Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Appello del 21 Settembre 2021 - Compito 1

Esercizio 1.
Abbiamo una moneta e sia p la probabilità che esca testa lanciandola.
`D1)` Si lancia la moneta 5 volte. Calcolare la probabilità che esca la sequenza (T,T,C,C,T), dove $T =$ testa e $C =$ croce.
`D2)` Si lancia la moneta 4 volte. Calcolare la probabilità che esca testa esattamente 3 volte (nella risposta a questa domanda si chiede di calcolare esplicitamente i coefficienti binomiali che appaiono).
`D3)` Si consideri un insieme di lanci non precisato. Calcolare la probabilità che esca testa per la seconda volta esattamente al terzo lancio.

Esercizio 2. Si lancia ripetutamente un dado equo e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta un numero pari. Poi si lancia X volte una moneta, la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $p \in [0,1]$.
`D4)` Verificare che la probabilità di avere tutte teste o tutte croci nei lanci di moneta effettuati è uguale a $\frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}$.

Esercizio 3. Sia $n \geq 1$ intero arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{n^2}, \text{ per } x_1,x_2 \in \{1,\dots,n\}.$$

`D5)` Verificare che $P(X_1 = X_2) = \frac{1}{n}$.
`D6)` Sia $n = 4$. Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1X_2 = 4)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0,1)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = 10 + \sqrt{X}$.
`D8)` Sia v la mediana di Y, cioè il numero v tale che $F_Y(v) = \frac{1}{2}$. Verificare che $v = 10 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale standard (media 0 e varianza 1).
Calcolare $P(1.1 < X < 2.8)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Siano $X_1,\dots,X_{100}$ v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 841. Verificare che si ha

$$P(101 \leq X_1 + \cdots + X_{100} < 111) \approx \Phi\left(\frac{11}{290}\right) - \Phi\left(\frac{1}{290}\right)$$

usando l'approssimazione Normale.

Cenno alle soluzioni (Compito 1) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $p^3(1-p)^2$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{3}p^3(1-p)^{4-3} = 4p^3(1-p)$.
`D3)` Con notazioni ovvie l'evento in questione si realizza con le seguenti due stringhe di risultati: (T,C,T), (C,T,T). Quindi la probabilità richiesta è uguale a $p^2(1-p) + p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.
Commento: questo è in accordo con la teoria della binomiale negativa traslata per cui la probabilità richiesta è uguale a $\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$ con $n=3$ e $r=2$, da cui segue $\binom{3-1}{2-1}p^2(1-p)^{3-2} = \binom{2}{1}p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.

Esercizio 2.
`D4)` Sia E l'evento di interesse e, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(E) = \sum_{k\geq 1} P(E|X=k)P(X=k) = \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(1-\frac{3}{6}\right)^{k-1}\frac{3}{6}$$
$$= \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{p}{2}\right)^k + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1-p}{2}\right)^k = \frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}.$$

Commento: si osservi che, nei casi $p=0$ e $p=1$, si ottiene $P(E)=1$ come deve essere.

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^n p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = X_2 | X_1X_2 = 4) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)} = \frac{p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(1,4)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(4,1)} = \frac{1/16}{3/16} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(10 \leq Y \leq 11) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 10$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 11$. Per $y \in (10,11)$ si ha $F_Y(y) = P(10+\sqrt{X} \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y-10) = P(X \leq (y-10)^2) = \int_0^{(y-10)^2}\frac{1}{1-0}dx = [x]_{x=0}^{x=(y-10)^2} = (y-10)^2$.
`D8)` Si ha l'equazione $(v-10)^2 = \frac{1}{2}$, da cui segue $v - 10 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi $v = 10 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si ha $P(1.1 < X < 2.8) = \Phi(2.8) - \Phi(1.1)$.
`D10)` Si ha

$$P(101 \leq X_1+\cdots+X_{100} < 111) = P\left(\frac{101-100\cdot 1}{\sqrt{841}\sqrt{100}} < \frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 1}{\sqrt{841}\sqrt{100}} < \frac{111-100\cdot 1}{\sqrt{841}\sqrt{100}}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{111-100}{29\cdot 10}\right) - \Phi\left(\frac{101-100}{29\cdot 10}\right) = \Phi\left(\frac{11}{290}\right) - \Phi\left(\frac{1}{290}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 21 Settembre 2021 - Compito 2

Esercizio 1.
Abbiamo una moneta e sia p la probabilità che esca testa lanciandola.
`D1)` Si lancia la moneta 5 volte. Calcolare la probabilità che esca la sequenza (T, T, C, C, T), dove T = testa e C = croce.
`D2)` Si lancia la moneta 4 volte. Calcolare la probabilità che esca testa esattamente 1 volta (nella risposta a questa domanda si chiede di calcolare esplicitamente i coefficienti binomiali che appaiono).
`D3)` Si consideri un insieme di lanci non precisato. Calcolare la probabilità che esca testa per la seconda volta esattamente al terzo lancio.

