APPENDICE

Metodi di risoluzione delle equazioni differenziali che descrivono il moto di un punto materiale sotto l'azione della forza peso e di una forza di attrito viscoso.

1) Risoluzione dell'equazione differenziale

$$V'_x(t) = g - \frac{b}{m} V_x(t)$$ (vedi pag. 40)

Occorre determinare la funzione $V_x(t)$ che soddisfa questa equazione differenziale, data la condizione iniziale $V_x(0) = 0$.

Si può procedere in due modi.

a] Riscriviamo l'equazione differenziale nel modo seguente:

$$V'_x(t) = g\left[1 - \frac{b}{mg} V_x(t)\right]$$

Operiamo quindi il seguente cambiamento di variabile:

$$z(t) = \frac{b}{mg} V_x(t)$$, da cui ricaviamo

$$V_x(t) = \frac{mg}{b} z(t)$$, e quindi

$$V'_x(t) = \frac{mg}{b} z'(t)$$

L'equazione differenziale di partenza diventa quindi:

$$\frac{m\cancel{g}}{b} z'(t) = \cancel{g}\left[1 - z(t)\right] \Rightarrow z'(t) = \frac{b}{m}\left[1 - z(t)\right]$$

Si osserva subito che questa equazione differenziale ha la seguente soluzione stazionaria (cioe', non dipendente dalla variabile t): $\bar{z} = 1$; in fatti, sostituendo tale valore costante a $z(t)$ nell' equazione differenziale, risulta $z'(t) = 0$ e otteniamo una identita'.

Se $z(0) \neq 1$, il secondo membro all'istante $t = 0$ non e' nullo e possiamo quindi riscrivere l' equazione differenziale così:

$$\frac{z'(t)}{1 - z(t)} = \frac{b}{m} \qquad (\text{"separazione delle variabili"})$$

Adesso integriamo i due membri di questa equazione tra l'istante $t=0$ e l'istante generico t, indicando con la lettera τ la variabile di integrazione:

$$\int_0^t \frac{z'(\tau)}{1 - z(\tau)}\, d\tau = \frac{b}{m} \int_0^t d\tau$$

Al secondo membro la funzione integranda e' la costante 1, dopo avere portato il fattore costante $\frac{b}{m}$ fuori dall'integrale, a moltiplicare. Per il teorema di integrazione per sostituzione, otteniamo:

$$\int_{z(0)}^{z(t)} \frac{1}{1 - z}\, dz = \frac{b}{m} \int_0^t d\tau \, , \quad \text{da cui:}$$

$$-\ln|1-z|\Big|_{z(0)}^{z(t)} = \frac{b}{m}t\,,\quad \text{cioe'}\quad \ln|1-z|\Big|_{z(0)}^{z(t)} = -\frac{b}{m}t$$

Poiché $z(0) = \frac{b}{mg}v_x(0) = 0$, otteniamo:

$$\ln|1-z|\Big|_{0}^{z(t)} = -\frac{b}{m}t\,,\quad \text{cioe'}\quad \ln|1-z(t)| = -\frac{b}{m}t\,,\quad \text{e quindi}$$

$$|1-z(t)| = e^{-\frac{b}{m}t}$$

Se $0 \leq z(t) < 1$, otteniamo di conseguenza:

$$1-z(t) = e^{-\frac{b}{m}t}\,,\quad \text{da cui}\quad z(t) = 1-e^{-\frac{b}{m}t}\,,\quad \text{e quindi}$$

$$v_x(t) = \frac{mg}{b}z(t) = \frac{mg}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right) = v_L\left(1-e^{-t/\tau}\right),$$

con $v_L = \frac{mg}{b}$ e $\tau = \frac{m}{b}$, come anticipato a pag. 41.

Osserviamo che, per $t \geq 0$, risulta $0 \leq z(t) < 1$, come ipotizzato in precedenza, e quindi $0 \leq v_x(t) < \frac{mg}{b}$.

