Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Appello del 15 Giugno 2021 - Compito 1

Esercizio 1.
D1) Abbiamo un'urna con 15 palline bianche e 15 palline nere. Si estraggono a caso 2 palline a caso una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre due palline di colori diversi (cioè una bianca e una nera in un qualsiasi ordine).
D2) Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(\text{bianco}, \text{nero})$ sapendo di aver estratto esattamente una pallina bianca, e si verifichi che il risultato non dipende da n.
D3) Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono ripetutamente palline a caso, una alla volta e *con* reinserimento. Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte per avere per la prima volta una pallina bianca. Poi sia r tale che $\frac{e^r}{2} < 1$. Verificare che $\mathbb{E}[e^{rY}] = \frac{e^r/2}{1-e^r/2}$.

Esercizio 2. Un'urna ha 2 palline bianche. Poi si lancia un dado equo: se esce un numero pari si mette una pallina nera nell'urna; se esce un numero dispari si mettono 6 palline nere nell'urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
D4) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

Esercizio 3. Siano $q_1, q_2 \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = q_1q_2(1-q_1)^{x_1}(1-q_2)^{x_2}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
D5) Verificare che $P(X_1 + X_2 = 1) = q_1q_2(2-q_1-q_2)$.
D6) Verificare che $P(\{X_2 > X_1\} \cap \{X_1 + X_2 \leq 2\}) = q_1q_2(1-q_2)(2-q_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (e^{11}, e^{12}).
D7) Trovare la densità continua di $Y = \log X$.
D8) Verificare che $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \frac{1}{e^{12}-e^{11}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una v.a. Normale standard (quindi con media 0 e varianza 1).
Verificare che $P(9|X| > 1) = 2(1 - \Phi(1/9))$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 10 e varianza $\sigma^2 > 0$.
Dire per quale valore di y si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 10n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma y}{2}\right) = \Phi(-1).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 1) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{15}{1}\binom{15}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{15\cdot 15}{\frac{30\cdot 29}{2}} = \frac{15}{29}$.
`D2)` Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte e sia E l'evento che indica la sequenza in questione. Allora si ha

$$P(E|X=1) = \frac{P(E\cap\{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P(E)}{P(X=1)} = \frac{\frac{n}{2n}\frac{n}{2n-1}}{\frac{\binom{n}{1}\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{n}{2n-1}}{\frac{n\cdot n}{2n(2n-1)/2}} = \frac{1}{2}.$$

`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, si ha $\mathbb{E}[e^{rY}] = \sum_{k\geq 1} e^{rk}p_Y(k) = \sum_{k\geq 1} e^{rk}(1-\frac{1}{2})^{k-1}\cdot\frac{1}{2} = \sum_{k\geq 1} e^{rk}(\frac{1}{2})^k = \sum_{k\geq 1}(\frac{e^r}{2})^k = \frac{e^r/2}{1-e^r/2}$, dove nell'ultima uguaglianza abbiamo tenuto conto della condizione $\frac{e^r}{2} < 1$ (in caso contrario la serie sarebbe divergente).

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(B) = P(B|D^c)P(D^c) + P(B|D)P(D) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{2}{8}\cdot\frac{3}{6} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{8+3}{24} = \frac{11}{24}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1+X_2=1) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) = q_1q_2(1-q_1+1-q_2) = q_1q_2(2-q_1-q_2)$.
`D6)` Si ha $P(\{X_2 > X_1\}\cap\{X_1+X_2\leq 2\}) = p_{X_1,X_2}(0,1)+p_{X_1,X_2}(0,2) = q_1q_2(1-q_2)+q_1q_2(1-q_2)^2 = q_1q_2(1-q_2)(1+1-q_2) = q_1q_2(1-q_2)(2-q_2)$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(11\leq Y\leq 12) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y\leq 11$ e $F_Y(y) = 1$ per $y\geq 12$. Per $y\in(11,12)$ si ha $F_Y(y) = P(\log X\leq y) = P(X\leq e^y) = \frac{e^y - e^{11}}{e^{12}-e^{11}}$. Quindi la densità continua richiesta è $f_Y(y) = \frac{e^y}{e^{12}-e^{11}}1_{(11,12)}(y)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \int_{11}^{12} e^{-y}\frac{e^y}{e^{12}-e^{11}}dy = \int_{11}^{12}\frac{1}{e^{12}-e^{11}}dy = [\frac{y}{e^{12}-e^{11}}]_{y=11}^{y=12} = \frac{12-11}{e^{12}-e^{11}} = \frac{1}{e^{12}-e^{11}}$.
Metodo alternativo. $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \mathbb{E}[e^{-\log X}] = \mathbb{E}[1/X] = \int_{e^{11}}^{e^{12}}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^{12}-e^{11}}dx = \frac{[\log x]_{x=e^{11}}^{x=e^{12}}}{e^{12}-e^{11}} = \frac{12-11}{e^{12}-e^{11}} = \frac{1}{e^{12}-e^{11}}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si ha $P(9|X|>1) = P(|X|>1/9) = 1-P(|X|\leq 1/9) = 1-P(-1/9\leq X\leq 1/9) = 1-(\Phi(1/9)-\Phi(-1/9)) = 1-(\Phi(1/9)-(1-\Phi(1/9))) = 1-\Phi(1/9)+1-\Phi(1/9) = 2(1-\Phi(1/9))$.
`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sqrt{n}}\leq\frac{\sigma y}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sigma\sqrt{n}}\leq\frac{y}{2}\right) = \Phi\left(\frac{y}{2}\right),$$

da cui si ottiene $\frac{y}{2} = -1$ e $y = -2$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 15 Giugno 2021 - Compito 2

Esercizio 1.
D1) Abbiamo un'urna con 15 palline bianche e 15 palline nere. Si estraggono a caso 2 palline a caso una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre due palline di colori diversi (cioè una bianca e una nera in un qualsiasi ordine).
D2) Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(\text{nero}, \text{bianco})$ sapendo di aver estratto esattamente una pallina bianca, e si verifichi che il risultato non dipende da n.
D3) Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono ripetutamente palline a caso, una alla volta e *con* reinserimento. Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte per avere per la prima volta una pallina bianca. Poi sia s tale che $\frac{e^s}{2} < 1$. Verificare che $\mathbb{E}[e^{sY}] = \frac{e^s/2}{1-e^s/2}$.

