Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Appello del 23 Febbraio 2021 - Compito 1

Esercizio 1. Abbiamo un'urna con 10 palline numerate da 1 a 10.
`D1)` Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(3, 5, \text{pari})$.
`D2)` Si estraggono a caso 5 palline, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la varianza della variabile aleatoria X che conta il numero di palline estratte con un numero dispari.
`D3)` Si estraggono a caso palline ripetutamente, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre per la prima volta uno dei numeri $1, 2, 3, 4$ ad una estrazione dispari (o la prima, o la terza, o la quinta, o la settima, ecc.).

Esercizio 2. Abbiamo tre urne con i numeri 1,2,3. In generale l'urna k, per $k \in \{1, 2, 3\}$, ha k palline bianche e $5 - k$ nere. Si sceglie un'urna a caso e si estrae una pallina a caso dall'urna scelta.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver scelto l'urna 1 sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(0,0) = q_{00} \quad p_{X_1,X_2}(0,1) = q_{01} \quad p_{X_1,X_2}(1,0) = q_{10}$$

$$p_{X_1,X_2}(1,2) = q_{12} \quad p_{X_1,X_2}(2,1) = q_{21},$$

dove $q_{00}, q_{01}, q_{10}, q_{12}, q_{21} > 0$ e $q_{00} + q_{01} + q_{10} + q_{12} + q_{21} = 1$.
`D5)` Trovare la densità discreta di $Y = X_1 + X_2$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 > X_2 | X_1 + X_2 > 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 6400)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{X/6400}$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[80 - \sqrt{X}] = \frac{80}{3}$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica; inoltre per i calcoli da fare è utile osservare che $6400^{3/2} = 80^3$ e $6400 = 80^2$).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media 0 e varianza σ^2.
Calcolare $P(-1.1\sigma < X < 2.1\sigma)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomenti positivi.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con distribuzione uniforme in $(-10, 10)$.
Dire per quale valore di $z > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-1 \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) = 2\Phi(z) - 1.$$

Cenno alle soluzioni (Compito 1) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Con notazioni ovvie la la probabilità richiesta è

$$P(E_{1,3}\cap E_{2,5}\cap E_{3,p})=P(E_{1,3})P(E_{2,5}|E_{1,3})P(E_{3,p}|E_{1,3}\cap E_{2,5})=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{1}{144}.$$

`D2)` Per la formule sulla distribuzione Binomiale la varianza richiesta è $5\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$.
`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, la probabilità richiesta è $\sum_{k\geq 0}(1-p)^{2k+1-1}p=p\sum_{k\geq 0}(1-p)^{2k}=p\frac{((1-p)^2)^0}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2p-p^2}=\frac{1}{2-p}=\frac{5}{8}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali per il denominatore) si ha

$$P(E_1|B)=\frac{P(B|E_1)P(E_1)}{\sum_{k=1}^3 P(B|E_k)P(E_k)}=\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{1+2+3}=\frac{1}{6}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $p_Y(0)=p_{X_1,X_2}(0,0)=q_{00}$, $p_Y(1)=p_{X_1,X_2}(0,1)+p_{X_1,X_2}(1,0)=q_{01}+q_{10}$ e $p_Y(3)=p_{X_1,X_2}(1,2)+p_{X_1,X_2}(2,1)=q_{12}+q_{21}$.
`D6)` Si ha $P(X_1>X_2|X_1+X_2>1)=\frac{P(\{X_1>X_2\}\cap\{X_1+X_2>1\})}{P(X_1+X_2>1)}=\frac{p_{X_1,X_2}(2,1)}{p_Y(3)}=\frac{q_{21}}{q_{12}+q_{21}}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1\leq Y\leq e)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 1$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq e$. Per $y\in(1,e)$ si ha $F_Y(y)=P(e^{X/6400}\leq y)=P(\frac{X}{6400}\leq\log y)=P(X\leq 6400\log y)=\frac{6400\log y-0}{6400-0}=\log y$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[80-\sqrt{X}]=80-\mathbb{E}[\sqrt{X}]=80-\int_0^{6400}\sqrt{x}\frac{1}{6400-0}dx=80-\frac{1}{6400}[\frac{x^{3/2}}{3/2}]_{x=0}^{x=6400}=80-\frac{1}{80^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 80^3=80-\frac{2}{3}\cdot 80=\frac{80}{3}$.

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^*=\frac{X-0}{\sigma}=\frac{X}{\sigma}$ la standardizzata di X. Allora $P(-1.1\sigma<X<2.1\sigma)=P(-1.1<X^*<2.1)=\Phi(2.1)-\Phi(-1.1)=\Phi(2.1)-(1-\Phi(1.1))=\Phi(2.1)+\Phi(1.1)-1$.
`D10)` Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione uniforme si ha $\mu=\frac{-10+10}{2}=0$ e $\sigma^2=\frac{(10-(-10))^2}{12}=\frac{20^2}{12}$, e quindi $\sigma=\frac{20}{2\sqrt{3}}=\frac{10}{\sqrt{3}}$. Allora, per il Teorema Limite Centrale e per ben note proprietà della funzione Φ, si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(-1\leq\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq 1\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(-\frac{\sqrt{3}}{10}\leq\frac{X_1+\cdots+X_n}{\frac{10}{\sqrt{3}}\sqrt{n}}\leq\frac{\sqrt{3}}{10}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{3}}{10}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\right)\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\right)-1.$$

Allora il valore richiesto $z>0$ deve soddisfare la condizione $2\Phi(\frac{\sqrt{3}}{10})-1=2\Phi(z)-1$, da cui si ottiene facilmente $z=\frac{\sqrt{3}}{10}$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 23 Febbraio - Compito 2

Esercizio 1. Abbiamo un'urna con 10 palline numerate da 1 a 10.
`D1)` Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(3, 5, \text{dispari})$.
`D2)` Si estraggono a caso 7 palline, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la varianza della variabile aleatoria X che conta il numero di palline estratte con un numero pari.
`D3)` Si estraggono a caso palline ripetutamente, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre per la prima volta uno dei numeri $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ad una estrazione dispari (o la prima, o la terza, o la quinta, o la settima, ecc.).

