ES. : RISOLVERE LA RIC. LINEARE A COEFF. COSTANTI

$$f(n+3) = -f(n+2) + 8 \cdot f(n+1) + 12 \cdot f(n)$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$, CON LE C.I. $f(0)=0$, $f(1)=5$, $f(2)=0$.

LA RIC. È GIÀ IN FORMA STANDARD.

L'EQ. CARATT. È

$$x^3 = -x^2 + 8 \cdot x + 12$$

CIOÈ

$$x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12 = 0 . \qquad (*)$$

VEDIAMO CHE $x = -2$ È SOLUZ. DI $(*)$. USIAMO RUFFINI. ABBIAMO

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12 & x+2 \\
\cline{2-2}
x^3 + 2x^2 & x^2 - x - 6 \\
\hline
\quad - x^2 - 8 \cdot x - 12 & \\
\quad - x^2 - 2x & \\
\hline
\qquad - 6 \cdot x - 12 & \\
\qquad - 6 \cdot x - 12 & \\
\hline
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

PERTANTO

$$x^3+x^2-8\cdot x-12=(x^2-x-6)(x+2)$$

RISOLVIAMO $x^2-x-6=0$. ABBIAMO

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+4\cdot 6}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}.$$

QUINDI LE RADICI DELL'EQ. CARATT.

SONO

$$\gamma_1=-2,\quad \gamma_2=3,\quad \gamma_3=-2$$

MA $\gamma_1 = \gamma_3$, QUINDI LE RADICI DISTINTE SONO

$$\gamma_1 = -2, \quad \gamma_2 = 3$$

DI MOLTEPLICITÀ $d_1 = 2$ E $d_2 = 1$ (IN EFFETTI $x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12 = (x-(-2))^2 \cdot (x-3)^1$). SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE $\exists\ P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ TALI CHE

$\text{DEG}\left(P_1(x)\right) \leq d_1 - 1$, $\text{DEG}\left(P_2(x)\right) \leq d_2 - 1$, E

$$f(n) = P_1(n) \cdot (\gamma_1)^n + P_2(n) \cdot (\gamma_2)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. QUINDI $\exists\ a, b, c \in \mathbb{C}$ TALI CHE

$$f(n) = (a + b \cdot n) \cdot (-2)^n + c \cdot (3)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. PER TROVARE a, b, c USIAMO LE C.I.:

$$\begin{cases} 0 = f(0) = a + c \\ 5 = f(1) = (a+b)\cdot(-2)^1 + c\cdot(3)^1 \\ 0 = f(2) = (a+2\cdot b)\cdot(-2)^2 + c\cdot(3)^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ -2a - 2b + 3\cdot c = 5 \\ 4\cdot a + 8\cdot b + 9\cdot c = 0 \end{cases}$$

$$c = -a$$

$$\begin{cases} -2a - 2b + 3\cdot(-a) = 5 \\ 4\cdot a + 8\cdot b + 9\cdot(-a) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -5a - 2b = 5 \\ -5\cdot a + 8\cdot b = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$5 \cdot a = 8 \cdot b$$

$$\Downarrow$$

$$-8 \cdot b - 2b = 5$$

$$\Downarrow$$

$$-10 \cdot b = 5$$

$$\Downarrow$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$5 \cdot a = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 5 \cdot a = -4$$

$\Rightarrow a = \frac{-4}{5} \Rightarrow c = \frac{4}{5}$. CONCLUDENDO

$$f(n) = \left(-\frac{4}{5} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot n\right) \cdot (-2)^n + \frac{4}{5} \cdot (3)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$.

ES. : TROVARE UNA FORMULA CHIUSA PER

$$\sum_{k=0}^{n} \left(k^2 + k\right).$$

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE $\exists\, f \in \mathbb{R}[x]$ TALE CHE $\mathrm{DEG}(f(x)) \leq 2+1$ E

$$\sum_{k=0}^{n} \left(k^2 + k\right) = f(n)$$

PER $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

QUINDI $\exists\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$\sum_{k=0}^{m} \left(k^2+k\right) = a\cdot m^3 + b\cdot m^2 + c\cdot m + d$$

PER $\forall m \in \mathbb{N}$. MA ALLORA

$$\begin{cases} 0 = d & (m=0) \\ 2 = a+b+c+d & (m=1) \\ 8 = 8\cdot a + 4\cdot b + 2\cdot c + d & (m=2) \\ 20 = 27\cdot a + 9\cdot b + 3\cdot c + d & (m=3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 8\cdot a+4\cdot b+2c=8 \\ 27\cdot a+9\cdot b+3\cdot c=20 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$c = 2-a-b$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 8\cdot a+4\cdot b+2\left(2-a-b\right)=8 \\ 27\cdot a+9\cdot b+3\cdot\left(2-a-b\right)=20 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 6\cdot a + 2b = 4 \\ 24\cdot a + 6\cdot b = 14 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 3\cdot a + b = 2 \\ 12\cdot a + 3\cdot b = 7 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$b = 2 - 3\cdot a$$

$$\Rightarrow \quad 12\cdot a + 3\cdot\left(2 - 3\cdot a\right) = 7$$

$$\Rightarrow \quad 3 \cdot a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad b = 2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad c = 2 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}.$$ CONCLUDENDO

$$\sum_{k=0}^{n} \left(k^2 + k\right) = \frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{2}{3} \cdot n$$

PER $\forall\, n \in \mathbb{N}$. ALTERNATIVAMENTE

$$\sum_{k=0}^{n} \left(k^2 + k\right) = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}.$$

SONDAGGIO: LA CARDINALITÀ DI

$$\{(x_1, \dots, x_6) \in [6]^6 : x_5 = 4\}$$

È

a) 6^6 30%

b) $6!$ 14%

c) 6^5 28% ✓

d) $5!$ 11%

e) NDQ 17%