Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 9 Febbraio 2021 - Compito 1

Esercizio 1. Abbiamo un mazzo di 8 carte numerate da 1 a 8. Si estraggono ripetutamente carte, una alla volta e *con* reinserimento.
`D1)` Nel caso di 4 estrazioni, calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina con uno dei numeri $1, 2, 3, 4$.
`D2)` Nel caso di 11 estrazioni, calcolare la speranza matematica della variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte con uno dei numeri $1, 2, 3, 4, 5$.
`D3)` Nel caso di 3 estrazioni, calcolare la probabilità di ottenere la sequenza $(2, \text{pari}, \text{dispari})$ sapendo di aver estratto esattamente due numeri pari.

Esercizio 2. Un'urna ha 1 pallina bianca e 2 nere. Si lanciano 2 monete eque: se esce la sequenza $(\text{testa}, \text{testa})$ si mettono 2 palline bianche nell'urna, altrimenti l'urna resta inalterata. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

Esercizio 3. Siano $q_1, q_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Poi siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti e tali che:

$$p_{X_1}(x_1) = (1 - q_1)^{x_1 - 1} q_1 \text{ per } x_1 \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_2}(x_2) = (1 - q_2)^{x_2} q_2 \text{ per } x_2 \geq 0 \text{ intero.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_2 = 2X_1) = \frac{q_1 q_2 (1-q_2)^2}{1-(1-q_1)(1-q_2)^2}$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^x}{e^{52}-e^{50}} 1_{(50,52)}(x)$.
`D7)` Verificare che $Y = e^X$ ha distribuzione uniforme su un intervallo opportuno da determinare.
`D8)` Calcolare $\mathbb{E}[Y - e^{50}]$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 11^2 = 121$.
Dire per quale valore di $y > 1$ si ha $P(0 < X < y) = \Phi(2) - \Phi(-\frac{1}{11})$.
`D10)` Siano $\{X_1, \ldots, X_{100}\}$ v.a. i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 18$.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > \frac{118}{18})$ usando l'approssimazione Normale, ed esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 1) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Con riferimento all'evento complementare, la probabilità richiesta è $1-\binom{4}{0}(\frac{1}{2})^4=\frac{15}{16}$.
`D2)` Per la formule sulla distribuzione Binomiale la speranza matematica richiesta è $11\cdot\frac{5}{8}=\frac{55}{8}$.
`D3)` Sia E l'evento "viene estratta la sequenza indicata" e sia X la variabile aleatoria che indica il numero di carte con numero pari estratte. Allora la probabilità condizionata richiesta è

$$P(E|X=2)=\frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)}=\frac{P(E)}{P(X=2)}=\frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3}=\frac{1/32}{3/8}=\frac{1}{32}\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{12}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Sia B l'evento "estratta pallina bianca" e sia E l'evento "esce $(\text{testa},\text{testa})$". Allora, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(B)=P(B|E)P(E)+P(B|E^c)P(E^c)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{20}+\frac{1}{4}=\frac{3+5}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2=2X_1)=\sum_{k\geq1}p_{X_1}(k)p_{X_2}(2k)=\sum_{k\geq1}(1-q_1)^{k-1}q_1(1-q_2)^{2k}q_2=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\sum_{k\geq1}((1-q_1)(1-q_2)^2)^k=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\frac{(1-q_1)(1-q_2)^2}{1-(1-q_1)(1-q_2)^2}=\frac{q_1q_2(1-q_2)^2}{1-(1-q_1)(1-q_2)^2}$.
`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=2)=p_{X_1}(1)p_{X_2}(1)+p_{X_1}(2)p_{X_2}(0)=q_1(1-q_2)q_2+(1-q_1)q_1q_2=q_1q_2(1-q_1+1-q_2)=q_1q_2(2-q_1-q_2)$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(e^{50}\leq Y\leq e^{52})=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq e^{50}$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq e^{52}$. Per $y\in(e^{50},e^{52})$ si ha $F_Y(y)=P(e^X\leq y)=P(X\leq\log y)=\int_{50}^{\log y}\frac{e^x}{e^{52}-e^{50}}dx=\frac{[e^x]_{x=50}^{x=\log y}}{e^{52}-e^{50}}=\frac{y-e^{50}}{e^{52}-e^{50}}$. Quindi Y ha distribuzione uniforme su (e^{50},e^{52}); del resto la densità continua è $f_Y(y)=\frac{1}{e^{52}-e^{50}}1_{(e^{50},e^{52})}(y)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[Y-e^{50}]=\mathbb{E}[Y]-e^{50}=\frac{e^{52}+e^{50}}{2}-e^{50}=\frac{e^{52}-e^{50}}{2}$ (nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato la formula per la speranza matematica delle variabili aleatorie con distribuzione uniforme).
Commento. In altro modo: $\mathbb{E}[Y-e^{50}]=\mathbb{E}[e^X-e^{50}]=\mathbb{E}[e^X]-e^{50}=\int_{50}^{52}e^x\cdot\frac{e^x}{e^{52}-e^{50}}dx-e^{50}=\int_{50}^{52}\frac{e^{2x}}{e^{52}-e^{50}}dx-e^{50}=\frac{[e^{2x}/2]_{x=50}^{x=52}}{e^{52}-e^{50}}-e^{50}=\frac{(e^{52})^2-(e^{50})^2}{2(e^{52}-e^{50})}-e^{50}=\frac{e^{52}+e^{50}}{2}-e^{50}=\frac{e^{52}-e^{50}}{2}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si deve avere $\Phi(2)-\Phi(-\frac{1}{11})=P(0<X<y)=\Phi(\frac{y-1}{\sqrt{121}})-\Phi(\frac{0-1}{\sqrt{121}})=\Phi(\frac{y-1}{11})-\Phi(-\frac{1}{11})$, da cui segue $\frac{y-1}{11}=2$, $y-1=22$, $y=23$.
`D10)` Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione esponenziale si ha $\mu=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{18}$ e $\sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{18^2}$, e quindi $\sigma=\frac{1}{18}$. Allora

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{118}{18}\right)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot\frac{1}{18}}{\frac{1}{18}\sqrt{100}}>\frac{\frac{118}{18}-100\cdot\frac{1}{18}}{\frac{1}{18}\sqrt{100}}\right)$$

e, per l'approssimazione Normale dovuta al Teorema Limite Centrale, si ha

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{118}{18}\right)\approx1-\Phi\left(\frac{\frac{118}{18}-100\cdot\frac{1}{18}}{\frac{1}{18}\sqrt{100}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\frac{118-100}{18}}{\frac{10}{18}}\right)=1-\Phi\left(\frac{18}{10}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 9 Febbraio 2021 - Compito 2

Esercizio 1. Abbiamo un mazzo di 8 carte numerate da 1 a 8. Si estraggono ripetutamente carte, una alla volta e *con* reinserimento.
`D1)` Nel caso di 4 estrazioni, calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina con uno dei numeri $5, 6, 7, 8$.
`D2)` Nel caso di 13 estrazioni, calcolare la speranza matematica della variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte con uno dei numeri $2, 3, 4, 5, 6$.
`D3)` Nel caso di 3 estrazioni, calcolare la probabilità di ottenere la sequenza $(\text{pari}, 4, \text{dispari})$ sapendo di aver estratto esattamente due numeri pari.

