Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2023-2024`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 19 Luglio 2024
L'Esercizio 6 è solo per coloro che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1. Un'urna 3 palline bianche, 1 rossa e 3 nere. Si estraggono 3 palline a caso in blocco.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre tre colori diversi.
`D2)` Calcolare la probabilità di estrarre tre colori uguali.
`D3)` Calcolare $\mathbb{E}[X]$, dove X è la variabile aleatoria che conta il numero di palline rosse estratte.

Esercizio 2. Si lancia un dado con le facce numerate con i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 5$. Se esce un numero pari, si lancia una moneta equa; se esce un numero dispari, si lancia una moneta la cui probabilità che esca testa lanciandola è $\frac{2}{3}$.
`D4)` Calcolare la probabilità che sia uscito un numero dispari nel lancio del dado sapendo che è uscita testa nel lancio di moneta effettuato.

Esercizio 3. Sia $q \in (0, 1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (1-q)^{x_1-1}(1-q^2)^{x_2-1}q^3 \quad \text{per } x_1, x_2 \geq 1 \text{ interi.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_2 = 2X_1) = \frac{q^3(1-q^2)}{1-(1-q)(1-q^2)^2}$.
`D6)` Verificare che $P(X_1 + X_2 \leq 3) = q^3(3 - q - q^2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(e^{-1}, \sqrt{3})$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \log(X^2)$.
Osservazione. Per proprietà dei logaritmi si può anche pensare a $Y = 2 \log X$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}\left[X - \frac{e^{-1}}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Suggerimento. Si tenga conto della linearità del valore atteso.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 4.
Calcolare $P(X \leq 2)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 1 e varianza 100.
Dire per quale valore di $z \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}} < z\right) = \Phi(3/2).$$

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1, 2, 3\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ q & 0 & 1-q \end{pmatrix},$$

dove $q \in (0, 1)$.
`D11)` Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$, per $i, j \in E$, dopo aver giustificato l'esistenza del limite.
`D12)` Calcolare i tempi medi di primo passaggio per lo stato 3 partendo da 1 e da 2 rispettivamente.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{3\cdot 1\cdot 3}{35} = \frac{9}{35}$.
`D2)` La probabilità richiesta è $p_B + p_R + p_N$ dove p_B è la probabilità di estrarre tre palline bianche, p_R è la probabilità di estrarre tre palline rosse, e p_N è la probabilità di estrarre tre palline nere. Ovviamente si ha $p_R = 0$. Inoltre si vede che $p_B = p_N = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$. In conclusione la probabilità richiesta è $\frac{1+1}{35} = \frac{2}{35}$.
`D3)` Per la teoria della distribuzione ipergeometrica si ha $\mathbb{E}[X] = 3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$.
Osservazione. In altro modo si ha anche $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{3} k \frac{\binom{1}{k}\binom{6}{3-k}}{\binom{7}{3}} = \frac{0+15+0+0}{35} = \frac{3}{7}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare $P(D|T)$. Si usa la formula di Bayes combinata con la formula delle probabilità totali e si ha

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)P(D)}{P(T|D)P(D) + P(T|D^c)P(D^c)} = \frac{\frac{2}{3}\frac{4}{6}}{\frac{2}{3}\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\frac{2}{6}} = \frac{4/9}{4/9 + 1/6} = \frac{4/9}{(24+9)/54} = \frac{4}{9}\frac{54}{33} = \frac{8}{11}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2X_1) &= \sum_{k\geq 1} p_{X_1,X_2}(k, 2k) = \sum_{k\geq 1} (1-q)^{k-1}(1-q^2)^{2k-1}q^3 \\ &= \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} \sum_{k\geq 1} ((1-q)(1-q^2)^2)^k = \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} \frac{(1-q)(1-q^2)^2}{1-(1-q)(1-q^2)^2} = \frac{q^3(1-q^2)}{1-(1-q)(1-q^2)^2}. \end{aligned}$$

`D6)` Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leq 3) &= p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(2,1) + p_{X_1,X_2}(1,2) \\ &= q^3 + (1-q)q^3 + (1-q^2)q^3 = q^3(1+1-q+1-q^2) = q^3(3-q-q^2). \end{aligned}$$

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(-2 \leq Y \leq \log 3) = 1$ e quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq -2, \\ (*) & \text{se } -2 < y < \log 3, \\ 1 & \text{se } y \geq \log 3. \end{cases}$$

Per $y \in (-2, \log 3)$ si ha

$$(*) = P(Y \leq y) = P(X \leq e^{y/2}) = \int_{e^{-1}}^{e^{y/2}} \frac{1}{\sqrt{3} - e^{-1}} dx = \left[\frac{x}{\sqrt{3} - e^{-1}}\right]_{x=e^{-1}}^{x=e^{y/2}} = \frac{e^{y/2} - e^{-1}}{\sqrt{3} - e^{-1}}.$$

