Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Appello del 13 Luglio 2021 - Compito 1

Esercizio 1.
Si lancia ripetutamente un dado equo.
`D1)` Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che esca la sequenza $(1, \text{pari}, \text{dispari})$.
`D2)` Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che escano esattamente 2 numeri pari in 4 lanci.
`D3)` Sia p (per $0 < p \leq 1$) la probabilità che esca il numero 1 in ciascun lancio del dado (quindi il dado potrebbe non essere equo). Verificare che la probabilità che esca per la prima volta il numero 1 ad un lancio pari è uguale a $\frac{1-p}{2-p}$.

Esercizio 2. Abbiamo due dadi: il primo con i numeri $1, 1, 3, 4, 5, 6$, il secondo con i numeri $1, 1, 1, 1, 5, 6$. Si sceglie un dado a caso e lo si lancia.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver scelto il primo dado sapendo che è uscito il numero 1 nel lancio di dado effettuato.

Esercizio 3. Sia $q \in (0, 1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, 4-k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4 q, \text{ per } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\};$$

$$p_{X_1,X_2}(h, 5-h) = \binom{5}{h} \left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-q), \text{ per } h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

`D5)` Verificare che $P(X_1X_2 = 0) = \frac{q+1}{16}$.
`D6)` Verificare che $P(X_1 + X_2 = 4) = q$.

Esercizio 4. Sia $r > 1$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{2x}{r^2-1} 1_{(1,r)}(x)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^a$ per $a > 0$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[X^3] = \frac{2(r^5-1)}{5(r^2-1)}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Siano X_1 e X_2 due v.a. Normali indipendenti, entrambe di media 0 e varianza 2.
Calcolare $P(X_1 + X_2 > 1.2)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 4.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} < 101)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 1) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La probabilità richiesta è uguale a $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.
D2) La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.
D3) Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro p, la probabilità richiesta è uguale a

$$\sum_{k\geq 1}(1-p)^{2k-1}\cdot p = \frac{p}{1-p}\sum_{k\geq 1}(1-p)^{2k} = \frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{1-(1-2p+p^2)} = \frac{p(1-p)}{2p-p^2} = \frac{1-p}{2-p}.$$

Esercizio 2.
D4) Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali) si ha

$$P(D_1|U) = \frac{P(U|D_1)P(D_1)}{P(U|D_1)P(D_1) + P(U|D_2)P(D_2)} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_1X_2 = 0) = p_{X_1,X_2}(0,4)+p_{X_1,X_2}(4,0)+p_{X_1,X_2}(0,5)+p_{X_1,X_2}(5,0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 q+\left(\frac{1}{2}\right)^4 q+ \left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-q) + \left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-q) = \frac{q}{16} + \frac{q}{16} + \frac{1-q}{32} + \frac{1-q}{32} = \frac{2q+2q+1-q+1-q}{32} = \frac{2q+2}{32} = \frac{q+1}{16}$.
D6) Si ha $P(X_1 + X_2 = 4) = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4 q = q \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = q\cdot 1 = q$ perché $\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1+4+6+4+1}{16} = 1$ (in accordo con la teoria della distribuzione binomiale).

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(1 \leq Y \leq r^a) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq r^a$. Per $y \in (1, r^a)$ si ha $F_Y(y) = P(X^a \leq y) = P(X \leq y^{1/a}) = \int_1^{y^{1/a}} \frac{2x}{r^2-1}dx = [\frac{x^2}{r^2-1}]_{x=1}^{x=y^{1/a}} = \frac{y^{2/a}-1}{r^2-1}$.
Commento. Si osservi che Y ha distribuzione uniforme se l'ultima espressione è una funzione affine di y; quindi questo accade se $2/a = 1$, da cui segue $a = 2$. Ovviamente si ha una distribuzione uniforme su $(1, r^a) = (1, r^2)$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[X^3] = \int_1^r x^3 \frac{2x}{r^2-1}dx = \int_1^r \frac{2x^4}{r^2-1}dx = [\frac{2x^5}{5(r^2-1)}]_{x=1}^{x=r} = \frac{2(r^5-1)}{5(r^2-1)}$.

Esercizio 5.
D9) Poiché $X_1 + X_2$ è una combinazione lineare di Normali indipendenti, possiamo dire che ha distribuzione Normale di media $0+0 = 0$ e varianza $2+2 = 4$. Allora la standardizzata di X_1+X_2 è $Z = \frac{X_1+X_2-0}{\sqrt{4}} = \frac{X_1+X_2}{2}$, da cui segue

$$P(X_1 + X_2 > 1.2) = P\left(\frac{X_1 + X_2}{2} > \frac{1.2}{2}\right) = P(Z > 0.6) = 1 - \Phi(0.6).$$

D10) Si ha

$$P(X_1+\cdots+X_{100} < 101) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{100} - 100}{\sqrt{4}\sqrt{100}} < \frac{101 - 100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right) \approx \Phi\left(\frac{101 - 100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{20}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 13 Luglio 2021 - Compito 2

Esercizio 1.
Si lancia ripetutamente un dado equo.
D1) Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che esca la sequenza $(2, \text{dispari}, \text{pari})$.
D2) Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che escano esattamente 2 numeri pari in 4 lanci.
D3) Sia p (per $0 < p \leq 1$) la probabilità che esca il numero 1 in ciascun lancio del dado (quindi il dado potrebbe non essere equo). Verificare che la probabilità che esca per la prima volta il numero 1 ad un lancio pari è uguale a $\frac{1-p}{2-p}$.