Esercizio 2. Si lancia ripetutamente un dado equo e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta un numero pari. Poi si lancia X volte una moneta, la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $p \in [0, 1]$.
`D4)` Verificare che la probabilità di avere tutte teste o tutte croci nei lanci di moneta effettuati è uguale a $\frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}$.

Esercizio 3. Sia $n \geq 1$ intero arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{n^2}, \text{ per } x_1, x_2 \in \{1, \ldots, n\}.$$

`D5)` Verificare che $P(X_1 = X_2) = \frac{1}{n}$.
`D6)` Sia $n = 4$. Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1 X_2 = 4)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 1)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = 20 + \sqrt{X}$.
`D8)` Sia v la mediana di Y, cioè il numero v tale che $F_Y(v) = \frac{1}{2}$. Verificare che $v = 20 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale standard (media 0 e varianza 1).
Calcolare $P(1.2 < X < 2.7)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 841. Verificare che si ha

$$P(101 \leq X_1 + \cdots + X_{100} < 111) \approx \Phi\left(\frac{11}{290}\right) - \Phi\left(\frac{1}{290}\right)$$

usando l'approssimazione Normale.

Cenno alle soluzioni (Compito 2) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $p^3(1-p)^2$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{1}p^1(1-p)^{4-1} = 4p(1-p)^3$.
`D3)` Con notazioni ovvie l'evento in questione si realizza con le seguenti due stringhe di risultati: (T, C, T), (C, T, T). Quindi la probabilità richiesta è uguale a $p^2(1-p) + p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.
Commento: questo è in accordo con la teoria della binomiale negativa traslata per cui la probabilità richiesta è uguale a $\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$ con $n = 3$ e $r = 2$, da cui segue $\binom{3-1}{2-1}p^2(1-p)^{3-2} = \binom{2}{1}p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.

Esercizio 2.
`D4)` Sia E l'evento di interesse e, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(E) = \sum_{k\geq 1} P(E|X=k)P(X=k) = \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(1-\frac{3}{6}\right)^{k-1}\frac{3}{6}$$
$$= \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{p}{2}\right)^k + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1-p}{2}\right)^k = \frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}.$$

Commento: si osservi che, nei casi $p = 0$ e $p = 1$, si ottiene $P(E) = 1$ come deve essere.

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{n} p_{X_1,X_2}(k, k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = X_2|X_1X_2 = 4) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)} = \frac{p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(1,4)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(4,1)} = \frac{1/16}{3/16} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(20 \leq Y \leq 21) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 20$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 21$. Per $y \in (20, 21)$ si ha $F_Y(y) = P(20 + \sqrt{X} \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y - 20) = P(X \leq (y-20)^2) = \int_0^{(y-20)^2} \frac{1}{1-0}dx = [x]_{x=0}^{x=(y-20)^2} = (y-20)^2$.
`D8)` Si ha l'equazione $(v-20)^2 = \frac{1}{2}$, da cui segue $v - 20 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi $v = 20 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si ha $P(1.2 < X < 2.7) = \Phi(2.7) - \Phi(1.2)$.
`D10)` Si ha

$$P(101 \leq X_1+\cdots+X_{100} < 111) = P\left(\frac{101-100\cdot 1}{\sqrt{841}\sqrt{100}} < \frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 1}{\sqrt{841}\sqrt{100}} < \frac{111-100\cdot 1}{\sqrt{841}\sqrt{100}}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{111-100}{29\cdot 10}\right) - \Phi\left(\frac{101-100}{29\cdot 10}\right) = \Phi\left(\frac{11}{290}\right) - \Phi\left(\frac{1}{290}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 21 Settembre 2021 - Compito 3

Esercizio 1.
Abbiamo una moneta e sia p la probabilità che esca testa lanciandola.
D1) Si lancia la moneta 5 volte. Calcolare la probabilità che esca la sequenza (T, T, C, C, T), dove $T =$ testa e $C =$ croce.
D2) Si lancia la moneta 4 volte. Calcolare la probabilità che esca testa esattamente 3 volte (nella risposta a questa domanda si chiede di calcolare esplicitamente i coefficienti binomiali che appaiono).
D3) Si consideri un insieme di lanci non precisato. Calcolare la probabilità che esca testa per la seconda volta esattamente al terzo lancio.

