Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2019-2020`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 7 Febbraio 2020

Esercizio 1.
Un'urna ha 2 palline bianche, 2 gialle e 2 rosse. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e senza reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità che vengano estratte le due palline gialle.
`D2`) Calcolare la probabilità che vengano estratte le due palline gialle e una rossa in un qualsiasi ordine.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori $(\text{giallo}, \text{rosso}, \text{giallo})$ sapendo di aver estratto le due palline gialle.

Esercizio 2.
Si lancia ripetutamente un dado equo fino a quando esce per la prima volta un numero pari. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci di dado effettuati. Poi si lancia X volte una moneta equa.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver lanciato il dado k volte (per $k \geq 1$ intero) sapendo di aver ottenuto tutte teste nei lanci di moneta.

Esercizio 3.
Sia $q \in (0,1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(h,h) = \binom{2}{h}\frac{q}{4}$ e $p_{X_1,X_2}(h,h+1) = \binom{2}{h}\frac{1-q}{4}$ per $h \in \{0,1,2\}$.
`D5`) Trovare la densità marginale di X_1.
`D6`) Trovare la densità discreta di $Y = X_2 - X_1$.

Esercizio 4.
Sia X una variabile aleatoria con densità $f_X(x) = xe^{-x^2/2}1_{(0,\infty)}(x)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^2$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.
`D9`) Sia X una variabile aleatoria Normale con media 5 e varianza 16. Calcolare $P(|X-5| \geq x)$ al variare di $x > 0$ esprimendo il risultato in funzione di Φ con argomento positivo; poi dire per quale valore di x tale probabilità è uguale a $2\Phi(-2)$.
`D10`) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con distribuzione uniforme in $(0,1)$. Calcolare

$$P\left(X_1 + \cdots + X_{100} \leq 45\right)$$

facendo riferimento alla funzione Φ con argomento positivo e usando l'approssimazione Normale.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.
D2) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.
Osservazione: si ottiene la stessa probabilità per "due gialle e una nera"; in corrispondenza la somma $\frac{1+1}{10} = \frac{1}{5}$ coincide (come deve) con la probabilità calcolata nella domanda precedente.
D3) Sia E l'evento che corrisponde alla sequenza di colori richiesta, e A l'evento "estratte le due palline gialle". Allora la probabilità richiesta è $P(E|A) = \frac{P(E\cap A)}{P(A)} = \frac{P(E)}{P(A)} = \frac{(2/6)(2/5)(1/4)}{1/5} = \frac{1}{6}$.
Osservazione: più in generale si può verificare che, rispetto alla probabilità $P(\cdot|A)$, le 6 sequenze (giallo, giallo, rosso), (giallo, giallo, nero), (giallo, rosso, giallo), (giallo, nero, giallo), (rosso, giallo, giallo), (nero, giallo, giallo) sono tutte equiprobabili.

Esercizio 2.
D4) Sia T l'evento "esce testa in tutti i lanci di moneta effettuati". Allora, combinando l'uso della formula di Bayes con quello della formula delle probabilità totali, la probabilità richiesta è

$$P(X=k|T) = \frac{P(T|X=k)P(X=k)}{P(T)} = \frac{P(T|X=k)P(X=k)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(T|X=j)P(X=j)}$$
$$= \frac{(1/2)^k(1-1/2)^{k-1}1/2}{\sum_{j=1}^{\infty}(1/2)^j(1-1/2)^{j-1}1/2} = \frac{(1/2)^{2k}}{\sum_{j=1}^{\infty}(1/2)^{2j}} = \frac{(1/4)^k}{(1/4)/(1-1/4)} = \left(\frac{1}{4}\right)^k 3.$$

Osservazione: con semplici calcoli si ottiene $P(X=k|T) = \left(1-\frac{3}{4}\right)^{k-1}\frac{3}{4}$ per $k \geq 1$ intero; quindi X ha distribuzione geometrica traslata di parametro $p = 1/2$ mentre, con il condizionamento dell'evento T, ha distribuzione geometrica traslata di parametro $p = 3/4$.