Esercizio 2. Abbiamo due dadi: il primo con i numeri $1, 1, 3, 4, 5, 6$, il secondo con i numeri $1, 1, 1, 1, 5, 6$. Si sceglie un dado a caso e lo si lancia.
D4) Calcolare la probabilità di aver scelto il primo dado sapendo che è uscito il numero 1 nel lancio di dado effettuato.

Esercizio 3. Sia $s \in (0, 1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:
$$p_{X_1,X_2}(k, 4-k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4 s, \text{ per } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\};$$
$$p_{X_1,X_2}(h, 5-h) = \binom{5}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-s), \text{ per } h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$
D5) Verificare che $P(X_1X_2 = 0) = \frac{s+1}{16}$.
D6) Verificare che $P(X_1 + X_2 = 4) = s$.

Esercizio 4. Sia $r > 1$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{2x}{r^2-1} 1_{(1,r)}(x)$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^b$ per $b > 0$.
D8) Verificare che $\mathbb{E}[X^5] = \frac{2(r^7-1)}{7(r^2-1)}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Siano X_1 e X_2 due v.a. Normali indipendenti, entrambe di media 0 e varianza 2.
Calcolare $P(X_1 + X_2 > 1.4)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 4.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} < 103)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 2) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.
`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro p, la probabilità richiesta è uguale a

$$\sum_{k\geq 1}(1-p)^{2k-1}\cdot p=\frac{p}{1-p}\sum_{k\geq 1}(1-p)^{2k}=\frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2}=\frac{p(1-p)}{1-(1-2p+p^2)}=\frac{p(1-p)}{2p-p^2}=\frac{1-p}{2-p}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali) si ha

$$P(D_1|U)=\frac{P(U|D_1)P(D_1)}{P(U|D_1)P(D_1)+P(U|D_2)P(D_2)}=\frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{2+4}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1X_2=0)=p_{X_1,X_2}(0,4)+p_{X_1,X_2}(4,0)+p_{X_1,X_2}(0,5)+p_{X_1,X_2}(5,0)=\left(\frac{1}{2}\right)^4 s+\left(\frac{1}{2}\right)^4 s+\left(\frac{1}{2}\right)^5(1-s)+\left(\frac{1}{2}\right)^5(1-s)=\frac{s}{16}+\frac{s}{16}+\frac{1-s}{32}+\frac{1-s}{32}=\frac{2s+2s+1-s+1-s}{32}=\frac{2s+2}{32}=\frac{s+1}{16}$.
`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=4)=\sum_{k=0}^4\binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4 s=s\sum_{k=0}^4\binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4=s\cdot 1=s$ perché $\sum_{k=0}^4\binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1+4+6+4+1}{16}=1$ (in accordo con la teoria della distribuzione binomiale).

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1\leq Y\leq r^b)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 1$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq r^b$. Per $y\in(1,r^b)$ si ha $F_Y(y)=P(X^b\leq y)=P(X\leq y^{1/b})=\int_1^{y^{1/b}}\frac{2x}{r^2-1}dx=[\frac{x^2}{r^2-1}]_{x=1}^{x=y^{1/b}}=\frac{y^{2/b}-1}{r^2-1}$.
Commento. Si osservi che Y ha distribuzione uniforme se l'ultima espressione è una funzione affine di y; quindi questo accade se $2/b=1$, da cui segue $b=2$. Ovviamente si ha una distribuzione uniforme su $(1,r^b)=(1,r^2)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[X^5]=\int_1^r x^5\frac{2x}{r^2-1}dx=\int_1^r\frac{2x^6}{r^2-1}dx=[\frac{2x^7}{7(r^2-1)}]_{x=1}^{x=r}=\frac{2(r^7-1)}{7(r^2-1)}$.

Esercizio 5.
`D9)` Poiché X_1+X_2 è una combinazione lineare di Normali indipendenti, possiamo dire che ha distribuzione Normale di media $0+0=0$ e varianza $2+2=4$. Allora la standardizzata di X_1+X_2 è $Z=\frac{X_1+X_2-0}{\sqrt{4}}=\frac{X_1+X_2}{2}$, da cui segue

$$P(X_1+X_2>1.4)=P\left(\frac{X_1+X_2}{2}>\frac{1.4}{2}\right)=P(Z>0.7)=1-\Phi(0.7).$$

`D10)` Si ha

$$P(X_1+\cdots+X_{100}<103)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}<\frac{103-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right)\approx\Phi\left(\frac{103-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right)=\Phi\left(\frac{3}{20}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 13 Luglio 2021 - Compito 3

Esercizio 1.
Si lancia ripetutamente un dado equo.
`D1)` Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che esca la sequenza $(3, \text{pari}, \text{pari})$.
`D2)` Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che escano esattamente 2 numeri pari in 4 lanci.
`D3)` Sia q (per $0 < q \leq 1$) la probabilità che esca il numero 1 in ciascun lancio del dado (quindi il dado potrebbe non essere equo). Verificare che la probabilità che esca per la prima volta il numero 1 ad un lancio pari è uguale a $\frac{1-q}{2-q}$.

