Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno Accademico: `2021-2022`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Appello del 4 Febbraio 2022 - Compito 1

Esercizio 1. Un'urna ha 2 palline bianche, 2 rosse e 3 nere. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere estratte.

`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca e una pallina rossa in un qualsiasi ordine.

`D2)` Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$ (si può fare riferimento a formule opportune per variabili aleatorie con distribuzione notevole).

`D3)` Calcolare $P(X = k|B_1)$ per $k \in \{0, 1, 2\}$, dove B_1 è l'evento "prima pallina estratta bianca".

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce il numero 1 si lanciano due monete eque, se esce un numero diverso da 1 si lanciano due monete con "due facce croce".

`D4)` Calcolare la probabilità che sia uscito il numero 1 nel lancio del dado sapendo di aver ottenuto croce in entrambi i lanci di moneta.

Esercizio 3. Siano $p_1, p_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, k) = p_1(1 - p_2)^k p_2 \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h, h - 1) = (1 - p_1)p_2^{h-1}(1 - p_2) \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero.}$$

`D5)` Sia $E = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ l'insieme dei numeri non negativi interi pari. Verificare che

$$P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \in E\}) = \frac{p_1}{2 - p_2}.$$

`D6)` Verificare che $P(X_1 = 1|X_2 = 0) = \frac{1-p_1-p_2+p_1p_2}{1-p_1-p_2+2p_1p_2}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{x^2}{3} 1_{(-1,2)}(x)$.

`D7)` Calcolare $P(X > 0| - 1 < X < 1)$.

`D8)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^X$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 16.

`D9)` Trovare il valore di b per cui si ha $P(0 < X < b) = \Phi(1/4) - \Phi(-1/4)$.

`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 100. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 1\right)$$

esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomento positivo.

Cenno alle soluzioni (Compito 1) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

D1) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{2\cdot 2\cdot 1}{21} = \frac{4}{21}$. In maniera alternativa, con notazioni ovvie, la probabilità richiesta è $P((B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = P(R_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|R_1)P(R_1) = \frac{2}{6}\frac{2}{7} + \frac{2}{6}\frac{2}{7} = \frac{2+2}{21} = \frac{4}{21}$.

D2) La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica e, per formule note, si ha $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$ e $\mathrm{Var}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} \cdot (1 - \frac{3}{7})\frac{7-2}{7-1} = \frac{6}{7}\frac{4}{7}\frac{5}{6} = \frac{20}{49}$.

D3) Con notazioni ovvie si ha: $P(X = 0|B_1) = \frac{P(\{X=0\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1 \cap N_2^c)}{P(B_1)} = P(N_2^c|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 1|B_1) = \frac{P(\{X=1\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1 \cap N_2)}{P(B_1)} = P(N_2|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 2|B_1) = \frac{P(\{X=2\}\cap B_1)}{P(B_1)} = 0$ perché $\{X = 2\} \cap B_1 = \emptyset$. Si osservi che il valore $P(B_1) = \frac{2}{7}$ non è essenziale per fare i calcoli.

Esercizio 2.

D4) Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(U|C)$. Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(C)$) si ha

$$P(U|C) = \frac{P(C|U)P(U)}{P(C)} = \frac{(1/2)(1/2)(1/6)}{(1/2)(1/2)(1/6) + 1 \cdot 1 \cdot (5/6)} = \frac{1}{1 + 20} = \frac{1}{21}.$$

Esercizio 3.

D5) Si ha $P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \in E\}) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(2k, 2k) = \sum_{k\geq 0} p_1(1-p_2)^{2k}p_2 = p_1p_2\frac{(1-p_2)^{2\cdot 0}}{1-(1-p_2)^2} = \frac{p_1p_2}{1-(1-2p_2+p_2^2)} = \frac{p_1p_2}{p_2(2-p_2)} = \frac{p_1}{2-p_2}$.

D6) Si ha $P(X_1 = 1|X_2 = 0) = \frac{P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\})}{P(X_2=0)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(0,0)} = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1)(1-p_2)+p_1p_2} = \frac{1-p_1-p_2+p_1p_2}{1-p_1-p_2+2p_1p_2}$.

Esercizio 4.

D7) Si ha $P(X > 0| - 1 < X < 1) = \frac{P(\{X>0\}\cap\{-1<X<1\})}{P(-1<X<1)} = \frac{P(0<X<1)}{P(-1<X<1)} = \frac{\int_0^1 \frac{x^2}{3}dx}{\int_{-1}^1 \frac{x^2}{3}dx} = \frac{\frac{1}{9}[x^3]_{x=0}^{x=1}}{\frac{1}{9}[x^3]_{x=-1}^{x=1}} = \frac{1/9}{(1-(-1)^3)/9} = \frac{1}{2}$.

D8) Si ha $P(e^{-1} \leq Y \leq e^2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-1}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^2$. Per $y \in (e^{-1}, e^2)$ si ha $F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{-1}^{\log y} \frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}]_{x=-1}^{x=\log y} = \frac{(\log y)^3-(-1)^3}{9} = \frac{(\log y)^3+1}{9}$.

Esercizio 5.

D9) Sia $X^* = \frac{X-1}{\sqrt{16}} = \frac{X-1}{4}$ la standardizzata di X. Allora $P(0 < X < b) = P(-\frac{1}{4} < X^* < \frac{b-1}{4}) = \Phi((b-1)/4) - \Phi(-1/4)$, da cui segue $\frac{b-1}{4} = \frac{1}{4}$, $b - 1 = 1$, e quindi $b = 2$.

D10) Si ha (il limite per n che tende ad infinito, indicato con $\to$, segue dal Teorema Limite Centrale)

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 1\right) &= P\left(-1 < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} < 1\right) \\ &= P\left(-\frac{1}{\sqrt{100}} < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{100}\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{100}}\right) \\ \to \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{100}}\right) &= \Phi\left(\frac{1}{10}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{10}\right) = \Phi\left(\frac{1}{10}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{10}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{10}\right) - 1. \end{aligned}$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2021-2022. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 4 Febbraio 2022 - Compito 2

Esercizio 1. Un'urna ha 2 palline bianche, 2 rosse e 3 nere. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere estratte.
D1) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca e una pallina rossa in un qualsiasi ordine.
D2) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$ (si può fare riferimento a formule opportune per variabili aleatorie con distribuzione notevole).
D3) Calcolare $P(X = k|B_1)$ per $k \in \{0, 1, 2\}$, dove B_1 è l'evento "prima pallina estratta bianca".

