《计算模型导引》第五章参考答案*

2019 年 6 月 18 日

习题 5.1

主要思想是先后抹除 $\overline{x}$ 最后移到 $\overline{y}$ 的头. 机器如下:

	0	1	解释
1	0R2	0R1	抹除第一个 $\overline{x}$ 并指向 $\overline{y}$ 头
2	0R3	1R2	移动到第二个 $\overline{x}$ 头
3	0L4	0R3	抹除第二个 $\overline{x}$
4	0L4	1L5	越过 $\overline{y}$ 的最后一个 1
5	0R6	1L5	移到 $\overline{y}$ 头

习题 5.2

主要思想是每次抹掉输入的一个 1 对应两个输出各增加一个 1. 即设计机器 M 实现如下功能:

$$M|1:0\cdots 0\underset{\uparrow}{1}01^k01^k0\cdots \twoheadrightarrow u:0\cdots 0\underset{\uparrow}{1}^{k+1}01^{k+1}0\cdots$$
$$M|1:0\cdots 0\underset{\uparrow}{1}^{l+1}01^k01^k0\cdots \twoheadrightarrow v:0\cdots 0\underset{\uparrow}{1}^{l}01^{k+1}01^{k+1}0\cdots$$

这里 $k\geq 0$, u 为停机状态. 这样 $M[v:=1]$ 既可实现循环.
具体实现如下:

*Ver. 0.3. 原答案由宋方敏教授给出手稿, 然后由丁超录入修订补充. 此文档来源为https://github.com/sleepycoke/NJU_Com_Models

	0	1	解释
1		0R2	输入移除 1
2	0R3	1R12	判断输入是否还有 1, 移到尾部再跳过后面的 0
3	1R4	1R3	输入为 0, 那么走第一个分支 3-8. 将第一个 1^k 后的 0 改为 1
4		0R5	将第二个 1^k 的第一个 1 改为 0
5	1R6	1R5	将第二个 1^k 后的 0 改为 1
6	1L7		再添个 1
7	0L8	1L7	跳过 1^{k+1}
8	0R9	1L8	移到输入头, 停机
12	0R13	1R12	输入不为 0, 那么走第二个分支 12-19. 跳过第一个输入
13	1R14	1R13	将第一个 1^k 后的 0 改为 1
14		0R15	将第二个 1^k 的第一个 1 改为 0
15	1R16	1R15	将第二个 1^k 后的 0 改为 1
16	1L17		再添个 1
17	0L18	1L17	跳过 1^{k+1}
18	0R19	1L18	再跳过 1^{k+1}
19	0R1	1L19	再移到输入头，循环

习题 5.3

大家可能在某些参考资料上看到了如下的乘法图灵机 M_1, 但它并不适用于我们对输入的定义.
实际上, M_1 接收的输入为 $01^x01^y0\cdots$ 而不是我们定义的 $01^{x+1}01^{y+1}\cdots$.

	0	1	解释
1	0R10	0R2	判断 x 是否为 0, 不为 0 抹除一个 1 进入 2-8 作一次累加
2	0R3	1R2	移到第一串 1 的尾部
3	0L8	0R4	3-7 作一次累加, 作过 y 次后转到 8. 进入 4 之前抹掉 1 留作标记给 7 找回用
4	0R5	1R4	找到本串 1 的尾部
5	1L6	1R5	找到 1^j 的尾部，+1
6	0L7	1L6	找到 1^{j+1} 的头
7	1R3	1L7	找到 1^i 的头，补回一个 1
8	0L9	1L8	一次累加结束
9	0R1	1L9	找到第一串 1 的头
10	0R11	0R10	抹除第一串 1

我们可以先证明

$$M_1|1:0\cdots0\underset{\uparrow}{1}^x01^y0\cdots\twoheadrightarrow u:0\cdots0\underset{\uparrow}{1}^{x*y}0\cdots$$

而理解 $M1$ 和关键在于理解 3-7 状态完成了以下操作:

$$M_1|3:0\cdots01\underset{\uparrow}{1}^i01^j\cdots\twoheadrightarrow 3:1\underset{\uparrow}{1}^i01^{j+1}0\cdots$$

从而 $M1$ 和通过 3-8 状态完成了以下操作:

$$M_1|3:\underset{\uparrow}{1}{}^i01^j\cdots \twoheadrightarrow 8:\underset{\uparrow}{1}{}^i01^{j+i}0\cdots$$