Esercizio 2. Abbiamo due dadi: il primo con i numeri $1, 1, 3, 4, 5, 6$, il secondo con i numeri $1, 1, 1, 1, 5, 6$. Si sceglie un dado a caso e lo si lancia.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver scelto il secondo dado sapendo che è uscito il numero 1 nel lancio di dado effettuato.

Esercizio 3. Sia $q \in (0, 1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, 4-k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4 q, \text{ per } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\};$$

$$p_{X_1,X_2}(h, 5-h) = \binom{5}{h} \left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-q), \text{ per } h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

`D5)` Verificare che $P(X_1 X_2 = 0) = \frac{q+1}{16}$.
`D6)` Verificare che $P(X_1 + X_2 = 4) = q$.

Esercizio 4. Sia $r > 1$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{2x}{r^2-1} 1_{(1,r)}(x)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^a$ per $a > 0$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[X^5] = \frac{2(r^7-1)}{7(r^2-1)}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Siano X_1 e X_2 due v.a. Normali indipendenti, entrambe di media 0 e varianza 2.
Calcolare $P(X_1 + X_2 > 1.6)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 4.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} < 119)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 3) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.
`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro q, la probabilità richiesta è uguale a

$$\sum_{k\geq 1}(1-q)^{2k-1}\cdot q=\frac{q}{1-q}\sum_{k\geq 1}(1-q)^{2k}=\frac{q}{1-q}\frac{(1-q)^2}{1-(1-q)^2}=\frac{q(1-q)}{1-(1-2q+q^2)}=\frac{q(1-q)}{2q-q^2}=\frac{1-q}{2-q}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali) si ha

$$P(D_2|U)=\frac{P(U|D_2)P(D_2)}{P(U|D_1)P(D_1)+P(U|D_2)P(D_2)}=\frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{4}{2+4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1X_2=0)=p_{X_1,X_2}(0,4)+p_{X_1,X_2}(4,0)+p_{X_1,X_2}(0,5)+p_{X_1,X_2}(5,0)=\left(\frac{1}{2}\right)^4q+\left(\frac{1}{2}\right)^4q+\left(\frac{1}{2}\right)^5(1-q)+\left(\frac{1}{2}\right)^5(1-q)=\frac{q}{16}+\frac{q}{16}+\frac{1-q}{32}+\frac{1-q}{32}=\frac{2q+2q+1-q+1-q}{32}=\frac{2q+2}{32}=\frac{q+1}{16}$.
`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=4)=\sum_{k=0}^4\binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4q=q\sum_{k=0}^4\binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4=q\cdot 1=q$ perché $\sum_{k=0}^4\binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1+4+6+4+1}{16}=1$ (in accordo con la teoria della distribuzione binomiale).

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1\leq Y\leq r^a)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 1$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq r^a$. Per $y\in(1,r^a)$ si ha $F_Y(y)=P(X^a\leq y)=P(X\leq y^{1/a})=\int_1^{y^{1/a}}\frac{2x}{r^2-1}dx=[\frac{x^2}{r^2-1}]_{x=1}^{x=y^{1/a}}=\frac{y^{2/a}-1}{r^2-1}$.
Commento. Si osservi che Y ha distribuzione uniforme se l'ultima espressione è una funzione affine di y; quindi questo accade se $2/a=1$, da cui segue $a=2$. Ovviamente si ha una distribuzione uniforme su $(1,r^a)=(1,r^2)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[X^5]=\int_1^r x^5\frac{2x}{r^2-1}dx=\int_1^r\frac{2x^6}{r^2-1}dx=[\frac{2x^7}{7(r^2-1)}]_{x=1}^{x=r}=\frac{2(r^7-1)}{7(r^2-1)}$.

Esercizio 5.
`D9)` Poiché X_1+X_2 è una combinazione lineare di Normali indipendenti, possiamo dire che ha distribuzione Normale di media $0+0=0$ e varianza $2+2=4$. Allora la standardizzata di X_1+X_2 è $Z=\frac{X_1+X_2-0}{\sqrt{4}}=\frac{X_1+X_2}{2}$, da cui segue

$$P(X_1+X_2>1.6)=P\left(\frac{X_1+X_2}{2}>\frac{1.6}{2}\right)=P(Z>0.8)=1-\Phi(0.8).$$

`D10)` Si ha

$$P(X_1+\cdots+X_{100}<119)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}<\frac{119-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right)\approx\Phi\left(\frac{119-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right)=\Phi\left(\frac{19}{20}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Appello del 13 Luglio 2021 - Compito 4

Esercizio 1.
Si lancia ripetutamente un dado equo.
D1) Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che esca la sequenza $(4, \text{dispari}, \text{dispari})$.
D2) Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che escano esattamente 2 numeri pari in 4 lanci.
D3) Sia q (per $0 < q \leq 1$) la probabilità che esca il numero 1 in ciascun lancio del dado (quindi il dado potrebbe non essere equo). Verificare che la probabilità che esca per la prima volta il numero 1 ad un lancio pari è uguale a $\frac{1-q}{2-q}$.

