

Matematica Discreta

(Prof. F. Brenti)

Prova D'Esame

(8 Gennaio, 2024)

1. Siano X, Y, Z insiemi e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ due funzioni iniettive. Dimostrare che la loro composizione, $g \circ f$ è iniettiva.

2. Trovare, se esistono, tutti i numeri $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che

$$97x + 66y = 4.$$

3. Calcolare, se esiste, l'inversa moltiplicativa di

$$[56]_{97}.$$

4. Quante parole diverse si possono formare permutando (cioè, anagrammando) le lettere della parola ANTANANARIVO?

5. Trovare una formula chiusa (o asintoticamente chiusa) per

$$\sum_{k=1}^n (k - \cos(k)).$$

6. Risolvere la ricorsione lineare

$$f(n+3) = -2f(n+2) - 2f(n+1) - 4f(n)$$

per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$.

7. Sia $G = (A, B, E)$ il grafo bipartito definito ponendo $A = \{S \subseteq [20] : |S| = 2\}$, $B = \{T \subseteq [20] : |T| = 18\}$ e dove $\{S, T\} \in E$ se e solo se $S \subseteq T$ ($S \in A$, $T \in B$). Quindi, per esempio, $\{\{1, 5\}, [20] \setminus \{3, 6\}\} \in E$ mentre $\{\{1, 5\}, [20] \setminus \{3, 5\}\} \notin E$. Esiste un accoppiamento di A in B ?