即实现了一次累加. 这样总体上每抹除第一个输入的一个 1 就，对应一次加法，整体实现了乘法.
最后为了符合我们的输入输出规范, 实现机器 M_2,M_3 分别实现:

$$M_2|1:0\underset{\uparrow}{1}{}^{x+1}01^{y+1}0\cdots \twoheadrightarrow u:00\underset{\uparrow}{1}{}^{x}01^{y}0\cdots$$

$$M_3|1:0\underset{\uparrow}{1}{}^{x}00\cdots \twoheadrightarrow v:0\underset{\uparrow}{1}{}^{x+1}0\cdots$$

这两个机器很容易实现不赘述.
从而且乘法机器为

$$M_2 \Rrightarrow M_1 \Rrightarrow M_3$$

习题 5.4

参照第 133 页定理 5.14, 我们需要作一个预处理，添上一个输入 $\overline{1}$. 具体可以由如下机器 M_3 实现:

	0	1
1	0R2	1R1
2		1R3
3	1L4	
4		1L5
5	0L6	
6	0R7	1L6

如书中第 134 页构造机器 M_1:

	0	1
1		0R2
2	0R4	1R3
3	0R4	1R3

令 M_2 为 $M_1 \Rrightarrow \boxed{\text{double}} \Rrightarrow \boxed{\text{compress}} \Rrightarrow \boxed{\text{shiftl}}$，从而
若 $x=0$, 则 $M_2|1:0\underset{\uparrow}{\overline{x}}0\overline{y}0\cdots \twoheadrightarrow v:000\underset{\uparrow}{\overline{y}}0\cdots$
若 $x>0$, 则 $M_2|1:0\underset{\uparrow}{\overline{x}}0\overline{y}0\cdots \twoheadrightarrow w:00\underset{\uparrow}{\overline{x-1}}0\overline{g(y)}0\cdots$, 其中 w 为 M_2 的输出时的状态.

令 $\boxed{\text{f}} = M_2[w:=1]$, $M_3 \Rrightarrow \boxed{\text{f}}$ 即为所求.

习题 5.5

- 若 $x = 0$:

$$1 : 0\underset{\uparrow}{1}0000\cdots \tag{1R2}$$

$$2 : 01\underset{\uparrow}{0}000\cdots \tag{0L3}$$

$$3 : 0\underset{\uparrow}{1}0000\cdots \tag{1L3}$$

$$3 : \underset{\uparrow}{0}10000\cdots \tag{0L3}$$

$$3 : \underset{\uparrow}{\ }010000\cdots \tag{halt}$$

- 若 $x > 0$:

$$1 : 0\underset{\uparrow}{1}1^x0000\cdots \tag{1R2}$$

$$2 : 01\underset{\uparrow}{1}^x0000\cdots \tag{0R1}$$

$$1 : 010\underset{\uparrow}{1}^{x-1}0000\cdots \tag{1R2}$$

$$2 : 0101\underset{\uparrow}{1}^{x-2}0000\cdots \tag{0R1}$$

$$\cdots \tag{1R2, 0R1}$$

$$3 : \overbrace{0101\cdots0\underset{\uparrow}{1}}^{\lfloor x/2\rfloor+1\text{个 }01}0000\cdots \tag{1L3}$$

$$\cdots \tag{0L3, 1L3}$$

$$3 : \overbrace{\underset{\uparrow}{0}101\cdots01}^{\lfloor x/2\rfloor+1\text{个 }01}\cdots010000\cdots \tag{0L3}$$

$$3 : \underset{\uparrow}{\ }\overbrace{0101\cdots01}^{\lfloor x/2\rfloor+1\text{个 }01}\cdots010000\cdots \tag{halt}$$

总之就是擦除了第偶数个 1, 然后指向第一个 0 左边 (越界).

习题 5.6

易见 $M_2|1 : 0\underset{\uparrow}{\overline{x}}0\overline{y}0\cdots \twoheadrightarrow 1 : 000\underset{\uparrow}{\overline{y}}0\cdots$

从而 $M_2|1 : 0\underset{\uparrow}{1}^n01^m01^k0\overline{y}0\cdots \twoheadrightarrow 1 : 0^{n+m+k+3}\underset{\uparrow}{0}0\cdots$ (停)

又易见 $M_2|1 : \underset{\uparrow}{0}00\cdots \twoheadrightarrow 7 : 0\underset{\uparrow}{1}1110\cdots$

于是 $M_2|1 : 0\underset{\uparrow}{1}^n01^m01^k0\overline{y}0\cdots \twoheadrightarrow 7 : 0^{m+n+k+4}\underset{\uparrow}{1}1110\cdots$ (停)

习题 5.7

由于

$$y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \Leftrightarrow y \le \sqrt{x} < y+1 \Leftrightarrow y^2 \le x < (y+1)^2$$

所以

$$f(x) = \mu y.x < (y+1)^2 = \mu y.N^2((sx) \dot{-} (sy)^2)$$

首先平方机器 $\boxed{\text{sqrt}}$ 可由 $\boxed{\text{copy1}}\Rightarrow\boxed{\text{shiftl}}\Rightarrow\boxed{\text{multi}}$ 构造，其中 $\boxed{\text{multi}}$ 为习题 5.3 的乘法机器. 然后减法机器也在习题 5.11 中给出，于是 f 涉及到的机器都已经构造出, 那么 $\boxed{\text{f}}$ 是可构造的. 具体构造过程可对照教材实现.

