Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2022-2023. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 26 Settembre 2023

Esercizio 1. Un'urna ha 8 palline numerate da 1 a 8. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e senza reinserimento.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(4, \text{pari}, \text{dispari})$.
`D2)` Calcolare la probabilità di estrarre un numero pari.
`D3)` Calcolare la probabilità di estrarre almeno due numeri pari.

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce un numero minore o uguale a 4, si lancia un altro dado equo; se esce un numero maggiore di 4 si lancia un dado con i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 5$.
`D4)` Calcolare la probabilità di aver lanciato il dado truccato, sapendo che nel secondo lancio del dado è uscito un numero dispari.

Esercizio 3. Siano $r > 0$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(h,0) = e^{-r}\left(\frac{1}{2}\right)^h \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(k,1) = (1-e^{-r})\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero.}$$

`D5)` Calcolare $\mathbb{E}[X_2]$.
`D6)` Verificare che $P(X_1 + X_2 = 1)$ non dipende da r.

Esercizio 4. Sia $a > 0$ arbitrariamente fissato. Inoltre sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-a}} 1_{(0,a)}(x)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^2$.
`D8)` Verificare che, per $0 < b < c < a$, si ha $P(X > c|X > b) = \frac{e^{-c}-e^{-a}}{e^{-b}-e^{-a}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale con media μ e varianza 9.
Dire per quale valore di μ si ha $P(X \leq 8) = \Phi(1)$.
`D10)` Siano $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 1 e varianza 16.
Dire per quale valore di $z \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}} > z\right) = 1 - \Phi(2).$$

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{1}{8}\frac{3}{7}\frac{4}{6} = \frac{1}{28}$.
`D2)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$.
`D3)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{24+4}{56} = \frac{1}{2}$, oppure (considerando il complementare) $1 - \left(\frac{\binom{4}{0}\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{\binom{8}{3}}\right) = 1 - \frac{4+24}{56} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(T|D)$. Per la formula di Bayes (in quel che segue si tiene conto che $P(D) = P(D|T)P(T) + P(D|T^c)P(T^c)$ per la formula delle probabilità totali) si ha

$$P(T|D) = \frac{P(D|T)P(T)}{P(D)} = \frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{6}} = \frac{8}{8+12} = \frac{2}{5}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $p_{X_2}(0) = \sum_{h\geq 1} e^{-r}\left(\frac{1}{2}\right)^h = e^{-r}\frac{1/2}{1-1/2} = e^{-r}$ e $p_{X_2}(1) = \sum_{k\geq 0}(1-e^{-r})\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = (1-e^{-r})\frac{1/2}{1-1/2} = 1-e^{-r}$ da cui segue $\mathbb{E}[X_2] = 1\cdot p_{X_2}(1) + 0\cdot p_{X_2}(0) = p_{X_2}(1) = 1-e^{-r}$.
`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=1) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) = \frac{e^{-r}}{2} + \frac{1-e^{-r}}{2} = \frac{1}{2}$, che effettivamente non dipende da r.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0 \leq Y \leq a^2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq a^2$. Per $0 < y < a^2$ si ha $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{e^{-x}}{1-e^{-a}}dx = \frac{[-e^{-x}]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}}{1-e^{-a}} = \frac{-e^{-\sqrt{y}}+1}{1-e^{-a}}$.
`D8)` Si ha $P(X>c|X>b) = \frac{P(\{X>c\}\cap\{X>b\})}{P(X>b)} = \frac{P(X>c)}{P(X>b)} = \frac{\int_c^a \frac{e^{-x}}{1-e^{-a}}dx}{\int_b^a \frac{e^{-x}}{1-e^{-a}}dx} = \frac{\frac{[-e^{-x}]_{x=c}^{x=a}}{1-e^{-a}}}{\frac{[-e^{-x}]_{x=b}^{x=a}}{1-e^{-a}}} = \frac{e^{-c}-e^{-a}}{e^{-b}-e^{-a}}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si ha $\Phi(1) = P(X \leq 8) = \Phi(\frac{8-\mu}{\sqrt{9}})$, da cui segue $1 = \frac{8-\mu}{\sqrt{9}}$, $1 = \frac{8-\mu}{3}$, $8-\mu = 3$, $\mu = 5$.
`D10)` Si ha

$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{n}} > z\right) = P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{16}\sqrt{n}} > \frac{z}{\sqrt{16}}\right)$$

e, per il Teorema Limite Centrale, il limite del secondo membro per $n\to\infty$ è uguale a $1-\Phi(\frac{z}{\sqrt{16}}) = 1-\Phi(\frac{z}{4})$. Allora anche il limite del primo membro per $n\to\infty$ è uguale a $1-\Phi(\frac{z}{4})$; quindi si deve avere $1-\Phi(\frac{z}{4}) = 1-\Phi(2)$, da cui segue $\frac{z}{4} = 2$, e quindi $z = 8$.