Esercizio 2. Un'urna ha 1 pallina bianca e 2 nere. Si lanciano 2 monete eque: se esce la sequenza $(\text{testa}, \text{croce})$ si mettono 2 palline bianche nell'urna, altrimenti l'urna resta inalterata. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina nera.

Esercizio 3. Siano $q_1, q_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Poi siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti e tali che:

$$p_{X_1}(x_1) = (1 - q_1)^{x_1 - 1} q_1 \text{ per } x_1 \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_2}(x_2) = (1 - q_2)^{x_2} q_2 \text{ per } x_2 \geq 0 \text{ intero.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_2 = 3X_1) = \frac{q_1 q_2 (1-q_2)^3}{1-(1-q_1)(1-q_2)^3}$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^x}{e^{42} - e^{40}} 1_{(40,42)}(x)$.
`D7)` Verificare che $Y = e^X$ ha distribuzione uniforme su un intervallo opportuno da determinare.
`D8)` Calcolare $\mathbb{E}[Y - e^{40}]$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 12^2 = 144$.
Dire per quale valore di $y > 1$ si ha $P(0 < X < y) = \Phi(2) - \Phi(-\frac{1}{12})$.
`D10)` Siano $\{X_1, \ldots, X_{100}\}$ v.a. i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 17$.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > \frac{117}{17})$ usando l'approssimazione Normale, ed esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 2) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` Con riferimento all'evento complementare, la probabilità richiesta è $1-\binom{4}{0}(\frac{1}{2})^4=\frac{15}{16}$.
`D2)` Per la formule sulla distribuzione Binomiale la speranza matematica richiesta è $13\cdot\frac{5}{8}=\frac{65}{8}$.
`D3)` Sia E l'evento "viene estratta la sequenza indicata" e sia X la variabile aleatoria che indica il numero di carte con numero pari estratte. Allora la probabilità condizionata richiesta è

$$P(E|X=2)=\frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)}=\frac{P(E)}{P(X=2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}}{\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3}=\frac{1/32}{3/8}=\frac{1}{32}\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{12}.$$

Esercizio 2.

`D4)` Sia N l'evento "estratta pallina nera" e sia E l'evento "esce $(\text{testa},\text{croce})$". Allora, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(N)=P(N|E)P(E)+P(N|E^c)P(E^c)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=\frac{1+5}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Esercizio 3.

`D5)` Si ha $P(X_2=3X_1)=\sum_{k\geq1}p_{X_1}(k)p_{X_2}(3k)=\sum_{k\geq1}(1-q_1)^{k-1}q_1(1-q_2)^{3k}q_2=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\sum_{k\geq1}((1-q_1)(1-q_2)^3)^k=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\frac{(1-q_1)(1-q_2)^3}{1-(1-q_1)(1-q_2)^3}=\frac{q_1q_2(1-q_2)^3}{1-(1-q_1)(1-q_2)^3}$.
`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=2)=p_{X_1}(1)p_{X_2}(1)+p_{X_1}(2)p_{X_2}(0)=q_1(1-q_2)q_2+(1-q_1)q_1q_2=q_1q_2(1-q_1+1-q_2)=q_1q_2(2-q_1-q_2)$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(e^{40}\leq Y\leq e^{42})=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq e^{40}$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq e^{42}$. Per $y\in(e^{40},e^{42})$ si ha $F_Y(y)=P(e^X\leq y)=P(X\leq\log y)=\int_{40}^{\log y}\frac{e^x}{e^{42}-e^{40}}dx=\frac{[e^x]_{x=40}^{x=\log y}}{e^{42}-e^{40}}=\frac{y-e^{40}}{e^{42}-e^{40}}$. Quindi Y ha distribuzione uniforme su (e^{40},e^{42}); del resto la densità continua è $f_Y(y)=\frac{1}{e^{42}-e^{40}}1_{(e^{40},e^{42})}(y)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[Y-e^{40}]=\mathbb{E}[Y]-e^{40}=\frac{e^{42}+e^{40}}{2}-e^{40}=\frac{e^{42}-e^{40}}{2}$ (nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato la formula per la speranza matematica delle variabili aleatorie con distribuzione uniforme).
Commento. In altro modo: $\mathbb{E}[Y-e^{40}]=\mathbb{E}[e^X-e^{40}]=\mathbb{E}[e^X]-e^{40}=\int_{40}^{42}e^x\cdot\frac{e^x}{e^{42}-e^{40}}dx-e^{40}=\int_{40}^{42}\frac{e^{2x}}{e^{42}-e^{40}}dx-e^{40}=\frac{[e^{2x}/2]_{x=40}^{x=42}}{e^{42}-e^{40}}-e^{40}=\frac{(e^{42})^2-(e^{40})^2}{2(e^{42}-e^{40})}-e^{40}=\frac{e^{42}+e^{40}}{2}-e^{40}=\frac{e^{42}-e^{40}}{2}$.

Esercizio 5.

`D9)` Si deve avere $\Phi(2)-\Phi(-\frac{1}{12})=P(0<X<y)=\Phi(\frac{y-1}{\sqrt{144}})-\Phi(\frac{0-1}{\sqrt{144}})=\Phi(\frac{y-1}{12})-\Phi(-\frac{1}{12})$, da cui segue $\frac{y-1}{12}=2$, $y-1=24$, $y=25$.
`D10)` Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione esponenziale si ha $\mu=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{17}$ e $\sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{17^2}$, e quindi $\sigma=\frac{1}{17}$. Allora

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{117}{17}\right)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot\frac{1}{17}}{\frac{1}{17}\sqrt{100}}>\frac{\frac{117}{17}-100\cdot\frac{1}{17}}{\frac{1}{17}\sqrt{100}}\right)$$

e, per l'approssimazione Normale dovuta al Teorema Limite Centrale, si ha

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{117}{17}\right)\approx1-\Phi\left(\frac{\frac{117}{17}-100\cdot\frac{1}{17}}{\frac{1}{17}\sqrt{100}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\frac{117-100}{17}}{\frac{10}{17}}\right)=1-\Phi\left(\frac{17}{10}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 9 Febbraio 2021 - Compito 3

Esercizio 1. Abbiamo un mazzo di 8 carte numerate da 1 a 8. Si estraggono ripetutamente carte, una alla volta e *con* reinserimento.
`D1)` Nel caso di 4 estrazioni, calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina con uno dei numeri $1, 2, 7, 8$.
`D2)` Nel caso di 17 estrazioni, calcolare la speranza matematica della variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte con uno dei numeri $3, 4, 5$.
`D3)` Nel caso di 3 estrazioni, calcolare la probabilità di ottenere la sequenza $(\text{pari}, \text{dispari}, 6)$ sapendo di aver estratto esattamente due numeri pari.

