__ES.__: SIA $m \in \mathbb{P}$. CALCOLARE IL NUMERO DI SOTTOINSIEMI DI $[m]$ CHE NON CONTENGONO DUE INTERI CONSECUTIVI.

PER ESEMPIO:

$m = 1 \Rightarrow [1] \Rightarrow \{1\}, \emptyset \Rightarrow 2$

$m = 2 \Rightarrow [2] \Rightarrow \emptyset, \{1\}, \{2\} \Rightarrow 3$

$n=3 \Rightarrow [3] \Rightarrow \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\},$

$\{1,3\} \Rightarrow 5$

$n=4 \Rightarrow [4] \Rightarrow \dots \Rightarrow 8$

SIA $f(n)$ IL NUMERO CERCATO

$(\Rightarrow f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=5,\ f(4)=8)$.

SEMBRA LA SEQUENZA DI FIBONACCI

PENSIAMO QUINDI CHE

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

PER $\forall\, n \geq 3$.

CERCHIAMO DI DIMOSTRARLO.

ABBIAMO CHE

$$f(n) = \left| \left\{ S \subseteq [n] : \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n-1 \\ i \in S \end{array} \Rightarrow i+1 \notin S \right\} \right|$$

MA

$$\left\{ S \subseteq [m] : \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m-1 \\ i \in S \end{array} \Rightarrow i+1 \notin S \right\} =$$

$$\left\{ S \subseteq [m] : S \text{ SPARSO}, \ m \in S \right\} \cup$$

$$\left\{ S \subseteq [m] : S \text{ SPARSO}, \ m \notin S \right\}$$

DOVE S È <u>SPARSO</u> SE E SOLO SE

$1 \leq i \leq m-1$, $i \in S \Rightarrow i+1 \notin S$

D'ALTRONDE

$$\{S \subseteq [n] : S \text{ SPARSO}, \ n \in S\} =$$

$$= \{S \subseteq [n] : S \text{ SPARSO}, \ n \in S, \ n-1 \notin S\}$$

E

$$\{S \subseteq [n] : S \text{ SPARSO}, \ n \notin S\} =$$

$$= \{S \subseteq [n-1] : S \text{ SPARSO}\}$$

QUINDI

$$\left|\{S \subseteq [m] : S \text{ SPARSO}, \ m \notin S\}\right| =$$

$$= \left|\{S \subseteq [m-1] : S \text{ SPARSO}\}\right| \overset{\text{(DEF.)}}{\underset{(\cancel{\text{INDUZIONE}})}{=}} f(m-1) \quad (*)$$

INOLTRE LA FUNZIONE

$$S \longmapsto S \cup \{m\}$$

È UNA BIEZIONE DA

$$\{S \subseteq [n-2] : S \text{ SPARSO}\}$$

A

$$\{T \subseteq [n] : T \text{ SPARSO}, n \in T, n-1 \notin T\}.$$

QUINDI

$$\left|\{T \subseteq [n] : T \text{ SPARSO}, n \in T, n-1 \notin T\}\right|$$

(~~INDUZIONE~~)(**)

$$= \left|\{S \subseteq [n-2] : S \text{ SPARSO}\}\right| \underset{\uparrow}{=} f(n-2)$$

(DEF. DI f)

PERTANTO

$$f(m) = \left|\left\{ S \subseteq [m] : S \text{ SPARSO} \right\}\right| =$$

$$= \left|\left\{ S \subseteq [m] : S \text{ SPARSO } m \notin S \right\}\right| +$$

$$+ \left|\left\{ S \subseteq [m] : S \text{ SPARSO, } m \in S \right\}\right|$$

$$\overset{(*)}{\underset{(**)}{=}} f(m-1) + f(m-2).$$

QUINDI

$$f(2)=3\ ,\quad f(1)=2$$

E

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

SE $n \geq 3$. SIA $\{F_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ LA <u>SEQUENZA DI FIBONACCI</u> (QUINDI $F_0=F_1=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ SE $n\geq 2$). ALLORA

$$f(n)=F_{n+1}, \qquad \forall\, n\in\mathbb{P}.$$