Esercizio 2. Abbiamo tre urne con i numeri 1,2,3. In generale l'urna k, per $k \in \{1, 2, 3\}$, ha k palline bianche e $5 - k$ nere. Si sceglie un'urna a caso e si estrae una pallina a caso dall'urna scelta.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver scelto l'urna 1 sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(0,0) = q_{00} \quad p_{X_1,X_2}(0,1) = q_{01} \quad p_{X_1,X_2}(1,0) = q_{10}$$

$$p_{X_1,X_2}(1,2) = q_{12} \quad p_{X_1,X_2}(2,1) = q_{21},$$

dove $q_{00}, q_{01}, q_{10}, q_{12}, q_{21} > 0$ e $q_{00} + q_{01} + q_{10} + q_{12} + q_{21} = 1$.
`D5)` Trovare la densità discreta di $Y = X_1 + X_2$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 > X_2 | X_1 + X_2 \leq 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 4900)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{X/4900}$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[70 - \sqrt{X}] = \frac{70}{3}$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica; inoltre per i calcoli da fare è utile osservare che $4900^{3/2} = 70^3$ e $4900 = 70^2$).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media 0 e varianza σ^2.
Calcolare $P(-1.1\sigma < X < 2.2\sigma)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomenti positivi.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con distribuzione uniforme in $(-20, 20)$.
Dire per quale valore di $z > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-1 \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) = 2\Phi(z) - 1.$$

Cenno alle soluzioni (Compito 2) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Con notazioni ovvie la la probabilità richiesta è

$$P(E_{1,3}\cap E_{2,5}\cap E_{3,d})=P(E_{1,3})P(E_{2,5}|E_{1,3})P(E_{3,d}|E_{1,3}\cap E_{2,5})=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{240}.$$

D2) Per la formule sulla distribuzione Binomiale la varianza richiesta è $7\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{7}{4}$.
D3) Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, la probabilità richiesta è $\sum_{k\geq 0}(1-p)^{2k+1-1}p=p\sum_{k\geq 0}(1-p)^{2k}=p\frac{((1-p)^2)^0}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2p-p^2}=\frac{1}{2-p}=\frac{5}{7}$.

Esercizio 2.
D4) Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali per il denominatore) si ha

$$P(E_1|B)=\frac{P(B|E_1)P(E_1)}{\sum_{k=1}^{3}P(B|E_k)P(E_k)}=\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{1+2+3}=\frac{1}{6}.$$

Esercizio 3.
D5) Si ha $p_Y(0)=p_{X_1,X_2}(0,0)=q_{00}$, $p_Y(1)=p_{X_1,X_2}(0,1)+p_{X_1,X_2}(1,0)=q_{01}+q_{10}$ e $p_Y(3)=p_{X_1,X_2}(1,2)+p_{X_1,X_2}(2,1)=q_{12}+q_{21}$.
D6) Si ha $P(X_1>X_2|X_1+X_2\leq 1)=\frac{P(\{X_1>X_2\}\cap\{X_1+X_2\leq 1\})}{P(X_1+X_2\leq 1)}=\frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_Y(0)+p_Y(1)}=\frac{q_{10}}{q_{00}+q_{01}+q_{10}}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(1\leq Y\leq e)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 1$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq e$. Per $y\in(1,e)$ si ha $F_Y(y)=P(e^{X/4900}\leq y)=P(\frac{X}{4900}\leq\log y)=P(X\leq 4900\log y)=\frac{4900\log y-0}{4900-0}=\log y$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[70-\sqrt{X}]=70-\mathbb{E}[\sqrt{X}]=70-\int_0^{4900}\sqrt{x}\frac{1}{4900-0}dx=70-\frac{1}{4900}[\frac{x^{3/2}}{3/2}]_{x=0}^{x=4900}=70-\frac{1}{70^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 70^3=70-\frac{2}{3}\cdot 70=\frac{70}{3}$.

Esercizio 5.
D9) Sia $X^*=\frac{X-0}{\sigma}=\frac{X}{\sigma}$ la standardizzata di X. Allora $P(-1.1\sigma<X<2.2\sigma)=P(-1.1<X^*<2.2)=\Phi(2.2)-\Phi(-1.1)=\Phi(2.2)-(1-\Phi(1.1))=\Phi(2.2)+\Phi(1.1)-1$.
D10) Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione uniforme si ha $\mu=\frac{-20+20}{2}=0$ e $\sigma^2=\frac{(20-(-20))^2}{12}=\frac{(40)^2}{12}$, e quindi $\sigma=\frac{40}{2\sqrt{3}}=\frac{20}{\sqrt{3}}$. Allora, per il Teorema Limite Centrale e per ben note proprietà della funzione Φ, si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(-1\leq\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq 1\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(-\frac{\sqrt{3}}{20}\leq\frac{X_1+\cdots+X_n}{\frac{20}{\sqrt{3}}\sqrt{n}}\leq\frac{\sqrt{3}}{20}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{20}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{3}}{20}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{20}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{20}\right)\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{20}\right)-1.$$

Allora il valore richiesto $z>0$ deve soddisfare la condizione $2\Phi(\frac{\sqrt{3}}{20})-1=2\Phi(z)-1$, da cui si ottiene facilmente $z=\frac{\sqrt{3}}{20}$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 23 Febbraio - Compito 3

Esercizio 1. Abbiamo un'urna con 10 palline numerate da 1 a 10.
`D1)` Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(2, 4, \text{dispari})$.
`D2)` Si estraggono a caso 9 palline, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la varianza della variabile aleatoria X che conta il numero di palline estratte con un numero dispari.
`D3)` Si estraggono a caso palline ripetutamente, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre per la prima volta uno dei numeri $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ad una estrazione dispari (o la prima, o la terza, o la quinta, o la settima, ecc.).

