Matematica Discreta
(Prof. F. Brenti)

V Appello
(20 Settembre, 2017)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che sostengono l'esame per 3 crediti devono risolvere solo i problemi 5, 6, e 7. Motivare tutte le risposte. Punti possono essere tolti per un lavoro particolarmente disordinato, o per comunicazioni con altri studenti.

1. ~~Siano p, q, r proposizioni. Semplificare la proposizione composta~~

$$\cancel{(p \wedge q) \vee (p \vee r) \vee (\neg q \wedge p)}$$

~~(cioè trovare una proposizione logicamente equivalente che usi un numero strettamente minore di $\vee$, $\wedge$, $\neg$).~~

2. ~~Trovare tutte le classi di resto $[x]_{144}$ tali che~~

Calcolare, se esiste l'inversa moltiplicativa di

$$\cancel{[x]_{144}}[129]_{144} = \cancel{[87]_{144}}.$$

3. State comunicando con il codice RSA. Avete due interlocutori: A e B. Le chiavi pubbliche sono $n = 221$ ed $e = 11$ (A), e $n = 391$ ed $e = 15$ (B). Le vostre chiavi sono: $n = 667$, $e = 39$ (pubbliche) e $d = 79$ (privata). Volete spedire il messaggio 16 a B. Codificatelo.

4. Sia $n \in \mathbb{P}$ e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ la sua decomposizione in numeri primi (quindi, $p_1, \ldots, p_k$ sono primi distinti). Dimostrare che

$$\Phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

dove Φ indica la funzione di Eulero.

5. Un'amica vi dice: "Ho qui un normale mazzo da gioco di 52 carte (4 semi $\times$ 13 valori). Tu peschi dieci carte a caso. Se tra queste 10 carte c'e' almeno un asso e almeno una carta di cuori io ti dó 1 Euro, altrimenti tu mi dai 1 Euro". Conviene accettare questa scommessa? (Nota: L'asso di cuori conta sia come asso che come carta di cuori, quindi se lo pescate vincete)

SEGUE SUL RETRO

6. Trovare un'espressione asintotica chiusa per

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{2i+1}{i^2+i}).$$

7. Sia $G = (V, E)$ il grafo avente $V \stackrel{\text{def}}{=} \{S \subseteq [1000] : |S| = 3\}$ come insieme dei vertici (quindi, i vertici di G sono i sottoinsiemi di $[1000]$ di cardinalita' 3) e dove, per ogni $S, T \in V$, $\{S, T\} \in E$ se e solo se $|S \cap T| = 2$ (quindi, per esempio, $\{1, 2, 3\}$ e $\{2, 3, 4\}$ sono collegati da un lato, mentre $\{1, 2, 3\}$ e $\{3, 4, 7\}$ non lo sono). È colorabile G con 3000 colori?

8. Risolvere la ricorsione lineare

$$f(n+3) = -2f(n+2) + 4f(n+1) + 8f(n)$$

per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$.