Esercizio 2. Si lancia ripetutamente un dado equo e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta un numero pari. Poi si lancia X volte una moneta, la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $p \in [0, 1]$.
D4) Verificare che la probabilità di avere tutte teste o tutte croci nei lanci di moneta effettuati è uguale a $\frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}$.

Esercizio 3. Sia $m \geq 1$ intero arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{m^2}, \text{ per } x_1, x_2 \in \{1, \ldots, m\}.$$

D5) Verificare che $P(X_1 = X_2) = \frac{1}{m}$.
D6) Sia $m = 4$. Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1X_2 = 4)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 1)$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = 20 + \sqrt{X}$.
D8) Sia v la mediana di Y, cioè il numero v tale che $F_Y(v) = \frac{1}{2}$. Verificare che $v = 20 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria Normale standard (media 0 e varianza 1).
Calcolare $P(1.3 < X < 2.6)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
D10) Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 961. Verificare che si ha

$$P(101 \leq X_1 + \cdots + X_{100} < 111) \approx \Phi\left(\frac{11}{310}\right) - \Phi\left(\frac{1}{310}\right)$$

usando l'approssimazione Normale.

Cenno alle soluzioni (Compito 3) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $p^3(1-p)^2$.

`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{3}p^3(1-p)^{4-3} = 4p^3(1-p)$.

`D3)` Con notazioni ovvie l'evento in questione si realizza con le seguenti due stringhe di risultati: (T, C, T), (C, T, T). Quindi la probabilità richiesta è uguale a $p^2(1-p) + p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.
Commento: questo è in accordo con la teoria della binomiale negativa traslata per cui la probabilità richiesta è uguale a $\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$ con $n = 3$ e $r = 2$, da cui segue $\binom{3-1}{2-1}p^2(1-p)^{3-2} = \binom{2}{1}p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.

Esercizio 2.

`D4)` Sia E l'evento di interesse e, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(E) = \sum_{k\geq 1} P(E|X = k)P(X = k) = \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(1 - \frac{3}{6}\right)^{k-1}\frac{3}{6}$$
$$= \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{p}{2}\right)^k + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1-p}{2}\right)^k = \frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}.$$

Commento: si osservi che, nei casi $p = 0$ e $p = 1$, si ottiene $P(E) = 1$ come deve essere.

Esercizio 3.

`D5)` Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^m p_{X_1,X_2}(k, k) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m^2} = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m}$.

`D6)` Si ha $P(X_1 = X_2|X_1X_2 = 4) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)} = \frac{p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(1,4)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(4,1)} = \frac{1/16}{3/16} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(20 \leq Y \leq 21) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 20$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 21$. Per $y \in (20, 21)$ si ha $F_Y(y) = P(20 + \sqrt{X} \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y - 20) = P(X \leq (y-20)^2) = \int_0^{(y-20)^2} \frac{1}{1-0}dx = [x]_{x=0}^{x=(y-20)^2} = (y-20)^2$.

`D8)` Si ha l'equazione $(v-20)^2 = \frac{1}{2}$, da cui segue $v - 20 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi $v = 20 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5.

`D9)` Si ha $P(1.3 < X < 2.6) = \Phi(2.6) - \Phi(1.3)$.

`D10)` Si ha

$$P(101 \leq X_1+\cdots+X_{100} < 111) = P\left(\frac{101 - 100\cdot 1}{\sqrt{961}\sqrt{100}} < \frac{X_1 + \cdots + X_{100} - 100\cdot 1}{\sqrt{961}\sqrt{100}} < \frac{111 - 100\cdot 1}{\sqrt{961}\sqrt{100}}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{111-100}{31\cdot 10}\right) - \Phi\left(\frac{101-100}{31\cdot 10}\right) = \Phi\left(\frac{11}{310}\right) - \Phi\left(\frac{1}{310}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 21 Settembre 2021 - Compito 4

Esercizio 1.
Abbiamo una moneta e sia p la probabilità che esca testa lanciandola.
D1) Si lancia la moneta 5 volte. Calcolare la probabilità che esca la sequenza (T, T, C, C, T), dove $T =$ testa e $C =$ croce.
D2) Si lancia la moneta 4 volte. Calcolare la probabilità che esca testa esattamente 1 volta (nella risposta a questa domanda si chiede di calcolare esplicitamente i coefficienti binomiali che appaiono).
D3) Si consideri un insieme di lanci non precisato. Calcolare la probabilità che esca testa per la seconda volta esattamente al terzo lancio.