Esercizio 2. Abbiamo tre urne con i numeri 1,2,3. In generale l'urna k, per $k \in \{1, 2, 3\}$, ha k palline bianche e $5 - k$ nere. Si sceglie un'urna a caso e si estrae una pallina a caso dall'urna scelta.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver scelto l'urna 1 sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(0, 0) = r_{00} \quad p_{X_1,X_2}(0, 1) = r_{01} \quad p_{X_1,X_2}(1, 0) = r_{10}$$

$$p_{X_1,X_2}(1, 2) = r_{12} \quad p_{X_1,X_2}(2, 1) = r_{21},$$

dove $r_{00}, r_{01}, r_{10}, r_{12}, r_{21} > 0$ e $r_{00} + r_{01} + r_{10} + r_{12} + r_{21} = 1$.
`D5)` Trovare la densità discreta di $Y = X_1 + X_2$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 > X_2|X_1 + X_2 > 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 3600)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{X/3600}$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[60 - \sqrt{X}] = \frac{60}{3}$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica; inoltre per i calcoli da fare è utile osservare che $3600^{3/2} = 60^3$ e $3600 = 60^2$).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media 0 e varianza σ^2.
Calcolare $P(-1.2\sigma < X < 2.1\sigma)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomenti positivi.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con distribuzione uniforme in $(-30, 30)$.
Dire per quale valore di $z > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-1 \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) = 2\Phi(z) - 1.$$

Cenno alle soluzioni (Compito 3) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Con notazioni ovvie la la probabilità richiesta è

$$P(E_{1,2} \cap E_{2,4} \cap E_{3,d}) = P(E_{1,2})P(E_{2,4}|E_{1,2})P(E_{3,d}|E_{1,2} \cap E_{2,4}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{144}.$$

D2) Per la formule sulla distribuzione Binomiale la varianza richiesta è $9 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$.
D3) Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, la probabilità richiesta è $\sum_{k \geq 0}(1-p)^{2k+1-1}p = p\sum_{k \geq 0}(1-p)^{2k} = p\frac{((1-p)^2)^0}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p} = \frac{5}{7}$.

Esercizio 2.
D4) Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali per il denominatore) si ha

$$P(E_1|B) = \frac{P(B|E_1)P(E_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(B|E_k)P(E_k)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{1+2+3} = \frac{1}{6}.$$

Esercizio 3.
D5) Si ha $p_Y(0) = p_{X_1,X_2}(0,0) = r_{00}$, $p_Y(1) = p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(1,0) = r_{01} + r_{10}$ e $p_Y(3) = p_{X_1,X_2}(1,2) + p_{X_1,X_2}(2,1) = r_{12} + r_{21}$.
D6) Si ha $P(X_1 > X_2|X_1 + X_2 > 1) = \frac{P(\{X_1 > X_2\} \cap \{X_1 + X_2 > 1\})}{P(X_1 + X_2 > 1)} = \frac{p_{X_1,X_2}(2,1)}{p_Y(3)} = \frac{r_{21}}{r_{12}+r_{21}}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(1 \leq Y \leq e) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e$. Per $y \in (1, e)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{X/3600} \leq y) = P(\frac{X}{3600} \leq \log y) = P(X \leq 3600 \log y) = \frac{3600 \log y - 0}{3600-0} = \log y$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[60 - \sqrt{X}] = 60 - \mathbb{E}[\sqrt{X}] = 60 - \int_0^{3600} \sqrt{x}\frac{1}{3600-0}dx = 60 - \frac{1}{3600}[\frac{x^{3/2}}{3/2}]_{x=0}^{x=3600} = 60 - \frac{1}{60^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 60^3 = 60 - \frac{2}{3} \cdot 60 = \frac{60}{3}$.

Esercizio 5.
D9) Sia $X^* = \frac{X-0}{\sigma} = \frac{X}{\sigma}$ la standardizzata di X. Allora $P(-1.2\sigma < X < 2.1\sigma) = P(-1.2 < X^* < 2.1) = \Phi(2.1) - \Phi(-1.2) = \Phi(2.1) - (1 - \Phi(1.2)) = \Phi(2.1) + \Phi(1.2) - 1$.
D10) Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione uniforme si ha $\mu = \frac{-30+30}{2} = 0$ e $\sigma^2 = \frac{(30-(-30))^2}{12} = \frac{(60)^2}{12}$, e quindi $\sigma = \frac{60}{2\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}}$. Allora, per il Teorema Limite Centrale e per ben note proprietà della funzione Φ, si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-1 \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(-\frac{\sqrt{3}}{30} \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\frac{30}{\sqrt{3}}\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{3}}{30}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{30}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{3}}{30}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{30}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{30}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{30}\right) - 1.$$

Allora il valore richiesto $z > 0$ deve soddisfare la condizione $2\Phi(\frac{\sqrt{3}}{30}) - 1 = 2\Phi(z) - 1$, da cui si ottiene facilmente $z = \frac{\sqrt{3}}{30}$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 23 Febbraio - Compito 4

Esercizio 1. Abbiamo un'urna con 10 palline numerate da 1 a 10.
D1) Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(2, 4, \text{pari})$.
D2) Si estraggono a caso 11 palline, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la varianza della variabile aleatoria X che conta il numero di palline estratte con un numero pari.
D3) Si estraggono a caso palline ripetutamente, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre per la prima volta uno dei numeri $1, 2, 3, 4$ ad una estrazione dispari (o la prima, o la terza, o la quinta, o la settima, ecc.).

