Appello 6

Esercizio 1 - compito 1

Un'urna ha 3 palline numerate con i numeri $0, 1, 10$.
• Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e con reinserimento.
- Trovare la densità discreta della v.a. X che indica la somma dei due numeri estratti.
• Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e con reinserimento.
- Calcolare $\mathbb{E}[Y]$, dove Y è la v.a. che conta il numero di volte che viene estratto numero 1.
- Calcolare la probabilità di estrarre numeri tutti diversi tra loro.

- Ognuna delle $3^2 = 9$ coppie di due palline è equiprobabile:
$(0,0), (0,1), (0,10), (1,0), (1,1), (1,10), (10,0), (10,1), (10,10)$.
Si ha $p_X(0) = P(\{(0,0)\}) = \frac{1}{9}$, $p_X(1) = P(\{(0,1),(1,0)\}) = \frac{2}{9}$, $p_X(2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{9}$, $p_X(10) = P(\{(0,10)\},\{(10,0)\}) = \frac{2}{9}$, $p_X(11) = P(\{(1,10),(10,1)\}) = \frac{2}{9}$, $p_X(20) = P(\{(10,10)\}) = \frac{1}{9}$.

- La v.a. Y ha distribuzione Binomiale con parametri $n = 3$ e $p = \frac{1}{3}$; quindi $\mathbb{E}[Y] = np = 1$.

- Per la teoria della distribuzione multinomiale la probabilità richiesta è $\frac{3!}{1!1!1!}(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^1 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

Esercizio 1 - compito 2

Un'urna ha 3 palline numerate con i numeri $0, 1, 20$.
• Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e con reinserimento.
- Trovare la densità discreta della v.a. X che indica la somma dei due numeri estratti.
• Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e con reinserimento.
- Calcolare $\mathbb{E}[Y]$, dove Y è la v.a. che conta il numero di volte che viene estratto il numero 0.
- Calcolare la probabilità di estrarre numeri tutti diversi tra loro.

- Ognuna delle $3^2 = 9$ coppie di due palline è equiprobabile:
$(0,0), (0,1), (0,20), (1,0), (1,1), (1,20), (20,0), (20,1), (20,20)$.
Si ha $p_X(0) = P(\{(0,0)\}) = \frac{1}{9}$, $p_X(1) = P(\{(0,1),(1,0)\}) = \frac{2}{9}$, $p_X(2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{9}$, $p_X(20) = P(\{(0,20)\},\{(20,0)\}) = \frac{2}{9}$, $p_X(21) = P(\{(1,20),(20,1)\}) = \frac{2}{9}$, $p_X(40) = P(\{(20,20)\}) = \frac{1}{9}$.

- La v.a. Y ha distribuzione Binomiale con parametri $n = 3$ e $p = \frac{1}{3}$; quindi $\mathbb{E}[Y] = np = 1$.

- Per la teoria della distribuzione multinomiale la probabilità richiesta è $\frac{3!}{1!1!1!}(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^1 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

Esercizio 1 - compito 3

Un'urna ha 3 palline numerate con i numeri $0, 1, 30$.
• Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e con reinserimento.
- Trovare la densità discreta della v.a. X che indica la somma dei due numeri estratti.
• Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e con reinserimento.
- Calcolare $\mathbb{E}[Y]$, dove Y è la v.a. che conta il numero di volte che viene estratto il numero 1.
- Calcolare la probabilità di estrarre numeri tutti diversi tra loro.

- Ognuna delle $3^2 = 9$ coppie di due palline è equiprobabile:
$(0,0), (0,1), (0,30), (1,0), (1,1), (1,30), (30,0), (30,1), (30,30)$.
Si ha $p_X(0) = P(\{(0,0)\}) = \frac{1}{9}$, $p_X(1) = P(\{(0,1),(1,0)\}) = \frac{2}{9}$, $p_X(2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{9}$, $p_X(30) = P(\{(0,30)\},\{(30,0)\}) = \frac{2}{9}$, $p_X(31) = P(\{(1,30),(30,1)\}) = \frac{2}{9}$, $p_X(60) = P(\{(30,30)\}) = \frac{1}{9}$.

