Matematica Discreta

(Prof. F. Brenti)

I Appello

(22 Gennaio, 2019)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che sostengono l'esame per 3 crediti devono risolvere solo i problemi 5, 6, e 7. Motivare tutte le risposte. Punti possono essere tolti per comunicazioni con altri studenti o con l'esterno, o per un lavoro particolarmente disordinato. I risultati di questo appello saranno disponibili in rete il 4/2/2019.

1. ~~Siano p, q, r proposizioni. Semplificare la proposizione composta~~

$$(\cancel{p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg q \wedge p})$$

~~(cioè trovare una proposizione logicamente equivalente che usi un numero strettamente minore di $\vee, \wedge, \neg$)~~.

2. ~~Trovare tutte le classi di resto $[x]_{78}$ tali che~~

Calcolare, se esiste, l'inversa moltiplicativa di

$$\cancel{[x]_{78}}\, [35]_{78} = \cancel{[88]_{78}}$$

3. Trovare tutte le coppie di numeri interi $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che

$$87x + 24y = 15.$$

4. Siano $a, b, k, n \in \mathbb{P}$ tali che $[k]_n[a]_n = [k]_n[b]_n$ e $(k, n) = 1$. Dimostrare che $[a]_n = [b]_n$.

5. Un cassetto contiene 16 calze: 8 blu, 6 marroni, e 2 nere. Le calze vengono tirate fuori tutte, una ad una. In quanti modi puo' avvenire questo? (Calze dello stesso colore sono indistinguibili).

6. State comunicando con il codice RSA. Avete due interlocutori: A e B. Le chiavi pubbliche sono $n = 1037$ ed $e = 7$ (A), e $n = 697$ ed $e = 9$ (B). Le vostre chiavi sono: $n = 391$, $e = 47$ (pubbliche) e $d = 15$ (privata). Ricevete il messaggio 9 da B. Decodificatelo.

7. Sia $G = (A \cup B, E)$ il grafo bipartito avente $A \stackrel{\text{def}}{=} \{S \subseteq [1000] : |S| = 3\}$ e $B \stackrel{\text{def}}{=} \{S \subseteq [1000] : |S| = 994\}$ come insieme dei vertici e dove, per ogni $S \in A$ e $T \in B$, $\{S, T\} \in E$ se e solo se $S \cap T = \emptyset$ (quindi, per esempio, $\{1, 2, 3\}$ e $[1000] \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sono collegati da un lato, mentre $\{1, 2, 3\}$ e $[1000] \setminus \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ non lo sono). Esiste un accoppiamento di A in B?

SEGUE SUL RETRO

8. Risolvere la ricorsione lineare

$$f(n+3) = -2f(n+2) - 2f(n+1) - 4f(n)$$

per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$.