ES. : TROVARE UNA FORMULA CHIUSA PER

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} 3^{i+j} .$$

ABBIAMO CHE

$$\sum_{j=0}^{m} 3^{i+j} = \sum_{j=0}^{m} 3^{i} \cdot 3^{j} = 3^{i} \cdot \sum_{j=0}^{m} 3^{j}$$

$$\underset{(5.1.1)}{=} 3^{i} \cdot \left(\frac{3^{m+1} - 1}{3 - 1} \right) = 3^{i} \cdot \frac{3^{m+1} - 1}{2}$$

QUINDI

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} 3^{i+j} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^{i} \cdot \frac{3^{m+1}-1}{2} = \frac{3^{m+1}-1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 3^{i}$$

$$= \frac{3^{m+1}-1}{2} \cdot \frac{3^{n+1}-1}{2}$$

__ES.__ : TROVARE UNA FORMULA CHIUSA O ASINTOTICAMENTE CHIUSA PER

$$\sum_{k=1}^{n} 2k \cdot \ln(k) .$$

LA FUNZIONE $f(x) \stackrel{def}{=} 2 \cdot x \cdot \ln(x)$ NON È UN POLINOMIO MA È CONTINUA PER $x>0$ E MONOTONA CRESCENTE PER $x>0$.

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE ALLORA

$$\int_1^n 2x \ln(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot k \cdot \ln(k) \leq 2 \cdot n \cdot \ln(n) + \int_1^n 2x \ln(x)\,dx$$

PER $\forall\, n \in \mathbb{P}$. MA

$$\int_1^n 2x \ln(x)\,dx = \left[x^2 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2} \right]_1^n =$$

$$= \left(n^2 \cdot \ln(n) - \frac{n^2}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right)$$

PERTANTO

$$n^2\cdot\ln(n)-\frac{n^2}{2}+\frac{1}{2}\leq\sum_{k=1}^{n}2\cdot k\cdot\ln(k)\leq 2\cdot n\cdot\ln(n)+n^2\cdot\ln(n)-\frac{n^2}{2}+\frac{1}{2}$$

PER $\forall n\in\mathbb{P}$. IL TERMINE CHE VA PIÙ VELOCEMENTE ALL'INFINITO PER $n\to+\infty$ A SINISTRA È $n^2\cdot\ln(n)$ E A DESTRA PURE. QUINDI

$$1-\frac{1}{2\cdot\ln(n)}+\frac{1}{2\cdot n^2\ln(n)}\leq\frac{\sum_{k=1}^{n}2k\ln(k)}{n^2\cdot\ln(n)}\leq\frac{2}{n}+1-\frac{1}{2\ln(n)}+\frac{1}{2n^2\ln(n)}$$

PERTANTO PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot k \cdot \ln(k)}{n^2 \cdot \ln(n)} = 1$$

PERTANTO

$$\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot k \cdot \ln(k) \approx n^2 \cdot \ln(n)$$

PER $n \to +\infty$.

ES. : TROVARE UNA FORMULA CHIUSA PER

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{m} 2^{i} \cdot 3^{j}.$$

CALCOLIAMO PRIMA IL PRODOTTO INTERNO.

$$\prod_{j=1}^{m} 2^{i} \cdot 3^{j} = 2^{i} \cdot 3^{1} \cdot 2^{i} \cdot 3^{2} \cdot \ldots \cdot 2^{i} \cdot 3^{m}$$

$$= \left(2^{i}\right)^{m} \cdot 3^{1+2+\ldots+m}$$

$$= 2^{i \cdot m} \cdot 3^{\binom{m+1}{2}}$$

PERTANTO

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} 2^{i} \cdot 3^{j} = \prod_{i=1}^{n} 2^{in} \cdot 3^{\binom{n+1}{2}}$$

$$= 2^{n} \cdot 3^{\binom{n+1}{2}} \cdot 2^{2n} \cdot 3^{\binom{n+1}{2}} \cdot \ldots \cdot 2^{n \cdot n} \cdot 3^{\binom{n+1}{2}}$$

$$= 3^{\binom{n+1}{2} \cdot n} \, 2^{n+2n+\ldots+n \cdot n}$$

$$= 3^{n \cdot \binom{n+1}{2}} \cdot 2^{n(1+2+\ldots+n)}$$

$$= 3^{n\binom{n+1}{2}} \cdot 2^{n\binom{n+1}{2}} = 6^{n \cdot \binom{n+1}{2}}.$$