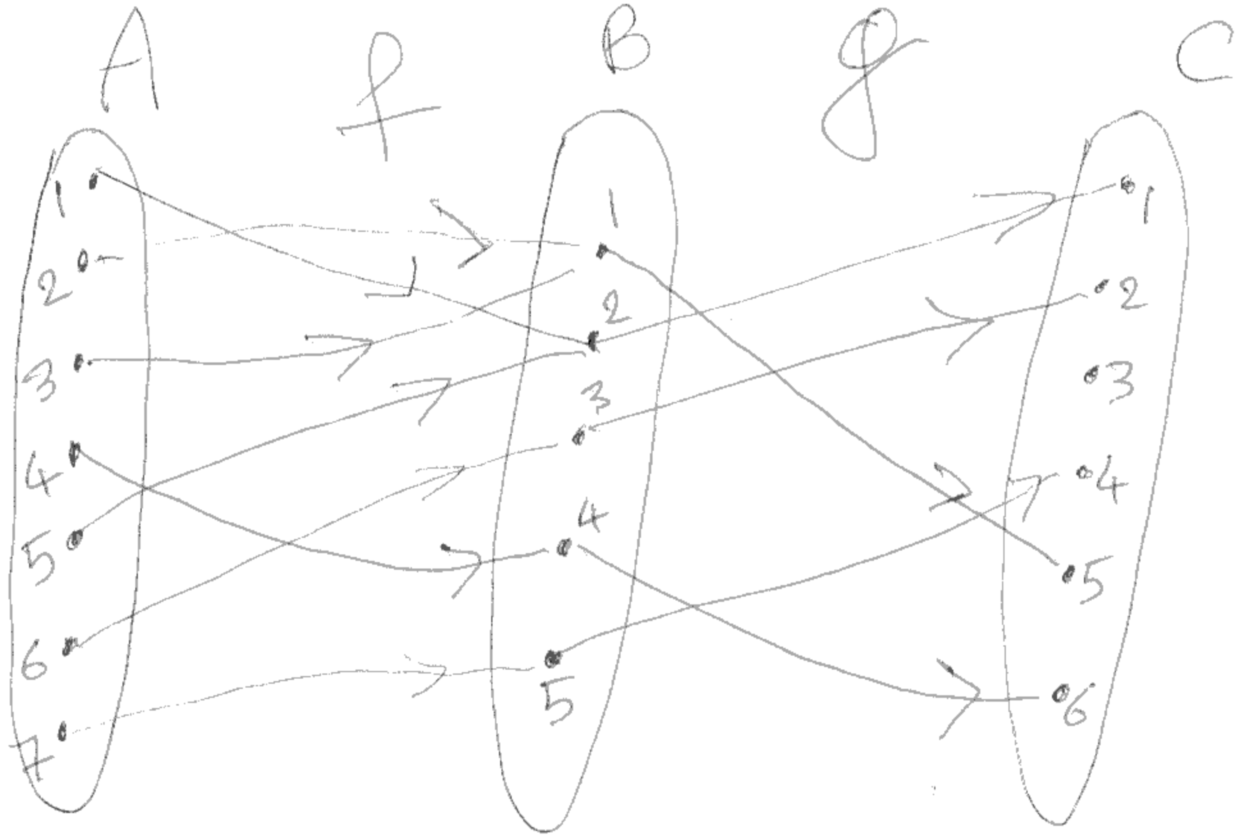
ES. 5: $f, \cancel{g} : A \to B$, $g : B \to C$, f SURIETTIVA, g INIETTIVA. ALLORA

$g \circ f$ INIETTIVA ?

VEDIAMO:



A
f
B
g
C
1
2
3
4
5
6
7
1
2
3
4
5
1
2
3
4
5
6

SIA $A=[7]$, $B=[5]$, $C=[6]$,

$f: A \to B$ DEFINITA DA

$f(1)=2$, $f(2)=1$, $f(3)=1$, $f(4)=4$

$f(5)=2$, $f(6)=3$, $f(7)=5$ e

g DEFINITA DA:

$g(1)=5$, $g(2)=1$, $g(3)=2$,

$g(4)=6$, $g(5)=4$

ALLORA f È SURIETTIVA E g È INIETTIVA MA

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 1$$

$$(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(2) = 1$$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ NON È INIETTIVA