Esercizio 2. Un'urna ha 1 pallina bianca e 2 nere. Si lanciano 2 monete eque: se esce la sequenza $(\text{croce}, \text{testa})$ si mettono 2 palline bianche nell'urna, altrimenti l'urna resta inalterata. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina nera.

Esercizio 3. Siano $q_1, q_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Poi siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti e tali che:

$$p_{X_1}(x_1) = (1 - q_1)^{x_1 - 1} q_1 \text{ per } x_1 \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_2}(x_2) = (1 - q_2)^{x_2} q_2 \text{ per } x_2 \geq 0 \text{ intero.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_2 = 4X_1) = \frac{q_1 q_2 (1-q_2)^4}{1-(1-q_1)(1-q_2)^4}$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^x}{e^{32}-e^{30}} 1_{(30,32)}(x)$.
`D7)` Verificare che $Y = e^X$ ha distribuzione uniforme su un intervallo opportuno da determinare.
`D8)` Calcolare $\mathbb{E}[Y - e^{30}]$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 13^2 = 169$.
Dire per quale valore di $y > 1$ si ha $P(0 < X < y) = \Phi(2) - \Phi(-\frac{1}{13})$.
`D10)` Siano $\{X_1, \ldots, X_{100}\}$ v.a. i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 16$.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > \frac{116}{16})$ usando l'approssimazione Normale, ed esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 3) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Con riferimento all'evento complementare, la probabilità richiesta è $1-\binom{4}{0}(\frac{1}{2})^4=\frac{15}{16}$.
`D2)` Per la formule sulla distribuzione Binomiale la speranza matematica richiesta è $17\cdot\frac{3}{8}=\frac{51}{8}$.
`D3)` Sia E l'evento "viene estratta la sequenza indicata" e sia X la variabile aleatoria che indica il numero di carte con numero pari estratte. Allora la probabilità condizionata richiesta è

$$P(E|X=2)=\frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)}=\frac{P(E)}{P(X=2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}{\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3}=\frac{1/32}{3/8}=\frac{1}{32}\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{12}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Sia N l'evento "estratta pallina nera" e sia E l'evento "esce $(\text{croce},\text{testa})$". Allora, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(N)=P(N|E)P(E)+P(N|E^c)P(E^c)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=\frac{1+5}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2=4X_1)=\sum_{k\geq1}p_{X_1}(k)p_{X_2}(4k)=\sum_{k\geq1}(1-q_1)^{k-1}q_1(1-q_2)^{4k}q_2=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\sum_{k\geq1}((1-q_1)(1-q_2)^4)^k=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\frac{(1-q_1)(1-q_2)^4}{1-(1-q_1)(1-q_2)^4}=\frac{q_1q_2(1-q_2)^4}{1-(1-q_1)(1-q_2)^4}$.
`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=2)=p_{X_1}(1)p_{X_2}(1)+p_{X_1}(2)p_{X_2}(0)=q_1(1-q_2)q_2+(1-q_1)q_1q_2=q_1q_2(1-q_1+1-q_2)=q_1q_2(2-q_1-q_2)$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(e^{30}\leq Y\leq e^{32})=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq e^{30}$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq e^{32}$. Per $y\in(e^{30},e^{32})$ si ha $F_Y(y)=P(e^X\leq y)=P(X\leq\log y)=\int_{30}^{\log y}\frac{e^x}{e^{32}-e^{30}}dx=\frac{[e^x]_{x=30}^{x=\log y}}{e^{32}-e^{30}}=\frac{y-e^{30}}{e^{32}-e^{30}}$. Quindi Y ha distribuzione uniforme su (e^{30},e^{32}); del resto la densità continua è $f_Y(y)=\frac{1}{e^{32}-e^{30}}1_{(e^{30},e^{32})}(y)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[Y-e^{30}]=\mathbb{E}[Y]-e^{30}=\frac{e^{32}+e^{30}}{2}-e^{30}=\frac{e^{32}-e^{30}}{2}$ (nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato la formula per la speranza matematica delle variabili aleatorie con distribuzione uniforme).
Commento. In altro modo: $\mathbb{E}[Y-e^{30}]=\mathbb{E}[e^X-e^{30}]=\mathbb{E}[e^X]-e^{30}=\int_{30}^{32}e^x\cdot\frac{e^x}{e^{32}-e^{30}}dx-e^{30}=\int_{30}^{32}\frac{e^{2x}}{e^{32}-e^{30}}dx-e^{30}=\frac{[e^{2x}/2]_{x=30}^{x=32}}{e^{32}-e^{30}}-e^{30}=\frac{(e^{32})^2-(e^{30})^2}{2(e^{32}-e^{30})}-e^{30}=\frac{e^{32}+e^{30}}{2}-e^{30}=\frac{e^{32}-e^{30}}{2}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si deve avere $\Phi(2)-\Phi(-\frac{1}{13})=P(0<X<y)=\Phi(\frac{y-1}{\sqrt{169}})-\Phi(\frac{0-1}{\sqrt{169}})=\Phi(\frac{y-1}{13})-\Phi(-\frac{1}{13})$, da cui segue $\frac{y-1}{13}=2$, $y-1=26$, $y=27$.
`D10)` Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione esponenziale si ha $\mu=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{16}$ e $\sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{16^2}$, e quindi $\sigma=\frac{1}{16}$. Allora

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{116}{16}\right)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}\sqrt{100}}>\frac{\frac{116}{16}-100\cdot\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}\sqrt{100}}\right)$$

e, per l'approssimazione Normale dovuta al Teorema Limite Centrale, si ha

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{116}{16}\right)\approx1-\Phi\left(\frac{\frac{116}{16}-100\cdot\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}\sqrt{100}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\frac{116-100}{16}}{\frac{10}{16}}\right)=1-\Phi\left(\frac{16}{10}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 9 Febbraio 2021 - Compito 4

Esercizio 1. Abbiamo un mazzo di 8 carte numerate da 1 a 8. Si estraggono ripetutamente carte, una alla volta e *con* reinserimento.
`D1)` Nel caso di 4 estrazioni, calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina con uno dei numeri $3, 4, 5, 6$.
`D2)` Nel caso di 19 estrazioni, calcolare la speranza matematica della variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte con uno dei numeri $4, 5, 6$.
`D3)` Nel caso di 3 estrazioni, calcolare la probabilità di ottenere la sequenza $(8, \text{pari}, \text{dispari})$ sapendo di aver estratto esattamente due numeri pari.

