Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2022-2023. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 18 Luglio 2023

Esercizio 1. Un'urna ha 10 palline numerate da 1 a 10. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
D1) Calcolare la probabilità di non estrarre il numero 7.
D2) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che conta il numero di palline con numero pari estratte.
D3) Calcolare speranza matematica e varianza della variabile aleatoria X.

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce un numero pari, si lancia una moneta la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a p; se esce un numero dispari, si lancia una moneta la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a q.
D4) Verificare che la probabilità che sia uscito un numero dispari (nel lancio del dado) sapendo che è uscita testa (nel lancio di moneta) è uguale a $\frac{q}{q+p}$.

Esercizio 3. Siano $q_1, q_2 \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (1-q_1)^{x_1}(1-q_2)^{x_2}q_1q_2 \quad \text{per } x_1, x_2 \geq 0 \text{ interi.}$$

D5) Verificare che

$$P(\{X_2 = X_1+1\} \cup \{X_2 = X_1 - 1\}) = \frac{q_1q_2(1-q_1+1-q_2)}{1-(1-q_1)(1-q_2)}.$$

Osservazione: per cominciare si ha un'unione di due eventi disgiunti, e quindi la somma delle probabilità ...
D6) Trovare le densità marginali di X_1 e X_2.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^x}{e-e^{-1}}1_{(-1,1)}(x)$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = |X|$.
D8) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria $Z = [X]$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria Normale con media 2 e varianza 16.
Calcolare $P(1 \leq X \leq 4)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomenti positivi.
D10) Siano $X_1, \ldots, X_{900}$ variabili aleatorie i.i.d. con media 0 e varianza 9.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{900} < 180)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{1}{0}\binom{9}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{9\cdot 8/2}{10\cdot 9/2} = \frac{4}{5}$.

`D2)` Si ha $p_X(k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{5}{2-k}}{\binom{10}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$, da cui segue $p_X(0) = p_X(2) = \frac{2}{9}$ e $p_X(1) = \frac{5}{9}$.

`D3)` Con formule note legate alla ipergeometrica si ha $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{5}{10} = 1$ e $\mathrm{Var}[X] = 2 \cdot \frac{5}{10}(1 - \frac{5}{10})\frac{5+5-2}{5+5-1} = \frac{4}{9}$.

Osservazione. Questi valori si possono ottenere anche dalla densità discreta di X scritta sopra: $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{2} kp_X(k)$ e $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \sum_{k=0}^{2} k^2 p_X(k) - (\sum_{k=0}^{2} kp_X(k))^2$.

Esercizio 2.

`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(D|T)$. Per la formula di Bayes (in quel che segue si tiene conto che $P(T) = P(T|D)P(D) + P(T|D^c)P(D^c)$ per la formula delle probabilità totali) si ha

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)P(D)}{P(T)} = \frac{q \cdot \frac{3}{6}}{q \cdot \frac{3}{6} + p \cdot \frac{3}{6}} = \frac{q}{q+p}.$$

Osservazione. Gli eventi T e D sono indipendenti se e solo se $P(D|T) = P(D)$; quindi se e solo se $\frac{q}{q+p} = \frac{3}{6}$ e, con semplici passaggi, si vede che questo equivale a dire $q = p$ (cioè le due monete a disposizione sono dello stesso tipo).

Esercizio 3.

`D5)` A partire dal suggerimento si ha

$$P(\{X_2 = X_1 + 1\} \cup \{X_2 = X_1 - 1\}) = P(X_2 = X_1 + 1) + P(X_2 = X_1 - 1)$$

da cui segue $P(\{X_2 = X_1+1\} \cup \{X_2 = X_1-1\}) = \sum_{x_1 \geq 0} p_{X_1,X_2}(x_1, x_1+1) + \sum_{x_1 \geq 1} p_{X_1,X_2}(x_1, x_1 - 1) = q_1q_2 \sum_{x_1 \geq 0}(1-q_1)^{x_1}(1-q_2)^{x_1+1} + q_1q_2 \sum_{x_1 \geq 1}(1-q_1)^{x_1}(1-q_2)^{x_1-1} = q_1q_2(1-q_2)\sum_{x_1 \geq 0}((1-q_1)(1-q_2))^{x_1} + q_1q_2(1-q_1)\sum_{x_1 \geq 1}((1-q_1)(1-q_2))^{x_1-1} = \frac{q_1q_2(1-q_2)}{1-(1-q_1)(1-q_2)} + \frac{q_1q_2(1-q_1)}{1-(1-q_1)(1-q_2)} = \frac{q_1q_2(1-q_1+1-q_2)}{1-(1-q_1)(1-q_2)}$.

Osservazione. Nella penultima uguaglianza si tiene conto del fatto che le serie $\sum_{x_1 \geq 0}((1-q_1)(1-q_2))^{x_1}$ e $\sum_{x_1 \geq 1}((1-q_1)(1-q_2))^{x_1-1}$ coincidono.

`D6)` Per $x_1 \geq 0$ intero si ha $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2 \geq 0} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (1-q_1)^{x_1} q_1q_2 \sum_{x_2 \geq 0}(1-q_2)^{x_2} = (1-q_1)^{x_1} q_1q_2 \frac{1}{1-(1-q_2)} = (1-q_1)^{x_1} q_1$; per $x_2 \geq 0$ intero si ha $p_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1 \geq 0} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (1-q_2)^{x_2} q_1q_2 \sum_{x_1 \geq 0}(1-q_1)^{x_1} = (1-q_2)^{x_2} q_1q_2 \frac{1}{1-(1-q_1)} = (1-q_2)^{x_2} q_2$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(0 \leq Y \leq 1) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Per $0 < y < 1$ si ha $F_Y(y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y} \frac{e^x}{e-e^{-1}} dx = \frac{[e^x]_{x=-y}^{x=y}}{e-e^{-1}} = \frac{e^y - e^{-y}}{e-e^{-1}}$.

`D8)` Si ha $p_Z(-1) = P(-1 \leq X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{e^x}{e-e^{-1}} dx = \frac{[e^x]_{x=-1}^{x=0}}{e-e^{-1}} = \frac{1-e^{-1}}{e-e^{-1}}$ e $p_Z(0) = P(0 \leq X < 1) = \int_0^1 \frac{e^x}{e-e^{-1}} dx = \frac{[e^x]_{x=0}^{x=1}}{e-e^{-1}} = \frac{e-1}{e-e^{-1}}$.

Esercizio 5.

`D9)` Si ha $P(1 \leq X \leq 4) = \Phi(\frac{4-2}{\sqrt{16}}) - \Phi(\frac{1-2}{\sqrt{16}}) = \Phi(2/4) - \Phi(-1/4) = \Phi(1/2) - (1 - \Phi(1/4)) = \Phi(1/2) + \Phi(1/4) - 1$.

`D10)` Si ha $P(X_1 + \cdots + X_{900} < 180) = P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{900}}{\sqrt{9}\sqrt{900}} < \frac{180}{\sqrt{9}\sqrt{900}}\right) \approx \Phi(\frac{180}{\sqrt{9}\sqrt{900}}) = \Phi(180/90) = \Phi(2)$.