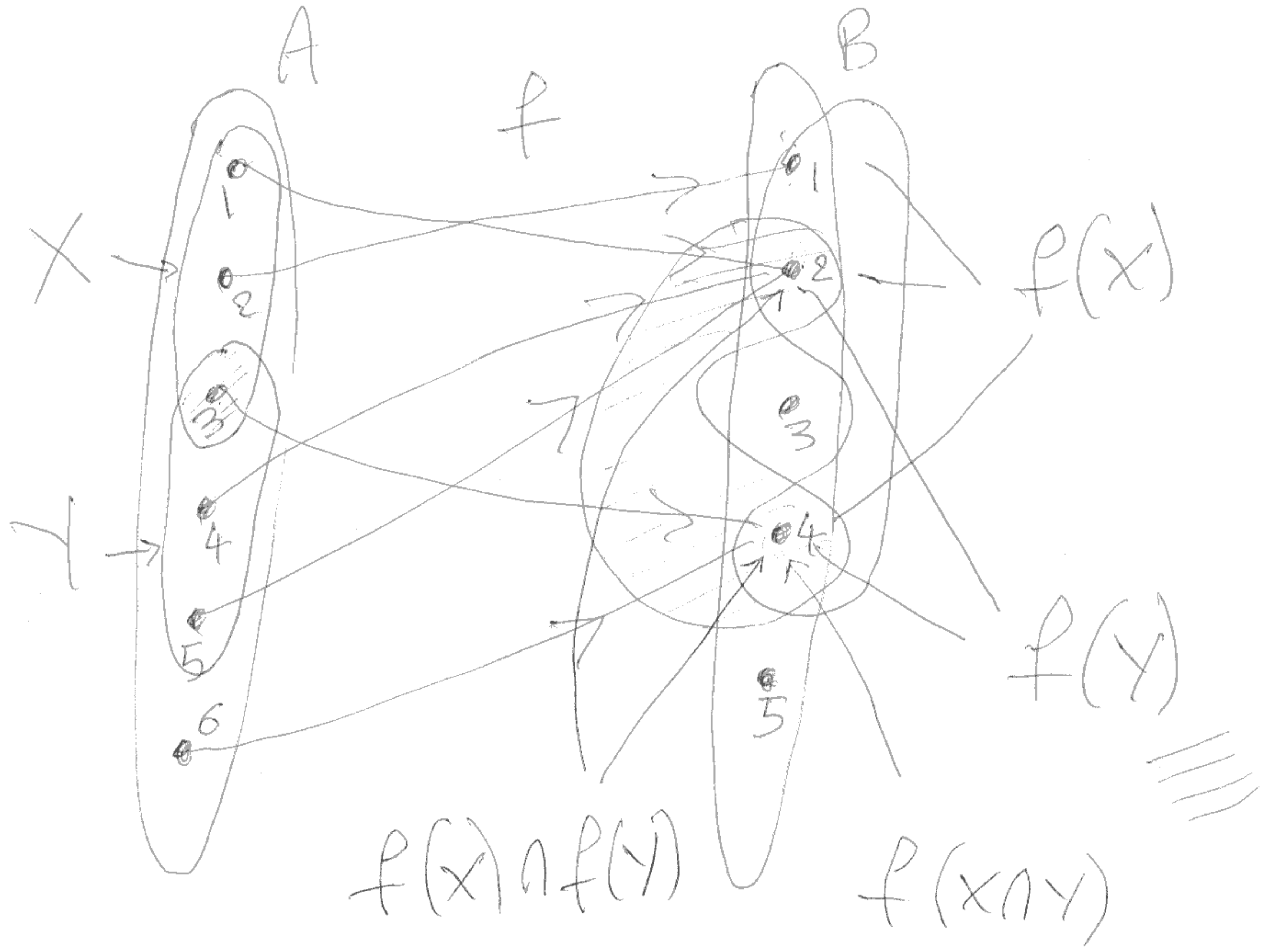
$\Rightarrow$ NO.

ES.6: $f : A \to B$, $X, Y \subseteq A$.

È VERO CHE

$$f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y) \,?$$

VEDIAMO:


A
B
f
X
Y
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
f(X)
f(Y)
f(X) ∩ f(Y)
f(X ∩ Y)

QUINDI NO, ANCHE SE SEMBRA CHE

$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y).$$

COSTRUIAMO UN CONTROESEMPIO DAL DISEGNO.