Esercizio 2. Un'urna ha 1 pallina bianca e 2 nere. Si lanciano 2 monete eque: se esce la sequenza $(\text{croce}, \text{croce})$ si mettono 2 palline bianche nell'urna, altrimenti l'urna resta inalterata. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

Esercizio 3. Siano $q_1, q_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Poi siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti e tali che:

$$p_{X_1}(x_1) = (1 - q_1)^{x_1 - 1} q_1 \text{ per } x_1 \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_2}(x_2) = (1 - q_2)^{x_2} q_2 \text{ per } x_2 \geq 0 \text{ intero.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_2 = 5X_1) = \frac{q_1 q_2 (1-q_2)^5}{1-(1-q_1)(1-q_2)^5}$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^x}{e^{22}-e^{20}} 1_{(20,22)}(x)$.
`D7)` Verificare che $Y = e^X$ ha distribuzione uniforme su un intervallo opportuno da determinare.
`D8)` Calcolare $\mathbb{E}[Y - e^{20}]$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 14^2 = 196$.
Dire per quale valore di $y > 1$ si ha $P(0 < X < y) = \Phi(2) - \Phi(-\frac{1}{14})$.
`D10)` Siano $\{X_1, \ldots, X_{100}\}$ v.a. i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 15$.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > \frac{115}{15})$ usando l'approssimazione Normale, ed esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 4) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` Con riferimento all'evento complementare, la probabilità richiesta è $1-\binom{4}{0}(\frac{1}{2})^4=\frac{15}{16}$.

`D2)` Per la formule sulla distribuzione Binomiale la speranza matematica richiesta è $19\cdot\frac{3}{8}=\frac{57}{8}$.

`D3)` Sia E l'evento "viene estratta la sequenza indicata" e sia X la variabile aleatoria che indica il numero di carte con numero pari estratte. Allora la probabilità condizionata richiesta è

$$P(E|X=2)=\frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)}=\frac{P(E)}{P(X=2)}=\frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3}=\frac{1/32}{3/8}=\frac{1}{32}\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{12}.$$

Esercizio 2.

`D4)` Sia B l'evento "estratta pallina bianca" e sia E l'evento "esce (croce, croce)". Allora, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(B)=P(B|E)P(E)+P(B|E^c)P(E^c)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{20}+\frac{1}{4}=\frac{3+5}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}.$$

Esercizio 3.

`D5)` Si ha $P(X_2=5X_1)=\sum_{k\geq 1}p_{X_1}(k)p_{X_2}(5k)=\sum_{k\geq 1}(1-q_1)^{k-1}q_1(1-q_2)^{5k}q_2=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\sum_{k\geq 1}((1-q_1)(1-q_2)^5)^k=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\frac{(1-q_1)(1-q_2)^5}{1-(1-q_1)(1-q_2)^5}=\frac{q_1q_2(1-q_2)^5}{1-(1-q_1)(1-q_2)^5}$.

`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=2)=p_{X_1}(1)p_{X_2}(1)+p_{X_1}(2)p_{X_2}(0)=q_1(1-q_2)q_2+(1-q_1)q_1q_2=q_1q_2(1-q_1+1-q_2)=q_1q_2(2-q_1-q_2)$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(e^{20}\leq Y\leq e^{22})=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq e^{20}$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq e^{22}$. Per $y\in(e^{20},e^{22})$ si ha $F_Y(y)=P(e^X\leq y)=P(X\leq\log y)=\int_{20}^{\log y}\frac{e^x}{e^{22}-e^{20}}dx=\frac{[e^x]_{x=20}^{x=\log y}}{e^{22}-e^{20}}=\frac{y-e^{20}}{e^{22}-e^{20}}$. Quindi Y ha distribuzione uniforme su (e^{20},e^{22}); del resto la densità continua è $f_Y(y)=\frac{1}{e^{22}-e^{20}}1_{(e^{20},e^{22})}(y)$.

`D8)` Si ha $\mathbb{E}[Y-e^{20}]=\mathbb{E}[Y]-e^{20}=\frac{e^{22}+e^{20}}{2}-e^{20}=\frac{e^{22}-e^{20}}{2}$ (nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato la formula per la speranza matematica delle variabili aleatorie con distribuzione uniforme). *Commento.* In altro modo: $\mathbb{E}[Y-e^{20}]=\mathbb{E}[e^X-e^{20}]=\mathbb{E}[e^X]-e^{20}=\int_{20}^{22}e^x\cdot\frac{e^x}{e^{22}-e^{20}}dx-e^{20}=\int_{20}^{22}\frac{e^{2x}}{e^{22}-e^{20}}dx-e^{20}=\frac{[e^{2x}/2]_{x=20}^{x=22}}{e^{22}-e^{20}}-e^{20}=\frac{(e^{22})^2-(e^{20})^2}{2(e^{22}-e^{20})}-e^{20}=\frac{e^{22}+e^{20}}{2}-e^{20}=\frac{e^{22}-e^{20}}{2}$.

Esercizio 5.

`D9)` Si deve avere $\Phi(2)-\Phi(-\frac{1}{14})=P(0<X<y)=\Phi(\frac{y-1}{\sqrt{196}})-\Phi(\frac{0-1}{\sqrt{196}})=\Phi(\frac{y-1}{14})-\Phi(-\frac{1}{14})$, da cui segue $\frac{y-1}{14}=2$, $y-1=28$, $y=29$.

`D10)` Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione esponenziale si ha $\mu=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{15}$ e $\sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{15^2}$, e quindi $\sigma=\frac{1}{15}$. Allora

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{115}{15}\right)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}\sqrt{100}}>\frac{\frac{115}{15}-100\cdot\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}\sqrt{100}}\right)$$

e, per l'approssimazione Normale dovuta al Teorema Limite Centrale, si ha

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{115}{15}\right)\approx 1-\Phi\left(\frac{\frac{115}{15}-100\cdot\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}\sqrt{100}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\frac{115-100}{15}}{\frac{10}{15}}\right)=1-\Phi\left(\frac{15}{10}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 9 Febbraio 2021 - Compito 5

Esercizio 1. Abbiamo un mazzo di 8 carte numerate da 1 a 8. Si estraggono ripetutamente carte, una alla volta e *con* reinserimento.
`D1)` Nel caso di 4 estrazioni, calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina con uno dei numeri $1, 2, 4, 8$.
`D2)` Nel caso di 11 estrazioni, calcolare la speranza matematica della variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte con uno dei numeri $3, 4, 5, 6, 7$.
`D3)` Nel caso di 3 estrazioni, calcolare la probabilità di ottenere la sequenza $(\text{pari}, 2, \text{dispari})$ sapendo di aver estratto esattamente due numeri pari.

