Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 2 Settembre 2021 - Compito 1

Esercizio 1.
Un'urna ha 4 palline con i numeri 1,2,3,4. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre uno dei seguenti insiemi di numeri: $\{1,2\},\{1,3\}$.
`D2)` Calcolare la probabilità di estrarre almeno uno dei numeri 3 e 4.
`D3)` Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che indica il minimo tra i due numeri estratti.

Esercizio 2. Un'urna ha 3 palline con i numeri 1,2,3. Si estrae a caso una pallina e viene reinserita insieme ad un'altra pallina con lo stesso numero. Poi si estrae nuovamente una pallina a caso.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina dispari alla seconda estrazione.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2}, \text{ per } x_1,x_2\geq 1 \text{ interi.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_2=2X_1)$.
`D6)` Calcolare $P(X_1>X_2|X_1X_2=4)$.

Esercizio 4. Sia $\lambda>0$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}1_{(0,\infty)}(x)$.
`D7)` Trovare la densità continua di $Y=e^{-hX}$ per $h>0$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[Y]=\frac{\lambda}{\lambda+h}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.
`D9)` Siano X una v.a. Normale di media 0 e varianza 25.
Calcolare $P(X>2.1)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n:n\geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 0 e varianza 10000.
Dire per quale valore di z si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq z\right)=\Phi(0.8).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 1) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Ognuno dei $\binom{4}{2}=6$ sottoinsiemi di due palline ha probabilità $\frac{1}{6}$ di essere estratto. I sottoinsiemi in questione sono $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{5}{6}$ (in effetti l'evento in questione fa riferimento a tutti i sottoinsiemi ad eccezione di $\{1,2\}$). Del resto, per la teoria della distribuzione ipergeometrica, la probabilità richiesta è anche uguale a $1-\frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.
`D3)` La densità discreta richiesta è $p_X(1)=P(\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\})=\frac{3}{6}$, $p_X(2)=P(\{\{2,3\},\{2,4\}\})=\frac{2}{6}$ e $p_X(3)=P(\{\{3,4\}\})=\frac{1}{6}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(D)=\sum_{k=1}^{3}P(D|E_k)P(E_k)=\frac{3}{4}\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\frac{1}{3}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2=2X_1)=\sum_{k\geq 1}p_{X_1,X_2}(k,2k)=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2k}=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{8}\right)^{k}=\frac{1/8}{1-1/8}=\frac{1/8}{7/8}=\frac{1}{7}$.
`D6)` Si ha $P(X_1>X_2|X_1X_2=4)=\frac{P(\{X_1>X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)}=\frac{p_{X_1,X_2}(4,1)}{p_{X_1,X_2}(4,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(1,4)}=\frac{1/32}{1/32+1/16+1/32}=\frac{1}{1+2+1}=\frac{1}{4}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0\leq Y\leq 1)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 0$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq 1$. Per $y\in(0,1)$ si ha $F_Y(y)=P(e^{-hX}\leq y)=P(-hX\leq\log y)=P(X\geq-\frac{1}{h}\log y)=\int_{-\frac{1}{h}\log y}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=[-e^{-\lambda x}]_{x=-\frac{1}{h}\log y}^{x=\infty}=e^{\frac{\lambda}{h}\log y}=y^{\lambda/h}$. Quindi la densità continua è $f_Y(y)=\frac{\lambda}{h}y^{\lambda/h-1}1_{(0,1)}(y)$.
`D8)` Sfruttando la risposta alla domanda precedente si ha $\mathbb{E}[Y]=\int_0^1 y\frac{\lambda}{h}y^{\lambda/h-1}dy=\frac{\lambda}{h}\int_0^1 y^{\lambda/h}dy=\frac{\lambda}{h}[\frac{y^{\lambda/h+1}}{\lambda/h+1}]_{x=0}^{x=1}=\frac{\lambda/h}{\lambda/h+1}=\frac{\lambda}{\lambda+h}$.
Metodo alternativo. Si ha $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[e^{-hX}]=\int_0^\infty e^{-hx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+h)x}dx=\lambda[-\frac{e^{-(\lambda+h)x}}{\lambda+h}]_{x=0}^{x=\infty}=\frac{\lambda}{\lambda+h}$.