SIA $A=[6]$, $B=[5]$ E $f: A \to B$

DEFINITA DA

$f(1)=2$, $f(2)=1$, $f(3)=4$

$f(4)=2$, $f(5)=2$, $f(6)=4$

E

$X=\{1,2,3\}$, $Y=\{3,4,5\}$

ALLORA

$$f(X) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{2, 1, 4$$

$$f(Y) = \{f(3), f(4), f(5)\} = \{4, 2\}$$

$$f(X \cap Y) = f(\{3\}) = \{f(3)\} = \{4\}$$

$$f(X) \cap f(Y) = \{2, 4\}$$

$$\Rightarrow \text{NO.}$$

DIMOSTRIAMO CHE

$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y).$$

SIA $a \in f(X \cap Y) \Rightarrow \exists\, b \in X \cap Y$ TALE CHE $f(b) = a$. MA $b \in X$ $\Rightarrow f(b) \in f(X) \Rightarrow a \in f(X)$. MA $b \in Y \Rightarrow f(b) \in f(Y) \Rightarrow a \in f(Y)$

$\Rightarrow a \in f(X) \cap f(Y)$. $\square$

ES. 8: CHI È

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{P}) \;?$$

MI PARE CHE SIA

$$\mathbb{N} \times \mathbb{P}.$$

VEDIAMO. SIA

$$(x,y) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{P}) \Rightarrow$$

$$(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \text{ e } (x,y) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{P})$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{Z},\ \text{e } x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{P}$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} \text{ e } y \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{P}$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{N} \text{ e } y \in \mathbb{P} \Rightarrow (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{P}.$$

VICEVERSA. SIA $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{P}$ $\Rightarrow$ $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{P}$ $\Rightarrow$ $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ e $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{P}$ $\Rightarrow (x,y) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{P})$.

ES. 9: $f: A \to B$, $X, Y \subseteq B$.

DIMOSTRARE CHE

$$f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y).$$

DIM. SIA $a \in f^{-1}(X \setminus Y) \Rightarrow$

$f(a) \in X \setminus Y \Rightarrow f(a) \in X$ e

$f(a) \notin Y \Rightarrow a \in f^{-1}(X)$ e

$a \notin f^{-1}(Y) \Longrightarrow a \in f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$.

VICEVERSA, SIA $a \in f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y) \Longrightarrow a \in f^{-1}(X)$ e $a \notin f^{-1}(Y)$

$\Longrightarrow f(a) \in X$ e $f(a) \notin Y \Longrightarrow$

$f(a) \in X \setminus Y \Longrightarrow a \in f^{-1}(X \setminus Y)$. $\square$

—— ∘ ——

E.g. SIA $A=\mathbb{Z}$. SIA R LA RELAZIONE SU $\mathbb{Z}$ DEFINITA PONENDO

(CIOÈ $\exists k \in \mathbb{Z}$ TALE CHE $b-a=3\cdot k$)

$$aRb \iff 3 \mid (b-a)$$

DIVIDE

$\forall a,b \in \mathbb{Z}$ (CIOÈ $b-a$ È MULTIPLO DI 3)

QUINDI, PER ES. $2R5$ MA $3 \not R 7$.

ALLORA R È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA. INFATTI.

SIA $a \in \mathbb{Z}$ ALLORA $a-a=0$ e $3 | 0$ (INFATTI $0=3\cdot 0$) $\Rightarrow$ $3 | a-a \Rightarrow aRa$ ✓

SIANO $a, b \in \mathbb{Z}$ TALI CHE $aRb \Rightarrow$

$3 \mid (b-a) \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ TALE CHE

$b-a = 3 \cdot k \Rightarrow a-b = 3 \cdot (-k)$

$\Rightarrow 3 \mid a-b$ (SE $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -k \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow bRa$. QUINDI R È

SIMMETRICA.

SIANO $a, b, c \in \mathbb{Z}$ TALI CHE
aRb e $bRc \Rightarrow 3 \mid b-a$ e $3 \mid c-b$
$\Rightarrow \exists\, k, l \in \mathbb{Z}$ TALI CHE $b-a=3\cdot k$
e $c-b=3\cdot l \Rightarrow c-a=c-b+b-a$
$=3\cdot l+3\cdot k=3(l+k)$. MA $l+k\in\mathbb{Z}$
$\Rightarrow 3 \mid c-a \Rightarrow aRc$. QUINDI
R È TRANSITIVA.