`D8)` Tenendo conto la linearità del valore atteso (e anche la formula per il valore atteso delle variabili aleatorie con distribuzioni uniforme su un intervallo) si ha

$$\mathbb{E}\left[X - \frac{e^{-1}}{2}\right] = \mathbb{E}[X] - \frac{e^{-1}}{2} = \frac{\sqrt{3} + e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^* = \frac{X-1}{\sqrt{4}} = \frac{X-1}{2}$ la standardizzata della variabile aleatoria X. Allora si ha

$$P(X \leq 2) = P\left(X^* \leq \frac{2-1}{\sqrt{4}}\right) = P(X^* \leq 1/2) = \Phi(1/2).$$

D10) Si ha
$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{n}}<z\right)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\cdot 1}{\sqrt{100}\sqrt{n}}<\frac{z}{\sqrt{100}}\right)$$
e, per il Teorema Limite Centrale, il secondo membro tende a $\Phi(z/\sqrt{100})=\Phi(z/10)$. Quindi anche il primo membro converge allo stesso limite. Infine il valore di z richiesto è tale che $\frac{z}{10}=\frac{3}{2}$, da cui segue $z=15$.

Esercizio 6.

D11) Osserviamo che la catena è irriducibile e, per l'Osservazione 5.16, è anche regolare (infatti si ha $p_{11},p_{22},p_{33}>0$). Quindi si può applicare il Teorema di Markov e si ha

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\pi_j \quad \text{(per ogni } i,j\in E),$$

dove (π_1,π_2,π_3) è l'unica distribuzione stazionaria per la catena. Inoltre abbiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \pi_1=\frac{\pi_1}{3}+\frac{\pi_2}{3}+q\pi_3 \\ \pi_2=\frac{\pi_1}{3}+\frac{\pi_2}{3} \\ \pi_3=\frac{\pi_1}{3}+\frac{\pi_2}{3}+(1-q)\pi_3. \end{cases}$$

Si sa che il sistema è indeterminato e, con la condizione $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$, ammette un'unica soluzione.
La seconda equazione fornisce $\pi_1=2\pi_2$, mentre dalla prima si ha $\frac{2}{3}\pi_1=\frac{\pi_2}{3}+q\pi_3$. Sostituendo $\pi_1=2\pi_2$ in $\frac{2}{3}\pi_1=\frac{\pi_2}{3}+q\pi_3$, si ha

$$\frac{2}{3}(2\pi_2)=\frac{\pi_2}{3}+q\pi_3, \quad \left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)\pi_2=q\pi_3, \quad \pi_2=q\pi_3, \quad \pi_3=\frac{\pi_2}{q}.$$

Quindi dalla condizione $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$ si ottiene

$$2\pi_2+\pi_2+\frac{\pi_2}{q}=1, \quad \frac{3q+1}{q}\pi_2=1, \quad \pi_2=\frac{q}{3q+1},$$

e anche
$$\pi_1=2\pi_2=\frac{2q}{3q+1}, \quad \pi_3=\frac{\pi_2}{q}=\frac{1}{3q+1}$$
(si osservi che questi valori di (π_1,π_2,π_3) soddisfano anche la terza equazione, come devono). In conclusione

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\begin{cases} \frac{2q}{3q+1} & \text{se } j=1 \\ \frac{q}{3q+1} & \text{se } j=2 \\ \frac{1}{3q+1} & \text{se } j=3. \end{cases}$$

D12) Consideriamo il sistema per i valori medi richiesti μ_1 e μ_2, e si ha

$$\begin{cases} \mu_1=1+\mu_1p_{11}+\mu_2p_{12} \\ \mu_2=1+\mu_1p_{12}+\mu_2p_{22}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_1=1+\frac{\mu_1}{3}+\frac{\mu_2}{3} \\ \mu_2=1+\frac{\mu_1}{3}+\frac{\mu_2}{3}; \end{cases}$$

allora si vede subito che $\mu_1=\mu_2$ (basta sottrarre membro a membro prima e seconda equazione e si ottiene $\mu_1-\mu_2=0$) e quindi, prendendo ad esempio la prima equazione, si ottiene

$$\mu_1=1+\frac{\mu_1}{3}+\frac{\mu_1}{3}, \quad \mu_1\left(1-\frac{2}{3}\right)=1, \quad \frac{\mu_1}{3}=1, \quad \mu_1=3.$$

In conclusione si ha $\mu_1=\mu_2=3$.
Osservazione. In effetti, se si esamina la dinamica descritta dalla matrice di transizione, partendo da uno qualsiasi degli stati 1 e 2, è come se si avessero prove indipendenti con probabilità di successo (il raggiungimento dello stato 3) $p=\frac{1}{3}$, e probabilità di fallimento $1-p=\frac{2}{3}$ (rimanere negli stati $\{1,2\}$). In corrispondenza è ben noto che la media del numero delle prove necessarie per avere il primo successo è $\frac{1}{p}=\frac{1}{1/3}=3$ e questo è in accordo con i valori ottenuti.