习题 5.10

参照第 133 页定理 5.14, 我们需要作一个预处理，添上一个输入 $\overline{0}$. 具体可以由如下机器 M_3 实现:

	0	1
1	0R2	1R1
2	1L3	
3	0L4	
4	0R5	1L4

接下来再如法构造 $\boxed{\text{f}}$ 既可. 最后结果为 $M_3\Rightarrow\boxed{\text{f}}$.

习题 5.11

注意到 $0 \dot{-} y = 0, \quad x \dot{-} 0 = x, \quad (x+1) \dot{-} (y+1) = x \dot{-} y$, 我们可以分情况处理. 机器如下:

	0	1	解释
1		0R2	将 x 减 1
2	0R3	1R4	判断原 x 是否为 0
3	1O15	0R3	原 x 为 0 那么把 $\overline{y}$ 修改为 1 输出
4	0R11	1R4	原 x 不为 0 找到 $\overline{y}$ 的头
5	0L6	1R5	找到 $\overline{y}$ 的尾部
6		0L7	将 y 减 1
7	0L10	1L7	找到 $\overline{x}$ 的尾
10	0R1	1L10	找到 $\overline{x}$ 的头, 迭代
11		1R12	跳过 $\overline{y}$ 的第一个 1
12	0L13	1R5	判断 y 是否为 0
13		0L16	原 y 为 0，抹掉 $\overline{y}$
14	0R15	1L14	原 y 为 0，找到 $\overline{x}$ 的头, 输出 x
15			停机
16	0L14		前左跳过一个 0

计算过程如下:

- 若 $x = 0$:

$$1 : 0\underset{\uparrow}{1}0\overline{y}000\cdots \tag{0R2}$$

$$2 : 00\underset{\uparrow}{0}\overline{y}000\cdots \tag{0R3}$$

$$3 : 000\underset{\uparrow}{\overline{y}}0000\cdots \tag{0R3}$$

$$3 : 0000\overline{\underset{\uparrow}{y}-1}0000\cdots \tag{0R3}$$

$$\cdots \tag{0R3}$$

$$3 : 000\cdots\underset{\uparrow}{0}0000\cdots \tag{1O15}$$

$$15 : 000\cdots\underset{\uparrow}{1}0000\cdots \tag{halt}$$

- 若 $x > 0, \quad y = 0$:

$$1 : 0\underset{\uparrow}{1}1^x01000\cdots \tag{0R2}$$

$$2 : 00\underset{\uparrow}{1}^x01000\cdots \tag{1R4}$$

$$\cdots \tag{1R4}$$

$$4 : 001^x\underset{\uparrow}{0}1000\cdots \tag{0R11}$$

$$11 : 001^x0\underset{\uparrow}{1}000\cdots \tag{1R12}$$

$$12 : 001^x01\underset{\uparrow}{0}00\cdots \tag{0L13}$$

$$13 : 001^x0\underset{\uparrow}{1}000\cdots \tag{0L16}$$

$$16 : 001^x\underset{\uparrow}{0}0000\cdots \tag{0L14}$$

$$14 : 001^{x-1}\underset{\uparrow}{1}0000\cdots \tag{1L14}$$

$$\cdots \tag{1L14}$$

$$14 : 0\underset{\uparrow}{0}1^x0000\cdots \tag{0R15}$$

$$15 : 00\underset{\uparrow}{1}^x0000\cdots \tag{halt}$$

- 若 $x > 0, \quad y > 0$:

