Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2022-2023. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 1 Settembre 2023

Esercizio 1. Un'urna ha 2 palline bianche, 3 rosse e 3 nere.
D1) Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e senza reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre 2 palline bianche e 1 nera (in un qualsiasi ordine).
D2) Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e senza reinserimento. Calcolare la probabilità di non estrarre palline nere.
D3) Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e con reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

Esercizio 2. Si lancia ripetutamente una moneta equa. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta testa. Se X assume un numero pari, si lancia un dado con i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 5$; se X assume un numero dispari, si lancia un dado con i numeri $2, 2, 3, 4, 5, 6$.
D4) Calcolare la probabilità che esca un numero dispari nel lancio del dado.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{9} \quad \text{per } x_1, x_2 \in \{0, 1, 2\} \text{ interi.}$$

D5) Calcolare $P(X_1X_2 = 0)$.
D6) Calcolare $P(X_1 + X_2 \leq 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^x}{e^3-1}1_{(0,3)}(x)$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^2$.
D8) Verificare che $P(X > 1|X < 2) = \frac{e}{e+1}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria Normale con media 2 e varianza 25.
Calcolare $P(X > 3)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
D10) Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 81.
Calcolare $P(250 < X_1 + \cdots + X_{100} < 280)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{3}{56}$.

`D2)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{5}{3}\binom{3}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$.

`D3)` La probabilità richiesta è $\binom{2}{1}(\frac{2}{8})^1(1-\frac{2}{8})^{2-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

Esercizio 2.
`D4)` Sia $E = \{X \in \{2, 4, 6, \ldots\}\}$. Per la formula delle probabilità totali si ha

$$P(D) = P(D|E)P(E) + P(D|E^c)P(E^c) = \frac{4}{6}P(E) + \frac{2}{6}P(E^c) = \frac{2P(E) + P(E^c)}{3}.$$

Inoltre $P(E) = \sum_{n\geq 1}(1-\frac{1}{2})^{2n-1}\frac{1}{2} = \sum_{n\geq 1}(\frac{1}{2})^{2n} = \sum_{n\geq 1}(\frac{1}{4})^n = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$, da cui segue $P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Quindi

$$P(D) = \frac{2/3 + 2/3}{3} = \frac{4}{9}.$$

Esercizio 3.
`D5)` La probabilità richiesta è

$$P(X_1X_2 = 0) = \frac{\#\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(2,0)\}}{9} = \frac{5}{9}.$$

`D6)` La probabilità richiesta è

$$P(X_1 + X_2 \leq 2) = \frac{\#\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(2,0),(1,1)\}}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0 \leq Y \leq 9) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 9$. Per $0 < y < 9$ si ha $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{e^x}{e^3-1}dx = \frac{[e^x]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}}{e^3-1} = \frac{e^{\sqrt{y}}-1}{e^3-1}$.

`D8)` Si ha $P(X > 1|X < 2) = \frac{P(\{X>1\}\cap\{X<2\})}{P(X<2)} = \frac{P(1<X<2)}{P(X<2)} = \frac{\int_1^2 \frac{e^x}{e^3-1}dx}{\int_0^2 \frac{e^x}{e^3-1}dx} = \frac{\frac{1}{e^3-1}[e^x]_{x=1}^{x=2}}{\frac{1}{e^3-1}[e^x]_{x=0}^{x=2}} = \frac{e^2-e}{e^2-1} = \frac{e(e-1)}{(e+1)(e-1)} = \frac{e}{e+1}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si ha $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \Phi(\frac{3-2}{\sqrt{25}}) = 1 - \Phi(1/5)$.

`D10)` Si ha $P(250 < X_1 + \cdots + X_{100} < 280) = P\left(\frac{250-100\cdot 2}{\sqrt{81}\sqrt{100}} < \frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 2}{\sqrt{81}\sqrt{100}} < \frac{280-100\cdot 2}{\sqrt{81}\sqrt{100}}\right) \approx \Phi(\frac{280-200}{\sqrt{81}\sqrt{100}}) - \Phi(\frac{250-200}{\sqrt{81}\sqrt{100}}) = \Phi(8/9) - \Phi(5/9)$.