Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
**Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)**
*Anno Accademico:* 2021-2022. *Titolare del corso:* Claudio Macci
**Appello del 2 Settembre 2022**

**Esercizio 1**. Un'urna ha tre palline numerate con i numeri $0, 1, 2$.
D1) Si estraggono a caso 2 palline *in blocco* e sia $X$ la variabile aleatoria che indica il prodotto dei due numeri estratti. Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
D2) Si estraggono a caso $n \geq 2$ palline, una alla volta e *con* reinserimento. Si verifichi che la probabilità di estrarre $n$ volte lo stesso numero è uguale a $\frac{1}{3^{n-1}}$.
D3) Si estraggono a caso palline ripetutamente, una alla volta e *con* reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre per la prima volta il numero 0 ad una estrazioni dispari (la prima, la terza, la quinta, ecc.).

**Esercizio 2**. Un'urna ha 4 palline numerate con i numeri $1, 2, 3, 4$. Si estrae una pallina a caso e viene reinserita insieme ad un'altra con lo stesso numero. Per $k_1, k_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$, calcolare la probabilità che il primo numero estratto sia $k_1$, sapendo di aver estratto il numero $k_2$ alla seconda estrazione.
*Suggerimento.* Conviene fare riferimento ai casi $k_1 = k_2$ e $k_1 \neq k_2$.

**Esercizio 3**. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, 1) = \frac{1}{8} \quad \text{per } x_1 \in \{1, 2, 3, 4\};$$

$$p_{X_1,X_2}(x_1, 2) = \frac{1}{10} \quad \text{per } x_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

D5) Calcolare $P(X_1 \geq 3)$.
D6) Verificare che $X_1$ e $X_2$ *non* sono indipendenti.

**Esercizio 4**. Sia $X$ una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{2}{x^3} 1_{(1,\infty)}(x)$.
D7) Si verifichi che $Y = \log X$ ha distribuzione esponenziale con parametro $\lambda = 2$.
D8) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e si verifichi anche che $\mathbb{E}[X^2] = +\infty$.

**Esercizio 5**. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia $X$ una variabile aleatoria Normale standard (cioè con media 0 e varianza 1).
Calcolare $P(-2 \leq X \leq 1)$ esprimendo il risultato con la funzione $\Phi$ con argomenti positivi.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 9. Dire per quale valore di $z$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} \geq z\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{5}\right).$$

**Cenno alle soluzioni** (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

**Esercizio 1**.
`D1)` I sottoinsiemi $\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}$ hanno tutti la stessa probabilità di essere estratti, cioè $\frac{1}{3}$. In corrispondenza i valori del prodotto dei due numeri estratti sono uguali a 0 (nei primi due casi) e 2 (nell'ultimo caso). Quindi $p_X(0)=\frac{2}{3}$ e $p_X(2)=\frac{1}{3}$, da cui segue $\mathbb{E}[X]=0\cdot p_X(0)+2\cdot p_X(2)=\frac{2}{3}$.
`D2)` Ciascuna delle probabilità di estrarre $n$ volte 0, $n$ volte 1, e $n$ volte 2 è uguale a $(\frac{1}{3})^n$ (per indipendenza degli eventi legati ad estrazioni diverse). Quindi la probabilità richiesta è uguale a $(\frac{1}{3})^n+(\frac{1}{3})^n+(\frac{1}{3})^n=3\cdot(\frac{1}{3})^n=\frac{1}{3^{n-1}}$.
`D3)` Sia $Y$ la variabile aleatoria che conta il numero di estrazioni necessarie per estrarre per la prima volta il numero 0. Allora $p_Y(k)=(1-\frac{1}{3})^{k-1}\cdot\frac{1}{3}$ per ogni $k\geq 1$ intero. La probabilità richiesta è uguale a $\sum_{h\geq 1}p_Y(2h-1)=\sum_{h\geq 1}(1-\frac{1}{3})^{2h-1-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\sum_{h\geq 1}(\frac{2}{3})^{2h-2}=\frac{1}{3}\sum_{h\geq 1}(\frac{2}{3})^{2(h-1)}=\frac{1}{3}\sum_{h\geq 1}(\frac{4}{9})^{h-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-4/9}=\frac{1}{3}\frac{9}{5}=\frac{3}{5}$.