Esercizio 2. Un'urna ha 1 pallina bianca e 2 nere. Si lanciano 2 monete eque: se esce la sequenza $(\text{testa}, \text{testa})$ si mettono 2 palline bianche nell'urna, altrimenti l'urna resta inalterata. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina nera.

Esercizio 3. Siano $q_1, q_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Poi siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti e tali che:

$$p_{X_1}(x_1) = (1 - q_1)^{x_1-1}\, q_1 \text{ per } x_1 \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_2}(x_2) = (1 - q_2)^{x_2}\, q_2 \text{ per } x_2 \geq 0 \text{ intero.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_2 = 5X_1) = \frac{q_1 q_2 (1-q_2)^5}{1-(1-q_1)(1-q_2)^5}$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^x}{e^{22}-e^{20}} 1_{(20,22)}(x)$.
`D7)` Verificare che $Y = e^X$ ha distribuzione uniforme su un intervallo opportuno da determinare.
`D8)` Calcolare $\mathbb{E}[Y - e^{20}]$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 15^2 = 225$.
Dire per quale valore di $y > 1$ si ha $P(0 < X < y) = \Phi(2) - \Phi(-\frac{1}{15})$.
`D10)` Siano $\{X_1, \ldots, X_{100}\}$ v.a. i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 14$.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > \frac{114}{14})$ usando l'approssimazione Normale, ed esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 5) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` Con riferimento all'evento complementare, la probabilità richiesta è $1-\binom{4}{0}(\frac{1}{2})^4=\frac{15}{16}$.

`D2)` Per la formule sulla distribuzione Binomiale la speranza matematica richiesta è $11\cdot\frac{5}{8}=\frac{55}{8}$.

`D3)` Sia E l'evento "viene estratta la sequenza indicata" e sia X la variabile aleatoria che indica il numero di carte con numero pari estratte. Allora la probabilità condizionata richiesta è

$$P(E|X=2)=\frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)}=\frac{P(E)}{P(X=2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}}{\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3}=\frac{1/32}{3/8}=\frac{1}{32}\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{12}.$$

Esercizio 2.

`D4)` Sia N l'evento "estratta pallina nera" e sia E l'evento "esce $(\text{testa},\text{testa})$". Allora, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(N)=P(N|E)P(E)+P(N|E^c)P(E^c)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=\frac{1+5}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Esercizio 3.

`D5)` Si ha $P(X_2=5X_1)=\sum_{k\geq 1}p_{X_1}(k)p_{X_2}(5k)=\sum_{k\geq 1}(1-q_1)^{k-1}q_1(1-q_2)^{5k}q_2=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\sum_{k\geq 1}((1-q_1)(1-q_2)^5)^k=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\frac{(1-q_1)(1-q_2)^5}{1-(1-q_1)(1-q_2)^5}=\frac{q_1q_2(1-q_2)^5}{1-(1-q_1)(1-q_2)^5}$.

`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=2)=p_{X_1}(1)p_{X_2}(1)+p_{X_1}(2)p_{X_2}(0)=q_1(1-q_2)q_2+(1-q_1)q_1q_2=q_1q_2(1-q_1+1-q_2)=q_1q_2(2-q_1-q_2)$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(e^{20}\leq Y\leq e^{22})=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq e^{20}$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq e^{22}$. Per $y\in(e^{20},e^{22})$ si ha $F_Y(y)=P(e^X\leq y)=P(X\leq\log y)=\int_{20}^{\log y}\frac{e^x}{e^{22}-e^{20}}dx=\frac{[e^x]_{x=20}^{x=\log y}}{e^{22}-e^{20}}=\frac{y-e^{20}}{e^{22}-e^{20}}$. Quindi Y ha distribuzione uniforme su (e^{20},e^{22}); del resto la densità continua è $f_Y(y)=\frac{1}{e^{22}-e^{20}}1_{(e^{20},e^{22})}(y)$.

`D8)` Si ha $\mathbb{E}[Y-e^{20}]=\mathbb{E}[Y]-e^{20}=\frac{e^{22}+e^{20}}{2}-e^{20}=\frac{e^{22}-e^{20}}{2}$ (nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato la formula per la speranza matematica delle variabili aleatorie con distribuzione uniforme).
Commento. In altro modo: $\mathbb{E}[Y-e^{20}]=\mathbb{E}[e^X-e^{20}]=\mathbb{E}[e^X]-e^{20}=\int_{20}^{22}e^x\cdot\frac{e^x}{e^{22}-e^{20}}dx-e^{20}=\int_{20}^{22}\frac{e^{2x}}{e^{22}-e^{20}}dx-e^{20}=\frac{[e^{2x}/2]_{x=20}^{x=22}}{e^{22}-e^{20}}-e^{20}=\frac{(e^{22})^2-(e^{20})^2}{2(e^{22}-e^{20})}-e^{20}=\frac{e^{22}+e^{20}}{2}-e^{20}=\frac{e^{22}-e^{20}}{2}$.

Esercizio 5.

`D9)` Si deve avere $\Phi(2)-\Phi(-\frac{1}{15})=P(0<X<y)=\Phi(\frac{y-1}{\sqrt{225}})-\Phi(\frac{0-1}{\sqrt{225}})=\Phi(\frac{y-1}{15})-\Phi(-\frac{1}{15})$, da cui segue $\frac{y-1}{15}=2$, $y-1=30$, $y=31$.

`D10)` Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione esponenziale si ha $\mu=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{14}$ e $\sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{14^2}$, e quindi $\sigma=\frac{1}{14}$. Allora

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{114}{14}\right)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot\frac{1}{14}}{\frac{1}{14}\sqrt{100}}>\frac{\frac{114}{14}-100\cdot\frac{1}{14}}{\frac{1}{14}\sqrt{100}}\right)$$

e, per l'approssimazione Normale dovuta al Teorema Limite Centrale, si ha

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{114}{14}\right)\approx 1-\Phi\left(\frac{\frac{114}{14}-100\cdot\frac{1}{14}}{\frac{1}{14}\sqrt{100}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\frac{114-100}{14}}{\frac{10}{14}}\right)=1-\Phi\left(\frac{14}{10}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 9 Febbraio 2021 - Compito 6

Esercizio 1. Abbiamo un mazzo di 8 carte numerate da 1 a 8. Si estraggono ripetutamente carte, una alla volta e *con* reinserimento.
`D1)` Nel caso di 4 estrazioni, calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina con uno dei numeri $1, 5, 7, 8$.
`D2)` Nel caso di 13 estrazioni, calcolare la speranza matematica della variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte con uno dei numeri $4, 5, 6, 7, 8$.
`D3)` Nel caso di 3 estrazioni, calcolare la probabilità di ottenere la sequenza $(\text{pari}, \text{dispari}, 4)$ sapendo di aver estratto esattamente due numeri pari.

