数理逻辑第十一讲习题参考答案*

2019 年 6 月 21 日

1

设:$\Delta \subseteq \Gamma, \Delta$ 为有穷集，
从而有 $k \in \mathbb{N}$ 使得
$\Delta \subseteq \{(x > S^n O) | n = 0, 1, 2, .., k\}$
设 $N = \{\mathbb{N}, O, Suc, >\}$ 为算术的标准模型
其中 $Suc(x) = x + 1, >$ 为大于关系
令 σ 为 $\mathbb{N}$ 上赋值使 $\sigma(x) = k + 1$
从而 $N \vDash_\sigma (x > S^n(O))(n = 0, 1, 2, .., k)$
故 $N \vDash_\sigma \Delta$ 即 Δ 可满足
由紧致性定理知 Γ 可满足.

2

设 $\Gamma \vDash \varphi$
反设不存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \vDash \varphi$
从而对任何 Γ 的有穷子集 Δ 有 $\Delta \nvDash \varphi$
因此对任何 Γ 的有穷子集 Δ 有 $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ 可满足
故 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 的任何有穷子集可满足,
由紧致性定理知 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 可满足，设
$\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. 即 $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ 且 $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi$, 与 $\Gamma \models \varphi$ 矛盾.
因此存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \models \varphi$.

3

令 $\varphi_n \triangleq \exists x_1, ..., x_n. \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$
易见 $\mathfrak{M} \models \varphi_n \Leftrightarrow |M| \geq n$
$\mathfrak{M} \models \{\varphi_i | i \in \mathbb{N}^+\} \Leftrightarrow |M| \geq \aleph_0$

*Ver. 0.6. 原答案由宋方敏教授给出手稿，乔羽同学录入，最后由丁超同学修订补充. 此文档来源为`https://github.com/sleepycoke/Mathematical_Logic_NJUCS`由于时间紧张，丁超只更正了比较明显的笔误，没有仔细验证，见谅. 欢迎各位同学提出意见共同维护.

令 $\Gamma \triangleq \Sigma \cup \{\varphi_i | i \in \mathbb{N}^+\}$，对于任何 Γ 的
有穷子集 $\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\varphi_i | i \in \mathbb{N}^+\}$，存在 k 使
$\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_k\}$, 由于 Σ 具有论域
基数大于 k 的模型，故 Δ 可满足,
由紧致性定理知 Γ 可满足，那么有，$\mathfrak{M} \vDash \Gamma$
从而 $\mathfrak{M} \vDash \{\varphi_i | i \in \mathbb{N}^+\}$, 故 $|M| \geq \aleph_0$.

4

只需证每个有穷图可 4 色则无穷图可四色.
设 MAP 为一张无穷地图，令全体国家的集合为
$\{a_i | i \in I\}$, 这里 $|I| \geq \aleph_0$.
设一阶语言 $\mathcal{L}$ 由以下构成
(1) 常元:$\{a_i | i \in I\}$
(2) 一元谓词符：$C_k(x)(k = 1, 2, 3, 4)$ ($C_k(x)$ 表示 x 着 k 色)
(3) 二元谓词符：$g(x, y)$ ($g(x, y)$ 表示 x 与 y 有大于 0 的公共边界).
令 $Q \triangleq \{< i, j > | i, j \in I\}$ 且在 MAP 中 a_i 与 a_j 有大于 0 的公共边界.
令 $\Gamma \triangleq \{q(a_i, a_j) | < i, j > \in Q\}$
$\cup \{\neg q(a_i, a_j) | < i, j > \notin Q\}$
$\cup \{\forall x(c_1(x) \vee c_2(x) \vee c_3(x) \vee c_4(x))\}$
$\cup \{\forall x \forall y(q(x, y) \rightarrow (\neg(c_1(x) \wedge c_1(y)) \wedge \neg(c_2(x) \wedge c_2(y)) \wedge \neg(c_3(x) \wedge c_3(y)) \wedge \neg(c_4(x) \wedge c_4(y))))\}$
设 $S \subseteq \Gamma$ 为 Γ 的任何有穷子集，不妨设 $\{a_0, ..., a_n\}$
为出现在 S 中的全体常元，令 $M = \{a_0, ..., a_n\}, MAP[s]$ 为 $\{a_0, \ldots, a_n\}$ 的生成子图. 从而
$MAP[s]$ 可着 4 色.
令 $(C_k)_{\mathfrak{M}} \triangleq \{a_i | a_i$ 着 k 色 $i \leq n\} k = 1, ..., 4$
$q_{\mathfrak{M}} = \{< a_i, a_j > | < i, j > \in Q\}$ 从而 $\mathfrak{M} \vDash S$
由 compactness 知有 $\mathfrak{M}$ 使 $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ 即 MAP 可 4 染色.

5

反设，对任何 $m \in \mathbb{N}$ 都存在结构 $\mathfrak{M} \triangleq (M, I)$ 使
$m < |M| < \aleph_0$ 且 $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi$
令 φ_n 为 $\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n (\bigwedge_{0<i<j\leq n} \neg(x_i \doteq x_j))$
易见
(1)$\mathfrak{M} \vDash \varphi_n \Rightarrow |M| \geq n$.
(2) 当 $m < n$ 时,$\mathfrak{M} \vDash \varphi_n \Rightarrow \mathfrak{M} \vDash \varphi_m$
(3)$\mathfrak{M} \vDash \{\varphi_1, \varphi_2 ...\} \Rightarrow |M| \geq \aleph_0$
令 $\Gamma \triangleq \{\neg\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n, ...\} = \{\neg\varphi\} \cup \{\varphi_n | n \in N^+\}$
对于有穷集 $S \subseteq \Gamma$, 有 k 使 $S \subseteq \{\neg\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_k\}$
从而由反设知 S 有模型, 因此由紧致定理知,Γ 有模型, 设为 $\mathfrak{M}' = (M', I')$, 从而
$\mathfrak{M}' \vDash \{\varphi_1, ..., \varphi_n ...\}$, 因此 $|M'| \geq \aleph_0$ 且

$\mathfrak{M}' \vDash \neg\varphi$ 与题设矛盾.

6

反设存在这样的 Σ. 令 $\{c_n|n \in N\}$ 为新常元集，令 $\mathscr{L}' \triangleq \mathscr{L} \cup \{c_n|n \in N\}$,
$\Sigma' \triangleq \Sigma \cup \{R(c_{n+1}, c_n), \neg(c_{n+1} \doteq c_n)|n \in N\}$
因为 Σ 有一个无穷模型，所以 Σ' 的任何有穷子集有模型，从而 Σ' 有模型，设为 $\mathfrak{M}$. 因此
$\mathfrak{M} \vDash \Sigma$. 令 $R_{\mathfrak{M}}$ 为 $<$, $(c_n)_{\mathfrak{M}}$ 为 a_n 从而
$a_0 > a_1 > a_2 ...$ 为无穷下降链，从而
$\{a_n|n \in \mathbb{N}\}$ 没有最小元.
故 $R_{\mathfrak{M}}$ 并非 M 上的良序. 矛盾