Esercizio 2. Si lancia ripetutamente un dado equo e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta un numero pari. Poi si lancia X volte una moneta, la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $p \in [0, 1]$.
D4) Verificare che la probabilità di avere tutte teste o tutte croci nei lanci di moneta effettuati è uguale a $\frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}$.

Esercizio 3. Sia $m \geq 1$ intero arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{m^2}, \text{ per } x_1, x_2 \in \{1, \dots, m\}.$$

D5) Verificare che $P(X_1 = X_2) = \frac{1}{m}$.
D6) Sia $m = 4$. Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1 X_2 = 4)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 1)$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = 10 + \sqrt{X}$.
D8) Sia v la mediana di Y, cioè il numero v tale che $F_Y(v) = \frac{1}{2}$. Verificare che $v = 10 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria Normale standard (media 0 e varianza 1).
Calcolare $P(1.4 < X < 2.5)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
D10) Siano $X_1, \dots, X_{100}$ v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 961. Verificare che si ha

$$P(101 \leq X_1 + \cdots + X_{100} < 111) \approx \Phi\left(\frac{11}{310}\right) - \Phi\left(\frac{1}{310}\right)$$

usando l'approssimazione Normale.

Cenno alle soluzioni (Compito 4) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $p^3(1-p)^2$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{1}p^1(1-p)^{4-1} = 4p(1-p)^3$.
`D3)` Con notazioni ovvie l'evento in questione si realizza con le seguenti due stringhe di risultati: (T, C, T), (C, T, T). Quindi la probabilità richiesta è uguale a $p^2(1-p) + p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.
Commento: questo è in accordo con la teoria della binomiale negativa traslata per cui la probabilità richiesta è uguale a $\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$ con $n = 3$ e $r = 2$, da cui segue $\binom{3-1}{2-1}p^2(1-p)^{3-2} = \binom{2}{1}p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.

Esercizio 2.
`D4)` Sia E l'evento di interesse e, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(E) = \sum_{k\geq 1} P(E|X=k)P(X=k) = \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(1-\frac{3}{6}\right)^{k-1}\frac{3}{6}$$
$$= \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{p}{2}\right)^k + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1-p}{2}\right)^k = \frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}.$$

Commento: si osservi che, nei casi $p = 0$ e $p = 1$, si ottiene $P(E) = 1$ come deve essere.

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^m p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m^2} = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = X_2|X_1X_2 = 4) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)} = \frac{p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(1,4)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(4,1)} = \frac{1/16}{3/16} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(10 \leq Y \leq 11) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 10$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 11$. Per $y \in (10, 11)$ si ha $F_Y(y) = P(10 + \sqrt{X} \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y - 10) = P(X \leq (y-10)^2) = \int_0^{(y-10)^2} \frac{1}{1-0}dx = [x]_{x=0}^{x=(y-10)^2} = (y-10)^2$.
`D8)` Si ha l'equazione $(v-10)^2 = \frac{1}{2}$, da cui segue $v - 10 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi $v = 10 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si ha $P(1.4 < X < 2.5) = \Phi(2.5) - \Phi(1.4)$.
`D10)` Si ha

$$P(101 \leq X_1+\cdots+X_{100} < 111) = P\left(\frac{101-100\cdot 1}{\sqrt{961}\sqrt{100}} < \frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 1}{\sqrt{961}\sqrt{100}} < \frac{111-100\cdot 1}{\sqrt{961}\sqrt{100}}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{111-100}{31\cdot 10}\right) - \Phi\left(\frac{101-100}{31\cdot 10}\right) = \Phi\left(\frac{11}{310}\right) - \Phi\left(\frac{1}{310}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 21 Settembre 2021 - Compito 5

Esercizio 1.
Abbiamo una moneta e sia p la probabilità che esca testa lanciandola.
`D1)` Si lancia la moneta 5 volte. Calcolare la probabilità che esca la sequenza (C, T, C, C, T), dove $T =$ testa e $C =$ croce.
`D2)` Si lancia la moneta 4 volte. Calcolare la probabilità che esca testa esattamente 3 volte (nella risposta a questa domanda si chiede di calcolare esplicitamente i coefficienti binomiali che appaiono).
`D3)` Si consideri un insieme di lanci non precisato. Calcolare la probabilità che esca testa per la seconda volta esattamente al terzo lancio.