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce il numero 1 si lanciano due monete eque, se esce un numero diverso da 1 si lanciano due monete con "due facce croce".
D4) Calcolare la probabilità che sia uscito il numero 1 nel lancio del dado sapendo di aver ottenuto croce in entrambi i lanci di moneta.

Esercizio 3. Siano $p_1, p_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, k) = p_1(1 - p_2)^k p_2 \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h, h - 1) = (1 - p_1)p_2^{h-1}(1 - p_2) \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero.}$$

D5) Sia $E = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ l'insieme dei numeri positivi interi dispari. Verificare che

$$P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \in E\}) = \frac{p_1(1 - p_2)}{2 - p_2}.$$

D6) Verificare che $P(X_1 = 1|X_2 = 0) = \frac{1-p_1-p_2+p_1p_2}{1-p_1-p_2+2p_1p_2}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{x^2}{3} 1_{(-1,2)}(x)$.
D7) Calcolare $P(X > 0| - 1 < X < 1)$.
D8) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^X$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 16.
D9) Trovare il valore di b per cui si ha $P(0 < X < b) = \Phi(3/4) - \Phi(-1/4)$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 100. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 3\right)$$

esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomento positivo.

Cenno alle soluzioni (Compito 2) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{2\cdot 2\cdot 1}{21} = \frac{4}{21}$. In maniera alternativa, con notazioni ovvie, la probabilità richiesta è $P((B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = P(R_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|R_1)P(R_1) = \frac{2}{6}\frac{2}{7} + \frac{2}{6}\frac{2}{7} = \frac{2+2}{21} = \frac{4}{21}$.
`D2)` La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica e, per formule note, si ha $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$ e $\mathrm{Var}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} \cdot (1 - \frac{3}{7})\frac{7-2}{7-1} = \frac{6}{7}\frac{4}{7}\frac{5}{6} = \frac{20}{49}$.
`D3)` Con notazioni ovvie si ha: $P(X = 0|B_1) = \frac{P(\{X=0\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1 \cap N_2^c)}{P(B_1)} = P(N_2^c|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 1|B_1) = \frac{P(\{X=1\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1\cap N_2)}{P(B_1)} = P(N_2|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 2|B_1) = \frac{P(\{X=2\}\cap B_1)}{P(B_1)} = 0$ perché $\{X = 2\} \cap B_1 = \emptyset$. Si osservi che il valore $P(B_1) = \frac{2}{7}$ non è essenziale per fare i calcoli.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(U|C)$. Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(C)$) si ha

$$P(U|C) = \frac{P(C|U)P(U)}{P(C)} = \frac{(1/2)(1/2)(1/6)}{(1/2)(1/2)(1/6) + 1 \cdot 1 \cdot (5/6)} = \frac{1}{1+20} = \frac{1}{21}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \in E\}) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(2k+1, 2k+1) = \sum_{k\geq 0} p_1(1-p_2)^{2k+1}p_2 = p_1p_2(1-p_2)\frac{(1-p_2)^{2\cdot 0}}{1-(1-p_2)^2} = \frac{p_1p_2(1-p_2)}{1-(1-2p_2+p_2^2)} = \frac{p_1p_2(1-p_2)}{p_2(2-p_2)} = \frac{p_1(1-p_2)}{2-p_2}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = 1|X_2 = 0) = \frac{P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\})}{P(X_2=0)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(0,0)} = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1)(1-p_2)+p_1p_2} = \frac{1-p_1-p_2+p_1p_2}{1-p_1-p_2+2p_1p_2}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(X > 0| -1 < X < 1) = \frac{P(\{X>0\}\cap\{-1<X<1\})}{P(-1<X<1)} = \frac{P(0<X<1)}{P(-1<X<1)} = \frac{\int_0^1 \frac{x^2}{3}dx}{\int_{-1}^1 \frac{x^2}{3}dx} = \frac{\frac{1}{9}[x^3]_{x=0}^{x=1}}{\frac{1}{9}[x^3]_{x=-1}^{x=1}} = \frac{1/9}{(1-(-1)^3)/9} = \frac{1}{2}$.
`D8)` Si ha $P(e^{-1} \leq Y \leq e^2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-1}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^2$. Per $y \in (e^{-1}, e^2)$ si ha $F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{-1}^{\log y} \frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}]_{x=-1}^{x=\log y} = \frac{(\log y)^3-(-1)^3}{9} = \frac{(\log y)^3+1}{9}$.

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^* = \frac{X-1}{\sqrt{16}} = \frac{X-1}{4}$ la standardizzata di X. Allora $P(0 < X < b) = P(-\frac{1}{4} < X^* < \frac{b-1}{4}) = \Phi((b-1)/4) - \Phi(-1/4)$, da cui segue $\frac{b-1}{4} = \frac{3}{4}$, $b - 1 = 3$, e quindi $b = 4$.
`D10)` Si ha (il limite per n che tende ad infinito, indicato con $\to$, segue dal Teorema Limite Centrale)

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 3\right) = P\left(-3 < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} < 3\right)$$
$$= P\left(-\frac{3}{\sqrt{100}} < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{100}\sqrt{n}} < \frac{3}{\sqrt{100}}\right)$$
$$\to \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{3}{10}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{10}\right) = \Phi\left(\frac{3}{10}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{3}{10}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) - 1.$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2021-2022`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 4 Febbraio 2022 - Compito 3

Esercizio 1. Un'urna ha 2 palline bianche, 2 rosse e 3 nere. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere estratte.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca e una pallina rossa in un qualsiasi ordine.
`D2)` Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$ (si può fare riferimento a formule opportune per variabili aleatorie con distribuzione notevole).
`D3)` Calcolare $P(X = k|B_1)$ per $k \in \{0, 1, 2\}$, dove B_1 è l'evento "prima pallina estratta bianca".

