Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2021-2022. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 18 Febbraio 2022

Esercizio 1. Si lancia quattro volte una moneta e sia $p \in (0,1)$ la probabilità che esca testa lanciandola.
D1) Verificare che la probabilità che esca almeno 3 volte testa è uguale a $p^3(4-3p)$.
D2) Calcolare la probabilità che esca la sequenza (testa, testa, croce, testa) sapendo di aver ottenuto 3 volte testa, e si verifichi che il risultato non dipende da p.
D3) Sia $p = \frac{1}{2}$. Calcolare $\mathbb{E}[X^2]$ dove X è la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce testa nei quattro lanci di moneta.

Esercizio 2. Si lancia un dado equo: se esce 1 o 2, si lanciano due monete eque; se esce 3, 4, 5 o 6, si lanciano quattro monete eque.
D4) Calcolare la probabilità escano tutte teste nei lanci di moneta effettuati.

Esercizio 3. Siano $p_1, p_2 \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (1-p_1)^{x_1-1}p_1(1-p_2)^{x_2-x_1-1}p_2 \quad \text{per } x_2 > x_1 \geq 1 \text{ interi.}$$

D5) Sia $h \geq 1$ intero. Verificare che $P(X_2 = X_1 + h) = p_2(1-p_2)^{h-1}$.
D6) Trovare la densità marginale di X_1.

Esercizio 4. Consideriamo $0 \leq a < b$ e $r \geq 0$ arbitrariamente fissati. Sia X una variabile aleatoria X con densità continua $f_X(x) = \frac{r+1}{b^{r+1}-a^{r+1}} x^r 1_{(a,b)}(x)$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^s$ per $s > 0$.
D8) Verificare che, nel caso in cui $s = r+1$, si ha $\mathbb{E}[Y] = \frac{b^{r+1}+a^{r+1}}{2}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria Normale con media μ e varianza 4. Trovare il valore di μ per cui si ha $P(X > 1) = 1 - \Phi(2)$.
D10) Sia $\{X_1, \ldots, X_{100}\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 16. Calcolare $P(203 < X_1 + \cdots + X_{100} < 211)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Sia X la variabile aleatoria che appare nella domanda `D3)`, la quale ha distribuzione Binomiale con parametri $n = 4$ (il numero dei lanci) e p (la probabilità che esca testa in un singolo lancio di moneta). Sia inoltre E l'evento "esce la sequenza $(\text{testa}, \text{testa}, \text{croce}, \text{testa})$".
`D1)` Si ha $P(X \geq 3) = \binom{4}{3}p^3(1-p)^{4-3} + \binom{4}{4}p^4(1-p)^{4-4} = 4p^3(1-p) + p^4 = p^3(4(1-p)+p) = p^3(4-4p+p) = p^3(4-3p)$.
`D2)` Si ha $P(E|X=3) = \frac{P(E\cap\{X=3\})}{P(X=3)} = \frac{P(E)}{P(X=3)} = \frac{p\cdot p\cdot(1-p)\cdot p}{\binom{4}{3}p^3(1-p)^{4-3}} = \frac{1}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{4}$.
`D3)` Si ha $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{4}{k}(\frac{1}{2})^4 = 0^2\cdot\frac{1}{16} + 1^2\cdot\frac{4}{16} + 2^2\cdot\frac{6}{16} + 3^2\cdot\frac{4}{16} + 4^2\cdot\frac{1}{16} = \frac{0+4+24+36+16}{16} = \frac{80}{16} = 5$.
Commento. In generale, se X ha distribuzione Binomiale di parametri n e p, si ha $\mathbb{E}[X^2] = \mathrm{Var}[X] + \mathbb{E}^2[X] = np(1-p) + (np)^2$. Quindi si recupera il valore numerico ottenuto usando questa formula generale con $n = 4$ e $p = \frac{1}{2}$: $\mathbb{E}[X^2] = 4\cdot\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + (4\cdot\frac{1}{2})^2 = 1 + 2^2 = 1 + 4 = 5$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(T) = P(T|E_{12})P(E_{12}) + P(T|E_{12}^c)P(E_{12}^c) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{2}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{4}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2 = X_1 + h) = \sum_{k\geq 1} p_{X_1,X_2}(k, k+h) = \sum_{k\geq 1}(1-p_1)^{k-1}p_1(1-p_2)^{k+h-k-1}p_2 = p_1p_2(1-p_2)^{h-1}\sum_{k\geq 1}(1-p_1)^{k-1} = p_1p_2(1-p_2)^{h-1}\frac{(1-p_1)^0}{1-(1-p_1)} = p_2(1-p_2)^{h-1}$.
`D6)` Per ogni $x_1 \geq 1$ intero si ha