Esercizio 2. Si lancia ripetutamente un dado equo e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta un numero pari. Poi si lancia X volte una moneta, la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $p \in [0, 1]$.
`D4)` Verificare che la probabilità di avere tutte teste o tutte croci nei lanci di moneta effettuati è uguale a $\frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}$.

Esercizio 3. Sia $m \geq 1$ intero arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{m^2}, \text{ per } x_1, x_2 \in \{1, \ldots, m\}.$$

`D5)` Verificare che $P(X_1 = X_2) = \frac{1}{m}$.
`D6)` Sia $m = 4$. Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1 X_2 = 4)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 1)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = 10 + \sqrt{X}$.
`D8)` Sia v la mediana di Y, cioè il numero v tale che $F_Y(v) = \frac{1}{2}$. Verificare che $v = 10 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale standard (media 0 e varianza 1).
Calcolare $P(1.5 < X < 2.4)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 841. Verificare che si ha

$$P(101 \leq X_1 + \cdots + X_{100} < 111) \approx \Phi\left(\frac{11}{290}\right) - \Phi\left(\frac{1}{290}\right)$$

usando l'approssimazione Normale.

Cenno alle soluzioni (Compito 5) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $p^2(1-p)^3$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{3}p^3(1-p)^{4-3} = 4p^3(1-p)$.
`D3)` Con notazioni ovvie l'evento in questione si realizza con le seguenti due stringhe di risultati: (T, C, T), (C, T, T). Quindi la probabilità richiesta è uguale a $p^2(1-p) + p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.
Commento: questo è in accordo con la teoria della binomiale negativa traslata per cui la probabilità richiesta è uguale a $\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$ con $n = 3$ e $r = 2$, da cui segue $\binom{3-1}{2-1}p^2(1-p)^{3-2} = \binom{2}{1}p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.

Esercizio 2.
`D4)` Sia E l'evento di interesse e, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(E) = \sum_{k\geq 1} P(E|X=k)P(X=k) = \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(1-\frac{3}{6}\right)^{k-1}\frac{3}{6}$$
$$= \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{p}{2}\right)^k + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1-p}{2}\right)^k = \frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}.$$

Commento: si osservi che, nei casi $p = 0$ e $p = 1$, si ottiene $P(E) = 1$ come deve essere.

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^m p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m^2} = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = X_2|X_1X_2 = 4) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)} = \frac{p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(1,4)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(4,1)} = \frac{1/16}{3/16} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(10 \leq Y \leq 11) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 10$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 11$. Per $y \in (10, 11)$ si ha $F_Y(y) = P(10 + \sqrt{X} \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y - 10) = P(X \leq (y-10)^2) = \int_0^{(y-10)^2} \frac{1}{1-0}dx = [x]_{x=0}^{x=(y-10)^2} = (y-10)^2$.
`D8)` Si ha l'equazione $(v-10)^2 = \frac{1}{2}$, da cui segue $v - 10 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi $v = 10 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si ha $P(1.5 < X < 2.4) = \Phi(2.4) - \Phi(1.5)$.
`D10)` Si ha

$$P(101 \leq X_1+\cdots+X_{100} < 111) = P\left(\frac{101-100\cdot 1}{\sqrt{841}\sqrt{100}} < \frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 1}{\sqrt{841}\sqrt{100}} < \frac{111-100\cdot 1}{\sqrt{841}\sqrt{100}}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{111-100}{29\cdot 10}\right) - \Phi\left(\frac{101-100}{29\cdot 10}\right) = \Phi\left(\frac{11}{290}\right) - \Phi\left(\frac{1}{290}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 21 Settembre 2021 - Compito 6

Esercizio 1.
Abbiamo una moneta e sia p la probabilità che esca testa lanciandola.
D1) Si lancia la moneta 5 volte. Calcolare la probabilità che esca la sequenza (C, T, C, C, T), dove $T =$ testa e $C =$ croce.
D2) Si lancia la moneta 4 volte. Calcolare la probabilità che esca testa esattamente 1 volta (nella risposta a questa domanda si chiede di calcolare esplicitamente i coefficienti binomiali che appaiono).
D3) Si consideri un insieme di lanci non precisato. Calcolare la probabilità che esca testa per la seconda volta esattamente al terzo lancio.