Esercizio 5.
`D9)` La standardizzata di X è $X^*=\frac{X-0}{\sqrt{25}}=\frac{X}{5}$, da cui segue

$$P(X>2.1)=P\left(X^*>\frac{2.1}{5}\right)=P(X^*>0.42)=1-\Phi(0.42).$$

`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq z\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{10000}\sqrt{n}}\leq\frac{z}{\sqrt{10000}}\right)=\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{10000}}\right)=\Phi\left(\frac{z}{100}\right),$$

da cui segue che $\frac{z}{100}=0.8$, e quindi $z=80$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 2 Settembre 2021 - Compito 2

Esercizio 1.
Un'urna ha 4 palline con i numeri 1,2,3,4. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre uno dei seguenti insiemi di numeri: $\{1,2\},\{1,3\}$.
`D2)` Calcolare la probabilità di estrarre almeno uno dei numeri 3 e 4.
`D3)` Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che indica il massimo tra i due numeri estratti.

Esercizio 2. Un'urna ha 3 palline con i numeri 1,2,3. Si estrae a caso una pallina e viene reinserita insieme ad un'altra pallina con lo stesso numero. Poi si estrae nuovamente una pallina a caso.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina dispari alla seconda estrazione.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2}, \text{ per } x_1,x_2\geq 1 \text{ interi.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_2=2X_1)$.
`D6)` Calcolare $P(X_1\geq X_2|X_1X_2=4)$.

Esercizio 4. Sia $\lambda>0$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}1_{(0,\infty)}(x)$.
`D7)` Trovare la densità continua di $Y=e^{-hX}$ per $h>0$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[Y]=\frac{\lambda}{\lambda+h}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.
`D9)` Siano X una v.a. Normale di media 0 e varianza 25.
Calcolare $P(X>2.2)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n:n\geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 0 e varianza 10000.
Dire per quale valore di z si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq z\right)=\Phi(0.7).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 2) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Ognuno dei $\binom{4}{2}=6$ sottoinsiemi di due palline ha probabilità $\frac{1}{6}$ di essere estratto. I sottoinsiemi in questione sono $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{5}{6}$ (in effetti l'evento in questione fa riferimento a tutti i sottoinsiemi ad eccezione di $\{1,2\}$). Del resto, per la teoria della distribuzione ipergeometrica, la probabilità richiesta è anche uguale a $1-\frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.
`D3)` La densità discreta richiesta è $p_X(2)=P(\{\{1,2\}\})=\frac{1}{6}$, $p_X(3)=P(\{\{1,3\},\{2,3\}\})=\frac{2}{6}$ e $p_X(4)=P(\{\{\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\}\})=\frac{3}{6}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(D)=\sum_{k=1}^{3}P(D|E_k)P(E_k)=\frac{3}{4}\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\frac{1}{3}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2=2X_1)=\sum_{k\geq1}p_{X_1,X_2}(k,2k)=\sum_{k\geq1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2k}=\sum_{k\geq1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}=\sum_{k\geq1}\left(\frac{1}{8}\right)^{k}=\frac{1/8}{1-1/8}=\frac{1/8}{7/8}=\frac{1}{7}$.
`D6)` Si ha $P(X_1\geq X_2|X_1X_2=4)=\frac{P(\{X_1\geq X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)}=\frac{p_{X_1,X_2}(4,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(4,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(1,4)}=\frac{1/32+1/16}{1/32+1/16+1/32}=\frac{1+2}{1+2+1}=\frac{3}{4}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0\leq Y\leq1)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq0$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq1$. Per $y\in(0,1)$ si ha $F_Y(y)=P(e^{-hX}\leq y)=P(-hX\leq\log y)=P(X\geq-\frac{1}{h}\log y)=\int_{-\frac{1}{h}\log y}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=[-e^{-\lambda x}]_{x=-\frac{1}{h}\log y}^{x=\infty}=e^{\frac{\lambda}{h}\log y}=y^{\lambda/h}$. Quindi la densità continua è $f_Y(y)=\frac{\lambda}{h}y^{\lambda/h-1}1_{(0,1)}(y)$.
`D8)` Sfruttando la risposta alla domanda precedente si ha $\mathbb{E}[Y]=\int_0^1 y\frac{\lambda}{h}y^{\lambda/h-1}dy=\frac{\lambda}{h}\int_0^1 y^{\lambda/h}dy=\frac{\lambda}{h}[\frac{y^{\lambda/h+1}}{\lambda/h+1}]_{x=0}^{x=1}=\frac{\lambda/h}{\lambda/h+1}=\frac{\lambda}{\lambda+h}$.
Metodo alternativo. Si ha $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[e^{-hX}]=\int_0^\infty e^{-hx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+h)x}dx=\lambda[-\frac{e^{-(\lambda+h)x}}{\lambda+h}]_{x=0}^{x=\infty}=\frac{\lambda}{\lambda+h}$.