Esercizio 2. Abbiamo tre urne con i numeri 1,2,3. In generale l'urna k, per $k \in \{1, 2, 3\}$, ha k palline bianche e $5 - k$ nere. Si sceglie un'urna a caso e si estrae una pallina a caso dall'urna scelta.
D4) Calcolare la probabilità di aver scelto l'urna 2 sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(0,0) = r_{00} \quad p_{X_1,X_2}(0,1) = r_{01} \quad p_{X_1,X_2}(1,0) = r_{10}$$

$$p_{X_1,X_2}(1,2) = r_{12} \quad p_{X_1,X_2}(2,1) = r_{21},$$

dove $r_{00}, r_{01}, r_{10}, r_{12}, r_{21} > 0$ e $r_{00} + r_{01} + r_{10} + r_{12} + r_{21} = 1$.
D5) Trovare la densità discreta di $Y = X_1 + X_2$.
D6) Calcolare $P(X_1 > X_2 | X_1 + X_2 \leq 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 2500)$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{X/2500}$.
D8) Verificare che $\mathbb{E}[50 - \sqrt{X}] = \frac{50}{3}$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica; inoltre per i calcoli da fare è utile osservare che $2500^{3/2} = 50^3$ e $2500 = 50^2$).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una v.a. Normale con media 0 e varianza σ^2.
Calcolare $P(-1.1\sigma < X < 2.3\sigma)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomenti positivi.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con distribuzione uniforme in $(-40, 40)$.
Dire per quale valore di $z > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-1 \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) = 2\Phi(z) - 1.$$

Cenno alle soluzioni (Compito 4) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Con notazioni ovvie la la probabilità richiesta è

$$P(E_{1,2}\cap E_{2,4}\cap E_{3,p})=P(E_{1,2})P(E_{2,4}|E_{1,2})P(E_{3,p}|E_{1,2}\cap E_{2,4})=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{240}.$$

`D2)` Per la formule sulla distribuzione Binomiale la varianza richiesta è $11\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{11}{4}$.
`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, la probabilità richiesta è $\sum_{k\geq 0}(1-p)^{2k+1-1}p=p\sum_{k\geq 0}(1-p)^{2k}=p\frac{((1-p)^2)^0}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2p-p^2}=\frac{1}{2-p}=\frac{5}{8}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali per il denominatore) si ha

$$P(E_2|B)=\frac{P(B|E_2)P(E_2)}{\sum_{k=1}^{3}P(B|E_k)P(E_k)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{2}{1+2+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $p_Y(0)=p_{X_1,X_2}(0,0)=r_{00}$, $p_Y(1)=p_{X_1,X_2}(0,1)+p_{X_1,X_2}(1,0)=r_{01}+r_{10}$ e $p_Y(3)=p_{X_1,X_2}(1,2)+p_{X_1,X_2}(2,1)=r_{12}+r_{21}$.
`D6)` Si ha $P(X_1>X_2|X_1+X_2\leq 1)=\frac{P(\{X_1>X_2\}\cap\{X_1+X_2\leq 1\})}{P(X_1+X_2\leq 1)}=\frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_Y(0)+p_Y(1)}=\frac{r_{10}}{r_{00}+r_{01}+r_{10}}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1\leq Y\leq e)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 1$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq e$. Per $y\in(1,e)$ si ha $F_Y(y)=P(e^{X/2500}\leq y)=P(\frac{X}{2500}\leq\log y)=P(X\leq 2500\log y)=\frac{2500\log y-0}{2500-0}=\log y$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[50-\sqrt{X}]=50-\mathbb{E}[\sqrt{X}]=50-\int_0^{2500}\sqrt{x}\frac{1}{2500-0}dx=50-\frac{1}{2500}[\frac{x^{3/2}}{3/2}]_{x=0}^{x=2500}=50-\frac{1}{50^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 50^3=50-\frac{2}{3}\cdot 50=\frac{50}{3}$.

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^*=\frac{X-0}{\sigma}=\frac{X}{\sigma}$ la standardizzata di X. Allora $P(-1.1\sigma<X<2.3\sigma)=P(-1.1<X^*<2.3)=\Phi(2.3)-\Phi(-1.1)=\Phi(2.3)-(1-\Phi(1.1))=\Phi(2.3)+\Phi(1.1)-1$.
`D10)` Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione uniforme si ha $\mu=\frac{-40+40}{2}=0$ e $\sigma^2=\frac{(40-(-40))^2}{12}=\frac{(80)^2}{12}$, e quindi $\sigma=\frac{80}{2\sqrt{3}}=\frac{40}{\sqrt{3}}$. Allora, per il Teorema Limite Centrale e per ben note proprietà della funzione Φ, si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(-1\leq\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq 1\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(-\frac{\sqrt{3}}{40}\leq\frac{X_1+\cdots+X_n}{\frac{40}{\sqrt{3}}\sqrt{n}}\leq\frac{\sqrt{3}}{40}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{40}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{3}}{40}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{40}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{40}\right)\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{40}\right)-1.$$

