Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
**Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)**
*Anno Accademico:* 2021-2022. *Titolare del corso:* Claudio Macci
**Appello del 12 Luglio 2022**

**Esercizio 1**. Un'urna ha tre palline numerate con i numeri $2, 3, 4$. Si estraggono a caso 4 palline, una alla volta e con reinserimento.
D1) Calcolare la probabilità di estrarre esattamente due numeri pari.
D2) Calcolare la probabilità di estrarre almeno due numeri pari.
D3) Calcolare la probabilità di non estrarre il numero 4.

**Esercizio 2**. Abbiamo due monete: la moneta 1 e la probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $q_1$, dove $0 < q_1 \leq 1$; la moneta 2 e la probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $q_2$, dove $0 \leq q_2 \leq 1$. Si lancia ripetutamente la moneta 1 fino a quando esce per la prima volta testa e sia $X$ la variabile aleatoria che indica quante volte la moneta 1 è stata lanciata. Poi si lancia $X$ volte la moneta 2.
D4) Sia $T$ l'evento "esce sempre testa nei lanci di moneta 2". Verificare che $P(T) = \frac{q_1 q_2}{1-q_2(1-q_1)}$.

**Esercizio 3**. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{9} \quad \text{per } x_1, x_2 \in \{1, 2, 3\}.$$

D5) Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1 + X_2 \geq 5)$.
D6) Calcolare $P(\{X_1 \leq 2\} \cap \{X_2 \leq 2\})$.

**Esercizio 4**. Sia $X$ una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = 2x1_{(0,1)}$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^X - 1$.
D8) Sia $m$ la mediana di $Y$, cioè il valore per cui si ha $F_Y(m) = \frac{1}{2}$. Verificare che $m = e^{1/\sqrt{2}} - 1$.

**Esercizio 5**. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia $X$ una variabile aleatoria Normale con media 2 e varianza 25.
Calcolare $P(3 \leq X \leq 4)$ esprimendo il risultato con la funzione $\Phi$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$, cioè con densità continua $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0,\infty)}(x)$.
Si verifichi che, per ogni $z \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{n}} \leq \frac{z}{\lambda}\right) = \Phi(z).$$

**Cenno alle soluzioni** (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

**Esercizio 1**.
`D1)-D2)` Sia $X$ la variabile aleatoria che conta il numero di volte che si estrae un numero pari; quindi $p_X(k) = \binom{4}{k}(\frac{2}{3})^k(1-\frac{2}{3})^{4-k}$ per $k \in \{0,1,2,3,4\}$.
`D1)` La probabilità richiesta è $P(X=2) = p_X(2) = \binom{4}{2}(\frac{2}{3})^2(1-\frac{2}{3})^{4-2} = 6\frac{4}{9}\frac{1}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$.
`D2)` La probabilità richiesta è $P(X \geq 2) = p_X(2)+p_X(3)+p_X(4) = \binom{4}{2}(\frac{2}{3})^2(1-\frac{2}{3})^{4-2} + \binom{4}{3}(\frac{2}{3})^3(1-\frac{2}{3})^{4-3} + \binom{4}{4}(\frac{2}{3})^4(1-\frac{2}{3})^{4-4} = \frac{24}{81} + \frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{72}{81} = \frac{8}{9}$.
`D3)` In ognuna delle estrazioni si deve estrarre il 2 o il 3; quindi, per indipendenza degli eventi di estrazioni diverse, la probabilità richiesta è $(\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}$.
In altro modo, detta $Y$ la variabile aleatoria che conta il numero di volte che viene estratto il numero 4, la probabilità richiesta è $p_Y(0) = \binom{4}{0}(\frac{1}{3})^0(1-\frac{1}{3})^{4-0} = 1 \cdot 1 \cdot (\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}$.

**Esercizio 2**.
`D4)` Per la formula delle probabilità totali si ha $P(T) = \sum_{h\geq 1} P(T|X=h)P(X=h) = \sum_{h\geq 1} q_2^h(1-q_1)^{h-1}q_1 = \frac{q_1}{1-q_1}\sum_{h\geq 1}(q_2(1-q_1))^h = \frac{q_1}{1-q_1}\frac{q_2(1-q_1)}{1-q_2(1-q_1)} = \frac{q_1q_2}{1-q_2(1-q_1)}$.
*Commenti.* Per $q_2 = 1$ si ha $P(T) = 1$ (del resto, se $q_2 = 1$, è certo che esca sempre testa lanciando la moneta 2); per $q_2 = 0$ si ha $P(T) = 0$ (del resto, se $q_2 = 0$, è certo che esca sempre croce lanciando la moneta 2); per $q_1 = 1$ si ha $P(T) = q_2$ (del resto, se $q_1 = 1$, è certo che la moneta 2 venga lanciata una volta sola ed esce testa con probabilità $q_2$).

**Esercizio 3**.
`D5)` Si ha $P(X_1 = X_2|X_1+X_2 \geq 5) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1+X_2\geq 5\})}{P(X_1+X_2\geq 5)} = \frac{p_{X_1,X_2}(3,3)}{p_{X_1,X_2}(2,3)+p_{X_1,X_2}(3,2)+p_{X_1,X_2}(3,3)} = \frac{1/9}{(1+1+1)/9} = \frac{1}{3}$.
`D6)` Si ha $P(\{X_1 \leq 2\}\cap\{X_2 \leq 2\}) = p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(1,2) + p_{X_1,X_2}(2,1) + p_{X_1,X_2}(2,2) = \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

**Esercizio 4**.
`D7)` Si ha $P(0 < Y < e-1) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e-1$. Per $y \in (0, e-1)$ si ha $F_Y(y) = P(e^X - 1 \leq y) = P(e^X \leq y+1) = P(X \leq \log(y+1)) = \int_0^{\log(y+1)} 2x dx = [x^2]_{x=0}^{x=\log(y+1)} = \log^2(y+1)$.
`D8)` Per il valore $m$ si ha l'equazione $\log^2(m+1) = \frac{1}{2}$, da cui segue $\log(m+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $m+1 = e^{1/\sqrt{2}}$, $m = e^{1/\sqrt{2}} - 1$.
In altro modo si può fare la seguente verifica diretta: $F_Y(e^{1/\sqrt{2}} - 1) = \log^2(e^{1/\sqrt{2}} - 1 + 1) = \log^2(e^{1/\sqrt{2}}) = (1/\sqrt{2})^2 = 1/2$.

**Esercizio 5**.
`D9)` Indichiamo con $X^* = \frac{X-2}{\sqrt{25}} = \frac{X-2}{5}$ la standardizzata di $X$ e si ha $P(3 \leq X \leq 4) = P\left(\frac{3-2}{\sqrt{25}} \leq X^* \leq \frac{4-2}{\sqrt{25}}\right) = P\left(\frac{1}{5} \leq X^* \leq \frac{2}{5}\right) = \Phi(2/5) - \Phi(1/5) = \Phi(0.4) - \Phi(0.2)$.
`D10)` Per ogni $n \geq 1$ si ha $\mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{\lambda}$ e $\mathrm{Var}[X_n] = \frac{1}{\lambda^2}$, e quindi

$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-\frac{n}{\lambda}}{\sqrt{n}} \leq \frac{z}{\lambda}\right) = P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-\frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}\sqrt{n}} \leq \frac{z/\lambda}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}}\right) = P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-\frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}\sqrt{n}} \leq z\right).$$

Allora il limite dell'ultimo membro è uguale a $\Phi(z)$ per il Teorema Limite Centrale; quindi possiamo dire che anche il primo membro converge allo stesso limite (sono quantità coincidenti ...).