Esercizio 5.
`D9)` La standardizzata di X è $X^*=\frac{X-0}{\sqrt{25}}=\frac{X}{5}$, da cui segue

$$P(X>2.2)=P\left(X^*>\frac{2.2}{5}\right)=P(X^*>0.44)=1-\Phi(0.44).$$

`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq z\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{10000}\sqrt{n}}\leq\frac{z}{\sqrt{10000}}\right)=\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{10000}}\right)=\Phi\left(\frac{z}{100}\right),$$

da cui segue che $\frac{z}{100}=0.7$, e quindi $z=70$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 2 Settembre 2021 - Compito 3

Esercizio 1.
Un'urna ha 4 palline con i numeri 1,2,3,4. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre uno dei seguenti insiemi di numeri: $\{1, 2\}, \{1, 3\}$.
`D2)` Calcolare la probabilità di estrarre almeno uno dei numeri 3 e 4.
`D3)` Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che indica il minimo tra i due numeri estratti.

Esercizio 2. Un'urna ha 3 palline con i numeri 2,3,4. Si estrae a caso una pallina e viene reinserita insieme ad un'altra pallina con lo stesso numero. Poi si estrae nuovamente una pallina a caso.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina dispari alla seconda estrazione.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2}, \text{ per } x_1, x_2 \geq 1 \text{ interi.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_2 = 2X_1)$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 \geq X_2 | X_1X_2 = 4)$.

Esercizio 4. Sia $\lambda > 0$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0,\infty)}(x)$.
`D7)` Trovare la densità continua di $Y = e^{-kX}$ per $k > 0$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[Y] = \frac{\lambda}{\lambda+k}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.
`D9)` Siano X una v.a. Normale di media 0 e varianza 25.
Calcolare $P(X > 2.3)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 0 e varianza 10000.
Dire per quale valore di z si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(0.6).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 3) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Ognuno dei $\binom{4}{2}=6$ sottoinsiemi di due palline ha probabilità $\frac{1}{6}$ di essere estratto. I sottoinsiemi in questione sono $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{5}{6}$ (in effetti l'evento in questione fa riferimento a tutti i sottoinsiemi ad eccezione di $\{1,2\}$). Del resto, per la teoria della distribuzione ipergeometrica, la probabilità richiesta è anche uguale a $1-\frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.
`D3)` La densità discreta richiesta è $p_X(1)=P(\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\})=\frac{3}{6}$, $p_X(2)=P(\{\{2,3\},\{2,4\}\})=\frac{2}{6}$ e $p_X(3)=P(\{\{3,4\}\})=\frac{1}{6}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(D)=\sum_{k=2}^{4}P(D|E_k)P(E_k)=\frac{1}{4}\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{1}{3}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2=2X_1)=\sum_{k\geq 1}p_{X_1,X_2}(k,2k)=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2k}=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{8}\right)^{k}=\frac{1/8}{1-1/8}=\frac{1/8}{7/8}=\frac{1}{7}$.
`D6)` Si ha $P(X_1\geq X_2|X_1X_2=4)=\frac{P(\{X_1\geq X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)}=\frac{p_{X_1,X_2}(4,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(4,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(1,4)}=\frac{1/32+1/16}{1/32+1/16+1/32}=\frac{1+2}{1+2+1}=\frac{3}{4}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0\leq Y\leq 1)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 0$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq 1$. Per $y\in(0,1)$ si ha $F_Y(y)=P(e^{-kX}\leq y)=P(-kX\leq \log y)=P(X\geq -\frac{1}{k}\log y)=\int_{-\frac{1}{k}\log y}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=[-e^{-\lambda x}]_{x=-\frac{1}{k}\log y}^{x=\infty}=e^{\frac{\lambda}{k}\log y}=y^{\lambda/k}$. Quindi la densità continua è $f_Y(y)=\frac{\lambda}{k}y^{\lambda/k-1}1_{(0,1)}(y)$.
`D8)` Sfruttando la risposta alla domanda precedente si ha $\mathbb{E}[Y]=\int_0^1 y\frac{\lambda}{k}y^{\lambda/k-1}dy=\frac{\lambda}{k}\int_0^1 y^{\lambda/k}dy=\frac{\lambda}{k}[\frac{y^{\lambda/k+1}}{\lambda/k+1}]_{x=0}^{x=1}=\frac{\lambda/k}{\lambda/k+1}=\frac{\lambda}{\lambda+k}$.
Metodo alternativo. Si ha $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[e^{-kX}]=\int_0^\infty e^{-kx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+k)x}dx=\lambda[-\frac{e^{-(\lambda+k)x}}{\lambda+k}]_{x=0}^{x=\infty}=\frac{\lambda}{\lambda+k}$.