Allora il valore richiesto $z>0$ deve soddisfare la condizione $2\Phi(\frac{\sqrt{3}}{40})-1=2\Phi(z)-1$, da cui si ottiene facilmente $z=\frac{\sqrt{3}}{40}$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 23 Febbraio - Compito 5

Esercizio 1. Abbiamo un'urna con 10 palline numerate da 1 a 10.
`D1)` Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(4, 7, \text{pari})$.
`D2)` Si estraggono a caso 5 palline, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la varianza della variabile aleatoria X che conta il numero di palline estratte con un numero pari.
`D3)` Si estraggono a caso palline ripetutamente, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre per la prima volta uno dei numeri $1, 2, 3, 4$ ad una estrazione dispari (o la prima, o la terza, o la quinta, o la settima, ecc.).

Esercizio 2. Abbiamo tre urne con i numeri 1,2,3. In generale l'urna k, per $k \in \{1, 2, 3\}$, ha k palline bianche e $5 - k$ nere. Si sceglie un'urna a caso e si estrae una pallina a caso dall'urna scelta.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver scelto l'urna 2 sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(0, 0) = a_{00} \quad p_{X_1,X_2}(0, 1) = a_{01} \quad p_{X_1,X_2}(1, 0) = a_{10}$$

$$p_{X_1,X_2}(1, 2) = a_{12} \quad p_{X_1,X_2}(2, 1) = a_{21},$$

dove $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{12}, a_{21} > 0$ e $a_{00} + a_{01} + a_{10} + a_{12} + a_{21} = 1$.
`D5)` Trovare la densità discreta di $Y = X_1 + X_2$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 > X_2 | X_1 + X_2 > 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 1600)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{X/1600}$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[40 - \sqrt{X}] = \frac{40}{3}$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica; inoltre per i calcoli da fare è utile osservare che $1600^{3/2} = 40^3$ e $1600 = 40^2$).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media 0 e varianza σ^2.
Calcolare $P(-1.4\sigma < X < 2.1\sigma)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomenti positivi.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con distribuzione uniforme in $(-50, 50)$.
Dire per quale valore di $z > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-1 \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) = 2\Phi(z) - 1.$$

Cenno alle soluzioni (Compito 5) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Con notazioni ovvie la la probabilità richiesta è

$$P(E_{1,4}\cap E_{2,7}\cap E_{3,p})=P(E_{1,4})P(E_{2,7}|E_{1,4})P(E_{3,p}|E_{1,4}\cap E_{2,7})=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{180}.$$

`D2)` Per la formule sulla distribuzione Binomiale la varianza richiesta è $5\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$.
`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, la probabilità richiesta è $\sum_{k\geq 0}(1-p)^{2k+1-1}p=p\sum_{k\geq 0}(1-p)^{2k}=p\frac{((1-p)^2)^0}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2p-p^2}=\frac{1}{2-p}=\frac{5}{8}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali per il denominatore) si ha

$$P(E_2|B)=\frac{P(B|E_2)P(E_2)}{\sum_{k=1}^{3}P(B|E_k)P(E_k)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{2}{1+2+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $p_Y(0)=p_{X_1,X_2}(0,0)=a_{00}$, $p_Y(1)=p_{X_1,X_2}(0,1)+p_{X_1,X_2}(1,0)=a_{01}+a_{10}$ e $p_Y(3)=p_{X_1,X_2}(1,2)+p_{X_1,X_2}(2,1)=a_{12}+a_{21}$.
`D6)` Si ha $P(X_1>X_2|X_1+X_2>1)=\frac{P(\{X_1>X_2\}\cap\{X_1+X_2>1\})}{P(X_1+X_2>1)}=\frac{p_{X_1,X_2}(2,1)}{p_Y(3)}=\frac{a_{21}}{a_{12}+a_{21}}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1\leq Y\leq e)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 1$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq e$. Per $y\in(1,e)$ si ha $F_Y(y)=P(e^{X/1600}\leq y)=P(\frac{X}{1600}\leq\log y)=P(X\leq 1600\log y)=\frac{1600\log y-0}{1600-0}=\log y$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[40-\sqrt{X}]=40-\mathbb{E}[\sqrt{X}]=40-\int_0^{1600}\sqrt{x}\frac{1}{1600-0}dx=40-\frac{1}{1600}[\frac{x^{3/2}}{3/2}]_{x=0}^{x=1600}=40-\frac{1}{40^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 40^3=40-\frac{2}{3}\cdot 40=\frac{40}{3}$.

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^*=\frac{X-0}{\sigma}=\frac{X}{\sigma}$ la standardizzata di X. Allora $P(-1.4\sigma<X<2.1\sigma)=P(-1.4<X^*<2.1)=\Phi(2.1)-\Phi(-1.4)=\Phi(2.1)-(1-\Phi(1.4))=\Phi(2.1)+\Phi(1.4)-1$.
`D10)` Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione uniforme si ha $\mu=\frac{-50+50}{2}=0$ e $\sigma^2=\frac{(50-(-50))^2}{12}=\frac{(100)^2}{12}$, e quindi $\sigma=\frac{100}{2\sqrt{3}}=\frac{50}{\sqrt{3}}$. Allora, per il Teorema Limite Centrale e per ben note proprietà della funzione Φ, si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(-1\leq\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq 1\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(-\frac{\sqrt{3}}{50}\leq\frac{X_1+\cdots+X_n}{\frac{50}{\sqrt{3}}\sqrt{n}}\leq\frac{\sqrt{3}}{50}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{50}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{3}}{50}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{50}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{50}\right)\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{50}\right)-1.$$

Allora il valore richiesto $z>0$ deve soddisfare la condizione $2\Phi(\frac{\sqrt{3}}{50})-1=2\Phi(z)-1$, da cui si ottiene facilmente $z=\frac{\sqrt{3}}{50}$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 23 Febbraio - Compito 6

Esercizio 1. Abbiamo un'urna con 10 palline numerate da 1 a 10.
`D1)` Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(4, 9, \text{dispari})$.
`D2)` Si estraggono a caso 7 palline, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la varianza della variabile aleatoria X che conta il numero di palline estratte con un numero dispari.
`D3)` Si estraggono a caso palline ripetutamente, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre per la prima volta uno dei numeri $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ad una estrazione dispari (o la prima, o la terza, o la quinta, o la settima, ecc.).

