Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2022-2023`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 3 Febbraio 2023

Esercizio 1. Un'urna ha 100 palline numerate da 1 a 100. Si estraggono a caso 4 palline, una alla volta e con reinserimento.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre 2 palline con un numero dispari.
`D2)` Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(\text{pari}, \text{pari}, \text{dispari}, \text{dispari})$ sapendo che si è verificato l'evento alla domanda precedente.
`D3)` Calcolare la speranza matematica della variabile aleatoria Z che conta il numero di palline estratte con un numero minore di 21 (cioè ≤ 20).

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce uno dei numeri $\{1,2\}$ si lancia una moneta equa; se esce uno dei numeri $\{3,4,5,6\}$ si lancia una moneta la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $\frac{1}{4}$.
`D4)` Calcolare la probabilità che esca testa nel lancio di moneta che si effettua.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(0,0) = \frac{5}{12}, \quad p_{X_1,X_2}(h,3h) = \left(\frac{1}{2}\right)^h \text{ e } p_{X_1,X_2}(h,5h) = \left(\frac{1}{4}\right)^h \text{ per ogni } h \geq 2 \text{ intero.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_2 = 5X_1)$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 = 3)$.

Esercizio 4. Siano $a > 0$ e $k > 1$ arbitrariamente fissati. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (a, ka).
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \sqrt{\frac{X}{a}}$, e verificare che non dipende da a.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{k+1}{2}$.
Suggerimento. Si può rispondere a `D8)` tenendo conto della risposta in `D7)`, oppure si può tenere conto che $Y^2 = \frac{X}{a}$ (in questo caso è anche utile tenere conto della linearità della speranza matematica, e del fatto che X ha distribuzione uniforme).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale con media 0 e varianza σ^2. Dire per quale valore di σ si ha $P(|X| \leq 2) = 2\Phi(3/2) - 1$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\lambda}{\sqrt{n}} < z\right)$$

per ogni $z \in \mathbb{R}$, esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che si estrae un numero dispari. La probabilità richiesta è $p_X(2) = \binom{4}{2}(\frac{1}{2})^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.
`D2)` Sia E l'evento "viene stratta la sequenza $(\text{pari}, \text{pari}, \text{dispari}, \text{dispari})$". Allora, sfruttando il valore di $p_X(2)$ calcolato nella risposta alla domanda precedente, la probabilità richiesta è $P(E|X = 2) = \frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)} = \frac{P(E)}{p_X(2)} = \frac{(1/2)^4}{(6/16)} = \frac{1}{6}$.
`D3)` Usando formule note legate alla binomiale si ha $\mathbb{E}[Z] = 4 \cdot \frac{20}{100} = \frac{4}{5}$.
Osservazione. Si può ottenere $\mathbb{E}[Z]$ anche dalla densità discreta di $Z \sim \text{Bin}(n = 4, p = 20/100 = 1/5)$ e usando la seguente formula: $\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{4} k\binom{4}{k}(\frac{1}{5})^k(1 - \frac{1}{5})^{4-k}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(T) = P(T|M_1)P(M_1) + P(T|M_2)P(M_2) = \frac{1}{2}\frac{2}{6} + \frac{1}{4}\frac{4}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2 = 5X_1) = p_{X_1,X_2}(0, 0) + \sum_{h\geq2} p_{X_1,X_2}(h, 5h) = \frac{5}{12} + \sum_{h\geq2} \left(\frac{1}{4}\right)^h = \frac{5}{12} + \frac{(1/4)^2}{1-1/4} = \frac{5}{12} + \frac{1}{16}\frac{4}{3} = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = 3) = p_{X_1,X_2}(3, 9) + p_{X_1,X_2}(3, 15) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{8+1}{64} = \frac{9}{64}$.
Osservazione. In generale la densità marginale di X_1 è $p_{X_1}(0) = p_{X_1,X_2}(0, 0) = \frac{5}{12}$ e, per $h \geq 2$ intero, $p_{X_1}(h) = p_{X_1,X_2}(h, 3h) + p_{X_1,X_2}(h, 5h) = \left(\frac{1}{2}\right)^h + \left(\frac{1}{4}\right)^h$ (e quindi $p_{X_1}(3) = \cdots = \frac{9}{64}$).

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1 \leq Y \leq \sqrt{k}) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq \sqrt{k}$. Per $y \in (1, \sqrt{k})$ si ha $F_Y(y) = P(\sqrt{\frac{X}{a}} \leq y) = P(X \leq ay^2) = \int_a^{ay^2} \frac{1}{ka-a}dx = \frac{[x]_{x=a}^{x=ay^2}}{ka-a} = \frac{ay^2-a}{ka-a} = \frac{y^2-1}{k-1}$.
Quindi effettivamente F_Y non dipende da a.
`D8)` Dalla domanda precedente si ha $f_Y(y) = \frac{2y}{k-1}1_{(1,\sqrt{k})}(y)$ (basta derivare ...) e quindi $\mathbb{E}[Y^2] = \int_1^{\sqrt{k}} y^2\frac{2y}{k-1}dy = \frac{2}{k-1}\int_1^{\sqrt{k}} y^3dy = \frac{2}{k-1}[\frac{y^4}{4}]_{y=1}^{y=\sqrt{k}} = \frac{(\sqrt{k})^4-1^4}{2(k-1)} = \frac{k^2-1}{2(k-1)} = \frac{(k+1)(k-1)}{2(k-1)} = \frac{k+1}{2}$.
Osservazione. In altro modo, come indicato nel suggerimento (e senza sfruttare la risposta alla domanda precedente), si ha $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[\frac{X}{a}] = \frac{1}{a}\mathbb{E}[X]$ dove $\mathbb{E}[X] = \frac{ka+a}{2}$ (perché X ha distribuzione uniforme su (a, ka)), da cui segue $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{a}\frac{ka+a}{2} = \frac{1}{a}\frac{a(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}$.
Commento. Il valore $\frac{k+1}{2}$ nell'uguaglianza da verificare non dipende da a; questo è in accordo con il fatto che F_Y non dipende da a.

Esercizio 5.
`D9)` La variabile aleatoria $X^* = X/\sigma$ è Normale standard. Allora si ha $P(|X| \leq 2) = P(-2 \leq X \leq 2) = P(-2/\sigma \leq X^* \leq 2/\sigma) = \Phi(2/\sigma) - \Phi(-2/\sigma) = \Phi(2/\sigma) - (1 - \Phi(2/\sigma)) = 2\Phi(2/\sigma) - 1$ da cui segue che $\frac{2}{\sigma} = \frac{3}{2}$ e quindi si ottiene $\sigma = \frac{4}{3}$.
`D10)` Si deve applicare il Teorema Limite Centrale e, tenendo conto alcune proprietà della distribuzione di Poisson, si ha $\mu = \lambda$ e $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Allora possiamo dire che

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\lambda}{\sqrt{n}} < z\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\lambda}{\sqrt{\lambda}\sqrt{n}} < \frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Phi(z/\sqrt{\lambda}).$$