Formule legate alle probabilità condizionate

Ci sono 3 regole principali legate alle probabilità condizionate:

- **Regola del prodotto (O formula inversa)**
- **Formula delle probabilità totali**
- **Formula di Bayes**

Regola del prodotto

Partendo da:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Otteniamo:

$$P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$$

Che vale anche per $P(B) = 0$, perché se $A \cap B \subset B \rightarrow P(A \cap B) = 0$ e quindi $0 = 0$ nonostante $P(A|B)$ sia indeterminato.

Fornisce un metodo per calcolare la probabilità che due o più eventi avvengano simultaneamente, basandosi sulla conoscenza delle probabilità degli eventi singoli e delle loro interrelazioni.

Si può usare anche per l'intersezione di più eventi, per esempio a 3 eventi è:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C) * P(B|C) * P(C)$$

Formule delle Probabilità totali

La formula della probabilità totale è utilizzata quando vogliamo calcolare la probabilità di un evento A considerando diverse partizioni del campione.
Si applica in situazioni in cui l'evento A può verificarsi in vari modi, ciascuno descritto da un'altra serie di eventi $B1, B2, \ldots, Bn$ che formano una partizione dello spazio degli eventi.

La formula è la seguente:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Dove $P(A \cap B)$ è riscritto come $P(A|B_i) * P(B_i)$

Possiamo usare la formula quando parliamo di **eventi mutualmente esclusivi,** quando l'unione di B_i è uguale a tutto lo spazio o per il **calcolo di Probabilità complesse**.

Teorema di Bayes

Ci serve in tutte quelle situazioni in cui abbiamo una causa-effetto, quindi la probabilità che una certa causa ha prodotto un certo evento o effetto, quindi se vogliamo calcolare la probabilità che A_k sia la causa dell'effetto B.

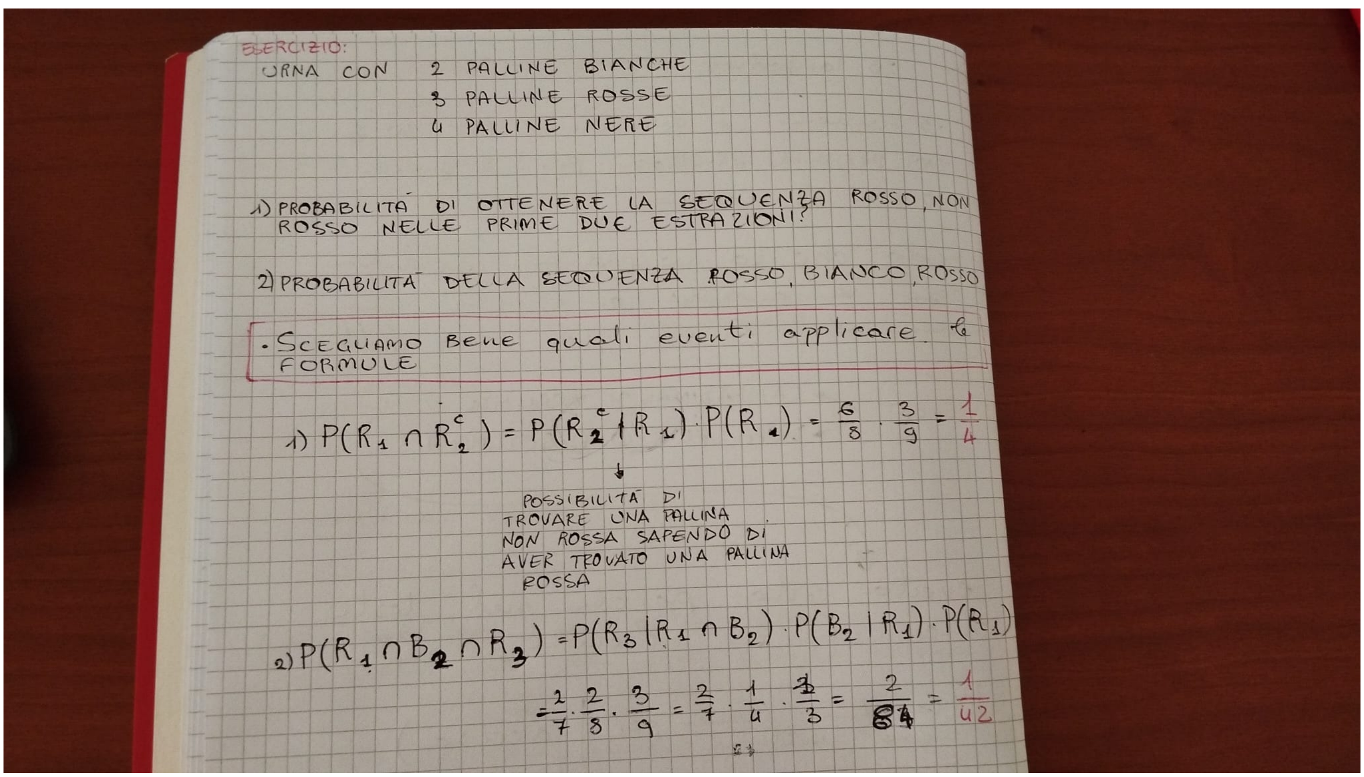
Teorema: Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una collezione di eventi A a due a due incompatibili tali che $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, P(A_i) > 0, A_i \cap A_j = \emptyset$, allora:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) * P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) * P(A_i)}$$