Esercizio 5.
`D9)` La standardizzata di X è $X^*=\frac{X-0}{\sqrt{25}}=\frac{X}{5}$, da cui segue

$$P(X>2.3)=P\left(X^*>\frac{2.3}{5}\right)=P(X^*>0.46)=1-\Phi(0.46).$$

`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq z\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{10000}\sqrt{n}}\leq\frac{z}{\sqrt{10000}}\right)=\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{10000}}\right)=\Phi\left(\frac{z}{100}\right),$$

da cui segue che $\frac{z}{100}=0.6$, e quindi $z=60$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 2 Settembre 2021 - Compito 4

Esercizio 1.
Un'urna ha 4 palline con i numeri 1,2,3,4. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre uno dei seguenti insiemi di numeri: $\{1,2\},\{1,3\}$.
`D2)` Calcolare la probabilità di estrarre almeno uno dei numeri 3 e 4.
`D3)` Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che indica il massimo tra i due numeri estratti.

Esercizio 2. Un'urna ha 3 palline con i numeri 2,3,4. Si estrae a caso una pallina e viene reinserita insieme ad un'altra pallina con lo stesso numero. Poi si estrae nuovamente una pallina a caso.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina dispari alla seconda estrazione.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2},\ \text{per } x_1,x_2\geq 1 \text{ interi.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_2=2X_1)$.
`D6)` Calcolare $P(X_1>X_2|X_1X_2=4)$.

Esercizio 4. Sia $\lambda>0$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}1_{(0,\infty)}(x)$.
`D7)` Trovare la densità continua di $Y=e^{-kX}$ per $k>0$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[Y]=\frac{\lambda}{\lambda+k}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.
`D9)` Siano X una v.a. Normale di media 0 e varianza 25.
Calcolare $P(X>2.4)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n:n\geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 0 e varianza 10000.
Dire per quale valore di z si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq z\right)=\Phi(0.5).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 4) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Ognuno dei $\binom{4}{2} = 6$ sottoinsiemi di due palline ha probabilità $\frac{1}{6}$ di essere estratto. I sottoinsiemi in questione sono $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{5}{6}$ (in effetti l'evento in questione fa riferimento a tutti i sottoinsiemi ad eccezione di $\{1,2\}$). Del resto, per la teoria della distribuzione ipergeometrica, la probabilità richiesta è anche uguale a $1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.
`D3)` La densità discreta richiesta è $p_X(2) = P(\{\{1,2\}\}) = \frac{1}{6}$, $p_X(3) = P(\{\{1,3\},\{2,3\}\}) = \frac{2}{6}$ e $p_X(4) = P(\{\{\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\}\}) = \frac{3}{6}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(D) = \sum_{k=2}^{4} P(D|E_k)P(E_k) = \frac{1}{4}\frac{1}{3} + \frac{2}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2 = 2X_1) = \sum_{k\geq 1} p_{X_1,X_2}(k,2k) = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2k} = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{8}\right)^{k} = \frac{1/8}{1-1/8} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 > X_2 | X_1X_2 = 4) = \frac{P(\{X_1>X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)} = \frac{p_{X_1,X_2}(4,1)}{p_{X_1,X_2}(4,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(1,4)} = \frac{1/32}{1/32+1/16+1/32} = \frac{1}{1+2+1} = \frac{1}{4}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0 \leq Y \leq 1) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Per $y \in (0,1)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{-kX} \leq y) = P(-kX \leq \log y) = P(X \geq -\frac{1}{k}\log y) = \int_{-\frac{1}{k}\log y}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_{x=-\frac{1}{k}\log y}^{x=\infty} = e^{\frac{\lambda}{k}\log y} = y^{\lambda/k}$. Quindi la densità continua è $f_Y(y) = \frac{\lambda}{k} y^{\lambda/k-1} 1_{(0,1)}(y)$.
`D8)` Sfruttando la risposta alla domanda precedente si ha $\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y\frac{\lambda}{k}y^{\lambda/k-1}dy = \frac{\lambda}{k}\int_0^1 y^{\lambda/k}dy = \frac{\lambda}{k}[\frac{y^{\lambda/k+1}}{\lambda/k+1}]_{x=0}^{x=1} = \frac{\lambda/k}{\lambda/k+1} = \frac{\lambda}{\lambda+k}$.
Metodo alternativo. Si ha $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[e^{-kX}] = \int_0^{\infty} e^{-kx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^{\infty} e^{-(\lambda+k)x}dx = \lambda[-\frac{e^{-(\lambda+k)x}}{\lambda+k}]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\lambda}{\lambda+k}$.

