Matematica Discreta

(Prof. F. Brenti)

III Appello

(24 Luglio, 2017)

Ogni problema vale 4 punti. Gli studenti che sostengono l'esame per 3 crediti devono risolvere solo i problemi 5, 6, e 7. Motivare tutte le risposte. Punti possono essere tolti per un lavoro particolarmente disordinato, o per comunicazioni con altri studenti.

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{Z}_7 \mapsto \mathbb{Z}_7$ definita ponendo $f([x]_7) \stackrel{\text{def}}{=} ([x]_7)^2$ per ogni $[x]_7 \in \mathbb{Z}_7$. Decidere se f è suriettiva.

2. ~~Trovare tutte le classi di resto $[x]_{86}$ tali che~~

Calcolare, se esiste, l'inversa moltiplicativa di

$$\cancel{[x]_{86}}[48]_{86} = \cancel{[124]_{86}}.$$

3. Decidere se, per ogni $n \in \mathbb{P}$, è vero che

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4. Sia $n \in \mathbb{P}$. Dimostrare che

$$|\{S : S \subseteq [n]\}| = 2^n.$$

5. Quante "posizioni iniziali" ci sono nel gioco della briscola con 3 giocatori? (Per "posizione iniziale" si intende l'assegnazione di 3 carte ad ognuno dei giocatori, prese da un normale mazzo da gioco di 40 carte).

6. Trovare un'espressione asintotica chiusa (o una formula chiusa) per

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - 4 - 6k\right).$$

7. Siano $V_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{S \subseteq [100] : |S| = 3\}$ e $V_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{S \subseteq [100] : |S| = 2\}$. Costruiamo un grafo bipartito $G = (V, E)$ dove $V \stackrel{\text{def}}{=} V_1 \cup V_2$ e $\{S, T\} \in E$ se e solo se $S \subseteq T$ oppure $T \subseteq S$. Esiste un accoppiamento di V_1 in V_2?

8. Risolvere la ricorsione lineare

$$f(n+3) = 3f(n+1) - 2f(n)$$

per $n \geq 0$, con le condizioni iniziali $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$.