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce il numero 1 si lanciano due monete eque, se esce un numero diverso da 1 si lanciano due monete con "due facce croce".
`D4)` Calcolare la probabilità che sia uscito il numero 1 nel lancio del dado sapendo di aver ottenuto croce in entrambi i lanci di moneta.

Esercizio 3. Siano $p_1, p_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, k) = p_1(1 - p_2)^k p_2 \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h, h - 1) = (1 - p_1)p_2^{h-1}(1 - p_2) \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero.}$$

`D5)` Sia $E = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ l'insieme dei numeri non negativi interi pari. Verificare che

$$P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \in E\}) = \frac{p_1}{2 - p_2}.$$

`D6)` Verificare che $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{1-p_1}{1-p_1+p_1p_2}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{x^2}{3} 1_{(-1,2)}(x)$.
`D7)` Calcolare $P(X > 0| - 1 < X < 1)$.
`D8)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^X$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 16.
`D9)` Trovare il valore di b per cui si ha $P(0 < X < b) = \Phi(7/4) - \Phi(-1/4)$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 100. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 7\right)$$

esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomento positivo.

Cenno alle soluzioni (Compito 3) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{2\cdot 2\cdot 1}{21} = \frac{4}{21}$. In maniera alternativa, con notazioni ovvie, la probabilità richiesta è $P((B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = P(R_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|R_1)P(R_1) = \frac{2}{6}\frac{2}{7} + \frac{2}{6}\frac{2}{7} = \frac{2+2}{21} = \frac{4}{21}$.
`D2)` La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica e, per formule note, si ha $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$ e $\mathrm{Var}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} \cdot (1 - \frac{3}{7})\frac{7-2}{7-1} = \frac{6}{7}\frac{4}{7}\frac{5}{6} = \frac{20}{49}$.
`D3)` Con notazioni ovvie si ha: $P(X = 0|B_1) = \frac{P(\{X=0\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1 \cap N_2^c)}{P(B_1)} = P(N_2^c|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 1|B_1) = \frac{P(\{X=1\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1\cap N_2)}{P(B_1)} = P(N_2|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 2|B_1) = \frac{P(\{X=2\}\cap B_1)}{P(B_1)} = 0$ perché $\{X = 2\} \cap B_1 = \emptyset$. Si osservi che il valore $P(B_1) = \frac{2}{7}$ non è essenziale per fare i calcoli.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(U|C)$. Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(C)$) si ha

$$P(U|C) = \frac{P(C|U)P(U)}{P(C)} = \frac{(1/2)(1/2)(1/6)}{(1/2)(1/2)(1/6) + 1 \cdot 1 \cdot (5/6)} = \frac{1}{1+20} = \frac{1}{21}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(\{X_1 = X_2\}\cap\{X_1 \in E\}) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(2k, 2k) = \sum_{k\geq 0} p_1(1-p_2)^{2k}p_2 = p_1p_2\frac{(1-p_2)^{2\cdot 0}}{1-(1-p_2)^2} = \frac{p_1p_2}{1-(1-2p_2+p_2^2)} = \frac{p_1p_2}{p_2(2-p_2)} = \frac{p_1}{2-p_2}$.
`D6)` Si ha $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{P(\{X_2=0\}\cap\{X_1=1\})}{P(X_1=1)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(1,1)} = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1)(1-p_2)+p_1(1-p_2)p_2} = \frac{1-p_1}{1-p_1+p_1p_2}$, dove per l'ultima uguaglianza basta semplificare il fattore $1 - p_2$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(X > 0| -1 < X < 1) = \frac{P(\{X>0\}\cap\{-1<X<1\})}{P(-1<X<1)} = \frac{P(0<X<1)}{P(-1<X<1)} = \frac{\int_0^1 \frac{x^2}{3}dx}{\int_{-1}^1 \frac{x^2}{3}dx} = \frac{\frac{1}{9}[x^3]_{x=0}^{x=1}}{\frac{1}{9}[x^3]_{x=-1}^{x=1}} = \frac{1/9}{(1-(-1)^3)/9} = \frac{1}{2}$.
`D8)` Si ha $P(e^{-1} \leq Y \leq e^2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-1}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^2$. Per $y \in (e^{-1}, e^2)$ si ha $F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{-1}^{\log y} \frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}]_{x=-1}^{x=\log y} = \frac{(\log y)^3-(-1)^3}{9} = \frac{(\log y)^3+1}{9}$.

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^* = \frac{X-1}{\sqrt{16}} = \frac{X-1}{4}$ la standardizzata di X. Allora $P(0 < X < b) = P(-\frac{1}{4} < X^* < \frac{b-1}{4}) = \Phi((b-1)/4) - \Phi(-1/4)$, da cui segue $\frac{b-1}{4} = \frac{7}{4}$, $b - 1 = 7$, e quindi $b = 8$.
`D10)` Si ha (il limite per n che tende ad infinito, indicato con $\to$, segue dal Teorema Limite Centrale)

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 7\right) = P\left(-7 < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} < 7\right)$$
$$= P\left(-\frac{7}{\sqrt{100}} < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{100}\sqrt{n}} < \frac{7}{\sqrt{100}}\right)$$
$$\to \Phi\left(\frac{7}{\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(-\frac{7}{\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{7}{10}\right) - \Phi\left(-\frac{7}{10}\right) = \Phi\left(\frac{7}{10}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{7}{10}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{7}{10}\right) - 1.$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2021-2022. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 4 Febbraio 2022 - Compito 4

Esercizio 1. Un'urna ha 2 palline bianche, 2 rosse e 3 nere. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere estratte.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca e una pallina rossa in un qualsiasi ordine.
`D2)` Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$ (si può fare riferimento a formule opportune per variabili aleatorie con distribuzione notevole).
`D3)` Calcolare $P(X = k|B_1)$ per $k \in \{0, 1, 2\}$, dove B_1 è l'evento "prima pallina estratta bianca".