Esercizio 5.
`D9)` La standardizzata di X è $X^* = \frac{X-0}{\sqrt{25}} = \frac{X}{5}$, da cui segue

$$P(X > 2.4) = P\left(X^* > \frac{2.4}{5}\right) = P(X^* > 0.48) = 1 - \Phi(0.48).$$

`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq z\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{10000}\sqrt{n}} \leq \frac{z}{\sqrt{10000}}\right) = \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{10000}}\right) = \Phi\left(\frac{z}{100}\right),$$

da cui segue che $\frac{z}{100} = 0.5$, e quindi $z = 50$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 2 Settembre 2021 - Compito 5

Esercizio 1.
Un'urna ha 4 palline con i numeri 1,2,3,4. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
D1) Calcolare la probabilità di estrarre uno dei seguenti insiemi di numeri: $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$.
D2) Calcolare la probabilità di estrarre almeno uno dei numeri 3 e 4.
D3) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che indica il minimo tra i due numeri estratti.

Esercizio 2. Un'urna ha 3 palline con i numeri 2,3,4. Si estrae a caso una pallina e viene reinserita insieme ad un'altra pallina con lo stesso numero. Poi si estrae nuovamente una pallina a caso.
D4) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina dispari alla seconda estrazione.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2}, \text{ per } x_1,x_2 \geq 1 \text{ interi.}$$

D5) Calcolare $P(X_2 = 2X_1)$.
D6) Calcolare $P(X_1 > X_2 | X_1X_2 = 4)$.

Esercizio 4. Sia $\lambda > 0$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0,\infty)}(x)$.
D7) Trovare la densità continua di $Y = e^{-rX}$ per $r > 0$.
D8) Verificare che $\mathbb{E}[Y] = \frac{\lambda}{\lambda+r}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Siano X una v.a. Normale di media 0 e varianza 25.
Calcolare $P(X > 2.5)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 0 e varianza 10000.
Dire per quale valore di z si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(0.4).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 5) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Ognuno dei $\binom{4}{2}=6$ sottoinsiemi di due palline ha probabilità $\frac{1}{6}$ di essere estratto. I sottoinsiemi in questione sono $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{5}{6}$ (in effetti l'evento in questione fa riferimento a tutti i sottoinsiemi ad eccezione di $\{1,2\}$). Del resto, per la teoria della distribuzione ipergeometrica, la probabilità richiesta è anche uguale a $1-\frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.
`D3)` La densità discreta richiesta è $p_X(1)=P(\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\})=\frac{3}{6}$, $p_X(2)=P(\{\{2,3\},\{2,4\}\})=\frac{2}{6}$ e $p_X(3)=P(\{\{3,4\}\})=\frac{1}{6}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(D)=\sum_{k=2}^{4}P(D|E_k)P(E_k)=\frac{1}{4}\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{1}{3}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2=2X_1)=\sum_{k\geq 1}p_{X_1,X_2}(k,2k)=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2k}=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{8}\right)^{k}=\frac{1/8}{1-1/8}=\frac{1/8}{7/8}=\frac{1}{7}$.
`D6)` Si ha $P(X_1>X_2|X_1X_2=4)=\frac{P(\{X_1>X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)}=\frac{p_{X_1,X_2}(4,1)}{p_{X_1,X_2}(4,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(1,4)}=\frac{1/32}{1/32+1/16+1/32}=\frac{1}{1+2+1}=\frac{1}{4}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0\leq Y\leq 1)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 0$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq 1$. Per $y\in(0,1)$ si ha $F_Y(y)=P(e^{-rX}\leq y)=P(-rX\leq\log y)=P(X\geq-\frac{1}{r}\log y)=\int_{-\frac{1}{r}\log y}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=[-e^{-\lambda x}]_{x=-\frac{1}{r}\log y}^{x=\infty}=e^{\frac{\lambda}{r}\log y}=y^{\lambda/r}$. Quindi la densità continua è $f_Y(y)=\frac{\lambda}{r}y^{\lambda/r-1}1_{(0,1)}(y)$.
`D8)` Sfruttando la risposta alla domanda precedente si ha $\mathbb{E}[Y]=\int_0^1 y\frac{\lambda}{r}y^{\lambda/r-1}dy=\frac{\lambda}{r}\int_0^1 y^{\lambda/r}dy=\frac{\lambda}{r}[\frac{y^{\lambda/r+1}}{\lambda/r+1}]_{x=0}^{x=1}=\frac{\lambda/r}{\lambda/r+1}=\frac{\lambda}{\lambda+r}$.
Metodo alternativo. Si ha $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[e^{-rX}]=\int_0^\infty e^{-rx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+r)x}dx=\lambda[-\frac{e^{-(\lambda+r)x}}{\lambda+r}]_{x=0}^{x=\infty}=\frac{\lambda}{\lambda+r}$.