Esercizio 2. Abbiamo tre urne con i numeri 1,2,3. In generale l'urna k, per $k \in \{1, 2, 3\}$, ha k palline bianche e $5 - k$ nere. Si sceglie un'urna a caso e si estrae una pallina a caso dall'urna scelta.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver scelto l'urna 3 sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(0,0) = a_{00} \quad p_{X_1,X_2}(0,1) = a_{01} \quad p_{X_1,X_2}(1,0) = a_{10}$$

$$p_{X_1,X_2}(1,2) = a_{12} \quad p_{X_1,X_2}(2,1) = a_{21},$$

dove $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{12}, a_{21} > 0$ e $a_{00} + a_{01} + a_{10} + a_{12} + a_{21} = 1$.
`D5)` Trovare la densità discreta di $Y = X_1 + X_2$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 > X_2 | X_1 + X_2 \leq 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 900)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{X/900}$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[30 - \sqrt{X}] = \frac{30}{3}$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica; inoltre per i calcoli da fare è utile osservare che $900^{3/2} = 30^3$ e $900 = 30^2$).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media 0 e varianza σ^2.
Calcolare $P(-1.1\sigma < X < 2.5\sigma)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomenti positivi.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con distribuzione uniforme in $(-60, 60)$.
Dire per quale valore di $z > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-1 \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) = 2\Phi(z) - 1.$$

Cenno alle soluzioni (Compito 6) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Con notazioni ovvie la la probabilità richiesta è

$$P(E_{1,4} \cap E_{2,9} \cap E_{3,d}) = P(E_{1,4})P(E_{2,9}|E_{1,4})P(E_{3,d}|E_{1,4} \cap E_{2,9}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{180}.$$

`D2)` Per la formule sulla distribuzione Binomiale la varianza richiesta è $7 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$.
`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, la probabilità richiesta è $\sum_{k \geq 0}(1-p)^{2k+1-1}p = p\sum_{k \geq 0}(1-p)^{2k} = p\frac{((1-p)^2)^0}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p} = \frac{5}{7}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali per il denominatore) si ha

$$P(E_3|B) = \frac{P(B|E_3)P(E_3)}{\sum_{k=1}^{3} P(B|E_k)P(E_k)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{1+2+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $p_Y(0) = p_{X_1,X_2}(0,0) = a_{00}$, $p_Y(1) = p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(1,0) = a_{01} + a_{10}$ e $p_Y(3) = p_{X_1,X_2}(1,2) + p_{X_1,X_2}(2,1) = a_{12} + a_{21}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 > X_2|X_1 + X_2 \leq 1) = \frac{P(\{X_1 > X_2\} \cap \{X_1 + X_2 \leq 1\})}{P(X_1 + X_2 \leq 1)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_Y(0)+p_Y(1)} = \frac{a_{10}}{a_{00}+a_{01}+a_{10}}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1 \leq Y \leq e) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e$. Per $y \in (1,e)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{X/900} \leq y) = P(\frac{X}{900} \leq \log y) = P(X \leq 900 \log y) = \frac{900 \log y - 0}{900-0} = \log y$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[30 - \sqrt{X}] = 30 - \mathbb{E}[\sqrt{X}] = 30 - \int_0^{900} \sqrt{x}\frac{1}{900-0}dx = 30 - \frac{1}{900}[\frac{x^{3/2}}{3/2}]_{x=0}^{x=900} = 30 - \frac{1}{30^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 30^3 = 30 - \frac{2}{3} \cdot 30 = \frac{30}{3}$.

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^* = \frac{X-0}{\sigma} = \frac{X}{\sigma}$ la standardizzata di X. Allora $P(-1.1\sigma < X < 2.5\sigma) = P(-1.1 < X^* < 2.5) = \Phi(2.5) - \Phi(-1.1) = \Phi(2.5) - (1 - \Phi(1.1)) = \Phi(2.5) + \Phi(1.1) - 1$.
`D10)` Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione uniforme si ha $\mu = \frac{-60+60}{2} = 0$ e $\sigma^2 = \frac{(60-(-60))^2}{12} = \frac{(120)^2}{12}$, e quindi $\sigma = \frac{120}{2\sqrt{3}} = \frac{60}{\sqrt{3}}$. Allora, per il Teorema Limite Centrale e per ben note proprietà della funzione Φ, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P\left(-1 \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) &= \lim_{n\to\infty} P\left(-\frac{\sqrt{3}}{60} \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\frac{60}{\sqrt{3}}\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{3}}{60}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{60}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{3}}{60}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{60}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{60}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{60}\right) - 1.\end{aligned}$$

Allora il valore richiesto $z > 0$ deve soddisfare la condizione $2\Phi(\frac{\sqrt{3}}{60}) - 1 = 2\Phi(z) - 1$, da cui si ottiene facilmente $z = \frac{\sqrt{3}}{60}$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 23 Febbraio - Compito 7

Esercizio 1. Abbiamo un'urna con 10 palline numerate da 1 a 10.
`D1)` Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(7, 2, \text{pari})$.
`D2)` Si estraggono a caso 11 palline, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la varianza della variabile aleatoria X che conta il numero di palline estratte con un numero dispari.
`D3)` Si estraggono a caso palline ripetutamente, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre per la prima volta uno dei numeri $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ad una estrazione dispari (o la prima, o la terza, o la quinta, o la settima, ecc.).

