* 性质5 如果将行列式中某行（列）的各元素同乘一数 *k*后，加到另一行（列）的各对应元素上，则行列式的值不变**

**\* 对称行列式：*aij*=*aji*(*i*,*j*=1,2,…,n) ,则称 D为对称行列式**

*nn*

*n*

*n*

*n*

*n*

*a*

*a*

*a*

*a*

*a*

*a*

*a*

*a*

*a*

*D*













2

1

2

22

21

1

12

11



**\* 反对称行列式：*aij*=-*aji*(*i,j*=1,2,…,n) ,则称D为反对称行列式.由定义易知,在反对称行列式中, *aii*=0**

**\* 奇数阶反对称行列式等于0.**

**#### 1.3 行列式的展开与计算**

**\* 余子式：在*n*阶行列式 *D*=|*aij*|*n*中，划掉元素 *aij*所在的第 *i*行和第 *j*列后,留下的元素按照原来的顺序组成的 *n-*1阶行列式称为元素 *aij*的余子式,记为 *Mij*.称**

**\* 代数余子式： ,称Aij为元素 *aij*的代数余子式**

**\* 定理: n阶行列式 D=|*aij*|*n*等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和**

**𝐷=, (𝑖=1**

**\* 定理:n阶行列式D=|*aij*|*n*中某一行(列)的各个元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于0.即**

**\* 递推法**

**\* 数学归纳法**

**\* 范德蒙行列式**

**\* 拉普拉斯(Laplace)定理**

**𝐷=**

**#### 1.4克莱姆（Cramer）法则**

**\* 系数行列式**

**\* (克莱姆(Cramer)法则) 如果线性方程组的系数行列式 D≠0,则方程组有唯一解**

**\* 当线性方程组右端的常数项 *b*1,*b*2,…,*bn*不全为零时，称为非齐次线性方程组；**

**\* 当*b*1,*b*2,…,*bn*全为零时，称为齐次线性方程组.**

**\* 显然齐次线性方程组总是有解的, 因为*x*1=0,*x*2=0,…,*xn*=0就是它的一个解, 称为零解. 如果齐次线性方程组的解 *x*1,*x*2,…,*xn*，不全为零, 则称为非零解.**

**\* 若齐次线性方程组的系数行列式D≠0 ,则它只有唯一的零解.**

**\* 若齐次线性方程组有非零解，则系数行列式 *D*=0.**

**#### 1.5 数域**

**\* 设P是由一些数组成的集合,包含0和1.如果P中任意两个数的和、差、积、商（除数不等于零）仍在*P*中,那么我们称*P*是一个数域.**

**\* 例如,全体有理数组成的集合*Q*,全体实数组成的集合*R*,全体复数组成的集合*C*,都是数域,分别称为有理数域、实数域和复数域,它们之间的关系是: *Q* ⊂*R*⊂*C*.显然全体整数组成的集合就不是数域.**

**\* 设P为任何一个数域，则*Q*⊆*P .即有理数域是所有的数域中最小的一个.***

**### 02.矩阵**

**#### 2.1 矩阵的概念和分类**

**\* 数域 *P* 上*m*×*n*个数 *aij*(*i*=1,2,…,*m*; *j*=1,2,…,*n*)排成的*m*行*n*列数表称为*P*上的一个m行n列矩阵,简记为(*aij*) *m×n*或(*aij*).其中*aij* (*i*=1,2,…,*m*; *j*=1,2,…,*n*)称为这个矩阵中第*i*行、第*j*列的元素.**

