Serway n. 61

Sia dato il vettore $\vec{A}$, con $A_x = 0$, $A_y = -60$, e sia dato il vettore $\vec{B}$, con $B_x = 80 \cos\theta$; $B_y = 80 \operatorname{sen}\theta$

a) Si trovi il modulo della somma $\vec{A}+\vec{B}$ in funzione di θ.

b) Per quale valore di θ il modulo $|\vec{A}+\vec{B}|$ assume il suo valore massimo? Quanto vale questo massimo?

c) Per quale valore di θ il modulo $|\vec{A}+\vec{B}|$ assume il suo valore minimo? Quanto vale questo minimo?

d) Senza fare riferimento al risultato del punto a) si discuta se le risposte ai punti b) e c), appena calcolate, siano sensate.

a) Le componenti cartesiane del vettore $\vec{A}+\vec{B}$ sono le seguenti:

$$A_x + B_x = 80 \cos\theta \,, \qquad A_y + B_y = -60 + 80 \operatorname{sen}\theta$$

Dunque risulta:

$$|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{(A_x+B_x)^2 + (A_y+B_y)^2} = \sqrt{(80\cos\theta)^2 + (-60 + 80\operatorname{sen}\theta)^2} =$$

$$= \sqrt{80^2\cos^2\theta + (-60)^2 - 9600\operatorname{sen}\theta + 80^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{6400 + 3600 - 9600\operatorname{sen}\theta} =$$

$$= \sqrt{10000 - 9600\operatorname{sen}\theta} = \sqrt{400(25 - 24\operatorname{sen}\theta)} = 20\sqrt{25 - 24\operatorname{sen}\theta}$$

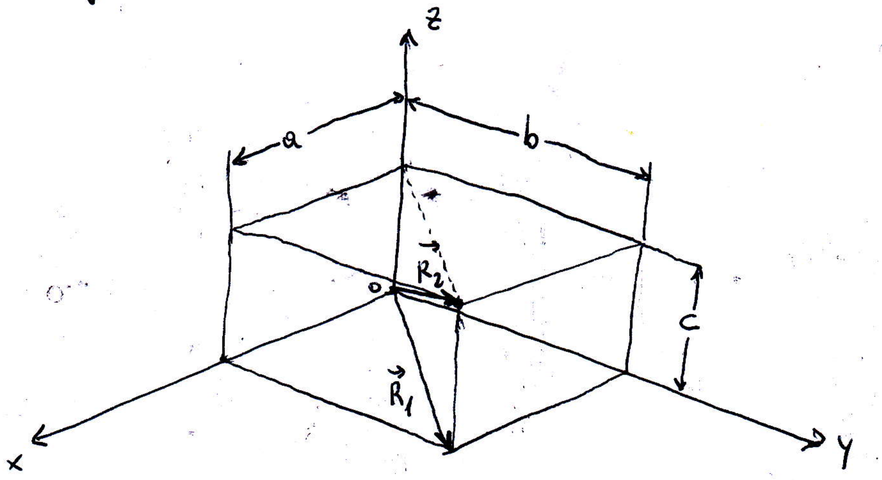
b) L'espressione trovata al punto a) assume valore massimo quando $\operatorname{sen}\theta = -1$, e risulta $|\vec{A}+\vec{B}|_{max} = 20\sqrt{25+24} = 20\cdot 7 = 140$

c) L'espressione trovata al punto a) assume valore minimo quando $\operatorname{sen}\theta = 1$, e risulta $|\vec{A}+\vec{B}|_{min} = 20\cdot 1 = 20$

d) Qualitativamente, il modulo ~~della~~ somma di due vettori di moduli fissati risulta massimo quando i due vettori sono paralleli e concordi, ciò che avviene quando $\operatorname{sen}\theta = -1$ in quanto il vettore $\vec{A}$ è in partenza disposto lungo l'asse y nel verso negativo.

Viceversa, il modulo della somma di due vettori di moduli fissati risulta minimo quando i due vettori sono paralleli e discordi, ciò che avviene quando $\operatorname{sen}\theta = 1$

Serway: n. 65



Un parallelepipedo ha dimensioni a, b e c come in figura.

a) Si scrive un'espressione vettoriale per il vettore $\vec{R}_1$ diagonale di una faccia. Qual e' il modulo di questo vettore?

b) Si scrive un'espressione vettoriale per il vettore $\vec{R}_2$ che e' la diagonale del parallelepipedo. Qual e' il modulo di questo vettore?

a) Dal grafico del problema possiamo scrivere subito:

$$\vec{R}_1 = a\hat{i} + b\hat{j}$$

Risulta quindi $|\vec{R}_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$

b) Ancora a partire dal grafico del problema possiamo scrivere:

$$\vec{R}_2 = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

Risulta quindi: $|\vec{R}_2| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Serway n. 66

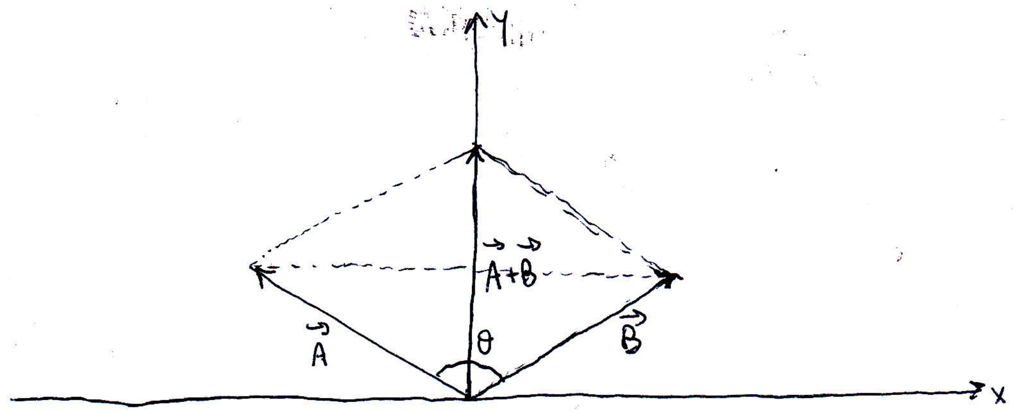
Due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ hanno modulo uguale a 5.

Si determini l'angolo fra i due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ se la loro somma è il vettore $6\hat{j}$.

Affinché due vettori di uguale modulo abbiano come somma un vettore disposto lungo l'asse y, deve risultare, ad esempio:

$$A_x = -B_x \,, \qquad A_y + B_y = 6 \qquad \text{(dati del problema)}$$

Poiché il modulo dei due vettori è uguale a 5, per la regola del parallelogramma i due vettori dovranno essere disposti simmetricamente rispetto all'asse y:



Dalla geometria della figura, applicando le formule trigonometriche valide per i triangoli rettangoli, possiamo scrivere:

$$2\,|\vec{A}|\cos\frac{\theta}{2} = 6 \,,$$ essendo θ l'angolo fra i due vettori.

Allora:
$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{6}{2|\vec{A}|} = \frac{6}{2\cdot 5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Dunque otteniamo

$$\frac{\theta}{2} = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \theta = 2\arccos\left(\frac{3}{5}\right) = 106{,}3^\circ = 1{,}85 \text{ rad}$$

A causa della simmetria del problema ($|\vec{A}| = |\vec{B}|$) il parallelogramma con cui abbiamo costruito il vettore somma $\vec{A}+\vec{B}$ è in effetti un rombo.