Esercizio 2. Abbiamo due dadi: il primo con i numeri $1, 1, 3, 4, 5, 6$, il secondo con i numeri $1, 1, 1, 1, 5, 6$. Si sceglie un dado a caso e lo si lancia.
D4) Calcolare la probabilità di aver scelto il secondo dado sapendo che è uscito il numero 1 nel lancio di dado effettuato.

Esercizio 3. Sia $s \in (0, 1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, 4-k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4 s, \text{ per } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\};$$

$$p_{X_1,X_2}(h, 5-h) = \binom{5}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-s), \text{ per } h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

D5) Verificare che $P(X_1X_2 = 0) = \frac{s+1}{16}$.
D6) Verificare che $P(X_1 + X_2 = 4) = s$.

Esercizio 4. Sia $r > 1$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{2x}{r^2-1}1_{(1,r)}(x)$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^b$ per $b > 0$.
D8) Verificare che $\mathbb{E}[X^3] = \frac{2(r^5-1)}{5(r^2-1)}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
D9) Siano X_1 e X_2 due v.a. Normali indipendenti, entrambe di media 0 e varianza 2.
Calcolare $P(X_1 + X_2 > 1.8)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 4.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} < 107)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 4) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.
`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro q, la probabilità richiesta è uguale a

$$\sum_{k\geq 1}(1-q)^{2k-1}\cdot q=\frac{q}{1-q}\sum_{k\geq 1}(1-q)^{2k}=\frac{q}{1-q}\frac{(1-q)^2}{1-(1-q)^2}=\frac{q(1-q)}{1-(1-2q+q^2)}=\frac{q(1-q)}{2q-q^2}=\frac{1-q}{2-q}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali) si ha

$$P(D_2|U)=\frac{P(U|D_2)P(D_2)}{P(U|D_1)P(D_1)+P(U|D_2)P(D_2)}=\frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{4}{2+4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1X_2=0)=p_{X_1,X_2}(0,4)+p_{X_1,X_2}(4,0)+p_{X_1,X_2}(0,5)+p_{X_1,X_2}(5,0)=\left(\frac{1}{2}\right)^4 s+\left(\frac{1}{2}\right)^4 s+\left(\frac{1}{2}\right)^5(1-s)+\left(\frac{1}{2}\right)^5(1-s)=\frac{s}{16}+\frac{s}{16}+\frac{1-s}{32}+\frac{1-s}{32}=\frac{2s+2s+1-s+1-s}{32}=\frac{2s+2}{32}=\frac{s+1}{16}$.
`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=4)=\sum_{k=0}^4\binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4 s=s\sum_{k=0}^4\binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4=s\cdot 1=s$ perché $\sum_{k=0}^4\binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1+4+6+4+1}{16}=1$ (in accordo con la teoria della distribuzione binomiale).

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1\leq Y\leq r^b)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 1$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq r^b$. Per $y\in(1,r^b)$ si ha $F_Y(y)=P(X^b\leq y)=P(X\leq y^{1/b})=\int_1^{y^{1/b}}\frac{2x}{r^2-1}dx=[\frac{x^2}{r^2-1}]_{x=1}^{x=y^{1/b}}=\frac{y^{2/b}-1}{r^2-1}$.
Commento. Si osservi che Y ha distribuzione uniforme se l'ultima espressione è una funzione affine di y; quindi questo accade se $2/b=1$, da cui segue $b=2$. Ovviamente si ha una distribuzione uniforme su $(1,r^b)=(1,r^2)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[X^3]=\int_1^r x^3\frac{2x}{r^2-1}dx=\int_1^r\frac{2x^4}{r^2-1}dx=[\frac{2x^5}{5(r^2-1)}]_{x=1}^{x=r}=\frac{2(r^5-1)}{5(r^2-1)}$.

Esercizio 5.
`D9)` Poiché X_1+X_2 è una combinazione lineare di Normali indipendenti, possiamo dire che ha distribuzione Normale di media $0+0=0$ e varianza $2+2=4$. Allora la standardizzata di X_1+X_2 è $Z=\frac{X_1+X_2-0}{\sqrt{4}}=\frac{X_1+X_2}{2}$, da cui segue

$$P(X_1+X_2>1.8)=P\left(\frac{X_1+X_2}{2}>\frac{1.8}{2}\right)=P(Z>0.9)=1-\Phi(0.9).$$

`D10)` Si ha

$$P(X_1+\cdots+X_{100}<107)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}<\frac{107-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right)\approx\Phi\left(\frac{107-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right)=\Phi\left(\frac{7}{20}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 13 Luglio 2021 - Compito 5

Esercizio 1.
Si lancia ripetutamente un dado equo.
D1) Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che esca la sequenza $(\text{dispari}, 4, \text{dispari})$.
D2) Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che escano esattamente 2 numeri pari in 4 lanci.
D3) Sia r (per $0 < r \leq 1$) la probabilità che esca il numero 1 in ciascun lancio del dado (quindi il dado potrebbe non essere equo). Verificare che la probabilità che esca per la prima volta il numero 1 ad un lancio pari è uguale a $\frac{1-r}{2-r}$.

