<u>E.g.</u> $n = 5$

$$f(5) = \left|\{(2,2,1), (2,1,2), (1,2,2), (2,1,1,1), (1,2,1,1), (1,1,2,1), (1,1,1,2), (1,1,1,1,1)\}\right|$$

$$= \left|\{(2,2,1), (2,1,1,1), (1,2,1,1), (1,1,2,1), (1,1,1,1,1)\}\right| + \left|\{(2,1,2), (1,2,2), (1,1,1,2)\}\right|$$

$$= |\{(2,2), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2), (1,1,1,1)\}|$$

$$+ |\{(2,1), (1,2), (1,1,1)\}| =$$

$$= f(4) + f(3).$$

__ES.__ : TROVARE UNA FORMULA PER LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI.

SAPPIAMO CHE LA SUCC. DI FIBONACCI $\{F_n\}_{n=0,1,\dots}$ È TALE CHE

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (*)$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, CON LE CONDIZIONI INIZIALI

$$F_0 = F_1 = 1.$$

RISOLVIAMO LA RICORSIONE LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI (*).

L'EQ. CARATTERISTICA È

$$x^2 = x + 1.$$

LA RISOLVIAMO. LE RADICI SONO

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\[2ex] \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

QUINDI LE RADICI SONO

$$\gamma_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \gamma_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

DI MOLTEPLICITÀ $d_1 = 1$ E $d_2 = 1$ (IN EFFETTI

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1).$$

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE $\exists\, P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{R}[x]$ TALI CHE $\deg(P_1) \leq 1-1$

$DEG(P_2) \leq 1-1$ E

$$F_n = P_1(n) \cdot (\gamma_1)^n + P_2(n) \cdot \gamma_2^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. QUINDI $\exists\, a, b \in \mathbb{C}$ TALI

CHE

$$F_n = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. PER TROVARE a E b

USIAMO LE CONDIZIONI INIZIALI. ABBIAMO

$$\begin{cases} 1 = F_0 = a + b \\ 1 = F_1 = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

PERTANTO

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

QUINDI

$$b = 1 - a$$

$$a\left(1+\sqrt{5}\right)+(1-a)\left(1-\sqrt{5}\right)=2$$

$$\Downarrow$$

$$a\left(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}\right)=2-1+\sqrt{5}$$

$$\Downarrow$$

$$a\left(2\sqrt{5}\right)=1+\sqrt{5}$$

QUINDI

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

E

$$b = 1 - a = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} .$$

CONCLUDENDO

$$F_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\cdot\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$.