Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2022-2023`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 21 Febbraio 2023

Esercizio 1. Un'urna ha 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(\text{pari}, \text{dispari})$.
`D2)` Calcolare la probabilità di estrarre un numero pari e un numero dispari in un qualsiasi ordine.
`D3)` Calcolare speranza matematica e varianza della variabile aleatoria X che conta il numero di palline con numero pari estratte.

Esercizio 2. Si lancia una moneta equa. Se esce testa si estrae una pallina a caso da un'urna con 2 palline bianche e 1 nera; se esce croce si estrae una pallina a caso da un'urna con 3 palline bianche e 2 nere.
`D4)` Calcolare la probabilità che sia uscita testa (nel lancio di moneta) sapendo di aver estratto una pallina bianca (dall'urna scelta).

Esercizio 3. Siano $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}\frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \quad \text{per } x_1, x_2 \geq 0 \text{ interi.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_2 \geq 1) = 1 - e^{-\lambda_2}$.
Suggerimento. Se si considera il calcolo diretto è utile ricordare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} = e^x, \text{ da cui segue } \sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1.$$

In altro modo si potrebbe sfruttare la ben nota relazione con la probabilità dell'evento complementare:

$$P(X_2 \geq 1) = 1 - P(X_2 = 0).$$

`D6)` Verificare che $P(X_1 = 1 | X_1 + X_2 = 2) = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = xe^{-x^2/2}1_{(0,\infty)}(x)$.
`D7)` Verificare che $Y = X^2$ ha distribuzione esponenziale e determinarne il parametro λ.
`D8)` Sia $Z = [X]$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di $x \in \mathbb{R}$. Verificare che la densità discreta di Z è $p_Z(k) = e^{-k^2/2} - e^{-(k+1)^2/2}$ per $k \geq 0$ intero.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
Sia X una variabile aleatoria Normale con media 0 e varianza 4.
`D9)` Dire per quale valore di $z > 0$ si ha $P(X > z) = 1 - \Phi(5/7)$.
Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ variabili aleatorie i.i.d. con media 7 e varianza 16.
`D10)` Calcolare $P(\frac{X_1+\cdots+X_{100}}{100} - 7 > 1)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
La variabile aleatoria X che conta il numero di palline con numero pari estratte ha distribuzione ipergeometrica, e più precisamente si ha $p_X(k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{3}{2-k}}{\binom{5}{2}}$ per $k \in \{0, 1, 2\}$.
`D1)` Con notazioni ovvie la probabilità richiesta è $P(D_1^c \cap D_2) = P(D_2|D_1^c)P(D_1^c) = \frac{3}{4}\frac{2}{5} = \frac{3}{10}$.
`D2)` La probabilità richiesta è $P(X = 1) = p_X(1) = \frac{3}{5}$ (uso la formula scritta sopra con $k = 1$).
Osservazione. Si ha anche $P(X = 1) = P(D_1^c \cap D_2) + P(D_1 \cap D_2^c)$; si può verificare che entrambi gli addendi sono uguali a $\frac{3}{10}$ (il primo addendo è stato calcolato nella domanda precedente).
`D3)` Con formule note legate alla ipergeometrica si ha $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ e $\mathrm{Var}[X] = 2 \cdot \frac{2}{5}(1 - \frac{2}{5})\frac{2+3-2}{2+3-1} = \frac{4}{5}\frac{3}{5}\frac{3}{4} = \frac{9}{25}$.
Osservazione. Questi valori si possono ottenere anche dalla densità discreta di X scritta sopra: $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{2} k p_X(k)$ e $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \sum_{k=0}^{2} k^2 p_X(k) - (\sum_{k=0}^{2} k p_X(k))^2$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(T|B)$. Per la formula di Bayes (in quel che segue si tiene conto che $P(B) = P(B|T)P(T) + P(B|T^c)P(T^c)$ per la formula delle probabilità totali) si ha

$$P(T|B) = \frac{P(B|T)P(T)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{5}} = \frac{10}{10 + 9} = \frac{10}{19}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Iniziamo con il calcolo diretto. Si ha $P(X_2 \geq 1) = \sum_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 1} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \sum_{x_1 \geq 0} \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} \sum_{x_2 \geq 1} \frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!}$ e, per il suggerimento, possiamo dire che $P(X_2 \geq 1) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} e^{\lambda_1}(e^{\lambda_2} - 1) = e^{-\lambda_2}(e^{\lambda_2} - 1) = 1 - e^{-\lambda_2}$.
In altro modo (considerando la parte del suggerimento con la probabilità dell'evento complementare) si ha $P(X_2 \geq 1) = 1 - P(X_2 = 0) = 1 - \sum_{x_1 \geq 0} p_{X_1,X_2}(x_1, 0) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{x_1 \geq 0} \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}\frac{\lambda_2^0}{0!} = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} e^{\lambda_1} = 1 - e^{-\lambda_2}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = 1|X_1 + X_2 = 2) = \frac{P(\{X_1=1\} \cap \{X_1+X_2=2\})}{P(X_1+X_2=2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,1)}{p_{X_1,X_2}(2,0)+p_{X_1,X_2}(1,1)+p_{X_1,X_2}(0,2)} = \frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{(\frac{\lambda_1^2}{2}+\lambda_1\lambda_2+\frac{\lambda_2^2}{2})e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(Y \geq 0) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$. Per $y > 0$ si ha $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx = \int_0^{\sqrt{y}} xe^{-x^2/2}dx = [-e^{-x^2/2}]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} = -e^{-(\sqrt{y})^2/2} - (-e^0) = 1 - e^{-y/2}$. Quindi F_Y è la funzione di distribuzione di una esponenziale con parametro $\lambda = \frac{1}{2}$.
`D8)` La variabile aleatoria Z assume interi e, nel caso specifico, possiamo limitarci a quelli non negativi (ovvio). Per $k \geq 0$ intero si ha $p_Z(k) = P(k \leq X < k + 1) = \int_k^{k+1} xe^{-x^2/2}dx = [-e^{-x^2/2}]_{x=k}^{x=k+1} = -e^{-(k+1)^2/2} - (-e^{-k^2/2}) = e^{-k^2/2} - e^{-(k+1)^2/2}$.
Osservazione. Si verifica che $\sum_{k \geq 0} p_Z(k) = 1$; infatti (nel limite delle somme parziali appare una somma telescopica ...) $\lim_{h\to\infty} \sum_{k=0}^{h}(e^{-k^2/2} - e^{-(k+1)^2/2}) = \lim_{h\to\infty} 1 - e^{-(h+1)^2/2} = 1$.

Esercizio 5.
`D9)` Si ha $1 - \Phi(5/7) = P(X > z) = P(X^* > \frac{z-0}{\sqrt{4}}) = P(X^* > z/2) = 1 - \Phi(z/2)$, e quindi $\frac{z}{2} = \frac{5}{7}$ da cui segue $z = \frac{10}{7}$.
`D10)` Si ha $P(\frac{X_1+\cdots+X_{100}}{100} - 7 > 1) = P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_{100}}{100} - 7}{\sqrt{16}/\sqrt{100}} > \frac{1}{\sqrt{16}/\sqrt{100}}\right) \approx 1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{16}/\sqrt{100}}) = 1 - \Phi(5/2)$.