**\* 当*P*是实数域时,称矩阵(2.1.1)为实矩阵；当*P*是复数域时,称(2.1.1)为复矩阵.**

**\* 矩阵和行列式的区别：矩阵和行列式是两个完全不同的概念,行列式表示一个数,而矩阵则是由*m*×*n*个数所排成的一个数表.**

**\* 矩阵的分类**

**\* 行矩阵，列矩阵**

**\* 零矩阵：所有元素都为零的*m*×*n*阶矩阵**

**\* *n*阶方阵：在*m*×*n*矩阵*A*=(*aij*)中, 当*m*=*n*时,称为n阶方阵,简记为(*aij*)*n*.，可定义行列式，矩阵*A*的行列式,记为|*A*|.**

**\* 单位矩阵E、对角形矩阵Λ = diag、数量矩阵**

**\* 上(下)三角形矩阵**

**\* 稀疏矩阵和稠密矩阵**

**\* 对称矩阵和反对称矩阵**

**#### 2.2 矩阵的运算**

**\* 矩阵的加法和数乘（线性运算）**

**\* 设*A*=(*aij*)*m*×*n*, *B*=(*bij*) *m*×*n*为数域 *P* 上的两个同型矩阵，称矩阵 (*aij*+*bij*) *m*×*n*为矩阵*A*与*B*的和,记作𝐴+𝐵=(**

**\* 设*A*=(*aij*)*m*×*n*为数域*P*上的矩阵,*k*∈*P*.数*k*与矩阵*A*的每个元素相乘后得到的矩阵(*kaij*)*m*×*n*称为数*k*与矩阵*A*的数量乘积,简称为数乘,记作𝑘𝐴=𝐴𝑘=(𝑘**

**\* 若矩阵*A*=(*aij*)*m*×*n*,则称矩阵 (*-aij*)*m*×*n*为矩阵*A*的负矩阵,记为*-A*.**

**\* 满足的运算律**

**\* (1) 加法交换律 *A*+*B*=*B*+*A*;**

**\* (2) 加法结合律 (*A*+*B*)+*C*=*A*+(*B*+*C*);**

**\* (3) *A*+*O*=*O*+*A*=*A*,这里*O*是与*A*同型的零矩阵;**

**\* (4) *A*+(-*A*)=(-*A*)+*A*=*O*；**

**\* (5) *k*(*A*+*B*)=*kA*+*kB*；**

**\* (6) (*k*+*l*)*A*=*kA*+*lA*；**

**\* (7) (*kl*)*A*=*k*(*lA*)=*l*(*kA*)；**

**\* (8) *1A*=*A*,*0A*=*O*.**

**\* 矩阵的乘法**

**\* 设*A*=(*aij*)*m*×*k*,*B*=(*bij*)*k*×*n*, *C*=(*Cij*)*m*×*n*均为数域*P*上的矩阵,其中,称矩阵*C*是*A*与*B*的乘积,记作*C=AB*.**

**\* 矩阵乘法不满足交换律**

**\* 矩阵和方程组的关系：𝐴𝑋=𝑏 A系数矩阵**

**\* 矩阵乘法的运算律**

**\* (1) 结合律 (*AB*)*C*=*A*(*BC*)；**

**\* (2) 分配律 *A*(*B*+*C*)=*AB*+*AC*，**

**\* (3) *k*(*AB*)=(*kA*)*B*=*A*(*kB*),*k*为任意常数.**

**\* 矩阵的幂**

**\* 设*A*是*n*阶矩阵,*k*为正整数,定义*k*个*A*的连乘积为*A*的*k*次幂,记作*Ak*,即，这里规定*A*0=*E*.**

**\* ，(**

**\* 矩阵多项式**

**\* *A*是一个*n*阶方阵,*E*为*n*阶单位阵,称 𝑓(𝐴)=为方阵*A*的多项式**

**\* 方阵**

***\* A*、*B*均为*n*阶方阵,*k*为常数,则**

**\* (1) |*kA*|=*kn*|*A*|；**

**\* (2) |*AB*|=|*A*||*B*|.**

**\* 设*A*1,*A*2,…,*Am*是*m*个*n*阶方阵,则**

**\* 矩阵的转置**

**\* *设 m×n矩阵，将矩阵A的行列互换,而不改变其先后次序得到的n×m矩阵，称为矩阵A的转置矩阵,记为AT(或A′).***

***\* 矩阵的转置满足如下运算规律:***

***\* (1) (AT)T=A；***

***\* (2) (A+B)T=AT+BT；***

***\* (3) (kA)T=kAT (k为任意常数)；***

***\* (4) |AT|=|A|（A为方阵）***

***\* (5) (AB)T=BTAT.***

***\* 对称矩阵和反对称矩阵***

***\* 设A=(aij)是n阶方阵,如果AT=A,即aij=aji(i,j=1,2,…,n)，则称A为对称矩阵;如果 AT=-A,即aij=-aji(i,j=1,2,…,n)，则称A为反对称矩阵.显然在反对称矩阵中,主对角线上的元素均为零.***

