

Probabilità Condizionata

Ci troviamo in una situazione di **Probabilità Condizionata** quando vogliamo calcolare la probabilità di un evento avendo un **evento che modifica l'esito di un altro evento**.

Possiamo scrivere questo evento come:

$$P(A|B)$$

Dove:

- A : L'evento di cui **vogliamo conoscere la probabilità**;
- B : L'evento che è **sicuramente avverrà** e che condiziona A ;

In altre parole possiamo dire che stiamo cercando la probabilità che avviene A sapendo che ($|$) avviene B .

Di conseguenza B modifica l'evento A .

Esempio: Abbiamo un'urna con 90 palline e facciamo estrazioni casuali senza rimettere le palline dentro, vogliamo sapere la probabilità di pescare una pallina pari alla seconda estrazione.

Spiegazione: E' una probabilità condizionata perché la prima estrazione influenza la seconda, infatti se la prima estrazione è un numero pari, allora alla seconda estrazione avremo $\frac{1}{44}$ di pescare una pallina pari, mentre se la prima estrazione è dispari allora avremo $\frac{1}{45}$.

Per capire come svolgere questo calcolo partiamo dalla formula degli **eventi indipendenti**

$$P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$$

Se esplicitiamo $P(B)$ otteniamo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Nota bene $P(B)$ non può essere zero per due motivi:

1. Andrebbe contro l'ipotesi iniziale per la quale è un evento certo.

2. Perché altrimenti ci sarebbe una divisione per zero.

Esercizio: Ci sono 25 lampadine delle quali:

- 5 funzionano e dureranno per 30 giorni;
- 10 funzionano parzialmente e dureranno per 2 giorni;
- 10 sono rotte e NON si accendono;

Sapendo che la lampadina scelta a caso si accende qual è la probabilità che funzioni per un settimana?

Soluzione:

Abbiamo due eventi principali in questo esercizio:

1. La lampadina si accende = B ;
2. Deve durare per una settimana = A ;

Siccome siamo certi che B avviene, perché lo dice il testo, allora sarà l'evento che condiziona A , di conseguenza cerchiamo:

$$P(A|B) = P(\text{Lampadina funzioni per una settimana} | \text{La lampadina si accende})$$

Inoltre sappiamo che per trovare questo risultato dobbiamo calcolare: $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Calcoliamo $P(A \cap B)$: E' molto semplice dobbiamo semplicemente calcolare la **possibilità di prendere una lampadina che si accende e duri una settimana**, siccome **abbiamo un'opportunità equa di pescare ciascuna lampadina**, il caso si riduce a:

$$\frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

Adesso calcoliamo $P(B)$, cioè i **casi in cui una lampadina si accende pescandone una a caso**, è la stessa cosa di prima:

$$P(\text{Lampadina si accende}) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Quindi

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$$

Quindi Sapendo che la lampadina scelta a caso si accende la probabilità che duri per una settimana è di $\frac{1}{3}$.