Esercizio 2. Abbiamo tre urne con i numeri 1,2,3. In generale l'urna k, per $k \in \{1, 2, 3\}$, ha k palline bianche e $5 - k$ nere. Si sceglie un'urna a caso e si estrae una pallina a caso dall'urna scelta.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver scelto l'urna 3 sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(0, 0) = b_{00} \quad p_{X_1,X_2}(0, 1) = b_{01} \quad p_{X_1,X_2}(1, 0) = b_{10}$$

$$p_{X_1,X_2}(1, 2) = b_{12} \quad p_{X_1,X_2}(2, 1) = b_{21},$$

dove $b_{00}, b_{01}, b_{10}, b_{12}, b_{21} > 0$ e $b_{00} + b_{01} + b_{10} + b_{12} + b_{21} = 1$.
`D5)` Trovare la densità discreta di $Y = X_1 + X_2$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 > X_2|X_1 + X_2 > 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 400)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{X/400}$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[20 - \sqrt{X}] = \frac{20}{3}$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica; inoltre per i calcoli da fare è utile osservare che $400^{3/2} = 20^3$ e $400 = 20^2$).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media 0 e varianza σ^2.
Calcolare $P(-1.7\sigma < X < 2.1\sigma)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomenti positivi.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con distribuzione uniforme in $(-70, 70)$.
Dire per quale valore di $z > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-1 \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) = 2\Phi(z) - 1.$$

Cenno alle soluzioni (Compito 7) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Con notazioni ovvie la la probabilità richiesta è

$$P(E_{1,7} \cap E_{2,2} \cap E_{3,p}) = P(E_{1,7})P(E_{2,2}|E_{1,7})P(E_{3,p}|E_{1,7} \cap E_{2,2}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{180}.$$

D2) Per la formule sulla distribuzione Binomiale la varianza richiesta è $11 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{11}{4}$.
D3) Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, la probabilità richiesta è $\sum_{k\geq 0}(1-p)^{2k+1-1}p = p\sum_{k\geq 0}(1-p)^{2k} = p\frac{((1-p)^2)^0}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p} = \frac{5}{7}$.

Esercizio 2.
D4) Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali per il denominatore) si ha

$$P(E_3|B) = \frac{P(B|E_3)P(E_3)}{\sum_{k=1}^{3} P(B|E_k)P(E_k)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{1+2+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3.
D5) Si ha $p_Y(0) = p_{X_1,X_2}(0,0) = b_{00}$, $p_Y(1) = p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(1,0) = b_{01} + b_{10}$ e $p_Y(3) = p_{X_1,X_2}(1,2) + p_{X_1,X_2}(2,1) = b_{12} + b_{21}$.
D6) Si ha $P(X_1 > X_2|X_1 + X_2 > 1) = \frac{P(\{X_1>X_2\}\cap\{X_1+X_2>1\})}{P(X_1+X_2>1)} = \frac{p_{X_1,X_2}(2,1)}{p_Y(3)} = \frac{b_{21}}{b_{12}+b_{21}}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(1 \leq Y \leq e) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e$. Per $y \in (1,e)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{X/400} \leq y) = P(\frac{X}{400} \leq \log y) = P(X \leq 400 \log y) = \frac{400 \log y - 0}{400-0} = \log y$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[20-\sqrt{X}] = 20-\mathbb{E}[\sqrt{X}] = 20-\int_0^{400} \sqrt{x}\frac{1}{400-0}dx = 20-\frac{1}{400}[\frac{x^{3/2}}{3/2}]_{x=0}^{x=400} = 20-\frac{1}{20^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 20^3 = 20 - \frac{2}{3} \cdot 20 = \frac{20}{3}$.

Esercizio 5.
D9) Sia $X^* = \frac{X-0}{\sigma} = \frac{X}{\sigma}$ la standardizzata di X. Allora $P(-1.7\sigma < X < 2.1\sigma) = P(-1.7 < X^* < 2.1) = \Phi(2.1) - \Phi(-1.7) = \Phi(2.1) - (1 - \Phi(1.7)) = \Phi(2.1) + \Phi(1.7) - 1$.
D10) Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione uniforme si ha $\mu = \frac{-70+70}{2} = 0$ e $\sigma^2 = \frac{(70-(-70))^2}{12} = \frac{(140)^2}{12}$, e quindi $\sigma = \frac{140}{2\sqrt{3}} = \frac{70}{\sqrt{3}}$. Allora, per il Teorema Limite Centrale e per ben note proprietà della funzione Φ, si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-1 \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(-\frac{\sqrt{3}}{70} \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\frac{70}{\sqrt{3}}\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{3}}{70}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{70}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{3}}{70}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{70}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{70}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{70}\right) - 1.$$

Allora il valore richiesto $z > 0$ deve soddisfare la condizione $2\Phi(\frac{\sqrt{3}}{70}) - 1 = 2\Phi(z) - 1$, da cui si ottiene facilmente $z = \frac{\sqrt{3}}{70}$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 23 Febbraio - Compito 8

Esercizio 1. Abbiamo un'urna con 10 palline numerate da 1 a 10.
`D1)` Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(5, 8, \text{dispari})$.
`D2)` Si estraggono a caso 9 palline, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la varianza della variabile aleatoria X che conta il numero di palline estratte con un numero pari.
`D3)` Si estraggono a caso palline ripetutamente, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre per la prima volta uno dei numeri $1, 2, 3, 4$ ad una estrazione dispari (o la prima, o la terza, o la quinta, o la settima, ecc.).