Esercizio 2. Abbiamo due dadi: il primo con i numeri $1, 1, 3, 4, 5, 6$, il secondo con i numeri $1, 1, 1, 1, 5, 6$. Si sceglie un dado a caso e lo si lancia.
D4) Calcolare la probabilità di aver scelto il secondo dado sapendo che è uscito il numero 1 nel lancio di dado effettuato.

Esercizio 3. Sia $q \in (0, 1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, 4-k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4 q, \text{ per } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\};$$

$$p_{X_1,X_2}(h, 5-h) = \binom{5}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-q), \text{ per } h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

D5) Verificare che $P(X_1X_2 = 0) = \frac{q+1}{16}$.
D6) Verificare che $P(X_1 + X_2 = 5) = 1 - q$.

Esercizio 4. Sia $r > 1$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{2x}{r^2-1} 1_{(1,r)}(x)$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^a$ per $a > 0$.
D8) Verificare che $\mathbb{E}[X^3] = \frac{2(r^5-1)}{5(r^2-1)}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Siano X_1 e X_2 due v.a. Normali indipendenti, entrambe di media 0 e varianza 2.
Calcolare $P(X_1 + X_2 > 2.2)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 4.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} < 109)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 5) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.
`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro r, la probabilità richiesta è uguale a

$$\sum_{k\geq 1}(1-r)^{2k-1}\cdot r=\frac{r}{1-r}\sum_{k\geq 1}(1-r)^{2k}=\frac{r}{1-r}\frac{(1-r)^2}{1-(1-r)^2}=\frac{r(1-r)}{1-(1-2r+r^2)}=\frac{r(1-r)}{2r-r^2}=\frac{1-r}{2-r}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali) si ha

$$P(D_2|U)=\frac{P(U|D_2)P(D_2)}{P(U|D_1)P(D_1)+P(U|D_2)P(D_2)}=\frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{4}{2+4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1X_2=0)=p_{X_1,X_2}(0,4)+p_{X_1,X_2}(4,0)+p_{X_1,X_2}(0,5)+p_{X_1,X_2}(5,0)=\left(\frac{1}{2}\right)^4q+\left(\frac{1}{2}\right)^4q+\left(\frac{1}{2}\right)^5(1-q)+\left(\frac{1}{2}\right)^5(1-q)=\frac{q}{16}+\frac{q}{16}+\frac{1-q}{32}+\frac{1-q}{32}=\frac{2q+2q+1-q+1-q}{32}=\frac{2q+2}{32}=\frac{q+1}{16}$.
`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=5)=\sum_{h=0}^{5}\binom{5}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^5(1-q)=(1-q)\sum_{h=0}^{5}\binom{5}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^5=(1-q)\cdot 1=1-q$ perché $\sum_{h=0}^{5}\binom{5}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1+5+10+10+5+1}{32}=1$ (in accordo con la teoria della distribuzione binomiale).

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1\leq Y\leq r^a)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 1$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq r^a$. Per $y\in(1,r^a)$ si ha $F_Y(y)=P(X^a\leq y)=P(X\leq y^{1/a})=\int_1^{y^{1/a}}\frac{2x}{r^2-1}dx=[\frac{x^2}{r^2-1}]_{x=1}^{x=y^{1/a}}=\frac{y^{2/a}-1}{r^2-1}$.
Commento. Si osservi che Y ha distribuzione uniforme se l'ultima espressione è una funzione affine di y; quindi questo accade se $2/a=1$, da cui segue $a=2$. Ovviamente si ha una distribuzione uniforme su $(1,r^a)=(1,r^2)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[X^3]=\int_1^r x^3\frac{2x}{r^2-1}dx=\int_1^r\frac{2x^4}{r^2-1}dx=[\frac{2x^5}{5(r^2-1)}]_{x=1}^{x=r}=\frac{2(r^5-1)}{5(r^2-1)}$.

Esercizio 5.
`D9)` Poiché X_1+X_2 è una combinazione lineare di Normali indipendenti, possiamo dire che ha distribuzione Normale di media $0+0=0$ e varianza $2+2=4$. Allora la standardizzata di X_1+X_2 è $Z=\frac{X_1+X_2-0}{\sqrt{4}}=\frac{X_1+X_2}{2}$, da cui segue

$$P(X_1+X_2>2.2)=P\left(\frac{X_1+X_2}{2}>\frac{2.2}{2}\right)=P(Z>1.1)=1-\Phi(1.1).$$

`D10)` Si ha

$$P(X_1+\cdots+X_{100}<109)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}<\frac{109-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right)\approx\Phi\left(\frac{109-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right)=\Phi\left(\frac{9}{20}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 13 Luglio 2021 - Compito 6

Esercizio 1.
Si lancia ripetutamente un dado equo.
`D1)` Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che esca la sequenza $(\text{pari}, 3, \text{pari})$.
`D2)` Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che escano esattamente 2 numeri pari in 4 lanci.
`D3)` Sia r (per $0 < r \leq 1$) la probabilità che esca il numero 1 in ciascun lancio del dado (quindi il dado potrebbe non essere equo). Verificare che la probabilità che esca per la prima volta il numero 1 ad un lancio pari è uguale a $\frac{1-r}{2-r}$.

