Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2021-2022`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 20 Settembre 2022

Esercizio 1. Si lanciano 5 dadi equi.
`D1)` Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di numeri pari ottenuti. Calcolare $P(X \leq 1)$.
`D2)` Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce il numero 4. Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
`D3)` Verificare che, per $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$, $P(Y = k | X = 5) = \binom{5}{k}(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{5-k}$.

Esercizio 2. Si lancia una moneta equa. Se esce testa si lancia un dado con i numeri $1,2,3,4,5,5$; se esce croce si lancia un dado con i numeri $2,2,3,4,5,6$. Calcolare la probabilità che esca un numero pari nel lancio del dado.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k,k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h,2h) = \left(\frac{1}{2}\right)^{h} \frac{3}{16} \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(j,3j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{j} \frac{5}{16} \quad \text{per } j \geq 1 \text{ intero.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_2 = 2X_1)$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 = 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0,1)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = 2X^2$.
`D8)` Calcolare $\mathbb{E}[2X^n]$ per $n \geq 1$ intero.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 4. Dire per quale valore di $z > 2$ si ha $P(2 \leq X \leq z) = \Phi(\frac{5}{2}) - \Phi(\frac{1}{2})$.
`D10)` Sia $\{X_1, \ldots, X_{100}\}$ una famiglia di variabili aleatorie i.i.d. con media 1 e varianza 25. Calcolare $P(105 < X_1 + \cdots + X_{100} < 110)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La variabile aleatoria X ha distribuzione Binomiale con parametri $n = 5$ e $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Allora $P(X \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} \binom{5}{k} (\frac{1}{2})^5 = \frac{1+5}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$.
`D2)` La variabile aleatoria Y ha distribuzione Binomiale con parametri $n = 5$ e $p = \frac{1}{6}$. Allora $\mathbb{E}[Y] = np = \frac{5}{6}$.
`D3)` Abbiamo quanto segue (l'evento interesezione è "k volte 4, $5-k$ volte 2 o 6, 0 volte dispari")

$$P(Y = k|X = 5) = \frac{P(\{Y = k\} \cap \{X = 5\})}{P(X = 5)} = \frac{\frac{5!}{k!(5-k)!0!}(\frac{1}{6})^k (\frac{2}{6})^{5-k} (\frac{3}{6})^0}{\binom{5}{5}(\frac{1}{2})^5} = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{2}{6}\right)^{5-k} 2^5$$
$$= \binom{5}{k} 2^k \left(\frac{1}{6}\right)^k 2^{5-k} \left(\frac{2}{6}\right)^{5-k} = \binom{5}{k} \left(\frac{2}{6}\right)^k \left(\frac{4}{6}\right)^{5-k} = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Sia E l'evento "esce un numero pari" e sia T l'evento "esce testa". Allora, per la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(E) = P(E|T)P(T) + P(E|T^c)P(T^c) = \frac{2}{6}\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2 = 2X_1) = p_{X_1,X_2}(0,0) + \sum_{h\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^h \frac{3}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0+2} + \frac{3}{16} \sum_{h\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^h = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}\frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{4+3}{16} = \frac{7}{16}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = 1) = p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(1,2) + p_{X_1,X_2}(1,3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \frac{3}{16} + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \frac{5}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{3+5}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1+2}{8} = \frac{3}{8}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0 < Y < 2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 2$. Per $0 < y < 2$ si ha $F_Y(y) = P(2X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y/2}) = \int_0^{\sqrt{y/2}} \frac{1}{1-0} dx = [x]_{x=0}^{x=\sqrt{y/2}} = \sqrt{y/2}$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[2X^n] = 2\mathbb{E}[X^n] = 2\int_0^1 x^n \frac{1}{1-0} dx = 2[\frac{x^{n+1}}{n+1}]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{n+1}$.
Commento. Se consideriamo la domanda `D7)`, la variabile aleatoria ha densità $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2y}} 1_{(0,2)}(y)$ e quindi $\mathbb{E}[Y] = \int_0^2 y \frac{1}{2\sqrt{2y}} dy = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^2 y^{1/2} dy = \frac{1}{2\sqrt{2}} [\frac{y^{3/2}}{3/2}]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{3/2} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$. Questo valore ottenuto coincide (come deve) con quello in `D8)` con $n = 2$.

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^* = \frac{X-1}{\sqrt{4}} = \frac{X-1}{2}$ la standardizzata di X. Allora si ha $P(2 \leq X \leq z) = P(\frac{2-1}{2} \leq X^* \leq \frac{z-1}{2}) = \Phi(\frac{z-1}{2}) - \Phi(\frac{2-1}{2}) = \Phi(\frac{z-1}{2}) - \Phi(\frac{1}{2})$; quindi si deve avere $\frac{z-1}{2} = \frac{5}{2}$, da cui segue $z - 1 = 5$ e $z = 6$.
`D10)` Si ha $P(105 < X_1 + \cdots + X_{100} < 110) = P(\frac{105-100\cdot 1}{\sqrt{25}\sqrt{100}} < \frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 1}{\sqrt{25}\sqrt{100}} < \frac{110-100\cdot 1}{\sqrt{25}\sqrt{100}}) \approx \Phi(\frac{110-100}{\sqrt{25}\sqrt{100}}) - \Phi(\frac{105-100}{\sqrt{25}\sqrt{100}}) = \Phi(\frac{1}{5}) - \Phi(\frac{1}{10})$.