Esercizio 2. Un'urna ha 2 palline bianche. Poi si lancia un dado equo: se esce un numero pari si mette una pallina nera nell'urna; se esce un numero dispari si mettono 6 palline nere nell'urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
D4) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

Esercizio 3. Siano $q_1, q_2 \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = q_1q_2(1-q_1)^{x_1}(1-q_2)^{x_2}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
D5) Verificare che $P(X_1 + X_2 = 1) = q_1q_2(2 - q_1 - q_2)$.
D6) Verificare che $P(\{X_1 > X_2\} \cap \{X_1 + X_2 \leq 2\}) = q_1q_2(1-q_1)(2-q_1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (e^{12}, e^{13}).
D7) Trovare la densità continua di $Y = \log X$.
D8) Verificare che $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \frac{1}{e^{13}-e^{12}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una v.a. Normale standard (quindi con media 0 e varianza 1).
Verificare che $P(8|X| > 1) = 2(1 - \Phi(1/8))$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 10 e varianza $\sigma^2 > 0$.
Dire per quale valore di y si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 10n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma y}{3}\right) = \Phi(-1).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 2) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{15}{1}\binom{15}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{15\cdot 15}{\frac{30\cdot 29}{2}} = \frac{15}{29}$.

`D2)` Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte e sia E l'evento che indica la sequenza in questione. Allora si ha

$$P(E|X=1) = \frac{P(E\cap\{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P(E)}{P(X=1)} = \frac{\frac{n}{2n}\frac{n}{2n-1}}{\frac{\binom{n}{1}\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{n}{2n-1}}{\frac{n\cdot n}{2n(2n-1)/2}} = \frac{1}{2}.$$

`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, si ha $\mathbb{E}[e^{sY}] = \sum_{k\geq 1} e^{sk} p_Y(k) = \sum_{k\geq 1} e^{sk}(1-\frac{1}{2})^{k-1}\cdot\frac{1}{2} = \sum_{k\geq 1} e^{sk}(\frac{1}{2})^k = \sum_{k\geq 1}(\frac{e^s}{2})^k = \frac{e^s/2}{1-e^s/2}$, dove nell'ultima uguaglianza abbiamo tenuto conto della condizione $\frac{e^s}{2} < 1$ (in caso contrario la serie sarebbe divergente).

Esercizio 2.

`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(B) = P(B|D^c)P(D^c) + P(B|D)P(D) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{2}{8}\cdot\frac{3}{6} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{8+3}{24} = \frac{11}{24}.$$

Esercizio 3.

`D5)` Si ha $P(X_1+X_2=1) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) = q_1q_2(1-q_1+1-q_2) = q_1q_2(2-q_1-q_2)$.

`D6)` Si ha $P(\{X_1 > X_2\}\cap\{X_1+X_2 \leq 2\}) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(2,0) = q_1q_2(1-q_1) + q_1q_2(1-q_1)^2 = q_1q_2(1-q_1)(1+1-q_1) = q_1q_2(1-q_1)(2-q_1)$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(12 \leq Y \leq 13) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 12$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 13$. Per $y \in (12,13)$ si ha $F_Y(y) = P(\log X \leq y) = P(X \leq e^y) = \frac{e^y - e^{12}}{e^{13}-e^{12}}$. Quindi la densità continua richiesta è $f_Y(y) = \frac{e^y}{e^{13}-e^{12}} 1_{(12,13)}(y)$.

`D8)` Si ha $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \int_{12}^{13} e^{-y}\frac{e^y}{e^{13}-e^{12}}dy = \int_{12}^{13}\frac{1}{e^{13}-e^{12}}dy = [\frac{y}{e^{13}-e^{12}}]_{y=12}^{y=13} = \frac{13-12}{e^{13}-e^{12}} = \frac{1}{e^{13}-e^{12}}$.

Metodo alternativo. $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \mathbb{E}[e^{-\log X}] = \mathbb{E}[1/X] = \int_{e^{12}}^{e^{13}} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^{13}-e^{12}}dx = \frac{[\log x]_{x=e^{12}}^{x=e^{13}}}{e^{13}-e^{12}} = \frac{13-12}{e^{13}-e^{12}} = \frac{1}{e^{13}-e^{12}}$.

Esercizio 5.

`D9)` Si ha $P(8|X| > 1) = P(|X| > 1/8) = 1 - P(|X| \leq 1/8) = 1 - P(-1/8 \leq X \leq 1/8) = 1 - (\Phi(1/8) - \Phi(-1/8)) = 1 - (\Phi(1/8) - (1-\Phi(1/8))) = 1 - \Phi(1/8) + 1 - \Phi(1/8) = 2(1-\Phi(1/8))$.