Esercizio 5.
`D9)` La standardizzata di X è $X^*=\frac{X-0}{\sqrt{25}}=\frac{X}{5}$, da cui segue

$$P(X>2.5)=P\left(X^*>\frac{2.5}{5}\right)=P(X^*>0.5)=1-\Phi(0.5).$$

`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq z\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{10000}\sqrt{n}}\leq\frac{z}{\sqrt{10000}}\right)=\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{10000}}\right)=\Phi\left(\frac{z}{100}\right),$$

da cui segue che $\frac{z}{100}=0.4$, e quindi $z=40$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 2 Settembre 2021 - Compito 6

Esercizio 1.
Un'urna ha 4 palline con i numeri 1,2,3,4. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre uno dei seguenti insiemi di numeri: $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$.
`D2)` Calcolare la probabilità di estrarre almeno uno dei numeri 3 e 4.
`D3)` Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che indica il massimo tra i due numeri estratti.

Esercizio 2. Un'urna ha 3 palline con i numeri 2,3,4. Si estrae a caso una pallina e viene reinserita insieme ad un'altra pallina con lo stesso numero. Poi si estrae nuovamente una pallina a caso.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina dispari alla seconda estrazione.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2}, \text{ per } x_1, x_2 \geq 1 \text{ interi.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_2 = 2X_1)$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 \geq X_2 | X_1X_2 = 4)$.

Esercizio 4. Sia $\lambda > 0$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0,\infty)}(x)$.
`D7)` Trovare la densità continua di $Y = e^{-rX}$ per $r > 0$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[Y] = \frac{\lambda}{\lambda+r}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
`D9)` Siano X una v.a. Normale di media 0 e varianza 25.
Calcolare $P(X > 2.6)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 0 e varianza 10000.
Dire per quale valore di z si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(0.3).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 6) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Ognuno dei $\binom{4}{2} = 6$ sottoinsiemi di due palline ha probabilità $\frac{1}{6}$ di essere estratto. I sottoinsiemi in questione sono $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{5}{6}$ (in effetti l'evento in questione fa riferimento a tutti i sottoinsiemi ad eccezione di $\{1,2\}$). Del resto, per la teoria della distribuzione ipergeometrica, la probabilità richiesta è anche uguale a $1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.
`D3)` La densità discreta richiesta è $p_X(2) = P(\{\{1,2\}\}) = \frac{1}{6}$, $p_X(3) = P(\{\{1,3\},\{2,3\}\}) = \frac{2}{6}$ e $p_X(4) = P(\{\{\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\}\}) = \frac{3}{6}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(D) = \sum_{k=2}^{4} P(D|E_k)P(E_k) = \frac{1}{4}\frac{1}{3} + \frac{2}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2 = 2X_1) = \sum_{k\geq 1} p_{X_1,X_2}(k,2k) = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2k} = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{8}\right)^{k} = \frac{1/8}{1-1/8} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 \geq X_2|X_1X_2 = 4) = \frac{P(\{X_1\geq X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)} = \frac{p_{X_1,X_2}(4,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(4,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(1,4)} = \frac{1/32+1/16}{1/32+1/16+1/32} = \frac{1+2}{1+2+1} = \frac{3}{4}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0 \leq Y \leq 1) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Per $y \in (0,1)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{-rX} \leq y) = P(-rX \leq \log y) = P(X \geq -\frac{1}{r}\log y) = \int_{-\frac{1}{r}\log y}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = [-e^{-\lambda x}]_{x=-\frac{1}{r}\log y}^{x=\infty} = e^{\frac{\lambda}{r}\log y} = y^{\lambda/r}$. Quindi la densità continua è $f_Y(y) = \frac{\lambda}{r}y^{\lambda/r-1}1_{(0,1)}(y)$.
`D8)` Sfruttando la risposta alla domanda precedente si ha $\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y\frac{\lambda}{r}y^{\lambda/r-1}dy = \frac{\lambda}{r}\int_0^1 y^{\lambda/r}dy = \frac{\lambda}{r}[\frac{y^{\lambda/r+1}}{\lambda/r+1}]_{x=0}^{x=1} = \frac{\lambda/r}{\lambda/r+1} = \frac{\lambda}{\lambda+r}$.
Metodo alternativo. Si ha $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[e^{-rX}] = \int_0^\infty e^{-rx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+r)x}dx = \lambda[-\frac{e^{-(\lambda+r)x}}{\lambda+r}]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\lambda}{\lambda+r}$.