Esercizio 3.
D5) Per $h \in \{0,1,2\}$ si ha $p_{X_1}(h) = p_{X_1,X_2}(h,h) + p_{X_1,X_2}(h,h+1) = \binom{2}{h}\frac{q}{4} + \binom{2}{h}\frac{1-q}{4} = \binom{2}{h}\frac{1}{4}$; quindi $p_{X_1}(0) = p_{X_1}(2) = \frac{1}{4}$ e $p_{X_1}(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Osservazione: la densità marginale di X_1 non dipende da q e si ha la distribuzione Binomiale di parametri $n = 2$ e $p = 1/2$; la densità marginale di X_2 invece dipende da q perché si ha $p_{X_2}(0) = p_{X_1,X_2}(0,0) = \frac{q}{4}$, $p_{X_2}(1) = p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(1,1) = \frac{1-q}{4} + \frac{q}{2} = \frac{1+q}{4}$, $p_{X_2}(2) = p_{X_1,X_2}(1,2) + p_{X_1,X_2}(2,2) = \frac{1-q}{2} + \frac{q}{4} = \frac{2-q}{4}$, $p_{X_2}(3) = p_{X_1,X_2}(2,3) = \frac{1-q}{4}$.
D6) La variabile aleatoria Y assume valori in $\{0,1\}$ e la sua densità discreta si ottiene come segue (mettendo in evidenza opportunamente): $p_Y(0) = \sum_{h=0}^{2} p_{X_1,X_2}(h,h) = \frac{\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}}{4}q = q$ e $p_Y(1) = \sum_{h=0}^{2} p_{X_1,X_2}(h,h+1) = \frac{\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}}{4}(1-q) = 1-q$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(Y > 0) = 1$, e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$. Per $y > 0$ si ha $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} xe^{-x^2/2}dx = [-e^{-x^2/2}]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} = 1 - e^{-(\sqrt{y})^2/2} = 1 - e^{-y/2}$. In particolare Y ha distribuzione esponenziale con parametro $\lambda = 1/2$.
D8) Avendo notato nella risposta alla domanda precedente che Y ha distribuzione esponenziale, possiamo subito dire che $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{1/2} = 2$.
Osservazione: si poteva rispondere a questa domanda anche senza tenere conto della risposta alla domanda precedente; infatti si ha

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{\infty} x^2 \cdot xe^{-x^2/2}dx = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2/2}dx$$

e, con il cambio di variabile $y = x^2$ (da cui segue $x = \sqrt{y}$ e quindi $dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$), si ottiene

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty y^{3/2} e^{-y/2} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_0^\infty y \cdot \frac{1}{2} e^{-y/2} dy;$$

allora, integrando per parti, si ha

$$\mathbb{E}[Y] = [y(-e^{-y/2})]_{y=0}^{y=\infty} - \int_0^\infty -e^{-y/2} dy = \int_0^\infty e^{-y/2} dy = \left[\frac{e^{-y/2}}{-1/2}\right]_{y=0}^{y=\infty} = 0 - (-2) = 2.$$

Del resto l'integrale $\int_0^\infty y \cdot \frac{1}{2} e^{-y/2} dy$ è la speranza matematica di una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 1/2$ ed è uguale a 2 per quanto si sa dalla teoria.

Esercizio 5.
D9) Si ha

$$\begin{aligned} P(|X-5| \geq x) &= 1 - P(|X-5| < x) = 1 - P(-x < X - 5 < x) \\ &= 1 - P\left(\frac{-x}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-5}{\sqrt{16}} \leq \frac{x}{\sqrt{16}}\right) = 1 - (\Phi(x/\sqrt{16}) - \Phi(-x/\sqrt{16})) \\ &= 1 - (\Phi(x/4) - (1 - \Phi(x/4))) = 2(1 - \Phi(x/4)). \end{aligned}$$

Poi si cerca x per cui si ha

$$2(1 - \Phi(x/4)) = 2\Phi(-2).$$

In corrispondenza si ottiene $\Phi(-x/4) = \Phi(-2)$, da cui segue $-x/4 = -2$, e quindi $x = 8$.
D10) Ricordiamo che le variabili aleatorie uniformi in $(0,1)$ hanno media $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ e varianza $\frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 + \cdots + X_{100} \leq 45) &= P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{100} - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{100}} \leq \frac{45 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{100}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{45 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{45-50}{\frac{10}{2\sqrt{3}}}\right) = \Phi(-\sqrt{3}) = 1 - \Phi(\sqrt{3}). \end{aligned}$$