**Esercizio 2**.
`D4)` Con notazioni ovvie siamo interessati a calcolare $P(E_{k_1}|F_{k_2})$ e per la formula di Bayes si ha

$$P(E_{k_1}|F_{k_2})=\frac{P(F_{k_2}|E_{k_1})P(E_{k_1})}{P(F_{k_2})}.$$

Si ha $P(E_{k_1})=\frac{1}{4}$ (ovvio). Inoltre, per la formula delle probabilità totali, si ha $P(F_{k_2})=\frac{1}{5}\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\frac{1}{4}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$ (per ogni $k_2\in\{1,2,3,4\}$; del resto, per costruzione, è ragionavole che questi valori siano tutti uguali tra loro). Quindi, osservando che $P(E_{k_1})$ e $P(F_{k_2})$ si semplificano, si ha

$$P(E_{k_1}|F_{k_2})=\frac{P(F_{k_2}|E_{k_1})P(E_{k_1})}{P(F_{k_2})}=P(F_{k_2}|E_{k_1})=\begin{cases}2/5 & \text{se } k_1=k_2\\ 1/5 & \text{se } k_1\neq k_2.\end{cases}$$

*Commento.* Si ha $\sum_{k_1=1}^4 P(E_{k_1}|F_{k_2})=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=1$ in accordo con la teoria.

**Esercizio 3**.
`D5)` Si ha $P(X_1\geq 3)=p_{X_1,X_2}(3,1)+p_{X_1,X_2}(4,1)+p_{X_1,X_2}(3,2)+p_{X_1,X_2}(4,2)+p_{X_1,X_2}(5,2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{10+10+8+8+8}{80}=\frac{44}{80}=\frac{11}{20}$.
`D6)` Basta osservare che $p_{X_1,X_2}(5,1)=0$ e $p_{X_1}(5)p_{X_2}(1)\neq 0$; infatti $p_{X_1}(5)=p_{X_1,X_2}(5,2)=\frac{1}{10}$ e $p_{X_2}(1)=p_{X_1,X_2}(1,1)+\cdots+p_{X_1,X_2}(4,1)=\frac{4}{8}$, e quindi $p_{X_1}(5)p_{X_2}(1)=\frac{1}{20}$.

**Esercizio 4**.
`D7)` Si ha $P(Y>0)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 0$. Per $y>0$ si ha $F_Y(y)=P(\log X\leq y)=P(X\leq e^y)=\int_1^{e^y}\frac{2}{x^3}dx=2[-\frac{x^{-2}}{2}]_{x=1}^{x=e^y}=-e^{-2y}+1$. Quindi si ha la distribuzione esponenziale richiesta.
`D8)` Per $k=1$ e $k=2$ si ha $\mathbb{E}[X^k]=\int_1^\infty x^k\frac{2}{x^3}dx=2\int_1^\infty x^{k-3}dx$. Quindi per $k=1$ si ha $\mathbb{E}[X]=2\int_1^\infty x^{-2}dx=2[\frac{x^{-1}}{-1}]_{x=1}^{x=\infty}=2(0-(-1))=2$, e per $k=2$ si ha $\mathbb{E}[X^2]=2\int_1^\infty x^{-1}dx=2[\log x]_{x=1}^{x=\infty}=+\infty$.

**Esercizio 5**.
`D9)` Si ha $P(-2\leq X\leq 1)=\Phi(1)-\Phi(-2)=\Phi(1)-(1-\Phi(2))=\Phi(1)+\Phi(2)-1$.
`D10)` Si tratta di dividere membro a membro per $\sqrt{9}=3$ nella disuguaglianza che descrive l'evento, e poi si applica il Teorema Limite Centrale:

$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-2n}{\sqrt{n}}\geq z\right)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-2n}{3\sqrt{n}}\geq\frac{z}{3}\right)\to 1-\Phi\left(\frac{z}{3}\right)\ \text{per } n\to\infty.$$

Quindi si deve avere $\frac{z}{3}=\frac{2}{5}$, da cui segue $z=\frac{6}{5}$.