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce il numero 1 si lanciano due monete eque, se esce un numero diverso da 1 si lanciano due monete con "due facce croce".
`D4)` Calcolare la probabilità che sia uscito il numero 1 nel lancio del dado sapendo di aver ottenuto croce in entrambi i lanci di moneta.

Esercizio 3. Siano $p_1, p_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, k) = p_1(1 - p_2)^k p_2 \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h, h - 1) = (1 - p_1)p_2^{h-1}(1 - p_2) \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero.}$$

`D5)` Sia $E = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ l'insieme dei numeri positivi interi dispari. Verificare che

$$P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \in E\}) = \frac{p_1(1 - p_2)}{2 - p_2}.$$

`D6)` Verificare che $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{1-p_1}{1-p_1+p_1p_2}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{x^2}{3}1_{(-1,2)}(x)$.
`D7)` Calcolare $P(X > 0| - 1 < X < 1)$.
`D8)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^X$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.
Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 16.
`D9)` Trovare il valore di b per cui si ha $P(0 < X < b) = \Phi(5/4) - \Phi(-1/4)$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 100. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 9\right)$$

esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomento positivo.

Cenno alle soluzioni (Compito 4) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{2\cdot 2\cdot 1}{21} = \frac{4}{21}$. In maniera alternativa, con notazioni ovvie, la probabilità richiesta è $P((B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = P(R_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|R_1)P(R_1) = \frac{2}{6}\frac{2}{7} + \frac{2}{6}\frac{2}{7} = \frac{2+2}{21} = \frac{4}{21}$.
`D2)` La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica e, per formule note, si ha $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$ e $\mathrm{Var}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} \cdot (1 - \frac{3}{7})\frac{7-2}{7-1} = \frac{6}{7}\frac{4}{7}\frac{5}{6} = \frac{20}{49}$.
`D3)` Con notazioni ovvie si ha: $P(X = 0|B_1) = \frac{P(\{X=0\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1 \cap N_2^c)}{P(B_1)} = P(N_2^c|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 1|B_1) = \frac{P(\{X=1\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1\cap N_2)}{P(B_1)} = P(N_2|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 2|B_1) = \frac{P(\{X=2\}\cap B_1)}{P(B_1)} = 0$ perché $\{X = 2\} \cap B_1 = \emptyset$. Si osservi che il valore $P(B_1) = \frac{2}{7}$ non è essenziale per fare i calcoli.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(U|C)$. Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(C)$) si ha

$$P(U|C) = \frac{P(C|U)P(U)}{P(C)} = \frac{(1/2)(1/2)(1/6)}{(1/2)(1/2)(1/6) + 1 \cdot 1 \cdot (5/6)} = \frac{1}{1+20} = \frac{1}{21}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \in E\}) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(2k+1, 2k+1) = \sum_{k\geq 0} p_1(1-p_2)^{2k+1}p_2 = p_1p_2(1-p_2)\frac{(1-p_2)^{2\cdot 0}}{1-(1-p_2)^2} = \frac{p_1p_2(1-p_2)}{1-(1-2p_2+p_2^2)} = \frac{p_1p_2(1-p_2)}{p_2(2-p_2)} = \frac{p_1(1-p_2)}{2-p_2}$.
`D6)` Si ha $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{P(\{X_2=0\}\cap\{X_1=1\})}{P(X_1=1)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(1,1)} = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1)(1-p_2)+p_1(1-p_2)p_2} = \frac{1-p_1}{1-p_1+p_1p_2}$, dove per l'ultima uguaglianza basta semplificare il fattore $1 - p_2$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(X > 0| -1 < X < 1) = \frac{P(\{X>0\}\cap\{-1<X<1\})}{P(-1<X<1)} = \frac{P(0<X<1)}{P(-1<X<1)} = \frac{\int_0^1 \frac{x^2}{3}dx}{\int_{-1}^1 \frac{x^2}{3}dx} = \frac{\frac{1}{9}[x^3]_{x=0}^{x=1}}{\frac{1}{9}[x^3]_{x=-1}^{x=1}} = \frac{1/9}{(1-(-1)^3)/9} = \frac{1}{2}$.
`D8)` Si ha $P(e^{-1} \leq Y \leq e^2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-1}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^2$. Per $y \in (e^{-1}, e^2)$ si ha $F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{-1}^{\log y} \frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}]_{x=-1}^{x=\log y} = \frac{(\log y)^3-(-1)^3}{9} = \frac{(\log y)^3+1}{9}$.

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^* = \frac{X-1}{\sqrt{16}} = \frac{X-1}{4}$ la standardizzata di X. Allora $P(0 < X < b) = P(-\frac{1}{4} < X^* < \frac{b-1}{4}) = \Phi((b-1)/4) - \Phi(-1/4)$, da cui segue $\frac{b-1}{4} = \frac{5}{4}$, $b - 1 = 5$, e quindi $b = 6$.
`D10)` Si ha (il limite per n che tende ad infinito, indicato con $\to$, segue dal Teorema Limite Centrale)

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 9\right) = P\left(-9 < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} < 9\right)$$
$$= P\left(-\frac{9}{\sqrt{100}} < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{100}\sqrt{n}} < \frac{9}{\sqrt{100}}\right)$$
$$\to \Phi\left(\frac{9}{\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(-\frac{9}{\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{9}{10}\right) - \Phi\left(-\frac{9}{10}\right) = \Phi\left(\frac{9}{10}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{9}{10}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{9}{10}\right) - 1.$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2021-2022`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 4 Febbraio 2022 - Compito 5

Esercizio 1. Un'urna ha 2 palline bianche, 2 rosse e 3 nere. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere estratte.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca e una pallina rossa in un qualsiasi ordine.
`D2)` Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$ (si può fare riferimento a formule opportune per variabili aleatorie con distribuzione notevole).
`D3)` Calcolare $P(X = k|B_1)$ per $k \in \{0, 1, 2\}$, dove B_1 è l'evento "prima pallina estratta bianca".