Esercizio 2. Abbiamo tre urne con i numeri 1,2,3. In generale l'urna k, per $k \in \{1, 2, 3\}$, ha k palline bianche e $5 - k$ nere. Si sceglie un'urna a caso e si estrae una pallina a caso dall'urna scelta.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver scelto l'urna 3 sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(0, 0) = b_{00} \quad p_{X_1,X_2}(0, 1) = b_{01} \quad p_{X_1,X_2}(1, 0) = b_{10}$$

$$p_{X_1,X_2}(1, 2) = b_{12} \quad p_{X_1,X_2}(2, 1) = b_{21},$$

dove $b_{00}, b_{01}, b_{10}, b_{12}, b_{21} > 0$ e $b_{00} + b_{01} + b_{10} + b_{12} + b_{21} = 1$.
`D5)` Trovare la densità discreta di $Y = X_1 + X_2$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 > X_2 | X_1 + X_2 \leq 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 100)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{X/100}$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[10 - \sqrt{X}] = \frac{10}{3}$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica; inoltre per i calcoli da fare è utile osservare che $100^{3/2} = 10^3$ e $100 = 10^2$).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media 0 e varianza σ^2.
Calcolare $P(-1.8\sigma < X < 2.1\sigma)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomenti positivi.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con distribuzione uniforme in $(-80, 80)$.
Dire per quale valore di $z > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-1 \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) = 2\Phi(z) - 1.$$

Cenno alle soluzioni (Compito 8) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Con notazioni ovvie la la probabilità richiesta è

$$P(E_{1,5}\cap E_{2,8}\cap E_{3,d})=P(E_{1,5})P(E_{2,8}|E_{1,5})P(E_{3,d}|E_{1,5}\cap E_{2,8})=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{180}.$$

`D2)` Per la formule sulla distribuzione Binomiale la varianza richiesta è $9\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{9}{4}$.
`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, la probabilità richiesta è $\sum_{k\geq 0}(1-p)^{2k+1-1}p=p\sum_{k\geq 0}(1-p)^{2k}=p\frac{((1-p)^2)^0}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2p-p^2}=\frac{1}{2-p}=\frac{5}{8}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali per il denominatore) si ha

$$P(E_3|B)=\frac{P(B|E_3)P(E_3)}{\sum_{k=1}^{3}P(B|E_k)P(E_k)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{3}{1+2+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $p_Y(0)=p_{X_1,X_2}(0,0)=b_{00}$, $p_Y(1)=p_{X_1,X_2}(0,1)+p_{X_1,X_2}(1,0)=b_{01}+b_{10}$ e $p_Y(3)=p_{X_1,X_2}(1,2)+p_{X_1,X_2}(2,1)=b_{12}+b_{21}$.
`D6)` Si ha $P(X_1>X_2|X_1+X_2\leq 1)=\frac{P(\{X_1>X_2\}\cap\{X_1+X_2\leq 1\})}{P(X_1+X_2\leq 1)}=\frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_Y(0)+p_Y(1)}=\frac{b_{10}}{b_{00}+b_{01}+b_{10}}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1\leq Y\leq e)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 1$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq e$. Per $y\in(1,e)$ si ha $F_Y(y)=P(e^{X/100}\leq y)=P(\frac{X}{100}\leq\log y)=P(X\leq 100\log y)=\frac{100\log y-0}{100-0}=\log y$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[10-\sqrt{X}]=10-\mathbb{E}[\sqrt{X}]=10-\int_0^{100}\sqrt{x}\frac{1}{100-0}dx=10-\frac{1}{100}[\frac{x^{3/2}}{3/2}]_{x=0}^{x=100}=10-\frac{1}{10^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 10^3=10-\frac{2}{3}\cdot 10=\frac{10}{3}$.

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^*=\frac{X-0}{\sigma}=\frac{X}{\sigma}$ la standardizzata di X. Allora $P(-1.8\sigma<X<2.1\sigma)=P(-1.8<X^*<2.1)=\Phi(2.1)-\Phi(-1.8)=\Phi(2.1)-(1-\Phi(1.8))=\Phi(2.1)+\Phi(1.8)-1$.
`D10)` Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione uniforme si ha $\mu=\frac{-80+80}{2}=0$ e $\sigma^2=\frac{(80-(-80))^2}{12}=\frac{(160)^2}{12}$, e quindi $\sigma=\frac{160}{2\sqrt{3}}=\frac{80}{\sqrt{3}}$. Allora, per il Teorema Limite Centrale e per ben note proprietà della funzione Φ, si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(-1\leq\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq 1\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(-\frac{\sqrt{3}}{80}\leq\frac{X_1+\cdots+X_n}{\frac{80}{\sqrt{3}}\sqrt{n}}\leq\frac{\sqrt{3}}{80}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{80}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{3}}{80}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{80}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{80}\right)\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{80}\right)-1.$$

Allora il valore richiesto $z>0$ deve soddisfare la condizione $2\Phi(\frac{\sqrt{3}}{80})-1=2\Phi(z)-1$, da cui si ottiene facilmente $z=\frac{\sqrt{3}}{80}$.