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2 > x_1} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \sum_{x_2 \geq x_1+1}(1-p_1)^{x_1-1}p_1(1-p_2)^{x_2-x_1-1}p_2$$

$$= (1-p_1)^{x_1-1}p_1p_2\sum_{x_2\geq x_1+1}(1-p_2)^{x_2-(x_1+1)} = (1-p_1)^{x_1-1}p_1p_2\frac{(1-p_2)^0}{1-(1-p_2)} = (1-p_1)^{x_1-1}p_1.$$

Commento. Possiamo dire che X_1 ha distribuzione Geometrica traslata (quella che parte da 1) di parametro p_1.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(a^s \leq Y \leq b^s) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq a^s$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq b^s$. Per $y \in (a^s, b^s)$ si ha $F_Y(y) = P(X^s \leq y) = P(X \leq y^{1/s}) = \int_a^{y^{1/s}} \frac{r+1}{b^{r+1}-a^{r+1}}x^r dx = \frac{r+1}{b^{r+1}-a^{r+1}}[\frac{x^{r+1}}{r+1}]_{x=a}^{x=y^{1/s}} = \frac{(y^{1/s})^{r+1}-a^{r+1}}{b^{r+1}-a^{r+1}} = \frac{y^{(r+1)/s}-a^{r+1}}{b^{r+1}-a^{r+1}}$.
`D8)` Tenendo conto della risposta alla domanda precedente possiamo dire che, se $s = r+1$, la variabile aleatoria Y ha distribuzione uniforme su $(a^s, b^s) = (a^{r+1}, b^{r+1})$. Allora $\mathbb{E}[Y] = \frac{b^{r+1}+a^{r+1}}{2}$ segue dalla formula per la speranza matematica delle variabili aleatorie con distribuzione uniforme.
Commento. In altro modo: $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^s] = \mathbb{E}[X^{r+1}] = \int_a^b x^{r+1}\frac{r+1}{b^{r+1}-a^{r+1}}x^r dx = \frac{r+1}{b^{r+1}-a^{r+1}}\int_a^b x^{2r+1}dx = \frac{r+1}{b^{r+1}-a^{r+1}}[\frac{x^{2r+2}}{2r+2}]_{x=a}^{x=b} = \frac{r+1}{b^{r+1}-a^{r+1}}\frac{b^{2r+2}-a^{2r+2}}{2r+2} = \frac{(b^{r+1})^2-(a^{r+1})^2}{2(b^{r+1}-a^{r+1})} = \frac{b^{r+1}+a^{r+1}}{2}$.

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^* = \frac{X-\mu}{\sqrt{4}} = \frac{X-\mu}{2}$ la standardizzata di X. Allora $1-\Phi(2) = P(X > 1) = P(X^* > \frac{1-\mu}{2}) = 1-\Phi(\frac{1-\mu}{2})$, da cui segue $2 = \frac{1-\mu}{2}$, $4 = 1-\mu$, $\mu = 1-4$ e quindi $\mu = -3$.
`D10)` Si ha $P(203 < X_1 + \cdots + X_{100} < 211) = P(\frac{203-100\cdot 2}{\sqrt{16}\sqrt{100}} < \frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 2}{\sqrt{16}\sqrt{100}} < \frac{211-100\cdot 2}{\sqrt{16}\sqrt{100}}) \approx \Phi(\frac{211-200}{\sqrt{16}\sqrt{100}}) - \Phi(\frac{203-200}{\sqrt{16}\sqrt{100}}) = \Phi(\frac{11}{40}) - \Phi(\frac{3}{40})$.