CHI SONO LE CLASSI DI EQUIVALENZA?

$$[0] = \{a \in \mathbb{Z} : a R 0\} =$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid (a - 0)\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid a\}$$

$$= \{3 \cdot k : k \in \mathbb{Z}\} = \{0, 3, -3, 6, -6, \dots\}$$

$$[1] = \{a \in \mathbb{Z} : aR1\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid (a-1)\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : a - 1 = 3 \cdot k \text{ PER QUALCHE } k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{3 \cdot k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{1, -2, 4, -5, 7, \ldots\}$$

$$
\begin{aligned}
[2] &= \{a \in \mathbb{Z} : a R 2\} \\
&= \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid (a-2)\} \\
&= \{a \in \mathbb{Z} : a-2 = 3 \cdot k \text{ PER QUALCHE } k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{3 \cdot k + 2 : k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{2, -1, 5, -4, 8, \dots\}
\end{aligned}
$$

IN GENERALE

$$[i] = \{3 \cdot k + i : k \in \mathbb{Z}\}$$

($i \in \mathbb{Z}$). QUINDI

$$[0] = [3] = [-3] = [6] = [-6] = \dots$$

$$[1] = [4] = [-2] = [7] = [-5] = \dots$$

$$[2] = [5] = [-1] = [8] = [-4] = \dots$$

QUINDI R HA 3 CLASSI DI EQUIVALENZA DISTINTE.

<u>ES. [2-]</u>: SIA R LA RELAZIONE SU $\mathbb{Z}$ DEFINITA PONENDO

$$aRb \iff b-a \text{ È PARI}$$

$(\forall a,b \in \mathbb{Z})$. EQUIVALENZA?

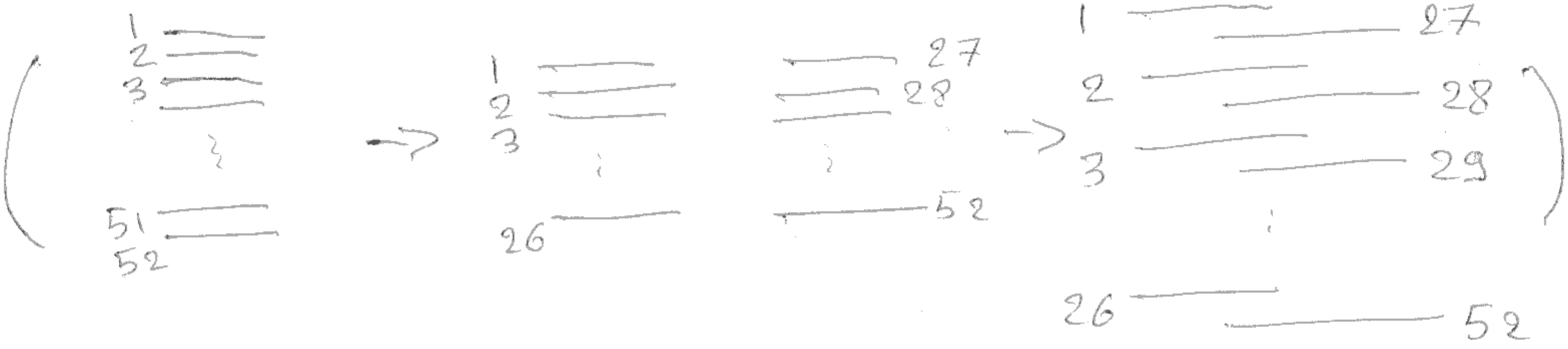
ES. [2]: SIA

$$p = 1\ 27\ 2\ 28\ 3\ 29\ \dots\ 25\ 51\ 26\ 52$$

$(\Rightarrow p \in S_{52})$. CALCOLARE IL MINIMO $k \in \mathbb{P}$ TALE CHE

$$\underbrace{p \circ p \circ p \circ \dots \circ p}_{k} = Id_{[52]} = 1\,2\,3\,4 \dots 51\,52.$$

OSS. φ È LA "SMAZZATA PERFETTA"



QUINDI k È IL MINIMO NUMERO DI SMAZZATE PERFETTE DOPO LE QUALI IL MAZZO TORNA NELL'ORDINAMENTO INIZIALE

DAL 18/10/20

LU	ME	VE
9-12	9-11	10-11 (SOLO ONLINE)