In particolare risulta $\lim\limits_{t\to+\infty} v_x(t) = \frac{mg}{b} = v_L$

b] Riscriviamo l'equazione differenziale nel modo seguente:

$$v_x'(t) + \frac{b}{m} v_x(t) = g$$

Si tratta di un' equazione differenziale lineare, del primo ordine (in quanto compaiono solo la funzione $v_x(t)$ e la sua derivata prima $v_x'(t)$, entrambe elevate alla potenza 1), a coefficienti costanti (in quanto i coefficienti di $v_x'(t)$, $v_x(t)$ sono costanti, e il termine che non contiene né $v_x(t)$ né $v_x'(t)$ e' costante). Una soluzione costante dell' equazione differenziale scritta in questo modo e' data dal rapporto tra il termine costante al 2° membro e il coefficiente di $v_x(t)$:

$$\overline{v}_x = \frac{g}{b/m} = \frac{mg}{b}$$

A questo punto, consideriamo l'equazione differenziale OMOGENEA associata all'equazione differenziale data; si ottiene semplicemente ponendo uguale a zero il termine noto al 2º membro:

$$V_{x_0}'(t) + \frac{b}{m} V_{x_0}(t) = 0$$

, dove $V_{x_0}(t)$ indica la funzione che risolve questa equazione differenziale omogenea.

Una soluzione possibile di un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti è di questo tipo:

$$V_{x_0}(t) = A e^{\lambda t}$$

, dove A e λ sono opportuni parametri costanti da determinare.

Risulta allora: $V_{x_0}'(t) = A\lambda e^{\lambda t}$ $(A \neq 0)$

Sostituendo le espressioni di $V_{x_0}'(t)$ e di $V_{x_0}(t)$ nell'equazione differenziale omogenea otteniamo:

$$A\lambda e^{\lambda t} + \frac{b}{m} A e^{\lambda t} = 0$$

I fattori A e $e^{\lambda t}$ si possono semplificare, in quanto sono comuni a tutti i termini nell'equazione e sono $\neq 0$:

$$\lambda + \frac{b}{m} = 0, \quad \text{da cui} \quad \lambda = -\frac{b}{m}$$

Allora, la soluzione generale dell' equazione differenziale omogenea associata e':

$$V_{x_0}(t) = A e^{-\frac{b}{m}t}$$

(essendo l' equazione differenziale del 1° ordine, c'e' un solo possibile valore per il parametro λ).

La soluzione generale dell' equazione differenziale di partenza e' data (secondo la teoria delle equazioni differenziali lineari che si studia nei corsi di Analisi Matematica) dalla somma della soluzione costante trovata in precedenza e della soluzione generale dell' equazione differenziale omogenea associata:

$$V_x(t) = \frac{mg}{b} + V_{x_0}(t) = \frac{mg}{b} + A e^{-\frac{b}{m}t}$$

A questo punto, per determinare il valore del coefficiente A imponiamo la condizione iniziale $V_x(0) = 0$:

$$V_x(0) = \frac{mg}{b} + A = 0, \quad \text{da cui otteniamo } A = -\frac{mg}{b}$$

Pertanto, la soluzione dell' equazione differenziale di partenza con la condizione iniziale assegnata e':

$$V_x(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right),$$ che coincide con la soluzione trovata usando il metodo della "separazione delle variabili" visto in precedenza.

2) Risoluzione dell' equazione differenziale

$$v_x'(t) = g - \frac{D\rho A}{2m}\left(v_x(t)\right)^2 \quad \text{(vedi pag. 43)},$$

con la condizione iniziale $v_x(0) = 0$.

Questa equazione differenziale non e' lineare, in quanto compare la funzione $v_x(t)$ elevata all' esponente 2.

Riscriviamo l' equazione differenziale nel modo seguente:

$$v_x'(t) = g\left[1 - \frac{D\rho A}{2mg}\left(v_x(t)\right)^2\right]$$

Si osserva subito che questa equazione differenziale ha la seguente soluzione stazionaria (indipendente dalla variabile t):

$$\overline{v_x} = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}} = v_L \left(\text{anche } -\sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}} \text{ e' soluzione}\right.$$

stazionaria; per fissare le idee, comunque, supponiamo che il corpo si muove nel verso positivo lungo l' asse x). Se $v_x(0) \neq \overline{v_x}$, il secondo membro all' istante $t=0$ non e' nullo, e possiamo quindi riscrivere l'equazione differenziale così:

$$\frac{v_x'(t)}{1 - \frac{1}{v_L^2}\left(v_x(t)\right)^2} = g$$

Operiamo il seguente cambiamento di variabile:

$z(t) = \frac{1}{v_L} v_x(t)$, da cui ricaviamo $v_x(t) = v_L \cdot z(t)$, e quindi $v_x'(t) = V_L \cdot z'(t)$, da cui otteniamo

l'equazione differenziale corrispondente per la funzione $z(t)$:

$$V_L \cdot \frac{z'(t)}{1-(z(t))^2} = g \, ,$$ oppure

$$\frac{z'(t)}{1-(z(t))^2} = g/V_L$$

Adesso integriamo i due membri dell'equazione differenziale tra l'istante $t=0$ e l'istante generico t, indicando con la lettera τ la variabile di integrazione:

$$\int_0^t \frac{z'(\tau)}{1-(z(\tau))^2}\, d\tau = \frac{g}{V_L} \int_0^t d\tau$$

Al secondo membro la funzione integranda e' la costante 1.