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce il numero 1 si lanciano due monete eque, se esce un numero diverso da 1 si lanciano due monete con "due facce croce".
`D4)` Calcolare la probabilità che sia uscito un numero diverso da 1 nel lancio del dado sapendo di aver ottenuto croce in entrambi i lanci di moneta.

Esercizio 3. Siano $p_1, p_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, k) = p_1(1 - p_2)^k p_2 \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h, h - 1) = (1 - p_1)p_2^{h-1}(1 - p_2) \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero.}$$

`D5)` Sia $E = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ l'insieme dei numeri non negativi interi pari. Verificare che

$$P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \in E\}) = \frac{p_1}{2 - p_2}.$$

`D6)` Verificare che $P(X_1 = 1|X_2 = 0) = \frac{1-p_1-p_2+p_1p_2}{1-p_1-p_2+2p_1p_2}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{x^2}{3} 1_{(-1,2)}(x)$.
`D7)` Calcolare $P(X > 0| - 1 < X < 1)$.
`D8)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^X$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 9.
`D9)` Trovare il valore di b per cui si ha $P(0 < X < b) = \Phi(1/3) - \Phi(-1/3)$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 100. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 11\right)$$

esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomento positivo.

Cenno alle soluzioni (Compito 5) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{2\cdot 2\cdot 1}{21} = \frac{4}{21}$. In maniera alternativa, con notazioni ovvie, la probabilità richiesta è $P((B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = P(R_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|R_1)P(R_1) = \frac{2}{6}\frac{2}{7} + \frac{2}{6}\frac{2}{7} = \frac{2+2}{21} = \frac{4}{21}$.
`D2)` La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica e, per formule note, si ha $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$ e $\mathrm{Var}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} \cdot (1 - \frac{3}{7})\frac{7-2}{7-1} = \frac{6}{7}\frac{4}{7}\frac{5}{6} = \frac{20}{49}$.
`D3)` Con notazioni ovvie si ha: $P(X = 0|B_1) = \frac{P(\{X=0\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1 \cap N_2^c)}{P(B_1)} = P(N_2^c|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 1|B_1) = \frac{P(\{X=1\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1\cap N_2)}{P(B_1)} = P(N_2|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 2|B_1) = \frac{P(\{X=2\}\cap B_1)}{P(B_1)} = 0$ perché $\{X = 2\} \cap B_1 = \emptyset$. Si osservi che il valore $P(B_1) = \frac{2}{7}$ non è essenziale per fare i calcoli.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(U^c|C)$. Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(C)$) si ha

$$P(U^c|C) = \frac{P(C|U^c)P(U^c)}{P(C)} = \frac{1 \cdot 1 \cdot (5/6)}{(1/2)(1/2)(1/6) + 1 \cdot 1 \cdot (5/6)} = \frac{20}{1+20} = \frac{20}{21}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(\{X_1 = X_2\}\cap\{X_1 \in E\}) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(2k, 2k) = \sum_{k\geq 0} p_1(1-p_2)^{2k}p_2 = p_1p_2\frac{(1-p_2)^{2\cdot 0}}{1-(1-p_2)^2} = \frac{p_1p_2}{1-(1-2p_2+p_2^2)} = \frac{p_1p_2}{p_2(2-p_2)} = \frac{p_1}{2-p_2}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = 1|X_2 = 0) = \frac{P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\})}{P(X_2=0)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(0,0)} = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1)(1-p_2)+p_1p_2} = \frac{1-p_1-p_2+p_1p_2}{1-p_1-p_2+2p_1p_2}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(X > 0| -1 < X < 1) = \frac{P(\{X>0\}\cap\{-1<X<1\})}{P(-1<X<1)} = \frac{P(0<X<1)}{P(-1<X<1)} = \frac{\int_0^1 \frac{x^2}{3}dx}{\int_{-1}^1 \frac{x^2}{3}dx} = \frac{\frac{1}{9}[x^3]_{x=0}^{x=1}}{\frac{1}{9}[x^3]_{x=-1}^{x=1}} = \frac{1/9}{(1-(-1)^3)/9} = \frac{1}{2}$.
`D8)` Si ha $P(e^{-1} \leq Y \leq e^2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-1}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^2$. Per $y \in (e^{-1}, e^2)$ si ha $F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{-1}^{\log y} \frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}]_{x=-1}^{x=\log y} = \frac{(\log y)^3-(-1)^3}{9} = \frac{(\log y)^3+1}{9}$.

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^* = \frac{X-1}{\sqrt{9}} = \frac{X-1}{3}$ la standardizzata di X. Allora $P(0 < X < b) = P(-\frac{1}{3} < X^* < \frac{b-1}{3}) = \Phi((b-1)/3) - \Phi(-1/3)$, da cui segue $\frac{b-1}{3} = \frac{1}{3}$, $b - 1 = 1$, e quindi $b = 2$.
`D10)` Si ha (il limite per n che tende ad infinito, indicato con $\to$, segue dal Teorema Limite Centrale)

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 11\right) &= P\left(-11 < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} < 11\right) \\ &= P\left(-\frac{11}{\sqrt{100}} < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{100}\sqrt{n}} < \frac{11}{\sqrt{100}}\right) \end{aligned}$$
$$\to \Phi\left(\frac{11}{\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(-\frac{11}{\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{11}{10}\right) - \Phi\left(-\frac{11}{10}\right) = \Phi\left(\frac{11}{10}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{11}{10}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{11}{10}\right) - 1.$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno Accademico: `2021-2022`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Appello del 4 Febbraio 2022 - Compito 6

Esercizio 1. Un'urna ha 2 palline bianche, 2 rosse e 3 nere. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere estratte.

`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca e una pallina rossa in un qualsiasi ordine.

`D2)` Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$ (si può fare riferimento a formule opportune per variabili aleatorie con distribuzione notevole).

`D3)` Calcolare $P(X = k|B_1)$ per $k \in \{0, 1, 2\}$, dove B_1 è l'evento "prima pallina estratta bianca".

