Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2019-2020`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 21 Febbraio 2020

Esercizio 1.
Si lancia 3 volte un dado equo.
`D1`) Calcolare la probabilità che esca almeno 2 volte un numero pari.
`D2`) Calcolare la probabilità che la somma dei tre numeri usciti sia uguale a 4.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(2,2,2)$ sapendo di aver estratto 3 numeri pari.

Esercizio 2.
Abbiamo un'urna con 2 palline bianche e 2 rosse. Si estrae a caso una pallina e viene reinserita nell'urna insieme ad un'altra pallina dello stesso colore di quella estratta. Infine si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D4`) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che conta il numero di palline bianche estratte (tra le due estratte in blocco alla fine del procedimento).

Esercizio 3.
Siano $p_1, p_2 \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta: $p_{X_1,X_2}(k,k) = (1-p_1)^k p_1 p_2$ per $k \geq 0$ intero; $p_{X_1,X_2}(h,0) = (1-p_1)^{h-1} p_1 (1-p_2)$ per $h \geq 1$ intero.
`D5`) Calcolare $P(X_2 = 0)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4.
Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = e^{-x/2} 1_{(0,\log 4)}(x)$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = e^X$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[Y^2]$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9`) Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti e Normali; X_1 con media 2 e varianza 4; X_2 con media -2 e varianza 16. Calcolare $P(X_1 + X_2 < \sqrt{20})$ esprimendo tale probabilità con la funzione $\Phi(y)$ per qualche $y \geq 0$.
`D10`) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con distribuzione uniforme su $(-\sqrt{12}, \sqrt{12})$. Calcolare, al variare di $x > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-x < \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} < 2x\right)$$

esprimendo il risultato con la funzione $\Phi(y)$ per qualche $y \geq 0$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce un numero pari nei tre lanci del dado.
`D1`) Per la teoria della distribuzione binomiale la probabilità richiesta è $P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{3} \binom{3}{k}(1/2)^3 = \frac{3+1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
`D2`) L'evento "somma 4" si ottiene con una delle tre sequenze $(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)$. Ciascuna di queste sequenze ha probabilità $\frac{1}{6^3}$. In conclusione probabilità richiesta è $\frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$.
`D3`) Sia E l'evento "esce la sequenza (2,2,2)". Allora la probabilità richiesta è $P(E|X=3) = \frac{P(E\cap\{X=3\})}{P(X=3)} = \frac{P(E)}{P(X=3)} = \frac{(1/6)^3}{(1/2)^3} = (\frac{2}{6})^3 = (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$.
Osservazione: il valore ottenuto corrisponde a quello di avere 3 successi su 3 prove indipendenti, tutte con probabilità di successo $p = \frac{1}{3}$; in effetti, se si verifica l'evento $\{X = 3\}$, è come se si avessero prove con risultati possibili 2,4,6 tutti equiprobabili.

Esercizio 2.
`D4`) Sia B l'evento "la prima pallina estratta è bianca". Allora, per la formula delle probabilità totali, si ha

$$p_X(k) = P(X=k) = P(X=k|B)P(B) + P(X=k|B^c)P(B^c)$$
$$= \frac{\binom{3}{k}\binom{2}{2-k}}{\binom{5}{2}} \cdot \frac{2}{4} + \frac{\binom{2}{k}\binom{3}{2-k}}{\binom{5}{2}} \cdot \frac{2}{4} = \begin{cases} \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5} & \text{per } k=0 \\ \frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{5} & \text{per } k=1 \\ \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5} & \text{per } k=2. \end{cases}$$

Osservazione: i valori ottenuti sono a somma 1 (in accordo con la teoria) e sono simmetrici rispetto al valore centrale $k = 1$ (questo non sembra essere sorprendente perché il ruolo delle palline bianche e rosse può essere scambiato senza alcuna differenza); inoltre $P(X = 1|B) = P(X = 1|B^c) = P(X = 1) = \frac{3}{5}$ e quindi gli eventi $\{X = 1\}$ e B sono indipendenti (come del resto lo sono anche $\{X = 1\}$ e B^c).