$$1 : 0\underset{\uparrow}{1}1^x 0\overline{y}000\cdots \tag{0R2}$$

$$2 : 00\underset{\uparrow}{1}^x 0\overline{y}000\cdots \tag{1R4}$$

$$\cdots \tag{1R4}$$

$$4 : 001^x \underset{\uparrow}{0}\overline{y}000\cdots \tag{0R11}$$

$$11 : 001^x 0\underset{\uparrow}{\overline{y}}000\cdots \tag{1R12}$$

$$12 : 001^x 01\underset{\uparrow}{\overline{y-1}}000\cdots \tag{1R5}$$

$$\cdots \tag{1R5}$$

$$5 : 001^x 0\overline{y}\underset{\uparrow}{0}00\cdots \tag{0L6}$$

$$6 : 001^x 01^y \underset{\uparrow}{1}000\cdots \tag{0L7}$$

$$7 : 001^x 01^{y-1} \underset{\uparrow}{1}000\cdots \tag{1L7}$$

$$\cdots \tag{1L7}$$

$$7 : 001^x \underset{\uparrow}{0}\overline{y}000\cdots \tag{0L10}$$

$$10 : 001^{x-1} \underset{\uparrow}{1}01^y 000\cdots \tag{1L10}$$

$$\cdots \tag{1L10}$$

$$10 : 0\underset{\uparrow}{0}1^x 01^y 000\cdots \tag{0R1}$$

$$1 : 00\underset{\uparrow}{1}^x 01^y 000\cdots \tag{Compute $(x-1) \dot{-} (y-1)$}$$

习题 5.12

欲证 $Even$ Turing-可计算，只需构造机器 E 满足:

$$E|1 : 0\underset{\uparrow}{1}^{2x+1}0\cdots \twoheadrightarrow u : 0\cdots 0\underset{\uparrow}{1}0\cdots$$

$$E|1 : 0\underset{\uparrow}{1}^{2x}0\cdots \twoheadrightarrow u : 0\cdots 0\underset{\uparrow}{1}10\cdots$$

其中 $E(1,u)$ 无定义. E 可如下构造:

	0	1
1	1L3	0R2
2	1O4	0R4
3	1O3	

$E(1,1)$ 的 $E(1,2)$ 形成循环将成对的 1 改为 0. 若有奇数个 1, 最后会执行 $M(0,2)$ 停机, 输出 $\overline{0}$. 若有偶数个 1, 最后会执行 $M(0,1), M(0,3)$ 停机, 输出 $\overline{1}$.

习题 5.17

首先 0,1 显然都不是一个合法的机器编码, 假定输入至少为 2.
此题的关键在于给定机器 M 的编码 $\#M$ 如何确定其行数. 解法为:
设 M 有 $k+1$ 行，那么显然有 $k < \#M$. 从而设 $k = \max z \le \#M, [p_z | \#M]$,
一但 k 确定, 那么对于各行的解码过程都是可计算的. 一旦出现不合法的行则解码失败, 全部成功解码则说明输入是一个合法的机器编码, 属于 S.
反过来由于编码和解码是一对逆过程, 那么解码失败的输入一定不属于 S.
如果我们承认 CT, 那么我们已经给出了一个能行的方法判定 S, 从而 S 是 Turing-可计算的.
若持有更保守的观点, 那可以通过证明 S 为递归集来证明其 Turing-可计算. 过程繁杂从略.

习题 5.18

由 Taylor 公式

$$e = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1$$

(1) 令 $f(n) = \lfloor e \cdot n! \rfloor$, 我们往证 $f \in \mathcal{EF}$:

$f(0) = f(1) = 2$, 当 $n \ge 2$

$$f(n) = \left\lfloor \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \right) n! + \frac{e^\theta}{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-i)! + \frac{e^\theta}{n+1} \right\rfloor$$

注意到当 $n \ge 2$ 时 $0 < \frac{e^\theta}{n+1} < 1$, 从而

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-i)!$$

于是 $f \in \mathcal{EF}$.

(2) 令 $h(n) = \lfloor e \cdot n \rfloor$ 则 $h(0) = 0, \quad h(n) = \left\lfloor \frac{e \cdot n!}{(n-1)!} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{f(n)}{(n-1)!} \right\rfloor (*), n \ge 1.$

从而 $h \in \mathcal{EF}$.

注: 下面给出 (*) 的证明:

设

$$e \cdot n! = k_1 (n-1)! + r_1$$

$$f(n) = k_2 (n-1)! + r_2$$

其中 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}, \quad r_1, r_2 \in [0, (n-1)!)$

由于 $f(n)$ 为整数, 我们有 $r_2 \in [0, (n-1)! - 1]$. 那么

$$r \triangleq e \cdot n! - f(n) = (k_1 - k_2)(n-1)! + (r_1 - r_2) \in [0, 1)$$

又 $r_1 - r_2 \in [1 - (n-1)!, (n-1)!)$, 从而 $k_1 = k_2$.

(3)

$$g(1) = 2$$

$$g(n) = h(10^n) \dot{-} h(10^{n \dot{-} 1}) \cdot 10, \quad n > 1$$

从而 $g \in \mathcal{EF}$, 于是 g 可计算。

注意到余项的上界 $\frac{e}{(n+1)!}$ 严格单调递减且收敛速度超过指数函数, 此题也可以设计数值算法来求 e 的前 n 位有效数字, 进而通过 CT 说明 g 可计算.