PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

EVENTI INDIPENDENTI

$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

FORMULA DI BAYES

$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

PROPRIETÀ SPERANZA MATEMATICA E VARIANZA

- Speranza matematica

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[c_1X_1 + c_2X_2] = c_1\mathbb{E}[X_1] + c_2\mathbb{E}[X_2]$

$X_1 \cap X_2 = \emptyset \rightarrow \mathbb{E}[X_1X_2] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]$

- Varianza

$Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$

$c \in \mathbb{R}, Var[cX] = c^2Var[X]$

$c \in \mathbb{R}, Var[c + X] = Var[X]$

CALCOLO COMBINATORIO

- Disposizione di n elementi presi a k gruppi

$\#D_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k+1)$

- Permutazione di n elementi

$\#P_n = n!$

- Combinazione di n elementi presi a k gruppi

$\#C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

- Insieme dei valori assunti da X

$S_X = \{x \in \mathbb{R} | \exists w \in \Omega : X(w) = x)$

- Funzione di distribuzione discreta

$p_X(x) = P(X \leq x)$

- Distribuzioni di una variabile aleatoria discreta

NOME E PARAMETRI	DENSITÀ	$\mathbb{E}[X]$	$Var[X]$
Distribuzione Binomiale $X \sim BIN(n,p)$ $n = 1,2,\dots; 0 \leq p \leq 1$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k(n-p)^k;\ k = 0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$
Distribuzione ipergeometrica $n_1 + n_2 \geq n$	$p_X(k) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}};\ k = 0,1,\dots,n$	$n\frac{n_1}{n_1+n_2}$	$n\frac{n_1}{n_1+n_2}\left(1 - \frac{n_1}{n_1+n_2}\right)\frac{n_1+n_2-n}{n_1+n_2-1}$
Distribuzione di Poisson $X \sim POISSON(\lambda)$ $\lambda > 0$	$p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}; k = 0,1,\dots$	λ	λ
Distribuzione geometrica (#fallimenti per 1 successo) $X \sim GEOM_0(p)$ $0 \leq p \leq 1$	$p_X(k) = (1-p)^k p; k = 0,1,\dots$	$\frac{1}{p} - 1$	$\frac{1-p}{p^2}$
Distribuzione geometrica traslata (#prove per 1 successo) $X \sim GEOM_1(p)$ $0 \leq p \leq 1$	$p_X(k) = (1-p)^{k-1}p; k = 0,1,2,\dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Distribuzione binomiale negativa (#fallimenti prima di r-esimo successo) $X \sim BIN-NEG_0(r,p)$ $0 \leq p \leq 1$	$p_X(k) = \binom{k+r-1}{k}(1-p)^k p^r; k = 0,1,2,\dots$	$r\left(\frac{1}{p} - 1\right)$	$r\frac{1-p}{p^2}$
Distribuzione binomiale negativa (#prove per r-esimo successo) $X \sim BIN-NEG_r(r,p)$ $0 \leq p \leq 1$	$p_X(k) = \binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r; k = 0,1,2,\dots$	$\frac{r}{p}$	$r\frac{1-p}{p^2}$

CALCOLO SPERANZA MATEMATICA

- Caso discreto

$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in S_X} x p_X(x)$

- Caso continuo

$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$

SOMMATORIE NOTEVOLI

$\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = e^a$

$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \rightarrow$

$\rightarrow \sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

DENSITÀ CONGIUNTA DISCRETA

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ discreta, con $S_{\underline{X}} = S_{X_1}XS_{X_2}X\dots XS_{X_n}$ e $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \forall A \in \mathbb{R}^n, p_{\underline{X}}(\underline{x}) = P(\underline{X} \in A) = \sum_{\underline{x} \in A \cap S_{\underline{X}}} p_{\underline{X}}(\underline{x})$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

- Funzione di distribuzione continua

$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)dx$; con $f_x(x)$ densità continua

- Proprietà della densità continua

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx = 1$

FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Siano X_1, X_2 eventi che non posso avvenire contemporaneamente, e sia Y un evento che può avvenire solamente associato ad uno dei precedenti, allora $P(Y) = P(X_1)P(Y|X_1) + P(X_2)P(Y|X_2)$

PROPRIETÀ DI MANCANZA DI MEMORIA

$X \sim EXP(\lambda)$

$\forall x, y > 0, P(X > x + y | X > y) = P(X > x)$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE INDIPENDENTI

$P\left(\bigcap_{I=1}^{N} \{a_i \leq X_i \leq b_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(a_i \leq X_i \leq b_i)$

- Distribuzioni di una variabile aleatoria continua

NOME E PARAMETRI	DENSITÀ	DISTRIBUZIONE	$\mathbb{E}[X]$	$Var[X]$
Distribuzione uniforme $X \sim U(a,b)$ $a < b, c = \frac{1}{b-a}$	$f_X(x) = \begin{cases} c\ se\ x \in (a,b) \\ 0\ se\ x \notin (a,b) \end{cases}$	$F_X(x) = \begin{cases} 0\ se\ x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}\ se\ a < x < b \\ 1\ se\ x \geq b \end{cases}$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Distribuzione esponenziale $X \sim EXP(\lambda)$	$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}\ se\ x \geq 0 \\ 0\ se\ x < 0 \end{cases}$	$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}\ se\ x > 0 \\ 0\ se\ x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Distribuzione normale standard $X \sim N(0,1)$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\Phi(\varphi_\alpha) = \alpha$, con $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ φ_α è detto quantile di ordine α	0	1
Distribuzione normale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $-\infty < \mu < +\infty;\ \sigma^2 > 0$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi(\varphi_\alpha) = \alpha$, con $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ φ_α è detto quantile di ordine α	μ	σ
Distribuzione gamma $X \sim GAMMA(\alpha, \lambda)$ $0 \leq p \leq 1$	$f_X(x) = \begin{cases} c_{\alpha,\lambda}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\ se\ x \geq 0 \\ 0\ se\ x < 0 \end{cases}$	$F_X(x) = \frac{c_{(\alpha,\lambda)}}{\lambda^\alpha}\Gamma(\alpha);\ \Gamma(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} y^{\alpha-1}e^{-y}dy$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

PROPRIETÀ DELLA DISTRIBUZIONE NORMALE

- Trasformazione da normale a normale standard

$X \sim N(0,1) \rightarrow\ Y = \sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

- Proprietà della funzione $\Phi(x)$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$X \sim N(0,1) \rightarrow P(x_1 < X < x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

SPERANZA MATEMATICA DI UNA VARIABILE ALEATORIA COMPOSTA

Sia X con $f_X(x)$ e $Y = g(X)$, allora, se $\mathbb{E}[Y]$ esiste, è pari a

$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$

PROCESSO DI POISSON

Siano $\{S_n\}_{n \geq 1}$ variabili aleatorie indipendenti con distribuzione $EXP(\lambda)$

T_n = istante n-esimo salto, $T_n \sim EXP(\lambda), \mathbb{E}[T_n] = \frac{n}{\lambda}$

N_t = numero di salti al tempo t (N_t è discreta perché assume valori in {0, 1, 2, …}), $N_t \sim POISSON(\lambda), P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

Siano $\{X_n\}$ variabili aleatorie continue i.i.d. con media μ, allora $\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

TEOREMA LIMITE CENTRALE

Siano $\{X_n\}$ variabili aleatorie continue i.i.d. con media finita μ e varianza finita e positiva σ^2, allora $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to \infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$

Se le variabili aleatorie hanno distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$, allora $\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$