<u>ES.</u> : DIMOSTRARE, USANDO IL WOP, CHE

SE $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{Z}$ TALI CHE $\alpha = \frac{a}{b}$

E $(a, b) = 1$.

SIA

$$S \overset{\text{def}}{=} \left\{ b \in \mathbb{P} : \exists\, a \in \mathbb{Z} \text{ PER CUI } \alpha = \frac{a}{b} \right\}.$$

ALLORA $S \subseteq \mathbb{P}$ E $S \neq \emptyset$ (PERCHÈ $\alpha \in \mathbb{Q}$)

$\Rightarrow$ PER WOP $\Rightarrow$ S HA UN MINIMO.

SIA $b \overset{\text{def}}{=} \min(S)$. QUINDI $\exists\, a \in \mathbb{Z}$ PER CUI $\alpha = \frac{a}{b}$. VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $(a,b)=1$.

PER ASSURDO, SIA $(a,b)>1$. SIA $c \in \mathbb{P}$ TALE CHE $c \mid a$ E $c \mid b$ E $c \geq 2$. ALLORA

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{\left(\frac{b}{c}\right)}$$

e $\frac{b}{c} \in S$ E $\frac{b}{c} < b$. ASSURDO. QUINDI $(a,b)=1$.

ES. : SIA $m \in \mathbb{P}$ E SIA T_m UN TORNEO COMPLETO SU $[m]$. UNA CLASSIFICA $\sigma \in S_m$ È RAGIONEVOLE SE $\sigma(i)$ HA BATTUTO $\sigma(i+1)$ PER OGNI $i=1,\dots,m-1$. DIMOSTRARE CHE ESISTE SEMPRE UNA CLASSIFICA RAGIONEVOLE.

INDUZIONE SU m. OVVIO SE $m=1$, FACILE SE $m=2$. SUPPONIAMO $m \geq 3$.

SIANO

$$A \stackrel{def}{=} \{ i \in [2,m] : i \text{ HA BATTUTO } 1 \}$$

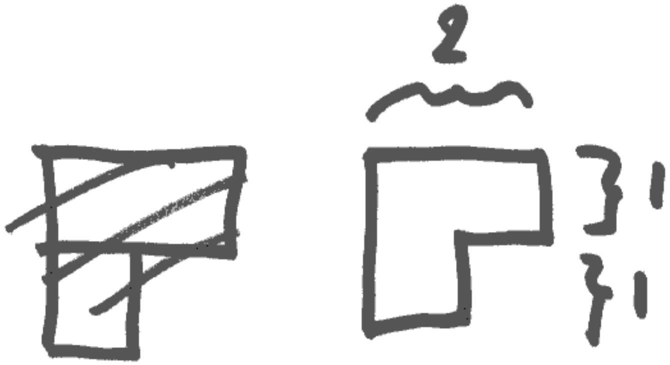
$$B \stackrel{def}{=} \{ j \in [2,m] : 1 \text{ HA BATTUTO } j \}.$$

ALLORA $|A| \leq m-1$ E $|B| \leq m-1 \Rightarrow$ PER INDUZIONE ESISTONO DUE CLASSIFICHE RAGIONEVOLI τ E ρ PER A E B, RISPETTIVAMENTE. MA ALLORA

$$\tau \; 1 \; \rho$$

È UNA CLASSIFICA RAGIONEVOLE PER T_n.

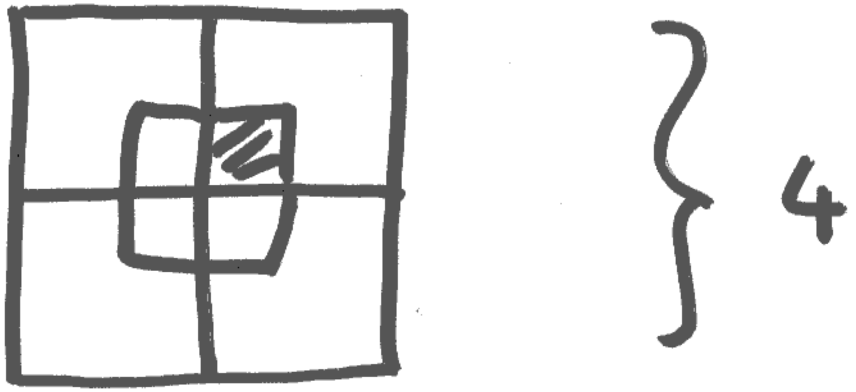
<u>ES.</u> : SIA $n \in \mathbb{P}$. VOGLIAMO ERIGERE UNA STATUA AL CENTRO DI UNA PIAZZA $2^n \times 2^n$, E PAVIMENTARE IL RESTO CON MATTONELLE DELLA FORMA