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce il numero 1 si lanciano due monete eque, se esce un numero diverso da 1 si lanciano due monete con "due facce croce".

`D4)` Calcolare la probabilità che sia uscito un numero diverso da 1 nel lancio del dado sapendo di aver ottenuto croce in entrambi i lanci di moneta.

Esercizio 3. Siano $p_1, p_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, k) = p_1(1 - p_2)^k p_2 \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h, h - 1) = (1 - p_1)p_2^{h-1}(1 - p_2) \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero.}$$

`D5)` Sia $E = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ l'insieme dei numeri positivi interi dispari. Verificare che

$$P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \in E\}) = \frac{p_1(1 - p_2)}{2 - p_2}.$$

`D6)` Verificare che $P(X_1 = 1|X_2 = 0) = \frac{1-p_1-p_2+p_1p_2}{1-p_1-p_2+2p_1p_2}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{x^2}{3} 1_{(-1,2)}(x)$.

`D7)` Calcolare $P(X > 0| - 1 < X < 1)$.

`D8)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^X$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 9.

`D9)` Trovare il valore di b per cui si ha $P(0 < X < b) = \Phi(2/3) - \Phi(-1/3)$.

`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 100. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 13\right)$$

esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomento positivo.

Cenno alle soluzioni (Compito 6) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{2\cdot 2\cdot 1}{21} = \frac{4}{21}$. In maniera alternativa, con notazioni ovvie, la probabilità richiesta è $P((B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = P(R_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|R_1)P(R_1) = \frac{2}{6}\frac{2}{7} + \frac{2}{6}\frac{2}{7} = \frac{2+2}{21} = \frac{4}{21}$.
`D2)` La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica e, per formule note, si ha $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$ e $\mathrm{Var}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} \cdot (1 - \frac{3}{7})\frac{7-2}{7-1} = \frac{6}{7}\frac{4}{7}\frac{5}{6} = \frac{20}{49}$.
`D3)` Con notazioni ovvie si ha: $P(X = 0|B_1) = \frac{P(\{X=0\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1 \cap N_2^c)}{P(B_1)} = P(N_2^c|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 1|B_1) = \frac{P(\{X=1\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1\cap N_2)}{P(B_1)} = P(N_2|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 2|B_1) = \frac{P(\{X=2\}\cap B_1)}{P(B_1)} = 0$ perché $\{X = 2\} \cap B_1 = \emptyset$. Si osservi che il valore $P(B_1) = \frac{2}{7}$ non è essenziale per fare i calcoli.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(U^c|C)$. Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(C)$) si ha

$$P(U^c|C) = \frac{P(C|U^c)P(U^c)}{P(C)} = \frac{1\cdot 1\cdot (5/6)}{(1/2)(1/2)(1/6) + 1\cdot 1\cdot (5/6)} = \frac{20}{1+20} = \frac{20}{21}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \in E\}) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(2k+1, 2k+1) = \sum_{k\geq 0} p_1(1-p_2)^{2k+1}p_2 = p_1p_2(1-p_2)\frac{(1-p_2)^{2\cdot 0}}{1-(1-p_2)^2} = \frac{p_1p_2(1-p_2)}{1-(1-2p_2+p_2^2)} = \frac{p_1p_2(1-p_2)}{p_2(2-p_2)} = \frac{p_1(1-p_2)}{2-p_2}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = 1|X_2 = 0) = \frac{P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\})}{P(X_2=0)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(0,0)} = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1)(1-p_2)+p_1p_2} = \frac{1-p_1-p_2+p_1p_2}{1-p_1-p_2+2p_1p_2}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(X > 0| -1 < X < 1) = \frac{P(\{X>0\}\cap\{-1<X<1\})}{P(-1<X<1)} = \frac{P(0<X<1)}{P(-1<X<1)} = \frac{\int_0^1 \frac{x^2}{3}dx}{\int_{-1}^1 \frac{x^2}{3}dx} = \frac{\frac{1}{9}[x^3]_{x=0}^{x=1}}{\frac{1}{9}[x^3]_{x=-1}^{x=1}} = \frac{1/9}{(1-(-1)^3)/9} = \frac{1}{2}$.
`D8)` Si ha $P(e^{-1} \leq Y \leq e^2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-1}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^2$. Per $y \in (e^{-1}, e^2)$ si ha $F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{-1}^{\log y} \frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}]_{x=-1}^{x=\log y} = \frac{(\log y)^3-(-1)^3}{9} = \frac{(\log y)^3+1}{9}$.

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^* = \frac{X-1}{\sqrt{9}} = \frac{X-1}{3}$ la standardizzata di X. Allora $P(0 < X < b) = P(-\frac{1}{3} < X^* < \frac{b-1}{3}) = \Phi((b-1)/3) - \Phi(-1/3)$, da cui segue $\frac{b-1}{3} = \frac{2}{3}$, $b - 1 = 2$, e quindi $b = 3$.
`D10)` Si ha (il limite per n che tende ad infinito, indicato con $\to$, segue dal Teorema Limite Centrale)

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n-2n}{\sqrt{n}}\right| < 13\right) &= P\left(-13 < \frac{X_1+\cdots+X_n-2n}{\sqrt{n}} < 13\right) \\ &= P\left(-\frac{13}{\sqrt{100}} < \frac{X_1+\cdots+X_n-2n}{\sqrt{100}\sqrt{n}} < \frac{13}{\sqrt{100}}\right) \end{aligned}$$
$$\to \Phi\left(\frac{13}{\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(-\frac{13}{\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{13}{10}\right) - \Phi\left(-\frac{13}{10}\right) = \Phi\left(\frac{13}{10}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{13}{10}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{13}{10}\right) - 1.$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2021-2022`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 4 Febbraio 2022 - Compito 7

Esercizio 1. Un'urna ha 2 palline bianche, 2 rosse e 3 nere. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere estratte.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca e una pallina rossa in un qualsiasi ordine.
`D2)` Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$ (si può fare riferimento a formule opportune per variabili aleatorie con distribuzione notevole).
`D3)` Calcolare $P(X = k|B_1)$ per $k \in \{0, 1, 2\}$, dove B_1 è l'evento "prima pallina estratta bianca".