***\* 对称矩阵的和、数量乘积仍为对称矩阵, 反对称矩阵的和、数量乘积仍为反对称矩阵.***

***#### 2.3逆矩阵***

***\* 设A是n阶方阵,若有一个n阶方阵B,使得AB=BA=E ，则B称为A的逆矩阵,A称为可逆矩阵,或非奇异矩阵.***

***\* 可逆矩阵一定是方阵, 并且它的逆矩阵亦为同阶方阵***

***\* 若A是一个n阶可逆矩阵, 则它的逆矩阵是唯一的.***

***\* 设A与B都是n阶方阵,若AB=E, 则A, B都可逆,并且 A-1=B, B-1=A.***

***\* 设A=(aij)n×n,Aij为的行列式|A|中元素aij的代数余子式,称A\*= 为矩阵A的伴随矩阵.***

***\* 𝐴𝐴***

***\****

***\* n阶方阵A可逆的充分必要条件是|A|≠0***

***\* 可逆的性质***

***\* 若A可逆,则A-1可逆,且(A-1)-1=A.***

***\* 若n阶矩阵A,B都可逆, 则AB可逆,且(AB)-1=B-1A-1.***

***\* 设A1,A2,…,Am均为n阶可逆矩阵,则A1A2…Am也可逆,并且(***

***\* 若A可逆, 则|A-1|=|A|-1.***

***\* 若A可逆, 则(AT) -1=(A-1)T.***

***\* 若A可逆,数k≠0,则 (𝑘𝐴***

***\* 若A可逆,且AB=O,则B=O.***

***\* 若A可逆,且AB=AC,则B=C.***

***\* 正交矩阵***

***\* 设A为实数域R上的方阵,如果它满足AAT=ATA=E,则称A为正交矩阵***

***\* 实数域R上的方阵A为正交矩阵的充分必要条件是A-1=AT.***

***\* 正交矩阵的性质***

***\* 若A为正交矩阵,则|A|=1或|A|=-1；***

***\* 正交矩阵的逆矩阵及转置矩阵仍为正交矩阵；***

***\* 若A、B是同阶正交矩阵,则AB也是正交矩阵;***

***\* 正交矩阵的每行(列)元素的平方和等于1, 不同两行(列)的对应元素乘积之和等于0.***

***#### 2.5初等变换和初等矩阵***

***#### 2.5.1矩阵的初等变换***

***\* 初等变换：***

***\* (1)互换矩阵A的第 i行与第 j行（或第 i列与第 j列）的位置，记为 ri↔rj(或ci↔cj );***

***\* (2)用常数 k≠0去乘矩阵 A的第 i行(或第 j列)，记为kri(或 kcj );***

***\* （3)将矩阵 A的第 j行（或第 j列）各元素的 k倍加到第 i行(或第 i列)的对应元素上去，记为 ri+krj(或ci+kcj );***

***这三种初等变换分别简称为互换、倍乘、倍加.矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.***

***\* 等价：如果矩阵A经过有限次初等变换化为矩阵 B,则称 A与 B等价， 记为 A≌B ，或 A→B.***

***\* 等价的性质***

***\* 自反性：A≌A ；***

***\* 对称性：若 A≌B, 则 A≌B;***

***\* 传递性： 若A≌B, B≌C, 则A≌C .***

***\* 阶梯形矩阵和最简阶梯矩阵，标准型***

***\* 如果矩阵A满足下列条件：(1) 若有零行，则零行全在矩阵A的下方； (2) A的各非零行的第一个非零元素的列序数小于下一行中第一个非零元素的列序数；则称 A为行阶梯形矩阵，或阶梯形矩阵.***

***\* 还满足条件：(3) 各非零行的第一个非零元素均为1，且所在列的其它元素都为零，则称 A为简化阶梯形矩阵.