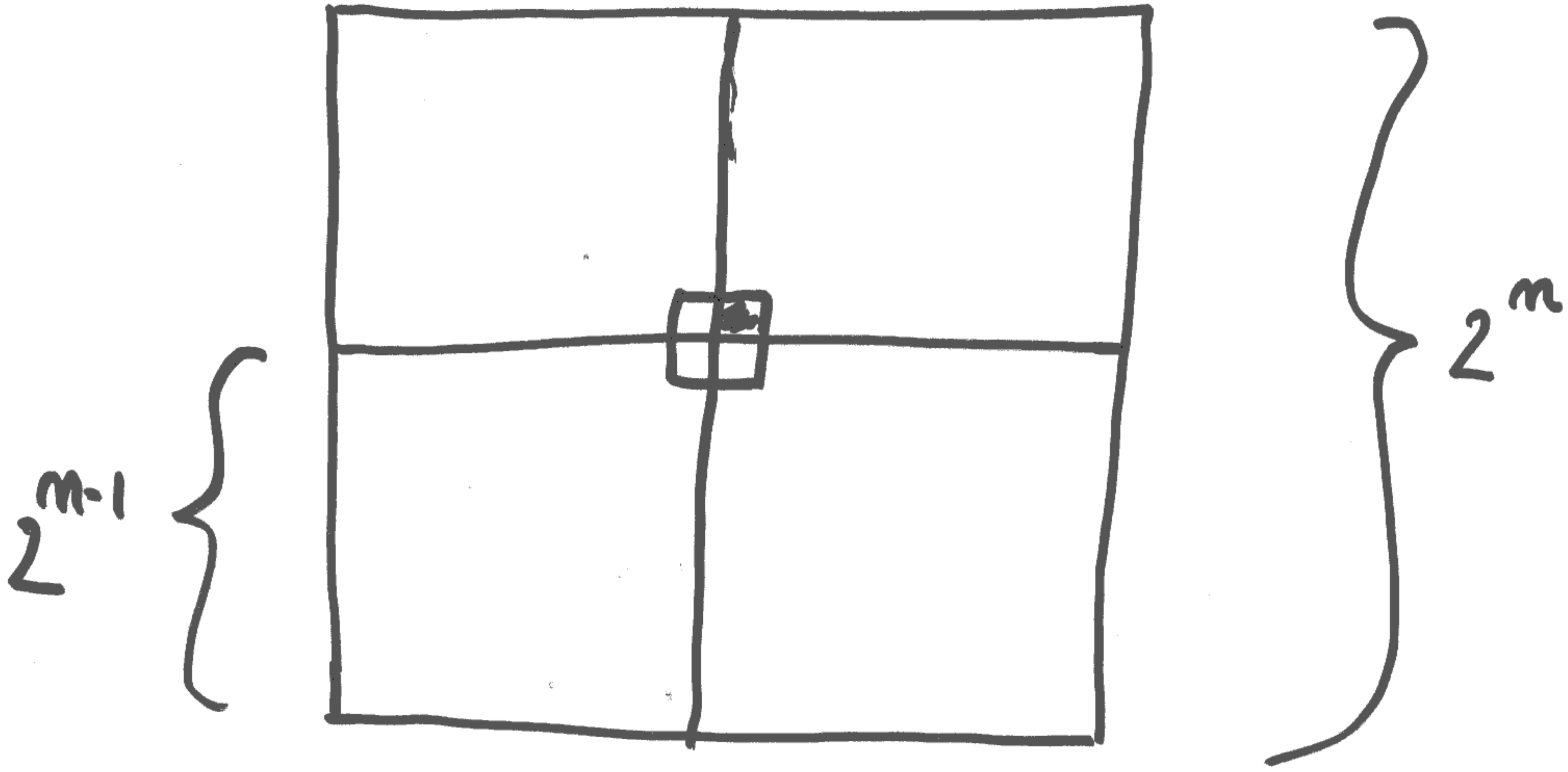
DIMOSTRARE CHE QUESTO È SEMPRE POSSIBILE.