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce il numero 1 si lanciano due monete eque, se esce un numero diverso da 1 si lanciano due monete con "due facce croce".
`D4)` Calcolare la probabilità che sia uscito un numero diverso da 1 nel lancio del dado sapendo di aver ottenuto croce in entrambi i lanci di moneta.

Esercizio 3. Siano $p_1, p_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, k) = p_1(1 - p_2)^k p_2 \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h, h - 1) = (1 - p_1)p_2^{h-1}(1 - p_2) \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero.}$$

`D5)` Sia $E = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ l'insieme dei numeri non negativi interi pari. Verificare che

$$P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \in E\}) = \frac{p_1}{2 - p_2}.$$

`D6)` Verificare che $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{1-p_1}{1-p_1+p_1p_2}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{x^2}{3} 1_{(-1,2)}(x)$.
`D7)` Calcolare $P(X > 0| - 1 < X < 1)$.
`D8)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^X$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 9.
`D9)` Trovare il valore di b per cui si ha $P(0 < X < b) = \Phi(4/3) - \Phi(-1/3)$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 100. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 17\right)$$

esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomento positivo.

Cenno alle soluzioni (Compito 7) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{2\cdot 2\cdot 1}{21} = \frac{4}{21}$. In maniera alternativa, con notazioni ovvie, la probabilità richiesta è $P((B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = P(R_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|R_1)P(R_1) = \frac{2}{6}\frac{2}{7} + \frac{2}{6}\frac{2}{7} = \frac{2+2}{21} = \frac{4}{21}$.

`D2)` La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica e, per formule note, si ha $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$ e $\mathrm{Var}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} \cdot (1 - \frac{3}{7})\frac{7-2}{7-1} = \frac{6}{7}\frac{4}{7}\frac{5}{6} = \frac{20}{49}$.

`D3)` Con notazioni ovvie si ha: $P(X = 0|B_1) = \frac{P(\{X=0\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1 \cap N_2^c)}{P(B_1)} = P(N_2^c|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 1|B_1) = \frac{P(\{X=1\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1\cap N_2)}{P(B_1)} = P(N_2|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 2|B_1) = \frac{P(\{X=2\}\cap B_1)}{P(B_1)} = 0$ perché $\{X = 2\} \cap B_1 = \emptyset$. Si osservi che il valore $P(B_1) = \frac{2}{7}$ non è essenziale per fare i calcoli.

Esercizio 2.

`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(U^c|C)$. Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(C)$) si ha

$$P(U^c|C) = \frac{P(C|U^c)P(U^c)}{P(C)} = \frac{1 \cdot 1 \cdot (5/6)}{(1/2)(1/2)(1/6) + 1 \cdot 1 \cdot (5/6)} = \frac{20}{1+20} = \frac{20}{21}.$$

Esercizio 3.

`D5)` Si ha $P(\{X_1 = X_2\}\cap\{X_1 \in E\}) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(2k, 2k) = \sum_{k\geq 0} p_1(1-p_2)^{2k}p_2 = p_1p_2\frac{(1-p_2)^{2\cdot 0}}{1-(1-p_2)^2} = \frac{p_1p_2}{1-(1-2p_2+p_2^2)} = \frac{p_1p_2}{p_2(2-p_2)} = \frac{p_1}{2-p_2}$.

`D6)` Si ha $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{P(\{X_2=0\}\cap\{X_1=1\})}{P(X_1=1)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(1,1)} = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1)(1-p_2)+p_1(1-p_2)p_2} = \frac{1-p_1}{1-p_1+p_1p_2}$, dove per l'ultima uguaglianza basta semplificare il fattore $1 - p_2$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(X > 0| -1 < X < 1) = \frac{P(\{X>0\}\cap\{-1<X<1\})}{P(-1<X<1)} = \frac{P(0<X<1)}{P(-1<X<1)} = \frac{\int_0^1 \frac{x^2}{3}dx}{\int_{-1}^1 \frac{x^2}{3}dx} = \frac{\frac{1}{9}[x^3]_{x=0}^{x=1}}{\frac{1}{9}[x^3]_{x=-1}^{x=1}} = \frac{1/9}{(1-(-1)^3)/9} = \frac{1}{2}$.

`D8)` Si ha $P(e^{-1} \leq Y \leq e^2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-1}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^2$. Per $y \in (e^{-1}, e^2)$ si ha $F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{-1}^{\log y} \frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}]_{x=-1}^{x=\log y} = \frac{(\log y)^3-(-1)^3}{9} = \frac{(\log y)^3+1}{9}$.

Esercizio 5.

`D9)` Sia $X^* = \frac{X-1}{\sqrt{9}} = \frac{X-1}{3}$ la standardizzata di X. Allora $P(0 < X < b) = P(-\frac{1}{3} < X^* < \frac{b-1}{3}) = \Phi((b-1)/3) - \Phi(-1/3)$, da cui segue $\frac{b-1}{3} = \frac{4}{3}$, $b - 1 = 4$, e quindi $b = 5$.

`D10)` Si ha (il limite per n che tende ad infinito, indicato con $\to$, segue dal Teorema Limite Centrale)

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 17\right) &= P\left(-17 < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} < 17\right) \\ &= P\left(-\frac{17}{\sqrt{100}} < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{100}\sqrt{n}} < \frac{17}{\sqrt{100}}\right) \end{aligned}$$

$$\to \Phi\left(\frac{17}{\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(-\frac{17}{\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{17}{10}\right) - \Phi\left(-\frac{17}{10}\right) = \Phi\left(\frac{17}{10}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{17}{10}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{17}{10}\right) - 1.$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2021-2022`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 4 Febbraio 2022 - Compito 8

Esercizio 1. Un'urna ha 2 palline bianche, 2 rosse e 3 nere. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere estratte.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca e una pallina rossa in un qualsiasi ordine.
`D2)` Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$ (si può fare riferimento a formule opportune per variabili aleatorie con distribuzione notevole).
`D3)` Calcolare $P(X = k|B_1)$ per $k \in \{0, 1, 2\}$, dove B_1 è l'evento "prima pallina estratta bianca".