Esercizio 2. Abbiamo due dadi: il primo con i numeri $1, 1, 3, 4, 5, 6$, il secondo con i numeri $1, 1, 1, 1, 5, 6$. Si sceglie un dado a caso e lo si lancia.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver scelto il secondo dado sapendo che è uscito il numero 1 nel lancio di dado effettuato.

Esercizio 3. Sia $s \in (0, 1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, 4-k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4 s, \text{ per } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\};$$

$$p_{X_1,X_2}(h, 5-h) = \binom{5}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-s), \text{ per } h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

`D5)` Verificare che $P(X_1X_2 = 0) = \frac{s+1}{16}$.
`D6)` Verificare che $P(X_1 + X_2 = 5) = 1 - s$.

Esercizio 4. Sia $r > 1$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{2x}{r^2-1}1_{(1,r)}(x)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^b$ per $b > 0$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[X^5] = \frac{2(r^7-1)}{7(r^2-1)}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
`D9)` Siano X_1 e X_2 due v.a. Normali indipendenti, entrambe di media 0 e varianza 2.
Calcolare $P(X_1 + X_2 > 2.4)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 4.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} < 111)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 6) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.
`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro r, la probabilità richiesta è uguale a

$$\sum_{k\geq 1}(1-r)^{2k-1}\cdot r = \frac{r}{1-r}\sum_{k\geq 1}(1-r)^{2k} = \frac{r}{1-r}\frac{(1-r)^2}{1-(1-r)^2} = \frac{r(1-r)}{1-(1-2r+r^2)} = \frac{r(1-r)}{2r-r^2} = \frac{1-r}{2-r}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali) si ha

$$P(D_2|U) = \frac{P(U|D_2)P(D_2)}{P(U|D_1)P(D_1)+P(U|D_2)P(D_2)} = \frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4}{2+4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1X_2=0) = p_{X_1,X_2}(0,4)+p_{X_1,X_2}(4,0)+p_{X_1,X_2}(0,5)+p_{X_1,X_2}(5,0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 s+\left(\frac{1}{2}\right)^4 s+\left(\frac{1}{2}\right)^5(1-s)+\left(\frac{1}{2}\right)^5(1-s) = \frac{s}{16}+\frac{s}{16}+\frac{1-s}{32}+\frac{1-s}{32} = \frac{2s+2s+1-s+1-s}{32} = \frac{2s+2}{32} = \frac{s+1}{16}$.
`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=5) = \sum_{h=0}^5\binom{5}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^5(1-s) = (1-s)\sum_{h=0}^5\binom{5}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = (1-s)\cdot 1 = 1-s$ perché $\sum_{h=0}^5\binom{5}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1+5+10+10+5+1}{32} = 1$ (in accordo con la teoria della distribuzione binomiale).

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1\leq Y\leq r^b)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 1$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq r^b$. Per $y\in(1,r^b)$ si ha $F_Y(y)=P(X^b\leq y)=P(X\leq y^{1/b})=\int_1^{y^{1/b}}\frac{2x}{r^2-1}dx=[\frac{x^2}{r^2-1}]_{x=1}^{x=y^{1/b}}=\frac{y^{2/b}-1}{r^2-1}$.
Commento. Si osservi che Y ha distribuzione uniforme se l'ultima espressione è una funzione affine di y; quindi questo accade se $2/b=1$, da cui segue $b=2$. Ovviamente si ha una distribuzione uniforme su $(1,r^b)=(1,r^2)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[X^5]=\int_1^r x^5\frac{2x}{r^2-1}dx=\int_1^r\frac{2x^6}{r^2-1}dx=[\frac{2x^7}{7(r^2-1)}]_{x=1}^{x=r}=\frac{2(r^7-1)}{7(r^2-1)}$.

Esercizio 5.
`D9)` Poiché X_1+X_2 è una combinazione lineare di Normali indipendenti, possiamo dire che ha distribuzione Normale di media $0+0=0$ e varianza $2+2=4$. Allora la standardizzata di X_1+X_2 è $Z=\frac{X_1+X_2-0}{\sqrt{4}}=\frac{X_1+X_2}{2}$, da cui segue

$$P(X_1+X_2>2.4)=P\left(\frac{X_1+X_2}{2}>\frac{2.4}{2}\right)=P(Z>1.2)=1-\Phi(1.2).$$

`D10)` Si ha

$$P(X_1+\cdots+X_{100}<111)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}<\frac{111-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right)\approx\Phi\left(\frac{111-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right)=\Phi\left(\frac{11}{20}\right).$$

LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA TOR VERGATA

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Appello del 13 Luglio 2021 - Compito 7

Esercizio 1.
Si lancia ripetutamente un dado equo.
`D1)` Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che esca la sequenza (dispari, 2, pari).
`D2)` Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che escano esattamente 2 numeri pari in 4 lanci.
`D3)` Sia s (per $0 < s \leq 1$) la probabilità che esca il numero 1 in ciascun lancio del dado (quindi il dado potrebbe non essere equo). Verificare che la probabilità che esca per la prima volta il numero 1 ad un lancio pari è uguale a $\frac{1-s}{2-s}$.