`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma y}{3}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{y}{3}\right) = \Phi\left(\frac{y}{3}\right),$$

da cui si ottiene $\frac{y}{3} = -1$ e $y = -3$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 15 Giugno 2021 - Compito 3

Esercizio 1.
D1) Abbiamo un'urna con 15 palline bianche e 15 palline nere. Si estraggono a caso 2 palline a caso una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre due palline di colori diversi (cioè una bianca e una nera in un qualsiasi ordine).
D2) Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(\text{nero}, \text{bianco})$ sapendo di aver estratto esattamente una pallina bianca, e si verifichi che il risultato non dipende da n.
D3) Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono ripetutamente palline a caso, una alla volta e *con* reinserimento. Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte per avere per la prima volta una pallina bianca. Poi sia b tale che $\frac{e^b}{2} < 1$. Verificare che $\mathbb{E}[e^{bY}] = \frac{e^b/2}{1-e^b/2}$.

Esercizio 2. Un'urna ha 2 palline bianche. Poi si lancia un dado equo: se esce un numero pari si mette una pallina nera nell'urna; se esce un numero dispari si mettono 6 palline nere nell'urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
D4) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

Esercizio 3. Siano $r_1, r_2 \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = r_1r_2(1-r_1)^{x_1}(1-r_2)^{x_2}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
D5) Verificare che $P(X_1 + X_2 = 1) = r_1r_2(2 - r_1 - r_2)$.
D6) Verificare che $P(\{X_2 > X_1\} \cap \{X_1 + X_2 \leq 2\}) = r_1r_2(1-r_2)(2-r_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (e^{13}, e^{14}).
D7) Trovare la densità continua di $Y = \log X$.
D8) Verificare che $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \frac{1}{e^{14}-e^{13}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una v.a. Normale standard (quindi con media 0 e varianza 1).
Verificare che $P(7|X| > 1) = 2(1 - \Phi(1/7))$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 10 e varianza $\sigma^2 > 0$.
Dire per quale valore di y si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 10n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma y}{4}\right) = \Phi(-1).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 3 (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{15}{1}\binom{15}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{15\cdot 15}{\frac{30\cdot 29}{2}} = \frac{15}{29}$.

`D2)` Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte e sia E l'evento che indica la sequenza in questione. Allora si ha

$$P(E|X=1) = \frac{P(E\cap\{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P(E)}{P(X=1)} = \frac{\frac{n}{2n}\frac{n}{2n-1}}{\frac{\binom{n}{1}\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{n}{2n-1}}{\frac{n\cdot n}{2n(2n-1)/2}} = \frac{1}{2}.$$

`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, si ha $\mathbb{E}[e^{bY}] = \sum_{k\geq 1} e^{bk} p_Y(k) = \sum_{k\geq 1} e^{bk}(1-\frac{1}{2})^{k-1}\cdot\frac{1}{2} = \sum_{k\geq 1} e^{bk}(\frac{1}{2})^k = \sum_{k\geq 1}(\frac{e^b}{2})^k = \frac{e^b/2}{1-e^b/2}$, dove nell'ultima uguaglianza abbiamo tenuto conto della condizione $\frac{e^b}{2} < 1$ (in caso contrario la serie sarebbe divergente).

Esercizio 2.

`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(B) = P(B|D^c)P(D^c) + P(B|D)P(D) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{2}{8}\cdot\frac{3}{6} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{8+3}{24} = \frac{11}{24}.$$

Esercizio 3.

`D5)` Si ha $P(X_1+X_2=1) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) = r_1r_2(1-r_1+1-r_2) = r_1r_2(2-r_1-r_2)$.

`D6)` Si ha $P(\{X_2 > X_1\}\cap\{X_1+X_2\leq 2\}) = p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(0,2) = r_1r_2(1-r_2) + r_1r_2(1-r_2)^2 = r_1r_2(1-r_2)(1+1-r_2) = r_1r_2(1-r_2)(2-r_2)$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(13\leq Y\leq 14) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y\leq 13$ e $F_Y(y) = 1$ per $y\geq 14$. Per $y\in(13,14)$ si ha $F_Y(y) = P(\log X\leq y) = P(X\leq e^y) = \frac{e^y-e^{13}}{e^{14}-e^{13}}$. Quindi la densità continua richiesta è $f_Y(y) = \frac{e^y}{e^{14}-e^{13}}1_{(13,14)}(y)$.

`D8)` Si ha $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \int_{13}^{14} e^{-y}\frac{e^y}{e^{14}-e^{13}}dy = \int_{13}^{14}\frac{1}{e^{14}-e^{13}}dy = [\frac{y}{e^{14}-e^{13}}]_{y=13}^{y=14} = \frac{14-13}{e^{14}-e^{13}} = \frac{1}{e^{14}-e^{13}}$.

Metodo alternativo. $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \mathbb{E}[e^{-\log X}] = \mathbb{E}[1/X] = \int_{e^{13}}^{e^{14}}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^{14}-e^{13}}dx = \frac{[\log x]_{x=e^{13}}^{x=e^{14}}}{e^{14}-e^{13}} = \frac{14-13}{e^{14}-e^{13}} = \frac{1}{e^{14}-e^{13}}$.

Esercizio 5.

`D9)` Si ha $P(7|X|>1) = P(|X|>1/7) = 1-P(|X|\leq 1/7) = 1-P(-1/7\leq X\leq 1/7) = 1-(\Phi(1/7)-\Phi(-1/7)) = 1-(\Phi(1/7)-(1-\Phi(1/7))) = 1-\Phi(1/7)+1-\Phi(1/7) = 2(1-\Phi(1/7))$.