- La v.a. Y ha distribuzione Binomiale con parametri $n = 3$ e $p = \frac{1}{3}$; quindi $\mathbb{E}[Y] = np = 1$.

- Per la teoria della distribuzione multinomiale la probabilità richiesta è $\frac{3!}{1!1!1!}(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^1 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

Esercizio 1 - compito 4

Un'urna ha 3 palline numerate con i numeri $0, 1, 40$.
• Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e con reinserimento.
- Trovare la densità discreta della v.a. X che indica la somma dei due numeri estratti.
• Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e con reinserimento.
- Calcolare $\mathbb{E}[Y]$, dove Y è la v.a. che conta il numero di volte che viene estratto il numero 0.
- Calcolare la probabilità di estrarre numeri tutti diversi tra loro.

- Ognuna delle $3^2 = 9$ coppie di due palline è equiprobabile:
$(0,0), (0,1), (0,40), (1,0), (1,1), (1,40), (40,0), (40,1), (40,40)$.
Si ha $p_X(0) = P(\{(0,0)\}) = \frac{1}{9}$, $p_X(1) = P(\{(0,1),(1,0)\}) = \frac{2}{9}$, $p_X(2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{9}$, $p_X(40) = P(\{(0,40)\},\{(40,0)\}) = \frac{2}{9}$, $p_X(41) = P(\{(1,40),(40,1)\}) = \frac{2}{9}$, $p_X(80) = P(\{(40,40)\}) = \frac{1}{9}$.

- La v.a. Y ha distribuzione Binomiale con parametri $n = 3$ e $p = \frac{1}{3}$; quindi $\mathbb{E}[Y] = np = 1$.

- Per la teoria della distribuzione multinomiale la probabilità richiesta è $\frac{3!}{1!1!1!}(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^1 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

Esercizio 2 - compito 1

Si lancia un dado equo: se esce il numero 1, si lancia un altro dado equo; se esce un numero diverso da 1 si lancia un dado con i numeri $1, 1, 2, 2, 2, 2$.
Calcolare la probabilità che sia uscito il numero 1 al primo lancio sapendo che è uscito il numero 1 al secondo lancio.

Formula di Bayes (combinata con la formula della probabilità totali):
$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_2|E_1)P(E_1)}{P(E_2|E_1)P(E_1)+P(E_2|E_1^c)P(E_1^c)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{6}} = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11}.$

Esercizio 2 - compito 2

Si lancia un dado equo: se esce il numero 1, si lancia un altro dado equo; se esce un numero diverso da 1 si lancia un dado con i numeri $1, 1, 1, 2, 2, 2$.
Calcolare la probabilità che sia uscito il numero 1 al primo lancio sapendo che è uscito il numero 1 al secondo lancio.

Formula di Bayes (combinata con la formula della probabilità totali):
$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_2|E_1)P(E_1)}{P(E_2|E_1)P(E_1)+P(E_2|E_1^c)P(E_1^c)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{6}} = \frac{1}{1+15} = \frac{1}{16}.$

Esercizio 2 - compito 3

Si lancia un dado equo: se esce il numero 1, si lancia un altro dado equo; se esce un numero diverso da 1 si lancia un dado con i numeri $1, 1, 1, 1, 5, 6$.
Calcolare la probabilità che sia uscito il numero 1 al primo lancio sapendo che è uscito il numero 1 al secondo lancio.

Formula di Bayes (combinata con la formula della probabilità totali):
$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_2|E_1)P(E_1)}{P(E_2|E_1)P(E_1)+P(E_2|E_1^c)P(E_1^c)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{6}} = \frac{1}{1+20} = \frac{1}{21}$.

Esercizio 2 - compito 4

Si lancia un dado equo: se esce il numero 1, si lancia un altro dado equo; se esce un numero diverso da 1 si lancia un dado con i numeri $1, 1, 1, 1, 1, 6$.
Calcolare la probabilità che sia uscito il numero 1 al primo lancio sapendo che è uscito il numero 1 al secondo lancio.

Formula di Bayes (combinata con la formula della probabilità totali):
$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_2|E_1)P(E_1)}{P(E_2|E_1)P(E_1)+P(E_2|E_1^c)P(E_1^c)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}} = \frac{1}{1+25} = \frac{1}{26}$.