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce il numero 1 si lanciano due monete eque, se esce un numero diverso da 1 si lanciano due monete con "due facce croce".
`D4)` Calcolare la probabilità che sia uscito un numero diverso da 1 nel lancio del dado sapendo di aver ottenuto croce in entrambi i lanci di moneta.

Esercizio 3. Siano $p_1, p_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, k) = p_1(1 - p_2)^k p_2 \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h, h - 1) = (1 - p_1)p_2^{h-1}(1 - p_2) \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero.}$$

`D5)` Sia $E = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ l'insieme dei numeri positivi interi dispari. Verificare che

$$P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \in E\}) = \frac{p_1(1 - p_2)}{2 - p_2}.$$

`D6)` Verificare che $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{1-p_1}{1-p_1+p_1p_2}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{x^2}{3} 1_{(-1,2)}(x)$.
`D7)` Calcolare $P(X > 0| - 1 < X < 1)$.
`D8)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^X$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 9.
`D9)` Trovare il valore di b per cui si ha $P(0 < X < b) = \Phi(5/3) - \Phi(-1/3)$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 100. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 19\right)$$

esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomento positivo.

Cenno alle soluzioni (Compito 8) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{2\cdot 2\cdot 1}{21} = \frac{4}{21}$. In maniera alternativa, con notazioni ovvie, la probabilità richiesta è $P((B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = P(R_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|R_1)P(R_1) = \frac{2}{6}\frac{2}{7} + \frac{2}{6}\frac{2}{7} = \frac{2+2}{21} = \frac{4}{21}$.

`D2)` La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica e, per formule note, si ha $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$ e $\mathrm{Var}[X] = 2 \cdot \frac{3}{7} \cdot (1 - \frac{3}{7})\frac{7-2}{7-1} = \frac{6}{7}\frac{4}{7}\frac{5}{6} = \frac{20}{49}$.

`D3)` Con notazioni ovvie si ha: $P(X = 0|B_1) = \frac{P(\{X=0\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1 \cap N_2^c)}{P(B_1)} = P(N_2^c|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 1|B_1) = \frac{P(\{X=1\}\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1\cap N_2)}{P(B_1)} = P(N_2|B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 2|B_1) = \frac{P(\{X=2\}\cap B_1)}{P(B_1)} = 0$ perché $\{X = 2\} \cap B_1 = \emptyset$. Si osservi che il valore $P(B_1) = \frac{2}{7}$ non è essenziale per fare i calcoli.

Esercizio 2.

`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(U^c|C)$. Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(C)$) si ha

$$P(U^c|C) = \frac{P(C|U^c)P(U^c)}{P(C)} = \frac{1 \cdot 1 \cdot (5/6)}{(1/2)(1/2)(1/6) + 1 \cdot 1 \cdot (5/6)} = \frac{20}{1 + 20} = \frac{20}{21}.$$

Esercizio 3.

`D5)` Si ha $P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \in E\}) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(2k + 1, 2k + 1) = \sum_{k\geq 0} p_1(1 - p_2)^{2k+1}p_2 = p_1p_2(1 - p_2)\frac{(1-p_2)^{2\cdot 0}}{1-(1-p_2)^2} = \frac{p_1p_2(1-p_2)}{1-(1-2p_2+p_2^2)} = \frac{p_1p_2(1-p_2)}{p_2(2-p_2)} = \frac{p_1(1-p_2)}{2-p_2}$.

`D6)` Si ha $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{P(\{X_2=0\}\cap\{X_1=1\})}{P(X_1=1)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(1,1)} = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1)(1-p_2)+p_1(1-p_2)p_2} = \frac{1-p_1}{1-p_1+p_1p_2}$, dove per l'ultima uguaglianza basta semplificare il fattore $1 - p_2$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(X > 0| - 1 < X < 1) = \frac{P(\{X>0\}\cap\{-1<X<1\})}{P(-1<X<1)} = \frac{P(0<X<1)}{P(-1<X<1)} = \frac{\int_0^1 \frac{x^2}{3}dx}{\int_{-1}^1 \frac{x^2}{3}dx} = \frac{\frac{1}{9}[x^3]_{x=0}^{x=1}}{\frac{1}{9}[x^3]_{x=-1}^{x=1}} = \frac{1/9}{(1-(-1)^3)/9} = \frac{1}{2}$.

`D8)` Si ha $P(e^{-1} \leq Y \leq e^2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-1}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^2$. Per $y \in (e^{-1}, e^2)$ si ha $F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{-1}^{\log y} \frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}]_{x=-1}^{x=\log y} = \frac{(\log y)^3-(-1)^3}{9} = \frac{(\log y)^3+1}{9}$.

Esercizio 5.

`D9)` Sia $X^* = \frac{X-1}{\sqrt{9}} = \frac{X-1}{3}$ la standardizzata di X. Allora $P(0 < X < b) = P(-\frac{1}{3} < X^* < \frac{b-1}{3}) = \Phi((b - 1)/3) - \Phi(-1/3)$, da cui segue $\frac{b-1}{3} = \frac{5}{3}$, $b - 1 = 5$, e quindi $b = 6$.

`D10)` Si ha (il limite per n che tende ad infinito, indicato con $\to$, segue dal Teorema Limite Centrale)

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}}\right| < 19\right) &= P\left(-19 < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} < 19\right) \\ &= P\left(-\frac{19}{\sqrt{100}} < \frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{100}\sqrt{n}} < \frac{19}{\sqrt{100}}\right) \end{aligned}$$

$$\to \Phi\left(\frac{19}{\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(-\frac{19}{\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{19}{10}\right) - \Phi\left(-\frac{19}{10}\right) = \Phi\left(\frac{19}{10}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{19}{10}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{19}{10}\right) - 1.$$