`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sqrt{n}}\leq\frac{\sigma y}{4}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sigma\sqrt{n}}\leq\frac{y}{4}\right) = \Phi\left(\frac{y}{4}\right),$$

da cui si ottiene $\frac{y}{4} = -1$ e $y = -4$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 15 Giugno 2021 - Compito 4

Esercizio 1.
D1) Abbiamo un'urna con 15 palline bianche e 15 palline nere. Si estraggono a caso 2 palline a caso una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre due palline di colori diversi (cioè una bianca e una nera in un qualsiasi ordine).
D2) Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(\text{bianco}, \text{nero})$ sapendo di aver estratto esattamente una pallina bianca, e si verifichi che il risultato non dipende da n.
D3) Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono ripetutamente palline a caso, una alla volta e *con* reinserimento. Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte per avere per la prima volta una pallina bianca. Poi sia c tale che $\frac{e^c}{2} < 1$. Verificare che $\mathbb{E}[e^{cY}] = \frac{e^c/2}{1-e^c/2}$.

Esercizio 2. Un'urna ha 2 palline bianche. Poi si lancia un dado equo: se esce un numero pari si mette una pallina nera nell'urna; se esce un numero dispari si mettono 6 palline nere nell'urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
D4) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

Esercizio 3. Siano $r_1, r_2 \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = r_1 r_2 (1-r_1)^{x_1}(1-r_2)^{x_2}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
D5) Verificare che $P(X_1 + X_2 = 1) = r_1 r_2 (2 - r_1 - r_2)$.
D6) Verificare che $P(\{X_1 > X_2\} \cap \{X_1 + X_2 \leq 2\}) = r_1 r_2 (1-r_1)(2-r_1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (e^{14}, e^{15}).
D7) Trovare la densità continua di $Y = \log X$.
D8) Verificare che $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \frac{1}{e^{15}-e^{14}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una v.a. Normale standard (quindi con media 0 e varianza 1).
Verificare che $P(6|X| > 1) = 2(1 - \Phi(1/6))$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 10 e varianza $\sigma^2 > 0$.
Dire per quale valore di y si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 10n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma y}{5}\right) = \Phi(-1).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 4) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{15}{1}\binom{15}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{15\cdot 15}{\frac{30\cdot 29}{2}} = \frac{15}{29}$.

`D2)` Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte e sia E l'evento che indica la sequenza in questione. Allora si ha

$$P(E|X=1) = \frac{P(E\cap\{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P(E)}{P(X=1)} = \frac{\frac{n}{2n}\frac{n}{2n-1}}{\frac{\binom{n}{1}\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{n}{2n-1}}{\frac{n\cdot n}{2n(2n-1)/2}} = \frac{1}{2}.$$

`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, si ha $\mathbb{E}[e^{cY}] = \sum_{k\geq 1} e^{ck}p_Y(k) = \sum_{k\geq 1} e^{ck}(1-\frac{1}{2})^{k-1}\cdot\frac{1}{2} = \sum_{k\geq 1} e^{ck}(\frac{1}{2})^k = \sum_{k\geq 1}(\frac{e^c}{2})^k = \frac{e^c/2}{1-e^c/2}$, dove nell'ultima uguaglianza abbiamo tenuto conto della condizione $\frac{e^c}{2} < 1$ (in caso contrario la serie sarebbe divergente).

Esercizio 2.

`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(B) = P(B|D^c)P(D^c) + P(B|D)P(D) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{2}{8}\cdot\frac{3}{6} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{8+3}{24} = \frac{11}{24}.$$

Esercizio 3.

`D5)` Si ha $P(X_1+X_2=1) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) = r_1r_2(1-r_1+1-r_2) = r_1r_2(2-r_1-r_2)$.

`D6)` Si ha $P(\{X_1>X_2\}\cap\{X_1+X_2\leq 2\}) = p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(2,0) = r_1r_2(1-r_1)+r_1r_2(1-r_1)^2 = r_1r_2(1-r_1)(1+1-r_1) = r_1r_2(1-r_1)(2-r_1)$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(14\leq Y\leq 15) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y\leq 14$ e $F_Y(y) = 1$ per $y\geq 15$. Per $y\in(14,15)$ si ha $F_Y(y) = P(\log X\leq y) = P(X\leq e^y) = \frac{e^y-e^{14}}{e^{15}-e^{14}}$. Quindi la densità continua richiesta è $f_Y(y) = \frac{e^y}{e^{15}-e^{14}}1_{(14,15)}(y)$.

`D8)` Si ha $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \int_{14}^{15} e^{-y}\frac{e^y}{e^{15}-e^{14}}dy = \int_{14}^{15}\frac{1}{e^{15}-e^{14}}dy = [\frac{y}{e^{15}-e^{14}}]_{y=14}^{y=15} = \frac{15-14}{e^{15}-e^{14}} = \frac{1}{e^{15}-e^{14}}$.

Metodo alternativo. $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \mathbb{E}[e^{-\log X}] = \mathbb{E}[1/X] = \int_{e^{14}}^{e^{15}}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^{15}-e^{14}}dx = \frac{[\log x]_{x=e^{14}}^{x=e^{15}}}{e^{15}-e^{14}} = \frac{15-14}{e^{15}-e^{14}} = \frac{1}{e^{15}-e^{14}}$.

Esercizio 5.

`D9)` Si ha $P(6|X|>1) = P(|X|>1/6) = 1-P(|X|\leq 1/6) = 1-P(-1/6\leq X\leq 1/6) = 1-(\Phi(1/6)-\Phi(-1/6)) = 1-(\Phi(1/6)-(1-\Phi(1/6))) = 1-\Phi(1/6)+1-\Phi(1/6) = 2(1-\Phi(1/6))$.