Per il teorema di integrazione per sostituzione, otteniamo:

$$\int_{z(0)}^{z(t)} \frac{1}{1-z^2}\, dz = \frac{g}{V_L} \int_0^t d\tau$$

Per calcolare l'integrale al 1° membro, occorre effettuare una "decomposizione in fratti semplici" della funzione integranda.

Risulta ovviamente $\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{(1-z)(1+z)}$, per cui possiamo

scrivere $\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z}$,

dove A e B sono opportuni coefficienti da determinare.
Per calcolarli, si può usare il seguente metodo; "ricomponiamo" la somma tra frazioni algebriche scritte sopra:

$$\frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} = \frac{A(1+z)+B(1-z)}{(1-z)(1+z)} = \frac{A+Az+B-Bz}{(1-z)(1+z)} = \frac{(A-B)z+(A+B)}{(1-z)(1+z)}$$

Questa frazione algebrica deve essere uguale all'espressione di partenza, cioè $\frac{1}{(1-z)(1+z)}$, per cui, dato che i due denominatori sono uguali, occorre imporre che anche i due numeratori siano uguali:

$$(A-B)z + (A+B) = 1 .$$

Questa uguaglianza deve valere per ogni z nell'intervallo di integrazione, per cui (a rigore questo è giustificato dal principio di identità tra polinomi) deve risultare:

$$\begin{cases} A-B=0 \\ A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}, \qquad B = A = \frac{1}{2}$$

Allora, in definitiva, risulta: $\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+z}$

Di conseguenza:

$$\int \frac{1}{1-z^2}\,dz = \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+z}\,dz + \frac{1}{2}\int\frac{1}{1-z}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|1+z| - \ln|1-z|\right] + \text{costante} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + \text{costante}$$

L'integrazione dei due membri dell'equazione differenziale dà:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|\Bigg|_{z(0)}^{z(t)} = \frac{g}{V_L}\,t \Rightarrow \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|\Bigg|_{z(0)}^{z(t)} = \frac{2g}{V_L}\,t$$

Poiché $z(0) = \frac{1}{V_L}\cdot V_x(0) = 0$, otteniamo:

$$\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|\Bigg|_{0}^{z(t)} = \frac{2g}{V_L}\,t$$, cioè

$$\ln\left|\frac{1+z(t)}{1-z(t)}\right| = 2\frac{g}{V_L}t \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{1+z(t)}{1-z(t)}\right| = e^{2\frac{g}{V_L}t}$$

Quando $0\leq z(t) < 1$ otteniamo quindi:

$$\frac{1+z(t)}{1-z(t)} = e^{2\frac{g}{V_L}t} \Rightarrow 1+z(t) = e^{2\frac{g}{V_L}t} - e^{2\frac{g}{V_L}t}z(t)$$, da cui:

$$\left(1+e^{2\frac{g}{V_L}t}\right)z(t) = e^{2\frac{g}{V_L}t} - 1 \Rightarrow z(t) = \frac{e^{2\frac{g}{V}t}-1}{e^{2g/V_L t}+1}$$

Moltiplichiamo il numeratore e il denominatore per il fattore $e^{-\frac{g}{V_L}t}$;

$$z(t) = \frac{e^{\frac{g}{V_L}t} - e^{-\frac{g}{V_L}t}}{e^{\frac{g}{V_L}t} + e^{-\frac{g}{V_L}t}} = \frac{\cancel{2}\,\mathrm{senh}\left(\frac{g}{V_L}t\right)}{\cancel{2}\cosh\left(\frac{g}{V_L}t\right)} = \mathrm{tgh}\left(\frac{g}{V_L}t\right)$$

Dunque $V_x(t) = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}}\,z(t) = V_L\,\mathrm{tgh}\left(\frac{g}{V_L}t\right)$, come anticipato

a pag. 43, con $\lim_{t\to+\infty} V_x(t) = V_L$, e $0 \leq V_x(t) < V_L$ per $t \geq 0$