Esercizio 3 - compito 1

Sia $p \in (0,1)$. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{1}{2}(1-p)^{k-1}p \quad \text{per } k \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h,2h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^h}{h!}e^{-3} \quad \text{per } h \geq 0 \text{ intero.}$$

- Calcolare $P(X_2 = X_1)$.
- Calcolare $P(X_1 = 1)$.

- Si ha $P(X_2 = X_1) = p_{X_1,X_2}(0,0) + \sum_{k\geq 1} p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{e^{-3}}{2} + \frac{p}{2}\sum_{k\geq 1}(1-p)^{k-1} = \frac{e^{-3}+1}{2}$, dove l'ultima uguaglianza segue da $\sum_{k\geq 1}(1-p)^{k-1} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$.

- Si ha $P(X_1 = 1) = p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(1,2) = \frac{p+3e^{-3}}{2}$.

Esercizio 3 - compito 2

Sia $r \in (0,1)$. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{1}{2}(1-r)^{k-1}r \quad \text{per } k \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h,2h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^h}{h!}e^{-5} \quad \text{per } h \geq 0 \text{ intero.}$$

- Calcolare $P(X_2 = X_1)$.
- Calcolare $P(X_1 = 1)$.

- Si ha $P(X_2 = X_1) = p_{X_1,X_2}(0,0) + \sum_{k\geq 1} p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{e^{-5}}{2} + \frac{r}{2}\sum_{k\geq 1}(1-r)^{k-1} = \frac{e^{-5}+1}{2}$, dove l'ultima uguaglianza segue da $\sum_{k\geq 1}(1-r)^{k-1} = \frac{1}{1-(1-r)} = \frac{1}{r}$.

- Si ha $P(X_1 = 1) = p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(1,2) = \frac{r+5e^{-5}}{2}$.

Esercizio 3 - compito 3

Sia $a \in (0,1)$. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{1}{2}(1-a)^{k-1}a \quad \text{per } k \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h,2h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7^h}{h!}e^{-7} \quad \text{per } h \geq 0 \text{ intero.}$$

- Calcolare $P(X_2 = X_1)$.
- Calcolare $P(X_1 = 1)$.

- Si ha $P(X_2 = X_1) = p_{X_1,X_2}(0,0) + \sum_{k\geq 1} p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{e^{-7}}{2} + \frac{a}{2}\sum_{k\geq 1}(1-a)^{k-1} = \frac{e^{-7}+1}{2}$, dove l'ultima uguaglianza segue da $\sum_{k\geq 1}(1-a)^{k-1} = \frac{1}{1-(1-a)} = \frac{1}{a}$.

- Si ha $P(X_1 = 1) = p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(1,2) = \frac{a+7e^{-7}}{2}$.

Esercizio 3 - compito 4

Sia $b \in (0,1)$. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{1}{2}(1-b)^{k-1}b \quad \text{per } k \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h,2h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9^h}{h!}e^{-9} \quad \text{per } h \geq 0 \text{ intero.}$$

- Calcolare $P(X_2 = X_1)$.
- Calcolare $P(X_1 = 1)$.

- Si ha $P(X_2 = X_1) = p_{X_1,X_2}(0,0) + \sum_{k\geq 1} p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{e^{-9}}{2} + \frac{b}{2}\sum_{k\geq 1}(1-b)^{k-1} = \frac{e^{-9}+1}{2}$, dove l'ultima uguaglianza segue da $\sum_{k\geq 1}(1-b)^{k-1} = \frac{1}{1-(1-b)} = \frac{1}{b}$.

- Si ha $P(X_1 = 1) = p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(1,2) = \frac{b+9e^{-9}}{2}$.

Esercizio 4 - compito 1

Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{3}{2}(x-2)^2 1_{(1,3)}(x)$.
- Trovare la funzione di distribuzione F_Y della v.a. $Y = X^2$ e, in particolare, si calcoli $F_Y(0)$.
- Verificare che $\mathbb{E}[X-2] = 0$.