Esercizio 2. Un'urna ha 1 pallina bianca e 2 nere. Si lanciano 2 monete eque: se esce la sequenza $(\text{testa}, \text{croce})$ si mettono 2 palline bianche nell'urna, altrimenti l'urna resta inalterata. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

Esercizio 3. Siano $q_1, q_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Poi siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti e tali che:

$$p_{X_1}(x_1) = (1 - q_1)^{x_1 - 1} q_1 \text{ per } x_1 \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_2}(x_2) = (1 - q_2)^{x_2} q_2 \text{ per } x_2 \geq 0 \text{ intero.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_2 = 4X_1) = \frac{q_1 q_2 (1-q_2)^4}{1-(1-q_1)(1-q_2)^4}$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^x}{e^{32}-e^{30}} 1_{(30,32)}(x)$.
`D7)` Verificare che $Y = e^X$ ha distribuzione uniforme su un intervallo opportuno da determinare.
`D8)` Calcolare $\mathbb{E}[Y - e^{30}]$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 16^2 = 256$.
Dire per quale valore di $y > 1$ si ha $P(0 < X < y) = \Phi(2) - \Phi(-\frac{1}{16})$.
`D10)` Siano $\{X_1, \ldots, X_{100}\}$ v.a. i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 13$.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > \frac{113}{13})$ usando l'approssimazione Normale, ed esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 6) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Con riferimento all'evento complementare, la probabilità richiesta è $1-\binom{4}{0}(\frac{1}{2})^4=\frac{15}{16}$.
`D2)` Per la formule sulla distribuzione Binomiale la speranza matematica richiesta è $13\cdot\frac{5}{8}=\frac{65}{8}$.
`D3)` Sia E l'evento "viene estratta la sequenza indicata" e sia X la variabile aleatoria che indica il numero di carte con numero pari estratte. Allora la probabilità condizionata richiesta è

$$P(E|X=2)=\frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)}=\frac{P(E)}{P(X=2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}{\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3}=\frac{1/32}{3/8}=\frac{1}{32}\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{12}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Sia B l'evento "estratta pallina bianca" e sia E l'evento "esce (testa, croce)". Allora, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(B)=P(B|E)P(E)+P(B|E^c)P(E^c)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{20}+\frac{1}{4}=\frac{3+5}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2=4X_1)=\sum_{k\geq 1}p_{X_1}(k)p_{X_2}(4k)=\sum_{k\geq 1}(1-q_1)^{k-1}q_1(1-q_2)^{4k}q_2=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\sum_{k\geq 1}((1-q_1)(1-q_2)^4)^k=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\frac{(1-q_1)(1-q_2)^4}{1-(1-q_1)(1-q_2)^4}=\frac{q_1q_2(1-q_2)^4}{1-(1-q_1)(1-q_2)^4}$.
`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=2)=p_{X_1}(1)p_{X_2}(1)+p_{X_1}(2)p_{X_2}(0)=q_1(1-q_2)q_2+(1-q_1)q_1q_2=q_1q_2(1-q_1+1-q_2)=q_1q_2(2-q_1-q_2)$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(e^{30}\leq Y\leq e^{32})=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq e^{30}$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq e^{32}$. Per $y\in(e^{30},e^{32})$ si ha $F_Y(y)=P(e^X\leq y)=P(X\leq\log y)=\int_{30}^{\log y}\frac{e^x}{e^{32}-e^{30}}dx=\frac{[e^x]_{x=30}^{x=\log y}}{e^{32}-e^{30}}=\frac{y-e^{30}}{e^{32}-e^{30}}$. Quindi Y ha distribuzione uniforme su (e^{30},e^{32}); del resto la densità continua è $f_Y(y)=\frac{1}{e^{32}-e^{30}}1_{(e^{30},e^{32})}(y)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[Y-e^{30}]=\mathbb{E}[Y]-e^{30}=\frac{e^{32}+e^{30}}{2}-e^{30}=\frac{e^{32}-e^{30}}{2}$ (nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato la formula per la speranza matematica delle variabili aleatorie con distribuzione uniforme).
Commento. In altro modo: $\mathbb{E}[Y-e^{30}]=\mathbb{E}[e^X-e^{30}]=\mathbb{E}[e^X]-e^{30}=\int_{30}^{32}e^x\cdot\frac{e^x}{e^{32}-e^{30}}dx-e^{30}=\int_{30}^{32}\frac{e^{2x}}{e^{32}-e^{30}}dx-e^{30}=\frac{[e^{2x}/2]_{x=30}^{x=32}}{e^{32}-e^{30}}-e^{30}=\frac{(e^{32})^2-(e^{30})^2}{2(e^{32}-e^{30})}-e^{30}=\frac{e^{32}+e^{30}}{2}-e^{30}=\frac{e^{32}-e^{30}}{2}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si deve avere $\Phi(2)-\Phi(-\frac{1}{16})=P(0<X<y)=\Phi(\frac{y-1}{\sqrt{256}})-\Phi(\frac{0-1}{\sqrt{256}})=\Phi(\frac{y-1}{16})-\Phi(-\frac{1}{16})$, da cui segue $\frac{y-1}{16}=2$, $y-1=32$, $y=33$.
`D10)` Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione esponenziale si ha $\mu=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{13}$ e $\sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{13^2}$, e quindi $\sigma=\frac{1}{13}$. Allora

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{113}{13}\right)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot\frac{1}{13}}{\frac{1}{13}\sqrt{100}}>\frac{\frac{113}{13}-100\cdot\frac{1}{13}}{\frac{1}{13}\sqrt{100}}\right)$$

e, per l'approssimazione Normale dovuta al Teorema Limite Centrale, si ha

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{113}{13}\right)\approx 1-\Phi\left(\frac{\frac{113}{13}-100\cdot\frac{1}{13}}{\frac{1}{13}\sqrt{100}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\frac{113-100}{13}}{\frac{10}{13}}\right)=1-\Phi\left(\frac{13}{10}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 9 Febbraio 2021 - Compito 7

Esercizio 1. Abbiamo un mazzo di 8 carte numerate da 1 a 8. Si estraggono ripetutamente carte, una alla volta e *con* reinserimento.
`D1)` Nel caso di 4 estrazioni, calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina con uno dei numeri $1, 2, 3, 8$.
`D2)` Nel caso di 17 estrazioni, calcolare la speranza matematica della variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte con uno dei numeri $1, 3, 5$.
`D3)` Nel caso di 3 estrazioni, calcolare la probabilità di ottenere la sequenza $(6, \text{pari}, \text{dispari})$ sapendo di aver estratto esattamente due numeri pari.