Esercizio 2. Si lancia ripetutamente un dado equo e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta un numero pari. Poi si lancia X volte una moneta, la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $p \in [0, 1]$.
D4) Verificare che la probabilità di avere tutte teste o tutte croci nei lanci di moneta effettuati è uguale a $\frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}$.

Esercizio 3. Sia $m \geq 1$ intero arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{m^2}, \text{ per } x_1, x_2 \in \{1, \ldots, m\}.$$

D5) Verificare che $P(X_1 = X_2) = \frac{1}{m}$.
D6) Sia $m = 4$. Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1 X_2 = 4)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 1)$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = 20 + \sqrt{X}$.
D8) Sia v la mediana di Y, cioè il numero v tale che $F_Y(v) = \frac{1}{2}$. Verificare che $v = 20 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria Normale standard (media 0 e varianza 1).
Calcolare $P(1.6 < X < 2.3)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
D10) Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 841. Verificare che si ha

$$P(101 \leq X_1 + \cdots + X_{100} < 111) \approx \Phi\left(\frac{11}{290}\right) - \Phi\left(\frac{1}{290}\right)$$

usando l'approssimazione Normale.

Cenno alle soluzioni (Compito 6) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $p^2(1-p)^3$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{1}p^1(1-p)^{4-1} = 4p(1-p)^3$.
`D3)` Con notazioni ovvie l'evento in questione si realizza con le seguenti due stringhe di risultati: (T, C, T), (C, T, T). Quindi la probabilità richiesta è uguale a $p^2(1-p) + p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.
Commento: questo è in accordo con la teoria della binomiale negativa traslata per cui la probabilità richiesta è uguale a $\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$ con $n = 3$ e $r = 2$, da cui segue $\binom{3-1}{2-1}p^2(1-p)^{3-2} = \binom{2}{1}p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.

Esercizio 2.
`D4)` Sia E l'evento di interesse e, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(E) = \sum_{k\geq 1} P(E|X = k)P(X = k) = \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(1-\frac{3}{6}\right)^{k-1}\frac{3}{6}$$
$$= \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{p}{2}\right)^k + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1-p}{2}\right)^k = \frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}.$$

Commento: si osservi che, nei casi $p = 0$ e $p = 1$, si ottiene $P(E) = 1$ come deve essere.

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^m p_{X_1,X_2}(k, k) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m^2} = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = X_2|X_1X_2 = 4) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)} = \frac{p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(1,4)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(4,1)} = \frac{1/16}{3/16} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(20 \leq Y \leq 21) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 20$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 21$. Per $y \in (20, 21)$ si ha $F_Y(y) = P(20 + \sqrt{X} \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y - 20) = P(X \leq (y - 20)^2) = \int_0^{(y-20)^2} \frac{1}{1-0}dx = [x]_{x=0}^{x=(y-20)^2} = (y - 20)^2$.
`D8)` Si ha l'equazione $(v - 20)^2 = \frac{1}{2}$, da cui segue $v - 20 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi $v = 20 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si ha $P(1.6 < X < 2.3) = \Phi(2.3) - \Phi(1.6)$.
`D10)` Si ha

$$P(101 \leq X_1+\cdots+X_{100} < 111) = P\left(\frac{101-100\cdot 1}{\sqrt{841}\sqrt{100}} < \frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 1}{\sqrt{841}\sqrt{100}} < \frac{111-100\cdot 1}{\sqrt{841}\sqrt{100}}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{111-100}{29\cdot 10}\right) - \Phi\left(\frac{101-100}{29\cdot 10}\right) = \Phi\left(\frac{11}{290}\right) - \Phi\left(\frac{1}{290}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 21 Settembre 2021 - Compito 7

Esercizio 1.
Abbiamo una moneta e sia p la probabilità che esca testa lanciandola.
`D1)` Si lancia la moneta 5 volte. Calcolare la probabilità che esca la sequenza (C, T, C, C, T), dove $T =$ testa e $C =$ croce.
`D2)` Si lancia la moneta 4 volte. Calcolare la probabilità che esca testa esattamente 3 volte (nella risposta a questa domanda si chiede di calcolare esplicitamente i coefficienti binomiali che appaiono).
`D3)` Si consideri un insieme di lanci non precisato. Calcolare la probabilità che esca testa per la seconda volta esattamente al terzo lancio.