Esercizio 5.
`D9)` La standardizzata di X è $X^* = \frac{X-0}{\sqrt{25}} = \frac{X}{5}$, da cui segue

$$P(X > 2.6) = P\left(X^* > \frac{2.6}{5}\right) = P(X^* > 0.52) = 1 - \Phi(0.52).$$

`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq z\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{10000}\sqrt{n}} \leq \frac{z}{\sqrt{10000}}\right) = \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{10000}}\right) = \Phi\left(\frac{z}{100}\right),$$

da cui segue che $\frac{z}{100} = 0.3$, e quindi $z = 30$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Appello del 2 Settembre 2021 - Compito 7

Esercizio 1.
Un'urna ha 4 palline con i numeri 1,2,3,4. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre uno dei seguenti insiemi di numeri: $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$.
`D2)` Calcolare la probabilità di estrarre almeno uno dei numeri 3 e 4.
`D3)` Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che indica il minimo tra i due numeri estratti.

Esercizio 2. Un'urna ha 3 palline con i numeri 1,2,3. Si estrae a caso una pallina e viene reinserita insieme ad un'altra pallina con lo stesso numero. Poi si estrae nuovamente una pallina a caso.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina dispari alla seconda estrazione.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2},\ \text{per } x_1,x_2\geq 1 \text{ interi.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_2=2X_1)$.
`D6)` Calcolare $P(X_1\geq X_2|X_1X_2=4)$.

Esercizio 4. Sia $\lambda>0$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}1_{(0,\infty)}(x)$.
`D7)` Trovare la densità continua di $Y=e^{-sX}$ per $s>0$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[Y]=\frac{\lambda}{\lambda+s}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.
`D9)` Siano X una v.a. Normale di media 0 e varianza 25.
Calcolare $P(X>2.7)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n:n\geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 0 e varianza 10000.
Dire per quale valore di z si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq z\right)=\Phi(0.2).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 7) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Ognuno dei $\binom{4}{2}=6$ sottoinsiemi di due palline ha probabilità $\frac{1}{6}$ di essere estratto. I sottoinsiemi in questione sono $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{5}{6}$ (in effetti l'evento in questione fa riferimento a tutti i sottoinsiemi ad eccezione di $\{1,2\}$). Del resto, per la teoria della distribuzione ipergeometrica, la probabilità richiesta è anche uguale a $1-\frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.
`D3)` La densità discreta richiesta è $p_X(1)=P(\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\})=\frac{3}{6}$, $p_X(2)=P(\{\{2,3\},\{2,4\}\})=\frac{2}{6}$ e $p_X(3)=P(\{\{3,4\}\})=\frac{1}{6}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(D)=\sum_{k=1}^{3}P(D|E_k)P(E_k)=\frac{3}{4}\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\frac{1}{3}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2=2X_1)=\sum_{k\geq 1}p_{X_1,X_2}(k,2k)=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2k}=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{8}\right)^{k}=\frac{1/8}{1-1/8}=\frac{1/8}{7/8}=\frac{1}{7}$.
`D6)` Si ha $P(X_1\geq X_2|X_1X_2=4)=\frac{P(\{X_1\geq X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)}=\frac{p_{X_1,X_2}(4,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(4,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(1,4)}=\frac{1/32+1/16}{1/32+1/16+1/32}=\frac{1+2}{1+2+1}=\frac{3}{4}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0\leq Y\leq 1)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 0$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq 1$. Per $y\in(0,1)$ si ha $F_Y(y)=P(e^{-sX}\leq y)=P(-sX\leq\log y)=P(X\geq -\frac{1}{s}\log y)=\int_{-\frac{1}{s}\log y}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=[-e^{-\lambda x}]_{x=-\frac{1}{s}\log y}^{x=\infty}=e^{\frac{\lambda}{s}\log y}=y^{\lambda/s}$. Quindi la densità continua è $f_Y(y)=\frac{\lambda}{s}y^{\lambda/s-1}1_{(0,1)}(y)$.
`D8)` Sfruttando la risposta alla domanda precedente si ha $\mathbb{E}[Y]=\int_0^1 y\frac{\lambda}{s}y^{\lambda/s-1}dy=\frac{\lambda}{s}\int_0^1 y^{\lambda/s}dy=\frac{\lambda}{s}[\frac{y^{\lambda/s+1}}{\lambda/s+1}]_{x=0}^{x=1}=\frac{\lambda/s}{\lambda/s+1}=\frac{\lambda}{\lambda+s}$.
Metodo alternativo. Si ha $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[e^{-sX}]=\int_0^\infty e^{-sx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x}dx=\lambda[-\frac{e^{-(\lambda+s)x}}{\lambda+s}]_{x=0}^{x=\infty}=\frac{\lambda}{\lambda+s}$.