Esercizio 2. Un'urna ha 1 pallina bianca e 2 nere. Si lanciano 2 monete eque: se esce la sequenza $(\text{croce}, \text{testa})$ si mettono 2 palline bianche nell'urna, altrimenti l'urna resta inalterata. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

Esercizio 3. Siano $q_1, q_2 \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Poi siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti e tali che:

$$p_{X_1}(x_1) = (1 - q_1)^{x_1 - 1} q_1 \text{ per } x_1 \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_2}(x_2) = (1 - q_2)^{x_2} q_2 \text{ per } x_2 \geq 0 \text{ intero.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_2 = 3X_1) = \frac{q_1 q_2 (1-q_2)^3}{1-(1-q_1)(1-q_2)^3}$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^x}{e^{42}-e^{40}} 1_{(40,42)}(x)$.
`D7)` Verificare che $Y = e^X$ ha distribuzione uniforme su un intervallo opportuno da determinare.
`D8)` Calcolare $\mathbb{E}[Y - e^{40}]$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 17^2 = 289$.
Dire per quale valore di $y > 1$ si ha $P(0 < X < y) = \Phi(2) - \Phi(-\frac{1}{17})$.
`D10)` Siano $\{X_1, \dots, X_{100}\}$ v.a. i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 12$.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > \frac{112}{12})$ usando l'approssimazione Normale, ed esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 7) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Con riferimento all'evento complementare, la probabilità richiesta è $1-\binom{4}{0}(\frac{1}{2})^4=\frac{15}{16}$.
`D2)` Per la formule sulla distribuzione Binomiale la speranza matematica richiesta è $17\cdot\frac{3}{8}=\frac{51}{8}$.
`D3)` Sia E l'evento "viene estratta la sequenza indicata" e sia X la variabile aleatoria che indica il numero di carte con numero pari estratte. Allora la probabilità condizionata richiesta è

$$P(E|X=2)=\frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)}=\frac{P(E)}{P(X=2)}=\frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3}=\frac{1/32}{3/8}=\frac{1}{32}\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{12}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Sia B l'evento "estratta pallina bianca" e sia E l'evento "esce $(\text{croce},\text{testa})$". Allora, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(B)=P(B|E)P(E)+P(B|E^c)P(E^c)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{20}+\frac{1}{4}=\frac{3+5}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2=3X_1)=\sum_{k\geq1}p_{X_1}(k)p_{X_2}(3k)=\sum_{k\geq1}(1-q_1)^{k-1}q_1(1-q_2)^{3k}q_2=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\sum_{k\geq1}((1-q_1)(1-q_2)^3)^k=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\frac{(1-q_1)(1-q_2)^3}{1-(1-q_1)(1-q_2)^3}=\frac{q_1q_2(1-q_2)^3}{1-(1-q_1)(1-q_2)^3}$.
`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=2)=p_{X_1}(1)p_{X_2}(1)+p_{X_1}(2)p_{X_2}(0)=q_1(1-q_2)q_2+(1-q_1)q_1q_2=q_1q_2(1-q_1+1-q_2)=q_1q_2(2-q_1-q_2)$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(e^{40}\leq Y\leq e^{42})=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq e^{40}$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq e^{42}$. Per $y\in(e^{40},e^{42})$ si ha $F_Y(y)=P(e^X\leq y)=P(X\leq\log y)=\int_{40}^{\log y}\frac{e^x}{e^{42}-e^{40}}dx=\frac{[e^x]_{x=40}^{x=\log y}}{e^{42}-e^{40}}=\frac{y-e^{40}}{e^{42}-e^{40}}$. Quindi Y ha distribuzione uniforme su (e^{40},e^{42}); del resto la densità continua è $f_Y(y)=\frac{1}{e^{42}-e^{40}}1_{(e^{40},e^{42})}(y)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[Y-e^{40}]=\mathbb{E}[Y]-e^{40}=\frac{e^{42}+e^{40}}{2}-e^{40}=\frac{e^{42}-e^{40}}{2}$ (nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato la formula per la speranza matematica delle variabili aleatorie con distribuzione uniforme).
Commento. In altro modo: $\mathbb{E}[Y-e^{40}]=\mathbb{E}[e^X-e^{40}]=\mathbb{E}[e^X]-e^{40}=\int_{40}^{42}e^x\cdot\frac{e^x}{e^{42}-e^{40}}dx-e^{40}=\int_{40}^{42}\frac{e^{2x}}{e^{42}-e^{40}}dx-e^{40}=\frac{[e^{2x}/2]_{x=40}^{x=42}}{e^{42}-e^{40}}-e^{40}=\frac{(e^{42})^2-(e^{40})^2}{2(e^{42}-e^{40})}-e^{40}=\frac{e^{42}+e^{40}}{2}-e^{40}=\frac{e^{42}-e^{40}}{2}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si deve avere $\Phi(2)-\Phi(-\frac{1}{17})=P(0<X<y)=\Phi(\frac{y-1}{\sqrt{289}})-\Phi(\frac{0-1}{\sqrt{289}})=\Phi(\frac{y-1}{17})-\Phi(-\frac{1}{17})$, da cui segue $\frac{y-1}{17}=2$, $y-1=34$, $y=35$.
`D10)` Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione esponenziale si ha $\mu=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{12}$ e $\sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{12^2}$, e quindi $\sigma=\frac{1}{12}$. Allora

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{112}{12}\right)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}\sqrt{100}}>\frac{\frac{112}{12}-100\cdot\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}\sqrt{100}}\right)$$

e, per l'approssimazione Normale dovuta al Teorema Limite Centrale, si ha

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{112}{12}\right)\approx1-\Phi\left(\frac{\frac{112}{12}-100\cdot\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}\sqrt{100}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\frac{112-100}{12}}{\frac{10}{12}}\right)=1-\Phi\left(\frac{12}{10}\right).$$

Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 9 Febbraio 2021 - Compito 8

Esercizio 1. Abbiamo un mazzo di 8 carte numerate da 1 a 8. Si estraggono ripetutamente carte, una alla volta e *con* reinserimento.
`D1)` Nel caso di 4 estrazioni, calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina con uno dei numeri $1, 6, 7, 8$.
`D2)` Nel caso di 19 estrazioni, calcolare la speranza matematica della variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte con uno dei numeri $2, 4, 6$.
`D3)` Nel caso di 3 estrazioni, calcolare la probabilità di ottenere la sequenza $(\text{pari}, 8, \text{dispari})$ sapendo di aver estratto esattamente due numeri pari.