Esercizio 2. Abbiamo due dadi: il primo con i numeri $1, 1, 3, 4, 5, 6$, il secondo con i numeri $1, 1, 1, 1, 5, 6$. Si sceglie un dado a caso e lo si lancia.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver scelto il primo dado sapendo che è uscito il numero 1 nel lancio di dado effettuato.

Esercizio 3. Sia $q \in (0, 1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, 4-k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4 q, \text{ per } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\};$$

$$p_{X_1,X_2}(h, 5-h) = \binom{5}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-q), \text{ per } h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

`D5)` Verificare che $P(X_1X_2 = 0) = \frac{q+1}{16}$.
`D6)` Verificare che $P(X_1 + X_2 = 5) = 1 - q$.

Esercizio 4. Sia $r > 1$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{2x}{r^2-1} 1_{(1,r)}(x)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^a$ per $a > 0$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[X^5] = \frac{2(r^7-1)}{7(r^2-1)}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Siano X_1 e X_2 due v.a. Normali indipendenti, entrambe di media 0 e varianza 2.
Calcolare $P(X_1 + X_2 > 2.6)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 4.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} < 113)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 7) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.
`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro s, la probabilità richiesta è uguale a

$$\sum_{k\geq 1}(1-s)^{2k-1} \cdot s = \frac{s}{1-s}\sum_{k\geq 1}(1-s)^{2k} = \frac{s}{1-s}\frac{(1-s)^2}{1-(1-s)^2} = \frac{s(1-s)}{1-(1-2s+s^2)} = \frac{s(1-s)}{2s-s^2} = \frac{1-s}{2-s}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali) si ha

$$P(D_1|U) = \frac{P(U|D_1)P(D_1)}{P(U|D_1)P(D_1) + P(U|D_2)P(D_2)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1X_2 = 0) = p_{X_1,X_2}(0,4) + p_{X_1,X_2}(4,0) + p_{X_1,X_2}(0,5) + p_{X_1,X_2}(5,0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 q + \left(\frac{1}{2}\right)^4 q + \left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-q) + \left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-q) = \frac{q}{16} + \frac{q}{16} + \frac{1-q}{32} + \frac{1-q}{32} = \frac{2q+2q+1-q+1-q}{32} = \frac{2q+2}{32} = \frac{q+1}{16}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 + X_2 = 5) = \sum_{h=0}^{5} \binom{5}{h} \left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-q) = (1-q)\sum_{h=0}^{5} \binom{5}{h} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = (1-q) \cdot 1 = 1-q$ perché $\sum_{h=0}^{5} \binom{5}{h} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1+5+10+10+5+1}{32} = 1$ (in accordo con la teoria della distribuzione binomiale).

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1 \leq Y \leq r^a) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq r^a$. Per $y \in (1, r^a)$ si ha $F_Y(y) = P(X^a \leq y) = P(X \leq y^{1/a}) = \int_1^{y^{1/a}} \frac{2x}{r^2-1}dx = [\frac{x^2}{r^2-1}]_{x=1}^{x=y^{1/a}} = \frac{y^{2/a}-1}{r^2-1}$.
Commento. Si osservi che Y ha distribuzione uniforme se l'ultima espressione è una funzione affine di y; quindi questo accade se $2/a = 1$, da cui segue $a = 2$. Ovviamente si ha una distribuzione uniforme su $(1, r^a) = (1, r^2)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[X^5] = \int_1^r x^5 \frac{2x}{r^2-1}dx = \int_1^r \frac{2x^6}{r^2-1}dx = [\frac{2x^7}{7(r^2-1)}]_{x=1}^{x=r} = \frac{2(r^7-1)}{7(r^2-1)}$.

Esercizio 5.
`D9)` Poiché $X_1 + X_2$ è una combinazione lineare di Normali indipendenti, possiamo dire che ha distribuzione Normale di media $0+0 = 0$ e varianza $2+2 = 4$. Allora la standardizzata di $X_1 + X_2$ è $Z = \frac{X_1+X_2-0}{\sqrt{4}} = \frac{X_1+X_2}{2}$, da cui segue

$$P(X_1 + X_2 > 2.6) = P\left(\frac{X_1 + X_2}{2} > \frac{2.6}{2}\right) = P(Z > 1.3) = 1 - \Phi(1.3).$$

`D10)` Si ha

$$P(X_1+\cdots+X_{100} < 113) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{100} - 100}{\sqrt{4}\sqrt{100}} < \frac{113-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right) \approx \Phi\left(\frac{113-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{13}{20}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 13 Luglio 2021 - Compito 8

Esercizio 1.
Si lancia ripetutamente un dado equo.
`D1)` Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che esca la sequenza $(\text{pari}, 1, \text{dispari})$.
`D2)` Supponiamo che il dado sia equo. Calcolare la probabilità che escano esattamente 2 numeri pari in 4 lanci.
`D3)` Sia s (per $0 < s \leq 1$) la probabilità che esca il numero 1 in ciascun lancio del dado (quindi il dado potrebbe non essere equo). Verificare che la probabilità che esca per la prima volta il numero 1 ad un lancio pari è uguale a $\frac{1-s}{2-s}$.