- Si ha $P(1 < Y < 9) = 1$; quindi in particolare $F_Y(0) = 0$. Per $y \in (1,9)$ si ha
$F_Y(y) = P(X^2 \le y) = P(X \le \sqrt{y}) = \int_1^{\sqrt{y}} \frac{3}{2}(x-2)^2 dx = \frac{[(x-2)^3]_{x=1}^{x=\sqrt{y}}}{2} = \frac{(\sqrt{y}-2)^3+1}{2}$.

- Si ha $\mathbb{E}[X-2] = \int_1^3 (x-2) \cdot \frac{3}{2}(x-2)^2 dx = \frac{3}{2} \int_1^3 (x-2)^3 dx = \frac{3}{2} \frac{[(x-2)^4]_{x=1}^{x=3}}{4} = \frac{3}{8}(1-1) = 0$.
Osservazione: segue che $\mathbb{E}[X] - 2 = 0$ per linearità della media, e quindi $\mathbb{E}[X] = 2$ (in accordo con la simmetria di $f_X(x)$ rispetto a $x = 2$).

Esercizio 4 - compito 2

Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{3}{2}(x-3)^2 1_{(2,4)}(x)$.
- Trovare la funzione di distribuzione F_Y della v.a. $Y = X^2$ e, in particolare, si calcoli $F_Y(3)$.
- Verificare che $\mathbb{E}[X-3] = 0$.

- Si ha $P(4 < Y < 16) = 1$; quindi in particolare $F_Y(3) = 0$. Per $y \in (4,16)$ si ha
$F_Y(y) = P(X^2 \le y) = P(X \le \sqrt{y}) = \int_2^{\sqrt{y}} \frac{3}{2}(x-3)^2 dx = \frac{[(x-3)^3]_{x=2}^{x=\sqrt{y}}}{2} = \frac{(\sqrt{y}-3)^3+1}{2}$.

- Si ha $\mathbb{E}[X-3] = \int_2^4 (x-3) \cdot \frac{3}{2}(x-3)^2 dx = \frac{3}{2} \int_2^4 (x-3)^3 dx = \frac{3}{2} \frac{[(x-3)^4]_{x=2}^{x=4}}{4} = \frac{3}{8}(1-1) = 0$.
Osservazione: segue che $\mathbb{E}[X] - 3 = 0$ per linearità della media, e quindi $\mathbb{E}[X] = 3$ (in accordo con la simmetria di $f_X(x)$ rispetto a $x = 3$).

Esercizio 4 - compito 3

Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{3}{2}(x-4)^2 1_{(3,5)}(x)$.
- Trovare la funzione di distribuzione F_Y della v.a. $Y = X^2$ e, in particolare, si calcoli $F_Y(8)$.
- Verificare che $\mathbb{E}[X-4] = 0$.

- Si ha $P(9 < Y < 25) = 1$; quindi in particolare $F_Y(8) = 0$. Per $y \in (9, 25)$ si ha
$F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \int_3^{\sqrt{y}} \frac{3}{2}(x-4)^2 dx = \frac{[(x-4)^3]_{x=3}^{x=\sqrt{y}}}{2} = \frac{(\sqrt{y}-4)^3+1}{2}$.

- Si ha $\mathbb{E}[X-4] = \int_3^5 (x-4) \cdot \frac{3}{2}(x-4)^2 dx = \frac{3}{2}\int_3^5 (x-4)^3 dx = \frac{3}{2}\frac{[(x-4)^4]_{x=3}^{x=5}}{4} = \frac{3}{8}(1-1) = 0$.
Osservazione: segue che $\mathbb{E}[X] - 4 = 0$ per linearità della media, e quindi $\mathbb{E}[X] = 4$ (in accordo con la simmetria di $f_X(x)$ rispetto a $x = 4$).

Esercizio 4 - compito 4

Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{3}{2}(x-5)^2 1_{(4,6)}(x)$.
- Trovare la funzione di distribuzione F_Y della v.a. $Y = X^2$ e, in particolare, si calcoli $F_Y(15)$.
- Verificare che $\mathbb{E}[X-5] = 0$.

- Si ha $P(16 < Y < 36) = 1$; quindi in particolare $F_Y(15) = 0$. Per $y \in (16, 36)$ si ha
$F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \int_4^{\sqrt{y}} \frac{3}{2}(x-5)^2 dx = \frac{[(x-5)^3]_{x=4}^{x=\sqrt{y}}}{2} = \frac{(\sqrt{y}-5)^3+1}{2}$.

