__ES.__ : DIECI PERSONE SI DIVIDONO IN 5 GRUPPI, OGNUNO DI 2 PERSONE. IN QUANTI MODI PUÒ AVVENIRE QUESTO?

LE PERSONE SONO TRA LORO DISTINGUIBILI. QUINDI

$$\{\text{PERSONE}\} \leftrightarrow [10]$$

E

$$\{\text{GRUPPI}\} \leftrightarrow \{\text{SCATOLE}\}$$

PERTANTO IL NUMERO È

$$\binom{10}{2,2,2,2,2} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9 \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}$$

$$= 5 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 .$$

<u>ES.</u> : QUANTE PAROLE DIVERSE POSSONO ESSERE FORMATE PERMUTANDO (ANAGRAMMANDO) LE LETTERE DELLA PAROLA MISSISSIPPI ?

SI CHIEDE IL NUMERO DI PERMUTAZIONI DEL MULTINSIEME

$$K \overset{\text{def}}{=} \{M^1, i^4, S^4, P^2\}.$$

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE QUESTO È

$$\binom{11}{1,\ 4,\ 4,\ 2} = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2}$$

ES. : TROVARE UNA RICORSIONE SODDISFATTA DAL NUMERO DI COMPOSIZIONI DI n IN PARTI UGUALI AD 1 O 2.

SIA $f(n)$ IL NUMERO CERCATO.
ABBIAMO CHE:

$n=1 \Rightarrow (1) \Rightarrow f(1)=1.$

$n=2 \Rightarrow (2), (1,1) \Rightarrow f(2)=2$

$n=3 \Rightarrow (2,1), (1,2), (1,1,1) \Rightarrow f(3)=3$

$n=4 \Rightarrow (2,2),\ (2,1,1),\ (1,2,1),\ (1,1,2),\ (1,1,1,1)$

$\Rightarrow f(4)=5$

$n=5 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(5)=8.$

SEMBRA FIBONACCI. PENSIAMO QUINDI CHE

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

PER $\forall n \geq 3$.

DIMOSTRIAMOLO.

ABBIAMO CHE

$$f(n) = \left| \left\{ (a_1, \dots, a_k) \in \{1,2\}^k : \; k \in \mathbb{P}, \; a_1 + \dots + a_k = n \right\} \right|$$

$$\{1,2\} = \underbrace{[2] \times \dots \times [2]}_{k}$$

MA

$$\left\{ (a_1, \dots, a_k) \in [2]^k : \; k \in \mathbb{P}, \; a_1 + \dots + a_k = n \right\}$$

$$\|$$

$$\left\{(a_1,\dots,a_k)\in[2]^k : k\in\mathbb{P},\ a_1+\dots+a_k=n,\ a_k=1\right\} \uplus$$

$$\left\{(a_1,\dots,a_k)\in[2]^k : k\in\mathbb{P},\ a_1+\dots+a_k=n,\ a_k=2\right\}$$

(DOVE "$C = A \uplus B$" SIGNIFICA "$C = A \cup B$ E $A \cap B = \emptyset$")

MA

$$\left|\left\{(a_1,\dots,a_k)\in[2]^k : k\in\mathbb{P},\ a_1+\dots+a_k=n,\ a_k=1\right\}\right|$$

$$=\left|\left\{(a_1,\dots,a_{k-1})\in[2]^{k-1} : k-1\in\mathbb{P},\ a_1+\dots+a_{k-1}=n-1\right\}\right|$$

$$=f(n-1)$$

SIMILMENTE

$$\left|\left\{(a_1,\dots,a_k)\in[2]^k : k\in\mathbb{P},\ a_1+\dots+a_k=n,\ a_k=2\right\}\right|$$

$$=\left|\left\{(a_1,\dots,a_{k-1})\in[2]^{k-1} : k-1\in\mathbb{P},\ a_1+\dots+a_{k-1}=n-2\right\}\right|$$

$$=f(n-2)$$

CONCLUDENDO

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

PER $\forall n\geq 3$.