Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno Accademico: `2021-2022`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Appello del 21 Giugno 2022

Esercizio 1. Un'urna ha 4 palline numerate con i numeri $0, 1, 1, 20$. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.

`D1)` Trovare la densità discreta della v.a. X che conta il numero di palline con il numero 1 estratte.

`D2)` Calcolare la probabilità che il massimo dei due numeri estratti sia uguale a 20.

`D3)` Calcolare $P(Y = 20)$, dove Y è la v.a. che indica il prodotto dei due numeri estratti.

Esercizio 2. Si lancia un dado equo: se esce un numero minore o uguale a 4, si lancia una moneta equa; se esce un maggiore di 4 si lancia una moneta con due teste.

`D4)` Calcolare la probabilità che esca testa.

Esercizio 3. Sia $r \in (0, 1)$. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(h, 2h) = (1 - r)\left(\frac{1}{2}\right)^h \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(k, k) = r\frac{3^k}{k!}e^{-3} \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_2 = 2X_1)$.

`D6)` Calcolare $P(\{X_1 \leq 1\} \cap \{X_2 \leq 1\})$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(-3, 3)$.

`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{-X}$.

`D8)` Si verifichi che $\mathbb{E}[X^6] = \frac{3^6}{7}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

`D9)` Siano $X_1, \ldots, X_{12}$ v.a. indipendenti Normali standard (media zero e varianza 1).
Verificare che $P(X_1 + \cdots + X_{12} \geq \sqrt{12}) = 1 - \Phi(1)$.

`D10)` Si lancia 900 volte un dado equo. Sia X la v.a. che conta quante volte esce un numero pari.
Calcolare $P(440 \leq X \leq 460)$ con l'approssimazione Normale (con riferimento alla funzione Φ) e la correzione di continuità.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Si ha $p_X(k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{2}{2-k}}{\binom{4}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$; quindi $p_X(0) = p_X(2) = \frac{1}{6}$ e $p_X(1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
`D2)-D3)` Ognuno dei $\binom{4}{2} = 6$ sottoinsiemi di due palline è equiprobabile, e distinguendo le due palline con il numero 1, si ha: $\{0,1_a\}, \{0,1_b\}, \{0,20\}, \{1_a,1_b\}, \{1_a,20\}, \{1_b,20\}$.
`D2)` La probabilità richiesta è $P(\{\{0,20\},\{1_a,20\},\{1_b,20\}\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
`D3)` Si ha $P(Y=20) = P(\{\{1_a,20\},\{1_b,20\}\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 2.
`D4)` Per la formula delle probabilità totali si ha $P(T) = P(T|E)P(E)+P(T|E^c)P(E^c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}+1\cdot\frac{2}{6} = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2 = 2X_1) = p_{X_1,X_2}(0,0) + \sum_{h\geq 1} p_{X_1,X_2}(h,2h) = re^{-3} + (1-r)\sum_{h\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^h = re^{-3}+1-r$, dove l'ultima uguaglianza segue da $\sum_{h\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^h = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$.
`D6)` Si ha $P(\{X_1 \leq 1\} \cap \{X_2 \leq 1\}) = p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(1,1) = re^{-3} + r3e^{-3} = 4re^{-3}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(e^{-3} < Y < e^3) = 1$; quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq -3$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 3$. Per $y \in (e^{-3}, e^3)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{-X} \leq y) = P(-X \leq \log y) = P(X \geq -\log y) = \int_{-\log y}^3 \frac{1}{3-(-3)}dx = \frac{3+\log y}{6}$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[X^6] = \int_{-3}^3 x^6 \cdot \frac{1}{3-(-3)}dx = \frac{1}{6}[\frac{x^7}{7}]_{x=-3}^{x=3} = \frac{3^7-(-3)^7}{6\cdot 7} = \frac{2\cdot 3^7}{6\cdot 7} = \frac{3^7}{3\cdot 7} = \frac{3^6}{7}$.

Esercizio 5.
`D9)` Indichiamo con $S^* = \frac{X_1+\cdots+X_{12}}{\sqrt{12}}$ la standardizzata di $S = X_1+\cdots+X_{12}$ e si ha
$P(X_1+\cdots+X_{12} \geq \sqrt{12}) = P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{12}}{\sqrt{12}} \geq \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}\right) = P(S^* \geq 1) = 1 - P(S^* < 1) = 1 - \Phi(1)$.
`D10)` Indichiamo con $X^* = \frac{X_1+\cdots+X_{900}-900\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}\sqrt{900}}$ la standardizzata di X (pensata come somma di 900 v.a. i.i.d. Bernoulliane di parametro $p = \frac{1}{2}$) e si ha
$P(440 \leq X \leq 460) = P\left(\frac{439.5-900\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}\sqrt{900}} \leq X^* \leq \frac{460.5-900\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}\sqrt{900}}\right) = P\left(-\frac{10.5}{15} \leq X^* \leq \frac{10.5}{15}\right)$
$\approx \Phi\left(\frac{10.5}{15}\right) - \Phi\left(-\frac{10.5}{15}\right) = \Phi\left(\frac{10.5}{15}\right) - \left(1-\Phi\left(\frac{10.5}{15}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{10.5}{15}\right) - 1$.