__ES.__: TROVARE UNA FORMULA CHIUSA PER

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{m} (i+j).$$

STIAMO SOMMANDO TUTTI I NUMERI DELLA SEGUENTE TABELLA:

$i \backslash j$	1	2	3	4	$\dots$	n
0	1	2	3	4	$\dots$	n
1	2	3	4	5	$\dots$	$n+1$
2	3	4	5	6	$\dots$	$n+2$
3	4	5	6	7	$\dots$	$n+3$
$\vdots$	$\vdots$					
n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$\dots$	$n+n$

QUINDI LA SOMMA È

$$= \sum_{i=0}^{n} \left((1+2+3+\dots+n) + i \cdot n \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\binom{n+1}{2} + i \cdot n \right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{2} + \sum_{i=0}^{n} i \cdot n$$

$$= \underbrace{\binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+1}{2}}_{n+1} + n \cdot \sum_{i=0}^{n} i = (n+1) \cdot \binom{n+1}{2} +$$

$$+ n \cdot \binom{n+1}{2}$$

CONCLUDENDO

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{m} (i+j) = (2m+1) \cdot \binom{m+1}{2}.$$

<u>ES.</u> : TROVARE UNA FORMULA CHIUSA PER

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} (m-j).$$

STIAMO SOMMANDO I NUMERI DELLA SEGUENTE TABELLA:

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	$\dots$	$m-2$	$m-1$	m
0	m	$m-1$	$m-2$	$m-3$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	0
1	m	$m-1$	$m-2$	$m-3$				1	
2	m	$m-1$	$m-2$	$m-3$			2		
3	m	$m-1$	$m-2$	$\dots$		3			
$\vdots$									
m	m								

QUINDI LA SOMMA È

$$= (m+1)\cdot m + m(m-1) + (m-1)(m-2) + (m-2)(m-3) + \dots$$

$$+ 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0$$

(m-1)-ESIMA COL.   M-ESIMA COL.   (m+1)-ESIMA COL.

$$= \sum_{i=1}^{m+1} i\cdot(i-1) = \sum_{i=1}^{m+1} (i^2 - i)$$

CHE È UNA SOMMA POLINOMIALE CHE POSSO CALCOLARE COME IN UN ES. PRECEDENTE.

ALTERNATIVAMENTE:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} (n-j)$$

CALCOLIAMO PRIMA LA SOMMA PIÙ INTERNA

$$\sum_{j=0}^{n-i} (n-j) = \sum_{j=0}^{n-i} n - \sum_{j=0}^{n-i} j = (n-i+1)\cdot n - \binom{n-i+1}{2}$$

$$= (n-i+1)\left[n - \frac{n-i}{2}\right] = (n-i+1)\cdot \frac{n+i}{2}$$

QUINDI

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} (n-j) = \sum_{i=0}^{n} (n-i+1)\frac{n+i}{2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2}\left(n^2 - i^2 + n + i\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n}(n^2+n) + \sum_{i=0}^{n}(i-i^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(n^2+n)(n+1) + \sum_{i=0}^{n}(i-i^2)\right],$$

SOMMA POLINOMIALE