`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma y}{5}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{y}{5}\right) = \Phi\left(\frac{y}{5}\right),$$

da cui si ottiene $\frac{y}{5} = -1$ e $y = -5$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 15 Giugno 2021 - Compito 5

Esercizio 1.
`D1)` Abbiamo un'urna con 15 palline bianche e 15 palline nere. Si estraggono a caso 2 palline a caso una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre due palline di colori diversi (cioè una bianca e una nera in un qualsiasi ordine).
`D2)` Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(\text{bianco}, \text{nero})$ sapendo di aver estratto esattamente una pallina nera, e si verifichi che il risultato non dipende da n.
`D3)` Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono ripetutamente palline a caso, una alla volta e *con* reinserimento. Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte per avere per la prima volta una pallina bianca. Poi sia r tale che $\frac{e^r}{2} < 1$. Verificare che $\mathbb{E}[e^{rY}] = \frac{e^r/2}{1-e^r/2}$.

Esercizio 2. Un'urna ha 2 palline bianche. Poi si lancia un dado equo: se esce un numero pari si mette una pallina nera nell'urna; se esce un numero dispari si mettono 6 palline nere nell'urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina nera.

Esercizio 3. Siano $a_1, a_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta: $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = a_1 a_2 (1 - a_1)^{x_1} (1 - a_2)^{x_2}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
`D5)` Verificare che $P(X_1 + X_2 = 1) = a_1 a_2 (2 - a_1 - a_2)$.
`D6)` Verificare che $P(\{X_1 > X_2\} \cap \{X_1 + X_2 \leq 2\}) = a_1 a_2 (1 - a_1)(2 - a_1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (e^{15}, e^{16}).
`D7)` Trovare la densità continua di $Y = \log X$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \frac{1}{e^{16}-e^{15}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale standard (quindi con media 0 e varianza 1).
Verificare che $P(5|X| > 1) = 2(1 - \Phi(1/5))$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 10 e varianza $\sigma^2 > 0$.
Dire per quale valore di y si ha

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 10n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma y}{6}\right) = \Phi(-1).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 5) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{15}{1}\binom{15}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{15\cdot 15}{\frac{30\cdot 29}{2}} = \frac{15}{29}$.
`D2)` Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere estratte e sia E l'evento che indica la sequenza in questione. Allora si ha

$$P(E|X=1) = \frac{P(E\cap\{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P(E)}{P(X=1)} = \frac{\frac{n}{2n}\frac{n}{2n-1}}{\frac{\binom{n}{1}\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{n}{2n-1}}{\frac{n\cdot n}{2n(2n-1)/2}} = \frac{1}{2}.$$

`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, si ha $\mathbb{E}[e^{rY}] = \sum_{k\geq 1} e^{rk} p_Y(k) = \sum_{k\geq 1} e^{rk}(1-\frac{1}{2})^{k-1}\cdot\frac{1}{2} = \sum_{k\geq 1} e^{rk}(\frac{1}{2})^k = \sum_{k\geq 1}(\frac{e^r}{2})^k = \frac{e^r/2}{1-e^r/2}$, dove nell'ultima uguaglianza abbiamo tenuto conto della condizione $\frac{e^r}{2} < 1$ (in caso contrario la serie sarebbe divergente).

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(N) = P(N|D^c)P(D^c) + P(N|D)P(D) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{6}{8}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{4+9}{24} = \frac{13}{24}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_1+X_2=1) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) = a_1a_2(1-a_1+1-a_2) = a_1a_2(2-a_1-a_2)$.
`D6)` Si ha $P(\{X_1 > X_2\}\cap\{X_1+X_2 \leq 2\}) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(2,0) = a_1a_2(1-a_1) + a_1a_2(1-a_1)^2 = a_1a_2(1-a_1)(1+1-a_1) = a_1a_2(1-a_1)(2-a_1)$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(15 \leq Y \leq 16) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 15$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 16$. Per $y \in (15,16)$ si ha $F_Y(y) = P(\log X \leq y) = P(X \leq e^y) = \frac{e^y - e^{15}}{e^{16}-e^{15}}$. Quindi la densità continua richiesta è $f_Y(y) = \frac{e^y}{e^{16}-e^{15}} 1_{(15,16)}(y)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \int_{15}^{16} e^{-y}\frac{e^y}{e^{16}-e^{15}}dy = \int_{15}^{16}\frac{1}{e^{16}-e^{15}}dy = [\frac{y}{e^{16}-e^{15}}]_{y=15}^{y=16} = \frac{16-15}{e^{16}-e^{15}} = \frac{1}{e^{16}-e^{15}}$.
Metodo alternativo. $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \mathbb{E}[e^{-\log X}] = \mathbb{E}[1/X] = \int_{e^{15}}^{e^{16}} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^{16}-e^{15}}dx = \frac{[\log x]_{x=e^{15}}^{x=e^{16}}}{e^{16}-e^{15}} = \frac{16-15}{e^{16}-e^{15}} = \frac{1}{e^{16}-e^{15}}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si ha $P(5|X| > 1) = P(|X| > 1/5) = 1 - P(|X| \leq 1/5) = 1 - P(-1/5 \leq X \leq 1/5) = 1 - (\Phi(1/5) - \Phi(-1/5)) = 1 - (\Phi(1/5) - (1-\Phi(1/5))) = 1 - \Phi(1/5) + 1 - \Phi(1/5) = 2(1-\Phi(1/5))$.
`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma y}{6}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{y}{6}\right) = \Phi\left(\frac{y}{6}\right),$$

da cui si ottiene $\frac{y}{6} = -1$ e $y = -6$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 15 Giugno 2021 - Compito 6

Esercizio 1.
D1) Abbiamo un'urna con 15 palline bianche e 15 palline nere. Si estraggono a caso 2 palline a caso una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre due palline di colori diversi (cioè una bianca e una nera in un qualsiasi ordine).
D2) Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(\text{nero}, \text{bianco})$ sapendo di aver estratto esattamente una pallina nera, e si verifichi che il risultato non dipende da n.
D3) Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono ripetutamente palline a caso, una alla volta e *con* reinserimento. Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte per avere per la prima volta una pallina bianca. Poi sia s tale che $\frac{e^s}{2} < 1$. Verificare che $\mathbb{E}[e^{sY}] = \frac{e^s/2}{1-e^s/2}$.