- Si ha $\mathbb{E}[X-5] = \int_4^6 (x-5) \cdot \frac{3}{2}(x-5)^2 dx = \frac{3}{2}\int_4^6 (x-5)^3 dx = \frac{3}{2}\frac{[(x-5)^4]_{x=4}^{x=6}}{4} = \frac{3}{8}(1-1) = 0$.
Osservazione: segue che $\mathbb{E}[X] - 5 = 0$ per linearità della media, e quindi $\mathbb{E}[X] = 5$ (in accordo con la simmetria di $f_X(x)$ rispetto a $x = 5$).

Esercizio 5 - compito 1

Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
- Sia X una v.a. Normale con media 4 e varianza 2.
Dire per quale valore di x si ha $P(X \leq x) = \Phi(\frac{1}{2\sqrt{2}})$.
- Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 2 e varianza 16.
Dire per quale valore di x si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(1/11).$$

- Si deve avere $\Phi(\frac{1}{2\sqrt{2}}) = P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-4}{\sqrt{2}})$, e quindi si ha $\frac{x-4}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, da cui segue $x = 4+\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

- Per il Teorema Limite Centrale (dividendo per $\sqrt{16} = 4$ membro a membro) si ha

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{4\sqrt{n}} \leq \frac{x}{4}\right) \to \Phi(x/4) \text{ per } n \to \infty,$$

da cui segue $\frac{x}{4} = \frac{1}{11}$ e $x = \frac{4}{11}$.

Esercizio 5 - compito 2

Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
- Sia X una v.a. Normale con media 4 e varianza 2.
Dire per quale valore di x si ha $P(X \leq x) = \Phi(\frac{1}{3\sqrt{2}})$.
- Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 2 e varianza 25.
Dire per quale valore di x si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(1/13).$$

- Si deve avere $\Phi(\frac{1}{3\sqrt{2}}) = P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-4}{\sqrt{2}})$, e quindi si ha $\frac{x-4}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$, da cui segue $x = 4+\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$.

- Per il Teorema Limite Centrale (dividendo per $\sqrt{25} = 5$ membro a membro) si ha

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{5\sqrt{n}} \leq \frac{x}{5}\right) \to \Phi(x/5) \text{ per } n \to \infty,$$

da cui segue $\frac{x}{5} = \frac{1}{13}$ e $x = \frac{5}{13}$.

Esercizio 5 - compito 3

Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
- Sia X una v.a. Normale con media 4 e varianza 2.
Dire per quale valore di x si ha $P(X \leq x) = \Phi(\frac{1}{4\sqrt{2}})$.
- Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 2 e varianza 36.
Dire per quale valore di x si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(1/17).$$

- Si deve avere $\Phi(\frac{1}{3\sqrt{2}}) = P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-4}{\sqrt{2}})$, e quindi si ha $\frac{x-4}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$, da cui segue $x = 4+\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$.

- Per il Teorema Limite Centrale (dividendo per $\sqrt{36} = 6$ membro a membro) si ha

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{6\sqrt{n}} \leq \frac{x}{6}\right) \to \Phi(x/6) \text{ per } n \to \infty,$$

da cui segue $\frac{x}{6} = \frac{1}{17}$ e $x = \frac{6}{17}$.

Esercizio 5 - compito 4

Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
- Sia X una v.a. Normale con media 4 e varianza 2.
Dire per quale valore di x si ha $P(X \leq x) = \Phi(\frac{1}{5\sqrt{2}})$.
- Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 2 e varianza 49.
Dire per quale valore di x si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(1/19).$$

- Si deve avere $\Phi(\frac{1}{3\sqrt{2}}) = P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-4}{\sqrt{2}})$, e quindi si ha $\frac{x-4}{\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$, da cui segue $x = 4+\frac{1}{5} = \frac{21}{5}$.

- Per il Teorema Limite Centrale (dividendo per $\sqrt{49} = 7$ membro a membro) si ha

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{7\sqrt{n}} \leq \frac{x}{7}\right) \to \Phi(x/7) \text{ per } n \to \infty,$$

da cui segue $\frac{x}{7} = \frac{1}{19}$ e $x = \frac{7}{19}$.