Esercizio 5.
`D9)` La standardizzata di X è $X^*=\frac{X-0}{\sqrt{25}}=\frac{X}{5}$, da cui segue

$$P(X>2.7)=P\left(X^*>\frac{2.7}{5}\right)=P(X^*>0.54)=1-\Phi(0.54).$$

`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq z\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{10000}\sqrt{n}}\leq\frac{z}{\sqrt{10000}}\right)=\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{10000}}\right)=\Phi\left(\frac{z}{100}\right),$$

da cui segue che $\frac{z}{100}=0.2$, e quindi $z=20$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 2 Settembre 2021 - Compito 8

Esercizio 1.
Un'urna ha 4 palline con i numeri 1,2,3,4. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre uno dei seguenti insiemi di numeri: $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$.
`D2)` Calcolare la probabilità di estrarre almeno uno dei numeri 3 e 4.
`D3)` Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che indica il massimo tra i due numeri estratti.

Esercizio 2. Un'urna ha 3 palline con i numeri 1,2,3. Si estrae a caso una pallina e viene reinserita insieme ad un'altra pallina con lo stesso numero. Poi si estrae nuovamente una pallina a caso.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina dispari alla seconda estrazione.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2}, \text{ per } x_1,x_2 \geq 1 \text{ interi.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_2 = 2X_1)$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 > X_2 | X_1 X_2 = 4)$.

Esercizio 4. Sia $\lambda > 0$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0,\infty)}(x)$.
`D7)` Trovare la densità continua di $Y = e^{-sX}$ per $s > 0$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[Y] = \frac{\lambda}{\lambda+s}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Siano X una v.a. Normale di media 0 e varianza 25.
Calcolare $P(X > 2.8)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 0 e varianza 10000.
Dire per quale valore di z si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(0.1).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 8) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Ognuno dei $\binom{4}{2} = 6$ sottoinsiemi di due palline ha probabilità $\frac{1}{6}$ di essere estratto. I sottoinsiemi in questione sono $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{5}{6}$ (in effetti l'evento in questione fa riferimento a tutti i sottoinsiemi ad eccezione di $\{1,2\}$). Del resto, per la teoria della distribuzione ipergeometrica, la probabilità richiesta è anche uguale a $1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.
`D3)` La densità discreta richiesta è $p_X(2) = P(\{\{1,2\}\}) = \frac{1}{6}$, $p_X(3) = P(\{\{1,3\},\{2,3\}\}) = \frac{2}{6}$ e $p_X(4) = P(\{\{\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\}\}) = \frac{3}{6}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(D) = \sum_{k=1}^{3} P(D|E_k)P(E_k) = \frac{3}{4}\frac{1}{3} + \frac{2}{4}\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\frac{1}{3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2 = 2X_1) = \sum_{k\geq 1} p_{X_1,X_2}(k,2k) = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2k} = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{8}\right)^{k} = \frac{1/8}{1-1/8} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 > X_2 | X_1X_2 = 4) = \frac{P(\{X_1>X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)} = \frac{p_{X_1,X_2}(4,1)}{p_{X_1,X_2}(4,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(1,4)} = \frac{1/32}{1/32+1/16+1/32} = \frac{1}{1+2+1} = \frac{1}{4}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0 \leq Y \leq 1) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Per $y \in (0,1)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{-sX} \leq y) = P(-sX \leq \log y) = P(X \geq -\frac{1}{s}\log y) = \int_{-\frac{1}{s}\log y}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = [-e^{-\lambda x}]_{x=-\frac{1}{s}\log y}^{x=\infty} = e^{\frac{\lambda}{s}\log y} = y^{\lambda/s}$. Quindi la densità continua è $f_Y(y) = \frac{\lambda}{s}y^{\lambda/s-1}1_{(0,1)}(y)$.
`D8)` Sfruttando la risposta alla domanda precedente si ha $\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y\frac{\lambda}{s}y^{\lambda/s-1}dy = \frac{\lambda}{s}\int_0^1 y^{\lambda/s}dy = \frac{\lambda}{s}[\frac{y^{\lambda/s+1}}{\lambda/s+1}]_{x=0}^{x=1} = \frac{\lambda/s}{\lambda/s+1} = \frac{\lambda}{\lambda+s}$.
Metodo alternativo. Si ha $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x}dx = \lambda[-\frac{e^{-(\lambda+s)x}}{\lambda+s}]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\lambda}{\lambda+s}$.

Esercizio 5.
`D9)` La standardizzata di X è $X^* = \frac{X-0}{\sqrt{25}} = \frac{X}{5}$, da cui segue

$$P(X > 2.8) = P\left(X^* > \frac{2.8}{5}\right) = P(X^* > 0.56) = 1 - \Phi(0.56).$$

`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq z\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{10000}\sqrt{n}} \leq \frac{z}{\sqrt{10000}}\right) = \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{10000}}\right) = \Phi\left(\frac{z}{100}\right),$$

da cui segue che $\frac{z}{100} = 0.1$, e quindi $z = 10$.