Esercizio 2. Abbiamo due dadi: il primo con i numeri $1, 1, 3, 4, 5, 6$, il secondo con i numeri $1, 1, 1, 1, 5, 6$. Si sceglie un dado a caso e lo si lancia.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver scelto il primo dado sapendo che è uscito il numero 1 nel lancio di dado effettuato.

Esercizio 3. Sia $s \in (0, 1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, 4-k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4 s, \text{ per } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\};$$

$$p_{X_1,X_2}(h, 5-h) = \binom{5}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-s), \text{ per } h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

`D5)` Verificare che $P(X_1X_2 = 0) = \frac{s+1}{16}$.
`D6)` Verificare che $P(X_1 + X_2 = 5) = 1 - s$.

Esercizio 4. Sia $r > 1$, e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{2x}{r^2-1} 1_{(1,r)}(x)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^b$ per $b > 0$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[X^3] = \frac{2(r^5-1)}{5(r^2-1)}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Siano X_1 e X_2 due v.a. Normali indipendenti, entrambe di media 0 e varianza 2.
Calcolare $P(X_1 + X_2 > 2.8)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 4.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} < 117)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 8) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.
`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro s, la probabilità richiesta è uguale a

$$\sum_{k \geq 1} (1-s)^{2k-1} \cdot s = \frac{s}{1-s} \sum_{k \geq 1} (1-s)^{2k} = \frac{s}{1-s} \frac{(1-s)^2}{1-(1-s)^2} = \frac{s(1-s)}{1-(1-2s+s^2)} = \frac{s(1-s)}{2s-s^2} = \frac{1-s}{2-s}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali) si ha

$$P(D_1|U) = \frac{P(U|D_1)P(D_1)}{P(U|D_1)P(D_1) + P(U|D_2)P(D_2)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1 X_2 = 0) = p_{X_1,X_2}(0,4) + p_{X_1,X_2}(4,0) + p_{X_1,X_2}(0,5) + p_{X_1,X_2}(5,0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 s + \left(\frac{1}{2}\right)^4 s + \left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-s) + \left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-s) = \frac{s}{16} + \frac{s}{16} + \frac{1-s}{32} + \frac{1-s}{32} = \frac{2s+2s+1-s+1-s}{32} = \frac{2s+2}{32} = \frac{s+1}{16}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 + X_2 = 5) = \sum_{h=0}^{5} \binom{5}{h} \left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-s) = (1-s) \sum_{h=0}^{5} \binom{5}{h} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = (1-s) \cdot 1 = 1-s$ perché $\sum_{h=0}^{5} \binom{5}{h} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1+5+10+10+5+1}{32} = 1$ (in accordo con la teoria della distribuzione binomiale).

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1 \leq Y \leq r^b) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq r^b$. Per $y \in (1, r^b)$ si ha $F_Y(y) = P(X^b \leq y) = P(X \leq y^{1/b}) = \int_1^{y^{1/b}} \frac{2x}{r^2-1} dx = \left[\frac{x^2}{r^2-1}\right]_{x=1}^{x=y^{1/b}} = \frac{y^{2/b}-1}{r^2-1}$.
Commento. Si osservi che Y ha distribuzione uniforme se l'ultima espressione è una funzione affine di y; quindi questo accade se $2/b = 1$, da cui segue $b = 2$. Ovviamente si ha una distribuzione uniforme su $(1, r^b) = (1, r^2)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[X^3] = \int_1^r x^3 \frac{2x}{r^2-1} dx = \int_1^r \frac{2x^4}{r^2-1} dx = \left[\frac{2x^5}{5(r^2-1)}\right]_{x=1}^{x=r} = \frac{2(r^5-1)}{5(r^2-1)}$.

Esercizio 5.
`D9)` Poiché $X_1 + X_2$ è una combinazione lineare di Normali indipendenti, possiamo dire che ha distribuzione Normale di media $0+0=0$ e varianza $2+2=4$. Allora la standardizzata di X_1+X_2 è $Z = \frac{X_1+X_2-0}{\sqrt{4}} = \frac{X_1+X_2}{2}$, da cui segue

$$P(X_1 + X_2 > 2.8) = P\left(\frac{X_1+X_2}{2} > \frac{2.8}{2}\right) = P(Z > 1.4) = 1 - \Phi(1.4).$$

`D10)` Si ha

$$P(X_1 + \cdots + X_{100} < 117) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{100} - 100}{\sqrt{4}\sqrt{100}} < \frac{117-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right) \approx \Phi\left(\frac{117-100}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{17}{20}\right).$$