Sarebbe una media ponderata con tutte le possibili n cause.

Esercizi

**Regola del Prodotto:



Formula della probabilità totale:

ESERCIZIO PROBABILITÀ TOTALE

UN' URNA HA 2 PALLINE BIANCHE ED UNA NERA.
SI LANCIA UN DADO EQUO:

- SE ESCE 1 SI METTONO 2 PALLINE BIANCHE NELL' URNA
- SE ESCE 2,3 SI METTONO 1 BIANCA ED 1 NERA
- SE ESCE 4,5,6 SI METTONO 2 PALLINE NERE.

POI SI ESTRAE UNA PALLINA, CALCOLA LA POSSIBILITÀ DI UNA PALLINA BIANCA

$$\underbrace{P(B)}_{\text{PROBABILITÀ PALLINA BIANCA}} = \sum \underbrace{P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) + P(B|E_3)P(E_3)}_{\text{SOMMATORIA DA 1 A 3 DELLA FORMULA DELLA P.T}}$$

E_1 = EVENTO CHE IL LANCIO DEL DADO FACCIA 1

E_2 = // 2 O 3

E_3 = // 4, 5 O 6

QUINDI $P(E_1) = \frac{1}{6}$, $P(E_2) = \frac{2}{6}$, $P(E_3) = \frac{3}{6}$

$P(B|E_1)$ = POSSIBILITÀ CHE ESCA UNA PALLINA BIANCA SAPENDO CHE L'EVENTO 1 SI È AVVERATO

↓

STIAMO NEL CASO 1
QUINDI CI SONO 3 PALLINE INIZIALI PIÙ 2 PALLINE BIANCHE → $P(B|E_1) = \frac{4}{5}$

$P(B|E_2) = \frac{3}{5}$

$P(B|E_3) = \frac{2}{5}$

QUINDI:

$$P(B) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6} = \frac{8}{15}$$

Bayes:

ESERCIZIO TEOREMA DI BAYES

USIAMO LO STESSO TESTO DELL'ESERCIZIO PRECEDENTE.

Si lancia un dado equo

2	1
B	N

$\xrightarrow{E_1}$ se esce $\boxed{1}$

4	1
B	N

$\xrightarrow{E_2}$ se esce $\boxed{2}\boxed{3}$

3	2
B	N

$\xrightarrow{E_3}$ se esce $\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}$

2	3
B	N

CALCOLARE LA PROBABILITÀ CHE SIA USCITO $\boxed{2}$ O $\boxed{3}$ DEL DADO SAPENDO DI AVER ESTRATTO UNA PALLINA BIANCA

DOBBIAMO CALCOLARE $P(E_2 \mid B)$, CIOÈ LA PROBABILITÀ CHE E_2 ABBIA CAUSATO DI TROVARE LA PALLINA BIANCA

$\underset{\text{CAUSA}}{\uparrow}$

RICORDIAMO DAI CALCOLI PRECEDENTI:

$$P(E_1) = \frac{1}{6} \quad P(E_2) = \frac{2}{6} \quad P(E_3) = \frac{3}{6}$$

$$P(B \mid E_1) = \frac{4}{5} \quad P(B \mid E_2) = \frac{3}{5} \quad P(B \mid E_3) = \frac{2}{5}$$

APPLICHIAMO BAYES A:

REGOLA DEL PRODOTTO

$$P(E_2 \mid B) = \frac{P(E_2 \cap B)}{P(B)} \qquad \frac{P(B \mid E_2)P(E_2)}{P(B \mid E_1)P(E_1) + P(B \mid E_2)P(E_2) + P(B \mid E_3)P(E_3)}$$

FORMULA PROBABILITÀ TOTALE

$$= \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6}} = \frac{3}{8}$$