Esercizio 2. Si lancia ripetutamente un dado equo e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta un numero pari. Poi si lancia X volte una moneta, la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $p \in [0, 1]$.
`D4)` Verificare che la probabilità di avere tutte teste o tutte croci nei lanci di moneta effettuati è uguale a $\frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}$.

Esercizio 3. Sia $n \geq 1$ intero arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{n^2}, \text{ per } x_1, x_2 \in \{1, \ldots, n\}.$$

`D5)` Verificare che $P(X_1 = X_2) = \frac{1}{n}$.
`D6)` Sia $n = 4$. Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1 X_2 = 4)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 1)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = 20 + \sqrt{X}$.
`D8)` Sia v la mediana di Y, cioè il numero v tale che $F_Y(v) = \frac{1}{2}$. Verificare che $v = 20 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale standard (media 0 e varianza 1).
Calcolare $P(1.7 < X < 2.2)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 961. Verificare che si ha

$$P(101 \leq X_1 + \cdots + X_{100} < 111) \approx \Phi\left(\frac{11}{310}\right) - \Phi\left(\frac{1}{310}\right)$$

usando l'approssimazione Normale.

Cenno alle soluzioni (Compito 7) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $p^2(1-p)^3$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{3}p^3(1-p)^{4-3} = 4p^3(1-p)$.
`D3)` Con notazioni ovvie l'evento in questione si realizza con le seguenti due stringhe di risultati: (T,C,T), (C,T,T). Quindi la probabilità richiesta è uguale a $p^2(1-p)+p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.
Commento: questo è in accordo con la teoria della binomiale negativa traslata per cui la probabilità richiesta è uguale a $\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$ con $n=3$ e $r=2$, da cui segue $\binom{3-1}{2-1}p^2(1-p)^{3-2} = \binom{2}{1}p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.

Esercizio 2.
`D4)` Sia E l'evento di interesse e, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(E) = \sum_{k\geq 1} P(E|X=k)P(X=k) = \sum_{k\geq 1}(p^k+(1-p)^k)\left(1-\frac{3}{6}\right)^{k-1}\frac{3}{6}$$
$$= \sum_{k\geq 1}(p^k+(1-p)^k)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{p}{2}\right)^k + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1-p}{2}\right)^k = \frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}.$$

Commento: si osservi che, nei casi $p=0$ e $p=1$, si ottiene $P(E)=1$ come deve essere.

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^n p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = X_2|X_1X_2 = 4) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)} = \frac{p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(1,4)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(4,1)} = \frac{1/16}{3/16} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(20 \leq Y \leq 21) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 20$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 21$. Per $y \in (20,21)$ si ha $F_Y(y) = P(20+\sqrt{X} \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y-20) = P(X \leq (y-20)^2) = \int_0^{(y-20)^2} \frac{1}{1-0}dx = [x]_{x=0}^{x=(y-20)^2} = (y-20)^2$.
`D8)` Si ha l'equazione $(v-20)^2 = \frac{1}{2}$, da cui segue $v-20 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi $v = 20+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si ha $P(1.7 < X < 2.2) = \Phi(2.2) - \Phi(1.7)$.
`D10)` Si ha

$$P(101 \leq X_1+\cdots+X_{100} < 111) = P\left(\frac{101-100\cdot 1}{\sqrt{961}\sqrt{100}} < \frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 1}{\sqrt{961}\sqrt{100}} < \frac{111-100\cdot 1}{\sqrt{961}\sqrt{100}}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{111-100}{31\cdot 10}\right) - \Phi\left(\frac{101-100}{31\cdot 10}\right) = \Phi\left(\frac{11}{310}\right) - \Phi\left(\frac{1}{310}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* Claudio Macci

Appello del 21 Settembre 2021 - Compito 8

Esercizio 1.
Abbiamo una moneta e sia p la probabilità che esca testa lanciandola.
D1) Si lancia la moneta 5 volte. Calcolare la probabilità che esca la sequenza (C, T, C, C, T), dove $T =$ testa e $C =$ croce.
D2) Si lancia la moneta 4 volte. Calcolare la probabilità che esca testa esattamente 1 volta (nella risposta a questa domanda si chiede di calcolare esplicitamente i coefficienti binomiali che appaiono).
D3) Si consideri un insieme di lanci non precisato. Calcolare la probabilità che esca testa per la seconda volta esattamente al terzo lancio.

