ES. : RISOLVERE LA RICORSIONE LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$f(n) = 2 \cdot f(n-1) + f(n-2) \qquad (*)$$

PER $\forall\, n \geq 2$, CON LE CONDIZIONI INIZIALI $f(0) = 1$, $f(1) = 3$.

PORTIAMO LA RICORSIONE IN FORMA STANDARD:

$$f(n+2) = 2 \cdot f(n+1) + f(n)$$

PER $\forall n \geq 0$. L'EQUAZIONE CARATTERISTICA È

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

LE RADICI SONO

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

E QUINDI

$$\gamma_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{1}, \qquad \gamma_2 = 1 - \sqrt{2}$$

DI MOLTEPLICITÀ $d_1 = 1$ E $d_2 = 1$ (IN EFFETTI $x^2 - 2x - 1 = \left(x - (1+\sqrt{2})\right)^1 \left(x - (1-\sqrt{2})\right)^1$).

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE $\exists\, P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ TALI CHE $\deg(P_1) \leq d_1 - 1$, $\deg(P_2) \leq d_2 - 1$ E

$$f(n) = P_1(n) \cdot (\gamma_1)^n + P_2(n) \cdot (\gamma_2)^n$$

PER $\forall n \geq 0$. QUINDI $\exists\, a, b \in \mathbb{C}$ TALI

CHE

$$f(n) = a \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^n + b \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

PER $\forall n \geq 0$. PER TROVARE a E b USIAMO LE C.I.. ABBIAMO

$$\begin{cases} 1 = f(0) = a + b \\ 3 = f(1) = a \cdot \left(1+\sqrt{2}\right) + b \cdot \left(1-\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

QUINDI

$$b = 1 - a$$

$$\Downarrow$$

$$3 = a \cdot (1+\sqrt{2}) + (1-a) \cdot (1-\sqrt{2})$$

$$\Downarrow$$

$$3 - 1 + \sqrt{2} = a\left(1+\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$b = 1 - a = 1 - \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

CONCLUDENDO

$$f(n) = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

PER $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

<u>ES.</u> : RISOLVERE LA RIC. LINEARE A COEFF. COSTANTI

$$f(n+3) = -2 \cdot f(n+2) - 2 \cdot f(n+1) - 4 \cdot f(n)$$

PER $\forall\, n \in \mathbb{N}$, CON LE CONDIZIONI INIZIALI

$f(0)=0, \; f(1)=2, \; f(2)=0.$

LA RIC. È GIÀ IN FORMA STANDARD. L'EQ. CARAT.

È

$$x^3 = -2x^2 - 2x - 4$$

CIOÈ

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0. \qquad (*)$$

VEDIAMO CHE $x = -2$ È UNA RADICE DI $(*)$

USIAMO RUFFINI

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+2x^2+2x+4 & x+2 \\ \cline{2-2}
x^3+2x^2 & x^2+2 \\ \cline{1-1}
\quad 2x+4 & \\
\quad 2x+4 & \\ \cline{1-1}
\quad 0 &
\end{array}
$$

QUINDI

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (x^2 + 2)(x + 2)$$

RISOLVIAMO $x^2 + 2 = 0$. ABBIAMO

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{\pm\sqrt{-8}}{2} = \frac{\pm\sqrt{4(-2)}}{2} =$$

$$= \pm \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-2}}{2} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{-2}}{2} = \pm\sqrt{-2}$$

$$= \pm\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} = \pm i \cdot \sqrt{2}.$$

PERTANTO LE RADICI DELL'EQ. CARATT.

SONO

$$\gamma_1 = -2, \quad \gamma_2 = i\sqrt{2}, \quad \gamma_3 = -i\cdot\sqrt{2}$$

DI MOLTEPLICITÀ $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, E $d_3 = 1$. SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE $\exists\ P_1(x), P_2(x), P_3(x) \in \mathbb{C}[x]$ TALI CHE $\deg(P_1) \leq d_1 - 1$, $\deg(P_2) \leq d_2 - 1$, $\deg(P_3) \leq d_3 - 1$ E

$$f(n) = P_1(n)\cdot(\gamma_1)^n + P_2(n)\cdot(\gamma_2)^n + P_3(n)\cdot(\gamma_3)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. QUINDI $\exists\ a, b, c \in \mathbb{C}$ TALI CHE

$$f(n) = a\cdot(-2)^n + b\cdot\left(i\sqrt{2}\right)^n + c\cdot\left(-i\sqrt{2}\right)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. PER TROVARE $a, b, c \in \mathbb{C}$ USIAMO LE C.I.. ABBIAMO

$$0 = f(0) = a + b + c$$

$$2 = f(1) = a\cdot(-2) + b\left(i\sqrt{2}\right) + c\left(-i\sqrt{2}\right)$$

$$0 = f(2) = a\cdot(-2)^2 + b\cdot\left(i\sqrt{2}\right)^2 + c\left(-i\sqrt{2}\right)^2$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -2a+i\sqrt{2}\cdot b-i\cdot c\cdot\sqrt{2}=2 \\ 4\cdot a+(-2)\cdot b+c(-2)=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a=-b-c$$

$$\begin{cases} -2(-b-c)+i\sqrt{2}\cdot b-i\cdot\sqrt{2}\cdot c=2 \\ 4(-b-c)+(-2b)-2c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\left(2+i\sqrt{2}\right)+c\left(2-i\sqrt{2}\right)=2 \\ b(-6)+c(-6)=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} b\left(2+i\sqrt{2}\right)+c\left(2-i\sqrt{2}\right)=2 \\ b+c=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$b=-c$$

$$\left\{ -c\left(2+i\sqrt{2}\right)+c\left(2-i\sqrt{2}\right)=2 \right.$$

$$\Downarrow$$

$$c\left(-2i\sqrt{2}\right)=2$$

$$\Downarrow$$

$$c=\frac{2}{-2i\sqrt{2}}=\frac{1}{-i\sqrt{2}}=\frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{-i}{\sqrt{2}},$$

$$a = -b - c = \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = 0.$$

CONCLUDENDO

$$f(n) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(i\sqrt{2}\right)^n + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \left(-i\sqrt{2}\right)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$.