Esercizio 2. Un'urna ha 2 palline bianche. Poi si lancia un dado equo: se esce un numero pari si mette una pallina nera nell'urna; se esce un numero dispari si mettono 6 palline nere nell'urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
D4) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina nera.

Esercizio 3. Siano $a_1, a_2 \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = a_1a_2(1-a_1)^{x_1}(1-a_2)^{x_2}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
D5) Verificare che $P(X_1 + X_2 = 1) = a_1a_2(2 - a_1 - a_2)$.
D6) Verificare che $P(\{X_2 > X_1\} \cap \{X_1 + X_2 \leq 2\}) = a_1a_2(1-a_2)(2-a_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (e^{16}, e^{17}).
D7) Trovare la densità continua di $Y = \log X$.
D8) Verificare che $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \frac{1}{e^{17}-e^{16}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una v.a. Normale standard (quindi con media 0 e varianza 1).
Verificare che $P(4|X| > 1) = 2(1 - \Phi(1/4))$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 10 e varianza $\sigma^2 > 0$.
Dire per quale valore di y si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 10n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma y}{7}\right) = \Phi(-1).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 6) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

D1) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{15}{1}\binom{15}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{15\cdot 15}{\frac{30\cdot 29}{2}} = \frac{15}{29}$.

D2) Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere estratte e sia E l'evento che indica la sequenza in questione. Allora si ha

$$P(E|X=1) = \frac{P(E\cap\{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P(E)}{P(X=1)} = \frac{\frac{n}{2n}\frac{n}{2n-1}}{\frac{\binom{n}{1}\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{n}{2n-1}}{\frac{n\cdot n}{2n(2n-1)/2}} = \frac{1}{2}.$$

D3) Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, si ha $\mathbb{E}[e^{sY}] = \sum_{k\geq 1} e^{sk}p_Y(k) = \sum_{k\geq 1} e^{sk}(1-\frac{1}{2})^{k-1}\cdot\frac{1}{2} = \sum_{k\geq 1} e^{sk}(\frac{1}{2})^k = \sum_{k\geq 1}(\frac{e^s}{2})^k = \frac{e^s/2}{1-e^s/2}$, dove nell'ultima uguaglianza abbiamo tenuto conto della condizione $\frac{e^s}{2} < 1$ (in caso contrario la serie sarebbe divergente).

Esercizio 2.

D4) Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(N) = P(N|D^c)P(D^c) + P(N|D)P(D) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{6}{8}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{4+9}{24} = \frac{13}{24}.$$

Esercizio 3.

D5) Si ha $P(X_1+X_2=1) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) = a_1a_2(1-a_1+1-a_2) = a_1a_2(2-a_1-a_2)$.

D6) Si ha $P(\{X_2 > X_1\}\cap\{X_1+X_2 \leq 2\}) = p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(0,2) = a_1a_2(1-a_2) + a_1a_2(1-a_2)^2 = a_1a_2(1-a_2)(1+1-a_2) = a_1a_2(1-a_2)(2-a_2)$.

Esercizio 4.

D7) Si ha $P(16 \leq Y \leq 17) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 16$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 17$. Per $y \in (16,17)$ si ha $F_Y(y) = P(\log X \leq y) = P(X \leq e^y) = \frac{e^y - e^{16}}{e^{17}-e^{16}}$. Quindi la densità continua richiesta è $f_Y(y) = \frac{e^y}{e^{17}-e^{16}}1_{(16,17)}(y)$.

D8) Si ha $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \int_{16}^{17} e^{-y}\frac{e^y}{e^{17}-e^{16}}dy = \int_{16}^{17}\frac{1}{e^{17}-e^{16}}dy = [\frac{y}{e^{17}-e^{16}}]_{y=17}^{y=16} = \frac{17-16}{e^{17}-e^{16}} = \frac{1}{e^{17}-e^{16}}$.

Metodo alternativo. $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \mathbb{E}[e^{-\log X}] = \mathbb{E}[1/X] = \int_{e^{16}}^{e^{17}}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^{17}-e^{16}}dx = \frac{[\log x]_{x=e^{16}}^{x=e^{17}}}{e^{17}-e^{16}} = \frac{17-16}{e^{17}-e^{16}} = \frac{1}{e^{17}-e^{16}}$.

Esercizio 5.

D9) Si ha $P(4|X| > 1) = P(|X| > 1/4) = 1 - P(|X| \leq 1/4) = 1 - P(-1/4 \leq X \leq 1/4) = 1 - (\Phi(1/4) - \Phi(-1/4)) = 1 - (\Phi(1/4) - (1-\Phi(1/4))) = 1 - \Phi(1/4) + 1 - \Phi(1/4) = 2(1-\Phi(1/4))$.

D10) Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma y}{7}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{y}{7}\right) = \Phi\left(\frac{y}{7}\right),$$

da cui si ottiene $\frac{y}{7} = -1$ e $y = -7$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 15 Giugno 2021 - Compito 7

Esercizio 1.
D1) Abbiamo un'urna con 15 palline bianche e 15 palline nere. Si estraggono a caso 2 palline a caso una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre due palline di colori diversi (cioè una bianca e una nera in un qualsiasi ordine).
D2) Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(\text{nero}, \text{bianco})$ sapendo di aver estratto esattamente una pallina nera, e si verifichi che il risultato non dipende da n.
D3) Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono ripetutamente palline a caso, una alla volta e *con* reinserimento. Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte per avere per la prima volta una pallina bianca. Poi sia b tale che $\frac{e^b}{2} < 1$. Verificare che $\mathbb{E}[e^{bY}] = \frac{e^b/2}{1-e^b/2}$.