***

***\* 任何非零矩阵都可以通过初等行变换化为阶梯形.***

***\* 任意非零矩阵A=(aij)m×n都与它的标准形等价,即存在矩阵 ，使𝐴≅其中Er为 r阶单位矩阵,1≤r≤min {m,n}.***

***#### 2.5.2 初等矩阵***

***\* 由单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.***

***\* (1)互换E的第i行（列）与第 j 行（列），记为 𝐸(𝑖 互换***

***\* (2) 用数k≠0乘 E的第i行(列)，记 倍乘***

***\* (3) 用数k乘 E的第j行(i列)加到第i行(j列)上，记为*** ***倍加***

***\* 初等矩阵的性质***

***\* (1) 初等矩阵的转置矩阵仍为同类型的初等矩阵；***

***\* (2) 初等矩阵都是可逆矩阵；***

***\* (3) 初等矩阵的逆矩阵仍为初等矩阵，且，***

***，***

***\* 设A是一个 m×n矩阵, 对 A作一次初等行变换，相当于在 A的左边乘以相应的 m阶初等矩阵；对 A作一次初等列变换，相当于在 A的右边乘以相应的 n阶初等矩阵.***

***\* m×n矩阵A与B等价⇔有m阶初等矩阵P1,P2,…,Ps与n阶初等矩阵Q1,Q2,…,Q t ,使得***

***\* m×n矩阵A与B等价⇔存在m阶可逆矩阵P与n阶可逆矩阵 Q ,使得𝑃𝐴𝑄=𝐵***

***\* 对于任意非零m×n矩阵A，必存在m阶可逆矩阵 P与 n阶可逆矩阵Q, 使得 𝑃𝐴𝑄=***

***\* 若A为n阶可逆矩阵，则A≌ E***

***\* n阶矩阵 A可逆的充分必要条件是它可表示成有限个初等矩阵的乘积***

***\* 求逆矩阵 (𝐴⋮𝐸)***

***#### 2.5.3 分块矩阵的初等变换***

***E =***

***\* (1)分块互换初等矩阵***

***,***

***\* (2) 分块倍乘初等矩阵***

***,***

***\* 3) 分块倍加初等矩阵***

***,***

***\* 设A为m×n矩阵， B为n×m矩阵，证明***

***### 2.4分块矩阵***

***#### 2.4.3 准对角形矩阵***

***### 2.6 矩阵的秩***

**\* 若在*m*×*n*矩阵*A*中,有一个*r*阶子式不为零,而所有的*r*+1阶子式(若存在的话)都为零,则称*r*为矩阵*A*的秩,记为*R*(*A*)*=r*.**

**\* 零矩阵的秩规定为零.**

**\* 在矩阵*A*中,若存在一个*r*阶子式不为零,则*R*(*A*)≥*r*,若所有的*r*+1阶子式都为零,则*R*(*A*)≤*r*.**

**\* 𝑅(𝐴)≤ ， 𝑅( ， 𝑅(𝑘𝐴)=𝑅(𝐴)(𝑘≠0)**

**\* *n*阶方阵*A*的秩为*n*的充分必要条件是*A*为可逆矩阵.**

**\* 初等变换不改变矩阵的秩.**

**\* 两个同型矩阵*A*与*B*等价的充分必要条件是*R*(*A*)=*R*(*B*).**

**\* 设*A*为*m*×*n*矩阵,*P*和*Q*分别为*m*阶与*n*阶可逆矩阵,则 𝑅(𝐴)=𝑅(𝑃𝐴)=𝑅(𝐴𝑄)=𝑅(𝑃𝐴𝑄)**

**\* *R*(*A*+*B*) ≤ *R*(*A*)+*R*(*B*).**

**\* *R*(*AB*) ≤ min{*R*(*A*)，*R*(*B*)};**

**\* *R*(*A*) + *R*(*B*)-*n* ≤ *R*(*AB*).**