Esercizio 2. Si lancia ripetutamente un dado equo e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta un numero pari. Poi si lancia X volte una moneta, la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $p \in [0, 1]$.
D4) Verificare che la probabilità di avere tutte teste o tutte croci nei lanci di moneta effettuati è uguale a $\frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}$.

Esercizio 3. Sia $n \geq 1$ intero arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{n^2}, \text{ per } x_1, x_2 \in \{1, \ldots, n\}.$$

D5) Verificare che $P(X_1 = X_2) = \frac{1}{n}$.
D6) Sia $n = 4$. Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1 X_2 = 4)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 1)$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = 10 + \sqrt{X}$.
D8) Sia v la mediana di Y, cioè il numero v tale che $F_Y(v) = \frac{1}{2}$. Verificare che $v = 10 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria Normale standard (media 0 e varianza 1).
Calcolare $P(1.8 < X < 2.1)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
D10) Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 961. Verificare che si ha

$$P(101 \leq X_1 + \cdots + X_{100} < 111) \approx \Phi\left(\frac{11}{310}\right) - \Phi\left(\frac{1}{310}\right)$$

usando l'approssimazione Normale.

Cenno alle soluzioni (Compito 8) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è uguale a $p^2(1-p)^3$.
`D2)` La probabilità richiesta è uguale a $\binom{4}{1}p^1(1-p)^{4-1} = 4p(1-p)^3$.
`D3)` Con notazioni ovvie l'evento in questione si realizza con le seguenti due stringhe di risultati: (T, C, T), (C, T, T). Quindi la probabilità richiesta è uguale a $p^2(1-p) + p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.
Commento: questo è in accordo con la teoria della binomiale negativa traslata per cui la probabilità richiesta è uguale a $\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$ con $n = 3$ e $r = 2$, da cui segue $\binom{3-1}{2-1}p^2(1-p)^{3-2} = \binom{2}{1}p^2(1-p) = 2p^2(1-p)$.

Esercizio 2.
`D4)` Sia E l'evento di interesse e, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(E) = \sum_{k\geq 1} P(E|X=k)P(X=k) = \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(1-\frac{3}{6}\right)^{k-1}\frac{3}{6}$$
$$= \sum_{k\geq 1}(p^k + (1-p)^k)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{p}{2}\right)^k + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1-p}{2}\right)^k = \frac{p/2}{1-p/2} + \frac{(1-p)/2}{1-(1-p)/2}.$$

Commento: si osservi che, nei casi $p = 0$ e $p = 1$, si ottiene $P(E) = 1$ come deve essere.

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{n} p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = X_2|X_1X_2 = 4) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1X_2=4\})}{P(X_1X_2=4)} = \frac{p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(1,4)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(4,1)} = \frac{1/16}{3/16} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(10 \leq Y \leq 11) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 10$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 11$. Per $y \in (10, 11)$ si ha $F_Y(y) = P(10 + \sqrt{X} \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y - 10) = P(X \leq (y-10)^2) = \int_0^{(y-10)^2}\frac{1}{1-0}dx = [x]_{x=0}^{x=(y-10)^2} = (y-10)^2$.
`D8)` Si ha l'equazione $(v-10)^2 = \frac{1}{2}$, da cui segue $v - 10 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi $v = 10 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si ha $P(1.8 < X < 2.1) = \Phi(2.1) - \Phi(1.8)$.
`D10)` Si ha

$$P(101 \leq X_1+\cdots+X_{100} < 111) = P\left(\frac{101-100\cdot 1}{\sqrt{961}\sqrt{100}} < \frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 1}{\sqrt{961}\sqrt{100}} < \frac{111-100\cdot 1}{\sqrt{961}\sqrt{100}}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{111-100}{31\cdot 10}\right) - \Phi\left(\frac{101-100}{31\cdot 10}\right) = \Phi\left(\frac{11}{310}\right) - \Phi\left(\frac{1}{310}\right).$$