Esercizio 2. Un'urna ha 2 palline bianche. Poi si lancia un dado equo: se esce un numero pari si mette una pallina nera nell'urna; se esce un numero dispari si mettono 6 palline nere nell'urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
D4) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina nera.

Esercizio 3. Siano $b_1, b_2 \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = b_1 b_2 (1-b_1)^{x_1}(1-b_2)^{x_2}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
D5) Verificare che $P(X_1 + X_2 = 1) = b_1 b_2 (2 - b_1 - b_2)$.
D6) Verificare che $P(\{X_1 > X_2\} \cap \{X_1 + X_2 \leq 2\}) = b_1 b_2 (1-b_1)(2-b_1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (e^{17}, e^{18}).
D7) Trovare la densità continua di $Y = \log X$.
D8) Verificare che $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \frac{1}{e^{18}-e^{17}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una v.a. Normale standard (quindi con media 0 e varianza 1).
Verificare che $P(3|X| > 1) = 2(1 - \Phi(1/3))$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 10 e varianza $\sigma^2 > 0$.
Dire per quale valore di y si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 10n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma y}{8}\right) = \Phi(-1).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 7) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{15}{1}\binom{15}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{15\cdot 15}{\frac{30\cdot 29}{2}} = \frac{15}{29}$.
D2) Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere estratte e sia E l'evento che indica la sequenza in questione. Allora si ha

$$P(E|X=1) = \frac{P(E\cap\{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P(E)}{P(X=1)} = \frac{\frac{n}{2n}\frac{n}{2n-1}}{\frac{\binom{n}{1}\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{n}{2n-1}}{\frac{n\cdot n}{2n(2n-1)/2}} = \frac{1}{2}.$$

D3) Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, si ha $\mathbb{E}[e^{bY}] = \sum_{k\geq 1} e^{bk} p_Y(k) = \sum_{k\geq 1} e^{bk}(1-\frac{1}{2})^{k-1}\cdot\frac{1}{2} = \sum_{k\geq 1} e^{bk}(\frac{1}{2})^k = \sum_{k\geq 1}(\frac{e^b}{2})^k = \frac{e^b/2}{1-e^b/2}$, dove nell'ultima uguaglianza abbiamo tenuto conto della condizione $\frac{e^b}{2} < 1$ (in caso contrario la serie sarebbe divergente).

Esercizio 2.
D4) Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(N) = P(N|D^c)P(D^c) + P(N|D)P(D) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{6}{8}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{4+9}{24} = \frac{13}{24}.$$

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_1+X_2=1) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) = b_1b_2(1-b_1+1-b_2) = b_1b_2(2-b_1-b_2)$.
D6) Si ha $P(\{X_1 > X_2\}\cap\{X_1+X_2\leq 2\}) = p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(2,0) = b_1b_2(1-b_1)+b_1b_2(1-b_1)^2 = b_1b_2(1-b_1)(1+1-b_1) = b_1b_2(1-b_1)(2-b_1)$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(17\leq Y\leq 18) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y\leq 17$ e $F_Y(y) = 1$ per $y\geq 18$. Per $y\in(17,18)$ si ha $F_Y(y) = P(\log X\leq y) = P(X\leq e^y) = \frac{e^y-e^{17}}{e^{18}-e^{17}}$. Quindi la densità continua richiesta è $f_Y(y) = \frac{e^y}{e^{18}-e^{17}}1_{(17,18)}(y)$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \int_{17}^{18} e^{-y}\frac{e^y}{e^{18}-e^{17}}dy = \int_{17}^{18}\frac{1}{e^{18}-e^{17}}dy = [\frac{y}{e^{18}-e^{17}}]_{y=17}^{y=18} = \frac{18-17}{e^{18}-e^{17}} = \frac{1}{e^{18}-e^{17}}$.
Metodo alternativo. $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \mathbb{E}[e^{-\log X}] = \mathbb{E}[1/X] = \int_{e^{17}}^{e^{18}}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^{18}-e^{17}}dx = \frac{[\log x]_{x=e^{17}}^{x=e^{18}}}{e^{18}-e^{17}} = \frac{18-17}{e^{18}-e^{17}} = \frac{1}{e^{18}-e^{17}}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(3|X| > 1) = P(|X| > 1/3) = 1 - P(|X|\leq 1/3) = 1 - P(-1/3\leq X\leq 1/3) = 1-(\Phi(1/3)-\Phi(-1/3)) = 1-(\Phi(1/3)-(1-\Phi(1/3))) = 1-\Phi(1/3)+1-\Phi(1/3) = 2(1-\Phi(1/3))$.
D10) Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sqrt{n}}\leq\frac{\sigma y}{8}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sigma\sqrt{n}}\leq\frac{y}{8}\right) = \Phi\left(\frac{y}{8}\right),$$

da cui si ottiene $\frac{y}{8} = -1$ e $y = -8$.

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 15 Giugno 2021 - Compito 8

Esercizio 1.
`D1)` Abbiamo un'urna con 15 palline bianche e 15 palline nere. Si estraggono a caso 2 palline a caso una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre due palline di colori diversi (cioè una bianca e una nera in un qualsiasi ordine).
`D2)` Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e *senza* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(\text{bianco}, \text{nero})$ sapendo di aver estratto esattamente una pallina nera, e si verifichi che il risultato non dipende da n.
`D3)` Abbiamo un'urna con n palline bianche e n palline nere, dove $n \geq 1$ è un numero intero. Si estraggono ripetutamente palline a caso, una alla volta e *con* reinserimento. Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte per avere per la prima volta una pallina bianca. Poi sia c tale che $\frac{e^c}{2} < 1$. Verificare che $\mathbb{E}[e^{cY}] = \frac{e^c/2}{1-e^c/2}$.