E.g. $n = 1$

$n = 2$



INDUZIONE SU $n \in \mathbb{P}$. SIA $n \geq 3$



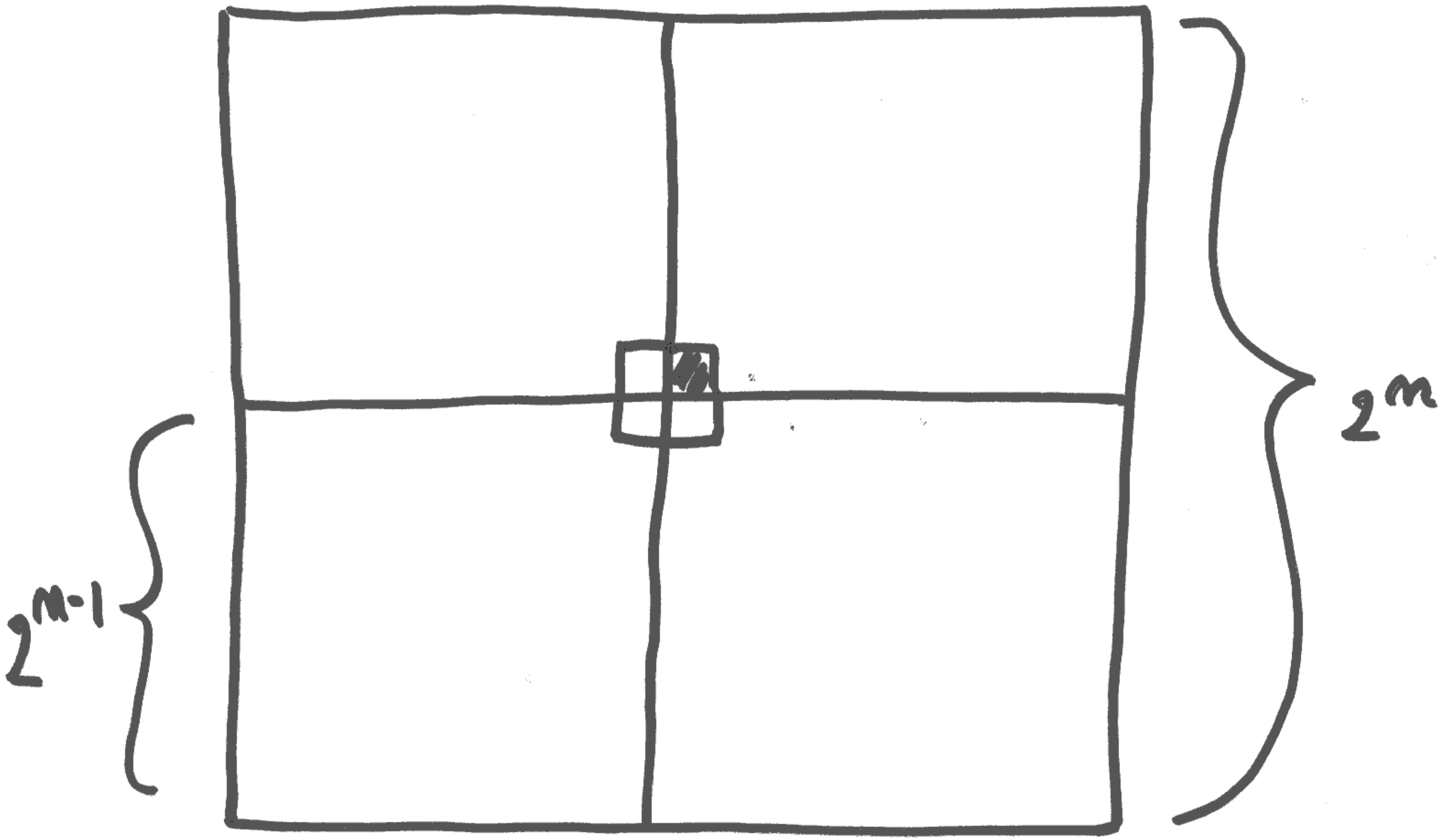
$\Rightarrow$?