Esercizio 2. Un'urna ha 1 pallina bianca e 2 nere. Si lanciano 2 monete eque: se esce la sequenza $(\text{croce}, \text{croce})$ si mettono 2 palline bianche nell'urna, altrimenti l'urna resta inalterata. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina nera.

Esercizio 3. Siano $q_1, q_2 \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Poi siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti e tali che:

$$p_{X_1}(x_1) = (1-q_1)^{x_1-1}\, q_1 \text{ per } x_1 \geq 1 \text{ intero;}$$

$$p_{X_2}(x_2) = (1-q_2)^{x_2}\, q_2 \text{ per } x_2 \geq 0 \text{ intero.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_2 = 2X_1) = \frac{q_1 q_2 (1-q_2)^2}{1-(1-q_1)(1-q_2)^2}$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{e^x}{e^{52}-e^{50}} 1_{(50,52)}(x)$.
`D7)` Verificare che $Y = e^X$ ha distribuzione uniforme su un intervallo opportuno da determinare.
`D8)` Calcolare $\mathbb{E}[Y - e^{50}]$ (come primo passo si sfrutti la linearità della speranza matematica).

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale con media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 18^2 = 324$.
Dire per quale valore di $y > 1$ si ha $P(0 < X < y) = \Phi(2) - \Phi(-\frac{1}{18})$.
`D10)` Siano $\{X_1, \ldots, X_{100}\}$ v.a. i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 11$.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > \frac{111}{11})$ usando l'approssimazione Normale, ed esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (Compito 8) (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Con riferimento all'evento complementare, la probabilità richiesta è $1-\binom{4}{0}(\frac{1}{2})^4=\frac{15}{16}$.
`D2)` Per la formule sulla distribuzione Binomiale la speranza matematica richiesta è $19\cdot\frac{3}{8}=\frac{57}{8}$.
`D3)` Sia E l'evento "viene estratta la sequenza indicata" e sia X la variabile aleatoria che indica il numero di carte con numero pari estratte. Allora la probabilità condizionata richiesta è

$$P(E|X=2)=\frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)}=\frac{P(E)}{P(X=2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}}{\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3}=\frac{1/32}{3/8}=\frac{1}{32}\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{12}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Sia N l'evento "estratta pallina nera" e sia E l'evento "esce $(\text{croce},\text{croce})$". Allora, usando la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(N)=P(N|E)P(E)+P(N|E^c)P(E^c)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=\frac{1+5}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2=2X_1)=\sum_{k\geq 1}p_{X_1}(k)p_{X_2}(2k)=\sum_{k\geq 1}(1-q_1)^{k-1}q_1(1-q_2)^{2k}q_2=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\sum_{k\geq 1}((1-q_1)(1-q_2)^2)^k=\frac{q_1q_2}{1-q_1}\frac{(1-q_1)(1-q_2)^2}{1-(1-q_1)(1-q_2)^2}=\frac{q_1q_2(1-q_2)^2}{1-(1-q_1)(1-q_2)^2}$.
`D6)` Si ha $P(X_1+X_2=2)=p_{X_1}(1)p_{X_2}(1)+p_{X_1}(2)p_{X_2}(0)=q_1(1-q_2)q_2+(1-q_1)q_1q_2=q_1q_2(1-q_1+1-q_2)=q_1q_2(2-q_1-q_2)$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(e^{50}\leq Y\leq e^{52})=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq e^{50}$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq e^{52}$. Per $y\in(e^{50},e^{52})$ si ha $F_Y(y)=P(e^X\leq y)=P(X\leq\log y)=\int_{50}^{\log y}\frac{e^x}{e^{52}-e^{50}}dx=\frac{[e^x]_{x=50}^{x=\log y}}{e^{52}-e^{50}}=\frac{y-e^{50}}{e^{52}-e^{50}}$. Quindi Y ha distribuzione uniforme su (e^{50},e^{52}); del resto la densità continua è $f_Y(y)=\frac{1}{e^{52}-e^{50}}1_{(e^{50},e^{52})}(y)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[Y-e^{50}]=\mathbb{E}[Y]-e^{50}=\frac{e^{52}+e^{50}}{2}-e^{50}=\frac{e^{52}-e^{50}}{2}$ (nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato la formula per la speranza matematica delle variabili aleatorie con distribuzione uniforme).
Commento. In altro modo: $\mathbb{E}[Y-e^{50}]=\mathbb{E}[e^X-e^{50}]=\mathbb{E}[e^X]-e^{50}=\int_{50}^{52}e^x\cdot\frac{e^x}{e^{52}-e^{50}}dx-e^{50}=\int_{50}^{52}\frac{e^{2x}}{e^{52}-e^{50}}dx-e^{50}=\frac{[e^{2x}/2]_{x=50}^{x=52}}{e^{52}-e^{50}}-e^{50}=\frac{(e^{52})^2-(e^{50})^2}{2(e^{52}-e^{50})}-e^{50}=\frac{e^{52}+e^{50}}{2}-e^{50}=\frac{e^{52}-e^{50}}{2}$.

Esercizio 5.
`D9)` Si deve avere $\Phi(2)-\Phi(-\frac{1}{18})=P(0<X<y)=\Phi(\frac{y-1}{\sqrt{324}})-\Phi(\frac{0-1}{\sqrt{324}})=\Phi(\frac{y-1}{18})-\Phi(-\frac{1}{18})$, da cui segue $\frac{y-1}{18}=2$, $y-1=36$, $y=37$.
`D10)` Con riferimento alle notazioni del Teorema Limite Centrale, per le formule sulla distribuzione esponenziale si ha $\mu=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{11}$ e $\sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{11^2}$, e quindi $\sigma=\frac{1}{11}$. Allora

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{111}{11}\right)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot\frac{1}{11}}{\frac{1}{11}\sqrt{100}}>\frac{\frac{111}{11}-100\cdot\frac{1}{11}}{\frac{1}{11}\sqrt{100}}\right)$$

e, per l'approssimazione Normale dovuta al Teorema Limite Centrale, si ha

$$P\left(X_1+\cdots+X_{100}>\frac{111}{11}\right)\approx 1-\Phi\left(\frac{\frac{111}{11}-100\cdot\frac{1}{11}}{\frac{1}{11}\sqrt{100}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\frac{111-100}{11}}{\frac{10}{11}}\right)=1-\Phi\left(\frac{11}{10}\right).$$