Esercizio 2. Un'urna ha 2 palline bianche. Poi si lancia un dado equo: se esce un numero pari si mette una pallina nera nell'urna; se esce un numero dispari si mettono 6 palline nere nell'urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina nera.

Esercizio 3. Siano $b_1, b_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta: $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = b_1 b_2 (1 - b_1)^{x_1} (1 - b_2)^{x_2}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
`D5)` Verificare che $P(X_1 + X_2 = 1) = b_1 b_2 (2 - b_1 - b_2)$.
`D6)` Verificare che $P(\{X_2 > X_1\} \cap \{X_1 + X_2 \leq 2\}) = b_1 b_2 (1 - b_2)(2 - b_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (e^{18}, e^{19}).
`D7)` Trovare la densità continua di $Y = \log X$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \frac{1}{e^{19}-e^{18}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale standard (quindi con media 0 e varianza 1).
Verificare che $P(2|X| > 1) = 2(1 - \Phi(1/2))$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 10 e varianza $\sigma^2 > 0$.
Dire per quale valore di y si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 10n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma y}{9}\right) = \Phi(-1).$$

Cenno alle soluzioni (Compito 8) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{15}{1}\binom{15}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{15\cdot 15}{\frac{30\cdot 29}{2}} = \frac{15}{29}$.

`D2)` Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere estratte e sia E l'evento che indica la sequenza in questione. Allora si ha

$$P(E|X=1) = \frac{P(E\cap\{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P(E)}{P(X=1)} = \frac{\frac{n}{2n}\frac{n}{2n-1}}{\frac{\binom{n}{1}\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{n}{2n-1}}{\frac{n\cdot n}{2n(2n-1)/2}} = \frac{1}{2}.$$

`D3)` Con riferimento alla distribuzione Geometrica traslata di parametro $p = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, si ha $\mathbb{E}[e^{cY}] = \sum_{k\geq 1} e^{ck} p_Y(k) = \sum_{k\geq 1} e^{ck}(1-\frac{1}{2})^{k-1}\cdot\frac{1}{2} = \sum_{k\geq 1} e^{ck}(\frac{1}{2})^k = \sum_{k\geq 1}(\frac{e^c}{2})^k = \frac{e^c/2}{1-e^c/2}$, dove nell'ultima uguaglianza abbiamo tenuto conto della condizione $\frac{e^c}{2} < 1$ (in caso contrario la serie sarebbe divergente).

Esercizio 2.

`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(N) = P(N|D^c)P(D^c) + P(N|D)P(D) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{6}{8}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{4+9}{24} = \frac{13}{24}.$$

Esercizio 3.

`D5)` Si ha $P(X_1+X_2=1) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) = b_1b_2(1-b_1+1-b_2) = b_1b_2(2-b_1-b_2)$.

`D6)` Si ha $P(\{X_2>X_1\}\cap\{X_1+X_2\leq 2\}) = p_{X_1,X_2}(0,1)+p_{X_1,X_2}(0,2) = b_1b_2(1-b_2)+b_1b_2(1-b_2)^2 = b_1b_2(1-b_2)(1+1-b_2) = b_1b_2(1-b_2)(2-b_2)$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(18\leq Y\leq 19) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y\leq 18$ e $F_Y(y) = 1$ per $y\geq 19$. Per $y\in(18,19)$ si ha $F_Y(y) = P(\log X\leq y) = P(X\leq e^y) = \frac{e^y-e^{18}}{e^{19}-e^{18}}$. Quindi la densità continua richiesta è $f_Y(y) = \frac{e^y}{e^{19}-e^{18}}1_{(18,19)}(y)$.

`D8)` Si ha $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \int_{18}^{19} e^{-y}\frac{e^y}{e^{19}-e^{18}}dy = \int_{18}^{19}\frac{1}{e^{19}-e^{18}}dy = [\frac{y}{e^{19}-e^{18}}]_{y=18}^{y=19} = \frac{19-18}{e^{19}-e^{18}} = \frac{1}{e^{19}-e^{18}}$.

Metodo alternativo. $\mathbb{E}[e^{-Y}] = \mathbb{E}[e^{-\log X}] = \mathbb{E}[1/X] = \int_{e^{18}}^{e^{19}}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^{19}-e^{18}}dx = \frac{[\log x]_{x=e^{18}}^{x=e^{19}}}{e^{19}-e^{18}} = \frac{19-18}{e^{19}-e^{18}} = \frac{1}{e^{19}-e^{18}}$.

Esercizio 5.

`D9)` Si ha $P(2|X|>1) = P(|X|>1/2) = 1-P(|X|\leq 1/2) = 1-P(-1/2\leq X\leq 1/2) = 1-(\Phi(1/2)-\Phi(-1/2)) = 1-(\Phi(1/2)-(1-\Phi(1/2))) = 1-\Phi(1/2)+1-\Phi(1/2) = 2(1-\Phi(1/2))$.

`D10)` Per il Teorema Limite Centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sqrt{n}}\leq\frac{\sigma y}{9}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-10n}{\sigma\sqrt{n}}\leq\frac{y}{9}\right) = \Phi\left(\frac{y}{9}\right),$$

da cui si ottiene $\frac{y}{9} = -1$ e $y = -9$.