RAFFORZAMENTO DELL' IPOTESI:

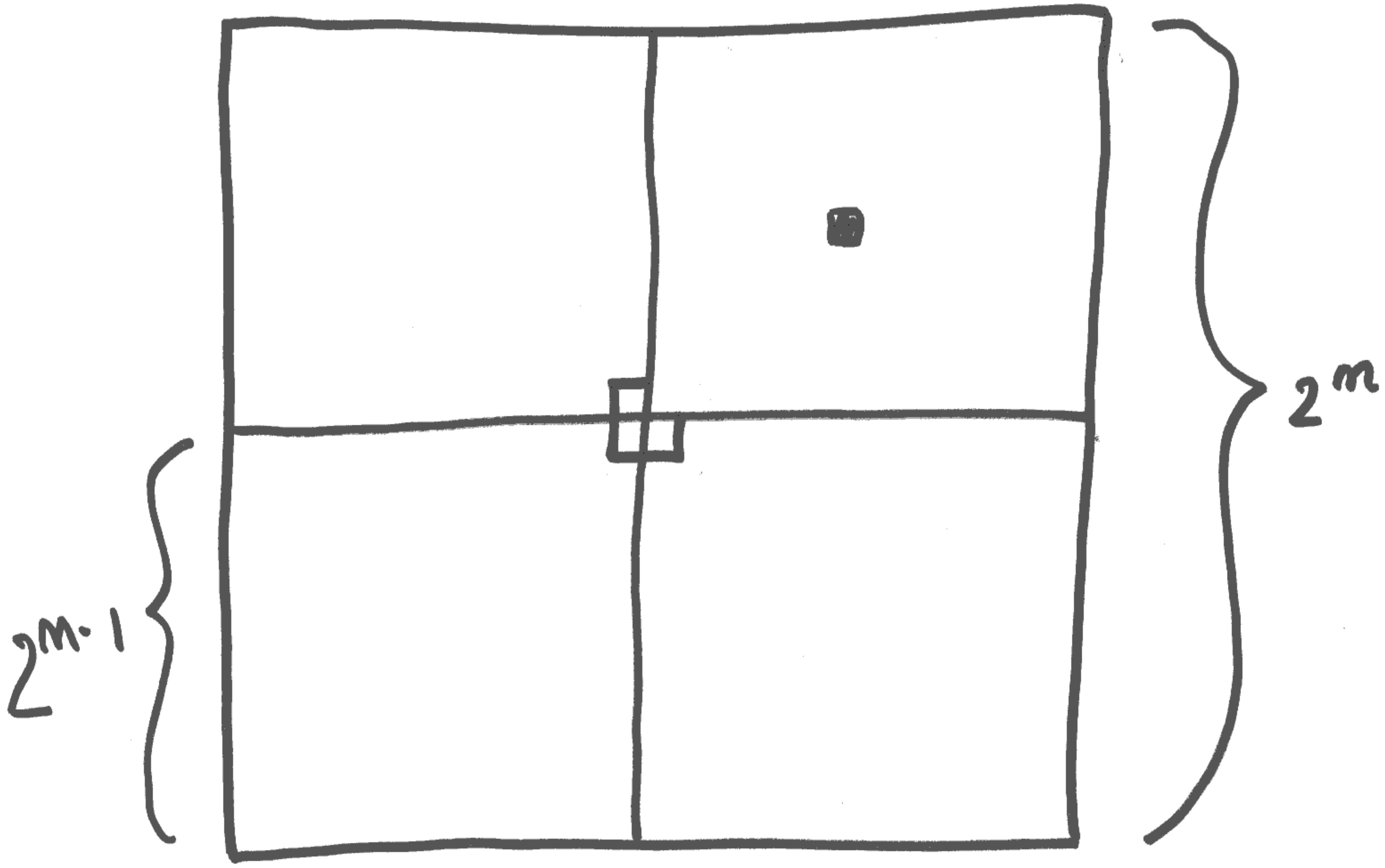
DIMOSTRARE CHE OVUNQUE METTO LA STATUA => POSSO PAVIMENTARE IL RESTO CON  .

INDUZIONE:

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1+1) = 2^n$$



$\Rightarrow$ o.k.



$\Rightarrow$ o.k.