Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2022-2023`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 20 Giugno 2023

Esercizio 1. Un'urna ha 8 palline numerate da 1 a 8. Si estraggono 3 palline a caso, una alla volta e con reinserimento.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre al più una pallina con un numero pari.
`D2)` Calcolare la probabilità di estrarre almeno due palline con un numero maggiore o uguale a 7 (quindi 7 oppure 8).
`D3)` Calcolare la probabilità di estrarre due palline con un numero dispari diverso da 7 (quindi 1, 3 oppure 5).

Esercizio 2. Un'urna contiene una moneta equa ed un'altra la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $\frac{1}{4}$. Si sceglie una moneta a caso, e la si lancia due volte.
`D4)` Calcolare la probabilità che escano due croci.

Esercizio 3. Siano $q_1, q_2 \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (1-q_1)^{x_1-1}(1-q_2)^{x_2-1}q_1q_2 \quad \text{per } x_1, x_2 \geq 1 \text{ interi.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_1 = X_2) = \frac{q_1q_2}{q_1+q_2-q_1q_2}$.
`D6)` Verificare che $P(X_1 \leq 2 | X_1 + X_2 = 4) = \frac{(1-q_2)^2+(1-q_1)(1-q_2)}{(1-q_2)^2+(1-q_1)(1-q_2)+(1-q_1)^2}$.

Esercizio 4. Sia $b > 0$ arbitrariamente fissato. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^x}{e^b-1}1_{(0,b)}(x)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = -\log(\frac{X}{b})$.
`D8)` Calcolare $P\left(\frac{b}{2} < X < 2b\right)$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale con media μ e varianza 16. Dire per quale valore di μ si ha $P(X \geq 5) = 1 - \Phi(2)$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 4. Dire per quale valore di z si ha

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \cdots + X_n - 2n > z\sqrt{n}) = \Phi(1).$$

Suggerimento. Si ricorda che $\Phi(y) = 1 - \Phi(-y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
In tutte le risposte alle domande si deve fare riferimento a variabili aleatorie Binomiali con parametri $n = 3$ e p, e il parametro p non è sempre lo stesso: precisamente si ha $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ e $p = \frac{3}{8}$.
D1) La probabilità richiesta è $\binom{3}{0}(\frac{1}{2})^3 + \binom{3}{1}(\frac{1}{2})^3 = \frac{1+3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
D2) La probabilità richiesta è $\binom{3}{2}(\frac{1}{4})^2(1-\frac{1}{4})^{3-2} + \binom{3}{3}(\frac{1}{4})^3(1-\frac{1}{4})^{3-3} = \frac{9+1}{64} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$.
D3) La probabilità richiesta è $\binom{3}{2}(\frac{3}{8})^2(1-\frac{3}{8})^{3-2} = \frac{135}{512}$.

Esercizio 2.
D4) Sia C l'evento "escono due croci" e sia E l'evento "scelta la moneta equa". Allora, per la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(C) = P(C|E)P(E) + P(C|E^c)P(E^c) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{9}{32} = \frac{4+9}{32} = \frac{13}{32}.$$

Osservazione. Possiamo pensare che $C = C_1 \cap C_2$ con notazioni ovvie. Allora C_1 e C_2 non sono indipendenti come accade con usuali lanci di moneta. Infatti, ancora per la formula delle probabilità totali, per $i = 1$ e $i = 2$ si ha

$$P(C_i) = P(C_i|E)P(E) + P(C_i|E^c)P(E^c) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8} = \frac{5}{8};$$

quindi $P(C_1 \cap C_2) \neq P(C_1)P(C_2)$ perché $P(C_1 \cap C_2) = \frac{13}{32} = \frac{26}{64}$ e $P(C_1)P(C_2) = \frac{5}{8}\frac{5}{8} = \frac{25}{64}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{h\geq 1} p_{X_1,X_2}(h,h) = q_1q_2 \sum_{h\geq 1}((1-q_1)(1-q_2))^{h-1} = \frac{q_1q_2}{1-(1-q_1)(1-q_2)} = \frac{q_1q_2}{q_1+q_2-q_1q_2}$.
D6) Si ha $P(X_1 \leq 2|X_1 + X_2 = 4) = \frac{P(\{X_1\leq 2\}\cap\{X_1+X_2=4\})}{P(X_1+X_2=4)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,3)+p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(1,3)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(3,1)} = \frac{(1-q_2)^2q_1q_2+(1-q_1)(1-q_2)q_1q_2}{(1-q_2)^2q_1q_2+(1-q_1)(1-q_2)q_1q_2+(1-q_1)^2q_1q_2} = \frac{(1-q_2)^2+(1-q_1)(1-q_2)}{(1-q_2)^2+(1-q_1)(1-q_2)+(1-q_1)^2}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(Y > 0) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$. Per $y > 0$ si ha $F_Y(y) = P(-\log(X/b) \leq y) = P(\log(X/b) \geq -y) = P(X/b \geq e^{-y}) = P(X \geq be^{-y}) = \int_{be^{-y}}^{b} \frac{e^x}{e^b-1}dx = [\frac{e^x}{e^b-1}]_{x=be^{-y}}^{x=b} = \frac{e^b-e^{be^{-y}}}{e^b-1}$.
D8) Si ha $P\left(\frac{b}{2} < X < 2b\right) = \int_{b/2}^{2b} f_X(x)dx = \int_{b/2}^{b} \frac{e^x}{e^b-1}dx = [\frac{e^x}{e^b-1}]_{x=b/2}^{x=b} = \frac{e^b-e^{b/2}}{e^b-1}$.

Esercizio 5.
D9) Sia $X^* = \frac{X-\mu}{\sqrt{16}} = \frac{X-\mu}{4}$ la standardizzata di X. Allora si ha $P(X \geq 5) = P(X^* \geq \frac{5-\mu}{4}) = 1 - P(X^* < \frac{5-\mu}{4}) = 1 - \Phi(\frac{5-\mu}{4})$; quindi si ha $1 - \Phi\left(\frac{5-\mu}{4}\right) = 1 - \Phi(2)$, da cui segue (con semplici passaggi che tengono conto del fatto che Φ è strettamente crescente) $\frac{5-\mu}{4} = 2$, e quindi $5 - \mu = 8$ e $\mu = 5 - 8 = -3$.
D10) Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1+\cdots+X_n-2n > z\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-2n}{\sqrt{4}\sqrt{n}} > \frac{z}{\sqrt{4}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{4}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{z}{2}\right).$$

Questo limite (dipendente da z) deve coincidere con $\Phi(1) = 1 - \Phi(-1)$; quindi si ha $1 - \Phi\left(\frac{z}{2}\right) = 1 - \Phi(-1)$, da cui segue (con semplici passaggi che tengono conto del fatto che Φ è strettamente crescente) $\frac{z}{2} = -1$, e quindi $z = -2$.