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $P(X_2 = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(k,0)$, da cui segue

$$P(X_2=0) = (1-p_1)^0 p_1 p_2 + \sum_{h=1}^{\infty}(1-p_1)^{h-1}p_1(1-p_2)$$
$$= p_1p_2 + p_1(1-p_2)\sum_{h=1}^{\infty}(1-p_1)^{h-1} = p_1p_2 + p_1(1-p_2)\frac{1}{1-(1-p_1)} = p_1p_2 + 1 - p_2.$$

`D6`) Si ha $P(X_1 = X_2|X_1 + X_2 = 2) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1+X_2=2\})}{P(X_1+X_2=2)} = \frac{P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=1\})}{P(X_1+X_2=2)}$, da cui segue

$$P(X_1 = X_2|X_1+X_2=2) = \frac{p_{X_1,X_2}(1,1)}{p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(2,0)}$$
$$= \frac{(1-p_1)p_1p_2}{(1-p_1)p_1p_2 + (1-p_1)^{2-1}p_1(1-p_2)} = \frac{p_2}{p_2 + 1 - p_2} = p_2.$$

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $P(1 < Y < 4) = 1$, e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 4$. Per $y \in (1,4)$ si ha $F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_0^{\log y} e^{-x/2}dx = [-2e^{-x/2}]_{x=0}^{x=\log y} = -2y^{-1/2} + 2$. Quindi

la densità continua richiesta è $f_Y(y) = y^{-3/2}1_{(1,4)}(y)$.
`D8`) Sfruttando la densità continua appena trovata, possiamo subito dire che $\mathbb{E}[Y^2] = \int_1^4 y^2 y^{-3/2} dy = \int_1^4 y^{1/2} dy = \frac{[y^{3/2}]_{y=1}^{y=4}}{3/2} = \frac{2}{3}(4^{3/2} - 1) = \frac{14}{3}$.
Osservazione: si poteva rispondere a questa domanda anche senza tenere conto della risposta alla domanda precedente; infatti si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[(e^X)^2] = \mathbb{E}[e^{2X}] &= \int_0^{\log 4} e^{2x} e^{-x/2} dx \\ &= \int_0^{\log 4} e^{3x/2} dx = \frac{[e^{3x/2}]_{x=0}^{x=\log 4}}{3/2} = \frac{2}{3}(e^{\frac{3 \log 4}{2}} - 1) = \frac{2}{3}(4^{3/2} - 1) = \frac{14}{3}.\end{aligned}$$

Esercizio 5.
`D9`) La variabile aleatoria $X_1 + X_2$ ha media $2 - 2 = 0$ e varianza $4 + 16 = 20$. Allora la probabilità richiesta è

$$P(X_1 + X_2 < \sqrt{20}) = P\left(\frac{X_1 + X_2 - 0}{\sqrt{20}} < \frac{\sqrt{20} - 0}{\sqrt{20}}\right) = \Phi(1).$$

`D10`) Osserviamo che $\mathbb{E}[X_1] = 0$ e $\mathrm{Var}[X_1] = \frac{(\sqrt{12} - (-\sqrt{12}))^2}{12} = 4$. Allora

$$P\left(-x < \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} < 2x\right) = P\left(-\frac{x}{\sqrt{4}} < \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{4}\sqrt{n}} < \frac{2x}{\sqrt{4}}\right)$$

e, per il teorema limite centrale,

$$\lim_{n \to \infty} P\left(-\frac{x}{\sqrt{4}} < \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{4}\sqrt{n}} < \frac{2x}{\sqrt{4}}\right) = \Phi(2x/\sqrt{4}) - \Phi(-x/\sqrt{4}) = \Phi(x) - \Phi(-x/2).$$

Questo il valore limite richiesto e, per far apparire Φ con argomenti positivi, si riscrive come segue:

$$\Phi(x) - \Phi(-x/2) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x/2)) = \Phi(x) + \Phi(x/2) - 1.$$